

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ  
ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ  
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**Νικόλαος Κ. Χαριτάκης**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Ιούνιος 2014

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ  
ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ  
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**Νικόλαος Κ. Χαριτάκης**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Ιούνιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Μπούτσικας (Επιβλέπων)

- .....

- .....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**SIMULATION OF STOCHASTIC  
PROCESSES WITH APPLICATIONS IN  
FINANCIAL ENGINEERING**

By

Nikolaos K. Charitakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science  
of the University of Piraeus in partial fulfilment of the  
requirements for the degree of Master of Science in Applied  
Statistics

Piraeus, Greece  
June 2014

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

*Αφιερώνεται στη μητέρα μου.*

Πανεπιστήμιο Πειραιώς



## Ευχαριστίες

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά όλους τους καθηγητές του Προγράμματος για τη γνώση που μου προσέφεραν και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα κ. Μιχαήλ Μπούτσικα για την άψογη συνεργασία, την καθοδήγηση και την άμεση και ουσιαστική βοήθεια που μου παρείχε, καθώς και για την προσήλωση που μου μετέδωσε, ώστε να απολαύσω αυτή την όμορφη διαδρομή.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## Περίληψη

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής πραγματοποιείται η παρουσίαση και εφαρμογή μεθόδων και τεχνικών παραγωγής δειγματικών διαδρομών (sample paths) συγκεκριμένων στοχαστικών ανελίξεων συνεχούς χρόνου που έχουν εφαρμογές στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά. Αρχικά γίνεται περιγραφή βασικών χρηματοοικονομικών όρων, τίτλων καθώς και των αγορών και στη συνέχεια αναλύονται τύποι παραγώγων (προθεσμιακά συμβόλαια - forwards, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης - futures, συμβόλαια δανεισμού τίτλων - repos και δικαιώματα προαίρεσης - options) καθώς και οι τύποι των συναλλασσομένων (hedgers, speculators, arbitrageurs). Κατόπιν παρουσιάζονται τεχνικές παραγωγής τυχαίων αριθμών από διάφορες κατανομές. Με τη χρήση των τελευταίων, αναπτύσσονται μοντέλα και τεχνικές για την προσομοίωση συγκεκριμένων στοχαστικών διαδικασιών (Κίνηση Brown, Γεωμετρική Κίνηση Brown σε μία ή σε πολλές διαστάσεις, προσομοίωση με Χρονικά Μεταβαλλόμενο Επιτόκιο, προσομοίωση με Προσδιοριστική Μεταβλητότητα, Γκαουσιανά Μοντέλα Βραχυπρόθεσμων Επιτοκίων, Διαχύσεις Τετραγωνικής Ρίζας, Διαδικασίες με Άλματα, Διαδικασίες με Καθαρά Άλματα, ανελίξεις Γάμμα, αντίστροφες Γκαουσιανές ανελίξεις) με σκοπό να εκτιμηθεί, μέσω Monte Carlo προσέγγισης, η δίκαιη τιμή ενός παραγώγου. Τέλος, αναπτύσσονται μέθοδοι για τον υπολογισμό των παραμέτρων ευαισθησίας της τιμής διαφόρων παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων με απώτερο σκοπό την προσεγγιστική κατασκευή χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## **Abstract**

The main aim of this thesis is the presentation and implementation of methods and techniques for the simulation of continuous time stochastic processes with applications in stochastic finance. This thesis begins with the description of basic financial terms, securities and markets and then analyses the types of derivatives (forwards, futures, repos, options) and market traders (hedgers, speculators, arbitrageurs). Followingly it presents techniques for generating random numbers from several distributions. Using these random numbers, various models and techniques are presented for simulating specific stochastic processes: Brownian Motion, Geometric Brownian Motion in one or multiple dimensions, simulation with time-varying rate, simulation with deterministic volatility, Gaussian short-term rate models, square root diffusion, processes with Jumps and pure-jumps, Gamma processes, inverse Gaussian processes. The associated sample paths are simulated in order to assess, through Monte Carlo approach, a derivative's fair value. Finally, methods are presented for calculating the sensitivity parameters of financial derivatives prices, with a view to an approximate construction of a hedging portfolio.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

# Περιεχόμενα

<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> - Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα</b>	
1.1. Χρήσιμοι ορισμοί και επεξηγήσεις.....	1
1.2. Τύποι Αγορών .....	2
1.2.1. Χρηματιστηριακές αγορές.....	2
1.2.2. Ηλεκτρονικές αγορές.....	3
1.2.3. Εξωχρηματιστηριακές Αγορές (Over the Counter -OTC).....	3
1.3. Τύποι Συναλλασσομένων .....	3
1.3.1. Hedgers.....	3
1.3.2. Speculators (Κερδοσκόποι).....	4
1.3.3. Arbitrageurs.....	4
1.4. Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.....	5
1.4.1. Προθεσμιακά Συμβόλαια – Forwards .....	5
1.4.2. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης – Futures.....	5
1.4.3. Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων - Repos.....	7
1.4.4. Δικαιώματα Προαίρεσης - Options .....	7
1.5. Βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης.....	8
1.6. Στρατηγικές που αφορούν συνδυασμό από δικαιώματα προαίρεσης επί της ίδιας μετοχής .....	9
1.6.1. Ίδιου τύπου (συνδυασμός από calls ή puts) με φραγμένο κέρδος και ζημία.....	9
1.6.2. Διαφορετικού τύπου (συνδυασμός από calls και puts) με φραγμένο κέρδος ή ζημία .....	10
1.6.3. Δικαιώματα προαίρεσης που εξαρτώνται από τη διαδρομή τους .....	11
1.6.4. Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης επί διαφορετικών μετοχών .....	12
<b>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> - Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών &amp; Μέθοδοι Δειγματοληψίας.....</b>	<b>14</b>
2.1. Παραγωγή τυχαίων αριθμών .....	14
2.2. Γενικές Μέθοδοι Δειγματοληψίας .....	15
2.2.1. Μέθοδος Αντιστροφής.....	15
2.2.2. Μέθοδος αποδοχής/απόρριψης .....	18
2.2.3. Παραγωγή κανονικών τυχαίων αριθμών και διανυσμάτων.....	22
2.2.3.1. Παραγωγή μονοδιάστατων κανονικών τυχαίων αριθμών .....	22
2.2.3.3. Παραγωγή πολυδιάστατων κανονικών τυχαίων αριθμών .....	23
<b>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> – Προσομοίωση Στοχαστικών Ανελιξίων.....</b>	<b>26</b>

3.1.	Στοχαστικές διαδικασίες martingale .....	26
3.2.	Κίνηση Brown.....	26
3.2.1.	Προσομοίωση κίνησης Brown μίας διάστασης .....	27
3.2.2.	Προσομοίωση κίνησης Brown πολλών διαστάσεων .....	31
3.3.	Γεωμετρική Κίνηση Brown.....	33
3.3.1.	Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown μίας διάστασης.....	33
3.3.2.	Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown πολλών διαστάσεων .....	34
3.4.	Αποτίμηση Παραγώγων .....	36
3.5.	Μέθοδοι Προσομοίωσης.....	40
3.5.1.	Προσομοίωση με Χρονικά Μεταβαλλόμενο Επιτόκιο .....	40
3.5.2.	Προσομοίωση με Προσδιοριστική Μεταβλητότητα .....	41
3.6.	Γκαουσιανά Μοντέλα Βραχυπρόθεσμων Επιτοκίων.....	43
3.6.1.	Βασικά Μοντέλα και Προσομοίωση .....	43
3.6.2.	Τιμές Ομολόγων .....	46
3.7.	Διαχύσεις Τετραγωνικής Ρίζας .....	49
3.7.1.	Πυκνότητα Μετάβασης .....	50
3.8.	Διαδικασίες με Άλματα .....	55
3.8.1.	Μοντέλο Διάχυσης με Άλματα.....	55
3.8.2.	Διαδικασίες με καθαρά άλματα .....	64
3.9.	Ισοδύναμα Martingale Μέτρα .....	70
3.10.	Παραδείγματα Εφαρμογών.....	70
<b>Κεφάλαιο 4ο - Υπολογισμός Παραμέτρων Ευαισθησίας .....</b>		<b>79</b>
4.1.	Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών (Finite - Difference Approximation).....	79
4.1.1.	Απόκλιση και Διακύμανση.....	79
4.1.2.	Βέλτιστο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Optimal MSE).....	81
4.2.	Εκτίμηση της Παραγώγου κατά διαδρομή .....	85
4.2.1.	Black & Scholes Delta.....	86
4.2.2.	Black & Scholes Vega .....	87
4.2.3.	Delta παραγώγου που εξαρτάται από τη διαδρομή του .....	88
4.2.4.	Vega που εξαρτάται από τη διαδρομή.....	91
4.2.5.	Delta δικαιώματος προαίρεσης με πολλά υποκείμενα αγαθά.....	91
4.2.6.	Διάχυση Τετραγωνικής Ρίζας.....	93
4.3.	Παραδείγματα Εφαρμογών.....	95



## Εισαγωγή

Η σημασία των χρηματοοικονομικών παραγώγων τα τελευταία 30 έτη αυξάνεται συνεχώς: παράγωγα προϊόντα προσάπτονται σε ομόλογα, προγράμματα αμοιβής, επενδυτικά προγράμματα κ.ά. που, σε συνδυασμό με την ευρεία συναλλαγή τους, καθιστούν απαραίτητη τη γνώση του τρόπου λειτουργίας και αποτίμησής τους.

Η μέθοδος της *Monte Carlo* προσομοίωσης είναι, πλέον, ένα απαραίτητο εργαλείο για την αποτίμηση χρηματοοικονομικών προϊόντων και για την αντιστάθμιση του κινδύνου. Στηρίζεται στον εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας: λαμβάνοντας τυχαίους αριθμούς παράγονται πιθανές εκβάσεις ενός πειράματος και καταγράφονται πόσες από αυτές ανήκαν σε κάποιο συγκεκριμένο σύνολο. Σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών, η εκτιμώμενη πιθανότητα συγκλίνει στην πραγματική, καθώς το μέγεθος του δείγματος της τυχαίας δειγματοληψίας αυξάνεται.

Εφόσον οι ανεξίτητες που καλούμαστε να προσομοιώσουμε είναι στοχαστικές, θα πρέπει να επηρεάζονται από κάποιες τυχαίες μεταβλητές των οποίων η τιμή δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Άρα, ο «πυρήνας» της *Monte Carlo* προσομοίωσης είναι η παραγωγή τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την εξέλιξη του εικονικού φαινομένου. Παρόλο που η παραγωγή των τυχαίων αριθμών από Η/Υ στηρίζεται σε απόλυτα προσδιοριστικές μεθόδους, κρίνεται δόκιμο να θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι πράγματι τυχαίοι χωρίς περαιτέρω αξιολόγηση της τυχειότητάς τους (συχνά χρησιμοποιείται ο όρος ψευδοτυχαίοι αριθμοί για να υποδηλώσει ότι απλά «μιμούνται» την τυχειότητα). Ούτως ή άλλως οι μοντέρνοι τρόποι παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών είναι ιδιαίτερα ικανοί στο να προσποιούνται πραγματική τυχειότητα και επομένως μπορούν, χωρίς πρόβλημα, να εφαρμοστούν στην *Monte Carlo* προσομοίωση.

Στη χρηματοοικονομική, μία σημαντική εφαρμογή της *Monte Carlo* προσομοίωσης είναι ο υπολογισμός της αναμενόμενης παρούσας αξίας του τελικού κέρδους από τη χρήση ενός δικαιώματος προαίρεσης, όπως θα δούμε και στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Αφού καθορίσουμε το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση της τιμής του υποκείμενου χρηματοοικονομικού προϊόντος του παραγώγου στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ , στη συνέχεια υπολογίζουμε, για κάθε διαδρομή, την παρούσα αξία του τελικού κέρδους. Ο μέσος όρος των αξιών αυτών εκτιμά την δίκαιη τιμή του παραγώγου, όταν η προσομοίωση γίνει υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου.

Τέλος, σημαντικό είναι να γνωρίζουμε την ευαισθησία της τιμής ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος ως προς τις παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται, γνωστές ως «sensitivities» ή «the Greeks»:

- Delta - η παράγωγος της αξίας του παραγώγου ως προς την αξία του υποκείμενου αγαθού,
- Gamma - η δεύτερη παράγωγος της αξίας του παραγώγου ως προς την αξία του υποκείμενου αγαθού,
- Vega - η παράγωγος της αξίας του παραγώγου ως προς τη μεταβλητότητα  $\sigma$ ,
- Theta - η παράγωγος της αξίας ενός παραγώγου ως προς το χρόνο  $t$ ,
- Rho - η παράγωγος της αξίας ενός παραγώγου ως προς το επιτόκιο  $r$ .

Οι μέθοδοι για τον υπολογισμό των παραμέτρων ευαισθησίας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν περιλαμβάνουν ή όχι, προσομοίωση δύο ή περισσότερων τιμών της παραμέτρου της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε την ευαισθησία. Οι μέθοδοι της πρώτης κατηγορίας (πεπερασμένες διαφορές) είναι ευκολότερα αντιληπτές και υλοποιήσιμες, αλλά επειδή παράγουν εκτιμήσεις που αποκλίνουν από την πραγματική τιμή θα πρέπει να εφαρμόσουμε εξισορρόπηση της μεροληψίας και της διακύμανσης. Οι μέθοδοι της δεύτερης κατηγορίας, εφόσον μπορούν να εφαρμοστούν, παράγουν αμερόληπτες εκτιμήσεις. Αυτό το επιτυγχάνουν χρησιμοποιώντας ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίας για να αντικαταστήσουν την παραγωγή με κατάλληλους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Πανεπιστήμιο Πειραιώς



διανέμει μέρισμα διαπραγματεύεται τώρα έναντι 30€ και ως υποθέσουμε ότι μπορούμε να δανειζόμαστε και να δανείζουμε χρήματα με επιτόκιο 5% για ένα έτος. Με αυτά τα δεδομένα, η προθεσμιακή τιμή της μετοχής πρέπει να ισούται με  $30€ \cdot 1,05 = 31,5€$ . Εάν η προθεσμιακή τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη, έστω 35€, τότε μπορούμε να δανειστούμε 30€ με επιτόκιο 5%, να αγοράσουμε τη μετοχή και να λάβουμε θέση short (πώληση) στο αντίστοιχο Προθεσμιακό Συμβόλαιο (συμφωνία αγοράς της μετοχής σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον, σε μία συγκεκριμένη ποσότητα και τιμή - βλ. §1.5). Στη λήξη του, πουλάμε τη μετοχή εισπράττοντας 35€ σύμφωνα με το συμβόλαιο και εξοφλούμε το δάνειο, αποκομίζοντας κέρδος 3,5€. Εάν η προθεσμιακή τιμή της μετοχής είναι μικρότερη, έστω 31€, τότε μπορούμε να προβούμε σε ανοιχτή πώληση της μετοχής (χωρίς να την έχουμε στο χαρτοφυλάκιό μας) με 30€, να δανείσουμε το ποσό αυτό με επιτόκιο 5%, και να λάβουμε θέση long (αγορά) στο αντίστοιχο Προθεσμιακό Συμβόλαιο. Στη λήξη του, αγοράζουμε τη μετοχή καταβάλλοντας 31€ σύμφωνα με το συμβόλαιο και εισπράττουμε 31,5€ από το δάνειο, αποκομίζοντας κέρδος 0,5€.

### Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Είναι το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού  $r$  σύμφωνα με το οποίο μπορεί (θεωρητικά) καθένας να δανείσει ή να δανεισθεί κάποιο χρηματικό ποσό χωρίς ρίσκο, δηλαδή χωρίς να υπάρχει ο κίνδυνος ο δανειστής να αθετήσει την υποχρέωσή του να επιστρέψει το αρχικό ποσό συν τον τόκο και συνήθως αναφέρεται σε επιτόκιο ομολόγων.

### Κυμαινόμενο με Συνεχή ανατοκισμό – Ενσωμάτωση χρονοδιαγράμματος

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι το επιτόκιο  $r$  παραμένει σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι ένα ομόλογο χωρίς τοκομερίδιο με αποζημίωση μίας (1) χρηματικής μονάδας στο χρόνο  $T$ , έχει αξία στον χρόνο  $t$  ( $t < T$ ) που ισούται με:

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε στη διάθεσή μας, στο χρόνο 0, αρκετά ομόλογα αξίας  $B(0, T)$  και διαφορετικής ληκτότητας  $T$ . Για να αποτιμήσουμε ένα option (βλ. Παρ. 1.4.4.) ενός υποκείμενου αγαθού αξίας  $S$  σε συνέπεια με τη χρονική δομή των τιμών των ομολόγων, μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου  $r(u)$  ως εξής:

$$B(0, T) = e^{-\int_0^T r(u) du}$$

## 1.2. Τύποι Αγορών

### 1.2.1. Χρηματιστηριακές αγορές

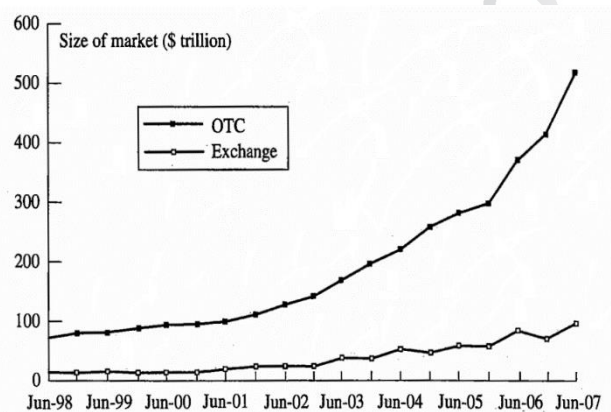
Οι Χρηματιστηριακές αγορές παραγώγων, είναι οι αγορές όπου οι συναλλασσόμενοι διαπραγματεύονται τυποποιημένα συμβόλαια τα οποία έχουν καθοριστεί από το Χρηματιστήριο. Ο κίνδυνος ρευστοποίησης είναι χαμηλός λόγω της μαζικής συμμετοχής επενδυτών σε αυτές (δηλ. δύσκολα υπάρχει ο κίνδυνος να μην μπορεί να γίνει εύκολα συναλλαγή κάποιου χρηματοοικονομικού προϊόντος λόγω χαμηλής προσφοράς ή ζήτησης) και η μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου μέσω των λογαριασμών περιθωρίων (βλ. Παρ. 1.4.2.) εξασφαλίζει χαμηλότερο κίνδυνο για τους συναλλασσόμενους.

### 1.2.2. Ηλεκτρονικές αγορές

Κατά το παρελθόν, οι συναλλαγές παραγώγων πραγματοποιούνταν στο φυσικό χώρο του Χρηματιστηρίου, με τους συναλλασσόμενους να φωνάζουν και να κάνουν περίπλοκα σήματα με τα χέρια τους, για να υποδείξουν τις συναλλαγές που ήθελαν να πραγματοποιήσουν (open outcry system). Αυτό το σύστημα τείνει πλέον να αντικατασταθεί από το ηλεκτρονικό εμπόριο, όπου οι συναλλασσόμενοι μπορούν να διαπραγματευτούν μέσω ενός Η/Υ.

### 1.2.3. Εξωχρηματιστηριακές Αγορές (Over the Counter -OTC)

Δεν πραγματοποιούνται όλες οι συναλλαγές μέσω Χρηματιστηρίου. Η over-the-counter αγορά είναι μεγαλύτερη σε όγκο συναλλαγών από τη χρηματιστηριακή. Οι συναλλαγές πραγματοποιούνται μέσω ενός δικτύου μεταξύ χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ή μεταξύ χρηματοπιστωτικού ιδρύματος και πελάτη του (συνήθως εταιρικό θησαυροφύλακα ή διαχειριστή αμοιβαίου κεφαλαίου).



Γράφημα 1.1.<sup>1</sup> Μέγεθος over-the counter και χρηματιστηριακής αγοράς παραγώγων

Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της αγοράς σε σύγκριση με τη Χρηματιστηριακή, είναι ότι οι όροι των συμβολαίων που συνάπτονται δεν καθορίζονται από το Χρηματιστήριο αλλά διαπραγματεύονται και συμφωνούνται μεταξύ των αντισυμβαλλόμενων και το βασικό μειονέκτημα είναι ότι υπάρχει συγκριτικά μεγαλύτερος κίνδυνος μη τήρησης του συμβολαίου.

## 1.3. Τύποι Συναλλασσομένων

### 1.3.1. Hedgers

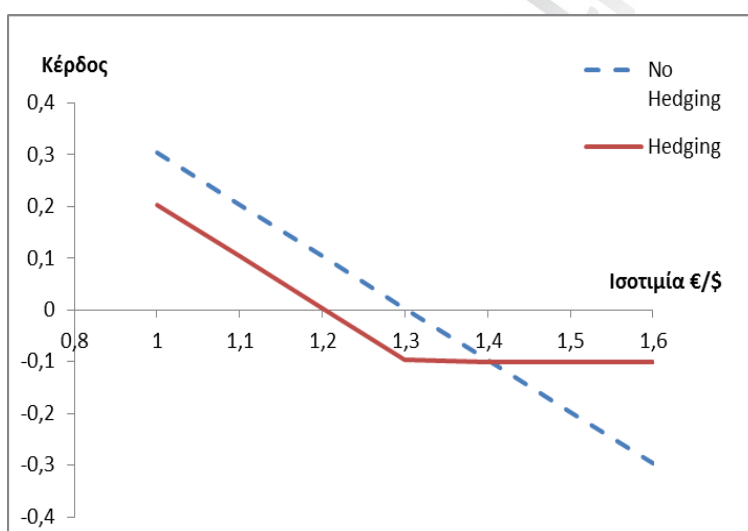
Είναι οι συναλλασσόμενοι που χρησιμοποιούν την αγορά παραγώγων με σκοπό να μειώσουν το ρίσκο που αναλαμβάνουν από τις θέσεις τους στην αγορά.

Παράδειγμα αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) με τη χρήση ΠΣ: Η Αμερικανική εταιρία Α πρέπει, σε έξι μήνες από σήμερα, πρέπει να πληρώσει 1 εκ. ευρώ σε μία Ευρωπαϊκή εταιρία από την οποία αγόρασε εμπόρευμα, με τρέχουσα ισοτιμία 1,303 ευρώ/δολαρίου. Αντί η εταιρία Α να ρισκάρει ενδεχόμενη αύξηση της τιμής του ευρώ έναντι του δολαρίου σε έξι

<sup>1</sup> Hull (2009)

μήνες, μπορεί να λάβει μία θέση long σε ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο για να αγοράσει σε έξι μήνες 1 εκατομμύριο ευρώ έναντι 1.303.000 δολαρίων (χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος). Με τον τρόπο αυτό, η εταιρία Α «κλειδώνει» το τελικό ποσό που θα κληθεί να πληρώσει σε έξι μήνες.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να αγοράσει ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς επί ευρώ, το οποίο θα της έδινε το δικαίωμα να αγοράσει ευρώ έναντι συγκεκριμένης ισοτιμίας (έστω 1,303 ευρώ/δολάριο). Εάν το ευρώ ανέβει (πάνω από 1,303) έναντι του δολαρίου, μπορεί να προβεί στην αγορά του έναντι της συγκεκριμένης τιμής, διαφορετικά θα το αγοράσει φθηνότερο από την αγορά. Εάν όμως η εταιρία Α λάβει θέση long στο ορτίον, σε αντίθεση με το ΠΣ, θα πρέπει να πληρώσει κάποιο αντίτιμο C (έστω ορτίον price = 0,1\$). Το παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει την αντιστάθμιση κινδύνου με τη χρήση ορτίον που κοστίζει 0,1\$ αλλά εξασφαλίζει στην εταιρία ότι η ζημία της θα περιοριστεί το πολύ στο κόστος αγοράς (C) του δικαιώματος λόγω μη εξάσκησής του (αν η ισοτιμία ανέβει πάνω από την τιμή εξάσκησης του ορτίον θα το εξασκήσει, διαφορετικά αν πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης του ορτίον θα το αγοράσει από την αγορά).



Γράφημα 1.2. Τελικό κέρδος από τη χρήση Π.Σ. με και χωρίς Hedging

### 1.3.2. Speculators (Κερδοσκόποι)

Οι hedgers χρησιμοποιούν την αγορά παραγώγων για να «ποντάρουν» στη μελλοντική πορεία μίας μεταβλητής της αγοράς. Για παράδειγμα, ένας κερδοσκόπος μπορεί να προβλέπει μία συγκεκριμένη πορεία (ανοδική ή καθοδική ή στάσιμη) της τιμής μιας μετοχής.

### 1.3.3. Arbitrageurs

Οι Arbitrageurs προσπαθούν να εκμεταλλευτούν τις πρόσκαιρες ανισορροπίες της αγοράς λαμβάνοντας στιγμιαία συμπηφιστικές θέσεις σε μία ή περισσότερες αγορές που θα τους οδηγήσουν σε σίγουρο (χωρίς ρίσκο) κέρδος.

## 1.4. Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

### 1.4.1. Προθεσμιακά Συμβόλαια – Forwards

Συνιστούν την απλούστερη μορφή παραγώγου και διαπραγματεύονται σε μία OTC αγορά μεταξύ χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων ή χρηματοπιστωτικού ιδρύματος και πελάτη του. Αποτελούν μία συμφωνία αγοράς ή πώλησης σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον, ενός συγκεκριμένου αγαθού και σε μία συγκεκριμένη ποσότητα και τιμή. Ο ένας συμβαλλόμενος λαμβάνει θέση *long* (*long position*) και υπόσχεται να αγοράσει το υποκείμενο αγαθό σε συγκεκριμένη ημερομηνία, τιμή και ποσότητα, ο δε αντισυμβαλλόμενος του λαμβάνει θέση *short* (*short position*) και υπόσχεται να το πουλήσει στην ίδια ημερομηνία, τιμή και ποσότητα. Σημειώνεται ότι η λήψη μιας τοποθέτησης σε Προθεσμιακό Συμβόλαιο δεν κοστίζει τίποτα για κάποιον από τους δύο συμβαλλόμενους. Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια είναι πολύ δημοφιλή όσον αφορά την αγορά συναλλάγματος στην προσπάθεια των επενδυτών να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο που προκύπτει από τις μεταβολές των ισοτιμιών.

#### Τελικό κέρδος/ζημία Προθεσμιακού Συμβολαίου

Το τελικό κέρδος/ζημία μίας *long* τοποθέτησης σε ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο στο χρόνο λήξης του ισούται με  $S_T - K$  ενώ μίας *short* τοποθέτησης ισούται με  $K - S_T$ , όπου  $S_T$  είναι η τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο λήξης  $T$  και  $K$  είναι τιμή παράδοσης σύμφωνα με το συμβόλαιο.

Γενικά, θα υποθέτουμε ότι  $S_t$  η τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο  $t$  και επομένως  $S_0$  η τιμή του σήμερα και  $S_T$  η τιμή του κατά το χρόνο λήξης του συμβολαίου.

### 1.4.2. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης – Futures

Όπως και ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο, το ΣΜΕ είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλόμενων αγοράς ή πώλησης ενός συγκεκριμένου αγαθού σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον, και σε μία συγκεκριμένη ποσότητα και τιμή. Ο ένας συμβαλλόμενος λαμβάνει θέση *long* (*long position*) και υπόσχεται να αγοράσει το υποκείμενο αγαθό σε συγκεκριμένη ημερομηνία, τιμή και ποσότητα, ο δε αντισυμβαλλόμενος του λαμβάνει θέση *short* (*short position*) υπόσχεται να το πουλήσει στην ίδια ημερομηνία, τιμή και ποσότητα. Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια διαπραγματεύονται σε μία εξωχρηματιστηριακή αγορά μεταξύ θεσμικών επενδυτών, οι οποίοι αξιολογούν μόνοι τους και έχουν την ευθύνη για την φερεγγυότητα του αντισυμβαλλόμενου. Τα ΣΜΕ συναλλάσσονται καθημερινά στο Χρηματιστήριο το οποίο καθορίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των συμβολαίων και εγγυάται την εκπλήρωσή τους μέσω των λογαριασμών περιθωρίων (*margin accounts*) όπου οι αντισυμβαλλόμενοι είναι υποχρεωμένοι να ανοίξουν ένα λογαριασμό και να καταθέσουν ένα ποσοστό επί της τιμής συναλλαγής  $K$  ως εγγύηση. Οι τιμές συναλλαγής των ΣΜΕ μεταβάλλονται ανάλογα με τις μεταβολές των τιμών των υποκείμενων αγαθών και τις προσδοκίες των επενδυτών.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο 100 μετοχές A, τιμή συναλλαγής  $F = 30€$  και ημερομηνία λήξης μετά από 3 μήνες και δύο επενδυτές λαμβάνουν θέση *long* και *short* επί του συμβολαίου αυτού. Οι δύο επενδυτές ανοίγουν αμέσως ένα λογαριασμό

περιθωρίου καταθέτοντας ένα ποσοστό επί της αξίας του συμβολαίου, έστω  $10\% \cdot 100\mu\tau\chi \cdot F = 300\text{€}$ . Στο τέλος της επόμενης συνεδρίασης η τιμή έχει αλλάξει σύμφωνα με τις προσδοκίες των επενδυτών και έχει πλέον διαμορφωθεί σε  $F = 32\text{€}$ . Αν ο αγοραστής (long position) αποφάσισε να κλείσει την ανοιχτή του θέση λαμβάνοντας short position επί του συμβολαίου αυτού, τότε θα είχε κέρδος  $(32\text{€} - 30\text{€}) \cdot 100\mu\tau\chi = 200\text{€}$ . Ο αγοραστής, χωρίς να χρειάζεται να κάνει την κίνηση αυτή, πιστώνεται μέσω του λογαριασμού περιθωρίου του το ποσό των 200€ που αντίστοιχα χρεώνεται στο λογαριασμό περιθωρίου του πωλητή. Εκ νέου οι δύο επενδυτές θα πρέπει να καταθέσουν, αν χρειάζεται, το ελάχιστο 10% στο λογαριασμό περιθωρίου τους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται καθημερινά και καλείται ημερήσιος διακανονισμός. Έτσι, κάθε επενδυτής λαμβάνει τμηματικά το τελικό κέρδος ή ζημία του και δεν χρειάζεται να περιμένει μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Όταν ο επενδυτής κλείσει την ανοιχτή του θέση, ο λογαριασμός περιθωρίου (margin account) αποδεσμεύεται.

### Τιμολόγηση Forwards και Futures

Προκειμένου να προσεγγίσουμε με απλό τρόπο το πρόβλημα της τιμολόγησης των χρηματοοικονομικών παραγώγων γενικά, κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- στην αγορά δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και όλα τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο,
- οι συναλλασσόμενοι μπορούν να δανείζουν και να δανείζονται με το ίδιο επιτόκιο  $r$  χωρίς κίνδυνο και με συνεχή ανατοκισμό,
- οι συναλλασσόμενοι δρουν λογικά και προσπαθούν να εκμεταλλευτούν κάθε ευκαιρία για σίγουρο κέρδος που παρουσιάζεται στην αγορά (με αυτή την υπόθεση οι ευκαιρίες για arbitrage χάνονται γρήγορα και η αγορά βρίσκεται σε «κατάσταση ισορροπίας»),
- μπορεί να γίνει ανοιχτή πώληση κάποιου χρηματοοικονομικού αγαθού χωρίς κόστος.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να λάβουμε κάποια θέση επί ενός ΣΜΕ επί ενός αγαθού (πχ. 100 μετοχές A) με ημερομηνία παράδοσης  $T \in (0, \infty)$ . Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία, η τιμή παράδοσης  $K$  θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μη δημιουργείται ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

Έστω ότι λαμβάνουμε short position (υποσχόμαστε να πουλήσουμε) επί του ΣΜΕ και ταυτόχρονα δανειζόμαστε ποσό  $S_0$  (με επιτόκιο  $r$ ) για να αγοράσουμε το υποκείμενο αγαθό. Στο χρόνο λήξης  $T$ , θα πουλήσουμε το υποκείμενο αγαθό που αγοράσαμε στο χρόνο 0 στην τιμή  $K$  και θα εξοφλήσουμε το δάνειο καταβάλλοντας ποσό  $S_0 e^{rT}$ . Το τελικό μας κέρδος ισούται με  $K - S_0 e^{rT}$ .

Έστω ότι ο αντισυμβαλλόμενός μας, έλαβε long position (υποσχέθηκε να αγοράσει) επί του ΣΜΕ και παράλληλα πούλησε ανοιχτά το υποκείμενο αγαθό (short sell 100 μετοχές A) και δάνεισε το ποσό  $S_0$  που εισέπραξε με επιτόκιο  $r$ . Στο χρόνο λήξης  $T$ , αγόρασε το υποκείμενο αγαθό με ποσό  $K$  (κλείνοντας τη θέση του) και εισέπραξε  $S_0 e^{rT}$  από το δάνειο που χορήγησε στο χρόνο 0. Το τελικό του κέρδος ισούται με  $S_0 e^{rT} - K$ .



Βλέπουμε λοιπόν ότι η τιμή συναλλαγής (delivery price)  $K$  ενός ΣΜΕ λήξεως  $T$  που δεν οδηγεί σε arbitrage είναι  $K = S_0 e^{rT}$ . Η παραπάνω τιμολόγηση ισχύει και για τα ΠΣ.

### 1.4.3. Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων - Repos

Ένας επενδυτής που δεν σκοπεύει να ρευστοποιήσει τις μετοχές του άμεσα μπορεί να τις μεταβιβάσει προσωρινά στο χρηματιστήριο παραγώγων, εισπράττοντας ένα έσοδο σε μηνιαία βάση, χωρίς κίνδυνο (stock lending - Repo). Ο επενδυτής επίσης δικαιούται να λάβει τεχνητό μέρισμα από τις μετοχές του repos, το οποίο δίνει το χρηματιστήριο παραγώγων. Το μηνιαίο έσοδο του επενδυτή δεν μπορεί να είναι γνωστό εκ των προτέρων, μπορεί όμως να είναι μόνο θετικό.

Αντίθετα, ένας επενδυτής μπορεί να δανειστεί μετοχές από το χρηματιστήριο παραγώγων (μέσω του stock lending - repo) για ένα χρονικό διάστημα έναντι ημερήσιου κόστους και παρέχοντας ένα περιθώριο ασφάλισης (stock borrowing – Reverse Repo).

### 1.4.4. Δικαιώματα Προαίρεσης - Options

Το δικαίωμα προαίρεσης είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων η οποία δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή (long position), αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει από τον πωλητή του δικαιώματος (short position) ένα συγκεκριμένο αγαθό, κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου  $[0, T]$  ή σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον  $T$  και σε μία συγκεκριμένη ποσότητα και τιμή εξάσκησης  $K$ . Το υποκείμενο αγαθό μπορεί να είναι μετοχή, δείκτης μετοχών, ομόλογα, συνάλλαγμα αλλά και εμπορεύματα.

Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι πιο σύνθετα από τα ΣΜΕ και τα ΠΣ διότι ο αγοραστής του δικαιώματος (holder) έχει τη δυνατότητα και όχι την υποχρέωση να εξασκήσει το δικαίωμά του (επομένως το πράττει μόνο εάν τον συμφέρει) και επιπλέον απαιτείται κάποιο αντίτιμο  $C$  για την απόκτησή του. Από την άλλη πλευρά, ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να ακολουθήσει την απόφαση του αγοραστή. Τα δικαιώματα προαίρεσης συναλλάσσονται και στις Χρηματιστηριακές και στις OTC αγορές.

Χαρακτηριστικά Δικαιωμάτων Προαίρεσης

- i. Το είδος του δικαιώματος (call ή put option) – το call option δίνει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) στον holder να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο ενώ το put option δίνει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) στον holder να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο.
- ii. Ο υποκείμενος τίτλος (underlying asset) – πχ. κάποιος χρηματοοικονομικός δείκτης ή μετοχή κάποιας εταιρίας.
- iii. Το μέγεθος του συμβολαίου – πχ. σύνηθες μέγεθος αποτελούν 100 μετοχές κάποιας εταιρίας.
- iv. Η ημερομηνία λήξης (maturity ή exercise date) – τα Αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να εξασκηθούν σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο μέχρι τη λήξη τους, ενώ τα Ευρωπαϊκά μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην ημερομηνία της λήξης τους (σημειώνεται ότι ο κύριος όγκος των παραγώγων που συναλλάσσονται στα χρηματιστήρια είναι Αμερικανικού τύπου).

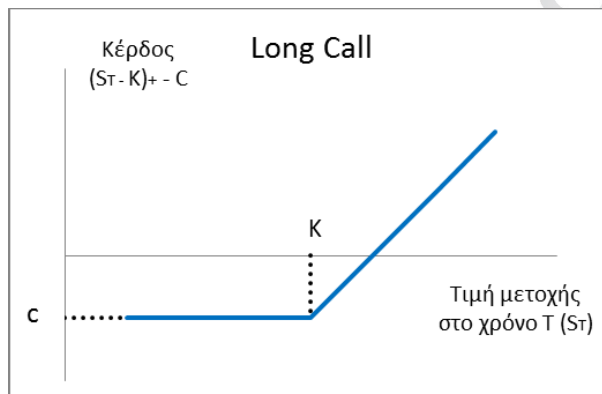
- v. Η τιμή εξάσκησης (strike price ή exercise price) – η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο holder, εάν αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα, θα αγοράσει ή θα πουλήσει το υποκείμενο αγαθό.
- vi. Το ασφάλιστρο  $C$  (option price ή option premium) – η αμοιβή που προκαταβάλλει ο αγοραστής στον πωλητή του δικαιώματος.

## 1.5.Βασικοί τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης<sup>2</sup>

### Αγορά δικαιώματος αγοράς – Long Call

Ο επενδυτής προβλέπει άνοδο της τιμής μιας μετοχής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την αγορά της μετοχής αλλά την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς επί 50 τεμαχίων της μετοχής αυτής καταβάλλοντας ασφάλιστρο  $C$ . Αν την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι πάνω από την τιμή εξάσκησης, ο επενδυτής προφανώς θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει τη μετοχή αποκομίζοντας κέρδος (μείον το ασφάλιστρο) αφού θεωρητικά μπορεί να την πουλήσει αμέσως. Αν την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης, ο επενδυτής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα αφού μπορεί, εάν θέλει, να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά. Στην περίπτωση αυτή, ο επενδυτής θα έχει ζημία ίση με το ασφάλιστρο  $C$  που πλήρωσε για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Γενικά, αν  $S(T)$  είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης  $T$  το κέρδος από τη χρήση του long call συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:



#### Τελικό κέρδος

$$\begin{aligned} (S_T - K)_+ - C &= \\ &= \max\{S_T - K, 0\} - C = \\ &= \begin{cases} S_T - K - C, & S_T > K \\ -C, & S_T \leq K \end{cases} \end{aligned}$$

Γράφημα 1.4. Τελικό κέρδος από τη χρήση long call

### Αγορά δικαιώματος πώλησης – Long Put

Ο επενδυτής κατέχει μετοχή μιας εταιρίας για την οποία προβλέπει πτώση της τιμής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την πώλησή της και προτιμά την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης της μετοχής αυτής καταβάλλοντας ασφάλιστρο  $C$ . Αντίστοιχα με το long call, το τελικό κέρδος από τη χρήση του long put, συναρτηθεί της τιμής της μετοχής στο χρόνο  $T$  είναι  $(K - S_T)_+ - C$ .

### Πώληση δικαιώματος αγοράς – Short Call

Ο επενδυτής κατέχει μετοχή μιας εταιρίας για την οποία προβλέπει στάσιμη ή καθοδική τάση της τιμής της για τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την πώλησή της.

<sup>2</sup> Hull (2009)

Προκειμένου να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του σε περίοδο στασιμότητας, προβαίνει στην πώληση ενός δικαιώματος αγοράς της μετοχής αυτής εισπράττοντας ασφάλιστρο  $C$ , παραχωρώντας το δικαίωμα στον αγοραστή να αγοράσει τη μετοχή σε χρόνο  $T$ , εφόσον τον συμφέρει. Το τελικό κέρδος από τη χρήση του short call, συναρτήσει της τιμής της μετοχής στο χρόνο  $T$  είναι  $C - (S_T - K)_+$ .

### Πώληση δικαιώματος πώλησης – Short Put

Ο επενδυτής προβλέπει στάσιμη ή ανοδική την τιμή μιας μετοχής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την αγορά της αλλά την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης της μετοχής αυτής εισπράττοντας ασφάλιστρο  $C$ . Άρα ο αγοραστής του δικαιώματος έχει αποκτήσει το δικαίωμα να πουλήσει στο χρόνο  $T$  τη μετοχή αυτή, εφόσον τον συμφέρει.

Το τελικό κέρδος από τη χρήση του short put, συναρτήσει της τιμής της μετοχής στο χρόνο  $T$  είναι  $C - (K - S_T)_+$ .

## 1.6. Στρατηγικές που αφορούν συνδυασμό από δικαιώματα προαίρεσης επί της ίδιας μετοχής

### 1.6.1. Ίδιου τύπου (συνδυασμός από calls ή puts) με φραγμένο κέρδος και ζημία

#### Bear Spread – Καθοδικό άνοιγμα

Η στρατηγική αυτή ακολουθείται όταν ο επενδυτής αναμένει πτωτική τάση της μετοχής. Το Bear δικαίωμα προαίρεσης είναι ένας συνδυασμός από calls (ή puts) επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας αλλά με διαφορετική τιμή εξάσκησης και αποτελείται από 1 Long call με τιμή εξάσκησης  $K_1$  και 1 Short Call με τιμή εξάσκησης  $K_2 < K_1$ . Στο χρόνο  $T$ , το τελικό κέρδος ισούται με:

$$(S_T - K_2)_+ - C_2 + C_1 - (S_T - K_1)_+ = \begin{cases} C_1 - C_2, & S_T < K_1 \\ -(S_T - K_1) + C_1 - C_2, & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ -K_1 + K_2 + C_1 - C_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$

#### Bull Spread – Ανοδικό άνοιγμα

Η στρατηγική αυτή ακολουθείται όταν ο επενδυτής αναμένει ανοδική τάση της μετοχής. Όπως και το Bear Spread, το Bull είναι ένας συνδυασμός από calls (ή puts) επί της μετοχής, ίδιας ληκτότητας αλλά με διαφορετική τιμή εξάσκησης και αποτελείται από 1 Long Call με τιμή εξάσκησης  $K_1$  και 1 Short Call με τιμή εξάσκησης  $K_2 < K_1$ . Στο χρόνο  $T$ , το τελικό κέρδος ισούται με:

$$(S_T - K_2)_+ - C_2 + C_1 - (S_T - K_1)_+ = \begin{cases} C_1 - C_2, & S_T < K_2 \\ (S_T - K_2) + C_1 - C_2, & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\ -K_2 + K_1 + C_1 - C_2, & S_T > K_1 \end{cases}$$

### Butterfly Spread

Η στρατηγική αυτή ακολουθείται όταν ο επενδυτής αναμένει μικρή μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Το Butterfly spread είναι ένας συνδυασμός από calls επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας αλλά με διαφορετική τιμή εξάσκησης και αποτελείται από:

2 Short calls με τιμή εξάσκησης  $K_2$

1 Long Call με τιμή εξάσκησης  $K_1 < K_2$ , συνήθως λαμβάνεται  $K_1 = K_2 - \alpha$

1 Long Call με τιμή εξάσκησης  $K_3 > K_2$ , συνήθως λαμβάνεται  $K_3 = K_2 + \alpha$

όπου  $K_2$  είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής,  $\alpha > 0$  και όλα ίδιας ληκτότητας  $T$ . Στο χρόνο  $T$ , το τελικό κέρδος ισούται με  $2C_2 - C_1 - C_3$  εάν η αξία της μετοχής είναι μικρότερη από  $(K - \alpha)$  ή μεγαλύτερη από  $(K + \alpha)$  και μεγαλύτερο από  $2C_2 - C_1 - C_3$  εάν βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές  $(K - \alpha)$  και  $(K + \alpha)$ . Σε κάθε περίπτωση, το κέρδος και η ζημία είναι φραγμένα και το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται όταν  $S_T = K_2$ .

### 1.6.2. Διαφορετικού τύπου (συνδυασμός από calls και puts) με φραγμένο κέρδος ή ζημία

#### Straddle

Με αυτή την επενδυτική θέση, ο επενδυτής προβλέπει τη μεταβλητότητα στην τιμή της μετοχής (εάν θα κινηθεί «κοντά» ή «μακριά» από την τιμή εξάσκησης). Το Bottom (Top) Straddle είναι ένας συνδυασμός από long call και long put (short call και short put) επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας και με ίδια τιμή εξάσκησης. Στο bottom straddle, όταν η τιμή στο χρόνο  $T$  είναι μακριά από το  $K$  ο επενδυτής έχει κέρδος ενώ όταν κινηθεί κοντά στο  $K$  η ζημία του είναι φραγμένη (τα αντίθετα ισχύουν για το top straddle). Το μέγιστο κέρδος (ζημία) για το top straddle (bottom straddle) είναι στην περίπτωση που  $S_T = K$ .

#### Strip and Strap

Η στρατηγική αυτή μοιάζει με την straddle στο ότι ο επενδυτής τώρα προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα κινηθεί μακριά από την τιμή εξάσκησης  $K$ , αλλά επιπλέον θεωρεί πιο πιθανή την μεγάλη άνοδο ή την μεγάλη πτώση της τιμής της μετοχής. Το strip είναι ένας συνδυασμός από 1 long call και 2 long put επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας και με ίδια τιμή εξάσκησης  $K$ . Το strap είναι ένας συνδυασμός από 2 long call και 1 long put επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας και με ίδια τιμή εξάσκησης  $K$ .

#### Strangle

Η στρατηγική αυτή είναι όμοια με την straddle, με μόνη διαφορά ότι τώρα οι τιμές εξάσκησης είναι διαφορετικές. Αποτελείται λοιπόν από ένα συνδυασμό από ένα long call με τιμή εξάσκησης  $K_2$  και ένα long put με τιμή εξάσκησης  $K_1$  για τα οποία ισχύει  $K_2 > K_1$  (ή short call και short put) επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας.

### 1.6.3. Δικαιώματα προαίρεσης που εξαρτώνται από τη διαδρομή τους

Το ενδιαφέρον μας στην προσομοίωση στοχαστικών ανελίξεων έγκειται κυρίως στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, ιδιαίτερα εκείνων που το τελικό τους κέρδος τους εξαρτάται από ολόκληρη τη διαδρομή του υποκείμενου αγαθού  $S$  και όχι μονάχα από την τελική του τιμή  $S(T)$ . Ένα τέτοιο δικαίωμα προαίρεσης θα μπορούσε γενικά να εξαρτάται από ολόκληρη τη διαδρομή  $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$  για ένα χρονικό διάστημα  $[0, T]$  αλλά εμείς θα επικεντρωθούμε κυρίως σε περιπτώσεις όπου το κέρδος εξαρτάται από αξίες σε συγκεκριμένες ημερομηνίες (πχ. τιμές κλεισίματος μιας μετοχής). Τα κυριότερα από αυτά είναι:

#### Δικαίωμα Προαίρεσης Φράγματος ενός υποκείμενου αγαθού (Barrier)

Ένα τυπικό δικαίωμα τέτοιου τύπου θεωρείται ισχύον (alive) ή μη (dead) εφόσον η τιμή του υποκείμενου τίτλου περάσει ένα δεδομένο φράγμα στο χρόνο  $[0, T]$ .

Οι 4 υποκατηγορίες τους είναι:

*Down & in (out)*: θεωρούνται alive (dead) και (δεν) μπορούν να εξασκηθούν όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού κατέβει κάτω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .

*Up & in (out)*: θεωρούνται alive (dead) και (δεν) μπορούν να εξασκηθούν όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού ανέβει πάνω από ένα προκαθορισμένο φράγμα  $u$  μέχρι το χρόνο εξάσκησης  $T$ .

Για παράδειγμα ένα *down-and-out call option* με φράγμα  $b$ , τιμή εξάσκησης  $K$  και λήξη  $T$ , έχει τελικό κέρδος

$$\mathbf{1}\{\tau(b) > T\}(S_T - K)_+, \text{ όπου } \tau(b) = \inf\{t_i: S(t_i) < b\}$$

δηλ.  $\tau(b)$  είναι η πρώτη χρονική στιγμή στο  $\{t_1, t_2, \dots\}$  που η τιμή του υποκείμενου αγαθού θα πέσει κάτω από το φράγμα  $b$  (εννοείται ότι είναι το  $\infty$  εάν δεν πέσει ποτέ κάτω από αυτό) και το  $\mathbf{1}\{A\}$  λαμβάνει την τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν πραγματοποιηθεί η όχι το ενδεχόμενο  $A$ .

Για δικαιώματα που παρακολουθούνται σε συνεχή χρόνο, το ανωτέρω διακριτό χρονικό σημείο  $\tau(b)$  αντικαθίσταται από τη χρονική στιγμή που η τιμή του υποκείμενου αγαθού περνάει το φράγμα για πρώτη φορά:

$$\tilde{\tau}(b) = \inf\{t \geq 0: S(t) \leq b\}$$

#### Δικαίωμα Προαίρεσης Ασιατικού τύπου (Asian option):

Η τελική του αξία (κέρδος από την χρήση του) υπολογίζεται με βάση τον μέσο όρο της αξίας του υποκείμενου αγαθού σε διακριτά χρονικά σημεία (διακριτή μέθοδος). Συγκεκριμένα, η αξία του στο χρόνο λήξης του ισούται με  $(\bar{S} - K)_+$  για call options και  $(K - \bar{S})_+$  για put options, όπου  $K$  η σταθερή τιμή εξάσκησης και

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i).$$

Άλλες παραλλαγές Ασιατικών δικαιωμάτων έχουν τελικό κέρδος  $(S(T) - \bar{S})_+$  ή  $(\bar{S} - S(T))_+$ . Για αυτά τα δικαιώματα δεν υπάρχει κλειστός τύπος για τον υπολογισμό των τιμών τους διότι δεν μπορεί να καθοριστεί με κλειστό τύπο η κατανομή του  $\bar{S}$ .

Για τη συνεχή μέθοδο, αλλάζει το  $\bar{S}$  που αντικαθίσταται από τον συνεχή μέσο:

$$\bar{S} = \frac{1}{t - u} \int_u^t S_\tau d\tau$$

για ένα χρονικό διάστημα  $[u, \tau]$ .

#### Δικαίωμα Προαίρεσης γεωμετρικού μέσου

Σε σχέση με τα προηγούμενα, αλλάζει το  $\bar{S}$  που αντικαθίσταται από τον γεωμετρικό μέσο:

$$\left( \prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n}$$

#### Δικαίωμα Προαίρεσης Ανασκόπησης (Lookback)

Τα δικαιώματα αυτού του τύπου βασίζονται σε ακραίες τιμές του υποκείμενου αγαθού και το τελικό τους κέρδος ισούται με:

$$(\max_i S(t_i) - S(t_n)), \text{ για put options και}$$

$$(S(t_n) - \min_i S(t_i)), \text{ για call options.}$$

Δηλαδή ένα Lookback call αποπληρώνει τη διαφορά μεταξύ της χαμηλότερης τιμής στα χρονικά σημεία  $t_1, \dots, t_n$ , και της πώλησης στην τελική τιμή  $S(t_n)$ . Για τη συνεχή μέθοδο, λαμβάνεται το μέγιστο ή το ελάχιστο σε ένα χρονικό διάστημα.

### 1.6.4. Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης επί διαφορετικών μετοχών

#### Spread option

Είναι ένα call παράγωγο δύο υποκείμενων αγαθών  $S_1, S_2$  με κέρδος  $([S_1(T) - S_2(T)] - K)_+$  και τιμή εξάσκησης  $K$ . Για παράδειγμα, τα *crack spread option* είναι παράγωγα που βασίζονται στη διαφορά των τιμών των μεταξύ πετρελαίου θέρμανσης και αργού πετρελαίου.

### Basket option

Είναι ένα παράγωγο επί ενός χαρτοφυλακίου υποκείμενων αγαθών με τελικό κέρδος  $([c_1S_1(T) + c_2S_2(T) + \dots + c_dS_d(T)] - K)_+$ . Τυπικά παραδείγματα αποτελούν παράγωγα επί χαρτοφυλακίου παρόμοιων αγαθών, πχ. τραπεζικών μετοχών ή ασιατικό συνάλλαγμα.

### Outperformance option

Αποτελεί παράγωγο επί της ελάχιστης ή μέγιστης αξίας ενός συνόλου υποκείμενων αγαθών και έχει τελικό κέρδος της μορφής  $(\max\{c_1S_1(T) + c_2S_2(T) + \dots + c_dS_d(T)\} - K)_+$

### Barrier option

Ένα Barrier παράγωγο επί 2 υποκείμενων αγαθών έχει τελικό κέρδος της μορφής

$$\mathbf{1}\{\min_{i=1,\dots,n}S_2(t_i) < b\}(K - S_1(T))_+.$$

Αυτό είναι ένα *down-and-in* put του  $S_1$  το οποίο εξασκείται όταν το  $S_2$  πέσει κάτω από κάποιο όριο  $b$ . Για παράδειγμα το  $S_1$  θα μπορούσε να είναι κάποια μετοχή και το  $S_2$  θα μπορούσε να είναι κάποιος γενικότερος δείκτης - το put επί της μετοχής εξασκείται μόνο όταν πέσει η αγορά.

### Quantos

Είναι παράγωγα που εξαρτώνται και από την τιμή μιας μετοχής και από κάποιον δείκτη. Για παράδειγμα, είναι ένα παράγωγο για την αγορά μιας αμερικάνικης μετοχής με την τιμή εξάσκησης καθορισμένη σε \$ (ξένο νόμισμα) αλλά το κέρδος του παραγώγου εκφρασμένο σε € (εγχώριο νόμισμα) -  $S_1$  είναι η τιμή της μετοχής,  $S_2$  είναι η συναλλαγματική ισοτιμία μονάδων €/1\$. Το τελικό κέρδος (σε €) δίνεται από τον τύπο  $S_2(T) \cdot (S_1(T) - K)_+$ . Εάν η τιμή εξάσκησης είναι καθορισμένη σε € (Ε.Ν.) και το κέρδος του παραγώγου εκφράζεται σε \$ (Ξ.Ν.), το τελικό κέρδος γίνεται  $(S_1(T) - \frac{K}{S_2(T)})_+$ .

## Κεφάλαιο 2° - Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών & Μέθοδοι Δειγματοληψίας

### 2.1. Παραγωγή τυχαίων αριθμών

Με τον όρο *παραγωγή τυχαίων αριθμών* από την ομοιόμορφη κατανομή εννοούμε μία μέθοδο με την οποία θα παράγονται αριθμοί  $U_1, U_2, \dots$  οι οποίοι θα είναι ανεξάρτητοι και ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο  $(0,1)$ .

Μία ευρύτατα διαδεδομένη μέθοδος είναι η γραμμική συμβατική (linear congruential) σύμφωνα με την οποία ξεκινάμε με μία αρχική τιμή  $x_0$  (seed) και στη συνέχεια εκτελούμε τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$x_{i+1} = a x_i \bmod m$$

$$u_{i+1} = x_{i+1} / m$$

όπου το  $x \bmod m$  συμβολίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $x$  διά του  $m$ , ενώ τα προεπιλεγμένα  $a$  και *modulus*  $m$ , καθώς και η αρχική δοθείσα τιμή  $x_0$  ανήκουν στους φυσικούς αριθμούς. Το  $x_0$  μπορεί να λάβει τις τιμές μεταξύ 1 και  $m - 1$  και συνήθως καθορίζεται από το χρήστη. Επειδή το αποτέλεσμα του  $a x_i \bmod m$  είναι πάντα ένας ακέραιος μεταξύ του 0 και του  $m - 1$ , οι τελικές τιμές  $u_i$  είναι πάντα μεταξύ του 0 και του  $m/(m - 1)$ , δηλαδή εντός του διαστήματος  $[0,1)$ . Μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων  $\leq m$ , όταν ο πρώτος αριθμός επανεμφανιστεί, θα επαναληφθεί ολόκληρη η ακολουθία και για αυτό το λόγο τα  $a$  και  $m$  θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε η ακολουθία που παράγεται να είναι αρκετά μεγάλη χωρίς να επαναλαμβάνεται (πρακτικά δεκάδες εκατομμύρια).

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τα προεπιλεγθέντα  $a, m, x_0$  (seed).
- ii. Υπολογίζουμε το  $x_{i+1} = a x_i \bmod m$  και θέτουμε  $u_{i+1} = x_{i+1} / m, i = 0, 1, \dots, n$ .

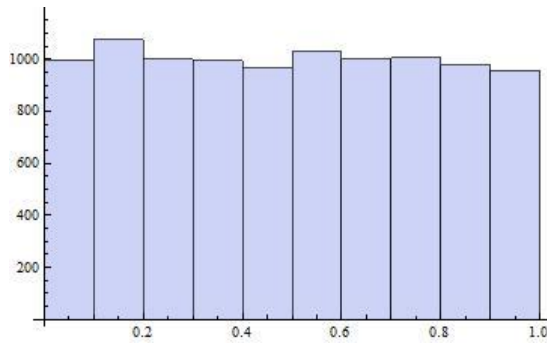
Μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη:

```
a=7^5;m=2^32;seed=1;x={seed};random={};n=5;
Do[AppendTo[x,Mod[a*x[[i]],m]];AppendTo[random,x[[i+1]]/m},{i,1,n}];
random/N
```

```
{3.91318*10^-6, 0.0657689, 0.377802, 0.720674, 0.367432}
```

Επίσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε το ιστόγραμμα (με πλάτος κλάσης 0,1) που προκύπτει από ένα δείγμα  $n = 10.000$  τέτοιων αριθμών:





Γράφημα 2.1. Ιστόγραμμα τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή με τη γραμμική συμβατική μέθοδο

## 2.2. Γενικές Μέθοδοι Δειγματοληψίας

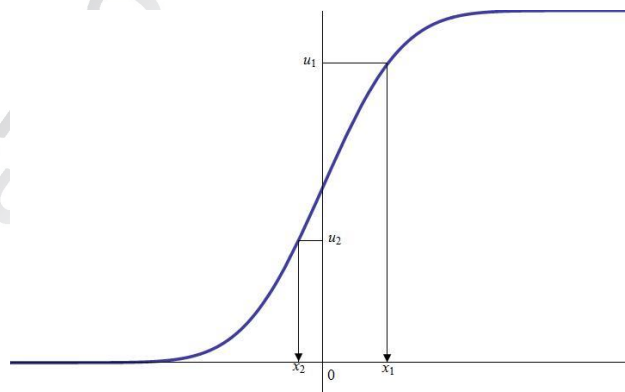
Οι περισσότερες τεχνικές προσομοίωσης απαιτούν τη δειγματοληψία τυχαίων αριθμών ή διανυσμάτων από κατανομές διαφορετικές από την ομοιόμορφη. Έχοντας ορίσει τη μέθοδο με την οποία μπορούμε να παράγουμε (ψευδο)τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη στο  $(0,1)$  κατανομή, θα προσπαθήσουμε να τους μετατρέψουμε σε (ψευδο)τυχαίους αριθμούς που προέρχονται από άλλες κατανομές, χρησιμοποιώντας τις δύο πιο διαδεδομένες μεθόδους: της αντιστροφής και της αποδοχής/απόρριψης.

### 2.2.1. Μέθοδος Αντιστροφής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό  $X$  από μία συνάρτηση κατανομής  $F$ , υπό τη σχέση  $P(X \leq x) = F(x) \forall x$ . Η μέθοδος της αντιστροφής θέτει

$$X = F^{-1}(U), \quad U \sim Unif[0,1]$$

όπου  $F^{-1}$  είναι η αντίστροφη της  $F$  και  $Unif[0,1]$  είναι η ομοιόμορφη στο  $[0,1]$  κατανομή.



Γράφημα 2.2. Διαγραμματική απεικόνιση της μεθόδου αντιστροφής

Η μέθοδος της αντιστροφής παρουσιάζεται στο ανωτέρω διάγραμμα: για μία υποθετική συνάρτηση κατανομής  $F$ , λαμβάνουμε τυχαίους αριθμούς  $u$  από την ομοιόμορφη κανονική στο  $(0,1)$  οι οποίοι ουσιαστικά συμβολίζουν την πιθανότητα  $P(X \leq x) = u$  και στη συνέχεια αντιστοιχούμε τις τιμές της  $x$  για τις οποίες ισχύει αυτή η πιθανότητα. Ο τυχαίος

αριθμός  $u$  μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα «τυχαίο ποσοστημόριο». Αν η  $F$  είναι συνεχής και η  $X \sim F$ , τότε η πιθανότητα του  $X$  να πέσει μεταξύ του  $20^{ου}$  και του  $30^{ου}$  ποσοστημορίου είναι η ίδια με αυτή του να πέσει μεταξύ του  $85^{ου}$  και του  $95^{ου}$  ποσοστημορίου, δηλαδή το ποσοστημόριο στο οποίο «πέφτει» η  $X$  κατανέμεται ομοιόμορφα.

Η αντίστροφη της  $F$  ορίζεται εφόσον η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα, διαφορετικά θα πρέπει να θέσουμε κάποιον κανόνα. Πχ. εάν υπάρχουν διαφορετικές τιμές για τις οποίες ισχύει  $F(x) = u$  τότε ο σχέση  $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$  επιλέγει το μικρότερο.

Προς επιβεβαίωση ότι η αντιστροφή όντως παράγει δείγμα από την  $F$  μπορούμε να ελέγξουμε την κατανομή του  $X$  που παράγεται:

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Η μέθοδος της αντιστροφής, αν και δεν είναι η ταχύτερη δυνατή για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία κατανομή, διαθέτει μερικά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά:

- α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση δεσμευμένων κατανομών,
- β) μετατρέπει την  $U$  μονότονα στη ζητούμενη  $X$  και
- γ) απαιτεί ένα μόνο τυχαίο αριθμό από την ομοιόμορφη κατανομή για την παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από τη ζητούμενη κατανομή.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικά παραδείγματα παραγωγής τυχαίων αριθμών από διάφορες κατανομές:

### Εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$  έχει συνάρτηση κατανομής  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$  και συνήθως χρησιμοποιείται για να εκφράσει τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών συμβάντων μιας διαδικασίας Poisson. Η  $F$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο  $(0, \infty)$  και ισχύει ότι:

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \xrightarrow{1-u \sim U(0,1)} x = -\frac{1}{\lambda} \ln(u).$$

Επομένως ένας αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$  είναι ο παρακάτω:

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Παράγουμε τυχαίο αριθμό  $u$  από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ .
- ii. Θέτουμε  $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(u)$

και μια υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη ( $n = 10000, \lambda = 1,5$ ):

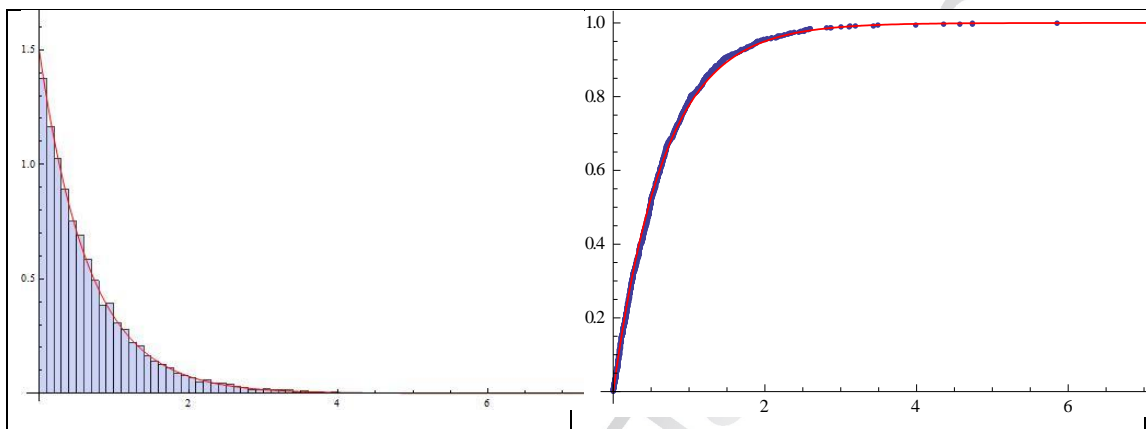
```
λ = 1.5; n = 1000; random = Table[0, {n}];
Do[u = RandomReal[]; random[[i]] = -1/λ*Log[u], {i, 1, n}];
H1 = Histogram[random, Automatic, "PDF"];
P1 = Plot[λ*Exp[-λ*x], {x, 0, 8}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
```

```

Red];
Show[H1, P1]
sr = Sort[random];
H2 = ListPlot[Table[{sr[[k]], k/n}, {k, 1, n}]];
P2 = Plot[1-Exp[-λ*x], {x,0,8}, PlotRange->All, PlotStyle->Red];
Show[H2, P2, AxesOrigin -> {0, 0}]

```

Το ιστόγραμμα και η εμπειρική συνάρτηση κατανομής των τυχαίων αριθμών προσεγγίζουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της εκθετικής:



Γράφημα 2.3. Ιστόγραμμα και εμπειρική συνάρτηση κατανομής τυχαίων αριθμών από την εκθετική κατανομή με τη μέθοδο της αντιστροφής.

### Κατανομή Rayleigh

Αν δεσμεύσουμε ως προς το ενδεχόμενο μία τυπική κίνηση Brown (βλ. Κεφάλαιο 3) να ισούται με  $b$  στο χρόνο  $T = 1$ , τότε η μέγιστη τιμή που έχει λάβει στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$  ακολουθεί κατανομή Rayleigh με σ.κ.:

$$F(x) = 1 - e^{-2x(x-b)}, \quad x \geq b$$

Θέτοντας  $F(x) = u$ ,  $u \in (0,1)$  και λύνοντας ως προς  $x$ , λαμβάνουμε:

$$1 - e^{-2x(x-b)} = u \Leftrightarrow e^{-2x(x-b)} = 1 - u \Leftrightarrow -2x(x-b) = \ln(1-u) \Leftrightarrow x^2 - bx + \frac{1}{2}\ln(1-u) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2\ln(1-u)}}{2}$$

Η αντίστροφη της  $F$  δίνεται από τη μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες (στην πραγματικότητα θα πρέπει να ισχύει ότι  $x \geq b$  διότι η μέγιστη τιμή της διαδρομής μίας κίνησης Brown θα πρέπει να ίση ή μεγαλύτερη της τελικής της τιμής – η ισότητα ισχύει στην περίπτωση που πριν την τελική τιμή της διαδρομής  $b$ , όλες οι ενδιάμεσες τιμές κυμάνθηκαν κάτω από αυτήν). Άρα καταλήγουμε ότι:

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2\ln(1-u)}}{2} \xleftrightarrow{1-u \sim U(0,1)} x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2\ln(u)}}{2}$$

### Δεσμευμένες Κατανομές

Ας υποθέσουμε ότι η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κατανομή  $F$  και επιπλέον ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς υπό την προϋπόθεση ότι  $a < X \leq b$ , με  $F(a) < F(b)$ . Σε αυτή την περίπτωση, παράγουμε  $U \sim U(0,1)$  και θέτουμε

$$V = F(a) + (F(b) - F(a)) \cdot U.$$

Ο νέος τυχαίος αριθμός  $V$  κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ του  $F(a)$  και του  $F(b)$  και η  $F^{-1}(V)$  έχει την επιθυμητή δεσμευμένη κατανομή.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(V) \leq x) &= P(F(a) + (F(b) - F(a))U \leq F(x)) \\ &= P\left(U \leq \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}\right) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \end{aligned}$$

η οποία είναι η ακριβής κατανομή του  $X$  δοθέντος ότι  $a < X \leq b$  (οποιοδήποτε από τα σημεία  $a$  και  $b$  θα μπορούσαν να είναι το άπειρο).

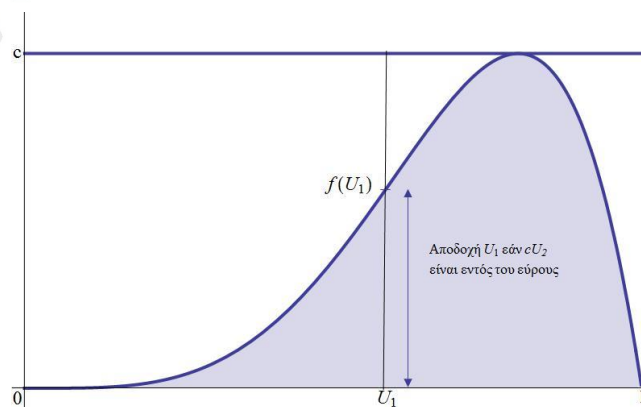
### 2.2.2. Μέθοδος αποδοχής/απόρριψης

Η μέθοδος της αποδοχής/απόρριψης χρησιμοποιεί πρώτα μία κατανομή που θεωρούμε ότι μπορούμε εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από αυτή και έπειτα, σύμφωνα με κάποιο μηχανισμό που θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, αποδεχόμαστε μόνο ένα υποσύνολο από αυτούς, που θα αποτελέσει τους τυχαίους αριθμούς της ζητούμενης κατανομής.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας  $f$  που ορίζεται για  $x \in \mathbb{R}$  (ή  $x \in \mathbb{R}^d$ ). Αν  $g$  είναι μία συνάρτηση πυκνότητας από την οποία γνωρίζουμε πώς να παράγουμε με ευκολία τυχαίους αριθμούς, υπό τις προϋποθέσεις ότι ισχύει:

$$f(x) \leq c g(x)$$

για κάθε  $x$  και για κάποια σταθερά  $c$ , και αν  $g(x) = 0$  τότε και  $f(x) = 0$ , τότε μπορούμε να πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα  $X$  από την  $g$  και να το κάνουμε δεκτό με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου  $\frac{f(X)}{c g(X)}$ . Αν το  $X$  απορριφθεί, τότε ένα νέο υποψήφιο δείγμα παράγεται από την  $g$  που υποβάλλεται ξανά στο τεστ αποδοχής/απόρριψης. Όταν τελικά το  $X$  γίνει αποδεκτό, τότε εκλαμβάνεται σαν δείγμα από την  $f$ . Η δύναμη της μεθόδου απόρριψης έγκειται στη συνεχή περίπτωση που μπορούμε να παράξουμε τυχαίους αριθμούς από κατανομές των οποίων η  $F^{-1}$  δεν μπορεί να γραφτεί με κλειστή μορφή και συνεπώς η μέθοδος της αντιστροφής δεν μπορεί να εφαρμοστεί.



Γράφημα 2.4. Διαγραμματική απεικόνιση της μεθόδου αποδοχής/απόρριψης

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Παράγουμε τυχαίο αριθμό  $X$  από την κατανομή  $g$ .
- ii. Παράγουμε τυχαίο αριθμό  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ .
- iii. Εάν  $U \leq \frac{f(X)}{c \cdot g(X)}$  θέτουμε  $Y = X$ , διαφορετικά επιστρέφουμε στο i.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικά παραδείγματα παραγωγής τυχαίων αριθμών από διάφορες κατανομές.

### Κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha, \beta$  έχει σ.π.π.:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$$

με μέσο  $\alpha\beta$  και διακύμανση  $\alpha\beta^2$ . Εφόσον για αυτή την κατανομή ισχύει ότι εάν  $X \sim G(\alpha, 1)$  τότε  $\beta \cdot X \sim G(\alpha, \beta)$ , θα κάνουμε χρήση αυτής της ιδιότητας και θα περιοριστούμε στην προσομοίωση μόνο από την  $G(\alpha, 1)$ .

Η μέθοδος<sup>3</sup> που ακολουθεί είναι γνωστή και ως η μέθοδος της αναλογίας των ομοιόμορφων τ.μ.. Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι μία μη-αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $(0, \infty)$ . Αν το σημείο  $(X, Y)$  είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο σύνολο  $A$  για το οποίο ισχύει  $A = \{(x, y): x \leq \sqrt{f(y/x)}\}$ , τότε η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής του  $Y/X$  είναι ανάλογη<sup>4</sup> της  $f$ . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι το  $A$  περιέχεται σε ένα καθορισμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Για να λάβουμε ομοιόμορφο δείγμα από το  $A$ , μπορούμε να λαμβάνουμε συνεχώς τυχαία σημεία  $(X, Y)$  ομοιόμορφα από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και να κρατήσουμε το πρώτο που ικανοποιεί τη σχέση  $X \leq \sqrt{f(Y/X)}$ . Η μέθοδος αυτή μας δίνει το  $Y/X$  σαν ένα δείγμα από μία κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας ανάλογη της  $f$ . Για την περίπτωση που έχουμε  $\alpha > 1$ , θέτουμε:

$$A = \left\{ x, y: 0 \leq x \leq \sqrt{(y/x)^{\alpha-1} e^{-y/x}} \right\}$$

Αυτό το σύνολο εμπεριέχεται στο παραλληλόγραμμο  $[0, \bar{x}] \times [0, \bar{y}]$ , όπου

$$\bar{x} = [(a-1)/e]^{(a-1)/2} \text{ και } \bar{y} = [(a+1)/e]^{(a+1)/2}.$$

Το ποσοστό του εμβαδού του  $A$  στο εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλόγραμμο καθορίζει τον αριθμό των δειγμάτων που απαιτούνται μέχρι να γίνει δεκτό κάποιο που βρίσκεται εντός του  $A$ . Όπως είναι λογικό, όσο μεγαλώνει το  $\alpha$ , τόσο μεγαλώνει και το ποσοστό  $(= O(\sqrt{\alpha}))$ , καθιστώντας τον αλγόριθμο πιο αργό.

<sup>3</sup> Cheng & Feast (1980)

<sup>4</sup> Fishman (1996)

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τις διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου,  $x = \left[\frac{(a-1)}{e}\right]^{(a-1)/2}$  και  $y = [(a+1)/e]^{(a+1)/2}$ .
- ii. Παράγουμε  $U_1, U_2 \sim U(0,1)$  και θέτουμε  $X = x \cdot U_1$ ,  $Y = y \cdot U_2$  ( $X$  και  $Y$  κατανέμονται ομοιόμορφα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
- iii. Εάν  $X \leq \sqrt{(Y/X)^{a-1} e^{-Y/X}}$ , αποδοχή του  $Y/X$ .

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη ( $n = 10.000, a = 4$ ):

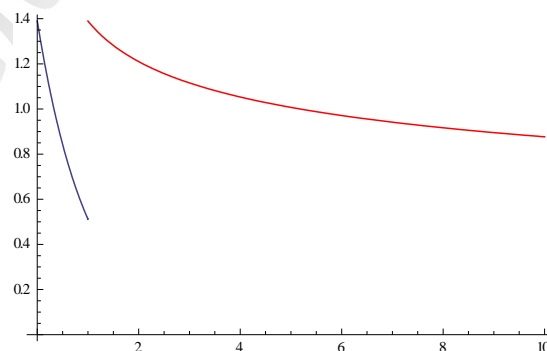
```
a = 4; n = 10000; rn = Table[0, {n}]; i = 1;
x = ((a - 1)/Exp[1])^0.5*(a - 1);
y = ((a + 1)/Exp[1])^0.5*(a + 1);
While[i < n+1, X = RandomReal[]*x; Y = RandomReal[]*y;
  If[X <= Sqrt[(Y/X)^(a - 1)*Exp[-Y/X]], rn[[i]] = Y/X; i = i + 1]]
Show[Histogram[rn, {.5}, "Probability"],
  Plot[0.5*PDF[GammaDistribution[a, 1], x], {x, 0, 20}]]
```

Για παράμετρο  $a \leq 1$ , η μέθοδος<sup>5</sup> που παρουσιάζεται στηρίζεται σε ένα γρήγορο αλγόριθμο αποδοχής/απόρριψης τ.μ. που παράγονται από κατανομές με τις κατάλληλες πιθανότητες στα διαστήματα  $[0,1]$  και  $(1, \infty)$ : θέτουμε  $p = e/(a+e)$  και ορίζουμε

$$g(z) = \begin{cases} pa z^{a-1}, & 0 \leq z \leq 1 \\ (1-p) e^{-z+1}, & z > 1 \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση κατανομής είναι μια μείξη της  $az^{a-1}$  στο  $[0,1]$  και της  $e^{-z+1}$  στο  $(1, \infty)$ , με βάρη  $p$  και  $1-p$  αντίστοιχα. Η συνάρτηση  $f_{a,1}(z)/g(z)$  (όπου  $f_{a,1}$  σ.π. της  $G(a,1)$ ) είναι φραγμένη:

$$\frac{f_{a,1}(z)}{g(z)} = \begin{cases} \frac{e^{-z}}{pa\Gamma(\alpha)} \leq \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{z^{a-1}}{(1-p)e\Gamma(\alpha)}, & z > 1 \end{cases} \leq \frac{a+e}{ae\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{ap\Gamma(\alpha)} \leq 1,39$$



Γράφημα 2.5. Διαγραμματική απεικόνιση της  $\frac{f_{a,1}(z)}{g(z)}$  για  $a = 1$

<sup>5</sup> Ahrens & Dieter (1974)

Για να λάβουμε τυχαίο δείγμα από την  $g$  (χωρίς τα βάρη), χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντιστροφής:

$$\int a z^{a-1} = z^a, \text{ άρα } U = z^a \Leftrightarrow z = U^{1/a}, 0 \leq z \leq 1$$

$$\int e^{-z+1} = -e^{-z+1}, \text{ άρα } U = e^{-z+1} \Leftrightarrow \log U = -z + 1 \Leftrightarrow z = 1 - \log U, z > 1$$

Περαιτέρω ανάλυση της μεθόδου μας δίνει ότι η υποψήφια τ.μ.  $Z$  γίνεται δεκτή με πιθανότητα  $e^{-Z}$  στο  $[0,1]$  και με πιθανότητα  $Z^{a-1}$  στο  $(1, \infty)$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

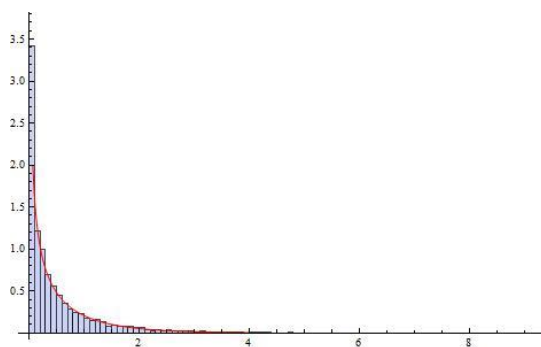
- i. Παράγουμε  $U_1, U_2 \sim U(0,1)$  και θέτουμε  $Y = \frac{U_1}{p}$
- ii. Εάν  $U_1 \leq p \Leftrightarrow Y \leq 1$ , θέτουμε  $Z = (Y)^{1/a}$  (μέθοδος αντιστροφής για την  $g$  με  $Z \leq 1$ ) και πάμε στο βήμα 3. Εάν  $U_1 > p$ , πάμε στο βήμα 4.
- iii. Εάν  $U_2 < e^{-Z}$ , αποδεχόμαστε τη  $Z$ .
- iv. Θέτουμε  $Z = 1 - \log\left(\frac{Y}{a}\right)$  (μέθοδος αντιστροφής για την  $g$  με  $Z > 1$ ) και εάν  $U_2 \leq Z^{a-1}$ , αποδοχή του  $Z$ .

Στον παραπάνω αλγόριθμο, εάν δεν ισχύει το  $Y \leq 1$ , τότε το  $Y \sim U(0, 1/p)$  και το  $\frac{U}{ap}$  έχει την κατανομή του  $U/e$  και το  $1 - \log\left(\frac{U}{ap}\right)$  έχει την κατανομή του  $1 - \log U$ .

Η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη ( $n = 10.000, a = 0.5$ ):

```
a = 0.5; p = Exp[1]/(a + Exp[1]); n = 10000; rn = Table[0, {n}]; i = 1;
While[i < n + 1, U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[];
  If[U1 <= p,
    Z = (U1/p)^(1/a); If[U2 < Exp[-Z], rn[[i]] = Z; i = i + 1],
    Z = 1 - Log[RandomReal[]]; If[U2 <= Z^(a - 1), rn[[i]] = Z;
    i = i + 1]];
A = Histogram[rn, {0.1}, "ProbabilityDensity"];
B = Plot[PDF[GammaDistribution[0.5, 1], x], {x, 0, 4},
  PlotStyle -> Red, PlotRange -> {0, 2}];
Show[A, B]
```

Το ιστόγραμμα των τυχαίων αριθμών προσεγγίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής  $Ga(0.5, 1)$ :



Γράφημα 2.6. Ιστόγραμμα τυχαίων αριθμών από την κατανομή Γάμμα ( $Ga(0.5, 1)$ )

### 2.2.3. Παραγωγή κανονικών τυχαίων αριθμών και διανυσμάτων

Η παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κανονική κατανομή είναι πολύ σημαντική λόγω του ευρύτατου πεδίου εφαρμογής της. Θα περιοριστούμε στην παραγωγή τυχαίων αριθμών από την τυπική κανονική κατανομή  $N(0,1)$  καθώς με ένα απλό μετασχηματισμό τους (αν  $Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) μπορούμε εύκολα να τους μετατρέψουμε στην κανονική κατανομή που επιθυμούμε. Η  $N(0,1)$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

Μία  $d$  –διάστατη κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται από ένα  $d$  –διαστάσεων διάνυσμα  $\mu$  και από ένα  $d \times d$  πίνακα συνδιακύμανσης  $\Sigma$  ( $N(\mu, \Sigma)$ ).

Ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\Sigma$  θα πρέπει να είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος ( $x^T \Sigma x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$ ).

#### 2.2.3.1. Παραγωγή μονοδιάστατων κανονικών τυχαίων αριθμών

##### Πολική Μέθοδος (Box-Muller)

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην παραγωγή τυχαίου διανύσματος από τη δι-διάστατη τυπική κανονική, κάθε ένα στοιχείο από το οποίο είναι μία μονοδιάστατη τυπική κανονική. Ο αλγόριθμος βασίζεται σε δύο ιδιότητες της δι-διάστατης τυπικής κανονικής:

- αν  $Z \sim N(0, I_2)$  τότε η  $R = Z_1^2 + Z_2^2$  κατανέμεται εκθετικά με μέσο 2 δηλαδή:  $P(R \leq x) = 1 - e^{-x/2}$
- για συγκεκριμένο  $R$ , το σημείο  $(Z_1, Z_2)$  κατανέμεται ομοιόμορφα στον κύκλο με κέντρο το  $(0,0)$  και ακτίνα  $\sqrt{R}$ .

Συνεπώς για να παράξουμε δύο τυχαίους αριθμούς  $Z_1$  και  $Z_2$ , παράγουμε αρχικώς το  $R$  και στη συνέχεια επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο του κύκλου με ακτίνα  $\sqrt{R}$ . Προκειμένου να παράξουμε ομοιόμορφα ένα σημείο του κύκλου, αρκεί να πάρουμε μία τυχαία γωνία μεταξύ του 0 και του  $2\pi$  (παράγουμε τυχαίο αριθμό  $U \sim U(0,1)$  και θέτουμε  $V = 2\pi U$ , δηλ.  $V \sim U(0,2\pi)$ ) και μετά να εντοπίσουμε το σημείο του κύκλου σύμφωνα με τη γωνία αυτή (με το να θέσουμε  $Z_1 = \sqrt{R} \cos(V)$  και  $Z_2 = \sqrt{R} \sin(V)$ ).

Περιγραφή αλγορίθμου:

- Παράγουμε τυχαίους αριθμούς  $U_1, U_2$  από την ομοιόμορφη στο  $(0,1)$ .
- Θέτουμε  $R = -2 \log(U_1)$ ,  $V = 2\pi U_2$
- Θέτουμε  $Z_1 = \sqrt{R} \cos(V)$ ,  $Z_2 = \sqrt{R} \sin(V)$

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη:

```
n = 10000; random = Table[0, {n}];
Do[U1 = RandomReal[]; U2 = RandomReal[]; r = -2 Log[U1]; v = 2*Pi*U2;
  random[[i]] = Sqrt[r]*Cos[v];
  random[[i + 1]] = Sqrt[r]*Sin[v], {i, 1, n, 2}];
```

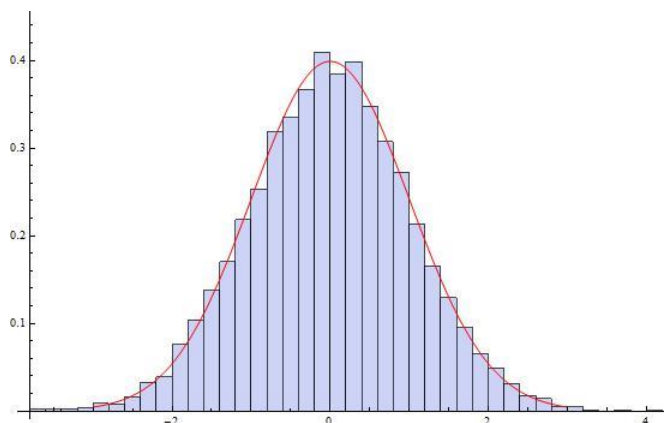


```

a = Histogram[random, Automatic, "PDF"];
b = Plot[PDF[NormalDistribution[], x], {x, -3, 3}, PlotStyle -> Red];
Show[a, b]

```

Το ιστόγραμμα των τυχαίων αριθμών προσεγγίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:



Γράφημα 2.6. Ιστόγραμμα τυχαίων αριθμών από την τυπική κανονική κατανομή με την πολική μέθοδο

### 2.2.3.2. Παραγωγή πολυδιάστατων κανονικών τυχαίων αριθμών

Μία  $d$ -διαστάσεων κανονική κατανομή (συμβολίζεται με  $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ) χαρακτηρίζεται από το μέσο διάνυσμα  $d$ -στοιχείων  $\boldsymbol{\mu}$  και από τον  $d \times d$  πίνακα συνδιακύμανσης  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\boldsymbol{\Sigma}$  θα πρέπει να είναι συμμετρικός, που σημαίνει ότι ο  $\boldsymbol{\Sigma}$  και ο ανάστροφός του  $\boldsymbol{\Sigma}^T$  πρέπει να είναι ίσοι και θετικά ημιορισμένοι, δηλαδή  $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ . Εάν λοιπόν, το τυχαίο διάνυσμα  $\boldsymbol{X}$  ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή ( $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ), τότε το  $i$ -οστό στοιχείο  $X_i$  έχει κατανομή  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , όπου  $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$ . Το  $i$ -οστό και  $j$ -οστό στοιχείο έχουν συνδιακύμανση  $Cov[X_i, X_j] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \Sigma_{ij}$  και η συσχέτισή τους είναι ίση με

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \Leftrightarrow \Sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Τέλος, εάν το τ.δ.  $\boldsymbol{X}$  πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε  $d \times d$  πίνακα  $A$  τότε ισχύει:

$$A\boldsymbol{X} \sim N(A\boldsymbol{\mu}, A\boldsymbol{\Sigma}A^T)$$

Επομένως, εάν  $\boldsymbol{Z} \sim N(0, \boldsymbol{I})$  τότε  $A\boldsymbol{Z} \sim N(0, A\boldsymbol{A}^T)$  και  $\boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z} \sim N(\boldsymbol{\mu}, A\boldsymbol{A}^T)$ . Δεδομένου ότι εύκολα μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την τυπική κανονική κατανομή με τη μέθοδο Box-Muller και στη συνέχεια να τους ενώσουμε σε ένα διάνυσμα το οποίο θα ακολουθεί  $N(0, \boldsymbol{I})$ , το πρόβλημα της παραγωγής πολυδιάστατων κανονικών τυχαίων αριθμών ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης του πίνακα  $A$  για τον οποίο θα ισχύει  $A\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ .

#### Παραγοντοποίηση Cholesky

Εάν στην εξίσωση  $A\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$  χρησιμοποιήσουμε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kd} \end{bmatrix}$$

τότε ο υπολογισμός του  $\mu + AZ$  θα γίνει:

$$X_1 = \mu_1 + A_{11}Z_1$$

$$X_2 = \mu_2 + A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 \text{ κ. ο. κ.}$$

και έτσι θα εξοικονομήσουμε τις περίπου διπλάσιες πράξεις που διαφορετικά θα απαιτούνταν για τον ορισμό του κάθε  $X_i$ . Ο ορισμός αυτός του πίνακα  $A$  ονομάζεται *παραγοντοποίηση Cholesky* του πίνακα  $\Sigma$ .

Εάν υποθέσουμε ένα  $2 \times 2$  πίνακα συνδιακύμανσης  $\Sigma$ , οποίος σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, ορίζεται ως:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

τότε η παραγοντοποίηση Cholesky του πίνακα  $\Sigma$  ορίζεται ως:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{bmatrix}$$

ο οποίος επαληθεύεται εάν υπολογίσουμε τον  $AA^T$ .

Εάν τώρα υποθέσουμε ένα  $d \times d$  πίνακα συνδιακύμανσης  $\Sigma$ , τότε:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_{d1} & A_{d2} & \dots & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{d1} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{d2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^2 & \dots & A_{11}A_{d1} \\ A_{11}A_{21} & \dots & A_{21}A_{d1} + A_{22}A_{d2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11}A_{d1} & \dots & A_{d1}^2 + \dots + A_{dd}^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Sigma_{11} = A_{11}^2, \Sigma_{21} = A_{11}A_{21}, \dots, \quad \Sigma_{d1} = A_{11}A_{d1}, \dots, \\ \Sigma_{22} = A_{21}^2 + A_{22}^2, \dots, \quad \Sigma_{dd} = A_{d1}^2 + \dots + A_{dd}^2$$

δηλαδή ακριβώς ένα προστεθέν στοιχείο σε κάθε εξίσωση, γεγονός που επιτρέπει την εφαρμογή εύχρηστου αλγορίθμου.

Άρα από τον ορισμό  $\Sigma_{ij} = \sum_{k=1}^j A_{ik}A_{jk}$  για  $j \leq i$  λαμβάνουμε

$$A_{ij} = \frac{(\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik}A_{jk})}{A_{jj}} \text{ για } j < i \text{ και } A_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2}$$

Περιγραφή αλγορίθμου για την παραγωγή τυχαίου αριθμού που ακολουθεί την  $d$ -διάστατη κανονική κατανομή  $N(\mu, \Sigma)$ :

- i. Εύρεση του κάτω τριγωνικού πίνακα  $A$  για τον οποίο ισχύει  $AA^T = \Sigma$ :
  - a. Θέτουμε  $A =$  μηδενικός πίνακας  $d \times d$
  - b. Για  $j = 1, \dots, d$  θέτουμε  $v =$  μηδενικό διάνυσμα  $d$  στοιχείων και για

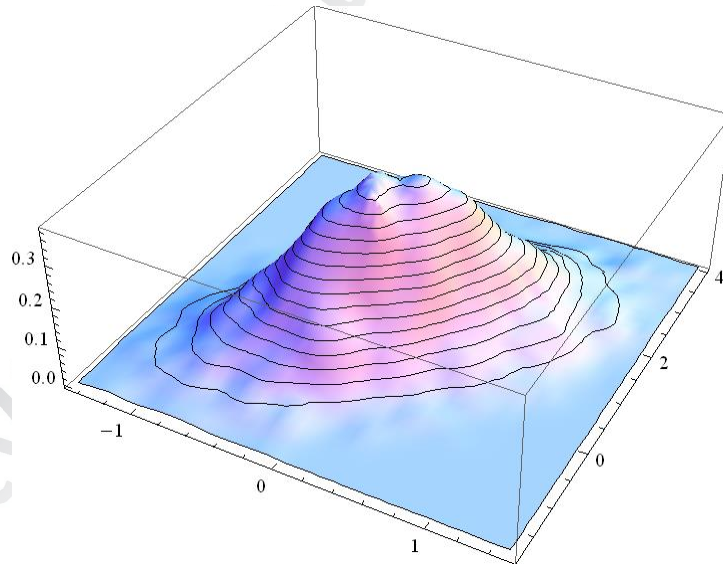
$i = j, \dots, d: v_i = \Sigma_{ij}$  και για  $k = 1, \dots, j: v_i = v_i - A_{jk}A_{ik}$  και  
 θέτουμε  $A_{ij} = v_i/\sqrt{v_j}$

- ii. Παραγωγή τυχαίων αριθμών  $Z_i$ , όπου  $Z \sim N(0,1)$ ,  $i = 1, \dots, d$
- iii. Θέτουμε  $X = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_i\}$ , (άρα  $X \sim N(0, I)$ )
- iv. Θέτουμε  $Y = \mu + AX$

και η υλοποίησή του για  $\mu = \{0,1\}$  και  $\Sigma = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix}$  μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη:

```
n = 10000; μ = {0, 1}; randomnumbers = Table[0, {n}];
d = 2; Σ = {{0.25, 0.3}, {0.3, 1}}; A = Table[0, {d}, {d}];
Do[v = Table[0, {d}];
  Do[v[[i]] = Σ[[i, j]];
    Do[v[[i]] = v[[i]] - A[[j, k]]*A[[i, k]], {k, 1, j}];
    A[[i, j]] = v[[i]]/Sqrt[v[[j]]]
    , {i, j, d}
  , {j, 1, d}];
Do[X = Table[0, {d}];
  Do[X[[i]] = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]], {i, 1, d}];
  Y = μ + A.X; randomnumbers[[i]] = Y
  , {i, 1, n}];
Histogram3D[randomnumbers, ColorFunction->Function[{height},
  ColorData["Rainbow"] [height]]]
```

και το αντίστοιχο ιστόγραμμα του αλγορίθμου για  $n = 10.000$ :



Γράφημα 2.7. Ιστόγραμμα τυχαίων αριθμών από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με

$$\mu = \{0,1\} \text{ και } \Sigma = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> – Προσομοίωση Στοχαστικών Ανελίξεων

### 3.1. Στοχαστικές διαδικασίες martingale

Στοχαστική διαδικασία είναι μία ακολουθία ή οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει χρονικά την εξέλιξη ενός γεγονότος, μίας χρηματικής αξίας κλπ.

Διαδικασία *Martingale* καλείται μία στοχαστική διαδικασία για την οποία ισχύει ότι σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η οποιαδήποτε αναμενόμενη μελλοντική τιμή της διαδικασίας ισούται με την τρέχουσα τιμή, ακόμα και αν γνωρίζουμε όλες τις προηγούμενες τιμές της διαδικασίας στο παρελθόν («δίκαιο τυχερό παιχνίδι»). Αλλά ας δούμε αυστηρότερα την έννοια αυτή.

Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και ένα φιλτράρισμα ή μελλοντική ιστορία (μία ακολουθία σ-αλγεβρών  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  με την ιδιότητα  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ , όπου  $\mathfrak{F}_i$  η πληροφορία που έχουμε στη διάθεσή μας στη χρονική στιγμή  $t_i$ ). Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots$  ορισμένη στον  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  λέγεται προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  εάν η  $X_i$  είναι  $\mathfrak{F}_i$  μετρήσιμη (διαισθητικά, η τιμή της  $X_i$  είναι γνωστή δεδομένης της πληροφορίας  $\mathfrak{F}_i$ , δηλαδή εάν η τιμή της γίνεται γνωστή στο χρόνο  $t_i$ ).

Με βάση τα παραπάνω, μία στοχαστική διαδικασία  $X_1, X_2, \dots$  είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$  εάν είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα αυτό,  $E(|X_i|) < \infty$ , και ισχύει:

$$E(X_{n+1} | \mathfrak{F}_n) = X_n \text{ με πιθανότητα } 1, \text{ για } n = 1, 2, \dots$$

που σημαίνει ότι η αναμενόμενη επόμενη τιμή της διαδικασίας, δοθέντων όλων των μέχρι σήμερα τιμών της (σήμερα ο χρόνος είναι  $t_n$ ), είναι ίση με τη σημερινή τιμή.

### 3.2. Κίνηση Brown

Το 1827, ο βοτανολόγος Robert Brown πρώτος παρατήρησε και περιέγραψε μέσω μικροσκοπίου σωματίδια να κινούνται μέσα σε υγρό και αέριο ακανόνιστα και με τυχαίο τρόπο στο χώρο. Αρκετές δεκαετίες αργότερα το 1905, ο Albert Einstein δημοσίευσε μία θεωρία ερμηνεύοντας με ακριβή τρόπο την ακανόνιστη κίνηση των σωματιδίων λόγω του «βομβαρδισμού» τους από τα μόρια του υγρού ή του αερίου. Τα μοντέλα της κίνησης *Brown* και της γεωμετρικής κίνησης *Brown*, βρίσκουν εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά και στην προσομοίωση των τιμών των χρηματοοικονομικών προϊόντων. Ας υποθέσουμε ότι η  $W(t), t \geq 0$ , είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (στοχαστική διαδικασία) στο χρόνο, η οποία σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, αυξάνεται ή μειώνεται (με πιθανότητα  $p = 0.5$ ) απειροστά και ανεξάρτητα από το παρελθόν. Μπορούμε να θεωρήσουμε την αυτή διαδικασία ως το όριο ενός διακριτού τυχαίου περιπάτου. Συγκεκριμένα, εάν διαιρέσουμε το χρονικό διάστημα  $[0, t]$  σε  $n$  υποδιαστήματα πλάτους  $\Delta$  το καθένα ( $\Delta = t/n$ ) και για αρχική τιμή  $W(0) = 0$  (ή  $C$ ), ισχύει για  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$W(i\Delta) = \begin{cases} W((i-1)\Delta) + \sqrt{\Delta} & \text{ή} \\ W((i-1)\Delta) - \sqrt{\Delta}, \end{cases}$$

με πιθανότητα  $p = 1 - p = 0.5$  και ανεξάρτητα από το παρελθόν. Εάν το  $n \rightarrow \infty$  τότε είναι εύκολο να δούμε ότι  $W(t) \rightarrow_d \sqrt{t}Z$ , όπου  $Z \sim N(0,1)$  και επομένως  $W(t) \sim N(0,t)$ . Επειδή οι αυξομειώσεις της  $W(t)$  είναι ανεξάρτητες σε ξένα χρονικά διαστήματα, η  $W(t)$  έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις δηλαδή η τ.μ.  $W(t+y) - W(y), t > 0$  είναι ανεξάρτητη από τις  $W(u), 0 \leq u < y$  (πρακτικά κάθε σημείο  $W(t)$  μπορεί να θεωρηθεί σαν την αρχική τιμή της διαδικασίας). Το όριο αυτής της διαδικασίας όταν  $n \rightarrow \infty$  ορίζεται αυστηρά παρακάτω και καλείται *μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown* (συμβολίζεται  $BM(0,1)$ ).

Η *μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown* ( $BM(0,1)$ ) στο χρόνο  $[0, T]$  είναι η στοχαστική διαδικασία  $W(t), 0 \leq t \leq T$ , με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i.  $W(0) = 0$  (ή  $C$ ),
- ii. η απεικόνιση  $t \rightarrow W(t)$  είναι, με πιθανότητα 1, μια συνεχής συνάρτηση στο  $[0, T]$
- iii. οι προσαυξήσεις  $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$  είναι ανεξάρτητες για κάθε  $k$  και για κάθε  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$
- iv. Η τ.μ.  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$  για κάθε  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Στο (iv) αρκεί να υποθέσουμε ότι η προσαύξηση  $W(t) - W(s)$  έχει μέσο 0 και διακύμανση  $t - s$ . Το ότι η κατανομή είναι κανονική προκύπτει από τη συνέχειά της (ii) και από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις (iii). Από τα (i) και (iv) προκύπτει επίσης ότι  $W(t) \sim N(0, t)$  για  $0 < t \leq T$ .

*Μονοδιάστατη κίνηση Brown* με τάση  $\mu$  και συντελεστή διάχυσης (ή μεταβλητότητα)  $\sigma^2$  (συμβολίζεται  $BM(\mu, \sigma^2)$ ) στο χρόνο  $[0, T]$  για σταθερά  $\mu$  και  $\sigma > 0$ , καλείται η διαδικασία  $X(t), 0 \leq t \leq T$  εάν ο λόγος

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma}, 0 \leq t \leq T$$

είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Άρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία κίνηση Brown  $BM(\mu, \sigma^2)$  από μία τυπική κίνηση Brown  $W$ , απλά θέτοντας:

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

Όπως είναι προφανές,  $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ . Επιπλέον, από την παραπάνω είναι φανερό ότι η στοχαστική διαδικασία  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Η υπόθεση ότι  $X(0) = 0$  συνήθως γίνεται χάριν απλούστευσης, αλλά μπορούμε να κατασκευάσουμε μία κίνηση Brown με αρχική τιμή  $C$  απλά προσθέτοντας  $C$  σε κάθε  $X(t)$ .

### 3.2.1. Προσομοίωση κίνησης Brown μίας διάστασης

#### **Κατασκευή Τυχαίου Περιπάτου (Random Walk)**

Υποθέτουμε ότι  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Για την κατασκευή μιας τυπικής κίνησης Brown με  $t_0 = 0$  και  $W(0) = 0$ , οι τιμές σε διακριτό χρόνο μπορούν να παραχθούν ως εξής:

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

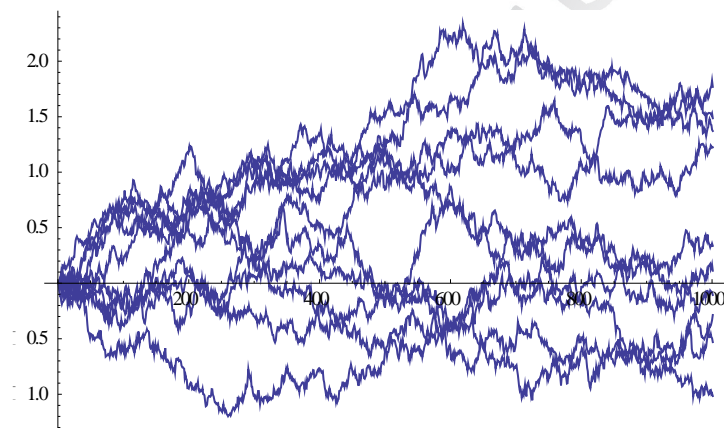
Η τιμή της ακολουθίας στο χρόνο  $t_{i+1}$  ισούται με τη διαδικασία στο χρόνο  $t_i$ , συν μια (ανεξάρτητη) τυχαία μεταβλητή από την τυπική κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με την τετραγωνική ρίζα της χρονικής διαφοράς  $t_{i+1} - t_i$  (υπενθυμίζεται ότι  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ ).

Στον ακόλουθο αλγόριθμο θέτουμε για ευκολία  $t_{i+1} - t_i = T/n$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$  και την αρχική τιμή  $W(0)$ .
- ii. Παράγουμε μια τυχαία μεταβλητή  $Z$  από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε  $W_{i+1} = W_i + Z\sqrt{1/n}$
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

Πραγματοποιήσεις δέκα δειγματικών διαδρομών του αλγορίθμου:



Γράφημα 3.1. Προσομοίωση τυπικής κίνησης Brown

Για την κατασκευή μιας κίνησης Brown όπου  $X(t) \sim BM(\mu, \sigma^2)$ , με τάση  $\mu$ , μεταβλητότητα  $\sigma > 0$  και δεδομένο  $X(0)$ , θέτουμε

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$  και την αρχική τιμή  $W(0)$ .
- ii. Παράγουμε τυχαία μεταβλητή  $Z$  από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε  $X_{i+1} = X_i + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z$ .
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

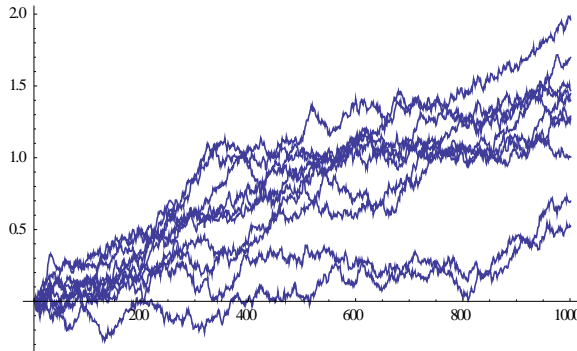
```
n = 1000; k = 10; plots = Table[0, {k}]; μ = 1; σ = 0.5; T=1;
Do[
  X = Table[0, {n + 1}];
  Do[X[[i + 1]] =
    X[[i]] + μ*T/n + σ*Sqrt[T/n]*RandomReal[NormalDistribution[]]
    , {i, 1, n}];
  plots[[j]] = ListLinePlot[X]
```

```

, {j, 1, k}];
Show[plots, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]

```

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου για  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0.5$ :



Γράφημα 3.2. Προσομοίωση κίνησης Brown BM(1,0.5)

Όταν οι παράμετροι  $\mu$  και  $\sigma$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι, η εξίσωση γίνεται:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s) ds + \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Όλοι οι ανωτέρω ορισμοί για την κατασκευή του τυχαίου περιπάτου είναι ακριβείς, υπό την έννοια ότι η από κοινού κατανομή των προσομοιωμένων τιμών, συμπίπτει με την από κοινού κατανομή της αντίστοιχης κίνησης Brown στις χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Αντικαθιστώντας την

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s) ds + \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} Z_{i+1}$$

με την προσέγγιση Euler:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i)\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

θα εισάγουμε σφάλμα διακριτοποίησης ακόμα και στα  $t_1, t_2, \dots, t_n$  μιας και οι προσαυξήσεις δεν θα έχουν ακριβώς τον σωστό μέσο και τη σωστή διακύμανση.

Το διάνυσμα  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του διανύσματος των προσαυξήσεων  $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ . Δεδομένου ότι αυτές οι προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες και κανονικές, προκύπτει ότι το διάνυσμα  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$  ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Επομένως, η προσομοίωση των  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$  είναι μία ειδική περίπτωση του γενικότερου προβλήματος της προσομοίωσης πολυδιάστατων κανονικών διανυσμάτων. Αν και η κατασκευή του τυχαίου περιπάτου είναι αρκετή για τις περισσότερες των περιπτώσεων, είναι ενδιαφέρον να ασχοληθούμε με εναλλακτικές μεθόδους προσομοίωσης.

Για τη συνέχεια, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το μέσο διάνυσμα και τον πίνακα συνδιακύμανσης των  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$ . Από τον ορισμό της τυπικής κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι  $E[W(t_i)] = 0$  και άρα και το μέσο διάνυσμα ισούται με 0. Για τον πίνακα

συνδιακύμανσης και χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων βρίσκουμε ότι, για οποιοδήποτε  $0 < s < t < T$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(s), W(t)] &= \text{Cov}[W(s), W(s) + (W(t) - W(s))] = \\ &= \text{Cov}[W(s), W(s)] + \text{Cov}[W(s), W(t) - W(s)] = s + 0 = s \end{aligned} \quad (3.1)$$

Αν θέσουμε  $C$  τον πίνακα συνδιακύμανσης του  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$ , αποδεικνύεται ότι  $C_{ij} = \min(t_i, t_j)$ , δηλαδή ο πίνακας συνδιακύμανσης δύο οποιονδήποτε  $W(t_i), W(t_j)$  ισούται με το μικρότερο από τα  $t_i, t_j$ .

### Παραγοντοποίηση Cholesky

Έχοντας ξεκαθαρίσει ότι το διάνυσμα  $\{W(t_1), \dots, W(t_n)\}$  έχει κατανομή  $N(0, C)$ , με  $C$  όπως αυτό που έχει περιγραφεί στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να προσομοιώσουμε το διάνυσμα αυτό μέσω του γινομένου  $A \cdot Z$ , όπου  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T \sim N(0, I)$  και ο πίνακας  $A$  είναι κάτω τριγωνικός και ικανοποιεί τη συνθήκη  $AA^T = C$ . Ο πίνακας αυτός υπάρχει πάντοτε αρκεί ο  $C$  να είναι τετραγωνικός, ημιοριστικά θετικός και καλείται πίνακας *Cholesky*. Για το συγκεκριμένο  $C$  είναι ίσος με:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η κατασκευή του τυχαίου περιπάτου μπορεί να θεωρηθεί ως μία υλοποίηση σε μορφή πινάκων ( $A \cdot Z$ ) της αναδρομικής εξίσωσης  $W(t_i + 1) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $A$  που είναι  $n \times n$  και αν για το  $A_{ij}$  στοιχείο του πίνακα ισχύει  $i \leq j$  τότε  $A_{ij} = \sqrt{T/n}$ , διαφορετικά  $A_{ij} = 0$  (κάτω τριγωνικός).
- ii. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα  $Z$  που αποτελείται από  $n$  τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε  $W = A \cdot Z$

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

```
n = 1000; T=1; A = Table[If[i >= j, Sqrt[T/n], 0], {i, n}, {j, n}];
Z = Table[RandomReal[NormalDistribution[]], {n}];
W = A.Z; PrependTo[W, 0];
ListLinePlot[W]
```

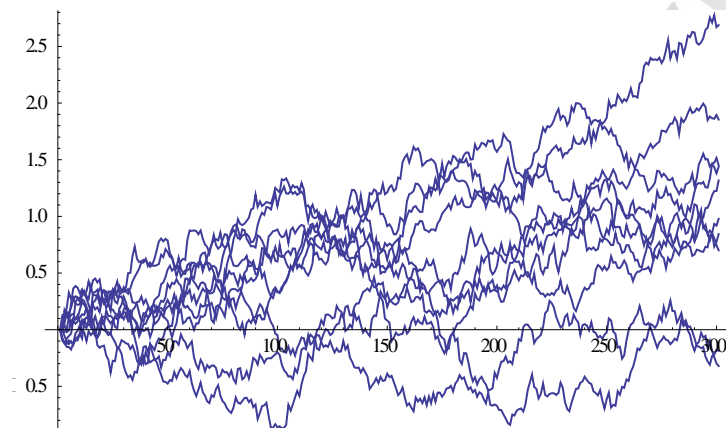
Για μία κίνηση Brown  $BM(\mu, \sigma^2)$ , το μέσο διάνυσμα του  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  έχει το  $i$ -οστό στοιχείο ίσο με  $\mu \cdot t_i$  και ο πίνακας συνδιακύμανσης ισούται με  $\sigma^2 C$ . Ο πίνακας *Cholesky* είναι  $\sigma \cdot A$ .



Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $A$  που είναι  $n \times n$  και αν για το  $A_{ij}$  στοιχείο του πίνακα ισχύει  $i \leq j$  τότε το  $A_{ij} = \sigma\sqrt{T/n}$ , διαφορετικά  $A_{ij} = 0$  (κάτω τριγωνικός).
- ii. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα  $Z$  που αποτελείται από  $n$  τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την  $N(0,1)$ .
- iii. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα  $M = \{\frac{\mu}{n}, \frac{2\mu}{n}, \dots, \frac{n\mu}{n} = \mu\}$
- iv. Θέτουμε  $W = M + A \cdot Z$

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου για  $\mu = 1, \sigma = 1$ :



Γράφημα 3.3. Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown μέσω παραγοντοποίησης Cholesky

### 3.2.2. Προσομοίωση κίνησης Brown πολλών διαστάσεων

Μία διαδικασία  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T$  με  $0 \leq t \leq T$ , καλείται *τυπική κίνηση Brown* στον  $\mathbf{R}^d$  εάν  $W(0) = 0$  ή  $C$ , είναι συνεχής και έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις για τις οποίες ισχύει ότι  $W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)\mathbf{I})$  για κάθε  $0 \leq s < t \leq T$ , όπου  $\mathbf{I}$  ο  $d \times d$  ταυτοτικός πίνακας (identity matrix). Συνεπάγεται ότι κάθε μία διαδικασία που την απαρτίζει με συντεταγμένη  $W_i(t), i = 1, \dots, d$ , είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και για κάθε  $i \neq j$ , τα  $W_i$  και  $W_j$  είναι ανεξάρτητα.

Μία διαδικασία  $X$  καλείται *πολυδιάστατη τυπική κίνηση Brown* με τάση  $\mu$  και μεταβλητότητα  $\Sigma, X(t) \sim BM(\mu, \Sigma)$ , εάν  $\mu$  είναι ένα διάνυσμα στον  $\mathbf{R}^d, \Sigma$  είναι ένας  $d \times d$  πίνακας θετικά ορισμένος ή ημιορισμένος και η διαδικασία είναι συνεχής με ανεξάρτητες προσαυξήσεις  $X(t) - X(s) \sim N((t-s)\mu, (t-s)\Sigma)$ .

Εάν  $B$  είναι  $d \times k$  πίνακας για τον οποίο ισχύει  $BB^T = \Sigma$  και εάν η  $W(t)$  είναι μια τυπική κίνηση Brown στον  $\mathbf{R}^d$ , τότε η διαδικασία  $X(t) = \mu t + B \cdot W(t), 0 \leq t \leq T$  είναι μία  $BM(\mu, \Sigma)$ .

Για χρονικά μεταβαλλόμενη τάση και διακύμανση, η πολυδιάστατη κίνηση Brown γίνεται  $dX(t) = \mu(t)dt + B(t)dW(t)$  όπου  $B(t)B^T(t) = \Sigma(t)$ . Αυτή η διαδικασία έχει συνεχείς δειγματικές διαδρομές, ανεξάρτητες προσαυξήσεις και

$$X(t) - X(s) \sim N\left(\int_s^t \mu(u) du, \int_s^t \Sigma(u) du\right)$$

Όπως είδαμε και στη μονοδιάστατη κίνηση Brown, ισχύει  $Cov[X_i(s), X_j(t)] = \min(s, t) \Sigma_{ij}$ .

### **Κατασκευή Τυχαίου Περιπάτου (Random Walk)**

Ας υποθέσουμε ότι  $Z_1, Z_2, \dots$  είναι ανεξάρτητα  $N(0, I)$  τυχαία διανύσματα στον  $\mathbb{R}^d$ . Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία  $d$ -διάστατων τυπική κίνηση Brown στα χρονικά σημεία  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  με το να θέσουμε  $W(0) = 0$  και

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

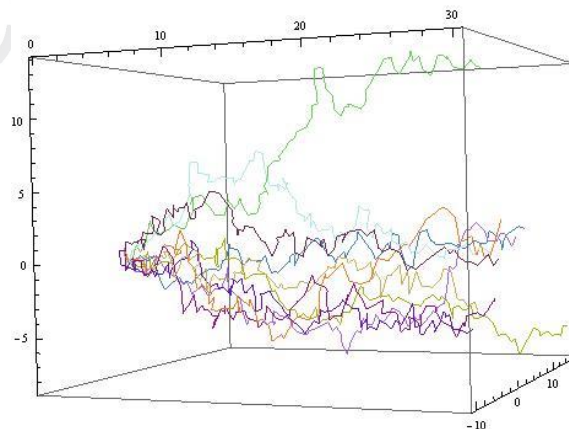
Η παραπάνω διαδικασία μπορεί ισοδύναμα να κατασκευαστεί εφαρμόζοντας τη μονοδιάστατη κατασκευή του τυχαίου περιπάτου ξεχωριστά σε κάθε συνιστώσα του  $W$ .

Περιγραφή αλγορίθμου προσομοίωσης 2-διάστατης τυπικής κίνησης Brown:

- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$  και την αρχική τιμή  $W(0)$ .
- ii. Παράγουμε τυχαίο διάνυσμα  $Z$  από την  $N(0, I)$ .
- iii. Θέτουμε  $W_{i+1} = W_i + Z\sqrt{T/n}$
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

```
T = 30; n = 500; w = Table[{T/n, 0, 0}, {n}]; P = {}; k = 10;
Do[
  Do[w[[i]][[1]] = w[[i - 1]][[1]] + T/n;
    w[[i]][[2]] =
      w[[i - 1]][[2]] + RandomReal[NormalDistribution[]]*Sqrt[T/n];
    w[[i]][[3]] =
      w[[i - 1]][[3]] + RandomReal[NormalDistribution[]]*Sqrt[T/n];
    , {i, 2, n}];
  AppendTo[P, Graphics3D[{RGBColor[RandomReal[], RandomReal[],
    RandomReal[], 1], Line[w]}]]
, {k}];
Show[P, Axes -> True]
```



Γράφημα 3.4. Προσομοίωση δι-διάστατης τυπικής κίνησης Brown

Για την προσομοίωση της  $X \sim BM(\mu, \Sigma)$  πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε τον πίνακα  $B$  για τον οποίο ισχύει  $BB^T = \Sigma$ . Αν ο  $B$  είναι  $d \times k$ , και τα  $Z_1, Z_2, \dots$  ανεξάρτητα κανονικά τυχαία διανύσματα στον  $\mathfrak{R}^k$ ,  $X(0) = 0$ , τότε

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} B Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

Τέλος, για χρονικά μεταβαλλόμενους συντελεστές ισχύει:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s) ds + B(t_i, t_{i+1}) Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

όπου  $B(t_i, t_{i+1})B(t_i, t_{i+1})^T = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma(u) du$ .

### 3.3. Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση των τιμών χρηματοοικονομικών προϊόντων διότι η πιθανότητα με την οποία κινείται η διαδικασία π.χ. από το 100 στο 101 είναι ίδια με την πιθανότητα που κινείται από το 10 στο 11 και επιπλέον μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές.

Μία στοχαστική διαδικασία  $S$  καλείται *Γεωμετρική Κίνηση Brown* (GBM) εάν η  $\log S$  είναι μία κίνηση Brown. Με άλλα λόγια, μία Γεωμετρική Κίνηση Brown είναι μία εκθετική κίνηση Brown. Ο Αμερικανός οικονομολόγος Paul Samuelson πρώτος χρησιμοποίησε τη GBM το 1960, για να εκφράσει την κίνηση των τιμών χρηματοοικονομικών προϊόντων: η πιθανότητα πλέον με την οποία κινείται η διαδικασία από το 10 στο 11 είναι ίδια με την πιθανότητα που κινείται από το 100 στο 110 (ανεξάρτητες ποσοστιαίες προσαυξήσεις) και δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές.

#### 3.3.1. Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown μίας διάστασης

Όλες οι μέθοδοι προσομοίωσης κίνησης Brown που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ισχύουν μέσω εκθετοποίησης και για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$  και την αρχική τιμή  $S(0)$ .
- ii. Παράγουμε τυχαία μεταβλητή  $Z$  από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε  $S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left(\mu \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z\right)$ ,
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

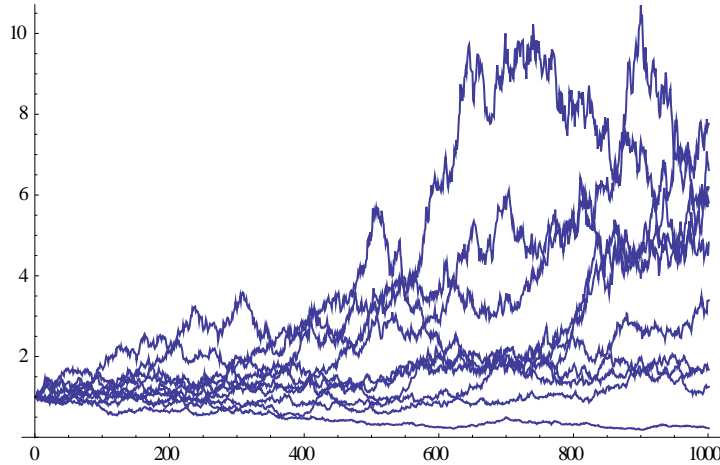
```
n = 1000; S = Table[1, {n + 1}]; μ = 1; σ = 1; k = 10; T = 1;
plots = Table[0, {k}];
Do[
```

```

Do[S[[i + 1]] = S[[i]] Exp[μ*T/n + σ*Sqrt[T/n]
  *RandomReal[NormalDistribution[]]]
, {i, 1, n}];
plots[[j]] = ListLinePlot[S]
, {j, 1, k}];
Show[plots, PlotRange -> All]

```

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου για  $\mu = 0,3$  και  $\sigma = 1$ :



Γράφημα 3.5. Προσομοίωση τυπικής Γεωμετρικής Κίνησης Brown

### 3.3.2. Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown πολλών διαστάσεων

Μία πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown μπορεί να προσδιοριστεί μέσω ενός συστήματος στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (εφεξής ΣΔΕ) της μορφής:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dX_i(t), \quad i = 1, \dots, d$$

όπου κάθε  $X_i$  είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και  $X_i(t)$  και  $X_j(t)$  έχουν συσχέτιση  $\rho_{ij}$ . Αν ορίσουμε τον  $d \times d$  πίνακα  $\Sigma$  για τον οποίο ισχύει  $\Sigma_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}$ , τότε η  $(\sigma_1 X_1, \dots, \sigma_d X_d) \sim BM(0, \Sigma)$ . Επομένως η διαδικασία  $S = (S_1, \dots, S_d)$  αποτελεί μία  $GBM(\mu, \Sigma)$  όπου  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ . Είδαμε στην παραγοντοποίηση Cholesky ότι μία  $BM(0, \Sigma)$  μπορεί να αναπαραχθεί σαν το γινόμενο  $A \cdot W(t)$ , όπου  $W$  τυπική κίνηση Brown  $BM(0, I)$  και  $A$  πίνακας για τον οποίο ισχύει  $AA^T = \Sigma$ . Αυτό μπορούμε να το εφαρμόσουμε και εδώ:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + a_i dW(t), \quad i = 1, \dots, d$$

όπου  $a_i$  η  $i$ -οστή σειρά του πίνακα  $A$  που αναλυτικότερα γράφεται ως εξής:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^d A_{ij} dW_j(t), \quad i = 1, \dots, d$$

το οποίο μας οδηγεί στον αλγόριθμο προσομοίωσης  $GBM(\mu, \Sigma)$  στα χρονικά σημεία  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ :

$$S_i(t_{k+1}) = S_i(t_k) e^{\mu(t_{k+1}-t_k) + \sqrt{t_{k+1}-t_k} \sum_{j=1}^d A_{ij} Z_{k+1,j}}, \quad i = 1, \dots, d \text{ και } k = 1, \dots, n-1$$

όπου  $Z_k = (Z_{k1}, \dots, Z_{kd}) \sim N(0, \mathbf{I})$  και  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  ανεξάρτητα. Και πάλι εάν ο  $A$  είναι ο πίνακας *Cholseky* του  $\Sigma$  θα μειώσει τις πράξεις που απαιτούνται σε κάθε βήμα.

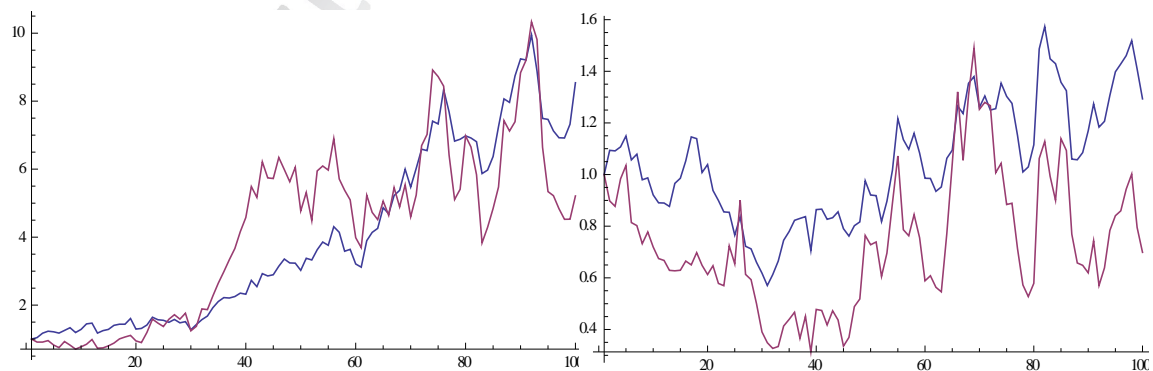
Περιγραφή αλγορίθμου:

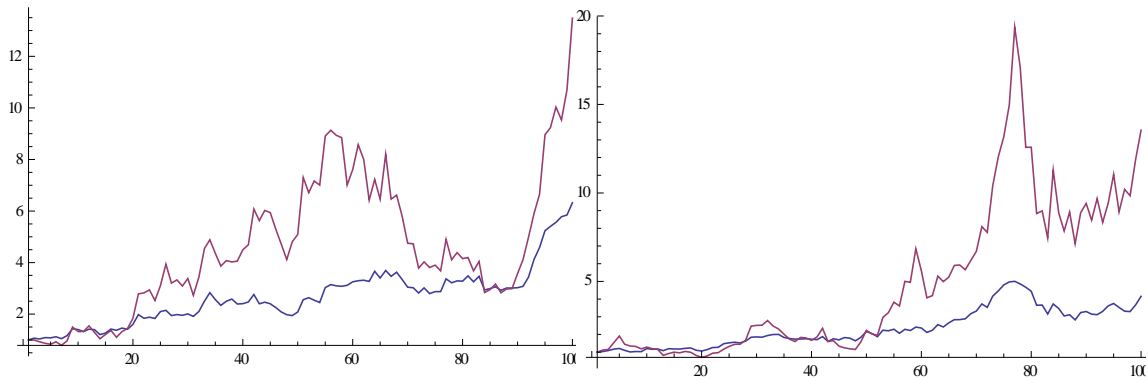
- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$  και την αρχική τιμή  $S(0)$ .
- ii. Κατασκευάζουμε τον κάτω τριγωνικό πίνακα  $A$  για τον οποίο ισχύει  $AA^T = \Sigma$ .
- iii. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα  $\mathbf{Z}$  που αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από την  $N(0,1)$ .
- iv. Θέτουμε  $S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left(\boldsymbol{\mu}^T \frac{T}{n} + A \sqrt{\frac{T}{n}} \mathbf{Z}\right)$ ,
- v. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

```
T = 3; n = 100; k = 4; P = {};
μ = {0.5, 1}; d = 2; Σ = {{0.25, 0.4}, {0.4, 1}};
A = Table[0, {d}, {d}]; S1 = Table[0, {n}]; S2 = Table[0, {n}];
Do[v = Table[0, {d}]; Do[v[[i]] = Σ[[i, j]];
  Do[v[[i]] = v[[i]] - A[[j, k]]*A[[i, k]], {k, 1, j}];
  A[[i, j]] = v[[i]]/Sqrt[v[[j]]], {i, j, d}], {j, 1, d}];
Do[S = Table[{1, 1}, {n}];
  Do[S[[i]] =
    S[[i - 1]]*
    Exp[μ*T/n +
      Sqrt[T/n]*
      A.{RandomReal[NormalDistribution[]],
        RandomReal[NormalDistribution[]]}];, {i, 2, n}];
  Do[S1[[j]] = S[[j]][[1]], {j, 1, n}];
  Do[S2[[j]] = S[[j]][[2]], {j, 1, n}];
  Print[ListLinePlot[{S1, S2}, PlotRange -> All], {1, 1, k}];
```

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου διδιάστατης γεωμετρικής κίνησης Brown για  $\boldsymbol{\mu} = \{0.5, 1\}$  και  $\Sigma = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.05 \end{bmatrix}$ :





Γράφημα 3.6 Προσομοίωση διδιάστατης γεωμετρικής κίνησης Brown

Παρατηρούμε ότι, λόγω της υψηλής τους συσχέτισης, οι διαδρομές τείνουν να «ακολουθούν» η μία την άλλη.

### 3.4. Αποτίμηση Παραγώγων

Η αποτίμηση των παραγώγων στηρίζεται στις εξής 3 βασικές αρχές:

1. Εάν ένα παράγωγο προϊόν μπορεί να αναπαραχθεί επακριβώς (replicated ή hedged) μέσω της αγοραπωλησίας άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων, τότε η αξία του παραγώγου ισούται με το κόστος αυτής της στρατηγικής.
2. Η παρούσα αξία χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι διαδικασίες martingale υπό κάποιο μέτρο πιθανότητας που ορίζει τον τρόπο προεξόφλησης της αξίας τους.
3. Σε μία πλήρη αγορά, οποιοδήποτε κέρδος από παράγωγα μπορεί να αναπαραχθεί μέσω μιας επενδυτικής στρατηγικής και η διαδικασία martingale που συνδέεται με κάποιο μέτρο πιθανότητας είναι μοναδική. Σε μία μη-πλήρη αγορά, υπάρχουν παράγωγα που δεν μπορούν να αναπαραχθούν επακριβώς και οι τιμές αυτών των παραγώγων δεν μπορούν να καθοριστούν από τις τιμές άλλων αγαθών.

Η πρώτη αρχή στηρίζεται στο γεγονός ότι οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν για ένα παράγωγο όσο τους στοιχίζει η εναλλακτική στρατηγική μέσω ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης. Η δεύτερη αρχή είναι ο κύριος σύνδεσμος μεταξύ αποτίμησης παραγώγων και Monte Carlo προσομοίωσης – οι τιμές αποτελούν προσδοκίες υπό κάποιο μέτρο πιθανότητας ανάλογο του ρίσκου. Η τρίτη αρχή εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η αξία ενός παραγώγου μέσω της αξίας άλλων αγαθών, ώστε να μπορούν χρησιμοποιηθούν οι δύο προηγούμενες αρχές. Τα άλματα στις τιμές των αγαθών μπορεί συχνά να καθιστούν ένα μοντέλο ημιτελές, διότι μπορεί να είναι αδύνατη η προσομοίωση της ασυνεχούς κίνησης των τιμών. Σε μία πλήρη αγορά, ένα παράγωγο δεν μπορεί να αποτελέσει από μόνο του διεύρυνση των επενδυτικών ευκαιριών ενός συναλασσόμενου. Αντίθετα, σε μία μη-πλήρη αγορά, οι τιμές μπορούν να θεωρηθούν σαν γενικότερες προσδοκίες της αγοράς, αλλά η εκτίμηση του κινδύνου που φέρουν δεν είναι μοναδική και στηρίζεται σε υποκειμενικές αξίες όπως τη συμπεριφορά των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο.

### Βασικές Ιδιότητες

Ας υποθέσουμε ότι η  $W(t)$  είναι μία τυπική κίνηση Brown και η  $X(t)$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (3.2)$$

έτσι ώστε η  $X \sim BM(\mu, \sigma^2)$ . Εάν θέσουμε  $S(t) = S(0) \exp(X(t)) \equiv f(X(t))$ , τότε η εφαρμογή του λήμματος του Itô<sup>6</sup> μας δίνει:

$$\begin{aligned} dS(t) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X(t))dt \\ &= S(0) \exp(X(t)) [\mu dt + \sigma dW(t)] + \frac{1}{2}\sigma^2 S(0) \exp(X(t))dt \\ &= S(t) \left( \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + S(t) \sigma dW(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Σε αντίθεση, μία διαδικασία που αποτελεί γεωμετρική κίνηση Brown συχνά περιγράφεται από τη ΣΔΕ:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (3.4)$$

που εκφράζει το μοντέλο Brown με στιγμιαίες αποδόσεις  $\frac{dS(t)}{S(t)}$ . Μία σύγκριση των δύο εξισώσεων υποδεικνύει κατ'αρχήν μία ασυνέπεια ως προς το  $\mu$ . Στην (3.3) το  $\mu$  είναι η τάση της  $BM$  που εκθετοποιήσαμε για να ορίσουμε το  $S(t)$  - η τάση του  $\log S(t)$ . Στην (3.4) το  $S(t)$  έχει τάση  $\mu \cdot S(t)$  και υποδεικνύει ότι:

$$d \log(S(t)) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \quad (3.5)$$

Θα χρησιμοποιούμε την έκφραση  $S \sim GBM(\mu, \sigma^2)$  για να υποδείξουμε ότι η  $S$  είναι η διαδικασία που περιγράφεται στη σχέση (3.4) και θα αναφερόμαστε στο  $\mu$  ως παράμετρο τάσης παρόλο που δεν εκφράζει την τάση ούτε του  $S(t)$  ούτε του  $\log(S(t))$ . Θα αναφερόμαστε στο  $\sigma$  στην (3.4) σαν την παράμετρο μεταβλητότητας του  $S(t)$ . Από την (3.5) συνεπάγεται ότι αν  $S \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ , τότε:

$$S(t) = S(0) \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right)$$

και γενικά για  $u < t$ :

$$S(t) = S(u) \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - u) + \sigma (W(t) - W(u)) \right) \quad (3.6)$$

Επίσης, δεδομένου ότι οι προσαυξήσεις του  $W$  είναι ανεξάρτητες και κανονικές, για προσομοίωση σε διακριτά χρονικά σημεία έχουμε:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right) \quad (3.7)$$

όπου  $Z_i$  ανεξάρτητες και κανονικές τ.μ.

---

<sup>6</sup> Itô (1944)

### Λογαριθμοκανονική Κατανομή

Από την (3.6) συμπεραίνουμε ότι για την  $S \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ , η  $S(t)$  ακολουθεί την εκθετική κανονική κατανομή (ή ο λογάριθμός της  $S(t)$  ακολουθεί κανονική κατανομή), δηλαδή τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Η σ.π.π. της λογαριθμοκανονικής κατανομής και η σ.κ. δίνονται από τους τύπους:

$$P(Y \leq y) = \Phi\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right) \text{ και } \frac{1}{y\sigma} \Phi\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right) \text{ αντίστοιχα.}$$

Με μέση τιμή:  $E(Y) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ , διακύμανση:  $Var(Y) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ , διάμεσο:  $P(Y \leq e^\mu) = 1/2$ .

Εφαρμόζοντας τα ανωτέρω στην εξίσωση (3.6) λαμβάνουμε:

$$\frac{S(t)}{S(0)} \sim LN\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right), \quad E[S(t)] = e^{\mu t} S(0), \quad Var[S(t)] = e^{2\mu t} S^2(0)(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

και τελικά για την  $S(t), t \geq 0$ , που (αν πολλαπλασιαστεί με  $e^{-\mu t}$ ) είναι μία διαδικασία martingale ισχύει ότι:

$$E[S(t)|S(\tau), 0 \leq \tau \leq u] = E[S(t)|S(u)] = e^{\mu(t-u)} S(u), \quad u < t \quad (3.8)$$

και ανάλογα για τη δεσμευμένη διακύμανση. Η τελευταία εξίσωση μας θυμίζει συνεχή ανατοκισμό του  $S(u)$ , όπου το  $\mu$  αντικαθιστά το επιτόκιο στην  $e^{rt}$ . Για μια τυπική κίνηση Brown  $W$  ισχύει ότι  $\frac{1}{t}W(t) \rightarrow 0$ , με πιθανότητα 1. Για μια  $S \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ , ισχύει ότι  $\frac{1}{t} \log S(t) \rightarrow \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  με πιθανότητα 1, οπότε το  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  εμφανίζεται σαν το επιτόκιο. Σε ένα μοντέλο όπου ισχύει  $\mu > 0 > \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ , τότε με τη βοήθεια της (3.8) βρίσκουμε ότι η  $E[S(t)]$  αυξάνεται εκθετικά ενώ το  $S(t)$  συγκλίνει προς το 0. Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται στην ασύμμετρη κατανομή του  $S(t)$ : αν και το  $S(t) \rightarrow 0$ , σπάνιες αλλά πολύ μεγάλες τιμές του  $S(t)$  είναι αρκετά πιθανό να παράγουν αυξανόμενο μέσο.

### Μέτρο ουδέτερου ρίσκου (Risk Neutral Measure)

Σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου, όλες οι επενδύσεις θα είχαν την ίδια μέση απόδοση και οι επενδυτές δεν θα απαιτούσαν μία υψηλότερη απόδοση για τη λήψη επενδυτικών θέσεων που φέρουν υψηλότερο ρίσκο.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σταθερό επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού  $r$  το οποίο είναι διαθέσιμο για δανεισμό μηδενικού κινδύνου. Η απόδοση μίας χρηματικής μονάδας που έχει επενδυθεί στο επιτόκιο αυτό ισούται (στο χρόνο  $t$ ) με  $\beta(t) = e^{rt}$  και, αντίστοιχα, μία επένδυση που στο χρόνο  $t$  αποδίδει 1 χρηματική μονάδα έχει παρούσα αξία (στο χρόνο 0)  $e^{-rt}$ . Υπό τη θεωρία αποτίμησης μηδενικού κινδύνου (risk neutral pricing), μπορούμε να ανάγουμε την αξία μίας επένδυσης από τον χρόνο  $t$  στον χρόνο 0 απλά διαιρώντας με  $\beta(t)$ .

Σε ένα κόσμο ουδέτερου ρίσκου, το  $r$  ισούται με το συντελεστή τάσης  $\mu$  της γεωμετρικής κίνησης Brown που υποθέτουμε ότι ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου αγαθού. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας στο χρόνο 0, ένα παράγωγο ληκτότητας  $T$  επί ενός υποκείμενου αγαθού που ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown και προσφέρει



απόδοση «ουδέτερου ρίσκου» (συμβολίζεται με το δείκτη  $\beta$ ). Για να μην υπάρχει δυνατότητα για arbitrage στην αγορά, θα πρέπει η παρούσα αξία του παραγώγου αυτού, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου, να είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από τη χρήση του:

$$C_{\beta}(0, T) = E_{\beta} \left[ e^{-rT} h(S) \mid \ln S \sim BM\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right) \right]$$

Για ένα αγαθό  $S$  (που δεν αποδίδει μέρισμα και η αξία του ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown), η παρούσα αξία του  $S(t)/\beta(t)$  είναι μία διαδικασία martingale και ισχύει:

$$S(t) = S(0)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \text{ όπου } Z \sim N(0,1).$$

και

$$\frac{S(u)}{\beta(u)} = E \left[ \frac{S(t)}{\beta(t)} \mid \{S(\tau), 0 \leq \tau < u\} \right].$$

### **Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης (τύπος Black & Scholes)**

Οι Black & Scholes απέδειξαν ότι, ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (επί υποκείμενου αγαθού με τιμή στο χρόνο 0 ίση με  $S(0)$ , τιμή εξάσκησης  $K$ , μεταβλητότητα  $\sigma$ , επιτόκιο μηδενικού κινδύνου  $r$  και χρόνο  $t$  μέχρι τη λήξη του) θα έχει παρούσα (no-arbitrage) τιμή, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου, ίση με:

$$C(S(0), K, t, \sigma, r) = S(0)\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) \quad (3.9)$$

όπου

$$\omega = \frac{rt + \frac{\sigma^2}{2}t - \ln(K/S(0))}{\sigma\sqrt{t}}$$

και  $\Phi$  η σ.κ. της τυπικής κανονικής.

Στην περίπτωση που το υποκείμενο αγαθό διανέμει μέρισμα, τότε η διαδικασία martingale συνεχίζει να υφίσταται με τη διαφορά ότι τώρα το  $S$  αντικαθίσταται από το άθροισμα του  $S$ , των μερισμάτων και των τυχόν τόκων από την επένδυσή τους με απόδοση μηδενικού κινδύνου. Θέτοντας

$D(t)$  = αξία μερισμάτων που καταβάλλονται στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  και των τόκων αυτών και

$\delta$  = επιτόκιο συνεχούς μερίσματος του υποκείμενου αγαθού,

τότε ο ρυθμός αύξησης του  $D$  είναι:

$\frac{dD(t)}{dt} = \delta S(t) + r D(t)$  = μέρισμα στο χρόνο  $t$  + τόκοι επί συσσωρευμένων μερισμάτων και πλέον ο συντελεστής τάσης της GBM γίνεται  $\mu = r - \delta$ .

---

<sup>7</sup> Black & Scholes (1973)

### 3.5. Μέθοδοι Προσομοίωσης

#### 3.5.1. Προσομοίωση με Χρονικά Μεταβαλλόμενο Επιτόκιο

##### Ενσωμάτωση χρονοδιαγράμματος επιτοκίων

Μέχρι τώρα, υποθέσαμε ότι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου  $r$  είναι σταθερό. Δηλαδή, ένα ομόλογο που στο χρόνο  $T$  αποπληρώνει 1 χρηματική μονάδα, στο χρόνο  $t < T$  η αξία του είναι:

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)} \quad (3.10)$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι στο χρόνο 0 έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο από ομόλογα (μηδενικού ρίσκου) κατηγοριοποιημένα σύμφωνα με τη ληκτότητά τους, η οποία δεν συμπίπτει με την (3.10). Για να αποτιμήσουμε ένα ορτίον επί ενός υποκείμενου αγαθού  $S$  και με συνέπεια ως προς το σύνολο των ομόλογων που έχουμε στη διάθεσή μας, μπορούμε να καθορίσουμε ένα προσδιοριστικό αλλά χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου  $r(u)$  θέτοντας:

$$r(u) = \frac{\partial}{\partial T} \log B(0, T) \Big|_{T=u} \quad \text{και άρα} \quad B(0, T) = \exp\left(-\int_0^T r(u) du\right).$$

Με ένα προσδιοριστικό αλλά χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο  $r(u)$ , η τιμή ενός αγαθού, υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου, είναι:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\int_0^t r(u) du - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right)$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να προσομοιωθεί σε διακριτά χρονικά σημεία ως εξής:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u) du - \frac{1}{2}\sigma^2(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}\right)$$

όπου  $Z_{i+1}$  ανεξάρτητες τ.μ. από την τυπική κανονική κατανομή.

Περιγραφή αλγορίθμου:

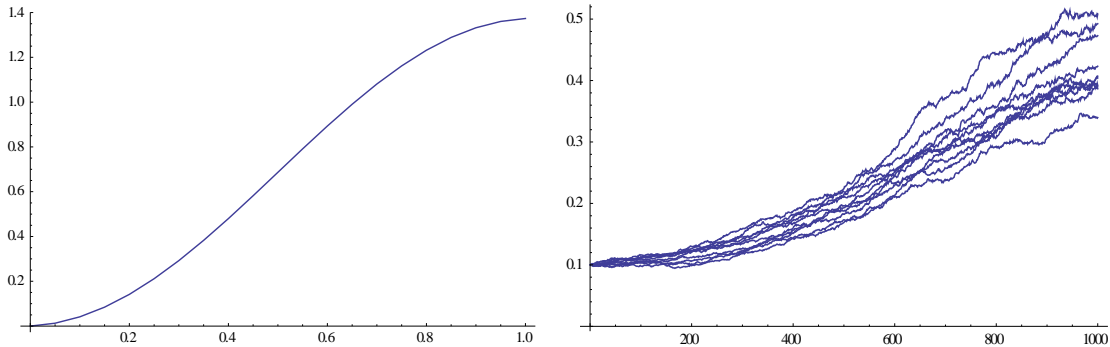
- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$ , την αρχική τιμή  $S(0)$ , τη μεταβλητότητα  $\sigma$ , το  $r(t)$ .
- ii. Παράγουμε τυχαία μεταβλητή  $Z$  από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε  $S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u) du - \frac{1}{2}\sigma^2(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z\right)$ ,
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

```
n = 1000; S = Table[0.1, {n}]; σ = 0.15; T = 1; k = 10;
plots = Table[0, {k}];
Do[
  Do[S[[i+1]] = S[[i]] * Exp[NIntegrate[2*Sin[Pi*r] + 0.1,
    {r, i*T/n, (i+1)*T/n}] -
    0.5*σ^2*T/n + σ*Sqrt[T/n]*RandomReal[NormalDistribution[]]]
  , {i, 1, n - 1}];
plots[[j]] = ListLinePlot[S]
```

```
, {j, 1, k}];
Show[plots, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου (δεξιά) για  $r(t) = \int_0^t 2 \sin(\pi u) du + 0.1$  (αριστερά) και  $\sigma = 0.15$ :



Γράφημα 3.7 Προσομοίωση GBM με χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Παρατηρούμε πώς επηρεάζονται οι πραγματοποιήσεις της παραπάνω στοχαστικής διαδικασίας σε σχέση με τη συνάρτηση  $r(t)$ .

Εάν έχουμε στη διάθεσή μας τιμές ομολόγων,  $B(0, t_1), \dots, B(0, t_n)$ , τότε εφόσον ισχύει:

$$\frac{B(0, t_i)}{B(0, t_{i+1})} = \exp\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u) du\right)$$

μπορούμε να προσομοιώσουμε τα  $S(t)$  ως εξής:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \frac{B(0, t_i)}{B(0, t_{i+1})} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}\right).$$

### 3.5.2. Προσομοίωση με Προσδιοριστική Μεταβλητότητα

Αν και η Γεωμετρική Κίνηση Brown αποτελεί ορόσημο όσον αφορά την προσομοίωση, έχει παρατηρηθεί ότι κάποιες τιμές παραγώγων δεν είναι συμβατές με αυτό, γεγονός που έχει πυροδοτήσει αρκετή έρευνα για μια εναλλακτική μοντελοποίηση της κίνησης των τιμών των αγαθών.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν αρκετά δικαιώματα προαίρεσης που αφορούν στο ίδιο υποκείμενο αγαθό, αλλά με διαφορετικές ληκτότητες και τιμές εξάσκησης και ότι η αγορά είναι αρκετά αποτελεσματική υπό την έννοια ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε τις τιμές των παραγώγων χωρίς σφάλμα. Εάν ίσχυαν οι υποθέσεις του μοντέλου των Black & Scholes, τότε όλες οι τιμές των ανωτέρω παραγώγων θα είχαν υπολογιστεί με τον ίδιο συντελεστή μεταβλητότητας  $\sigma$ . Αντίθετα, στην πραγματικότητα η τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility) ποικίλλει ανάλογα με την τιμή εξάσκησης  $K$  και τη ληκτότητα  $T$ .

Στην προσπάθεια αναζήτησης ενός τροποποιημένου μοντέλου Black & Scholes που θα ανταποκρίνεται στις συνθήκες της αγοράς, ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να πάρουμε τιμές

από δικαιώματα αγοράς (calls)  $C(K, T)$  επί του ίδιου υποκείμενου αγαθού για συνεχείς τιμές των  $K$  και  $T$ . Είναι δυνατό<sup>8</sup> να φτιάξουμε μία συνάρτηση  $\sigma(S, t)$  τέτοια ώστε το μοντέλο:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + \sigma(S(t), t) dW(t)$$

να παράγει τη ζητούμενη τιμή παραγώγου για κάθε  $K$  και  $T$ , η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν η παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από τη χρήση του  $C(K, T) = e^{-rt} E_{\beta}[(S(T) - K)_+]$ . Αυτή η συνάρτηση καλείται και προσδιοριστικής μεταβλητότητας διότι επιτρέπει την αντιστάθμιση του παραγώγου μέσω κατάλληλων θέσεων στο υποκείμενο αγαθό, η οποία δεν θα ήταν εφικτή εάν η μεταβλητότητα ήταν μια στοχαστική διαδικασία. Στην πράξη έχουμε πεπερασμένες τιμές παραγώγων οι οποίες μας δίνουν κάποια ευελξία στον προσδιορισμό της  $\sigma(S, t)$ . Μπορούμε για παράδειγμα να συμπεριλάβουμε περιορισμούς εξομάλυνσης στην επιλογή της συνάρτησης μεταβλητότητας. Όταν η συνάρτηση  $\sigma(S, t)$  επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να προσαρμόζεται στις τιμές πραγματικών παραγώγων που συναλλάσσονται στην αγορά, θα είναι δυνατός και ο υπολογισμός των τιμών παραγώγων μικρότερης ρευστότητας. Γενικά, δεν υπάρχει ακριβής διαδικασία προσομοίωσης αυτών των μοντέλων και είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μία διαδικασία Euler της μορφής:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \left( 1 + r(t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right) \quad \text{ή}$$

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left[ \left[ r - \frac{1}{2} \sigma^2(S(t_i), t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right]$$

όπου  $Z_{i+1}$  ανεξάρτητη τ.μ. από την τυπική κανονική κατανομή.

Για το παράδειγμα που ακολουθεί, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση μεταβλητότητας δίνεται από τη σχέση  $\sigma(S, t) = S(t)/10 \cdot \exp(T - t)$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων  $n$ , την αρχική τιμή  $S(0)$ , τη μεταβλητότητα  $\sigma(S, t) = S(t)/10 \cdot \exp(T - t)$ , το  $r$ .
- ii. Παράγουμε τυχαία μεταβλητή  $Z$  από την τυπική κανονική κατανομή.
- iii. Θέτουμε
 
$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left[ \left[ r - \frac{1}{2} \sigma^2(S(t_i), t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right],$$
- iv. Θέτουμε  $i = i + 1$  και εάν  $i \leq n$ , επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής:

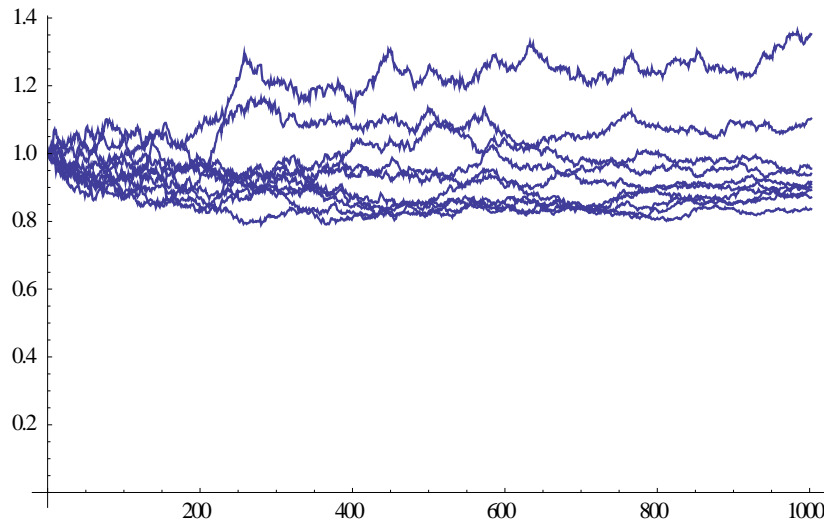
```
T=1;n=1000;r=0.05;S=Table[1,{n+2}];sigma[t_]:=S[[t/T*n+1]]/10*Exp[T-t];
k=10;plots=Table[0,{k}];
Do[
  Do[S[[t/T*n+2]]=S[[t/T*n+1]]*Exp[(r-
0.5*(sigma[t])^2)*T/n+sigma[t]*
```

<sup>8</sup> Dupire B. (1994)

```

      Sqrt[T/n]*RandomReal[NormalDistribution[]]
    , {t, 0, T, T/n}];
  plots[[j]] = ListLinePlot[S, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}
    , {j, 1, k}];
  Show[plots]

```



Γράφημα 3.8 Προσομοίωση GBM με προσδιοριστική μεταβλητότητα

## 3.6. Γκαουσιανά Μοντέλα Βραχυπρόθεσμων Επιτοκίων

### 3.6.1. Βασικά Μοντέλα και Προσομοίωση

Η αξία ενός ομολόγου στο χρόνο 0 (το οποίο στο χρόνο  $T$  αποδίδει 1 χρηματική μονάδα), υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου, δίνεται από τον τύπο:

$$B(0, T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T r(u) du \right) \right] \quad (3.11)$$

Το κλασικό μοντέλο του Vasicek<sup>9</sup> (1977) περιγράφει το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μέσω μιας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck<sup>10</sup> που έχει τη μορφή:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

όπου  $W$  μία μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown,  $a, b, \sigma$  θετικές σταθερές.

Στην ανωτέρω εξίσωση, η τάση είναι θετική αν  $r(t) < b$  και αρνητική αν  $r(t) > b$ . Το  $r(t)$  κατευθύνεται προς το  $b$ , γεγονός που καλείται και επιστροφή στο μέσο. Γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το  $b$  σαν μακροπρόθεσμο επιτόκιο και το  $a$  σαν την ταχύτητα με την οποία το  $r(t)$  κατευθύνεται στο  $b$ . Εφόσον  $r(0) > 0$ , το  $r(t)$  συνήθως δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές.

<sup>9</sup> Vasicek O.A. (1977)

<sup>10</sup> Karatzas και Shreve (1991)

Το μοντέλο συνεχούς χρόνου των *Ho-Lee*<sup>11</sup> ορίζει:

$$dr(t) = g(t)dt + \sigma dW(t)$$

όπου  $g$  μία προσδιοριστική συνάρτηση του χρόνου. Και τα δύο αυτά μοντέλα αποτελούν Γκαουσιανές διαδικασίες<sup>12</sup>. Επιπλέον και τα δύο αποτελούν διαδικασίες Μαρκον<sup>13</sup> και αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης Γκαουσιανής - Μαρκοβιανής διαδικασίας:

$$dr(t) = [g(t) + h(t) \cdot r(t)]dt + \sigma(t) \cdot dW(t),$$

όπου  $g, h$  και  $\sigma$  προσδιοριστικές συναρτήσεις με βάση το χρόνο. Αποδεικνύεται ότι αυτή η ΣΔΕ, με την εφαρμογή του λήμματος του Ιτό, λύνεται ως εξής:

$$r(t) = e^{H(t)}r(0) + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}g(s) ds + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}\sigma(s)dW(s),$$

όπου  $H(t) \equiv \int_0^t h(s)ds$ .

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στο μοντέλο Vasicek και στο μοντέλο *Ho - Lee*.

### Προσομοίωση

Για το μοντέλο *Vasicek* με χρονικά μεταβαλλόμενο  $b$ <sup>14</sup>, ο παραπάνω γενικός τύπος γίνεται:

$$r(t) = e^{-at}r(0) + a \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s) \quad (3.12)$$

και για οποιοδήποτε  $0 < u < t$ ,

$$r(t) = e^{-a(t-u)}r(u) + a \int_u^t e^{-a(t-s)} b(s) ds + \sigma \int_u^t e^{-a(t-s)} dW(s).$$

Δεδομένου του  $r(u)$ , το  $r(t)$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο:

$$e^{-a(t-u)}r(u) + \mu(u, t), \quad \text{όπου} \quad \mu(u, t) \equiv a \int_u^t e^{-a(t-s)} b(s) ds$$

και διακύμανση:

$$\sigma_r^2(u, t) = \sigma^2 \int_u^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-u)}).$$

Για να προσομοιώσουμε το  $r$  στους χρόνους  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , θέτουμε:

$$r(t_{i+1}) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}r(t_i) + \mu(t_i, t_{i+1}) + \sigma_r(t_i, t_{i+1})Z_{i+1} \quad (3.13)$$

όπου  $Z_1, \dots, Z_n$  ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την  $N(0,1)$ .

<sup>11</sup> Ho-Lee (1986)

<sup>12</sup> Οι Γκαουσιανές διαδικασίες αποτελούν στοχαστικές διαδικασίες των οποίων κάθε τ.μ.  $r(t_i)$  ακολουθεί κανονική κατανομή και η από κοινού κατανομή κάθε ομάδας τ.μ.  $r(t_1), \dots, r(t_n)$  ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή για οποιαδήποτε  $t_1, \dots, t_n$ .

<sup>13</sup> Οι διαδικασίες Μαρκον αποτελούν στοχαστικές διαδικασίες των οποίων η πρόβλεψη στηρίζεται αποκλειστικά στην τρέχουσα τιμή και το παρελθόν δεν προσθέτει επιπλέον γνώση.

<sup>14</sup> Hull and White (1990)

Στην περίπτωση που το  $b(t) \equiv b$ , ο αλγόριθμος απλοποιείται ως εξής:

$$r(t_{i+1}) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}r(t_i) + b(1 - e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)})}Z_{i+1}$$

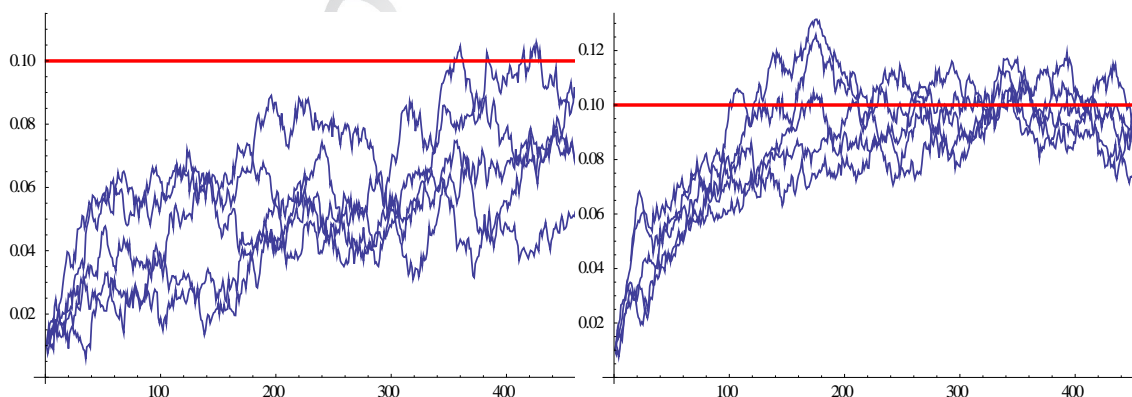
Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε το μακροπρόθεσμο επιτόκιο  $b$ , την ταχύτητα με την οποία θα συγκλίνει  $\alpha$  και τη μεταβλητότητα  $\sigma$ , τον αριθμό των τιμών  $n$  και το επιτόκιο στο χρόνο 0.
- ii. Παράγουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$
- iii. Θέτουμε  $r(i+1) = e^{-\alpha(1/n)}r(i) + b(1 - e^{-\alpha(1/n)}) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2\alpha(1/n)})} \cdot Z$ ,  $i = i + 1$  και εάν  $i < n$  επιστρέφουμε στο ii.

και η υλοποίησή του μέσω του Mathematica για  $a = 3$ ,  $b = 0.05$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $n = 1000$  και  $r(0) = 0.01$  είναι:

```
n = 500; b = 0.1; a = 5; σ = 0.05; k = 5; plots = Table[0, {k}];
Do[r = Table[0.01, {n}];
  Do[r[[i + 1]] =
    Exp[-a/n]*r[[i]] + b*(1 - Exp[-a/n]) +
    σ*Sqrt[0.5/a*(1 - Exp[-
2*a/n]])*RandomReal[NormalDistribution[]], {i,
  1, n - 1}];
  plots[[j]] = ListLinePlot[r];
  , {j, 1, k}];
Show[{plots, ListLinePlot[Table[b, {n}], PlotStyle -> {Red, Thick}]},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου για  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$  και  $a = 2$  (αριστερά),  $a = 7$  (δεξιά):



Γράφημα 3.9 Προσομοίωση μοντέλου Vasicek για διαφορετικές τιμές του  $a$ .

ενώ για χρονικά μεταβαλλόμενο  $b$ , ισχύει ότι

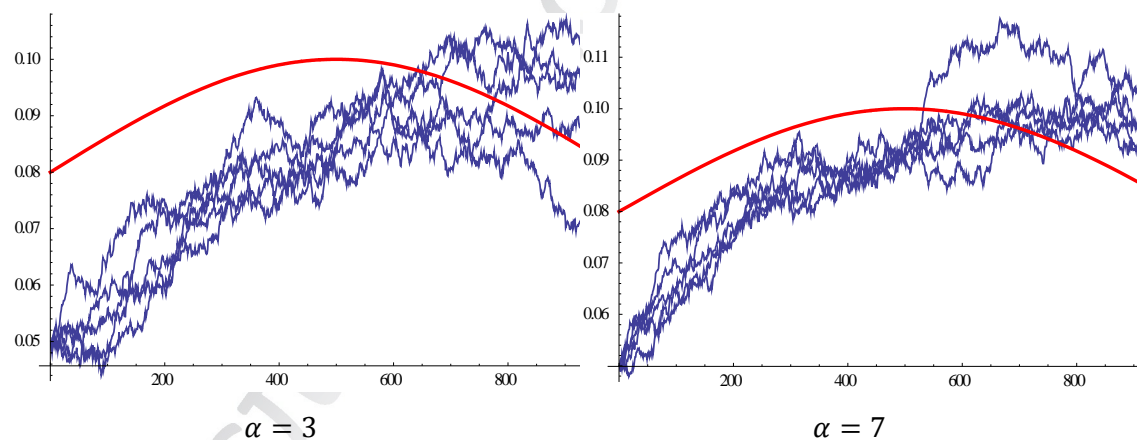
$$r(i+1) = e^{-\alpha(1/n)}r(i) + a \int_u^t e^{-a(t-s)} b(s) ds + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2a(1/n)})} \cdot Z$$

για υλοποίηση μέσω Mathematica είναι  $(\alpha = 5, b(t) = 1/50 * \text{Sin}[\text{Pi} * t] + 0.08, \sigma = 0.001, r(0) = 0.05$ :

```
n = 1000; B[x_] := 1/50*Sin[Pi*x] + 0.08; σ = 0.01; a = 5;
σr = σ*Sqrt[0.5/a*(1-Exp[-2*a/n])];
r = Table[0.05, {n}];
μr = Table[0, {n}];

n = 1000; B[x_] := 1/50*Sin[Pi*x] + 0.08; σ = 0.01; a = 5;
P = Plot[B[x/n], {x, 0, n}, PlotStyle -> {Red, Thick}];
σr = σ*Sqrt[0.5/a*(1 - Exp[-2*a/n])];
μr = Table[0, {n}];
k = 5; L = Table[0, {k}];
Do[μr[[i]] =
  a*NIntegrate[Exp[-a (i/n - x)]*B[x], {x, (i - 1)/n, i/n}], {i, 2,
  n}];
Do[r = Table[0.05, {n}];
  Do[Z1 = RandomReal[NormalDistribution[]];
    r[[i]] = Exp[-a/n]*r[[i - 1]] + μr[[i]] + σr*Z1;, {i, 2, n}];
  L[[j]] = ListLinePlot[r];
  , {j, 1, k}];
Show[L, P, PlotRange -> All]
```

Διαγραμματική απεικόνιση πραγματοποιήσεων του αλγορίθμου οι οποίες διαφέρουν μόνο στην τιμή του  $a$ :



Γράφημα 3.10 Προσομοίωση μοντέλου Vasiceck για διαφορετικές τιμές του  $a$  και χρονικά μεταβαλλόμενο  $b$ .

### 3.6.2. Τιμές Ομολόγων

Οι χρονικά μεταβαλλόμενες παράμετροι τάσης χρησιμοποιούνται για να εναρμονίσουν ένα μοντέλο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με τις παρατηρούμενες τιμές ομολόγων. Η εφαρμογή του αλγορίθμου στην (3.13) συνοδεύεται με το «καλιμπράρισμα» του μοντέλου μέσω της επιλογής της κατάλληλης συνάρτησης  $b(t)$ .

Ξεκινάμε από τον τύπο της αξίας του ομολόγου (3.11) όπου το ολοκλήρωμα του  $r(u)$  από 0 έως  $T$  κατανέμεται κανονικά αφού το  $r(u)$  είναι Γκαουσιανή διαδικασία. Συνεπώς, η αξία του ομολόγου είναι η αναμενόμενη τιμή της εκθετοποίησης μιας κανονικής τ.μ.. Για μια



κανονική τ.μ.  $X \sim N(m, v^2)$ , υπό το αρχικό μέτρο, έχουμε  $E[\exp(X)] = \exp(m + (v^2/2))$ , οπότε

$$E \left[ \exp \left( - \int_0^T r(t) dt \right) \right] = \exp \left( -E \left[ \int_0^T r(t) dt \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left[ \int_0^T r(t) dt \right] \right) \quad (3.14)$$

Επομένως για να βρούμε την αξία του ομολόγου πρέπει να βρούμε το μέσο και τη διακύμανση του ολοκληρώματος του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.

Στο μοντέλο των Ho-Lee το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δίνεται από τον τύπο:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t g(s) ds + \sigma W(t)$$

και το ολοκλήρωμά του από τον τύπο:

$$\int_0^T r(u) du = r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du + \sigma \int_0^T W(u) du.$$

το οποίο έχει μέσο:

$$r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du$$

και διακύμανση:

$$\text{Var} \left[ \sigma \int_0^T W(u) du \right] = 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^t \text{Cov}[W(u), W(t)] du dt = 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^t u du dt = \frac{1}{3} \sigma^2 T^3.$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (3.14) έχουμε:

$$B(0, T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T r(u) du \right) \right] = \exp \left( -r(0)T - \int_0^T \int_0^u g(s) ds du + \frac{\sigma^2 T^3}{6} \right).$$

Εάν στο χρόνο 0 έχουμε στη διάθεσή μας τιμές ομολόγων  $B(0, T)$ , θα πρέπει να επιλέξουμε τη συνάρτηση  $g$  με τέτοιο τρόπο ώστε η ανωτέρω ισότητα να ισχύει. Εάν γράψουμε γενικά:

$$B(0, T) = \exp \left( - \int_0^T f(0, t) dt \right),$$

εξισώσουμε τις δύο σχέσεις και λογαριθμήσουμε λαμβάνουμε:

$$\int_0^T f(0, t) dt = r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du - \frac{\sigma^2 T^3}{6}.$$

Με διπλή παραγωγή ως προς το χρόνο λήξης  $T$ , καταλήγουμε ότι:

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \Big|_{T=t} + \sigma^2 t \quad (3.15)$$

Επομένως, οι τιμές των ομολόγων που προέρχονται από το μοντέλο των Ho-Lee θα ταιριάζουν με τις δοθείσες τιμές ομολόγων εάν η συνάρτηση  $g$  ταιριάζει στην αρχική προθεσμιακή καμπύλη  $f(0, T)$ . Αν ορίσουμε:

$$dr(t) = \left( \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \Big|_{T=t} + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW(t), \quad (3.16)$$

ο γενικός τύπος της προσομοίωσης του μοντέλου Ho-Lee με συνάρτηση τάσης  $g$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s) ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

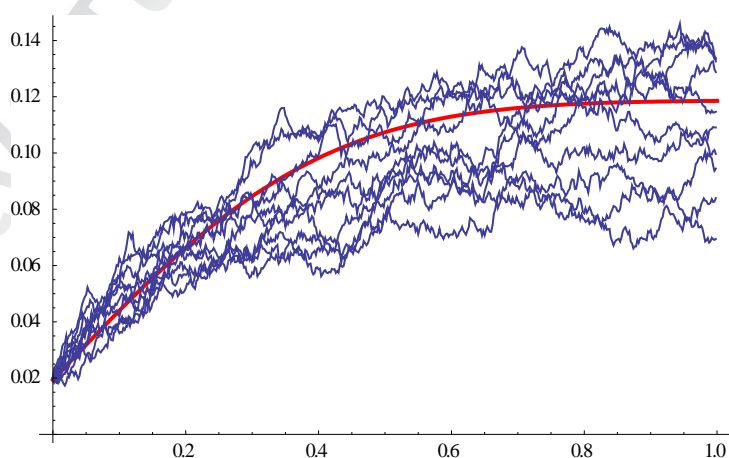
Όπου  $Z_{i+1}$ , ανεξάρτητες τ.μ. από την τυπική κανονική. Και εάν επιλέξουμε την  $g$  σύμφωνα με την (3.15), ο τύπος της προσομοίωσης γίνεται:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [t_{i+1}^2 - t_i^2] + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

χωρίς να χρειάζεται η ολοκλήρωση της συνάρτησης της τάσης  $g$ . Εναλλακτικά, η όποια απαραίτητη ολοκλήρωση έχει ενσωματωθεί με την επιλογή της προθεσμιακής καμπύλης  $f(0, t)$  η οποία ταιριάζει με τις παρατηρούμενες τιμές ομολόγων.

Για το παράδειγμα που ακολουθεί, υποθέσαμε ότι η προθεσμιακή καμπύλη  $f$  που ταιριάζει με τις παρατηρούμενες τιμές ομολόγων είναι η συνάρτηση  $f(x) = -0.08 + \frac{1}{10} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-5t^2} dt$  και η υλοποίηση του αλγορίθμου μέσω του Mathematica είναι:

```
f[x_]:= -0.08+0.1*Sqrt[2*Pi]*
  NIntegrate[Exp[-(10*t^2/2)], {t, -Infinity, x}];
k = 10; n = 500; σ = 0.03; T = 1;
P1 = Plot[f[x], {x, 0, T}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotStyle -> {Red, Thick}];
P2 = Table[0, {k}];
Do[r = Table[{0, 0.02}, {n}];
  Do[r[[i]] = r[[i - 1]] + {1/n, f[i/n] - f[(i - 1)/n] + 0.5*σ^2*
    ((i/n)^2 - ((i-1)/n)^2)^2+σ*Sqrt[i/n-(i - 1)/n]*
    RandomReal[NormalDistribution[]]}];
  , {i, 2, n}];
  P2[[j]] = ListLinePlot[r];
  , {j, 1, k}];
Show[P1, P2, PlotRange -> All]
```



Γράφημα 3.11 Διαγραμματική απεικόνιση προθεσμιακής καμπύλης επιτοκίων και υλοποιήσεων του αλγορίθμου σύμφωνα με το μοντέλο των Ho-Lee.

Η προσομοίωση απλοποιείται περαιτέρω εάν θέλουμε να προσομοιώσουμε τιμές βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μόνο στις χρονικές στιγμές λήξης των ομολόγων. Με αυτά τα δεδομένα, η (3.15) γίνεται:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s) ds = f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i) + \frac{\sigma^2}{2} [t_{i+1}^2 - t_i^2].$$

### 3.7. Διαχύσεις Τετραγωνικής Ρίζας

Ο Feller μελέτησε τις διαδικασίες που περιλαμβάνουν διαχύσεις τετραγωνικής ρίζας:

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \quad (3.17)$$

όπου  $W$  μία μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown,  $a, b, \sigma$  θετικές σταθερές. Αν  $r(0) > 0$ , το  $r(t)$  δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές και εάν  $2ab \geq \sigma^2$ , είναι σχεδόν βέβαιο ότι το  $r(t)$  παραμένει αυστηρά θετικό για κάθε  $t$ .

Αυτή η διαδικασία προτάθηκε από τους Cox, Ingersoll και Ross (1985)<sup>15</sup> σαν ένα μοντέλο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, γνωστό και ως μοντέλο CIR. Όπως και στο μοντέλο Vasicek, η μορφή της τάσης στην (3.17) δείχνει την ταχύτητα  $a$  με την οποία το  $r(t)$  επιστρέφει στο  $b$ . Σε αντίθεση, όμως, με το μοντέλο Vasicek, στο CIR ο συντελεστής διάχυσης  $\sigma\sqrt{r(t)}$  εμποδίζει το  $r(t)$  να πάρει αρνητικές τιμές.

Όλοι οι συντελεστές της (3.17) θα μπορούσαν να είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι στην πράξη όμως, κάτι τέτοιο είναι πολύ χρήσιμο μόνο για τη σταθερά  $b$  και να θεωρήσουμε το μοντέλο:

$$dr(t) = a(b(t) - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \quad (3.18)$$

Αν και η (3.18) μπορεί να επεκταθεί στη μοντελοποίηση επιτοκίων, έχει και άλλες χρηματοοικονομικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, ο Heston (1993)<sup>16</sup> πρότεινε ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας στο οποίο η τιμή του υποκείμενου αγαθού δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{V(t)} dW_1(t)$$

$$dV(t) = a(b - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t),$$

όπου  $(W_1, W_2)$  μία 2-διάστατη κίνηση Brown. Στο μοντέλο αυτό το τετράγωνο της μεταβλητότητας ακολουθεί διάχυση τετραγωνικής ρίζας. Επιπλέον, η διαδικασία στην (3.18) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της (στοχαστικής) έντασης μιας διαδικασίας με άλματα.

Μία απλή Euler διακριτοποίηση για την προσομοίωση της (3.17) είναι η εξής:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a(b - r(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}$$

<sup>15</sup> Cox, Ingersoll, Ross (1985)

<sup>16</sup> Heston (1993)

όπου  $Z_{i+1}$  τ.μ.  $\sim N(0,1)$ .

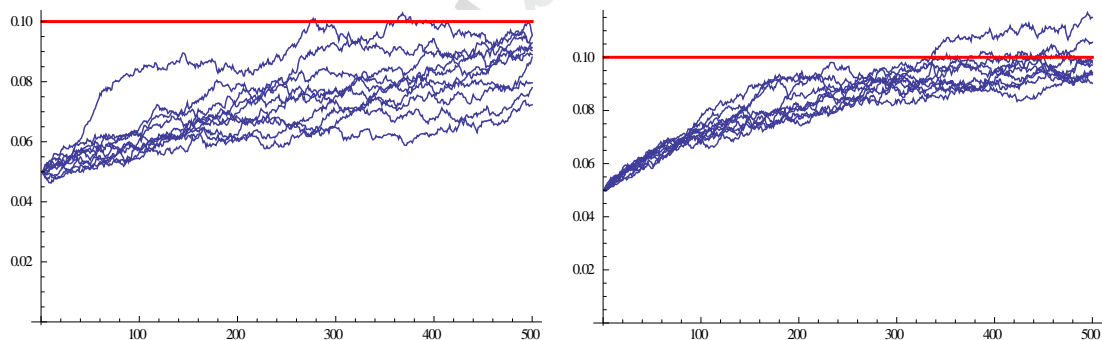
Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε το μακροπρόθεσμο επιτόκιο  $b$ , την ταχύτητα με την οποία θα συγκλίνει  $\alpha$  και τη μεταβλητότητα  $\sigma$ , το πλήθος των προσομοιωμένων τιμών  $n$ , το επιτόκιο στο χρόνο 0, και το χρόνο λήξης  $T$ .
- ii. Παράγουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$
- iii. Θέτουμε  $r(i+1) = r(i) + a(b - r(i))[T/n] + \sigma\sqrt{r(i)}\sqrt{T/n} \cdot Z$ ,  $i = i+1$  και εάν  $i < n$  επιστρέφουμε στο ii.

Και η υλοποίησή του μέσω του Mathematica για  $a = 0.3$ ,  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $n = 100$  και  $r(0) = 0.05$  είναι:

```
a = 3; b = 0.1; σ = 0.05; n = 500;
k = 10; plots = Table[0, {k}];
Do[r = Table[0.05, {n}];
  Do[r[[i + 1]] = r[[i]] + a*(b - r[[i]])*1/n +
    σ*Sqrt[Max[r[[i]], 0]]*Sqrt[1/n]*
    RandomReal[NormalDistribution[], {i, 1, n - 1}];
  plots[[j]] = ListLinePlot[r];
, {j, 1, k}];
Show[{plots, ListLinePlot[Table[b, {n}], PlotStyle -> {Red, Thick}]},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Η μόνη διαφορά στις παραπάνω υλοποιήσεις του αλγορίθμου είναι η σύγκλιση προς το  $b = 0,1$  ( $a = 0.3$  αριστερά και  $a = 3$  δεξιά).



Γράφημα 3.12 Διαγραμματική απεικόνιση προσομοίωσης διάχυσης τετραγωνικής ρίζας.

### 3.7.1. Πυκνότητα Μετάβασης

Βασιζόμενος στα αποτελέσματα του Feller<sup>17</sup>, ο Cox<sup>18</sup> σημείωσε ότι η κατανομή του  $r(t)$  δοθέντος κάποιου  $r(u)$  με  $u < t$ , είναι μία μη-κεντρική  $\chi^2$  κατανομή. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσομοιωθεί η διαδικασία της (3.17). Η παρακάτω προσέγγιση είναι από τον Scott<sup>19</sup>:

<sup>17</sup> Feller (1951)

<sup>18</sup> Cox, Ingersoll, Ross (1985)

<sup>19</sup> Scott (1996)

Μία μη-κεντρική  $\chi^2$  τ.μ. (συμβ.  $\chi_v'^2(\lambda)$ ) με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη-κεντρικότητας  $\lambda$ , έχει κατανομή:

$$P(\chi_v'^2(\lambda) \leq y) = F_{\chi_v'^2(\lambda)}(y) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j / j!}{2^{(\nu/2)+j} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + j\right)} \int_0^y z^{(\nu/2)+j-1} e^{-z/2} dz \quad (3.19)$$

για  $y > 0$ . Ο κανόνας μετάβασης στην (3.17) γράφεται ως εξής:

$$r(t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})}{4a} \chi_d'^2 \left( \underbrace{\frac{4ae^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u)}_{\lambda} \right), \quad t > u \quad (3.20)$$

όπου  $d = \frac{4ba}{\sigma^2}$ .

Αυτό σημαίνει ότι, δοθέντος του  $r(u)$ , το  $r(t)$  κατανέμεται σαν μια μη-κεντρική  $\chi^2$  τ.μ. με  $d$  βαθμούς ελευθερίας πολλαπλασιασμένη επί  $\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})/4a$  και παράμετρο μη-κεντρικότητας

$$\lambda = \left( \frac{4ae^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u) \right).$$

Ισοδύναμα:

$$P(r(t) \leq y | r(u)) = F_{\chi_d'^2(\lambda)} \left( \frac{4ay}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} \right)$$

Έτσι, εφόσον μπορούμε να παράξουμε τ.μ. από την μη - κεντρική  $\chi^2$  κατανομή, μπορούμε να προσομοιώσουμε και την (3.17) σε διακριτά χρονικά σημεία. Όπως και στο μοντέλο Vasicek, η διάχυση τετραγωνικής ρίζας (3.17) έχει μια στάσιμη κατανομή. Αν το  $t \rightarrow \infty$  στην (3.20), τότε το  $r(t)$  συγκλίνει στην κατανομή μιας μη - κεντρικής  $\chi^2$  τ.μ. με  $d$  βαθμούς ελευθερίας πολλαπλασιασμένη επί  $\sigma^2/4a$  και παράμετρο μη-κεντρικότητας ίση με 0, που την κάνει μια  $\chi^2$  τ.μ.. Αυτή η κατανομή είναι στάσιμη, υπό την έννοια ότι αν το  $r(0)$  παραχθεί από αυτή την κατανομή, το  $r(t)$  έχει ίδια κατανομή για κάθε  $t$ .

### $\chi^2$ κατανομή / μη - κεντρική $\chi^2$ κατανομή

Αν το  $\nu$  είναι ένας θετικός ακέραιος και  $Z_1, \dots, Z_\nu$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. από την τυπική κανονική, τότε η κατανομή του αθροίσματος

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_\nu^2$$

καλείται  $\chi^2$  κατανομή με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας ( $\chi_\nu^2$ ) και δίνεται από τον τύπο:

$$P(\chi_\nu^2 \leq y) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \int_0^y e^{-z/2} z^{(\nu/2)-1} dz,$$

όπου  $\Gamma(\cdot)$  η συνάρτηση Γάμμα και  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , αν το  $n$  είναι θετικός ακέραιος. Αυτή η εξίσωση ορίζει μια συνάρτηση πιθανότητας για κάθε  $v > 0$  και επεκτείνει τον ορισμό της  $\chi_v^2$  και για μη ακέραια  $v$ .

Για ακέραια  $v$  και σταθερά  $a_1, \dots, a_v$  η κατανομή του

$$\sum_{i=1}^v (Z_i + a_i)^2 \quad (3.21)$$

είναι μία μη – κεντρική  $\chi^2$  κατανομή με  $v$  βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη – κεντρικότητας  $\lambda = \sum_{i=1}^v a_i^2$ . Αυτό εξηγεί τον όρο «μη-κεντρική» (συμβολίζεται  $\chi_v'^2(\lambda)$ ). Η κατανομή στην (3.19) επεκτείνεται και σε μη ακέραια  $v^{20}$ . Από την (3.21) και αν το  $v$  είναι ακέραιο, προκύπτει ότι:

$$\chi_v'^2(\lambda) = \chi_1'^2(\lambda) + \chi_{v-1}^2$$

που σημαίνει ότι οι δύο πλευρές έχουν την ίδια κατανομή όταν οι τ.μ. στη δεξιά πλευρά είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για την παραγωγή της  $\chi_v'^2(\lambda)$ ,  $v > 1$ , αρκεί να παράξουμε τη  $\chi_{v-1}^2$  και μια ανεξάρτητη τυπική κανονική τ.μ.  $Z$  και να θέσουμε:

$$\chi_v'^2(\lambda) = (Z + \sqrt{\lambda})^2 + \chi_{v-1}^2,$$

απλοποιώντας έτσι το πρόβλημα προσομοίωσης μιας μη – κεντρικής  $\chi^2$  τ.μ. στην προσομοίωση μιας  $\chi^2$  τ.μ. και μιας ανεξάρτητης τυπικής κανονικής τ.μ., όταν  $v > 1$ .

Στην περίπτωση που  $d - 1 \leq 0$  και επομένως δεν μπορούμε να λάβουμε τ.μ. από την  $\chi_{d-1}^2$ , ακολουθούμε την παρακάτω τεχνική: θεωρούμε τη  $N$  μία τ.μ. που ακολουθεί Poisson με μέσο  $\lambda/2$ , τότε:

$$P(N = j) = e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\lambda/2)^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε επίσης μία τ.μ.  $\chi_{v+2N}^2$  όπου  $N$  η τ.μ. με την παραπάνω κατανομή Poisson. Δοθέντος ότι  $N = j$ , η τ.μ. έχει  $\chi^2$  κατανομή με  $v + 2j$  βαθμούς ελευθερίας:

$$P(\chi_{v+2N}^2 \leq y | N = j) = \frac{1}{2^{(v/2)+j} \Gamma((v/2) + j)} \int_0^y e^{-z/2} z^{v/2+j-1} dz$$

και η αδέσμευτη κατανομή θα δίνεται από:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(N = j) P(\chi_{v+2N}^2 \leq y | N = j) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\frac{\lambda}{2})^j}{j!} P(\chi_{v+2j}^2 \leq y)$$

η οποία είναι ίση με την μη κεντρική  $\chi^2$  κατανομή της σχέσης (3.19). Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε μία μη – κεντρική  $\chi^2$  τ.μ., προσομοιώντας μία τ.μ.  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  και δοθείσης αυτής, να παράγουμε μία  $\chi^2$  τ.μ. με  $v + 2N$  βαθμούς ελευθερίας.

Από την υλοποίηση των παρακάτω αλγορίθμων μέσω του Mathematica επαληθεύουμε ότι οι τυχαίοι αριθμοί προέρχονται από μη-κεντρική  $\chi^2$  κατανομή:

<sup>20</sup> Επεκτείνεται και για μη ακέραιο  $v > 1$  (Johnson, (1995))

```

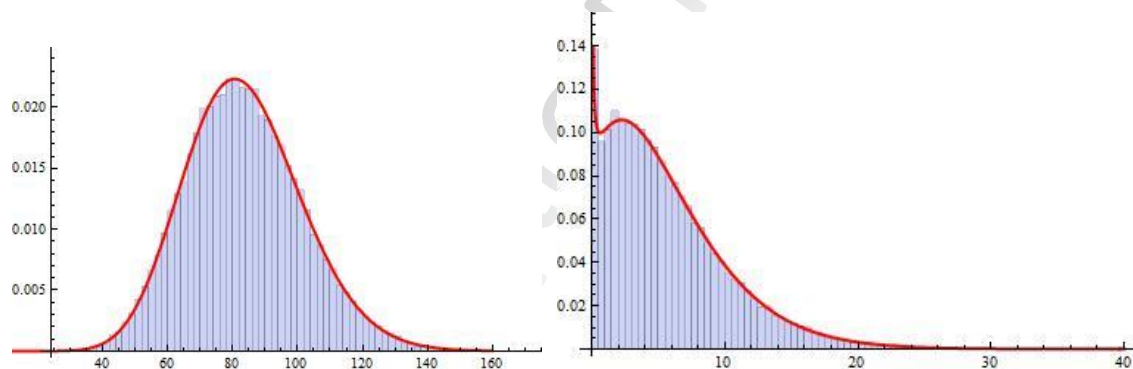
a = 0.03; b = 0.1; σ = 0.05; r = 0.05; n = 1;
cc = σ^2*(1 - Exp[-a/n])/4/a; d = 4*a*b/σ^2;
k = 50000; K = Table[0, {k}]; λ = Exp[-a/n]/cc*r;
Do[K[[i]] = (RandomReal[NormalDistribution[]] + Sqrt[λ])^2 +
    RandomReal[ChiSquareDistribution[d - 1]]];
    , {i, 1, k}];
H = Histogram[K, Automatic, "ProbabilityDensity"];
P = Plot[PDF[NoncentralChiSquareDistribution[d, λ], x],
    {x, 0, 160}, PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> All];
Show[H, P]

```

```

a = 0.25; b = 0.2; σ = 0.453; r = 0.05; n = 5;
cc = σ^2*(1 - Exp[-a/n])/4/a; d = 4*a*b/σ^2;
λ = Exp[-a/n]/cc*r; k = 50000; K = Table[0, {k}];
Do[K[[j]] =
    RandomReal[ChiSquareDistribution[d+2*Random[
    PoissonDistribution[λ/2]]]]];
    , {j, 1, k}];
H = Histogram[K, Automatic, "ProbabilityDensity"];
P = Plot[PDF[NoncentralChiSquareDistribution[d, λ], x],
    {x, 0, 40}, PlotStyle -> {Red, Thick}];
Show[H, P]

```



Γράφημα 3.13 Σύγκριση ιστογράμματος τυχαίων αριθμών που προέρχονται από τη  $\chi^2$  κατανομή και την αντίστοιχη σ.π.π.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, εφαρμόζουμε τις δύο μεθόδους για την προσομοίωση διάχυσης τετραγωνικής ρίζας της (3.17):

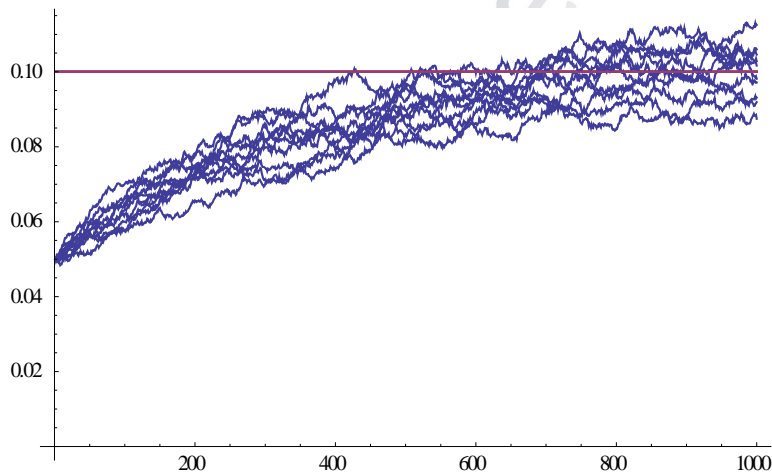
Περιγραφή αλγορίθμου ( $d = 4ab/\sigma^2 > 1$ ):

- i. Ορίζουμε το μακροπρόθεσμο επιτόκιο  $b$ , την ταχύτητα με την οποία θα συγκλίνει  $\alpha$  και τη μεταβλητότητα  $\sigma$ , το πλήθος των προσομοιωμένων τιμών  $n$  και το επιτόκιο στους χρόνους  $0, 1/n, 2/n, \dots, 1, i = 1$ .
- ii. Θέτουμε  $c = \sigma^2 (1 - e^{-\alpha/n}) / (4a)$ ,
- iii. Θέτουμε  $\lambda = r(i/n) \cdot e^{-\alpha/n} / c$
- iv. Παράγουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$  και  $X \sim \chi_{d-1}^2$

v. Θέτουμε  $r((i + 1)/n) = c \left[ (Z + \sqrt{\lambda})^2 + X \right]$ ,  $i = i + 1$  και εάν  $i < n$  επιστρέφουμε στο iii.

και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής ( $\alpha = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $n = 1000$ ,  $d = 480$ ):

```
a = 3; b = 0.1; σ = 0.05; n = 1000; r = Table[0.05, {n + 1}]; T = 1;
cc = σ^2*(1 - Exp[-a*T/n])/4/a; d = 4*a*b/σ^2; k = 10; plots =
Table[0, {k}];
Do[
  Do[λ = Exp[-a*T/n]/cc*r[[i]];
    Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    X2 = RandomReal[ChiSquareDistribution[d - 1]];
    r[[i + 1]] = cc*((Z + Sqrt[λ])^2 + X2), {i, 1, n}];
  plots[[j]] = ListLinePlot[r];, {j, 1, k}];
Show[plots, ListLinePlot[Table[b, {n + 1}], PlotStyle -> Red],
  AxesOrigin -> {1, 0}, PlotRange -> All]
```



Γράφημα 3.14 Διαγραμματική απεικόνιση προσομοίωσης διάχυσης τετραγωνικής ρίζας με Πυκνότητα Μετάβασης ( $d > 1$ ).

Περιγραφή αλγορίθμου ( $d = 4ab/\sigma^2 \leq 1$ ):

- i. Ορίζουμε το μακροπρόθεσμο επιτόκιο  $b$ , την ταχύτητα  $a$  με την οποία θα συγκλίνει και τη μεταβλητότητα  $\sigma$ , το πλήθος των προσομοιωμένων τιμών  $n$  και το επιτόκιο  $r(0)$  στο χρόνο 0.
- ii. Θέτουμε  $c = \sigma^2 \left( 1 - e^{-\frac{a}{n}} \right) / (4a)$ ,
- iii. Θέτουμε  $\lambda = r(i/n) \cdot e^{-a/n} / c$
- iv. Παράγουμε τ.μ.  $N \sim \text{Poisson}(\lambda/2)$  και  $X \sim \chi_{d+2N}^2$
- v. Θέτουμε  $r((i + 1)/n) = cX$ ,  $i = i + 1$  και εάν  $i < n$  επιστρέφουμε στο iii.

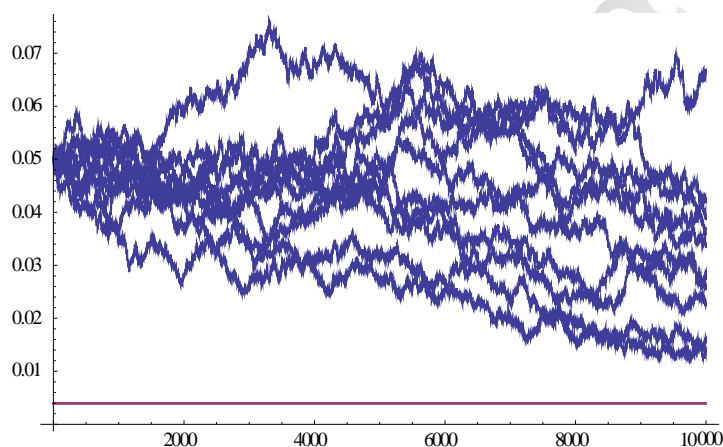


και η υλοποίησή του μέσω Mathematica είναι η εξής ( $\alpha = 0,5$ ,  $b = 0.004$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $n = 10000$ ,  $d = 0.8$ ):

```

a = 0.5; b = 0.004;  $\sigma$  = 0.1; n = 10000; r = Table[0.05, {n}];
cc =  $\sigma^2(1 - \text{Exp}[-a/n])/4/a$ ; d = 4*a*b/ $\sigma^2$ ; Print["d = ", d];
k = 10; plots = Table[0, {k}];
Do[
  Do[ $\lambda$  = Exp[-a/n]/cc*r[[i]];
    Ni = Random[PoissonDistribution[ $\lambda/2$ ]];
    X = RandomReal[ChiSquareDistribution[d + 2*Ni]];
    r[[i + 1]] = cc*X, {i, 1, n - 1}];
  plots[[j]] =
    ListLinePlot[{r, Table[b, {n}]}, AxesOrigin -> {0, 0}], {j, 1,
k}];
Show[plots]

```



Γράφημα 3.15 Διαγραμματική απεικόνιση προσομοίωσης διάχυσης τετραγωνικής ρίζας με Πυκνότητα Μετάβασης ( $d \leq 1$ ).

### 3.8. Διαδικασίες με Άλματα

Αν και η πλειονότητα των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στην αποτίμηση παραγώγων βασίζονται σε στοχαστικές ανελίξεις με συνεχείς διαδρομές, οι έρευνες δείχνουν πόσο σημαντική είναι η ύπαρξη αλμάτων στις τιμές των υποκείμενων αγαθών. Εν συγκρίσει με την κανονική κατανομή, ο λογάριθμος της τιμής μιας διαδικασίας με άλματα ακολουθεί συχνά μία λεπτόκυρτη κατανομή, που σημαίνει ότι έχει «υψηλή κορυφή και παχιές ουρές». Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε απλά σχετικά μοντέλα με άλματα και θα ασχοληθούμε με στοιχεία που επηρεάζουν την εφαρμογή της Monte Carlo προσομοίωσης.

#### 3.8.1. Μοντέλο Διάχυσης με Άλματα

Ο Merton<sup>21</sup> εισήγαγε και ανέλυσε ένα από τα πρώτα μοντέλα με άλματα και όρους διάχυσης για την αποτίμηση παραγώγων το οποίο και χρησιμοποίησε σε δικαιώματα

<sup>21</sup> Merton (1976)

προαίρεσης επί μετοχών, ερμηνεύοντας τα άλματα σαν «shocks» που επηρέαζαν την εταιρία και όχι την αγορά σαν σύνολο. Παρόμοια μοντέλα εφαρμόζονται σε δείκτες, συναλλαγματικές ισοτιμίες, τιμές αγαθών και επιτόκια.

Το μοντέλο διάχυσης με άλμα του Merton ορίζεται από τη ΣΔΕ:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dJ(t) \quad (3.22)$$

όπου  $\mu$  και  $\sigma$  σταθερές,  $W$  μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown,  $S(t-)$  το αριστερό όριο της διαδικασίας  $S$  στο χρόνο  $t$  δηλ.  $S(t-) = \lim_{u \rightarrow t^-} S(u)$  και  $J$  μία τμηματικά σταθερή στοχαστική διαδικασία, ανεξάρτητη της  $W$ , που ορίζεται ως εξής:

$$J(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1), \quad (3.23)$$

όπου  $Y_1, Y_2, \dots$  είναι τ.μ. και  $N(t)$  μία διαδικασία απαρίθμησης. Αυτό σημαίνει ότι οι στιγμές «αφίξεων» των αλμάτων  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  είναι τυχαίες και  $N(t) = \sup\{n: \tau_n \leq t\}$  ο αριθμός των «αφίξεων» στο  $[0, t]$ . Το  $dJ(t)$  συμβολίζει το άλμα  $J$  στο χρόνο  $t$ . Εάν το  $t$  συμπίπτει με κάποιο από τα  $\tau_j$  (δηλ. εάν στο χρόνο  $t$  υπάρχει άλμα), το μέγεθος του άλματος ισούται με  $Y_j - 1$ , διαφορετικά (εάν στο χρόνο  $t$  δεν υπάρχει άλμα) ισούται με 0. Η χρήση του συμβόλου  $S(t)$  ενέχει κίνδυνο σύγχυσης διότι, εάν υπάρχει άλμα στο χρόνο  $t$ , πρέπει να ξεκαθαρίσουμε εάν εννοούμε την τιμή με ή χωρίς το άλμα. Εφεξής, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $S(t-) = \lim_{u \rightarrow t^-} S(u)$  για την τιμή του  $S$  χωρίς το άλμα και  $S(t) = \lim_{u \rightarrow t^+} S(u)$  για την τιμή του  $S$  με το άλμα.

Επομένως το μέγεθος του άλματος μπορεί να οριστεί και ως εξής:

$$S(t) - S(t-) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \neq \tau_j \text{ διαφορετικά} \\ S(\tau_j) - S(\tau_j-) = S(\tau_j-) [J(\tau_j) - J(\tau_j-)] = S(\tau_j-) (Y_j - 1) \end{cases}$$

και επομένως  $S(\tau_j) = S(\tau_j-) \cdot Y_j$  άρα τα άλματα είναι πολλαπλασιαστικά και γι' αυτό στην (3.23) γράψαμε  $Y_j - 1$  και όχι απλά  $Y_j$ .

Περιορίζοντας τα  $Y_j$  να παίρνουν μόνο θετικές τ.μ., το  $S(t)$  δεν πρόκειται να λάβει ποτέ αρνητικές τιμές και με λογαρίθμηση έχουμε:

$$\log S(\tau_j) = \log S(\tau_j-) + \log Y_j$$

δηλαδή τα άλματα είναι προσθετικά στο λογάριθμο της τιμής. Τα προσθετικά άλματα επομένως αποτελούν μία φυσική εξέλιξη της κίνησης Brown και τα πολλαπλασιαστικά άλματα αποτελούν μία φυσική εξέλιξη της γεωμετρικής κίνησης Brown. Η (3.22) λύνεται ως εξής:

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \cdot \prod_{j=1}^{N(t)} Y_j \quad (3.24)$$

η οποία τη γενικεύει την αντίστοιχη λύση για GBM.

Σύμφωνα με το απλό μοντέλο του Merton<sup>22</sup> το  $N(t)$  είναι μία διαδικασία Poisson έντασης  $\lambda$ , άρα τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των αλμάτων  $\tau_{j+1} - \tau_j$  είναι ανεξάρτητα με κοινή εκθετική κατανομή:

$$P(\tau_{j+1} - \tau_j \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι τα  $Y_j$  είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα (*i.i.d.*) και ανεξάρτητα από τη διαδικασία απαρίθμησης  $N$  και την κίνηση Brown  $W$ . Υπό αυτούς τους όρους, η  $J$  καλείται μία διαδικασία σύνθετης Poisson (*compound Poisson*).

Το μοντέλο γίνεται ιδιαίτερα προσιτό όταν τα  $Y_j$  ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή, διότι το γινόμενο λογαριθμοκανονικών τ.μ. ακολουθεί και αυτό λογαριθμοκανονική κατανομή. Εάν  $\log Y_j \sim N(a, b^2) \Leftrightarrow Y_j \sim LN(a, b^2)$ , ενώ για συγκεκριμένο  $n$  ισχύει ότι:

$$\prod_{j=1}^n Y_j \sim LN(an, b^2 n).$$

Άρα δοθέντος ότι  $N(t) = n$ , το  $S(t)$  έχει κατανομή

$$\begin{aligned} S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \cdot \prod_{j=1}^{N(t)} Y_j &\sim S(0) \cdot LN\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \cdot LN(an, b^2 n) \\ &= LN\left(\log S(0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + an, \sigma^2 t + b^2 n\right), \end{aligned}$$

εφόσον τα  $Y_j$  και  $W$  είναι ανεξάρτητα. Εάν συμβολίσουμε την ανωτέρω λογαριθμοκανονική κατανομή με  $F_{n,t}$  και λάβουμε υπόψη μας ότι το  $N(t)$  ακολουθεί Poisson με μέσο  $\lambda \cdot t$ , βρίσκουμε ότι η αδέσμευτη κατανομή του  $S(t)$  έχει σ.κ.:

$$P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_{n,t}(x),$$

και είναι μίξη Poisson από λογαριθμοκανονικές κατανομές. Ο Merton χρησιμοποίησε αυτή τη σχέση για να περιγράψει την τιμή ενός δικαιώματος σαν ένα άθροισμα απείρων όρων, καθένας από τους οποίους είναι το γινόμενο μιας πιθανότητας Poisson επί του τύπου των Black and Scholes.

Υπό το μέτρο ουδέτερου ρίσκου και την απουσία αλμάτων και εφόσον το υποκείμενο αγαθό δεν διανέμει μέρισμα, η τάση  $\mu$  στην (3.22) θα είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Υποθέτοντας επίσης, χάριν απλότητας, ότι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι σταθερό και ίσο με  $r$ , η τάση καθορίζεται από τη συνθήκη ότι το  $S(t)e^{-rt}$  είναι μία διαδικασία martingale. Τέλος, θεωρούμε ότι η αγορά δεν αποζημιώνει τους επενδυτές που αναλαμβάνουν τον κίνδυνο της επένδυσης σε αγαθά των οποίων οι τιμές παρουσιάζουν άλματα.

Μία τυπική ιδιότητα της διαδικασίας Poisson είναι ότι το  $N(t) - \lambda t$  είναι martingale. Μία γενίκευση αυτής της συνθήκης είναι ότι το:

<sup>22</sup> Merton (1976)

$$\sum_{i=1}^{N(t)} h(Y_i) - \lambda \cdot E[h(Y)] \cdot t$$

είναι martingale για i.i.d.  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  και για οποιαδήποτε συνάρτηση  $h$  για την οποία η αναμενόμενη τιμή του  $h(Y)$  υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Ακολούθως, η διαδικασία

$$J(t) - \lambda m t$$

είναι martingale εάν  $m = E[Y_j] - 1$ . Επομένως η παράμετρος τάσης στην (3.22) που κάνει την  $S(t)e^{-rt}$  martingale, είναι  $\mu = r - \lambda m$ . Ξαναγράφοντας την (3.22) γίνεται

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = (r - \lambda m)dt + \sigma dW(t) + dJ(t) = rdt + \sigma dW(t) + [dJ(t) - \lambda m dt]$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι όντως martingales και ο ρυθμός αύξησης του  $S(t)$  είναι  $r$ . Αν λάβουμε επίσης υπόψη μας ότι  $\log Y_j \sim N(a, b^2)$ , το μοντέλο αποτίμησης παραγώγων του Merton γίνεται:

$$\begin{aligned} e^{-rT} E[(S(T) - K)_+] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-rt} E[(S(T) - K)_+ | N(T) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda' t} \frac{(\lambda' t)^n}{n!} BS(S(0), \sigma_n, T, r_n, K) \end{aligned}$$

όπου  $\lambda' = \lambda(1 + m)$ ,  $BS$  = ο τύπος των Black & Scholes με παραμέτρους  $S(0)$ ,  $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + b^2 n/T}$ ,  $r_n = r - \lambda m + n \log(1 + m)/T$  και τιμή εξάσκησης  $K$ .

### Προσομοίωση σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία

Υπάρχουν δύο τρόποι προσομοίωσης ενός μοντέλου διάχυσης με άλματα. Ο πρώτος είναι η προσομοίωση σε διακριτά χρονικά σημεία  $0, t_1, t_2, \dots, t_n$  και ο δεύτερος είναι να προσομοιώσουμε ξεχωριστά τις στιγμές των αλμάτων  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ .

Οι υποθέσεις ότι το  $N$  είναι μία διαδικασία Poisson, τα  $Y_1, Y_2, \dots$  είναι i.i.d. και ότι τα  $N, W$  και  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, εξακολουθούν να ισχύουν.

Για να προσομοιώσουμε τα  $S(t)$  στους χρόνους  $t_1, t_2, \dots, t_n$  γενικεύουμε την (3.24):

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma[W(t_{i+1}) - W(t_i)]} \cdot \prod_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} Y_j,$$

με τον κανόνα ότι το γινόμενο των  $Y_j$  είναι ίσο με 1 εάν  $N(t_{i+1}) = N(t_i)$  (δηλ. εάν στο χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1}]$  δεν υπήρξε άλμα). Επίσης, μπορούμε να θέσουμε  $X(t) = \log S(t)$  οπότε γίνεται:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sum_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} \log Y_j$$

για να μετατρέψουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα.

Περιγραφή αλγορίθμου:

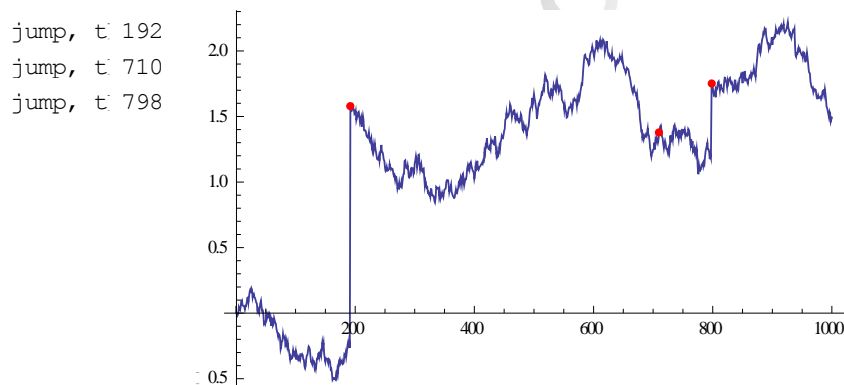
- i. Παράγουμε  $Z \sim N(0,1)$
- ii. Παράγουμε  $N \sim \text{Poi}(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ . Αν  $N = 0$  θέτουμε  $M = 0$  και πάμε στο iv.
- iii. Παράγουμε  $\log Y_1, \log Y_2, \dots, \log Y_N$  από την κοινή τους κατανομή και θέτουμε  $M = \log Y_1 + \log Y_2 + \dots + \log Y_N$
- iv. Θέτουμε  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z + M$

Απεικόνιση, μέσω του Mathematica, 1.000 βημάτων του αλγορίθμου με παραμέτρους για την κίνηση Brown  $\mu = 0.5, \sigma = 1$  και παραμέτρους για τα άλματα  $\lambda = 2, Y \sim LN(1, 1/2)$ :

```

λ = 1; n = 1000; μ = 0.5; σ = 1; X = Table[0, {n}];
a = (μ - 0.5*σ^2)/n; b = σ*Sqrt[1/n]; Jumps = {};
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
  Ni = Random[PoissonDistribution[λ/n]];
  If[Ni == 0, M = 0, Print["jump, t=", i]; logs = {};
  Do[Y = RandomReal[LogNormalDistribution[1, 0.5]];
  AppendTo[logs, Log[Y]], {Ni}];
  M = Total[logs];
  AppendTo[Jumps, {i, X[[i - 1]] + a + b*Z + M}];
  X[[i]] = X[[i - 1]] + a + b*Z + M; {i, 2, n}];
Show[ListLinePlot[X, PlotRange -> All],
  ListPlot[Jumps, PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}]]

```



Γράφημα 3.16 Διαγραμματική απεικόνιση προσομοίωσης, σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία, μοντέλου διάχυσης με άλματα

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται σε δύο υποθέσεις της Poisson: η προσαύξηση  $N(t_{i+1}) - N(t_i)$  ακολουθεί Poisson με μέσο  $\lambda \cdot (t_{i+1} - t_i)$  και είναι ανεξάρτητη των προσαυξήσεων στο  $[0, t_i]$ .

Απλοποιήσεις του αλγορίθμου:

Εάν υποθέσουμε ότι τα  $Y_j \sim LN(a, b^2)$  τότε τα  $\log Y_j \sim N(a, b^2)$  και  $\sum_{j=1}^n \log Y_j \sim N(an, b^2n) = an + b\sqrt{n}N(0,1)$ , οπότε το 3<sup>ο</sup> βήμα του αλγορίθμου γίνεται:

iii. Παράγουμε  $Z_2 \sim N(0,1)$  και θέτουμε  $M = \alpha N + b\sqrt{N}Z_2$

Εάν υποθέσουμε ότι τα  $\log Y_j \sim Ga(\alpha, \beta)$  (κατανομή γάμμα με παράμετρο μορφής  $\alpha$  και παράμετρο κλίμακας  $\beta$ ), τότε το  $\sum_{j=1}^n \log Y_j \sim Ga(\alpha n, \beta)$ , οπότε το 3<sup>ο</sup> βήμα του αλγόριθμου γίνεται:

iii. Παράγουμε  $M \sim \Gamma(\alpha N, \beta)$

Ο Steven Kou<sup>23</sup>, προτείνει ένα μοντέλο στο οποίο τα  $|\log Y_j|$  ακολουθούν εκθετική κατανομή και το  $\log Y_j$  έχει θετικό πρόσημο με πιθανότητα  $q$  και αρνητικό πρόσημο με πιθανότητα  $1 - q$ . Σε αυτήν την περίπτωση, δοθείσας της τ.μ.  $N = n$ , το πλήθος των θετικών  $\log Y_j$  ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $q$ . Το 3<sup>ο</sup> βήμα του αλγόριθμου γίνεται:

iiiα. Παράγουμε  $K \sim Binomial(N, q)$   
 iiiβ. Παράγουμε  $R_1 \sim Gamma(K\alpha, \beta)$  και  $R_2 \sim Gamma((N - K)\alpha, \beta)$  και θέτουμε  $M = R_1 - R_2$

### Προσομοίωση μεταξύ των χρονικών σημείων των αλμάτων

Στην προηγούμενη παράγραφο, το μοντέλο που αναπτύξαμε υπολογίζει τον αριθμό των αλμάτων σε κάθε χρονικό διάστημα  $(t_i, t_{i+1}]$  αλλά δεν εντοπίζει το ακριβές χρονικό σημείο που παρουσιάζεται άλμα. Μία εναλλακτική μέθοδος είναι η ξεχωριστή προσομοίωση των χρονικών σημείων των αλμάτων  $\tau_1, \tau_2, \dots$ .

Μεταξύ των αλμάτων, η  $S(t) = e^{X(t)}$  εξελίσσεται κανονικά σαν γεωμετρική κίνηση Brown αφού υποθέσαμε ότι τα  $j$  και  $W$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπάγεται ότι, δοθέντων των χρονικών σημείων των αλμάτων  $\tau_1, \tau_2, \dots$  ισχύει ότι:

$$S(\tau_{j+1} -) = S(\tau_j) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_{j+1} - \tau_j) + \sigma(W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j))} \quad \text{και}$$

$$S(\tau_{j+1}) = S(\tau_{j+1} -) Y_{j+1}$$

Με λογαρίθμηση και συνδυάζοντας τα βήματα παίρνουμε:

$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\tau_{j+1} - \tau_j) + \sigma(W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)) + \log Y_{j+1}.$$

Το επόμενο βήμα είναι να συνδυάσουμε τις δύο προσεγγίσεις για να προσομοιώσουμε την  $X(t)$ . Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε μία χρονική στιγμή  $t$  την οποία θα θέλαμε να συμπεριλάβουμε και η οποία βρίσκεται ενδιάμεσα σε προσομοιωμένες χρονικές στιγμές αλμάτων  $\tau_j < t < \tau_{j+1}$ . Τότε

$$X(t) = X(\tau_j) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - \tau_j) + \sigma(W(t) - W(\tau_j)) \quad \text{και}$$

<sup>23</sup> Kou (2002)

$$X(\tau_{j+1}) = X(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\tau_{j+1} - t) + \sigma(W(\tau_{j+1}) - W(t)) + \log Y_{j+1}.$$

Περιγραφή αλγορίθμου:

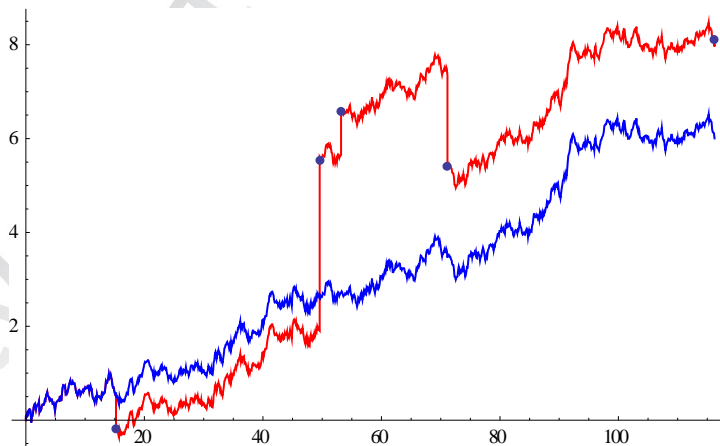
- i. Παράγουμε  $Z_{j+1} \sim N(0,1)$
- ii. Παράγουμε  $R_{j+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$
- iii. Παράγουμε  $\log Y_{j+1}$
- iv. Παράγουμε ενδιάμεσες τιμές  $X(t)$  για  $\tau_j < t < \tau_{j+1}$
- v. Θέτουμε  $\tau_{j+1} = \tau_j + R_{j+1}$  και
 
$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)R_{j+1} + \sigma\sqrt{R_{j+1}}Z_{j+1} + \log Y_{j+1}$$

και η υλοποίησή του, μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```

λ = 0.05; n = 1000; μ = 0.1; σ = 0.2; X1 = {{0, 0}}; X2 = {{0, 0}};
r = 0.05; b = σ*Sqrt[1/n]; t = 0; i = 0; Jumps = {};
While[t<100, R = Random[ExponentialDistribution[λ]];
midsteps = Round[R*10];
Y = Random[LogNormalDistribution[0, 2]];
Do[i = i + 1; Z = Random[NormalDistribution[]];
AppendTo[X1, {t1, X1[[i]][[2]] +
(μ - 0.5*(σ^2))*R/midsteps + σ*Sqrt[R/midsteps]*Z}];
AppendTo[X2, {t1, X2[[i]][[2]] +
(μ - 0.5*(σ^2))*R/midsteps + σ*Sqrt[R/midsteps]*Z}];
, {t1, t, t + R, R/midsteps}];
t = t + R; i = i + 1;
AppendTo[Jumps, {t, X1[[i]][[2]] + Log[Y]}];
AppendTo[X1, {t, X1[[i]][[2]] + Log[Y]}];
AppendTo[X2, {t, X2[[i]][[2]]}]]
Show[ListLinePlot[X1, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red],
ListLinePlot[X2, PlotRange -> All, PlotStyle -> Blue],
ListPlot[Jumps, PlotStyle -> {PointSize[Medium]}]]

```



Γράφημα 3.17 Διαγραμματική απεικόνιση μοντέλου διάχυσης με άλματα (κόκκινη γραμμή) με προσομοίωση μεταξύ των χρονικών σημείων των αλμάτων (κουκίδες) και χωρίς άλματα (μπλε γραμμή)

### Ανομοιογενής διαδικασία Poisson

Μία λογική επέκταση του μοντέλου διάχυσης με άλματα (3.22) που εξετάσαμε, είναι να θεωρήσουμε ότι η ένταση  $\lambda$  της διαδικασίας Poisson δεν είναι σταθερή αλλά μία μη-αρνητική συνάρτηση  $\lambda(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι:

$$P(N(t+h) - N(t) = 1 | N(t)) = \lambda(t)h + o(h)$$

Η  $N(t)$  λέγεται ανομοιογενής διαδικασία Poisson και έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις που ακολουθούν και αυτές Poisson. Οι προσαυξήσεις, όμως, σε ξένα αλλά ίσα χρονικά διαστήματα έχουν διαφορετικούς μέσους. Ο αριθμός των αλμάτων στο  $(t_i, t_{i+1}]$  ακολουθεί Poisson με μέσο  $\Lambda(t_{i+1}) - \Lambda(t_i)$ , όπου  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

Δεδομένου ότι η συνάρτηση  $\Lambda$  μπορεί να υπολογιστεί, το προηγούμενο μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί και τώρα με τη διαφορά ότι αντί για την Poisson με μέσο  $\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)$  χρησιμοποιούμε την Poisson με μέσο  $\Lambda(t_{i+1}) - \Lambda(t_i)$ .

Για την προσομοίωση των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των αλμάτων, η συνθήκη είναι:

$$P(\tau_{j+1} - \tau_j \leq t | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j) = 1 - \exp(-[\Lambda(t_{i+1}) - \Lambda(t_i)]), \quad t \geq 0,$$

εφόσον ισχύει ότι  $\Lambda(\infty) = \infty$ . Μπορούμε (τουλάχιστον θεωρητικά) να προσομοιώσουμε τ.μ. από αυτή την κατανομή με τη μέθοδο της αντιστροφής. Δοθέντος του  $\tau_j$ , θέτουμε:

$$X = \inf \left\{ t \geq 0 : 1 - \exp \left( - \int_{\tau_j}^t \lambda(u) du \right) = U \right\}, \quad U \sim Unif[0,1]$$

και το  $X$  έχει την κατανομή της χρονικής διάρκειας μεταξύ αλμάτων και μπορούμε να θέσουμε  $\tau_{j+1} = \tau_j + X$ . Το  $X$  θα μπορούσε να οριστεί ισοδύναμα και ως εξής:

$$X = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_{\tau_j}^t \lambda(u) du = \xi \right\}, \quad \xi \sim Exp(1)$$

Εάν η χρονικά μεταβαλλόμενη ένταση  $\lambda(t)$  οριοθετείται από κάποια σταθερά  $\bar{\lambda}$ , τα άλματα μπορούν να παραχθούν με τη λέπτυνση μίας διαδικασίας Poisson  $\bar{N}$  εντάσεως  $\bar{\lambda}^{24}$ ). Στη νέα διαδικασία, ο χρόνος των αλμάτων του  $\bar{N}$  γίνεται δυνητικός χρόνος αλμάτων του  $N$  - ένα δυνητικό άλμα στο χρόνο  $t$  γίνεται αποδεκτό σαν πραγματικό άλμα με πιθανότητα  $\lambda(t)/\bar{\lambda}$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Παράγουμε τα χρονικά σημεία αλμάτων  $\bar{\tau}_j$  του  $\bar{N}$  (οι ενδιάμεσοι χρόνοι  $\bar{\tau}_{j+1} - \bar{\tau}_j$  είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο  $1/\bar{\lambda}$ ):
- ii. Παράγουμε  $U \sim U[0,1]$ .
- iii. Εάν  $U < \lambda(\bar{\tau}_j)/\bar{\lambda}$ , αποδεχόμαστε το  $\bar{\tau}_j$  σαν άλμα για το  $N$ .

Για το παράδειγμα που ακολουθεί, υποθέσαμε ότι η  $\lambda(t)$  περιγράφεται από τη συνάρτηση  $\lambda(t) = \frac{1}{2} \sin(t) + 5$  η οποία λαμβάνει μέγιστη τιμή 5.5, άρα  $\bar{\lambda} = 5.5$ . Η υλοποίησή του μέσω του Mathematica για  $n = 5$  είναι:

<sup>24</sup> Lewis & Shedler (1979)



```

f[λ_] := 0.5*Sin[λ] + 5;
n = 5; λmax = 5.5;
x = {}; t = 0; jumptimeN = {}; jumptimeN2 = {};
Do[
  r = RandomReal[ExponentialDistribution[λmax]]; t = t + r;
  AppendTo[jumptimeN, t];
  U = RandomReal[];
  If[U*λmax < f[t], AppendTo[jumptimeN2, t]]
, {n}];
jumptimeN
jumptimeN2

```

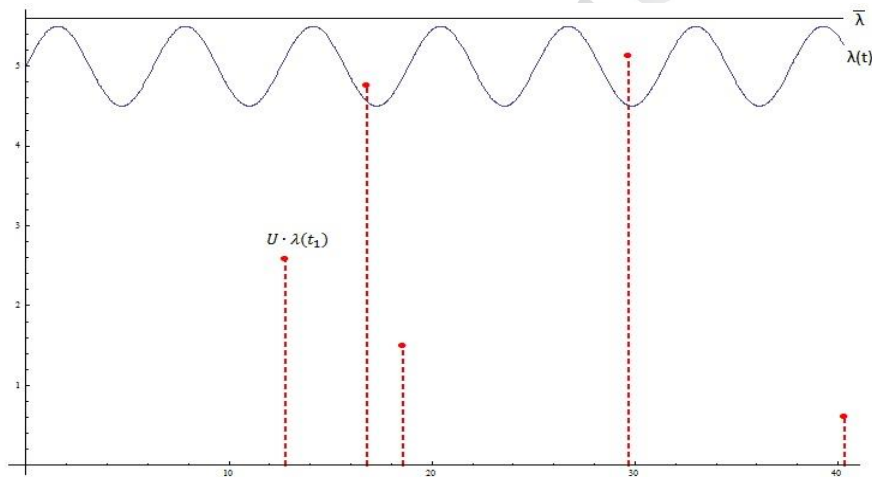
```

{12.7896, 16.8032, 18.5586, 29.6569, 40.302}
{12.7896, 18.5586, 40.302}

```

$$U \cdot \lambda(t_1)$$

Βλέπουμε ότι στην τυχαία πραγματοποίηση του αλγορίθμου, το 2<sup>ο</sup> και το 4<sup>ο</sup> άλμα δεν έγιναν δεκτά.



Γράφημα 3.18 Κατασκευή μιας ανομοιογενούς Poisson διαδικασίας μέσω λέπτυνσης μιας κανονικής Poisson

Η οριζόντια συντεταγμένη των σημείων συμβολίζει το χρόνο των αλμάτων μιας διαδικασίας Poisson με παράμετρο  $\bar{\lambda}$ . Κάθε σημείο πολλαπλασιάζεται με  $U$  και επομένως κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ 0 και  $\bar{\lambda}$ . Τα άλματα γίνονται δεκτά σαν άλματα της ανομοιογενούς διαδικασίας Poisson αν βρίσκονται κάτω από την καμπύλη  $\lambda(t)$ .

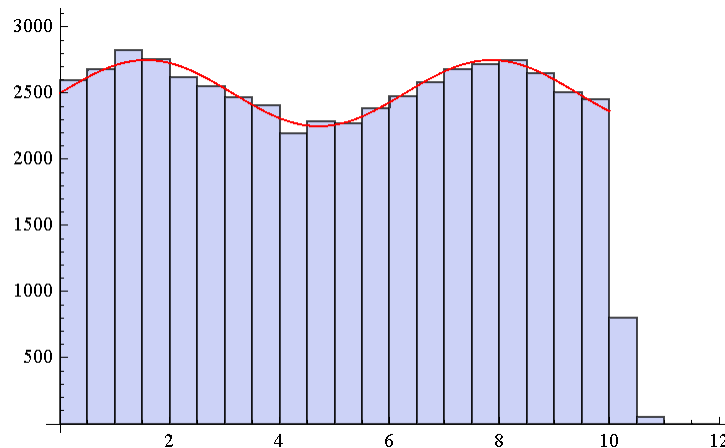
```

f[λ_] := 0.5*Sin[λ] + 5;
n = 5; λmax = 5.5;
x = {};
k = 1000; hist = Table[0, {k}];
Do[jumptimeN = {}; jumptimeN2 = {}; t = 0;
  While[t < 10, r = RandomReal[ExponentialDistribution[λmax]]; t = t
+ r;
  AppendTo[jumptimeN, t];
  U = RandomReal[];
  If[U*λmax < f[t], AppendTo[jumptimeN2, t]];
  hist[[j]] = jumptimeN2;
, {j, 1, k}];
Show[Histogram[Flatten[hist], {0.5}],

```

```
Plot[0.5*k*(0.5*Sin[x] + 5), {x, 0, 10}, PlotStyle -> Red],
AxesOrigin -> {0, 0}]
```

Στο παρακάτω διάγραμμα επαληθεύουμε ότι το ιστογράμμα των αλμάτων που γίνονται δεκτά κατανέμονται σύμφωνα με τη  $\lambda(t)$ :



Γράφημα 3.19 Σύγκριση ιστογράμματος των αλμάτων και συνάρτησης  $\lambda(t)$ .

### 3.8.2. Διαδικασίες με καθαρά άλματα

Εάν η  $S(t)$  είναι μία διαδικασία διάχυσης με άλματα όπως στην (3.22)<sup>25</sup>, όπου  $J(t)$  είναι μία σύνθετη Poisson (Compound Poisson), τότε η  $X(t) = \log S(t)$  είναι μία διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι η  $W$ , η  $J$  και ο λογάριθμος της γεωμετρικής κίνησης Brown έχουν ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Γενικότερα, εάν η  $X$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις (στασιμότητα των προσαυξήσεων σημαίνει ότι η κατανομή της προσαύξεσης  $X(t+s) - X(s)$  έχει την κατανομή του  $X(t)$ ) και ικανοποιεί τη συνθήκη η  $X(t)$  να συγκλίνει στην κατανομή του  $X(s)$  καθώς το  $t \rightarrow s$ , τότε η  $X$  καλείται μία *διαδικασία Lévy*. Κάθε διαδικασία Lévy μπορεί να εκφραστεί ως ένα άθροισμα προσδιοριστικής τάσης, μιας κίνησης Brown και μιας διαδικασίας (ανεξάρτητων από την κίνηση Brown) καθαρών αλμάτων. Εάν ο αριθμός των αλμάτων σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα είναι πεπερασμένα, τότε αποδεικνύεται ότι το καθαρό άλμα είναι μία διαδικασία σύνθετης Poisson. Τέλος, για να κατασκευάσουμε μία διαδικασία της μορφής  $S(t) = S(0)e^{X(t)}$ , όπου  $X$  μία διαδικασία Lévy (με την κανονικοποίηση ότι  $X(0) = 0$ ), για να εξελίξουμε τη διαδικασία διάχυσης με άλματα (3.22), θα πρέπει να θεωρήσουμε διαδικασίες με άπειρα άλματα σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα δηλ. διαδικασία Lévy που δεν περιλαμβάνει κίνηση Brown. Αρκετές διαδικασίες αυτής της μορφής έχουν προταθεί για μοντελοποίηση των τιμών των αγαθών<sup>26</sup>.

Για αυτή τη μοντελοποίηση (άπειρα άλματα σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα), μπορούμε να προσομοιώσουμε τις προσαυξήσεις αυτής της διαδικασίας αλλά όχι στα

<sup>25</sup>  $\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dJ(t)$

<sup>26</sup> Asmussen (1998)

χρονικά σημεία από το ένα άλμα στο επόμενο, επομένως θα επικεντρωθούμε στην κατανομή των προσαυξήσεων συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος.

Η κατανομή μίας τ.μ.  $Y$  καλείται *απειρώς διαιρετή* εάν για κάθε  $n = 2, 3, \dots$ , υπάρχουν i.i.d. τ.μ.  $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$  τέτοιες ώστε το άθροισμα  $Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}$  να έχει την κατανομή του  $Y$ . Εάν  $X$  είναι μία διαδικασία Λένυ ( $X(0) = 0$ ), τότε το άθροισμα των προσαυξήσεων:

$$X(t) = X\left(\frac{t}{n}\right) + \left[X\left(2\frac{t}{n}\right) - X\left(\frac{t}{n}\right)\right] + \left[X\left(3\frac{t}{n}\right) - X\left(2\frac{t}{n}\right)\right] + \dots + \left[X(t) - X\left(\frac{n-1}{n}t\right)\right]$$

αποσυνθέτει τη  $X(t)$  σε ένα άθροισμα από  $n$  στο πλήθος i.i.d. τ.μ. και δείχνει ότι η  $X(t)$  έχει μία απείρωσ διαιρετή κατανομή. Αντίστροφα, για κάθε απείρωσ διαιρετή κατανομή υπάρχει μία διαδικασία Λένυ για την οποία το  $X(1)$  έχει αυτή την κατανομή. Η προσομοίωση, επομένως, μίας διαδικασίας Λένυ σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία είναι ισοδύναμη με την προσομοίωση μιας απείρωσ διαιρετής κατανομής.

Μία διαδικασία Λένυ της οποίας κάθε δειγματικό μονοπάτι δεν μειώνεται, καλείται *subordinator*. Μία μεγάλη κλάση διαδικασιών Λένυ (μερικές φορές αποκαλούμενες σαν διαδικασίες τύπου  $G$ ) συμβολίζονται με  $W(G(t))$  και αποτελούνται από μία κίνηση Brown ( $W$ ) και μία subordinator  $G$  (ανεξάρτητη της  $W$ ).

### Ανελίξεις Gamma

Εάν οι  $Y_1, \dots, Y_n$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Γάμμα( $\alpha/n, \beta$ ) τότε το άθροισμα  $Y_1 + \dots + Y_n$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα( $\alpha, \beta$ ), άρα οι κατανομές Γάμμα είναι απείρωσ διαιρετές. Για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  υπάρχει μια διαδικασία Λένυ (που καλείται *διαδικασία Γάμμα*) τέτοια ώστε η  $X(1)$  να έχει κατανομή Γάμμα( $\alpha, \beta$ ). Μπορούμε να προσομοιώσουμε αυτή τη διαδικασία σε χρονικά σημεία  $t_1, \dots, t_n$  προσομοιώνοντας ανεξάρτητα τις προσαυξήσεις:

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) \sim \text{Γάμμα}(\alpha \cdot (t_{i+1} - t_i), \beta).$$

Δεδομένου ότι οι τ.μ. που ακολουθούν Γάμμα κατανομή παίρνουν μονάχα θετικές τιμές, η διαδικασία Γάμμα δεν μειώνεται, γεγονός που την κάνει ακατάλληλη για την προσομοίωση (του λογαρίθμου) των τιμών αγαθών που φέρουν ρίσκο. Ας υποθέσουμε το μοντέλο<sup>27</sup>  $X(t) = U(t) - D(t)$ , όπου  $U$  και  $D$  ανεξάρτητες Γάμμα διαδικασίες που συμβολίζουν ανοδική και καθοδική κίνηση του  $X$  (με παραμέτρους  $\alpha = C, \beta = 1/M$  για την  $U$  και  $\alpha = C, \beta = 1/G$  για την  $D$ ). Αυτή η διαδικασία καλείται *Variance Gamma* και συμβολίζεται  $VG(C, G, M)$ . Οι προσαυξήσεις του  $X$  προσομοιώνονται μέσω των προσαυξήσεων των  $U$  και  $D$  και ο μέσος της διαδικασίας είναι  $\mu = C * (G - M)/(MG)$ .

Εάν  $U(1)$  και  $D(1)$  έχουν τις ίδιες γάμμα παραμέτρους, τότε η  $X$  μπορεί να θεωρηθεί μια διαδικασία τυπικής κίνησης Brown αλλά με τυχαίες χρονικές μεταβολές  $W(G(t))$  όπου ο προσδιοριστικός χρόνος  $t$  έχει αντικατασταθεί από ένα τυχαίο χρόνο  $G(t)$  που είναι ανέλιξη Γάμμα, και ο οποίος καθορίζει τη δεσμευμένη διακύμανση του  $W(G(t))$  δοθέντος του  $G(t)$  (απ'όπου και η ονομασία Variance Gamma).

Στην περίπτωση που η  $W$  έχει τάση ( $\mu$ ) και μεταβλητότητα ( $\sigma$ ), μπορούμε να καθορίσουμε την παράμετρο μορφής του  $G(1)$  να είναι αντίστροφη της παραμέτρου κλίμακας  $\beta$  (έτσι

<sup>27</sup> Μοντέλο Madan (1998)

ώστε  $E[G(t)] = t$ . Οι παράμετροι των  $U(1)$  και  $D(1)$  θα πρέπει να επιλεγθούν έτσι, ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\alpha_U = \alpha_D = 1/\beta, \quad \beta_U \cdot \beta_D = \frac{\sigma^2 \beta}{2} \quad \text{και} \quad \beta_U - \beta_D = \mu \cdot \beta.$$

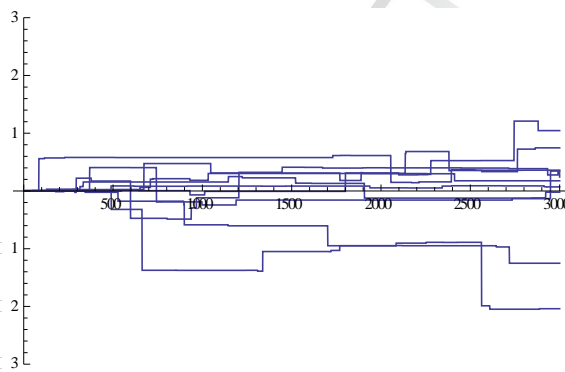
Εναλλακτικά, δοθείσας της προσαύξησης  $G(t_{i+1}) - G(t_i)$ , η προσαύξηση  $W(G(t_{i+1})) - W(G(t_i))$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο  $\mu[G(t_{i+1}) - G(t_i)]$  και διακύμανση  $\sigma^2[G(t_{i+1}) - G(t_i)]$ . Οπότε μπορούμε να προσομοιώσουμε την  $X$  ως ακολούθως:

Περιγραφή αλγορίθμου:

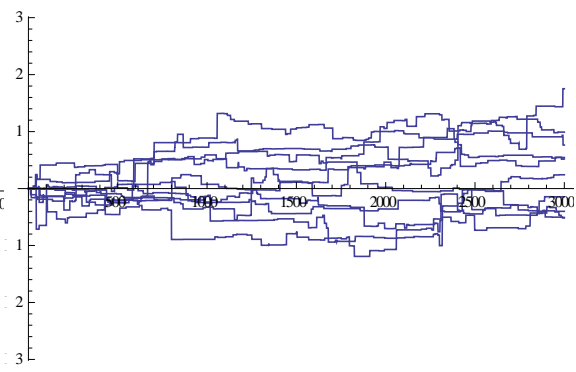
- i. Παράγουμε τ.μ.  $Y \sim \Gamma((t_{i+1} - t_i)/\beta, \beta)$  (η προσαύξηση της  $G$ )
- ii. Παράγουμε τ.μ.  $Z \sim N[0,1]$
- iii. Θέτουμε  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu \cdot Y + \sigma \cdot \sqrt{Y} \cdot Z$

Πραγματοποίηση του αλγορίθμου μέσω του Mathematica για  $\beta = 1, 0.1, 0.03, 0.01$ ,  $\mu = 0$  και  $\sigma = 1$ :

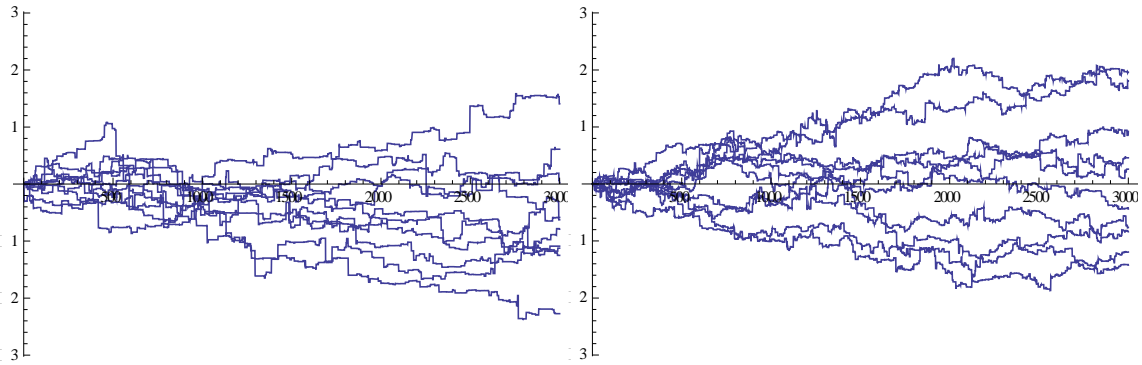
```
n = 3000; μ = 0; σ = 1; k = 10;
plots = Table[0, {k}];
Do[
  Do[X = Table[0, {n}];
    Do[Y = RandomReal[GammaDistribution[1/n/b, b]];
      Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
      X[[i]] = X[[i - 1]] + μ*Y + σ*Sqrt[Y]*Z
        , {i, 2, n}];
    plots[[j]] = ListLinePlot[X
      , {j, 1, k}];
  Print["β =", b]; Print[ Show[plots, PlotRange -> {-3, 3}]
    , {b, {1, 0.1, 0.03, 0.01}}]
```



$\beta = 1$



$\beta = 0.1$



$$\beta = 0.03$$

$$\beta = 0.01$$

Γράφημα 3.20 Διαγραμματική απεικόνιση δέκα τυχαίων διαδρομών της διαδικασίας Γάμμα για διαφορετικές τιμές του  $\beta$ .

Για να υπολογίζουμε την δίκαιη τιμή ενός call option που ακολουθεί εκθετική  $VG(C, G, M)$ , η αξία του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο  $t$  θα είναι

$$X(t) = S_0 \exp(U(t) - D(t)), \quad t \geq 0$$

όπου  $U$  και  $D$  ανεξάρτητες Γάμμα διαδικασίες με παραμέτρους  $\alpha = C, \beta = 1/M$  για την  $U$  και  $\alpha = C, \beta = 1/G$  για την  $D$ . Ο μέσος της διαδικασίας είναι

$$E(X(t)) = S_0 E(e^{U(t)}) E(e^{-D(t)}) = S_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^{tC}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{G}\right)^{tC}}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν επιτυγχάνεται πλήρης αντιστάθμιση αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα martingale ισοδύναμο μέτρο επιλέγοντας το  $C$  να είναι τέτοιο ώστε

$$E(X(t)) = S_0 e^{rt}$$

Δηλαδή από τις δύο παραπάνω εξισώσεις θα πρέπει,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)^{tC}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{G}\right)^{tC}} = e^{tr} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{r}{\log\left(\left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{G}\right)\right)}$$

### Ανελίξεις Κανονικής Αντίστροφης Γκαουσιανής Κατανομής (Normal Inverse Gaussian, NIG)

Οι διαδικασίες αυτού του τύπου παρουσιάζουν κάποιες ομοιότητες με το μοντέλο Variance Gamma. Είναι διαδικασίες Λένγ των οποίων οι προσαυξήσεις ακολουθούν Κανονική Αντίστροφη Γκαουσιανή (Normal Inverse Gaussian - NIG) κατανομή και μπορούν επίσης να εκφραστούν ως τυχαίες χρονικά μεταβολές της κίνησης Brown.

Η απλή αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με παραμέτρους  $\delta, \gamma > 0$  έχει σ.κ.:

$$f_{IG}(x) = \delta \frac{e^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)\right), \quad x > 0 \quad (3.25)$$

Αυτή είναι η κατανομή του χρονικού σημείου της πρώτης διάβασης (*first passage time*) από την οριζόντια ευθεία με τεταγμένη  $\delta$  μιας κίνησης Brown με τάση  $\gamma$ . Έχει μέσο  $\delta/\gamma$  και διακύμανση  $\delta/\gamma^3$ . Επίσης, η NIG κατανομή είναι απείρως διαιρητή: εάν  $X_1, X_2 \sim NIG$

ανεξάρτητες τ.μ. με παραμέτρους  $(\delta_1, \gamma)$ ,  $(\delta_2, \gamma)$  αντίστοιχα, τότε η τ.μ.  $X_1 + X_2$  ακολουθεί NIG κατανομή αλλά με παραμέτρους  $(\delta_1 + \delta_2, \gamma)$ . Άρα υπάρχει μια Λέβυ διαδικασία  $Y(t)$  για την οποία η  $Y(1)$  έχει την ανωτέρω σ.π.π. (3.25).

Η NIG κατανομή με παραμέτρους  $\alpha, \beta, \mu, \delta$  περιγράφεται ως η κατανομή του:

$$\mu + \beta Y(1) + \sqrt{Y(1)} Z, \quad Z \sim N(0,1).$$

όπου  $Y(1)$  έχει την (3.25) σ.κ.,  $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$  και  $Z$  ανεξάρτητη της  $Y(1)$ . Ο μέσος και η διακύμανση αυτής της κατανομής είναι:

$$\mu + \frac{\delta\beta}{\alpha\sqrt{1 - (\beta/\alpha)^2}} \quad \text{και} \quad \frac{\delta}{\alpha(1 - (\beta/\alpha)^2)^{3/2}} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν NIG μπορούν να προστεθούν ως εξής:

$$NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1) + NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2) = NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2).$$

και είναι απείρως διαιρετές.

Όπως και στις διαδικασίες Variance Gamma, υπάρχουν δύο τρόποι προσομοίωσης του  $X$  σε διακριτές χρονικές στιγμές: να προσομοιώσουμε τις προσαυξήσεις λαμβάνοντας τ.μ. από την NIG κατανομή ή να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση σαν μια κίνηση Brown με προσαυξήσεις που μεταβάλλονται χρονικά. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο καθώς η τυχαία δειγματοληψία από την NIG κατανομή δεν είναι εύκολη.

Για να προσομοιώσουμε την  $X(t)$  μέσω της  $W(Y(t))$  αρκεί να παράξουμε τις προσαυξήσεις της  $Y$  λαμβάνοντας τ.μ. από την (απλή) αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή. Χρησιμοποιώντας το γεγονός<sup>28</sup> ότι αν το  $Y$  έχει σ.π.π. την (3.25) τότε:

$$\frac{(\gamma Y - \delta)^2}{Y} \sim \chi_1^2$$

και επομένως μπορούμε προσομοιώσουμε την  $Y$  προσομοιώνοντας πρώτα την  $V \sim \chi_1^2$ . Δεδομένης μιας τιμής του  $V$ , το  $Y$  έχει δύο ρίζες:

$$y_1 = \gamma + \frac{V\gamma^2}{2\delta} - \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{4\gamma\delta V + \gamma^2 V^2} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{\gamma^2}{y_1}.$$

Η μικρότερη ρίζα  $y_1$  πρέπει να γίνεται δεκτή με πιθανότητα  $\gamma/(\gamma+y_1)$  και η μεγαλύτερη ρίζα  $y_2$  γίνεται δεκτή με τη συμπληρωματική πιθανότητα. Η τ.μ.  $V \sim \chi_1^2$  μπορεί να παραχθεί ως μία τ.μ. που ακολουθεί  $Gamma(\frac{1}{2}, 2)$  ή ως το τετράγωνο μιας τυπικής κανονικής.

Για να προσομοιώσουμε την προσαύξηση της κανονικής αντίστροφης Γκαουσιανής διαδικασίας  $X(t) = W(Y(t))$  από το  $t_i$  στο  $t_{i+1}$ , χρησιμοποιούμε τον παραπάνω αλγόριθμο για να παράξουμε δείγμα  $Y$  από την αντίστροφη Γκαουσιανή με παραμέτρους  $\delta(t_{i+1} - t_i)$  και  $\gamma$ . Στη συνέχεια θέτουμε:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \beta Y + \sqrt{Y} Z, \quad \text{όπου } Z \sim N(0,1).$$

όπου  $\beta$  είναι η τάση του  $W$  στην NIG παραμετροποίηση.

<sup>28</sup> Michael, Schucany και Haas (1976)

Παρά την εμφανή ομοιότητα μεταξύ αυτής της μεθόδου και της Variance Gamma, η έρευνα των Asmussen και Rosinski έδειξε μία σημαντική διαφορά: η αθροιστική επίδραση μικρών αλμάτων μπορεί να προσεγγιστεί καλύτερα από μία κίνηση Brown σε μία NIG διαδικασία αλλά όχι σε μία διαδικασία Variance Gamma. Σαν μια γενική ιδέα, μπορούμε να πούμε ότι ακόμα και τα μικρά άλματα της Variance Gamma είναι πολύ μεγάλα και πολύ σπάνια για μια κίνηση Brown.

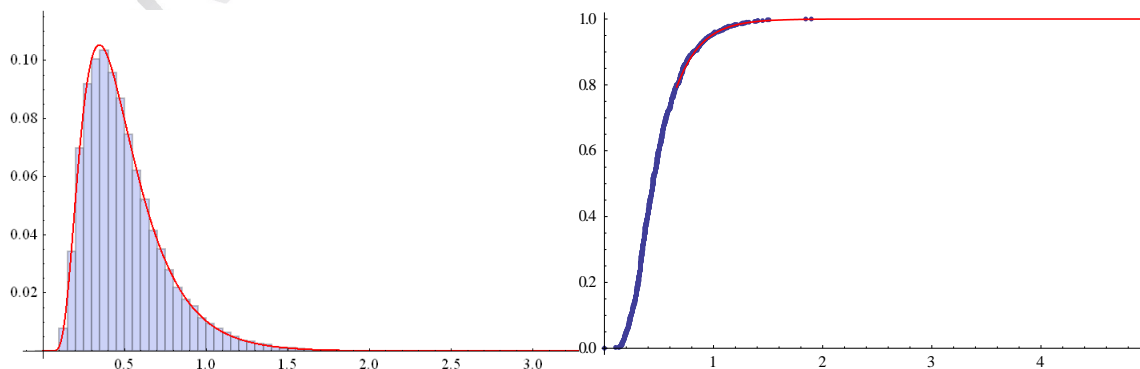
Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τα  $\beta, \gamma, \delta$ .
- ii. Παράγουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$  και θέτουμε  $V = Z^2$ ,
- iii. Θέτουμε  $Y = \gamma + \frac{V\gamma^2}{2\delta} - \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{4\gamma\delta V + \gamma^2 V^2}$ ,  $p = \gamma/(\gamma + Y)$
- iv. Παράγουμε  $U \sim U[0,1]$  και εάν  $U > p$ , θέτουμε  $Y = \gamma^2/Y$
- v. Θέτουμε  $X_{i+1} = X_i + \beta Y + \sqrt{Y}Z$ .

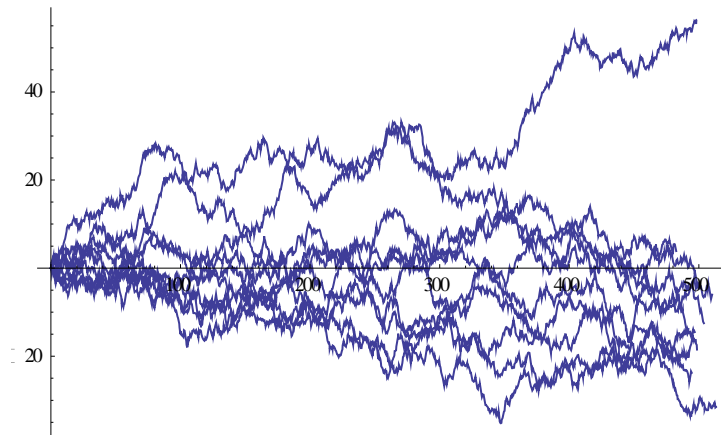
Μία πραγματοποίηση του αλγορίθμου μέσω του Mathematica για  $\gamma = 0.5$ ,  $\delta = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $n = 1000$  είναι:

```
b = 0.01; g = 0.5; d = 2; n = 1000; plot = Table[0, {n}]; sample =
Table[0, {n}];
k = 10; plots = Table[0, {k}];
Do[Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]]; V = Z^2;
Y = g + 0.5*(g^2)*V/d - 0.5*g/d*Sqrt[4*g*d*V + (g^2)*(V^2)];
p = g/(g + Y);
U = RandomReal[]; If[U > p, Y = g^2/Y]; sample[[i]] = Y;
plot[[i]] = plot[[i - 1]] + b*Y + Sqrt[Y]*Z, {i, 2, n}];
plots[[j]] =
ListLinePlot[plot, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All];
, {j, 1, k}];
Show[Histogram[sample, Automatic, "ProbabilityDensity"],
Plot[Sqrt[d/(2*Pi*x^3)]*Exp[-d*((x-g)^2)/(2*(g^2)*x)],{x,0, 20},
PlotStyle->{Red},PlotRange -> All], AxesOrigin->{0, 0}]
sY = Sort[sample]; Do[sY[[i]] = {sY[[i]], i/n}, {i, 1, n}];
Show[ListPlot[sY],
Plot[CDF[NormalDistribution[], Sqrt[d/x]*(x/g - 1)] +
Exp[2*d/g]*CDF[NormalDistribution[],-Sqrt[d/x]*(x/g+1)]
,{x,0, 5}, PlotStyle -> {Red}], PlotRange -> All]
Show[plots]
```

Αφού επαληθεύσουμε ότι το δείγμα τυχαίων αριθμών ακολουθεί την NIG κατανομή:



παρακάτω παρουσιάζονται δέκα τυχαίες πραγματοποιήσεις του αλγορίθμου:



Γράφημα 3.21 Διαγραμματική απεικόνιση δέκα τυχαίων διαδρομών της διαδικασίας Γάμμα για διαφορετικές τιμές του  $b$ .

### 3.9. Ισοδύναμα Martingale Μέτρα

Όπως προαναφέρθηκε, σύμφωνα με το μέτρο ουδέτερου ρίσκου για το μοντέλο των Black & Scholes, ο μέσος είναι  $r - \frac{\sigma^2}{2}$ . Ο Schoutens<sup>29</sup> προτείνει τους παρακάτω μέσους για ισοδύναμα μέτρα Martingale των αντίστοιχων μοντέλων:

Μοντέλο	$\mu_{new}$
Διάχυσης με άλματα (προσεγγιστικό)	$r - q - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left( e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1 \right)$
Γάμμα Διακύμανσης	$r - q + 1/C \log \left( \frac{(M-1)(G+1)}{MG} \right)$
NIG	$r - q + \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - (\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)$

### 3.10. Παραδείγματα Εφαρμογών

#### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>: Αποτίμηση Long Call

Υπενθυμίζουμε ότι λαμβάνοντας θέση Long Call, ο επενδυτής αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει τη μετοχή στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος κατά την ημερομηνία λήξης. Το τελικό του κέρδος, προεξοφλημένο στο χρόνο 0, ισούται με  $e^{-rT}(S_T - K)_+$ , μείον το ασφάλιστρο. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εφαρμόζουμε Monte Carlo προσομοίωση ( $n = 1.000.000$  βημάτων) για το τελικό κέρδος από τη χρήση ενός long call ( $T = 1$ ,  $K = 3$ ) με υποκείμενο αγαθό που ακολουθεί κίνηση Brown ( $\sigma = 1, S(0) = 2, r = 0.05$ ) υπολογισμένο στο χρόνο  $t = 0$ , το οποίο ισούται με την αξία του παραγώγου ώστε να μην υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

Ο τύπος των Black & Scholes μας δίνει την αξία του παραγώγου στο χρόνο  $t = 0$ :

<sup>29</sup> Schoutens (2003)



$$C(S(0), K, T, \sigma, r) = 2 \cdot \Phi(\omega) - 3 \cdot e^{-0.05} \Phi(\omega - \sqrt{1}) = 0.55518$$

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τις αρχικές παραμέτρους  $T, K, S(0), \sigma, n, r, i = 1$ .
- ii. Λαμβάνουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$
- iii. Υπολογίζουμε την τιμή του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο  $T$ :  

$$S(T) = S(0)e^{(r - 0.5(\sigma^2))T + \sigma\sqrt{T}Z}$$
- iv. Αν  $S(T) > K$ ,  $P_i = e^{-rT}(S(T) - K)$ , διαφορετικά  $P_i = 0$  και εάν  $i < n$  θέτουμε  $i = i + 1$  και επιστρέφουμε στο βήμα ii.
- v. Υπολογίζουμε το  $(\sum_{i=1}^n P_i)/n$

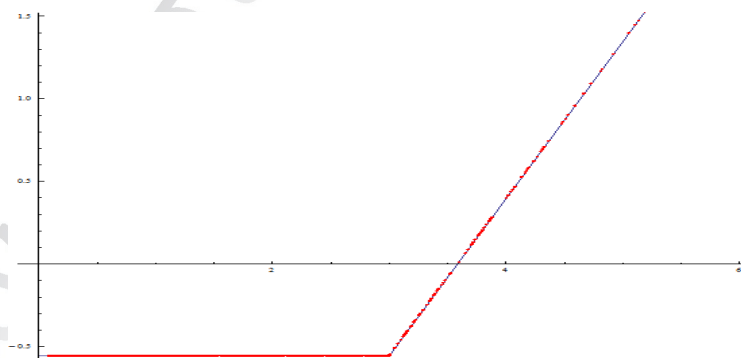
και η υλοποίηση των παραπάνω μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
T = 1; K = 3; S0 = 2; σ = 1; n = 1000000; r = 0.05;
omega = (r*T + 0.5*(σ^2)*T - Log[K/S0]) / (σ*Sqrt[T]);
BS = S0*CDF[NormalDistribution[], omega] -
      K*Exp[-r*T]*CDF[NormalDistribution[], omega - σ*Sqrt[T]];
Print["B&S C = ", BS];

P = Table[0, {n}];
Do[ST = S0*Exp[(r - 0.5*(σ^2))*T +
              σ*Sqrt[T]*RandomReal[NormalDistribution[]]];
   If[ST > K, P[[i]] = Exp[-r*T]*(ST - K), P[[i]] = 0];
  , {i, 1, n}];
SimC = Total[P]/n;
Print["Simulated C = ", SimC];
```

---

```
B&S C = 0.55518
Simulated C = 0.555083
```



Τελικό κέρδος  $h(T)$  από τη χρήση ενός long call

**Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>: Αποτίμηση Bull Spread:**

Υποθέτουμε ένα Bull Spread που αποτελείται από 1 Long Call με τιμή εξάσκησης  $K_1$  και 1 Short Call με τιμή εξάσκησης  $K_2 < K_1$ , επί της ίδιας μετοχής, ίδιας ληκτότητας. Το τελικό κέρδος ισούται με:

$$\begin{aligned}
& C_1 - C_2, & \text{αν} & S_T < K_2 \\
& (S_T - K_2) + C_1 - C_2, & \text{αν} & K_2 \leq S_T \leq K_1 \\
& -K_2 + K_1 + C_1 - C_2 & \text{αν} & S_T > K_1
\end{aligned}$$

Το Long Call είναι το ίδιο με του 1<sup>ου</sup> παραδείγματος και το Short Call επί του ίδιου αγαθού έχει τιμή εξάσκησης  $K_2 = 2,5$  ( $T = 1$ ). Και πάλι η αξία στο χρόνο 0 ενός Bull Spread μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου των Black & Scholes ( $= C_{call} - C_{put}$ ) αλλά μπορεί να υπολογιστεί και μέσω Monte Carlo προσομοίωσης, η υλοποίηση της οποίας μέσω Mathematica είναι:

```

T = 1; K1 = 3; K2 = 2.5; S0 = 2; σ = 1; n = 500000; r = 0.05;
P = Table[0, {n}];
Do[ST=S0*Exp[(r-0.5*(σ^2))*T+
  σ*Sqrt[T]*RandomReal[NormalDistribution[]]];
  If[ST < K2, P[[i]] = 0,
    If[ST <= K1, P[[i]] = Exp[-r*T]*(ST - K2),
      P[[i]] = Exp[-r*T]*(K1 - K2)]];
, {i, 1, n}];
Print["Sim C = ", Total[P]/n]

T = 1; K1 = 3; K2 = 2.5; S0 = 2; σ = 1; r = 0.05;
omega1=(r*T+0.5*(σ^2)*T-Log[K1/S0])/(σ*Sqrt[T]);
BS1 = S0*CDF[NormalDistribution[], omega1]-K1*
  Exp[-r*T]*CDF[NormalDistribution[], omega1 - σ*Sqrt[T]];
omega2 = (r*T + 0.5*(σ^2)*T - Log[K2/S0])/(σ*Sqrt[T]);
BS2 = S0*CDF[NormalDistribution[], omega2] -
  K2*Exp[-r*T]*CDF[NormalDistribution[], omega2 - σ*Sqrt[T]];
Print["B&S C = ", BS2 - BS1];

```

```

Sim C = 0.105606
B&S C = 0.105507

```

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>: Αποτίμηση Lookback Option:

Τα δικαιώματα αυτού του τύπου βασίζονται σε ακραίες τιμές του υποκείμενου αγαθού και το τελικό τους κέρδος ισούται με  $(\max_i S(t_i) - S(t_n))$  για call options και  $(S(t_n) - \min_i S(t_i))$  για put options. Δηλαδή ένα Lookback Call αποπληρώνει τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής στα χρονικά σημεία  $t_1, \dots, t_n$ , και της πώλησης στην τελική τιμή  $S(t_n)$ .

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Ορίζουμε τις αρχικές παραμέτρους  $T, K, S(0), \sigma, r, n, m, j = 1$ .
- ii. Θέτουμε  $i = 2$ .
- iii. Λαμβάνουμε τ.μ.  $Z \sim N(0,1)$ .
- iv. Υπολογίζουμε  $S(i) = S(i-1)e^{(r-0.5(\sigma^2))*T/n + \sigma\sqrt{T/n}Z}$  και εάν  $i < n$  θέτουμε  $i = i + 1$  και επιστρέφουμε στο iii.
- v. Θέτουμε  $P(j) = \text{Max}(S) - S(n)$  και εάν  $j < m$  θέτουμε  $j = j + 1$  και επιστρέφουμε στο ii.
- vi. Υπολογίζουμε την τιμή  $(\sum_{i=1}^m P_i)/m$

και η υλοποίηση του αλγορίθμου μέσω Mathematica είναι:

```

T = 1; K = 3; S0 = 2; σ = 1; n = 500; m = 10000; r = 0.05;
P = Table[0, {m}];
S = Table[S0, {n}];
Do[
  Do[S[[i]] = S[[i - 1]]* Exp[(r - 0.5*(σ^2))*T/n +
    σ*Sqrt[T/n]*RandomReal[NormalDistribution[]]];
    , {i, 2, n}];
  P[[j]] = Max[S] - S[[n]]
    , {j, 1, m}];
ListLinePlot[S, AxesOrigin -> {0, 0}];
Print["C = ", Total[P]/m];

```

C = 2.14087

#### **Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>: Αποτίμηση Call με άλματα και χωρίς άλματα**

Μία μετοχή ακολουθεί το μοντέλο διάχυσης με άλματα του Merton ( $S(0) = 5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $Y_j \sim LN(0, 0.5)$ ). Διατίθεται επίσης ένα long call Ευρωπαϊκού Τύπου επί της συγκεκριμένης μετοχής με χρόνο εξάσκησης  $T = 1$  και τιμή εξάσκησης  $K = 6$ . Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι  $r = 0.05$ . Πως εκτιμάται η δίκαιη αξία, μέσω Monte Carlo προσομοίωσης, του παραγώγου στο χρόνο 0 (για διαφορετικές τιμές του  $\lambda = 1, 2, 3, 4$  ή 5); Να συγκριθεί με τη δίκαιη αξία του παραγώγου στο χρόνο 0, εάν η μετοχή δεν παρουσιάζει άλματα.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Υπολογίζουμε την τελική αξία του παραγώγου στο χρόνο  $T$ ,  $(S(T) - K)_+$  με άλματα:  

$$S(T) = S(0)e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)} \cdot \prod_{j=1}^{N(T)} Y_j$$
- ii. και χωρίς άλματα:  

$$S(T) = S(0)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1\right)\right)T + \sigma W(T)}$$
- iii. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα i-ii  $n$  φορές και υπολογίζουμε το μέσο όρο αυτών.
- iv. Εκτιμούμε την αξία  $e^{-rT} E[(S(T) - K)_+]$  για κάθε περίπτωση.

και η προσομοίωσή του μέσω Mathematica είναι:

```

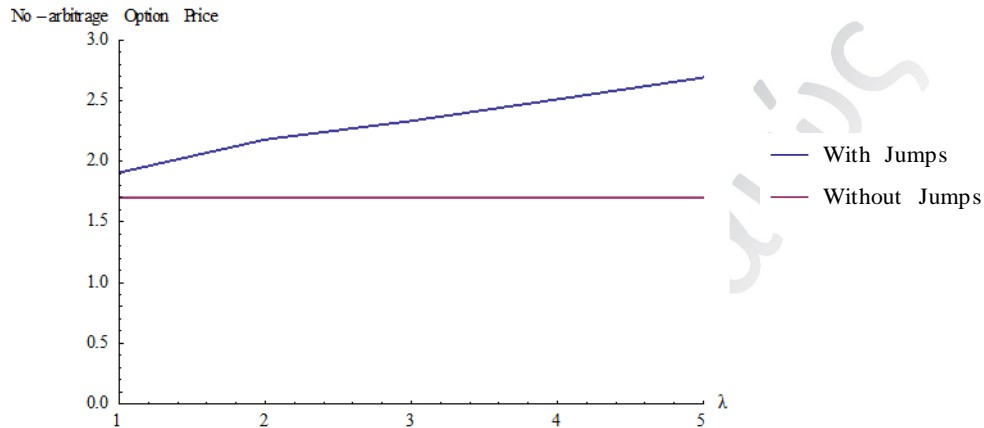
T = 1; S0 = 5; σ = 1; r = 0.05; K = 6; m2 = r - 0.5*σ^2;
b = σ*Sqrt[T]; d = 0.5; n = 50000; optionPr1 = Table[0, {n}];
optionPr2 = Table[0, {n}]; λmin = 1; λmax = 5; λstep = 1;
list = Table[0, {λmax}]; list2 = Table[0, {λmax}];
Do[m1 = r - 0.5*σ^2 - λ (Exp[0.5*d^2] - 1);
  Do[Ni = Random[PoissonDistribution[λ*T]];
    If[Ni == 0, M = 1; logs = Table[0, {Ni}];
      Do[Y = RandomReal[LogNormalDistribution[0, d]];
        logs[[i]] = Y, {i, 1, Ni}]; M = Apply[Times, logs]];
    Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    ST1 = S0*Exp[m1*T + b*Z]*M;
    optionPr1[[j]] = Exp[-r*T]*Max[ST1 - K, 0];
    If[λ == λmin, ST2 = S0*Exp[m2*T + b*Z];
      optionPr2[[j]] = Exp[-r*T]*Max[ST2 - K, 0];
    , {j, 1, n}];

```

```

list[[λ]] = {λ, Mean[optionPr1]}
, {λ, λmin, λmax, λstep}};
ListLinePlot[{{list, {{λmin, Mean[optionPr2]}, {λmax, Mean[optionPr2]}}},
PlotRange -> {{1, 5}, {0, 3}},
PlotLegends -> {"With Jumps", "Without Jumps"},
AxesLabel -> {"λ", "No-arbitrage Option Price"}]

```



Από το ανωτέρω γράφημα παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνονται τα άλματα ( $\lambda$ ), υπάρχει αύξηση της no-arbitrage τιμής του παραγώγου.

#### **Παράδειγμα 5ο: Αναμενόμενο κέρδος carlet Ασιατικού τύπου**

Το carlet είναι ένα παράγωγο, το οποίο παρέχει προστασία από την αύξηση του επιτοκίου για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και λειτουργεί σαν ένα call option βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με τελικό κέρδος  $[(r(T) - K)]_+$  για κάποια τιμή εξάσκησης  $K$  και λήξη  $T$ .

Έστω ότι διατίθεται στην αγορά ένα carlet Ασιατικού τύπου ( $K = 0.08$ ,  $T = 1$ ,  $n = 100$ ) επί ενός χρηματοοικονομικού αγαθού που ακολουθεί διάχυση τετραγωνικής ρίζας με παραμέτρους  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $r(0) = 0.05$ . Όπως είπαμε στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, η τελική του αξία (κέρδος από την χρήση του) υπολογίζεται με βάση τον μέσο όρο της αξίας του υποκείμενου αγαθού σε διακριτά χρονικά σημεία (διακριτή μέθοδος,  $n = 100$ ). Συγκεκριμένα, η αξία του στο χρόνο λήξης ισούται με  $(\bar{r} - K)_+$  για call options, όπου  $K$  η σταθερή τιμή εξάσκησης και  $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(t_i)$ . Υπογραμμίζεται ότι για αυτά τα δικαιώματα δεν υπάρχει κλειστός τύπος για τον υπολογισμό των τιμών τους, διότι δεν μπορεί να καθοριστεί με κλειστό τύπο η κατανομή του  $\bar{r}$ . Πώς μεταβάλλεται το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση του carlet στο χρόνο  $T$ , μέσω *Monte Carlo* προσομοίωσης, καθώς αυξάνεται ο ρυθμός σύγκλισης ( $a$ ) από το 0,1 σε 10,1?

Περιγραφή αλγορίθμου:

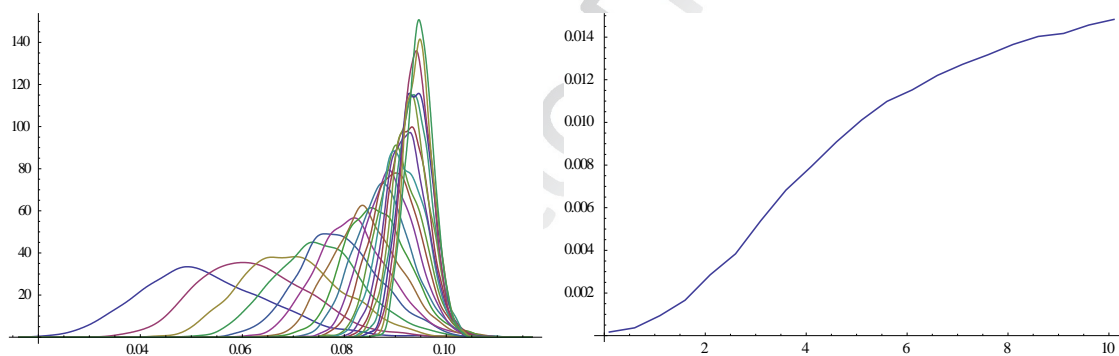
- i. Υπολογίζουμε, σε κάθε διακριτό χρονικό σημείο, την τιμή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού αγαθού:

$$r(t_i) = c \left[ (Z + \sqrt{\lambda})^2 + X \right], \quad Z \sim N(0,1), \quad X \sim \chi_{d-1}^2.$$

- ii. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το τελικό κέρδος από τη χρήση του παραγώγου  $(\bar{r} - K)_+$ .
- iii. Επαναλαμβάνουμε το βήμα  $i$   $k$  φορές και υπολογίζουμε το μέσο όρο αυτών.

και η προσομοίωσή του μέσω Mathematica είναι:

```
k = 2000; b = 0.1; σ = 0.1; n = 100; T = 1; r0 = 0.05; K = 0.08;
results = {}; hist = {};
Do[FinalProfit = 0; rdist = Table[0, {k}];
cc = σ^2*(1 - Exp[-a*T/n])/4/a; d = 4*a*b/σ^2;
Do[r = Table[r0, {n + 1}];
Do[λ = Exp[-a*T/n]/cc*r[[i]];
Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
X2 = RandomReal[ChiSquareDistribution[d - 1]];
r[[i + 1]] = cc*((Z + Sqrt[λ])^2 + X2), {i, 1, n}];
FinalProfit = FinalProfit + Max[Mean[r] - K, 0];
rdist[[j]] = Mean[r], {j, 1, k}];
AppendTo[results, {a, FinalProfit/k}]; AppendTo[hist, rdist];
, {a, 0.1, 10.1, 0.5}];
ListLinePlot[results]
SmoothHistogram[hist]
```



Από τα ανωτέρω γραφήματα παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνεται ο ρυθμός σύγκλισης ( $a$ ) στο  $b$ , η κατανομή του  $\bar{r}$  μετατοπίζεται προς τα δεξιά (σχήμα αριστερό), η  $E[(\bar{r} - K)_+]$  αυξάνεται και επομένως αυξάνεται το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση του carplet στο χρόνο  $T$  (σχήμα δεξιά).

#### **Παράδειγμα 6ο: Αποτίμηση Bull Spread για διαφορετικά $t$ και $S(t)$ .**

Έστω ότι διαθέτουμε και πάλι το Bull Spread του 2<sup>ου</sup> παραδείγματος. Πώς διαμορφώνεται το γράφημα της τιμής του παραγώγου  $c(t, S(t))$ , κατά προσέγγιση μέσω προσομοίωσης, έναντι διαφορετικών τιμών  $S(t)$ , όταν ο χρόνος  $t$  μεταβάλλεται από 0 έως  $\frac{5}{6}T$  με βήμα  $T/6$ ;

Περιγραφή αλγορίθμου:

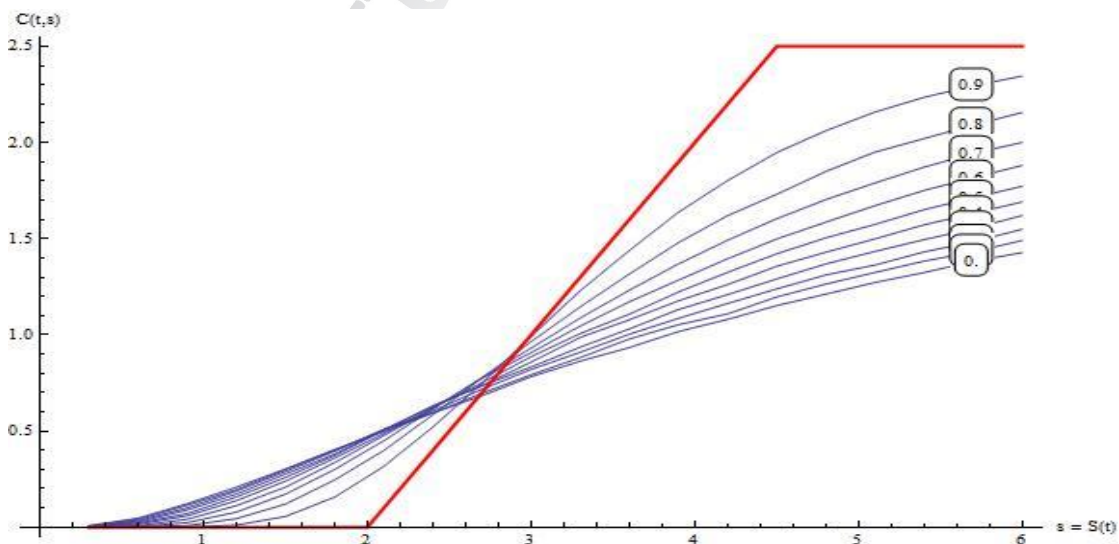
- i. Για διαφορετικές τιμές  $S(t)$  του υποκείμενου αγαθού, υπολογίζουμε το αναμενόμενο κέρδος (στο χρόνο 0) από τη χρήση του παραγώγου:
  - παράγουμε την τελική τιμή του αγαθού  $S(T)$  και υπολογίζουμε το

προεξοφλημένο ενδεχόμενο κέρδος  $e^{-rt}(S(T) - K)_+$ .

- επαναλαμβάνουμε  $n$  φορές και υπολογίζουμε το μέσο όρο αυτών.
- ii. Επαναλαμβάνουμε το βήμα  $i$  για τις διαφορετικές τιμές του χρόνου που απομένει για τη λήξη του παραγώγου ( $t = 0, t = 1/6, t = 2/6, t = 3/6, t = 4/6, t = 5/6$ ).
- iii. Στο χρόνο λήξης του ( $t_0 = T = 1$ ), η αξία του παραγώγου για  $S(t) \leq K$  είναι προφανώς 0 (αφού δεν εξασκείται) και για  $S(t) > K$  είναι  $S(t) - K$ .

και η προσομοίωσή του μέσω Mathematica είναι:

```
T = 1; K1 = 4.5; K2 = 2; S0 = 2; σ = 1; n = 50000; r = 0.05; K = 3;
Trange = Table[1/10*i, {i, 10}]; Srange =
Table[i*0.3, {i, 20}]; A = {}; plots1 = {}; P =
Table[0, {n}]; labeling = {};
Do[A = {};
Do[
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
ST = S*Exp[(r - 0.5*σ^2)*T + σ*Sqrt[T]*Z];
If[ST < K2, P[[i]] = 0,
If[ST <= K1, P[[i]] = (ST - K2), P[[i]] = (K1 - K2)];, {i, 1,
n}];
SimC = Total[P]/n; AppendTo[A, {S, SimC}];
If[S == 5.7, AppendTo[labeling, SimC], {S, Srange}];
AppendTo[plots1, ListLinePlot[A]]; {T, Trange}];
AppendTo[plots1,
Plot[Max[S - K2, 0] - Max[S - K1, 0], {S, 0.3, 6},
PlotStyle -> {Red, Thick}]];
Show[plots1, PlotRange -> All,
Epilog ->
Table[Inset[
Framed[DisplayForm[(1 - i) // N], RoundingRadius -> 5], {5.7,
labeling[[i*10]]}, Background -> White], {i, Trange}],
AxesLabel -> {"s = S(t)", "C(t,s)"}];
```



Από το γράφημα αυτό διαπιστώνουμε ότι όσο το  $t$  πλησιάζει προς το χρόνο λήξης  $T$ , η τιμή του παραγώγου πλησιάζει την τελική του αξία στο χρόνο λήξης:  $(S(T) - K_2)_+ - (S(T) - K_1)_+$ .

### Παράδειγμα 7ο: Αποτίμηση Spread Call για διαφορετικούς βαθμούς συσχέτισης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα *call crack spread option* (παράγωγο που βασίζεται στη διαφορά των τιμών των μεταξύ πετρελαίου θέρμανσης ( $S_1$ ) και αργού πετρελαίου ( $S_2$ ) τιμή εξάσκησης  $K$  και κέρδος  $([S_1(T) - S_2(T)] - K)_+$ . Υποθέτουμε ότι οι τιμές των δύο υποκειμένων αγαθών ακολουθούν διδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown με  $\sigma_1^2 = 0.8$ ,  $\sigma_2^2 = 0.45$ . Υποθέτουμε ότι οι αρχικές τους τιμές είναι  $S_1(0) = 3$  και  $S_2(0) = 1.5$  το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι  $r = 0.05$  και ο χρόνος εξάσκησης του call είναι  $T = 3$ . Ποια είναι η no-arbitrage αξία του παραγώγου καθώς ο συντελεστής συσχέτισης των δύο υποκειμένων αγαθών αυξάνεται?

Περιγραφή αλγορίθμου:

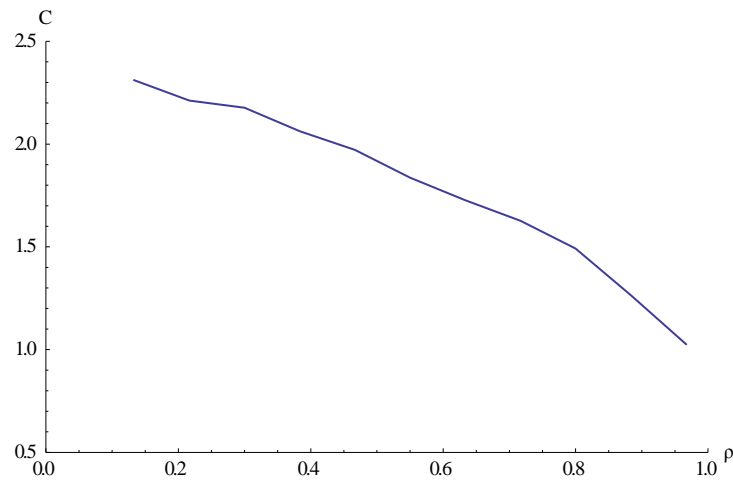
- i. Υπολογίζουμε τον συντελεστή συσχέτισης  $\rho$  από τον πίνακα συνδιακύμανσης ως εξής:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.8 & \sqrt{0.8} \cdot \sqrt{0.45} \cdot \rho \\ \sqrt{0.8} \cdot \sqrt{0.45} \cdot \rho & 0.45 \end{bmatrix}$$

- ii. Σύμφωνα με την παραγοντοποίηση Cholesky υπολογίζουμε τον πίνακα  $A^{30}$  έτσι ώστε  $AA^T = \Sigma$ .
- iii. Υπολογίζουμε το αναμενόμενο κέρδος (στο χρόνο 0) από τη χρήση του παραγώγου:
- παράγουμε τις τελικές τιμές των υποκειμένων αγαθών  $S_1(T)$  και  $S_2(T)$   
 $\{S_1(T), S_2(T)\} = \{S_1(0), S_2(0)\} * e^{\mu T + \sqrt{T}A\{Z_1, Z_2\}}$ , (όπου  $Z_1, Z_2$  τ.μ.  $\sim N(0, I)$ ) και υπολογίζουμε το προεξοφλημένο ενδεχόμενο κέρδος  $e^{-rt}([S_1(T) - S_2(T)] - K)_+$ .
  - επαναλαμβάνουμε  $n$  φορές και υπολογίζουμε το μέσο όρο αυτών.
- iv. Επαναλαμβάνουμε το βήμα i για διαφορετικές τιμές του  $\rho$ .

```
r = 0.05; σ1 = 0.8; σ2 = 0.45; T = 3; n = 200000;
μ = {r - 0.5*σ1^2, r - 0.5*σ2^2}; d = 2; K = 1; q = 11;
SimC = Table[0, {q}]; ρ = 0.08;
Do[A = Table[0, {d}, {d}]; FP = Table[0, {n}];
Σ = {{σ1, ρ}, {ρ, σ2}};
Do[v = Table[0, {d}]; Do[v[[i]] = Σ[[i, j]];
Do[v[[i]] = v[[i]] - A[[j, k]]*A[[i, k]], {k, 1, j}];
A[[i, j]] = v[[i]]/Sqrt[v[[j]]], {i, j, d}, {j, 1, d}];
Do[S = {3, 2};
S = S*Exp[
μ*T + Sqrt[T]*
A.{RandomReal[NormalDistribution[]],
RandomReal[NormalDistribution[]]};
If[S[[1]] - S[[2]] - K > 0,
FP[[1]] = Exp[-r*T]*(S[[1]] - S[[2]] - K);
, {1, 1, n}];
SimC[[m]] = {ρ/Sqrt[σ1]/Sqrt[σ2], Total[FP/n]};
ρ = ρ + 0.05, {m, 1, q}];
ListLinePlot[SimC, PlotRange -> {{0, 1}, {0.5, 2.5}},
AxesLabel -> {"ρ", "C"}]
```

<sup>30</sup> (βλ. Κεφ 2<sup>ο</sup>, σελ. 27)



Όπως ήταν αναμενόμενο, καθώς ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο υποκείμενων αγαθών αυξάνεται, η αξία του call οption μειώνεται, αφού γίνεται όλο και πιο πιθανό οι τιμές των υποκείμενων αγαθών να έχουν μικρό spread (άνοιγμα) και το παράγωγο να μην εξασκείται ( $S_1(T) - S_2(T) < K$ ).



## Κεφάλαιο 4ο - Υπολογισμός Παραμέτρων Ευαισθησίας

### 4.1. Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών (Finite - Difference Approximation)

Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο που εξαρτάται από μία παράμετρο  $\theta$  και ας υποθέσουμε ότι για κάθε τιμή του  $\theta$ , το αποτέλεσμα που δίνει το μοντέλο είναι μια τυχαία μεταβλητή  $Y(\theta)$  και ισχύει:

$$\alpha(\theta) = E[Y(\theta)].$$

Κατά την εκτίμηση της αξίας ενός δικαιώματος προαίρεσης, το  $Y(\theta)$  είναι το προεξοφλημένο κέρδος από τη χρήση του παραγώγου, το  $\alpha(\theta)$  είναι η τιμή του και το  $\theta$  θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε από τις πολλές παραμέτρους του μοντέλου ή της αγοράς που επηρεάζουν την τιμή του. Όπως είδαμε, αν το  $\theta$  είναι η αρχική τιμή του υποκείμενου αγαθού, το  $\alpha'(\theta)$  είναι το *delta* και το  $\alpha''(\theta)$  είναι το *gamma* ενώ αν το  $\theta$  είναι η παράμετρος μεταβλητότητας, το  $\alpha'(\theta)$  είναι το *vega*.

#### 4.1.1. Απόκλιση και Διακύμανση

##### Εκτιμητής προς τα εμπρός διαφοράς (forward difference)

Μία προφανής προσέγγιση για την εκτίμηση της παραγώγου είναι η ακόλουθη: προσομοιώνουμε  $n$  ανεξάρτητες τιμές του μοντέλου  $Y_1(\theta), Y_2(\theta), \dots, Y_n(\theta)$  με παράμετρο  $\theta$  και  $n$  επαναλήψεις  $Y_1(\theta + h), \dots, Y_n(\theta + h)$  με παράμετρο  $\theta + h$ , για κάποιο  $h > 0$ . Λαμβάνουμε το μέσο όρο αυτών,  $\bar{Y}_n(\theta)$  και  $\bar{Y}_n(\theta + h)$  και υπολογίζουμε τον εκτιμητή της προς τα εμπρός - διαφοράς:

$$\hat{\Delta}_F = \hat{\Delta}_F(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta)}{h}. \quad (4.1)$$

Ο εκτιμητής αυτός έχει αναμενόμενη τιμή:

$$E[\hat{\Delta}_F] = \frac{[\alpha(\theta + h) - \alpha(\theta)]}{h}. \quad (4.2)$$

Δεν έχουμε προσδιορίσει την σχέση που υπάρχει μεταξύ των αποτελεσμάτων  $Y_i(\theta)$  και  $Y_i(\theta + h)$ . Αν η συνάρτηση  $\alpha$  είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο  $\theta$  τότε:

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \frac{1}{2}\alpha''(\theta)h^2 + o(h^2)^{31}.$$

<sup>31</sup> Ορισμός Ασυμπτωτικού Άνω Ορίου  $O(\cdot)$  (Big O) - Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση  $f(n)$  η οποία είναι θετική για όλες τις τιμές του  $n \geq 0$ . Λέμε ότι η " $f(n)$  είναι big O  $g(n)$ ," και το γράφουμε σαν  $f(n) = O(g(n))$ , εάν υπάρχει ακέραιος αριθμός  $n_0$  και μια σταθερά  $c > 0$  τέτοια ώστε, για όλους τους ακεραίους  $n \geq n_0$ , είναι  $f(n) \leq cg(n)$ .

Ορισμός Ασυμπτωτικού Άνω Ορίου  $o(\cdot)$  (Little o) - Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση  $f(n)$  η οποία είναι θετική για όλες τις τιμές του ορίσματος  $n \geq 0$ . Λέμε ότι η " $f(n)$  είναι little o  $g(n)$ ," και το γράφουμε σαν  $f(n) = o(g(n))$ , εάν για κάθε σταθερά  $c > 0$  υπάρχει ακέραιος αριθμός  $n_0$  τέτοιος ώστε, για όλους τους ακεραίους  $n \geq n_0$ , είναι  $f(n) \leq cg(n)$ .

Η διαφορά τους είναι ότι η πρώτη θα πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον μια σταθερά  $c$  ενώ η δεύτερη θα πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε (αλλά μικρή) σταθερά  $c$ .

Σε αυτή την περίπτωση, από την (4.2) συνεπάγεται ότι η απόκλιση στον εκτιμητή προς τα εμπρός - διαφοράς είναι:

$$\text{Bias}(\hat{\Delta}_F) = E[\hat{\Delta}_F - a'(\theta)] = \frac{1}{2}a''(\theta)h + o(h). \quad (4.3)$$

### Εκτιμητής κεντρικής - διαφοράς

Εάν προσομοιώσουμε στο  $\theta - h$  και στο  $\theta + h$ , μπορούμε να ορίσουμε έναν εκτιμητή κεντρικής - διαφοράς:

$$\hat{\Delta}_C = \hat{\Delta}_C(n, h) = \frac{\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta - h)}{2h}. \quad (4.4)$$

Αυτός ονομάζεται εκτιμητής κεντρικής - διαφοράς και παρά το ότι χρειάζεται μεγαλύτερος κόπος για τον υπολογισμό του αφού απαιτεί προσομοίωση σε δύο σημεία  $\theta - h$  και  $\theta + h$  ενώ ο εκτιμητής της προς τα εμπρός διαφοράς απαιτεί την προσομοίωση σε ένα σημείο  $\theta + h$ , προσφέρει καλύτερο ρυθμό σύγκλισης της απόκλισης. Αν το  $\alpha$  είναι τουλάχιστον δύο φορές διαφορίσιμο γύρω από το  $\theta$ , τότε:

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \frac{\alpha''(\theta)h^2}{2} + o(h^2)$$

$$\alpha(\theta - h) = \alpha(\theta) - \alpha'(\theta)h + \frac{\alpha''(\theta)h^2}{2} + o(h^2)$$

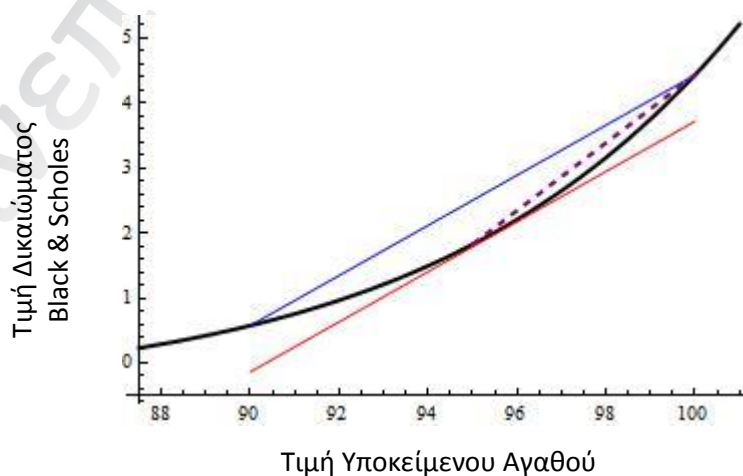
οπότε η αφαίρεση κατά μέλη μας δίνει:

$$\text{Bias}(\hat{\Delta}_C) = \frac{\alpha(\theta + h) - \alpha(\theta - h)}{2h} - \alpha'(\theta) = o(h) \quad (4.5)$$

το οποίο είναι μικρότερο από την απόκλιση στην (4.3). Αν το  $\alpha''$  είναι διαφορίσιμο στο  $\theta$  τότε μπορούμε να γράψουμε την (4.5) ως εξής:

$$\text{Bias}(\hat{\Delta}_C) = \frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2 + o(h^2). \quad (4.6)$$

Η μεγαλύτερη ακρίβεια της κεντρικής - διαφοράς σε σύγκριση με την προς τα εμπρός - διαφορά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η μαύρη γραμμή εμφανίζει την B&S αξία ενός παραγώγου συναρτήσεως της τιμής του υποκείμενου αγαθού του. Η κόκκινη γραμμή εμφανίζει την εφαπτομένη στην τιμή υποκείμενου αγαθού 95, η μωβ γραμμή την προς τα εμπρός - διαφορά 95 και 100 και η

μπλε την κεντρική διαφορά μεταξύ 90 και 100. Η κλίση της μπλε ευθείας είναι προφανώς πολύ πιο κοντά στην κλίση της κόκκινης.

### Διακύμανση

Η μορφή της απόκλισης των εκτιμητών προς τα εμπρός και κεντρικής διαφοράς μας οδηγεί να λάβουμε όσο το δυνατόν μικρότερες τιμές  $h$  ώστε να βελτιώσουμε την ακρίβεια. Μικρές τιμές του  $h$  όμως, έχουν αρνητική επίδραση στη διακύμανση.

Η διακύμανση του εκτιμητή προς τα εμπρός - διαφοράς της (4.1) είναι:

$$\text{Var}[\hat{\Delta}_F(n, h)] = \frac{\text{Var}[\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta)]}{h^2} \quad (4.7)$$

και μια ανάλογη σχέση ισχύει και για τον εκτιμητή κεντρικής διαφοράς στην (4.4). Και στις δύο περιπτώσεις, το  $h^{-2}$  μας προειδοποιεί για μεγάλες επιπτώσεις στην περίπτωση που επιλέξουμε το  $h$  να είναι «πολύ μικρό». Η ανωτέρω εξίσωση μας δείχνει επίσης ότι η εξάρτηση μεταξύ των τιμών που προσομοιώνονται για διαφορετικές τιμές του  $\theta$  επηρεάζει τη διακύμανση του εκτιμητή πεπερασμένων διαφορών.

Ας υποθέσουμε ότι τα ζευγάρια  $(Y(\theta), Y(\theta + h))$  και  $(Y_i(\theta), Y_i(\theta + h))$  για  $i = 1, 2, \dots$ , είναι *i.i.d.* έτσι ώστε:

$$\text{Var}[\bar{Y}_n(\theta + h) - \bar{Y}_n(\theta)] = \frac{1}{n} \text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)].$$

Η εξάρτηση του  $\text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)]$  στο  $h$ , καθορίζει πώς αλλάζει η διακύμανση με το  $h$  στην (4.7).

Στην πράξη, υπάρχουν οι παρακάτω 3 περιπτώσεις:

$$\text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = \begin{cases} i) & O(1) \\ ii) & O(h) \\ iii) & O(h^2) \end{cases} \quad (4.8)$$

Εάν προσομοιώσουμε ανεξάρτητα τα  $Y(\theta)$  και  $Y(\theta + h)$  τότε έχουμε την πρώτη περίπτωση:

$$\text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = \text{Var}[Y(\theta + h)] + \text{Var}[Y(\theta)] \rightarrow 2\text{Var}[Y(\theta)],$$

υπό την προϋπόθεση ότι το  $\text{Var}[Y(\theta)]$  είναι συνεχές στο  $\theta$ . Η δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιεί, για την προσομοίωση των  $Y(\theta), Y(\theta + h)$  κοινούς τυχαίους αριθμούς (δηλαδή η ακολουθία των τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιείται για να παραχθεί το  $Y(\theta)$ , χρησιμοποιείται με κατάλληλο τρόπο για να παραχθεί και το  $Y(\theta + h)$ , ώστε οι τ.μ.  $Y(\theta), Y(\theta + h)$  να είναι συσχετισμένες). Η τρίτη περίπτωση χρησιμοποιεί κοινούς τυχαίους αριθμούς των οποίων το αποτέλεσμα  $Y(\cdot)$  είναι συνεχές στο  $\theta$ .

#### **4.1.2. Βέλτιστο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Optimal MSE)**

Επειδή η «ελάττωση» του  $h$  μπορεί και να αυξήσει τη διακύμανση και να μειώσει την απόκλιση, θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το MSE. Ο στόχος μας είναι να βρούμε τη

βέλτιστη σχέση<sup>32</sup> μεταξύ του αριθμού των επαναλήψεων  $n$  (του οποίου η αύξηση μειώνει τη διακύμανση χωρίς επίπτωση στην απόκλιση) και του  $h$  (το οποίο επηρεάζει και τα δύο).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν εκτιμητή προς τα εμπρός - διαφοράς με ανεξάρτητη προσομοίωση στο  $\theta$  και στο  $\theta + h$ . Μπορούμε λογικά να υποθέσουμε ότι έχουμε την πρώτη περίπτωση της (4.8) και για να τον ξεχωρίσουμε αυτό τον εκτιμητή, τον συμβολίζουμε με  $\hat{\Delta}_{F,i} = \hat{\Delta}_{F,i}(n, h)$ . Τετραγωνίζοντας την απόκλιση στην (4.3) και προσθέτοντάς τη στη διακύμανση (4.7) έχουμε:

$$MSE(\hat{\Delta}_{F,i}(n, h)) = O(h^2) + O(n^{-1}h^{-2}),$$

από το οποίο βλέπουμε ότι για να υπάρχει σύγκλιση πρέπει  $h \rightarrow 0$  και  $nh^2 \rightarrow \infty$ .

Για να εξάγουμε πιο ασφαλή συμπεράσματα, θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις i) και ii) της 4.8 και επομένως θα υπολογίσουμε τέσσερις διαφορετικούς εκτιμητές: προς τα εμπρός - διαφοράς και κεντρικής - διαφοράς με τη χρήση ανεξάρτητων ή κοινών τυχαίων αριθμών για διαφορετικές τιμές του  $\theta$ . Ένας γενικός εκτιμητής και για τις 4 αυτές περιπτώσεις είναι ο  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}(n, h)$  για τον οποίο ισχύει ότι:

$$E[\hat{\Delta} - \alpha'(\theta)] = bh^\beta + o(h^\beta), \quad Var[\hat{\Delta}] = \frac{\sigma^2}{nh^\eta} + o(h^{-\eta}) \quad (4.9)$$

για κάποια θετικά  $\beta, \eta, \sigma$  και κάποιο μη - μηδενικό  $b$ . Οι εκτιμητές προς τα εμπρός και κεντρικής διαφοράς τυπικά λαμβάνουν  $\beta = 1$  και  $\beta = 2$  αντίστοιχα. Το  $\eta = 2$  ακολουθεί την περίπτωση i) και το  $\eta = 1$  ακολουθεί την περίπτωση ii) της 4.8.

Ας υποθέσουμε μία ακολουθία εκτιμητών  $\hat{\Delta}(n, h_n)$  όπου

$$h_n = h_* \cdot n^{-\gamma}$$

για θετικά  $h_*$  και  $\gamma$ . Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας για μεροληψία και διακύμανση, έχουμε:

$$MSE(\hat{\Delta}) = b^2 h_n^{2\beta} + \frac{\sigma^2}{nh_n^\eta} \quad (4.10)$$

(εξαιρώντας όρους μεγαλύτερης τάξης από τα  $h_n$  της έκφρασης). Η τιμή του  $\gamma$  για την οποία μεγιστοποιείται ο ρυθμός μείωσης του MSE είναι

$$\gamma = \frac{1}{2\beta + \eta}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι με μικρότερη μεροληψία (μεγαλύτερο  $\beta$ ), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερη προσαύξηση  $h$ . Αν αντικαταστήσουμε αυτή την αξία του  $\gamma$  στην 4.10 και πάρουμε την τετραγωνική ρίζα έχουμε (root mean square error):

$$RMSE(\hat{\Delta}) = O\left(n^{-\frac{\beta}{2\beta + \eta}}\right),$$

που είναι ένα λογικό μέτρο του ρυθμού σύγκλισης του εκτιμητή. Συνεχίζουμε και βρίσκουμε ότι:

<sup>32</sup> Glynn (1989) , Fox & Glynn (1989).

$$\left(n^{\frac{2\beta}{2\beta+\eta}}\right) \cdot MSE(\hat{\Delta}) \rightarrow b^2 h_*^{2\beta} + \sigma^2 h_*^{-\eta}$$

του οποίου η ελαχιστοποίηση ως προς  $h_*$  μας δίνει τη βέλτιστη τιμή:

$$h_* = \left(\frac{\eta \sigma^2}{2\beta b^2}\right)^{\frac{1}{2\beta+\eta}}.$$

Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης δίνονται στον παρακάτω πίνακα για τους εκτιμητές προς τα εμπρός και κεντρικής διαφοράς χρησιμοποιώντας ανεξάρτητους ή κοινούς τυχαίους αριθμούς. Οι στήλες της διακύμανσης και της απόκλισης παρουσιάζουν τους σημαντικότερους όρους που παίζουν τη μεγαλύτερη σημασία έναντι των ολοκληρωμένων εξισώσεων όπως της 4.9. Ο πίνακας υποδεικνύει ότι αν η διακύμανση και η απόκλιση είναι όπως στη δεύτερη και τρίτη στήλη, τότε ισχύουν τα συμπεράσματα των τριών τελευταίων στηλών. Επομένως σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα, ο εκτιμητής κεντρικής – διαφοράς με κοινούς τυχαίους αριθμούς ( $\hat{\Delta}_{C,ii}$ ), τουλάχιστον ασυμπτωτικά, υπερισχύει των υπολοίπων διότι επιτυγχάνει την ταχύτερη σύγκλιση.

Εκτιμητής	Διακύμανση	Απόκλιση	Βέλτιστο $h_n$	Σύγκλιση	$h_*$
$\hat{\Delta}_{F,i}$	$\frac{\sigma_{F,i}^2}{nh^2}$	$\frac{1}{2}\alpha''(\theta)h$	$O(n^{-1/4})$	$O(n^{-1/4})$	$\left(\frac{4\sigma_{F,i}^2}{\alpha''(\theta)^2}\right)^{1/4}$
$\hat{\Delta}_{C,i}$	$\frac{\sigma_{C,i}^2}{nh^2}$	$\frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2$	$O(n^{-1/6})$	$O(n^{-1/3})$	$\left(\frac{18\sigma_{C,i}^2}{\alpha'''(\theta)^2}\right)^{1/6}$
$\hat{\Delta}_{F,ii}$	$\frac{\sigma_{F,ii}^2}{nh}$	$\frac{1}{2}\alpha''(\theta)h$	$O(n^{-1/3})$	$O(n^{-1/3})$	$\left(\frac{2\sigma_{F,ii}^2}{\alpha''(\theta)^2}\right)^{1/3}$
$\hat{\Delta}_{C,ii}$	$\frac{\sigma_{C,ii}^2}{nh}$	$\frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2$	$O(n^{-1/5})$	$O(n^{-2/5})$	$\left(\frac{9\sigma_{C,ii}^2}{\alpha'''(\theta)^2}\right)^{1/5}$

Ρυθμοί σύγκλισης εκτιμητών πεπερασμένων διαφορών με βέλτιστη προσαύξηση  $h_n$ .

Οι εκτιμητές χρησιμοποιούν προς τα εμπρός ( $F$ ) ή κεντρικές ( $C$ ) διαφορές και ανεξάρτητους (i) ή κοινούς τυχαίους αριθμούς (ii).

Για τον εκτιμητή προς τα εμπρός διαφοράς με ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς, ο συντελεστής διακύμανσης  $\sigma_{F,i}^2$  δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{F,i}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} (Var[Y(\theta + h)] + Var[Y(\theta)]) = 2Var[Y(\theta)]$$

υπό την προϋπόθεση της συνέχειας του  $Var[Y(\theta)]$ .

Επειδή ο εκτιμητής κεντρικής διαφοράς έχει παρονομαστή  $2h$ , ο συντελεστής διακύμανσης  $\sigma_{C,i}^2$  δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{C,i}^2 = \frac{1}{2}Var[Y(\theta)].$$

Οι τιμές των  $\sigma_{F,ii}^2$  και  $\sigma_{C,ii}^2$  εξαρτώνται από την από κοινού κατανομή των  $(Y(\theta - h), Y(\theta), Y(\theta + h))$ , η οποία εξαρτάται μερικώς από τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για προσομοίωση (διαφορετικοί αλγόριθμοι μπορεί να αποφέρουν διαφορετικά αποτελέσματα σε διαφορετικές τιμές της αρχικής παραμέτρου με τους τυχαίους αριθμούς να παραμένουν ο ίδιοι). Αντίθετα, το  $Var[Y(\theta)]$  ορίζεται από την οριακή κατανομή του  $Y(\theta)$  οπότε όλοι οι αλγόριθμοι που λαμβάνουν δείγμα από αυτή την κατανομή παράγουν την ίδια διακύμανση. Η διακύμανση των εκτιμητών προς τα εμπρός διαφοράς αποτυπώνεται στις βέλτιστες τιμές του  $h_*$ .

Στην περίπτωση iii) της 4.8 το μέσο τετραγωνικό σφάλμα γίνεται:

$$MSE(\hat{\Delta}) = b^2 h_n^{2\beta} + \frac{\sigma^2}{n}$$

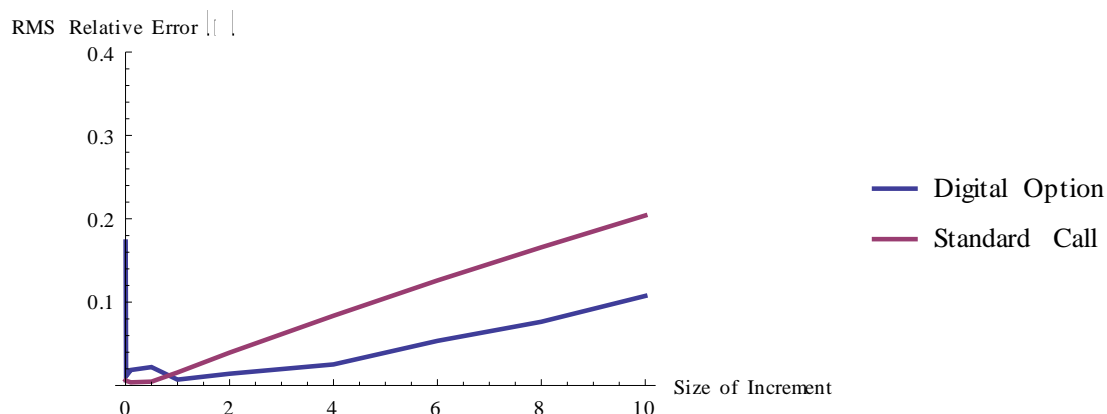
οπότε δεν θυσιάζεται η διακύμανση έναντι της αμεροληψίας. Το  $h_n$  θα πρέπει να λαμβάνεται όσο το δυνατόν μικρότερο, το  $RMSE$  είναι  $O(n^{-1/2})$  και είναι το μικρότερο από όλα στον παραπάνω πίνακα.

Οι δε διαφορές των περιπτώσεων ii) και iii) της 4.8 φαίνονται στο επόμενο παράδειγμα που συγκρίνει το  $RMSE$  εκτιμητών της προς τα εμπρός διαφοράς του delta ενός τυπικού call option με τελικό κέρδος  $(S(T) - K)_+$  και ενός digital option με τελικό κέρδος  $1\{S(T) > K\}$ . Οι παράμετροι του μοντέλου είναι  $K = S(0) = 100$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $r = 0.05$  και  $T = 0.25$ . Οι εκτιμητές προς τα εμπρός διαφοράς χρησιμοποιούν κοινούς τυχαίους αριθμούς που στο συγκεκριμένο παράδειγμα σημαίνει τη χρήση του ίδιου τυχαίου αριθμού από την κανονική κατανομή για την παραγωγή του  $S(T)$  και από το  $S(0)$  και από το  $S(0) + h$ . Για να απλοποιήσουμε τη σύγκριση, στο τέλος διαιρούμε κάθε  $RMSE$  με την πραγματική τιμή του delta για να πάρουμε το σχετικό σφάλμα.

Ακολουθεί η υλοποίηση του αλγορίθμου μέσω του Mathematica:

```
n = 1000000; S0 = 100; K = 100; σ = 0.3; r = 0.05; T = 0.25;
hlist = {0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 6, 8, 10}; k =
Length[hlist];
list1 = Table[0, {k}]; list2 = Table[0, {k}];
d2 = (Log[S0/K] + (r - 0.5*(σ^2))*T)/σ/Sqrt[T];
DIGdelta = Exp[-r*T]/Sqrt[2*Pi]*Exp[-0.5*(d2)^2]/S0/σ/Sqrt[T];
BSdelta =
  CDF[NormalDistribution[], (r*T + 0.5*σ^2*T - Log[K/S0])/σ/(T^0.5)];
Do[Y1 = 0; Y2 = 0; h = hlist[[j]];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    ST1 = S0*Exp[σ*Sqrt[T]*Z];
    ST2 = (S0 + h)*Exp[σ*Sqrt[T]*Z];
    Y1 = Y1 + If[ST2 > K, 1, 0] - If[ST1 > K, 1, 0];
    Y2 = Y2 + Max[ST2 - K, 0] - Max[ST1 - K, 0];, {i, 1, n}];
  DF1 = Exp[-r*T] (Y1)/(n*h);
  DF2 = Exp[-r*T] (Y2)/(n*h);
  list1[[j]] = {h, Abs[(DF1 - DIGdelta)/DIGdelta]};
  list2[[j]] = {h, Abs[(DF2 - BSdelta)/BSdelta]};, {j, 1, k}];
axes = AxesLabel -> {"RMS Relative Error (%)", "Size of Increment"};
labels = PlotLegends -> {"Digital Option", "Standard Call"};
range = PlotRange -> {0, 0.4};
ListLinePlot[{list1, list2}, labels, axes, range]
```

και το παρακάτω σχήμα εμφανίζει την επίδραση της μεταβολής του  $h$  στο RMS σχετικό σφάλμα:



Το τυπικό call option αντιστοιχεί στην περίπτωση iii) της 4.8: το RMS σχετικό σφάλμα μειώνεται όσο μειώνεται η τιμή του  $h$ . Το digital option αντιστοιχεί στην περίπτωση ii) της 4.8: το RMS σχετικό σφάλμα αυξάνεται δραματικά όσο το  $h$  πλησιάζει το 0. Όπως βλέπουμε, το σχετικό σφάλμα ελαχιστοποιείται όταν το  $h$  λαμβάνει τιμή περίπου στο 1,5. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν πάρουμε το  $h$  «πολύ μικρό» έχουμε αρκετά μεγαλύτερο σφάλμα από ότι αν το πάρουμε «πολύ μεγάλο».

## 4.2. Εκτίμηση της Παραγώγου κατά διαδρομή

Αυτή η μέθοδος υπολογίζει την ευαισθησία άμεσα, χωρίς να προσομοιώνει πολλαπλές παραμέτρους. Είδαμε προηγουμένως στην (4.8) περίπτωση iii), ότι το MSE μειώνεται με την προσαύξηση  $h$ , που σημαίνει ότι θα πρέπει το  $h \rightarrow 0$  και να υπολογίσουμε την παράγωγο  $\alpha(\theta) = E[Y(\theta)]$  με τον τύπο:

$$Y'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}. \quad (4.11)$$

Αυτός ο εκτιμητής έχει αναμενόμενη τιμή  $E[Y'(\theta)]$ . Είναι αμερόληπτος εκτιμητής του  $\alpha'(\theta)$  εάν:

$$E \left[ \frac{d}{d\theta} Y(\theta) \right] = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)]. \quad (4.12)$$

Για να κάνουμε την (4.12) πιο ακριβή, χρειαζόμαστε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών  $\{Y(\theta), \theta \in \Theta\}$ , ορισμένο σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$ . Οπότε η  $Y(\theta)$  είναι μία στοχαστική διαδικασία του  $\theta \in \Theta$ . Ας πάρουμε το  $\Theta \subseteq \mathcal{R}$  να είναι ένα διάστημα και ας ορίσουμε  $\omega \in \Omega$  και ας θεωρήσουμε την απεικόνιση  $\theta \rightarrow Y(\theta, \omega)$  σαν μία τυχαία συνάρτηση στο  $\theta$ . Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το  $Y'(\theta) = Y'(\theta, \omega)$  σαν την παράγωγο της τυχαίας συνάρτησης ως προς το  $\theta$  με το  $\omega$  να παραμένει σταθερό. Στην (4.1) μπορούμε εμμέσως να υποθέσουμε ότι η παράγωγος υπάρχει με πιθανότητα 1, και ονομάζουμε την  $Y'(\theta)$  ως παράγωγο (κατά διαδρομή) του  $Y$  στο  $\theta$ .

Στην πράξη, μπορούμε να φανταστούμε το  $\omega$  σαν το αποτέλεσμα όταν έχουμε ένα ιδανικό τρόπο παραγωγής τυχαίων αριθμών. Κάθε  $Y(\theta, \omega)$  είναι το αποτέλεσμα ενός αλγορίθμου προσομοίωσης στην παράμετρο  $\theta$  με σειρά τυχαίων αριθμών  $\omega$ . Κάθε  $Y'(\theta, \omega)$  είναι η παράγωγος του αποτελέσματος της προσομοίωσης συναρτήσει του  $\theta$  με σταθερή τη σειρά των τυχαίων αριθμών. Η τιμή της παραγωγού εξαρτάται, εν μέρει, από τον τρόπο που εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης.

#### 4.2.1. Black & Scholes Delta

Black & Scholes Delta είναι η παράγωγος του τύπου των Black & Scholes ως προς την αρχική τιμή του υποκείμενου αγαθού  $S(0)$ , δεν απαιτεί προσομοίωση, μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς και είναι ίση με:

$$\Phi\left(\frac{r \cdot T + \frac{\sigma^2}{2} \cdot T - \text{Log}\left[\frac{K}{S_0}\right]}{\sigma \sqrt{T}}\right).$$

Ας υποθέσουμε ότι  $Y$  είναι το προεξοφλημένο κέρδος από τη χρήση ενός long call, δηλαδή:

$$Y = e^{-rT} [S(T) - K]_+,$$

όπου:

$$S(T) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0,1), \quad (4.13)$$

λαμβάνοντας το  $\theta$  να είναι το  $S(0)$ , με  $r, \sigma, T$  και  $K$  θετικές σταθερές, έχουμε:

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)}. \quad (4.14)$$

Για τον πρώτο από τους δύο αυτούς παράγοντες βλέπουμε ότι:

$$\frac{d}{dx} \max(0, x - K) = \begin{cases} 0, & x < K \\ 1, & x > K \end{cases}.$$

Αυτή η παράγωγος δεν υπάρχει αν  $x = K$ . Αλλά επειδή η πιθανότητα το  $S(T)$  να είναι ίσο με  $K$  είναι σχεδόν μηδέν, το  $Y$  είναι σχεδόν σίγουρα διαφορίσιμο ως προς το  $S(T)$  με παράγωγο:

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S(T) > K\}. \quad (4.15)$$

Για τον δεύτερο από τους δύο παράγοντες στην (4.14), παρατηρούμε στην (4.13) ότι το  $S(T)$  είναι γραμμικό στο  $S(0)$  με  $\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}$ . Συνδυάζοντας αυτά τα δύο συμπεράσματα καταλήγουμε στον εκτιμητή:

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} \mathbf{1}\{S(T) > K\},$$

ο οποίος υπολογίζεται εύκολα με προσομοίωση του  $S(T)$ . Η αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή είναι το Black & Scholes Delta, οπότε ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος.



### Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Για το long call του προηγούμενου παραδείγματος, θέτουμε  $D_{sim} = 0$ .
- ii. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού  $S(T)$ .
- iii. Εάν ισχύει  $S(T) > K$ , θέτουμε  $D_{sim} = D_{sim} + e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)}$  και επιστρέφουμε στο βήμα ii.  $n$  φορές.
- iv. Υπολογίζουμε το  $\frac{1}{n} D_{sim}$ .

και η υλοποίησή του μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0=30;n=200000; K=32;r=0.2;
s=0.1;T=0.8;w=(r*T+s^2*T/2-Log[K/S0])/s/T^0.5;
Delta=CDF[NormalDistribution[],w];
SimDelta=0;
Do[ST=0;
  Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
  ST=S0*Exp[(r-0.5*s^2)*T+T^0.5*s*Z];
  If[ST>K,SimDelta=SimDelta+Exp[-r*T]*ST/S0],{i,1,n}];
Print["Simulated Delta = ",SimDelta/n]
Print["Delta = ",Delta]
```

```
Simulated Delta = 0.867154
Delta = 0.866934
```

Όπως βλέπουμε, το  $D_{sim}$  προσεγγίζει αρκετά το ακριβές  $Delta$ .

### 4.2.2. Black & Scholes Vega

Μία μικρή μετατροπή της παραπάνω διαδικασίας μας δίνει τον εκτιμητή του Black & Scholes Vega:

$$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{d\sigma}.$$

Ο πρώτος παράγοντας παραμένει ο ίδιος, ενώ ο δεύτερος υπολογίζεται από την (4.13). Με συνδυασμό τους, ο εκτιμητής είναι:

$$\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} (-\sigma T + \sqrt{T}Z) S(T) \mathbf{1}\{S(T) > K\}.$$

Η αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή είναι το Black & Scholes Vega, οπότε ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος.

Χρησιμοποιώντας την (4.13) μπορούμε να εξαλείψουμε το  $Z$  και να γράψουμε τον vega εκτιμητή ως εξής:

$$\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} \left( \frac{\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma} \right) S(T) \mathbf{1}\{S(T) > K\}.$$

Αυτή η μορφή έχει το χαρακτηριστικό ότι δεν στηρίζεται στην κλασική μορφή της (4.13) για την προσομοίωση του  $S(T)$ . Αν και προέρχεται από αυτήν, αυτός ο εκτιμητής θα μπορούσε να εφαρμοστεί με οποιοδήποτε άλλο τρόπο προσομοίωσης του  $S(T)$  από την λογαριθμοκανονική του κατανομή.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Για το παράγωγο του προηγούμενου παραδείγματος, θέτουμε  $Vega_{sim} = 0$ .
- ii. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού  $S(T)$ .
- iii. Εάν ισχύει  $S(T) > K$ , θέτουμε  $V_{sim} = V_{sim} + e^{-rT} \left( \frac{\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma} \right) S(T)$  και επιστρέφουμε στο βήμα ii.  $n$  φορές.
- iv. Υπολογίζουμε το  $\frac{V_{sim}}{n}$ .

και μια υλοποίησή του μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0 = 30; n = 500000; K = 32; r = 0.2;
σ = 0.1; T = 0.8; w = (r*(T) + σ^2*(T)/2 - Log[K/S0])/σ/(T)^0.5;
Φ[t_] := CDF[NormalDistribution[], t];
Vega = S0*Sqrt[T]*Φ'[w];
SimVega = 0;
Do[ST = 0;
  Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
  ST = S0*Exp[(r - 0.5*σ^2)*T + T^0.5*σ*Z];
  If[ST>K, SimVega = SimVega + Exp[-r*T]*ST/σ*(Log[ST/S0] - (r +
0.5*σ^2)*T)]
, {i, 1, n}];
Print["Simulated Vega = ", SimVega/n]
Print["Vega = ", Vega]
```

Simulated Vega = 5.77902  
Vega = 5.76843

Και πάλι βλέπουμε ότι το  $V_{sim}$  προσεγγίζει αρκετά το προσδιοριστικό  $Vega$ .

#### 4.2.3. Delta παραγώγου που εξαρτάται από τη διαδρομή του

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, αλλά τώρα το τελικό κέρδος εξαρτάται από τη συνολική διαδρομή του. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ένα παράγωγο Ασιατικού τύπου για το οποίο ισχύει:

$$Y = e^{-rT}[\bar{S} - K]_+, \quad \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i),$$

για κάποιες συγκεκριμένες χρονικές στιγμές  $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ . Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS(0)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \frac{d\bar{S}}{dS(0)}.$$

Επίσης,

$$\frac{d\bar{S}}{dS(0)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{dS(0)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S(t_i)}{S(0)} = \frac{\bar{S}}{S(0)}$$

Ο εκτιμητής του delta του παραγώγου είναι:

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \frac{\bar{S}}{S(0)}$$

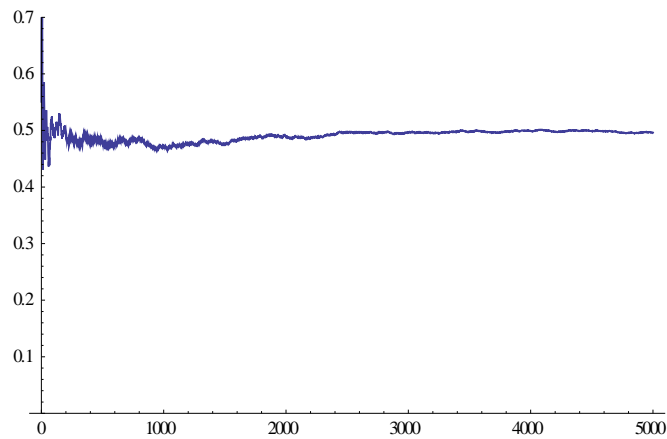
Ο εκτιμητής είναι στην πράξη αμερόληπτος. Επειδή το παράγωγο Ασιατικού τύπου δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω κλειστού τύπου, ο υπολογισμός αυτού του εκτιμητή έχει και πρακτική αξία. Επειδή το  $\bar{S}$  προσομοιώνεται έτσι και αλλιώς για τον υπολογισμό της τιμής του παραγώγου, ο υπολογισμός του εκτιμητή χρειάζεται ελάχιστη επιπλέον προσπάθεια. Σε σύγκριση με ένα εκτιμητή πεπερασμένων διαφορών, αυτός μειώνει τη διακύμανση, μηδενίζει τη μεροληψία και απαιτεί περίπου το μισό υπολογιστικό χρόνο.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Για το long call Ασιατικού τύπου, θέτουμε  $D_{sim} = 0$  προσομοιώνουμε τη διαδρομή του υποκείμενου αγαθού  $S$ .
- ii. Εάν ισχύει  $\bar{S} > K$ , θέτουμε  $D_{sim} = D_{sim} + e^{-rT} \frac{\bar{S}}{S(0)}$  και επιστρέφουμε στο βήμα i.  $n$  φορές.
- iii. Υπολογίζουμε το  $\frac{1}{n} D_{sim}$ .

και μια υλοποίησή του μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
k = 5000; n = 400; T = 0.8; S0 = 30; list = Table[0, {k}];
d = T/n; K = 32; r = 0.2; σ = 0.5;
sdelta = 0;
Do[S = Table[S0, {n}];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[(r - 0.5*σ^2)*d + σ*(d)^0.5*Z];
    , {i, 2, n}];
  If[Mean[S] > K, sdelta = sdelta + Exp[-r*T]*Mean[S]/S0];
  list[[j]] = sdelta/j;
  , {j, 1, k}];
ListLinePlot[list, PlotRange -> {0, 0.7}]
Print["Simulated Delta =", list[[k]]]
```



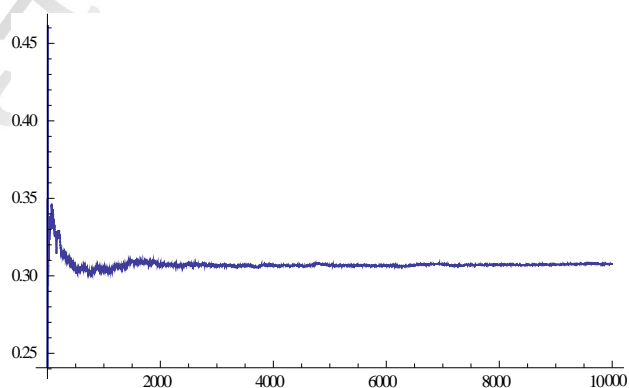
Simulated Delta =0.498647

Τα ίδια περίπου ισχύουν και για ένα lookback put με προεξοφλημένη αξία:

$$Y = e^{-rT} \left( \max_{1 \leq i \leq m} S(t_i) - S(t_m) \right).$$

Ο εκτιμητής του delta απλοποιείται σε  $Y/S(0)$ , ο οποίος είναι επίσης αμερόληπτος. Μία εφαρμογή υπολογισμού του μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
k = 10000; n = 400; T = 0.8; d = T/n; K = 32; r = 0.2; σ = 0.5; S0 = 30;
sdelta = 0; list = Table[0, {k}];
Do[S = Table[S0, {n}];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[(r - 0.5*σ^2)*d + σ*d^0.5*Z];
    , {i, 2, n}];
  Y = Exp[-r*T]*(Max[S] - S[[n]]);
  sdelta = sdelta + Y/S0;
  list[[j]] = sdelta/j;
  , {j, 1, k}];
ListLinePlot[list, PlotRange -> {0, 0.4}]
Print["Simulated Delta =", list[[k]]]
```



Simulated Delta =0.319259

#### 4.2.4. Vega που εξαρτάται από τη διαδρομή

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ευαισθησία του Ασιατικού δικαιώματος προαίρεσης του προηγούμενου παραδείγματος ως προς το  $\sigma$ . Υποθέτουμε ότι:

$$S(t_i) = S(t_{i-1})e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_i-t_{i-1})+\sigma\sqrt{t_i-t_{i-1}}Z_i}, \quad Z_i \sim N(0,1), i = 1, \dots, m$$

Με παραγωγή και των δύο πλευρών έχουμε:

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = \frac{dS(t_{i-1})}{d\sigma} \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} + S(t_i)[- \sigma(t_i - t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i].$$

Με αρχική συνθήκη ότι ισχύει  $dS(0)/d\sigma = 0$ , η σχέση γίνεται:

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = S(t_i) \left[ -\sigma t_i + \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_j \right],$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = \frac{S(t_i)}{\sigma} \left[ \log(S(t_i)/S(0)) - \left( r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_i \right].$$

Ο εκτιμητής του vega του Ασιατικού option είναι:

$$e^{-rT} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{d\sigma} \mathbf{1}_{\{\bar{S} > K\}}$$

και μία εφαρμογή υπολογισμού του μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0=30;n=10;K=30;r=0.2;k=10000;
σ=0.1;T=0.8;μ=0.5;d=T/n;SimVega=0;
Do[S=Table[S0,{n}];
  Do[S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[d*μ+d^0.5*σ*RandomReal[NormalDistribution[]],{i,2,n}];
  If[Mean[S]>K,SimVega=SimVega+Exp[-r*T]/n*Sum[S[[i]]/σ*(Log[S[[i]]/S0)-(r+0.5*σ^2)*(i*d)},{i,1,n}]];
  ,{k}];
Print["Simulated Vega = ",SimVega/k]
```

Simulated Vega = 31.2838

#### 4.2.5. Delta δικαιώματος προαίρεσης με πολλά υποκείμενα αγαθά

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε  $d$  χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία εκφράζονται από μία πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown  $GBM(r, \Sigma)$  για την οποία ισχύει:

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_i^2)t+\sqrt{t}X_i}, \quad i = 1, \dots, d,$$

όπου  $(X_1, \dots, X_d)$  ακολουθούν  $N(0, \Sigma)$ . Συμπεραίνεται ότι  $dS_i(T)/dS_i(0) = S_i(T)/S_i(0)$ , όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση και  $dS_i(T)/dS_j(0) = 0$  για  $i \neq j$ .

Ένα spread option με δύο υποκείμενα αγαθά και προεξοφλημένο κέρδος:

$$Y = e^{-rT} [(S_2(T) - S_1(T)) - K]_+$$

έχει delta συναρτήσει κάθε υποκείμενου αγαθού, των οποίων οι εκτιμητές είναι:

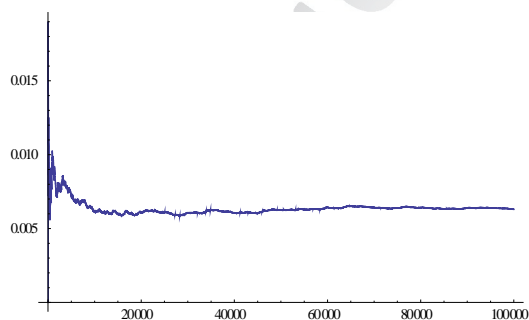
$$\frac{\partial Y}{\partial S_2(0)} = e^{-rT} \frac{S_2(T)}{S_2(0)} \mathbf{1}\{S_2(T) - S_1(T) > K\}$$

και

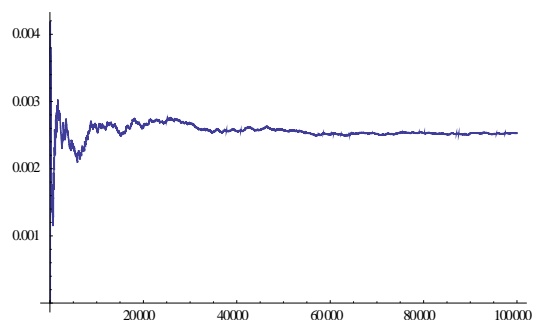
$$\frac{\partial Y}{\partial S_1(0)} = e^{-rT} \frac{S_1(T)}{S_1(0)} \mathbf{1}\{S_2(T) - S_1(T) > K\}.$$

Μία εφαρμογή υπολογισμού του Delta δικαιώματος προαίρεσης με δύο υποκείμενα αγαθά μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
T=1; d=2; μ={-0.3, -0.5}; Σ={{0.2, 0.01},{0.01, 0.05}}; A=Table[0, {d}, {d}];
Do[v = Table[0, {d}];
  Do[v[[i]] = Σ[[i, j]];
    Do[v[[i]] = v[[i]] - A[[j, k]]*A[[i, k]], {k, 1, j}];
    A[[i, j]] = v[[i]]/Sqrt[v[[j]]]
      , {i, j, d}
    , {j, 1, d}];
k = 100000; S0a = 1; S0b = 1; list1 = Table[0, {k}]; list2 = Table[0, {k}];
sdelta1 = 0; sdelta2 = 0; K = 0.5; r = 0.2;
Do[
  S = Table[{S0a, S0b}, {2}];
  S[[2]] = S[[1]]*Exp[μ*T + Sqrt[T]*A.{RandomReal[NormalDistribution[]],
    RandomReal[NormalDistribution[]]}];
  If[S[[2]][[2]] - S[[2]][[1]] > K,
    sdelta1 = sdelta1 + Exp[-r*T]*S[[2]][[2]]/S[[1]][[2]];
  If[S[[2]][[2]] - S[[2]][[1]] > K,
    sdelta2 = sdelta2 + Exp[-r*T]*S[[2]][[1]]/S[[1]][[1]];
  list1[[j]] = sdelta1/j;
  list2[[j]] = sdelta2/j;
  , {j, 1, k}];
ListLinePlot[list1, PlotRange -> All]
ListLinePlot[list2, PlotRange -> All]
Print["Spread Delta1 = ", list1[[k]]]
Print["Spread Delta2 = ", list2[[k]]]
```



Spread Delta1 = 0.00626988



Spread Delta2 = 0.00244165

Ένα option με  $d$  υποκείμενα αγαθά και προεξοφλημένο κέρδος:

$$Y = e^{-rT} [\max\{S_1(T), \dots, S_d(T)\} - K]_+$$

έχει delta συναρτήσει κάθε ενός από τα υποκείμενα αγαθά. Μία μικρή αλλαγή στο  $S_i(T)$  επηρεάζει το  $Y$  μόνο εάν το  $i$ -στό αγαθό ήταν το μέγιστο και ξεπέρασε την τιμή εξάσκησης  $K$ , άρα ισχύει:

$$\frac{\partial Y}{\partial S_i(T)} = e^{-rT} \mathbf{1} \left\{ S_i(T) > \max_{j \neq i} S_j(T), S_i(T) > K \right\}.$$

Οπότε ο εκτιμητής για το  $i$ -οστό delta είναι:

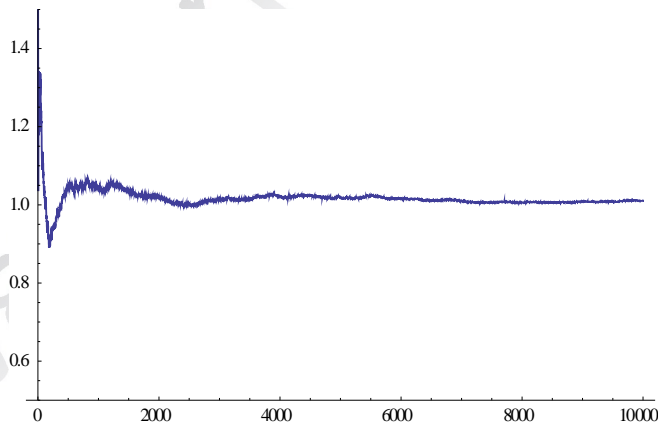
$$e^{-rT} \frac{S_i(T)}{S_i(0)} \mathbf{1} \left\{ S_i(T) > \max_{j \neq i} S_j(T), S_i(T) > K \right\}.$$

Μία εφαρμογή υπολογισμού του Delta του ανωτέρω δικαιώματος προαίρεσης (με τρία υποκείμενα αγαθά) μέσω του Mathematica, είναι η εξής:

```

T = 1; d = 3; r = 0.2; μ = {-0.3, -0.5, 0.2};
Σ = {{0.4, 0.3, 0.2}, {0.3, 0.4, 0.3}, {0.2, 0.3, 0.4}}
A = Table[0, {d}, {d}];
Do[v = Table[0, {d}];
  Do[v[[i]] = Σ[[i, j]];
    Do[v[[i]] = v[[i]] - A[[j, k]]*A[[i, k]], {k, 1, d}];
    A[[i, j]] = v[[i]]/Sqrt[v[[j]]]
      , {i, j, d}
  , {j, 1, d}];
k = 10000; S0a = S0b = S0c = 1; list = Table[0, {k}]; sdelta = 0;
K = 0.5;
Do[S = Table[{S0a, S0b, S0c}, {2}];
  S[[2]] = S[[1]]*Exp[μ*T + Sqrt[T]*
    A.*RandomReal[NormalDistribution[]],
  RandomReal[NormalDistribution[]],
  RandomReal[NormalDistribution[]]];
  If[S[[2]][[3]] > Max[S[[2]][[2]], S[[2]][[1]]] && S[[2]][[3]] > K,
    sdelta = sdelta + Exp[-r*T]*S[[2]][[3]]/S[[1]][[3]];
  list[[j]] = sdelta/j, {j, 1, k}];
ListLinePlot[list, PlotRange -> {0.5, 1.5}]
Print["Spread Delta1 = ", list[[k]]]

```



#### 4.2.6. Διάχυση Τετραγωνικής Ρίζας

Ας θεωρήσουμε τη διάχυση τετραγωνικής ρίζας:

$$dX(t) = a(b - X(t)) dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t).$$

Όπως αναλύσαμε στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, η  $X(t)$  έχει κατανομή ενός πολλαπλασίου μιας μη-κεντρικής  $\chi$ -τετράγωνο τυχαίας μεταβλητής με παράμετρο μη-κεντρικότητας ανάλογη προς το  $X(0)$ :

$$X(t) \sim c_1 \chi_{\nu}^2(c_2 X(0)).$$

η οποία μπορεί να προσομοιωθεί ως εξής (αν  $\nu > 1$ ):

$$X(t) = c_1 \left( \left( Z + \sqrt{c_2 X(0)} \right)^2 + \chi_{\nu-1}^2 \right),$$

όπου  $Z \sim N(0,1)$  και  $\chi_{\nu-1}^2$  μία  $\chi$ -τετράγωνο τυχαία μεταβλητή με  $\nu - 1$  βαθμούς ελευθερίας, ανεξάρτητη της  $Z$ .

Συνεπάγεται ότι

$$\frac{dX(t)}{dX(0)} = c_1 c_2 \left( 1 + \frac{Z}{\sqrt{c_2 X(0)}} \right).$$

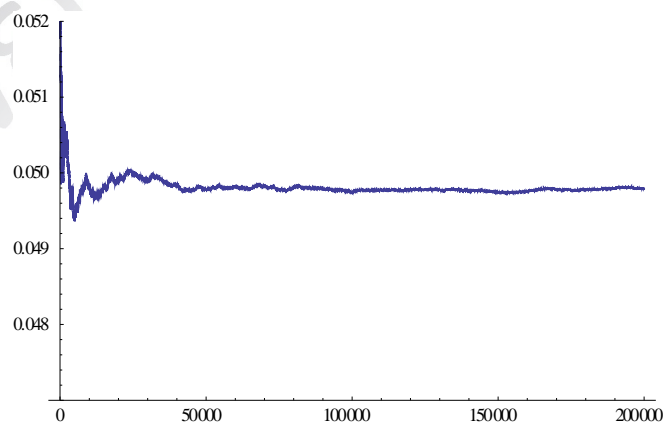
Αυτό γενικεύεται σε μια διαδρομή που προσομοιώνεται στις  $t_1 < t_2 < \dots$  χρονικές στιγμές με την αναδρομική σχέση :

$$\frac{dX(t_{i+1})}{dX(0)} = c_1 c_2 \left( 1 + \frac{Z_{i+1}}{\sqrt{c_2 X(t_i)}} \right) \frac{dX(t_i)}{dX(0)},$$

με τα  $Z_{i+1}$  να είναι αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση από το  $X_{t_i}$  στο  $X_{t_{i+1}}$ . Οι συντελεστές  $c_1, c_2$  εξαρτώνται από τη χρονική προσαύξηση  $t_{i+1} - t_i$ .

Ένας υπολογισμός, μέσω Mathematica, του delta για μία διάχυση τετραγωνικής ρίζας, είναι ο εξής:

```
a = 3; b = 0.1; σ = 0.1; T = 1; k = 200000;
X0 = 0.05;
c1 = σ^2*(1 - Exp[-a*T])/4/a;
c2 = Exp[-a*T]/c1;
d = 4*a*b/σ^2;
list = Table[0, {k}];
Y = 0;
Do[Y = Y + c1*c2*(1 +
  (RandomReal[NormalDistribution[]]/Sqrt[c2*X0]));
  list[[i]] = Y/i, {i, 1, k}]
ListLinePlot[list, PlotRange -> {0.047, 0.052}]
Print["Delta = ", list[[k]]]
```



Delta = 0.0498571



### 4.3. Παραδείγματα Εφαρμογών

#### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup> - Delta Hedging τυπικού call option (Προσδιοριστικό Delta)

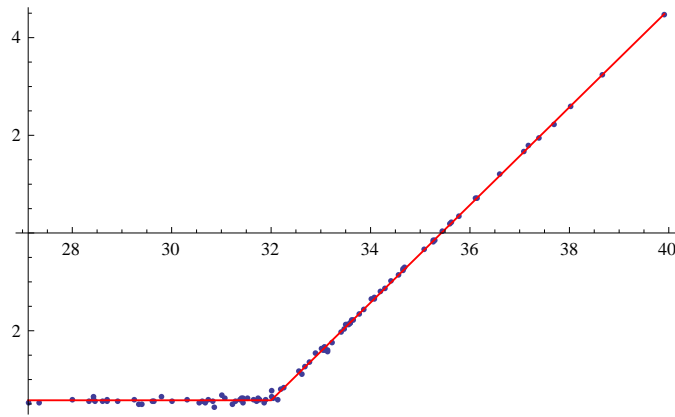
Αποδεικνύεται ότι εάν έχουμε ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο που κατά τη χρονική στιγμή  $t$  περιέχει Delta το πλήθος τεμάχια από το υποκείμενο αγαθό (π.χ. Delta το πλήθος μετοχές), τότε εφαρμόζουμε «Delta Hedging» και το τελικό κέρδος αυτής της στρατηγικής δεν θα διαφέρει από το τελικό κέρδος της αγοράς ενός long call επί του υποκειμένου αγαθού.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Για ένα Long Call Ευρωπαϊκού τύπου  $(K, T)$  επί μιας μετοχής υπολογίζουμε το τελικό κέρδος από τη χρήση του στο χρόνο  $T$ :  $(S(T) - K)_+ - Ce^{rT}$ .
- ii. Στο χρόνο  $t$  υπολογίζουμε τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να κατέχουμε 
$$\Delta_t = \Phi \left( \frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - \text{Log} \left[ \frac{K}{S_t} \right]}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \right)$$
 και αν είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος δανειζόμαστε ή επενδύουμε αντίστοιχα με επιτόκιο  $r$ . Στο χρόνο  $T$  ρευστοποιούμε.
- iii. Συγκρίνουμε το τελικό κέρδος των δύο στρατηγικών.

και υλοποιήσεις του μέσω του Mathematica είναι οι εξής:

```
k = 100; delta = Table[0, {k}]; call = Table[0, {k}]; n = 500;
s = 0.1; T = 0.8; S0 = 30; d = T/n; K = 32; r = 0.2; m = r - 0.5*s^2;
w = (r*T + s^2*T/2 - Log[K/S0])/s/ T^0.5;
C0 = S[[1]]*CDF[NormalDistribution[], w] -
K*Exp[-r*T]*CDF[NormalDistribution[0, 1], w - s*T^0.5];
Do[S = Table[S0, {n + 1}];
Dx = Table[CDF[NormalDistribution[], w], {n + 1}];
cash = Table[-Dx[[1]]*S[[1]], {n + 1}];
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[d*m + d^0.5*s*Z]
, {i, 2, n + 1}];
Do[Dx[[i]] = CDF[NormalDistribution[], (r*(T - (i - 1)*d) +
0.5*s^2 (T -
(i - 1)*d) - Log[K/S[[i]])]/(s*(T - (i - 1)*d)^0.5)];
cash[[i]] = cash[[i - 1]]*Exp[r*d] - (Dx[[i]] - Dx[[i -
1]])*S[[i]];
, {i, 2, n}];
If[S[[n + 1]] > K, Dx[[n + 1]] = 1, Dx[[n + 1]] = 0];
cash[[n + 1]] = cash[[n]]*Exp[r*d] + Dx[[n]]*S[[n + 1]];
delta[[j]] = {S[[n + 1]], cash[[n + 1]]};
call[[j]] = {S[[n + 1]],
Max[S[[n + 1]] - K, 0] - C0*Exp[r*T]};
, {j, 1, k}];
Show[ListPlot[delta], {ListLinePlot[Sort[call], PlotStyle -> Red}]}
```



Σύγκριση τελικού κέρδους από τη χρήση ενός call option μεταξύ Black & Scholes και στρατηγικής Delta Hedging.

**Παράδειγμα 2ο - Delta Hedging τυπικού call option (Υπολογισμός Delta μέσω προσομοίωσης)**

Ο αλγόριθμος παραμένει ο ίδιος με αυτόν του πρώτου παραδείγματος με μόνη διαφορά ότι τώρα το  $\Delta_t$  υπολογίζεται μέσω του αλγορίθμου της παραγράφου 4.2.1.:

Περιγραφή αλγορίθμου υπολογισμού  $\Delta_t$ :

- i. Θέτουμε  $D_{sim} = 0$ .
- ii. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού  $S(T)$ .
- iii. Εάν ισχύει  $S(T) > K$ , θέτουμε  $D_{sim} = D_{sim} + e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)}$  και επιστρέφουμε στο βήμα ii.  $n$  φορές.
- iv. Υπολογίζουμε το  $\frac{1}{n} D_{sim}$ .

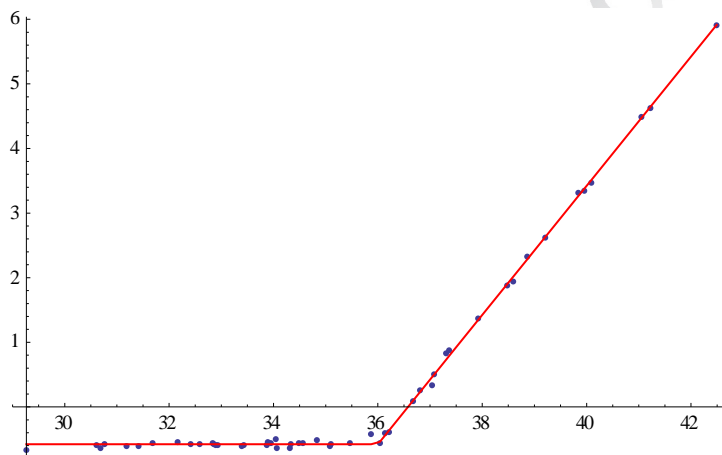
και υλοποιήσεις του μέσω του Mathematica είναι οι εξής:

```
k = 50; delta = Table[0, {k}]; call = Table[0, {k}]; n = 500; times = 20000;
s = 0.1; T = 0.7; S0 = 30; d = T/n; K = 36; r = 0.2; m = r - 0.5*s^2;
w = (r*T + s^2*T/2 - Log[K/S0])/s/T^0.5;
C0 = S0*CDF[NormalDistribution[], w] - K*Exp[-r*T]*CDF[NormalDistribution[0, 1], w - s*T^0.5];
Dsum = 0;
Do[ST = 0; Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
  ST = S0*Exp[(r - 0.5*s^2)*T + T^0.5*s*Z];
  If[ST > K, Dsum = Dsum + Exp[-r*T]*ST/S0, {}], {times}];
D0 = Dsum/times;
Do[S = Table[S0, {n + 1}];
  Dx = Table[D0, {n + 1}]; cash = Table[-Dx[[1]]*S[[1]], {n + 1}];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[d*m + d^0.5*s*Z], {i, 2, n + 1}];
  Do[Dsum = 0;
    Do[ST = 0; Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
```

```

ST = S[[i]]*Exp[(r-0.5*s^2)*(T-(i-1)*d) +
(T - (i - 1)*d)^0.5*s*Z];
If[ST > K, Dsum = Dsum + Exp[-r*(T - (i - 1)*d)]*ST/S[[i]]
, {times}];
Dx[[i]] = Dsum/times;
cash[[i]] = cash[[i - 1]]*Exp[r*d] - (Dx[[i]] -
Dx[[i - 1]])*S[[i]];
, {i, 2, n}];
If[S[[n + 1]] > K, Dx[[n + 1]] = 1, Dx[[n + 1]] = 0];
cash[[n + 1]] = cash[[n]]*Exp[r*d] + Dx[[n]]*S[[n + 1]];
delta[[j]] = {S[[n + 1]], cash[[n + 1]]};
call[[j]] = {S[[n + 1]], Max[S[[n + 1]] - K, 0]*Dx[[n + 1]] -
C0*Exp[r*T]};
, {j, 1, k}];
Show[ListPlot[delta], {ListLinePlot[Sort[call], PlotStyle -> Red]}]

```



### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup> - Delta Hedging μοντέλου διάχυσης με άλματα

Υποθέτουμε και πάλι ότι έχουμε το παράγωγο του 1<sup>ου</sup> παραδείγματος, με μόνη διαφορά ότι το υποκείμενο αγαθό ακολουθεί το μοντέλο διάχυσης με άλματα του Merton ( $Y_j \sim LN(0, 0.5), \lambda = 2$ ). Να υλοποιηθεί στρατηγική delta hedging.

Περιγραφή αλγορίθμου:

Ο αλγόριθμος παραμένει ο ίδιος με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος με μόνη διαφορά ότι τώρα το  $S$  ακολουθεί μοντέλο διάχυσης με άλματα με  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left( e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1 \right)$ :

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left( e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1 \right) \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma [W(t_{i+1}) - W(t_i)]} \cdot \prod_{N(t_i)}^{N(t_{i+1})} Y_j.$$

και υλοποιήσεις του μέσω του Mathematica είναι οι εξής:

```

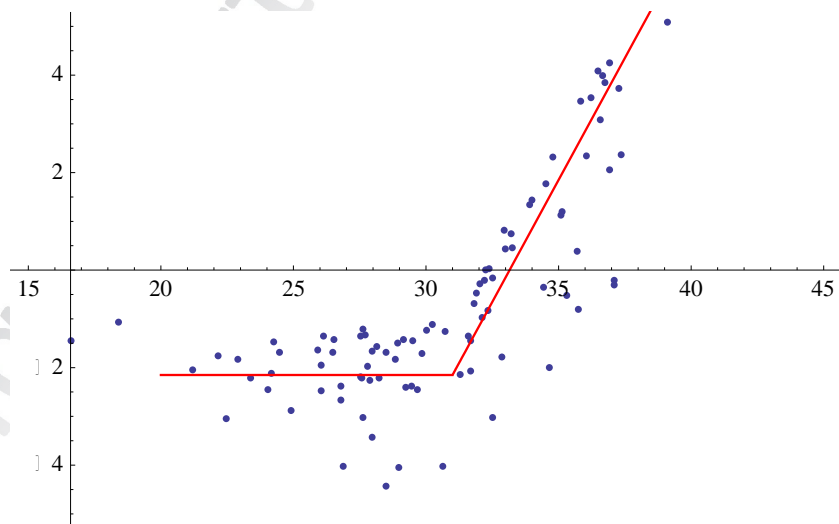
T = 1; S0 = 30; σ = 0.1; r = 0.04; K = 31; δ = 0.1; b = σ*Sqrt[T];
rep = 10000; optionPr1 = Table[0, {rep}]; λ = 2;
Do[M=Product[RandomReal[LogNormalDistribution[0, δ]],
{RandomInteger[PoissonDistribution[λ*T]]}];

```

```

Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
m = (r - 0.5*σ^2 - λ (E^(δ^2/2) - 1)); ST1 = S0*Exp[m*T + b*Z]*M;
optionPr1[[j]] = Exp[-r*T]*Max[ST1 - K, 0];, {j, 1, rep}};
C0 = Mean[optionPr1]
k = 100; delta = Table[0, {k}]; n = 50; times = 200;
s = σ; d = T/n; Dsum = 0;
Do[ST = 0; Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
M = Product[RandomReal[LogNormalDistribution[0, δ]],
{RandomInteger[PoissonDistribution[λ*T]]}];
ST = S0*Exp[m*T + T^0.5*s*Z]*M;
If[ST > K, Dsum = Dsum + Exp[-r*T]*ST/S0], {times}};
D0 = Dsum/times;
Do[S = Table[S0, {n + 1}]; Dx = Table[D0, {n + 1}];
cash = Table[-Dx[[1]]*S[[1]], {n + 1}];
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]];
dM = Product[RandomReal[LogNormalDistribution[0, δ]],
{RandomInteger[PoissonDistribution[λ*T/n]]}];
S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[d*m + d^0.5*s*Z]*dM, {i, 2, n + 1}];
Do[Dsum = 0;
Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
M = Product[RandomReal[LogNormalDistribution[0, δ]],
{RandomInteger[PoissonDistribution[λ*(T - (i - 1)*d)]}];
ST = S[[i]]*Exp[m*(T - (i - 1)*d) + (T - (i - 1)*d)^0.5*s*Z];
If[ST > K, Dsum = Dsum + Exp[-r*(T - (i - 1)*d)]*ST/S[[i]]],
{times}};
Dx[[i]] = Dsum/times;
cash[[i]] = cash[[i-1]]*Exp[r*d] - (Dx[[i]] - Dx[[i-1]])*S[[i]];
, {i, 2, n}];
If[S[[n + 1]] > K, Dx[[n + 1]] = 1, Dx[[n + 1]] = 0];
cash[[n + 1]] = cash[[n]]*Exp[r*d] + Dx[[n]]*S[[n + 1]];
delta[[j]] = {S[[n + 1]], cash[[n + 1]]};
, {j, 1, k}];
p11 = Plot[Max[x-K, 0] - C0*Exp[r T], {x, 20, 45}, PlotStyle -> Red];
Show[ListPlot[delta], p11, PlotRange -> {{15, 45}, {-5, 5}}]

```



Από το παραπάνω γράφημα βλέπουμε ότι ο μέσος που χρησιμοποιήσαμε ( $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left( e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1 \right)$ ) για την εφαρμογή delta hedging προσεγγίζει την αντίστοιχη στρατηγική αγοράς του call option.

**Παράδειγμα 4<sup>ο</sup> - Delta Hedging call option με υποκείμενο αγαθό που ακολουθεί εκθετική Variance Gamma**

Υποθέτουμε ότι διατίθεται ένα call option ( $K = 32, T = 1$ ) με υποκείμενο αγαθό που ακολουθεί εκθετική Variance Gamma που ορίζεται με τη διαφορά δύο ανεξάρτητων Γάμμα διαδικασιών ( $C, G, M$ ) με παραμέτρους ( $G = 60, M = 45$ ) ενώ η τρέχουσα τιμή του αγαθού είναι  $S(0) = 30$ , το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι  $r = 0,1$ . Να υλοποιηθεί στρατηγική delta hedging.

**Περιγραφή αλγορίθμου:**

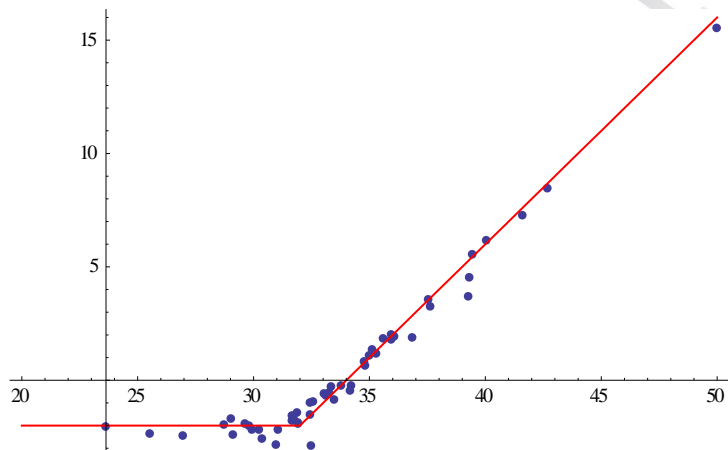
- i. Υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου  $C = -r / (\text{Log}[(1 - 1/M)(1 + 1/G)])$
- ii. Υπολογίζουμε το τελικό κέρδος από τη χρήση του call option  $(S(T) - K)_+$ . Το  $S$  ακολουθεί Variance Gamma με  $X(t) = S(0) \exp(U(t) - D(t))$ , όπου  $U$  και  $D$  ανεξάρτητες Γάμμα διαδικασίες (με παραμέτρους  $\alpha = \Delta_t C, \beta = 1/M$  για την  $U$  και  $\alpha = \Delta_t C, \beta = 1/G$  για την  $D$ ).
- iii. Εναλλακτικά, στο χρόνο  $t$  υπολογίζουμε τον αριθμό των μετοχών  $D_{sim}$  που πρέπει να κατέχουμε:
  - a. Θέτουμε  $D_{sim} = 0$ .
  - b. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού  $S(T)$ .
  - c. Εάν ισχύει  $S(T) > K$ , θέτουμε  $D_{sim} = D_{sim} + e^{-r(T-t)} \frac{S(T)}{S(t)}$  και επιστρέφουμε στο b.,  $n$  φορές.
  - d. Υπολογίζουμε το  $\frac{1}{n} D_{sim}$ .
- iv. Αν το  $D_{sim}$  αυξάνεται (μειώνεται), αγοράζουμε (πουλάμε) μετοχές μέσω δανεισμού (και επενδύουμε) με επιτόκιο  $r$ . Στο χρόνο  $T$  ρευστοποιούμε.
- v. Συγκρίνουμε το τελικό κέρδος αυτής της στρατηγικής με την αγορά του call option.

```
k = 50; delta = Table[0, {k}]; call = Table[0, {k}]; n = 50; r = 0.1;
times = 5000; T = 1; S0 = 30; d = T/n; K = 32; Dsum = 0; CT = 0;
M = 45; G = 60; c = -r/(Log[(1 - 1/M)(1 + 1/G)]); maxprice = 0;
Do[S = Table[S0, {n + 1}];
  Do[G1 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/M]];
    G2 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/G]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[G1 - G2], {i, 2, n + 1}];
  If[S[[n + 1]] > K, Dsum = Dsum + Exp[-r*T]*S[[n + 1]]/S0];
  If[S[[n + 1]] > K, CT = CT + S[[n + 1]] - K];, {times}];
D0 = Dsum/times; CT = CT/times; times = 300;
Do[S = Table[S0, {n + 1}];
  Dx = Table[D0, {n + 1}];
  cash = Table[-Dx[[1]]*S[[1]], {n + 1}];
  Do[G1 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/M]];
    G2 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/G]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[G1 - G2], {i, 2, n + 1}];
  If[S[[n + 1]] > maxprice, maxprice = S[[n + 1]]];
  Do[Dsum = 0;
    Do[ST = S[[i]];
      Do[G1 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/M]];
        G2 = Random[GammaDistribution[T/n*c, 1/G]]];
```

```

ST = ST*Exp[G1 - G2], {1, i, n + 1}];
If[ST > K,
  Dsum = Dsum + Exp[-r*(T - (i - 1)*d)]*ST/S[[i]]
, {times}];
Dx[[i]] = Dsum/times;
cash[[i]] = cash[[i - 1]]*Exp[r*d] - (Dx[[i]] -
Dx[[i - 1]])*S[[i]], {i, 2, n + 1}];
cash[[n + 1]] = cash[[n]]*Exp[r*d] + Dx[[n]]*S[[n + 1]];
delta[[j]] = {S[[n + 1]], cash[[n + 1]]};
, {j, 1, k}];
Show[ListPlot[delta, PlotStyle -> PointSize[.012]],
Plot[Max[x - K, 0] - CT, {x, 20, maxprice}, PlotStyle -> Red],
PlotRange -> All]

```



Διαπιστώνουμε ικανοποιητική προσέγγιση του τελικού κέρδους του call option με την στρατηγική delta hedging με υπολογισμό του delta μέσω προσομοίωσης.

### **Παράδειγμα 5<sup>ο</sup> - Σύγκριση Delta ενός lookback option μέσω των δύο μεθόδων (pathwise, forward-difference)**

Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα lookback call option ( $n = 100$ ,  $m = 30$ ,  $S_0 = 30$ ,  $K = 32$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $r = 0.2$ ,  $T = 0.8$ ). Να υπολογιστεί μέσω της μεθόδου pathwise και της μεθόδου προς τα εμπρός διαφοράς (για διαφορετικές τιμές του  $h$ ) το Delta στο χρόνο 0 και να συγκριθούν μεταξύ τους.

Περιγραφή αλγορίθμου:

- i. Για το lookback option, θέτουμε  $D_{sim} = 0, Y = 0$ .
- ii. Προσομοιώνουμε τη διαδρομή του υποκείμενου αγαθού  $S$ .
- iii. Υπολογίζουμε το προεξοφλημένο κέρδος  $Y = e^{-rT}(\max_{1 \leq i \leq m} S(t_i) - S(t_m))$ .
- iv. Θέτουμε  $D_{sim} = D_{sim} + \frac{Y}{S(0)}$  και επιστρέφουμε στο βήμα ii.  $n$  φορές.
- v. Υπολογίζουμε το  $\frac{1}{n}D_{sim}$ .
  - i. Εναλλακτικά: Θέτουμε  $Y = 0$ .
  - ii. Χρησιμοποιώντας κοινούς τυχαίους αριθμούς, προσομοιώνουμε δύο διαδρομές του υποκείμενου αγαθού  $S_1, S_2$  με αρχική τιμή  $S(0)$  και  $S(0) + h$  αντίστοιχα.
  - iii. Υπολογίζουμε τη διαφορά του κέρδους στο χρόνο  $T$ :  $P_2 - P_1 = \max_{1 \leq i \leq m} S_2(t_i) - S_2(t_m) - \max_{1 \leq i \leq m} S_1(t_i) - S_1(t_m)$  και θέτουμε  $Y = Y + P_2 - P_1$  και

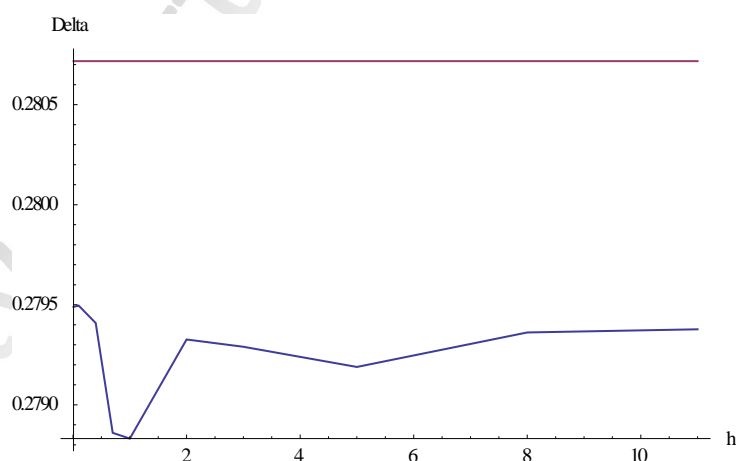
επιστρέφουμε στο βήμα  $i$ .  $n$  φορές.

iv. Υπολογίζουμε το  $D_{sim2} = \frac{e^{-rT}Y}{nh}$ .

v. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα vi έως ix για διαφορετικές τιμές του  $h$ .

και υλοποιήσεις του μέσω του Mathematica είναι οι εξής:

```
n = 500000; m=100; hlist={0.01, 0.1, 0.4, 0.7, 1, 2, 3, 5, 8, 11};
k = Length[hlist]; S0 = 30; K = 32; σ = 0.5; r = 0.2; T = 0.8;
list1 = Table[0, {k}]; d = T/m;
sdelta = 0; list = Table[0, {n}];
(*1st Method*)
Do[S = Table[S0, {m + 1}];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[(r - 0.5*σ^2)*d + σ*d^0.5*Z];, {i, 2,
  m + 1}];
  Y = Exp[-r*T]*(Max[S] - S[[m]]);
  sdelta = sdelta + Y/S0;
  list[[j]] = sdelta/j; , {j, 1, n}];
(*2nd Method*)
Do[Y = 0; h = hlist[[j]];
  Do[S1 = Table[S0, {m + 1}]; S2 = Table[S0 + h, {m + 1}];
  Do[Z = RandomReal[NormalDistribution[]];
    S1[[1]] = S1[[1 - 1]]*Exp[(r - 0.5*σ^2)*d + σ*d^0.5*Z];
    S2[[1]] = S2[[1 - 1]]*Exp[(r - 0.5*σ^2)*d + σ*d^0.5*Z];
    , {1, 2, m + 1}];
  Pr1 = Max[S1] - S1[[m + 1]];
  Pr2 = Max[S2] - S2[[m + 1]];
  Y = Y + Pr2 - Pr1;
  , {i, 1, n}];
  DF = Exp[-r*T]*Y/n/h; list1[[j]] = {h, DF}; Print[j];
  , {j, 1, k}];
ListLinePlot[{list1, {{Min[hlist], list[[n]]}, {Max[hlist],
  list[[n]]}}}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"h", Delta}]
```

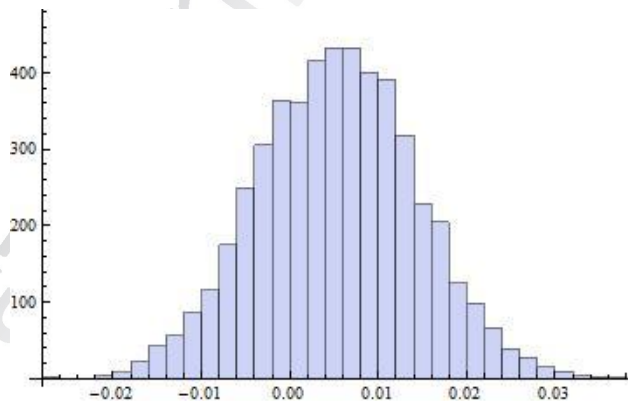


Από το παραπάνω γράφημα φαίνεται πώς αποκλίνει ο προσεγγιστικός υπολογισμός του delta με τη μέθοδο της προς τα εμπρός διαφοράς, καθώς το  $h$  αυξάνεται αλλά και πόσο σημαντικά κοντά βρίσκονται οι δύο μέθοδοι, όπως επιβεβαιώνεται και από τη σύγκριση του μέσου, της διακύμανσης και του ιστογράμματος 5.000 προσομοιωμένων τιμών του delta που παράγουν οι δύο μέθοδοι με κοινούς τυχαίους αριθμούς:

```

n = 100; m = 30;
S0 = 30; K = 32;  $\sigma$  = 0.5; r = 0.2; T = 0.8; list1 = Table[0, {k}];
d = T/m; list = Table[0, {n}]; list1 = Table[0, {k}];
k = 5000; D1 = Table[0, {k}]; D2 = Table[0, {k}];
Do[
  ZT = Table[RandomReal[NormalDistribution[]], {n}, {m + 1}];
  (*1st Method*)
  sdelta = 0;
  Do[S = Table[S0, {m + 1}];
    Do[Z = ZT[[j, i]];
      S[[i]] = S[[i - 1]]*Exp[(r - 0.5* $\sigma$ ^2)*d +  $\sigma$ *d^0.5*Z];
      , {i, 2, m + 1}];
    Y = Exp[-r*T]*(Max[S] - S[[m+1]]);
    sdelta = sdelta + Y/S0; , {j, 1, n}];
  D1[[a]] = sdelta/n;
  (*2nd Method*)
  Y = 0; h = 0.5;
  Do[S1 = Table[S0, {m + 1}]; S2 = Table[S0 + h, {m + 1}];
    Do[Z = ZT[[i, 1]];
      S1[[1]] = S1[[1 - 1]]*Exp[(r - 0.5* $\sigma$ ^2)*d +  $\sigma$ *d^0.5*Z];
      S2[[1]] = S2[[1 - 1]]*Exp[(r - 0.5* $\sigma$ ^2)*d +  $\sigma$ *d^0.5*Z];
      , {1, 2, m + 1}];
    Pr1 = Max[S1] - S1[[m + 1]];
    Pr2 = Max[S2] - S2[[m + 1]];
    Y = Y + Pr2 - Pr1; , {i, 1, n}];
  DF = Exp[-r*T]*Y/n/h; list1[[a]] = {h, DF};
  D2[[a]] = DF; , {a, 1, k}];
Histogram[D1 - D2]
Print["Pathwise Method Mean = ", Mean[D1]];
Print["Pathwise Method Variance = ", Variance[D1]];
Print["Forward-Difference Method Mean = ", Mean[D2]];
Print["Forward-Difference Variance = ", Variance[D2]];

```



```

Pathwise Method Mean : 0.260074
Pathwise Method Variance : 0.000336272
Forward Difference Method Mean : 0.254759
Forward Difference Variance : 0.000381865

```



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ελληνική

- Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*.
- Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*.

## Ξένα

- Ahrens J.H. & Dieter U., (1974) Computer Methods for Sampling from the gamma, beta, Poisson and binomial distributions, *Computing* **12**, 223-246.
- Andersen, Jackel & Kahl, (2010) *Simulation of Square-Root Processes*, John Wiley & Sons.
- Asmussen S. (1998) *Stochastic Simulation with a View Towards Stochastic Processes*, MaPhySto Lecture Notes No 2, University of Aarhus, Aarhus, Denmark.
- Black & Scholes, (1973) The pricing of options and corporate liabilities , *Journal of Political Economy* **81**, 637-654.
- Cox J.C., Ingersoll J.E. , Ross S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**, 129-151.
- Cheng R.C.H. & Feast G.M. (1980) Gamma Variate Generators with increased shape parameter range, *Communications of the ACM* **23**, 389-394.
- Dupire B. (1994) Pricing with a smile, *Risk* **7** (January), 18-20.
- Feller W. (1951) Two Singular Diffusion Problems, *Annals of Mathematics* **54**, 173-182.
- Fishman G.S. (1996) *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Fox B.L. & Glynn P.W. (1989) Replication schemes for limiting expectations, *Probability in the engineering and information sciences* **3**, 299-318.
- Glasserman P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Volatility*, Springer.
- Glynn P.W. (1989) Optimization of stochastic systems via simulation, *Proceedings of the winter simulation conference*, IEEE Press, New York, 90-105.
- Heston S.I. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* **6**, 327-343.
- Ho T.S.Y. and Lee S. B. (1986) Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance* **41**, 1011-1029.
- Hull C.J. (2009) *Options, Futures and Other Derivatives - 7th Edition*, Pearson Education.
- Hull C.J. and White A. (1990) Pricing interest-rate-derivative securities, *Review of Financial Studies* **3**, 573-592.

- Johnson NL, Kotz S, Balakrishnan N., (1995) *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*, Second Edition, Wiley, New York.
- Karatzas I. & Shreve S. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.
- Kou S.G. (2002) A jump diffusion model for option pricing, *Management Science* **48**, 1086-1101.
- Lewis P.A.W. & Shedler G.S. (1979) Simulation of nonhomogeneous Poisson Processes by thinning, *Naval Logistics Quarterly* **26**, 403-413.
- Madan, D. B., Carr, P. & Chang, E. C. (1998) The variance Gamma process and option pricing, *European Finance Review* **2**, 79-105.
- Merton R.C. (1976) Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics* **3**, 125-144.
- Michael J.R., Schucany W.R. & Haas R.W. (1976) Generating Random Variates using transformations with multiple roots, *American Statistician* **30**, 88-90.
- Scott L.O. (1996) Simulating a multi-factor term structure model over relatively long discrete time periods, *Proceedings of the IAFE First Annual Computational Finance Conference*, Graduate School of Business, Stanford University.
- Schoutens W. (2003) *Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, JohnWiley & Sons Ltd.
- Vasicek O.A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* **5**, 177-188.
- Zazanis M.A. (1987) *Statistical Properties Of Perturbation Analysis Estimates For Discrete Event Systems*, doctoral dissertation, Division of Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, Mass.