ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΜΕ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Αουρόρα Μπότση

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΜΕ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Αουρόρα Μπότση

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ 1^{η}/27.09.2012 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Κωνσταντίνος Πολίτης,
- Δημήτριος Στέγγος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

PROCESSES WITH CONDITIONALLY STATIONARY INDEPENDENT INCREMENTS AND APPLICATIONS IN FINANCE

by
Aurora Botsi

Piraeus, Greece
December 2013

Στο Θεολόγο

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Νικόλαο Μαχαιρά, για την πολύτιμη βοήθειά του καθ'ολη τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και για τις συμβουλές και τη καθοδήγησή του στη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και κ. Δημήτριο Στέγγο, για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της επιτροπής και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω βαθιά τον Θεολόγο, για την συμπαράσταση, βοήθεια και άμετρη κατανόηση που έδειξε καθ'ολη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς και την αδελφή μου, για την αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετούνται βασικές ιδιότητες και χαρακτηρισμοί των στοχαστικών διαδικασιών ($\sigma.\delta.$) με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις που αποτελούν γενίκευση των $\sigma.\delta.$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στη Θεωρία Κινδύνου, τη Στατιστική και τα Χρηματοοικονομικά. Αρχικά μελετάται το γνωστό αποτέλεσμα ότι, κάθε μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson είναι Markov και έχει τη πολυωνυμική ιδιότητα, και θέτουμε το ερώτημα πότε μία διαδικασία Markov είναι μεμειγμένη διαδικασία Poisson. Στη συνέχεια διερευνούμε το πρόβλημα: «Για δοσμένη σύνθετη μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson S κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P, να χαρακτηριστούν όλα τα προοδευτικά ισοδύναμα με το P μέτρα πιθανότητας που αφήνουν αναλλοίωτη την κατανομή της S.» Το εν λόγω έχει λυθεί από τον Δ. Λυμπερόπουλο [3] και εδώ διερευνούμε μία ειδικότερη μορφή του. Τέλος, εξετάζονται ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω αποτελέσματος, η σχέση του με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και ο ρόλος του στη χρηματοοικονομική αποτίμηση των ασφαλίσεων.

Abstract

Some basic properties and some characterizations of stochastic processes with conditionally stationary and conditionally independent increments are studied. Such processes are generalization of stochastic processes with stationary and independent increments, and have interesting applications in Risk Theory, Statistics and Finance. First, the known result that, each mixed Poisson process is a Markov process and has the polynomial property, is presented. This raises the question whether a Markov process is mixed Poisson one. Then the following problem is investigated: "For given compound mixed Poisson process S under a probability measure P, characterize all those probability measures which are progressively equivalent to the probability measure P, and under which the distribution of S remains unchanged." This is solved by D. Lymberopoulos [3] and here we investigate a particular case of this problem. Finally some special cases of the above result, his relationship with the premium calculation principles and its role in the pricing of insurance derivatives are examined.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ/Σ.Δ.	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
κ.δ.π	: Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d	: Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	: Παράβαλε
MPP	: Μεμειγμένη διαδικασία Poisson
CMPP	: Σύνθετη μεμειγμένη σ.δ. Poisson

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετώνται στοχαστικές διαδικασίες (σ.δ.) με υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, που αποτελούν μία ενδιαφέρουσα κλάση σ.δ. και έχουν εφαρμογές στη Θεωρία Κινδύνου και στα Χρηματοοικονομικά. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στις μεμειγμένες σ.δ. Poisson που είναι η βάση για τη μελέτη γενικότερων (μεμειγμένων) σ.δ. με υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Βασικό εργαλείο της μελέτης μας είναι οι disintegrations που καθιστούν ξεκάθαρο το ρόλο της δομικής παραμέτρου σε μία μεμειγμένη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Ενδιαφέρουσα είναι η σχέση των σ.δ. Markov με τις μεμειγμένες σ.δ. Poisson καθώς και εκείνη της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson με τις disintegrations που διερευνάται στο Κεφάλαιο 4. Ως ειδική περίπτωση μίας μεμειγμένης σ.δ. Poisson, μελετάται η σ.δ. Pólya-Lundberg (βλ. Θεώρημα 4.2.9).

Μελετούνται επίσης οι σύνθετες μεμειγμένες διαδικασίες Poisson και ειδικές περιπτώσεις τους, όπως και ένα πρόβλημα χαρακτηρισμού συγκεκριμένων κατανομών πιθανότητας που σχετίζονται με σύνθετες μεμειγμένες σ.δ. Poisson. Η λύση του εν λόγω προβλήματος είναι το κύριο αποτέλεσα της μελέτης μας και αποτελεί μία ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος της [3].

Τέλος δίνονται κάποιες εφαρμογές του παραπάνω αποτελέσματος στα χρηματοοικονομικά.

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής.

Στο Κεφάλαιο 1 παρατίθονται κάποιες βασικές έννοιες και ορισμοί. Στο Κεφάλαιο 2 παραθέτουμε μια επισκόπηση στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου όπου αρχικά παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των σ.δ. άφιξης απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, (βλ. Ενότητες 2.1 και 2.2 αντίστοιχα). Στην Ενότητα 2.3 αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα της σ.δ. Poisson, και ολοκληρώνουμε το 2^o Κεφάλαιο με μια αναφορά στις σύνθετες κατανομές (βλ. Ενότητα 2.4).

Η έννοια των Disintegrations που παρατίθεται στο Κεφάλαιο 3 είναι καθοριστικής σημασίας. Μέσω των ιδιοτήτων τους, προκύπτουν αξιόλογα αποτελέσματα που μας επιτρέπουν την P-υπό συνθήκη ανεξαρτησία να την ανάγουμε σε ανεξαρτησία ως προς τα μέτρα πιθανότητας μίας disintegration.

Στο Κεφάλαιο 4, καθορίζουμε το γενικό μοντέλο που προσδιορίζει τις κατάλληλες υποθέσεις για τη $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων. Σε αυτόν τον προσδιορισμό καίριο ρόλο παίζει η μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson (βλ. Ορισμό 4.1.3) η οποία αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Στη συνέχεια του Κεφαλαίου 4 (Ενότητα 4.2) παραθέτουμε αρχικά το Πολυωνυμικό Κριτήριο, ένα χρήσιμο εργαλείο που μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson. Στη συνέχεια μέσω του Πολυωνυμικού Κριτηρίου αποδεικνύεται το γνωστό θεώρημα ότι κάθε μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson είναι και διαδικασία Markov (βλ Θεώρημα 4.2.3) και τίθεται το ερώτημα, αν και πότε ισχύει το αντίστροφο. Η ενότητα ολοκληρώνεται, παρουσιάζοντας μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση της μεμειγμένης $\sigma.\delta.$ Poisson, την δαδικασία Pólya-Lundberg. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.1, παραθέτουμε ένα χαρακτηρισμό της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson μέσω disintegrations (βλ. Πρόταση 4.3.9) που ανάγει μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P σε διαδικασία Poisson κάτω από (σχεδόν βέβαια) όλα τα μέτρα πιθανότητας μίας disintegration. Ο εν λόγω χαρακτηρισμός έχει αποδειχθεί στο [23], Proposition 4.4.

Στο Κεφάλαιο 5, παραθέτουμε τις Σύνθετες Μεμειγμένες $\sigma.\delta.$ Poisson ξεκινώντας από ένα χαρακτηρισμό τους μέσω disintegrations, που επίσης τις ανάγει σε σύνθετες διαδικασίες Poisson με κατάλληλη αλλαγή του μέτρου όπως στο Κεφάλαιο 4 (βλ. Θεώρημα 5.1.4). Το αποτέλεσμα αυτό είναι το Θεώρημα 6.2.2 της [3].
Πιο συγκεκριμένα, κάτω από δύο ασθενείς συνθήκες για το μέτρο πιθανότητας P, αποδεικνύεται ότι μία $\sigma.\delta.$ συνολικών απαιτήσεων είναι μία σύνθετη μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson κάτω από το μέτρο P αν και μόνο αν είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson κάτω από σχεδόν όλα τα μέτρα πιθανότητας μιας disintegration του P.
Στη συνέχεια κατασκευάζονται δύο στοχαστικές διαδικασίες $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{M_t^{(\beta)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που είναι martingales (βλ. Πρόταση 5.2.7) και αποτελούν βασικά εργαλεία για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος του Κεφαλαίου 5. Ολοκληρώνοντας το 5^o Κεφάλαιο, παραθέτουμε το Θεώρημα 5.3.7 που αποτελεί βασικό αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου αλλά και όλης της διπλωματικής εργασίας.
Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός μέτρου πιθανότητας P και υποθέτοντας ότι η $\sigma.\delta.$ $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P-$σύνθετη μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson, το παραπάνω θεώρημα χαρακτηρίζει όλα τα μέτρα πιθανότητας Q, υπό τα οποία η $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων παραμένει μία σύνθετη μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.2.9 στο [3].

Στο Κεφάλαιο 6 παραθέτουμε αρχικά κάποιες ειδικές περιπτώσεις του κεντρικού αποτελέσματος της διπλωματικής εργασίας (βλ. Ενότητα 6.1). Στη συνέχεια ορίζουμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και εξετάζουμε πότε η πυκνότητα ασφαλίστρου ως προς το αρχικό μέτρο πιθανότητας P είναι μικρότερη από εκείνη ως προς μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου (βλ. Ενότητα 6.2). Στην Ενότητα 6.3. περιγράφουμε το ρόλο του Θεωρήματος 5.3.7 στη χρηματοοικονομική αποτίμηση ασφαλίσεων.

Στο Παράρτημα Α′ περιλαμβάνονται βασικά στοιχεία της Θεώριας Μέτρου που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, ενώ στο Παράρτημα Β′, παρατίθονται βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και Κατανομές Πιθανότητας που αναφέρονται στην παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.
Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του A** (σε σχέση με το Ω) και με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας οικογένειας** $\{A_i\}_{i\in I}(I \neq \emptyset)$ **ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.

Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτηση** του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το δε $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα A, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $A = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **Σύνολα Borel**.

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώ-**

ρος πιθανότητας (χ.π. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y \quad P-$σχεδόν βέβαια ($P - \sigma.\beta.$ για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty -$ συναρτήσεων).

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο. Με π_Ω και π_Υ συμβολίζονται οι **κανονικές προβολές** από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ αντίστοιχα. Αν $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε για σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $f_\omega : \Upsilon \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f_\omega(y) := f(\omega, y)$ ονομάζεται η $\omega-$**τομή** της f. Αντίστοιχα, για σταθερό $y \in \Upsilon$ η $f^y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $f^y(\omega) := f(\omega, y)$ ονομάζετσι η $y-$**τομή** της f.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοθείσης της** $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μ.χ. Μία συνάρτηση $k : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένας $T - \Sigma$-**Μαρκοβιανός πυρήνας** (**Markov kernel**) όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην T για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι $\Sigma-$μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Ένας $T - \Sigma-$**Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**. (βλ. π.χ. [20], Chapter 5, page 83).

Έστω $\Sigma - T-$μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της X επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας $T - \mathcal{F}-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Σαφώς, για κάθε $T - Z-$Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(B, \omega) := (k(B, \bullet) \circ \Theta)(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in T \quad \text{και} \quad \omega \in \Omega$$

είναι ένας $T-\sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο $T-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1, 2\}$, είναι $P|\mathcal{F}-$**ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P|\mathcal{F}-\sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B, \omega) = k_2(B, \omega)$ για κάθε $B \in T$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται P-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} \quad -\sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leq n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $\Sigma - T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in I}$ από το Ω στο Υ είναι:

- P-**υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και

- P-**υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad i, j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και } \mathrm{B} \in \mathrm{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) = \sigma\bigg(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου Τ, $I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, οι σ-(υπο)άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια σ.δ. με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_i} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή** *σ*.**δ.** ή *σ*.**δ. Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | \bigcap_{j=1}^{n} \{X_{t_j} = x_j\}) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_{t_j} = x_j\}) > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j \in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{T_j\}_{j \in I}$ με $T_j = \sigma(\{X_k : k \leq j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j \in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j \in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j \in I}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$-**martingale** αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j \in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k | \Sigma_j] = X_j \quad P|\Sigma_j - \sigma.\beta.$

Τέλος, για την υπόλοιπη εργασία, και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε ένα σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες των $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Τέλος αναφέρονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθούν ορισμοί και λήμματα τόσο για τη στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων αλλά και για τη στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}^*$, η $T_n(\omega) > 0$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σ.δ. άφιξης απαιτήσεων. Με $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ συμβολίζουμε τη σ**.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$,
- $E[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, και τη $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων επαγόμενη από τη σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset \in \Sigma$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$ είναι εμφανές πως η σ.δ. άφιξης, και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.1.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν τα εξής:

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*})$$

Αυτό σημαίνει πως η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} E[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Πόρισμα 2.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} E[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [2], Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7.

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί έχει να κάνει με το αν θα πρέπει την πιθανότητα έκρηξης, να τη λάβουμε ίση με το μηδέν ή όχι. Η απόφαση αυτή αφορά τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Λήμμα 2.1.7. Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$ και

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$.

Στην περίπτωση αυτή, $E[W_n] = 1/\theta$ και $E[T_n] = n/\theta$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$, και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [28], Lemma 1.2.2.

2.2 Η Σ.Δ. Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην προηγούμενη ενότητα συζητήσαμε για τη σ.δ. άφιξης απαιτήσεων καθώς και για τη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων. Στην παρούσα ενότητα θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω, κάνοντας λόγω για τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων**, αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

$(n1)$ $N_0(\omega) = 0$,

$(n2)$ $N_t(\omega) \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0,\infty)$,

$(n3)$ $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

$(n4)$ $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \le N_t(\omega) \le \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

$(n5)$ $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0,t]$,
- Όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Ένα αρχικό αποτέλεσμα του ορισμού, αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα το οποίο ισχυρίζεται πως κάθε σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, παράγει μία σ.δ. αριθμού απαιτήσεων και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $\omega\in\Omega$, θέσουμε

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}(\omega) \tag{2.2}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N=\Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\omega\in\Omega\backslash\Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t\in\mathbb{R}_+ | N_t(\omega)=n\} \tag{2.3}$$

Θεώρημα 2.2.3. Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\omega\in\Omega$, θέσουμε

$$T_n(\omega) := \inf\{t\in\mathbb{R}_+ | N_t(\omega)=n\} \tag{2.4}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T=\Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $\omega\in\Omega\backslash\Omega_N$ ισχύει

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}(\omega) \tag{2.5}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [2], Θεώρημα 3.3.2. και Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου θεωρούμε:

- $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων,
- $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων
- $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων
- και υποθέτουμε πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \emptyset$.

Κάτω από την τελευταία υπόθεση προκύπτουν δύο εξαιρετικά χρήσιμες ισότητες. Σύμφωνα με αυτές, ορισμένα από τα γεγονότα (ενδεχόμενα) που καθορίζονται από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, και αντίστροφα.

Λήμμα 2.2.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:

(a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ και

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\}\setminus\{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. πχ. [2], Λήμμα 3.3.4.

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και η σ.δ. άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5.

$$\sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}})$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνδέσουμε την πιθανότητα έκρηξης με τη σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.6.

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*}\{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right].$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ.[2], Λήμμα 3.3.6.

Πόρισμα 2.2.7. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές, τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με μηδέν.

Απόδειξη. **(a)** Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\{N_t = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\}.$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega \in \{N_t = \infty\} &\iff N_t(\omega) = \infty \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_t(\omega) \geq n \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\}. \end{aligned}$$

Άρα επειδή το $\omega \in \Omega$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι

$$\{N_t = \infty\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\}. \tag{2.6}$$

Αντιστρόφως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\} &\iff \forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_t(\omega) \geq n \\ &\implies \lim_{n \to \infty} N_t(\omega) \geq \lim_{n \to \infty} n \\ &\iff N_t(\omega) \geq \infty \\ &\iff N_t(\omega) = \infty \\ &\iff \omega \in \{N_t = \infty\} \end{aligned}$$

Άρα

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\} \subseteq \{N_t = \infty\}. \tag{2.7}$$

Οπότε από τη σχέση (2.6) και από τη σχέση (2.7), προκύπτει το **(a).**

(b) Για κάθε $t \in (0, \infty)$ θα δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\text{Αν} \quad \mathbb{E}[N_t] < \infty \quad \text{τότε η} \quad P(\{N_t = \infty\}) = 0.$$

Πράγματι, έστω $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ για κάθε $t \in (0, \infty)$. Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι η $P(\{N_t = \infty\}) > 0$. Τότε για κάθε $t \in (0, \infty)$ έχουμε:

$$\infty > \mathbb{E}[N_t] = \int_\Omega N_t dP = \int_{\{N_t = \infty\}} N_t dP + \int_{\{N_t = \infty\}^c} N_t dP \tag{2.8}$$

Έστω επίσης $A := \{N_t = \infty\}$. Τότε $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\}$, σύμφωνα με το βήμα (a). Άρα

$$\begin{aligned} \int_A N_t dP = \int_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{N_t \geq n\}} N_t dP &= \lim_{n \to \infty} \int_{\{N_t \geq n\}} N_t dP \\ &\geq \lim_{n \to \infty} \int_{\{N_t \geq n\}} n dP = \lim_{n \to \infty} n \int_{\{N_t \geq n\}} dP = \lim_{n \to \infty} [nP(\{N_t \geq n\})] \\ &= \lim_{n \to \infty} n \lim_{n \to \infty} P(\{N_t \geq n\}) = \lim_{n \to \infty} nP(A) = \lim_{n \to \infty} nP(\{N_t = \infty\}) = \infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Πορίσματος 2.3.3 του [5], σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.2.3 του [5], αφού η ακολουθία $\langle\{N_t \geq n\}\rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα, η τρίτη από το τέλος ισότητα, είναι συνέπεια της Πρότασης 1.2.3 του [5], ενώ η τελευταία προκύπτει από το γεγονός ότι $P[\{N_t = \infty\}] > 0$.
Άρα αποδείξαμε ότι $\infty > \mathbb{E}[N_t] \overset{(2.8)}{=} \infty + \int_{\{N_t=\infty\}^c} N_t dP = \infty$, άτοπο.
Επομένως η $P[\{N_t = \infty\}] = 0$.

(c) Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $P(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty) = 0$.
Πράγματι, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.6 έχουμε:

$$P[\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty] = P[\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = \infty\}] = \lim_{t\to\infty} P[\{N_t = \infty\}] \overset{(b)}{=} 0,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 1.2.3 του [5], αφού η ακολουθία $\langle\{N_t = \infty\}\rangle_{t\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα. □

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s,t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, διότι μέσω αυτών κατανοούμε παρισσότερο τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s,t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η **προσαύξηση** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s,t]$, ορίζεται από τη σχέση:

  $$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.9}$$

  Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, η $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

- Για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι:

  $$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.10}$$

  που ισχύει ακόμη και όταν $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.3 Η Διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [2], Λήμμα Α΄1.3).

Ορισμός 2.3.2. Μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα (Multinomial Criterion) 2.3.3. Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Για κάθε $t \in (0,\infty)$ η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} | \{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

(b) Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.

Απόδειξη.(a)⟹(b): Έστω ότι ισχύει το **(a)**. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \mid \{N_{t_m} = n\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n\}] \\
&= \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} \cdot e^{-\alpha t_m} \frac{(\alpha t_m)^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} \cdot \prod_{j=1}^m e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} \alpha^{k_j} \cdot \frac{t_m^n}{n!} \\
&= n! \cdot \frac{t_m^n}{n!} \frac{1}{t_m^n} \prod_{j=1}^m e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} \cdot \frac{(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!} \\
&= \prod_{j=1}^m e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} \frac{(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!},
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα, ενώ η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του (a). Άρα:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] = \prod_{j=1}^m e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} \frac{(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}.$$

Ως εκ τούτου το (α) συνεπάγεται το (b).

(b)$\Longrightarrow$(a): Έστω ότι ισχύει το **(b)**. Τότε έχουμε ότι $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$, και καθώς ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] \\
&\quad := \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right]}{P[\{N_{t_m} = n\}]} \\
&\quad = \frac{\prod_{j=1}^{m} P[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}]}{P[\{N_{t_m} = n\}]} = \frac{\prod_{j=1}^{m} e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} \frac{(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}}{e^{-\alpha t_m}\frac{(\alpha t_m)^n}{n!}} \\
&\quad = \frac{n! \prod_{j=1}^{m} e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}}{e^{-\alpha t_m}(\alpha t_m)^n \prod_{j=1}^{m} k_j!} \\
&\quad = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j} \prod_{j=1}^{m} e^{-\alpha(t_j - t_{j-1})} e^{\alpha t_m} \cdot \frac{(\alpha(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{(\alpha t_m)^n} \\
&\quad = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} \cdot \frac{\alpha^{k_j}}{\alpha^n} \cdot e^0 \\
&\quad = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j},
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της σ.δ. $\{N_t\}$. Άρα

$$
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}.
$$

Ως εκ τούτου και το (b) συνεπάγεται το (a). □

Λήμμα 2.3.4. Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$ η $E[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0, \infty)$ η $E[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [28], Lemma 2.2.1.

Θεώρημα 2.3.5. Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.

(iii) Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $E[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [28], Theorem 2.3.4.

2.4 Σύνθετες Κατανομές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της σύνθετης κατανομής (πιθανότητας) για τον υπολογισμό της κατανομής του ύψους των συνολικών απαιτήσεων, σε δοσμένο χρόνο $t \in \mathbb{R}_+$. Αρχικά θα παρουσιάσουμε το υπόδειγμα και στη συνέχεια κάποια γενικά αποτελέσματα σχετικά με την σύνθετη κατανομή Poisson.

2.4.1 Το υπόδειγμα

Για την ανάπτυξη του υποδείγματος αναφέρουμε αρχικά πως σε όλο το κεφάλαιο η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Υποθέτουμε πως η πιθανότητα έκρηξης είναι μηδέν. Επι πλέον, έστω ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια ακολουθία τ.μ. Για $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{και} \quad S_0 := 0.$$

Σημειώνουμε τα εξής:

- X_n είναι το ποσό ή το μέγεθος της n-οστής απαίτησης και
- S_t είναι το συνολικό ποσό των απαιτήσεων ή το ύψος των συνολικών απαιτήσεων, μέχρι τη χρονική στιγμή t.

Κατά συνέπεια η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων και η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η σύνθετη σ.δ. η παραγόμενη από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και τη σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, υποθέτουμε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ισοκατανέμεται και είναι ανεξάρτητη (i.i.d. για συντομία), και ότι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες.

Ένα πρώτο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό της κατανομής του ύψους των απαιτήσεων δίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.4.1. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει

$$P[\{S_t \in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P\left[\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\}\right].$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P[\{S_t \in B\}] &= P\left[\{\sum_{k=1}^{N_t} X_k \in B\}\right] = P\left[\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} \{N_t = n\} \cap \{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P\left[\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\}\right], \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η προσαύξηση της $\sigma.\delta.$ του ύψους των απαιτήσεων δίνεται από τη σχέση:

$$S_t - S_s := \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k.$$

Για $S_0 = 0$, η παραπάνω σχέση συμφωνεί με τον ορισμό ύψους των συνολικών απαιτήσεων. Επιπλέον έχουμε:

$$S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega),$$

ακόμη και όταν η $S_s(\omega)$ είναι άπειρη.

Για τη $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων οι ιδιότητες για την ανεξαρτησία και στασιμότητα των προσαυξήσεων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στη $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων.

Θεώρημα 2.4.2. Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τη $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων,

(ii) αν η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τη $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων.

Για την απόδειξη βλ. [28], Theorem 5.1.2.

Άρα στην περίπτωση που η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι Poisson (με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις) τότε το ίδιο ισχύει και για τη $\sigma.\delta.$ των συνολικών απαιτήσεων. Στη περίπτωση αυτή η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων είναι **σύνθετη σ.δ. Poisson.**

Ακολουθεί ο ορισμός της σύνθετης κατανομής Poiosson.

Ορισμός 2.4.3. Αν η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι i.i.d. και ανεξάρτητη από τη τ.μ. N, τότε η κατανομή της τ.μ. S, έστω P_S, ονομάζεται **σύνθετη κατανομή** και συμβολίζεται με $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ ή με $\mathbf{C}(F_N, F_X)$ σε όρους σ.κ.. Για παράδειγμα αν η P_N είναι μια κατανομή Poisson, τότε η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ λέμε ότι είναι μια **σύνθετη κατανομή Poisson**.

Σημειώνουμε πως η σύνθετες κατανομές λαμβάνουν το όνομά τους από την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ή αλλιώς της **απαριθμήτριας τ.μ.** N.

Ακολουθεί ένα πρώτο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό της κατανομής του τυχαίου αθροίσματος S. Για τον σκοπό αυτό, αρχικά παραθέτουμε τον ορισμό της συνέλιξης κατανομών πιθανότητας.

Ορισμός 2.4.4. Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στο μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B - y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την **n-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης, άμεσα έχουμε ότι:

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Λήμμα 2.4.5. Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει

$$P_S[B] = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(\{n\}) P_X^{*n}(B).$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμεύει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όμως ο υπολογισμός της είναι δύσκολος και απαιτεί χρόνο. Για το λόγο αυτό θα ήταν καλύτερα εάν χρησιμοποιούσαμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του S και τον Τύπο της Αντιστροφής (βλ. π.χ. [32], Theorem (16.6)).

Λήμμα 2.4.6. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi_S(u) = m_N(\varphi_X(u))$.

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $z \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi_S(z) &= \mathbb{E}\left[e^{izS}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iz\sum_{k=1}^{N} X_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} e^{iz\sum_{k=1}^{N} X_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} e^{izX_k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{izX_k}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \mathbb{E}[e^{izX_k}]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}\varphi_X(z)^n \\
&= \mathbb{E}[\varphi_X(z)^N] \\
&= m_N(\varphi_X(z)).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.4.7. Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε $\varphi_S(u) = e^{\alpha[\varphi_X(u)-1]}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό παραθέτοντας τις «Ταυτότητες του Wald», για την πρώτη και δεύτερη ροπή της κατανομής του ύψους των συνολικών απαιτήσεων.

Λήμμα (Ταυτότητες του Wald) 2.4.8. Έστω ότι $\mathbb{E}[N] < \infty$ και $\mathbb{E}[X] < \infty$. Τότε υπάρχει η μέση τιμή και η διακύμανση της τ.μ. S και ικανοποιούνται οι ισότητες:

(i) $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$.

(ii) $Var[S] = \mathbb{E}[N]Var[X] + Var[N]\mathbb{E}[X]^2$.

Κεφάλαιο 3

Disintegrations

Επειδή στον ορισμό των μεμειγμένων σ.δ. Poisson, που είναι τα κύρια αντικείμενα μελέτης στα Κεφάλαια 4 και 5, εμπλέκεται η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας ως προς μία $\sigma-$άλγεβρα, θεωρήσαμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε στο παρόν Κεφάλαιο την έννοια της disintegration με τις βασκές ιδιότητές της. Η έννοια μιας disintegration γενικεύει εκείνη μίας δεσμευμένης πιθανότητας ως προς μία $\sigma-$άλγεβρα και μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τον δομικό ρόλο της παραμέτρου Θ στον ορισμό των μεμειγμένων σ.δ. Poisson (βλ. Ορισμό 4.1.3).

Σε όλο το παρόν κεφάλαιο (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) οποιοιδήποτε σταθεροί χ.π..

3.1 Διάφοροι ορισμοί των disintegrations

Ο παρακάτω ορισμός είναι ειδική περίπτωση του [17], 452E.

Ορισμός 3.1.1. Μια **disintegration του P πάνω στο Q** είναι μια οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ των μέτρων πιθανότητας $P_y : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

($d1$) για κάθε σταθερό $D \in \Sigma$ η συνάρτηση $P_\bullet(D) : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι T-μετρήσιμη,

($d2$) $\int P_y(D)Q(dy) = P(D)$ για κάθε $D \in \Sigma$.

Αν $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μια συνάρτηση ώστε για κάθε $B \in T$ να ισχύει $P(f^{-1}(B)) = Q(B))$, μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P πάνω στο Q ονομάζεται **συνεπής με την f,** αν για κάθε $B \in T$, η ισότητα $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ ισχύει για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B$.

Σχετικά με την ύπαρξη των disintegrations, είναι γνωστό ότι αν (Ω, Σ, P) είναι ένας αριθμήσιμα συμπαγής χώρος πιθανότητας (βλ. [17], $451B$ για τον ορισμό) με αριθμήσιμα παραγόμενη Σ και αν $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μια συνάρτηση με $P \circ f^{-1} = Q$, τότε πάντα υπάρχει μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P πάνω στο Q, συνεπής με την f (βλ. π.χ. [17], $452J(a)$ και $452X(l)$).

Ορισμός 3.1.2. Έστω $\mathcal{F}$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ. Μία συνάρτηση $P_{\mathcal{F}} : \Sigma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι μια **κανονική δεσμευμένη πιθανότητα της Σ δοθείσης της $\mathcal{F}$** αν

($cp1$) για κάθε $A \in \Sigma$ η ισότητα $P_{\mathcal{F}}(A, \bullet) = \mathbb{E}_P[\chi_A|\mathcal{F}](\bullet)$ ισχύει $P|\mathcal{F} - \sigma$.β., όπου $P_{\mathcal{F}}(A, \bullet)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση,

($cp2$) για κάθε $\omega \in \Omega$ η συνολοσυνάρτηση $P_{\mathcal{F}}(\bullet, \omega) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια πιθανότητα.

Είναι γνωστό ότι για έναν τέλειο χ.π. (Ω, Σ, P) (βλ. π.χ. [26] για τις ιδιότητες των τέλειων χ.π., των κανονικών δεσμευμένων πιθανοτήτων, των disintegrations καθώς και τις σχέσεις μεταξύ αυτών), αν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και αν η $\mathcal{F}$ είναι μια σ-υποάλγεβρα της Σ, τότε υπάρχει πάντα μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα $P_{\mathcal{F}}$ της Σ δοθείσης της $\mathcal{F}$, έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$ το μέτρο $P_{\mathcal{F}}(\bullet, \omega)$ να είναι τέλειο (βλ. [26], Theorem 4.2.1).

Ιδιαιτέρως, αν $\Upsilon = \Omega$, $T \subseteq \Sigma$, $Q = P|T$, και αν P_T είναι μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα της Σ δοθείσης της T, τότε θέτοντας $P_y(A) := P_T(A, y)$ για κάθε $y \in \Upsilon$ και $A \in \Sigma$, λαμβάνουμε ότι $P_y(A) = \mathbb{E}_P[\chi_A|T](y)$ για Q-σχεδόν όλα τα $y \in \Upsilon$ και για όλα τα $A \in \Sigma$, επομένως ότι $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q.

Ορισμός 3.1.3. Έστω M μια πιθανότητα επάνω στη σ-άλγεβρα $\Sigma \otimes T$ τέτοια ώστε P και Q να είναι οι περιθώριες πιθανότητες της M (δηλαδή $M(A \times \Upsilon) = P(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$ και $M(\Omega \times B) = Q(B)$ για κάθε $B \in T$ ή ισοδύναμα $M \circ \pi_\Omega^{-1} = P$ και $M \circ \pi_\Upsilon^{-1} = Q$, όπου $\pi_\Omega : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \Omega$ και $\pi_\Upsilon : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \Upsilon$ είναι οι κανονικές προβολές). Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $y \in \Upsilon$ υπάρχει μια πιθανότητα P_y επάνω στην Σ, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

($D1$) για κάθε σταθερό $A \in \Sigma$ η απεικόνιση $y \longrightarrow P_y(A)$ είναι T-μετρήσιμη,

($D2$) $M(A \times B) = \int_B P_y(A) Q(dy)$ για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$.

Τότε, η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ονομάζεται μία **κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο επάνω στη Σ για την M ως προς Q** (βλ. π.χ. Definition 1.1 των [31]).

Είναι γνωστό, ότι αν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το P είναι τέλειο μέτρο πιθανότητας, τότε υπάρχει πάντα μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο (βλ. [15], Theorem 6). Για τις παρακάτω παρατηρήσεις (βλ. [3], Παρατηρήσεις 2.2.3) παραθέτουμε αναλυτικότερες αποδείξεις από εκείνες της [3].

Παρατηρήσεις 3.1.4. **(a)** Υποθέτουμε ότι η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί τη συνθήκη $(D1)$, και ότι M είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma\otimes T$ τέτοιο ώστε P και Q να είναι τα περιθώρια μέτρα πιθανότητας. Έστω g μια M-ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\Upsilon_g := \Upsilon \setminus M_g$ με

$$M_g := \{y\in\Upsilon : \int (g^+)^y dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad \int (g^-)^y dP_y = \infty\}.$$

Τότε η συνάρτηση $h : \Upsilon_g \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$h(y) := h_g(y) = \int g^y dP_y \quad \text{για κάθε} \quad y\in\Upsilon_g,$$

είναι $T\cap\Upsilon_g$-μετρήσιμη, όπου $T\cap\Upsilon_g$ η σ-άλγεβρα-ίχνος της T στο Υ_g.

• Πράγματι, έστω $\mathcal{M} := \{E\in\Sigma\otimes T : h_{\chi_E} \quad T\cap\Upsilon_{\chi_E} - \text{μετρήσιμη}\}$. Άρα για κάθε $A\times B\in\Sigma\times T$ ισχύει $h_{\chi_{A\times B}}(y) = \int(\chi_{A\times B})^y dP_y = \int \chi_{(A\times B)^y} dP_y = \int_B \chi_A dP_y = P_y(A)\chi_B$. Οπότε η $h_{\chi_{A\times B}}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_{A\times B}}-$μετρήσιμη αφού η $P_\bullet : \Upsilon_{\chi_{A\times B}} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_{A\times B}}-$μετρήσιμη, και η $\chi_B : \Upsilon_{\chi_{A\times B}} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_{A\times B}}-$μετρήσιμη. Άρα $A\times B\in\mathcal{M}$. Επομένως $\Sigma\times T\subseteq\mathcal{M}$.

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το $\mathcal{M}$ είναι μια κλάση Dynkin.

$(Dyn1)$ $\emptyset\in\mathcal{M}$ διότι $h_{\chi_\emptyset}(y) = \int(\chi_\emptyset)^y dPy = \int 0 dPy = 0$ για κάθε $y\in\Upsilon_{\chi_\emptyset}$.
Άρα η $h_{\chi_\emptyset}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_\emptyset}-$μετρήσιμη.

$(Dyn2)$ Για κάθε $E\in\mathcal{M}$ ισχύει $E^c\in\mathcal{M}$
Πράγματι, $E\in\mathcal{M}\Rightarrow h_{\chi_E} \quad T\cap\Upsilon_{\chi_E}-$ μετρήσιμη

$$\begin{aligned} h_{\chi_{E^c}}(y) &= \int(\chi_{E^c})^y dPy = \int(\chi_{E^c})^y(\omega)P_y(d\omega)\\ &= \int \chi_{E^c}(\omega,y)P_y(d\omega) = \int[1-\chi_E(\omega,y)]P_y(d\omega)\\ &= \int P_y(d\omega) - \int \chi_E(\omega,y)P_y(d\omega) = 1 - h_{\chi_E}(y). \end{aligned}$$

Άρα $h_{\chi_{E^c}} = 1 - h_{\chi_E} \Rightarrow h_{\chi_{E^c}}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_E}-$μετρήσιμη.

$(Dyn3)$ Έστω $\langle E_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανά δύο ξένων στοιχείων της $\mathcal{M}$.
Τότε $h_{\chi_{E_n}}$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_{E_n}}$-μετρήσιμη για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $h_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n}}(y)$ είναι $T\cap\Upsilon_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n}}-$μετρήσιμη για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned} h_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n}}(y) &= \int(\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n})^y dP_y = \int \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n}(\omega,y)P_y(d\omega)\\ &= \int\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}(\omega,y)P_y(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int(\chi_{E_n})^y dP_y = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_{\chi_{E_n}}(y), \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την εξής σχέση

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(\omega,y) = \delta_{(\omega,y)}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{(\omega,y)}(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{E_n}(\omega,y),$$

για κάθε $(\omega,y) \in \Omega \times \Upsilon_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}}$.

Στη συγκεκριμένη σχέση η πρώτη και τελευταία ισότητα, προκύπτουν από το γεγονός ότι

$$\chi_A(\omega) = \delta_\omega(A) \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

Άρα $h_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_{\chi_{E_n}}(y)$ για κάθε $y \in \Upsilon_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}}$. Οπότε $h_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}}$ είναι $T \cap \Upsilon_{\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}}$−μετρήσιμη.

Αλλά επειδή η $\Sigma \times T$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. Θεώρημα Μονότονης Κλάσης Α′.2.4) ώστε να λάβουμε $\Sigma \otimes T \subseteq \mathcal{M}$.

Πράγματι,

$$\Sigma \otimes T = \sigma(\Sigma \times T) \quad \text{και} \quad \Sigma \times T := \{A \times B : A \in \Sigma, B \in T\}$$

Το $\Sigma \times T$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, διότι για κάθε $A_1 \times B_1 \in \Sigma \times T$ και $A_2 \times B_2 \in \Sigma \times T$, ισχύει

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \times B_2).$$

Όμως $A_1 \cap A_2 \in \Sigma$ και $B_1 \times B_2 \in T$. Άρα $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \in \Sigma \times T$. Επομένως, $\Sigma \times T \subseteq \mathcal{M}$ και άρα θα έχουμε $\Sigma \otimes T \subseteq \mathcal{M}$. Όμως από τον ορισμό έχουμε ότι $\mathcal{M} \subseteq \Sigma \otimes T$, επομένως προκύπτει $\mathcal{M} = \Sigma \otimes T$. Άρα για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$, η συνάρτηση h_{χ_E} ικανοποιεί την (a) για $\Upsilon_{\chi_E} = \Upsilon$. Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

$$\begin{aligned} M_{\chi_E} &= \{y \in \Upsilon : \int \left((\chi_E)^+\right)^y dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad \int \left((\chi_E)^-\right)^y dP_y = \infty\} \\ &= \{y \in \Upsilon : \int (\chi_E)^y dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad \int 0 dP_y = \infty\} \\ &= \{y \in \Upsilon : \int \chi_{E^y} dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad 0 = \infty\} = \{y \in \Upsilon : \int_{E^y} dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad 0 = \infty\} \\ &= \{y \in \Upsilon : P_y(E^y) = \infty \quad \text{ή} \quad 0 = \infty\} = \emptyset \Rightarrow \Upsilon_{\chi_E} = \Upsilon \backslash \emptyset = \Upsilon. \end{aligned}$$

• Έτσι, προκύπτει ότι κάθε απλή $\Sigma \otimes T$-μετρήσιμη μή αρνητική συνάρτηση g στο $\Omega \times \Upsilon$, ικανοποιεί την (a) για $\Upsilon_g = \Upsilon$.

Πράγματι, αν η g είναι όπως παραπάνω, τότε $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ όπου $\alpha_k \geq 0$ και $E_k \in \Sigma \otimes T$

για κάθε $k = 1, \dots, n$. Θα δείξω ότι η h_g είναι T-μετρήσιμη.
Πράγματι,

$$g(\omega, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(\omega, y) \quad \alpha_k \geq 0, E_k \in \Sigma \otimes T \quad \text{για κάθε} \quad k = 1, \dots, n.$$

Άρα

$$\begin{aligned} h_g(y) = h_{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(y)} &= \int g^y dP_y = \int \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} \right)^y dP_y \\ &= \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\chi_{E_k})^y dP_y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int (\chi_{E_k})^y dP_y \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_{\chi_{E_k}} \right)(y) \quad \text{για κάθε} \quad y \in \Upsilon. \end{aligned}$$

Άρα $h_g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_{\chi_{E_k}}$ και επειδή για κάθε $k = 1, \dots, n$ η $h_{\chi_{E_k}}$ είναι T-μετρήσιμη, έπεται ότι και η h_g είναι T-μετρήσιμη.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε πως στις δύο παραπάνω περιπτώσεις αναφέρουμε ότι οι συναρτήσεις είναι T-μετρήσιμες αντί για $T \cap \Upsilon_g$−μετρήσιμες, διότι

$$T \cap \Upsilon_g \overset{(\Upsilon_g = \Upsilon)}{=} T \cap \Upsilon = \{B \cap \Upsilon : B \in T\} = \{B : B \in T\} = T.$$

• Για μια μή αρνητική $\Sigma \otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση g, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ απλών $\Sigma \otimes T$-μετρήσιμων συναρτήσεων $g_n \geq 0$ στο $\Omega \times \Upsilon$, τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\omega, y) = g(\omega, y) \quad \text{για κάθε} \quad (\omega, y) \in \Omega \times \Upsilon.$$

Έτσι $\lim_{n \to \infty} g_n^y(\omega) = g^y(\omega)$ και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης λαμβάνουμε το εξής:

$$\int g^y(\omega) P_y(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int g_n^y(\omega) P_y(d\omega) \Longleftrightarrow h_g(y) = \lim_{n \to \infty} h_{g_n}(y).$$

Επειδή οι $h_{g_n} : \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι $T - \overline{\mathfrak{B}}$−μετρήσιμες, θα έχουμε ότι η $h_0 := h_{0,g} : \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ που ορίζεται από την $h_0(y) := \int g^y dP_y$ για κάθε $y \in \Upsilon$, είναι $T - \overline{\mathfrak{B}}$−μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων συναρτήσεων. Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι $\Upsilon_g = \Upsilon \setminus h_0^{-1}(\{\infty\}) \in T$ και ότι η συνάρτηση $h = h_0 | \Upsilon_g$ είναι $T \cap \Upsilon_g$-μετρήσιμη. Οπότε με αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει πως οι προϋποθέσεις του (a) ικανοποιούνται για όλες τις μή αρνητικά μετρήσιμες συναρτήσεις.

• Για μια οποιαδήποτε $\Sigma \otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση g ισχύει $g = g^+ - g^-$. Λόγω της $T - \overline{\mathfrak{B}}$-μετρησιμότητας των συναρτήσεων h_{0,g^+} και h_{0,g^-}, λαμβάνουμε τη σχέση $M_g = h_{0,g^+}^{-1}(\{\infty\}) \cup h_{0,g^-}^{-1}(\{\infty\}) \in T$ συνεπώς ότι $\Upsilon_g \in T$ και ότι η συνάρτηση $h : \Upsilon_g \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$h(y) = \int (g^+)^y dP_y - \int (g^{-1})^y dP_y$ για κάθε $y \in \Upsilon_g$, είναι $T \cap \Upsilon_g$-μετρήσιμη. Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του (a).

(b) Αν $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο επάνω στη Σ για το M ως προς το Q, τότε $M(E) = \int P_y(E^y)Q(dy)$ για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$.

Πράγματι, θέτοντας $\mathcal{D} := \{D \in \Sigma \otimes T : M(D) = \int P_y(D^y)Q(dy)\}$ θα αποδείξουμε αρχικά ότι η $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin.

$(Dyn1)$ $\emptyset \in \mathcal{D}$ διότι $0 = M(\emptyset) = \int P_y(\emptyset^y)Q(dy)$ αφού $P_y(\emptyset^y) = P_y(\emptyset) = 0$,

$(Dyn2)$ Έστω $E \in \mathcal{D}$. Τότε $M(E) = \int P_y(E^y)Q(dy)$. Άρα

$$\begin{aligned} M(E^c) &= 1 - M(E) = 1 - \int P_y(E^y)Q(dy) \\ &= \int (1 - P_y(E^y))Q(dy) = \int P_y([E^y]^c)Q(dy) \\ &= \int P_y([E^c]^y)Q(dy), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$[E^y]^c = [E^c]^y, \quad \text{για κάθε} \quad E \subseteq \Omega \times \Upsilon.$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\omega \in [E^y]^c \iff \omega \notin E^y \iff (\omega, y) \notin E \iff (\omega, y) \in E^c \iff \omega \in [E^c]^y.$$

Άρα $M(E^c) = \int P_y([E^y]^c)Q(dy) \iff E^c \in \mathcal{D}$,

$(Dyn3)$ Έστω $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανά δύο ξένων στοιχείων της $\mathcal{D}$.
Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$M(E_n) = \int P_y(E_n^y)Q(dy). \tag{3.1}$$

Πρέπει να δείξω ότι

$$M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \int P_y\left([\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n]^y\right) Q(dy).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} M(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int P_y(E_n^y)Q(dy) = \int \sum_{n=0}^{\infty} P_y(E_n^y)Q(dy) \\ &= \int P_y\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^y Q(dy)\right) = \int P_y\left([\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n]^y\right) Q(dy), \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη σχέση (3.1), η τρίτη από το Πόρισμα 2.3.2 Bepo Levi του [5], η τέταρτη λόγω του ότι το P_y είναι μέτρο πιθανότητας και τέλος η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ακόλουθη σχέση, την οποία αποδεικνύουμε

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^y = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n]^y.$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^y &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \omega \in E_{n_0}^y \\
&\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad (\omega, y) \in E_{n_0} \\
&\iff (\omega, y) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \\
&\iff \omega \in [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n]^y.
\end{aligned}$$

Άρα $M(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \int P_y([\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n]^y)Q(dy) \Longleftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}$.

Σημειώνουμε επίσης πως η $\mathcal{D}$ περιλαμβάνει το $\Sigma\times T$ το οποίο είναι κλειστό υπό πεπερασμένες τομές, άρα από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης συνεπάγεται ότι η $\mathcal{D}$ περιέχει το $\Sigma \otimes T$. Πράγματι, για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ ισχύει

$$M(A \times B) \overset{(D2)}{=} \int_B P_y(A)Q(dy) = \int \chi_B(y)P_y(A)Q(dy) = \int P_y([A \times B]^y)Q(dy),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σχέση $P_y([A \times B]^y) = \chi_B(y)P_y(A)$ την οποία θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

Επομένως $\mathcal{D} = \Sigma \otimes T$. Άρα ισχύει το (b).

• Στο σημείο αυτό θα δείξουμε ότι ισχύει

$$P_y([A \times B]^y) = \chi_B(y)P_y(A)$$

Πράγματι,

$$P_y([A \times B]^y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \notin B \\ P_y(A) & \text{αν } y \in B \end{cases}$$

Άρα, αν $y \notin B$ τότε $P_y([A \times B]^y) = 0 = \chi_B(y)P_y(A)$, ενώ αν $y \in B$ τότε $P_y([A \times B]^y) = P_y(A) = \chi_B(y)P_y(A)$. Άρα ισχύει $P_y([A \times B]^y) = \chi_B(y)P_y(A)$.

(c) Έστω ότι υπάρχει μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ επάνω στη Σ, για το M ως προς το Q. Τότε το ολοκλήρωμα:

$$\int\int g^y dP_y Q(dy),$$

ορίζεται στο $\overline{\mathbb{R}}$ (δηλαδή $\int\int g^y dP_yQ(dy) \in \overline{\mathbb{R}}$) και είναι ίσο με $\int gdM$ για κάθε συνάρτηση $g : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα $\int gdM$ να ορίζεται στο $\overline{\mathbb{R}}$. Αυτό είναι μια συνέπεια του (b) .

Πράγματι,

$(c1)$ Έστω $g = \chi_E \quad E \in \Sigma \otimes T$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \int gdM &= \int \chi_E dM = \int_E dM = M(E) \overset{(b)}{=} \int P_y(E^y)Q(dy) \\
&= \int \int_{E^y} dP_yQ(dy) = \int \int \chi_{E^y} dP_yQ(dy) \\
&= \int \int (\chi_E)^y dP_yQ(dy) = \int \int g^y dP_yQ(dy).
\end{aligned}$$

$(c2)$ Έστω $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$, $\alpha_k \geq 0$, $E_k \in \Sigma \otimes T$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \int gdM &= \int \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k} dM = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \chi_{E_k} dM \\
&\overset{(c1)}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \int (\chi_{E_k})^y dP_yQ(dy) = \int \int \sum_{k=1}^n \alpha_k (\chi_{E_k})^y dP_yQ(dy) \\
&= \int \int \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k} \right)^y dP_yQ(dy) = \int \int g^y dP_yQ(dy).
\end{aligned}$$

$(c3)$ Έστω $g : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \quad \Sigma \otimes T-$μετρήσιμη μή αρνητική συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\langle g \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ απλών μή αρνητικών συναρτήσεων $g_n : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R}$ ώστε $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Τότε $\int gdM \in \overline{\mathbb{R}}$ και

$$\begin{aligned}
\int gdM &= \int \lim_{n\to\infty} g_n dM = \lim_{n\to\infty} \int g_n dM \overset{(c2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \int g_n^y dP_yQ(dy) \\
&= \int \int \lim_{n\to\infty} g_n^y dP_yQ(dy) = \int \int (\lim_{n\to\infty} g_n)^y dP_yQ(dy) \\
&= \int \int g^y dP_yQ(dy).
\end{aligned}$$

$(c4)$ Έστω $g : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε $\Sigma \otimes T-$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\int gdM \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int gdM &= \int (g^+ - g^-)dM = \int g^+ dM - \int g^- dM \\
&\overset{(c3)}{=} \int \int (g^+)^y dP_yQ(dy) - \int \int (g^-)^y dP_yQ(dy) \\
&= \int \int (g^+ - g^-)^y dP_yQ(dy) = \int \int g^y dP_yQ(dy).
\end{aligned}$$

(d) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ επάνω στη Σ για το M ως προς το Q. Έστω επίσης g μια συνάρτηση στο $\mathcal{L}^1(M)$ και h, Υ_g όπως στο (a) . Τότε η συνάρτηση h είναι $T\cap\Upsilon_g$-μετρήσιμη, $Q(\Upsilon_g) = 1$, το ολοκλήρωμα $\int\int g^y dP_y Q(dy)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\int g dM = \int\int g^y dP_y Q(dy).$$

Ιδαιτέρως, αν g είναι οποιαδήποτε φραγμένη $\Sigma\otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση στο $\Omega\times\Upsilon$, τότε έχουμε επιπλέον ότι $\Upsilon_g = \Upsilon$.

Πράγματι, από το (a) προκύπτει ότι $\Upsilon_g\in T$ καθώς και ότι η h είναι $T\cap\Upsilon_g$-μετρήσιμη, ενώ το υπόλοιπο των απαιτήσων είναι συνέπεια του (c) και του γεγονότος ότι η g είναι M-ολοκληρώσιμη. Ιδιαιτέρως αν η g είναι φραγμένη, τότε εύκολα λαμβάνουμε ότι το σύνολο M_g του (a) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Upsilon = \Upsilon_g$. Συνεπώς, στην ειδική αυτή περίπτωση λαμβάνουμε το Lemma 3.1 του [31].

Ιδιαιτέρως, έστω g φραγμένη συνάρτηση και $g\in\mathcal{L}^1(M)$. Τότε υπάρχει $L\geq 0$ ώστε $|g(\omega,y)|\leq L$ για κάθε $(\omega,y)\in\Omega\times\Upsilon$ και

$$M_g = \{y\in\Upsilon : \int (g^+)^y dP_y = \infty \quad \text{ή} \quad \int (g^-)^y dP_y = \infty\}.$$

Όμως από τη $|g(\omega,y)|\leq L$για κάθε $(\omega,y)\in\Omega\times\Upsilon$ προκύπτει ότι $g^+(\omega,y)+g^-(\omega,y)\leq L$ για κάθε (ω,y). Οπότε για κάθε $(\omega,y)\in\Omega\times\Upsilon$ ισχύει

$$g^+(\omega,y), g^-(\omega,y)\leq L \Longleftrightarrow (g^+)^y(\omega), (g^-)^y(\omega)\leq L,$$

επομένως για κάθε $y\in\Upsilon$ ισχύει

$$\int (g^+)^y dP_y \leq \int L dP_y = L \quad \text{και} \quad \int (g^-)^y dP_y \leq \int L dP_y = L.$$

Άρα $M_g = \emptyset \Longrightarrow \Upsilon = \Upsilon_g$.

3.2 Δεσμευμένες μέσες τιμές και disintegrations

Τα δύο ακόλουθα Λήμματα καθώς και η Πρόταση 3.2.4 που ακολουθεί, μας δίνουν τη σχέση ανάμεσα στις δεσμευμένες μέσες τιμές και τις disintegrations.

Μέρος του παρακάτω Λήμματος υπάρχει στην [3], Λήμμα 2.3.1 και Λήμμα 2.3.2. Εδώ παραθέτουμε αναλυτικότερη απόδειξη.

Λήμμα 3.2.1. Έστω $f:\Omega\longrightarrow\Upsilon$ μια συνάρτηση με $P\circ f^{-1} = Q$. Έστω $\sigma(f) := \{f^{-1}(D) : D\in T\}$ και έστω ότι υπάρχει μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q συνεπής με την f. Τότε για κάθε $g\in\mathcal{L}^1(P)$, ισχύει:

(i) $\mathbb{E}_P[g|\sigma(f)] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[g] \circ f \quad P|\sigma(f) - \sigma.\beta.$

(ii) $\int_B P_y(A)Q(dy) = \int_{f^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_A|\sigma(f)]dP = P(A \cap f^{-1}(B))$, για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$.

Απόδειξη. **(a)** Θέτουμε $N_g := \{y \in \Upsilon : \int g^+ dP_y = \infty \quad \acute{\eta} \quad \int g^- dP_y = \infty\}$. Τότε $N_g \in T_0$ και η συνάρτηση $h_1 := h_{1,g} : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω της:

$$h_1(y) = \begin{cases} \int g dP_y & \text{για } y \notin N_g \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

είναι T-μετρήσιμη.

(a1) Το (a) ισχύει για $g = \chi_A \in \mathcal{L}^1(P)$, όπου $A \in \Sigma$. Επί πλέον $N_g = \emptyset$.
Πράγματι,

$$g = \chi_A \Longrightarrow g^+ := max\{g, 0\} = g \quad \text{και} \quad g^- := max\{-g, 0\} = 0.$$

Οπότε

$$\int g^+ dP_y = \int g dP_y = \int \chi_A dP_y = P_y(A) \leq 1 \Longrightarrow \nexists \quad y \in \Upsilon : \int g^+ dP_y = \infty,$$

και

$$\int g^- dP_y = \int 0 dP_y = 0 < \infty \Longrightarrow \nexists \quad y \in \Upsilon : \int g^- dP_y = \infty.$$

Επομένως $N_g = \emptyset \in T_0$.
Τώρα θα δείξω ότι η h_1 είναι T-μετρήσιμη.
Πράγματι, αφού $N_g = \emptyset$, για κάθε $y \in \Upsilon$ ισχύει $h_1(y) = \int g dP_y = \int \chi_A dP_y = P_y(A) \overset{(d1)}{\Longrightarrow}$ $P_\bullet(A) : \Upsilon \to \mathbb{R}$ είναι T-μετρήσιμη. Άρα η h_1 είναι T-μετρήσιμη. Επομένως ισχύει το (a1).

(a2) Έστω $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μια απλή μη αρνητική συνάρτηση. Τότε ισχύει το (a) και $N_g = \emptyset$.
Πράγματι, έστω $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ όπου $\alpha_k \geq 0$ και $A_k \in \Sigma$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε $g^+ = g$ και $g^- = 0$. Άρα

$$\begin{aligned} \int g^+ dP_y &= \int g dP_y = \int \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} dP_y = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \chi_{A_k} dP_y \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k P_y(A_k) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k < \infty, \end{aligned}$$

και

$$\int g^- dP_y = 0 < \infty.$$

Επομένως, $\nexists \quad y \in \Upsilon$ ώστε $\int g^+ dP_y = \infty$ ή $\int g^- dP_y = \infty$. Άρα $N_g = \emptyset$ και η h_1 ορίζεται επάνω σε ολόκληρο το Υ.

Επί πλέον για κάθε $y \in \Upsilon$ ισχύει

$$h_1(y) = \int g dP_y = \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k} dP_y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int \chi_{A_k} dP_y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_y(A_k)$$

και αφού η $P_\bullet(A_k)$ είναι T-μετρήσιμη, λόγω της $(d1)$, θα έχουμε ότι η h_1 είναι T-μετρήσιμη. Επομένως ισχύει το (a) για $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$.

(a3) Το (a) ισχύει για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1(P)$.

Για μια μή αρνητική συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1(P)$, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ Σ-μετρήσιμων μή αρνητικών απλών συναρτήσεων g_n στο Ω τέτοια ώστε:

$$g(\omega) = \lim_{n \to \infty} g_n(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad \omega \in \Omega,$$

άρα για κάθε $y \in \Upsilon$ έχουμε:

$$\int g dP_y = \lim_{n \to \infty} \int g_n dP_y.$$

Ως συνέπεια αυτού, λαμβάνουμε ότι η συνάρτηση $y \longrightarrow \int g dP_y$ είναι $T - \overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη, ως εκ τούτου $N_g \in T$. Αλλά η P-ολοκληρωσιμότητα της g μαζί με την Proposition 452F του [17], συνεπάγεται $\infty > \int g dP = \int \int g dP_y Q(dy)$. Οπότε $N_g \in T_0$, και η h_1 είναι μια T-μετρήσιμη συνάρτηση στο Ω.

Στο προηγούμενο βήμα αποδείχθηκε ότι η $h_{1,n} : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto h_{1,n}(y) := \int g_n dP_y$ είναι T-μετρήσιμη και $N_{g_n} = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\widetilde{h}_1 : \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : y \longrightarrow \widetilde{h}_1(y) := \lim_{n \to \infty} h_{1,n}(y)$. Τότε η $\widetilde{h}_1$ είναι $T - \overline{\mathfrak{B}}-$ μετρήσιμη, ως όριο μετρησίμων συναρτήσεων. Επίσης, αφού η g είναι μη αρνητική, προκύπτει ότι

$$g^+ = g \quad \text{και} \quad g^- = 0 \Longrightarrow \nexists \quad y \in \Upsilon \quad \text{ώστε} \quad \int g^- dP_y = \infty.$$

Συνεπώς

$$N_g = \{y \in \Upsilon : \int g^+ dP_y = \infty\} \tag{3.2}$$

Αφού $\widetilde{h}_1$ είναι $T - \overline{\mathfrak{B}}-$ μετρήσιμη και $\{\infty\} \in \overline{\mathfrak{B}}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}(\widetilde{h}_1)^{-1}(\{\infty\}) &= \{y \in \Upsilon : \widetilde{h}_1(y) = \infty\} = \{y \in \Upsilon : \int g dP_y = \infty\} \\ &= \{y \in \Upsilon : \int g^+ dP_y = \infty\} \overset{(3.2)}{=} N_g \in T.\end{aligned}$$

Επομένως, $N_g \in T$.

Η h_1 είναι T-μετρήσιμη.
Πράγματι, καταρχήν έχουμε ότι

$$h_1(y) = \begin{cases} \widetilde{h}_1(y) & \text{αν } y \notin N_g \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$h_1^{-1}(B) = (h_1^{-1}(B) \cap N_g) \cup (h_1^{-1}(B) \cap N_g^c) = (h_1^{-1}(B) \cap N_g) \cup ((\widetilde{h}_1)^{-1}(B) \cap N_g^c) \quad (3.3)$$

και

$$h_1^{-1}(B) \cap N_g = \{y \in \Upsilon : h_1(y) \in B \quad \& \quad y \in N_g\} = \{y \in \Upsilon : 0 \in B \cap y \in N_g\}$$

Οπότε στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(*i*) Αν $0 \in B$ τότε $h_1^{-1}(B) \cap N_g = \{y \in \Upsilon : y \in N_g\} = N_g$. Άρα $h_1^{-1}(B) \overset{(3.3)}{=} N_g \cup ((\widetilde{h}_1)^{-1}(B) \cap N_g^c) \in T$.

(*ii*) Αν $0 \notin B$ τότε $h_1^{-1}(B) \cap N_g = \emptyset \Longrightarrow h_1^{-1}(B) \overset{(3.3)}{=} \emptyset \cup ((\widetilde{h}_1)^{-1}(B) \cap N_g^c) \in T$.

Άρα η h_1 είναι T-μετρήσιμη.

Θα δείξω τώρα ότι $N_g \in T_0$, δηλαδή $Q(N_g) = 0$.
Πράγματι, αφού η $g \in \mathcal{L}^1(P)$ έπεται ότι

$$\int g dP < \infty. \quad (3.4)$$

Όμως

$$\int g dP = \int \int g dP_y Q(dy) \quad (3.5)$$

(βλ. π.χ. [17], Proposition 452F).
Έχουμε $N_g = \{y \in \Upsilon : \int g dP_y = \infty\}$. Έστω

$$Q(N_g) > 0 \quad (3.6)$$

Τότε

$$\begin{aligned} \int g dP &\overset{(3.5)}{=} \int \left[\int g dP_y\right] Q(dy) = \int_{N_g} \left[\int g dP_y\right] Q(dy) + \int_{N_g^c} \left[\int g dP_y\right] Q(dy) \\ &= \int_{N_g} \infty Q(dy) + \int_{N_g^c} \left[\int g dP_y\right] Q(dy) = \infty, \end{aligned}$$

άτοπο λόγω της (3.4). Άρα δεν ισχύει η σχέση (3.6), δηλαδή ισχύει ότι $Q(N_g) = 0$ ισοδύναμα $N_g \in T_0$.

(a4) Το (a) ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1(P)$.
Πράγματι, για οποιαδήποτε $g \in \mathcal{L}^1(P)$ έχουμε $g = g^+ - g^-$ και $\int g dP = \int g^+ dP - \int g^- dP \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $\int g^+ dP < \infty$ και $\int g^- dP < \infty$ ή ισοδύναμα

$$\int \left[\int g^+ dP_y \right] Q(dy) < \infty \quad \text{και} \quad \int \left[\int g^- dP_y \right] Q(dy) < \infty \tag{3.7}$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με το (a3) οι συναρτήσεις h_{1,g^+} και h_{1,g^-} είναι T-μετρήσιμες και $N_{g^+}, N_{g^-} \in T_0$. Επομένως, από την (3.7) έπεται ότι $\int g^+ dP_y < \infty$ και $\int g^- dP_y < \infty$ για κάθε $y \notin N_{g^+} \cup N_{g^-}$. Συνεπώς η $h_{1,g}$ είναι T-μετρήσιμη ως διαφορά T-μετρήσιμων συναρτήσεων ($h_{1,g} = h_{1,g^+} - h_{1,g^-}$) και $N_g \in T_0$ αφού $N_{g^+}, N_{g^-} \in T_0$ και $N_g = N_{g^+} \cup N_{g^-}$. Με τον τρόπο αυτό αποδείχθηκε το (a).

(b) Η συνάρτηση $h := h_1 \circ f$ είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της g δοθείσης της $\sigma(f)$.

Πράγματι, η $\sigma(f)$-μετρησιμότητα της h προκύπτει άμεσα από το (a). Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το ίδιο σκεπτικό όπως και στο [17], απόδειξη της Proposition 452Q για να δούμε ότι ισχύει το (b)

(i) Για κάθε $A \in \sigma(f)$ ισχύει $\int_A \mathbb{E}[g|\sigma(f)] dP = \int_A h dP$.
Πράγματι, για κάθε $A \in \sigma(f)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_A \mathbb{E}_P[g|\sigma(f)]dP &\overset{(b)}{=} \int_A h dP = \int_A h_1(f(\omega))P(d\omega) = \int_A \left[\int g(f(\omega)) dP_{f(\omega)} \right] P(d\omega) \\ &= \int_A \left(\left[\int g dP_\bullet \right] \circ f \right) P(d\omega) = \int_A (\mathbb{E}_{P_\bullet}[g] \circ f) dP.\end{aligned}$$

Επομένως, $\mathbb{E}_P[g|\sigma(f)]dP = \mathbb{E}_{P_\bullet}[g] \circ f \quad P|\sigma(f) - \sigma.\beta.$

Ο ισχυρισμός (i) γίνεται πλέον σαφής από το (b), ενώ ο (ii) έπεται από το (i) για $g = \chi_A \in \mathcal{L}^1(P)$.

(ii) Έστω $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Τότε
$\int_B P_y(A) Q(dy) = \int_{f^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_A|\sigma(f)] dP = P(A \cap f^{-1}(B))$.
Πράγματι, έστω $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Τότε

$$\begin{aligned}P(A \cap f^{-1}(B)) &= \int P(A \cap f^{-1}(B)|\sigma(f)) dP = \int \mathbb{E}_P[\chi_{A \cap f^{-1}(B)}|\sigma(f)] dP \\ &= \int \chi_{f^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_A|\sigma(f)] dP = \int_{f^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_A|\sigma(f)] dP \\ &\overset{(i),(g=\chi_A)}{=} \int_{f^{-1}(B)} (\mathbb{E}_{P_\bullet}[\chi_A] \circ f) dP = \int_{f^{-1}(B)} \mathbb{E}_{P_\bullet}[\chi_A](f(\omega)) P(d\omega) \\ &= \int_B \mathbb{E}_{P_y}[\chi_A](P \circ f^{-1})(dy) = \int_B P_y(A) Q(dy)\end{aligned}$$

□

Ο ισχυρισμός (i) του παραπάνω αποτελέσματος έχει αποδειχθεί στον [17], Proposition 452Q υπό την πρόσθετη προϋπόθεση της πληρότητας του μέτρου πιθανότητας Q.

Από τώρα και για τη συνέχεια της παρούσας ενότητας, η $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση με $P \circ f^{-1} = Q$, $\sigma(f) = \{f^{-1}(D) : D \in T\}$ και $M : \Sigma \otimes T \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνολοσυνάρτηση που ορίζεται ως $M := P \circ (id_\Omega \times f)^{-1}$, όπου για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $(id_\Omega \times f)(\omega) = (\omega, f(\omega))$.

Το παρακάτω Λήμμα είναι το Λήμμα 2.3.3 της [3] με αναλυτικότερη απόδειξη.

Λήμμα 3.2.2. Η συνολοσυνάρτηση M είναι ένα μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $P = M \circ \pi_\Omega^{-1}$ και $Q = M \circ \pi_\Upsilon^{-1}$

(ii) $P(A \cap f^{-1}(B)) = M(A \times B)$ για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$.
Ιδιαιτέρως, αν $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q, συνεπής με την f τότε

(iii) $M(A \times B) = \int_B P_y(A) Q(dy)$ για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$.

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε πως η απεικόνιση $id_\Omega \times f$ είναι $\Sigma - \Sigma \otimes T$-μετρήσιμη. Πράγματι, έστω $A \times B \in \Sigma \times T$. Τότε

$$\begin{aligned}(id_\Omega \times f)^{-1}(A \times B) &:= \{\omega \in \Omega : (id_\Omega \times f)(\omega) \in A \times B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : (\omega, f(\omega)) \in A \times B\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \quad \text{και} \quad f(\omega) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \quad \text{και} \quad \omega \in f^{-1}(B)\} = A \cap f^{-1}(B) \in \Sigma,\end{aligned}$$

αφού η f είναι $\Sigma - T-$μετρήσιμη. Άρα $(id_\Omega \times f)^{-1}(A \times B) \in \Sigma$, επομένως η $id_\Omega \times f$ είναι $\Sigma - \Sigma \otimes T-$μετρήσιμη (βλ. π.χ. Πρόταση 2.4.4 του [5]).
Ως εκ τούτου η συνάρτηση M είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\Sigma \otimes T$ (βλ. π.χ. το σχόλιο μετά τον Ορισμό 2.4.3 του [5]).
(i) Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής διότι
• Ισχύει $P = M \circ \pi_\Omega^{-1}$.
Πράγματι, έστω $A \in \Sigma$. Τότε

$$\begin{aligned}M \circ \pi_\Omega^{-1}(A) = M(\pi_\Omega^{-1}(A)) = M(A \times \Upsilon) &:= P \circ (id_\Omega \times f)^{-1}(A \times \Upsilon) \\ &= P((id_\Omega \times f)^{-1}(A \times \Upsilon)) = P(A),\end{aligned}$$

καθώς,

$$\begin{aligned}\pi_\Omega^{-1}(A) &= \{(\omega, y) \in \Omega \times \Upsilon : \pi_\Omega(\omega, y) \in A\} = \{(\omega, y) \in \Omega \times \Upsilon : \omega \in A\} \\ &= \{(\omega, y) \quad \omega \in A \quad \text{και} \quad y \in \Upsilon\} = A \times \Upsilon,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(id_\Omega \times f)^{-1}(A \times \Upsilon) &:= \{\omega \in \Omega : (id_\Omega \times f)(\omega) \in A \times \Upsilon\} \\ &= \{\omega \in \Omega : (\omega, f(\omega)) \in A \times \Upsilon\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \quad \text{και} \quad f(\omega) \in \Upsilon\} = A.\end{aligned}$$

Άρα $M \circ \pi_\Omega^{-1} = P$.

• Ισχύει $Q = M \circ \pi_\Upsilon^{-1}$.

Πράγματι, έστω $B \in T$. Τότε

$$\begin{aligned}(M \circ \pi_\Upsilon^{-1})(B) &= M(\pi_\Upsilon^{-1}(B)) = M(\Omega \times B) = P \circ (id_\Omega \times f)^{-1}(\Omega \times B) \\ &= P((id_\Omega \times f)^{-1}(\Omega \times B)) = P(f^{-1}(B)) = Q(B),\end{aligned}$$

διότι,

$$\begin{aligned}(id_\Omega \times f)^{-1}(\Omega \times B) &:= \{\omega \in \Omega : (id_\Omega \times f)(\omega) \in \Omega \times B\} \\ &= \{\omega : (\omega, f(\omega)) \in \Omega \times B\} = \{\omega : \omega \in \Omega \quad \text{και} \quad f(\omega) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} = f^{-1}(B).\end{aligned}$$

Άρα $Q = M \circ \pi_\Upsilon^{-1}$.

(ii) Για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ ισχύει $P(A \cap f^{-1}(B)) = M(A \times B)$.

Πράγματι, έστω $A \times B \in \Sigma \times T$. Τότε

$$M(A \times B) := P((id_\Omega \times f)^{-1}(A \times B)) = P(A \cap f^{-1}(B)),$$

διότι

$$\begin{aligned}(id_\Omega \times f)^{-1}(A \times B) &:= \{\omega \in \Omega : (id_\Omega \times f)(\omega) \in A \times B\} = \{\omega : (\omega, f(\omega)) \in A \times B\} \\ &= \{\omega : \omega \in A \quad \text{και} \quad f(\omega) \in B\} = A \cap \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \\ &= A \cap f^{-1}(B).\end{aligned}$$

(iii) Ιδιαιτέρως, αν $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q, συνεπής με την f, τότε για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ ισχύει $M(A \times B) = \int_B P_y(A) Q(dy)$.

Πράγματι, έστω $A \times B \in \Sigma \times T$. Τότε

$$M(A \times B) \overset{(ii)}{=} P(A \cap f^{-1}(B)) = \int_B P_y(A) Q(dy),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.2.1 (ii). $\square$

Στην πρόταση που ακολουθεί (βλ. [3], Πρόταση 2.3.4 και [23], Proposition 3.7) αποδεικνύεται η ισοδυναμία των Ορισμών 3.1.1 και 3.1.2 για disintegrations όταν το μέτρο M σχετίζεται με την f όπως παραπάνω. Εδώ παρουσιάζεται αναλυτικότερη απόδειξη.

Πρόταση 3.2.3. Έστω $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας P_y επάνω στην Σ. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f,

(ii) $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο επάνω στην Σ για το M ως προς το Q.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii): Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.2.2 $(i), (iii)$.
(ii)$\Longrightarrow$(i): Έστω ότι ισχύει η (ii).

(a) Η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q.
Πράγματι, από την ιδιότητα $(D1)$ έπεται άμεσα η $(d1)$. Επίσης για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει

$$\int P_y(A)Q(dy) = \int_\Upsilon P_y(A)Q(dy) \overset{(D2)}{=} M(A\times\Upsilon) = M(\pi_\Omega^{-1}(A)) = P(A),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.2.2 (i). Επομένως ισχύει το $(d2)$. Άρα ισχύει το (a).

(b) Η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την f.
Πράγματι, έστω $B \in T$ αυθαίρετο. Τότε από το Λήμμα 3.2.2 (ii) για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $P(A\cap f^{-1}(B)) = M(A\times B)$. Άρα για κάθε $A\in\Sigma$ ισχύει $P(A\cap f^{-1}(B)) = \int_B P_y(A)Q(dy)$. Συνεπώς για $A = f^{-1}(B)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(f^{-1}(B)) \quad &= \quad \int_B P_y(f^{-1}(B))Q(dy) \\
&\Longleftrightarrow \quad Q(B) = \int_B P_y(f^{-1}(B))Q(dy) \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \chi_B(y)Q(dy) = \int \chi_B(y)P_y(f^{-1}(B))Q(dy) \\
&\Longleftrightarrow \quad \int [\chi_B(y) - \chi_B(y)P_y(f^{-1}(B))]Q(dy) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))]Q(dy) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))] = 0, \quad \text{για } Q\text{-σχεδόν όλα τα} \quad y\in\Upsilon,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι $\chi_B(y)[1-P_y(f^{-1}(B))] \geq 0$, για κάθε $y \in \Upsilon$ (βλ. π.χ. Θεώρημα 2.2.10 του [5]). Άρα για Q-σχεδόν όλα τα $y \in B$ ισχύει $1 = P_y(f^{-1}(B))$ αφού $\chi_B(y) = 1$. Εφόσον το $B \in T$ αυθαίρετο, προκύπτει ότι η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την f. $\square$

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι η Πρόταση 2.3.5 του [3] (ή [23], Proposition 3.8) με αναλυτικότερη απόδειξη.

Πρόταση 3.2.4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q συνεπής με την f και θέτουμε $g := u\circ(id_\Omega \times f)$ για κάθε $u \in \mathcal{L}^1(M)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\mathbb{E}_P[g|\sigma(f)] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[u]\circ f \quad P|\sigma(f) - \sigma.\beta.$

(ii) $\int\int u^\bullet dP_\bullet dQ = \int gdP.$

Απόδειξη.(i) Σημειώνουμε αρχικά ότι η $g \in \mathcal{L}^1(P)$, διότι $\int \mid g\mid dP = \int \mid u \mid dM < \infty$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int |g|dP = \int |u\circ(id_\Omega\times f)|dP &= \int_\Omega |u\circ(id_\Omega\times f)|dP\\ &= \int_{(id_\Omega\times f)^{-1}(\Omega\times\Upsilon)} |u\circ(id_\Omega\times f)|dP\\ &= \int_{\Omega\times\Upsilon}|u|d(P\circ(id_\Omega\times f)^{-1})\\ &= \int |u|dM<\infty,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5].
Στη συνέχεια για κάθε $D\in T$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(D)}\mathbb{E}_P[g|\sigma(f)]dP &= \int_{f^{-1}(D)} gdP = \int \chi_{f^{-1}(D)}gdP\\ &= \int(\chi_D\circ f)gdP = \int[\chi_{\Omega\times D}\circ(id_\Omega\times f)][u\circ(id_\Omega\times f)]dP\\ &= \int(\chi_{\Omega\times D}u)dM = \int\int[\chi_{\Omega\times D}u]^y dP_yQ(dy) = \int_{f^{-1}(D)}E_{P_\bullet}[u^\bullet]dP,\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα ισχύει διότι: $\chi_{f^{-1}(D)} = \chi_D\circ f$.
Πράγματι, για κάθε $\omega\in\Omega$ ισχύει

$$(\chi_D\circ f)(\omega) = \chi_D(f(\omega)) = \begin{cases}1 & \text{αν } f(\omega)\in D\\ 0 & \text{αν } f(\omega)\notin D\end{cases} = \begin{cases}1 & \text{αν } \omega\in f^{-1}(D)\\ 0 & \text{αν } \omega\notin f^{-1}(D)\end{cases} = \chi_{f^{-1}(D)}(\omega)$$

Η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι: $[\chi_D\circ f](\omega) = [\chi_{\Omega\times D}\circ(id_\Omega\times f)](\omega)$.
Πράγματι, για κάθε $\omega\in\Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned}[\chi_{\Omega\times D}\circ(id_\Omega\times f)](\omega) &= \chi_{\Omega\times D}((id_\Omega\times f)(\omega)) = (\chi_{\Omega\times D}(id_\Omega\times f))(\omega)\\ &= \chi_{\Omega\times D}(\omega, f(\omega)) = (\chi_\Omega\times\chi_D)(\omega,f(\omega)) = \chi_\Omega(\omega)\chi_D(f(\omega))\\ &= 1\cdot(\chi_D\circ f)(\omega) = (\chi_D\circ f)(\omega).\end{aligned}$$

Η πέμπτη ισότητα ισχύει διότι για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε

$$\int [\chi_{\Omega\times D} \circ (id_\Omega \times f)][u \circ (id_\Omega \times f)]dP = \int (\chi_{\Omega\times D} u) \circ (id_\Omega \times f)dP$$
$$= \int \chi_{\Omega\times D} ud(P \circ (id_\Omega \times f^{-1})) = \int \chi_{\Omega\times D} udM,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5].
Η έκτη ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 3.2.3 και την Παρατήρηση 3.1.4,(d).
Τέλος για την έβδομη ισότητα θα αποδείξουμε αρχικά ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ ισχύει $[\chi_{\Omega\times D} u]^y(\omega) = \chi_D(y)u^y(\omega)$.
Πράγματι, για κάθε $\omega \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ ισχύει

$$[\chi_{\Omega\times D} u]^y(\omega) = (\chi_{\Omega\times D} \cdot u)(\omega, y) = \chi_{\Omega\times D}(\omega, y)u(\omega, y) = \chi_\Omega(\omega)\chi_D(y)u(\omega, y) = \chi_D(y)u^y(\omega).$$

Οπότε έχουμε

$$\int\int [\chi_{\Omega\times D} u]^y dP_y Q(dy) = \int\int \chi_D(y)u^y dP_y Q(dy)$$
$$= \int_D \int u^y dP_y Q(dy) = \int_D E_{P_y}(u^y)Q(dy)$$
$$= \int_D [E_{P_\bullet}(u^\bullet \circ f)]Q(dy) = \int_{f^{-1}(D)} E_{P_\bullet}[u^\bullet]dP,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5].
(ii) Από την (i) λαμβάνουμε

$$\int\int u^\bullet dP_\bullet dQ = \int \mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet]dQ = \int (\mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet] \circ f)dP = \int \mathbb{E}_P[g|\sigma(f)]dP = \int gdP,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5] και η τρίτη ισότητα από το (i). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Λήμμα 3.2.5. ([3], Λήμμα 2.2.1). Έστω M ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\Sigma \otimes T$ ώστε η $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ να είναι μία κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στην Σ για το M ως προς Q. Θέτουμε $P_y := \widetilde{P}_y \otimes \delta_y$ για $y \in \Upsilon$, όπου δ_y είναι το μέτρο πιθανότητας Dirac επάνω στο T που ορίζεται ως $\delta_y(B) := \chi_B(y)$ για κάθε $B \in T$. Τότε η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του M επάνω στο Q συνεπής με την κανονική προβολή π_Υ από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Υ.

Απόδειξη. Προφανώς το P_y είναι μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\Sigma \otimes T$ για $y \in \Upsilon$.

(a) Η οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(d1)$.

Πράγματι, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η οικογένεια

$$\mathcal{D}_1 := \{E \in \Sigma \otimes T : P_\bullet(E) \quad \text{είναι} \quad T - \text{μετρήσιμη}\}$$

είναι μία κλάση Dynkin. Επί πλέον, για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $P_y(A \times B) = \widetilde{P}_y(A)\chi_B(y)$, που συνεπάγεται ότι η $P_\bullet(A \times B)$ είναι $T-$μετρήσιμη. Ως εκ τούτου $A \times B \in \mathcal{D}_1$. Όμως επειδή το $\Sigma \times T$ είναι κλειστό υπό τις πεπερασμένες τομές, λαμβάνοντας υπ΄ όψη το γεγονός ότι η $\mathcal{D}_1$ είναι μία κλάση Dynkin, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. π.χ. Θεώρημα Α΄.2.4) ώστε να λάβουμε $\Sigma \otimes T \subseteq \mathcal{D}_1$. Άρα $\Sigma \otimes T = \mathcal{D}_1$.

(b) Η οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ικανοποιεί την ιδιότητα ($d2$).

Πράγματι, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η οικογένεια

$$\mathcal{D}_2 := \{E \in \Sigma \otimes T : M(E) = \int P_y(E)Q(dy)\}$$

είναι μία κλάση Dynkin. Για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ έχουμε

$$\begin{aligned} M(A \times B) &= \int_B \widetilde{P}_y(A)Q(dy) = \int \widetilde{P}_y(A)\chi_B(y)Q(dy) = \int \widetilde{P}_y(A) \cdot \delta_y(B)Q(dy) \\ &= \int P_y(A \times B)Q(dy). \end{aligned}$$

Άρα $A \times B \in \mathcal{D}_2$. Επομένως $\Sigma \times T \subseteq \mathcal{D}_2$. Πάλι με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης όπως και στο (a) έπεται ότι $\Sigma \otimes T = \mathcal{D}_2$.

(c) Η disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του μέτρου M επάνω στο Q είναι συνεπής με την π_Υ.

Πράγματι, για κάθε $B \in T$ έχουμε

$$\begin{aligned} M(\Omega \times B) = Q(B) &= \int_B \widetilde{P}_y(\Omega)Q(dy) = \int_B \chi_B(y)\widetilde{P}_y(\Omega)Q(dy) \\ &= \int_B P_y(\Omega \times B)Q(dy) = \int_B P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(B))Q(dy), \end{aligned}$$

γεγονός που συνεπάγεται ότι

$$\int_B Q(dy) = \int_B P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(B))Q(dy) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(B)) = 1,$$

για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B$. Έτσι αποδεικνύεται το (c) και ολοκληρώνεται η όλη απόδειξη.

$\square$

Παρατηρήσεις 3.2.6. **(a)** Στο βήμα (c) του Λήμματος 3.2.5 μπορεί να αποδειχθεί κάτι ισχυρότερο. Συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $B \in T$ και $y \in B$ ισχύει $P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(B)) = 1$.

Πράγματι, για κάθε $B \in T$ και $y \in B$ ισχύει

$$P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(B)) = P_y(\Omega \times B) = (\widetilde{P}_y \otimes \delta_y)(\Omega \times B) = \widetilde{P}_y(\Omega)\delta_y(B) = \delta_y(B) = 1.$$

Η απόδειξη οφείλεται στον καθηγητή κ. Δ. Στέγγο.
(b) Κάτω από την ασθενή υπόθεση, ότι για κάθε $y \in \Upsilon$ ισχύει $\{y\} \in T$, η disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του παραπάνω λήμματος είναι **ισχυρά συνεπής** με την π_Υ (ισχυρά συνεπής σημαίνει ότι για $Q-\sigma.o.$ τα $y \in \Upsilon$ ισχύει $P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(\{y\}) = 1$, βλ. π.χ [17], Definition 452E). Πράγματι, για κάθε $y \in \Upsilon$ άμεση συνέπεια του (a) για $B = \{y\}$ είναι ότι $P_y(\pi_\Upsilon^{-1}(\{y\})) = 1$.
(c) Σημειώνουμε ότι οι ισχυρά συνεπείς disintegrations χρησιμοποιούνται ευρέως στη Θεωρία Πιθανοτήτων, όπου συνήθως οι χ.π. των εφαρμογών έχουν δομή παρόμοια με εκείνη των χ.π. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{N}}, P)$, για τους οποίους πάντα υπάρχουν ισχυρά συνεπείς disintegrations.

Παρόλα αυτά, για γενικούς χ.π. ενδιαφέρον παραμένει το παρακάτω

Ερώτημα 3.2.7. Έστω (Ω, Σ, P) (Υ, T, Q) χ.π. και $\Theta : \Omega \longmapsto \Upsilon$ μία απεικόνιση ώστε $P_\Theta = Q$ (δηλ $P(\Theta^{-1}(B)) = Q(B)$). Κάτω από ποιες (ικανές και αναγκαίες) συνθήκες υπάρχουν disintegrations $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q που είναι ισχυρά συνεπείς με την Θ;

Στην παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται η ισοδυναμία της ύπαρξης μιας κ.δ.π.-γινόμενο και μιας συνεπούς disintegration σε πολύ γενικά πλαίσια. Το πρώτο μέρος της πρότασης (ισοδυναμία των (i) και (ii)) υπάρχει στην [3], Πρόταση 2.2.2 και [24], Proposition 2.5.

Πρόταση 3.2.8. Έστω M ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\Sigma \otimes T$ ώστε P και Q να είναι τα περιθώρια μέτρα του M. Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(i) Υπάρχει μία κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για το μέτρο M ως προς το μέτρο Q,

(ii) υπάρχει μία disintegration του M επάνω στο Q συνεπής με την π_Υ.

Αν επί πλέον για κάθε $y \in \Upsilon$ ισχύει $\{y\} \in T$, τότε κάθε μία από τις συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμη με την

(iii) υπάρχει μία disintegration του M επάνω στο Q ισχυρά συνεπής με την π_Υ.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.2.5.
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, θεωρούμε ότι υπάρχει μία disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του M επάνω στο Q συνεπής με την π_Υ. Για κάθε $y \in \Upsilon$ ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $\widetilde{P}_y : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο:

$$\widetilde{P}_y(A) := P_y(A \times \Upsilon) \quad \text{για όλα τα} \quad A \in \Sigma.$$

Προφανώς, η $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί την ιδιότητα $(D1)$.
Για να δείξουμε την $(D2)$, σταθεροποιούμε $A \times B \in \Sigma \times T$. Αφού $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με

την π_Υ, έχουμε $P_y(\Omega \times B) = 1$ για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B$, και αφού επίσης $P_y(\Omega \times B^c) = 1$ για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B^c$, έχουμε $P_y(\Omega \times B) = 0$ για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B^c$, γεγονός που έπεται ότι

$$P_y(A \times B) = 0 \quad \text{για} \quad Q - \text{σχεδόν όλα τα} \quad y \in B^c. \tag{3.8}$$

Ξανά, από τη συνέπεια της $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ με την π_Υ έπεται για $Q-$σχεδόν όλα τα $y \in B$ ότι

$$P_y(A \times B) = P_y((A \times \Upsilon) \cap (\Omega \times B)) = P_y(A \times \Upsilon) = \widetilde{P}_y(A),$$

δηλαδή

$$P_y(A \times B) = \widetilde{P}_y(A) \quad \text{για} \quad Q - \text{σχεδόν όλα τα} \quad y \in B. \tag{3.9}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τις σχέσεις (3.8) και (3.9) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} M(A \times B) &= \int P_y(A \times B) Q(dy) \\ &= \int_B P_y(A \times B) Q(dy) + \int_{B^c} P_y(A \times B) Q(dy) \\ &= \int_B \widetilde{P}_y(A) Q(dy). \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει η ιδιότητα $(D2)$. Κατά συνέπεια, έχουμε και την ισχύ της (i) ιδιότητας.

Αν επί πλέον για κάθε $y \in \Upsilon$ ισχύει $\{y\} \in T$, θα δείξουμε την ισοδυναμία $(iii) \Longleftrightarrow (ii)$. Πράγματι, η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (ii)$ είναι γνωστή (βλ. π.χ. [17], Proposition 452, (b)), ενώ η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (iii)$ είναι συνέπεια της Παρατήρησης 3.2.6, (b). □

Κεφάλαιο 4

Μεμειγμένες Σ.Δ. Poisson

Η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για τη $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο, είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα συζητηθεί μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ως μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Στη περίπτωση αυτή η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, ορίζεται ότι είναι ένα μείγμα στοχαστικών διαδικασιών αριθμού απαιτήσεων ομοιογενών χαρτοφυλακίων, τέτοια ώστε η μεμειγμένη κατανομή τους, να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα καθοριστεί το γενικό μοντέλο, και στη συνέχεια θα μελετηθεί η μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson και μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση, η διαδικασία Pólya-Lundberg.

Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4.1 και 4.2 υπάρχουν στο [28]. Εδώ παρουσιάζονται με αναλυτικές αποδείξεις.

4.1 Το υπόδειγμα

Θεωρούμε στο εξής $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία $\sigma.\delta.$ του αριθμού απαιτήσεων, και Θ μια τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε όπως προαναφέρθηκε, πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια ιδίου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, μπορεί να προσδιοριστεί με τη πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής Θ. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή του Θ αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς το Θ, και από τις ιδιότητες της κατανομής του Θ. Για το λόγο αυτό, η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **παράμετρος δό-**

μησης (structure parameter), η κατανομή της P_Θ ονομάζεται **κατανομή δόμησης (structure distribution)**, ενώ η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεμειγμένη σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων (mixed claim number process)**.

Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ έχουν την ίδια υπό συνθήκη κατανομή ως προς το Θ, και ισχύει η σχέση:

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Άμεσα προκύπτει πως, μια στοχαστική διαδικασία αριθμού απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α΄1.3 του [2].

Λήμμα 4.1.1. Αν μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.

Απόδειξη. Για όλα τα $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για όλα τα $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h} = k_j\}\right] &= \int_\Omega P(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h} = k_j\}|\Theta(\omega))P(d\omega) \\
&= \int_\Omega P(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\Theta(\omega))P(d\omega) \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right]
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και τρίτη ισότητα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π), ενώ η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό για τις υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων. $\square$

Αντίθετα, για μία σ.δ. αριθμού των απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, συνεπάγεται ότι δεν έχει γενικά ανεξάρτητες προσαυξήσεις όπως θα δούμε και από το Θεώρημα 4.2.7 στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 4.1.2. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

και

$$Var[N_t] = \mathbb{E}[Var(N_t|\Theta)] + Var[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται ο ορισμός της μεμειγμένης σ.δ. Poisson .

Ορισμός 4.1.3. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεμειγμένη στοχαστική διαδικασία Poisson** με παράμετρο Θ (ή για συντομία $P - MPP(\Theta)$), εάν

- Θ είναι μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει $\mathrm{P}_\Theta[(0,\infty)] = 1$, και εάν
- $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει η σχέση $\mathrm{P}_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$ (δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$), τότε $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P - \sigma.\delta.$ Poisson με παράμετρο θ_0.

Τελικά παρατίθεται μία βασική ιδιότητα της μεμειγμένης σ.δ. Poisson:

Λήμμα 4.1.4. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μία μεμειγμένη σ.δ. Poisson, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση: $P[\{N_t = n\}] > 0$, για όλα τα $t \in (0,\infty)$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1.1 παραπάνω, γνωρίζουμε πως η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} P[\{N_t = n\}] &= \int_\Omega P[\{N_t = n\}|\Theta(\omega)]P(d\omega) \\ &= \int_\Omega e^{-t\Theta(\omega)} \frac{(t\Theta(\omega))^n}{n!} P(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t\theta} \frac{(t\theta)^n}{n!} P_\Theta(d\theta) \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι αποτέλεσμα του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π), η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον Ορισμό 4.1.3, ενώ η τρίτη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5], γνωστό ως Θεώρημα Μετασχηματισμού Ολοκληρώματος. Οπότε πράγματι η $\mathrm{P}[\{N_t = n\}] > 0$. □

Στο σημείο αυτό, γεννάται το ερώτημα κατά πόσον μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson, μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, το οποίο απαντούμε στην επόμενη ενότητα (Θεώρημα 4.2.7).

4.2 Το πολυωνυμικό κριτήριο και η σ.δ. Markov

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι μερική γενίκευση του Λήμματος 2.3.3.

Λήμμα 4.2.1. (Πολυωνυμικό Κριτήριο). Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μεμειγμένη σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε ισχύει

$$(*) \qquad P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ ισχύει η σχέση:

$$\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \cap \{N_{t_m} = n\} = \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \tag{4.1}$$

Πράγματι, για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \cap \{N_{t_m} = n\} \\
&\quad = \{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1\} \cap \{N_{t_2} - N_{t_1} = k_2\} \cap \ldots \cap \{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\} \cap \{N_{t_m} = n\} \\
&\quad = \{N_{t_1} = k_1\} \cap \ldots \cap \{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\} \cap \{N_{t_m} = n\} \\
&\quad = \{N_{t_1} = k_1\} \cap \{N_{t_2} = k_1 + k_2\} \cap \ldots \cap \{N_{t_m} = k_1 + \ldots + k_m\} \cap \{N_{t_m} = n\} \\
&\quad = \{N_{t_1} = k_1\} \cap \{N_{t_2} = k_1 + k_2\} \cap \ldots \cap \{N_{t_m} = k_1 + \ldots + k_m\} \\
&\quad = \{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1\} \cap \{N_{t_2} - N_{t_1} = k_2\} \cap \ldots \cap \{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\} \\
&\quad = \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}
\end{aligned}$$

Άμεσα προκύπτει πως:

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\cap\{N_{t_m}=n\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\right] \\
&= \int_\Omega P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}|\Theta(\omega)\right)P(d\omega) \\
&= \int_\Omega \prod_{j=1}^{m} P(\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}|\Theta(\omega))P(d\omega) \\
&= \int_\Omega \prod_{j=1}^{m} e^{-(t_j-t_{j-1})\Theta(\omega)}\frac{((t_j-t_{j-1})\Theta(\omega))^{k_j}}{k_j!}P(d\omega) \\
&= \int_\Omega e^{-(t_1-t_0)\Theta(\omega)}\cdot\frac{((t_1-t_0)\Theta(\omega))^{k_1}}{k_1!}\cdots e^{-(t_m-t_{m-1})\Theta(\omega)}\frac{((t_m-t_{m-1})\Theta(\omega))^{k_m}}{k_m!}P(d\omega) \\
&= \int_\Omega e^{-(t_1-t_0)\Theta(\omega)-\ldots-(t_m-t_{m-1})\Theta(\omega)}\frac{(t_1-t_0)^{k_1}\cdots(t_m-t_{m-1})^{k_m}(\Theta(\omega))^{k_1+k_2+\ldots+k_m}}{\prod_{j=1}^{m}k_j!}P(d\omega) \\
&= \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m}k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}\int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\frac{(t_m\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega) \\
&= \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m}k_j!}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}\cdot\int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\cdot\frac{(t_m\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega),
\end{aligned}
$$

όπου άμεση συνέπεια της σχέσης (4.1) είναι η πρώτη ισότητα. Επειδή η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεμειγμένη $\sigma.\delta.$ Poisson, τότε έχει και υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις απ'οπου προκύπτει η τρίτη ισότητα. Τέλος η τέταρτη ισότητα διαμορφώνεται κατα αυτό το τρόπο, διότι $P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}=\mathbf{P}((t_j-t_{j-1})\Theta)$.
Στη συνέχεια, από το Λήμμα 4.1.4 ισχύει ότι:

$$
P[\{N_{t_m}=n\}] = \int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\frac{(t_m\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega) \tag{4.2}
$$

οπότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}|\{N_{t_m}=n\}\right] \\
&:= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\cap\{N_{t_m}=n\}\right]}{P[\{N_{t_m}=n\}]} \\
&= \frac{\frac{n!}{\prod_{j=1}^{m}k_j!}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}\cdot\int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\cdot\frac{(t_m\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega)}{\int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\cdot\frac{(t_m\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega)} \\
&= \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m}k_j!}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}
\end{aligned}
$$

□

Στην περίπτωση που $m = 2$, το πολυωνυμικό κριτήριο ονομάζεται Lundberg's binomial criterion, (διωνυμικό κριτήριο Lundberg). Το πολυωνυμικό κριτήριο μας επιτρέπει να ελένξουμε την υπόθεση για το αν η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων, είναι μια μεμειγμένη διαδικασία Poisson και είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό της «πεπερασμένης» κατανομής της μεμειγμένης σ.δ. Poisson.

Το πολυωνυμικό κριτήριο που ισχύει για την σ.δ. Poisson (βλ. Λήμμα 2.3.3) σε συνδιασμό με το Λήμμα 4.2.1 μας οδηγεί στο παρακάτω

Ερώτημα 4.2.2. Πότε ισχύει η ισοδυναμία
«Η $\{N_t\}$ είναι μεμειγμένη στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Theta \iff$ η $\{N_t\}$ ικανοποιεί την $(*)$ και τη $P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$»;

Θεώρημα 4.2.3. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.

Απόδειξη. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \cdots, t_m, t_{m+1} \in (0,\infty)$ και $n_1, n_2, ..., n_m, n_{m+1} \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $t_1 < .... < t_m < t_{m+1}$ και $P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] > 0$. Ορίζουμε $t_0 := 0$ και $n_0 := 0$. Στο σημείο αυτό, θα αποδείξουμε αρχικά ότι ισχύει η σχέση:

$$\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\} = \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\} \tag{4.3}$$

Πράγματι,
έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\begin{aligned}\omega \in \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\} &\Leftrightarrow N_{t_j}(\omega) = n_j \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots, m \\ &\Leftrightarrow N_{t_j}(\omega) - N_{t_{j-1}}(\omega) = n_j - n_{j-1} \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots, m \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\end{aligned}$$

Επειδή το $\omega \in \Omega$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι ισχύει η σχέση (4.3)
Προφανώς ισχύει ότι:

$$\{N_{t_m} = n_m\} \supseteq \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}$$

Οπότε

$$0 < P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] \leq P\left[\{N_{t_m} = n_m\}\right] \tag{4.4}$$

Άρα

$$P\left[\{N_{t_m}=n_m\}\right]>0 \tag{4.5}$$

Με τον τρόπο αυτό από τη σχέση (4.3) και τη σχέση (4.4), εξασφαλίζουμε επίσης πως η

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\}\right]>0 \tag{4.6}$$

(a) $P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}]$
$=\binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m}\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P\left[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}\right] &:= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j}=n_j\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}\right]}\\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\}\right]}\\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\}|\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}\right]P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\}|\{N_{t_m}=n_m\}\right]P[\{N_{t_m}=n_m\}]}\\
&= \frac{\frac{n_{m+1}!}{\prod_{j=1}^{m+1}(n_j-n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m+1}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_{m+1}}\right)^{n_j-n_{j-1}}P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{\frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}}P[\{N_{t_m}=n_m\}]}\\
&= \frac{n_{m+1}!\cdot\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!\cdot\prod_{j=1}^{m+1}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_{m+1}}\right)^{n_j-n_{j-1}}P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{n_m!\cdot\prod_{j=1}^{m+1}(n_j-n_{j-1})!\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}}P[\{N_{t_m}=n_m\}]}\\
&= \frac{n_{m+1}!\cdot(n_1-n_0)!\cdots(n_m-n_{m-1})!}{n_m!\cdot(n_1-n_0)!\cdots(n_{m+1}-n_m)!}\cdot\frac{\frac{(t_1-t_0)^{n_1-n_0}}{t_{m+1}^{n_1-n_0}}\cdots\frac{(t_{m+1}-t_m)^{n_{m+1}-n_m}}{t_{m+1}^{n_{m+1}-n_m}}}{\frac{(t_1-t_0)^{n_1-n_0}}{t_m^{n_1-n_0}}\cdots\frac{(t_m-t_{m-1})^{n_m-n_{m-1}}}{t_m^{n_m-n_{m-1}}}}\\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}\\
&= \frac{n_{m+1}!}{n_m!\cdot(n_{m+1}-n_m)!}\cdot\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{(n_1-n_0)+\ldots+(n_m-n_{m-1})}\cdot\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m}\\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}\\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m}\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την σχέση (4.3), η τρίτη από το Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα, ενώ η τέταρτη από το Πολυωνυμικό Κριτήριο.

(b) $P\left[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\{N_{t_m}=n_m\}\right]=\binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m}\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}$.
Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
P\left[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\{N_{t_m}=n_m\}\right] &:= P\left[\{N_{t_m}=n_m\}|\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}\right] \\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{P\left[\{N_{t_m}=n_m\}\cap\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}\right]}{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{P[\{N_{t_m}=n_m, N_{t_{m+1}}-N_{t_m}=n_{m+1}-n_m\}]}{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega P[\{N_{t_m}=n_m\}\cap\{N_{t_{m+1}}-N_{t_m}=n_{m+1}-n_m\}|\Theta(\omega)]P(d\omega)}{\int_\Omega P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\Theta(\omega)]P(d\omega)} \\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega P[\{N_{t_m}=n_m\}|\Theta(\omega)]P[\{N_{t_{m+1}}-N_{t_m}=n_{m+1}-n_m\}|\Theta(\omega)]P(d\omega)}{\int_\Omega P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\Theta(\omega)]P(d\omega)} \\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega e^{-t_m\Theta(\omega)}\frac{(t_m\Theta(\omega))^{n_m}}{n_m!}\cdot e^{-(t_{m+1}-t_m)\Theta(\omega)}\frac{(t_{m+1}-t_m\Theta(\omega))^{n_{m+1}-n_m}}{(n_{m+1}-n_m)!}P(d\omega)}{\int_\Omega e^{-t_{m+1}\Theta(\omega)}\frac{(t_{m+1}\Theta(\omega))^{n_{m+1}}}{n_{m+1}!}P(d\omega)} \\
&\quad\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega e^{-t_{m+1}\Theta(\omega)}\frac{(t_m\Theta(\omega))^{n_m}((t_{m+1}-t_m)\Theta(\omega))^{n_{m+1}-n_m}}{n_m!(n_{m+1}-n_m)!}P(d\omega)}{\int_\Omega e^{-t_{m+1}\Theta(\omega)}\frac{(t_{m+1}\Theta(\omega))^{n_{m+1}}}{n_{m+1}!}P(d\omega)}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{\frac{t_m^{n_m}(t_{m+1}-t_m)^{n_{m+1}-n_m}}{n_m!(n_{m+1}-n_m)!}}{\frac{t_{m+1}^{n_{m+1}}}{n_{m+1}!}}\cdot\frac{\int_\Omega e^{-t_{m+1}\Theta(\omega)}(\Theta(\omega))^{n_{m+1}}P(d\omega)}{\int_\Omega e^{-t_{m+1}\Theta(\omega)}(\Theta(\omega))^{n_{m+1}}P(d\omega)}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \frac{n_{m+1}!}{n_m!(n_{m+1}-n_m)!}\cdot\frac{t_m^{n_m}\,(t_{m+1}-t_m)^{n_{m+1}-n_m}}{t_{m+1}^{n_{m+1}}}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\cdot\frac{t_{m+1}^{n_m}}{t_{m+1}^{n_m}}\cdot\frac{t_m^{n_m}\,(t_{m+1}-t_m)^{n_{m+1}-n_m}}{t_{m+1}^{n_{m+1}}}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\cdot\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\cdot(t_{m+1}-t_m)^{n_{m+1}-n_m}\cdot t_{m+1}^{n_m-n_{m+1}}\cdot\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]} \\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m}\frac{P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}]}{P[\{N_{t_m}=n_m\}]}
\end{aligned}
$$

Από τα (a) και (b) έπεται

$$
P\left[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}\right]=P\left[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\{N_{t_m}=n_m\}\right].
$$

Δηλαδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov. □

Από το παραπάνω Θεώρημα, προκύπτει το εξής:

Ερώτημα 4.2.4. *Κάτω από ποιές συνθήκες ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.2.3, δηλαδή πότε μια διαδικασία Markov είναι μεμειγμένη σ.δ. Poisson με παράμετρο* Θ *;*

Από το λήμμα που ακολουθεί, δίνεται μία επιπλέον δυνατότητα να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων είναι μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson, και μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης της κατανομής μιας μεμειγμένης σ.δ. Poisson.

Λήμμα 4.2.5. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει:

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$Var[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2 Var[\Theta].$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Απόδειξη. (**a**) : Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)] = \mathbb{E}[t\Theta] = t\mathbb{E}[\Theta],$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 4.1.2 και η δεύτερη από τον Ορισμό 4.1.3.
(**b**) : Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$Var[N_t] = \mathbb{E}[Var(N_t|\Theta)] + Var[\mathbb{E}(N_t|\Theta)] = \mathbb{E}[t\Theta] + Var[t\Theta] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2 Var[\Theta],$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.1.2, ενώ η δεύτερη είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 4.1.3.
(**c**) : Η πιθανότητα έκρηξης είναι μηδέν.
Πράγματι, από το (**a**) έπεται ότι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές διότι,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] < \infty.$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη [28], Proposition 2.1.5 για να πάρουμε το (**c**). □

Τώρα μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, για το αν μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αρχικά θα αναφέρουμε τον ορισμό της μή ομογενούς σ.δ. Poisson.

Ορισμός 4.2.6. Έστω $\lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow (0, \infty)$ μία συνεχής συνάρτηση. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία **μή ομογενής σ.δ. Poisson** με ένταση λ, αν έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ισχύει η σχέση $P_{N_{t+h} - N_t} = \mathbf{P}\left(\int_t^{t+h} \lambda(s) ds\right)$ για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$.

Θεώρημα 4.2.7. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια μεμειγμένη σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, έτσι ώστε το Θ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η κατανομή του Θ, είναι εκφυλισμένη.

(b) Η σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(c) Η σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία μή ομογενής σ.δ. Poisson .

(d) Η σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία (ομογενής) σ.δ. Poisson .

Απόδειξη. Προφανώς το (a) συνεπάγεται το (d), το (d) συνεπάγεται το (c), και το (c) συνεπάγεται το (b). Από το Λήμμα 4.2.5 και το [28], Theorem 2.3.4, το (b) συνεπάγεται το (d). Μένει να δείξουμε ότι το (d) συνεπάγεται το (a). Πράγματι, αν υποθέσουμε πως η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. Poisson, τότε έχουμε:

$$\mathbb{E}[N_t] = Var[N_t]$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και από το Λήμμα 4.2.5 έχουμε $Var[\Theta] = 0$, που σημαίνει πως η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη. Ως εκ τούτου, η (d) συνεπάγεται την (a). □

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή παρουσιάζοντας τη σ.δ. Pólya-Lundberg

Ορισμός 4.2.8. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **σ.δ. Pólya-Lundberg** με παραμέτρους α και γ, εάν είναι μεμειγμένη σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ ώστε να ισχύει $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \gamma)$.

Θεώρημα 4.2.9. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. Pólya-Lundberg με παραμέτρους α και γ, τότε ισχύει:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m} \{N_{t_j} = n_j\}\right] = \frac{\Gamma(\gamma + n_m)}{\Gamma(\gamma) \prod_{j=1}^{m} (n_j - n_{j-1})!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha + t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n_0, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $0 = n_0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_m$.

Ιδιαιτέρως, η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και εξαρτημένες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τα εξής:

$$P_{N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha+t}\right) \quad \text{για κάθε} \quad t \in (0,\infty)$$

και

$$P_{N_{t+h}-N_t|N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma + N_t, \frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right) \quad \text{για κάθε} \quad t,h \in (0,\infty).$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1.4 και το Θεώρημα 4.2.7 φαίνεται καθαρά πως η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, έχει στάσιμες και εξαρτημένες προσαυξήσεις.
(**a**). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+^\star$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha+t}\right)$.
Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+^\star$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&P[\{N_t = n\}] \\
&\quad = \int_\Omega P(\{N_t = n\}|\Theta(\omega))P(d\omega) \\
&\quad = \int_\Omega e^{-t\Theta(\omega)} \cdot \frac{(t\Theta(\omega))^n}{n!}P(d\omega) \\
&\quad = \int_\mathbb{R} e^{-t\theta} \cdot \frac{(t\theta)^n}{n!}P_\Theta(d\theta) \\
&\quad := \int_\mathbb{R} e^{-t\theta} \cdot \frac{(t\theta)^n}{n!} \cdot \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot e^{-\alpha\theta}\theta^{\gamma-1}\chi_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) \\
&\quad = \frac{t^n \cdot \alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)\cdot n!}\int_0^\infty e^{-(\alpha+t)\theta}\theta^{\gamma+n-1}\lambda(d\theta) \\
&\quad = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\cdot\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n\cdot\int_0^\infty\frac{(\alpha+t)^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n)}\cdot e^{-(\alpha+t)\theta}\theta^{\gamma+n-1}\lambda(d\theta) \\
&\quad = \frac{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots\gamma\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma)n!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\cdot\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n \\
&\quad = \frac{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots\gamma}{n!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\cdot\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n \\
&\quad = \frac{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots\gamma(\gamma-1)!}{n!(\gamma-1)!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\cdot\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n \\
&\quad = \frac{(\gamma+n-1)!}{n!(\gamma-1)!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n \\
&\quad = \binom{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n,
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το [5], Θεώρημα 2.4.6, η έβδομη από τον ορισμό της σ.π.π. της $\mathbf{Ga}(\gamma+n,\alpha+t)$.
Άρα

$$P_{N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha+t}\right) \quad \text{για κάθε} \quad t \in (0,\infty).$$

(**b**). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $h > 0$, ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] = \frac{\Gamma(\gamma + n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha + t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}}.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}|\{N_{t_m} = n_m\}\right] P[\{N_{t_m} = n_m\}] \\
&\overset{(4.3)}{=} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}|\{N_{t_m} = n_m\}\right] P[\{N_{t_m} = n_m\}] \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}} \binom{\gamma + n_m - 1}{n_m} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\left(\frac{t_m}{\alpha + t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}} \frac{(\gamma + n_m - 1)!}{n_m!(\gamma - 1)!} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\left(\frac{t_m}{\alpha + t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}} \frac{(\gamma + n_m - 1)\cdots\gamma(\gamma - 1)!}{n_m!(\gamma - 1)!} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\left(\frac{t_m}{\alpha + t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}} \\
&\quad \cdot \frac{(\gamma + n_m - 1)\cdots\gamma\Gamma(\gamma)}{n_m!\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\left(\frac{t_m}{\alpha + t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!}\frac{\Gamma(\gamma + n_m)}{n_m!\Gamma(\gamma)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}}\left(\frac{t_m}{\alpha + t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma + n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha + t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}},
\end{aligned}$$

όπου λόγω του Πολυωνυμικού Κριτηρίου και του (**a**) προκύπτει η τρίτη ισότητα.

(**c**). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $h > 0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$P[\{N_{t+h} = n+k\}\cap\{N_t = n\}] = \frac{\Gamma(\gamma + n + k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t + h}\right)^{\gamma}\cdot\left(\frac{t}{\alpha + t + h}\right)^{n}\cdot\left(\frac{h}{\alpha + t + h}\right)^{k}.$$

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $h > 0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&P[\{N_{t+h} = n+k\} \cap \{N_t = n\}] \\
&\overset{(b)}{=} \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{2}(n_j - n_{j-1})!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma} \prod_{j=1}^{2}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha+t+h}\right)^{n_j - n_{j-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)(n_1-n_0)!(n_2-n_1)!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma} \cdot \left(\frac{t_1-t_0}{\alpha+t+h}\right)^{n_1-n_0} \cdot \left(\frac{t_2-t_1}{\alpha+t+h}\right)^{n_2-n_1} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)k!\cdot n!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{t+h-t}{\alpha+t+h}\right)^{k}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)k!\cdot n!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}.
\end{aligned}
$$

(**d**). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $h > 0$ ισχύει:

$$
P_{N_{t+h}-N_t|N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma + N_t, \frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right).
$$

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $h > 0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&P[\{N_{t+h} - N_t = k\}|\{N_t = n\}] \\
&= \frac{P[\{N_{t+h} - N_t = k\} \cap \{N_t = n\}]}{P[\{N_t = n\}]} \\
&= \frac{P[\{N_{t+h} = n+k\} \cap \{N_t = n\}]}{P[\{N_t = n\}]} \\
&\overset{(\mathbf{a}),(\mathbf{c})}{=} \frac{\frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!\cdot k!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}}{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n}} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma+n)k!}\frac{(\alpha+t)^{\gamma}}{(\alpha+t+h)^{\gamma}}\frac{(\alpha+t)^{n}}{(\alpha+t+h)^{n}}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \frac{(\gamma+n+k-1)\Gamma(\gamma+n+k-1)}{(\gamma+n-1)\Gamma(\gamma+n-1)k!} \cdot \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \frac{(\gamma+n+k-1)\cdots(\gamma+n)(\gamma+n-1)\Gamma(\gamma+n-1)}{(\gamma+n-1)\Gamma(\gamma+n-1)k!} \cdot \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \frac{(\gamma+n+k-1)(\gamma+n+k-2)\cdots(\gamma+n)}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \frac{(\gamma+n+k-1)(\gamma+n+k-2)\cdots(\gamma+n)(\gamma+n-1)!}{k!(\gamma+n-1)!} \cdot \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \frac{(\gamma+n+k-1)!}{k!(\gamma+n-1)!} \cdot \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \binom{\gamma+n+k-1}{k}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}.
\end{aligned}
$$

□

4.3 Χαρακτηρισμός της MPP μέσω disintegrations

Σε όλη την ενότητα που ακολουθεί, (Ω, Σ, P) είναι σταθερός χ.π. και Θ μια τ.μ. επάνω στο Ω με $P_\Theta((0,\infty)) = 1$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $R_\Theta = (0,\infty)$. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης Ω_T (δηλ. $P(\Omega_T) = 0$), έστω $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων που επάγεται από τη σ.δ. άφιξης απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (βλ. π.χ. [28], Chapter 1, Section 1.1, σελ 6) και έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης Ω_N (βλ. π.χ. [28], Chapter 2, Section 2.1, σελ 17). Σημειώνουμε ότι κάθε σ.δ. άφιξης απαιτήσεων επάγεται μια σ.δ. αριθμού απαιτήσεων με $\Omega_T = \Omega_N$ και αντίστροφα (βλ. πχ. [28], Theorem 2.1.1).

Σε ό,τι ακολουθεί, για όλη την εργασία, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι το κενό. Τότε έπεται ότι $\Omega_T = \Omega_N = \emptyset$ (βλ. [28], Theorem 2.1.1). Επί πλέον, έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ μια disintegration του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ.

Σημειώνουμε ότι, αν ο υποκείμενος χ.π. (Ω, Σ, P) είναι τέλειος και η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε υπάρχει πάντοτε μια disintegration του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ (βλ. [15], Theorem 6 και 3). Επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές των μεμειγμένων σ.δ. Poisson, ο υποκείμενος χ.π. είναι Πολωνικός ή αριθμήσιμα συμπαγής (συνεπώς και τέλειος) με μια αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα, προκύπτει ότι αληθεύει η υπόθεση για την ύπαρξη των disintegrations.

Με $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συμβολίζουμε την κανονική διύλιση της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{\mathcal{A}} := \sigma(\mathcal{A}_t \cup \sigma(\Theta))$ τότε $\widetilde{\mathcal{A}} := \{\widetilde{\mathcal{A}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διύλιση για το (Ω, Σ). Επιπλέον, έχουμε $\mathcal{A}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{A}_t)$ και $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty := \sigma(\mathcal{A}_\infty \cup \sigma(\Theta))$.

Παραθέτουμε στη συνέχεια κάποιες έννοιες που απαιτούνται για την παρούσα ενότητα. Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ είναι **υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** ως προς τη $\sigma-$υποάλγεβρα T της Σ, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n|T) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|T) \quad P|T - \sigma.\beta.$$

για οποιαδήποτε $i_1, \ldots, i_n$ διακριτά στοιχεία του I και $E_j \in \Sigma_{i_j}$ για κάθε $j \leq n$.

Μια οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ τ.μ. στο Ω είναι **(P)-υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** ως προς μια τ.μ. Y στο Ω, αν η οικογένεια $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ $\sigma-$αλγεβρών είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητη ως προς τη $\sigma-$άλγεβρα $\sigma(Y)$. Επιπλέον, μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in J}$ τ.μ. στο Ω ονομάζεται **(P)-υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ως προς τη σ-άλγεβρα $T \subseteq \Sigma$, αν το ζεύγος $(\{\sigma(X_j)\}_{j\in J}, \{\Sigma_i\}_{i\in I})$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητο σε σχέση με τη T.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο (Ω,Σ) έχει **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς Θ, αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, τέτοιο ώστε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ οι προσαυξήσεις $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m)$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες (ως προς Θ).

Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** (ως προς Θ) αν για κάθε $m \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ ισχύει

$$P_{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Δεδομένου του ότι ο όρος της **δέσμευσης** χρησιμοποιείται πάντα σε σχέση με την τ.μ. Θ, σε ό,τι ακολουθεί, για όλη την εργασία, θα γράφουμε απλώς «υπό συνθήκη» αντί για «υπό συνθήκη ως προς Θ».

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφέρουμε πως μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο.

Αν μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση $X_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε θα έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει η ισότητα $P_{X_{t+h}-X_t|\Theta} = P_{X_h|\Theta}$ $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ Η απόδειξη γίνεται όπως στο Λήμμα Α΄ 1.3 του [2].

Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι **P-υπό συνθήκη ισόνομα κατανεμημένη** επάνω σε μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_j^{-1}(B))$$

για οποιαδήποτε $i, j \in I, F \in \mathcal{F}$ και $B \in \mathfrak{B}$.

Το λήμμα που ακολουθεί, είναι βασικό, δεδομένου ότι ανάγει μέσω μιας disintegration, την $P-$υπό συνθήκη ανεξαρτησία, σε ανεξαρτησία ως προς τα μέτρα πιθανότητας της disintegration.

Λήμμα 4.3.1. (βλ. [3], Λήμμα 3.2.2). Έστω I αριθμήσιμο σύνολο. Τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P-$υπο συνθήκη ανεξάρτητη αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη για κάθε $\theta \notin N$.

Απόδειξη. (α) Έστω ότι η σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητη, δηλαδή ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}|\Theta\right) = \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{i_j} \in B_j\}|\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \tag{4.7}$$

για οποιαδήποτε $i_1, \ldots, i_m$ διακριτά στοιχεία του I και $B_j \in \mathfrak{B}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$. Τότε η σχέση (4.7) ισοδυναμεί με

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}|\Theta\right) dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{i_j} \in B_j\}|\Theta) dP,$$

ή, λόγω του Λήμματος 3.2.1 (i), με

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_{\bullet}\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\right) \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m}[P_{\bullet}(\{X_{i_j} \in B\}) \circ \Theta] dP,$$

ή, με

$$\int_D P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\right) P_\Theta(d\theta) = \int_D \prod_{j=1}^{m} P_\theta(\{X_{i_j} \in B_j\}) P_\Theta(d\theta), \tag{4.8}$$

για κάθε $D \in \mathfrak{B}$.

Η τελευταία σχέση (σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.15 (c) του [5]) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, για όλα τα διακριτά $i_1, \ldots, i_m \in I$ και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$, υπάρχει ένα σύνολο $N_{m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B}_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin N_{m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}$ να ισχύει η σχέση

$$P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^{m} P_\theta\{X_{i_j} \in B_j\}. \tag{4.9}$$

Επειδή το σύνολο I είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το

$$N_{m,B_1,\ldots,B_m} := \bigcup_{i_1,\ldots,i_m \in I} N_{m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B},$$

με $i_1, \ldots, i_m$ διακριτά στοιχεία του I, είναι στοιχείο της $\mathfrak{B}$.
Επίσης

$$\begin{aligned} P_\Theta(N_{m,B_1,\ldots,B_m}) &= P_\Theta\left(\bigcup_{i_1,\ldots,i_m \in I} N_{m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}\right) \\ &\leq \sum_{i_1,\ldots,i_m \in I} P_\Theta(N_{m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}) = 0, \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από τη Πρόταση 1.2.3 (d) του [5].
Άρα $P_\Theta(N_{m,B_1,\ldots,B_m}) = 0$, δηλαδή $N_{m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B}_0$. Έτσι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$, η σχέση (4.9) ικανοποιείται για κάθε $\theta \notin N_{m,B_1,\ldots,B_m}$.

(b) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = 2$. Τότε υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η σχέση (4.9) να ισχύει για $m = 2$, για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$, για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ και για κάθε $\theta \notin N$.
Πράγματι, έστω $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ ένας αριθμήσιμος γεννήτορας του $\mathfrak{B}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ είναι κλειστός υπό πεπερασμένες τομές. Έτσι, εφαρμόζοντας τη (4.9) για $m = 2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ λαμβάνουμε ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N_{B_1,B_2} := N_{2,B_1,B_2} \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση (4.9) για όλα τα $\theta \notin N_{B_1,B_2}$. Έστω $N := \bigcup_{B_1,B_2 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}} N_{B_1,B_2}$. Τότε έπεται ότι $P_\Theta(N) = 0$ και ότι ικανοποιείται η σχέση

(4.9) για όλα τα $B_1, B_2 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ και για οποιοδήποτε $\theta \notin N$. Οπότε εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης λαμβάνουμε το (b).
Για τον αντίστροφο ισχυρισμό, σημειώστε ότι αν υποτεθεί η ύπαρξη ενός $P_\Theta-$μηδενικού συνόλου $N \in \mathfrak{B}$ έξω από το οποίο ισχύει η σχέση (4.9), έπεται ότι ισχύει και η σχέση (4.8), ως εκ τούτου λαμβάνουμε ισοδύναμα και τη σχέση (4.7). $\square$

Για την απόδειξη του παρακάτω λήμματος χρησιμοποιούνται επιχειρήματα παρόμοια με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος 3.2.2 της [3].

Λήμμα 4.3.2. Έστω I αριθμήσιμο σύνολο. Τότε η οικογένεια $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η $\{X_t\}_{t\in I}$ να έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις για κάθε $\theta \notin N$.

Απόδειξη. (a) Έστω ότι η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta\right) = \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \tag{4.10}$$

για οποιαδήποτε $t_1, \ldots, t_m$ διακριτά στοιχεία του I και $B_j \in \mathfrak{B}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$.
Τότε η σχέση (4.10) ισοδυναμεί με

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta\right) dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta)dP,$$

ή, λόγω του Λήμματος 3.2.1 (i), με

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_\bullet\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m}[P_\bullet(\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B\}) \circ \Theta]dP,$$

ή, με

$$\int_D P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) P_\Theta(d\theta) = \int_D \prod_{j=1}^{m} P_\theta(\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\})P_\Theta(d\theta), \tag{4.11}$$

για κάθε $D \in \mathfrak{B}$.
Η τελευταία σχέση (σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.15 (c) του [5]) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, για όλα τα διακριτά $t_1, \ldots, t_m \in I$ και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$, υπάρχει ένα σύνολο $N_{m,t_1,\ldots,t_m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B}_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin N_{m,t_1,\ldots,t_m,B_1,\ldots,B_m}$ να ισχύει η σχέση

$$P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^{m} P_\theta\{X_{t_j} - X_{t_j} \in B_j\}. \tag{4.12}$$

Επειδή το σύνολο I είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το

$$N_{m,B_1,\ldots,B_m} := \bigcup_{t_1,\ldots,t_m \in I} N_{m,t_1,\ldots,t_m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B},$$

με $t_1, \ldots, t_m$ διακριτά στοιχεία του I, είναι στοιχείο της $\mathfrak{B}$.
Επίσης

$$\begin{aligned} P_\Theta(N_{m,B_1,\ldots,B_m}) &= P_\Theta\left(\bigcup_{t_1,\ldots,t_m \in I} N_{m,t_1,\ldots,t_m,B_1,\ldots,B_m}\right) \\ &\leq \sum_{t_1,\ldots,t_m \in I} P_\Theta(N_{m,t_1,\ldots,t_m,B_1,\ldots,B_m}) = 0, \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από τη Πρόταση 1.2.3 (d) του [5].
Άρα $P_\Theta(N_{m,B_1,\ldots,B_m}) = 0$, δηλαδή $N_{m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B}_0$. Έτσι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$, η σχέση (4.12) ικανοποιείται για κάθε $\theta \notin N_{m,B_1,\ldots,B_m}$.

(b) Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ ώστε να ισχύει η σχέση (4.12) για κάθε $\theta \notin N$. Η απόδειξη γίνεται όπως ακριβώς στο βήμα (b) της απόδειξης του Λήμματος 4.3.1. Το αντίστροφο είναι προφανές. $\square$

Η εκφώνηση του παρακάτω αποτελέσματος είναι η Παρατήρηση 3.2.3, (b) της [3]. Παραθέτουμε αναλυτική απόδειξη.

***Λήμμα* 4.3.3.** Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας στο Σ και έστω $I \subseteq \mathbb{R}_+$, η $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι μια σ.δ. και $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική της διύλιση. Τότε η $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει $Q-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$ ισχύει

$$\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_t - X_s)] = Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_t - X_s)]. \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει $Q-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Τότε ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ η τ.μ. $X_t - X_s$ είναι $Q-$ανεξάρτητη της $\sigma-$άλγεβρας $\mathcal{F}_s$. Άρα η $f(X_t - X_s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ για κάθε συνάρτηση f όπως παραπάνω, γεγονός που μας δίνει ότι η $f(X_t - X_s)$ είναι $Q-$ανεξάρτητη της χ_A για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$, και

$$\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{E}_Q[\chi_A]\mathbb{E}_Q[f(X_t - X_s)] = Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_t - X_s)],$$

για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ και για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η σχέση (4.13) για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$, για κάθε $A \in$

$\mathcal{F}_s$ και για οποιαδήποτε συνάρτηση f όπως παραπάνω. Τότε έπεται ότι η $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει $Q-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις, καθώς αποδεικνύεται με επαγωγή ότι

$$Q\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^{m} Q(\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \in B_j\}), \tag{4.14}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 2$, για κάθε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m \in I$ και για κάθε σύνολο Borel $B_1, \ldots, B_m$.

Πράγματι, για $m = 2$ για κάθε $s = t_1 \leq t_2 = t$, $A = X_{t_1}^{-1}(B_1)$ και $f = \chi_{B_2}$ με $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q[\chi_{X_{t_1}^{-1}(B_1)}\chi_{B_2}(X_{t_2} - X_{t_1})] \\
&\quad = \mathbb{E}_Q[\chi_{X_{t_1}^{-1}(B_1)}\chi_{(X_{t_2}-X_{t_1})^{-1}(B_2)}] \\
&\quad = \mathbb{E}_Q[\chi_{X_{t_1}^{-1}(B_1)\cap(X_{t_2}-X_{t_1})^{-1}(B_2)}] \\
&\quad = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap (X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)]
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}_Q[\chi_{X_{t_1}^{-1}(B_1)}\chi_{B_2}(X_{t_2} - X_{t_1})] = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap (X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)]. \tag{4.15}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]\mathbb{E}_Q[\chi_{B_2}(X_{t_2} - X_{t_1})] \\
&\quad = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]\mathbb{E}_Q[\chi_{(X_{t_2}-X_{t_1})^{-1}(B_2)}] \\
&\quad = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]Q[(X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)],
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]\mathbb{E}_Q[\chi_{B_2}(X_{t_2} - X_{t_1})] = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]Q[(X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)]. \tag{4.16}$$

Οπότε από τις σχέσεις (4.15), (4.16) και την (4.13) συνεπάγεται

$$Q[X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap (X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)] = Q[X_{t_1}^{-1}(B_1)]Q[(X_{t_2} - X_{t_1})^{-1}(B_2)],$$

δηλαδή ισχύει η σχέση (4.14) για $m = 2$.

• Έστω ότι ισχύει η (4.14) για κάποιο $m \geq 2$, για κάποια $t_1, \ldots, t_m \in I$ και $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$.

Για $s = t_m \leq t_{m+1} = t$, $A = \bigcap_{j=1}^{m}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j) \in \mathcal{F}_s)$ και $f = \chi_{B_{m+1}}$ με $B_{m+1} \in \mathfrak{B}$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})] &= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)} \cdot \chi_{B_{m+1}}(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})] \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)} \cdot \chi_{(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})}] \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j) \cap (X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})} \\
&= Q[\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j) \cap (X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})]
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})] = Q[\bigcap_{j=1}^{m+1} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)]. \tag{4.17}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})] \\
&\quad = Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)}]\mathbb{E}_Q[\chi_{(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})}] \\
&\quad = Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)}] \cdot Q[(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})].
\end{aligned}$$

Άρα

$$Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})] = Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^m (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)}] \cdot Q[(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})]. \tag{4.18}$$

Από τις σχέσεις (4.17), (4.18) και την (4.13) προκύπτει

$$\begin{aligned}
&Q[\bigcap_{j=1}^{m+1} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)] \\
&\quad = Q[\bigcap_{j=1}^{m} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j) \cdot Q\left((X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})\right)] \\
&\quad \overset{(\Upsilon.E)}{=} \prod_{j=1}^{m} Q[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)] \cdot Q[(X_{t_{m+1}} - X_{t_m})^{-1}(B_{m+1})] \\
&\quad = \prod_{j=1}^{m+1} Q[(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{-1}(B_j)].
\end{aligned}$$

□

Η παρακάτω πρόταση είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.2.5 της [3]. Παρατίθεται αναλυτική απόδειξη.

Πρόταση 4.3.4. Η σ.δ. $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin N$.

Απόδειξη. **(a)** Έστω $\mathcal{Z}_s := \sigma(\{N_u\}_{u\in\mathbb{Q}_+, u\leq s})$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Τότε $\mathcal{A}_s = \mathcal{Z}_s$.
Πράγματι, αρχικά θεωρούμε ένα $s \in \mathbb{R}_+$ αυθαίρετο. Επειδή η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει δεξιά συνεχείς τροχιές, λόγω της ιδιότητας $(n3)$, και επειδή το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, λαμβάνουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ με $u \leq s$ υπάρχει μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ τέτοια ώστε $u_n \downarrow u$ και $N_u = \lim_{n\to\infty} N_{u_n}$. Συνεπώς, η τ.μ N_u για $u \leq s$ είναι μια $\mathcal{Z}_s-$μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο $\mathcal{Z}_s-$μετρήσιμων συναρτήσεων. Άρα το $\sigma(N_u) \subseteq \mathcal{Z}_s$ για κάθε $u \leq s$, γεγονός που σημαίνει ότι $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{Z}_s$. Αυτό αποδεικνύει το (a), εφόσον ο αντίθετος εγκλεισμός είναι προφανής.

(b) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $\mathcal{A}_s = \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+, s'>s} \mathcal{A}_{s'}$.
Πράγματι, έστω $A \in \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+, s'>s} \mathcal{F}_{s'}$. Ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι $A \in \mathcal{A}_{s'}$ για κάθε $s' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' > s$, το οποίο λόγω του γεγονότος ότι το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, ισοδύναμα μας δίνει ότι $A \in \mathcal{A}_u$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ με $u > s$ ή ότι $A \in \bigcap_{u>s, u\in\mathbb{R}_+} \mathcal{A}_u = \mathcal{A}_s$, όπου η ισότητα ισχύει επειδή η κανονική διύλιση $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχής, (βλ. π.χ. [25], Theorem 25).
Αντιστρόφως, έστω ότι $A \in \mathcal{A}_s$. Ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι $A \in \mathcal{A}_{s'}$ για κάθε $s' \in \mathbb{R}_+$ με $s' > s$, αφού $\mathcal{A}_s \in \mathcal{A}_{s'}$ και ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι $A \in \mathcal{A}_{s'}$ για κάθε $s' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' > s$. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι το $A \in \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+, s'>s} \mathcal{A}_{s'}$. Άρα $\mathcal{A}_s \subseteq \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+, s'>s} \mathcal{A}_{s'}$. Έτσι αποδεικνύεται το (b).

Έστω ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(c) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 2$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta\right) = \prod_{j=1}^{m} P(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}|\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

για οποιαδήποτε διάφορα μεταξύ τους $t_0, t_1, \ldots, t_m$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \in \mathbb{Q}_+$ και $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$.
Από το Λήμμα 4.3.2 έπεται ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin N$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{Q}_+}$ έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις, το οποίο μαζί με το Λήμμα 4.3.3 δίνει ισοδύναμα ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$, για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $A \in \mathcal{Z}_s$

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(N_t - N_s)] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_t - N_s)]. \tag{4.19}$$

(d) Αν λάβουμε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και αν γράψουμε τη σχέση (4.19) για $s', t' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' < t'$ και στη συνέχεια αφήσουμε $s' \downarrow s$ και $t' \downarrow t$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebegue, (βλ. Θεώρημα Α΄.2.5) λαμβάνουμε ότι για όλα τα $A \in \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+, s'>s} \mathcal{A}_{s'} \overset{(b)}{=} \mathcal{A}_s$ και για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η σχέση (4.19) είναι αληθής.

Πράγματι, έστω συνάρτηση f όπως παραπάνω και θεωρούμε δύο ακολουθίες $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ τέτοιες ώστε $s_n \downarrow s$ και $t_n \downarrow t$. Θεωρούμε επίσης ένα σύνολο $A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{s_n} \overset{(b)}{=} \mathcal{A}_s$. Τότε υπάρχει ένα $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ως εκ τούτου, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$ λαμβάνουμε ότι $|\chi_A(f \circ (N_{t_n} - N_{s_n}))|(\omega) = |\chi_A(\omega) f((N_{t_n} - N_{s_n})(\omega))| \leq M \in \mathcal{L}^1(P)$. Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebegue (βλ. Θεώρημα Α΄.2.5), για την ακολουθία $\{\chi_A(f \circ (N_{t_n} - N_{s_n}))\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. επάνω στο Ω ώστε να λάβουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(N_t - N_s)] &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(\lim_{n\to\infty}(N_{t_n} - N_{s_n}))] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \lim_{n\to\infty} f(N_{t_n} - N_{s_n})] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(N_{t_n} - N_{s_n})] = \lim_{n\to\infty} P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_{t_n} - N_{s_n})] \\
&= P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[\lim_{n\to\infty} f(N_{t_n} - N_{s_n})] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_t - N_s)],
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει διότι η $\{N_t\}$ έχει δεξιά συνεχείς τροχιές, η δεύτερη και η έκτη διότι η f είναι συνεχής, η τρίτη και η πέμπτη λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebegue (βλ. Θεώρημα Α΄.2.5) και η τέταρτη λόγω της σχέσης (4.19).
Άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $s \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$, για κάθε φραγμένη, συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και για κάθε $A \in \mathcal{Z}_s$ ισχύει η (4.19). Έτσι αποδεικνύεται το (d).

(e) Για κάθε Borel φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ υπάρχει μια ακολουθία $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\lim_{m\to\infty} \int \chi_A(|g_m - f| \circ (N_t - N_s))dP_\theta = 0$$

για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}_s$.
Πράγματι, έστω $s, t \in \mathbb{R}_+$ αυθαίρετα με $s < t$. Έστω επίσης μία συνάρτηση f όπως παραπάνω. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία φραγμένη συνεχής συνάρτηση $g_m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int |g_m - f| d(P_\theta)_{(N_t - N_s)} \leq \frac{1}{m}$ (βλ. π.χ. Proposition 415P του [17]). Συνεπώς λαμβάνουμε $\lim_{m\to\infty} \int (|g_m - f| \circ (N_t - N_s))dP_\theta = 0$, αποδεικνύοντας το (e).

(f) Για κάθε $A, \{g_m\}, s, t$ και f όπως στο (e) ισχύει

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \cdot (g_m(N_t - N_s))] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(N_t - N_s)]. \tag{4.20}$$

Πράγματι, από τη γνωστή ανισότητα

$$|\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A((g_m - f) \circ (N_t - N_s))]| \leq \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \cdot (|g_m - f| \circ (N_t - N_s))]$$

έπεται ότι

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} |\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A((g_m - f) \circ (N_t - N_s))]| \leq \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A(|g_m - f| \circ (N_t - N_s))] = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το (e). Άρα $\lim_{m\to\infty}|\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A((g_m - f)\circ(N_t - N_s))]| = 0$, ισοδύναμα $\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A(|g_m - f|\circ(N_t - N_s))] = 0$, ισοδύναμα ισχύει η (4.20).

(g) Η σχέση (4.19) ικανοποιείται για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$ και για κάθε συνάρτηση f όπως στο (c).

Πράγματι, έστω s, t, f και A όπως παραπάνω και $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ όπως στο (e). Τότε από το (f) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(N_t - N_s)] &\overset{(f)}{=} \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A g_m(N_t - N_s)] \overset{(d)}{=} \lim_{m\to\infty} P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[g_m(N_t - N_s)] \\ &\overset{(f)}{=} P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_t - N_s)].\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου από το Λήμμα 4.3.3 λαμβάνουμε ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin N$.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$, ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin N$. Θα δείξουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Πράγματι, αν ισχύει η παραπάνω υπόθεση, τότε για κάθε $\theta \notin N$ και για κάθε $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B} \quad (m \in \mathbb{N}^* \setminus 1)$ ισχύει

$$P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^m P_\theta(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\})$$

Συνεπώς για κάθε $D \in \mathfrak{B}$

$$\int_D P_\theta\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) P_\Theta(d\theta) = \int_D \prod_{j=1}^m P_\theta(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}) P_\Theta(d\theta),$$

ισοδύναμα

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_\bullet\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}\right) \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^m P_\theta(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\}) \circ \Theta dP,$$

ισοδύναμα λόγω του Λήμματος 3.2.1 (i), με

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\} | \Theta\right) dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^m P_\theta(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\} | \Theta) dP,$$

ισοδύναμα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\} | \Theta\right) = \prod_{j=1}^m P_\theta(\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \in B_j\} | \Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

δηλαδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις. $\square$

Παρατήρηση 4.3.5. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 είναι $P-$ισόνομες αν και μόνο αν για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbb{E}_P[f(X_1)] = \mathbb{E}_P[f(X_2)]$.

Πράγματι, εφαρμόζοντας την παραπάνω ισότητα για $f = \chi_B$ και για οποιοδήποτε $B \in \mathfrak{B}$ άμεσα λαμβάνουμε ότι $P_{X_1} = P_{X_2}$. Αντιστρόφως, έστω ότι οι X_1 και X_2 είναι $P-$ισόνομες. Επομένως $P_{X_1}(f^{-1}(C)) = P_{X_2}(f^{-1}(C))$ για κάθε $C \in \mathfrak{B}$, δεδομένου ότι η f είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Ως εκ τούτου $P_{f(X_1)} = P_{f(X_2)}$ και άρα $\mathbb{E}_P[f(X_1)] = \mathbb{E}_P[f(X_2)]$. $\square$

Τα παρακάτω δύο αποτελέσματα είναι ειδικές περιπτώσεις του Λήμματος 3.2.7 και του Πορίσματος 3.2.8 της [3], αντίστοιχα.

Λήμμα 4.3.6. Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ισόνομες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $M \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\theta \notin M$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$ισόνομες προσαυξήσεις.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $M \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\theta \notin M$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$ισόνομες προσαυξήσεις. Έστω ένα αυθαίρετο $\theta \notin M$ καθώς $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, $u < v$ με $t - s = v - u$ και έστω ότι οι προσαυξήσεις $N_t - N_s$ και $N_v - N_u$ είναι $P_\theta-$ ισόνομες. Τότε

$$P_\theta((N_t - N_s)^{-1}(B)) = P_\theta((N_v - N_u)^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.1 (i), έχουμε ισοδύναμα ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει η ισότητα $P_{N_t-N_s|\Theta}(B) = P_{N_v-N_u|\Theta}(B)$ $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$, δηλαδή ότι οι προσαυξήσεις $N_t - N_s$ και $N_v - N_u$ είναι $P-$υπό συνθήκη ισόνομες. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο. Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $s, t, u, v, \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, $u < v$ και $t - s = v - u$ οι προσαυξήσεις $N_t - N_s$ και $N_v - N_u$ είναι $P-$υπό συνθήκη ισόνομες. Δεδομένου ότι $\mathbb{Q}_+$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και η $\mathfrak{B}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, μπορεί να αποδειχθεί, όπως και στο Λήμμα 4.3.1 ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $M \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\theta \notin M$ έχουμε $P_\theta((N_t - N_s)^{-1}(B)) = P_\theta((N_v - N_u)^{-1}(B))$ για κάθε $s, t, u, v, \in Q_+$ με $t - s = v - u$ και $s < t$, $u < v$. Τότε από τη Παρατήρηση 4.3.5 έπεται ότι για όλα τα $\theta \notin M$ ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_t - N_s)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[f(N_v - N_u)], \tag{4.21}$$

για κάθε $s, t, u, v \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$, $u < v$ με $t - s = v - u$ και για κάθε Borel φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Ακολουθώντας τώρα την ίδια λογική με εκείνη στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.4, λαμβάνουμε ότι η σχέση (4.21) ισχύει για κάθε $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, $u < v$ με $t - s = v - u$ και για κάθε συνάρτηση f όπως παραπάνω, το οποίο λόγω της Παρατήρησης 4.3.5 ισοδυμανεί με το γεγονός ότι $N_t - N_s$ και $N_v - N_u$ είναι $P_\theta-$ισόνομα για όλα τα $\theta \notin M$. $\square$

Πόρισμα 4.3.7. Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει και P-υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$στάσιμες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin L$, δηλαδή $(P_\theta)_{N_{t+h}-N_t} = (P_\theta)_{N_h}$, για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Έστω επίσης ότι έχει και $P-$υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις, δηλαδή ότι $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$. Από το Λήμμα 4.3.6, η ισότητα αυτή ισοδυναμεί με το γεγονός ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $M \in \mathfrak{B}$, ώστε για κάθε $\theta \notin M$ να ισχύει η ισότητα $P_\theta \circ (N_{t+h} - N_t)^{-1} = P_\theta \circ N_h^{-1}$ για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$. Αφού σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.4, υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin N$, η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα έχει $P_\theta-$στάσιμες προσαυξήσεις για όλα τα $\theta \notin L := M \cup N$. $\square$

Λήμμα 4.3.8. (βλ. [3], Λήμμα 3.2.9). Έστω μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με δεξιά συνεχείς τροχές έτσι ώστε ή όλες οι τ.μ. X_t να είναι διακριτές ή όλες να είναι απόλυτα συνεχείς με σ.(π).π. $f_{X_t}(\cdot, \Theta)$ για $t \in \mathbb{R}_+$. Έστω ότι η συνάρτηση $(y, \theta) \longmapsto f_{X_t} y, \theta)$ είναι $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}-$μετρήσιμη, και έστω $\mathbf{K}_t(\Theta)(B) := \int_B f_{X_t}(y, \Theta)\nu(dy)$, $\mathbf{K}_t(\theta)(B) := \int_B f_{X_t}(y, \theta)\nu(dy)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ και $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $t \longmapsto \mathbf{K}_t(\theta)$ να είναι δεξιά συνεχής για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ και $\theta \in \mathbb{R}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_t|\Theta} = \mathbf{K}_t(\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$,

(ii) υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} \in \mathfrak{B}$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$

$$(P_\theta)_{X_t} = \mathbf{K}_t(\theta) \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή **(ii)$\Longrightarrow$(i):** είναι προφανής.

(i)$\Longrightarrow$(ii): Έστω ότι η (i) ικανοποιείται από τη διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4.6 του [5] καθώς και το Λήμμα 3.2.1 (ii), λαμβάνουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B, D \in \mathfrak{B}$ έχουμε

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_{X_t|\Theta}(B)dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \int_B f_{X_t}(y, \Theta)\nu(dy)dP$$

όπου ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$, αν κάθε X_t είναι μια διακριτή τ.μ., ή είναι το μέτρο Lebesgue λ στο $\mathbb{R}$, αν κάθε X_t είναι απόλυτα συνεχής.

Η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με το γεγονός ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει ένα $P-$μηδενικό σύνολο $M_t \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη

$$P_{X_t|\Theta}(B,\omega) = \mathbf{K}_t(\Theta)(B)(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad \omega \notin M_t.$$

Άρα από το Λήμμα 3.2.1 (i), έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_t \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_t$ λαμβάνουμε $P_\theta(X_t^{-1}(B)) = \mathbf{K}_t(\theta)(B)$. Ως εκ τούτου μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \widetilde{L}_t \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$ και για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε

$$P_\theta(X_t^{-1}(B)) = \mathbf{K}_t(\theta)(B). \tag{4.22}$$

Έστω $\theta \notin \widetilde{L}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Αφού οι τροχιές της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχείς και το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, έπεται ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ τέτοια ώστε $q_n \downarrow t$ και $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{q_n}$. Το τελευταίο μαζί με τη σχέση (4.22) συνεπάγεται ότι $(P_\theta)_{X_t} = \lim_{n\to\infty}(P_\theta)_{X_{q_n}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{K}_{q_n}(\theta) = \mathbf{K}_t(\theta)$ (βλ. π.χ. [6], Theorem 2.5.1 και Proposition 9.1.1 για την πρώτη και τελευταία ισότητα), το οποίο αποδεικνύει το (i). □

Από την ακόλουθη πρόταση οι $P-$μεμειγμένες σ.δ. Poisson (P-MPP) μετατρέπονται μέσω μιας disintegration σε συνήθεις σ.δ. Poisson.

Πρόταση 4.3.9. (βλ. [3], Πρόταση 3.2.11 και [23], Proposition 4.4). Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P - MPP$ με παράμετρο Θ αν και μόνο αν υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L' \in \mathfrak{B}$, ώστε για κάθε $\theta \notin L'$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μία $P_\theta - PP$ με παράμετρο θ.

Απόδειξη. Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P - MPP$ με παράμετρο Θ, δηλαδή με $P-$υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.8 η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} \in \mathfrak{B}$ ώστε

$$P_\theta \circ N_t^{-1} = \mathbf{P}(t\theta) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \notin \widetilde{L} \quad \text{και για κάθε} \quad t \in (0,\infty). \tag{4.23}$$

Έπειτα λόγω του Πορίσματος 4.3.7 και της Πρότασης 4.3.4, το γεγονός ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P-$υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L \in \mathfrak{B}$, ώστε για κάθε $\theta \notin L$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.23), ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P_\theta - PP$ με παράμετρο θ για όλα τα $\theta \notin L' := \widetilde{L} \cup L$. □

Κεφάλαιο 5

Σύνθετες μεμειγμένες σ.δ. Poisson

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά δίνεται ένας χαρακτηρισμός των σύνθετων μεμειγμένων διαδικασιών Poisson μέσω disintegrations. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται στο κύριο Θεώρημα του κεφαλαίου (Θεώρημα 5.3.7), που δίνει μία θετική απάντηση στο παρακάτω πρόβλημα: αν η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του ύψους των συνολικών απαιτήσεων είναι σύνθετη μεμειγμένη Poisson κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, να χαρακτηριστούν όλα τα μέτρα πιθανότητας Q που είναι προοδευτικά ισοδύναμα με το P και κάτω από τα οποία η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παραμένει σύνθετη μεμειγμένη Poisson. Το εν λόγω πρόβλημα έχει λυθεί στο [3] σε μία πολύ γενική μορφή, ενώ εδώ δίνεται μία λύση για μία ειδικότερη περίπτωση, όπου η συνάρτηση β είναι της μορφής $\beta(x) = \alpha + \gamma(x)$ (βλ. Συμβολισμός 5.2.2), ενώ στο [3] η β είναι της μορφής $\beta(\theta, x) = \alpha(\theta) + \gamma(x)$ (βλ. [3], Συμβολισμός 7.1.2).

5.1 Ένας χαρακτηρισμός των σύνθετων μεμειγμένων σ.δ. Poisson

Για τον ακόλουθο ορισμό βλέπε επίσης [28], Chapter 6, σελ. 127.

Ορισμός 5.1.1. Ένα ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ ονομάζεται **σ.δ. κινδύνου** επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) ή **$P - \sigma$.δ κινδύνου** αν

($R1$) η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,

($R2$) η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων υπό το P (P-i.i.d για συντομία) τυχαίων μεταβλητών, με μια κοινή κατανομή πιθανότητας P_{X_1} και

($R3$) το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι ανεξάρτητο υπό το P.

Ορισμός 5.1.2. Αν $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μια $P-$ σ.δ. κινδύνου, τότε η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, που επάγεται από το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$, ονομάζεται **σύνθετη μεμειγμένη σ.δ. Poisson** με παραμέτρους Θ και P_{X_1} επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) (ή για συντομία $P-CMPP(\Theta, P_{X_1})$), αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P-MPP(\Theta)$ (βλ. π.χ. [19], σελ. 207-208).
Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$, τότε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **σύνθετη σ.δ. Poisson** επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) με παραμέτρους θ_0 και P_{X_1} (ή διαφορετικά για συντομία $P-CPP$).

Οι ακόλουθες συνθήκες θα αξιοποιηθούν στη μελέτη των $CMPPs$:

$(a1)$ Οι σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$υπό συνθήκη μεταξύ τους ανεξάρτητες.

$(a2)$ Οι τ.μ. Θ και X_n $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$ είναι $P-$(μή υπό συνθήκη) ανεξάρτητες.

$(a3)$ Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ των μεγεθών της απαίτησης είναι $P-$υπό συνθήκη $i.i.d.$

Κατόπιν, όποτε ισχύει η συνθήκη $(a1), (a2)$ και $(a3)$, θα γράφουμε ότι η τετράδα $(P, \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \Theta)$ ή το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί αντιστοίχως, τις συνθήκες $(a1), (a2)$ και $(a3)$.

Από εδώ και κάτω, μέχρι το τέλος του Κεφαλαίου 5, θεωρούμε $\Upsilon := (0, \infty)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P πάνω στο Q συνεπής με την Θ.

Λήμμα 5.1.3. (βλ. [3], Λήμμα 6.2.1).

(i) Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- (a) Η συνθήκη $(a1)$,
- (b) οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$υπό συνθήκη μεταξύ τους ανεξάρτητες,
- (c) οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P_\theta-$μεταξύ τους ανεξάρτητες για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

(ii) Η συνθήκη $(a2)$ συνεπάγεται ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-i.i.d.$ αν και μόνο αν είναι $P-$υπό συνθήκη $i.i.d.$ αν και μόνο αν είναι $P_\theta - i.i.d.$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

(iii) Από τις συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$ έπεται ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μια $P-$ σ.δ. κινδύνου αν και μόνο αν είναι μια $P_\theta -$ σ.δ. κινδύνου για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

(iv) Αν το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1), (a2)$ και $(a3)$, τότε το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μια $P_\theta -$ σ.δ. κινδύνου για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

Απόδειξη.(i) Αρχικά σημειώνουμε ότι $\sigma(\{T_k\}_{k\in\{0,\ldots,n\}}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ (βλ. [28], Lemma 1.1.1) γεγονός που έπεται ότι $\sigma(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει άμεσα από το [28], Lemma 2.1.3. Άρα το (b) συνεπάγεται το (a). Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα καθώς

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \le t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\{T_n \le t < T_{n+1}\}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\{\sum_{k=1}^{n} W_k \le t < \sum_{k=1}^{n+1} W_k\}} \tag{5.1}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [28], Theorem 2.1.1 και Lemma 2.1.2). Η ισοδυναμία των (a) και (c) έπεται από το [28], Lemma 4.1.

(ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη $(a2)$ και ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$ανεξάρτητη. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$, για αυθαίρετα και διακριτά $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε ακολουθία $\{C_l\}_{l\in\mathbb{N}_k}$ στο $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι $P\left(\bigcap_{l\in\mathbb{N}_k}\{X_{n_l} \in C_l\}\right) = \prod_{l\in\mathbb{N}_k} P(\{X_{n_l} \in C_l\})$, το οποίο λόγω της συνθήκης $(a2)$ συνεπάγεται ότι

$$P\left(\bigcap_{l\in\mathbb{N}_k}\{X_{n_l} \in C_l\}|\Theta\right) = \prod_{l\in\mathbb{N}_k} P(\{X_{n_l} \in C_l\}|\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.,$$

δηλαδή ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Αλλά η τελευταία συνθήκη μαζί με το Λήμμα 4.3.1 ισοδυναμεί με το ότι η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

Επί πλέον, λόγω της συνθήκης $(a2)$, το γεγονός ότι όλες οι τ.μ. X_n είναι $P-$ισόνομα κατανεμημένες ισοδυναμεί με το γεγονός ότι είναι $P-$υπό συνθήκη ισόνομα κατανεμημένες, το οποίο μαζί με το Λήμμα 3.2.1 (i), έπεται ότι είναι και $P_\theta-$ισόνομα κατανεμημένες για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

(iii) Η ισχύς της συνθήκης $(R1)$ στο $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$ προκύπτει άμεσα για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Σε περίπτωση που $\Omega_N \neq \emptyset$, για να δείξουμε τη συνθήκη $(R1)$, δηλαδή ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $P_\theta-\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων για P_Θ-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$, αρκεί να ελεγχθεί αν για το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης Ω_N της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισοδύναμα λαμβάνουμε ότι

$$P_\theta(\Omega_N) = 0 \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

Αλλά δεδομένου ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του P επάνω στο P_Θ, αυτό προκύπτει άμεσα από τη $(d2)$. Αν το $\Omega_N = \emptyset$ τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε κάτι.

Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$ καθώς επίσης και ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $P_\theta - \sigma$.δ κινδύνου για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Τότε από το (ii) συνεπάγεται η συνθήκη $(R2)$ για το χ.π. $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ αν και μόνο αν ισχύει για το χ.π. (Ω, Σ, P). Να σημειωθεί επίσης ότι σύμφωνα με το (i), η συνθήκη $(R3)$ για το χ.π. $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$, ισοδυναμεί με τη συνθήκη $(a1)$, η οποία μαζί με τη συνθήκη $(a2)$ αποδεικνύουν την ισχύ της $(R3)$ για το χ.π. (Ω, Σ, P). Κατά συνέπεια το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $P-$σ.δ. κινδύνου. Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια των (i) και (ii).

(iv) Έστω ότι το P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1), (a2)$ και $(a3)$. Όμως οι δύο τελευταίες συνθήκες, σύμφωνα με το (ii) συνεπάγονται τη συνθήκη $(R2)$ για το χ.π. $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Επί πλέον, από την (i) έπεται ότι ισχύει η $(R3)$ για το χ.π. $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Άρα το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $P_\theta -$ σ.δ. κινδύνου για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \mathbb{R}$. □

Θεώρημα 5.1.4. (βλ. [3], Θεώρημα 6.2.2). Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$. Τότε η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P - CMPP(\Theta, P_{X_1})$ αν και μόνο αν είναι μία $P_\theta - CPP(\theta, (P_\theta)_{X_1})$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

Απόδειξη. Έστω ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P - CMMP(\Theta, P_{X_1})$, το οποίο ισοδυναμεί με το γεγονός ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $P-$σ.δ. κινδύνου και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία $P - MPP(\Theta)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.3, (iii) και την Πρόταση 4.3.9, το τελευταίο ισοδυναμεί με το ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $P_\theta -$ σ.δ. κινδύνου και αντίστοιχα ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P_\theta -$ σ.δ. Poisson με παράμετρο θ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$, που ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P_\theta - CPP(\theta, (P_\theta)_{X_1})$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. □

5.2 Δύο εκθετικά martingales

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται δύο στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν ευρέως και θα δείξουμε επίσης πως οι δύο αυτές διαδικασίες είναι και martingales (βλ. Πρόταση 5.2.7). Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τις ακόλουθες έννοιες. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα της Ενότητας 5.2, όπως και της 5.3, είναι ειδικές περιπτώσεις των αποτελεσμάτων των Ενοτήτων 7.1 και 7.2 της [3], αντίστοιχα.

Θεωρούμε $I = \mathbb{R}_+$. Μία τ.μ. $T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ ονομάζεται **χρόνος διακοπής** ως προς τη διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ή διαφορετικά ένας $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}-$**χρόνος διακοπής**) αν και μόνο αν $\{T \leq t\} \in \Sigma_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Η τιμή μιας σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σε ένα χρόνο διακοπής T, είναι η τ.μ. X_T που ορίζεται ως $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (βλ. π.χ [21], Chapter 1, Definitions 2.1 και 1.15 αντίστοιχα).

Επί πλέον, η $\Sigma_T := \{A \in \Sigma : A \cap \{T \leq t\} \in \Sigma_t \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+\}$ είναι η $\sigma-$**άλγεβρα**

των γεγονότων που ορίζονται πριν από το χρόνο διακοπής T (βλ. π.χ. [21], Chapter 1, Definition 2.12).

Στη συνέχεια θεωρούμε μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση $x \longmapsto \beta(x)$ από το Υ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε τη συνάρτηση $S_t^{(\beta)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω της

$$S_t^{(\beta)}(\omega) := \sum_{k=1}^{N_t(\omega)} \beta(X_k)(\omega).$$

Επίσης, ορίζουμε $\widetilde{\mathcal{H}}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, με $\widetilde{\mathcal{H}} := \{\widetilde{\mathcal{H}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συμβολίζουμε την κανονική διύλιση της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ των συνολικών απαιτήσεων, και θέτουμε $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty := \sigma(\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$. Τότε, $\widetilde{\mathcal{H}}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Αν $\mathcal{H}_t := \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ τότε $\mathcal{H} := \{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διύλιση για το (Ω, Σ). Επιπλέον, έχουμε $\mathcal{H}_\infty := \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\infty \cup \sigma(\Theta))$.

Παρατηρήσεις 5.2.1. (a) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ οι τυχαίες μεταβλητές N_t είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρήσιμες. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οι τ.μ. W_n και T_n είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρήσιμες (βλ. [3], Παρατηρήσεις 7.1.1, (a)).
(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ οι τυχαίες μεταβλητές X_{N_t} είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t-$μετρήσιμες και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η τ.μ. X_n είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_{T_n}-$μετρήσιμη (βλ. [3], Παρατηρήσεις 7.1.1, (b)).
(c) Από το (b) άμεσα προκύπτει ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ οι τ.μ. $S_t^{(\beta)}$ είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t-$μετρήσιμες, άρα και $\mathcal{H}_t-$ και $\mathcal{H}_\infty-$μετρήσιμες.

Συμβολισμός και Παρατήρηση 5.2.2. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Με $\mathcal{F}_{P,a} := \mathcal{F}_{P,X_1,a}$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων β επάνω στο Υ, ώστε $\beta(x) = \alpha + \gamma(x)$ για κάθε $x \in \Upsilon$, όπου γ είναι μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση επάνω στο Υ με $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathbb{E}[e^{\gamma(X_1)}] = 1$. Για $a = 0$ θέτουμε $\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_{P,0}$. Η κλάση $\mathcal{F}_{P,\alpha}$ είναι μία γνήσια υποκλάση της $\mathcal{F}_P$ που ορίζεται στην [3], Συμβολισμός και Παρατηρήσεις 7.1.2. Οι συναρτήσεις β, που είναι τα στοιχεία της $\mathcal{F}_P$, εξαρτώνται από δύο μεταβλητές θ και x, ενώ τα στοιχεία της $\mathcal{F}_{P,\alpha}$ εξαρτώνται μόνο από το x.
Αν η $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ τότε υπάρχει ένα $P_\theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{D} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ να ισχύει $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P_\theta)$. Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}]P_\Theta(d\theta) &= \int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_{P_\bullet}[e^{\beta(X_1)}] \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}|\Theta]dP \\ &= \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{\beta(X_1)}dP \leq \int_\Omega e^{\beta(X_1)}dP < \infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 3.2.1 (i), η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τη σχέση $\Theta^{-1}(B) \subseteq \Omega$ και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$. Αφού $\int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}]P_\Theta(d\theta) < \infty$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{D} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ να ισχύει $\int e^{\beta(X_1)}dP_\theta < \infty$, δηλαδή $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P_\theta)$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.1, από την $P-$ολοκληρωσιμότητα της β έπεται η $P_\theta-$ολοκλη -ρωσιμότητα της β για $P_\theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ (βλ. [3], Συμβολισμός και Παρατήρηση 7.1.2).

Λήμμα 5.2.3. Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$, $(a2)$ και $(a3)$. Εάν η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-MPP(Θ), τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $r > 0$ έχουμε

$$\mathbb{E}_P[e^{rS_t^{(\beta)}}|\Theta] = e^{t\Theta\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1)}-1]} \quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta,$$

όπου β είναι μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση από το Υ στο $\mathbb{R}$ με $\beta(x) = \alpha + \gamma(x)$, για κάθε $x \in \Upsilon$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\gamma : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι από τις συνθήκες $(a2)$ και $(a3)$ συνεπάγεται ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι επίσης $P-i.i.d.$. Από το Λήμμα 5.1.3(i) συνεπάγεται επίσης ότι η συνθήκη $(a1)$ ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$υπό συνθήκη μεταξύ τους ανεξάρτητες. Αλλά αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P-MPP(\Theta)$, έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[e^{rS_t^{(\beta)}}|\Theta] &= \mathbb{E}_P[e^{r\sum_{k=1}^{N_t}\beta(X_k)}|\Theta] = \mathbb{E}_P[\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{\{N_t=n\}}e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}|\Theta] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}_P[\chi_{\{N_t=n\}}e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}|\Theta] \\
&\stackrel{(a1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}_P[\chi_{\{N_t=n\}}|\Theta]\mathbb{E}_P[e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}|\Theta] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}P(\{N_t=n\}|\Theta)\mathbb{E}_P[e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}|\Theta] \\
&\stackrel{(a2),(a3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}e^{-t\Theta}\frac{(t\Theta)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1)}] = e^{-t\Theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\Theta\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1)}])^n}{n!} \\
&= e^{-t\Theta}e^{t\Theta\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1)}]} \\
&= e^{t\Theta\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1)}-1]},
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της σχέσης

$$e^{r\sum_{k=1}^{N_k}\beta(X_k)} = \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{\{N_t=n\}}e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}$$

που προκύπτει ως εξής:

Για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει ακριβώς ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\omega \in \{N_t = n_0\}$ και $\omega \notin \{N_t = n\}$ με

$n = n_0$ (αφού η $\{N_t = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαμέριση του Ω). Άρα

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)}\right)(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}}(\omega) e^{r\sum_{k=1}^{n}\beta(X_k)(\omega)}$$

$$= e^{r\sum_{k=1}^{n_0}\beta(X_k)(\omega)} = e^{r\sum_{k=1}^{N_t(\omega)}\beta(X_k)(\omega)} = \left(e^{r\sum_{k=1}^{N_t}\beta(X_k)}\right)(\omega)$$

$\square$

Παρατήρηση 5.2.4. Γενικά ισχύει $\mathbb{E}_P[e^{rS_t^{\beta}}|\Theta] \leq \infty$ για κάθε $r > 0$. Αν $r = 1$ και $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ τότε ισχύει $\mathbb{E}_P[e^{S_t^{(\beta)}}|\Theta] < \infty \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Έστω $id_\Omega \times \Theta : \Omega \longrightarrow \Omega \times \Upsilon$ η απεικόνιση που δίνεται μέσω της

$$(id_\Omega \times \Theta)(\omega) := (\omega, \Theta(\omega)) \quad \text{για κάθε} \quad \omega \in \Omega.$$

Σαφώς, η $id_\Omega \times \Theta$ είναι μία $\Sigma - \Sigma \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση, αφού $(id_\Omega \times \Omega)^{-1}(A \times B) = A \cap \Theta^{-1}(B) \in \Sigma$ για κάθε $A \times B \in \Sigma \times \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $M_t^{(\beta)} : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$M_t^{(\beta)}(\omega, \theta) := e^{S_t^{(\beta)}(\omega) - t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}-1]} \quad \text{για κάθε} \quad \omega \in \Omega \quad \text{και} \quad \theta \notin \widehat{D}, \tag{5.2}$$

και $M_t^{(\beta)}(\omega, \theta) := 0$ για κάθε $(\omega, \theta) \in \Omega \times \widehat{D}$, όπου $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$.

Συμβολίζουμε με $M_t^{(\beta)}(\theta)$ τη θ-τομή της $M_t^{(\beta)}$ και με $M_t^{(\beta)}(\Theta)$ τη σύνθεση της $M_t^{(\beta)}(\cdot)$ με τη $id_\Omega \times \Theta$. Τότε έχουμε

$$M_t^{(\beta)}(\theta) = e^{S_t^{(\beta)} - t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}-1]} \quad \text{για κάθε} \quad \theta \notin \widehat{D}. \tag{5.3}$$

και $M_t^{(\beta)}(\theta) = 0$ για κάθε $\theta \in \widehat{D}$ καθώς και

$$M_t^{(\beta)}(\Theta) = e^{S_t^{(\beta)} - t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}-1]}. \tag{5.4}$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 5.2.4 και 5.2.2 οι συναρτήσεις $M_t^{(\beta)}$, $M_t^{(\beta)}(\theta)$ και $M_t^{(\beta)}(\Theta)$ είναι καλά ορισμένες, δηλαδή παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$.

Η $\widetilde{\mathcal{H}}_t-$μετρησιμότητα της $M_t^{(\beta)}(\theta)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ έπεται από τη Παρατήρηση 5.2.1, (c), ενώ η $\mathcal{H}_t-$μετρησιμότητα της Θ και της N_t, για $t \in \mathbb{R}_+$, συνεπάγεται την $\mathcal{H}_t-$μετρησιμότητα της $M_t^{(\beta)}(\Theta)$.

Λήμμα 5.2.5. Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$, $(a2)$, $(a3)$ και $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$. Εάν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-MPP(Θ) τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] = 1 \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

(ii) $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)] = 1.$

(iii) $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)\chi_A M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[\xi(\bullet)\chi_A M_t^{(\beta)}(\bullet)] \circ \Theta \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$
για κάθε $\xi \in \mathcal{L}^1_+(P_\Theta)$.

(iv) $\int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP = \int \xi(\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta)$
για κάθε $\xi \in \mathcal{L}^1(P_\Theta)$.

(v) Υπάρχει ένα P_Θ−μηδενικό σύνολο $\widehat{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $\theta \notin \widehat{D}_*$.

Απόδειξη. (i): Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από τη σχέση (5.4) και το Λήμμα 5.2.3. Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] &= \mathbb{E}_P[e^{S_t^{(\beta)} - t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-1}]}|\Theta] \\
&= \mathbb{E}_P[e^{S_t^{(\beta)}} e^{-t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-1}]}|\Theta] \\
&= e^{-t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-1}]} \cdot \mathbb{E}_P[e^{S_t^{(\beta)}}|\Theta] \\
&= e^{-t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-1}]} \cdot e^{t\Theta\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)-1}]} = e^0 = 1,
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει διότι η τ.μ. Θ είναι $\sigma(\Theta)$−μετρήσιμη, ενώ η τέταρτη από το Λήμμα 5.2.3.
(ii): Για τον δεύτερο ισχυρισμό έχουμε

$$\mathbb{E}_P[M_t^{\beta}(\Theta)] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta]] \stackrel{(i)}{=} \mathbb{E}_P[1] = 1,$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τη Πρόταση 3.3.14 του [5].
(iii): Έστω $\xi \in \mathcal{L}^1_+(P_\Theta)$ και $\mu := P\circ(id_\Omega \times \Theta)^{-1}$. Αφού η $M_t^{(\beta)}$ είναι $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$−μετρήσιμη, έπεται ότι η $(\chi_A \times \xi)\cdot M_t^{(\beta)}$, όπου $(\chi_A \times \xi)(\omega,\theta) := \chi_A(\omega)\xi(\theta)$ για κάθε $(\omega,\theta) \in \Omega \times \Upsilon$, είναι $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$−μετρήσιμη. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int \chi_A \xi M_t^{(\beta)} d\mu &= \int (\chi_A \xi M_t^{(\beta)}) \circ (id_\Omega \times \Theta) dP = \int \chi_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP \\
&\leq \int \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP = \int \mathbb{E}_P[\xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] dP \\
&= \int \xi(\Theta)\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] dP \stackrel{(i)}{=} \int \xi(\Theta) dP = \int \xi dP_\Theta < \infty,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.6 του [5], γνωστό ως Θεώρημα Μετασχηματισμού Ολοκληρώματος ενώ για τη δεύτερη ισότητα για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει :

$$[(\chi_A \xi M_t^{(\beta)}) \circ (id_\Omega \times \Theta)](\omega) = [\chi_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)](\omega).$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
[(\chi_A \xi M_t^{(\beta)}) \circ (id_\Omega \times \Theta)](\omega) &= (\chi_A \xi M_t^{(\beta)})((id_\Omega \times \Theta)(\omega)) \\
&= [(\chi_{A\times\Upsilon}) \cdot (\xi(\Theta) \times \chi_\Upsilon) M_t^{(\beta)}](\omega, \Theta(\omega)) \\
&= \chi_{A\times\Upsilon}(\omega, \Theta(\omega)) \xi(\Theta(\omega)) M_t^{(\beta)}(\omega, \Theta(\omega)) \\
&= \chi_A(\omega) \chi_\Upsilon(\Theta(\omega)) \xi(\Theta(\omega)) M_t^{(\beta)}(\omega, \Theta(\omega)) \\
&= \chi_A(\omega) \xi(\Theta(\omega)) e^{S_t^\beta(\omega) - t\Theta(\omega)\mathbb{E}_P[e^\beta(X_1)-1]} \\
&= \chi_A(\omega) \xi(\Theta)(\omega) M_t^{(\beta)}(\Theta)(\omega).
\end{aligned}
$$

Άρα $\chi_A \xi M_t^{(\beta)} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.2.4, (i) για $u = \chi_A \xi M_t^{(\beta)}$ και $f = \Theta$ για να πάρουμε την (iii).

(iv): Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP = \int \chi_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP &= \int\int \chi_A \xi(\bullet)[M_t^{(\beta)}]^\bullet dP_\bullet dP_\Theta \\
&= \int \mathbb{E}_{P_\bullet}[\chi_A \xi(\bullet)[M_t^{(\beta)}]^\bullet] dP_\Theta = \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \xi(\theta) M_t^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta),
\end{aligned}
$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη Πρόταση 3.2.4, (ii).

(v): Προφανώς η (v) δεν ισχύει για τα $\theta \in \widehat{D}$, αφού για κάθε $\theta \in \widehat{D}$ έχουμε $M_t^{(\beta)}(\theta) = 0$. Από την συνθήκη (iii) για $A = \Omega$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[M_t^{(\beta)}(\bullet)] \circ \Theta \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \\
&\overset{(i)}{\Longrightarrow} 1 = \mathbb{E}_{P_\bullet}[M_t^{(\beta)}(\bullet)] \circ \Theta \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \\
&\Longleftrightarrow \int_{\Theta^{-1}(B)} dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} (\mathbb{E}_{P_\bullet}[M_t^{(\beta)}(\bullet)] \circ \Theta) dP \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \\
&\Longleftrightarrow \int_B \chi_\Upsilon dP_\Theta = \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \\
&\Longleftrightarrow \exists \widehat{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \chi_\Upsilon(\theta) = \mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] \quad \text{για κάθε} \quad \theta \notin \widehat{D}_* \\
&\Longleftrightarrow \exists \widehat{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1 \quad \text{για κάθε} \quad \theta \notin \widehat{D}_*.
\end{aligned}
$$

Σαφώς πρέπει να ισχύει $\widehat{D} \subseteq \widehat{D}_*$. □

Το λήμμα που ακολουθεί είναι χρήσιμο για την απόδειξη του κυρίου αποτελέσματος αυτής της ενότητας, που είναι η Πρόταση 5.2.7.

Λήμμα 5.2.6. Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$, $(a2)$ και $(a3)$. Τότε υπάρχουν δύο $P_\Theta-$μηδενικά σύνολα V και $\widehat{Z}$ στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε αν $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν για οποιοδήποτε $\theta \notin V$ η διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε η $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(ii) Αν για οποιοδήποτε $\theta \notin \widehat{Z}$ η διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $P_\theta-$ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ οι $\sigma-$άλγεβρες $\sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$ και $\mathcal{H}_s$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητες.

Απόδειξη. (i) : Αφού το μέτρο P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$, $(a2)$ και $(a3)$ σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.3, (iv) υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $V \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin V$ το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μια $P_\theta-\sigma$.δ. κινδύνου, επομένως το ίδιο ισχύει για το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{\beta(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*})$. Συνεπώς, οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τηρούν τις προϋποθέσεις των [28], Theorems 5.1.2 και 5.1.3 για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V$ επάνω στο $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$. Ως εκ τούτου, προκύπτει το (i).
(ii) : Αρχικά σταθεροποιούμε αυθαίρετα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$. Για οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε

$$I_m := I_{m,s,t} := \{v^{(m)} = (v_0, \ldots, v_m) \in [s,t]^{m+1} : s = v_0 < v_1 < \ldots < v_{m-1} < v_m = t\}$$

και θεωρούμε $E_m := E_{s,t,m} := \{N_t - N_s = m\}$ για οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N}$. Τότε σημειώνουμε ότι αφού η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την $(n2)$ και η έκρηξη έχει υποτεθεί ότι είναι το κενό σύνολο έχουμε $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$, όπου τα E_m είναι ανά δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους.
$(\mathbf{a})$: $E_m = \bigcup_{v^m \in I_m} \bigcap_{j=1}^m \{N_{v_j} = N_{v_{j-1}} + 1\}$ για οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N}^*$.
Για την απόδειξη του (a) βλ. [3], απόδειξη του Λήμματος 7.1.6, (ii) (a).
$(\mathbf{b})$: Από το (a) έπεται ότι για οποιοδήποτε $\omega \notin E_0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ και $v^{(m)} \in I_m$ ώστε $N_{v_j}(\omega) = N_{v_{j-1}}(\omega) + 1 = N_s(\omega) + j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, γεγονός που συνεπάγεται ότι $(N_t - N_s)(\omega) = m$ και $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})(\omega) = X_{N_s(\omega)+j}(\omega)$. Άρα $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})|E_0^c = X_{N_s+j}|E_0^c$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$.
$(\mathbf{c})$: Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $V \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin V$, και για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ να υπάρχει $v^{(m)} \in I_m$ ώστε ο περιορισμός $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})|E_0^c$ για $j \in \{1, \ldots, m\}$ να είναι $P_\theta-$ανεξάρτητος του S_u για κάθε $0 \le u \le s$.
Για την απόδειξη του (c) βλ. [3], απόδειξη του Λήμματος 7.1.6, $(ii)(c)$.
$(\mathbf{d})$: Η οικογένεια $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})|E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι $P_\theta-$ ανεξάρτητη.
Πράγματι, η $P_\theta-$ ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της διαδικασίας $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνεπάγεται ότι για όλα τα $m \in \mathbb{N}^*$ και $v^{(m)} \in I_m$ η ακολουθία $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι $P_\theta-$ ανεξάρτητη. Ακολουθώντας τώρα το ίδιο σκεπτικό με το βήμα (c), μπορεί να δειχθεί ότι όλοι οι περιορισμοί $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})|E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι επίσης $P_\theta-$ ανεξάρτητοι.
$(\mathbf{e})$: Οι $\sigma-$άλγεβρα $\sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$ είναι $P_\theta-$ ανεξάρτητη της $\widetilde{H}_s$.
Πράγματι, από το βήμα (b) έως (d) έπεται ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ και $v^{(m)} \in I_m$ ώστε η οικογένεια $\{X_{N_s+j}|E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ να είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη και $P_\theta-$ανεξάρτητη του S_u για όλα

τα $0 \le u \le s$. Άρα και η $\{\beta(X_{N_s+j})|E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη, γεγονός που μαζί με τη συνθήκη $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)|E_0^c = \sum_{j=1}^m \beta(X_{N_s+j})|E_0^c$, που προκύπτει από το βήμα (b), συνεπάγονται ότι $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)|E_0^c$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη της S_u για όλα τα $0 \le u \le s$. Σημειώνουμε επίσης ότι από τη συνθήκη $E_0 = \{S_t - S_s = 0\} = \{(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) = 0\}$ έπεται ότι $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)|E_0 = 0|E_0$ για οποιοδήποτε $\theta \in \Upsilon$ και ότι ο περιορισμός $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)|E_0$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητος της S_u για όλα τα $0 \le u \le s$. Άρα το ίδιο θα ισχύει και για τη τ.μ. $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)$, το οποίο συνεπάγεται και το βήμα (e).

(f) : Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{Z} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{Z}$ η $\sigma-$άλγεβρα $\sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητη της $\mathcal{H}_s$.

Πράγματι, το βήμα (e) είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι για οποιοδήποτε $\theta \notin V$ η ισότητα

$$P_\theta(E \cap F) = P_\theta(E)P_\theta(F) \tag{5.5}$$

ισχύει για κάθε $E \in \sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}))$ και για κάθε $F \in \widetilde{H}_s$. Αλλά λόγω της συέπειας της $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ με τη τ.μ. Θ, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin Z_B$ να έχουμε $P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$. Μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Άρα για οποιοδήποτε $\theta \in B \cap Z^c$ και για κάθε $E \in \sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}))$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ λαμβάνουμε

$$P_\theta(E \cap \Theta^{-1}(B)) = P_\theta(E) = P_\theta(E)P_\theta(\Theta^{-1}(B)),$$

ενώ για οποιοδήποτε $\theta \in B^c \cap Z^c$ λαμβάνουμε $P_\theta(E \cap \Theta^{-1}(B)) = 0 = P_\theta(E)P_\theta(\Theta^{-1}(B))$. Άρα για καθε $\theta \notin Z$ η σχέση (5.5) ικανοποιείται για όλα τα $F \in \sigma(\Theta)$. Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\theta \notin \widehat{Z} := Z \cup V$ η σχέση (5.5) ικανοποιείται για κάθε $E \in \sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$ και κάθε $F \in \widetilde{H}_s \cup \sigma(\Theta)$.

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \notin \widehat{Z}$. Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_s$ την οικογένεια όλων των $F \in \mathcal{H}_s$ που ικανοποιούν την σχέση (5.5) για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$, τότε έχουμε ότι $\widetilde{H}_s \cup \sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{D}_s$. Επί πλέον, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{D}_s$ είναι μία κλάση Dynkin

Έπειτα, σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}^*$ και θέτουμε

$$\mathcal{G}_s := \{\bigcap_{k=1}^{n} C_k : C_k \in \mathcal{H}_s \cup \sigma(\Theta), n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Τότε για κάθε $G \in \mathcal{G}_s$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n και μία πεπερασμένη ακολουθία $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ στο $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)$ ώστε $G = \bigcap_{k=1}^n C_k$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε το $\{1, \ldots, n\}$ στα σύνολα

$$I_\Theta := \{k \in \mathbb{N}_n^* : C_k \in \sigma(\Theta)\} \quad \text{και} \quad I_F := \{k \in \mathbb{N}_n^* : C_k \in \mathcal{H}_s \backslash \sigma(\Theta)\}.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι οι κλάσεις $\mathcal{H}_s$ και $\sigma(\Theta)$ είναι κλειστές ως προς τις πεπερασμένες τομές γεγονός που σημαίνει ότι

$$\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k \in \sigma(\Theta) \quad \text{για} \quad C_k \in \sigma(\Theta) \tag{5.6}$$

και

$$\bigcap_{k\in I_H} C_k \in \mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{D}_s \quad \text{για} \quad C_k \in \mathcal{H}_s. \tag{5.7}$$

Τότε από τη σχέση (5.6) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $\Theta^{-1}(B) = \bigcap_{k\in I_\Theta} G_k$. Ως εκ τούτου λόγω της συνέπειας της $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ με τη Θ λαμβάνουμε για $P_\Theta-\sigma.o.$ τα $\theta \in \Upsilon$ και για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta))$ ότι

$$\begin{aligned} P_\theta(E\cap G) &= P_\theta\left(E \cap \Theta^{-1}(B) \cap (\bigcap_{k\in I_F} C_k)\right) = \chi_B(\theta) P_\theta\left(E \cap (\bigcap_{k\in I_F} C_k)\right) \\ &\overset{(5.7)}{=} \chi_B(\theta) P_\theta\left(\bigcap_{k\in I_F} C_k\right) P_\theta(E) = P_\theta\left(\Theta^{-1}(B) \cap (\bigcap_{k\in I_F} C_k)\right) P_\theta(E) \\ &= P_\theta(G) P_\theta(E). \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι η σχέση (5.5) ικανοποιείται για όλα τα $G \in \mathcal{G}_s$. Άρα $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{D}_s$. Το τελευταίο μαζί με το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. π.χ. [16], 136B) συνεπάγονται ότι $\mathcal{H}_s \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta) \cup \mathcal{G}_s) \subseteq \mathcal{D}_s$. Κατά συνέπεια, οι $\sigma-$άλγεβρες $\sigma((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}))$ και $\mathcal{H}_s$ είναι $P_\theta-$ανεξάρτητες για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. □

Πρόταση 5.2.7. (πρβλ. [3], Πρόταση 7.1.7). Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1), (a2)$ και $(a3)$. Εάν η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-MPP(Θ) και η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P - i.i.d$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ η διαδικασία $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P_\theta, \mathcal{H})-$martingale τέτοια ώστε $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Η διαδικασία $\{M_t^{(\beta)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P, \mathcal{H})-$martingale τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] = 1 = \mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)] \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

με την πρώτη ισότητα να ισχύει για $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ η $M_t^{(\beta)}(\theta)$ μαζί με τη $M_t^{(\beta)}(\Theta)$ είναι $\mathcal{H}_t-$μετρήσιμες. Επί πλέον από το Λήμμα 5.2.5 λαμβάνουμε $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ και επίσης ότι $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] = 1 = \mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, με την πρώτη ισότητα να ισχύει για $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι η ιδιότητα $(m3)$ ικανοποιείται από τη διαδικασία $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ και από τη διαδικασία $\{M_t^{(\beta)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για την απόδειξη της (i) και (ii), αντίστοιχα.

(i) : Το γεγονός ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-MPP(Θ) συνεπάγεται ότι έχει $P-$υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Από το Πόρισμα 4.3.7 και την Πρόταση 4.3.4 συνεπάγεται επίσης ότι έχει $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

Επιπλέον, η $P_\theta-$υπό συνθήκη ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μαζί με το Λήμμα 5.2.6, (ii), συνεπάγονται ότι για $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$, οι τ.μ. $e^{(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})}$ και χ_A είναι $P_\theta-$ανεξάρτητες για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Άρα

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] &\overset{(5.3)}{=} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta) e^{(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}) - (t-s)\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)} - 1]}] \\
&= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)] \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_{t-s}^{(\beta)} - (t-s)\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)} - 1]}] \\
&= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)] \mathbb{E}_{P_\theta}[M_{t-s}^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)],
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (i). Σαφώς οι παραπάνω ισότητες ισχύουν για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$.

(ii) : Αφού από την (i) η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $(m3)$ για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$, λαμβάνουμε για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ ότι

$$\begin{aligned}
\int_A M_t^{(\beta)}(\Theta) dP &= \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta) = \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_A M_s^{(\beta)}(\Theta) dP,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 5.2.5, (iv). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του (ii) καθώς και ολόκληρου του Λήμματος. □

5.3 Martingale-ισοδύναμα μέτρα και Σύνθετες μεμειγμένες σ.δ. Poisson

Βασικό αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας αποτελεί το Θεώρημα 5.3.7. Ακριβέστερα, δοθέντος ενός μέτρου πιθανότητας P και υποθέτοντας ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P-$σύνθετη μεμειγμένη σ.δ. Poisson, το παραπάνω θεώρημα χαρακτηρίζει όλα τα μέτρα πιθανότητας Q, υπό τα οποία η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων παραμένει μία σύνθετη μεμειγμένη σ.δ. Poisson.

Ορισμός 5.3.1. Έστω $\mathbb{T}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με $0 \in \mathbb{T}$, $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μία διύλιση για το μ.χ. (Ω, Σ) και P, Q δύο μέτρα πιθανότητας επάνω στην Σ και $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μία σ.δ. επάνω στον (Ω, Σ). Τότε τα P και Q ονομάζονται

(a) ισοδύναμα και συμβολίζονται με $P \sim Q$ αν για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει
$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0$,

(b) προοδευτικά ισοδύναμα (για την $\mathcal{Z}$) και συμβολίζονται με $Q \overset{pr}{\sim} P$ αν $\{N \in \mathcal{Z}_t : Q(N) = 0\} = \{N \in \mathcal{Z}_t : P(N) = 0\}$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, δηλαδή αν για κάθε $t \in \mathbb{T}$ έχουν κοινά μηδενικά σύνολα στην $\mathcal{Z}_t$.

(c) $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$**-martingale ισοδύναμα** αν

$(em1)$ $P \sim Q$

$(em2)$ η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι (Q,$\mathcal{Z}$)-martingale,

(d) $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$**-martingale προοδευτικά ισοδύναμα**, αν

$(pem1)$ τα P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμα για την $\mathcal{Z}$,

$(pem1)$ η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι ένα (Q,$\mathcal{Z}$)-martingale.

Για τον Ορισμό 5.3.1, (c), βλ. π.χ. [27], Definition 1.1.

Προφανώς, αν τα P και Q είναι $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$-martingale ισοδύναμα, τότε θα είναι και $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$-martingale προοδευτικά ισοδύναμα. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Επίσης, αν τα P και Q είναι $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$-martingale προοδευτικά ισοδύναμα, τότε για κάθε $t \in \mathbb{T}$ τα $P_t := P|\mathcal{Z}_t$ και $Q_t := Q|\mathcal{Z}_t$ είναι $(\mathcal{Z}_t, \{Y_s\}_{s\in[0,t]\cap\mathbb{T}})$-martingale ισοδύναμα.

Σημειώνουμε ότι ο Ορισμός 5.3.1, (b) συμπίπτει με εκείνον των [10], Definition 2.1. Τέλος, η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q που είναι $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})-$martingale προοδευτικά ισοδύναμα με το P θα συμβολίζεται με $\mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$.

Έστω τώρα ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χ.π. $(\Omega^*, \Sigma^*, P^*)$ καθώς επίσης και η σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, η τ.μ. Θ^* επάνω στον προαναφερθέντα χ.π. και υποθέτουμε ότι οι $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και Θ^* ικανοποιούν τις συνθήκες $(a1^*) - (a3^*)$, δηλαδή τις συνθήκες $(a1) - (a3)$ αλλά με W_n^*, X_n^* και Θ^* στη θέση των W_n, X_n και Θ αντίστοιχα.

Σε όλη την παρούσα ενότητα θεωρούμε $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}^*} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}$, $\Omega = \widetilde{\Omega} \times \Upsilon$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ *και* $\Sigma := \mathfrak{B}(\Omega)$. *Για* $n \in \mathbb{N}^*$ *θέτουμε* $W^* := (W_1^*, \ldots, W_n^*, \ldots)$, $X^* := (X_1^*, \ldots, X_n^*, \ldots)$ *και* Ψ^* *μία απεικόνιση από το* Ω^* *στο* Ω *που ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\Psi^*(\omega^*) := (W^*, X^*, \Theta^*)(\omega^*) := (w, x, \theta) := \omega \quad \textit{για κάθε} \quad \omega^* \in \Omega^*,$$

όπου $w = (w_1, \ldots, w_n, \ldots) \in \Upsilon^{\mathbb{N}^*}, x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ *και* $\theta \in \Upsilon$. *Θυμίζουμε ότι* $\Upsilon := (0, \infty)$.

Παρατηρήσεις 5.3.2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε το χ.π. $(\Omega, \Sigma, P) := (\Omega, \Sigma, P^*_{\Psi^*})$ αντί του χ.π. $(\Omega^*, \Sigma^*, P^*)$ όπως φαίνεται από τα παρακάτω:
(a) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $W_n, X_n, \Theta : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ ως εξής:

$$W_n^* = W_n \circ \Psi^*, \quad X_n^* = X_n \circ \Psi^*, \quad \text{και} \quad \Theta^* = \Theta \circ \Psi^*, \tag{5.8}$$

Σαφώς, όλες οι W_n, X_n και Θ είναι τ.μ. επάνω στο Ω. Επί πλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $P^*_{W_n^*} = P^* \circ (W_n \circ \Psi^*)^{-1} = P^* \circ ((\Psi^*)^{-1} \circ W_n^{-1}) = P^*_{\Psi_n^*} \circ W_n^{-1} = P \circ W_n^{-1} = P_{W_n}$ και κατά τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε $P_{X_n} = P^*_{X_n^*}$ καθώς και $P_\Theta = P^*_{\Theta^*}$. Έτσι, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων υπό το μέτρο P, αντίστοιχα.
(b) Έστω $\Psi := (W_1, \ldots, W_n, \ldots; X_1, \ldots, X_n, \ldots; \Theta)$. Λόγω του (a) λαμβάνουμε $W^* = W \circ \Psi^*$, $X^* = X \circ \Psi^*$ και $\Psi = id_\Omega$ γεγονός που σημαίνει ότι $(W^*, X^*) = (W, X) \circ \Psi^*$, $\Psi^* = \Psi \circ \Psi^*$ και για οποιοδήποτε $D^* \in \sigma(\Theta^*)$ υπάρχει ένα $D \in \sigma(\Theta)$ ώστε

$$\int_{D^*} P^*_{(W^*,X^*)|\Theta^*}(E)dP^* = \int_D P_{(W,X)|\Theta}(E)dP \tag{5.9}$$

για κάθε $E \in \widetilde{\Sigma}$. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε επίσης

$$\int_{D^*} P^*_{W_n^*|\Theta^*}(A)dP^* = \int_D P_{W_n|\Theta}(A)dP \quad \text{και} \quad \int_{D^*} P^*_{X_n^*|\Theta^*}(B)dP^* = \int_D P_{X_n|\Theta}(B)dP$$

για κάθε $A, B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.
(c) Οι συνθήκες $(a1)$ έως $(a3)$ ικανοποιούνται από το P, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και τη τ.μ. Θ.
Πράγματι, αρκεί να δείξω ότι

$$P_{(W,X)|\Theta} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*} P_{W_n|\Theta}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*} P_{X_n}) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.. \tag{5.10}$$

Με $\widetilde{\mathcal{C}}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων του $\widetilde{\Omega}$, δηλαδή όλων των υποσυνόλων του $\widetilde{\Omega}$ που εκφράζονται ως $\widetilde{C} = \{\widetilde{\omega} : \widetilde{\omega} = (w, x) \in \Upsilon^{\mathbb{N}^*} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ με $w_i \in A_i$ και $x_j \in B_j$ για κάθε $(i, j) \in I \times J\}$, όπου $I, J \subseteq \mathbb{N}^*$ είναι πεπερασμένα και $A_i, B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $(i, j) \in I \times J$. Τότε από τη σχέση (5.9) μαζί με το γεγονός ότι το μέτρο P^* ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1^*)$, $(a2^*)$ και $(a3^*)$ προκύπτει ότι για κάθε $D^* \in \sigma(\Theta^*)$ υπάρχει

$D \in \sigma(\Theta)$ ώστε

$$
\begin{aligned}
\int_D P_{(W,X)|\Theta}(\widetilde{C})dP &= \int_{D^*}\left[\prod_{i\in I} P^*_{W_i^*|\Theta^*}(A_i)\right]\left[\prod_{j\in J} P^*_{X_j^*}(B_j)\right] dP^* \\
&= \left[\prod_{j\in J} P^*_{X_j^*}(B_j)\right]\int_{D^*}\prod_{i\in I} P^*_{W_i^*|\Theta^*}(A_i)dP^* \\
&\overset{(a)}{=} \left[\prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j)\right]\int_{D^*}\prod_{i\in I} P^*((W_i\circ\Psi^*)^{-1}(A_i)|\Theta^*)dP^* \\
&\overset{P=P^*_{\Psi^*}}{=} \left[\prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j)\right]\int_{\Psi^{*(-1)}(D)}\prod_{i\in I} P(W_i^{-1}(A_i)|\Theta\circ\Psi^*)dP^* \\
&\overset{P=P^*_{\Psi^*}}{=} \left[\prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j)\right]\int_{D}\prod_{i\in I} P(W_i^{-1}(A_i)|\Theta)dP \\
&= \int_D\left[\prod_{i\in I} P_{W_i|\Theta}(A_i)\right]\left[\prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j)\right] dP,
\end{aligned}
$$

Άρα αποδείχθηκε η σχέση (5.10) στο $\widetilde{\mathcal{C}}$.
Έτσι, αν συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{D}}$ την οικογένεια όλων των $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$ που ικανοποιούν την (5.10), τότε λαμβάνουμε ότι το $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}$. Αλλά μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\widetilde{\mathcal{D}}$ είναι κλάση Dynkin. Σημειώνουμε επίσης ότι $\sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$ και ότι το $\widetilde{\mathcal{C}}$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές. Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. π.χ. Θεώρημα Α΄.2.4) προκειμένου να λάβουμε $\widetilde{\mathcal{D}} \supseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$, η οποία συνεπάγεται την εγκυρότητα της σχέσης (5.10). Αυτό αποδεικνύει το (c) καθώς επίσης και τη $P-$υπό συνθήκη ανεξαρτησία της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_*}$.

Έτσι, από τώρα και μέχρι το τέλος αυτής της ενότητας, (Ω, Σ, P) θα είναι ο χ.π. μαζί με όλα τα στοιχεία της Παρατήρησης 5.3.2, (a), καθώς και την επαγόμενη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και του ύψους των συνολικών απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αντίστοιχα.

Σημειώστε, επίσης, ότι Σ είναι η $\sigma-$άλγεβρα η παραγόμενη από όλες τις κανονικές προβολές W_n, X_n και Θ, δηλαδή $\Sigma = \sigma(\{\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \Theta\})$. Όμως από τα Λήμματα 2.1.3 και 2.2.5 έπεται ότι $\sigma(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}) = \sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ γεγονός που σημαίνει ότι

$$\Sigma = \sigma(\{\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \Theta\}) \supseteq \sigma(\{\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \Theta\}) = \mathcal{H}_\infty.$$

Όμως σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 5.2.1, (a) και (b), έχουμε ότι $\Sigma = \mathcal{H}_\infty$. Ακριβέστερα, από την Παρατήρηση 5.2.1, (a), έπεται ότι $\sigma(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\infty$ ενώ από την Παρατήρηση 5.2.1, (b), έχουμε ότι $\sigma(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\infty$. Άρα $\sigma(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\infty \subseteq \mathcal{H}_\infty$, από το οποίο προκύπτει ότι $\Sigma \subseteq \mathcal{H}_\infty$.

Λήμμα 5.3.3. Αν $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$

(ii) $Q_\Theta \sim P_\Theta$

Απόδειξη. Εφόσον για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $Q|\mathcal{H}_t \sim P|\mathcal{H}_t$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_t \subseteq \mathcal{H}_t$, τότε λαμβάνουμε $Q|\widetilde{\mathcal{H}}_t \sim P|\widetilde{\mathcal{H}}_t$. Έτσι προκύπτει το (i) (βλ. [10], Lemma 2.1) Η δεύτερη συνθήκη είναι άμεση συνέπεια της $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ μαζί με $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Ο τελευταίος ισχυρισμός αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως στο (ii). □

Έστω $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία $P - CPP(\theta, P_{X_1})$. Στο [10], σελίδα 277, Delbaen and Haezendonck χαρακτηρίζονται όλα τα μέτρα πιθανότητας Q επάνω στην Σ ώστε $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ και η S να παραμένει μία $Q - CPP(\theta e^a, Q_{X_1})$. Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί στο παρακάτω:

Ερώτημα 5.3.4. Έστω $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία $P - CMPP(\Theta, P_{X_1})$. Χαρακτήρισε όλα τα μέτρα πιθανότητας Q στην $\mathcal{H}_\infty$ που είναι προοδευτικά ισοδύναμα με το P, και τέτοια ώστε η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να παραμένει μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Συμβολισμοί 5.3.5. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_{S,a} := \mathcal{M}_{S,a,P,X_1,\Theta}$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στην Σ, ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$, να είναι προοδευτικά ισοδύναμα με το P και η S να είναι μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$. Για $a = 0$ θέτουμε $\mathcal{M}_S := \mathcal{M}_{S,0}$.

Παρατήρηση 5.3.6. Είναι γνωστό ότι, για το χ.π. (Ω, Σ, P) και για κάθε μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ, κατά συνέπεια και για το P, υπάρχει πάντα μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη Θ (βλ. π.χ. [17], $452X(m)$).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνει μία απάντηση στο Ερώτημα 5.3.4.

Θεώρημα 5.3.7. (πρβλ. [3], Πρόταση 7.2.5 και Θεώρημα 7.2.9). Έστω $P \in \mathcal{M}_S$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ υπάρχει μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ και μία ουσιωδώς μοναδική συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}_{P,a}$ ώστε

$$\gamma = \ln f, \qquad (*)$$

όπου f είναι μία $P_{X_1} - \sigma.\beta.$ θετική Radon-Nikodym παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, και ώστε να υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin Z_*$, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες

$$Q_\theta(A) = \int_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta \qquad (M_\theta)$$

και

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP, \qquad (M_\xi)$$

όπου η $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση $\xi \in \mathcal{L}^1_+(P_\theta)$ είναι μία Radon-Nikodym παράγωγος του Q_Θ ως προς το P_Θ.

(ii) Αντιστρόφως, για κάθε $\beta \in \mathcal{F}_{P,a}$ και για κάθε $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ υπάρχει ένα μοναδικό $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$, μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin Z'_*$, και για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ικανοποιούνται οι συνθήκες $(*), (M_\theta)$ και (M_ξ).

Απόδειξη. (i): Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $Q \in \mathcal{M}_S$. Τότε η σ.δ. $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$ και $Q \overset{pr}{\sim} P$. Υπάρχει πάντοτε μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ (βλ. Παρατήρηση 5.3.6). Αφού ισχύει $Q \overset{pr}{\sim} P$ από το Λήμμα 5.3.3, (ii), έπεται ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$. Έτσι, για το υπόλοιπο της απόδειξης του (i) γράφοντας «για $Q_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$» ισοδυναμεί με το «για $P_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$»

(a) Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_a \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin L_a$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $t \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει

$$Q_\theta(N_t = n) = e^{na - t\theta[e^a - 1]} P_\theta(N_t = n).$$

Πράγματι, επειδή η S είναι μία $P - CPP(\Theta, P_{X_1})$ και μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$, τότε από το Θεώρημα 5.1.4 έπεται ότι υπάρχουν $P_\Theta-$ και $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο L_1 και L_2 στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin L_a := L_1 \cup L_2$ η S να είναι μία $P_\theta - CPP(\theta, (P_\theta)_{X_1})$ και μία $Q_\theta - CPP(\theta e^a, (Q_\theta)_{X_1})$, αντίστοιχα. Συνεπώς, με έναν εύκολο υπολογισμό λαμβάνουμε το (a).

(b) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_s$ υπάρχει ένα σύνολο $B_n \in \mathcal{X}_n := \sigma(\{X_k\}_{k \in \{1,\ldots,n\}})$ ώστε $A \cap \{N_s = n\} = B_n \cap \{N_s = n\}$. Επιπλέον υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_b \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin L_b$ να ισχύει

$$Q_\theta(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta(B_n) Q_\theta(N_s = n).$$

Πράγματι, το πρώτο μέρος του (b) προκύπτει άμεσα από το [10], (2.19). Αφού το Q ικανοποιεί τη συνθήκη $(a1)$, από το Λήμμα 5.1.3, (i), έπεται ότι υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_b \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin L_b$ οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q_\theta-$ανεξάρτητες, γεγονός που συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τα γεγονότα $B_n \in \mathcal{X}_n$ και $\{N_s = n\}$ είναι $Q_\theta-$ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας τώρα το ίδιο σκεπτικό όπως και στην [10], Proposition 2.2, λαμβάνουμε το (b).

(c) Υπάρχει μία $P_{X_1} - \sigma.\beta.$ μοναδική θετική συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1_+(P_{X_1})$ ώστε $Q_{X_1}(B) = \int_B f dP_{X_1}$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_c \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin L_c$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $B_n \in \mathcal{X}_n$ να ισχύει

$$Q(B_n) = Q_\theta(B_n) = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] = \mathbb{E}_P[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}], \tag{5.11}$$

όπου $\gamma := \ln f$.

Πράγματι, δεδομένου ότι $Q \overset{pr}{\sim} P$, από το Λήμμα 5.3.3, (i), έπεται ότι $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, όπου με τη χρήση του Θεωρήματος Radon-Nikodym (βλ. π.χ. [7], Theorem 32.2) συνεπάγεται η ύπαρξη μίας $P_{X_1} - \sigma.\beta.$ θετικής συνάρτησης $f \in \mathcal{L}^1_+(P_{X_1})$ ώστε $Q_{X_1}(B) = \int_B f dP_{X_1}$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Αφού από την υπόθεση η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q - i.i.d$ από το Λήμμα 5.1.3, (ii), έπεται ότι υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}'' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}''$ η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ να είναι $Q_\theta - i.i.d.$ Επομένως η δεύτερη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως στο [10], (2.21).

Από το Λήμμα 3.2.1, (ii), προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $B_n \in \mathcal{X}_n$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_B Q_\theta(B_n) Q_\Theta(d\theta) &= \int_{\Theta^{-1}(B)} Q(B_n|\Theta) dQ = \int_{\Theta^{-1}(B)} Q(B_n) dQ \\ &= \int_B Q(B_n) dQ_\Theta,\end{aligned}$$

για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της $(a2)$ για το Q. Άρα υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}^{(**)}_{n,B_n} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}^{(**)}_{n,B_n}$ να ισχύει

$$Q_\theta(B_n) = Q(B_n). \tag{5.12}$$

Με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης προκύπτει ότι υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}^{(**)} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε να προκύπτει η πρώτη ισότητα.

Από το Λήμμα 3.2.1, (i), προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \in \mathcal{X}_n$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει

$$\int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}|\Theta] dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_{P_\bullet}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] \circ \Theta dP$$

ή ισοδύναμα (λόγω της $(a2)$ για το P)

$$\int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] dP = \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] dP_\Theta(d\theta)$$

ή ισοδύναμα

$$\int_B \mathbb{E}_P[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] dP_\Theta = \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] P_\Theta(d\theta).$$

Άρα υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}^{(*)}_{n,B_n} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}^{(*)}_{n,B_n}$ να ισχύει

$$\mathbb{E}_P[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}]. \tag{5.13}$$

Ομοίως, με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης προκύπτει ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}^{(*)} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε να ισχύει η (5.13).
Από τις (5.12) και (5.13) έπεται ότι για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}^{(*)} \cup \widetilde{L}^{(**)}$ ισχύει η πρώτη και τελευταία ισότητα της (5.11). Επομένως, για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}'' \cup \widetilde{L}^{(*)} \cup \widetilde{L}^{(**)} =: L_c$ ισχύει η (5.11).
(d) Έστω $\beta := \alpha + \gamma(x)$ για κάθε $x \in \Upsilon$. Σαφώς, η β είναι μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση. Από την τελευταία ισότητα του (c) μαζί με την $(a2)$ για το P προκύπτει, ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_d := L_{d,\gamma,X_1} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε το $\widehat{D}$ να είναι γνήσιο υποσύνολο του L_d και για κάθε $\theta \notin L_d$ να ισχύει $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$, από το οποίο με έναν εύκολο υπολογισμό προκύπτει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}] = e^a$ και ότι $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = e^a \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = e^a < \infty$, δηλαδή $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$. Επομένως $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$.
Η απόδειξη ότι το $\widehat{D}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του L_d είναι άμεση συνέπεια των ορισμών των $\widehat{D}$ και L_d.
(e) Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin Z_*$ να ικανοποιείται η συνθήκη (M_θ) από την $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$.
Θα αποδείξουμε το (e) εφαρμόζοντας ένα κριτήριο μονότονης κλάσης. Αρχικά σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.7, (i), υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{K} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $\widehat{D} \subseteq \widehat{K}$ και για κάθε $\theta \notin \widehat{K}$ η διαδικασία $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{H})$-martingale που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επί πλέον, η συνέπεια των $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ με την Θ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός $P_\Theta-$μηδενικού συνόλου $Z' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και ενός $Q_\Theta-$μηδενικού συνόλου $\widetilde{Z} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin Z'$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ να ισχύει ότι $P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$ και για κάθε $\theta \notin \widetilde{Z}$ να ισχύει $Q_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$.
Έστω $Z_* := L_a \cup L_b \cup L_c \cup \widehat{K} \cup Z' \cup \widetilde{Z} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Τότε $P_\Theta(Z_*) = 0$.
Θεωρούμε ένα αυθαίρετο $s \in \mathbb{R}_+$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_s$ την οικογένεια όλων των $A \in \mathcal{H}_s$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (M_θ) για οποιοδήποτε $\theta \notin Z_*$.
(e1) $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{C}_s$.
Πράγματι, έστω $A \in \sigma(\Theta)$. Τότε υπάρχει ένα $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε το $A = \Theta^{-1}(B)$. Η συνέπεια της $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και της $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ με τη Θ μαζί με τη σχέση $Z' \subseteq Z_*$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\theta \in Z_*^c \cap B$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\Theta^{-1}(B)} M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1 = Q_\theta(\Theta^{-1}(B)),$$

όπου η δεύτερη από το τέλος ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 5.2.7, (i). Ξανά, λόγω της συνέπειας της $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και$\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, λαμβάνουμε $\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] = 0 = Q_\theta(\Theta^{-1}(B))$ για κάθε $\theta \in Z_*^c \cap B^c$, άρα ότι $A \in \mathcal{C}_s$. Ως εκ τούτου $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{C}_s \neq \emptyset$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $A \in \widetilde{\mathcal{H}}_s$. Τότε από το (b) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ένα $B_n \in \mathcal{X}_n$, ώστε για κάθε σταθερό $\theta \notin Z_*$ να έχουμε

$$\begin{aligned}
Q_\theta(A) &\overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta(B_n) Q_\theta(N_s = n) \overset{(5.11)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] Q_\theta(N_s = n) \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}] e^{na - s\theta(e^a - 1)} P_\theta(N_s = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{B_n \cap \{N_s = n\}} e^{na - s\theta(e^a-1) + \sum_{j=1}^{N_s} \gamma(X_j)}\big] \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{A \cap \{N_s = n\}} e^{na - s\theta(e^a-1) + \sum_{j=1}^{N_s} \gamma(X_j)}\big] \\
&\overset{(d),(5.3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\{N_s = n\}} \chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)],
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τα γεγονότα B_n και $\{N_s = n\}$ είναι $P_\theta-$υπό συνθήκη ανεξάρτητα, ενώ η τελευταία είναι άμεση συνέπεια του Πορίσματος 2.3.2 του [5]. Έτσι, αποδείχθηκε ότι $A \in \mathcal{C}_s$. Άρα $\widetilde{\mathcal{H}}_s \subseteq \mathcal{C}_s$ το οποίο αποδεικνύει το $(e1)$.

Στο σημείο αυτό καθορίζουμε τις εξής κλάσεις

$$\mathcal{G} := \{\bigcap_{k=1}^{m} A_k : A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta), m \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} := \{\biguplus_{j=1}^{r} B_j : r \in \mathbb{N}^*, B_j \in \mathcal{G}\}.$$

(e2) $\mathcal{G}, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_s$.

Πράγματι, έστω αυθαίρετο $G \in \mathcal{G}$. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m και μία πεπερασμένη ακολουθία $\{A_k\}_{k\in\{1,\ldots,m\}}$ στην ένωση $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)$ ώστε $G = \bigcap_{k=1}^m A_k$. Ορίζοντας τα ακόλουθα σύνολα δεικτών

$$I_\Theta := \{k \in \{1, \ldots, m\} : A_k \in \sigma(\Theta)\}$$

και

$$I_H := \{k \in \{1, \ldots, m\} : A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \backslash \sigma(\Theta)\},$$

λαμβάνουμε $I_\Theta \cup I_H = \{1, \ldots, m\}$.

Σημειώστε επίσης ότι, οι $\widetilde{\mathcal{H}}_s$ και $\sigma(\Theta)$ είναι κλειστές ως προς τις πεπερασμένες τομές ως $\sigma-$άλγεβρες. Οπότε

$$\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta) \quad \text{και} \quad \bigcap_{k\in I_H} A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \subseteq \mathcal{C}_s. \tag{5.14}$$

όπου η σχέση $\widetilde{\mathcal{H}}_s \subseteq \mathcal{C}_s$ προκύπτει άμεσα από το $(e1)$. Τότε από το πρώτο μέρος της σχέσης (5.14) έπεται ότι υπάρχει ένα $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $\Theta^{-1}(D) = \bigcap_{k \in I_\Theta} A_k$. Ως εκ τούτου, λόγω της συνέπειας της $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και της $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ με την Θ και της Πρότασης 5.2.7, (i), λαμβάνουμε για κάθε $\theta \in Z_*^c \cap D$ ότι

$$\begin{aligned} Q_\theta(G) &= Q_\theta\left(\Theta^{-1}(D) \cap \left(\bigcap_{k\in I_H} A_k\right)\right) = Q_\theta\left(\bigcap_{k\in I_H} A_k\right) \overset{(5.14)}{=} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} M_s^{(\beta)}(\theta)] \\ &= \int_{\Theta^{-1}(D)} \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} M_s^{(\beta)}(\theta) dP_\theta = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_G M_s^{(\beta)}(\theta)], \end{aligned}$$

ενώ για κάθε σταθερό $\theta \in Z_*^c \cap D^c$ σαφώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_G M_s^{(\beta)}(\theta)] &= \int_{\Theta^{-1}(D)} \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} M_s^{(\beta)}(\theta) dP_\theta = 0 = Q_\theta\left(\Theta^{-1}(D) \cap (\bigcap_{k\in I_H} A_k)\right) \\ &= Q_\theta(G) \end{aligned}$$

άρα ότι $G \in \mathcal{C}_s$. Συνεπώς, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}_s$. Οπότε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_s$, το οποίο αποδεικνύει το $(e2)$.
Από τους ορισμούς των $\mathcal{G}$ και $\mathcal{U}$, έχουμε $\mathcal{U} = a(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta))$ (βλ. π.χ [12], I, Aufgabe 5.3). Ως εκ τούτου, $\mathcal{H}_s = \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)) = \sigma(a(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta))) = \sigma(\mathcal{U}) = m(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}_s$, όπου η τελευταία σχέση έπεται από το $(e2)$ μαζί με το γεγονός ότι μπορεί εύκολα να φανεί ότι η $\mathcal{C}_s$ είναι μονότονη κλάση (βλ. π.χ. [16], Theorem 136G). Συνεπώς, έχουμε $\mathcal{H}_s = \mathcal{C}_s$.
(f) Η συνθήκη (M_ξ) ικανοποιείται από τα μέτρα Q, P και τη σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Πράγματι, δεδομένου ότι $Q \overset{pr}{\sim} P$ από το Λήμμα 5.3.3, (ii) έχουμε ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 10.12 (β)) έπεται η ύπαρξη μιας $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετικής συνάρτησης $\xi \in \mathcal{L}_+^1(P_\Theta)$, ώστε $Q_\Theta(B) = \int_B \xi dP_\Theta$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Σαφώς, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ οι οικογένειες $\{P_\theta|\mathcal{H}_t\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta|\mathcal{H}_t\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι disintegrations των $P|\mathcal{H}_t$ και $Q|\mathcal{H}_t$ επάνω στα P_Θ και Q_Θ, αντίστοιχα. Το τελευταίο μαζί με τη συνθήκη (M_θ) επάγεται για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ ότι

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int\int \chi_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta Q_\Theta(d\theta) = \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)]\xi(\theta) P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_A (\xi(\Theta)) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 5.2.5, (iv).
(g) Η συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ είναι ουσιωδώς μοναδική.
Σύμφωνα με το (c) η f είναι $P_{X_1}-$μοναδική (δηλ. ουσιωδώς μοναδική), επομένως και η $\gamma = \ln f$, άρα και η β είναι $P_{X_1}-$μοναδική (δηλ. ουσιωδώς μοναδική).
(ii): Έστω $\beta \in \mathcal{F}_{P,a}$ και ξ μία $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Αρχικά

καθορίζουμε για κάθε $\theta \in \Upsilon$ την συνολοσυνάρτηση $R_\theta : \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$R_\theta(A) = \begin{cases} \int_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta & \text{αν } \theta \notin \widehat{K} \\ P_\theta(A) & \text{αν } \theta \in \widehat{K} \end{cases} \tag{5.15}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$. Με μία εφαρμογή του Πορίσματος B. Levi (βλ. π.χ. [5], Πόρισμα 2.3.3), αποδεικνύεται εύκολα ότι ο περιορισμός $R_\theta|\mathcal{H}_t$ της R_θ επάνω στην $\mathcal{H}_t (t \in \mathbb{R}_+)$ είναι μία πιθανότητα για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Επί πλέον, από τον ορισμό της R_θ, έπεται ότι $R_\theta|\mathcal{H}_t \sim P_\theta|\mathcal{H}_t$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Επιπρόσθετα, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $A \in \mathcal{H}_t$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto (R_\theta|\mathcal{H}_t)(A)$ είναι Borel μετρήσιμη, διότι για οποιοδήποτε σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \chi_A(\omega) M_t^{(\beta)}(\theta)(\omega)$ είναι μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση του θ.
Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μία συνολοσυνάρτηση $R : \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$R(A) := \int \xi(\theta) R_\theta(A) P_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad A \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t.$$

Τότε έχουμε

$$R(A) \overset{(5.15)}{:=} \int\int \xi(\theta)\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta P_\Theta(d\theta) = \int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP, \tag{5.16}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$, όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 5.2.5, (iv). Από την παραπάνω συνθήκη μαζί με το Λήμμα 5.2.5, (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} R_\Theta(F) &= \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbb{E}_P[\xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} \xi(\Theta) \mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)|\Theta] dP \\ &= \int_{\Theta^{-1}(F)} \xi(\Theta) dP = \int_F \xi(\theta) P_\Theta(d\theta), \end{aligned}$$

για κάθε $F \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Άρα $R_\Theta \sim P_\Theta$.
Συνεπώς έχουμε

$$R(A) := \int R_\theta(A) R_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad A \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t.$$

Σαφώς, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η οικογένεια $\{R_\theta|\mathcal{H}_t\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του $R|\mathcal{H}_t$ επάνω στο R_Θ και, αφού από την υπόθεση η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την Θ, λόγω της (5.15) προκύπτει ότι η $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την Θ.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\zeta : \mathbb{R}_+ \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}_+$ με τον τύπο

$$\zeta(t,\theta) := e^{-t\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}-1]} \quad \text{και} \quad \zeta(t,\theta) := 0, \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \theta \notin \widehat{D}.$$

Από την απόδειξη του (d) μαζί με τη συνθήκη $(a2)$ για το P, υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_d \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_d$ να έχουμε

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}].$$

Συνεπώς

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)}] = e^a \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = e^a \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = e^a. \tag{5.17}$$

για κάθε $(t,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times (L_d)^c$, όπου $L_d := \widetilde{L}_d \cup \widehat{D}$.
Επομένως

$$\zeta(t,\theta) = e^{-t\theta[e^a-1]} \quad \text{για κάθε} \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times (L_d)^c. \tag{5.18}$$

(h) Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_h \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιαδήποτε σταθερά $\theta \notin L_h$ και $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $r > 0$ και για όλα τα $0 \le u \le s \le t$ και $A \in \mathcal{H}_u$ να ισχύει

$$\mathbb{E}_{R_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s - S_u)}] = \zeta(s-u,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_u^{(\beta)}(\theta)]\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_{s-u}^{(\beta)}(\theta) - rS_{s-u}}].$$

Πράγματι, έστω ένα σταθερό και αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$ και έστω ο μ.χ. $(\Omega, \widetilde{\mathcal{H}}_t)$. Αφού η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από την υπόθεση είναι μία $P-CMPP(\Theta, P_{X_1})$ και το P ικανοποιεί τις συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.4, λαμβάνουμε ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P_\theta - CPP(\theta, (P_\theta)_{X_1})$. Επειδή έχει και $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις για $Q_\Theta-$σχεδόν όλα τα $\theta \in \Upsilon$ (βλ. πχ. [28], Theorem 5.1.3), θα ισχύει το ίδιο και για την $\{S_t^{(\beta)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (βλ. την απόδειξη του Λήμματος 5.2.6, (i)). Άρα θα υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $V \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin V$ η σ.δ. $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει $P_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Έτσι θέτοντας $L_h := V \cup L_d \cup \widetilde{D}_*$, όπου $\widetilde{D}_*$ είναι ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{D}_*$ να ισχύει η συνθήκη (i) της Πρότασης 5.2.7, θα έχουμε $P_\Theta(L_h) = 0$. Άρα εφαρμόζοντας την (5.15), για κάθε $\theta \notin L_h$, για κάθε $F \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, για κάθε $r > 0$ και για όλα τα $0 \le u \le s \le t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{R_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}] &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)} M_s^{(\beta)}(\theta)] \\
&= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \zeta(s-u,\theta) M_u^{(\beta)}(\theta) e^{(S_s^{(\beta)} - S_u^{(\beta)})(\theta) - r(S_s - S_u)}] \\
&= \zeta(s-u,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_u^{(\beta)}(\theta)]\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_{s-u}^{(\beta)}(\theta) - rS_{s-u}}],
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από τη συνθήκη (5.3), (5.17) και (5.18). Συνεπώς, έχουμε το (h).

(i) Ορίζουμε τώρα για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ τις συνολοσυναρτήσεις $\nu_\theta, \mu : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longrightarrow [0,\infty]$ ως εξής:

$$\nu_\theta := \mathbf{Exp}(\theta e^a), \tag{5.19}$$

και

$$\mu(B) := \int_B e^{\gamma(x)} P_{X_1}(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}(\Upsilon), \tag{5.20}$$

αντίστοιχα.
Ορίζουμε επίσης για κάθε $\theta \in \Upsilon$ τη συνολοσυνάρτηση $\widetilde{Q}_\theta : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow [0,\infty]$ από τη σχέση

$$\widetilde{Q}_\theta := (\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*} \otimes \mu_{\mathbb{N}^*}. \tag{5.21}$$

Σαφώς, το $\widetilde{Q}_\theta$ είναι μέτρο πιθανότητας και το μ είναι μέτρο πιθανότητας λόγω του Πορίσματος 2.3.3 του [5]. Επί πλέον, για κάθε σταθερό $A \in \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*})$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto (\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*}(A)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη, διότι $\nu_\theta(A) = \int \chi_A(x)\theta e^a e^{-x\theta e^a}\lambda(dx)$ και άρα η συνάρτηση $\theta \longmapsto \nu_\theta(A)$ είναι συνεχής, αφού για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $\chi_A(x)e^a e^{-x\theta e^a}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.3.6 του [5]. Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι για κάθε σταθερό $A \times B \in \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \times \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*})$ η συνάρτηση $\widetilde{Q}_\bullet(A \times B) = (\nu_\bullet)_{\mathbb{N}^*}(A)\mu_{\mathbb{N}^*}(B)$ είναι επίσης $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη συνάρτηση. Έπειτα, εύκολα μπορεί να δειχθεί με τη χρήση ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης ότι η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη για κάθε σταθερό $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$.

(j) Ως συνέπεια, μπορούμε να ορίσουμε τις συνολοσυναρτήσεις $\widetilde{Q} : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ και $Q, Q_\theta : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$ ως εξής:

$$\widetilde{Q}(\widetilde{E}) := \int \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})P_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma},$$

$$Q(E) := \int \widetilde{Q}_\theta(E^\theta)R_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \Sigma$$

και

$$Q_\theta = \widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta,$$

όπου δ_θ είναι το μέτρο Dirac επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ που συγκεντρώνεται στο $\theta \in \Upsilon$. Τότε $Q_\Theta = R_\Theta$ και τα Q και Q_θ είναι μέτρα πιθανότητας, ενώ η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του Q επάνω στο R_Θ συνεπής με την κανονική προβολή $\pi_\Upsilon = \Theta : \widetilde{\Omega} \times \Upsilon \to \Upsilon$.
Πράγματι, προφανώς τα $\widetilde{Q}$, Q και κάθε Q_θ είναι μέτρα πιθανότητας. Επίσης για οποιοδήποτε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Q_\Theta(B) &= Q(\Theta^{-1}(B)) = Q(\widetilde{\Omega} \times B) \\ &= \int \widetilde{Q}_\theta([\widetilde{\Omega} \times B]^\theta)R_\Theta(d\theta) \\ &= \int_B \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{\Omega})R_\Theta(d\theta) + \int_{B^c} \widetilde{Q}_\theta(\emptyset)R_\Theta(d\theta) \\ &= \int_B R_\Theta(d\theta) + 0 = R_\Theta(B). \end{aligned}$$

Άρα

$$Q_\Theta = R_\Theta. \tag{5.22}$$

Από την (5.22) και την $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρησιμότητα της συνάρτησης $\theta \longmapsto \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})$ για οποιοδήποτε $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$, (που αποδείχθηκε στο βήμα (i)), προκύπτει ότι η $\{\widetilde{Q}_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία κ.δ.π-γινόμενο επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ για το Q ως προς το R_Θ. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.2.8 για να συμπεράνουμε ότι η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του Q επάνω στο R_Θ συνεπής με την Θ.

(k) Οι συνθήκες $(a1)$ και $(a2)$ ικανοποιούνται από το Q και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $Q-$ανεξάρτητη από την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Πράγματι, αρχικά σταθεροποιούμε οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\theta \in \Upsilon$. Συμβολίζουμε με $\pi_{\widetilde{\Omega}}$ την κανονική προβολή από το Ω στο $\widetilde{\Omega}$ και με $\widetilde{W}_n$ και $\widetilde{X}_n$ τις κανονικές προβολές από το $\widetilde{\Omega}$ στη $n-$οστή συντεταγμένη του πρώτου και δεύτερου καρτεσιανού γινομένου $\Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ και $\Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ αντίστοιχα. Τότε

$$W_n = \widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\Omega}} \quad \text{και} \quad X_n = \widetilde{X}_n \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}, \tag{5.23}$$

όπου W_n και X_n είναι οι κανονικές προβολές από το $\Omega = \Upsilon^{\mathbb{N}^*} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*} \times \Upsilon$ στη $n-$οστή συντεταγμένη του πρώτου και δεύτερου καρτεσιανού γινομένου $\Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ και $\Upsilon^{\mathbb{N}^*}$ αντίστοιχα. Τότε ισχύει

$$\nu_\theta = (\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n} \tag{5.24}$$

Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει

$$\begin{aligned}
(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}(B) &= \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{W}_n^{-1}(B)) = \widetilde{Q}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \\
&= ((\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*} \otimes \mu_{\mathbb{N}^*})((\Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times B) \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \\
&= (\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times B) \cdot \mu_{\mathbb{N}^*}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \\
&= (\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*}(\Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times B) = \nu_\theta(B)\nu_\theta(\Upsilon)\ldots\nu_\theta(\Upsilon)\ldots = \nu_\theta(B).
\end{aligned}$$

Επίσης ισχύει

$$(\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)_{\pi_{\widetilde{\Omega}}}(\widetilde{W}_n^{-1}(B)) = (\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}(B). \tag{5.25}$$

Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)_{\pi_{\widetilde{\Omega}}}(\widetilde{W}_n^{-1}(B)) &= (\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)[\pi_{\widetilde{\Omega}}^{-1}(\widetilde{W}_n^{-1}(B))] \\
&= (\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)[\pi_{\widetilde{\Omega}}^{-1}(B \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*})] \\
&= (\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)[(B \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \times \Upsilon] \\
&= \widetilde{Q}_\theta(B \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \cdot \delta_\theta(\Upsilon) = \widetilde{Q}_\theta(B \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*}) \\
&= \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{W}_n^{-1}(B)) = (\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}(B),
\end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η (5.25).

Από τις (5.24) και (5.25) προκύπτει

$$\begin{aligned}\nu_\theta \overset{(5.24)}{=} (\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n} \overset{(5.25)}{=} (\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)_{\pi_{\widetilde{\Omega}}} \circ \widetilde{W}_n^{-1} &= (Q_\theta \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}^{-1})\widetilde{W}_n^{-1} = Q_\theta \circ (\widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\Omega}})^{-1} \\ &= Q_\theta \circ W_n^{-1} = (Q_\theta)_{W_n},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\nu_\theta = (Q_\theta)_{W_n}. \tag{5.26}$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στις σχέσεις (5.24) και (5.26) αποδεικνύεται ότι

$$(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n} = \mu = (Q_\theta)_{X_n}. \tag{5.27}$$

Στη συνέχεια συμβολίζουμε με $\widetilde{C}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων του $\widetilde{\Omega}$, δηλαδή όλων των υποσυνόλων του $\widetilde{\Omega}$ που εκφράζονται ως $\prod_{i,j\in\mathbb{N}^*}(A_i \times B_j)$, όπου $A_i, B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$, και $I := \{i \in \mathbb{N}^* : A_i \neq \Upsilon\}$, $J := \{j \in \mathbb{N}^* : B_j \neq \Upsilon\}$ είναι πεπερασμένα. Θέτουμε $C_i := A_i$ για $i \in I$ και $D_j := B_j$ για $j \in J$. Τότε $\widetilde{C} = \prod_{(i,j)\in I\times J}(C_i \times D_j) \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus I} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus J}$ και έτσι θέτοντας $\widetilde{W} := (\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_n, \ldots)$ και $\widetilde{X} := (\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n, \ldots)$, λαμβάνουμε για κάθε $\widetilde{C} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ ότι

$$\begin{aligned}(\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})}(\widetilde{C}) &= ((\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*} \otimes \mu_{\mathbb{N}^*})\left(\prod_{(i,j)\in I\times J}(Ci, D_j) \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus I} \times \Upsilon^{\mathbb{N}^*\setminus J}\right) \\ &= \prod_{i\in I}\nu_\theta(C_i)\prod_{j\in J}\mu(D_j) = \prod_{i\in I}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_i}(C_i)\prod_{j\in J}\widetilde{Q}_{\widetilde{X}_j}(D_j),\end{aligned}$$

από το οποίο έπεται ότι η ισότητα

$$(\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n}) = (\nu_\theta)_{\mathbb{N}^*} \otimes \mu_{\mathbb{N}^*} \tag{5.28}$$

αληθεύει επάνω στο $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Έτσι, αν συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{D}}$ την οικογένεια όλων των $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$ που ικανοποιούν την σχέση (5.28) έχουμε ότι $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}$. Εύκολα μπορεί να φανεί ότι η $\widetilde{\mathcal{D}}$ είναι μία κλάση Dynkin. Επίσης ισχύει ότι $\sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$ και ότι η $\widetilde{\mathcal{C}}$ είναι κλειστή υπό τις πεπερασμένες τομές. Ως εκ τούτου μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. π.χ. Θεώρημα Α΄.2.4) ώστε να λάβουμε $\widetilde{\mathcal{D}} \supseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$, επομένως $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\Sigma}$.

Συνεπώς, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ οι ακολουθίες $\{\widetilde{W}_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ και $\{\widetilde{X}_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ είναι $\widetilde{Q}_\theta-$ανεξάρτητες, όπου μαζί με τη σχέση (5.23) έπεται ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q_\theta-$ανεξάρτητες, διότι αν $W := (W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ και $X := (X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ τότε

$$(Q_\theta)_{(W,X)} \overset{(5.23)}{=} Q_\theta \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}^{-1} \circ (\widetilde{W}, \widetilde{X})^{-1} = (\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})} \overset{(5.28)}{=} (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n}).$$

Άρα

$$(Q_\theta)_{(W,X)} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(Q_\theta)_{W_n}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(Q_\theta)_{X_n}). \tag{5.29}$$

Όμως καθώς η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μία disintegration του Q επάνω στην R_Θ συνεπής με την Θ σύμφωνα με το βήμα (j), μπορούμε να εφαρμόσουμε το βήμα (d) της απόδειξης του Θεωρήματος 7.2.9 του [3] για να συμπεράνουμε ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q-$υπό συνθήκη ανεξάρτητες, δηλαδή ότι το Q ικανοποιεί την $(a1)$. Επί πλέον, επειδή $(Q_\theta)_{X_n} = \mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κάθε $\theta \in \Upsilon$, από το Λήμμα 3.2.1 λαμβάνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει η ισότητα $Q_{X_n|\Theta} = \mu$.
Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}^*$ αυθαίρετο. Από το Λήμμα 3.2.1 προκύπτει ότι για κάθε $B, D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε $Q(X_n^{-1} \cap \Theta^{-1}(D)) = \int_D Q_\theta(X_1^{-1}(B))Q_\Theta(d\theta)$. Συνεπώς, για $D = \Upsilon$ έχουμε

$$\begin{aligned} Q_{X_n}(B) &= \int_\Upsilon (Q_\theta)_{X_n}(B)Q_\Theta(d\theta) = \int_\Upsilon \mu(B)Q_\Theta(d\theta) = \mu(B)\int_\Upsilon Q_\theta(d\theta) \\ &= \mu_B Q_\Theta(\Upsilon) = \mu(B). \end{aligned}$$

Επομένως $Q_{X_n|\Theta} = \mu$. Αφού $Q_{X_n} = \mu$, προκύπτει η συνθήκη $(a2)$ για το Q.
Αφού ισχύουν οι $(a1)$ και $(a2)$ για το Q, προκύπτει η $Q-$ανεξαρτησία των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, επομένως των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.3, (i)). Επίσης, αφού η σχέση (5.28) ισχύει επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$, εφαρμόζοντας την (5.29) συμπεραίνουμε ότι $(Q_\theta)_X = \otimes_{n\in\mathbb{N}^*}(Q_\theta)_{X_n} = \mu_{\mathbb{N}^*}$. Επομένως η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q_\theta - i.i.d.$ για όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Όμως αφού το Q ικανοποιεί την $(a2)$, από το τελευταίο συμπέρασμα και το Λήμμα 5.1.3, (ii) προκύπτει ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $Q - i.i.d.$
(l) Η σ.δ. του ύψους των συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q-CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$.
Πράγματι, από το βήμα (k) και την απόδειξή του προκύπτει ότι η $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μία $Q_\theta-$διαδικασία κινδύνου για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Επίσης από τις συνθήκες $\nu_\theta = \mathbf{Exp}(\theta e^a)$ και $(Q_\theta)_{W_n} = \nu_\theta$ των βημάτων (i) και (j) αντίστοιχα, που ισχύουν για κάθε $\theta \in \Upsilon$ και $n \in \mathbb{N}^*$, έπεται σύμφωνα με το [28], Theorem 2.3.6, ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $Q_\theta-$Poisson με παράμετρο θe^a. Συνεπώς, η επαγόμενη σ.δ.$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του ύψους των συνολικών απαιτήσεων είναι $Q_\theta - CPP(\theta e^a, (Q_\theta)_{X_1})$ για όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Το τελευταίο μαζί με το (k) και το Θεώρημα 5.1.4 συνεπάγονται την ισχύ του (l).
(m) Υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιαδήποτε σταθερά $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \notin Z'_*$ να ισχύει $(R_\theta)_{S_t} = (Q_\theta)_{S_t}$ όπου $R_\theta := R_\theta|\mathcal{H}_t$ και $Q_\theta := Q_\theta|\mathcal{H}_t$.
Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού το P ικανοποιεί την $(a2)$, υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_*$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_*$ να ισχύει $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$.
Πράγματι, από το Λήμμα 3.2.1 για κάθε $A, B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ συνεπάγεται ότι

$$P(X_1^{-1}(A) \cap \Theta^{-1}(B)) = \int_B P_\theta(X_1^{-1}(A))P_\Theta(d\theta).$$

Όμως για κάθε $A, B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει

$$\begin{aligned} P(X_1^{-1}(A) \cap \Theta^{-1}(B)) &\stackrel{(a2)}{=} P(X_1^{-1}(A))P(\Theta^{-1}(B)) = P(X_1^{-1}(A))P_\Theta(B) \\ &= P(X_1^{-1}(A)) \int_B P_\Theta(d\theta) = \int_B P(X_1^{-1}(A))P_\Theta(d\theta). \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $A, B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_B P_\theta(X_1^{-1}(A))P_\Theta(d\theta) = \int_B P(X_1^{-1}(A))P_\Theta(d\theta) \\ &\iff \forall A \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \quad \exists \widehat{L}_A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \forall \theta \notin \widehat{L}_A \quad P_\theta(X_1^{-1}(A)) = P(X_1^{-1}(A)) \\ &\iff \forall A \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \quad \exists \widehat{L}_A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \forall \theta \notin \widehat{L}_A \quad (P_\theta)_{X_1}(A) = (P_{X_1})(A), \end{aligned}$$

όπου $\mathfrak{B}(\Upsilon)_0 := \{B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) : P_\Theta(B) = 0\}$.

Έστω $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}(\Upsilon)}$ ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\widehat{L}_* := \bigcup_{A \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}(\Upsilon)}} L_A \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0$. Εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης, από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε ότι

$$\exists \widehat{L}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \quad \forall \theta \notin \widehat{L}_* \quad (P_\theta)_{X_1}(A) = P_{X_1}(A),$$

ή ισοδύναμα

$$\exists \widehat{L}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0 \quad \forall \theta \notin \widehat{L}_* \quad (P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}.$$

Έστω τώρα $r > 0, n \in \mathbb{N}^*$ και $t \in \mathbb{R}_+$ σταθερά. Από την (5.20) έπεται ότι για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_*$ ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rX_1}] &= \int e^{-rx}(Q_\theta)_{X_1}(dx) = \int e^{-rx}\mu(dx) = \int e^{-rx}e^{\gamma(x)}P_{X_1}(dx) \\ &= \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)-rX_1}] = \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}], \end{aligned} \tag{5.30}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [5].
Από την απόδειξη του βήματος (l) προκύπτει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q_\theta - MPP$ με παράμετρο θe^a για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Άρα εφαρμόζοντας την (5.18) παίρνουμε ότι για κάθε $\theta \notin L_d$ ότι

$$Q_\theta(N_t = n) = \zeta(t,\theta)e^{na}P_\theta(N_t = n). \tag{5.31}$$

Από τις (5.30) και (5.31) για κάθε $\theta \notin L_d$ προκύπτει

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}] = \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}])^n e^{na}P_\theta(N_t = n). \tag{5.32}$$

Πράγματι, για κάθε $\theta \notin L_d$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}] &= \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-r\sum_{k=1}^{N_t} X_k}] = \mathbb{E}_{Q_\theta}[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} e^{-r\sum_{k=1}^{n} X_k}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{Q_\theta}[\chi_{\{N_t=n\}} e^{-r\sum_{k=1}^{n} X_k}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{Q_\theta}[\chi_{\{N_t=n\}}]\mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-r\sum_{k=1}^{n} X_k}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{Q_\theta}[\chi_{\{N_t=n\}}]\mathbb{E}_{Q_\theta}[\prod_{k=1}^{n} e^{-rX_k}] = \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta[N_t=n]\mathbb{E}_{Q_\theta}[\prod_{k=1}^{n} e^{-rX_1}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta[N_t=n] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rX_1}] \overset{(5.30)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta[N_t=n] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(t,\theta) e^{na} P_\theta[N_t=n](\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}])^n.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $Z_*^{'} := \widehat{L}_* \cup L_h \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Τότε $P_\Theta(Z_*^{'}) = 0$ και άρα $R_\Theta(Z_*^{'}) = 0 = Q_\Theta(Z_*^{'})$ αφού $R_\Theta = Q_\Theta \sim P_\Theta$ σύμφωνα με το βήμα (j) και το Λήμμα 5.3.3, αντίστοιχα. Έτσι εφαρμόζοντας το βήμα (h) έχουμε ότι για κάθε $\theta \notin Z_*^{'}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{R_\theta}[e^{-rS_t}] &= \zeta(t,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_t^{(\beta)}-rS_t}] = \zeta(t,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\sum_{k=1}^{N_t}[\beta(X_k)-rX_k]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} e^{\sum_{k=1}^{n}[\beta(X_k)-rX_k]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\{N_t=n\}} \prod_{k=1}^{n} e^{[\beta(X_k)-rX_k]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\{N_t=n\}}]\mathbb{E}_{P_\theta}[\prod_{k=1}^{n} e^{[\beta(X_k)-rX_k]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} P_\theta[N_t=n] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{[\beta(X_k)-rX_k]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} P_\theta[N_t=n] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{[\beta(X_1)-rX_1]}] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}_{P_\theta}(e^{[\beta(X_1)-rX_1]})\right)^n P_\theta[N_t=n] \\
&= \zeta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}_{P_\theta}(e^{[\gamma(X_1)-rX_1]})\right)^n e^{na} P_\theta[N_t=n] \overset{(5.28)}{=} \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}],
\end{aligned}$$

δηλαδή $\mathbb{E}_{R_\theta}[e^{-rS_t}] = \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}]$, από το οποίο έπεται ότι $(R_\theta)_{S_t} = (Q_\theta)_{S_t}$ (βλ. π.χ. [7], Theorem 22.2).

(n) Για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin Z_*^{'}$ υπάρχει μία μοναδική επέκταση του R_θ στην Σ, που συμβολίζεται πάλι με R_θ, ώστε $Q_\theta = R_\theta$ επάνω στην Σ. Επί πλέον, υπάρχει μία μοναδική

επέκταση του R στην Σ, που συμβολίζεται πάλι με R, ώστε $Q = R$ επάνω στην Σ και η οικογένεια $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ να είναι μία disintegration του R επάνω στο R_θ συνεπής με την Θ.
Πράγματι, σύμφωνα με το (m) για κάθε σταθερό $\theta \notin Z'_*$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $Q_\theta|\sigma(S_u) = R_\theta|\sigma(S_u)$ για $0 \le u \le t$, από το οποίο έπεται ότι $Q_\theta|\bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u) = R_\theta|\bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u)$. Αλλά αφού τα Q_θ και R_θ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\widetilde{\mathcal{H}}_t$ που συμπίπτουν επάνω στην $\bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u)$, τότε από το Θεώρημα Μοναδικότητας για μέτρα (βλ. Πρόταση 1.2.8 του [5]) προκύπτει ότι αυτά συμπίπτουν επάνω στην $\widetilde{\mathcal{H}}_t$. Επί πλέον, αφού οι $\{Q_\theta|\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{R_\theta|\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι συνεπείς με την Θ, θα συμπίπτουν και επάνω στην $\sigma(\Theta)$. Άρα θα συμπίπτουν επάνω στην $\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta)$. Όμως αφού οι συνολοσυναρτήσεις Q_θ και R_θ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{H}_t$ που συμπίπτουν επάνω στην $\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta)$ εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης παρόμοιο με εκείνο του βήματος (e), λαμβάνουμε ότι τα Q_θ και R_θ συμπίπτουν επάνω στην $\mathcal{H}_t$, επομένως και στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$.
Αφού η συνολοσυνάρτηση Q_θ είναι μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ, ώστε $Q_\theta|\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t = R_\theta$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή (βλ. π.χ. [5], Θεώρημα 1.3.5) παίρνουμε ότι υπάρχει μία μοναδική επέκταση του R_θ επάνω στην Σ, που θα συμβολίζεται πάλι με R_θ ώστε $Q_\theta = R_\theta$.
Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η συνάρτηση $\theta \longmapsto R_\theta(F)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $F \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ και εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης έχουμε την $\mathfrak{B}(\Upsilon)-$μετρησιμότητα της συνάρτησης $\theta \longmapsto R_\theta(E)$ για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \Sigma$. Επί πλέον, από το βήμα (j) μαζί με το γεγονός ότι $Q_\theta = R_\theta$ για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin Z'_*$, έπεται ότι τα μέτρα R και Q συμπίπτουν επάνω στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ και ότι το Q είναι μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ. Επομένως, εφαρμόζοντας και πάλι το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή έπεται η ύπαρξη μιας μοναδικής επέκτασης του R επάνω στην Σ, που συμβολίζεται πάλι με R, ώστε $R = Q$ επάνω στην Σ. Προφανώς, η οικογένεια των μέτρων πιθανότητας $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ επάνω στην Σ γίνεται disintegration του R επάνω στο R_θ συνεπής με την Θ.
(o) Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ και μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ) για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin Z'_*$.
Πράγματι, αφού $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ από την (5.16) και το βήμα (n) έχουμε από το βήμα (k) και (l) ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$. Επί πλέον, έχουμε ότι η ισχύς της (M_θ) για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin Z'_*$ και για τις disintegrations $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο P_Θ και Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, οι οποίες είναι συνεπείς με την Θ, προκύπτει άμεσα από το βήμα (n) και τη σχέση (5.15). Η ισχύς της συνθήκης (M_ξ) έπεται από το βήμα (n) και την (5.16). Το γεγονός ότι η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι ουσιωδώς μοναδική προκύπτει από την [17], $452X(m)$. Τέλος,

αφού η μοναδικότητα του Q είναι προφανής, έχουμε το βήμα (o).
Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του (ii). □

Παρατήρηση 5.3.8. Η Πρόταση 2.2. των Delbaen & Haezendonck [10] μπορεί να θεωρηθεί ως μία ξεχωριστή περίπτωση του Θεωρήματος 5.3.7 αν η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. Θ είναι εκφυλισμένη σε κάποιο $\theta_0 > 0$ υπό το μέτρο P.

Πράγματι, έστω $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$ για κάποιο $\theta_0 > 0$. Τότε το μέτρο P ικανοποιεί τη συνθήκη ($a1$) αν και μόνο αν οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$ανεξάρτητες, και το P ικανοποιεί τη συνθήκη ($a2$) αν και μόνο αν η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι $P-$ανεξάρτητη του θ_0, το οποίο είναι προφανές. Έτσι, έπεται η συνθήκη $P_{(W,X)} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*} P_{W_n}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}^*} P_{X_n})$.
Σημειώνουμε επίσης ότι από την υπόθεση $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ έχουμε ότι $Q \overset{pr}{\sim} P$, από το οποίο μαζί με το Λήμμα 5.3.3, (ii), έπεται ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$. Άρα $Q_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Theta(\omega) = \theta_0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα $\sigma(\Theta) = \{\emptyset, \Omega\}$ γεγονός που σημαίνει ότι $\widetilde{\mathcal{H}}_t = \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty = \mathcal{H}_\infty$.
Τότε η υπόθεση ότι $P \in \mathcal{M}_S$ του Θεωρήματος 5.3.7 ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P - CPP(\theta_0, (P_{\theta_0})_{X_1})$, ενώ η υπόθεση ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CPP(\theta_0 e^a, (Q_{\theta_0})_{X_1})$, και $Q|\widetilde{\mathcal{H}}_t \sim P|\widetilde{\mathcal{H}}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
Επί πλέον, από το γεγονός ότι η Θ είναι εκφυλισμένη στο θ_0 υπό το μέτρο P αλλά και Q, συμπεραίνουμε ότι $P_\Theta(\Upsilon \setminus \{\theta_0\}) = Q_\Theta(\Upsilon \setminus \{\theta_0\}) = 0$ καθώς και ότι $P = P_{\theta_0}$ και $Q = Q_{\theta_0}$. Έτσι οι δύο συνθήκες (M_θ) και (M_ξ) ανάγονται στην ισότητα (2.15) του [10]. Οπότε, από την εφαρμογή του Θεωρήματος 5.3.7, (i), έπεται το πρώτο μέρος της [10], Proposition 2.2. Από την εφαρμογή του Θεωρήματος 5.3.7, (ii) και την απόδειξή του, συμπεραίνουμε το «αντίστροφο» μέρος της [10], Proposition 2.2. □

Πρόταση 5.3.9. (πρβλ. [3], Πρόταση 7.2.12). Αν το μέτρο $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ και $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin L_2$ η διαδικασία $\{S_t - \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(Q_\theta, \mathcal{H})-$martingale,

(ii) Αν $\Theta \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε η $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})-$martingale,

(iii) Αν $\Theta \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε η $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})-$martingale, αν και μόνο αν η σ.κ. της Θe^a είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 e^a$ για κάποιο $\theta_0 > 0$.

Απόδειξη. Έστω $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ και $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$. Τότε έχουμε ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$ καθώς και ότι η Q ικανοποιεί τις συνθήκες ($a1$) και ($a2$). Έτσι, από το Θεώρημα 5.1.4 έπεται ότι υπάρχει ένα $Q_\Theta-$μηδενικό σύνολο $L_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin L_2$ η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μία $Q_\theta - CPP(\Theta e^a, (Q_\theta)_{X_1})$, γεγονός που σημαίνει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q_\theta-$ διαδικασία Poisson με παράμετρο θe^α. Από το τελευταίο μαζί με το Λήμμα 5.2.6, (i) έπεται ότι η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $Q_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Σταθεροποιούμε τώρα ένα αυθαίρετο $\theta \notin L_2$.

(i): Από την τελευταία συνθήκη έχουμε ότι η διαδικασία $\{S_t - \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(m3)$ για τα Q_θ και $\mathcal{H}$, αφού $\mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t] = t\theta e^\alpha \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = t\theta e^\alpha \mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου οι δύο ισότητες είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης $(a2)$ και της $Q-$ολοκληρωσιμότητας της τ.μ. X_1, αντίστοιχα. Έτσι, λαμβάνουμε το (i).

(ii): Προφανώς, η $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(m1)$ για την $\mathcal{H}$, ενώ η ιδιότητα $(m2)$ έπεται από την $Q-$ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. X_1 και Θe^a. Αφού η διαδικασία $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει $Q_\theta-$στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις για οποιοδήποτε $\theta \notin L_2$, από το Πόρισμα 4.3.7 και την Πρόταση 4.3.4 έπεται ότι θα έχει $Q-$υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, γεγονός που συνεπάγεται ότι για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ η τ.μ. $S_t - S_s$ είναι $Q-$υπο συνθήκη ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{H}}_s$, επομένως και της $\mathcal{H}_s$ (βλ. [23], Lemma 4.7). Το τελευταίο μαζί με το [9], Theorem 1, Chapter 7.3, συνεπάγονται ότι η συνθήκη $\int_A \mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\mathcal{H}_s]dQ = \int_A \mathbb{E}_Q[S_t - S_s|\Theta]dQ$ αληθύει για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και $A \in \mathcal{H}_s$, οπότε η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(m3)$ για το Q και την $\mathcal{H}$. Έτσι προκύπτει το (ii).

(iii): Αν η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})-$martingale, τότε λαμβάνουμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα $(m3)$, γεγονός που με τη σειρά του συνεπάγεται την ισότητα $\int_D (S_t - S_s)dQ = \int_D \mathbb{E}_Q[(S_t - S_s)]dQ$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $D \in \sigma(\Theta)$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι από την υπόθεση η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CMPP(\Theta e^a, Q_{X_1})$ τέτοια ώστε η Θe^a και η X_1 να είναι $Q-$ολοκληρώσιμες, συνεπάγονται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}_Q[S_t|\Theta] = \mathbb{E}_Q[S_t] \Longleftrightarrow t\Theta e^a \mathbb{E}_Q[X_1] = t\mathbb{E}_Q[\Theta e^a]\mathbb{E}_Q[X_1] \Longleftrightarrow \Theta e^a = \mathbb{E}_Q[\Theta e^a],$$

όπου όλες οι ισότητες αληθεύουν για $Q|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ Συνεπώς, υπάρχει ένα $\theta_0 \in \Upsilon$ τέτοιο ώστε $1 = Q_{\Theta e^a}(\{\theta_0 e^a\}) = Q_\Theta(\{\theta : \theta e^a = \theta_0 e^a\})$ επομένως $P_\Theta(\{\theta : \theta e^a = \theta_0 e^a\}) = 1$, αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$, από την υπόθεση $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$. Συνεπώς, η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CPP(\theta_0 e^a, Q_{X_1})$.

Αντιστρόφως, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CPP(\theta_0 e^a, Q_{X_1})$ τότε η $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})-$martingale (σημειώνουμε ότι η ιδιότητα $(m1)$ είναι προφανής, ενώ η $(m2)$ προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathbb{E}_Q[S_t] = t\theta_0 e^a \mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$) για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}_+$, αφού η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CPP(\theta_0 e^a, Q_{X_1})$. Από το τελευταίο προκύπτει η $Q-$ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο σκεπτικό όπως και στο βήμα (c) της απόδειξης της [23], Proposition 4.8 για να λάβουμε την ιδιότητα $(m3)$. $\square$

Συμβολισμός 5.3.10. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}^*_{S,\alpha} := \mathcal{M}^*_{S,\alpha,P_{X_1},\Theta}$ την οικογένεια όλων των μέτρων πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\alpha}$ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{H}, \{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+})$. Επί πλέον, αν η ξ είναι μία $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, τότε με $\mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha} := \mathcal{F}^*_{P,X_1,\Theta,\xi,\alpha}$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ τέτοιων ώστε $\Theta e^\alpha \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) \in \mathcal{L}^1(P)$ και $X_1\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \in \mathcal{L}^1(P)$.

Πόρισμα 5.3.11. (πρβλ. [3], Πόρισμα 7.2.13). Θεωρούμε ότι $P \in \mathcal{M}_{S,\alpha}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $Q \in \mathcal{M}^*_{S,\alpha}$ υπάρχει μία $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική Radon-Nikodym παράγωγος ξ του Q_Θ ως προς P_Θ, μία ουσιωδώς μοναδική συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha}$, μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_θ συνεπής με την Θ και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin Z_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

(ii) Αντιστρόφως, για οποιαδήποτε $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ και για οποιοδήποτε $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha}$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^*_{S,\alpha}$, μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin Z'_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και $A \in \mathcal{H}_s$ να ικανοποιούνται οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

Απόδειξη. (i): Έστω ότι $Q \in \mathcal{M}^*_{S,a}$. Αφού προφανώς $\mathcal{M}^*_{S,a} \subseteq \mathcal{M}_{S,a}$, από το Θεώρημα 5.3.7, (i), έχουμε ότι υπάρχει μία $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική Radon-Nikodym παράγωγος ξ του Q_Θ ως προς το P_Θ, μία ουσιωδώς μοναδική συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$, μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ, καθώς και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε $\theta \notin Z_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ). Όμως, αφού $Q \in \mathcal{M}^*_{S,a}$, όλες οι τ.μ. $S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]$ είναι $Q-$ολοκληρώσιμες, κάτι που από έναν εύκολο υπολογισμό συνεπάγεται ότι και οι Θe^a και X_1 είναι $Q-$ολοκληρώσιμες. Το τελευταιο μαζί με τη συνθήκη (M_ξ) συνεπάγονται ότι οι τ.μ. $\Theta e^a \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)$ και $X_1\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)$ είναι $P-$ολοκληρώσιμες. Άρα $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha}$ και έτσι αποδεικνύεται το (i).

(ii): Έστω ξ μία $P_\Theta - \sigma.\beta.$ θετική συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, και θεωρούμε ότι $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha}$. Αφού $\mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha} \subseteq \mathcal{F}_{P,\alpha}$ από το Θεώρημα 5.3.7, (ii), έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$, μία ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του

Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ, καθώς και ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ που ικανοποιεί για οποιοδήποτε $\theta \notin Z'_*$, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ τις συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ). Επί πλέον, η υπόθεση ότι το $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi,\alpha}$ μαζί με την συνθήκη (M_ξ) συνεπάγονται ότι οι τ.μ. Θe^a και X_1 είναι $Q-$ολοκληρώσιμες. Συνεπώς, κάθε τ.μ. S_t είναι $Q-$ολοκληρώσιμη. Άρα η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(m2)$ για το Q. Σημειώνουμε όμως ότι η συνθήκη $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ μαζί με την Πρόταση 5.3.9, (ii), συνεπάγονται ότι η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(m3)$ για το Q και την $\mathcal{H}$. Άρα $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{H}, \{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t|\Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ το οποίο αποδεικνύει το (ii). □

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά αναφέρουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 5.3.7 για συγκεκριμένες κατανομές της Θ που είναι χρήσιμες στις εφαρμογές. Στη συνέχεια, ορίζουμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και παραθέτουμε παραδείγματα που η πυκνότητα ασφαλίστρου ως προς το αρχικό μέτρο πιθανότητας P, είναι μικρότερη από την πυκνότητα ασφαλίστρου ως προς την αρχή ασφαλίστρου Q. Τέλος, περιγράφουμε το ρόλο του Θεωρήματος 5.3.7 στην χρηματοοικονομική αποτίμηση των ασφαλίσεων (Ενότητα 6.3.2).

6.1 Ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 5.3.7

Το Θεώρημα 5.3.7 παρέχει έναν χαρακτηρισμό των martingale-(προοδευτικά) ισοδύναμων σύνθετων μεμειγμένων σ.δ. Poisson προσφέροντάς μας μία πολύ σημαντική πληροφορία, τη συνθήκη (M_ξ). Για τον λόγο αυτό στη συνέχεια υπολογίζουμε την Radon-Nikodym παράγωγο ξ του Q_Θ ως προς το P_Θ για ειδικές περιπτώσεις κ.π. της δομικής παραμέτρου Θ, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα ασφαλιστικά και χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

Παρατήρηση 6.1.1. Από κάποιους εύκολους υπολογισμούς προκύπτει κάθε μία από τις ακόλουθες Radon-Nikodym παραγώγους. Πιο συγκεκριμένα είναι ο λόγος της σ.π.π. της εκάστοτε κατανομής πιθανότητας Q_Θ ως προς την αντίστοιχη σ.π.π. της P_Θ.

(a) Αν $P_\Theta = \mathbf{Ga}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(c_2, d_2)$ όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2^{d_2}\Gamma(d_1)}{c_1^{d_1}\Gamma(d_2)}\theta^{d_2-d_1}e^{(c_1-c_2)\theta} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(b) Αν $P_\Theta = \mathbf{Pa}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Pa}(c_2, d_2)$ όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2 d_2^{c_2}(d_1+\theta)^{c_1+1}}{c_1 d_1^{c_1}(d_2+\theta)^{c_2+1}} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(c) Αν $P_\Theta = \mathbf{IG}(c_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{IG}(c_2)$ όπου $c_1, c_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1 - c_2}{2\theta}} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(d) Αν $P_\Theta = \mathbf{Pa}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(c_2, d_2)$ όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2^{d_2}}{c_1 d_1^{c_1} \Gamma(d_2)} \theta^{d_2 - 1} (d + \theta)^{c_1 + 1} e^{-c_2 \theta} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(e) Αν $P_\Theta = \mathbf{Ga}(a_1, b_1, c_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(a_2, b_2, c_2)$ όπου $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2 \theta^{b_2 - 1} c^{-(\frac{\theta}{a_2})^{c_2}}}{a_2^{b_2} \Gamma(\frac{b_2}{c_2})} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(f) Αν $P_\Theta = \mathbf{Pa}(a_1, b_1, c_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(a_2, b_2, c_2)$ όπου $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2^{(1 - [\frac{\theta}{a_2}]^{c_2})} \cdot c_1}{a_2^{b_2} [\frac{c_1 + a_1(\theta - b_1)}{c_1}]^{-\frac{1}{a_1} - 1}} \cdot \theta^{b_2 - 1} \quad \text{για} \quad P_\Theta - \text{σχεδόν όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

Στο (a) μελετάμε την περίπτωση όπου η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ από μία $P-$ γίνεται μία $Q-$διαδικασία Pólya-Lundberg λόγω της αλλαγής του μέτρου πιθανότητας. Η λογική που ακολουθήθηκε για το (b) είναι παρόμοια με πριν, για μία δημοφιλή κατανομή των ασφαλιστικών μαθηματικών, την κατανομή Pareto. Στη συνέχεια, στο (c) εξετάζουμε την περίπτωση που η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ παραμένει στην κλάση των διαδικασιών Sichel. Για περισσότερες εφαρμογές βλέπε π.χ. [19], σελ. 41. Στο (d), δίνεται ένα παράδειγμα για το αν η αλλαγή μέτρου πιθανότητας επηρεάζει την ίδια την κατανομή πιθανότητας της δομικής παραμέτρου Θ και όχι απλώς τις παραμέτρους της αρχικής κατανομής (από Pareto κάτω από το μέτρο P γίνεται Γάμμα κάτω από το μέτρο Q). Το (e) και (f), είναι «γενικευμένα» παραδείγματα των (a) και (d) αντίστοιχα, καθώς έχουν κατανομές πιθανότητας τριών μεταβλητών.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την Radon-Nikodym παράγωγο f του Q_{X_1} ως προς P_{X_1} για ειδικές περιπτώσεις της κατανομής πιθανότητας της X_1.

6.2 Εφαρμογές στις Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρου

Για ό,τι ακολουθεί, υπενθυμίζουμε ότι ο χ.π. (Ω, Σ, P) είναι όπως και στην Παρατήρηση 5.3.2, (a) η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία $P - CMPP(\Theta)$, και θεωρούμε ότι οι τ.μ. X_1 και Θ είναι $P-$ολοκληρώσιμες. Επί πλέον, συμβολίζουμε με Q και $\{Q_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ το μοναδικό μέτρο *πιθανότητας* $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ *και την ουσιωδώς μοναδική* disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ *του* Q *επάνω στο* Q_Θ *συνεπή με τη* Θ*, που και τα δύο αντιστοιχούν στη συνάρτηση* $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$ *σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.7,* (ii).

Ο αριθμός $p(P) := \mathbb{E}_P[S_1] = \mathbb{E}_P[N_1]\mathbb{E}_P[X_1]$ ονομάζεται **πυκνότητα ασφαλίστρου** (ως προς P).

Ο σκοπός της εισαγωγής του νέου μέτρου πιθανότητας Q είναι να δώσουμε περισσότερο βάρος σε λιγότερο ευνοϊκά συμβάντα. Πιο συγκεκριμένα, το Q πρέπει να ορίζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου $p(Q)$ να είναι πεπερασμένη (δηλ. $\mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$) και να περιέχει μία επιπλέον επιβάρυνση ασφάλειας, δηλαδή

$$p(P) < p(Q) < \infty.$$

Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο γενικό ορισμό μιας αρχής υπολογισμού ασφαλίστρου, που είναι μία μικρή τροποποίηση του [10], Definition 3.1 κατάλληλη για τους σκοπούς της παρούσας ενότητας (βλ. Ορισμό 8.2.1 της Διδακτορικής Διατριβής του Δ. Λυμπερόπουλου [3]).

Ορισμοί 6.2.1. (βλ. [3], Ορισμός 8.2.1). **Αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου** είναι ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην Σ τέτοιο ώστε

$(pc1)$ $Q \overset{pr}{\sim} P$.

$(pc2)$ Η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q - CPP(\theta_0, Q_{X_1})$ για $\theta_0 > 0$.

$(pc3)$ $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Σημειώνουμε ότι σε σύγκριση με το [10], Definition 3.1, εδώ η κλάση όλων των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων είναι διευρυμένη, αφού $\Sigma = \mathcal{H}_\infty \supseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\infty$.

Παρατήρηση 6.2.2. Αν $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q_\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$.
Πράγματι, από το Θεώρημα 5.3.7, (ii) και την απόδειξή του ισχύει ότι

$$(Q_\theta)_{X_1} = (Q)_{X_1} \quad \text{για όλα τα} \quad \theta \in \Upsilon.$$

Επομένως, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ έχουμε

$$\mathbb{E}_Q[X_1] = \int X_1 dQ = \int x Q_{X_1}(dx) = \int x (Q_\theta)_{X_1}(dx) = \int X_1 dQ_\theta = \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1],$$

όπου η δεύτερη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [5]. Συνεπώς, $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$ και άρα $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q_\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$.

Οι παρατηρήσεις που ακολουθούν είναι ειδική περίπτωση των Παρατηρήσεων 8.2.2 του [3] για την ειδική περίπτωση που η β δεν εξαρτάται από το θ.

Παρατηρήσεις 6.2.3. (πρβλ. [3], Παρατηρήσεις 8.2.2). Προφανώς, οι Q και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ ικανοποιούν την (ii) του Θεωρήματος 5.3.7, (ii). Τότε από το Θεώρημα 5.3.7, (ii) και την απόδειξή του έπεται ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ και ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $Z_*^{'} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin Z_*^{'}$ να ισχύει $Q_\theta \overset{pr}{\sim} P_\theta$. Έτσι, από τη συνθήκη $Q \in \mathcal{M}_{S,a}$ μαζί με το Θεώρημα 5.1.4 έπεται ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $Q_\theta - CPP(\theta e^a, (Q_\theta)_{X_1})$ για οποιοδήποτε $\theta \notin Z_*^{'}$. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη και την Παρατήρηση 6.2.2 έχουμε ότι αν $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε για κάθε $\theta \notin Z_*^{'}$ το Q_θ είναι αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου. Επί πλέον, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι:

(a) Για κάθε $\theta \notin Z_*^{'}$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = e^{-a}\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\beta(X_1)}], \tag{6.1}$$

και

$$p(P_\theta) < p(Q_\theta) < \infty \quad \text{αν} \quad \beta(X_1) > 0. \tag{6.2}$$

Πράγματι, από την απόδειξη του (ii) του Θεωρήματος 5.3.7, βήμα (m) έπεται ότι υπάρχει ένα $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_*$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_*$ να ισχύει

$$(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}. \tag{6.3}$$

Έστω $\theta \notin Z_*^{'}$ σταθερό. Τότε για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει

$$(Q_\theta)_{X_1}(B) = \int_{X_1^{-1}(B)} e^{\gamma(X_1)} dP_\theta. \tag{6.4}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}(Q_\theta)_{X_1}(B) &= \mu(B) := \int_B e^{\gamma(x)} P_{X_1}(dx) \overset{(6.3)}{=} \int_B e^{\gamma(x)} (P_\theta)_{X_1}(dx)\\ &= \int_{X_1^{-1}(B)} e^{\gamma(X_1)} dP_\theta,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.7, (ii) και η τελευταία από το Θεώρημα 2.4.6. του [5].
Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] &= \int X_1 dQ_\theta = \int x (Q_\theta)_{X_1}(dx)\\ &\overset{(6.4)}{=} \int x e^{\gamma(x)} (P_\theta)_{X_1}(dx) = \int X_1 e^{\gamma(X_1)} dP_\theta\\ &= \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = e^{-a}\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\beta(X_1)}],\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [5].
Άρα για κάθε $\theta \notin Z'_*$ ισχύει η συνθήκη (6.1).

Από την (6.1) συνεπάγεται ότι $p(P_\theta) < p(Q_\theta)$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1(e^{\beta(X_1)} - 1)] > 0$.
Πράγματι, για κάθε $\theta \notin Z'_*$ έχουμε

$$\begin{aligned} p(P_\theta) < p(Q_\theta) &\iff \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \theta e^{\alpha}\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] \iff \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < e^{\alpha}\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] \\ &\overset{(6.1)}{\iff} \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < e^{\alpha}e^{-\alpha}\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\beta(X_1)}] \iff \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\beta(X_1)}] \\ &\iff \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1(e^{\beta(X_1)} - 1)] > 0. \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (6.2), υποθέτουμε ότι $\beta(X_1) > 0$. Τότε θα έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1(e^{\beta(X_1)} - 1)] > 0 \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon.$$

Πράγματι,

$$\beta(X_1) > 0 \Longrightarrow e^{\beta(X_1)} > e^0 \Longrightarrow e^{\beta(X_1)} > 1 \Longrightarrow e^{\beta(X_1)} - 1 > 0 \Longrightarrow \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta(X_1)} - 1] > 0,$$

για κάθε $\theta \in \Upsilon$.
Τώρα για να δείξουμε ότι $p(P_\theta) < p(Q_\theta) < \infty$ για κάθε $\theta \notin Z'_*$, αρκεί να δείξουμε ότι $p(Q_\theta) \in \mathcal{L}^1(Q_\theta)$ για κάθε $\theta \notin Z'_*$.
Πράγματι, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ έχουμε

$$p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = \theta e^{\alpha}\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] < \infty,$$

όπου η ανισότητα είναι συνέπεια της Παρατήρησης 6.2.2.

(b) Αν $\gamma > 0 \quad P_{X_1} - \sigma.\beta.$ και αν $\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)e^{\alpha} > 1 \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ τότε $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
Για την αποδειξη του (b), αρχικά θα δείξουε ότι

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_Q[X_1] \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon. \tag{6.5}$$

Πράγματι, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \int X_1 dQ_\theta = \int x(Q_\theta)_{X_1}(dx) = \int x(Q_{X_1})(dx) = \int X_1 dQ = \mathbb{E}_Q[X_1],$$

όπου η δεύτερη και τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [5], ενώ η τρίτη είναι συνέπεια της Παρατήρησης 6.2.2.
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για κάθε $\theta \in \Upsilon$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]. \tag{6.6}$$

Πράγματι, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] &= \int X_1 e^{\gamma(X_1)} dP_\theta = \int x e^{\gamma(x)} (P_\theta)_{X_1}(dx) = \int x e^{\gamma(x)} P_{X_1}(dx) \\ &= \int X_1 e^{\gamma(X_1)} dP = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}],\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.6 του [5], ενώ η τρίτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$, όπως αποδείχθηκε και στο Θεώρημα 5.3.7, (ii), που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1]$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$.

Από τις (6.5) και (6.6) προκύπτει ότι για κάθε $\theta \in \Upsilon$ ισχύει

$$\mathbb{E}_Q[X_1] \overset{(6.5)}{=} \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] \overset{(6.1)}{=} \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] \overset{(6.6)}{=} \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}],$$

συνεπώς

$$\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}].$$

Από την τελευταία συνθήκη μαζί με την (M_ξ) προκύπτει ότι

$$\frac{p(Q)}{p(P)} = \frac{\mathbb{E}_Q[S_1]}{\mathbb{E}_P[S_1]} = \frac{\mathbb{E}_Q[X_1]\mathbb{E}_Q[N_1]}{\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[N_1]} = \frac{\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \frac{\mathbb{E}_P[\xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)\Theta e^a]}{\mathbb{E}_P[\Theta]}, \quad (6.7)$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.4.8.

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις μας και την (6.7), λαβάνουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[S_1] < \mathbb{E}_Q[S_1] < \infty. \quad (6.8)$$

Επί πλέον, λαμβάνουμε ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q[S_t] &= \mathbb{E}_Q[X_1]\mathbb{E}_Q[N_t] = \mathbb{E}_Q[X_1] \int \mathbb{E}_Q[N_t|\Theta] dQ = \mathbb{E}_Q[X_1] \int t\Theta e^\alpha dQ \\ &= t\mathbb{E}_Q[X_1] \int \Theta e^\alpha \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP = t\mathbb{E}_Q[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta e^\alpha \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)] \\ &> t\mathbb{E}_Q[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta] = t\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]\mathbb{E}_P[\Theta] \\ &> t\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta] = \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[N_t] = \mathbb{E}_P[S_t],\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι προκύπτει από το Λήμμα 2.4.8.

Στη συνέχεια της παρούσας ενότητας παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα υπολογισμού ασφαλίστρων που αποτελούν εφαρμογή των όσων αναφέραμε προηγουμένως.

Παράδειγμα 6.2.4. (Αρχή Αναμενόμενης Αξίας). Αν $\beta(x) = c_0$ για κάθε $x \in \Upsilon$, όπου $c_0 \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε:

- $\gamma(x) = 0$ και $a = c_0$ για κάθε $x \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = e^{c_0}$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = e^{c_0}\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] = e^{c_0}\theta$ και $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ για κάθε $\theta \notin Z_*'$, όπου Z_*' είναι το $P_\Theta-$μηδενικό σύνολο του Θεωρήματος 5.3.7.
- $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = e^{c_0}\mathbb{E}_{P_\theta}[S_1] = e^{c_0}p(P_\theta)$ για κάθε $\theta \notin Z_*'$.

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_Q[e^{c_0}\Theta] = e^{c_0}\mathbb{E}_Q[\Theta] = e^{c_0}\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1]$, οπότε $\mathbb{E}_Q[S_t] = t\mathbb{E}_Q[S_1] = te^{c_0}\mathbb{E}_P[S_1] = te^{c_0}\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Ιδιαιτέρως, έχουμε ότι για κάθε $\theta \notin Z_*'$ ισχύει $p(Q_\theta) > p(P_\theta)$ αν και μόνο αν $c_0 > 0$.

Για το παραπάνω παράδειγμα βλ. Delbaen and Haezendonck [10], Examples 3.1. και [3], Παράδειγμα 8.2.3. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 8.2.5 του [3].

Παράδειγμα 6.2.5. Αν $\beta(x) = \ln(\frac{1}{x\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]})$ για κάθε $x \in \Upsilon$, τότε:

- $\gamma(x) = -\ln(x\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])$ και $a = 0$ για κάθε $x \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1 < \infty$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_{P,\alpha}$.
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = \theta = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ και $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = (\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1} = (\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}])^{-1}$ για κάθε $\theta \notin Z_*'$.
- $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = \theta\left(\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}]\right)^{-1}$ για κάθε $\theta \notin Z_*'$.

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = \theta$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = (\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}])^{-1} = (\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$, οπότε έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[S_t] = t\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)](\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\theta \notin Z_*'$ ισχύει η συνθήκη $p(P_\theta) < p(Q_\theta)$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}] < 1$.

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
p(P_\theta) < p(Q_\theta) &\iff \mathbb{E}_{P_\theta}[S_1] < \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] \iff \mathbb{E}_{P_\theta}[S_1] < \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
&\iff \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}]^{-1} \iff \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
&\iff \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}]^{-1} \iff \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}] < 1,
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη συνεπαγωγή είναι συνέπεια του Λήμματος 2.4.8.
Παρατηρούμε επίσης ότι η ανισότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}] < (\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)])(\mathbb{E}_P[\Theta])^{-1}$.
Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] \iff & \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[N_t] < t\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
\iff & \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[N_t|\Theta]] < t\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
\iff & \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[t\Theta] < t\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
\iff & t\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta] < t\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]^{-1} \\
\iff & \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]\mathbb{E}_P[\Theta] < \mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)] \\
\iff & \mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}] < \mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]\mathbb{E}_P[\Theta]^{-1},
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη συνεπαγωγή είναι συνέπεια του Λήμματος 2.4.8.

6.3 Εφαρμογές του Θεωρήματος 5.3.7 στα Χρηματοοικονομικά

Στην παρούσα ενότητα αρχικά παραθέτουμε κάποια σχόλια για τις μεθοδολογικές διαφορές μεταξύ των χρηματοοικονομικών και ασφαλιστικών. Στην Ενότητα 6.3.2 περιγράφουμε τον ρόλο του Θεωρήματος 5.3.7 στη χρηματοοικονομική αποτίμηση των ασφαλίσεων. Στην Ενότητα 6.3.3 δίνουμε μία σύντομη περιγραφή του προβλήματος της τιμολόγησης των ασφαλιστικών παραγώγων CAT, που σχετίζεται με τις σύνθετες μεμειγμένες διαδικασίες Poisson όπως μελετώνται στο Θεώρημα 5.3.7. Κλείνοντας το κεφάλαιο δίνουμε κάποια στοιχεία των αναλογιστικών μεθόδων στην χρηματοοικονομική.

Ιστορικά, οι τομείς των χρηματοοικονομικών και των ασφαλιστικών έχουν αναπτυχθεί ξεχωριστά, με κοινό σημείο κυρίως την κοινή χρήση της Θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών ως βασικό εργαλείο ανάλυσης. Ωστόσο, από τις εξελίξεις στο χρηματοπιστωτικό τομέα, όπως η αύξηση της συνεργασίας μεταξύ των ασφαλιστικών εταιρειών και των τραπεζών ή η εμφάνιση χρηματοασφαλιστικών προϊόντων, προκαλείται η αλληλεπίδραση μεταξύ χρηματοοικονομικών και ασφαλιστικών. Πρόσφατα το συγκεκριμένο θέμα έχει καταστεί ένα «καυτό θέμα», και διαφαίνεται ότι πολλές από τις μελλοντικές έρευνες στον τομέα της χρηματοοικονομικής και των ασφαλιστικών, θα συνδυάζουν ιδέες και από τους δύο τομείς. Για περισσότερες πληροφορίες της εξέλιξης αυτού του τομέα βλ. Embrechts (2000) [13].

6.3.1 Μεθολογικές διαφορές μεταξύ χρηματοοικονομικών και ασφαλιστικών

Αρχικά αξίζει να επισημάνουμε βασικές διαφορές μεταξύ του κλασικού αναλογισμού και των χρηματοοικονομικών προσεγγίσεων για την αντιμετώπιση του χρηματοοικονομικού κινδύνου (ρίσκου).
Η σύγχρονη ανάλυση των παραγώγων περιουσιακών στοιχείων, αποσκοπεί στην «αντιστάθμιση» των χρηματοοιονομικών κινδύνων από την δυναμική των συναλλαγών. Οι τιμές καθορίζονται από τα κεφάλαια που απαιτούνται για τη χρηματοδότηση αυτής της αντιστάθμισης. Συνεπώς, η κατανομή κάτω από το μέτρο πιθανότητας του πραγματικού κόσμου κάποιου χρηματοοικονομικού κινδύνου (π.χ. η πληρωμή ενός παραγώγου), δεν χρησιμοποιείται για την τιμολόγιση του κινδύνου αυτού. Αντιθέτως, οι τιμές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας κάποια «τεχνητά» martingale μέτρα, των οποίων η ύπαρξη είναι στενά συνδεδεμένη με την χρηματοοικονομική έννοια της μη-κερδοσκοπίας (no-arbitrage).

Η τυπική αναλογιστική προσέγγιση για την αντιμετώπιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων είναι θεμελιωδώς διαφορετική. Οι ασφαλιστικές εταιρείες είναι έτοιμες να αντέξουν κάποιους από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους (απαιτήσεις) ενός ασφαλισμένου, με αντάλλαγμα ένα ασφάλιστρο που είναι το άθροισμα της αναμενόμενης αξίας της απαίτησης και κάποιου ασφαλίστρου κινδύνου. Η πρόσθετη αυτή απαίτηση υπολογίζεται μέσω αρχών υπολογισμού (αναλογιστικού) ασφαλίστρου (βλ. π.χ. Goovaerts, De Vylder, and Haezendonck (1984) [18] για περισσότερες πληροφορίες). Μολονότι η ασφαλιστική εταιρεία θα μπορούσε να περάσει ένα μέρος του κινδύνου σε έναν αντασφαλιστή, δεν μπορεί τυπικά να «αντισταθμίσει» τους κινδύνους του χαροφυλακίου της με δυναμική διαπραγμάτευση. Συνεπώς, ο υπολογισμός των ασφαλίστρων των πιθανοτήτων χρεοκοπίας ή των απαραίτητων αποθεμάτων, γίνεται με τη χρήση της κατανομής των απαιτήσεων κάτω από το μέτρο πιθανότητας του πραγματικού κόσμου. Τα martingale εισάγονται στην ανάλυση μόνο ως ένα τεχνητό εργαλείο, μολονότι πολύ σημαντικό.

Μία δεύτερη διαφορά μεταξύ των τυπικών μοντέλων στους δύο τομείς αφορά στην κλάση των στοχαστικών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται. Οι διαδικασίες κινδύνου, που χρησιμοποιούνται στα ασφαλιστικά, όπως το μοντέλο Cramér-Lundberg έχουν ασυνεχείς δειγματικές τροχιές οι οποίες έχουν πεπερασμένη διακύμανση, ενώ τα περισσότερα τυπικά χρηματοοικονομικά μοντέλα χρησιμοποιούν διαδικασίες διάχυσης με συνεχείς τροχιές για να περιγράψουν τα ανεβοκατεβάσματα των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Ωστόσο, ορισμένα «νέα» μοντέλα για τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων μοιάζουν πολύ με διαδικασίες κινδύνου που χρησιμοποιούνται στον αναλογισμό.

Συνοπτικά, από μεθοδολογικής άποψης οι δύο τομείς φαίνεται ότι απέχουν μεταξύ τους.

Ωστόσο, αν κοιτάξουμε πρόσφατες εξελίξεις, είναι πολύ πιθανό ότι στο μέλλον το χάσμα μεταξύ των δύο κλάδων θα είναι πολύ μικρότερο από ό,τι φαίνεται να είναι τώρα.

6.3.2 Χρηματοοικονομική αποτίμηση των ασφαλίσεων

Οι βασικές μελέτες σχετικά με αυτό το θέμα οφείλονται στον Sondermann, [30] και ειδικότερα στους Delbaen and Haezendonck, [10]. Στο σημείο αυτό θα εξηγήσουμε την «προσέγγιση μέσω martingales στον υπολογισμό ασφαλίστρων σε μία μη κερδοσκοπική αγορά (arbitrage-free-market)που προτάθηκε από τους Delbaen and Haezendonck».

Σύμφωνα με τους Delbaen and Haezendonck η σ.δ. κινδύνου S_t παριστάνει το ύψος των συνολικών απαιτήσεων ενός σταθερού χαρτοφυλακίου από ασφαλιστήρια συμβόλαια που έχουν καταβληθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t. Επί πλέον θεωρούν κατάλληλο υπόδειγμα για τη σ.δ. του ύψους των συνολικών απαιτήσεων την σύνθετη σ.δ. Poisson. Δηλαδή, $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$, όπου η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ είναι μία σ.δ. ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία ομογενής διαδικασία Poisson που είναι ανεξάρτητη των X_k. Οι Delbaen and Haezendonck υποθέτουν επίσης ότι σε κάθε χρονική στιγμή t, η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να πουλήσει τον εναπομείνοντα κίνδυνο (τις εναπομείνουσες απαιτήσεις) $S_T - S_t$ του χαρτοφυλακίου της κατά την περίοδο $(t, T]$, για δοσμένο ασφάλιστρο p_t. Αναγκαστικά τότε, τα ασφάλιστρα αυτά θα είναι μία προβλέψιμη διαδικασία. Ως εκ τούτου, η υποκείμενη διαδικασία τιμών U_t (η αξία του χαρτοφυλακίου των απαιτήσεων στο χρόνο t) ορίζεται ως $U_t = p_t + S_t$.

Τώρα έρχεται το κρίσιμο σημείο που σηματοδοτεί την απομάκρυνση από τις συνήθεις αρχές αποτίμησης της ασφάλισης. Οι Delbaen and Haezendonck υποστηρίζουν ότι:

> «Η δυνατότητα να πουλάς και να αγοράσεις στο χρόνο t παριστάνει τη δυνατότητα «ανάληψης» αυτής της πολιτικής. Η ρευστότητα της αγοράς θα έπρεπε να συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν κερδοσκοπικές ευκαιρίες και ως εκ τούτου σύμφωνα με τους Harrison and Kreps (1979) θα έπρεπε να υπάρχει μία ουδέτερου κινδύνου κατανομή πιθανότητας Q, ώστε η σ.δ. $U := \{U_t\}_{0\leq t\leq T}$ να είναι ένα martingale κάτω από την Q.»

Το επόμενο βήμα στην αποτίμηση των ασφαλιστικών συμβολαίων για μη κερδοσκοπικές αγορές, είναι η επιλογή ενός κατάλληλου μέτρου Q. Οι Delbaen and Haezendonck ενδιαφέρονται για όλα αυτά τα μέτρα Q που οδηγούν σε γραμμικά ασφάλιστρα της μορφής $p_t = (T-t)p(Q)$ για την υποκείμενη σ.δ. κινδύνου $S := \{S_t\}_{t\in[0,T]}$, και για όλα τα συμβόλαια αντασφάλισης υπερβάλλουσας ζημίας (excess-of-loss reinsurance contracts) με πληρωμή

$$C_K = \sum_{i=1}^{N_T} (X_i - K)^+,$$

όπου K είναι η τιμή εξάσκησης (strike price) του δικαιώματος.

Η $p(Q)$, η οποία εξαρτάται φυσικά από την συγκεκριμένη υπό εξέταση υπέρβαση του συμβολαίου περίσσειας της απώλειας (exess-of-loss contrant), ονομάζεται **πυκνότητα ασφαλίστρου** (premium density). Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό συνεπάγεται ότι υπό το μέτρο Q, η διαδικασία των τιμών U πρέπει και πάλι να είναι μία σύνθετη $\sigma.\delta.$ Poisson, πιθανότατα με διαφορετική κατανομή απώλειας $\mu(Q)$ και ένταση απώλειας $\lambda(Q)$. Τότε η πυκνότητα ασφαλίστρου $p(Q)$ λαμβάνει την εξής μορφή

$$p(Q) = \mathbb{E}_Q(U_1) = \mathbb{E}_Q(N_1)\mathbb{E}_Q(X_1) = \lambda(Q) \int_0^\infty y\mu(Q)(dy).$$

Οι Delbaen and Haezendonck δείχνουν επίσης ότι μπορούμε να λάβουμε οποιαδήποτε κατανομή μεγέθους απαίτησης $\mu(Q)$ η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική κατανομή μεγέθους της απαίτησης μ και με οποιαδήποτε ένταση $\lambda(Q)$ με τον τρόπο αυτό. Ειδικότερα, αποδεικνύουν πως μπορούμε να αποκτήσουμε ορισμένες γνωστές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου με την κατάλληλη επιλογή των $\lambda(Q)$ και $\mu(Q)$.

Οι παραπάνω σκέψεις των Delbaen and Haezendonck τους οδήγησαν στο πρόβλημα του χαρακτηρισμού όλων των κατανομών πιθανότητας Q, ώστε να είναι προοδευτικά ισοδύναμες με το P και οι $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, που είναι σύνθετες διαδικασίες Poisson κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, να παραμένουν το ίδιο κάτω από το Q, το οποίο έλυσαν στο [10]. Στο Θεώρημα 5.3.7 λύθηκε το αντίστοιχο γενικότερο πρόβλημα για σύνθετες μεμειγμένες διαδικασίες Poisson.

6.3.3 Παράγωγα ασφάλισης

Μία περιοχή στενά συνδεδεμένη με την αποτίμηση των ασφαλιστικών συμβολαίων σε περιβάλλον μη κερδοσκοπικών αγορών είναι η αξία των ασφαλιστικών παραγώγων. Η πληρωμή τέτοιων παραγώγων (εν μέρει) συνδέεται με τις απώλειες κάποιου προκαθορισμένου χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ή κάποιου τυποποιημένου δείκτη απώλειας. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τα PCS-δικαιώματα (Property Claim Service-options) που αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο Chicago Board of Trade ή ορισμένα λεγόμενα CAT-ομόλογα (Catastrophe-bonds, ομόλογα καταστροφών) που εκδίδονται από μεμονωμένες εταιρείες (αντ)ασφάλισης. Οι ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούν τα μέσα αυτά προκειμένου να περάσουν μέρος του κίνδυνου στις αγορές κεφαλαίων. Από την άλλη, για ορισμένους επενδυτές αυτά τα παράγωγα θα μπορούσε να είναι ενδιαφέροντα εργαλεία ώστε να διαφοροποιήσουν περαιτέρω τους επενδυτικούς τους κινδύνους. Για περισσότερες λεπτομέριες για τα συγκεκριμένα παράγωγα βλ. Canter, Cole, and Sandor, [8].

Μία μαθηματική περιγραφή ενός παραγώγου ασφάλισης θα μπορούσε να είναι ως ακολούθως.
Έστω S μία σ.δ. κινδύνου της μορφής $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ που εκπροσωπεί τον υποκείμενο δείκτη απώλειας. Τότε η πληρωμή ενός τυπικού παραγώγου ασφάλισης δίνεται από κάποια συνάρτηση $F(S_T)$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός PSC-δικαιώματος έχουμε

$$F(S_T) = (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ \quad \text{για κάποια} \quad 0 < K_1 < K_2.$$

Για να εξηγήσουμε το βασικό πρόβλημα που προκύπτει από την αποτίμηση τέτοιων συμβολαίων, υποθέτουμε ότι η S είναι μία σύνθετη σ.δ. Poisson, και ότι σε κάθε χρονική στιγμή t ο υπολειπόμενος κίνδυνος $S_T - S_t$ μπορεί να αγοραστεί η να πωληθεί για δοσμένο ασφάλιστρο $p^*(T-t)$. Η Θεωρία της μη κερδοσκοπικής αποτίμησης τώρα μας λέει μόνο ότι, μετά την προεξόφληση, κάθε βιώσιμη διαδικασία τιμών για το παράγωγό μας πρέπει να είναι της μορφής $H_t = \mathbb{E}_Q(F(S_T)|\mathcal{F}_t)$, όπου $Q \sim P$ και $\mathbb{E}_Q(S_T|\mathcal{F}_t) = S_t + p^*(T-t)$ για όλα τα t. Καθώς τα μεγέθη της απαίτησης X είναι μεταβλητές (σίγουρα αυτό ισχύει, αν μιλάμε για ασφάλιση έναντι καταστροφικών γεγονότων) υπάρχουν πολλά μέτρα με αυτή την ιδιότητα, ακόμη και αν η S είναι μία σύνθετη σ.δ. Poisson, υπό το μέτρο Q. Πράγματι, υπό ορισμένες τεχνικές συνθήκες κάθε νέα ένταση $\lambda(Q) > 0$ και κάθε κατανομή μεγέθους απαίτησης $\mu(Q)$ ισοδύναμη με την κατανομή μ των X_i υπό το P θα ήταν κατάλληλη, με την προϋπόθεση ότι $\lambda(Q)\int_0^\infty y\mu(Q)(dy) = p^*$. Η τελευταία σχέση αφήνει πολλές επιλογές αν ο φορέας του μ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Ως εκ τούτου, η αποτίμηση των ασφαλιστικών παραγώγων οδηγεί σε ένα πρόβλημα αποτίμησης σε μη πλήρεις αγορές. Θεωρούμε πως εδώ η προσέγγιση ελαχιστοποίησης του κινδύνου είναι κατάλληλη. Για περισσότερες λεπτομέριες σχετικά με μεθοδολογικές απορίες σχετικά με την αποτίμηση παραγώγων ασφάλισης και για ένα πληρέστερο κατάλογο της σχετικής βιβλιογραφίας, παραπέμπουμε στους Embrechts and Meister, [14]. Επί πλέον, ο Schmock, [29], περιέχει μια ενδιαφέρουσα συζήτηση ορισμένων στατιστικών θεμάτων που προκύπτουν στην περιοχή.

6.3.4 Αναλογιστικές Μέθοδοι στα Χρηματοοικονομικά

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί κατά κύριο λόγο με την εφαρμογή τεχνικών της χρηματοοικονομικής αποτίμησης σε ασφαλιστικά προβλήματα. Ωστόσο, οι αναλογιστικές έννοιες είναι επίσης σημαντικές για τα χρηματοοικονομικά προβλήματα. Έχουμε δει ότι τα ρεαλιστικά μοντέλα είναι τυπικά ατελή για τις διαδικασίες τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Εξάλλου, σε πολλά ελλιπή μοντέλα της αγοράς, η έννοια της υπέρ-αντιστάθμισης (superhedging) δεν οδηγεί σε ικανοποιητικές απαντήσεις για τη διαχείριση του κινδύνου των παραγώγων. Συνεπώς, ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να περιλαμβάνουν κάποιο είδος επιμερισμού των κινδύνων μεταξύ αγοραστή και πωλητή. Ειδικότερα, ο πωλητής πρέπει να φέρει ένα μέρος του «εναπομένοντος κινδύνου». Επί πλέον, οι συμμετέχοντες σε αγορές παραγώγων βρίσκονται αντιμέτωποι με μεγάλο μέρος του πιστωτικού κινδύνου, και θα ήταν ψευδαίσθηση να πιστεύει κανείς ότι όλος αυτός ο κίνδυνος μπορεί να αντισταθμιστεί. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα χρηματοοικονομικά μοντέλα για επικίνδυνους πιστωτικούς τίτλους παραπέμπουμε στον Lando, [22].

Αναλογιστικές μέθοδοι για τη διαχείριση του κινδύνου θα μπορούσαν να αποδειχθούν χρήσιμες για την αντιμετώπιση αυτών των μη αντισταθμισμένων (unhedgeable) κινδύνων. Οι εν λόγω έννοιες έχουν ήδη εφαρμοστεί, για παράδειγμα η RAC-(risk adjusted capital) προσέγγιση στην ασφάλιση έχει γίνει δημοφιλής στις τραπεζικές επενδύσεις ως εργαλείο για τον προσδιορισμό των κεφαλαίων και την κατανομή κεφαλαίων. Δεν είναι τυχαίο ότι η Swiss Bank Cooperation τώρα UBS ονόμασε ένα από τα συστήματα διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου της ACRA το οποίο αντιπροσωπεύει την Αναλογιστική Λογιστική του Πιστωτικού Κινδύνου (Actuarial Credit Risk Accounting).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο ακόλουθο παράρτημα, παραθέτουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου.

Α΄.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμοί Α΄.1.1. Ορίζουμε ως σ-**άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω, μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε:

(σ1) Το $\emptyset \in \Sigma$

(σ2) Για κάθε $E \in \Sigma$ ισχύει $E^c \in \Sigma$

(σ3) Για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Τα στοιχεία της Σ ονομάζονται **μετρήσιμα σύνολα** ή **ενδεχόμενα**. Το ζευγάρι (Ω, Σ) ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ. για συντομία). Μία $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω, ώστε $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, ονομάζεται $\sigma-$**υποάλγεβρα** της Σ.

Ορισμός Α΄.1.2. Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω αν:

- $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in \mathcal{I}$ ώστε $j \neq k$ και
- $\bigcup_{j\in\mathcal{I}} B_j = \Omega$.

Θα μπορούσαμε τις δύο τελευταίες ιδιότητες να τις συμβολίζαμε ως: $\biguplus_{j\in\mathcal{I}} B_j = \Omega$. Αν επιπλέον (Ω, Σ) είναι μ.χ. και η $\{B_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ είναι μια οικογένεια στο Σ, τότε αυτή ονομάζεται μια Σ-**μετρήσιμη διαμέριση του** Ω.

Ορισμός Α΄.1.3. Αν Θ είναι ένα σύνολο και T μια σ-άλγεβρα στο Θ, μία συνάρτηση $f : \Omega \to \Theta$ ονομάζεται Σ-T-**μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν και μόνο αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Ειδικά, αν $\Theta = \mathbb{R}$ και $T = \mathfrak{B}$, τότε η f ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, ενώ αν $\Theta = \mathbb{R}^n$ και $T = \mathfrak{B}$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η f ονομάζεται **(**n-**διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

Ορισμός Α΄.1.4. Ένας **χώρος μέτρου** είναι μία τριάδα (Ω, Σ, μ), όπου

(a) Ω είναι ένα σύνολο

(b) Σ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω

(c) $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ είναι μία συνολοσυνάρτηση, ώστε

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ στοιχείων της Σ με $E_i \cap E_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με P. Επομένως, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με (Ω, Σ, P).

Ορισμός Α΄.1.5. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Ως σύνολο **μηδενικού μέτρου** ή **μ-μηδενικού μέτρου** ή **μ-μηδενικό σύνολο**, ορίζουμε ένα σύνολο $N \in \Sigma$ αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$.

Ορισμός Α΄.1.6. Ένα μέτρο πιθανότητας P ονομάζεται **τέλειο** (και ο χ.π. (Ω, Σ, P) ονομάζεται **τέλειος**), αν για κάθε τυχαία μεταβλητή X στο Ω υπάρχει ένα σύνολο Borel $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}(\Omega) := \{\mathrm{X}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ τέτοιο ώστε, $P(\mathrm{X}^{-1}(B)) = 1$.

Α΄.2 Βασικά Αποτελέσματα

Θεώρημα Radon-Nikodym Α΄.2.1. Έστω μ, ν πεπερασμένα μέτρα επάνω στον μ.χ. (Ω, Σ). Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Η f ονομάζεται **παράγωγος Radon-Nikodym του** ν **ως προς** μ και είναι $\mu - \sigma.\beta.$ μοναδική.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 10.12(β).

Λήμμα Α′.2.2. Έστω Ω ένα υποσύνολο και $\mathcal{D}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $(Dyn1)'$ $\Omega \in \mathcal{D}$

$(Dyn2)'$ $B \setminus A \in \mathcal{D}$, για $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subseteq B$

$(Dyn3)'$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

(ii) $(Dyn1)$ $\emptyset \in \mathcal{D}$

$(Dyn2)$ $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, για κάθε $A \in \mathcal{D}$

$(Dyn3)$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

Ορισμός Α′.2.3. Αν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) ή (ii) του Λήμματος Α′.1.2 τότε λέγεται **κλάση Dynkin** υποσυνόλων του Ω.

Θεώρημα Μονότονης Κλάσης Α′.2.4. Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.

Για την απόδειξη του Λήμματος Α′.2.2 και του Θεωρήματος Μονότονης Κλάσης βλ. π.χ. [16], Lemma 136 A και Theorem 136 B.

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue Α′.2.5. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία $\Sigma-$μετρησίμων συναρτήσεων $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο $f(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$. Επί πλέον υποθέτουμε, ότι υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, υπάρχει το $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλ. π.χ. [5], Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue 2.3.5.

Παράρτημα Β′

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

Β′.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμοί Β′.1.1. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χ.π. Για μια τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)**(*degenerate (probability) distribution*).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [5], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [5], Πρόταση 1.4.10).

Μια (*σ.κ.*) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** ($\sigma.\pi.$) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ($\sigma.\pi.\pi.$).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β΄.1.2. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}X := E[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμοί Β΄.1.3. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα-γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π.-γινόμενο**.

Ορισμός Β΄.1.4. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον **χ.π.-γινόμενο** $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i \in J} \Omega_i \otimes_{i \in J} \Sigma_i \otimes_{i \in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί Β΄.1.5. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[5], Παρατήρηση 3.2.5(b)) Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n^*$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμοί Β΄.1.6. Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j \in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ [4], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. Επιπλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j \in I}$ είναι μια **σ.δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j \in I}$ είναι μια **σ.δ. διακριτού χρόνου**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι:

- Μια σ.δ. **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ ($j \in \mathbb{N}_m^*$) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Μια σ.δ. **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j \in \mathbb{N}_m^*}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j \in \mathbb{N}_m^*}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m^*$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}}$.

Β′.2 Χρήσιμες Κατανομές Πιθανότητας

Β′.2.1 Διακριτές κατανομές

(i) **Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (τύπου I)** ($P_X = \mathbf{NB}(r, p)$)

- $f_X(x) = \binom{x+r}{r} p^r (1-p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty)$, $p \in (0, 1)$.
- $\varphi_X(u) = \big(p/[(1-(1-p)e^{\mathrm{i}u}]\big)^r$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου i η φανταστική μονάδα.
- $EX = r/p$, $VX = r(1-p)/p^2$.

Σημειώνουμε ότι $\binom{x+r}{r} := \Gamma(x+r)/[x!\Gamma(r)]$ για κάθε $x, r \in (0, \infty)$.

(ii) **Κατανομή Poisson** ($P_X = \mathbf{P}(\lambda)$)

- $f_X(x) = e^{-\lambda}(\lambda^x / x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, με $\lambda > 0$.
- $\varphi_X(u) = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}u}-1)}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = VX = \lambda$.

Β′.2.2 Συνεχείς κατανομές

(i) **Εκθετική Κατανομή** ($P_X = \mathbf{Exp}(\lambda)$)

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\lambda > 0$.
- $\varphi_X(u) = \lambda/(\lambda - \mathrm{i}u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = 1/\lambda$, $VX = 1/\lambda^2$.

(ii) **Κατανομή Γάμμα** ($P_X = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$)

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\alpha, \beta > 0$.

- $\varphi_X(u) = [\beta/(\beta - \mathrm{i}u)]^\alpha$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = \alpha/\beta$, $VX = \alpha/\beta^2$.

Σημειώνουμε ότι $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ για κάθε $\alpha > 0$.

(iii) **Κατανομή Pareto** ($P_X = \mathbf{Pa}(\alpha, \beta)$)

- $f_X(x) = \alpha \cdot \beta^\alpha(\beta + x)^{-(\alpha+1)}$ για κάθε $x > 0$, με $\alpha, \beta > 0$.

(iv) **Γενικευμένη Κατανομή Γάμμα** ($P_X = \mathbf{Ga}(a, b, c)$)

- $f_X(x) = \frac{\left(c/a^b\right)x^{(b-1)}e^{-(x/a)^c}}{\Gamma(d/c)}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $a, b, c > 0$.
- $EX = a\frac{\Gamma((b+1)/c)}{\Gamma(b/c)}$, $VX = a^2\left(\frac{\Gamma((b+2)/c)}{\Gamma(b/c)} - \left(\frac{\Gamma((b+1)/c)}{\Gamma(b/c)}\right)^2\right)$.

(v) **Γενικευμένη Κατανομή Pareto** ($P_X = \mathbf{Pa}(a, b, c)$)

- $f_X(x) = \frac{c^{1/a}}{(c+a(x-b))^{(1/a)+1}}$ για $x \geq b$ όταν $a \geq 0$ και $b \leq x \leq b - (c/a)$ όταν $a < 0$.
- $EX = b + \frac{c}{1-a}, (a < 1)$ και $VX = \frac{c^2}{(1-a)^2(1-2a)}, (a < \frac{1}{2})$.

(vi) **Αντίστροφη Gaussian Κατανομή** ($P_X = \mathbf{IG}(\alpha)$)

- $f_X(x) = \frac{(2/\alpha)^{1/2}}{\pi^{1/2}}x^{-3/2} \cdot e^{-\alpha/2x}$ για κάθε $x > 0$, με $\alpha > 0$.

Βιβλιογραφία

[1] Κουμμουλής, Γ.-Νεγρεπόντης, Σ. (1991). *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία.

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006) *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία.

[3] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2013) *Martingale-Ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή.

[4] Μαχαιράς, Ν.Δ.: *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πειραιάς (2005).

[5] Μαχαιράς, Ν.Δ.: *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς (2006).

[6] Athreya, K.B. and Lahiri, S.N. *Measure Theory and Probability Theory* Springer, Science and Business Media, LLC, USA.

[7] Billingsley, P. (1979). *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, New York-Cichester-Brisbane-Toronto.

[8] Canter, M., Cole, J. and Sandor, R. (1996). *Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry*, J. Deriv. Winter 1996, 89-104.

[9] Chow, Y.S. and Teicher, H (1988). *Probability Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.

[10] Delbaen, F. and Haezendonck, J. (1989). *A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market*, Insurance Math. Econom. 8, 269-277.

[11] Dudley, R.M. (1989). *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/ Cole, Advanced Books & Software, Pacific Grove, California.

[12] Elstrodt, J. (1996). *Mass-und Integrationstheorie*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[13] Embrechts, P. (2000). *Actuarial versus financial pricing of insurance.* Risk Finance 1(4), 17-26.

[14] Embrechts, P. and Meister, S. (1997). *Pricing Insurance Derivatives: The Case of CAT Futures, Proceedings of the 1995 Bowles Symposium and Securitization of Risk*, George State University Atlanta, Society of Actuaries, Monoraph M-FI97-1,15-26.

[15] Faden, A.M. (1985). *The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions. Ann. Probab.* **13** (No.1), 288-298. MR770643 (86h:60001)

[16] Fremlin, D.H. (2001). *Measure Theory*, Vol.1. Torres Fremlin (Ed.). MR2462372

[17] Fremlin, D.H. (2003). *Measure Theory*, Vol.4. Torres Fremlin(Ed.). MR2462519

[18] Goovaerts, M., F. De Vylder and Haezendonck, J. (1984). *Insurance Premiums.* North Holland, Amsterdam.

[19] Grandell, J. (1997). *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall London.

[20] Kallenberg, O. (2005). *Probability Symmetries and Invariance Principles*, Springer.

[21] Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* Springer-Verlag, New York.

[22] Lando, D. (1997). *Modelling bonds and derivatives with credit risk.* In. Mathematics of Financial Derivatives (Eds., M.Dempster and S. Pliska), pp. 369-393. Cambridge University Press, Cambridge.

[23] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. (2012). *Some Characterizations Of Mixed Poisson Processes*, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, 74-A, Part 1, pp. 57-79, Greece.

[24] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. (2013). *A Constraction Of Mixed Poisson Processes Via Disintegrations*, Math.Slovaca 63, No 1, 167-182.

[25] Protter, P.E. *Stochastic Integration and Differential Equations, Second Edition* Springer (2003).

[26] Ramachandran, D. (1979). *Perfect Measures, Part I: Basic Theory and Part II: Special Topics, Vol. 1,2. The Macmillan Company of India Limited, Delhi-Bombay-Calcutta-Madras.* MR1954628 (2004b:28014)

[27] Schachermayer, W. (1994). *Martingale Measures for Discrete-Time Processes with Infinite Horizon*, Mathematical Finance, Vol. 4 (1),25-55.

[28] Schmidt, K.D. (1996). *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[29] Schmock, U. (1998). *Estimating the value of the Wincat coupons of the Winterthur Insurance convertible bond: A study of the model risk*. ASTIN Bulletin. 29, 101-163.

[30] Sondermann, D. (1991). *Reinsurance in arbitrage free markets*. Ins. Math. & Econm. 10, 191-202.

[31] Strauss, W., Machairas, N.D. and Musial, K. (2002). *Liftings, in: Handbook of Measure Theory, Vol. II, Chapter 28. Elsevier, Amsterdam*. MR1954638 (2004c:28009)

[32] Williams, D.: *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).