

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ
ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ
ΤΥΠΟΥ**

Μιχαήλ Ν. Μποζούδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Οκτώβριος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στις υπ' αριθμ. 1^η/27.09.2012, 3^η/03.12.2012 και 1^η/26.09.2013 συνεδριάσεις του, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επικ. Καθηγητής κ. Μ. Μπούτσικας (Επιβλέπων)
- Καθηγητής κ. Μ. Κούτρας
- Αναπλ. Καθηγητής κ. Κ. Πολίτης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα, Επικ. Καθηγητή κ. Μιχαήλ Μπούτσικα, για την πολύτιμη βοήθεια, επισημάνσεις και κατευθύνσεις που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικανικού τύπου δεν έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα κάποιος κλειστός μαθηματικός τύπος, όπως αντίστοιχα συμβαίνει στην περίπτωση των δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει πολλούς αναλυτές στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων, για την εκτίμηση της αξίας των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου. Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι μία σύντομη εισαγωγή στο πρόβλημα αποτίμησης των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, η περιγραφή και κατανόηση κάποιων διαδεδομένων μεθόδων αποτίμησης, καθώς και η υλοποίησή τους με τη βοήθεια του υπολογιστικού λογισμικού Wolfram Mathematica®. Επίσης, στόχος είναι μία πειραματική συγκριτική αξιολόγηση των μεθόδων που υλοποιήθηκαν, ως προς την ταχύτητα και την ακρίβεια, ώστε να εντοπιστούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

ABSTRACT

Although the European-style options can be valued analytically, there are no available explicit closed-form solutions for valuing the American-style options. This has led many analysts to develop various approximating methods. The scope of this study is an introduction to the problem of valuing American options, the description and comprehension of specific approximating methods, as well as the implementation of the corresponding algorithms via Wolfram Mathematica® software. The outcome of this study is a comparison between these methods in terms of accuracy and computational speed, and an experimental examination of the advantages and disadvantages of each method.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	i
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	ii
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	v
1 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ	1
1.1 Χρήσιμες μακροοικονομικές και χρηματοοικονομικές έννοιες	1
1.2 Δικαιώματα προαίρεσης	4
1.3 Κέρδος συναρτήσει της τιμής του υποκείμενου αγαθού	6
1.4 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου	8
1.5 Αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου	10
1.6 Κρίσιμη τιμή και βέλτιστος χρόνος εξάσκησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου.....	11
2 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΑΓΑΘΟΥ	14
2.1 Γεωμετρική κίνηση Brown (GBM).....	14
2.2 Άλματα διάχυσης – Merton’s Jump Diffusion Model (JDM)	16
2.3 Στοχαστική μεταβλητότητα – Heston’s Stochastic Volatility (SV) Model	19
3 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ	22
3.1 Προεκβολή Richardson	22
3.2 Προσομοίωση Monte-Carlo	23
3.3 Ανάδρομη επαγωγή	24
3.4 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson.....	24
3.5 Παλινδρόμηση.....	25
3.6 Σύνθετος κανόνας του Simpson	26
4 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	27
4.1 GJ Method	27
4.2 Quadratic Approximation.....	32
4.3 Integral representation of the early exercise premium.....	36
4.4 LBA	39
4.5 LUBA.....	43

5 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΔΕΝΔΡΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	48
5.1 CRR Standard Method	48
5.2 BBS and BBSR Methods	53
5.3 Modified GJ Methods	55
5.4 Improved AB Method	60
6 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ.....	64
6.1 Προσομοίωση της διαδικασίας απόφασης “hold-or-exercise”	64
6.2 Bundling Method	68
6.3 LSM Method	74
7 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	77
7.1 Κριτήρια αξιολόγησης.....	77
7.2 Το σενάριο της αξιολόγησης	77
7.3 Αποτελέσματα	80
7.4 Συμπεράσματα	85
ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	89
ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ.....	95

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
7.1	Σφάλματα προσέγγισης βραχυπρόθεσμου ($T = 0,5$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0 = 40, K = 45$
7.2	Σφάλματα προσέγγισης μεσοπρόθεσμου ($T = 1$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0 = 40, K = 45$
7.3	Σφάλματα προσέγγισης μακροπρόθεσμου ($T = 3$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0 = 40, K = 45$
7.4	Βασικά περιγραφικά στατιστικά μέτρα για τα σφάλματα των μεθόδων καθώς και χρόνοι υπολογισμού (sec)

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΗΜΑ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
1.1	Συνάρτηση κέρδους για ένα long call
1.2	Συνάρτηση κέρδους για ένα short call
1.3	Συνάρτηση κέρδους για ένα long put
1.4	Συνάρτηση κέρδους για ένα short put
2.1	Κίνηση Brown για τη μεταβλητή $\ln(S)$
2.2	Γεωμετρική κίνηση Brown για τη μεταβλητή S
2.3	Απλή στοχαστική διαδικασία GBM (μπλε) και η ίδια στοχαστική διαδικασία με ενσωματωμένα άλματα διάχυσης (κόκκινο). Το μέσο μέγεθος των αλμάτων είναι 104,6%, ενώ τα άλματα συνέβησαν στα βήματα No 80, 831 και 836
2.4	Η ανάλυση της μεταβλητότητας σύμφωνα με το μοντέλο του Heston, με μέση τιμή $\sigma = 0,3$ και παραμέτρους $\theta = 0,8$, $\xi = 0,3$, $\rho = 0,7$
2.5	Η ανάλυση της τιμής του υποκείμενου αγαθού χωρίς στοχαστική μεταβλητότητα (μπλε) και με στοχαστική μεταβλητότητα (κόκκινο)
4.1	Προσέγγιση του συνόρου πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$ και $T = 3$, για ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$
4.2	Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$ και $T = 3$, και ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$ βημάτων: Με τη διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζεται το φράγμα L_t^* , όπως προκύπτει από τη σχέση (4.6), ενώ με την κόκκινη συνεχή καμπύλη απεικονίζεται η προσέγγιση του «πραγματικού» φράγματος B_t^* , σύμφωνα με τη μέθοδο QA (βλ. ενότητα 4.2)
4.3	Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης για ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$, $T = 3$ και ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$ βημάτων: Με τη διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζεται το κάτω φράγμα L_t^* της μεθόδου LBA, ενώ με την μπλε συνεχή καμπύλη απεικονίζεται το φράγμα B_t^* της μεθόδου “integral representation of the early exercise premium”
5.1	Διωνυμικό δέντρο έξι περιόδων για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$
5.2	Οι συντεταγμένες (i,j) των κόμβων ενός διωνυμικού δέντρου 6 περιόδων

ΣΧΗΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- 5.3 Το σύνоро πρώιμης εξάσκησης (κίτρινο) σε ένα διωνυμικό δέντρο 50 περιόδων, για δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$
- 5.4 Χρήση της τεχνικής των ελαχίστων τετραγώνων σε ένα διωνυμικό δέντρο 50 περιόδων, για την προσέγγιση του συνόρου πρώιμης εξάσκησης σε ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, από μια συνάρτηση της μορφής $B(t) = a + be^{ct}$
- 5.5 Αξία του δικαιώματος πώλησης τύπου "Bermudan" $P(2)$ συναρτήσεϊ του μοναδικού χρονικού σημείου $t_1 \in (0, T)$ που επιτρέπεται η πρώιμη εξάσκηση, με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων.
- 5.6 Αξία του δικαιώματος πώλησης τύπου "Bermudan" $P(3)$ συναρτήσεϊ των μοναδικών χρονικών σημείων $t_1, t_2 \in (0, T)$ που επιτρέπεται η πρώιμη εξάσκηση, με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων.
- 5.7 Προσέγγιση της αξίας του δικαιώματος μετά από κάθε επανάληψη της προεκβολής Richardson (κόκκινη γραμμή), σε σχέση με τη διωνυμική μέθοδο χωρίς προεκβολή (μπλε γραμμή). Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται ο εκθέτης n των 2^n σημείων χρονικού διαμερισμού.
- 6.1 Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης (κόκκινες τελείες) με τη μέθοδο QA, για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$. Με την μπλε περιοχή απεικονίζεται το 95% της GBM για την τιμή του υποκείμενου αγαθού
- 6.2 Κατασκευή δύο ψευδοτυχαίων ανεξίξεων: για τη μία (μπλε) αποφασίζεται η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος, ενώ για την άλλη (μωβ) όχι.
- 6.3 Διαδικασία "hold-or-exercise" για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$. Έγινε ομοιόμορφος διαμερισμός του χρόνου σε 50 βήματα και χρήση 1000 ψευδοτυχαίων ανεξίξεων GBM
- 6.4 Περιπτώσεις πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, στο χρονικό διάστημα $(0, T)$, με χρήση 10^5 ψευδοτυχαίων ανεξίξεων
- 6.5 Διαδικασία "hold-or-exercise" για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, σύμφωνα με τη μέθοδο Bundling, για $\alpha = 0,5$, $n = 16$, $P = Q = 40$. Απεικονίζεται το διακριτό σύνоро (κίτρινη καμπύλη) και η ευρύτερη ζώνη μετάβασης (βρίσκεται μεταξύ κόκκινης και πράσινης καμπύλης)
- 7.1 Κατάταξη των μεθόδων βάσει του MSE και του χρόνου υπολογισμού: Όσο πιο κάτω και αριστερά είναι μία μέθοδος, τόσο γρηγορότερη και ακριβέστερη είναι αντίστοιχα
- 7.2 Θηκογράμματα σφαλμάτων για τις μεθόδους GJ, 2-point max, 3-point max, QA, Integral, LB, LBA, UB, LUBA, Binomial, BBS και BBSR. Απεικονίζονται και οι χρόνοι υπολογισμού (sec)

ΣΧΗΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- 7.3 Θηκογράμματα σφαλμάτων για τις μεθόδους Imp-AB, Bundling και LSM. Απεικονίζονται και οι χρόνοι υπολογισμού (sec)
- 7.4 Ταχύτητα σύγκλισης των μεθόδων Binomial (μπλε) και BBS (κόκκινη) στην πραγματική τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, ανάλογα με τον χρονικό διαμερισμό που χρησιμοποιείται. Ο οριζόντιος άξονας εκφράζει τον εκθέτη των 2^n βημάτων του διαμερισμού
- 7.5 Θηκογράμματα σφαλμάτων για τις χρονικά ισοδύναμες μεθόδους BBS 130 περιόδων και LBA. Για την BBS 130 περιόδων είναι $MSE = 1,67 \cdot 10^{-5}$ και για την LBA είναι $MSE = 5,42 \cdot 10^{-5}$
- 7.6 Προσαρμογή της μεθόδου Bundling (με $n = 12$ βήματα, $\alpha = 0,5$ και $R = 2500$ ανελίξεις) στο μοντέλο Merton's JDM, για την εύρεση της τιμής ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, συναρτήσει του μέσου ετήσιου αριθμού αλμάτων διάχυσης και της μεταβλητότητας του μεγέθους τους, και της μεταβλητότητας του μεγέθους τους (παράμετρος ν). Σε όλες τις περιπτώσεις έγινε υπόθεση ότι ο λογάριθμος του μέσου μεγέθους των αλμάτων (παράμετρος m) είναι μηδέν (σχέση (2.4))

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 1973, οι Fischer Black και Myron Scholes έδειξαν ότι η αξία ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου, το οποίο μπορεί να ασκηθεί μόνο κατά το χρόνο λήξης του, υπολογίζεται αναλυτικά μέσω της επίλυσης μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Ωστόσο, για την περίπτωση των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, τα οποία μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και τη λήξη τους, δεν έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα αντίστοιχος κλειστός αναλυτικός τύπος. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει πολλούς αναλυτές στην ανάπτυξη προσεγγιστικών εκτιμητικών μεθόδων, οι οποίες παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Το μεγάλο πρακτικό αλλά και θεωρητικό ενδιαφέρον για τις βασικές μεθόδους προσέγγισης της αξίας δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, καθώς και η πρόκληση υλοποίησής τους στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, αποτέλεσε το κίνητρο ανάπτυξης του θέματος της παρούσας Διπλωματικής εργασίας.

Η εργασία είναι δομημένη σε 3 μέρη: Το πρώτο καλύπτει σε γενικές γραμμές το θεωρητικό μέρος (Κεφάλαια 1, 2 και 3), το δεύτερο είναι το περιγραφικό μέρος, στο οποίο παρουσιάζονται και υλοποιούνται συγκεκριμένες προσεγγιστικές μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου (Κεφάλαια 4, 5 και 6), ενώ το τελευταίο είναι το πειραματικό μέρος, όπου πραγματοποιείται συγκριτική αξιολόγηση των μεθόδων σε όρους ακρίβειας και ταχύτητας (Κεφάλαιο 7). Ειδικότερα, το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου περιλαμβάνει περιληπτικά τα εξής:

Στο **1^ο Κεφάλαιο** γίνεται μία **γενική εισαγωγή** σε χρήσιμες χρηματοοικονομικές και μακροοικονομικές έννοιες, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης και η συνάρτηση κέρδους τους, και γίνεται μία θεωρητική εισαγωγή στο πρόβλημα αποτίμησης των δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου, καθώς και στις υποθέσεις / παραδοχές που το διέπουν.

Στο **2^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα κυριότερα **στοχαστικά μοντέλα** της διαχρονικής εξέλιξης της τιμής του υποκείμενου αγαθού, πάνω στα οποία βασίζονται οι περισσότερες μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων. Ειδικότερα, παρουσιάζονται και υλοποιούνται η γεωμετρική κίνηση Brown, το μοντέλο του Merton με άλματα διάχυσης και το μοντέλο του Heston με στοχαστική μεταβλητότητα.

Στο **3^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται κάποιες χρήσιμες **προσεγγιστικές τεχνικές**, όπως η προεκβολή Richardson, η ανάδρομη επαγωγή, η επαναληπτική τεχνική Newton-Raphson, η προσομοίωση Monte-Carlo, η παλινδρόμηση, ο κανόνας του τραpezίου και ο σύνθετος κανόνας του Simpson. Οι συγκεκριμένες τεχνικές χρησιμοποιούνται στις μεθόδους αποτίμησης των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, που παρουσιάζονται στα επόμενα Κεφάλαια.

Στο **4^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται και υλοποιούνται κάποιες βασικές **αναλυτικές μέθοδοι** αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, όπως η GJ (Geske & Johnson, 1984), η Quadratic Approximation (Barone-Adesi & Whaley, 1987), η Integral Approximation (Kim, 1990), η Lower Bound Approximation και Lower & Upper Bound Approximation (Broadie & Detemple, 1996).

Στο **5^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται και υλοποιούνται κάποιες βασικές **δενδρικές μέθοδοι** αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, όπως η Standard Binomial (Cox, Ross & Rubinstein, 1979), η Binomial Black & Scholes με ή χωρίς προεκβολή Richardson (Broadie & Detemple, 1996), η Modified GJ (Bunch & Johnson, 1992) και η Improved Binomial Accelerated (Breen, 1991).

Στο **6^ο Κεφάλαιο** περιγράφεται η διαδικασία λήψης απόφασης για τη διακράτηση ή την πρώιμη εξάσκηση ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, ενώ παρουσιάζονται και υλοποιούνται κάποιες βασικές **μέθοδοι προσομοίωσης**, όπως η Bundling (Tilley, 1992) και η Least Squares Monte-Carlo (Longstaff & Schwartz, 2001)

Τέλος, στο **7^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα από την υλοποίηση της κάθε μεθόδου βάσει συγκεκριμένων συνδυασμών παραμέτρων, πραγματοποιείται μία **συγκριτική αξιολόγηση** ως προς την ακρίβεια και την ταχύτητα υπολογισμού και εξετάζονται τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

1.1 Χρήσιμες μακροοικονομικές και χρηματοοικονομικές έννοιες

Πριν από την εξέταση του κύριου αντικειμένου της παρούσας διπλωματικής εργασίας και προκειμένου να γίνει ευκολότερη η κατανόηση του περιεχομένου των επομένων ενοτήτων, κρίνεται σκόπιμη η σύντομη ανασκόπηση κάποιων χρήσιμων όρων και εννοιών:

Διαχρονική αξία του χρήματος

Ο όρος «διαχρονική αξία του χρήματος» (time value of money) εκφράζει την εγγενή δυνατότητα κερδοφορίας του χρήματος, ότι δηλαδή το ίδιο το χρήμα με την πάροδο του χρόνου και επενδυόμενο σε βιώσιμα επενδυτικά σχέδια μπορεί να αποφέρει νέο χρήμα. Έτσι π.χ., ένα ευρώ στην αρχή του χρόνου ισοδυναμεί με περισσότερα από ένα ευρώ στο τέλος του χρόνου, ή αντίστροφα, ένα ευρώ στο τέλος του χρόνου ισοδυναμεί με λιγότερα από ένα ευρώ στην αρχή του χρόνου.

Παρούσα αξία, προεξόφληση και ανατοκισμός

Χρηματοροές (cash flows), είτε εισροές είτε εκροές, που πραγματοποιούνται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα. Για να είναι εφικτή η άθροιση ή σύγκριση χρηματοροών, θα πρέπει πρώτα να αναχθούν σε μία κοινή χρονική βάση, ώστε να καταστούν χρονικά ισοδύναμες (time equivalent).

Η παρούσα αξία (present value, PV) είναι η εκφρασμένη σε σημερινούς όρους μελλοντική αξία (future value, FV) χρηματοροών που πρόκειται να συμβούν στο μέλλον. Για την εύρεση της παρούσας αξίας, χρησιμοποιείται η διαδικασία της προεξόφλησης (discounting process). Με τη χρήση κατάλληλων συντελεστών, οι οποίοι ονομάζονται συντελεστές προεξόφλησης (discounting factors) ή συντελεστές παρούσας αξίας (present value factors), προεξοφλείται σε σημερινούς όρους η αξία των μελλοντικών χρηματοροών.

Ο ανατοκισμός (compounding process) είναι η αντίστροφη διαδικασία από αυτήν της προεξόφλησης. Με τη χρήση των συντελεστών ανατοκισμού (compounding factors), οι οποίοι είναι αντίστροφοι των συντελεστών προεξόφλησης, ανατοκίζεται σε μελλοντικούς όρους η αξία σημερινών χρηματοροών.

Κίνδυνος, επιτόκιο ελεύθερο κινδύνου και συνεχής ανατοκισμός

Ο κίνδυνος (risk) εκφράζει τη συνισταμένη της πιθανότητας εκδήλωσης ενός ανεπιθύμητου γεγονότος και του κόστους των επιπτώσεών του. Για έναν επενδυτή, ο κίνδυνος μπορεί π.χ. να εκφράζει την πιθανότητα μία επένδυση να οδηγήσει σε ζημία, επί το ύψος της ζημίας. Συνεπώς, για να προχωρήσει ένας ορθολογικά σκεπτόμενος επενδυτής σε μία επένδυση υψηλού κινδύνου, θα πρέπει το γινόμενο της πιθανότητας κερδοφορίας επί το ύψος της κερδοφορίας να είναι εξίσου υψηλό.

Ο κίνδυνος παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή συντελεστών ανατοκισμού ή προεξόφλησης. Συνήθως, οι επενδυτές έχουν διαφορετική αντίληψη ως προς το πόσο επικίνδυνη είναι μία επένδυση ή έχουν διαφορετικές προσδοκίες κερδοφορίας, κλπ. Έτσι, διαφορετικοί επενδυτές μπορεί να θεωρούν καταλληλότερη τη χρήση διαφορετικών συντελεστών ανατοκισμού ή προεξόφλησης για χρηματοροές της ίδιας επένδυσης.

Μέσα σε μία αγορά, ορίζεται η έννοια του επιτοκίου ελεύθερου κινδύνου ή επιτοκίου χωρίς κίνδυνο (risk-free rate). Το επιτόκιο αυτό αποτελεί τη βάση για την κατασκευή συντελεστών ανατοκισμού ή προεξόφλησης, ούτως ώστε να υπάρχει μία κοινή αντίληψη για τη διαχρονική αξία του χρήματος. Στην πράξη, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο εκφράζει την απόδοση μίας διαχρονικά βιώσιμης επένδυσης με τον ελάχιστο δυνατό κίνδυνο, όπως π.χ. το EURIBOR ή το επιτόκιο των ομολόγων (bonds) μίας οικονομικά ανεπτυγμένης χώρας.

Αν μία χρηματοροή με παρούσα αξία PV ανατοκίζεται με σταθερό ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r και με k περιόδους ανατοκισμού ανά έτος, μετά από m περιόδους ανατοκισμού η μελλοντική αξία FV της χρηματοροής θα είναι:

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{k}\right)^m.$$

Για τη διάρκεια ενός έτους και όταν $k \rightarrow \infty$ (δηλαδή ο ανατοκισμός είναι συνεχής), το όριο της ποσότητας $(1 + r/k)^k$ είναι e^r . Συνεπώς, στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού, η μελλοντική αξία FV μετά από t έτη θα δίνεται από τον τύπο:

$$FV = PV e^{rt}.$$

Αντίστοιχα, η παρούσα αξία PV μίας χρηματοροής με μελλοντική αξία FV θα δίνεται από τη σχέση:

$$PV = FV e^{-rt}.$$

Συνεχές μέρισμα

Όσοι συμμετέχουν σε ένα βιώσιμο επενδυτικό σχέδιο (π.χ. οι μέτοχοι μιας εταιρείας), εκτός από το κέρδος που μπορεί να έχουν από την εξέλιξη της τιμής των τίτλων που κατέχουν (μετοχές, ομόλογα, κλπ), έχουν συνήθως δικαίωμα συμμετοχής και στα κέρδη της εταιρείας, εισπράττοντας κάποιο μέρισμα (dividend). Στην πράξη, τις περισσότερες φορές η αποκοπή του μερίσματος γίνεται μία φορά ανά έτος, γεγονός που προκαλεί μία στιγμιαία και απότομη πτώση στην τιμή της μετοχής, προκειμένου να επανέλθει η αγορά σε κατάσταση ισορροπίας.

Η στιγμιαία ασυνέχεια στην τιμή της μετοχής, λόγω της αποκοπής μερίσματος, καθιστά δύσκολη την αποτύπωση της διαχρονικής της εξέλιξης της τιμής της με κάποιο μαθηματικό (συνήθως στοχαστικό) μοντέλο. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ασυνέχειας, οι αναλυτές κάνουν την υπόθεση σε θεωρητικό επίπεδο, ότι το αποδιδόμενο μέρισμα είναι συνεχές και υπεισέρχεται ανελλιπώς στη διαμόρφωση της τιμής της μετοχής.

Επενδυτικές θέσεις

Ένας επενδυτής λαμβάνει θέση “long” (long position) αναφορικά με έναν χρηματοοικονομικό τίτλο (π.χ. μετοχή), όταν η αύξηση της τιμής του τίτλου θα του αποφέρει κέρδος, ενώ η μείωση της τιμής του τίτλου θα του αποφέρει ζημιά. Αντίστοιχα, ένας επενδυτής λαμβάνει θέση “short” (short position), όταν η αύξηση της τιμής του τίτλου θα του αποφέρει ζημιά, ενώ η μείωση της τιμής του τίτλου θα του αποφέρει κέρδος.

Ένα παράδειγμα “short” θέσης είναι η ανοιχτή πώληση (short selling) τίτλων: Ένας επενδυτής μπορεί να πουλήσει τίτλους που δεν διαθέτει, «ανοίγοντας» αντίστοιχη θέση πώλησης στην αγορά. Είναι όμως υποχρεωμένος (θεωρητικά) κάποια στιγμή να «κλείσει» τη θέση του, επιστρέφοντας τους τίτλους.

Εξισορροποιητική κερδοσκοπία

Οι ορθολογικά σκεπτόμενοι επενδυτές προσπαθούν πάντα να εκμεταλλεύονται ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος (arbitrage). Οι ευκαιρίες αυτές προκύπτουν από στιγμιαίες ανισορροπίες μίας δυναμικά κινούμενης αγοράς. Μόλις εμφανιστεί μία ευκαιρία για arbitrage, πολλοί επενδυτές θα σπεύσουν να την εκμεταλλευτούν, με συνέπεια αυτή πολύ γρήγορα να εκλείψει και η αγορά να επανέλθει σε κατάσταση ισορροπίας.

Σε θεωρητικό επίπεδο, γίνεται η υπόθεση ότι όλα τα χρηματοοικονομικά προϊόντα έχουν “no-arbitrage” αξίες, δηλαδή τέτοιες που να εξασφαλίζεται πάντα η ισορροπία στην αγορά και να μην υπάρχουν ποτέ ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος.

Χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης

Ένα χαρτοφυλάκιο B λέγεται χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (replicating portfolio, hedging portfolio) έναντι του χαρτοφυλακίου A , όταν τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια αξία σε κάθε χρονική στιγμή t , αλλά έχουν διαφορετική σύνθεση τίτλων. Κατά συνέπεια, αν ένας επενδυτής πουλήσει το ένα χαρτοφυλάκιο, εξασφαλίζεται πλήρως έναντι του κινδύνου που αντιμετωπίζει από την κατοχή του άλλου.

Τυχαίος περίπατος ή κίνηση Brown

Ο τυχαίος περίπατος (random walk) ή κίνηση Brown (Brownian motion, BM) είναι μία στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο, της οποίας οι διαδρομές είναι συνεχείς συναρτήσεις και οι προσαυξήσεις ανεξάρτητες και κανονικές. Ωστόσο, αν και οι ανελίξεις που περιγράφονται από την κίνηση Brown είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμες.

Μία στοχαστική ανέλιξη X_t , $t \geq 0$, ονομάζεται κίνηση Brown, με παραμέτρους: α) τη σταθερά μ , που εκφράζει τον μέσο αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής της (drift), και β) τη σταθερά $\sigma > 0$, που εκφράζει τη μεταβλητότητά της (volatility), όταν, για κάθε $y \geq 0$, ισχύει:

$$\text{Η τ. μ. } (X_{t+y} - X_t) \sim N(\mu t, t\sigma^2) \text{ και ανεξάρτητη από τις } X_u, 0 \leq u \leq y.$$

Όταν μία ανέλιξη X_t ακολουθεί BM με παραμέτρους μ και σ , η ανέλιξη $S_t = e^{X_t}$ ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) με τις ίδιες παραμέτρους. Εκτενέστερη ανάλυση των συγκεκριμένων ανελίξεων ακολουθεί σε επόμενη ενότητα.

Ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας

Σε μία αγορά, οι επενδυτές έχουν την προσδοκία αποκόμισης υψηλότερου κέρδους από ένα “risky” asset, όπως π.χ. μία μετοχή, σε σχέση με ένα “riskless” asset, όπως π.χ. ένα ομόλογο. Αυτό συμβαίνει επειδή στην «πραγματική» αγορά, η επένδυση σε διαφορετικά επενδυτικά προϊόντα ενέχει διαφορετικό κίνδυνο, γεγονός που γεννά διαφορετικές προσδοκίες για κέρδη και δίνει κίνητρο στους επενδυτές να επιλέγουν διαφορετικές στρατηγικές. Η «πραγματική» αγορά διέπεται από το μέτρο πιθανότητας κινδύνου P .

Σε θεωρητική βάση, οι αναλυτές κάνουν την υπόθεση ότι η αγορά είναι «ουδέτερη» κινδύνου, ότι δηλαδή δεν διαφέρει ο κίνδυνος ανάμεσα σε επενδύσεις σε “risky” ή “riskless” assets. Μία τέτοια ουδέτερη (θεωρητικά) αγορά, διέπεται από το ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας Q (risk-neutral probability measure).

1.2 Δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι μία από τις πιο γνωστές κατηγορίες παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, μεταξύ άλλων όπως: τα προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts), τα προϊόντα δανεισμού τίτλων (stock repo & stock reverse repo) και οι ανταλλαγές (swaps).

Δικαίωμα προαίρεσης (option) καλείται μία συμφωνία (ένα συμβόλαιο) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του αγοραστή (holder) και του πωλητή (writer) του δικαιώματος, με τη μεσολάβηση ενός Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα (και όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πωλήσει, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή του δικαιώματος ένα συγκεκριμένο αγαθό A (asset) σε μία προκαθορισμένη τιμή K , κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου $[0, T]$ ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T στο μέλλον. Το υποκείμενο αγαθό A μπορεί π.χ. να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα, αλλά μπορεί σε ορισμένες αγορές να είναι και κάποιο εμπόρευμα.

Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι πιο σύνθετο παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν από ότι ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (future) ή προθεσμιακό συμβόλαιο (forward), επειδή ο αγοραστής του δικαιώματος δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του, παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον αγοραστή και για αυτό ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - option price, option premium) στον πωλητή, για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο πωλητής απεμπολώντας ένα δικαίωμα που θα μπορούσε να του αποφέρει κέρδος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα δικαίωμα χαρακτηρίζεται από τα εξής:

(α) Το είδος του δικαιώματος: δικαίωμα αγοράς (call option) ή δικαίωμα πώλησης (put option). Στην αγορά μπορεί κανείς να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς (long call) ή να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς (short call) ή να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης (long put) ή να πουλήσει ένα δικαίωμα πώλησης (short put).

(β) Το υποκείμενο αγαθό ή τίτλος (underlying asset) (π.χ. δείκτης FTSE/ASE-20, μετοχή ΟΤΕ, κλπ).

(γ) Το μέγεθος του συμβολαίου (π.χ. ένα συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή του ΟΤΕ, μπορεί να αντιστοιχεί σε 100 μετοχές του ΟΤΕ).

(δ) Η ημερομηνία λήξης (exercise date, maturity). Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης T , υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης: (α) **Αμερικανικού τύπου** (American option), όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης. (β) **Ευρωπαϊκού τύπου** (European option), όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης.

(ε) Η τιμή εξάσκησης K (strike price ή exercise price): Η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς/πώλησης θα αγοράσει/πωλήσει (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα) το υποκείμενο αγαθό.

(στ) Το αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - option price, option premium), το οποίο καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του δικαιώματος. Συνήθως στη βιβλιογραφία, με κεφαλαία C ή P συμβολίζονται τα ασφάλιστρα δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου (αγοράς και πώλησης, αντίστοιχα), ενώ με μικρά c και p συμβολίζονται τα ασφάλιστρα δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου.

Οι συναλασσόμενοι των δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί να ανήκουν σε κάποια από τις ακόλουθες κατηγορίες:

- **Hedgers:** Έχουν ως στόχο να προστατεύσουν μία θέση τους στην αγορά, προσπαθώντας να μειώσουν τη μέγιστη ζημιά που θα μπορούσαν να υποστούν. Αντισταθμίζουν τον κίνδυνο της επένδυσής τους με την επιλογή μίας αντίθετης θέσης στην αγορά παραγώγων.
- **Κερδοσκόποι (speculators):** Αναλαμβάνουν μεγάλους κινδύνους ευελπιστώντας ότι θα αποκομίσουν μεγάλα κέρδη. Συνήθως προσπαθούν να αυξήσουν τη διασπορά του αναμενόμενου κέρδους τους.
- **Arbitrageurs:** Στόχος τους είναι η εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage), προσπαθώντας να εντοπίσουν και να εκμεταλλευτούν τις στιγμιαίες ανισοροπίες της αγοράς, που αποτελούν ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος.

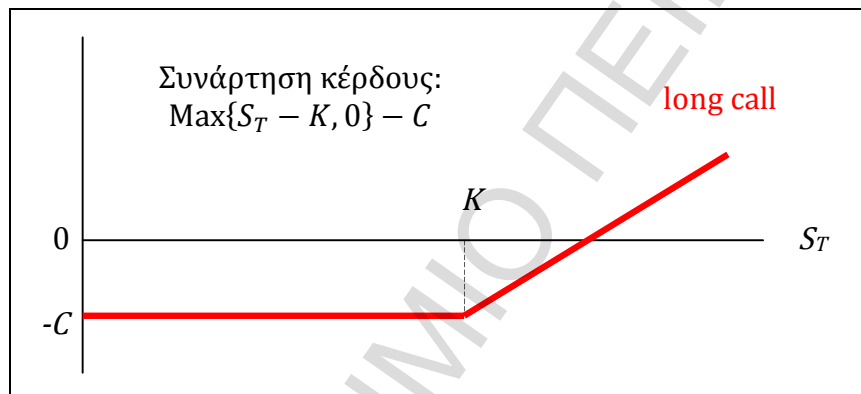
(Για περισσότερες λεπτομέρειες, π.χ. βλ. Κεφ.1 των εκπαιδευτικών σημειώσεων του κ. Μ. Μπούτσικα, για το μάθημα «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», 2004).

1.3 Κέρδος συναρτήσει της τιμής του υποκείμενου αγαθού

Έστω ότι το υποκείμενο αγαθό είναι μία μετοχή και έστω ότι κατά το χρόνο εξάσκησης του δικαιώματος, η τιμή της μετοχής είναι S_T . Επίσης έστω ότι η τιμή εξάσκησης είναι K , το ασφάλιστρο του δικαιώματος αγοράς C , το ασφάλιστρο του δικαιώματος πώλησης P , ενώ δεν λαμβάνεται υπόψη η διαχρονική αξία του χρήματος.

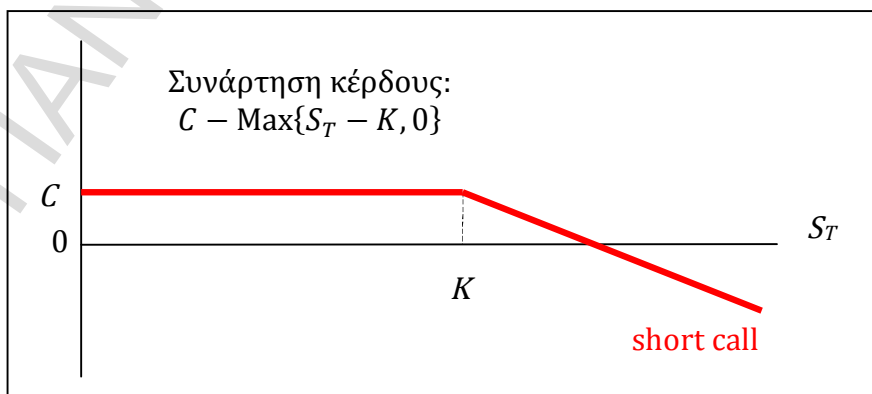
Ένας επενδυτής θα λάβει “long call” θέση επί της μετοχής, αν προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει στο μέλλον ενώ ταυτόχρονα δεν θέλει να αναλάβει τον κίνδυνο να αγοράσει μετοχές στην παρούσα φάση. Είναι όμως διατεθειμένος να πληρώσει ένα ασφάλιστρο για να αποκτήσει τη long call θέση. Η συνάρτηση κέρδους για τον επενδυτή θα είναι $\text{Max}\{S_T - K, 0\} - C$:

ΣΧΗΜΑ 1.1
Συνάρτηση κέρδους για ένα long call



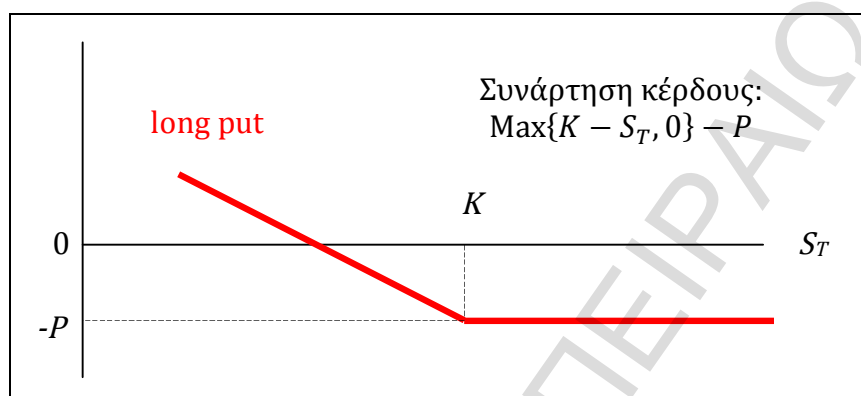
Ένας επενδυτής θα λάβει “short call” θέση επί της μετοχής, αν προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής θα παραμείνει στάσιμη ή θα πέσει ελαφρά στο μέλλον, οπότε επιθυμεί να καρπωθεί ένα ασφάλιστρο κινδύνου, πουλώντας ένα δικαίωμα αγοράς επί των μετοχών που κατέχει. Η συνάρτηση κέρδους για τον επενδυτή θα είναι $C - \text{Max}\{S_T - K, 0\}$:

ΣΧΗΜΑ 1.2
Συνάρτηση κέρδους για ένα short call



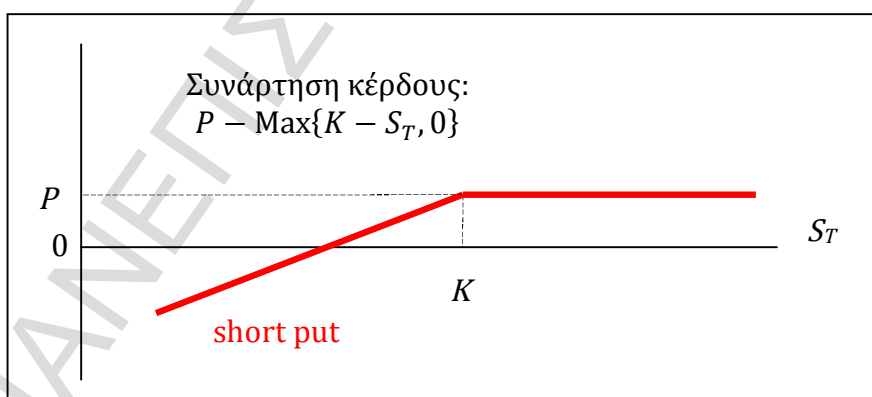
Ένας επενδυτής θα λάβει “long put” θέση επί της μετοχής, αν προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής θα πέσει στο μέλλον ενώ ταυτόχρονα δεν θέλει να αναλάβει τον κίνδυνο να πουλήσει τις μετοχές του στην παρούσα φάση. Είναι όμως διατεθειμένος να πληρώσει ένα ασφάλιστρο για να αποκτήσει το συγκεκριμένο δικαίωμα. Η συνάρτηση κέρδους για τον επενδυτή θα είναι $\text{Max}\{K - S_T, 0\} - P$:

ΣΧΗΜΑ 1.3
Συνάρτηση κέρδους για ένα long put



Ένας επενδυτής θα λάβει “short put” θέση επί της μετοχής, αν προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής θα παραμείνει στάσιμη ή θα ανέβει ελαφρά στο μέλλον, οπότε επιθυμεί να καρπωθεί ένα ασφάλιστρο κινδύνου, πουλώντας ένα δικαίωμα πώλησης επί των μετοχών που κατέχει. Η συνάρτηση κέρδους για τον επενδυτή θα είναι $P - \text{Max}\{K - S_T, 0\}$:

ΣΧΗΜΑ 1.4
Συνάρτηση κέρδους για ένα short put



Ένα δικαίωμα αγοράς (ή πώλησης, αντίστοιχα) μπορεί, σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , να χαρακτηρίζεται ως:

- “in-the-money”: στην περίπτωση που $S_t > K$ (ή $K > S_t$, αντίστοιχα).
- “deep-in-the-money”: στην περίπτωση που $S_t \gg K$ (ή $K \gg S_t$, αντίστοιχα).
- “at-the-money”: στην περίπτωση που $S_t = K$.

- “out-of-the-money”: στην περίπτωση που $S_t < K$ (ή $K < S_t$, αντίστοιχα).
- “deep-out-of-the-money”: στην περίπτωση που $S_t \ll K$ (ή $K \ll S_t$, αντίστοιχα).

1.4 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου

Οι Black & Scholes (1973) και Merton (1973) απέδειξαν ότι είναι εφικτή μία αναλυτική μαθηματική έκφραση για την αξία ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου, με βάση τις ακόλουθες παραδοχές:

(α) Η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί GBM με παραμέτρους τάσης μ και μεταβλητότητας σ (βλ. ενότητα 1.1). Στην πράξη, σε αρκετές περιπτώσεις το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να μην περιγράφει ικανοποιητικά την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού.

(β) Το ελεύθερο κινδύνου επιτόκιο r της αγοράς και η μεταβλητότητα σ της τιμής του υποκείμενου αγαθού είναι γνωστά και διαχρονικά σταθερά (τουλάχιστον για το χρονικό διάστημα που εξετάζεται η αγορά). Στην πράξη, οι δύο αυτές μεταβλητές μπορεί να μεταβάλλονται.

(γ) Το κόστος συναλλαγών είναι μηδενικό. Στην πράξη, υπάρχει πάντα ένα κόστος συναλλαγών.

(δ) Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος (arbitrage). Στην πράξη, οι αγορές κινούνται δυναμικά και ενδέχεται να εμφανίζουν ανισορροπίες, οι οποίες επιτρέπουν, έστω παροδικά, την εφαρμογή στρατηγικής για την αποκόμιση σίγουρου κέρδους.

(ε) Η διαπραγμάτευση του υποκείμενου αγαθού στην αγορά είναι διαρκής. Στην πράξη, οι περισσότερες αγορές λειτουργούν με συγκεκριμένο ωράριο.

(στ) Το υποκείμενο αγαθό αποδίδει συνεχές μέρισμα δ . Στην πράξη, το μέρισμα αποδίδεται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

Βάσει των παραπάνω παραδοχών, οι Black & Scholes (1973) έδειξαν ότι η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου τη χρονική στιγμή t , θα πρέπει να ταυτίζεται με την προεξοφλημένη αξία του αναμενόμενου κέρδους του (κατά τη λήξη), υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q . Αν, κατά τη λήξη, η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι S_T , η αξία των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου θα είναι αντίστοιχα, για $t \in [0, T]$:

$$\text{European call premium} = c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q(\text{Max}\{S_T - K, 0\}),$$

$$\text{European put premium} = p(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q(\text{Max}\{K - S_T, 0\}),$$

όπου K η τιμή εξάσκησης, r το επιτόκιο ελεύθερο κινδύνου, T ο χρόνος ωρίμανσης, S_T η τιμή του υποκείμενου αγαθού κατά τη λήξη και $e^{-r(T-t)}$ ο συντελεστής προεξόφλησης για την εύρεση της παρούσας αξίας στη χρονική στιγμή t .

Ισοδύναμα αποδεικνύεται (Black & Scholes 1973, Merton 1973) ότι η αξία V ενός δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου είναι συνάρτηση της τιμής του υπο-

κείμενου αγαθού και του χρόνου, και προκύπτει από την επίλυση της παρακάτω μερικής διαφορικής εξίσωσης (Partial Differential Equation, PDE):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1.1)$$

Για να έχει μοναδική λύση η παραπάνω PDE, θα πρέπει να ισχύουν δύο συνοριακές συνθήκες για τη μεταβλητή S και μία για τη μεταβλητή t . Για ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου π.χ., οι συνθήκες αυτές είναι:

- Για $S_t \rightarrow \infty$, $V(S_t, t) = S_t e^{-\delta(T-t)}$
- Για $S_t \rightarrow 0$, $V(S_t, t) = 0$
- Για $t = T$, $V(S_T, T) = \text{Max}\{S_T - K, 0\}$

Αν κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης με ομόλογα και τίτλους του υποκειμένου αγαθού (π.χ. μετοχές) και στη συνέχεια επιχειρηθεί η εξίσωση της αξίας του με ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, αποδεικνύεται ότι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.1) είναι:

$$\text{Για } t \in [0, T], \quad V(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q \text{Max}\{S_T - K, 0\}, \quad (1.2)$$

όπου Q είναι το ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας. Η σχέση (1.2) είναι ευρέως γνωστή ως «τύπος αποτίμησης υπό ουδέτερο κίνδυνο» (risk-neutral pricing formula).

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η σχέση (1.2), που δίνει την αξία $c(S_t, t)$ ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, ισοδύναμα μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως εξής:

$$c(S_t, t) = e^{-\delta(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2), \quad (1.3)$$

όπου N η αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής και:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (1.4)$$

Αντίστοιχα, η αξία $p(S_t, t)$ ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου δίνεται από τη σχέση:

$$p(S_t, t) = -e^{-\delta(T-t)} S_t N(-d_1) + e^{-r(T-t)} K N(-d_2). \quad (1.5)$$

Τέλος, αποδεικνύεται (ενδεικτικά βλ. Stoll 1969, Cox & Rubinstein 1985), ότι σε μία αγορά όπου ισχύουν τα παραπάνω, η αξία ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, συνδέονται με την ακόλουθη σχέση (put-call parity):

$$c(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} = p(S_t, t) + S_t.$$

Η παραπάνω ισότητα προκύπτει άμεσα από την κατασκευή δύο χαρτοφυλακίων και τη σύγκριση της αξίας τους στο χρόνο $t = T$:

(α) ενός χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει ένα ομόλογο με σταθερό επιτόκιο r και ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου για το υποκείμενο αγαθό A , με τιμή εξάσκησης K και χρόνο ωρίμανσης T , και

(β) ενός χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει έναν τίτλο αγοράς (μετοχή) του αγαθού A και ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου για το ίδιο υποκείμενο αγαθό, με τιμή εξάσκησης K και χρόνο ωρίμανσης T .

1.5 Αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου

Τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου έχουν γενικά ίση ή μεγαλύτερη αξία από τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκού τύπου, διότι προσφέρουν μεγαλύτερη ευελιξία (μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την λήξη τους, σε αντίθεση με τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου που εξασκούνται μόνο κατά την λήξη τους). Παρόλα αυτά, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος **αγοράς** Ευρωπαϊκού τύπου είναι ίση με την no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου όταν το υποκείμενο αγαθό δεν αποδίδει μέρισμα, δηλ. όταν $\delta = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι, η βέλτιστη στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, όταν $\delta = 0$, είναι να το ασκήσει κατά την ημερομηνία λήξης του.

Πράγματι, αν το δικαίωμα είναι “in-the-money” και ο κάτοχός του αποφασίσει να το ασκήσει σε χρόνο $t < T$, τότε θα έχει κέρδος $S_t - K$. Αντίθετα, αν στον ίδιο χρόνο t πωλήσει ανοιχτά (short selling) το υποκείμενο αγαθό στην τιμή S_t και κλείσει την ανοιχτή του θέση στον χρόνο T με κόστος $\text{Min}\{K, S_T\}$, είτε ασκώντας το δικαίωμα, είτε αγοράζοντας το αγαθό από την αγορά, τότε θα έχει κέρδος $S_t - \text{Min}\{K, S_T\} \geq S_t - K$.

Αντίθετα με το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου για υποκείμενο αγαθό με μηδενικό αποδιδόμενο μέρισμα ($\delta = 0$), η πρόωμη εξάσκηση ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $\delta > 0$ ή ενός δικαιώματος **πώλησης** Αμερικανικού τύπου όταν $\delta \geq 0$, μπορεί να αποβεί σε όφελος. Συνεπώς, στις περιπτώσεις αυτές, είναι αναμενόμενο ότι η αξία ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου θα πρέπει να είναι υψηλότερη από αυτή του αντίστοιχου δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου.

Η διαφορά (V_ε) στην αξία ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου (C), σε σχέση με την αξία του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού (c), ονομάζεται πρόσθετο ασφάλιστρο πρόωμης εξάσκησης (early exercise premium, EEP):

$$V_\varepsilon(S_t, t) = C(S_t, t) - c(S_t, t),$$

ενώ αντίστοιχα, για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου, είναι:

$$V_\varepsilon(S_t, t) = P(S_t, t) - p(S_t, t).$$

Συχνά, οι αναλυτές αναφέρουν το πρόσθετο ασφάλιστρο των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου ως «όρο ποινής» (penalty term), αφού ο αγοραστής ενός τέτοιου δικαιώματος θα πρέπει να πληρώσει ένα επιπρόσθετο ποσό ως αντιστάθμισμα για την ευκαιρία που του δίνεται να αποκομίσει μεγαλύτερο κέρδος, σε σχέση πάντα με το αντίστοιχο δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου.

1.6 Κρίσιμη τιμή και βέλτιστος χρόνος εξάσκησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου

Σε αντίθεση με το πρόβλημα αποτίμησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος, για την αναλυτική αποτίμηση του οποίου υπάρχουν εκ προοιμίου όλες οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες (boundary conditions), στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου (που εξασκείται στο χρόνο t) δεν ισχύει η συνοριακή συνθήκη:

$$V(S_t, t) = \text{Max}\{S_t - K, 0\}, \quad \text{για } t \in [0, T].$$

Για το λόγο αυτό, το πρόβλημα αποτίμησης ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου συχνά χαρακτηρίζεται ως «πρόβλημα ελεύθερο συνοριακών συνθηκών» (free-boundary problem). Για να είναι εφικτή η αποτίμηση της αξίας του, είναι αναγκαίο να δημιουργηθεί μία «τεχνητή» συνοριακή συνθήκη (artificial boundary) ή, με άλλα λόγια, ένα σύνορο πρώιμης εξάσκησης (early exercise boundary).

Ειδικότερα, σε κάθε χρονική στιγμή t της ζωής του δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, αντιστοιχεί μία τιμή του υποκείμενου αγαθού, η οποία αποτελεί το σύνορο ανάμεσα σε δύο περιοχές: Μία περιοχή στην οποία συμφέρει η διακράτηση (holding) του δικαιώματος και μία περιοχή στην οποία συμφέρει η πρώιμη εξάσκησή του (early exercise). Η συνοριακή αυτή τιμή του υποκείμενου αγαθού εξαρτάται από το χρόνο t , συμβολίζεται με S^* και ονομάζεται βέλτιστη ή κρίσιμη τιμή εξάσκησης (optimal / critical exercise price).

Σύμφωνα με τους Friedman (1975), Van Moerbeke (1973) και Jacka (1991), η συνάρτηση της αξίας του $C(S_t, t)$ ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι μη αύξουσα, εξαρτάται από το χρόνο και είναι ανεξάρτητη από την αρχική τιμή του υποκείμενου αγαθού, τέτοια ώστε:

$$C(S_t, t) = \text{Max}\{S_t - K, 0\}, \quad \text{όταν } S_t \geq S_t^*,$$

$$C(S_t, t) > \text{Max}\{S_t - K, 0\}, \quad \text{όταν } S_t < S_t^*.$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση της αξίας $P(S_t, t)$ ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου είναι μη φθίνουσα, τέτοια ώστε:

$$P(S_t, t) = \text{Max}\{K - S_t, 0\}, \quad \text{όταν } S_t \leq S_t^*,$$

$$P(S_t, t) > \text{Max}\{K - S_t, 0\}, \quad \text{όταν } S_t > S_t^*.$$

Ο όρος $\text{Max}\{K - S_t, 0\}$ (ή $\text{Max}\{K - S_t, 0\}$) εκφράζει το κέρδος από την άμεση εξάσκηση του δικαιώματος αγοράς (ή πώλησης, αντίστοιχα) κατά τη χρονική στιγμή t , και ονομάζεται εσωτερική αξία (intrinsic value) του δικαιώματος.

Οι παραπάνω εξισώσεις παίζουν το ρόλο της απαιτούμενης συνοριακής συνθήκης που έλλειπε, ούτως ώστε να έχει λύση η μερική διαφορική εξίσωση (1.1) για ένα δικαίωμα Αμερικανικού τύπου.

Η κρίσιμη τιμή εξάσκησης S_t^* προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης:

$$S_t^* - K = C(S_t^*, t), \quad \text{για δικαίωμα αγοράς}$$

$$K - S_t^* = P(S_t^*, t), \quad \text{για δικαίωμα πώλησης}$$

Συχνά στη βιβλιογραφία, οι δύο παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται και ως «συνθήκες ταύτισης αξιών» (value matching conditions), αφού, για να ισχύουν, θα πρέπει η εσωτερική αξία (intrinsic value) ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου να ταυτίζεται με την αναμενόμενη αξία από τη διακράτησή του (holding value).

Ο McKean (1965), βασιζόμενος στο μοντέλο αποτίμησης του Samuelson (1965), διατύπωσε για πρώτη φορά το πρόβλημα αποτίμησης της αξίας ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου ως πρόβλημα εύρεσης του βέλτιστου χρόνου εξάσκησης του (optimal stopping time). Ωστόσο, μαθηματικές εκφράσεις δόθηκαν αρκετά αργότερα, από τους Bensoussan (1984) και Karatzas (1988):

$$V(S_t, t) = \text{ess sup}_{\tau \in [t, T]} E_Q[e^{-r(\tau-t)} f(S_\tau) | \mathfrak{F}_t], \quad (1.6)$$

όπου $f(S_\tau) = \text{Max}\{K - S_\tau, 0\}$ για δικαίωμα πώλησης, και $f(S_\tau) = \text{Max}\{S_\tau - K, 0\}$ για δικαίωμα αγοράς αντίστοιχα. Η μεγιστοποίηση (supremum) της μέσης τιμής στον παραπάνω τύπο λαμβάνεται ως προς όλους τους δυνατούς χρόνους διακοπής (stopping times) τ που ανήκουν στο διάστημα $[t, T]$.

Αποδεικνύεται (ενδεικτικά βλ. Lamberton, 2009) ότι η μέση τιμή της σχέσης (1.6) μεγιστοποιείται όταν, από όλους τους δυνατούς χρόνους διακοπής λαμβάνεται ο συντομότερος στον οποίον η πρώτη εξάσκηση του δικαιώματος καθίσταται συμφέρουσα, όταν δηλαδή για πρώτη φορά η εσωτερική αξία του δικαιώματος υπερβεί την αναμενόμενη αξία από τη διακράτησή του, δοθείσης της διαθέσιμης πληροφορίας \mathfrak{F}_τ στο χρονικό διάστημα $[t, \tau]$.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι McDonald & Schroder (1990), καθώς και οι Chesney & Gibson (1995), έδειξαν ότι αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί GBM, τότε η αξία ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς με παραμέτρους S_t, K, r, δ, T ισοδυναμεί με την αξία ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης με παραμέτρους K, S_t, δ, r, T , δηλαδή:

$$C(S_t, K, r, \delta, t) = P(K, S_t, \delta, r, t) \quad (1.7)$$

Με άλλα λόγια, αν σε μία υπολογιστική διαδικασία που προσεγγίζει ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου, γίνουν οι αλλαγές των παραμέτρων $S_t \rightarrow$

$K, K \rightarrow S_t, r \rightarrow \delta$ και $\delta \rightarrow r$, η ίδια διαδικασία θα προσεγγίζει πλέον την αξία του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης.

Η διαπίστωση αυτή είναι αρκετά χρήσιμη για έναν αναλυτή, καθώς του επιτρέπει τον υπολογισμό της αξίας δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία υπολογισμού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΑΓΑΘΟΥ

2.1 Γεωμετρική κίνηση Brown (GBM)

Η αποτίμηση ενός δικαιώματος βασίζεται στην χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου, με το οποίο επιχειρείται να προσεγγιστεί διαχρονικά ο τρόπος της συμπεριφοράς της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Το αγαθό αυτό τοποθετείται μέσα σε μία αποτελεσματική αγορά (efficient market), στην οποία ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

(α) Η τρέχουσα τιμή S του αγαθού περιλαμβάνει όλη την πληροφορία του παρελθόντος και καθόλου πληροφορία για το μέλλον. Μόνο η τρέχουσα τιμή και όχι οι παρελθοντικές, σχετίζεται με τη διαμόρφωση των μελλοντικών τιμών.

(β) Η αγορά ανταποκρίνεται άμεσα σε κάθε νέα πληροφορία και διαμορφώνει ανάλογα την τιμή S .

Έστω S_t η τιμή του υποκείμενου αγαθού στον χρόνο t . Γίνεται η υπόθεση ότι η αρχική τιμή S_0 είναι γνωστή (π.χ. είναι η τιμή της μετοχής στο παρόν). Προφανώς, η S_t είναι τυχαία μεταβλητή και η οικογένεια $\{S_t, t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Ένα σχετικά απλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο, που περιγράφει την εξέλιξη τιμών στο χρόνο, είναι η γεωμετρική κίνηση Brown (GBM). Αν $\{S_t, t \geq 0\} \sim GBM$ τότε η ποσοστιαία μείωση ή αύξηση της τιμής σε κάθε απειροστό διάστημα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν, κάτι που (σε ένα απλοποιημένο μοντέλο) συμφωνεί με την συμπεριφορά της τιμής ενός αγαθού στην πράξη.

Η ποσοστιαία αυξομείωση της S είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 ανάλογη του Δt και ανεξάρτητη από το παρελθόν της διαδικασίας. Όταν $\Delta t \rightarrow 0$, μπορεί να γραφεί η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση (Stochastic Differential Equation, SDE) για τη διαδικασία S :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t, \quad (2.1)$$

όπου $\{B_t, t \geq 0\} \sim BM$ (Brownian motion με παραμέτρους 0 και 1).

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι (ενδεικτικά βλ. εκπαιδευτικές σημειώσεις κ. Μ. Μπούτσικα, για το μάθημα «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», 2004), η τιμή του υποκείμενου αγαθού τη χρονική στιγμή $t + dt$ μπορεί να γραφεί:

$$S_{t+dt} = S_t e^{\mu dt + \sigma dB_t}. \quad (2.2)$$

Υπό το ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας Q , η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί και πάλι GBM αλλά με παράμετρο τάσης $\mu = r - \delta - \sigma^2/2$

και μεταβλητότητα σ , όπου δ το συνεχές μέρισμα που αποδίδει το υποκείμενο αγαθό και r το ελεύθερο κινδύνου επιτόκιο:

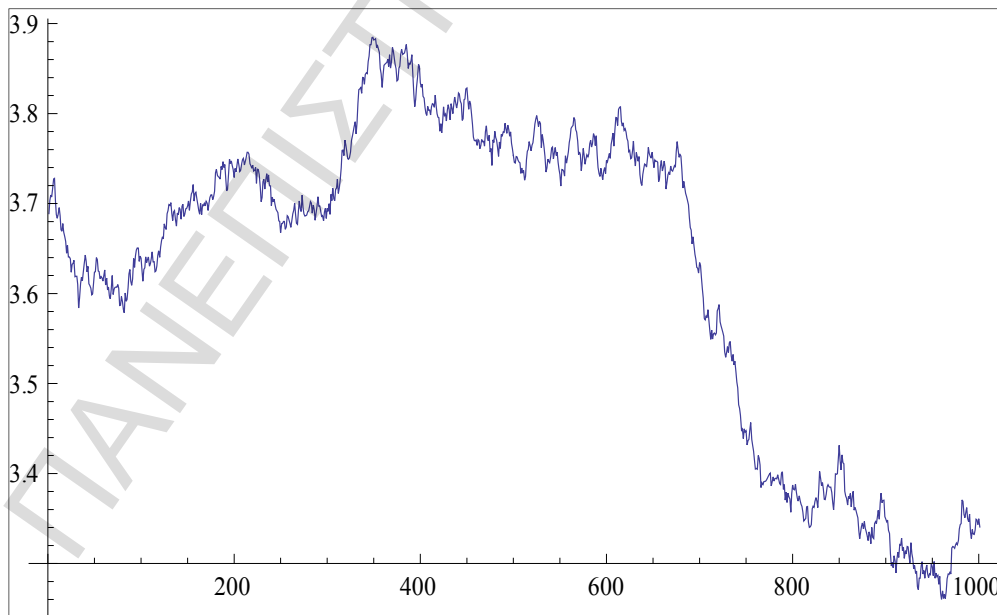
$$\mu = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.3)$$

Η μοντελοποίηση ανελίξεων BM και GBM υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

```
steps=1000;S0=40;r=0.07;div=0;σ=0.3;
μ=r-div-0.5*σ^2;dt=1/steps;
X=Table[Log[S0],{steps+1}];
S=Table[S0,{steps+1}];
Do[
  z=RandomReal[NormalDistribution[]];
  X[[i]]=X[[i-1]]+dt*μ+dt^0.5*σ*z;
  S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[dt*μ+dt^0.5*σ*z]
  ,{i,2,steps+1}];
Print["Brownian Motion for Ln(S)"]
ListPlot[X,Joined->True]
Print["Geometric Brownian Motion for S"]
ListPlot[S,Joined->True]
```

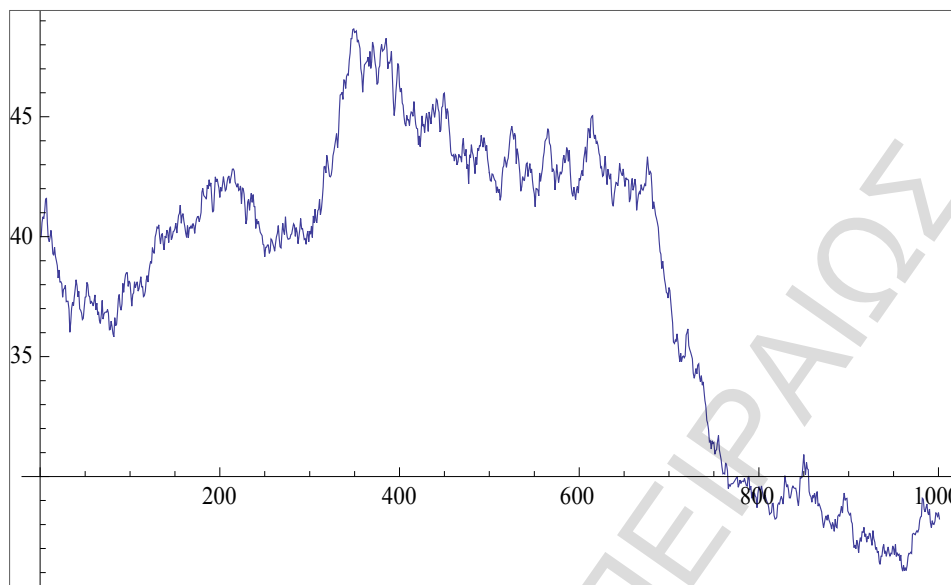
ΣΧΗΜΑ 2.1

Κίνηση Brown για τη μεταβλητή $\text{Ln}(S)$



ΣΧΗΜΑ 2.2

Γεωμετρική κίνηση Brown για τη μεταβλητή S



2.2 Άλματα διάχυσης - Merton's Jump Diffusion Model (JDM)

Στην πράξη, σε δεδομένες χρονικές στιγμές μπορεί να παρατηρηθούν κάποια βίαια άλματα στις τιμές του υποκείμενου αγαθού, ειδικά όταν η αγορά αντιδρά σε κάποια απρόβλεπτα κρίσιμα γεγονότα. Η ύπαρξη τέτοιων αλμάτων επηρεάζει σημαντικά την αξία ενός δικαιώματος και η μοντελοποίηση τους προϋποθέτει την αντιμετώπιση δύο επιμέρους προβλημάτων: Αφενός τη μοντελοποίηση του αριθμού των εμφανιζόμενων αλμάτων μέσα στη χρονική περίοδο ωρίμανσης του δικαιώματος $[0, T]$ και αφετέρου τη μοντελοποίηση των χαρακτηριστικών του κάθε άλματος (Merton, 1976).

Έτσι, στη στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.1) θα πρέπει να προστεθούν δύο ακόμη παράγοντες τυχαιότητας, ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλον: Ο ένας παράγοντας θα περιγράφει την εμφάνιση ή όχι ενός άλματος σε μία δεδομένη χρονική στιγμή και ο άλλος παράγοντας θα περιγράφει τα χαρακτηριστικά του άλματος, εφόσον αυτό εμφανιστεί.

Σύμφωνα με το σχετικό μοντέλο του Merton (Merton's Jump Diffusion Model), το πλήθος N_t των αλμάτων που θα λάβουν χώρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ μοντελοποιείται με μία διαδικασία Poisson, με μέση τιμή λ (το μέσο πλήθος των αλμάτων στη μονάδα του χρόνου):

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Έστω ότι όταν συμβαίνει ένα άλμα μέσα στο απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt , η τιμή του υποκείμενου αγαθού μεταβάλλεται ακαριαία κατά ένα

ποσοστό y_t . Ο λογάριθμος της ποσοστιαίας αυτής μεταβολής, γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους m, v^2 :

$$\ln\left(\frac{y_t S_t}{S_t}\right) = \ln(y_t) \equiv Y_t \sim N(m, v^2). \quad (2.4)$$

Αντίστοιχα, η σχετική μεταβολή της τιμής του υποκείμενου αγαθού θα είναι:

$$\frac{y_t S_t - S_t}{S_t} = y_t - 1.$$

Το αναμενόμενο μέγεθος ενός άλματος, ως ποσοστό επί της τιμής του υποκείμενου αγαθού, θα είναι:

$$E[y_t] = e^{m + \frac{1}{2}v^2},$$

και η αναμενόμενη σχετική μεταβολή της τιμής του υποκείμενου αγαθού:

$$k \equiv E[y_t - 1] = e^{m + \frac{1}{2}v^2} - 1.$$

Η διακύμανση του μεγέθους των αλμάτων που θα συμβούν, θα είναι:

$$E[(y_t - E[y_t])^2] = e^{2m + v^2} (e^{v^2} - 1).$$

Μέσα σε κάθε απειροελάχιστη χρονική μεταβολή dt , ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η πιθανότητα να συμβεί ένα άλμα: $P\{dN_t = 1\} \cong \lambda dt$.
- Η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον δύο άλματα: $P\{dN_t \geq 2\} \cong 0$.
- Η πιθανότητα να μη συμβεί άλμα: $P\{dN_t = 0\} \cong 1 - \lambda dt$.
- Η παράμετρος τάσης της τιμής του υποκείμενου αγαθού: $r - \sigma^2/2 - k\lambda$.

Οι παράμετροι λ, m, v χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν πλήρως ένα μοντέλο με άλματα διάχυσης. Επισημαίνεται ότι οι μεταβλητές Y, N και X θεωρούνται ανεξάρτητες. Στην περίπτωση αυτή, η διαφορική εξίσωση (2.1) γίνεται:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - k\lambda)dt + \sigma dB_t + (y_t - 1)dN_t,$$

και αντίστοιχα η σχέση (2.2) γίνεται:

$$S_{t+dt} = S_t e^{(\mu - k\lambda)dt + \sigma dB_t + Y_t},$$

όπου περιγραφικά μπορούμε να γράψουμε:

$$Y_t = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } \cong 1 - \lambda dt \\ \tau. \mu. \sim N(m, v^2), & \text{με πιθανότητα } \cong \lambda dt. \end{cases}$$

Το μοντέλο "Merton's JDM" υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

```
S0=40;T=3;steps=1000;dt=T/steps;
σ=0.3;r=0.07;div=0;
μ=r-div-0.5*σ^2;
S=Table[S0,{steps+1}];
S1=Table[S0,{steps+1}];

"**** DIFFUSION JUMP PARAMETERS ****";
"jumps per year";
λ=1;
"average jump Log-size";
m=0;
"jump Log-size volatility";
v=0.3;

k=Exp[m+0.5*v^2]-1;

"poisson process";
StepJumpIndex={};
time=dt;
jumptime=Floor[-Log[RandomReal[]]/λ,dt];
j=1;
While[time<jumptime&&time<T,time=time+dt;j++;If[time==jumptime,
AppendTo[StepJumpIndex,j];jumptime=jumptime+Floor[-
Log[RandomReal[]]/λ,dt]]];

"asset's price";
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[]];

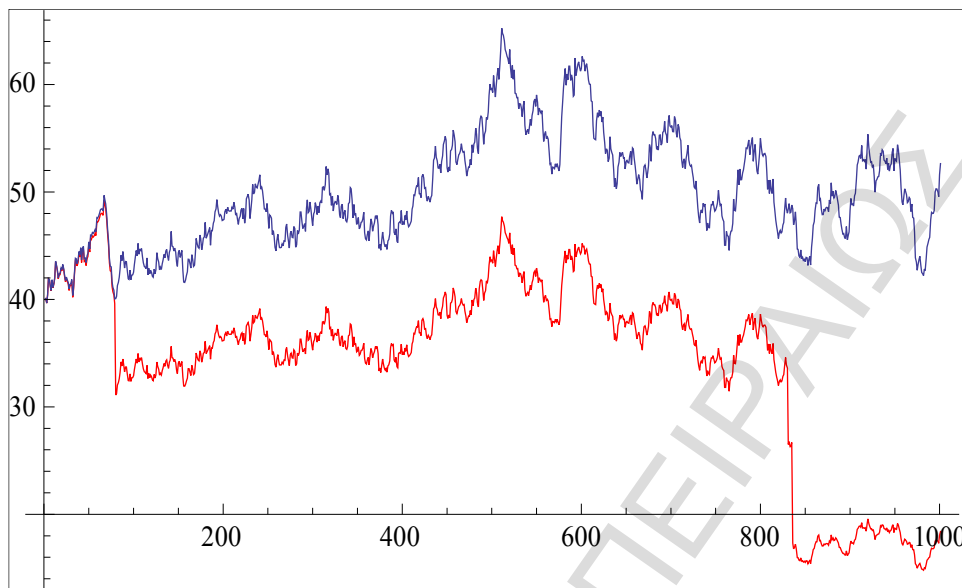
Y=If[MemberQ[StepJumpIndex,i],RandomReal[NormalDistribution[m,
v]],0];
S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[(μ-λ*k)*dt+σ*(dt^0.5)*Z+Y];
S1[[i]]=S1[[i-1]]*Exp[μ*dt+σ*(dt^0.5)*Z],{i,2,steps+1}];

R1:=ListPlot[S,Joined->True,PlotStyle->{Red},PlotRange->All]
R2:=ListPlot[S1,Joined->True,PlotRange->All]
Print["The average jump size is: ",(k+1)*100,"%"];
Show[{R1,R2}]

If[StepJumpIndex=={},Print["There were no
jumps"],Print["Jump(s) occurred at the following step(s) :
",StepJumpIndex]]];
```

ΣΧΗΜΑ 2.3

Απλή στοχαστική διαδικασία GBM (μπλε) και η ίδια στοχαστική διαδικασία με ενσωματωμένα άλματα διάχυσης (κόκκινο). Το μέσο μέγεθος των αλμάτων είναι 104,6 %, ενώ τα άλματα συνέβησαν στα βήματα Νο 80, 831 και 836



2.3 Στοχαστική μεταβλητότητα – Heston's Stochastic Volatility (SV) Model

Για μία ακόμη πιο ρεαλιστική προσέγγιση αναφορικά με τη μοντελοποίηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού, αντί της υπόθεσης ότι η μεταβλητότητα της τιμής παραμένει σταθερή, μπορεί να υποθεθεί ότι η μεταβλητότητα ακολουθεί και αυτή μία στοχαστική διαδικασία. Υπάρχουν αρκετά μοντέλα που ενσωματώνουν στοχαστική μεταβλητότητα (G.A.R.C.H., S.A.B.R., C.E.V, κλπ) με δημοφιλέστερο ίσως το μοντέλο του Heston (1993).

Σύμφωνα με το μοντέλο του Heston, η μεταβλητότητα περιγράφεται από την εξής στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dv_t = \theta(\omega - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dB_t,$$

όπου:

- ω η μέση τιμή της μεταβλητότητας,
- θ ο ρυθμός με τον οποίο η μεταβλητότητα προσεγγίζει μακροπρόθεσμα τη μέση τιμή της,
- ξ η μεταβλητότητα της στοχαστικής διαδικασίας,
- dB_t τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση \sqrt{dt} , δηλαδή $\{B_t, t \geq 0\} \sim BM$, η οποία συνδέεται με συντελεστή συσχέτισης ρ με την αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή

που χρησιμοποιείται στο μοντέλο της τιμής του υποκείμενου αγαθού (σχέση (2.1)).

Με άλλα λόγια, το μοντέλο του Heston υπονοεί ότι η μεταβλητότητα αλλάζει ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα της εκάστοτε τιμής της, ενώ η τυχαιότητα του μοντέλου που την περιγράφει είναι συσχετισμένη με την τυχαιότητα της κίνησης στην τιμή του υποκείμενου αγαθού.

Το μοντέλο "Heston's SV Model" υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

```
<<MultivariateStatistics` ;
"Input data"
S0=40;
T=3;
steps=1000;
dt=T/steps;
σ=0.3;
r=0.07;
μ=r-0.5*σ^2;
v=Table[σ,{steps+1}];
S=Table[S0,{steps+1}];
S1=Table[S0,{steps+1}];

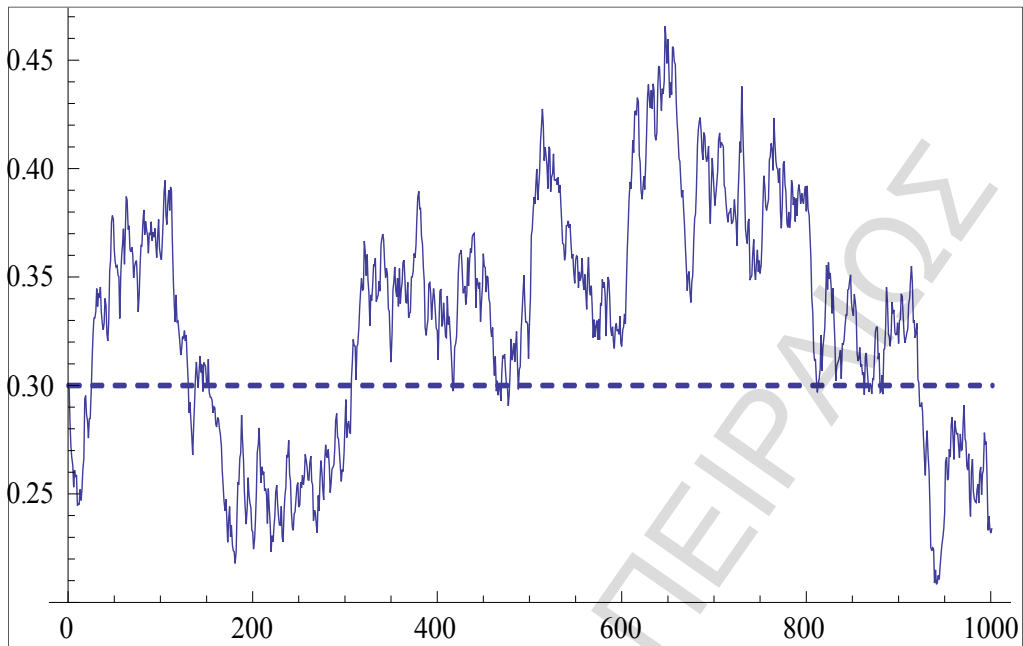
"Heston's SV model parameters";
θ=0.8;
ξ=0.3;
ρ=0.7;
Z=RandomReal[MultinormalDistribution[{0,0},{1,ρ},{ρ,1}],step
s+1];

"construction of stochastic paths";
Do[v[[i]] = v[[i - 1]] + θ*(σ - v[[i - 1]])*dt +
  ξ*Sqrt[dt*v[[i - 1]])*Z[[i, 1]];
  S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[dt*μ+(dt^0.5)*σ*Z[[i,2]]];
  S1[[i]]=S1[[i-
1]]*Exp[dt*μ+(dt^0.5)*v[[i]]*Z[[i,2]]],{i,2,steps+1}];

R0:=ListPlot[Table[σ,{i,1,steps+1}],Joined →True,PlotStyle->
{Dashed},PlotRange ->All]
R1:=ListPlot[Table[v[[i]],{i,1,steps+1}],Joined->
True,PlotRange -> All]
R2:=ListPlot[Table[S[[i]],{i,1,steps+1}],Joined->
True,PlotRange -> All]
R3:=ListPlot[Table[S1[[i]],{i,1,steps+1}],Joined->
True,PlotStyle->{Red},PlotRange -> All]
Print["Volatility's path"];
Show[{R0,R1}]
Print["Asset's price with SV (red path) and without SV (blue
path) "];
Show[{R2,R3}]
```

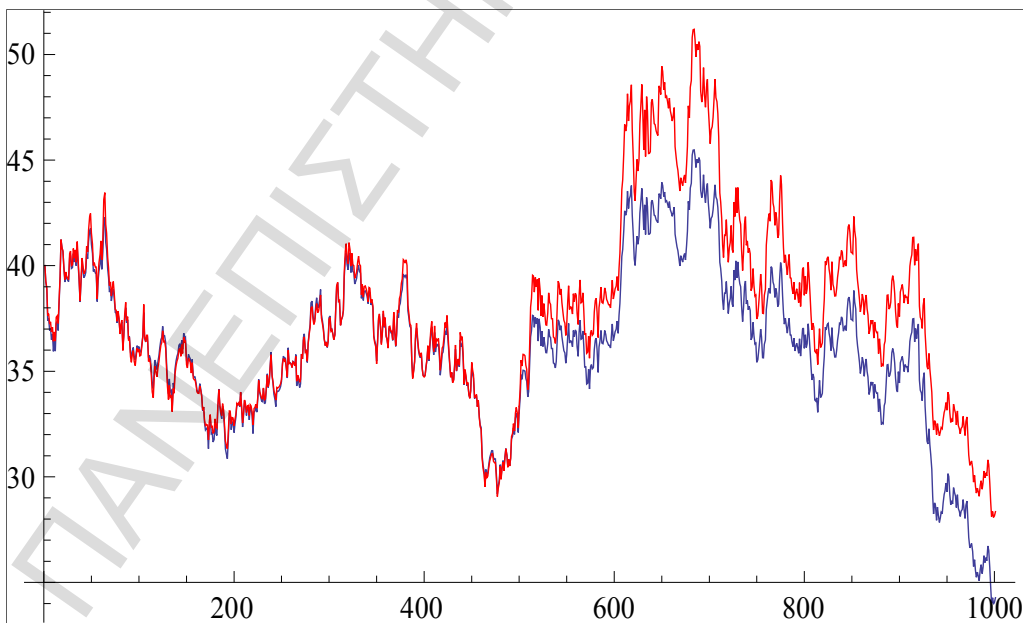

ΣΧΗΜΑ 2.4

Η ανέλιξη της μεταβλητότητας σύμφωνα με το μοντέλο του Heston, με μέση τιμή $\sigma=0,3$ και παραμέτρους $\theta = 0,8$, $\xi = 0,3$, $\rho = 0,7$



ΣΧΗΜΑ 2.5

Η ανέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού χωρίς στοχαστική μεταβλητότητα (μπλε) και με στοχαστική μεταβλητότητα (κόκκινο)



3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

3.1 Προεκβολή Richardson

Η τεχνική “Richardson extrapolation” προτάθηκε από τον Richardson (1910) και χρησιμοποιείται για την επιτάχυνση της σύγκλισης μιας επαναληπτικής διαδικασίας. Έστω ότι μία ποσότητα Q προσεγγίζεται από μία συνάρτηση που εξαρτάται από την ποσότητα h , έστω $F(h)$, και το σφάλμα της προσέγγισης μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο της ποσότητας h :

$$Q = F(h) + Kh^k + K_1h^{k+1} + K_2h^{k+2} + \dots = F(h) + O(h^k), \quad (3.1)$$

όπου ο όρος $O(h^k)$ υποδηλώνει μια συνάρτηση $g(h)$ με την ιδιότητα $g(h)/h^k \rightarrow c$ για κάποια σταθερά c , όταν $h \rightarrow 0$.

Αν στη συνέχεια επιχειρηθεί η προσέγγιση του Q , λαμβάνοντας στην θέση του h την ποσότητα $h/2$, προκύπτει η σχέση:

$$Q = F(h/2) + K\left(\frac{h}{2}\right)^k + K_1\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} + K_2\left(\frac{h}{2}\right)^{k+2} + \dots = F\left(\frac{h}{2}\right) + O(h^k). \quad (3.2)$$

Αν η σχέση (3.1) πολλαπλασιαστεί με το -1 , η σχέση (3.2) με το 2^k και προστεθούν κατά μέλη, προκύπτει:

$$Q = \frac{2^k F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{2^k - 1} + O(h^{k+1}).$$

Με τον τρόπο αυτό απαλείφεται το σφάλμα k τάξης. Γενικά, αν τεθεί $F_2(h) = (2^k F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h))/(2^k - 1)$ και επαναληφθεί η παραπάνω διαδικασία μειώνοντας κάθε φορά στο μισό την ποσότητα h , προκύπτει ο ακόλουθος τύπος, για την προσέγγιση της ποσότητας Q , με το σφάλμα που απομένει να είναι της τάξης $O(h^{k+n})$:

$$F_{n+1}(h) = \frac{2^{k+n-1} F_n\left(\frac{h}{2}\right) - F_n(h)}{2^{k+n-1} - 1}.$$

Ένα πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι μπορεί να υποδείξει το απαιτούμενο επίπεδο διαμερισμού της ποσότητας h , ούτως ώστε να επιτευχθεί μία επιθυμητή προσέγγιση της ποσότητας Q βάσει της συνάρτησης F .

Για παράδειγμα, αφαιρώντας τη σχέση (3.2) από την σχέση (3.1) κατά μέλη, υπολογίζεται η σταθερά K :

$$K = \frac{F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{h^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} + O(h^{k+1}). \quad (3.3)$$

Στη συνέχεια, μπορεί να υποτεθεί ότι το σφάλμα $E(h)$ ισούται με:

$$E(h) = Q - F(h) = Kh^k + O(h^{k+1}) \cong Kh^k. \quad (3.4)$$

Θέτοντας ένα επιθυμητό σφάλμα $E(h)$ και λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς h , προκύπτει το απαιτούμενο επίπεδο διαμερισμού της αρχικής ποσότητας h :

$$h = \sqrt[k]{E(h)/K} \quad (3.5)$$

3.2 Προσομοίωση Monte-Carlo

Η προσομοίωση (simulation) είναι μία εικονική πειραματική μέθοδος, της οποίας η αποτελεσματικότητα βασίζεται στο νόμο των μεγάλων αριθμών. Χάρη στην τεράστια και φθηνή υπολογιστική ισχύ των Η/Υ, είναι εφικτή η πραγματοποίηση ενός μεγάλου αριθμού εικονικών πειραμάτων που αφορούν μία στοχαστική διαδικασία στο χρόνο, και στη συνέχεια η καταγραφή των αποτελεσμάτων.

Ένας αναλυτής δεν έχει παρά να μοντελοποιήσει μία διαδικασία με συγκεκριμένες παραμέτρους και στη συνέχεια να την επαναλάβει με ψευδοτυχαίο τρόπο στην «εικονική πραγματικότητα» ενός Η/Υ, χιλιάδες ή εκατομμύρια φορές, σε ελάχιστο χρόνο και με ελάχιστο κόστος. Βάσει του νόμου των μεγάλων αριθμών, η οριακή σχετική συχνότητα εκδήλωσης του κάθε ενδεχόμενου θα είναι ασυμπτωτικά ίση με την πραγματική πιθανότητα εκδήλωσής του.

Ιδιαίτερα χρήσιμη για την αποτίμηση της αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η τεχνική της ολοκλήρωσης Monte-Carlo, με την οποία επιτυγχάνεται ο προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων ή ισοδύναμα μέσω τιμών. Έστω ότι ένας αναλυτής επιχειρεί να προσεγγίσει το ολοκλήρωμα:

$$\mu = \int_0^1 g(x) dx,$$

όπου $g(x)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$E[g(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_U(x) dx,$$

όπου U τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_U(x) = 1, x \in (0,1)$.

Στη συνέχεια, με την επανάληψη ενός ψευδοτυχαίου πειράματος παράγονται πολλές τ.μ. $g(U_i)$, των οποίων η μέση τιμή θα είναι μία εκτιμήτρια της ζητούμενης τιμής μ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g(U)]. \quad (3.6)$$

Ο Boyle (1977) ήταν ο πρώτος αναλυτής που χρησιμοποίησε την τεχνική Monte-Carlo για να εκτιμήσει τιμές παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

3.3 Ανάδρομη επαγωγή

Η ανάδρομη επαγωγή (backward induction) είναι μία διαδικασία, η οποία, ξεκινώντας από το τέλος ενός προβλήματος με κατεύθυνση προς την έναρξή του, επιχειρεί να καταδείξει τις βέλτιστες αποφάσεις σε κάθε χρονική στιγμή. Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή της είναι ο διαμερισμός του προβλήματος σε μία αλληλουχία n σταδίων, στα οποία λαμβάνονται αλληλοσυνδεδεμένες αποφάσεις.

Το πρώτο στάδιο της ανάδρομης επαγωγής είναι το τελευταίο χρονικό στάδιο ($T - dt$) στην εξέλιξη του προβλήματος, όπου υπάρχει ακόμη η (τελευταία) δυνατότητα να παρθεί κάποια απόφαση. Αφού ληφθεί η βέλτιστη απόφαση κατά το στάδιο $T - dt$ έχοντας ως δεδομένα τα γεγονότα που «συνέβησαν» στο τελικό χρονικό στάδιο T , στη συνέχεια εξετάζεται η βέλτιστη απόφαση στο χρονικό στάδιο $T - 2dt$, έχοντας ως δεδομένη τη βέλτιστη απόφαση που πάρθηκε στο στάδιο $T - dt$, κ.ο.κ., έως ότου φτάσει κανείς στο σημείο εκκίνησης του προβλήματος ($t = 0$), περνώντας διαδοχικά από όλα τα χρονικά στάδια στα οποία υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες.

Όσον αφορά στην αποτίμηση της αξίας των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, η τεχνική της ανάδρομης επαγωγής συνδυάζεται με την τεχνική της ολοκλήρωσης Monte-Carlo. Αρχικά, δημιουργείται ένα μεγάλο πλήθος στοχαστικών ανελίξεων ή κόμβων ενός δέντρου, φτιάχνοντας με τον τρόπο αυτό πολλά ψευδοτυχαία «σενάρια» για τη διαχρονική εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού, στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Στη συνέχεια, κινούμενος κανείς ανάποδα στο χρόνο πάνω στα μονοπάτια (paths) που έχουν δημιουργηθεί, ελέγχει σε κάθε χρονική στιγμή αν συμφέρει η διακράτηση ή η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος. Τέλος, προεξοφλείται στη χρονική στιγμή $t = 0$ και σταθμίζεται το κέρδος από όλες τις «βέλτιστες» αποφάσεις, με τη βοήθεια της σχέσης (3.6).

3.4 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων. Έστω x_n η προσέγγιση της λύσης x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$ και έστω ότι $f'(x_n) \neq 0$ για κάθε n , ενώ x_0 μία δεδομένη αρχική προσέγγιση της λύσης x^* . Τότε η προσέγγιση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

είναι καλύτερη προσέγγιση της x^* από ότι η x_n . Η τεχνική αυτή παρουσιάζει συνήθως πολύ γρήγορη σύγκλιση.

3.5 Παλινδρόμηση

Στόχος της παλινδρόμησης (regression) είναι να προσδιοριστεί η εξίσωση της ευθείας (ή καμπύλης, γενικότερα) που προσαρμόζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο σε ένα σύνολο σημείων, τα οποία ουσιαστικά αντιστοιχούν σε πραγματικές παρατηρήσεις. Το κριτήριο που χρησιμοποιείται για να επιλεγεί η «καταλληλότερη» ευθεία είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (Least-Squares method).

Έστω ότι έχουν καταγραφεί n δεδομένα της μορφής (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , ..., (X_n, Y_n) και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X.$$

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι όποια ευθεία και αν επιλεγεί, αυτή δεν θα περνά από όλα τα σημεία. Για κάθε X_i η ευθεία θα αντιστοιχίσει στο Y_i ένα εκτιμώμενο \hat{Y}_i .

Η αντιστοίχιση αυτή θα απορρέει από τη σχέση:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i.$$

Για κάθε αντιστοίχιση, προκύπτει ένα «κατάλοιπο» ή σφάλμα (residual, error) της μορφής $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$. Επίσης, κάθε συνδυασμός των $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ θα δίνει διαφορετικά κατάλοιπα κατά περίπτωση. Σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, καταλληλότερος συνδυασμός των $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ θα είναι αυτός που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, δηλαδή την ποσότητα:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)]^2.$$

Η εύρεση των $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ που ελαχιστοποιούν την παραπάνω ποσότητα γίνεται με μεθόδους ελαχιστοποίησης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Συγκεκριμένα, οι μερικές παράγωγοι ως προς $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ τίθενται ίσες με μηδέν και λύνο-ντας προκύπτει:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

3.6 Σύνθετος κανόνας του Simpson

Ο σύνθετος κανόνας του Simpson χρησιμοποιείται για την προσέγγιση δυσεπίλυτων ολοκληρωμάτων και βασίζεται στη φιλοσοφία του τύπου ολοκλήρωσης των Newton-Cotes, γνωστό και ως «τύπο του τραapeζίου», σύμφωνα με τον οποίο το ολοκλήρωμα μίας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, προσεγγίζεται από το εμβαδό του τραapeζίου με κορυφές $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)).$$

Αρχικά ο Simpson διαμέρισε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε δύο ίσα μέρη και εφαρμόζοντας τον τύπο του τραapeζίου για κάθε ένα από αυτά, προέκυψε ο ακόλουθος τύπος:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{\beta - \alpha}{2} \left(\frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{4}{3}f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \frac{1}{3}f(\beta) \right).$$

Επεκτείνοντας το παραπάνω σκεπτικό, αν γίνει ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, με βήμα $h = (\beta - \alpha)/n$ και κομβικά σημεία $x_i = \alpha + ih$, $i = 0, \dots, n$, εφαρμόζοντας σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ τον παραπάνω τύπο, προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_n)) \quad (3.7)$$

Ο σύνθετος τύπος του Simpson δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην πραγματική τιμή του ολοκληρώματος. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με την κατάλληλα συνδυασμένη χρήση της προεκβολής Richardson και την εύρεση του σφάλματος προσέγγισης.

Τέλος, σημειώνεται ότι έχουν αναπτυχθεί διάφορες παραλλαγές του παραπάνω τύπου, π.χ. η χρήση μη ομοιόμορφου διαμερισμού του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, που ενδείκνυται όταν η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ιδιαίζουσα συμπεριφορά σε συγκεκριμένες περιοχές.

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

4.1 GJ Method

Η μέθοδος των Geske & Johnson (1984) θεωρείται από αρκετούς αναλυτές ως η ενδεικνύομενη μέθοδος για την αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, υποστηρίζοντας ότι αποτελεί την καλύτερη (θεωρητικά) αντιμετώπιση του προβλήματος επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.1). Η μέθοδος βασίζεται στο διαμερισμό του χρόνου ωρίμανσης ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου σε n ομοιόμορφα διαστήματα μήκους dt , στο τέλος των οποίων είναι δυνατή η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος. Ένα τέτοιο δικαίωμα, που μπορεί να ασκηθεί σε διακριτά χρονικά σημεία πριν τη λήξη του, ονομάζεται "Bermudan". Στη συνέχεια, σύμφωνα με τους Cox & Ross (1976), η αξία του δικαιώματος υπολογίζεται ως η παρούσα αξία των αναμενόμενων χρηματοροών σε κάθε μελλοντικό σημείο εξάσκησης.

Ειδικότερα, έστω ότι ένα δικαίωμα μπορεί να ασκηθεί πρώτη φορά στη χρονική στιγμή $t_1 = 0 + dt$. Σε περίπτωση που το κέρδος από την πρώιμη εξάσκηση είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο κέρδος από την διακράτηση, το δικαίωμα θα ασκηθεί. Στην αντίθετη περίπτωση, το δικαίωμα δεν ασκείται μέχρι την επόμενη στιγμή $t_2 = 0 + 2dt$, όπου εξετάζεται εκ νέου αν συμφέρει η πρώιμη εξάσκηση ή όχι, κ.ο.κ. Με άλλα λόγια, για να ασκηθεί το δικαίωμα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, θα πρέπει να συντρέχουν δύο προϋποθέσεις:

(α) Να μην έχει ασκηθεί μέχρι τότε,

(β) Η εσωτερική αξία να είναι μεγαλύτερη από την αξία διακράτησής του.

Για να διαπιστωθεί αν ισχύει η 2^η προϋπόθεση, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός κρίσιμης τιμής εξάσκησης σε κάθε χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, για ένα δικαίωμα πώλησης η κρίσιμη τιμή S_t^* προκύπτει από τη συνοριακή συνθήκη:

$$K - S_t^* = P(S_t^*, t),$$

όπου $P(S_t^*, t)$ η αξία ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου τη χρονική στιγμή t . Η εύρεση της S_t^* συνήθως γίνεται με τη χρήση κάποιας επαναληπτικής προσεγγιστικής τεχνικής.

Στη συνέχεια, θα πρέπει να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα εξάσκησης τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, δοθέντος ότι το δικαίωμα δεν έχει ασκηθεί σε νωρίτερο χρόνο.

Τέλος, η αξία του δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $t_0 = 0$ προσεγγίζεται από τον προεξοφλημένο σταθμισμένο μέσο όλων των πιθανών χρηματοροών:

$$\begin{aligned} P(S_0, t_0) &= e^{-rdt}(K - S_{dt}^*)Prob(S_{dt} < S_{dt}^*) \\ &+ e^{-r2dt}(K - S_{2dt}^*)Prob(S_{2dt} < S_{2dt}^* | S_{dt} \geq S_{dt}^*) \\ &+ e^{-r3dt}(K - S_{3dt}^*)Prob(S_{3dt} < S_{3dt}^* | S_{2dt} \geq S_{2dt}^* \& S_{dt} \geq S_{dt}^*) + \dots \end{aligned}$$

Έχοντας ως δεδομένο ότι ο λογάριθμος της τιμής S του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί BM, ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{km} των τυχαίων προσαυξήσεων της τιμής του για τις χρονικές στιγμές t_k και t_m αντίστοιχα, με $t_m > t_k$, αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι:

$$\rho_{km} = \rho(X_{t_k}, X_{t_m}) = \frac{\text{Cov}(X_{t_k}, X_{t_m})}{\sqrt{V(X_{t_k})V(X_{t_m})}} = \sqrt{\frac{t_k}{t_m}},$$

όπου $X_t = \ln S_t$.

Ενδεικτικά, για ένα δικαίωμα με $n = 2$ σημεία εξάσκησης, ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων προσαυξήσεων του λογαρίθμου της τιμής του υποκείμενου αγαθού μεταξύ των δύο σημείων εξάσκησης είναι $\rho = \sqrt{1/2}$. Αντίστοιχα, για ένα δικαίωμα με $n = 3$ σημεία εξάσκησης, οι αντίστοιχοι συντελεστές συσχέτισης είναι $\rho_{12} = \sqrt{1/2}$, $\rho_{13} = \sqrt{1/3}$ και $\rho_{23} = \sqrt{2/3}$.

Όταν $n \rightarrow \infty$ και άρα $dt \rightarrow 0$, θεωρητικά προσεγγίζεται η «πραγματική» αξία του δικαιώματος. Στην πράξη όμως, η συγκεκριμένη μέθοδος απαιτεί τη χρήση πολυδιάστατων κανονικών κατανομών, γεγονός που την καθιστά εξαιρετικά χρονοβόρα για $n > 3$ (βλ. ενδεικτικά Bunch & Johnson, 1992). Ειδικότερα αν θεωρήσουμε ότι το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο στους χρόνους $T/3$, $2T/3$ και T (είναι γνωστό και ως “Bermudan option” με $n = 3$) ο τύπος για τον υπολογισμό της αξίας του αποδεικνύεται ότι έχει την μορφή:

$$P(S_0, t_0) = Kw_2 - S_0w_1,$$

όπου:

$$\begin{aligned} w_1 = & e^{-\delta T/3} N^1(-d_1(S_{T/3}^*, T/3)) \\ & + e^{-\delta 2T/3} N^2(d_1(S_{T/3}^*, T/3), -d_1(S_{2T/3}^*, 2T/3); -\rho_{12}) \\ & + e^{-\delta T} N^3(d_1(S_{T/3}^*, T/3), d_1(S_{2T/3}^*, 2T/3), -d_1(K, T); \rho_{12}, -\rho_{13} - \rho_{23}), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} w_2 = & e^{-rT/3} N^1(-d_2(S_{T/3}^*, T/3)) \\ & + e^{-r2T/3} N^2(d_2(S_{T/3}^*, T/3), -d_2(S_{2T/3}^*, 2T/3); -\rho_{12}) \\ & + e^{-rT} N^3(d_2(S_{T/3}^*, T/3), d_2(S_{2T/3}^*, 2T/3), -d_2(K, T); \rho_{12}, -\rho_{13} - \rho_{23}). \end{aligned}$$

Στους παραπάνω τύπους, με N^k συμβολίζεται η αθροιστική συνάρτηση μίας k -διάστατης κανονικής κατανομής, ενώ οι συναρτήσεις d_1, d_2 δίνονται από τους τύπους:

$$d_1(S_\tau, \tau) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{S_\tau}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2(S_\tau, \tau) = d_1(S_\tau, \tau) - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Οι κρίσιμες τιμές $S_{T/3}^*$, $S_{2T/3}^*$ προσδιορίζονται αριθμητικά από τις εξισώσεις:

$$K - S_{T/3}^* = P(S_{T/3}^*, T/3) \quad \text{και} \quad K - S_{2T/3}^* = p(S_{2T/3}^*, 2T/3).$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση ενός δικαιώματος τύπου “Bermudan” με $n = 2$, ισχύει:

$$w_1 = e^{-\delta T/2} N^1(-d_1(S_{T/2}^*, T/2)) \\ + e^{-\delta T} N^2(d_1(S_{T/2}^*, T/2), -d_1(K, T); -\rho)$$

και

$$w_2 = e^{-rT/2} N^1(-d_2(S_{T/2}^*, T/2)) \\ + e^{-rT} N^2(d_2(S_{T/2}^*, T/2), -d_2(K, T); -\rho),$$

ενώ η κρίσιμη τιμή $S_{T/2}^*$ προσδιορίζεται αριθμητικά από την εξίσωση:

$$K - S_{T/2}^* = p(S_{T/2}^*, T/2).$$

Για την αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας του προβλήματος όταν ο χρονικός διαμερισμός αυξάνεται, οι Geske & Johnson υιοθέτησαν την τεχνική της προεκβολής Richardson (βλ. ενότητα 3.1). Έτσι, για την προσέγγιση της αξίας ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου P με χρόνο ωρίμανσης T , υπολογίζονται προηγουμένως τα $P(1)$, $P(2)$, και $P(3)$, ως εξής:

- $P(1)$: Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (με δυνατότητα εξάσκησης μόνο τη στιγμή T).
- $P(2)$: Δικαίωμα τύπου “Bermudan” με δυνατότητα εξάσκησης τις στιγμές $T/2$ και T .
- $P(3)$: Δικαίωμα τύπου “Bermudan” με δυνατότητα εξάσκησης τις στιγμές $T/3$, $2T/3$ και T .

Στη συνέχεια, αν συμβολίσουμε με $g(h)$ την προσέγγιση της αξίας P η οποία λαμβάνεται με την παραπάνω διαδικασία, όταν το μήκος του βήματος είναι h , τότε θα είναι:

$$P(1) = g(T), \quad P(2) = g(T/2), \quad P(3) = g(T/3),$$

και θεωρητικά, $P = g(0)$. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι ομαλή στο 0 (2 φορές παραγωγίσιμη), τότε από το θεώρημα Taylor θα είναι:

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + h^2 \frac{g''(0)}{2} + O(h^3) = P - hK_1 - h^2K_2 + O(h^3)$$

και εφαρμόζουμε διπλή προεκβολή Richardson (2-times extrapolation), ως εξής:

$$\begin{cases} P = P(1) + TK_1 + T^2 K_2 + \dots \\ P = P(2) + \frac{T}{2}K_1 + \left(\frac{T}{2}\right)^2 K_2 + \dots \\ P = P(3) + \frac{T}{3}K_1 + \left(\frac{T}{3}\right)^2 K_2 + \dots \end{cases} \quad (4.1)$$

Αν η 2^η εξίσωση του συστήματος (4.1) πολλαπλασιαστεί με το -8 και η 3^η εξίσωση με το 9, και στη συνέχεια προστεθούν όλες κατά μέλος, τα σφάλματα προσέγγισης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης απαλείφονται και προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$P \approx P(1,2,3) = \frac{1}{2}P(1) - \frac{8}{2}P(2) + \frac{9}{2}P(3), \quad (4.2)$$

με το σφάλμα της προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος να είναι πλέον 3^{ης} τάξης.

Αν και ο συγκεκριμένος τρόπος εφαρμογής της προεκβολής Richardson, με τον αριθμό των σημείων εξάσκησης να αυξάνει αριθμητικά, μειώνει σημαντικά το μέγεθος του σφάλματος, έχει ωστόσο δύο μειονεκτήματα:

(α) Υπάρχει κίνδυνος ανομοιόμορφης σύγκλισης: Ο Omberg (1987) έδειξε ότι η μέθοδος GJ δεν μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά σε ορισμένες περιπτώσεις, ειδικά όταν δεν ισχύει $P(1) \leq P(2) \leq P(3)$. Π.χ. για δικαιώματα πώλησης "deep-in-the-money" σε συνθήκες χαμηλής μεταβλητότητας, όταν το υποκείμενο αγαθό είναι μετοχή που αποδίδει μέρισμα τη χρονική στιγμή $T/2$, γίνεται ελκυστική η εξάσκηση του δικαιώματος ακριβώς μετά την απόδοση του μερίσματος. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή ισχύει $P(1) < P(2) > P(3)$ και η μέθοδος GJ εμφανίζει ανομοιόμορφη σύγκλιση. Αυτό συμβαίνει γενικά όταν ένα δικαίωμα με δυνατότητα εξάσκησης σε n χρονικές στιγμές μπορεί να έχει μικρότερη αξία από ένα δικαίωμα με δυνατότητα εξάσκησης σε m χρονικές στιγμές, όπου $m < n$ (τα δύο δικαιώματα έχουν κοινό χρόνο ωρίμανσης T).

(β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η ακρίβεια της προσέγγισης που επιτυγχάνεται με τον συγκεκριμένο τρόπο εφαρμογής της προεκβολής Richardson. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να βρεθεί πόσα επιμέρους δικαιώματα και πόσα χρονικά σημεία εξάσκησης θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν, για ένα επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας.

Η μέθοδος των Geske & Johnson υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica® με την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί. Επισημαίνεται ότι η κρίσιμη τιμή $S_{T/3}^*$ προσεγγίστηκε μέσω της μεγιστοποίησης της αξίας του δικαιώματος $P(3)$, αντί της αριθμητικής επίλυσης της συνοριακής συνθήκης $K - S_{T/3}^* = P(S_{T/3}^*, T/3)$:

```
"Input Data";
Needs["MultivariateStatistics`"]
```

```

T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0.0;vol=0.3;
d1[x_,y_,z_]=(Log[x/y]+(r-div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);
d2[x_,y_,z_]=d1[x,y,z]-vol*Sqrt[z];

"***** P(1) *****";

pre1=Exp[-r*T]*K*CDF[NormalDistribution[],-d2[S0,K,T]]-Exp[-
div*T]*S0*CDF[NormalDistribution[],-d1[S0,K,T]];

"***** P(2) *****";

"Critical price for T/2";
predt[x_]=Exp[-r*T/2]*K*CDF[NormalDistribution[],-
d2[x,K,T/2]]-Exp[-div*T/2]*x*CDF[NormalDistribution[],-
d1[x,K,T/2]];

"Newton-Raphson technique";
Scrit=x/.FindRoot[K-x-predt[x]==0,{x,K+S0}];

"Geske & Johnson for P(2)";
ρ=Sqrt[0.5];
pre2=K*(Exp[-r*T/2]*CDF[NormalDistribution[],-
d2[S0,Scrit,T/2]]+Exp[-
r*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ},{-
ρ,1}]],{d2[S0,Scrit,T/2],-d2[S0,K,T]})-S0*(Exp[-
div*T/2]*CDF[NormalDistribution[],-d1[S0,Scrit,T/2]]+Exp[-
div*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ},{-
ρ,1}]],{d1[S0,Scrit,T/2],-d1[S0,K,T]});

"***** P(3) *****";

"Critical price for 2T/3";
predt[x_]=Exp[-r*T/3]*K*CDF[NormalDistribution[],-
d2[x,K,T/3]]-Exp[-div*T/3]*x*CDF[NormalDistribution[],-
d1[x,K,T/3]];

"Newton-Raphson technique";
Scrit2=x/.FindRoot[K-x-predt[x]==0,{x,K+S0}];

"Geske & Johnson for P(3)";
ρ12=Sqrt[0.5];
ρ13=Sqrt[1/3];
ρ23=Sqrt[2/3];
pre3[y_]=K*(Exp[-r*T/3]*CDF[NormalDistribution[],-
d2[S0,y,T/3]]+Exp[-
r*2*T/3]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ12},{-
ρ12,1}]],{d2[S0,y,T/3],-d2[S0,Scrit2,2*T/3]})+Exp[-
r*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0,0},{1,ρ12,-
ρ13},{ρ12,1,-ρ23},{-ρ13,-
ρ23,1}]],{d2[S0,y,T/3],d2[S0,Scrit2,2*T/3],-d2[S0,K,T]})-
S0*(Exp[-div*T/3]*CDF[NormalDistribution[],-
d1[S0,y,T/3]]+Exp[-
div*2*T/3]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ12},{-
ρ12,1}]],{d1[S0,y,T/3],-d1[S0,Scrit2,2*T/3]})+Exp[-
div*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0,0},{1,ρ12,-

```

```

ρ13},{ρ12,1,-ρ23},{-ρ13,-
ρ23,1}},{d1[S0,y,T/3],d1[S0,Scrit2,2*T/3],-d1[S0,K,T]}});
pre33=Maximize[pre3[y],y<=Scrit2,{y}][[1]];

"*** Richardson Extrapolation ***";
Print["P(1) = ",pre1," (European put)"];
Print["P(2) = ",pre2];
Print["P(3) = ",pre33];
Print["Geske & Johnson approximation: P(1,2,3) =
",premium=0.5*pre1-4*pre2+4.5*pre33];

```

P(1) = 6.19676 (European put)
P(2) = 7.16061
P(3) = 7.46865

Geske & Johnson approximation: P(1,2,3) = 8.06486

4.2 Quadratic Approximation

Οι Barone-Adesi & Whaley (1987) πρότειναν μία τετραγωνική προσέγγιση για την αποτίμηση των δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, βασισμένη σε μία προσεγγιστική μέθοδο του McMillan (1986). Αρχικά, γίνεται η υπόθεση ότι εφόσον η μερική διαφορική εξίσωση (1.1) ισχύει τόσο για δικαιώματα Ευρωπαϊκού, όσο και Αμερικανικού τύπου, θα ισχύει και για το πρόσθετο ασφάλιστρο λόγω δυνατότητας πρώιμης εξάσκησης (early exercise premium, EEP). Ενδεικτικά, στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, είναι:

$$V_{\varepsilon}(S_t, t) = C(S_t, t) - c(S_t, t)$$

και η μερική διαφορική εξίσωση (1.1) για το EEP γράφεται:

$$\frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{\varepsilon}}{\partial S^2} + bS \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial S} - rV_{\varepsilon} = 0,$$

όπου $b = r - \delta$. Αν η παραπάνω εξίσωση πολλαπλασιαστεί με $2/\sigma^2$, γίνουν οι αντικαταστάσεις $M = 2r/\sigma^2$, $N = 2b/\sigma^2$ και η μερική παράγωγος της V_{ε} ληφθεί ως προς T (δηλ. ως προς το χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, οπότε $\partial V_{\varepsilon}/\partial T = -\partial V_{\varepsilon}/\partial t$), προκύπτει η εξίσωση:

$$-\frac{M}{r} \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial T} + S^2 \frac{\partial^2 V_{\varepsilon}}{\partial S^2} + NS \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial S} - MV_{\varepsilon} = 0.$$

Στη συνέχεια, αν η V_{ε} γραφεί ως $V_{\varepsilon}(S_t, k(t)) = k(t)f(S_t, k(t))$, όπου k μία συνάρτηση του χρόνου, προκύπτουν οι ισότητες:

$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial^2 S} = k \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} \quad \text{και} \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial T} = \frac{\partial k}{\partial T} f + k \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial f}{\partial k}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες, θέτοντας $k(t) = 1 - e^{-r(T-t)}$ και παραγωγίζοντας τη συνάρτηση k , η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} + NS \frac{\partial f}{\partial S} - \frac{M}{k} f - (1-k)M \frac{\partial f}{\partial k} = 0.$$

Στο σημείο αυτό, γίνεται η υπόθεση ότι ο τελευταίος όρος της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να αγνοηθεί. Στην πράξη, η υπόθεση αυτή οδηγεί σε ικανοποιητική προσέγγιση της «πραγματικής» αξίας ενός δικαιώματος, όταν:

(α) $T \rightarrow 0$, οπότε η μερική παράγωγος $\partial f / \partial k \rightarrow 0$ και ο όρος μηδενίζεται,

(β) $T \rightarrow \infty$, οπότε η συνάρτηση $k(T) = 1 - e^{-rT} \rightarrow 1$ και ο όρος μηδενίζεται.

Μετά από την απαλοιφή του τελευταίου όρου, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} + NS \frac{\partial f}{\partial S} - \frac{M}{k} f \approx 0,$$

πρόκειται δηλαδή για μία απλή διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής AS^q . Αυτές βρίσκονται αντικαθιστώντας την AS^q στην παραπάνω, :

$$AS^q \left[q^2 + (N-1)q - \frac{M}{k} \right] \approx 0.$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$q_1 = \frac{1 - N - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{k}}}{2}, \quad q_2 = \frac{N - 1 - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{k}}}{2},$$

με $q_1 < 0$ και $q_2 > 0$, επειδή $M/k > 0$. Συνεπώς, η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$f(S_t) = \alpha_1 S_t^{q_1} + \alpha_2 S_t^{q_2},$$

με αγνώστους α_1 και α_2 . Δεδομένου ότι $q_1 < 0$, αν ίσχυε $\alpha_1 \neq 0$ η συνάρτηση $f(S_t) \rightarrow \infty$ όταν $S_t \rightarrow 0$. Αυτό σημαίνει ότι $V_\varepsilon(0, t) = 0$, κάτι που δεν ισχύει. Άρα, $\alpha_1 = 0$. Ο όρος α_2 προκύπτει λύνοντας το σύστημα των ακόλουθων εξισώσεων:

(α) της συνοριακής συνθήκης για την κρίσιμη τιμή εξάσκησης:

$$C(S_t^*, t) = S_t^* - K \approx c(S_t^*, t) + k(t)\alpha_2 S_t^{*q_2},$$

(β) της εξίσωσης που προκύπτει αν παραγωγίσουμε τα δύο σκέλη της παραπάνω σχέσης ως προς S^* (για το $c(S_t^*, t)$ χρησιμοποιείται η σχέση (1.3)):

$$1 = e^{(b-r)T} N(d_1(S^*)) + k(t)q_2\alpha_2 S_t^{*q_2-1},$$

από όπου προκύπτει:

$$\alpha_2 = [1 - e^{(b-r)T} N(d_1(S^*))]/k(t)q_2 S_t^{*q_2-1}.$$

Συνοψίζοντας, η αξία του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου προσεγγίζεται ως εξής:

$$C(S_t, t) = \begin{cases} c(S_t, t) + A_2 \left(\frac{S_t}{S_t^*}\right)^{q_2}, & S_t < S_t^* \\ S_t - K, & S_t \geq S_t^* \end{cases}$$

Ο όρος $c(S_t, t)$ υπολογίζεται βάσει του τύπου Black & Scholes - Merton για ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (σχέση (1.3)), τη χρονική στιγμή t .

Οι υπόλοιποι όροι δίνονται από τους τύπους:

$$A_2 = \frac{S_t^* [1 - e^{(b-r)(T-t)} N(d_1(S^*))]}{q_2},$$

$$q_2 = \frac{1 - N + \sqrt{(N - 1)^2 + \frac{4M}{k(t)}}}{2},$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2\delta}{\sigma^2}, \quad k(t) = 1 - e^{-r(T-t)}, \quad b = r - \delta.$$

Η κρίσιμη τιμή εξάσκησης S_t^* προκύπτει αριθμητικά από τη συνοριακή συνθήκη:

$$S_t^* - K = c(S_t^*, t) + A_2.$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται ενδεικτικά με την επαναληπτική προσεγγιστική τεχνική Newton-Raphson (βλ. ενότητα 3.4).

Αντίστοιχα, η αξία του δικαιώματος πώλησης υπολογίζεται ως εξής:

$$P(S_t, t) = \begin{cases} p(S_t, t) + A_1 \left(\frac{S_t}{S_t^{**}}\right)^{q_1}, & S_t > S_t^{**} \\ K - S_t, & S_t \leq S_t^{**} \end{cases}$$

Ο όρος $p(S_t, t)$ υπολογίζεται βάσει του τύπου Black & Scholes - Merton για το αντίστοιχο δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (σχέση (1.5)), τη χρονική στιγμή t .

Οι όροι A_1 και q_1 δίνονται από τους τύπους:

$$A_1 = -\frac{S_t^{**}[1 - e^{(b-r)(T-t)}N(-d_1(S_t^{**}))]}{q_1},$$

$$q_1 = \frac{1 - N - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{k(t)}}}{2}.$$

Οι υπόλοιποι όροι είναι ίδιοι με την περίπτωση του δικαιώματος αγοράς.

Η κρίσιμη τιμή εξάσκησης S_t^{**} προκύπτει αριθμητικά από τη συνοριακή συνθήκη:

$$K - S_t^{**} = p(S_t^{**}, t) + A_1.$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται ενδεικτικά με την επαναληπτική προσεγγιστική τεχνική Newton-Raphson (βλ. ενότητα 3.4).

Οι Ju και Zhong (1999) πρότειναν μία βελτιωμένη έκδοση της παραπάνω μεθόδου, ενισχύοντας την ακρίβεια της προσέγγισης για δικαιώματα με περίοδο ωρίμανσης από 1 ως 5 έτη. Παράλληλα, κατόρθωσαν να βελτιώσουν και την ακρίβεια της προσέγγισης για δικαιώματα με περίοδο ωρίμανσης μικρότερη από 1 έτος και μεγαλύτερη των 5 ετών.

Η μέθοδος Quadratic Approximation υλοποιήθηκε για $t = 0$ στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

```
"Input Data";
T=3; S0=40; K=45; r=0.07; div=0;
b=r-div;
vol=0.3;
error=10^-6;

"Black & Scholes - Merton for the European put option";
d1[x_]=(Log[x/K]+(b+0.5*vol^2)*T)/(vol*Sqrt[T]);
d2[x_]=d1[x]-vol*Sqrt[T];
Nd1[x_]=CDF[NormalDistribution[],-d1[x]];
Nd2[x_]=CDF[NormalDistribution[],-d2[x]];
euro[x_]=-x*Exp[-div*T]*Nd1[x]+K*Exp[-r*T]*Nd2[x];

"Quadratic approximation terms";
m=2*r/(vol^2);
n=2*b/(vol^2);
k=1-Exp[-r*T];
q1=(1-n-Sqrt[(n-1)^2+4*m/k])/2;
a1[x_]=-x*(1-Exp[(b-r)*T]*Nd1[x])/q1;

"Newton-Raphson technique";
f[x_]=K-x-euro[x]-a1[x];
g[x_]=f[x]/D[f[x],x];
```

```

Scrit=K+S0;
j=0;
While[Abs[g[Scrit]]>error,Scrit=Scrit-g[Scrit];j++];
Print["The critical price at t=0 is ",Scrit,". It was approxi-
mated after ",j," iterations of the Newton-Raphson technique,
with an error less than ",error//N]

"American put premium";
premium=If[S0>Scrit,euro[S0]+a1[Scrit]*(S0/Scrit)^q1,K-S0];
Print["The American put premium at t=0: ",premium]

```

The critical price at t=0 is 30.2055. It was approximated after 4 iterations of the Newton-Raphson technique, with an error less than $1 \cdot 10^{-6}$

The American put premium at t=0: 8.00588

4.3 Integral representation of the early exercise premium

Έστω B_s μία μη αρνητική συνεχής συνάρτηση του χρόνου, για $s \in [t, T]$, και έστω ένα συμβόλαιο που αποτελείται από ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και μία σειρά χρηματοροών που συμβαίνουν με ρυθμό:

$$\delta S_t e^{-(\delta-\rho)(s-t)} N(d_1(S_t, B_s, s-t)) - rKN(d_2(S_t, B_s, s-t)),$$

όπου:

$$d_1(S_t, B_s, s-t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{s-t}} \left[\ln\left(\frac{S_t}{B_s}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t) \right],$$

$$d_2(S_t, B_s, s-t) = d_1(S_t, B_s, s-t) - \sigma\sqrt{s-t}.$$

Οι Kim (1990), Jacka (1991), Carr, Jarrow & Myneni (1992) έδειξαν ότι η αξία ενός τέτοιου συμβολαίου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$V(S_t, B) = c(S_t, t) + \int_{s=t}^T g(S_t, B_s, s-t) ds, \quad (4.4)$$

όπου $c(S_t, t)$ η αξία του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου τη χρονική στιγμή t , ενώ η συνάρτηση g δίνεται από τον τύπο:

$$g(S_t, B_s, s-t) = \delta S_t e^{-\delta(s-t)} N(d_1(S_t, B_s, s-t)) - rK e^{-r(s-t)} N(d_2(S_t, B_s, s-t)).$$

Η εύρεση του συνόρου πρώιμης εξάσκησης για το δικαίωμα Αμερικανικού τύπου προκύπτει από την επίλυση ως προς B^* της εξίσωσης:

$$V(B_s^*, B^*) = B_s^* - K, \quad s \in [t, T], \quad (4.5)$$

και η αξία ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου στο χρόνο t είναι:

$$C(S_t, t) = V(S_t, B^*).$$

Αντίστοιχα, για την εύρεση της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου $P(S_t, B)$, η συνάρτηση g υπολογίζεται από τον τύπο:

$$g(S_t, B_s, s - t) = -\delta S_t e^{-\delta(s-t)} N(-d_1(S_t, B_s, s - t)) + rK e^{-r(s-t)} N(-d_2(S_t, B_s, s - t)),$$

ενώ ο όρος $c(S_t, t)$ αντικαθίσταται από τον $p(S_t, t)$, που αντιστοιχεί σε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου.

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης g εκφράζει ουσιαστικά το πρόσθετο ασφάλιστρο λόγω δυνατότητας πρώιμης εξάσκησης (early exercise premium, EEP) ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου.

Επειδή η B_s^* είναι μία άγνωστη συνάρτηση του χρόνου, οι Broadie & Detemple, βασιζόμενοι στον Kim (1990), προτείνουν τον ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό του παραπάνω ολοκληρώματος σε n διαστήματα και τη χρήση κάποιας αριθμητικής μεθόδου για την εκτίμησή του, θεωρώντας κατά προσέγγιση την B_s^* σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα. Ενδεικτικά, προτείνεται η χρήση του κανόνα του τραπεζιού (βλ. ενότητα 3.6).

Η εικόνα του συνόρου πρώιμης εξάσκησης προσεγγίζεται σταδιακά από το τέλος προς την αρχή του χρόνου, με εφαρμογή της τεχνικής της ανάδρομης επαγωγής, έχοντας δηλαδή ως εφαλτήριο της διαδικασίας το τελευταίο (χρονικά) διάστημα ολοκλήρωσης $[T - dt, T]$. Αναλυτικότερα, για ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου γίνεται η υπόθεση ότι ισχύει $B_T^* = \text{Max}\{rK/\delta, K\}$ (ενδεικτικά βλ. Broadie & Detemple, 1996). Στη συνέχεια, κινούμενοι προς τα πίσω, το σύνορο πρώιμης εξάσκησης προσεγγίζεται διαδοχικά από την επίλυση της εξίσωσης (4.4), σε συνδυασμό με την συνοριακή συνθήκη (4.5). Συγκεκριμένα, η τιμή της B_s^* , $s \in [0, T]$ στα διακριτά χρονικά σημεία $0, dt, 2dt, \dots, (n-1)dt$ προσεγγίζεται ως εξής ($dt = T/n$):

$$B_{(i-1)dt}^* \approx S_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου $S_{n+1}^* = B_T^*$ και η S_{n-i+1}^* , για $i = 1, 2, \dots, n$ προκύπτει αναδρομικά ως η ρίζα ως προς x της παρακάτω εξίσωσης:

$$x - K = c(x, (n-i)dt) + \frac{dt}{2} \left(g(x, x, 0) + 2 \sum_{k=1}^{i-1} g(x, S_{n-k+1}^*, kdt) + g(x, S_{n+1}^*, idt) \right).$$

Υπενθυμίζεται εδώ ότι, λόγω της ανάδρομης επαγωγής, το n -οστό βήμα αντιστοιχεί στο αρχικό χρονικό διάστημα $[0, dt]$, ενώ με $c(x, (n-i)dt)$ συμβολίζεται η αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου τη χρονική στιγμή $(n-i)dt$ (δηλαδή υπολείπεται χρόνος idt ως τη λήξη του).

Τέλος, η αξία $C(S_0, t_0)$ του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, προσεγγίζεται ως εξής:

$$C(S_0, 0) = V(S_0, B^*) \approx$$

$$c(S_0, 0) + \frac{dt}{2} \left(g(S_0, S_1^*, 0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} g(S_0, S_{n-k+1}^*, kdt) + g(S_0, S_{n+1}^*, T) \right).$$

Στην υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί, η μέθοδος αυτής της ενότητας υλοποιήθηκε στο λογισμικό Wolfram Mathematica®, για $t = 0$ και για $n = 50$ βήματα. Παράλληλα, κατασκευάστηκε και το σύνορο πρώιμης εξάσκησης:

```

"Input Data";
steps=50;
T=3;S0=45;K=40;r=0.0;div=0.07;vol=0.3;t0=10^-6;
n=steps;dt=T/n;
Scr=Table[Max[r*K/div,K],{n+1}];

"**** INTEGRAL REPRESENTATION OF THE EEP ****";

"European call option";
d11[x_,z_]=(Log[x/K]+(r-div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);
d22[x_,z_]=d11[x,z]-vol*Sqrt[z];
Nd11[x_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d11[x,z]];
Nd22[x_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d22[x,z]];
euro[x_,z_]=x*Exp[-div*z]*Nd11[x,z]-K*Exp[-r*z]*Nd22[x,z];

"Contract value";
dd1[x_,y_,z_]=(Log[x/y]+(r-div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);
dd2[x_,y_,z_]=dd1[x,y,z]-vol*Sqrt[z];
Ndd1[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],dd1[x,y,z]];
Ndd2[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],dd2[x,y,z]];
g[x_,y_,z_]=-r*K*Exp[-r*z]*Ndd2[x,y,z]+div*x*Exp[-div*z]*Ndd1[x,y,z];

"Backward induction for the critical price";
Do[
  vs[x_]=euro[x,ii*dt]+(dt/2)*(g[x,x,t0]+2*Sum[g[x,Scr[[n-j+1]],j*dt],{j,1,ii-1}]+g[x,Scr[[n+1]],ii*dt]);
  Scr[[n+1-ii]]=x/.FindRoot[vs[x]-x+K==0,{x,Scr[[n+1]]}];
  ,{ii,1,n}];

premi-
um=euro[S0,T]+(dt/2)*(g[S0,Scr[[1]],t0]+2*Sum[g[S0,Scr[[j+1]],j*dt],{j,1,n-1}]+g[S0,Scr[[n+1]],T]);

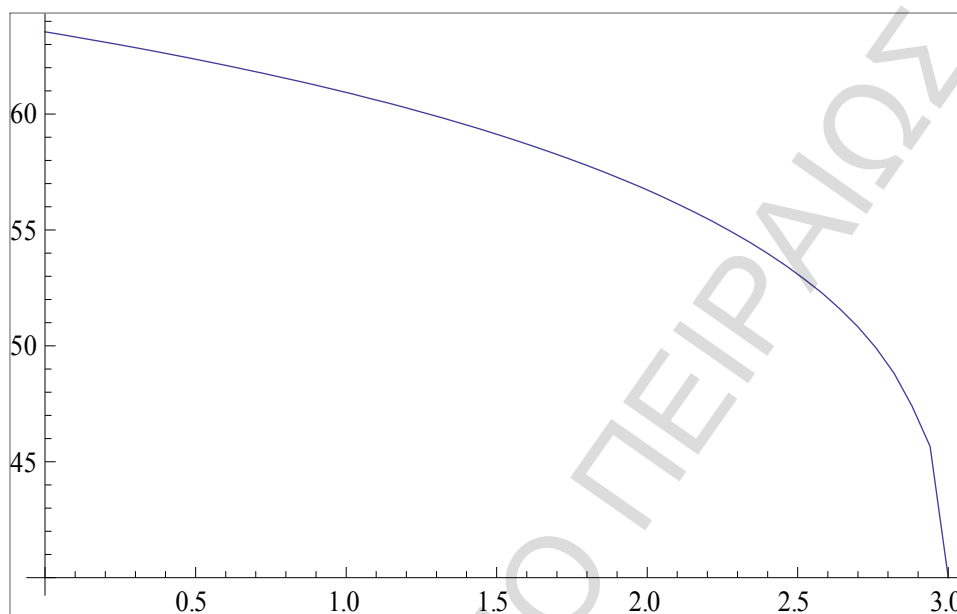
ListPlot[Table[{(i-1)*dt,Scr[[i]]},{i,1,n+1}],PlotRange->All,Joined->True]
Print["The American call premium at t=0 is ",premium,". It consists of a European call premium ",euro[S0,T]," plus an

```

```
early exercise premium ",premium-euro[S0,T]);  
Print["The critical price at t=0 is ",Scr[[1]]];
```

ΣΧΗΜΑ 4.1

Προσέγγιση του συνόρου πρόωμης εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$ και $T = 3$, για ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$.



The American call premium at $t=0$ is 7.79677. It consists of a European call premium 6.19676 plus an early exercise premium 1.60001.

The critical price at $t=0$ is 63.5464.

4.4 LBA

Οι Broadie & Detemple (1996) ανέπτυξαν μία αναλυτική μέθοδο για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος της αξίας ενός δικαιώματος. Η μέθοδος Lower Bound Algorithm (LBA) βασίζεται στην εκτίμηση της μέγιστης αξίας ενός φραγμένου (capped) δικαιώματος, για το ίδιο υποκείμενο αγαθό.

Το φραγμένο δικαίωμα αγοράς, του οποίου η αξία συμβολίζεται με $C(S_t, L)$, είναι ένα δικαίωμα το οποίο θα πρέπει να εξασκηθεί αναγκαστικά, αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού «αγγίξει» κάποιο ανώτατο φράγμα L . Προσοχή θα πρέπει να δοθεί ώστε να μη συγχέεται η έννοια του κάτω φράγματος (lower bound) της αξίας του δικαιώματος Αμερικανικού τύπου με το φράγμα (cap) της τιμής του υποκείμενου αγαθού, στην οποία θα πρέπει να εξασκηθεί το φραγμένο δικαίωμα (capped option).

Η συνάρτηση κέρδους ενός φραγμένου δικαιώματος αγοράς τη χρονική στιγμή t , είναι:

$$\text{Max}\{\text{Min}\{S_t, L\} - K, 0\}.$$

Από τη στιγμή που η βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου είναι μοναδική, όπως αυτή απορρέει από τη σχέση (1.6), σε κάθε περίπτωση η αξία του αντίστοιχου φραγμένου δικαιώματος, το οποίο ενδέχεται να εξασκηθεί πρόωρα αν η S_t αγγίξει το φράγμα L , θα είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την αξία $C(S_t)$ του αντίστοιχου δικαιώματος Αμερικανικού τύπου:

$$C(S_t, L) \leq C(S_t).$$

Έτσι, αν υπολογιστεί η μέγιστη αξία $\max_L C(S_t, L)$ του φραγμένου δικαιώματος, ουσιαστικά βρίσκεται ένα ικανοποιητικό κάτω φράγμα $C^l(S_t)$ της «πραγματικής» αξίας του αντίστοιχου δικαιώματος Αμερικανικού τύπου:

$$C^l(S_t) \equiv \max_L C(S_t, L).$$

Ο τύπος για τον υπολογισμό ενός φραγμένου δικαιώματος αγοράς, σύμφωνα με τους Broadie & Detemple (1995), είναι:

$$\begin{aligned} C(S_t, L) = (L - K) & \left[\lambda_t^{2\varphi/\sigma^2} N(d_o) + \lambda_t^{2\alpha/\sigma^2} N(d_o + 2f \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}) \right] \\ & + S_t e^{-\delta(T-t)} [N(d_1^-(L) - \sigma\sqrt{T-t}) - N(d_1^-(K) - \sigma\sqrt{T-t})] \\ & - \lambda_t^{-2(r-\delta)/\sigma^2} L e^{-\delta(T-t)} [N(d_1^+(L) - \sigma\sqrt{T-t}) - N(d_1^+(K) - \sigma\sqrt{T-t})] \\ & - K e^{-r(T-t)} [N(d_1^-(L)) - N(d_1^-(K))] \\ & - \lambda_t^{1-2(r-\delta)/\sigma^2} [N(d_1^+(L)) - N(d_1^+(K))], \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned} d_o &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} [\ln(\lambda_t) - f(T-t)], \\ d_1^\mp(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} [\mp \ln(\lambda_t) - \ln(L) + \ln(x) + b(T-t)], \end{aligned}$$

$$b = \delta - r + \frac{1}{2}\sigma^2, \quad f = \sqrt{b^2 + 2r\sigma^2}, \quad \varphi = \frac{1}{2}(b - f), \quad a = \frac{1}{2}(b + f), \quad \lambda_t = S_t/L.$$

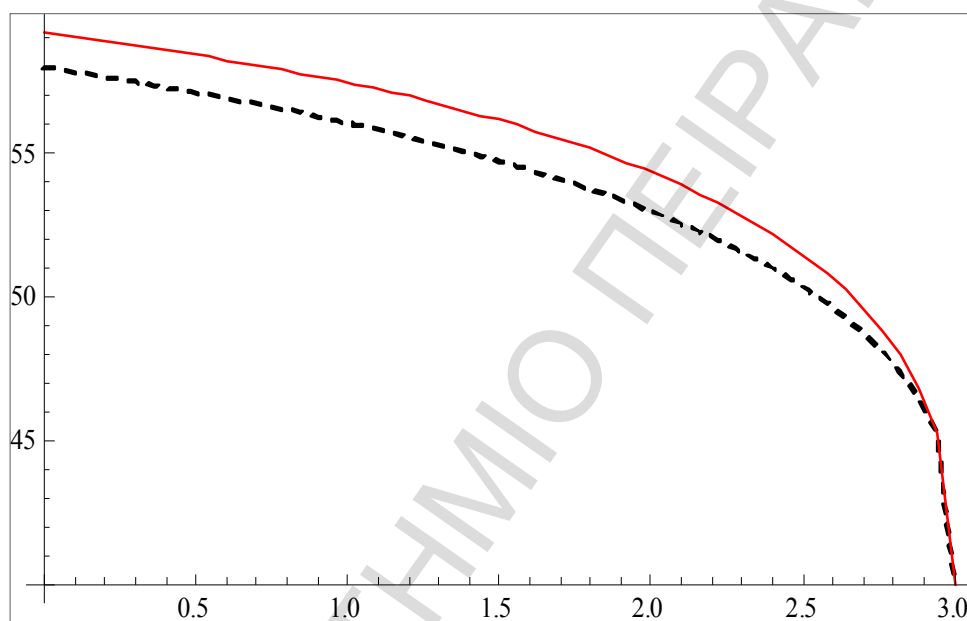
Για την κατασκευή ενός ικανοποιητικού κάτω φράγματος για το σύνολο πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου θεωρείται η συνάρτηση L_t^* , $t \in [0, T]$ η οποία προκύπτει από την επίλυση της ακόλουθης εξίσωσης, καθώς η S_t τείνει (από κάτω) στο φράγμα L :

$$D(L, t) \equiv \lim_{S_t \uparrow L} \frac{\partial C(S_t, L)}{\partial L} = 0. \quad (4.6)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης προσεγγίζεται συνήθως με τη βοήθεια κάποιας επαναληπτικής μεθόδου και αποδεικνύεται (π.χ. βλ. Broadie and Detemple (1996), p. 1217)) ότι οδηγεί σε ένα σύνоро L_t^* ελάχιστα μικρότερο από το βέλτιστο σύνоро εξάσκησης B_t^* , $t \in [0, T]$ ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου (με $\delta > 0$).

ΣΧΗΜΑ 4.2

Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$ και $T = 3$, και ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$ βημάτων: Με τη διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζεται το φράγμα L_t^* , όπως προκύπτει από τη σχέση (4.6), ενώ με την κόκκινη συνεχή καμπύλη απεικονίζεται η προσέγγιση του «πραγματικού» φράγματος B_t^* , σύμφωνα με τη μέθοδο QA (βλ. ενότητα 4.2)



Εξετάζοντας ένα μεγάλο πλήθος δικαιωμάτων, οι Broadie & Detemple πρότειναν μια προσέγγιση για την «πραγματική» αξία $C(S_t)$ ενός δικαιώματος της μορφής:

$$C(S_t) \approx \hat{\lambda}_1 C^l(S_t).$$

Το $\hat{\lambda}_1 \geq 1$ είναι μία συνάρτηση των παραμέτρων S, K, T, r, δ και μπορεί να προκύψει με την εφαρμογή παλινδρόμησης στις ακόλουθες μεταβλητές:

$$x_1 = T, \quad x_2 = \sqrt{T}, \quad x_3 = \frac{S}{K}, \quad x_4 = r, \quad x_5 = \delta, \quad x_6 = \text{Min} \left\{ \frac{r}{\text{Max} \{ \delta, 10^{-5} \}}, 5 \right\},$$

$$x_7 = x_6^2, \quad x_8 = \frac{C^l(S) - c(S)}{K}, \quad x_9 = x_8^2, \quad x_{10} = \frac{C^l(S)}{c(S)}.$$

όπου $c(S)$ η αξία του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Η εφαρμογή παλινδρόμησης οδήγησε στην κατασκευή της ακόλουθης συνάρτησης για τη μεταβλητή y_1 :

$$y_1 = 1,002 - 1,485 \times 10^{-3}x_1 + 6,693 \times 10^{-3}x_2 - 1,451 \times 10^{-3}x_3 - 3,430 \times 10^{-2}x_4 + 6,301 \times 10^{-2}x_5 - 1,954 \times 10^{-3}x_6 + 2,740 \times 10^{-4}x_7 - 1,043 \times 10^{-1}x_8 + 5,077 \times 10^{-1}x_9 - 2,509 \times 10^{-3}x_{10},$$

και ως $\hat{\lambda}_1$ λαμβάνεται η:

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν } C^l(S) = c(S) \text{ ή } C^l(S) \leq S - K \\ \text{Max}\{\text{Min}\{y_1, 1,0133\}, 1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι παραπάνω συντελεστές των x_i εκτιμήθηκαν μέσω παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας 2500 ακριβείς τιμές του δικαιώματος, για διάφορες τιμές των S, K, T, r και δ .

Από τα παραπάνω προκύπτει για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, ότι $1 \leq \hat{\lambda}_1 \leq 1,0133$, γεγονός που σημαίνει ότι το κάτω φράγμα $C^l(S_t)$ προσεγγίζει την «πραγματική» αξία ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, με μέγιστη απόκλιση 1,33%. Ο υπολογισμός της τιμής της μεταβλητής y_1 και στη συνέχεια της εκτιμήτριας $\hat{\lambda}_1$, αποσκοπεί σε μία ακόμη καλύτερη προσέγγιση της «πραγματικής» αξίας του δικαιώματος.

Ο προσεγγιστικός υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τη μέθοδο LBA υλοποιήθηκε στο Wolfram Mathematica®, χρησιμοποιώντας την υπολογιστική διαδικασία του αντίστοιχου δικαιώματος αγοράς και αλλάζοντας τις παραμέτρους $K \leftrightarrow S$ και $r \leftrightarrow \delta$ (σχέση (1.7)):

```
"Input Data";
T=3;S0=45;K=40;r=0.0;div=0.07;vol=0.3;
b=div-r+0.5*vol^2;
f=Sqrt[(b^2)+2*r*vol^2];
phi=0.5*(b-f);
a=0.5*(b+f);
lambda[x_,y_]=x/y;
d0[x_,y_]=(Log[lambda[x,y]]-f*T)/(vol*Sqrt[T]);
d1plus[x_,y_,z_]=(Log[lambda[x,y]]-Log[y]+Log[z]+b*T)/(vol*Sqrt[T]);
d1minus[x_,y_,z_]=(-Log[lambda[x,y]]-Log[y]+Log[z]+b*T)/(vol*Sqrt[T]);
Nd0[x_,y_]=CDF[NormalDistribution[],d0[x,y]];
Nd0new[x_,y_]=CDF[NormalDistribution[],d0[x,y]+2*f*Sqrt[T]/vol];
Nd1plus[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d1plus[x,y,z]];
Nd1plusnew[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d1plus[x,y,z]-vol*Sqrt[T]];
Nd1minus[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d1minus[x,y,z]];
Nd1minusnew[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d1minus[x,y,z]-vol*Sqrt[T]];

d1euro=(Log[S0/K]+(r-div+0.5*vol^2)*T)/(vol*Sqrt[T]);
d2euro=d1euro-vol*Sqrt[T];
```

```

Nd1euro=CDF[NormalDistribution[],d1euro];
Nd2euro=CDF[NormalDistribution[],d2euro];
euro=S0*Exp[-div*T]*Nd1euro-K*Exp[-r*T]*Nd2euro;

c[x_,y_]=(y-
K)*((λ[x,y]^(2*φ/(vol^2))*Nd0[x,y]+(λ[x,y]^(2*a/(vol^2))))*Nd0n
ew[x,y]))+x*Exp[-div*T]*(Nd1minusnew[x,y,y]-
Nd1minusnew[x,y,K])-(λ[x,y]^(-2*(r-div)/(vol^2)))*y*Exp[-
div*T]*(Nd1plusnew[x,y,y]-Nd1plusnew[x,y,K])-K*Exp[-
r*T]*(Nd1minus[x,y,y]-Nd1minus[x,y,K])-(λ[x,y]^(1-2*(r-
div)/(vol^2)))*(Nd1plus[x,y,y]-Nd1plus[x,y,K]));

lb=Maximize[{c[S0,y]},{y}][[1]];
Lstar=y/.Maximize[{c[S0,y]},{y}][[2,1]];

x1=T;
x2=Sqrt[T];
x3=S0/K;
x4=r;
x5=div;
x6=Min[r/(Max[div,10^-5]),5];
x7=x6^2;
x8=(lb-euro)/K;
x9=x8^2;
x10=lb/euro;
y1=1.002-x1*1.485*10^-3+x2*6.693*10^-3-x3*1.451*10^-3-
x4*3.43*10^-2+x5*6.301*10^-2-x6*1.954*10^-3+x7*2.74*10^-4-
x8*1.043*10^-1+x9*5.077*10^-1-x10*2.509*10^-3;
λ1=If[lb==euro||lb<=S0-K,1,Max[Min[y1,1.0133],1]];
lba=λ1*lb;

Print["The cap L* that maximizes the value of the capped call
option at t=0 is: ",Lstar];
Print["The lower bound (LB) for the American put premium at
t=0 is: ",lb];
Print["The Lower Bound Approximation (LBA) for the American
put premium at t=0 is: ",lba];

```

The cap L^* that maximizes the value of the capped call option at $t=0$ is: 57.9895.

The lower bound (LB) for the American put premium at $t=0$ is: 7.93356.

The Lower Bound Approximation (LBA) for the American put premium at $t=0$ is: 7.97427.

4.5 LUBA

Πέρα από τον υπολογισμό του κάτω φράγματος, οι Broadie & Detemple (1996) προχώρησαν και στον υπολογισμό ενός άνω φράγματος $C^u(S_t)$ για την αξία ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός

σταθμισμένου μέσου όρου του κάτω και του άνω φράγματος (Lower & Upper Bound Approximation, LUBA), κατόρθωσαν να πάρουν μία ακόμη καλύτερη προσέγγιση της «πραγματικής» αξίας του δικαιώματος, σε σχέση με τη μέθοδο LBA.

Βάσει θεωρήματος (ενδεικτικά βλ. Broadie & Detemple, 1996), για το άνω φράγμα της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, ισχύει:

$$C(S_t) \leq C^u(S_t) = V(S_t, L^*),$$

όπου L^* το φράγμα από την εξίσωση (4.6), ενώ η συνάρτηση V ισούται με το δεξί σκέλος της σχέσης (4.4). Με άλλα λόγια, οι Broadie & Detemple χρησιμοποιούν, ως ενδιάμεσο στάδιο στη μεθόδό τους, την αναλυτική αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος, όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.3.

Στη συνέχεια, για την προσέγγιση της «πραγματικής» αξίας του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου, το άνω και κάτω φράγμα σταθμίζονται ως εξής:

$$C(S) = \hat{\lambda}_2 C^l(S) + (1 - \hat{\lambda}_2) C^u(S),$$

όπου η $\hat{\lambda}_2 \in [0,1]$ είναι μία συνάρτηση των παραμέτρων S, K, T, r και δ , η οποία, όπως και στην περίπτωση της μεθόδου LBA, προέκυψε με την εφαρμογή παλινδρόμησης στις ακόλουθες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} x_1 &= T, \quad x_2 = \sqrt{T}, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \delta, \quad x_5 = \text{Min} \left\{ \frac{r}{\text{Max}\{\delta, 10^{-5}\}}, 5 \right\}, \\ x_6 &= x_5^2, \quad x_7 = \frac{dC^l(S)}{dS}, \quad x_8 = x_7^2, \quad x_9 = \frac{C^l(S) - c(S)}{K}, \quad x_{10} = x_9^2, \\ x_{11} &= \frac{C^l(S)}{c(S)}, \quad x_{12} = \frac{C^u(S) - C^l(S)}{K}, \quad x_{13} = \frac{C^u(S)}{C^l(S)}, \quad x_{14} = \frac{S}{L_o^*}, \quad x_{15} = x_{14}^2. \end{aligned}$$

Η εφαρμογή παλινδρόμησης οδήγησε στην κατασκευή της ακόλουθης συνάρτησης για τη μεταβλητή y_2 :

$$\begin{aligned} y_2 &= 8,664 \times 10^{-1} - 7,668 \times 10^{-2} x_1 + 3,092 \times 10^{-1} x_2 - 3,356 \times 10^{-1} x_3 \\ &+ 1,200 x_4 - 3,507 \times 10^{-2} x_5 - 9,775 \times 10^{-2} x_6 - 7,208 \times 10^{-1} x_7 \\ &+ 6,071 \times 10^{-1} x_8 + 7,379 x_9 - 4,999 \times 10 x_{10} + 1,148 \times 10^{-1} x_{11} \\ &- 5,037 \times 10 x_{12} - 6,629 \times 10^{-1} x_{13} - 4,745 \times 10^{-1} x_{14} + 5,995 \times 10^{-1} x_{15}. \end{aligned}$$

Τέλος, η $\hat{\lambda}_2$ είναι:

$$\hat{\lambda}_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν } C^l(S) = c(S) \text{ ή } C^l(S) \leq S - K \\ \text{Max}\{\text{Min}\{y_2, 1\}, 0\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για την απλούστευση της διαδικασίας προσέγγισης της «πραγματικής» αξίας ενός δικαιώματος, οι Broadie & Detemple προτείνουν εναλλακτικά τη χρήση του μέσου όρου των δύο φραγμάτων:

$$C(S) = \frac{1}{2}C^l(S) + \frac{1}{2}C^u(S).$$

Ο προσεγγιστικός υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τη μέθοδο LUBA υλοποιήθηκε στο Wolfram Mathematica®, χρησιμοποιώντας την υπολογιστική διαδικασία του αντίστοιχου δικαιώματος αγοράς και αλλάζοντας τις παραμέτρους $K \leftrightarrow S$ και $r \leftrightarrow \delta$ (σχέση (1.7)):

```
"Input Data";
steps=50;
T=3;S0=45;K=40;r=0.0;div=0.07;vol=0.3;
t0=10^-6;
n=steps;
dt=T/steps;

μ=r-div-0.5*vol^2;
b=div-r+0.5*vol^2;
f=Sqrt[(b^2)+2*r*vol^2];
φ=0.5*(b-f);
a=0.5*(b+f);
λ[x_,y_]=x/y;

Scr=Table[Max[r*K/div,K],{n+1}];
Lstar=Scr;

"**** LOWER BOUND ****";
Do[
  d0[x_,y_,t_]=(Log[λ[x,y]]-f*t)/(vol*Sqrt[t]);
  dlplus[x_,y_,z_,t_]=(Log[λ[x,y]]-
Log[y]+Log[z]+b*t)/(vol*Sqrt[t]);
  dlminus[x_,y_,z_,t_]=(-Log[λ[x,y]]-
Log[y]+Log[z]+b*t)/(vol*Sqrt[t]);
  Nd0[x_,y_,t_]=CDF[NormalDistribution[],d0[x,y,t]];
Nd0new[x_,y_,t_]=CDF[NormalDistribution[],d0[x,y,t]+2*f*Sqrt[t]
]/vol];
Nd1plus[x_,y_,z_,t_]=CDF[NormalDistribution[],dlplus[x,y,z,t]
];
Nd1plusnew[x_,y_,z_,t_]=CDF[NormalDistribution[],dlplus[x,y,z,
t]-vol*Sqrt[t]];
Nd1minus[x_,y_,z_,t_]=CDF[NormalDistribution[],dlminus[x,y,z,t
]];
Nd1minusnew[x_,y_,z_,t_]=CDF[NormalDistribution[],dlminus[x,y,
z,t]-vol*Sqrt[t]];
  c[x_,y_,t_]=(y-
K)*((λ[x,y]^(2*φ/(vol^2))*Nd0[x,y,t]+(λ[x,y]^(2*a/(vol^2)))*Nd
0new[x,y,t]))+x*Exp[-div*t]*(Nd1minusnew[x,y,y,t]-
Nd1minusnew[x,y,K,t])-(λ[x,y]^(-2*(r-div)/(vol^2)))*y*Exp[-
div*t]*(Nd1plusnew[x,y,y,t]-Nd1plusnew[x,y,K,t])-K*Exp[-
```

```

r*t]*(Nd1minus[x,y,y,t]-Nd1minus[x,y,K,t]-(λ[x,y]^(1-2*(r-
div)/(vol^2)))*(Nd1plus[x,y,y,t]-Nd1plus[x,y,K,t]));
Lstar[[steps+1-i]]=y/.Maximize[{c[S0,y,i*dt]},{y}][[2,1]]
,{i,1,steps}];
lb=Maximize[{c[S0,y,T]},{y}][[1]];

"**** INTEGRAL REPRESENTATION OF THE EEP ****";
"European call option";
d11[x_,z_]=(Log[x/K]+(r-div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);
d22[x_,z_]=d11[x,z]-vol*Sqrt[z];
Nd11[x_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d11[x,z]];
Nd22[x_,z_]=CDF[NormalDistribution[],d22[x,z]];
euro[x_,z_]=x*Exp[-div*z]*Nd11[x,z]-K*Exp[-r*z]*Nd22[x,z];
"Contract value";
dd1[x_,y_,z_]=(Log[x/y]+(r-div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);
dd2[x_,y_,z_]=dd1[x,y,z]-vol*Sqrt[z];
Ndd1[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],dd1[x,y,z]];
Ndd2[x_,y_,z_]=CDF[NormalDistribution[],dd2[x,y,z]];
g[x_,y_,z_]=-r*K*Exp[-r*z]*Ndd2[x,y,z]+div*x*Exp[-
div*z]*Ndd1[x,y,z];
Do[
vs[x_]=euro[x,ii*dt]+(dt/2)*(g[x,x,t0]+2*Sum[g[x,Scr[[n-
j+1]],j*dt]},{j,1,ii-1})+g[x,Scr[[n+1]],ii*dt)];
Scr[[n+1-ii]]=x/.FindRoot[vs[x]-x+K==0,{x,Scr[[n+1]]}];
,{ii,1,n}];
premi-
um=euro[S0,T]+(dt/2)*(g[S0,Scr[[1]],t0]+2*Sum[g[S0,Scr[[j+1]],
j*dt]},{j,1,n-1})+g[S0,Scr[[n+1]],T]);
ub=euro[S0,T]+(dt/2)*(g[S0,Lstar[[1]],t0]+2*Sum[g[S0,Lstar[[j+
1]],j*dt]},{j,1,n-1})+g[S0,Lstar[[n+1]],T]);

"**** LUBA ****";
x1=T;
x2=Sqrt[T];
x3=r;
x4=div;
x5=Min[r/Max[div,10^-5],5];
x6=x5^2;
f7[x_]=D[c[x,Lstar[[1]],T],x];
x7=f7[S0];
x8=x7^2;
x9=(lb-euro[S0,T])/K;
x10=x9^2;
x11=lb/euro[S0,T];
x12=(ub-lb)/K;
x13=ub/lb;
x14=S0/Lstar[[1]];
x15=x14^2;
y2=8.664*10^-1-x1*7.668*10^-2+x2*3.092*10^-1-x3*3.356*10^-
1+x4*1.2-x5*3.507*10^-2-x6*9.755*10^-2-x7*7.208*10^-
1+x8*6.071*10^-1+x9*7.379-x10*4.999*10+x11*1.148*10^-1-
x12*5.037*10-x13*6.629*10^-1-x14*4.745*10^-1+x15*5.995*10^-1;
λ2=If[lb==euro[S0,T]||lb<=S0-K,1,Max[Min[y2,1],0]];
luba=λ2*lb+(1-λ2)*ub;

```

```

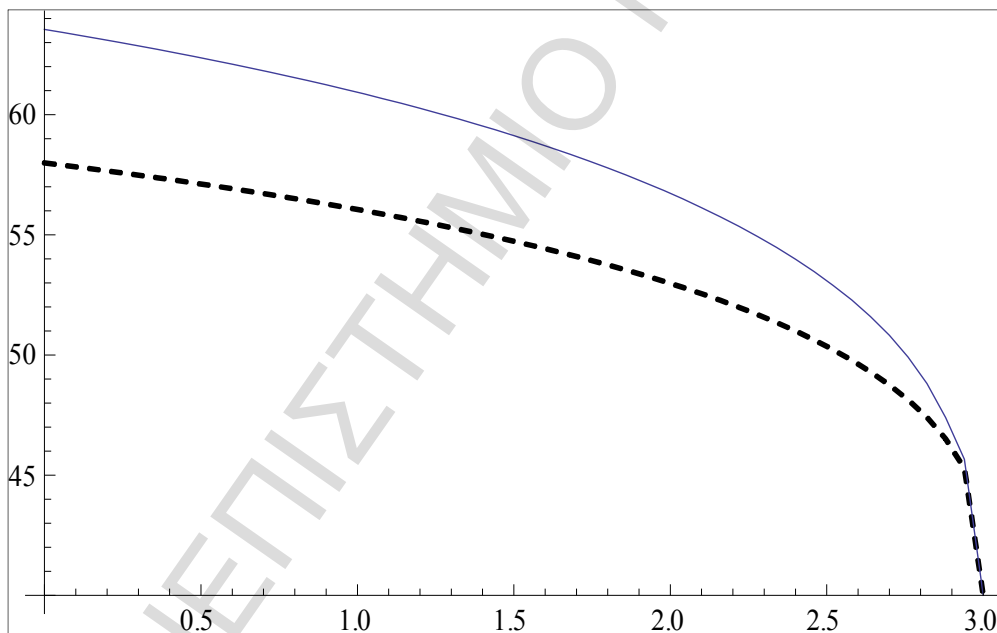
R1:=ListPlot[Table[{{(i-
1)*dt,Lstar[[i]]},{i,1,steps+1}},PlotStyle-
>{Dashed,Black},Joined->True];
R2:=ListPlot[Table[{{(i-1)*dt,Scr[[i]]},{i,1,n+1}},PlotRange-
>All,Joined->True]
Show[{R1,R2}]

Print["The Lower Bound for the American call premium at t=0 is
",lb];
Print["The Upper Bound for the American call premium at t=0 is
",ub];
Print["The LUBA for the American call premium at t=0 is
",luba];

```

ΣΧΗΜΑ 4.3

Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης για ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 45$, $K = 40$, $r = 0$, $\delta = 0,07$, $T = 3$ και ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 50$ βημάτων: Με τη διακεκομμένη καμπύλη απεικονίζεται το κάτω φράγμα L_t^* της μεθόδου LBA, ενώ με την μπλε συνεχή καμπύλη απεικονίζεται το φράγμα B_t^* της μεθόδου "integral representation of the early exercise premium"



The Lower Bound for the American call premium at t=0 is 7.93356.

The Upper Bound for the American call premium at t=0 is 8.22605.

The LUBA for the American call premium at t=0 is 8.12299.

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΔΕΝΔΡΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

5.1 CRR Standard Method

Οι Cox, Ross & Rubinstein (1979) ανέπτυξαν την “CRR standard method”, μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για την αποτίμηση της αξίας ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, επειδή είναι εύκολη στην εφαρμογή της και προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά την αξία του δικαιώματος. Η μέθοδος βασίζεται στην κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου που μοντελοποιεί τη διαχρονική εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού, και η αξία του δικαιώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται με την τεχνική της ανάδρομης επαγωγής.

Έστω ότι η τιμή του αγαθού τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι S_0 , έχει μεταβλητότητα σ και η διάρκεια ωρίμανσης του δικαιώματος είναι T . Επίσης, το ελεύθερο κινδύνου επιτόκιο είναι r και το υποκείμενο αγαθό αποδίδει συνεχές μέρισμα δ .

Η τιμή του υποκείμενου αγαθού S_{t+dt} σε σχέση με την ακριβώς προηγούμενη χρονικά τιμή S_t μπορεί να είναι είτε αυξημένη κατά u (δηλ. $S_{t+dt} = uS_t$) είτε μειωμένη κατά d (δηλ. $S_{t+dt} = dS_t$), όπου:

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \quad \text{και} \quad d = u^{-1}.$$

Η πιθανότητα αύξησης της τιμής του υποκείμενου αγαθού μεταξύ δύο χρονικών βημάτων, υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου Q , είναι:

$$p = \frac{e^{(r-\delta)dt} - d}{u - d},$$

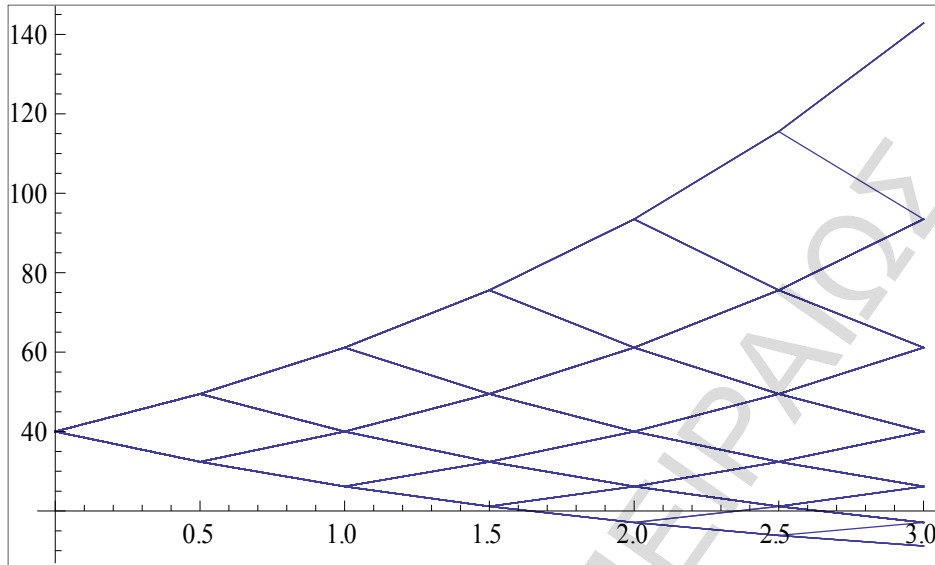
ενώ η πιθανότητα μείωσης της τιμής είναι $1 - p$.

Ενδεικτικά, η μοντελοποίηση της διαχρονικής εξέλιξης της τιμής ενός αγαθού με τη βοήθεια διωνυμικού δέντρου, για $n = 6$ και με τη χρήση 200 ψευδο-τυχαίων μονοπατιών που προέκυψαν με προσομοίωση, υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

```
T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0.0;vol=0.3;n=6;dt=T/n;
u=Exp[vol*Sqrt[dt]];
d=1/u;
p=(Exp[(r-div)*dt]-d)/(u-d);
m=200;
S=Table[S0,{m},{n+1}];
path=Table[0,{m}];
Do[Do[If[RandomReal[]<p,S[[k,i]]=S[[k,i-1]]*u,S[[k,i]]=S[[k,i-1]]*d];,{i,2,n+1}];,{k,1,m}];
Do[path[[k]]=ListPlot[Table[{(i-1)*dt,S[[k,i]}],{i,1,n+1}],Joined->True];,{k,1,m}];
Show[path,PlotRange->All]
```

ΣΧΗΜΑ 5.1

Διωνυμικό δέντρο έξι περιόδων για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0=40$, $K=45$, $r=0,07$, $\delta=0$ και $T=3$



Η εύρεση της αξίας ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου προσεγγίζεται εφαρμόζοντας την τεχνική της ανάδρομης επαγωγής, ξεκινώντας από $t = T$ και καταλήγοντας στη χρονική στιγμή $t = 0$. Για $t = T$, οι τρέχουσες αξίες (current values) των τελευταίων κόμβων ταυτίζονται με τις εσωτερικές αξίες τους (intrinsic values), δηλαδή $\text{Max}\{S_T - K, 0\}$ για δικαίωμα αγοράς και $\text{Max}\{K - S_T, 0\}$ για δικαίωμα πώλησης. Στη συνέχεια, το διωνυμικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα δέντρο αποφάσεων, σε κάθε κόμβο του οποίου «αποφασίζεται» ποια είναι η τρέχουσα αξία.

Ειδικότερα, ως τρέχουσα αξία του κόμβου (i, j) κατά τη χρονική στιγμή t_i λαμβάνεται η μέγιστη εκ των:

(α) της εσωτερικής αξίας του δικαιώματος στον κόμβο (i, j) ,

(β) της σταθμισμένης αξίας των κόμβων $(i+1, j)$ και $(i+1, j+1)$, προεξοφλημένης στον κόμβο (i, j) , με συντελεστή προεξόφλησης $e^{-r(t_{i+1}-t_i)} = e^{-rdt}$ και συντελεστές στάθμισης $1-p$ και p αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, ο υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης Αμερικανικού τύπου στον κόμβο (i, j) , γίνεται αντίστοιχα ως εξής:

$$C_{i,j} = \text{Max}\{S_0 u^j d^{i-j} - K, [pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j}]e^{-rdt}\},$$

$$P_{i,j} = \text{Max}\{K - S_0 u^j d^{i-j}, [pP_{i+1,j+1} + (1-p)P_{i+1,j}]e^{-rdt}\}.$$

Για την εκτίμηση της αξίας του δικαιώματος χρειάζεται να γίνουν $(n+1)^2$ πράξεις, όπου n τα βήματα του χρονικού διαμερισμού.

Η απεικόνιση ενός διωνυμικού δέντρου $n = 6$ περιόδων με τις συντεταγμένες των κόμβων του, υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με την ακόλουθη διαδικασία:

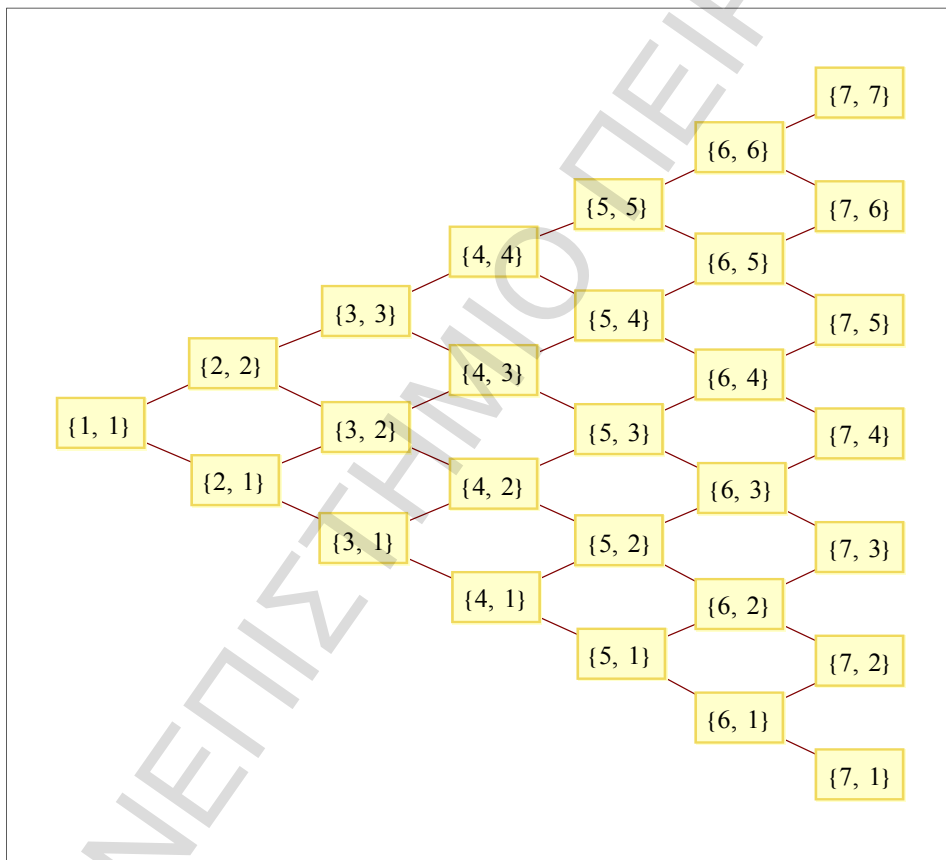
```

n=6;
a=Table[0,{i,1,n},{j,1,i}];
tree=List[];
Do[
  Do[
    a[[i,j]]={{i,j}->{i+1,j},{i,j}->{i+1,j+1}};
    tree=Union[tree,a[[i,j]]];
    ,{j,1,i}];
  ,{i,1,n}];
TreePlot[tree, Left, VertexLabeling->All]

```

ΣΧΗΜΑ 5.2

Οι συντεταγμένες (i,j) των κόμβων ενός διωνυμικού δέντρου 6 περιόδων



Ο υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $t = 0$ και $n = 50$, η σύγκριση με το αντίστοιχο δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου και η απεικόνιση του συνόρου πρώιμης εξάσκησης, υλοποιήθηκαν στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, με τη διαδικασία που ακολουθεί:

```

"Input Data";
T=3; S0=40; K=45; r=0.07; div=0; vol=0.3; steps=50;
dt=T/steps;
u=Exp[vol*sqrt[dt]];

```

```

d=1/u;
p=(Exp[(r-div)*dt]-d)/(u-d);

"Binomial tree for the asset's price";
S=Table[S0*(u^i)*(d^(k-i)),{k,0,steps},{i,0,k}];

"Backward induction to estimate the European put option premium at t=0";
h=Table[Max[K-S[[i,j]],0],{i,1,steps+1},{j,1,i}];
Do[
  Do[
    h[[i,j]]=((1-p)*h[[i+1,j]]+p*h[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt];
    ,{j,1,i}
    ,{i,steps,1,-1}];

"Backward induction to estimate the American put option premium at t=0";
v=Table[h[[i,j]],{i,1,steps+1},{j,1,i}];
early=Table[1,{i,1,steps+1},{j,1,i}];
Do[
  Do[
    v[[i,j]]=Max[(K-S[[i,j]]),((1-p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt]];
    early[[i,j]]=If[K-S[[i,j]]-((1-p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt]>0,1,0];
    ,{j,1,i}
    ,{i,steps,1,-1}];
Print["European put option premium at t=0 : ",h[[1,1]]];
Print["American put option premium at t=0 : ",v[[1,1]]];

"Setting the early exercise boundary";
k5=1;
While[early[[k5,1]]==0,k5++];
Scrit=Table[K,{steps+1}];
Do[
  jearly=Sum[early[[i,j]],{j,1,i}];
  Scrit[[i]]=S[[i,jearly]]
  ,{i,k5,steps}];
bound:=ListPlot[Table[{(i-1)*dt,Scrit[[i]]},{i,k5,steps+1}],Joined->True,PlotStyle->{Yellow,Thick}];

"Simulating binomial paths";
m1=500;
Ssim=Table[S0,{m1},{steps+1}];
simpaths=Table[0,{m1}];
Do[
  Do[
    If[RandomReal[]<p,Ssim[[k,i]]=Ssim[[k,i-1]]*u,Ssim[[k,i]]=Ssim[[k,i-1]]*d];
    ,{i,2,steps+1}];
  ,{k,1,m1}];
Do[
  simpaths[[k]]=ListPlot[Table[{(i-1)*dt,Ssim[[k,i]]},{i,1,steps+1}],Joined->True]

```

```
, {k, 1, m1}];
```

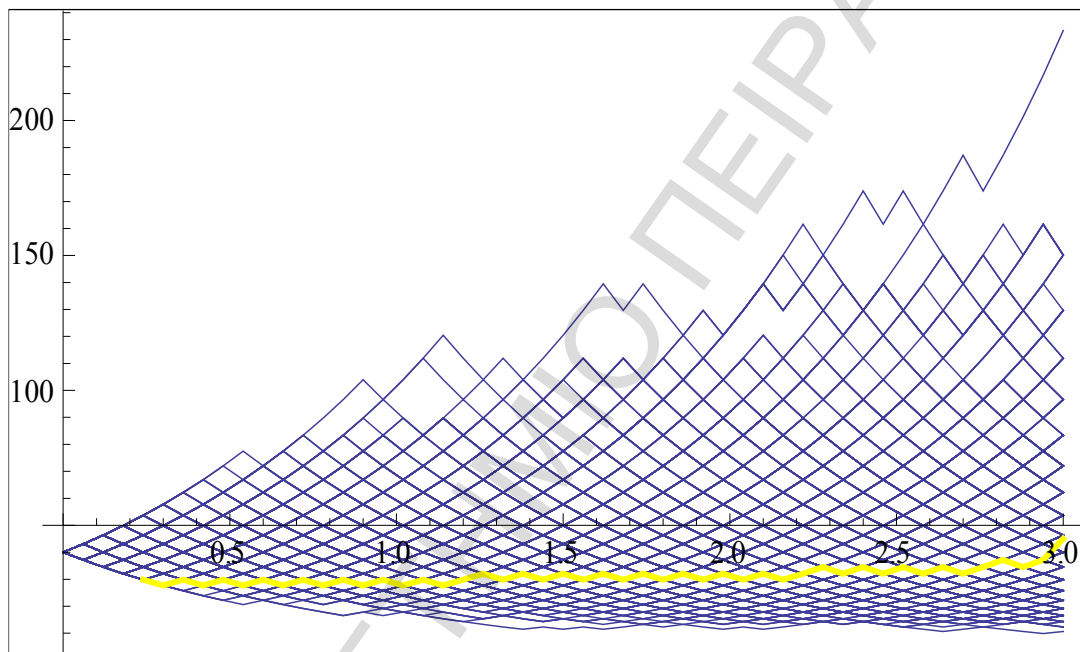
```
"Location of the early exercise boundary";  
Show[{simpaths, bound}, PlotRange->All]
```

European put option premium at t=0: 6.19659

American put option premium at t=0: 7.96662

ΣΧΗΜΑ 5.3

Το σύνορο πρόωρης εξάσκησης (κίτρινο) σε ένα διωνυμικό δέντρο 50 περιόδων, για δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$



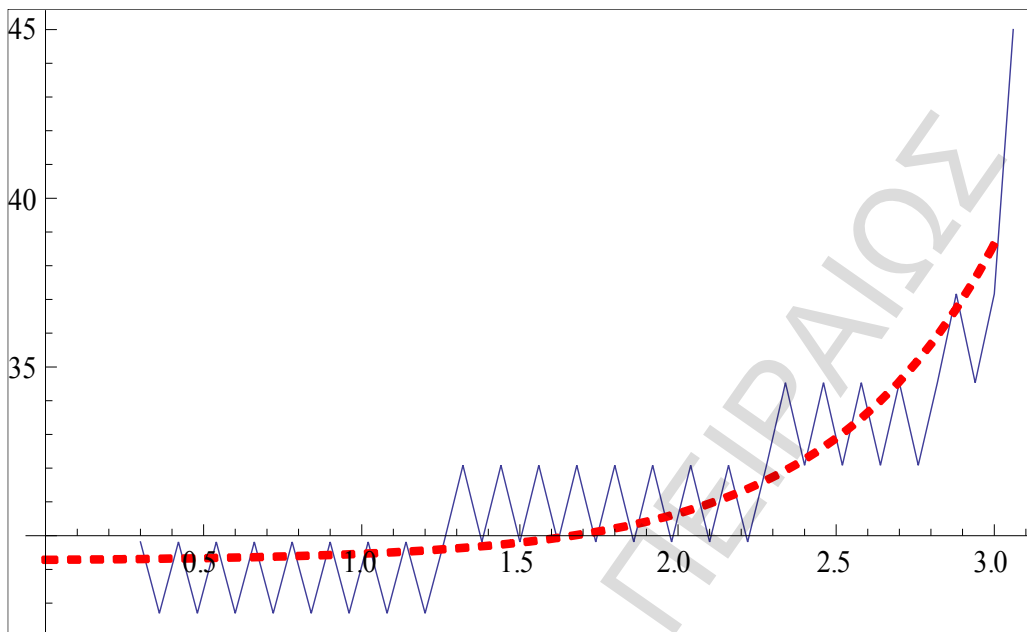
Επισημαίνεται ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού προσομοιώθηκε από 500 ψευδοτυχαίες διαδρομές, για το λόγο αυτό δεν απεικονίζεται το πλήρες πλέγμα του διωνυμικού δέντρου στο σχήμα 5.3.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της τεχνικής των ελαχίστων τετραγώνων, επιχειρήθηκε η προσέγγιση του συνόρου πρόωρης εξάσκησης από μια συνάρτηση του χρόνου, της μορφής $B(t) = a + be^{ct}$:

```
Scr=Table[{i*dt, Scrit[[i]]}, {i, k5, steps+1}];  
R11:=ListPlot[Scr, Joined->True]  
f[t_]=Normal[NonlinearModelFit[Scr, {a+b*Exp[c*t]}, {a,b,c}, t]];  
R12:=Plot[f[t], {t, 0, T}, PlotStyle->{Dashed, Thick, Red}]  
Show[{R11, R12}, PlotRange->All]  
Print["The function that approximates the early exercise  
boundary is B(t)=", f[t], ". The critical price at t=0 is  
", f[0]]
```


ΣΧΗΜΑ 5.4

Χρήση της τεχνικής των ελαχίστων τετραγώνων σε ένα διωνυμικό δέντρο 50 περιόδων, για την προσέγγιση του συνόρου πρώιμης εξάσκησης σε ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0=40$, $K=45$, $r=0,07$, $\delta=0$ και $T=3$, από μια συνάρτηση της μορφής $B(t) = a + be^{ct}$



The function that approximates the early exercise boundary is $B(t) = 29.2524 + 0.0314176 e^{1.89998 t}$

The critical price at $t=0$ is: 29.2839

5.2 BBS and BBSR Methods

Οι Broadie & Detemple (1996) ανέπτυξαν τη μέθοδο “Binomial Black & Scholes model” (BBS) και πρότειναν τη χρήση του τύπου Black & Scholes ένα χρονικό βήμα πριν από τη λήξη του δικαιώματος, όταν για την αποτίμησή του χρησιμοποιείται το διωνυμικό δέντρο.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να συνδυαστεί και με τη χρήση της προεκβολής Richardson (BBSR model). Ενδεικτικά, η εφαρμογή της προεκβολής Richardson μία φορά (1-time extrapolation), μπορεί να γίνει αν επιλεγούν δύο επιμέρους δικαιώματα, με την ποσότητα h να αντιστοιχεί σε $n/2$ δυνατά σημεία εξάσκησης (για το δικαίωμα $P(n/2)$) και την ποσότητα $h/2$ να αντιστοιχεί σε n δυνατά σημεία εξάσκησης (για το δικαίωμα $P(n)$). Η αξία του δικαιώματος προσεγγίζεται από τον τύπο:

$$P = 2P(n) - P(n/2) \quad (5.1)$$

Η μέθοδος BBS υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica® με την ακόλουθη υπολογιστική διαδικασία:

```

"Input Data";
T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0;vol=0.3;steps=12;dt=T/steps;
u=Exp[vol*Sqrt[dt]];d=1/u;
p=(Exp[(r-div)*dt]-d)/(u-d);
"Binomial tree for the asset's price";
S=Table[S0*(u^i)*(d^(k-i)),{k,0,steps},{i,0,k}];

"Black & Scholes - Merton estimation for the last step";
h=Table[0,{i,1,steps},{j,1,i}];
Do[
  d1=(Log[S[[steps,j]]/K]+(r-
div+0.5*vol^2)*dt)/(vol*Sqrt[dt]);
  d2=d1-vol*Sqrt[dt];
  Nd1=CDF[NormalDistribution[],-d1];
  Nd2=CDF[NormalDistribution[],-d2];
  h[[steps,j]]=-S[[steps,j]]*Exp[-div*dt]*Nd1+K*Exp[-
r*dt]*Nd2;
  ,{j,1,steps}];

"Backward induction to estimate the American put option premi-
um at t=0";
v=Table[h[[i,j]},{i,1,steps},{j,1,i}];
Do[
  Do[
    v[[i,j]]=Max[(K-S[[i,j]]),((1-
p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt]];
    ,{j,1,i}];
  ,{i,steps-1,1,-1}];

Print["American put option premium at t=0 : ",v[[1,1]]]

```

American put option premium at t=0: 7.92739

Αντίστοιχα, ο υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος με τη μέθοδο BBSR (1-time extrapolation) υλοποιείται με τη βοήθεια της προηγούμενης υπολογιστικής διαδικασίας και με τη χρήση της σχέσης (5.1), ενδεικτικά για $n = 8$ και $n/2 = 4$:

$$P = 2P(n) - P(n/2) = 2P(8) - P(4) = 2 * 7,82703 - 7,78024 = 7,87382.$$

Σε περίπτωση που το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος με τη χρήση της μεθόδου BBS είναι της τάξης 10^{-2} , υπολογίζεται αρχικά το K με τη βοήθεια των $P(2)$ και $P(1)$, σύμφωνα με τη σχέση (3.3):

$$K = \frac{P(2) - P(1)}{1(1 - \frac{1}{2})} + O(h) \cong 2(6,27973 - 6,19676) + 0 = 0,16594,$$

ενώ η σχέση (3.4) δίνει για το σφάλμα:

$$E(T) = 10^{-2} \cong Kdt .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.5), ο απαιτούμενος διαμερισμός του χρόνου ωρίμανσης T είναι:

$$dt = 10^{-2} \frac{T}{0,16594} \approx \frac{T}{17} .$$

5.3 Modified GJ Methods

Οι Bunch & Johnson (1992) πρότειναν μία παραλλαγή της μεθόδου GJ για την προσέγγιση ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$P(1,2) = 2P^{max}(2) - P(1).$$

Η αξία του $P(1)$ αντιστοιχεί σε ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, δηλαδή το μοναδικό δυνατό σημείο εξάσκησης είναι στη λήξη του. Η μέγιστη αξία $P^{max}(2)$ προκύπτει επιλέγοντας εκείνα τα δύο σημεία εξάσκησης, τα οποία μεγιστοποιούν την αξία του $P(2)$. Για τη μεγιστοποίηση του $P(2)$ προτείνεται η χρήση αφενός της χρονικής στιγμής T , αφετέρου (ενδεικτικά) η επιλογή μίας εκ των $T/8, 2T/8, \dots, 7T/8$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιείται προεκβολή Richardson μία φορά (1-time extrapolation) πάνω στις αξίες των δικαιωμάτων $P(1)$ και $P^{max}(2)$, με ένα και δύο χρονικά σημεία εξάσκησης αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό, οι Bunch & Johnson αποκαλούν τη συγκεκριμένη παραλλαγή της μεθόδου GJ “2-point maximum method” (λόγω του πλήθους των χρονικών σημείων εξάσκησης του δικαιώματος με τα περισσότερα χρονικά σημεία εξάσκησης).

Μία ακόμη παραλλαγή, που μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη προσέγγιση της αξίας ενός δικαιώματος αλλά απαιτεί σημαντικά μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ, είναι η χρήση διπλής προεκβολής Richardson (2-times extrapolation) πάνω στις αξίες των δικαιωμάτων $P(1)$, $P^{max}(2)$ και $P^{max}(3)$, με ένα, δύο και τρία σημεία εξάσκησης αντίστοιχα. Οι Bunch & Johnson αποκαλούν την παραλλαγή αυτή “3-point maximum method”. Στην προκειμένη περίπτωση, η αξία του δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου προσεγγίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (4.2), ως:

$$P(1,2,3) = \frac{1}{2}P(1) - \frac{8}{2}P^{max}(2) + \frac{9}{2}P^{max}(3).$$

Οι παραλλαγές “2-point maximum method” και “3-point maximum method” υλοποιήθηκαν στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, τόσο αναλυτικά βάσει της μεθόδου GJ, όσο και με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων, με τις ακόλουθες υπολογιστικές διαδικασίες (πρώτη η αναλυτική):

```

Needs["MultivariateStatistics`"]
T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0.0;vol=0.3;
d1[x_,y_,z_]=(Log[x/y]+(r-
div+0.5*vol^2)*z)/(vol*Sqrt[z]);d2[x_,y_,z_]=d1[x,y,z]-
vol*Sqrt[z];

"**** P(1) ****";
euro[x_]=Exp[-r*T]*K*CDF[NormalDistribution[],-d2[x,K,T]]-
Exp[-div*T]*x*CDF[NormalDistribution[],-d1[x,K,T]];
pre1=euro[S0];

"**** Geske & Johnson for Pmax(2) ****";
ρ=Sqrt[t1];
pr2[x_,x1_,t1_]=K*(Exp[-r*t1*T]*CDF[NormalDistribution[],-
d2[x,x1,t1*T]]+Exp[-
r*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ},{-
ρ,1}]],{d2[x,x1,t1*T],-d2[x,K,T]})-x*(Exp[-
div*t1*T]*CDF[NormalDistribution[],-d1[x,x1,t1*T]]+Exp[-
div*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ},{-
ρ,1}]],{d1[x,x1,t1*T],-d1[x,K,T]}]);
premax2=FindMaximum[{pr2[S0,x1,t1],x1>0&&x1<K&&t1>0&&t1<1},{x
1,K},{t1,0.5}];
scr=premax2[[2,1,2]];tscr=premax2[[2,2,2]];

"**** Geske & Johnson for Pmax(3) ****";
ρ12=Sqrt[t1/t2]; ρ13=Sqrt[t1];
ρ23=Sqrt[t2];pr3[x_,x1_,x2_,t1_,t2_]=K*(Exp[-
r*t1*T]*CDF[NormalDistribution[],-d2[x,x1,t1*T]]+Exp[-
r*t2*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ12},{-
ρ12,1}]],{d2[x,x1,t1*T],-d2[x,x2,t2*T]})+Exp[-
r*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0,0},{1,ρ12,-
ρ13},{ρ12,1,-ρ23},{-ρ13,-
ρ23,1}]],{d2[x,x1,t1*T],d2[x,x2,t2*T],-d2[x,K,T]})-x*(Exp[-
div*t1*T]*CDF[NormalDistribution[],-d1[x,x1,t1*T]]+Exp[-
div*t2*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{1,-ρ12},{-
ρ12,1}]],{d1[x,x1,t1*T],-d1[x,x2,t2*T]})+Exp[-
div*T]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0,0},{1,ρ12,-
ρ13},{ρ12,1,-ρ23},{-ρ13,-
ρ23,1}]],{d1[x,x1,t1*T],d1[x,x2,t2*T],-d1[x,K,T]}]);
premax3=FindMaximum[{pr3[S0,x1,x2,t1,t2],x1>0&&x2<K&&x1<x2&&t1
>0&&t2<1&&t1<t2},{x1,scr},{x2,scr},{t1,tscr/2},{t2,(1+tscr)/2
}}];
scr1=premax3[[2,1,2]];scr2=premax3[[2,2,2]];
tscr1=premax3[[2,3,2]];tscr2=premax3[[2,4,2]];

"**** Richardson extrapolation ****";
TwoPoint=2*premax2[[1]]-pre1;
ThreePoint=0.5*pre1-4*premax2[[1]]+4.5*premax3[[1]];

"**** Asset's critical price at t=0 ****";
f[x_]=0.5*euro[x]-
4*pr2[x,scr,tscr]+4.5*pr3[x,scr1,scr2,tscr1,tscr2];
Scr0=x/.FindRoot[f[x]-K+x==0,{x,scr1}];

Print["P(1)= ",pre1," (European)"];

```

```

Print["Pmax(2)= ",premax2[[1]]," when early exercise is possible at t1 = ",tscr*T];
Print["Pmax(3)= ",premax3[[1]]," when early exercise is possible at t1 = ",tscr1*T," and t2 = ",tscr2*T];
Print["The American put premium TWO-POINT MAXIMUM approximation is: ",TwoPoint];
Print["The American put premium THREE-POINT MAXIMUM approximation is: ",ThreePoint];
Print["The critical price approximation at t=0 is: ",Scr0];

```

P(1)=6.19676 (European)

Pmax(2)=7.25817 when early exercise is possible at t1=0.962409

Pmax(3)=7.52162 when early exercise is possible at t1=0.651648 and t2=1.57437

The American put premium TWO-POINT MAXIMUM approximation is: 8.31958

The American put premium THREE-POINT MAXIMUM approximation is: 7.91298

The critical price approximation at t=0 is: 32.7263

Ακολουθεί η υλοποίηση των παραπάνω με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων:

```

"Input Data";
T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0.0;vol=0.3;steps=60;
dt=T/steps;u=Exp[vol*Sqrt[dt]];d=1/u;
p=(Exp[(r-div)*dt]-d)/(u-d);
S=Table[S0*(u^i)*(d^(k-i)),{k,0,steps},{i,0,k}];

"P(1) European";
v=Table[Max[K-S[[i,j]],0],{i,1,steps+1},{j,1,i}];
Do[
  Do[
    v[[i,j]]=((1-p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt],
    {j,1,i}
  ],
  {i,steps,1,-1}];
prebin1=v[[1,1]];

"Pmax(2)";
prebin2={};
Do[
  v=Table[Max[K-S[[i,j]],0],{i,1,steps+1},{j,1,i}];
  Do[
    Do[
      v[[i,j]]=If[k==i,Max[(K-S[[i,j]]),((1-p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt]],((1-p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt]],
      {j,1,i}
    ]
  ]
];

```

```

, {i, steps, 1, -1}];
AppendTo[prebin2, {(k-1)*dt//N, v[[1, 1]]}];
, {k, 2, steps}];

"Pmax(3)";
prebin3={};
Do[
  Do[
    v=Table[Max[K-S[[i, j]], 0], {i, 1, steps+1}, {j, 1, i}];
    Do[
      Do[
        v[[i, j]]=If[k1==i || k2==i, Max[(K-S[[i, j]]), ((1-p)*v[[i+1, j]]+p*v[[i+1, j+1]])*Exp[-r*dt]], ((1-p)*v[[i+1, j]]+p*v[[i+1, j+1]])*Exp[-r*dt]]
        , {j, 1, i}
        , {i, steps, 1, -1}];
      AppendTo[prebin3, {(k2-1)*dt//N, (k1-1)*dt//N, v[[1, 1]]}];
      , {k2, 2, k1-1}
      , {k1, 3, steps}];

prebin2=Sort[prebin2, #1[[2]]>#2[[2]]&];
prebin22=Sort[prebin2, #1[[1]]>#2[[1]]&];
prebin3=Sort[prebin3, #1[[3]]>#2[[3]]&];

Print["P(1)= ", prebin1, " (European)"];
Print["Pmax(2)= ", prebin2[[1, 2]], " when early exercise is possible at t1= ", prebin2[[1, 1]]];
ListPlot[prebin22, Joined->True]
Print["Pmax(3)= ", prebin3[[1, 3]], " when early exercise is possible at t1= ", prebin3[[1, 1]], " and t2= ", prebin3[[1, 2]]];
ListPlot3D[{prebin3}, Mesh->None, ColorFunction->"Rainbow"]
Print["The American put premium TWO-POINT MAXIMUM approximation at t=0 is: ", 2*prebin2[[1, 2]]-prebin1];
Print["The American put premium THREE-POINT MAXIMUM approximation at t=0 is: ", 0.5*prebin1-4*prebin2[[1, 2]]+4.5*prebin3[[1, 3]]];

```

P(1)=6.18366 (European)

Pmax(2)=7.27448 when early exercise is possible at t1=0.9

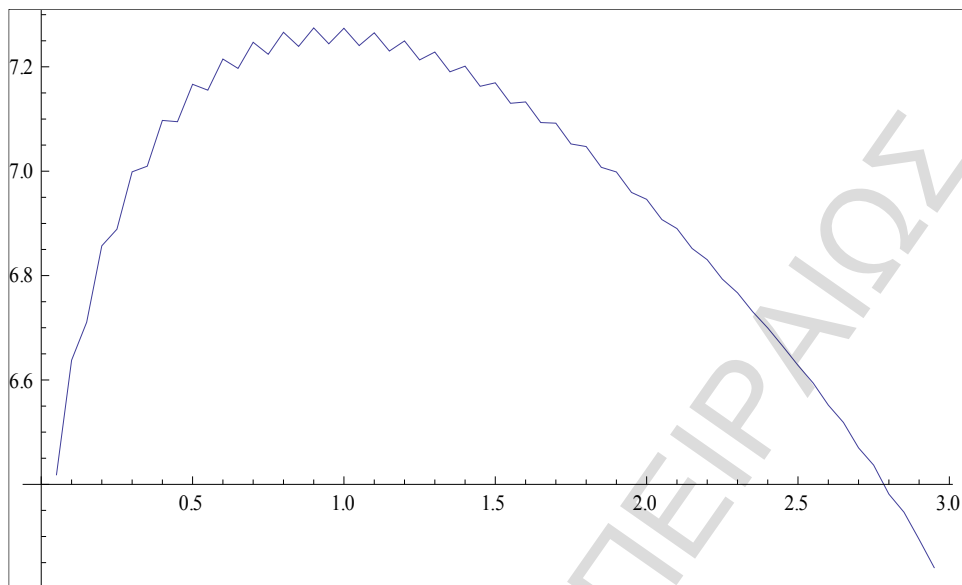
Pmax(3)=7.54343 when early exercise is possible at t1=0.65 and t2=1.5

The American put premium TWO-POINT MAXIMUM approximation at t=0 is: 8.36531

The American put premium THREE-POINT MAXIMUM approximation at t=0 is: 7.93932

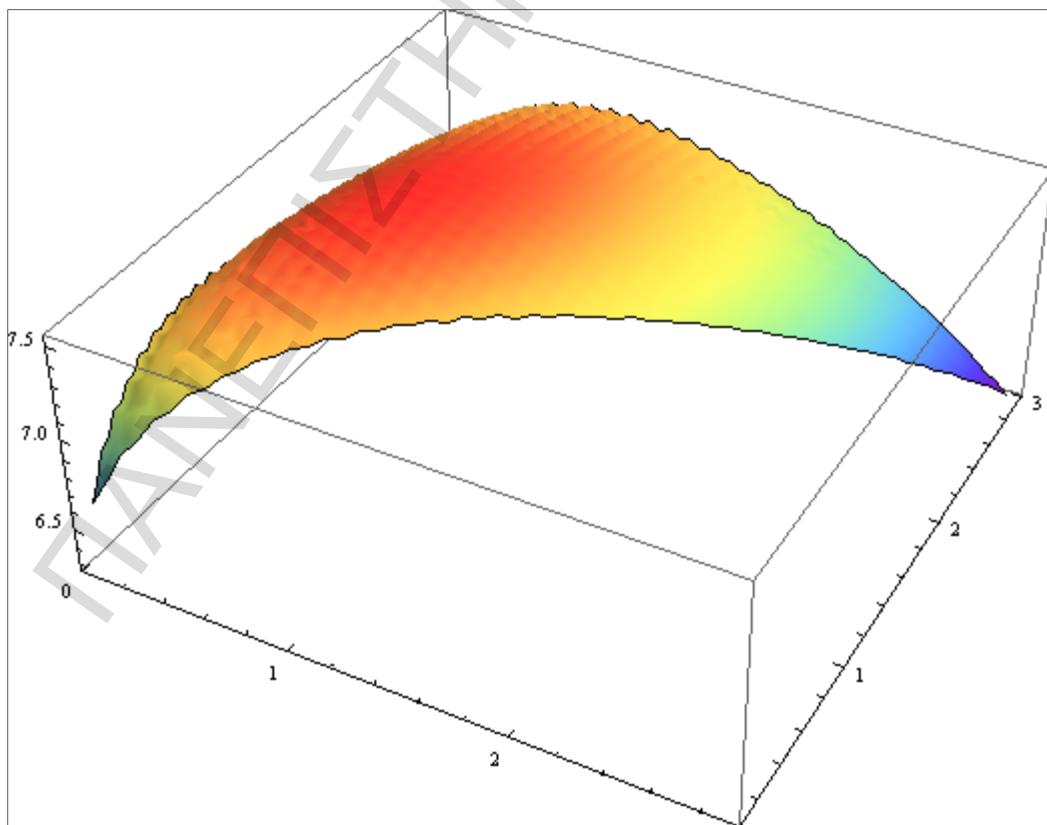
ΣΧΗΜΑ 5.5

Αξία του δικαιώματος πώλησης τύπου "Bermudan" $P(2)$ συναρτήσει του μοναδικού χρονικού σημείου $t_1 \in (0, T)$ που επιτρέπεται η πρώτη εξάσκηση, με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων.



ΣΧΗΜΑ 5.6

Αξία του δικαιώματος πώλησης τύπου "Bermudan" $P(3)$ συναρτήσει των μοναδικών χρονικών σημείων $t_1, t_2 \in (0, T)$ που επιτρέπεται η πρώτη εξάσκηση, με τη χρήση διωνυμικού δέντρου 60 περιόδων.



5.4 Improved AB Method

Ο Breen (1991) ανέπτυξε τη μέθοδο “Accelerated Binomial model” (AB model), με την οποία τα επιμέρους δικαιώματα με $1,2,3,\dots, n$ σημεία εξάσκησης αποτιμώνται με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου. Η μέθοδος αυτή εξακολουθεί να αντιμετωπίζει τον κίνδυνο ανομοιόμορφης σύγκλισης. Για την αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος απαιτούνται $4n+10$ πράξεις.

Οι Chang, Chung και Stapleton (2007) έδειξαν ότι η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της προεκβολής Richardson μπορεί να προσδιορίσει το ελάχιστο πλήθος των χρονικών σημείων n , τα οποία απαιτούνται για να επιτευχθεί μία επιθυμητή ακρίβεια προσέγγισης, όταν αυτή συνδυάζεται με τη χρήση γεωμετρικού και όχι αριθμητικού ρυθμού αύξησης των χρονικών σημείων εξάσκησης. Με τον τρόπο αυτό αντιμετωπίζεται ο κίνδυνος ανομοιόμορφης σύγκλισης, βελτιώνοντας το μοντέλο του Breen.

Η διπλή προεκβολή Richardson (2-times extrapolation), για $h=T$,

$$\text{εφαρμόζεται ως εξής: } \begin{cases} P = P(1) + T K_1 + T^2 K_2 + \dots \\ P = P(2) + \frac{T}{2} K_1 + \left(\frac{T}{2}\right)^2 K_2 + \dots \\ P = P(4) + \frac{T}{4} K_1 + \left(\frac{T}{4}\right)^2 K_2 + \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

Αν η 2^η εξίσωση του συστήματος (5.2) πολλαπλασιαστεί με το -6 και η 3^η εξίσωση με το 8, και στη συνέχεια προστεθούν όλες κατά μέλος, τα σφάλματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος απαλείφονται και προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$P \approx P(1,2,4) = \frac{1}{3}P(1) - \frac{6}{3}P(2) + \frac{8}{3}P(4),$$

με το σφάλμα της προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος να είναι 3^{ης} τάξης.

Είναι προφανές ότι πάντα ισχύει $P(1) \leq P(2) \leq P(4)$, αφού τα ενδεχόμενα σημεία εξάσκησης του $P(k)$ είναι γνήσιο υποσύνολο των ενδεχόμενων σημείων εξάσκησης του $P(2k)$. Με τον τρόπο αυτό αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της ανομοιόμορφης σύγκλισης των προηγούμενων παραλλαγών της μεθόδου GJ. Για την αποτίμηση της αξίας δικαιώματος απαιτούνται $4,5n+11$ πράξεις.

Η μέθοδος των Chang, Chung & Stapleton υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica® με την ακόλουθη διαδικασία:

```
"Input Data";
T=3; S0=40; K=45; r=0.07; div=0; vol=0.3;
i1=10;
dt=Table[T/(2^i), {i, 0, i1}];
steps=Table[2^i, {i, 0, i1}];
pre=Table[0, {i1+1}];
```



```

"CRR premiums for dt = T, T/2, T/4, T/8, T/16, ...";
Do[
  u=Exp[vol*Sqrt[dt[[m]]]];
  d=1/u;
  p=(Exp[(r-div)*dt[[m]]]-d)/(u-d);
  S=Table[S0*(u^i)*(d^(k-i)),{k,0,steps[[m]]},{i,0,k}];
  v=Table[Max[K-S[[i,j]],0],{i,1,steps[[m]]+1},{j,1,i}];
  Do[
    Do[
      v[[i,j]]=Max[(K-S[[i,j]]),((1-
p)*v[[i+1,j]]+p*v[[i+1,j+1]])*Exp[-r*dt[[m]]]];
      ,{j,1,i}
      ,{i,steps[[m]],1,-1}];
    pre[[m]]=v[[1,1]];
    ,{m,1,i1+1}];

"Extrapolation";
extrapol=Table[pre[[1]],{i1}];
Do[
  f[1,2^(1-i)]=pre[[i]];
  ,{i,1,i1+1}];
Do[
  f[i,x_]=((2^(i-1))*f[i-1,x/2]-f[i-1,x])/(2^(i-1)-1);
  extrapol[[i-1]]=Expand[f[i,1]];
  Print[i-1,"-times extrapolated premium : ",extrapol[[i-1]],"
CRR premium : ",pre[[i]];
  ,{i,2,i1+1}];

```

1-times extrapolated premium:	8.7326	CRR premium:	7.9081
2-times extrapolated premium:	8.1266	CRR premium:	8.0931
3-times extrapolated premium:	7.5783	CRR premium:	7.9489
4-times extrapolated premium:	8.2807	CRR premium:	8.0112
5-times extrapolated premium:	7.8450	CRR premium:	7.9838
6-times extrapolated premium:	7.9532	CRR premium:	7.9643
7-times extrapolated premium:	8.0289	CRR premium:	7.9789
8-times extrapolated premium:	7.9471	CRR premium:	7.9746
9-times extrapolated premium:	7.9892	CRR premium:	7.9769
10-times extrapolated premium:	7.9725	CRR premium:	7.9765

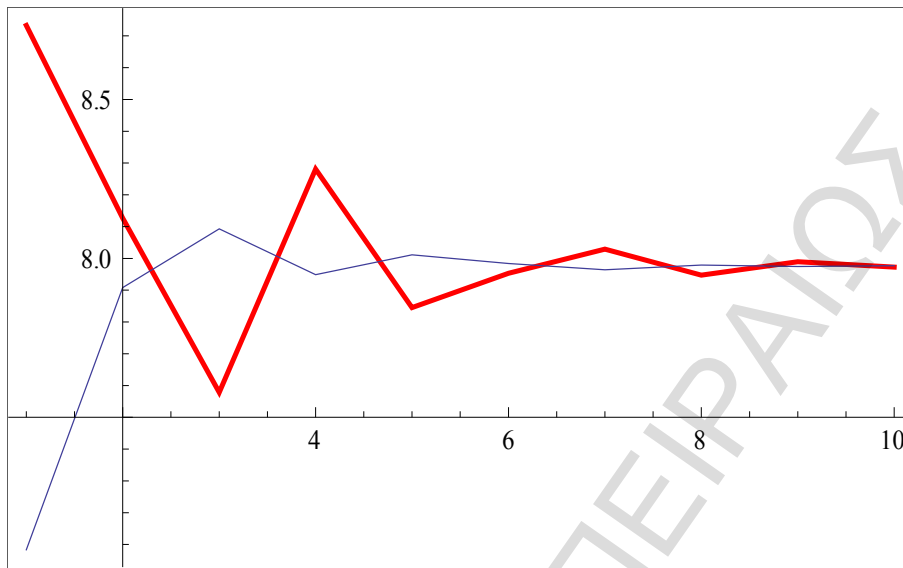
```

R1:=ListPlot[Table[{i,extrapol[[i]]},{i,1,i1}],Joined→True,PlotStyle→{Red,Thick},PlotRange→All]
R2:=ListPlot[Table[{i,pre[[i]]},{i,1,i1}],Joined→True,PlotRange→All]
Show[{R1,R2},PlotRange→All]

```

ΣΧΗΜΑ 5.7

Προσέγγιση της αξίας του δικαιώματος μετά από κάθε επανάληψη της προεκβολής Richardson (κόκκινη γραμμή), σε σχέση με τη διωνυμική μέθοδο χωρίς προεκβολή (μπλε γραμμή). Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται ο εκθέτης n των 2^n σημείων χρονικού διαμερισμού.



Σε περίπτωση που το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας προσέγγισης της αξίας του δικαιώματος με τη χρήση της κλασικής μεθόδου CRR (binomial method) είναι της τάξης 10^{-2} , υπολογίζεται αρχικά το K με τη βοήθεια των $P(2)$ και $P(1)$, σύμφωνα με τη σχέση (3.3):

$$K = \frac{P(2) - P(1)}{1(1 - \frac{1}{2})} + O(h) \cong 2(7,90806 - 7,0835) + 0 = 1,6491,$$

ενώ η σχέση (3.4) δίνει για το σφάλμα:

$$E(T) = 10^{-2} \cong Kdt.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.5), ο απαιτούμενος διαμερισμός του χρόνου ωρίμανσης T είναι:

$$dt = 10^{-2} \frac{T}{1,6491} \approx \frac{T}{165}.$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω απαιτούμενο επίπεδο διαμερισμού με το αντίστοιχο της μεθόδου BBS (βλ. ενότητα 5.2), για δεδομένο σφάλμα σύγκλισης, είναι φανερό ότι η μέθοδος BBS απαιτεί περίπου 10 φορές λιγότερα χρονικά βήματα, σε σχέση με αυτά που χρησιμοποιεί η κλασική διωνυμική μέθοδος. Συνεπώς, η μέθοδος BBS υπερτερεί σημαντικά έναντι της κλασικής διωνυμικής μεθόδου των Cox, Ross & Rubinstein.

Άλλες δενδρικές μέθοδοι

Κλείνοντας το κεφάλαιο, αναφέρονται ενδεικτικά κάποιες παρόμοιες μέθοδοι:

- Η τριωνυμική (trinomial) μέθοδος (Parkinson 1977, Kamrad & Ritchken 1991).
- Η μέθοδος του Chaudhary (2006), με την εφαρμογή fast Fourier transformation (FFT) (μπορεί να θεωρηθεί ως « n »-ωνυμική μέθοδος).
- Η χρήση προεκβολής Richardson στη μέθοδο GJ με εκθετικά αυξανόμενο διαμερισμό (“2-point GJ formula with exponential extrapolation”, Ho, Stapleton & Subrahmanyam 1994).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

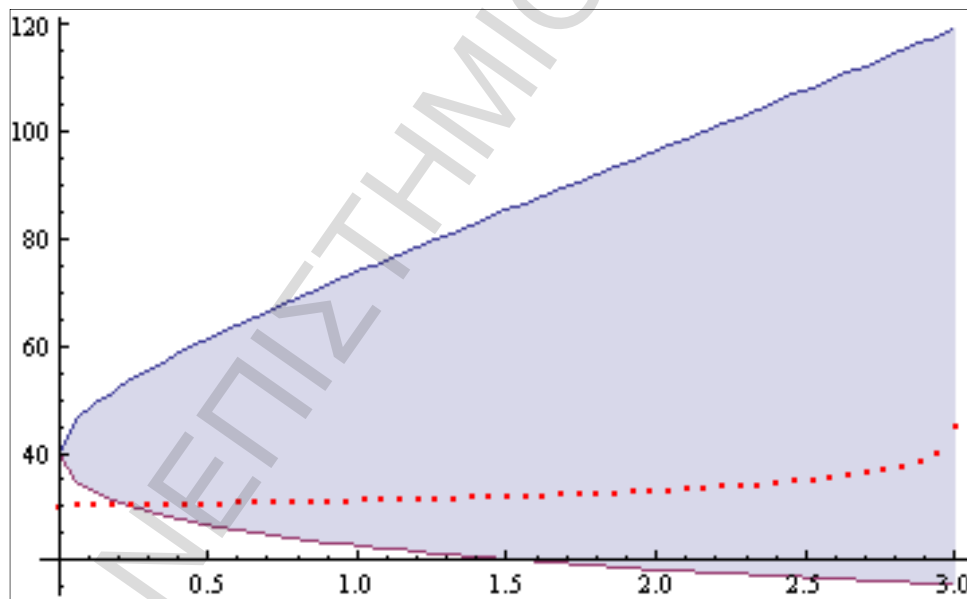
6.1 Προσομοίωση της διαδικασίας απόφασης “hold-or-exercise”

Στο 4^ο Κεφάλαιο εξετάστηκαν κάποιες αναλυτικές μέθοδοι, οι οποίες οδηγούν στον υπολογισμό της αξίας ενός δικαιώματος μέσω της προσέγγισης της κρίσιμης τιμής εξάσκησης, για $t = 0$. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να γίνει για όλους τους χρόνους $t \in [0, T]$, οδηγώντας έτσι στην κατασκευή του συνόρου πρώιμης εξάσκησης.

Στο σχήμα 6.1, η (προσεγγιστική) κατασκευή του συνόρου πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου έγινε διαμερίζοντας ομοιόμορφα το χρόνο σε $n = 50$ βήματα, θέτοντας την υπολογιστική διαδικασία της μεθόδου Quadratic Approximation (βλ. ενότητα 4.2) μέσα σε έναν επαναληπτικό βρόχο (loop) και προσεγγίζοντας την κρίσιμη τιμή σε κάθε ένα από τα 50 πιθανά σημεία εξάσκησης, στο διάστημα $(0, T]$.

ΣΧΗΜΑ 6.1

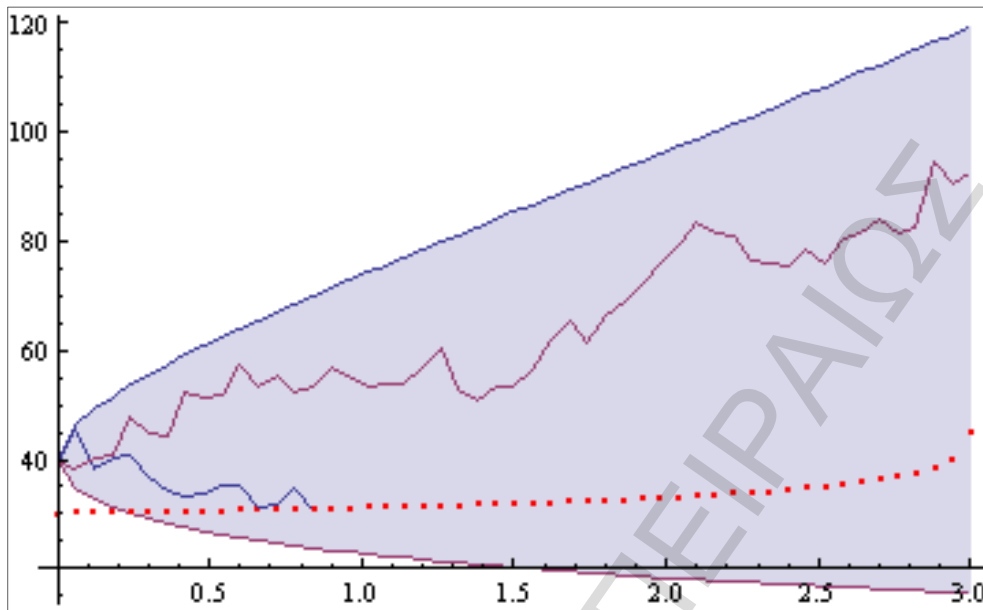
Κατασκευή συνόρου πρώιμης εξάσκησης (κόκκινες τελείες) με τη μέθοδο QA, για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$. Με την μπλε περιοχή απεικονίζεται το 95% της GBM για την τιμή του υποκείμενου αγαθού



Το παραπάνω σύνορο μπορεί να αποτελέσει το κριτήριο σε μία υπολογιστική διαδικασία προσομοίωσης, για να εξετάζεται σε κάθε χρονική στιγμή αν συμφέρει η πρώιμη εξάσκηση ή η διακράτηση (hold-or-exercise) του δικαιώματος. Ενδεικτικά, από τις 2 ψευδοτυχαίες ανελίξεις GBM που απεικονίζονται στο σχήμα 6.2, για τη μία αποφασίζεται η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος αμέσως μόλις η ανέλιξη κατέλθει του συνόρου, ενώ για την άλλη ανέλιξη δεν αποφασίζεται σε καμία περίπτωση η εξάσκηση του δικαιώματος, μέχρι αυτό να λήξει.

ΣΧΗΜΑ 6.2

Κατασκευή δύο ψευδοτυχαίων ανελιξεων: για τη μία (μπλε) αποφασίζεται η πρόωμη εξάσκηση του δικαιώματος, ενώ για την άλλη (μωβ) όχι.



Για κάθε ανέλιξη GBM θα προκύψει μία και μόνο χρηματοροή τη χρονική στιγμή t , όπου το δικαίωμα πώλησης: (α) είτε θα ασκηθεί πρώιμα, αν $S_t < S_t^*$, για $t < T$, (β) είτε θα έχει λήξει, όταν $t = T$. Σε κάθε περίπτωση, η χρηματοροή θα ισούται με την τρέχουσα εσωτερική αξία του δικαιώματος, $Max\{K - S_t, 0\}$. Η παρούσα αξία της αυτής της χρηματοροής για $t = 0$, θα είναι $e^{-rt} Max\{K - S_t, 0\}$.

Αν κατασκευαστεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός ψευδοτυχαίων ανελιξεων GBM, σε συνδυασμό με έναν πολύ μεγάλο χρονικό διαμερισμό, η εφαρμογή της τεχνικής της προσομοίωσης Monte-Carlo (βλ. ενότητα 3.2), μπορεί να οδηγήσει σε μία ικανοποιητική προσέγγιση της «πραγματικής» αξίας του δικαιώματος, για $t=0$.

Η προσομοίωση της διαδικασίας απόφασης “hold-or-exercise” για τον υπολογισμό της αξίας του παραπάνω δικαιώματος με την τεχνική Monte-Carlo, υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica®, κατασκευάζοντας 1.000 ψευδοτυχαίες ανελιξεις GBM και διαμερίζοντας ομοιόμορφα το χρόνο ωρίμανσης σε 50 βήματα:

```
"Input Data";
T=3;S0=40;K=45;r=0.07;div=0.0;b=r-div;vol=0.3;
μ=r-div-0.5*vol^2;error=10^-6;steps=50;paths=1000;dt=T/steps;
Scr=Table[K,{steps+1}];

Do[
  T=dt*i;
  "Black & Scholes - Merton for the European put option";
  d1[x_]=(Log[x/K]+(b+0.5*vol^2)*T)/(vol*Sqrt[T]);
  d2[x_]=d1[x]-vol*Sqrt[T];
  Nd1[x_]=CDF[NormalDistribution[],-d1[x]];
  Nd2[x_]=CDF[NormalDistribution[],-d2[x]];

```

```

euro[x_]=-x*Exp[(b-r)*T]*Nd1[x]+K*Exp[-r*T]*Nd2[x];

"Quadratic approximation terms";
m=2*r/(vol^2);
n=2*b/(vol^2);
k=1-Exp[-r*T];
q1=(1-n-Sqrt[((n-1)^2)+4*m/k])/2;
a1[x_]=-x*(1-Exp[(b-r)*T]*Nd1[x])/q1;

"Newton-Raphson technique";
f[x_]=K-x-euro[x]-a1[x];
g[x_]=f[x]/D[f[x],x];
Scrit=Scr[[steps-i+2]];
While[Abs[g[Scrit]]>error,Scrit=Scrit-g[Scrit]];
Scr[[steps-i+1]]=Scrit;

,{i,steps,1,-1}}

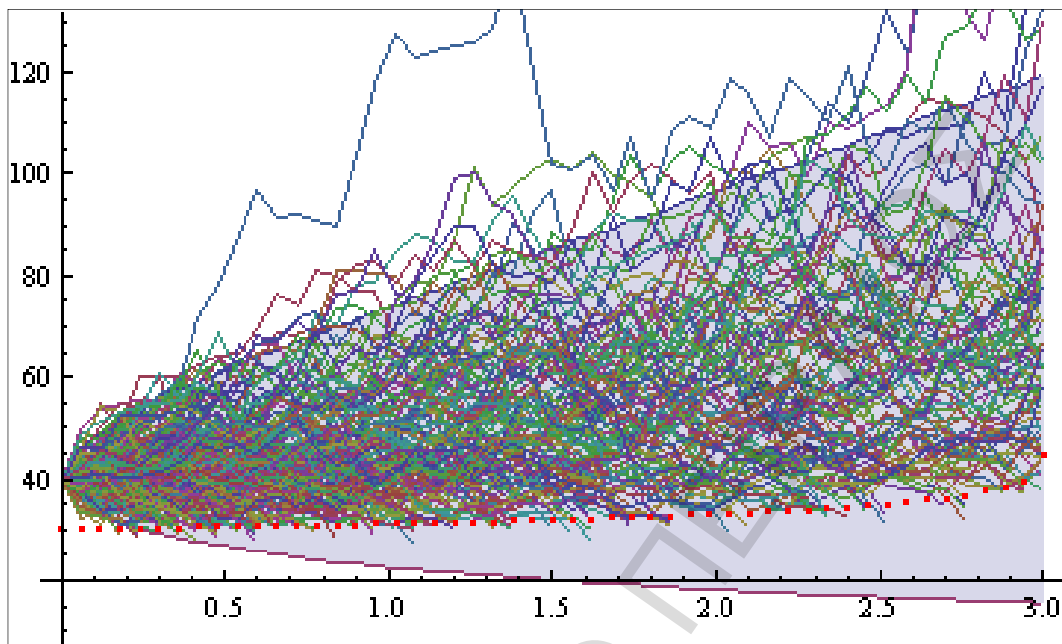
"*** asset ***";
S=Table[S0,{paths},{steps+1}];
path=Table[0,{paths}];
Do[
  Do[
    S[[k,i]]=S[[k,i-
1]]*Exp[dt*μ+(dt^0.5)*vol*RandomReal[NormalDistribution[]]]
    ,{i,2,steps+1}}
    ,{k,1,paths}];
"Hold-or-exercise";
pre=0;
ind=Table[0,{paths}];
Do[
  i=2;
  While[i<steps+1&&S[[k,i]]>Scr[[i]],i++];
  path[[k]]=Table[{(j-1)*dt,S[[k,j]]},{j,1,i}];
  ind[[k]]=(i-1)*dt;
  pre=pre+Max[K-S[[k,i]],0]*Exp[-r*dt*(i-1)]
  ,{k,1,paths}];
premium = pre/paths;
Print["The American put premium at t=0: ",premium];

"*** Graphs ***";
a=0.05;
Z=InverseCDF[NormalDistribution[],1-a/2];
Sup=Table[{{(i-1)*dt,S0*Exp[μ*dt*(i-1)+Z*vol*Sqrt[dt*(i-
1)]}],{i,1,steps+1}];
Sdown=Table[{{(i-1)*dt,S0*Exp[μ*dt*(i-1)-Z*vol*Sqrt[dt*(i-
1)]}],{i,1,steps+1}];
data=Table[{{(i-1)*dt,Scr[[i]]},{i,1,steps+1}];
R1:=ListPlot[data,PlotStyle->{Thick,Red}]
R2:=ListPlot[path,Joined->True]
R3:=ListPlot[{Sup,Sdown},Filling->{1->{2}},Joined->True]
Show[{R3,R2,R1},PlotRange->{{0,3},{10,130}}]

```

ΣΧΗΜΑ 6.3

Διαδικασία “hold-or-exercise” για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$. Έγινε ομοιόμορφος διαμερισμός του χρόνου σε 50 βήματα και χρήση 1000 ψευδοτυχαίων ανελίξεων GBM



The American put premium at $t=0$: 7.877

Μία ενδιαφέρουσα δυνατότητα που παρέχει η προσομοίωση, είναι η εκτίμηση της πιθανότητας πρώιμης εξάσκησης σε συγκεκριμένες στιγμές ή διαστήματα. Με την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί, κατασκευάστηκε το ιστόγραμμα των πιθανοτήτων πρώιμης εξάσκησης σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ ενδεικτικά υπολογίζονται οι πιθανότητες να αποφασιστεί πρώιμη εξάσκηση στα χρονικά διαστήματα $(0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$ καθώς επίσης και η πιθανότητα να μην αποφασιστεί σε καμία περίπτωση πρώιμη εξάσκηση.

```
ind=Sort[ind];
ind1=Cases[ind,Except[3]];
100*BinCounts[ind,{0,1,2,3,Infinity}]]/paths//N
ListPlot[Tally[ind1],Filling→ Axis]
```

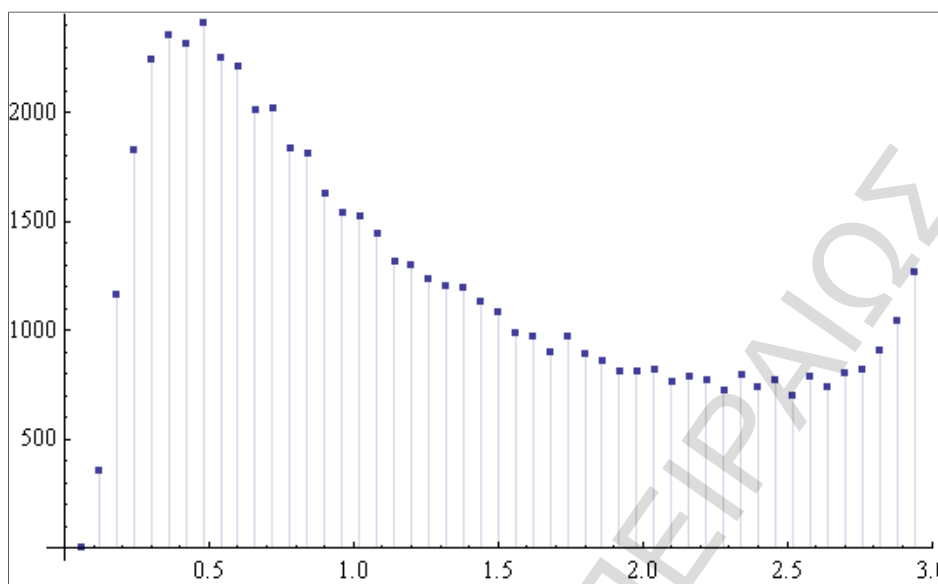
{27.82, 18.84, 13.04, 40.3}

Από όπου προκύπτουν οι ακόλουθες πιθανότητες:

- $Prob(S_t < S_t^* | 0 < t < 1) \approx 27,82\%$
- $Prob(S_t < S_t^* | 1 \leq t < 2 \ \& \ S_t \geq S_t^* \ \forall t \in (0,1)) \approx 18,84\%$
- $Prob(S_t < S_t^* | 2 \leq t < 3 \ \& \ S_t \geq S_t^* \ \forall t \in (0,2)) \approx 13,04\%$
- $Prob(S_t \geq S_t^* \ \forall t \in (0,3)) \approx 40,3\%$

ΣΧΗΜΑ 6.4

Περιπτώσεις πρώιμης εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, στο χρονικό διάστημα $(0, T)$, με χρήση 10^5 ψευδοτυχαίων ανελίξεων



Πρέπει να επισημανθεί ότι η κατασκευή του συνόρου πρώιμης εξάσκησης βασίστηκε σε μία αναλυτική μέθοδο, η οποία υποθέτει ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί GBM με μία διάσταση τυχειότητας (βλ. ενότητα 2.1). Για το λόγο αυτό, η παραπάνω υπολογιστική διαδικασία δεν μπορεί να υπολογίσει την αξία ενός δικαιώματος στην περίπτωση που αυξηθούν οι διαστάσεις της τυχειότητας στην τιμή του υποκείμενου αγαθού, π.χ. με την προσθήκη αλμάτων διάχυσης (βλ. ενότητα 2.2) ή / και στοχαστικής μεταβλητότητας (βλ. ενότητα 2.3). Ωστόσο, στις μεθόδους που εξετάζονται στις επόμενες ενότητες, επιτρέπεται η χρήση ανελίξεων με περισσότερες από μία διαστάσεις τυχειότητας, επειδή το σύνоро πρώιμης εξάσκησης «παράγεται» από τις ίδιες τις ανελίξεις που θα χρησιμοποιηθούν.

6.2 Bundling Method

Ο Tilley (1993) ανέπτυξε μία κλασική μέθοδο με τη χρήση προσομοίωσης, η οποία βασίζεται στην κατασκευή ψευδοτυχαίων ανελίξεων GBM (για τη μοντελοποίηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού) και στο διαμερισμό του χρόνου σε ομοιόμορφα διαστήματα. Εφαρμόζοντας ανάδρομη επαγωγή, οι ανελίξεις ιεραρχούνται και ομαδοποιούνται σε δέσμες (bundles), βάσει των τιμών τους σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Οι συνεχείς αναδιατάξεις που απαιτούνται σε κάθε χρονικό βηματισμό καθώς και ο μεγάλος αριθμός ανελίξεων που απαιτούνται για μία ικανοποιητική προσέγγιση της αξίας του δικαιώματος, απαιτούν σημαντική υπολογιστική ισχύ. Το πλεονέκτημα όμως της μεθόδου είναι ότι μπορεί να προσεγγίσει αρκετά σύνθετα προβλήματα, όπως για παράδειγμα προβλήματα αποτίμησης της αξίας δικαιωμάτων με μη σταθερή τιμή εξάσκησης K (εξαρτάται από την ανέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού), περιπτώσεις με άλματα διάχυσης ή και στοχαστική μεταβλητότητα, κλπ.

Η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή ενός διακριτού συνόρου (sharp boundary) για την κρίσιμη τιμή εξάσκησης, ή ακόμη και στην κατασκευή μίας ευρύτερης ζώνης μετάβασης (transition zone), μέσα στην οποία ενδεχομένως να ενδείκνυται η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος. Για ένα δικαίωμα πώλησης (ή αγοράς), αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού βρίσκεται κάτω (ή πάνω, αντίστοιχα) από τη ζώνη μετάβασης, το δικαίωμα καθίσταται “deep-in-the-money” και συμφέρει σε κάθε περίπτωση η πρώιμη εξάσκησή του.

Ο Tilley όρισε έναν δείκτη α , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση:

$$P = R^{1-\alpha}, \quad (6.1)$$

όπου R το συνολικό πλήθος των ανελίξεων, P το πλήθος των ανελίξεων σε κάθε δέσμη και Q το πλήθος των δεσμών (ισχύει πάντα $R = Q \cdot P$). Ο δείκτης αυτός μπορεί να πάρει τιμές από 0 ως 1. Έτσι, $\alpha = 0$ σημαίνει ότι όλες οι ανελίξεις ανήκουν σε μία και μόνο δέσμη (δηλ. $Q = 1$ και $R = P$), $\alpha = 1$ σημαίνει ότι κάθε ανέλιξη αποτελεί μία ανεξάρτητη δέσμη (δηλ. $P = 1$ και $Q = R$), ενώ $\alpha = 0,5$ σημαίνει ότι κάθε δέσμη περιλαμβάνει αριθμό ανελίξεων ίσο με το πλήθος των δεσμών (δηλ. $P = Q = \sqrt{R}$).

Ο Tilley έδειξε ότι η μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα όταν $Q \approx P$, (δηλ. $\alpha \approx 0,5$), ακόμη και όταν δεν λαμβάνεται υπόψη το διακριτό σύνολο πρώιμης εξάσκησης. Τα βήματα για την αποτίμηση της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη μέθοδο, είναι τα ακόλουθα:

ΒΗΜΑ 1^ο: Γίνεται ομοιόμορφος χρονικός διαμερισμός του χρόνου ωρίμανσης T σε n περιόδους, μήκους $dt = T/n$, με δυνατότητα εξάσκησης του δικαιώματος τις χρονικές στιγμές idt , με $i = 1, 2, \dots, n$. Κατασκευάζονται R ανελίξεις και οι τιμές του υποκείμενου αγαθού κωδικοποιούνται με τη μορφή $S(k, i)$, όπου $k = 1, 2, \dots, R$ και $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Η τιμή $S(k, 0)$ αντιστοιχεί στην αρχική S_0 . Για κάθε ανέλιξη και για κάθε χρονική στιγμή idt , υπολογίζεται η εσωτερική (intrinsic) αξία $I(k, i)$ του δικαιώματος πώλησης:

$$I(k, i) = \text{Max}\{K - S(k, i), 0\}.$$

ΒΗΜΑ 2^ο: Για $i = n$ (δηλ. $t = T$) οι τιμές $S(k, n)$ ταξινομούνται κατά φθίνουσα σειρά σε Q δέσμες των P ανελίξεων η καθεμιά. Η πρώτη ομάδα P ανελίξεων εντάσσεται στην 1^η δέσμη, οι δεύτερη ομάδα P ανελίξεων στην 2^η δέσμη, κ.ο.κ., μέχρι που και η τελευταία ομάδα P ανελίξεων εντάσσεται στην Q -οστή δέσμη. Οι αριθμοί P και Q πρέπει να είναι ακέραιοι διαιρέτες του R . Επίσης, η τρέχουσα (current) αξία $V(k, n)$ του δικαιώματος ισούται με την εσωτερική $I(k, n)$.

Για τα επόμενα Βήματα 3 έως και 8 ακολουθείται η τεχνική της ανάδρομης επαγωγής, δηλαδή ενημερώνονται όλες οι μεταβλητές αναδρομικά, για $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$.

ΒΗΜΑ 3^ο: Οι R ανελίξεις αναδιατάσσονται σε φθίνουσα σειρά, βάσει των τιμών τους τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και ταξινομούνται εκ νέου σε Q δέσμες των P ανελίξεων.

ΒΗΜΑ 4^ο: Υπολογίζεται η αξία διακράτησης (holding) $H(k, i)$ του δικαιώματος:

$$H(k, i) = e^{-rdt} P^{-1} \sum_{\substack{\text{όλα τα } j \text{ της} \\ \text{ίδιας δέσμης}}} V(j, i + 1).$$

ΒΗΜΑ 5^ο: Για κάθε ανελίξη k ορίζεται ένας δείκτης $x(k, i)$ που παίρνει τις τιμές 1 (υποδηλώνει απόφαση για πρόωπη εξάσκηση του δικαιώματος) και 0 (υποδηλώνει απόφαση για διακράτηση του δικαιώματος):

$$x(k, i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } I(k, i) > H(k, i) \\ 0, & \text{αν } I(k, i) \leq H(k, i). \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 6^ο: Εξετάζεται η σειρά των 0 και 1 $\{x(k, i), k = 1, 2, \dots, R\}$. Το διακριτό σύνορο (sharp boundary) προσδιορίζεται από το πρώτο στοιχείο εκείνης της ομάδας με 1, η οποία έχει τα περισσότερα στοιχεία από όλες τις ακόλουθες ομάδες με 0. Για παράδειγμα, στην παρακάτω σειρά το διακριτό όριο οριοθετείται από το $x(13, i)$:

$$000000110000\mathbf{1}11001111 \quad (6.2)$$

Το διακριτό σύνορο καταχωρείται ως $k_0(i)$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι $k_0(i) = 13$, οπότε η κρίσιμη τιμή εξάσκησης είναι $S^*(i) = S(13, i)$. Η ζώνη μετάβασης (transition zone) ξεκινά με το πρώτο 1 και τελειώνει με το τελευταίο 0. Για την αλληλουχία (6.2), η ζώνη μετάβασης είναι:

$$000000\boxed{110000\mathbf{1}1100}1111$$

ΒΗΜΑ 7^ο: Κατασκευάζεται ένας δείκτης $y(k, i)$, για τη μοντελοποίηση του διακριτού συνόρου:

$$y(k, i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k \geq k_0(i) \\ 0, & \text{αν } k < k_0(i). \end{cases}$$

Για την αλληλουχία (6.2), ο δείκτης αυτός θα παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$000000000000\mathbf{1}11111111$$

ΒΗΜΑ 8^ο: Η τρέχουσα αξία $V(k, i)$ του δικαιώματος υπολογίζεται ως εξής:

$$V(k, i) = \begin{cases} I(k, i), & \text{αν } y(k, i) = 1 \\ H(k, i), & \text{αν } y(k, i) = 0. \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 9^ο: Αφού επαναληφθούν τα Βήματα από 2 ως 8 ούτως ώστε να ολοκληρωθεί η διαδικασία της ανάδρομης επαγωγής, σαρώνεται η κάθε ανέλιξη k ξεκινώντας από $i = 1$ ως n μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά $y(k, i_\varepsilon) = 1$ για κάποιο $i_\varepsilon \leq n$, γεγονός που υποδηλώνει ότι συμφέρει η εξάσκηση τη χρονική στιγμή $t_\varepsilon = i_\varepsilon dt$, με κέρδος $V(k, i_\varepsilon) = I(k, i_\varepsilon)$. Εάν $y(k, i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, δεν συμφέρει σε καμία περίπτωση η εξάσκηση του δικαιώματος και η αξία της συγκεκριμένης ανέλιξης είναι μηδενική.

Στη συνέχεια προεξοφλείται η αξία της κάθε ανέλιξης k στην χρονική στιγμή $t = 0$:

$$V_k = V(k, i_\varepsilon)e^{-rt_\varepsilon}.$$

ΒΗΜΑ 10^ο: Η αξία του δικαιώματος για $t = 0$, υπολογίζεται βάσει του ακόλουθου τύπου (ολοκλήρωση Monte-Carlo):

$$Put \text{ premium} = R^{-1} \sum_k V_k.$$

Ο υπολογισμός της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $t = 0$, με διαμερισμό του χρόνου σε $n = 16$ βήματα και τη χρήση $Q = 40$ δεσμών των $P = 40$ ανελιξεων η καθεμία, δηλ. $\alpha = 0,5$, σύμφωνα με τη σχέση (6.1), υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica® με τη διαδικασία που ακολουθεί. Παράλληλα, γίνεται η απεικόνιση του διακριτού συνόρου πρώιμης εξάσκησης, η απεικόνιση της ζώνης μετάβασης καθώς και η απεικόνιση της διαδικασίας λήψης απόφασης “hold-or-exercise”:

```
steps=16;bundles=40;ppb=40;paths=bundles*ppb;T=3;dt=T/steps;
K=45;r=0.07;S0=40;σ=0.3;div=0;μ=Log[1+r]-0.5*σ^2;
S=Table[S0,{paths},{steps+1}];
hv=Table[0,{paths}];
k0=Table[1,{paths}];
path=Table[0,{paths}];
Supper=Table[S0,{steps+1}];
Scrit=Table[S0,{steps+1}];
Slower=Table[S0,{steps+1}];
Do[
  Do[
    S[[k,i]]=S[[k,i-
1]]*Exp[dt*μ+(dt^0.5)*σ*RandomReal[NormalDistribution[]]]
    ,{i,2,steps+1}
    ,{k,1,paths}];
  S=Sort[Table[S[[k]],{k,1,paths}],#1[[steps+1]]>#2[[steps+1]]&];
;
y=S;
cv=S;
j5=1;
While[K-S[[j5,steps+1]]<=0,j5++];
```

```

Scrit[[steps+1]]=S[[j5-1,steps+1]];
Supper[[steps+1]]=S[[j5-1,steps+1]];
Slower[[steps+1]]=S[[j5-1,steps+1]];
Do[
  cv[[k,steps+1]]=Max[K-S[[k,steps+1]],0];
  y[[k,steps+1]]=1
  ,{k,1,paths}];
Do[
  S=Sort[Table[S[[k]],{k,1,paths}],#1[[i]]>#2[[i]]&];
  cv=Sort[Table[cv[[k]],{k,1,paths}],#1[[i]]>#2[[i]]&];
  y=Sort[Table[y[[k]],{k,1,paths}],#1[[i]]>#2[[i]]&];
  Do[
    Do[
      hv[[j*ppb+i1]]=Mean[Table[cv[[k,i+1]],{k,j*ppb+1,(j+1)*ppb}]]*
      Exp[-r*dt];
      k0[[j*ppb+i1]]=If[Max[K-S[[j*ppb+i1,i]],0]-
      hv[[j*ppb+i1]]<=0||i==1,0,1]
      ,{i1,1,ppb}
      ,{j,0,bundles-1}];
    "STEP 6: Examine the sequence of 0 and 1";
    c=Table[k0[[k]],{k,1,paths}];lc=Length[c];
    a=SplitBy[c,0];la=Length[a];c0=List[];c1=List[];
    Do[
      If[a[[i2,1]]==0,AppendTo[c0,Length[a[[i2]]]],AppendTo[c1,Length[a[[i2]]]],{i2,1,la}];
      If[c[[1]]==1,c0=PrependTo[c0,0]];
      If[c[[lc]]==0,c1=AppendTo[c1,0]];
      lc0=Length[c0];lc1=Length[c1];k01=c0[[1]];
      Supper[[i]]=S[[c0[[1]],i]];
      Slower[[i]]=S[[paths-c1[[lc1]],i]];
      If[c0[[1]]+c1[[1]]==lc,repeat=False,repeat=True];
      While[repeat,
        e0=Extract[c0,1];e1=Extract[c1,1];c0=Delete[c0,1];
        c1=Delete[c1,1];
        If[e1>Max[c0],repeat=False,k01=k01+c0[[1]]+e1];
        Scrit[[i]]=S[[k01,i]];
      "STEP 7: Define a new hold-or-exercise indicator";
      Do[y[[k,i]]=If[k<=k01,0,1],{k,1,paths}];
      "STEP 8: Redefine the current values";
      Do[
        cv[[k,i]]=If[y[[k,i]]==1,Max[K-S[[k,i]],0],hv[[k]]]
        ,{k,1,paths}
        ,{i,steps,1,-1}];
      premium=0;
      Do[
        i=2;
        While[S[[k,i]]>=Scrit[[i]]&& i<steps+1,i++];
        path[[k]]=Table[{(j-1)*dt,S[[k,j]]},{j,1,i}];
        premium=premium+Max[K-S[[k,i]],0]*Exp[-r*dt*(i-1)]
        ,{k,1,paths}];
      premium=premium/paths;
      R1:=ListPlot[Table[path[[k]],{k,1,paths}],Joined->
      True,PlotRange->All];
      R2:=ListPlot[Table[{(i-
      1)*dt,Scrit[[i]]},{i,2,steps+1}],Joined-> True,PlotStyle-

```

```

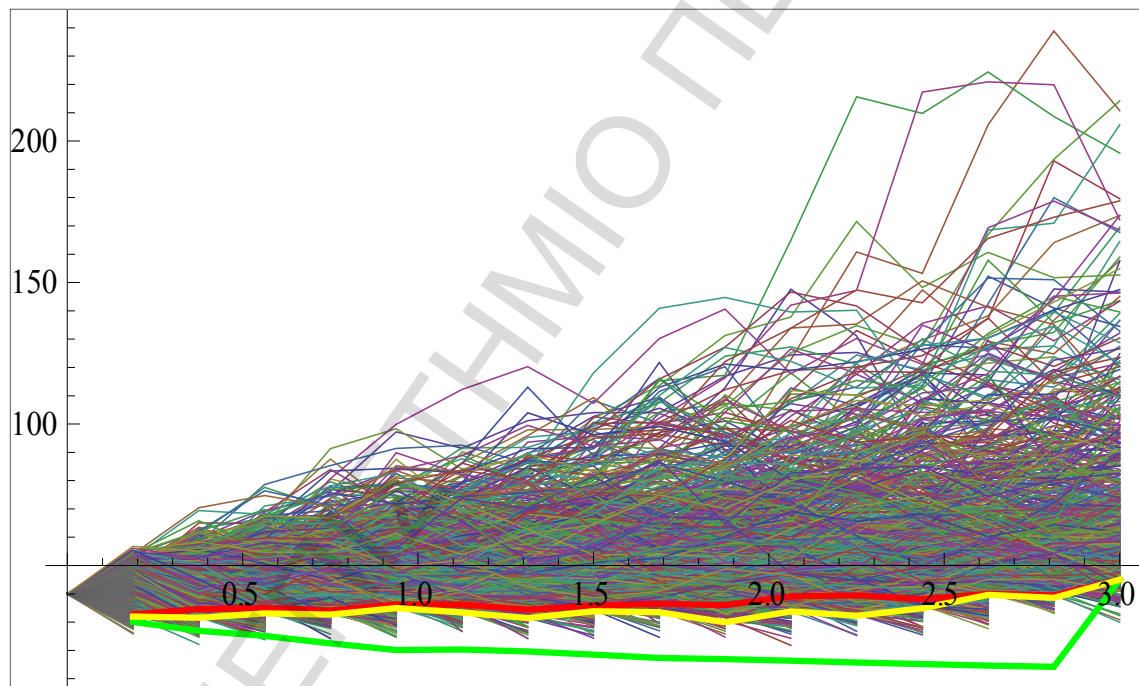
>{Yellow,Thick},PlotRange->All];
R3:=ListPlot[Table[{{(i-
1)*dt,Supper[[i]]},{i,2,steps+1}},Joined-> True,PlotStyle-
>{Red,Thick},PlotRange->All];
R4:=ListPlot[Table[{{(i-
1)*dt,Slower[[i]]},{i,2,steps+1}},Joined-> True,PlotStyle-
>{Green,Thick},PlotRange->All];
Show[{R1,R3,R4,R2}]
Print["The American put premium at t=0 is: ",premium];

```

The American put premium at t=0 is: 7.87664

ΣΧΗΜΑ 6.5

Διαδικασία “hold-or-exercise” για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, σύμφωνα με τη μέθοδο Bundling, για $\alpha = 0,5$, $n = 16$, $P = Q = 40$. Απεικονίζεται το διακριτό σύνορο (κίτρινη καμπύλη) και η ευρύτερη ζώνη μετάβασης (βρίσκεται μεταξύ κόκκινης και πράσινης καμπύλης)



Στο σχήμα 6.5, η κίτρινη καμπύλη συμβολίζει το διακριτό σύνορο πρώιμης εξάσκησης του δικαιώματος. Όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού βρεθεί κάτω από αυτό το σύνορο, δηλαδή όταν $S(k,t) < S^*(t)$, αποφασίζεται η πρώιμη εξάσκηση του δικαιώματος, γεγονός που αναπαρίσταται με την απότομη διακοπή της ανέλιξης k . Μεταξύ της κόκκινης και της πράσινης καμπύλης οριοθετείται η ζώνη μετάβασης. Όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινείται κάτω από την πράσινη καμπύλη, το δικαίωμα είναι “deep-in-the-money”.

6.3 LSM Method

Οι Longstaff και Schwartz (2001), βασισμένοι στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων του Carriere (1996), ανέπτυξαν τη μέθοδο “Least-Squares Monte Carlo” και πρότειναν τη συνδυασμένη χρήση των τεχνικών Monte-Carlo και ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση της συνάρτησης που θα προσεγγίζει την αξία του δικαιώματος κάθε χρονική στιγμή t (conditional expectation function). Η μέθοδος LSM παρακάμπτει το πρόβλημα εύρεσης του συνόρου πρώιμης εξάσκησης και επικεντρώνεται κατευθείαν στην εκτίμηση της αξίας του δικαιώματος.

Η φιλοσοφία της μεθόδου βασίζεται αφενός στην κατασκευή ανελίξεων GBM, αφετέρου στην επιλογή μίας συνάρτησης-βάσης (basis function), οι συντελεστές της οποίας εκτιμώνται σε κάθε χρονική στιγμή t , με την εφαρμογή παλινδρόμησης μεταξύ των τρεχουσών τιμών $S(k, t)$ του υποκείμενου αγαθού, ως ανεξάρτητης μεταβλητής, και των αξιών διακράτησης $V(k, t + dt)e^{-rdt}$ του δικαιώματος, ως εξαρτημένης μεταβλητής. Η διαδικασία υλοποιείται με ανάδρομη επαγωγή, ενώ για την εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου η παλινδρόμηση υλοποιείται μόνο για τις “in-the-money” καταστάσεις του δικαιώματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης-βάσης, οι συντελεστές της οποίας θα εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, παίζει σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση της αξίας του δικαιώματος. Διάφοροι αναλυτές, όπως οι Clement, Lamberton & Protter (2001), έχουν δείξει ότι η χρήση συγκεκριμένων συναρτήσεων μπορεί να προσδώσει κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά (π.χ. αμεροληψία, μεγαλύτερη ακρίβεια) στις εκτιμήσεις που επιχειρούνται.

Μια ενδεικτική συνάρτηση που προτείνεται να χρησιμοποιηθεί ως βάση, είναι ο γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων Laguerre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (6.3)$$

Εναλλακτικές προτάσεις για τη συνάρτηση-βάση περιλαμβάνουν τη χρήση πολυωνύμων Hermite, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer και Jacobi. Σύμφωνα με τους Longstaff & Schwartz, η μέθοδος LSM δεν οδηγεί σε αμερόληπτη εκτίμηση της «πραγματικής» αξίας ενός δικαιώματος και τις περισσότερες φορές την υποεκτιμά.

Τα βήματα για την εφαρμογή της μεθόδου LSM στον υπολογισμό της αξίας ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου, είναι τα ακόλουθα:

ΒΗΜΑ 1^ο: Επιλέγεται η συνάρτηση-βάση $f(x)$, οι συντελεστές της οποίας θα εκτιμώνται στη συνέχεια με την τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων. Γίνεται ομοιόμορφος χρονικός διαμερισμός του χρόνου ωρίμανσης T σε n περιόδους, μήκους $dt = T/n$, με δυνατότητα εξάσκησης του δικαιώματος τις χρονικές στιγμές idt , με $i = 1, 2, \dots, n$. Κατασκευάζονται R ανελίξεις και οι τιμές του υποκείμενου αγαθού κωδικοποιούνται με τη μορφή $S(k, i)$, όπου $k = 1, 2, \dots, R$ και $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Η τιμή $S(k, 0)$ αντιστοιχεί στην αρχική S_0 . Για κάθε ανελίξη και για κάθε χρονική στιγμή idt , υπολογίζεται η εσωτερική (intrinsic) αξία $I(k, i)$ του δικαιώματος πώλησης:

$$I(k, i) = \text{Max}\{K - S(k, i), 0\}.$$

Για $i = n$ (δηλ. $t = T$), η τρέχουσα αξία $V(k, n)$ του δικαιώματος τίθεται ίση με $I(k, n)$.

ΒΗΜΑ 2^ο: Το συγκεκριμένο βήμα εφαρμόζεται κατ' επανάληψη με την τεχνική της ανάδρομης επαγωγής για $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$. Την κάθε χρονική στιγμή idt εφαρμόζεται παλινδρόμηση μόνο για τις "in-the-money" καταστάσεις του δικαιώματος, εκεί δηλαδή όπου ισχύει $I(k, i) > 0$, προκειμένου να εκτιμηθούν οι συντελεστές της συνάρτησης-βάσης $f(x)$. Το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής τον παίζουν οι τιμές $S(k, i)$, $k = 1, 2, \dots, R$, ενώ της εξαρτημένης οι $V(k, i + 1)e^{-rdt}$, $k = 1, 2, \dots, R$. Αφού έχουν προσδιοριστεί οι συντελεστές της συνάρτησης-βάσης (η f τώρα ονομάζεται conditional expectation function), η τρέχουσα αξία $V(k, i)$ του δικαιώματος για κάθε μια ανέλιξη $k = 1, 2, \dots, R$ εκτιμάται ως εξής:

$$V(k, i) = \begin{cases} I(k, i), & \text{αν } I(k, i) > f(S(k, i)) \\ 0, & \text{αν } I(k, i) \leq f(S(k, i)). \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 3^ο: Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία της ανάδρομης επαγωγής του προηγούμενου βήματος, σαρώνεται η κάθε ανέλιξη k ξεκινώντας από $i = 1$ ως n μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά $V(k, i_\varepsilon) > 0$ για κάποιο $i_\varepsilon \leq n$, γεγονός που υποδηλώνει ότι συμφέρει η εξάσκηση τη χρονική στιγμή $t_\varepsilon = i_\varepsilon dt$, με κέρδος $V(k, i_\varepsilon) = I(k, i_\varepsilon)$. Εάν $V(k, i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, δεν συμφέρει σε καμία περίπτωση η εξάσκηση του δικαιώματος και η αξία της συγκεκριμένης ανέλιξης είναι μηδενική.

Στη συνέχεια προεξοφλείται η αξία της κάθε ανέλιξης k στην χρονική στιγμή $t = 0$:

$$V_k = V(k, i_\varepsilon)e^{-rt_\varepsilon}.$$

ΒΗΜΑ 4^ο: Η αξία του δικαιώματος για $t = 0$, υπολογίζεται βάσει του ακόλουθου τύπου (ολοκλήρωση Monte-Carlo):

$$\text{Put premium} = R^{-1} \sum_k V_k.$$

Η μέθοδος LSM υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό λογισμικό Wolfram Mathematica® με την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί, για ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου, με ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 4$ βημάτων και 1.000 ανελιξεων GBM. Χρησιμοποιήθηκε ως συνάρτηση-βάση ο γραμμικός συνδυασμός 4 πολυωνύμων Laguerre, σύμφωνα με τη σχέση (6.3).

```
"Input data";
steps=4;paths=1000;T=3;dt=T/steps;K=45;S0=40;
r=0.07;div=0.0;σ=0.3;μ=r-div-0.5*σ^2;
"Basis function: 4 Laguerre polynomials";
```

```

Do[
  g[x_,i_]=Exp[-x/2]*(Exp[x]/(i!))*D[(x^i)*Exp[-x],{x,i}]
  ,{i,1,4}];
S=Table[S0,{paths},{steps+1}];
cv=Table[0,{paths},{steps+1}];
iv=Table[0,{paths},{steps+1}];
premium=Table[0,{paths}];

"Asset's price: GBM paths";
Do[Do[S[[k,i]]=S[[k,i-
1]]*Exp[dt*μ+dt^0.5*σ*RandomReal[NormalDistribution[]]]
  ,{i,2,steps+1}],{k,1,paths}];

"Option intrinsic values";
Do[Do[iv[[k,i]]=Max[K-S[[k,i]],0],{i,1,steps+1}],{k,1,paths}];

"Option current values at expiration";
Do[cv[[k,steps+1]]=iv[[k,steps+1]],{k,1,paths}];

"Estimate the conditional function using LSM and define option
current values via backward induction";
Do[regression=List[];
  Do[
If[iv[[k,i]]>0,AppendTo[regression,{S[[k,i]],cv[[k,i+1]]*Exp[-
r*dt]}],{k,1,paths}];
  f[x_]=Normal[Fit[regression,{1,g[x,1],g[x,2],g[x,3],g[x,4]}
,x]];
  Do[
  If[iv[[k,i]]>f[S[[k,i]]],cv[[k,i]]=iv[[k,i]],cv[[k,i]]=0]
  ,{k,1,paths}],{i,steps,1,-1}];

"Premium estimation at t=0";
Do[i1=1;repeat=True;
  While[repeat,i1++;If[cv[[k,i1]]>0||i1==steps+1,repeat=False;
  premium[[k]]=cv[[k,i1]]*Exp[-r*(i1-1)*dt]],{k,1,paths}];
Print["The put premium at t=0 : ",Mean[premium]]

```

The put premium at t=0: 7.54919

Άλλες μέθοδοι με προσομοίωση

Κλείνοντας το κεφάλαιο, αναφέρονται ενδεικτικά κάποιες μέθοδοι αποτίμησης που χρησιμοποιούν την τεχνική της προσομοίωσης:

- Weighted Monte-Carlo method (Broadie et al., 2000).
- Stratified State Aggregation method (Barraquand & Martineau, 1995).
- Quasi Monte-Carlo (QMC) based method (Reiter, 1999).
- Canonical Least-Squares Monte-Carlo (CLM) approach (Liu, 2010).

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

7.1 Κριτήρια αξιολόγησης

Για τη σύγκριση των διαφόρων προσεγγιστικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικανικού τύπου, εξετάζονται δύο βασικά κριτήρια:

(α) Η απαίτηση σε υπολογιστική ισχύ, που συνήθως εκφράζεται με τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο (σε sec) που αναλώνει ο επεξεργαστής ενός Η/Υ (Central Processing Unit, CPU) για την αποτίμηση ενός δικαιώματος. Όσο μικρότερος είναι ο χρόνος υπολογισμού, τόσο ταχύτερη θεωρείται μία μέθοδος.

(β) Η ακρίβεια της εκτίμησης που δίνει η κάθε μέθοδος. Συνήθως, ως σημείο αναφοράς για την «πραγματική» αξία ενός δικαιώματος, λαμβάνεται το αποτέλεσμα από την εφαρμογή κάποιας μεθόδου με πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διαμερισμό (π.χ. σε διωνυμικό δέντρο με μερικές χιλιάδες βήματα) ή με πολύ μεγάλο πλήθος ανελιξεων (π.χ. σε μεθόδους προσομοίωσης). Ειδικότερα, στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου με $\delta = 0$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς η αξία του αντίστοιχου δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου, επειδή η αξία τους ταυτίζεται στο χρόνο $t = 0$ (βλ. ενότητα 1.5).

Η ακρίβεια της εκτίμησης μπορεί να μετράται π.χ. σε όρους μέσου σχετικού σφάλματος (mean relative error), μέσου τετραγωνικού σφάλματος (root mean squared error), μέσου απόλυτου σχετικού σφάλματος (mean absolute relative error), μέγιστου σχετικού σφάλματος (max relative error), κλπ. Όσο μικρότερο σφάλμα δίνει μία μέθοδος σε σχέση με την «πραγματική» τιμή του δικαιώματος, τόσο καλύτερη θεωρείται από άποψη ακρίβειας.

7.2 Το σενάριο της αξιολόγησης

Οι μέθοδοι που αξιολογήθηκαν ως προς την ταχύτητα και την ακρίβεια, είναι οι παρακάτω:

1. Η μέθοδος GJ των Geske & Johnson (1984) με διπλή εφαρμογή της προεκβολής Richardson.
2. Η 2-point Maximum Method των Bunch & Johnson (1992), με αναλυτικό τρόπο υπολογισμού και ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 8$ για την επιλογή του σημείου εξάσκησης που μεγιστοποιεί την αξία του δικαιώματος $P(2)$.
3. Η 3-point Maximum Method με αναλυτικό τρόπο υπολογισμού για τη μεγιστοποίηση των αξιών $P(2), P(3)$.
4. Η μέθοδος QA των Barone-Adesi & Whaley (1987).
5. Η μέθοδος Integral Approximation του Kim (1990), με χρονικό διαμερισμό του ολοκληρώματος $n = 12$.
6. Η μέθοδος LBA των Broadie & Detemple (1996). Επίσης εξετάζεται και το κάτω φράγμα (LB).

7. Η μέθοδος LUBA των Broadie & Detemple (1996), με χρονικό διαμερισμό του ολοκληρώματος $n = 12$. Επίσης εξετάζεται και το άνω φράγμα (UB).
8. Η διωνυμική μέθοδος των Cox, Ross & Rubinstein (1979), με χρονικό διαμερισμό $n = 16$.
9. Η διωνυμική BS μέθοδος των Broadie & Detemple (1996), με χρονικό διαμερισμό $n = 16$.
10. Η διωνυμική BSR μέθοδος των Broadie & Detemple (1996), με χρήση δύο δικαιωμάτων με χρονικό διαμερισμό $n = 8$ και $n/2 = 4$ αντίστοιχα.
11. Η βελτιωμένη AB μέθοδος των Chang, Chung και Stapleton (2007), με τη χρήση διωνυμικού δέντρου και διπλής εφαρμογής της προεκβολής Richardson επί των δικαιωμάτων $P(1)$, $P(2)$ και $P(4)$.
12. Η μέθοδος Bundling του Tilley (1993), με χρονικό διαμερισμό $n = 8$, και χρήση 70 δεσμών με 70 ανελιξεις GBM στην κάθε μία ($\alpha = 0.5$).
13. Η μέθοδος LSM των Longstaff & Schwartz (2001), με τη χρήση της μέσης τιμής των αποτελεσμάτων που προκύπτουν μετά από 100 επαναλήψεις μίας υπολογιστικής διαδικασίας, με χρονικό διαμερισμό $n = 2$, 50 ανελιξεις GBM και συνάρτηση-βάση έναν γραμμικό συνδυασμό 3 πολυωνύμων Laguerre.

Η αξιολόγηση των παραπάνω μεθόδων βασίστηκε στις αντίστοιχες υπολογιστικές διαδικασίες που υλοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, με το λογισμικό Wolfram Mathematica®. Για την αξιολόγηση χρησιμοποιήθηκε ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου, με $S_0 = 40$ και $K = 45$. Η αξιολόγηση έγινε για τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις ως προς το χρόνο ωρίμανσης T του δικαιώματος (σε έτη):

- Δικαίωμα βραχυπρόθεσμης διάρκειας (short-term), για $T = 0.5$ έτη.
- Δικαίωμα μεσοπρόθεσμης διάρκειας (medium-term), για $T = 1$ έτος.
- Δικαίωμα μακροπρόθεσμης διάρκειας (long-term), για $T = 3$ έτη.

Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις ωρίμανσης, εξετάστηκαν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ($3^3 = 27$) για:

- $\sigma = 30\%, 40\%, 60\%$.
- $r = 3\%, 5\%, 7\%$.
- $\delta = 0\%, 1\%, 2\%$.

Συνολικά, βάσει όλων των δυνατών συνδυασμών T , σ , r , δ που περιγράφηκαν παραπάνω, προέκυψαν $3^4 = 81$ πειραματικά αποτελέσματα για την κάθε μέθοδο.

Ως «πραγματική» κάθε φορά αξία του δικαιώματος θεωρήθηκε αυτή που προκύπτει από ένα διωνυμικό δέντρο 2000 περιόδων. Όλες οι αξίες υπολογίστηκαν με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Ως βασικό κριτήριο ακρίβειας επιλέχθηκε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean -Square Error, MSE), το οποίο ενσωματώνει την πληροφορία τόσο για τη διακύμανση, όσο και για τη μεροληψία των σφαλμάτων:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2.$$

Παράλληλα, για να δοθεί μία πλήρης εικόνα των σφαλμάτων για κάθε μέθοδο που εξετάστηκε, παρατίθενται τα περιγραφικά στατιστικά χαρακτηριστικά τους με τα αντίστοιχα θηκογράμματα.

Ως κριτήριο ταχύτητας επιλέχθηκε η μέση διάρκεια χρήσης της CPU (σε sec) για τον υπολογισμό της αξίας ενός δικαιώματος. Τα χαρακτηριστικά του υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε είναι: LG Intel®, Atom™, CPU N270, 1.60 GHz, 800 MHz, 0.99 GB RAM.

Τέλος, οι μέθοδοι που αξιολογήθηκαν τοποθετούνται σε ένα σύστημα δύο αξόνων: (α) του λογάριθμου του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και (β) του λογάριθμου του χρόνου υπολογισμού.

7.3 Αποτελέσματα

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1

Σφάλματα προσέγγισης βραχυπρόθεσμου ($T=0,5$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0=40, K=45$

σ	r	δ	European	Early Exercise Premium	"Exact" American	GJ	2-point max	3-point max	QA	Integral	Lower Bound	LBA	Upper Bound	LUBA	Binomial	BBS	BBSR	Imp-AB	Bundling	LSM	
0,30	0,03	0,00	6,135	0,130	6,265	-0,023	0,010	-0,003	-0,023	0,000	-0,025	-0,003	0,040	0,021	-0,001	0,010	0,031	-0,152	0,043	-0,036	
0,30	0,03	0,01	6,265	0,091	6,356	-0,017	0,007	-0,002	-0,017	0,001	-0,020	-0,004	0,030	0,016	-0,003	0,010	0,020	-0,100	0,103	-0,008	
0,30	0,03	0,02	6,396	0,056	6,452	-0,010	0,004	-0,001	-0,009	0,001	-0,014	-0,003	0,020	0,012	-0,006	0,011	0,011	-0,053	-0,055	-0,024	
0,30	0,05	0,00	5,820	0,247	6,067	-0,031	0,036	-0,006	-0,029	-0,005	-0,029	-0,003	0,060	0,032	0,002	0,010	0,049	-0,292	-0,002	-0,053	
0,30	0,05	0,01	5,946	0,201	6,147	-0,030	0,027	-0,004	-0,024	-0,003	-0,027	-0,004	0,053	0,028	0,001	0,010	0,060	-0,231	-0,111	0,015	
0,30	0,05	0,02	6,074	0,157	6,231	-0,026	0,018	-0,003	-0,019	-0,001	-0,025	-0,005	0,044	0,025	0,000	0,011	0,042	-0,174	-0,100	0,013	
0,30	0,07	0,00	5,515	0,379	5,894	-0,029	0,070	-0,013	-0,032	-0,014	-0,031	0,000	0,074	0,037	-0,001	0,005	0,025	-0,319	0,007	-0,155	
0,30	0,07	0,01	5,638	0,327	5,965	-0,031	0,052	-0,010	-0,029	-0,010	-0,030	-0,002	0,069	0,035	0,001	0,007	0,033	-0,339	0,086	-0,130	
0,30	0,07	0,02	5,762	0,277	6,039	-0,032	0,043	-0,008	-0,025	-0,007	-0,029	-0,003	0,063	0,033	0,001	0,009	0,044	-0,318	-0,024	-0,110	
0,40	0,03	0,00	7,214	0,104	7,318	-0,018	0,005	-0,002	-0,019	0,002	-0,025	0,000	0,042	0,022	0,007	0,015	0,009	0,192	0,002	-0,085	
0,40	0,03	0,01	7,332	0,076	7,408	-0,012	0,003	-0,001	-0,013	0,002	-0,021	-0,001	0,032	0,020	0,007	0,016	0,011	0,229	0,068	0,014	
0,40	0,03	0,02	7,451	0,050	7,501	-0,006	0,001	-0,001	-0,007	0,001	-0,015	-0,001	0,022	0,015	0,008	0,018	0,010	0,263	-0,042	0,066	
0,40	0,05	0,00	6,911	0,196	7,107	-0,035	0,013	-0,004	-0,025	-0,001	-0,033	-0,001	0,065	0,040	0,003	0,012	0,031	0,084	0,154	0,022	
0,40	0,05	0,01	7,027	0,162	7,189	-0,030	0,011	-0,003	-0,020	0,000	-0,030	-0,002	0,056	0,036	0,005	0,013	0,025	0,127	-0,028	-0,019	
0,40	0,05	0,02	7,143	0,131	7,274	-0,024	0,009	-0,002	-0,015	0,001	-0,027	-0,003	0,047	0,030	0,006	0,015	0,016	0,168	-0,127	-0,017	
0,40	0,07	0,00	6,617	0,297	6,914	-0,045	0,033	-0,007	-0,027	-0,006	-0,037	0,000	0,085	0,052	0,001	0,009	0,066	-0,037	-0,047	-0,082	
0,40	0,07	0,01	6,729	0,261	6,990	-0,042	0,026	-0,006	-0,023	-0,004	-0,036	-0,001	0,077	0,048	0,001	0,010	0,039	0,011	-0,053	-0,019	
0,40	0,07	0,02	6,843	0,225	7,068	-0,039	0,020	-0,005	-0,019	-0,002	-0,034	-0,002	0,069	0,043	0,001	0,011	0,034	0,057	-0,029	0,026	
0,60	0,03	0,00	9,452	0,085	9,537	-0,010	-0,002	-0,002	-0,015	0,003	-0,026	0,008	0,042	0,030	0,105	0,028	0,015	0,699	-0,021	-0,062	
0,60	0,03	0,01	9,555	0,065	9,620	-0,006	0,000	0,000	-0,009	0,003	-0,020	0,005	0,034	0,025	0,106	0,030	0,019	0,724	0,144	-0,102	
0,60	0,03	0,02	9,658	0,048	9,706	-0,003	0,000	0,000	-0,004	0,002	-0,016	0,002	0,024	0,017	0,104	0,030	0,020	0,746	0,037	-0,184	
0,60	0,05	0,00	9,156	0,158	9,314	-0,027	0,005	-0,003	-0,018	0,003	-0,036	0,007	0,069	0,050	0,101	0,026	0,020	0,616	0,103	-0,271	
0,60	0,05	0,01	9,257	0,136	9,393	-0,022	0,004	-0,002	-0,013	0,002	-0,033	0,004	0,060	0,044	0,101	0,027	0,018	0,644	0,055	0,020	
0,60	0,05	0,02	9,358	0,115	9,473	-0,017	0,003	-0,002	-0,008	0,002	-0,029	0,003	0,051	0,038	0,102	0,028	0,015	0,672	0,033	0,110	
0,60	0,07	0,00	8,867	0,238	9,105	-0,043	0,013	-0,004	-0,018	0,001	-0,044	0,008	0,092	0,068	0,095	0,020	0,018	0,523	0,029	-0,158	
0,60	0,07	0,01	8,966	0,213	9,179	-0,038	0,012	-0,003	-0,013	0,002	-0,040	0,007	0,085	0,063	0,098	0,023	0,021	0,556	0,221	-0,165	
0,60	0,07	0,02	9,065	0,190	9,255	-0,033	0,011	-0,002	-0,009	0,002	-0,037	0,005	0,077	0,057	0,099	0,025	0,022	0,586	-0,117	-0,095	
Error Standard Deviation (STD)							0,012	0,018	0,003	0,008	0,004	0,008	0,004	0,021	0,015	0,048	0,008	0,015	0,372	0,087	0,086
Average Error (AE)							-0,025	0,016	-0,004	-0,018	-0,001	-0,028	0,000	0,055	0,035	0,035	0,016	0,027	0,181	0,012	-0,055
Maximum Absolute Error (MAE)							0,045	0,070	0,013	0,032	0,014	0,044	0,008	0,092	0,068	0,106	0,030	0,066	0,746	0,221	0,271
Mean-Square Error (MSE) x 10.000							8	6	0	4	0	9	0	34	14	34	3	9	1659	74	102
Central Processing Unit (CPU) Time						224	22,0	3,5	68,1	0,5	1,2	1,3	1,3	5,4	5,5	0,5	0,5	0,4	0,5	32,0	5

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2

Σφάλματα προσέγγισης μεσοπρόθεσμου ($T=1$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0=40, K=45$

σ	r	δ	European	Early Exercise Premium	"Exact" American	GJ	2-point max	3-point max	QA	Integral	Lower Bound	LBA	Upper Bound	LUBA	Binomial	BBS	BBSR	Imp-AB	Bundling	LSM	
0,30	0,03	0,00	7,034	0,235	7,269	-0,014	0,018	-0,004	-0,025	-0,002	-0,036	-0,005	0,077	0,047	0,017	0,012	0,035	0,103	-0,063	-0,094	
0,30	0,03	0,01	7,258	0,171	7,429	-0,012	0,012	-0,003	-0,016	0,000	-0,031	-0,004	0,060	0,037	0,022	0,015	0,023	0,187	0,050	-0,013	
0,30	0,03	0,02	7,458	0,140	7,598	-0,007	0,009	-0,001	-0,006	0,001	-0,023	-0,002	0,042	0,028	0,023	0,017	0,013	0,263	-0,064	-0,020	
0,30	0,05	0,00	6,464	0,443	6,907	-0,008	0,058	-0,011	-0,026	-0,014	-0,041	-0,006	0,111	0,067	0,011	0,008	0,083	-0,146	0,012	-0,082	
0,30	0,05	0,01	6,677	0,369	7,046	-0,013	0,046	-0,009	-0,020	-0,009	-0,040	-0,008	0,098	0,061	0,012	0,010	0,091	-0,047	-0,076	-0,223	
0,30	0,05	0,02	6,894	0,297	7,191	-0,014	0,035	-0,006	-0,013	-0,004	-0,036	-0,007	0,085	0,054	0,014	0,010	0,043	0,047	0,024	0,095	
0,30	0,07	0,00	5,926	0,669	6,595	0,012	0,116	-0,021	-0,025	-0,033	-0,040	-0,002	0,133	0,075	-0,005	-0,005	0,015	-0,200	0,049	-0,183	
0,30	0,07	0,01	6,129	0,587	6,716	0,004	0,093	-0,017	-0,020	-0,025	-0,039	-0,004	0,125	0,073	0,002	0,000	0,047	-0,240	-0,139	-0,120	
0,30	0,07	0,02	6,336	0,508	6,844	-0,004	0,073	-0,014	-0,015	-0,018	-0,040	-0,006	0,115	0,069	0,008	0,005	0,072	-0,207	-0,014	-0,279	
0,40	0,03	0,00	8,624	0,201	8,825	-0,014	0,011	-0,003	-0,019	0,002	-0,039	0,000	0,081	0,056	0,087	0,020	0,017	0,490	-0,012	-0,039	
0,40	0,03	0,01	8,828	0,154	8,982	-0,010	0,007	-0,003	-0,011	0,001	-0,034	-0,001	0,063	0,044	0,089	0,023	0,018	0,551	0,092	-0,015	
0,40	0,03	0,02	9,034	0,110	9,144	-0,005	0,005	-0,002	-0,002	0,001	-0,026	0,000	0,045	0,033	0,090	0,025	0,014	0,608	0,018	0,033	
0,40	0,05	0,00	8,059	0,376	8,435	-0,021	0,031	-0,007	-0,017	-0,005	-0,048	-0,004	0,122	0,087	0,074	0,014	0,049	0,283	-0,191	-0,225	
0,40	0,05	0,01	8,255	0,321	8,576	-0,021	0,021	-0,006	-0,011	-0,003	-0,045	-0,005	0,107	0,077	0,077	0,017	0,038	0,357	-0,069	0,032	
0,40	0,05	0,02	8,453	0,268	8,721	-0,018	0,020	-0,004	-0,004	-0,001	-0,041	-0,005	0,092	0,067	0,082	0,020	0,022	0,427	0,159	-0,065	
0,40	0,07	0,00	7,520	0,547	8,067	0,003	0,086	0,007	0,006	0,002	-0,031	0,017	0,173	0,127	0,080	0,026	0,143	0,073	0,030	-0,199	
0,40	0,07	0,01	7,709	0,505	8,214	-0,019	0,058	-0,011	-0,008	-0,013	-0,049	-0,004	0,142	0,101	0,064	0,005	0,089	0,136	0,082	-0,102	
0,40	0,07	0,02	7,899	0,447	8,346	-0,021	0,049	-0,009	-0,003	-0,010	-0,048	-0,005	0,130	0,093	0,068	0,009	0,054	0,215	-0,018	0,000	
0,60	0,03	0,00	11,803	0,181	11,984	-0,010	0,002	-0,003	-0,011	0,004	-0,044	0,011	0,084	0,065	0,140	0,038	0,020	1,081	-0,099	-0,063	
0,60	0,03	0,01	11,979	0,148	12,127	-0,006	0,002	-0,002	-0,002	0,003	-0,037	0,008	0,069	0,053	0,139	0,040	0,022	1,123	-0,074	-0,176	
0,60	0,03	0,02	12,156	0,117	12,273	-0,002	0,002	-0,001	0,007	0,002	-0,029	0,005	0,053	0,043	0,136	0,040	0,026	1,162	-0,112	0,040	
0,60	0,05	0,00	11,227	0,334	11,561	-0,024	0,019	-0,005	-0,003	0,001	-0,057	0,006	0,133	0,110	0,133	0,034	0,035	0,909	0,182	-0,015	
0,60	0,05	0,01	11,397	0,297	11,694	-0,020	0,017	-0,004	0,004	0,002	-0,052	0,004	0,118	0,097	0,133	0,035	0,034	0,958	-0,018	0,184	
0,60	0,05	0,02	11,569	0,261	11,830	-0,017	0,015	-0,004	0,011	0,001	-0,048	0,002	0,103	0,085	0,133	0,036	0,031	1,005	-0,134	0,060	
0,60	0,07	0,00	10,672	0,501	11,173	-0,033	0,031	-0,009	0,006	-0,006	-0,065	0,005	0,173	0,145	0,124	0,024	0,035	0,717	0,012	-0,442	
0,60	0,07	0,01	10,838	0,459	11,297	-0,031	0,031	-0,008	0,013	-0,004	-0,061	0,004	0,161	0,134	0,126	0,027	0,028	0,772	0,037	-0,278	
0,60	0,07	0,02	11,004	0,420	11,424	-0,029	0,030	-0,007	0,019	-0,003	-0,058	0,002	0,147	0,123	0,126	0,029	0,033	0,825	0,152	-0,152	
Error Standard Deviation (STD)							0,011	0,030	0,006	0,012	0,009	0,010	0,006	0,037	0,032	0,051	0,013	0,030	0,444	0,093	0,135
Average Error (AE)							-0,013	0,033	-0,006	-0,007	-0,005	-0,042	0,000	0,105	0,076	0,074	0,020	0,042	0,424	-0,007	-0,087
Maximum Absolute Error (MAE)							0,033	0,116	0,021	0,026	0,033	0,065	0,017	0,173	0,145	0,140	0,040	0,143	1,162	0,191	0,442
Mean-Square Error (MSE) x 10.000							3	20	1	2	1	19	0	124	67	80	5	26	3696	84	252
Central Processing Unit (CPU) Time						224	22,0	3,5	68,1	0,5	1,2	1,3	1,3	5,4	5,5	0,5	0,5	0,4	0,5	32,0	5

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3

Σφάλματα προσέγγισης μακροπρόθεσμου ($T=3$) δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου για $S_0=40, K=45$

σ	r	δ	European	Early Exercise Premium	"Exact" American	GJ	2-point max	3-point max	QA	Integral	Lower Bound	LBA	Upper Bound	LUBA	Binomial	BBS	BBSR	Imp-AB	Bundling	LSM	
0,30	0,03	0,00	8,890	0,693	9,583	-0,025	0,077	-0,014	0,008	-0,019	-0,060	-0,011	0,199	0,155	0,093	0,008	0,108	0,263	-0,179	-0,145	
0,30	0,03	0,01	9,398	0,548	9,946	-0,030	0,056	-0,012	0,024	-0,011	-0,056	-0,011	0,165	0,129	0,100	0,016	0,059	0,462	-0,109	-0,005	
0,30	0,03	0,02	9,917	0,413	10,330	-0,026	0,038	-0,006	0,045	-0,004	-0,048	-0,006	0,127	0,101	0,111	0,024	0,025	0,642	0,030	-0,071	
0,30	0,05	0,00	7,451	1,243	8,694	0,021	0,191	-0,035	0,026	-0,066	-0,055	-0,011	0,256	0,186	0,048	-0,023	0,070	-0,114	-0,072	-0,523	
0,30	0,05	0,01	7,905	1,087	8,992	0,003	0,152	-0,028	0,041	-0,050	-0,056	-0,013	0,237	0,177	0,070	-0,009	0,125	-0,204	-0,230	-0,589	
0,30	0,05	0,02	8,372	0,936	9,308	-0,013	0,133	-0,023	0,058	-0,036	-0,056	-0,015	0,214	0,164	0,080	0,004	0,212	0,014	-0,031	-0,312	
0,30	0,07	0,00	6,197	1,779	7,976	0,089	0,323	-0,063	0,030	-0,123	-0,042	-0,002	0,274	0,173	0,035	-0,018	-0,102	0,151	-0,074	-0,936	
0,30	0,07	0,01	6,600	1,625	8,225	0,068	0,300	-0,055	0,045	-0,103	-0,046	-0,006	0,267	0,175	0,028	-0,024	-0,071	0,073	0,183	-0,555	
0,30	0,07	0,02	7,017	1,471	8,488	0,046	0,271	-0,047	0,063	-0,085	-0,048	-0,009	0,256	0,175	0,023	-0,035	0,012	-0,023	-0,064	-0,583	
0,40	0,03	0,00	11,563	0,663	12,226	-0,040	0,051	-0,012	0,029	-0,012	-0,073	-0,008	0,217	0,191	0,123	0,023	0,052	0,764	-0,069	-0,501	
0,40	0,03	0,01	12,022	0,551	12,573	-0,037	0,043	-0,009	0,049	-0,006	-0,065	-0,008	0,182	0,158	0,127	0,030	0,038	0,916	-0,146	-0,126	
0,40	0,03	0,02	12,486	0,447	12,933	-0,030	0,042	-0,006	0,070	-0,003	-0,056	-0,005	0,146	0,127	0,125	0,034	0,043	1,053	-0,070	-0,026	
0,40	0,05	0,00	10,044	1,189	11,233	-0,023	0,147	-0,028	0,065	-0,048	-0,073	-0,013	0,299	0,261	0,095	0,003	0,255	0,122	-0,039	-0,391	
0,40	0,05	0,01	10,464	1,068	11,532	-0,032	0,136	-0,024	0,082	-0,038	-0,072	-0,016	0,272	0,239	0,091	0,002	0,166	0,300	-0,033	-0,489	
0,40	0,05	0,02	10,890	0,951	11,841	-0,039	0,125	-0,020	0,101	-0,028	-0,069	-0,016	0,246	0,216	0,093	0,004	0,093	0,469	-0,240	-0,469	
0,40	0,07	0,00	8,687	1,710	10,397	0,031	0,262	-0,048	0,087	-0,095	-0,064	-0,007	0,339	0,279	0,047	-0,039	0,099	-0,107	-0,174	-0,716	
0,40	0,07	0,01	9,070	1,588	10,658	0,014	0,235	-0,043	0,103	-0,081	-0,066	-0,011	0,323	0,269	0,065	-0,022	0,170	-0,230	-0,225	-0,696	
0,40	0,07	0,02	9,459	1,468	10,927	-0,001	0,208	-0,039	0,122	-0,068	-0,066	-0,014	0,306	0,257	0,076	-0,007	0,255	-0,175	-0,183	-0,436	
0,60	0,03	0,00	16,659	0,688	17,347	-0,050	0,050	-0,012	0,075	-0,007	-0,087	0,005	0,241	0,230	0,101	0,037	0,059	1,482	0,097	0,212	
0,60	0,03	0,01	17,033	0,614	17,647	-0,044	0,051	-0,010	0,097	-0,005	-0,078	0,001	0,210	0,195	0,093	0,035	0,054	1,578	-0,039	-0,186	
0,60	0,03	0,02	17,407	0,545	17,952	-0,037	0,052	-0,008	0,119	-0,005	-0,069	-0,001	0,178	0,166	0,091	0,037	0,041	1,666	0,083	-0,204	
0,60	0,05	0,00	14,988	1,231	16,219	-0,063	0,140	-0,026	0,143	-0,035	-0,095	-0,008	0,345	0,345	0,079	0,005	0,089	0,876	-0,277	-0,354	
0,60	0,05	0,01	15,338	1,150	16,488	-0,064	0,134	-0,023	0,163	-0,029	-0,091	-0,012	0,320	0,320	0,084	0,016	0,057	0,992	-0,266	-0,627	
0,60	0,05	0,02	15,689	1,072	16,761	-0,064	0,127	-0,020	0,184	-0,025	-0,086	-0,015	0,294	0,291	0,083	0,021	0,044	1,102	-0,190	-0,300	
0,60	0,07	0,00	13,460	1,777	15,237	-0,039	0,239	-0,044	0,194	-0,074	-0,093	-0,008	0,413	0,413	0,060	-0,010	0,302	0,230	-0,028	-0,805	
0,60	0,07	0,01	13,787	1,694	15,481	-0,046	0,237	-0,041	0,214	-0,066	-0,091	-0,012	0,394	0,394	0,049	-0,018	0,223	0,359	-0,055	-0,552	
0,60	0,07	0,02	14,115	1,613	15,728	-0,052	0,235	-0,038	0,235	-0,059	-0,088	-0,015	0,373	0,373	0,048	-0,020	0,139	0,483	-0,040	-0,373	
Error Standard Deviation (STD)						0,040	0,089	0,016	0,062	0,035	0,016	0,005	0,074	0,084	0,029	0,023	0,095	0,561	0,114	0,268	
Average Error (AE)						-0,018	0,150	-0,027	0,092	-0,044	-0,068	-0,009	0,263	0,228	0,078	0,003	0,097	0,487	-0,090	-0,398	
Maximum Absolute Error (MAE)						0,089	0,323	0,063	0,235	0,123	0,095	0,016	0,413	0,413	0,127	0,039	0,302	1,666	0,277	0,936	
Mean-Square Error (MSE) x 10.000						18	302	10	121	31	49	1	743	589	70	5	181	5397	207	2280	
Central Processing Unit (CPU) Time						224	22,0	3,5	68,1	0,5	1,2	1,3	1,3	5,4	5,5	0,5	0,5	0,4	0,5	32,0	5

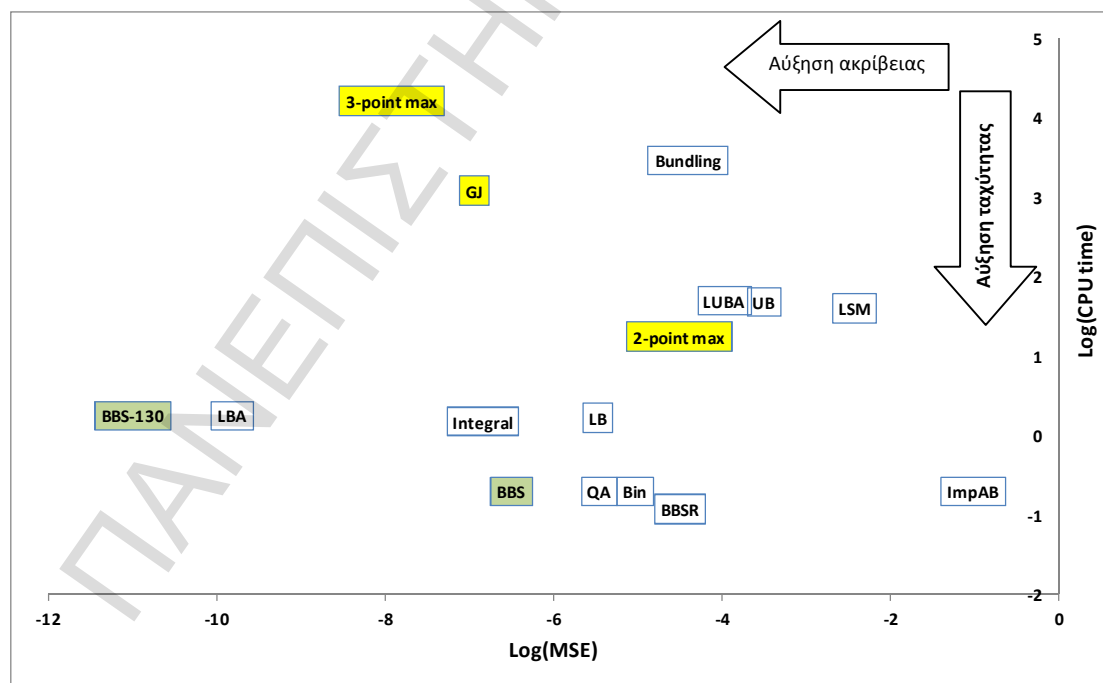
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4

Βασικά περιγραφικά στατιστικά μέτρα για τα σφάλματα των μεθόδων καθώς και χρόνοι υπολογισμού (sec)

	Range	Min	Max	Mean	Std. Dev.	MSE (x10.000)	CPU time
GJ	0,153	-0,064	0,089	-0,019	0,025	10	22,0
2-point max	0,325	-0,002	0,323	0,066	0,081	109	3,5
3-point max	0,070	-0,063	0,007	-0,012	0,015	4	68,1
QA	0,267	-0,032	0,235	0,022	0,061	42	0,5
Integral	0,127	-0,123	0,004	-0,016	0,028	11	1,2
LB	0,081	-0,095	-0,014	-0,046	0,020	26	1,3
LBA	0,033	-0,016	0,017	-0,003	0,007	1	1,3
UB	0,393	0,020	0,413	0,141	0,102	301	5,4
LUBA	0,401	0,012	0,413	0,113	0,099	224	5,5
Bin	0,145	-0,005	0,140	0,056	0,045	52	0,5
BBS	0,145	-0,039	0,106	0,019	0,034	15	0,5
BBS-130	0,024	-0,002	0,022	0,003	0,003	0	1,3
BBSR	0,321	0,002	0,323	0,070	0,079	110	0,4
ImpAB	2,005	-0,339	1,666	0,364	0,478	3584	0,5
Bundling	0,498	-0,277	0,221	-0,028	0,107	122	32,0
LSM	1,148	-0,936	0,212	-0,180	0,237	878	5,0

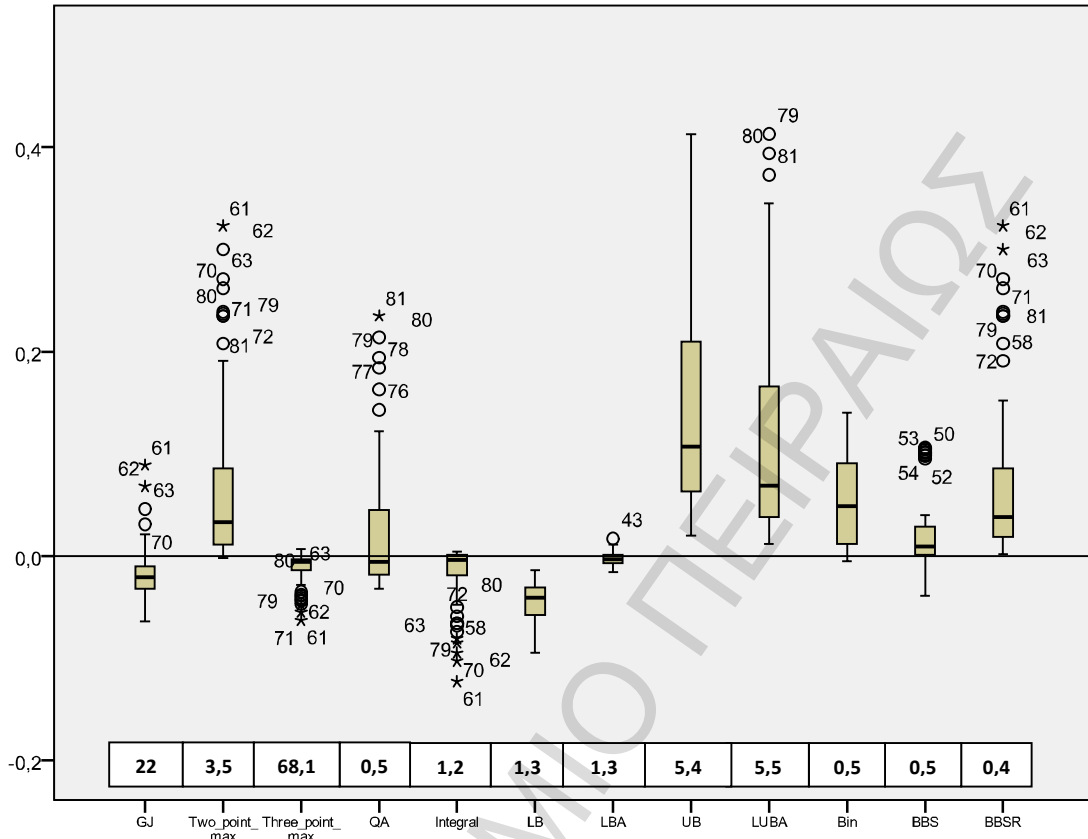
ΣΧΗΜΑ 7.1

Κατάταξη των μεθόδων βάσει του MSE και του χρόνου υπολογισμού: Όσο πιο κάτω και αριστερά είναι μία μέθοδος, τόσο γρηγορότερη και ακριβέστερη είναι αντίστοιχα



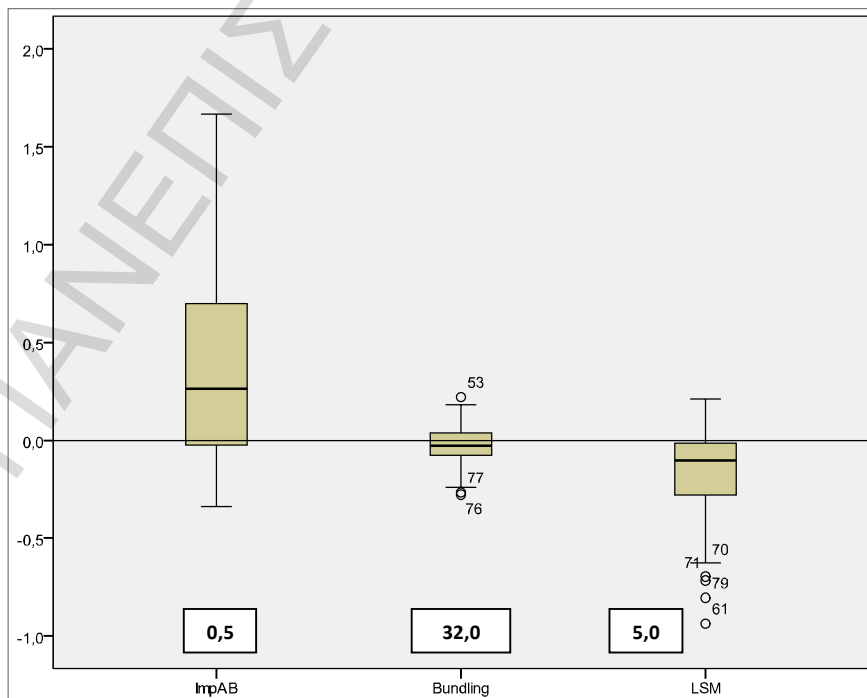
ΣΧΗΜΑ 7.2

Θηκογράμματα σφαλιμάτων για τις μεθόδους GJ, 2-point max, 3-point max, QA, Integral, LB, LBA, UB, LUBA, Binomial, BBS, και BBSR. Απεικονίζονται και οι χρόνοι υπολογισμού (sec)



ΣΧΗΜΑ 7.3

Θηκογράμματα σφαλιμάτων για τις μεθόδους Imp-AB, Bundling και LSM. Απεικονίζονται και οι χρόνοι υπολογισμού (sec)



7.4 Συμπεράσματα

Η μέθοδος LBA εμφανίζει τις καλύτερες επιδόσεις σε όρους ακρίβειας, ενώ κατατάσσεται ανάμεσα στις πιο γρήγορες μεθόδους. Ακόμα και χωρίς τη βελτίωση που επιφέρει η χρήση της μεταβλητής $\hat{\lambda}_1$, η προσέγγιση μέσω του κάτω φράγματος (LB) είναι αρκετά ικανοποιητική και πάντα μικρότερη από την «πραγματική» αξία του δικαιώματος, όπως αναμενόταν.

Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι η μεταβλητή $\hat{\lambda}_1$, μπορεί μεν να μειώνει σημαντικά το MSE που έχει προκύψει από την προσέγγιση μέσω του κάτω φράγματος (LB), όμως: (α) η μεταβλητή $\hat{\lambda}_1$ προκύπτει από εμπειρικούς υπολογισμούς και (β) η επίδρασή της οδηγεί σε μία προσέγγιση (LBA) που δεν έχει την ιδιότητα του κάτω φράγματος.

Πολύ ικανοποιητική προσέγγιση επιτυγχάνεται με τη μέθοδο Integral Approximation. Ωστόσο, η προσέγγιση μέσω του άνω φράγματος (UB) δεν είναι το ίδιο ικανοποιητική, ενώ η μεταβλητή $\hat{\lambda}_2$ δεν οδηγεί σε σημαντική βελτίωση για τη μέθοδο LUBA. Παράλληλα, η μέθοδος LUBA απαιτεί περίπου 4 φορές περισσότερο υπολογιστικό χρόνο από την LBA.

Η κλασική μέθοδος GJ με διπλή προεκβολή Richardson παρουσιάζει ικανοποιητική ακρίβεια, απαιτεί όμως περίπου 17 φορές περισσότερο υπολογιστικό χρόνο από την LBA. Αρκετοί αναλυτές υποστηρίζουν ότι θα πρέπει να προτιμάται η χρήση της μεθόδου GJ σε σχέση με άλλες μεθόδους αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου, ακόμα και αν υστερεί ως προς την ακρίβεια ή την υπολογιστική ισχύ, καθώς πιστεύουν ότι αποτελεί την ορθότερη θεωρητική προσέγγιση για την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.1).

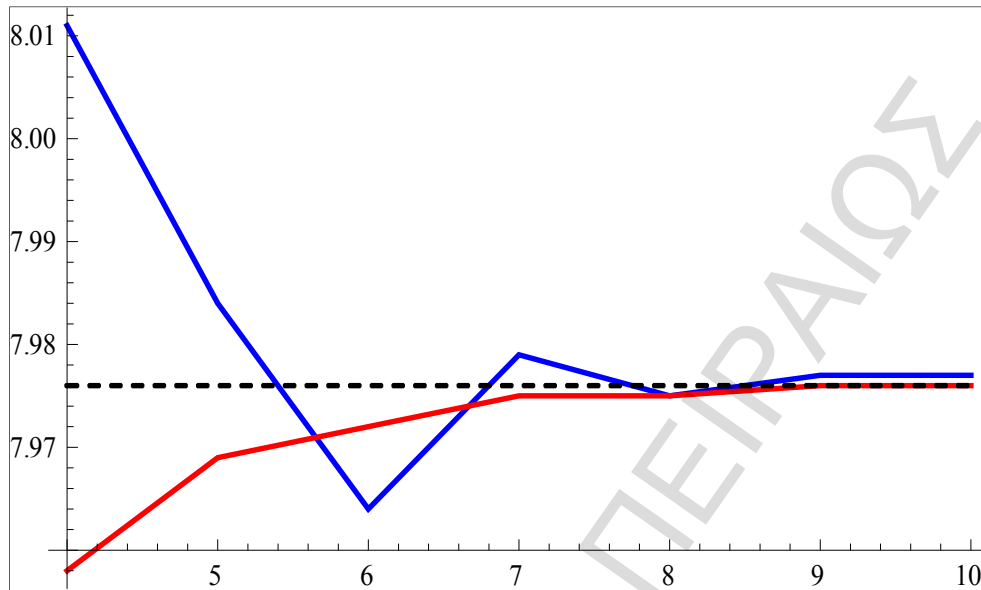
Η μέθοδος 3-point maximum απαιτεί περίπου 2,5 φορές περισσότερο υπολογιστικό χρόνο σε σχέση με την κλασική μέθοδο GJ. Ωστόσο, στις περιπτώσεις βραχυπρόθεσμου δικαιώματος ($T = 0,5$, πίνακας 7.1) το MSE παρουσιάζεται μειωμένο κατά 34 φορές, στις περιπτώσεις μεσοπρόθεσμου δικαιώματος ($T = 1$, πίνακας 7.2) μειώνεται κατά 4 φορές, ενώ στις περιπτώσεις μακροπρόθεσμου δικαιώματος ($T = 3$, πίνακας 7.3) μειώνεται κατά 1,8 φορές. Φαίνεται δηλαδή ότι το όφελος από τη χρήση ανομοιόμορφου χρονικού διαμερισμού για τη μεγιστοποίηση των $P(2)$ και $P(3)$, σε σχέση με την κλασική μέθοδο GJ, αυξάνεται όταν ο χρόνος ωρίμανσης του δικαιώματος μειώνεται.

Η μέθοδος QA είναι κατασκευαστικά η ευκολότερη και απλούστερη υπολογιστική διαδικασία, σε σχέση με τις υπόλοιπες αναλυτικές μεθόδους που εξετάστηκαν. Είναι αρκετά ακριβής και από τις ταχύτερες μεθόδους.

Οι μέθοδοι Binomial, BBS και BBSR είναι από τις ταχύτερες και πιο εύκολα υλοποιήσιμες μεθόδους. Παράλληλα, επιτρέπουν σε έναν αναλυτή να επιλέξει το βαθμό ακρίβειας ή ταχύτητας ανάλογα με τις ανάγκες του. Για δεδομένο χρονικό διαμερισμό, η μέθοδος BBS δείχνει να υπερτερεί από την Binomial ως προς την ακρίβεια, ενώ είναι ισοδύναμη από θέμα ταχύτητας. Επίσης, η μέθοδος BBS δίνει την εικόνα μονότονης και ομαλότερης σύγκλισης στην «πραγματική» τιμή ενός δικαιώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

ΣΧΗΜΑ 7.4

Ταχύτητα σύγκλισης των μεθόδων Binomial (μπλε) και BBS (κόκκινη) στην πραγματική τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, ανάλογα με τον χρονικό διαμερισμό που χρησιμοποιείται. Ο οριζόντιος άξονας εκφράζει τον εκθέτη των 2^n βημάτων του διαμερισμού



Η μέθοδος 2-point maximum, με τον συγκεκριμένο τρόπο που υλοποιήθηκε (με ομοιόμορφο χρονικό διαμερισμό $n = 8$ και στη συνέχεια επιλογή του χρονικού σημείου εξάσκησης που μεγιστοποιεί την αξία του δικαιώματος $P(2)$), παρουσιάζει τα ίδια επίπεδα ακρίβειας με την BBSR, αλλά είναι περίπου 9 φορές πιο αργή. Και οι δύο μέθοδοι υπερτιμούν την αξία του δικαιώματος και έχουν παρόμοια διακύμανση.

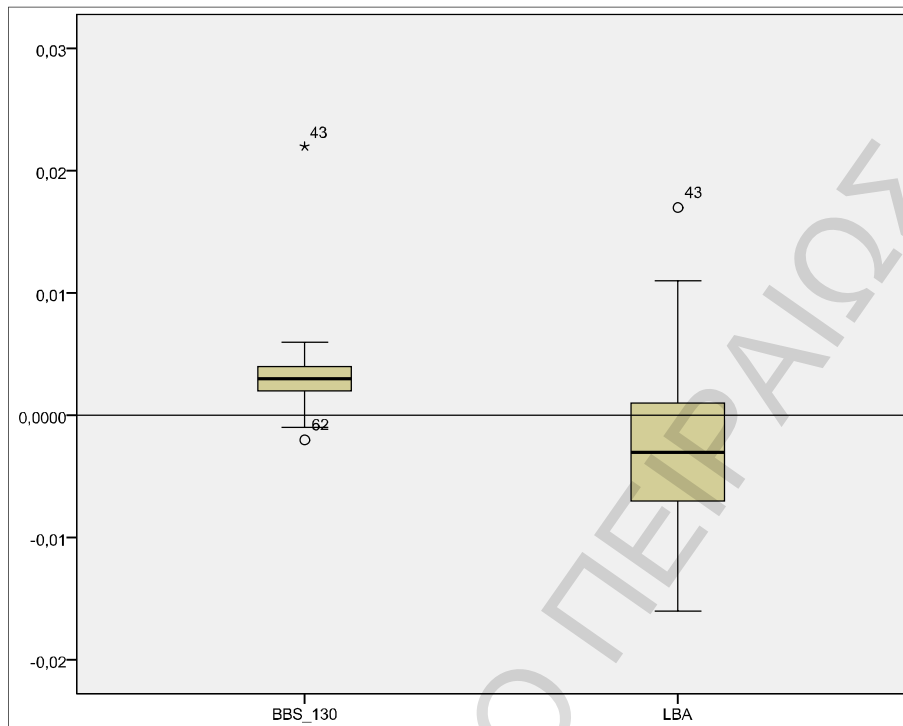
Η μέθοδος Improved AB, αν και ταχύτερη, είναι η χειρότερη ως προς την ακρίβεια.

Διαπιστώνεται στην πράξη ότι η μέθοδος LSM δεν είναι αμερόληπτη και ότι υποεκτιμά την αξία ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου. Από την άλλη, η μέθοδος Bundling δείχνει βελτιωμένα χαρακτηριστικά αμεροληψίας και έχει μικρότερη τυπική απόκλιση σφαλμάτων σε σχέση με την LSM, αλλά είναι η χειρότερη ως προς την απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Ωστόσο, η μέθοδος Bundling επιτρέπει την αντιμετώπιση δυσκολότερων προβλημάτων με πολλές διαστάσεις τυχαιότητας.

Συμπερασματικά, για την περίπτωση αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου με μία διάσταση τυχαιότητας, προτείνεται η χρήση της μεθόδου BBS. Αν και βάσει των παραμέτρων της αξιολόγησης φαίνεται να υπερτερεί η μέθοδος LBA ως προς την ακρίβεια, σε περίπτωση που επιλεγεί για την BBS χρονικός διαμερισμός $n \approx 130$ (ούτως ώστε οι δύο μέθοδοι να αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα) η μέθοδος BBS καθίσταται ακριβέστερη (λόγω μικρότερης διακύμανσης σφαλμάτων) από την LBA.

ΣΧΗΜΑ 7.5

Θηκογράμματα σφαλμάτων για τις χρονικά ισοδύναμες μεθόδους BBS 130 περιόδων και LBA. Για την BBS 130 περιόδων είναι $MSE = 1,67 \cdot 10^{-5}$ και για την LBA είναι $MSE = 5,42 \cdot 10^{-5}$



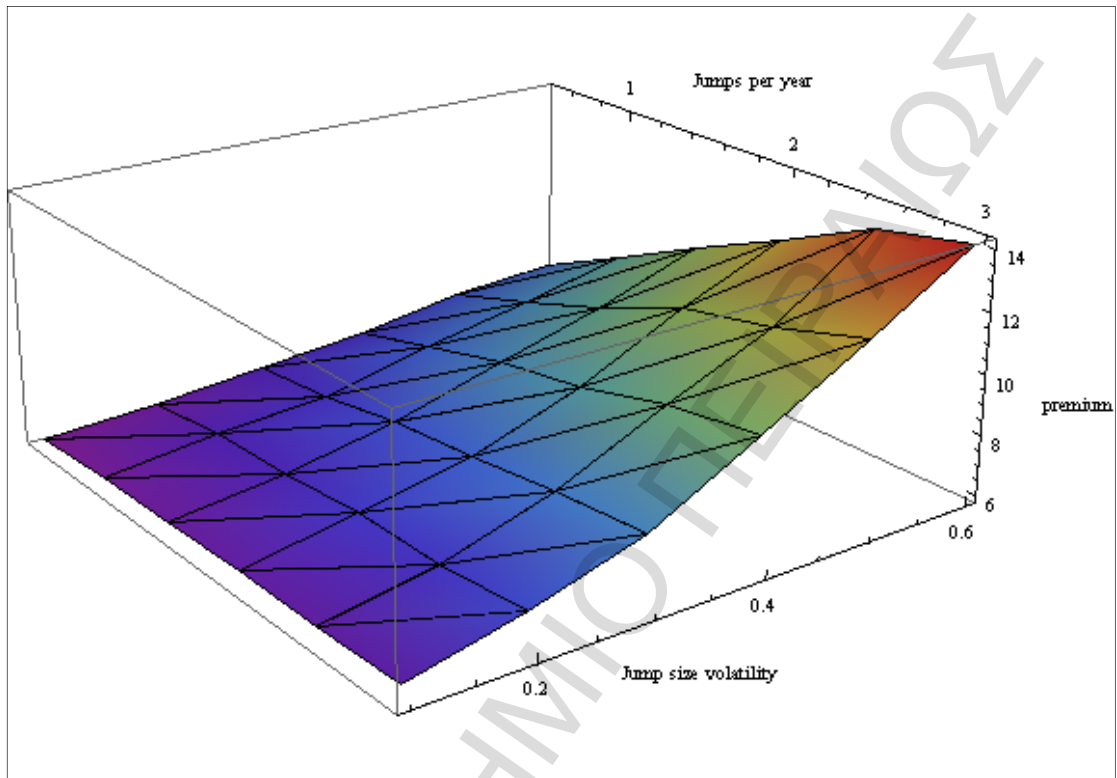
Επίσης, αν ένας αναλυτής είναι διατεθειμένος να χάσει σε ταχύτητα προκειμένου να κερδίσει σε ακρίβεια ή το αντίθετο, η μέθοδος BBS του δίνει ένα μεγάλο εύρος επιλογών. Γενικά, ο κάθε αναλυτής θα πρέπει να επιλέξει εκείνη τη μέθοδο που θεωρεί καταλληλότερη, σταθμίζοντας ανάλογα τις απαιτήσεις σε ακρίβεια και ταχύτητα.

Τέλος, σε περίπτωση που εξετάζονται προβλήματα αποτίμησης με περισσότερες διαστάσεις τυχειότητας (π.χ. ύπαρξη αλμάτων διάχυσης, στοχαστικής μεταβλητότητας, τιμής εξάσκησης K εξαρτώμενης από την ανέλιξη της τιμής του υποκείμενου αγαθού), προτείνεται η χρήση της μεθόδου Bundling, η οποία και διαθέτει την ικανότητα προσαρμογής πάνω σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Το σχήμα που ακολουθεί προέκυψε από την υλοποίηση της μεθόδου Bundling, προσαρμοσμένης στο μοντέλο αλμάτων διάχυσης Merton's JDM (βλ. Ενότητα 2.2). Απεικονίζεται στις τρεις διαστάσεις η αξία του ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου συναρτήσεως του μέσου ετήσιου αριθμού αλμάτων διάχυσης και της μεταβλητότητας του μεγέθους τους.

ΣΧΗΜΑ 7.6

Προσαρμογή της μεθόδου Bundling (με $n = 12$ βήματα, $\alpha = 0,5$ και $R = 2500$ ανελιξίες) στο μοντέλο Merton's JDM, για την εύρεση της τιμής ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με $S_0 = 40$, $K = 45$, $r = 0,07$, $\delta = 0$ και $T = 3$, συναρτήσει του μέσου ετήσιου αριθμού αλμάτων διάχυσης (παράμετρος λ) και της μεταβλητότητας του μεγέθους τους (παράμετρος ν). Σε όλες τις περιπτώσεις έγινε υπόθεση ότι ο λογάριθμος του μέσου μεγέθους των αλμάτων (παράμετρος m) είναι μηδέν (σχέση (2.4))



ΑΡΧΤΙΚΟΛΕΞΑ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

A

AB	Accelerated Binomial
ABC	Artificial Boundary Condition

B

BBS	Binomial Black & Scholes
BBSR	Binomial Black & Scholes with Richardson extrapolation
BM or BS	Brownian Motion

C

CPU	Central Processing Unit
CRR	Cox-Ross-Rubinstein method

E

EEP	Early Exercise Premium
EURIBOR	Euro Interbank Offered Rate

F

FV	Future Value
----	--------------

G

GARCH	General Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity
GBM	Geometric Brownian Motion
GJ	Geske & Johnson

J

JD	Jump Diffusion
----	----------------

L

LB	Lower Bound
LBA	Lower Bound Algorithm
LSM	Least Square Monte-Carlo
LUBA	Lower and Upper Bound Approximation

M

MC	Monte-Carlo
MJD	Merton's Jump Diffusion model

MSE Mean-Square Error

P

PDE Partial Differential Equation

PV Present Value

Q

QMC Quasi-Monte-Carlo

R

RMSE Root Mean-Square Error

S

SDE Stochastic Differential Equation

SV Stochastic Volatility

SVJ Stochastic Volatility with Jumps

SVJD Stochastic Volatility and Jump-Diffusion

U

UB Upper Bound

UBA Upper Bound Algorithm

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

A

American option	Δικαίωμα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου
Analytical method	Αναλυτική μέθοδος
Arbitrage	Εξισορροποιητική κερδοσκοπία
Arithmetical method	Αριθμητική μέθοδος
Asset	Περιουσιακό στοιχείο

B

Backward induction	Ανάδρομη επαγωγή
Basis function	Συνάρτηση-βάση
Binomial	Διωνυμικό
Bond	Ομόλογο
Bound	Σύνορο
Boundary condition	Συνοριακή συνθήκη
Bundle	Δέσμη

C

Call option	Δικαίωμα αγοράς
Cash flow	Χρηματοροή
Coefficient	Συντελεστής
Compounding factor	Συντελεστής ανατοκισμού
Compounding process	Διαδικασία ανατοκισμού
Continuous compounding	Συνεχής ανατοκισμός
Continuous dividend	Συνεχές μέρισμα
Conditional expectation	Υπό συνθήκες αναμενόμενη τιμή
Current value	Τρέχουσα αξία

D

Differential equation	Διαφορική εξίσωση
Discounting process	Διαδικασία προεξόφλησης
Discounting factor	Συντελεστής προεξόφλησης
Discretization	Διακριτοποίηση, διαμερισμός
Dividend	Μέρισμα
Drift	Ρυθμός, τάση

E

Early exercise	Πρώιμη εξάσκηση
Early exercise boundary	Σύνορο πρώιμης εξάσκησης
Early exercise premium	Πρόσθετο ασφάλιστρο λόγω δυνατότητας πρώιμης εξάσκησης
Efficient market	Αποτελεσματική αγορά

Error	Σφάλμα
European option	Δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου
Exponential	Εκθετικός
Extrapolation	Προεκβολή

F

Finite-difference	Πεπερασμένες διαφορές
Forward	Πρόδρομο
Forward contract	Προθεσμιακό συμβόλαιο
Forward induction	Πρόδρομη επαγωγή
Function	Συνάρτηση
Future contract	Δικαίωμα μελλοντικής εκπλήρωσης
Future value	Μελλοντική αξία

G

Geometrical	Γεωμετρικός
Grid	Πλέγμα

H

Hedging	Αντιστάθμιση κινδύνου
Hedging portfolio	Χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης
Holder	Αγοραστής δικαιώματος
Holding value	Αξία διακράτησης

I

Induction	Επαγωγή
Initial condition	Αρχική συνθήκη
Interpolation	Παρεμβολή
Intrinsic value	Εσωτερική αξία

J

Jump diffusion	Άλμα διάχυσης
----------------	---------------

L

Lattice	Δικτυωτό
Least-squares method	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
Long call / put	Αγορά δικαιώματος αγοράς / πώλησης
Loop	Επαναληπτικός βρόγχος
Lower Bound	Κάτω φράγμα

M

Maturity	Ωρίμανση
Mesh	Πλέγμα

N

Node	Κόμβος
Numerical method	Αριθμητική μέθοδος

O

Optimal stopping time	Βέλτιστος χρόνος εξάσκησης (δικαιώματος)
Option	Δικαίωμα (προαίρεσης)

P

Partial differential equation	Μερική διαφορική εξίσωση (ή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους)
Path	Διαδρομή / Μονοπάτι
Penalty term	Όρος ποινής
Portfolio	Χαρτοφυλάκιο
Premium	Τιμή, αξία ή ασφάλιστρο δικαιώματος
Present value	Παρούσα αξία
Present value factor	Συντελεστής παρούσας αξίας
Probabilistic method	Πιθανοθεωρητική μέθοδος
Put option	Δικαίωμα πώλησης

Q

Quadratic	Τετραγωνικό
Quantization method	Ποσοτική μέθοδος

R

Rate	Επιτόκιο, ρυθμός
Regression	Παλινδρόμηση
Replicating portfolio	Χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης
Residual	Κατάλοιπο
Risk-free rate	Επιτόκιο ελεύθερο κινδύνου
Risk-neutral pricing formula	Τύπος αποτίμησης υπό ουδέτερο κίνδυνο
Risk-neutral probability measure	Ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας

S

Sharp boundary	Διακριτό σύνορο
Short call / put	Πώληση δικαιώματος αγοράς / πώλησης
Short selling	Ανοιχτή πώληση
Simulation	Προσομοίωση
Spatial discretization	Χωρικός διαμερισμός
Speculator	Κερδοσκόπος
Stochastic	Στοχαστικό
Stock	Μετοχή
Stock repo / reverse repo	Προϊόν δανεισμού τίτλων
Strike price	Τιμή εξάσκησης

Swap

Ανταλλαγή

T

Time discretization

Χρονικός διαμερισμός

Time equivalent

Χρονικά ισοδύναμος

Time value of money

Διαχρονική αξία του χρήματος

Transition zone

Ζώνη μετάβασης

Trapezoidal

Τραπεζοειδής

Trinomial

Τριωνυμικό

Truncation

Στρογγυλοποίηση

U

Underlying asset

Υποκείμενο αγαθό

Upper Bound

Άνω φράγμα

V

Volatility

Μεταβλητότητα

W

Weighted

Σταθμισμένο

Writer

Πωλητής δικαιώματος προαίρεσης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

Γ. Ακρίβης & Β. Δουγαλής (2008) *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, 3^η Έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Γ. Αρτίκης (2002) *Χρηματοοικονομική Διοίκηση, Αποφάσεις Επενδύσεων*, 3^η Έκδοση, Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

Π. Αρτίκης (2010) *Διαχείριση Αξίας και Κινδύνου*, Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

Μ. Κούτρας (2011) *Ανάλυση Παλινδρόμησης και Ανάλυση Διακύμανσης*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Μ. Μπούτσικας (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Μ. Μπούτσικας (2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξενόγλωσση

G. Barone-Adesi & R. Whaley (1987) *Efficient Analytic Approximation of American Option Values*, Journal of Finance, Vol. 42, No. 2, pp. 301-320.

A. Bensoussan (1984) *On the Theory of Option Pricing*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 2, No. 2, pp. 139-158.

F. Black & M. Scholes (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

P. Boyle (1977) *Options: A Monte-Carlo Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 4, No. 3, pp. 323-338.

R. Breen (1991) *The Accelerated Binomial Option Pricing Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, pp. 153-164.

M. Broadie & J. Detemple (1995) *American Capped Call Options on Dividend Paying Assets*, Review of Financial Studies, Vol. 8, No. 1, pp. 161-191.

M. Broadie & J. Detemple (1996) *American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods*, The Review of Financial Studies, Vol. 9, No. 4, pp. 1211-1250.

- D. Bunch & Johnson (1992) *A Simple Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach*, Journal of Finance, Vol. 47, No. 2, pp. 809-816.
- P. Carr, R. Jarrow & R. Myneni (1992) *Alternative Characterizations of American Put Options*, Mathematical Finance, Vol. 2, No. 2, pp. 87-105.
- J. Carriere (1996) *Valuation of the Early-Exercise Price for Options using Simulations and Nonparametric Regression*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 19, No. 1, pp. 19-30.
- C. Chang, S. Chung & R. Stapleton (2007) *Richardson Extrapolation Techniques for the Pricing of American-style Options*, The Journal of Futures Markets, Vol. 27, No. 8, pp. 791-817.
- M. Chesney & R. Gibson (1995) *State Space Symmetry and Two-Factor Option Pricing Models*, Advances in Futures and Options Research, Vol. 8, pp. 85-112.
- E. Clement, D. Lamberton & P. Protter (2002) *An Analysis of a Least Square Regression Method for American Option Pricing*, Finance and Stochastics, Vol. 6, No. 4, pp. 449-471.
- J. Cox, S. Ross & M. Rubinstein (1979) *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.
- J. Cox & M. Rubinstein (1985) *Option Markets*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- J. Cox & S. Ross (1976) *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, Journal of Financial Economics, Vol. 3, No. 1/2, pp. 145-166.
- A. Friedman (1975) *Parabolic Variational Inequalities in One Space Dimension and Smoothness of the Free Boundary*, Journal of Functional Analysis, Vol. 18, No. 2, pp. 151-176.
- R. Geske & H. Johnson (1984) *The American Put Option Valued Analytically*, The Journal of Finance, Vol. 39, No. 5, pp. 1511-1524.
- S. Heston (1993) *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency*, Review of Financial Studies, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- S. Ikonen & J. Toivanen (2008) *Efficient Numerical Methods for Pricing American Options under Stochastic Volatility*, John Wiley & Sons, Inc., Vol. 24, No. 1, pp. 104-126.
- S. Jacka (1991) *Optimal Stopping and the American Put*, Journal of Mathematical Finance, Vol. 1, No. 2, pp. 1-14.
- I. Karatzas (1988) *On the Pricing of the American Option*, Applied Mathematics and Optimization Journal, Vol. 17, No. 1, pp. 37-60.

I. Kim (1990) *The Analytic Valuation of American Options*, Rev. Financial Studies, Vol. 3, No. 3, pp. 547-572.

D. Lamberton (2009) *Optimal Stopping and American Options*, Ljubljana Summer School on Financial Mathematics.

F. Longstaff & E. Schwartz (2001) *Valuing American Options by simulation: A Simple Least Squares Approach*, Review of Financial Studies, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147.

R. McDonald & M. Schroder (1990) *A Parity Result for American Options*, Working Paper, Northwestern University.

L. McMillan (1986) *Analytic Approximation for the American Put Option*, Advances in Futures and Options Research, Vol. 1, pp. 119-139.

R. Merton (1973) *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

R. Merton (1976) *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, Vol. 3, No. 1/2, pp. 125-144.

E. Omberg (1987) *A Note on the Convergence of the Binomial-Pricing and Compound-Option Models*, Journal of Finance, Vol. 42, No. 2, pp. 463-469.

H. Stoll (1969) *The Relationship Between Put and Call Option Prices*, Journal of Finance, Vol. 24, No. 5, pp. 801-824.

J. Tilley (1993) *Valuing American Options in a Path Simulation Model*, Investment Section Monograph, III, pp. 55-67.

P. Van Moerbeke (1973) *On Optimal Stopping and Free Boundary Problems*, Advances in Applied Probability, Vol. 5, No. 1, pp. 33-35.