

ND: 31648.



Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Μελέτη μη ανανεωτικών στοχαστικών  
μοντέλων στη θεωρία κινδύνου

Απόστολος Δ. Παπαϊωάννου

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πειραιάς









University of Piraeus

Department of Statistics and Insurance Science

# A Study of Non-renewal Stochastic models with Applications to Risk Theory

Apostolos D. Papaioannou

PhD Thesis

Piraeus



Στους γονείς μου,

Μίμη και Λένα.



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτέρως τον επιβλέποντά μου, καθηγητή κ. Στάθη Χατζηκωνσταντινίδη για την ουσιαστική βοήθεια του, τις συμβουλές του και την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της συγκεκριμένης διατριβής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιμελούς επιτροπής καθηγητές κ. Θεόδωρο Αρτίκη, κ. Δημήτρη Στέγγο, κ. Μάρκο Κούτρα, κ. Μιχάλη Ζαζάνη, κ. Νίκο Φράγκο και κ. Θανάση Γιαννακόπουλο, για τα σχόλια και τις παρατηρήσεις τους, οι οποίες οδήγησαν σε μια καλύτερη και σαφέστερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων της συγκεκριμένης διατριβής. Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου Μίμη και Λένα για την οικονομική και ψυχολογική στήριξή τους, όχι μόνο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της συγκεκριμένης διατριβής, αλλά, καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Τέλος, ευχαριστώ όλους τους πολύ κοντινούς μου ανθρώπους για την υπομονή και την υποστήριξή τους.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων . . . . .	2
1.2	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος - Το μοντέλο Sparre Andersen . . . . .	5
1.3	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu . . . . .	9
1.4	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου . . . . .	10
1.4.1	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu . . . . .	11
1.4.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος . . . . .	21
1.4.3	Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων . . . . .	26
1.4.4	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	28
1.5	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου. . . . .	36
1.5.1	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson . . . . .	39
1.5.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος . . . . .	45
1.5.3	Ροπές των συνολικών μερισμάτων στο μοντέλο Markov-modulated Poisson . . . . .	50
1.6	Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν υστέρηση . . . . .	51
1.6.1	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα μοντέλο με δυο κλάσεις κινδύνων</b>	<b>59</b>
2.1	Περιγραφή του μοντέλου . . . . .	60
2.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων . . . . .	63

2.3	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος . . . . .	76
2.4	Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων . . . . .	83
2.5	Ταυτότητα μερισμάτων-ποινής . . . . .	89
2.6	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	92
2.7	Γενίκευση του μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων για γενικευμένους Erlang( $\nu$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης . . . . .	115
<b>3</b>	<b>Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα μοντέλο με δυο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης</b>	<b>125</b>
3.1	Περιγραφή του μοντέλου . . . . .	126
3.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης . . . . .	128
3.3	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος	147
3.4	Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης . . . . .	156
3.5	Ταυτότητα μερισμάτων-ποινής σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης . . . . .	162
3.6	Η πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία . . . . .	170
3.7	Η κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία . . . . .	176
<b>4</b>	<b>Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα γενικό μοντέλο με δυο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων</b>	<b>179</b>
4.1	Περιγραφή του μοντέλου . . . . .	181
4.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	183
4.2.1	Αναδρομικός υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu . . . . .	198
4.3	Η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων . . . . .	200
4.3.1	Αναδρομικός υπολογισμός αναμενόμενης παρούσας αξίας των σωρευτικών μερισμάτων . . . . .	205
4.4	Αναδρομικός τρόπος υπολογισμού ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	207
4.4.1	Ο χρόνος εξόδου από το επίπεδο $b$ . . . . .	207
4.4.2	Αναδρομικός υπολογισμός των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	213



4.4.3	Αναδρομικός υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	217
<b>5</b>	<b>Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου</b>	<b>221</b>
5.1	Περιγραφή του μοντέλου . . . . .	222
5.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου . . . . .	224
5.3	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος . . . .	248
5.4	Ένα Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου με δύο καταστάσεις . . . .	257
<b>6</b>	<b>Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση και με έναν όρο διάχυσης</b>	<b>265</b>
6.1	Περιγραφή του μοντέλου . . . . .	267
6.2	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης . . . . .	268
6.2.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικά μεγέθη ζημιών . . . . .	283
6.3	Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων . . . . .	285
6.3.1	Ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους 289	
6.3.2	Αναλυτικά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu μεταξύ των επιπέδων $\beta_{i-1}$ και $\beta_i$ . . . . .	296
6.3.3	Αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικά μεγέθη ζημιών κάτω από την ύπαρξη μιας μερισματικής στρατηγικής τριών επιπέδων . . . . .	298
<b>A'</b>	<b>Παράρτημα</b>	<b>315</b>
A'.1	Βασική θεωρία των martingales . . . . .	315
A'.2	Διαγράμματα των χρόνων διακοπής της Ενότητας 4.4.1 . . . . .	316
A'.3	Ένα ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα δεύτερης τάξης με μη-γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις . . . . .	319
A.4	Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις - το Λήμμα του Itô . . . . .	321

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ . . . . .	6
1.2	Η διαδικασία αποζημιώσεων $S(t)$ . . . . .	6
1.3	Η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ με στρατηγική σταθερού μερίσματος . . . .	22
1.4	Η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ με στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων . . .	29
1.5	Η διαδικασία πλεονάσματος στο Markov-modulated Poisson μοντέλο . . . .	36
1.6	(a) Markov-modulated με δυο καταστάσεις, (b)διάγραμμα της απαρτιθμήτριας $N(t)$ . . . . .	39
3.1	(a) χρεοκοπία λόγω αποζημιώσης , (b)χρεοκοπία λόγω ταλάντωσης της $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ . . . . .	129
6.1	Η πιθανότητα χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του $\theta$ . . . . .	285
6.2	Η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u, \beta)$ , για διάφορες τιμές του $\theta$ . . . . .	300
A'.1	Διάγραμμα 1 της δειγματοσυνάρτησης $U_b(t)$ μέχρι να φτάσει το επίπεδο $b$ . .	317
A'.2	Διάγραμμα 2 της δειγματοσυνάρτησης $U_b(t)$ μέχρι να φτάσει το επίπεδο $b$ . .	317
A'.3	Διάγραμμα 1 της δειγματοσυνάρτησης $U_{1,k}(t)$ μέχρι να φτάσει το επίπεδο $b - b_{k-1}$ . . . . .	318
A'.4	Διάγραμμα 2 της δειγματοσυνάρτησης $U_{1,k}(t)$ μέχρι να φτάσει το επίπεδο $b - b_{k-1}$ . . . . .	318
A'.5	Διάγραμμα 3 της δειγματοσυνάρτησης $U_{1,k}(t)$ μέχρι να φτάσει το επίπεδο $b - b_{k-1}$ . . . . .	319

## ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

$\tau.μ.$	τυχαία μεταβλητή
$\sigma.π.π.$	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$\sigma.κ.$	συνάρτηση κατανομής
$\mathbb{R}$	σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$\Re(x)$	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $x$
*	τελεστής συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων
$1_{(A)}$	δείκτης συνάρτηση του συνόλου $A$
$g(x) = o(f(x))$	$f(x) \rightarrow 0$ και $g(x)/f(x) \rightarrow 0$ για $x \rightarrow \infty$
$g(x) \sim f(x)$	$f(x)/g(x) \rightarrow 1$ για $x \rightarrow \infty$
$\frac{\partial}{\partial u}$	τελεστής παραγώγισης ως προς $u$
$a \wedge b$	minimum των $a$ και $b$
$f^{(k)}(x)$	παράγωγος $k$ τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(x)$
$\mathbf{A}^\top$	ανάστροφος πίνακας του πίνακα $\mathbf{A}$
$\det \mathbf{A}$	ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	αντίστροφος πίνακας του πίνακα $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^*$	adjoint πίνακας του πίνακα $\mathbf{A}$
$\mathbf{0}_n$	$n \times n$ τετραγωνικός πίνακας με μηδενικά στοιχεία
$\mathbf{I}_n$	$n \times n$ ταυτοτικός πίνακας
$\vec{e}_n$	$1 \times n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1
$\text{diag}(a_{i,j})_{i,j=1}^n$	ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με $a_{ij}$ , $i, j = 1, \dots, n$ , στοιχεία στην κύρια διαγώνιο
$\mathcal{L}^{-1}$	ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -άλγεβρα πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $\Omega$
$\mathbb{P}$	μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$
$\mathbb{E}$	μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$ , $\mathbb{E}(\cdot) = \int_{\Omega} x d\mathbb{P}(x)$
$\otimes$	γινόμενο Kronecker



# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αρχή της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου προσδιορίζεται στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, όταν οι μαθηματικοί Filip Lundberg και Harald Cramér με μια σειρά από εργασίες τους ενσωμάτωσαν τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στην αναλογιστική επιστήμη.

Πρόσφατα, οι Gerber και Shiu, με την εργασία τους 'On the time value of ruin' [(1998), North American Actuarial Journal], έδωσαν μια πρωτόγνωρη ώθηση στη μαθηματική θεωρία κινδύνου. Στην προαναφερόμενη εργασία οι Gerber και Shiu κατάφεραν να ενσωματώσουν όλα τα μέτρα κινδύνου, που ενδιαφέρουν έναν ασφαλιστικό οργανισμό, σε μία μόνο συνάρτηση, την *αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber-Shiu*, εν συντομία. Για την αναλυτική μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής τόσο για το κλασσικό, όσο και το ανανεωτικό μοντέλο τη θεωρίας χρεοκοπίας παραπέμπουμε στους Gerber και Shiu (1998,2005), καθώς και στο Κεφ. 1.

Κύρια υπόθεση στα προαναφερόμενα μοντέλα είναι η ανεξαρτησία μεταξύ του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων και του ύψους του μεγέθους της ζημιάς που προκύπτει από την εμφάνιση αυτών. Στην πράξη η προαναφερόμενη υπόθεση φαίνεται να είναι πολύ δεσμευτική και δεν αντικατοπτρίζει την εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ των χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και του μεγέθους των ζημιών.

Σκοπός της συγκεκριμένης διατριβής είναι η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu σε μοντέλα κινδύνου, όπου οι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών και τα μεγέθη των αντίστοιχων ζημιών παρουσιάζουν (ανομοιογένεια) εξάρτηση μεταξύ τους.

Αρχικά στο Κεφ. 1 δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας και παρουσιάζουμε τα πιο σημαντικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu για το προαναφερόμενο μοντέλο. Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο, περιγράφουμε λεπτομερώς δύο μη-ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου: το Markov-modulated Poisson και το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση. Επιπλέον, δίνουμε τα κυριότερα αποτελέσματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu για τα παραπάνω δύο μοντέλα μη-ανανεωτικά μοντέλα και συγκρίνουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα με το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας.

Στο Κεφ. 2 εισάγουμε και δίνουμε μια αναλυτική περιγραφή ενός μη-ανανεωτικού μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου υποθέτουμε ότι στην πρώτη και στη δεύτερη κλάση ο

αριθμός των κινδύνων είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους, αντίστοιχα. Στο ίδιο κεφάλαιο δείχνουμε πως η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και δίνουμε την λύση αυτής. Επίσης, για το προαναφερόμενο μοντέλο εισάγουμε μια στρατηγική σταθερού μερίσματος και δείχνουμε τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής. Ακόμη, το ίδιο μοντέλο με τα αντίστοιχα αποτελέσματα μελετώνται στην περίπτωση μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, γενικεύοντας τη στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Επιπλέον, στο Κεφ. 3 εισάγουμε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, όπου στην πρώτη και στη δεύτερη κλάση υποθέτουμε ότι ο αριθμός των κινδύνων είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους, αντίστοιχα. Στο ίδιο κεφάλαιο βρίσκουμε αναλυτικούς τύπους για τον υπολογισμό της συνάρτησης των Gerber-Shiu, καθώς και για τις ροπές της παρούσας αξίας των μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Στο Κεφ. 4 θεωρούμε ένα «γενικό» μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου σε κάθε κλάση ο αριθμός των κινδύνων είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Επιπλέον, θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων και δίνουμε αναλυτικά αποτελέσματα τόσο για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, όσο και για την αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης μερισματικής στρατηγικής.

Επιπροσθέτως, στο Κεφ. 5 γενικεύουμε το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου εισάγοντας το Markov-modulated ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Στο συγκεκριμένο μοντέλο υποθέτουμε ότι ο αριθμός των κινδύνων καθώς και τα μεγέθη των ζημιών εξαρτώνται από μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Σε κάθε κατάσταση της προαναφερόμενης αλυσίδας θεωρούμε ότι ο αριθμός των κινδύνων είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με Erlang ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις δίνουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu. Επίσης θεωρούμε το ίδιο μοντέλο κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος και δείχνουμε τον τρόπο υπολογισμού της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής.

Τέλος, στο Κεφ. 6 θεωρούμε μια επέκταση του κλασσικού μοντέλου με απαιτήσεις που εμφανίζονται χρονική υστέρηση, εισάγοντας έναν επιπλέον όρο διάχυσης. Κάτω από αυτή την τροποποίηση δείχνουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και δίνουμε τη λύση αυτής. Επιπλέον, θεωρούμε το ίδιο μοντέλο κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων και αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί ένα ολοκληρωτικό σύστημα τύπου Volterra δευτέρου είδους,

η λύση του οποίου δίνεται χρησιμοποιώντας την προαναφερόμενη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση του ίδιου μοντέλου, χωρίς την ύπαρξη της μερισματικής στρατηγικής.





# EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH

The seminal papers by Gerber and Shiu (1998, 2005), gave a huge boost to the study of risk theory by unifying various risk-related quantities in one single function - the *Gerber-Shiu expected discounted penalty function*, or *Gerber-Shiu function* in short. In these papers the authors show not only how the expected discounted penalty function can be calculated but also some nice properties in the classical as well as in the Sparre Andersen risk model. However, the main, stringent, assumption of the aforementioned risk models is that the interclaim times and the claim sizes are independent, which is not an appropriate assumption so as to reflect the real insurance business precisely (e.g. catastrophic insurance).

The main focus of this thesis is to provide a detailed analysis of the Gerber-Shiu function in various dependent structures risk models.

In Chapter 1 we give a detailed introduction of the Sparre-Andersen risk model and we present known results for the Gerber-Shiu function in this model. Also, in the same chapter we define, and analyze the mathematical tools that we will use repeatedly in the main core of this thesis. Moreover, we introduce various dividend strategies and we give an analytical way known results under this strategies. In addition, we explain in full details the so called Markov-modulated Poisson risk model as well as the classical delayed risk model. Under this models known results for the expected discounted penalty function are given.

In Chapter 2 we consider a risk model with two independent classes of insurance risks. We assume that the two independent claim counting processes are, respectively, Poisson and generalized Erlang(2) process. We prove that the Gerber-Shiu function satisfies some defective renewal equations. Exact representations for the solutions of these equations are derived through an associated compound geometric distribution and an analytic expression for this quantity is given when the claim severities have rationally distributed Laplace transforms. Further, the same risk model is considered in the presence of a constant dividend barrier. A system of integro-differential equations with certain boundary conditions for the Gerber-Shiu function is derived and solved. Using systems of integro-differential equations for the moment-generating function as well as for the arbitrary moments of the discounted sum of the dividend payments until ruin, a matrix version of the

dividends-penalty is derived. Also, in the same chapter we show how the aforementioned results can be applied in the presence of a multi-layer dividend strategy. Finally, an extension to a risk model when the two independent claim counting processes are Poisson and generalized Erlang( $\nu$ ), respectively, is considered, generalizing the aforementioned results.

In Chapter 3 we consider two classes risk model perturbed by diffusion. We assume that the claim number processes are independent Poisson and generalized Erlang( $n$ ) process, respectively. Systems of integro-differential equations for the expected discounted penalty functions at ruin if ruin is caused by a claim and oscillation are established, and a generalized Lundberg's equation is obtained. When the generalized Lundberg's equation has distinct roots with positive real parts, explicit results for the Gerber-Shiu functions due to a claim and oscillation are given when both claim amount distributions belong to the rational family. Moreover, we consider the same two classes perturbed risk model in the presence of a constant dividend barrier strategy. Systems of integro-differential equations for the Gerber-Shiu functions if ruin is caused by a claim and by oscillation with certain boundary conditions are derived and solved for rational distributed claim amounts. In addition a system of integro-differential equations with certain boundary conditions for the moment-generating function as well as for the arbitrary moments of the discounted sum of the dividend payments until ruin is derived and solved. Using this a matrix version of the dividends-penalty identity is derived. Also similar results for the maximum surplus before ruin are given. Finally the distribution of the total dividends payments until ruin is obtained.

In Chapter 4 we study a more general two classes risk model in the presence of a multi-layer dividend strategy. We assume that both of the two claim number processes are renewal processes with phase-type inter-claim times. By re-composing and analyzing the Markov-chains associated with the two given phase-type distributions of the inter-claim times, algorithmic schemes for the determination of explicit expressions for the Gerber-Shiu expected discounted penalty function as well as the expected discounted dividend payments are derived. Finally a recursive approach with respect to the number of layers is developed, that allows us to obtain explicit expressions for the two aforementioned risk quantities improving the previous algorithmic schemes.

In Chapter 5 motivated by the Markov-modulated Poisson risk process, in this paper we study the expected discounted penalty functions in a Markov-modulated renewal risk process in which both the inter-arrival claim times and the distribution of the claim sizes are influenced by an external Markovian process. At each state of this Markovian process the number of claims is modeled by an ordinary renewal process in which the inter-arrival claim times are Erlang distributed random variables. This model is a generalization of the

Markov-modulated Poisson risk model and is closely related to the Markov-modulated  $E_K/G/1$  queuing system. A system of integro-differential equations for the expected discounted penalty functions is derived and a characteristic equation is obtained. The solutions of the characteristic equation are given. Through these solutions, explicit formulas for the expected discounted penalty functions are obtained when all the claim amount distributions belong to the rational family. Further, the same risk model is considered in the presence of a constant dividend barrier strategy. A system of integro-differential equations with certain boundary solutions for the expected discounted penalty functions is derived and solved. As an illustration, explicit results and numerical examples are obtained in the case of the two state model where the claim arrival process, in each of the two states, has Erlang(2) and exponentially distributed inter-arrival times respectively.

In Chapter 6 we propose an extension to the compound Poisson risk process perturbed by diffusion in which two types of individual claims, main claims and by-claims, are incorporated. Every by-claim is induced by the main claim and may be delayed for one time period with a certain probability. An integro-differential equation system for the expected discounted penalty functions is derived and solved by proving that the Gerber-Shiu function satisfy some defective renewal equation. An exact representation for the solution of this equation is derived through an associated compound geometric distribution and an analytic expression for this quantity is given when the claim amount severities of both the claims and by-claims have rationally distributed Laplace transforms. Further, the same risk model is considered in the presence of a multi-layer dividend strategy. A system of integro-differential equations for the expected discounted penalty functions, depending on the current surplus level, with certain boundary conditions is obtained. To solve this, we derive a general solution to a certain second order integro-differential equation system. Using this, we prove that the expected discounted penalty functions, in each layer, satisfy some defective renewal equations. Finally, explicit and numerical results for the probabilities of ruin are given to illustrate the applicability of the approach.

Finally, it is important to note that while efforts have been made to keep the notations as consistent as possible, due to the different models and quantities considered in this thesis, the reader is recommended to treat the remaining chapters as being independent of each other.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εύρυθμη λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κυρίως από το σχηματισμό επαρκών αποθεματικών προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις του έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) και κυρίως των ασφαλισμένων του (ασφαλιστικά ρίσκα). Στην ασφαλιστική ορολογία, τα εν λόγω αποθεματικά (ή ακριβέστερα η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών της υποχρεώσεων-αποζημιώσεων) χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα. Βασικό πρόβλημα της (κλασσικής) θεωρίας κινδύνου είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Η αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου προσδιορίζεται στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, όταν ο Σουηδός Filip Lundberg (1903) με την περίφημη διδακτορική διατριβή του ('Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen, Upsalla) έθεσε τα θεμέλια της. Βασιζόμενος σε αυτή, ο Harald Cramér (1930), με μια σειρά από εργασίες, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε από τις παραπάνω συνεισφορές ονομάζεται, κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο Cramér-Lundberg. Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από την κατανομή Poisson. Η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε, στο 15<sup>ο</sup> αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία 'On the collective theory of risk in case of contagion between the claims'. Κύριο χαρακτηριστικό στο μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία. Επομένως, είναι φανερό ότι τα μοντέλα που εισήχθησαν για την μοντελοποίηση του προβλήματος της χρεοκοπίας εξαρτώνται άμεσα από τη (στοχαστική) διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων.

## 1.1 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Ένα πρώτο βήμα για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των κινδύνων. Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ . Τότε η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 1.1.** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν

- (i)  $N(t) > 0$ , με  $N(0) = 0$ ,
- (ii)  $N(t)$  είναι διακριτή,
- (iii) αν  $s \leq t$  τότε  $N(s) \leq N(t)$ .

Μια απ' τις πιο γενικές «οικογένειες» στοχαστικών διαδικασιών, ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στη θεωρία ουρών όσο και στη θεωρία κινδύνου, είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ . Έστω, λοιπόν,  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F_W(t)$ , σ.π.π.  $f_W(t)$ , μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_W(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_W(t) dt$  και μέση τιμή  $\mathbb{E}(W) < \infty$ , όπου  $W_i$  είναι ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της  $i$ -ζημιάς (ενδεχομένου). Τότε η ανανεωτική διαδικασία  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ορίζεται ακολούθως.

**Ορισμός 1.2.** Έστω  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  μια ακολουθία μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ.. Η ακολουθία  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\sigma_0 = 0$ , με  $\sigma_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$  ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  με  $N(0) = 0$  που δίνεται από τη σχέση

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n \leq t)},$$

και παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Από τον Ορισμό 1.2 βλέπουμε ότι για κάθε ανανεωτική ανέλιξη ισχύει ότι

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}. \quad (1.1)$$

Η σχέση (1.1) ερμηνεύεται ως εξής: το ενδεχόμενο  $\{N(t) = n\}$  σημαίνει ότι έχουμε ακριβώς  $n$  γεγονότα έως το χρόνο  $t$ . Από την άλλη, το ενδεχόμενο  $\{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$  σημαίνει ότι

ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν  $n$  γεγονότα (ανανεώσεις) είναι  $t$ . Επειδή οι παραπάνω αποτελούν δύο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου ενδεχομένου, η (1.1) είναι αληθής.

**Θεώρημα 1.1.** Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της  $N(t)$ , οι ανισότητες  $\sigma_n \leq t \leq \sigma_{n+1}$  ισχύουν με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια). Διαιρώντας τις παραπάνω ανισότητες με  $N(t)$  και χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_1) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{n+1}}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \mathbb{E}(W_1), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Θεώρημα 1.2 (Elementary Renewal Theorem).** Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N(t))}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(W_1)}.$$

Απόδειξη. Rolski, Schmidli, Schmidt και Teugels (1996) σελ. 211. ■

Από τον Ορισμό 1.2 της ανανεωτικής διαδικασίας, προκύπτει ότι η διαδικασία Poisson είναι μια ειδική περίπτωση μιας ανανεωτικής ανέλιξης, όταν υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

**Θεώρημα 1.3.** Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια ανανεωτική ανέλιξη με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης εκθετικά κατανομημένους με παράμετρο  $\lambda$ . Τότε η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$ . Σε αυτή την περίπτωση οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

(i) η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και σε ένα απειροστό διάστημα  $[0, dt]$  ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(N(dt) = 1) = \lambda dt + o(dt), \quad \mathbb{P}(N(dt) = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt),$$

(ii) η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και για κάθε  $t$ , η τ.μ.  $N(t)$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$ .

Απόδειξη. Από την υποθέση ότι οι τ.μ.  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο  $\lambda$ , συνεπάγεται ότι το άθροισμα  $n$  ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.,  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n W_i$ , ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους  $n$  και  $\lambda$ . Τότε,  $\mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(\sigma_n > t) = e^{-\lambda t}$  και για  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(N(t) \geq n) - \mathbb{P}(N(t) \geq n+1) \\ &= \mathbb{P}(\sigma_n \leq t) - \mathbb{P}(\sigma_{n+1} \leq t) \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t \frac{d}{dx} \left( \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \right) dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

από όπου φαίνεται ότι η  $N(t)$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$ .

Επιπλέον, για να δείξουμε ότι (i)  $\Rightarrow$  (ii), για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $t \geq 0$ , ορίζουμε  $p_n(t) := \mathbb{P}(N(t) = n)$ . Τότε για  $dt > 0$ ,

$$\begin{aligned}p_0(t+h) &= \mathbb{P}(N(t) = 0, N(t+dt) - N(t) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0)\mathbb{P}(N(dt) = 0) \\ &= p_0(t)(1 - \lambda dt + o(dt)),\end{aligned}$$

από την οποία έπεται ότι

$$\frac{p_0(t+dt) - p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(dt)}{dt}.$$

Για  $dt \rightarrow 0$  και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t). \quad (1.2)$$

Έχοντας  $p_0(0) = 1$ , τότε η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.2) είναι η

$$p_0(t) = \mathbb{P}(N(0) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, θα δείξουμε ότι το (ii) είναι αληθές επαγωγικά. Έτσι θεωρούμε ότι το (ii) είναι αληθές για  $n-1$  (και για κάθε  $t \geq 0$ ) και δείχνουμε ότι είναι αληθές για  $n$ . Έτσι

$$\begin{aligned}p_n(t+dt) &= \mathbb{P}(N(t) = n)\mathbb{P}(N(dt) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = n-1)\mathbb{P}(N(dt) = 1) \\ &= p_n(t)p_0(t) + p_{n-1}(t)p_1(dt) \\ &= p_n(t)(1 - \lambda dt) + p_{n-1}(t)\lambda dt + o(dt),\end{aligned}$$



από όπου παίρνουμε ότι

$$\frac{p_n(t+dt) - p_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(dt)}{dt}.$$

Για  $dt \rightarrow 0$  και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, έχουμε

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\lambda t} p_n(t) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right).$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες  $p_n(0) = 0 \forall n \geq 1$ , συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

από όπου προκύπτει το (ii). ■

## 1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος - Το μοντέλο Sparre Andersen

Έχοντας μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, το επόμενο βήμα είναι να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Έτσι θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη διαδικασία πλεονάσματος,  $\{U(t), t \geq 0\}$  και ορίζεται ακολούθως.

**Ορισμός 1.3 (surplus process).** Ως διαδικασία πλεονάσματος  $\{U(t), t \geq 0\}$ , ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

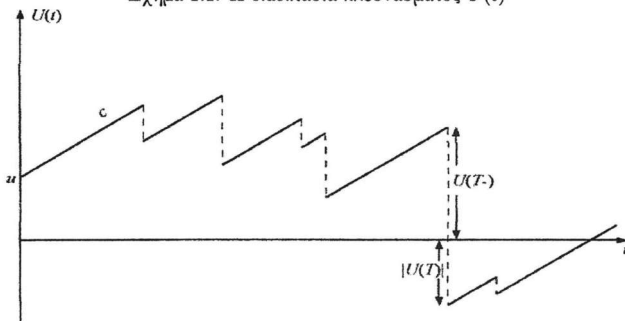
$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1.3}$$

όπου  $U(0) = u(\geq 0)$  το αρχικό απόθεμα,  $c$  ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίσεων ανά μονάδα χρόνου και  $S(t)$  οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , με

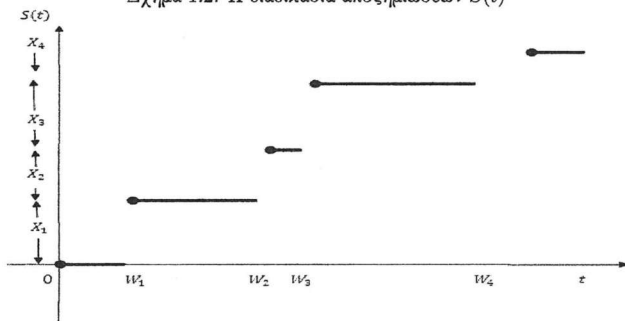
$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

όπου  $\{X_i\}_{i \geq 1}^\infty$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με  $X_i$  να περιγράφει το μέγεθος της  $i$ -οστής ζημιάς. Θεωρούμε ότι η τ.μ.  $X_i$  έχει σ.π.π.  $f(x)$ , σ.χ.  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  και

Σχήμα 1.1: Η διαδικασία πλεονάσματος  $U(t)$



Σχήμα 1.2: Η διαδικασία αποζημιώσεων  $S(t)$



μέση τιμή  $m = \mathbb{E}(X) < \infty$ . Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι ακολουθίες  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  και  $\{X_i\}_{i \geq 1}^{\infty}$  είναι ανεξάρτητες.

Από τις σχέσεις (1.3)-(1.4) έπεται (βλ. σχήμα 1.1) ότι η δειγματοσυνάρτηση  $U(t)$  εμφανίζει άλματα (προς τα κάτω) κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιωγόνων γεγονότων  $W_i$ . Τα άλματα αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα (προς τα πάνω) της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων  $S(t)$  (βλ. σχήμα 1.2), με τη διαφορά ότι η δειγματοσυνάρτηση  $S(t)$  είναι κλιμακωτή (η  $S(t)$  έχει σταθερή τιμή μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων  $W_i$ ), ενώ η αντίστοιχη δειγματοσυνάρτηση  $U(t)$  είναι (μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων  $W_i$ ) ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση  $c$ .

Στο μοντέλο Sparre Andersen θεωρούμε ότι η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια ανανεωτική στοχαστική

διαδικασία.

Από τον ορισμό 1.3, είναι φανερό ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τις χρονικές στιγμές  $W_i$  μπορεί να γίνει αρνητική. Στην αναλογιστική ορολογία το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται χρεοκοπία και η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου πιθανότητα χρεοκοπίας. Προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας χρειαζόμαστε, αρχικά τον ορισμό του χρόνου κατά τον οποίο εμφανίζεται η χρεοκοπία.

**Ορισμός 1.4 (time to ruin).** Για  $t \geq 0$ , ορίζουμε

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \quad \text{με} \quad \inf \emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται παρακάτω.

**Ορισμός 1.5.** Για  $u \geq 0$  η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) := \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u).$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι ο μοναδικός «πόρος» μιας ασφαλιστικής επιχείρησης και ότι η καταβολή μιας αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός (απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα, που συνεπάγεται εισροή ασφαλιστρού πέρα από το καταβληθέν μέχρι την χρονική στιγμή  $T$ ). Έτσι η «μαθηματική χρεοκοπία» που ορίζουμε δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με την πραγματική χρεοκοπία, αλλά είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου από το οποίο η επιχείρηση μπορεί να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι, με βάση αυτό το μέτρο κινδύνου, αν η επιχείρηση έχει ενδείξεις ότι οι υποχρεώσεις της θα είναι εξαιρετικά αυξημένες μπορεί να προχωρήσει σε αύξηση των ασφαλιστρών, σύναψη δανείου, αύξηση μετοχικού κεφαλαίου κ.ο.κ. Από μαθηματικής άποψης είναι φανερό ότι υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό απόθεμα  $u$  και το ασφάλιστρο  $c$  έτσι ώστε να αποφύγει (ή σε κάθε περίπτωση να επιμηκύνει) το ενδεχόμενο, η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική.

Επιπλέον, από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος προκύπτει άμεσα ότι τα ασφάλιστρα της επιχείρησης  $c$  δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματικό ποσό (για παράδειγμα δεν μπορεί να είναι μηδενικά). Έτσι υποθέτουμε ότι ο ρυθμός είσπραξης του ασφαλιστρού  $c$  στο  $[0, t]$  είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τις μέσες ζημιές,  $\mathbb{E}(S(t))$ , που εμφανίζονται στο  $[0, t]$ , διαφορετικά η χρεοκοπία στο  $[0, t]$  είναι βέβαια (από την πρώτη χιάλιας ζημία). Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεωρούμε ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός<sup>1</sup>  $\rho$ ,

<sup>1</sup>ο Asmussen (2000) καλεί το  $\rho$  ως traffic intensity δανειζόμενος την ονομασία από τη Θεωρία Ουρών. Διαισθητικά το  $\rho$  ερμηνεύεται ως το μέσο ύψος των συνολικών ζημιών στη μονάδα του χρόνου.

τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{t}S(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \rightarrow \rho, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

**Πρόταση 1.1.** Έστω ότι η (1.5) είναι αληθής. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας,  $\psi(u) < 1$ , αν και μόνο αν

$$c\mathbb{E}(W_1) > m. \quad (1.6)$$

*Απόδειξη.* Έστω  $\eta = \frac{c}{\rho} - 1$ . Τότε, από την Πρόταση 1.1 του Asmussen (2000) ισχύει ότι αν  $\eta > 0$ , τότε  $\psi(u) < 1$ , ενώ αν  $\eta < 0$ , τότε  $\psi(u) = 1$  για κάθε  $u \geq 0$ . Επομένως για να αποδείξουμε ότι  $\psi(u) < 1$  αν και μόνο αν  $c\mathbb{E}(W_1) > m$ , αρκεί να δείξουμε ότι  $\rho = m/\mathbb{E}(W_1)$ .

Πράγματι,

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}(S(t)|N(t))]}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(N(t))m}{t} = \frac{m}{\mathbb{E}(W_1)},$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2. ■

Επιπλέον, από την σχέση (1.6), προκύπτει ακόμη μία σημαντική ποσότητα, το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$ , το οποίο ορίζεται ως  $1 + \theta = c/m\mathbb{E}(W_1)$ .

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο έγινε από τον Malinovskii (1998). Όμως, στη συγκεκριμένη εργασία η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί υπό την υπόθεση συγκεκριμένων μορφών της κατανομής των αποζημιώσεων,  $f(x)$ . Έτσι, αρκετοί συγγραφείς, προκειμένου να έχουν αναλυτικά αποτελέσματα για οποιαδήποτε κατανομή των αποζημιώσεων,  $f(x)$ , υποθέτουν συγκεκριμένες μορφές για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των ζημιών,  $f_W(t)$ . Μια από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες υποθέσεις στην θεωρία κινδύνου είναι οι  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  να κατανομούνται σύμφωνα με μία Erlang ή γενικευμένη Erlang. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο κινδύνου που προκύπτει ονομάζεται ανανεωτικό μοντέλο με Erlang ή γενικευμένου Erlang ενδιάμεσους χρόνους. Από εδώ και στο εξής, όταν αναφερόμαστε στο ανανεωτικό μοντέλο θα νοείται το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους κατανεμημένους σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang, το οποίο αναλύεται διεξοδικά στην ενότητα 1.4.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, αν και είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι το μοναδικό. Δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές, που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή  $T$ , είναι η  $|U(T)|$  που συμβολίζει το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και η  $U(T-)$  που συμβολίζει το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία (με  $T-$  το αριστερό όριο της  $T$ ) (βλ. σχήμα 1.1). Είναι φανερό ότι η μελέτη και των τριών παραπάνω ποσοτήτων δίνουν πολύ περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος  $U(t)$ , απ' ότι μόνο η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T$ . Έτσι πολλοί συγγραφείς μελέτησαν τις περιθώριες και

από κοινού κατανομές των τ.μ.  $T$ ,  $|U(T)|$  και  $U(T-)$  τόσο για το κλασσικό όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο. Οι αναφορές περιλαμβάνουν τους Bühlmann (1970), Gerber (1979), Thorin (1982), Gerber, Goovaerts και Kass (1987), Gerber και Shiu (1987), Dufrense και Gerber (1988a), Willmot (1998), Delbaen (1990), Dickson και Waters (1992), Dickson (1992), (1993), Picard (1994), Dickson, Dos Reis και Waters (1995), Dickson και Egidio dos Reis (1996), Di Lorenzo και Tessitore (1996), Gerber και Shiu (1997), Dickson και Hipp (1998), Dufrense και Gerber (1988b), Picard και Lefevre (1998), Dickson (1998), και Lin (1998), Schmidli (1999), Tsai και Sun (2004), Sun και Yang (2004), Dickson και Drekcic (2004).

### 1.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Οι Gerber και Shiu το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές  $T$ ,  $|U(T)|$  και  $U(T-)$  σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function).

**Ορισμός 1.6.** Για  $u \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ , η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως

$$\phi(u) := \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) \mathbf{1}_{(T < \infty)} | U(0) = u), \quad u \geq 0, \quad (1.7)$$

όπου  $\delta$  η ένταση ανατοκισμού,  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  μια διδιάστατη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^2$  που ονομάζεται συνάρτηση ποινής,  $U(T-)$  το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U(T)|$  το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και  $\mathbf{1}_{(\cdot)}$  η δείκτρια συνάρτηση.

Διασθητικά, η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη ποινή η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της  $\phi(u)$  και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου.

#### Ειδικές περιπτώσεις

- για  $\delta = 0$ ,  $w(x, y) = 1$ , παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,  $\psi(u) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(T < \infty)} | U(0) = u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$ ,
- για  $\delta > 0$ ,  $w(x, y) = 1$ , παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,  $\varphi_T(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} \mathbf{1}_{(T < \infty)} | U(0) = u)$ ,
- για  $\delta > 0$ ,  $w(x, y) = \mathbf{1}_{(x=x_1)} \mathbf{1}_{(y=x_2)}$ , παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος  $(U(T-), |U(T)|)$ ,  $f(x_1, x_2 | u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} \mathbf{1}_{(|U(T)|=x_2), U(T-)=x_1} \mathbf{1}_{(T < \infty)} | U(0) = u)$ ,
- για  $\delta > 0$ ,  $w(x, y) = \mathbf{1}_{(x=x_1)}$ , παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ.  $U(T-)$ ,  $h(x_1 | u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} \mathbf{1}_{(U(T-)=x_1)} \mathbf{1}_{(T < \infty)} | U(0) = u)$ ,

- για  $\delta > 0$ ,  $w(x, y) = 1_{(y=x_2)}$ , παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ.  $|U(T)|$ ,  $g(x_2|u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} 1_{\{|U(T)|=x_2\}} 1_{\{T<\infty\}} | U(0) = u)$ ,
- για  $\delta > 0$ ,  $w(x, y) = x_1^k$  ( $w(x, y) = x_2^k$ ), παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης  $k$  του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία),  $\mathbb{E}(e^{-\delta T} |U(T)|^k 1_{\{T<\infty\}} | U(0) = u)$  ( $\mathbb{E}(e^{-\delta T} U(T-)^k 1_{\{T<\infty\}} | U(0) = u)$ ).

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που εκτός από τη χρήση της στα αναλογιστικά μαθηματικά, έχει και εφαρμογές στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Παραδείγματος χάρι, όταν  $w(x, y) = \max\{0, K - x\}$ , η  $\phi(u)$  χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός Αμερικάνικου put option με τιμή άσκησης  $K$  (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Gerber και Shiu (1999), Gerber και Landry (1998) ).

Η μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης πονής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έγινε από τους Gerber και Shiu (1998). Σε αυτή την εργασία οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Volterra. Η λύση της συγκεκριμένη ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση πονής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε από τους Lin και Willmot (1999) σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (associated compound geometric). Στην ίδια εργασία γίνεται ο υπολογισμός της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόστηκε και στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Οι αναφορές περιλαμβάνουν τους Dickson και Hipp (2001a), Cheng και Tang (2003), Gerber και Shiu (2003a), Gerber και Shiu (2003b), Li (2003), Lin (2003), Li και Garrido (2004), Sun (2004), Gerber και Shiu (2005), Li και Garrido (2005), Schmidli (2005), Albecher (2005), Tsai (2005), Li (2005), Ng (2005), Yin και Chiu (2005).

**Παρατήρηση 1.1.** Εφόσον το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου (βλ. Θεώρημα 1.3) στην επόμενη παράγραφο δίνουμε αναλυτικά την παραπάνω μεθοδολογία για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης που κατανέμονται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang  $(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

#### 1.4 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων  $U(t)$  ορίζεται όπως στις σχέσεις (1.3)-(1.4) και ότι οι ενδιάμεσοι

χρόνοι άφιξης είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  που ακολουθούν την γενικευμένη Erlang<sup>2</sup>  $(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία κινδύνου ονομάζεται γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου.

**Ορισμός 1.7.** Έστω  $\{Z_i\}_{i=1}^n$  μια ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. με παραμέτρους  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε η κατανομή της (συνέλιξης των  $Z_i$ ) τ.μ.  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n Z_i$  ονομάζεται γενικευμένη Erlang κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση η σ.π.π. της τ.μ.  $\sigma_n$  δίνεται από τη σχέση

$$f_{\sigma_n}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda_i > 0,$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ.  $\sigma_n$  δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{f}_{\sigma_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_{\sigma_n}(t) dt = \mathbb{E}(e^{-sW}) = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + s)}, \quad s \geq 0. \quad (1.8)$$

**Παρατήρηση 1.2.** Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η γενικευμένη Erlang κατανομή αποτελεί γενίκευση της κατανομής Erlang. Έτσι θέτοντας  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$  παίρνουμε την κατανομή Erlang( $n, \lambda$ ), ενώ θέτοντας  $n = 1, \lambda_1 = \lambda$  παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ .

#### 1.4.1 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Για την γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου, οι Gerber και Shiu (2005) έδειξαν ότι η προεξοφλημένη αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.4.** Για  $u \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u \phi(u-x) f(x) dx - \prod_{j=1}^n \lambda_j w(u) = 0, \quad (1.9)$$

όπου

$$w(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) f(x) dx = \int_0^{\infty} w(u, x) f(x+u) dx. \quad (1.10)$$

**Απόδειξη.** Μια εναλλακτική απόδειξη από αυτή των Gerber και Shiu (σελ. 55-56, 2005), είναι η ακόλουθη. Από τον ορισμό της γενικευμένη Erlang  $(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , χωρίζουμε

<sup>2</sup> στη θεωρία ουρών το συγκεκριμένο μοντέλο αντιστοιχεί σε μία GI/G/1 ουρά, ενώ το κλασσικό μοντέλο αντιστοιχεί σε μία M/G/1 ουρά

κάθε ενδιάμεσο χρόνο άφιξης (των ζημιών) σε άθροισμα  $n$  ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. κάθε μία με παράμετρο  $\lambda_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), όπου η εμφάνιση κάθε μίας από αυτές τις τ.μ. να προκαλεί μία “υπο-ζημιά” μεγέθους 0 για  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  και η εμφάνιση της  $n$ -οστής τ.μ. προκαλεί μια “πραγματική” ζημιά με σ.χ.  $F(x)$ . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία πλεονάσματος  $U(t)$  σαν μία αλυσίδα Markov (piecewise deterministic Markov chain)  $\{J(t), t \geq 0\}$  με χώρο καταστάσεων  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Η μετάβαση από την κατάσταση  $j$  στην κατάσταση  $j + 1$  γίνεται με την εμφάνιση μιας εκθετικής τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_j$ , για  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , και η μετάβαση από την κατάσταση  $n$  στην κατάσταση 1 γίνεται με την εμφάνιση μιας εκθετικής τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_n$ . Έστω

$$\phi_j(u) := \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)) | 1_{(T < \infty)} | J(0) = i, U(0) = u), \quad u \geq 0,$$

μια “βοηθητική” Gerber-Shiu συνάρτηση, όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται στην κατάσταση  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Ενδιαφερόμαστε για τη συνάρτηση  $\phi_1(u) = \phi(u)$ .

Επιπλέον, θεωρούμε ένα απειροστό διάστημα  $[0, dt]$  στο οποίο έχουμε τέσσερα ενδεχόμενα αναφορικά με την εμφάνιση κάποιας ζημιάς και τη μετάβαση της αλυσίδας  $\{J(t), t \geq 0\}$ :

- (i) δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση
- (ii) εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση
- (iii) δεν εμφανίζεται ζημιά και η αλυσίδα μεταβαίνει σε άλλη κατάσταση
- (iv) συμβαίνουν δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Τότε για  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  έχουμε

$$\phi_j(u) = (1 - \lambda_j dt) e^{-\delta dt} \phi_j(u + cdt) + \lambda_j e^{-\delta dt} \phi_{j+1}(u + cdt) + o(dt). \quad (1.11)$$

Από το ανάπτυγμα του Taylor έχουμε ότι  $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$  και  $\phi_j(u + cdt) = \phi_j(u) + c\phi_j'(u)dt + o(dt)$ . Τότε συγκεντρώνοντας τους όρους τάξης  $dt$  και για  $dt \rightarrow 0$  από την εξίσωση (1.11) έχουμε

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_j + \delta) \right) \phi_j(u) + \lambda_j \phi_{j+1}(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n - 1. \quad (1.12)$$

Όμοια για  $j = n$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_n(u) &= (1 - \lambda_n dt) e^{-\delta dt} \phi_n(u + cdt) + \lambda_n dt e^{-\delta dt} \left( \int_0^{u+cdt} \phi(u + cdt - x) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, x - u - cdt) f(x) dx \right) + o(dt), \end{aligned}$$

από την οποία συγκεντρώνοντας τους όρους τάξης  $dt$  και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του





Taylor, για  $dt \rightarrow 0$  παίρνουμε ότι

$$\left(c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_n + \delta)\right) \phi_n(u) + \lambda_n \left(\int_0^u \phi(u-x)f(x)dx + w(u)\right) = 0. \quad (1.13)$$

Τώρα, από τη σχέση (1.12) έχουμε ότι

$$\phi_{j+1}(u) = \frac{\lambda_j + \delta - \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \phi_j(u), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

από την οποία με διαδοχικές αντικαταστάσεις για  $j = 1, 2, \dots$  παίρνουμε ότι

$$\phi_n(u) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j + \delta - \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \phi(u).$$

Τέλος, λύνοντας την εξίσωση (1.13) ως προς  $\phi_n(u)$  και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

**Πόρισμα 1.1.** Για  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$  η εξίσωση (1.9) γίνεται

$$\left(\lambda + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}\right)^n \phi(u) - \lambda^n \int_0^u \phi(u-x)f(x)dx - \lambda^n w(u) = 0, \quad (1.14)$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang  $(n, \lambda)$  ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.

**Πόρισμα 1.2.** Για  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$  η εξίσωση (1.9) γίνεται

$$c\phi'(u) - (\delta + \lambda)\phi(u) + \lambda \int_0^u \phi(u-x)f(x)dx + \lambda w(u) = 0, \quad (1.15)$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.9) βρίσκεται χρησιμοποιώντας ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, τους μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι για  $\Re(s) \geq 0$  ορίζουμε  $\widehat{\phi}(s)$ ,  $\widehat{f}(s)$  και  $\widehat{w}(s)$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\phi(u)$ ,  $f(x)$  και  $w(u)$  αντίστοιχα, που δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \phi(x) dx, \\ \widehat{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \\ \widehat{w}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} w(x) dx. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace,  $\widehat{\phi}(s)$ , χρειαζόμαστε το παρακάτω θεώρημα και το παρακάτω λήμμα.

**Θεώρημα 1.5 (Lundberg's generalized fundamental equation).** Για  $s \in \mathbb{C}$  και  $\delta \geq 0$ , η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg δίνεται από τη σχέση

$$\widetilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \widehat{f}(s) = 0, \quad (1.16)$$

όπου  $\widetilde{\gamma}(s) = \prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta - cs)$ .

Απόδειξη. Έστω  $\tau_k = \sum_{i=1}^k W_i$  ο χρόνος άφιξης της  $k$ -ζημιάς, με  $\tau_0 = 0$ . Επιπλέον ορίζουμε  $U_0 = u$  και για  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$U_k = U(\tau_k) = u + c\tau_k - \sum_{j=1}^{N(\tau_k)} X_j = u + \sum_{i=1}^k \left( cW_i - \sum_{j=1}^{N(W_i)} X_j \right), \quad (1.17)$$

να είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της  $k$ -ζημιάς. Έστω, ότι υπάρχει ένας αριθμός  $s$  τέτοιος ώστε η ακολουθία των τ.μ.  $\{e^{-\delta\tau_k + sU_k}\}_{k=0}^{\infty}$  να είναι martingale ως προς μια διύλιση  $\mathcal{F}_k = \sigma(W_i, X_i; 1 \leq i \leq k)$ , με  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Τότε ισχύει ότι (βλ. Ορισμό A'.3 στο Παράρτημα)

$$e^{-\delta\tau_k + sU_k} = \mathbb{E}(e^{-\delta\tau_{k+1} + sU_{k+1}} | \mathcal{F}_k). \quad (1.18)$$

Όμως χρησιμοποιώντας την (1.17) έχουμε ότι

$$e^{-\delta\tau_{k+1} + sU_{k+1}} = e^{-\delta\tau_k + sU_k - \delta W_{k+1} + s(cW_{k+1} - X_1)},$$

και συνεπώς (μαζί με το γεγονός ότι οι  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι ισόνομες τ.μ.) η (1.18) γίνεται

$$1 = \mathbb{E}(e^{-\delta W_1 + s(cW_1 - X_1)}) = \mathbb{E}(e^{-(\delta - cs)W_1}) \mathbb{E}(e^{-sX_1}),$$

από όπου χρησιμοποιώντας την (1.8) παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

**Πόρισμα 1.3 (Lundberg's fundamental equation).** Για  $n = 1$  και  $\lambda_1 = \lambda$ , η εξίσωση (1.16) γίνεται

$$\delta + \lambda - cs = \widehat{f}(s), \quad (1.19)$$

που είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Η λύση της εξίσωσης (1.16) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu και δίνεται από το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 1.1.** (i) Για  $\Re(s) \geq 0$ ,  $\delta > 0$  η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, (1.16), έχει ακριβώς  $n$  ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ii) Για  $\Re(s) \geq 0$  και  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς μία ρίζα, το 0 και  $n - 1$  ρίζες, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005), Albrecher και Boxma (2005). ■

Στο εξής θα συμβολίζουμε τις θετικές ρίζες της εξίσωσης (1.16),  $r_i(\delta) \equiv r_i$ ,  $\Re(r_i(0)) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ενώ επίσης υποθέτουμε ότι οι  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Τώρα, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.9), και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.6.** Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής  $\hat{\phi}(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{w}(s) - q(s)}{\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{f}(s)}, \quad (1.20)$$

όπου  $q(s) = \sum_{j=1}^n \hat{w}(r_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{s - r_k}{r_j - r_k}$  και  $r_i$ , με  $\Re(r_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.16).

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005). ■

Επειδή η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (1.20), είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί (στη γενική περίπτωση), το επόμενο βήμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι να δείξουμε ότι η  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και να βρούμε τη λύση αυτής. Για αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε ένα εργαλείο, ευρέως γνωστό και χρησιμοποιούμενο στη θεωρία κινδύνου, τους τελεστές  $T_r$ .

**Ορισμός 1.8** ( $T_r$  operator). Έστω  $f(x)$  μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για  $\Re(r) \geq 0$  και  $x \geq 0$  ορίζουμε τον τελεστή  $T_r$  να δίνεται από την σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x) du.$$

Για έναν πιο αυστηρό ορισμό του τελεστή  $T_r$  παραπέμπουμε στους Butzer και Hubert<sup>3</sup> (1967) παράγραφος 1.3.3 ή στον Feller (1996) κεφάλαιο III. Στη θεωρία κινδύνου ο τελεστής

<sup>3</sup>ο τελεστής  $T_r$  καλείται από τους Butzer και Hubert ως pseudo-resolvent

$T_r$  εισήχθη από τους Dickson και Hipp (2001). Ο τελεστής  $T_r$  έχει κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες, όπως δίνονται ακολούθως.

**Πρόταση 1.2 (Ιδιότητες των τελεστών  $T_r$ ).** Έστω  $T_r f(x)$  ο  $T_r$  τελεστής μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης  $f(x)$ . Ο τελεστής  $T_r f(x)$  ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

- (i)  $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du = \widehat{f}(r)$ ,
- (ii)  $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$ ,  $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ ,
- (iii)  $\frac{d}{dx} T_r f(x) = r T_r f(x) - f(x)$ ,  $\frac{d}{ds} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^2 \frac{r_k T_{r_k} f(x)}{r_2'(r_k)}$ ,  $\tau_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$ ,
- (iv)  $T_r \widehat{f}(s) = \frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)}{r - s}$ ,  $r \neq s \in \mathbb{C}$ ,
- (v)  $T_r \widehat{f}(s) = \widehat{(T_r f)}(s) = T_s T_r f(0)$ ,
- (vi)  $s \widehat{f}(s) - r \widehat{f}(r) = (s - r)[-s T_r \widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)]$ ,
- (vii)  $\widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2(s) - \widehat{f}_1(r) \widehat{f}_2(r) = -(s - r)[\widehat{f}_1(s) T_{r_2} \widehat{f}_2(s) + T_{r_1} \widehat{f}_1(r) \widehat{f}_2(s)]$ , για κάθε  $s \neq r$  και για  $f_1, f_2$  δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,
- (viii) αν  $r_1, r_2, \dots, r_k$  είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε  $T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_k} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{T_{r_j} f(x)}{r_k'(r_j)}$ ,  $\tau(s) = \prod_{j=1}^k (s - r_j)$ , και  $T_s T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_k} f(0) = (-1)^k \left( \frac{\widehat{f}(s)}{r_k(s)} - \sum_{j=1}^k \frac{\widehat{f}(r_j)}{(s - r_j) r_k'(r_j)} \right)$ .  
Επιπλέον αν η  $f(x)$  είναι σ.π.π. της τ.μ.  $X$  με σ.κ.  $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$ , τότε ισχύουν τα παρακάτω
- (ix)  $T_0 T_r f(x) = \int_x^\infty T_r f(u) du = \frac{\overline{F}(x) - T_r \overline{F}(x)}{r} = T_r \overline{F}(x)$ ,
- (x)  $\int_0^u T_r f(x + y) dx = T_r \overline{F}(y) - T_r \overline{F}(y + u)$ ,
- (xi)  $\int_0^\infty T_{r_1} T_{r_2} f(x) dx = \frac{1}{r_2 - r_1} \left( \frac{1 - \widehat{f}(r_1)}{r_1} - \frac{1 - \widehat{f}(r_2)}{r_2} \right)$ ,
- (xii)  $\int_0^\infty (T_{r_1} f \star T_{r_2} f)(x) dx = \frac{(1 - \widehat{f}(r_1))(1 - \widehat{f}(r_2))}{r_1 r_2}$ .

Απόδειξη. Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων παραπέμπουμε στους Lin και Willmot (1999), Dickson και Hipp (2001), Li και Garrido (2004a). ■

Ο Li (2003), χρησιμοποιώντας τους τελεστές  $T_r$  απέδειξε ότι η  $\widehat{\phi}(s)$  της εξίσωσης (1.20) γράφεται σε μια ισοδύναμη μορφή, απ' όπου εύκολα μπορεί να δείχθει ότι η  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.7.** Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής,  $\widehat{\phi}(s)$ , γράφεται ως

$$\widehat{\phi}(s) = \frac{\widehat{G}(s)}{1 - \widehat{n}(s)}, \quad (1.21)$$

όπου  $\widehat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left( \prod_{j=1}^n T_{r_j} w \right) (0)$  και  $\widehat{n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} n(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left( \prod_{j=1}^n T_{r_j} f \right) (0)$  και  $r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.16).

Απόδειξη. Li (2003), Θεώρημα 2. ■

Τώρα, αντιστρέφοντας την εξίσωση (1.21) ως προς  $s$  παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.8.** Για  $u \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_0^u \phi(u-x)n(x)dx + G(u) \\ &= \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \phi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} H(u), \end{aligned} \quad (1.22)$$

όπου  $n(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \left( \prod_{j=1}^n T_{r_j} f \right) (x)$ ,  $G(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \left( \prod_{j=1}^n T_{r_j} w \right) (x)$ ,  $\xi$  τέτοιο ώστε  $1/(1+\xi) = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n \prod_{j=1}^n r_j} < 1$ , με  $r_i, \Re(r_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.16),  $H(x) = (1+\xi)G(x)$  και  $z(x) = (1+\xi)n(x)$  όπου η  $z(x)$  είναι η σ.π.π. της κατανομής  $Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)dy}{\int_0^\infty \eta(y)dy}$ . Επιπλέον αν  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε  $\xi \rightarrow \xi_0$ , τέτοιο ώστε  $1/(1+\xi_0) = 1 - \frac{\theta \prod_{j=1}^n \lambda_j m}{c^n \prod_{j=1}^n r_j(0)} < 1$ , δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  είναι θετικό.

Απόδειξη. Li (2003). ■

**Πόρισμα 1.4.** Για  $n = 1$  και  $\lambda_1 = \lambda$ , η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (1.22) γίνεται

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_0^u \phi(u-x)n(x)dx + G(u) \\ &= \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \phi(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} H(u), \end{aligned} \quad (1.23)$$

που είναι η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με  $n(x) = \frac{\lambda}{c} T_r f(x)$ ,  $G(x) = \frac{\lambda}{c} T_r w(x)$ ,  $\xi$  τέτοιο ώστε  $1/(1+\xi) = \int_0^\infty n(x)dx = 1 - \frac{\delta}{c\tau} < 1$ , με  $r, \Re(r) > 0$ , να είναι η ρίζα της εξίσωσης (1.19),  $H(x) = (1+\xi)G(x)$  και  $z(x) = (1+\xi)n(x)$

όπου η  $z(x)$  είναι η σ.π.π. της κατανομής  $Z(u) = \frac{\int_0^u \eta(y)dy}{\int_0^\infty \eta(y)dy}$ . Επιπλέον, αν  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε  $\xi \rightarrow \xi_0$ , τέτοιο ώστε  $1/(1 + \xi_0) = 1 - \frac{1}{\sigma^2(0)} < 1$ .

Η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.22) υπολογίζεται σε όρους της δεξιάς ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι για  $u \geq 0$ , ορίζουμε τη σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (associate compound geometric distribution)  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$ , όπου η δεξιά ουρά  $\bar{K}(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi} \left( \frac{1}{1+\xi} \right)^n \bar{N}^{*n}(u), \quad u \geq 0,$$

με  $\bar{N}^{*n}(u)$  η  $n$ -οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς  $\bar{N}(u) = 1 - N(u) = \int_u^\infty n(y)dy$ .

**Θεώρημα 1.9.** Για  $u \geq 0$ , η λύση της ανανεωτικής ελαττωματικής εξίσωσης (1.22) δίνεται από τη σχέση

$$\phi(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi} H(u), \quad (1.24)$$

ή ισοδύναμα

$$\phi(u) = -\frac{1}{\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\xi} \bar{K}(u) + \frac{1}{\xi} H(u), \quad (1.25)$$

ή ισοδύναμα

$$\phi(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u (1 - \bar{K}(u-x))dH(x) + \frac{H(0)}{\xi} (1 - \bar{K}(u)). \quad (1.26)$$

Απόδειξη. Lin και Willmot (1999). ■

Από τις σχέσεις (1.24)-(1.26) και τον τύπο της  $H(u)$  είναι φανερό ότι η λύση της  $\phi(u)$  εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της δεξιάς ουράς,  $\bar{K}(u)$ . Οι Lin και Willmot (1999) απέδειξαν ότι η ουρά της βοηθητικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} \bar{Z}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.27)$$

όπου  $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u) = \int_u^\infty z(x)dx$ .

Επιπλέον επιλέγοντας  $w(x,y) = 1$ , η συνάρτηση των Gerber-Shiu  $\phi(u)$  γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,  $\mathbb{E}(e^{-\delta T} 1_{\{T < \infty\}} | U(0) = u) = \phi_T(u)$ .

Ακόμη για  $w(x, y) = 1$ , χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 9 των τελεστών  $T_r$ , παίρνουμε άμεσα ότι  $H(u) = (1 + \xi) \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \left( \prod_{j=1}^n T_{r_j} \bar{Z} \right) (u)$  και συνεπώς η (1.22) γίνεται

$$\varphi_T(u) = \frac{1}{1 + \xi} \int_0^u \varphi_T(u-x) z(x) dx + \frac{1}{1 + \xi} \bar{Z}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.28)$$

απ' όπου συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.27) και (1.28) παρατηρούμε ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης βοηθητικής γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας  $T$ .

**Θεώρημα 1.10.** Για  $u \geq 0$ , ισχύει ότι

$$\bar{K}(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} 1_{(T < \infty)} | U(0) = u) = \varphi_T(u).$$

Από τα Θεώρηματα (1.9) και (1.10), είναι φανερό ότι γνωρίζοντας τη  $\varphi_T(u)$  και υπολογίζοντας την  $H(u)$  για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής,  $w(x, y)$ , μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα κινδύνου, όπως την πιθανότητα χρεοκοπίας, την κατανομή του  $U(T-)$  (πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία), την κατανομή του  $|U(T)|$  (ελλείμμα κατά τη χρεοκοπία), την από κοινού κατανομή των δύο παραπάνω τ.μ., καθώς και άλλα μέτρα κινδύνου.

Έτσι από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός διάφορων μέτρων κινδύνου εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της συνάρτησης  $\varphi_T(u)$ , η οποία βρίσκεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι από τη σχέση (1.21), για  $w(x, y) = 1$  έχουμε ότι

$$\widehat{\varphi}_T(s) = \frac{\widehat{G}(s) \prod_{j=1}^n (r_j - s)}{\prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \widehat{f}(s)}, \quad (1.29)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$1 - \widehat{n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \widehat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)}, \quad s \neq r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

η οποία αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1 και τις ιδιότητες των τελεστών  $T_r$ , (βλ. Lin (2003) Θεώρημα 2). Επιπλέον επιλέγοντας  $w(x, y) = 1$ , και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 5 των τελεστών  $T_r$ , η συνάρτηση  $\widehat{G}(s)$  γίνεται

$$\begin{aligned} \widehat{G}(s) &= \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{T_0 T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0) - T_s T_{r_1} \dots T_{r_n} f(0)}{s} \\ &= \frac{\widehat{n}(0) - \widehat{n}(s)}{s} = \frac{1}{s} \left( \frac{\prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \widehat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)} - \frac{\xi}{1 + \xi} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.30) στην (1.29) παίρνουμε άμεσα ότι

$$\widehat{\varphi}_T(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \widehat{f}(s) - \frac{\xi}{1+\xi} \prod_{j=1}^n (r_j - s)}{s \left[ \prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \widehat{f}(s) \right]}. \quad (1.31)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace (1.31), μπορεί να αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μία από αυτές τις περιπτώσεις είναι όταν η  $\widehat{\varphi}_T(s)$  έχει πολυωνυμική μορφή. Έτσι η  $\widehat{\varphi}_T(s)$  μπορεί να έχει πολυωνυμική μορφή, αν και μόνον αν η  $\widehat{f}(s)$  έχει πολυωνυμική μορφή και συνεπώς για αυτό το σκοπό επιλέγουμε την  $f(x)$  να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

**Ορισμός 1.9 (rational distribution family).** Η τ.μ.  $X$  με σ.π.π.  $f(x)$ , ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών  $\mathcal{R}_f$  αν ο μετασχηματισμός Laplace,  $\widehat{f}(s)$ , γράφεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων,

$$\widehat{f}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}, \quad \text{με } Q_m(0) = Q_{m-1}(0), \quad \Re(s) \in (h_X, \infty), \quad (1.32)$$

όπου  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $h_X = \inf\{s \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(e^{-sX}) < \infty\}$ , και  $Q_m(s)$ ,  $Q_{m-1}(s)$  είναι πολυώνυμα βαθμού  $m$  και  $\deg(Q_{m-1}(s)) \leq m-1$  αντίστοιχα .

Η κλασματική οικογένεια είναι μια ευρεία κλάση κατανομών που περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) την εκθετική, την κατανομή Erlang, την κατανομή Coxian, την κατανομή phase-type καθώς και τις μίξεις αυτών. Για περισσότερες λεπτομέρειες για την κλασματική οικογένεια κατανομών παραπέμπουμε στους Li και Garido (2005), Cox (1955), Neuts (1981) Κεφ. 2.

Υποθέτοντας ότι η κατανομή των ζημιών  $f(x)$  ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλ. ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την εξίσωση (1.32), και ορίζοντας

$$B_{m,n}(s) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) Q_m(s) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c} Q_{m-1}(s), \quad (1.33)$$

να είναι ένα πολυώνυμο  $m+n$  βαθμού, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,  $\varphi_T(u) = \overline{K}(u)$ , δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.11.** *Εάν ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών  $\widehat{f}(s)$  έχει τη μορφή της (1.32), τότε*

$$\widehat{\varphi}_T(s) = \frac{B_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^m (s + R_i)},$$



με  $B_{m-1}(s) = \frac{1}{s} \left( \prod_{i=1}^m (s + R_i) - \frac{\xi}{1-\xi} Q_m(s) \right)$ , όπου  $\xi$  δίνεται από το Θεώρημα 1.8 και  $-R_i$  είναι όλες οι ρίζες της εξίσωσης  $B_{m,n}(s) = 0$ , με  $\Re(R_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Επιπλέον, αν  $-R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$\widehat{\varphi}_T(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s + R_i},$$

και

$$\varphi_T(u) = \sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}, \quad u \geq 0,$$

με

$$a_i = \frac{\prod_{i=1}^m R_i}{R_i \prod_{j=1, j \neq i}^m (R_j - R_i)} \cdot \frac{Q_m(-R_i)}{Q_m(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

**Παρατήρηση 1.3.** Από το Θεώρημα 1.11 μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού ισχύει ότι  $\psi(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_T(u)$ .

#### 1.4.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Μία πιο ρεαλιστική επέκταση του ανανεωτικού μοντέλου (1.3)-(1.4), είναι η υπόθεση ύπαρξης μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος (constant dividend barrier strategy). Κάτω από αυτή την υπόθεση, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο  $b (> u)$  τέτοιο ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο κατώφλι  $b$  τα ασφάλιστρα  $c$  επιστρέφονται στους δικαιούχους με τη μορφή μερίσματος μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς. Έστω  $U_b(t)$  με  $U_b(0) = u$ , η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη συγκεκριμένη στρατηγική (βλ. σχήμα 1.3), η οποία ορίζεται ως

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}$$

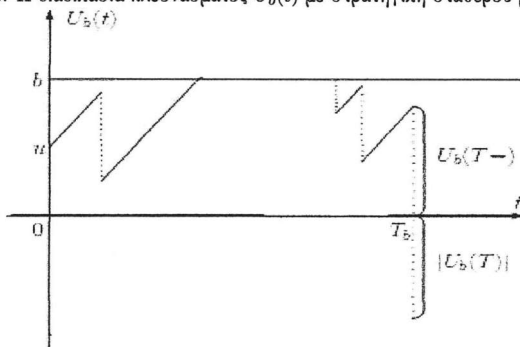
Επιπλέον (σε αντιστοιχία με τη διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη μερίσματος) ορίζουμε

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\} \quad \text{με} \quad \inf \emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος και  $U_b(T_b-)$  και  $|U_b(T_b)|$  να είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, αντίστοιχα. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi_b(u) = \mathbb{P}(T_b < \infty), \quad u \leq b,$$

Σχήμα 1.3: Η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  με στρατηγική σταθερού μερίσματος



ενώ η συνάρτηση Gerber-Shiu κάτω από αυτή την προσαρμογή ορίζεται ακολούθως.

**Ορισμός 1.10.** Για  $u \leq b$  και  $\delta \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως

$$\phi_b(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u), \quad u \leq b,$$

όπου  $\delta$  η ένταση ανατοκισμού και  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  μια διδιάστατη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^2$ .

**Παρατήρηση 1.4.** Από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_b(t)$ , είναι φανερό ότι πρόκειται για μία ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς μερίσματα,  $U(t)$ . Έτσι για  $b \rightarrow \infty$  έχουμε ότι  $\lim_{b \rightarrow \infty} U_b(t) = U(t)$  και συνεπώς  $\lim_{b \rightarrow \infty} \phi_b(u) = \phi(u)$

Η στρατηγική σταθερού μερίσματος εισήχθη από τον De Finetti (1957) για το διωνυμικό μοντέλο κινδύνου. Από τότε τόσο η συνάρτηση των Gerber-Shiu, όσο και ροπές των μερισμάτων αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης τόσο στο κλασσικό όσο και ανανεωτικό μοντέλο με Erlang ή γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Οι αναφορές περιλαμβάνουν τους Bühlmann (1970), Gerber (1973), (1979), (1981), Paulsen και Giessing (1997), Albrecher και Kainhofer (2002), Claramunt, Mármol και Alegre (2003), Albrecher, Kainhofer και Tichy (2003), Lin, Willmot και Drekcik (2003), Albrecher (2004), Dickson και Waters (2004), Li και Garrido (2004b), Albrecher, Mercé και Mármol (2005), Albrecher και Hartinger (2006), Li και Dickson (2006), Gerber, Lin και Hialiang (2006), Li (2006).

Υποθέτοντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  ακολουθούν την γενικευμένη Erlang( $n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ) κατανομή, δείχνουμε πως η μεθοδολογία της ενότητας 1.4.1 μπορεί

να προσαρμοστεί στην υπόθεση ύπαρξης μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

**Θεώρημα 1.12.** Για  $u \leq b$  και  $\delta \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi_b(u)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi_b(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx - \prod_{j=1}^n \lambda_j w(u) = 0, \quad (1.34)$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi_b^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.35)$$

και  $w(u)$  δίνεται από τη σχέση (1.10).

Απόδειξη. Li και Garrido (2004b). ■

**Πόρισμα 1.5.** Για  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , η εξίσωση (1.34) γίνεται

$$\left( \lambda + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^n \phi_b(u) - \lambda^n \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx - \lambda^n w(u) = 0, \quad u \leq b, \quad (1.36)$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi_b^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.

**Πόρισμα 1.6.** Για  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ , η εξίσωση (1.34) γίνεται

$$\left( \lambda + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi_b(u) - \lambda \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx - \lambda w(u) = 0, \quad u \leq b, \quad (1.37)$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi_b'(0) = 0,$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1.34) με οριακές συνθήκες που δίνονται από την (1.35) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (ως προς  $v_\delta(u)$ )

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) v_\delta(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u v_\delta(u-x) f(x) dx = 0, \quad u \geq 0,$$

ή ισοδύναμα

$$A_{\delta}(\mathcal{D})v_{\delta}(u) - \int_0^u v_{\delta}(u-x)f(x)dx = 0, \quad u \geq 0, \quad (1.38)$$

όπου  $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial u}$  είναι ο τελεστής παραγώγισης και  $A_{\delta}(s) = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} - \frac{c_j}{\lambda_j} s\right) = \sum_{k=0}^n A_{\delta,k} s^k$  είναι ένα πολυώνυμο τάξης  $n$ , με  $A_{\delta,k}$  σταθερούς αριθμούς, που δίνονται σε όρους των  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, c$  και  $\delta$ .

Τότε, από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. Κεφ. 7 των Boyce και DiPrima (2000)] έπεται ότι η λύση της  $n$ -τάξης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.34) εκφράζεται σαν μία μερική λύση συν ένα γραμμικό συνδυασμό από  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.38). Εφόσον, από το Θεώρημα 1.4 η συνάρτηση Gerber-Shiu χωρίς μερίσματα,  $\phi(u)$ , είναι μια μερική λύση της (1.34), τότε η γενική λύση της  $\phi_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$\phi_b(u) = \phi(u) + \sum_{i=1}^n \eta_i(b)v_{\delta,i}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.39)$$

όπου  $v_{\delta,i}(u)$  είναι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.38) και  $\eta_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (1.35), δηλ. λύνοντας ως προς  $\eta_i(b)$  το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\phi^{(k)}(b) + \sum_{i=1}^n \eta_i(b)v_{\delta,i}^{(k)}(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης (1.38), προσδιορίζεται με βάση την επιλογή των αρχικών συνθηκών  $v_{\delta}^{(k)}(0), k = 0, 1, \dots, n-1$  και υπολογίζεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε

$$v_{\delta,i}^{(k)}(0) = 1_{(k=i-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.40)$$

Κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες οι λύσεις  $v_{\delta,i}(u), i = 0, 1, \dots, n$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για να δείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία θεωρούμε ότι υπάρχουν κάποιοι σταθεροί αριθμοί  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ , τέτοιοι ώστε  $\sum_{i=1}^n c_i v_{\delta,i}(u) \equiv 0$ . Τότε  $\sum_{i=1}^n c_i v_{\delta,i}^{(k)}(u) \equiv 0, k = 0, 1, \dots, n-1, \forall u \geq 0$ . Αντικαθιστώντας  $u = 0$  και χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (1.40), έχουμε ότι  $c_i = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ , από το οποίο αποδεικνύεται ότι οι λύσεις  $v_{\delta,i}(u), i = 0, 1, \dots, n$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εφόσον οι  $v_{\delta,i}(u), i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης (1.38), τότε επαληθεύουν την εξίσωση (1.38), δηλ.

$$A_{\delta}(\mathcal{D})v_{\delta,i}(u) - \int_0^u v_{\delta,i}(u-x)f(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad u \geq 0. \quad (1.41)$$

Έτσι από την εξίσωση (1.41), με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace και των οριακών συνθηκών (1.40), μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις  $v_{\delta,i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Έστω  $\widehat{v}_{\delta,i}(s)$  να είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $v_{\delta,i}(u)$  ως προς  $s$ ,

$$\widehat{v}_{\delta,i}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} v_{\delta,i}(x) dx, \quad \Re(s) \geq 0.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.41), η  $\widehat{v}_{\delta,i}(s)$  δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.13.** Για  $\Re(s) \geq 0$  και  $\delta \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace των λύσεων  $v_{\delta,i}(s)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{v}_{\delta,i}(s) = \frac{d_{\delta,i}(s)}{A_{\delta}(s) - \widehat{f}(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.42)$$

όπου

$$d_{\delta,i}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^n A_{\delta,k} v_{\delta,i}^{(k-j-1)}(0),$$

$$A_{\delta}(s) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{\delta}{\lambda_j} - \frac{c}{\lambda_j} s \right) = \sum_{k=0}^n A_{\delta,k} s^k,$$

με  $A_k$  σταθερούς αριθμούς, που δίνονται σε όρους των  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $c$  και  $\delta$ .

Απόδειξη. Li και Garrido (2004b). ■

Ο μετασχηματισμός Laplace (1.42), μπορεί να αντιστραφεί σε κάποιες μόνο περιπτώσεις. Έτσι υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών (βλ. ορισμό 1.9) και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.11, οι λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.38), δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.14.** Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.κ. του μεγέθους των ζημιών  $\widehat{f}(s)$  δίνεται από την (1.32), τότε για  $\Re(s) \geq 0$ ,

$$\widehat{v}_{\delta,i}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{h_{i,k}}{s - r_k} + \sum_{\ell=1}^m \frac{g_{i,\ell}}{s + R_{\ell}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου

$$h_{i,k} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{-d_{\delta,i}(r_k) Q_m(r_k)}{\prod_{j=1}^m (R_j + r_k) \prod_{l=1, l \neq k}^n (r_l - r_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_{i,\ell} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \cdot \frac{d_{\delta,i}(-R_\ell) Q_m(-R_\ell)}{\prod_{j=1}^n (R_\ell + r_j) \prod_{i=1, i \neq k}^m (R_i - R_\ell)}, \quad \ell = 1, 2, \dots, m.$$

με  $r_k$  και  $-R_\ell$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, m$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $B_{m,n}(s) = 0$ , όπου  $B_{m,n}(s)$  δίνεται από τη σχέση (1.33). Επιπλέον, αν  $r_k$  και  $-R_\ell$  είναι διαφορετικές μεταξὺ τους, τότε

$$v_{\delta,i}(u) = \sum_{k=1}^n h_{i,k} e^{r_k u} + \sum_{\ell=1}^m g_{i,\ell} e^{-R_\ell u}, \quad u \geq 0.$$

**Παρατήρηση 1.5.** Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $v_{\delta,i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , του Θεωρήματος 1.14 δεν είναι μοναδικές, αφού η επιλογή των αρχικών συνθηκών των  $v_{\delta,i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , (1.40) γίνεται αυθαίρετα χωρίς βλάβη της γενικότητας.

**Παρατήρηση 1.6.** Σημειώνουμε ότι παρόλο που οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg μπορεί να είναι μιγαδικές, οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $v_{\delta,i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , του Θεωρήματος 1.14 είναι πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών περιέχουν κάποιες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

### 1.4.3 Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, (1.4.2), είναι ένα σημαντικό μέτρο κινδύνου όσον αφορά στη διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος. Ένα άλλο όμως πολύ σημαντικό εργαλείο, το οποίο συνδέεται με την «ποιότητα» της στρατηγικής μερίσματος, είναι οι ροπές ή ακόμη και η κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Έτσι ενώ η συνάρτηση των Gerber-Shiu, σχετίζεται με τη μέτρηση του κινδύνου, οι ροπές των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας σχετίζονται με το ύψος του ποσού των μερισμάτων που διανέμεται πίσω στους δικαιούχους της ασφάλισης. Στην παρούσα ενότητα γίνεται η μελέτη των ροπών της παρούσας αξίας των μερισμάτων της διαδικασίας  $U_b(t)$ .

**Ορισμός 1.11.** Για  $0 \leq u \leq b$  και  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t),$$

να είναι η παρούσα αξία του συνόλου των καταβληθέντων μερισμάτων πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, όπου  $D(t)$  τα σωρευτικά μερίσματα που πληρώνονται μέχρι τον χρόνο  $t$ , και  $\delta$  να συμβολίζει την ένταση ανατοκισμού.

**Ορισμός 1.12.** Για  $0 \leq u \leq b$  και  $m \in \mathbb{N}^+$ , ορίζουμε

$$W_m(u, b) = \mathbb{E}(D_{u,b}^m | U_b(0) = u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad m \in \mathbb{N},$$

να είναι η  $m$ -τάξης ροπή της τ.μ.  $D_{u,b}$  με  $W_0(u, b) = 1$ .

Για την γενικευμένη Erlang( $n$ ) διαδικασία κινδύνου η  $m$ -τάξης ροπή  $W_m(u, b)$  ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.15.** Για  $0 \leq u \leq b$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , η  $m$ -τάξης ροπή της τ.μ.  $D_{u,b}$ ,  $W_m(u, b)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \delta m - c \frac{\partial}{\partial u} + \lambda_j \right) W_m(u, b) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u W_m(u-x, b) f(x) dx = 0, \quad (1.43)$$

με οριακές συνθήκες

$$\prod_{j=2}^k \left( \delta m + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u} W_m(u, b) \Big|_{u=b} = m \prod_{j=2}^k \left( \delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u} \right) W_{m-1}(u, b) \Big|_{u=b},$$

για  $k = 1, 2, \dots, n$  και  $\prod_{j=2}^1 = 1$ . Επιπλέον

$$\lim_{b \rightarrow \infty} W_m(u, b) = 0$$

Απόδειξη. Albrecher, Claramunt και Mármol (2005) σελ. 6,7. ■

**Πόρισμα 1.7.** Για  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , η εξίσωση (1.43) γίνεται

$$\left( \delta m - c \frac{\partial}{\partial u} + \lambda \right)^n W_m(u, b) - \lambda^n \int_0^u W_m(u-x, b) f(x) dx = 0, \quad (1.44)$$

με οριακές συνθήκες

$$\left( \delta m + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} W_m(u, b) \Big|_{u=b} = m \left( \delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^{k-1} W_{m-1}(u, b) \Big|_{u=b},$$

για  $k = 1, 2, \dots, n$ , που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.

**Πόρισμα 1.8.** Για  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ , η εξίσωση (1.43) γίνεται

$$\left( \delta m - c \frac{\partial}{\partial u} + \lambda \right) W_m(u, b) - \lambda \int_0^u W_m(u-x, b) f(x) dx = 0, \quad (1.45)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_m(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{m-1}(u, b) \Big|_{u=b},$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασικό μοντέλο.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.43) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της ακόλουθης ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \tilde{\delta} - c \frac{\partial}{\partial u} \right) v_{\tilde{\delta}}(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u v_{\tilde{\delta}}(u-x) f(x) dx = 0, \quad u \geq 0, \quad (1.46)$$

όπου  $\tilde{\delta} = \delta m$ . Τότε από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. ΚΕΦ 7 των Boyce και DiPrima (2000)] η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.43) εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός από  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.46). Έτσι η γενική λύση της  $W_m(u, b)$  δίνεται από τη σχέση

$$W_m(u, b) = \sum_{i=1}^n \eta_{i,m} v_{\tilde{\delta},i}(u), \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου  $v_{\tilde{\delta},i}(u)$  είναι οι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (1.46) και  $\eta_{i,m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , είναι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 1.15. Αναλυτικότερα, οι σταθερές  $\eta_{i,m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  υπολογίζονται αναδρομικά από τη σχέση

$$\prod_{j=2}^k (\delta m + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u}) \sum_{i=1}^n \eta_{i,m} v'_{\tilde{\delta},i}(b) = m \prod_{j=2}^k (\delta(m-1) + \lambda_{j-1} - c \frac{\partial}{\partial u}) \sum_{i=1}^n \eta_{i,m-1} v_{\tilde{\delta},i}(b),$$

για  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\prod_{j=2}^1 = 1$  και  $m \in \mathbb{N}$ .

Εφόσον, η εξίσωση (1.46) είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση (1.38), με  $\tilde{\delta} = \delta m$  στη θέση του  $\delta$ , για τον υπολογισμό των  $v_{\tilde{\delta},i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία της ενότητας 1.4.2. Έτσι υποθέτοντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace,  $\hat{f}(s)$ , έχει την ίδια μορφή όπως στην εξίσωση (1.32), τότε οι  $v_{\tilde{\delta},i}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , δίνονται από το Θεώρημα 1.14 με  $\tilde{\delta} = \delta m$  στη θέση του  $\delta$ .

#### 1.4.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Άμεση γενίκευση της ενότητας 1.4.2 είναι η επέκταση της υπόθεσης ύπαρξης σταθερού μερισματος σε ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Έτσι θεωρούμε ότι υπάρχουν  $N$  διαφορετικά μεταξύ τους επίπεδα,  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_N = \infty$ , τέτοια ώστε όταν η διαδικασία πλεονάσματος είναι μεταξύ του  $b_{i-1}$  και  $b_i$  κατωφλιού το ασφαλιστρο που εισπράττεται είναι  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Διασθητικά η παραπάνω στρατηγική ερμηνεύεται ακολούθως. Μόλις η διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει το επίπεδο  $b_{i-1}$ , τότε μέρος του



ασφαλίστρου  $c_{i-1}$  επιστρέφεται ως μέρισμα στους δικαιούχους της ασφάλισης και συνεπώς το ασφαλιστρο μειώνεται σε  $c_i$ . Κατά συνέπεια  $c_1 < c_2 < \dots < c_N$ . Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό με την ενότητα 1.4.2, η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων,  $U_b(t)$ , ορίζεται ως

$$dU_b(t) = c_i dt - dS(t), \quad b_{i-1} \leq U_b(t) \leq b_i, \quad (1.47)$$

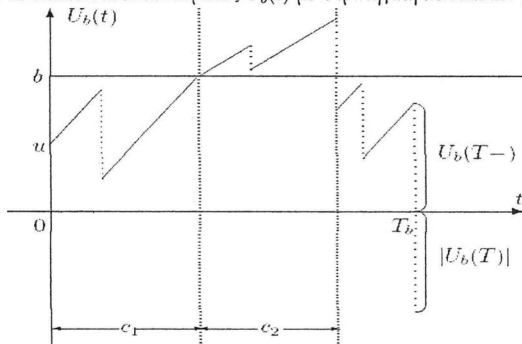
με  $U_b(u) = u$ , ενώ για την παραπάνω προσαρμογή είναι φανερό ότι συμπεριφέρεται διαφορετικά, ανάλογα με το κατώφλι στο οποίο βρίσκεται.

**Ορισμός 1.13.** Για  $b_{i-1} \leq u < b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  και  $\delta \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi_b(u)$ , ορίζεται ως

$$\phi_b(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T_b} w(U(T_b^-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u) = \begin{cases} \phi_{b,1}(u), & 0 \leq u < b_1 \\ \phi_{b,2}(u), & b_1 \leq u < b_2 \\ \vdots & \\ \phi_{b,N}(u), & u \geq b_{N-1} \end{cases}$$

όπου  $\phi_{b,i}(u)$  είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu μεταξύ των κατωφλίων  $b_{i-1}$  και  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Σχήμα 1.4: Η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  με στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων



Η стоχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη πολλαπλών μερισμάτων εισήχθη από τους Lin και Pavlova (2006), οι οποίοι μελέτησαν τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας στην περίπτωση ύπαρξης δύο επιπέδων ( $N = 2$ ), ενώ οι Albrecher και Hartinger (2007) μελέτησαν το ίδιο μέτρο κινδύνου για

εκθετικά μεγέθη ζημιών κάτω από την ύπαρξη  $N$ -επιπέδων. Επιπλέον, οι Lin και Sendova (2007), δείχνοντας ότι η μεθοδολογία των ενότητων 1.4.2, 1.4.3 μπορεί να εφαρμοστεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα, μελέτησαν την προεξοφλημένη συνάφτηση ποινής με την ύπαρξη  $N$ -επιπέδων χωρίς την υπόθεση συγκεκριμένων κατανομών για τα μεγέθη των ζημιών. Τέλος, χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, οι Zhang και Yang (2008), γενίκευσαν την εργασία των Lin και Sendova (2007) για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Τα κυριότερα αποτελέσματα δίνονται στην παρακάτω ενότητα.

Θεωρώντας την γενικευμένη Erlang( $n$ ) διαδικασία κινδύνου, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάφτηση ποινής αποτελεί λύση μιας ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.16.** Για  $b_{i-1} \leq u < b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  και  $\delta \geq 0$ , η  $\phi_b(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c_j \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi_b(u) = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx - \prod_{j=1}^n \lambda_j w(u), \quad (1.48)$$

με οριακές συνθήκες

$$c_i^k \left( \frac{\partial^-}{\partial u} \right)^k \phi_b(b) = c_{i+1}^k \left( \frac{\partial^+}{\partial u} \right)^k \phi_b(b), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.49)$$

με  $\frac{\partial^-}{\partial u}$  και  $\frac{\partial^+}{\partial u}$  να είναι ένας τελεστής παραγώγισης από δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 1.7.** Από τη σχέση (1.49) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι συνεχής για κάθε  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , αλλά όχι παραγωγίσιμη. Έτσι, στην (1.48) οι παράγωγοι της  $\phi_b(u)$  στο σημείο  $u = b$  θεωρούνται ότι είναι παράγωγοι από τα δεξιά.

**Πόρισμα 1.9.** Για  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ , η εξίσωση (1.48) γίνεται

$$(\lambda + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}) \phi_b(u) = \lambda \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx - \lambda w(u), \quad b_{i-1} \leq u < b_i \quad (1.50)$$

με οριακές συνθήκες

$$c_i \left( \frac{\partial^-}{\partial u} \right) \phi_b(b) = c_{i+1} \left( \frac{\partial^+}{\partial u} \right) \phi_b(b), \quad (1.51)$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Για τη λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.48), «χαλαρώνουμε» τον περιορισμό  $b_{i-1} \leq u < b_i$  σε  $b_{i-1} \leq u$  και θεωρούμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση  $\Phi_i(u)$  που ικανοποιεί την

ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c_i \frac{\partial}{\partial u} \right) \Phi_b(u) &= \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) f(x) dx \\ &+ \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_{u-b_{i-1}}^u \phi_i(u-x) f(x) dx + \prod_{j=1}^n \lambda_j w(u), \quad u \geq b_{i-1}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

**Παρατήρηση 1.8.** Από τη σχέση (1.52) παρατηρούμε ότι για  $i = 1$ , η  $\Phi_1(u)$ ,  $u \geq 0$ , είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη κάποιας στρατηγικής μερίσματος, δηλ.  $\Phi_1(u) = \phi(u)$ .

Τότε, (κατ' επέκταση της τεχνικής που χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα 1.4.2) η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.48) δίνεται από τη σχέση

$$\phi_b(u) = \Phi_i(u) + \sum_{j=1}^n k_{ij} v_{i,j}(u), \quad b_{i-1} \leq u < b_i, \quad (1.53)$$

όπου  $k_{ij}$  είναι σταθεροί αριθμοί που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες (1.51) και  $v_{i,j}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , είναι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j + \delta - c_i \frac{\partial}{\partial u} \right) v_{i,j}(u) = \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^{u-b_{i-1}} v_{i,j}(u-x) f(x) dx, \quad u \geq b_{i-1},$$

με αρχικές συνθήκες  $v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = 1_{(k=j-1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Επομένως, από τη σχέση (1.53) είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό της  $\phi_b(u)$ , πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες  $\Phi_b(u)$  και  $v_{i,j}(u)$ . Επιπλέον, ορίζουμε τον τελεστή

$$\mathfrak{S}_i = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c_i^n} \prod_{k=1}^n T_{r_{ik}},$$

όπου  $r_{ik}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , με  $\Re(r_{ik}) > 0$ , είναι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, που δίνεται από τη σχέση (1.16) με  $c_i$  στη θέση του  $c$ , (βλέπε επίσης Λήμμα 1.1). Τότε, ορίζοντας την μεταβλητή  $y = u - b_{i-1}$ , και τη συνάρτηση  $V_i(y) = V_i(u - b_{i-1}) = \Phi_i(u)$  και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace στην εξίσωση (1.52), οι Zhang και Yang (2008), έδειξαν ότι η  $V_i(y)$  ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$V_i(y) = \int_0^y V_i(y-x) n_i(x) dx + J_i(y), \quad y \geq 0, \quad (1.54)$$

όπου  $n_i(u) = \mathcal{S}_i f(u) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} (\prod_{k=1}^n T_{r_{ik}} f)(u)$  και

$$\begin{aligned} J_i(y) &= \int_0^{b_{i-1}} \phi_b(x) \mathcal{S}_i f(y + b_{i-1} - x) dx + \mathcal{S}_i w(y + b_{i-1}) \\ &= \int_0^{b_{i-1}} \phi_b(x) n_i(x) dx + H_i(u), \end{aligned}$$

με  $H_i(u) = \mathcal{S}_i w(u) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} (\prod_{k=1}^n T_{r_{ik}} w)(u)$ .

Παρατηρώντας ότι η (1.54) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (1.22) εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.8 και κάνοντας ξανά αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1}$ , έπεται ότι η  $\Phi_i(u)$  ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.17.** Για  $u \geq b_{i-1}$  και  $\delta \geq 0$ , η  $\Phi_i(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{1 + \xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) z_i(x) dx + \frac{1}{1 + \xi_i} P_i(u), \quad (1.55)$$

όπου  $\xi_i$  τέτοιο ώστε  $1/(1 + \xi_i) = \int_0^\infty n_i(x) dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n \prod_{k=1}^n r_{ik}} < 1$ ,  $z_i(u) = (1 + \xi_i) n_i(x)$  και  $P_i(u) = (1 + \xi_i) J_i(u - b_{i-1}) = \int_{u-b_{i-1}}^{b_i} \phi_b(u-x) z_i(x) dx + (1 + \xi_i) H_i(u)$ .

Απόδειξη. Zhang και Yang (2008), σελ. 9-10. ■

Η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.55) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι για  $u \geq 0$ , ορίζουμε τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$K_i(u) = 1 - \bar{K}_i(u) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{1 + \xi_i} \left( \frac{1}{1 + \xi_i} \right)^n \bar{N}_i^{*n}(u), \quad u \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

όπου  $\bar{N}_i^{*n}(u)$  είναι η  $n$ -οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς  $\bar{N}_i(u) = 1 - N_i(u) = \int_u^\infty n_i(y) dy$  για  $i = 1, \dots, N$ .

Αλλάζοντας μεταβλητή,  $y = u - b_{i-1}$ ,  $V_i(y) = V_i(u - b_{i-1}) = \Phi_i(u)$ , η εξίσωση (1.55) γίνεται

$$V_i(y) = \frac{1}{1 + \xi_i} \int_0^y V_i(y-x) z_i(x) dx + \frac{1}{1 + \xi_i} P_i(y + b_{i-1}), \quad y \geq 0.$$

Τότε από το Θεώρημα 1.9 μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τη λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης.

**Θεώρημα 1.18.** Για  $u \geq b_{i-1}$ , η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.55),

δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} P_i(u-x) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} P_i(u), \quad u \geq b_{i-1}.$$

Επιπλέον, εφόσον  $P_i(u) = \int_{u-b_{i-1}}^{b_i} \phi_b(u-x) z_i(x) dx + (1+\xi_i) H_i(u)$ , ισοδύναμα η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\Phi_i(u) = \int_0^{b_i-1} \phi_b(y) \bar{\varphi}_i(u, y) + \zeta_i(u), \quad u \geq b_{i-1}, \quad (1.56)$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i(u, y) &= \frac{1}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} z_i(u-x-y) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} z_i(u-y), \\ \zeta_i(u) &= \frac{1+\xi_i}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} H_i(u-x) dK_i(x) + H_i(u). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Zhang και Yang (2008), σελ. 11. ■

Σημειώνουμε ότι, με βάση το Θεώρημα 1.10 και το Θεώρημα 1.11, η σύνθετη γεωμετρική κατανομή  $K_i(u)$ , όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, όπως στη σχέση (1.32), δίνεται από τη σχέση

$$K_i(u) = 1 - \bar{K}_i(u) = 1 - \sum_{j=1}^m a_{ij} e^{-R_{ij}u}, \quad u \geq 0, ,$$

με

$$a_{ij} = \frac{\prod_{i=1}^m R_{ij}}{R_{ij} \prod_{k=1, k \neq j}^m (R_{ik} - R_{ij})} \cdot \frac{Q_m(-R_{ij})}{Q_m(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Επομένως υπολογίζοντας από το Θεώρημα 1.18 την  $\Phi_i(u)$ , από την (1.53), έπεται ότι για να βρούμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu με την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων,  $\phi_b(u)$ , χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τις λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής (1.4.4),  $v_{i,j}(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Η λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.4.4) εξαρτάται άμεσα από τις αρχικές συνθήκες των  $v_{i,j}(u)$ . Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε

$$v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = 1_{(k=j-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Επιπλέον κάνοντας αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1}$ ,  $v_{i,j}(y) = v_{i,j}(y + b_{i-1}) = v_{i,j}(u)$ , η

εξίσωση (1.4.4) γίνεται

$$A_{\delta,i}(D)\vartheta_{i,j}(y) - \int_0^y \vartheta_{i,j}(y-x)f(x)dx = 0, \quad (1.57)$$

όπου  $A_{\delta,i}(s) = \prod_{j=1}^n (1 + \frac{\delta}{\lambda_j} - \frac{c_i}{\lambda_j} s) = \sum_{k=0}^n A_{\delta,k,i} s^k$  είναι ένα πολυώνυμο τάξης  $n$  με  $A_{\delta,k,i}$  σταθερούς που δίνονται σε όρους των  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, c_i$  και  $\delta$ .

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της παραγράφου 1.4.2, και επιλέγοντας η κατανομή των αποζημιώσεων να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, όπως στην σχέση (1.32), μπορούμε να βρούμε τις λύσεις  $\vartheta_{i,j}(y)$ . Έτσι, από τη σχέση (1.14) έπεται ότι

$$\vartheta_{i,j}(y) = \sum_{k=1}^n h_{i,j,k} e^{r_{ik}y} + \sum_{\ell=1}^m g_{i,j,\ell} e^{-R_{i\ell}y}, \quad y \geq 0, \quad (1.58)$$

όπου

$$h_{i,k} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c_i^n} \cdot \frac{-d_{\delta,i,j}(r_{ik})Q_m(r_{ik})}{\prod_{j=1}^m (R_{i,j} + r_{ik}) \prod_{l=1, l \neq k}^n (r_{il} - r_{ik})}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_{i,\ell} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c_i^n} \cdot \frac{d_{\delta,i,j}(-R_{i\ell})Q_m(-R_{i\ell})}{\prod_{j=1}^m (R_{i\ell} + r_{ij}) \prod_{l=1, l \neq k}^n (R_{il} - R_{i\ell})}, \quad \ell = 1, 2, \dots, m,$$

και

$$d_{\delta,i,j}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^n A_{\delta,k,i} \vartheta_{i,j}^{(k-j-1)}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{k=j+1}^n A_{\delta,k,i} v_{i,j}^{(k-j-1)}(b_{i-1}).$$

Επομένως, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1}$ ,  $\vartheta_{i,j}(y) = v_{i,j}(y + b_{i-1}) = v_{i,j}(u)$  στην εξίσωση (1.58), παίρνουμε τις λύσεις  $v_{i,j}(u)$ , όπως δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.19.** *Αν ο μετασχηματισμός Laplace των αποζημιώσεων,  $\widehat{f}(s)$ , δίνεται όπως στην (1.32), τότε οι λύσεις του ομογενούς συστήματος (1.57) δίνονται από τη σχέση*

$$v_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^n h_{i,j,k} e^{r_{ik}(u-b_{i-1})} + \sum_{\ell=1}^m g_{i,j,\ell} e^{-R_{i\ell}(u-b_{i-1})}, \quad u \geq b_{i-1}, \quad (1.59)$$

όπου τα  $h_{i,j,k}$  και  $g_{i,j,\ell}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , δίνονται από τις σχέσεις (1.59) και (1.59), αντίστοιχα.

Απόδειξη. Zhang και Yang (2008) σελ. 10. ■

Τώρα, από την εξίσωση (1.56) του Θεωρήματος 1.18, είναι φανερό ότι ο υπολογισμός της  $\Phi_i(u)$  βασίζεται στην γνώση των  $\phi_b(u)$  μέχρι το επίπεδο  $b_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Έτσι από τις σχέσεις (1.56) και (1.53) μπορούμε να οδηγηθούμε σε έναν αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό της  $\Phi_i(u)$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.20.** Για  $u \geq b_{i-1}$ ,  $\delta \geq 0$  και για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N$ , η λύση της εξίσωσης (1.52) βρίσκεται αναδρομικά από τη σχέση

$$\Phi_m(u) = \bar{L}_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{L}_{m,i,j}(u),$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{L}_m(u) &= \zeta_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \bar{L}_i(y) \bar{\varphi}_m(u, y) dy, \\ \bar{L}_{m,i,j}(u) &= \sum_{\ell=i+1}^{m-1} \int_{b_{\ell-1}}^{b_\ell} \bar{L}_{\ell,i,j}(y) \bar{\varphi}_m(u, y) dy + \int_{b_{i-1}}^{b_i} v_{i,j}(y) \bar{\varphi}_m(u, y) dy, \end{aligned}$$

όπου οι  $\zeta_m(u)$  και  $\bar{\varphi}_m(u, y)$  δίνονται από το Θεώρημα 1.18 και  $v_{i,j}(y)$  είναι οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (1.57) που δίνονται από το Θεώρημα 1.19.

Απόδειξη. Zhang και Yang (2008), σελ. 12-13. ■

Από το Θεώρημα 1.20, είναι φανερό ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $k_{ij}$ . Έτσι, παρατηρώντας ότι  $k_{Nj} = 0$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$  και ανακαλώντας τις οριακές συνθήκες (1.49) και τις αρχικές συνθήκες  $v_{i,j}^{(k)}(b_{i-1}) = 1_{(k=j-1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} k_{m+1,\kappa+1} &= \frac{c_m^\kappa}{c_{m+1}^\kappa} \left( \bar{L}_m^{(\kappa)}(b_m) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{L}_{m,i,j}^{(\kappa)}(b_m) + \sum_{j=1}^n k_{mj} v_{m,j}^{(\kappa)}(b_m) \right) \\ &\quad - \bar{L}_{m+1}^{(\kappa)}(b_m) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{L}_{m+1,i,j}^{(\kappa)}(b_m), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Τέλος, συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.20 και τη σχέση (1.53), η συνάρτηση των Gerber-Shiu με την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.21.** Για  $b_{i-1} \leq u \leq b_i$  και  $\delta \geq 0$  η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση πονής,  $\phi_b(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$\phi_b(u) = \bar{L}_m(u) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{L}_{m,i,j}(u) + \sum_{j=1}^n k_{mj} v_{m,j}(u), \quad (1.61)$$

όπου  $\bar{L}_m(u)$  και  $\bar{L}_{m,i,j}(u)$  δίνονται από το Θεώρημα 1.20.

Απόδειξη. Zhang και Yang (2008), σελ. 13. ■

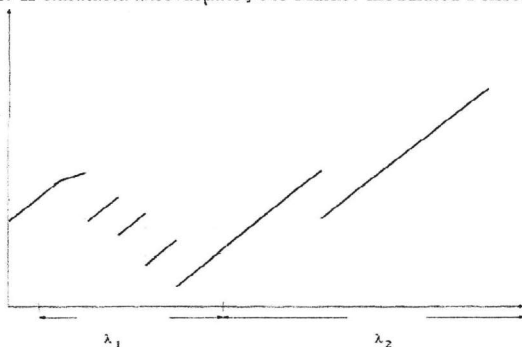
## 1.5 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου.

Από την ενότητα 1.2, είναι φανερό ότι στο ανανεωτικό μοντέλο (και κατά συνέπεια στο κλασικό μοντέλο) της θεωρίας χρεοκοπίας υπάρχει ομοιογένεια, μεταξύ τόσο μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των ζημιών, όσο και μεταξύ των μεγεθών των ζημιών.

Επομένως, είναι φανερό ότι τόσο το κλασικό όσο και το ανανεωτικό μοντέλο «αποτυγχάνουν» στο να περιγράψουν ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια στα οποία η «ένταση» των κινδύνων και το μέγεθος των ζημιών παρουσιάζουν κάποιου είδους εξάρτηση (συσχέτιση) στο χρονικό διάστημα  $(0, t)$ .

Η λύση του παραπάνω προβλήματος, δόθηκε από τον Reinhard (1984) ο οποίος εισήγαγε το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου, όπου τόσο η «ένταση» των ζημιών, όσο και τα μεγέθη των ζημιών μεταβάλλονται σύμφωνα με μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του μοντέλου είναι τα φυσικά φαινόμενα El Nino, La Nina και Kobe. Για να γίνει κατανοητό πώς επιδρούν αυτά τα φυσικά φαινόμενα στην ασφάλιση και πώς το Markov-modulated είναι κατάλληλο για την ερμηνεία τέτοιων φαινομένων δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα. Έστω, λοιπόν, ότι ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από ασφαλιστήρια συμβόλαια στη χρονική περίοδο  $(0, t)$  έναντι του κινδύνου των σεισμών. Υποθέτουμε ότι στη χρονική διάρκεια  $(0, t_1)$  υπάρχει μια έντονη σεισμική δραστηριότητα, όπου ο αριθμός των σεισμών περιγράφεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda_1$ , ενώ τη χρονική περίοδο  $(t_1, t)$  υπάρχει μια ασθενής σεισμική δραστηριότητα όπου ο αριθμός των σεισμών περιγράφεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda_2$ ,  $\lambda_2 < \lambda_1$  (βλ. σχήμα 1.5). Το παραπάνω είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα του Markov-modulated Poisson μοντέλου

Σχήμα 1.5: Η διαδικασία πλεονάσματος στο Markov-modulated Poisson μοντέλο





όπου η εισηγμένη μακροβιανή αλυσίδα επιτρέπει την μετάβαση από την κατάσταση υψηλής σεισμικής δραστηριότητας στην κατάσταση χαμηλής σεισμικής δραστηριότητας.

Γενικότερα, οι καταστάσεις της μακροβιανής αλυσίδας μπορούν να περιγράψουν διαφορετικά είδη ασθενειών (βλ. Asmussen (1999)) ή ακόμη και διαφορετικές οικονομικο-πολιτικές συνθήκες (βλ. Ng και Yang (2006)).

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας, της κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, της κατανομής του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία ή γενικότερα η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης από πολλούς συγγραφείς. Οι κυριότερες αναφορές περιλαμβάνουν τους Reinhard (1984), Janssen (1980), Bäuerle (1996), Schmidli (1997), Rolski, Schmidli, Schmidt, και Teugels (1999), Asmussen (1999), (2000), Reinhard και Snoussi (2001), Snoussi (2002), Wu και Wei (2004), Lu και Li (2005), Lu (2006), Ng και Yang (2006), Lu και Tsai (2007), Zhang (2007), Li και Lu (2008).

**Ορισμός 1.14.** Μια Μακροβιανή διαδικασία  $\{J(t)\}_{t \geq 0}$  με χώρο καταστάσεων  $\{1, \dots, m\}$ , ονομάζεται Μακροβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αν και μόνον αν για  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$  και  $k, j, x_i \in \{1, \dots, m\}$  ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(J(t+h) = k | J(t) = j, J(t_i) = x_i \forall i) = \mathbb{P}(J(t+h) = k | J(t) = j),$$

όπου

$$\mathbb{P}(J(t+h) = k | J(t) = j) = \begin{cases} a_{jk}h + o(h), & k \neq j \\ 1 - a_{jj}h + o(h), & k = j \end{cases}$$

με  $a_{jk} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(J(t+h)=k | J(t)=j)}{h}$  να είναι ρυθμός μετάβασης (transition rate) από την κατάσταση  $j$  στην κατάσταση  $k$ , στο απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, h]$  και  $a_{jj} = \sum_{k=1}^m a_{jk}$ .

**Ορισμός 1.15.** Έστω μια Μακροβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου  $\{J(t)\}_{t \geq 0}$ , με χώρο καταστάσεων  $\{1, \dots, m\} = E$ . Τότε ο πίνακας  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ , με στοιχεία τους ρυθμούς μετάβασης από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$ ,  $i, j \in E$ , ονομάζεται πίνακας τάσης της  $\{J(t)\}_{t \geq 0}$  αν και μόνο αν

- (i)  $a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j,$
- (ii)  $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^m a_{ij} < 0,$
- (iii)  $\sum_{j=1}^m a_{ij} 0,$

Προκειμένου να ορίσουμε την διαδικασία πλεονάσματος στο μοντέλο Markov-modulated θεωρούμε ότι  $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$  να είναι μια ομογενής, μεταβατική, συνεχούς χρόνου αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων  $E = \{1, \dots, m\}$  (όπως στον Ορισμό 1.2) και πίνακα

τάσης  $\Lambda = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  με  $a_{ii} = -a_i = -\sum_{j \neq i}^m a_{ij}$  για  $i \in E$  (όπως στον Ορισμό 1.6). Επιπλέον, θεωρούμε ότι το  $1 \times m$  διάνυσμα  $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$  είναι η στάσιμη κατανομή (stationary distribution) της αλυσίδας  $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , η οποία ικανοποιεί την σχέση  $\vec{\pi}\Lambda = \vec{0}$ , και  $\vec{\pi}\vec{e} = 1$  με  $\vec{0}$  να είναι  $1 \times m$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία και  $\vec{e}$  ένα  $m \times 1$  διάνυσμα με όλα του τα στοιχεία ίδια με 1.

Στο μοντέλο Markov-modulated Poisson, θεωρούμε ότι όταν η αλυσίδα  $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$  βρίσκεται στην κατάσταση  $i \in E$ , τότε ο αριθμός των κινδύνων δίνεται από την απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία  $\{N_i(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , η οποία υποθέτουμε ότι είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda_i$ , και η κατανομή των μεγεθών των ζημιών είναι  $F_i(\cdot)$ , με σ.π.π.  $f_i(\cdot)$  και πεπερασμένη μέση τιμή  $m_i$ ,  $i \in E$ . Επιπλέον, σε κάθε κατάσταση εισπράττεται ένα ασφάλιστρο μεγέθους  $c$ .

Από τις παραπάνω υποθέσεις θεωρούμε ότι σε κάθε κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να ορισθεί μια στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος  $\{U_i(t), t \geq 0\}$ , όμοια με τη σχέση (1.3), όπου οι σωρευτικές ζημιές είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson  $(\lambda_i, F_i)$ .

Τότε ο συνολικός αριθμός των κινδύνων, για όλες τις καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας (βλ. σχήμα 1.6), δίνεται από την απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ,

$$N(t) = \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} dN_i(s),$$

ενώ η αντίστοιχη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} dU_i(s). \quad (1.62)$$

Επιπλέον, (όμοια με την ενότητα 1.2) ορίζουμε

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \quad \text{με} \quad \inf \emptyset = \infty,$$

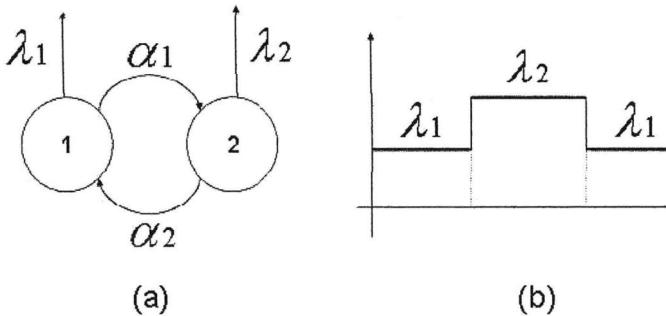
να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, ενώ προκειμένου να μην έχουμε χρεοκοπία με την πρώτη ζημιά, ενώ ο περιορισμός για την επάρκεια του ασφαλιστρου δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 1.3.** Έστω ότι η (1.5) είναι αληθής. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, αν και μόνο αν

$$c > \sum_{i=1}^m \pi_i \lambda_i m_i,$$

*Απόδειξη.* Βλέπε Rolski, Schmidli, Schmidt, και Teugels (1999), Θεώρημα 12.3.2, σελ. 515-516. ■

Σχήμα 1.6: (a) Markov-modulated με δυο καταστάσεις, (b)διάγραμμα της απαριθμήτριας  $N(t)$



### 1.5.1 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson

Στο μοντέλο Markov-modulated Poisson λόγω της χρονικής ανομοιογένειας που παρουσιάζει το μοντέλο, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται για κάθε μία από τις καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας, όπως δίνεται στον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.16.** Έστω  $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | J(0) = i)$  και  $\mathbb{E}_i$  η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i$ . Τότε, για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$$\phi_i(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u), \quad i \in E, \quad u \geq 0,$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης  $i$  και του αρχικού αποθεματικού  $u$ , με  $\delta$ ,  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$  και  $w(x, y)$  όπως δίνονται από τον Ορισμό 1.6. Τότε, η «συνολική» Gerber-Shiu συνάρτηση για το μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^m \pi_i \phi_i(u), \quad u \geq 0.$$

Η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των  $\phi_i$  αντικατοπτρίζεται στα εξής βήματα: αρχικά θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις  $\phi_i$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace μπορούμε να προσδιορίσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση (δηλαδή την εξίσωση Lundberg για το μοντέλο Markov-modulated Poisson), ενώ με βάση τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορούμε να

γράψουμε το μετασχηματισμό των  $\phi_i$  σε μια κατάλληλη μορφή ώστε να είναι δυνατή η αντιστροφή του όταν οι  $f_i$  ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

**Θεώρημα 1.22.** Για  $u \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  και  $i \in E$  οι συναρτήσεις  $\phi_i(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$c\phi_i(u) - (a_i + \lambda_i + \delta)\phi_i(u) + \lambda_i \left( \int_0^u \phi_i(u-x)f_i(x)dx + w_i(u) \right) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik}\phi_k(u) = 0, \quad (1.63)$$

όπου

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)f_i(x)dx = \int_0^\infty w(u, x)f_i(x+u)dx.$$

Απόδειξη. Ng και Yang (2006) Θεώρημα 3, σελ. 251-252. ■

**Παρατήρηση 1.9.** Για  $a_{ik} \rightarrow 0$ , τότε και  $a_i \rightarrow 0$ , η εξίσωση (1.63) γίνεται η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, (1.15) του Πορίσματος 1.2, που αντιστοιχεί στο κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.63) βρίσκεται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι για  $\Re(s) \geq 0$ , ορίζουμε  $\widehat{\phi}_i(s)$ ,  $\widehat{f}_i(s)$  και  $\widehat{w}_i(s)$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\phi_i(u)$ ,  $f_i(x)$  και  $w_i(u)$  αντίστοιχα, οι οποίοι δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_i(s) &= \int_0^u e^{-su} \phi_i(u) du, \\ \widehat{w}_i(s) &= \int_0^u e^{-su} w_i(u) du, \\ \widehat{f}_i(s) &= \int_0^u e^{-sx} f_i(x) dx. \end{aligned}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.63), έχουμε ότι

$$\left( cs - (a_i + \lambda_i + \delta) + \lambda_i \widehat{f}_i(s) \right) \widehat{\phi}_i(s) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \widehat{\phi}_k(s) = c\phi_i(0) - \lambda_i \widehat{w}_i(s). \quad (1.64)$$

Τώρα, προκειμένου να αναλύσουμε και τις  $m$ -συναρτήσεις μαζί, ορίζουμε τους πίνακες/διανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) &= \text{diag}(S_1(s), \dots, S_m(s)) + \mathbf{\Lambda}, \\ \vec{\widehat{\phi}}(s) &= (\widehat{\phi}_1(s), \dots, \widehat{\phi}_m(s))^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\phi}(0) &= (\phi_1(0), \dots, \phi_m(0))^T, \\ \vec{\tilde{w}}(s) &= (\lambda_1 \hat{w}_1(s), \dots, \lambda_m \hat{w}_m(s))^T,\end{aligned}$$

με  $S_i(s) = cs - \delta - \lambda_i(1 - \hat{f}_i(s))$ ,  $i \in E$ , και  $\top$  να είναι το σύμβολο του ανάστροφου πίνακα.

Τότε, με βάση τους παραπάνω πίνακες, η εξίσωση (1.64) γράφεται ως

$$\mathbf{A}(s)\vec{\phi}(s) = \vec{\phi}(0) - \vec{\tilde{w}}(s), \quad (1.65)$$

από όπου εύκολα παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace,  $\vec{\phi}(s)$  όπως δίνεται από το παρακάτω Θεώρημα.

**Θεώρημα 1.23.** Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace,  $\vec{\phi}(s)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\phi}(s) = \frac{\mathbf{A}^*(s)\vec{\phi}(0) - \mathbf{A}^*(s)\vec{\tilde{w}}(s)}{\det \mathbf{A}(s)}, \quad (1.66)$$

όπου  $\mathbf{A}^*(s)$  είναι ο *adjoint* πίνακας του  $\mathbf{A}(s)$ .

Επιπλέον, ορίζουμε

$$\det \mathbf{A}(s) = 0,$$

να είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του μοντέλου μας. Η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο τόσο στον υπολογισμό των αρχικών τιμών  $\phi(0)$ , όσο και στο να εκφράσουμε την σχέση (1.65) σε μια κατάλληλη μορφή προκειμένου να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Laplace. Για τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}(s) = 0$  χρειαζόμαστε αρχικά τον παρακάτω ορισμό και τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν.

**Ορισμός 1.17 (diagonally dominant).** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$  λέγεται ότι *κυριαρχεί διαγωνίως* (diagonally dominant) αν και μόνο αν

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.24 (Levy-Desplanques theorem).** Αν ο τετραγωνικός πίνακας  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  κυριαρχεί διαγωνίως, τότε ισχύει ότι  $\det \mathbf{A} \neq 0$  και συνεπώς ο  $\mathbf{A}$  είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη. Horn και Johnson (1985), Θεωρήμα 6.1.10. ■

**Θεώρημα 1.25 (Cauchy's argument principle).** Έστω  $f(x)$  μια αναλυτική και ολόμορφη συνάρτηση πάνω ή εντός κάποιου κύκλου  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε αν  $f(x) \neq 0$ , ο αριθμός των ριζών  $N$ , της συνάρτησης  $f(x)$  μέσα στον κύκλο  $C^+$ , που είναι το εσωτερικό τμήμα του  $C$ , δίνεται από τη σχέση,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\frac{d}{ds} f(s)}{f(s)} ds.$$

Απόδειξη. Reade (2002) σελ. 76. ■

Έτσι οι Li και Lu (2008), Zhang (2008), δείχνοντας ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}(s)$  κυριαρχεί διαγωνίως και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.25, υπολόγισαν τις ρίζες  $\det \mathbf{A}(s) = 0$ , όπως αυτές δίνονται από το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 1.2.** Για  $\Re(s) \geq 0$  και  $\delta > 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}(s) = 0$ , έχει ακριβώς  $m$  ρίζες,  $r_1(\delta), \dots, r_m(\delta)$  με  $\Re(r_i(\delta)) > 0$ ,  $i \in E$ , στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Απόδειξη. Li και Lu (2008) σελ. 5, Zhang (2008) σελ. 228. ■

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε τις ρίζες  $r_i(\delta) \equiv r_i$ ,  $i \in E$ , και υποθέτουμε ότι οι ρίζες  $r_i$ ,  $i \in E$ , είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Τώρα, προκειμένου να αντιστρέψουμε τον Laplace (1.66) χρειαζόμαστε ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο στην θεωρία κινδύνου, τις διακριτές διαφορές για πίνακες/διανύσματα.

**Ορισμός 1.18 (divided differences).** Για έναν  $m \times n$  πίνακα,  $\mathbf{B}(x)$ , ορίζουμε τις διακριτές διαφορές ως προς κάποιους αριθμούς  $r_1, \dots, r_n$ , διαφορετικούς μεταξύ τους αναδρομικά ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[r_1, s] &= \frac{\mathbf{B}(s) - \mathbf{B}(r_1)}{s - r_1}, \\ \mathbf{B}[r_1, r_2, s] &= \frac{\mathbf{B}[r_1, s] - \mathbf{B}[r_1, r_2]}{s - r_2}, \\ \mathbf{B}[r_1, r_2, r_3, s] &= \frac{\mathbf{B}[r_1, r_2, s] - \mathbf{B}[r_1, r_2, r_3]}{s - r_3}, \end{aligned}$$

και αντιστοίχως μέχρι τον αριθμό  $r_n$ . Γενικότερα, για την  $(k-1)$ -διακριτή διαφορά έχουμε

$$\mathbf{B}[r_1, r_2, \dots, r_k] = \sum_{j=1}^k \frac{\mathbf{B}(r_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (r_j - r_i)}.$$

Οι διακριτές διαφορές σχετίζονται άμεσα με τους τελεστές  $T_r$ , που ορίστηκαν στην ενότητα 1.4 ( Ορισμός 1.7), με βάση την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 1.4** (Σχέση μεταξύ των τελεστών  $T_r$  και των διακριτών διαφορών).  
 Έστω  $\mathbf{B}(x)$  ένας πίνακας όπου τα στοιχεία του είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και

$$T_r \mathbf{B}(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} \mathbf{B}(u) du, \quad \Re(r) \geq 0, x \geq 0,$$

ο τελεστής  $T_r$  του πίνακα  $\mathbf{B}(x)$ . Τότε για τον τελεστή  $(\prod_{k=1}^n T_{r_k}) \mathbf{B}(x)$  και την  $(n-1)$  διακριτή διαφορά  $\mathbf{B}[r_1, r_2, \dots, r_n]$ , η παρακάτω σχέση είναι αληθής

$$\left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \widehat{\mathbf{B}}(0) = (-1)^{n-1} \mathbf{B}[r_1, \dots, r_n]. \quad (1.67)$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη των Gerber και Shiu (2005), σελ. 65. ■

Έτσι χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.2 και τις διακριτές διαφορές, οι αρχικές τιμές της  $\phi(u)$  δίνονται από την παρακάτω Πρόταση.

**Πρόταση 1.5.** Για  $u = 0$ , το διάνυσμα  $\vec{\phi}(0)$  δίνεται από την σχέση

$$\vec{\phi}(0) = (\mathbf{A}[r_1, r_2, \dots, r_m])^{-1} (\mathbf{A}^* \vec{w}) [r_1, r_2, \dots, r_m], \quad (1.68)$$

όπου

$$(\mathbf{A}^* \vec{w}) [r_1, r_2, \dots, r_m] = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}^* [r_1, r_2, \dots, r_i] \vec{w} [r_i, \dots, r_m] \quad (1.69)$$

και  $r_i, i \in E$ , είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}(s) = 0$  με  $\Re(r_i) > 0$ .

Απόδειξη. Li και Lu (2008) σελ. 6. ■

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι στο Markov-modulated Poisson μοντέλο δεν είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί η μεθοδολογία της ενότητας 1.4.1, δηλαδή να αποδείξουμε ότι ο πίνακας  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Συνεπώς, η εύρεση των συναρτήσεων Gerber-Shiu γίνεται με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $\widehat{\phi}(s)$ , της εξίσωσης (1.66) ως προς  $s$ .

Εφόσον  $\widehat{\phi}(s) < \infty$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι  $r_1, r_2, \dots, r_m$  είναι ρίζες του παρονομαστή της (1.66), έπεται ότι είναι ρίζες και του αριθμητή της (1.66). Έτσι εφαρμόζοντας επαλαμβανόμενα τις διακριτές διαφορές στον αριθμητή της εξίσωσης (1.66), ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.26.** Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace,  $\vec{\phi}(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\phi}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - r_i)}{c^m \det \mathbf{A}(s)} \left( \mathbf{A}^*(s) [r_1, r_2, \dots, r_m, s] \vec{\phi}(0) - (\mathbf{A}^* \vec{w})(s) [r_1, r_2, \dots, r_m, s] \right), \quad (1.70)$$

όπου

$$(\mathbf{A}^* \tilde{\mathbf{w}})(s)[r_1, r_2, \dots, r_m, s] = \mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_m, s] \tilde{\mathbf{w}}(s) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_i] \tilde{\mathbf{w}}[r_i, r_2, \dots, r_m, s]. \quad (1.71)$$

Απόδειξη. Li και Lu (2008) σελ. 7. ■

Τώρα, θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων  $f_i(x)$ ,  $i \in E$  ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλαδή ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\hat{f}_i(x)$ , δίνεται από την σχέση

$$\hat{f}_i(x) = \frac{Q_{k_i-1}(s)}{Q_{k_i}(s)}, \quad k_i \in \mathbb{N}^+, i \in E, \quad (1.72)$$

όπου  $Q_{k_i}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο  $k_i$  βαθμού, ενώ το  $Q_{k_i-1}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $k_i-1$  ή μικρότερου, ( $\deg(Q_{k_i-1}(s)) \leq k_i-1$ ) για τα οποία ισχύει ότι  $Q_{k_i}(0) = Q_{k_i-1}(0)$ . Επιπλέον, η εξίσωση  $Q_{k_i}(s) = 0$  έχει ρίζες μόνο με αρνητικά πραγματικά μέρη. Έτσι, χρησιμοποιώντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης,  $\det \mathbf{A}(s) = 0$ , οι Li και Lu έδειξαν ότι το διάνυσμα  $\tilde{\phi}(s)$  γράφεται ως

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{c^m \prod_{i=1}^{k_m} (s + R_i)} \left[ \left( \mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_m, s] \prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) \right) (\tilde{\phi}(0) - \tilde{\mathbf{w}}(s)) - \prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) \sum_{i=1}^m \mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_i] \tilde{\mathbf{w}}[r_i, r_2, \dots, r_m, s] \right], \quad (1.73)$$

όπου  $R_i$ , με  $\Re(R_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k_m$ , είναι οι ρίζες της εξίσωσης<sup>4</sup>

$$\det \mathbf{A}(s) \prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) = 0. \quad (1.74)$$

Παρατηρώντας ότι τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_m, s] \prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s)$  είναι κάποια πολυώνυμα βαθμού μικρότερου από  $k_m$  και ότι τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}^*[r_1, r_2, \dots, r_i]$  είναι σταθεροί αριθμοί, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, και αντιστρέφοντας ως προς  $s$  το διάνυσμα  $\tilde{\phi}(s)$ , η  $\tilde{\phi}(u)$ , δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.27.** Για  $u \geq 0$ , το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\tilde{\phi}(u)$  δίνεται από

<sup>4</sup>βλ. απόδειξη Θεώρηματος 1.29.



τη σχέση

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(u) = & \frac{1}{c^m} \left\{ \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \mathbf{A}^* [r_1, \dots, r_i] \left( \prod_{k=i}^m T_{r_k} \right) \tilde{\mathbf{w}}(u) + \sum_{\ell=1}^{k_m} \left[ e^{-R_\ell u} \mathbf{M}_\ell \tilde{\phi}(0) \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-R_\ell u} \star \left( \mathbf{M}_\ell \tilde{\mathbf{w}}(u) - N_\ell \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \mathbf{A}^* [r_1, \dots, r_i] \left( \prod_{k=i}^m T_{r_k} \right) \tilde{\mathbf{w}}(u) \right) \right] \right\} \quad (1.75) \end{aligned}$$

, όπου  $\mathbf{M}_\ell = (m_{ij,\ell})_{i,j=1}^m$  για  $\ell = 1, 2, \dots, k_m$ , με  $k_m = \sum_{i=1}^m k_i$ , είναι κάποιοι συντελεστές πίνακες με

$$\mathbf{M}_\ell = \frac{\mathbf{A}^* [r_1, r_2, \dots, r_m, -R_\ell] \prod_{i=1}^m Q_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{k_m} (R_\nu - R_\ell)},$$

και  $N_\ell$  για  $\ell = 1, 2, \dots, k_m$ , είναι κάποιοι συντελεστές με

$$N_\ell = \frac{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{k_m} (R_\nu - R_\ell)}.$$

Απόδειξη. Li και Lu (2008) σελ. 10. ■

### 1.5.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την υπόθεση της ύπαρξης ενός οριζόντιου κατωφλιού στο επίπεδο  $b (\geq u)$  για το μοντέλο Markov-modulated Poisson, (βλ. σχέση (1.62)). Όμοια με την ενότητα 1.5.1, ορίζουμε σε κάθε κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{U_{b,i}(t), t \geq 0\}$ , να είναι μια τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την υπόθεση ύπαρξης σταθερού μερίσματος, με τη «συνολική» διαδικασία πλεονάσματος να δίνεται από τη σχέση

$$dU_b(t) = u + \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} dU_{b,i}(s), \quad 0 \leq u \leq b.$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\} \quad \text{με} \quad \inf \emptyset = \infty,$$

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_b(t)$ , ενώ για κάθε μια από τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας, η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.19.** Έστω  $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | J(0) = i)$  και  $\mathbb{E}_i$  να είναι η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο  $\mathbb{P}_i$ . Τότε, για το μοντέλο Markov-modulated Poisson υπό την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζουμε

$$\phi_{b,i}(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{\{T_b < \infty\}} | U_b(0) = u), \quad i \in E, \quad 0 \leq u \leq b,$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης  $i$  και του αρχικού αποθεματικού  $u$ , με  $\delta, U(T-), |U(T)|$  και  $w(x, y)$  όπως δίνονται από τον ορισμό 1.6. Τότε, η «συνολική» Gerber-Shiu συνάρτηση για το μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\phi_b(u) = \sum_{i=1}^m \pi_i \phi_{b,i}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\pi_i, i \in E$ , είναι οι αρχικές πιθανότητες της στάσιμης κατανομής.

**Θεώρημα 1.28.** Για  $0 \leq u \leq b, \delta \geq 0$  και  $i \in E$  οι συναρτήσεις  $\phi_{b,i}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$c\phi_{b,i}(u) - (a_i + \lambda_i + \delta)\phi_{b,i}(u) + \lambda_i \left( \int_0^u \phi_{b,i}(u-x) f_i(x) dx + w_i(u) \right) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{b,k}(u) = 0, \quad (1.76)$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi'_{b,i}(b) = 0, \quad i \in E, \quad (1.77)$$

και  $w_i(u)$  όπως δίνονται από την εξίσωση (1.22).

Απόδειξη. Li και Lu (2008). ■

**Παρατήρηση 1.10.** Για  $a_{ik} \rightarrow 0$ , τότε και  $a_i \rightarrow 0$ , η εξίσωση (1.76) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.37) του Πορίσματος 1.6, που είναι η ολοκληρο-διαφορική του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.76) με οριακές συνθήκες (1.77) εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος, για  $i \in E$

$$c v'_{\delta,i}(u) - (a_i + \lambda_i + \delta) v_{\delta,i}(u) + \lambda_i \int_0^u v_{\delta,i}(u-x) f_i(x) dx + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} v_{\delta,k}(u) = 0, \quad u \geq 0. \quad (1.78)$$

Η λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.78), προσδιορίζεται με βάση τις αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,i}(0), i \in E$ . Έστω ότι  $v_{\delta,1j}(u), v_{\delta,2j}(u), \dots, v_{\delta,mj}(u)$  να είναι κάποιες

λύσεις του συστήματος (1.78) με αρχικές τιμές

$$v_{\delta,ij}(0) = 1_{(i=j)}, \quad i, j \in E. \quad (1.79)$$

Τώρα, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι κάτω από τις αρχικές συνθήκες (1.79), οι λύσεις  $v_{\delta,ij}(u)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες και έτσι από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων η γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.78) δίνεται από τη σχέση

$$v_{\delta,i}(u) = \sum_{j=1}^m v_{\delta,i}(0)v_{\delta,ij}(u), \quad u \geq 0.$$

Επιπλέον, από το Θεώρημα 1.22 οι συναρτήσεις Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη μερίσματος,  $\phi_i(u)$ , είναι κάποιες μερικές λύσεις του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.76), και συνεπώς (όμοια με τη θεωρία της παραγράφου 1.4.2), η γενική λύση των  $\phi_{b,1}(u), \phi_{b,2}(u), \dots, \phi_{b,m}(u)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\phi_{b,i}(u) = \phi_i(u) + \sum_{j=1}^m v_{\delta,i}(0)v_{\delta,ij}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.80)$$

όπου οι σταθεροί αριθμοί  $v_{\delta,i}(0)$  υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες (1.77), δηλαδή αποτελούν λύσεις του συστήματος

$$\phi'_i(b) + \sum_{j=1}^m v_{\delta,i}(0)v'_{\delta,ij}(b) = 0. \quad (1.81)$$

Προκειμένου να γράψουμε τις εξισώσεις (1.80) και (1.81) σε μορφή πινάκων (ώστε να αναλύσουμε και τις  $m$ -συναρτήσεις ταυτόχρονα) ορίζουμε τους πίνακες/διάνυσματα

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(u) &= (\phi_1(u), \dots, \phi_m(u))^T, \\ \vec{\phi}_b(u) &= (\phi_{b,1}(u), \dots, \phi_{b,m}(u))^T, \\ \mathbf{v}_\delta(u) &= (v_{\delta,ij}(u))_{i,j=1}^m, \\ \vec{v}(0) &= (v_1(0), \dots, v_m(0))^T. \end{aligned}$$

Τότε, οι εξισώσεις (1.80) και (1.81) γράφονται ως

$$\vec{\phi}_b(u) = \vec{\phi}_b(u) + \mathbf{v}_\delta(u)\vec{v}(0), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.82)$$

$$\vec{\mathbf{0}}_m = \vec{\phi}'_b(b) + \mathbf{v}'_\delta(b)\vec{v}(0), \quad (1.83)$$

όπου  $\vec{\mathbf{0}}_m$  είναι ένα  $1 \times m$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία. Επομένως υπολογίζοντας από την

εξίσωση (1.83), το  $\vec{v}(0)$ , η γενική λύση του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.76) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\phi}_b(u) = \vec{\phi}_b(u) - \mathbf{v}_\delta(u) [\mathbf{v}_\delta(b)]^{-1} \vec{\phi}_b(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.84)$$

Άρα, έχοντας υπολογίσει από το Θεώρημα 1.27, τον πίνακα  $\phi_b(u)$ , είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό του πίνακα  $\vec{\phi}_b(u)$  πρέπει να υπολογισθεί ο πίνακας  $\mathbf{v}_\delta(u)$ . Ο υπολογισμός των  $v_{\delta,ij}(u)$ ,  $i, j \in E$  γίνεται με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace.

**Παρατήρηση 1.11.** Παρόλο που το Markov-modulated Poisson μοντέλο είναι ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο στη θεωρία κινδύνου, στη βιβλιογραφία είναι γνωστές οι λύσεις του ομογενούς συστήματος (1.76) μόνο για την περίπτωση όπου η Μαρκοβιανή ανέλιξη  $\{J(t)\}_{t \geq 0}$  αποτελείται από δύο μόνο καταστάσεις,  $E = \{1, 2\}$ . Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις  $v_{\delta,ij}(u)$  χωρίς τον περιορισμό των δύο καταστάσεων, δηλαδή όταν  $i, j \in E = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Έστω ότι  $\widehat{v}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{ij}(x) dx$  ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $v_{ij}(u)$  ως προς  $s$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι  $v_{\delta,ij}(u)$  αποτελούν λύσεις του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.78) και παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace, έχουμε ότι για  $\Re(s) \geq 0$ ,

$$\left( cs - (a_i + \lambda_i + \delta) + \lambda_i \widehat{f}_i(s) \right) \widehat{v}_{ij}(s) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \widehat{v}_{kj}(s) = c \widehat{v}_{ij}(0), \quad (1.85)$$

από όπου χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (1.79), η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\widehat{\mathbf{v}}_\delta(s) = \frac{\mathbf{A}^*(s)}{\det \mathbf{A}(s)} \mathbf{I}_m, \quad u \geq 0, \quad (1.86)$$

όπου  $\widehat{\mathbf{v}}_\delta(s) = (\widehat{v}_{\delta,ij}(s))_{i,j=1}^m$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.86), οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.78) όταν τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.29.** Αν ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους της ζημιάς,  $\widehat{f}_i(s)$ ,  $i \in E$ , δίνεται από τη σχέση (1.72), τότε

$$v_{\delta,ij}(u) = \sum_{k=1}^m \widetilde{h}_{ij,k} e^{r_k u} + \sum_{\ell=1}^{k_m} \widetilde{g}_{ij,\ell} e^{-R_\ell u}, \quad u \geq 0, \quad (1.87)$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ij,k} &= \frac{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(r_k) (\mathbf{A}^*(r_k))_{ij}}{c^m \prod_{j=1}^{k_m} (r_k + R_j) \prod_{l=1, l \neq k}^m (r_k - r_l)}, \\ \tilde{g}_{ij,\ell} &= \frac{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(-R_\ell) (\mathbf{A}^*(-R_\ell))_{ij}}{c^m (-1)^m \prod_{j=1}^m (R_\ell - r_j) \prod_{i=1, i \neq \ell}^m (R_\ell - R_i)},\end{aligned}$$

με  $(\mathbf{A}^*(s))_{ij}$  το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}^*(s)$  και  $R_i$  με  $\Re(R_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k_m$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.74).

Απόδειξη. Από την εξίσωση (1.86), έπεται ότι

$$\widehat{v}_{\delta,i,j}(s) = \frac{(\mathbf{A}^*(s))_{ij}}{\det \mathbf{A}(s)}.$$

Υποθέτοντας ότι  $\widehat{f}_i(s) = \frac{Q_{k_i-1}(s)}{Q_{k_i}(s)}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}^+$ ,  $i \in E$  και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της παραπάνω εξίσωσης με  $\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s)$ , έχουμε ότι

$$\widehat{v}_{\delta,i,j}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) (\mathbf{A}^*(s))_{ij}}{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) \det \mathbf{A}(s)}, \quad (1.88)$$

Παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (1.88) είναι ένα πολυώνυμο  $m + k_m$  βαθμού με το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου να είναι το  $c^m$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η εξίσωση  $Q_{k_i}(s) = 0$ ,  $i \in E$ , έχει ρίζες μόνο με αρνητικά πραγματικά μέρη, έπεται ότι η εξίσωση  $\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) \det \mathbf{A}(s) = 0$ , έχει  $r_i$  ρίζες, με  $\Re(r_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  και  $-R_j$  ρίζες, με  $\Re(R_j) > 0$ ,  $j = 1, \dots, k_m$  και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως

$$\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) \det \mathbf{A}(s) = c^m \prod_{i=1}^m (s - r_i) \prod_{j=1}^{k_m} (s + R_j). \quad (1.89)$$

Τότε, από τις εξισώσεις (1.89) και (1.88), παίρνουμε άμεσα ότι

$$\widehat{v}_{\delta,i,j}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m Q_{k_i}(s) (\mathbf{A}^*(s))_{ij}}{c^m \prod_{i=1}^m (s - r_i) \prod_{j=1}^{k_m} (s + R_j)}.$$

Επιπλέον, εφόσον ο αριθμητής της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερο από  $m + k_m$ , και επομένως χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, έχουμε ότι

$$\widehat{v}_{\delta,i,j}(s) = \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{h}_{ij,k}}{s - r_k} + \sum_{\ell=1}^{k_m} \frac{\tilde{g}_{ij,\ell}}{s + R_\ell},$$

από όπου αντιστρέφοντας ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (1.87). ■

### 1.5.3 Ροπές των συνολικών μερισμάτων στο μοντέλο Markov-modulated Poisson

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε την  $m$ -τάξης ροπή της παρούσας αξίας των συνολικών μερισμάτων μέχρι το χρόνο χρεοκοπίας για το μοντέλο Markov-modulated Poisson.

**Ορισμός 1.20.** Έστω  $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | J(0) = i)$  και  $\mathbb{E}_i$  η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i$ . Τότε, για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$$W_{m,i}(u, b) = \mathbb{E}_i [D_{u,b}^m | U_b(0) = u] \quad i \in E, \quad m \geq 1, \quad 0 \leq u \leq b,$$

να είναι η  $m$ -τάξης ροπή της παρούσας αξίας των σωρευτικών μερισμάτων,  $D_{u,b}$ , δοθέντος της αρχικής κατάστασης  $i$  και του αρχικού αποθεματικού  $u$ , με  $W_{0,i}(u, b) = 1$ .

Τότε η «συνολική»  $m$ -τάξης ροπή για το μοντέλο που μελετούμε δίνεται από τη σχέση

$$W_m(u, b) = \sum_{i=1}^m \pi_i W_{m,i}(u, b), \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου  $\pi_i$ ,  $i \in E$ , είναι οι αρχικές πιθανότητες της στάσιμης κατανομής.

Η  $m$ -τάξης ροπή ικανοποιεί ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.30.** Για  $0 \leq u \leq b$ ,  $i \in E$  και  $m \geq 1$ , η  $m$ -τάξης ροπή  $W_{m,i}(u, b)$  ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$cW'_{m,i}(u, b) - (a_i + \lambda_i + \delta m)W_{m,i}(u, b) + \lambda_i \int_0^u W_{m,i}(u-x, b) f_i(x) dx + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} W_{m,k}(u, b) = 0, \quad (1.90)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_{m,i}(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{m-1,i}(u, b) \Big|_{u=b}. \quad (1.91)$$

Απόδειξη. Li και Lu (2007), σελ. 70. ■

**Παρατήρηση 1.12.** Για  $a_{ik} \rightarrow 0$ , για κάθε  $i \in E$ , το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (1.90) ανάγεται στην εξίσωση (1.45) του Πορίσματος 1.8, που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.90), εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος

$$c v'_{\delta,i}(u) - (a_i + \lambda_i + \bar{\delta}) v_{\delta,i}(u) + \lambda_i \int_0^u v_{\delta,i}(u-x) f_i(x) dx + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} v_{\delta,k}(u) = 0, \quad u \geq 0. \quad (1.92)$$

Έστω  $v_{\delta,ij}(u)$ ,  $i, j \in E$  να είναι οι λύσεις του παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος με αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,ij}(0) = 1_{(i=j)}$ ,  $i, j \in E$ . Παρατηρώντας ότι το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (1.92), είναι ακριβώς το ίδιο με το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (1.78), με  $\bar{\delta}$  στη θέση του  $\delta$ , είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των  $v_{\delta,ij}(u)$  για μεγέθη  $\delta$  που ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δίνεται από το Θεώρημα 1.29 με  $\bar{\delta}$  στη θέση του  $\delta$ .

Τότε, από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έπεται ότι η γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.90) δίνεται από τη σχέση

$$W_{m,i}(u, b) = \sum_{j=1}^m W_{m,j}(0, b) v_{\delta,ij}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.93)$$

όπου οι σταθερές  $W_{m,j}(0, b)$  υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (1.91).

Ορίζοντας του πίνακες

$$\begin{aligned} \bar{W}_m(u, b) &= (W_{m,1}(u, b), \dots, W_{m,m}(u, b))^T \\ \mathbf{v}_{\delta}(u) &= (v_{\delta,ij}(u))_{i,j=1}^m, \end{aligned}$$

η εξίσωση (1.93) γράφεται, για κάθε  $i \in E$  ως

$$\bar{W}_m(u, b) = \mathbf{v}_{\delta}(u) \bar{W}_m(0, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (1.94)$$

όπου οι σταθερές  $\bar{W}_m(0, b)$  υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (1.91) αναδρομικά από τη σχέση

$$\bar{W}_m(0, b) = n [v'_{\delta_1}(b)]^{-1} \mathbf{v}_{\delta_1}(b) \bar{W}_{m-1}(0, b),$$

με  $\bar{\delta}_1 = \delta(m-1)$ , και  $\mathbf{v}'_0(b) = \mathbf{I}_m$ .

## 1.6 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζονται υστέρηση

Στην ενότητα 1.5 αναλύθηκε πως το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου, που αποτελεί μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας, μπορεί να

χρησιμοποιηθεί προκειμένου να περιγραφούν χαρτοφυλάκια κινδύνου στα οποία υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών ζημιών.

Μια άλλη επέκταση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας μπορεί να επιτευχθεί υποθέτοντας ότι σε κάθε χρονική περίοδο εμφανίζονται δύο είδη ζημιών: οι κύριες ζημιές (main claims) και οι δευτερεύουσες ζημιές (sub-claims), όπου ο χρόνος εμφάνισης των δευτερευουσών ζημιών μπορεί να εμφανίζει χρονική υστέρηση σε σχέση με τον χρόνο εμφάνισης των κύριων ζημιών. Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι κάτω από την παραπάνω υπόθεση οι χρόνοι άφιξης των ζημιών και τα μεγέθη των αντίστοιχων ζημιών συσχετίζονται μεταξύ τους.

Θεωρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τον  $t$  δίνεται από την σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1.95)$$

όπου  $U(0) = u \geq 0$  είναι το αρχικό αποθεματικό και  $S(t)$  οι σωρευτικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ . Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι η διαδικασία  $S(t)$  είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson από την οποία κατά τους χρόνους επέλευσης των ζημιογόνων υνδεχομένως εμφανίζονται δύο είδη ζημιών: οι κύριες και οι δευτερεύουσες. Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των ζημιών. Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι η  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$  και ενδιάμεσους χρόνους  $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ , με  $T_0 = 0$ , οι οποίοι (βλ. Θεώρημα 1.3) κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο  $\lambda$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  και  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι δύο ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων θετικών τ.μ. που περιγράφουν τα μεγέθη των κύριων ζημιών και των δευτερευουσών ζημιών, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι η τ.μ.  $X_i$  έχει σ.χ.  $F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , σ.π.π.  $f_1(x)$ , μέσο  $\mathbb{E}(X) = \mu_1$ , ενώ η τ.μ.  $Y_i$  έχει σ.χ.  $Q(x) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ , σ.π.π.  $q(x)$ , και μέση τιμή  $\mathbb{E}(Y) = \mu_2$ .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κατά την εμφάνιση του ενδιάμεσου χρόνου άφιξης,  $T_i$ , της διαδικασίας Poisson μία κύρια ζημιά,  $X_i$ , εμφανίζεται η οποία επιφέρει την εμφάνιση και μιας δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_i$ . Η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_i$  μπορεί να εμφανισθεί ταυτοχρόνως με την κύρια ζημιά  $X_i$ , με πιθανότητα  $\theta$ , ή να εμφανισθεί με χρονική υστέρηση κατά τον χρόνο  $T_{i+1}$  με πιθανότητα  $1 - \theta$ . Όταν, η εμφάνιση της δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_i$  δεν είναι ταυτόχρονη με την εμφάνιση της ζημιάς  $X_i$ , αλλά καθυστερεί μέχρι τον χρόνο  $T_{i+1}$ , υποθέτουμε ότι η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_i$  είναι ανεξάρτητη από την κύρια ζημιά  $X_{i+1}$ . Σημειώνουμε ότι όταν εμφανίζεται ταυτόχρονα μια κύρια και μια δευτερεύουσα ζημιά, τότε το μέγεθος της συνολικής ζημιάς που προκύπτει έχει σ.χ. την συνέλιξη των σ.χ.  $F$  και  $Q$  την οποία συμβολίζουμε με  $F_2(x) = (F_1 * Q)(x)$ , και σ.π.π.  $f_2(x)$ . Επίσης, όταν εμφανίζονται μαζί μια κύρια ζημιά με μια δευτερεύουσα, ενώ ταυτόχρονα έχουμε και την εμφάνιση μιας άλλης δευτερεύουσας ζημιάς (η οποία έχει καθυστερήσει να εμφανισθεί κατά τον προηγούμενο χρόνο άφιξης της διαδικασίας Poisson) τότε θα συμβολίζουμε την σ.χ. αυτής της ζημιάς με  $F_3(x) = (F_1 * Q * Q)(x)$ , και την σ.π.π. με  $f_3(x)$ .



Επομένως, με βάση τα παραπάνω, η συνολική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων δίνεται από την σχέση

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + R(t), \quad t \geq 0, \quad (1.96)$$

όπου  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  όπως ορίστηκαν παραπάνω και  $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια στοχαστική διαδικασία που εκφράζει το άθροισμα όλων των υπο-ζημιών  $Y_i$  που εμφανίζονται πριν από τον χρόνο  $t$ .

Τέλος, προκειμένου η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας υποθέτουμε ότι

$$c > \lambda(\mu_1 + \mu_q). \quad (1.97)$$

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με χρονική υστέρηση η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, κατανομή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία κ.α., περιλαμβάνονται στους Yuen , Guo και Ng(2005), Stabile και Torrisi (2008). Πρόσφατα οι Xie και Zou (2011) μελέτησαν για το συγκεκριμένο μοντέλο την συνάρτηση των Gerber-Shiu αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση Gerber-Shiuiκανοποιεί μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι μια από τις πρακτικές εφαρμογές του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η μοντελοποίηση χαρτοφυλαχίων με ζημιές τύπου IBNR (Incurred But Not Reported) . Στα ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια, στην πράξη, συχνά υπολογίζονται τα λεγόμενα 'εξισοροπητικά αποθέματα' τα οποία αφορούν σε ζημιές για τις οποίες ο αναλογιστής πιστεύει ότι έχουν εμφανισθεί αλλά δεν έχουν δηλωθεί ακόμη στην εταιρία. Αυτού του είδους οι ζημιές ονομάζονται ζημιές τύπου IBNR. Ο υπολογισμός επαρκών αποθεματικών για χαρτοφυλάκια με τέτοιου είδους ζημιές (ειδικά με την έκδοση της οδηγίας Solvency II) είναι ένα σημαντικό θέμα για έναν ασφαλιστικό οργανισμό.

### 1.6.1 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε συνοπτικά την μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu. Όμοια με την ενότητα 1.3, ορίζουμε

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$$

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$ , η συνάρτηση Gerber-Shiu για το μοντέλο (1.95)-(1.96) δίνεται από την σχέση

$$\phi(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\delta$ ,  $w(x, y)$ ,  $1_{(\cdot)}$  και οι τ.μ.  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$ ,  $T-$ , έχουν την ίδια ερμηνεία όπως στον Ορισμό 1.6. Ο υπολογισμός της  $\phi(u)$  βασίζεται στην ίδια μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 1.4. Δηλ., αρχικά δείχνουμε πως η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί κάποια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση την οποία στη συνέχεια με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace μετατρέπουμε σε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, όπου λύνεται με βάση το Θεώρημα 1.9.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί κάποια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση ως δούμε πρώτα την συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος  $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$  κατά την εμφάνιση του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου άφιξης της διαδικασίας Poisson. Κατά τον χρόνο  $T_1$  έχουμε τα ακόλουθα δύο ενδεχόμενα: (α) εμφάνιση μιας κύριας ζημιάς  $X_1$  και μιας δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_1$  κατά την ίδια χρονική περίοδο, με πιθανότητα  $\theta$ , και η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται και (β) κατά την χρονική στιγμή  $T_1$  εμφανίζεται μια κύρια ζημιά  $X_1$ , ενώ η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_1$  καθυστερεί την εμφάνιση της για μια χρονική περίοδο, δηλ. εμφανίζεται την χρονική στιγμή  $T_2$  με πιθανότητα  $1 - \theta$ , και η διαδικασία πλεονάσματος δεν ανανεώνεται. Έτσι όσον αφορά στο ενδεχόμενο (β) θεωρούμε μια νέα διαδικασία πλεονάσματος στην οποία αντί της ταυτόχρονης εμφάνισης μιας κύριας και μιας δευτερεύουσας ζημιάς, υποθέτουμε ότι εμφανίζονται ταυτόχρονα μια κύρια ζημιά και δύο δευτερεύουσες ζημιάς. Τότε, η νέα διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται, ενώ θεωρούμε ότι σε αυτή τη διαδικασία πλεονάσματος αντιστοιχεί μια νέα, βοηθητική, αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής την οποία συμβολίζουμε με  $\phi_1(u)$ .

Με βάση τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.31.** Για  $u \geq 0$ , οι συναρτήσεις Gerber-Shiu  $\phi(u)$ ,  $\phi_1(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c\phi'(u) - (\lambda + \delta)\phi(u) &= -\lambda\theta \left( \int_0^u \phi(u-x)dF_2(x) + w_2(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^u \phi_1(u-x)dF_1(x) + w_1(u) \right), \\ c\phi_1'(u) - (\lambda + \delta)\phi_1(u) &= -\lambda\theta \left( \int_0^u \phi(u-x)dF_3(x) + w_3(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^u \phi_1(u-x)dF_2(x) + w_2(u) \right), \end{aligned} \quad (1.98)$$

όπου

$$w_k(x) = \int_x^{\infty} w(x, y-x) f_k(y) dy = \int_0^{\infty} w(x, y) f_k(x+y) dy, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.99)$$

Απόδειξη. Xie και Zou (2011) σελ. 2394. ■

Η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (1.98) βρίσκεται χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι για  $\Re(s) > 0$  ορίζουμε  $\widehat{\phi}(s)$ ,  $\widehat{\phi}_1(s)$ ,  $\widehat{f}_i(s)$  και  $\widehat{w}_i(s)$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\phi(u)$ ,  $\phi_1(u)$ ,  $f_i(x)$  και  $w_i(x)$  για  $i = 1, 2, 3$ , που δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} \phi(u) du, & \widehat{\phi}_1(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} \phi_1(u) du, \\ \widehat{f}_i(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f_i(x) dx, & \widehat{w}_i(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} w_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος στην (1.98) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{\phi}(s)$  και  $\widehat{\phi}_1(s)$  έχουμε ότι

$$\widehat{\phi}(s) = \frac{(cs - \lambda - \delta + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_2(s))(c\phi(0) - \widehat{w}(s)) - \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)(c\phi_1(0) - \widehat{w}^*(s))}{(cs - \lambda - \delta)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s)(cs - \lambda - \delta)}, \quad (1.100)$$

$$\widehat{\phi}_1(s) = \frac{(cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s))(c\phi_1(0) - \widehat{w}^*(s)) - \lambda\theta\widehat{f}_3(s)(c\phi(0) - \widehat{w}(s))}{(cs - \lambda - \delta)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s)(cs - \lambda - \delta)}, \quad (1.101)$$

όπου  $\widehat{w}(s) = \lambda(\theta\widehat{w}_2(s) + (1 - \theta)\widehat{w}_1(s))$  και  $\widehat{w}^*(s) = \lambda(\theta\widehat{w}_3(s) + (1 - \theta)\widehat{w}_2(s))$ .

Για να ολοκληρώσουμε την λύση του παραπάνω συστήματος χρειαζόμαστε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες των  $\phi$  και  $\phi_1$  στο  $u = 0$ . Πρώτα όμως χρειαζόμαστε την λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης για το κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση.

**Λήμμα 1.3.** Για  $\delta > 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση

$$(cs - \lambda - \delta)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s)(cs - \lambda - \delta) = 0, \quad (1.102)$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους,  $r_1(\delta)$  και  $r_2(\delta)$ , στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Απόδειξη. Xie και Zou (2011) σελ. 2395. ■

Στο εξής θα συμβολίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης (1.102),  $r_i(\delta) \equiv r_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Χρησιμοποιώντας τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των εξισώσεων (1.100) και (1.101) οι αρχικές τιμές  $\phi(0)$  και  $\phi_1(0)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\phi(0) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \widehat{f}_1(r_{i-(-1)^i}) \frac{[y(r_i)\widehat{w}(r_i) - \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(r_i)\widehat{w}^*(r_i)]}{c(y(r_2)\widehat{f}_1(r_1) - y(r_1)\widehat{f}_1(r_2))},$$

$$\phi_1'(0) = y(r_2) \frac{\widehat{w}(r_2) - c\phi'(0)}{\lambda c(1-\theta)\widehat{f}_1(r_2)} - \frac{1}{c}\widehat{w}^*(r_2),$$

όπου  $y(s) = cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\widehat{f}_2(s)$ .

Επιπλέον από τις εξισώσεις (1.100) και (1.101) παρατηρούμε ότι γνωρίζοντας τις αρχικές τιμές  $\phi(0)$  και  $\phi_1(0)$ , τότε οι μετασχηματισμοί Laplace  $\widehat{\phi}(s)$  και  $\widehat{\phi}_1(s)$  λύνονται σε κάθε εξίσωση μονοσήμαντα. Εφόσον η συνάρτηση  $\phi(u)$  περιέχει όλα τα μέτρα κινδύνου μέσα από τα οποία εξάγουμε συμπεράσματα για το πως συμπεριφέρεται η διαδικασία πλεονάσματος (1.95)-(1.96). Έτσι, στο εξής αρκεί να υπολογίζουμε μόνο την συνάρτηση  $\phi(u)$ .

Οι Xie και Zou (2011), χρησιμοποιώντας τις ρίζες (1.102) και τους τελεστές  $T_r$  έδειξαν ότι η εξίσωση (1.100) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σαν μία ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.32.** Για  $u \geq 0$ , η συνάρτηση των Gerber-Shiu,  $\phi(u)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \phi(u-x)dG(x) + h(u), \quad (1.103)$$

όπου  $G(x) = (1+\xi) \int_0^x g(y)dy$  με  $g(y) = \frac{\lambda}{c}T_r f_2(y)$ ,  $\xi$  τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty g(y)dy = 1 - \frac{\frac{\lambda\delta+\delta^2}{2}}{\prod_{i=1}^2 r_i} < 1$  και

$$h(u) = \frac{-1}{c^2} [\lambda(1-\theta)(T_{r_1}T_{r_2}A(u) - T_{r_1}T_{r_2}A_1(u)) + \lambda c(1-\theta)(\phi_1(0)T_{r_1}T_{r_2}f_1(u) - \phi(0)T_{r_1}T_{r_2}f_2(u)) - cT_{r_2}w(u)],$$

όπου  $A_1(u) = (f_1 * w^*)(u)$ ,  $A_2(u) = (f_2 * w)(u)$ . Για  $\delta \rightarrow 0^+$  τότε  $\xi \rightarrow \xi_0$ , τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \lambda \frac{c-\lambda(\mu_1+\mu_2)}{r_1(0)(\sigma_1(0)+c)c}$  δοθέντος ότι ισχύει η ανίσωση (1.97).

**Παρατήρηση 1.13.** Για  $\theta = 1$ , σε κάθε περίοδο οι κυρίως και οι δευτερεύουσες ζημιές εμφανίζονται ταυτόχρονα, και το μοντέλο κινδύνου που δίνεται από τις (1.95)-(1.96) ανάγεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας με ζημιές μεγέθους  $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^\infty$  με σ.κ.  $F_2(x)$ . Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1.103) ανάγεται στην εξίσωση (1.23) του Πορίσματος 1.4.

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (1.103) λύνεται εφαρμόζοντας την μεθοδολογία της παραγράφου 1.4. Έτσι για  $u \geq 0$ , ορίζουμε μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή  $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$  που δίνεται από την σχέση

$$\overline{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\xi} \right)^n \overline{G}^{*n}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\bar{G}^{*n}(u)$  είναι η ουρά της  $n$ -οστής συνέλιξης της σ.χ.  $G(u) = 1 - \bar{G}(u)$ . Τότε, η ακριβής λύση της εξίσωσης (1.103) βρίσκεται εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.9, όπως δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 1.6.** Για  $u \geq 0$ , η συνάρτηση των Gerber-Shiu,  $\phi(u)$ , που ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (1.103), δίνεται από την σχέση

$$\phi(u) = \frac{1 + \xi}{\xi} \int_0^u h(u-x) dK(x) + h(u). \quad (1.104)$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ένα μοντέλο, όπου η στοχαστική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων παράγεται από δύο κλάσεις κινδύνων. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία  $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , που παριστά τις συνολικές αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου, αποτελείται από δύο επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες: μία σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process) και μια ανανεωτική σύνθετη διαδικασία (compound renewal process).

Κάτω από αυτή την υπόθεση είναι φανερό ότι το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί γενίκευση τόσο του κλασσικού όσο και του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας. Η κύρια όμως διαφορά με τόσο το κλασσικό όσο και το ανανεωτικό μοντέλου κινδύνου είναι ότι το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ανήκει στην κατηγορία των μη ανανεωτικών μοντέλων.

Η δομή του συγκεκριμένου κεφαλαίου συνοψίζεται ως εξής.

Αρχικά δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή, τις υποθέσεις του μοντέλου κινδύνου και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε κάτω από την υπόθεση ότι η απαριθμήτρια διαδικασία της δεύτερης κλάσης είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης που κατανέμονται σύμφωνα με μία γενικευμένη Erlang(2,  $\lambda_1, \lambda_2$ ). Στην Ενότητα 2.2 αποδεικνύουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu ικανοποιούν κάποιες ανανεωτικές ελαττωματικές εξισώσεις και δίνουμε έναν αναλυτικό τρόπο υπολογισμού για τη λύση αυτών. Στην επόμενη ενότητα μελετούμε τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu καθώς και τις ροπές των συνολικών σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της

Ενότητας 2.3, στην Ενότητα 2.5 δείχνουμε τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις Gerber-Shiu και τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων, γνωστή και ως «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» (dividends-penalty identity). Ακόμη, στην ενότητα 2.6, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων, μελετούμε τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Στην συγκεκριμένη ενότητα αποδεικνύουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu ικανοποιούν κάποιες ανανεωτικές ελαττωματικές εξισώσεις η λύση των οποίων προκύπτει με ένα αναδρομικό τρόπο.

Τέλος, στην τελευταία ενότητα γενικεύουμε τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.3 στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την υπόθεση ότι η απαριθμήτρια διαδικασία της δεύτερης κλάσης είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης που κατανομούνται σύμφωνα με μία γενικευμένη Erlang( $n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ).

## 2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος,  $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , ενός ασφαλιστικού οργανισμού στον χρόνο  $t$  δίνεται από την σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

όπου  $u = U(0)$  το αρχικό κεφάλαιο,  $c > 0$  το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου που εισπράττεται και  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η  $S(t)$  είναι το άθροισμα δύο επιμέρους στοχαστικών διαδικασιών, δηλ. δίνεται από την σχέση

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

όπου οι  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο  $t$  προερχόμενες από την  $i$ -κλάση. Παρόλο που το συγκεκριμένο μοντέλο ορίστηκε αρχικά υποθέτοντας ότι η  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , είναι εξαρτημένες μεταξύ τους στη συγκεκριμένη διατριβή υποθέτουμε ότι οι  $S_1(t)$  και  $S_2(t)$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση οι σωρευτικές αποζημιώσεις (aggregate shocks)  $S_1(t)$ , από την πρώτη κλάση, προστίθενται (ανεξάρτητα) στη μεταβλητότητα που παρουσιάζει η σωρευτική διαδικασία αποζημιώσεων  $S_2(t)$ .

Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ.  $F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , σ.π.κ.  $f_1(x)$ , μέση τιμή  $m_1$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_1(x) dx$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση.

Αντίστοιχα οι  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με



σ.κ.  $F_2(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ , σ.π.π.  $f_2(x)$ , μέση τιμή  $m_2$  και μετασχηματισμό Laplace  $f_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx$ , που παριστούν το μέγεθος των αποζημιώσεων από τη δεύτερη κλάση.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι η απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N_1(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda$  και ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ , που είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παράμετρο  $\lambda$ . Επιπροσθέτως, η απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N_2(t)\}_{t=0}^\infty$  υποθέτουμε ότι είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{V_i\}_{i=1}^\infty$  οι οποίοι αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(2) κατανομή και επομένως η τ.μ.  $V_i$  μπορεί να γραφεί ως  $V_i = L_{i1} + L_{i2}$ , όπου  $\{L_{i1}\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_1$ , ενώ  $\{L_{i2}\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_2$ , (συνήθως  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ).

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  και  $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$  είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, και επίσης ανεξάρτητες από τις απαριθμήτριες διαδικασίες  $\{N_1(t)\}_{t=0}^\infty$ ,  $\{N_2(t)\}_{t=0}^\infty$ , καθώς και ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στη μονάδα του χρόνου είναι τέτοια ώστε να είναι αληθής η ανίσωση  $c > \lambda m_1 + [\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)] m_2$ . Από την τελευταία ανίσωση προκύπτει ότι υπάρχει ένα περιθώριο ασφαλείας  $\theta$ , τέτοιο ώστε  $1 / (1 + \theta) = [\lambda m_1 + \lambda_1 \lambda_2 m_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)] / c$ .

Ορίζουμε  $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$  ( $\inf \emptyset = \infty$ ) να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, και  $\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$ ,  $u \geq 0$ , να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο (2.1)-(2.2).

Το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων εισήχθη αρχικά από τους Yuen, Guo και Wu (2002) υποθέτοντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης από τη δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την Erlang(2) κατανομή. Στην εργασία αυτή οι συγγραφείς δίνουν αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι αποζημιώσεις και των δύο κλάσεων είναι εκθετικά κατανομημένες. Οι Li και Garrido(2005) θεώρησαν το μοντέλο των Yuen, Guo και Wu (2002) θεωρώντας όμως ότι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης από τη δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(2) κατανομή. Στην εργασία αυτή οι Li και Garrido (2005) δίνουν αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα επιβίωσης (μέσω των μετασχηματισμών Laplace) στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Μία ακόμη επέκταση για το προαναφερόμενο μοντέλο δόθηκε από τους Li και Lu (2005), οι οποίοι μελέτησαν, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace, τη συνάρτηση των Gerber-Shiu. Στην ίδια εργασία δίνονται αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ζημιών και για τις δύο κλάσεις κινδύνων κατανέμονται εκθετικά. Πρόσφατα, οι Zhang, Li και Yang (2009) επέκτειναν το μοντέλο των Yuen, Guo και Wu (2002) μελετώντας τη συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις

κινδύνων όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης από τη δεύτερη κλάση κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την Erlang( $n$ ) κατανομή.

**Παρατήρηση 2.1.** Το μοντέλο με δύο (ανεξάρτητες) κλάσεις κινδύνων που ορίστηκε στις σχέσεις (2.1)-(2.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να ορίσουμε ένα εξαρτημένο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων.

Ειδικότερα, έστω ότι η διαδικασία πλεονάσματος,  $\{U'(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , ενός ασφαλιστικού οργανισμού στον χρόνο  $t$  δίνεται από την σχέση

$$U'(t) = u + ct - S'(t), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

όπου  $u = U'(0)$  το αρχικό κεφάλαιο,  $c > 0$  το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου που εισπράττεται και  $\{S'(t)\}_{t \geq 0}$  η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων, με

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{K_1(t)} X'_i + \sum_{i=1}^{K_2(t)} Y'_i, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

όπου  $\{X'_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F_{X'}(x)$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση,  $\{Y'_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F_{Y'}(x)$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από τη δεύτερη κλάση, και  $\{K_1(t)\}_{t=0}^{\infty}$  και  $\{K_2(t)\}_{t=0}^{\infty}$  οι απαριθμήτριες διαδικασίες για την πρώτη και την δεύτερη κλάση αντίστοιχα.

Επιπλέον, υποθέτουμε δυο οι προαναφερόμενες απαριθμήτριες διαδικασίες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους με βάση την ακόλουθη μορφή εξάρτησης

$$K_1(t) = M_1(t) + N_2(t) \quad \text{και} \quad K_2(t) = M_3(t) + N_2(t), \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

όπου  $M_i(t)$ , για  $i = 1, 3$ , δύο ανεξάρτητες μεταξύ διαδικασίες Poisson με παράμετρο  $\mu_i$ , για  $i = 1, 3$ , και επίσης ανεξάρτητες από την ανανεωτική διαδικασία  $N_2(t)$ , όπου η  $N_2(t)$  είναι μια ανανεωτική διαδικασία με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνέλιξη δύο ανεξάρτητων διαδικασιών Poisson είναι επίσης μια διαδικασία Poisson, τότε έχουμε ότι η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων της σχέσης (2.4) έχει την ίδια κατανομή με την

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{K_{13}(t)} X'_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y'_i, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

όπου  $K_{13}(t) = K_1(t) + K_3(t)$ . Επίσης έχουμε ότι

$$X'_i = X_i 1_{(\eta_i=0)} + Y_i 1_{(\eta_i=1)}, \quad \text{και} \quad Y'_i = X_i + Y_i, \quad (2.7)$$

όπου  $\{\eta_i, i = 1, 2, \dots\}$  είναι μία ακολουθία δύτιμων τ.μ. με μάζες πιθανότητας

$$\mathbb{P}(\eta_i = 0) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(\eta_i = 1) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3},$$

και συνεπώς

$$F_{X'}(x) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} F_1(x) + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} F_2(x) \quad \text{και} \quad F_{Y'}(x) = F_1(x) * F_2(x),$$

όπου  $F_1(x)$  και  $F_2(x)$  οι σ.κ. των τ.μ.  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα, που ορίστηκαν παραπάνω.

Τότε από τις σχέσεις (2.6), (2.7) και (2.1) βλέπουμε πως το εξαρτημένο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων των σχέσεων (2.3)-(2.4) ανάγεται στο μοντέλο με δύο ανεξάρτητες κλάσεις κινδύνων που ορίστηκε στις σχέσεις (2.1)-(2.2).

## 2.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε πως η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στο ανανεωτικό μοντέλο της παραγράφου 1.4.1 μπορεί να προσαρμοστεί κατάλληλα στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων προκειμένου να υπολογίσουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Έτσι για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$\Phi(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u \right), \quad u \geq 0, \quad (2.8)$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu, για το μοντέλο (2.1)-(2.2) με  $\delta$ ,  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$ ,  $T-$ ,  $w(x, y)$  και  $1_{(\cdot)}$  όπως και στον Ορισμό 1.6.

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, λόγω της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης που παρουσιάζουν οι εκθετικά κατανομημένοι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων, η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι χρονικά ομογενής (time homogeneous). Στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων λόγω της υπόθεσης ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων της δεύτερης κλάσης ακολουθούν την Erlang κατανομή, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι πλέον χρονικά ομογενής. Έτσι, για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu που ορίστηκε στην εξίσωση (2.8), υποθέτουμε ότι ακριβώς μία αποζημίωση εμφανίζεται στο χρόνο 0.

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε για το μοντέλο (2.1)-(2.2) την συνάρτηση των Gerber-Shiu σαν μια δισδιάστατη συνάρτηση,  $\Phi(u, \tau)$ , του αρχικού αποθεματικού  $u$  και του χρόνου

$\tau$ , όπου  $\tau$  είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της τελευταίας αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση (σε αυτά τα σημεία η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται). Έτσι, ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της συνάρτησης των Gerber-Shiu στον χρόνο 0, που είναι  $\Phi(u, 0) = \Phi(u)$ , και για τη συνάρτηση

$$\Phi_1(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(t) = u, L_{11} = t \right), \quad (2.9)$$

που είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος,  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$ , από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί.

Τότε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\Phi(u, \tau) = \Phi(u) \mathbb{P}(L_{11} > \tau) + \Phi_1(u) \mathbb{P}(L_{11} < \tau) = e^{-\lambda_1 \tau} \Phi(u) + (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \Phi_1(u).$$

Επιπλέον σε αυτό το σημείο εισάγουμε δύο άλλες συναρτήσεις των Gerber-Shiu για το μοντέλο (2.1)-(2.2), όπως οι Li και Lu (2005). Για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$\Phi_{i1}(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, J=i)} | U(0) = u \right), \quad u \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι το μέγεθος της ζημιάς που προκαλεί τη χρεοκοπία προέρχεται από την κλάση  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Η τ.μ.  $J$  (cause-of-ruin r.v.) ορίζεται να είναι μια δίτιμη τ.μ. που παριστά την κλάση από την οποία προκαλείται η χρεοκοπία, δηλ.  $J = i$ , όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωση από την κλάση  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Αντίστοιχα με την σχέση (2.9) και για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, ορίζουμε τη «βοηθητική» συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι ο εκθετικός χρόνος από την δεύτερη κλάση,  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$ , έχει ήδη εμφανισθεί, που δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{i2}(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, J=i)} | L_{11} = t, U(t) = u \right), \quad u \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.11)$$

Τότε, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu που ορίστηκαν στις σχέσεις (2.8) και (2.9), μπορούν να γραφούν ως  $\Phi(u) = \Phi_{11}(u) + \Phi_{21}(u)$  και  $\Phi_1(u) = \Phi_{12}(u) + \Phi_{22}(u)$ , για  $u \geq 0$ . Σημειώνουμε ότι στην εργασία των Li και Lu (2005) οι συναρτήσεις  $\Phi_{11}(u)$  και  $\Phi_{12}(u)$ , συμβολίζονται με  $\phi_i(u)$ , και  $\xi_i(u)$  αντίστοιχα.

Ο κύριος στόχος αυτής της ενότητας είναι ο προσδιορισμός αναλυτικών τύπων για το υπολογισμό των συναρτήσεων  $\Phi(u)$  και  $\Phi_1(u)$ . Για αυτό το σκοπό θα αποδείξουμε ότι (παρόλο που η διαδικασία  $S(t)$  δεν είναι μια σύνθετη Poissonούτε μια σύνθετη ανανεωτική διαδικασία) ότι οι συναρτήσεις  $\Phi(u)$  και  $\Phi_1(u)$  ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις, οι οποίες λύνονται χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9.

Αρχικά δίνουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu είναι

πεπερασμένες. Η απόδειξη του παρακάτω λήμματος γίνεται ακολουθώντας τα ίδια βήματα της μεθοδολογίας των Cheng και Tang (2003), την οποία λόγω της ακριβώς ίδιας διαδικασίας με τους Cheng και Tang (2003) παραλείπουμε.

**Λήμμα 2.1.** Έστω, ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) f_i(x + y) dx dy < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (2.12)$$

τότε για κάθε  $u \geq 0$ , ισχύει ότι

$$\Phi(u) < \infty \text{ και } \Phi_1(u) < \infty.$$

Στο επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι οι  $\Phi$  και  $\Phi_1$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

**Θεώρημα 2.1.** Έστω ότι η εξίσωση (2.12) είναι αληθής. Τότε για  $u \geq 0$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις  $\Phi$  και  $\Phi_1$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c\Phi'(u) &= (\lambda + \lambda_1 + \delta)\Phi(u) - \lambda \int_0^u \Phi(u-x) f_1(x) dx - \lambda_1 \Phi_1(u) - \lambda w_1(u), \\ c\Phi_1'(u) &= (\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_1(u) - \lambda \int_0^u \Phi_1(u-x) f_1(x) dx - \lambda w_1(u) \\ &\quad - \lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x) f_2(x) dx - \lambda_2 w_2(u), \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου

$$w_j(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f_j(y) dy = \int_0^\infty w(x, y) f_j(x+y) dy, \quad j = 1, 2. \quad (2.14)$$

Απόδειξη. Έστω  $M = W_1 \wedge L_{11}$ . Τότε δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα  $\{M = t, M = W_1\}$  και  $\{M = t, M = L_{11}\}$  και το αντίστοιχο μέγεθος της αποζημίωσης, για  $u \geq 0$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(M = t, M = L_{11}) \Phi_1(u + ct) dt + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(M = t, M = W_1) \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - x) f_1(x) dx dt + w_1(u + ct) \right\} dt. \end{aligned}$$

Εφόσον ισχύει ότι  $\mathbb{P}(M = W_1) = \mathbb{P}(W_1 < L_{11}) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}$ ,  $\mathbb{P}(M = L_{11}) = \mathbb{P}(W_1 > L_{11}) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$  και  $\mathbb{P}(M > t | M = W_1) = \mathbb{P}(M > t | M = L_{11}) = e^{-(\lambda + \lambda_1)t}$ , τότε η παραπάνω εξίσωση

γράφεται ως

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t} \Phi_1(u+ct) dt \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x) f_1(x) dx + w_1(u+ct) \right\} dt. \quad (2.15)\end{aligned}$$

Έστω  $Z = W_1 \wedge L_{12}$ . Τότε, όμοια με παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_1(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z=t, Z=L_{12}) \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x) f_2(x) dx + w_2(u+ct) \right\} dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} P(Z=t, Z=W_1) \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi_1(u+ct-x) f_1(x) dx + w_1(u+ct) \right\} dt \\ &= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-x) f_2(x) dx + w_2(u+ct) \right\} dt \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \Phi_1(u+ct-x) f_1(x) dx + w_1(u+ct) \right\} dt. \quad (2.16)\end{aligned}$$

Θέτοντας  $s = u + ct$  οι εξισώσεις (2.15) και (2.16) γίνονται

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{\lambda_1}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \Phi_1(s) ds \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1+\delta)(s-u)/c} \left\{ \int_0^s \Phi(s-x) f_1(x) dx + w_1(s) \right\} ds, \\ \Phi_1(u) &= \frac{\lambda_2}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)(s-u)/c} \left\{ \int_0^s \Phi(s-x) f_2(x) dx + w_2(s) \right\} ds,\end{aligned}$$

από όπου παραγωγίζοντας ως προς  $u$  προκύπτει το ζητούμενο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. ■

**Παρατήρηση 2.2.** (i) Για  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ , τότε  $\Phi = \Phi_1$  και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.13) ανάγεται στην εξίσωση (1.15) του Πορίσματος 1.2, που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

(ii) Για  $\lambda \rightarrow 0$ , το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.13) απλοποιείται σε

$$\begin{aligned}c\Phi'(u) &= -\lambda_1 \Phi_1(u) + (\lambda_1 + \delta) \Phi(u), \\ c\Phi_1'(u) &= -\lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x) f_2(x) dx - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda_2 + \delta) \Phi_1(u),\end{aligned}$$

από όπου παραγωγίζοντας την εξίσωση την πρώτη εξίσωση στην ως προς  $u$  και κάνοντας

χρήση της δευτέρης εξίσωσης παίρνουμε ότι

$$\prod_{j=1}^2 \left( \lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \Phi(u) = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x) f_2(x) dx + \lambda_1 \lambda_2 w_2(u),$$

που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.9) του Θεωρήματος 1.4 για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

Τώρα, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, τους τελεστές  $T_r$  (βλ. Ορισμό 1.8), τις ιδιότητες αυτών όπως δίνονται στην Πρόταση 1.2 και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του Θεωρήματος 2.1 θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\Phi$  και  $\Phi_1$ , ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε τη λύση της εξίσωσης Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων.

**Λήμμα 2.2.** Για  $\delta$  αυστηρά θετικό, η εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων δίνεται από τη σχέση

$$\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) = 0, \quad (2.17)$$

όπου  $\gamma(s) = \prod_{i=1}^2 [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)]$ . Η εξίσωση (2.17) έχει ακριβώς δύο ακριβώς ρίζες,  $r_1(\delta)$  και  $r_2(\delta)$ , με  $r_1(\delta) \neq r_2(\delta)$ . Υποθέτουμε ότι  $r_1(\delta) < r_2(\delta)$ , τότε  $r_1(\delta) \rightarrow 0$  όταν  $\delta \rightarrow 0^+$ .

Απόδειξη. Li και Lu (2005), Θεώρημα 1. ■

Στο εξής, θα συμβολίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης του Lundberg με  $r_i$ .

Εστω  $\widehat{\Phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \Phi(x) dx$ ,  $\widehat{\Phi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \Phi_1(x) dx$  και  $\widehat{w}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx} w_j(x) dx$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $\Phi(u)$ ,  $\Phi_1(u)$  και  $w_j(u)$ ,  $j = 1, 2$ , αντίστοιχα.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις στην (2.13) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{\Phi}$  και  $\widehat{\Phi}_1$  έχουμε ότι

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\lambda_1 [\lambda \widehat{w}_1(s) + \lambda_2 \widehat{w}_2(s) - c \Phi_1(0)] + [c \Phi(0) - \lambda \widehat{w}_1(s)] [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)]}{\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}, \quad (2.18)$$

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\lambda_2 \widehat{f}_2(s) [\lambda \widehat{w}_1(s) - c \Phi(0)] + [c \Phi_1(0) - \lambda \widehat{w}_1(s) - \lambda_2 \widehat{w}_2(s)] [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)]}{\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}, \quad (2.19)$$

όπου οι αρχικές τιμές των  $\Phi$  και  $\Phi_1$  στο σημείο  $u = 0$  δίνονται από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.1.** Κάτω από την συνθήκη του Λήμματος 2.1, οι αρχικές τιμές  $\Phi(0)$  και  $\Phi_1(0)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \left( \widehat{w}_1(r_2) - \frac{cr_1 + \lambda \widehat{f}_1(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta) T_{r_1} T_{r_2} w_1(0)}{c - \lambda T_{r_1} T_{r_2} f_1(0)} T_{r_1} T_{r_2} w_1(0) \right) + \frac{\lambda_2 \lambda_1}{c} \frac{T_{r_1} T_{r_2} w_2(0)}{c - \lambda T_{r_1} T_{r_2} f_1(0)} \\ \Phi_1(0) &= \Phi(0) + \frac{\lambda_2}{c} \widehat{w}_2(r_2) + \frac{c\Phi(0) - \lambda \widehat{w}_1(r_2)}{\lambda_1 c} \left[ cr_2 + \lambda \widehat{f}_1(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta) \right].\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Εφόσον  $\widehat{\Phi}(s) < \infty$  για κάθε  $s > 0$ , ο αριθμητής της εξίσωσης (2.18) είναι 0 όταν  $s = r_1$  και  $r_2$ , δηλ.

$$[c\Phi(0) - \lambda \widehat{w}_1(r_i)] [cr_i + \lambda \widehat{f}_1(r_i) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)] = -\lambda_1 [\lambda \widehat{w}_1(r_i) + \lambda_2 \widehat{w}_2(r_i) - c\Phi_1(0)], \quad i = 1, 2.$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς  $\Phi(0)$  και  $\Phi_1(0)$  παίρνουμε άμεσα το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.1. ■

**Πρόταση 2.2.** Κάτω από τη συνθήκη του Λήμματος 2.1, οι μετασχηματισμοί Laplace των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων πονής επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\widehat{\Phi}(s) = \frac{\widehat{A}(s)}{c^2 - \widehat{n}(s)}, \quad \widehat{\Phi}_1(s) = \widehat{\Phi}(s) + \frac{\widehat{A}_1(s)}{c^2 - \widehat{n}(s)}, \quad (2.20)$$

όπου

$$\begin{aligned}\widehat{n}(s) &= 2\lambda c T_{r_1} \widehat{f}_1(s) + \lambda \left[ (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) - 2\lambda cr_2 - \lambda \widehat{f}_1(r_1) - \lambda \widehat{f}_1(r_2) \right] T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_1(s) \\ &\quad - \lambda^2 T_{r_1} \widehat{f}_1(s) T_{r_2} \widehat{f}_1(s) + \lambda_1 \lambda_2 T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_2(s), \\ \widehat{A}(s) &= \lambda \left[ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + \delta) - cr_2 - \lambda \widehat{f}_1(r_1) \right] T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_1(s) + \lambda_1 \lambda_2 T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_2(s) \\ &\quad + \lambda [c\Phi_\delta(0) - \lambda \widehat{w}_1(r_2)] T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_1(s) + \lambda c T_{r_1} \widehat{w}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1} \widehat{f}_1(s) T_{r_2} \widehat{w}_1(s),\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\widehat{A}_1(s) &= \lambda_2 c T_{r_1} \widehat{w}_2(s) - \lambda_2 \lambda (1 - \widehat{f}_2(r_1)) T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_1(s) - \lambda_2 \lambda T_{r_1} \widehat{f}_1(s) T_{r_2} \widehat{w}_2(s) + \lambda_2 [\lambda \\ &\quad + \delta - cr_2 - \lambda \widehat{f}_1(r_1)] T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_2(s) + \lambda_2 \lambda T_{r_1} \widehat{f}_2(s) T_{r_2} \widehat{w}_1(s) + [c\Phi_\delta(0) - \lambda \widehat{w}_1(r_2)] \\ &\quad \times \left( \lambda \frac{cr_2 + \lambda \widehat{f}_1(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)}{\lambda_1} T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_1(s) - \lambda_2 T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_2(s) \right).\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Δεδομένου ότι η συνθήκη (2.12) του Λήμματος 2.1 είναι αληθής, έχουμε ότι  $\widehat{\Phi}(s) < \infty$  και  $\widehat{\Phi}_1(s) < \infty$  για κάθε  $s > 0$ . Ανακαλώντας ότι η τιμή  $r_1 > 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης



(2.17), χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτήν της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1 των Dickson και Hipp (2001) (βλ. επίσης την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 στους Cheng και Tang (2003) ), από τον ορισμό της συνάρτησης  $\gamma(s)$  έχουμε ότι

$$\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) = \gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) - \gamma(r_1) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(r_1) = (s - r_1)M(s),$$

με

$$\begin{aligned} M(s) = & c^2(s + r_1) - 2\lambda c s T_{r_1} \widehat{f}_1(s) + 2\lambda c \widehat{f}_1(r_1) - \lambda^2(\widehat{f}_1(s) + \widehat{f}_1(r_1))T_{r_1} \widehat{f}_1(s) \\ & + \lambda(2\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\delta)T_{r_1} \widehat{f}_1(s) - c(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) + \lambda_1 \lambda_2 T_{r_1} \widehat{f}_2(s). \end{aligned}$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $r_2 \neq r_1$  είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης (2.17), έχουμε ότι  $M(r_2) = 0$ , και συνεπώς

$$M(s) = M(s) - M(r_2) = (s - r_2)[c^2 - \widehat{n}(s)],$$

όπου η τελευταία εξίσωση προκύπτει χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (iv) – (viii) των τελεστών  $T_r$  που δίνονται από την Πρόταση 1.2. Επιπλέον, ο κοινός παρονομαστής των μετασχηματισμών Laplace  $\widehat{\Phi}(s)$  και  $\widehat{\Phi}_1(s)$  μπορεί να γραφεί ως

$$\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)[c^2 - \widehat{n}(s)]. \quad (2.21)$$

Τώρα, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} m_1(s) = & \lambda(c - \lambda T_{r_1} \widehat{f}_1(s))T_{r_2} \widehat{w}_1(s) + \lambda(c\Phi_{11}(0) - \lambda \widehat{w}_1(r_2))T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_1(s) - \lambda[c r_1 + \lambda \widehat{f}_1(r_1) \\ & - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)]T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_2(s), \end{aligned}$$

$$m_2(s) = c\lambda\Phi_{21}(0)T_{r_1} T_{r_2} \widehat{f}_1(s) + \lambda_1 \lambda_2 T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_2(s)$$

που επίσης δίνονται στις εξισώσεις (18) και (23), αντίστοιχα, στους Li και Lu (2005). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης  $T_{r_1} T_{r_2} \widehat{w}_1(s)$  και το γεγονός ότι  $\Phi(0) = \Phi_{11}(0) + \Phi_{21}(0)$ , τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $\widehat{A}(s) = m_1(s) + m_2(s)$ . Επιπλέον, ορίζουμε  $Num(s)$  να είναι ο αριθμητής της εξίσωσης (2.18). Εφόσον ισχύει ότι  $\widehat{\Phi}_{11}(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)m_i(s)}{\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}$ ,  $i = 1, 2$ , (βλ. σχέσεις (17) και (22) στους Li και Lu (2005) ) και  $\widehat{\Phi}(s) = \widehat{\Phi}_{11}(s) + \widehat{\Phi}_{21}(s)$ , συνεπώς έχουμε ότι

$$Num(s) = (s - r_1)(s - r_2)\widehat{A}(s). \quad (2.22)$$

Τότε, από τις εξισώσεις (2.21) και (2.22) αποδεικνύεται το πρώτο μέρος της εξίσωσης (2.20).

Επιπροσθέτως, συμβολίζοντας με  $Num_1(s)$  τον αριθμητή της εξίσωσης (2.19), και

χρησιμοποιώντας από το Λήμμα 2.1, το γεγονός ότι  $\widehat{\Phi}_1(s) < \infty$ , τότε ισχύει ότι  $Num_1(r_i) = 0$ , για  $i = 1, 2$ . Εφαρμόζοντας ίδια μεθοδολογία όπως αυτή της απόδειξης της σχέσης (2.22), και χρησιμοποιώντας ξανά τις ιδιότητες των τελεστών  $T_r$ , η συνάρτηση  $Num_1(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$Num_1(s) = Num_1(s) - Num_1(r_1) = (s - r_1)\Gamma_1(s),$$

όπου

$$\begin{aligned} \Gamma_1(s) = & c^2\Phi_1(0) + \lambda[cs + \lambda\widehat{f}_1(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \delta) - \lambda_2\widehat{f}_2(r_1)] T_{r_1}\widehat{w}_1(s) + \lambda_2[cs \\ & + \lambda\widehat{f}_1(r_1) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)]T_{r_1}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2[c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(s)]T_{r_1}\widehat{f}_2(s) \\ & - \lambda[c\Phi_1(0) - \lambda_2\widehat{w}_2(s) - \lambda\widehat{w}_1(s)]T_{r_1}\widehat{f}_1(s) - \lambda c\widehat{w}_1(r_1) - \lambda_2 c\widehat{w}_2(r_1). \end{aligned}$$

Επίσης, από το γεγονός ότι  $\Gamma_1(r_2) = 0$ , τότε δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να δούμε ότι

$$\Gamma_1(s) = \Gamma_1(s) - \Gamma_1(r_2) = (s - r_2)\widehat{C}(s),$$

με

$$\begin{aligned} \widehat{C}(s) = & \lambda[c\Phi_1(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2) - \lambda_2\widehat{w}_2(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{f}_1(s) + \lambda cT_{r_1}\widehat{w}_1(s) + \lambda_2 cT_{r_1}\widehat{w}_2(s) \\ & + \lambda[\lambda + \lambda_1 + \delta - cr_2 - \lambda\widehat{f}_1(r_1) + \lambda_2\widehat{f}_2(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1}\widehat{f}_1(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s) \\ & + \lambda_2[\lambda + \lambda_1 + \delta - cr_2 - \lambda\widehat{f}_1(r_1)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) - \lambda_2\lambda T_{r_1}\widehat{f}_1(s)T_{r_2}\widehat{w}_2(s) \\ & - \lambda_2[c\Phi(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{f}_2(s) + \lambda_2\lambda T_{r_1}\widehat{f}_2(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s), \end{aligned}$$

και έτσι ο αριθμητής  $Num_1(s)$  γράφεται

$$Num_1(s) = (s - r_1)(s - r_2)\widehat{C}(s). \quad (2.23)$$

Τότε, από τις εξισώσεις (2.21) και (2.23) παίρνουμε ότι

$$\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\widehat{C}(s)}{c^2 - \widehat{n}(s)}. \quad (2.24)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την τιμή της  $\Phi_1(0)$  (από που δίνεται από την Πρόταση 2.1) στην συνάρτηση  $\widehat{C}(s)$  μπορούμε να δούμε ότι η  $\widehat{C}(s) = \widehat{A}(s) + \widehat{A}_1(s)$  είναι αληθής. Έτσι, από την παραπάνω εξίσωση μαζί με τις εξισώσεις (2.20) και (2.24), παίρνουμε το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (2.20). ■

**Λήμμα 2.3.** Για  $\delta > 0$ , ισχύει ότι

$$2\lambda c\widehat{F}_1(r_1) + \lambda[\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta - 2cr_2 - \lambda\widehat{f}_1(r_1) - \lambda\widehat{f}_1(r_2)]\frac{\widehat{F}_1(r_1) - \widehat{F}_1(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2\widehat{F}_1(r_1)\widehat{F}_1(r_2) + \lambda_1\lambda_2\frac{\widehat{F}_2(r_1) - \widehat{F}_2(r_2)}{r_2 - r_1} = c^2 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{r_1r_2}. \quad (2.25)$$

Απόδειξη. Εφόσον οι ρίζες  $r_1, r_2 > 0$  ικανοποιούν την εξίσωση του Lundberg του Λήμματος 2.2, έχουμε ότι

$$\frac{1}{r_j} \left[ \prod_{i=1}^2 (cr_j + \lambda\widehat{f}_i(r_j) - (\lambda + \lambda_i + \delta)) + \lambda_1\lambda_2(1 - \widehat{f}_2(r_j)) \right] = \frac{\lambda_1\lambda_2}{r_j}, \quad j = 1, 2.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη για  $j = 1, 2$  στην παραπάνω εξίσωση και μετά από κάποιους αλγεβρικούς υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση είναι (2.25) αληθής. ■

Τώρα, από το γεγονός ότι για κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $h$  ισχύει ότι  $T_r\widehat{h}(s) = (T_r h(x))(s) = T_s T_r h(0)$ , βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις  $\widehat{n}(s)$ ,  $\widehat{A}(s)$  και  $\widehat{A}_1(s)$ , που δίνονται στην Πρόταση 2.2, είναι οι μετασχηματισμοί Laplace κάποιων συναρτήσεων  $n$ ,  $A$  και  $A_1$  αντίστοιχα, οι οποίες υπολογίζονται εύκολα με αντιστροφή των προαναφερόμενων μετασχηματισμών Laplace ως προς  $s$ .

**Πρόταση 2.3.** Για  $u \geq 0$ , κάτω από την υπόθεση ότι η εξίσωση (2.12) είναι αληθής, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\Phi(u)$ ,  $\Phi_1(u)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$\Phi(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \Phi(u-x)\zeta(x) dx + \frac{B(u)}{1+\xi}, \quad (2.26)$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \Phi_1(u-x)\zeta(x) dx + \frac{B(u) + B_1(u)}{1+\xi}, \quad (2.27)$$

όπου  $\zeta(y) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}n(y)$  είναι σ.π.π.,  $B(y) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}A(y)$ ,  $B_1(y) = (1+\xi)\frac{1}{c^2}A_1(y)$  και  $\xi$  τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y) dy = 1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{c^2 r_1 r_2} < 1$ . Επιπλέον, για  $\delta \rightarrow 0^+$  τότε  $\xi \rightarrow \xi_0$  τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{\theta[\lambda(\lambda_1 + \lambda_2)m_1 + \lambda_1\lambda_2 m_2]}{c^2 r_2(0)} < 1$ , δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  είναι θετικό.

Απόδειξη. Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $\widehat{\Phi}(s)$ , στην εξίσωση (2.20) ως προς  $s$  έχουμε ότι

$$\Phi(u) = \frac{1}{c^2} \int_0^u \Phi(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2}A(u), \quad u \geq 0. \quad (2.28)$$

Τώρα, θεωρούμε την σ.χ.  $Z(u)$  με ουρά  $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u)$  η οποία δίνεται από την σχέση  $\bar{Z}(u) = \frac{\int_u^\infty \frac{1}{c^2} n(y) dy}{\int_0^\infty \frac{1}{c^2} n(y) dy}$ . Αντιστρέφοντας ως προς  $s$  το μετασχηματισμό Laplace,  $\hat{n}(s)$  της Πρότασης 2.2 και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\int_0^\infty T_r f_j(s) ds = \frac{1 - \hat{f}_j(r)}{r}$  για  $j = 1, 2$  και  $\int_0^\infty (T_{r_1} f_1 * T_{r_2} f_2)(x) dx = \frac{1 - \hat{f}_1(r_1)}{r_1} \cdot \frac{1 - \hat{f}_2(r_2)}{r_2}$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{c^2} n(x) dx &= \frac{1}{c^2} \left[ 2\lambda c \hat{F}_1(r_1) + \lambda \left( \lambda_2 + \lambda_1 + 2\lambda + 2\delta - 2cr_2 - \lambda \hat{f}_1(r_1) - \lambda \hat{f}_1(r_2) \right) \right. \\ &\quad \times \frac{\hat{F}_1(r_1) - \hat{F}_1(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2 \hat{F}_1(r_1) \hat{F}_1(r_2) + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\hat{F}_2(r_1) - \hat{F}_2(r_2)}{r_2 - r_1} \left. \right] \\ &= 1 - \delta \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) + \delta}{c^2 r_1 r_2} < 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι απόρροια της εξίσωσης (2.25) του Λήμματος 2.3. Επιπλέον, ορίζουμε  $\xi = [(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2] / [c^2 r_1 r_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2]$ , τέτοιο ώστε  $1/(1 + \xi) = \frac{1}{c^2} \int_0^\infty n(y) dy$  και  $\bar{Z}(u) = (1 + \xi) \frac{1}{c^2} \int_u^\infty n(y) dy$ . Τότε, η συνάρτηση  $\zeta(u) = \frac{d}{du} Z(u) = (1 + \xi) \frac{1}{c^2} n(u)$  είναι μία σ.π.κ. και από τον ορισμό της συνάρτησης  $B(u)$ , η ανανεωτική εξίσωση (2.28) μπορεί να εκφραστεί σε όρους των  $\zeta(u)$ ,  $B(u)$  και  $\xi$  όπως δίνεται στην εξίσωση (2.26), η οποία είναι ελαττωματική.

Επίσης, από την (2.24) και το γεγονός ότι  $\hat{C}(s) = \hat{A}(s) + \hat{A}_1(s)$ , έχουμε ότι

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\hat{A}(s) + \hat{A}_1(s)}{c^2 - \hat{n}(s)}.$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω Laplace ως προς  $s$  παίρνουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{c^2} \int_0^u \Phi_1(u-x)n(x)dx + \frac{1}{c^2} [A(u) + A_1(u)], \quad u \geq 0,$$

από την οποία, όμοια με την μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την (2.26), παίρνουμε την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (2.27). Τέλος, για  $\delta \rightarrow 0^+$ , δοθέντος  $r_1(\delta) < r_2(\delta)$ , έχουμε ότι  $r_1(\delta) \rightarrow r_1(0) = 0$ ,  $r_2(0) > 0$ , και συνεπώς

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \xi} = 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{c^2 r_1(\delta) r_2(\delta)} = 1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c^2 r_1'(0) r_2(0)}. \quad (2.29)$$

Θέτοντας  $s = r_1(\delta)$  στην εξίσωση (2.17) (εξίσωση του Lundberg), παραγωγίζοντας ως προς  $\delta$  και παίρνοντας  $\delta \rightarrow 0^+$ , έχουμε ότι  $r_1'(0) = 1/(c - \lambda m_1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} m_2)$  και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την  $r_1'(0)$  σε όρους του περιθωρίου ασφαλείας, δηλ.  $r_1'(0) = 1/(\theta(\lambda m_1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} m_2))$ . Αντικαθιστώντας το  $r_1'(0)$  στην εξίσωση (2.29), το αποτέλεσμα για την ποσότητα  $1/(1 + \xi_0)$  είναι προφανές. ■

Η λύση των ελαττωματικών ανανεωτικών εξισώσεων (2.26) και (2.27) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι ορίζουμε  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$  να είναι η σ.χ. της ακόλουθης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\bar{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\xi} \right)^n \bar{Z}^{*n}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\bar{Z}^{*n}(u)$  είναι η  $n$ -οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς  $\bar{Z}(u) = \int_u^{\infty} \zeta(x) dx$ . Τότε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9 μπορούμε να πάρουμε αναλυτικές λύσεις για τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις που δίνονται στις (2.26) και (2.27).

**Πρόταση 2.4.** *Κάτω από την υπόθεση ότι η εξίσωση (2.12) είναι αληθής, τότε για  $u \geq 0$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\Phi(u)$  και  $\Phi_1(u)$  που ικανοποιούν τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις (2.26) και (2.27) αντίστοιχα, έχουν την ακόλουθη μορφή*

$$\Phi(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)] dB(x) + \frac{B(0)}{\xi} [1 - \bar{K}(u)], \quad (2.30)$$

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) + \frac{1}{\xi} \int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)] dB_1(x) + \frac{B_1(0)}{\xi} [1 - \bar{K}(u)]. \quad (2.31)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη της εξίσωσης (2.30) για την  $\Phi(u)$  είναι άμεση απόρροια της εφαρμογής του Θεωρήματος 1.9. Όμοια, για την  $\Phi_1(u)$  εφαρμόζοντας το Θεωρήματος 1.9 έχουμε ότι

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)] d[B(x) + B_1(x)] + \frac{B(0) + B_1(0)}{\xi} [1 - \bar{K}(u)],$$

από την οποία χρησιμοποιώντας την (2.30) παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.31). ■

Από την Πρόταση 2.4, δεδομένου ότι συναρτήσεις  $B(u)$  και  $B_1(u)$  μπορούν εύκολα να υπολογισθούν για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής  $w(x, y)$ , έπεται ότι ο υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu μπορεί να γίνει όταν η δεξιά ουρά  $\bar{K}(u)$  είναι γνωστή. Μία από τις περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την κατανομή της  $K(u)$  με δεξιά ουρά  $\bar{K}(u)$  είναι όταν ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{\bar{K}}(s)$  έχει την μορφή ημίικου πολυωνύμων. Σημειώνουμε ότι η  $\widehat{\bar{K}}(s)$  έχει μορφή ημίικου πολυωνύμων αν και μόνο αν οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων,  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$ , είναι ημίικα πολυωνύμων. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων μπορούμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό της  $\bar{K}(u)$ .

Οι Lin και Willmot (1999) (βλ. εξίσωση (2.14) του Θεωρήματος 2.1), έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $\bar{K}(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική

αναnevωτικὴ ἐξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x) \zeta(x) dx + \frac{1}{1+\xi} \bar{Z}(u), \quad u \geq 0,$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\widehat{\bar{n}}(s)}{[c^2 - \widehat{\bar{n}}(s)]}, \quad (2.32)$$

όπου  $\widehat{\bar{n}}(s)$  δίνεται από την Πρόταση 2.2 και  $\widehat{\bar{n}}(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $\bar{n}(x) = \int_x^\infty n(y) dy$ . Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.21) στην εξίσωση (2.32) και κάνοντας χρήση του ορισμού της συνάρτησης  $\gamma(s)$ , έπεται ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\widehat{\bar{n}}(s)(s-r_1)(s-r_2)}{\prod_{i=1}^2 [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}. \quad (2.33)$$

Τώρα, εφόσον  $\widehat{\bar{n}}(s) = T_s \bar{n}(0) = T_s T_0 n(0) = (T_0 n(0) - T_s n(0))/s = (\widehat{\bar{n}}(0) - \widehat{\bar{n}}(s))/s$  χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση (2.21) και από τον ορισμό της συνάρτησης  $\gamma(s)$ , έχουμε ότι

$$\widehat{\bar{n}}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{\prod_{i=1}^2 [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} - c^2 \frac{\xi}{1+\xi} \right],$$

και έτσι η εξίσωση (2.33) γράφεται ως

$$\widehat{K}(s) = \frac{\prod_{i=1}^2 [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) - \frac{c^2 \xi}{1+\xi} (s-r_1)(s-r_2)}{s \left\{ \prod_{i=1}^2 [cs + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) \right\}}. \quad (2.34)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι όταν οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$  είναι ηλίγια πολωνύμων, τότε και ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{K}(s)$  έχει μορφή ηλίγια πολωνύμων. Έτσι, θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Αυτό συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace των σ.π.π. των αποζημιώσεων έχει την ακόλουθη μορφή

$$\widehat{f}_1(s) = \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)}, \text{ με } p_{n-1}(0) = p_n(0) \text{ και } \widehat{f}_2(s) = \frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)}, \text{ με } q_{m-1}(0) = q_m(0) \quad (2.35)$$

όπου  $p_{n-1}(s)$ ,  $q_{m-1}(s)$  είναι πολώνυμα βαθμού  $n-1$ ,  $m-1$  ή μικρότερο ( $\deg(p_{n-1}) \leq n-1$ ,  $\deg(q_{m-1}) \leq m-1$ ) αντίστοιχα και  $p_n(s)$ ,  $q_m(s)$  είναι πολώνυμα βαθμού  $n$ ,  $m$  αντίστοιχα.

Έστω  $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s} [\prod_{i=1}^{2n+m} (s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} p_n^2(s) q_m(s)]$  ένα πολώνυμο βαθμού

$2n + m - 1$  (βλ. απόδειξη Θεωρήματος 2.2). Επιπλέον ορίζουμε

$$a_i = \frac{R_1 R_2 \dots R_{2n+m}}{R_i \prod_{j=1, j \neq i}^{2n+m} (R_j - R_i)} \cdot \frac{p_n^2(-R_i) q_m(-R_i)}{p_n^2(0) q_m(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n + m,$$

όπου τα  $-R_i$ , με  $\Re(R_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n + m$ , είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $D_{2n+m+2}(s) = 0$ , με

$$D_{2n+m+2}(s) = q_m(s) \prod_{i=1}^2 [(cs - \lambda - \lambda_i - \delta) p_n(s) + \lambda p_{n-1}(s)] - \lambda_1 \lambda_2 q_{m-1}(s) p_n^2(s). \quad (2.36)$$

Με βάση τα παραπάνω, όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών η εξίσωση (2.34) γράφεται ως

$$\widehat{K}(s) = \frac{D_{2n+m+2}(s) - \frac{c^2 \xi}{1+\xi} (s - r_1)(s - r_2) p_n^2(s) q_m(s)}{s D_{2n+m+2}(s)}. \quad (2.37)$$

**Θεώρημα 2.2.** Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.τ.  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$  είναι όπως στην εξίσωση (2.35). Τότε

$$\widehat{K}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)}.$$

Επιπλέον, αν  $-R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n + m$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$\widehat{K}(s) = \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{a_i}{s + R_i}, \quad s \geq 0, \quad \text{και} \quad \bar{K}(u) = \sum_{i=1}^{2n+m} a_i e^{-R_i u}, \quad u \geq 0. \quad (2.38)$$

*Απόδειξη.* Υποθέτοντας ότι  $\widehat{f}_1(s) = p_{n-1}(s)/p_n(s)$  και  $\widehat{f}_2(s) = q_{m-1}(s)/q_m(s)$ , τότε από το Λήμμα 2.2, έχουμε ότι

$$0 = \gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) = \prod_{i=1}^2 \left[ cs + \lambda \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} - (\lambda + \lambda_i + \delta) \right] - \frac{\lambda_1 \lambda_2 q_{m-1}(s)}{q_m(s)} = \frac{D_{2n+m+2}(s)}{p_n^2(s) q_m(s)}. \quad (2.39)$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $D_{2n+m+2}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2n + m + 2$  με μεγιστοβάθμιο όρο το  $c^2$  και συνεπώς η εξίσωση  $D_{2n+m+2}(s) = 0$  έχει  $2n + m + 2$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Από το γεγονός ότι  $\gamma(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s) = 0$  είναι η εξίσωση του Lundberg έπεται, από την (2.39), ότι η εξίσωση  $D_{2n+m+2}(s) = 0$  έχει δύο ακριβώς ρίζες,  $r_1, r_2$  με θετικά πραγματικά μέρη και  $2n + m$  ρίζες,  $R_i$ , με αρνητικά πραγματικά μέρη. Επομένως η

εξίσωση  $D_{2n+m+2}(s)$  μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$D_{2n+m+2}(s) = c^2 (s - r_1)(s - r_2) \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i). \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση  $D_{2n+m+2}(s)$  στην εξίσωση (2.37) έπεται ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} p_n^2(s) q_m(s)}{s \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)} = \frac{Q_{2n+m}(s)}{s \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)},$$

όπου  $Q_{2n+m}(s) = \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i) - \frac{\xi}{1+\xi} p_n^2(s) q_m(s)$ . Από το γεγονός ότι  $\widehat{K}(s) < \infty$ , για  $s \geq 0$ , καθώς επίσης και από το γεγονός ότι το  $s = 0$  είναι ρίζα του παρονομαστή της συνάρτησης  $\widehat{K}(s)$ , είναι φανερό ότι πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή, δηλ.  $Q_{2n+m}(0) = 0$  απ' όπου παίρνουμε ότι  $\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{R_1 R_2 \dots R_{2n+m}}{p_n^2(0) q_m(0)}$ . Επιπλέον, η συνάρτηση  $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s} Q_{2n+m}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2n + m - 1$ , και επομένως χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων έχουμε ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)} = \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{a_i}{s + R_i}, \quad a_i = \frac{Q_{2n+m-1}(-R_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{2n+m} (R_j - R_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+m,$$

απ' όπου αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (2.38). ■

### 2.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Όμοια με τη στρατηγική σταθερού μερίσματος που περιγράφηκε στην Ενότητα 1.4.2, σε αυτή την ενότητα μελετάμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων όταν υιοθετείται μια στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Έτσι, η διαδικασία πλεονάσματος (2.1) τώρα τροποποιείται εισάγοντας την ύπαρξη ενός σταθερού μερίσματος επιπέδου  $b \geq u$ . Κάτω από την τροποποίηση έχουμε ότι όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο επίπεδο  $b$ , τα ασφαλιστικά  $c$  επιστρέφονται πίσω στους ασφαλισμένους υπό την μορφή μερίσματος και η διαδικασία πλεονάσματος παραμένει στο επίπεδο  $b$  μέχρι την εμφάνιση της επόμενης αποζημίωσης.

Έστω  $U_b(t)$  να είναι η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος για αυτή την στρατηγική



σταθερού μερίσματος με αρχικό απόθεμα  $U_b(0) = u$ . Τότε έχουμε ότι

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b, \\ -dS(t), & U_b(t) = b, \end{cases} \quad (2.41)$$

όπου οι στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων,  $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , δίνεται από την σχέση (2.2). Επιπλέον ορίζουμε  $T_b = \inf \{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}$  να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος και για κάποια συνάρτηση ποινής  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  και  $\delta \geq 0$  ορίζουμε

$$\Phi_b(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) \mathbf{1}_{\{T_b < \infty\}} | U_b(0) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.42)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο κινδύνου όπως ορίστηκε στην (2.41), όπου  $U(T_b-)$  είναι το πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία και  $|U(T_b)|$  το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία κάτω από την παραπάνω προσαρμογή. Επίσης, για τους ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν στην Ενότητα 2.2, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ορίζουμε την «βοηθητική» αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος,  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$ , από την δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί (σε αυτά τα σημεία η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται), που δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_{b,1}(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta(T_b-t)} w(U(T_b-), |U(T_b)|) \mathbf{1}_{\{T_b < \infty\}} | L_{11} = t, U_b(t) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.43)$$

Σημειώνουμε ότι για  $b \rightarrow \infty$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος ανάγονται στις αντίστοιχες συναρτήσεις των Gerber-Shiu της Ενότητας 2.2 όπου η διαδικασία πλεονάσματος δεν επηρεάζεται από κάποια στρατηγική μερισμάτων, δηλ.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \Phi_b(u) = \Phi(u)$  και  $\lim_{b \rightarrow \infty} \Phi_{b,1}(u) = \Phi_1(u)$ .

Στο επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\Phi_b$  και  $\Phi_{b,1}$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

**Θεώρημα 2.3.** Για  $0 \leq u \leq b$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\Phi_b(u)$  και  $\Phi_{b,1}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c\Phi'_b(u) &= (\lambda + \lambda_1 + \delta) \Phi_b(u) - \lambda \int_0^u \Phi_b(u-x) f_1(x) dx - \lambda_1 \Phi_{b,1}(u) - \lambda w_1(u), \\ c\Phi'_{b,1}(u) &= (\lambda + \lambda_2 + \delta) \Phi_{b,1}(u) - \lambda \int_0^u \Phi_{b,1}(u-x) f_1(x) dx - \lambda w_1(u) \\ &\quad - \lambda_2 \int_0^u \Phi_b(u-x) f_2(x) dx - \lambda_2 w_2(u), \end{aligned} \quad (2.44)$$

με οριακές συνθήκες

$$\Phi'_b(b) = 0, \quad \Phi'_{b,1}(b) = 0, \quad (2.45)$$

όπου  $w_j(u)$ , για  $j = 1, 2$ , δίνονται από την εξίσωση (2.14).

Απόδειξη. Για  $0 \leq u \leq b$ , ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned}\gamma_j(u) &= \int_0^u \Phi_b(u-x) f_j(x) dx + w_j(u), \quad j = 1, 2, \\ \vartheta(u) &= \int_0^u \Phi_{b,1}(u-x) f_1(x) dx + w_1(u).\end{aligned}$$

Θεωρώντας ένα απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  και χρησιμοποιώντας μεθοδολογία όμοια με αυτή των Zhang, Li και Yang (2009), για  $0 \leq u \leq b$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_b(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_1 dt)e^{-\delta dt} \Phi_b(u + cdt) + \lambda_1 dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,1}(u + cdt) \\ &\quad + \lambda dt(1 - \lambda_1 dt)e^{-\delta dt} \gamma_1(u + cdt) + o(dt).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας από το ανάπτυγμα του Taylor το γεγονός ότι  $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$ , παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης  $dt$ , παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , καθώς επίσης και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $w_1(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς  $u$  (και συνεπώς  $\gamma_1(u)$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $u$  απ' όπου έπεται ότι  $\lim_{dt \rightarrow 0} \gamma_1(u + cdt) = \gamma_1(\lim_{dt \rightarrow 0}(u + cdt))$ ), βρίσκουμε την πρώτη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση από το σύστημα (2.44).

Κατά τον ίδιο τρόπο, για  $0 \leq u \leq b$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_{b,1}(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_2 dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,1}(u + cdt) + \lambda dt(1 - \lambda_2 dt)e^{-\delta dt} \vartheta(u + cdt) \\ &\quad + \lambda_2 dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \gamma_2(u + cdt) + o(dt).\end{aligned}\tag{2.46}$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  και παρατηρώντας ότι η συνάρτηση  $w_k(u)$  για  $k = 1, 2$  είναι συνεχής ως προς  $u$  (και συνεπώς όμοια με την απόδειξη της πρώτης εξίσωσης στην (2.44) έχουμε ότι  $\gamma_2(u)$  και  $\vartheta(u)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς  $u$ ), παίρνουμε τη δεύτερη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του συστήματος (2.44).

Για  $u = b$ , όμοια με την παραπάνω μεθοδολογία, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_b(b) &= (1 - (\lambda + \lambda_1)dt)e^{-\delta dt} \Phi_b(b) + \lambda_1 dt e^{-\delta dt} \Phi_{b,1}(b) + \lambda dt e^{-\delta dt} \gamma_1(b) + o(dt) \\ &= \Phi_b(b) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)dt \Phi_b(b) + \lambda_1 dt \Phi_{b,1}(b) + \lambda dt \gamma_1(b) + o(dt).\end{aligned}$$

Διαγράφοντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  έχουμε ότι

$$-(\lambda_1 + \lambda + \delta)\Phi_b(b) + \lambda_1 \Phi_{b,1}(b) + \lambda \gamma_1(b) = 0.$$

Τώρα, εφόσον  $\Phi_b(u)$  είναι συνεχής συνάρτηση στο σημείο  $u = b$ , θέτοντας  $u = b$  στην εξίσωση (2.44) και συγκρίνοντας την με την παραπάνω εξίσωση έπεται άμεσα η οριακή

συνθήκη  $\Phi'_b(b) = 0$ .

Όμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi_{b,1}(b) &= (1 - (\lambda + \lambda_2)dt)e^{-\delta dt}\Phi_{b,1}(b) + \lambda dt e^{-\delta dt}\vartheta(b) + \lambda_2 dt e^{-\delta dt}\gamma_2(b) + o(dt) \\ &= \Phi_{b,1}(b) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)dt\Phi_{b,1}(b) + \lambda dt\vartheta(b) + \lambda_2 dt\gamma_2(b) + o(dt),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$-(\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_{b,1}(b) + \lambda\vartheta(b) + \lambda_2\gamma_2(b) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης  $\Phi_{b,1}(u)$  στο σημείο  $u = b$ , θέτοντας  $u = b$  στην εξίσωση (2.44), και συγκρίνοντας την προκύπτουσα εξίσωση με την τελευταία εξίσωση καταλήγουμε στη δεύτερη οριακή συνθήκη,  $\Phi'_{b,1}(b) = 0$ . ■

**Παρατήρηση 2.3.** (i) Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της συνέχειας των συναρτήσεων  $w_j(u)$  για  $j = 1, 2$ , στο Θεώρημα 2.3 είναι απαραίτητη και εξασφαλίζει ότι οι οριακές συνθήκες  $\Phi'_b(b) = 0$  και  $\Phi'_{b,1}(b) = 0$  είναι αληθείς. Σε διαφορετική περίπτωση, από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 φαίνεται ότι τόσο οι οριακές συνθήκες (2.45) όσο και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.44) δεν ισχύουν.

(ii) Για  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ , τότε  $\Phi_b = \Phi_{b,1}$ , και συνεπώς το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.44) ανάγεται στην εξίσωση (1.37) του Πορίσματος 1.5, που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

(iii) Παίρνοντας  $\lambda \rightarrow 0$  και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στο (ii) της Παρατήρησης 2.2, τότε το σύστημα (2.44) ανάγεται στην εξίσωση

$$\prod_{j=1}^2 \left( \lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \Phi_b(u) = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^u \Phi_b(u-x) f_2(x) dx + \lambda_1 \lambda_2 w_2(u),$$

για  $0 \leq u \leq b$ , που είναι η ολοκληρο-διαφορική (1.34) του Θεωρήματος 1.12 για  $n = 2$ .

Η λύση του μη-ομογενούς συστήματος ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.44) με οριακές συνθήκες (2.45), εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρο-

διαφορικού συστήματος, ως προς  $v_\delta$  και  $v_{\delta,1}$  για  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} cv'_\delta(u) - (\lambda + \lambda_1 + \delta) v_\delta(u) + \lambda \int_0^u v_\delta(u-x) f_1(x) dx + \lambda_1 v_{\delta,1}(u) &= 0, \\ cv'_{\delta,1}(u) - (\lambda + \lambda_2 + \delta) v_{\delta,1}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta,1}(u-x) f_1(x) dx & \\ + \lambda_2 \int_0^u v_\delta(u-x) f_2(x) dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. Κεφ. 7 των Boyce και DiPrima (2000)] έπεται ότι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος (2.47) είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} v_\delta(u) \\ v_{\delta,1}(u) \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} v_{\delta,11}(u) \\ v_{\delta,21}(u) \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} v_{\delta,12}(u) \\ v_{\delta,22}(u) \end{pmatrix}, \quad u \geq 0, \quad (2.48)$$

όπου  $(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u))^T$  και  $(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u))^T$ , με  $T$  να συμβολίζει τον ανάστροφο διάνυσμα, είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα λύσεις και  $\eta_1, \eta_2$  σταθεροί αριθμοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,kl}(0) = 1_{(k=l)}$  για  $k, l \in \{1, 2\}$ . Τότε, κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες τα διανύσματα  $(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,12}(u))^T$  και  $(v_{\delta,21}(u), v_{\delta,22}(u))^T$  είναι δύο ανεξάρτητα διανύσματα των λύσεων του ομογενούς συστήματος (2.47). Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία όπως οι Lu και Li (2009) (βλ. επίσης την μεθοδολογία του Κεφ. ) η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος (2.44) δίνεται σε όρους μιας μερικής λύσης του συστήματος (2.44) (αυτή είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων) και ενός γραμμικού συνδυασμού των λύσεων του ομογενούς συστήματος (2.47), δηλ.

$$\begin{aligned} \Phi_b(u) &= \Phi(u) + \eta_1(b) v_{\delta,11}(u) + \eta_2(b) v_{\delta,12}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \\ \Phi_{b,1}(u) &= \Phi_1(u) + \eta_1(b) v_{\delta,21}(u) + \eta_2(b) v_{\delta,22}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \end{aligned} \quad (2.49)$$

όπου  $\Phi(u)$  και  $\Phi_1(u)$  είναι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu της Ενότητας 2.2, ενώ οι ποσότητες  $\eta_1(b) = \Phi_b(0) - \Phi(0)$ ,  $\eta_2(b) = \Phi_{b,1}(0) - \Phi_1(0)$  μπορούν να υπολογισθούν από τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 2.3. Αναλυτικότερα οι  $\eta_1(b) = \Phi_b(0) - \Phi(0)$ ,  $\eta_2(b) = \Phi_{b,1}(0) - \Phi_1(0)$  αποτελούν λύσεις του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \Phi'(b) + \eta_1(b) v'_{\delta,11}(b) + \eta_2(b) v'_{\delta,12}(b) &= 0, \\ \Phi'_1(b) + \eta_1(b) v'_{\delta,21}(b) + \eta_2(b) v'_{\delta,22}(b) &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Εφόσον οι  $\Phi$  και  $\Phi_1$  είναι γνωστές από την Ενότητα 2.2, από την εξίσωση 2.49 έπεται ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\Phi_b$  και  $\Phi_{b,1}$  μπορούν να υπολογισθούν όταν οι  $(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,21}(u))^T$  και  $(v_{\delta,12}(u), v_{\delta,22}(u))^T$  είναι γνωστές. Οι λύσεις του ομογενούς

ολοκληρω-διαφορικού συστήματος (2.47), βρίσκονται μέσω των μετασχηματισμών Laplace και των αρχικών συνθηκών  $v_{\delta,kl}(0)$ , για  $k, l \in \{1, 2\}$ .

Έστω  $\widehat{v}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_\delta(x) dx$  και  $\widehat{v}_{\delta,1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{\delta,1}(x) dx$  οι μετασχηματισμοί Laplace των  $v_\delta(u)$  και  $v_{\delta,1}(u)$  αντίστοιχα. Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace του συστήματος (2.47), και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{v}_\delta(s)$  και  $\widehat{v}_{\delta,1}(s)$  έχουμε ότι

$$\widehat{v}_\delta(s) = \frac{cv_\delta(0) [cs - (\lambda_2 + \lambda + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)] - c\lambda_1 v_{\delta,1}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)},$$

και

$$\widehat{v}_{\delta,1}(s) = \frac{cv_{\delta,1}(0) [cs - (\lambda_1 + \lambda + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)] - c\lambda_2 \widehat{f}_2(s) v_\delta(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}.$$

Από τις παραπάνω δύο εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις των  $\widehat{v}_{\delta,kl}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{\delta,kl}(x) dx$ ,  $k, l \in \{1, 2\}$ , αφού από την εξίσωση (2.48) δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι με βάση τις αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,kl}(0) = 1_{(k=l)}$  ισχύει ότι  $v_\delta(0) = \eta_1$ ,  $v_{\delta,1}(0) = \eta_2$ ,  $\widehat{v}_\delta(s) = v_\delta(0) \widehat{v}_{\delta,11}(s) + v_{\delta,1}(0) \widehat{v}_{\delta,12}(s)$ ,  $\widehat{v}_{\delta,1}(s) = v_\delta(0) \widehat{v}_{\delta,21}(s) + v_{\delta,1}(0) \widehat{v}_{\delta,22}(s)$ , και έτσι έπεται ότι

$$\widehat{v}_{\delta,1l}(s) = \frac{cv_{\delta,1l}(0) [cs - (\lambda_2 + \lambda + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)] - c\lambda_1 v_{\delta,2l}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}, \quad l = 1, 2, \quad (2.51)$$

και

$$\widehat{v}_{\delta,2l}(s) = \frac{cv_{\delta,2l}(0) [cs - (\lambda_1 + \lambda + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)] - c\lambda_2 \widehat{f}_2(s) v_{\delta,1l}(0)}{\gamma_\delta(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}, \quad l = 1, 2. \quad (2.52)$$

Στην παρακάτω πρόταση δίνουμε ακριβείς μορφές για τις λύσεις  $v_{\delta,kl}(u)$ ,  $k, l \in \{1, 2\}$ , στην περίπτωση που τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

**Πρόταση 2.5.** Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$  είναι της μορφής όπως στην εξίσωση (2.35). Τότε οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $(v_{\delta,11}(u), v_{\delta,12}(u))^\top$  και  $(v_{\delta,21}(u), v_{\delta,22}(u))^\top$  δίνονται από τη σχέση

$$v_{\delta,kl}(u) = \sum_{j=1}^2 a_{kl}(j) e^{r_j u} + \sum_{i=1}^{2n+m} b_{kl}(i) e^{-R_i u}, \quad u \geq 0, \quad k, l \in \{1, 2\}, \quad (2.53)$$

με

$$a_{kl}(j) = p_n^2(r_j) q_m(r_j) \frac{1_{(k=l)} \left[ (cr_j - \lambda_{kl}^* - \lambda - \delta) + \lambda \frac{p_{n-1}(r_j)}{p_n(r_j)} \right] - v_{kl}^*(0; r_j)}{c r_2'(r_j) \prod_{i=1}^{2n+m} (r_j + R_i)},$$

$$b_{kl}(i) = p_n^2(-R_i) q_m(-R_i) \frac{1_{(k=l)} \left[ \lambda \frac{p_{n-1}(-R_i)}{p_n(-R_i)} - (cR_i + \lambda_{kl}^* + \lambda + \delta) \right] - v_{kl}^*(0; -R_i)}{c\tau_2(-R_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{2n+m} (R_j - R_i)},$$

για  $j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, 2n + m$ , και

$$\lambda_{kl}^* = \begin{cases} \lambda_2, & k = 1 \\ \lambda_1, & k = 2 \end{cases}, \quad v_{kl}^*(0; t) = \begin{cases} \lambda_1, & k = 1, l = 2 \\ \lambda_2 \frac{q_{m-1}(t)}{q_m(t)}, & k = 2, l = 1 \end{cases},$$

όπου  $r_1, r_2$  και  $-R_i, \mu \in \Re(R_i) > 0, i = 1, 2, \dots, 2n + m$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $D_{2n+m+2}(s) = 0$  και  $\tau_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$ .

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (2.39) και (2.40), έπεται ότι η εξίσωση (2.51) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\widehat{v}_{\delta, 1l}(s) = \frac{A_{1l}(s)/c^2}{\tau_2(s) \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)}, \quad (2.54)$$

όπου

$$A_{1l}(s) = p_n^2(s) q_m(s) \left\{ cv_{\delta, 1l}(0) \left[ cs - (\lambda_2 + \lambda + \delta) + \lambda \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} \right] - c\lambda_1 v_{\delta, 2l}(0) \right\}$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2n + m + 1$ . Εάν οι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (2.54) είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων η  $\widehat{v}_{\delta, 1l}(s)$  γράφεται ως

$$\widehat{v}_{\delta, 1l}(s) = \sum_{j=1}^2 \frac{a_{1l}(j)}{s - r_j} + \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{b_{1l}(i)}{s + R_i}, \quad (2.55)$$

όπου

$$a_{1l}(j) = \frac{A_{1l}(r_j)/c^2}{c^2 \tau_2'(r_j) \prod_{i=1}^{2n+m} (r_j + R_i)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.56)$$

$$b_{1l}(i) = \frac{A_{1l}(-R_i)/c^2}{c^2 \tau_2(-R_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{2n+m} (R_j - R_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n + m. \quad (2.57)$$

Αντιστρέφοντας την εξίσωση (2.55) ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα ότι

$$v_{1l}(u) = \sum_{j=1}^2 a_{1l}(j) e^{r_j u} + \sum_{i=1}^{2n+m} b_{1l}(i) e^{-R_i u}, \quad u \geq 0, \quad l = 1, 2. \quad (2.58)$$

Με ανάλογο τρόπο, η εξίσωση (2.52) γράφεται ως

$$\widehat{v}_{\delta,2l}(s) = \frac{A_{2l}(s)/c^2}{\tau_2(s) \prod_{i=1}^{2n+m} (s + R_i)}, \quad (2.59)$$

όπου

$$A_{2l}(s) = p_n(s) q_m(s) \left\{ cv_{\delta,2l}(0) \left[ (cs - \lambda_1 - \lambda - \delta) + \lambda \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} \right] - c\lambda_2 \frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)} v_{\delta,1l}(0) \right\}$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2n + m + 1$ . Εάν οι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (2.59) είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η  $\widehat{v}_{\delta,2l}(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{v}_{\delta,2l}(s) = \sum_{j=1}^2 \frac{a_{2l}(j)}{s - r_j} + \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{b_{2l}(i)}{s + R_i},$$

όπου

$$a_{2l}(j) = \frac{A_{2l}(r_j)/c^2}{c^2 \tau_2'(r_j) \prod_{i=1}^{2n+m} (r_j + R_i)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.60)$$

$$b_{2l}(i) = \frac{A_{2l}(-R_i)/c^2}{c^2 \tau_2(-R_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{2n+m} (R_j - R_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n + m. \quad (2.61)$$

Αντιστρέφοντας ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα ότι

$$v_{2l}(u) = \sum_{j=1}^2 a_{2l}(j) e^{r_j u} + \sum_{i=1}^{2n+m} b_{2l}(i) e^{-R_i u}, \quad u \geq 0, \quad l = 1, 2. \quad (2.62)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (2.56), (2.57), (2.60), (2.61) τις αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,kl}(0) = 1_{(k=l)}$ , για  $k, l \in \{1, 2\}$ , από τις εξισώσεις (2.58) και (2.62) παίρνουμε άμεσα τη ζητούμενη σχέση (2.53). ■

## 2.4 Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων της Ενότητας 2.3. Αρχικά ορίζουμε τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο (2.41) και δείχνουμε ότι ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας το

προαναφερόμενο σύστημα και το ανάπτυγμα του Taylor προσδιορίζουμε ένα ομογενές σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για τη διαδικασία πλεονάσματος (2.41). Τέλος, η λύση του τελευταίου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Ενότητας 2.3.

Για  $0 \leq u \leq b$  και  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t), \quad 0 \leq u \leq b,$$

να είναι η παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας  $T_b$ , όπου  $D(t)$  είναι τα σωρευτικά μερίσματα που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο  $t$ . Ακόμη, ορίζουμε  $M(u, y, b)$  τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $D_{u,b}$  που δίνεται από τη σχέση

$$M(u, y, b) = \mathbb{E} [e^{yD_{u,b}} | U_b(0) = u],$$

με  $y$  τέτοιο ώστε η  $M(u, y, b)$  να συγχλίνει. Επιπλέον, θεωρούμε τη ροπή  $m$ -τάξης,  $m \in \mathbb{N}$ , της τ.μ.  $D_{u,b}$

$$W_m(u, b) = \mathbb{E} [D_{u,b}^m | U_b(0) = u],$$

με  $W_0(u, b) = 1$ .

Για τους ίδιους λόγους όπως και στην Ενότητα 2.2, ορίζουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση και τη ροπή  $m$ -τάξης,  $m \in \mathbb{N}$ , της τ.μ.  $D_{u,b}$  δοθέντος ένας εκθετικός χρόνος,  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$ , από τη δεύτερη κλάση κινδύνων έχει ήδη εμφανισθεί. Έτσι, για  $m \in \mathbb{N}$ , έχουμε ότι

$$M_1(u, y, b) = \mathbb{E} [e^{yD_{u,b}} | L_{11} = t, U_b(t) = u], \quad W_{m,1}(u, b) = \mathbb{E} [D_{u,b}^m | L_{11} = t, U_b(t) = u],$$

με  $W_{0,1}(u, b) = 1$ . Σημειώνουμε ότι για το αρχικό απόθεμα  $u$  ισχύει πάντα ο περιορισμός  $0 \leq u \leq b$  (διαφορετικά η διαφορά  $u - b$  καταβάλλεται ως μερίσμα).

Τέλος, συμβολίζουμε  $\frac{\partial}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  να είναι οι τελεστές των μερικών παραγώγων ως προς  $u$  και  $y$  αντίστοιχα.

**Θεώρημα 2.4.** Για  $0 \leq u \leq b$ , οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις  $M(u, y, b)$  και  $M_1(u, y, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} (c \frac{\partial}{\partial u} - \delta y \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_1))M(u, y, b) + \lambda \int_0^u M(u-x, y, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_1 M_1(u, y, b) + \lambda [1 - F_1(u)] = 0, \\ (c \frac{\partial}{\partial u} - \delta y \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_2))M_1(u, y, b) + \lambda \int_0^u M_1(u-x, y, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_2 \int_0^u M(u-x, y, b) f_2(x) dx + \lambda [1 - F_1(u)] + \lambda_2 [1 - F_2(u)] = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$



με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} M(u, y, b) |_{u=b} = yM(b, y, b), \quad \frac{\partial}{\partial u} M_1(u, y, b) |_{u=b} = yM_1(b, y, b). \quad (2.64)$$

Επίσης

$$\lim_{b \rightarrow \infty} M(u, y, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} M_1(u, y, b) = 1. \quad (2.65)$$

Απόδειξη. Για  $0 \leq u < b$ , θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$ , επαρκώς μικρό έτσι ώστε το πλεόνασμα να μην φτάνει το σημείο  $b$ . Όμοια με τους Albrecher, Mercé και Marmol (2005), και χρησιμοποιώντας όμοια διαδικασία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M(u, y, b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_1 dt) \mathbb{E} \left( e^{ye^{-\delta dt} D_{u+cdt}} | U_b(0) = u \right) \\ &\quad + \lambda_1 dt (1 - \lambda dt) \mathbb{E} \left( e^{ye^{-\delta dt} D_{u+cdt, b}} | L_{11} = t, U_b(dt) = u \right) \\ &\quad + \lambda dt (1 - \lambda_1 dt) \left( \int_0^{u+cdt} \mathbb{E} \left( e^{ye^{-\delta dt} D_{u+cdt-x, b}} | U_b(0) = u \right) f_1(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} f_1(x) dx \right) + o(dt) \\ &= (1 - (\lambda_1 + \lambda) dt) M(u + cdt, ye^{-\delta dt}, b) + \lambda_1 dt M_1(u + cdt, ye^{-\delta dt}, b) \\ &\quad + \lambda dt \left( \int_0^{u+cdt} M(u + cdt - x, ye^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + \int_{u+cdt}^{\infty} f_1(x) dx \right) + o(dt), \end{aligned}$$

από όπου χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης  $dt$ , διαιρώντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , προκύπτει άμεσα το πρώτο μέρος του μη ομογενούς συστήματος (2.63).

Κατά την ίδια λογική ακολουθία, όπως παραπάνω έχουμε,

$$\begin{aligned} M_1(u, y, b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_2 dt) M_1(u + cdt, ye^{-\delta dt}, b) \\ &\quad + \lambda dt (1 - \lambda_2 dt) \left( \int_0^{u+cdt} M_1(u + cdt - x, ye^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + \int_{u+cdt}^{\infty} f_1(x) dx \right) \\ &\quad + \lambda_2 dt (1 - \lambda dt) \left( \int_0^{u+cdt} M(u + cdt - x, ye^{-\delta dt}, b) f_2(x) dx + \int_{u+cdt}^{\infty} f_2(x) dx \right) \\ &\quad + o(dt). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  παίρνουμε άμεσα τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2.63).

Για  $u = b$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 M(b, y, b) &= (1 - (\lambda_1 + \lambda)dt) \mathbb{E} \left( e^{y(cdt + e^{-\delta dt} D_{b,b})} | U_b(0) = u \right) \\
 &\quad + \lambda_1 dt \mathbb{E} \left( e^{y(cdt + e^{-\delta dt} D_{b,b})} | L_{11} = t, U_b(dt) = u \right) \\
 &\quad + \lambda dt \left( \int_0^b \mathbb{E} \left( e^{ye^{-\delta dt} D_{b-x,b}} | U_b(0) = u \right) f_1(x) dx + \int_b^\infty f_1(x) dx \right) + o(dt) \\
 &= (1 - (\lambda + \lambda_1)dt) e^{ycdt} M(b, ye^{-\delta dt}, b) + \lambda_1 dt e^{ycdt} M_1(b, ye^{-\delta dt}, b) \\
 &\quad + \lambda dt \left( \int_0^b M(b-x, ye^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + \int_b^\infty f_1(x) dx \right) + o(dt),
 \end{aligned}$$

απ' όπου, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 0 &= -\delta y \frac{\partial}{\partial y} M(b, y, b) + [yc - (\lambda + \lambda_1)] M(b, y, b) + \lambda_1 M_1(b, y, b) \\
 &\quad + \lambda \int_0^b M(b-x, y, b) f_1(x) dx + \lambda [1 - F_1(b)].
 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση (2.63) για  $u = b$ , και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ροπογεννήτρια  $M(u, y, b)$  είναι συνεχής στο σημείο  $u = b$  παίρνουμε άμεσα την οριακή συνθήκη (2.64) για την  $M(u, y, b)$ .

Κατά όμοιο τρόπο, για την οριακή συνθήκη της ροπεγεννήτριας  $M_1(u, y, b)$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 M_1(b, y, b) &= (1 - (\lambda + \lambda_2)dt) e^{ycdt} M_1(b, ye^{-\delta dt}, b) \\
 &\quad + \lambda dt \left( \int_0^b M_1(b-x, ye^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + [1 - F_1(b)] \right) \\
 &\quad + \lambda_2 dt \left( \int_0^b M(b-x, ye^{-\delta dt}, b) f_2(x) dx + [1 - F_2(b)] \right) + o(dt),
 \end{aligned}$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
 0 &= -\delta y \frac{\partial}{\partial y} M_1(b, y, b) + [yc - (\lambda_2 + \lambda)] M_1(b, y, b) + \lambda \int_0^b M_1(b-x, y, b) f_1(x) dx \\
 &\quad + \lambda [1 - F_1(b)] + \lambda_2 \int_0^b M(b-x, y, b) f_2(x) dx + \lambda_2 [1 - F_2(b)].
 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση (2.63) για  $u = b$  και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της  $M_1(u, y, b)$  στο σημείο  $u = b$ , παίρνουμε άμεσα την οριακή συνθήκη (2.64) για την  $M_1(u, y, b)$ . Τέλος, οι οριακές συνθήκες (2.65) είναι αληθείς εξ' ορισμού των  $M(u, y, b)$  και  $M_1(u, y, b)$ . ■

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.4 μπορούμε να βρούμε το σύστημα των

ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι  $m$ -τάξης ροπές  $W_m(u, b)$  και  $W_{m,1}(u, b)$ .

**Πρόταση 2.6.** Για  $0 \leq u \leq b$  και  $m \geq 1$ , οι  $m$ -τάξης ροπές των σωρευτικών μερισμάτων  $W_m(u, b)$  και  $W_{m,1}(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_1) \right) W_m(u, b) + \lambda \int_0^u W_m(u-x, b) f_1(x) dx + \lambda_1 W_{m,1}(u, b) &= 0, \\ \left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda_2 + \lambda) \right) W_{m,1}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{m,1}(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_2 \int_0^u W_m(u-x, b) f_2(x) dx &= 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_m(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{m-1}(b, b), \quad \frac{\partial}{\partial u} W_{m,1}(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{m-1,1}(b, b). \quad (2.67)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{b \rightarrow \infty} W_m(u, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} W_{m,1}(u, b) = 0. \quad (2.68)$$

*Απόδειξη.* Από το ανάπτυγμα του Taylor για εκθετικές συναρτήσεις έχουμε ότι

$$M(u, y, b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_m(u, b), \quad M_1(u, y, b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_{m,1}(u, b). \quad (2.69)$$

Έτσι η εξίσωση (2.63) με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.69) γίνεται

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \left[ c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_1) \right] W_m(u, b) + \lambda_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_{m,1}(u, b) \\ &+ \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \int_0^u W_m(u-x, b) f_1(x) dx, \end{aligned}$$

απ' όπου εξισώνοντας του συντελεστές του  $y^m$  παίρνουμε άμεσα την πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.66).

Επίσης, από τις εξισώσεις (2.69) και (2.64) βρίσκουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \frac{\partial}{\partial u} W_m(u, b) \Big|_{u=b} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{y^m}{m!} W_{m-1}(u, b) \Big|_{u=b},$$

απ' όπου εξισώνοντας τους συντελεστές του  $y^m$  παίρνουμε την πρώτη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (2.67).

Κατά όμοιο τρόπο, από τις εξισώσεις (2.69) και (2.63) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \left[ c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_2) \right] W_{m,1}(u, b) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \int_0^u W_{m,1}(u-x, b) f_1(x) dx \\ &= -\lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \int_0^u W_m(u-x, b) f_2(x) dx, \end{aligned}$$

απ' όπου εξισώνοντας τους συντελεστές του  $y^m$  βρίσκουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2.66). Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η δεύτερη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (2.67) για την  $m$ -τάξης ροπή  $W_{m,1}(u, b)$  είναι αληθής. Τέλος, η επαλήθευση των οριακών συνθηκών (2.68) είναι εύκολο να γίνει χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.65) και (2.69). ■

**Παρατήρηση 2.4.** (i) Παίρνοντας  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ , τότε  $W_m(u, b) = W_{m,1}(u, b)$  και το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.66) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.45) του Πορίσματος 1.8 που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της  $m$ -τάξης ροπής της τ.μ.  $D_{u,b}$  για το κλασσικό μοντέλο.

(ii) Παίρνοντας  $\lambda \rightarrow 0$  και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στο (ii) της Παρατήρησης 2.2, τότε το σύστημα (2.66) ανάγεται στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση (1.43) του Θεωρήματος 1.15 για  $n = 2$  που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της  $m$ -τάξης ροπής της τ.μ.  $D_{u,b}$  για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

Για τη λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.66), θεωρούμε το ακόλουθο ομογενές σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων ως προς  $v_{\delta}$  και  $v_{\delta,1}$  για  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & cv'_{\delta}(u) - (\lambda + \lambda_1 + \bar{\delta}) v_{\delta}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta}(u-x) f_1(x) dx + \lambda_1 v_{\delta,1}(u) = 0, \\ & cv'_{\delta,1}(u) - (\lambda + \lambda_2 + \bar{\delta}) v_{\delta,1}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta,1}(u-x) f_1(x) dx \\ & \quad + \lambda_2 \int_0^u v_{\delta}(u-x) f_2(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

με  $\bar{\delta} = \delta m$ . Από τη μορφή του παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος παρατηρούμε ότι είναι όμοιες μορφής με το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.66) και έτσι από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, έπεται ότι η γενική λύση των  $W_m(u, b)$  και  $W_{m,1}(u, b)$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} & W_m(u, b) = \eta_{1,m}(b) v_{\delta,11}(u) + \eta_{2,m}(b) v_{\delta,12}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \\ & W_{m,1}(u, b) = \eta_{1,m}(b) v_{\delta,21}(u) + \eta_{2,m}(b) v_{\delta,22}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \end{aligned} \quad (2.71)$$

όπου  $[v_{\delta,21}^-(u), v_{\delta,21}^-(u)]^\top$ ,  $[v_{\delta,12}^-(u), v_{\delta,22}^-(u)]^\top$  με  $v_{\delta,ki}^-(0) = 1_{(k=i)}$  για  $k, l \in \{1, 2\}$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.70) με  $\eta_{1,m}(b) = W_m(0, b)$ ,  $\eta_{2,m}(b) = W_{m,1}(0, b)$  σταθερούς όρους οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες (2.67), δηλ. ως λύσεις του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \eta_{1,m}(b) v_{\delta,11}^-(b) + \eta_{2,m}(b) v_{\delta,12}^-(b) &= mW_{m-1}(b, b), \\ \eta_{1,m}(b) v_{\delta,21}^-(b) + \eta_{2,m}(b) v_{\delta,22}^-(b) &= mW_{m-1,1}(b, b). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Εφόσον το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.70) έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.47) της Ενότητας 2.3 (με  $\tilde{\delta} = \delta m$  αντί του  $\delta$ ), έπεται ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $[v_{\delta,21}^-(u), v_{\delta,21}^-(u)]^\top$ ,  $[v_{\delta,12}^-(u), v_{\delta,22}^-(u)]^\top$  βρίσκονται με βάση το Θεώρημα 2.5 της Ενότητας 2.3, θέτοντας  $\tilde{\delta} = \delta m$  αντί του  $\delta$ .

## 2.5 Ταυτότητα μερισμάτων-ποινής

Οι Gerber, Lin και Yang (2006) έδειξαν, για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, ότι οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων καθώς και οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu με και χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων, συνδέονται μεταξύ τους σύμφωνα με μια σχέση την οποία ονόμασαν «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» (dividends-penalty identity). Σε αυτή την ενότητα δειχνουμε μια ανάλογη «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων. Θα πρέπει να τονισθεί ότι η απόδειξη της παραπάνω σχέσης στους Gerber, Lin και Yang (2006) βασίζεται στο γεγονός ότι στο κλασσικό μοντέλο η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται για κάθε χρόνο εμφάνισης των κινδύνων. Όμως, στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, λόγω της υπόθεσης ότι οι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων από τη δεύτερη κλάση είναι κατανομημένοι σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang, η διαδικασία πλεονάσματος δεν ανανεώνεται για κάθε χρόνο εμφάνισης των κινδύνων. Έτσι η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την απόδειξη της «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής», στην παρούσα ενότητα είναι διαφορετική από αυτή των Gerber, Lin και Yang (2006).

Για την απόδειξη της «ταυτότητας μερισμάτων-ποινής» στηρίζομαστε στις συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\Phi_{ij}(u)$ , για  $i, j = 1, 2$ , όπως ορίζονται στις εξισώσεις (2.10) και (2.11) της Ενότητας 2.2. Επιπλέον, θεωρούμε την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος (2.41) κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος και ορίζουμε

$$\Phi_{b,i1}(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T_b} w(U(T_b^-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=i)} | U_b(0) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b, i = 1, 2,$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι το μέγεθος της ζημιάς που προκαλεί την χρεοκοπία προέρχεται από τη δεύτερη κλάση  $i = 1, 2$ . Επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση των

Gerber-Shiu δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος,  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$ , από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί

$$\Phi_{b,i2}(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta(T_b-t)} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=i)} | L_{i1} = t, U_b(t) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b, i = 1, 2.$$

Σημειώνουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής που ορίζονται από τις εξισώσεις (2.42) και (2.43), αναλύονται ως  $\Phi_b(u) = \Phi_{b,11}(u) + \Phi_{b,21}(u)$  και  $\Phi_{b,1}(u) = \Phi_{b,12}(u) + \Phi_{b,22}(u)$  αντίστοιχα για  $0 \leq u \leq b$ .

Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της Ενότητας 2.3, μπορεί να δειχθεί ότι, κάτω από την υπόθεση συνέχειας των συναρτήσεων  $w_i(u)$  στο σημείο  $u$ , για  $i = 1, 2$ , οι συναρτήσεις  $\Phi_{b,i1}(u)$  και  $\Phi_{b,i2}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $0 \leq u \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c\Phi'_{b,i1}(u) &= (\lambda + \lambda_1 + \delta)\Phi_{b,i1}(u) - \lambda \int_0^u \Phi_{b,i1}(u-x)f_1(x)dx - \lambda_1\Phi_{b,i2}(u) - \lambda w_1(u)1_{(i=1)}, \\ c\Phi'_{b,i2}(u) &= (\lambda + \lambda_2 + \delta)\Phi_{b,i2}(u) - \lambda \int_0^u \Phi_{b,i2}(u-x)f_1(x)dx - \lambda_2 \int_0^u \Phi_{b,i1}(u-x)f_2(x)dx \\ &\quad - \lambda w_1(u)1_{(i=1)} - \lambda_2 w_2(u)1_{(i=2)}, \end{aligned} \tag{2.73}$$

με οριακές συνθήκες

$$\Phi'_{b,ij}(b) = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.74}$$

Για κάθε  $i = 1, 2$ , η λύση του παραπάνω μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος, εξαρτάται από τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (2.47). Έστω  $v_\delta(u) = (v_{\delta,ij}(u))_{i,j=1,2}$ ,  $0 \leq u < \infty$ , να είναι ένας  $2 \times 2$  πίνακας, του οποίου οι στήλες του αποτελούν λύσεις του συστήματος (2.47) με οριακές συνθήκες  $v_\delta(0) = \mathbf{I}_2$ , όπου  $\mathbf{I}_2$  είναι ο  $2 \times 2$  ταυτοτικός πίνακας. Επίσης, έστω  $\vec{\Phi}_i(u) = (\Phi_{i1}(u), \Phi_{i2}(u))^T$ ,  $0 \leq u < \infty$  και  $\vec{\Phi}_{b,i}(u) = (\Phi_{b,i1}(u), \Phi_{b,i2}(u))^T$ ,  $0 \leq u \leq b$ , για  $i = 1, 2$ . Για κάθε  $i = 1, 2$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\Phi_{i1}(u)$  και  $\Phi_{i2}(u)$ , ικανοποιούν το ίδιο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που δίνεται από τη σχέση (2.73) για  $0 \leq u < \infty$  [βλ. εξισώσεις (2.2)-(2.5) στους Zhang, Li και Yang (2009)]. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία όπως οι Lu και Li (2009), συνεπάγεται ότι η γενική λύση του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.73) για  $i = 1, 2$ , δίνεται, σε μορφή πινάκων, από τη σχέση

$$\vec{\Phi}_{b,i}(u) = \vec{\Phi}_i(u) + v_\delta(u)\vec{\eta}_i(b), \quad 0 \leq u \leq b, i = 1, 2, \tag{2.75}$$

όπου το διάνυσμα  $\vec{\eta}_i(b) = \vec{\Phi}_{b,i}(0) - \vec{\Phi}_i(0)$ , για  $i = 1, 2$  υπολογίζεται με βάση τις οριακές συνθήκες (2.74) και την εξίσωση (2.75). Η εξίσωση (2.74) σε μορφή πινάκων γράφεται ως  $\vec{\Phi}'_{b,i}(b) = \vec{\mathbf{0}}_2$ , για  $i = 1, 2$ , όπου  $\vec{\mathbf{0}}_2$  είναι ένα  $2 \times 1$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία. Έτσι το

διάλυση  $\bar{\eta}_i(b)$  μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας το γραμμικό σύστημα  $\bar{\Phi}'_i(b) + \nu'_\delta(b)\bar{\eta}_i(b) = \bar{0}_2$ , για  $i = 1, 2$ . Έτσι έπεται ότι η εξίσωση (2.75) γίνεται

$$\bar{\Phi}_{b,i}(u) = \bar{\Phi}_i(u) - \nu_\delta(u)[\nu'_\delta(b)]^{-1}\bar{\Phi}'_i(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (2.76)$$

Τώρα, θεωρούμε τους  $2 \times 2$  πίνακες  $\Phi(u) = (\bar{\Phi}_1(u), \bar{\Phi}_2(u)) = (\bar{\Phi}_{ij}(u))_{i,j=1,2}^\top$  και  $\Phi_b(u) = (\bar{\Phi}_{b,1}(u), \bar{\Phi}_{b,2}(u)) = (\bar{\Phi}_{b,ij}(u))_{i,j=1,2}^\top$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.76), έπεται ότι η ακόλουθη σχέση είναι αληθής

$$\Phi_b(u) = \Phi(u) - \nu_\delta(u)[\nu'_\delta(b)]^{-1}\Phi'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.77)$$

Επιπλέον ορίζουμε

$$W_{i1}(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}1_{(J=i)}|U_b(0) = u], \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι η χρεοκοπία προκαλείται από μια αποζημίωση από την κλάση  $i = 1, 2$ . Επίσης, ορίζουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι η χρεοκοπία προκαλείται από μια αποζημίωση από την κλάση  $i = 1, 2$  και ότι ένας εκθετικός χρόνος  $\{L_{i1}\}_{i \geq 1}$  από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί

$$W_{i2}(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}1_{(J=i)}|L_{11} = t, U_b(t) = u], \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2.$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες παρούσες αξίες των σωρευτικών μερισμάτων  $W_1(u, b)$  και  $W_{1,1}(u, b)$  (που ορίστηκαν στην Ενότητα 2.4) μπορούν να γραφούν ως  $W_1(u, b) = W_{11}(u, b) + W_{21}(u, b)$  και  $W_{1,1}(u, b) = W_{12}(u, b) + W_{22}(u, b)$ . Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης των Θεωρημάτων 2.4 και 2.6 της Ενότητας 2.4 μπορεί να δείχθει ότι οι  $W_{i1}(u, b)$  και  $W_{i2}(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο ολοκληρο-διαφορικό σύστημα, για  $i = 1, 2$  και  $0 \leq u \leq b$ ,

$$\begin{aligned} cW'_{i1}(u, b) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)W_{i1}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{i1}(u-x, b)f_1(x)dx + \lambda_1 W_{i2}(u, b) &= 0, \\ cW'_{i2}(u, b) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)W_{i2}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{i2}(u-x, b)f_1(x)dx \\ &+ \lambda_2 \int_0^u W_{i1}(u-x, b)f_2(x)dx &= 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_{ij}(u, b) \Big|_{u=b} = 1_{(i=j)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.79)$$

Έστω  $\bar{W}_i(u, b) = (W_{i1}(u, b), W_{i2}(u, b))^T$ , για  $0 \leq u \leq b$  και  $i = 1, 2$ . Τότε, όμοια με τη μεθοδολογία της Ενότητας 6 των Lu και Li (2009) [βλ. επίσης και την μεθοδολογία του Κεφ. ], έπεται ότι η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.78) για  $i = 1, 2$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{W}_i(u, b) = v_\delta(u) \bar{W}_i(0, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2, \quad (2.80)$$

όπου το διάνυσμα  $\bar{W}_i(0, b)$  για  $i = 1, 2$  υπολογίζεται με βάση τις οριακές συνθήκες (2.79) και την εξίσωση (2.80). Η εξίσωση (2.79) σε μορφή πινάκων δίνεται από την σχέση  $\bar{W}_i'(b, b) = \mathbf{e}_i$ , για  $i = 1, 2$ , όπου  $\mathbf{e}_i$  είναι η  $i$ -στη στήλη ενός  $2 \times 2$  ταυτοτικού πίνακα  $\mathbf{I}_2$ . Έτσι, από την εξίσωση (2.80) συνεπάγεται ότι

$$\bar{W}_i(u, b) = v_\delta(u) [v'_\delta(b)]^{-1} \mathbf{e}_i, \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (2.81)$$

Τώρα, θεωρώντας τον  $2 \times 2$  πίνακα  $\mathbf{W}(u, b) = (\bar{W}_1(u, b), \bar{W}_2(u, b)) = (W_{ij}(u, b))_{i,j=1,2}^T$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.81) έχουμε ότι

$$\mathbf{W}(u, b) = v_\delta(u) [v'_\delta(b)]^{-1} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = v_\delta(u) [v'_\delta(b)]^{-1} \mathbf{I}_2 = v_\delta(u) [v'_\delta(b)]^{-1}. \quad (2.82)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.77) και (2.82), παίρνουμε την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» όπως δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.5.** Για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων από τη δεύτερη κλάση ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(2) κατανομή, η ακόλουθη «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» είναι αληθής,

$$\Phi_b(u) = \Phi(u) - \mathbf{W}(u, b) \Phi'(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.83)$$

με  $w_j(u)$ , για  $j = 1, 2$ , όπως δίνονται από την εξίσωση (2.14), και είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς  $u$ .

## 2.6 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, της Ενότητας 2.1, κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, γενικεύοντας τις Ενότητες 2.2 και 2.3.

Αρχικά εισάγουμε το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όταν τα ασφάλιστρα που εισπράττονται είναι συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού  $u$ . Κάτω από αυτή την υπόθεση



δείχνουμε πως οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Ειδική περίπτωση της παραπάνω επέκτασης αποτελεί το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων. Τότε, από τα παραπάνω σύστημα παίρνουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων. Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε κατάλληλα το παραπάνω σύστημα και δείχνουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις οι οποίες λύνονται αναδρομικά.

Έστω  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  η διαδικασία πλεονάσματος κατά την χρονική στιγμή  $t$ , η οποία δίνεται από την σχέση

$$dU(t) = c(U(t))dt - dS(t), \quad t \geq 0, \quad (2.84)$$

όπου  $u = U(0)$  το αρχικό απόθεμα και  $c(U(t))$  το ασφάλιστρο (ο ρυθμός εισπραξης ασφαλίστρου) κατά τον χρόνο  $t$ , με  $c(x)$  μία θετική πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε  $\int_0^t [c(x)]^{-1} dx < \infty$ , για  $t \geq 0$  και  $\int_0^\infty [c(x)]^{-1} dx = \infty$ . Επιπλέον, η στοχαστική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων  $\{S(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι ακριβώς η ίδια με αυτή της Ενότητας 2.1, όπως δίνεται στην σχέση (2.2).

Έστω  $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$  ορίζουμε

$$\phi(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u \right), \quad u \geq 0, \quad (2.85)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο (2.84), όπου  $T$ ,  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$  και  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  έχουν την ίδιο ορισμό και ερμηνεία όπως στον Ορισμό 1.6.

Επίσης για τους ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν στην Ενότητα 2.2, ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος ότι ένας εκθετικός χρόνος,  $\{L_{i1}\}_{i=1,2}$ , από την δεύτερη κλάση κινδύνων έχει ήδη εμφανισθεί, και δίνεται από τη σχέση

$$\phi_1(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(t) = u, L_{11} = t \right). \quad (2.86)$$

Στο επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

**Θεώρημα 2.6.** Για  $u \geq 0$ , εάν η συνάρτηση  $c(u)$  είναι διαφορίσιμη ως προς  $u$ , τότε οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των

ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c(u)\phi'(u) &= -\lambda_1\phi_1(u) + (\lambda + \lambda_1 + \delta)\phi(u) - \lambda \int_0^u \phi(u-x)f_1(x)dx - \lambda w_1(u), \\ c(u)\phi_1'(u) &= -\lambda_2 \int_0^u \phi(u-x)f_2(x)dx - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda + \lambda_2 + \delta)\phi_1(u) \\ &\quad - \lambda \int_0^u \phi_1(u-x)f_1(x)dx - \lambda w_1(u) \end{aligned} \quad (2.87)$$

όπου  $w_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , δίνονται από την εξίσωση (2.14).

Απόδειξη. Έστω  $M = W_1 \wedge L_{11}$ . Τότε δεσμεύοντας ως προς ενδεχόμενα  $\{M = t, M = L_{11}\}$  και  $\{M = t, M = W_1\}$  και το αντίστοιχο μέγεθος της ζημιάς, για  $u \geq 0$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(M = t, M = L_{11}) \phi_1(U(t)) dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(M = t, M = W_1) \left( \int_0^{U(t)} \phi(U(t) - x) f_1(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{U(t)}^\infty w(U(t), x - U(t)) f_1(x) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Εφόσον,  $\mathbb{P}(M = W_1) = \mathbb{P}(W_1 < L_{11}) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}$ ,  $\mathbb{P}(M = L_{11}) = \mathbb{P}(W_1 > L_{11}) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$  και  $\mathbb{P}(M > t | M = W_1) = \mathbb{P}(M > t | M = L_{11}) = e^{-(\lambda + \lambda_1)t}$ , η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\phi(u) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda + \lambda_1 + \delta)t} \phi_1(U(t)) dt + \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda + \lambda_1 + \delta)t} \xi_1(U(t)) dt, \quad (2.88)$$

όπου  $\xi_j(u) = \int_0^u \phi(u-x)f_j(x)dx + w_j(u)$ ,  $j = 1, 2$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $U(t)$  είναι μια αύξουσα και διαφορίσιμη συνάρτηση, μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής  $s = U(t)$  στην εξίσωση (2.88). Εφόσον  $dU(t) = c(U(t))dt$  και  $U(0) = u$  συνεπάγεται ότι  $ds = c(s)dt$  και ότι  $t = \int_u^s [c(x)]^{-1} dx$ , και συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \lambda_1 \int_u^\infty e^{-(\lambda + \lambda_1 + \delta) \int_u^s [c(x)]^{-1} dx} \phi_1(s) [c(s)]^{-1} ds \\ &\quad + \lambda \int_u^\infty e^{-(\lambda + \lambda_1 + \delta) \int_u^s [c(x)]^{-1} dx} \xi_1(s) [c(s)]^{-1} ds. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $u$  βρίσκουμε την πρώτη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του συστήματος (2.87) για την  $\phi(u)$ .

Έστω  $Z = W_1 \wedge L_{12}$ . Τότε, δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα  $\{Z = t, Z = L_{12}\}$  και

$\{Z = t, Z = W_1\}$  και το αντίστοιχο μέγεθος της ζημιάς, έχουμε ότι για  $u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z = t, Z = L_{12}) \left( \int_0^{U(t)} \phi(u-x) f_2(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{U(t)}^\infty w(U(t), x - U(t)) f_2(x) dx \right) \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z = t, Z = W_1) \left( \int_0^{U(t)} \phi_1(u-x) f_1(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{U(t)}^\infty w(U(t), x - U(t)) f_1(x) dx \right) \\
&= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \xi_2(U(t)) dt + \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta)t} \mu(U(t)) dt, \quad (2.89)
\end{aligned}$$

όπου  $\mu(u) = \int_0^u \phi_1(u-x) f_1(x) dx + w_1(u)$ . Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής  $s = U(t)$  στην εξίσωση (2.89) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \lambda_2 \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta) \int_u^s c(x) dx} \xi_2(s) [c(s)]^{-1} ds \\
&\quad + \lambda \int_u^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2+\delta) \int_u^s c(x) dx} \mu(s) [c(s)]^{-1} ds.
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $u$  παίρνουμε άμεσα την δεύτερη ολοκληρω-  
διαφορική εξίσωση του συστήματος (2.87) για την  $\phi_1(u)$ . ■

Τώρα, όμοια με την Ενότητα 1.4.4 [βλ. επίσης Albrecher και Hantinger (2007), Lin και Sendova (2007), Yang και Zhang (2007)], θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων με  $n$ -επίπεδα,  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1} < b_n = \infty$ . Υποθέτουμε ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται με ρυθμό  $c_i$  όταν το πλεόνασμα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων  $b_{i-1}$  και  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Κάτω από αυτή την υπόθεση η διαδικασία πλεονάσματος (2.84) τροποποιείται σε  $U_b(t)$ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$dU_b(t) = c_i dt - dS(t), \quad b_{i-1} \leq U_b(t) < b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.90)$$

όπου οι σωρευτικές αποζημιώσεις,  $S(t)$ , δίνονται από τη σχέση (2.2). Επίσης, υποθέτουμε, για  $i = 1, \dots, n$ , ότι  $c_i > \lambda m_1 + [\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)] m_2$  που συνεπάγεται τη ύπαρξη ενός περιθωρίου ασφαλείας  $\theta_i$ , τέτοιο ώστε  $1/(1 + \theta_i) = [\lambda m_1 + \lambda_1 \lambda_2 m_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)] / c_i$ . Επιπλέον, για την διαδικασία πλεονάσματος (2.90) ορίζουμε  $T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}$  να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$

$$\phi(u; \mathbf{b}) = \left( e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U(T_b)|) \mathbf{1}_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u \right),$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για την διαδικασία πλεονάσματος (2.90) κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Επίσης, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 2.2, ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, δοθέντος ότι ένα εκθετικός χρόνος,  $L_{i1}$ ,  $i = 1, 2$ , από την δεύτερη κλάση έχει εμφανισθεί, και δίνεται από τη σχέση

$$\phi_1(u; \mathbf{b}) = \left( e^{-\delta(T_b - t)} w(U_b(T_b -), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} |U_b(t) = u, L_{11} = t \right).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.6, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u, \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u, \mathbf{b})$ , ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.7.** Για  $b_{i-1} < u < b_i$  και  $i = 1, 2, \dots, n$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u, \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u, \mathbf{b})$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c_i \phi'(u; \mathbf{b}) &= -\lambda_1 \phi_1(u; \mathbf{b}) + (\lambda + \lambda_1 + \delta) \phi(u; \mathbf{b}) - \lambda \int_0^u \phi(u-x, \mathbf{b}) f_1(x) dx \\ &\quad - \lambda w_1(u), \\ c_i \phi_1'(u; \mathbf{b}) &= -\lambda_2 \int_0^u \phi(u-x, \mathbf{b}) f_2(x) dx - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda + \lambda_2 + \delta) \phi_1(u; \mathbf{b}) \\ &\quad - \lambda \int_0^u \phi_1(u-x; \mathbf{b}) f_1(x) dx - \lambda w_1(u), \end{aligned} \quad (2.91)$$

με οριακές συνθήκες

$$c_{i+1} \lim_{u \rightarrow b_i^+} \phi'(u; \mathbf{b}) = c_i \lim_{u \rightarrow b_i^-} \phi'(u; \mathbf{b}), \quad c_{i+1} \lim_{u \rightarrow b_i^+} \phi_1'(u; \mathbf{b}) = c_i \lim_{u \rightarrow b_i^-} \phi_1'(u; \mathbf{b}), \quad (2.92)$$

όπου  $w_j(u)$  για  $j = 1, 2$  δίνονται από την εξίσωση (2.14).

*Απόδειξη.* Αντικαθιστώντας, με βάση την υπόθεση για την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων,  $c(u) = c_i$  όταν  $b_{i-1} \leq U_b(t) < b_i$  στο Θεώρημα 2.6, παίρνουμε άμεσα το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91). Για τις οριακές συνθήκες (2.92), από την μορφή των εξισώσεων (2.88) και (2.89), παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , είναι συνεχείς ως προς  $u$ . Έτσι, κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  είναι συνεχείς ως προς  $u$ , ακόμη και στα σημεία όπου  $u = b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Επιπλέον, οι συναρτήσεις  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  δεν είναι διαφορίσιμες στα σημεία  $b_i$ , αλλά σε στα αυτά υπάρχουν τα πλευρικά όρια της αριστερής και δεξιάς παραγώγου, αντίστοιχα. Τότε, από το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91) και την συνέχεια των συναρτήσεων  $\phi(u, \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u, \mathbf{b})$  στα σημεία  $b_i$ , έχουμε ότι οι οριακές συνθήκες (2.92) είναι αληθείς. ■

Η ύπαρξη της δεξιάς παραγώγου των συναρτήσεων  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  μας επιτρέπει να ορίσουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91) για κάθε  $u$ , τέτοιο ώστε να οι συναρτήσεις  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  να είναι παραγωγίσιμες από δεξιά. Έτσι, στο Θεώρημα 2.7 αντικαθιστούμε τους περιορισμούς του αρχικού κεφαλαίου σε κάθε επίπεδο από  $b_{i-1} < u < b_i$  σε  $b_{i-1} \leq u < b_i$  σε  $i = 1, \dots, n$ . Συνεπώς, για τους παραγώγους των συναρτήσεων  $\phi'(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1'(u; \mathbf{b})$  στην εξίσωση (2.91) στα σημεία  $u = b_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , υποθέτουμε ότι είναι παράγωγοι από δεξιά.

**Παρατήρηση 2.5.** (i) Για  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ , τότε  $\phi(u, \mathbf{b}) = \phi_1(u, \mathbf{b})$  και το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.91) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (1.50) του Πόρισματος 1.9 που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

(ii) Παίρνοντας  $\lambda \rightarrow 0$  και εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στο (ii) της Παρατήρησης 2.2, τότε το σύστημα (2.91) ανάγεται στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση (1.48) του Θεωρήματος 1.16 για  $n = 2$  που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang(2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

Για την ανάλυση του συστήματος των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91), χρειαζόμαστε πρώτα τα παρακάτω βοηθητικά αποτελέσματα.

Ανακαλώντας την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη κάποιας στρατηγικής μερισμάτων [βλ. Λήμμα 2.2] παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα για την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερών μερισμάτων.

**Λήμμα 2.4.** Για  $\delta > 0$ , η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο (2.90) δίνεται από τη σχέση

$$\ell_i(s) = \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.93)$$

με  $\ell_i(s) = [c_i s + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_1 + \delta)] [c_i s + \lambda \widehat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_2 + \delta)]$ . Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , η εξίσωση (2.93) έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες,  $r_{1i}(\delta)$  και  $r_{2i}(\delta)$ , με  $r_{1i}(\delta) \neq r_{2i}(\delta)$ .

Συμβολίζοντας την μικρότερη εκ των δύο ριζών με  $r_{1i}(\delta)$ , τότε έχουμε ότι  $\lim_{\delta \rightarrow 0} r_{1i}(\delta) = 0$ . Στο εξής θα συμβολίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης (2.93),  $r_{ji}(\delta) \equiv r_{ji}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Επίσης, για την ανάλυση του συστήματος των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91) ορίζουμε τους τελεστές

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i &= \prod_{j=1}^2 T_{r_{ji}} = \frac{T_{r_{2i}} - T_{r_{1i}}}{r_{1i} - r_{2i}}, \\ \mathcal{M}_{1,i} &= \lambda c_i T_{r_{1i}} + \lambda(\lambda + \lambda_2 + \delta - c_i r_{2i} - \lambda \widehat{f}_1(r_{1i})) \mathcal{S}_i, \\ \mathcal{M}_{2,i} &= \frac{\lambda}{\lambda_1} (c_i r_{2i} + \lambda \widehat{f}_1(r_{2i}) - \lambda - \lambda_1 - \lambda_2 - \delta) \mathcal{S}_i, \end{aligned}$$

για  $i = 1, 2, \dots, n$ , με  $T_r$  να είναι ο τελεστής που δίνεται από τον Ορισμό 1.8. Επίσης υποθέτουμε ότι  $T_{rki} w_j(u) < \infty$ , (και συνεπώς  $\delta_i w_j(u) < \infty$ ),  $i = 1, \dots, n$ ,  $k, j = 1, 2$ .

Τώρα, όμοια με την μεθοδολογία των Lin και Sendova (2007), για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου [βλ. επίσης Yang και Zhang (2007), για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου] στο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.91), «χαλαρώνουμε» τον περιορισμό  $b_{i-1} \leq u < b_i$  σε  $b_{i-1} \leq u$  και ορίζουμε  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  (με  $T_{rj} \Phi_i(b_{i-1}) < \infty$ ,  $T_{rji} \Phi_{1,i}(b_{i-1}) < \infty$ ) να ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $i = 1, \dots, n$  και  $u \geq b_{i-1}$ ,

$$\begin{aligned} c_i \Phi_i'(u) &= -\lambda_1 \Phi_{1,i}(u) + (\lambda + \lambda_1 + \delta) \Phi_i(u) - \lambda \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) f_1(x) dx \\ &\quad - \lambda \int_{u-b_{i-1}}^u \phi(u-x) f_1(x) dx - \lambda w_1(u), \quad u \geq b_{i-1} \\ c_i \Phi_{1,i}'(u) &= -\lambda_2 \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) f_2(x) dx - \lambda_2 \int_{u-b_{i-1}}^u \phi(u-x) f_2(x) dx \\ &\quad - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda + \lambda_2 + \delta) \Phi_{1,i}(u) - \lambda w_1(u) \\ &\quad - \lambda \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_{1,i}(u-x) f_1(x) dx - \lambda \int_{u-b_{i-1}}^u \phi_1(u-x) f_1(x) dx. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Τότε, η λύση του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.91), με οριακές συνθήκες (2.92), εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό των συναρτήσεων  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$ , που αποτελούν λύσεις του συστήματος (2.94), καθώς επίσης και από τη λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος, για  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} c_i v_i'(u) - (\lambda + \lambda_1 + \delta) v_i(u) + \lambda \int_0^{u-b_{i-1}} v_i(u-x) f_1(x) dx + \lambda_1 v_{1,i}(u) &= 0, \\ c_i v_{1,i}'(u) + \lambda_2 \int_0^{u-b_{i-1}} v_i(u-x) f_2(x) dx + \lambda \int_0^{u-b_{i-1}} v_{1,i}(u-x) f_1(x) dx \\ &\quad - (\lambda + \lambda_2 + \delta) v_{1,i}(u) = 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

Όμοια με τη μεθοδολογία της Ενότητας 2.3 έχουμε ότι η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.95) έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{pmatrix} v_i(u) \\ v_{1,i}(u) \end{pmatrix} = k_{i,1} \begin{pmatrix} v_{i,11}(u) \\ v_{i,21}(u) \end{pmatrix} + k_{i,2} \begin{pmatrix} v_{i,12}(u) \\ v_{i,22}(u) \end{pmatrix}, \quad u \geq b_{i-1}, \quad (2.96)$$

όπου  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.95) και  $k_{i,1}$ ,  $k_{i,2}$  σταθεροί αριθμοί. Ο υπολογισμός των  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$  εξαρτάται άμεσα από την

επιλογή των αρχικών συνθηκών για τις  $v_{i,kl}(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k, l \in \{1, 2\}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες  $v_{i,kl}(b_{i-1}) = 1_{(i=j)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k, l \in \{1, 2\}$ . Τότε, είναι εύκολο να δούμε ότι κάτω από αυτές τις αρχικές συνθήκες οι  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Τότε από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. επίσης και την μεθοδολογία της Ενότητας 2.3], η γενική λύση του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.91), δίνεται από τη σχέση, για  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}\phi(u; \mathbf{b}) &= \Phi_i(u) + \eta_{i,1}v_{i,11}(u) + \eta_{i,2}v_{i,12}(u), & b_{i-1} \leq u \leq b_i, \\ \phi_1(u; \mathbf{b}) &= \Phi_{1,i}(u) + \eta_{i,1}v_{i,21}(u) + \eta_{i,2}(b)v_{i,22}(u), & b_{i-1} \leq u \leq b_i,\end{aligned}\quad (2.97)$$

όπου  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  είναι οι λύσεις του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.94) και  $\eta_{i,1}, \eta_{i,2}$  σταθεροί όροι οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες της εξίσωσης (2.92). Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις  $\Phi_1(u)$  και  $\Phi_{1,1}(u)$  είναι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη κάποιας μερισματικής στρατηγικής, οι οποίες μελετήθηκαν στην Ενότητα 2.2. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τόσο τις συναρτήσεις  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  όσο και τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$ . Ξεκινώντας λοιπόν από τον υπολογισμό των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  στη συνέχεια θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, ότι οι  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις οι λύσεις των οποίων προκύπτουν από το Θεώρημα 1.9.

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1}$  και  $Q_i(y) = Q_i(u - b_{i-1}) = \Phi_i(u)$ ,  $Q_{1,i}(y) = Q_{1,i}(u - b_{i-1}) = \Phi_{1,i}(u)$  το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (2.94) γίνεται, για  $y \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}c_i Q'_i(y) &= -\lambda_1 Q_{1,i}(y) + (\lambda + \lambda_1 + \delta) Q_i(y) - \lambda \int_0^y Q_i(y-x) f_1(x) dx - A_i(y), \\ c_i Q'_{1,i}(y) &= -\lambda_2 \int_0^y Q_i(y-x) f_2(x) dx + (\lambda + \lambda_2 + \delta) Q_{1,i}(y) \\ &\quad - \lambda \int_0^y Q_{1,i}(y-x) f_1(x) dx - A_{1,i}(y),\end{aligned}\quad (2.98)$$

όπου  $A_i(y) = \lambda \int_0^{b_i-1} \phi(x) f_1(y+b_{i-1}-x) dx + \lambda w_1(y+b_{i-1})$  και  $A_{1,i}(y) = \lambda_2 \int_0^{b_i-1} \phi(x) f_2(y+b_{i-1}-x) dx + \lambda_2 w_2(y+b_{i-1}) + \lambda \int_0^{b_i-1} \phi_1(x) f_1(y+b_{i-1}-x) dx + \lambda w_1(y+b_{i-1})$ .

Επιπλέον, για  $\Re(s) \geq 0$ , ορίζουμε  $\widehat{Q}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sy} Q_i(y) dy$ ,  $\widehat{Q}_{1,i}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} Q_{1,i}(y) dy$ ,  $\widehat{A}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sy} A_i(y) dy$ , και  $\widehat{A}_{1,i}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} A_{1,i}(y) dy$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $Q_i(y)$ ,  $Q_{1,i}(y)$ ,  $A_i(y)$  και  $A_{1,i}(y)$ , αντίστοιχα, όπου από την μορφή

των  $A_i(y)$  και  $A_{1,i}(y)$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\widehat{A}_i(s) &= \lambda \int_0^{b_{i-1}} \phi(x) T_s f_1(b_{i-1} - x) dx + \lambda T_s w_1(b_{i-1}), \\ \widehat{A}_{1,i}(s) &= \lambda_2 \int_0^{b_{i-1}} \phi(x) T_s f_2(b_{i-1} - x) dx + \lambda_2 T_s w_2(b_{i-1}) \\ &\quad + \lambda \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(x) T_s f_1(b_{i-1} - x) dx + \lambda T_s w_1(b_{i-1}).\end{aligned}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις της σχέσης (2.98) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$  έχουμε ότι, για  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_i(s) &= \frac{[c_i s - (\lambda + \lambda_2 + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)][c_i Q_i(0) - \widehat{A}_i(s)] - \lambda_1 [c_i Q_{1,i}(0) - \widehat{A}_{1,i}(s)]}{\ell_i(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}, \\ \widehat{Q}_{1,i}(s) &= \frac{[c_i s - (\lambda + \lambda_1 + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)][c_i Q_{1,i}(0) - \widehat{A}_{1,i}(s)] - \lambda_2 \widehat{f}_2(s) [c_i Q_i(0) - \widehat{A}_i(s)]}{\ell_i(s) - \lambda_1 \lambda_2 \widehat{f}_2(s)}.\end{aligned}\quad (2.99)$$

Για να ολοκληρώσουμε την λύση των  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$  της εξίσωσης (2.99), πρέπει να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές  $Q_i(0)$ ,  $Q_{1,i}(0)$ . Από το γεγονός ότι  $T_{r_{ji}} \Phi_i(b_{i-1}) < \infty$ ,  $T_{r_{ji}} \Phi_{1,i}(b_{i-1}) < \infty$ , έπεται ότι  $\widehat{Q}_i(r_{ji}) < \infty$ ,  $\widehat{Q}_{1,i}(r_{ji}) < \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Έτσι, για  $\Re(s) \geq 0$ , ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg,  $r_{1i}$  και  $r_{2i}$ , είναι επίσης και ρίζες του αριθμητή της  $\widehat{Q}_i(s)$  στην (2.99), δηλ. ισχύει ότι

$$[c_i r_{ji} - (\lambda + \lambda_2 + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(r_{ji})][c_i Q_i(0) - \widehat{A}_i(r_{ji})] - \lambda_1 [c_i Q_{1,i}(0) - \widehat{A}_{1,i}(r_{ji})] = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.100)$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα ως προς  $Q_i(0)$ ,  $Q_{1,i}(0)$ , παίρνουμε ότι για  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}Q_i(0) &= \frac{T_{r_{2i}} A_i(0)}{c_i} + \frac{\lambda_1 \mathcal{S}_i A_{1,i}(0) - [c_i r_{1i} + (\lambda + \lambda_2 + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(r_{1i})] \mathcal{S}_i A_i(0)}{c_i (c_i - \lambda \mathcal{S}_i f_1(0))}, \\ Q_{1,i}(0) &= \frac{[c_i r_{2i} - (\lambda + \lambda_2 + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(r_{2i})][c_i Q_i(0) - \widehat{A}_i(r_{2i})] + \lambda_1 \widehat{A}_{1,i}(r_{2i})}{\lambda_1 c_i}.\end{aligned}\quad (2.101)$$

Επιπλέον, από τον ορισμό των τελεστών  $T_r$  είναι εύκολο να δούμε ότι για  $\ell = \begin{cases} 1, 2 & , k = 1 \\ 2 & , k = 2 \end{cases}$ , οι ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς

$$\prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \widehat{A}_i(s) = \lambda \int_0^{b_{i-1}} \phi(x) T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) f_1(b_{i-1} - x) dx + \lambda T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) w_1(b_{i-1}),$$



και

$$\begin{aligned} \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \widehat{A}_{1,i}(s) &= \lambda_2 \int_0^{b_{i-1}} \phi(x) T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) f_2(b_{i-1} - x) dx \\ &+ \lambda \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(x) T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) f_1(b_{i-1} - x) dx \\ &+ \lambda_2 T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) w_2(b_{i-1}) + \lambda T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} \right) w_1(b_{i-1}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας της δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Πρόταση 2.7.** Για  $\Re(s) > 0$  οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$ , που δίνονται στην εξίσωση (2.101), ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\widehat{Q}_i(s) = \frac{\widehat{G}_i(s)}{c_i^2 - \widehat{n}_i(s)}, \quad \widehat{Q}_{1,i}(s) = \widehat{Q}_i(s) + \frac{\widehat{G}_{1,i}(s)}{c_i^2 - \widehat{n}_i(s)}, \quad (2.102)$$

με

$$\begin{aligned} \widehat{n}_i(s) &= 2\lambda c_i T_{r_{1i}} \widehat{f}_1(s) + \lambda \left( (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta) - 2\lambda c_i r_{2i} - \lambda \widehat{f}_1(r_{1i}) - \lambda \widehat{f}_1(r_{2i}) \right) \mathfrak{S}_i \widehat{f}_1(s) \\ &\quad - \lambda^2 T_{r_{1i}} \widehat{f}_1(s) T_{r_{2i}} \widehat{f}_1(s) - \lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{S}_i \widehat{f}_2(s), \\ \widehat{G}_i(s) &= c_i T_{r_{1i}} \widehat{A}_i(s) + \left( \lambda + \lambda_2 + \delta - c_i r_{2i} - \lambda \widehat{f}_1(r_{1i}) \right) \mathfrak{S}_i \widehat{A}_i(s) + \lambda_1 \mathfrak{S}_i \widehat{A}_{1,i}(s) + \lambda [c_i Q_i(0) \\ &\quad - \widehat{A}_i(r_{2i})] \mathfrak{S}_i \widehat{f}_1(s) - \lambda T_{r_{1i}} \widehat{f}_1(s) T_{r_{2i}} \widehat{A}_i(s), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{1,i}(s) &= c_i \left( T_{r_{1i}} \widehat{A}_{1,i}(s) - T_{r_{1i}} \widehat{A}_{1,i}(s) \right) - \lambda_2 \left( 1 - \widehat{f}_2(r_{1i}) \right) \mathfrak{S}_i \widehat{A}_i(s) - \lambda T_{r_{1i}} \widehat{f}_1(s) \left( T_{r_{2i}} \widehat{A}_{1,i}(s) \right. \\ &\quad \left. - T_{r_{2i}} \widehat{A}_{1,i}(s) \right) + \lambda_2 T_{r_{1i}} \widehat{f}_2(s) T_{r_{2i}} \widehat{A}_i(s) + \left( c_i Q_i(0) - \widehat{A}_i(r_{2i}) \right) \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} (c_i r_{2i} + \lambda \widehat{f}_1(r_{2i}) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)) \mathfrak{S}_i \widehat{f}_1(s) - \lambda_2 \mathfrak{S}_i \widehat{f}_2(s) \right) + \left( \lambda + \delta - c_i r_{2i} - \lambda \widehat{f}_1(r_{1i}) \right) \left( \mathfrak{S}_i \widehat{A}_{1,i}(s) \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{S}_i \widehat{A}_{1,i}(s) \right). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Εφόσον οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$ , της εξίσωσης (2.99) έχουν την ίδια μορφή με αυτή των μετασχηματισμών Laplace των εξισώσεων (2.18) και (2.19) της Ενότητας 2.2, το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.2. ■

Τώρα, προκειμένου να δείξουμε ότι οι  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις, χρειαζόμαστε να αντιστρέψουμε (ως προς  $s$ ) τους μετασχηματισμούς Laplace  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$  της Πρότασης 2.7. Επιπλέον, από την μορφή

των μετασχηματισμών Laplace στην εξίσωση (2.102) είναι φανερό ότι για να αντιστρέψουμε τις συναρτήσεις  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$  αρκεί να βρούμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων  $\widehat{G}_i(s)$ ,  $\widehat{G}_{1,i}(s)$  και  $\widehat{n}_i(s)$ .

Σημειώνουμε ότι για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f(x)$  και για  $\ell$  όπως ορίστηκε παραπάνω, ισχύει ότι

$$T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f \right) (b_{i-1}) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f \right) (y + b_{i-1}) dy,$$

Επιπλέον, για δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $f_1(x)$  και  $f_2(x)$ , ισχύει ότι

$$\int_0^{b_{i-1}} f_1(x) T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f_2 \right) (b_{i-1}) dx = \int_0^{\infty} e^{-sy} \int_0^{b_{i-1}} f_1(x) \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f_2 \right) (y + b_{i-1} - x) dx dy.$$

Τότε, είναι εύκολο να δούμε ότι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των παραπάνω συναρτήσεων δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{L}^{-1} \left( T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f \right) (b_{i-1}) \right) = \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f (y + b_{i-1}), \quad (2.103)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \int_0^{b_{i-1}} f_1(x) T_s \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f_2 \right) (b_{i-1}) dx \right) = \int_0^{b_{i-1}} f_1(x) \left( \prod_{j=k}^{\ell} T_{r_{ji}} f_2 \right) (y + b_{i-1} - x) dx. \quad (2.104)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.103) - (2.104), είναι πλέον εύκολο να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $\widehat{G}_i(s)$ , όπου αφού πρώτα παραγοντοποιήσουμε ως προς τους όρους  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , δίνεται από τη σχέση

$$\frac{G_i(y)}{c_i^2} = \int_0^{b_{i-1}} \phi(x; \mathbf{b}) Z_{1,i}(y + b_{i-1}, x) dx + \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(x; \mathbf{b}) Z_{2,i}(y + b_{i-1}, x) dx + Z_i(y + b_{i-1}), \quad (2.105)$$

όπου

$$Z_{k,i}(u, x) = z_{k,i}(u, x) + \frac{\lambda z_{k,i}(b_{i-1})}{c - \lambda \mathcal{S}_i f_1(0)} \mathcal{S}_i f_1(u - b_{i-1}), \quad k = 1, 2,$$

$$Z_i(u, x) = z_i(u, x) + \frac{\lambda z_i(b_{i-1})}{c - \lambda \mathcal{S}_i f_1(0)} \mathcal{S}_i f_1(u - b_{i-1}),$$

με

$$z_{1,i}(u, x) = \frac{1}{c_i^2} \left( \mathcal{M}_{1,i} f_1(u - x) + \lambda_1 \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u - x) - \lambda^2 T_{r_{2i}} f_1(b_{i-1} - x) \mathcal{S}_i f_1(u - b_{i-1}) - \lambda^2 \int_0^{u - b_{i-1}} T_{r_{2i}} f_1(u - x - z) T_{r_{1i}} f_1(z) dz \right),$$

$$\begin{aligned}
z_{2,i}(u, x) &= \frac{\lambda\lambda_1}{c_i^2} \mathcal{S}_i f_1(u-x), \\
z_i(u) &= \frac{1}{c_i^2} \left( \mathcal{M}_{1,i} w_1(u) + \lambda_1 \mathcal{S}_i (\lambda_2 w_2(u) + \lambda w_1(u)) - \lambda^2 T_{r_{2i}} w_1(b_{i-1}) \mathcal{S}_i f_1(u-b_{i-1}) \right. \\
&\quad \left. - \lambda^2 \int_0^{u-b_{i-1}} T_{r_{2i}} w_1(u-z) T_{r_{1i}} f_1(z) dz \right).
\end{aligned}$$

Ακόμη, με όμοιο τρόπο, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $\widehat{G}_{1,i}(s)$ , αφού πρώτα παραγοντοποιήσουμε ως προς τους όρους  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , δίνεται από τη σχέση

$$\frac{G_{1,i}(y)}{c_i^2} = \int_0^{b_{i-1}} \phi(x; \mathbf{b}) H_{1,i}(y+b_{i-1}, x) dx + \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(x; \mathbf{b}) H_{2,i}(y+b_{i-1}, x) dx + H_i(y+b_{i-1}), \quad (2.106)$$

όπου

$$\begin{aligned}
H_i(u, x) &= h_{k,i}(u, x) + \frac{\mathcal{M}_{2,i} f_1(u-b_{i-1}) - \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u-b_{i-1})}{c - \lambda \mathcal{S}_i f_1(0)} h_{k,i}(b_{i-1}), \quad k = 1, 2, \\
H_i(u) &= h_i(u) + \frac{\mathcal{M}_{2,i} f_1(u-b_{i-1}) - \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u-b_{i-1})}{c - \lambda \mathcal{S}_i f_1(0)} h_i(b_{i-1}),
\end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned}
h_{1,i}(u, x) &= \frac{1}{c_i^2} \left( \lambda_2 \left( \frac{1}{\lambda} \mathcal{M}_{1,i} - \lambda_2 \mathcal{S}_i \right) f_2(u-x) + (\lambda_2 \lambda \widehat{f}_2(r_{1i}) \mathcal{S}_i - \mathcal{M}_{1,i}) f_1(u-x) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{u-b_{i-1}} [T_{r_{2i}} f_1(u-x-z) (\lambda_2 \lambda T_{r_{1i}} f_2(z) + \lambda^2 T_{r_{1i}} f_1(z)) \right. \\
&\quad \left. - \lambda \lambda_2 T_{r_{2i}} f_2(u-x-z) T_{r_{1i}} f_1(z)] dz - \lambda (\mathcal{M}_{2,i} f_1(u-b_{i-1}) - \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u-b_{i-1})) \right. \\
&\quad \left. \times T_{r_{2i}} f_1(b_{i-1}-x) \right), \\
h_{2,i}(u, x) &= \frac{1}{c_i^2} \left( (\mathcal{M}_{1,i} - \lambda \lambda_2 \mathcal{S}_i) f_1(u-x) - \lambda^2 \int_0^{u-b_{i-1}} T_{r_{2i}} f_1(u-x-z) T_{r_{1i}} f_1(z) dz \right), \\
h_i(u) &= \frac{1}{c_i^2} \left( \left( \frac{1}{\lambda} \mathcal{M}_{1,i} - \lambda_2 \mathcal{S}_i \right) w_2(u) - \lambda \lambda_2 (1 - \widehat{f}_2(r_{1i})) \mathcal{S}_i w_1 - \lambda (\mathcal{M}_{2,i} f_1(u-b_{i-1}) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u-b_{i-1})) T_{r_{2i}} w_2(b_{i-1}) + \lambda \lambda_2 \int_0^{u-b_{i-1}} \sum_{\nu=1, j \neq \nu}^2 (-1)^\nu T_{r_{2i}} w_j(u-z) \right. \\
&\quad \left. T_{r_{1i}} f_\nu(z) dz \right).
\end{aligned}$$

Επομένως αντιστρέφοντας ως προς  $s$  τους μετασχηματισμούς Laplace,  $\widehat{Q}_i(s)$  και  $\widehat{Q}_{1,i}(s)$ , της

εξίσωσης (2.102), καταλήγουμε στις ακόλουθες δύο ανανεωτικές εξισώσεις

$$Q_i(y) = \int_0^y Q_i(y-x) \frac{n_i(x)}{c_i^2} dx + \frac{G_i(y)}{c_i^2}, \quad (2.107)$$

$$Q_{1,i}(y) = \int_0^y Q_{1,i}(y-x) \frac{n_i(x)}{c_i^2} dx + \frac{G_i(y) + G_{1,i}(y)}{c_i^2}, \quad (2.108)$$

όπου  $G_i(y)$  και  $G_{1,i}(y)$  δίνονται από τις εξισώσεις (2.105) και (2.106) αντίστοιχα, ενώ

$$n_i(u) = 2\lambda c_i T_{r_{1i}} f_1(u) + \lambda \left( \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda + 2\delta - 2\lambda c_i r_{2i} - \lambda \widehat{f}_1(r_{1i}) - \lambda f_1(r_{2i}) \right) \mathcal{S}_i f_1(u) - \lambda^2 (T_{r_{1i}} f_1 * T_{r_{2i}} f_1)(u) + \lambda_1 \lambda_2 \mathcal{S}_i f_2(u).$$

Τώρα, κάνοντας ξανά αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1}$ ,  $Q_i(y) = Q_i(u - b_{i-1}) = \Phi_i(u)$ ,  $Q_{1,i}(y) = Q_{1,i}(u - b_{i-1}) = \Phi_{1,i}(u)$ , από τις εξισώσεις (2.107), (2.108) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\Phi_i(u) = \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) n_i(x) / c_i^2 dx + G_i(u - b_{i-1}) / c_i^2,$$

$$\Phi_{1,i}(u) = \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_{1,i}(u-x) n_i(x) / c_i^2 dx + (G_i(u - b_{i-1}) + G_{1,i}(u - b_{i-1})) / c_i^2.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3 της Ενότητας 2.2 έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

**Θεώρημα 2.8.** Για  $u > b_{i-1}$  και  $i = 1, \dots, n$ , οι συναρτήσεις  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{1 + \xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_i(u-x) \gamma_i(x) dx + \frac{1}{1 + \xi_i} B_i(u), \quad (2.109)$$

$$\Phi_{1,i}(u) = \frac{1}{1 + \xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} \Phi_{1,i}(u-x) \gamma_i(x) dx + \frac{1}{1 + \xi_i} (B_{1,i}(u) + B_i(u)), \quad (2.110)$$

όπου  $\gamma_i(u) = (1 + \xi_i) n_i(u) / c_i^2$ , είναι μία σ.π.π.,  $B_i(u) = (1 + \xi_i) G_i(u - b_{i-1}) / c_i^2$ ,  $B_{1,i}(u) = (1 + \xi_i) G_{1,i}(u - b_{i-1}) / c_i^2$  και  $\xi_i$  τέτοιο ώστε  $1 / (1 + \xi_i) = \int_0^\infty z_i(x) c_i^2 dx = 1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \delta + \delta^2}{c_i^2 r_{1i} r_{2i}} < 1$ . Επιπλέον για  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε  $\xi_i \rightarrow \xi_{i,0}$  τέτοιο ώστε  $\xi_{i,0} = 1 - \theta_i [\lambda(\lambda_2 + \lambda_1) m_1 + \lambda_2 \lambda_1 m_2] / (c_i^2 r_{2i}(0))$ , δοθέντος ότι το περιθώριο ασφαλείας  $\theta_i$  είναι θετικό.

Η λύση των ελαττωματικών ανανεωτικών εξισώσεων (2.109)-(2.110) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι για  $i = 1, \dots, n$  ορίζουμε την σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$K_i(x) = 1 - \bar{K}_i(x) = 1 - \frac{\xi_i}{1 + \xi_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \xi_i} \right)^n \bar{\Gamma}_i^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

όπου  $\bar{\Gamma}_i^{*n}(x)$  είναι η δεξιά ουρά της  $n$ -στής συνέλιξης της σ.κ.  $\Gamma_i(x) = 1 - \bar{\Gamma}_i(x) = \int_0^x \gamma_i(y) dy$ .

**Θεώρημα 2.9.** Για  $u > b_{i-1}$  και  $i = 1, \dots, n$ , οι συναρτήσεις  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  που ικανοποιούν τις ελαττωματικές ανανεωτικές (2.109) και (2.110) αντίστοιχα, δίνονται από τις σχέσεις

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} B_i(u-x) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} B_i(u), \quad (2.111)$$

$$\Phi_{1,i}(u) = \Phi_i(u) + \frac{1}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} B_{1,i}(u-x) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} B_{1,i}(u). \quad (2.112)$$

Απόδειξη. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1} \geq 0$  στις εξισώσεις (2.109), (2.110) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.9 έχουμε ότι

$$Q_i(y) = \frac{1}{\xi_i} \int_0^y B_i(y+b_{i-1}-x) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} B_i(y+b_{i-1}),$$

$$Q_{1,i}(y) = Q_i(y) + \frac{1}{\xi_i} \int_0^y B_{1,i}(y+b_{i-1}-x) dK_i(x) + \frac{1}{1+\xi_i} B_{1,i}(y+b_{i-1}),$$

α' όπου χρησιμοποιώντας, ξανά, την αλλαγή μεταβλητής  $y = u - b_{i-1} \geq 0$  παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Από το Θεώρημα 2.9, είναι φανερό ότι εφόσον οι συναρτήσεις  $B_i(u)$  και  $B_{1,i}(u)$  μπορούν να υπολογισθούν για διάφορες μορφές των συναρτήσεων ποινής  $w(x, y)$ , έπεται ότι ο υπολογισμός των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό της σ.κ.  $K_i(u)$ . Μία από τις περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την σ.κ.  $K_i(u)$ , είναι όταν ο μετασχηματισμός Laplace  $\hat{K}_i(s)$  έχει την μορφή ενός πηλίκου πολυωνύμων. Σημειώνουμε ότι η  $\hat{K}_i(s)$  έχει μορφή πηλίκου πολυωνύμων στην περίπτωση όπου οι μετασχηματισμοί Laplace του μεγέθους των αποζημιώσεων  $\hat{f}_1(s)$  και  $\hat{f}_2(s)$  ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Τότε, υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων και για τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών με μετασχηματισμούς Laplace,  $\hat{f}_1(s)$  και  $\hat{f}_2(s)$  όπως στην εξίσωση (2.35) και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 της Ενότητας 2.2, η σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής,  $K_i(u)$ , δίνεται από την την σχέση

$$K_i(x) = 1 - \bar{K}_i(x) = 1 - \sum_{j=1}^{2n+m} a_{j,i} e^{-R_{j,i}x}, \quad x \geq 0, \quad (2.113)$$

όπου

$$a_{j,i} = \frac{R_{1,i}R_{2,i} \dots R_{2n+m,i}}{R_{j,i} \prod_{k=1, k \neq j}^{2n+m} (R_{k,i}) - R_{k,i}} \frac{p_n^2(-R_{j,i})q_m(R_{j,i})}{p_n^2(0)q_m(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n + m,$$

με  $-R_{j,i}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n + m$  να είναι οι αρνητικές ρίζες της εξίσωσης

$$q_m(s) \prod_{k=1}^2 [(c_i s - \lambda - \lambda_k - \delta)p_n(s) + \lambda p_{n-1}(s)] - \lambda_1 \lambda_2 q_{m-1}(s) p_n^2(s) = 0. \quad (2.114)$$

Έχοντας υπολογίσει την σ.κ.  $K_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , από τις εξισώσεις (2.109) και (2.110) μπορούμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο υπολογισμού των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$ . Επομένως από την εξίσωση (2.97), είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό των συναρτήσεων των Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi(u; \mathbf{b})$ , χρειαζόμαστε τον υπολογισμό των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$ , που γίνονται ακολούθως.

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής,  $y = u - b_{i-1}$  και  $\chi_i(y) = \chi_i(u - b_{i-1}) = v_i(u)$ ,  $\chi_{1,i}(y) = \chi_{1,i}(u - b_{i-1}) = v_{1,i}(u)$   $y \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.95) γίνεται

$$\begin{aligned} c_i \chi_i'(y) - (\lambda + \lambda_1 + \delta) \chi_i(y) + \lambda \int_0^y \chi_i(y-x) f_1(x) dx + \lambda_1 \chi_{1,i}(y) &= 0, \\ c_i \chi_{1,i}'(y) + \lambda_2 \int_0^y \chi_i(y-x) f_2(x) dx + \lambda \int_0^y \chi_{1,i}(y-x) f_1(x) dx \\ &\quad - (\lambda + \lambda_2 + \delta) \chi_{1,i}(y) = 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

όπου, από την Ενότητα 2.3, η γενική λύση του παραπάνω ομογενούς συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} \chi_i(y) \\ \chi_{1,i}(y) \end{pmatrix} = \eta_{i,1} \begin{pmatrix} \chi_{i,11}(y) \\ \chi_{i,21}(y) \end{pmatrix} + \eta_{i,2} \begin{pmatrix} \chi_{i,12}(y) \\ \chi_{i,22}(y) \end{pmatrix}, \quad y \geq 0. \quad (2.116)$$

Επιπλέον, ανακαλώντας τις οριακές συνθήκες των  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$ ,  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$ , είναι φανερό ότι  $\chi_{i,k\ell}(0) = 1_{(k=\ell)}$ ,  $k, \ell = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , απ' όπου μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι λύσεις  $[\chi_{i,11}(y), \chi_{i,21}(y)]^T$ ,  $[\chi_{i,12}(y), \chi_{i,22}(y)]^T$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Λόγω του γεγονότος ότι η μορφή του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.115) είναι ακριβώς ίδια με αυτή του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.47) της Ενότητας 2.3, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.5 μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις ανεξάρτητες λύσεις  $[\chi_{i,11}(y), \chi_{i,21}(y)]^T$ ,  $[\chi_{i,12}(y), \chi_{i,22}(y)]^T$  και συνεπώς αλλάζοντας την μεταβλητή να πάρουμε ένα αναλυτικό τύπο υπολογισμού των  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$ , όπως δίνονται από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.8.** Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_1(s)$ , των μεγεθών των αποζημιώσεων για τις δύο κλάσεις, έχουν μορφή πηλίκου πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (2.35), τότε οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^\top$  και  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^\top$ , για  $i = 1, \dots, n$ , δίνονται από τη σχέση

$$v_{i,k\ell}(u) = \sum_{j=1}^2 \bar{a}_{i,k\ell}(j) e^{r_{ji}(u-b_{i-1})} + \sum_{j=1}^{2n+m} \bar{b}_{i,k\ell}(j) e^{-R_{ji}(u-b_{i-1})}, \quad u > b_{i-1}, \quad (2.117)$$

για  $k, \ell \in \{1, 2\}$ , με

$$\bar{a}_{k\ell}(j) = p_n^2(r_{ji}) q_m(r_{ji}) \frac{1_{(k=\ell)} \left[ (c_i r_{ji} - \lambda_{kl}^* - \lambda - \delta) + \lambda \frac{p_{n-1}(r_{ji})}{p_n(r_{ji})} \right] - v_{i,k\ell}^*(b_{i-1}; r_{ji})}{c_i r'_{i,2}(r_{ji}) \prod_{k=1}^{2n+m} (r_{ki} + R_{ki})}, \quad j = 1, 2,$$

$$\bar{b}_{k\ell}(i) = p_n^2(-R_{ji}) q_m(-R_{ji}) \frac{1_{(k=\ell)} \left[ \lambda \frac{p_{n-1}(-R_{ji})}{p_n(-R_{ji})} - (c_i R_{ji} + \lambda_{kl}^* + \lambda + \delta) \right] - v_{i,k\ell}^*(b_{i-1}; -R_{ji})}{c_i r_{i,2}(-R_{ji}) \prod_{k=1, k \neq j}^{2n+m} (R_{ki} - R_{ji})},$$

όπου

$$\lambda_{k\ell}^* = \begin{cases} \lambda_2 & , k = 1 \\ \lambda_1 & , k = 2 \end{cases}, \quad v_{i,k\ell}^*(b_{i-1}; t) = \begin{cases} \lambda_1 & , k = 1, \ell = 2 \\ \lambda_2 \frac{q_{m-1}(t)}{q_m(t)} & , k = 2, \ell = 1 \end{cases}$$

με  $r_{1i}, r_{2i}$  και  $-R_{ji}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n + m$ , να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (2.114) και  $\tau_{i,2}(s) = (s - r_{1i})(s - r_{2i})$ .

*Απόδειξη.* Από τη μορφή του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.115) και την Πρόταση 2.5 παίρνουμε άμεσα ότι, για  $k, \ell \in \{1, 2\}$ ,

$$\chi_{i,k\ell}(y) = \sum_{j=1}^2 \bar{a}_{i,k\ell}(j) e^{r_{ji}y} + \sum_{j=1}^{2n+m} \bar{b}_{i,k\ell}(j) e^{-R_{ji}y}, \quad u > b_{i-1},$$

α' όπου αλλάζοντας την μεταβλητή  $y = u - b_{i-1}$  και ανακαλώντας ότι  $\chi_i(y) = \chi_i(u - b_{i-1}) = v_i(u)$ ,  $\chi_{1,i}(y) = \chi_{1,i}(u - b_{i-1}) = v_{1,i}(u)$  παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Έτσι, βρίσκοντας από το Θεώρημα 2.9 και την Πρόταση 2.8 τις ποσότητες τις  $\Phi_i(u)$ ,  $\Phi_{1,i}(u)$ ,  $[v_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^\top$ ,  $[v_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^\top$  και αντικαθιστώντας αυτές στην εξίσωση (2.97) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi(u; \mathbf{b})$ .

Επιπλέον, από το Θεώρημα 2.9 παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  μεταξύ των επιπέδων  $[b_{i-1}, b_i]$  δίνεται σε όρους των συναρτήσεων  $B_i(u)$  και  $B_{1,i}(u)$ , οι οποίες από μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις (2.105)-(2.106). Από την μορφή των εξισώσεων (2.105)-(2.106) είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των  $B_i(u)$ ,  $B_{1,i}(u)$  και

συνεπώς ο υπολογισμός των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  βασίζεται στην γνώση των συναρτήσεων Gerber-Shiu  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  σε όλα τα προηγούμενα επίπεδα, δηλ. στα διαστήματα  $[0, b_1), [b_1, b_2), \dots, [b_{n-2}, b_{n-1})$ , όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.9.** Για  $u > b_{i-1}$  και  $i = 1, \dots, n$ , οι  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\Phi_i(u) &= \int_0^{b_{i-1}} \phi(y; \mathbf{b}) m_{1,i}(u, y) dy + \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(y; \mathbf{b}) m_{2,i}(u, y) dy + m_i(u), \quad (2.118) \\ \Phi_{1,i}(u) &= \Phi_i(u) + \int_0^{b_{i-1}} \phi(y; \mathbf{b}) \mu_{1,i}(u, y) dy + \int_0^{b_{i-1}} \phi_1(y; \mathbf{b}) \mu_{2,i}(u, y) dy + \mu_i(u), \quad (2.119)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}m_{k,i}(u, y) &= \frac{1 + \xi_i}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} Z_{k,i}(u-x, y) dK_i(x) + Z_{k,i}(u, y), \quad k = 1, 2, \\ m_i(u) &= \frac{1 + \xi_i}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} Z_i(u-x) dK_i(x) + Z_i(u),\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mu_{k,i}(u, y) &= \frac{1 + \xi_i}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} H_i(u-x, y) dK_i(x) + H_i(u, y), \quad k = 1, 2, \\ \mu_i(u) &= \frac{1 + \xi_i}{\xi_i} \int_0^{u-b_{i-1}} H_i(u-x) dK_i(x) + H_i(u).\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.105)-(2.106) στις εξισώσεις (2.111)-(2.112) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Foubini για την εναλλαγή ολοκληρωμάτων παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Επιπλέον, από τη μορφή των εξισώσεων (2.118) και (2.119) είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$  γίνεται αναδρομικά, στηριζόμενοι στον υπολογισμό των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$  σε όλα τα προηγούμενα επίπεδα, ξεκινώντας από από το επίπεδο  $b_1$ , δηλ. από τις  $\Phi_1(u) = m_1(u)$  και  $\Phi_{1,1}(u) = \Phi_1(u) + \mu_1(u) = m_1(u) + \mu_1(u)$ . Επιπλέον από την εξίσωση (2.97) παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Gerber-Shiu  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , (μετά το επίπεδο  $b_1$ ) είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των συντελεστών,  $\eta_{i,1}$  και  $\eta_{i,2}$ , όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.10.** Για  $u > b_{i-1}$ , και  $i = 1, 2, \dots, n$  οι συναρτήσεις  $\Phi_i(u)$  και  $\Phi_{1,i}(u)$ , που αποτελούν τις λύσεις του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.94), δίνονται από



τις σχέσεις

$$\Phi_i(u) = L_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \left( \eta_{k,1} L_{i,k,1}(u) + \eta_{k,2} L_{i,k,2}(u) \right), \quad (2.120)$$

$$\Phi_{1,i}(u) = \Phi_i(u) + \Lambda_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \left( \eta_{k,1} \Lambda_{i,k,1}(u) + \eta_{k,2} \Lambda_{i,k,2}(u) \right), \quad (2.121)$$

με

$$L_i(u) = m_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \left( L_k(y) m_{1,i}(u, y) + (L_k(y) + \Lambda_k(y)) m_{2,i}(u, y) \right) dy,$$

$$\Lambda_i(u) = \mu_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \left( L_k(y) \mu_{1,i}(u, y) + (L_k(y) + \Lambda_k(y)) \mu_{2,i}(u, y) \right) dy,$$

και για  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} L_{i,k,j}(u) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \left( v_{k,1j}(y) m_{1,i}(u, y) + v_{k,2j}(y) m_{2,i}(u, y) \right) dy \\ &+ \sum_{\nu=k+1}^{i-1} \int_{b_{\nu-1}}^{b_\nu} \left( L_{\nu,k,j}(y) m_{1,i}(u, y) + (L_{\nu,k,j}(y) + \Lambda_{\nu,k,j}(y)) m_{2,i}(u, y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,k,j}(u) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \left( v_{k,1j}(y) \mu_{1,i}(u, y) + v_{k,2j}(y) \mu_{2,i}(u, y) \right) dy \\ &+ \sum_{\nu=k+1}^{i-1} \int_{b_{\nu-1}}^{b_\nu} \left( L_{\nu,k,j}(y) \mu_{1,i}(u, y) + (L_{\nu,k,j}(y) + \Lambda_{\nu,k,j}(y)) \mu_{2,i}(u, y) \right) dy. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά. Για  $i = 1$  είναι φανερό ότι οι εξισώσεις (2.120)-(2.121) είναι αληθείς. Τώρα, υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις (2.120)-(2.121) είναι αληθείς για  $1 \leq i \leq \nu$  και θα αποδείξουμε ότι είναι επίσης αληθείς για  $i = \nu + 1$ .

Από τις εξισώσεις (2.118) και (2.97), έπεται ότι

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu+1}(u) &= \int_0^{b_\nu} \phi(y; \mathbf{b}) m_{1,\nu+1}(u, y) dy + \int_0^{b_\nu} \phi_1(y; \mathbf{b}) m_{2,\nu+1}(u, y) dy + m_{\nu+1}(u) \\ &= m_{\nu+1}(u) + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \phi(y; \mathbf{b}) m_{1,\nu+1}(u, y) dy + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \phi_1(y; \mathbf{b}) m_{2,\nu+1}(u, y) dy \\ &= m_{\nu+1}(u) + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \left( \Phi_i(y) + \eta_{i,1} v_{i,11}(y) + \eta_{i,2} v_{i,12}(y) \right) m_{1,\nu+1}(u, y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \left( \Phi_{1,i}(y) + \eta_{i,1} v_{i,21}(y) + \eta_{i,2} v_{i,22}(y) \right) m_{2,\nu+1}(u, y) dy \\
= & m_{\nu+1}(u) + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \Phi_i(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy + \sum_{i=1}^{\nu} \eta_{i,1} \sum_{j=1}^2 \int_{b_{i-1}}^{b_i} v_{i,j1}(y) m_{j,\nu+1}(u, y) dy \\
& + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \Phi_{1,i}(y) m_{2,\nu+1}(u, y) dy + \sum_{i=1}^{\nu} \eta_{i,2} \sum_{j=1}^2 \int_{b_{i-1}}^{b_i} v_{i,j2}(y) m_{j,\nu+1}(u, y) dy, \quad (2.122)
\end{aligned}$$

Επιπλέον χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής, για  $1 \leq \ell \leq \nu$ , ισχύει ότι

$$\Phi_{\ell}(u) = L_{\ell}(u) + \sum_{k=1}^{\ell-1} (\eta_{k,1} L_{\ell,k,1}(u) + \eta_{k,2} L_{\ell,k,2}(u)),$$

απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} \Phi_{\ell}(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy & = \sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell}(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy \\
& + \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell,k,j}(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy \\
= & \sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell}(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy \\
& + \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell,k,j}(y) m_{1,\nu+1}(u, y) dy. \quad (2.123)
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, για  $1 \leq \ell \leq n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} \Phi_{1,\ell}(y) m_{2,\nu+1}(u, y) dy & = \sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} (\Lambda_{\ell}(y) + L_{\ell}(y)) m_{2,\nu+1}(u, y) dy \\
& + \sum_{k=1}^{\nu-1} \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} (\Lambda_{\ell,k,j}(y) + L_{\ell,k,j}(y)) m_{2,\nu+1}(u, y) dy. \quad (2.124)
\end{aligned}$$

Τώρα, εφόσον ισχύει ότι  $\sum_{k=\nu+1}^{\nu} \cdot = 0$ , τότε στις εξισώσεις (2.123)-(2.124) είναι φανερό ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο δεύτερο άθροισμα τα όρια  $1 \leq k \leq \nu - 1$  με  $1 \leq k \leq \nu$ .

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.123) και (2.124) στην (2.122) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\nu+1}(u) &= m_{\nu+1}(u) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} \left( L_{\ell}(y)m_{1,\nu+1}(u, y) + (\Lambda_{\ell}(y) + L_{\ell}(y))m_{2,\nu+1}(y) \right) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{\nu} \eta_{k,1} \left( \int_{b_{k-1}}^{b_k} v_{k,11}(y)m_{1,\nu+1}(u, y) + \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell,k,1}(y)m_{1,\nu+1}(u, y) dy \right. \\
 &+ \left. \int_{b_{k-1}}^{b_k} v_{k,21}(y)m_{2,\nu+1}(u, y) + \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} (\Lambda_{\ell,k,1}(y) + L_{\ell,k,1}(y))m_{2,\nu+1}(u, y) dy \right) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\nu} \eta_{k,2} \left( \int_{b_{k-1}}^{b_k} v_{k,12}(y)m_{1,\nu+1}(u, y) + \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} L_{\ell,k,2}(y)m_{1,\nu+1}(u, y) dy \right. \\
 &+ \left. \int_{b_{k-1}}^{b_k} v_{k,22}(y)m_{2,\nu+1}(u, y) + \sum_{\ell=k+1}^{\nu} \int_{b_{\ell-1}}^{b_{\ell}} (\Lambda_{\ell,k,2}(y) + L_{\ell,k,2}(y))m_{2,\nu+1}(u, y) dy \right) \\
 &= L_{\nu+1}(u) + \sum_{k=1}^{\nu} \left( \eta_{k,1}L_{\nu+1,k,1}(u) + \eta_{k,2}L_{\nu+1,k,2}(u) \right),
 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι η εξίσωση (2.120) είναι αληθής για  $i = \nu + 1$ . Χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση (2.121) είναι επίσης αληθής για  $i = \nu + 1$ . ■

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.120)-(2.121) της Πρότασης 2.10 και την εξίσωση (2.97) έπεται ότι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , μπορούν να υπολογισθούν με βάση το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.10.** Για  $b_{i-1} \leq u < b_i$  και  $i = 1, 2, \dots, n$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\phi(u; \mathbf{b}) = L_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} L_{i,k,j}(u) + \sum_{j=1}^2 \eta_{i,j} v_{i,1j}(u), \quad (2.125)$$

$$\phi_1(u; \mathbf{b}) = \Lambda_i(u) + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \Lambda_{i,k,j}(u) + \sum_{j=1}^2 \eta_{i,j} v_{i,2j}(u). \quad (2.126)$$

Τέλος, δείχνουμε τον τρόπο υπολογισμού των σταθερών όρων  $\eta_{ij}$  για  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2$ . Αρχικά παρατηρούμε ότι  $\eta_{n,1} = \eta_{n,2} = 0$ . Επιπλέον, ανακλώντας τις οριακές συνθήκες (2.92) του Θεωρήματος 2.7 και τις αρχικές συνθήκες  $v_{i,k\ell}(b_{i-1}) = 1_{(k=\ell)}$ ,  $k, \ell \in \{1, 2\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων  $[u_{i,11}(u), v_{i,21}(u)]^T$ ,  $[u_{i,12}(u), v_{i,22}(u)]^T$ , οι σταθεροί όροι  $\eta_{i,j}$  μπορούν να υπολογισθούν αναδρομικά ως λύσεις του παρακάτω γραμμικού

συστήματος

$$c_m \left( L'_m(b_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} L'_{m,k,j}(b_m) + \sum_{j=1}^2 \eta_{m,j} v'_{m,1,j}(b_m) \right) = c_{m+1} \left( L'_{m+1}(b_m) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} L'_{m+1,k,j}(b_m) + \sum_{j=1}^2 \eta_{m+1,j} v'_{m+1,1,j}(b_m) \right), \quad (2.127)$$

$$c_m \left( L'_m(b_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} L'_{m,k,j}(b_m) + \tilde{L}'_m(b_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \Lambda'_{m,k,j}(b_m) + \sum_{j=1}^2 \eta_{m,j} v'_{m,2j}(b_m) \right) = c_{m+1} \left( L'_{m+1}(b_m) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} L'_{m+1,k,j}(b_m) + \Lambda'_{m+1,k,j}(b_m) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 \eta_{k,j} \Lambda'_{m+1,k,j}(b_m) + \sum_{j=1}^2 \eta_{m+1,j} v'_{m+1,2j}(b_m) \right). \quad (2.128)$$

**Παράδειγμα 2.1 (Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας).** Έστω  $\delta > 0$  και  $w(x, y) \equiv 1$ . Τότε, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi(u; \mathbf{b})$  και  $\phi_1(u; \mathbf{b})$ , γίνονται  $\mathbb{E}(e^{-\delta T_b} \mathbf{1}_{(T_b < \infty)} | U_{\mathbf{b}}(0) = u) = \varphi_{T_b}(u; \mathbf{b})$  και  $\mathbb{E}(e^{-\delta(T_b - t)} \mathbf{1}_{(T_b < \infty)} | U_{\mathbf{b}}(t) = u, L_{11} = t) = \varphi_{T_b,1}(u; \mathbf{b})$ , που είναι ο μετασχηματισμός του χρόνου χρεοκοπίας. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη ζημιών για τις δύο κλάσεις κινδύνων έχουν σ.π.π.  $f_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ , και  $f_2(x) = \beta e^{-\beta x}$ ,  $\beta > 0$ ,  $x \geq 0$ . Ακόμη, θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερισμάτων τριών επιπέδων  $0 = b_0 < b_1 < b_2 < b_3 = \infty$ .

Επιπροσθέτως, θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο των παραμέτρων:  $\alpha = 1, \lambda = 1, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 2, \beta = 1.5, \delta = 0.03, c_1 = 15, c_2 = 13, c_3 = 12, b_1 = 3$  και  $b_2 = 6$ . Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραμέτρους στην εξίσωση (2.93), παίρνουμε τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για κάθε επίπεδο, όπως δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \left(15s - \frac{s}{s+1} - 0.53\right) \cdot \left(15s - \frac{s}{s+1} - 2.03\right) - \frac{1.5}{s+1.5} &= 0, \\ \left(13s - \frac{s}{s+1} - 0.53\right) \cdot \left(13s - \frac{s}{s+1} - 2.03\right) - \frac{1.5}{s+1.5} &= 0, \\ \left(12s - \frac{s}{s+1} - 0.53\right) \cdot \left(12s - \frac{s}{s+1} - 2.03\right) - \frac{1.5}{s+1.5} &= 0, \end{aligned}$$

απ' όπου λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} r_{11} &= 0.00218, r_{21} = 0.17579, -R_{11} = -0.93081, -R_{21} = -0.94525, -R_{31} = -1.49790, \\ r_{12} &= 0.00256, r_{22} = 0.20389, -R_{12} = -0.91976, -R_{22} = -0.93857, -R_{32} = -1.49734, \\ r_{13} &= 0.00279, r_{23} = 0.22157, -R_{13} = -0.91280, -R_{23} = -0.93459, -R_{32} = -1.49697. \end{aligned}$$

Επιπλέον αντικαθιστώντας τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωση του Lundberg για κάθε επίπεδο στην εξίσωση (2.117) της Πρότασης 2.8 έχουμε ότι, για  $u \geq 0$ ,

$$v_{1,11}(u) = 0.8736e^{0.00218u} + 0.19595e^{0.17579u} - 0.054533e^{-0.93081u} - 0.01383e^{-0.94525u} - 0.001211e^{-1.49790u},$$

$$v_{1,12}(u) = 0.218468e^{0.00218u} - 0.214243e^{0.17579u} - 0.010742e^{-0.93081u} + 0.006539e^{-0.94525u} - 0.000022e^{-1.49790u},$$

$$v_{1,21}(u) = 0.872604e^{0.00218u} - 0.767079e^{0.17579u} - 0.1132e^{-0.93081u} + 0.070725e^{-0.94525u} - 0.063013e^{-1.49790u},$$

$$v_{1,22}(u) = 0.218214e^{0.00218u} + 0.838682e^{0.17579u} - 0.022306e^{-0.93081u} - 0.033445e^{-0.94525u} - 0.001145e^{-1.49790u},$$

και για  $u \geq 3$

$$v_{2,11}(u) = 0.879333e^{0.00256u} + 0.105739e^{0.20389u} - 1.016948e^{-0.91976u} - 0.252484e^{-0.93857u} - 0.134526e^{-1.49734u},$$

$$v_{2,12}(u) = 0.219908e^{0.00256u} - 0.117179e^{0.20389u} - 0.201443e^{-0.919761u} + 0.120413e^{-0.93857u} - 0.002745e^{-1.49734u},$$

$$v_{2,21}(u) = 0.878136e^{0.00256u} - 0.412631e^{0.20389u} - 2.083034e^{-0.91976u} + 1.286867e^{-0.93857u} - 6.189831e^{-1.49734u},$$

$$v_{2,22}(u) = 0.219609e^{0.00256u} + 0.457277e^{0.20389u} - 0.412619e^{-0.91976u} - 0.613724e^{-0.93857u} + 0.126291e^{-1.49734u},$$

Ακόμη, αντικαθιστώντας της παραπάνω παραμέτρους στις εξισώσεις της Πρότασης 2.10 έχουμε ότι

$$L_1(u) = 0.060096e^{-0.93081u} + 0.007318e^{-0.94525u} + 0.001145e^{-1.49790u},$$

$$\Lambda_1(u) + L_1(u) = 0.12479e^{-0.93081u} - 0.03743e^{-0.94525u} + 0.059755e^{-1.49790u},$$

από όπου χρησιμοποιώντας τους αναδρομικούς τύπους υπολογισμού της Πρότασης 2.10, παίρνουμε ότι

$$L_2(u) = 0.06765e^{-0.91976u} + 0.007864e^{-0.93857u} + 0.00122e^{-1.49734u},$$

$$\Lambda_2(u) = 0.12071e^{-0.91976u} - 0.02561e^{-0.93857u} + 0.056339e^{-1.49734u},$$

$$L_3(u) = 0.0705e^{-0.91280u} + 0.00818e^{-0.93459u} + 0.00049e^{-1.49697u},$$

$$\Lambda_3(u) = 0.11173e^{-0.91280u} - 0.0147e^{-0.93459u} + 0.022188e^{-1.49697u},$$

$$L_{2,1,1}(u) = 0.97682e^{-0.91976u} + 0.33765e^{-0.93857u} + 0.14899e^{-1.49734u},$$

$$L_{2,1,2}(u) = 0.15719e^{-0.91976u} - 0.22191e^{-0.93857u} - 0.015282e^{-1.49734u},$$

$$\Lambda_{2,1,1}(u) = 2.23455e^{-0.91976u} - 1.91026e^{-0.93857u} + 6.854349e^{-1.49734u},$$

$$\Lambda_{2,1,2}(u) = -0.950203e^{-0.91976u} + 2.161659e^{-0.93857u} - 0.69628e^{-1.49734u},$$

και

$$L_{3,1,1}(u) = 1.02174e^{-0.91280u} + 0.34799e^{-0.93459u} + 0.15425e^{-1.49697u},$$

$$L_{3,1,2}(u) = 0.154412e^{-0.91280u} - 0.22267e^{-0.93459u} - 0.01699e^{-1.49697u},$$

$$L_{3,2,1}(u) = -0.31089e^{-0.91280u} + 0.95295e^{-0.93459u} + 0.059362e^{-1.49697u},$$

$$L_{3,2,2}(u) = 4.27725e^{-0.91280u} - 3.63864e^{-0.93459u} - 0.16198e^{-1.496968u},$$

$$\Lambda_{3,1,1}(u) = 2.09744e^{-0.91280u} - 1.78902e^{-0.93459u} + 6.63376e^{-1.49697u},$$

$$\Lambda_{3,1,2}(u) = -0.89626e^{-0.91280u} + 2.16707e^{-0.93459u} - 0.68497e^{-1.49697u},$$

$$\Lambda_{3,2,1}(u) = 37.9558e^{-0.91280u} - 34.8825e^{-0.93459u} + 657.6117e^{-1.49697u},$$

$$\Lambda_{3,2,2}(u) = -17.2047e^{-0.91280u} + 40.31738e^{-0.93459u} - 79.0007e^{-1.49697u},$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στις εξισώσεις (2.127) και (2.128), βρίσκουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τον προσδιορισμό των σταθερών όρων  $\eta_{1,1}$ ,  $\eta_{1,2}$ ,  $\eta_{2,1}$  και  $\eta_{2,2}$

$$\begin{pmatrix} 1.981633 & -0.992642 & -0.117692 & 0.038461 \\ -1.553575 & 4.509101 & 0.4 \times 10^{-9} & -0.233077 \\ -0.000498 & 0.000071 & 1.067405 & -0.997872 \\ -0.002958 & -0.0006476 & -1.84071 & 4.86628 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1,1} \\ \eta_{1,2} \\ \eta_{2,1} \\ \eta_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000542 \\ 0.005633 \\ 0.000024 \\ 0.000245 \end{pmatrix},$$

άπ' όπου βρίσκουμε ότι

$$\eta_{1,1} = 0.001096, \quad \eta_{1,2} = 0.001632,$$

$$\eta_{2,1} = 0.000109, \quad \eta_{2,2} = 0.0000927.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στις εξισώσεις (2.125) και (2.125) του θεωρήματος 2.10, οι μετασχηματισμοί Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,  $\varphi_T(u; \mathbf{b})$  και

$\varphi_{T,1}(u; \mathbf{b})$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\varphi_{T_b}(u; \mathbf{b}) = \begin{cases} 0.06002e^{-0.93081u} + 0.007314e^{-0.94525u} + 0.001147e^{-1.49790u} \\ + 0.001314e^{0.00218u} - 0.0001349e^{0.17579u}, & 0 \leq u < 3, \\ 0.068851e^{-0.91976u} + 0.007855e^{-0.93857u} + 0.001346e^{-1.49734u} \\ + 0.0001167e^{0.00256u} + 0.7129 \times 10^{-6}e^{0.20389u}, & 3 \leq u < 6, \\ 0.072235e^{-0.91280u} + 0.00797e^{-0.93459u} + 0.000621e^{-1.49697u} & u \geq 6 \end{cases}$$

και

$$\varphi_{T_{b,1}}(u; \mathbf{b}) = \begin{cases} 0.12463e^{-0.93081u} + 0.007314e^{-0.94525u} + 0.059684e^{-1.49790u} \\ + 0.0013121e^{0.00218u} + 0.000528e^{0.17579u}, & 0 \leq u < 3, \\ -0.02409e^{-0.91976u} + 0.12134e^{-0.93857u} + 0.06202e^{-1.49734u} \\ + 0.0001165e^{0.00256u} - 0.278238 \times 10^{-5}e^{0.20389u}, & 3 \leq u < 6, \\ 0.115128e^{-0.91280u} - 0.013249e^{-0.93459u} + 0.0093041e^{-1.49697u} & u \geq 6 \end{cases}$$

## 2.7 Γενίκευση του μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων για γενικευμένους Erlang( $\nu$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης

Πρόσφατα, οι Zhang, Li και Zhang (2009), γενίκευσαν το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων υποθέτοντας, για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U(t)$  της σχέσης (2.2) (Ενότητα 2.1), ότι η απαριθμήτρια διαδικασία κινδύνου για τη δεύτερη κλάση,  $\{N_2(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , είναι μια σύνθετη ανανεωτική διαδικασία, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων,  $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ , κατανομούνται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang( $\nu$ ). Επομένως, είναι φανερό ότι η τ.μ.  $V_i$  είναι πλέον συνέλιξη από  $\nu$  ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παραμέτρους  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$  (συνήθως διαφορετικές μεταξύ τους). Στην προαναφερόμενη εργασία οι συγγραφείς μελέτησαν τη συνάρτηση των Gerber-Shiu κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Laplace. Επεκτείνοντας το μοντέλο των Zhang, Li και Zhang (2009) σε αυτή ενότητα μελετούμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το παραπάνω μοντέλο κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Έστω  $\Phi(u)$  η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων κατανομούνται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang( $\nu$ ), όπου η μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu δίνεται όπως στην εξίσωση (2.8).

Επίσης, για το παραπάνω μοντέλο θεωρούμε, όμοια με την Ενότητα 2.3, την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος σε ένα επίπεδο  $b$ . Έστω  $U_b(t)$  η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για την παραπάνω επέκταση κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής και  $\Phi_b(u)$  η αντίστοιχη συνάρτηση των Gerber-Shiu, η οποία έχει ίδια μορφή με αυτή στην εξίσωση

(2.42).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στη θέση της απαριθμήτριας διαδικασίας της δεύτερης κλάσης,  $N_2(t)$ , ορίζουμε την απαριθμήτρια διαδικασία  $N_{2,j}(t)$  με τον πρώτο ενδιάμεσο χρόνο να είναι  $V_1^{(j)} = L_{1,j} + L_{1,j+1} + \dots + L_{1,\nu}$ , που παριστά το χρόνο που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της πρώτης αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση, ενώ οι υπόλοιποι ενδιάμεσοι χρόνοι, της  $N_{2,j}(t)$ , είναι ίδιοι με αυτούς της απαριθμήτριας διαδικασίας  $N_2(t)$ . Έστω  $U_j(t)$  η διαδικασία πλεονάσματος για την παραπάνω προσαρμογή, και  $\Phi_j(u)$  για  $j = 1, \dots, \nu$ , με  $\Phi_1(u) = \Phi(u)$ , η αντίστοιχη αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$  (για  $\nu = 2$ , η συνάρτηση  $\Phi_2(u)$  είναι ακριβώς η ίδια με τη συνάρτηση  $\Phi_1(u)$  της Ενότητας 2.2).

Τώρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, εφαρμόζουμε την παραπάνω τεχνική κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Έτσι, θεωρούμε ότι  $U_{b,j}(t)$  είναι η διαδικασία πλεονάσματος, με βάση την παραπάνω προσαρμογή, κάτω από την στρατηγική σταθερού μερίσματος και  $\Phi_{b,j}(u)$ ,  $0 \leq u \leq b$ , για  $j = 1, \dots, \nu$ , να είναι η αντίστοιχη αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , με  $\Phi_{b,1}(u) = \Phi_b(u)$  (για  $\nu = 2$ , η συνάρτηση  $\Phi_{b,2}(u)$  είναι ακριβώς ίδια με τη συνάρτηση  $\Phi_{b,1}(u)$  της Ενότητας 2.3). Για  $\delta = 0$  και  $w(x, y) = 1$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\Phi_j(u)$ ,  $u \geq 0$ , και  $\Phi_{b,j}(u)$ ,  $0 \leq u \leq b$ , γίνονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας,  $\psi_j(u)$  και  $\psi_{b,j}(u)$  αντίστοιχα.

**Θεώρημα 2.11.** Για  $0 \leq u \leq b$ , η συνάρτηση των Gerber-Shiu  $\Phi_{b,j}(u)$  ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, \nu - 1$

$$c\Phi'_{b,j}(u) = (\lambda + \lambda_j + \delta)\Phi_{b,j}(u) - \lambda \int_0^u \Phi_{b,j}(u-x)f_1(x)dx - \lambda_j\Phi_{b,j+1}(u) - \lambda w_1(u), \quad (2.129)$$

και για  $j = \nu$

$$c\Phi'_{b,\nu}(u) = (\lambda + \lambda_\nu + \delta)\Phi_{b,\nu}(u) - \lambda \int_0^u \Phi_{b,\nu}(u-x)f_1(x)dx - \lambda_\nu \int_0^u \Phi_{b,1}(u-x)f_2(x)dx - \lambda w_1(u) - \lambda_\nu w_2(u), \quad (2.130)$$

με οριακές συνθήκες

$$\Phi'_{b,j}(b) = 0, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad (2.131)$$

όπου οι συνεχείς συναρτήσεις  $w_k(u)$  για  $k = 1, 2$ , δίνονται από την εξίσωση (2.14).

*Απόδειξη.* Βασίζόμενοι στη μεθοδολογία των Albrecher, Mercé και Marmol (2005), [βλ. επίσης απόδειξη του Θεωρήματος 1.4] μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία (external piecewise Markov chain) με  $\nu$  καταστάσεις. Κάθε μετάβαση από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $i + 1$ ,  $i = 1, \dots, \nu - 1$ , συντελείται με ρυθμό μετάβασης σύμφωνα με μια εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο



$\lambda_j$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , ενώ η μετάβαση από την κατάσταση  $\nu$  στην κατάσταση 1 συντελείται με ρυθμό μετάβασης σύμφωνα με εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_\nu$ . Θεωρούμε το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$ . Χρησιμοποιώντας παρόμοια μεθοδολογία με αυτή της Ενότητας 2.2 καθώς και με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4, για  $j = 1, \dots, \nu-1$ , και  $0 \leq u \leq b$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi_{b,j}(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_j dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,j}(u + cdt) + \lambda_j dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,j+1}(u + cdt) \\ &\quad + \lambda dt(1 - \lambda_j dt)e^{-\delta dt} \gamma_{j,1}(u + cdt) + o(dt), \end{aligned}$$

όπου

$$\gamma_{j,k}(u) = \int_0^u \Phi_{b,j}(u-x) f_k(x) dx + w_k(u), \quad j = 1, \dots, \nu, \quad k = 1, 2.$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, παραγοντοποιώντας ως προς τους όρους τάξης  $dt$ , παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  και κάνοντας χρήση της συνέχειας των συναρτήσεων  $w_k(u)$ , για  $k = 1, 2$  παίρνουμε την εξίσωση (2.129) για  $j = 1, \dots, \nu-1$ . Όμοια, για  $j = \nu$  και  $0 \leq u \leq b$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi_{b,\nu}(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_\nu dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,\nu}(u + cdt) + \lambda_\nu dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \gamma_{1,2}(u + cdt) \\ &\quad + \lambda dt(1 - \lambda_\nu dt)e^{-\delta dt} \gamma_{\nu,1}(u + cdt) + o(dt), \end{aligned}$$

απ' όπου χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω καταλήγουμε στην εξίσωση (2.130) για  $j = \nu$ .

Επιπλέον για  $u = b$  και  $j = 1, \dots, \nu-1$ , έχουμε ότι

$$\Phi_{b,j}(b) = (1 - (\lambda + \lambda_j)dt)e^{-\delta dt} \Phi_{b,j}(b) + \lambda_j dt e^{-\delta dt} \Phi_{b,j+1}(b) + \lambda dt e^{-\delta dt} \gamma_{j,1}(b) + o(dt),$$

απ' όπου παίρνουμε ότι

$$-(\lambda + \lambda_j + \delta)\Phi_{b,j}(b) + \lambda \int_0^b \Phi_{b,j}(b-x) f_1(x) dx + \lambda_j \Phi_{b,j+1}(b) + \lambda w_1(b) = 0.$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση (2.129) στο  $u = b$ , και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης  $\Phi_{b,j}(u)$  στο σημείο  $u = b$ , έπεται άμεσα η οριακή συνθήκη (2.131) για  $j = 1, \dots, \nu-1$ .

Κατά τον ίδιο τρόπο, για  $u = b$  και  $j = \nu$  έχουμε ότι

$$-(\lambda + \lambda_\nu + \delta)\Phi_{b,\nu}(b) + \lambda_\nu \gamma_{1,2}(b) + \lambda \gamma_{\nu,1}(b) = 0,$$

και συνεπώς συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την εξίσωση (2.130) στο σημείο  $u = b$ , και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης  $\Phi_{b,\nu}(u)$  στο σημείο  $u = b$ , βλέπουμε ότι η

εξίσωση (2.131) είναι αληθής για  $j = \nu$ . ■

Η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.129)-(2.130) εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος ως προς  $v_j(u)$ , για  $j = 1, \dots, \nu - 1$  και  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} cv'_{\delta,j}(u) - (\lambda + \lambda_j + \delta)v_{\delta,j}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta,j}(u-x)f_1(x)dx + \lambda_j v_{\delta,j+1}(u) &= 0, \\ cv'_{\delta,\nu}(u) - (\lambda + \lambda_\nu + \delta)v_{\delta,\nu}(u) + \lambda \int_0^u v_{\delta,\nu}(u-x)f_1(x)dx & \\ + \lambda_\nu \int_0^u v_{\delta,1}(u-x)f_2(x)dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Από τη μορφή του παραπάνω ομογενούς συστήματος έπεται ότι οι αρχικές συνθήκες  $(v_{\delta,1}(0), \dots, v_{\delta,\nu}(0))$  προσδιορίζουν τη λύση των  $(v_{\delta,1}(u), \dots, v_{\delta,\nu}(u))$  του συστήματος (2.132). Έτσι, για προκαθορισμένο  $i = 1, \dots, \nu$ , θεωρούμε  $\bar{v}_{\delta,i}(u) = (v_{\delta,1i}(u), \dots, v_{\delta,\nu i}(u))$  να είναι κάποιες συγκεκριμένες λύσεις του συστήματος (2.132) με αρχικές συνθήκες  $v_{\delta,ji}(0) = 1_{(i=j)}$  για  $j = 1, \dots, \nu$ . Τότε, κάτω από τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες είναι φανερό ότι οι λύσεις  $\{\bar{v}_{\delta,i}(u)\}_{i=1}^\nu$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς, η γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.132) δίνεται από τη σχέση

$$v_{\delta,j}(u) = \sum_{i=1}^\nu \eta_i v_{\delta,ji}(u), \quad j = 1, \dots, \nu, \quad u \geq 0, \quad (2.133)$$

όπου  $\eta_j$ , για  $j = 1, \dots, \nu$ , είναι κάποιοι σταθεροί όροι.

Επιπλέον, από τους Zhang, Li και Zhang (2009) έχουμε ότι η συνάρτηση  $\Phi_j(u)$ , για  $j = 1, \dots, \nu$ , είναι μια μερική λύση του μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.129)-(2.130) για  $0 \leq u < \infty$ . Τότε, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Ενότητας 4 των Lu και Li (2009) [βλ. επίσης τη μεθοδολογία του Κεφ. 4] έπεται ότι η γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.129)-(2.130) είναι της ακόλουθης μορφής

$$\Phi_{b,j}(u) = \Phi_j(u) + \sum_{i=1}^\nu \eta_i(b) v_{\delta,ji}(u), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.134)$$

όπου οι σταθεροί όροι  $\eta_i(b) = \Phi_{b,i}(0) - \Phi_i(0)$ , για  $i = 1, \dots, \nu$  υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (2.131) και την εξίσωση (2.134), δηλ. αποτελούν λύσεις του ακόλουθου γραμμικού συστήματος

$$\Phi'_j(b) + \sum_{i=1}^\nu \eta_i(b) v'_{\delta,ji}(b) = 0, \quad j = 1, \dots, \nu. \quad (2.135)$$

Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις (2.134) και (2.135) μπορούν να γραφούν ως

$$\bar{\Phi}_b(u) = \bar{\Phi}(u) + \mathbf{v}_\delta(u)\bar{\eta}(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.136)$$

και

$$\bar{\Phi}'(b) + \mathbf{v}'_\delta(b)\bar{\eta}(b) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (2.137)$$

όπου  $\bar{\Phi}(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_\nu(u))^\top$ ,  $\bar{\Phi}_b(u) = (\Phi_{b,1}(u), \dots, \Phi_{b,\nu}(u))^\top$ ,  $\bar{\eta}(b) = (\eta_1(b), \dots, \eta_\nu(b))^\top$ ,  $\mathbf{v}_\delta(u) = (\bar{v}_{\delta,1}^\top(u), \dots, \bar{v}_{\delta,\nu}^\top(u))$  ένας  $\nu \times \nu$  τετραγωνικός πίνακας με  $(i, j)$ -στοιχείο τη συνάρτηση  $v_{\delta,ij}(u)$  και  $\bar{\mathbf{0}}$  ένα  $\nu \times 1$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία. Λύνοντας το σύστημα (2.137), έχουμε ότι  $\bar{\eta}(b) = -[\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1}\bar{\Phi}'(b)$  και συνεπώς η εξίσωση (2.136) γράφεται ως

$$\bar{\Phi}_b(u) = \bar{\Phi}(u) - \mathbf{v}_\delta(u)[\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1}\bar{\Phi}'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.138)$$

Από την εξίσωση (2.136) είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του διανύσματος  $\bar{\Phi}_b(u)$  εξαρτάται άμεσα από τον υπολογισμό του πίνακα  $\mathbf{v}_\delta(u)$ , που γίνεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Για αυτό το σκοπό θεωρούμε  $\hat{\mathbf{v}}_\delta(s)$ ,  $\Re(s) \geq 0$ , να είναι ένας  $\nu \times \nu$  τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία  $\hat{v}_{\delta,ij}(s) = \int_0^u e^{-sx} v_{\delta,ij}(x) dx$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις του ομογενούς ολοκλήρο-διαφορικού συστήματος της σχέσης (2.132), εκφράζοντας τις προκύπτουσες εξισώσεις σε μορφή πινάκων και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $\mathbf{v}_\delta(0) = \mathbf{I}$ , όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο ταυτοτικός  $\nu \times \nu$  πίνακας, έπεται ότι

$$\hat{\mathbf{v}}_\delta(s) = \frac{c\mathbf{A}_\delta^*(s)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}, \quad (2.139)$$

όπου  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$  είναι ο πίνακας που περιέχει όλα τα αλγεβρικά συμπληρώματα (adjoint matrix) του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$  και

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \mathbf{A}_{\delta,1}(s) + \mathbf{A}_{\delta,2}(s), \quad (2.140)$$

με  $\mathbf{A}_{\delta,1}(s) = \text{diag}(cs - \delta - \lambda - \lambda_1, \dots, cs - \delta - \lambda - \lambda_\nu)$  και

$$\mathbf{A}_{\delta,2}(s) = \begin{pmatrix} \lambda \hat{f}_1(s) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda \hat{f}_1(s) & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_\nu \hat{f}_2(s) & 0 & 0 & \dots & \lambda \hat{f}_1(s) \end{pmatrix}.$$

Οι Zhang, Li και Zhang (2009) έδειξαν ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  ισοδύναμα γράφεται ως

$$\prod_{j=1}^{\nu} [\lambda_j - (cs - \delta - \lambda(1 - \widehat{f}_1(s)))] = \widehat{f}_2(s) \prod_{j=1}^{\nu} \lambda_j, \quad (2.141)$$

που είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης από τη δεύτερη κλάση ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang( $\nu$ ) κατανομή. Η λύση της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg δίνεται από το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 2.5.** Για  $\delta > 0$ , η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (2.141) έχει ακριβώς  $\nu$  ρίζες,  $r_1(\delta), \dots, r_\nu(\delta)$ , που βρίσκονται στο θετικό μιγαδικό ημιπίεδο.

Απόδειξη. Zhang, Li και Zhang (2009), Λήμμα 1. ■

Στο εξής θα συμβολίζουμε τις ρίζες  $r_i(\delta)$  με  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$  και υποθέτουμε ότι είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5 και υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων και για τις δύο κλάσεις κινδύνων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.132),  $u_{\delta,ij}(u)$  για  $i, j = 1, \dots, \nu$ , βρίσκονται με βάση την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2.11.** Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$  των μεγεθών των αποζημιώσεων έχουν μορφή όπως στην (2.35). Τότε οι  $u_{\delta,ij}(u)$  για  $i, j = 1, \dots, \nu$ , δίνονται από τη σχέση

$$u_{\delta,ij}(s) = \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{ij}(k) e^{r_k u} + \sum_{\ell=1}^{\nu+m} \bar{b}_{ij}(\ell) e^{-R_\ell u}, \quad u \geq 0, \quad (2.142)$$

όπου

$$\bar{a}_{ij}(k) = \frac{q_m(r_k) p_n^\nu(r_k) (\mathbf{A}_\delta^*(r_k))_{ij}}{c^{\nu-1} \prod_{i=1, i \neq k}^{\nu} (r_k - r_i) \prod_{j=1}^{\nu+m} (r_k + R_j)},$$

$$\bar{b}_{ij}(\ell) = \frac{q_m(-R_\ell) p_n^\nu(-R_\ell) (\mathbf{A}_\delta^*(-R_\ell))_{ij}}{(-1)^\nu c^{\nu-1} \prod_{i=1}^{\nu} (R_\ell + r_i) \prod_{j=1, j \neq \ell}^{\nu+m} (R_j - R_\ell)}.$$

με  $(\mathbf{A}_\delta^*(s))_{ij}$  να είναι το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$ , και  $r_k$  με  $\Re(r_k) > 0$  για  $k = 1, \dots, \nu$ ,  $-R_\ell$  με  $\Re(R_\ell) > 0$  για  $\ell = 1, \dots, \nu+n$ , να είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ .

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της Πρότασης 2.5, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (2.139) με  $q_m(s) p_n^\nu(s)$ . Τότε, συνεπάγεται ότι

$$\widehat{v}_{\delta,ij}(s) = \frac{c q_m(s) p_n^\nu(s) (\mathbf{A}_\delta^*(s))_{ij}}{D_{\nu+m+\nu}(s)}, \quad (2.143)$$

όπου  $D_{\nu n+m+\nu}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $\nu n+m+\nu$  με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το  $c^\nu$ , που δίνεται από τη σχέση

$$D_{\nu n+m+\nu}(s) = q_m(s) \prod_{j=1}^{\nu} \left( (cs - (\lambda + \lambda_j + \delta)) p_n(s) + \lambda p_{n-1}(s) \right) - q_{m-1}(s) p_n^\nu(s) \prod_{j=1}^{\nu} \lambda_j. \quad (2.144)$$

Εφόσον από το Λήμμα 2.5 η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  έχει ακριβώς  $\nu$  ρίζες στο δεξιό ημικύκλιο των μιγαδικών αριθμών,  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , τότε η εξίσωση  $D_{\nu n+m+\nu}(s) = 0$  έχει  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη και  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu n + m$ , ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη και συνεπώς το πολυώνυμο  $D_{\nu n+m+\nu}(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$D_{\nu n+m+\nu}(s) = c^\nu \prod_{i=1}^{\nu} (s - r_i) \prod_{j=1}^{\nu n+m} (s + R_j). \quad (2.145)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.143) και (2.145) και χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων βρίσκουμε ότι

$$\widehat{v}_{\delta,ij}(s) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\bar{a}_{ij}(k)}{s - r_k} + \sum_{\ell=1}^{\nu n+m} \frac{\bar{b}_{ij}(\ell)}{s + R_\ell}. \quad (2.146)$$

Αντιστρέφοντας την εξίσωση (2.146) ως προς  $s$  βρίσκουμε την εξίσωση (2.142). ■

Επομένως, όλες οι ποσότητες της εξίσωσης (2.138) είναι γνωστές. Επιπλέον, η εξίσωση (2.138) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σχεδόν βέβαιη. Έστω  $\vec{\psi}(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_\nu(u))^T$  για  $0 \leq u \leq \infty$  και  $\vec{\psi}_b(u) = (\psi_{b,1}(u), \dots, \psi_{b,\nu}(u))^T$  για  $0 \leq u \leq b$ .

**Θεώρημα 2.12.** *Κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος, ισχύει ότι*

$$\vec{\psi}_b(u) = \mathbf{1}, \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου  $\mathbf{1}$  είναι ένα  $\nu \times 1$  με όλα του τα στοιχεία ίσα με ένα.

*Απόδειξη.* Για  $\delta = 0$  και  $w(x, y) = 1$ , η εξίσωση (2.138) ανάγεται στην

$$\vec{\psi}_b(u) = \vec{\psi}(u) - \mathbf{v}_0(u) [\mathbf{v}'_0(b)]^{-1} \vec{\psi}'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.147)$$

Έστω  $\delta_j(u) = 1 - \psi_j(u)$ ,  $0 \leq u < \infty$  και  $\delta_{b,j}(u) = 1 - \psi_{b,j}(u)$ ,  $0 \leq u \leq b$  για  $j = 1, \dots, \nu$  να είναι οι πιθανότητες επιβίωσης. Επίσης, θεωρούμε  $\vec{\delta}(u) = (\delta_1(u), \dots, \delta_\nu(u))^T$ ,  $u \geq 0$  και  $\vec{\delta}_b(u) = (\delta_{b,1}(u), \dots, \delta_{b,\nu}(u))^T$ ,  $0 \leq u \leq b$ . Εφόσον  $\vec{\delta}(u) = \mathbf{1} - \vec{\psi}(u)$  και  $\vec{\delta}_b(u) = \mathbf{1} - \vec{\psi}_b(u)$ ,

τότε η εξίσωση (2.147) γίνεται

$$\bar{\delta}_b(u) = \bar{\delta}(u) - \mathbf{v}_0(u)[\mathbf{v}'_0(b)]^{-1}\bar{\delta}(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.148)$$

Επιπλέον είναι εύκολο να δειχθεί [βλ. επίσης και Zhang, Li και Zhang (2009)] ότι οι πιθανότητες επιβίωσης  $\delta_j(u)$  για  $j = 1, \dots, \nu$ , ικανοποιούν το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (2.132) για  $\delta = 0$  και συνεπώς δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι  $\bar{\delta}(u) = \mathbf{v}_0(u)\bar{\delta}(0)$ , για  $u \geq 0$ . Έτσι, η εξίσωση (2.148) γίνεται

$$\bar{\delta}_b(u) = \mathbf{v}_0(u)\bar{\delta}(0) - \mathbf{v}_0(u)[\mathbf{v}'_0(b)]^{-1}\mathbf{v}'_0(b)\bar{\delta}(0) = \bar{\mathbf{0}}, \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.149)$$

όπου  $\bar{\mathbf{0}}$  είναι ένα  $\nu \times 1$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία. ■

Στη συνέχεια μελετούμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για την επέκταση του μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων, όπως ορίστηκε στην αρχή της παρούσας ενότητας. Έστω,  $W_m(u, b)$  να είναι η  $m$ -τάξης ροπή των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων που καταβάλλονται μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$ . Επίσης, κατά αντιστοιχία με την μεθοδολογία για την συνάρτηση Gerber-Shiu, θεωρούμε  $W_{m,j}(u, b)$ , για  $0 \leq u \leq b$  και  $j = 1, \dots, \nu$ , να είναι η  $m$ -τάξης ροπή των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , με  $W_{m,1}(u, b) = W_m(u, b)$  (για  $\nu = 2$ , η συνάρτηση  $W_{m,2}(u, b)$  είναι ακριβώς ίδια με τη συνάρτηση  $W_{m,1}(u, b)$  της Ενότητας 2.4). Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της Ενότητας 2.4 έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.13.** Για  $0 \leq u \leq b$  και  $m \geq 1$ , οι  $W_{m,j}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για  $j = 1, \dots, \nu - 1$ ,

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_j) \right) W_{m,j}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{m,j}(u-x, b) f_1(x) dx + \lambda_j W_{m,j+1}(u, b) = 0, \quad (2.150)$$

και για  $j = \nu$ ,

$$\begin{aligned} \left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda_\nu + \lambda) \right) W_{m,\nu}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{m,\nu}(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_\nu \int_0^u W_{m,1}(u-x, b) f_2(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.151)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial u} W_{m,j}(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{m-1,j}(b, b), \quad j = 1, \dots, \nu. \quad (2.152)$$

Έστω  $\bar{\mathbf{W}}_m(u, b) = (W_{m,1}(u, b), \dots, W_{m,\nu}(u, b))^T$  και  $\mathbf{v}_\delta(u)$  να είναι ο ίδιος πίνακας με τον πίνακα  $\mathbf{v}_\delta(u)$  με  $\bar{\delta} = \delta m$  στη θέση του  $\delta$ . Τότε, εφαρμόζοντας όμοια μεθοδολογία όπως και παραπάνω, η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (2.150)-(2.151) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{W}}_m(u, b) = \mathbf{v}_\delta(u) \bar{\boldsymbol{\eta}}_m(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (2.153)$$

όπου  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_m(b) = (\eta_{1,m}(b), \dots, \eta_{\nu,m}(b))^T = \bar{\mathbf{W}}_m(0, b)$  είναι ένα  $\nu \times 1$  διάνυσμα σταθερών όρων, το οποίο υπολογίζεται αναδρομικά με βάση τις οριακές συνθήκες (2.152) και την εξίσωση (2.153). Συνεπώς,

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_m(b) = m[\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1} \mathbf{v}_{\bar{\delta}_1}(b) \bar{\boldsymbol{\eta}}_{m-1}(b), \quad m \geq 1, \quad (2.154)$$

με  $\bar{\delta}_1 = \delta(m-1)$ ,  $\mathbf{v}_0(b) = \mathbf{I}$  και  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_0(b) = \mathbf{1}$  όπου  $\mathbf{1}$  είναι ένα  $\nu \times 1$  διάνυσμα με όλα τα στοιχεία ίσα με ένα.

Θέτοντας  $m = 1$  και  $\bar{\delta} = \delta$ , η εξίσωση (2.153) γίνεται  $\bar{\mathbf{W}}_1(u, b) = \mathbf{v}_\delta(u) \bar{\boldsymbol{\eta}}_1(b)$ ,  $0 \leq u \leq b$ , και συνεπώς από την εξίσωση (2.154) έχουμε ότι

$$\bar{\mathbf{W}}_1(u, b) = \mathbf{v}_\delta(u) [\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1} \mathbf{1}, \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.155)$$

Για  $\lambda_i \rightarrow 0$  για  $i = 1, \dots, \nu$ , το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ανάγεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας. Σε αυτή την περίπτωση στις εξισώσεις (2.138) και (2.155) οι πίνακες/διανύσματα απλοποιούνται σε συναρτήσεις και έτσι παίρνουμε εύκολα την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» των Gerber, Lin και Yang (2006).

Όμως, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων από τη μορφή των πινάκων των εξισώσεων (2.138) και (2.155) βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε το διάνυσμα  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_b(u)$  σε όρους του διανύσματος  $\bar{\mathbf{W}}_1(u, b)$ . Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι στην εξίσωση (2.155) δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς τον πίνακα  $\mathbf{v}_\delta(u) [\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1}$ , τον οποίο στη συνέχεια πρέπει να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.138) προκειμένου να πάρουμε την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής».

**Παρατήρηση 2.6.** Στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων από τη δεύτερη κλάση ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang( $\nu$ ) κατανομή η «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» δεν είναι αληθής ακόμη και αν ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία της Ενότητας 2.5. Χρησιμοποιώντας όμοια διαδικασία με αυτήν της Ενότητας 2.5, έχουμε ότι ο αντίστοιχος  $\nu \times 2$  πίνακας  $\mathbf{W}(u, b)$  ικανοποιεί την εξίσωση  $\mathbf{W}(u, b) = \mathbf{v}_\delta(u) [\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , όπου  $\mathbf{e}_i$  είναι η  $i$ -στήλη του  $\nu \times \nu$  ταυτοτικού πίνακα. Έτσι, για  $\nu \geq 3$  δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε τον πίνακα  $\mathbf{v}_\delta(u) [\mathbf{v}'_\delta(b)]^{-1}$  σε όρους του πίνακα  $\mathbf{W}(u, b)$  και έτσι δεν είναι δυνατόν να πάρουμε μια όμοια «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» με αυτή της Ενότητας 2.5.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Μια άλλη γενίκευση της διαδικασίας πλεονάσματος, η οποία περιγράφεται στα προηγούμενα κεφάλαια, μπορεί να γίνει με την εισαγωγή ενός όρου διάχυσης. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται μια πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων, όπου ο επιπρόσθετος όρος διάχυσης αντικατοπτρίζει την τυχόν μεταβλητότητα, τόσο στα ασφάλιστρα, όσο και στο ύψος των αποζημιώσεων. Στην πράξη η επιπρόσθετη μεταβλητότητα σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων μπορεί να προέρχεται από την μείωση ή αύξηση των ασφαλιστρών, από την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μετοχών ή ομολογιών που έχει ο ασφαλιστικός οργανισμός στη διάθεση του κ.α.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με έναν όρο διάχυσης εισήχθη στη θεωρία κινδύνου από τους Gerber και Landry (1999) για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Στην προαναφερόμενη εργασία οι συγγραφείς μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας. Έκτοτε, η μελέτη διάφορων μέτρων κινδύνου ή ακόμη και η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu τόσο για το κλασσικό, όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με έναν όρο διάχυσης αποτελούν ένα δημοφιλές αντικείμενο έρευνας. Οι αναφορές περιλαμβάνουν τους Gerber και Shui (1999), Rolski, Schmidli, Schmidt και Teugels (1999), Wang και Wu (2000), Wang (2001), Chiu και Yin (2003), Li και Garrido (2005), Ren (2005), Tsai (2001), Tsai και Willmot (2002), Tsai (2003), Song (2008), Song, Meng και Ren (2010). Επιπλέον, αρκετοί συγγραφείς συμπεριέλαβαν στο κλασσικό και στο ανανεωτικό μοντέλο με ένα όρο

διάχυσης και μια στρατηγική σταθερού μερίσματος, κάτω από την οποία μελέτησαν, τόσο τη συνάρτηση των Gerber-Shiu, όσο και τις ροπές των προεξοφλημένων μερισμάτων. Οι κυριότερες αναφορές περιλαμβάνουν τους Zhang, Zhang και Wu (2002), Gerber και Shiu (2004), Li και Bao (2006), Li (2006), Meng, Zhang και Wu (2007), Gao και Yin (2008).

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τη διαδικασία πλεονάσματος στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων εισάγοντας έναν όρο διάχυσης. Η δομή του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: στην Ενότητα 3.1 δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή του μοντέλου με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, όταν η πρώτη κλάση κινδύνων είναι μια σύνθετη Poisson και η δεύτερη κλάση είναι μια σύνθετη ανανεωτική διαδικασία με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Στην Ενότητα 3.2 μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και βρίσκουμε, μέσω μετασχηματισμών Laplace, αναλυτικά αποτελέσματα για αυτήν. Στην επόμενη ενότητα (Ενότητα 3.3) μελετούμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το προαναφερόμενο μοντέλο κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Επιπλέον, στην Ενότητα 3.4 μελετούμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων που καταβάλλονται κάτω από τη προεπιλεγείσα μερισματική στρατηγική. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, στην Ενότητα 3.5 αποδεικνύουμε πως μια ανάλογη του Κεφ. 2 «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής», ισχύει στην περίπτωση όπου εισάγεται ένας όρος διάχυσης. Στην Ενότητα 3.6, εισάγουμε και δίνουμε αποτελέσματα για την πιθανότητα του μεγίστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία (maximum surplus before ruin). Τέλος, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για πιθανότητα του μεγίστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, στην Ενότητα 3.7 δείχνουμε πως η κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων είναι μια μικτή κατανομή.

### 3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τον χρόνο  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma B(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

όπου  $u = U(0)$  το αρχικό απόθεμα,  $c > 0$  το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου,  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια διαδικασία Wiener (ή κίνηση Brown) με μέσο 0 και διακύμανση  $\sigma^2$  που ορίζεται ως ακολούθως.

**Ορισμός 3.1.** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ονομάζεται διαδικασία Wiener (ή κίνηση Brown) με μέσο 0 και διακύμανση  $\sigma^2$  αν και μόνο αν μια από τις ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις είναι αληθής:

- (i) η  $B(t)$  έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις, με  $B(0) = 0$ , και ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους 0 και  $\sigma^2 t$ ,

(ii)  $\{B^2(t) - \sigma^2 t\}$  είναι martingale (ως προς κάποια διύλιση  $\mathcal{F}_t^B$ ),

(iii) για  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\{\exp(sB(t) - \sigma^2 s^2 t/2)\}$  είναι martingale (ως προς κάποια διύλιση  $\mathcal{F}_t^B$ )

Επιπλέον, όμοια με το Κεφ. 2, Ενότητα 2.1, θεωρούμε ότι  $\{S(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι στοχαστική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα  $[0, t)$ , η οποία συγκροτείται από δύο επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες,

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

όπου (όμοια με την εξίσωση (2.2)) οι  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο  $t$  προερχόμενες από την  $i$ -κλάση. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ.  $F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , σ.π.π.  $f_1(x)$ , μέση τιμή  $m_1$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_1(x) dx$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση.

Αντίστοιχα οι  $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ.  $F_2(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ , σ.π.π.  $f_2(x)$ , μέση τιμή  $m_2$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από τη δεύτερη κλάση.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι η απαριθμητήρια διαδικασία  $\{N_1(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda$  και ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ , που είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παράμετρο  $\lambda$ .

Επομένως, με όλα τα άλλα να παραμένουν ίδια όπως στην Ενότητα 2.1, σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των αποζημιώσεων, για τη δεύτερη κλάση κινδύνων,  $\{N_2(t)\}_{t=0}^\infty$ , είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ , όπου  $\{V_i\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang( $n$ ) κατανομή. Τότε από τον ορισμό της γενικευμένης Erlang( $n$ ) κατανομής ισχύει ότι

$$V_i = V_{i,1} + V_{i,2} + \dots + V_{i,n}, \quad (3.3)$$

όπου  $\{V_{i,j}\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανομημένων τ.μ., με παράμετρο  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  και  $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καθώς και ανεξάρτητες από τις στοχαστικές διαδικασίες του αριθμού των κινδύνων  $\{N_1(t)\}_{t=0}^\infty$  και  $\{N_2(t)\}_{t=0}^\infty$ . Ακόμη, θεωρούμε ότι η διαδικασία Wiener  $\{B(t)\}_{t=0}^\infty$  και η στοχαστική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων  $\{S(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τέλος, για την επάρκεια των ασφαλιστρών, υποθέτουμε ότι ισχύει μια συνθήκη, γνωστή

ως περιθώριο ασφαλείας (security loading), που δίνεται από τη σχέση

$$c > \lambda m_1 + \frac{m_2}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}. \quad (3.4)$$

### 3.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο (3.1)-(3.2). Σημειώνουμε ότι ο τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης των Gerber-Shiu διαφέρει από αυτόν της Ενότητας 2.2, μιας και δεν είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Έτσι, σε αυτή την ενότητα, ο υπολογισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής γίνεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace, και την αντιστροφή αυτών όταν τα μεγέθη ζημιών και από τις δύο κλάσεις κινδύνων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Έστω  $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$\phi(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u], \quad u \geq 0, \quad (3.5)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο (3.1)-(3.2), όπου οι τ.μ.  $T$ ,  $U(T-)$ ,  $|U(T)|$ , ο σταθερός όρος  $\delta$  και η συνάρτηση  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  έχουν την ίδια ερμηνεία όπως και στον Ορισμό 1.6.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονισθεί ότι η δειγματοσυνάρτηση  $U(t)$  εκτός από τα άλματα προς τα κάτω, που εμφανίζει κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων, εμφανίζει επίσης (μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων) απότομες μεταβολές (ταλαντώσεις), προς τα πάνω ή προς τα κάτω, οι οποίες οφείλονται στην ύπαρξη της στοχαστικής διαδικασίας  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$ . Τότε, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1, η ενδεχόμενη χρεοκοπία μπορεί να προέλθει είτε από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης, είτε από τη μεταβλητότητα της διαδικασίας Wiener. Έτσι, για το μοντέλο κινδύνου (3.1)-(3.2), όμοια με τους Gerber και Landry (1999), ορίζουμε

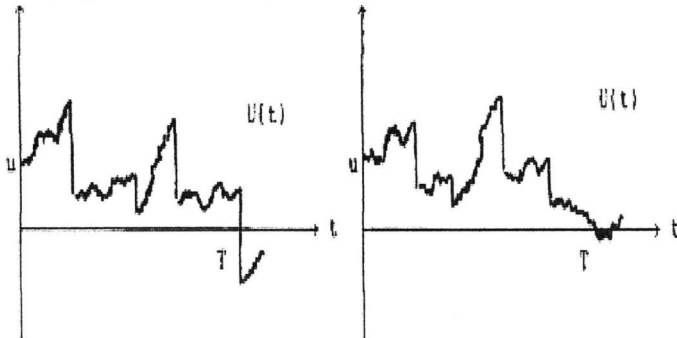
$$\phi^d(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T} 1_{(T < \infty, U(T)=0)} | U(0) = u], \quad u \geq 0, \quad (3.6)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία προέρχεται λόγω της μεταβλητότητας της διαδικασίας  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , με  $\phi^d(0) = 1$  και

$$\phi^c(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, U(T) < 0)} | U(0) = u], \quad u \geq 0, \quad (3.7)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία προέρχεται από

Σχήμα 3.1: (a) χρεοκοπία λόγω αποζημίωσης, (b) χρεοκοπία λόγω ταλάντωσης της  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$



την εμφάνιση μιας αποζημίωσης, με  $\phi^c(0) = 0$ . Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu,  $\phi^d(u)$ , είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας λόγω των ταλαντώσεων της  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$ .

Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , της σχέσης (3.5) και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης,  $\phi^d(u)$  και  $\phi^c(u)$ , των σχέσεων (3.6) και (3.7) συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\phi(u) = w_0 \phi^d(u) + \phi^c(u), \quad u \geq 0. \quad (3.8)$$

όπου  $w_0 = w(0,0)$  παριστά την ποινή που επιβάλλεται στον ασφαλιστή όταν η χρεοκοπία προκαλείται λόγω της διάχυσης.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι  $\phi^d(u)$  και  $\phi^c(u)$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρω-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Προκειμένου να αποδείξουμε το προαναφερμένο σύστημα, όμοια με την Ενότητα 2.7 για το ίδιο μοντέλο κινδύνου χωρίς τον όρο διάχυσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, στη θέση της απαριθμήτριας διαδικασίας  $N_2(t)$  ορίζουμε την απαριθμήτρια διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ . Για τη νέα αυτή απαριθμήτρια διαδικασία θεωρούμε ότι ο πρώτος ενδιάμεσος χρόνος άφιξης να είναι της μορφής  $V_1^j = V_{1,j} + V_{1,j+1} + \dots + V_{1,n}$  και παριστά τον χρόνο που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της πρώτης αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση, ενώ οι υπόλοιποι ενδιάμεσοι χρόνοι της  $N_{2,j}(t)$  είναι ίδιοι με αυτούς της αρχικής απαριθμήτριας διαδικασίας  $N_2(t)$ . Με όλα τα άλλα να είναι ίδια όπως στη διαδικασία πλεονάσματος (3.1) και με μόνη αλλαγή την αντικατάσταση της  $N_2(t)$  με  $N_{2,j}(t)$ , θεωρούμε  $U_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , να είναι η διαδικασία πλεονάσματος για την προαναφερόμενη προσαρμογή με  $U_1(t) = U(t)$ .

Επιπλέον για  $j = 1, \dots, n$ , θεωρούμε ότι

$$S_1^j = V_1 - V_1^j = V_{1,1} + V_{1,2} + \dots + V_{1,j-1},$$

με  $S_1^1 = 0$ , να είναι ένα άθροισμα των εκθετικών τ.μ. της εξίσωσης (3.3), και ορίζουμε

$$\begin{aligned}\phi_j(u) &= \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | S_1^j = t, U(t) = u \right], \\ \phi_j^c(u) &= \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, U(T) < 0)} | S_1^j = t, U(t) = u \right],\end{aligned}\quad (3.9)$$

και

$$\phi_j^d(u) = \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T-t)} 1_{(T < \infty, U(T) = 0)} | S_1^j = t, U(t) = u \right],$$

να είναι οι αντίστοιχες [με τις (3.5), (3.6), (3.7)] αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινης για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$ .

Τότε, είναι προφανές ότι  $\phi_1(u) = \phi(u)$ ,  $\phi_1^c(u) = \phi^c(u)$  με  $\phi_j^c(0) = 0$  για  $j = 1, \dots, n$  και  $\phi_1^d(u) = \phi^d(u)$  με  $\phi_j^d(0) = 1$  για  $j = 1, \dots, n$ . Επίσης, κάτω από την παραπάνω τροποποίηση, [αντίστοιχα με τη σχέση (3.8)] ισχύει ότι, για  $u \geq 0$ ,

$$\phi_j(u) = w_0 \phi_j^d(u) + \phi_j^c(u), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος δεύτερης τάξης για τις  $\phi_j^c(u)$  και  $\phi_j^d(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , δίνουμε τις αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες οι προαναφερόμενες συναρτήσεις των Gerber-Shiu, είναι συνεχείς δύο φορές παραγωγίσιμες.

**Λήμμα 3.1.** Έστω ότι οι σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων,  $f_k(x)$ , και οι  $w_k(u)$ , για  $k = 1, 2$ , είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $[0, \infty)$ , με

$$w_k(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f_k(y) dy = \int_0^\infty w(x, y) f_k(x+y) dy, \quad k = 1, 2. \quad (3.11)$$

Τότε, για  $j = 1, \dots, n$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_j^c(u)$  και  $\phi_j^d(u)$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  στο  $(0, \infty)$ .

**Απόδειξη.** Για  $a > 0$ , θεωρούμε  $k_a = \inf\{s : |B(s)| = a\}$  να είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η στοχαστική διαδικασία  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  να φτάσει, για πρώτη φορά, στο στο επίπεδο  $a$ . Επιπλέον για  $x \in [-a, a]$ , ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$H(a, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \exp \left[ -\frac{(x+4ka)^2}{2t} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-2a+4ka)^2}{2t} \right] \right),$$

$$h(a, t) = \frac{a}{2\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( (4k+1) \exp\left[-\frac{a^2(4k+1)^2}{2t}\right] + (4k-3) \exp\left[-\frac{a^2(4k-3)^2}{2t}\right] - (4k-1) \exp\left[-\frac{a^2(4k-1)^2}{2t}\right] \right).$$

Από τη μορφή των παραπάνω συναρτήσεων είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνάρτηση  $h(a, t)$  είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς  $t$  και  $a$ , ενώ η συνάρτηση  $H(a, t, x)$  είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς  $a$ ,  $t$  και  $x$ . Επιπλέον, από τους Revuz και Yor (1991) [σελ. 105-106], ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(B(s) \in dx, k_a > s) = H(a, s, x)dx, \quad \mathbb{P}(k_a \in ds) = h(a, s)ds.$$

Έστω  $Z_j = W_1 \wedge V_{1,j}$  και  $k^j = k_{u/\sigma} \wedge Z_j$  για  $j = 1, \dots, n$ . Τότε, όμοια με τη μεθοδολογία της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1, δεσμεύοντας ως προς τον τυχαίο χρόνο  $k^j$  και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι, για  $j = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \phi_j^c(u) &= \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi_j^c(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < Z_j)}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta V_{1,j}} \phi_{j+1}^c(u + cV_{1,j} + \sigma B(V_{1,j})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > V_{1,j})} \mathbf{1}_{(V_{1,j} < W_1)}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta W_1} \phi_j^c(u + cW_1 + \sigma B(W_1) - X_1) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > W_1)} \mathbf{1}_{(V_{1,j} > W_1)}] \\ &= I_{j,1} + I_{j,2} + I_{j,3}. \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με τους Li και Garrido (2005) [βλ. επίσης Θεώρημα 3.1 στους Wang και Wu (2000)], παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{j,1} &= \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi_j^c(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < Z_j)} \mathbf{1}_{(B(k_{u/\sigma})=u/\sigma)}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi_j^c(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < Z_j)} \mathbf{1}_{(B(k_{u/\sigma})=-u/\sigma)}]. \end{aligned}$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 2.8.3 των Port και Stone (1978), έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(B(k_a) = a, k_a \in dt) = \mathbb{P}(B(k_a) = -a, k_a \in dt) = \frac{1}{2} h(a, t) dt,$$

και επομένως η  $I_{j,1}$  γράφεται ως

$$I_{j,1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)t} [\phi_j^c(2u+ct) + \phi_j^c(ct)] h(u/\sigma, t) dt.$$

Ακόμη, από τον ορισμό της μέσης τιμής, η  $I_{j,2}$  γίνεται

$$I_{j,2} = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_j = s, Z_j = V_{1,j}) e^{-\delta s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \phi_{j+1}^c(u + cs + \sigma x) dx ds,$$

και εφόσον  $\mathbb{P}(Z_j > t | Z_j = W_1) = \mathbb{P}(Z_j > t | Z_j = V_{1,j}) = e^{-(\lambda+\lambda_j)t}$ , για  $j = 1, \dots, n$ , η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$I_{j,2} = \int_0^\infty \lambda_j e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \phi_{j+1}^c(u+cs+\sigma x) dx ds.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{j,3} &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_j = s, Z_j = W_1) e^{-\delta s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \zeta_{j,1}(u+cs+\sigma x) dx ds \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \zeta_{j,1}(u+cs+\sigma x) dx ds, \end{aligned}$$

με

$$\zeta_{j,i}(u) = \int_0^u \phi_j^c(u-y) f_i(y) dy + w_i(u), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2.$$

Όμοια, για  $j = n$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_n^c(u) &= \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi_n^c(u + c k_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < Z_n)}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta L_{1,n}} \phi_n^c(u + c V_{1,j} + \sigma B(L_{1,n}) - Y_1) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > L_{1,n})} \mathbf{1}_{(L_{1,n} < W_1)}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta W_1} \phi_n^c(u + c W_1 + \sigma B(W_1) - X_1) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > W_1)} \mathbf{1}_{(L_{1,n} > W_1)}] \\ &= I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}, \end{aligned}$$

από όπου κατά την ίδια μεθοδολογία όπως και παραπάνω, οι  $I_{n,1}$ ,  $I_{n,2}$  και  $I_{n,3}$  γράφονται ως

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_n+\delta)t} [\phi_n^c(2u+ct) + \phi_n^c(ct)] h(u/\sigma, t) dt, \\ I_{n,2} &= \int_0^\infty \lambda_n e^{-(\lambda+\lambda_n+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \zeta_{1,2}(u+cs+\sigma x) dx ds, \\ I_{n,3} &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\lambda_n+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \zeta_{n,1}(u+cs+\sigma x) dx ds. \end{aligned}$$

Τώρα, αλλάζοντας μεταβλητή στα ολοκληρώματα  $I_{j,1}$ ,  $I_{j,2}$  και  $I_{j,3}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , προκειμένου να αφαιρέσουμε το  $u$  από τις  $\phi_j^c$ ,  $j = 1, \dots, n$  και  $\phi_{j+1}^c$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  που ολοκληρώνονται, για  $j = 1, \dots, n$ , η ποσότητα  $I_{j,1}$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} I_{j,1} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)s} \phi_j^c(ct) h(u/\sigma, t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{2u}^\infty e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)(z-u)/c} \phi_j^c(z) h(u/\sigma, (z-2u)/c) dt, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$



η ποσότητα  $I_{j,2}$ , για  $j = 1, \dots, n-1$  μπορεί να γραφεί ως

$$I_{j,2} = \int_0^\infty \frac{\lambda_j}{\sigma} e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)s} ds \int_{cs}^{cs+2u} \phi_{j+1}^c(z) H(u/\sigma, s, (z-u-cs)/\sigma) dt,$$

η  $I_{n,2}$  γίνεται

$$I_{n,2} = \int_0^\infty \lambda_n e^{-(\lambda+\lambda_n+\delta)s} ds \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \left[ \int_0^{u+cs+\sigma x} \phi_1^c(z) f_2(u+cs+\sigma x-z) dz + w_2(u+cs+\sigma x) \right] dx,$$

και η ποσότητα  $I_{j,3}$ , για  $j = 1, \dots, n$ , γίνεται

$$I_{j,3} = \int_0^\infty \lambda_n e^{-(\lambda+\lambda_j+\delta)s} ds \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H(u/\sigma, s, x) \left[ \int_0^{u+cs+\sigma x} \phi_j^c(z) f_1(u+cs+\sigma x-z) dz + w_1(u+cs+\sigma x) \right] dx,$$

Από τη μορφή των  $I_{j,1}$ ,  $I_{j,2}$ , και  $I_{j,3}$  για  $j = 1, \dots, n$ , έπεται ότι οι προαναφερόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  στο  $(0, \infty)$ , και συνεπώς από το γεγονός ότι  $\phi_j^c(u) = I_{j,1} + I_{j,2} + I_{j,3}$  για  $j = 1, \dots, n$ , έχουμε ότι οι  $\phi_j^c(u)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $(0, \infty)$ .

Για να αποδείξουμε ότι οι  $\phi_j^d(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες  $(0, \infty)$  ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως και παραπάνω (με  $\zeta_{j,i}(u) = \int_0^u \phi_j^d(u-y) f_i(y) dy$ ) απ' όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Έχοντας δείξει ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_j^c(u)$  και  $\phi_j^d(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής, λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης, ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

**Θεώρημα 3.1.** Κάτω από τις συνθήκες του Λήμματος 3.1, για  $u \geq 0$ , οι  $\phi_j^c(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) \phi_j^c(u) + \lambda_j \phi_{j+1}^c(u) + \lambda \int_0^u \phi_j^c(u-x) f_1(x) dx + \lambda w_1(u) = 0, \quad (3.12)$$

και για  $j = n$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) \phi_n^c(u) + \lambda \int_0^u \phi_n^c(u-x) f_1(x) dx$$

$$+\lambda_n \int_0^u \phi_1^c(u-x)f_2(x)dx + \lambda w_1(u) + \lambda_n w_2(u) = 0. \quad (3.13)$$

όπου  $w_k(u)$  για  $k = 1, 2$ , δίνονται από την εξίσωση (3.11).

*Απόδειξη.* Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.11, μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία πλεονάσματος  $U(t)$ , που δίνεται από τη σχέση (3.1), σαν μια Μαρκοβιανή διαδικασία με  $n$  καταστάσεις. Η μετάβαση από την κατάσταση  $j$  στην κατάσταση  $j + 1$  συντελείται με ρυθμό μετάβασης σύμφωνα με μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_j$ , για  $j = 1, \dots, n - 1$ , ενώ η μετάβαση από την κατάσταση  $n$  στην κατάσταση 1 συντελείται με ρυθμό μετάβασης σύμφωνα με μια εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_n$ . Όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ , θεωρούμε ότι η απαριθμητρία διαδικασία της δεύτερης κλάσης είναι  $N_{2,j}(t)$ . Υποθέτοντας ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $j = 1, \dots, n - 1$  και θεωρώντας ένα απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  (δηλ. το απειροστό χρονικό διάστημα από το  $S_1^j$  μέχρι το  $S_1^j + dt$ ), έχουμε τέσσερα πιθανά ενδεχόμενα:

- (1) δεν εμφανίζεται κάποια αποζημίωση και η Μαρκοβιανή διαδικασία δεν αλλάζει κατάσταση,
- (2) εμφανίζεται κάποια αποζημίωση και η Μαρκοβιανή διαδικασία δεν αλλάζει κατάσταση,
- (3) η Μαρκοβιανή διαδικασία αλλάζει κατάσταση και δεν εμφανίζεται κάποια αποζημίωση,
- (4) δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω ενδεχόμενα εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Τότε, δεσμεύοντας ως προς τα παραπάνω ενδεχόμενα στο  $[0, dt]$  και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας για μέσες τιμές, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_j^c(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_j dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}[\phi_j^c(\mathcal{V}(dt))] + \lambda_j dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}[\phi_{j+1}^c(\mathcal{V}(dt))] \\ &\quad + \lambda dt(1 - \lambda_j dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \phi_j^c(\mathcal{V}(dt) - x)f_1(x)dx + w_1(\mathcal{V}(dt))\right] + o(dt), \end{aligned}$$

για  $j = 1, \dots, n - 1$ , με  $\mathcal{V}(dt) = u + cdt + \sigma B(dt)$  και  $o(t)/t \rightarrow 0$ , για  $t \rightarrow 0$ . Πολλαπλασιάζοντας με  $e^{\delta dt}$  και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_j^c(\mathcal{V}(dt))] - e^{\delta dt} \phi_j^c(u) - (\lambda + \lambda_j)dt \mathbb{E}[\phi_j^c(\mathcal{V}(dt))] + \lambda_j dt \mathbb{E}[\phi_{j+1}^c(\mathcal{V}(dt))] \\ + \lambda dt \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \phi_j^c(\mathcal{V}(dt) - x)f_1(x)dx + w_1(\mathcal{V}(dt))\right] + o(dt) = 0. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown [βλ. επίσης Lu και Tsai (2007)], το Λήμμα του Itô [βλ. Παράρτημα Α'.4], καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι  $\phi_j^c$  είναι

συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες (βλ. Λήμμα 3.1), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[\phi_j^c(\mathcal{V}(dt))] - e^{\delta dt} \phi_j^c(u)}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[\phi_j^c(\mathcal{V}(dt))] - \phi_j^c(u) - (e^{\delta dt} - 1)\phi_j^c(u)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\phi_j^c(u) + c(\phi_j^c)'(u) + \frac{\sigma^2}{2}(\phi_j^c)''(u) - \phi_j^c(u) - \delta\phi_j^c(u) + o(dt)}{dt} \\ &= \frac{\sigma^2}{2}(\phi_j^c)''(u) + c(\phi_j^c)'(u) - \delta\phi_j^c(u). \end{aligned}$$

Διαιρώντας με  $dt$  και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.14), παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $w_1(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς  $u$  (απ' όπου έπεται ότι  $\lim_{dt \rightarrow 0} w_1(\mathcal{V}(dt)) = w_1(\lim_{dt \rightarrow 0} \mathcal{V}(dt)) = w_1(u)$ ) παίρνουμε άμεσα την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.12) για  $j = 1, \dots, n-1$ .

Κατά όμοιο τρόπο, για  $j = n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_n^c(u) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_n dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}[\phi_n^c(\mathcal{V}(dt))] \\ &\quad + \lambda_n dt(1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \phi_n^c(\mathcal{V}(dt) - x)f_2(x)dx + w_2(\mathcal{V}(dt))\right] \\ &\quad + \lambda dt(1 - \lambda_n dt)e^{-\delta dt} \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \phi_n^c(\mathcal{V}(dt) - x)f_1(x)dx + w_1(\mathcal{V}(dt))\right] \\ &\quad + o(dt). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία, όπως αυτή της εξίσωσης (3.12), από την εξίσωση (3.15) παίρνουμε άμεσα την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.13). ■

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης 3.1, βρίσκουμε το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα που ικανοποιούν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω διάχυσης, όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.2.** *Κάτω από τις συνθήκες του Λήμματος 3.1, για  $u \geq 0$ , οι  $\phi_j^d(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,*

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta)\right) \phi_j^d(u) + \lambda_j \phi_{j+1}^d(u) + \lambda \int_0^u \phi_j^d(u-x)f_1(x)dx = 0, \quad (3.16)$$

και για  $j = n$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta)\right) \phi_n^d(u) + \lambda \int_0^u \phi_n^d(u-x)f_1(x)dx \\ + \lambda_n \int_0^u \phi_1^d(u-x)f_2(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η λύση των ολοκληρω-διαφορικών συστημάτων (3.12)-(3.13) και (3.16)-(3.17) εξαρτώνται άμεσα από τις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg για το μοντέλο (3.1)-(3.2), την οποία βρίσκουμε και λύνουμε ακολούθως.

Προκειμένου να βρούμε την εξίσωση του Lundberg, θεωρούμε  $t_k = \sum_{i=1}^k V_i$  να είναι ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της  $k$  αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση, με  $t_0 = 0$ . Ορίζουμε  $U_0 = u$  και για  $k \in \mathbb{N}$ , έστω

$$\begin{aligned} U_k(u) &= U(t_k) = u + ct_k - \sum_{i=1}^k Y_i - \sum_{j=1}^{N_1(t_k)} X_j + \sigma B(t_k) \\ &= u + \sum_{i=1}^k \left( cV_i - Y_i - \sum_{j=1}^{N_1(V_i)} X_j + \sigma(B(t_i) - B(t_{i-1})) \right), \end{aligned}$$

να είναι η διαδικασία πλεονάσματος αμέσως μετά την πραγματοποίηση της  $k$  αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση. Επιπλέον, θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός  $s$ , τέτοιος ώστε η διαδικασία  $\{e^{-\delta t_k + sU_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  να είναι martingale [ως προς κάποια διύλιση  $\mathcal{F}_k = \sigma(\{X_k\}_{k \geq 1}, \{Y_k\}_{k \geq 1}, N_1(k), N_2(k), B(k))$ ]. Τότε, από την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι martingale, έπεται ότι

$$\mathbb{E}[e^{(cs-\delta)V_1 - sY_1 - s \sum_{j=1}^{N_1(V_1)} X_j + s\sigma B(V_1)}] = \mathbb{E}[e^{(cs-\delta)V_1 - s \sum_{j=1}^{N_1(V_1)} X_j + s\sigma B(V_1)}] \mathbb{E}[e^{-sY_1}] = 1. \quad (3.18)$$

Εφόσον

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{(cs-\delta)V_1 - s \sum_{j=1}^{N_1(V_1)} X_j + s\sigma B(V_1)}] &= \mathbb{E}_{V_1} \{ \mathbb{E}[e^{(cs-\delta)V_1 - s \sum_{j=1}^{N_1(V_1)} X_j + s\sigma B(V_1)} | V_1] \} \\ &= \mathbb{E}_{V_1} [e^{(cs-\delta)V_1 - \lambda(\widehat{f}_1(s) - 1)V_1 + \frac{\sigma^2}{2}s^2 V_1}], \end{aligned}$$

και επιπλέον από την υπόθεση ότι η τ.μ.  $V_1$  ακολουθεί τη γενικευμένη Erlang( $n$ ) κατανομή, έπεται ότι η εξίσωση (3.18) γίνεται

$$\prod_{j=1}^n \left[ 1 - \frac{cs - \delta - \lambda(1 - \widehat{f}_1(s)) + \frac{\sigma^2}{2}s^2}{\lambda_j} \right] = \widehat{f}_2(s), \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.19)$$

Έστω  $\gamma_{\delta, \sigma}(s) = \prod_{j=1}^n \left[ 1 - \frac{cs - \delta - \lambda(1 - \widehat{f}_1(s)) + \frac{\sigma^2}{2}s^2}{\lambda_j} \right]$ , τότε η εξίσωση (3.19) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\gamma_{\delta, \sigma}(s) = \widehat{f}_2(s), \quad \delta \geq 0, n \in \mathbb{N}^+ \text{ και } s \in \mathbb{C}. \quad (3.20)$$

Η εξίσωση (3.20) ονομάζεται *γενικευμένη εξίσωση του Lundberg* για το μοντέλο που ορίστηκε

από τις σχέσεις (3.1) και (3.2).

Αξίζει να σημειωθεί ότι για  $\lambda \rightarrow 0$ , το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, που ορίζεται από τις σχέσεις (3.1)-(3.2), ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιαμέσους χρόνους άφιξης των κινδύνων και έναν όρο διάχυσης. Έτσι η εξίσωση (3.20) απλοποιείται σε

$$\prod_{j=1}^n \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{\lambda_j} \right) - \frac{c}{\lambda_j} s - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} s^2 \right] = \widehat{f}_2(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad (3.21)$$

που είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το παραπάνω ανανεωτικό μοντέλο. Οι Li και Garrido (2005), χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouché [βλ Θεώρημα 6.2] απέδειξαν ότι, για  $\delta > 0$ , η εξίσωση (3.21) έχει ακριβώς  $n$  ρίζες που βρίσκονται στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Στο επόμενο Λήμμα θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή των Albrecher και Boxma (2005), ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (3.20) έχει επίσης  $n$  ρίζες που βρίσκονται στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Για αυτό το σκοπό, ορίζουμε το  $n \times n$  πίνακα

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \mathbf{A}_{\delta,1}(s) + \mathbf{A}_{\delta,2}(s), \quad (3.22)$$

όπου  $\mathbf{A}_{\delta,1}(s) = \text{diag}(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_1, \dots, \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_n)$ , και

$$\mathbf{A}_{\delta,2}(s) = \begin{pmatrix} \lambda \widehat{f}_1(s) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda \widehat{f}_1(s) & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n \widehat{f}_2(s) & 0 & 0 & \dots & \lambda \widehat{f}_1(s) \end{pmatrix}.$$

Τότε, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  ισοδυναμεί με τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg που δίνεται από την σχέση (3.20).

**Λήμμα 3.2.** Για  $\delta > 0$ , γενικευμένη εξίσωση του Lundberg που δίνεται από τη σχέση (3.20) έχει ακριβώς  $n$  ρίζες,  $r_1(\delta, \sigma), \dots, r_n(\delta, \sigma)$ , που βρίσκονται στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

*Απόδειξη.* Από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_j = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες για  $1 \leq j \leq n$

$$s_{1j} = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2} < 0, \quad s_{2j} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2} > 0,$$

έπεται ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_{\delta,1}(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n$  θετικές ρίζες.

Τώρα, για  $\Re(s) \geq 0$  και  $0 \leq u \leq 1$ , ορίζουμε τον  $n \times n$  πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s, u) = \mathbf{A}_{\delta,1}(s) + u\mathbf{A}_{\delta,2}(s)$ . Τότε, από το γεγονός ότι  $\mathbf{A}_\delta(s, 1) = \mathbf{A}_\delta(s)$ , εύκολα συμπεραίνουμε

ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s, 1) = 0$  ισοδυναμεί με τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg που δίνεται από τη σχέση (3.20). Επιπλέον, έστω  $C_\delta$  να παριστά ένα κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο  $(R_\delta, 0)$  και ακτίνα  $R_\delta$ , όπου  $R_\delta = \max_{1 \leq j \leq n} s_{2,j} = \max_{1 \leq j \leq n} \{(-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)})/\sigma^2\}$ . Στη συνέχεια θα αποδείξουμε, για  $0 \leq u \leq 1$ , ότι  $\det \mathbf{A}_\delta(s, u) \neq 0$  για  $s \in C_\delta$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Levy-Desplanques (βλ. Θεώρημα 1.24). Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.24, πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως (diagonally dominant) (βλ. Ορισμό 1.17).

Για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $\Re(s) \geq 0$  και  $s \in C_\delta$ , χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των μέτρων των μιγαδικών αριθμών έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_j + u\lambda \widehat{f}_1(s) \right| &\geq \left| \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_j - u\lambda \widehat{f}_1(s) \right| \\ &\geq \left| \frac{\sigma^2}{2} (s - s_{1,j})(s - s_{2,j}) \right| - u\lambda \\ &\geq \frac{\sigma^2}{2} |s - s_{1,j}| |s - s_{2,j}| - u\lambda \\ &\geq \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2} \right) - u\lambda \\ &= \delta + \lambda_j - (1-u)\lambda \geq \delta + \lambda_j > \lambda_j \geq u\lambda_j, \end{aligned}$$

και όμοια για  $j = n$ ,  $\Re(s) \geq 0$  και  $s \in C_\delta$ , ισχύει ότι

$$\left| \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \delta - \lambda - \lambda_n + u\lambda \widehat{f}_1(s) \right| > \lambda_n \geq u\lambda_n \widehat{f}_2(0) \geq |u\lambda_n \widehat{f}_2(s)|.$$

Τότε, ανακαλώντας τον Ορισμό 1.17, ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως. Τώρα, έστω  $f(u)$  να παριστά το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s, u) = 0$  εντός του κύκλου  $\overline{C}_\delta$ , που είναι το εσωτερικό τμήμα του κύκλου  $C_\delta$ . Τότε, εφόσον  $\det \mathbf{A}_\delta(s, u) \neq 0$ , από το Θεώρημα 1.25, έχουμε ότι

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{\frac{\partial}{\partial u} \det \mathbf{A}_\delta(s, u)}{\det \mathbf{A}_\delta(s, u)} ds.$$

Ανακαλώντας ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_1(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n$  ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη, είναι εύκολο να δούμε ότι  $f(0) = n$ . Τέλος, η  $f(u)$  παίρνει ακεραίες τιμές, είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$ , και συνεπώς σταθερή. Έτσι, έχουμε ότι  $f(1) = f(0) = n$ , από όπου αποδεικνύεται το ζητούμενο. ■

**Παρατήρηση 3.1.** (i) Στο Λήμμα 3.2, αποδείξαμε την ύπαρξη  $n$  ριζών, της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s, 1) = 0$ , που βρίσκονται στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, οι

ρίζες αυτές βρίσκονται εντός του κύκλου που έχει κέντρο  $(\max_{1 \leq j \leq n} \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2}, 0)$  και ακτίνα  $\max_{1 \leq j \leq n} \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda + \lambda_j)}}{\sigma^2}$ .

- (ii) Έστω  $\ell_{\delta, \sigma}(s) = \widehat{f}_2(s) - \gamma_{\delta, \sigma}(s)$ . Εφόσον  $\ell_{\delta, \sigma}(0) < 0$  και  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \ell_{\delta, \sigma}(s) = +\infty$ , τότε η εξίσωση  $\ell_{\delta, \sigma}(s) = 0$  έχει τουλάχιστον μια αρνητική ρίζα, έστω  $-R(\delta, \sigma)$  με  $R(\delta, \sigma) > 0$ . Η ρίζα αυτή καλείται *συντελεστής προσαρμογής* για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, που ορίζεται από τις σχέσεις (3.1)-(3.2).
- (iii) Εάν  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε  $-R(\delta, \sigma) \rightarrow -R(0, \sigma)$  και  $r_j(\delta, \sigma) \rightarrow r_j(0, \sigma)$  για  $1 \leq j \leq n$ , όπου  $-R(0, \sigma)$  και  $r_j(0, \sigma)$  είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\gamma_{0, \sigma}(s) = \prod_{j=1}^n \left[ 1 - \frac{cs - \lambda(1 - \widehat{f}_1(s)) + \frac{\sigma^2}{2}s^2}{\lambda_j} \right] = \widehat{f}_2(s), \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.23)$$

Έστω  $r_1(\delta, \sigma) = \min_{1 \leq j \leq n} \{r_j(\delta, \sigma)\}$ . Παίρνοντας  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε  $r_1(0, \sigma) = 0$ , και έτσι η εξίσωση (3.23) έχει ακριβώς  $n - 1$  ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη.

- (iv) Παίρνοντας  $\sigma \rightarrow 0^+$ , τότε  $-R(\delta, \sigma) \rightarrow -R(\delta, 0)$  και  $r_j(\delta, \sigma) \rightarrow r_j(\delta, 0)$  για  $1 \leq j \leq n$ , όπου  $-R(\delta, 0)$  και  $r_j(\delta, 0)$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\gamma_{\delta, 0}(s) = \prod_{j=1}^n \left[ 1 - \frac{cs - \delta - \lambda(1 - \widehat{f}_1(s))}{\lambda_j} \right] = \widehat{f}_2(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad (3.24)$$

που είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη του όρου διάχυσης [βλ. εξίσωση (2.141) της Ενότητας 2.7]. Επιπλέον, παίρνοντας  $\lambda \rightarrow 0$ , η εξίσωση (3.24) ανάγεται στην εξίσωση (1.16) του Θεωρήματος 1.5, που είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

- (v) Για λόγους ευκολίας στο εξής συμβολίζουμε τις ρίζες  $r_j(\delta, \sigma)$  με  $r_j$  για  $1 \leq j \leq n$  και υποθέτουμε ότι είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της εξίσωσης (3.21) και τους μετασχηματισμούς Laplace προκειμένου να βρούμε την αναλυτική λύση των ολοκληρο-διαφορικών συστημάτων (3.12)-(3.13) και (3.16)-(3.17) των Θεωρημάτων 3.1 και 3.2.

Για  $s \in \mathbb{C}$ , ορίζουμε  $\widehat{\phi}_j^c(s) = \int_0^\infty e^{-su} \phi_j^c(u) du$ ,  $\widehat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_i(x) dx$  και  $\widehat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_i(u) du$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $\phi_j^c(u)$ ,  $f_i(x)$  και  $w_i(u)$ , αντίστοιχα, για  $j = 1, \dots, n$  και  $i = 1, 2$ .

Επιπλέον, εφόσον  $\phi_j^c(u) < \infty$ , τότε έχουμε ότι  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-su} \phi_j^c(u) = 0$  και  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-su} \times (\phi_j^c)'(u) = 0$  για  $\Re(s) \geq 0$  και  $j = 1, \dots, n$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και

στα δύο μέλη των εξισώσεων (3.12) και (3.13), και ανακαλώντας ότι  $\phi_j^c(0) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , βρίσκουμε ότι, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_j + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{\phi}_j^c(s) + \lambda_j \widehat{\phi}_{j+1}^c(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\phi_j^c)'(0) - \lambda \widehat{w}_1(s),$$

και για  $j = n$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_n + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{\phi}_n^c(s) + \lambda_n \widehat{f}_2(s) \widehat{\phi}_1^c(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\phi_n^c)'(0) - \lambda \widehat{w}_2(s) - \lambda_n \widehat{w}_2(s).$$

Ισοδύναμα το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων, όπως δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta(s) \widetilde{\phi}^c(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\widetilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \widetilde{\mathbf{w}}_\ell(s), \quad \Re(s) \geq 0, \quad (3.25)$$

όπου  $\widetilde{\phi}^c(s) = (\widehat{\phi}_1^c(s), \dots, \widehat{\phi}_n^c(s))^\top$ ,  $(\widetilde{\phi}^c)'(0) = ((\phi_1^c)'(0), \dots, (\phi_n^c)'(0))^\top$ ,  $\widetilde{\mathbf{w}}_1(s) = \lambda \widehat{w}_1(s) \mathbf{I}_n$  με  $\mathbf{I}_n$  να είναι ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1 και  $\widetilde{\mathbf{w}}_2(s) = \lambda_n \widehat{w}_2(s) \mathbf{e}_n$ , με  $\mathbf{e}_j$  να είναι ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα στήλη, με μόνο μη μηδενικό στοιχείο το 1 στην  $j$  γραμμή.

Επιπλέον, από την απόδειξη του Λήμματος 3.2, για  $u = 1$ , έχουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s) = \mathbf{A}_\delta(s, 1)$  κυριαρχεί διαγωνίως και συνεπώς από το Θεώρημα 1.24 έπεται ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε, η εξίσωση (3.25) γίνεται

$$\widetilde{\phi}^c(s) = \mathbf{A}_\delta^*(s) \frac{\frac{\sigma^2}{2}(\widetilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \widetilde{\mathbf{w}}_\ell(s)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}, \quad (3.26)$$

όπου  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$  είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (adjoint matrix) του  $\mathbf{A}_\delta(s)$ .

Κατά όμοιο τρόπο, έστω  $\widehat{\phi}_j^d(s) = \int_0^\infty e^{-su} \phi_j^d(u) du$  ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu λόγω διάχυσης,  $\phi_j^d(u)$ , για τις οποίες ισχύει ότι  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-su} \phi_j^d(u) = 0$  και  $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-su} (\phi_j^d)'(u) = 0$  για  $\Re(s) \geq 0$  και  $j = 1, \dots, n$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη των εξισώσεων (3.16)-(3.17) και ανακαλώντας ότι  $\phi_j^d(0) = 1$ ,  $1 \leq j \leq n$ , έχουμε ότι, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_j + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{\phi}_j^d(s) + \lambda_j \widehat{\phi}_{j+1}^d(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\phi_j^d)'(0) + \frac{\sigma^2}{2}s + c,$$

και για  $j = n$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_n + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{\phi}_n^d(s) + \lambda_n \widehat{f}_2(s) \widehat{\phi}_1^d(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\phi_n^d)'(0) + \frac{\sigma^2}{2}s + c.$$



Όμοια με το σύστημα για τις  $\phi_i^c(u)$ , το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων, όπως δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta(s)\tilde{\phi}^d(s) = \frac{\sigma^2}{2}(\tilde{\phi}^d)'(0) + \left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\tilde{\mathbf{I}}_n, \quad i = 1, 2,$$

όπου  $\tilde{\phi}^d(s) = (\tilde{\phi}_1^d(s), \dots, \tilde{\phi}_n^d(s))^T$  και  $(\tilde{\phi}^d)'(0) = ((\phi_1^d)'(0), \dots, (\phi_n^d)'(0))^T$ . Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα, παίρνουμε ότι

$$\tilde{\phi}^d(s) = \mathbf{A}_\delta^*(s) \frac{\frac{\sigma^2}{2}(\tilde{\phi}^d)'(0) + \left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)\tilde{\mathbf{I}}_n}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}. \quad (3.27)$$

**Παρατήρηση 3.2.** Από την μορφή της εξίσωσης για το διάνυσμα των μετασχηματισμών Laplace,  $\tilde{\phi}^d(s)$ , της σχέσης (3.27), παρατηρούμε ότι είναι ανάλογης μορφής με αυτό για το διάνυσμα των μετασχηματισμών Laplace,  $\tilde{\phi}^c(s)$ , που δίνεται στη σχέση (3.26). Θέτοντας  $\tilde{w}_1(s) = -(\frac{\sigma^2}{2}s + c)/\lambda$ , και  $\tilde{w}_2(s) = 0$ , το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{w}}_1(s)$  γίνεται  $-\tilde{\mathbf{w}}_1(s) = (\frac{\sigma^2}{2}s + c)\tilde{\mathbf{I}}_n$  και επίσης  $\tilde{\mathbf{w}}_2(s) = \tilde{\mathbf{0}}_n$ , όπου  $\tilde{\mathbf{0}}_n$  είναι το  $n \times 1$  διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία. Έτσι για τις παραπάνω επιλεγμένες μορφές των συναρτήσεων ποινής  $\tilde{w}_1(s)$  και  $\tilde{w}_2(s)$ , ο μετασχηματισμός Laplace,  $\tilde{\phi}_i^d(s)$  ικανοποιεί την εξίσωση (3.27). Συνεπώς ο μετασχηματισμός Laplace  $\tilde{\phi}^d(s)$  μπορεί επίσης να υπολογισθεί μέσω του μετασχηματισμού Laplace  $\tilde{\phi}^c(s)$ .

Για να ολοκληρώσουμε τη λύση των συστημάτων στις εξισώσεις (3.26) και (3.27), πρέπει επίσης να προσδιορίσουμε τις αρχικές τιμές  $(\tilde{\phi}^c)'(0)$  και  $(\tilde{\phi}^d)'(0)$ . Για αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε μία, συχνά χρησιμοποιούμενη στη θεωρία κινδύνου έννοια, τις διακετές διαφορές που ορίστηκαν στην Ενότητα 1.5. Ανακαλώντας από τον Ορισμό 1.18, την έννοια των διακετών διαφορών για πίνακες/διανύσματα και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις πρώτες παραγωγούς των διανυσμάτων  $\tilde{\phi}^c(u)$  και  $\tilde{\phi}^d(u)$  στο σημείο 0, ως εξής. Εφόσον το διάνυσμα  $\tilde{\phi}^c(s)$  είναι πεπερασμένο για  $\Re(s) \geq 0$ , από την εξίσωση (3.26) έχουμε ότι

$$\frac{\sigma^2}{2}\mathbf{A}_\delta^*(r_i)(\tilde{\phi}^c)'(0) = \sum_{\ell=1}^2 \mathbf{A}_\delta^*(r_i)\tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_i), \quad \text{για } i = 1, \dots, n.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις για  $i = 1, 2$  και χρησιμοποιώντας τις διακετές διαφορές έχουμε ότι

$$\frac{\sigma^2}{2}\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2](\tilde{\phi}^c)'(0) = \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{A}_\delta^*(r_1)\tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_1, r_2] + \mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2]\tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_2) \right).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αναδρομικά παίρνουμε ότι

$$\frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n] (\tilde{\phi}^c)'(0) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_i, \dots, r_n]. \quad (3.28)$$

Τότε, από την εξίσωση (3.28) και από την Παρατήρηση 3.2, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τις αρχικές τιμές των διανυσμάτων  $(\tilde{\phi}^c)'(0)$  και  $(\tilde{\phi}^d)'(0)$ .

**Πρόταση 3.1.** *Οι παράγωγοι πρώτου βαθμού των διανυσμάτων  $\tilde{\phi}^c(u)$  και  $\tilde{\phi}^d(u)$  στο σημείο μηδέν δίνονται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi}^c)'(0) &= \frac{1}{\sigma^2/2} (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n])^{-1} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_i, \dots, r_n], \\ (\tilde{\phi}^d)'(0) &= \frac{-1}{\sigma^2/2} (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n])^{-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n] \bar{\mathbf{I}}_n \left( \frac{\sigma^2}{2} r_n + c \right) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}] \bar{\mathbf{I}}_n \right). \end{aligned}$$

Όμοια, εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική των διακριτών διαφορών επαναλαμβανόμενα στον αριθμητή της εξίσωσης (3.26) και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.2, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τον μετασχηματισμό Laplace των διανυσμάτων  $\tilde{\phi}^c(u)$  και  $\tilde{\phi}^d(u)$ .

**Πρόταση 3.2.** *Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace των διανυσμάτων  $\tilde{\phi}^c(u)$  και  $\tilde{\phi}^d(u)$  δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις*

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^c(s) &= \frac{\prod_{i=1}^n (s - r_i)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)} \left[ \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] (\tilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_n, s] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_n, s] \right) \right], \quad (3.29) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^d(s) &= \frac{\prod_{i=1}^n (s - r_i)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)} \left[ \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \left( \frac{\sigma^2}{2} (\tilde{\phi}^d)'(0) + \left( \frac{\sigma^2}{2} r_n + c \right) \bar{\mathbf{I}}_n \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] \bar{\mathbf{I}}_n \right], \quad (3.30) \end{aligned}$$

με  $(\tilde{\phi}^c)'(0)$  και  $(\tilde{\phi}^d)'(0)$  όπως δίνονται από την Πρόταση 3.1.

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το  $s = r_1$  είναι ρίζα του αριθμητή της εξίσωσης (3.26), έχουμε ότι

$$\mathbf{A}_\delta^*(s) \left[ \frac{\sigma^2}{2} (\tilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\mathbf{w}}_\ell(s) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{A}_\delta^*(s) \left[ \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \bar{\mathbf{w}}_\ell(s) \right] - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \left[ \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \bar{\mathbf{w}}_\ell(r_1) \right] \\
&= (s - r_1) \left[ \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, s] (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, s] \bar{\mathbf{w}}_\ell(s) + \mathbf{A}_\delta(r_1) \bar{\mathbf{w}}_\ell[r_1, s]) \right]. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, επειδή οι τιμές  $s = r_2, \dots, r_{n-1}$  είναι επίσης ρίζες του αριθμητή της εξίσωσης (3.26), έχουμε ότι οι τιμές  $s = r_2, \dots, r_{n-1}$  πρέπει επίσης να είναι και ρίζες της συναρτήσεως εντός των αγκυλών στην εξίσωση (3.31). Έτσι, εφαρμόζοντας την τεχνική των διακετών διαφορών επαναλαμβανόμενα ως προς τους αριθμούς  $r_2, \dots, r_{n-1}$  με  $r_i \neq r_j$  για  $i, j = 2, \dots, n-1$ ,  $i \neq j$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_\delta^*(s) \left[ \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \bar{\mathbf{w}}_\ell(s) \right] \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (s - r_i) \left[ \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] \bar{\mathbf{w}}_\ell(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] \bar{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_{n-1}, s] \right) \right].
\end{aligned}$$

Ακόμη, από το γεγονός ότι το  $s = r_n$  είναι επίσης ρίζα του αριθμητή στην εξίσωση (3.26) και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία όπως και παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_\delta^*(s) \left[ \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \bar{\mathbf{w}}_\ell(s) \right] \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (s - r_i) \left[ \frac{\sigma^2}{2} \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] - \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, r_n] \right) (\bar{\phi}^c)'(0) \right. \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] (\bar{\mathbf{w}}_\ell(s) - \bar{\mathbf{w}}_\ell(r_n)) \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] - \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, r_n]) \bar{\mathbf{w}}_\ell(r_n) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] (\bar{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_{n-1}, s] - \bar{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_{n-1}, r_n]) \right) \right],
\end{aligned}$$

από όπου βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση της εξίσωσης (3.29). Τέλος η απόδειξη της σχέσης (3.30) γίνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.29) και την Παρατήρηση 3.2. ■

Από τη μορφή των μετασχηματισμών Laplace των διανυσμάτων  $\bar{\phi}^c(u)$  και  $\bar{\phi}^d(u)$  των σχέσεων (3.29) και (3.30), είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία της Ενότητας 2.2 αποδεικνύοντας ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, λόγω αποζημίωσης και

λόγω διάχυσης, ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι οι εξισώσεις (3.29) και (3.30) έχουν την μορφή πινάκων και συνεπώς είναι ιδιαίτερα δύσκολο να παραγοντοποιήσουμε κατάλληλα τον κοινό παρονομαστή των (3.29) και (3.30) προκειμένου να δείξουμε ότι οι  $\vec{\phi}^c(u)$  και  $\vec{\phi}^d(u)$  ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Αντ' αυτού, στην συνέχεια υποθέτοντας μια πολύ γενική μορφή για το ύψος των αποζημιώσεων θα αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace (3.29) και (3.30). Σημειώνουμε ότι η εύρεση των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace των διανυσμάτων  $\vec{\phi}^c(u)$  και  $\vec{\phi}^d(u)$  μπορεί να γίνει σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μία από αυτές τις περιπτώσεις είναι να υποθέσουμε ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Έτσι, υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π.  $f_1$  και  $f_2$  (των τ.μ.  $X$  και  $Y$ ) έχουν την ακόλουθη μορφή ηλίκων πολυωνύμων

$$\widehat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}, \quad p_{k-1}(0) = p_k(0) \quad \text{και} \quad \widehat{f}_2(s) = \frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)}, \quad q_{m-1}(0) = q_m(0), \quad (3.32)$$

όπου  $p_{k-1}(s)$ ,  $q_{m-1}(s)$  είναι πολυώνυμα βαθμού  $k-1$ ,  $m-1$  ή μικρότερου και  $p_k(s)$ ,  $q_m(s)$  είναι πολυώνυμα βαθμού  $k$ ,  $m$ , αντίστοιχα, με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το 1. Επιπλέον, οι εξισώσεις  $p_k(s) = 0$  και  $q_m(s) = 0$  έχουν μόνο αρνητικές ρίζες (ή μιγαδικές ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη).

Σε αυτή την περίπτωση η ορίζουσα του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$ , που δίνεται στην εξίσωση (3.22), παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\det \mathbf{A}_\delta(s) = \frac{J_{nk+m+2n}(s)}{p_k^n(s)q_m(s)}, \quad (3.33)$$

όπου

$$J_{nk+m+2n}(s) = q_m(s) \prod_{j=1}^n \left( \left( \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \lambda_j - \delta \right) p_k(s) + \lambda p_{k-1}(s) \right) - q_{m-1}(s) p_k^n(s) \prod_{j=1}^n \lambda_j,$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $nk + m + 2n$ , με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το  $(\sigma^2/2)^n$ , και συνεπώς η εξίσωση  $J_{nk+m+2n}(s) = 0$  έχει  $nk + m + 2n$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Ακόμη, από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, από την (3.33) έπεται ότι η εξίσωση  $J_{nk+m+2n}(s) = 0$  έχει  $n$  ρίζες  $r_1, \dots, r_n$  με θετικά πραγματικά μέρη (τις ρίζες του Λήμματος 3.2) και  $nk + m + n$  ρίζες  $R_i$  με αρνητικά πραγματικά μέρη. Στο εξής υποθέτουμε ότι οι ρίζες  $R_i$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Από τα παραπάνω έχουμε ότι το πολυώνυμο  $J_{nk+m+2n}(s)$  μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$J_{nk+m+2n}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n (s - r_i) \prod_{i=1}^{nk+m+n} (s + R_i)$ , απ' όπου παίρνουμε ότι

$$p_k^n(s) q_m(s) \det \mathbf{A}_\delta(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n (s - r_i) \prod_{i=1}^{nk+m+n} (s + R_i), \quad \Re(s) \geq 0. \quad (3.34)$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας, τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (3.29) με  $p_k^n(s) q_m(s)$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.34) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^c(s) = & \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n \prod_{i=1}^{nk+m+n} (s + R_i)} \left[ p_k^n(s) q_m(s) \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] (\tilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \left( p_k^n(s) \right. \right. \\ & \times q_m(s) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_n, s] + p_k^n(s) q_m(s) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_n) \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^{n-1} p_k^n(s) q_m(s) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_n, s] \right) \right]. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων  $p_k^n(s) q_m(s) \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s]$  και  $p_k^n(s) q_m(s) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_{n-1}, s]$  είναι πολυώνυμα βαθμών μικρότερων από  $nk + m + n$ , ενώ τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j]$  για  $j = 1, \dots, n$  είναι σταθεροί όροι. Τότε, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{p_k^n(s) q_m(s) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j, s]}{\prod_{i=1}^{nk+m+n} (s + R_i)} &= \sum_{i=1}^{nk+m+n} \frac{\mathbf{M}_i^{(j)}}{s + R_i}, \quad j = n-1, n, \\ \frac{p_k^n(s) q_m(s)}{\prod_{i=1}^{nk+m+n} (s + R_i)} &= \sum_{i=1}^{nk+m+n} \frac{h_i}{s + R_i} \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{M}_i^{(j)}$  είναι κάποιοι συντελεστές πίνακες και  $h_i$  είναι κάποιοι συντελεστές αριθμοί που δίνονται από τις σχέσεις, για  $i = 1, \dots, nk + m + n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^{(j)} &= \frac{p_k^n(-R_i) q_m(-R_i) \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j, -R_i]}{\prod_{k=1, k \neq i}^{nk+m+n} (R_k - R_i)}, \quad j = n-1, n, \text{ αν } \delta \\ h_i &= \frac{p_k^n(-R_i) q_m(-R_i)}{\prod_{k=1, k \neq i}^{nk+m+n} (R_k - R_i)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μερικά κλάσματα ο μετασχηματισμός Laplace  $\tilde{\phi}^c(s)$  γράφεται ως

$$\tilde{\phi}^c(s) = \frac{1}{(\sigma^2/2)^n} \sum_{i=1}^{nk+m+n} \left[ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\mathbf{M}_i^{(n)}}{s + R_i} (\tilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \left( \frac{\mathbf{M}_i^{(n-1)}}{s + R_i} \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_n, s] \right) \right]$$

$$+ \frac{\mathbf{M}_i^{(n)}}{s + R_i} \tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h_i}{s + R_i} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] \tilde{\mathbf{w}}_\ell[r_j, \dots, r_n, s] \Big]. \quad (3.36)$$

Επιπλέον, θέτοντας  $\hat{w}_1(s) = -(\frac{\sigma^2}{2}s + c)/\lambda$  και  $\hat{w}_2(s) = 0$  (συνεπώς  $\tilde{\mathbf{w}}_1(s) = -(\frac{\sigma^2}{2}s + c)\bar{\mathbf{I}}_n$  και  $\tilde{\mathbf{w}}_1[r_n, s] = -\frac{\sigma^2}{2}\bar{\mathbf{I}}_n$ ) στην εξίσωση (3.36), παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής λόγω διάχυσης

$$\tilde{\phi}^d(s) = \frac{1}{(\sigma^2/2)^n} \sum_{i=1}^{nk+m+n} \frac{1}{s + R_i} \left[ \mathbf{M}_i^{(n)} \left( \frac{\sigma^2}{2} (\tilde{\phi}^d)'(0) + \left( \frac{\sigma^2}{2} r_n + c \right) \bar{\mathbf{I}}_n \right) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{M}_i^{(n-1)} \bar{\mathbf{I}}_n \right]. \quad (3.37)$$

Προκειμένου να βρούμε τους αναλυτικές εκφράσεις για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των διανυσμάτων  $\tilde{\phi}^c(s)$  και  $\tilde{\phi}^d(s)$ , χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή  $T_r$  για πίνακες/διανύσματα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.67) της Πρότασης 1.4, μέσω της οποίας οι διακριτές διαφορές για πίνακες/διανύσματα εκφράζονται σε όρους των τελεστών  $T_r$  για πίνακες/διανύσματα, καθώς και το γεγονός ότι  $T_s T_r \mathbf{L}(0) = \int_0^\infty e^{-sx} T_r \mathbf{L}(x) dx$ , ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του πίνακα  $T_s \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ T_s \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(0) \right] = \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(x).$$

Έστω  $\tilde{\phi}^c(u) = (\phi_1^c(u), \dots, \phi_n^c(u))^\top$  και  $\tilde{\phi}^d(u) = (\phi_1^d(u), \dots, \phi_n^d(u))^\top$ . Τότε, αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των εξισώσεων (3.36) και (3.37) βρίσκουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις  $\tilde{\phi}^c(u)$  και  $\tilde{\phi}^d(u)$ , όπως δίνονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.** *Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace  $\hat{f}_1(s)$  και  $\hat{f}_2(s)$ , των μεγεθών των αποζημιώσεων και για τις δύο κλάσεις, έχουν μορφή ηγλικού πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (3.32), τότε για  $u \geq 0$ , τα διανύσματα των συναρτήσεων Gerber-Shiu λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης δίνονται από τις σχέσεις*

$$\tilde{\phi}^c(u) = \frac{1}{(\sigma^2/2)^n} \sum_{i=1}^{nk+m+n} \left[ e^{-R_i u} \mathbf{M}_i^{(n)} \left( \frac{\sigma^2}{2} (\tilde{\phi}^c)'(0) - \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\mathbf{w}}_\ell(r_n) \right) + \sum_{\ell=1}^2 e^{-R_i u} \star \left( \mathbf{M}_i^{(n-1)} T_{r_n} \tilde{\mathbf{w}}_\ell(u) + h_i \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_j] \left( \prod_{k=j}^n T_{r_k} \right) \tilde{\mathbf{w}}_\ell(u) \right) \right],$$

και

$$\tilde{\phi}^d(u) = \frac{1}{(\sigma^2/2)^n} \sum_{i=1}^{nk+m+n} e^{-R_i u} \left[ \mathbf{M}_i^{(n)} \left( \frac{\sigma^2}{2} (\tilde{\phi}^d)'(0) + \left( \frac{\sigma^2}{2} r_n + c \right) \bar{\mathbf{I}}_n \right) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{M}_i^{(n-1)} \bar{\mathbf{I}}_n \right],$$

όπου  $(\bar{\phi}^c)'(0)$ ,  $(\bar{\phi}^d)'(0)$  δίνονται από την Πρόταση 3.1,  $M_i^{(j)}$ ,  $h_i$ , για  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = n-1, n$ , δίνονται από την εξίσωση (3.35) και  $\star$  συμβολίζει τον τελεστή συνέλιξης.

### 3.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης για τη διαδικασία πλεονάσματος (3.1)-(3.2), όταν αυτή τροποποιείται εισάγοντας μια στρατηγική σταθερού μερίσματος σε κάποιο επίπεδο  $b \geq u$ . Τότε, όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάσει το επίπεδο  $b$ , τα ασφάλιστρα  $c$  επιστρέφονται στους δικαιούχους σε μορφή μερίσματος. Έστω  $U_b(t)$  να είναι η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος για το μοντέλο (3.1)-(3.2) κάτω από την στρατηγική σταθερού μερίσματος, με  $U_b(0) = u \geq 0$ . Τότε, η  $U_b(t)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) + \sigma dB(t), & U_b(t) < b, \\ -dS(t) + \sigma dB(t), & U_b(t) = b, \end{cases} \quad (3.38)$$

με  $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$  και  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$  δίνονται από τη σχέση (3.2) και τον Ορισμό 3.1 αντίστοιχα. Επιπλέον, για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$ , υποθέτουμε ότι η συνθήκη (3.4) είναι αληθής.

Έστω  $T_b = \inf\{t : U_b(t) \leq 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος και για  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  και  $\delta \geq 0$  ορίζουμε

$$\phi(u, b) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) I(T_b < \infty) | U_b(0) = u], \quad 0 \leq u \leq b,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη διαδικασία πλεονάσματος (3.38), όπου οι τ.μ.  $U(T_b-)$  και  $|U(T_b)|$  είναι το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία κάτω από την ύπαρξη της παραπάνω μερισματικής στρατηγικής.

Εφόσον, στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης η χρεοκοπία μπορεί να προέλθει από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης ή λόγω των διακυμάνσεων της κίνησης Brown (βλ. για περισσότερες λεπτομέρειες στην Ενότητα 3.2), για τη διαδικασία πλεονάσματος (3.38) ορίζουμε

$$\phi^c(u, b) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, U_b(T_b) < 0)} | U_b(0) = u], \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.39)$$

με  $\phi^c(0, b) = 0$ , να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία

προέλθει από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης και

$$\phi^d(u, b) = \mathbb{E} \left[ e^{-\delta T_b} \mathbf{1}_{(T_b < \infty, U_b(T_b) = 0)} \mid U_b(0) = u \right], \quad (3.40)$$

με  $\phi^d(0, b) = 1$ , να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν η χρεοκοπία οφείλεται στη μεταβλητότητα του όρου διάχυσης.

Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u, b)$ , αναλύεται ως

$$\phi(u, b) = w_0 \phi^d(u, b) + \phi^c(u, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.41)$$

με  $w_0 = w(0, 0)$ .

Προκειμένου να δείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, κατά αντιστοιχία με την Ενότητα 3.2, ορίζουμε την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , με  $U_{b,1}(t) = U_b(t)$ , να είναι η διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$  της Ενότητας 3.2 κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Για την νέα αυτή διαδικασία πλεονάσματος, οι τις αντίστοιχες συναρτήσεις των Gerber-Shiu δίνονται από τις σχέσεις, για  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \phi_j(u, b) &= \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T_b - t)} w(U(T_b -), |U(T_b)|) \mathbf{1}_{(T_b < \infty)} \mid S_1^j = t, U_b(t) = u \right], \quad 0 \leq u \leq b, \\ \phi_j^c(u, b) &= \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T_b - t)} w(U(T_b -), |U(T_b)|) \mathbf{1}_{(T_b < \infty, U(T_b) < 0)} \mid S_1^j = t, U_b(t) = u \right], \quad 0 \leq u \leq b, \end{aligned} \quad (3.42)$$

με  $\phi_j^c(0, b) = 0$ , και

$$\phi_j^d(u, b) = \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(T_b - t)} \mathbf{1}_{(T_b < \infty, U(T_b) = 0)} \mid S_1^j = t, U_b(t) = u \right], \quad 0 \leq u \leq b,$$

με  $\phi_j^d(0, b) = 1$ .

Τότε, από τον ορισμό της διαδικασίας  $U_{b,j}(t)$ , είναι φανερό ότι  $\phi_1(u, b) = \phi(u, b)$ ,  $\phi_1^c(u, b) = \phi^c(u, b)$  και  $\phi_1^d(u, b) = \phi^d(u, b)$ , ενώ επίσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος η συνάρτηση των Gerber-Shiu,  $\phi(u, b)$ , αναλύεται ως

$$\phi_j(u, b) = w_0 \phi_j^d(u, b) + \phi_j^c(u, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_j^c(u, b)$  και  $\phi_j^d(u, b)$  ικανοποιούν, κάθε μία, ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Σημειώνουμε ότι κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, οι συναρτήσεις  $\phi_j^c(u, b)$  και  $\phi_j^d(u, b)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες



ως προς  $u$  στο  $(0, b)$  για  $j = 1, \dots, n$ . Η απόδειξη για την παραγωγισιμότητα  $\phi_j^c(u, b)$  και  $\phi_j^d(u, b)$  γίνεται ακολουθώντας όμοια διαδικασία με αυτή της απόδειξης του Λήμματος 3.1, και για αυτό το λόγο παραλείπεται.

Πριν, όμως, αναφερθούμε στο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω αποζημίωσης και λόγω διάχυσης, εξετάζουμε τις οριακές συνθήκες (οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τη λύση των προαναφερθέντων συστημάτων) που ικανοποιούν οι  $(\phi_j^c)'(u, b)$  και  $(\phi_j^d)'(u, b)$  στο σημείο  $u = b$ .

**Θεώρημα 3.4.** *Εάν το αρχικό απόθεμα είναι  $b$ , τότε για  $j = 1, \dots, n$ , ισχύει ότι*

$$(\phi_j^c)'(b-, b) = 0 \text{ και } (\phi_j^d)'(b-, b) = 0. \quad (3.44)$$

*Απόδειξη.* Έστω  $\nu = c/\sigma$ . Για  $0 < \varepsilon < b$ , ορίζουμε τον τυχαίο χρόνο  $\tau_\varepsilon = \inf\{s > 0 : \nu s + B(s) = -\varepsilon\}$ . Τότε από τους Karatzas και Shreve (σελ. 197, 1991) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon + \nu t)^2}{2t}\right] dt, \quad t > 0, \\ \mathbb{P}(\tau_\varepsilon < \infty) &= \exp(-2\nu\varepsilon), \\ \mathbb{E}[\exp(-\alpha\tau_\varepsilon)] &= \exp(-\nu\varepsilon - \varepsilon\sqrt{\nu^2 + 2\alpha}), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε  $Z_j = W_1 \wedge V_{1,j}$  και θεωρούμε  $\tau_\varepsilon \wedge Z_j$ , για  $j = 1, \dots, n$  να είναι ο τυχαίος χρόνος που προκύπτει συνδυάζοντας τους χρόνους  $W_1$ ,  $V_{1,j}$  και  $\tau_\varepsilon$ , με  $W_1$  οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης από την πρώτη κλάση, όπως ορίστηκαν στην Ενότητα 2.1, και  $V_{1,j}$  οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης της δεύτερης κλάσης, όπως ορίστηκαν στην Ενότητα 3.1. Τότε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε, για  $j = 1, \dots, n - 1$ ,

$$\begin{aligned} \phi_j^c(b, b) &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_\varepsilon} \phi_j^c(U_{b,j}(\tau_\varepsilon), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon < Z_j)}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[e^{-\delta W_1} \phi_j^c(U_{b,j}(W_1), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon > W_1)} \mathbf{1}_{(W_1 < V_{1,j})}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[e^{-\delta V_{1,j}} \phi_{j+1}^c(U_{b,j+1}(V_{1,j}), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon > V_{1,j})} \mathbf{1}_{(W_1 > V_{1,j})}\right], \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \phi_j^c(b - \sigma\varepsilon, b) \mathbb{P}(Z_j > t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z_j = t, W_1 = t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) \left[ \int_0^b \phi_j^c(b-x, b) f_1(x) dx + w_1(b) \right] dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z_j = t, V_{1,j} = t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) \phi_{j+1}^c(b, b) dt. \end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι  $\mathbb{P}(Z_j = W_1) = \lambda/(\lambda + \lambda_j)$ ,  $\mathbb{P}(Z_j = V_{1,j}) = \lambda_j/(\lambda + \lambda_j)$  και  $\mathbb{P}(Z_j > t | Z_j = W_1) = \mathbb{P}(Z_j > t | Z_j = V_{1,j}) = e^{-(\lambda + \lambda_j)t}$ , για  $j = 1, \dots, n$ , η παραπάνω εξίσωση

γίνεται

$$\begin{aligned}
\phi_j^c(b, b) &= \phi_j^c(b - \sigma\varepsilon, b) \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\lambda_j)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) \\
&\quad + \left[ \int_0^b \phi_j^c(b-x, b) f_1(x) dx + w_1(b) \right] \int_0^\infty \lambda e^{-(\delta+\lambda+\lambda_j)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) dt \\
&\quad + \phi_{j+1}^c(b, b) \int_0^\infty \lambda_j e^{-(\delta+\lambda+\lambda_j)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) dt.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Τώρα, για κάθε  $\alpha > 0$  και  $\varepsilon$  επαρκώς μικρό, ισχύει ότι

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) = \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau_\varepsilon}, \tau_\varepsilon < \infty) = \exp(-\nu\varepsilon - \varepsilon\sqrt{\nu^2 + 2\alpha}) = 1 + o(\varepsilon), \tag{3.46}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \geq t) dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} [\mathbb{P}(\tau_\varepsilon = \infty) + \mathbb{P}(t \leq \tau_\varepsilon < \infty)] dt \\
&= \frac{1}{\alpha} [1 - \mathbb{P}(\tau_\varepsilon < \infty)] + \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_t^\infty \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in ds) dt \\
&= \frac{1}{\alpha} [1 - \mathbb{P}(\tau_\varepsilon < \infty)] + \frac{1}{\alpha} [\mathbb{P}(\tau_\varepsilon < \infty) - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau_\varepsilon}, \tau_\varepsilon < \infty)] \\
&= \frac{1}{\alpha} [1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau_\varepsilon}, \tau_\varepsilon < \infty)] = o(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

όπου η τελευταία εξίσωση είναι απόρροια της εξίσωσης (3.46).

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.46) και (3.47) για  $\alpha = \delta + \lambda + \lambda_j$ , η εξίσωση (3.45) γίνεται

$$\phi_j^c(b, b) = \phi_j^c(b - \sigma\varepsilon, b) + o(\varepsilon),$$

απ' όπου διαιρώντας με  $\varepsilon$  και παίρνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0$  βρίσκουμε ότι  $(\phi_j^c)'(b-, b) = 0$ , για  $j = 1, \dots, n-1$ .

Κατά όμοιο τρόπο, για  $j = n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi_n^c(b, b) &= \mathbb{E}[e^{-\delta\tau_\varepsilon} \phi_n^c(U_{b,n}(\tau_\varepsilon), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon < Z_n)}] \\
&\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta W_1} \phi_n^c(U_{b,n}(W_1), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon > W_1)} \mathbf{1}_{(W_1 < V_{1,n})}] \\
&\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta V_{1,n}} \phi_n^c(U_{b,1}(V_{1,n}), b) \mathbf{1}_{(\tau_\varepsilon > V_{1,n})} \mathbf{1}_{(W_1 > V_{1,n})}], \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} \phi_n^c(b - \sigma\varepsilon, b) \mathbb{P}(Z_n > t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z_n = t, W_1 = t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) \left[ \int_0^b \phi_n^c(b-x, b) f_1(x) dx + w_1(b) \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty e^{-\delta t} \mathbb{P}(Z_n = t, V_{1,n} = t) \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) \left[ \int_0^b \phi_1^\varepsilon(b-x, b) f_2(x) dx + w_2(b) \right] dt \\
= & \phi_n^\varepsilon(b - \sigma\varepsilon, b) \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\lambda_n)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon \in dt) \\
& + \left[ \int_0^b \phi_n^\varepsilon(b-x, b) f_1(x) dx + w_1(b) \right] \int_0^\infty \lambda e^{-(\delta+\lambda+\lambda_n)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) dt \\
& + \left[ \int_0^b \phi_1^\varepsilon(b-x, b) f_2(x) dx + w_2(b) \right] \int_0^\infty \lambda e^{-(\delta+\lambda+\lambda_n)t} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon > t) dt.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, τις εξισώσεις (3.46) και (3.47), για  $\alpha = \delta + \lambda + \lambda_n$ , η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\phi_n^\varepsilon(b, b) = \phi_n^\varepsilon(b - \sigma\varepsilon, b) + o(\varepsilon),$$

απ' όπου για  $\varepsilon \rightarrow 0$  βρίσκουμε ότι  $(\phi_n^\varepsilon)'(b-, b) = 0$ . Τέλος για την απόδειξη της οριακής συνθήκης  $(\phi_j^\varepsilon)'(b-, b) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  εφαρμόζουμε ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως για την  $(\phi_j^\varepsilon)'(b-, b) = 0$ , παίρνοντας  $w_k(u) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2$ . ■

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_j^\varepsilon(u, b)$  και  $\phi_j^d(u, b)$  ικανοποιούν, κάθε μία, ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.

**Πρόταση 3.3.** Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, για  $0 \leq u \leq b$ , οι  $\phi_j^\varepsilon(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) \phi_j^\varepsilon(u, b) + \lambda_j \phi_{j+1}^\varepsilon(u, b) + \lambda \int_0^u \phi_j^\varepsilon(u-x, b) f_1(x) dx + \lambda w_1(u) = 0, \quad (3.48)$$

και για  $j = n$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) \phi_n^\varepsilon(u, b) + \lambda \int_0^u \phi_n^\varepsilon(u-x, b) f_1(x) dx \\
& + \lambda_n \int_0^u \phi_1^\varepsilon(u-x, b) f_2(x) dx + \lambda w_1(u) + \lambda_n w_2(u) = 0, \quad (3.49)
\end{aligned}$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi_j^\varepsilon(0, b) = 0 \quad \text{και} \quad (\phi_j^\varepsilon)'(b, b) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.50)$$

όπου  $w_k(u)$  για  $k = 1, 2$ , δίνονται από την εξίσωση (3.11).

Απόδειξη. Η απόδειξη των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.48) και (3.49) γίνεται ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, και για αυτό παραλείπεται. Η οριακές συνθήκες  $\phi_j^c(0, b) = 0$  για  $j = 1, \dots, n$ , είναι αληθείς από τον ορισμό της  $\phi_j^c$ . Τέλος, για να δείξουμε ότι  $(\phi_j^c)'(b, b) = 0$ , αρχικά χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για  $u \geq b$ , το ποσό  $u - b$  πληρώνεται άμεσα ως μερίσματα στους δικαιούχους, και συνεπώς έχουμε ότι  $\phi_j^c(u, b) = \phi_j^c(b, b)$ , απ' όπου βρίσκουμε

$$(\phi_j^c)'(b+, b) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Επίσης, από τη μορφή των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.48) και (3.49), συμπεραίνουμε ότι οι  $(\phi_j^c)'(u)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς  $u = b$ . Συνδυάζοντας τα παραπάνω μαζί με τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 3.4, παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Κατά όμοιο τρόπο, έχουμε την παρακάτω πρόταση για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu λόγω διάχυσης,  $\phi_j^d(u, b)$ .

**Πρόταση 3.4.** Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, για  $0 \leq u \leq 0$ , οι  $\phi_j^d(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) \phi_j^d(u, b) + \lambda_j \phi_{j+1}^d(u, b) + \lambda \int_0^u \phi_j^d(u-x, b) f_1(x) dx = 0, \quad (3.51)$$

και για  $j = n$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) \phi_n^d(u, b) + \lambda \int_0^u \phi_n^d(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_n \int_0^u \phi_1^d(u-x, b) f_2(x) dx = 0, \quad (3.52) \end{aligned}$$

με οριακές συνθήκες

$$\phi_j^d(0, b) = 1 \quad \text{και} \quad (\phi_j^d)'(b, b) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Οι λύσεις για τις  $\phi_j^c(u, b)$  και  $\phi_j^d(u, b)$  που ικανοποιούν τα συστήματα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων των Προτάσεων 3.3 και 3.4, εξαρτώνται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς συστήματος των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $u \geq 0$  και  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) v_{j;\delta}(u) + \lambda_j v_{j+1;\delta}(u) + \lambda \int_0^u v_{j;\delta}(u-x) f_1(x) dx = 0, \quad (3.53)$$

και για  $j = n$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) v_{n;\delta}(u) + \lambda \int_0^u v_{n;\delta}(u-x) f_1(x) dx + \lambda_n \int_0^u v_{1;\delta}(u-x) f_2(x) dx = 0. \quad (3.54)$$

Τιποθετώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή των Cheung και Landriault (2009), η λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.53)-(3.54), προσδιορίζεται με βάση τις αρχικές συνθήκες  $(v_{1;\delta}(0), \dots, v_{n;\delta}(0))$  και  $(v'_{1;\delta}(0), \dots, v'_{n;\delta}(0))$ . Έστω  $\vec{v}_{k;\delta}^A(u) = (v_{1,k;\delta}^A(u), \dots, v_{n,k;\delta}^A(u))^T$  και  $\vec{v}_{k;\delta}^B(u) = (v_{1,k;\delta}^B(u), \dots, v_{n,k;\delta}^B(u))^T$  για  $k = 1, \dots, n$ , να είναι δύο διανύσματα που περιέχουν ως στοιχεία το σύνολο των λύσεων του συστήματος (3.53)-(3.54), με αρχικές συνθήκες  $\vec{v}_{k;\delta}^A(0) = \vec{e}_k$ ,  $(\vec{v}_{k;\delta}^A)'(0) = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{k;\delta}^B(0) = \vec{0}$  και  $(\vec{v}_{k;\delta}^B)'(0) = \vec{e}_k$ , όπου  $\vec{e}_k$ , όμοια με την Ενότητα 3.2, είναι ένα  $k$ -διάστατο διάνυσμα στήλη με μόνο μη μηδενικό στοιχείο το 1 στην  $k$ -γραμμή και  $\vec{0}$  είναι ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία ίσα με το μηδέν. Τότε, είναι εύκολο να δει κανείς ότι, κάτω από τις παραπάνω αρχικές συνθήκες, τα διανύσματα  $\vec{v}_{k;\delta}^A(u)$  και  $\vec{v}_{k;\delta}^B(u)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι, με βάση τα παραπάνω, η γενική λύση για τις  $(v_{1;\delta}(u), \dots, v_{n;\delta}(u))$ , που ικανοποιούν το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.53)-(3.54), έχει την ακόλουθη μορφή

$$v_{j;\delta}(u) = \sum_{k=1}^n v_k(0) v_{j,k;\delta}^A(u) + \sum_{k=1}^n v'_k(0) v_{j,k;\delta}^B(u), \quad j = 1, \dots, n.$$

Επομένως, από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων [βλ. εξίσωση (31) στους Cheung και Landriault (2009)] η λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.48)-(3.49) με οριακές συνθήκες (3.50) δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \phi_j^c(u, b) &= \phi_j^c(u) + \sum_{k=1}^n [\phi_k^c(0, b) - \phi_k^c(0)] v_{j,k;\delta}^A(u) \\ &+ \sum_{k=1}^n [(\phi_k^c)'(0, b) - (\phi_k^c)'(0)] v_{j,k;\delta}^B(u), \quad 0 \leq u \leq b. \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες  $\phi_j^c(0, b) = \phi_j^c(0) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\phi_j^c(u, b) = \phi_j^c(u) + \sum_{k=1}^n [(\phi_k^c)'(0, b) - (\phi_k^c)'(0)] v_{j,k;\delta}^B(u).$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή πινάκων ως

$$\vec{\phi}^c(u, b) = \vec{\phi}^c(u) + \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) \left[ (\vec{\phi}^c)'(0, b) - (\vec{\phi}^c)'(0) \right], \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.55)$$

όπου  $\vec{\phi}^c(u, b) = (\phi_1^c(u, b), \dots, \phi_n^c(u, b))^T$ ,  $0 \leq u \leq b$ ,  $\vec{\phi}^c(u) = (\phi_1^c(u), \dots, \phi_n^c(u))^T$ ,  $u \geq 0$ , που δίνεται από το Θεώρημα 3.3 και  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) = (v_{j, k; \delta}^B(u))_{j, k=1}^n$  ένας  $n \times n$  πίνακας.

Επιπλέον, ανακαλώντας τις οριακές συνθήκες της εξίσωσης (3.50), δηλ.  $(\vec{\phi}^c)'(b, b) = \vec{0}_n$ , από την εξίσωση (3.55) βρίσκουμε άμεσα ότι  $(\vec{\phi}^c)'(0, b) - (\vec{\phi}^c)'(0) = -[(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}(\vec{\phi}^c)'(b)$ , και συνεπώς η εξίσωση (3.55) μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{\phi}^c(u, b) = \vec{\phi}^c(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u)[(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}(\vec{\phi}^c)'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.56)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως και παραπάνω η γενική λύση του συστήματος των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (3.52) και (3.4), για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω διάχυσης, δίνεται σε μορφή πινάκων από τη σχέση

$$\vec{\phi}^d(u, b) = \vec{\phi}^d(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u)[(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}(\vec{\phi}^d)'(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.57)$$

όπου  $\vec{\phi}^d(u, b) = (\phi_1^d(u, b), \dots, \phi_n^d(u, b))^T$ ,  $0 \leq u \leq b$  και  $\vec{\phi}^d(u) = (\phi_1^d(u), \dots, \phi_n^d(u))^T$ ,  $u \geq 0$ , που δίνεται από το Θεώρημα 3.3 της Ενότητας 3.2.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.10), (3.43), (3.56) και (3.57), προκύπτει ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο (3.38) δίνεται σε μορφή πινάκων από τη σχέση

$$\vec{\phi}(u, b) = \vec{\phi}(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u)[(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}\vec{\phi}'(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.58)$$

όπου  $\vec{\phi}(u) = (\phi_1(u), \dots, \phi_n(u))^T$ ,  $u \geq 0$ , είναι το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu για το αντίστοιχο μοντέλο χωρίς την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος, που αναλύθηκε στην Ενότητα 3.2, και βρίσκεται με βάση τη σχέση (3.8) και το Θεώρημα 3.3.

Από τις εξισώσεις (3.56) και (3.57), είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των  $\vec{\phi}^c(u, b)$  και  $\vec{\phi}^d(u, b)$  εξαρτάται άμεσα από τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_j^c(u)$  και  $\phi_j^d(u)$ , στο αντίστοιχο μοντέλο κινδύνου χωρίς την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, καθώς επίσης και από τον υπολογισμό των λύσεων του συστήματος (3.51)-(3.52), οι οποίες αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u)$ , και βρίσκονται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace. Στο υπόλοιπο μέρος αυτής της ενότητας δείχνουμε πώς μπορούν να υπολογισθούν τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) = (v_{j, k; \delta}^B(u))_{j, k=1}^n$ .

Για αυτό το σκοπό ορίζουμε, για  $\Re(s) \geq 0$ ,  $\hat{v}_{j, k; \delta}^B(s) = \int_0^\infty e^{-su} v_{j, k; \delta}^B(u) du$  να είναι ο μετασχηματισμός Laplace των λύσεων  $v_{j, k; \delta}^B(u)$ , για  $j, k = 1, \dots, n$ . Εφόσον οι στήλες του πίνακα  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u)$  αποτελούν λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.51)-(3.52), τότε αντικαθιστώντας  $v_{j, k; \delta}^B(u)$  στη θέση του  $v_{j, \delta}(u)$  και παίρνοντας μετασχηματισμούς

Laplace και στα δύο μέλη των εξισώσεων (3.53) και (3.54) βρίσκουμε ότι, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_j + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{v}_{j,k;\delta}^B(s) + \lambda_j \widehat{v}_{j+1,k;\delta}^B(s) = \frac{\sigma^2}{2} (v_{j,k;\delta}^B)'(0), \quad (3.59)$$

και για  $j = n$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - (\lambda + \lambda_n + \delta) + \lambda \widehat{f}_1(s)\right) \widehat{v}_{n,k;\delta}^B(s) + \lambda_n \widehat{f}_2(s) \widehat{v}_{1,k;\delta}^B(s) = \frac{\sigma^2}{2} (v_{n,k;\delta}^B)'(0). \quad (3.60)$$

Ορίζοντας τον  $n \times n$  πίνακα  $\widehat{v}_{\delta,n}^B(s) = (\widehat{v}_{j,k;\delta}^B(s))_{j,k=1}^n$  και ανακαλώντας τις αρχικές συνθήκες  $(\widehat{v}_{k;\delta}^B)'(0) = \bar{e}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , έπεται ότι  $(\mathbf{v}_{\delta,n}^B)'(0) = \mathbf{I}_n$ , και συνεπώς το σύστημα (3.59) και (3.60) μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{A}_\delta(s) \widehat{v}_{\delta,n}^B(s) = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{I}_n, \quad (3.61)$$

όπου  $\mathbf{I}_n$  είναι ο  $n \times n$  ταυτοτικός πίνακας. Επιπλέον από το γεγονός ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι αντιστρέψιμος [βλ. Ενότητα 3.2], η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\widehat{v}_{\delta,n}^B(s) = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\mathbf{A}_\delta^*(s)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}, \quad \Re(s) \geq 0. \quad (3.62)$$

Αντιστρέφοντας ως προς  $s$  την εξίσωση (3.62) οδηγούμαστε στον προσδιορισμό των  $\mathbf{v}_{\delta,n}^B(u)$ . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου τα μεγέθη αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλ. όταν ο μετασχηματισμός Laplace των σ.π.π.  $f_1$  και  $f_2$  είναι ηλίκο πολυωνύμων, τότε κάθε στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι μια συνάρτηση με μορφή ηλίκων πολυωνύμων, όπως επίσης και κάθε στοιχείο του αντίστροφου πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^{-1}(s) = \mathbf{A}_\delta^*(s) / \det \mathbf{A}_\delta(s)$ . Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις  $v_{j,k;\delta}^B(u)$  μπορούν να υπολογισθούν βρίσκοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των  $\widehat{v}_{j,k;\delta}^B(s)$  με τη χρήση της τεχνικής των μερικών κλασμάτων.

**Πρόταση 3.5.** *Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$  των μεγεθών των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις, έχουν τη μορφή ηλίκο πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (3.32), τότε οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.51)-(3.52),  $v_{j,k;\delta}^B(u)$  για  $j, k = 1, \dots, n$ , δίνονται από τη σχέση*

$$v_{j,k;\delta}^B(u) = \sum_{i=1}^n a_{j,k}(i) e^{r_i u} + \sum_{i=1}^{nk+m+n} b_{j,k}(i) e^{-R_i u}, \quad u \geq 0,$$

με

$$a_{j,k}(i) = \frac{p_k^n(r_i) q_m(r_i) (\mathbf{A}_\delta^*(r_i))_{j,k}}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1, k \neq i}^n (r_k - r_i) \prod_{j=1}^{nk+m+n} (r_i + R_j)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$b_{j,k}(i) = \frac{p_k^n(-R_i)q_m(-R_i)(\mathbf{A}_\delta^*(-R_i))_{j,k}}{(-1)^n\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{n-1}\prod_{k=1}^n(r_k+R_i)\prod_{j=1, j \neq i}^{nk+m+n}(R_j-R_i)}, \quad i=1, \dots, nk+m+n,$$

όπου  $(\mathbf{A}_\delta^*(s))_{j,k}$  είναι το  $(j, k)$  στοιχείο του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του  $\mathbf{A}_\delta(s)$ ,  $r_i \in \Re(r_i) \geq 0$  για  $i=1, \dots, n$  και  $-R_i \in \Re(R_i) \geq 0$  για  $i=1, \dots, nk+m+n$ , είναι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg,  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ .

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (3.62) με  $p_k^n(s)q_m(s)$  και ανακαλώντας την εξίσωση (3.34), έχουμε ότι

$$\hat{v}_{j,k;\delta}^B(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{-(n-1)} \frac{p_k^n(s)q_m(s)(\mathbf{A}_\delta^*(s))_{j,k}}{\prod_{i=1}^n(s-r_i)\prod_{i=1}^{nk+m+n}(s+R_i)}.$$

Χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{v}_{j,k;\delta}^B(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{j,k}(i)}{s-r_i} + \sum_{i=1}^{nk+m+n} \frac{b_{j,k}(i)}{s+R_i},$$

από όπου αντιστρέφοντας ως προς  $s$ , παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

### 3.4 Ροπές των σωρευτικών μερισμάτων σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τις ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Αρχικά ορίζουμε τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο (3.38) και δείχνουμε ότι ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Χρησιμοποιώντας το προαναφερόμενο σύστημα και το ανάπτυγμα του Taylor προσδιορίζουμε ένα ομογενές σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης που ικανοποιούν οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων της διαδικασίας πλεονάσματος (3.38). Για τη λύση του ομογενούς αυτού συστήματος στηρίζομαστε στη μεθοδολογία και στα αποτελέσματα της Ενότητας 3.3.

Για  $\delta \geq 0$  να παριστά την ένταση ανατοκισμού, ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.63)$$

να παριστά την παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας  $T_b$ , όπου  $D(t)$  είναι τα σωρευτικά μερίσματα που καταβάλλονται



μέχρι το χρόνο  $t$ .

Επιπλέον ορίζουμε

$$M(u, y, b) = \mathbb{E}[e^{yD_{u,b}} | U_b(0) = u],$$

να είναι η ροπογεννήτρια συνάρτησης τ.μ.  $D_{u,b}$ .

Επίσης, έστω

$$M_j(u, y, b) = \mathbb{E}[e^{yD_{u,b}} | S_1^j = t, U_b(t) = u], \quad j = 1, \dots, n,$$

με  $M_1(u, y, b) = M(u, y, b)$ , η ροπογεννήτρια συνάρτηση των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας για τη «βοηθητική» διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , για  $j = 1, \dots, n$ , της Ενότητας 3.3.

Αρχικά δίνουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις  $M_j(u, y, b)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες. Επειδή η απόδειξη του παρακάτω Λήμματος είναι όμοια με αυτή του Λήμματος 3.1 [βλ. επίσης και στο παράρτημα του Li (2006)], για αυτό και παραλείπεται.

**Λήμμα 3.3.** Έστω ότι οι σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις,  $f_1(x)$  και  $f_2(x)$ , είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $(0, \infty]$ . Τότε, για  $j = 1, \dots, n$ , οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις  $M_j(u, y, b)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  και  $y$  στο  $(0, b)$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, όπως δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.5.** Για  $0 \leq u \leq b$ , οι  $M_j(u, y, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - \delta \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_j) \right) M_j(u, y, b) + \lambda_j M_{j+1}(u, y, b) + \lambda \left( \int_0^u M_j(u-x, y, b) f_1(x) dx + \int_u^\infty f_1(x) dx \right) = 0 \quad (3.64)$$

και για  $j = n$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - \delta \frac{\partial}{\partial y} - (\lambda + \lambda_n) \right) M_n(u, y, b) + \lambda \left( \int_0^u M_n(u-x, y, b) f_1(x) dx + \int_u^\infty f_1(x) dx \right) + \lambda_n \left( \int_0^u M_1(u-x, y, b) f_2(x) dx + \int_u^\infty f_2(x) dx \right) = 0, \quad (3.65)$$

με οριακές συνθήκες

$$M_j(0, y, b) = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial u} M_j(u, y, b) \Big|_{u=b} = y M_j(u, y, b) \Big|_{u=b}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.66)$$

Απόδειξη. Για  $0 \leq u \leq b$ , θεωρούμε ένα απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$ , στο οποίο η διαδικασία πλεονάσματος είναι κάτω από το επίπεδο (οριζόντιο κατώφλι)  $b$ . Χρησιμοποιώντας όμοια λογική ακολουθία, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, για  $j = 1, \dots, n-1$  και  $0 \leq u < b$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_j(u, y, b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_j dt) \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [ e^{y e^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt), b}} | S_1^j = t, U_b(t) = u ] \} \\ &\quad + \lambda_j dt (1 - \lambda dt) \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [ e^{y e^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt), b}} | S_1^{j+1} = t, U_b(t) = u ] \} \\ &\quad + \lambda dt (1 - \lambda_j dt) \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} \mathbb{E} [ e^{y e^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt) - x, b}} | S_1^j = t, U_b(t) = u ] f_1(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx \right\} + o(dt) \\ &= (1 - (\lambda + \lambda_j) dt) \mathbb{E} [ M_j(\mathcal{V}(dt), y e^{-\delta dt}, b) ] + \lambda_j dt \mathbb{E} [ M_{j+1}(\mathcal{V}(dt), y e^{-\delta dt}, b) ] \\ &\quad + \lambda dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} M_j(\mathcal{V}(dt) - x, y e^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx \right] + o(dt), \end{aligned}$$

όπου  $\mathcal{V}(dt) = u + cdt + \sigma B(dt)$ .

Τώρα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor για δισδιάστατες συναρτήσεις,<sup>1</sup> το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.3 για τη διαφορισιμότητα των  $M_j(u, y, b)$  και βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown έχουμε ότι  $\mathbb{E} (M_j(\mathcal{V}(dt), y e^{-\delta dt}, b) = M_j(u, y, b) + (c \frac{\partial}{\partial u} M_j(u, y, b) - \delta y \frac{\partial}{\partial y} M_j(u, y, b) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} M_j(u, y, b)) dt + o(dt)$ . Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην παραπάνω εξίσωση, διαγράφοντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  βρίσκουμε άμεσα την εξίσωση (3.64).

Όμοια για  $j = n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_n(u, y, b) &= (1 - \lambda_n dt)(1 - \lambda dt) \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [ e^{y e^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt), b}} | S_1^n = t, U_b(t) = u ] \} \\ &\quad + \lambda dt (1 - \lambda_n dt) \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} \mathbb{E} [ e^{y e^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt) - x, b}} | S_1^n = t, U_b(t) = u ] f_1(x) dx \right. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Έστω μια συνάρτηση  $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι  $n$  φορές παραγωγίσιμη ως προς  $x$  και  $y$  στα σημεία  $h$  και  $k$ , αντίστοιχα. Τότε, από το ανάπτυγμα του Taylor έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left( h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx \Big\} \\
& + \lambda_n dt (1 - \lambda dt) \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} \mathbb{E} [e^{ye^{-\delta dt} D_{\mathcal{V}(dt)} - x, b} | S_1^1 = t, U_b(t) = u] f_2(x) dx \right. \\
& \left. + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_2(x) dx \right\} + o(dt) \\
= & (1 - (\lambda + \lambda_n) dt) \mathbb{E} [M_n(\mathcal{V}(dt), ye^{-\delta dt}, b)] \\
& + \lambda dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} M_n(\mathcal{V}(dt) - x, ye^{-\delta dt}, b) f_1(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx \right] \\
& + \lambda_n dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mathcal{V}(dt)} M_1(\mathcal{V}(dt) - x, ye^{-\delta dt}, b) f_2(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_2(x) dx \right] \\
& + o(dt).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor για δισδιάστατες συναρτήσεις, διαιρώντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , βρίσκουμε την εξίσωση (3.65).

Η πρώτη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (3.66) είναι προφανής, διότι εάν  $U_b(0) = 0$ , τότε η χρεοκοπία είναι άμεση και συνεπώς δεν καταβάλλονται μερίσματα. Για να αποδείξουμε τη δεύτερη οριακή συνθήκη της εξίσωσης (3.66), θεωρούμε ένα  $\varepsilon > 0$  και  $M_\varepsilon(u, y, b)$  να είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία για την ακόλουθη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος σε ένα επίπεδο  $b$ ,

$$U_{b,\varepsilon}(t) = u + (c + c_\varepsilon)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \varepsilon N_\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου  $N_\varepsilon(t)$  είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda_\varepsilon > 0$ , ανεξάρτητη από τις διαδικασίες  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , και  $c_\varepsilon$  τέτοιο ώστε  $c + c_\varepsilon > \lambda m_1 + \varepsilon \lambda_\varepsilon + m_2 / \sum_{j=1}^n \lambda_j$ . Επιπλέον θεωρούμε τη διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ , που ορίστηκε στην Ενότητα 3.2, και ορίζουμε  $M_{j,\varepsilon}(u, y, b)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , με  $M_{1,\varepsilon}(u, y, b) = M_\varepsilon(u, y, b)$ , να είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j,\varepsilon}(t)$  (όπου όμοια με την Ενότητα 3.3 η μόνη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών πλεονάσματος  $U_{b,\varepsilon}(t)$  και  $U_{b,j,\varepsilon}(t)$  είναι να αντικαταστήσουμε τη διαδικασία  $N_2(t)$  με την διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ ). Επιπροσθέτως, από το γεγονός ότι  $\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \varepsilon N_\varepsilon(t)$  είναι επίσης μια σύνθετη διαδικασία Poisson [βλ. Rolski, Schmidli, Schmidt και Teugels (1999), Κεφ. 5] έπεται ότι η διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,\varepsilon}(t)$  ισοδυναμεί με τη διαδικασία πλεονάσματος για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων χωρίς την ύπαρξη του όρου διάχυσης, που αναλύθηκε διεξοδικά στην Ενότητα 2.7. Έτσι (κατά αναλογία του Θεωρήματος 2.4) έχουμε ότι για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j,\varepsilon}(t)$  ισχύει ότι  $(\partial/\partial u)M_{j,\varepsilon}(u, y, b)|_{u=b} = yM_{j,\varepsilon}(u, y, b)|_{u=b}$ .

Τώρα, επιλέγουμε  $\varepsilon$ ,  $\lambda_\varepsilon$  και  $c_\varepsilon$  τέτοια ώστε  $\mathbb{E}[c_\varepsilon t - \varepsilon N_\varepsilon(t)] = 0$  και  $\text{Var}[\varepsilon N_\varepsilon(t)] = \sigma^2 t$ , απ' όπου συνεπάγεται ότι  $\lambda_\varepsilon = \sigma^2 / \varepsilon^2$ ,  $c_\varepsilon = \sigma^2 / \varepsilon$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της μετατοπισμένης διαδικασίας Poisson  $c_\varepsilon t - \varepsilon N_\varepsilon(t)$ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E}(e^{z(c_\varepsilon t - \varepsilon N_\varepsilon(t))}) &= z c_\varepsilon t + \lambda_\varepsilon t (e^{-z\varepsilon} - 1) = \frac{\sigma^2 t (z\varepsilon + e^{-z\varepsilon} - 1)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\sigma^2 z^2 t}{2!} - \frac{\sigma^2 z^3 t}{3!} \varepsilon + \frac{\sigma^2 z^4 t}{4!} \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Για  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , τότε  $\mathbb{E}(e^{z(c_\varepsilon t - \varepsilon N_\varepsilon(t))}) \rightarrow e^{\sigma^2 z^2 t / 2}$ , απ' όπου έπεται ότι  $\{c_\varepsilon t - \varepsilon N_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$  συγκλίνει ασθενώς στην  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  και συνεπώς η διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j,\varepsilon}(t)$  συγκλίνει ασθενώς στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$  για  $1 \leq j \leq n$ . Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_{j,\varepsilon}(u, y, b) = M_j(u, y, b)$  και  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\partial / \partial u) M_{j,\varepsilon}(u, y, b)|_{u=b} = (\partial / \partial u) M_j(u, y, b)|_{u=b} = y M_j(u, y, b)|_{u=b}$ , για  $j = 1, \dots, n$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεώρημα μπορούμε, εύκολα, να υπολογίσουμε το σύστημα των ολοκληρω-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι ροπές των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο (3.38). Για αυτό το σκοπό ορίζουμε την  $m$ -τάξης ροπή της τ.μ.  $D_{u,b}$ , που δίνεται από τη σχέση

$$W_m(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}^m | U_b(0) = u], \quad m \in \mathbb{N}, 0 \leq u \leq b,$$

με  $W_0(u, b) = 1$ . Επίσης ορίζουμε

$$W_{j,m}(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}^m | S_1^j = t, U_b(t) = u], \quad 0 \leq u \leq b,$$

με  $W_{j,0}(u, b) = 1$ , να είναι η  $m$ -τάξης ροπή των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , για  $j = 1, \dots, n$ , με  $W_{1,m}(u, b) = W_m(u, b)$ .

Σημειώνουμε ότι κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.3, οι συναρτήσεις  $W_{j,m}(u, b)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  στο  $(0, b)$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor ισχύει ότι

$$M_j(u, y, b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_{j,m}(u, b), \quad j = 1, \dots, n.$$

Τότε, από την εξίσωση (3.4) και το Θεώρημα 3.5, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση για τις  $m$ -τάξεως ροπές των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων  $W_{j,m}(u, b)$ .

**Πρόταση 3.6.** *Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.3, για  $0 \leq u \leq b$ , οι  $W_{j,m}(u, b)$ ,*

$m \geq 1$ , ικανοποιούν το ακόλουθο ομογενές σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_j) \right) W_{j,m}(u, b) + \lambda_j W_{j+1,m}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{j,m}(u-x, b) f_1(x) dx = 0, \quad (3.67)$$

και για  $j = n$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\delta m + \lambda + \lambda_n) \right) W_{n,m}(u, b) + \lambda \int_0^u W_{j,m}(u-x, b) f_1(x) dx + \lambda_n \int_0^u W_{1,m}(u-x, b) f_2(x) dx = 0, \quad (3.68)$$

με οριακές συνθήκες

$$W_{j,m}(0, b) = 0 \text{ και } \frac{\partial}{\partial u} W_{j,m}(u, b) \Big|_{u=b} = m W_{j,m-1}(u, b) \Big|_{u=b}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.69)$$

Η λύση του παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος εξαρτάται άμεσα από το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.53)-(3.54) [της Ενότητας 3.3] με  $\delta_m = \delta m$  στη θέση του  $\delta$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με τους Cheung και Landriault (2009), η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.67) και (3.68) έχει τη μορφή

$$W_{j,m}(u, b) = \sum_{k=1}^n W_{j,m}(0, b) v_{j,k;\delta_m}^A(u) + \sum_{k=1}^n W'_{j,m}(0, b) v_{j,k;\delta_m}^B(u), \quad 0 \leq u \leq b.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες της Πρότασης 3.6,  $W_{j,m}(0, b) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$W_{j,m}(u, b) = \sum_{k=1}^n W'_{j,m}(0, b) v_{j,k;\delta_m}^B(u), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq u \leq b,$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων

$$\bar{W}_m(u, b) = \mathbf{v}_{\delta_m}^B(u) \frac{\partial}{\partial u} \bar{W}_m(u, b) \Big|_{u=0}, \quad 0 \leq u \leq b, \quad (3.70)$$

Επιπλέον, γράφοντας τις οριακές συνθήκες της Πρότασης 3.6 σε μορφή πινάκων, έχουμε ότι

$$\bar{W}_m(0, b) = \bar{\mathbf{0}}_n \text{ και } \frac{\partial}{\partial u} \bar{W}_m(u, b) \Big|_{u=b} = m \bar{W}_{m-1}(u, b) \Big|_{u=b}, \quad (3.71)$$

όπου  $\vec{W}_m(u, b) = (W_{1,m}(u, b), \dots, W_{n,m}(u, b))^T$  και  $v_{\delta_m, n}^B(u)$  που αντιστοιχεί στον πίνακα  $v_{\delta, n}^B(u)$  της Ενότητας 3.3 με την ένταση ανατοκισμού  $\delta$  αν αντικατασταθεί με  $\delta_m = \delta t$ . Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω οριακές συνθήκες, από τις εξισώσεις (3.70) και (3.71) έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{W}_m(u, b)|_{u=0} = [(v_{\delta_m, n}^B)'(b)]^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \vec{W}_m(u, b)|_{u=b} = m[(v_{\delta_m, n}^B)'(b)]^{-1} \vec{W}_{m-1}(u, b)|_{u=b},$$

και συνεπώς η εξίσωση (3.70) γίνεται

$$\vec{W}_m(u, b) = m v_{\delta_m, n}^B(u) [(v_{\delta_m, n}^B)'(b)]^{-1} \vec{W}_{m-1}(b, b), \quad m \geq 1, 0 \leq u \leq b. \quad (3.72)$$

ή ισοδύναμα

$$\vec{W}_m(u, b) = m! \left( \prod_{k=1}^m v_{\delta_k, n}^B(u) [(v_{\delta_k, n}^B)'(b)]^{-1} \right) \vec{1}_n, \quad m \geq 1, 0 \leq u \leq b, \quad (3.73)$$

με  $\delta_k = \delta k$ , για  $1 \leq k \leq m$  και  $\vec{W}_0(u, b) = \vec{1}_n$ .

### 3.5 Ταυτότητα μερισμάτων-ποινής σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τη σχέση που συνδέει την πρώτη ροπή των σωρευτικών μερισμάτων με τις συναρτήσεις Gerber-Shiu για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης. Η διαδικασία που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη της «ταυτότητας μερισμάτων-ποινής» είναι όμοια με αυτή της Ενότητας 2.5 και συνοψίζεται στα εξής βήματα: αρχικά, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, ορίζουμε τις συναρτήσεις Gerber-Shiu όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση μιας αποζημίωσης, η οποία προέρχεται από την κλάση  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της Ενότητας 3.2 δείχνουμε πως μπορούν να υπολογισθούν οι προαναφερόμενες συναρτήσεις. Στη συνέχεια, με βάση τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.3, βρίσκουμε τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής λόγω αποζημίωσης, όταν η χρεοκοπία οφείλεται σε μία αποζημίωση από την πρώτη ή δεύτερη κλάση, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης κάτω από την υπόθεση μιας στρατηγικής σταθερού μερισματος. Τέλος, υπολογίζοντας ένα ακριβή τύπο για την παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από μία αποζημίωση από την πρώτη ή δεύτερη κλάση, και συνδυάζοντας αυτόν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu οδηγούμαστε στη ζητούμενη «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής».

Έστω  $J$  μια δίτιμη τ.μ. (cause-of-ruin due to a claim r.v.) που συμβολίζει την κλάση από

την οποία προέρχεται ο κίνδυνος (αποζημίωση) ύψους τέτοιο ώστε να προκαλέσει χρεοκοπία, δηλ  $J = i$ , εάν η χρεοκοπία προκαλείται από μία αποζημίωση από την κλάση  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Για  $\delta \geq 0$ ,  $w(x, y) : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , ορίζουμε

$$\Phi_i^c(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, J=i, U(T) < 0)} | U(0) = u), \quad u \geq 0, \quad (3.74)$$

για  $i = 1, 2$ , να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το μοντέλο (3.1)-(3.2) όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $i$ , με  $\Phi_i^c(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της Ενότητας 3.2 (βλ. εξίσωση (3.7)) μπορεί να αναλυθεί ως  $\phi^c(u) = \Phi_1^c(u) + \Phi_2^c(u)$ ,  $u \geq 0$ .

Επίσης, όμοια με την Ενότητα 3.2, θεωρούμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$  (όπου η μόνη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών πλεονάσματος  $U(t)$  και  $U_j(t)$  είναι να αντικαταστήσουμε τη διαδικασία  $N_2(t)$  με τη διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ ),

$$\Phi_{j,i}^c(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, J=i, U(T) < 0)} | S_1^j = t, U(t) = u), \quad u \geq 0,$$

με  $\Phi_{j,i}^c(0) = 0$  για  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, 2$  και προφανώς  $\Phi_{i,i}^c(u) = \Phi_i^c(u)$ ,  $i = 1, 2$ . Είναι φανερό ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της σχέσης (3.9) μπορεί να αναλυθεί ως  $\phi_j^c(u) = \Phi_{j,1}^c(u) + \Phi_{j,2}^c(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $u \geq 0$ .

Χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1, μπορούμε να δείξουμε ότι, κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\Phi_{j,i}^c(u)$ ,  $u \geq 0$ , ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) \Phi_{j,i}^c(u) + \lambda_j \Phi_{j+1,i}^c(u) \\ & + \lambda \int_0^u \Phi_{j,i}^c(u-x) f_1(x) dx + \lambda w_1(u) 1_{(i=1)} = 0, \quad (3.75) \end{aligned}$$

και για  $j = n$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) \Phi_{n,i}^c(u) + \lambda \int_0^u \Phi_{n,i}^c(u-x) f_1(x) dx \\ & + \lambda_n \int_0^u \Phi_{1,i}^c(u-x) f_2(x) dx + \lambda w_1(u) 1_{(i=1)} + \lambda_n w_2(u) 1_{(i=2)} = 0. \quad (3.76) \end{aligned}$$

Έστω  $\vec{\Phi}_i^c(u) = (\Phi_{1,i}^c(u), \dots, \Phi_{n,i}^c(u))^T$  για  $i = 1, 2$ . Χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία όπως αυτή για την απόδειξη της Πρότασης 3.1 και του Θεωρήματος 3.3, μπορούμε να δείξουμε ότι το διάνυσμα των αρχικών τιμών ( $\vec{\Phi}_i^c$ )'(0) και ο μετασχηματισμός Laplace,  $\vec{\Phi}_i^c(s)$ , του διανύσματος  $\vec{\Phi}_i^c(u)$  μπορούν απ' ευθείας να βρεθούν από την Πρόταση

3.1 και την Πρόταση 3.2, αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τα διανύσματα  $\bar{\phi}^c(u)$  με  $\bar{\Phi}_i^c(u)$  και  $\bar{\tilde{w}}_\ell(s)$  με  $\bar{\tilde{w}}_\ell(s)1_{(\ell=i)}$  για  $i = 1, 2$ ,  $\ell = 1, 2$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλ.  $\hat{f}_1$  και  $\hat{f}_2$  έχουν μορφή ηλίχιου πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (3.32), τότε το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\bar{\Phi}_i^c(u)$ , μπορεί να υπολογισθεί από το Θεώρημα 3.3 αντικαθιστώντας το διάνυσμα  $\bar{\phi}^c(u)$  με  $\bar{\Phi}_i^c(u)$  και το διάνυσμα  $\bar{\tilde{w}}_\ell(s)$  με  $\bar{\tilde{w}}_\ell(s)1_{(\ell=i)}$  για  $i = 1, 2$ ,  $\ell = 1, 2$ .

Το επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε και να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις Gerber-Shiu όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την πρώτη ή δεύτερη κλάση στο το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Έτσι για την διαδικασία πλεονάσματος (3.38) ορίζουμε (αντίστοιχα με την εξίσωση (3.74))

$$\Phi_i^c(u, b) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_b} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=i, U(T_b) < 0)} | U_b(0) = u], \quad 0 \leq u \leq b,$$

για  $i = 1, 2$ , να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $i$ , με  $\Phi_i^c(0, b) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Τότε, είναι φανερό ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της εξίσωσης (3.39), μπορεί να αναλυθεί ως  $\phi^c(u, b) = \Phi_1^c(u, b) + \Phi_2^c(u, b)$ ,  $0 \leq u \leq b$ .

Επίσης, όμοια με την Ενότητα 3.3, θεωρούμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$  (όπου η μόνη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών πλεονάσματος  $U_b(t)$  και  $U_{b,j}(t)$  είναι να αντικαταστήσουμε τη διαδικασία  $N_2(t)$  με τη διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ )

$$\Phi_{j,i}^c(u, b) = \mathbb{E}[e^{-\delta(T_b-t)} w(U(T_b-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=i, U(T_b) < 0)} | S_1^j = t, U_b(t) = u], \quad 0 \leq u \leq b,$$

με  $\Phi_{j,i}^c(0, b) = 0$  για  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, 2$ . Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu της εξίσωσης (3.42) μπορούν να αναλυθούν ως  $\phi_{j,i}^c(u, b) = \Phi_{j,1}^c(u, b) + \Phi_{j,2}^c(u, b)$  για  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, 2$ .

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία όπως αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.4 και της Πρότασης 3.3, κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, μπορούμε να δείξουμε ότι, για  $0 \leq u \leq b$ , οι  $\Phi_{j,i}^c(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρω-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $i = 1, 2$

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) \Phi_{j,i}^c(u, b) + \lambda_j \Phi_{j+1,i}^c(u, b) + \lambda \int_0^u \Phi_{j,i}^c(u-x, b) f_1(x) dx + \lambda w_1(u) 1_{(i=1)} = 0, \quad (3.77)$$



και για  $j = n, i = 1, 2$

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) \Phi_{n,i}^c(u, b) + \lambda \int_0^u \Phi_{n,i}^c(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_n \int_0^u \Phi_{1,i}^c(u-x, b) f_2(x) dx + \lambda w_1(u) 1_{(i=1)} + \lambda_n w_2(u) 1_{(i=2)} = 0. \quad (3.78)$$

με οριακές συνθήκες

$$\Phi_{j,i}^c(0, b) = 0, \quad \text{και} \quad (\Phi_{j,i}^c)'(b, b) = 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2. \quad (3.79)$$

Για κάθε  $i = 1, 2$ , η λύση του παραπάνω μη ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος εξαρτάται άμεσα από το (ίδιο) ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (3.53) και (3.54), το οποίο αναλύθηκε διεξοδικά στην Ενότητα 3.3.

Έστω  $\vec{\Phi}_i^c(u, b) = (\Phi_{1,i}^c(u, b), \dots, \Phi_{n,i}^c(u, b))^T$  και  $\mathbf{v}_{\delta,n}^A = (v_{j,k;\delta}^A(u))_{j,k=1}^n$ ,  $\mathbf{v}_{\delta,n}^B = (v_{j,k;\delta}^B(u))_{j,k=1}^n$  να είναι δύο  $n \times n$  πίνακες όπου οι στήλες τους αποτελούν τις (γραμμικά ανεξάρτητες) λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.53) και (3.54). Τότε, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Ενότητας 3.3, η γενική λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.77)-(3.78) δίνεται, σε μορφή πινάκων, από τη σχέση

$$\vec{\Phi}_i^c(u, b) = \vec{\Phi}_i^c(u) + \mathbf{v}_{\delta,n}^A(u) \left[ \vec{\Phi}_i^c(0, b) - \vec{\Phi}_i^c(0) \right] + \mathbf{v}_{\delta,n}^B(u) \left[ (\vec{\Phi}_i^c)'(0, b) - (\vec{\Phi}_i^c)'(0) \right],$$

για  $0 \leq u \leq b, i = 1, 2$ .

Επιπλέον, γράφοντας σε μορφή πινάκων την πρώτη οριακή συνθήκη στην εξίσωση (3.79), έχουμε  $\vec{\Phi}_i^c(0, b) = \vec{\mathbf{0}}_n$ . Επίσης, από τον ορισμό των συναρτήσεων Gerber-Shiu έχουμε ότι  $\vec{\Phi}_i^c(0) = \vec{\mathbf{0}}_n$ , για  $i = 1, 2$ , και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\vec{\Phi}_i^c(u, b) = \vec{\Phi}_i^c(u) + \mathbf{v}_{\delta,n}^B(u) \left[ (\vec{\Phi}_i^c)'(0, b) - (\vec{\Phi}_i^c)'(0) \right], \quad (3.80)$$

για  $0 \leq u \leq b, i = 1, 2$ .

Για να προσδιορίσουμε το άγνωστο διάνυσμα  $(\vec{\Phi}_i^c)'(0, b) - (\vec{\Phi}_i^c)'(0)$ ,  $i = 1, 2$  θα κάνουμε χρήση της δεύτερης οριακής συνθήκης στην εξίσωση (3.79),  $(\vec{\Phi}_i^c)'(b, b) = \vec{\mathbf{0}}_n$  in (3.80), από την οποία παίρνουμε ότι

$$(\vec{\Phi}_i^c)'(b) + (\mathbf{v}_{\delta,n}^B)'(b) \left[ (\vec{\Phi}_i^c)'(0, b) - (\vec{\Phi}_i^c)'(0) \right] = \vec{\mathbf{0}}_n. \quad (3.81)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.80) και (3.81), έχουμε ότι

$$\vec{\Phi}_i^c(u, b) = \vec{\Phi}_i^c(u) - \mathbf{v}_{\delta,n}^B(u) \left[ (\mathbf{v}_{\delta,n}^B)'(b) \right]^{-1} (\vec{\Phi}_i^c)'(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3.82)$$

Ακόμη, προκειμένου να δείξουμε την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής», χρειάζομαστε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων, όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την πρώτη ή δεύτερη κλάση. Για αυτό το λόγο ορίζουμε

$$V_i(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}1_{(J=i)} | U_b(0) = u], \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2,$$

με  $V_i(0, b) = 0$ , να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων  $W_1(u, b)$ , που ορίστηκε στην Ενότητα 3.4, αναλύεται ως  $W_1(u, b) = V_1(u, b) + V_2(u, b)$ ,  $0 \leq u \leq b$ .

Επίσης ορίζουμε

$$V_{j,i}(u, b) = \mathbb{E}[D_{u,b}1_{(J=i)} | S_1^j = t, U_b(t) = u], \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2,$$

για  $j = 1, \dots, n$ , να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $i$  για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , που ορίστηκε στην Ενότητα 3.4, με  $V_{1,i}(u, b) = V_i(u, b)$  για  $i = 1, 2$ . Χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία με την Ενότητα 3.4, μπορούμε να δείξουμε, κάτω από τις συνθήκες του Λήμματος 3.3, ότι για  $0 \leq u \leq b$ , οι  $V_{j,i}(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο ομογενές σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $i = 1, 2$

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j + \delta) \right) V_{j,i}(u) + \lambda_j V_{j+1,i}(u) + \lambda \int_0^u V_{j,i}(u-x) f_1(x) dx = 0, \quad (3.83)$$

και για  $j = n$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n + \delta) \right) V_{n,i}(u) + \lambda \int_0^u V_{n,i}(u-x) f_1(x) dx \\ + \lambda_n \int_0^u V_{1,i}(u-x) f_2(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (3.84)$$

με οριακές συνθήκες

$$V_{j,i}(0, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} V_{j,i}(u, b) \Big|_{u=b} = 1_{(i=j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2. \quad (3.85)$$

Έστω  $\vec{V}_i(u, b) = (V_{1,i}(u, b), \dots, V_{n,i}(u, b))^T$ , για  $i = 1, 2$ . Τότε, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία με αυτή της Ενότητας 3.4, προκύπτει ότι η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-

διαφορικού συστήματος (3.83)-(3.84), για κάθε  $i = 1, 2$ , δίνεται σε μορφή πινάκων από τη σχέση

$$\vec{V}_i(u, b) = \mathbf{v}_{\delta, n}^A(u) \vec{V}_i(0, b) + \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) \vec{V}'_i(0, b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.86)$$

Εκφράζοντας σε μορφή πινάκων την πρώτη οριακή συνθήκη της σχέσης (3.85), δηλ.  $\vec{V}_i(0, b) = \vec{0}_n$ ,  $i = 1, 2$ , η εξίσωση (3.86) απλοποιείται σε

$$\vec{V}_i(u, b) = \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) \vec{V}'_i(0, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2, \quad (3.87)$$

όπου το άγνωστο διάνυσμα  $\vec{V}'_i(0, b)$ ,  $i = 1, 2$ , υπολογίζεται με βάση την εξίσωση (3.87) και τη δεύτερη οριακή συνθήκη της σχέσης (3.85), η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται ως  $\vec{V}_i(b, b) = \vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Τότε, από την εξίσωση (3.87) παίρνουμε ότι

$$(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b) \vec{V}'_i(0, b) = \vec{e}_i, \quad i = 1, 2,$$

και συνεπώς η εξίσωση (3.87) γίνεται

$$\vec{V}_i(u, b) = \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} \vec{e}_i, \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3.88)$$

Τώρα, θεωρώντας τον  $n \times 2$  πίνακα  $\mathbf{V}_n(u, b) = (\vec{V}_1(u, b), \vec{V}_2(u, b))$ , και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.88) παίρνουμε ότι

$$\mathbf{V}_n(u, b) = \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} (\vec{e}_1, \vec{e}_2), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.89)$$

Επίσης, για να δειξουμε την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινή», θεωρούμε τους ακόλουθους  $n \times 2$  πίνακες  $\Phi_n^c(u) = (\vec{\Phi}_1^c(u), \vec{\Phi}_2^c(u))$ ,  $u \geq 0$  και  $\Phi_n^c(u, b) = (\vec{\Phi}_1^c(u, b), \vec{\Phi}_2^c(u, b))$ ,  $0 \leq u \leq b$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.82), μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η ακόλουθη σχέση είναι αληθής

$$\Phi_n^c(u, b) = \Phi_n^c(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} (\Phi_n^c)'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.90)$$

Επόμενο βήμα είναι να λύσουμε την εξίσωση (3.89) ως προς  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}$  και να αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στην παραπάνω εξίσωση προκειμένου να πάρουμε την «ταυτότητα μερισμάτων-ποινή». Όμως παρατηρώντας τη μορφή της εξίσωσης (3.89), είναι φανερό ότι για  $n \geq 3$  δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε τον πίνακα  $\mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1}$  σε όρους του πίνακα  $\mathbf{V}_n(u, b)$  και αυτό επειδή ο  $n \times 2$  πίνακας  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  δεν είναι αντιστρέψιμος για  $n \geq 3$ .

Έτσι, θεωρώντας ότι  $n = 2$ , έχουμε ότι  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathbf{I}_2$  με  $\mathbf{I}_2$  να είναι ο  $2 \times 2$  ταυτοτικός πίνακας και συνεπώς οι εξισώσεις (3.89) και (3.90) παίρνουν μια μορφή  $2 \times 2$  τετραγωνικών

πινάκων, δηλ. για  $n = 2$  γράφονται ως

$$V_2(u, b) = \mathbf{v}_{\delta,2}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta,2}^B)'(b)]^{-1}, \quad 0 \leq u \leq b,$$

και

$$\Phi_2^c(u, b) = \Phi_2^c(u) - \mathbf{v}_{\delta,2}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta,2}^B)'(b)]^{-1} (\Phi_2^c)'(b), \quad 0 \leq u \leq b.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.6.** *Κάτω από τις υποθέσεις των Λήμματος 3.1 και 3.3, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, όταν η δεύτερη κλάση έχει ενδιάμεσους χρόνους άφιξης που κατανομούνται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang(2) κατανομή, η ακόλουθη, σε μορφή πινάκων, «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» είναι αληθής*

$$\Phi_2^c(u, b) = \Phi_2^c(u) - V_2(u, b) (\Phi_2^c)'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.91)$$

Από το παραπάνω θεώρημα είναι φανερό ότι η «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» ισχύει για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu όπου η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση μιας αποζημίωσης και όχι στην μεταβλητότητα που παρουσιάζει ο όρος διάχυσης της κίνησης Brown. Έτσι, στη συνέχεια δείχνουμε μια «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής όπου η χρεοκοπία οφείλεται είτε στην εμφάνιση μιας αποζημίωσης, είτε στη μεταβλητότητα της κίνησης Brown.

Για αυτό το σκοπό, ορίζουμε

$$\Phi_{j,i}(u) = w_0 \phi_j^d(u) + \Phi_{j,i}^c(u), \quad u \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2,$$

και

$$\Phi_{j,i}(u, b) = w_0 \phi_j^d(u, b) + \Phi_{j,i}^c(u, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2,$$

να είναι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $i$  ή όταν η χρεοκοπία προέρχεται λόγω της μεταβλητότητας του όρου διάχυσης, σε ένα περιβάλλον χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος (δηλ. για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$ ) και σε ένα περιβάλλον με την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος (δηλ. για τη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ ), αντίστοιχα. Σε μορφή διανυσμάτων οι παραπάνω σχέσεις εκφράζονται ως

$$\bar{\Phi}_i(u) = w_0 \bar{\phi}^d(u) + \bar{\Phi}_i^c(u), \quad u \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.92)$$

και

$$\bar{\Phi}_i(u, b) = w_0 \bar{\phi}^d(u, b) + \bar{\Phi}_i^c(u, b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3.93)$$

Τώρα, από τις εξισώσεις (3.82), (3.57) και (3.92), η εξίσωση (3.93) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_i(u, b) &= w_0 \bar{\phi}^d(u, b) + \bar{\Phi}_i^c(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} (\bar{\Phi}_i^c)'(b) \\
 &= w_0 \left\{ \bar{\phi}^d(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} (\bar{\phi}^d)'(b) \right\} \\
 &\quad + \bar{\Phi}_i^c(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} (\bar{\Phi}_i^c)'(b) \\
 &= w_0 \bar{\phi}^d(u) + \bar{\Phi}_i^c(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} \left\{ w_0 (\bar{\phi}^d)'(b) + (\bar{\Phi}_i^c)'(b) \right\} \\
 &= \bar{\Phi}_i(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} \left\{ w_0 (\bar{\phi}^d)'(b) + (\bar{\Phi}_i^c)'(b) \right\}, \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

για  $0 \leq u \leq b$ ,  $i = 1, 2$ .

Επιπλέον, παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.92) ως προς  $u$  και θέτοντας  $u = b$ , έχουμε ότι

$$\bar{\Phi}_i'(b) = w_0 (\bar{\phi}^d)'(b) + (\bar{\Phi}_i^c)'(b), \quad i = 1, 2, \quad (3.95)$$

και συνεπώς η εξίσωση (3.94) γίνεται

$$\bar{\Phi}_i(u, b) = \bar{\Phi}_i(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} \bar{\Phi}_i'(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3.96)$$

Τώρα, θεωρούμε τους  $n \times 2$  τετραγωνικούς πίνακες  $\bar{\Phi}_n(u) = (\bar{\Phi}_1(u), \bar{\Phi}_2(u))$ ,  $u \geq 0$  και  $\bar{\Phi}_n(u, b) = (\bar{\Phi}_1(u, b), \bar{\Phi}_2(u, b))$ ,  $0 \leq u \leq b$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.96), μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι η ακόλουθη σχέση είναι αληθής

$$\bar{\Phi}_n(u, b) = \bar{\Phi}_n(u) - \mathbf{v}_{\delta, n}^B(u) [(\mathbf{v}_{\delta, n}^B)'(b)]^{-1} \bar{\Phi}_n'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.97)$$

Έτσι, κατά την ίδια μεθοδολογία όπως και παραπάνω, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.89) και (3.97) παίρνουμε την ακόλουθη «ταυτότητα μερισμάτων-ποινή» σε μορφή πινάκων για  $n = 2$ .

**Θεώρημα 3.7.** *Κάτω από τις υποθέσεις των Λήμματος 3.1 και 3.3, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης, όταν η δεύτερη κλάση έχει ενδιάμεσους χρόνους άφιξης που κατανέμονται σύμφωνα με μια γενικευμένη Erlang(2) κατανομή, η ακόλουθη «ταυτότητα μερισμάτων-ποινή» είναι αληθής*

$$\Phi_2(u, b) = \Phi_2(u) - \mathbf{V}_2(u, b) \Phi_2'(b), \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.98)$$

**Παρατήρηση 3.3.** Από το γεγονός ότι  $\Phi_2(u) = w_0 \Phi_2^d(u) + \Phi_2^c(u)$ ,  $u \geq 0$  και  $\Phi_2(u, b) = w_0 \Phi_2^d(u, b) + \Phi_2^c(u, b)$ ,  $0 \leq u \leq b$ , με  $\Phi_2^d(u) = (\bar{\phi}^d(u), \bar{\phi}^d(u))$  και  $\Phi_2^c(u, b) =$

$(\bar{\phi}^d(u, b), \bar{\phi}^d(u, b))$ , έπεται ότι για  $w_0 = 0$ , η «ταυτότητα μερισμάτων-ποινής» (3.98) ανάγεται στην εξίσωση (3.91). Επομένως, το Θεώρημα 3.7 αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 3.6.

### 3.6 Η πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο που μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη διαδικασία πλεονάσματος, όμως δεν είναι το μοναδικό. Ένα άλλο μέτρο κινδύνου μέσω του οποίου μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος είναι το μέγιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία (maximum surplus before ruin). Ως πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος ορίζεται η πιθανότητα του ενδεχομένου να συμβεί η χρεοκοπία, χωρίς όμως πρώτα η διαδικασία πλεονάσματος να έχει φτάσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο  $b$ . Η μελέτη αυτής της ποσότητας τόσο στο κλασικό όσο και στο ανανεωτικό μοντέλο (χωρίς την ύπαρξη ενός όρου διάχυσης) περιλαμβάνεται στους Bühlmann (1970), Dickson και Gray (1984), Dickson (1998), Dickson και Waters (2004), Li και Dickson (2006).

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης που δίνεται από τις σχέσεις (3.1)-(3.1) της Ενότητας 3.2.

Έτσι για  $0 \leq u < b$ , ορίζουμε

$$\xi(u, b) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} U(t) < b, T < \infty \mid U(0) = u\right),$$

να είναι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία ξεκινώντας από αρχικό απόθεμα  $u$  χωρίς όμως πρώτα η διαδικασία πλεονάσματος να έχει φτάσει στο επίπεδο  $b$ . Εναλλακτικά, η πιθανότητα  $\xi(u, b)$  ισοδυναμεί με την πιθανότητα χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη ενός απορροφητικού κατωφλιού (absorbing barrier) στο επίπεδο  $b$ . Από τον παραπάνω ορισμό για την  $\xi(u, b)$ , είναι φανερό ότι για  $b \leq u$ , έχουμε ότι  $\xi(u, b) = 0$ .

Επίσης για  $0 \leq u < b$  και  $j = 1, \dots, n$ , ορίζουμε

$$\xi_j(u, b) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} U(s) < b, T < \infty \mid S_1^j = t, U(t) = u\right)$$

να είναι η πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία που αντιστοιχεί στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$  της Ενότητας 3.2 (όπου η μόνη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών πλεονάσματος  $U(t)$  και  $U_j(t)$  είναι να αντικαταστήσουμε τη διαδικασία  $N_2(t)$  με τη διαδικασία  $N_{2,j}(t)$ ). Τότε, είναι φανερό ότι ισχύει  $\xi_1(u, b) = \xi(u, b)$ . Στην ακόλουθη πρόταση θα δείξουμε ότι οι  $\xi_j(u, b)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρω-διαφορικών εξισώσεων.

**Πρόταση 3.7.** Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, για  $0 \leq u < b$ , η πιθανότητα του μέγιστου πλεονάσματος,  $\xi_j(u, b)$ , ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j) \right) \xi_j(u, b) + \lambda_j \xi_{j+1}(u, b) + \lambda \left( \int_0^u \xi_j(u-x, b) f_1(x) dx + \bar{F}_1(u) \right) = 0, \quad (3.99)$$

και για  $j = n$ ,

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n) \right) \xi_n(u, b) + \lambda \left( \int_0^u \xi_n(u-x, b) f_1(x) dx + \bar{F}_1(u) \right) + \lambda_n \left( \int_0^u \xi_1(u-x, b) f_2(x) dx + \bar{F}_2(u) \right) = 0, \quad (3.100)$$

με οριακές συνθήκες

$$\xi_j(0, b) = 1 \quad \text{και} \quad \xi_j(b, b) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.101)$$

Απόδειξη. Για  $0 \leq u \leq b$ ,  $j = 1, \dots, n$ , θεωρούμε

$$\begin{aligned} \xi_j^s(u, b) &= \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} U(s) < b, T < \infty, U(T) < 0 \mid S_1^j = t, U(t) = u \right), \\ \xi_j^d(u, b) &= \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} U(s) < b, T < \infty, U(T) = 0 \mid S_1^j = t, U(t) = u \right), \end{aligned}$$

να είναι οι σ.κ. του μέγιστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία που αντιστοιχούν στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$ , όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση αποζημίωσης ή από τη μεταβλητότητα του όρου διάχυσης, αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι

$$\xi_j(u, b) = \xi_j^s(u, b) + \xi_j^d(u, b), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.102)$$

με  $\xi_j^s(0, b) = 0$ ,  $\xi_j^d(0, b) = 1$  για  $j = 1, \dots, n$ . Πρώτα δείχνουμε ότι οι σ.κ. του μέγιστου πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης,  $\xi_j^s(u, b)$ , ικανοποιεί ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων.

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, θεωρούμε ένα απειροστό διάστημα  $[0, dt]$ , και για  $j = 1, \dots, n-1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi_j^s(u, b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_j dt) \mathbb{E}(\xi_j^s(\mathcal{V}(dt), b)) + \lambda_j dt (1 - \lambda dt) \mathbb{E}(\xi_{j+1}^s(\mathcal{V}(dt), b)) \\ &\quad + \lambda dt (1 - \lambda_j dt) \mathbb{E} \left( \int_0^{\mathcal{V}(dt)} \xi_j^s(\mathcal{V}(dt) - x, b) f_1(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx \right) + o(dt), \end{aligned}$$

με  $\mathcal{V}(dt) = u + cdt + \sigma B(dt)$ .

Τώρα, χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown, διαγράφοντας με  $dt$  και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , για  $j = 1, \dots, n-1$ , έχουμε ότι

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j)\right) \xi_j^c(u, b) + \lambda_j \xi_{j+1}^c(u, b) + \lambda \left(\int_0^u \xi_j^c(u-x, b) f_1(x) dx + \bar{F}_1(u)\right) = 0. \quad (3.103)$$

Όμοια για  $j = n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \xi_n^c(u, b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \lambda_n dt) \mathbb{E}(\xi_n^c(\mathcal{V}(dt), b)) \\ &+ \lambda_n dt(1 - \lambda dt) \mathbb{E}\left(\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \xi_1^c(\mathcal{V}(dt) - x, b) f_2(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_2(x) dx\right) \\ &+ \lambda dt(1 - \lambda_n dt) \mathbb{E}\left(\int_0^{\mathcal{V}(dt)} \xi_n^c(\mathcal{V}(dt) - x, b) f_1(x) dx + \int_{\mathcal{V}(dt)}^{\infty} f_1(x) dx\right) \\ &+ o(dt), \end{aligned}$$

από όπου, με την ίδια τεχνική όπως παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n)\right) \xi_n^c(u, b) + \lambda \left(\int_0^u \xi_n^c(u-x, b) f_1(x) dx + \bar{F}_1(u)\right) \\ + \lambda_n \left(\int_0^u \xi_1^c(u-x, b) f_2(x) dx + \bar{F}_2(u)\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι οι  $\xi_j^d(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j)\right) \xi_j^d(u, b) + \lambda_j \xi_{j+1}^d(u, b) + \lambda \int_0^u \xi_j^d(u-x, b) f_1(x) dx = 0, \quad (3.105)$$

και για  $j = n$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n)\right) \xi_n^d(u, b) + \lambda \int_0^u \xi_n^d(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_n \int_0^u \xi_1^d(u-x, b) f_2(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.102), (3.103) και (3.105), παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα για  $j = 1, \dots, n-1$ , ενώ συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.102), (3.104) και (3.106), παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα για  $j = n$ . Οι οριακές συνθήκες  $\xi_j(0, b) = 1$  και  $\xi_j(b, b) = 0$ , είναι προφανείς. ■

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι για  $\delta = 0$ ,  $w(x, y) = 1$ , τότε οι συναρτήσεις



των Gerber-Shiu,  $\phi_j(u)$ ,  $\phi_j^c(u)$  και  $\phi_j^d(u)$ , της Ενότητας 3.2 ανάγονται στις πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi_j(u)$ ,  $\psi_j^c(u)$  και  $\psi_j^d(u)$  αντίστοιχα, με  $\psi_j(u) = \psi_j^c(u) + \psi_j^d(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , οι οποίες αφορούν στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_j(t)$ . Ανακαλώντας τα Θεωρήματα 3.1 και 3.2, παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi_j(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$  ικανοποιούν το ίδιο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων όπως στις σχέσεις (3.99) και (3.100), για  $u \geq 0$ . Συνεπώς, οι πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi_j(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$  αποτελούν κάποιες μερικές λύσεις του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.99)-(3.100). Στηριζόμενοι σε αυτό, και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή των Ενότητων 3.3 και 3.4, έχουμε ότι η γενική λύση για τις  $\xi_j(u, b)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση, σε μορφή πινάκων

$$\vec{\xi}(u, b) = \vec{\psi}(u) + \mathbf{v}_{0,n}^B(u) (\vec{\xi}'(0, b) - \vec{\psi}'(0)), \quad 0 \leq u < b, \quad (3.107)$$

όπου  $\vec{\xi}(u, b) = (\xi_1(u, b), \dots, \xi_n(u, b))^T$ ,  $0 \leq u < b$ ,  $\vec{\psi}(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_n(u))^T$ ,  $u \geq 0$  και  $\mathbf{v}_{0,n}^B(u)$  είναι ο πίνακας  $\mathbf{v}_{\delta,n}^B(u)$  (που ορίστηκε στην Ενότητα 3.4) για  $\delta = 0$ , δηλ.  $\mathbf{v}_{0,n}^B(u) = \mathbf{v}_{\delta,n}^B(u)|_{\delta=0}$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη οριακή συνθήκη της σχέσης (3.101) και την παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε ότι  $\vec{\xi}'(0, b) - \vec{\psi}'(0) = -[\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1} \vec{\psi}(b)$  και συνεπώς η εξίσωση (3.107) γίνεται

$$\vec{\xi}(u, b) = \vec{\psi}(u) - \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1} \vec{\psi}(b), \quad 0 \leq u < b. \quad (3.108)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε  $\tau_b = \inf\{t \geq 0 : U(t) \geq b | U(0) = u\}$  να είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει ή να ξεπεράσει το προκαθορισμένο επίπεδο  $b$ . Επίσης θεωρούμε

$$\chi(u, b) = \mathbb{P}(\tau_b < T_b | U_b(0) = u), \quad 0 \leq u \leq b,$$

με  $\chi(0, b) = 0$ , να είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει στο επίπεδο  $b$ , χωρίς πρώτα να πέσει κάτω του επιπέδου 0, δηλ. χωρίς πρώτα να έχει προηγηθεί η χρεοκοπία. Η πιθανότητα  $\chi(u, b)$ , είναι ένα ακόμη μέτρο κινδύνου που μας δίνει επιπρόσθετες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα ο υπολογισμός της πιθανότητας  $\chi(u, b)$  είναι απαραίτητος προκειμένου να υπολογίσουμε την ακριβή κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων.

Ακόμη θεωρούμε

$$\chi_j(u, b) = \mathbb{P}(\tau_b < T_b | S_1^j = t, U_b(t) = u), \quad 0 \leq u \leq b,$$

με  $\chi_j(0, b) = 0$ , να είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$  (που ορίστηκε στην Ενότητα 3.3) να φτάσει ή να ξεπεράσει το επίπεδο  $b$  χωρίς να πρώτα να έχει προηγηθεί η χρεοκοπία. Εφόσον, τα ενδεχόμενα των πιθανοτήτων  $\xi_j(u, b)$  και  $\chi_j(u, b)$

είναι συμπληρωματικά, είναι φανερό ότι  $\chi_j(u, b) = 1 - \xi_j(u, b)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Επομένως αντικαθιστώντας στην Πρόταση 3.7 τις  $\xi_j(u, b)$  με  $1 - \chi_j(u, b)$ , για  $j = 1, \dots, n$ , παίρνουμε άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα για τις πιθανότητες  $\xi_j(u, b)$ .

**Πρόταση 3.8.** *Κάτω από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1, για  $0 \leq u < b$ , οι  $\chi_j(u, b)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων, για  $j = 1, \dots, n-1$ ,*

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_j) \right) \chi_j(u, b) + \lambda_j \chi_{j+1}(u, b) + \lambda \int_0^u \chi_j(u-x, b) f_1(x) dx = 0, \quad (3.109)$$

και για  $j = n$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda + \lambda_n) \right) \chi_n(u, b) + \lambda \int_0^u \chi_n(u-x, b) f_1(x) dx \\ + \lambda_n \int_0^u \chi_1(u-x, b) f_2(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (3.110)$$

με οριακές συνθήκες

$$\chi_j(b, b) = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.111)$$

Για τη λύση του παραπάνω ολοκληρο-διαφορικού συστήματος, παρατηρούμε ότι η μορφή των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της Πρότασης 3.8 είναι όμοια με τη μορφή των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του συστήματος (3.67)-(3.68) για  $\delta = 0$ . Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (3.109)-(3.110) δίνεται, σε μορφή πινάκων, από τη σχέση

$$\bar{\chi}(u, b) = \mathbf{v}_{0,n}^B(u) \bar{\chi}'(0, b), \quad 0 \leq u \leq b,$$

όπου  $\bar{\chi}(u, b) = (\chi_1(u, b), \dots, \chi_n(u, b))^T$ . Επιπλέον οι οριακές συνθήκες (3.111) γράφονται σε μορφή πινάκων ως  $\bar{\chi}(b, b) = \bar{\mathbf{I}}_n$ . Χρησιμοποιώντας ότι  $\bar{\chi}'(b, b) = \bar{\mathbf{I}}_n$  και την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι  $\bar{\chi}'(0, b) = [\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1} \bar{\mathbf{I}}_n$  και συνεπώς

$$\bar{\chi}(u, b) = \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1} \bar{\mathbf{I}}_n, \quad 0 \leq u \leq b. \quad (3.112)$$

Σε αυτό το σημείο, σημειώνουμε ότι για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους γενικευμένους Erlang( $n$ ) και ένα όρο διάχυσης, οι πιθανότητες  $\xi(u, b)$  και  $\chi(u, b)$  δεν έχουν μελετηθεί. Έτσι, το υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα αφιερωθεί στο να δώσουμε αντίστοιχα αποτελέσματα για τις προαναφερθείσες πιθανότητες για το ανανεωτικό μοντέλο.

Για  $\lambda \rightarrow 0$  το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο με έναν όρο διάχυσης, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των αποζημιώσεων ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang( $n$ ) κατανομή και το μέγεθος των αποζημιώσεων έχει σ.π.π.  $f(x) = f_2(x)$  και σ.χ.  $F(x) = 1 - \bar{F}(x) = F_2(x)$ . Σε αυτή

την περίπτωση από τις Προτάσεις 3.7 και 3.8 για  $\lambda \rightarrow 0$ , μπορούμε εύκολα να βρούμε τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι  $\xi(u, b) = \xi_1(u, b)$  και  $\chi(u, b) = \chi_1(u, b)$  για το ανανεωτικό μοντέλο, όπως δίνονται στο ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.1.** Έστω  $\lambda^{[n]} = \prod_{j=1}^n \lambda_j$ . Στο ανανεωτικό μοντέλο, με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων ισχύει ότι:

(i) για  $0 \leq u < b$ , η πιθανότητα του μέγιστου κλεονάσματος,  $\xi(u, b)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j - c \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \xi(u, b) = \lambda^{[n]} \int_0^u \xi(u-x, b) f(x) dx + \lambda^{[n]} \bar{F}(u), \quad (3.113)$$

με οριακές συνθήκες  $\xi(0, b) = 1$  και  $\xi(b, b) = 0$ .

(ii) για  $0 \leq u \leq b$ , η πιθανότητα  $\chi(u, b)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^n \left( \lambda_j - c \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \chi(u, b) = \lambda^{[n]} \int_0^u \chi(u-x, b) f(x) dx,$$

με οριακές συνθήκες  $\chi(0, b) = 0$  και  $\chi(b, b) = 1$ .

**Παρατήρηση 3.4.** (i) Οι λύσεις των συναρτήσεων  $\xi(u, b)$  και  $\chi(u, b)$  που ικανοποιούν τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις του Πορίσματος 1.6, μπορούν να βρεθούν από τα αποτελέσματα για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης. Πράγματι, η  $\xi(u, b)$  ( $\chi(u, b)$ ) είναι ίση με το πρώτο στοιχείο του διανύσματος στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.108) ((3.112)) για  $\lambda \rightarrow 0$ .

(ii) Για  $\sigma \rightarrow 0^+$ ,  $\lambda_1 = \dots, \lambda_n = \lambda$ , η εξίσωση (3.113) ανάγεται στην εξίσωση (2.6) των Li και Dickson (2006) για το ανανεωτικό μοντέλο, με γενικευμένους Erlang( $n$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης χωρίς τον όρο διάχυσης.

Επιπλέον, για  $\lambda_j \rightarrow 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων και έναν όρο διάχυσης ανάγεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας με έναν όρο διάχυσης [βλ. Gerber και Landry (1999)], όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων έχουν σ.π.π.  $f(x) = f_1(x)$  και σ.κ.  $F(x) = 1 - \bar{F}(x) = F_1(x)$ . Σε αυτή την περίπτωση τα διανύσματα  $\bar{\chi}(u, b)$ ,  $\bar{\xi}(u, b)$  και  $\bar{\psi}(u)$  γίνονται μονοδιάστατα με μοναδικά στοιχεία τις συναρτήσεις  $\chi(u, b)$ ,  $\xi(u, b)$  και  $\psi(u)$  αντίστοιχα. Τότε, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.108)-(3.112) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\chi(u, b) = 1 - \xi(u, b)$ , παίρνουμε το ακόλουθο ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 3.2.** Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας με έναν όρο διάχυσης, ισχύει ότι

$$\xi(u, b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)}, \quad \chi(u, b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}, \quad 0 \leq u \leq b.$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα των Dickson και Gray (1984), για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας χωρίς τον όρο διάχυσης.

### 3.7 Η κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.5 και 3.6 βρίσκουμε την κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία. Αναλυτικότερα, θεωρώντας ότι η διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση (3.38), θα δείξουμε ότι η κατανομή των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μια μίξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο 0 και μιας phase-type κατανομής με διαφορετικά βάρη. Αρχικά δίνουμε τον ορισμό της phase-type κατανομής.

**Ορισμός 3.2 (Phase-type distribution).** Έστω  $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια διαδικασία Markov συνεχούς χρόνου με  $\nu + 1$ ,  $\nu \geq 1$ , καταστάσεις. Επιπλέον θεωρούμε ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές (transient states) και ότι η  $\nu + 1$  κατάσταση είναι απορροφητική κατάσταση (absorbing state), ενώ η  $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$  έχει αρχική κατανομή που δίνεται από το διάνυσμα  $(\bar{\alpha}, \alpha_{\nu+1})$  και πίνακα τάσης  $\mathbf{S}$ . Τότε, λέμε ότι η τ.μ.  $X$ , που εκφράζει το χρόνο που απαιτείται μέχρι η διαδικασία να μεταβεί στην απορροφητική κατάσταση, είναι μια phase-type κατανομή με παραμέτρους  $(\bar{\alpha}, \mathbf{S}, \bar{\mathbf{a}}^T)$ , όπου  $\bar{\mathbf{a}}^T = -\mathbf{S}\bar{\mathbf{I}}_n$ , με  $\bar{\mathbf{I}}_n$  να είναι ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα στήλη με όλα του τα στοιχεία ίσα με 1, για την οποία ισχύουν τα εξής:

- (i)  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \bar{\alpha}e^{\mathbf{S}x}\bar{\mathbf{I}}_n$ ,  $x \geq 0$ ,
- (ii)  $f(x) = F'(x) = \bar{\alpha}e^{\mathbf{S}x}\bar{\mathbf{a}}^T$ ,  $x \geq 0$ ,
- (iii)  $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{sx}dF(x) = \bar{\alpha}(s\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\bar{\mathbf{a}}^T$ , με  $\Re(s) \geq 0$  και  $\mathbf{I}$  τον  $\nu \times \nu$  ταυτοτικός πίνακα,
- (iv)  $\mathbb{E}(X^n) = \int_0^{\infty} x^n dF(x) = (-1)^n n! \bar{\alpha} \mathbf{S}^{-n} \bar{\mathbf{I}}_n$ .

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό της κατανομής των σωρευτικών μερισμάτων, παίρνοντας  $\delta = 0$ , η τ.μ.  $D_{u,b}$ , που ορίσθηκε στην εξίσωση (3.63), ανάγεται στα συνολικά μερίσματα μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας,  $D(T_b)$ , και η κατανομή τους δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.8.** Για  $0 \leq u \leq b$ , η κατανομή της τ.μ.  $D(T_b)$ , είναι μια μίξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο μηδέν με βάρη  $1 - \chi(u, b)$  και μιας phase-type κατανομής  $(\bar{\alpha}_1, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{t}})$  με βάρη  $\chi(u, b)$ , όπου  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\mathbf{z}}_1(u, b)/\chi(u, b)$  με  $\bar{\mathbf{z}}_1(u, b)$  να είναι η πρώτη γραμμή του πίνακα  $\mathbf{v}_{0,n}^B(u)[\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1}$ ,  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)[\mathbf{v}_{0,n}^B(b)]^{-1}$  και  $\bar{\mathbf{t}} = -\mathbf{Q}\bar{\mathbf{I}}_n$ .

Απόδειξη. Για  $\delta = 0$  και  $0 \leq u \leq b$ , από την εξίσωση (3.73) έχουμε ότι

$$\tilde{W}_m(u, b)|_{\delta=0} = (m-1)! \{ \mathbf{v}_{0,n}^B(b) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1} \}^{m-1} \tilde{\mathbf{I}}_n,$$

και συνεπώς η εξίσωση (3.72), για  $0 \leq u \leq b$ , γίνεται

$$\begin{aligned} \tilde{W}_m(u, b)|_{\delta=0} &= m! \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1} \{ \mathbf{v}_{0,n}^B(b) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1} \}^{m-1} \tilde{\mathbf{I}}_n \\ &= m! \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1} \{ \mathbf{v}_{0,n}^B(b) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1} \}^m \tilde{\mathbf{I}}_n, \\ &= m! \mathbf{z}(u, b) [\mathbf{P}(b, b)]^m \tilde{\mathbf{I}}_n, \end{aligned}$$

με  $\mathbf{z}(u, b) = \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1}$  και  $\mathbf{P}(u, b) = \mathbf{v}_{0,n}^B(u) [(\mathbf{v}_{0,n}^B)'(b)]^{-1}$  είναι δύο  $n \times n$  τετραγωνικοί πίνακες. Επιπλέον για  $\delta = 0$ , η ροπογεννήτρια συνάρτηση  $M_j(u, y, b)$ , που ορίσθηκε στην Ενότητα 3.4 και αφορά στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ανάγεται στη ροπογεννήτρια της τ.μ.  $D(T_b)$ . Έστω  $\tilde{\mathbf{M}}(u, y, b) = (M_1(u, y, b), \dots, M_n(u, y, b))^T$ . Τότε, για  $0 \leq u \leq b$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}(u, y, b)|_{\delta=0} &= \tilde{\mathbf{I}}_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \tilde{W}_m(u, b)|_{\delta=0} = \left\{ \mathbf{I}_n + \mathbf{z}(u, b) \sum_{m=1}^{\infty} y^m [\mathbf{P}(b, b)]^m \right\} \tilde{\mathbf{I}}_n \\ &= \{ \mathbf{I}_n + \mathbf{z}(u, b) [(\mathbf{I}_n - y\mathbf{P}(b, b))^{-1} - \mathbf{I}_n] \} \tilde{\mathbf{I}}_n \\ &= \{ \mathbf{I}_n - \mathbf{z}(u, b) + \mathbf{z}(u, b) [(\mathbf{I}_n - y\mathbf{P}(b, b))^{-1}] \} \tilde{\mathbf{I}}_n \\ &= \tilde{\mathbf{I}}_n - \tilde{\chi}(u, b) + \mathbf{z}(u, b) \{ [\mathbf{P}(b, b)]^{-1} - y\mathbf{I}_n \}^{-1} [\mathbf{P}(b, b)]^{-1} \tilde{\mathbf{I}}_n, \end{aligned}$$

με  $\mathbf{I}_n$  τον  $n \times n$  ταυτοτικό πίνακα. Επομένως από την τελευταία εξίσωση έχουμε ότι, για  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} M_j(u, y, b)|_{\delta=0} &= \mathbb{E}[e^{yD(T_b)} | S_1^j = t, U_b(t) = u] \\ &= 1 - \chi_j(u, b) + \chi_j(u, b) \frac{\tilde{z}_j(u, b)}{\chi_j(u, b)} \{ [\mathbf{P}(b, b)]^{-1} - y\mathbf{I} \}^{-1} [\mathbf{P}(b, b)]^{-1} \tilde{\mathbf{I}}_n. \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω ροπογεννήτρια ως προς  $y$  έχουμε ότι η κατανομή της τ.μ.  $D(T_b)$  που αντιστοιχεί στη διαδικασία πλεονάσματος  $U_{b,j}(t)$ , είναι μια μίξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο 0 με βάρος  $1 - \chi_j(u, b)$  και μιας συνεχούς κατανομής με βάρος  $\chi_j(u, b)$  και σ.π.π.

$$h_j(x) = \tilde{\alpha}_j e^{\mathbf{Q}x} \tilde{\mathbf{t}}, \quad x \geq 0,$$

όπου  $\mathbf{Q} = -[\mathbf{P}(b, b)]^{-1}$  και  $\tilde{\mathbf{t}} = -\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{I}}_n$ . Τέλος, εφόσον  $U_b(t) = U_{b,1}(t)$ , για  $j = 1$  παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα για την κατανομή της  $D(T_b)$ . ■

**Παρατήρηση 3.5.** (i) Από τη μορφή της σ.π.π.  $h_j(x)$  είναι φανερό ότι η  $h_j$  είναι μια

phase-type πυκνότητα με παραμέτρους  $(\vec{\alpha}_j, \mathbf{Q})$ , έχοντας μετασχηματισμό Laplace  $\widehat{h}_j(s) = \vec{\alpha}_j (s\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})^{-1} \vec{1}$  και συνεπώς  $-\vec{\alpha}_j (s\mathbf{I}_n + \mathbf{Q})^{-1} \vec{1}$  είναι η αντίστοιχη ροπογενήτρια συνάρτηση.

- (ii) Για  $\delta = 0$ ,  $n = 2$ , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{P}(u, b)$  ανάγεται στον πίνακα  $\mathbf{V}_2(u, b)$  που ορίσθηκε στην Ενότητα 3.5.
- (iii) Για  $\lambda_j \rightarrow 0$ , από την εξίσωση (3.72) έπεται ότι ο πίνακας  $\mathbf{P}(b, b)$  ανάγεται στη συνάρτηση  $W_1(b, b)|_{\delta=0}$ , καθώς επίσης και το διάνυσμα  $\vec{z}_1(u, b)$  αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $\chi(u, b)$ . Επομένως, για το κλασσικό μοντέλο με έναν όρο διάχυσης, έχουμε ότι η κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων είναι μια μίξη μιας εκφυλισμένης κατανομής στο 0 και μιας εκθετικής κατανομής με μέση τιμή  $W_1(b, b)|_{\delta=0}$  [βλ. επίσης Li (2006)].

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

Την τελευταία δεκαετία ένα μεγάλο μέρος στην αναλογιστική βιβλιογραφία έχει αφιερωθεί στην μελέτη των κατανομών phase-type και τις εφαρμογές αυτών στη θεωρία κινδύνου. Οι κατανομές phase-type [βλ. Ορισμό 3.2] εισήχθησαν από τον Neuts (1981), και είναι μια ευρεία οικογένεια κατανομών, που περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις, μεταξύ άλλων, την εκθετική κατανομή, την κατανομή Erlang, την γενικευμένη Erlang κατανομή, την κατανομή Coxian, καθώς και τις μίξεις αυτών. Έτσι, πολλοί συγγραφείς χρησιμοποίησαν τις κατανομές phase-type προκειμένου να μοντελοποιήσουν τόσο τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων, όσο και τα μεγέθη των αποζημιώσεων.

Το μοντέλο το οποίο προκύπτει από την υπόθεση ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων κατανέμονται σύμφωνα με μια phase-type κατανομή, ονομάζεται Ανανεωτικό μοντέλο με phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Για το προαναφερόμενο μοντέλο κινδύνου πολλοί συγγραφείς μελέτησαν διάφορα μέτρα κινδύνου, όπως την πιθανότητα χρεοκοπίας, το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία καθώς και τις από κοινού κατανομές αυτών. Πρόσφατα, η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu για το ανανεωτικό μοντέλο με phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων αποτέλεσε ένα πολύ δημοφιλές αντικείμενο έρευνας. Οι κυριότερες αναφορές στις οποίες κανείς μπορεί να

βρει μια εκτεταμένη μελέτη των παραπάνω μέτρων κινδύνου ή και της συνάρτησης των Gerber-Shiu για το ανανεωτικό μοντέλο με phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης περιλαμβάνουν τους Rolski, Schmidli, Schmidt και Teugels (1999), Asmussen (2000), Dickson και Hipp (2000), Avram και Usábel (2004), Drekić, Dickson, Standord και Willmot (2004), Schmidli (2005), Bladt (2005), Ren (2007), Li (2008), Ko (2007), Pitts και Politis (2007), Song, Meng και Ren (2010) και πολλούς άλλους,

Πρόσφατα, οι Ji και Zhang (2010), θεώρησαν ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων και για τις δύο κλάσεις κατανομούνται σύμφωνα με μια phase-type κατανομή. Σημειώνουμε ότι αυτό το μοντέλο κινδύνου περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τόσο το μοντέλο των Κεφαλαίων 2 και 3 (χωρίς τον όρο διάχυσης), όσο και το ανανεωτικό μοντέλο με phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης. Στη συγκεκριμένη εργασία οι συγγραφείς μελέτησαν την συνάρτηση των Gerber-Shiu, δίνοντας αναλυτικά αποτελέσματα για αυτή την συνάρτηση μέσω μετασχηματισμών Laplace.

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, όπου όμοια με τους Ji και Zhang (2010), οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων και για τις δύο κλάσεις κατανομούνται σύμφωνα με μια phase-type κατανομή και μελετούμε την συνάρτηση των Gerber-Shiu και την αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων κάτω από την υπόθεση μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Όπως τονίστηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια η στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων δίνει την δυνατότητα στον ασφαλιστή να καθορίσει ένα βέλτιστο επίπεδο ασφαλιστρών καθώς και ένα ποσοστό των ασφαλιστρών που επιστρέφεται στους δικαιούχους της ασφάλισης με τη μορφή μερίσματος, μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας. Πρακτικά με αυτό τον τρόπο ο ασφαλιστής διατηρεί την ικανότητα να προσφέρει «εκπτώσεις» στα ασφάλιστρα για όσο χρόνο τα μεγέθη των αποζημιώσεων δεν είναι τέτοιου μεγέθους ώστε να προκαλέσουν χρεοκοπία (bonus-malus system).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu και της πρώτης ροπής σωρευτικών μερισμάτων είναι διαφορετική από αυτή των Ji και Zhang (2010). Πιο συγκεκριμένα, αντί να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu και στην συνέχεια να αντιστρέψουμε αυτόν, στο συγκεκριμένο κεφάλαιο βρίσκουμε την γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος που ικανοποιούν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής. Επίσης δείχνουμε πως αυτή η γενική λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της αναμενόμενης παρούσας αξίας των σωρευτικών μερισμάτων.

Η δομή του συγκεκριμένου κεφαλαίου έχει ως εξής: στην Ενότητα 4.1 δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή του μοντέλου, τις υποθέσεις και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην Ενότητα 4.2 δείχνουμε πως οι συναρτήσεις ποινής ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων και δίνουμε την γενική λύση αυτού όταν μεγέθη αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Χρησιμοποιώντας την



γενική αυτή λύση, στην Ψποενότητα 4.2.1 βρίσκουμε ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής. Επιπλέον, στην Ενότητα 4.3 δείχνουμε πως οι αναμενόμενες παρούσες αξίες των σωρευτικών μερισμάτων ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Η λύση τους συστήματος για τις αναμενόμενες παρούσες αξίες των σωρευτικών μερισμάτων βρίσκετε μέσω της γενικής λύσης του συστήματος των συναρτήσεων Gerber-Shiu. Στην Ψποενότητα 4.3.1 βρίσκουμε ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων. Τέλος, στην Ενότητα 4.4 βρίσκουμε ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού για τα παραπάνω μέτρα κινδύνου με βάση το επίπεδο που βρίσκεται η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων (layer-based approach).

#### 4.1 Περιγραφή του μοντέλου

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων με  $\nu$  επίπεδα  $0 < b_1 < \dots < b_\nu < \infty$ . Υποθέτουμε ότι όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων  $b_{k-1}$  και  $b_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , με  $b_0 = 0$  και  $b_{\nu+1} = \infty$ , ο ασφαλιστής πληρώνει μερίσματα με ρυθμό  $d_k$  και συνεπώς το ο ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρών είναι  $c_k = c - d_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , με  $c = c_1 > \dots > c_\nu > c_{\nu+1} \geq 0$ .

Έστω  $b = \{b_1, \dots, b_\nu\}$  και  $\{U_b(t)\}_{t \geq 0}$  η διαδικασία πλεονάσματος στον χρόνο  $t$  κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερών μερισμάτων, με αρχικό κεφάλαιο  $U_b(0) = u$ . Τότε, η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  ικανοποιεί την εξίσωση, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$

$$dU_b(t) = c_k dt - dS(t), \quad b_{k-1} \leq U_b(t) \leq b_k, \quad (4.1)$$

όπου  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  είναι η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, η οποία γεννάται από την ύπαρξη δύο επιμέρους διαδικασιών,

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

όπου οι  $S_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , παριστούν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο  $t$  προερχόμενες από την  $i$ -κλάση.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , σ.π.π.  $f_1(x)$ , μέση τιμή  $m_1$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_1(x) dx$ , που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση. Αντίστοιχα οι  $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F_2(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ , σ.π.π.  $f_2(x)$ , μέση τιμή  $m_2$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx$ , που παριστούν το μέγεθος των αποζημιώσεων από τη δεύτερη

κλάση.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι η  $\{N_1(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία που παριστά τον αριθμό των κινδύνων από την πρώτη κλάση στο διάστημα  $[0, t)$ . Θεωρούμε ότι η  $\{N_1(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{V_i\}_{i \geq 1}$ , που είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.χ.  $F(x) = \mathbb{P}(V \leq x)$ . Όμοια, ο αριθμός των κινδύνων από τη δεύτερη κλάση στο διάστημα  $[0, t)$  περιγράφεται από την απαριθμήτρια διαδικασία  $\{N_2(t)\}_{t=0}^{\infty}$ , για την οποία θεωρούμε ότι είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $\{L_i\}_{i \geq 1}$ , που είναι μια ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ. με σ.χ.  $G(x) = \mathbb{P}(L \leq x)$ .

Ακόμη, υποθέτουμε ότι οι  $\{N_1(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{N_2(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  και  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των από την πρώτη κλάση,  $F$ , είναι μια phase-type κατανομή με παραμέτρους  $(\vec{\alpha}, \mathbf{A}, \vec{a}^T)$ , όπου  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με  $a_{ii} < 0$ ,  $a_{ij} \geq 0$  για  $i \neq j$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 0$  για  $i = 1, \dots, n$ ,  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  με  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  και  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  με  $\vec{a}^T = -\mathbf{A}\vec{e}_n$ , όπου  $\vec{y}^T$  συμβολίζει τον ανάστροφο ενός διανύσματος  $\vec{y}$  και  $\vec{e}_\ell$  συμβολίζει ένα  $\ell$ -διάστατο,  $\ell \in \mathbb{N}^+$ , διάνυσμα γραμμής με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Τότε, από το Θεώρημα 1.5 [Κεφαλαίο VIII] στον Asmussen (2000) [βλ. επίσης τον Ορισμό 3.2] έχουμε ότι

$$F(t) = 1 - \vec{\alpha} e^{\mathbf{A}t} \vec{e}_n, \quad t \geq 0.$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι από τη μορφή της κατανομής  $F$  έπεται ότι η  $V_i$  αντιστοιχεί στον χρόνο που απαιτείται, σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου  $\{I_t^{(i)}\}_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , με καταστάσεις  $\{E_1, \dots, E_n\} \cup \{E_0\}$ , για τη μετάβαση από την κατάσταση  $\{E_i\}$  στην απορροφητική κατάσταση  $\{E_0\}$ .

Όμοια, υποθέτουμε ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των κινδύνων από τη δεύτερη κλάση,  $Q$  είναι μια phase-type κατανομή με παραμέτρους  $(\vec{\beta}, \mathbf{B}, \vec{b}^T)$ , όπου  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^m$  είναι ένας  $m \times m$  πίνακας,  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  με  $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$  και  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$  με  $\vec{b}^T = -\mathbf{B}\vec{e}_m$ . Τότε, έχουμε ότι

$$Q(t) = 1 - \vec{\beta} e^{\mathbf{B}t} \vec{e}_m, \quad t \geq 0,$$

και συνεπώς η  $L_i$  αντιστοιχεί στον χρόνο που απαιτείται, σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου  $\{J_t^{(i)}\}_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , με καταστάσεις  $\{F_1, \dots, F_n\} \cup \{F_0\}$ , για τη μετάβαση από την κατάσταση  $\{F_i\}$  στην απορροφητική κατάσταση  $\{F_0\}$ .

Τώρα έστω  $\{(I(t), J(t))\}_{t \geq 0}$  μια δισδιάστατη στοχαστική διαδικασία η οποία ορίζεται με

βάση της στοχαστικές διαδικασίες  $\{I_t^{(i)}\}_{t \geq 0}$  και  $\{J_t^{(i)}\}_{t \geq 0}$  ως

$$\begin{aligned} I(t) &= I_t^{(1)}, & 0 \leq t < V_1, & & I(t) &= I_{t-V_1}^{(2)}, & V_1 \leq t < V_1 + V_2, \dots, \\ J(t) &= J_t^{(1)}, & 0 \leq t < L_1, & & J(t) &= J_{t-L_1}^{(2)}, & L_1 \leq t < L_1 + L_2, \dots, \end{aligned}$$

Τότε, από τους Ji και Zhang (2010) έχουμε ότι η διαδικασία  $\{(I(t), J(t))\}_{t \geq 0}$  είναι μια δισδιάστατη διαδικασία Markov συνεχούς χρόνου με καταστάσεις  $\{(E_1, F_1), \dots, (E_n, F_1), (E_1, F_2), \dots, (E_n, F_2), \dots, (E_1, F_m), \dots, (E_n, F_m)\}$ , πίνακα τάσης  $\mathbf{K} = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{a}^\top \bar{\alpha}) + (\bar{b}^\top \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n$  και αρχική κατανομή  $\bar{\gamma} = \bar{\beta} \otimes \bar{\alpha}$ , όπου  $\mathbf{I}_\ell$  είναι ο  $\ell \times \ell$  ταυτοτικός πίνακας και  $\otimes$  είναι το γινόμενο Kronecker που ορίζεται ακολούθως.

**Ορισμός 4.1 (Kronecker product or tensor product).** Έστω  $\mathbf{A}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$  και  $\mathbf{A}^{(2)}$  δύο πίνακες διαστάσεων  $m \times n$  και  $k \times \ell$  αντίστοιχα,  $m, n, k, \ell \in \mathbb{N}$ . Τότε το γινόμενο Kronecker ορίζεται ως πράξη του γινομένου τέτοιο ώστε

$$\mathbf{A}^{(1)} \otimes \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} & a_{12}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} & a_{m1}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων, όπως ορίστηκε στις σχέσεις (4.1)-(4.2). Όμοια με την Ενότητα 2.6, κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται με βάση το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων στο οποίο ανήκει το αρχικό απόθεμα, δηλ. όταν το αρχικό απόθεμα είναι μεταξύ του  $b_{k-1}$  και  $b_k$ , για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ .

Έστω  $T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας. Τότε, για το μοντέλο κινδύνου (4.1)-(4.2), η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που αντιστοιχεί στο διάστημα μεταξύ των  $b_{k-1}$  και  $b_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , ορίζεται ως

$$\phi_k(u, b) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u \right), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \quad (4.3)$$

όπου  $\delta \geq 0$  είναι η ένταση ανατοκισμού,  $U_b(T_b-)$  είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U_b(T_b)|$  είναι το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία,  $w(x, y) : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  και  $1_{(\cdot)}$  συμβολίζει την δείκτρια συνάρτηση.

Επίσης, όμοια με τους Ji και Zhang (2010), ορίζουμε, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,

$$\phi_{k,\ell}(u, b) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=\ell)} | U_b(0) = u \right), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \ell = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το διάστημα μεταξύ των επιπέδων  $b_{k-1}$  και  $b_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης που προέρχεται από την κλάση  $\ell = 1, 2$ . Επιπλέον θεωρούμε ότι  $J$  είναι μια δίτιμη τ.μ. που παριστά την κλάση από την οποία προέρχεται η αποζημίωση που προκαλεί χρεοκοπία, δηλ.  $J = \ell$  εάν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ . Τότε, η συνάρτηση των Gerber-Shiu της εξίσωσης (4.3) αναλύεται ως  $\phi_k(u, b) = \phi_{k,1}(u, b) + \phi_{k,2}(u, b)$ , για  $b_{k-1} \leq u < b_k$  και  $k = 1, \dots, \nu + 1$ .

Έστω  $\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}(\cdot | (I(0), J(0)) = (E_i, F_j))$  και  $\mathbb{E}_{ij}$  να είναι η μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Τότε, για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , ορίζουμε

$$\phi_{ij,k,\ell}(u, b) = \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J=\ell)} | U_b(0) = u \right), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \ell = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που αντιστοιχεί στο διάστημα μεταξύ των επιπέδων  $b_{k-1}$  και  $b_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ , δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι  $u$  και ότι η διαδικασία  $\{(I(t), J(t))\}_{t \geq 0}$  ξεκινάει από την κατάσταση  $(E_i, F_j)$ . Τότε, με βάση τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$\phi_{k,\ell}(u, b) = \vec{\gamma} \vec{\phi}_{k,\ell}(u, b), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \quad k = 1, \dots, \nu + 1, \quad \ell = 1, 2,$$

με  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) = (\phi_{11,k,\ell}(u, b), \dots, \phi_{n1,k,\ell}(u, b), \phi_{12,k,\ell}(u, b), \dots, \phi_{n2,k,\ell}(u, b), \dots, \phi_{1m,k,\ell}(u, b), \dots, \phi_{nm,k,\ell}(u, b))^T$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής,  $\phi_{ij,k,\ell}(u, b)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\ell = 1, 2$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Τότε με βάση το παραπάνω σύστημα δίνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ .

**Θεώρημα 4.1.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$  και  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) &= \frac{1}{c_k} (\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) - \frac{1}{c_k} \int_0^{u-b_{k-1}} \left( (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{\alpha}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{\phi}_{k,\ell}(u-x, b) dx - \vec{\zeta}_{k,\ell}(u), \quad b_{k-1} < u < b_k, \quad (4.4) \end{aligned}$$

με οριακές συνθήκες

$$c_k \vec{\phi}'_{k,\ell}(b_k^-, b) = c_{k+1} \vec{\phi}'_{k+1,\ell}(b_k^+, b) \quad \text{και} \quad \vec{\phi}_{k,\ell}(b_k^-, b) = \vec{\phi}_{k+1,\ell}(b_k^+, b), \quad k = 1, \dots, \nu, \quad (4.5)$$

και

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}_{k,\ell}(u) &= \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{u-b_i}^{u-b_{i-1}} \left( (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{\phi}_{i,\ell}(u-x, b) dx \\ &\quad + (\vec{e}_m \otimes \vec{a}^T) \frac{1}{c_k} w_1(u) 1_{(\ell=1)} + (\vec{b}^T \otimes \vec{e}_n) \frac{1}{c_k} w_2(u) 1_{(\ell=2)}, \end{aligned}$$

με

$$w_j(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f_j(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$ . Τότε, για  $u \in [b_{k-1}, b_k]$  και δεσμεύοντας ως προς την αλλαγή κατάστασης της αλυσίδας  $\{I(t), J(t)\}_{t \geq 0}$ , σε συνδυασμό με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση μιας αποζημίωσης στο  $[0, dt]$ , έχουμε για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\ell = 1, 2$  ότι

$$\begin{aligned} e^{\delta dt} \phi_{ij,k,\ell}(u, b) &= \left( 1 + (a_{ii} + b_{jj}) dt \right) \phi_{ij,k,\ell}(u + c_k dt, b) \\ &\quad + (1 + a_{ii} dt) \sum_{\nu_1=1, \nu_1 \neq j}^m b_{j\nu_1} dt \phi_{i\nu_1,k,\ell}(u + c_k dt, b) \\ &\quad + (1 + b_{jj} dt) \sum_{\nu_2=1, \nu_2 \neq i}^n a_{i\nu_2} dt \phi_{\nu_2 j,k,\ell}(u + c_k dt, b) \\ &\quad + (1 + a_{ii} dt) b_j dt \sum_{\nu_1=1}^m \beta_{\nu_1} \left( \int_0^{u+c_k dt - b_{k-1}} \phi_{i\nu_1,k,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_2(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u+c_k dt - b_l}^{u+c_k dt - b_{l-1}} \phi_{i\nu_1,l,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_2(x) dx + w_2(u + c_k dt) 1_{(\ell=2)} \right) \\ &\quad + (1 + b_{jj} dt) a_i dt \sum_{\nu_2=1}^m \alpha_{\nu_2} \left( \int_0^{u+c_k dt - b_{k-1}} \phi_{\nu_2 j,k,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_1(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u+c_k dt - b_l}^{u+c_k dt - b_{l-1}} \phi_{\nu_2 j,l,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_1(x) dx + w_1(u + c_k dt) 1_{(\ell=1)} \right) \\ &\quad + o(dt). \end{aligned}$$

Διαρρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $dt$ , παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $w_j(u)$  είναι μία συνεχής συνάρτηση ως προς  $u$  (και συνεπώς

$\lim_{dt \rightarrow 0} w_j(u + c_k dt) = w_j(\lim_{dt \rightarrow 0} (u + c_k dt))$  για  $j = 1, 2$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_k \phi'_{ij,k,\ell}(u, b) &= \delta \phi_{ij,k,\ell}(u, b) - \sum_{\nu_1=1}^m b_{j\nu_1} \phi_{i\nu_1,k,\ell}(u, b) - \sum_{\nu_2=1}^n a_{i\nu_2} \phi_{\nu_2j,k,\ell}(u, b) \\ &- b_j \sum_{\nu_1=1}^m \beta_{\nu_1} \left( \int_0^{u-b_{k-1}} \phi_{i\nu_1,k,\ell}(u-x, b) f_2(x) dx \right. \\ &+ \left. \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} \phi_{i\nu_1,l,\ell}(u-x, b) f_2(x) dx + w_2(u) 1_{(\ell=2)} \right) \\ &- a_i \sum_{\nu_2=1}^n \alpha_{\nu_2} \left( \int_0^{u-b_{k-1}} \phi_{\nu_2j,k,\ell}(u-x, b) f_1(x) dx \right. \\ &+ \left. \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} \phi_{\nu_2j,l,\ell}(u-x, b) f_1(x) dx + w_1(u) 1_{(\ell=1)} \right). \end{aligned}$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή πινάκων/διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε άμεσα την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4). Για την απόδειξη των οριακών συνθηκών (4.5), πρώτα παρατηρούμε από την μορφή της εξίσωσης (4.4) ότι το διάνυσμα  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς  $u$ . Έτσι το διάνυσμα  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε κάθε επίπεδο  $b_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , δηλ. ισχύει ότι  $\vec{\phi}_{k,\ell}(b_k-, u) = \vec{\phi}_{k+1,\ell}(b_k+, u)$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ ,  $\ell = 1, 2$ . Τότε συνδυάζοντας την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4) και την συνθήκη συνέχειας για το διάνυσμα  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  στα σημεία  $u = b_k$ , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η δεύτερη οριακή συνθήκη της σχέσης (4.5) είναι αληθής. ■

**Παρατήρηση 4.1.** (i) Σημειώνουμε ότι από την μορφή της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.4) και τις οριακές συνθήκες (4.5) έπεται ότι η  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία  $b_k$ , αλλά σε αυτά τα σημεία υπάρχουν οι δεξιές και αριστερές παράγωγοι της συνάρτησης  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ . Η ύπαρξη της δεξιάς παραγώγου της συνάρτησης  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ , μας επιτρέπει να ορίσουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4) για κάθε  $u$ , τέτοιο ώστε η συνάρτηση  $\vec{\phi}'_{k,\ell}(u, b)$  να είναι παραγωγίσιμη από δεξιά. Συνεπώς στην εξίσωση (4.4) οι περιορισμοί για το αρχικό κεφάλαιο,  $b_k < u < b_{k-1}$ , μπορούν να αντικατασταθούν με  $b_k \leq u < b_{k-1}$ .

(ii) Για  $\nu = 1$ ,  $c_1 = c$ , και  $b_1 = \infty$ , η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4) ανάγεται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (2.3) (για  $\ell = 1$ ) και (2.4) (για  $\ell = 2$ ) των Ji και Zhang (2010), που είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  για το αντίστοιχο μοντέλο κινδύνου, χωρίς την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερισμάτων.

Όμοια με τη μεθοδολογία της Ενότητας 2.6 [βλ. επίσης και στους Lin και Sendova (2007), Yang και Zhang (2007)], η λύση της μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.4) εξαρτάται άμεσα από τη λύση της αντίστοιχης μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης για  $u \geq b_{k-1}$ .

Έτσι, στη μη-ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.4), «χαλαρώνουμε» τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο από  $b_{k-1} \leq u < b_k$  σε  $u \geq b_{k-1}$ , και θεωρούμε ότι το διάνυσμα  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u) = (\varphi_{11,k,\ell}(u), \dots, \varphi_{n1,k,\ell}(u), \varphi_{12,k,\ell}(u), \dots, \varphi_{n2,k,\ell}(u), \dots, \varphi_{1m,k,\ell}(u), \dots, \varphi_{nm,k,\ell}(u))^T$  αποτελεί λύση της ακόλουθης μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}'_{k,\ell}(u) &= \frac{1}{c_k} (\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \vec{\varphi}_{k,\ell}(u) - \frac{1}{c_k} \int_0^{u-b_{k-1}} \left( (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{\varphi}_{k,\ell}(u-x) dx - \vec{\zeta}_{k,\ell}(u), \quad u \geq b_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Όπως, θα δούμε στη συνέχεια η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6) είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.4).

Επιπλέον, αλλάζοντας την μεταβλητή  $y = u - b_{k-1}$  και ορίζοντας  $h_{ij,k,\ell}(y) = \varphi_{ij,k,\ell}(u - b_{k-1})$ ,  $\vec{h}_{k,\ell}(y) = \vec{\varphi}_{k,\ell}(u - b_{k-1})$  και  $\vec{z}_{k,\ell}(y) = \vec{\zeta}_{k,\ell}(u - b_{k-1})$  για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , η μη-ομογενής ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.6) γίνεται

$$\begin{aligned} \vec{h}'_{k,\ell}(y) &= \frac{1}{c_k} (\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \vec{h}_{k,\ell}(y) - \frac{1}{c_k} \int_0^y \left( (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{h}_{k,\ell}(y-x) dx - \vec{z}_{k,\ell}(y), \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Προκειμένου να βρούμε τη συνάρτηση  $\vec{h}_{k,\ell}(y)$  που αποτελεί λύση της παραπάνω ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης, θεωρούμε την αντίστοιχη της (4.7) ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \vec{h}'_{k,\ell}(y) &= \frac{1}{c_k} (\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \vec{h}_{k,\ell}(y) - \frac{1}{c_k} \int_0^y \left( (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{h}_{k,\ell}(y-x) dx, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Η λύσης της παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Για αυτό στο σκοπό θεωρούμε  $\vec{h}_{k,\ell}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} \vec{h}_{k,\ell}(y) dy$ , για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$  και  $\Re(s) \geq 0$ , να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος  $\vec{h}_{k,\ell}(y)$ . Έτσι, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.8), και παραγοντοποιώντας ως προς τη συνάρτηση  $\vec{h}_{k,\ell}(s)$  βρίσκουμε ότι, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$  και  $\Re(s) \geq 0$

$$\mathbf{L}_{k,\delta}(s) \vec{h}_{k,\ell}(s) = \vec{h}_{k,\ell}(0), \quad (4.9)$$

όπου

$$\mathbf{L}_{k,\delta}(s) = (c_k s - \delta)\mathbf{I}_{nm} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A} + (\bar{b}^\top \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n \widehat{f}_2(s) + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{a}^\top \bar{\alpha}) \widehat{f}_1(s).$$

Η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$  καλείται *χαρακτηριστική εξίσωση* (characteristic equation) για το μοντέλου κινδύνου που ορίζεται από τις σχέσεις (4.1)-(4.2). Όπως θα δούμε στη η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης,  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$ , που δίνεται από την ακόλουθη πρόταση, παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6).

**Πρόταση 4.1.** (i) Για  $\delta > 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$ , έχει ακριβώς  $nm$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη.

(ii) Για  $\delta = 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο σημείο 0 και  $nm - 1$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη.

*Απόδειξη.* Για την περίπτωση όπου  $\delta > 0$ , παραπέμπουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 των Ji και Zhang (2010).

Για να αποδείξουμε το (ii) ακολουθούμε όμοια μεθοδολογία με αυτή των Adan και Kulkarni (2003), δείχνοντας ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s) = 0$  έχει ακριβώς  $nm$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο, εκ των οποίων μία από αυτές είναι το 0 ενώ οι υπόλοιπες βρίσκονται στον θετικό ημιάξονα των μιγαδικών αριθμών.

Έστω  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{mn})$  και  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{mm})$ . Τότε για  $\delta = 0$ , ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,0}(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k,0}(s) &= c_k s \mathbf{I}_{nm} + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_n + (\mathbf{B} - \mathbf{\Gamma}) \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}) \\ &\quad + (\bar{b}^\top \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n \widehat{f}_2(s) + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{a}^\top \bar{\alpha}) \widehat{f}_1(s). \end{aligned}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάποιο  $\varepsilon_0 > 0$ , οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\widehat{f}_1(s)$  και  $\widehat{f}_2(s)$ , είναι αναλυτικές συναρτήσεις (analytic functions) για κάθε  $s$  με  $\Re(s) > -\varepsilon_0$ . Ακόμη, θεωρούμε  $C_\varepsilon$  να είναι ένας κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με το κέντρο του να βρίσκεται στα σημεία  $\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (|a_{ii}| + |b_{jj}|)/c_k$  και ακτίνα  $\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (|a_{ii}| + |b_{jj}|)/c_k$  με  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

Επίσης, για  $0 \leq u \leq 1$ , ορίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k,0}(s, u) &= c_k s - \mathbf{I}_{nm} + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A} + \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_n + u\{(\mathbf{B} - \mathbf{\Gamma}) \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}) \\ &\quad + (\bar{b}^\top \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n \widehat{f}_2(s) + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{a}^\top \bar{\alpha}) \widehat{f}_1(s)\}. \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό για τον πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  είναι προφανές ότι  $\mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = \mathbf{L}_{k,0}(s)$ .



Αρχικά θα δείξουμε ότι για επαρκώς μικρό  $\varepsilon$

$$\det \mathbf{L}_{k,0}(s, u) \neq 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq u \leq 1, s \in C_\varepsilon.$$

Προκειμένου να δείξουμε το παραπάνω, στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για  $0 \leq u \leq 1$ ,  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) \geq 0$ , ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως (diagonally dominant). Τότε, από το θεώρημα των Levy-Desplanques [βλ. Θεώρημα 1.24] έχουμε ότι  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, u) \neq 0$ . Πράγματι, θεωρώντας την  $((k-1)n + \ell)$ -γραμμή του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$ , για  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq \ell \leq n$ , και ανακλώντας τον Ορισμό 1.17, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & |c_k s + a_{\ell\ell} + b_{kk} + u a_\ell \alpha_\ell \widehat{f}_1(s) + u b_k \beta_k \widehat{f}_2(s)| \\ & \geq |c_k s - |a_{\ell\ell}| - |b_{kk}| - u a_\ell \alpha_\ell \widehat{f}_1(0) - u b_k \beta_k \widehat{f}_2(0)| \\ & \geq \varepsilon + |a_{\ell\ell}| + |b_{kk}| - u a_\ell \alpha_\ell \widehat{f}_1(0) - u b_k \beta_k \widehat{f}_2(0) \\ & > |a_{\ell\ell}| + |b_{kk}| - u a_\ell \alpha_\ell \widehat{f}_1(0) - u b_k \beta_k \widehat{f}_2(0) \\ & \geq \left( a_\ell + \sum_{i=1, i \neq \ell}^n a_{\ell i} \right) u + \left( b_k + \sum_{j=1, j \neq k}^m b_{kj} \right) u - u a_\ell \alpha_\ell \widehat{f}_1(0) - u b_k \beta_k \widehat{f}_2(0) \\ & = u \sum_{i=1, i \neq \ell}^n a_{\ell i} + u \sum_{j=1, j \neq k}^m b_{kj} + u a_\ell \sum_{i=1, i \neq \ell}^n \alpha_i \widehat{f}_1(0) + u b_k \sum_{j=1, j \neq k}^m \beta_j \widehat{f}_2(0) \\ & = u \sum_{i=1, i \neq \ell}^n \left( a_{\ell i} + a_\ell \alpha_i \widehat{f}_1(0) \right) + u \sum_{j=1, j \neq k}^m \left( b_{kj} + b_k \beta_j \widehat{f}_2(0) \right) \\ & \geq u \sum_{i=1, i \neq \ell}^n |a_{\ell i} + a_\ell \alpha_i \widehat{f}_1(s)| + u \sum_{j=1, j \neq k}^m |b_{kj} + b_k \beta_j \widehat{f}_2(s)|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Επομένως, για  $0 \leq u \leq 1$ ,  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) \geq 0$ , η ορίζουσα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  είναι μη μηδενική.

Για να αποδείξουμε ότι η ορίζουσα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  είναι μη μηδενική για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ , πρώτα ανακαλούμε από τη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας ότι μία ορίζουσα ενός πίνακα είναι μη μηδενική αν και μόνον αν το 0 δεν αποτελεί μέρος των ιδιοτιμών του προαναφερόμενου πίνακα. Έτσι, στη συνέχεια προχωρούμε εξετάζοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  για  $s$  και  $u$  κοντά στο σύνολο τιμών  $(s, u) = (0, 1)$ . Για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$  ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  είναι προσεγγιστικά ίδιος (perturbation) με τον πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$ . Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τα μη-διαγώνια στοιχεία της  $((k-1)n + \ell)$ -γραμμής (στήλης),  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq \ell \leq n$ , του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$  είναι:  $0, a_{\ell j} a_\ell \alpha_j, b_{ki} b_k \beta_i$  ( $0, a_{j\ell} a_j \alpha_\ell, b_{ik} b_i \beta_k$ ) για  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq \ell$  και  $1 \leq i \leq m$ ,  $j \neq k$ . Επομένως, από την μορφή των παραπάνω μη-διαγώνιων στοιχείων της του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$ , έπεται ότι ο πίνακας έχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και στήλη του, απ' όπου συνεπάγεται [βλ. Brookes (2005), Ενότητα Special Matrices] ότι ο  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$  είναι ένας αναλλοίωτος (irreducible) πίνακας.

Συνεπώς, ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,0}(0,1)$  έχει μια ακριβώς ιδιοτιμή στο σημείο μηδέν, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\bar{e}_{nm}$ . Τότε, για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$  υπάρχουν οι διαφορίσιμες συναρτήσεις  $\mu(s, u)$  και  $\bar{x}(s, u)$  τέτοιες ώστε

$$\mathbf{L}_{k,0}(s, u)\bar{x}(s, u) = \mu(s, u)\bar{x}(s, u), \quad \bar{e}_{nm}\bar{x}(s, u) = 1, \quad (4.11)$$

με  $\mu(0, 1) = 0$  και  $\bar{x}(0, 1) = \bar{e}_{nm}$ .

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $s$ , θέτοντας  $s = 0$ ,  $u = 1$  και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με  $\bar{\gamma} = \bar{\beta} \otimes \bar{\alpha}$  έχουμε ότι

$$\bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \bar{e}_{nm} + \bar{\gamma} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \frac{\partial}{\partial s} \bar{x}(0, 1) = \frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1), \quad (4.12)$$

με

$$\bar{\gamma} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = \bar{\gamma} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A} + (\bar{b}^T \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{\alpha}^T \bar{\alpha})) = \bar{\gamma} \mathbf{K} = \bar{0}_{nm}, \quad (4.13)$$

όπου η τελευταία εξίσωση έπεται από το γεγονός ότι ο  $\mathbf{K}$  είναι ο πίνακας τάσης της δισδιάστατης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου  $\{I(t), J(t)\}_{t \geq 0}$  με αρχική κατανομή το διάνυσμα  $\bar{\gamma}$ , και συνεπώς  $\bar{\gamma} \mathbf{K} = \bar{0}_{nm}$ . Επίσης το  $\bar{0}_{nm}$  είναι ένα  $1 \times nm$  διάνυσμα στήλη με όλα του τα στοιχεία ίσα με μηδέν.

Ακόμη, χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη ταυτότητα για το γινόμενο Kronecker [βλ. εξίσωση (A.26) στον Asmussen (2000)]

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1) \otimes (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2) \cdot (\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2),$$

όπου  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1$  και  $\mathbf{B}_2$  κάποιος πίνακες, η ποσότητα  $\bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \bar{e}_{nm}$  της εξίσωσης (4.12) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \bar{e}_{nm} &= \bar{\gamma} c_k \bar{e}_{nm} - \{ (\bar{\beta} \otimes \bar{\alpha}) \cdot (\mathbf{I}_m \otimes (\bar{\alpha}^T \bar{\alpha})) m_1 + (\bar{\beta} \otimes \bar{\alpha}) \cdot ((\bar{b}^T \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n) m_2 \} \bar{e}_{nm} \\ &= c_k - \{ (\bar{\beta} \cdot \mathbf{I}_m) \otimes (\bar{\alpha} \cdot (\bar{\alpha}^T \bar{\alpha})) m_1 + (\bar{\beta} \cdot (\bar{b}^T \bar{\beta})) \otimes (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{I}_n) m_2 \} \bar{e}_{nm} \\ &= c_k - \bar{0}_{nm} \bar{e}_{nm} = c_k, \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου για την τελευταία εξίσωση χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $\bar{\alpha} \bar{\alpha}^T = \bar{\beta} \bar{b}^T = 0^1$ . Τότε, από

<sup>1</sup> Από το γεγονός ότι η  $V_i$  είναι μια phase-type κατανομή με παραμέτρους  $(\bar{\alpha}, \mathbf{A}, \bar{a}^T)$ , έπεται ότι η τ.μ.  $V_i$  αντιστοιχεί στον χρόνο που απαιτείται, σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου με καταστάσεις  $\{E_1, \dots, E_n\} \cup \{E_0\}$ , για τη μετάβαση από την κατάσταση  $\{E_i\}$  στην απορροφητική κατάσταση  $\{E_0\}$ . Η προαναφερμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου έχει αρχική κατανομή  $\bar{\pi} = (\bar{\alpha}, 0)$  και πίνακα τάσης

$$\mathbf{Q} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \bar{a}^T \\ \hline \bar{0} & 0 \end{array} \right). \text{ Επιπλέον } \bar{\pi} \mathbf{Q} = \bar{0} \Rightarrow (\bar{0}, 0) = (\bar{\alpha}, 0) \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \bar{a}^T \\ \hline \bar{0} & 0 \end{array} \right) = (\bar{\alpha} \mathbf{A}, \bar{\alpha} \bar{a}^T).$$

τις εξισώσεις (4.13)-(4.14), η εξίσωση (4.12) γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1) = c_k > 0. \quad (4.15)$$

Όμοια, παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.11) ως προς  $u$ , θέτοντας  $(s, u) = (0, 1)$  και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με  $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \otimes \vec{\alpha}$  έχουμε

$$\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \vec{e}_{nm} + \vec{\gamma} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \frac{\partial}{\partial u} \vec{x}(0, 1) = \frac{\partial}{\partial u} \mu(0, 1), \quad (4.16)$$

με

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \vec{e}_{nm} &= (\vec{\beta} \otimes \vec{\alpha}) \cdot \{ \mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}) + (\mathbf{B} - \mathbf{\Gamma}) \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{a}^T \vec{\alpha}) \\ &\quad + (\vec{b}^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n \} \vec{e}_{nm} \\ &= \{ (\vec{\beta} \cdot \mathbf{I}_m) \otimes (\vec{\alpha} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda})) + (\vec{\beta} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{\Gamma})) \otimes (\vec{\alpha} \cdot \mathbf{I}_n) \\ &\quad + (\vec{\beta} \cdot \mathbf{I}_m) \otimes (\vec{\alpha} \cdot (\vec{a}^T \vec{\alpha})) + (\vec{\beta} \cdot (\vec{b}^T \vec{\beta})) \otimes (\vec{\alpha} \cdot \mathbf{I}_n) \} \vec{e}_{nm} \\ &= \{ -\vec{\beta} \otimes (\vec{\alpha} \mathbf{\Lambda}) - (\vec{\beta} \mathbf{\Gamma}) \otimes \vec{\alpha} \} \vec{e}_{nm}. \end{aligned}$$

Επίσης, από τη μορφή του διανύσματος  $\vec{\alpha} \mathbf{\Lambda} = (\alpha_1 a_{11}, \dots, \alpha_n a_{nn})$ , όπου  $\alpha_i \geq 0$  και  $a_{ii} < 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$  (σημειώνουμε επειδή  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , τότε τουλάχιστον μία από τις αρχικές πιθανότητες  $\alpha_i$  είναι αστηρά θετική), έχουμε ότι  $\vec{\alpha} \mathbf{\Lambda} < \vec{0}_{nm}$ . Επομένως, το  $-\vec{\beta} \otimes (\vec{\alpha} \mathbf{\Lambda})$  είναι ένα διάνυσμα στήλη διαστάσεων  $nm \times 1$  με όλα του τα στοιχεία να είναι θετικά. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική ακολουθία έχουμε ότι το  $-(\vec{\beta} \mathbf{\Gamma}) \otimes \vec{\alpha}$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $nm \times 1$  με όλα του τα στοιχεία αστηρώς θετικά. Επομένως, από τα παραπάνω είναι προφανές ότι

$$\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \vec{e}_{nm} > 0.$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και την εξίσωση (4.13), για την εξίσωση (4.16) ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial u} \mu(0, 1) > 0. \quad (4.17)$$

Τώρα, για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$ , από το ανάπτυγμα του Taylor έχουμε ότι

$$\mu(s, u) \approx \mu(0, 1) + s \frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1) + (u - 1) \frac{\partial}{\partial u} \mu(0, 1).$$

Τότε, από τις εξισώσεις (4.15), (4.17) και την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι  $\mu(s, u) \neq 0$  για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ , για  $\varepsilon$  επαρκώς μικρό και  $u$  κοντά στο 1, δηλ. για  $1 - \varepsilon \leq u \leq 1$ .

Επιπλέον, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη της εξίσωσης (4.10), δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι για  $0 \leq u \leq 1 - \varepsilon$ , ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  κυριαρχεί

διαγωνίως για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ , και  $\varepsilon$  τέτοιο ώστε

$$\varepsilon + a_\ell + \sum_{i=1, i \neq \ell}^n a_{\ell i} + b_k + \sum_{j=1, j \neq k}^m b_{kj} > (1 - \varepsilon) \left( a_\ell \widehat{f}_1(-\varepsilon) + \sum_{i=1, i \neq \ell}^n a_{\ell i} + b_k \widehat{f}_2(-\varepsilon) + \sum_{j=1, j \neq k}^m b_{kj} \right).$$

Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη για το ότι  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, u) \neq 0$  φορ  $0 \leq u \leq 1$ ,  $s \in C_\varepsilon$ .

Τώρα, έστω  $f(u)$  να παριστά το πλήθος τη εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, u) = 0$  εντός του κύκλου  $C_\varepsilon^+$ , που είναι το εσωτερικό τμήμα του κύκλου  $C_\varepsilon$ . Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ορίζουσα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, u)$  είναι μη μηδενική, από το Θεώρημα 1.25 έχουμε ότι

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{L}_{k,0}(s, u) \det \mathbf{L}_{k,0}(s, u)^{-1} ds.$$

Επομένως, από τα παραπάνω έχουμε ότι η  $f(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[0, 1]$ , η οποία παίρνει ακέραιες τιμές και συνεπώς είναι σταθερή. Ακόμη από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 0) = \det(c_k s \mathbf{I}_{nm} + \mathbf{I}_m \otimes \Lambda + \Gamma \otimes \mathbf{I}_n) = 0$  έχει ακριβώς  $nm$  ρίζες, έπεται ότι  $f(0) = nm$ , απ' όπου επίσης έχουμε ότι  $f(1) = nm$ . Παίρνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0$ , συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = \det \mathbf{L}_{k,0}(s) = 0$  έχει ακριβώς  $nm$  ρίζες εντός του κύκλου  $C_0$ .

Τέλος, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μένει να δείξουμε ότι η τιμή  $s = 0$  είναι μία ρίζα της εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = 0$  με μονή πολλαπλότητα. Το ότι η τιμή  $s = 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = 0$ , είναι απόρροια του γεγονότος ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\det \mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί των μή-διαγώνιων στοιχείων που βρίσκονται στην ίδια γραμμή. Πράγματι, θεωρώντας την  $((k-1)n + \ell)$ -γραμμή του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$ , για  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq \ell \leq n$ , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το διαγώνιο στοιχείο της προπελεγμένης γραμμής,  $a_{\ell\ell} + b_{kk} + a_\ell \alpha_\ell + b_k \beta_k$ , μπορεί να γραφεί ως

$$a_{\ell\ell} + b_{kk} + a_\ell \alpha_\ell + b_k \beta_k = \sum_{i=1, i \neq \ell}^n (a_{\ell i} + a_\ell \alpha_i) + \sum_{j=1, j \neq k}^m (b_{kj} + b_k \beta_j),$$

και συνεπώς έχουμε ότι  $\det \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = 0$ .

Τέλος, για να δείξουμε ότι το  $s = 0$  είναι μια απλή ρίζα, θεωρούμε  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_{nm})$  να είναι ο πίνακας που συγκροτείται από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(0, 1)$ , με  $d_1 = 0$  και  $d_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, nm$ . Επίσης, ορίζουμε  $\mathbf{X}_l$  και  $\mathbf{X}_r$  να είναι οι αντίστοιχοι πίνακες των αριστερών και δεξιών ιδιοδιανυσμάτων, με  $\mathbf{X}_l \mathbf{X}_r = \mathbf{I}_{nm}$ . Τότε, έχουμε ότι

$$\mathbf{L}_{k,0}(0, 1) \mathbf{X}_r = \mathbf{X}_r \mathbf{D} \quad \text{και} \quad \mathbf{X}_l \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = \mathbf{D} \mathbf{X}_l.$$

απ' όπου χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbf{X}_l \mathbf{X}_r = \mathbf{I}_{nm}$ , οι δύο παραπάνω εξισώσεις δίνουν ότι

$$\mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = \mathbf{X}_r \mathbf{D} \mathbf{X}_l.$$

Επιπλέον για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$  θεωρούμε ότι υπάρχουν οι πίνακες  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{X}_l(s)$  και  $\mathbf{X}_r(s)$ , με τα στοιχεία τους να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = \mathbf{X}_r(s)\mathbf{D}(s)\mathbf{X}_l(s),$$

με  $\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{X}_r(0) = \mathbf{X}_r$  και  $\mathbf{X}_l(0) = \mathbf{X}_l$ . Τότε, από τη μορφή του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,0}(s, 1)$  εύκολα βλέπουμε ότι

$$\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = \det \mathbf{X}_r(s) \det \mathbf{D}(s) \det \mathbf{X}_l(s).$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $s$ , θέτοντας  $s = 0$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός  $\det \mathbf{D}(0) = 0$ , έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = \det \mathbf{X}_r(0) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(0) \cdot \det \mathbf{X}_l(0),$$

όπου  $\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(0) = \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(s)|_{s=0}$ . Επιπλέον, ανακαλώντας ότι  $d_i(0) = d_i$ ,  $i = 1, \dots, nm$ , με  $d_1(0) = 0$ ,  $d_i \neq 0$  για  $i = 2, \dots, nm$  και  $d'_1(0) = \frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1) > 0$  (όπου η τελευταία ανίσωση είναι αληθής από την εξίσωση (4.15)), τότε για την μερική παράγωγο της συνάρτησης  $\det \mathbf{D}(s)$  έχουμε ότι  $\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(0) = d'_1(0)d_2 \cdots d_{nm} \neq 0$ . Συνεπώς

$$\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{L}_{k,0}(0, 1) = \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(0) \neq 0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι  $s = 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,0}(s, 1) = 0$  με πολλαπλότητα ένα. ■

**Παρατήρηση 4.2.** Στο εξής θα συμβολίζουμε τις  $nm$  ρίζες της εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$  με  $r_{i,k}(\delta) \equiv r_{i,k}$ ,  $i = 1, \dots, nm$  και υποθέτουμε ότι οι  $r_{1,k}, \dots, r_{nm,k}$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Επιστρέφοντας στο αρχικό ζητούμενο, ο υπολογισμός της λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6) γίνεται με βάση τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$ , που δίνονται από το Λήμμα 4.1, καθώς και με τη βοήθεια του παρακάτω Θεωρήματος.

**Θεώρημα 4.2.** Έστω  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  ένα  $n \times 1$  διάνυσμα πραγματικών παραγωγίσιμων συναρτήσεων, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\bar{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}(t) + \int_0^t \mathbf{M}(t-s)\bar{\mathbf{x}}(s)ds + \bar{\mathbf{n}}(t), \quad t \geq 0, \quad (4.18)$$

και

$$\bar{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}(t) + \int_0^t \mathbf{M}(t-s)\bar{\mathbf{x}}(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (4.19)$$

όπου  $\mathbf{P}$  ένας  $n \times n$  πίνακας με τα στοιχεία του σταθερού όρους,  $\mathbf{M}(t)$  ένας  $n \times n$  πίνακας συνεχών συναρτήσεων στο  $[0, \infty)$  και  $\bar{\mathbf{h}}(t)$  ένα  $n \times 1$  διάνυσμα συνεχών συναρτήσεων στο  $[0, \infty)$ .

Επιπλέον, έστω  $\mathbf{Z}(t)$  ένας  $n \times n$  πίνακας οι στήλες του οποίου αποτελούν λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.19), με  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}$ , όπου  $\mathbf{I}$  ο  $n \times n$  ταυτοτικός πίνακας.

Τότε, για  $t \geq 0$ , η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.18) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Z}(t)\bar{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathbf{Z}(t-s)\bar{\mathbf{h}}(s)ds.$$

Απόδειξη. Βλ. Burton (2005), Θεώρημα 2.3.1. ■

Επίσης, από την απόδειξη της Πρότασης 4.1, έχουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,\delta}(s)$  κυριαρχεί διαγωνίως και συνεπώς από το Θεώρημα 1.24 έπεται ότι ο  $\mathbf{L}_{k,\delta}(s)$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Επομένως, χρησιμοποιώντας το παραπάνω και αντιστρέφοντας την εξίσωση (4.9) ως προς  $s$  έχουμε ότι

$$\bar{\mathbf{h}}_{k,\ell}(y) = \mathbf{v}_k(y)\bar{\mathbf{h}}_{k,\ell}(0) \quad \text{με} \quad \mathbf{v}_k(y) = \mathcal{L}^{-1}\left([\mathbf{L}_{k,\delta}(s)]^{-1}\right). \quad (4.20)$$

όπου  $\mathcal{L}^{-1}$  συμβολίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Τώρα, θεωρούμε τον  $nm \times nm$  πίνακα  $\mathbf{v}_k(y) = (v_{ij,k}(y))_{i,j=1}^{nm}$  του οποίου οι στήλες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης (4.8), με  $\mathbf{v}_k(0) = \mathbf{I}_{nm}$  (όπου για την τελευταία ισότητα αρκεί να θέσουμε  $y = 0$  στην εξίσωση (4.20)). Τότε, από το Θεώρημα 4.2, η λύση της μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.7) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{h}}_{k,\ell}(y) = \mathbf{v}_k(y)\bar{\mathbf{h}}_{k,\ell}(0) - \int_0^y \mathbf{v}_k(x)\bar{\mathbf{z}}_{k,\ell}(y-x)dx, \quad y \geq 0. \quad (4.21)$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή  $y = u - b_{k-1}$ , βρίσκουμε τη λύση του μη-ομογενούς εξίσωσης (4.6) όπως δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.2.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , θεωρούμε ότι  $\mathbf{v}_k(y) = (v_{ij,k}(y))_{i,j=1}^{nm}$ ,  $y \geq 0$ , ένα πίνακα διαστάσεων  $nm \times nm$ , του οποίου οι στήλες είναι αποτελούν λύσεις της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.8), με  $\mathbf{v}_k(0) = \mathbf{I}_{nm}$ . Τότε, η γενική λύση της μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.6) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\varphi}_{k,\ell}(u) = \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\bar{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) - \int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x)\bar{\zeta}_{k,\ell}(u-x)dx, \quad u \geq b_{k-1}. \quad (4.22)$$

με  $\bar{\zeta}_{k,\ell}(u)$  όπως δίνεται από το Θεώρημα 4.1.

Για να ολοκληρώσουμε την λύση για την  $\bar{\varphi}_{k,\ell}(u)$ , που δίνεται από την εξίσωση (4.22) της Πρότασης 4.2, είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τόσο τις αρχικές τιμές  $\bar{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1})$  για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , όσο και τον πίνακα  $\mathbf{v}_k(y)$ . Το υπόλοιπο μέρος αυτής της Ενότητας αφιερώνεται στο να δείξουμε πώς υπολογίζονται οι δύο προαναφερόμενες ζητούμενες ποσότητες.

Πρώτα ξεκινάμε με τον υπολογισμό του πίνακα  $\mathbf{v}_k(y)$ , ο οποίος γίνεται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace.

Εστω  $\hat{\mathbf{v}}_k(s) = (\hat{v}_{ij,k}(s))_{i,j=1}^{nm}$  ένας  $nm \times nm$  πίνακας του οποίου τα στοιχεία  $\hat{v}_{ij,k}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} v_{ij,k}(y) dy$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $v_{ij,k}(y)$ . Επιπλέον από το γεγονός ότι οι στήλες του πίνακα  $\mathbf{v}_k(y)$  αποτελούν λύσεις της εξίσωσης (4.8), έπεται ότι ο πίνακας  $\hat{\mathbf{v}}_k(s)$  ικανοποιεί την εξίσωση (4.9), και συνεπώς χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbf{v}_k(0) = \mathbf{I}_{nm}$ , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ακόλουθη σχέση είναι αληθής

$$\hat{\mathbf{v}}_k(s) = c_k [\mathbf{L}_{k,\delta}(s)]^{-1} = \frac{c_k \mathbf{L}_{k,\delta}^*(s)}{\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s)}, \quad (4.23)$$

όπου  $\mathbf{L}_{k,\delta}^*(s)$  είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (adjoint matrix) του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,\delta}(s)$ . Ο μετασχηματισμός Laplace,  $\hat{\mathbf{v}}_k(s)$ , της παραπάνω εξίσωσης αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Έτσι θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Σε αυτή την περίπτωση οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π.  $f_1$  και  $f_2$  έχουν την μορφή πηλίκων πολυωνύμων όπως δίνεται στην παρακάτω σχέση

$$\hat{f}_i(s) = \frac{p_{k_i-1}(s)}{p_{k_i}(s)}, \quad p_{k_i-1}(0) = p_{k_i}(0), \quad i = 1, 2, \quad (4.24)$$

όπου  $p_{k_i-1}(s)$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k_i-1$  (ή μικρότερου) και  $p_{k_i}(s)$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k_i$ , με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1. Επιπλέον η εξίσωση  $p_{k_i}(s) = 0$  για  $i = 1, 2$ , έχει μόνο ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη. Όπως τονίστηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια η κλασματική οικογένεια κατανομών είναι μια πολύ ευρεία κλάση, η οποία περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων ως ειδικές περιπτώσεις, την εκθετική κατανομή, την γενικευμένη Erlang κατανομή, την κατανομή Coxian, την phase-type κατανομή, καθώς και τις μίξεις αυτών.

Επομένως, όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, τότε τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_k(y) = (v_{ij,k}(y))_{i,j=1}^{nm}$  μπορούν να βρεθούν μέσω της παρακάτω πρότασης.

**Πρόταση 4.3.** *Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\hat{f}_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , των μεγεθών των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις έχουν τη μορφή πηλίκου πολυωνύμων όπως στην εξίσωση (4.24), τότε τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_k(y) = (v_{ij,k}(y))_{i,j=1}^{nm}$  υπολογίζονται με βάση*

τη σχέση

$$v_{ij,k}(y) = \sum_{\ell_1=1}^{nm} \bar{\alpha}_{ij,k}(\ell_1) e^{r_{\ell_1,k}y} + \sum_{\ell_2=1}^{(k_1+k_2)nm} \bar{\beta}_{ij,k}(\ell_2) e^{-R_{\ell_2,k}y}, \quad y \geq 0,$$

με

$$\bar{\alpha}_{ij,k}(\ell_1) = \frac{(\prod_{i=1}^2 p_{k_i}(r_{\ell_1,k}))^{nm} (\mathbf{L}_{k,\delta}^*(r_{\ell_1,k}))_{i,j}}{c_k^{nm-1} \prod_{\nu=1, \nu \neq \ell_1}^{nm} (r_{\nu,k} - r_{\ell_1,k}) \prod_{j=1}^{(k_1+k_2)nm} (r_{\ell_1,k} + R_{j,k})},$$

$$\bar{\beta}_{ij,k}(\ell_2) = \frac{(\prod_{i=1}^2 p_{k_i}(-R_{\ell_2,k}))^{nm} (\mathbf{L}_{k,\delta}^*(-R_{\ell_2,k}))_{i,j}}{(-1)^{nm} c_k^{nm-1} \prod_{j=1}^{nm} (r_{j,k} + R_{\ell_2,k}) \prod_{\nu=1, \nu \neq \ell_2}^{(k_1+k_2)nm} (R_{\nu,k} - R_{\ell_2,k})},$$

όπου  $(\mathbf{L}_{k,\delta}^*(s))_{i,j}$  είναι το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,\delta}^*(s)$  και  $r_{\ell_1,k}$  με  $\Re(r_{\ell_1,k}) > 0$  για  $\ell = 1, \dots, nm$ , καθώς και  $-R_{\ell_2,k}$  με  $\Re(R_{\ell_2,k}) > 0$  για  $\ell_2 = 1, \dots, (k_1 + k_2)nm$  είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$  για μεγέθη αποζημιώσεων όπως στην εξίσωση (4.24).

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (4.23) με  $(\prod_{i=1}^2 p_{k_i}(s))^{nm}$ , τότε το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\hat{\mathbf{v}}_k(s) = (\hat{v}_{ij,k}(s))_{i,j=1}^{nm}$  δίνεται από τη σχέση

$$\hat{v}_{ij,k}(s) = \frac{(\prod_{i=1}^2 p_{k_i}(s))^{nm} (\mathbf{L}_{k,\delta}^*(s))_{i,j}}{(\prod_{i=1}^2 p_{k_i}(s))^{nm} \det \mathbf{L}_{k,\delta}(s)}. \quad (4.25)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμητής της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $(k_1 + k_2 + 1)nm$  με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το  $c^{nm}$ . Ανακαλώντας από την Πρόταση 4.1 ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$  έχει ρίζες τα  $r_{i,k}$ ,  $i = 1, \dots, nm$  ρίζες με  $\Re(r_{i,k}) > 0$  καθώς επίσης και ότι η εξίσωση  $p_{k_i}(s) = 0$  έχει μόνο ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη, έστω τις  $-R_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, 2$ , με  $\Re(R_{j,k}) > 0$ , τότε έπεται ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (4.25) μπορεί, ισοδύναμα, να γραφεί ως

$$\left( \prod_{i=1}^2 p_{k_i}(s) \right)^{nm} \det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = c^{nm} \prod_{i=1}^{nm} (s - r_{i,k}) \prod_{j=1}^{(k_1+k_2)nm} (s - R_{j,k}).$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην εξίσωση (4.25) και χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, έχουμε ότι

$$\hat{v}_{ij,k}(s) = \sum_{l_1=1}^{nm} \frac{\bar{\alpha}_{ij,k}(l_1)}{s - r_{l_1,k}} + \sum_{l_2=1}^{(k_1+k_2)nm} \frac{\bar{\beta}_{ij,k}(l_2)}{s + R_{l_2,k}},$$



απ' όπου αντιστρέφοντας ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα  $\mathbf{v}_k(y)$  για να ολοκληρώσουμε την λύση για την  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u)$ , [βλ. εξίσωση (4.22) της Πρότασης 4.2] χρειάζομαστε να υπολογίσουμε τόσο τις αρχικές τιμές  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1})$  για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ . Ο υπολογισμός των προαναφερόμενων αρχικών τιμών γίνεται ακολουθώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή στον Badescu (2008), χρησιμοποιώντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$ , που δίνονται από την Πρόταση 4.1 και τους τελεστές  $T_r$  για πίνακες/διανύσματα. Έτσι, όμοια με τον Ορισμό 1.8, ορίζουμε τον τελεστή  $T_r$  για πίνακες/διανύσματα ακολούθως.

Έστω  $\mathbf{P}(x)$  ένας πίνακας/διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ως προς  $x$ . Τότε ο τελεστής  $T_r \mathbf{P}(x)$  ως προς κάποιο μιγαδικό αριθμό  $r$  ορίζεται ως

$$T_r \mathbf{P}(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} \mathbf{P}(u) du, \quad \Re(r) \geq 0.$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.6) με  $e^{-s(u-b_{k-1})}$  και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς  $u$  από  $u = b_{k-1}$  έως  $u = \infty$  παίρνουμε ότι, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$

$$\frac{1}{c_k} \mathbf{L}_{k,\delta}(s) T_s \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) = \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) - T_s \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}). \quad (4.26)$$

Επιπλέον από την απόδειξη της Πρότασης 4.1 έχουμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{L}_{k,\delta}(s) = 0$  έχει ακριβώς  $nm$  ρίζες, τις  $r_{1,k} \dots, r_{nm,k}$ . Έτσι για κάθε  $s = r_{i,k}$ , ο πίνακας  $\mathbf{L}_{k,\delta}(r_{i,k})$ ,  $i = 1, \dots, nm$ , έχει ίδια ιδιοτιμή στο σημείο 0. Συνεπώς, για κάθε  $r_{i,k}$  ορίζουμε  $\vec{q}_{i,k}$  να είναι το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα (διαστάσεων  $1 \times nm$ ) του πίνακα  $\mathbf{L}_{k,\delta}(r_{i,k})$  ως προς την ιδιοτιμή στο σημείο 0, τέτοιο ώστε  $\vec{q}_{i,k} \mathbf{L}_{k,\delta}(r_{i,k}) = \vec{0}_{nm}$ ,  $\forall i = 1, \dots, nm$ . Αντικαθιστώντας  $s = r_{i,k}$  στην εξίσωση (4.26) και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με  $\vec{q}_{i,k}$ , παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα των  $nm$  εξισώσεων, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$

$$\vec{q}_{i,k} \left( \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) - T_{r_{i,k}} \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}) \right) = \frac{1}{c_k} \vec{q}_{i,k} \mathbf{L}_{k,\delta}(r_{i,k}) T_{r_{i,k}} \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) = \vec{0}_{nm}.$$

Έστω  $\mathbf{Q}_k = (\vec{q}_{1,k}, \dots, \vec{q}_{nm,k})^T$  ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $nm \times nm$ , που συμβολίζει τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων. Τότε, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν, ισοδύναμα, να γραφούν σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{Q}_k \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) = \sum_{i=1}^{nm} \text{diag} \left( T_{r_{1,k}} \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}), \dots, T_{r_{nm,k}} \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}) \right) \mathbf{Q}_k \vec{\mathbf{1}}_i,$$

όπου  $\vec{\mathbf{1}}_i$  αντιστοιχεί την  $i$ -στήλη του  $nm \times nm$  ταυτοτικού πίνακα. Τέλος, από την υπόθεση ότι τα  $r_{i,k}$  είναι διαφορετικά μεταξύ τους, έχουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{q}_{1,k}, \dots, \vec{q}_{nm,k}$  είναι

γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς [βλ. Badescu (2008)] ο πίνακας  $\mathbf{Q}_k$  είναι αντιστρέψιμος. Έτσι το διάνυσμα των αρχικών τιμών,  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1})$ , για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) = \sum_{i=1}^{nm} \mathbf{Q}_k^{-1} \text{diag} \left( T_{r_{k,1}} \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}), \dots, T_{r_{k,nm}} \vec{\zeta}_{k,\ell}(b_{k-1}) \right) \mathbf{Q}_k \vec{\mathbf{1}}_i. \quad (4.27)$$

Από την Πρόταση 4.3 και την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι γνωρίζουμε όλες τις ποσότητες που χρειάζονται για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u)$ , που δίνεται από την Πρόταση 4.2. Ο προσδιορισμός του διανύσματος  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u)$  είναι απαραίτητος προκειμένου να υπολογίσουμε το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ . Ο τρόπος υπολογισμού των  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  είναι το αντικείμενο της επόμενης υποενότητας.

#### 4.2.1 Αναδρομικός υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Σε αυτή την υποενότητα, δείχνουμε πως το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο υπολογισμού για το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ .

Ανακαλώντας το Θεώρημα 4.1 και «χαλαρώνοντας» στην εξίσωση (4.4) τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο από  $b_{k-1} < u < b_k$  σε  $u \geq b_{k-1}$ , έπεται ότι το διάνυσμα των συναρτήσεων των Gerber-Shiu,  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ , ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τη σχέσης (4.6) και επομένως η λύση του μπορεί να βρεθεί μέσω της Πρότασης 4.2. Χρησιμοποιώντας πρώτα το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2 με  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  στη θέση του διανύσματος  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u)$  και στη συνέχεια επαναφέροντας τον αρχικό περιορισμό για το αρχικό κεφάλαιο, δηλ. αλλάζοντας τον περιορισμό  $u \geq b_{k-1}$  σε  $b_{k-1} \leq u < b_k$ , έχουμε ότι, για  $k = 1, \dots, \nu + 1$

$$\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \mathbf{v}_k(u - b_{k-1}) \vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x) \vec{\zeta}_{k,\ell}(u-x) dx, \quad b_{k-1} \leq u < b_k. \quad (4.28)$$

Σημειώνουμε, ότι στην εξίσωση (4.28) η περίπτωση  $u = b_{k-1}$  ισχύει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  ως προς  $u$  [βλ. την πρώτη οριακή συνθήκη της σχέσης (4.5)]. Τώρα, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.22) και (4.28), παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους και στις δυο εξισώσεις είναι κοινός. Έτσι, αλλάζοντας στην εξίσωση (4.22) τον περιορισμό για το αρχικό κεφάλαιο από  $u \geq b_{k-1}$  σε  $b_{k-1} \leq u < b_k$ , παρατηρούμε ότι στις εξισώσεις (4.22) και (4.28) ο όρος  $\int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x) \vec{\zeta}_{k,\ell}(u-x) dx$  είναι ακριβώς ο ίδιος και με ακριβώς τους ίδιους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο. Επομένως, αφαιρώντας κατά

μέλη τις δύο προαναφερόμενες εξισώσεις παίρνουμε για  $k = 1, \dots, \nu + 1$  και  $\ell = 1, 2$  ότι

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) &= \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) + \vec{\varphi}_{k,\ell}(u) - \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) \\ &= \vec{\varphi}_{k,\ell}(u) + \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\left(\vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1})\right) \\ &= \vec{\varphi}_{k,\ell}(u) + \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,\ell}(b), \quad b_{k-1} \leq u < b_k,\end{aligned}\quad (4.29)$$

όπου  $\vec{\eta}_{k,\ell}(b) = \vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1})$  είναι ένα άγνωστο διάνυσμα, διότι το  $\vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b)$  είναι ένα άγνωστο διάνυσμα, το οποίο θα προσδιορίσουμε με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεώρηματος 4.1.

Χρησιμοποιώντας την πρώτη οριακή συνθήκη (συνθήκη συνέχειας) της σχέσης (4.5) και την εξίσωση (4.29) έχουμε για  $k = 1, \dots, \nu$  και  $\ell = 1, 2$  ότι

$$\mathbf{v}_k(b_k - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,\ell}(b) + \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_k) = \mathbf{v}_{k+1}(0)\vec{\eta}_{k+1,\ell}(b) + \vec{\varphi}_{k+1,\ell}(b_k).$$

Επιπλέον, ανακαλώντας Πρόταση 4.2 ότι  $\mathbf{v}_{k+1}(0) = \mathbf{I}_{nm}$ , τότε η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του διανύσματος  $\vec{\eta}_{k+1,\ell}(b)$ , που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\eta}_{k+1,\ell}(b) = \vec{\varphi}_{k,\ell}(b_k) - \vec{\varphi}_{k+1,\ell}(b_k) + \mathbf{v}_k(b_k - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,\ell}(b), \quad k = 1, \dots, \nu,$$

όπου τα διανύσματα  $\vec{\varphi}_{k+1,\ell}(b_k)$  και  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_k)$  υπολογίζονται με βάση την εξίσωση (4.27). Ακόμη, για  $k = \nu + 1$  και  $\ell = 1, 2$ , η συνάρτηση  $\vec{\phi}_{\nu+1,\ell}(u, b)$  ικανοποιεί την εξίσωση (4.28) για  $u \geq b_\nu$ . Επομένως για  $k = \nu + 1$  και  $\ell = 1, 2$  οι εξισώσεις (4.22) και (4.28) είναι ακριβώς οι ίδιες και συνεπώς

$$\vec{\phi}_{\nu+1,\ell}(u, b) = \vec{\varphi}_{\nu+1,\ell}(u) \quad u \geq b_\nu, \ell = 1, 2.$$

Έτσι από την παραπάνω εξίσωση και από την εξίσωση (4.29) για  $k = \nu + 1$  παίρνουμε άμεσα ότι  $\vec{\eta}_{\nu+1,\ell}(b) = \vec{0}_{nm}$ .

Τέλος, συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων  $\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \vec{\varphi}_{k,\ell}(u) + \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\vec{\eta}_{k,\ell}(b), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \quad (4.30)$$

όπου τα διανύσματα  $\vec{\varphi}_{k,\ell}(u)$  και  $\vec{\eta}_{k,\ell}(b)$  υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\vec{\varphi}_{k,\ell}(u) = \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\vec{\varphi}_{k,\ell}(b_{k-1}) - \int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x)\vec{\zeta}_{k,\ell}(u-x)dx, \quad u \geq b_{k-1}$$

και

$$\begin{cases} \bar{\eta}_{k+1,\ell}(b) = \bar{\varphi}_{k,\ell}(b_k) - \bar{\varphi}_{k+1,\ell}(b_k) + \mathbf{v}_k(b_k - b_{k-1})\bar{\eta}_{k,\ell}(b), & k = 1, \dots, \nu, \\ \bar{\eta}_{\nu+1,\ell}(b) = \bar{0}_{nm} \end{cases}$$

αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 4.3.** (i) Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (4.30) μας παρέχει μία αλγοριθμική προσέγγιση για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\bar{\varphi}_{k,\ell}(u, b)$  με αρχικό σημείο εκκίνησης το διάνυσμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη κάποιας μερισματικής στρατηγικής, το οποίο μπορεί να υπολογισθεί από την Πρόταση 4.2. Τότε, το διάνυσμα  $\bar{\varphi}_{1,\ell}$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\varphi}_{1,\ell}(u) = \mathbf{v}_1(u)\bar{\varphi}_{1,\ell}(0) - \int_0^u \mathbf{v}_1(x)\bar{\zeta}_{1,\ell}(u-x)dx, \quad u \geq 0,$$

όπου το διάνυσμα  $\bar{\varphi}_{1,\ell}(0)$  υπολογίζετε με βάση την εξίσωση (4.27) για  $k = 1$ .

(ii) Από τον αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του Θεωρήματος 4.3, έχουμε ότι τα διανύσματα  $\bar{\eta}_{k,\ell}(b)$  για  $k = 2, \dots, \nu - 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , βρίσκονται, για κάθε επίπεδο των  $b_i$ , σε όρους του διανύσματος  $\bar{\eta}_{1,\ell}(b)$ , όπου το  $\bar{\eta}_{1,\ell}(b)$  υπολογίζεται στο τελευταίο επίπεδο, δηλ. λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων  $\bar{\eta}_{\nu+1,\ell}(b) = \bar{0}_{nm}$ .

### 4.3 Η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία των σωρευτικών μερισμάτων για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, όπως ορίστηκε στις σχέσεις (4.1)-(4.2). Η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε σε αυτή την ενότητα βασίζεται στα αποτελέσματα της Ενότητας 4.2.

Αρχικά ορίζουμε

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t),$$

να είναι η παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων μέχρι το χρόνο χρεοκοπίας, με  $D(t)$  να είναι τα συνολικά μερίσματα που καταβάλλονται στους δικαιούχους της ασφάλισης μέχρι το χρόνο  $t$ .

Τότε, για το μοντέλο με δύο κλάσεις κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων που ορίστηκε στις σχέσεις (4.1)-(4.2), η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων στο οποίο ανήκει το αρχικό απόθεμα, δηλ. όταν το αρχικό απόθεμα είναι μεταξύ του  $b_{k-1}$  και  $b_k$ , για

$k = 1, \dots, \nu + 1$ , ορίζεται ως

$$V_k(u, b) = \mathbb{E}(D_{u,b}|U_b(0) = u), \quad b_{k-1} \leq u \leq b_k. \quad (4.31)$$

Επίσης για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , ορίζουμε

$$V_{k,\ell}(u, b) = \mathbb{E}(D_{u,b}1_{(j=\ell)}|U_b(0) = u), \quad b_{k-1} \leq u \leq b_k, \ell = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία που αντιστοιχεί μεταξύ των επιπέδων  $b_{k-1}$  και  $b_k$ , για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ , όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ . Επομένως, η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών μερισμάτων που ορίσθηκε στην εξίσωση (4.31) αναλύεται ως  $V_k(u, b) = V_{k,1}(u, b) + V_{k,2}(u, b)$ .

Επιπλέον, για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , οορίζουμε

$$V_{ij,k,\ell}(u, b) = \mathbb{E}_{ij}(D_{u,b}1_{(j=\ell)}|U_b(0) = u), \quad b_{k-1} \leq u \leq b_k, \ell = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ , δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι  $u$  και ότι η διαδικασία  $\{(I(t), J(t))\}_{t \geq 0}$  ξεκινάει από την κατάσταση  $(E_i, F_j)$ . Συνεπώς, έχουμε ότι

$$V_{k,\ell}(u, b) = \bar{\gamma} \bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b), \quad b_{k-1} \leq u < b_k, \quad k = 1, \dots, \nu + 1, \quad \ell = 1, 2,$$

όπου  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b) = (V_{11,k,\ell}(u, b), \dots, V_{n1,k,\ell}(u, b), V_{12,k,\ell}(u, b), \dots, V_{n2,k,\ell}(u, b), \dots, V_{1m,k,\ell}(u, b), \dots, V_{nm,k,\ell}(u, b))^T$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων  $V_{ij,k,\ell}(u, b)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\ell = 1, 2$ , ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Τότε με βάση το παραπάνω σύστημα δίνουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το διάνυσμα των συναρτήσεων των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$ .

**Θεώρημα 4.4.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$  και  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}'_{k,\ell}(u, b) &= \frac{1}{c_k} (\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b) - \frac{1}{c_k} \int_0^{u-b_{k-1}} \left( (\bar{b}^T \bar{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{a}^T \bar{\alpha}) f_1(x) \right) \bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u-x, b) dx - \bar{\xi}_{k,\ell}(u), \quad b_{k-1} < u < b_k, \end{aligned} \quad (4.32)$$

με οριακές συνθήκες

$$\vec{V}_{k,\ell}(b_{k-}, b) = \vec{V}_{k+1,\ell}(b_{k+}, b), \quad k = 1, \dots, \nu, \quad (4.33)$$

$$c_k \vec{V}'_{k,\ell}(b_{k-}, b) = c_{k+1} \vec{V}'_{k+1,\ell}(b_{k+}, b) + (c - c_{k+1}) \vec{V}_{k+1,\ell}(b_{k+}, b), \quad k = 1, \dots, \nu \quad (4.34)$$

και

$$\vec{\xi}_{k,\ell}(u) = \frac{1}{c_k} (c - c_k) \vec{e}_{nm} + \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{u-b_i}^{u-b_{i-1}} \left( (b^T \vec{\beta}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) + \mathbf{I}_m \otimes (\vec{\alpha}^T \vec{\alpha}) f_1(x) \right) \vec{V}_{i,\ell}(u-x, b) dx$$

Απόδειξη. Ακολουθώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή του Θεωρήματος 4.1, θεωρούμε το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$ . Τότε, για  $u \in [b_{k-1}, b_k]$  και δεσμεύοντας ως προς την αλλαγή κατάστασης της αλυσίδας  $\{I(t), J(t)\}_{t \geq 0}$ , σε συνδυασμό με την εμφάνιση ή μη εμφάνιση μιας αποζημίωσης στο  $[0, dt]$ , έχουμε για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\ell = 1, 2$ , ότι

$$\begin{aligned} V_{ij,k,\ell}(u, b) &= (c - c_k) dt + \left( 1 + (a_{ii} + b_{jj}) dt \right) V_{ij,k,\ell}(u + c_k dt, b) e^{-\delta dt} \\ &\quad + (1 + a_{ii} dt) \sum_{\nu_1=1, \nu_1 \neq j}^m b_{j\nu_1} dt V_{i\nu_1,k,\ell}(u + c_k dt, b) e^{-\delta dt} \\ &\quad + (1 + b_{jj} dt) \sum_{\nu_2=1, \nu_2 \neq i}^n a_{i\nu_2} dt V_{\nu_2 j,k,\ell}(u + c_k dt, b) e^{-\delta dt} \\ &\quad + (1 + a_{ii} dt) b_j dt \sum_{\nu_1=1}^m \beta_{\nu_1} \left( \int_0^{u+c_k dt - b_{k-1}} V_{i\nu_1,k,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_2(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u+c_k dt - b_l}^{u+c_k dt - b_{l-1}} V_{i\nu_1,l,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_2(x) dx \right) e^{-\delta dt} \\ &\quad + (1 + b_{jj} dt) a_i dt \sum_{\nu_2=1}^m \alpha_{\nu_2} \left( \int_0^{u+c_k dt - b_{k-1}} V_{\nu_2 j,k,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_1(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u+c_k dt - b_l}^{u+c_k dt - b_{l-1}} V_{\nu_2 j,l,\ell}(u + c_k dt - x, b) f_1(x) dx \right) e^{-\delta dt} \\ &\quad + o(dt). \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $dt$ , παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  παίρνουμε άμεσα ότι

$$c_k V'_{ij,k,\ell}(u, b) = \delta V_{ij,k,\ell}(u, b) - \sum_{\nu_1=1}^m b_{j\nu_1} V_{i\nu_1,k,\ell}(u, b) - \sum_{\nu_2=1}^n a_{i\nu_2} V_{\nu_2 j,k,\ell}(u, b)$$

$$\begin{aligned}
& -b_j \sum_{\nu_1=1}^m \beta_{\nu_1} \left( \int_0^{u-b_{k-1}} V_{i\nu_1,k,\ell}(u-x,b) f_2(x) dx \right. \\
& + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} V_{i\nu_1,l,\ell}(u-x,b) f_2(x) dx \Big) \\
& -a_i \sum_{\nu_2=1}^m \alpha_{\nu_2} \left( \int_0^{u-b_{k-1}} V_{i\nu_2,k,\ell}(u-x,b) f_1(x) dx \right. \\
& + \sum_{l=1}^{k-1} \int_{u-b_l}^{u-b_{l-1}} V_{i\nu_2,l,\ell}(u-x,b) f_1(x) dx \Big) + (c-c_k).
\end{aligned}$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή πινάκων/διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε άμεσα την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.32). Για την απόδειξη των οριακών συνθηκών (4.34), πρώτα παρατηρούμε από την μορφή της εξίσωσης (4.32) ότι το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση ως προς  $u$ . Έτσι το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε κάθε επίπεδο  $b_k$ ,  $k=1, \dots, \nu+1$ , δηλ. ισχύει ότι  $\vec{V}_{k,\ell}(b_k^-, u) = \vec{V}_{k+1,\ell}(b_k^+, u)$ ,  $k=1, \dots, \nu$ ,  $\ell=1, 2$  Για να δείξουμε την οριακή συνθήκη της εξίσωσης (4.34), αρκεί να συνδυάσουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.32) και την συνθήκη συνέχειας για το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$  στα σημεία  $u = b_k$ . ■

**Παρατήρηση 4.4.** Όμοια με την Παρατήρηση 4.1, θεωρούμε ότι η παράγωγος  $\vec{V}'_{k,\ell}(u,b)$  στην εξίσωση (4.32) είναι δεξιά παράγωγος της συνάρτησης  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$ . Επομένως στην εξίσωση (4.4) ο περιορισμός για το αρχικό κεφάλαιο  $b_k < u < b_{k-1}$  μπορεί να αντικατασταθεί με  $b_k \leq u < b_{k-1}$ .

Τώρα, χρησιμοποιώντας όμοια ίδια μεθοδολογία με την Ενότητα 4.2, αρχικά δείχνουμε πως μπορεί να υπολογισθεί η λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (4.32) μέχρι το επίπεδο  $b_1$ , την οποία στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν αναδρομικό τρόπο υπολογισμού για το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$ .

Αλλάζοντας, στην εξίσωση (4.32), τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο από  $b_{k-1} < u < b_k$  σε  $u \geq b_{k-1}$ , το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$  ικανοποιεί την μη-ομογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.6), με τη διαφορά ότι ο μη-ομογενής όρος,  $\vec{\zeta}_{k,\ell}(u)$ , αντικαθίσταται με τον όρο  $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)$ . Επομένως, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2, με  $\vec{\xi}_{k,\ell}(u)$  στη θέση του  $\vec{\zeta}_{k,\ell}(u)$  και επαναφέροντας του αρχικούς περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο, δηλ. αλλάζοντας το  $u \geq b_{k-1}$  σε  $b_{k-1} \leq u < b_k$ , η γενική λύση για το διάνυσμα  $\vec{V}_{k,\ell}(u,b)$ , για

$k = 1, \dots, \nu + 1$ , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{V}_{k,\ell}(u, b) = v_k(u - b_{k-1})\bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \int_0^{u-b_{k-1}} v_k(x)\bar{\xi}_{k,\ell}(u-x)dx, \quad b_{k-1} \leq u < b_k. \quad (4.35)$$

Σημειώνουμε ότι από την συνθήκη συνέχειας της σχέσης (4.34), έπεται ότι η εξίσωση (4.35) είναι αληθής και για την περίπτωση όπου  $u = b_{k-1}$ .

Επίσης, τονίζουμε ότι για  $k = 1$  ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.32) είναι μηδέν, διότι  $\bar{\xi}_{k,\ell}(u) = 0$  για  $c = c_1$  και  $k = 1$ . Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων μεταξύ των επιπέδων 0 και  $b_1$ ,  $\bar{V}_{1,\ell}(u, b)$ , ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.32) με  $\bar{\xi}_{k,\ell}(u) = 0$ . Επιπλέον, εφόσον για  $k = 1$  έχουμε ότι  $\bar{\xi}_{k,\ell}(u) = 0$ , από την εξίσωση (4.35), η γενική λύση για το διάνυσμα  $\bar{V}_{1,\ell}(u, b)$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{V}_{1,\ell}(u, b) = v_1(u)\bar{V}_{1,\ell}(0, b), \quad 0 \leq u < b_1, \ell = 1, 2. \quad (4.36)$$

Τώρα, θεωρούμε το μοντέλο με δύο κλάσεις και phase-type ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων (όπως περιγραφήκε στην Ενότητα 4.1) με τη διαφορά ότι η στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων αντικαθίσταται από μία στρατηγική σταθερού μερίσματος σε κάποιο επίπεδο  $b_1$ . Κάτω από την υπόθεση ύπαρξης μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος, όταν διαδικασία πλεονάσματος φτάσει στο επίπεδο  $b_1$ , τα ασφάλιστρα επιστρέφονται στους δικαιούχους της ασφάλισης με την μορφή μερισμάτων και η διαδικασία πλεονάσματος παραμένει στο επίπεδο  $b_1$  μέχρι την εμφάνιση της επόμενης αποζημίωσης. Το υπόλοιπο μέρος αυτής της ενότητας αφιερώνεται στον υπολογισμό των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε εδώ το προαναφερόμενο μοντέλο κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος είναι διότι (όπως θα δούμε στην επόμενη υποενότητα) ο υπολογισμός των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων κάτω από την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων εξαρτώνται άμεσα από τον υπολογισμό της αντίστοιχης ποσότητας στο αντίστοιχο μοντέλο με την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Έτσι για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , ορίζουμε

$$W_{ij,\ell}(u, b_1) = \mathbb{E}_{i,j}(D_{u,b_1} 1_{\{J=j\}} | U_{b_1}(0) = u), \quad 0 \leq u < b_1, \ell = 1, 2,$$

να είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία των σωρευτικών μερισμάτων πριν τη χρεοκοπία, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ , δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι  $u$  και ότι η διαδικασία  $\{(I(t), J(t))\}_{t \geq 0}$  ξεκινάει από την κατάσταση  $(E_i, F_j)$ , στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Όμοια όπως και παραπάνω θεωρούμε το διάνυσμα



$\bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1) = (W_{11,\ell}(u, b_1), \dots, W_{n_1,\ell}(u, b_1), W_{12,\ell}(u, b_1), \dots, W_{n_2,\ell}(u, b_1), \dots, W_{1m,\ell}(u, b_1), \dots, W_{nm,\ell}(u, b_1))^T$ . Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτή του Θεωρήματος 4.4, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}'_\ell(u, b_1) &= \frac{1}{c_k}(\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1) - \frac{1}{c_k} \int_0^{u-b_1} \left( (\bar{\mathbf{b}}^T \bar{\boldsymbol{\beta}}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}) f_1(x) \right) \bar{\mathbf{W}}_\ell(u-x, b_1) dx, \quad 0 \leq u \leq b_1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

με οριακές συνθήκες  $\bar{\mathbf{W}}'_\ell(b_1, b_1) = \bar{\mathbf{e}}_{nm}$ . Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2 (με τον μη-ομογενή όρο να είναι μηδέν) η γενική λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (4.37) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1) = \mathbf{v}_1(u) \bar{\mathbf{W}}_\ell(0, b_1), \quad 0 \leq u < b_1, \ell = 1, 2,$$

από την οποία χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες  $\bar{\mathbf{W}}'_\ell(b_1, b_1) = \bar{\mathbf{e}}_{nm}$  βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1) = \mathbf{v}_1(u) [\mathbf{v}'_1(b_1)]^{-1} \bar{\mathbf{e}}_{nm}, \quad 0 \leq u < b_1, \ell = 1, 2. \quad (4.38)$$

Τότε, από τις εξισώσεις (4.36) και (4.38) έχουμε ότι

$$\bar{\mathbf{V}}_{1,\ell}(u, b) = \bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b_1) + \mathbf{v}_1(u) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{1,\ell}(b), \quad 0 \leq u < b_1, \ell = 1, 2, \quad (4.39)$$

όπου  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{1,\ell}(b) = \bar{\mathbf{V}}_{1,\ell}(0, b) - [\mathbf{v}'_1(b_1)]^{-1} \bar{\mathbf{e}}_{nm}$ . Όπως θα δούμε παρακάτω η παραπάνω σχέση μεταξύ των  $\bar{\mathbf{V}}_{1,\ell}(u, b)$  και  $\bar{\mathbf{W}}_\ell(u, b)$ , στο διάστημα  $[0, b_1]$ , χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης στην αλγοριθμική προσέγγιση για την υπολογισμό του διανύσματος  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$ , η οποία αναλύεται διεξοδικά στην επόμενη υποενότητα.

#### 4.3.1 Αναδρομικός υπολογισμός αναμενόμενης παρούσας αξίας των σωρευτικών μερισμάτων

Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με την Ενότητα 4.2, σε αυτή την υποενότητα βρίσκουμε ένα αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του διανύσματος  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$ ,  $k = 2, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ .

Έστω ότι το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{W}}_{k,\ell}(u, b) = (W_{11,k,\ell}(u, b), \dots, W_{n_1,k,\ell}(u, b), W_{12,k,\ell}(u, b), \dots, W_{n_2,k,\ell}(u, b), \dots, W_{1m,k,\ell}(u, b), \dots, W_{nm,k,\ell}(u, b))^T$ , για  $k = 2, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}'_{k,\ell}(u, b) &= \frac{1}{c_k}(\delta - \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \bar{\mathbf{W}}_{k,\ell}(u, b) - \frac{1}{c_k} \int_0^{u-b_{k-1}} \left( (\bar{\mathbf{b}}^T \bar{\boldsymbol{\beta}}) \otimes \mathbf{I}_n f_2(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{I}_m \otimes (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}) f_1(x) \right) \bar{\mathbf{W}}_{k,\ell}(u-x, b) dx - \bar{\boldsymbol{\xi}}_{k,\ell}(u), \quad u > b_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Από την παραπάνω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση παρατηρούμε ότι είναι ακριβώς της ίδιας μορφής με αυτή της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (4.6), με τη μόνη διαφορά να είναι ότι ο μη-ομογενής όρος είναι  $\bar{\xi}_{k,\ell}(u)$  αντί για  $\bar{\zeta}_{k,\ell}(u)$ . Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.2 προκειμένου να βρούμε το διάνυσμα  $\bar{W}_{k,\ell}(u, b)$ . Επομένως εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.2 με  $\bar{\xi}_{k,\ell}(u)$  στη θέση του  $\bar{\zeta}_{k,\ell}(u)$ , έχουμε για  $k = 2, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$

$$\bar{W}_{k,\ell}(u, b) = \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\bar{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x)\bar{\xi}_{k,\ell}(u-x)dx, \quad u \geq b_{k-1}, \quad (4.41)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{v}_k(u)$  βρίσκεται με βάση την Πρόταση 4.3, ενώ το διάνυσμα  $\bar{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b)$  προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε στην Ενότητα 4.2 [βλ. σχέση (4.27)] ως

$$\bar{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) = \sum_{i=1}^{nm} \mathbf{Q}_k^{-1} \text{diag} \left( T_{r_{k,1}} \bar{\xi}_{k,\ell}(b_{k-1}), \dots, T_{r_{k,nm}} \bar{\xi}_{k,\ell}(b_{k-1}) \right) \mathbf{Q}_k \bar{e}_i.$$

Τώρα, αλλάζοντας τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο στην εξίσωση (4.41) σε  $b_{k-1} \leq u \leq b_k$  και συγκρίνοντας την εξίσωση (4.41) με την εξίσωση (4.35), έχουμε για  $k = 2, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$

$$\bar{V}_{k,\ell}(u, b) = \bar{W}_{k,\ell}(u, b) + \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\bar{\theta}_{k,\ell}(b), \quad b_{k-1} \leq u \leq b_k,$$

όπου το άγνωστο διάνυσμα  $\bar{\theta}_{k,\ell}(b) = \bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b)$  προσδιορίζεται με βάση τις οριακές συνθήκες (4.34).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα για την  $\bar{V}_{k,\ell}(u, b)$ , έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.5.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων,  $\bar{V}_{k,\ell}(u, b)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{V}_{k,\ell}(u, b) = \begin{cases} \bar{W}_{\ell}(u, b_1) + \mathbf{v}_1(u)\bar{\theta}_{1,\ell}(b), & 0 \leq u < b_1, \\ \bar{W}_{k,\ell}(u, b) + \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\bar{\theta}_{k,\ell}(b), & b_{k-1} \leq u \leq b_k, k = 2, \dots, \nu + 1, \end{cases} \quad (4.42)$$

όπου  $\bar{W}_{\ell}(u, b_1)$  και  $\bar{W}_{k,\ell}(u, b)$  υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} \bar{W}_{\ell}(u, b_1) = \mathbf{v}_1(u) [\mathbf{v}'_1(b_1)]^{-1} \bar{e}_{nm}, & 0 \leq u < b_1, \\ \bar{W}_{k,\ell}(u, b) = \mathbf{v}_k(u - b_{k-1})\bar{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \int_0^{u-b_{k-1}} \mathbf{v}_k(x)\bar{\xi}_{k,\ell}(u-x)dx, & u \geq b_{k-1}, \\ k = 2, \dots, \nu + 1, \end{cases}$$

ενώ τα σταθερά διανύσματα  $\vec{\theta}_{1,\ell}(b_1)$  και  $\vec{\theta}_{k,\ell}(b)$  βρίσκονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\begin{cases} \vec{\theta}_{1,\ell}(b) = \vec{V}_{1,\ell}(0, b) - [\mathbf{V}'_1(b_1)]^{-1} \vec{e}_{nm} \\ \vec{\theta}_{k+1,\ell}(b) = \vec{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \vec{W}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) + \mathbf{v}_k(b_k - b_{k-1})\vec{\theta}_{k,\ell}(b), & k = 2, \dots, \nu, \\ \vec{\theta}_{\nu+1,\ell}(b) = \vec{0}_{nm}. \end{cases}$$

**Παρατήρηση 4.5.** (i) Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (4.42) μας παρέχει μία αλγοριθμική προσέγγιση για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{V}_{k,\ell}(u, b)$ , με σημείο εκκίνησης το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων κάτω την στρατηγική σταθερού μερισματος,  $\vec{W}_{\ell}(u, b_1)$ .

(ii) Από τον αναδρομικό τρόπο υπολογισμού του Θεωρήματος 4.5, έχουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{\theta}_{k,\ell}(b)$  για  $k = 2, \dots, \nu - 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , βρίσκονται σε κάθε επίπεδο  $b_i$ , σε όρους του διανύσματος  $\vec{\theta}_{1,\ell}(b)$ , όπου το  $\vec{\theta}_{1,\ell}(b)$  υπολογίζεται στο τελευταίο επίπεδο, δηλ. λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων  $\vec{\theta}_{\nu+1,\ell}(b) = \vec{0}_{nm}$  ως προς  $\vec{\theta}_{1,\ell}(b)$ .

#### 4.4 Αναδρομικός τρόπος υπολογισμού ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Όπως, ήδη, αναφέρθηκε στις Ενότητες 4.2 και 4.3 [βλ. Παρατηρήσεις 4.3 και 4.5], οι αναδρομικοί μέθοδοι υπολογισμού των συναρτήσεων Gerber-Shiu και των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων στηρίζονται σε αναδρομικές σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα επίπεδα της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων οι οποίες λύνονται στο τελευταίο επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα υπολογιστικό μειονέκτημα κυρίως όταν ο αριθμός των επιπέδων της μερισματικής στρατηγικής είναι μεγάλος.

Σε αυτή την ενότητα ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με αυτή των Albrecher και Hartinger (2007) (για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας), θα δείξουμε πως μπορούν να υπολογισθούν οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu και τα αναμενόμενα προεξοφλημένα σωρευτικά μερίσματα με βάση μια αναδρομική μέθοδο με την οποία η ακριβής λύση, για κάθε ένα από τα προαναφερόμενα μέτρα κινδύνου, στο  $k$ -επίπεδο βρίσκεται με βάση την ακριβή λύση του  $(k - 1)$ -επιπέδου (layer-based approach).

##### 4.4.1 Ο χρόνος εξόδου από το επίπεδο $b$

Αρχικά προκειμένου να βρούμε αναδρομικούς μεθόδους υπολογισμού για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu και τα αναμενόμενα προεξοφλημένα σωρευτικά μερίσματα με βάση το επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής στο οποίο ανήκει η διαδικασία πλεονάσματος, χρειαζόμαστε να εισάγουμε, όμοια με τους Albrecher και Hartinger (2007), τους ακόλουθους χρόνους

διακοπής (stopping times). Για  $a \leq b$ , για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων κάτω από την ύπαρξη μιας μερισματικής στρατηγικής  $k$ -επιπέδων, όπως ορίστηκε στις σχέσεις (4.1)-(4.2), θεωρούμε τους χρόνους διακοπής  $\tau_k^*(u, a, b) = \inf\{t \geq 0, U_b(t) \notin [a, b] | U_b(0) = u\}$ ,

$$\tau_k^+(u, a, b) = \begin{cases} \tau_k^*(u, a, b) & \text{για } U_b(\tau_k^*(u, a, b)) = b, \\ \infty & \text{για } U_b(\tau_k^*(u, a, b)) < a \end{cases},$$

$$\tau_k^-(u, a, b) = \begin{cases} \infty & \text{για } U_b(\tau_k^*(u, a, b)) = b, \\ \tau_k^*(u, a, b) & \text{για } U_b(\tau_k^*(u, a, b)) < a \end{cases},$$

Σημειώνουμε ότι ο χρόνος διακοπής  $\tau_k^+(u, a, b)$  παριστά τον χρόνο που απαιτείται μέχρι η διαδικασία πλεονάσματος να ξεπεράσει (για πρώτη φορά) το (άνω) επίπεδο  $b$  (το οποίο μπορεί να συμβεί εισπράττοντας τα ασφάλιστρα χωρίς την εμφάνιση κάποιας αποζημίωσης), ενώ  $\tau_k^-(u, a, b)$  παριστά τον χρόνο που απαιτείται μέχρι η διαδικασία πλεονάσματος να πέσει (για πρώτη φορά) κάτω του επιπέδου  $a$  (το οποίο μπορεί να συμβεί με την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την πρώτη ή δεύτερη κλάση). Επίσης, σημειώνουμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας,  $T_b$ , που ορίστηκε στην Ενότητα 4.2, μπορεί πλέον να εκφραστεί σε όρους των παραπάνω χρόνων διακοπής ως  $\tau_k(u) = \tau_k^-(u, 0, \infty)$ .

Ακόμη, για  $1 \leq i, \nu \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m$ , ορίζουμε

$$B_{ij,\nu\ell,k}(u, b) = \mathbb{E}_{i,j} \left( e^{-\delta \tau_k^+(u, 0, b)} 1_{[I(\tau_k^+(u, 0, b)) = \nu, J(\tau_k^+(u, 0, b)) = \ell]} \right),$$

να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου διακοπής  $\tau_k^+(u, 0, b)$ , δοθέντος του αρχικού αποθεματικού  $u$  και δοθέντος ότι η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει ή ξεπερνάει για πρώτη φορά το επίπεδο  $b$  όταν η δισδιάστατη διαδικασία Markov  $\{I(t), J(t)\}_{t \geq 0}$  βρίσκεται στην κατάσταση  $(E_\nu, E_\ell)$ , έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση  $(E_i, E_j)$ , δεδομένου ότι η χρεοκοπία δεν έχει εμφανισθεί. Επιπλέον, ορίζουμε  $\mathbf{B}_k(u, b) = (\mathbf{B}_{ij,k}(u, b))_{i,j=1}^m$ , όπου οι υποπίνακες (block matrices)  $\mathbf{B}_{ij,k}(u, b)$  ορίζονται ως  $\mathbf{B}_{ij,k}(u, b) = (B_{i_1 i_2, j_1 j_2, k}(u, b))_{i_1, i_2=1}^n$ . Σημειώνουμε ότι από την μορφή του πίνακα  $\mathbf{B}_k(u, b)$  είναι φανερό ότι ο  $\mathbf{B}_k(u, b)$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $nm \times nm$ . Επιπλέον, όμοια με τους Albrecher και Hartinger (2007), σημειώνουμε ότι ο συμβολισμός  $\mathbf{B}_{k-1}(u, b)$  αντιστοιχεί στον πίνακα  $\mathbf{B}_k(u, b)$  με το κατώφλι  $b_{k-1}$  να μετατοπίζεται στο άπειρο.

Ακόμη, θεωρούμε ότι  $U_{(1,k)}(t)$ , παριστά την διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής ενός επιπέδου με ρυθμό ασφαλίσεων  $c_k$  και ρυθμό μερισμάτων  $d_k$ . Στο εξής θα θεωρούμε ότι ο υποδείκτης  $\{\cdot\}_{(1,k)}$  θα αναφέρεται στην αντίστοιχη ποσότητα στην διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής ενός επιπέδου με ρυθμό ασφαλίστρου  $c_k$ . Για παράδειγμα ο χρόνος διακοπής  $\tau_{(1,k)}(u)$  παριστά το χρόνο χρεοκοπίας της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_{(1,k)}(t)$ .

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας  $\mathbf{B}_k(u, b)$  υπολογίζεται με βάση το ακόλουθο Λήμμα.

**Λήμμα 4.1.** Για  $k \in \mathbb{N}^+$  και  $\delta > 0$  έχουμε ότι:

(i)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(u, b) &= \mathbf{I}_{nm}, & \text{για } u \geq b, \\ \mathbf{B}_k(u, b) &= \mathbf{0}_{nm}, & \text{για } u < 0, \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{0}_{nm}$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $nm \times nm$  με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν και  $\mathbf{I}_{nm}$  είναι ο  $nm \times nm$  ταυτοτικός πίνακας.

(ii) Για  $0 \leq u < b_{k-1}$

$$\mathbf{B}_k(u, b) = \begin{cases} \mathbf{B}_{k-1}(u, b) & \text{για } b \leq b_{k-1}, \\ \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1})\mathbf{B}_k(b_{k-1}, b) & \text{για } b > b_{k-1} \end{cases}.$$

(iii) Για  $b_{k-1} \leq u \leq b$

$$\mathbf{B}_k(u, b) = \mathbf{B}_{(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1}) + \mathbf{G}_k(u - b_{k-1}) - \mathbf{B}_{(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1})\mathbf{G}_k(b - b_{k-1}),$$

όπου  $\mathbf{G}_k(u) = (\mathbf{G}_{ij,k}(u))_{i,j=1}^m$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων  $nm \times nm$ , και  $\mathbf{G}_{ij,k}(u)$  είναι υποπίνακες (block matrices) της μορφής  $\mathbf{G}_{ij,k}(u) = (G_{i_1 i_2, j_1 j_2, k}(u))_{i_1, i_2=1}^n$  με στοιχεία, για  $1 \leq i, \nu \leq n$ ,  $1 \leq j, \ell \leq m$

$$\begin{aligned} G_{ij,\nu\ell,k}(u) &= \mathbb{E}_{ij} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta\tau_{(1,k)}(u)} B_{k_1 k_2, \nu\ell, k}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b) \right. \\ &\quad \left. \times 1_{[J(\tau_{(1,k)}(u))=k_1]} 1_{[J(\tau_{(1,k)}(u))=k_2]} \right). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* (i) Όταν  $u \geq b$ , τότε η διαδικασία πλεονάσματος έχει φτάσει ή υπερβεί ήδη το επίπεδο  $b$  και συνεπώς  $\tau_k^+(u, 0, b) = 0$ . Επιπλέον, όταν  $u < 0$ , η εμφάνιση της χρεοκοπίας έχει προηγηθεί και συνεπώς  $\tau_k^+(u, 0, b) = \infty$ . Από τις δύο αυτές παρατηρήσεις έπεται ότι το (i) είναι αληθές.

(ii) Για  $0 \leq u < b_{k-1}$  πρώτα παρατηρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων με  $k$ -επίπεδα συμπίπτει με την διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων με  $(k-1)$ -επίπεδα πριν την πρώτη έξοδο από το διάστημα  $[0, b_{k-1})$ . Τότε έχουμε ότι  $\tau_k^+(u, 0, b) = \tau_{k-1}^+(u, 0, b)$  και συνεπώς  $B_{ij,\nu\ell,k}(u, b) = B_{ij,\nu\ell,k-1}(u, b)$  για  $0 < b \leq b_{k-1}$  απ' όπου σε μορφή πινάκων παίρνουμε την πρώτη σχέση του (ii). Για  $b \geq b_{k-1}$ , το ενδεχόμενο ότι η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

φτάνει ή ξεπερνά το επίπεδο  $b$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο η διαδικασία πλεονάσματος να ξεπεράσει το επίπεδο  $b_{k-1}$  και να συνεχίσει μέχρι να φτάσει στο επίπεδο  $b$  με ένα νέο πλέον αρχικό κεφάλαιο  $b_{k-1}$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
B_{ij,\nu\ell,k}(u, b) &= \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta[\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1}) + \tau_k^+(b_{k-1},0,b)]} 1_{[I(\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1})) = \nu, J(\tau_k^+(u,0,b)) = \ell]} \right) \\
&= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1})} 1_{[I(\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1})) = k_1, J(\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1})) = k_2]} \right) \\
&\quad \times \mathbb{E} \left( e^{-\delta\tau_k^+(b_{k-1},0,b)} 1_{[I(\tau_k^+(b_{k-1},0,b)) = \nu, J(\tau_k^+(b_{k-1},0,b)) = \ell]} \middle| (I(\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1})), \right. \\
&\quad \left. J(\tau_{k-1}^+(u,0,b_{k-1}))) = (k_1, k_2) \right) \\
&= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m B_{ij,k_1k_2,k-1}(u, b_{k-1}) B_{k_1k_2,\nu\ell,k}(b_{k-1}, b).
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\mathbf{B}_k(u, b) = \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \mathbf{B}_k(b_{k-1}, b), \quad b \geq b_{k-1}.$$

(iii) Για  $b_{k-1} \leq u \leq b_k$  υπάρχουν δύο διαφορετικά «μονοπάτια» [βλ. Σχήμα Α'1 και Α'2 του Παραρτήματος] μέσω των οποίων η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να φτάσει το επίπεδο  $b$ : (α) η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο σημείο  $b$  απ' ευθείας χωρίς πρώτα να πέσει κάτω από το σημείο  $b_{k-1}$ , και (β) η διαδικασία πλεονάσματος πέφτει πρώτα κάτω από το επίπεδο  $b_{k-1}$  χωρίς να προκαλείται χρεοκοπία και στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι να φτάσει στο επίπεδο  $b$ , με ένα νέο αρχικό κεφάλαιο. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
B_{ij,\nu\ell,k}(u, b) &= \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta\tau_k^+(u,b_{k-1},b)} 1_{[U_b(\tau_k^+(u,b_{k-1},b)) = b, I(\tau_k^+(u,b_{k-1},b)) = \nu, J(\tau_k^+(u,b_{k-1},b)) = \ell]} \right) \\
&\quad + \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta[\tau_k^-(u,b_{k-1},b) + \tau_k^+(U_b(\tau_k^-(u,b_{k-1},b)),0,b)]} \right. \\
&\quad \left. \times 1_{[U_b(\tau_k^-(u,b_{k-1},b)) < b, I(\tau_k^-(u,b_{k-1},b)) = \nu, J(\tau_k^-(u,b_{k-1},b)) = \ell]} \right) \\
&= M_{1,k}(u) + M_{2,k}(u), \quad b_{k-1} \leq u < b.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Τώρα, όμοια με τους Albrecher και Hartinger (2007), σκοπός μας είναι να αντικαταστήσουμε τον χρόνο διακοπής  $\tau_k^+(\tau_k^-)$  στην εξίσωση (4.43) με τον χρόνο διακοπής  $\tau_{(1,k)}^+(\tau_{(1,k)}^-)$ . Αυτό μπορεί να γίνει παρατηρώντας ότι το διάγραμμα που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο (α) [βλ. Σχήμα Α'1 του Παραρτήματος] είναι ισοδύναμο με το αυτό της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_{(1,k)}(t)$ , κάτω από την ύπαρξη μιας μερισματικής στρατηγικής ενός επιπέδου, στην οποία η διαδικασία  $U_{(1,k)}(t)$  ξεκινά από την αρχική κατάσταση  $(E_i, F_j)$  και με αρχικό κεφάλαιο  $u - b_{k-1}$  και φτάνει (πρώτα) στο επίπεδο  $b - b_{k-1}$  κατά τον χρόνο  $\tau_{(1,k)}^+(u - b_{k-1}, 0, b - b_{k-1})$

στην κατάσταση  $(E_\nu, F_\ell)$  [βλ. Σχήμα A'2 του Παραρτήματος]. Συνεπώς έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} M_{1,k}(u) &= \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta\tau_{(1,k)}^+(u-b_{k-1}, 0, b_{k-1})} 1_{[I(\tau_{(1,k)}^+(u-b_{k-1}, 0, b_{k-1}))=\nu, J(\tau_{(1,k)}^+(u-b_{k-1}, 0, b_{k-1}))=\ell]} \right) \\ &= B_{ij, \nu \ell, (1,k)}(u-b_{k-1}, b-b_{k-1}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο (b) [βλ. Σχήμα A'3-A'6 του Παραρτήματος] είναι ισοδύναμο με αυτό της διαδικασίας πλεονάσματος  $U_{(1,k)}(t)$  κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής ενός επιπέδου, στην οποία η διαδικασία  $U_{(1,k)}(t)$  ξεκινάει από την αρχική κατάσταση  $(E_i, F_j)$  και με αρχικό κεφάλαιο  $u-b_{k-1}$ , στη συνέχεια η εμφάνιση μιας αποζημίωσης (από την πρώτη ή δεύτερη κλάση) προκαλεί χρεοκοπία και η διαδικασία πλεονάσματος συνεχίζει με ένα νέο αρχικό κεφάλαιο για να φτάσει το επίπεδο  $b-b_{k-1}$  στην κατάσταση  $(E_\nu, F_\ell)$ . Σημειώνουμε ότι κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας το έλλειμμα, για την διαδικασία πλεονάσματος  $U_{(1,k)}(t)$ , είναι  $|U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|$ . Αυτό, όμως, είναι ισοδύναμο με την περίπτωση όπου η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  πέφτει κάτω από το επίπεδο  $b_{k-1}$  και στη συνέχεια αυξάνεται με νέο αρχικό κεφάλαιο το  $b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|$ . Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_{2,k}(u) &= \mathbb{E}_{ij} \left\{ \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})} B_{k_1 k_2, \nu \ell, k}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|) \right. \\ &\quad \left. \times 1_{[I(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_1, J(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_2]} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \sum_{k_3=1}^n \sum_{k_4=1}^m B_{ij, k_3 k_4, (1,k)}(u-b_{k-1}, b-b_{k-1}) e^{-\delta\tau_{(1,k)}(b-b_{k-1})} \right. \\ &\quad \left. B_{k_1 k_2, \nu \ell, k}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b) 1_{[I(\tau_{(1,k)}(b-b_{k-1}))=k_1, J(\tau_{(1,k)}(b-b_{k-1}))=k_2]} \right. \\ &\quad \left. (I(\tau_{(1,k)}^+(u-b_{k-1}, 0, b-b_{k-1})), J(I(\tau_{(1,k)}^+(u-b_{k-1}, 0, b-b_{k-1}))) = (k_3, k_4)) \right\} \\ &= G_{ij, \nu \ell, k}(u-b_{k-1}) - \sum_{k_3=1}^n \sum_{k_4=1}^m B_{ij, k_3 k_4, (1,k)}(u-b_{k-1}, b-b_{k-1}) G_{k_3 k_4, \nu \ell, k}(b-b_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

όπου με τον τελευταίο όρο (correction term) αφαιρούμε όλες εκείνες τις μεταβάσεις όπου η διαδικασία πλεονάσματος  $U_{(1,k)}(t)$  φτάνει το επίπεδο  $b-b_{k-1}$  πριν τη χρεοκοπία. Ισοδύναμα οι όροι αυτοί μπορούν να εκφραστούν μέσω του ενδεχομένου ότι η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$  φτάνει το επίπεδο  $b$  πριν πέσει κάτω του επιπέδου  $b_{k-1}$ , και έχουν ήδη υπολογισθεί στην εξίσωση (4.44).

Τότε, από τις εξισώσεις (4.43)-(4.45) έχουμε ότι

$$M_{1,k}(u) + M_{2,k}(u) = B_{ij,\nu\ell,(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1}) + G_{ij,\nu\ell,k}(u - b_{k-1}) \\ - \sum_{k_3=1}^n \sum_{k_4=1}^m B_{ij,k_3k_4,(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1}) G_{k_3k_4,\nu\ell,k}(b - b_{k-1}).$$

Ισοδύναμα η παραπάνω σχέση γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{B}_k(u, b) = \mathbf{B}_{(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1}) + \mathbf{G}_k(u - b_{k-1}) - \mathbf{B}_{(1,k)}(u - b_{k-1}, b - b_{k-1}) \mathbf{G}_k(b - b_{k-1}).$$

Η παραπάνω σχέση ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Τέλος, εκτός από το Λήμμα 4.1 για τον υπολογισμό του αναδρομικού αλγορίθμου με βάση τα επίπεδα της μερισματικής στρατηγικής για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu και των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε και την ποσότητα  $\mathbf{B}_k(0, b)$  (ο λόγος υπολογισμού του πίνακα  $\mathbf{B}_k(0, b)$  θα φανεί καθαρά στις επόμενες υποενότητες όπου βρίσκουμε τον ζητούμενο αλγόριθμο). Επομένως, το υπόλοιπο μέρος αυτής της υποενότητας αφιερώνεται στον να δείξουμε πως υπολογίζεται ο πίνακας  $\mathbf{B}_k(0, b)$ .

Για αυτό τον σκοπό θεωρούμε την τ.μ.

$$H_{ij,\nu\ell,(1,k)}(u) = e^{-\delta\tau_{(1,k)}(u)} 1_{[I(\tau_{(1,k)}(u))=\nu, J=\tau_{(1,k)}(u)=\ell]} | (I(0), J(0)) = (i, j), \quad (4.46)$$

και τον αντίστοιχο πίνακα  $\mathbf{H}_{(1,k)}(u) = (\mathbf{H}_{ij,(1,k)}(u))_{i,j=1}^m$ , όπου οι υποπίνακες  $\mathbf{H}_{ij,(1,k)}(u)$  είναι της μορφής  $\mathbf{H}_{ij,(1,k)}(u) = (H_{i_1i_2j,(1,k)}(u))_{i_1,i_2=1}^n$ . Τότε, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι οι συναρτήσεις  $G_{ij,\nu\ell,k}(u)$  που ορίστηκαν στο Λήμμα 4.1 γράφονται ισοδύναμα ως

$$G_{ij,\nu\ell,k}(u) = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m H_{ij,k_1k_2,(1,k)}(u) B_{k_1k_2,\nu\ell,k}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b) \right\} \\ = \mathbb{E} \left\{ \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u) \mathbf{B}_k(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b) \right)_{ij,\nu\ell} \right\}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{G}_k(u) = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{H}_{(1,k)}(u) \mathbf{B}_k(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b) \right\}. \quad (4.47)$$

Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$P_{ij,\nu\ell,(1,k)}(u) = \mathbb{E}_{ij} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta\tau_{(1,k)}(u)} B_{k_1k_2,\nu\ell,k-1}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b_{k-1}) \right)$$



$$\times 1_{\{U(\tau_{(1,k)}(u))=k_1, J=(\tau_{(1,k)}(u))=k_2\}},$$

και τον αντίστοιχο πίνακα  $\mathbf{P}_k(u) = (\mathbf{P}_{ij,k}(u))_{i,j=1}^m$ , όπου οι υποπίνακες  $\mathbf{P}_{ij,k}(u)$  είναι της μορφής  $\mathbf{P}_{ij,k}(u) = (P_{i_1 i_2 j, k}(u))_{i_1, i_2=1}^n$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική ακολουθία όπως και στην εξίσωση (4.47) έχουμε ότι

$$\mathbf{P}_k(u) = \mathbb{E}\left\{\mathbf{H}_{(1,k)}(u)\mathbf{B}_{k-1}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b_{k-1})\right\}. \quad (4.48)$$

Τώρα, στηριζόμενοι στους παραπάνω ορισμούς και χρησιμοποιώντας ανάλογη μεθοδολογία με αυτήν των Albrecher και Hartinger (2007) μπορούμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο πίνακα  $\mathbf{B}_k(0, b)$  ως εξής: θέτοντας  $u = 0$  στο (ii) του Λήμματος 4.1 για  $b > b_{k-1}$  παίρνουμε ότι

$$\mathbf{B}_k(0, b) = \mathbf{B}_{k-1}(0, b_{k-1})\mathbf{B}_k(b_{k-1}, b), \quad b > b_{k-1},$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{B}_k(b_{k-1}, b) = \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\mathbf{B}_k(0, b), \quad b > b_{k-1}. \quad (4.49)$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την εξίσωση (ii) του Λήμματος 4.1 για  $b > b_{k-1}$  στην εξίσωση (4.47) και χρησιμοποιώντας την εξισώσεις (4.48) και (4.49) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_k(u) &= \mathbb{E}\left\{\mathbf{H}_{(1,k)}(u)\mathbf{B}_{k-1}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b_{k-1})\mathbf{B}_k(b_{k-1}, b)\right\} \\ &\stackrel{(4.48)}{=} \mathbf{P}_k(u)\mathbf{B}_k(b_{k-1}, b) \stackrel{(4.49)}{=} \mathbf{P}_k(u)\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\mathbf{B}_k(0, b). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Τέλος, θέτοντας  $u = b_{k-1}$  στην εξίσωση (iii) του Λήμματος 4.1 και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.50) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(b_{k-1}, b) &= \mathbf{B}_{(1,k)}(0, b - b_{k-1}) + \mathbf{G}_k(0) - \mathbf{B}_{(1,k)}(0, b - b_{k-1})\mathbf{G}_k(b - b_{k-1}) \\ &= \mathbf{B}_{(1,k)}(0, b - b_{k-1}) + \mathbf{P}_k(0)\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\mathbf{B}_k(0, b) \\ &\quad - \mathbf{B}_{(1,k)}(0, b - b_{k-1})\mathbf{P}_k(b - b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\mathbf{B}_k(0, b), \end{aligned}$$

απ' όπου μπορούμε να λύσουμε ως προς τον πίνακα  $\mathbf{B}_k(0, b)$ .

#### 4.4.2 Αναδρομικός υπολογισμός των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Σε αυτή την υποενότητα δείχνουμε πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα της Υποενότητας 4.4.1 προκειμένου να υπολογισθούν οι αναμενόμενες παρούσες αξίες των σωρευτικών μερισμάτων  $\bar{V}_{k,\ell}(u, b)$  στο  $k$ -επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής.

Για  $0 \leq u < b_{k-1}$  δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα η διαδικασία πλεονάσματος να

φτάσει το επίπεδο  $b_{k-1}$  ή να προκληθεί χρεοκοπία από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V_{ij,k,\ell}(u, b) &= \mathbb{E}_{ij} \left( \int_0^{\tau_k(u)} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \right) \\ &= \mathbb{E}_{ij} \left( \int_0^{\tau_k^+(u, 0, b_{k-1})} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \right) + \mathbb{E}_{ij} \left( \int_{\tau_k^+(u, 0, b_{k-1})}^{\tau_k(u)} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \right) \\ &= I_{k,\ell,1} + I_{k,\ell,2}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

όπου ο δεύτερος όρος της παραπάνω εξίσωσης είναι μη-μηδενικός μόνο στην περίπτωση όπου  $\tau_k^+(u, 0, b_{k-1}) = \tau_k^+(u, 0, b_{k-1})$ . Αυτός σημαίνει ότι η διαδικασία φτάνει ή ξεπερνάει το επίπεδο  $b_{k-1}$  στην κατάσταση  $(E_{k_1}, F_{k_2})$  και στη συνέχεια οι καταβολές των μερισμάτων είναι  $V_{k_1, k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b)$ . Συνεπώς (χρησιμοποιώντας το γεγονός  $\tau_k^+(u, 0, b_{k-1}) = \tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})$ ) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{k,\ell,2} &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta \tau_k^+(u, 0, b_{k-1})} 1_{[I(\tau_k^+(u, 0, b_{k-1}))=k_1, J(\tau_k^+(u, 0, b_{k-1}))=k_2]} \right) V_{k_1, k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta \tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})} 1_{[I(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1}))=k_1, J(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1}))=k_2]} \right) V_{k_1, k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m B_{ij, k_1, k_2, k-1}(u, b_{k-1}) V_{k_1, k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ακόμη, ο όρος  $I_{k,\ell,1}$  αντιστοιχεί στα μερίσματα όταν η διαδικασία φτάσει στο επίπεδο  $b_{k-1}$  πριν τη χρεοκοπία. Τώρα, όμοια με τη μεθοδολογία της προηγούμενης υποενότητας, το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε τον χρόνο διακοπής  $\tau_k^+(u, 0, b_{k-1}) = \tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})$  με τον χρόνο διακοπής  $\tau_{k-1}(u)$ , και στη συνέχεια να αφαιρέσουμε όλα τα μερίσματα τα οποία καταβάλλονται μετά από το παραπάνω ενδεχόμενο (δηλ. για όλες τις μεταβάσεις κατά τις οποίες η διαδικασία πλεονάσματος ξεπερνάει το επίπεδο  $b_{k-1}$ ). Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{k,\ell,1} &= \mathbb{E}_{ij} \left( \int_0^{\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \right) \\ &= \mathbb{E}_{ij} \left( \int_0^{\tau_{k-1}(u)} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \right) - \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m \mathbb{E}_{ij} \left( e^{-\delta \tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})} 1_{[I(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1}))=k_1]} \right. \\ &\quad \left. \times 1_{[J(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1}))=k_2]} \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left( \int_{\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})}^{\tau_{k-1}(b_{k-1})} e^{-\delta t} dD(t) 1_{(J=\ell)} \mid (I(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1})), J(\tau_{k-1}^+(u, 0, b_{k-1}))) = (k_1, k_2) \right) \end{aligned}$$

$$= V_{ij,k-1,\ell}(u, b) - \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m B_{ij,k_1 k_2, k-1}(u, b_{k-1}) V_{k_1 k_2, k-1, \ell}(b_{k-1}, b). \quad (4.53)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.51)-(4.53) παίρνουμε άμεσα ότι

$$V_{ij,k,\ell}(u, b) = V_{ij,k-1,\ell}(u, b) + \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m B_{ij,k_1 k_2, k-1}(u, b_{k-1}) \left( V_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b) - V_{k_1 k_2, k-1, \ell}(b_{k-1}, b) \right),$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πίνακων έχουμε

$$\bar{V}_{k,\ell}(u, b) = \bar{V}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \left( \bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) \right). \quad (4.54)$$

Επιπλέον, θέτοντας  $u = 0$  στην παραπάνω εξίσωση και λύνοντας ως προς τον όρο  $\bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b)$  παίρνουμε ότι

$$\bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) = \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{V}_{k,\ell}(0, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(0, b) \right),$$

απ' όπου αντικαθιστώντας την ποσότητα  $\bar{V}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b)$  της παραπάνω εξίσωσης, στην εξίσωση (4.54) έχουμε για  $u < b_{k-1}$  ότι

$$\bar{V}_{k,\ell}(u, b) = \bar{V}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{V}_{k,\ell}(0, b) - \bar{V}_{k-1,\ell}(0, b) \right), \quad u < b_{k-1}. \quad (4.55)$$

Για  $u \geq b_{k-1}$ , χρησιμοποιούμε όμοια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης του Λήμματος 4.1, προκειμένου να συνδέσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες στο μοντέλο με  $k$ -επίπεδα με το μοντέλο με ένα επίπεδο με παράμετρο  $c_k$ . Έτσι, δεσμεύοντας ως προς τα ενδεχόμενα η διαδικασία πλεονάσματος να μην πέσει κάτω του επιπέδου  $b_{k-1}$  ή να πέσει κάτω του επιπέδου  $b_{k-1}$ , έχουμε ότι

$$V_{ij,k,\ell}(u, b) = V_{ij,(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) + \mathbb{E}_{ij} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta \tau_{(1,k)}(u - b_{k-1})} \mathbf{1}_{[J(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1})) = k_1]} \right. \\ \left. \times \mathbf{1}_{[J(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1})) = k_2]} V_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b) \right),$$

απ' όπου χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις  $H_{ij,\nu,\ell,(1,k)}(u)$  που ορίστηκαν στη σχέση (4.46), έχουμε ότι

$$V_{ij,k,\ell}(u, b) = V_{ij,(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) + \mathbb{E} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m H_{ij,k_1 k_2, (1,k)}(u - b_{k-1}) \right. \\ \left. \times V_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b) \right).$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση σε μορφή πινάκων και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.55), καθώς επίσης και τον πίνακα  $\mathbf{P}_k(u)$  που ορίστηκε στη σχέση (4.48), παίρνουμε άμεσα ότι

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b) &= \vec{\mathbf{V}}_{(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) \\
 &\quad + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(u - b_{k-1})\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b)\right) \\
 &= \vec{\mathbf{V}}_{(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) \\
 &\quad + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(u - b_{k-1})\vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b)\right) \\
 &\quad + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(u - b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\right. \\
 &\quad \left. \times [\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)]\right) \\
 &= \vec{\mathbf{V}}_{(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) \\
 &\quad + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(u - b_{k-1})\vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b)\right) \\
 &\quad + \mathbf{P}_k(u - b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right), \quad u \geq b_{k-1}. \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας  $u = b_{k-1}$  στις εξισώσεις (4.55) και (4.56), χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης  $\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$  στα σημεία  $u = b_{k-1}$ , λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς  $\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right)$ , και χρησιμοποιώντας το (i) του Λήμματος 4.1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right) &= \left[\mathbf{I}_{nm} - \mathbf{P}_k(0)\right]^{-1} \left\{ \vec{\mathbf{V}}_{(1,k),\ell}(0) \right. \\
 &\quad \left. - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(0)\vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b)\right) \right\}. \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.4.** Για  $k = 2, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων,  $\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b) = \begin{cases} \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right), & \text{για } u \leq b_{k-1}, \\ \vec{\mathbf{V}}_{(1,k),\ell}(u - b_{k-1}) \\ \quad + \mathbb{E}\left(\mathbf{H}_{(1,k)}(u - b_{k-1})\vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u - b_{k-1}))|, b)\right) \\ \quad + \mathbf{P}_k(u - b_{k-1})\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right), & \text{για } u > b_{k-1}, \end{cases}$$

όπου ο κοινός όρος  $\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1})\left(\vec{\mathbf{V}}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(0, b)\right)$  δίνεται από την εξίσωση (4.57).

**Παρατήρηση 4.6.** Σημειώνουμε ότι από την Πρόταση 4.4 έχουμε ότι για κάθε τιμή του αρχικού κεφαλαίου  $u$ , ότι το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{V}}_{k,\ell}(u, b)$  υπολογίζεται σε όρους του διανύσματος  $\bar{\mathbf{V}}_{k-1,\ell}(u, b)$ . Δηλ. μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τη λύση των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων, ανεξάρτητα, σε κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής σε αντίθεση με τη μεθοδολογία της Ενότητας 4.3 όπου χρειάζεται να κάνουμε ενδιάμεσους υπολογισμούς μέχρι το τελευταίο επίπεδο όπου οι ακριβείς τύποι των αναμενόμενων προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων βρίσκονται με βάση την λύση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων (βλ. Παρατήρηση 4.5).

#### 4.4.3 Αναδρομικός υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu ανά επίπεδο της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Σε αυτή την υποενότητα δείχνουμε πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα της Υποενότητας 4.4.1 προκειμένου να υπολογισθούν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_{ij,k,\ell}(u, b)$  στο  $k$ -επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής.

Για  $0 \leq u \leq b_{k-1}$ , χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως στην Υποενότητα 4.4.2 [βλ. εξισώσεις (4.51), (4.52) και (4.53)] έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{ij,k,\ell}(u, b) &= \phi_{ij,k-1,\ell}(u, b) + \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m B_{ij,k_1 k_2, k-1}(u, b_{k-1}) \left( \phi_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1}, b) \right. \\ &\quad \left. - \phi_{k_1 k_2, k-1, \ell}(b_{k-1}, b) \right), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων

$$\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \bar{\phi}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) \right). \quad (4.58)$$

Θέτοντας  $u = 0$  στην παραπάνω εξίσωση και λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς  $\bar{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b)$ , παίρνουμε άμεσα ότι

$$\bar{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1}, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) = \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right),$$

από όπου αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (4.58) έχουμε ότι

$$\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \bar{\phi}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right), \quad u \leq b_{k-1}. \quad (4.59)$$

Για  $u \geq b_{k-1}$ , διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η χρεοκοπία (που προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση  $\ell = 1, 2$ ) εμφανίζεται από το επίπεδο  $k$  ή αν η διαδικασία πλεονάσματος πρώτα μειώνεται φτάνοντας κάποιο χαμηλότερο επίπεδο και

από εκεί εμφανίζεται η χρεοκοπία. Θεωρώντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \phi_{ij,k,\ell}(u, b) &= \mathbb{E}_{ij} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta \tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})} \phi_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b) \right. \\
 &\quad \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_1, J(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_2, U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) \leq b_{k-1}]}) \\
 &\quad + \mathbb{E}_{ij} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m e^{-\delta \tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})} w(b_{k-1} + |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, \right. \\
 &\quad \left. b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|) \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_1, J(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))=k_2]} \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) > b_{k-1}, J=\ell]} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m H_{ij, k_1 k_2, (1,k)}(u-b_{k-1}) \phi_{k_1 k_2, k, \ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) \leq b_{k-1}]}) \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left( \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^m H_{ij, k_1 k_2, (1,k)}(u-b_{k-1}) w(b_{k-1} + |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, \right. \\
 &\quad \left. b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|) \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) > b_{k-1}, J=\ell]} \right),
 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων

$$\begin{aligned}
 \vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) &= \mathbb{E} \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u-b_{k-1}) \vec{\phi}_{k,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) \leq b_{k-1}]}) \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u-b_{k-1}) \vec{e}_{nm} w(b_{k-1} + |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, \right. \\
 &\quad \left. b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|) \mathbb{1}_{[J=\ell]} \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) > b_{k-1}]} \right).
 \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.59) για την περίπτωση όπου  $u \leq b_{k-1}$  η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}
 \vec{\phi}_{k,\ell}(u, b) &= \mathbb{E} \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u-b_{k-1}) \vec{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) \leq b_{k-1}]}) \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u-b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, b_{k-1}) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) \leq b_{k-1}]} \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \vec{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \vec{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right) \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left( \mathbf{H}_{(1,k)}(u-b_{k-1}) \vec{e}_{nm} w(b_{k-1} + |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|, \right. \\
 &\quad \left. b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1}))|) \mathbb{1}_{[J=\ell]} \mathbb{1}_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) > b_{k-1}]} \right). \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η δείκτρια συνάρτηση  $1_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u-b_{k-1})) > b_{k-1}]}$  που εμφανίζεται στον δεύτερο όρο της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να παραληφθεί διότι από το (i) του Λήμματος 4.1 εάν η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται ο προαναφερόμενος όρος είναι μηδέν.

Επιπλέον, θεωρώντας το διάνυσμα

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{k,\ell}(u) = & \mathbb{E} \left\{ \mathbf{H}_{(1,k)}(u) \left[ \bar{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b) 1_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u)) \leq b_{k-1}]} \right. \right. \\ & + \bar{c}_{nm} w(b_{k-1} + |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|, b_{k-1} - |U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u))|) \\ & \left. \left. \times 1_{[J=\ell]} 1_{[U_{(1,k)}(\tau_{(1,k)}(u)) > b_{k-1}]} \right] \right\}, \end{aligned}$$

και ανακαλώντας τον πίνακα  $\mathbf{P}_k(u)$  που ορίσθηκε στην εξίσωση (4.48), τότε η εξίσωση (4.60) γράφεται ως

$$\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \bar{\mathbf{A}}_{k,\ell}(u - b_{k-1}) + \mathbf{P}_k(u - b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right), \quad u > b_{k-1}. \quad (4.61)$$

Τώρα, αντικαθιστώντας  $u = b_{k-1}$  στις εξισώσεις (4.59) και (4.61), χρησιμοποιώντας την συνέχεια του διανύσματος  $\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  στα σημεία  $u = b_{k-1}$ , λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς  $\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right)$ , και χρησιμοποιώντας το (i) του Λήμματος 4.1, έχουμε ότι

$$\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right) = \left[ \mathbf{I}_{nm} - \mathbf{P}_k(0) \right]^{-1} \left( \bar{\mathbf{A}}_{k,\ell}(0) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(b_{k-1}, b) \right). \quad (4.62)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.5.** Για  $k = 1, \dots, \nu + 1$ ,  $\ell = 1, 2$ , το διάνυσμα των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων  $\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b) = \begin{cases} \bar{\phi}_{k-1,\ell}(u, b) + \mathbf{B}_{k-1}(u, b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right), & \text{για } u \leq b_{k-1}, \\ \bar{\mathbf{A}}_{k,\ell}(u - b_{k-1}) + \mathbf{P}_k(u - b_{k-1}) \mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right), & \text{για } u > b_{k-1}, \end{cases}$$

όπου ο κοινός όρος  $\mathbf{B}_{k-1}^{-1}(0, b_{k-1}) \left( \bar{\phi}_{k,\ell}(0, b) - \bar{\phi}_{k-1,\ell}(0, b) \right)$  δίνεται από τη σχέση (4.62).

**Παρατήρηση 4.7.** Όμοια με την Παρατήρηση 4.6, σημειώνουμε ότι η Πρόταση 4.5 έχουμε ότι για κάθε τιμή του αρχικού κεφαλαίου  $u$ , ότι το διάνυσμα  $\bar{\phi}_{k,\ell}(u, b)$  υπολογίζεται σε όρους του διανύσματος  $\bar{\phi}_{k-1,\ell}(u, b)$ . Δηλ. μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τη λύση των συναρτήσεων Gerber-Shiu, ανεξάρτητα, σε κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής σε αντίθεση με τη μεθοδολογία της Ενότητας 4.2 όπου χρειάζεται να κάνουμε ενδιάμεσους

υπολογισμούς μέχρι το τελευταίο επίπεδο όπου οι ακριβείς τύποι των συναρτήσεων Gerber-Shiu βρίσκονται με βάση την λύση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων (βλ. Παρατήρηση 4.3).



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ MARKOV-MODULATED ERLANG ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το μοντέλο κινδύνου Markov-modulated Poisson αποτέλεσε, τα τελευταία χρόνια, αντικείμενο μελέτης για πολλούς συγγραφείς. Κύριο χαρακτηριστικό του προαναφερόμενου μοντέλου είναι η μεταβλητότητα (εξάρτηση) τόσο του αριθμού των αποζημιώσεων (που εμφανίζονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson), όσο και των μεγεθών των ζημιών, τα οποία μεταβάλλονται σύμφωνα με μια (προεπιλεγμένη) Markovιανή διαδικασία. Για τα κυριότερα αποτελέσματα και για την πλήρη βιβλιογραφία σχετικά με το μοντέλο Markov-modulated Poisson παραπέμπουμε στην Ενότητα 1.5 της Εισαγωγής. Αξίζει να σημειωθεί ότι χαρακτηριστικό παράδειγμα του προαναφερόμενου μοντέλου είναι τα φυσικά φαινόμενα El Nino, La Nina και Kobe, ενώ στην αναλογιστική βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει πλήθος άλλων παραδειγμάτων σε όρους οικονομικο-πολιτικών συνθηκών, γεωγραφικών μεταβολών ή ακόμη και γενετικών καταστάσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύουμε το μοντέλο Markov-modulated Poisson. Έτσι, ενώ σε κάθε κατάσταση της Markovιανής αλυσίδας, στο προαναφερόμενο μοντέλο, υποθέτουμε ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων, σε κάθε κατάσταση της Markovιανής διαδικασίας, εμφανίζεται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, στη γενίκευση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι σε κάθε κατάσταση της Markovιανής αλυσίδας ο αριθμός των ζημιών μοντελοποιείται σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων ακολουθούν την Erlang κατανομή. Το μοντέλο που οποίο προκύπτει από αυτή τη γενίκευση θα το ονομάζουμε

Markov-modulated Erlang και συνδέεται στενά με το  $E_K/G/1$  σύστημα της θεωρίας ουρών.

Η δομή του κεφαλαίου αυτού συνοψίζεται ως εξής: Στην Ενότητα 5.1 δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή, τις υποθέσεις του μοντέλου και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην Ενότητα 5.2, εισάγουμε τις συναρτήσεις Gerber-Shiu για το Markov-modulated Erlang μοντέλο και δείχνουμε πως ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Η λύση του προαναφερόμενου συστήματος βρίσκεται με βάση τη λύση χαρακτηριστικής εξίσωσης για το μοντέλο μας και με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Τέλος, στην ίδια ενότητα δίνουμε αναλυτικά αποτελέσματα στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Στην Ενότητα 5.3 εισάγουμε το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Στην ίδια ενότητα δείχνουμε πως οι συναρτήσεις Gerber-Shiu, για το μοντέλο κάτω από της μερισματικής στρατηγικής, ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Με βάση αυτές τις οριακές συνθήκες βρίσκουμε αναλυτικές λύσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu κάτω από την παραπάνω τροποποίηση. Τέλος, στην Ενότητα 5.4, προκειμένου να δείξουμε την εφαρμοσιμότητα του μοντέλου μας, θεωρούμε ως ειδική περίπτωση ένα Markov-modulated Erlang μοντέλο με δύο μόνο καταστάσεις. Στην ίδια ενότητα αναλυτικές εκφράσεις και αριθμητικά αποτελέσματα δίνονται για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu σε ένα περιβάλλον χωρίς την ύπαρξη μερισματικής στρατηγικής, καθώς και κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

## 5.1 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ένας χώρος πιθανότητας. Πάνω σ' αυτόν τον χώρο πιθανότητας θεωρούμε ότι  $\{J(t), t \geq 0\}$  είναι μια ομογενής, αναλλοίωτη (irreducible) και επαναληπτική (recurrent) διαδικασία Markov με μετρήσιμο χώρο καταστάσεων  $E = \{1, \dots, m\}$  [βλ. Ορισμούς 1.14 και 1.15]. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η διαδικασία  $\{J(t), t \geq 0\}$  έχει πίνακα τάσης (generator matrix)  $\Lambda = (a_{ij})_{i,j=1}^m$  με  $a_{ii} = -a_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$ ,  $i, j \in E$ . Ακόμη, ορίζουμε  $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$  να είναι η (μοναδική) στάσιμη κατανομή της αλυσίδας  $\{J(t), t \geq 0\}$ , η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις  $\vec{\pi}\Lambda = \vec{0}$  και  $\vec{\pi}\vec{e} = 1$ , όπου  $\vec{e}$  είναι ένα  $m \times 1$  διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1 και  $\vec{0}$  είναι ένα  $1 \times m$  διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με 0.

Όταν η Markovιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $i \in E$ , δηλ.  $J(t) = i$  για κάθε  $t \geq 0$ , τότε υποθέτουμε ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων έχουν σ.κ.  $F_i(x)$ , σ.π.  $f_i(x)$ , μέσο  $\mu_i (< \infty)$  και μετασχηματισμό Laplace  $\hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_i(x) dx$ . Για τα μεγέθη των αποζημιώσεων σε διαφορετικές καταστάσεις της διαδικασίας  $J(t)$  υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Τώρα, προκειμένου να μοντελοποιήσουμε τη διαδικασία πλεονάσματος,  $U(t)$ , για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου αρχικά θεωρούμε  $m$  ανεξάρτητες διαδικασίες

πλεονάσματος,  $\{U^{(i)}(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $i \in E$ , οι οποίες ορίζονται ακολούθως. Όταν η Μαρκοβιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $i \in E$ , δηλ.  $J(s) = i$  για κάθε  $0 \leq s \leq t$ , κάθε μια από τις διαδικασίες πλεονάσματος  $\{U^{(i)}(t)\}$ ,  $i \in E$ , παριστά μια (Sparre Andersen) διαδικασία πλεονάσματος με μηδενικό κεφάλαιο, η οποία ορίζεται ως

$$U^{(i)}(t) = ct - \sum_{k=1}^{N_i(t)} X_k^{(i)}, \quad t \geq 0, i \in E, \quad (5.1)$$

όπου  $c > 0$  παριστά το το ρυθμό είσπραξης του ασφαλιστρού στη μονάδα του χρόνου,  $\{X_k^{(i)}\}_{k \geq 1}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη-αρνητικών τ.μ., που παριστάνουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων και  $\{N_i(t)\}_{t \geq 0}$  μια απαριθμήτρια διαδικασία, που παριστά τον αριθμό των αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των αποζημιώσεων  $N_i(t) = \min\{k : V_1^{(i)} + V_1^{(i)} + \dots + V_k^{(i)} > t\}$  είναι μία ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων  $V_k^{(i)}$ , για  $k \in \mathbb{N}$ .

Τότε, η αρχική διαδικασία πλεονάσματος  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  για το Markov-modulated Erlang μοντέλο ορίζεται ως

$$\begin{aligned} U(t) &= u + \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} dU^{(i)}(s), \\ &= u + c \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} ds - \sum_{i=1}^m \int_0^t 1_{(J(s)=i)} dS_i(s), \end{aligned} \quad (5.2)$$

με  $S_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} X_k^{(i)}$  να είναι οι σωρευτικές αποζημιώσεις στο διάστημα  $[0, t]$ ,  $u \geq 0$  είναι το αρχικό απόθεμα και  $1_{(A)}$  η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου  $A$ .

Στο εξής, θεωρούμε ότι για  $i \in E$  οι  $\{V_k^{(i)}\}_{k \geq 1}$  κατανομονται σύμφωνα με μια Erlang( $n_i, \lambda_i$ ) κατανομή, και συνεπώς κάθε μία τ.μ.  $V_k^{(i)}$  είναι συνέλιξη  $n_i$  ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων τ.μ.  $T_{r_i, k}^{(i)}$  με παράμετρο  $\lambda_i$ , για  $r_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i \in E$  και  $k \in \mathbb{N}$ , δηλ.  $V_k^{(i)} = \sum_{r_i=1}^{n_i} T_{r_i, k}^{(i)}$ . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου  $n_i = 1$  για κάθε  $i \in E$ , τότε η  $V_k^{(i)}$  είναι μία εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_i$  και συνεπώς η διαδικασία πλεονάσματος (5.2) ανάγεται στη διαδικασία πλεονάσματος του μοντέλου Markov-modulated Poisson. Επίσης, σημειώνουμε ότι όταν  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = K$  το μοντέλο Markov-modulated Erlang σχετίζεται άμεσα με το σύστημα  $E_K/G/1$  της θεωρίας ουρών [βλ. Zhu και Prabhu (1991)].

Τέλος, για την επάρκεια των ασφαλιστρού υποθέτουμε ότι ισχύει μια συνθήκη για το ρυθμό είσπραξης των ασφαλιστρού, γνωστή και ως περιθώριο ασφαλείας. Για τη διαδικασία

πλεονάσματος της εξίσωσης (5.2) η προαναφερόμενη συνθήκη δίνεται από τη σχέση

$$c > \sum_{i=1}^m \pi_i \frac{\mu_i \lambda_i}{n_i}. \quad (5.3)$$

## 5.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο Markov-modulated Erlang και δείχνουμε πώς μπορεί να υπολογισθεί. Σημειώνουμε ότι ο τρόπος υπολογισμού των συναρτήσεων Gerber-Shiu γίνεται, όπως θα δούμε και παρακάτω, μέσω των μετασχηματισμών Laplace και την αντιστροφή αυτών όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Εστω  $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$  να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  να είναι η συνάρτηση ποινής. Για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$\phi(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u), \quad u \geq 0,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο (5.1)-(5.2), δοθέντος του αρχικού κεφαλαίου  $u$ , με  $U(T-)$  το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U(T)|$  το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και  $\delta$  να παριστά την ένταση ανατοκισμού.

Επιπλέον, θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot | J(0) = i)$  και  $\mathbb{E}_i$  να είναι η μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i$ . Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής δοθέντος του αρχικού αποθεματικού  $u$  και δοθέντος ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $i \in E$ , δίνεται από τη σχέση

$$\phi_i(u) = \mathbb{E}_i \left( e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u \right), \quad u \geq 0, i \in E. \quad (5.4)$$

Επίσης, όμοια με τους Li και Lu (2008), για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε

$$\phi_{i,j}(u) = \mathbb{E}_i \left( e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty, J(T)=j)} | U(0) = u \right), \quad u \geq 0, i, j \in E, \quad (5.5)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης στην κατάσταση  $j \in E$ , δοθέντος του αρχικού κεφαλαίου  $u$  και την αρχική κατάσταση  $i \in E$ .

Βασιζόμενοι στους παραπάνω ορισμούς των συναρτήσεων Gerber-Shiu, είναι φανερό ότι

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^m \pi_i \phi_i(u) \quad \text{και} \quad \phi_i(u) = \sum_{j=1}^m \phi_{i,j}(u), \quad u \geq 0, i \in E.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_{i,j}(u)$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Γ' αυτό το σκοπό εισάγουμε τη βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος  $U_{\nu_i}(t)$  για  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i \in E$ , η οποία ορίζεται ως εξής. Έστω  $V_{\nu_i,k}^{(i)} = \sum_{r_i=\nu_i}^{n_i} T_{r_i,k}^{(i)}$  για  $i \in E$ ,  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $k \in \mathbb{N}$  και  $N_{i,\nu_i}(t) = \min\{k : V_{\nu_i,1}^{(i)} + V_{\nu_i,2}^{(i)} + \dots + V_{\nu_i,k}^{(i)} > t\}$  να είναι μία τροποποιημένη απαριθμήτρια διαδικασία της  $N_i(t)$ . Επιπλέον, με βάση την απαριθμήτρια διαδικασία  $N_{i,\nu_i}(t)$  θεωρούμε τη βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος  $U_{\nu_i}^{(i)}(t)$  οφ  $U^{(i)}(t)$  με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, η οποία δίνεται από τη σχέση:  $U_{\nu_i}^{(i)}(t) = ct - \sum_{k=1}^{N_{i,\nu_i}(t)} X_k^{(i)}$ ,  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i \in E$ . Με βάση τις παραπάνω διαδικασίες η αρχική βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος  $U_{\nu_i}(t)$  ορίζεται ως

$$U_{\nu_i}(t) = u + \int_0^t \mathbf{1}_{(J(s)=i)} dU_{\nu_i}^{(i)}(s) + \sum_{r=1, r \neq i}^m \int_0^t \mathbf{1}_{(J(s)=r)} dU^{(r)}(s). \quad (5.6)$$

Επιπλέον, για την παραπάνω βοηθητική διαδικασία πλεονάσματος θεωρούμε [όμοια με τις εξισώσεις (5.4) και (5.5)] τις αντίστοιχες βοηθητικές αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_{i,\nu_i}(u)$  και  $\phi_{i,j,\nu_i}(u)$ , για  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i, j \in E$ . Τότε, με όλα τα άλλα να παραμένουν ίδια όπως στη διαδικασία πλεονάσματος της σχέσης (5.2), η μόνη αλλαγή είναι να αντικαταστήσουμε την απαριθμήτρια διαδικασία  $N_i(t)$  με την απαριθμήτρια διαδικασία  $N_{i,\nu_i}(t)$ , απ' όπου έπεται η αντικατάσταση της διαδικασίας  $U^{(i)}(t)$  με τη διαδικασία  $U_{\nu_i}^{(i)}(t)$ . Κάτω από τις παραπάνω τροποποιήσεις έχουμε ότι  $V_{1,k}^{(i)} = V_k^{(i)}$ ,  $N_{i,1}(t) = N_i(t)$ ,  $U_1^{(i)}(t) = U^{(i)}(t)$ ,  $U_1(t) = U(t)$  και συνεπώς  $\phi_{i,1}(u) = \phi_i(u)$ ,  $\phi_{i,j,1}(u) = \phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j \in E$ .

Όταν η Μαρκοβιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $i \in E$ , δηλ.  $J(t) = i$ ,  $i \in E$ , τότε στην παραπάνω διαδικασία κάθε ενδιάμεσος χρόνος  $V_k^{(i)}$ ,  $i \in E$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , που κατανέμεται σύμφωνα με μια Erlang( $n_i, \lambda_i$ ) κατανομή μπορεί να γραφεί ως άθροισμα  $n_i$  ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_i$ , όπου κάθε μία προκαλεί την εμφάνιση μίας υπο-ζημιάς (sub-claim) μεγέθους 0, ενώ η  $n_i$  εκθετική τ.μ. προκαλεί την εμφάνιση μιας αποζημίωσης με σ.χ.  $F_i$ . Έτσι, όταν  $J(t) = i$ ,  $i \in E$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η παραπάνω διαδικασία πλεονάσματος «ρυθμίζεται» από μία (εξωτερική) Μαρκοβιανή διαδικασία (regulated by an external piecewise deterministic Markov chain) με καταστάσεις  $1, 2, \dots, n_i$ . Όταν η Μαρκοβιανή διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 1, στο χρόνο 0, κάθε εμφάνιση μιας υπο-ζημιάς προκαλεί μια μετάβαση από την κατάσταση  $\nu_i$  στην κατάσταση  $\nu_i + 1$  με ρυθμό μετάβασης (transition rate) ο οποίος αντιστοιχεί σε μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_i$ , για  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i - 1$ , ενώ στο χρόνο εμφάνισης της (πραγματικής) ζημιάς προκαλείται μια μετάβαση από την κατάσταση  $n_i$  στην κατάσταση 1, με ρυθμό μετάβασης που αντιστοιχεί σε μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda_i$ . Συνεπώς, όποτε η Μαρκοβιανή διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση  $\nu_i$ , η απαριθμήτρια διαδικασία για το μοντέλο μας είναι  $N_{i,\nu_i}(t)$ .

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι αναμενόμενες προεξοφλημένες

συναρτήσεις ποινής  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j \in E$ .

**Θεώρημα 5.1.** Για  $u \geq 0$ , και  $i, j \in E$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_{i,j}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\left(\lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}\right) \phi_{i,j}(u) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{\ell_i=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \left(\lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}\right)^{\ell_i} \phi_{k,j}(u) - \lambda_i^{n_i} \int_0^u \phi_{i,j}(u-x) f_i(x) dx - \lambda_i^{n_i} w_i(u) 1_{(i=j)} = 0, \quad (5.7)$$

με

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f_i(y) dy = \int_0^\infty w(u, y) f_i(u+y) dy. \quad (5.8)$$

*Απόδειξη.* Αρχικά αποδεικνύουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι βοηθητικές συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j,\nu_i}(u)$  για  $\nu_i = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i, j \in E$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\phi_{i,j}(u) = \phi_{i,j,1}(u)$ ,  $i, j \in E$  μπορούμε εύκολα να πάρουμε το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j \in E$ .

Θεωρώντας το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  και χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με τους Yang και Ng (2006), για  $\nu_i = 1, \dots, n_i - 1$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,\nu_i}(u) &= (1 - \lambda_i dt)(1 - a_i dt) e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i}(u + cdt) + \lambda_i dt (1 - a_i dt) e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i+1}(u + cdt) \\ &\quad + (1 - \lambda_i dt) e^{-\delta dt} \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} dt \phi_{k,j,1}(u + cdt) + o(dt), \end{aligned}$$

όπου οι παραπάνω τέσσερις όροι αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα

- (i) στο απειροστό διάστημα  $[0, dt]$  δεν εμφανίζεται κάποια υπο-ζημιά (μεγέθους 0) και η Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε κάποια άλλη κατάσταση,
- (ii) στο απειροστό διάστημα  $[0, dt]$  εμφανίζεται κάποια υπο-ζημιά (μεγέθους 0), αλλά η Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μεταβαίνει σε κάποια κατάσταση,
- (iii) στο απειροστό διάστημα  $[0, dt]$  δεν εμφανίζεται κάποια υπο-ζημιά (μεγέθους 0), αλλά η Μαρκοβιανή αλυσίδα μεταβαίνει σε κάποια κατάσταση,
- (iv) όλα τα άλλα ενδεχόμενα με συνολική πιθανότητα  $o(dt)$ .

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, συγκεντρώνοντας μαζί όλους τους όρους τάξης  $dt$  και διαίρωντας με  $dt$  έχουμε ότι

$$c \frac{\phi_{i,j,\nu}(u + cdt) - \phi_{i,j,\nu}(u)}{cdt} - (\lambda_i + a_i + \delta)\phi_{i,j,\nu}(u + cdt) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu+1}(u + cdt) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j}(u + cdt) + \frac{o(dt)}{dt} = 0.$$

Παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  βρίσκουμε ότι

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta) \right) \phi_{i,j,\nu_i}(u) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu_i+1}(u) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u) = 0, \quad i, j \in E. \quad (5.9)$$

Όμοια για  $\nu_i = n_i$  έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,n_i}(u) &= (1 - \lambda_i dt)(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} \phi_{i,j,n_i}(u + cdt) \\ &+ \lambda_i dt(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} \left( \int_0^{u+cdt} \phi_{i,j,1}(u + cdt - x) f_i(x) dx \right. \\ &+ \left. \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, x - u - cdt) f_i(x) dx 1_{(i=j)} \right) \\ &+ (1 - \lambda_i dt)e^{-\delta dt} \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} dt \phi_{k,j,1}(u + cdt) + o(dt). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, συγκεντρώνοντας μαζί όλους τους όρους τάξης  $dt$  και διαίρωντας με  $dt$ , η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\begin{aligned} c \frac{\phi_{i,j,n_i}(u + cdt) - \phi_{i,j,n_i}(u)}{cdt} - (\lambda_i + a_i + \delta)\phi_{i,j,n_i}(u + cdt) \\ + \lambda_i \int_0^{u+cdt} \phi_{i,j}(u + cdt - x) f_i(x) dx + \lambda_i \int_{u+cdt}^{\infty} w(u + cdt, x - u - cdt) f_i(x) dx 1_{(i=j)} \\ + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j}(u + cdt) + \frac{o(dt)}{dt} = 0, \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  έχουμε ότι

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta) \right) \phi_{i,j,n_i}(u) + \lambda_i \int_0^u \phi_{i,j,1}(u - x) f_i(x) dx + \lambda_i w_i(u) 1_{(i=j)} + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u) = 0. \quad (5.10)$$

Τώρα, από την εξίσωση (5.9) έχουμε

$$\phi_{i,j,\nu_i+1}(u) = \frac{-c\frac{\partial}{\partial u} + (\lambda_i + a_i + \delta)}{\lambda_i} \phi_{i,j,\nu_i}(u) - \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{a_{ik}}{\lambda_i} \phi_{k,j}(u), \quad \nu_i = 1, \dots, n_i - 1, \quad (5.11)$$

απ' όπου με συνεχείς αντικαταστάσεις για  $\nu_i = 1, \nu_i = 2, \dots$ , και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.10) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,n_i}(u) &= \frac{(-c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_i + a_i + \delta)^{n_i-1}}{\lambda_i^{n_i-1}} \phi_{i,j,1}(u) - \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{a_{ik}}{\lambda_i^{n_i-1}} \sum_{\ell_i=0}^{n_i-2} \lambda_i^{n_i-\ell_i-2} \left( -c\frac{\partial}{\partial u} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i + a_i + \delta \right)^{\ell_i} \phi_{k,j}(u). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση μαζί με την εξίσωση (5.10) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\left( \frac{-c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_i + a_i + \delta}{\lambda_i^{n_i-1}} \right)^{n_i} \phi_{i,j}(u) - \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{a_{ik}}{\lambda_i^{n_i-1}} \left[ \sum_{\ell=0}^{n_i-2} \lambda_i^{n_i-\ell-2} \left( -c\frac{\partial}{\partial u} + \lambda_i + a_i + \delta \right)^{\ell+1} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i^{n_i-1} \right] \phi_{k,j}(u) - \lambda_i \int_0^u \phi_{i,j}(u-x) f_i(x) dx - \lambda_i w_i(u) 1_{(i=j)} = 0, \end{aligned}$$

απ' όπου πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $\lambda_i^{n_i-1}$  παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

**Παρατήρηση 5.1.** (i) Για  $n_i = 1$  για κάθε  $i \in E$ , είναι εύκολο να δούμε ότι το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του Θεωρήματος 5.1 ανάγεται στην εξίσωση (1.63) του Θεωρήματος 1.22 που είναι το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου.

(ii) Για  $m = 1$ , το μοντέλο Markov-modulated Erlang ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας με Erlang( $n_1, \lambda_1$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων. Εφόσον για  $m = 1$  ισχύει ότι  $\phi(u) = \phi_1(u) = \phi_{1,1}(u)$ , είναι εύκολο να δούμε πως το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (5.7) ανάγεται στην εξίσωση (1.14) του Πορίσματος 1.1.

Η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.7) γίνεται με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace. Έτσι, για  $\Re(s) \geq 0$  και  $i, j \in E$  θεωρούμε  $\hat{\phi}_{i,j}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \times \phi_{i,j}(u) du$ ,  $\hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_i(x) dx$ , και  $\hat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_i(u) du$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $\phi_{ij}(u)$ ,  $f_i(x)$  και  $w_i(u)$ , αντίστοιχα.



Επιπλέον, για  $i \in E$  ορίζουμε τις ακόλουθες βοηθητικές συναρτήσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε ακολούθως

$$\begin{aligned}\gamma_{\delta,i}(s) &= \lambda_i + a_i + \delta - cs, \quad \text{και} \\ b_{i;k,\nu} &= (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \gamma_{\delta,i}^\nu(0) c^{k-\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ακόμη, θεωρώντας ότι  $h^{(k)}(u)$  παριστά την παράγωγο  $k$ -τάξης της συνάρτησης  $h(u)$ , με μετασχηματισμό Laplace  $\widehat{h}(s)$ , είναι ευρέως γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Laplace της  $h^{(k)}(u)$  δίνεται από τη σχέση  $s^k \widehat{h}(s) - \sum_{n=0}^{k-1} s^{k-n-1} h^{(n)}(0)$ .

Τώρα, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην εξίσωση (5.7) και χρησιμοποιώντας από το ανάπτυγμα του Newton ότι  $(a-b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{n-\nu} a^\nu b^{n-\nu}$ , ο μετασχηματισμός Laplace του πρώτου όρου της εξίσωσης (5.7) είναι

$$\begin{aligned}& \sum_{\nu_i=0}^{n_i} (-1)^{n_i-\nu_i} \binom{n_i}{\nu_i} \gamma_{\delta,i}^{\nu_i}(0) c^{n_i-\nu_i} \left( s^{n_i-\nu_i} \widehat{\phi}_{ij}(s) - \sum_{k_i=0}^{n_i-\nu_i-1} s^{n_i-\nu_i-1-k_i} \phi_{i,j}^{(k_i)}(0) \right) \\ &= \gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) \widehat{\phi}_{ij}(s) - \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \sum_{\nu_i=0}^{n_i-k_i-1} b_{i;n_i,\nu_i} s^{n_i-\nu_i-1-k_i} \phi_{i,j}^{(i_1)}(0), \quad i \in E.\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του δεύτερου όρου της εξίσωσης (5.7) δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} (\lambda_i + a_i + \delta - cs)^\ell \widehat{\phi}_{k,j}(s) - \sum_{i_1=0}^{n_i-2} \sum_{\ell=i_1+1}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} \sum_{\nu=0}^{\ell-i_1-1} b_{i;\ell,\nu} s^{\ell-\nu-1-i_1} \phi_{k,j}^{(i_1)}(0).$$

Συνεπώς, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (5.7), και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, βρίσκουμε, για  $i, j \in E$ , ότι

$$\begin{aligned}& \left( \gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s) \right) \widehat{\phi}_{i,j}(s) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{\ell_i=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \gamma_{\delta,i}^{\ell_i}(s) \widehat{\phi}_{k,j}(s) \\ &= \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \sum_{\nu_i=0}^{n_i-k_i-1} b_{i;n_i,\nu_i} s^{n_i-\nu_i-1-k_i} \phi_{i,j}^{(k_i)}(0) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{k_i=0}^{n_i-2} \sum_{\ell_i=k_i+1}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \\ & \times \sum_{\nu_i=0}^{\ell_i-k_i-1} b_{i;\ell_i,\nu_i} s^{\ell_i-\nu_i-1-k_i} \phi_{k,j}^{(k_i)}(0) + \lambda_i^{n_i} \widehat{w}_i(s) 1_{(i=j)}.\end{aligned} \quad (5.12)$$

Τώρα, για κάθε  $i \in E$ , θεωρούμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \nu_{\delta,i}(s) &= \sum_{\ell_i=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \gamma_{\delta,i}^{\ell_i}(s), \\ g_{i;n_i-k_i-1}(s) &= \sum_{\nu_i=0}^{n_i-k_i-1} b_{i;n_i,\nu_i} s^{n_i-\nu_i-k_i-1}, \quad k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad \text{και} \\ h_{i;n_i-k_i-2}(s) &= \sum_{\ell_i=k_i+1}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \sum_{\nu_i=0}^{\ell_i-k_i-1} b_{i;\ell_i,\nu_i} s^{\ell_i-\nu_i-1-k_i}, \quad k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1. \end{aligned}$$

Τότε, η εξίσωση (5.12) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} & \left( \gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s) \right) \widehat{\phi}_{i,j}(s) - \nu_{\delta,i}(s) \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \widehat{\phi}_{k,j}(s) \\ &= \sum_{k_i=0}^{n_i-1} g_{i;n_i-k_i-1}(s) \phi_{i,j}^{(k_i)}(0) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{k_i=0}^{n_i-2} h_{i;n_i-k_i-2}(s) \phi_{k,j}^{(k_i)}(0) + \lambda_i^{n_i} \widehat{w}_i(s) \mathbf{1}_{(i=j)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Σημειώνουμε ότι προς αποφυγή οποιασδήποτε παρανόησης στην εξίσωση (5.13), θεωρούμε ότι  $\sum_a^b = 0$  για κάθε  $b < a$ . Συνεπώς, ισχύει ότι  $g_{i;n_i-k_i-1}(s) = 0$  για  $n_i - k_i - 1 < 0$  καθώς επίσης και  $h_{i;n_i-k_i-2}(s) = 0$  για  $n_i - k_i - 2 < 0$ ,  $i \in E$ .

Επιπλέον, προκειμένου να εκφράσουμε την εξίσωση (5.13) σε μορφή πινάκων, θεωρούμε τους ακόλουθους  $m \times m$  πίνακες:

$$\mathbf{B}_{\delta}(s) = (b_{\delta;ij}(s))_{i,j=1}^m, \quad \text{με } b_{\delta;ij}(s) = \begin{cases} \lambda^{n_i} f_i, & i = j \\ a_{ij} \nu_{\delta,i}(s), & i \neq j \end{cases} \quad i, j \in E,$$

$$\mathbf{\Gamma}_{\delta}(s) = \text{diag}(\gamma_{\delta,1}(s)^{n_1}, \dots, \gamma_{\delta,m}(s)^{n_m}),$$

$$\mathbf{A}_{\delta}(s) = \mathbf{\Gamma}_{\delta}(s) - \mathbf{B}_{\delta}(s)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{\delta,1}^{n_1}(s) - \lambda_1^{n_1} \widehat{f}_1(s) & -a_{12} \nu_{\delta,1}(s) & \cdots & -a_{1m} \nu_{\delta,1}(s) \\ -a_{21} \nu_{\delta,2}(s) & \gamma_{\delta,2}^{n_2}(s) - \lambda_2^{n_2} \widehat{f}_2(s) & \cdots & -a_{2m} \nu_{\delta,2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} \nu_{\delta,m}(s) & -a_{m2} \nu_{\delta,m}(s) & \cdots & \gamma_{\delta,m}^{n_m}(s) - \lambda_m^{n_m} \widehat{f}_m(s) \end{pmatrix},$$

$$\omega(u) = \text{diag}(\omega_1(u), \dots, \omega_m(u)), \quad \text{με } \omega_i(u) = \lambda_i^{n_i} w_i(u), \quad i \in E,$$

$$\widehat{\omega}(s) = \text{diag}(\widehat{\omega}_1(s), \dots, \widehat{\omega}_m(s)), \quad \text{με } \widehat{\omega}_i(s) = \lambda_i^{n_i} \widehat{w}_i(s), \quad i \in E, \quad \text{και}$$

$$\phi(u) = (\phi_{i,j}(u))_{i,j=1}^m, \quad \widehat{\phi}(s) = (\widehat{\phi}_{i,j}(s))_{i,j=1}^m, \quad \phi(k)(0) = (\phi_{i,j}^{(k)}(0) \mathbf{1}_{(k \leq n_i-1)})_{i,j=1}^m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_{\delta}(s) = 0$  καλείται *χαρακτηριστική εξίσωση* για το μοντέλο

(5.2), και η μελέτη της γίνεται αργότερα σε αυτήν την Ενότητα.

Επίσης, για  $k \in \mathbb{N}$ , θεωρούμε  $\Delta_k(s)$  να παριστά τον ακόλουθο  $m \times m$  πίνακα,

$$\Delta_k(s) = \begin{pmatrix} g_{1;n_1-k-1}(s) & -a_{12}h_{1;n_1-k-2}(s) & \cdots & -a_{1m}h_{1;n_1-k-2}(s) \\ -a_{21}h_{2;n_2-k-2}(s) & g_{2;n_2-k-1}(s) & \cdots & -a_{2m}h_{2;n_2-k-2}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1}h_{m;n_m-k-2}(s) & -a_{m2}h_{m;n_m-k-2}(s) & \cdots & g_{m;n_m-k-1}(s) \end{pmatrix},$$

Τότε, με βάση τα παραπάνω μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι η εξίσωση (5.13) γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{A}_\delta(s)\widehat{\phi}(s) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \Delta_k(s)\phi_{(k)}(0) + \widehat{\omega}(s), \quad (5.14)$$

όπου  $\tilde{n} = \max_{1 \leq i \leq m} \{n_i\}$ .

**Παρατήρηση 5.2.** Σημειώνουμε ότι από τον ορισμό του πίνακα  $\phi_{(k)}(0)$ , έπεται ότι  $\phi_{(0)}(0) = \phi(0) = (\phi_{i,j}(0))_{i,j=1}^m$ . Επίσης για  $n_1 = \cdots = n_m = \tilde{n}$ , τότε  $\phi_{(k)}(0) = (\phi_{i,j}^{(k)}(0))_{i,j=1}^m$  για  $k \leq \tilde{n} - 1$ .

Η λύση της εξίσωσης (5.14), προκειμένου να βρούμε τον πίνακα των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής,  $\widehat{\phi}(s)$ , γίνεται με βάση τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ . Επομένως, ακολούθως θα μελετήσουμε την εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ , βρίσκοντας τον αριθμό των ριζών στο θετικό μιγαδικό ημιπέδιο. Οι ρίζες αυτές παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στον προσδιορισμό του πίνακα των αρχικών τιμών  $\phi_{(k)}(0)$ ,  $k = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$ , καθώς επίσης και στην εύρεση ενός αναλυτικού τύπου για τον πίνακα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\phi(u)$ . Γύ αυτούς τους λόγους στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης για  $\delta > 0$  και  $\delta = 0$  ξεχωριστά. Η σπουδαιότητα της περίπτωσης  $\delta = 0$  είναι λόγω του ότι για  $\delta = 0$  (και για ειδικές μορφές της συνάρτησης ποινής) προκύπτουν διάφορα σημαντικά μέτρα κινδύνου όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία κ.α.

**Θεώρημα 5.2.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ . Τότε, για  $\delta > 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n$  ρίζες, έστω  $r_1(\delta), r_2(\delta), \dots, r_n(\delta)$ , στο θετικό ημιπέδιο των μιγαδικών αριθμών, δηλ. με  $\Re(r_i(\delta)) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με τους Albrecher και Boxma (2005) [βλ. επίσης τη μεθοδολογία της απόδειξης της Πρότασης 4.1]. Έστω  $C_\delta$  να παριστά τον κύκλο του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο στα σημεία  $((\delta + \max_{i \in E}(\lambda_i + a_i))/c, 0)$  και ακτίνα  $M_\delta = (\delta + \max_{i \in E}(\lambda_i + a_i))/c$ . Επίσης, έστω  $C_\delta^+$

να είναι μια περιοχή του παραπάνω κύκλου όπου  $\{s : \Re(s) \geq 0, |s - M_\delta| \geq M_\delta\}$ . Ακόμη, για  $0 \leq u \leq 1$  ορίζουμε  $\mathbf{A}_\delta(s, u) = \Gamma_\delta(s) - u\mathbf{B}_\delta(s)$ .

Αρχικά δείχνουμε, γι  $0 \leq u \leq 1$ , ότι

$$\det \mathbf{A}_\delta(s, u) \neq 0, \text{ για } s \in C_\delta^+. \quad (5.15)$$

Για το παραπάνω αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας  $A_\delta(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως (diagonally dominant) για  $0 \leq u \leq 1$ , και αυτό διότι από το Θεώρημα των Levy-Desplanques [βλ. Θεώρημα 1.24] έχουμε ότι κάθε πίνακας που κυριαρχεί διαγωνίως είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς η εξίσωση (5.15) είναι αληθής. Ανακαλώντας τον Ορισμό 1.17, ένας πίνακας  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  κυριαρχεί διαγωνίως αν και μόνον αν  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  για κάθε  $i$ . Επομένως στην περίπτωση του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s, u)$  αρκεί να δείξουμε, για  $0 \leq u \leq 1$ ,  $s \in C_\delta^+$  και  $i \in E$ , ότι

$$|\gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s)| > \sum_{k=1, k \neq i}^m |ua_{ik} \nu_{\delta,i}(s)| = ua_i |\nu_{\delta,i}(s)|.$$

Πράγματι, για  $s \in C_\delta^+$  και  $0 \leq u \leq 1$ , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |\gamma_{\delta,i}(s) - \lambda_i &= |cs - (\lambda_i + \alpha_i + \delta)| - \lambda_i = c \left| s - M_\delta + M_\delta - \frac{\lambda_i + \alpha_i + \delta}{c} \right| - \lambda_i \\ &\geq c \left( |s - M_\delta| - \left| M_\delta - \frac{\lambda_i + \alpha_i + \delta}{c} \right| \right) - \lambda_i \\ &\geq c \left( M_\delta - \left( M_\delta - \frac{\lambda_i + \alpha_i + \delta}{c} \right) \right) - \lambda_i = \alpha_i + \delta > \alpha_i \geq ua_i, \end{aligned}$$

και επειδή για  $\Re(s) \geq 0$ , ισχύει ότι  $|\widehat{f}_i(s)| \leq \widehat{f}_i(\Re(s)) \leq \widehat{f}_i(0) = 1$ , τότε για  $0 \leq u \leq 1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - u\lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s)| &\geq |\gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - u\lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s)| \geq (|\gamma_{\delta,i}(s)|)^{n_i} - \lambda_i^{n_i} \\ &= (|\gamma_{\delta,i}(s)| - \lambda_i) \sum_{\ell_i=0}^{n_i-1} (|\gamma_{\delta,i}(s)|)^{\ell_i} \lambda_i^{n_i-\ell_i-1} \\ &\geq (|\gamma_{\delta,i}(s)| - \lambda_i) |\nu_{\delta,i}(s)| > ua_i |\nu_{\delta,i}(s)|. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω  $f_\delta(u)$  να συμβολίζει τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s, u)$  στο  $C_\delta^+$ . Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $\det \mathbf{A}_\delta(s, u)$  είναι αναλυτική εντός του κύκλου  $C_\delta$ . Συνεπώς ανακαλώντας το Θεώρημα 1.25 έχουμε ότι

$$f_\delta(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_\delta(s, u)}{\det \mathbf{A}_\delta(s, u)} ds.$$

Επιπλέον, παρατηρώντας ότι η  $f_\delta(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[0, 1]$ , που παίρνει ακέραιες τιμές, έχουμε ότι η  $f_\delta(0) = f_\delta(1)$ . Εφόσον η εξίσωση  $\gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) = 0$  έχει μια ρίζα  $\frac{\lambda_i + a_i + \delta}{c}$  με πολλαπλότητα  $n_i$ , έπεται ότι η εξίσωση  $\det \Gamma_\delta(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n_1 + n_2 + \dots + n_m$  ρίζες, και συνεπώς  $f_\delta(0) = n$ . Επίσης λόγω των παραπάνω έχουμε ότι  $f_\delta(1) = n$ , με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  στην περίπτωση όπου  $\delta = 0$ . Γύ αυτό το σκοπό όμοια με την μεθοδολογία όμοια με των Adan και Kulkarni (2003) [βλ. επίσης απόδειξη της Πρότασης 4.1] θεωρούμε ότι για κάποιο  $\varepsilon_0 > 0$  ο μετασχηματισμός Laplace του μεγέθους των αποζημιώσεων στην κατάσταση  $i \in E$ ,  $\widehat{f}_i(s)$ , είναι αναλυτική συνάρτηση ως προς  $s$  με  $\Re(s) > -\varepsilon_0$ .

Έστω  $C_\varepsilon$  να παριστά έναν κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο στα σημεία  $(\max_{i \in E}(a_i + \lambda_i)/c, 0)$  και ακτίνα  $M_\varepsilon = (\varepsilon + \max_{i \in E}(a_i + \lambda_i))/c$  με  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Αρχικά, θα δείξουμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n = \sum_{i=1}^m n_i$  ρίζες εντός του κύκλου  $C_\varepsilon$  για κάθε  $\varepsilon$  (επαρκώς μικρό). Γύ αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε τα ακόλουθα δύο Λήμματα.

**Λήμμα 5.1.** Έστω

$$N(m) = \sum_{k=1}^m \prod_{j=1, j \neq k}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \pi_k \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell [\mu_k \lambda_k^{n_k} - c n_k (\lambda_k + a_k)^{n_k-1} + c a_k \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \ell \lambda_k^{n_k-\ell-1} (\lambda_k + a_k)^{\ell-1}]. \quad (5.16)$$

Τότε, κάτω από τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας της εξίσωσης (5.3), ισχύει ότι  $N(m) < 0$ .

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας ως προς  $y$  την ακόλουθη ταυτότητα

$$(x+y)^\nu - x^\nu = y \sum_{\ell=0}^{\nu-1} x^{\nu-\ell-1} (x+y)^\ell, \quad (5.17)$$

έχουμε ότι

$$\nu(x+y)^{\nu-1} - y \sum_{\ell=1}^{\nu-1} \ell x^{\nu-\ell-1} (x+y)^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} x^{\nu-\ell-1} (x+y)^\ell. \quad (5.18)$$

Τώρα, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση  $\nu = n_k$ ,  $x = \lambda_k$  και  $y = a_k$ , και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που προκύπτει από την προαναφερόμενη αντικατάσταση,

η συνάρτηση  $N(m)$  γράφεται γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} N(m) &= - \sum_{k=1}^m \prod_{j=1, j \neq k}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \pi_k \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell \left( c \sum_{i=0}^{n_k-1} \lambda_k^{n_k-i-1} (\lambda_k + a_k)^i - \mu_k \lambda_k^{n_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \pi_k \mu_k \lambda_k^{n_k} \prod_{j=1, j \neq k}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell - c \prod_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell. \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τη συνθήκη του περιθωρίου ασφαλείας της εξίσωσης (5.3) έχουμε ότι  $c > \sum_{k=1}^m \pi_k \mu_k \lambda_k / n_k$ , και συνεπώς

$$N(m) < \sum_{k=1}^m \pi_k \mu_k \lambda_k \prod_{j=1, j \neq k}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell \left( \lambda_k^{n_k-1} - \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \lambda_k^{n_k-i-1} (\lambda_k + a_k)^i \right). \quad (5.19)$$

Παραγωγίζοντας, ξανά, την ταυτότητα (5.17) ως προς  $x$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.18), ισχύει ότι

$$\sum_{\ell=0}^{\nu-1} x^{\nu-\ell-1} (x+y)^\ell = \nu x^{\nu-1} + y \sum_{\ell=0}^{\nu-2} (\nu-\ell-1) x^{\nu-\ell-2} (x+y)^\ell.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση  $\nu = n_k$ ,  $x = \lambda_k$  και  $y = a_k$ , έχουμε ότι

$$\lambda_k^{n_k-1} - \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \lambda_k^{n_k-i-1} (\lambda_k + a_k)^i = -\frac{a_k}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-2} (n_k-i-1) \lambda_k^{n_k-i-2} (\lambda_k + a_k)^i < 0. \quad (5.20)$$

Από την παραπάνω ανίσωση και την εξίσωση (5.19) είναι φανερό ότι  $N(m) < 0$ . ■

**Λήμμα 5.2.** Για  $0 \leq u \leq 1$  και μικρό  $\varepsilon > 0$ , ισχύει ότι

$$\det \mathbf{A}_0(s, u) \neq 0, \quad s \in C_\varepsilon, \quad (5.21)$$

όπου  $\mathbf{A}_0(s, u) = \Gamma_0(s) - u \mathbf{B}_0(s)$ .

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση ότι  $\Re(s) > -\varepsilon_0$  για κάθε  $s$  προκύπτει ότι και για κάποιο  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\Re(s) \geq 0$  ή  $\Re(s) < 0$ . Ακολούθως, θα εξετάσουμε τις δύο προαναφερόμενες περιπτώσεις ξεχωριστά.

Για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) \geq 0$ , ισχύει ότι  $|s - (M_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{c})| = M_\varepsilon$ , απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} |\gamma_{0,i}(s)| - \lambda_i &= |cs - (\lambda_i + a_i)| - \lambda_i = c \left| s - \left( M_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{c} \right) + \left( M_\varepsilon - \frac{\varepsilon + \lambda_i + a_i}{c} \right) \right| - \lambda_i \\ &\geq c \left( \left| s - \left( M_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{c} \right) \right| - \left| M_\varepsilon - \frac{\varepsilon + \lambda_i + a_i}{c} \right| \right) - \lambda_i \\ &= c \left( M_\varepsilon - \left( M_\varepsilon - \frac{\varepsilon + \lambda_i + a_i}{c} \right) \right) - \lambda_i = \varepsilon + a_i > a_i \geq ua_i, \quad i \in E. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, έχουμε ότι

$$|\gamma_{0,i}^{n_i}(s) - u\lambda_i^{n_i}\widehat{f}_i(s)| > \sum_{k=1, k \neq i}^m |ua_{ik}\nu_{0,i}(s)| = ua_i|\nu_{0,i}(s)|, \quad (5.22)$$

για  $0 \leq u \leq 1$  και  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) \geq 0$ . Έτσι, ο πίνακας  $\mathbf{A}_0(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως, και συνεπώς η ορίζουσα  $\det \mathbf{A}_0(s, u)$  είναι μη-μηδενική για  $0 \leq u \leq 1$ ,  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) \geq 0$ .

Τώρα, θα δείξουμε ότι  $\det \mathbf{A}_0(s, u) \neq 0$  για  $0 \leq u \leq 1$  και  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ . Εφόσον  $\det \mathbf{A}_0(s, u) \neq 0$  αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A}_0(s, u)$  [βλ. απόδειξη Λήμματος 6.1 στους Adan και Kulkarni (2003)], συνεχίζουμε μελετώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}_0(s, u)$  για  $s$  κοντά στην τιμή  $s = 0$ . Για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$ , ο πίνακας  $\mathbf{A}_0(s, u)$  είναι προσεγγιστικά ο ίδιος (perturbation) με τον πίνακα  $\mathbf{A}_0(0, 1)$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.17), μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_0(0, 1)$  είναι ίσο με  $-a_{ij} \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} (\lambda_i + a_i)^\ell$ ,  $i, j \in E$ , και συνεπώς  $\mathbf{A}_0(0, 1)\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{0}}^T$ . Έτσι ο πίνακας  $\mathbf{A}_0(0, 1)$  έχει μία ακριβώς ιδιοτιμή στο σημείο 0 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το  $\bar{\mathbf{e}}$ . Συνεπώς, για τιμές του  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$ , θεωρούμε ότι υπάρχουν μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $\mu(s, u)$  και ένα  $m \times 1$  διάνυσμα  $\bar{\mathbf{x}}(s, u) = (x_1(s, u), \dots, x_m(s, u))^T$ , με τα στοιχεία του να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, τέτοια ώστε

$$\mathbf{A}_0(s, u)\bar{\mathbf{x}}(s, u) = \mu(s, u)\bar{\mathbf{x}}(s, u), \quad \bar{\mathbf{x}}^T(s, u)\bar{\mathbf{e}} = 1, \quad (5.23)$$

με  $\mu(0, 1) = 0$  και  $\bar{\mathbf{x}}(0, 1) = \bar{\mathbf{e}}$ .

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (5.23) ως προς  $s$  και θέτοντας  $s = 0$  και  $u = 1$ , παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{A}_0(0, 1)\bar{\mathbf{e}} + \mathbf{A}_0(0, 1) \frac{\partial}{\partial s} \bar{\mathbf{x}}(0, 1) = \frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1)\bar{\mathbf{e}}. \quad (5.24)$$

Επιπλέον, έστω  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  ένα  $1 \times m$  διάνυσμα με στοιχεία

$$\theta_i = \frac{\pi_i \prod_{j=1, j \neq i}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell}{\sum_{i=1}^m \pi_i \prod_{j=1, j \neq i}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell}, \quad i \in E.$$

Τότε, μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι

$$\begin{aligned}\bar{\theta}\bar{\mathbf{e}} &= 1, \\ \bar{\theta}\mathbf{A}_0(0,1) &= \bar{\mathbf{0}}, \quad (\text{διότι } \bar{\pi}\Lambda = \bar{\mathbf{0}}), \quad \text{και} \\ \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} &= \frac{N(m)}{\sum_{k=1}^m \pi_k \prod_{j=1, j \neq k}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_j-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (5.24) με  $\bar{\theta}$  έχουμε ότι

$$\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial s}\mu(0,1).$$

Κατά όμοιο τρόπο, παραγωγίζοντας την εξίσωση (5.23) ως προς  $u$  και θέτοντας  $s = 0$  και  $u = 1$ , έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} + \mathbf{A}_0(0,1)\frac{\partial}{\partial u}\bar{\mathbf{x}}(0,1) = \frac{\partial}{\partial u}\mu(0,1)\bar{\mathbf{e}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $\bar{\theta}$  παίρνουμε άμεσα ότι

$$\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial u}\mu(0,1).$$

Ακόμη, για  $(s, u)$  κοντά στο  $(0, 1)$ , χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor και τα παραπάνω αποτελέσματα για τις παραγώγους  $\frac{\partial}{\partial u}\mu(0,1)$ ,  $\frac{\partial}{\partial s}\mu(0,1)$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(s, u) &\approx \mu(0,1) + s\frac{\partial}{\partial s}\mu(0,1) + (u-1)\frac{\partial}{\partial u}\mu(0,1) \\ &= s\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} + (u-1)\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Τότε, από το Λήμμα 5.1 και την εξίσωση (5.25) έπεται ότι  $\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} < 0$ . Επίσης, εφόσον  $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{A}_0(0,1) = -\mathbf{B}_0(0)$ , έχουμε επίσης ότι  $\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{A}_0(0,1)\bar{\mathbf{e}} < 0$ .

Επιπλέον, από την εξίσωση (5.26) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $\mu(s, u) \neq 0$  για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$  για  $\varepsilon > 0$  επαρκώς μικρό και  $u$  κοντά στο 1, δηλ. για  $1 - \hat{\varepsilon} \leq u \leq 1$ .

Τέλος, για  $0 \leq u \leq 1 - \hat{\varepsilon}$  (δηλ. για  $u$  κοντά στο 0), όμοια με τους Adan και Kulkarni (2003), θα δείξουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_0(s, u)$  κυριαρχεί διαγωνίως για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ , δοθέντος ότι  $\varepsilon$  είναι επαρκώς μικρό, τέτοιο ώστε

$$1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_i} > (1 - \hat{\varepsilon})\hat{f}_i(-\varepsilon), \quad \forall i \in E. \quad (5.27)$$

Πράγματι, για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ , έχουμε ότι  $-\varepsilon < \Re(s) < 0$  (διότι  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  και



$\Re(s) > -\varepsilon_0$ , και συνεπώς  $|\widehat{f}_i(s)| \leq \widehat{f}_i(\Re(s)) \leq \widehat{f}_i(-\varepsilon)$ . Τότε,  $\forall i \in E$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_{0,i}^{n_i}(s) - u \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s)| &\geq |\gamma_{0,i}(s)|^{n_i} - u \lambda_i^{n_i} |\widehat{f}_i(s)| \geq |\gamma_{0,i}(s)|^{n_i} - (1-\varepsilon) \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(-\varepsilon) \\ &= \left( |\gamma_{0,i}(s)| - \lambda_i (1-\varepsilon)^{1/n_i} \widehat{f}_i^{1/n_i}(-\varepsilon) \right) \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} (1-\varepsilon)^{\frac{n_i-\ell-1}{n_i}} \\ &\quad \times \widehat{f}_i^{\frac{n_i-\ell-1}{n_i}}(-\varepsilon) |\gamma_{0,i}(s)|^\ell \\ &\geq \left( \varepsilon + \lambda_i + a_i - \lambda_i \left( (1-\varepsilon) \widehat{f}_i(-\varepsilon) \right)^{1/n_i} \right) \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} (1-\varepsilon) |\gamma_{0,i}(s)|^\ell \\ &\geq \left( \varepsilon + \lambda_i + a_i - \lambda_i \left( (1-\varepsilon) \widehat{f}_i(-\varepsilon) \right)^{1/n_i} \right) u |\nu_{0,i}(s)|^\ell, \end{aligned}$$

όπου για την δεύτερη ανίσωση χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $\widehat{f}_i^{\frac{n_i-\ell-1}{n_i}}(-\varepsilon) \geq 1$  για  $\varepsilon > 0$ .

Ακόμη, από το γεγονός ότι  $1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_i} > (1-\varepsilon) \widehat{f}_i(-\varepsilon)$  έπεται ότι ισχύει  $(\varepsilon + \lambda_i)^{n_i} > \lambda_i^{n_i} (1-\varepsilon) \widehat{f}_i(-\varepsilon)$ , και συνεπώς  $\varepsilon + \lambda_i > \lambda_i \left( (1-\varepsilon) \widehat{f}_i(-\varepsilon) \right)^{1/n_i}$ .

Συνεπώς, η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$|\gamma_{0,i}^{n_i}(s) - u \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s)| > a_i u |\nu_{0,i}(s)| = \sum_{k=1, k \neq i}^m |u a_{ik} \nu_{0,i}(s)|, \quad \forall i \in E,$$

απ' όπου αποδεικνύεται το  $\det \mathbf{A}_0(0,1)(s, u) \neq 0$  για  $s \in C_\varepsilon$  με  $\Re(s) < 0$ . ■

**Θεώρημα 5.3.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^n n_i$ . Τότε, για  $\delta = 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο σημείο 0 με πολλαπλότητα ένα και  $n-1$  ρίζες που βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών.

Απόδειξη. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς μεθοδολογία με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, θεωρούμε ότι  $f_0(u)$  παριστά τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_0(s, u)$  εντός (ή στην περιφέρεια) του κύκλου  $C_\varepsilon^+$ , όπου  $C_\varepsilon^+$  είναι το εσωτερικό τμήμα του κύκλου  $C_\varepsilon$ . Τότε με βάση το Θεώρημα 1.25 έχουμε ότι

$$f_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\det \mathbf{A}_0(s, u)}{\det \mathbf{A}_0(s, u)} ds.$$

Σημειώνουμε ότι η  $f_0(u)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[0, 1]$ , που παίρνει ακέραες τιμές και συνεπώς είναι σταθερή. Επιπλέον από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\gamma_{0,i}^{n_i}(s) = 0$  έχει μία ρίζα στο  $\frac{\lambda_i + a_i}{\varepsilon}$  με πολλαπλότητα  $n_i$ ,  $\forall i \in E$ , έπεται ότι η εξίσωση  $\det \Gamma_0(s) = 0$  έχει

$n_1 + n_2 + \dots + n_m$  ρίζες. Συνεπώς  $f_0(0) = n$  καθώς επίσης και  $f_0(1) = n$ . Παίρνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0$ , τότε η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_0(s, u)$  έχει  $n$  ρίζες εντός του κύκλου  $C_0$ .

Ακόμη, η τιμή  $s = 0$  ικανοποιεί την εξίσωση  $\det \mathbf{A}_0(s) = \det \mathbf{A}_0(s, 1) = 0$ , και αυτό διότι

$$\det \mathbf{A}_0(0) = \det \mathbf{A}_0(0, 1) = (\det \mathbf{A}) \prod_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^{n_j-1} \lambda_j^{n_m-\ell-1} (\lambda_j + a_j)^\ell = 0.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος μένει να δείξουμε ότι το  $s = 0$  που είναι ρίζα της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  έχει πολλαπλότητα ένα. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι  $\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_0(s)|_{s=0} \neq 0$ . Προκειμένου να αποδείξουμε το παραπάνω θεωρούμε  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$  να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με μόνα μη-μηδενικά στοιχεία αυτά της κυρίας διαγωνίου που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}_0(0, 1)$  με  $d_1 = 0$  [διότι το 0 είναι μια απλή ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{A}_0(0, 1) = 0$ ]. Επιπλέον, θεωρούμε  $\mathbf{X}_L$  και  $\mathbf{X}_R$  να παριστούν τους πίνακες των αριστερών και δεξιών ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $\mathbf{A}_0(0, 1)$ , με  $\mathbf{X}_R \mathbf{X}_L = \mathbf{I}$ , όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο  $m \times m$  ταυτοτικός πίνακας. Τότε, ισχύει ότι

$$\mathbf{A}_0(0, 1) \mathbf{X}_R = \mathbf{X}_R \mathbf{D} \quad \text{και} \quad \mathbf{X}_L \mathbf{A}_0(0, 1) = \mathbf{D} \mathbf{X}_L,$$

απ' όπου (και από τις δύο παραπάνω εξισώσεις) παίρνουμε

$$\mathbf{A}_0(0, 1) = \mathbf{X}_R \mathbf{D} \mathbf{X}_L.$$

Τότε, για  $u$  κοντά στο 1, υπάρχουν οι  $m \times m$  πίνακες  $\mathbf{D}(s) = \text{diag}(d_1(s), \dots, d_m(s))$ ,  $\mathbf{X}_R(s)$  και  $\mathbf{X}_L(s)$  (όπου τα στοιχεία τους είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις) τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{A}_0(s, 1) = \mathbf{X}_R(s) \mathbf{D}(s) \mathbf{X}_L(s),$$

με  $\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{X}_R(0) = \mathbf{X}_R$  και  $\mathbf{X}_L(0) = \mathbf{X}_L$ . Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\det \mathbf{A}_0(s, 1) = \det \mathbf{A}_0(s) = (\det \mathbf{X}_R(s)) (\det \mathbf{D}(s)) (\det \mathbf{X}_L(s)).$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $s$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_0(s) &= \left( \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{X}_R(s) \right) (\det \mathbf{D}(s)) (\det \mathbf{X}_L(s)) + (\det \mathbf{X}_R(s)) \left( \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(s) \right) \\ &\quad \times (\det \mathbf{X}_L(s)) + (\det \mathbf{X}_R(s)) (\det \mathbf{D}(s)) \left( \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{X}_L(s) \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Επιπλέον, από το γεγονός ότι  $d_i(0) = d_i$ ,  $\forall i \in E$  έχουμε ότι  $d_1(0) = 0$ , απ' όπου εύκολα βλέπουμε ότι  $\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(s)|_{s=0} = d_1'(0) d_2(0) \dots d_m(0) = d_1'(0) d_2 \dots d_m$ . Ακόμη

$\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(s)|_{s=0}$  είναι διάφορο του μηδενός, διότι  $d_i \neq 0, \forall 2 \leq i \leq m$  και

$$\begin{aligned} a'_i(0) &= \frac{\partial}{\partial s} \mu(0, 1) \quad (\text{βλ. εξίσωση (5.23)}) \\ &= \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{A}_0(0, 1) \bar{\epsilon} \neq 0 \quad (\text{από την εξίσωση (5.25) και το Λήμμα 5.1}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Τώρα, θέτοντας  $s = 0$  στην εξίσωση (5.28) παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{A}_0(s)|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \det \mathbf{D}(s)|_{s=0} \neq 0.$$

Τέλος, προκειμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αναιρούμε την αρχική υπόθεση ότι για  $\epsilon_0 > 0$  οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\hat{f}_i(s), i \in E$ , είναι αναλυτικές συναρτήσεις για  $s$  με  $\Re(s) > -\epsilon$ . Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία με αυτή του Παραρτήματος των Adan και Kulkarni (2003). ■

**Παρατήρηση 5.3.** (i) Έστω  $n_i = 1, i \in E$ . Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  ανάγεται στη χαρακτηριστική εξίσωση του μοντέλου Markov-modulated Poisson, και συνεπώς το Θεώρημα 5.2 ανάγεται στο Λήμμα 1.2 της Ενότητας 1.5. Παρόλο που για  $\delta > 0$ , η προαναφερόμενη εξίσωση έχει μελετηθεί εκτενώς [βλ. π.χ. Zhanh (2008)], για  $\delta = 0$  η λύση της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  δεν υπάρχει στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Έτσι για  $n_i = 1, i \in E$ , το Θεώρημα 5.3 μας παρέχει την ακριβή λύση της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$ , απ' όπου έπεται ότι στο μοντέλο Markov-modulated Poisson για  $\delta = 0$  η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο σημείο 0 και  $m - 1$  ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη.

(ii) Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε τις  $n$  ρίζες της εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  με  $r_i(\delta) = r_i, i = 1, \dots, n$ . Επιπλέον, στο εξής θα υποθέτουμε ότι οι ρίζες  $r_1, r_2, \dots, r_n$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Τώρα, επιστρέφοντας στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής, θα χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  προκειμένου να υπολογίσουμε, τόσο τον πίνακα των αρχικών τιμών  $\phi_{(k)}(0), k = 0, 1, \dots, \bar{n} - 1$ , όσο και τον πίνακα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\hat{\phi}(s)$ .

Χρησιμοποιώντας, από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, το γεγονός ότι ο  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και την εξίσωση (5.14) έχουμε το ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 5.1.** Για  $\Re(s) \geq 0$ , ο πίνακας των μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

Gerber-Shiu,  $\widehat{\phi}(s)$ , δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(s) &= [\mathbf{A}_\delta(s)]^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\widetilde{n}-1} \Delta_k(s) \phi^{(k)}(0) + \widehat{\omega}(s) \right) \\ &= \frac{\mathbf{A}_\delta^*(s) \sum_{k=0}^{\widetilde{n}-1} \Delta_k(s) \phi^{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)},\end{aligned}\quad (5.30)$$

όπου  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$  είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (adjoint matrix) του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$ .

**Παρατήρηση 5.4.** Για  $n_i = 1$  για κάθε  $i \in E$ , το άθροισμα στην εξίσωση (5.30) γίνεται ένας μόνος όρος, με  $\Delta_0(s) = -\text{diag}(c, \dots, c)$ , ενώ στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της προαναφερόμενης εξίσωσης με  $-1/c$ , παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (1.66) του Θεωρήματος 1.23, που είναι ο μετασχηματισμός Laplace του πίνακα των συναρτήσεων Gerber-Shiu για το μοντέλο Markov-modulated Poisson.

Τώρα, από την εξίσωση (5.30) είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός μιας αναλυτικής έκφρασης για τις συναρτήσεις  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j \in E$ , συνδέεται στενά με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ .

Επιπλέον, για να ολοκληρώσουμε τη λύση του συστήματος ως προς τον πίνακα  $\widehat{\phi}(s)$ , στην εξίσωση (5.30) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον πίνακα των αρχικών  $\phi^{(k)}(0)$ . Για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $\phi^{(k)}(0)$  θα χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  με θετικά πραγματικά μέρη καθώς επίσης και τη θεωρία των διακετών διαφορών για πίνακες. Έτσι, ανακαλώντας τον ορισμό των διακετών διαφορών [βλ. Ορισμό 1.18] η  $(n-1)$  διακετή διαφορά του πίνακα  $\mathbf{L}(s)$  ως προς τους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , ορίζεται ως

$$\mathbf{L}[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n] = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{L}(\rho_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (\rho_j - \rho_i)}.$$

Επίσης, για λόγους συμβολισμού ορίζουμε τη διακετή διαφορά του γινομένου των πινάκων  $\mathbf{A}_\delta^*$  και  $\mathbf{L}(s)$  ως προς τους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , να είναι

$$(\mathbf{A}_\delta^* \mathbf{L})[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n] = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[\rho_1, \dots, \rho_i] \mathbf{L}[\rho_i, \dots, \rho_n].\quad (5.31)$$

Τότε, ο πίνακας των αρχικών τιμών  $\phi^{(k)}(0)$ ,  $k = 0, \dots, \widetilde{n} - 1$ , υπολογίζεται με βάση την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 5.2.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^n n_i$  και  $\widetilde{n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{n_i\}$ . Τότε, ο πίνακας των αρχικών

τιμών,  $\phi_{(k)}(0)$ ,  $k = 0, \dots, \tilde{n} - 1$ , ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_k) [r_1, r_2, \dots, r_{n-j}] \phi_{(k)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \tilde{\omega}) [r_1, r_2, \dots, r_{n-j}] = 0, \quad (5.32)$$

για  $j = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$ , όπου  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  με θετικά πραγματικά μέρη.

*Απόδειξη.* Εφόσον  $\hat{\phi}(s) < \infty$  για  $\Re(s) > 0$ , και από το γεγονός ότι οι  $r_i$ ,  $i \in E$ , αποτελούν λύσεις του παρονομαστή της εξίσωσης (5.30), έπεται ότι ο αριθμητής της εξίσωσης (5.30) είναι επίσης μηδέν για  $s = r_1, r_2, \dots, r_n$ , δηλ. ισχύει ότι

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \mathbf{A}_\delta^*(r_i) \Delta_k(r_i) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(r_i) \tilde{\omega}(r_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Αντικαθιστώντας  $i = 1, 2$  στην παραπάνω εξίσωση και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες από την προηγούμενη αντικατάσταση εξισώσεις, έχουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k(r_1) - \mathbf{A}_\delta^*(r_2) \Delta_k(r_2) \right) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \tilde{\omega}(r_1) - \mathbf{A}_\delta^*(r_2) \tilde{\omega}(r_2) = 0,$$

απ' όπου χρησιμοποιώντας τη θεωρία των διακριτών διαφορών, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k [r_1, r_2] + \mathbf{A}_\delta^* [r_1, r_2] \Delta_k(r_2) \right) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \tilde{\omega} [r_1, r_2] + \mathbf{A}_\delta^* [r_1, r_2] \tilde{\omega}(r_2) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_k) [r_1, r_2] \phi_{(k)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \tilde{\omega}) [r_1, r_2] = 0.$$

Εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενα τις διακριτές διαφορές για  $i = 1, \dots, n$  στον αριθμητή της εξίσωσης (5.30), παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

**Παρατήρηση 5.5.** (i) Σημειώνουμε ότι από την Πρόταση 5.2 έχουμε ένα σύστημα από  $\tilde{n}$  γραμμικές εξισώσεις με  $\tilde{n}$  αγνώστους, η λύση των οποίων μας δίνει τα στοιχεία του πίνακα  $\phi_{(k)}(0)$ ,  $k = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$ .

(ii) Για  $n_i = 1$  για κάθε  $i \in E$ , η εξίσωση (5.32) γίνεται

$$(\mathbf{A}_\delta^* \mathbf{\Delta}_0)[r_1, r_2, \dots, r_m] \phi(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \hat{\omega})[r_1, r_2, \dots, r_m] = 0,$$

όπου  $\mathbf{\Delta}_0(s) = -\text{diag}(c, \dots, c)$ , απ' όπου προκύπτει ότι οι διακριτές διαφορές του πίνακα  $\mathbf{\Delta}_0(s)$  είναι μηδέν. Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $-1/c$ , και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (1.68) της Πρότασης 1.5, που η εξίσωση του πίνακα των αρχικών τιμών για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου.

Τώρα, από την εξίσωση (5.31), έχουμε ότι η  $n$ -οστή διακριτή διαφορά του γινομένου των πινάκων  $\mathbf{A}_\delta^*$  και  $\mathbf{L}(s)$  ως προς τους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, s$  είναι

$$(\mathbf{A}_\delta^* \mathbf{L})[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, s] = \mathbf{A}_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, s] \mathbf{L}(s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[\rho_1, \dots, \rho_i] \mathbf{L}[\rho_i, \dots, \rho_n, s]. \quad (5.33)$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  με θετικά πραγματικά μέρη και τη θεωρία των διακριτών διαφορών βρίσκουμε για τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων πονής μια ισοδύναμη μορφή της σχέσης (5.30) με βάση την οποία στη συνέχεια θα είναι δυνατόν να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του πίνακα  $\hat{\phi}(s)$ .

**Πρόταση 5.3.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^n n_i$  και  $\tilde{n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{n_i\}$ . Τότε για  $\Re(s) \geq 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace του πίνακα  $\phi(u)$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s) = & \frac{\prod_{i=1}^n (s - r_i)}{\det \mathbf{A}_\delta(s)} \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \mathbf{\Delta}_k(s) \phi_{(k)}(0) \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \mathbf{\Delta}_k[r_i, \dots, r_n, s] \phi_{(k)}(0) \\ & \left. + \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \hat{\omega}(s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \hat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s] \right\}. \quad (5.34) \end{aligned}$$

όπου  $r_1, r_2, \dots, r_n$  είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  με  $\Re(r_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Απόδειξη.* Από το γεγονός ότι  $\hat{\phi}(s) < \infty$  για κάθε  $s$  με  $\Re(s) > 0$  καθώς επίσης και από το γεγονός ότι το  $s = r_1$  είναι ρίζα του παρονομαστή της εξίσωσης (5.30), έπεται ότι το  $s = r_1$  είναι επίσης ρίζα του αριθμητή της εξίσωσης (5.30). Συνεπώς, ο αριθμητής της εξίσωσης

(5.30) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_\delta^*(s) \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \Delta_k(s) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s) \\
&= \mathbf{A}_\delta^*(s) \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \Delta_k(s) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \Delta_k(r_1) \phi_{(k)}(0) \\
&\quad - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}(r_1) \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_k(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k(r_1) \right) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}(r_1) \\
&= \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_k(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k(s) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k(r_1) \right) \phi_{(k)}(0) \\
&\quad + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}(s) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}(s) - \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}(r_1) \\
&= (s - r_1) \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left( \mathbf{A}_\delta^*[r_1, s] \Delta_k(s) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \Delta_k[r_1, s] \right) \phi_{(k)}(0) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{A}_\delta^*[r_1, s] \widehat{\omega}(s) + \mathbf{A}_\delta^*(r_1) \widehat{\omega}[r_1, s] \right\} \\
&= (s - r_1) \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_k)[r_1, s] \phi_{(k)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \widehat{\omega})[r_1, s] \right\},
\end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ισότητα κάνουμε χρήση της εξίσωσης (5.33). Επιπλέον, παρατηρώντας ότι οι τιμές  $s = r_2, r_3, \dots, r_n$  είναι επίσης ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (5.30) και εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενα τις διακριτές διαφορές ως προς τους αριθμούς  $r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_\delta^*(s) \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \Delta_k(s) \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*(s) \widehat{\omega}(s) \\
&= \prod_{i=1}^n (s - r_i) \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_k)[r_1, \dots, r_n, s] \phi_{(k)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \widehat{\omega})[r_1, \dots, r_n, s] \right\} \\
&= \prod_{i=1}^n (s - r_i) \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \Delta_k(s) \phi_{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \right. \\
&\quad \left. \times \Delta_k[r_i, \dots, r_n, s] \phi_{(k)}(0) + \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \widehat{\omega}(s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s] \right\},
\end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ισότητα κάνουμε χρήση της εξίσωσης (5.33).

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση και την εξίσωση (5.30) έπεται άμεσα το ζητούμενο

αποτέλεσμα. ■

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace του πίνακα  $\widehat{\phi}(s)$  μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μία από αυτές τις περιπτώσεις, για την ακρίβεια η πιο γενική περίπτωση, είναι η υπόθεση ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace των σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων,  $f_i$ ,  $i \in E$ , έχει τη μορφή πηλίκου πολυωνύμων όπως στην παρακάτω σχέση

$$\widehat{f}_i(s) = \frac{p_{k_i-1}(s)}{p_{k_i}(s)}, \text{ με } p_{k_i-1}(0) = p_{k_i}(0), k_i \in \mathbb{N}^+, i \in E, \quad (5.35)$$

όπου  $p_{k_i}(s)$ ,  $\forall i \in E$ , ένα πολυώνυμο βαθμού  $k_i$ , με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το 1 και  $p_{k_i-1}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ίσου ή μικρότερου του  $k_i - 1$ . Επιπλέον η εξίσωση  $p_{k_i}(s) = 0$  έχει μόνο αρνητικές ρίζες ή μιγαδικές ρίζες με μόνο αρνητικά πραγματικά μέρη. Όπως έχει τονισθεί και στα προηγούμενα κεφάλαια η οικογένεια των πηλίκων κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών η οποία περιλαμβάνει, ως ειδικές περιπτώσεις, την εκθετική κατανομή, την Erlang κατανομή, την γενικευμένη Erlang κατανομή, την κατανομή Coxian, τις phase-type καθώς και τις μίξεις αυτών.

Τώρα, προκειμένου να φέρουμε τον μετασχηματισμό Laplace,  $\widehat{\phi}(s)$ , σε μια κατάλληλη μορφή προκειμένου στη συνέχεια να τον αντιστρέψουμε, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (5.34) με  $\prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)$ . Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(s) &= \frac{\prod_{i=1}^n (s - r_i)}{\det \mathbf{A}_\delta(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)} \left\{ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_n, s] \Delta_k(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) \phi_{(k)}(0) \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_i] \Delta_k [r_i, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) \phi_{(k)}(0) \\ &\left. + \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) \widehat{\omega}(s) + \sum_{i=1}^n \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega} [r_i, \dots, r_n, s] \right\}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (5.36),  $\det \mathbf{A}_\delta(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)$ , είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n + K_m$ , όπου  $K_m = \sum_{i=1}^m k_i$ , με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το  $c^n$ . Επιπλέον, από τον ορισμό της κατανομής των πηλίκων πολυωνύμων και το Θεώρημα 5.2, η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) = 0$  έχει ακριβώς  $n + K_m$  ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο,  $n$  εκ των οποίων είναι οι ρίζες του Θεωρήματος 5.2,  $r_i$ , με  $\Re(r_i) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ενώ οι υπόλοιπες ρίζες είναι οι  $-R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K_m$ , όπου όλες οι  $R_i$  έχουν θετικά



πραγματικά μέρη. Συνεπώς, η συνάρτηση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$\det \mathbf{A}_\delta(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) = c^n \prod_{i=1}^n (s - r_i) \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i). \quad (5.37)$$

Στο εξής, θα θεωρούμε ότι οι ρίζες  $R_i$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (5.36) και απλοποιώντας τον κοινό όρο  $\prod_{i=1}^n (s - r_i)$  τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή, έχουμε την ακόλουθη σχέση για τον πίνακα  $\widehat{\phi}(s)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(s) &= \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \Delta_k(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{c^n \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} \phi_{(k)}(0) \\ &+ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \frac{\Delta_k[r_i, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{c^n \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} \phi_{(k)}(0) \\ &+ \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{c^n \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} \widehat{\omega}(s) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{c^n \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Επιπροσθέτως, από τον ορισμό των διακετών διαφορών δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τα στοιχεία των ακόλουθων πινάκων  $\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) \Delta_k(s)$  και  $\Delta_k(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)$  είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερο από  $K_m$ . Επίσης, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  είναι σταθεροί αριθμοί. Τότε, σε κάθε πηλίκο της εξίσωσης (5.38) μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική των μερικών κλασμάτων, απ' όπου έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \Delta_k(s) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{\prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} &= \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{M}_{k,\ell}}{s + R_\ell}, \\ \frac{\Delta_k[r_i, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{\prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} &= \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{N}_{k,\ell}}{s + R_\ell}, \\ \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, s] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{\prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} &= \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{Z}_\ell}{s + R_\ell}, \end{aligned}$$

και

$$\frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)}{\prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)} = 1 + \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{d_\ell}{s + R_\ell},$$

όπου  $\mathbf{M}_{k,\ell}$ ,  $\mathbf{N}_{k,\ell}$  και  $\mathbf{Z}_\ell$ ,  $k = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$ ,  $\ell = 1, \dots, K_m$ , είναι κάποιοι συντελεστές

πίνακες διαστάσεων  $m \times m$ , και δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{M}_{k,\ell} = \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, -R_\ell] \Delta_k(-R_\ell) \prod_{i=1}^m p_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{K_m} (R_\nu - R_\ell)}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{N}_{k,\ell} = \frac{\Delta_k[r_1, \dots, r_n, -R_\ell] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{K_m} (R_\nu - R_\ell)}, \quad \text{αν } \delta \quad (5.40)$$

$$\mathbf{Z}_\ell = \frac{\mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_n, -R_\ell] \prod_{i=1}^m p_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{K_m} (R_\nu - R_\ell)}, \quad (5.41)$$

ενώ ο συντελεστής  $d_\ell$  δίνεται από τη σχέση

$$d_\ell = \frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(-R_\ell)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq \ell}^{K_m} (R_\nu - R_\ell)}. \quad (5.42)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μερικά κλάσματα, η εξίσωση (5.38) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(s) &= \frac{1}{c^n} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{M}_{k,\ell}}{s + R_\ell} \phi_{(k)}(0) + \frac{1}{c^n} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{N}_{k,\ell}}{s + R_\ell} \phi_{(k)}(0) \\ &+ \frac{1}{c^n} \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{\mathbf{Z}_\ell}{s + R_\ell} \widehat{\omega}(s) + \frac{1}{c^n} \left( 1 + \sum_{\ell=1}^{K_m} \frac{d_\ell}{s + R_\ell} \right) \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s] \\ &= \frac{1}{c^n} \left[ \sum_{\ell=1}^{K_m} \left( \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \frac{1}{s + R_\ell} (\mathbf{M}_{k,\ell} + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \mathbf{N}_{k,\ell}) \phi_{(k)}(0) + \frac{\mathbf{Z}_\ell}{s + R_\ell} \widehat{\omega}(s) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{d_\ell}{s + R_\ell} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s] \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^*[r_1, \dots, r_i] \widehat{\omega}[r_i, \dots, r_n, s] \right]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Τέλος, η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace του πίνακα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\widehat{\phi}(s)$ , γίνεται με τη βοήθεια των τελεστών  $T_r$  για πίνακες/διανύσματα. Ανακαλώντας την Πρόταση 1.4, ο τελεστής  $T_r$  ενός πίνακα/διανύσματος  $\mathbf{L}(x)$ , του οποίου τα στοιχεία είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, ορίζεται ως

$$T_r \mathbf{L}(x) = \int_x^\infty e^{-r(z-x)} \mathbf{L}(z) dx, \quad x \geq 0, \Re(r) \geq 0.$$

Επιπλέον, οι κολλαπλοί τελεστές  $T_r$  βρίσκονται αναδρομικά ως

$$T_{r_1} T_{r_2} \mathbf{L}(x) = T_{r_2} T_{r_1} \mathbf{L}(x) = \frac{T_{r_1} \mathbf{L}(x) - T_{r_2} \mathbf{L}(x)}{r_2 - r_1}, \quad r_2 \neq r_1 \in \mathbb{C}, \quad x \geq 0.$$

Τότε, από την Πρόταση 1.4 έχουμε την ακόλουθη σχέση η οποία συνδέει τους τελεστές  $T_r$  ενός πίνακα/διανύσματος  $\mathbf{L}(x)$  με τις αντίστοιχες διακριτές διαφορές του πίνακα/διανύσματος  $\mathbf{L}(x)$

$$\left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(0) = (-1)^{n-1} \widehat{\mathbf{L}}[r_1, \dots, r_n].$$

Ακόμη, από τον ορισμό του τελεστή  $T_r$  δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι  $T_s T_r \mathbf{L}(0) = \int_0^\infty e^{-sx} T_r \mathbf{L}(x) dx$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace του πίνακα/διανύσματος  $T_r \mathbf{L}(x)$ , απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ακόλουθη σχέση για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του πίνακα  $T_s \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(0)$  είναι αληθής

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ T_s \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(0) \right] = \left( \prod_{k=1}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(x),$$

απ' όπου επίσης παίρνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{L}}[r_1, \dots, r_n, s] \right) = (-1)^{n-i+1} \left( \prod_{k=i}^n T_{r_k} \right) \mathbf{L}(x).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του πίνακα  $\widehat{\mathbf{f}}(s)$  στην εξίσωση (5.43), ο οποίος δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.4.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^n n_i$ ,  $\tilde{n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{n_i\}$  και  $K_m = \sum_{i=1}^m k_i$ . Όταν οι μετασχηματισμοί Laplace των μεγεθών των αποζημιώσεων  $\widehat{f}_i(s)$ ,  $i \in E$ , έχουν μορφή όπως και στην εξίσωση (5.35), τότε ο πίνακας των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\phi(u) = (\phi_{i,j}(u))_{i,j=1}^m$ , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{c^n} \sum_{\ell=1}^{K_m} \left[ \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} e^{-R_\ell u} (\mathbf{M}_{k,\ell} + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_i] \mathbf{N}_{k,\ell}) \phi_{(k)}(0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-R_\ell u} * \left( \mathbf{Z}_\ell \omega(u) - d_\ell \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_i] \left( \prod_{k=i}^n T_{r_k} \right) \omega(u) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{c^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \mathbf{A}_\delta^* [r_1, \dots, r_i] \left( \prod_{k=i}^n T_{r_k} \right) \omega(u), \quad u \geq 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

όπου με  $*$  συμβολίζουμε τον τελεστή συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων,  $\omega(u) = \text{diag}(\lambda_1^{n_1} w_1(u), \dots, \lambda_m^{n_m} w_m(u))$  και οι συντελεστές πίνακες  $\mathbf{M}_{k,\ell}$ ,  $\mathbf{N}_{k,\ell}$   $\mathbf{Z}_\ell$  δίνονται από τις εξισώσεις (5.39)-(5.41), ενώ ο συντελεστής  $d_\ell$  δίνεται από την εξίσωση (5.42).

### 5.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου, που ορίζεται από τη σχέση (5.2), κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος σε ένα επίπεδο  $b \geq u$ . Κάτω από την προαναφερόμενη τροποποίηση όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο επίπεδο  $b$ , τα ασφάλιστρα  $c$  επιστρέφονται ως μερίσματα στους δικαιούχους της ασφάλισης και η διαδικασία πλεονάσματος παραμένει στο επίπεδο  $b$  μέχρι την εμφάνιση της επόμενης αποζημίωσης.

Έστω  $U_b(t)$  η διαδικασία πλεονάσματος του Markov-modulated Erlang μοντέλου κινδύνου κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, με αρχικό αποθεματικό  $U_b(0) = u \geq 0$ . Προκειμένου να δώσουμε την ακριβή μορφή της διαδικασίας πλεονάσματος  $\{U_b(t)\}_{t \geq 0}$ , θεωρούμε τη βοηθητική διαδικασία του μεγίστου πλεονάσματος (running maximum) της  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  στον χρόνο  $t$ , η οποία ορίζεται ως

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} U(s), \quad t \geq 0,$$

με  $U(t)$  να είναι η διαδικασία πλεονάσματος του για το Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου χωρίς την ύπαρξη της μερισματικής στρατηγικής που ορίστηκε στη σχέση (5.2). Τότε, κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος, τα συνολικά (μη-προεξοφλημένα) σωρευτικά μερίσματα μέχρι τον χρόνο  $t$  δίνονται από τη σχέση

$$D(t) = (M(t) - b)_+ = \begin{cases} 0, & M(t) \leq b, \\ M(t) - b, & M(t) > b. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τα συνολικά μερίσματα,  $\{D(t)\}_{t \geq 0}$ , η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος δίνεται από τη σχέση

$$U_b(t) = U(t) - M(t), \quad t \geq 0. \quad (5.45)$$

Επιπλέον, όμοια με την προηγούμενη ενότητα, ορίζουμε  $T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}$  να είναι χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$  ορίζουμε

$$\phi(u, b) = \mathbb{E}(e^{-\delta T_b} w(U(T_b^-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u), \quad 0 \leq u \leq b,$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, όπου  $U_b(T_b^-)$  είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U_b(T_b)|$  είναι το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία,  $T_b^-$  το αριστερό

όριο του  $T_b$ ,  $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  η συνάρτησης ποινής και  $\delta$  η ένταση ανατοκισμού.

Επίσης, για το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot | J(0) = i)$  και για  $\mathbb{E}_i$  να είναι η μέση τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_i$ , ορίζουμε

$$\phi_i(u, b) = \mathbb{E}_i \left( e^{-\delta T_b} w(U(T_b^-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b.$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη διαδικασία πλεονάσματος (5.45), δοθέντος του αρχικού κεφαλαίου  $0 \leq u \leq b$ ,  $i \in E$ .

Τέλος, όμοια με την Ενότητα 5.2, ορίζουμε

$$\phi_{i,j}(u, b) = \mathbb{E}_i \left( e^{-\delta T_b} w(U(T_b^-), |U(T_b)|) 1_{(T_b < \infty, J(T_b)=j)} | U_b(0) = u \right), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (5.46)$$

να είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης στην κατάσταση  $j$ , δοθέντος του αρχικού αποθεματικού  $0 \leq u \leq b$  και της αρχικής κατάστασης  $i \in E$ .

Τότε σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς ισχύει ότι

$$\phi(u, b) = \sum_{i=1}^m \pi_i \phi_i(u, b) \quad \text{και} \quad \phi_i(u, b) = \sum_{j=1}^m \phi_{i,j}(u, b), \quad 0 \leq u \leq b, i, j \in E.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ , ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.

**Θεώρημα 5.5.** Για  $0 \leq u \leq b$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής,  $\phi_{i,j}(u, b)$ ,  $i, j \in E$ , ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^{n_i} \phi_{i,j}(u, b) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} \left( \lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^{\ell} \phi_{k,j}(u, b) \\ & - \lambda_i^{n_i} \int_0^u \phi_{i,j}(u-x, b) f_i(x) dx - \lambda_i^{n_i} w_i(u) 1_{(i=j)} = 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{\partial^{\ell}}{\partial u^{\ell}} \phi_{i,j}(u, b) \Big|_{u=b} = 0, \quad \ell = 1, \dots, n_i, i, j \in E, \quad (5.48)$$

όπου  $w_j(u)$ , για  $j = 1, 2$  δίνονται από την εξίσωση (5.8).

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1 παρατηρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων, που ακολουθούν την Erlang( $n_i, \lambda_i$ ) κατανομή, μπορούν ισοδύναμα να γραφούν ως άθροισμα  $n_i$  ανεξάρτητων

εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $\lambda_i$ . Κάθε μια από τις  $n_i - 1$  προαναφερόμενες κατανομές προκαλεί την εμφάνιση μιας αποζημίωσης μεγέθους 0, ενώ στο χρόνο εμφάνισης της  $n_i$  εκθετικής κατανομής, εμφανίζεται μια αποζημίωση με σ.χ. του μεγέθους της  $F_i$ .

Έστω  $\phi_{i,j,\nu_i}(u, b)$ , για  $\nu_i = 1, \dots, n_i - 1$ , με  $\phi_{i,j,1}(u, b) = \phi_{i,j}(u, b)$ , να είναι η βοηθητική αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη (βοηθητική) διαδικασία πλεονάσματος (5.6), τροποποιημένη όμως κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Επιπλέον, θεωρώντας το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  και χρησιμοποιώντας την ίδια λογική ακολουθία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1, για  $0 \leq u \leq b$  και  $\nu_i = 1, \dots, n_i - 1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,\nu_i}(u, b) &= (1 - \lambda_i dt)(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i}(u + cdt, b) \\ &\quad + \lambda_i dt(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i+1}(u + cdt, b) \\ &\quad + dt(1 - \lambda_i dt)e^{-\delta dt} \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u + cdt, b) + o(dt). \end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, συγκεντρώνοντας μαζί όλους τους όρους τάξης  $o(dt)$  και διαιρώντας με  $dt$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &c \frac{\phi_{i,j,\nu_i}(u + cdt, b) - \phi_{i,j,\nu_i}(u, b)}{cdt} - (\lambda_i + a_i + \delta) \phi_{i,j,\nu_i}(u + cdt, b) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu_i+1}(u + cdt, b) \\ &+ \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u + cdt, b) + \frac{o(dt)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$  βρίσκουμε άμεσα ότι

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta) \right) \phi_{i,j,\nu_i}(u, b) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu_i+1}(u, b) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u, b) = 0. \quad (5.49)$$

Κατά όμοιο τρόπο για  $0 \leq u \leq b$  και  $\nu_i = n_i$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,n_i}(u, b) &= (1 - \lambda_i dt)(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} \left( \int_0^{u+cdt} \phi_{i,j}(u + cdt - x, b) f_i(x) dx \right. \\ &\quad \left. + w_i(u + cdt) 1_{(i=j)} \right) + \lambda_i dt(1 - a_i dt)e^{-\delta dt} h_{i,j}(u + cdt, b) \\ &\quad + (1 - \lambda_i dt)c^{-\delta dt} dt \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u + cdt, b) + o(dt). \end{aligned}$$

Ερσιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, συγκεντρώνοντας μαζί όλους τους όρους

τάξης  $o(dt)$  και διαιρώντας με  $dt$ , έχουμε ότι

$$\left(c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta)\right) \phi_{i,j,n_i}(u, b) + \lambda_i \int_0^u \phi_{i,j}(u-x, b) f_i(x) dx + w_i(u) 1_{(i=j)} + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(u, b) = 0. \quad (5.50)$$

Τώρα, από την εξίσωση (5.49), έχουμε ότι

$$\phi_{i,j,\nu_i+1}(u, b) = \frac{a_i + \lambda_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_i} \phi_{i,j,\nu_i}(u, b) - \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{a_{ik}}{\lambda_i} \phi_{k,j}(u, b), \quad \nu_i = 1, \dots, n_i - 1, \quad (5.51)$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,n_i}(u, b) &= \frac{(\lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u})^{n_i-1}}{\lambda_i^{n_i-1}} \phi_{i,j}(u, b) - \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{a_{ik}}{\lambda_i^{n_i-1}} \sum_{\ell=0}^{n_i-2} \lambda_i^{n_i-\ell-2} \\ &\quad \times \left(\lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}\right)^\ell \phi_{k,j}(u, b). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.52) στην εξίσωση (5.50), μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις βρίσκουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (5.47).

Για να δείξουμε ότι οι οριακές συνθήκες της εξίσωσης (5.48) είναι αληθείς, θεωρούμε ότι το  $u = b$  και εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς μεθοδολογία όπως αυτή για την απόδειξη του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.47). Έτσι, για  $u = b$  και  $\nu_i = 1, \dots, n_i - 1$ ,  $i \in E$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,\nu_i}(b, b) &= (1 - (\lambda_i + a_i)dt) e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i}(b, b) + \lambda_i dt e^{-\delta dt} \phi_{i,j,\nu_i+1}(b, b) \\ &\quad + dt e^{-\delta dt} \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j}(b, b) + o(dt), \quad i, j \in E, \end{aligned}$$

απ' όπου χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor, και συγκεντρώνοντας μαζί τους όρους τάξης  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , βρίσκουμε την εξίσωση

$$-(\lambda_i + a_i + \delta) \phi_{i,j,\nu_i}(b, b) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu_i+1}(b, b) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j}(b, b) = 0, \quad i, j \in E. \quad (5.53)$$

Επιπλέον αντικαθιστώντας  $u = b$  στην εξίσωση (5.49) έχουμε ότι

$$\left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta) \right) \phi_{i,j,\nu_i}(b, b) + \lambda_i \phi_{i,j,\nu_i+1}(b, b) + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(b, b) = 0, \quad i, j \in E. \quad (5.54)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j,\nu_i}(u, b)$ , είναι συνεχείς στο σημείο  $u = b$  και συγκρίνοντας τις εξισώσεις (5.53) και (5.54) βρίσκουμε ότι

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \phi_{i,j,\nu_i}(u, b) \right|_{u=b} = 0, \quad \nu_i = 1, \dots, n_i - 1, i, j \in E. \quad (5.55)$$

Ακόμη, για  $\nu_i = n_i$ , χρησιμοποιώντας την ίδια λογική ακολουθία όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι για  $i, j \in E$

$$-(\lambda_i + a_i + \delta) \phi_{i,j,n_i}(b, b) + \lambda_i \int_0^b \phi_{i,j,1}(b-x, b) f_i(x) dx + \lambda_i w_i(b) 1_{(i=j)} + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j}(b, b) = 0. \quad (5.56)$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας  $u = b$  στην εξίσωση (5.50) παίρνουμε άμεσα ότι

$$\begin{aligned} & \left( c \frac{\partial}{\partial u} - (\lambda_i + a_i + \delta) \right) \phi_{i,j,n_i}(b, b) + \lambda_i \int_0^b \phi_{i,j,1}(b-x, b) f_i(x) dx + \lambda_i w_i(b) 1_{(i=j)} \\ & + \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \phi_{k,j,1}(b, b) = 0, \quad i, j \in E. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j,n_i}(u, b)$ , είναι συνεχείς στο σημείο  $u = b$  και συγκρίνοντας τις εξισώσεις (5.56) και (5.57), παίρνουμε άμεσα ότι η εξίσωση (5.55) είναι επίσης αληθής για  $\nu_i = n_i$ ,  $i \in E$ . Για  $\nu_i = 1$ , η εξίσωση (5.55) δίνει ακριβώς την οριακή συνθήκη της σχέσης (5.48) για  $\ell_i = 1$ . Τώρα, προκειμένου να δείξουμε ότι για  $\ell_i = 2, \dots, n_i$  οι οριακές συνθήκες της σχέσης (5.48) είναι αληθείς, αρκεί να εκφράσουμε την εξίσωση (5.55), για  $\nu_i = 2, \dots, n_i$ , σε όρους των συναρτήσεων  $\phi_{i,j,1}(u, b) = \phi_{i,j}(u, b)$ . Αυτό γίνεται εύκολα μέσω της εξίσωσης (5.51). ■

**Παρατήρηση 5.6.** (i) Για  $n_i = 1$  για κάθε  $i \in E$ , είναι εύκολο να δούμε ότι το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του Θεωρήματος 5.5 ανάγεται στην εξίσωση (1.76) του Θεωρήματος 1.28 που είναι το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

(ii) Για  $m = 1$ , το μοντέλο Markov-modulated Erlang ανάγεται στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας με Erlang( $n_1, \lambda_1$ ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.



Εφόσον για  $m = 1$  ισχύει ότι  $\phi(u, b) = \phi_1(u, b) = \phi_{1,1}(u, b)$ , είναι εύκολο να δούμε πως το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (5.47) ανάγεται στην εξίσωση (1.36) του Πορίσματος 1.5.

Η λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.47) του Θεωρήματος 5.5, για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ , βρίσκεται με βάση το αντίστοιχο ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα εξισώσεων. Έτσι, για  $u \geq 0$ , θεωρούμε το ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα, ως προς  $v_i(u)$ ,  $i \in E$ ,

$$\left( \lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^{n_i} v_i(u) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{\ell=0}^{n_i-1} \lambda_i^{n_i-\ell-1} \left( \lambda_i + a_i + \delta - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^\ell v_k(u) - \lambda_i^{n_i} \int_0^u v_i(u-x) f_i(x) dx = 0. \quad (5.58)$$

Τότε, η λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.47), εκφράζεται σαν ένα άθροισμα μιας μερικής λύσης του συστήματος (5.47) (αυτή είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα περιβάλλον χωρίς την ύπαρξη της μερισματικής στρατηγικής, που αναλύθηκε διεξοδικά στην προηγούμενη ενότητα) συν ένα γραμμικό συνδυασμό από τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58). Με βάση τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, από τη μορφή του παραπάνω (ομογενούς) συστήματος, οι αρχικές συνθήκες  $v_i(0), v_i'(0), \dots, v_i^{(n_i-1)}(0)$ ,  $\forall i \in E$ , προσδιορίζουν (μονοσήμαντα) τις λύσεις  $\bar{v}(u) = (v_1(u), v_2(u), \dots, v_m(u))^T$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $n_0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ , με  $n_0 = 0$ , και για την προαναφερόμενη διάταξη θεωρούμε τα ακόλουθα  $m \times 1$  διανύσματα, για  $i \in E$

$$\bar{v}_{j,\rho_i}(u) = (v_{1,j;\rho_i}(u), v_{2,j;\rho_i}(u), \dots, v_{m,j;\rho_i}(u))^T, \quad \rho_i = n_{i-1}, n_{i-1}+1, \dots, n_i-1, j = i, \dots, m,$$

να είναι οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58), με αρχικές τιμές

$$\bar{v}_{j,\rho_i}^{(\rho_i)}(0) = \frac{d^{\rho_i}}{du^{\rho_i}} \bar{v}_{j,\rho_i}(u) \Big|_{u=0} \begin{cases} \bar{e}_j, & \rho_i = n_{i-1}, n_{i-1}+1, \dots, n_i-1, j = i, \dots, m, i \in E, \\ \mathbf{0}^T, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (5.59)$$

όπου  $\bar{e}_j$  είναι ένα  $m$ -διάστατο διάνυσμα στήλη με μόνο μη-μηδενικό στοιχείο το 1 στη  $j$ -γραμμή.

Τότε, η λύση του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58) είναι της ακόλουθης μορφής

$$v_i(u) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{\rho_\ell=n_{\ell-1}}^{n_\ell-1} \sum_{k=\ell}^m v_k^{(\rho_\ell)}(0) v_{i,k;\rho_\ell}(u), \quad u \geq 0, i \in E.$$

Ισοδύναμα η παραπάνω σχέση γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\vec{v}(u) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{\rho_\ell=n_{\ell-1}}^{n_\ell-1} \sum_{k=\ell}^m v_k^{(\rho_\ell)}(0) \vec{v}_{k,\rho_\ell}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\{\vec{v}_{k,\rho_\ell}(u), \rho_\ell = n_{\ell-1}, n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell - 1, k = \ell, \dots, m, \ell \in E\}$ , είναι στο σύνολο  $\sum_{k=1}^m (n_k - n_{k-1})(m - (k - 1)) = n = \sum_{i=1}^m n_i$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις το ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58) και  $v_k^{(\rho_\ell)}(0) = \frac{d^{\rho_\ell}}{du^{\rho_\ell}} v_k(u)|_{u=0}$ ,  $\rho_\ell = n_{\ell-1}, n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell - 1, k = \ell, \dots, m, \ell \in E$ .

Συμπεπώς, από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, έπεται ότι η λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.47), για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\phi_{i,j}(u, b) = \phi_{i,j}(u) + \sum_{\ell=1}^m \sum_{\rho_\ell=n_{\ell-1}}^{n_\ell-1} \sum_{k=\ell}^m \eta_{k,j;\rho_\ell}(b) v_{i,k;\rho_\ell}(u), \quad 0 \leq u \leq b, i, j \in E, \quad (5.60)$$

όπου  $\eta_{k,j;\rho_\ell}(b)$  είναι κάποιοι σταθεροί αριθμοί οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 5.5. Επιπλέον, αναπτύσσοντας το άθροισμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (5.60) ως προς  $\ell$  και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες των λύσεων του ομογενούς συστήματος, που δίνονται από τη σχέση (5.59), δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι  $\eta_{k,j;\rho_\ell}(b) = \phi_{k,j}^{(\rho_\ell)}(0, b) - \phi_{k,j}^{(\rho_\ell)}(0)$ ,  $\rho_\ell = n_{\ell-1}, n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell - 1, k = \ell, \dots, m, \ell \in E, j \in E$ . Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (5.48) του Θεωρήματος 5.5, οι ποσότητες  $\eta_{k,j;\rho_\ell}(b)$  προσδιορίζονται λύνοντας το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\phi_{i,j}^{(\ell_i)}(b) + \sum_{\ell=1}^m \sum_{\rho_\ell=n_{\ell-1}}^{n_\ell-1} \sum_{k=\ell}^m \eta_{k,j;\rho_\ell}(b) (v_{i,k;\rho_\ell})^{(\ell_i)}(b) = 0, \quad \ell_i = 1, \dots, n_i, i, j \in E. \quad (5.61)$$

Σε μορφή πινάκων η εξίσωση (5.60) γράφεται ως

$$\phi(u, b) = \phi(u) + \sum_{\ell=1}^m \sum_{\rho_\ell=n_{\ell-1}}^{n_\ell-1} \sum_{k=\ell}^m \vec{v}_{k,\rho_\ell}(u) \vec{\eta}_{k,\rho_\ell}(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (5.62)$$

με  $\phi(u, b) = (\phi_{i,j}(u, b))_{i,j=1}^m$ , και  $\vec{\eta}_{k,\rho_\ell}(b) = (\eta_{k,1;\rho_\ell}(b), \eta_{k,2;\rho_\ell}(b), \dots, \eta_{k,m;\rho_\ell}(b))$ .

Συμπερασματικά, από την εξίσωση (5.62), είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ ,  $i, j \in E$ , εξαρτάται άμεσα από τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu στο αντίστοιχο μοντέλο κινδύνου χωρίς την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος,  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j \in E$ , οι οποίες μελετήθηκαν εκτενώς στην Ενότητα 5.2, καθώς επίσης και από τις λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58),  $v_{i,k;\rho_\ell}(u)$ ,  $\rho_\ell = n_{\ell-1}, n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell - 1, k = \ell, \dots, m, \ell \in E, i \in E$ . Επομένως το υπόλοιπο

μέρος αυτής της ενότητας αφιερώνεται στον υπολογισμό των γραμμικώς ανεξάρτητα λύσεων ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58), οι οποίες βρίσκονται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace.

Έστω  $\widehat{v}_{i,j;\rho_\ell}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v_{i,j;\rho_\ell}(x) dx$  να είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $v_{i,j;\rho_\ell}(u)$ , για  $\rho_\ell = n_{\ell-1}, n_{\ell-1} + 1, \dots, n_\ell - 1$ ,  $j = \ell, \dots, m$ ,  $\ell \in E$ ,  $i \in E$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης (5.58), αφού αντικαταστήσουμε την συνάρτηση  $v_i(u)$ , με την συνάρτηση  $v_{i,j;\rho_\ell}(u)$  βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} & \left( \gamma_{\delta,i}^{n_i}(s) - \lambda_i^{n_i} \widehat{f}_i(s) \right) \widehat{v}_{i,j;\rho_\ell}(s) - \nu_{\delta,i}(s) \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \widehat{v}_{k,j;\rho_\ell}(s) \\ &= \sum_{k_i=0}^{n_i-1} g_{i;n_i-k_i-1}(s) (v_{i,j;\rho_\ell})^{(k_i)}(0) - \sum_{k=1, k \neq i}^m a_{ik} \sum_{k_i=0}^{n_i-2} h_{i;n_i-k_i-2}(s) (v_{k,j;\rho_\ell})^{(k_i)}(0). \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε  $\mathbf{v}_{\rho_i}(u) = (\bar{v}_{1,\rho_i}(u) 1_{(\rho_i \leq n_1-1)}, \dots, \bar{v}_{m,\rho_i}(u) 1_{(\rho_i \leq n_m-1)})$  για  $\rho_i = n_{\rho_i-1}, n_{\rho_i-1} + 1, \dots, n_{\rho_i} - 1$ ,  $i \in E$ , να είναι ένας  $m \times m$  πίνακας όπου οι (μη-μηδενικές) στήλες του αποτελούν μερικές του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58). Επίσης, θεωρούμε  $\widehat{\mathbf{v}}_{\rho_i}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{v}_{\rho_i}(x) dx$  να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του πίνακα  $\mathbf{v}_{\rho_i}(u)$  (όπου τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_{\rho_i}(u)$  είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις). Τότε, με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (5.63) γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{A}_\delta(s) \widehat{\mathbf{v}}_{\rho_i}(s) = \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \Delta_k(s) (\mathbf{v}_{\rho_i})^{(k)}(0), \quad \Re(s) \geq 0, \quad \rho_i = n_{i-1}, n_{i-1} + 1, \dots, n_i - 1, i \in E, \quad (5.63)$$

με  $(\mathbf{v}_{\rho_i})^{(k)}(0) = (\bar{v}_{1,\rho_i}^{(k)}(0) 1_{(\rho_i, k \leq n_1-1)}, \dots, \bar{v}_{m,\rho_i}^{(k)}(0) 1_{(\rho_i, k \leq n_m-1)})$ , όπου  $1_{(\rho_i, k \leq n_i-1)} = 1_{(\rho_i \leq n_i-1)} 1_{(k \leq n_i-1)}$ ,  $i \in E$ , και  $\mathbf{A}_\delta(s)$ ,  $\Delta_k(s)$  είναι οι πίνακες της Ενότητας 5.2.

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (5.59), η εξίσωση (5.63) απλοποιείται σε

$$\mathbf{A}_\delta(s) \widehat{\mathbf{v}}_{\rho_i}(s) = \Delta_{\rho_i}(s) \mathbf{G}_{\rho_i}, \quad \rho_i = n_{i-1}, n_{i-1} + 1, \dots, n_i - 1, i \in E, \quad (5.64)$$

όπου  $\mathbf{G}_{\rho_i} = (\bar{\mathbf{e}}_1 1_{(\rho_i \leq n_1-1)}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_m 1_{(\rho_i \leq n_m-1)})$  ένας πίνακας διαστάσεων  $m \times m$ . Σημειώνουμε ότι για  $\rho_i = 0$ ,  $\mathbf{G}_{\rho_i}$  ανάγεται στον ταυτοτικό  $m \times m$  πίνακα,  $\mathbf{I}$ .

Επιπροσθέτως, ανακλώντας από το Θεώρημα 5.2 το γεγονός ότι ο  $\mathbf{A}_\delta(s)$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, συνεπάγεται ότι η εξίσωση (5.64) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\rho_i}(s) = \frac{\mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_{\rho_i}(s) \mathbf{G}_{\rho_i}}{\det \mathbf{A}_\delta(s)}, \quad \rho_i = n_{i-1}, n_{i-1} + 1, \dots, n_i - 1, i \in E. \quad (5.65)$$

Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (5.65), μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{v}_{\rho_i}(u)$ . Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός Laplace

αντιστρέφεται σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Μία από αυτές τις περιπτώσεις (η πιο γενική) είναι να υποθέσουμε ότι τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Έτσι υποθέτοντας ότι οι σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων,  $f_i$ , για  $i \in E$ , έχουν μετασχηματισμό Laplace όπως και στην εξίσωση (5.35), τότε κάθε στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$ , και συνεπώς και κάθε στοιχείο του αντίστροφου πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^{-1}(s)$ , είναι της μορφής ηλίχιων πολυωνύμων. Συνεπώς, οι μερικές λύσεις  $v_{i,j;\rho_\ell}(u)$  μπορούν να υπολογισθούν, όταν τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (5.65) χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων.

**Πρόταση 5.4.** Έστω  $n = \sum_{i=1}^n n_i$  και  $K_m = \sum_{i=1}^m k_i$ . Εάν οι μετασχηματισμοί Laplace,  $\hat{f}_i(s)$ ,  $i \in E$ , των μεγεθών αποζημιώσεων έχουν τη μορφή ηλίχιου πολυωνύμων όπως και στην εξίσωση (5.35), τότε οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58),  $v_{i,j;\rho_\ell}(u)$  για  $\rho_\ell = n_{\rho_\ell-1}, n_{\rho_\ell-1} + 1, \dots, n_{\rho_\ell} - 1$ ,  $j = \ell, \dots, m$ ,  $\ell \in E$ ,  $i \in E$ , δίνονται από τη σχέση

$$v_{i,j;\rho_\ell}(u) = \sum_{k=1}^n a_{i,j;\rho_\ell}(k) e^{r_k u} + \sum_{l=1}^{K_m} b_{i,j;\rho_\ell}(l) e^{-R_l u}, \quad u \geq 0, \quad (5.66)$$

με

$$a_{i,j;\rho_\ell}(k) = \frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(r_k) (\mathbf{A}_\delta^*(r_k) \Delta_{\rho_\ell}(r_k) \mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}}{c^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (r_k - r_j) \prod_{j=1}^{K_m} (r_k + R_j)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$b_{i,j;\rho_\ell}(l) = \frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(-R_l) (\mathbf{A}_\delta^*(-R_l) \Delta_{\rho_\ell}(-R_l) \mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}}{c^n (-1)^n \prod_{j=1}^n (r_j + R_l) \prod_{j=1, j \neq k}^{K_m} (R_j - R_l)}, \quad l = 1, \dots, K_m,$$

όπου  $(\mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_{\rho_\ell}(s) \mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}$  είναι το  $(i, j)$ -στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_{\rho_\ell}(s) \mathbf{G}_{\rho_\ell}$ , καθώς και  $r_k$ , με  $\Re(r_k) \geq 0$  για  $k = 1, \dots, n$  και  $-R_k$ , με  $\Re(R_k) \geq 0$  για  $k = 1, \dots, K_m$ , είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ .

*Απόδειξη.* Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (5.65) με  $\prod_{i=1}^m p_{k_i}(s)$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.37) έχουμε ότι

$$\hat{v}_{i,j;\rho_\ell}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m p_{k_i}(s) (\mathbf{A}_\delta^*(s) \Delta_{\rho_\ell}(s) \mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}}{c^n \prod_{i=1}^n (s - r_i) \prod_{i=1}^{K_m} (s + R_i)}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\hat{v}_{i,j;\rho_\ell}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{i,j;\rho_\ell}(k)}{s - r_k} + \sum_{l=1}^{K_m} \frac{b_{i,j;\rho_\ell}(l)}{s + R_l},$$

απ' όπου αντιστρέφοντας ως προς  $s$  παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

#### 5.4 Ένα Markov-modulated Erlang μοντέλο κινδύνου με δύο καταστάσεις

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu όταν το εξωτερικό περιβάλλον είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία με δύο καταστάσεις. Για αυτό τον λόγο υποθέτουμε για τη Μαρκοβιανή διαδικασία  $\{J(t), t \geq 0\}$  που ορίστηκε στην Ενότητα 5.2 ότι έχει χώρο καταστάσεων το σύνολο  $\{1, 2\}$ , δηλ.  $m = 2$ . Σε αυτή την περίπτωση η  $\{J(t), t \geq 0\}$  έχει πίνακα τάσης που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι  $n_1 = 1$  και  $n_2 = 2$ , το οποίο σημαίνει ότι στην κατάσταση 1 οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων κατανέμονται σύμφωνα με μία εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda_1$ , ενώ στην κατάσταση 2 οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων κατανέμονται σύμφωνα με μια Erlang( $2, \lambda_2$ ) κατανομή. Επίσης, θεωρούμε ότι στην κατάσταση 1 τα μεγέθη των αποζημιώσεων έχουν σ.π.π.  $f_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ , ενώ στην κατάσταση 2 τα μεγέθη των αποζημιώσεων έχουν σ.π.π.  $f_2(x) = \beta e^{-\beta x}$ , με  $\alpha, \beta > 0$  και  $x \geq 0$ . Τότε, με βάση της παραπάνω υποθέσεις ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s)$  έχει την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \begin{pmatrix} \gamma_{\delta,1}(s) - \frac{\lambda_1 \alpha}{s+\alpha} & -a_1 \\ -a_2(\lambda_2 + \gamma_{\delta,2}(s)) & \gamma_{\delta,2}(s) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{s+\beta} \end{pmatrix},$$

με  $\gamma_{\delta,i}(s) = \lambda_i + a_i + \delta - cs$ . Επιπλέον, από το Θεώρημα 5.2, η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ , έχει ακριβώς τρεις 3 ρίζες,  $r_i \equiv r_i(\delta)$  με  $\Re(r_i) > 0$  για  $i = 1, 2, 3$ , ενώ ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta^*(s) = \begin{pmatrix} \gamma_{\delta,2}(s) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{s+\beta} & a_1 \\ a_2(\lambda_2 + \gamma_{\delta,2}(s)) & \gamma_{\delta,1}(s) - \frac{\lambda_1 \alpha}{s+\alpha} \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, εφόσον  $f_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$  και  $f_2(x) = \beta e^{-\beta x}$ , οι πίνακες  $\mathbf{\Delta}_0(s)$  και  $\mathbf{\Delta}_1(s)$ , έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{\Delta}_0(s) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ a_2 c & c^2 s - 2c(\lambda_2 + a_2 + \delta) \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{\Delta}_1(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Ακόμη, στηριζόμενοι στην Πρόταση 5.2 οι πίνακες των αρχικών τιμών  $\phi(0) = (\phi_{i,j}(0))_{i,j=1}^2$  και  $\phi_{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi'_{2,1}(0) & \phi'_{2,2}(0) \end{pmatrix}$  υπολογίζονται λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_0)[r_1, r_2] \phi(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_1)[r_1, r_2] \phi_{(1)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \tilde{\omega})[r_1, r_2] &= 0, \\ (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_0)[r_1, r_2, r_3] \phi(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \Delta_1)[r_1, r_2, r_3] \phi_{(1)}(0) + (\mathbf{A}_\delta^* \tilde{\omega})[r_1, r_2, r_3] &= 0, \end{aligned}$$

απόπου μετά από κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} c \left( c(\gamma_{\delta,2}(r_2) + \gamma_{\delta,1}(r_1)) + \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^2 (\beta + r_i)} \right) \phi_{1,1}(0) + a_1 c^2 \phi_{2,1}(0) + \lambda_1 (\gamma_{\delta,2}(r_1)^2 \\ - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\beta + r_1}) \hat{w}_1[r_1, r_2] - \lambda_1 \left( c(\gamma_{\delta,2}(r_2) + \gamma_{\delta,2}(r_1)) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^2 (\beta + r_i)} \right) \hat{w}_1(r_2) &= 0, \\ \left( c(\gamma_{\delta,2}(r_2) + \gamma_{\delta,2}(r_1)) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^2 (\beta + r_i)} \right) \phi_{1,2}(0) + a_1 c^2 \phi_{2,2}(0) + a_1 \lambda_2^2 \hat{w}_2[r_1, r_2] &= 0, \\ a_2 c \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \phi_{1,1}(0) + \left( c^2 (\gamma_{\delta,1}(r_1) - \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha + r_1}) - (c^2 r_2 - 2c(\lambda_2 + a_2 + \delta)) \right) \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \\ \times \phi_{2,1}(0) - c^2 \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \phi'_{2,1}(0) + a_2 \lambda_1 (\lambda_2 + \gamma_{\delta,2}(r_1)) \hat{w}_1[r_1, r_2] - \lambda_1 a_2 c \hat{w}_1(r_2) &= 0, \\ a_2 c \frac{\lambda_1 \alpha \phi_{1,2}(0)}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} + \left[ c^2 (\gamma_{\delta,1}(r_1) - \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha + r_1}) - (c^2 r_2 - 2c(\lambda_2 + a_2 + \delta)) \right] \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \phi_{2,2}(0) \\ - c^2 \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \phi'_{2,2}(0) + \lambda_2^2 (\gamma_{\delta,1}(r_1) - \frac{\lambda_1 \alpha}{\alpha + r_1}) \hat{w}_2[r_1, r_2] - \lambda_2^2 \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \hat{w}_2(r_2) &= 0, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} -c \left( c^2 - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)} \right) \phi_{1,1}(0) + \lambda_1 \left( \gamma_{\delta,2}^2(r_1) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\beta + r_1} \right) \hat{w}_1[r_1, r_2, r_3] - (c\gamma_{\delta,2}(r_2) \\ + \gamma_{\delta,2}(r_1)) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^2 (\beta + r_i)} \lambda_1 \hat{w}_1[r_2, r_3] + \lambda_1 \left( c^2 - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)} \right) \hat{w}_1(r_3) &= 0, \\ -c \left( c^2 - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)} \right) \phi_{2,1}(0) + a_1 \lambda_2^2 \hat{w}_2[r_1, r_2, r_3] &= 0. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.44) του Θεωρήματος 5.4 δίνουμε μια αναλυτική έκφραση για τον πίνακα των συναρτήσεων Gerber-Shiu,  $\phi(u) = (\phi_{i,j}(u))_{i,j=1,2}^2$ .

**Πρόταση 5.5.** Για  $m = 2$ ,  $n_1 = 1$ , και  $n_2 = 2$ , εάν τα μεγέθη των αποζημιώσεων  $f_1$  και  $f_2$  είναι εκθετικά κατανομημένα με παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα, τότε ο πίνακας των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής,  $\phi(u)$ , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{c^3} \sum_{\ell=1}^2 d_\ell \left[ e^{-R_\ell u} \left( \mathbf{H}_1(-R_\ell) \phi(0) + \mathbf{H}_2(-R_\ell) \phi_{(1)}(0) \right) + e^{-R_\ell u} \star \mathbf{H}_3(-R_\ell) \right] \\ &+ \frac{1}{c^3} \mathbf{H}_4(u), \quad u \geq 0, \end{aligned} \tag{5.68}$$

όπου  $\phi(u) = (\phi_{i,j}(u))_{i,j=1,2}$  και  $\mathbf{H}_k(-R_\ell) = (h_{k,ij}(-R_\ell))_{i,j=1}^2$ , για  $k = 1, 2, 3$ ,  $2 \times 2$  πίνακες με στοιχεία

$$\begin{aligned} h_{1,11}(-R_\ell) &= \frac{-\lambda_2^2 c \beta}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)(\beta - R_\ell)}, \quad h_{1,12}(-R_\ell) = 0, \\ h_{1,21}(-R_\ell) &= \frac{\lambda_1 a_2 c \alpha}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)(\alpha - R_\ell)}, \\ h_{1,22}(-R_\ell) &= \frac{-\lambda_1 \alpha (c^2 R_\ell + 2c(\lambda_2 + a_2 + \delta))}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)(\alpha - R_\ell)} - \frac{\lambda_1 c^2 \alpha}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)}, \\ h_{2,11}(-R_\ell) &= h_{2,12}(-R_\ell) = h_{2,21}(-R_\ell) = 0, \quad h_{2,22}(-R_\ell) = \frac{\lambda_1 c^2 \alpha}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)(\alpha - R_\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{3,11}(-R_\ell) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \beta w_1(u)}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)(\beta - R_\ell)} + h_{4,11}(u) \\ h_{3,12}(-R_\ell) &= h_{4,12}(u), \\ h_{3,21}(-R_\ell) &= h_{4,21}(u), \\ h_{3,22}(-R_\ell) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \alpha w_2(u)}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)(\alpha - R_\ell)} + h_{4,22}(u), \end{aligned}$$

με  $h_{4,ij}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$  να είναι τα στοιχεία του  $2 \times 2$  πίνακα  $\mathbf{H}_4(u)$  που δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} h_{4,11}(u) &= -\lambda_1 \left( \gamma_{\delta,2}^2(r_1) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\beta + r_1} \right) T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} w_1(u) - \lambda_1 \left[ c(\gamma_{\delta,2}(r_2) + \gamma_{\delta,2}(r_1)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^2 (\beta + r_i)} \right] T_{r_2} T_{r_3} w_1(u) - \lambda_1 \left( c^2 - \frac{\lambda_2^2 \beta}{\prod_{i=1}^3 (\beta + r_i)} \right) T_{r_3} w_1(u), \\ h_{4,12}(u) &= -a_1 \lambda_2^2 T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} w_2(u), \\ h_{4,21}(u) &= -\lambda_1 a_2 (\lambda_2 + \gamma_{\delta,2}(r_1)) T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} w_1(u) - a_2 c \lambda_1 T_{r_2} T_{r_3} w_1(u), \\ h_{4,22}(u) &= -\lambda_2^2 \left( \gamma_{\delta,1}(r_1) - \frac{\lambda_1 \alpha}{r_1 + \alpha} \right) T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} w_2(u) - \lambda_2^2 \left( c - \frac{\lambda_1 \alpha}{\prod_{i=1}^2 (\alpha + r_i)} \right) \\ &\quad \times T_{r_2} T_{r_3} w_2(u) + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \alpha}{\prod_{i=1}^3 (\alpha + r_i)} T_{r_3} w_2(u), \end{aligned}$$

ενώ οι  $2 \times 2$  πίνακες των αρχικών τιμών  $\phi(0)$  και  $\phi_{(1)}(0)$  υπολογίζονται λύνοντας γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (5.67).

Στη συνέχεια θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος σε ένα επίπεδο  $b$ , η οποία αναλύθηκε διεξοδικά στην Ενότητα 5.3. Τότε, σύμφωνα με την εξίσωση (5.62) ο πίνακας των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποιής,  $\phi(u, b)$ , για το Μαρκον-

modulated Erlang μοντέλο κινδύνου με δύο καταστάσεις, δίνεται από τη σχέση

$$\phi(u, b) = \phi(u) + \bar{v}_{1,0}(u)\bar{\eta}_{1,0}(b) + \bar{v}_{2,0}(u)\bar{\eta}_{2,0}(b) + \bar{v}_{2,1}(u)\bar{\eta}_{2,1}(b), \quad 0 \leq u \leq b, \quad (5.69)$$

όπου τα διανύσματα  $\bar{v}_{1,0}(u) = (v_{1,1,0}(u), v_{2,1,0}(u))^T$ ,  $\bar{v}_{2,0}(u) = (v_{1,2,0}(u), v_{2,2,0}(u))^T$  και  $\bar{v}_{2,1}(u) = (v_{1,2,1}(u), v_{2,2,1}(u))^T$  είναι οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (5.58) για  $m = 2$ ,  $n_1 = 1$  και  $n_2 = 2$ , ενώ τα διανύσματα  $\bar{\eta}_{1,0}(b) = (\eta_{1,1,0}(b), \eta_{1,2,0}(b))$ ,  $\bar{\eta}_{2,0}(b) = (\eta_{2,1,0}(b), \eta_{2,2,0}(b))$ , και  $\bar{\eta}_{2,1}(b) = (\eta_{2,1,1}(b), \eta_{2,2,1}(b))$  μπορούν να βρεθούν ως λύσεις του συστήματος (5.61). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.4, οι προαναφερόμενες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (5.58), βρίσκονται με βάση την εξίσωση (5.66), όπου οι συντελεστές  $a_{i,j;\rho_\ell}(k)$  και  $b_{i,j;\rho_\ell}(\ell)$  υπολογίζονται, όταν  $f_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$  και  $f_2(x) = \beta e^{-\beta x}$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,  $x \geq 0$ , από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_{i,j;\rho_\ell}(k) &= \frac{(r_k + \alpha)(r_k + \beta)(\mathbf{A}_\delta^*(r_k)\Delta_{\rho_\ell}(r_k)\mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}}{c^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k \neq j} (r_k - r_j) \prod_{j=1}^2 (r_k + R_i)} & k = 1, 2, 3, \rho_1 = 0, \rho_2 = 1, \ell = 1, 2 \\ b_{i,j;\rho_\ell}(\ell) &= -\frac{(\alpha - R_i)(\beta - R_i)(\mathbf{A}_\delta^*(-R_i)\Delta_{\rho_\ell}(-R_i)\mathbf{G}_{\rho_\ell})_{i,j}}{c^3 \prod_{j=1}^3 (R_k + r_j) \prod_{j=i,j \neq \ell} (R_i - R_i)} & l = 1, 2, \rho_1 = 0, \rho_2 = 1, \ell = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

με

$$\mathbf{A}_\delta^*(s)\Delta_0(s)\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 c - (\gamma_{\delta,2}^2(s) - \frac{\lambda_2^2 \beta}{s+\beta}) & a_1 (c^2 s - 2c\gamma_{\delta,2}(0)) \\ a_2 c \left( \gamma_{\delta,1}(s) - \frac{\lambda_1 \alpha}{s+\alpha} - \lambda_2 - \gamma_{\delta,2}(s) \right) & (\gamma_{\delta,1}(s) - \frac{\lambda_1 \alpha}{s+\alpha}) (c^2 s - 2c\gamma_{\delta,2}(0)) \end{pmatrix},$$

και

$$\mathbf{A}_\delta^*(s)\Delta_1(s)\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 c^2 \\ 0 & \left( \gamma_{\delta,1}(s) - \frac{\lambda_1 \alpha}{s+\alpha} \right) c^2 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, προκειμένου να γίνουν τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 5.2 και 5.3 περισσότερο κατανοητά, στη συνέχεια δίνουμε, σύντομα, κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Γι' αυτό το σκοπό θεωρούμε το σύνολο των παραμέτρων:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda_1 = 0.3$ ,  $\lambda_2 = 0.7$ ,  $c = 5$ ,  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{2}{3}$  και  $\delta = 0.02$ . Τότε, η Μαρκοβιανή διαδικασία  $\{J(t), t \geq 0\}$  έχει πίνακα τάσης

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix},$$

και αρχική κατανομή  $\pi = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . Επιπλέον για τις παραπάνω προεπιλεγμένες παραμέτρους τα μεγέθη των ζημιών, για κάθε μία από τις δύο καταστάσεις της Μαρκοβιανής διαδικασίας, έχουν μετασχηματισμούς Laplace που δίνονται από τις σχέσεις  $\hat{f}_1(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $\hat{f}_2(s) = \frac{2}{s+2}$ ,  $s \geq 0$ .



**Παράδειγμα 5.1.** [Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας] Έστω  $w(s, t) = 1$ . Τότε, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$ , της εξίσωσης (5.5), ανάγονται σε  $\mathbb{E}_i(e^{-\delta T} 1_{(T < \infty), J(T)=j}) | U(0) = u$ ), που είναι οι μετασχηματισμοί Laplace του χρόνου χρεοκοπίας  $T$  στο σημείο  $\delta$ , τους οποίους θα συμβολίζουμε με  $\varphi_{i,j}(u)$ . Επιπλέον για το σύνολο των παραμέτρων που ορίστηκε προηγουμένως, ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \begin{pmatrix} 0.65333 - 5s - \frac{0.3}{s+1} & -\frac{1}{3} \\ -1.39111 + \frac{10}{3}s & (1.38666 - 5s)^2 - \frac{0.98}{s+2} \end{pmatrix}.$$

Βασίζομενοι στον παραπάνω πίνακα, η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$ , έχει ακριβώς τρεις πραγματικές θετικές ρίζες  $r_1 = 0.00420$ ,  $r_2 = 0.21372$ ,  $r_3 = 0.40351$  και δύο αρνητικές πραγματικές ρίζες  $-R_1 = 0.94372$ ,  $-R_2 = 1.99238$ .

Έστω  $\varphi(u) = (\varphi_{i,j}(u))_{i,j=1,2}$ ,  $\varphi_{(1)}(0) = (\varphi'_{i,j}(0) 1_{(1 \leq n_i - 1)})_{i,j=1,2}$  να είναι οι πίνακες των αρχικών τιμών του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Αρχικά χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τους πίνακες  $\varphi(0)$  και  $\varphi_{(1)}(0)$ . Εφόσον για  $w(s, t) = 1$ ,  $w_i(u) = \bar{F}_i(u)$ ,  $\hat{w}_i(s) = T_s \bar{F}_i(0)$ ,  $i \in E$ ,  $T_{r_k} w_1(u) = \frac{e^{-\alpha u}}{r_k + \alpha}$ ,  $T_{r_k} w_2(u) = \frac{e^{-\beta u}}{r_k + \beta}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , λύνοντας το γραμμικό σύστημα (5.67) βρίσκουμε ότι

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0.05628 & 0.000123 \\ 0.006974 & 0.003813 \end{pmatrix} \text{ και } \varphi_{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.006529 & -0.00759 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας  $w(x, y) = 1$  στην εξίσωση (5.68) της Πρότασης 5.5, ο πίνακας των μετασχηματισμών Laplace του χρόνου χρεοκοπίας βρίσκουμε ότι είναι της μορφής

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0.05628 & 0.66067 \times 10^{-5} \\ 0.00702 & 0.82391 \times 10^{-5} \end{pmatrix} e^{-0.94372u} + \begin{pmatrix} -0.15481 \times 10^{-5} & 0.00012 \\ -0.000051 & 0.00381 \end{pmatrix} e^{-1.99238u},$$

φορ  $u \geq 0$ .

Τώρα, θεωρούμε την προαναφερόμενη στρατηγική σταθερού μερίσματος σε ένα επίπεδο  $b \geq u$ . Για  $w(x, y) = 1$ , οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ ,  $i, j = 1, 2$ , της εξίσωσης (5.46), ανάγονται σε  $\mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} 1_{(T_b < \infty), J(T_b)=j}) | U_b(0) = u$ ), που είναι οι μετασχηματισμοί Laplace του χρόνου χρεοκοπίας  $T_b$  στο σημείο  $\delta$ , κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, τους οποίους θα συμβολίζουμε με  $\varphi_{i,j}(u, b)$ . Επιπλέον θεωρούμε  $\varphi(u, b) = (\varphi_{i,j}(u, b))_{i,j=1,2}$  να είναι ο πίνακας των προαναφερόμενων συναρτήσεων. Με βάση την εξίσωση (5.69), αρχικά χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τα διανύσματα  $\bar{v}_{1,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,0}(u)$  και  $\bar{v}_{2,1}(u)$ . Θεωρώντας το επίπεδο  $b = 4$ , αντικαθιστώντας το προεπιλεγμένο σύνολο των

παραμέτρων στην εξίσωση (5.70) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.66), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{v}_{1,0}(u) &= \begin{pmatrix} 0.58665 \\ 0.58710 \end{pmatrix} e^{0.00420u} + \begin{pmatrix} 0.59672 \\ -1.1859 \end{pmatrix} e^{0.21372u} + \begin{pmatrix} -0.12795 \\ 0.60570 \end{pmatrix} e^{0.40351u} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0.05542 \\ 0.00691 \end{pmatrix} e^{-0.94372u} - \begin{pmatrix} 0.62926 \times 10^{-6} \\ -0.00002062 \end{pmatrix} e^{-1.99238u}, \\ \bar{v}_{2,0}(u) &= \begin{pmatrix} 0.46646 \\ 0.46681 \end{pmatrix} e^{0.00420u} + \begin{pmatrix} -0.60148 \\ 1.19533 \end{pmatrix} e^{0.21372u} + \begin{pmatrix} 0.13897 \\ -0.65786 \end{pmatrix} e^{0.40351u} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0.003831 \\ 0.000478 \end{pmatrix} e^{-0.94372u} - \begin{pmatrix} 0.00011609 \\ 0.0038022 \end{pmatrix} e^{-1.99238u}, \\ \bar{v}_{2,1}(u) &= - \begin{pmatrix} 0.84739 \\ 0.84803 \end{pmatrix} e^{0.00420u} + \begin{pmatrix} 1.7641 \\ -3.5059 \end{pmatrix} e^{0.21372u} + \begin{pmatrix} -0.91936 \\ 4.3521 \end{pmatrix} e^{0.40351u} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0.0025569 \\ 0.0003192 \end{pmatrix} e^{-0.94372u} + \begin{pmatrix} 0.00004557 \\ 0.0014928 \end{pmatrix} e^{-1.99238u}.\end{aligned}$$

Ακόμη, αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\varphi(u)$ , που υπολογίσαμε παραπάνω, και τα διανύσματα  $\bar{v}_{1,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,1}(u)$  στην εξίσωση (5.61), λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τις παραπάνω αντικαταστάσεις, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{1,0}(4) &= \begin{pmatrix} 0.15820 & 0.0001636 \end{pmatrix}, & \bar{\eta}_{2,0}(4) &= \begin{pmatrix} 0.16414 & -0.0000831 \end{pmatrix}, \\ \bar{\eta}_{2,1}(4) &= \begin{pmatrix} 0.0027950 & 0.07128 \times 10^{-5} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.69), βρίσκουμε για  $b = 4$  ότι

$$\begin{aligned}\varphi(u, 4) &= \begin{pmatrix} 0.16701 & 0.00004983 \\ 0.16713 & 0.00004987 \end{pmatrix} e^{0.00420u} + \begin{pmatrix} 0.0006093 & 0.00016296 \\ -0.0012109 & -0.00032384 \end{pmatrix} e^{0.21372u} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -0.21631 \times 10^{-5} & -0.000040587 \\ 0.00001024 & 0.00019166 \end{pmatrix} e^{0.40351u} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0.046892 & -0.21247 \times 10^{-5} \\ 0.005853 & -0.26520 \times 10^{-6} \end{pmatrix} e^{-0.94372u} + \begin{pmatrix} -0.0000205 & 0.000116 \\ -0.0006739 & 0.003812 \end{pmatrix} \\ &\quad \times e^{-1.99238u},\end{aligned}$$

για  $0 \leq u \leq 4$ .

**Παράδειγμα 5.2 (Η πιθανότητα χρεοκοπίας).** Έστω  $w(s, t) = 1$  και  $\delta = 0$ . Τότε, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$ , που ορίστηκαν στην εξίσωση (5.5), ανάγονται στις πιθανότητες χρεοκοπίας  $\mathbb{E}_i(1_{(T < \infty), J(T)=j} | U(0) = u) = \mathbb{P}_i(T < \infty, J(T) =$

$j|U(0) = u$ ), τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $\psi_{i,j}(u)$ . Για  $\delta = 0$ , και για το ίδιο σύνολο των παραμέτρων όπως και στο Παράδειγμα 5.1, ο πίνακας  $\mathbf{A}_0(s)$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_0(s) = \begin{pmatrix} 0.633333 - 5s - \frac{0.3}{s+1} & -\frac{1}{3} \\ -1.377778 + \frac{10}{3}s & (1.366666667 - 5s)^2 - \frac{0.98}{s+2} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det \mathbf{A}_0(s) = 0$  έχει τις ακόλουθες ρίζες  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0.20955$ ,  $r_3 = 0.39963$ ,  $-R_1 = 0.94349$ ,  $-R_2 = 1.99235$ . Επιπλέον, οι πίνακες των αρχικών τιμών  $\psi(0) = (\psi_{i,j}(0))_{i,j=1,2}$  και  $\psi_{(1)}(0) = (\psi'_{i,j}(0)1_{(1 \leq n_i - 1)})_{i,j=1,2}$  αποτελούν λύσεις του συστήματος (5.67), απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 0.056506 & 0.00012368 \\ 0.0070304 & 0.0038263 \end{pmatrix} \text{ και } \psi_{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.0065793 & -0.0076225 \end{pmatrix}.$$

Έχοντας υπολογίσει τους πίνακες  $\psi(0)$  και  $\psi_{(1)}(0)$ , τότε από την εξίσωση (5.68) της Πρότασης, βρίσκουμε για  $u \geq 0$  ότι

$$\psi(u) = \begin{pmatrix} 0.05651 & 0.6663 \times 10^{-5} \\ 0.007082 & 0.8351 \times 10^{-6} \end{pmatrix} e^{-0.94349u} + \begin{pmatrix} -0.15687 \times 10^{-5} & 0.000117 \\ -0.00005128 & 0.003825 \end{pmatrix} e^{-1.99235u}.$$

Τώρα, θεωρούμε την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής σταθερού μερίσματος στο επίπεδο  $b$ . Τότε, για  $w(x, y) = 1$  και  $\delta = 0$ , οι συναρτήσεις Gerber-Shiu,  $\phi_{i,j}(u, b)$ ,  $i, j = 1, 2$ , που ορίστηκαν στην εξίσωση (5.46), γίνονται  $\mathbb{E}_i(1_{(T_b < \infty, J(T_b)=j)} | U_b(0) = u) = \mathbb{P}_i(T_b < \infty, J(T_b) = j | U_b(0) = u)$ , που είναι οι πιθανότητες χρεοκοπίας κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $\psi_{i,j}(u, b)$ . Ακόμη έστω  $\psi(u, b) = (\psi_{i,j}(u, b))_{i,j=1,2}$ . Με βάση την εξίσωση (5.69), αρχικά χρειάζομαστε να υπολογίσουμε τα διανύσματα  $\bar{v}_{1,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,0}(u)$  και  $\bar{v}_{2,1}(u)$ , όπου για  $b = 4$ , από την εξίσωση (5.66), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1,0}(u) &= \begin{pmatrix} 0.58727 \\ 0.58724 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.59626 \\ -1.1849 \end{pmatrix} e^{0.20955u} + \begin{pmatrix} -0.12764 \\ 0.60469 \end{pmatrix} e^{0.39963u} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0.055888 \\ 0.007004 \end{pmatrix} e^{-0.94349u} - \begin{pmatrix} 0.63621 \times 10^{-6} \\ 0.000020806 \end{pmatrix} e^{-1.99235u}, \\ \bar{v}_{2,0}(u) &= \begin{pmatrix} 0.46304 \\ 0.4630401 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.59396 \\ 1.1804 \end{pmatrix} e^{0.20955u} + \begin{pmatrix} 0.13491 \\ -0.63912 \end{pmatrix} e^{0.39963u} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0.0038700 \\ 0.00048499 \end{pmatrix} e^{-0.94349u} - \begin{pmatrix} 0.00011677 \\ 0.0038174 \end{pmatrix} e^{-1.99235u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{2,1}(u) = & \begin{pmatrix} -0.84705 \\ -0.847026 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.7619 \\ -3.5014 \end{pmatrix} e^{0.20955u} + \begin{pmatrix} -0.91749 \\ 4.3466 \end{pmatrix} e^{0.39963u} \\ & + \begin{pmatrix} 0.0025970 \\ 0.00032546 \end{pmatrix} e^{-0.94349u} + \begin{pmatrix} 0.000045989 \\ 0.0015035 \end{pmatrix} e^{-1.99235u}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\psi(u)$ , που υπολογίσαμε παραπάνω και τα διανύσματα  $\bar{v}_{1,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,0}(u)$ ,  $\bar{v}_{2,1}(u)$  στην εξίσωση (5.61) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1,0}(4) &= \begin{pmatrix} 0.93711 & 0.00017835 \end{pmatrix}, & \bar{\eta}_{2,0}(4) &= \begin{pmatrix} 0.98252 & -0.000093865 \end{pmatrix}, \\ \bar{\eta}_{2,1}(4) &= \begin{pmatrix} 0.014101 & 0.88560 \times 10^{-5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα και την εξίσωση (5.69), για  $0 \leq u \leq 4$  βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(u, 4) = & \begin{pmatrix} 0.99334 & 0.000053776 \\ 0.9933405 & 0.000053776 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.000026885 & 0.00017770 \\ -0.000053430 & -0.00035314 \end{pmatrix} e^{0.20955u} \\ & + \begin{pmatrix} -0.25918 \times 10^{-5} & -0.000043553 \\ 0.000012279 & 0.00020633 \end{pmatrix} e^{0.39963u} \\ & + \begin{pmatrix} 0.00036854 & -0.29182 \times 10^{-5} \\ 0.000046185 & -0.36570 \times 10^{-6} \end{pmatrix} e^{-0.94349u} \\ & + \begin{pmatrix} -0.00011624 & 0.00011703 \\ -0.0038002 & 0.0038259 \end{pmatrix} e^{-1.99235u}. \end{aligned}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΥΝ ΧΡΟΝΙΚΗ ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε μια επέκταση του κλασσικού μοντέλου με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση, το οποίο ορίστηκε στην Ενότητα 1.6, εισάγοντας έναν όρο διάχυσης. Όπως τονίστηκε στο Κεφ. 3, με την εισαγωγή αυτού του έξτρα όρου διάχυσης στη διαδικασία πλεονάσματος, επιτυγχάνουμε μια πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων, και αυτό διότι ο όρος διάχυσης αντικατοπτρίζει την τυχόν μεταβλητότητα του στα ασφάλιστρα, το ύψος των αποζημιώσεων και σε άλλα οικονομικά μεγέθη που εμπλέκονται στην τιμολόγηση των ασφαλιστηρίων συμβολαίων.

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με έναν όρο διάχυσης μελετήθηκε από πολλούς τόσο για το κλασσικό, όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας. Για τη βιβλιογραφία όσον αφορά στη διαδικασία πλεονάσματος με έναν όρο διάχυσης παραπέμπουμε στην εισαγωγή του Κεφ. 3.

Επιπλέον, τονίζουμε ότι ενώ στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, σε κάθε εμφάνιση μιας αποζημίωσης, η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται, στο κλασσικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση, σε κάθε εμφάνιση μιας αποζημίωσης, η διαδικασία πλεονάσματος ενδέχεται να μην ανανεώνεται. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση ότι σε κάθε χρονική περίοδο εμφανίζονται δύο είδη ζημιών: οι κύριες ζημιές (main claims)

και οι δευτερεύουσες ζημιές (sub-claims), όπου ο χρόνος εμφάνισης των δευτερευουσών ζημιών μπορεί να εμφανίζει χρονική υστέρηση σε σχέση με το χρόνο εμφάνισης των κύριων ζημιών. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με χρονική υστέρηση η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία κ.α., περιλαμβάνονται στους Yuen , Guo και Ng (2005), Stabile και Torrisi (2008). Πρόσφατα οι Xie και Zou (2011) μελέτησαν για το συγκεκριμένο μοντέλο την συνάρτηση των Gerber-Shiu αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ανανεωτική ελλειμματική εξίσωση.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι μία από τις πρακτικές εφαρμογές του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η μοντελοποίηση χαρτοφυλακίων με ζημιές τύπου IBNR (Incurred But Not Reported). Στα ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια, στην πράξη, συχνά υπολογίζονται τα λεγόμενα 'εξισοροπητικά αποθέματα' τα οποία αφορούν σε ζημιές για τις οποίες ο αναλογιστής πιστεύει ότι έχουν εμφανισθεί αλλά δεν έχουν δηλωθεί ακόμη στην εταιρία. Αυτού του είδους οι ζημιές ονομάζονται ζημιές τύπου IBNR. Ο υπολογισμός επαρκών αποθεματικών για χαρτοφυλάκια με τέτοιου είδους ζημιές είναι ένα σημαντικό θέμα για έναν ασφαλιστικό οργανισμό.

Η δομή του συγκεκριμένου κεφαλαίου συνοψίζεται ως εξής: Στην Ενότητα 6.1 δίνουμε μια λεπτομερή περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση και με έναν όρο διάχυσης, καθώς επίσης τις υποθέσεις και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην Ενότητα 6.2, εισάγουμε τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu και αποδεικνύουμε ότι ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Στην ίδια ενότητα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο οι προαναφερόμενες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις λύνονται, απ' όπου παίρνουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής. Επιπλέον, στηριζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα, δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στην Ενότητα 6.3 εισάγουμε το προαναφερόμενο μοντέλο κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων και δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu (κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων) ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Η λύση του προαναφερόμενου ολοκληρο-διαφορικού συστήματος βρίσκεται θεωρώντας ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δεύτερου είδους, το οποίο λύνεται με βάση τα αποτελέσματα της Ενότητας 6.2. Στην ίδια ενότητα, χρησιμοποιώντας τη λύση του προαναφερόμενου ολοκληρωτικού συστήματος τύπου Volterra δίνουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu. Τέλος, προκειμένου να δείξουμε πως η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται πρακτικά, δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

## 6.1 Περιγραφή του μοντέλου

Έστω ότι η διαδικασία πλεονάματος κατά το χρόνο  $t$ , δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma B(t), \quad u \geq 0, \quad (6.1)$$

όπου  $u$  είναι το αρχικό απόθεμα,  $c$  είναι τα ασφάλιστρα στη μονάδα του χρόνου,  $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι η διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων και  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι μια διαδικασία Wiener (ή κίνηση Brown) με μέσο 0 και διακύμανση  $\sigma^2$ , σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1. Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η διαδικασία  $S(t)$  είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson από την οποία κατά τους χρόνους επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένως εμφανίζονται δύο είδη αποζημιώσεων (ζημιών): οι κύριες και οι δευτερεύουσες. Έστω  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$  η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των ζημιών για την οποία υποθέτουμε ότι είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$  και ενδιάμεσους χρόνους  $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ , με  $T_0 = 0$ , οι οποίοι (βλ. Θεώρημα 1.3) κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο  $\lambda$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  και  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  είναι δύο ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων θετικών τ.μ. που περιγράφουν τα μεγέθη των κύριων ζημιών και των δευτερευόντων ζημιών, αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι η τ.μ.  $X_i$  έχει σ.κ.  $F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , σ.π.π.  $f_1(x)$ , μέσο  $\mathbb{E}(X) = \mu_1$ , ενώ η τ.μ.  $Y_i$  έχει σ.κ.  $Q(x) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ , σ.π.π.  $q(x)$  και μέση τιμή  $\mathbb{E}(Y) = \mu_q$ .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κατά την εμφάνιση του ενδιάμεσου χρόνου άφιξης,  $T_i$ , της διαδικασίας Poisson μία κύρια ζημιά,  $X_i$ , εμφανίζεται η οποία επιφέρει την εμφάνιση και μιας δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_i$ . Η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_i$  μπορεί να εμφανισθεί ταυτοχρόνως με την κύρια ζημιά  $X_i$ , με πιθανότητα  $\theta$ , ή να εμφανισθεί με χρονική υστέρηση κατά τον χρόνο  $T_{i+1}$  με πιθανότητα  $1 - \theta$ . Όταν η εμφάνιση της δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_i$  δεν είναι ταυτόχρονη με την εμφάνιση της ζημιάς  $X_i$ , αλλά καθυστερεί μέχρι το χρόνο  $T_{i+1}$ , υποθέτουμε ότι η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_i$  είναι ανεξάρτητη από την κύρια ζημιά  $X_{i+1}$ . Σημειώνουμε ότι όταν εμφανίζεται ταυτόχρονα μια κύρια και μια δευτερεύουσα ζημιά, τότε το μέγεθος της συνολικής ζημιάς που προκύπτει έχει σ.κ. την συνέλιξη των σ.κ.  $F$  και  $Q$  την οποία συμβολίζουμε με  $F_2(x) = (F_1 * Q)(x)$ , και σ.π.π.  $f_2(x)$ . Επίσης όταν εμφανίζονται μαζί μια κύρια ζημιά και μια δευτερεύουσα, ενώ ταυτόχρονα έχουμε και την εμφάνιση μιας άλλης δευτερεύουσας ζημιάς (η οποία έχει καθυστερήσει να εμφανισθεί κατά τον προηγούμενο χρόνο άφιξης της διαδικασίας Poisson) τότε θα συμβολίζουμε την σ.κ. αυτής της ζημιάς με  $F_3(x) = (F_1 * Q * Q)(x)$ , και την σ.π.π. με  $f_3(x)$ .

Επομένως, με βάση τα παραπάνω, η συνολική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + R(t), \quad t \geq 0, \quad (6.2)$$

όπου  $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  όπως ορίστηκαν παραπάνω και  $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μια στοχαστική διαδικα-

σία που εκφράζει το άθροισμα όλων των υπο-ζημιών  $Y_i$  που εμφανίζονται πριν από το χρόνο  $t$ . Ακόμη, θεωρούμε ότι οι διαδικασίες  $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$  και  $\{B(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Τέλος για την επάρκεια των ασφαλιστρών ισχύει η ακόλουθη συνθήκη, γνωστή ως περιθώριο ασφαλείας

$$c > \lambda(\mu_1 + \mu_q). \quad (6.3)$$

## 6.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης

Στην ενότητα αυτή μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης, όπως ορίστηκε από τις σχέσεις (6.1)-(6.2). Αρχικά θα δείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, μέσω του οποίου και με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, η λύση της οποίας προκύπτει με βάση το Θεώρημα 1.9.

Έστω  $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$ , ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης ως

$$\phi(u) = \mathbb{E}(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T < \infty)} | U(0) = u), \quad u \geq 0,$$

με  $\phi(0) = 1$ , λόγω της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η διαδικασία  $U(t)$  η οποία οφείλεται στην ύπαρξη της διαδικασίας Wiener. Επίσης, θεωρούμε πως  $\delta$  είναι η ένταση ανατοκισμού,  $U(T-)$  το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U(T)|$  το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία,  $T-$  το αριστερό όριο του  $T$ ,  $w: [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  παριστά τη συνάρτηση ποινής και  $1_{(\cdot)}$  μια δείτρια συνάρτηση. Όπως είναι ευρέως γνωστό [βλ. Ορισμό 1.6] η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής περιέχει (ως ειδικές περιπτώσεις) πολλά μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με το χρόνο χρεοκοπίας.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί ένα ολοκληρο-διαφορικό σύστημα εξισώσεων δεύτερης τάξης, ας δούμε πρώτα τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος  $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$  κατά την εμφάνιση του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου άφιξης της διαδικασίας Poisson. Κατά το χρόνο  $T_1$  έχουμε τα ακόλουθα δύο ενδεχόμενα: (α) εμφάνιση μιας κύριας ζημιάς  $X_1$  και μιας δευτερεύουσας ζημιάς  $Y_1$  κατά την ίδια χρονική περίοδο, με πιθανότητα  $\theta$ , και η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται και (β) κατά τη χρονική στιγμή  $T_1$  εμφανίζεται μια κύρια ζημιά  $X_1$ , ενώ η δευτερεύουσα ζημιά  $Y_1$  καθυστερεί την



εμφάνισή της για μια χρονική περίοδο, δηλ. εμφανίζεται τη χρονική στιγμή  $T_2$  με πιθανότητα  $1 - \theta$ , και η διαδικασία πλεονάσματος δεν ανανεώνεται. Έτσι όσον αφορά στο ενδεχόμενο ( $\beta$ ) θεωρούμε μια νέα διαδικασία πλεονάσματος στην οποία αντί της ταυτόχρονης εμφάνισης μιας κύριας και μιας δευτερεύουσας ζημιάς, υποθέτουμε ότι εμφανίζονται ταυτόχρονα μια κύρια ζημιά και δύο δευτερεύουσες ζημιές. Τότε, η νέα διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται, ενώ θεωρούμε ότι σε αυτή τη διαδικασία πλεονάσματος αντιστοιχεί μια νέα, βοηθητική, αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής την οποία συμβολίζουμε με  $\phi_1(u)$ . Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος δεύτερης τάξης για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής, δίνουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$ .

**Λήμμα 6.1.** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f_1(x)$ ,  $q(x)$  και  $w_k(u)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $[0, \infty)$ , με

$$w_k(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f_k(y) dy = \int_0^\infty w(x, y) f_k(x+y) dy, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

Τότε, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής,  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  στο  $(0, \infty)$ .

*Απόδειξη.* Για  $a > 0$ , θεωρούμε τον τυχαίο χρόνο  $k_a = \inf\{s : |B(s)| = a\}$  που παριστά το χρόνο που απαιτείται μέχρι η στοχαστική διαδικασία  $\{B(t)\}_{t=0}^\infty$  να φτάσει για πρώτη φορά στο επίπεδο  $a$ . Επιπλέον, για  $x \in [-a, a]$ , ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$H(a, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \exp \left[ -\frac{(x+4ka)^2}{2t} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-2a+4ka)^2}{2t} \right] \right),$$

$$h(a, t) = \frac{a}{2\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( (4k+1) \exp \left[ -\frac{a^2(4k+1)^2}{2t} \right] + (4k-3) \exp \left[ -\frac{a^2(4k-3)^2}{2t} \right] \right. \\ \left. - (4k-1) \exp \left[ -\frac{a^2(4k-1)^2}{2t} \right] \right).$$

Από τη μορφή των παραπάνω συναρτήσεων είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση  $h(a, t)$  τουλάχιστον δυο φορές παραγωγίσιμη ως προς  $a$  και  $t$ , ενώ η συνάρτηση  $H(a, t, x)$  είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς  $a$ ,  $t$  και  $x$ . Ακόμη, από τους Revuz και Yor (1991) [σελ. 105-106], ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(B(s) \in dx, k_a > s) = H(a, s, x)dx, \quad \mathbb{P}(k_a \in ds) = h(a, s)ds.$$

Επιπλέον, θεωρούμε τον τυχαίο χρόνο  $k_{u/\sigma} \wedge T_1$ . Τότε, συγκρίνοντας τους χρόνους  $k_{u/\sigma}$  και  $T_1$ , και λαμβάνοντας υπόψη τη συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος  $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$  (που περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < T_1)}] \\ &\quad + \theta \mathbb{E}[e^{-\delta T_1} \phi(u + cT_1 + \sigma B(T_1) - X_1 - Y_1) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > T_1)}] \\ &\quad + (1 - \theta) \mathbb{E}[e^{-\delta T_1} \phi_1(u + cT_1 + \sigma B(T_1) - X_1) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} > T_1)}] \\ &= J_1(u) + J_2(u) + J_3(u).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1 των Wang και Wu (2000), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}J_1(u) &= \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < T_1)} \mathbf{1}_{(B(k_{u/\sigma}) = k_{u/\sigma})}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-\delta k_{u/\sigma}} \phi(u + ck_{u/\sigma} + \sigma B(k_{u/\sigma})) \mathbf{1}_{(k_{u/\sigma} < T_1)} \mathbf{1}_{(B(k_{u/\sigma}) = -k_{u/\sigma})}] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} [\phi(2u + ct) + \phi(ct)] h\left(\frac{u}{\sigma}, t\right) dt, \\ J_2(u) &= \theta \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H\left(\frac{u}{\sigma}, s, x\right) \left[ \int_0^{u+cs+\sigma x} \phi(u + cs + \sigma x - y) dF_2(y) \right. \\ &\quad \left. + w_2(u + cs + \sigma x) \right] dx ds,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}J_3(u) &= (1 - \theta) \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)s} ds \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H\left(\frac{u}{\sigma}, s, x\right) dx \left[ \int_0^{u+cs+\sigma x} \phi_1(u + cs + \sigma x - y) dF_1(y) \right. \\ &\quad \left. + w_1(u + cs + \sigma x) \right].\end{aligned}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα  $J_1(u)$ ,  $J_2(u)$  και  $J_3(u)$  προκειμένου να απαλείψουμε το  $u$  από τις συναρτήσεις  $\phi$ , και  $\phi_1$  στα παραπάνω ολοκληρώματα και ανακαλώντας ότι  $\phi(u) = J_1(u) + J_2(u) + J_3(u)$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση πονής  $\phi(u)$  γράφεται ως

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \phi(ct) h\left(\frac{u}{\sigma}, t\right) dt + \frac{1}{2} \int_{2u}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)(z-2u)/c} \phi(z) h\left(\frac{u}{\sigma}, \frac{z-2u}{c}\right) dz, \\ &\quad + \theta \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H\left(\frac{u}{\sigma}, s, x\right) \left[ Z(u + cs + \sigma x) + w_2(u + cs + \sigma x) \right] dx ds \\ &\quad + (1 - \theta) \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)s} \int_{-u/\sigma}^{u/\sigma} H\left(\frac{u}{\sigma}, s, x\right) \left[ Z_1(u + cs + \sigma x) + w_1(u + cs + \sigma x) \right] dx ds,\end{aligned}$$

με  $Z(u) = \int_0^u \phi(z) f_2(u - z) dz$  και  $Z_1(u) = \int_0^u \phi_1(z) f_1(u - z) dz$ .

Από τη μορφή της παραπάνω εξίσωσης για τη  $\phi(u)$ , προκύπτει ότι η προαναφερόμενη συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Επιπλέον, ανακαλώντας ότι οι συναρτήσεις  $h$  και  $H$  είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες καθώς επίσης και ότι, από την υπόθεση, οι συναρτήσεις  $f_1, f_2, w_1, w_2$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, έπεται ότι οι συναρτήσεις  $Z(u)$  και  $Z_1(u)$  είναι επίσης συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$ . Τότε, με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\phi$ , είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, \infty)$ .

Τέλος, για την απόδειξη της παραγωγισιμότητας της «βοηθητικής» αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής  $\phi_1(u)$  στο  $(0, \infty)$  εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη της  $\phi(u)$ . Ως εκ τούτου η απόδειξη για την  $\phi_1(u)$  παραλείπεται. ■

Έχοντας δείξει ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $(0, \infty)$ , είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι οι  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 6.1.** Για  $u \geq 0$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής,  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$ , ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u) + c\phi'(u) - (\lambda + \delta)\phi(u) &= -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x)dF_2(x) + w_2(u)\right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x)dF_1(x) + w_1(u)\right), \\ \frac{\sigma^2}{2}\phi_1''(u) + c\phi_1'(u) - (\lambda + \delta)\phi_1(u) &= -\lambda\theta\left(\int_0^u \phi(u-x)dF_3(x) + w_3(u)\right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta)\left(\int_0^u \phi_1(u-x)dF_2(x) + w_2(u)\right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

όπου  $w_k(u)$  δίνεται από την εξίσωση (6.4).

*Απόδειξη.* Για να αποδείξουμε το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.5), πρώτα παρατηρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος που δίνεται από τις σχέσεις (6.1)-(6.2), μπορεί να θεωρηθεί σαν μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου με δύο καταστάσεις. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1, τότε εμφανίζονται ταυτόχρονα μία κύρια ζημιά μεγέθους  $X_i$  και μια δευτερεύουσα ζημιά μεγέθους  $Y_i$ , ενώ στην κατάσταση 2 εμφανίζεται μόνο μια κύρια ζημιά μεγέθους  $X_i$ . Η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 συντελείται με ρυθμό μετάβασης σύμφωνα με μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda(1-\theta)$ , ενώ η μετάβαση από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1 συντελείται σύμφωνα με μια εκθετική τ.μ. με παράμετρο  $\lambda\theta$ .

Υποθέτοντας ότι η Μακροβιανή διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 1, θεωρώντας το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  και δεσμεύοντας ως προς το μέγεθος των εμφανισθέντων ζημιών και τις μεταβάσεις της Μακροβιακής διαδικασίας στο  $[0, dt]$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^{\delta dt} \phi(u) &= (1 - \lambda \theta dt)(1 - \lambda(1 - \theta)dt) \mathbb{E}[\phi(V(dt))] \\ &+ \lambda \theta dt (1 - \lambda(1 - \theta)dt) \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi(V(dt) - x) F_2(x) + w_2(V(dt)) \right] \\ &+ \lambda(1 - \theta)dt (1 - \lambda \theta dt) \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi_1(V(dt) - x) F_1(x) + w_1(V(dt)) \right] + o(dt), \end{aligned}$$

όπου  $V(t) = u + ct + \sigma B(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $e^{-\delta dt}$  και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(u) &= (1 - (\lambda + \delta)dt) \mathbb{E}[\phi(V(dt))] + \lambda \theta dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi(V(dt) - x) F_2(x) + w_2(V(dt)) \right] \\ &+ \lambda(1 - \theta)dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi_1(V(dt) - x) F_1(x) + w_1(V(dt)) \right] + o(dt). \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας από το Λήμμα του Itô [βλ. Παράρτημα Α.4] το γεγονός ότι  $\mathbb{E}[\phi(V(dt))] = \phi(u) + [c\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(u)]dt + o(dt)$ , διαίρωντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , βρίσκουμε άμεσα την πρώτη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης της σχέσης (6.5).

Ακολουθώντας όμοια μεθοδολογία όπως παραπάνω, δηλ. υποθέτοντας ότι η Μακροβιανή διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 2, θεωρώντας το απειροστό χρονικό διάστημα  $[0, dt]$  και δεσμεύοντας ως προς το μέγεθος των εμφανισθέντων ζημιών και τις μεταβάσεις της Μακροβιακής διαδικασίας στο  $[0, dt]$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_1(u) &= (1 - (\lambda + \delta)dt) \mathbb{E}[\phi_1(V(dt))] + \lambda \theta dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi(V(dt) - x) F_3(x) + w_3(V(dt)) \right] \\ &+ \lambda(1 - \theta)dt \mathbb{E} \left[ \int_0^{V(dt)} \phi_1(V(dt) - x) F_2(x) + w_2(V(dt)) \right] + o(dt). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας, ξανά, το ανάπτυγμα του Taylor, διαίρωντας με  $dt$  και παίρνοντας  $dt \rightarrow 0$ , βρίσκουμε άμεσα τη δεύτερη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης της σχέσης (6.5).

■

Τώρα, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, τους τελεστές  $T_r$  (βλ. Ορισμό 1.8), τις ιδιότητες αυτών όπως δίνονται στην Πρόταση 1.2 και το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.5) θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$ , ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Γύ αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε, πρώτα τους μετασχηματισμούς Laplace των  $\phi(u)$  και  $\phi_1(u)$ .

Για,  $\Re(s) \geq 0$ , θεωρούμε ότι  $\widehat{\phi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \phi(u) du$ ,  $\widehat{\phi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su} \phi_1(u) du$  και  $\widehat{w}_k(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_k(u) du$ ,  $k = 1, 2, 3$ , είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $\phi(u)$ ,  $\phi_1(u)$  και  $w_k(u)$  αντίστοιχα. Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις της σχέσης (6.5) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{\phi}$  και  $\widehat{\phi}_1$ , βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(s) &= \frac{\widehat{B}(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda \widehat{f}_2(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)}, \\ \widehat{\phi}_1(s) &= \frac{\widehat{B}_1(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda \widehat{f}_2(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)},\end{aligned}\tag{6.6}$$

όπου

$$\begin{aligned}\widehat{B}(s) &= \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_2(s)\right) \left(\frac{\sigma^2}{2}(s + \phi'(0)) + c - \widehat{w}(s)\right) \\ &\quad - \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}(s + \phi'_1(0)) + c - \widehat{w}^*(s)\right), \\ \widehat{B}_1(s) &= \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s)\right) \left(\frac{\sigma^2}{2}(s + \phi'_1(0)) + c - \widehat{w}^*(s)\right) \\ &\quad - \lambda\theta\widehat{f}_3(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}(s + \phi'(0)) + c - \widehat{w}(s)\right),\end{aligned}$$

με  $\widehat{w}(s) = \lambda(\theta\widehat{w}_2(s) + (1 - \theta)\widehat{w}_1(s))$  και  $\widehat{w}^*(s) = \lambda(\theta\widehat{w}_3(s) + (1 - \theta)\widehat{w}_2(s))$ .

Για να ολοκληρώσουμε τις λύσεις του συστήματος των  $\widehat{\phi}$  και  $\widehat{\phi}_1$  στην εξίσωση (6.6) χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές  $\phi'(0)$  και  $\phi'_1(0)$ . Οι προαναφερόμενες αρχικές τιμές υπολογίζονται με τη βοήθεια των ριζών της εξίσωσης  $\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right) = 0$ , που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης. Για να βρούμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 6.2 (Rouché's theorem).** Έστω  $f(x)$  και  $g(x)$  δύο ολόμορφες συναρτήσεις επάνω στο σύνολο  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ . Εάν  $|f(x)| > |g(x)|$  για κάθε  $x \in \mathbb{A}$ , τότε οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $f(x) + g(x)$  έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο  $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ .

Απόδειξη. Reade (2002), Θεώρημα 3, σελ. 78. ■

**Λήμμα 6.2.** Για  $\delta \geq 0$ , η χαρακτηριστική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης δίνεται από τη σχέση

$$\ell(s) = 0,\tag{6.7}$$

όπου  $\ell(s) = (\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s)(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta)$ . Τότε, για  $\delta > 0$ , η εξίσωση (6.7) έχει ακριβώς δύο ρίζες,  $r_1(\delta)$  και  $r_2(\delta)$ , οι οποίες βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών. Επιπλέον, για  $\delta = 0$ , η εξίσωση (6.7) έχει ακριβώς μία ρίζα στο σημείο 0,  $r_2(0) = 0$ , καθώς επίσης και ακριβώς μία ρίζα,  $r_1(0)$ , η οποία βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών.

*Απόδειξη.* Αρχικά παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.7) γράφεται ισοδύναμα ως  $\ell(s) = \ell_1(s)\ell_2(s) = 0$ , με  $\ell_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta$  και  $\ell_2(s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\widehat{f}_2(s)$ . Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι η εξίσωση  $\ell_1(s) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες, εκ των οποίων η μία είναι αρνητική, έστω  $\rho_1(\delta) = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda)}}{\sigma^2} < 0$ , ενώ η δεύτερη είναι θετική, έστω  $r_1(\delta) = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda)}}{\sigma^2} > 0$ . Επίσης, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η συνάρτηση  $\ell_2(s)$  είναι μία κυρτή συνάρτηση του  $s$ , συνεχής ως προς  $s$ , η οποία παίρνει τις τιμές  $-\delta$  στο σημείο  $s = 0$  και τείνει στο  $\infty$  για  $s \rightarrow \infty$  [βλ. επίσης Gerber και Landry (1998)]. Επομένως, η εξίσωση  $\ell_2(s) = 0$  έχει μία ακριβώς θετική ρίζα, έστω  $r_2(\delta)$ . Για  $\delta = 0$  είναι εύκολο να δούμε ότι  $r_2(0) = 0$ .

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $\ell_2(s) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο θετικό ημιεπίπεδο των μιγαδικών αριθμών, θεωρούμε ότι το  $s$  είναι εντός (ή επάνω) του ημικυκλίου στο μιγαδικό επίπεδο, τέτοιο ώστε  $|s| = r > 0$ . Για  $\Re(s) \geq 0$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\ell_1(s)| &= \frac{\sigma^2}{2}|s - \rho_1(\delta)||s - r_1(\delta)| \geq \frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda)})(c + \sqrt{c^2 + 2\sigma^2(\delta + \lambda)}) \\ &> \lambda = \lambda\widehat{f}_2(0) \geq |\lambda\widehat{f}_2(s)|, \end{aligned}$$

ενώ για  $\Re(s) = 0$ , ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως και παραπάνω, έχουμε ότι  $|\ell_1(s)| > \lambda \geq |\lambda\widehat{f}_2(s)|$ . Επομένως, από το θεώρημα του Rouché [βλ. Θεώρημα 6.2], έπεται ότι, στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ο αριθμός των ριζών της εξίσωσης  $\ell_1(s) = 0$  είναι ίσος με τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης  $\ell_1(s) + \lambda\widehat{f}_2(s) = \ell_2(s) = 0$ . Εφόσον, η εξίσωση  $\ell_1(s) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος, τότε το ίδιο πρέπει να ισχύει για την εξίσωση  $\ell_2(s) = 0$ . Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος. ■

Στο εξής, θα συμβολίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $r_i(\delta)$  με  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Τώρα, επιστρέφοντας στον υπολογισμό των αρχικών τιμών  $\phi'(0)$  και  $\phi'_i(0)$ , εφόσον η  $\phi(s)$  είναι πεπερασμένη συνάρτηση για  $\Re(s) \geq 0$ , και από το γεγονός ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (6.6) είναι μηδέν για  $s = r_i$ ,  $i = 1, 2$ , έπεται ότι και ο αριθμητής της εξίσωσης (6.6) πρέπει να είναι μηδέν για  $s = r_i$ ,  $i = 1, 2$ , δηλ.

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}r_i^2 + cr_i - \lambda - \delta + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_2(r_i)\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}(r_i + \phi'(0)) + c - \widehat{w}(r_i)\right) = 0, \quad \forall i = 1, 2.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων ως προς  $\phi(0)$  και  $\phi_1(0)$  έχουμε ότι

$$\phi'(0) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \widehat{f}_1(r_i - (-1)^i) \frac{[y(r_i)(b_i - \frac{2}{\sigma^2} \widehat{w}(r_i)) - \lambda(1 - \theta) \widehat{f}_1(r_i)(b_i - \frac{2}{\sigma^2} \widehat{w}^*(r_i))]}{y(r_2) \widehat{f}_1(r_1) - y(r_1) \widehat{f}_1(r_2)}, \quad (6.8)$$

$$\phi_1'(0) = y(r_2) \frac{b_2 - \frac{2}{\sigma^2} \widehat{w}(r_2) + \phi'(0)}{\lambda(1 - \theta) \widehat{f}_1(r_2)} - (b_2 - \frac{2}{\sigma^2} \widehat{w}^*(r_2)). \quad (6.9)$$

με  $y(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1 - \theta) \widehat{f}_2(s)$  και  $b_i = r_i + \frac{2c}{\sigma^2}$  για  $i = 1, 2$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και θα δώσουμε τη λύση αυτής. Σημειώνουμε ότι σε αυτό το σημείο παραλείπουμε τον υπολογισμό της «βοηθητικής» συνάρτησης των Gerber-Shiu,  $\phi_1(u)$ , και αυτό διότι όλα τα μέτρα κινδύνου για το μοντέλο κινδύνου των σχέσεων (6.1)-(6.2) μπορούν αναλυτικά να μελετηθούν μέσω της συνάρτησης  $\phi(u)$ . Παρόλα αυτά, στην επόμενη ενότητα, όπου εισάγεται μια στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων, για το κλασικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης, λόγω της φύσης του προβλήματος, χρειαζόμαστε αναλυτικούς τύπους υπολογισμού τόσο για τη  $\phi$ , όσο και για την  $\phi_1$ . Επομένως ένας αναλυτικός τύπος υπολογισμού της «βοηθητικής» συνάρτησης  $\phi_1$  δίνεται στην επόμενη ενότητα.

Για να αποδείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi$ , ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση χρειαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης,  $\ell(s) = 0$ , που δίνονται από το Λήμμα 6.2, καθώς επίσης και τους τελεστές  $T_r$ . Ανακαλώντας τον Ορισμό 1.8, ο τελεστής  $T_r$  για μία ολοκληρώσιμη πραγματική συνάρτηση  $f$  δίνεται από τη σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy, \quad x \geq 0, \Re(r) > 0.$$

Για τις ιδιότητες του τελεστή  $T_r$  παραπέμπουμε στην Πρόταση 1.2 της Εισαγωγής.

**Πρόταση 6.1.** Για  $\Re(s) > 0$ , ο μετασχηματισμός Laplace,  $\widehat{\phi}(s)$ , της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\widehat{\phi}(s) = \widehat{\phi}(s) \widehat{g}(s) + \widehat{h}(s), \quad (6.10)$$

όπου

$$\widehat{g}(s) = \frac{\lambda T_{r_2} \widehat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s + b_2)},$$

$$\widehat{h}(s) = \frac{T_{r_2}\widehat{w}(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s+b_2)} + \frac{1}{s+b_2} + \frac{\lambda(1-\theta)}{(\sigma^2/2)^2} \sum_{k=1}^2 \frac{T_{r_k}\widehat{\eta}(s)}{(s+b_k)\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)},$$

με

$$\begin{aligned} T_{r_k}\widehat{\eta}(s) &= \frac{\sigma^2}{2}b_k(T_{r_k}\widehat{f}_1(s) - T_{r_k}\widehat{f}_2(s)) - \frac{\sigma^2}{2}(\widehat{f}_1(s) - \widehat{f}_2(s)) + (T_{r_k}\widehat{A}_2(s) - T_{r_k}\widehat{A}_1(s)) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2}(\phi'_1(0)T_{r_k}\widehat{f}_1(s) - \phi'(0)T_{r_k}\widehat{f}_2(s)), \end{aligned}$$

και  $\widehat{A}_1(s) = \widehat{f}_1(s)\widehat{w}^*(s)$ ,  $\widehat{A}_2(s) = \widehat{f}_2(s)\widehat{w}(s)$ , ενώ  $b_k = r_k + \frac{2c}{\sigma^2}$ , για  $k = 1, 2$ .

Απόδειξη. Αρχικά ξεκινάμε μελετώντας τον παρονομαστή του μετασχηματισμού Laplace,  $\widehat{\phi}(s)$ , που δίνεται από την εξίσωση (6.6). Από την απόδειξη του Λήμματος 6.2, έχουμε ότι ο παρονομαστής του μετασχηματισμού Laplace της εξίσωσης (6.6),  $\ell(s)$ , γράφεται ως  $\ell(s) = \ell_1(s)\ell_2(s)$  όπου  $\ell_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , είναι οι συναρτήσεις της απόδειξης του Λήμματος 6.2. Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\ell_1(r_1) = 0$  και  $\ell_2(r_2) = 0$  [βλ. απόδειξη του Λήμματος 6.2] έχουμε ότι η συνάρτηση  $\ell(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$\ell(s) = (\ell_1(s) - \ell_1(r_1))(\ell_2(s) - \ell_2(r_2)) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i) \left(1 - \frac{\lambda T_{r_2}\widehat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s + b_2)}\right), \quad (6.11)$$

όπου για την τελευταία εξίσωση κάνουμε χρήση της ιδιότητας (iv) της Πρότασης 1.2 για τους τελεστές  $T_r$ .

Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο αριθμητής του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu,  $\widehat{\phi}(s)$ , στην εξίσωση (6.6), μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις γράφεται ως

$$\widehat{B}(s) = \widehat{h}_1(s) - \widehat{h}_2(s),$$

όπου οι συναρτήσεις  $\widehat{h}_1(s)$  και  $\widehat{h}_2(s)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \widehat{h}_1(s) &= \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)\frac{\sigma^2}{2}\phi'(0), \\ \widehat{h}_2(s) &= \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)\left(\widehat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2}s - c\right) + \lambda(1-\theta)\widehat{h}_3(s), \end{aligned}$$

με  $\widehat{h}_3(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s + c\right)(\widehat{f}_1(s) - \widehat{f}_2(s)) + \widehat{A}_2(s) - \widehat{A}_1(s) + \frac{\sigma^2}{2}(\phi'_1(0)\widehat{f}_1(s) - \widehat{f}_2(s)\phi'(0))$ . Σημειώνουμε ότι εφόσον  $\phi(s) < \infty$ , τότε από το Λήμμα 6.2 και την εξίσωση (6.6) έχουμε ότι  $\widehat{B}(r_k) = 0$ , απ' όπου έπεται ότι  $\widehat{h}_1(r_k) = \widehat{h}_2(r_k)$  για  $k = 1, 2$ .

Επιπροσθέτως, ορίζοντας τις μεταβλητές  $x = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs$ , και  $x_k = \frac{\sigma^2}{2}r_k^2 + cr_k$ ,  $k = 1, 2$ , η



συνάρτηση

$$\gamma(x) = (x - \lambda - \delta) \frac{\sigma^2}{2} \phi'(0),$$

είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Ακόμη, εφόσον  $\gamma(x_k) = \hat{h}_1(r_k)$  για  $k = 1, 2$ , με βάση τα παραπάνω έχουμε επίσης ότι  $\gamma(x_k) = \hat{h}_1(r_k) = \hat{h}_2(r_k)$  για  $k = 1, 2$ . Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το θεώρημα παρεμβολής του Lagrange παίρνουμε άμεσα ότι

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^2 \prod_{j=1, j \neq k}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \gamma(x_k) = \sum_{k=1}^2 \prod_{j=1, j \neq k}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \hat{h}_2(r_k).$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή  $x$  πίσω στην μεταβλητή  $s$ , από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{B}(s) &= \sum_{k=1}^2 \prod_{j=1, j \neq k}^2 \frac{(s - r_j)(s + b_j)}{(r_k - r_j)(r_k + b_j)} \hat{h}_2(r_k) - \hat{h}_2(s) \\ &= \sum_{k=1}^2 \prod_{j=1, j \neq k}^2 \frac{(s - r_j)(s + b_j)}{(r_k - r_j)(r_k + b_j)} (\hat{h}_2(r_k) - \hat{h}_2(s)) \\ &= \prod_{i=1}^2 (s - r_i) \sum_{k=1}^2 \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (s + b_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)} T_{r_k} \hat{h}_2(s), \end{aligned} \quad (6.12)$$

όπου για την τελευταία εξίσωση κάνουμε χρήση της ιδιότητας (iv) της Πρότασης 1.2 για τους τελεστές  $T_r$ . Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace  $T_{r_k} \hat{h}_2(s)$ . Γ' αυτό το σκοπό ορίζουμε τον πρώτο όρο τη συνάρτησης  $\hat{h}_2(s)$  ως  $\hat{n}(s)$ , δηλ.  $\hat{n}(s) = (\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta) (\hat{w}(s) - \frac{\sigma^2}{2} s - c)$ . Τότε, ο τελεστής  $T_{r_k}$  του μετασχηματισμού Laplace  $\hat{n}(s)$  βρίσκεται από τη σχέση

$$T_{r_k} \hat{n}(s) = \frac{\hat{n}(s) - \hat{n}(r_k)}{r_k - s} = \left( \frac{\sigma^2}{2} r_k^2 + cr_k - \lambda - \delta \right) \left( T_{r_k} \hat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2} \right) - (s + b_k) \frac{\sigma^2}{2} \left( \hat{w}(s) + c + \frac{\sigma^2}{2} s \right). \quad (6.13)$$

Επιπλέον, για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό της συνάρτησης  $T_{r_k} \hat{h}_2(s)$ , χρειαζόμαστε, επίσης, τον υπολογισμό της ποσότητας  $T_{r_k} \hat{h}_3(s)$ . Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, όπως αυτή για την απόδειξη της σχέσης (6.13), δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$T_{r_k} \hat{h}_3(s) = T_{r_k} \hat{\eta}(s). \quad (6.14)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.13) και (6.14), η εξίσωση (6.12) γράφεται ως

$$\hat{B}(s) = \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i) \left[ \sum_{k=1}^2 \frac{\left( \frac{\sigma^2}{2} r_k^2 + cr_k - \lambda - \delta \right)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)} \cdot \frac{T_{r_k} \hat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}}{s + b_k} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma^2}{2} \left( \widehat{w}(s) + c + \frac{\sigma^2}{2} s \right) \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)} \\
& + \lambda(1 - \theta) \sum_{k=1}^2 \frac{T_{r_k} \widehat{\eta}(s)/(s + b_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)}. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Τώρα, αρχικά παρατηρούμε ότι το άθροισμα, που εμφανίζεται στον μεσαίο όρο της παραπάνω εξίσωσης, είναι μηδέν, ενώ το άθροισμα στον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 \frac{\left( \frac{\sigma^2}{2} r_k^2 + cr_k - \lambda - \delta \right)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)} \cdot \frac{T_{r_k} \widehat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}}{s + b_k} &= \frac{\frac{\sigma^2}{2} r_2^2 + cr_2 - \lambda - \delta}{(r_2 - r_1)(r_2 + b_1)} \cdot \frac{T_{r_2} \widehat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}}{s + b_2} \\
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2} (r_2 + r_1 + \frac{2c}{\sigma^2}) (T_{r_2} \widehat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2})}{(r_2 + b_1)(s + b_2)} \\
&= \left( \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \frac{T_{r_2} \widehat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{2} (s + b_2)}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση, η εξίσωση (6.15) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\widehat{B}(s) = \left( \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i) \left[ \frac{T_{r_2} \widehat{w}(s) + \frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{2} (s + b_2)} + \frac{\lambda(1 - \theta)}{(\sigma^2/2)^2} \sum_{k=1}^2 \frac{T_{r_k} \widehat{\eta}(s)/(s + b_k)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)} \right]. \tag{6.16}$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.6), (6.11) και (6.16) παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 6.1 είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\phi(u)$  ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 6.3.** Για  $u \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi(u) = \frac{1}{1 + \xi} \int_0^u \phi(u - x) dG(x) + h(u), \tag{6.17}$$

όπου  $G(x) = (1 + \xi) \int_0^x g(y) dy$  είναι μία σ.π.π. (proper density function) με  $g(y) = \frac{\lambda}{\sigma^2/2} (m_2 * T_{r_2} f_2)(y)$ , όπου  $m_k(y) = e^{-b_k y}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\xi$  είναι τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1 + \xi} = \int_0^\infty g(y) dy = 1 - \frac{\lambda \delta + \delta^2}{(\frac{\sigma^2}{2})^2 \prod_{i=1}^2 r_i b_i} < 1$  και

$$h(u) = \frac{1}{\sigma^2/2} (m_2 * T_{r_2} w)(u) + e^{-b_2 u} + \frac{\lambda(1-\theta)}{(\sigma^2/2)^2} \sum_{k=1}^2 \frac{(m_k * T_{r_k} \eta)(u)}{\prod_{j=1, j \neq k}^2 (r_k - r_j)(r_k + b_j)},$$

με

$$\begin{aligned} T_{r_k} \eta(u) &= \frac{\sigma^2}{2} b_k (T_{r_k} f_1(u) - T_{r_k} f_2(u)) - \frac{\sigma^2}{2} (f_1(u) - f_2(u)) + (T_{r_k} A_2(u) - T_{r_k} A_1(u)) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} (\phi'_1(0) T_{r_k} f_1(u) - \phi'(0) T_{r_k} f_2(u)), \end{aligned}$$

όπου  $A_1(u) = (f_1 * w^*)(u)$  και  $A_2(u) = (f_2 * w)(u)$ . Επιπλέον, εάν  $\delta \rightarrow 0^+$ , τότε το  $\xi \rightarrow \xi_0$  είναι τέτοιο ώστε  $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \lambda \frac{c - \lambda(\mu_1 + \mu_q)}{r_1(0)(\frac{\sigma^2}{2} r_1(0) + c)}$  δοθέντος ότι η εξίσωση (6.3) είναι αληθής.

Απόδειξη. Αντιστρέφοντας ως προς  $s$  την εξίσωση (6.10), εύκολα παίρνουμε ότι

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u-x)g(x)dx + h(u). \quad (6.18)$$

Τώρα, θεωρούμε την σ.χ.  $G(x) = \frac{\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}$ . Τότε, από την εξίσωση (6.11) και τον ορισμό των  $\xi$  και  $\widehat{g}(s)$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\xi} &= \int_0^\infty g(x)dx = \widehat{g}(0) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta)^2 + \lambda \widehat{f}_2(s) (\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta)}{(\frac{\sigma^2}{2})^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i)} \\ &= 1 - \frac{\lambda \delta + \delta^2}{(\frac{\sigma^2}{2}) \prod_{i=1}^2 r_i b_i} < 1, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι η  $G(x)$  είναι μια σ.χ. καθώς επίσης και ότι η ανανεωτική εξίσωση (6.18) μπορεί να εκφραστεί σε όρους των συναρτήσεων  $G$  και  $\xi$  όπως δίνεται στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (6.17).

Τέλος, θέτοντας  $s = r_2(\delta)$  στην εξίσωση (6.7), παραγωγίζοντας ως προς  $\delta$  και στη συνέχεια θέτοντας  $\delta = 0$  βρίσκουμε ότι

$$r'_2(0) = \frac{1}{c - \lambda(\mu_1 + \mu_q)} > 0,$$

όπου η τελευταία ανίσωση είναι αληθής από την εξίσωση (6.3). Έτσι, για  $\delta = 0$ , χρησιμοποιώντας ότι  $r_2(0) = 0$ , καθώς επίσης και τους κανόνες του L' Hôpital έχουμε ότι

$$\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda \delta + \delta^2}{(\frac{\sigma^2}{2})^2 \prod_{i=1}^2 r_i(\delta) (r_i(\delta) + \frac{2c}{\sigma^2})} = 1 - \lambda \frac{c - \lambda(\mu_1 + \mu_q)}{r_1(0)(\frac{\sigma^2}{2} r_1(0) + c)} < 1.$$

**Παρατήρηση 6.1.** Για  $\theta = 1$ , τότε, σε κάθε περίοδο, οι κύριες ζημιές και οι δευτερεύουσες ζημιές εμφανίζονται ταυτόχρονα. Συνεπώς, το μοντέλο κινδύνου των σχέσεων (6.1)-(6.2) ανάγεται στο κλασσικό μοντέλο με έναν όρο διάχυσης με μεγέθη των αποζημιώσεων της μορφής  $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ , τα οποία έχουν σ.κ.  $F_2(x)$ . Επομένως για  $\theta = 1$  η εξίσωση (6.17) ανάγεται στην εξίσωση

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \phi(u-x) dG(x) + \frac{\lambda}{\sigma^2/2} (m_2 * T_{r_2} w_2)(u) + e^{-b_2 u}, \quad u \geq 0,$$

που είναι η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο με έναν όρο διάχυσης, βλ. σχέσεις (2.10) στους Tsai και Willmot (2002) καθώς και εξίσωση (17) στους Gerber και Landry (1998).

Η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (6.17) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι, ορίζουμε  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$  να είναι η σ.κ. της ακόλουθης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\bar{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\xi} \right)^n \bar{G}^{*n}(u), \quad u \geq 0,$$

όπου  $\bar{G}^{*n}(u)$  η  $n$ -οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς της  $G(u) = 1 - \bar{G}(u)$ . Τότε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9 μπορούμε να πάρουμε την αναλυτική λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (6.17).

**Πρόταση 6.2.** Για  $u \geq 0$ , η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , που ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (6.17), έχει την ακόλουθη μορφή

$$\phi(u) = \frac{1+\xi}{\xi} \int_0^u h(u-x) dK(x) + h(u). \quad (6.19)$$

Από την Πρόταση 6.2, δεδομένου ότι οι συνάρτηση  $h(u)$  μπορεί εύκολα να υπολογισθεί για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής  $w(x, y)$ , έπεται ότι ο υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber-Shiu μπορεί να γίνει όταν η σ.κ.  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$  είναι γνωστή. Μία από τις περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την κατανομή της  $K(u)$  με δεξιά ουρά  $\bar{K}(u)$  είναι όταν ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{\bar{K}}(s)$  έχει τη μορφή ηλίχου πολυωνύμων. Σημειώνουμε ότι η  $\widehat{\bar{K}}(s)$  έχει μορφή ηλίχου πολυωνύμων αν και μόνο αν ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{K}(s)$  είναι ηλίχο πολυωνύμων. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων μπορούμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό της  $K(u)$ .

Οι Lin και Willmot (1999) [βλ. εξίσωση (2.14) του Θεωρήματος 2.1], έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $\bar{K}(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x) dG(x) + \frac{1}{1+\xi} \bar{G}(u), \quad u \geq 0,$$

με  $\bar{G}(u) = 1 - G(u)$ . Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\widehat{g}(s)}{1 - \widehat{g}(s)},$$

με  $\widehat{g}(s)$  να δίνεται από την Πρόταση 6.1 και  $\widehat{g}(s)$  να είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $\bar{g}(x) = \int_x^\infty g(y) dy$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.11) καθώς επίσης και από τον ορισμό της συνάρτησης  $\widehat{g}(s)$ , βρίσκουμε ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\widehat{g}(s) \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i)}{\ell(s)}. \quad (6.20)$$

Επιπλέον, εφόσον  $\widehat{g}(s) = T_s \bar{g}(0) = T_s T_0 g(0) = (T_0 g(0) - T_s g(0))/s$ , χρησιμοποιώντας, ξανά, την εξίσωση (6.11) και τον ορισμό της συνάρτησης  $\widehat{g}(s)$ , έχουμε ότι

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i)} - \frac{\xi}{1 + \xi} \right].$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (6.20), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\ell(s) - \frac{\xi}{1+\xi} \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{i=1}^2 (s - r_i)(s + b_i)}{s \ell(s)}, \quad (6.21)$$

με  $\ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta\right)^2 + \lambda \widehat{f}_2(s) \left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta\right)$ . Από τη μορφή της συνάρτησης με  $\ell(s)$  και την εξίσωση (6.21) είναι φανερό ότι όταν ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{f}_2(s)$  είναι ηλίκο πολυωνύμων, τότε και ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{K}(s)$  έχει επίσης μορφή ηλίκο πολυωνύμων. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των κυρίων και των δευτερεύουσων ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Συνεπώς, θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του μεγέθους των κύριων και των δευτερεύουσων ζημιών έχει την ακόλουθη μορφή

$$\widehat{f}_1(s) = \frac{p_{1,k_1-1}(s)}{p_{1,k_1}(s)}, \quad p_{1,k_1-1}(0) = p_{1,k_1}(0), \quad \text{και} \quad \widehat{g}(s) = \frac{p_{2,k_2-1}(s)}{p_{2,k_2}(s)}, \quad p_{2,k_2-1}(0) = p_{2,k_2}(0),$$

όπου, για  $i = 1, 2$ ,  $p_{i,k_i-1}(s)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $k_i - 1$  ή μικρότερου και  $p_{i,k_i}(s)$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $k_i$  με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1. Επιπλέον, η εξίσωση  $p_{i,k_i}(s) = 0$  έχει μόνο πραγματικές αρνητικές ρίζες ή μιγαδικές ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη. Τότε, από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace  $\widehat{f}_2(s)$  έχουμε ότι

$$\widehat{f}_2(s) = \widehat{f}_1(s)\widehat{q}(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}, \quad p_{k-1}(0) = p_k(0), \quad k = k_1 + k_2, \quad (6.22)$$

με  $p_{k-1}(s)$  και  $p_k(s)$  δύο πολυώνυμα βαθμών  $k-1$  ή μικρότερου και  $k$ , αντίστοιχα. Όπως έχει τονισθεί και σε προηγούμενα κεφάλαια η κλάση των ηλίκων κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών, η οποία περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις την εκθετική κατανομή, την κατανομή Erlang, την κατανομή Coxian, τις phase-type καθώς και τις μίξεις αυτών.

**Θεώρημα 6.4.** Για  $u \geq 0$ , εάν ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{f}_2(s)$  έχει τη μορφή ηλίκου πολυωνύμου όπως και στην εξίσωση (6.22), τότε

$$\overline{K}(u) = 1 - K(u) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i e^{-R_i u}, \quad a_i = \frac{R_1 \cdots R_{k+1}}{R_i \prod_{j=1, j \neq i}^{k+1} (R_j - R_i)} p_k(-R_i) (b_2 - R_i) \frac{1}{p_k(0)b_2}, \quad (6.23)$$

όπου  $-R_i$  με  $\Re(R_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, k+1$ , είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $J_{k+2}(s) = 0$  με  $J_{k+2}(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta\right)p_k(s) + \lambda p_{k-1}(s)$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτοντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{f}_2(s)$  έχει μορφή ηλίκου πολυωνύμου όπως και στην εξίσωση (6.22), τότε από τον ορισμό της συνάρτησης  $\ell(s)$  έχουμε ότι

$$0 = \ell(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta\right)^2 + \lambda\widehat{f}_2(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta\right) = \ell_1(s)\frac{J_{k+2}(s)}{p_k(s)},$$

όπου η συνάρτηση  $\ell_1(s)$  δίνεται στην απόδειξη του Λήμματος 6.2 και  $J_{k+2}(s)$  είναι η συνάρτηση  $\ell_2(s)$  για  $\widehat{f}_2(s)$  όπως στην εξίσωση (6.22). Επίσης, από την απόδειξη του Λήμματος 6.2, η εξίσωση  $\ell_1(s) = 0$  έχει μία μοναδική θετική ρίζα, την  $r_1$ , και μία ακριβώς αρνητική ρίζα, την  $-(r_1 + \frac{2c}{\sigma^2}) = -b_1$ . Επομένως, εφόσον η  $\ell_1(s)$  είναι ένα πολυώνυμο δεύτερης τάξης με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το  $\sigma^2/2$ , και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως

$$\ell_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}(s - r_1)(s + b_1).$$

Επιπλέον, από την απόδειξη του Λήμματος 6.2 και τον ορισμό των ηλίκων κατανομών για τον μετασχηματισμό Laplace  $\widehat{f}_2(s)$ , έπεται ότι η εξίσωση  $J_{k+2}(s) = 0$  έχει μία ακριβώς ρίζα,  $r_2$ , με θετικά πραγματικά μέρη και  $k+1$  ρίζες,  $R_i$ , με αρνητικά πραγματικά μέρη. Συνεπώς

η συνάρτηση  $J_{k+2}(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$J_{k+1}(s) = \frac{\sigma^2}{2}(s - r_2) \prod_{j=1}^{k+1} (s + R_j).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις έχουμε ότι

$$\ell(s) = \frac{1}{p_k(s)} \left( \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \prod_{j=1}^2 (s - r_i)(s + b_1) \prod_{j=1}^{k+1} (s + R_j). \quad (6.24)$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (6.21) και χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων παίρνουμε άμεσα ότι

$$\widehat{K}(s) = \frac{\frac{1}{s} \left[ \prod_{j=1}^{k+1} (s + R_j) - \frac{\xi}{1+\xi} p_k(s)(s + b_2) \right]}{\prod_{j=1}^{k+2} (s + R_j)} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{a_j}{s + R_j}.$$

Σημειώνουμε ότι εφόσον  $\widehat{K}(s) < \infty$  για  $\Re(s) \geq 0$ , θέτοντας  $s = 0$  στην παραπάνω εξίσωση έπεται ότι ο όρος εντός των αγκυλών πρέπει να είναι μηδέν, απ' όπου παίρνουμε ότι  $\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{p_k(0)b_2}$ . Τέλος, αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace ως προς  $s$  βρίσκουμε άμεσα το αποτέλεσμα της εξίσωσης (6.23). ■

### 6.2.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικά μεγέθη ζημιών

Σε αυτή την υπο-ενότητα, προκειμένου να δείξουμε την πρακτική εφαρμογή των αποτελεσμάτων της Ενότητας 6.2, δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση όπου τα μεγέθη τόσο των κύριων όσο και των δευτερευουσών ζημιών κατανομούνται εκθετικά με παραμέτρους  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ , αντίστοιχα. Συνεπώς, έχουμε ότι  $F_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$  και  $Q(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $x \geq 0$ , απ' όπου εύκολα παίρνουμε ότι  $\widehat{f}_1(s) = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1}$  και  $\widehat{q}(s) = \frac{\alpha_2}{s + \alpha_2}$ . Επιπλέον, υποθέτοντας ότι  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , τότε βρίσκουμε ότι

$$F_2(x) = 1 - \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_2 x} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad F_3(x) = 1 - \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} + \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 x - \alpha_2 (2 + \alpha_2 x))}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}.$$

Επίσης, για  $F_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$  και  $Q(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$ , τότε η χαρακτηριστική εξίσωση, που δίνεται από τη σχέση (6.7), ανάγεται σε

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \right)^2 (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) + \lambda \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{\sigma^2}{2} s^2 + cs - \lambda - \delta \right) = 0, \quad (6.25)$$

απ' όπου, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2, έπεται ότι έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες  $r_1, r_2$ , και τέσσερις αρνητικές ρίζες  $-R_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

Έστω  $w(x, y) = 1$  και  $\delta = 0$ . Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής,  $\phi(u)$ , ανάγεται σε  $\mathbb{E}(1_{T < \infty} | U(0) = u) = \psi(u)$  που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης, και δίνεται από τις σχέσεις (6.1)-(6.2). Επιπλέον, για  $w(x, y) = 1$ , είναι εύκολο να δούμε ότι  $w_k(u)$ , που δίνεται από την εξίσωση (6.4), ανάγεται σε  $\bar{F}_k(u)$  για  $k = 1, 2, 3$  και συνεπώς  $\hat{w}_1(s) = \frac{1}{s+\alpha_1}$ ,  $\hat{w}_2(s) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$  και  $\hat{w}_3(s) = \frac{2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1s + (s+\alpha_2)^2}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2}$ , απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\hat{w}(s) &= \lambda \left( \frac{\theta(\alpha_1 + \alpha_2 + s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} + \frac{1 - \theta}{s + \alpha_1} \right), \\ \hat{w}^*(s) &= \lambda \left( \frac{\theta(2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1s + (s + \alpha_2)^2)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)^2} + \frac{(1 - \theta)(\alpha_1 + \alpha_2 + s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \right).\end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο των παραμέτρων:  $c = 2.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\delta = 0$ ,  $\theta = 0.5$  και  $\lambda = 1$ . Για τις προαναφερόμενες τιμές των παραμέτρων οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (6.25) είναι  $r_1 = 0.37228$ ,  $r_2 = 0$ ,  $-R_1 = -0.31867$ ,  $-R_2 = -2.3579$ ,  $-R_3 = -5.32340$  και  $-R_4 = -5.37228$ . Επιπλέον, αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις  $\hat{w}(s)$ ,  $\hat{w}^*(s)$  και το σύνολο των παραμέτρων στις εξισώσεις (6.8) και (6.9), βρίσκουμε ότι  $\psi'(0) = -2.17029$  και  $\psi'_1(0) = -1.82971$ .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη σ.χ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής,  $K(u)$ . Εφόσον η εξίσωση  $J_4(s) = (\frac{1}{2}s^2 + 2.5s - 1)(s + 1)(s + 2) + 2 = 0$  έχει ακριβώς τρεις αρνητικές ρίζες, τις προαναφερόμενες  $-R_1, -R_2$  και  $-R_3$ , από την εξίσωση (6.23) έπεται ότι, για  $u \geq 0$

$$K(u) = 1 - 0.65955e^{-0.31867u} + 0.03602e^{-2.3579u} + 0.02353e^{-5.32340u}.$$

Επιπλέον, υπολογίζοντας τις συνελίξεις  $(f_1 * w^*)(u)$ ,  $(f_2 * w)(u)$  και αντικαθιστώντας το παραπάνω σύνολο των παραμέτρων, έχουμε ότι  $A_1(u) = (-3e^u + 3ue^u + 3 + u)e^{-2u}$  και  $A_2(u) = (4 - 4e^u + u + 3ue^u)e^{-2u}$ . Τότε, η συνάρτηση  $h(u)$  του Θεωρήματος 6.3, έχει την ακόλουθη μορφή

$$h(u) = 0.28548e^{-5u} - 0.24290e^{-2u} + 0.89538e^{-u} + 0.06205e^{-5.37228u}.$$

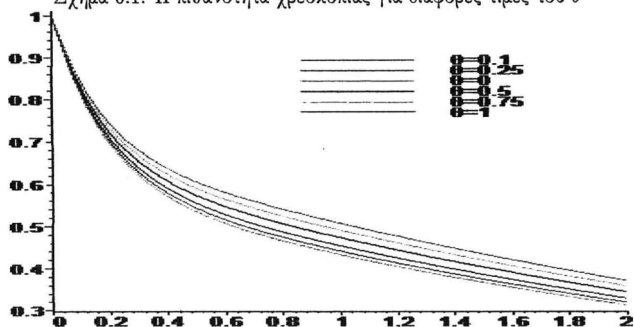
Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις  $K(u)$  και  $h(u)$  στην εξίσωση (6.19) της Πρότασης 6.2, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι της μορφής

$$\psi(u) = 0.65310e^{-0.31867u} - 0.03141e^{-2.3579u} - 0.07912e^{-5.32340u} + 0.45743e^{-5.37228u}, \quad u \geq 0.$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι για  $w(x, y) = 1$  και  $\delta = 0$ , από την εξίσωση (6.19) της



Σχήμα 6.1: Η πιθανότητα χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του  $\theta$



Πρόταση 6.2 και από τη μορφή της συνάρτησης  $h(u)$ , που δίνεται στο Θεώρημα 6.3, η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  εξαρτάται άμεσα από τις τιμές της παραμέτρου  $\theta$ , δηλ. από την πιθανότητα ταυτόχρονης εμφάνισης μιας κύριας και μιας δευτερεύουσας ζημιάς. Παίρνοντας το ίδιο σύνολο των παραμέτρων όπως παραπάνω, αλλά με διαφορετικές τιμές του  $\theta$ , όπως βλέπουμε από το διάγραμμα 6.1, η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  μειώνεται καθώς η πιθανότητα  $\theta$  αυξάνεται.

### 6.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο κλασικό μοντέλο με χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το κλασικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων. Όπως έχει τονισθεί και σε προηγούμενες ενότητες, η ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων δίνει τη δυνατότητα στον ασφαλιστή να καθορίσει ένα βέλτιστο επίπεδο ασφαλιστρών, προσφέροντας, σε κάθε επίπεδο, στους δικαιούχους της ασφάλισης μερίσματα (επιστροφές επί των ασφαλιστρών) και για όσο δεν εμφανίζονται σημαντικές ζημιές.

Έτσι, θεωρούμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος που δίνεται στις σχέσεις (6.1)-(6.2) τροποποιείται εισάγοντας μία στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων με  $n$ -επίπεδα,  $0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \beta_{n+1} = \infty$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται μεταξύ των δύο διαδοχικών επιπέδων  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , ο ασφαλιστής πληρώνει μερίσματα στους δικαιούχους με ρυθμό  $d_i$  και συνεπώς ο αντίστοιχος ρυθμός

είσπραξης του ασφαλιστρού είναι  $c_i = c - d_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ , με  $c = c_1 > \dots > c_n > c_{n+1} \geq 0$ . Έστω  $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}\}$  και  $\{U_\beta(t)\}_{t \geq 0}$  να είναι η διαδικασία πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο με απαιτήσεις που εμφανίζουν χρονική υστέρηση και έναν όρο διάχυσης κάτω από την ύπαρξη μιας στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων, στο χρόνο  $t$  με αρχικό κεφάλαιο  $U_\beta(0) = u$ . Τότε, η στοχαστική διαδικασία  $\{U_\beta(t)\}_{t \geq 0}$  ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση, για  $i = 1, \dots, n + 1$

$$dU_\beta(t) = c_i dt - dS(t) + \sigma_i dB(t), \quad \beta_{i-1} \leq U_\beta(t) \leq \beta_i, \quad (6.26)$$

όπου  $\{B(t)\}_{t=0}^\infty$  είναι η στοχαστική διαδικασία Wiener και  $\{S(t)\}_{t=0}^\infty$  η στοχαστική διαδικασία των σωρευτικών αποζημιώσεων, οι οποίες έχουν τους ίδιους ορισμούς και ερμηνεία όπως στην Ενότητα 6.1, με μόνη διαφορά ότι η παράμετρος διασποράς της κίνησης Brown είναι πλέον  $\sigma_i$ , όταν η διαδικασία πλεονάσματος βρίσκεται μεταξύ των διαδοχικών επιπέδων  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ .

Επίσης, έστω  $T_\beta = \inf\{t \geq 0 : U_\beta(t) < 0\}$  ο χρόνος χρεοκοπίας και για  $\delta \geq 0$  ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη διαδικασία πλεονάσματος της σχέσης (6.26) ως

$$\phi(u, \beta) = \mathbb{E}(e^{-\delta T_\beta} w(U_\beta(T_\beta -), |U_\beta(T_\beta)|) 1_{(T_\beta < \infty)} | U_\beta(0) = u), \quad u \geq 0, \quad (6.27)$$

με  $\phi(0, \beta) = 1$  λόγω της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η διαδικασία πλεονάσματος  $U_\beta(t)$ . Επιπλέον η παράμετρος  $\delta$  και η συνάρτηση  $w(x, y)$  έχουν τους ίδιους ορισμούς και ερμηνεία όπως στην Ενότητα 6.2,  $U_\beta(T_\beta -)$  είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,  $|U_\beta(T_\beta)|$  το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, και  $T_\beta -$  το αριστερό όριο του χρόνου χρεοκοπίας  $T_\beta$ .

Για του ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν στην Ενότητα 6.2, θεωρούμε, επίσης, τη «βοηθητική» αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής  $\phi_1(u, \beta)$ ,  $u \geq 0$ . Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με το Λήμμα 6.1, σε κάθε επίπεδο, έχουμε ότι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi(u, \beta)$  και  $\phi_1(u, \beta)$  είναι συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς  $u$  στο  $(0, \infty)$ .

Κατά την ίδια μεθοδολογία όπως και σε προηγούμενες ενότητες [βλ. για παράδειγμα στην Ενότητα 1.4.4], κάτω από τη στρατηγική των πολλαπλών μερισμάτων, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu εξαρτώνται άμεσα από τα επίπεδα της μερισματικής στρατηγικής στα οποία ανήκει το αρχικό κεφάλαιο  $u$ . Έτσι, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεταξύ των επιπέδων  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$ , για  $i = 1, \dots, n + 1$ , η αντίστοιχη αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής της εξίσωσης (6.27) θα συμβολίζεται με  $\phi_i(u)$  για  $\beta_{i-1} < u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ . Όμοια όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεταξύ των επιπέδων  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$ , για  $i = 1, \dots, n + 1$ , η αντίστοιχη «βοηθητική» αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής θα συμβολίζεται με  $\phi_{1,i}(u)$  για  $\beta_{i-1} < u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ . Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι, όπως θα

δούμε και από το παρακάτω θεώρημα, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu,  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  δεν είναι διαφορίσιμες στα σημεία (επίπεδα)  $\beta_i$ , αλλά σε αυτά τα σημεία υπάρχουν οι αντίστοιχες δεξιές και αριστερές παράγωγοι. Στο παρακάτω θεώρημα δείχνουμε, ότι σε κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

**Θεώρημα 6.5.** Για  $\beta_{i-1} < u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_i''(u) + c_i \phi_i'(u) - (\lambda + \delta) \phi_i(u) &= -\lambda \theta \left( \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_i(u-x) dF_2(x) + \xi_{2,i}(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_{1,i}(u-x) dF_1(x) + \zeta_{1,i}(u) \right), \\ \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_{1,i}''(u) + c_i \phi_{1,i}'(u) - (\lambda + \delta) \phi_{1,i}(u) &= -\lambda \theta \left( \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_i(u-x) dF_3(x) + \xi_{3,i}(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_{1,i}(u-x) dF_2(x) + \zeta_{2,i}(u) \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

με οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \phi(0, \beta) &= \phi_1(0) = 1, & \phi_1(0, \beta) &= \phi_{1,1}(0) = 1, \\ \phi_{i-1}(\beta_{i-1}-) &= \phi_i(\beta_{i-1}+), & \phi_{1,i-1}(\beta_{i-1}-) &= \phi_{1,i}(\beta_{i-1}+), \quad i = 2, \dots, n+1, \\ \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \phi_{i-1}''(\beta_{i-1}-) + c_{i-1} \phi_{i-1}'(\beta_{i-1}-) &= \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_i''(\beta_{i-1}+) + c_i \phi_i'(\beta_{i-1}+), \quad i = 2, \dots, n+1, \\ \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \phi_{1,i-1}''(\beta_{i-1}-) + c_{i-1} \phi_{1,i-1}'(\beta_{i-1}-) &= \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_{1,i}''(\beta_{i-1}+) + c_i \phi_{1,i}'(\beta_{i-1}+), \quad i = 2, \dots, n+1, \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, \beta) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(u) = 0, & \lim_{u \rightarrow \infty} \phi_1(u, \beta) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \phi_{1,n+1}(u) = 0, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \xi_{j,i}(u) &= \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}} \phi_k(u-x) dF_j(x) + w_j(u), \quad j = 2, 3, \\ \zeta_{j,i}(u) &= \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}} \phi_{1,k}(u-x) dF_j(x) + w_j(u), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

με  $w_j(u)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , όπως δίνονται στην εξίσωση (6.4).

Απόδειξη. Για  $\beta_{i-1} < u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.28) αποδεικνύεται εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1, και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\int_0^u \phi(u-x, \mathbf{b}) dF_j(x) = \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_i(u-x) dF_j(x) + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}} \phi_k(u-x) dF_j(x)$  για  $j = 2, 3$ , και  $\int_0^u \phi_1(u-x, \mathbf{b}) dF_j(x) = \int_0^{u-\beta_{i-1}} \phi_i(u-x) dF_j(x) + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{u-\beta_k}^{u-\beta_{k-1}} \phi_{1,k}(u-x) dF_j(x)$  για  $j = 1, 2$ .

Για να αποδείξουμε τις οριακές συνθήκες του θεωρήματος, πρώτα παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού των συναρτήσεων Gerber-Shiu έχουμε ότι  $\phi_1(0) = \phi_{1,1}(0) = 1$ , λόγω της μεταβλητότητας που παρουσιάζει η διαδικασία πλεονάσματος  $U_b(t)$ . Επομένως, το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις τιμές των συναρτήσεων  $\phi_i(u)$ ,  $\phi_{1,i}(u)$  στο σημείο  $u = 0$  για τα επίπεδα  $b_i$ ,  $i = 2, \dots, n+1$ . Επιπλέον, από τη μορφή του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.28) έπεται ότι οι συναρτήσεις  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$  είναι συνεχείς (ακόμη και στα σημεία  $\beta_i$ , όπου μπορεί να τα αντιληφθεί κανείς ως σημεία ασυνέχειας). Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$ , έχουμε για  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \beta_i^-} \phi(u, \beta) = \lim_{u \rightarrow \beta_i^+} \phi(u, \beta), \quad \lim_{u \rightarrow \beta_i^-} \phi_1(u, \beta) = \lim_{u \rightarrow \beta_i^+} \phi_1(u, \beta).$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε άμεσα το δεύτερο σύνολο των οριακών συνθηκών, απ' όπου φαίνεται ότι η συνέχεια των  $\phi_i$ ,  $\phi_{1,i}$  στα σημεία  $u = \beta_i$ . Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι, παρόλο που οι συναρτήσεις  $\phi_i$ ,  $\phi_{1,i}$  είναι συνεχείς στα σημεία  $u = \beta_i$ , το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (6.28) ορίζεται για  $\beta_{i-1} < u < \beta_i$  και όχι για  $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , και αυτό διότι όπως θα δούμε παρακάτω οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$  δεν είναι διαφορίσιμες στα σημεία  $b_i$ , αλλά σε αυτά τα σημεία υπάρχει η δεξιά και η αριστερή παράγωγος των  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$ . Πράγματι παίρνοντας το πλευρικό όριο  $u \rightarrow \beta_{i-1}^-$ ,  $i = 2, \dots, n+1$  και στις δύο εξισώσεις της σχέσης (6.28) και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των  $\phi_i$ ,  $\phi_{1,i}$  στα σημεία  $\beta_i$  βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \phi_{i-1}''(\beta_{i-1}^-) + c_{i-1} \phi_{i-1}'(\beta_{i-1}^-) &= \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_i''(\beta_{i-1}^+) + c_i \phi_i'(\beta_{i-1}^+), \\ \frac{\sigma_{i-1}^2}{2} \phi_{1,i-1}''(\beta_{i-1}^-) + c_{i-1} \phi_{1,i-1}'(\beta_{i-1}^-) &= \frac{\sigma_i^2}{2} \phi_{1,i}''(\beta_{i-1}^+) + c_i \phi_{1,i}'(\beta_{i-1}^+). \end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό των συναρτήσεων Gerber-Shiu, όταν το αρχικό κεφάλαιο τείνει στο άπειρο, τότε οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi(u, \beta)$  και  $\phi_1(u, \beta)$  είναι μηδέν. Αυτό εξηγεί και τις δύο τελευταίες δύο οριακές συνθήκες του θεωρήματος. ■

**Παρατήρηση 6.2.** Η συνήθης διαδικασία (η οποία εφαρμόστηκε και σε προηγούμενες ενότητες όπου θεωρούσαμε την ύπαρξη κάποιας μερισματικής στρατηγικής [βλ. π.χ. Ενότητα 2.6]) προκειμένου να βρούμε τη γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.28)

είναι να βρούμε μια μερική λύση του προαναφερθέντος μη-ομογενούς συστήματος (αυτή είναι οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων) καθώς και να υπολογίσουμε τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος της εξίσωσης (6.28). Στο συγκεκριμένο όμως μοντέλο, όπως μπορούμε να δούμε από την Ενότητα Α'3 του Παραρτήματος, το προαναφερόμενο ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 6.2) δεν έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Επομένως, προκειμένου να βρούμε τη γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.28), στη συνέχεια θα μετασχηματίσουμε το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα (6.28) σε ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους, το οποίο θα λύσουμε χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά της Ενότητας 6.2. Αυτό είναι και το αντικείμενο της επόμενης υπο-ενότητας.

### 6.3.1 Ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δευτέρου είδους

Σε αυτή την υπο-ενότητα θεωρούμε ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, όμοιας μορφής με αυτού της εξίσωσης (6.28), και βρισκόμαστε τη λύση αυτού. Με αυτό επιτυγχάνουμε, όπως θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη υπο-ενότητα, να βρούμε αναλυτικές εκφράσεις για τη λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.28) του Θεωρήματος 6.5.

Για  $u \geq \beta$ , θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις  $\Phi(u)$  και  $\Phi_1(u)$  ικανοποιούν το ακόλουθο μη-ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2}\Phi''(u) + c\Phi'(u) - (\lambda + \delta)\Phi(u) &= -\lambda \left( \int_0^{u-\beta} \Phi(u-x)dF_2(x) + \xi_2(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^{u-\beta} \Phi_1(u-x)dF_1(x) + \zeta_1(u) \right), \\ \frac{\sigma^2}{2}\Phi_1''(u) + c\Phi_1'(u) - (\lambda + \delta)\Phi_1(u) &= -\lambda \left( \int_0^{u-\beta} \Phi(u-x)dF_3(x) + \xi_3(u) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^{u-\beta} \Phi_1(u-x)dF_2(x) + \zeta_2(u) \right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

όπου  $\xi_i(u)$ , για  $i = 2, 3$ , και  $\zeta_i(u)$  για  $i = 1, 2$ , είναι κάποιες πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες παριστούν τους μη-ομογενείς όρους του παραπάνω συστήματος. Σημειώνουμε, ότι η μορφή του παραπάνω συστήματος σχετίζεται άμεσα με τη μορφή του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος του Θεωρήματος 6.5, με τη διαφορά τον υπο-δείκτη  $i$ , καθώς και τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο.

Αλλάζοντας μεταβλητή  $u - \beta = x$  και θεωρώντας τις συναρτήσεις  $\Lambda(x) = \Phi(u)$ ,  $\Lambda_1(x) = \Phi_1(u)$ ,  $\xi_{j,\beta}(x) = \xi_j(x + \beta)$  για  $j = 2, 3$  και  $\zeta_{j,\beta}(x) = \zeta_j(x + \beta)$  για  $j = 1, 2$ , το μη-ομογενές

ολοκληρο-διαφορικό σύστημα της εξίσωσης (6.29) γίνεται, για  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \Lambda''(x) + c\Lambda'(x) - (\lambda + \delta)\Lambda(x) &= -\lambda\theta \left( \int_0^x \Lambda(x-y) dF_2(y) + \xi_{2,\beta}(x) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^x \Lambda_1(x-y) dF_1(y) + \zeta_{1,\beta}(x) \right), \\ \frac{\sigma^2}{2} \Lambda_1''(x) + c\Lambda_1'(x) - (\lambda + \delta)\Lambda_1(x) &= -\lambda\theta \left( \int_0^x \Lambda(x-y) dF_3(y) + \xi_{3,\beta}(x) \right) \\ &\quad - \lambda(1-\theta) \left( \int_0^x \Lambda_1(x-y) dF_2(y) + \zeta_{2,\beta}(x) \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Επόμενο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε το μη-ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα της σχέσης (6.30) σε ένα ολοκληρωτικό σύστημα τύπου Volterra δευτέρου είδους (Volterra integral equation system of second kind), το οποίο στη συνέχεια θα λύσουμε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace και τα αποτελέσματα της Ενότητας 6.2. Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος της σχέσης (6.30) χρειάζομαστε το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 6.3.** Για  $x > 0$ , οι παρακάτω αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace είναι αληθείς:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{s^n}{(s-r_1) \prod_{i=1}^k (s+b_i)} &= \begin{cases} \frac{r_1^n e^{r_1 x}}{\pi(r_1)} + \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-n+1} b_i^n e^{-b_i x}}{(r_1-r_2)(r_1+b_i)}, & k=2, n=0,1, \\ \frac{1}{b_1+r_1} (r_1 e^{r_1 x} + b_1 e^{-b_1 x}), & n=1, k=1, \end{cases} \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{s^n}{\prod_{i=1}^2 (s-r_i)(s+b_i)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{(r_1-r_2)\pi(r_i)} (r_i^n (-1)^{i+1} e^{r_i x} + (-1)^{i+n-2} b_i^n e^{-b_i x}), \quad n=2,3, \end{aligned}$$

με  $\pi(s) = \prod_{i=1}^2 (s+b_i)$  και  $b_k = r_k + \frac{2c}{\sigma^2}$  για  $k=1,2$ .

Επίσης για δύο πραγματικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $m_1(x)$  και  $m_2(x)$  ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{\widehat{m}_1(s)\widehat{m}_2(s)}{s+a} = \int_0^x e^{-a(x-y)} (m_1 * m_2)(y) dy, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να δείξουμε πως προκύπτει η λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.30).

**Θεώρημα 6.6.** Για  $x \geq 0$ , η γενική λύση του μη-ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.30) είναι τη μορφής

$$\Lambda(x) = \Lambda(0) + x\Lambda'(0) + \int_0^x (x-t)l(t)dt \quad \text{και} \quad \Lambda_1(x) = \Lambda_1(0) + x\Lambda_1'(0) + \int_0^x (x-t)l_1(t)dt, \quad (6.31)$$

$\mu\epsilon$

$$l(x) = \frac{1+\xi}{\xi} \int_0^x v(x-t)dK(t) + v(x), \quad l_1(x) = \frac{1+\xi}{\xi} \int_0^x v_1(x-t)dK(t) + v_1(x), \quad (6.32)$$

$\xi$  και  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$  όπως δίνονται από το Θεωρήματα 6.3 και 6.4, αντίστοιχα. Επιπλέον

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{1}{(\sigma^2/2)^2} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} H_1(x, \Lambda(0), \Lambda'(0)) - \lambda \int_0^x H_2(x, y, \Lambda(0), \Lambda'(0)) T_{r_2} f_2(y) dy \right. \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \lambda \int_0^x [\theta H_3(x, y, \Lambda(0), \Lambda'(0)) f_2(y) + (1-\theta) H_3(x, y, \Lambda_1(0), \Lambda'_1(0)) f_1(y)] dy \\ & + \lambda \int_0^x H_4(x, y) [\theta(f_2 * w_A)(y) + (1-\theta)(f_1 * w_B)(y)] dy - \frac{\sigma^2}{2} w_A(x) \\ & \left. - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1}{r_1 + b_1} \int_0^x (r_1^2 e^{r_1(x-y)} - b_1^2 e^{-b_1(x-y)}) w_A(y) dy \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \lambda \int_0^x H_5(x, y) (T_{r_2} f_2 * w_A)(y) dy \right\},$$

$$\begin{aligned} v_1(x) = & \frac{1}{(\sigma^2/2)^2} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} H_1(x, \Lambda_1(0), \Lambda'_1(0)) - \lambda \int_0^x H_2(x, y, \Lambda_1(0), \Lambda'_1(0)) T_{r_2} f_2(y) dy \right. \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \lambda \int_0^x [(1-\theta) H_3(x, y, \Lambda_1(0), \Lambda'_1(0)) f_2(y) + \theta H_3(x, y, \Lambda(0), \Lambda'(0)) f_3(y)] dy \\ & + \lambda \int_0^x H_4(x, y) [(1-\theta)(f_2 * w_B)(y) + \theta(f_3 * w_A)(y)] dy - \frac{\sigma^2}{2} w_B(x) \\ & \left. - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1}{r_1 + b_1} \int_0^x (r_1^2 e^{r_1(x-y)} - b_1^2 e^{-b_1(x-y)}) w_B(y) dy \right. \\ & \left. + \lambda \int_0^x H_5(x, y) (T_{r_2} f_2 * w_B)(y) dy \right\}, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} H_1(x, z_1, z_2) &= (\lambda + \delta) z_2 \frac{e^{r_1 x} - e^{-b_1 x}}{b_1 + r_1} + \frac{r_1 e^{r_1 x} + b_1 e^{-b_1 x}}{b_1 + r_1} [(\lambda + \delta) z_1 - c z_2], \\ H_2(x, y, z_1, z_2) &= [r_1(\lambda + \delta) z_1 + (\lambda + \delta - c r_1) z_2] \frac{e^{r_1(x-y)}}{\pi(r_1)} + \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i e^{-b_i(x-y)}}{(r_1 - r_2)(r_1 + b_i)} \\ &\quad \times [b_i(\lambda + \delta) z_1 - (c b_i + \lambda + \delta) z_2], \\ H_3(x, y, z_1, z_2) &= \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{r_1 - r_2} \left[ r_i^2 \frac{e^{r_i(x-y)}}{\pi(r_i)} (b_i z_1 + z_2) + b_i^2 \frac{e^{-b_i(x-y)}}{\pi(r_i)} (r_i z_1 - z_2) \right], \end{aligned}$$

$$H_4(x, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{(r_1 - r_2)\pi(r_i)} [-r_i^2 e^{r_i(x-y)} + b_i^2 e^{-b_i(x-y)}],$$

$$H_5(x, y) = \frac{r_1^2 e^{r_1(x-y)}}{\pi(r_1)} - \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i b_i^2 e^{-b_i(x-y)}}{(r_1 - r_2)(r_1 + b_i)},$$

$\mu \in \pi(s) = \prod_{i=1}^2 (s + b_i)$ ,  $w_A(x) = \lambda(\theta \xi_{2,\beta}(x) + (1 - \theta)\zeta_{1,\beta}(x))$  και  $w_B(x) = \lambda(\theta \xi_{3,\beta}(x) + (1 - \theta)\zeta_{2,\beta}(x))$ .

Απόδειξη. Έστω  $l(x)$  και  $l_1(x)$  δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε  $l(x) = \Lambda''(x)$  και  $l_1(x) = \Lambda_1''(x)$ . Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\Lambda(x) = \Lambda(0) + \int_0^x \Lambda'(t) dt = \Lambda(0) + \Lambda'(0)x + \int_0^x (x-t)l(t) dt,$$

$$\Lambda_1(x) = \Lambda_1(0) + \int_0^x \Lambda_1'(t) dt = \Lambda_1(0) + \Lambda_1'(0)x + \int_0^x (x-t)l_1(t) dt,$$

και συνεπώς η εξίσωση (6.31) επαληθεύεται. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις και στις δύο εξισώσεις της σχέσης (6.30) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} l(x) + [c - (\lambda + \delta)x]\Lambda'(0) - (\lambda + \delta)\Lambda(0) + \int_0^x [c - (\lambda + \delta)(x-s)]l(s) ds \\ &= -\lambda\theta \int_0^x [(x-y)\Lambda'(0) + \Lambda(0)] dF_2(y) - \lambda\theta \int_0^x \int_0^{x-y} (x-y-s)l(s) ds dF_2(y) \\ & \quad - \lambda(1-\theta) \int_0^x [(x-y)\Lambda_1'(0) + \Lambda_1(0)] dF_1(y) - \lambda(1-\theta) \int_0^x \int_0^{x-y} (x-y-s) \\ & \quad \times l_1(s) ds dF_1(y) - \lambda\theta \xi_{2,\beta}(x) - \lambda(1-\theta)\zeta_{1,\beta}(s), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} l_1(x) + [c - (\lambda + \delta)x]\Lambda_1'(0) - (\lambda + \delta)\Lambda_1(0) + \int_0^x [c - (\lambda + \delta)(x-s)]l_1(s) ds \\ &= -\lambda\theta \int_0^x [(x-y)\Lambda'(0) + \Lambda(0)] dF_3(y) - \lambda\theta \int_0^x \int_0^{x-y} (x-y-s)l(s) ds dF_3(y) \\ & \quad - \lambda(1-\theta) \int_0^x [(x-y)\Lambda_1'(0) + \Lambda_1(0)] dF_2(y) - \lambda(1-\theta) \int_0^x \int_0^{x-y} (x-y-s) \\ & \quad \times l_1(s) ds dF_2(y) - \lambda\theta \xi_{3,\beta}(x) - \lambda(1-\theta)\zeta_{2,\beta}(s). \end{aligned}$$

Επιπλέον, αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης, έχουμε ότι  $\int_0^x \int_0^{x-y} ds dy = \int_0^x (\int_0^{x-s} dy) ds$ , απ' όπου, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, οι δύο παραπάνω εξισώσεις γράφονται



ισοδύναμα ως ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra δεύτερου είδους

$$\begin{aligned} l(x) - \int_0^x \kappa(x-s)l(s)ds + \int_0^x \varphi(x-s)l_1(s)ds &= \gamma(x), \\ l_1(x) - \int_0^x \kappa_1(x-s)l_1(s)ds + \int_0^x \varphi_1(x-s)l(s)ds &= \gamma_1(x), \end{aligned} \quad (6.33)$$

με

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= -\frac{1}{\sigma^2/2} \left[ c - (\lambda + \delta)x + \lambda\theta \int_0^x (x-s)dF_2(s) \right], \\ \kappa_1(x) &= -\frac{1}{\sigma^2/2} \left[ c - (\lambda + \delta)x + \lambda(1-\theta) \int_0^x (x-s)dF_2(s) \right], \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\lambda(1-\theta)}{\sigma^2/2} \int_0^x (x-y)dF_2(y), & \varphi_1(x) &= \frac{\lambda\theta}{\sigma^2/2} \int_0^x (x-y)dF_3(y), \\ \gamma(x) &= \frac{1}{\sigma^2/2} \left[ ((\lambda + \delta)x - c)\Lambda'(0) + (\lambda + \delta)\Lambda(0) - \lambda\theta \int_0^x ((x-y)\Lambda'(0) + \Lambda(0))dF_2(y) \right. \\ &\quad \left. - \lambda(1-\theta) \int_0^x ((x-y)\Lambda'_1(0) + \Lambda_1(0))dF_1(y) - w_A(x) \right], \\ \gamma_1(x) &= \frac{1}{\sigma^2/2} \left[ ((\lambda + \delta)x - c)\Lambda'_1(0) + (\lambda + \delta)\Lambda_1(0) - \lambda\theta \int_0^x ((x-y)\Lambda'(0) + \Lambda(0))dF_3(y) \right. \\ &\quad \left. - \lambda(1-\theta) \int_0^x ((x-y)\Lambda'_1(0) + \Lambda_1(0))dF_2(y) - w_B(x) \right]. \end{aligned}$$

Τώρα, προκειμένου να βρούμε την ακριβή λύση του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων της σχέσης (6.33), για  $\Re(s) \geq 0$ , ορίζουμε  $\widehat{l}(s)$ ,  $\widehat{l}_1(s)$ ,  $\widehat{\kappa}(s)$ ,  $\widehat{\kappa}_1(s)$ ,  $\widehat{\gamma}(s)$ ,  $\widehat{\gamma}_1(s)$ ,  $\widehat{\varphi}(s)$  και  $\widehat{\varphi}_1(s)$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων  $l(x)$ ,  $l_1(x)$ ,  $\kappa(x)$ ,  $\kappa_1(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\gamma_1(x)$ ,  $\varphi(x)$  και  $\varphi_1(x)$ , αντίστοιχα. Έτσι παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις της σχέσης (6.33) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\widehat{l}(s)$  και  $\widehat{l}_1(s)$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \widehat{l}(s) &= \frac{(1 - \widehat{\kappa}_1(s))\widehat{\gamma}(s) - \widehat{\varphi}(s)\widehat{\gamma}_1(s)}{(1 - \widehat{\kappa}(s))(1 - \widehat{\kappa}_1(s)) - \widehat{\varphi}(s)\widehat{\varphi}_1(s)}, \\ \widehat{l}_1(s) &= \frac{(1 - \widehat{\kappa}(s))\widehat{\gamma}_1(s) - \widehat{\varphi}_1(s)\widehat{\gamma}(s)}{(1 - \widehat{\kappa}(s))(1 - \widehat{\kappa}_1(s)) - \widehat{\varphi}(s)\widehat{\varphi}_1(s)}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

όπου από τους ορισμούς των συναρτήσεων  $\kappa$ ,  $\kappa_1$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  και μετά από κάποιες αλγεβρικές

πράξεις είναι εύκολο να δούμε ότι

$$1 - \widehat{\kappa}(s) = \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}, \quad 1 - \widehat{\kappa}_1(s) = \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\widehat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2},$$

$$\widehat{\varphi}(s) = \frac{\lambda(1-\theta)\widehat{f}_1(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2}, \quad \widehat{\varphi}_1(s) = \frac{\lambda\theta\widehat{f}_3(s)}{\frac{\sigma^2}{2}s^2},$$

και

$$\widehat{\gamma}(s) = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}s^2} \left[ s(\lambda + \delta - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))\Lambda(0) - (cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s))\Lambda'(0) - \lambda(1-\theta)s\widehat{f}_1(s)\Lambda_1(0) \right. \\ \left. - \lambda(1-\theta)\widehat{f}_1(s)\Lambda_1'(0) - s^2\widehat{w}_A(s) \right],$$

$$\widehat{\gamma}_1(s) = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2}s^2} \left[ s(\lambda + \delta - \lambda(1-\theta)\widehat{f}_2(s))\Lambda_1(0) - (cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\widehat{f}_2(s))\Lambda_1'(0) - \lambda\theta s\widehat{f}_3(s) \right. \\ \left. \times \Lambda(0) - \lambda\theta\widehat{f}_3(s)\Lambda'(0) - s^2\widehat{w}_B(s) \right].$$

Τότε, με βάση τους παραπάνω μετασχηματισμούς Laplace, έχουμε ότι ο κοινός παρονομαστής των δύο εξισώσεων της σχέσης (6.34) γράφεται ισοδύναμα ως

$$(1 - \widehat{\kappa}(s))(1 - \widehat{\kappa}_1(s)) - \widehat{\varphi}(s)\widehat{\varphi}_1(s) = \frac{\ell(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4}$$

όπου η συνάρτηση  $\ell(s)$  δίνεται από το Λήμμα 6.2. Συνεπώς, και οι δύο εξισώσεις της σχέσης (6.34) γράφονται ως

$$\widehat{l}(s) = \frac{C(s)}{\ell(s)}, \quad \text{και} \quad \widehat{l}_1(s) = \frac{C_1(s)}{\ell(s)}. \quad (6.35)$$

με

$$C(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4 \left[ (1 - \widehat{\kappa}_1(s))\widehat{\gamma}(s) - \widehat{\varphi}(s)\widehat{\gamma}_1(s) \right], \quad (6.36)$$

$$C_1(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 s^4 \left[ (1 - \widehat{\kappa}(s))\widehat{\gamma}_1(s) - \widehat{\varphi}_1(s)\widehat{\gamma}(s) \right]. \quad (6.37)$$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τους αριθμητές των  $\widehat{l}(s)$  και  $\widehat{l}_1(s)$ , δηλ. τις συναρτήσεις  $C(s)$  και  $C_1(s)$ , ξεχωριστά όπως γίνεται ακολούθως.

Αρχικά μελετούμε τον αριθμητή της συνάρτησης  $\widehat{l}(s)$ . Αντικαθιστώντας, από τις παραπάνω σχέσεις, τους μετασχηματισμούς Laplace  $\widehat{\kappa}$ ,  $\widehat{\gamma}$ ,  $\widehat{\varphi}$  και  $\widehat{\gamma}_1$  στην εξίσωση (6.36) και ανακαλώντας από την απόδειξη του Λήμματος 6.2 ότι  $\ell_2(s) = \frac{\sigma^2}{2} + cs - \lambda - \delta + \lambda\widehat{f}_2(s)$ , τότε

η συνάρτηση  $C(s)$  μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} C(s) = & \Lambda(0)\{s(\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))(\lambda + \delta - \lambda\theta\widehat{f}_2(s)) + s\lambda^2\theta(1 - \theta)\widehat{f}_3(s)\widehat{f}_1(s)\} \\ & - \Lambda'(0)\{(\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))(cs - \lambda - \delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s)) - \lambda^2\theta(1 - \theta)\widehat{f}_3(s)\widehat{f}_1(s)\} \\ & - \Lambda_1(0)\{s(\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))\lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s) + s(\lambda + \delta - \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_2(s))\lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)\} \\ & - \Lambda'_1(0)\{(\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))\lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s) - (cs - \lambda - \delta + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_2(s))\lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)\} \\ & - (\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s))s^2\widehat{w}_A(s) + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)s^2\widehat{w}_B(s). \end{aligned}$$

Επιπλέον, κάνοντας περαιτέρω αλγεβρικές πράξεις στους όρους εντός αγκυλών, στην παραπάνω εξίσωση, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $C(s)$  παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} C(s) = & \Lambda(0)s\{(\lambda + \delta)\ell_2(s) - \lambda\theta\widehat{f}_2(s)s(\frac{\sigma^2}{2}s + c)\} - \Lambda'(0)\{(cs - \lambda - \delta)\ell_2(s) + \lambda\theta\widehat{f}_2(s)\frac{\sigma^2}{2}s^2\} \\ & - \Lambda_1(0)\lambda(1 - \theta)s^2\widehat{f}_1(s)(\frac{\sigma^2}{2} + c) - \Lambda'_1(0)\lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)\frac{\sigma^2}{2}s^2 + \lambda s^2\theta\widehat{f}_2(s)\widehat{w}_A(s) \\ & - s^2\ell_2(s)\widehat{w}_A(s) + \lambda(1 - \theta)\widehat{f}_1(s)s^2\widehat{w}_B(s). \end{aligned}$$

Ακόμη, έχοντας από το Λήμμα 6.2 ότι το  $s = r_2$  επαληθεύει την εξίσωση  $\ell_2(s) = 0$  και χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία όπως αυτή στην απόδειξη της Πρότασης 6.1, βρίσκουμε ότι

$$\ell_2(s) = \ell_2(s) - \ell_2(r_2) = \frac{\sigma^2}{2}(s - r_2)(s + b_2)(1 - \frac{\lambda T_{r_2}\widehat{f}_2(s)}{\frac{\sigma^2}{2}(s + b_2)}),$$

απ' όπου η συνάρτηση  $C(s)$  ισοδύναμα εκφράζεται ως

$$C(s) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \prod_{j=1}^2 (s - r_j)(s + b_j)\widehat{v}(s), \quad (6.38)$$

με

$$\begin{aligned} \widehat{v}(s) = & \frac{1}{(\sigma^2/2)^2} \left\{ \Lambda(0) \left[ \frac{\frac{\sigma^2}{2}s(\lambda + \delta)}{(s - r_1)(s + b_1)} - \frac{(\lambda + \delta)\lambda s T_{r_2}\widehat{f}_2(s)}{(s - r_1)\prod_{i=1}^2(s + b_i)} - \lambda\theta \frac{\widehat{f}_2(s)s^2(\frac{\sigma^2}{2}s + c)}{\prod_{i=1}^2(s - r_i)(s + b_i)} \right] \right. \\ & - \Lambda'(0) \left[ \frac{\frac{\sigma^2}{2}(cs - \lambda - \delta)}{(s - r_1)(s + b_1)} - \frac{(cs - \lambda - \delta)\lambda T_{r_2}\widehat{f}_2(s)}{(s - r_1)\prod_{i=1}^2(s + b_i)} + \frac{\sigma^2}{2}\lambda\theta \frac{\widehat{f}_2(s)s^2}{\prod_{i=1}^2(s - r_i)(s + b_i)} \right] \\ & - \lambda(1 - \theta) \left[ \Lambda_1(0) \frac{\widehat{f}_1(s)s^2(\frac{\sigma^2}{2}s + c)}{\prod_{i=1}^2(s - r_i)(s + b_i)} + \Lambda'_1(0) \frac{\sigma^2}{2} \frac{\widehat{f}_1(s)s^2}{\prod_{i=1}^2(s - r_i)(s + b_i)} \right] \\ & \left. + \lambda\theta \frac{s^2\widehat{f}_2(s)\widehat{w}_A(s)}{\prod_{i=1}^2(s - r_i)(s + b_i)} - \frac{\frac{\sigma^2}{2}s^2\widehat{w}_A(s)}{(s - r_1)(s + b_1)} + \frac{\lambda s^2\widehat{w}_A(s)T_{r_2}\widehat{f}_2(s)}{(s - r_1)\prod_{i=1}^2(s + b_i)} \right\} \end{aligned}$$

$$+\lambda(1-\theta)\left.\frac{s^2\widehat{f}_1(s)\widehat{w}_B(s)}{\prod_{i=1}^2(s-r_i)(s+b_i)}\right\}. \quad (6.39)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.11), (6.38) και (6.35), και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης  $\widehat{g}(s)$ , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{l}(s)$  ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\widehat{l}(s) = \widehat{l}(s)\widehat{g}(s) + \widehat{v}(s). \quad (6.40)$$

Το επόμενο βήμα είναι να αντιστρέψουμε ως προς  $s$  την παραπάνω εξίσωση. Για αυτό το σκοπό παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\widehat{v}(s)$ , που δίνεται από την εξίσωση (6.39), είναι ένα άθροισμα πηλίκων πολυωνύμων, όπου οι βαθμοί των πολυωνύμων των αριθμητών, σε κάθε ένα από προαναφερόμενα πηλίκια, είναι μικρότεροι ή ίσοι με τους βαθμούς των αντίστοιχων πολυωνύμων που βρίσκονται στους παρονομαστές. Έτσι, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων καθώς και τα αποτελέσματα του Λήμματος 6.3, μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η  $\theta$  αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $\widehat{v}(s)$ , είναι η συνάρτηση  $v(x)$  που δίνεται στην εκφώνηση του θεωρήματος.

Συνοπώς, με βάση τα παραπάνω, αντιστρέφοντας ως προς  $s$  την εξίσωση (6.40), βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $l(x)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ανανεωτική εξίσωση

$$l(x) = \int_0^x l(x-t)g(t)dt + v(x),$$

η οποία με βάση το Θεώρημα 6.3 γράφεται ισοδύναμα ως μία ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$l(x) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^x l(x-t)dG(t) + v(x),$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9 βρίσκουμε άμεσα ότι η συνάρτηση  $l(x)$  ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση της σχέσης (6.32).

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $l_1(x)$  ικανοποιεί τη δεύτερη εξίσωση της σχέσης (6.32), εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς μεθοδολογία, όπως παραπάνω, στον αριθμητή  $C_1(s)$  της εξίσωσης (6.35). Λόγω ότι η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια η απόδειξη παραλείπεται. ■

### 6.3.2 Αναλυτικά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu μεταξύ των επιπέδων $\beta_{i-1}$ και $\beta_i$

Σε αυτή την υπο-ενότητα κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων τη υπο-ενότητας 6.3.1 βρίσκουμε την αναλυτική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος του Θεωρήματος 6.5, προσδιορίζοντας την ακριβή μορφή των συναρτήσεων Gerber-Shiu. Αυτό γίνεται μετασχηματίζοντας, για κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής, το σύστημα των

ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.28) σε μια ισοδύναμη μορφή όμοια με αυτή του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος (6.29) απ' όπου πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τις αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$ .

**Θεώρημα 6.7.** Για  $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\phi_i(u) = \Phi_i(u) = \Lambda_i(u - \beta_{i-1}), \quad \text{και} \quad \phi_{1,i}(u) = \Phi_{1,i}(u) = \Lambda_{1,i}(u - \beta_{i-1}), \quad (6.41)$$

όπου  $\Lambda_i(u)$  και  $\Lambda_{1,i}(u)$  ορίζονται στην εξίσωση (6.31) με τη βοήθεια των εξισώσεων (6.32) και (6.23), όπου το  $\beta$  αντικαθίσταται από το  $\beta_{i-1}$  και οι συναρτήσεις  $\xi_{j,\beta}(u)$ ,  $j = 2, 3$ , και  $\zeta_{j,\beta}(u)$ ,  $j = 1, 2$ , του Θεωρήματος 6.6 αντικαθίσταται από τα  $\sum_{k=1}^{i-1} \int_{u+\beta_{i-1}-\beta_k}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{k-1}} \phi_k(u+\beta_{i-1}-x) dF_j(x) + w_j(u+\beta_{i-1})$ ,  $j = 2, 3$  και  $\sum_{k=1}^{i-1} \int_{u+\beta_{i-1}-b_k}^{u+b_{i-1}-\beta_{k-1}} \phi_{1,k}(u+\beta_{i-1}-x) dF_j(x) + w_j(u+\beta_{i-1})$ ,  $j = 1, 2$ , αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Για  $0 = \beta_0 \leq u < \beta_1$ , το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.28) είναι ακριβώς της ίδιας μορφής με το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (6.29) με  $\beta = \beta_0 = 0$ . Επομένως, αλλάζοντας τους περιορισμούς του αρχικού κεφαλαίου από  $0 = \beta_0 \leq u < \beta_1$  σε  $u \geq 0$ , και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.6, η γενική λύση του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος της σχέσης (6.28) έχει την μορφή  $\phi_1(u) = \Phi_1(u) = \Lambda_1(u)$  και  $\phi_{1,1}(u) = \Phi_{1,1}(u) = \Lambda_{1,1}(u)$  για  $u \geq 0$ . Αλλάζοντας ξανά τους περιορισμούς του αρχικού κεφαλαίου από  $u \geq 0$  σε  $0 = \beta_0 \leq u < \beta_1$  παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (6.41) για το διάστημα  $[0, \beta_1)$ .

Για τα υπόλοιπα επίπεδα της μερισματικής στρατηγικής βρίσκουμε τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu αναδρομικά. Έτσι, εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία, όπως και παραπάνω, βρίσκουμε τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\phi_k$  και  $\phi_{1,k}$  για  $k = 1, \dots, i-1$ . Για  $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$ , από τη μορφή του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος της σχέσης (6.28) έχουμε ότι οι  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$ , ανάμεσα στα επίπεδα  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$  εξαρτώνται από από τις συναρτήσεις των Gerber-Shiu  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$  για όλα τα επίπεδα που είναι μικρότερα του  $\beta_{i-1}$ . Εφόσον το ολοκληρο-διαφορικό σύστημα της σχέσης (6.28) είναι αντίστοιχης μορφής με αυτής του ολοκληρο-διαφορικού συστήματος της σχέσης (6.29), αλλάζοντας τους περιορισμούς του αρχικού κεφαλαίου από  $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$  σε  $u \geq \beta_{i-1}$ , έπεται ότι η λύση για τις  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$  είναι τη μορφής όπως δίνεται στην εξίσωση (6.41). Αλλάζοντας, ξανά τους περιορισμούς για το αρχικό κεφάλαιο από  $u \geq \beta_{i-1}$  σε  $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$  παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

■

**Παρατήρηση 6.3.** (i) Από τα Θεωρήματα 6.6 και 6.7 είναι φανερό ότι η λύσεις των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  εξαρτώνται

από τον υπολογισμό των σταθερών όρων  $\Lambda_i(0)$ ,  $\Lambda_{1,i}(0)$ ,  $\Lambda'_i(0)$  και  $\Lambda'_{1,i}(0)$ , για  $i = 1, \dots, n+1$ , οι οποίοι υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες του Θεωρήματος 6.5. Έτσι, γνωρίζοντας από τα Θεωρήματα 6.6 και 6.7 την μορφή των  $\phi_i$  και  $\phi_{1,i}$ , μπορούμε, μέσω των οριακών συνθηκών του Θεωρήματος 6.5, να πάρουμε ένα σύστημα  $4n+4$  εξισώσεων η λύση του οποίου μας δίνει τις αρχικές τιμές  $\Lambda_i(0)$ ,  $\Lambda_{1,i}(0)$ ,  $\Lambda'_i(0)$  και  $\Lambda'_{1,i}(0)$ , για  $i = 1, \dots, n+1$ .

- (ii) Επίσης, σημειώνουμε ότι από τα Θεωρήματα 6.6 και 6.7 η λύση των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής  $\phi_i(u)$  και  $\phi_{1,i}(u)$  εξαρτώνται άμεσα από τον υπολογισμό της σ.χ.της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής της Ενότητας 6.2 μεταξύ των διαδοχικών επιπέδων της μερισματικής στρατηγικής. Αναλυτικότερα, από το θεώρημα 6.4 έπεται ότι η σ.χ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής  $K_i(u)$ , μεταξύ των επιπέδων  $\beta_{i-1}$  και  $\beta_i$  για  $i = 1, \dots, n+1$ , όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων τόσο από τις κύριες ζημιές όσο και από τις δευτερεύουσες ζημιές ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δίνεται από τη σχέση

$$K_i(u) = 1 - \sum_{j=1}^{k+1} a_{j,i} e^{-R_{j,i}u}, \quad a_{j,i} = \frac{R_{1,i} \cdots R_{k+1,i} (b_{2,i} - R_{j,i})}{R_{j,i} \prod_{k=1, k \neq j}^{k+1} (R_{k,i} - R_{j,i})} p_k(-R_{j,i}) \frac{1}{p_k(0) b_{2,i}}, \quad (6.42)$$

για  $i = 1, \dots, n+1$ , όπου  $-R_{j,i}$  με  $\Re(R_{j,i}) > 0$ ,  $j = 1, \dots, k+1$ , είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $J_{k+2,i}(s) = 0$  με  $J_{k+2,i}(s) = (\frac{\sigma^2}{2} s^2 + c_i s - \lambda - \delta) p_k(s) + \lambda p_{k-1}(s)$ , για  $i = 1, \dots, n+1$ .

### 6.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας για εκθετικά μεγέθη ζημιών κάτω από την ύπαρξη μιας μερισματικής στρατηγικής τριών επιπέδων

Σε αυτή την υπο-ενότητα, προκειμένου να δούμε την πρακτική εφαρμογή των αποτελεσμάτων της Ενότητας 6.3, δίνουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Γι' αυτό το σκοπό θεωρούμε ότι  $\delta = 0$  και  $w(x, y) = 1$ . Τότε, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής, κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής πολλαπλών μερισμάτων,  $\phi(u, \beta)$  και  $\phi_1(u, \beta)$  ανάγονται στις πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi(u, \beta)$  και  $\psi_1(u, \beta)$ , αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε την ύπαρξη μιας στρατηγικής δύο επιπέδων  $\beta_1$  και  $\beta_2$ , δηλ.  $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη των κυρίων και των δευτερεύουσων ζημιών κατανομούνται εκθετικά με παραμέτρους  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , αντίστοιχα. Συνεπώς έχουμε ότι  $F_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$  και  $Q(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $x \geq 0$ , απ' όπου εύκολα παίρνουμε ότι  $\hat{f}_1(s) = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1}$  και  $\hat{q}(s) = \frac{\alpha_2}{s + \alpha_2}$ .

Με βάση τα παραπάνω η χαρακτηριστική εξίσωση, για κάθε επίπεδο της μερισματικής

στρατηγικής δίνεται από τη σχέση

$$\left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2 + c_i s - \lambda\right)^2 (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) + \lambda \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2 + c_i s - \lambda - \delta\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

η οποία, σύμφωνα με το Λήμμα 6.2, τις ακόλουθες ρίζες:  $r_{1,i}$ , με  $\Re(r_{1,i}) > 0$ ,  $r_{2,i} = 0$ , και  $-R_{j,i}$ , με  $\Re(R_{j,i}) > 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Θεωρώντας το ακόλουθο σύνολο των παραμέτρων:  $c_1 = 3.3$ ,  $c_2 = 3.1$ ,  $c_3 = 2.5$ ,  $\sigma_1 = 1.5$ ,  $\sigma_2 = 1.3$ ,  $\sigma_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $\beta_1 = 2$ , και  $\beta_2 = 3$ , τότε βρίσκουμε ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, για κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής, είναι οι:

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= 0.27689, -R_{1,1} = -0.42181, -R_{2,1} = -2.66667, -R_{3,1} = -2.84485, -R_{4,1} = -3.21023, \\ r_{2,2} &= 0.29832, -R_{1,2} = -0.40881, -R_{2,2} = -2.39987, -R_{3,2} = -3.85996, -R_{4,2} = -3.96696, \\ r_{1,3} &= 0.37227, -R_{1,3} = -0.31866, -R_{2,3} = -2.35793, -R_{3,3} = -5.32340, -R_{4,3} = -5.37227. \end{aligned}$$

Επιπλέον, η εξίσωση  $J_{4,i}(s) = \left(\frac{\sigma_i^2}{2}s^2 + c_i s - \lambda\right)(s + \alpha_1)(s + \alpha_2) + \lambda \alpha_1 \alpha_2 = 0$  έχει, σε κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής, ακριβώς τρεις αρνητικές ρίζες, τις προαναφερόμενες  $-R_{j,i}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Χρησιμοποιώντας τις ρίζες τις προαναφερόμενης εξίσωσης και την εξίσωση (6.42) βρίσκουμε ότι η σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, για κάθε επίπεδο της μερισματικής στρατηγικής, δίνεται από τις σχέσεις

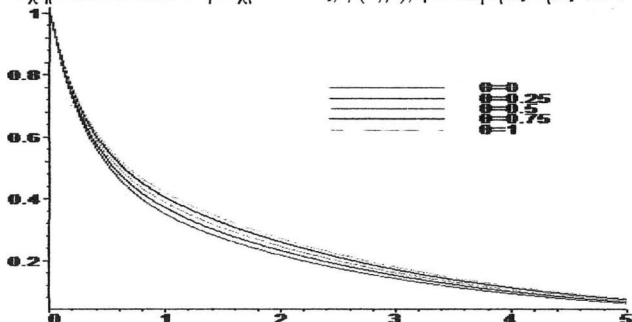
$$\begin{aligned} K_1(u) &= 1 - 0.54482e^{-.42181u} + 0.15151e^{-2.66667u} - 0.061242e^{-2.84485u}, \\ K_2(u) &= 1 - 0.56342e^{-.40881u} + 0.05254e^{-2.39987u} + 0.027005e^{-3.85996u}, \\ K_3(u) &= 1 - 0.65955e^{-.31866u} + 0.03602e^{-2.35793u} + 0.023527e^{-5.32340u}, \end{aligned}$$

καθώς και ότι  $\xi_1 = 1.1999$ ,  $\xi_2 = 1.066667$ ,  $\xi_3 = 0.666666$ .

Τώρα, προκειμένου να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας  $\psi(u, \beta)$  και  $\psi_1(u, \beta)$ , συνδυάζουμε τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 6.7 και 6.6. Αρχικά από το Θεώρημα 6.7, έχουμε ότι για  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} w_{A,i}(x) &= \lambda \left( \theta \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}} \phi_k(x + b_{i-1} - y) dF_2(y) + \bar{F}_2(x + b_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}} \phi_{1,k}(x + b_{i-1} - y) dF_1(y) + \bar{F}_1(x + b_{i-1}) \right), \\ w_{B,i}(x) &= \lambda \left( \theta \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}} \phi_k(x + b_{i-1} - y) dF_3(y) + \bar{F}_3(x + b_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x+b_{i-1}-b_k}^{x+b_{i-1}-b_{k-1}} \phi_{1,k}(x + b_{i-1} - y) dF_2(y) + \bar{F}_2(x + b_{i-1}) \right), \end{aligned}$$

Σχήμα 6.2: Η πιθανότητα χρεοκοπίας,  $\psi(u, \beta)$ , για διάφορες τιμές του  $\theta$



και συνεπώς αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις και το παραπάνω σύνολο των παραμέτρων στα αποτελέσματα του Θεωρήματος 6.7 είναι εύκολο να υπολογίσουμε, με τη χρήση ενός κατάλληλου υπολογιστικού προγράμματος [στη συγκεκριμένη περίπτωση με τη χρήση του Maple] τις συναρτήσεις  $u_i(x)$  και  $v_{1,i}(x)$ , για  $i = 1, 2, 3$ . Τότε από τις εξισώσεις (6.31) και (6.32) και με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών του Θεωρήματος 6.7 βρίσκουμε ότι

$$\psi(u, \beta) = \begin{cases} 0.90654 + 0.07002e^{-0.42181u} + 0.007144e^{-2.66667u} \\ -0.0001349e^{-3.21023u} + 0.001348e^{-2.84485u} \\ + 0.002347 \times 10^{-8}e^{0.27689u}, & 0 \leq u < 2, \\ 0.0003486 + 0.068751e^{-0.40881u} + 0.007755e^{-2.39987u} \\ + 0.0001166e^{-3.96696u} + 0.001906e^{-3.85996u} \\ + 0.7129 \times 10^{-8}e^{0.29832u}, & 2 \leq u < 3, \\ 0.00040 + 0.072235e^{-0.31866u} + 0.00797e^{-2.35793u} \\ + 0.000621e^{-5.32340u} + 0.006214e^{-5.37227u} & 3 \leq u < \infty \end{cases}$$

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι από το διάγραμμα 6.2, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας, κάτω από την ύπαρξη της προεπιλεγμένης μερισματικής στρατηγικής,  $\psi(u, \beta)$ , μειώνεται καθώς η πιθανότητα της ταυτόχρονης εμφάνισης των κυρίως και των δευτερευόντων ζημιών,  $\theta$ , αυξάνεται.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Avram, F., Usábel, M., (2004). Ruin probabilities and deficit for the renewal risk model with phase-type inter-arrival times. *ASTIN Bulletin*, 34, 2, 315-332.
- [2] Adan, I., Kulkarni, V., (2003). Single-server queue with Markov dependent inter-arrival and service times. *Queueing Systems*, 45, 113-134.
- [3] Albrecher, H., Kainhofer, R., (2002). Risk theory with a nonlinear dividend barrier. *Computing*, 68, 289-311.
- [4] Albrecher, H., Kainhofer, R., Tichy, R.F., (2003). Simulation methods in ruin models with non-linear dividends barriers. *Mathematics and Computers in Simulation*, 62 (3-6), 277-287.
- [5] Albrecher, H., (2004). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'Optimal dividends: analysis with Brownian motion' *North American Actuarial Journal*, 8 (2), 111-113.
- [6] Albrecher, H., Boxma, O., (2005). On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model. *Insurance Mathematics and Economics*, 37, 650-672.
- [7] Albrecher, H., Mercé, C., Marmol, M., (2005). On the distribution of the dividends payments in a Sparre Andersen model with Generalized Erlang( $n$ ) inter-claim times. *Insurance Mathematics and Economics*, 37, 324-334.
- [8] Albrecher, H., Hartinger, J., (2006). On the non-optimality of horizontal barrier strategies in Sparre Andersen model. *HERMIS International Journal of Computer Mathematics and its Applications*, 7, 1-14.
- [9] Albrecher, H., Hartinger, J., (2007). A risk model with multilayer dividend strategy. *North American Actuarial Journal*, 11 (2), 43-64.
- [10] Albrecher, H., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (2), 71-74.

- [11] Andersen, E. Sparre., (1957). On collective theory of risk in case of contagion between the claims. Transactions XVth International congress of Actuaries, New York, II, 219-229.
- [12] Asmussen, S., (1999). Risk theory in a Markovian environment. *Scandinavian Actuarial Journal*, 69-100.
- [13] Asmussen, S., (2000). Ruin Probabilities. World Scientific. Singapore.
- [14] Bäuerle, N., (1996). Some results about the expected ruin time in Markov-modulated risk models. *Insurance Mathematics and Economics*, 18, 119-127.
- [15] Bladt, M. (2005). A review on phase-type distributions and their use in risk theory. *ASTIN Bulletin*, 1, 145-161.
- [16] Boyce, E.W., DiPrima, C.R., (2000). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Seventh Edition. Wiley.
- [17] Brookes, M., (2005). The Matrix Reference Manual, Imperial College, UK.
- [18] Bühlmann, H., (1970). Mathematical Methods in Risk Theory. New York: Springer-Verlag.
- [19] Burton, T.A., (2005). Volterra Integral and Differential Equations. Elsevier, 2nd edition.
- [20] Butzer, P., Hubert, B., (1967). Semi-Groups of Operators and Approximation. New York: Springer-Verlag.
- [21] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2009). Analysis of the Gerber-Shiu function and dividend barrier problems for a risk process with two classes of claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 45: 470-484.
- [22] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2010). The Gerber-Shiu penalty function for a risk process with two classes of claims under a multi-layer dividend strategy. *Proceedings of the VIth International in Actuarial Science & Finance on Samos* <http://www.actuar.aegean.gr/samos2010/files/proceedings/Papaioannou-paper.pdf>.
- [23] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2010). The Gerber-Shiu function, the distribution of dividends and related problems for a perturbed risk process with two classes of claims. *preprint University of Piraeus*.

- [24] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2010). On the Gerber-Shiu penalty functions for a Markov-modulated renewal risk model. *under review*
- [25] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2011). On a two classes renewal risk process under a multi-layer dividend strategy. *submitted*
- [26] Chadjiconstantinidis, S., Papaioannou, A.D., (2011). On a perturbed by diffusion compound Poisson risk model with delayed claims and multi-layer dividend strategy. *submitted*.
- [27] Cheng, Y., Tang, Q., (2003). Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process. *North American Actuarial Journal*, 7 (1), 1-12.
- [28] Cheung, E., Landriault, D., (2008). Perturbed MAP risk models with dividend barrier strategy, preprint, *Journal of Applied Probability* 2, 521-541.
- [29] Chiu, S.N., Yin, C.C., (2003). The time of ruin, the surplus prior to ruin and the deficit at ruin for the classical risk process perturbed by diffusion *Insurance: Mathematics and Economics* 33: 59-66.
- [30] Claramunt, M.M., Mármol, M. Alegre, A., (2003). A note on the expected present value of the dividends with a constant barrier in an Erlang(2) risk process. *Mitteilungen der Schweizerischen Aktuarvereinigung*, Heft, 2, 149-159.
- [31] Cox, D.R., (1995). A use of the complex probabilities in the theory of stochastic processes. *Proc. Camb. Philos.*, 51, 319-329.
- [32] Cramér, H., (1930). On mathematical theory of risk. Skandia Jubille Volume, Stockholm. Reprinted in: Martin-Löf, A Ed. (1994) Cramér Collected works. Springer-Berlin.
- [33] De Boor, C., (2005). Divided differences. *Surveys in Approximation Theory*, 1, 46-69.
- [34] De Finetti, B., (1957). Su un'ipostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XV International Congress of Actuaries*, 2, 433-443.
- [35] Delbaen, F., (1990). A remark on the moments of the ruin time in classical risk theory. *Insurance Mathematics and Economics*, 7, 75-80.
- [36] Dickson, D.C.M., Gray, J.R., (1984). Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 105-115.
- [37] Dickson, D.C.M., (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, 11, 191-207.

- [38] Dickson, D.C.M., (1993). On the distribution of the claim causing ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, 12, 143-154.
- [39] Dickson, D.C.M., Egídio Dos Reis, A., (1993). On the distribution of the duration of negative surplus. *Scandinavian Actuarial Journal*, 148-164.
- [40] Dickson, D.C.M., Waters, H., (1992). The probability and the severity of ruin in finite and in infinite time. *ASTIN Bulletin*, 22, 177-190.
- [41] Dickson, D.C.M., Dos Reis, A.D.E., Waters, H., (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications. *ASTIN Bulletin*, 25, 153-175.
- [42] Dickson, D.C.M. (1998). Discussion of 'On the time value of ruin'. *North American Actuarial Journal*, 2, 74-75.
- [43] Dickson, D.C.M. (1998). On a class of renewal risk processes. *North American Actuarial Journal*, 2, 60-68.
- [44] Dickson, D.C.M., Hipp, C., (2001). Ruin probabilities for the Erlang(2) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics* 22, 251-262.
- [45] Dickson, D.C.M., Hipp, C., (2001a). On the time value to ruin for the Erlang(2) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 333-344.
- [46] Dickson, D.C.M., Drekić, S., (2004). The joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in some Sparre Andersen risk models. *Insurance: Mathematics and Economics* 34, 97-107.
- [47] Dickson, D.C.M., Waters, H., (2004). Some optimal dividends problems. *ASTIN Bulletin*, 34, 49-74.
- [48] Dickson, D.C.M., Hipp, C., (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 333-344.
- [49] Di Lorenzo, F., Tessitore, G., (1996). Approximate solutions of the severity of ruin. *Blatter Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik XXII*, 705-709.
- [50] Drekić, S., Dickson, D.C.M., Standord, D., Willmot, G.E., (2004). On the distribution of the deficit at ruin when claims are phase-type. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, 105-120.
- [51] Dufresne, F., Gerber, H., (1988a). The probability and the severity of ruin for combination of exponential claim amount distributions and their translations. *Insurance Mathematics and Economics*, 7, 75-80.

- [52] Dufrense, F., Gerber, H., (1988b). The surplus immediately before and at ruin and the amount of the claim causing ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, 7, 193-199.
- [53] Dufrense, F., (2001). On a general class of risk models. *Australian Actuarial Journal*, 7, 755-791.
- [54] Feller, W., (1957). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I. Second Edition. New York: Wiley.
- [55] Feller, W., (1966). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. II. Second Edition. New York: Wiley.
- [56] Gao, H., Yin, C., (2008). The perturbed Sparre Andersen model with a threshold dividend strategy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220, 394-408.
- [57] Gerber, H., (1979). An introduction to Mathematical Risk Theory. S.S Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [58] Gerber, H., (1973). Martingales in risk theory. *Mitteilungen der Schweizer Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, 73, 205-206.
- [59] Gerber, H., (1981). On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 105-115.
- [60] Gerber, H., Shiu, E., (1987). The joint distribution of the time of ruin the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, 21, 129-137.
- [61] Gerber, H., Shiu, E., (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal* , 2, 48-78.
- [62] Gerber, H., Landry, B., (1999). On the discounted penalty at ruin in a jump diffusion and the perpetual put option. *Insurance Mathematics and Economics*, 22, 263-276.
- [63] Gerber, H., Shiu, E., (1999). From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options. *Insurance Mathematics and Economics* , 24, 3-14.
- [64] Gerber, H., Goovaerts, M., Kass, R., (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin*, 17, 151-163.
- [65] Gerber, H., Shiu, E., (2003a). Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. *North American Actuarial Journal* , 7 (3), 117-119.

- [66] Gerber, H., Shiu, E., (2003b). Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. *North American Actuarial Journal* , 7 (4), 96-101.
- [67] Gerber, H., Shiu, E., (2004). Optimal dividends: analysis with Brownian motion. *North American Actuarial Journal* , 8 (1), 1-20.
- [68] Gerber, H., Shiu, E., (2005). The the time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal* , 9 (2), 49-68.
- [69] Gerber, H., Lin, S., Hailiang, Y., (2006). A note on the dividends-penalty identity and the optimal dividend barrier. *ASTIN Bulletin*, 36, 489-503.
- [70] Grandell, J., (1991). Aspects of Risk Theory. Springer-Verlag.
- [71] Horn, R.A., Johnson C.R., (1985). Matrix Analysis. Cambridge University press.
- [72] Janssen, J., (1980). Some transient results on the  $M/SM/1$  special semi-Markov model in risk and queuing theories. *ASTIN Bulletin*, 11, 41-51.
- [73] Jasiulewicz, H., (2001). Probability of ruin with variable premium rate in a Markovian environment. *Insurance Mathematics and Economics*, 29 (2) 23-43.
- [74] Ji, L., Zhang, C., (2010). The Gerber-Shiu penalty functions for two classes of renewal risk processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233: 2575-2589.
- [75] Karatzas, I., Shreve, S., (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York.
- [76] Ko, B., (2007). Discussion of The discount joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a Sparre-andersen model. *North American Actuarial Journal*, 11(3), 136-137.
- [77] Li, S., Garrido, J., (2004a). On the ruin for the Erlang( $n$ ) risk process. *Insurance Mathematics and Economics*, 34, 193-225.
- [78] Li, S., Garrido, J., (2004b). On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier. *Insurance Mathematics and Economics*, 35, 529-539.
- [79] Li, S., (2003). Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. *North American Actuarial Journal* , 7 (3), 119-122.
- [80] Li, S., Garrido, J., (2005). On the Gerber-Shiu functions in a Sparre Andersen risk model perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal* 3, 161-186.

- [81] Li, S., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (2), 77-80.
- [82] Li, S., Garrido, H., (2005). On a general class of renewal risk processes : Analysis of the Gerber-Shiu function. *Advances in Applied Probability*, 37, 836-856.
- [83] Li, S., (2006). The distribution of the dividend payments in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal*, 73-85.
- [84] Li, S., Garrido, H., (2005). Ruin probabilities for two classes of risk process. *ASTIN Bulletin*, 35, 61-77.
- [85] Dickson, D.C.M., Hipp, C., (2000). Ruin problems for phase-type(2) risk processes. *Scandinavian Actuarial Journal* , 2, 147-167.
- [86] Li, S., Dickson, D.C.M., (2006). The maximum surplus before ruin in an Erlang( $n$ ) risk model and related problems. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 529-539.
- [87] Li, S., Lu, Y., (2005) On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 36, 179-193.
- [88] Li, S., Biao, W., (2006). The diffusion perturbed compound Poisson risk model with a dividend barrier. *preprint University of Melbourne*.
- [89] Li, S., Lu, Y., (2007). Moments of the dividend payments and related problems in a Markov-modulated risk model. *North American Actuarial Journal*, 11(2), 65-76.
- [90] Li, S., Lu, Y., (2008). The decomposition for the discounted penalty functions and dividends-penalty identity in a Markov-modulated risk model, *ASTIN Bulletin*, 38(1), 53-71.
- [91] Li, S., (2008). The time of recovery and the maximum severity of ruin in a Sparre-andersen risk model. *North American Actuarial Journal*, 12(4), 1-13.
- [92] Lin, S., (2003). Discussion of Y Cheng and Q Tang's 'Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin. *North American Actuarial Journal*, 7 (3), 122-124.
- [93] Lin, S., Willmot, G., Drekcic, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier. *Insurance Mathematics and Economics*, 33, 551-566.
- [94] Lin, S., Pavlova, K.P., (2006). The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy. *Insurance Mathematics and Economics*, 38, 57-80.
- [95] Lin, S., Sendova, K.P., (2007). The compound Poisson risk model with multiple thresholds. *Insurance Mathematics and Economics*, 42, 617-627.

- [96] Lu, Y. and Li, S., (2005). On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model. *Insurance Mathematics and Economics*, 37(2), 136-152.
- [97] Lu, Y., (2006). On the severity of ruin in a Markov-modulated risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 183-202.
- [98] Lu, Y. and Tsai, C.C.L. (2007). The expected discounted penalty at ruin for a Markov-modulated risk process perturbed by diffusion. *North American Actuarial Journal*, 11(2), 136-152.
- [99] Lu, Y., Li, S., (2009). The Markovian regime-switching model with a threshold dividend strategy. *Insurance Mathematics and Economics*, 44(2) 296-303.
- [100] Lu, Z., Xu, W., Sun, D., HanLu, W., (2009). On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes under a threshold dividend strategy. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 232: 582-593.
- [101] Meng, H., Zhang, C., Wu, R., (2007). The expectation of aggregate discounted dividends for Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 23: 273-291.
- [102] Mitric, I.R., Sendova, K., Tsai, C.C.L, (2010). On a multi-threshold compound Poisson process perturbed by diffusion. *Statistics and Probability Letters*, 80, 366-375.
- [103] Miyazawa, M., (2004). Hitting probabilities in a Markov additive process with linear movements and upward jumps: applications to risk and queuing process. *The Annals of Applied Probability*, 14, (2), 1029-1054.
- [104] Neuts, M.F., (1981). *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [105] Ng, A., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (3), 131-134.
- [106] Ng, A., Yang, H., (2006). On the joint distribution of the surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model. *Stochastic Processes and their Applications*, 116, 244-266.
- [107] Panjer, H., Willmot, G., (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, Schaumburgh, IL.
- [108] Paulsen, J., Giessing, H., (1997). Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. *Insurance Mathematics and Economics*, 20, 215-223.



- [109] Pitts, S.M., Politis, K., (2007). The joint density of the surplus before ruin and after ruin in the sparre Andersen model. *Journal of Applied Probability*, 44, 695-712.
- [110] Port, S., Stone, C., (1978). Brownian motion and Classical potential theory. New York, Academic Press.
- [111] Picard, P., (1994). On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model. *Insurance Mathematics and Economics*, 14, 107-115.
- [112] Picard, P., Lefevre, C., (1998). The moments of the ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution. *Insurance Mathematics and Economics*, 35, 5-19.
- [113] Reader, B.J., (2002). Calculus with Complex Numbers. Taylor & Francis, London.
- [114] Reinhard, J., (1984). On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment. *ASTIN Bulletin*, 14, 23-43.
- [115] Reinhard, J., Snoussi, M., (2001). On the distribution of the surplus prior to ruin in a discrete semi-Markov risk model. *ASTIN Bulletin*, 31(2) 255-273.
- [116] Ren, J., (2005). The expected value of the time of ruin and the moments of the discounted deficit at ruin in the perturbed classical risk process. *Insurance Mathematics and Economics*, 37, 505-521.
- [117] Ren, J.D., (2007). The discount joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in a Sparre-andersen model. *North American Actuarial Journal*, 11(3), 128-136.
- [118] Revuz D., Yor, M., (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, Berlin1991.
- [119] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J., (1999). Stochastic Processes for Insurance and Finance. New York. Wiley
- [120] Ross, S., (1996). Stochastic Processes. Second edition, Wiley
- [121] Schiff, J., (1999). Laplace Transform, Theory and Practice. Springer-Verlag.
- [122] Schmidli, H., (1997). Estimation of the Lundberg coefficient for a Markov modulated risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 48-57.
- [123] Schmidli, H., (1999). On the distribution of the surplus prior to and at ruin. *ASTIN Bulletin*, 29, 227-244.

- [124] Schmidli, H., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (2), 69-70.
- [125] Son, M., (2008). On the ruin problem in the renewal risk process perturbed by diffusion. [arXiv:0803.0906v1](https://arxiv.org/abs/0803.0906v1) [math.PR]
- [126] Song, M., Meng, Q., Ren, J., (2010). The Gerber-Shiu discounted penalty function in the risk process with phase-type interclaim times. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 523-531.
- [127] Snoussi, M., (2002). The severity of ruin in a Markov-modulated risk model. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 31-43.
- [128] Stabile, G., Torrisi, G.L., (2008). Risk processes with delayed claims for heavy tailed distributions. *Methods, Models, and Information Technologies for Decision Support Systems*. Università del Salento, Lecce.
- [129] Sun, L., (2005). The expected discounted penalty function at ruin in the Erlang(2) risk process. *Statistics and Probability Letters*, 72, 295-217.
- [130] Sun, J., Da, F., (2006). The Erlang(2) risk model with a two step premium. *preprint Lanzhou University of China*.
- [131] Thorin, O., (1982). Probabilities of ruin. *Scandinavian Actuarial Journal*, 65-102.
- [132] Tsai, C.C.L., (2001). On the discounted distribution of the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 28, 401-419.
- [133] Tsai, C.C.L., Willmot, G.E., (2002). A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 51-66.
- [134] Tsai, C.C.L., (2003). On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 32, 413-429.
- [135] Tsai, C., Sun, L., (2004). On the discounted distribution functions for the Erlang(2) risk process. *Insurance Mathematics and Economics*, 35, 5-19.
- [136] Tsai, C., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu 'The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (2), 74-77.
- [137] Xiao, Y.T., Guo, J.Y., (2007). The compound binomial risk model with time-correlated claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 41, 124-133.

- [138] Xie, J.H., Zou, W., (2010). Expected present value of total dividends in a delayed claims risk model under stochastic interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics* 46, 415-422.
- [139] Xie, J.H., Zou, W., (2011). On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235, 2392-2404.
- [140] Yang, H., Sun, L., (2004). On the joint distributions of surplus immediately before ruin and the deficit at ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance Mathematics and Economics*, 34, 121-125.
- [141] Yang, H., Zhang, Z., (2008). Gerber-Shiu discounted penalty function in a Sparre Andersen model with multi-layer dividend strategy. *Insurance Mathematics and Economics*, 42, 984-991.
- [142] Yang, H., Zhang, Z., (2009a). The perturbed compound Poisson risk model with multi-layer dividend strategy. *Statistics and Probability Letters* 79, 70-78.
- [143] Yang, H., Zhang, Z., (2009b). In a perturbed Sparre Andersen risk model with multi-layer dividend strategy. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 232, 612-624.
- [144] Yuen, K.C., Guo, J., Wu, X., (2002). On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 205-214.
- [145] Yuen, K.C., Guo, J.Y., (2001). Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 47-57.
- [146] Yuen, K.C., Guo, J.Y., Ng, K.W., (2005). On ultimate ruin in delayed-claims risk model. *Journal of Applied Probability* 42, 163-174.
- [147] Yin, C., Chiu, S., (2005). Discussion of H. Gerber and E. Shiu "The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9 (3), 134-136.
- [148] Wan, N., (2007). Dividend payments with a threshold strategy in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* 40, 509-523.
- [149] Wang, G., Wu, R., (2000). Some distributions for the classical risk process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 15-24.

- [150] Wang, G., (2001). A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28, 49-59.
- [151] Waters, H.R, Papatriandafylou, A., (1985). Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement. *Insurance: Mathematics and Economics* 4, 401-419.
- [152] Xie, J.H., Zou, W., (2011). On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 2392-2404.
- [153] Williams, D., (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press.
- [154] William, S., (1994). Introduction to the numerical solution of Markov Chains. Princeton University.
- [155] Willmot, G. (1988). Further use of Shiu's approach to the evaluation of ultimate ruin probabilities. *Insurance Mathematics and Economics*, 7, 275-282.
- [156] Willmot, G., Lin, S., (1998). Exact and approximate properties of the surplus before and after ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, 23, 91-110.
- [157] Willmot, G., Lin, S., (1998). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance Mathematics and Economics*, 25, 63-84.
- [158] Wu, R., Wei, L., (2004). The probability of ruin in a kind of Cox risk model with variable premium rate. *Scandinavian Actuarial Journal*, 121-132.
- [159] Zhang, C.S., Zhang, L.Z., Wu, R., (2002). Some results for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 18, 1, 153-160.
- [160] Zhang, X., (2007). On the ruin in a Markov-modulated risk model. *Methodology in Computing and Applied Probability*, 10, 2, 225-238.
- [161] Zhang, Z., Li, S., Yang, H., (2002). The Gerber-Shiu discounted penalty function for a risk model with two classes of claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230(2): 643-655.
- [162] Zhou, X., (2007). Classical risk model with multi-layer premium rate. *Actuarial Research Clearing House* 1. <http://www.soa.org/files/pdf/ARCH07v41n1III.pdf>
- [163] Zhu, Y., Parbhu, N., (1999). Markov-modulated  $PH/G/1$  queueing systems. *Queueing Systems*, 9, 313-322.

- [164] Zhu, J., Yang, H., (2007). Ruin theory for a Markov regime-switching model under threshold strategy. *Insurance Mathematics and Economics*, 42(1) 311-318.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

#### A'.1 Βασική θεωρία των martingales

Σε αυτή την παράγραφο παραθέτουμε μέρος από τη βασική θεωρία των martingales. Θεωρούμε ότι η τριπλέτα  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ένας χώρος πιθανότητας.

**Ορισμός A'.1 (filtration).** Έστω μια στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$ . Τότε η ακολουθία  $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$ , ονομάζεται διύλιση (filtration) της διαδικασίας  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  και ορίζεται ως μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών της  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μέχρι το χρόνο  $t$ , τέτοιο ώστε

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{F}_t = \sigma\{X(s); s \leq t\}. \quad (\text{A'.1})$$

Διασηθητικά η  $\mathcal{F}_t$  είναι το σύνολο που περιέχει όλη την πληροφορία (ιστορία) της στοχαστικής διαδικασίας  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  μέχρι τον χρόνο  $t$ .

**Ορισμός A'.2 (adapted process).** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ονομάζεται προσαρμοσμένη (adapted) αν και μόνον αν για κάθε  $t \geq 0$  η  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη.

**Ορισμός A'.3 (martingale).** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  ονομάζεται martingale αν ισχύουν τα παρακάτω:

- (i)  $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty, \forall t \geq 0,$
- (ii) η  $X(t)$  είναι  $\mathcal{F}_s$  προσαρμοσόμενη,  $\forall t \geq 0,$
- (iii)  $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s), \forall t \geq s.$

**Πόρισμα A'.1.** Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι martingale. Τότε ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(0)), \forall t \geq 0. \quad (\text{A'.2})$$

**Ορισμός Α'.4 (stopping time).** Μια τ.μ.  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  ονομάζεται χρόνος διακοπής (stopping time) αν για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (\text{Α'.3})$$

Διασθητικά η (Α'.3) ερμηνεύεται ως εξής: αν γνωρίζουμε όλη την «πληροφορία» μέχρι την χρονική στιγμή  $t$ , τότε μπορούμε να δούμε αν ισχύει ότι  $T \leq t$  ή όχι. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι αν  $T$  είναι ένας χρόνος διακοπής, τότε η τ.μ.  $T \wedge t$  είναι επίσης ένας χρόνος διακοπής.

Το ερώτημα, πλέον, που γεννάται είναι ότι αν η  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι martingale και  $T$  ένας χρόνος διακοπής, τότε αν ισχύει ότι  $\mathbb{E}(X(T)) = \mathbb{E}(X(0))$ . Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα δίνεται μέσα από το Optional Stopping Theorem.

**Θεώρημα Α'.1 (Optional Stopping Theorem).** Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$  είναι ένα martingale και  $T$  ένας χρόνος διακοπής. Αν ένα από τα παρακάτω είναι αληθές

- (i)  $T \leq c < \infty$  όπου  $c$  κάποιος σταθερός αριθμός,
- (ii)  $|X(T \wedge n)| \leq Y \forall n \geq 0$  με  $\mathbb{E}(Y) < \infty$ ,  $T < \infty$ ,
- (iii)  $|X(T \wedge n) - X(T \wedge (n-1))| \leq c \forall$  σταθερό αριθμό και  $T < \infty$ ,

τότε ισχύει ότι

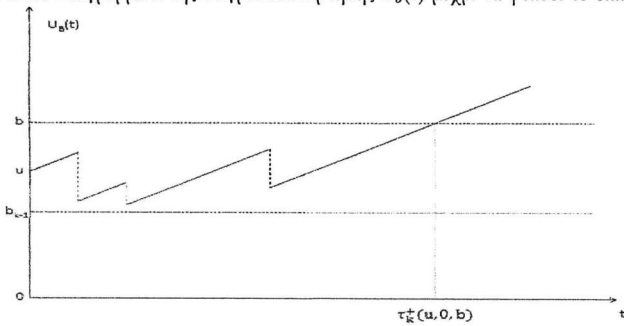
$$\mathbb{E}(X(T)) = \mathbb{E}(X(0)).$$

Απόδειξη. Williams (1991) σελ. 100-101. ■

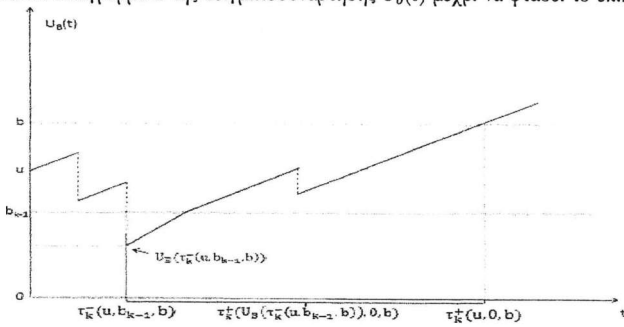
## Α'.2 Διαγράμματα των χρόνων διακοπής της Ενότητας 4.4.1



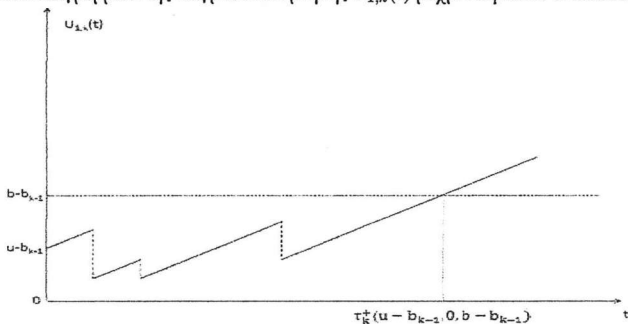
Σχήμα Α'1: Διάγραμμα 1 της δειγματοσυνάρτησης  $U_b(t)$  μέχρι να φτάσει το επίπεδο  $b$



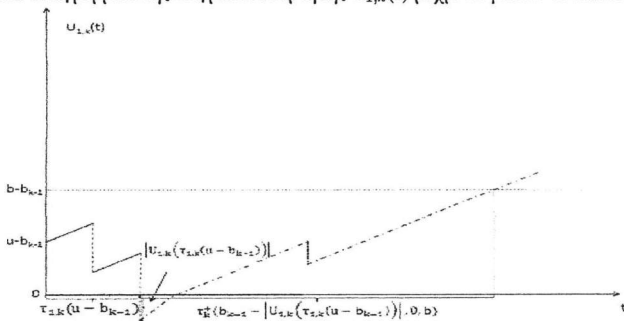
Σχήμα Α'2: Διάγραμμα 2 της δειγματοσυνάρτησης  $U_b(t)$  μέχρι να φτάσει το επίπεδο  $b$



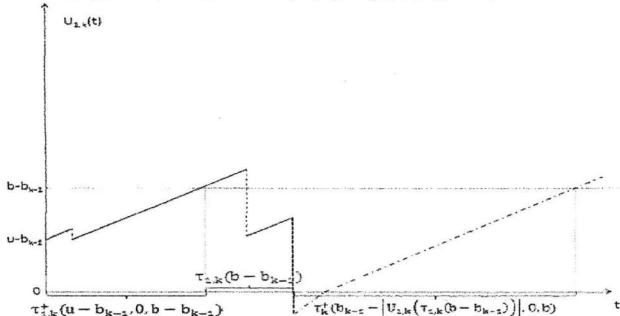
Σχήμα Α'3: Διάγραμμα 1 της δειγματοσυνάρτησης  $U_{1,k}(t)$  μέχρι να φτάσει το επίπεδο  $b - b_{k-1}$



Σχήμα Α'4: Διάγραμμα 2 της δειγματοσυνάρτησης  $U_{1,k}(t)$  μέχρι να φτάσει το επίπεδο  $b - b_{k-1}$



Σχήμα Α'.5: Διάγραμμα 3 της δειγματοσυνάρτησης  $U_{1,k}(t)$  μέχρι να φτάσει το επίπεδο  $b-b_{k-1}$



### Α'.3 Ένα ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα δεύτερης τάξης με μη γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

Σε αυτή την Ενότητα του Παραρτήματος δείχνουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα του του συστήματος (6.28) του Θεωρήματος 6.5 στην Ενότητα 6.3, δεν έχει λύσεις οι οποίες να είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Για  $u \geq 0$ , θεωρούμε το ακόλουθο ομογενές ολοκληρο-διαφορικό σύστημα δεύτερης τάξης ως προς  $\nu(u)$  και  $\nu_1(u)$ ,

$$\frac{\sigma^2}{2} \nu''(u) + c\nu'(u) - (\lambda + \delta)\nu(u) = -\lambda\theta \int_0^u \nu(u-x) dF_2(x) - \lambda(1-\theta) \int_0^u \nu_1(u-x) dF_1(x),$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \nu_1''(u) + c\nu_1'(u) - (\lambda + \delta)\nu_1(u) = -\lambda\theta \int_0^u \nu(u-x) dF_3(x) - \lambda(1-\theta) \int_0^u \nu_1(u-x) dF_2(x).$$

Επιπλέον για  $\Re(s) \geq 0$ , έστω  $\widehat{\nu}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\nu(u)du$  και  $\widehat{\nu}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su}\nu_1(u)du$  να είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\nu(u)$  και  $\nu_1(u)$  αντίστοιχα. Παίρνοντας και στα δύο μέλη του παραπάνω ομογενούς ολοκληρο-διαφορικού συστήματος μετασχηματισμούς Laplace άμεσα βρίσκουμε ότι

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda\theta\widehat{f}_2(s)\right)\widehat{\nu}(s) + \lambda(1-\theta)\widehat{f}_1(s)\widehat{\nu}_1(s) = \frac{\sigma^2}{2}(s\nu(0) + \nu'(0)) + c\nu(0),$$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda(1-\theta)\widehat{f}_2(s)\right)\widehat{\nu}_1(s) + \lambda\theta\widehat{f}_3(s)\widehat{\nu}(s) = \frac{\sigma^2}{2}(s\nu_1(0) + \nu_1'(0)) + c\nu_1(0).$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται, ισοδύναμα, σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{A}_\delta(s)\tilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\sigma^2}{2}(s\tilde{\mathbf{v}}(0) + \tilde{\mathbf{v}}'(0)) + c\tilde{\mathbf{v}}(0), \quad (\text{A'.4})$$

όπου  $\tilde{\mathbf{v}}(0) = (\nu(0), \nu_1(0))^\top$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}(s) = (\tilde{\nu}(s), \tilde{\nu}_1(s))^\top$ , και

$$\mathbf{A}_\delta(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda\theta\hat{f}_2(s) & \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s) \\ \lambda\theta\hat{f}_3(s) & \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s) \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση  $\det \mathbf{A}_\delta(s) = 0$  είναι ισοδύναμη με την χαρακτηριστική εξίσωση  $\ell(s) = 0$  του Λήμματος 6.2 και συνεπώς έχουμε ότι  $\det \mathbf{A}_\delta(r_i) = 0$ , για  $i = 1, 2$ . Επίσης, χρησιμοποιώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή των Κεφ. 3,4 δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{A}_\delta$  κυριαρχεί διαγωνίως (diagonally dominant) και συνεπώς από το θεώρημα των Levy-Desplanques [βλ. Θεώρημα 1.24] ισχύει ότι ο  $\mathbf{A}_\delta$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Έστω  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$  να είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (adjoint) του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta$ , ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}_\delta^*(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s) & -\lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s) \\ -\lambda\theta\hat{f}_3(s) & \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda\delta + \lambda\theta\hat{f}_2(s) \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω από την εξίσωση (A'.4), έχουμε ότι

$$\det \mathbf{A}_\delta(s)\tilde{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{A}_\delta^*(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}(s\tilde{\mathbf{v}}(0) + \tilde{\mathbf{v}}'(0)) + c\tilde{\mathbf{v}}(0)\right). \quad (\text{A'.5})$$

Τώρα, ανακαλούμε την θεωρία των διακριτών διαφορών για πίνακες/διανύσματα. Έτσι ανακαλώντας τον ορισμό των διακριτών διαφορών [βλ. Ορισμό 1.18] η πρώτη και δεύτερη διακριτή διαφορά του πίνακα/διανύσματος  $\mathbf{L}(s)$  ως προς τους αριθμούς  $r_1, r_2$  (διαφορετικού μεταξύ τους) ορίζεται αναδρομικά ως

$$\mathbf{L}[r_1, s] = \frac{\mathbf{L}(s) - \mathbf{L}(r_1)}{s - r_1}, \quad \mathbf{L}[r_1, r_2, s] = \frac{\mathbf{L}[r_1, s] - \mathbf{L}[r_1, r_2]}{s - r_2}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\tilde{\mathbf{v}}(s) < \infty$  καθώς επίσης και ότι  $\det \mathbf{A}_\delta(r_1) = 0$ , τότε έχουμε ότι το  $s = r_1$  είναι επίσης ρίζα του δεξιού μέλους της εξίσωσης (A'.5), δηλ.  $\mathbf{A}_\delta^*(r_1)\left(\frac{\sigma^2}{2}(r_1\tilde{\mathbf{v}}(0) + \tilde{\mathbf{v}}'(0)) + c\tilde{\mathbf{v}}(0)\right) = 0$ , απ' όπου μπορούμε να εκφράσουμε το δεξιό μέλος της εξίσωσης (A'.5) ως

$$\det \mathbf{A}_\delta(s)\tilde{\mathbf{v}}(s) = (s - r_1)\left[\frac{\sigma^2}{2}\left(\mathbf{A}_\delta^*(s) + r_1\mathbf{A}_\delta^*[r_1, s]\right)\tilde{\mathbf{v}}(0) + \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{A}_\delta^*[r_1, s]\tilde{\mathbf{v}}'(0) + c\mathbf{A}_\delta^*[r_1, s]\tilde{\mathbf{v}}(0)\right].$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική ακολουθία όπως και παραπάνω, χρησιμοποιώντας

το γεγονός ότι το  $s = r_2$  είναι ρίζα του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης, έχουμε ότι

$$\det \mathbf{A}_\delta(s) \vec{\nu}(s) = (s-r_1)(s-r_2) \left[ \mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2, s] \left( \left( \frac{\sigma^2}{2} r_1 + c \right) \vec{\nu}(0) + \frac{\sigma^2}{2} \vec{\nu}'(0) \right) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*[r_2, s] \vec{\nu}(0) \right]. \quad (\text{A'.6})$$

Επιπλέον, από το γεγονός ότι  $\mathbf{A}_\delta^*(r_i) \left( \frac{\sigma^2}{2} (r_i \vec{\nu}(0) + \vec{\nu}'(0)) + c \vec{\nu}(0) \right) = 0, \forall i = 1, 2$ , μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2] \left( \left( \frac{\sigma^2}{2} r_1 + c \right) \vec{\nu}(0) + \frac{\sigma^2}{2} \vec{\nu}'(0) \right) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta^*(r_2) \vec{\nu}(0) = \vec{0}, \quad (\text{A'.7})$$

όπου  $\vec{0}$  είναι ένα διάνυσμα στήλη με δύο στοιχεία ίσα με το μηδέν. Ακόμη, από τον ορισμό του πίνακα  $\mathbf{A}_\delta^*(s)$  δεν είναι δύσκολο να βρούμε την πρώτη διαιρετή διαφορά ως προς τους αριθμούς  $r_1, r_2$ , και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την ορίζουσα τη προαναφερόμενης ποσότητας, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\det \mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2] = \left( \frac{\sigma^2}{2} \right) (r_1 + b_2)^2 + \lambda \hat{f}_2[r_1, r_2] \frac{\sigma^2}{2} (r_1 + b_2) + \lambda^2 \theta (1 - \theta) \hat{q}[r_1, r_2]^2 \hat{f}_1(r_1) \hat{f}_1(r_2) > 0.$$

Ακόμη, εφόσον  $\det \mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2] \neq 0$ , τότε υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του  $\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2]$ , δηλ. ο πίνακας  $(\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2])^{-1}$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (A'.7) με  $(\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2])^{-1}$  βρίσκουμε ότι

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} r_1 + c \right) \vec{\nu}(0) + \frac{\sigma^2}{2} \vec{\nu}'(0) = - \frac{\sigma^2}{2} (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2])^{-1} \mathbf{A}_\delta^*(r_2) \vec{\nu}(0).$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (A'.6), έχουμε ότι

$$\det \mathbf{A}_\delta(s) \vec{\nu}(s) = (s-r_1)(s-r_2) \left[ -\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2, s] \frac{\sigma^2}{2} (\mathbf{A}_\delta^*[r_1, r_2])^{-1} \mathbf{A}_\delta^*(r_2) \vec{\nu}(0) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{A}_\delta[r_2, s] \vec{\nu}(0) \right],$$

απ' όπου, εφόσον ο μετασχηματισμός Laplace  $\vec{\nu}(s)$  εξαρτάται μόνο από τις αρχικές τιμές  $\vec{\nu}(0)$ , συμπεραίνουμε ότι το αρχικό ολοκληρο-διαφορικό σύστημα δεν έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

#### A'.4 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις - το Λήμμα του Itô

Στη θεωρία πιθανοτήτων οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι περιέχουν ολοκληρώματα κατά Riemann καθώς και ολοκληρώματα κατά Itô.

Η γενική μορφή μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dB(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{A'.8})$$

όπου  $\alpha(t, x)$  και  $\sigma(t, x)$  είναι δύο ντετερμινιστικές συναρτήσεις και  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  μια στοχαστική διαδικασία επάνω σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{B}_t, \mathbb{P})$ , όπου  $\mathcal{B}_t$  είναι διύλιση η οποία γεννάται από την διαδικασία Wiener (κίνηση Brown)  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  [βλ. Ορισμό 3.1].

Από την μορφή της της εξίσωσης (Α'.8) είναι φανερό ότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα Itô.

Στο εξής θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  αποτελεί τη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (Α'.8) με αρχική τιμή την  $X(0)$ <sup>1</sup>.

Ισοδύναμα η στοχαστική διαφορική εξίσωση (Α'.8) γράφεται σε μορφή διαφορικών ως

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t), \quad (\text{Α'.9})$$

με αρχική τιμή την  $X(0)$ .

**Παρατήρηση Α'.1.** Αρχικά παρατηρούμε ότι η εξίσωση (Α'.9) είναι όμοιας μορφής με τη συνήθη διαφορική εξίσωση  $dx = f(t, x)dt$ . Παρά όμως την ομοιότητα υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης και μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, η οποία εξηγείται ακολούθως.

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων η συνήθης διαφορική εξίσωση  $dx = f(t, x)dt$  μπορεί να γραφεί ως  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ , και συνεπώς τα διαφορικά  $dx$  και  $dt$  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Με άλλα λόγια μια συνήθη διαφορική εξίσωση εμπεριέχει μία συνάρτηση και τις παραγώγους της συνάρτησης αυτής. Επομένως, η λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Στην περίπτωση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων [βλ. Karatzas και Shreve (1991)] η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Έτσι, παρόλο που η ποσότητα  $dB(t)$  «φαίνεται» να εκφράζει το διαφορικό της στοχαστικής διαδικασίας  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  δεν μπορεί να έχει την ίδια μεταχείριση όπως στην κλασσική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον το ολοκλήρωμα του Itô  $\int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s)$  ως συνάρτηση του  $t$  δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη, συνεπώς και η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Ο τρόπος λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (Α'.9) δίνεται με βάση το Λήμμα του Itô.

**Λήμμα Α'.1 (One dimensional Itô's Lemma).** Έστω  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  μια στοχαστική διαδικασία η οποία ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση (Α'.8) και  $g(t, x)$  μια

<sup>1</sup> συχνά στη βιβλιογραφία η στοχαστική διαδικασία  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  καλείται σαν μια διαδικασία Itô (Itô process), παρόλο που μία διαδικασία Itô αποτελεί γενέκυση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (Α'.8). Πιο συγκεκριμένα αν η  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μια διαδικασία Itô, τότε η  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

όπου οι  $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  και  $\{\sigma(t)\}_{t \geq 0}$  είναι δύο στοχαστικές διαδικασίες ως τη διύλιση  $\mathcal{B}_t$

ντετερμινιστική συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη (continuously differentiable) ως προς  $t$  και δύο φορές παραγωγίσιμη (twice continuously differentiable) ως προς  $x$ . Τότε, η στοχαστική διαδικασία  $\{g(t, X(t))\}_{t \geq 0}$  αποτελεί λύση της ακόλουθης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dg(t, X) = \left( \frac{\partial g(t, X)}{\partial t} + \alpha(t, X) \frac{\partial g(t, X)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X) \frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X) \frac{\partial g(t, X)}{\partial x} dB, \quad (\text{A'.10})$$

ή ισοδύναμα [εφόσον  $dX = \alpha(t, X)dt + \sigma(t, X)dB$ ]

$$dg(t, X) = \left( \frac{\partial g(t, X)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X) \frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial g(t, X)}{\partial x} dX. \quad (\text{A'.11})$$

Απόδειξη. Karatzas και Shreve (1991). ■





# INDEX

- Markov modulated Poisson, 36  
Sparre Andersen, 6  
diagonally dominant, 138  
Cauchy's argument principle, 42  
Levy-Desplanques theorem, 41  
diagonally dominant, 41
- ομογενής διαφορική εξίσωση, 24, 28
- αναδρομικός τύπος υπολογισμού, 108, 198,  
199, 206, 216, 219
- ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, 2  
αντιστρέψιμος πίνακας, 41  
απαριθμήτρια διαδικασία, 2
- διύλιση, 315
- διαδικασία πλεονάσματος, 5, 21, 29, 38, 45,  
52, 60, 62, 76, 93, 95, 126, 147,  
181, 222, 225, 267, 286
- διαρετές διαφορές, 42, 141, 146, 240, 320
- Elementary Renewal Theorem, 3  
ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση, 17, 18,  
32, 56, 71, 104, 278, 281  
εξίσωση Lundberg, 14, 15, 42, 97, 136, 137
- γενικευμένη Erlang, 11, 61, 127
- Θεώρημα Rouché, 273  
θεώρημα παρεμβολής του Lagrange, 277
- κίνηση Brown, 126  
κατανομή phase-type, 176, 182
- κατανομή των σωρευτικών μερισμάτων, 176  
κλασματική οικογένεια κατανομών, 20, 25,  
44, 48, 74, 81, 105, 107, 144, 146,  
155, 195, 244, 247, 256  
κλασσικό μοντέλο, 13, 14, 17, 23, 30, 40,  
46, 66, 79, 88, 97
- Λήμμα του Itô, 322  
λύση ανανεωτικής εξίσωσης, 18, 32, 56, 73,  
105, 280
- μέγιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, 170  
Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς, 37, 182,  
222, 271  
μετασχηματισμός Laplace, 13, 25, 40, 41,  
43, 48, 55, 68, 139, 142, 145, 239,  
242, 275
- μη ομογενής διαφορική εξίσωση, 24
- Optional Stopping Theorem, 316  
ολόμορφη συνάρτηση, 42  
ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, 11, 23, 27,  
30, 31, 184, 187, 201, 205  
ολοκληρωτικό σύστημα τύπου Volterra, 290
- πίνακας τάσης, 37, 183  
περιθώριο ασφαλείας, 8, 17  
πιθανότητα χρεοκοπίας, 121, 289
- χαρακτηριστική εξίσωση, 41, 55, 188, 231,  
237, 273  
χρόνος διακοπής, 208, 316

χρόνος χρεοκοπίας, 7, 21, 38, 45, 53, 77,  
93, 95, 128, 147, 183, 224, 248,  
268

ροπή  $m$ -τάξης, 27, 50, 122, 160  
ρυθμός μετάβασης, 37

σύνθετη γεωμετρική κατανομή, 18, 32, 105,  
280, 282

σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων,  
40, 46, 51, 54, 65, 77, 84, 87, 90,  
91, 94, 116, 122, 133, 135, 151,  
152, 157, 161, 163, 164, 166, 171,  
172, 174, 226, 249, 271, 287

στάσιμη κατανομή, 38, 46, 50, 222  
στοχαστική διαφορική εξίσωση, 321  
στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων, 28, 181,  
285

στρατηγική σταθερού μερίσματος, 21, 45,  
76, 115, 248

συνάρτηση των Gerber-Shiu, 9, 22, 29, 39,  
46, 53, 63, 93, 96, 115, 128, 147,  
163, 164, 183, 224, 248, 258, 268

συντελεστής προσαρμογής, 139  
σωρευτικά μερίσματα, 26, 50, 84, 156  
σωρευτικές αποζημιώσεις, 60

ταυτότητα μερισμάτων-ποινής, 89, 123, 168,  
169

τελεστές  $T_r$ , 15, 43, 146, 197, 246, 275  
τεχνική των μερικών κλασμάτων, 49, 76,  
82, 121, 145, 156, 196, 245, 256

