Πανεπιστήμιο Πειραιώς - Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Θεωρία Παιγνίων και Κοινωνικές Εφαρμογές** **Game Theory and Social Applications**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Παπαχριστοδούλου Σπυρίδων**
Πατρώνυμο	**Χρήστος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 11008**
Επιβλέπων	**Ευάγγελος Φούντας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Νοέμβριος 2013**

Πανεπιστήμιο Πειραιώς - Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Θεωρία Παιγνίων και Κοινωνικές Εφαρμογές** **Game Theory and Social Applications**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Παπαχριστοδούλου Σπυρίδων**
Πατρώνυμο	**Χρήστος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 11008**
Επιβλέπων	**Ευάγγελος Φούντας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Νοέμβριος 2013**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα εργασία προσπαθεί να συγκεντρώσει τις βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων και τους σύγχρονους τομείς εφαρμογών της σύγχρονης βιβλιογραφείας. Η θεωρία Παιγνίων συνδέεται με όλους τους επιστημονικούς χώρους σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και σε επίπεδο εφαρμογών. Μπορούμε να την συνδυάσουμε εύκολα με τον κλάδος της θεωρίας των αποφάσεων που ασχολείται με τις αλληλένδετες αποφάσεις. Επειδή η θεωρία παιγνίων προέκυψε από την ανάλυση σεναρίων ανταγωνισμού, τα προβλήματα καλούνται παίγνια και οι συμμετέχοντες καλούνται παίκτες. Οι εφαρμοζόμενες τεχνικές ενσωματόνονται σε πολλαπλούς τομείς και δεν περιορίζονται μόνο σε ανταγωνιστικές καταστάσεις. Συνοπτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η θεωρία παιγνίων πραγματεύεται οποιοδήποτε πρόβλημα στο οποίο η στρατηγική του κάθε παίκτη εξαρτάται από τις αποφάσεις των άλλων παικτών.

Συχνά παρουσιάζονται καταστάσεις στα κοινωνικά στρώματα που αφορούν σε αποφάσεις που υπάρχει αλληλεξάρτηση. Όλες αυτές οι καταστάσεις απαιτούν στρατηγική σκέψη αφού με αποτελεσματική χρήση των διαθέσιμων πληροφοριών υπάρχει δυνατότητα για ολοκλήρωση του καλύτερου σχεδίου για την επίτευξη των στόχων τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι κατάλληλες τεχνικές για την ανάλυση των αλληλεξαρτώμενων αποφάσεων διαφέρουν σημαντικά από εκείνες για τις μεμονωμένες αποφάσεις. Στα παίγνια, οι ενέργειες των παικτών αναφέρονται ως κινήσεις. Μια σειρά από συνδυασμό κινήσεων ονομάζεται στρατηγική, έτσι μια βέλτιστη στρατηγική είναι μια ακολουθία κινήσεων που οδηγεί στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται βασικές έννοιες των παιγνίων και αναλύονται οι διάφορες υποκατηγορίες κατηγορίες. Στο τέλος της εργασίας, μέσα από αρκετές εφαρμογές και παραδείγματα γίνεται μια προσπάθεια καταγραφής των κατά περίπτωση επιχειρησιακών εφαρμογών. Επιπλέον δίνονται παραδείγματα εφαρμογών που μέχρι σήμερα δεν είχαν μεγάλη αναγνωρισιμότητα όπως για παράδειγμα ο τομέας της τρομοκρατίας.

Abstract

This thesis tries to bring together the basic concepts of game theory, and current areas of application of modern applicartions. Game theory is connected with all scientific areas in theoretical level but also at the application level. We can combine easily with the branch of the theory of decisions dealing with the interrelated decisions. Because game theory emerged from the analysis scenarios competition; problems are called games and participants invited players. The techniques can be mounted in multiple sectors and not limited to competitive situations. In summary, we could say that game theory deals with a problem in which the strategy of each player depends on the decisions of other players.

Often, presented situations in society; relating to decisions that are interdependent. All these situations require strategic thinking since with effective use of the available information it is possible to integrate the best plan to meet their goals. For example, in the proper techniques for the analysis of interdependent decisions differ significantly from those for individual decisions. In games, the actions of the players listed as movements. A series of combined movements called strategy, so an optimal strategy is a sequence of moves that leads to the best possible outcome.

The following sections present basic concepts of game theory and analyze the various sub-categories. At the end of the thesis we have collected and present several examples of daily and business applications.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι προβλήματα παιγνίων είχαν προκαλέσει το ενδιαφέρον μεγάλων μαθηματικών όπως των Huyghens, Pascal, Fermat, Bernoulli, Gauss, οι οποίοι και είχαν δώσει σχετικές λύσεις. Η μαθηματικοποίηση όμως της θεωρίας των παιγνίων οφείλεται στις εργασίες του Borel (1921) και κύρια του von Neumann (1928), ενώ η εφαρμογή τους στην Οικονομική είναι έργο των von Neumann και Morgenstern (1944). Οι συρράξεις, οι διαπραγματεύσεις και τα παίγνια είναι οι τρείς τρόποι με τους οποίους ο άνθρωπος αντιμετωπίζει το αρχαιότερο του πρόβλημα δηλαδή το πρόβλημα των μεριδίων. Ειδικά στα παίγνια με βάση τους κανόνες τους (όχι κατ' αναγκή πάντα ηθικούς) γίνεται ορθολογικά παραδεκτή η επικράτηση, η υπεροχή.

Με τη θεωρία των παιγνίων επιτυγχάνεται η μελέτη, η ανάλυση και η λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις συγκρούσεως συμφερόντων. Έτσι στην περίπτωση των οικονομικών συμφερόντων, η θεωρία των παιγνίων αποτέλεσε τη βάση για την μελέτη προβλημάτων ολιγοπωλίου, διμερούς μονοπωλίου, γενικής ισορροπίας, οικονομικών διακυμάνσεων κ.λ.π. Εκτός των εφαρμογών στην Οικονομική, τα παίγνια πολλά προσέφεραν και στη μελέτη των πολιτικών και στρατηγικών προβλημάτων, αφού έννοιες όπως χρησιμότητα, προτίμηση, συνεργασία, συμμαχία, συνασπισμός, επικράτηση, διαιτησία, απειλή, διαπραγματεύσεις, καταδίωξη, πόλωση κ.λ.π. μπορούν να περιγραφούν με την γλώσσα των μαθηματικών και να δώσουν σαφή κριτήρια στους ηγήτορες για τη λήψη των αποφάσεων. Υπάρχουν, επίσης, ψυχολογικά παίγνια που παίζονται σε προσωπικό επίπεδο, όπου τα όπλα, οι λέξεις και οι εξοφλήσεις είναι καλά ή άσχημα συναισθήματα. Υπάρχουν και βιολογικά παίγνια, ο ανταγωνισμός μεταξύ των ειδών, όπου η φυσική επιλογή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα παίγνιο που παίζεται μεταξύ γονιδίων. Υπάρχει, λοιπόν, μια σύνδεση μεταξύ της θεωρίας παιγνίων και των μαθηματικών στους τομείς της λογικής και της επιστήμης των υπολογιστών.

Οι συμμετέχοντες σε ένα παίγνιο ονομάζονται παίκτες. Ένας παίκτης μπορεί να είναι ένα άτομο, μια ομάδα ατόμων, μια εταιρία ή ακόμα και ένα κράτος. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους τα παίγνια διακρίνονται σε παίγνια τύχης, στρατηγικής, συνεργασίας, πεπερασμένα, απέραντα, με 2,3,....,n πρόσωπα, με άθροισμα κερδών μηδέν ή διάφορο του μηδενός, με πληροφίες ή χωρίς πληροφορίες, με ποινές, εναντίον της φύσεως κ.λ.π.

Στα παίγνια τύχης το αποτέλεσμα αξαρτάται αποκλειστικά από την τύχη (π.χ. ζάρια, νομίσματα, ρουλέτα κ.λ.π.) χωρίς να μπορούν να επέμβουν οι πάικτες. Αντίθετα στα παίγνια στατηγικής το αποτέλεσμα δεν είναι αποκλειστικό προϊον της τύχης, αλλά διαμορφώνεται από την επέμβαση των παικτών.

Η θεωρία των παιγνίων έχει δύο διαφορετικούς ρόλους: ο πρώτος ερμηνεύει την πραγματικότητα δηλαδή πως σε καταστάσεις συγκρούσεων συμφερόντων οι παίκτες προκαλούν έναν ορισμένο αριθμό στρατηγικών και τακτικών κινήσεων. Στο δεύτερο ρόλο καθορίζονται οι καταστάσεις ισορροπίας που μπορούν (ή δεν μπορούν) να ικανοποιηθούν ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των παικτών. Στη θεωρία των παιγνίων λαμβάνονται υπόψη οι παρακάτω παράγοντες:

- ο αριθμός των παικτών. Αν το παίγνιο εξελίσσεται μόνο μεταξύ δύο παικτών, τότε ονομάζεται παίγνιο δύο ατόμων (two-person game). Αν ο αριθμός των παικτών είναι μεγαλύτερος από δύο, τότε το παίγνιο ονομάζεται n-ατόμων (n-person game)
- άθροισμα κερδών και ζημιών. Αν σε ένα παίγνιο τα κέρδη του ενός παίκτη ισούται με τις ζημίες του άλλου , τότε αυτό ονομάζεται παίγνιο μηδενικού – αθροίσματος (zero-sum game). Σε αντίθετη περίπτωση το παίγνιο ονομάζεται μη- μηδενικού αθροίσματος (non-zero sum game)
- στρατηγική. Είναι η δυνατότητα επεμβάσεως που προσφέρουν σε κάθε παίκτη οι κανόνες του παιγνίου

Η θεωρία παιγνίων διευρευνά εκείνες τις στρατηγικές που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του παίκτη. Γενικά, υπάρχουν δύο είδη στρατηγικών σε ένα παίγνιο.

- η καθαρή στρατηγική (pure strategy). Σε αυτή ο παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις επιλογές του, με πιθανότητα ίση με τη μονάδα ενώ δεν επιλέγει καμία από τις υπόλοιπες.
- η μικτή στρατηγική (mixed strategy). Σε αυτή τη στρατηγική περιλαμβάνονται συνδυασμοί στρατηγικών, καθεμία από τις οποίες επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

Τα κέρδη (ή ζημίες), όταν οι παίκτες επιλέγουν συγκεκριμένες στρατηγικές μπορούν να παρασταθούν μέσω μιας μήτρας η οποία ονομάζεται Μήτρα παιγνίου ή Μήτρα αποτελέσματος (payoff matrix). Αναλυτικότερα, η μήτρα περιγράφει το αποτέλεσμα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών των παικτών.

Σε αυτή την ανάλυση για την θεωρία των παιγνίων, θα μελετήσουμε ένα έυρος μαθηματικών μοντέλων σύγκρουσης και συνεργασίας μεταξυ δύο ή περισσότερων οντοτήτων. Εδώ, δίνουμε ένα περίγραμμα του περιεχομένου αυτής της εργασίας, συχνά δίνοντας παραδείγματα.

Πρώτα θα εξετάσουμε τα συνδυαστικά παίγνια, στα οποία δύο παίκτες λαμβάνουν θέσεις κάνοντας κινήσεις μέχρι να επιτευχθεί μια θέση νίκης για έναν από τους παίκτες. Η γενική ιδέα λύσης για αυτού του είδους το παίγνιο είναι μια στρατηγική νίκης – μια συλλογή από κινήσεις για έναν από τους παίκτες, μια για κάθε πιθανή κατάσταση, που θα εγγυάται τη νίκη του.

Το Chess και Go είναι παραδείγματα δημοφιλών συνδυαστικών παιχνίων που είναι γνωστά για την δυσκολία τους να αναλυθούν. Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε απλούστερα παραδείγματα όπως το παίγνιο του Hex που εφευρέθηκε απο το Δανό μαθηματικό Piet Hein και ανεξάρτητα από το διάσημο θεωρητικό παιγνίων John Nash, ενώ ήταν μεταπτυχιακός φοιτητής στο Princeton. Το Hex παίζεται σε ένα διαμορφωμένο ρόμβο ο οποίος έχει σχεδιασμένα στο εσωτερικό μικρά εξάγωνα. Δυο πάικτες, Κ και ο Π, εναλλάσσονται χρωματίζοντας τα εξάγωνα με το αντίστοιχο χρώμα τους, κόκκινο ή πράσινο. Ο στόχος για τον Κ είναι να παράγει μια κόκκινη αλυσίδα η οποία να διασχίζει τις δύο πλευρές του πίνακα. Ο στόχος για τον Π είναι να παράγει μια πράσινη αλυσίδα η οποία να συνδέει τις δύο άλλες πλευρές. Όπως θα δούμε, είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ο παίκτης που θα κινηθεί πρώτος μπορεί να κερδίζει πάντα. Η εύρεση της στρατηγική νίκης, ωστόσο, παραμένει ένα άλυτο πρόβλημα, εκτός εάν το μέγεθος του πίνακα είναι μικρό.

Σε μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του παιγνίου, οι παίκτες, αντί να εναλλάσσονται, ρίχνουν ένα νόμισμα για να καθορίσει ποιος θα κινηθεί στη συνέχεια. Σε αυτή την περίπτωση, θα είμαστε σε θέση να δώσουμε μια σαφή περιγραφή των βέλτιστων διαθέσιμων στρατηγικών των παικτών. Αυτά είναι γνωστά ως τυχαίας σειράς συνδυαστικά παίγνια.

Ένα άλλο παράδειγμα συνδυαστικού παιγνίου είναι το Nim. Στο Nim, υπάρχουν αρκετές στοίβες από μάρκες, και οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής να επιλέξουν μια στοίβα και να μετακινήσουν μία ή περισσότερες από αυτές. Ο στόχος για κάθε παίκτη είναι να πάρει την τελευταία μάρκα. Θα περιγράψουμε μια στρατηγική νίκης για το Nim και θα δείξουμε ότι μία μεγάλη ομάδα συνδυαστικών παιχνιδιών είναι ουσιαστικά όμοια προς αυτό.

Στη συνέχεια, θα στρέψουμε την προσοχή μας στα **παίγνια τύχης**, στα οποία και οι δύο παίκτες κινούνται ταυτόχρονα. Στα 2 – προσώπων, μηδενικού αθροίσματος παίγνια, κάθε παίκτης επωφελείται μόνο από την ζημία του άλλου. Θα δείξουμε πώς θα βρίσκουμε τις βέλτιστες στρατηγικές για κάθε παίκτη, που τυπικά θα αποτελούν τυχαίες επιλογές από τις διαθέσιμες.

Στο παίγνιο “σουτ πέναλτι”, ένα παίνγιο μηδενικού αθροίσματος εμπνευσμένο από το ποδόσφαιρο, ένας παίκτης , αυτός που ρίχνει τα πέναλτι, επιλέγει να κλοτσίσει τη μπάλα είτε στα αριστερά είτε στα δεξία στον άλλο παίκτη , τον τερματοφύλακα. Την ίδια στιγμή ο τερματοφύλακας μαντεύει που να «βουτήξει», αριστερά ή δεξιά.

Ο τερματοφύλακας έχει μια επιλογή να αποτρέψει το γκόλ αν «βουτήξει» στην ίδια κατεύθυνση όπου έγινε το σούτ. Αυτός που εκτελεί το πέναλτι, ο οποίος είναι αριστερός σούτερ έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας, αν κλωτσήσει αριστερά

Οι πιθανότητες ότι το σούτ θα βρεί στόχο παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΤΕΡΜΑΤΟΦΥΛΑΚΑΣ ΣΟΥΤΕΡ	Α	Δ
Α	0.8	1
Δ	1	0.5

Στα παίγνια γενικού αθροίσματος, δεν έχουμε πλέον βέλτιστες στρατηγικές. Παρόλαυτά υπάρχει ακόμα μια έννοια μιας «βέλτιστης επιλογής» για τους παίκτες. Η ισορροπία Nash είναι ένα σύνολο από στρατηγικές μια για κάθε παίκτη με την προυπόθεση ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να κερδίσει από μονόπελυρη αλλαγή της στρατηγικής. Προκύπτει ότι καθε γενικού αθροίσματος παίγνιο έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash.

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία γενικού αθροίσματος σημαντική στην επιστήμη των υπολογιστών είναι αυτή των παιγνίων συμφόρησης/συνοστισμού. Σε ένα τέτοιο παίγνιο υπάρχουν δύο οδηγεί I και II, οι οποίοι πρέπει να πλοηγηθούν όσο το δυνατόν πιο φθηνά μέσα σε ένα δίκτυο από δρόμους διοδίων. Ο I πρέπει να ταξιδέψει από την πόλη B στην D και ο II από την πόλη A στην πόλη C. Το κόστος που αντιστοιχεί σε ένα οδηγό για τη χρησιμοποίηση ενός δρόμου είναι μικρότερο όταν είναι αποκλειστικός χρήστης από όταν μοιράζεται το δρόμο με τον άλλο οδηγό. Σε ένα διάγραμμα επισυνάπτεται σε κάθε δρόμο ένα ζευγάρι (a,b),όπου το a αντιπροσωπεύει το κόστος του να είσαι ο μοναδικός χρήστης του δρόμου και το b το κόστος να τον μοιράζεσαι. Για παράδειγμα, αν ο I και ο II και οι δύο χρησιμοποιούν τον AB – ο I ταξιδεύει απο το A στο B και ο II απότο B στο A – τότε κάθε έναςπληρώνει 5 μονάδες. Αν μόνο ένας οδηγός χρησιμοποιεί το δρόμο , το κόστος είναι 3 μονάδες.

Μια βελτίωση των τελευταίων 12 χρόνων είναι η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων γενικού αθροίσματος. Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι αυτό της σηματοδότησης. Αν ένας παίκτης έχει κάποια πληροφορία ότι ο άλλος δεν έχει , αυτό μπορεί να είναι το πλεονέκτημα του. Το θέμα στο κεφάλαιο 6 είναι τα παίγνια συνεργασίας , στα οποία οι παίκτες συσπυρώνονται για να εργαστούν απέναντι σε ένα κοινό στόχο. Σαν παράδειγμα, υποθέτουμε ότι τρεις άνθρωποι πωλούν τα εμπορεύματα τους σε ένα μαγαζί. Δύο από αυτούς πουλούν ένα αριστερό γάντι ενώ ο τρίτος πουλά το δεξί. Ένα πλούσιος τουρίστας μπαίνει στο μαγαζί και χρειάζεται ένα ζευγάρι γάντια. Ο τρίτος παίκτης εδώ έχει ένα πλεονέκτημα, επειδή το προϊόν του είναι σε έλλειψη. Αυτό σημαίνει ότι είναι ικανός να λάβει το ένα υψηλότερο μέρος από την πληρωμή του τουρίστα από τους δύο άλλους παίκτες. Όμως αν κρατά πολύ υψηλό ποσοστό των κερδών οι άλλοι παίκτες μπορεί να συμφωνήσουν μεταξύ τους να αρνηθούν να διαπραγματευτούν μαζί του, μπλοκάροντας κάθε πώληση και με αυτό τον τρόπο να διακινδυνέυσουν τα κέρδη του. Η εύρεση μιας λύσης για ένα τέτοιο παίγνιο περιλαμβάνει μια μαθηματική έννοια γνωστή ως τιμή Shapley.

Κεφάλαιο 2

Συνδυαστικά Παίγνια

2.1 Εισαγωγή

Τα συνδυαστικά παίγνια είναι μια κατηγορία παιγνίων που περιλαμβάνει δημοφιλή παίγνια 2 παικτών όπως το Nim και το Hex, που αναφέραμε πιο πάνω. Σε ένα συνδυαστικό παίγνιο υπάρχουν 2 παίκτες, ένα σύνολο θέσεων και ένα σύνολο από ορθολογικές κινήσεις μεταξύ των θέσεων. Μερικές από τις θέσεις είναι τερματικές. Οι παίκτες παίρνουν τις θέσεις τους κινούμενοι από θέση σε θέση. Ο στόχος για κάθε έναν είναι να φτάσει στην τελική θέση η οποία είναι θέση νίκης για τον παίκτη αυτό. Τα συνδυαστικά παίγνια γενικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 2 κατηγορίες:

- Εκείνα για τα οποία οι θέσεις νίκης και οι διαθέσιμες κινήσεις είναι οι ίδιες και για τους δύο παίκτες και λέγονται αμερόληπτα παίγνια. Ένα παίκτης που φθάνει σε μια από τις τελικές θέσεις πρωτος κερδίζει. Θα δούμε ότι όλα αυτά τα παίγνια συσχετίζονται σε το Nim.
- Όλα τα άλλα παίγνια καλούνται εγωιστικά. Σε αυτά τα παίγνια οι διαθέσιμες κινήσεις, όπως και οι θέσεις νίκης, μπορεί να διαφέρουν για τους δύο παίκτες. Τέλος, μερικά εγωιστικά παίγνια μπορεί να τερματίζουν σε ισοπαλία, μια θέση στην οποία κανένας παίκτης δεν κερδίζει.

Μερικά συνδυαστικά παίγνια μπορούν επίσης να είναι ισόπαλα και να συνεχίζονται στο άπειρο. Σε ένα συνδυαστικό παίγνιο ο στόχος μας είναι να βρούμε ποίος απο τους 2 παίκτες μπορεί πάντα να πιέζει μια νίκη και καθορίζοντας τη στρατηγική νίκης. Εφόσον αυτό είναι δύσκολο κατά περίπτωση θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε πιο απλά παίγνια. Πιο συγκεκριμένα, θα επικεντωθούμε σε συνδυαστικά παίγνια τα οποία τερματίζουν σε πεπερασμενο αριθμό βημάτων. Το Hex είναι ένα παράδειγμα τέτοιων παιγνίων καθώς κάθε θέση, όπως θα δούμε, έχει πεπερασμένα αχρωμάτιστα εξάγωνα.

Ορισμός 2.1.1 Ένα συνδυαστικό παίγνιο με μια θέση X, θεωρείται προοδευτικά οριοθετημένο αν ξεκινώντας από οποιαδήποτε θέση $x \in X$ το παίγνιο θα πρέπει να τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό B(x) κινήσεων.

Όπου B(x) είναι ένα ανώτερο όριο, στον αριθμό βημάτων που χρειάζεται για να εξελιχθεί ένα παίγνιο. Ίσως ενα ενεργό παίγνιο να τερματίζει σε λιγότερα βήματα. Εδώ σημειώνουμε ότι τα παίγνια, σκάκι, ντάμα και Go δεν χρειάζεται να τερματίζουν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων καθώς οι θέσεις μπορούν να επαναληφθούν κυκλικά. Ωστόσο, υπάρχουν ειδικοί κανόνες, που τα καθιστούν πραγματικά προοδευτικά οριοθετημένα παίγνια. Θα δούμε ότι τα προοδευτικά οριοθετημένα συνδυαστικά παίγνια δεν μπορούν να τερματίσουν σε ισοπαλία, γιατί ένας από τους παίκτες έχει στρατηγική νίκης. Για πολλά παίγνια θα είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε αυτόν τον παίκτη αλλά όχι απαραίτητα και την στρατηγική.

2.2 Αμερόληπτα παίγνια

Παράδειγμα 2.1 (Ένα παίγνιο αφαίρεσης). Ξεκινώντας με μια στοίβα από $x \in$N* μάρκες , δύο παίκτες, ο I και ο II, εναλλάσσονται παίρνοντας μία μέχρι 4 μάρκες. Ο παίκτης I κινείται πρώτος. Ο παίκτης που θα μετακινήσει την τελευταία μάρκα κερδίζει.

Παρατηρείστε ότι με 4 ή λιγότερες μάρκες, ο παίκτης I σαφώς έχει μια κίνηση νίκης: απλά τις αφαιρεί όλες. Αν υπάρχουν πέντε μάρκες με τις οποίες αρχίζει να παίζει, ωστόσο, ο παίκτης II θα μείνει με τέσσερις ή λιγότερες, ανεξάρτητα από το τί κάνει ο παίκτης I.

Τι γίνεται αν έχουμε n = 6 μάρκες; Αυτή είναι και πάλι μια θέση νίκης για τον παίκτη I γιατί αν απομακρύνει μια μάρκα, ο παίκτης II έχει απομείνει σε θέση ήττας με πέντε μάρκες. Το ίδιο ισχύει και για x = 7, 8, 9. Με 10 μάρκες, ωστόσο, ο παίκτης II και πάλι μπορεί να εγγυηθεί ότι θα κερδίσει. Ας κάνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

$N = \{x \in$N*, ο παίκτης I μπορεί να εξασφαλίσει μια νίκη αν υπάρχουν x μάρκες στην αρχή$\}$
$P = \{x \in$N*, ο παίκτης II μπορεί να εξασφαλίσει μια νίκη αν υπάρχουν x μάρκες στην αρχή$\}$

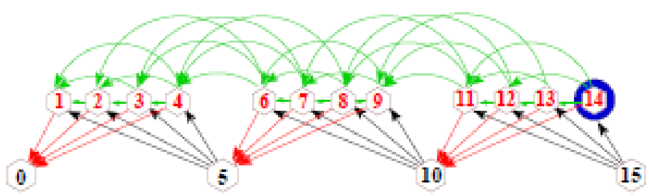
Μέχρι στιγμής, έχουμε δει ότι $\{1,2,3,4,6,7,8,9\} \subseteq \mathrm{N}$, και $5 \in \mathrm{P}$. Συνεχίζοντας με αυτή τη συλλογιστική γραμμή, βρίσκουμε ότι $P = \{x \in$N* το x είναι πολλαπλάσιο του πέντε$\}$ και N*=**N**/P.

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται για να αναλύσει την αφαίρεση μπορεί να επεκταθεί και σε άλλα αμερόληπτα παίγνια. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να αναπτύξουμε ένα επίσημο πλαίσιο.

Ορισμός 2.2.1 Ένα αμερόληπτο συνδυαστικό παίγνιο έχει δύο παίκτες I και II, και ένα σύνολο (συνήθως πεπερασμένο) πιθανών θέσεων. Η κίνηση που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε το παίγνιο από τη μία θέση στην άλλη. Μια κίνηση είναι ένα διατεταγμένο ζευγάρι θέσεων. Η τερματική θέση είναι μία από τις οποίες υπάρχουν μη νόμιμες κινήσεις. Για κάθε μη τερματική θέση, υπάρχει ένα σύνολο νόμιμων κινήσεων και για τους δύο παίκτες. Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες παιγνίου, ο παίκτης που θα κινηθεί στην τερματική θέση κερδίζει.

Μπορούμε να σκεφτούμε τις θέσεις παιγνίων ως κόμβους και τις κινήσεις ως διευθυνόμενες συνδέσεις. Μια τέτοια συλλογή κόμβων (κορυφές) και συνδέσεων (ακμές) μεταξύ αυτών καλείται γράφημα. Αν οι κινήσεις είναι αμφίρροπες, οι ακμές μπορούν να ληφθούν ως μη διευθυνόμενες. Στην αρχή του παιγνίου ένα «δείγμα» τοποθετείται στον κόμβο που αντιστοιχεί στην αρχική θέση. Στη συνέχεια οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής τοποθέτηση του «δείγματος» σε ένα από τους γειτονικούς κόμβους μέχρι ένας από αυτούς να φτάσει σε ένα τερματικό κόμβο και να ανακηρυχθεί νικητής.

Με τον ορισμό αυτό, είναι σαφές ότι το παίγνιο είναι αμερόληπτο υπό κανονικές συνθήκες παιγνίου. Η μόνη τερματική θέση είναι η x = 0. Το παρακάτω σχήμα 2.1 δίνει ένα διευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στο παίγνιο με την αρχική θέση x = 14.



Σχήμα 2.1 Οι θέσεις στο N συμβολίζονται με κόκκινο και αυτές στο P με μαύρο.

Είδαμε ότι ξεκινώντας από μια θέση x∈N, ο παίκτης I μπορεί να διεκδικήσει μια νίκη κινούμενος σε ένα από τα στοιχεία του P={5n: n∈N*}

Ορισμός 2.2.2 Μια στρατηγική για έναν παίκτη είναι μια συνάρτηση που αναθέτει μια κίνηση σε κάποια μη τερματική θέση. Μια νικηφόρα στρατηγική απο μία θέση x είναι μια στρατηγική που ξεκινώντας από το x εγγυάται απότελεσμα νίκης για αυτό τον παίκτη σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Τότε:

$$M(x)=\begin{cases}\max\{P\cap\{1,2,...,x\}\},\alpha\nu\, x\in N\\ x-1,\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases}$$

ορίζεται μια στρατηγική νίκης για τον παίκτη I, ξεκινώντας από οποιαδήποτε θέση $x\in N$ και μια στρατηγική νίκης για τον παίκτη II ξεκινώντας από οποιαδήποτε θέση $x\in P$. Μπορούμε να επεκτείνουμε τις έννοιες του N και P σε οποιοδήποτε αμερόληπτο παίγνιο.

Ορισμός 2.2.3. Για οποιοδήποτε συνδυαστικό παίγνιο, ορίζουμε το N (για το "next"-επόμενη κίνηση) να είναι ένα σύνολο θέσεων τέτοιων ώστε ο επόμενος παίκτης να μπορεί να εγγυηθεί μια νίκη. Το σύνολο θέσεων για το οποίο κάθε κίνηση οδηγεί σε μια θέση N δηλώνεται από το P (για το "προηγούμενο"), από τη στιγμή που ο παίκτης, ο οποίος μπορεί να διεκδικήσει μια θέση P μπορεί να εγγυηθεί ότι θα κερδίσει.

Στο παίγνιο της αφαίρεσης έχουμε N*$=N\cup P$ και εύκολα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε μια στρατηγική νίκης. Αυτό γενικεύεται αν το σύνολο των θέσεων σε ένα αμερόληπτο συνδυαστικό παίγνιο ισούται με $N\cup P$, τότε ένας απο τους παίκτες πρέπει να έχει μια στρατηγική νίκης. Αν η θέση έναρξης είναι στο N τότε ο παίκτης I έχει μια τέτοια στρατηγική, αλλιώς έχει ο παίκτης II. Κάθε προοδευτικά οριοθετημένο αμερόληπτο παίγνιο είναι πιθανό να λειτουργεί αναδρομικά από τις τερματικές θέσεις. Ως εκ τούτου ξεκινώντας από οποιαδήποτε θέση, μια στρατηγική νίκης μπορεί να προσδιοριστεί για έναν από τους παίκτες. Αυτό μπορεί όμως αλγοριθμικά να είναι δύσκολο όταν το γράφημα είναι μεγάλο. Στην πραγματικότητα μια παρόμοια κατάσταση διατηρείται επίσης για ένα προοδευτικά οριοθετημένο εγωϊστικό παίγνιο. Παρακάτω έχουμε αναδρομικούς χαρακτηρισμούς του N και P, υπό κανονικές συνθήκες παιγνίου:

P_0 = {τερματικές θέσεις}

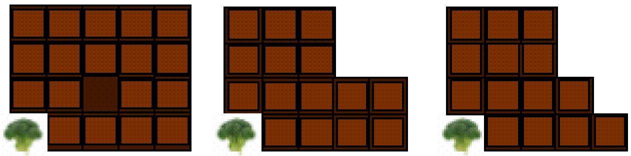
N_{i+1} = {θέσεις x για τις οποίες υπάρχει μια κίνηση που οδηγεί στο P_i}

P_i = {θέσεις y τέτοιες ώστε κάθε κίνηση οδηγεί στο N_i}

$$N=\bigcup_{i\geq 1}N_i,\ P=\bigcup_{i\geq 0}P_i$$

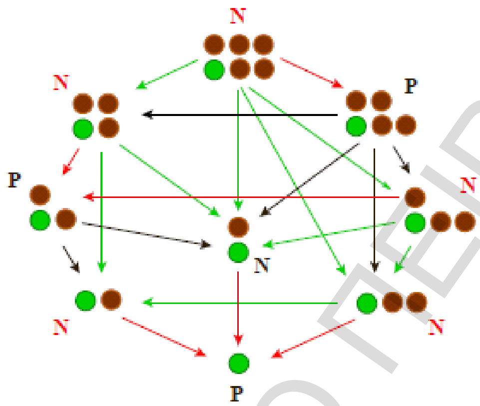
Παράδειγμα 2.2 (Chomp)[1] Στο παίγνιο αυτό δύο παίκτες παίρνουν θέσεις δαγκώνοντας ένα μεγάλο κομμάτι ορθογώνιας μπάρας σοκολάτας το οποίο διαιρείται σε τετράγωνα. Η κάτω αριστερή γωνία της μπάρας έχει αντικατασταθεί με ένα μπρόκολο. Κάθε παίκτης, ότεν έρθει η σειρά του, επιλέγει ένα ολόκληρο τετράγωνο σοκολάτας και μετακινεί κατα μήκος όλα τα τετράγωνα που βρίσκονται πάνω και στα δεξιά του. Το άτομο που θα φάει το τελευταίο κομμάτι σοκολάτας κερδίζει και ο χαμένος πρέπει να φάει το μπρόκολο.

[1] Το παίγνιο Chomp εφευρέθηκε τη δεκαετία του '70 από τον David Gale, τώρα ομότιμο καθηγητή των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Μπέρκλεϊ.



Σχήμα 2.2. Μερικές κινήσεις στο παίγνιο Chomp.

Εδώ η τελευταία θέση είναι όταν έχει τελειώσει η σοκολάτα. Το γράφημα για μια μικρή 2x3 μπάρα σοκολάτας μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί, και τα N και P είναι εύκολο (και συνεπώς μια νικηφόρα στρατηγική) να αναγνωριστούν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.3 Κάθε κίνηση από μια θέση P οδηγεί σε μια θέση N (έντονα μαύρα διανύσματα), για κάθε θέση N υπάρχει τουλάχιστον μια κίνηση για τη θέση P.

Ωστόσο, όσο το μέγεθος της μπάρας αυξάνεται, το γράφημα γίνεται πολύ μεγάλο και η στρατηγική νίκης δύσκολα μπορεί να βρεθεί. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για κάθε προοδευτικά οριοθετημένο αμερόληπτο παίγνιο υπάρχει μια στρατηγική νίκης για έναν από τους παίκτες.

Θεώρημα 2.2.1 Σε ένα προοδευτικά οριοθετημένο αμερόληπτο παίγνιο υπό κανονικές συνθήκες παιγνίου, όλες οι θέσεις x βρίσκονται στο σύνολο $N \cup P$.

Απόδειξη. (Με επαγωγή για το B (x)). Βέβαια, για όλα τα x ώστε $B(x)=0$, έχουμε ότι $x \in P_0 \subseteq P$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει και για τις συγκεκριμένες θέσεις x για τα οποία $B(x) \leq n$, και εξετάζουμε αν κάθε θέση z ικανοποιεί τη σχέση $B(z)=n+1$. Κάθε μετάβαση από z θα μας οδηγήσει σε μια θέση στο $N \cup P$ από την επαγωγική υπόθεση. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Κάθε κίνηση από z οδηγεί σε μια θέση στο N. Τότε το z βρίσκεται σε ένα από τα σύνολα P_i εξ ορισμού, και ως εκ τούτου είναι στο P.

Περίπτωση 2: Αν δεν είναι αληθές ότι κάθε κίνηση από την z οδηγεί σε μια θέση σε N, πρέπει να ισχύει ότι υπάρχει μια κίνηση από z σε κάποια P-θέση. Στην περίπτωση αυτή, εξ ορισμού, $z \in N$.
Ως εκ τούτου, όλες οι θέσεις βρίσκονται στο $N \cup P$.

Θεώρημα 2.2.2 Η έναρξη από μια θέση στην οποία η σοκολάτα που απομένει είναι ορθογώνια οδηγεί τον παίκτη που κινείται να έχει μια στρατηγική νίκης.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, προς μια αντίφαση, ότι υπάρχει μια ορθογώνια θέση τέτοια ώστε ο επόμενος παίκτης που πρόκειται να μετακινηθεί (ας πούμε ότι είναι παίκτης I) δεν έχει μια στρατηγική νίκης και ας εξετάσουμε την κίνηση του δαγκώματος από την επάνω δεξιά γωνία. Η θέση που προκύπτει πρέπει να είναι μια θέση από την οποία υπάρχει μια στρατηγική νίκης για τον παίκτη II. Όμως αυτό δεν μπορεί να συμβεί, γιατί ανεξάρτητα από το ποία θέση είναι αυτή, ο παίκτης I μπορεί να τη φτάσει σε μία κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι, στην πραγματικότητα, ο παίκτης I έχει μια στρατηγική νίκης, το οποίο είναι μια αντίφαση.

2.2.1. Λύση Nim και Bouton

Παράδειγμα 2.3 (Nim) Στο Nim υπάρχουν αρκετές στόιβες, καθε μία περιλαμβάνει πεπερασμένες πολλές μάρκες. Μια κίνηση είναι μια μετακινήσουμε οποιοδήποτε αριθμό από μάρκες απο μια μονή στοίβα. Δύο πάικτες εναλλάσσουν τη σειρά με σκοπό να μετακινήσουν την τελευταία μάρκα. Κατά συνέπεια, η τερματική θέση είναι όταν δεν υπάρχουν πλέον μέρκες. Επειδή το Nim είναι προοδευτικά οριοθετημένο, όλες οι θέσεις είναι στο N ή στο P, και ένας από τους παίκτες έχει μια στρατηγική νίκης.

Θα δούμε πιο κάτω ότι οποιοδήποτε προοδευτικά οριοθετημένο αμερόληπτο παίγνιο είναι ισοδύναμο με μια μόνο στοίβα Nim κάποιου μεγέθους. Δηλαδή, αν το μέγεθος μιας τέτοιας στοίβας Nim μπορεί να προσδιοριστεί, μια στρατηγική νίκης μπορεί επίσης να κατασκευαστεί σαφέστερα.

Θα αναλύσουμε το παίγνιο δουλεύοντας προς τα πίσω από τις τερματικές θέσεις. Δηλώνουμε μια θέση στο παίγνιο με $(n_1, n_2, ..., n_k)$, που σημαίνει ότι υπάρχουν κ στοίβες απο μάρκες και ότι η πρώτη έχει n_1 μέρκες , η δεύτερη n_2 και κ.ο.κ.

Σαφώς το (0,1) και το (1,0) είναι στο N. Από την άλλη μερία, το (1,1) $\in P$. Βλέπουμε ότι τα (1,2),(2,1) $\in N$ επειδή ο επόμενος παίκτης μπορεί να δημιουργήσει τη θέση (1,1) $\in P$.Επειδή κάθε μία από τις διαθέσιμες κινήσεις οδηγούν στο (0,1) ή στο (1,0). Πιο γενικά , το (n,n)$\in P$ για $n \in$N* και (n,m) ∈N* αν n,m∈ℕ* δεν είναι ίσα.

Προχωρώντας στις τρεις στοίβες, βλέπουμε ότι (1,2,3)$\in P$ επειδή οποιαδήποτε κίνηση κάνει ο πρώτος παίκτης , ο δεύτερος μπορεί να διεκδικήσει δύο στοίβες με ίσο μέγεθος. Ακολουθεί ότι (1,2,3,4)$\in N$ επειδή ο επόμενος παίκτης που κινείται μπορεί να μετακινηθεί στην 4η στοίβα.

Για να αναλύσουμε το (1,2,3,4,5) θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.2.1. Για δύο θέσεις Nim $X = (x_1, ..., x_k)$ και $Y = (y_1, ..., y_l)$, δηλώνουμε τη θέση $(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$ από το (X, Y). Αν το X και το Y είναι στο P τότε $(X, Y) \in P$. Αν $X \in P$ και $Y \in N$ (ή αντιστρόφως), τότε $(X, Y) \in N$. Αν X,Y$\in N$,όμως τότε (X,Y) μπορεί να είναι είτε στο P είτε στο N.

Ορισμός 2.2.4.:Το άθροισμα Nim του n,$m \in$N* είναι η ακόλουθη ενέργεια: Γράψε n και m σε δυαδική μορφή και άθροισε τα ψηφία σε κάθε στήλη modulo2. O αριθμός που προκύπτει ο οποίος εκφράζεται δυαδικά , είναι το άθροισμα Nim των n και m. Δηλώνουμε το άθροισμα Nim των n και m από τη σχέση $n \oplus m$.

Ισοδύναμα, το άθροισμα Nim από μια συλλογή των τιμών $(m_1, m_2, ..., m_k)$ είναι το άθροισμα όλων των δυνάμεων του 2 που παρουσιάζουν ένα περιττό αριθμό,όταν κάθε αριθμός m_i γράφεται ως άθροισμα των δυνάμεων του 2.

Αν $m_1 = 3$, $m_2 = 9$, $m_3 = 13$ σε δυνάμεις του 2 έχουμε:

$$m_1 = 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$$
$$m_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$$
$$m_3 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα Nim αποδοτικά χρησιμοποιώντας δυαδική σημειολογία:

Δεκαδικός	Δυαδιακός			
3	0	0	1	1
9	1	0	0	1
13	1	1	0	1
7	0	1	1	1

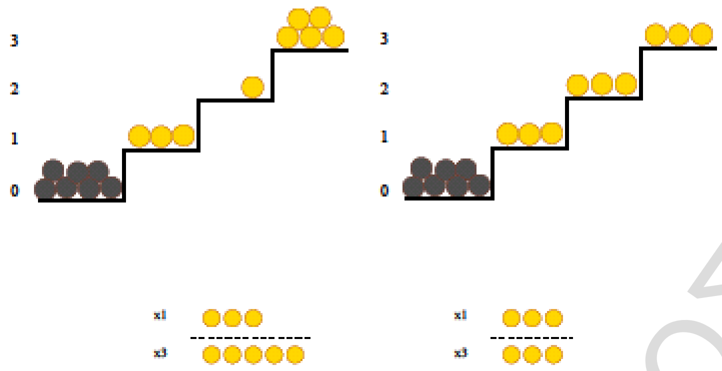
Θεώρημα 2.2.3. (Θεώρημα Bouton): Μια θέση Nim $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ είναι στο P αν και μόνο αν το άθροισμα Nim από κάθε παράγοντα είναι 0.
Για να επεξηγήσουμε το θεώρημα, θεωρείστε την αρχική θέση (1,2,3):

Δεκαδικός	Δυαδικός	
1	0	1
2	1	0
3	1	1
0	0	0

Αθροίζοντας τις στήλες από την δυαδική έκφραση modulo2 , λαμβάνουμε 00. Το θεώρημα δίνει ότι $(1,2,3) \in P$.

2.2.2 Άλλα αμερόληπτα παίγνια

Παράδειγμα 2.4 (Σκάλα Nim). Το παίγνιο παίζεται σε μια σκάλα από n σκαλοπάτια. Σε κάθε σκαλί j με j = 1,...,n είναι ένας σωρός από κέρματα μεγέθους $x_j \geq 0$. Κάθε παίκτης, με τη σειρά του, μετακινεί ένα ή περισσότερα νομίσματα από ένα σωρό σε ένα σκαλί i και τα τοποθετεί στο σωρό στο σκαλί j -1. Τα νομίσματα που φτάσουν στο έδαφος (Σκαλί 0) απομακρύνονται από το παίγνιο. Το παίγνιο τελειώνει όταν όλα τα νομίσματα βρίσκονται στο έδαφος, και ο τελευταίος παίκτης που κινείται κερδίζει.



Σχήμα 2.4 Εδώ μετακινούμε 2 νομίσματα από το σκαλί 3 στο 2.

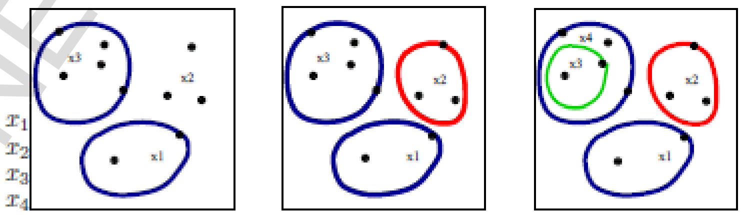
Όπως αποδεικνύεται, οι P-θέσεις στη Σκάλα Nim είναι οι θέσεις τέτοιες ώστε οι σωροί από τα νομίσματα στα περιττά αριθμημένα σκαλιά αντιστοιχούν σε P-θέση στο Nim. Μπορούμε να δούμε μετακινώντας y νομίσματα από ένα περιττό αριθμημένο σκαλί σε ένα άρτιο-αριθμημένο καθώς αντιστοιχίζεται στη νόμιμη κίνηση για την μετακίνηση y μάρκες στο Nim. Τι συμβαίνει όταν μετακινούμε νομίσματα από ένα άρτιο αριθμημένο σκαλί σε ένα περιττό-αριθμημένο σκαλί;

Εάν ένας παίκτης κινεί z νομίσματα από ένα άρτιο-αριθμημένο σκαλί σε ένα περιττό αριθμημένο σκαλί, ο αντίπαλός του μπορεί τότε να μετακινήσει τα νομίσματα στο επόμενο άρτιο- αριθμημένο σκαλί,και για αυτό γιατί, μπορεί να επαναλάβει την κίνηση που αντιπάλου σε ένα σκαλί χαμηλότερα. Αυτή η κίνηση επιστρέφει το άθροισμα Nim στα περιττά αριθμημένα σκαλιά σε προηγούμενη τιμή τους, και εξασφαλίζει ότι μια τέτοια κίνηση δεν παίζει κανένα ρόλο στην έκβαση του παιγνίου. Τώρα, θα εξετάσουμε ένα άλλο παίγνιο, που ονομάζεται Πλαίσια, το οποίο, όπως θα δούμε, είναι επίσης Nim σε "μεταμφίεση".

Παράδειγμα 2.5 Μια θέση εκκίνησης αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό κουκκίδων στο πλαίσιο και ένα πεπερασμένο αριθμό συνεχών βρόγχων που δεν τέμνονται.

Κάθε βρόχος μπορεί να διέρχεται από οποιοδήποτε αριθμό κουκκίδων, και πρέπει να περάσει τουλάχιστον από ένα.

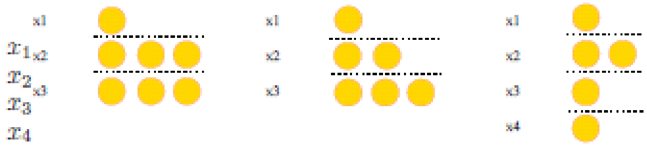
Κάθε παίκτης, με τη σειρά του, σχεδιάζει ένα νέο βρόγχο που δεν τέμνει τον άλλο βρόχο. Ο στόχος είναι να σχεδιάσει ένα τέτοιο τελευταίο βρόγχο.



Σχήμα 2.5 Τρείς κινήσεις στο παίγνιο των Πλαισίων.

Για μια δεδομένη θέση στο παίγνιο αυτό, μπορούμε να χωρίσουμε τα σημεία που δεν βρίσκονται σε κάποιο βρόγχο σε κατηγορίες ισοδυναμίας ως εξής: Κάθε τάξη αποτελείται από ένα σύνολο από κουκκίδες που μπορούν να προσεγγιστούν από μια συγκεκριμένη κουκκίδα μέσω ενός συνεχόμενου μονοπατιού που δεν διασχίζει κάποιο βρόγχο.

Για να δούμε τη σύνδεση με το Nim, σκεφτείτε κάθε κατηγορία κουκκίδων ως μια στοίβα από μάρκες. Ένας βρόγχος, επειδή περνά μέσα από μια τουλάχιστον κουκκίδα, στην ουσία, μετακινεί τουλάχιστον μια μάρκα από μια στοίβα, και χωρίζει τις υπόλοιπες μάρκες μέσα σε δύο νέες στοίβες. Αυτό το τελευταίο μέρος δεν είναι συνεπές με τους κανόνες της Nim εκτός εάν ο παίκτης σχεδιάσει το βρόγχο, ώστε να αφήσει τις υπόλοιπες μάρκες σε μια μόνη στοίβα.



Σχήμα 2.6 Ισοδύναμη συνθήκη κινήσεων στο Nim με επιτρεπόμενες διασπάσεις.

Κατά συνέπεια, το παίγνιο Ζάντες ισοδυναμεί με μια παραλλαγή του Nim όπου οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα διάσπασης των στοιβών μετά την αφαίρεση μάρκες από αυτές. Όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα, το γεγονός ότι οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα διάσπασης της στοίβας δεν έχει καμία επίπτωση στην ανάλυση του παιγνίου.

Θεώρημα 2.2.4. Τα σύνολα N και P συμπίπτουν για Nim και Πλαίσια.

Τα παρακάτω παραδείγματα είναι ιδιαίτερα δύσκολες παραλλαγές του Nim.

Παράδειγμα 2.6 (Nim_k του Moore). Αυτό το παίγνιο είναι σαν το Nim, εκτός από το ότι κάθε παίκτης, με τη σειρά του, έχει το δικαίωμα να αφαιρέσει οποιοδήποτε αριθμό από μάρκες από το πολύ k στοίβες.

Γράφουμε τις δυαδικές επεκτάσεις της στοίβας μεγεθών $(n_1,\dots,n_l)$:

$$n_1 = n_1^{(m)} \dots n_1^{(0)} \equiv \sum_{j=0}^{m} n_1^{(j)} 2^j,$$

$$\dots$$

$$n_l = n_l^{(m)} \dots n_l^{(0)} \equiv \sum_{j=0}^{m} n_l^{(j)} 2^j.$$

Τώρα θέτουμε:

$$\hat{P} = \{(n_1,\dots,n_l) : \sum_{i=1}^{l} n_i^{(r)} = 0(\bmod(k+1))\, \gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon r \geq 0\}$$

Θεώρημα 2.2.5 (Θεώρημα του Moore). $\hat{P}$ = P.

Απόδειξη. Σημειώστε ότι η τελική θέση βρίσκεται στο $\hat{P}$. Τώρα χρειάζεται να ελέγξουμε ότι η έναρξη από το γενομένης από $\hat{P}$, κάθε νομική κίνηση μας φέρνει έξω από αυτό. Για να το δούμε, λαμβάνουμε οποιαδήποτε κίνηση από μια θέση στο $\hat{P}$, και θα εξετάσουμε την αριστερή στήλη για την οποία η κίνηση αυτή αλλάζει την δυαδική επέκταση για τουλάχιστον ένα από τους αριθμούς στοιβών. Κάθε αλλαγή σε αυτή τη στήλη πρέπει να είναι από το ένα έως το μηδέν. Το υφιστάμενο άθροισμα των μονάδων και των μηδενικών (mod (k + 1)) είναι μηδέν, και ρυθμίζουμε το πολύ k στοίβες. Επειδή οι άσσοι γίνονται μηδενικά, μειώνουμε το άθροισμα (mod κ) σε αυτήν τη στήλη και κατά τουλάχιστον 1 και το πολύ k. Θα μπορούσαμε να πάρουμε πίσω το 0 (k mod + 1), σε αυτή τη στήλη, μόνο αν αλλάζαμε k + 1 στοίβες.

Δεδομένου ότι η κίνηση αυτή δεν επιτρέπεται, έχουμε ελέγξει ότι καμία κίνηση ξεκινώντας από το $\hat{P}$ δεν πηγαίνει πίσω στο $\hat{P}$.

Θα πρέπει επίσης να επαληθεύσουμε ότι για κάθε θέση στο $\hat{N}$ (το οποίο καθορίσαμε να είναι το συμπλήρωμα του $\hat{P}$), μπορούμε να βρούμε μια μετακίνηση στο $\hat{P}$. Αυτό το βήμα της απόδειξης είναι λίγο πιο δύσκολο, γιατί χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να επιλέξουμε τις k στοίβες από τις οποίες θα μετακινήσουμε τις μάρκες.

Ξεκινάμε βρίσκοντας την πιο αριστερή στήλη της οποίοας το άθροισμα (mod (k +1)) είναι μη μηδενικό. Επιλέγουμε τις γραμμές r με έναν άσσο σε αυτή τη στήλη, όπου r είναι ο αριθμός των μονάδων στη στήλη μειωμένος κατά mod (k + 1) (έτσι ώστε $r \in \{0,...,k\}$). Έχουμε την επιλογή να διαλέξουμε k-r περισσότερες γραμμές, εάν χρειαστεί. Το κάνουμε αυτό κινούμενοι στην επόμενη στήλη προς τα δεξιά, και υπολογίζοντας τον αριθμό των άσσων σε αυτή στη στήλη, αγνοώντας κάθε μονάδα στις γραμμές που επιλέξαμε πριν, και μειωμένο κατά mod (k + 1). Αν $r+s<k$,τότε προσθέτουμε s γραμμές στη λίστα αυτών που επιλέξαμε, επιλέγοντας αυτές με τρόπο τέτοιο ώστε να υπάρχει ένας άσσος στη στήλη αυτή που επί του παρόντος είναι υπό εξέταση, και διαφορετικό από τις γραμμές που είχαμε επιλεγεί προηγουμένως. Αν $r+s \geq k$, επιλέγουμε k-r τέτοιες γραμμές, έτσι ώστε να έχουμε ένα πλήρες σύνολο από k επιλεγμένες γραμμές. Στην πρώτη περίπτωση, εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε περισσότερες γραμμές, και τις συλλέγουμε διαδοχικά από την εξέταση κάθε στήλης στα δεξιά, με τον ίδιο κανόνα, σαν εκείνο που μόλις περιγράψαμε. Το νόημα για να το κάνουμε αυτό είναι ότι έχουμε επιλέξει τις γραμμές με τέτοιο τρόπο ώστε, για κάθε στήλη, είτε η στήλη δεν έχει κανένα άσσο από τις με επιλεγμένες γραμμές γιατί σε κάθε μία από αυτές τις γραμμές, το πιο σημαντικό ψηφίο εμφανίζεται σε μια θέση στα δεξιά αυτής της στήλης, ή το mod (k + 1) άθροισμα στις γραμμές εκτός από τους επιλεγμένους άσσους δεν είναι μηδέν. Εάν η στήλη είναι του πρώτου τύπου, θέτουμε όλα τα bits μηδέν στις επιλεγμένες γραμμές. Αυτό μας δίνει πλήρη ελευθερία να επιλέξουμε τα bits στις λιγότερο σημαντικές θέσεις. Στις άλλες στήλες, μπορεί να πρέπει να πούμε ότι $t \in \{1,...,k\}$ ως το άθροισμα (mod (k + 1)) από τις άλλες γραμμές, έτσι ώστε να επιλέξουμε τον αριθμό των άσσων σε επιλεγμένες γραμμές αυτής της στήλης να είναι ίσος με k-t. Αυτό μας δίνει ένα mod (k + 1) άθροισμα μηδέν σε κάθε γραμμή, και κατά συνέπεια μια θέση στο $\hat{P}$.

Το επιχείρημα αυτό είναι δύσκολο. Μπορεί να μας βοηθήσει να δούμε πώς λειτουργεί σε μερικά μικρά παραδείγματα: Επέλεξε μια μικρή τιμή του k, φτιάξε μερικές στοίβες μεγεθών που βρίσκονται στο $\hat{N}$, και βρές μια συγκεκριμένη κίνηση σε μια θέση στο $\hat{P}$.

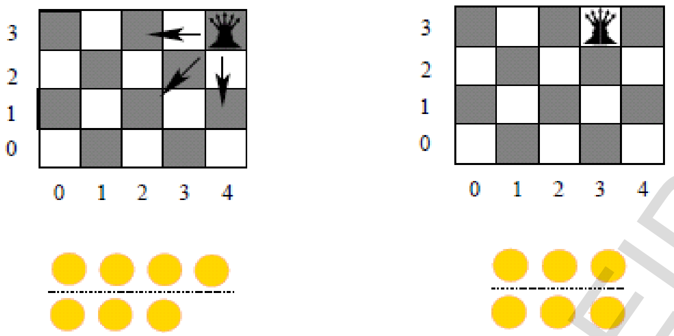
Παράδειγμα 2.7 (Nim Wythoff). Μια θέση σε αυτό το παίγνιο αποτελείται από δύο στοίβες των μεγεθών n και m. Οι νομικές κινήσεις είναι αυτές του Nim, με μία προσθήκη: οι παίκτες μπορούν να αφαιρέσουν ίσο αριθμό από μέρκες και από τις δύο στοίβες σε μια ενιαία κίνηση. Αυτή η επιπλέον κίνηση αποτρέπει τις θέσεις $\{(n,n): n \in \mathrm{N}^*\}$ από το να είναι P-θέσεις.
Αυτό το παίγνιο έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα δομή. Μπορούμε να πούμε ότι μια θέση αποτελείται από ένα ζεύγος (n,m) από φυσικούς αριθμούς, τέτοιους ώστε $n,m \geq 0$. Μια νόμιμη κίνηση είναι μία από τις ακόλουθες:

Για να μειώσουμε το n σε κάποια τιμή μεταξύ 0 και n-1 χωρίς να αλλάξουμε m, να μειώσουμε το m σε κάποια τιμή μεταξύ 0 και m-1 χωρίς να αλλάξουμε το n, ή να μείωσουμε ένα από το n και το m κατά το ίδιο ποσό. Αυτός που φτάνει στο (0,0) είναι ο νικητής.
Για να αναλύσουμε το Wythoff Nim, θεωρείστε τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό των δύο ακολουθιών/συνθηκών των φυσικών αριθμών:

$$a_0 = b_0 = 0, a_1 = 1, b_1 = 2$$

και για κάθε k>1.

$$a_k = mex\{a_0, a_1, ..., a_{k-1}, b_0, b_1, ..., b_{k-1}\} \text{,και } b_k = a_k + k\,.$$



Σχήμα 2.7. Το παίγνιο αυτό μπορεί να μελετηθεί ως το ακόλουθο παίγνιο που παίζεται σε ένα σκάκι. Θεωρείστε ένα nxm τμήμα του πίνακα. Οι παίκτες που έχουν σειρά κινούν τη βασίλισσα αρχικά τοποθετείται στην πιο πάνω δεξιά γωνία, είτε αριστερά κάτω ή διαγώνια προς το χαμηλότερο αριστερό μέρος. Ο παίκτης που κινεί τη βασίλισσα στην κάτω αριστερή γωνία κερδίζει. Αν η θέση της βασίλισσας σε κάθε γύρο δηλώνεται από το (x,y), με $1 \le x \le n, 1 \ge y \le m$, βλέπουμε ότι το παίγνιο είναι αντίστοιχο του Nim Wythoff.

όπου $mex(S) = \min\{n \ge 0 : n \notin S\}$,για $S \subseteq \{0,1,....\}$. (Ο όρος "mex" προέρχεται από "ελάχιστη αποκλειστική τιμή"(minimal excluded value).)

Θεώρημα 2.2.6. Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από το μηδέν είναι ίσος με ακριβώς έναν από τους a_i ή b_i. Δηλαδή, τα $\{a_j\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{b_j\}_{i=1}^{\infty}$ αποτελούν ένα τμήμα του Z^+.

2.2.3 Αμερόληπτα Παίγνια και το Θεώρημα Sprague-Grundy.

Στην ενότητα αυτή, θα αναπτύξουμε ένα γενικό πλαίσιο για την ανάλυση όλων των σταδιακά οριοθετημένων αμερόληπτων συνδυαστικών παιχνιδιών. Όπως και στην περίπτωση του Nim, θα εξετάσουμε τα αθροίσματα των παιχνιδιών και θα αναπτύξουμε ένα εργαλείο που θα μας επιτρέπει να αναλύσουμε κάθε αμερόληπτο συνδυαστικό παίγνιο υπό κανονικές συνθήκες παιγνίου σαν να ήταν μια στοίβα Nim ορισμένου μεγέθους.

Ορισμός 2.2.5. Το άθροισμα δύο συνδυαστικών παιχνιδιών, G_1 και G_2, είναι ένα παίγνιο G στο οποίο κάθε παίκτης με τη σειρά του, επιλέγει ένα από τα G_1, G_2 στο οποίο θα παίξει. Οι τερματικές θέσεις στο G είναι οι (t_1, t_2), όπου t_i είναι μια τερματική θέση στο G_i για $i \in \{1,2\}$. Γράφουμε G = G_1 + G_2.

Παράδειγμα 2.8. Το άθροισμα των δύο Nim παιγνίων X και Y είναι το παίγνιο (X,Y), όπως ορίζεται στο Λήμμα 2.2.1 της προηγούμενης ενότητας. Είναι εύκολο να δούμε ότι Λήμμα 2.2.1 γενικεύεται στο άθροισμα δύο οποιωνδήποτε σταδιακά οριοθετημένων συνδυαστικών παιχνιδιών:

Θεώρημα 2.2.7. Αν $(G_1,x_1)\in P$ και $(G_2,x_2)\in N$ τότε $(G_1+G_2,(x_1,x_2))\in N$. Αν $(G_1,x_1),(G_2,x_2)\in P$ τότε $(G_1+G_2,(x_1,x_2))\in P$.

Όπως και με το Nim, όταν (G_1,x_1) και (G_2,x_2) και οι δύο στο N τότε το (x_1,x_2) θα μπορούσε να είναι είτε μια N-θέση ή μια P-θέση.

Θεωρείστε ένα άθροισμα των δύο αυθαίρετων παιχνιδιών (G_1,x_1) και (G_2,x_2). Αν το αποτέλεσμα είναι ένα P, τότε, είτε και τα δύο (G_1,x_1) και (G_2,x_2) είναι στο N ή και τα δύο είναι στο P. Το ζήτημα αυτό παρακινεί τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.6. Έστω x_1,x_2 είναι θέσεις εκκίνησης για τα παίγνια G_1 και G_2, αντιστοίχως. Λέμε ότι τα διατεταγμένα ζεύγη (G_1,x_1) και (G_2,x_2) είναι ισοδύναμα, εάν (x_1,x_2) είναι μια P-θέση του παιγνίου G_1+G_2.

Παράδειγμα 2.9. Το παίγνιο Nim με αρχική θέση την (1,3,6) είναι ισοδύναμο με το παίγνιο Nim με αρχική θέση (4), επειδή το Nim-άθροισμα του παιγνίου αθροίσματος (1,3,4,6) είναι μηδέν. Γενικότερα, η θέση $(n_1,...,n_k)$ είναι ισοδύναμη με τη $(n_1\oplus...\oplus n_k)$, διότι το Nim-άθροισμα του $(n_1,...,n_k,n_1\oplus...\oplus n_k)$ είναι μηδέν.

Αν μπορούμε να δείξουμε ότι ένα αυθαίρετο παίγνιο (G,x) είναι ισοδύναμο με μια ενιαία Nim στοίβα (n), μπορούμε αμέσως να προσδιορίσουμε εάν το (G,x) είναι στο P ή είναι στο N, δεδομένου ότι η μόνη στοίβα Nim στο P είναι (0).

Χρειαζόμαστε ένα εργαλείο που θα μας επιτρέψει να προσδιορίσουμε το μέγεθος n της στοίβας Nim ισοδύναμη με μια αυθαίρετη θέση του (G,x).

Ορισμός 2.2.7. Έστω G είναι ένα προοδευτικά οριοθετημένο αμερόληπτο συνδυαστικό παίγνιο υπό κανονικές συνθήκες παιγνίου. Κάθε Sprague-Grundy συνάρτηση g ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$g(x)=mex\{g(y):x\rightarrow y\,\textit{είναι μια νόμιμη κίνηση}\}$$

Σημειώστε ότι η τιμή Sprague-Grundy οποιασδήποτε τερματικής θέσης είναι $mex\{\varnothing\}=0$. Σε γενικές γραμμές, η λειτουργία Sprague-Grundy έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα:

Λήμμα 2.2.2. Η τιμή Sprague-Grundy οποιασδήποτε θέσης είναι 0, αν και μόνο αν είναι μια P-θέση.

Ας υπολογίσουμε την συνάρτηση Sprague-Grundy για μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.10 (Το παίγνιο m-αφαιρέσεων). Στο παίγνιο m-αφαιρέσεων με σύνολο αφαίρεσης $\{a_1,...,a_m\}$, μια θέση αποτελείται από στοίβα από μάρκες, και μια νομική κίνηση είναι να αφαιρέσουμε από μια στοίβα a_i μάρκες, για κάποιο $i\in\{1,...,m\}$. Ο παίκτης ο οποίος θα αφαιρέσει την τελευταία μάρκα κερδίζει.

Θεωρείστε ένα παίγνιο 3-Αφαιρέσεων με σύνολο αφαίρεσης {1,2,3}. Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει μερικές τιμές της Sprague-Grundy συνάρτησης:

x	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	0	1	2	3	0	1	2 .

Γενικά, g(x)=x(mod4).

Παράδειγμα 2.11 (Το Αναλογικό παίγνιο Αφαίρεσης). Μια θέση αποτελείται από μια στοίβα από μάρκες. Μια νόμιμη κίνηση από μια θέση με n μάρκες είναι να η εξάλειψη κάθε θετικού αριθμού μαρκών αυστηρά-απολύτως μικρότερος από το n /2+1.

Εδώ, οι πρώτες τιμές της συνάρτησης Sprague-Grundy είναι:

x	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	0	1	0	2	1	3	0

Παράδειγμα 2.12. Σημειώστε ότι η τιμή Sprague-Grundy οποιασδήποτε στοίβας Nim (n) είναι ακριβώς n.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δηλώσουμε το θεώρημα Sprague-Grundy:

Θεώρημα 2.2.8 (Sprague-Grundy Θεώρημα). Κάθε προοδευτικά οριοθετημένο, αμερόληπτο συνδυαστικό παίγνιο G με αρχική θέση x υπό κανονικό παίγνιο είναι ισοδύναμο με μια μόνη στοίβα Nim μεγέθους $g(x) \geq 0$, όπου g (x) είναι η συνάρτηση Sprague-Grundy που αξιολογείται σε θέση εκκίνησης x.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα για να βρούμε τις P και N-θέσεις ενός συγκεκριμένου αμερόληπτου, σταδιακά οριοθετημένου παιγνίου υπό κανονικές συνθήκες, με την προϋπόθεση ότι μπορούμε να αξιολογήσουμε τη συνάρτηση Sprague-Grundy.

Για παράδειγμα, θυμηθείτε το παίγνιο των 3-αφαιρέσεων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα (2.10). Έχουμε διαπιστώσει ότι η συνάρτηση Sprague-Grundy του παιγνίου είναι g (x) = x (mod 4). Ως εκ τούτου, από το θεώρημα Sprague-Grundy,το παίγνιο των 3-αφαιρέσεων με αρχική θέση x είναι ισοδύναμο με μια μόνη στοίβα Nim με x (mod4) μάρκες. Θυμηθείτε ότι $(0) \in P_{nim}$ ενώ $(1),(2),(3) \in N_{nim}$. Ως εκ τούτου, οι P-θέσεις για το G είναι οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το τέσσερα.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν τρόπο εύρεσης της συνάρτησης Sprague-Grundy του παιγνίου αθροίσματος $G_1 + G_2$, λαμβάνοντας υπόψη τις συναρτήσεις Sprague-Grundy από τα παίγνια στοιχείου G_1 και G_2. Θα αποφέρει επίσης μια απλή απόδειξη του θεωρήματος Sprague-Grundy.

Θεώρημα 2.2.9 (Θεώρημα Αθροίσματος). Έστω (G_1, x_1) και (G_2, x_2) είναι δύο ζεύγη παιγνίων και x_1 και x_2 είναι θέσεις μέσα εκείνα τα παίγνια. Για το παίγνιο αθροίσματος,

G = $G_1 + G_2$,

$$g(x_1, x_2) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2)$$

όπου g, g_1, g_2 δηλώνουν αντίστοιχα τις συναρτήσεις Sprague-Grundy για τα παίγνια G, G_1 και G_2, και $\oplus$ είναι το άθροισμα Nim.

Το Sprague-Grundy Θεώρημα είναι συνέπεια του Θεωρήματος αθροίσματος από το εξής απλό επιχείρημα:

Έστω G είναι ένα προοδευτικά οριοθετημένο παίγνιο υπό κανονικές συνθήκες παιχνιδιοού και x μια αρχική θέση, και θεωρείστε τη στοίβα Nim (g (x)). Πρέπει να δείξουμε ότι η θέση (x, g (x)) στο παίγνιο αθροίσματος είναι μια P-θέση. Από το θεώρημα αθροίσματος και την τιμή Sprague-Grundy του παιγνίου αθροίσματος είναι g (x) $\oplus$ g (x) το οποίο είναι 0, και το Λήμμα 2.1.2 εξασφαλίζει ότι (x, g (x)) είναι πράγματι μια P-θέση.

Ας χρησιμοποιήσουμε την Sprague-Grundy και το Θεώρημα Αθροίσματος να αναλύσουμε μερικά παίγνια.

Παράδειγμα 2.13. (4 ή 5) Υπάρχουν δύο στοίβες μαρκών. Κάθε παίκτης, με τη σειρά του, αφαιρεί είτε μία μέχρι τέσσερεις μάρκες από την πρώτη στοίβα ή μία μέχρι πέντε μάρκες από τη δεύτερο στοίβα.

Στόχος είναι να υπολογίσουμε τις P-θέσεις για αυτό το παίγνιο. Σημειώστε ότι το παίγνιο είναι της μορφής $G_1 + G_2$ όπου G_1 είναι ένα παίγνιο 4-αφαιρέσεων και G_2 είναι ένα παίγνιο 5-s αφαιρέσεων. Κατ 'αναλογία με το παίγνιο των 3-αφαιρέσεων, $g_1(x) = x(\bmod 5)$ και $g_2(y) = y(\bmod 6)$. Από το θεώρημα αθροίσματος, έχουμε ότι:

$$g(x, y) = x(\bmod 5) \oplus y(\bmod 6)$$

Βλέπουμε ότι g (x,y) = 0 αν και μόνο αν x (mod 5) =y (mod 6).

Το ακόλουθο παράδειγμα δεν έχει καμία προφανή ομοιότητα με το Nim, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Sprague-Grundy να το αναλύσουμε.

Παράδειγμα 2.14 (Πράσινο Hackenbush). Το παίγνιο αυτό παίζεται σε ένα πεπερασμένο γράφημα με μια διακεκριμένη κορυφή r, που ονομάζεται ρίζα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η βάση πάνω στην οποία στέκεται το υπόλοιπο της δομής. Με τη σειρά του, ο παίκτης μπορεί να αφαιρέσει μια άκρη από το γράφημα. Αυτό προκαλεί όχι μόνο αυτή η άκρη να εξαφανιστεί, αλλά όλη η δομή που βασίζεται σε αυτή.

Ο στόχος για κάθε παίκτη είναι να αφαιρεθεί και η τελευταία άκρη από το γράφημα. Μιλάμε για «πράσινο» Hackenbush επειδή υπάρχει μια «εγωιστική» παραλλαγή του παιγνίου στο οποίο οι ακμές μπορούν να είναι χρωματισμένες με κόκκινο ή μπλε και οι παίκτες περιορίζονται στην κατάργηση ενός μόνο τύπου άκρης.

Σημειώστε ότι εάν το αρχικό γράφημα αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό διαδρομών, κάθε μια από τις οποίες καταλήγει στη ρίζα, τότε, το παίγνιο Πράσινο Hackenbush είναι ισοδύναμο με το παίγνιο Nim, στο οποίο ο αριθμός των στοιβών είναι ίσος με τον αριθμό των διαδρομών, καθώς και ο αριθμός των μαρκών σε μια στοίβα είναι ίσος με το μήκος της αντίστοιχης διαδρομής.

Για να χειριστούμε την υπόθεση κατά την οποία η γραφική παράσταση είναι ένα δέντρο, θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 2.2.3 (Αρχή Άνω και Κάτω τελείας). Η συνάρτηση Sprague-Grundy του Πράσινου Hackenbush σε ένα δέντρο είναι απρόσβλητη από την ακόλουθη πράξη: Για οποιουσδήποτε δύο κλάδους του δένδρου που συναντιούνται σε μια κορυφή, αντικαταστείστε αυτους τους δύο κλάδους από ένα μονοπάτι που προέρχονται από την κορυφή του οποίου το μήκος είναι το Nim-άθροισμα των συναρτήσεων Sprague-Grundy των δύο κλάδων.

Απόδειξη.

Εάν οι δύο κλάδοι αποτελούνται απλώς από μονοπάτια, ή "στελέχη-μίσχους", που προέρχονται από ένα συγκεκριμένο κόμβο, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι οι δύο κλάδοι σχηματίζουν ένα παίγνιο δύο στοιβών του Nim, χρησιμοποιώντας το άμεσο θεώρημα αθροίσματος για τις συναρτήσεις Sprague-Grundy των δύο παιχνιδιών. Γενικότερα, θα μπορούμε να εκτελέσουμε την εκ νέου λειτουργία τοποθέτησης σε οποιουσδήποτε δύο κλάδους που συναντιούνται σε μια κορυφή με την επανάληψη αντικαθιστώντας τα ζευγάρια των μίσχων του φυτού που συναντιούνται μέσα σε ένα συγκεκριμένο κλάδο μέχρι καθένας από τους δύο κλάδους έχεις να έχει γίνει ένας μίσχος.

Στη συνέχεια αφήνουμε τα αμερόληπτα παίγνια για να συζητήσουμε μερικά ενδιαφέροντα κομματικά παίγνια.

2.3 Εγωϊστικά Παίγνια

Ένα συνδυαστικό παίγνιο που δεν είναι αμερόληπτο καλείται εγωϊστικό. Σε αυτά τα παίγνια οι νόμιμες κινήσεις για ορισμένες θέσεις μπορεί να είναι διαφορετικές για κάθε παίκτη. Επίσης, σε ορισμένα τέτοια παίγνια, οι τερματικές θέσεις μπορεί να χωριστούν σε εκείνες που έχουν μια νίκη για τον παίκτη 1 και εκείνες που έχουν μια νίκη για τον παίκτη 2. Αυτό συμβαίνει στο Hex – ένα σημαντικό εγωιστικό παίγνιο που περιγράψαμε και στην εισαγωγή. Στο Hex, οι θέσεις με κόκκινο πέρασμα κερδίζουν για τον παίκτη 1 και αυτές με το πράσινο για τον παίκτη 2. Συνήθως, σε ένα εγωιστικό παίγνιο δεν είναι όλες οι θέσεις προσβάσιμες από κάθε παίκτη από μια συγκεκριμένη θέση εκκίνησης. Μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό με το παίγνιο του Hex. Αν το παίγνιο ξεκινά σε ένα κενό πίνακα, ο παίκτης που παίζει πρώτος μπορεί να μην αντιμετωπίσει ποτέ μια θέση όπου ο αριθμός των κόκκινων και πράσινων εξαγώνων στον πίνακα είναι διαφορετικός.

Σε ορισμένα εγωιστικά παίγνια μπορεί να υπάρχουν επιπρόσθετες τερματικές θέσεις, το οποίο σημαίνει ότι κανένας από τους παίκτες δεν κερδίζει. Αυτά μπορούν να επονομαστούν «δεσμοί» (όπως στο παίγνιο Go, όταν και οι δύο έχουν κατακτήσει την ίδια περιοχή). Η μεταγενέστερη υπάρχουν για να αποτρέπουν σε άπειρους κύκλους και, επομένως, να δώσουν τα παίγνια σταδιακά οριακά.

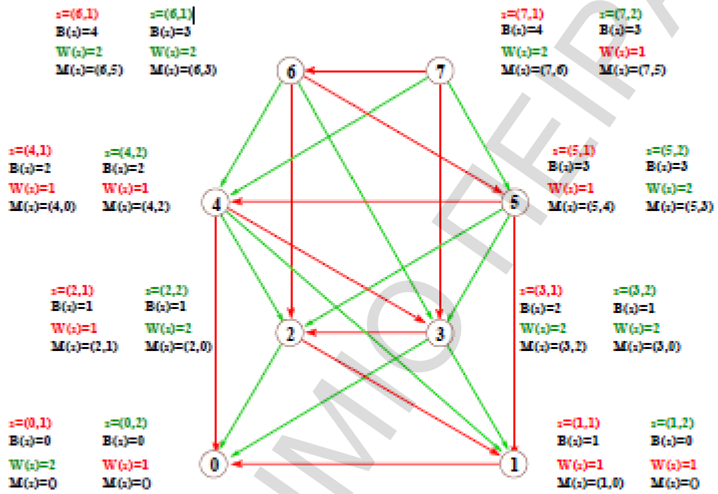
Όσο ένα εγωιστικό συνδυαστικό παίγνιο μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα γράφημα ένα μόνο σύνολο πλευρά, ένα εγωιστικό είναι πιο συχνά δοσμένο από ένα ενιαίο σύνολο κόμβων και δύο σύνολα από άκρες που αποτελούν νόμιμες κινήσεις διαθέσιμες σε κάθε παίκτη. Έστω X δηλώνει το σύνολο των θέσεων και E_1, E_2 είναι τα δύο σύνολα-πλευρών για τους παίκτες 1 και 2 αντίστοιχα. Αν (x,y) είναι μια νόμιμη κίνηση για κάθε παίκτη $i \in \{1,2\}$ τότε $((x,y) \in E_i)$ και λέμε ότι το y είναι ένας διάδοχος του x. Γράφουμε $S_i(x) = \{y : (x,y) \in E_i\}$. Οι πλευρές είναι διευθυνόμενες εάν οι κινήσεις είναι αμετάκλητες. Σε εγωιστικά παίγνια όπου τα σύνολα-πλευρών συμπίπτουν, οι νικηφόροι τερματικοί κόμβοι πρέπει να είναι διαφορετικοί για τις δύο παίκτες.

Μια στρατηγική ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και σε ένα αμερόληπτο παίγνιο. Εντούτοις, θα χρειαστεί τώρα μια πλήρης προδιαγραφή για την κατάσταση του παιγνίου, εκτός από τη θέση, απαιτείται δηλαδή μια ταυτοποίηση του παίκτη που είναι να κινηθεί μετά.

Ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.15 (Ένα εγωιστικό Παίγνιο Αφαίρεσης). Ξεκινώντας με μια στοίβα από $x \in \mathbb{N}$ μάρκες, δύο παίκτες, 1 και 2, εναλλάσσονται παίρνοντας έναν συγκεκριμένο αριθμό από μάρκες. Ο παίκτης 1 κινείται πρώτα και μπορεί να αφαιρέσει 1 ή 4 μάρκες. Ο παίκτης 2 κινείται δεύτερος και μπορεί να αφαιρέσει 2 ή 3 μάρκες. Ο παίκτης ο οποίος θα αφαιρέσει την τελευταία μάρκα κερδίζει.

Αυτό είναι ένα προοδευτικά οριοθετημένο εγωιστικό παίγνιο όπου και οι δύο τερματικοί κόμβοι και οι κινήσεις είναι διαφορετικές για τους δύο παίκτες.



Σχήμα 2.8. Εδώ ο παίκτης 1 κινείται πρώτος. Ο κόμβος 0 είναι τερματικός για κάθε παίκτη και ο 1 είναι επίσης τερματικός με μια νίκη για τον 1.

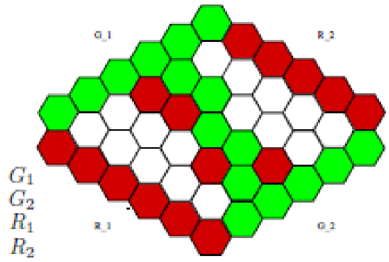
Από αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι ο αριθμός των βημάτων που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί το παίγνιο από μια δεδομένη θέση τώρα εξαρτάται από την κατάσταση του παιγνίου, $s = (x, i)$,όπου x δηλώνει τη θέση και $i \in \{1, 2\}$ δηλώνει τον παίκτη που κινείται στη συνέχεια.

Θεώρημα 2.3.1. Σε κάθε προοδευτικά οριοθετημένο συνδυαστικό παίγνιο χωρίς δεσμούς επιτρέπεται σε έναν από τους παίκτες έχει μια στρατηγική νίκης.

Λήμμα 2.3.1 Ένα συνδεδεμένο παίγνιο με ένα πεπερασμένο σύνολο θέσης και χωρίς κύκλους είναι προοδευτικά οριοθετημένο.

2.3.1 Το παίγνιο του Hex

Παράδειγμα 2.16 (Hex). Το Hex παίζεται σε ένα πίνακα σε σχήμα ρόμβου που αποτελείται από εξάγωνα. Σε κάθε παίκτη έχει ανατεθεί ένα χρώμα, κόκκινο για τον παίκτη I και πράσινο για τον παίκτη II, και οι δύο αντίθετες πλευρές του πίνακα. Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής τον χρωματισμό άδειων εξαγώνων. Ο στόχος για κάθε παίκτη είναι να συνδέσει τις δύο πλευρές του πίνακα με μια αλυσίδα εξαγώνων στο χρώμα του. Ως εκ τούτου, οι τερματικές θέσεις σε αυτό το παίγνιο είναι τα πλήρη ή μερικώς χρωματισμένα εξάγωνα του πίνακα που έχουν μια αλυσίδα διέλευσης να τον διασχίζει.



Σχήμα 2.9. Ένα ολοκληρωμένο παίγνιο Hex με μια πράσινη αλυσίδα να διασχίζει το πίνακα.

Σημειώστε ότι το Hex είναι ένα εγωιστικό παίγνιο όπου και οι τερματικές θέσεις και οι νόμιμες κινήσεις είναι διαφορετικές για τους δύο παίκτες. Εμείς θα αποδείξουμε ότι κάθε πλήρως χρωματισμένος, κανονικός πίνακας Hex περιέχει μια και μόνο μια μονόχρωμη διάβαση. Αυτή η τοπολογία εγγυάται το γεγονός ότι στο παίγνιο του Hex δεν είναι δυνατοί οι δεσμοί.

Σαφώς, το Hex είναι σταδιακά οριοθετημένο. Δεδομένου ότι οι δεσμοί δεν είναι δυνατοί ένας από τους παίκτες πρέπει να έχει μια στρατηγική νίκης. Θα αποδείξουμε τώρα, με τη χρήση της Στρατηγικής-κλοπή επιχείρημα, ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί πάντα να κερδίζει.

Θεώρημα 2.3.2. Σε ένα πρότυπο, συμμετρικό πίνακα Hex αυθαίρετου μεγέθους,ο παίκτης I έχει μια στρατηγική νίκης.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ένας από τους παίκτες έχει μια στρατηγική νίκης. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης II είναι αυτος ο ένας. Επειδή οι κινήσεις των παικτών είναι συμμετρικές, είναι δυνατό για τον παίκτη I να υιοθετήσει τη στρατηγική νίκης του παίκτη II ως εξής: Ο παίκτης I, στην πρώτη του κίνησή , απλά χρωματίζει ένα αυθαίρετα επιλεγμένο εξάγωνο. Στη συνέχεια, για κάθε κίνηση από τον παίκτη II, ο παίκτης I ανταποκρίνεται με κατάλληλη κίνηση που υπαγορεύεται από τη στρατηγική νίκης του παίκτη II. Εάν η στρατηγική απαιτεί ο παίκτης I να κινηθεί στο σημείο που επέλεξε στην πρώτη του σειρά και υπάρχουν κενά εξάγωνα αριστερά, ο ίδιος επιλέγει απλά ένα άλλο αυθαίρετο σημείο και κινείται εκεί αντ 'αυτού. Η ύπαρξη ενός επιπλέον εξαγώνου στον πίνακα δεν μπορεί ποτέ να βλάψει τον παίκτη I - μπορεί να τον βοηθήσει μόνο. Με τον τρόπο αυτό, ο παίκτης I, επίσης, εγγυάται ότι θα κερδίσει, υπονοώντας ότι και οι δύο παίκτες έχουν στρατηγικές νίκης, μια αντίφαση.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οποιοσδήποτε χρωματισμένος πρότυπος πίνακας Hex περιέχει μια και μόνο μια μονοχρωματική διαδρομή, πράγμα που σημαίνει ότι το παίγνιο τερματίζει πάντα με μια νίκη για έναν από τους παίκτες. Πρόκειται για ένα καθαρά τοπολογικό γεγονός το οποίο είναι ανεξάρτητο από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους παίκτες.

2.3.2 Hex και Y

Το ότι δεν μπορούν να υπάρξουν περισσότερες από μία διάβασεις στο παίγνιο του Hex φαίνεται προφανές, μέχρι να προσπαθήσουμε πραγματικά να το αποδείξουμε με προσοχή. Για να γίνει αυτό άμεσα, θα χρειαστεί ένα διακριτό ανάλογο του θεωρήματος καμπύλης Jordan, το οποίο λέει ότι μια συνεχή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο χωρίζει το επίπεδο σε δύο συνδεδεμένα μέρη. Η διακριτή μορφή-έκδοση του θεωρήματος είναι λίγο πιο εύκολη από το συνεχή τρόπο, αλλά εξακολουθεί να είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί.

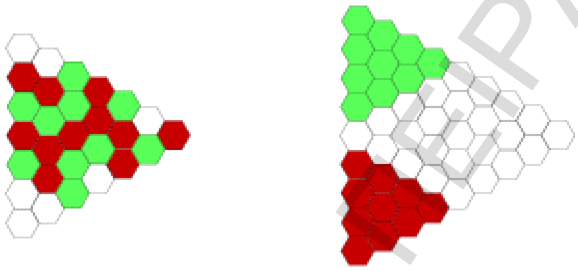
Κατά συνέπεια, αντί να επιτεθεί το αίτημα αυτό άμεσα, θα καταφύγουμε σε ένα τέχνασμα: Θα αποδείξουμε αντ 'αυτού ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για ένα σχετικό, γενικότερο παίγνιο - το παίγνιο του Y[2], επίσης γνωστό ως τρίποδο.

[2] Το Y παρουσιάστηκε τη δεκαετία του 1950 από τον διάσημο θεωρητικό πληροφοριών, Claude Shannon.

Η απόδειξη για το Y θα μας δώσει μια απόδειξη του αποτελέσματος της τελευταίας ενότητας, εάν κάθε ολοκληρωμένος πίνακας Hex περιέχει μια μονοχρωματική διέλευση. Θα δείξουμε επίσης ότι δεν μπορεί να υπάρχει περισσότερη της μίας διάβασης σε ένα πλήρες πίνακα.

Παράδειγμα 2.17 (Παίγνιο του Y). Το Y παίζεται σε ένα τριγωνικό πίνακα που αποτελέιται από εξάγωνα. Όπως και στο Hex, οι δύο παίκτες με τη σειρά τους χρωματίζουν τα εξάγωνα, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο χρώμα του. Ο στόχος για τους δύο παίκτες είναι η δημιουργία ενός Y, μονοχρωματική συνδεδεμένη περιοχή που καλύπτει και τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Έτσι, οι τερματικές θέσεις είναι αυτές που περιέχουν ένα μονόχρωμο Y.

Μπορούμε να δούμε ότι το Hex είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση του Y: Παίζοντας Y, ξεκινώντας από την θέση που φαίνεται στο Σχήμα 2.10 είναι ισοδύναμο με το παίγνιο του Hex στην κενή περιοχή του πίνακα.



Σχήμα. 2.10. Το Hex είναι μια ειδική περίπτωση του Γ.

Εμείς θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ένας συμπληρωμένος πίνακας Y πάντα περιλαμβάνει ένα ενιαίο Y. Επειδή το Hex είναι ισοδύναμο με το Y με ορισμένα προ-χρώματισμένα εξάγωνα, η ύπαρξη και μοναδικότητα της αλυσίδας διέλευσης κληρονομείται από το Hex στο Y.

Αφού το έχουμε δημιουργήσει αυτό, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη στρατηγική κλοπής επιχείρημα που δώσαμε για το Hex να αποδείξουμε ότι ο πρώτος παίκτης που θα κινηθεί έχει μια στρατηγική νίκης.

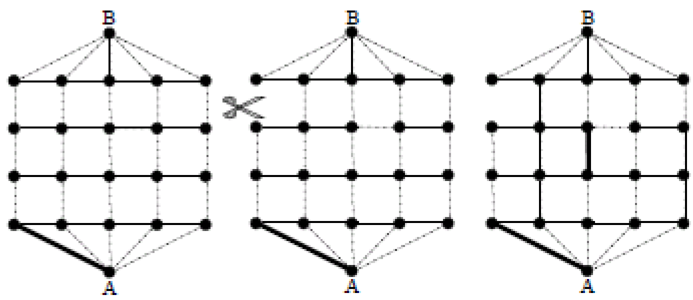
Θεώρημα 2.3.3. Οποιοσδήποτε χρωματισμός του πίνακα περιλαμβάνει ένα και μόνο ένα Y.

Επειδή οποιοσδήποτε χρωματισμένος Y πίνακας περιλαμβάνει ένα και μόνο ένα Y νίκης, προκύπτει ότι οποιοσδήποτε χρωματισμένος πίνακας Hex περιέχει μία και μόνο μια διέλευση.

2.3.4 Άλλα "εγωιστικά" παίγνια που παίζονται σε Γραφήματα

Τώρα θα συζητήσουμε πολλά άλλα τέτοια παίγνια που παίζονται σε γραφήματα. Για κάθε ένα από τα παραδείγματα μας, μπορούμε να περιγράψουμε μια σαφή στρατηγική νίκης για τον πρώτο παίκτη.

Παράδειγμα 2.18 (Το Παίγνιο Μεταγωγής Shannon). Το παίγνιο μεταγωγής του Shannon, ένα εγωϊστικό παίγνιο παρόμοιο με το Hex, παίζεται από δύο παίκτες, Cut (Αποκοπή) και Short (Συντόμευση), σε ένα συνδεδεμένο γράφημα με δύο διακεκριμένους κόμβους, A και B. O Short, με τη σειρά του, ενισχύει μια ακμή του γραφήματος, καθιστώντας τη απρόσβλητη απο το να περικοπή. O Cut, με τη σειρά του, διαγράφει κάθε ακμή που δεν έχει ενισχυθεί. O Cut κερδίζει αν καταφέρει να αποσυνδέσει το A από B. O Short κερδίζει αν καταφέρει να συνδέσει το A με το B με μια ενισχυμένη διαδρομή.

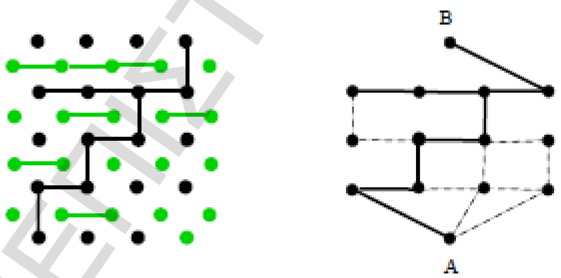


Σχήμα 2.11. Το παίγνιο του Shannon που παίζεται σε ένα 6x5 πλέγμα. Οι πρώτες 3 κινήσεις με πρώτο να κινείται ο Short. Οι διαθέσιμες ακμές εμφανίζονται με διακεκομμένες γραμμές, οι ενισχυμένες ακμές εμφανίζονται με «παχιές» γραμμές. Το ψαλίδι δείχνει την γραμμή που μόλις έχει διαγραφεί.

Υπάρχει μια επίλυση στο γενικό παίγνιο Μεταγωγής Shannon, αλλά εμείς δεν θα το περιγράψω εδώ. Αντ 'αυτού, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μια περιορισμένη, απλούστερη περίπτωση: Όταν το παίγνιο Μεταγωγής Shannon παίζεται σε ένα γράφημα που είναι ένα Lx(L + 1) πλέγμα με τις κορυφές της επάνω πλευράς συγχωνευμένες σε μία κορυφή, A, και τις κορυφές στο κάτω μέρος συγχωνευμένες σε ένα άλλο κόμβο, B, τότε είναι ισοδύναμο με ένα άλλο παίγνιο, γνωστό ως Bridg-It (επίσης αναφέρεται ως Gale, από τον εφευρέτη του, τον David Gale.)

Παράδειγμα 2.19 (Bridg-It[3]). Το Bridg-It παίζεται σε ένα δίκτυο από πράσινες και μαύρες κουκίδες (βλ. σχήμα 2.12). Το Μαύρο, με τη σειρά του, επιλέγει δύο παρακείμενες μαύρες κουκίδες και τις συνδέει με μια γραμμή. Το Πράσινο προσπαθεί να μπλοκάρει την πρόοδο του Μαύρου, συνδέοντας ένα παρακείμενο ζευγάρι από πράσινες κουκκίδες. Οι γραμμές σύνδεσης, μετά την κατάρτιση, δεν μπορούν να διασταυρωθούν.

Στόχος του Μαύρου είναι να δημιουργήσει μια διαδρομή από πάνω προς τα κάτω, ενώ ο στόχος του Πράσινου είναι να τον εμποδίσει με την δημιουργία ενός μονοπατιού από αριστερά προς τα δεξιά.



Σχήμα 2.12. Ένα ολκληρωμένο παίγνιο Bridg-It και το αντίστοιχο παίγνιο μεταγωγής Shannon

Στο περιορισμένο παίγνιο Μεταγωγής του Shannon που είναι ισοδύναμο με το Bridg-It, θα δείξουμε ότι ο Short, εάν κινηθεί πρώτος, έχει μια στρατηγική νίκης.

Πριν μπορέσουμε να περιγράψουμε τη στρατηγική του Short, θα χρειαστούμε μερικούς ορισμούς από τη θεωρία γραφημάτων:

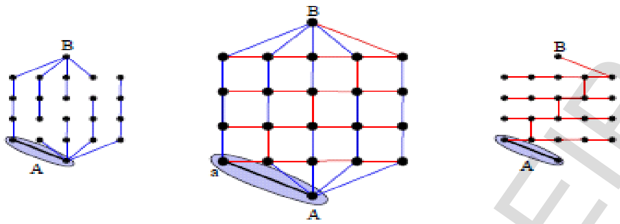
Ορισμός 2.3.1. Ένα δένδρο είναι ένα συνδεδεμένο διευθυνόμενο γράφημα χωρίς κύκλους.\

[3] Το 1956, ο Oliver Gross, ένας μαθηματικός στην εταιρία RAND, απέδειξε ότι ο παίκτης που παίζει πρώτος στο παίγνιο Bridg έχει μια στρατηγική νίκης. Αρκετά χρόνια αργότερα, ο Alfred B. Lehman, καθηγητής της επιστήμης των υπολογιστών στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο, επινόησε μια λύση στο γενικό παίγνιο Μεταγωγής του Shannon.

i. Κάθε δένδρο πρέπει να έχει ένα φύλλο, μια κορυφή βαθμού ένα.
ii. Ένα δένδρο με n κορυφές έχει n-1 ακμές.
iii. Ένα συνδεδεμένο γράφημα με n κορυφές και n-1 ακμές είναι ένα δένδρο.
iv. Ένα γράφημα που δεν έχει κύκλους, με n κορυφές και n-1 ακμές είναι ένα δένδρο.

Θεώρημα 2.3.4 O Short αν κινηθεί πρώτος έχει μια στρατηγική νίκης.

Απόδειξη. O Short ξεκινάει ενισχύοντας μια ακμή στο γράφημα G, συνδέοντας το A με μια παρακείμενη κουκίδα, α. Εντοπίζουμε τα A και α από τη "σύντηξη" τους σε ένα ενιαίο A. Στο γράφημα που προκύπτει,υπάρχουν δύο δένδρα με ασυνεχείς ακμές έτσι ώστε κάθε δένδρο εκτείνεται στο (περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του) G.

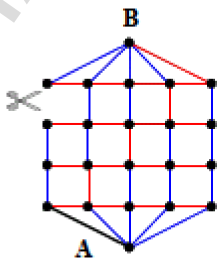


Σχήμα 2.13 Δύο εκτεινόμενα δένδρα - το μπλε είναι κατασκευασμένο από την πρώτη κορυφή και ενώνεται με την κάτω χρησιμοποιώντας τις αριστερότερες κατακόρυφες ακμές, και στη συνέχεια προσθέτοντας άλλες κάθετες ακμές, παραλείποντας ακριβώς μια ακμή σε κάθε γραμμή κατά μήκος μιας νοητής διαγωνίου. Το κόκκινο δέντρο περιλαμβάνει τις υπόλοιπες ακμές. Οι δύο κυκλομένοι κόμβοι εντοπίζονται.

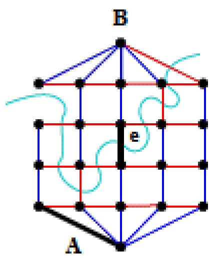
Παρατηρήστε ότι τα μπλε και κόκκινα υπογραφήματα στο πλέγμα 4x5 στο σχήμα. 2.13 είναι ένα τέτοιο ζευγάρι των γεννητικών – εκτεινόμενων δέντρων: Το μπλε υπογράφημα εκτείνεται σε κάθε κόμβο,που είναι συνδεδεμένος, και δεν έχει κύκλους, έτσι είναι ένα εκτεινόμενο δέντρο εξ’ορισμού. Το κόκκινο υπογράφημα είναι συνδεδεμένο, αγγίζει κάθε κόμβο, και έχει το σωστό αριθμό ακμών, γι 'αυτό είναι επίσης ένα εκτεινόμενο δέντρο από την ιδιότητα (iii). Η ίδια κατασκευή θα μπορούσε να επαναληφθεί σε ένα αυθαίρετο Lx(L + 1) πλέγμα. Χρησιμοποιώντας αυτά τα δύο εκτεινόμενα δέντρα, τα οποία συνδέουν αναγκαστικά το A με το B, μπορούμε να καθορίσουμε μια στρατηγική για τον Short.

Η πρώτη κίνηση από τον Cut διασπά ένα από τα εκτεινόμενα δένδρα σε δύο συνιστώσες (βλέπε Σχήμα 2.14.), ο Short μπορεί να επισκευάσει το δένδρο ως ακολούθως: Επειδή το άλλο δέντρο είναι επίσης ένα εκτεινόμενο δένδρο, πρέπει να έχει μια ακμή, e, που συνδέει τις δύο συνιστώσες (βλέπε Σχήμα 2.15.) ο Short ενισχύει την e.

Αν υποθέσουμε μια ενισχυμένη ακμή e σαν να είναι και κόκκινη και μπλε, τότε το κόκκινο και μπλε υπογράφημα που προκύπτει θα εξακολουθούν να είναι ένα εκτεινόμενο γράφημα για το G. Για να το δούμε αυτό, σημειώστε ότι και τα δύο υπογραφήματα θα συνδεθούν, και θα εξακολουθούν να έχουν n ακμές και n-1 κορυφές. Ως εκ τούτου, από την ιδιότητα (iii) θα είναι δένδρα που εκτείνονται σε κάθε κορυφή του G.



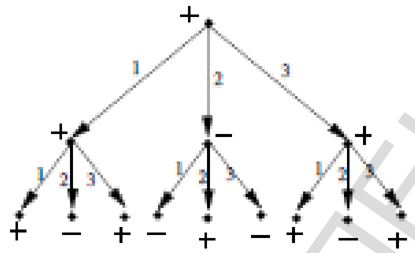
Σχήμα 2.14. O Cut χωρίζει το δένδρο σε δύο συνιστώσες.



Σχήμα 2.15. O Short ενισχύει μια κόκκινη ακμή για να ξανασυνδέσει τις δύο συνιστώσες.

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, ο Short μπορεί να "επισκευάσει" τα εκτεινόμενα δένδρα με μια ενισχυμένη ακμή κάθε φορά που ο Cut τα αποσυνδέει. Ως εκ τούτου, ο Cut δεν θα καταφέρει ποτέ να αποσυνδέσει το A από το B, και ο Short θα κερδίσει.

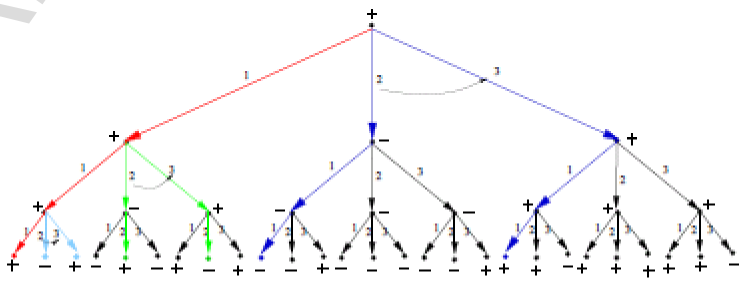
Παράδειγμα 2.20 (Αναδρομική Πλειοψηφία). Η Αναδρομική Πλειοψηφία παίζεται σε ένα πλήρες τριαδικό δένδρο βάθους h (βλέπε σχήμα 2.16.) Οι παίκτες αναλαμβάνουν εκ περιτροπής την σήμανση των φύλλων, ο παίκτης I με το "+" και ο παίκτης II με "-". Ένας κόμβος γονέας αποκτά το σήμα που προκύπτει από την πλειοψηφία των σημάτων των παιδιών του. (Επειδή κάθε μη-τερματικός κόμβος έχει περιττό αριθμό παιδιών, κάθε σήμα του προσδιορίζεται επακριβώς.) Ο παίκτης του οποίου το σήμα έχει αντιστοιχιστεί στη ρίζα κερδίζει. Σαφώς, το παίγνιο τελειώνει πάντα σε μια νίκη για έναν από τους παίκτες, οπότε ένας από αυτούς έχει μια στρατηγική νίκης.



Σχήμα 2.16. Εδώ ο παίκτης I κερδίζει. Το αριστερότερο φύλλο παριστάνεται με 11.

Για να αναλύσουμε το παράδειγμα, θα πρέπει να δοθεί σε κάθε κόμβο του δέντρου ένα όνομα: Ονομάζουμε καθένα από τους τρεις κλάδους που προέρχονται από ένα μόνο κόμβο με τον ακόλουθο τρόπο: το 1 δηλώνει την άκρως αριστερή πλευρά, το 2 δείχνει τη μεσαία ακμή και το 3, την πιο δεξιά ακμή. Χρησιμοποιώντας αυτές τις "ετικέτες", μπορούμε να προσδιορίσουμε κάθε κόμβο κάτω από τη ρίζα με τον "ΤΚ" της διαδρομής από τη ρίζα που οδηγεί σε αυτόν. Για παράδειγμα, η αριστερότερη ακμή χαρακτηρίζεται από το 11...11, μια λέξη μήκους h που αποτελείται εξ ολοκλήρου από αυτούς.

Μια στρατηγική επιχειρήματος κλοπής προϋποθέτει ότι ο πρώτος παίκτης που κινείται έχει το πλεονέκτημα. Μπορούμε να περιγράψουμε την στρατηγική της νίκης του: Στην πρώτη του κίνηση, ο παίκτης I σημαδεύει το φύλλο 1... 11 με ένα συν. Για τον υπόλοιπο άρτιο αριθμό φύλλων, χρησιμοποιεί τον ακόλουθο αλγόριθμο για να τα κάνει ζευγάρια: Ο σύντροφος του αριστερότερου μη ζευγαρομένου φύλλου βρίσκεται καθώς κινούμαστε προς τα επάνω στο δέντρο δηλαδή κινούμενοι προς τον πρώτο κοινό πρόγονο του μη ζευγαρομένου φύλλου και του φύλλου 1...11, και κοινούμενοι στη συνέχεια από τον ένα κλάδο προς τα δεξιά, και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται προς και τα κάτω, κατά μήκος του δέντρου (βλέπε Σχήμα 2.17). Τυπικά, αφήνοντας το 1^k να είναι μια συντομογραφία για μια σειρά από αυτά σταθερού μήκους $k \geq 0$ και αφήνοντας το w να σταθεί για μια αυθαίρετα σταθερή λέξη μήκους h-k-1, ο παίκτης I ζευγαρώνει τα φύλλα από το ακόλουθο σχέση: $1^k 2w \mapsto 1^k 3w$.



Σχήμα 2.17. Ο Κόκκινος σημειώνει το αριστερότερο φύλλο και τη διαδρομή του. Ορισμένα δείγματα ζευγαριών - συντρόφων είναι σημειωμένα με την ίδια απόχρωση του πράσινου ή μπλε.

Εφόσον τα ζευγάρια έχουν προσδιοριστεί, για κάθε φύλλο που είναι σημειωμένο με ένα "-" από τον παίκτη II, ο παίκτης I σημειώνει κάθε σύντροφο του με ένα "+".
Μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή του h ότι ο παίκτης I είναι εγγυήση για να είναι ο νικητής στο αριστερό υποδέντρο βάθους h -1.

Όσο για τα άλλα δύο υποδέντρα του ίδιου βάθους, κάθε φορά που παίκτης II κερδίζει σε ένα, ο παίκτης I κερδίζει το άλλο, διότι κάθε φύλλο σε ένα από αυτά τα υποδέντρα έχει συνδεθεί με το αντίστοιχο φύλλο στο άλλο.

Ως εκ τούτου, ο παίκτης I είναι εγγυημένος να κερδίσει δύο από τα τρία υποδέντρα, προσδιορίζοντας κατά συνέπεια το σημείο της ρίζας.

Κεφάλαιο 3

Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήθηκαν τα παίγνια που είναι καθορισμένα όπου τίποτα δεν αφήνεται στην τύχη. Στα επόμενα κεφάλαια, θα στρέψουμε την προσοχή μας προς τα παίγνια στα οποία οι παίκτες, στην ουσία, κινούνται ταυτόχρονα, και ως εκτούτου δεν θα έχουν πλήρη γνώση των συνεπειών των επιλογών τους. Όπως θα δούμε, η τύχη παίζει σημαντικό ρόλο σε τέτοια παίγνια. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος, στα οποία ένας παίκτης χάνει ότι ο άλλος κερδίζει σε κάθε αποτέλεσμα. Το κεντρικό θεώρημα για αυτή την κατηγορία των παιγνίων αναφέρει ότι ακόμα και αν η στρατηγική κάθε παίκτη είναι γνωστή στον άλλο, υπάρχει ένα ποσό που ένας παίκτης μπορεί να εγγυηθεί ως αναμενόμενο κέρδος του, και αφετέρου, ως μέγιστη αναμενόμενη ζημία του. Το ποσό αυτό είναι γνωστό ως τιμή του παιγνίου.

Παράδειγμα 3.1 Διάλεξε χέρι, ένα παίγνιο στοιχήματος. Υπάρχουν δύο παίκτες, ένας που επιλέγει (παίκτης Ι), και ένας που κρύβει (παίκτης ΙΙ). Αυτός που κρύβει - ο παίκτης ΙΙ - έχει δύο χρυσά νομίσματα στην πίσω τσέπη του. Στην αρχή του γύρου, βάζει τα χέρια του πίσω από την πλάτη του και είτε βγάζει ένα νόμισμα και το κρατά στο αριστερό του χέρι, ή τα βγλαζει και τα δύο και τα κρατά στο δεξί του χέρι. Αυτός που επιλέγει – ο παίκτης ΙΙ - διαλέγει ένα χέρι και κερδίζει οποιαδήποτε νομίσματα του παίκτη ΙΙ που έχει κρύψει εκεί. Μπορεί να πάρει μην τίποτα (αν το χέρι είναι άδειο), ή θα μπορούσε να κερδίσει ένα νόμισμα, ή δύο. Μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα με τη μορφή μιας μήτρας πληρωμών, της οποίας οι γραμμές αρχικοποιούνται από τις δυνατές επιλογές του παίκτη Ι, και της οποίας οι στήλες συμπληρώνονται με τις επιλογές του παίκτη ΙΙ. Κάθε καταχώρηση a_{ij} στην μήτρα είναι το ποσό που ο παίκτης ΙΙ χάνει από τον παίκτη Ι όταν ο Ι παίζει i και ο ΙΙ παίζει j. Καλούμε αυτήν την περιγραφή ενός παιγνίου κανονική ή στρατηγική μορφή του.

ΙΙ Ι	Α	Δ
Α Δ	1 0	0 2

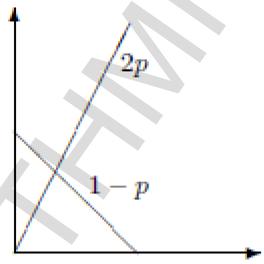
Ας υποθέσουμε ότι παίκτης ΙΙ επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει τις ζημίες του, επιλέγοντας να τοποθετήσει ένα νόμισμα στο αριστερό του χέρι, εξασφαλίζοντας ότι το μέγιστο που θα χάσει είναι αυτό το κέρμα. Αυτή είναι μια λογική στρατηγική αν θα μπορούσε να είναι βέβαιο ότι παίκτης Ι δεν έχει ιδέα του τι θα επιλέξει να κάνει. Αλλά ας υποθέσουμε ότι παίκτης Ι μαθαίνει ή συμπεραίνει την στρατηγική του. Τότε χάνει το νόμισμα του, όταν η καλύτερη ελπίδα του είναι να μην χάσει τίποτα. Ως εκ τούτου, αν ο παίκτης ΙΙ σκέφτεται ότι ο παίκτης Ι μπορεί να μαντέψει ή να μάθει ότι θα παίξει Α (Αριστερά), έχει ένα κίνητρο να παίξει αντ 'αυτού Δ (Δεξιά). Είναι σαφές ότι η επιτυχία της στρατηγικής Α (ή Δ) εξαρτάται από το πόσες πληροφορίες έχειο παίκτης Ι. Όλα αυτά μπορεί να εγγυηθεί που ο παίκτης ΙΙ είναι η μέγιστη απώλεια ενός νομίσματος.

Ομοίως, ο παίκτης Ι μπορεί να προσπαθήσει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του επιλέγοντας τη στρατηγική Δ, ελπίζοντας να κερδίσει δύο νομίσματα. Αν ο παίκτης ΙΙ μαντεύει ή ανακαλύπτει την στρατηγική του παίκτη Ι, ωστόσο, τότε μπορεί να εξασφαλίσει ότι δεν κερδίζει τίποτα. Εξάλλου, χωρίς την γνώση του πόσα πολλά γνωρίζει ο παίκτης ΙΙ, ο παίκτης Ι μπορεί να διαβεβαιώσει μόνο ότι δεν θα χάσει τίποτα από το παίγνιο.

Ιδανικά, θα θέλαμε να βρούμε μια στρατηγική η επιτυχία της οποίας δεν εξαρτάται από το πόσες πληροφορίες έχει ο άλλος παίκτης. Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι με την εισαγωγή κάποιας αβεβαιότητας στις επιλογές των παικτών. Μια στρατηγική με αβεβαιότητα - δηλαδή, μια στρατηγική στην οποία ένας παίκτης αποδίδει σε κάθε πιθανή κίνηση κάποια σταθερή πιθανότητα να παιχτεί - είναι γνωστή ως μια **μικτή στρατηγική**. Μια μικτή στρατηγική στην οποία μια συγκεκριμένη κίνηση παίζεται με πιθανότητα ένα είναι γνωστή ως μια **καθαρή στρατηγική**.

Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης Ι αποφασίζει να ακολουθήσει μια μικτή στρατηγική επιλέγοντας Δ με πιθανότητα p και Α με πιθανότητα 1-p. Αν ο παίκτης ΙΙ ήταν να παίξει την καθαρή στρατηγική Δ (κρύβει δύο νομίσματα στο δεξί του χέρι) η αναμενόμενη ζημία του θα είναι 2p. Εάν επιθυμεί να παίξει την Α (κρύβει ένα νομισμα στο αριστερό του χέρι), τότε η αναμενόμενη ζημία του θα είναι 1-p. Ως εκ τούτου, αν με κάποιο τρόπο μάθαινε το p, θα μπορούσε να παίξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί στο ελάχιστο των 2p και 1-p. Αναμένοντας αυτό, ο παίκτης Ι θα μεγιστοποιήσει το κέρδος του, επιλέγοντας p, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το $\min\{2p, 1-p\}$.

Σημειώνουμε ότι αυτό το μέγιστο συμβαίνει σε $p = \frac{1}{3}$, το σημείο στο οποίο οι δύο γραμμές που διασταυρώνονται:



Ως εκ τούτου, μετά τη μικτή στρατηγική της επιλογής Δ με πιθανότητα 1/3 και Α με πιθανότητα 2/3, ο παίκτης Ι εξασφαλίζει ένα αναμενόμενο κέρδος για 2/3, ανεξάρτητα από το αν ο παίκτης ΙΙ ξέρει τη στρατηγική του. Πώς μπορεί ο παίκτης ΙΙ να ελαχιστοποιήσει την αναμενόμενη ζημία του.

Ο παίκτης ΙΙ θα παίξει Δ με κάποια πιθανότητα q και Α με πιθανότητα 1-q. Η πληρωμή για τον παίκτη Ι είναι 2q αν διαλέξει την Δ, και 1-q αν διαλέξει την Δ. Αν ξέρει το q, θα επιλέξει την στρατηγική που αντιστοιχεί στο μέγιστο από τις δύο τιμές. Αν ο παίκτης ΙΙ, με τη σειρά του, γνωρίζει το σχέδιο του παίκτη Ι, αυτός θα επιλέξει το q = 1/3 για την ελαχιστοποίηση του μέγιστου αυτού, διασφαλίζοντας ότι η αναμενόμενη πληρωμή του είναι 2 / 3.

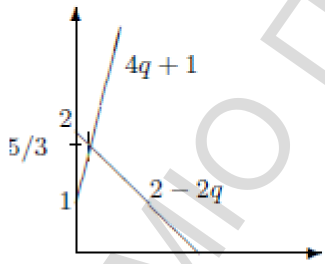
Κατά συνέπεια, ο παίκτης Ι μπορεί να διαβεβαιώσει ένα αναμενόμενο κέρδος στα 2 / 3 και ο παίκτης ΙΙ μπορεί να επιβεβαιώσει την αναμενόμενη απώλεια των 2 / 3, ανεξάρτητα από το τι ξέρει ο καθένας για την στρατηγική του άλλου. Σημειώνουμε ότι, σε αντίθεση με την κατάσταση όταν οι παίκτες περιορίζονται σε καθαρές στρατηγικές, τα διαβεβαιωμένα ποσά είναι ίσα. Το θεώρημα minimax του von Neumann αναφέρει ότι αυτό συμβαίνει πάντα σε κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων.

Είναι σαφές ότι, χωρίς κάποιο επιπλέον κίνητρο, δεν είναι προς το συμφέρον του παίκτη ΙΙ να παίξει το “Διάλεξε χέρι”, διότι μπορεί μόνο να χάσει σε αυτό το παίγνιο. Έτσι, μπορούμε να φανταστούμε ότι ο παίκτης I πληρώνει τον παίκτη II για να τον δελεάσει να ενταχθεί στο παίγνιο. Στην περίπτωση αυτή, τα 2 / 3 είναι το μέγιστο ποσό που ο παίκτης I πρέπει να τον πληρώσει με σκοπό να κερδίσει τη συμμετοχή του.

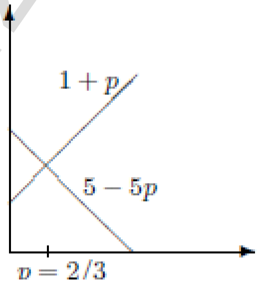
Παράδειγμα 3.2 Ένα άλλο παίγνιο στοιχήματος. Ένα παίγνιο έχει την ακόλουθη μήτρα αποτελεσμάτων:

II I	A	Δ
B	0	2
T	5	1

Ας υποθέσουμε ότι παίκτης I που παίζει την T με πιθανότητα p και την B με πιθανότητα 1-p, και ο παίκτης II παίζει την A με πιθανότητα q και την Δ με πιθανότητα 1-q. Συλλογιστική άποψη του παίκτη I, η διαπίστωση ότι η αναμενόμενη αμοιβή του είναι 2(1-q) για να παίξει την καθαρή στρατηγική T, και 4q + 1 για να παίξει την καθαρή στρατηγική B. Ως εκ τούτου, αν γνωρίζει το q, θα επιλέξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί στο μέγιστο του $2\,(1-q)$ και του 4q+ 1. Ο παίκτης II θα επιλέξει το $q=1/6$, ώστε να ελαχιστοποιηθεί αυτό το μέγιστο, και το αναμενόμενο ποσό που θα πληρώσει ο παίκτης II είναι $5/3$.



Από την προοπτική του παίκτη II, η αναμενόμενη ζημία του είναι $5(1-p)$ αν παίξει την καθαρή στρατηγική A και 1 + p αν παίζει την καθαρή στρατηγική Δ, και θα επιδιώξει την ελαχιστοποίηση αυτού του αναμενόμενου χρέους. Με σκοπό να μεγιστοποιηθεί το ελάχιστο αυτό, ο παίκτης I θα επιλέξει $p=2/3$, το οποίο αποφέρει και πάλι ένα αναμενόμενο κέρδος $5/3$.



Ας δημιουργήσουμε ένα πλαίσιο για τη θεωρία μας ώστε για ένα αυθαίρετο παίγνιο δύο ατόμων, μηδενικού αθροίσματος με μήτρα αποτελεσμάτων $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, το σύνολο των μικτών στρατηγικών για τον παίκτη I συμβολίζεται με:

$$\Delta_m=\{x\in R^m : x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

και το σύνολο των μικτών στρατηγικών για τον παίκτη II, με

$$\Delta_n=\{y \in \mathrm{R}^n \ : y_i \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

$\in$

Παρατηρήστε ότι σε αυτό το συμβολισμό, οι καθαρές στρατηγικές εκπροσωπούνται από τα πρότυπα διανύσματα βάσης.

Αν ο παίκτης I ακολουθεί μια μικτή στρατηγική x και ο παίκτη II, μια μικτή στρατηγική y η αναμενόμενη πληρωμή στον παίκτη I είναι $\sum x_i a_{ij} y_j = x^T Ay$

Αναφερόμαστε στο Ay, ως διάνυσμα αμοιβής για τον παίκτη I που αντιστοιχίζεται στη μικτή στρατηγική y για τον παίκτη II. Τα στοιχεία αυτού του φορέα –διανύσματος αντιπροσωπεύουν τις αμοιβές του I που αντιστοιχούν σε κάθε μια καθαρή στρατηγική του. Ομοίως, $x^T A$ είναι το διάνυσμα πληρωμής για τον παίκτη II που αντιστοιχίζεται στη μικτή στρατηγική x για παίκτη I. Τα στοιχεία αυτού του φορέα αντιπροσωπεύουν τις πληρωμές για κάθε μια από τις καθαρές στρατηγικές του παίκτη II.

Λέμε ότι ένα διάνυσμα πληρωμής $w \in \mathrm{R}^d$ υπερισχύει άλλου διανύσματος πληρωμής $u \in \mathrm{R}^d$, αν $w_i \geq u_i$ για όλα τα $i = 1,...,d$. Γράφουμε $w \geq u$.

Ορισμός 3.1.1. Μια στρατηγική $\bar{x} \in \Delta_m$ είναι βέλτιστη για τον παίκτη I, εφόσον

$$\min_{y\in\Delta_n} \bar{x}^T Ay = \max_{x\in\Delta_m} \min_{y\in\Delta_n} x^T Ay.$$

Ομοίως, μια στρατηγική $\bar{x} \in \Delta_n$ είναι η βέλτιστη για τον παίκτη II, εάν

$$\max_{x\in\Delta_m} x^T A\bar{y} = \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} x^T Ay.$$

3.2 Θεώρημα Minmax του Von Neumann

Θα αποδείξουμε[4] ότι κάθε παίγνιο δύο-παικτών μηδενικού αθροίσματος έχει μια τιμή. Δηλαδή, σε κάθε παίγνιο δύο-παικτών μηδενικού αθροίσματος, η αναμενόμενη πληρωμή για μια βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη I ισούται με το αναμενόμενο κέρδος για τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη II.

Ορισμός 3.2.1. Ένα σύνολο $K \subseteq \mathrm{R}^d$ είναι κυρτό αν, για οποιαδήποτε δύο σημεία $\mathrm{a}, b \in K$, το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει,

$$\{p\mathrm{a} + (1-p)b : p \in [0,1]\},$$

βρίσκεται, επίσης,στο K.

Η απόδειξη μας θα κάνει χρήση του ακόλουθου αποτελέσματος σχετικά με τα κυρτά σύνολα:

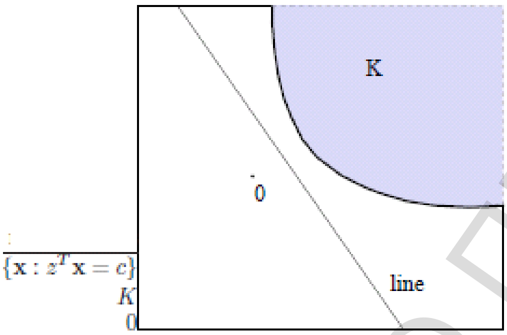
4 Απόδειξη μας θα βασιστεί σε ένα βασικό θεώρημα της κυρτής γεωμετρίας.

Θεώρημα 3.2.1 Θεώρημα διαχωρισμού υπερεπίπεδο. Ας υποθέσουμε ότι το $K \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ είναι κλειστό και κυρτό. Αν $0 \notin K$, τότε υπάρχει $z \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ και $c \in \mathrm{R}$ τέτοια ώστε:

$$0 < c < z^T v, \text{ για όλα τα } v \in K$$

Υπάρχει ένα υπερεπίπεδο (μια γραμμή στο επίπεδο, ή, γενικότερα, ένας $\mathrm{R}^{\mathrm{d-1}}$ υπόχωρος του R^{d}), που διαχωρίζει το 0 από το K. Ειδικότερα, για κάθε συνεχή πορεία από το 0 έως το K, εκεί υπάρχει κάποιο σημείο που βρίσκεται σε αυτό το υπερεπίπεδο.

Το διαχωρισμένο υπερεπίπεδο δίνεται από τη σχέση $\{x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}} : z^T x = c\}$.



Σχήμα 3.1.

Απόδειξη. Πρώτα, σημειώνουμε ότι επειδή το K είναι κλειστό, υπάρχει $z \in K$ για το οποίο

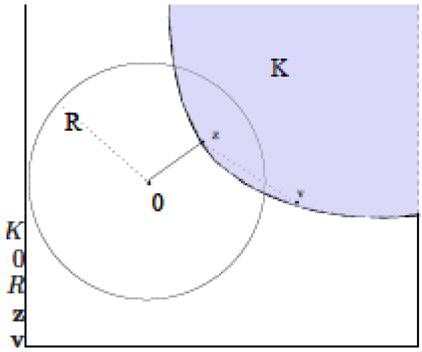
$$\| z \| = \inf_{v \in K} \| v \|.$$

Αυτό ισχύει επειδή εάν διαλέξουμε το R (Δ) έτσι ώστε η σφαίρα ακτίνας R τέμνει το K, η συνάρτηση $v \mapsto \| v \|$, θεωρείται ως ένας χάρτης από το $K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \| x \| \leq R\}$ στο $[0, \infty)$, είναι συνεχής, με έναν τομέα που είναι κλειστός και φραγμένος. Κατά συνέπεια, ο χάρτης επιτυγχάνει infimum (κατώτατο όριο) σε κάποιο σημείο z στο K. Επιλέγουμε $c = (1/2) \| z \|^2 > 0$. Θα δείξουμε ότι $c < z^T v$ για κάθε $v \in K$. Θεωρούμε το v στο K. Επειδή το K είναι κυρτό, για οποιαδήποτε $\in \in (0,1)$, $\in v + (1 - \in) z \in K$. Ως εκ τούτου,

$$\| z \|^2 \leq \| \varepsilon v + (1-\varepsilon) z \|^2 = (\varepsilon v^T + (1-\varepsilon) z^T)(\varepsilon v + (1-\varepsilon) z),$$

η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι z έχει το ελάχιστο ποσοστό από οποιοδήποτε σημείο στο K. Λαμβάνουμε:

$$z^T z \leq \varepsilon^2 v^T v + (1-\varepsilon)^2 z^T z + 2\varepsilon(1-\varepsilon) v^T z.$$



Σχήμα 3.2

Πολλαπλασιάζοντας και διαγράφοντας ένα ε, έχουμε:

$$\varepsilon(2v^T z - v^T v - z^T z) \le 2(v^T z - z^T z).$$

Αφήνοντας το ε να προσεγγίσει το 0, βρίσκουμε ότι

$$0 \le v^T z - z^T z,$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι

$$v^T z \ge \| z \|^2 = 2c > c,$$

Θα χρειαστούμε επίσης το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.2.1. Έστω X και Y είναι κλειστά και φραγμένα σύνολα στο R και έστω $(x^*, y^*) \in X \times Y$. Έστω $f : X \times Y \to$R είναι συνεχής και στις δύο συντεταγμένες. Τότε,

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y)$$

Απόδειξη. Έστω $(x^*, y^*) \in X \times Y$ είναι δοσμένο. Σαφώς, έχουμε $f(x^*, y^*) \le \sup_{x\in X} f(x, y^*)$ και $f(x, y^*) \le f(x^*, y^*)$, το οποία μας δίνει

$$\inf_{y\in Y} f(x^*, y) \le \sup_{x\in X} f(x, y^*).$$

Επειδή η ανισότητα ισχύει για κάθε $x^* \in X$, ισχύει για $\sup_{x^*\in X}$ της ποσότητας στα αριστερά. Ομοίως, επειδή η ανισότητα ισχύει για όλα τα $y^* \in Y$, πρέπει να ισχύει για τα $\inf_{y^*\in Y}$ της ποσότητας στα δεξιά. Έχουμε:

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y).$$

Επειδή η f είναι συνεχής και τα X και Y είναι κλειστά και φραγμένα, τα ελάχιστα και τα μέγιστα επιτυγχάνονται και έχουμε αποδείξει το λήμμα.

Θεώρημα 3.2.2 (Θεώρημα Minimax του von Neumann). Έστω A μια μήτρα απόδοσης ωφέλειας $m \times n$, και έστω $\Delta_m = \{x : x \ge 0, \sum_i x_i = 1\}$, $\Delta_n = \{y : y \ge 0, \sum_j y_j = 1\}$, τότε,

$$\max_{x\in\Delta_m} \min_{y\in\Delta_n} x^T A y = \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} x^T A y$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται τιμή του παιγνίου των δύο πρόσωπων, μηδενικού αθροίσματος με μήτρα απόδοσης ωφέλειας A.

Απόδειξη. Αυτή η σχέση

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T Ay \le \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T Ay$$

προκύπτει αμέσως από το λήμμα επειδή $f(x,y)=x^T Ay$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και στις δύο μεταβλητές και $\Delta_m \subset \mathrm{R}^m$, $\Delta_n \subset \mathrm{R}^n$ είναι κλειστά και φραγμένα. Για την άλλη ανισότητα, υποθέσουμε προς την αντίφαση αυτή ότι

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T Ay < \lambda < \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T Ay .$$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο παίγνιο με μήτρα απόδοσης ωφέλειας $\hat{A}$ που δίνεται από $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \lambda$. Για αυτό το παίγνιο, έχουμε

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T Ay < 0 < \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T Ay. \qquad (3.1)$$

Κάθε μικτή στρατηγική $y\in\Delta_n$ για τον παίκτη II παράγει ένα διάνυσμα πληρωμής $\hat{A}y \in \mathrm{R}^m$. Έστω το K δηλώνει το σύνολο όλων των διανυσμάτων u για τα οποία υπάρχει ένα διάνυσμα πληρωμής $\hat{A}y$ τέτοιο ώστε το u κυριαρχεί του $\hat{A}y$. Δηλαδή,

$$K = \{u = \hat{A}y + v : y\in\Delta_n, v\in \mathbb{R}^m, v \ge 0\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το K είναι κυρτό και κλειστό: αυτό προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι το Δ_n , το σύνολο των διανυσμάτων πιθανότητας που αντιστοιχούν σε μικτές στρατηγικές y για τον παίκτη II, είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό. Επίσης, το K δεν μπορεί να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα γιατί αν το 0 ήταν στο K, θα υπήρχε κάποια μικτή στρατηγική $y\in\Delta_n$ τέτοια ώστε $\hat{A}y<0$, από όπου και για κάθε $x\in\Delta_m$ έχουμε $x^T \hat{A}y \le 0$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την δεξιά πλευρά της (3.1).

Κατά συνέπεια, το K πληρεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος διαχωρισμου υπερεπίπεδου (3.2.1), το οποίο μας δίνει $z \in \mathrm{R}^m$ και $c>0$ τέτοιο ώστε $0<c<z^T w$ για όλα τα $w\in K$. Δηλαδή,

$$z^T(\hat{A}y+v) > c > 0 \text{ για όλα τα } y\in\Delta_n,\ v \ge 0. \qquad (3.2)$$

Θα πρέπει να ισχύει ότι $z_i \ge 0$ για όλα τα i, διότι εάν $z_i < 0$, για κάποιο j θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $y\in\Delta_n$, τέτοιο ώστε $z^T Ay + \sum_i z_i u_i$ θα είναι αρνητικό (έστω $u_i = 0$ για $i \ne j$ και $u_i \to \infty$), το οποίο θα ερχόταν σε αντίθεση με τη σχέση (3.2).
Η ίδια συνθήκη (3.2) μας δίνει ότι δεν μπορούν όλα τα z_i να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $s=\sum_{i=1}^m z_i$ είναι απολύτως θετικό, έτσι ώστε $x=(1/s)(z_i,\ldots,z_m)^T = (1/s)z\in\Delta_m$, με $x^T Ay > c > 0$ για όλα τα $y\in\Delta_n$. Συνεπώς, το x είναι μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη I που δίνει μια θετική αναμενόμενη πληρωμή έναντι σε κάθε μικτή στρατηγική του παίκτη II. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την αριστερή μεριά της ανισότητας (3.1), η οποία αναφέρει ότι ο παίκτης I μπορεί να διαβεβαιώσει, στην καλύτερη περίπτωση μια αρνητική πληρωμή.

Σημειώνουμε ότι η πιο πάνω απόδειξη δείχνει απλώς ότι η τιμή minimax υπάρχει πάντα, δεν δίνει έναν τρόπο για την εύρεση της. Η εύρεση της τιμής του παιγνίου μηδενικού αθροίσματος περιλαμβάνει την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος, το οποίο συνήθως απαιτεί έναν υπολογιστή για όλες αλλά τις απλούστερες μήτρες αποδόσεων ωφέλειας.

3.3 Η τεχνική της Κυριαρχίας

Η κυριαρχία είναι μια τεχνική για τη μείωση του μεγέθους της μήτρας του παιγνίου, που επιτρέπει να είναι πιο εύκολο στην ανάλυση.

Παράδειγμα 3.3 Συν ένα. Κάθε παίκτης επιλέγει έναν αριθμό από το $\{1,2,...,n\}$ και τον γράφει σε ένα κομμάτι χαρτί. Στη συνέχεια, οι παίκτες συγκρίνουν τους δύο αριθμούς. Εάν οι αριθμοί διαφέρουν κατά ένα, ο παίκτης με το μεγαλύτερο αριθμό κερδίζει 1€ από τον άλλο παίκτη. Εάν οι επιλογές των παικτών διαφέρουν κατά δύο ή περισσότερο, ο παίκτης με το μεγαλύτερο αριθμό πληρώνει 2 € στον άλλο παίκτη. Σε περίπτωση ισοπαλίας, δεν γίεται ανταλλαγεί χρημάτων. Η μήτρα πληρωμών για το παίγνιο είναι:

II I	1	2	3	4	5	6	…	n
1	0	-1	2	2	2	2	…	2
2	1	0	-1	2	2	2	…	2
3	-2	1	0	-1	2	2	…	2
4	-2	-2	1	0	-1	2	…	2
5	-2	-2	-2	1	0	-1	2	2
.								
n-1	-2	-2	…					1 0 -1
n	-2	-2	…					1 0

Αν κάθε στοιχείο της γραμμής i_1 μιας τέτοιας μήτρας είναι το λιγότερο τόσο μεγάλη όσο τα αντίστοιχα στοιχεία στη σειρά i_2, δηλαδή, αν $a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$ για κάθε j, τότε, για τον προσδιορισμό της τιμής του παιγνίου, μπορούμε να διαγράψουμε τη γραμμή i_2. Όμοια, υπάρχει μια έννοια της κυριαρχίας για παίκτη II: Αν $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}$ για κάθε i, τότε θα μπορέσουμε να εξαλείψουμε την στήλη j_2 χωρίς να επηρεάζεται η τιμή του παιγνίου. Γιατί είναι εντάξει για να το κάνουμε αυτό; Υποθέτοντας ότι $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}$ για κάθε i, εάν ο παίκτης II αλλάζει μια μικτή στρατηγική y σε άλλη z, έχοντας $z_{j_1} = y_{j_1} + y_{j_2}$, $z_{j_2} = 0$ και $z_l = y_l$ για όλα τα $l = j_1, j_2$, τότε,

$$x^T Ay = \sum_{i,l} x_i a_{i,l} y_l \geq \sum_{i,l} x_i a_{i,l} z_l = x^T Az,$$

επειδή $\sum_i x_i (a_{i,j_1} y_j + a_{i,j_2} y_{j_2}) \geq \sum_i x_i a_{i,j_1} (y_j + y_{j_2})$. Επομένως, η στρατηγική z, στην οποία δεν έκανε χρήση της στήλης j_2, είναι τουλάχιστον εξίσου καλή για τον παίκτη II όσο η y.
Στο παράδειγμά μας, μπορούμε να εξαλείψουμε κάθε γραμμή και στήλη που έχουν καταχωρήσεις από το τέσσερα ή μεγαλύτερες για να λάβουμε:

II / I	1	2	3
1	0	-1	2
2	1	0	-1
3	-2	1	0

Για να αναλύσουμε το μειωμένο παίγνιο, έστω το $x=(x_1,x_2,x_3)$ αντιστοιχεί σε μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη Ι. Οι αναμενόμενες πληρωμές που πραγματοποιούνται από τον παίκτη ΙΙ για κάθε μια από τις καθαρές στρατηγικές 1,2 και 3 είναι:

$$(x_2-2x_3,-x_1+x_3,2x_1-x_2). \qquad (3.3)$$

Ο παίκτης ΙΙ θα προσπαθήσει να ελαχιστοποιήσει την αναμενόμενη πληρωμή. Ο παίκτης Ι θα επιλέξει (x_1,x_2,x_3), έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το ελάχιστο. Πρώτα, υποθέστε ότι το x_3 είναι σταθερό. Με την εξάλειψη του x_2, η (3.3) γίνεται

$$(1-x_1-3x_3,-x_1+x_3,3x_1+x_3-1).$$

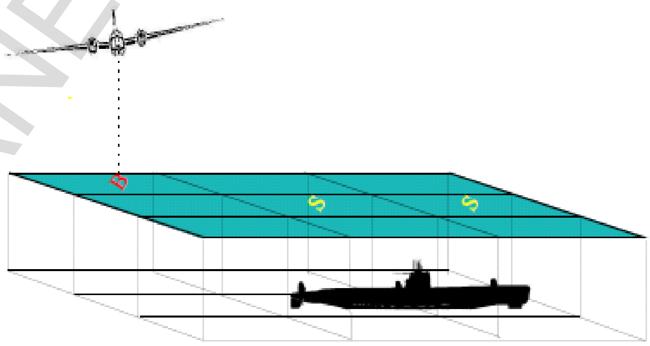
Υπολογίζοντας την επιλογή του x_1 για τα οποία το μέγιστο των ελάχιστων αυτών των ποσοτήτων έχει επιτευχθεί, και στη συνέχεια μεγιστοποιώντας αυτό πάνω από το x_3, παράγει μια βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη του $(1/4,1/2,1/4)$, και μια τιμή 0 για το παίγνιο.

<u>Παρατήρηση</u>. Μπορεί φυσικά να συμβεί σε ένα παίγνιο, καμία από τις γραμμές να μην κυριαρχεί μιας άλλης, αλλά υπάρχουν δύο γραμμές, u, w, των οποίων ο κυρτός συνδυασμός pu + (1 - p) w για κάποιο $p\in(0,1)$ μπορεί να κυριαρχεί σε ορισμένες άλλες γραμμές. Στην περίπτωση αυτή, οι "εξουσιασμένες" γραμμές μπορούν ακόμα να εξαλειφθούν.

3.4 Η χρήση της συμμετρίας

Ένας άλλος τρόπος για την απλοποίηση της ανάλυσης ενός παιγνίου γίνεται μέσω της τεχνικής της συμμετρίας. Παρουσιάζουμε μια παράμετρο συμμετρίας στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.4. (Υποβρύχιο Βομβαρδισμός)



Σχήμα 3.3.

Ένα υποβρύχιο βρίσκεται σε δύο διπλανά τετράγωνα από ένος 3x3 πλέγματος. Ένα βομβαρδιστικό (παίκτης Ι), το οποίο δεν μπορεί να δει το καταδυμένο σκάφος, αιωρείται εναέρια και ρίχνει μια βόμβα σε ένα από τα εννέα τετραγώνα. Αυτός κερδίζει 1 € σε περίπτωση που χτυπήσει το υποβρύχιο και χάνει 1 € σε περίπτωση που αστοχήσει. Υπάρχουν εννέα καθαρές στρατηγικές για το βομβαρδιστικό, και δώδεκα για το υποβρύχιο, έτσι η μήτρα αποδόσεων ωφέλειας για το παίγνιο είναι αρκετά μεγάλη, αλλά με τη χρήση παραμέτρων συμμετρίας, μπορούμε να απλοποιήσουμε την ανάλυση.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν τρεις τύποι, ουσιαστικά ισοδύναμων κινήσεων που το βομβαρδιστικό αεροπλάνο μπορεί να κάνει: Μπορεί να ρίξει μια βόμβα στο κέντρο, στο κέντρο μιας από τις πλευρές, ή σε μια γωνιά. Ομοίως, υπάρχουν δύο είδη θέσεων που το υποβρύχιο μπορεί να λάβει: την ανάληψη του κεντρικού τετραγώνου ή την ανάληψη του τετράγωνου μιας γωνίας. Χρησιμοποιώντας αυτές τις ισοδυναμίες, μπορούμε να γράψουμε μια πιο εύχρηστη μήτρα απόδοσης ωφέλειας:

Υποβρύχιο Βομβαρδιστικό	Κέντρο	γωνία
Γωνία	0	1/4
Μέση πλευρα	1/4	1/4
Μέσο	1	0

Σημειώστε ότι οι τιμές για τη νέα μήτρα είναι λίγο διαφορετικές από ό, τι στην πρότυπη μήτρα αποδόσεων ωφέλειας. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν το βομβαρδιστικό (παίκτης I) και το υποβρυχίο είναι και τα δύο και παίζουν στη γωνία υπάρχει μόνο μία στις τέσσερις πιθανότητες ότι θα υπάρξει ένα χτύπημα. Στην πραγματικότητα, η καθαρή στρατηγική της γωνίας για το βομβαρδιστικό σε αυτό το μειωμένο παίγνιο αντιστοιχεί στην μικτή στρατηγική των βομβαρδισμών κάθε γωνίας με πιθανότητα 1/4 στο αρχικό παίγνιο. Έχουμε μια παρόμοια κατάσταση για καθεμία από τις καθαρές στρατηγικές του μειωμένου παιγνίου.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κυριαρχία για να απλουστεύσουμε την μήτρα ακόμη περισσότερο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για το βομβαρδιστικό, η στρατηγική - μεση πλευρά κυριαρχεί εκείνης της γωνία (γιατί το υποβρύχιο, κατά την επαφή με μια γωνία, πρέπει επίσης να ακουμπά μια μέση πλευρά.)
Η παρατήρηση αυτή μειώνει τη μήτρα σε:

Υποβρύχιο Βομβαρδιστικό	Κέντρο	Εκτός Κέντρου
Μεσαία πλευρά	1/4	1/4
Μέση	1	0

Τώρα σημειώστε ότι για το υποβρύχιο, εκτός κέντρου υπερισχύει του κέντρου, και έτσι παίρνουμε τη μειωμένη μήτρα:

Υποβρύχιο Βομβαρδιστικό	Εκτός Κέντρου
Γωνία	1/4
Μέση πλευρα	0

Το βομβαρδιστικό επιλέγει την καλύτερη – τεχνικά εναλλακτική, άλλη εφαρμογή της κυριαρχίας - και διαλέγει τη μέση πλευρά πάνω από τη μέση. Η τιμή του παιγνίου είναι 1 / 4, η βόμβα πέφτει σε μια από τις τέσσερις πλευρές μέσα με πιθανότητα 1 / 4 για κάθε μία, και το υποβρύχιο κρύβεται σε μια από τις οκτώ πιθανές τοποθεσίες (ζεύγη διπλανών τετραγώνων) που αποκλείουν το κέντρο, επιλέγοντας κάθε δεδομένη τοποθεσία με πιθανότητα 1 / 8.

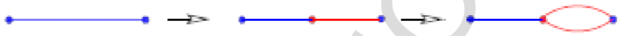
Μαθηματικά, μπορούμε να σκεφτούμε τις συμμετρικές παραμέτρους ως ακολούθως. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο χάρτες, π_1, μια μετάθεση των πιθανών κινήσεων του παίκτη I, και π_2 μια μετάθεση των πιθανών κινήσεων του παίκτη II, για τους οποίους οι πληρωμές a_{ij} ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{\pi_1(i),\pi_2(j)} = a_{ij}. \tag{3.4}$$

Εάν αυτό είναι έτσι, τότε υπάρχουν βέλτιστες στρατηγικές για τον παίκτη I που δίνουν το ίδιο βάρος στο $\pi_1(i)$ και στο i για κάθε i. Ομοίως, υπάρχει μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη II, που είναι η βέλτιστη και αποδίδει το ίδιο βάρος για τις κινήσεις $\pi_2(j)$ και j για κάθε j.

3.5 Δίκτυα αντίστασης και παίγνια σύνδεσης

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος που παίζεται σε ένα οδικό δίκτυο που συνδέει δύο πόλεις, A και B. Θα περιορίσουμε την προσοχή μας στα οδικά δίκτυα που κατασκευάζονται με την τροποποίηση ενός αρχικού ευθύ δρόμου που εκτείνεται από το A στο B από μια σειρά βημάτων δύο ειδών: τα βήματα σε σειρά και τα παράλληλα βήματα. Και οι δύο τύποι των βημάτων φαίνονται στο σχήμα (3.4). Αναφερόμαστε σε αυτά τα οδικά δίκτυα ως παράλληλα - σειριακά δίκτυα.

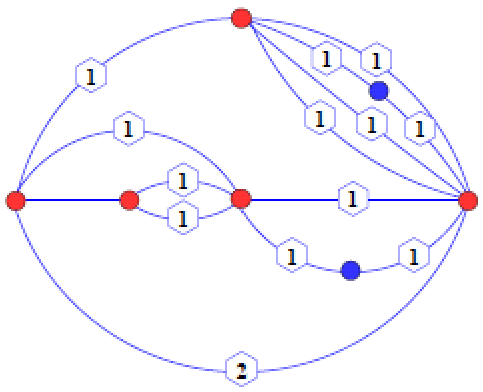


Σχήμα 3.4. Το πρώτο είναι ένα βήμα σε σειρά: ένας δρόμος στο τρέχων δίκτυο αντικαθίσταται από δύο δρόμους, οι οποίοι είναι ο ένας μετά τον άλλο στον ίδιο δρόμο. Το δεύτερο είναι ένα παράλληλο βήμα: Ένας δρόμος αντικαθίσταται από δύο, καθένας από τους οποίους τρέχει από το ίδιο αρχικό σημείο στο ίδιο τερματικό σημείο όπως ο τρέχων δρόμος.

Ένα τυπικό δίκτυο έχει την ακόλουθη μορφή: Για ένα σταθερό παράλληλο – σειριακό δίκτυο, εξετάζουμε το ακόλουθο παίγνιο:

Παράδειγμα 3.5 Σύνδεση και Ταξιδιώτης. Ένα βαγόνι και ένας ταξιδιώτης θα επιλέξουν από μια διαδρομή κατά μήκος της οποίας θα ταξιδεύουν από πόλη A στην πόλη B και στη συνέχεια θα αποκαλύψουν τα δρομολόγιά τους. Κάθε δρόμος έχει ένα συνδεδεμένο βαγόνι-διοδίων. Σε κάθε περίπτωση όπου το βαγόνι και ο ταξιδιώτης έχουν επιλέξει τον ίδιο δρόμο, ο ταξιδιώτης καταβάλλει το φόρο στο βαγόνι. Αυτό είναι φυσικά ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Όπως θα δούμε, υπάρχει ένας γενικός τρόπος για την επίλυση αυτού του τύπου παιγνίων.

Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε το οδικό δίκτυο ως ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, καθώς και τα βαγόνια-διόδια ως αντιστάσεις. Θυμηθείτε ότι η αγωγιμότητα είναι το αντίστροφο της αντίστασης. Όταν τα στοιχεία ενός κυκλώματος ενταχθουν στη σειρά, η συνολική αντίσταση είναι απλώς το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων. Παρομοίως, για ένα τμήμα που αποτελείται από στοιχεία που εντάχθηκαν εκ παραλλήλου, η συνολική αγωγιμότητα είναι το άθροισμα των επιμέρους αγωγιμοτήτων.



Σχήμα 3.5 Ένα τμήμα που χαρακτηρίζεται από δύο διαδοχικά κόκκινα σημεία είναι παράλληλου τύπου.

Ισχυριζόμαστε ότι η βέλτιστη στρατηγική και για τους δύο παίκτες είναι η ίδια: Σύμφωνα με τη βέλτιστη στρατηγική, ένας παίκτης που σχεδιάζει τη διαδρομή του, κατά τη συμπλήρωση μιας διακλάδωσης του δρόμου, θα πρέπει να κινηθεί κατά μήκος οποιωνδήποτε από τις άκρες που προέρχονται από τη διακλάδωση, με πιθανότητα επιλογής ανάλογη με την αγωγιμότητα της άκρης.

Ορισμός 3.5.1. Λαμβάνοντας υπόψη δύο μηδενικού αθροίσματος παίγνια G_1 και G_2 με τιμές v_1 και v_2 το παίγνιο αθροίσματος σειρών αντιστοιχεί στο παίγνιο G_1 και ύστερα στο G_2. Έχει την τιμή $v_1 + v_2$. Στο παίγνιο παράλληλου αθροίσματος, κάθε παίκτης επιλέγει είτε το G_1 ή το G_2 για να παίξει. Εάν κάθε ένας επιλέξει το ίδιο παίγνιο, τότε αυτό είναι εκείνο το παίγνιο που παίζεται. Εάν διαφέρουν, τότε κανένα παίγνιο δεν παίζεται , και η πληρωμή είναι μηδέν. Μπορούμε να γράψουμε μια μεγάλη μήτρα αποδόσεων ωφέλειας ως εξής:

I \ II	
	G_1 0 0 G_2

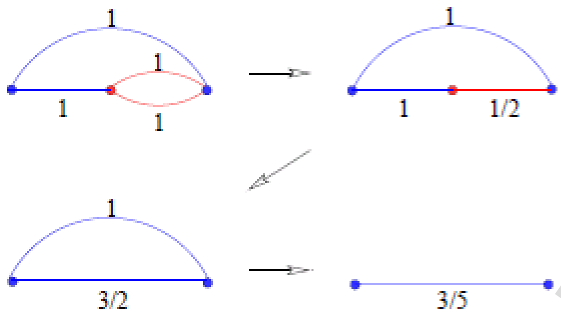
Αν οι δύο παίκτες παίζουν G_1 και G_2 με τον καλύτερο τρόπο, η μήτρα πληρωμών είναι αποτελεσματικά:

I \ II	
	v_1 0 0 v_2

Η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη αποτελείται από το παίγνιο G_1 με πιθανότητα v_2 / ($v_1 + v_2$), και G_2 με πιθανότητα v_1 / ($v_1 + v_2$). Δεδομένου ότι

$$\frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} = \frac{1}{1/u_1 + 1/u_2},$$

αυτό εξηγεί τη μορφή της βέλτιστης στρατηγικής σε αυτά τα παίγνια σε σειριακά - παράλληλα γραφήματα.



Σχήμα 3.6. Ένα παίγνιο στο δίκτυο στην ανώτερη αριστερή γωνία, με αντιστάσεις όλες ίσες με τ το 1, έχει τιμή 3/5.

Σε γενικά γραφήματα με δύο διακεκριμένες κορυφές A, B, πρέπει να καθορίσουμε το παίγνιο σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο: Αν το βαγόνι και ο ταξιδιώτης παίρνουν μια ακμή προς την αντίθετη κατεύθυνση, τότε το βαγόνι πληρώνει το κόστος του δρόμου του ταξιδιώτη. Τότε, η τιμή του παιγνίου αποδεικνύεται ότι είναι η αποτελεσματική αντίσταση μεταξύ των A και B, μια ποσότητα με σημαντική έννοια σε διάφορα πιθανολογικά πλαίσια.

3.6 Παίγνια Απόκρυψης

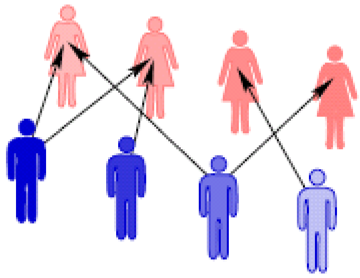
Τα παίγνια απόκρυψης αποτελούν μια άλλη κατηγορία των παιγνίων δύο ατόμων μηδενικού αθροίσματος.

Παράδειγμα 3.6 Παιγνιο Κρυφτό. Το παίγνιο παίζεται σε έναν πίνακα του οποίου οι εγγραφές είναι 0 και 1. Ο παίκτης I επιλέγει ένα 1 κάπου στον πίνακα, και το κρύβει εκεί. Ο παίκτης II επιλέγει μια γραμμή ή στήλη και κερδίζει πληρωμή του 1 εάν η γραμμή που ο ίδιος επιλέγει περιλαμβάνει την περιοχή που επιλέχθηκε από τον παίκτη I. Για να αναλυθεί αυτό το παίγνιο, θα χρειαστεί θεώρημα του γάμου του Hall, ένα σημαντικό αποτέλεσμα που εμφανίζεται σε πολλά σημεία της θεωρίας παιγνίων.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε μέλος μιας ομάδας B των αγοριών είναι γνωρίζει κάποιο υποσύνολο μιας ομάδας G των κοριτσιών. Κάτω από ποιες συνθήκες μπορούμε να βρούμε μια αντιστοίχιση των αγοριών με τα κορίτσια, έτσι ώστε κάθε αγόρι συνδυάζεται με μια κοπέλα με την οποία είναι εξοικειωμένος;

Σαφώς, δεν υπάρχει καμία ελπίδα να βρουμε μια τέτοια αντιστοίχιση εκτός και αν για κάθε B’ υποσύνολο των αγοριών, η συλλογή G’ του συνόλου των κοριτσιών με τις οποίες τα αγόρια στο B’ είναι εξοικειωμένα, είναι το λιγότερο τόσο μεγάλη όσο το B’. Αυτό που λέει το θεώρημα Hall είναι ότι αυτή η κατάσταση δεν είναι μόνο αναγκαία αλλά και επαρκής: Εφ 'όσον η ανωτέρω προϋπόθεση ισχύει, είναι πάντα δυνατό να βρεθεί μια αντιστοίχιση.

Θεώρημα 3.6.1 Θεώρημα γάμου του Hall. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα σύνολο B των αγοριών και ένα σύνολο G των κοριτσιών. Έστω $f: B \to 2^G$ είναι τέτοια ώστε το f (β) δηλώνει τα κορίτσια στο G με τα οποία το αγόρι b γνωρίζεται. Κάθε αγόρι, b, μπορεί να ταιριάξει με ένα κορίτσι που ξέρει αν και μόνο αν, για κάθε $B' \subseteq B$, έχουμε ότι $|f(B')| \geq |B'|$. (Εδώ, η συνάρτηση f έχει επεκταθεί στα υποσύνολα B’ του B θέτοντας $f(B') = \cup_{b \in B'} f(b)$.)



Σχήμα 3.7.

Απόδειξη. Όπως προαναφέρθηκε, η προϋπόθεση είναι σαφώς αναγκαία για να υπάρχει αντιστοίχιση. Εμείς θα αποδείξουμε ότι η κατάσταση είναι επίσης επαρκής με επαγωγή στο $n = |B|$, τον αριθμό των αγοριών.

Στην περίπτωση που το n = 1 είναι εύκολο. Για μεγαλύτερες τιμές του n, ας υποθέσουμε ότι η δήλωση είναι αληθής για k <n. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Η πρώτη είναι ότι υπάρχει $B' \subseteq B$ που ικανοποιεί την $|f(B')| = |B'|$ με $|B'| < n$. Αν $A \subseteq B \setminus B'$, τότε, $|f(A) \setminus f(B')| \geq |A|$, αυτό προκύπτει επειδή $|f(A \cup B')| = |f(B')| + |f(A) \setminus f(B')|$ και $|f(A \cup B')| \geq |A \cup B'| = |A| + |B'|$ από την υπόθεση. Ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στο σύνολο $B \setminus B'$ για να βρεθεί μια αντιστοίχιση αυτού του συνόλου των κοριτσιών στο $G \setminus f(B')$, και έχουμε μια αντιστοίχιση του B στο G, όπως απαιτείται. Στη δεύτερη περίπτωση, $|f(B')| > |B'|$ για κάθε $B' \subseteq B$. Η υπόθεση αυτή είναι εύκολη: ταιριάζουμε ακριβώς ένα αγόρι σε κάθε κορίτσι που ξέρει. Τότε, το σύνολο των υπόλοιπων αγοριών εξακολουθεί να πληρεί τη δεύτερη προϋπόθεση στη δήλωση του λήμματος. Με την επαγωγική υπόθεση, τους ταιριάζουμε, και έχουμε τελειώσει την απόδειξη.

Δεδομένου ενός πίνακα του οποίου εγγραφές αποτελούνται από 0 και 1, οι δύο άσσοι (1) λέγεται ότι είναι ανεξάρτητοι εάν καμία γραμμή ή στήλη δεν περιλαμβάνει και τους δύο. Μια κάλυψη του πίνακα είναι μια συλλογή γραμμών και στηλών των οποίων η ένωση περιέχει κάθε ένα από τους άσσους.

Λήμμα 3.6.1 Δεδομένης μιας nxm μήτρας της οποίας οι είσοδοι αποτελούνται από 0 και 1, το μέγιστο μέγεθος ενός συνόλου ανεξάρτητων άσσων (1) ισούται με το ελάχιστο μέγεθος μιας κάλυψης.

Θα χρησιμοποιούμε τώρα το λήμμα 3.6.1 για να αναλύσουμε το "κρυφτό". Υπενθυμίζουμε ότι στο παίγνιο αυτό, ο παίκτης I επιλέγει το 1 κάπου στη μήτρα, και το κρύβει εκεί, και ο παίκτης II επιλέγει μια γραμμή ή στήλη και κερδίζει μια πληρωμή του 1 εάν η γραμμή που επιλέγει περιλαμβάνει τη θέση που έχει επιλέξει ο παίκτης I. Είναι σαφές ότι η βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη I είναι να επιλέξει ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του 1, και στη συνέχεια να κρύψει σε ένα ομοιόμορφο επιλεγμένο στοιχείο του. Μια στρατηγική για τον παίκτη II απαρτίζεται από τη συλλογή ομοιόμορφα μιας τυχαίας από τις γραμμές του μια ελάχιστη κάλυψη της μήτρας. Το λήμμα 3.6.1 δείχνει ότι αυτό είναι, στην πραγματικότητα, μια κοινή βέλτιστη στρατηγική, και ότι η τιμή του παιγνίου είναι k^{-1}, όπου k είναι το μέγεθος του μέγιστου συνόλου ανεξάρτητων 1.

3.7 Γενικά παίγνια "κρυφτού"

Αναλύουμε παρακάτω μια γενικότερη εκδοχή του παιγνίου του "κρυφτού".

Παράδειγμα 3.7 Γενικευμένο "κρυφτό". Δίνεται ένας πίνακας τιμών $(b_{ij})_{n\times n}$. Ο παίκτης ΙΙ επιλέγει μια θέση (i,j) για να κρύψει. Ο παίκτης ΙΙ επιλέξει μια γραμμή ή μια στήλη του πίνακα. Αυτός κερδίζει μια πληρωμή b_{ij} αν η γραμμή που έχει επιλέξει περιέχει την "κρυψώνα" του αντιπάλου του. Πρώτα, προτείνουμε μια στρατηγική για τον παίκτη ΙΙ, ύστερα ελέγχθουμε ότι είναι βέλτιστη. Ο παίκτης ΙΙ επιλέγει αρχικά μια σταθερή μετάθεση π του συνόλου $\{1,...,n\}$ και στη συνέχεια κρύβει στη θέση (i,π_i) με πιθανότητα p_i ότι αυτός επιλέγει. Λαμβάνοντας υπόψη μια επιλογή π, η βέλτιστη επιλογή για το p_i είναι $p_i = d_{i,\pi_i}/D_\pi$, όπου $d_{ij}=b_{ij}^{-1}$ και $D_\pi=\sum_{i=1}^n d_{i,\pi_i}$, επειδή αυτή είναι η επιλογή, που εξισώνει τις αναμενόμενες πληρωμές. Η αναμενόμενο πληρωμή για το παίγνιο, είναι τότε $1/D_\pi$. Κατά συνέπεια, αν ο παίκτης ΙΙ πρόκειται να χρησιμοποιήσει μια στρατηγική η οποία αποτελείται από την επιλογή μια μετάθεσης π* και στη συνέχεια να κάνει, όπως περιγράφεται, η σωστή μετάθεση για να διαλέξει είναι αυτή που μεγιστοποιεί το D_π. Θα αποδείξουμε στην πραγματικότητα ότι κάνοντας αυτό είναι μια βέλτιστη στρατηγική, όχι μόνο στην περιορισμένη κατηγορία αυτών που αφορούν μεταθέσεις με αυτόν τον τρόπο, αλλά και σε όλες πιθανές στρατηγικές.

Για να βρούμε μια βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη Ι, χρειαζόμαστε ένα ανάλογο του λήμματος 3.6.1. Σε αυτό το πλαίσιο, μια κάλυψη του πίνακα $D=(d_{ij})_{n\times n}$ θα είναι ένα ζευγάρι διανυσμάτων $u=(u_1,...,u_n)$ και $w=(w_1,...,w_n)$ τέτοια ώστε $u_i+w_j\ge d_{ij}$ για κάθε ζεύγος (i,j). (Υποθέτουμε ότι τα u και w έχουν μη αρνητικά στοιχεία). Το ανάλογο του λήμματος 3.6.1.

Λήμμα 3.7.1. Θεωρείστε μια ελάχιστη κάλυψη (u^*,w^*). (Αυτό σημαίνει αυτή για την οποία το $\sum_{t=1}^n (u_i+w_i)$ είναι ελάχιστο). Τότε:

$$\sum_{t=1}^n (u_i^*+w_i^*) = \max_\pi D_\pi. \qquad (3.5)$$

Αυτό το λήμμα μας δίνει ένα ζευγάρι των βέλτιστων στρατηγικών για τους παίκτες. Ο παίκτης Ι επιλέγει τη γραμμή i με πιθανότητα u_i^*/D_{π^*}, και τη στήλη j με πιθανότητα w_j^*/D_{π^*}. Στο πλαίσιο αυτό, εάν ο παίκτης ΙΙ επιλέξει κάποιο (i,j), τότε το αποτέλεσμα θα είναι

$$\frac{u_i^*+v_j^*}{D_{\pi^*}} b_{ij} \ge \frac{d_{ij}b_{ij}}{D_{\pi^*}} = D_{\pi^*}^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η μεταθετική στρατηγική του παίκτη ΙΙ που περιέγραψε πριν το λήμμα είναι πράγματι η βέλτιστη.

Παράδειγμα 3.8. Σκεφτείτε το παίγνιο με μήτρα πληρωμής Β να δίνεται από

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μήτρα D είναι ίση με

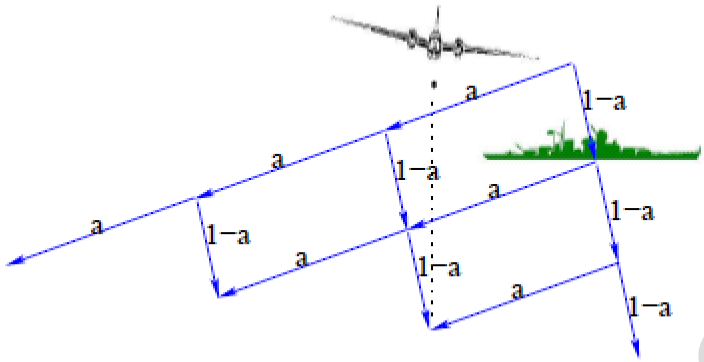
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Για να προσδιορίσουμε την ελάχιστη κάλυψη της μήτρας D, κατά πρώτον εξετάζουμε μια κάλυψη που έχει όλα της μάζας στις σειρές: u = (2,5) και v = (0, 0). Σημειώστε ότι οι γραμμές 1 και 2 γνωρίζουν μόνο τη στήλη 2, σύμφωνα με τον ορισμό της «γνώσης» που εισήχθη στην ανάλυση αυτού του παιγνίου. Τροποποιώντας τα διανύσματα u και v σύμφωνα με τον κανόνα που περιλαμβάνεται στην παρούσα ανάλυση, θα λάβουμε ενημερωμένα διανύσματα, u = (1,4) και v = (0,1), των οποίων το άθροισμα είναι 6, ίσο με την έκφραση $\max_{\pi} D_{\pi}$ (που λαμβάνεται επιλέγοντας τη μετάθεση $\pi = id$). Μια βέλτιστη στρατηγική για αυτόν που κρύβει είναι να παίξει p (1,1) = 1/ 6 και p(2,2) = 5 /6. Μια βέλτιστη στρατηγική για το άτομο που αναζητά αποτελείται από το παίγνιο $q(row1) = 1/6$, $q(row2) = 2/3$ και $q(col2) = 1/6$. Η τιμή του παιγνίου είναι 1 / 6.

3.8 Το παίγνιο βομβαρδιστικό, αεροπλάνο και θωρηκτό

Παράδειγμα 3.9. Σε αυτή την οικογένεια των παιχνιδιών, ένα θωρηκτό αρχικά βρίσκεται στην περιοχή προέλευσης Z. Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή στο $\{0,1,...\}$, το πλοίο κινείται δεξιά ή αριστερά σε ένα νέο χώρο όπου θα παραμείνει μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή. Το βομβαρδιστικό (παίκτης I), το οποίο μπορεί να δει την τρέχουσα θέση του θωρηκτού (παίκτης II), ρίχνει μία βόμβα σε κάποια χρονική στιγμή $j \in \{0,1,...,n\}$ για το παίγνιο G_n σε κάποια μεριά στο Z*. Η βόμβα φτάνει τη χρονική στιγμή j +2, και καταστρέφει το θωρηκτό αν το χτυπήσει. Ποιά είναι η τιμή του παιγνιού. Η απάντηση εξαρτάται από το n. Η τιμή του G_0 είναι 1 / 3, διότι το θωρηκτό μπορεί να εξασφαλίσει ότι διαθέτει μια πιθανότητα 1/3 να είναι σε οποιαδήποτε από τις τοποθεσίες -2, 0 ή 2 σε χρόνο 2. Κινείται προς τα αριστερά ή δεξιά με ίση πιθανότητα, την πρώτη χρονική στιγμή, και στη συνέχεια γυρίζει με πιθανότητα 1 / 3 ή συνεχίζει στην ίδια κατεύθυνση με πιθανότητα 2 / 3. Η τιμή 1 / 3 για το παίγνιο G_1 μπορεί να ληφθεί ακολουθώντας την ανωτέρω στρατηγική.

Έχουμε ήδη αποφασίσει πως το θωρηκτό θα πρέπει να κινηθεί στις δύο πρώτες χρονικές στιγμές. Εάν το πλοίο είναι στο 1 κατά τη χρονική στιγμή 1, τότε κινείται στο 2 σε χρόνο 2 με πιθανότητα 2 / 3. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να κινηθεί με πιθανότητα 1 / 2 για κάθε μια από τοποθεσίες 1 ή 3 σε χρονικό διάστημα 2 αν είναι στη θέση 2 κατά το προηγούμενο χρονικό διάστημα, προκειμένου να διασφαλιστεί η τιμή 1 / 3 για το G_1. Αυτό αναγκάζει το πλοίο να μετακινηθεί από την περιοχή 0 στην 1 με πιθανότητα 1, αν επισκέφθηκε την περιοχή 1, σε χρόνο 1. Λαμβάνοντας τις ίδιες τιμές με τη συμμετρική περίπτωση κατά την οποία το θωρηκτό κινείται από την τοποθεσία -1 σε χρόνο 1, λαμβάνουμε μια στρατηγική για το θωρηκτό που να διασφαλίζει ότι χτυπάει με μέγιστη πιθανότητα 1 / 3 στο G_1.



Σχήμα 3.8.

Είναι αδύνατο να συνεχίσουμε αυτή τη στρατηγική για να επιτύχουμε την τιμή 1 / 3 για το παίγνιο G_2. Πράγματι, $v(G_2) > 1/3$.

Θα περιγράψουμε μια στρατηγική για το παίγνιο που οφείλεται στον μαθηματικό Rufus Isaacs. Η στρατηγική του Isaacs δεν είναι βέλτιστη σε κάθε δεδομένο παίγνιο G_n, αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι έχει την ίδια οριακή τιμή, όπως $n \to \infty$, όπως σε βέλτιστο παίγνιο. Στο G_0, η στρατηγική είναι όπως φάνηκε παραπάνω. Ο γενικός κανόνας είναι: γύρνα με πιθανότητα 1 - α, και συνέχισε με πιθανότητα α. Επιλέγουμε τώρα να βελτιστοποιήσουμε την πιθανότητα φοροδιαφυγής για το θωρηκτό. Κάθε πιθανότητα άφιξης στα σημεία -2,0 ή 2 σε διάστημα 2 είναι a^2, 1 - α και ένα α(1 - α). Πρέπει να επιλέξουμε ένα α, έτσι ώστε $\max\{a^2, 1-a\}$ είναι ελάχιστο. Η τιμή αυτή επιτυγχάνεται, όταν $a^2 = 1-a$, της οποίας η λύση στο (0,1) δίνεται από $a = 2/(1+\sqrt{5})$. Η πληρωμή για το βομβαρδιστικό αεροπλάνο σε αντίθεση αυτής της στρατηγικής είναι το πολύ 1 - α. Έχουμε αποδείξει ότι η τιμή $v(G_n)$ του παιγνίου G_n είναι το πολύ 1 - α, για κάθε n. Θεωρείστε το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος του οποίου η μήτρα πληρωμής δίνεται από :

II / I			
	1	0	8
	2	3	-1

Για να λυθεί αυτό το παίγνιο, αφενός, ψάχνουμε για σαγματικά σημεία - μια τιμή στην μήτρα που είναι η μέγιστη στη στήλη της και ελάχιστη στη γραμμή της. Δεν υπάρχουν σε αυτή την περίπτωση. Επίσης, δεν υπάρχουν εμφανείς κυριαρχίες γραμμών ή στηλών.

Ας υποθέσουμε τότε ότι αυτός ο παίκτης παίζει την μικτή στρατηγική (p, 1 - p). Αν υπάρχει μια βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη II, στην οποία παίζει καθέ μία από τις τρείς καθαρές στρατηγικές της με θετική πιθανότητα, τότε,

$$2 - p = 3 - 3p = 9p - 1.$$

Δεν υπάρχει λύση, έτσι θεωρούμε τώρα μικτές στρατηγικές για τον παίκτη II, στις οποίες δεν παίζεται μια καθαρή στρατηγική. Εάν η τρίτη στήλη δεν έχει βάρος, τότε $2 - p = 3 - 3p$ συνεπάγεται ότι p = 1/2. Ωστόσο, η είσοδος 2 στην μήτρα γίνεται ένα σημείο σέλα στην 2x2 μήτρα που σχηματίζεται από την κατάργηση της τρίτης στήλης, η οποία δεν συνάδει με p = 1 / 2.

Θεωρείστε εναλλακτικές στρατηγικές που στηρίζονται στις στήλες 1 και 3. Η ισότητα $2-p=9p-1$ αποδίδει p= 3 / 10, δίνοντας πληρωμές

$$(17/10, 21/10, 17/10)$$

για τις τρεις στρατηγικές του παίκτη ΙΙ.

Αν ο παίκτης ΙΙ παίζει την στήλη 1 με πιθανότητα q και την στήλη 3 διαφορετικά, τότε ο παίκτης Ι βλέπει το διάνυσμα πληρωμής (8 - 7q, 3q - 1). Οι ποσότητες αυτές είναι ίσες όταν q = 9 /10, έτσι ώστε ο παίκτης Ι βλέπει το διάνυσμα πληρωμής $(17/10, 17/10)$. Ως εκ τούτου, η τιμή του παιγνίου είναι 17 / 10.

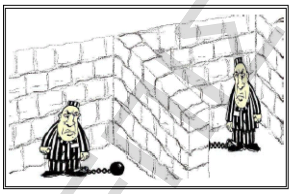
Κεφάλαιο 4

Παίγνια γενικού αθροίσματος

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη θεωρία παιγνίων γενικού αθροίσματος. Ένα τέτοιο παίγνιο δίνεται με μια στρατηγική μορφή από δύο μήτρες A και B, οι είσοδοι των οποίων δίνουν τις πληρωμές των χορηγούμενων κοινών καθαρών στρατηγικών για καθέναν από τους δύο παίκτες. Συνήθως δεν υπάρχει κοινή βέλτιστη στρατηγική για τους παίκτες, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει μια γενίκευση του θεωρήματος Minimax του Neumann, η λεγόμενη ισορροπία Nash. Αυτή η ισορροπία δίνει τις στρατηγικές που οι "ορθολογικοί" παίκτες θα μπορούσαν να ακολουθήσουν. Ωστόσο, υπάρχουν συχνά πολλές ισορροπίες Nash, και επιλέγοντας μια από αυτές, υπάρχει δυνατότητα βέλτιστης συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Επιπλέον, ένα ζευγάρι στρατηγικών που βασίζονται στην συνεργασία θα μπορούσε να είναι καλύτερο και για τους δύο παίκτες από οποιαδήποτε από τις ισορροπίες Nash.

Παράδειγμα 4.1 Το δίλημμα του φυλακισμένου. Δύο ύποπτοι κρατούνται και ανακρίνονται από την αστυνομία η οποία τους ζητά να ομολογήσουν ή να παραμείνουν σιωπηλοί. Η κατηγορία είναι σοβαρή, αλλά τα αποδεικτικά στοιχεία που κατέχει η αστυνομία είναι λίγα. Εάν κάποιος από τους δύο ομολογήσει και ο άλλος παραμένει σιωπηλός, τότε ο πρώτος αφήνεται ελεύθερος, και ο άλλος καταδικάζεται σε δέκα έτη φυλάκισης. Αν και οι δύο ομολογήσουν, κάθε ένας θα περάσει οκτώ χρόνια στη φυλακή. Αν και οι δύο παραμείνουν σιωπηλοί, η ποινή είναι ένα έτος στον καθένα, για κάποιο έγκλημα που η αστυνομία είναι σε θέση να αποδείξει. Γράφοντας την αρνητική πληρωμή ως τον αριθμό των ετών που θα περάσουν στη φυλακή, παίρνουμε την ακόλουθη μήτρα παιγνίου ή μήτρα αποτελεσμάτων:



I II	Σ	Ο
Σ	(-1,-1)	(-10,0)
Ο	(0,-10)	(-8,-8)

Σχήμα 4.1

Οι μήτρες αποτελεσμάτων για τους παίκτες I και II είναι οι 2x2 μήτρες που δίνονται από τη συλλογή των πρώτων ή δεύτερων, καταχωρήσεων σε κάθε ένα από τα διανύσματα στην παραπάνω μήτρα.

Αν οι παίκτες παίξουν μόνο ένα γύρο, τότε υπάρχει ένα επιχείρημα που αφορά στην κυριαρχία λέγοντας ότι θα πρέπει ομολογήσουν: το αποτέλεσμα που εξασφαλίζει ομολογώντας είναι προτιμότερο από την εναλλακτική του να παραμένει κανείς σιωπηλός, ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά του άλλου παίκτη. Ωστόσο, αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ χειρότερο για κάθε παίκτη από εκείνο που επιτυγχάνεται από το να παρεμείνουν και οι δύο σιωπηλοί. Σε ένα μόνο παίγνιο, το «παγκόσμιο» προτιμότερο αποτέλεσμα για καθένα που παραμένει σιωπηλός μπορεί να συμβεί μόνο όταν κάθε παίκτης καταστέλλει την επιθυμία να επιτύχει το καλύτερο αποτέλεσμα σε εγωϊστικούς όρους. Σε επαναλαμβανόμενο παίγνια όπου τερματίζουν σε ορισμένο χρόνο, ισχύει το ίδιο, με το επιχείρημα της προς τα πίσω επαγωγής.

Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια όπου τελειώνουν σε μια τυχαία στιγμή, η παγκόσμια προτιμότερη λύση μπορεί να προκύψει ακόμη και με εγωϊστικό παίγνιο.

Παράδειγμα 4.2 Η μάχη των φύλων. Η σύζυγος θέλει να πάει στην όπερα, αλλά ο σύζυγος επιθυμεί αντί αυτού να περάσει ένα βράδυ παρακολουθώντας ποδόσφαιρο. Επίσης, κανένας δεν είναι ικανοποιημένος από μια βραδιά χωρίς τον άλλο. Σε αριθμούς, ο παίκτης I θα είναι η σύζυγος και ο II ο σύζυγος, εδώ είναι το σενάριο:

II / I	Ο	Π
Ο	(4,1)	(0,0)
Π	(0,0)	(1,4)

Θα μπορούσε κανείς φυσικά να καταλήξει σε δύο τροποποιήσεις του minimax . Η πρώτη είναι ότι οι παίκτες δεν υποθέτουν οτιδήποτε λογικό σχετικά με τον σύντροφο τους, έτσι απλά θέλουν να εξασφαλίσουν μια πληρωμή αναλαμβάνοντας τη χειρότερη περίπτωση. Ο παίκτης I μπορεί να εγγυηθεί μια τιμή ασφάλειας

$$\max_{x\in\Delta_2} \min_{y\in\Delta_2} x^T Ay$$

όπου το A δηλώνει τη μήτρα πληρωμών που λαμβάνεται από αυτόν. Αυτό δίνει την στρατηγική (1/5, 4/5) για αυτόν, με μια εξασφαλισμένη πληρωμή 4 / 5, της οποίας η τιμή στην πραγματικότητα δεν εξαρτάται από το τι κάνει ο παίκτης II. Η ανάλογη στρατηγική για τον παίκτη II είναι (1/5, 1/5), με την ίδια εξασφαλισμένη πληρωμή 4 / 5. Σημειώνουμε ότι αυτές οι τιμές είναι χαμηλότερες από ότι ο κάθε παίκτης θα έπαιρνε αν συμφωνούσε να πάει εκεί όπου ο άλλος προτιμά.

Η δεύτερη πιθανή προσαρμογή της προσέγγισης minimax είναι ότι ο παίκτης I ανακοινώνει την τιμή του p, περιμένοντας ο παίκτης II να μεγιστοποιήσει το κέρδος του από το p. Στη συνέχεια ο παίκτης I μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα πάνω από το p. Ωστόσο, σε αντίθεση με την περίπτωση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, η δυνατότητα ανακοίνωσης μίας στρατηγικής και η εκτέλεση της σε ένα παίγνιο γενικού αθροίσματος ίσως στην πραγματικότητα αυξήσει την πληρωμή για αυτόν που ανακοινώνει, και ως εκ τούτου προκύπτει η ερώτηση πώς ένα μοντέλο μπορεί να προσαρμοστεί σε αυτή τη δυνατότητα.

Στο παίγνιο μας, κάθε παίκτης θα μπορούσε να ανακοινώσει απλώς την αγαπημένη του επιλογή και να περιμένει ο/η σύζυγος του να συμπεριφερθεί “ορθολογικά” και να συμφωνήσει μαζί του. Αυτό οδηγεί σε μια καταστροφή, εκτός και αν ένας από αυτούς κατορθώνει να κάνει αυτή την ανακοίνωση, πριν ο/η σύζυγος το κάνει, και ο/η σύζυγος πιστεύει πραγματικά ότι η απόφαση αυτή είναι αδύνατο να αλλάξει, και προσπαθήσει να ενεργήσει λογικά[5].

4.2 Ισορροπίας Nash

Θα εισάγουμε τώρα μια κεντρική έννοια για τη μελέτη των παιγνίων γενικού αθροίσματος.

[5] Σε αυτό το παράδειγμα, είναι αφύσικο να υποθέσουμε ότι οι δύο παίκτες δεν μπορούν να συζητήσουν, και ότι δεν υπάρχουν επαναλλαμβανόμενα παίγνια. Παρ 'όλα αυτά, το παράδειγμα αυτό δείχνει σαφώς ότι μια προσέγγιση Minimax δεν είναι η καταλληλότερη.

Ορισμός 4.2.1 Ισορροπία Nash. Ένα ζευγάρι διανυσμάτων (x^*, y^*) με $x^* \in \Delta_m$ και $y^* \in \Delta_n$ ορίζει μια ισορροπία Nash, εάν κανένας παίκτης δεν κερδίζει αποκλίνοντας μονομερώς από αυτήν. Δηλαδή,

$$x^{*T} Ay^* \geq x^T Ay^*$$

για όλα τα $x \in \Delta_m$ και

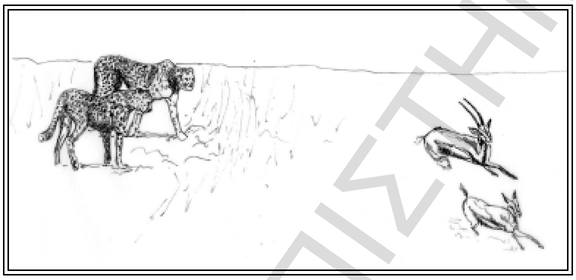
$$x^{*T} By^* \geq x^{*T} By$$

για όλα τα $y \in \Delta_n$. Το παίγνιο καλείται συμμετρικό αν m=n και $A_{ij} = B_{ji}$ για όλα τα $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Ένα ζευγάρι (x,y) στρατηγικών καλείται συμμετρικό αν $x_i = y_i$ για όλα τα $i = 1, ..., n$.

Θα δούμε ότι υπάρχει πάντα μια ισορροπία Nash. Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν πολλές από αυτές. Αν x και y είναι μοναδιαία διανύσματα, με ένα 1 σε κάποια συντεταγμένη και 0 σε όλες τις άλλες, τότε η ισορροπία λέγεται καθαρή.

Στο παραπάνω παράδειγμα της μάχης των φύλων, υπάρχουν δύο καθαρές ισορροπίες: αυτές είναι η ΠΠ και η ΟΟ. Υπάρχει επίσης μια μικτή ισορροπία, (4/5, 1/5) για τον παίκτη I και (1/5, 4/5) για τον II, έχοντας τιμή 4/5, η οποία είναι πολύ χαμηλή, και πάλι.

Θεωρήστε ένα απλό μοντέλο, όπου δύο γατόπαρδοι κυνηγούν δύο αντιλόπες. Οι γατόπαρδοι θα πιάσουν όποια αντιλόπη επιλέξουν. Εφόσον επιλέξουν την ίδια, πρέπει να μοιραστούν τη λεία. Διαφορετικά, η λεία είναι κοινόχρηστη. Υπάρχει μια μεγάλη αντιλόπη (L) και ένα μικρή (S), που αξίζουν l και s για τους γατόπαρδους. Παρακάτω η μήτρα πληρωμών:



II / I	L	S
L	(l/2, l/2)	(l,s)
S	(s,l)	(s/2, s/2)

Σχήμα 4.2

Αν η μεγαλύτερη αντιλόπη αξίζει τουλάχιστον τα διπλάσια από τη μικρότερη ($l \geq 2s$), για τον παίκτη I η πρώτη γραμμή κυριαρχεί της δεύτερης. Ομοίως, για τον παίκτη II, η πρώτη στήλη κυριαρχεί στη δεύτερη. Ως εκ τούτου, κάθε γατόπαρδος θα πρέπει να κυνηγήσει μόνο τη μεγαλύτερη αντιλόπη. Αν $s < l < 2s$, τότε υπάρχουν δύο καθαρές ισορροπίες Nash, (L, S) και (S, L). Αυτές αποδίδουν αρκετά καλά και για τους δύο γατόπαρδους, αλλά πώς θα μπορούσαν οι δύο υγιείς γατοπαρδοι να συμφωνούν ποιός θα πρέπει να κυνηγήσει τη μικρότερη αντιλόπη. Συνεπώς, είναι λογικό να ψάξουμε για συμμετρική μικτή ισορροπία. Αν ο πρώτος γατόπαρδος κυνηγά τη μεγάλη αντιλόπη με πιθανότητα p, τότε η αναμενόμενη πληρωμή για το δεύτερο γατόπαρδο κυνηγώντας τη μεγαλύτερη αντιλόπη είναι ίση με:

$$\frac{l}{2} p + (1-p)l,$$

και αυτό που προκύπτει από το κυνήγι τις μικρότερης αντιλόπης είναι:

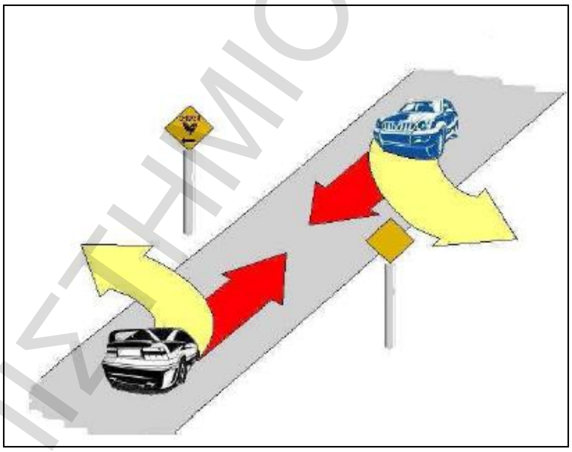
$$ps + (1-p)\frac{s}{2}.$$

Μια μικτή ισορροπία Nash τίθεται στην συγκεκριμένη τιμή του x για την οποία αυτές οι δύο ποσότητες είναι ίσες, γιατί, σε οποιαδήποτε άλλη τιμή του p, ο παίκτης ΙΙ θα έχει λόγο να αποκλίνει από τη μικτή στρατηγική $(p, 1-p)$ σε καλύτερη από τις διαθέσιμες καθαρές στρατηγικές. Διαπιστώνουμε ότι:

$$p = \frac{2l - s}{l + s}.$$

Αυτό αποδίδει πραγματικά μια συμμετρική μικτή ισορροπία. Οι συμμετρικές μικτές ισορροπιές Nash παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έχει επαληθευτεί πειραματικά ότι σε ορισμένες βιολογικές καταστάσεις, συστήματα προσεγγίζουν τέτοια ισορροπία, προφανώς από τους μηχανισμούς της φυσικής επιλογής.

Παράδειγμα 4.3 Το παίγνιο του δειλού. Δύο οδηγοί τρέχουν ο ένας κατά πάνω στον άλλο και είναι βέβαιο ότι θα συμβεί μια σύγκρουση εκτός και αν ένας από αυτούς δειλιάσει την τελευταία στιγμή. Αν και οι δύο δειλιάσουν, όλα είναι εντάξει (και οι δύο κερδίζουν 1). Εάν κάποιος δειλιάσει και ο άλλος δεν το κάνει, τότε είναι μεγάλη επιτυχία για τον παίκτη με τα γερά νεύρα (πληρωμή = 2) και μια μεγάλη ντροπή για αυτόν που δείλιασε (πληρωμή = -1). Αν και οι δύο παίκτες έχουν γερά νεύρα, έρχεται η καταστροφή (και οι δύο χάνουν κάποια μεγάλη τιμή M).



Σχήμα 4.3.

Γράφουμε C για τη στρατηγική της δειλίας, D για την οδήγηση ευθεία. Οι καθαρές ισορροπίες είναι τα (C , D) και (D, C). Για τον προσδιορισμό της μικτής ισορροπίες, ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης Ι παίζει τη στρατηγική C με πιθανότητα (x) και τη στρατηγική D, με πιθανότητα (1- p). Αυτό παρουσιάζει τον παίκτη ΙΙ με αναμενόμενες απολαβές (2p-1) αν παίζει τη C, και (M + 2) p - M αν παίζει τη D. Επιδιώκουμε μια ισορροπία όπου ο παίκτης ΙΙ έχει θετική βαρύτητα σε κάθε στρατηγική C και D, και κατά συνέπεια μια για την οποία:

$$2p - 1 = (M+2)p - M.$$

Δηλαδή:. $p = 1 - 1/M$

Η πληρωμή για τον παίκτη II είναι (2p-1), το οποίο ισούται με (1-2/M). Όσο το M αυξάνεται έως το άπειρο, αυτή η συμμετρική μικτή ισορροπία συγκεντρώνεται στο (C, C), καθώς και η αναμενόμενη πληρωμή αυξάνεται έως το 1[6].

Ωστόσο, εάν η απόφαση του κάθε παίκτη μπαίνει τυχαία σε λειτουργία με μια μικρή αλλά σταθερή πιθανότητα, τότε έχοντας $M \to \infty$, δεν αποφέρει συνολική συγκέντρωση στο ζευγάρι στρατηγικής (C, C). Εξάλλου, αυτό είναι και πάλι ένα παίγνιο στο οποίο η πιθανότητα δέσμευσης αυξάνει την πληρωμή. Αν ένας παίκτης πετάξει έξω από το αυτοκίνητο το τιμόνι, τότε είναι αδύνατο να δειλίασει. Αν ο άλλος παίκτης το δει αυτό και πιστεψει στα μάτια του, τότε δεν έχει άλλη επιλογή από το να δειλιάσει.

Στη μάχη των δύο φύλων και το παίγνιο του δειλού, κάνοντας μια δέσμευση οδηγεί το παίγνιο σε μια καθαρή ισορροπία Nash, και η φύση αυτής της ισορροπίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το ποιος κατάφερε να το διαπράξει πρώτος. Στο παίγνιο του δειλού, η ωφέλεια για εκείνον που δεν έκανε τη δέσμευση είναι χαμηλότερη από την πληρωμή - ωφέλεια στη μοναδική μικτή ισορροπία Nash, ενώ, στη μάχη των δύο φύλων, είναι υψηλότερη.

Παράδειγμα 4.4 Μη καθαρή ισορροπία. Εδώ είναι ένα παράδειγμα όπου δεν υπάρχει μια καθαρή ισορροπία, μόνο μια μοναδική μικτή, και τα δύο ζεύγη στρατηγικής δέσμευσης έχουν την ιδιότητα ότι ο παίκτης που δεν είχε αναλάβει τη δέσμευση εξακολουθεί να λαμβάνει την πληρωμή της ισορροπίας Nash.

II I	C	D
C	(6,-10)	(0,10)
D	(4,l)	(1,0)

Σε αυτό το παίγνιο, δεν υπάρχει καθαρή ισορροπία Nash (ένας από τους παίκτες προτιμά πάντα μια άλλη στρατηγική, σε μια κυκλική διαδικασία). Για μικτές στρατηγικές, εάν ο παίκτης I παίζει την (A, B) με πιθανότητες (p, 1-p), και ο παίκτης II παίζει τη (C, D) με πιθανότητες (q,1-q), τότε οι αναμενόμενες πληρωμές είναι $f(p,q)=1+3q-p+3pq$ για τον I και $g(p,q)=10p+q-21pq$ για τον II. Εμείς εύκολα λαμβάνουμε ότι το μοναδικό σημείο μικτής ισορροπίας είναι p = 1 / 21 και q = 1 / 3, με απολαβές 2 για τον I και 10 / 21 για τον II. Αν ο I μπορεί να κάνει μια δέσμευση, στη συνέχεια, επιλέγοντας $p=1/21-\in$ για κάποιο μικρό $\in>0$ θα κάνει τον II να επιλέξει q = 1, και οι πληρωμές θα είναι $4+2/21-2\in$ για τον I και $10/21+11\in$ για τον II. Αν ο II μπορεί να κάνει μια δέσμευση, στη συνέχεια, επιλέγοντας $q=1/3+\in$ θα κάνει τον I να επιλέξει p = 1, και οι πληρωμές θα είναι $2+6\in$ για τον I και $10/3-11\in$ για τον II[7].

[6] Υπάρχει ένα φαινομενικά παράδοξο εδώ. Έχουμε ένα συμμετρικό παίγνιο με μήτρες πληρωμών A και B, που έχει μια μοναδική συμμετρική ισορροπία με πληρωμή γ. Με την αντικατάσταση των A και B με μικρότερες μήτρες $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$, λαμβάνουμε μια πληρωμή $\tilde{\gamma}$ σε μια μοναδική συμμετρική ισορροπία που υπερβαίνει το γ. Αυτό είναι αδύνατο σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

[7] Ένα διασκεδαστικό παράδειγμα των δεσμευτικών υποχρεώσεων στην καθημερινή ζωή προέρχεται από κάποιο στενό δρόμο διπλής κατεύθυνσης στην Ιερουσαλήμ. Μόνο ένα αυτοκίνητο στιγμή μπορεί να περάσει κάθε στιγμή. Σε περίπτωση που δύο αυτοκίνητα με αντίθετη κατεύθυνση συναντόνται σε αυτό το δρόμο, ο οδηγός που μπορεί να σημάνει στον "αντίπαλο" ότι έχει χρόνο να περιμένει, θα μπορεί να κάνει πίσω. Μερικοί οδηγοί φέρνουν μαζί τους μια εφημερίδα με την οποία δίνουν σήμα ότι δεν βιάζονται.

4.3 Συσχετιζόμενη Ισορροπία

II / I	Ο	Π
Ο	(4,1)	(0,0)
Π	(0,0)	(1,4)

Επανερχόμαστε στο παίγνιο της μάχης των φύλων. Εδώ, υπάρχουν δύο καθαρές ισορροπίες Nash: και οι δύο πηγαίνουν στην όπερα ή και οι δύο βλέπουν ποδόσφαιρο. Ποιός θα ήταν ένας καλός τρόπος για να αποφασίσουν μεταξύ αυτών των δύο;

Ένας τρόπος να γίνει αυτό θα ήταν να διαλέξουμε μια κοινή δράση που βασίζεται σε μια ρίψει ενός νομίσματος. Για παράδειγμα, αν ένα κέρμα προσγειώνεται με την κορώνα προς τα πάνω, τότε, και οι δύο θα πάνε στην όπερα, αλλιώς και οι δύο θα δουν ποδόσφαιρο. Αυτό είναι διαφορετικό από τις μικτές στρατηγικές, όπου κάθε παίκτης ανεξάρτητα τυχαιοποιήθηκε σε ατομικές στρατηγικές. Αντίθετα, εδώ μια μόνο ρίψη “κορώνα-γράμματα” καθορίζει τις στρατηγικές και για τους δύο[8].

Ορισμός 4.3.1 (Συσχετιζόμενη Ισορροπία). Μια κοινή διανομή σε στρατηγικές για όλους τους παίκτες ονομάζεται συσχετιζόμενη ισορροπία, εάν κανένας παίκτης δεν κερδίζει αποκλίνοντας μονομερώς από αυτήν. Πιο τυπικά, σε ένα παίγνιο γενικού αθροίσματος δύο παικτών με $m \times n$ μήτρες ωφέλειας A και B, μια συσχετιζόμενη ισορροπία δίνεται από μια μήτρα **z** $m \times n$. Αυτή η μήτρα έχει τις εξής ιδιότητες:

$$z_{ij} \geq 0, \text{ για όλα τα } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

και

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1.$$

Λέμε ότι κανένας πάικτης δεν οφελείται από την προϋπόθεση της μονομερούς απόκλισης:

$$(z)_i Az \geq x^T Az$$

για όλα τα $i \in \{1,...,m\}$ και για όλα τα $x \in \Delta_m$, ενώ

$$zB(z)^j \geq zBy$$

για όλα τα $j \in \{1,...,n\}$ και για όλα τα $y \in \Delta_m$.

Παρατηρούμε ότι η ισορροπία Nash παρέχει μια συσχετιζόμενη ισορροπία, όπου η κοινή κατανομή είναι το αποτέλεσμα των δύο ανεξάρτητων μεμονωμένων διανομών. Στο παράδειγμα της μάχης των φύλων, όπου η ισορροπία Nash είναι της μορφής (4/5, 1/5) για τον παίκτη I και (1/5, 4/5) για τον παίκτη II, όταν οι παίκτες ακολουθούν μια ισορροπία Nash στρίβουν, στην πραγματικότητα, ένα “προκατειλημμένο” κέρμα με πιθανότητα για κορώνα (4/5) και γράμματα (1/5) - εάν είναι κορώνα-γράμματα, και οι δύο πηγαίνουν στην όπερα, αν είναι γράμματα-κορώνα, και οι δύο βλέπουν ποδόσφαιρο, κλπ. Η κοινή μήτρα πυκνότητας μοιάζει με:

[8] Η ιδέα αυτή εισήχθη το 1974 από τον Aumann και τώρα καλείται **συσχετιζόμενη ισορροπία**. Είναι γενίκευση της ισορροπίας Nash και μπορεί να είναι έκπληξη το γεγονός, ότι πιο εύκολο μπορεί να βρεθεί σε μεγάλα παίγνια.

II I	O	Π
O	4/25	16/25
Π	1/25	4/25

Ας πάμε τώρα πίσω στο παίγνιο του παραδείγματος 4.3.

II I	C	D
C	(1,1)	(-1,2)
D	(2,-l)	(-100,-100)

Δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική εδώ και οι καθαρές ισορροπίες είναι (C ,D) και (D, C) με πληρωμές (-1, 2) και (2, -1), αντίστοιχα. Υπάρχει μια συμμετρική μικτή ισορροπία Nash που βάζει πιθανότητα $p = 1 - \frac{1}{100}$ στη C και $1 - p = \frac{1}{100} idD$, δίνοντας την αναμενόμενη πληρωμή των 98/100.

Αν ένας από τους παίκτες μπορούσε να δεσμευτεί στο D, δηλαδή από την ρίψη του τιμονιού, τότε ο άλλος θα ήταν προτιμότερο να στρίψει και οι πληρωμές είναι: 2 για εκείνον που το διέπραξε πρώτα και 1 για τον άλλο.

Μια άλλη επιλογή θα ήταν να τεθεί μια δεσμευτική συμφωνία. Θα μπορούσαν, για παράδειγμα, να χρησιμοποιήσουν μια συσχετιζόμενη ισορροπία και να ρίξουν ένα νόμισμα μεταξύ των (C, D) και (D, C). Τότε, η αναμενόμενη πληρωμή είναι 1.5. Αυτός είναι ο μέσος όρος μεταξύ της πληρωμής εκείνου που διαπράττει πρώτος και του άλλου παίκτη. Είναι υψηλότερη από την αναμενόμενη πληρωμή σε μια μικτή στρατηγική. Τέλος, θα μπορούσαν να επιλέξουν ένα διαμεσολαβητή και να τον αφήσουν να προτείνει μια στρατηγική για τον κάθε ένα. Ας υποθέσουμε ότι ένας μεσολαβητής επιλέγει (C, D), (D, C) και (C, C), με πιθανότητα 1/3 την κάθε μία. Στη συνέχεια ο μεσολαβητής γνωστοποιεί σε κάθε παίκτη ποιά στρατηγική πρέπει να χρησιμοποιήσει (αλλά όχι τη στρατηγική του αντιπάλου). Σε αυτό το σημείο, οι παίκτες είναι ελεύθεροι να ακολουθήσουν ή να απορρίψουν την προτεινόμενη στρατηγική.

Εδώ ισχυριζόμαστε ότι ακολουθώντας την πρόταση του μεσολαβητή είναι μια συσχετιζόμενη ισορροπία. Παρατηρούμε ότι οι στρατηγικές εξαρτώνται, έτσι αυτό δεν είναι μια ισορροπία Nash.

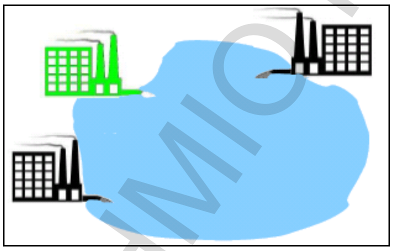
Ας υποθέσουμε ότι ο μεσολαβητής λέει στον παίκτη I να παίζει D, στην περίπτωση αυτή ξέρει ότι ο παίκτης II θα κάνει στραβοτιμονιά και ο παίκτης I θα κάνει το ότι καλύτερο για τη συλλογή της πληρωμής του 2. Δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει. Από την άλλη πλευρά, αν ο μεσολαβητής πεί να παίξει τη C, είναι αβέβαιος για το τι έχει πει στον παίκτη II, έτσι (C, C), (C, D) και είναι εξίσου πιθανά. Έχουμε αναμενόμενη πληρωμή (ωφέλεια), ακολουθώντας την πρόταση, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ενώ η αναμενόμενη πληρωμή από τη μεταγωγή είναι $2\frac{1}{2} - 100\frac{1}{2} = -49$, έτσι ο παίκτης είναι σε καλύτερη κατάσταση μετά από την πρόταση.

Συνολικά η αναμενόμενη πληρωμή του παίκτη I όταν και οι δύο ακολουθούν την πρόταση είναι $-1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Αυτό είναι καλύτερο από ό,τι μπορούσαν να κάνουν, ακολουθώντας μια μη - συσχετισμένη ισορροπία Nash. Η εύρεση μιας συσχετιζόμενης ισορροπίας σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας είναι πραγματικά ευκολότερη από ότι η εύρεση μιας ισορροπίας Nash. Το πρόβλημα ανάγεται σε γραμμικό προγραμματισμό.

4.4 Παίγνια γενικού αθροίσματος με περισσότερους από δύο παίκτες

Δεν μπορούμε να μιλάμε για παίγνια μηδενικού αθροίσματος όταν υπάρχουν περισσότεροι από δύο παίκτες. Η έννοια της ισορροπίας Nash, ωστόσο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο αυτό. Περιγράφουμε τυπικά ένα τέτοιο παίγνιο με $k \geq 2$ παίκτες . Κάθε παίκτης i έχει ένα σύνολο S_i καθαρών στρατηγικών. Εάν, για κάθε $i \in \{1,\dots,k\}$, ο παίκτης i χρησιμοποιεί τη στρατηγική $l_i \in S_i$, τότε ο παίκτης j έχει μια ωφέλεια $F_j(l_1,\dots,l_k)$, όπου μας δίνονται οι συναρτήσεις $F_j : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k \to \mathbb{R}$ για $j \in \{1,\dots,k\}$.

Παράδειγμα 4.5 Ένα παίγνιο οικολογίας. Τρία εργοστάσια είτε θα ρυπαίνουν μια λίμνη κατά το επόμενο έτος, είτε θα την καθαρίζουν. Πληρώνουν 1 μονάδα για να καθαρίσει, αλλά είναι ελεύθερα να ρυπαίνουν. Αν δύο ή περισσότερα εργοστάσια ρυπαίνουν, τότε το νερό της λίμνης είναι άχρηστο, και κάθε εργοστάσιο πρέπει να πληρώσει 3 μονάδες για να αποκτήσει το νερό που χρειάζεται από αλλού. Αν το πολύ ένα εργοστάσιο ρυπαίνει, τότε το νερό μπορεί να χρησιμοποιηθεί, και τα εργοστάσια δεν επιβαρύνονται με επιπλέον κόστος.



Υποθέτοντας ότι το εργοστάσιο ΙΙΙ καθαρίζει τη λίμνη, η μήτρα κόστους είναι:

II / I	K	M
K	(1,1,1)	(1,0,1)
M	(0,1,1)	(3,3,3+1)

Σε περίπτωση που το εργοστάσιο ΙΙΙ ρυπαίνει, τότε είναι:

II / I	K	M
K	(1,1,0)	(3+1,3,3)
M	(3,3+1,3)	(3,3,3)

Για να συζητήσουμε το παίγνιο, εισάγουμε αρχικά την έννοια της ισορροπίας Nash στο πλαίσιο των παιγνίων με αρκετούς παίκτες:

Ορισμός 4.4.1. Μια καθαρή ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο k-άτομων είναι ένα σύνολο καθαρών στρατηγικών για κάθε ένα από τους παίκτες,

$$(l_1^*,\dots,l_k^*) \in S_1 \times \dots \times S_k$$

έτσι ώστε για κάθε $j \in \{1,\dots,k\}$ και $l_j \in S_j$,

$$F_j(l_1^*,...,l_{j-1}^*,l_j,l_{j+1}^*,...,l_k^*) \le F_j(l_1^*,...,l_{j-1}^*,l_j^*,l_{j+1}^*,...,l_k^*).$$

Γενικότερα, μια μικτή ισορροπία Nash είναι μια συλλογή από k διανύσματα πιθανότητας $\tilde{\chi}^i$, το καθένα μήκους $|S_i|$, έτσι ώστε

$$F_j(x,...,x^{j-1},X,x^{j+1},...,x^k) \le F_j(x^1,...,x^{j-1},x^j,x^{j+1},...,x^k),$$

για κάθε $j \in \{1,...,k\}$ και κάθε διάνυσμα πιθανότητας x μήκους $|S_j|$. Έχουμε γράψει:

$$F_j(x^1,x^2,...,x^k) := \sum_{l_1 \in S_1,...,l_k \in S_k} x^1(l_1)...x^k(l_k)F_j(l_1,...,l_k).$$

Ορισμός 4.4.2. Ένα παίγνιο είναι συμμετρικό, αν για κάθε $i_0, j_0 \in \{1,...,k\}$, υπάρχει μια μετάθεση π του συνόλου $\{1,...,k\}$ τέτοια ώστε $\pi(i_0) = j_0$ και

$$F_{\pi(i)}(l_{\pi(1)},...,l_{\pi(k)}) = F_i(l_1,...,l_k).$$

Θεώρημα 4.4.1 Θεώρημα Nash. Κάθε παίγνιο έχει μια ισορροπία Nash[9].

Πόρισμα 4.4.1. Σε ένα συμμετρικό παίγνιο, υπάρχει μια συμμετρική ισορροπία Nash.

Επιστρέφοντας στο παίγνιο οικολογίας, η καθαρή ισορροπία αποτελείται από κάθε εργοστάσιο που ρυπαίνει, ή από ένα από τα τρία εργοστάσια που ρυπαίνουν, και τα υπόλοιπα δύο καθαρίζουν. Εμείς τώρα αναζητούμε μικτές ισορροπίες. Έστω p_1, p_2, p_3 είναι οι πιθανότητες ότι τα εργοστάσια I, II και III καθαρίσουν τη λίμνη, αντίστοιχα. Σε περίπτωση που το εργοστάσιο III καθαρίζει, τότε το αναμενόμενο κόστος του είναι $p_1p_2 + p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) + 4(1-p_1)(1-p_2)$. Αν ρυπαίνει, τότε το κόστος είναι $3p_1(1-p_2) + 3p_2(1-p_1) + 3(1-p_1)(1-p_2)$. Αν θέλουμε μια ισορροπία με 0 < p_3 <1, τότε αυτές οι δύο αναμενόμενες τιμές πρέπει να συμπίπτουν, το οποίο δίνει $1 = 3(p_1 + p_2 - 2p_1p_2)$. Παρομοίως, αν υποτεθεί 0 < p_2 <1 έχουμε $1 = 3(p_1 + p_3 - 2p_1p_3)$, και υποθέτοντας 0 < p_1 <1 έχουμε $1 = 3(p_2 + p_3 - 2p_2p_3)$. Αφαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη έχουμε $0 = 3(p_2 - p_3)(1 - 2p_1)$. Αν $p_2 = p_3$, τότε, η τρίτη εξίσωση γίνεται τετραγωνική στο p_2, με δύο λύσεις, $p_2 = p_3 = (3 \pm \sqrt{3})/6)$, και οι δύο στο $(0,1)$. Αντικαθιστώντας αυτές τις λύσεις στην πρώτη εξίσωση, και οι δύο αποδίδουν $p_1 = p_2 = p_3$, οπότε υπάρχουν δύο συμμετρικές μικτές ισορροπίες. Αν, αντί για $p_2 = p_3$, θέτουμε $p_1 = 1/2$, τότε η πρώτη εξίσωση γίνεται $1 = 3/2$, το οποίο είναι ψευδές. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ασύμμετρη ισορροπία με τουλάχιστον δύο μικτές στρατηγικές. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι δεν υπάρχει ισορροπία με δύο καθαρές και μία μικτή στρατηγική. Ως εκ τούτου, έχουμε βρει όλες τις ισορροπίες Nash[10].

9 Η ισορροπία μπορεί να είναι μικτή.

10 Μία συμμετρική και τρεις ασύμμετρες καθαρές ισορροπίες, καθώς και δύο συμμετρικές μικτές.

4.5 Απόδειξη του θεωρήματος Nash

Θεώρημα 4.5.1 (Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer). Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο, και $T: K \to K$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in K$, τέτοιο ώστε T(x)=x.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο παίκτες και το παίγνιο προσδιορίζεται από τις μήτρες πληρωμών $A_{m\times n}$ και $B_{m\times n}$ για τους παίκτες I και II. Θα καθορίσουμε μια σχέση $F: K \to K$ (με $K = \Delta_m \times \Delta_n$) από ένα ζευγάρι στρατηγικών για τους δύο παίκτες σε άλλο παρόμοιο ζευγάρι. Σημειώστε, πρώτον, ότι το K είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο. Ορίζουμε, για $x \in \Delta_m$ και $y \in \Delta_n$,

$$c_i = c_i(x, y) = \max\{A_{(i)}y - x^T Ay, 0\},$$

όπου το $A_{(i)}$ δηλώνει την i-οστή γραμμή της μήτρας A. Δηλαδή, το c_i είναι ίσο με το κέρδος για τον παίκτη I που λαμβάνεται με την αλλαγή της στρατηγικής x με την καθαρή στρατηγική i, εάν το κέρδος αυτό είναι θετικό: σε αντίθετη περίπτωση, είναι μηδέν. Ομοίως, ορίζουμε:

$$d_j = d_j(x, y) = \max\{x^T B^{(j)} - x^T By, 0\},$$

όπου $B^{(j)}$ είναι η j-οστή στήλη της B. Οι ποσότητες d_j έχουν την ίδια ερμηνεία για τον παίκτη II όπως οι c_i για τον παίκτη I. Ορίζουμε τώρα την F, που δίνεται από $F(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, όπου

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k}$$

για $i \in \{1, ..., m\}$, και

$$\tilde{y}_j = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k}$$

για $j \in \{1, ..., n\}$. Σημειώνουμε ότι η F είναι συνεχής, γιατί είναι τα c_i και d_j. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.5.1 (του Brouwer), διαπιστώνουμε ότι υπάρχει $(x, y) \in K$ για το οποίο $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Τώρα ισχυριζόμαστε ότι, για αυτή την επιλογή των x και y, κάθε $c_i = 0$ για το $i \in \{1, ..., m\}$, , και $d_j = 0$ για $j \in \{1, ..., n\}$. Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $c_1 > 0$. Σημειώστε ότι η τρέχουσα πληρωμή του παίκτη I είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος $\sum_{i=1}^{m} x_i A_{(i)} y$. Πρέπει να υπάρχει $l \in \{1, ..., m\}$ για τα οποία $x_l > 0$ και $x^T Ay \geq A_{(l)}y$. Γι 'αυτό το l, έχουμε ότι $c_l = 0$, εξ ορισμού. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\tilde{x}_l = \frac{x_l}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k} < x_l,$$

γιατί $c_1 > 0$. Δηλαδή, αν υποτεθεί ότι $c_1 > 0$ μας έχει δώσει μια αντίφαση. Εμείς μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχείρημα αυτό, για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$, αποδεικνύοντας έτσι ότι κάθε $c_i = 0$. Ομοίως, κάθε $d_j = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $x^T Ay \geq A_i y$ για $i \in \{1, ..., m\}$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$x^T Ay \geq x'^T Ay$$

για όλα τα $x' \in \Delta_m$. Ομοίως,

$$x^T By \geq x^T By'$$

για όλα τα $y' \in \Delta_n$. Έτσι, (x, y) είναι μια ισορροπία Nash.

Για $k > 2$ παίκτες, μπορούμε ακόμα να εξετάσουμε τις συναρτήσεις

$$c_i^{(j)}(x^{(1)}, ..., x^{(k)}) \text{ για } i, j = 1, ..., k,$$

όπου $x^{(j)}\Delta_{n(j)}$ είναι μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη j, και $c_i^{(j)}$ είναι το κέρδος για τον παίκτη j που λαμβάνεται με την αλλαγή της στρατηγικής $x^{(j)}$ με την καθαρή στρατηγική i, εάν αυτό κέρδος είναι θετικό. Επίσης, αναφέρουμε ότι σε ένα συμμετρικό παίγνιο, υπάρχει πάντα μια συμμετρική ισορροπία Nash. Αυτό προκύπτει και από την παραπάνω απόδειξη, με τη σημείωση ότι η F , που ορίζεται από k-φορές του αποτελέσματος $\Delta_n \times ... \times \Delta_n$, μπορεί να περιοριστεί στη διαγώνιο:

$$D = \{(x, ..., x) \in \Delta_n^k : x \in \Delta_n\}.$$

Η εικόνα του D στο πλαίσιο F είναι και πάλι στο D, επειδή, σε ένα συμμετρικό παίγνιο, $c_i^{(i)}(x, ..., x) = ... = c_i^{(k)}(x, ..., x)$ για κάθε $i = 1, ..., k$ και $x \in \Delta_n$. Τότε, το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer μας δίνει ένα σταθερό σημείο στο D, το οποίο είναι μια συμμετρική ισορροπία Nash.

Παράδειγμα 4.6[11] Σε μια περιοχή υπάρχουν μόνο δύο καφετέριες και ο νόμος λέει ότι στην αρχή κάθε μήνα οι δύο ιδιοκτήτες πρέπει να ορίζουν την τιμή καφέ για όλο τον προσεχή μήνα. Οι επιτρεπόμενες τιμές είναι μόνο δύο: 1 ευρώ και 1,5 ευρώ. Αν οι πελάτες είναι πάντα οι ίδιοι, πόσο θα χρεώνουν τον καφέ οι δύο καφετέριες; Με την υψηλή ή με τη χαμηλή τιμή. Οι δύο ιδιοκτήτες μπορούν να συμφωνήσουν και να κρατήσουν την τιμή στο 1,5 ευρώ. Οι πελάτες θα μοιραστούν δίκαια και στις δύο καφετέριες. Όμως αν ένας από τους δύο χαμηλώσει την τιμή, θα «κλέψει» πελάτες του άλλου και συνεπώς θα κερδίζει περισσότερα. Όπως στο προηγούμενο δίλημμα, οι παίκτες τείνουν να «προδίδουν» ο ένας τον άλλο. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δύο παίγνια είναι ότι το δίλημμα του καφέ επαναλαμβάνεται, άρα μπορεί να προκύψει η συνεργασία. Αν κάποιος από τους δύο προδώσει τον άλλο, πρέπει να περιμένει ότι στο μέλλον ο αντίπαλος του θα κάνει το ίδιο. Είναι λοιπόν πιθανό να κρατήσουν και οι δύο την τιμή στο 1,5 ευρώ σχηματίζοντας ένα «καρτέλ» ακόμα και χωρίς συγκεκριμένη συμφωνία. Αυτό εξηγεί γιατί είναι πολύ δύσκολο για τους ελέγχους αντιτράστ να αποδείξουν την ύπαρξη των «καρτέλ»: μπορεί να υπάρχει σύμπραξη ανάμεσα σε εταιρείες που δραστηριοποιούνται στον ίδιο τομέα ακόμα και χωρίς συγκεκριμένες μυστικές συμφωνίες.

Παράδειγμα 4.7 Τριψήφιο κόλπο. Μια συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία, κατά τη διάρκεια ενός μη συνεργατικού παιγνίου, αναπτύχθηκε μια μορφή συνεργασίας είναι οι πλειστηριασμοί συχνοτήτων τηλεφωνίας που προκηρύσσονταν στις ΗΠΑ από το 1994. Αρχικά όλα έβαιναν καλώς, αλλά το 1997 κάτι άλλαξε. Εκείνη τη χρονιά το αμερικανικό κράτος κέρδισε από τις πωλήσεις των συχνοτήτων μόλις το 1% του ποσού που είχε προβλέψει: σαν να λέμε ότι βγάζοντας ένα σπίτι σε πλειστηριασμό θα κέρδιζε κάποιος 5.000 ευρώ αντί για 500.000. Αν οι εταιρίες που πλειοδοτούσαν συναγωνίζονταν η μία την άλλη σε κάθε συχνότητα χωριστά, θα αέβαζαν πολύ τη ζήτηση και συνεπώς η τελική τιμή θα ήταν πολύ ακριβή. Άρχισαν λοιπόν να ανταλλάσσουν συχνότητες με ένα ευφυές σύστημα που οι διοργανωτές της δημοπρασίας δεν είχαν προβλέψει: για τις εταιρίες που συμμετείχαν στη δημοπρασία δεν είχε μεγάλη διαφορά να ξοδέψουν 1.537.000 δολάρια ή 1.537.385… όμως η δεύτερη προσφορά περιείχε ένα μήνυμα προς τους άλλους, το οποίο αναφερόταν στη συχνότητα που προτιμούσε αυτός που έκανε την προσφορά. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον κώδικα, οι συμμετέχοντες στη δημοπρασία κατάφεραν να συμφωνήσουν χωρίς ποτέ να

[11] Το δίλλημα του καφέ. Η θεωρία Nash είναι εμπνευσμένη από ένα μαθηματικό μοντέλο του 1838 του Γάλλου οικονομολόγου Αντουάν Ογκιστέν Κουρνό, στο οποίο δύο εταιρίες αγωνίζονται για την κυριαρχία στο ίδιο κομμάτι της αγοράς. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να προκύψει μια κατάσταση παρόμοια με το δίλημμα του φυλακισμένου.

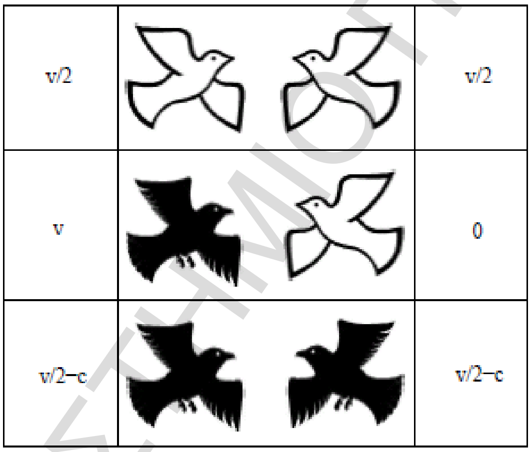
συναντηθούν. Μετά από λίγα χρόνια όμως, μία άλλη δημοπρασία για δικαιώματα κινητής τηλεφωνίας που έγινε στην Αγγλία οργανώθηκε από ειδικούς στη θεωρία παιγνίων, οι οποίοι εμπόδισαν αυτές τις παράνομες συνεννοήσεις: η προσφορά στρογγυλοποιούνταν εξαλείφοντας τα τρία τελευταία ψηφία, άρα τα 1.537.385 δολάρια γίνονταν 1.537.000. Ξέσπασε έτσι το αντίθετο αποτέλεσμα: καθώς ανέβαιναν οι προσφορές, οι συμμετέχοντες πείθονταν αμοιβαία για την αξία των δημοπρατούμενων αδειών και ανέβαζαν την προσφορά. Αυτό το σοβαρότατο παίγνιο μας διδάσκει ότι, για να έχει όφελος ο δημοπράτης σε έναν πλειστηριασμό, πρέπει να εμποδίσει τη συνεργασία, διαφορετικά κινδυνεύει να βρεθεί σε ένα παίγνιο τελείως διαφορετικό από αυτό που είχε διοργανώσει.

4.6 Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων

Αρχίζουμε εισάγωντας μια νέα παραλλαγή του παλιότερου παιγνίου του δειλού.

4.6.1 Γεράκια και Περιστέρια

Αυτό το παίγνιο είναι ένα απλό μοντέλο για δύο συμπεριφορές - μια πολεμοχαρή και η άλλη φιλειρηνική - του πληθυσμού ενός είδους (όχι τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ θηρευτών και των θηραμάτων του).



Σχήμα 4.4. Δύο παίκτες παίζουν αυτό το παίγνιο, για το χρηματικό έπαθλο τιμής v>0. Αντιμετωπίζουν ο ένας τον άλλον, και κάθε ένας επιλέγει (ταυτόχρονα) να πολεμήσει ή να εγκαταλείψει. Αυτές οι δύο στρατηγικές ονομάζονται “γεράκι” και “περιστέρι” στρατηγικές, αντίστοιχα. Αν και οι δύο επιλέξουν να πολεμήσουν (δύο γεράκια), τότε κάθε ένας καταβάλλει ένα κόστος c για να πολεμήσει, και ο νικητής (και οι δύο είναι εξίσου πιθανό να κερδίσουν) παίρνει το βραβείο. Εάν ένα γεράκι αντιμετωπίζει ένα περιστέρι, το περιστέρι φεύγει, και το γεράκι παίρνει το βραβείο. Αν δύο περιστέρια συναντώνται, μοιράζονται το βραβείο εξίσου.

Το παίγνιο στο σχήμα (4.4) έχει μια μήτρα πληρωμής.

ΙΙ / Ι	Γ	Π
Γ	$(\frac{v}{2}-c,\frac{v}{2}-c,)$	$(v,0)$
Π	$(0,v)$	$(\frac{v}{2},\frac{v}{2})$

Έστω ένα μεγάλο μέρος του πληθυσμού, καθένα από τα μέλη του οποίου συνδέονται γενετικά είτε ως "γεράκια" ή "περιστέρια", και ότι αυτοί που πηγαίνουν καλύτερα σε αυτό το παίγνιο έχουν περισσότερους απογόνους. Θα αποδειχθεί ότι η ισορροπία Nash είναι επίσης μια ισορροπία για τον πληθυσμό, με την έννοια ότι η σύνθεση του πληθυσμού των γερακιών και των περιστεριών στις αναλογίες που καθορίζονται από την ισορροπία Nash (είναι ένα συμμετρικό παίγνιο, οπότε αυτές είναι οι ίδιες και για τους δύο παίκτες) είναι τοπικά σταθερή - μικρές μεταβολές στη σύνθεση θα επιστρέψει στην ισορροπία.

Στη συνέχεια, διερευνούμε την ισορροπία Nash. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, ανάλογα με τις σχετικές τιμές του c και v. Εάν $c < \frac{v}{2}$, τότε απλά συγκρίνοντας τις γραμμές, είναι σαφές ότι ο παίκτης I προτιμά πάντα να παίξει τη Γ (γεράκι), χωρίς να τον ενδιαφέρει τι θα παίξει ο παίκτης II. Συγκρίνοντας τις στήλες, το ίδιο ισχύει και για τον παίκτη II. Αυτό συνεπάγεται ότι το (Γ, Γ) είναι μια καθαρή ισορροπία Nash. Υπάρχουν μικτές ισορροπίες; Ας υποθέσουμε ότι ο I παίζει τη μικτή στρατηγική $\{\Gamma: p, \Pi: (1-p)\}$. Τότε η πληρωμή II, εάν παίξει την Η είναι $p(v/2-c)+(1-p)v,$ και αν παίξει τη $(1-p)v/2.$ Εφόσον $c < \frac{v}{2}$, η πληρωμή για την Γ είναι πάντα μεγαλύτερη, και από τη συμμετρία, δεν υπάρχουν μικτές ισορροπίες.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, τα γεράκια και περιστέρια είναι μια άλλη έκδοση του διλήμματος του φυλακισμένου. Αν και οι δύο παίκτες ήταν να παίξουν τη Δ, θα είχαν καλύτερα αποτελέσματα από ότι σε μια ισορροπία Nash - αλλά χωρίς δεσμεύσεις, δεν μπορούν να φτάσουν εκεί. Ας υποθέσουμε ότι αντί να παίξει ένα παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου, θα παίξουν πολλά. Αν είναι να παίξουν ένα σταθερό, γνωστό, αριθμό παιχνιδιών, η κατάσταση δεν αλλάζει. (απόδειξη: Το τελευταίο παίγνιο είναι ισοδύναμο με το να παίξουν ένα παίγνιο μόνο, έτσι για αυτό το παίγνιο και οι δύο παίκτες παίζουν την Γ. Καθώς και οι δύο γνωρίζουν τι θα συμβεί στο τελευταίο παίγνιο, το δεύτερο έως το τελευταίο παίγνιο είναι επίσης ισοδύναμο με ένα παίγνιο μόνο, έτσι και οι δύο παίζουν Γ και πάλι... και ούτω καθεξής, από την προς τα πίσω επαγωγή.) Ωστόσο, εάν ο αριθμός των παιχνιδιών είναι τυχαίος, η κατάσταση μπορεί να αλλάξει. Στην περίπτωση αυτή, η στρατηγική ισορροπίας μπορεί να είναι "οφθαλμόν αντί οφθαλμού" ("tit-for-tat") - κατά την οποία ο I παίζει τη Δ όπως εσείς, αλλά αν παίζετε την Γ, ο I υπολογίζει να παίξει την Γ στο επόμενο παίγνιο (μόνο).

Η περίπτωση $c > \frac{v}{2}$ είναι πιο ενδιαφέρουσα. Αυτή είναι η περίπτωση που είναι ισοδύναμη με το παίγνιο του δειλού. Υπάρχουν δύο καθαρές ισορροπιές Nash: (Γ, Δ) και (Δ, Γ), και δεδομένου ότι το παίγνιο είναι συμμετρικό, υπάρχει μια συμμετρική, μικτή, Nash ισορροπία. Ας υποθέσουμε ότι ο I παίζει την Γ με πιθανότητα p. Για να είναι μια ισορροπία Nash, χρειαζόμαστε τις εξοφλήσεις για τον παίκτη II για να παίξει Γ και Δ να είναι ίσες:

$$(A) \qquad p\left(\frac{v}{2}-c\right)+(1-p)v=(1-p)\frac{v}{2} \qquad (\Delta) \qquad\qquad (4.1)$$

Για για να είναι αυτό αληθινό, χρειαζόμαστε $p = \frac{v}{2c}$, το οποίο από την παραδοχή, είναι λιγότερο από ένα. Από συμμετρία, ο παίκτης II θα κάνει το ίδιο πράγμα.

Παράδειγμα 4.8 Αναλογίες των φύλων. Ένα τυπικό παράδειγμα αυτής της φύσης είναι η περίπτωση της αναλογίας φύλου. Στα, ως επί το πλείστον μονογαμικά είδη, μια στενή σχέση

1:1 αρσενικά με θηλυκά φαίνεται σαν μια καλή ιδέα, αλλά τι γίνεται με τα λιοντάρια της θάλασσας, στα οποία ένα μόνο αρσενικό συγκεντρώνει ένα μεγάλο «χαρέμι» θηλυκών, ενώ η πλειοψηφία των αρσενικών δεν αναπαράγουν. Η θεωρία παιγνίων παρέχει μια εξήγηση για αυτό. Σε ένα σταθερό πληθυσμό, ο αναμενόμενος αριθμός απογόνων που ζουν στην ενηλικίωση ανά ενήλικο άτομο ανά χρόνο ζωής είναι 2. Ο αριθμός των απογόνων ενός θηλυκού θαλάσσιου λιονταριού που παράγει στη ζωή του, μάλλον δεν διαφέρει πάρα πολύ από το 2. Ωστόσο, υπάρχει μια μεγάλη πιθανότητα ένα αρσενικό λιοντάρι θάλασσας να αποφέρει κανένα απογόνο, που εξισορροπείται από μια μικρή πιθανότητα να παίρνει ένα χαρέμι και να παράγει ένα τεράστιο αριθμό. Εάν το ποσοστό των αρσενικών σε ένα (σταθερό) πληθυσμό μειώνεται, τότε, δεδομένου ότι ο αριθμός από τα «χαρέμια» είναι σταθερός, ο αναμενόμενος αριθμός απογόνων ανά αρσενικό αυξάνεται, και η πληρωμή (από την άποψη των απογόνων δεύτερης γενιάς), παραγωγής ενός αρσενικού αυξάνεται.

4.6.2 Εξελικτικά Σταθερές Στρατηγικές

Έστω ένα συμμετρικό, παίγνιο δύο παικτών με n καθαρές στρατηγικές ο καθένας και η μήτρα πληρωμής ($A_{ij} = B_{ji}$), όπου A_{ij} είναι η πληρωμή του παίκτη I που παίζει την στρατηγική i εάν ο παίκτης II παίζει τη στρατηγική j, και B_{ij} είναι το αποτέλεσμα του παίκτη II που παίζει τη στρατηγική i αν παίκτης I παίζει τη στρατηγική j.

Ορισμός 4.6.1 Εξελικτικά σταθερή στρατηγική[12]. Μια μικτή στρατηγική x στο Δ_n είναι μια εξελικτικά σταθερή στρατηγική αν για οποιονδήποτε καθαρή “μεταλλαγμένη” στρατηγική z,

I. $z^t Ax \le x^t Ax$ [13]
II. Αν $z^t Ax = x^t Ax,$ τότε $z^t Az < x^t Az.$

Στον ορισμό, επιτρέπουμε μόνο τις «μεταλλαγμένες» στρατηγικές z να είναι καθαρές στρατηγικές. Ο ορισμός αυτός μερικές φορές επεκτείνεται ώστε να επιτρέπει οποιαδήποτε κοντινή (κατά μία έννοια), στρατηγική η οποία δεν διαφέρει πάρα πολύ από τη στρατηγική του πληθυσμού x, π.χ. εάν ο πληθυσμός χρησιμοποιεί μόνο τις στρατηγικές 1, 3, και 5, τότε η μεταλλάξεις δεν μπορούν να εισάγουν περισσότερες από μία νέα στρατηγική, εκτός από τις 1, 3, και 5. Για κίνητρο, ας υποθέσουμε ότι ένας πληθυσμός με τη στρατηγική x δέχεται εισβολή από έναν μικρό πληθυσμό της στρατηγικής z, οπότε η νέα σύνθεση είναι $\varepsilon z + (1-\varepsilon)x$, όπου ε είναι μικρός. Οι νέες πληρωμές θα είναι:

1. $\varepsilon x^t Az + (1-\varepsilon)x^t Ax$ (για τον x)
2. $\varepsilon z^t Az + (1-\varepsilon)z^t Ax$ (για τον z)

Τα δύο κριτήρια για την x να είναι ESS συνεπάγονται ότι, για αρκετά μικρό ε, η μέση πληρωμή για την x θα είναι αυστηρά μεγαλύτερη από εκείνη για τη z, έτσι οι εισβολείς θα εξαφανιστούν.

Παράδειγμα 4.9 Γεράκια και Περιστέρια. Θα εξετάσουμε ότι η μικτή ισορροπία Nash, στο παίγνιο γεράκια και περιστέρια είναι μια ESS. Έστω $x = \frac{v}{2c}\Gamma + (1-\frac{v}{2c})\Delta.$

---

[12] Evolutionarily stable strategy - (ESS)

[13] Το κριτήριο (i) στον ορισμό του ESS μοιάζει απίθανο να συμβεί στην πράξη, αλλά υπενθυμίζουμε ότι, αν μια μικτή ισορροπία Nash βρίσκεται με μέσο όρο, τότε κάθε μετάλλαξη που δεν εισάγει μια νέα στρατηγική θα έχει $z^t Ax = x^t Ax.$

- Αν $z = (1,0)$ ('Γ') τότε $z^t Az = \frac{v}{2} - c,$ το οποίο είναι αυστηρά μικρότερο από

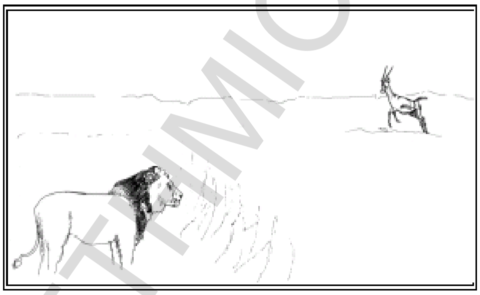
  $x^t Az = p(\frac{v}{2} - c) + (1-p)0.$

- Αν $z = (0,1)$ ('Π') τότε $z^t Az = \frac{v}{2} < x^t Az = pv + (1-p)\frac{v}{2}.$

Η μικτή ισορροπία Nash για Γεράκια και περιστέρια (αν υπάρχει) είναι ESS.

4.7 Σηματοδότηση και ασύμμετρη πληροφόρηση

Παράδειγμα 4.10 Λιοντάρια, τσιτάχ και αντιλόπες. Στα παίγνια που έχουμε αναφερθεί μέχρι στιγμής, και οι δύο παίκτες είναι πιθανόν να έχουν πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες σχετικά με τους κανόνες του παιγνίου. Αυτό δεν είναι πάντα μια καλή υπόθεση. Οι αντιλόπες έχουν παρατηρηθεί να αναπηδούν δυναμικά όταν ένα λιοντάρι βρίσκεται κοντά και ενδέχεται να τις κυνηγήσει. Γιατί δαπανούν ενέργεια με αυτόν τον τρόπο. Μια θεωρία ήταν ότι οι αντιλόπες με αυτό τον τρόπο δηλώνουν στους άλλους τον κίνδυνο που βρίσκονται σε κάποια απόσταση, με μια χειρονομία της κοινότητας τους. Ωστόσο, οι αντιλόπες έχουν παρατηρηθεί να το κάνουν αυτό ολομόναχες . Η τρέχουσα αποδεκτή θεωρία είναι ότι το σήμα αυτό προορίζεται για το λιοντάρι, για να δείξει ότι η αντιλόπη είναι καλά στην υγεία και είναι απίθανο να την πιάσει αν την κυνηγήσει. Αυτή είναι η ιδέα πίσω από τη σηματοδότηση.



Σχήμα 4.5. Μία αντιλόπη μόνη της αναπηδά για να δείξει ότι είναι καλά στην υγεία.

Εξετάζουμε την κατάσταση μιας αντιλόπης που βρίσκεται στην θέα ενός λιονταριού από απόσταση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο είδη αντιλόπης: υγιείς (H) και αδύναμη (W), και ότι ένα λιοντάρι δεν έχει καμία πιθανότητα να πιάσει μία υγιή αντιλόπη - αλλά θα δαπανήσει πολύ ενέργεια προσπαθώντας - και θα είναι σε θέση να πιάσει μία αδύναμη. Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας συνδυασμός δύο απλών παιχνιδιών (A^H και A^W), ανάλογα με το αν η αντιλόπη είναι υγιής ή ασθενής, στα οποία η αντιλόπη έχει μόνο μια στρατηγική (να τρέξει εάν την κυνηγούν), αλλά το λιοντάρι έχει την επιλογή να κυνηγήσει (C) ή να αγνοήσει (I).

$A^H =$

C	(-1,-1)
I	(0,0)

$A^W =$

C	(5,-1000)
I	(0,0)

Το λιοντάρι δεν ξέρει ποιό παίγνιο παίζουν - και αν είκοσι τοις εκατό από τις αντιλόπες είναι αδύναμες, τότε το λιοντάρι μπορεί να αναμένει μια πληρωμή των $(.8)(-1)+(.2)(5)=.2$ από το κυνήγι. Ωστόσο, η αντιλόπη ξέρει, και αν ένα υγιής αντιλόπη μπορεί να διαβιβάζει την πληροφορία[14] αυτή στο λιοντάρι πηδώντας πολύ υψηλά, και οι δύο θα είναι σε καλύτερη κατάσταση - η αντιλόπη πολύ περισσότερο από το λιοντάρι.

4.7.1 Παραδείγματα σηματοδότησης (και μη)

Παράδειγμα 4.11 *Ένα τυχαιοποιημένο παίγνιο.* Για ένα άλλο παράδειγμα, θεωρείστε το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών στο οποίο το παίγνιο που παίζεται είναι τυχαίο από μια δίκαιη ρίψη νομίσματος. Αν πετυχαίνει κορώνα (H), η μήτρα πληρωμών δίνεται από A^H, και αν πετυχαίνει γράμματα (T), δίνεται από την A^T.

$A^T =$

II / I	l	R
L	1	3
R	2	5

$A^H =$

II / I	L	R
L	4	1
R	3	0

Αν οι παίκτες δεν γνωρίζουν το αποτέλεσμα της ρίψης νομίσματος πριν από το παίγνιο, παίζουν απλώς το παίγνιο που δίνεται από το μέσο όρο μήτρας, $\frac{1}{2}A^H + \frac{1}{2}A^T$, η οποία έχει πληρωμή 2.5. Αν και οι δύο παίκτες γνωρίζουν το αποτέλεσμα της ρίψης νομίσματος, τότε (εφόσον η A^H έχει πληρωμή 1 και η A^T έχει μια πληρωμή 2), η πληρωμή είναι 1.5 – ο παίκτης ΙΙ έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει τις συμπληρωματικές πληροφορίες για να μειώσει τις ζημίες του.

Ας υποθέσουμε ότι μόνο στον Ι γνωστοποιείται το αποτέλεσμα της ρίψης νομίσματος, αλλά ο Ι θα πρέπει να αποκαλύψει την κίνησή του πρώτος. Αν ο Ι πηγαίνει με την απλή στρατηγική της επιλογής της καλύτερης γραμμής σε όποιο παίγνιο παίζεται, αλλά ο ΙΙ το αντιλαμβάνεται αυτό , τότε ο Ι έχει μια πληρωμή μόνο 1.5, λιγότερη από το αν αυτός αγνοήσει τις επιπλέον πληροφορίες.

Αυτό αποδεικνύει ότι μερικές φορές η καλύτερη στρατηγική είναι να αγνοούμε τις πρόσθετες πληροφορίες, και να παίζουμε σαν να ήταν άγνωστες[15].

Παράδειγμα 4.12 Ένα ταυτόχρονο τυχαιοποιημένο παίγνιο**.** Και πάλι, το παίγνιο έχει επιλεγεί από μια δίκαιη ρίψη νομίσματος, το αποτέλεσμα της οποίας είναι γνωστοποιήθηκε στον παίκτη Ι, αλλά οι παίκτες κάνουν τώρα ταυτόχρονες κινήσεις, και ένα δεύτερο παίγνιο, με την ίδια μήτρα, παίζεται πριν οποιεσδήποτε πληρωμές αποκαλυφθούν.

II / I	l	R
L	0	0
R	0	-1

$A^H =$

II / I	L	R
L	-1	0
R	0	0

[14] Εδώ, όπως και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, η πράξη της σηματοδότησης κοστίζει κάτι, αλλά λιγότερο από το αναμενόμενο κέρδος, και υπάρχουν πολλά παραδείγματα που προτείνονται στον τομέα της βιολογίας της εν λόγω δαπανηρής σηματοδότησης.

[15] Αυτό φαίνεται από την παρακάτω (δεν είναι απολύτως εξακριβωμένη) ιστορία. Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, οι Άγγλοι είχαν χρησιμοποιήσει την μηχανή Enigma για να αποκωδικοποιήσουν τις επικοινωνίες των Γερμανών. Παρακολούθησαν την πληροφορία ότι οι Γερμανοί προγραμμάτισαν να βομβαρδίσουν την Coventry, μια πολύ μικρή πόλη χωρίς πολλούς στρατιωτικούς στόχους. Δεδομένου ότι η Coventry ήταν τέτοιος παράξενος στόχος, οι Άγγλοι συνειδητοποίησαν ότι για την προετοιμασία της Coventry για την επίθεση θα μπορούσε να αποκαλύψει ότι είχαν σπάσει τον γερμανικό κώδικα, πληροφορία η οποία είχε περισσότερο αξία από τις απώλειες στο Coventry, και επέλεξαν να μην προειδοποιήσουν την για την επικείμενη επίθεση.

$A^T =$

Χωρίς τις πρόσθετες πληροφορίες, κάθε παίκτης θα παίξει (L, R) με πιθανότητες $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, και η τιμή του παιγνίου για τον I (για τους δύο γύρους) είναι $-\frac{1}{2}$. Ωστόσο, απο τη που ο I ξέρει ποιό παίγνιο παίζεται, μπορεί να επιλέξει απλά την γραμμή με όλα τα μηδενικά, και να μην χάσει τίποτα, ανεξάρτητα από το αν ο II γνωρίζει την ρίψη νομίσματος, επίσης. Τώρα θεωρούμε την ίδια ιστορία, αλλά με μήτρες

$A^T =$

II I	l	R
L	0	0
R	0	1

$A^H =$

II I	L	R
L	1	0
R	0	0

Και πάλι, χωρίς πληροφορίες, η τιμή του I είναι $\frac{1}{2}$. Στο δεύτερο γύρο, ο I θα παίξει με σαφήνεια τη βέλτιστη γραμμή. Το ερώτημα παραμένει το τι πρέπει να κάνει στον πρώτο γύρο.
Ο I έχει μια απλή στρατηγική που θα πάρει $\frac{3}{4}$ - αυτό είναι να αγνοήσει τη ρίψη νομίσματος στον πρώτο γύρο (και να επιλέξει την L με πιθανότητα $\frac{1}{2}$), αλλά στη συνέχεια, στο δεύτερο γύρο για να επιλέξει την σειρά με 1. Στην πραγματικότητα , αυτή είναι η τιμή του παιγνίου, διότι, εάν ο II επιλέγει την L με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στον πρώτο γύρο, αλλά στο δεύτερο γύρο κάνει τα εξής: Αν ο I έπαιζε την L στον πρώτο γύρο, τότε, επιλέγει την L ή R, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, και αν ο I έπαιξε την R στον πρώτο γύρο, επιλέγει την R. Με τον έλεγχο κάθε μίας από τις τέσσερεις καθαρές στρατηγικές του I (υπενθυμίζοντας ότι ο I παίζει πάντα τη βέλτιστη γραμμή στο δεύτερο γύρο), μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό περιορίζει τον I από μία νίκη το πολύ $\frac{3}{4}$.

4.7.2 Η αγορά μεταχειρισμένων αυτοκινήτων

Ο οικονομολόγος George Akerlof κέρδισε το βραβείο Νόμπελ για την ανάλυση του πώς μια αγορά μεταχειρισμένων αυτοκινήτων μπορεί να διασπάσει την παρουσία της ασύμμετρης πληροφόρησης. Αυτή είναι μια εξαιρετικά απλοποιημένη εκδοχή. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν αυτοκίνητα μόνο δύο τύπων: καλά αυτοκίνητα (G) και λεμόνια[16] (L), και ότι και τα δύο είναι στην αρχή δυσδιάκριτα στον αγοραστή, ο οποίος ανακαλύπτει τι είδους αυτοκίνητο αγόρασε μόνο μετά από μερικές εβδομάδες, όταν τα λεμόνια χαλάσουν. Ας υποθέσουμε ότι ένα καλό αυτοκίνητο αξίζει 9.000 € σε όλους τους πωλητές και 12.000 € σε όλους τους αγοραστές, ενώ ένα λεμόνι αξίζει μόνο 3.000 € για τους πωλητές, και 6.000 € για τους αγοραστές. Το κλάσμα p των αυτοκινήτων στην αγορά, που είναι τα λεμόνια, είναι γνωστό σε όλους, όπως οι ανωτέρω τιμές, αλλά μόνο ο πωλητής γνωρίζει εάν το αυτοκίνητο που πωλείται είναι ένα λεμόνι. Το μέγιστο ποσό που ένας λογικός αγοραστής θα πληρώσει για

16 Έκφραση για τα αυτοκίνητα που δεν είναι σε καλή κατάσταση

ένα αυτοκίνητο είναι $6000p + 12000(1-p) = f(p)$, καθώς και ενός πωλητή που διαφημίζει ένα αυτοκίνητο θα το πουλήσει στα $f(p) - \varepsilon$.

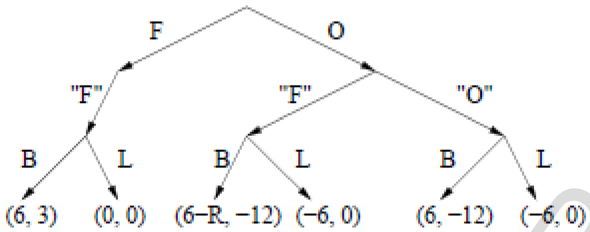
Σχήμα 4.6 Ο πωλητής, που ξέρει το τον τύπο του αυτοκινήτου, μπορεί το παρουσιάσει διαφορετικά στον αγοραστή, ο οποίος δεν γνωρίζει τον τύπο.

Ωστόσο, αν $p > \frac{1}{2}$, τότε η $f(p) > 9000$ €, και οι πωλητές με καλά αυτοκίνητα δεν θα τα πουλήσουν - η αγορά δεν είναι καλή, και θα συνεχίσουν την οδήγηση τους – και το p θα αυξηθεί, η f (p) θα μειωθεί, και σύντομα θα μείνουν μόνο λεμόνια στην αγορά. Στην περίπτωση αυτή, ασύμμετρη πληροφόρηση τους βλάπτει όλους.

Παράδειγμα 4.13 Το παίγνιο του ιχθυοπώλη. Τα ψάρια που πωλούνται στην αγορά είναι «φρέσκα» με πιθανότητα 2/3 και τα «μπαγιάτικα» με άλλη, και ο πελάτης το γνωρίζει αυτό. Ο πωλητής γνωρίζει κατά πόσον το συγκεκριμένο ψάρι που πωλείται τώρα είναι φρέσκο ή μπαγιάτικο. Ο πελάτης ζητά από τον ιχθυοπώλη αν το ψάρι είναι φρέσκο, ο πωλητής απαντά και, στη συνέχεια ο πελάτης αποφασίζει να αγοράσει το ψάρι, ή να φύγει χωρίς να προβεί σε κάποια αγορά. Η τιμή που δόθηκε για το ψάρι είναι 12€. Αξίζει 15€ για τον πελάτη εάν είναι φρέσκο, και τίποτα δεν αν είναι μπαγιάτικο. Ο πωλητής αγόρασε το ψάρι για 6€, και αν παραμείνει απούλητο, τότε μπορεί να το πωλήσει σε άλλον πωλητή για τα ίδια 6€ αν είναι φρέσκο, ή θα πρέπει να το πετάξει αν είναι μπαγιάτικο. Από την άλλη πλευρά, εάν το ψάρι είναι μπαγιάτικο, ο πωλητής ισχυρίζεται ότι είναι φρέσκο, και ο πελάτης το αγοράζει, τότε ο πωλητής χάνει R€ σε φήμη.

Σχήμα 4.7. Ο πωλητής γνωρίζει πότε το ψάρι είναι φρέσκο, ο πελάτης ξέρει μόνο την πιθανότητα.

Το δέντρο όλων των πιθανών σεναρίων, με τα καθαρά κέρδη να φαίνονται όπως (πωλητή, πελάτη), απεικονίζεται στην εικόνα. Αυτό ονομάζεται το δέντρο Kuhn του παιγνίου. Ο πωλητής είναι σαφές ότι δεν πρέπει να λέει «μπαγιάτικο» εάν το ψάρι είναι φρέσκο (F), ως εκ τούτου θα πρέπει να εξετάσουμε δύο πιθανές καθαρές στρατηγικές γι 'αυτόν: "FF" σημαίνει, ότι αυτός λέει πάντα «φρέσκο», "FO" σημαίνει ότι λέει πάντα την αλήθεια. Για τον πελάτη, υπάρχουν τέσσερις τρόποι να αντιδράσει σε αυτό που μπορεί να ακούσει. Ακούγοντας «μπαγιάτικο» σημαίνει ότι το ψάρι είναι πράγματι μπαγιάτικο, οπότε είναι σαφές ότι πρέπει να φύγει στην προκειμένη περίπτωση. Έτσι, δύο λογικές στρατηγικές παραμένουν: BL σημαίνει ότι αγοράζει το ψάρι αν ακούσει «φρέσκο» και φεύγει αν ακούσει «μπαγιάτικο», LL σημαίνει ότι απλά πάντα φεύγει. Παρακάτω οι αναμενόμενες πληρωμές για τους δύο παίκτες, με τυχαιότητα που προέρχεται από την πραγματική κατάσταση των ψαριών.



Σχήμα 4.8. Το δέντρο Kuhn για το παίγνιο του ιχθυοπώλη.

ΠΕΛ ΠΩΛ	BL	LL
“FF”	(6-R/3,-2)	(-2,0)
“FO”	(2,2)	(-2,0)

Βλέπουμε ότι αν χάσουν την υπόληψή τους δεν κοστίζει πάρα πολύ σε ευρώ, δηλαδή, αν $R<12$, τότε υπάρχει μόνο μία καθαρή ισορροπία Nash: "FF" κατά του LL. Ωστόσο, εάν $R\geq 12$, τότε το ("FO", BL) ζευγάρι, επίσης, γίνεται μια καθαρή ισορροπία, και η πληρωμή για αυτό το ζευγάρι είναι πολύ υψηλότερη από ό, τι για τις άλλες ισορροπίες.

Κεφάλαιο 5

Παίγνια τυχαίας σειράς και πλειστηριασμού

5.1 Παίγνια τυχαίας σειράς

Σε προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε δύο βασικά είδη παιγνίων. Τα συνδυαστικά παίγνια, στα οποία το δικαίωμα κίνησης εναλλάσσεται μεταξύ των παικτών, καθώς και τα παίγνια που βασίζονται σε μήτρες, στα οποία και οι δύο παίκτες (συνήθως) δηλώνουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα, και η ενδεχόμενη τυχαιότητα αποφασίζει τι θα συμβεί στη συνέχεια. Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζουμε μερικά παίγνια τα οποία είναι συνδυαστικής φύσεως, αλλά το δικαίωμα να γίνει η επόμενη κίνηση εξαρτάται από την τυχαιότητα ή κάποια άλλη διαδικασία μεταξύ των παικτών. Σε ένα παίγνιο τυχαίας σειράς το δικαίωμα να κάνει μια κίνηση καθορίζεται από μία ρίψη νομίσματος. Σε ένα παίγνιο Richman[17], κάθε παίκτης προσφέρει χρήματα στον άλλο παίκτη για το δικαίωμα να κάνει την επόμενη κίνηση, και ο παίκτης που προσφέρει περισσότερα μπορεί να προχωρήσει.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα πεπερασμένο διευθυνόμενο γράφημα - ένα σύνολο κορυφών V και μια συλλογή από βέλη που οδηγούνται μεταξύ των ζευγαριών των κορυφών - κατά το οποίο το διακεκριμένο υποσύνολο $\mathcal{G}V$ των κορυφών ονομάζονται όρια ή τερματικές κορυφές, και κάθε τερματική κορυφή v έχει μια σχετική πληρωμή $f(v)$. Οι κορυφές στο $V \setminus \mathcal{G}V$ ονομάζονται εσωτερικές κορυφές. Υποθέτουμε ότι από για κάθε κόμβο υπάρχει ένα μονοπάτι σε κάποια τερματική κορυφή.

Ένα παίγνιο δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος παίζεται ως εξής. Ξεκινάει με ένα συμβολισμό σε κάποια κορυφή. Σε κάθε γύρο, οι παίκτες ρίχνουν ένα δίκαιο κέρμα, και ο νικητής μπορεί να μετακινήσει το συμβολισμό κατά μήκος μερικών διευθυνόμενων ακμών. Το παίγνιο τελειώνει όταν επιτυγχάνεται μια τερματική κορυφή v_t. Σε αυτό το σημείο ο ΙΙ πληρώνει στον Ι τη σχετική πληρωμή $f(v_t)$. Έστω το u (x) χαρακτηρίζει την τιμή του παιγνίου που άρχισε στην κορυφή x. (Σημειώνουμε ότι αφού υπάρχουν άπειρα πολλές στρατηγικές αν το γράφημα έχει κύκλους, θα πρέπει να αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει). Ας υποθέσουμε ότι από το x υπάρχουν ακμές $x_1, ..., x_k$.

Ισχυρισμός:

$$u(x) = \frac{1}{2}(\max_i\{u(x_i)\}) + \min_j\{u(x_j)\}). \tag{5.1}$$

Πιο συγκεκριμένα, αν το S_I δηλώνει τις στρατηγικές που είναι διαθέσιμες για τον παίκτη Ι, και S_{II} εκείνων που διατίθενται για τον παίκτη ΙΙ, τ είναι ο χρόνος που τελειώνει το παίγνιο, και X_τ είναι η τερματική κατάσταση, γράφουμε

$$u_I(x) = \begin{cases} \sup_{S_I}\{\inf_{S_{II}}\{\mathrm{E}f(X_\tau)\}\}, & \alpha\nu \quad \tau < \infty \\ -\infty & \alpha\nu \quad \tau = 0. \end{cases}$$

[17] Στο τέλος του παιγνίου Richman, τα χρήματα δεν έχουν καμία αξία.

Ομοίως, έστω

$$u_{II}(x) = \begin{cases} \inf_{S_I}\{\sup_{S_I}\{\mathrm{E}f(X_\tau)\}\}, & \alpha\nu \quad \tau < \infty \\ +\infty & \alpha\nu \quad \tau = 0. \end{cases}$$

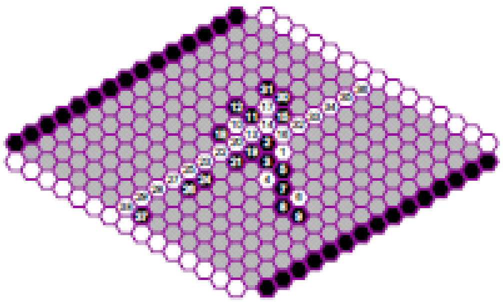
Τότε, και το u_I και το u_{II} ικανοποιούν την σχέση (5.1). Καλούμε τις συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση (5.1) «άπειρο-αρμονικές» ή αλλιώς «συναρτήσεις Richman».

5.2 Τυχαίας σειράς παίγνια επιλογής

Έστω η γενική κατηγορία των παιγνίων που περιλαμβάνει το διάσημο παίγνιο του Hex. Το παίγνιο τυχαίας σειράς Hex είναι το ίδιο όπως και το συνηθισμένο Hex, εκτός από το ότι αντί να εναλλάσσονται οι σειρές, οι παίκτες πετούν ένα κέρμα πριν από κάθε σειρά για να αποφασίσουν ποιος θα τοποθετήσει την επόμενη πέτρα. Αν και το συνηθισμένο Hex είναι γνωστό ότι είναι δύσκολο να αναλυθεί, η βέλτιστη στρατηγική για το Hex τυχαίας σειράς καταλήγει να είναι πολύ απλή. Έστω S είναι ένα σύνολο n-στοιχείων, το οποίο μερικές φορές θα ονομάζεται πίνακας, και έστω f είναι μια συνάρτηση από τα 2^n υποσύνολα του S στο □ . Ένα παίγνιο επιλογής παίζεται ως εξής: ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα στοιχείο του S, ο δεύτερος παίκτης επιλέγει ένα από τα υπόλοιπα n-1 στοιχεία, ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα από τα υπόλοιπα n - 2, και ούτω καθεξής, μέχρις ότου όλα τα στοιχεία να έχουν επιλεγεί. Έστω S_1 και S_2 αναφέρονται στα σύνολα που έχουν επιλεγεί από τον πρώτο και το δεύτερο παίκτη αντίστοιχα. Τότε ο παίκτης I λαμβάνει μια πληρωμή $f(S_1)$ και ο παίκτης II μια πληρωμή - $f(S_1)$.(Τα παίγνια επιλογής είναι μηδενικού αθροίσματος.) Τα ακόλουθα είναι παραδείγματα των παιχνιδιών επιλογής:

5.2.1 Hex

Εδώ το S είναι το σύνολο των εξαγώνων σε ένα $L \times L$ εξαγωνικό πλέγμα σχήματος ρόμβου, και η $f(S_1)$ είναι 1 αν το S_1 περιέχει μια αριστερή προς τα δεξιά διασταύρωση, διαφορετικά είναι -1. Στην περίπτωση αυτή, καθώς το S_1 περιέχει μια αριστερά προς τα δεξιά διασταύρωση ή το S_2 περιέχει μία από πάνω προς τα κάτω διάβαση (η οποία αποκλείει τη δυνατότητα του S_1 να έχει μαι αριστερά-δεξιά διασταύρωση), το αποτέλεσμα είναι καθορισμένο και δεν υπάρχει καμία ανάγκη να συνεχιστεί το παίγνιο.



Σχήμα 5.1. Ένα παίγνιο μεταξύ ενός ανθρώπου παίκτη και ένος προγράμματος από τον David Wilson σε έναν πίνακα 15 x 15.

Επίσης, θα θεωρούμε μερικές φορές ότι το Hex παίζεται σε άλλους τύπους πινάκων. Στη γενική ρύθμιση, μερικά εξάγωνα δίνονται στο πρώτο ή στο δεύτερο παίκτη πριν το παίγνιο αρχίσει.

5.2.2 Bridg-It

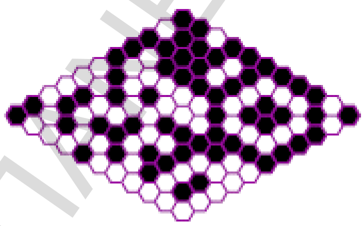
Το Bridg-It είναι ένα ακόμη παράδειγμα ενός παιγνίου επιλογής. Η έκδοση τυχαίας σειράς είναι ακριβώς όπως το κανονικό Bridg-It, αλλά το δικαίωμα να κινηθεί ο παίκτης καθορίζεται από μια ρίψη νομίσματος. Ο παίκτης Ι προσπαθεί να κάνει μια κάθετη διέλευση συνδέοντας τις μπλε κουκκίδες και ο παίκτης ΙΙ – μια οριζόντια διάβαση με τη γεφύρωση των κόκκινων.

Σχήμα 5.2. Το παίγνιο τυχαίας-σειράς Bridg-it και το αντίστοιχο παίγνιο του Shannon. Οι κυκλομένοι αριθμοί δίνουν τη σειρά που γίνονται οι κινήσεις.

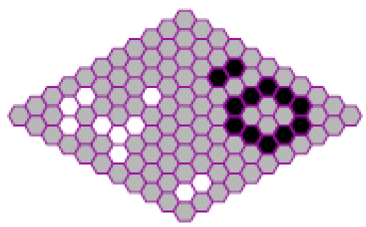
Στο αντίστοιχο παίγνιο του Shannon, το S είναι ένα σύνολο ακμών που συνδέουν τους κόμβους σε ένα $(L+1)\times L$ πλέγμα με τους κόμβους στην κορυφή να συγχωνεύονται σε έναν (ομοίως για τους κάτω κόμβους). Στην περίπτωση αυτή, η $f(S_1)$ είναι 1 αν το S_1 περιέχει μια από πάνω προς τα κάτω διάβαση και -1 διαφορετικά.

5.2.3 Surround

Το διάσημο παίγνιο "Go" δεν είναι ένα παίγνιο επιλογής (για έναν, ένας παίκτης μπορεί να αφαιρέσει τα κομμάτια του αντιπάλου), αλλά το παίγνιο του "Surround", στο οποίο, όπως στο Go, η περιβαλλόμενη περιοχή είναι σημαντική, είναι ένα παίγνιο επιλογής. Σε αυτό το παίγνιο το S είναι το σύνολο των n εξαγώνων σε ένα εξαγωνικό πλέγμα (οποιασδήποτε μορφής). Στο τέλος του παιγνίου, κάθε εκ νέου χρωματισμένο εξάγωνο να είναι το χρώμα των άκρως απόκεντρων του συμπλέγματος γύρω από αυτό (αν υπάρχει ένα τέτοιο σύμπλεγμα). Η πληρωμή $f(S_1)$ είναι ο αριθμός



Σχήμα 5.3. Ένα ολοκληρωμένο παίγνιο.

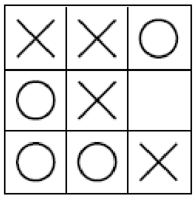


Σχήμα 5.4. Περιτριγυρισμένο έδαφοςπου είναι χρωματισμένο εκ νέου, $f(S_1)=2$.

των εξαγώνων που έχουν χρωματιστεί εκ νέου μαύρα μείον τον αριθμό των εξαγώνων που έχουν χρωματιστεί εκ νέου λευκά.

5.2.4 Πλήρης πίνακας τρίλιζας (Tic-Tac-Toe)

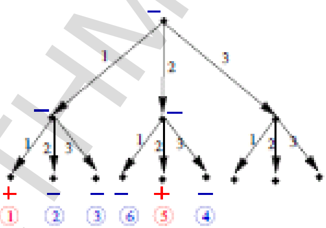
Εδώ το S είναι το σύνολο των διαστημάτων σε ένα πλέγμα 3 x 3, και $f(S_1)$ είναι ο αριθμός των οριζόντιων, κάθετων ή διαγώνιων γραμμών στο S_1 μείον τον αριθμό των οριζόντιων, κάθετων ή διαγώνιων γραμμων στο $S \setminus S_1$. Αυτό είναι διαφορετικό από την συνηθισμένη τρίλιζα στο ότι το παίγνιο αυτό δεν τελειώνει εφόσον έχει ολοκληρωθεί η πρώτη γραμμή.



Σχήμα 5.5. Τρίλιζα τυχαίας σειράς παίζεται μέχρι καμία νέα γραμμή να μην μπορεί να κατασκευαστεί. $S_1 = 1$.

5.2.5 Αναδρομική Πλειοψηφία

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα πλήρες τριαδικό δέντρο βάθους h. S είναι το σύνολο των φύλλων. Οι παίκτες θα αναλαμβάνουν εκ περιτροπής τη σήμανση των φύλλων, ο παίκτης I με ένα + και ο παίκτης II με ένα -. Ένας κόμβος γονέας αποκτά το ίδιο σύμβολο όπως η πλειοψηφία των παιδιών του. Ο παίκτης του οποίου το σήμα έχει εκχωρηθεί στη ρίζα, κερδίζει. Στην έκδοση τυχαίας-σειράς η ακολουθία των κινήσεων καθορίζεται από μία ρίψη νομίσματος.



Σχήμα 5.6. Εδώ ο παίκτης II κερδίζει.Οι κυκλωμένοι αριθμοί δίνουν τη σειρά των κινήσεων.

Έστω $S_1(h)$ είναι ένα υποσύνολο των φύλλων του πλήρους τριμερούς δέντρου βάθους h (οι κόμβοι που έχουν επισημανθεί από τον I). Επαγωγικά, έστω $S_1(j)$ είναι το σύνολο των κόμβων στο επίπεδο j τέτοιους ώστε η πλειοψηφία των παιδιών τους στο επίπεδο j+1 είναι στο $S_1(j+1)$. Η συνάρτηση πληρωμής $f(S_1)$ για την αναδρομική τριών – φορών πλειοψηφία είναι –1 αν $S_1(0) = \varnothing$ και +1 αν $S_1(0) = \{\rho\acute{\iota}\zeta\alpha\}$.

5.2.6 Αρχηγοί Ομάδων

Δύο αρχηγοί ομάδων επιλέγουν ομάδες ποδοσφαίρου από ένα πεπερασμένο σύνολο S n παικτών με σκοπό να παίξουν ένα μόνο παίγνιο ο ένας εναντίον του άλλου. Η πληρωμή $f(S_1)$ για τον πρώτο αρχηγό είναι η πιθανότητα ότι οι παίκτες στο S_1 (μαζί με τον πρώτο αρχηγό) θα κερδίσουν τους παίκτες στο S_2 (μαζί με τον δεύτερο αρχηγό). Η συνάρτηση πληρωμής μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη (ανάλογα με το ποιοί παίκτες γνωρίζουν ποια σημεία, ποιοί παίκτες έχουν παίξει μαζί στο παρελθόν, ποιοί παίκτες τα πηγαίνουν καλά με ποιόν αρχηγό, κ.λπ.). Επειδή δεν έχουμε καθορίσει την συνάρτηση πληρωμής, αυτό το παίγνιο είναι τόσο γενικό όσο η κατηγορία των παιχνιδιών επιλογής. Κάθε παίγνιο επιλογής έχει μια παραλλαγή τυχαίας σειράς στην οποία σε κάθε σειρά ένα δίκαιο κέρμα πετιέται για να αποφασιστεί ποιος θα κινηθεί μετά. Εξετάζουμε τα ακόλουθα ερωτήματα:

I. Τι μπορεί να πει κανείς για την κατανομή πιθανότητας S_1 μετά από ένα τυπικό παίγνιο ενός βέλτιστου παιγνίου τυχαίας σειράς Surround;
II. Γενικότερα, σε ένα γενικό παίγνιο επιλογής τυχαίας σειράς, πώς η κατανομή πιθανότητας της τελικής κατάστασης εξαρτάται από την συνάρτηση πληρωμής f;
III. Λιγότερο ακριβές: Είναι οι ομάδες, που επιλέχθηκαν από τυχαίας σειράς αρχηγούς ομάδων, "καλές ομάδες" αντικειμενικά;

5.3 Βέλτιστη στρατηγική για τυχαίας σειράς παίγνια επιλογής

Μια (καθαρή) στρατηγική για ένα δεδομένο παίκτη σε ένα παίγνιο επιλογής τυχαίας σειράς της είναι μια συνάρτηση M η οποία αντιστοιχίζει κάθε ζεύγος ασυνεχών υποσυνόλων $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ του S σε ένα στοιχείο του S. Ως εκ τούτου, $M(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ δηλώνει το στοιχείο που ο παίκτης θα επιλέξει αν του δοθεί η σειρά σε μια στιγμή στο παίγνιο, όταν παίκτης I μέχρι στιγμής έχει πάρει τα στοιχεία του T_1 και ο παίκτης II - τα στοιχεία του T_2. Ας δείξουμε από την $T_3 = S \setminus (\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2)$, το σύνολο των διαθέσιμων κινήσεων. Συμβολίζουμε με $E(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ την αναμενόμενη πληρωμή για τον παίκτη I σε αυτό το στάδιο στο παίγνιο, αν υποτεθεί ότι και οι δύο παίκτες παίζουν βέλτιστα με στόχο τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης πληρωμής. Όπως ισχύει για όλα τα πεπερασμένα τέλειας-πληροφόρησης, δύο παικτών παίγνια, το E είναι σαφώς προσδιορισμένο, και μπορεί κανείς να υπολογίσει το E και το σύνολο των πιθανών βέλτιστων στρατηγικών επαγωγικά ως εξής. Πρώτον, εάν $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 = S$, τότε $E(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) = f(T_1).$ Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει $E(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ όποτε $|T_3| \le k.$ Τότε, αν $|T_3| = k+1,$ και ο παίκτης I έχει την ευκαιρία να κινηθεί, ο παίκτης I θα παίξει με τον καλύτερο τρόπο αν και μόνο αν επιλέξει ένα s από το T_3 για το οποίο το $E(\mathrm{T}_1 \cup \{s\} \mathrm{T}_2)$ είναι μέγιστο. (Εάν επέλεξε οποιοδήποτε άλλο s, η αναμενόμενη πληρωμή του θα μειωθεί.) Παρομοίως, ο παίκτης II παίζει άριστα αν και μόνο αν ελαχιστοποιεί το $E(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \cup \{t\})$ σε κάθε στάδιο. Ως εκ τούτου

$$E(T_1, T_2) = \frac{1}{2}(\max_{s \in T_3} E(T_1 \cup \{s\}, T_2) + \min_{t \in T_3} E(T_1, T_2 \cup \{t\})).$$

Θα δούμε ότι οι κινήσεις μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης είναι όντως οι ίδιες.
Η παραπάνω ανάλυση καταδεικνύει, επίσης, ένα γνωστό θεμελιώδες γεγονός για πεπερασμένα, που βασίζονται στη σειρά, παίγνια τέλειας πληροφόρησης: και οι δύο παίκτες έχουν βέλτιστες καθαρές στρατηγικές (π.χ.,στρατηγικές που δεν απαιτούν ρίψη κέρματος), και η γνώση της στρατηγικής του άλλου παίκτη δεν δίνει σε ένα παίκτη οποιοδήποτε πλεονέκτημα, όταν και οι δύο παίκτες παίζουν άριστα. (Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την κατάσταση στην οποίο οι παίκτες παίζουν "ταυτόχρονα"). Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για τα παίγνια όπως το Hex η τερματική θέση δεν χρειάζεται να είναι της μορφής $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 = S.$ Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ και για οποιοδήποτε $\tilde{T}$ τέτοιο ώστε $\tilde{T} \supset \mathrm{T}_1$ και $\tilde{T} \cap \mathrm{T}_2 = \varnothing$ $f((\tilde{T})) = C,$ τότε $E(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) = C.$

Θεώρημα 5.3.1. Η τιμή ενός παιγνίου επιλογής τυχαίας σειράς είναι η προσδοκία της f (T), όταν ένα σύνολο T έχει επιλεγεί τυχαία και ομοιόμορφα μεταξύ όλων των υποσυνόλων του S.

Επίσης, κάθε βέλτιστη στρατηγική για έναν από τους παίκτες είναι επίσης μια βέλτιστη στρατηγική για τους άλλους παίκτες.

Απόδειξη. Αν ο παίκτης II παίζει οποιαδήποτε βέλτιστη στρατηγική, ο παίκτης I μπορεί να επιτύχει την αναμενόμενη εξόφληση E [f (T)], παίζοντας ακριβώς την ίδια στρατηγική (δεδομένου ότι, όταν και οι δύο παίκτες παίζουν την ίδια στρατηγική, κάθε στοιχείο θα ανήκει στο S_1 με πιθανότητα 1/2, ανεξάρτητα). Ως εκ τούτου, η αξία του παιγνίου είναι τουλάχιστον E [f (T)]. Ωστόσο, ένα συμμετρικό όρισμα που εφαρμόζεται με τους ρόλους των παικτών που εναλλάσσονται συνεπάγεται ότι η τιμή δεν υπερβαίνει το E [f (T)]. Ας υποθέσουμε ότι η M είναι η βέλτιστη στρατηγική για τον πρώτο παίκτη. Είδαμε ότι, όταν και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν τη M, η αναμενόμενη πληρωμή είναι $E[f(T)] = E(\varnothing,\varnothing)$. Δεδομένου ότι η M είναι η βέλτιστη για τον παίκτη I, προκύπτει ότι, όταν χρησιμοποιούν και οι δύο παίκτες τη M ο παίκτης II παίζει πάντα βέλτιστα (αλλιώς, ο παίκτης I θα κερδίσει ένα πλεονέκτημα, δεδομένου ότι παίζει άριστα). Αυτό σημαίνει ότι η $M(\varnothing,\varnothing)$ είναι μια βέλτιστη πρώτη κίνηση για τον παίκτη II, και ως εκ τούτου κάθε βέλτιστη πρώτη κίνηση για τον παίκτη I είναι μια βέλτιστη πρώτη κίνηση για παίκτη II. Τώρα σημειώστε ότι το παίγνιο ξεκίνησε σε οποιαδήποτε θέση αντιστοιχεί σε ένα παίγνιο επιλογής. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε βέλτιστη κίνηση για έναν από τους παίκτες είναι μια βέλτιστη κίνηση για το άλλον, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αν η f είναι ,όμοια, μηδέν, τότε όλες οι στρατηγικές είναι οι καλύτερες δυνατές. Ωστόσο, αν η f είναι γενική (που σημαίνει ότι όλες οι τιμές $f(S_1)$, για διάφορα υποσύνολα S_1 του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω στο Q), τότε τα προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι η βέλτιστη επιλογή του s είναι πάντα μοναδική και ότι είναι το ίδιο και για τους δύο παίκτες. Έχουμε έτσι το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.3.2. Αν η f είναι γενική, τότε υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη στρατηγική και είναι η ίδια στρατηγική και για τους δύο παίκτες. Επιπλέον, όταν και οι δύο παίκτες παίζουν βέλτιστα, το τελικό S_1 είναι εξίσου πιθανό να είναι μία από τα 2^n υποσύνολα του S.

Το θεώρημα 5.3.1 και το θεώρημα 5.3.2 είναι κατά κάποιο τρόπο αρκετά περίεργα. Κατά την επιλογή της ομάδας ποδοσφαίρου, για παράδειγμα, κάποιος πρέπει να σκεφτεί πολύ σκληρά για να παίξουν το παίγνιο με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, γνωρίζοντας ότι σε κάθε στάδιο υπάρχει ακριβώς μια σωστή επιλογή και ότι ο αντίπαλος μπορεί να αξιοποιήσει κάθε εσφαλμένο υπολογισμό. Ωστόσο, παρ' όλη τη νοητική προσπάθεια από τους αρχηγούς των ομάδων, οι τελικές ομάδες δεν εμφανίζονται διαφορετικές από ότι θα φαινόντουσαν εάν σε κάθε βήμα οι αρχηγοί επέλεγαν παίκτες ομοιόμορφα τυχαία. Επίσης, για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο παίκτες που ξέρουν πώς να ρίξουν και μια ομάδα χωρίς σουτέρ πάντα χάνει. Στο εναλλασσόμενης σειράς παίγνιο, ο αρχηγός μπορεί πάντα να περιμένει για να επιλέξει ένα σούτερ μέχρι αμέσως μετά να επιλέξει ο άλλος αρχηγός. Στο παίγνιο τυχαίας σειράς, οι αρχηγοί πρέπει να προσπαθήσουν να επιλέξουν τους σουτέρ με ανοιχτές κινήσεις, και υπάρχει μια ακόμα ευκαιρία στους σουτέρ να καταλήξουν στην ίδια ομάδα. Το θεώρημα 5.3.1 και το θεώρημα 5.3.2 γενικεύονται σε τυχαίας σειράς-παίγνια επιλογής στα οποίο ο παίκτης για να πάρει την επόμενη σειρά, την επιλέγει χρησιμοποιώντας ένα κέρμα. Αν ο παίκτης I παίρνει κάθε σειρά με πιθανότητα p, ανεξάρτητα, τότε η τιμή του παιγνίου είναι E [f (T)], όπου T είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του S για το οποίο κάθε στοιχείο του S είναι στο T με πιθανότητα p, ανεξάρτητα. Για την αντίστοιχη δήλωση της πρόταση για τη διεξαγωγή, η έννοια "γενική" πρέπει να τροποποιηθεί. Για παράδειγμα, αρκεί να υποθέσουμε ότι οι τιμές της f είναι γραμμικά ανεξάρτητες πάνω Q [p].

5.4 Παίγνια Richman

Τα παίγνια Richman προτάθηκαν από τον μαθηματικό David Richman, και αναλύθηκαν από τους Lazarus, Loeb, Propp, και Ullman, το 1995. Ξεκινούν με ένα πεπερασμένο, διευθυνόμενο, άκυκλο γράφημα, με δύο διακεκριμένες τερματικές κορυφές, που επισημαίνονται ως b και r. Ο Μπλέ παίκτης προσπαθεί να φτάσει την b, και ο κόκκινος παίκτης προσπαθεί να φτάσει την r. Καλούμε τη συνάρτηση πληρωμής R, και έστω R (b) = 0, R (r) = 1. Παίζουμε όπως στο παίγνιο τυχαίας- σειράς, εκτός αντί για μια ρίψη νομίσματος, οι παίκτες προσφέρουν λεφτά για το δικαίωμα να κάνουν την επόμενη κίνηση. Ο παίκτης που προσφέρει το μεγαλύτερο ποσό καταβάλλει το ποσό αυτό στον άλλο, και μετακινεί το σύμβο κατά μήκος μιας διευθυνόμενης ακμής της επιλογής της. Σε περίπτωση ισοπαλίας, θα ρίξουν ένα κέρμα για να δουν ποιος θα αγοράσει την επόμενη κίνηση. Σε αυτά τα παίγνια υπάρχει επίσης μια φυσική άπειρο-αρμονική (Richman) συνάρτηση, οι βέλτιστες προσφορές για κάθε παίκτη.

Έστω $R^{+}(v)=\max_{v\to w} R(w)$ και $R^{-}(v)=\min_{v\to w} R(w)$, όπου τα μέγιστα και τα ελάχιστα είναι πάνω από τις κορυφές w για τις οποίες υπάρχει ένα διευθυνόμενο μονοπάτι που οδηγεί από το v στο w. Επέκταση του R στις εσωτερικές κορυφές από

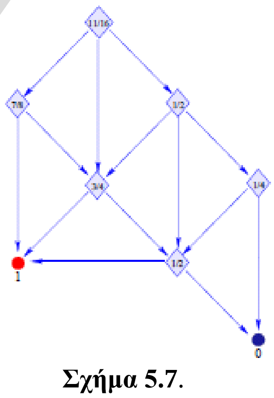
$$R(v)=\frac{1}{2}(R^{+}(v)+R^{-}(v)).$$

Σημειώστε ότι η R είναι μια συνάρτηση Richman.

Θεώρημα 5.4.1. Ας υποθέσουμε ότι ο Μπλε έχει x €, και ο Κόκκινος έχει y €, και η τρέχουσα θέση είναι v. Αν

$$\frac{x}{x+y}>R(v) \qquad (5.2)$$

ισχύει πριν ο Μπλέ προσφέρει, και ο Μπλε προσφέρει $[R(v)-R(u)](x+y)$, όπου $v\to u$ και $R(u)=R^{-}(v)$, τότε η ανισότητα (5.2) ισχύει αφού ο επόμενος παίκτης κινηθεί , με την προϋπόθεση ότι ο Μπλε κινείται στο u εάν κερδίσει την προσφορά.



Σχήμα 5.7.

Απόδειξη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις να αναλυθούν.

Περίπτωση I: Ο Μπλε κερδίζει την προσφορά. Μετά από αυτή την κίνηση, ο Μπλε έχει € $x'=x-[R(v)-R(u)](x+y)$ ευρώ. Πρέπει να δείξουμε ότι $\frac{x'}{x+y}>R(u)$.

$$\frac{x'}{x+y}>R(u)=\frac{x}{x+y}-[R(v)-R(u)]>R(v)-[R(v)-R(u)]=R(u).$$

Περίπτωση ΙΙ: Ο Κόκκινος κερδίζει την προσφορά. Τώρα ο Μπλε έχει € $x' \geq x + [R(v) - R(u)](x+y)$ ευρώ. Σημειώστε ότι αν $R(w) = R^{+}(v)$, τότε $[R(v) - R(u)] = [R(w) - R(v)]$.

$$\frac{x'}{x+y} \geq \frac{x}{x+y} + [R(w) - R(v)] \geq R(w),$$

και εξ ορισμού του w, αν το z είναι η επιλογή του Κόκκινου, το $R(w) \geq R(z)$.

Πόρισμα 5.4.1. Αν η (5.3) ισχύει κατά την έναρξη του παιγνίου, ο Μπλέ έχει μια στρατηγική νίκης.

Απόδειξη. Όταν ο Μπλε χάνει, R (v) = 1, αλλά $\frac{x}{x+y} \leq 1$.

Πόρισμα 5.4.2. Αν

$$\frac{x}{x+y} < R(v)$$

ισχύει κατά την έναρξη του παιγνίου, ο Κόκκινος έχει μια στρατηγική νίκης.

Απόδειξη. Επαναχρωματίζουμε τις κορυφές, και αντικαθιστούμε το R με 1 - R.

Κεφάλαιο 6

Συμμαχίες & Δείκτης Shapley

6.1 Η τιμή Shapley και η αγορά γαντιού

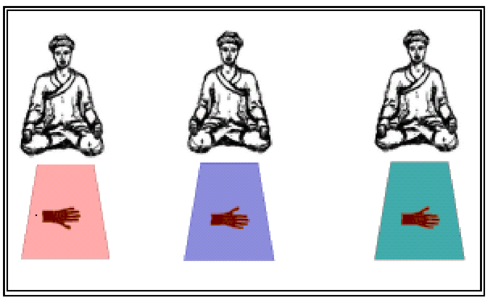
Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από k > 2 παίκτες. Κάθε ένας επιδιώκει ένα μέρος ενός συγκεκριμένου κέρδους το οποίο μπορεί να επιτευχθεί μόνο ενώνοντας τις δυνάμεις του με μερικούς από τους άλλους παίκτες οι οποίοι έχουν διαφορετική επιρροή και δύναμη.

Παράδειγμα 6.1 Ένας πελάτης εισέρχεται σε ένα κατάστημα και επιθυμεί να αγοράσει ένα ζευγάρι γάντια. Στο κατάστημα είναι οι τρεις παίκτες. Ο παίκτης I έχει ένα αριστερό γάντι και οι παίκτες II και III έχουν ο καθένας από ένα δεξί γάντι. Ο πελάτης θα προβεί σε καταβολή 100 ευρώ για ένα ζευγάρι γάντια. Στο πλαίσιο των διαπραγματεύσεων πριν από την αγορά, πόσα μπορεί ο κάθε παίκτης ρεαλιστικά να ζήτηση από την πληρωμή που πραγματοποιήθηκε από τον πελάτη;

Για να επιλύσουμε αυτό το ζήτημα, θα παρουσιάσουμε μία χαρακτηριστική συνάρτηση u, που καθορίζεται με υποσύνολα του συνόλου του παίκτη. Από την κατάχρηση της σημειογραφίας, θα γράψουμε u_{12} στη θέση του $u_{\{12\}}$, και ούτω καθεξής. Η συνάρτηση u, θα λάβει τις τιμές 0 ή 1, και θα πάρει την τιμή 1, ακριβώς όταν το υποσύνολο των παικτών εν λόγω μπορούν μεταξύ τους να πραγματοποιήσουν το στόχο τους. Σε αυτή την περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι το υποσύνολο περιλαμβάνει έναν παίκτη με ένα αριστερό γάντι, και έναν με ένα δεξί γάντι - έτσι ώστε, μεταξύ τους, μπορούν να προσφέρουν στον πελάτη ένα ζευγάρι γάντια. Έτσι, οι τιμές

$$u_{123} = u_{12} = u_{13} = 1,$$

και η τιμή είναι 0 σε κάθε άλλη υποομάδα $\{1,2,3\}$.Σημειώστε ότι u είναι το $\{0,1\}-$ αποτιμώνται μονότονη συνάρτηση: αν $S \subseteq T$, τότε, $u_S \le u_T$.. Αυτή η συνάρτηση είναι πάντα **υπερπροσθετική (superadditive)**: $u(S \cup T) \ge u(S) + u(T)$, αν S και T είναι ασύνδετα.



Σχήμα 6.1

Γενικά μια χαρακτηριστική συνάρτηση είναι απλά μια **υπερπροσθετική (superadditive)** συνάρτηση με $u(\varnothing)=0.$ Ο Shapley έψαχνε για μια τιμή συνάρτησης ψ_i, $i \in \{1,...,k\}$, έτσι ώστε η $\psi_i(u)$ θα είναι η τιμή διαιτησίας (που σήμερα ονομάζεται τιμή Shapley) για τον παίκτη i σε ένα παίγνιο του οποίου η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι u. Ο Shapley ανέλυσε αυτό το πρόβλημα με την εισαγωγή των παρακάτω αξιωμάτων:

(i) **Συμμετρία:** αν $u(S\cup\{i\})=u(S\cup\{j\})$ για όλα τα S με $i, j \notin S$, τότε, $\psi_i(u)=\psi_j(u).$

(ii) **Χωρίς δύναμη / χωρίς τιμή:** αν $u(S\cup\{i\})=u(S)$ για όλα τα S, τότε $\psi_i(u)=0.$

(iii) **Προσθετικότητα:** $\psi_i(u+v)=\psi_i(u)+\psi_i(v).$

(iv) **Απόδοση:** $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(u)=u(\{1,...,n\}).$

Το δεύτερο ονομάζεται επίσης «εικονικό» αξίωμα, ενώ το τρίτο αξίωμα είναι το πιο προβληματικό μιας και υποθέτει ότι για κανένα από τους παίκτες, δεν υπάρχει επίδραση των προηγούμενων παιχνιδιών στα επόμενα.

Θεώρημα 6.1.1 (Shapley). Υπάρχει μια μοναδική λύση για το ψ.

Παράδειγμα 6.2 Για ένα σταθερό υποσύνολο $S \subseteq \{1,...,n\}$, θεωρείστε το παίγνιο S-βέτο, στο οποίο οι πραγματικές συμμαχίες είναι αυτές που περιέχουν κάθε μέλος του S. Αυτό το παίγνιο έχει χαρακτηριστική συνάρτηση w_S, που δίνεται από το $w_S(T)=1$ αν και μόνο αν $S \subseteq T.$ Είναι εύκολο να βρούμε τη μοναδική συνάρτηση που είναι μια τιμή Shapley. Πρώτον, το «εικονικό» αξίωμα δίνει ότι

$$\psi_i(w_S)=0 \quad \text{αν } i \notin S.$$

Στη συνέχεια, για το $i, j \in S$, το «συμμετρικό» αξίωμα δίνει $\psi_i(w_S)=\psi_j(w_S).$ Αυτό και το αξίωμα «αποτελεσματικότητας» συνεπάγεται

$$\psi_i(w_S)=\frac{1}{|S|} \quad \text{αν } i \in S.$$

και έχουμε καθορίσει την τιμή Shapley. Επιπλέον, έχουμε ότι $\psi_i(cw_S)=c\psi_i(w_S)$ για κάθε $c \in [0,\infty).$

Τώρα, σημειώστε ότι το παίγνιο της αγοράς γαντιού έχει τις ίδιες πληρωμές όπως το $w_{12}+w_{13,}$, εκτός από την περίπτωση του συνόλου $\{1,2,3\}.$Στην πραγματικότητα, έχουμε ότι

$$w_{12}+w_{13}=u+w_{123}.$$

Ειδικότερα, το αξίωμα «προσθετικότητας» δίνει

$$\psi_i(w_{12})+\psi_i(w_{13})=\psi_i(u)+\psi_i(w_{123}).$$

Αν $i=1$, τότε $1/2+1/2=\psi_1(u)+1/3$, ενώ, εάν $i=3$, $0+1/2=\psi_3(u)+1/3$. Ως εκ τούτου $\psi_1(u)=2/3$και $\psi_1(u)=\psi_2(u)=1/6$. Αυτό σημαίνει ότι παίκτης Ι έχει τα δύο τρίτα της τιμής της διαιτησίας, ενώ οι παίκτες ΙΙ και ΙΙΙ έχουν το ένα τρίτο μεταξύ τους.

Παράδειγμα 6.3 Σε τέσσερις ανθρώπους ανήκει το απόθεμα στην ACME. Ο παίκτης i κρατά i μονάδες των αποθεμάτων, για κάθε $i\in\{1,2,3,4\}$. Χρειάζονται έξι μετοχές για να περάσει ένα ψήφισμα κατά τη συνεδρίαση του διοικητικού συμβουλίου. Πόση είναι η αξία της θέση του κάθε παίκτη κατά την έννοια της τιμής Shapley, αν $1=u_{1234}=u_{24}=u_{34}$, ενώ u= 1 για κάθε 3-άδα, και u = 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Υποθέτουμε ότι η τιμή u μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$u=\sum_{\varnothing\neq S}c_s w_S.$$

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι υπάρχει πάντα ένας τέτοιος τρόπος γραφής του u, και υπολογίζουμε τους συντελεστές c_s. Σημειώστε, πρώτον, ότι

$$0=u_1=c_1$$

(γράφουμε c_1 για $c_{\{1\}}$, κ.ο.κ). Ομοίως,

$$0=c_2=c_3=c_4.$$

Επίσης,

$$0=u_{12}=c_1+c_2+c_{12},$$

συνεπάγεται ότι $c_{12}=0$. Ομοίως,

$$c_{13}=c_{14}=c_{23}=0.$$

Στη συνέχεια,

$$1=u_{24}=c_2+c_4+c_{24}=0+0+c_{24},$$

συνεπάγεται ότι $c_{24}=1$. Ομοίως, $c_{34}=1$. Έχουμε ότι

$$1=u_{123}=c_{123},$$

ενώ

$$1=u_{124}=c_{24}+c_{124}=1+c_{124},$$

συνεπάγεται ότι $c_{124}=0$. Ομοίως, $c_{134}=0$, και

$$1=u_{234}=c_{24}+c_{34}+c_{234}=1+1+c_{234},$$

συνεπάγεται ότι $c_{234}=-1$. Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}1=u_{1234}&=c_{24}+c_{34}+c_{123}+c_{124}+c_{134}+c_{234}+c_{1234}\\&=1+1+1+0+0-1+c_{1234},\end{aligned}$$

συνεπάγεται ότι $c_{1234}=-1$. Έτσι,

$$u=w_{24}+w_{34}+w_{123}-w_{234}-w_{1234},$$

εξ' ου και

$$\psi_1(u)=1/3-1/4=1/12,$$

και

$$\psi_2(u)=1/2+1/3-1/3-1/4=1/4,$$

ενώ το $\psi_3(u)=1/4$, από τη συμμετρία με τον παίκτη 2. Τέλος, $\psi_4(u)=5/12$. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι το άτομο με 2 μετοχές και το πρόσωπο με 3 μετοχές έχουν ίση εξουσία.

6.2 Πιθανολογική ερμηνεία της τιμής Shapley

Έστω ότι οι παίκτες φτάνουν στη συνεδρίαση του διοικητικού συμβουλίου σε ομοιόμορφη τυχαία σειρά. Τότε υπάρχει μια στιγμή κατά την οποία, με την άφιξη του επόμενου μετόχου, η συμμαχία που ήδη υπάρχει στο γραφείο του διοικητικού συμβουλίου τίθεται σε ισχύ. Η τιμή Shapley ενός συγκεκριμένου παίκτη είναι η πιθανότητα ο παίκτης να είναι αυτός που κάνει την ισχύουσα συμμαχία αποτελεσματική[18].

Θεώρημα 6.2.1. Τα τέσσερα αξιώματα Shapley καθορίζουν μοναδικά τις συναρτήσεις φ_i. Επιπλέον, έχουμε τον τυχαίο τύπο[19] άφιξης:

$$\varphi_i(u) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\pi\in S_n:\pi(k)=i}(u(\pi(1),...,\pi(k)) - u(\pi(1),...,\pi(k-1)))$$

Παράδειγμα 6.4 Έστω ένα παίγνιο στην παρακάτω συμμαχική μορφή (u(S)). Θα δείξουμε ότι οι παίκτες $2,3,...,n$ είναι συμμετρικοί και θα υπολογίσουμε την τιμή Shapley $(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)$.

$$u(S) = \begin{cases} |S|, & \in S \\ 0, & \textit{διαφορετικα} \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι: $u(S\cup\{i\}) = u(S\cup\{j\})$ για κάθε $S \subset N$ με $i, j \notin S\cup\{1\}$.

i. Αν ο $1\in S$ τότε $\left.\begin{matrix} u(S\cup\{i\}) = |S|+1 \\ u(S\cup\{j\}) = |S|+1 \end{matrix}\right\}(ok),$

ii. Αν ο $1\notin S$ τότε $\left.\begin{matrix} u(S\cup\{i\}) = 0 \\ u(S\cup\{j\}) = 0 \end{matrix}\right\}(ok).$

Λόγω του (α) και του αξιώματος συμμετρίας θα έχουμε:

$$\varphi[u] = (a,b,b,...,b) \text{ με } a+(n-1) \overset{(\alpha\xi.\ \alpha\pi o\tau/\tau\eta\tau\alpha\varsigma)}{=\!=\!=\!=\!=\!=} u(N) = n.$$

Θα βρούμε το a:

$$a = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}[\underbrace{u(P_\pi(1)\cup\{1\})}_{=|P_\pi(1)+1|} - \underbrace{u(P_\pi(1))}_{=0}]$$

---

[18] Θυμηθείτε ότι μας δίνεται το $u(S)$ για όλα τα σύνολα $S\subseteq[n]:=\{1,...,n\}$ με $u(\varnothing)=0$ και $u(S\cup T)\ge u(S)+u(T)$ αν $S,T\subseteq[n]$ είναι ασύνδετα.

[19] Αυτός ο τύπος προβλέπει πράγματι την πιθανότητα που ο παίκτης να είναι αυτός που κάνει την ισχύουσα συμμαχία αποτελεσματική.

- Ο 1 έρχεται πρώτος με $(n-1)!$ τρόπους και τότε $|P_{\pi}(1)|=0$
- Ο 1 έρχεται πρώτος με $(n-1)!$ τρόπους και τότε $|P_{\pi}(1)|=1$

$$\vdots$$

- Ο 1 έρχεται πρώτος με $(n-1)!$ τρόπους και τότε $|P_{\pi}(1)|=n-1$

Άρα

$$a=\frac{1}{n!}[(n-1)!\cdot 1+(n-1)!\cdot 2+\ldots+(n-1)!\cdot n]=\frac{1+2+\ldots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+2}{2}.$$

Και

$$b=\frac{n-\frac{n+1}{2}}{n-1}=\frac{2n-n-n}{2(n-1)}=\frac{n-1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}.$$

Οπότε $\varphi[u]=\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right).$

<u>Έλεγχος:</u> $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i[u]=\frac{n+1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=n(ok).$

Κεφάλαιο 7

Σχεδιασμός Μηχανισμού

7.1 Δημοπρασίες

Θα εισαγάγουμε μερικά από τα βασικά είδη των πλειστηριασμών. Η αρχή για την παιγνιοθεωρητική ανάλυση έχει ως εξής: Υπάρχει ο πωλητής, που είναι γνωστός ως εντολέας (κύριος), κάποιος αριθμός αγοραστών, γνωστοί ως εντολοδόχοι και (για λόγους απλότητας) ένα αντικείμενο που πρέπει να πουληθεί, με τιμή u_*, στον κύριο , και τιμή u_i στον πράκτορα i. Συχνά, ο εντολέας έχει μια τιμή κράτησης u_{res} (**reservation price**): δεν θα πωλήσει το αντικείμενο, εάν η τελική τιμή δεν είναι μεγαλύτερη από την τιμή της κράτησης. Τα παρακάτω είναι μερικά από τα βασικά είδη πλειστηριασμού:

Ορισμός 7.1.1 (Αγγλική δημοπρασία). Σε μια αγγλική δημοπρασία,
- οι πράκτορές αυξάνουν τις προσφορές,
- όταν δεν υπάρχουν άλλες προσφορές, ο πλειοδότης παίρνει το αντικείμενο στην τιμή που πρόσφερε, εάν η τιμή είναι τουλάχιστον u_{res}

Ορισμός 7.1.2 (Δημοπρασία Ολλανδικού Τύπου). Η ολλανδική δημοπρασία λειτουργεί προς την αντίθετη κατεύθυνση: σε μια ολλανδική δημοπρασία,
- ο εντολέας δίνει μια ακολουθία μείωσης των τιμών,
- ο πρώτος εντολοδόχος που θα πει "stop" παίρνει το αντικείμενο στην τιμή που πρόσφερε, εάν αυτή είναι τουλάχιστον u_{res}.

Ορισμός 7.1.3 (Σφραγισμένης προσφοράς, Δημοπρασία Πρώτης τιμής). Αυτό το είδος της δημοπρασίας είναι το πιο δύσκολο να αναλυθεί. Εδώ,
- οι αγοραστές κάνουν προσφορά σε σφραγισμένους φακέλους,
- ο πλειοδότης παίρνει το αντικείμενο στην τιμή που πρόσφερε, εάν αυτή είναι τουλάχιστον u_{res}.

Ορισμός 7.1.4 (Δημοπρασία Vickrey). Αυτή είναι μία σφραγισμένη-προσφορά, δημοπρασία δεύτερης τιμής. Στη δημοπρασία Vickrey,
- οι αγοραστές κάνουν προσφορές σε σφραγισμένους φακέλους,
- ο πλειοδότης παίρνει το αντικείμενο αυτό στην προσεχή-υψηλότερη προσφορά, αν αυτή είναι τουλάχιστον u_{res}.

7.2 Ιδιότητες των τύπων δημοπρασιών

Γιατί ένας πωλητής πάντα επιλέγει να εκτελέσει μια δημοπρασία Vickrey, όταν θα μπορούσαν να έχουν μια σφραγισμένης προσφοράς, δημοπρασία πρώτης τιμής; Διαισθητικά, οι κανόνες της δημοπρασίας Vickrey θα ενθαρρύνουν τους φορείς να υποβάλουν υψηλότερες προσφορές από ό, τι θα έκαναν σε μια δημοπρασία πρώτης τιμής, και διαθέτει ένα επιπλέον θεωρητικό πλεονέκτημα:

Θεώρημα 7.2.1. Σε μια δημοπρασία Vickrey, είναι μια καθαρή ισορροπία Nash για κάθε παράγοντα που υποβάλει μια προσφορά αξία u_i .

Για να έχει νόημα έξω από αυτό, πρέπει να διευκρινιστεί ότι ο εντολοδόχος, αγοράζει το αντικείμενο για ψ_i, η πληρωμή είναι $u_i - \psi_i$ για τον εντολοδόχο i, και 0 για όλους τους άλλους εντολοδόχους. Ο ρόλος που παίζει ο εντολέας είναι να επιλέγει τους κανόνες του παιγνίου - δεν είναι ένας παίκτης στο παίγνιο.

Είναι σαφές ότι στη δημοπρασία Vickrey, αν οι εντολοδόχοι ακολουθούν αυτή τη στρατηγική Nash ισορροπίας, τότε το αντικείμενο θα πουλήθει για την αξία της δεύτερης μεγαλύτερης προσφοράς. Αυτό αποδεικνύει, επίσης, ότι είναι αληθές στην Αγγλικές και τις Ολλανδικές δημοπρασίες. Και στις δύο περιπτώσεις, χρειάζεται να υποθέσουμε ότι οι προσφορές κινούνται σε μια συνεχή μόδα (ή από απειροελάχιστες προσαυξήσεις), και ότι οι δεσμοί αντιμετωπίζονται με ένα λογικό τρόπο. Στην ολλανδική δημοπρασία, χρειαζόμαστε επίσης να υποθέσουμε ότι οι εντολοδόχοι ξέρουν και τις τιμές του άλλου.

Αυτό σημαίνει ότι στις αγγλικές δημοπρασίες και στις δημοπρασίες Vickrey, οι εντολοδόχοι μπορούν να συμπεριφέρονται άριστα γνωρίζοντας μόνο τη δική τους αποτίμηση, ενώ στην ολλανδική και σφραγισμένης προσφοράς δημοπρασίες πρώτης τιμής, πρέπει να μαντέψει τις αποτιμήσεις του άλλου.

7.3 Διατήρηση της μετεωρολογικής εγκυρότητας.

Ο εργοδότης ενός μετεωρολόγου καθορίζει ότι θα πρέπει να παρέχει μια καλή πρόβλεψη του καιρού για την επόμενη ημέρα. Τα μέσα του μετεωρολόγου είναι καλά, και μπορεί, με αρκετή προσπάθεια, να τα συντονίσει για να λάβει τη σωστή τιμή για την πιθανότητα βροχής την επόμενη ημέρα. Υπάρχουν πολλές ημέρες, και, στην i-οστή από αυτές, αυτή η σωστή πιθανότητα ονομάζεται p_i. Το βράδυ της i-1-οστής ημέρας, ο μετεωρολόγος υποβάλλει την εκτίμηση του $\hat{p}_i$ για την πιθανότητα βροχής την επόμενη ημέρα, την i-οστή. Ποιό καθεστώς θα πρέπει να υιοθετήσουμε για να ανταμείψουμε ή να τιμωρήσουμε τον μετεωρολόγο για τις προβλέψεις του, έτσι ώστε να έχει κίνητρα για να προσδιοριστεί σωστά την p_i (δηλαδή, να δηλώσει $\hat{p}_i = p_i$); Ο εργοδότης δεν ξέρει τι είναι το p_i, επειδή δεν έχει πρόσβαση σε τεχνικό εξοπλισμό, αλλά ξέρει τις τιμές του $\hat{p}_i$ που ο μετεωρολόγος προσφέρει, και γνωρίζει αν βρέχει ή όχι κάθε μέρα.

Μια πρόταση είναι να πληρώσει ο μετεωρολόγος, την i-οστή μέρα, το ποσό $\hat{p}_i$ (ή κάποιο πολλαπλάσιο του ευρώ κατά το ποσό αυτό), αν βρέχει, και $1-\hat{p}_i$ αν έχει ηλιοφάνεια. Αν $\hat{p}_i = p_i = 0.6$, τότε το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned}&\hat{p}_i \mathrm{P}(\theta\alpha \quad \beta\rho\acute{\varepsilon}\xi\varepsilon\iota) + (1-\hat{p}_i)\mathrm{P}(\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota \quad \eta\lambda\iota o\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha) = \hat{p}_i p_i + (1-\hat{p}_i)(1-p_i)\\ &= 0.6\times 0.6 + 0.4\times 0.4 = 0.52.\end{aligned}$$

Αλλά στην περίπτωση αυτή, ακόμη και αν ο μετεωρολόγος, έχει υπολογίσει σωστά ότι $p_i = 0.6$, έχει μπει στον πειρασμό να αναφέρει την τιμή $\hat{p}_i$ του 1, διότι, από τον ίδιο τύπο, στην περίπτωση αυτή, τα κέρδη του είναι 0.6.

Μια άλλη ιδέα είναι να καταβάλει ο μετεωρολόγος ένα σταθερό μισθό μέσα σε ένα χρονικό περιθώριο, ας πούμε, ένα έτος. Στο τέλος του χρονικού αυτού περιθωρίου, ζημιώνουν τον μετεωρολόγο σύμφωνα με το πόσες ακριβείς προβλέψεις έχει κάνει κατά μέσο όρο. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε, για λόγους απλούστευσης, ότι ο μετεωρολόγος είναι ο μόνος σε θέση να αναφέρει τις τιμές $\hat{p}_i$ σε μια κλίμακα του $\frac{1}{10}$, ούτως ώστε να έχει έντεκα επιλογές, δηλαδή $\{k/10 : k \in \{0,...,10\}\}$. Όταν ένας χρόνος έχει περάσει, οι μέρες του έτους αυτού μπορούν να χωριστούν σε έντεκα κατηγορίες, ανάλογα με την $\hat{p}_i$- τιμή που ο μετεωρολόγος έχει δηλώσει. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n_k ημέρες που η προβλεπόμενη τιμή $\hat{p}_i$ είναι $\frac{k}{n}$, ενώ σύμφωνα με τις πραγματικές καιρικές συνθήκες, τις r_k μέρες από αυτές τις n_k ημέρες έβρεχε. Στη συνέχεια, δίνουμε την ποινή, ως

$$\sum_{k=0}^{10} (r_k - \frac{k}{10} n_k)^2.$$

Ένα σύστημα, όπως αυτό φαίνεται αρκετά λογικό, αλλά στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι αρκετά καταστροφικό. Εάν ο καιρός δεν παρουσιάζει πολλές διακυμάνσεις από έτος σε έτος και μετεωρολόγος γνωρίζει ότι κατά μέσο όρο έβρεχε για $\frac{3}{10}$ των ημερών πέρυσι, θα είναι σε θέση να αγνοήσει τα μέσα του εντελώς.

Ας υποθέσουμε ότι ο μετεωρολόγος απλά θέτει $\hat{p} = \frac{3}{10}$, τότε, $n_3 = 365$ και $n_{k \neq 3} = 0$. Στην περίπτωση αυτή ποινή του θα είναι

$$(r_3 - 365 \cdot \frac{3}{10})^2,$$

όπου r_3 είναι απλά ο συνολικός αριθμός των βροχερών ημερών σε ένα έτος, το οποίο αναμένεται να είναι αρκετά κοντά στο $365 \cdot \frac{3}{10}$.. Με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνει, η ποινή είναι πιθανό να είναι κοντά στο μηδέν.
Υπάρχει περαιτέρω επεξεργασία στο ότι ακόμη και αν ο μετεωρολόγος δεν γνωρίζει τη μέση βροχόπτωση, μπορεί ακόμα να κάνει αρκετά καλές προβλέψεις.

Θεώρημα 7.3.1. Ας υποθέσουμε ότι ο μετεωρολόγος περιορίζεται να αναφέρει τις τιμές $\hat{p}_i$ σε μια κλίμακα του $\frac{1}{10}$. Ακόμη και αν ο ίδιος δεν γνωρίζει τίποτα για τον καιρό, μπορεί να χαράξει μια στρατηγική, έτσι ώστε σε διάστημα n ημερών η ποινή του είναι, κατά μέσο όρο, μέσα στο $\frac{1}{20}$, σε κάθε υποδοχή.

Το αποτέλεσμα έχει αναδιατυπωθεί ως συνέπεια του θεωρήματος Minimax, εξετάζοντας την κατάσταση ως ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μεταξύ του μετεωρολόγου και κάποιου αντιπάλου. Στην περίπτωση αυτή, ο αντίπαλος είναι ο εργοδότης και οι καιρικές συνθήκες. Έτσι υπάρχουν δύο παίκτες Μ και Α. Κάθε μέρα, ο Α μπορεί να παίξει μια μικτή στρατηγική randomizing μεταξύ Βροχής και Ηλιοφάνειας. Το πρόβλημα είναι να επινοήσει μια βέλτιστη απάντηση για τον Μ, η οποία αποτελείται από μια πρόβλεψη για κάθε ημέρα. Μια τέτοια πρόβλεψη, μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια μικτή στρατηγική, randomizing μεταξύ βροχής και ηλιοφάνειας. Στο τέλος του χρονικού περιθωρίου, ο Μ πληρώνει στον αντίπαλο μια ποινή, όπως περιγράψαμε πιο παραπάνω.

Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει ανάγκη για τα όργανα. Το θεώρημα Minimax εγγυάται ότι υπάρχει μια βέλτιστη στρατηγική ανταπόκρισης. Μπορούμε να προχωρήσουμε ακόμη περισσότερο και να δώσει μια συγκεκριμένη “συνταγή”: Σε κάθε μέρα, υπολογίζουμε μια πιθανότητα βροχής, που εξαρτάται από τι καιρό είχε μέχρι τώρα.

7.4 Ανταλλαγή μυστικού

Στην εισαγωγή, μιλήσαμε για το πρόβλημα του να μεταφερθεί ένα μυστικό μεταξύ δύο ανθρώπων. Ας υποθέσουμε ότι δεν εμπιστευόμαστε κανένα από αυτούς εξ ολοκλήρου, αλλά θέλουμε το μυστικό να γίνει γνωστό σε κάθε ένα από αυτούς, υπό τον όρο ότι θα συνεργαστούν. Γενικότερα, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο ερώτημα για n ανθρώπους.
Σκεφτείτε το αυτό σε ένα υπολογιστικό πλαίσιο: Ας υποθέσουμε ότι το μυστικό είναι ένας κωδικός πρόσβασης που παρουσιάζεται ως ένας ακέραιος S που βρίσκεται μεταξύ του 0 και ορισμένων μεγάλων τιμών M, για παράδειγμα, $M = 10^6$.

Θα μπορούσαμε να λάβουμε τον κωδικό πρόσβασης και να τον διαχωρίσουμε σε n κομμάτια, δίνοντας τα σε κάθε ένα από τους παίκτες. Ωστόσο, αυτό θα αναγκάσει το μήκος του κωδικού πρόσβασης να είναι υψηλό, εάν κανένα από τα κομμάτια δεν μαντευτεί από επανειλημμένες προσπάθειες. Επιπλέον, όσο περισσότεροι παίκτες βάζουν μαζί τα κομμάτια τους, το μέγεθος του άγνωστου κομματιού μειώνεται, καθιστώντας το πιο πιθανό να μαντευτεί από επαναλαμβανόμενες δοκιμές.

Ένας πιο φιλόδοξος στόχος είναι να χωρίσουμε το μυστικό S μεταξύ n ανθρώπων με τέτοιο τρόπο, ώστε όλοι μαζί να αναδημιουργήσουν το S, αλλά καμία συμμαχία του μεγέθους $l<n$ έχει κάποιες χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το S.
Πρέπει να διευκρινιστεί τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συμμαχία δεν έχει χρήσιμες πληροφορίες:

Ορισμός 7.4.1. Έστω $A = \{i_1, ..., i_l\} \subset 1, ..., n$ είναι οποιοδήποτε υποσύνολο μεγέθους $l < n$. Λέμε ότι μια συνεργασία l ατόμων που κατέχουν ένα τυχαίο διάνυσμα $(X_{i_1}, ..., X_{i_l})$ δεν διαθέτει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με ένα μυστικό S που προϋποθέτει το $(X_{i_1}, ..., X_{i_l})$ είναι ένα ενιαίο τυχαίο διάνυσμα στο $(\{0, ..., M-1\})^l$, του οποίου η κατανομή είναι ανεξάρτητη από το S: Δηλαδή λέμε ότι

$$P(X_{i_1} = x_1, ..., X_{i_l} = x_l \mid S) = \frac{1}{M^l}.$$

Θυμηθείτε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο Ω, σε ένα χώρο μεγέθους N, υπό την προϋπόθεση κάθε ένα από τα N πιθανά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά:

$$P(X = x \mid x \in \Omega) = \frac{1}{N}.$$

Στην περίπτωση ενός μονοδιάστατου διανύσματος με στοιχεία στο $\{0, ..., M-1\}$, έχουμε $\Omega = (\{0, ..., M-1\})^l$, μεγέθους $1/M^l$.

Το ακόλουθο πλαίσιο επιτρέπει στον κάτοχο του μυστικού να χωρίσει ένα μυστικό $S \in \{0,...,M-1\}$ μεταξύ n ατόμων κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε συνεργασία μεγέθους $l < n$ δεν έχει χρήσιμες πληροφορίες: Ο κάτοχος του μυστικού, παράγει ένα τυχαίο n – 1-διάστατο διάνυσμα $(X_1, X_2,..., X_{n-1})$, του οποίου η κατανομή είναι ομοιόμορφη στο $(\{0,...,M-1\})^{n-1}$. Αυτό δίνει τον αριθμό X_i του i-οστού άτομου για $1 \le i \le n-1$ και τον αριθμό

$$X_n = (S - \sum_{i=1}^{n-1} X_i)(\operatorname{mod} M) \qquad (7.1)$$

για το τελευταίο πρόσωπο.
Είναι αρκετό να δείξουμε ότι κάθε συμμαχία μεγέθους $n-1$ δεν διαθέτει χρήσιμες πληροφορίες. Για $\{i_1,...,i_{n-1}\} = \{1,...,n-1\}$, η συμμαχία των πρώτων $n-1$ άτομων αυτό είναι σαφές από τον ορισμό. Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα χρειαστούμε ένα στοιχειώδες λήμμα.

Λήμμα 7.4.1. Θεωρείστε Ω - πεπερασμένο σύνολο μεγέθους N. Έστω T μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση από το Ω στην ίδια. Αν μια τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο Ω, τότε προκύπτει Y = T (X).

Σκεφτείτε μία συμμαχία που παραλείπει το j-οστό άτομο: $A = 1,..., j+1,...,n.$ Έστω $T_j((X_1,..., X_{n-1})^T) = (X_1,..., X_{j-1}, X_{j+1},..., X_n)^T$, όπου X_n ορίζεται από την εξίσωση: (7.1) . Η σχέση αυτή είναι 1-1 και επί. Εξ ου και μπορούμε να ορίσουμε ρητά τον αντίστροφο της:

$$T_j^{-1}((Z_1,..., Z_{n-1})^T) = (Z_1,..., Z_{j-1}, Z_j, Z_{j+1},..., Z_{n-1})^T,$$

όπου $Z_j = S - \sum_{1 \le i \ne j \le n-1} Z_i$.

Έτσι, αν μία συμμαχία, που δεν περιλαμβάνει όλους τους παίκτες, συγκεντρώνει όλα τα διαθέσιμα στοιχεία, εξακολουθεί να έχει μόνο ένα ενιαίο τυχαίο διάνυσμα και συνεπώς την ίδια πιθανότητα να μαντέψουν το μυστικό S όπως εάν δεν διέθετε καμία πληροφορία. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαν να δημιουργήσουν ένα τυχαίο διάνυσμα με την ίδια κατανομή τους χωρίς να γνωρίζουν τίποτα για το S. Όλοι μαζί, όμως, οι παίκτες μπορούν να προσθέσουν τις τιμές που τους είχαν δοθεί, να μειώσουν την απάντηση (mod M), και να πάρουν το μυστικό S πίσω.

7.4.1 Πολυωνυμική Μέθοδος

Η ακόλουθη μέθοδος, που επινοήθηκε από τον Adi Shamir, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να χωρίσει το μυστικό μεταξύ n παικτών. Έχει ένα ενδιαφέρον πλεονέκτημα: Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο μπορούμε να μοιραστούμε ένα μυστικό με n άτομα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε συμμαχία τουλάχιστον m ατόμων να μπορεί να το ανακτήσει, ενώ μια ομάδα από ένα μικρότερο μέγεθος δεν μπορεί. Αυτό θα μπορούσε να είναι χρήσιμο εάν μια συγκεκριμένη δράση που απαιτεί απαρτία των m ατόμων, που είναι μικρότερη από το n - το συνολικό αριθμό των ατόμων στην ομάδα.
Έστω p είναι ένας πρώτος αριθμός τέτοιος ώστε 0 <S <p. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $n < p$. Ορίζουμε ένα πολυώνυμο τάξης $m-1$:

$$F(x)=\sum_{i=0}^{m-1} A_i x^i \,(\mathrm{mod}\, p),$$

με $A_0 = S$ και $(A_1,...,A_{m_1})^T$ - ένα ομοιόμορφο τυχαίο διάνυσμα στο $(\{0,...,p-1\})^{m-1}$.

Έστω $z_1,...,z_n$ είναι διακριτοί αριθμοί στο $\{1,...,p-1\}$. Για να χωρίσουμε το μυστικό δίνουμε στο j-οστό άτομο τον αριθμό $F(z_j)$. Ισχυριζόμαστε ότι:

Θεώρημα 7.4.1. Μία συμμαχία μεγέθους m ή μεγαλύτερου μεγέθους μπορεί να ανακατασκευάσει το μυστικό S, αλλά μια συμμαχία μεγέθους l<m δεν έχει χρήσιμες πληροφορίες:

$$P(F(z_1)=x_1,...,F(z_l=x_l)\,|\,S)=\frac{1}{p^l}, \quad x_i\in\{0,...,p-1\}.$$

7.5 Κοπή της πίτας

Θυμηθείτε από την εισαγωγή το πρόβλημα της κοπής μιας πίτας με πολλά διαφορετικά κομμάτια. Το παίγνιο έχει δύο ή περισσότερους παίκτες, ο καθένας με μία συγκεκριμένη προτίμηση για το ποίο από τα μέρη της πίτας θα ήθελε πολύ να έχει. Υποθέτουμε ότι η πίτα δεν έχει αδιαίρετα συστατικά.

Εάν υπάρχουν μόνο δύο παίκτες, υπάρχει μια πολύ γνωστή μέθοδος για τη διαίρεση της πίτας : Ο ένας την κόβει σε δύο μισά, και ο άλλος επιλέγει όποιο κομμάτι του αρέσει. Κάθενας λαμβάνει τουλάχιστον το μισό της πίτας, όπως μετράται σύμφωνα με τις προτιμήσεις του. Τι γίνεται όμως όταν υπάρχουν τρεις ή περισσότεροι παίκτες; Αυτό μπορεί ακόμη να γίνει, αλλά απαιτεί ορισμένες νέες έννοιες.

Ας συμβολίσουμε την πίτα με Ω. Τότε, το F δηλώνει την άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω. Χοντρικά, αυτά είναι όλα τα υποσύνολα στα οποία η πίτα μπορεί να υποδιαιρεθεί με επανειλημμένη κοπή.

Ορισμός 7.5.1 (Άλγεβρα συνόλων). Πιο τυπικά λέμε ότι μια συλλογή F του υποσύνολο του Ω αποτελεί μια άλγεβρα, εάν:

I. $\varnothing \in F$,
II. αν $A\in F$ τότε $A^c \in F$,
III. αν $A,B\in F$ τότε $A\cup B\in F$.

Τα σύνολα στο F ονομάζονται **μετρήσιμα.**

Θα χρειαστούμε ένα εργαλείο για τη μέτρηση της «επιθυμίας», που έχει κάθε συγκεκριμένο άτομο για ένα πιθανό κομμάτι της πίτας.

Ορισμός 7.5.2. Μία μη-αρνητική με πραγματικές τιμές σύνολο-συνάρτηση μ που ορίζεται στο F ονομάζεται **πεπερασμένο μέτρο**, εάν:

I. $\mu(\varnothing)=0$ και $\mu(\Omega)=\mathrm{M}<\infty$,
II. αν $A,B\in F$ και $A\cap B\in\varnothing$ τότε $\mu(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mu(\mathrm{A})+\mu(\mathrm{B})$.

Η τριάδα (Ω, F, μ) ονομάζεται ένα **πεπερασμένο μέτρο διαστήματος**. Επιπλέον, θα χρειαστούμε ότι το μέτρο διαστήματος πρέπει να έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής: Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in F$ και οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\beta \in (0, \mu(\Omega))$, υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $B \in F$ τέτοιο ώστε $\mu(B) = \beta$. Αυτό εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν αδιαίρετα στοιχεία στην πίτα (αποκλείουμε σκληρά καρύδια που δεν μπορούν να κοπούν στα δύο).

Τώρα έστω μ_j είναι το μέτρο στην πίτα που αντικατοπτρίζει τις προτιμήσεις του j-οστού ατόμου. Παρατηρήστε ότι κάθε άτομο δίνει μια προσωπική τιμή για ολόκληρη την πίτα. Για κάθε ένα, όμως, η αξία των «κενών κομματιών» είναι 0 και η αξία κάθε κομματιού είναι μεγαλύτερη ή ίση με εκείνη οποιουδήποτε κομματιού της πίτας.

Καθήκον μας είναι να διαιρέσουμε την πίτα σε K κομμάτια $\{A_1^*, ..., A_K^*\}$, έτσι ώστε για κάθε μεμονωμένο άτομο i,

$$\mu_i(\mathrm{A}_i^*) \geq \frac{\mu_i(\Omega)}{K}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η διαίρεση είναι δίκαιη. Σημειώστε ότι αυτή η έννοια διευθύνει τη δικαιοσύνη από την άποψη του κάθε ατόμου: Ένα άτομο εξασφαλίζει ένα κομμάτι που είναι τουλάχιστον το $\frac{1}{K}$ της ιδιαίτερης εκτίμησης του για την πίτα.

Ο παρακάτω αλγόριθμος παρέχει μία τέτοια υποδιαίρεση: Το πρώτο πρόσωπο καλείται να σημαδεύσει το κομμάτι A_1 τέτοιο ώστε $\mu_1(A_1) = \frac{\mu_1(A_1)}{K}$. Στη συνέχεια, ο j-οστός, σημαδεύει ένα κομμάτι A_j με $\mu_j(A_j) = \frac{\mu_j(A_j)}{K}$, έτσι ώστε για κάθε k <j, είτε $A_j \subseteq A_k$ ή $A_k \subseteq A_j$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε K εμφωλευμένα σύνολα

$$A_{a(1)} \subseteq A_{a(1)} \cdots \subseteq A_{a(K)},$$

όπου α είναι μια μετάθεση του $\{1, ..., K\}$ (σε περίπτωση που πολλοί άνθρωποι έχουν διαλέξει το ίδιο κομμάτι πίτας, στη μετάθεση α οι αρχικές τους επιλογές έρχονται σε αριθμητική σειρά.)

Θέτουμε κατά μέρος $A_k^* = A_{a(1)}$,το μικρότερο (εσώτατο) των επιλεγμένων συνόλων, για το άτομο που διάλεξε πρώτο: k = α (1). Έστω $\tilde{\Omega} = \Omega / A_k^*$, είναι το υπόλοιπο της πίτας. Παρατηρήστε ότι για κάθε ένα από τα υπόλοιπα K - 1 άτομα, ισχύει $\mu_j(A_k^*) \leq \mu_j(A_j)$ και ως εκ τούτου, για το υπόλοιπο της τούρτας

$$\mu_j(\tilde{\Omega}) \geq \mu_j(\Omega)(1 - \frac{1}{K}) = \mu_j(\Omega)(\frac{K-1}{K}).$$

Έτσι μπορούμε να επαναλάβετε τη διαδικασία στο $\tilde{\Omega}$ με τα υπόλοιπα K-1 άτομα, λαμβάνοντας A_m^* με

$$\mu_m(A_m^*) \geq \mu_m(\tilde{\Omega})(\frac{1}{K-1}) \geq \mu_m(\Omega)(\frac{1}{K}),$$

και έστω $\tilde{\tilde{\Omega}} = \Omega / \{A_k^* \cup A_m^*\}$, τέτοιο ώστε, για άλλη μια φορά, για κάθε εναπομείναν άτομο j έχουμε:

$$\mu_j(\tilde{\tilde{\Omega}}) \geq \mu_j(\tilde{\Omega})(\frac{\mathrm{K}-2}{\mathrm{K}-1}) \geq \mu_m(\Omega)(\frac{K-2}{K}).$$

Αυτό μπορεί να εκτελείται έως ότου όλη η πίτα να έχει διαιρεθεί.
Τα $A_1^*,...,A_K^*$ θα έχουν την επιθυμητή ιδιότητα.
Αυτό ισχύει εάν κάθε πρόσωπο j εκτελέσει τις οδηγίες πιστά. Μετά από όλα, εφόσον δεν ξέρουμε το μέτρο του μ_j δεν μπορούμε να κρίνουμε αν είχε χαραχτεί ένα "δίκαιο" κομμάτι σε κάθε στάδιο του παιγνίου. Ωστόσο, εφόσον το μέτρο όλων έχει την ενδιάμεση ιδιότητα, ένα πρόσωπο που επιλέγει να συμμορφωθεί, μπορεί να διασφαλίσει ότι παίρνει το μερίδιο του.

Κεφάλαιο 8

Κοινωνική επιλογή

8.1 Εισαγωγή

Συχνά βρισκόμαστε σε καταστάσεις όπου πρέπει να ληφθεί μία ομαδική απόφαση όπως μια απόφαση ομάδας φίλων για το ποία ταινία θα διαλέξουν για το βράδυ, ή σε πολύπλοκη και υψηλής σημασίας θέματα όπως οι εκλογές. Ας υποθέσουμε ότι μια κοινωνία (ομάδα ψηφοφόρων) αντιπροσωπεύεται από μια λίστα υποψηφίων και αυτοί πρέπει να επιλέξουν έναν από αυτούς. Θα μπορούσαμε να δούμε πως μπορεί μια εκλογή να γίνεται με τρόπο που να αντικατοπτρίζει πραγματικά τις προτιμήσεις των ατόμων και τι σημαίνει για μια κοινωνική επιλογή όπως το να είμαστε δίκαιοι.

Όταν υπάρχουν μόνο δύο επιλογές για να διαλέξει κανείς, μια απλή έννοια του κανόνα της πλειοψηφίας μπορεί να εφαρμοστεί για να αποδόσει ένα αποτέλεσμα το οποίο περισσότεροι από τους μισούς ψηφοφόρους βρίσκουν ικανοποιητικό. Όταν η ψήφος χωρίζεται μεταξύ των υποψηφίων, μπορεί να είναι απαραίτητος ένας επιπρόσθετος μηχανισμός που "σπάει" την ισοπαλία. Καθώς ο αριθμός των επιλογών αυξάνει πέραν των τριών, η απλή πλειοψηφία γίνεται συχνά ανεφάρμοστη. Για να βρούμε ένα μοναδικό νικητή χρησιμοποιούνται ειδικές διαδικασίες που ονομάζονται μηχανισμοί ψηφοφορίας. Το ανησυχητικό στοιχείο είναι ότι το αποτέλεσμα των εκλογών συχνά εξαρτάται από ένα ιδιαίτερο επιλεγμένο μηχανισμό.

8.2 Μηχανισμοί ψηφοφορίας και Κριτηρία Δικαιοσύνης

Μια συστηματική μελέτη των μηχανισμών ψηφοφορίας ξεκίνησε τον 18^{o} αιώνα με την αντιπαράθεση δύο μελών της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών, των Chevalier και Condorcet. Ο Chevalier παρατήρησε ότι η τρέχουσα μέθοδος που χρησιμοποιείται από την Ακαδημία συχνά οδηγούσε στην εκλογή ενός υποψηφίου που θεωρούνταν λιγότερο επιθυμητός από την πλειοψηφία των Ακαδημαϊκών. Πρότεινε και εναλλακτικό μηχανισμό, ο οποίος σύντομα υιοθετήθηκε.

Ωστόσο ο Condorcet αμέσως έδειξε ότι ο νέος μηχανισμός είχε και ο ίδιος πολλές ανεπιθύμητες ιδιότητες και προχώρησε στο να επινοήσει τη δική του μέθοδο με βάση ένα συγκεκριμένο κριτήριο δικαιοσύνης τώρα γνωστό ως κριτήριο Condorcet. Διατύπωσε λοιπόν την άποψη ότι εάν ένας υποψήφιος μπορεί να νικήσει κάθε άλλο σ 'έναν ένα προς ένα διαγωνισμό, θα πρέπει να είναι ο νικητής. Πήγε περαιτέρω ακόμη και ανακάλυψε ότι η μέθοδος του βασίζεται σε διαγωνισμούς ανά ζεύγη, η οποία με τη σειρά της οδηγήθηκε στο γνωστό σήμερα ως παράδοξο Condorcet. Από τότε συνεχίστηκε αυτό το μοτίβο, με μια πληθώρα μηχανισμών ψηφοφορίας να έχουν στόχο να ικανοποιήσουν μια σειρά από επιθυμητά κριτήρια δικαιοσύνης, αλλά ο καθένας έχει αποδειχθεί ότι περιέχει ένα συγκεκριμένο ελάττωμα ή ένα παράδοξο.

Το έργο του Kenneth Arrow από το 1951 έχει διευκρινίσει το πρόβλημα και έδειξε ότι μπορεί να επινοηθεί μη «δίκαιη» διαδικασία που να είναι απαλλαγμένη από τη στρατηγική χειραγώγηση.

8.2.1 Κριτήρια Δικαιοσύνης του Arrow

Η έννοια της «δικαιοσύνης» που χρησιμοποιείται από τον Arrow απαιτεί κάποια επεξεργασία. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $A=\{a,b,c,...\}$, που αποτελείται από m εναλλακτικές λύσεις, όπου $m \geq 3$. Για μια οντότητα X η $\textit{προτίμηση} \geq x$ πάνω από το A είναι μια σχέση, η οποία καθορίζει, για κάθε ένα από τα $\binom{m}{2}$ μη διατεταγμένα ζεύγη των εναλλακτικών λύσεων, αυτό που προτιμάται από την X. Γράφουμε $a \geq b$ όποτε προτιμάται το α από το β και $a > b$ εάν αυστηρά προτιμάται το α από το β. Μια προτίμηση λέγεται μεταβατική αν ένα $a \geq b$ και $b \geq c$ συνεπάγεται ότι $a \geq c$. Στην περίπτωση αυτή, μια προτίμηση $(\geq)$, δίνει μια ταξινόμηση p έχοντας μια λίστα των συνόλων ισοδύναμων εναλλακτικών λύσεων από τις πιο επιθυμητές προς τις λιγότερο προτιμώμενες. Η μεταβατικότητα δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της κοινωνικής προτίμησης, αλλά θα χρειαστεί στη συνέχεια.

Υποθέσουμε ότι μια κοινωνία αποτελείται από N άτομα το καθένα με μία μεταβατική προτίμηση στο A. Το σύνταγμα (πολίτευμα) είναι μια συνάρτηση που συνδέει σε κάθε N-πλειάδα $\pi = (p_1,..., p_N)$, των μεταβατικών προτιμήσεων (που ονομάζονται προφίλ) μια κοινωνική προτίμηση $(\geq s)$.

Ένα «δίκαιο» σύνταγμα (πολίτευμα) θα πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- **Μεταβατικότητα** της κοινωνικής προτίμησης.
- **Ομοφωνία**: αν για κάθε ατομική προτίμηση $a >_i b$, τότε $a >_s b$ για την κοινωνική προτίμηση.
- **Ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών**: για κάθε προφίλ π_1, π_2 με καθοριμένη κατάταξη μεταξύ α και β, η κοινωνική κατάταξη των α και β θα πρέπει να είναι η ίδια.

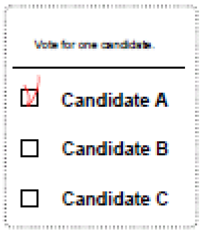
Τα δύο πρώτα είναι αυτονόητα. Η τρίτη είναι πιο λεπτή - η απαίτηση αυτή εξασφαλίζει ότι δεν μπορεί να υπάρξει «στρατηγική διαστρέβλωση» των ατομικών προτιμήσεων, προκειμένου να επιτευχθεί μια επιθυμητή κοινωνική προτίμηση. Έστω ότι όλες οι ατομικές προτιμήσεις στο π_1 και π_2 έχουν τις ίδιες ταξινομήσεις των α και β, αλλά τα c και d έχουν ταξινομηθεί διαφορετικά, όπου $|\{c,d\} \cap \{a,b\}| \leq 1$. Αν το π_1 οδηγεί σε στο $a \geq_s b$ και π_2 οδηγεί στο $b \geq_s a$, τότε η ανεξαρτησία των μη συσχετισμένων υποψηφίων παραβιάζεται και η ομάδα των ατόμων που προτιμούν το b από το a έχουν κίνητρο να αποκρύψουν τις πραγματικές προτιμήσεις τους μεταξύ των c και d, προκειμένου να επιτευχθεί μια επιθυμητή κοινωνική ιεράρχηση. Ένας μηχανισμός εκλογής ενός νικητή αντιστοιχίζει σε κάθε εναλλακτική λύση υποψήφιο μια αριθμητική βαθμολογία (σκορ). Ένα τέτοιο σύστημα συνήθως παράγει έναν ειδικό τύπο του συντάγματος, εκείνο που διακρίνει έναν αυστηρά επιθυμητό υποψήφιο και κατατάσσει όλους τους άλλους ως ισοδύναμους μεταξύ τους. Σε περιπτώσεις, που εξάγεται μια πλήρης κοινωνική κατάταξη, βασίζεται και πάλι σε αριθμητικά δεδομένα και κατά συνέπεια πρέπει να είναι μεταβατική.

8.3 Παραδείγματα μηχανισμών ψηφοφορίας

Οι μηχανισμοί ψηφοφορίας ενός νικητή μπορούν να χαρακτηριστούν από το είδος του ψηφοδελτίου που χρησιμοποιούν. Οι δυαδικοί μέθοδοι χρησιμοποιούν ένα απλό ψηφοδέλτιο, όπου οι υποψήφιοι ή οι εναλλακτικές επιλογές βρίσκονται σε λίστα και κάθε ένας είναι, είτε επιλεγμένος είτε όχι. Οι μέθοδοι κατάταξης χρησιμοποιούν ένα ψηφοδέλτιο προτίμησης όπου κάθε εναλλακτική επιλογή κατατάσσεται με τη σειρά προτίμησης. Τέλος, στις μεθόδους σειράς ή βαθμολογίας, κάθε εναλλακτική λύση που αναφέρεται σε ένα ψηφοδέλτιο της δίνεται ένα αριθμητικό αποτέλεσμα.

8.3.1 Πλειοψηφία

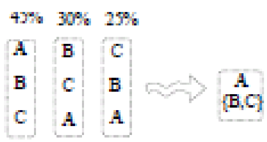
Πιθανώς ο πιο κοινός μηχανισμός είναι η Πλειοψηφία, επίσης γνωστός ως "first-past-the-post". Χρησιμοποιείται ένα απλό ψηφοδέλτιο.



Σχήμα. 8..1 Σύμφωνα με την πλειοψηφία μόνο μία από τις εναλλακτικές λύσεις μπορεί να επιλεγεί.

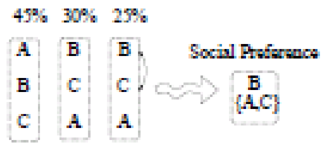
Η εναλλακτική λύση με τις περισσότερες ψήφους κερδίζει. Δεν χρειάζεται να έχει την πλειοψηφία των ψήφων. Στις ΗΠΑ, οι εκλογές του Κογκρέσου διεξάγονται με τη χρήση του συστήματος πλειοψηφίας. Το σύστημα αυτό έχει πολλά πλεονεκτήματα. Είναι ιδιαίτερα ελκυστικό, λόγω της απλότητας και της διαφάνειας. Στις βουλευτικές εκλογές έχει πάρει συχνά επαίνους για την εξαίρεση των εξτρεμιστών (άκρων) και για την ενθάρρυνση των πολιτικών κομμάτων να έχουν ευρύτερη προσφυγή. Δίνει επίσης σε ένα δημοφιλή ανεξάρτητο υποψήφιο μια ευκαιρία, δεδομένου ότι τελικά εκλέγονται άτομα ξεχωριστά και όχι κόμματατα. Μπορεί, ωστόσο, να οδηγήσει σε υποεκπροσώπηση των μειονοτήτων και να ενθαρρύνει τη δημιουργία κομμάτων με βάση γεωγραφικά ή εθνικής χαρακτηριστικά.

Μια άλλη ανεπιθύμητη ιδιότητα της πλειοψηφίας είναι ότι ο υποψήφιος που τελικά θα εκλεγεί θα είναι ο λιγότερο αγαπημένος για ένα σημαντικό τμήμα του πληθυσμού. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρεις υποψήφιοι A, B και C και οι ψηφοφόροι έχουν τρεις διαφορετικούς τύπους κατάταξης των υποψηφίων.



Σχήμα 8.2 Η επιλογή A προτιμάται από το 45% του πληθυσμού, επιλογή B, από το 30% και η C από το 25%

Σύμφωνα με την απλή πλειοψηφία, ο A κερδίζει τις εκλογές, παρά την ισχυρή αντίθεση με την πλειοψηφία των ψηφοφόρων. Αν οι ψηφοφόροι που ευνοούν τον C ήταν να ρίξουν την ψήφο τους για τον B, τη δεύτερη επιλογή τους, ο B θα κέρδιζε με πλειοψηφία 55%. Αυτό είναι ένα παράδειγμα της στρατηγικής ή υστερόβουλης ψηφοφορίας. Η συγκεκριμένη στρατηγική, όταν μια λιγότερο επιθυμητή, αλλά περισσότερο δημοφιλής εναλλακτική λύση βρίσκεται σε υψηλότερη κατάταξη καλείται συμβιβασμός. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι ο πλουραλισμός παραβιάζει το κριτήριο της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών, δεδομένου ότι αλλαγή της κοινωνικής προτίμησης μεταξύ B και A μπορεί να επιτευχθεί χωρίς καμία αλλαγή ατομικών προτιμήσεων AB. Σημειώνουμε ότι δεν αποκαλύπτονται ποτέ οι πλήρεις επιμέρους κατατάξεις στην ψηφοφορία.

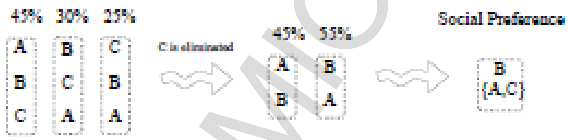


Σχήμα 8.3 Όταν το 25% αλλάζει υστερόβουλα τις ψήφους του από το C στο, η κοινωνική προτίμηση μεταξύ των A και B αλλάζει.

8.3.2 Επαναληπτικές Εκλογές

Οι επαναληπτικές εκλογές είναι επίσης γνωστές ως «πλειοψηφία με αποκλεισμό». Χρησιμοποιούν ένα απλό ψηφοδέλτιο και η ψηφοφορία διεξάγεται σε γύρους. Μετά από κάθε γύρο, άν κανένας υποψήφιος δεν επιτυγχάνει την πλειοψηφία, ο υποψήφιος (ή η εναλλακτική επιλογή) με τις λιγότερες πρώτης θέσης ψήφους αποκλείεται και ένας νέος γύρος ξεκινά μαζί με τους υπόλοιπους υποψήφιους. Όταν παραμείνουν μόνο δύο υποψήφιοι σε ένα γύρο, ο ένας με τις περισσότερες ψήφους κερδίζει τις εκλογές. Για έναν N υποψήφιους εκλογών, οι επαναληπτικές εκλογές απαιτούν N - 1 γύρους.

Παρατηρούμε ότι η επαναληπτική ψηφοφορία αλλάζει το νικητή στο παραπάνω παράδειγμα: Οι Επαναληπτικές εκλογές διασφαλίζουν ότι κανένας από τους ηττημένους υποψηφίους δεν θα έχει μεγαλύτερη υποστήριξη από το νικητή στο διαγωνισμό ένας προς ένας.

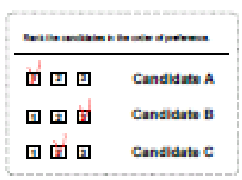


Σχήμα 8.4. Στον πρώτο γύρο ο C αποκλείστηκε. Όταν οι ψήφοι ανακατανέμονται, ο B παίρνει την πλειοψηφία. Η πλήρης βαθμολογίες των ψηφοφόρων δεν αποκαλύπτονται στη διαδικασία.

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται σπάνια σε αυτή την πλήρη μορφή, λόγω του επιπλέον κόστους και της χαμηλότερης συμμετοχής των ψηφοφόρων στην ψηφοφορία γιατί διαθέτει πολλαπλούς γύρους. Η πιο διαδεδομένη εκδοχή είναι η επαναληπτική ψηφοφορία των δύο πρώτων. Όταν δεν καθορίζεται σαφώς ένας νικητής στον πρώτο γύρο, ένας νέος γύρος διεξάγεται μεταξύ των δύο πρώτων υποψηφίων. Στις ΗΠΑ οι επαναληπτικές εκλογές χρησιμοποιούνται συχνά σε προκριματικές εκλογές κομμάτων και σε διάφορες τοπικές εκλογές.

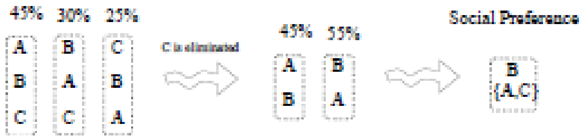
8.3.3 Άμεσες Επαναληπτικές

Με τη χρήση του ψηφοδελτίου προτίμησης οι επαναληπτικές εκλογές μπορούν να ολοκληρωθούν σε ένα γύρο.



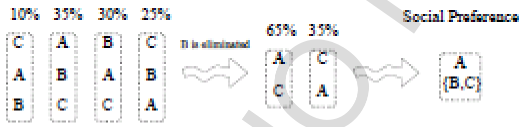
Σχήμα 8.5. Στις άμεσες επαναναηπτικές οι ψηφοφόροι προσδιορίζουν τη σειρά κατάταξης των υποψηφίων.

Ο υποψήφιος με το λιγότερο αριθμό πρώτων ψήφων αποβάλλεται από την διαδικασία, και οι ψήφοι αυτών που τον έφεραν πρώτο αναδιανέμονται στο δεύτερο πιό επιθυμητό υποψηφίο. Αυτή η μέθοδος είναι φθηνότερη από μια κοινή επαναληπτική ψηφοφορία. Ενθαρρύνει επίσης τη συμμετοχή τον ψηφοφόρων στην ψηφοφορία αφού υπάρχει μόνο ένας γύρος. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος υποφέρει από την ίδια αδυναμία όπως η πλειοψηφία - είναι "ανοικτή" σε στρατηγικές χειραγώγησης. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο σενάριο:



Σχήμα 8.6. Μετά τον αποκλεισμό του C, ο B παίρνει την πλειοψηφία των ψήφων.

Αν οι ψηφοφόροι στην πρώτη ομάδα γνώριζαν την κατανομή των προτιμήσεων, θα μπορούσαν να εξασφαλίσουν μια νίκη για τον A παίρνοντας το 10% των συστατικών τους για να κρύψουν την αληθινή τους προτίμηση και insencerely να μετακινήσουν τον C από τη βάση, στην κορυφή της κατάταξης τους. Στον πρώτο γύρο ο B, ένας πιο δυνατός αντίπαλος του A, θα αποβληθεί. Στη συνέχεια ο A θα κερδίσει εναντίον του C. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται «ώθηση προς τα πάνω» (push - over).



Σχήμα 8.7. Μικρή ομάδα παραποιεί τις αληθινές προτιμήσεις της διασφαλίζοντας ότι B αποκλείεται. Ως αποτέλεσμα, A κερδίζει τις εκλογές.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η άμεση επαναληπτική παραβιάζει το κριτήριο της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών, δεδομένου ότι επιτρέπει για την κοινωνική προτίμηση μεταξύ των A και B να αλλάξει χωρίς όμως να αλλάξει οποιαδήποτε από τις ατομικές προτιμήσεις AB.

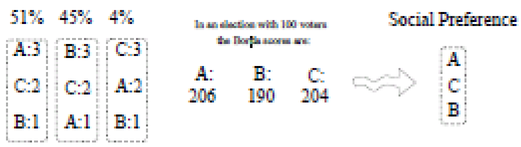
Οι Άμεσες Επαναληπτικές Εκλογές (Instant runoff voting (IRV)) χρησιμοποιούνται στην Αυστραλία για τις εκλογές στην Ομοσπονδιακή Βουλή των Αντιπροσώπων, Fijian Βουλή των Αντιπροσώπων, για να εκλέξει τον Πρόεδρο της Ιρλανδίας και για διάφορες δημοτικές εκλογές στην Αυστραλία, τις Ηνωμένες Πολιτείες και η Νέα Ζηλανδία.

8.3.4 Μέτρηση Borda

Η μέτρηση Borda χρησιμοποιεί επίσης το ψηφοδέλτιο προτίμησης. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, λαμβάνοντας υπόψη μια αριθμημένη λίστα με N εναλλακτικές λύσεις, κάθε ψηφοφόρος εκχωρείται σε μια μετάθεση των $\{1, 2, \dots, N\}$, όπου το N αντιστοιχεί στην πιό επιθυμητή επιλογή και το 1 στην λιγότερο επιθυμητή εναλλακτική λύση. Ο υποψήφιος με το μεγαλύτερο σύνολο πόντων κερδίζει τις εκλογές. Ο Borda πρότεινε αυτή τη μέθοδο, το 1770, όταν ανακάλυψε ότι η μέθοδος της πλειοψηφίας που τότε χρησιμοποίησε η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών παρουσίαζε πρόβλημα από το παράδοξο που περιγράψαμε. Η μέθοδος Borda χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια από την ακαδημία για τις επόμενες δύο δεκαετίες.

Ο Donald G. Saari έδειξε ότι η μέτρηση Borda είναι κατά κάποιο τρόπο αυτή με τα λιγότερα προβλήματα από όλους τους μηχανισμούς ενός μόνο νικητή. Ωστόσο, δεν είναι απαλλαγμένη από το ίδιο ελάττωμα που μαστίζει όλες τις άλλες μεθόδους ενός μόνο-νικητή. Μπορεί επίσης να χειραγωγηθεί από στρατηγική ψηφοφορίας.

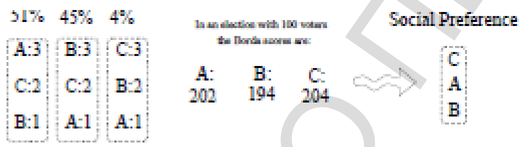
Έστω το παρακάτω παράδειγμα:



Σχήμα 8.8. Η εναλλακτική Α έχει τη συνολική πλειοψηφία και είναι ο νικητής στο πλαίσιο της μέτρησης Borda.

Στην περίπτωση αυτή, ο Α έχει μια ξεκάθαρη πλειοψηφία των ψήφων και είναι επίσης ο νικητής στο πλαίσιο της μέτρησης Borda. Ωστόσο, εάν οι υποστηρικτές του C ήταν να κατατάξουν υστερόβουλα τον Β πάνω από τον Α, θα μπορούσαν να εξασφαλίσουν μια νίκη για το C. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται «ταφή».

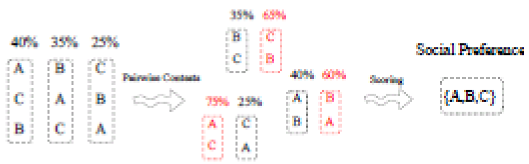
Αυτό είναι και πάλι παραβίαση της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών δεδομένου ότι καμία από τις ατομικές προτιμήσεις AC δεν είχε αλλάξει.



Σχήμα 8.9. Οι υποστηρικτές του C μπορούν να θάψουν τον Α μετακινώντας τον Β πιο ψηλά στην κατάταξή τους.

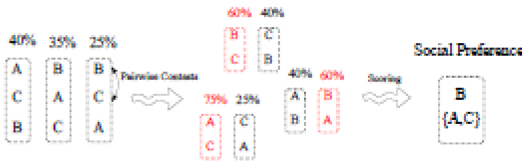
8.3.5 Διαγωνισμοί ανά ζεύγη

Οι διαγωνισμοί ανά ζεύγη, επίσης γνωστοί ως «μέθοδοι Condorcet», είναι μια οικογένεια μεθόδων στις οποίες κάθε εναλλακτική λύση αντιστοιχίζεται μία προς μία με κάθε μια από τις άλλες. Μία μία προς μία νίκη φέρνει 1 βαθμό και μισό βαθμό για την ισοπαλία. Η εναλλακτική λύση με τις περισσότερους συνολικά πόντους κερδίζει. Με Ν εναλλακτικές λύσεις, αυτή η διαδικασία απαιτεί $\binom{N}{2}$ στάδια. Μπορεί να επιτευχθεί σε ένα μόνο στάδιο, με τη χρήση του «ψηφοδελτίου προτίμησης». Ο Condorcet προώθησε αυτή τη μέθοδο αφού κατέδειξε τις αδυναμίες στη μέτρηση Borda. Στη συνέχεια προχώρησε παρουσιάζοντας την ευπάθεια της δικής του μεθόδου - μια ισοπαλία με την παρουσία ενός «κύκλου προτίμησης».



Σχήμα 8.10. Κύκλος Προτίμησης: σε ένα-προς-ένα διαγωνισμούς ο Α νικά τον C, ο C νικά τον Β και ο Β νικά τον Α.

Για να επιλύσουμε μια τέτοια κατάσταση, υπάρχει μια ποικιλία από μηχανισμούς «σπασίματος» της ισοπαλίας. Η μέθοδος του «Μαύρου», για παράδειγμα, χρησιμοποιεί τη μέτρηση Borda, ενώ οι πιο εξελιγμένες μέθοδοι χρησιμοποιούν τις άμεσες επαναληπτικές σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των υποψηφίων. Εκτός από την παραγωγή συχνά ισορροπίας, οι μέθοδοι Condorcet είναι με τη σειρά τους ευάλωτες σε στρατηγική ψηφοφορία. Στο παράδειγμα που ακολουθεί οι υποστηρικτές του C χρησιμοποιούν συμβιβασμούς για την επίλυση ενός κύκλου υπέρ της δεύτερης επιθυμητής εναλλακτικής B.



Σχήμα 8.11. Κύκλος Προτίμησης: σε διαγωνισμούς ένα-προς-ένα ο A νικά τον C, ο C νικά τον B και ο B νικά τον A.

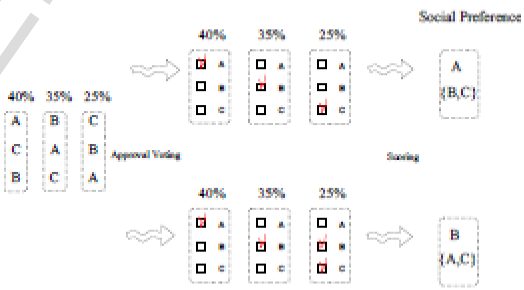
Αυτό παραβιάζει και πάλι το κριτήριο της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών λύσεις, εφόσον ο B κινείται πιο πάνω σε σχέση με τον A στον τομέα της κοινωνικής προτίμησης, ενώ όλες οι επιμέρους προτιμήσεις AB παραμένουν σταθερές.

8.3.6 Ψηφοφορία Έγκρισης

Πρόσφατα η Έγκριση των ψηφοφοριών έχει γίνει πολύ δημοφιλής σε ορισμένες επαγγελματικές οργανώσεις. Πρόκειται για μια διαδικασία κατά την οποία οι ψηφοφόροι μπορούν να ψηφίσουν, ή να γκρίνουν, όσους υποψηφίους επιθυμούν. Χρησιμοποιείται ένα **ψηφοδέλτιο έγκρισης** όπου σημειώνεται κάθε εγκεκριμένος υποψήφιος . Κάθε εγκεκριμένος υποψήφιος λαμβάνει μία ψήφο, και αυτός με τις περισσότερες ψήφους κερδίζει.

Δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι αυτή η μέθοδος είναι επίσης ευάλωτη στην στρατηγική ψηφοφορία. Δίνουμε ένα παράδειγμα όπου μια στρατηγική είναι ισοδύναμη με συμβιβασμούς επιτρέποντας στους υποστηρικτές του C να εκλέξουν ,τον δεύτερο στη σειρά προτίμησης τους, υποψήφιο.

Σχήμα 8.12. Οι υποψήφιοι A και C θα λάβουν μία ψήφο.



Σχήμα 8.13. Όταν οι υποστηρικτές του C μαρκάρουν επίσης και τον B, όπως έχει εγκριθεί, η κοινωνική προτίμηση μεταξύ των A και B αλλάζει, ενώ εξακολουθούν να υφίστανται όλες οι ατομικές προτιμήσεις AB.

Αυτό δείχνει ότι η έγκριση των ψηφοφοριών παραβιάζει επίσης το κριτήριο της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών.

8.4 Θεώρημα αδυναμίας του Arrow

Το 1951 ο Kenneth Arrow διατύπωσε και απέδειξε το γνωστό «*θεώρημα αδυναμίας*». Έδειξε ότι το μόνο σύνταγμα (πολίτευμα) που είναι μεταβατικό, σέβεται την ομοφωνία και είναι άτρωτο σε στρατηγική ψηφοφορία είναι μια δικτατορία. Ένα πολίτευμα λέγεται δικτατορία από ένα άτομο D αν για κάθε ζεύγος εναλλακτικών λύσεων α και β,

$$a >_S \beta \Leftrightarrow a >_D \beta$$

Στην ουσία, η προτίμηση του δικτάτορα καθορίζει την κοινωνική προτίμηση.

Θεώρημα 8.4.1. Θεώρημα του Arrow. Κάθε πολίτευμα που σέβεται τη μεταβατικότητα, την ομοφωνία και την ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών λύσεων είναι η δικτατορία.

Παρακάτω παρουσιάζουμε μια απλοποιημένη απόδειξη του θεωρήματος του Arrow. Η απόδειξη απαιτεί να θεωρούμε ακραίες εναλλακτικές λύσεις - εκείνους στην κορυφή ή στο τέλος της κατάταξης. Ας καθορίσουμε ένα άτομο Χ και μια εναλλακτική λύση β. Λαμβάνοντας υπόψη το χαρακτηριστικό π ορίζουμε δύο νέα χαρακτηριστικά:

- $\pi^{+}(\mathrm{X},\beta)$ τέτοιο ώστε $\beta >_X \alpha$ για όλα τα $a \neq \beta$, όλες οι άλλες προτιμήσεις είναι όπως στο π
- $\pi^{-}(\mathrm{X},\beta)$ τέτοιο ώστε $\beta <_X \alpha$ για όλα τα $a \neq \beta$, όλες οι άλλες προτιμήσεις είναι όπως στο π.

Ορισμός 8.4.1. Το Χ λέγεται ότι είναι εξαιρετικά σημαντικό για μια εναλλακτική β στο προφίλ π εάν για όλα τα $a \neq \beta$ στο Α, το $\pi^{+}(\mathrm{X},\beta)$ οδηγεί σε μια κοινωνική κατάταξη όπου, $\beta >_S \alpha$. Ομοίως, το $\pi^{-}(\mathrm{X},\beta)$ οδηγεί σε μια κοινωνική κατάταξη όπου $\beta <_S \alpha$.

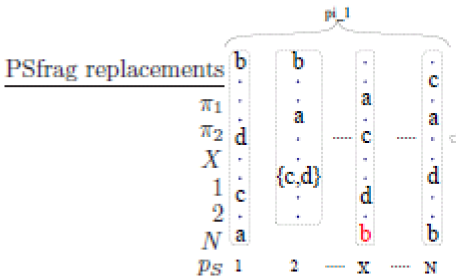
Ένα τέτοιο άτομο μπορεί να μετακινήσει μια εναλλακτική λύση β από τον «πάτο» της κοινωνικής προτίμησης στην κορυφή. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα πολύ βασικό άτομο Χ το οποίο πρέπει να αποτελεί αληθινός δικτάτορας.

Λήμμα 8.4.1 Έστω ότι η εναλλακτική β επιλέγεται αυθαίρετα από το Α. Για ένα προφίλ, όπου κάθε ατομική προτίμηση έχει την εναλλακτική b σε ακραία θέση (στην κορυφή ή στο κάτω μέρος), η b πρέπει να κατέχει επίσης ακραία θέση στην κοινωνική προτίμηση.

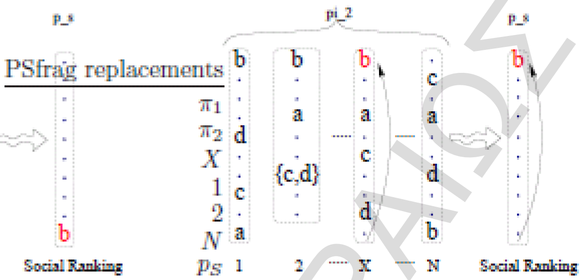
Απόδειξη. Υποθέτουμε, προς μια αντίφαση, ότι για ένα τέτοιο προφίλ και διακριτά α, b, c, η κοινωνική προτίμηση δίνει $a \geq_s b$ και $b \geq_s c$. Ας θεωρήσουμε ένα νέο προφίλ, όπου κάθε άτομο μετακίνησε το c αυστηρά πάνω από το a στη γενική κατάταξη του. Καμία από τις ab ή bc κατατάξεις δε θα διαταραχθεί. Ως εκ τούτου, από την ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών, σε ένα τέτοιο προφίλ έχουμε $a \geq b$ και $b \geq c$. Από τη μεταβατικότητα τότε, $a \geq c$, ενώ η ομοφωνία συνεπάγεται $c > a$, μια αντίφαση.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι υπάρχει ένας ψηφοφόρος Χ = Χ (b) ο οποίος είναι εξαιρετικά καθοριστικός για το b σε ένα συγκεκριμένο προφίλ π_1. Ας θεωρήσουμε ένα προφίλ έτσι ώστε κάθε ατομική προτίμηση έχει το b στο κάτω μέρος της κατάταξης. Με την ομοφωνία η κοινωνική ιεράρχηση κάνει το ίδιο. Τώρα έστω ότι τα άτομα κινούν διαδοχικά το b από τη βάση προς την κορυφή της κατάταξής τους. Από το παραπάνω λήμμα, για κάθε ένα από αυτά τα προφίλ, το b είναι είτε στην κορυφή είτε στο κάτω μέρος της κοινωνικής κατάταξης. Επίσης, με ομοφωνία, από τη στιγμή που όλα τα άτομα τοποθετούν το b στην κορυφή των κατατάξεων τους, έτσι πρέπει να κάνει η κοινωνία. Ως εκ τούτου, πρέπει να υπάρχει το πρώτο άτομο X (ένας ηγούμενος, η ταυτότητά του φαίνεται να εξαρτάται από τη διάταξη της αλλαγής προτίμησης), του οποίου η αλλαγή στην προτίμηση κατακρημνίζει την αλλαγή στην κοινωνική κατάταξη του b.

Συμβολίζουμε με π_1 το προφίλ λίγο πριν ο X μετακινήσει το b προς την κορυφή, και με π_2 το προφίλ αμέσως μετά την αλλαγή.



Σχήμα 8.14.



Σχήμα 8.15.

Υποστηρίζουμε ότι ο X πρέπει να είναι «*περιορισμένος δικτάτορας*» σε κάθε ζεύγος ac που δεν περιλαμβάνει το b. Ένα άτομο X καλείται περιορισμένος δικτάτορας υπεράνω του ac, συμβολίζεται με D (ac), εάν $a >_S c$ κάθε φορά που $\alpha >_X c$ και $c >_S a$ όποτε $c >_X a$. Ας επιλέξουμε ένα στοιχείο, έστω το α από το ζεύγος ac. Κατασκευάζουμε ένα προφίλ π_3 από το π_2, αφήνοντας τον X να μετακινήσει το α πάνω από το β, έτσι ώστε $\alpha >_X b >_X c$, και αφήνοντας όλα τα άλλα άτομα αυθαίρετα να αναδιατάξουν την αντίστοιχη κατάταξή τους a και c. Από την ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών η κοινωνική κατάταξη που αντιστοιχεί στο π_3 θα θέσει αναγκαστικά $a >_S b$, δεδομένου ότι όλες οι επιμέρους ab προτιμήσεις είναι όπως στο προφίλ π_1 όπου ο X τοποθετεί το b στο κάτω μέρος. Δεδομένου ότι όλες οι επιμέρους bc προτιμήσεις είναι όπως στο προφίλ π_2 όπου ο X τοποθετεί το b στην κορυφή, στην κοινωνική κατάταξη πρέπει να έχουμε $b >_S c$. Ως εκ τούτου, από τη μεταβατικότητα, $\alpha >_S c$. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω της ανεξαρτησίας των άσχετων εναλλακτικών, η κοινωνική ιεράρχηση μεταξύ των ac συμπίπτει αναγκαστικά με εκείνη του ατόμου X. Ως εκ τούτου $X = D(ac)$ ένας δικτάτορας άνω του ac. Μένει να αποδειχθεί ότι ο X είναι επίσης ένα δικτάτορας του ab.

Επιλέγουμε ένα άλλο διακριτό εναλλακτικό d και κατασκευάζουμε ένα εξαιρετικά καίριο ψηφοφόρο X (d). Από το παραπάνω επιχείρημα, ένα τέτοιο πρόσωπο είναι ένας δικτάτορας πάνω από κάθε ζεύγος αβ χωρίς τη συμμετοχή του d, για παράδειγμα ab. Αλλά ο X μπορεί να επηρεάσει την κοινωνική κατάταξη του ab στα προφίλ π_1 και π_2, οπότε, $X = X(d) = D(ab)$ και επομένως είναι ο εν λόγω ab δικτάτορας.

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα δεν λέει ότι ο συγκεκριμένος εκλογικός μηχανισμός, δεν έχει σημασία, αλλά περιορίζεται στον ισχυρισμό ότι η δικτατορία από ένα άτομο είναι ο μόνος μηχανισμός που είναι απαλλαγμένος από τη στρατηγική χειραγώγησης. Μια ομάδα σε αναζήτηση ενός αποδεκτού εκλογικού μηχανισμού θα πρέπει να το έχει αυτό κατά νου. Υπάρχουν πολλά άλλα κριτήρια «δικαιοσύνης» που θα μπορούσαν και θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν για να επιλέξουμε έναν «καλό» μηχανισμό.

Κεφάλαιο 9

Μερικές εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων

9.1 Το σχέδιο διαιτησίας του Nash και συνεργατικές λύσεις.

Στην ανάλυση των παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες έχουν παίξει μη συνεργατικά. Καθένας έχει προσπαθήσει να κάνει το καλύτερο δυνατό για τον εαυτό του επιλέγοντας στρατηγικές ή κάνοντας στρατηγικές δεσμεύσεων, απειλών ή υποσχέσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μια διαφορετική προσέγγιση. Φανταστείτε τους παίκτες να κάθονται μαζί να αποφασίσουν τι είναι λογικό ή δίκαιο αποτέλεσμα για το παίγνιο και στη συνέχεια να συμφωνούν για την εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος. Εναλλακτικά, φανταστείτε ότι οι παίκτες προσφεύγουν σε έναν αμερόληπτο εξωτερικό διαμεσολαβητή ο οποίος θα καθορίσει ένα λογικό και δίκαιο αποτέλεσμα, και ότι συμφωνούν να τηρήσουν την απόφαση του. Ποιες αρχές πρέπει να διέπουν τους παίκτες ή τον εξωτερικό διαμεσολαβητή σε αυτό το πλαίσιο και πως μπορούμε να καθορίσουμε μια λογική και δίκαιη έκβαση ενός παιγνίου.

Παράδειγμα 9.1

Colin

	A	**B**
A	(2,6)	(10,5)
B	(4,8)	(0,0)

Παίγνιο 9.1

Με ποίο τρόπο θα συμβουλεύαμε τους παίκτες να χειριστούν αυτό το παίγνιο δίκαια. Η ποιό προφανής συμβουλή θα μπορούσε να είναι να διαλέξουν η Rose και ο Colin το αποτέλεσμα με τη μεγαλύτερη συνολική ωφέλεια και στη συνέχεια να χωρίσουν αυτή την πληρωμή εξίσου. Σε αυτό το παίγνιο θα παίξουν Rose A-Colin B για ένα σύνολο 15, και θα χωρίσουν την πληρωμή για να λάβουν ο καθένας 7,5. Αυτό καλείται *ισότιμη πρόταση* η οποία παρουσιάζει ατέλειες σε δύο διαφορετικούς τρόπους που απεικονίζουν σημαντικές αοριστίες στο πρόβλημά μας.

Το πρώτο μειονέκτημα είναι ότι οι εξοφλήσεις στο παίγνιο υποτίθεται ότι είναι κοινής ωφέλειας. Οι διαφορετικές ωφέλειες των παικτών δεν μπορούν ουσιαστικά να προστεθούν, δεν μπορούν να χωριστει η ωφελεία εξίσου. Η ισότιμη πρόταση απλώς δεν έχει νόημα.

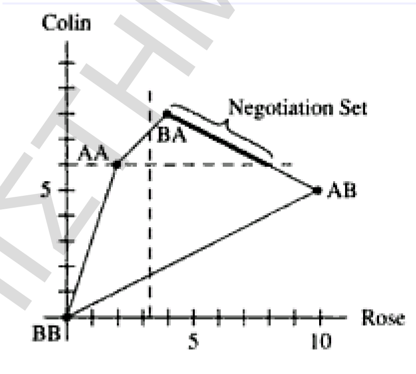
Το δεύτερο μειονέκτημα είναι ότι η ισότιμη πρόταση αγνοεί – παραλείπει τις ασυμμετρίες της στρατηγικής θέσης στο παίγνιο. Σε αυτό το παίγνιο ο Colin έχει μια ισχυρή θέση, αφού η Colin A υπερέχει της Colin B και το φυσικό αποτέλεσμα από το παίγνιο να είναι Rose B – Colin A, δίνοντας στον Colin το καλύτερο αποτέλεσμα. Ο Colin θα μπορούσε εύλογα να υποστηρίξει ότι είναι άδικο να αγνοήσουμε την πραγματικότητα της ανώτερης στρατηγικής του θέσης για τον προσδιορισμό ενός δίκαιου αποτέλεσματος στο παίγνιο.

Πρέπει ως εκ τούτου να βρούμε μια μέθοδο παιχνιδιών διαιτησίας που δεν συνεπάγεται παράνομη χειραγώγηση των υπηρεσιών κοινής ωφέλειας, λαμβάνει υπόψη τη στρατηγική των ανισοτήτων και έχει αξίωση την αμεροληψία. Η πρώτη καλή ιδέα προς αυτήν την κατεύθυνση πηγαίνει πίσω στους von Neumann και Morgenstern. Συμφώνησαν ότι κάθε λογική λύση διαιτησίας σε ένα παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος πρέπει να είναι

- Βέλτιστη κατά Pareto. Δεν θα πρέπει να είναι ένα άλλο αποτέλεσμα που είναι καλύτερο και για τους δύο παίκτες, ή καλύτερο για έναν και εξίσου καλό για τον άλλο.

- Ίση ή μεγαλύτερη από το επίπεδο ασφάλειας για τους δυο παίκτες. Κανένας παίκτης δεν θα πρέπει να αναγκαστεί να δεχθεί λιγότερο από ό, τι θα μπορούσε να εγγυηθεί ο ίδιος σε μη συνεργατικό παίγνιο.

Το σύνολο των (καθαρών και μικτών) αποτελεσμάτων που ικανοποιούν αυτές τις δύο συνθήκες καλείται σύνολο διαπραγμάτευσης του παιγνίου. Στο παίγνιο 9.1 μπορούμε να ελέγξουμε ότι τα επίπεδα ασφαλείας είναι $\frac{10}{3}$ για τη Rose και 6 για τον Colin. Μελετώντας το πολύγωνο πληρωμής στο σχήμα 16.1, βλέπουμε ότι τα βέλτιστα κατά Pareto αποτέσματα είναι εκείνα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το (4,8) ως το (8,6). Ως εκ τούτου το σύνολο διαπραγμάτευσης συνίσταται από τα αποτελέσματα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα από το (4,8) στο (8,6). Αυτά αντιστοιχούν στη Rose και τον Colin παίζοντας μίξη των BA και AB, με BA να παίζεται το λιγότερο σε $\frac{1}{3}$ του χρόνου.



Σχήμα 9.1 πολύγωνο πληρωμής για το παίγνιο 9.1

Μια ¨όμορφη¨ ιδέα για το πώς να βρεθεί το ποιό δίκαιο αποτέλεσμα προτάθηκε από το John Nash . Είναι γνωστή ως σχέση διαιτησίας Nash. O Nash θεώρησε ένα πιο γενικό πρόβλημα. Θεωρείστε δύο μέρη των διαπραγματεύσεων, την Rose και τον Colin, που έχουν στη διάθεσή τους μια συλλογή των αποτελεσμάτων τα οποία, όταν εκπροσωπούνται σε ένα επίπεδο συντεταγμένων από τις ωφέλειες της Rose και του Colin, δίνουν ένα κυρτό πολύγωνο. Οι ομάδες προσπαθούν να συμφωνήσουν σε κάποιο αποτέλεσμα σε αυτό το σύνολο. Αν αποτύχουν στο να συμφωνήσουν, θα λάβουν κάποιο προκαθορισμένο αποτέλεσμα στο πολύγωνο, που καλείται status quo σημείο. Πως θα μπορούσαν να διαλέξουν ένα δίκαιο σημείο στο οποίο να συμφωνήσουν;

Μια γενική μέθοδος για να λυθεί αυτό το πρόβλημα πρέπει να παίρνει κάθε κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο, με ένα σημείο status quo SQ στο πολύγωνο, να παράγει ένα σημείο στο πολύγωνο ως λύση. Μια μέθοδος που το κάνει αυτό θα καλείται σχέδιο διαιτησίας. Ο Nash ξεκίνησε γράφοντας τέσσερα αξιώματα τα οποία πίστευε ότι ικανοποιούν αυτή το σχέδιο:

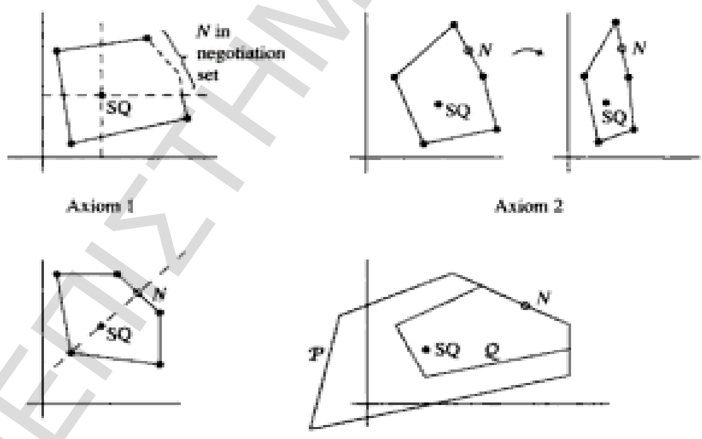
Αξίωμα 9.1.1: Λογικότητας. Το σημείο επίλυσης πρέπει να είναι στο σύνολο διαπραγμάτευσης.

Αξίωμα 9.1.2: Γραμμικότητας Αν είτε οι ωφέλειες της Rose είτε του Colin μετασχηματίζονται από μια ρητή γραμμική συνάρτηση, το σημείο επίλυσης πρέπει να μετασχηματίζεται από το ίδιο σημείο.

Αξίωμα 9.1.3:: Συμμετρίας. Αν το πολύγωνο συμβαίνει να είναι συμμετρικό για τη γραμμή κλίσης +1 μέσω του SQ, τότε το σημείο λύσης θα πρέπει να είναι σε αυτή τη γραμμή.

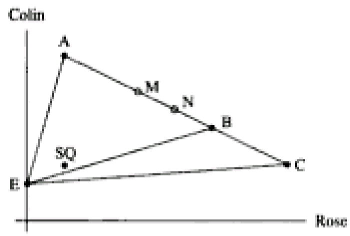
Αξίωμα 9.1.4: Ανεξαρτησίας. Υποθέστε ότι το N είναι το σημείο επίλυσης για το πολύγωνο P με σημείο status quo SQ. Υποθέστε ότι το Q είναι ένα άλλο πολύγωνο το οποίο περιλαμβάνει και το SQ και το N, και περιλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου στο P. Τότε το N πρέπει επίσης να είναι το σημείο επίλυσης για το Q με status quo το σημείο SQ.

Τα τρία πρώτα αξιώματα είναι αρκετά απλά σε αντίθεση με το Αξίωμα 4 το οποίο είναι πολύπλοκο. Ο Nash ισχυρίστηκε για το Αξίωμα 4 τα ακόλουθα. Υποθέστε στην περίπτωση που το P είναι το σύνολο των εναλλακτικών και SQ είναι το status quo, ότι η Rose και ο Colin συμφωνούν ότι το N είναι το πιο δίκαιο δυνατό αποτέλεσμα. Τώρα ας υποθέσουμε ότι κάποια από τα αποτελέσματα στο P ανακαλύπτονται να μην είναι διαθέσιμα μετά απ' όλα αυτά – το σύνολο των διαθέσιμων αποτελεσμάτων συρρικνώνεται στο Q. Τότε το N, το οποίο κρίθηκε πιο δίκαιο από όλα τα άλλα αποτελέσματα στο P, πρέπει ακόμη να είναι δικαιότερο από όλα τα άλλα αποτελέσματα στο Q.



Σχήμα 9.2 Τα Αξιώματα του Nash.

Στο σχήμα 9.3, υποθέστε ότι το N είναι η λύση στο πρόβλημα διαιτησίας (EAC,SQ). Τότε από το Αξίωμα 4 πρέπει επίσης να είναι η λύση στο πρόβλημα (EAB,SQ). Αλλά αν σκεφτούμε ότι το N ήταν δίκαιο επειδή φαινόταν να είναι ένας λογικός συμβιβασμός μεταξύ του προτιμόμενου σημείου C της Rose και του προτιμόμενου σημείου Ατου Colin, δεν θα ήταν ένα σημείο όπως το M πιο δίκαιο αν προκύπτει ότι το C δεν είναι διαθέσιμο και το καλύτερο που η Rose μπορεί να ελπίζει είναι το B. O Nash ισχυρίστηκε ότι αν το N ήταν πιο δίκαιο από το Μμε το C διαθέσιμο, είναι ακόμη δικαιότερο αν το C δεν είναι διαθέσιμο. Η δικαιοσύνη δεν πρόκειται να επηρεαστεί από την διαθεσιμότητα ή την έλλειψη εξωπραγματικών, ουτοπικών εναλλακτικών λύσεων.



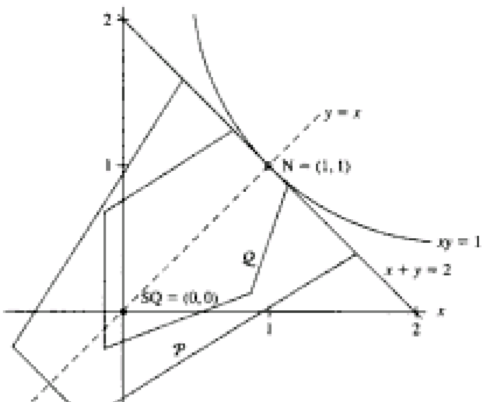
Σχήμα 9.3 Τι αποκλείει η ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών

Αν συμφωνήσουμε να δεχτούμε τα τέσσερα αξιώματα του Nash ως συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί μια σχέση διαιτησίας, τότε η σχέση διαιτησίας που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι πλήρως καθορισμένη, για τον Nash αποδείχθηκε το ακόλουθο αξιοσημείωτο θεώρημα:

Θεώρημα 9.1.1. Υπάρχει μία και μοναδική σχέση διαιτησίας η οποία ικανοποιεί το Αξίωμα 1 μέχρι το 4. Αυτή είναι η: $SQ=(x_0, y_0)$, τότε το σημείο επίλυσης διαιτησίας N είναι το σημείο (x,y) στο πολύγωνο με $x \geq x_0$ και $y \geq y_0$ που μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα $(x-x_0)(y-y_0)$.

Το θεώρημα είναι εκπληκτικό πρώτον λόγω της δήλωσης μοναδικότητας : αυτή η σχέση διαιτησίας είναι η μόνη σχέση η οποία ικανοποιεί τα Αξιώματα του Nash. Δεύτερον, είναι εκπληκτικό επειδή απαιτεί από εμάς να μεγιστοποιήσουμε το αποτέλεσμα των κερδών ωφέλειας των παικτών από το σημείο status quo. Αυτό φαίνεται μυστήριο, αλλά προσέξτε ότι ταιριάζει καλά με το Αξιωμα 2. Αν πολλαπλασιάζαμε όλες τις τιμές x , έστω, με μια θετική σταθερά, το αποτέλεσμα $(x-x_0)(y-y_0)$ θα μπορούσε να πολλαπλασιαστεί με αυτή την σταθερά και το αποτέλεσμα που μεγιστοποιούσε το προιον πριν, θα συνεχίσει να το μεγιστοποιεί και μετά. Στην πραγματικότητα, είναι σχετικά εύκολο να ελέγξουμε ότι αυτή η σχέση διαιτήσίας ικανοποιεί και τα τέσσερα αξιώματα του Nash. Είναι λίγο πιο δύσκολο να αποδείξουμε ότι είναι η μόνη σχέση η οποία κάνει και αξίζει να παρακολουθούμε στενά.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε πολύγωνο Q, με σημείο status quo (x, x_0). Συμβολίζουμε με N το σημείο στο Q με $x \geq x_0$, $y \geq y_0$ το οποίο μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα $(x-x_0)(y-y_0)$. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε σχέση διαιτησίας που ικανοποιεί τα Αξιώματα 1έως 4 πρέπει να επιλέγει το N ως το σημείο λύσης για αυτή την κατάσταση.



Σχήμα 9.4: Η απόδειξη του θεωρήματος του Nash.

Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα 2, πρώτα αφαιρούμε το x_0 από όλες τις x-ωφέλειες και το y_0 από όλες τις y-ωφέλειες , έτσι ώστε το σημείο status quo είναι στο (0,0). Ύστερα πολλαπλασιάζουμε τις x-ωφέλειες και τις y-ωφέλειες με θετικές σταθερές έτσι ώστε το σημείο N είναι στο (1,1). Στη συνέχεια από την ιδιότητα μεγιστοποίησης αποτελέσματος του N, ολόκληρο το πολύγωνο Q πρέπει να βρίσκεται πάνω ή κάτω από το θετικό σκέλος της υπερβολής $xy = 1$. Στην πραγματικότητα , εφόσον η υπερβολή είναι κοίλη προς τα πάνω και το Q είναι κυρτό, το Q πρέπει να βρίσκεται πάνω ή κάτω από την εφαπτομένη της υπερβολής στο (1,1), η οποία είναι η ευθεία $x + y = 2$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να περικλείουμε το Q σε ένα μεγαλύτερο πολύγωνο P το οποίο έχει αυτή την εφαπτομένη γραμμή ως βορειοανατολικό όριο του, και είναι συμμετρική με τη γραμμή x = y. Η σχέση απεικονίζεται στο σχήμα 9.4. Τώρα από τα Αξιώματα 1 και 3, η λύση στο πρόβλημα της διαιτησίας $(P,(0,0))$ πρέπει να είναι το N. Ύστερα από το Αξίωμα 4, η λύση στο πρόβλημα της διαιτησίας $(Q,(0,0))$ επίσης πρέπει να είναι το N, και έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη.

Παρατηρήστε πώς κάθε ένα από τα αξιώματα υπεισέρχεται σε αυτό τον ισχυρισμό, και ιδίως τον πανίσχυρο ρόλο του Αξιώματος 4 στο τέλος. Πέραν της θεωρητικής κομψότητας της απόδειξης αυτής, η επίλυση Nash στο πρόβλημα της διαιτησίας έχει το πλεονέκτημα να είναι εύκολη στους υπολογισμούς. Θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.2. Υποθέτουμε ότι η Rose και ο Colin πρέπει να συμφωνήσουν σε ένα από τα αποτελέσματα $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,2)$, $D(1,5)$, ή σε κάποια πιθανή μείξη αυτών των αποτελεσμάτων. Οι αριθμοί για κάθε αποτέλεσμα είναι, φυσικά, οι ωφέλειες της Rose και του Colin για αυτό το αποτέλεσμα. Αν δεν μπορούν να συμφωνήσουν, το αποτέλεσμα θα είναι το $SQ = (2,1)$. Ως Nash διαιτητής, τι θα προτείνατε για μια δίκαιη λύση;

Αυτή η κατάσταση απεικονίζεται στο σχήμα 9.5a. Το σημείο Nash πρέπει να βρίσκεται στο σύνολο διαπραγμάτευσης, το οποίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το (2,4) στο (4,2). Αυτό είναι το σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα $(x-2)(y-1)$. Δεδομένου ότι η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος είναι $y = 6 - x (2 \le x \le 4)$, η έκφραση που πρέπει να μεγιστοποιήσουμε είναι

$$(x-2)(6-x-1) = -x^2 + 7x - 10.$$

Για τη γενική δευτεροβάθμια έκφραση

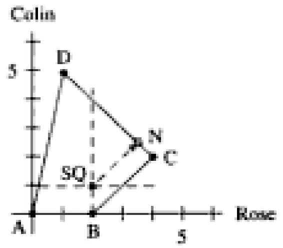
$$-ax^2 + bx + c \qquad (a \ge 0)$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορικό λογισμό ή την ολοκλήρωση του τετραγώνου, για να διαπιστώσουμε ότι το μέγιστο εμφανίζεται στο $x = b/2a$. Ως εκ τούτου , το μέγιστο είναι στο $x = 7/2$, και στο $y = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$. Αυτό είναι $\frac{5}{6}C + \frac{1}{6}D$, το οποίο είναι αυτό που πρέπει να προτείνουμε ως λύση.

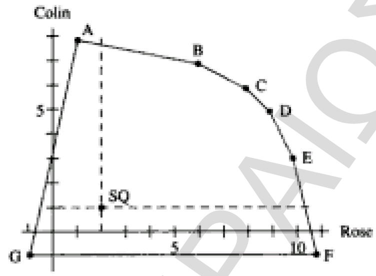
Το πρόβλημα αυτό έχει την ιδιαίτερη ιδιότητα ότι το βέλτιστο όριο κατά Pareto είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα της κλίσης –1. Όποτε αυτό είναι αληθές, υπάρχει ένας εύκολος γεωμετρικός τρόπος να βρούμε το σημείο επίλυσης Nash: ξεκινάμε στο SQ και πηγαίνουμε βορειοανατολικά μέχρι να βρούμε το όριο, και αυτό το σημείο είναι το σημείο λύσης του Nash.

<u>Παράδειγμα 9.3</u>. Υποθέτουμε ότι οι εναλλακτικές λύσεις είναι $A(1,8)$, $B(6,7)$, $C(8,6)$, $D(9,5)$, $E(10,3)$, $F(11,-1)$, $G(-1,-1)$ και το status quo είναι $SQ=(2,1)$. Ποιό είναι το σημείο επίλυσης του Nash;

Αυτή κατάσταση απεικονίζεται στο σχήμα 9.5b. Το σύνολο διαπραγμάτευσης είναι μια συλλογή από ευθύγραμμα τμήματα. Για να πάρουμε μια ιδέα που μπορεί να βρίσκεται το σημείο επίλυσης, υπολογίζουμε



α) Παράδειγμα 9.2



b) Παράδειγμα 9.3

Σχήμα 9.5

$(x-2)(y-1)$ για τα γωνιακά σημεία του συνόλου διαπραγμάτευσης:

B: $(6-2)(7-1)=24$
C: $(8-2)(6-1)=30$
D: $(9-2)(5-1)=28$
E: $(10-2)(3-1)=16.$

Δεδομένου ότι το C έχει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα, το σημείο λύσης θα βρίσκεται σε ένα από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα BC ή CD. Η ευθεία που περιλαμβάνει το BC έχει εξίσωση $y=10-\frac{1}{2}x$, οπότε πρέπει να μεγιστοποιήσουμε

$$(x-2)(10-\frac{1}{2}x-1)=-\frac{1}{2}x^2+10x-18$$

Το μέγιστο προκύπτει στο x=10, το οποίο είναι πέρα από το τέλος του C του ευθύγραμμμου τμήματος BC. Ως εκ τούτου το μέγιστο σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα είναι στο τελικό σημείο C. Επομένως το C είναι το σημείο λύσης Nash.

Με την λύση Nash σε γενικό πρόβλημα διαιτησίας αντιθέτως , μπορούμε να εξετάσουμε το δικό μας αυθεντικό πρόβλημα ευρέσης μιας δίκαιης λύσης διαιτησίας σε ένα παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος. Το πολύγωνο πληρωμής για το παίγνιο μας δίνει το πολύγωνο για ένα πρόβλημα διαιτησίας. Για να βρούμε το σημείο status quo, πρέπει να αναρωτηθούμε τι θα συμβεί αν η διαιτησία αποτύχει. Μια πιθανότητα είναι να παραδεχτούμε ότι δεν γνωρίζουμε τι ακριβώς θα συμβεί , εκτός και αν κάθε πάικτης μπορεί να διαβεβαιώσει τουλάχιστον το επίπεδο ασφάλειας του. Οπότε μπορούμε να πάρουμε ως σημείο status quo το σημείο του οποίου οι συντεταγμενες είναι τα επίπεδα ασφαλείας των Rose και Colin. Για το παίγνιο 16.1 θα πάρουμε $SQ=(3\frac{1}{3},6)$. Η λύση διαιτησίας του Nash τότε αποδεικύεται ότι είναι

$(5\frac{2}{3},7\frac{1}{6})$, ή $\frac{13}{18}BA+\frac{5}{18}AB$. Θα συνιστούσαμε στους παίκτες να συμφωνήσουν για να παίξουν ΒΑ με πιθανότητα $\frac{13}{18}$, ΑΒ με πιθανότητα $\frac{5}{18}$. Αν έπαιζαν το παίγνιο πολλές φορές, θα μπορούσαν να παίξουν ΒΑ $\frac{13}{18}$ τη φορά, και ΑΒ $\frac{5}{18}$ τη φορά.

Τα επίπεδα ασφαλείας έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολα στον υπολοσμό, αλλά θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε σχετικά με τη χρήση τους για το σημείο status quo. Ο Nash μόνος του, όταν εξέτασε το πρόβλημα διαιτησίας στα παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, πρότεινε μια διαφορετική ιδέα. Ισχυρίστηκε ότι σε μια κατάσταση διαιτησίας για ένα παίγνιο, οι πάικτες θα μπορούσαν κάλλιστα να επηρεάσουν το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας στρατηγικές απειλής:"Αν οι διαπραγματεύσεις ναυαγήσουν, θα παίξω την ακόλουθη στρατηγική , η οποία θα έχει άσχημα αποτελέσματα για σένα." Το κατάλληλο status quo σημείο, θα είναι τότε το αποτέλεσμα που καθορίζεται από τις στρατηγικές απειλής. Ξέροντας αυτό, κάθε παίκτης θα μπορούσε να επιλέξει την στρατηγική απειλής για να λάβει ένα σημέιο status quo όσο πιο επιθυμητό γίνεται για αυτόν, γνωρίζοντας ότι ο αντίπαλος του θα κάνει το ίδιο ακριβώς. Με άλλα λόγια, η επιλογή των στρατηγικών απειλής αποτελεί ένα παίγνιο! Ωστόσο, δίνει μια βέλτιστη στρατηγική απειλής για κάθε παίκτη. Ο Nash πρότεινε ότι το status quo σημείο για την διαιτησία θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα που καθορίζεται από αυτές τις βέλτιστες στρατηγικές απειλής.

Και σε πολύπλοκες περιπτώσεις, η βέλτιστη στρατηγική απειλής Nash μπορεί να είναι δύσκολη στον υπολογισμό. Υπάρχει μια περίπτωση όπου ο υπολογισμός είναι πολύ εύκολος : όταν το σύνολο διαπραγματέυσεων αποτελείται από ένα μόνο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου η κλιση είναι –1. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε δει ότι το σημείο επίλυσης του Nash μπορεί να βρεθεί από το σημείο status quo μετακινώντας βορειοανατολικά κατά μήκος μιας γραμμής κλισης +1. Ως εκ τούτου, η διαφορά μεταξύ της πληρωμής της Rose και της πληρωμής του Colin στο SQ θα διατηρηθεί στη λύση της διαιτησίας. Η Rose θα ήθελε η διαφορά αυτή να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη, ενώ ο Colin θα ήθελε να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρή. Ως εκ τούτου η Rose και ο Colin θα έβρισκαν τις βέλτιστες στρατηγικές απειλής παίζοντας ένα παιχνιδί διαφορών μη μηδενικού αθροίσματος που παράγεται από το κανονικό παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε

		Colin	
		A	**B**
Rose	**A**	(2,12)	(10,10)
	B	(4,16)	(0,0)

Παίγνιο 9.2

Το σύνολο των διαπραγματεύσεων είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το (4,16) στο (10,10), το οποίο έχει κλίση –1. Το παίγνιο των διαφορών είναι

		Colin	
		A	**B**
Rose	**A**	-10	0
	B	-12	0

το οποίο έχει ένα σαγματικό σημείο στο ΑΑ. Ως εκ τούτου η στρατηγική Α είναι μια βέλτιστη στρατηγική και για τους δύο παίκτες, και ο Nash θα έπαιρνε το σημείο status quo για μια λύση διαιτησίας στο παίγνιο 9.2 να είναι $SQ=(2,12)$. Βέβαια, σε άλλα παίγνια οι βέλτιστες στρατηγικές απειλής θα μπορούσε να αποδειχθούν ότι είναι μικτές στρατηγικές.

Εαν το σύνολο διαπραγμάτευσης στο πολύγωνο του παιγνίο είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο πρέπει να έχει αρνητική κλιση, η κλιση μπορεί να φτιαχτεί να είναι –1 πολλαπλασιάζοντας τις ωφέλειες ενός παίκτη με μια κατάλληλη σταθερά, και ύστερα η διαδικασία της τελευταίας παραγράφου μπορεί να εφαρμοστεί για να βρεθούν βέλτιστες στρατηγικές απειλής. Για παραδειγμα, το παίγνιο 9.1 είχε το σύνολο διαπραγμάτευσης του σε μια γραμμή με κλίση –1/2. Αν πολλαπλασιάσουμε τις ωφέλειες το Colin με το 2, η κλίση γίνεται –1, και στην πραγματικότητα λαμβάνουμε ακριβώς το παίγνιο 16.2. Ως εκ τούτου οι βέλτιστες στρατηγικές απειλής είναι Α και Α , και η λύση διαιτησίας Nash προκύπτει ότι είναι $(5,7\frac{1}{2})=\frac{5}{6}BA+\frac{1}{6}AB.$ Αυτό είναι πιο ευνοϊκό για τον Colin από ότι εκείνη η λύση που λάβαμε όταν χρησιμοποιήσαμε τα επίπεδα ασφάλειας για να βρούμε το σημείο status quo. Σημειώσαμε νωρίτερα ότι ο Colin έχει ένα στατηγικό πλεονέκτημα σε αυτό το παίγνιο, το οποίο θα μπορούσε να αντικατοπτρίζεται σε κάθε δίκαιη επίλυση διαιτησίας. Μέρος αυτού του πλεονεκτήματος στρατηγικής αντικατοπτρίζεται στο υψηλότερο επίπεδο ασφάλειας του Colin, αλλά περισσότερο από αυτό φαίνεται στην ισχυρή ικανότητα του Colin να τρομοκρατεί.

Το συμπέρασμα μας είναι ότι αν χρησιμοποιούμε το σχέδιο διαιτησίας του Nash για να διαχειριστούμε το γενικό πρόβλημα διαιτησίας, οι λύσεις μας για πάιγνια μη μηδενικού αθροίσματος θα εξαρτώνται από το πως προσδιορίζουμε το σημείο status quo. Αυτό με τη σειρά του έχει να κάνει με το πως πιστεύουμε ότι το πλεονέκτημα στρατηγικής θα πρέπει να ληφθή υπόψη.

9.2 Διαιτησία μεταξύ Διαχείρισης – εργατικού Δυναμικού

Η διαχείριση ενός εργοστασίου διαπραγματεύεται ένα νέο συμβόλαιο με την ένωση που αντιπροσωπεύει του εργάτες. Η ένωση έχει απαιτήσει νέα οφέλη για κάθε μέλος : ένα επιπλέον ευρώ για κάθε ώρα ως αύξηση, και αύξηση των συνταξιοδοτικών παροχών. Με τη σειρά της, η διαχείριση έχει απαιτήσει παραχωρήσεις από την ένωση. Η διαχείριση θα ήθελε να αφαιρέσει το διάλειμμα για καφέ στις 10:00 το πρωί, το οποίο έχει αποδειχθεί ότι είναι υπερβολικά δαπανηρό καθώς οι εργαζόμενοι προσαρμόζονται αργά στην γραμμή παραγωγής αφού επιστρέψουν και να αυτοματοποιήσουν ένα από τα σημεία της γραμμής παραγωγής. Η ένωση διαφωνεί και με τις δύο αυτές απαιτήσεις, ειδικότερα με την αυτοματοποίηση, η οποία θα καταργούσε θέσεις εργασίας. Η διαφορά δεν έχει επιλυθεί, αλλά και οι δύο πλευρές επιθυμούν να δοκιμάσουν διαιτησία πριν καταφύγουν σε αυστηρότερα μέτρα. Έχουμε κληθεί ως διαιτητές. Θα μπορούσαμε να βρούμε μια λύση η οποία θα ήταν δίκαιη και θα ικανοποιούσε και τους δύο;

Το πρώτο βήμα θα ήταν να καθίσουμε μαζί με την διαχείριση και το εργατικό δυναμικό ξεχωριστά και να προσδιορίσουμε τις ωφέλειες τους για διάφορες προτάσεις που εξετάζονται:

A: αυτοματοποίηση του σημείου ελέγχου
C: αφαίρεση του διαλείμματος για καφέ
R: ένα ευρώ αύξησηση για κάθε ώρα στους εργάτες
P: αύξηση των συνταξιοδοτικών παροχών
SQ: το status quo

Για διευκόλυνση, μπορούμε να διαλέξουμε κλίμακες ωφέλειας έτσι ώστε το SQ έχει ωφέλεια μηδέν και για τις δύο πλευρές. Ύστερα περιμένουμε η διαχείριση να έχει θετικές ωφέλειες για A και C και αρνητικές για R και P, ενώ οι ωφέλειες των εργατών θα έχουν αντίθετα πρόσημα. Θα μπορούσαμε κάλλιστα να βρούμε, ωστόσο, ότι οι προτιμήσεις δεν είναι απολύτως αντίθετες, οπότε δεν βρισκόμαστε σε κατάσταση μη μηδενικού αθροίσματος. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να υπάρχουν συναλλαγές οι οποίες είναι καλύτερες από το SQ και για τις δύο πλευρές. Θα θέλαμε να βρούμε μια τέτοια συναλλαγή, η οποία είναι, επιπλέον, δίκαιη και για τις δύο πλευρές.

Πρώτα ζητάμε από τη διαχείρηση να κατατάξει τις εναλλακτικές λύσεις. Υποθέτουμε ότι δίνουν ίδιες τιμές στα A και C και θα προτιμήσουν να ενδώσουν στην αύξηση των συνταξιοδοτικών παροχών παρά στην αύξηση, οπότε έχουμε μια τακτική κατάταξη ωφέλειας A=C, SQ, P, R. Στη συνέχεια κάνουμε περαιτέρω ερωτήσεις για να καθορίσουμε την κύρια ωφέλεια. Αυτό μπορεί να λάβει τη μορφή ερωτήσεων λοτταρίας, αλλά μπορεί να υπάρχουν άλλοι πιο φυσικοί τρόποι στους οποίους μπορούν να μπούν οι ερωτήσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να καθορίσουμε ότι η διαχείριση θα είναι αδιάφορη μεταξύ της χορήγησης των παροχών συνταξιοδότησης και της χορήγησης μιας αύξησης του 0,67 € ανά ώρα, και ότι η διαχείριση θα ήταν πρόθυμη να ανταλλάξει ολόκληρη την αύξηση του ενός ευρώ και το ήμισυ των συνταξιοδοτικών παροχών για την εξάλειψη του διαλείμματος για καφέ. Αυτό θα δώσει τις κύριες ωφέλειες.

R	P	SQ	A,C
-3	-2	0	4

Ωφέλειες Διαχείρισης

Στη συνέχεια κάνουμε τις ίδιες ερωτήσεις και λαμβάνουμε

R	P	SQ	A,C
-3	-2	0	4

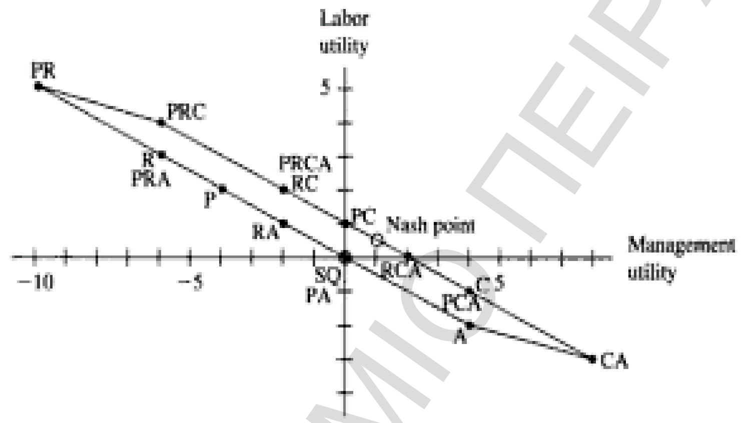
Ωφέλειες Εργατικού δυναμικού

Χρησιμοποιούμε τώρα αυτή τη πληροφορία για να αξιολογήσουμε τις ωφέλειες της διαχείρισης και των εργαζομένων για όλες τις πιθανές "συναλλαγές". Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν οι ωφέλειες είναι πρόσθετες, εκεί αν το εργατικό δυναμικό αξιολογεί βάζοντας το P στο 2 και το R στο 3, θα αξιολογήσει βάζοντας και το P και το R στο 2+3=5. Θα υποθέσουμε ότι αυτό είναι αληθές, αν και υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις στις οποίες τα οφέλη ή παραχωρήσεις δεν θα συμπεριφέρονταν με αυτό τον τρόπο. Για παράδειγμα, παίρνοντας το P θα μπορούσε να είναι περισσότερο πολύτιμο (ή λιγότερο) αν το εργατικό δυναμικό διαλέγει το R, από το αν δεν το έκανε. Αυτές οι περιπτώσεις θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν κάνοντας ξεχωριστές ερωτήσεις ωφέλειας για συναλλαγές με σημαντικούς δεσμούς. Εδώ παρατείθενται οι ωφέλειες των συναλλαγών στο παράδειγμα μας:

		Το εργατικό δυναμικό αποδέχεται			
		Nothing	**C**	**A**	**CA**
Η διαχείριση αποδέχεται	**Nothing**	(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,3)
	P	(-2,2)	(2,1)	(2,0)	(6,-1)
	R	(-3,3)	(1,2)	(1,1)	(5,0)
	PR	(-5,5)	(-1,4)	(-1,3)	(3,2)

Σχεδιάζουμε το πολύγωνο πληρωμής αυτών των αποτελεσμάτων , που φαίνεται στο σχήμα 9.6. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το σημείο διαιτησίας του Nash, χρησιμοποιώντας το (0,0) ως το σημείο status quo. Η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι (3,2) , που αντιστοιχεί στην συναλλαγή PRCA όπου κάθε πλευρά επιδοτεί και τις δύο απαιτήσεις της άλλης πλευράς. Και οι δύο πλευρές είναι σε καλύτερη κατάσταση από ό, τι στο status quo, και τα αξιώματα Nash αξιολογούν το αποτέλεσμα ως δίκαιο.

Η διαδικασία φαίνεται ελκυστική αλλά φυσικά υπάρχουν προβλήματα. Η μη γραμμικότητα της ωφελείας ενδέχεται να περιπλέξει την ανάλυση. Είναι επίσης αληθές ότι η αύξηση του αριθμού των θεμάτων της διαχείρισης και του εργασιακού δυναμικού αυξάνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος δραματικά, σε σημείο όπου ένας υπολογιστής θα καταστεί απαραίτητος. Θα κλείσουμε με την εξέταση τεσσάρων προβλημάτων.



Σχήμα 9.6: πολύγωνο πληρωμής

1) Τί γίνεται αν το σημείο Nash είναι ένα μικτό αποτέλεσμα; Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η λύση Nash στο παράδειγμα ήταν στο $(2,2\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}PRC + \frac{3}{4}PRCA.$ Θα συνιστούσαμε να δοθεί η αύξηση στις συνταξιοδοτικές παροχές, και την εξάλειψη του διαλείμματος για καφέ, αλλά πώς θα μπορούσαμε να δώσουμε 3/4 του αυτοματισμού; Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι η χορήγηση της αυτοματοποίησης αλλά να απαιτεί την εγγύηση ότι το 1/4 των εκτοπισμένων εργαζομένων θα απορροφηθεί σε άλλες θέσεις εργασίας. Κάποια αιτήματα είναι "διαιρετής" φύσεως, όπως αυξήσεις και συνταξιοδοτικά οφέλη. Κάποια άλλα μπορεί να είναι δύσκολο να διαιρεθούν: μείωση του διαλείμματος για καφέ στο μισό δεν θα ικανοποιούσε ούτε τη μία πλευρά ούτε την άλλη. Ωστόσο, ίσως θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε το πρωινό διάλειμμα για καφέ και να μεγαλώσουμε το διάλειμμα για το μεσημεριανό.

2) Τι πρέπει να κάνουμε αν δεν υπάρχουν αποτελέσματα τα οποία να είναι ανώτερα κατά Pareto από το status quo; Εμείς απλά συνιστούμε το status quo. Ωστόσο, μια πιο δημιουργική επίλυση θα μπορούσε να είναι να προσπαθήσει να μεγαλώσει την συλλογή των προτάσεων υπό εξέταση. Όσο πιο πολλές εναλλακτικές έχουμε να εξετάσουμε, τόσο περισσότερες δυνατότητες θα υπάρχουν έχοντας αρκετές εναλλακτικές λύσεις που αξιολογούνται διαφορετικά για να δώσουν κερδοφόρες συναλλαγές. Η διαχείριση θα μπορούσε να προσφέρει την παροχή υποτροφιών για κολλέγια στα παιδία της ένωσης. Το εργατικό δυναμικό θα μπορούσε να προσφέρει

την τροποποίηση μιας διαδικασίας παραπόνων που έχει ενοχλήσει τη διαχείριση. Αυτές οι νέες ιδέες θα μπορούσαν να πάνε στην διαδικασία μαζί με τα αρχικά θέματα. Η ιδέα της διεύρυνσης του πεδίου εφαρμογής των διαπραγματεύσεων για να αυξήσει τις πιθανότητές των αμοιβαίων επικερδών συμφωνιών επιδοκιμάστηκε ένθερμα από πολλούς αναλυτές.

3) Είναι η “παρούσα κατάσταση” το κατάλληλο σημείο status quo για την διαδικασία του Nash; Για να δικαιολογήσουμε ότι είναι , πρέπει να υποθέσουμε ότι οι διαπραγμάτευσεις συχνά συμβαίνουν σε μια ατμόσφαιρα απειλών, με τη συζήτηση απεργιών και ανταπεργιών. Τέτοιες ενέργειες θα ήταν δαπανηρές και για τις δύο πλευρές, αλλά θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως απόπειρες να αλλάξει το καθεστώς του σημείου status quo του Nash υπέρ της μίας πλευράς. Ένας διαιτητής μπορεί να χρειαστεί να εξετάσει εάν ή πώς πρέπει να αντιδράσει σε τέτοιες απόπειρες. Δεν θα είναι εύκολο.

4) Δεν θα ήταν φυσικό και για τις δύο πλευρές να δώσουν ψευδείς πληροφορίες σχετικά με τις ωφέλειες τους, πράγμα το οποίο καθιστά ολόκληρη την ανάλυση ανώφελη; Η ένσταση αυτή είναι θεμελιώδους σημασίας , και πρέπει να εξεταστεί προσεκτικά. Αν μία ή και οι δύο πλευρές ήξεραν ότι θα μπορούσε να επιτύχει ένα πιο επιθυμητό αποτέλεσμα λέγοντας ψέμματα για τις ωφέλειες τους, η διαδικασία πράγματι θα ήταν ανώφελη σε πρακτικές περιπτώσεις. Ωστόσο, η κατάσταση είναι ποιο διακριτική από αυτή: δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι τα ψέματα θα είναι κερδοφόρα, και κατά πόσον είναι ή όχι εξαρτάται από το τι κάνει και η άλλη πλευρά.

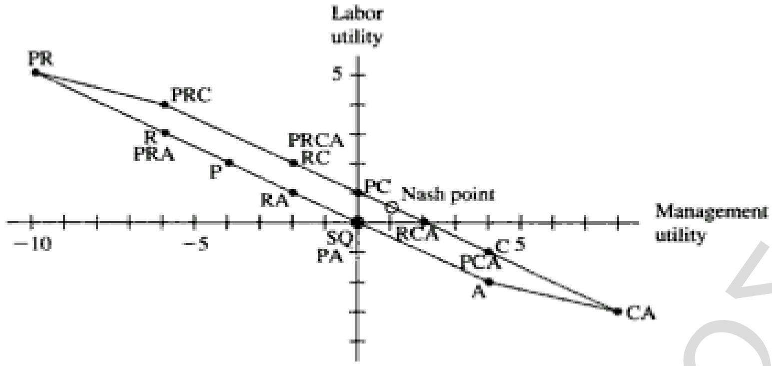
Υποθέστε ότι η διαχείριση αποφασίζει να δώσει ψευδή στοιχεία για τις ωφέλειες της. Τι είδους ψέμα θα ήταν αποδοτικό; Μια πολλά υποσχόμενη τεχνική θα μπορούσε να είναι να δώσει σωστή σχετική κλίμακα των θετικών αντικειμένων ωφέλειας, και σωστή σχετική κλίμακα των αρνητικών, αλλά να παραποιήσει τη σχέση μεταξύ των δύο απαντώντας σε ερωτήσεις των συναλλαγών ψευδώς. Η διαχείριση εκθέτει ότι απαιτούνται πολλές παραχωρήσεις από την άλλη πλευρά πριν να ενδώσουν σε κάποιο από τα αιτήματα τους. Αυτό το είδος της παραποίησης είναι αυτό που έχουμε συχνά στο μυαλό μας και καλείται “σκληρό παζάρι”. Για παράδειγμα, η διαχείριση μπορεί να διπλασιάσει όλα τα αρνητικά νούμερα , και να παρουσιάσει ψευδείς ωφέλειες

R	P	SQ	A,C	
-6	-4	0	4	Ψευδείς Ωφέλειες Διαχείρισης

Για να δούμε τι επιδράσεις έχει αυτή η παραποίηση στο αποτέλεσμα της διαιτησίας, ξανακάνουμε την ανάλυση χρησιμοποιώντας τα ψευδή στοιχεία που έχει παρουσιάσει η διαχείριση:

Το εργατικό δυναμικό αποδέχεται

Η διαχείριση αποδέχεται		**Nothing**	**C**	**A**	**CA**
	Nothing	(0,0)	(4,-1)	(4,-2)	(8,-3)
	P	(-4,2)	(0,1)	(0,0)	(4,-1)
	R	(-6,3)	(-2,2)	(-2,1)	(2,0)
	PR	(-10,5)	(-6,4)	(-6,3)	(-2,2)



Σχήμα 9.7: Το πολύγωνο πληρωμών όταν η διαχείρηση ψεύδεται

Το πολύγωνο πληρωμής φαίνεται στο σχήμα 9.7. Η αλλαγή από το σχήμα 9.6 είναι ότι η παραποίηση που έκανε η διαχείρηση έχει μετακινήσει μερικά σημεία στα αριστερά, καθιστώντας την περιοχή των αμοιβαίων επικερδών συμφωνιών μικρότερη. Το νέο σημείο Nash είναι στο $(1,\frac{1}{2})$, το οποίο μπορεί να ερμηνευτεί με διάφορους τόπους. Μπορεί, για παράδειγμα, να εφαρμοστεί ως $\frac{1}{2}PC+\frac{1}{2}RCA.$ Αν κοιτάξουμε πίσω στις ειλικρινείς ωφέλειες, το σημείο αυτό είναι $(3\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, που εμφανίζεται ως το σημείο #1 στο σχήμα 9.1. Το σημείο αυτό δεν είναι βέλτιστο κατά Pareto, αλλά είναι καλύτερο για τη διαχείριση από το ειλικρινές σημείο Nash (3,2). Η διαχείριση έχει κερδίσει λέγοντας ψέμματα.

Από την άλλη πλευρά, το ανειλικρινές σημείο Nash $(1,\frac{1}{2})$ μπορεί επίσης να εφαρμοστεί ως $\frac{3}{4}PC+\frac{1}{4}C.$ Οι ειλικρινείς ωφειλές αυτής της εφαρμογής είναι $(2\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, που φαίνεται ως το σημείο #2 στο σχήμα 9.6. Αυτό είναι χειρότερο για την διαχείριση από ότι το ειλικρινές σημείο Nash. Με άλλα λόγια, τα ψέμματα μπορεί να βοηθήσουν τη διαχείριση αλλά μπορούν και να την βλάψουν.

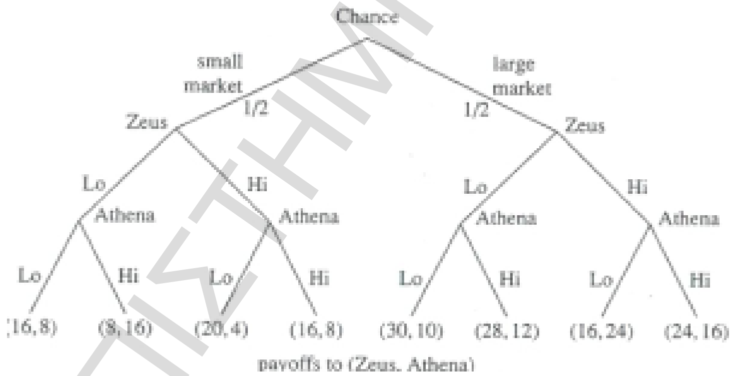
9.3 Ανταγωνιστική διαδικασία λήψης αποφάσεων

Στον κόσμο των επιχειρήσεων, οι εταιρίες συχνά πρέπει να πάρουν αποφάσεις οι οποίες συνεπάγονται στρατηγική αβεβαιότητα σχετικά με το τι θα κάνουν οι άλλες εταιρείες. Τέτοιες αποφάσεις συνήθως συνεπάγονται επίσης αβεβαιότητα σχετικά με τις μελλοντικές οικονομικές συνθήκες, το μέγεθος της αγοράς, τα κόστη, και άλλες μεταβλητές. Με άλλα λόγια, οι εταιρίες συχνά παίζουν παίγνια τα οποία περιλαμβάνουν τους παίκτες και την ευκαιρία. Σε παίγνια σαν και αυτά ο ρόλος της πληροφορίας, σχετικά με το τι κάνουν οι άλλες εταιρίες και τι ευκαιρίες μπορεί να έχουν, μπορεί να είναι πολύ σημαντικός.

Θα εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα μια ανταγωνιστικής κατάστασης η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως ένα παίγνιο δύο προσώπων μηδενικού αθροίσματος. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας ειδικότερα στο ρόλο της πληροφορίας. Το παράδειγμα είναι υποθετικό, αλλά έχει ως πρότυπο μια μελέτη η οποία είχε χρησιμοποιηθεί σε ένα μάθημα που καλείται “Ανταγωνιστική Διαδικασία Λήψης Αποφάσεων ” στο Harvard.

Η Zeus Music είναι μια κορυφαία εταιρία στον κλάδο του σύγχρονου στερεοφωνικού εξοπλισμού, μια εταιρία με ισχυρή αναγνωρισιμότητα στην αγορά. Η Athena Acoustics είναι μια μικρότερη εταιρία, γνωστή για την υψηλή ποιότητα της έρευνας και το αναπτυξιακό έργο. Και οι δύο εταιρίες έχουν αναπτύξει ένα πολλά υποσχόμενο "εξαφωνικό" σύστημα ήχου. Σε αυτή την επαναστατική ιδέα απόλυτου μουσικού περιβάλλοντος, ο ακροατής κάθεται καθώς έξι ηχεία παράγουν μουσική από αριστερά, δεξιά, μπροστά, πίσω, πάνω, και κάτω. Το αποτέλεσμα λέγεται ότι είναι εξαιρετικό. Σε αυτό το σημείο είναι αβέβαιο πόσο μεγάλη είναι η αγορά για ένα τέτοιο σύστημα. Μπορεί να είναι μικρή, με ενδεχόμενα κέρδη γύρω στα 24 εκατομμύρια ευρώ ετησίως, ή μπορεί να είναι μεγάλη με κέρδη γύρω στα 40 εκατομμύρια ευρώ. Αναλυτές της Zeus εκτιμούν ότι οι πιθανότητες για μια μικρή εναντίον μεγάλης αγοράς είναι περίπου 50-50.

Η Zeus και η Athena πρέπει η κάθε μία να αποφασίσουν τι είδους προϊόν να παράγουν για αυτή την αγορά – ένα υψηλότερης ποιότητας σύστημα να απευθύνεται στους λάτρεις, ή ένα ελαφρώς χαμηλότερης ποιότητας σύστημα με περισσότερη gadgetry για να απευθύνεται σε μια αγορά με λιγότερο ευαίσθητη μουσική διάκριση. Αν η αγορά είναι μικρή, το υψηλής ποιότητας προϊόν θα έχει ευρύτερη απήχηση. Η Athena έχει ένα πλεονέκτημα στην παραγωγή υψηλής ποιότητας συστημάτων. Η Zeus αναμένει ένα μεγάλο μερίδιο της αγοράς εξ' αιτίας της αναγνωρισιμότητας της, και μπορεί να κάνει ανώτερη δουλειά στη εμπορευματοποίηση προϊόντων κατώτερης ποιότητας. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπόψη, αναλυτές της Zeus έχουν εκτιμήσει ότι τα μερίδια της αγοράς υπό διάφορες απρόβλεπτες καταστάσεις. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 9.8. Οι πληρωμές είναι σε εκατομμύρια ευρώ της Zeus και της Athena, αντίστοιχα. Εφόσον οι εκτιμήσεις αυτές βασίζονται σε γεγονότα γνωστά σε ολόκληρο τον κλάδο, η Zeus έχει κάθε λόγο να πιστέψει ότι η ανάλυση της κατάστασης από την Athena θα είναι παρόμοια.



Σχήμα 9.8

Θα εξετάσουμε πώς αυτό το παίγνιο πρέπει να παίζεται κάτω από μια ποικιλία συνθηκών πληροφορίας. Πρώτα, υποθέτουμε ότι οι εταιρίες κάνουν τις επιλογές παραγωγής τους μυστικά. Φυσικά, ούτε ένας δεν γνωρίζει τις επιλογές των αποφάσεων τους. Στη συνέχεια δύο κόμβων επιλογής της Zeus είναι σε ένα σύνολο πληροφορίας, και οι τέσσερις κόμβοι τις Athena σε ένα σύνολο πληροφορίας. Κάθε εταιρία έχει μόνο δύο στρατηγικές : να παράγει ένα υψηλής ποιότητας σύστημα (Hi) ή να παράγει ένα χαμηλότερης ποιότητας σύστημα (Lo). Η μήτρα του παιγνίου είναι:

Athena

		Lo	**Hi**
Zeus	**Lo**	(29,3)	(18,14)
	Hi	(18,14)	(20,12)

Παίγνιο 9.3

Οι πληρωμές έχουν αναμενόμενες τιμές. Για παράδειγμα, η πληρωμή Lo-Lo υπολογίζεται από $\left(\frac{1}{2}\right)(16,8)+\left(\frac{1}{2}\right)(30,10)=(23,9)$. Εφόσον το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος, μπορούμε να υπολογίσουμε βέλτιστες στρατηγικές, οι οποίες είναι 2/7 Lo, 5/7 Hi και για τους δύο πάικτες. Η τιμή του παιγνίου είναι $19\frac{3}{7}$ για την Zeus και , ως εκ τούτου $12\frac{4}{7}$ για την Athena.

Υποθέτουμε τώρα ότι η Zeus, ως ηγέτης της βιομηχανίας, πρέπει να κάνει την απόφαση παραγωγής πρώτη, και η Athena, ως μικρότερη και πιο ευέλικτη εταιρία, μπορεί να περιμένει να δεί την απόφαση της Zeus πριν πάρει τη δική της. Η επίδραση στο δέντρο του παιγνίου θα ήταν ότι τώρα η Athena έχει δύο σύνολα πληροφορίας, ένα που περιλαμβάνει τον πρώτο και τον τρίτο κόμβο της (όταν η Zeus έχει επιλέξει Lo), και το άλλο που περιλαμβάνει τον δεύτερο και τέταρτο κόμβο (όταν η Zeus έχει επιλέξει Hi). Εφόσον μπορεί να κάνει δύο επιλογές σε κάθε ένα από τα δύο σύνολα πληροφορίας, τώρα έχει τέσσερεις πιθανές στρατηγικές. Το παίγνιο είναι

Athena

		Lo /Lo	**Lo/ Hi**	**Hi/Lo**	**Hi/Hi**
Zeus	**Lo**	23	23	18	18
	Hi	18	20	18	20

Παίγνιο 9.4.

Εφόσον το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος, έχουμε δείξει μόνο την πληρωμή της Zeus. Οι στρατηγικές της Athena προσδιορίζουν τι να κάνει αν η Zeus επιλέγει Lo ή η Zeus επιλέγει Hi. Στα λόγια, είναι “πάντα επέλεξε Lo”, “κάνε ότι κάνει η Zeus”, “κάνε το αντίθετο από αυτό που κάνει η Zeus”,και “επέλεξε Hi πάντα”. Το παίγνιο έχει δύο σαγματικά σημεία. Ό,τι κάνει η Zeus, η Athena πρέπει να κάνει το αντίθετο, και η πληρωμή θα είναι 18 για τη Zeus, αφήντοντας 14 για την Athena. Η ευελιξία της Athena να περιμένει ενώ η Zeus κινείται πρώτη έχει κοστίσει 1,43 εκατομμύρια ευρώ στην Zeus.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η Zeus πρέπει ακόμη να κινηθεί πρώτη, αλλά πριν πάρει την απόφαση της, θα πραγματοποιήσει μια εκτεταμένη (και ακριβή) έρευνα αγοράς για να προσδιορίσει εάν η αγορά είναι μεγάλη ή μικρή. Η Athena δεν θα γνωρίζει το αποτέλεσμα από αυτή την έρευνα, αλλά θα γνωρίζει ότι η Zeus έχει κάνει την έρευνα, αφού τετοια πράγματα ειναι δύσκολο να κρυφτούν. Η επίδραση στο δένδρο του παιγνίου θα ήταν ότι οι δύο κόμβοι της Zeus είναι τώρα σε ξεχωριστά σύνολα πληροφορίας. Η Zeus τώρα έχει τέσσεριες στρατηγικές, και το παίγνιο είναι

Athena

		Lo /Lo	**Lo/ Hi**	**Hi/Lo**	**Hi/Hi**
	Lo/Lo	23	23	18	18
Zeus	**Lo/Hi**	16	20	12	16
	Hi/Lo	25	23	24	22
	Hi/Hi	18	20	18	20

Παίγνιο 9.5

Οι στρατηγικές της Athena είναι ακόμη εξαρτημένες από το αν η Zeus επιλέξει Lo ή Hi. Οι στρατηγικές τις Zeus είναι εξαρτημένες από το αν τύχει να επιλέξει μικρή ή μεγάλη. Σε αυτό το παίγνιο, η στρατηγική Hi/Lo της Zeus, η οποία λέει "Να παράγεις ένα υψηλής ποιότητας σύστημα αν βρεις ότι η αγορά θα είναι μικρή, αλλιώς να παράγεις ένα χαμηλότερης ποιότητας σύστημα," υπερισχύει. Η Athena πρέπει να παράγει ένα υψηλής ποιότητας σύστημα ανεξάρτητα από το τι κάνει η Zeus, και οι αναμενόμενες πληρωμές θα είναι 22 για τη Zeus και 10 για την Athena.

Υπάρχουν ενδιαφέροντα πράγματα να σημειώσουμε σχετικά με αυτή τη λύση. Πρώτον, η βέλτιστη στρατηγική της Athena έχει αλλάξει κάνοντας το αντίθετο από αυτό που κάνει η Zeus, να επιλέγει πάντα Hi. Γιατί συμβαίνει αυτό, εφόσον η Athena δεν έχει καμία νέα πληροφορία εκτός από το ότι η Zeus έχει κάνει μια έρευνα; Λοιπόν, αν η Zeus επιλέγει Hi, η Athena θα ήταν καλύτερο να επιλέξει Lo μόνο αν η αγορά θα είναι μεγάλη. Αλλά γνωρίζοντας για την αγορά, η Athena μπορεί να δει ότι αν η Zeus επιλέγει Hi, θα ήταν μόνο επειδή η έρευνα λέει ότι η αγορά θα είναι μικρή. Σε αυτή την περίπτωση η Athena θα ήταν καλύτερο να επιλέξει επίσης Hi. Η αιτιολογία είναι λεπτή.

Δεύτερον, διεξάγωντας την έρευνα και στηρίζοντας την απόφασή της παραγωγής της στα αποτελέσματα αυξάνει το αναμενόμενο κέρδος της Zeus από 18 εκατομμύρια ευρώ σε 22 εκατομμύρια ευρώ. Αν η έρευνα κοστίζει λιγότερο από 4 εκατομμύρια ευρώ, είναι μια αξιόλογη επένδυση.

Αν η έρευνα της Zeus επωφελεί τη Zeus, πώς θα φαινόταν αν η Athena διενεργούσε τη δική της έρευνα; η επίδραση στο δένδρο του παιγνίου θα ήταν να μπούν κάθε κόμβοι της Athena σε δικό της σύνολο πληροφορίας. Η Athena θα μπορεί να κάνει τις επιλογές τις εξαρτημένες και από τις επιλογές της Zeus και της επιλογές τύχης, και θα έχει 16 πιθανές στρατηγικές. Η τεχνική της αποκοπής δίνει τη λύση του αριστερού μισού δένδρου ως (16,8), και η λύση του δεξιού μισού ως (28,12). Αφού καθένα από τα δύο αυτά παίγνια θα παίζονται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οι αναμενόμενες πληρωμές είναι $(\frac{1}{2})(16,8)+(\frac{1}{2})(28,12)=(22,10)$. Δυστυχώς, αυτό δεν είναι καλύτερο για την Athena από τη λύση στο παίγνιο 8.3. Η Athena δεν πρέπει να χρηματοδοτήσει τη δική της έρευνα καταναλωτών. Μπορεί να τα καταφέρει καλά γνωρίζοντας μόνο ότι η Zeus θα κάνει την έρευνα, και σκεπτόμενη παιγνιοθεωρητικά.

Τέλος ας εξετάσουμε μια ενδιαφέρουσα πιθανότητα. Υποθέτουμε ότι η Zeus μπορεί να διεξάγη την έρευνα της χωρίς της γνώση της Athena. Η επίδραση θα είναι ότι η Athena θα έχει λανθασμένη πληροφορία σχετικά με το ποιό παίγνιο παίζεται. Η Athena θα σκεφτεί να ότι παίζει το παίγνιο 9.4, το οποίο είναι Hi/Lo. Γνωρίζοντας αυτό, η Zeus θα παίξει Hi/Lo και θα κερδίσει 24 στο παίγνιο 9.5, αντί της τιμής 22 για αυτό το παίγνιο. Με άλλα λόγια, η Zeus αν μπορεί να κρατήσει μυστικά όχι μόνο τα αποτελέσματα, αλλά και την ύπαρξη της έρευνας της, θα κερδίσει επιπλέον 2 εκατομμύρια ευρώ. Η γνώση πληροφορίας σε ένα παίγνιο μπορεί να είναι πολύτιμη. Γνωρίζοντας βέβαια καλυτερα από τον αντίπαλο ποίος έχει ποία πληροφορία – με άλλα λόγια τι παίγνιο παίζεται – μπορεί επίσης να είναι πολύτιμο.

Η ανάλυση του ρόλου της πληροφορίας στη λήψη ανταφωνιστικών αποφάσεων είναι ένα σημαντικό θέμα στα μακροοικονομικά.

9.4 Η θεωρία παιγνίων και η εφαρμογή της στην πολιτική

Το πεδίο εφαρμογής της θεωρίας είναι τεράστιο και εκτείνεται από την ανάλυση ενός παιγνίου σκάκι ή ντάμας, μέχρι την ανάλυση λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις πυρηνικού πολέμου. Η θεωρία εφαρμόζεται στις επιστήμες των οικονομικών, της πολιτικής, της βιολογίας, των τηλεπικοινωνιών, του σχεδιασμού μηχανολογικών εξαρτημάτων και πολλές άλλες.

Θα προσπαθήσω να παραθέσω με εκλαϊκευμένο τρόπο τις βασικές αρχές της θεωρίας παιγνίων χωρίς να αναφερθώ στη θεωρία Nash και τις υπόλοιπες μεθοδολογίες επίλυσης, κατηγορίες παιγνίων και τα υπόλοιπα θεωρητικά στοιχεία, που εχω αναφερει. Εχω ήδη αναφερει τους τρόπος με τον οποίο οι πολυεθνικές εταιρίες και τα οργανωμένα συμφέροντα χρησιμοποιούν την θεωρία για να επιτυγχάνουν τους σκοπούς τους (συνήθως εις βάρος υμών των υπολοίπων). Τώρα θέλω να δείξω το πως τα πολιτικά κόμματα κανουν το ιδιο, και πως η θεωρια εφαρμοζεται στην πολιτικη, δηλαδη, το στρατηγικο μανατζμεντ σε κλιμακα μιας ολόκληρης χώρας. Για να κατανοήσουμε τη φύση και το σκοπό ύπαρξης της θεωρίας παιγνίων, θα χρησιμοποιήσω το πιο δημοφιλές παράδειγμα, αυτό των φυλακισμένων του Tucker.

Δύο ύποπτοι για ένα έγκλημα συλλαμβάνονται από την αστυνομία και κρατούνται σε διαφορετικά κελιά, ώστε να μην έχουν μεταξύ τους επικοινωνία. Οι αστυνομικοί είναι σίγουροι για την ενοχή τους αλλά ελλείψει αποδεικτικών στοιχείων τους προσφέρουν μια συμφωνία: αν και οι δύο ομολογήσουν ότι διέπραξαν το έγκλημα θα καταδικαστούν μόνο σε τρία χρόνια φυλάκισης. Αν μόνο ο ένας ομολογήσει θα αφεθεί ελεύθερος ενώ ο άλλος που θα αρνηθεί θα φυλακιστεί για πέντε χρόνια. Τέλος, αν κανένας δεν ομολογήσει, και οι δύο θα περάσουνε έναν χρόνο στη φυλακή.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να παρουσιαστεί στον επόμενο πίνακα όπου Α και Β είναι οι δύο φυλακισμένοι, Α1: ομολογία, Α2 άρνηση του παίκτη Α και Β1: ομολογία, Β2: άρνηση του παίκτη Β. Η θεωρία αντικαθιστά τις ποινές στον παραπάνω πίνακα με βαθμούς ωφέλειας όπως στον παρακάτω πίνακα:

Η θεωρία όπως αναφέρθηκε παραπάνω αφορά σε λογικούς παίκτες, οπότε θα υποθέσουμε ότι και οι δύο φυλακισμένοι νοιάζονται μόνο για να ελαχιστοποιήσουν την ποινή τους.
Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές επιλογές : είτε να ομολογήσει και να συνεργαστεί με την αστυνομία (confess), είτε να παραμείνει σιωπηλός (not confess). Το μεγαλύτερο όφελος για τον παίκτη Α προκύπτει αν αυτός ομολογήσει ενώ ο παίκτης Β μείνει σιωπηλός. Το επόμενο καλύτερο αποτέλεσμα για τον Α είναι να μη μιλήσει κανένας από τους δύο, ενώ το χειρότερο σενάριο είναι να μιλήσει ο Β ενώ ο Α θα παραμείνει σιωπηλός. Το αντίστοιχο ισχύει και για τον παίκτη Β.

Από την ανάλυση προκύπτει πως οτιδήποτε και να σκοπεύει να κάνει ο Β, ο παίκτης Α θα πρέπει να επιλέξει την πρώτη στρατηγική (να ομολογήσει δηλαδή), αφού έτσι θα έχει καλύτερα αποτελέσματα. Ομοίως ισχύει και για τον Β παίκτη ο οποίος θα προτιμήσει και αυτός να μιλήσει. Σε αυτό το σημείο υπάρχει το δίλημμα αφού από τον πίνακα φαίνεται πως οι παίκτες θα αποκομίσουν μεγαλύτερο όφελος αν και οι δύο επιλέξουν να μη μιλήσουν από το να τα ομολογήσουν όλα. Έτσι η καλύτερη στρατηγική για τον καθένα ξεχωριστά, παράγει ένα αποτέλεσμα που δεν είναι καλό για την ομάδα, κάνοντας τα ατομικά κίνητρα να υπονομεύουν το κοινό συμφέρον. Πρόκειται για ένα παίγνιο όπου τα κέρδη προέρχονται από τη συνεργασία. Το καλύτερο αποτέλεσμα και για τους δύο παίκτες είναι να μη μιλήσουν στους αστυνομικούς . Παρόλα αυτά, κάθε παίκτης έχει ένα μεγάλο κίνητρο να γίνει προδότης. Οτιδήποτε και να κάνει ο ένας παίκτης, ο αντίπαλος προτιμάει να ομολογήσει. Έτσι το παίγνιο αυτό έχει μία μοναδική κυρίαρχη στρατηγική, η οποία είναι η λύση (Α1,Β1)=(1,1), η από κοινού ομολογία.

Το παράδοξο του αποτελέσματος εξηγείται από το γεγονός ότι οι φυλακισμένοι βρίσκονται σε ξεχωριστά κελιά και δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους για να αποφασίσουν από κοινού τι θα κάνουν. Αν μπορούσαν να το συζητήσουν ίσως να έβλεπαν πως η καλύτερη λύση είναι να μη μιλήσει κανένας τους. Αλλά ακόμη και με μια προφορική συμφωνία οι φυλακισμένοι ίσως προσπαθήσουν να προδώσουν τον υποτιθέμενο αντίπαλο τους, προλαβαίνοντας τον από μια πιθανή προδοσία.

Η θεωρία έχει εφαρμογή στα οικονομικά, στην πολιτική, τη λογική επιστήμη, τη βιολογία και όπως όλες οι θεωρίες έχει "καλές" και "κακές" εφαμογές. Το πιο ενδιαφέρον πεδίο ίσως είναι αυτό της λήψης στρατηγικών αποφάσεων, τόσο μεταξύ εταιριών, όσο και μεταξύ κρατών.
Σε επίπεδο εταιριών, η θεωρία αναλύει καταστάσεις σε περιβάλλον ανταγωνισμού, σε περιβάλλον ολιγοπωλίου, μονοπωλίου κ.λ.π. και είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον να δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής της, χωρίς την ανάλυση που οδηγεί στα τελικά συμπεράσματα.

Παράδειγμα. Εφορία vs πολίτες

Συμφέρον της εφορίας είναι να εισπράττει φόρους από όλους τους πολίτες και συμφέρον (ατομικό) των πολιτών είναι να μην πληρώνουν φόρους. Η εφορία θα πρέπει να επιλέξει μια στρατηγική ώστε να μεγιστοποιήσει το όφελος της

Μια στρατηγική για να το πετύχει αυτό θα ήταν να εφαρμόζει 100% έλεγχο στα βιβλία των φορολογουμένων, οπότε η είσπραξη των φόρων θα ήταν σίγουρη και θα πλησίαζε το 100%. Ομως ο καθολικός έλεγχος, έχει τεράστιο κόστος για την εφορία, διότι για να διενεργήσει όλους αυτούς τους ελέγχους θα πρέπει να έχει έναν τεράστιο αριθμό υπαλλήλων ελεγκτών.
Μια δεύτερη στρατηγική είναι η εφορία να διενεργεί δειγματοληπτικούς ελέγχους στους φορολογούμενους και να τιμωρεί με δυσανάλογα (σε σχέση με την φοροδιαφυγή) πρόστιμα και ποινές όσους πιάστηκαν να φοροδιαφεύγουν. Με τον τρόπο αυτόν η εφορία εισπράττει τους φόρους από τη συντριπτική πλειοψηφία των φορολογουμένων (που δεν φοροδιαφεύγουν φοβούμενοι την σκληρή τιμωρία) διατηρώντας παράλληλα τα έξοδα λειτουργίας της σε αποδεκτά επίπεδα.

Αυτή η δεύτερη στρατηγική εξασφαλίζει το μέγιστο όφελος για την εφορία και είναι η καλύτερη στρατηγική όπως προκύπτει από την ανάλυση με τη βοήθεια της θεωρίας παιγνίων. Στην Ελλάδα το πρόβλημα που απαξιώνει τη στρατηγική αυτή είναι η μη διενέργεια των δειγματοληπτικών ελέγχων και η μη επιβολή ή η μη είσπραξη των προστίμων (με τους γνωστούς τρόπους).

Παράδειγμα. Ολιγοπώλιο vs καταναλωτές.

Συμφέρον των παικτών του ολιγοπωλίου είναι η διατήρηση υψηλών τιμών πώλησης των προϊόντων / υπηρεσιών τους, ενώ συμφέρον των καταναλωτών είναι η μείωση των τιμών. Αρα το όφελος της μιας ομάδας είναι αντίθετο ως προς το όφελος της άλλης. Στο παράδειγμα αυτό, υπάρχει αντικρουόμενο συμφέρον και μεταξύ των παικτών του ολιγοπωλίου, καθώς το μερίδιο της αγοράς κάθε παίκτη (από το ολιγοπώλιο) εξαρτάται από την τιμή πώλησης των προϊόντων / υπηρεσιών.

Αν υποθέσουμε ότι σε μια χώρα υπάρχουν τρεις εταιρίες κινητής τηλεφωνίας (ολιγοπώλιο) που χρεώνουν την επικοινωνία των καταναλωτών ανα δευτερόλεπτο και ότι το επίπεδο της παρεχόμενης υπηρεσίας (κάλυψη, ένταση σήματος) είναι πάνω κάτω το ίδιο, το μερίδιο της αγοράς καθε εταιρίας εξαρτάται κυρίως από την τιμή.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή της υπηρεσίας, τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το μερίδιο της αγοράς που θα πάρει η φθηνότερη εταιρία. Ετσι φαίνεται μοιραίο να ξεκινήσει ένας πόλεμος τιμών μεταξύ των εταιριών κινητής τηλεφωνίας στην προσπάθεια τους να διατηρήσουν το μερίδιο της αγοράς και μόνος κερδισμένος θα είναι ο καταναλωτής.

Τα παραπάνω ισχύουν με την παραδοχή ότι οι εταιρίες δεν συνεννοούνται μεταξύ τους (περίπου όπως στο παράδειγμα των φυλακισμένων). Οι εταιρίες όμως έχουν και μια δεύτερη επιλογή, να συνεννοηθούν και να σχηματίσουν καρτέλ, με τη συμφωνία οτι θα πουλάνε τις υπηρεσίες τους σε συγκεκριμένη τιμή (υψηλότερη από αυτήν που θα πουλούσαν σε ανταγωνιστικό περιβάλλον) και θα διαφοροποιηθούν δίνοντας παροχές στους συνδρομητές τους (κινητό τηλέφωνο με επιδότηση, υπηρεσίες web, παιχνιδιών και άλλων παρόμοιων) για να προστατεύσουν τα τεράστια κέρδη τους.

Υπάρχει ένα τελευταίο πρόβλημα που πρέπει να λύσουν τα μέλη του καρτέλ. Υπάρχει ο κίνδυνος κάποιο μέλος του καρτέλ να χαλάσει τη συμφωνία και να ριξει τις τιμές κλέβοντας μερίδιο αγοράς από τα υπόλοιπα μελη που θα εξακολουθούν να τηρούν τη συμφωνία και θα πουλάνε σε ακριβότερες τιμές. Για να διασφαλίσουν την εφαρμογή της συμφωνίας, τα μέλη του καρτέλ επιλέγουν τυχαία ένα μέλος που θα παίξει τον ρόλο "χωροφύλακα" και ανταλλάσσουν εγγυήσεις (λευκές επιταγές ή οτιδήποτε άλλο) μεταξύ τους ώστε να μην συμφέρει κανέναν να χαλάσει η συμφωνία.

Ο "χωροφύλακας" διαφημίζει στην τηλεόραση ότι θα παρέχει δωρεάν τις υπηρεσίες του σε όποιον καταναλωτή βρει τις υπηρεσίες του σε φθηνότερη τιμή. Ετσι, αν κάποιο μέλος του καρτέλ χαλάσει τη συμφωνία, το καρτέλ θα το μάθει αμέσως και μάλιστα από τον ίδιο τον καταναλωτή, αφού ο τελευταίος θα τρέξει στον "χωροφύλακα" να "καρφώσει" το μέλος που δεν τήρησε την συμφωνία απαιτώντας την ανταμοιβή του (τη δωρεαν υπηρεσία).
Με τον τρόπο αυτόν, τα μέλη του καρτέλ διατηρούν τις τιμές ψηλά και προσπαθούν να διαφοροποιηθούν στην συνείδηση των καταναλωτών με άλλους πιο ακίνδυνους και λιγότερο δαπανηρούς τρόπους. Με την διαφήμιση του "χωροφύλακα" δημιουργείται στον καταναλωτή η ψευδαίσθηση ότι αγοράζει την υπηρεσία σε πολύ χαμηλές τιμές, ενώ το καρτέλ διατηρεί την τεράστια κερδοφορία του.

Ετσι, την επόμενη φορά που θα δείτε στην τηλεόραση διαφήμιση που να λέει "Επιστροφή χρημάτων σε περίπτωση που βρείτε το προϊόν αλλού φθηνότερα", να είστε υποψιασμένοι. Ο διαφημιζόμενος είναι ο χωροφύλακας, και εσείς ο εν δυνάμει καταδότης (που βγάζετε τα μάτια σας μονος σας).

Παράδειγμα. Η ακροσφαλής στρατηγική ή "στρατηγική του γκρεμού".

Κατα τη διάρκεια του ψυχρού πολεμου, οι δύο υπερδυνάμεις διέθεταν πυρηνικό οπλισμό ικανό να εξαφανίσει κάθε μορφή ζωής από τον πλανήτη. Οπως είναι φυσικό, καμία εκ των υπερδυνάμεων δεν ήθελε να κάνει χρήση των όπλων της και ούτε θα ήθελε να χρησιμοποιήσει τα όπλα της παρά μόνο σαν έσχατη λύση. Ομως και οι δυο, απειλούσαν ότι θα κάνουν χρήση των πυρηνικών τους και θα σύρουν την ανθρωπότητα στην καταστροφή. Η απειλή χρησιμοποίησης πυρηνικών και από τις δύο πλευρές εξασφάλιζε ότι καμία υπερδύναμη δε θα τα χρησιμοποιούσε. Η στρατηγική αυτή, της απειλής ενός παίκτη ότι θα τινάξει το παίγνιο στον αέρα, ονομάζεται στην θεωρία παιγνίων ακροσφαλής στρατηγική και αποτελεί στρατηγική θέση που εμποδίζει τον αντίπαλο παίκτη να αποκτήσει στρατηγικό πλεονέκτημα.

Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής απαιτεί παίκτες με γερά νεύρα και μπορεί να οδηγήσει σε επικίνδυνες καταστάσεις. Συνήθως όμως δεν αποτελεί παρά απειλή και εξαρτάται από τις ικανότητες του αντίπαλου παίκτη (του αποδέκτη της απειλής) να εκτιμήσει την πιθανότητα υλοποίησης της. Στην πραξη, μόνο παίκτες που έχουν ουσιαστικά χάσει το παίγνιο θα εφάρμοζαν τις απειλές που εκτοξεύουν κατα τη χρήση της στρατηγικής αυτής.
Καθ' όλη την διάρκεια του ψυχρού πολέμου, μόνο μια φορά οι δυο υπερδυνάμεις έφτασαν πραγματικά στο χείλος του γκρεμού και αυτή είναι η περίπτωση των πυραύλων της Κούβας.

Παράδειγμα. Στρατηγική και Ελληνική εξωτερική πολιτική

Η θεωρία παιγνίων και η επιστήμη της στρατηγικής είναι διαζευγμένη με την Ελληνική εξωτερική πολιτική. Η ακροσφαλής στρατηγική εφαρμόζεται με μεγάλη επιτυχία από την

Τουρκία στις σχέσεις της με την Ελλάδα, με την απειλή πολέμου, το περίφημο casus beli κάθε φορά που η Ελλάδα είναι κοντά στο να αποκτήσει κάποιο στρατηγικό πλεονέκτημα. Με τον τρόπο αυτόν, η Τουρκία εμποδίζει την Ελλάδα να εκτελέσει διπλωματικές κινήσεις που θα της έδιναν πλεονέκτημα στις διαπραγματεύσεις, απειλώντας με πόλεμο ("αν κάνεις αυτό, θα τα καταστρέψω ολα") και οι διάνοιες Ελληνες πολιτικοί και συμβουλοί, δεν έχουν καταφέρει ακόμα να επινοήσουν και να εφαρμόσουν στρατηγικές που θα εξουδετέρωναν την απειλή αυτή και θα καθιστούσαν την ακροσφαλή στρατηγική της Τουρκίας ανίσχυρη. Τέτοιες στρατηγικές υπάρχουν πολλές, διδάσκονται σε πανεπιστήμια, είναι γραμμένες σε βιβλία, αλλά κανείς από τους σύμβουλους του υπουργείου εξωτερικών δε φαίνεται να τις γνωρίζει.

Η ακροσφαλής στρατηγική έχει τεράστιο ενδιαφέρον και στις "διαπραγματεύσεις" μας με τους δανειστές μας. Η έξοδος της Ελλάδας από το ευρώ δεν θα είχε ούτε θα έχει επιπτώσεις μόνο για τη χώρα μας. Θα έχει τεράστιες επιπτώσεις και για τους δανειστές μας, και για τους κερδοσκόπους και για την Ευρώπη.

Οι "Ελληνες" πολιτικοί, θα μπορούσαν ευθύς εξ' αρχής να χρησιμοποιήσουν πρώτοι την απειλή αυτή με μια τοποθέτηση τύπου "ή τηρείτε τις δεσμεύσεις σας που απορρέουν από το σύμφωνο νομισματικής ενοποίησης και μας χρηματοδοτείτε χωρίς εγγυήσεις, ή τινάζουμε την Ευρώπη στον αέρα". Αντ' αυτού, δέχθηκαν και δέχονται αδιαπραγμάτευτα τις απειλές και τους όρους των τοκογλύφων, χωρίς ποτέ να κερδίσουν ούτε μια μάχη.

Μια άξια κυβέρνηση Ελλήνων, με τη δύναμη της νομιμοποίησης από τον Ελληνικό λαό θα μπορούσε ακόμα και σήμερα να χρησιμοποιήσει την ακροσφαλή στρατηγική για να ακυρώσει όλες τις συμφωνίες που υπέγραψαν οι προηγούμενες κυβερνήσεις σε βάρος και παρά τη θέληση του λαού. Μια τέτοια απειλή από την Ελληνική πλευρά θα ασκούσε τεράστια πίεση στους δανειστές μας, ενώ η πολύ δυσχερής θέση της χώρας μας θα την καθιστούσε πολύ ισχυρό διαπραγματευτικό χαρτί. Οταν αυτός που δέχεται την απειλή κινδυνεύει περισσότερο από αυτόν που την εκτοξεύει (που στην περίπτωση μας έχει να χάσει πολύ λιγότερα) η απειλή αυτή εχει τεράστια ισχύ.
Σε αντίθεση με τα παραπάνω, σήμερα, αντί να απειλούμε την Ευρώπη ότι θα "τινάξουμε την μπάνκα στον αέρα", δεχόμαστε ανόητες απειλές ότι δήθεν θα μας βγάλουν από το ευρώ, και την Ε.Ε. τις οποίες τα ΜΜΕ φροντίζουν να μας επαναλαμβάνουν σε κάθε ευκαιρία δια στόματος πολιτικών, ειδικών, καθηγητών και λοιπών παραθυρανθρώπων για να μας φοβίσουν. Και από ότι φαίνεται το καταφέρνουν.

Παράδειγμα. Παίγνιο του δειλού (chicken game)

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα παίγνια στα οποία ο κάθε παίκτης επιδιώκει, ακολουθώντας την καλύτερη στρατηγική, να κυριαρχήσει πάνω στον άλλο. Αυτό προκαλεί και ανάλογο φόβο στον αντίπαλο παίκτη, επηρεάζοντας έτσι και την απόδοση του παιγνίου. Ο κάθε παίκτης αποφεύγει να επιλέξει την καλύτερη στρατηγική του όταν πεισθεί ότι ο αντίπαλος του ακολουθεί μέχρι τέλους την παράλογη στρατηγική που ακολουθεί στη σύγκρουση.

Το παίγνιο γενικά παρουσιάζεται όπως παρακάτω: Δυο άτομα οδηγούν τα αυτοκίνητά τους σε αντίθετη κατεύθυνση με πολύ μεγάλη ταχύτητα, διαγράφοντας μια πορεία μετωπικής σύγκρουσης εκτός αν κάποιος στρίψει το τιμόνι και αποχωρήσει από το δρόμο. Εάν κανένας δεν αλλάξει πορεία, τότε θα υπάρξει η σύγκρουση, με αρνητικό αποτέλεσμα και για τους δύο (-10). Αν κάποιος αποδειχθεί δειλός και αποκλίνει για να αποφύγει την σύγκρουση, τότε θα έχει πάλι αρνητικό όφελος, (-5), μικρότερου όμως βαθμού από αυτό της σύγκρουσης. Αυτός ο οδηγός όμως που θα παραμείνει στην πορεία του και δε φανεί «δειλός», θα έχει θετικό όφελος, (+5). Στην περίπτωση που και οι δύο αποκλίνουν και φανούν «δειλοί» τότε θα έχουν και οι δύο αρνητικό όφελος, (-3), αλλά μικρότερης έκτασης από δύο περιπτώσεις της σύγκρουσης που περιγράφηκαν παραπάνω. Έτσι η μόνη στρατηγική επιλογή που θα αποφέρει κέρδος είναι η μη απόκλιση από την πορεία του ενός και η απόσυρση του άλλου. Κάθε άλλη περίπτωση αποφέρει μικρό η μεγάλο αρνητικό όφελος.

Στον τύπο αυτό των παιγνίων υπάρχουν περιθώρια τόσο για στοιχεία σύγκρουσης όσο και για στοιχεία συνεργασίας. Μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου ένας παίκτης «επιτίθεται» με σκοπό να μεταβάλει το ισχύον status quo και έναν άλλον παίκτη, αμυνόμενο επιδιώκει τη διασφάλιση και διατήρηση του.

Πολλά είναι τα παραδείγματα στο χώρο των διεθνών σχέσεων που ακολουθούν τη λογική αυτή στο πλαίσιο των διακρατικών συγκρούσεων. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα «η κρίση των πυραύλων της Κούβας το 1962». Η ΕΣΣΔ βρισκόταν μπροστά στη απειλή «να αποσύρει τους πυραύλους από την Κούβα» ή να «συνεχίσει την εγκατάσταση». Η πλευρά των ΗΠΑ αντιμετώπιζε τα ενδεχόμενα «εισβολή και καταστροφή» αυτών και «παραίτησης». Αναλύοντας το παίγνιο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο συμβιβασμός θα ήταν εφικτός μόνο εάν και οι δύο πλευρές αναγνώριζαν ότι ο αντίπαλος θα ήταν έτοιμος για πυρηνικό πόλεμο. Εδώ ακριβώς βρίσκεται και η έννοια της αποτροπής, ευρύτατα χρησιμοποιούμενος όρος κατά την ψυχρο-πολεμική περίοδο. Αν μόνο η μια πλευρά ήταν έτοιμη για πόλεμο και άλλη όχι, τότε η επιθετική πλευρά θα ήταν η νικήτρια αφού η άλλη πλευρά θα αναγκάζονταν όχι να συμβιβαστεί αλλά να υποχωρήσει.

Ας αναφερθούμε σαν παράδειγμα, στην κρίση με την προμήθεια και εγκατάσταση των πυραύλων S-300 της Κύπρου. Είχαμε τη εξαγγελία της Κυβέρνησης της Κυπριακής Δημοκρατίας για την ανάπτυξη στο έδαφος της του αντιαεροπορικού συστήματος S-300. Η εξαγγελία αυτή προκάλεσε την αντίδραση όλων σχετικά των χωρών του ΝΑΤΟ και ασφαλώς της Τουρκίας, η οποία και απείλησε με στρατιωτική επέμβαση.

Σε κρίσιμες καταστάσεις που η σκληρή στάση συνοδεύεται από υψηλό και δυσβάστακτο κόστος για την απόκτηση θετικού αποτελέσματος, δημιουργούνται αφόρητες συνθήκες τουλάχιστον για το ασθενέστερο εμπλεκόμενο μέρος που αναγκάζεται να αναζητήσει διέξοδο από την απειλή και επικεντρώνει τις προσπάθειές του στον περιορισμό των απωλειών.

Αναλύοντας τις ενέργειες τις Κυπριακής ηγεσίας συνοπτικά μπορούμε να δούμε, ότι η απόφαση της για την προμήθεια του οπλικού συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως διπλωματικό χαρτί παρά ως στρατιωτική ενέργεια. Διατήρησε τον κίνδυνο υπό έλεγχο καθόλη τη διάρκεια της κρίσης, θέλοντας να χρησιμοποιήσει τις αποφάσεις της για την μη εγκατάσταση των πυραύλων στο πλαίσιο των συνολικών διαπραγματεύσεων για τον ευρύτατο αφοπλισμό του νησιού, δίνοντας έτσι διέξοδο στο παίγνιο του «δειλού». Μπροστά στον κίνδυνο μιας σύγκρουσης χωρίς ορατά αποτελέσματα, η λογική αποκόμισης κερδών θα πρέπει να ενισχυθεί σε βάρος της λογικής που αποβλέπει την αποτυχία του αντιπάλου. Η υποχώρηση δε θεωρήθηκε ως αποτυχία με καταστρεπτικές συνέπειες και διαφυλάχτηκε το προσωπικό κύρος της Κυπριακής Κυβέρνησης.

Σε τέτοιου είδους παίγνια η λογική αποκόμισης κερδών ενισχύεται σε βάρος της λογικής που αποβλέπει στην αποτυχία του αντιπάλου. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην σύγκλιση των αντιτιθεμένων πλευρών και στον περιορισμό της πίεσης, της μιας πλευράς να επικρατήσει πάνω στην άλλη. Δημιουργούνται συνθήκες αφόρητες στο ένα μέρος, που γίνεται έτσι και το ασθενέστερο και αναγκάζεται να αναγνωρίσει την ανωτερότητα του άλλου και να αναζητήσει έξοδο από την απειλή.

Από τη στιγμή που το ασθενέστερο μέρος του παιγνίου έχει αναγνωρίσει μια συμβιβαστική δέσμευση, τότε υποβάλλονται συναινετικές προτάσεις έτσι ώστε η υποχώρηση να μη θεωρείται αποτυχία με καταστρεπτικές συνέπειες και ασφαλώς προτάσεις για να διαφυλάσσεται το κύρος του υποχωρούντα, αλλιώς μπορεί να γίνει πολύ επιθετικός και παράλογος.

Παράδειγμα. Θεωρητική προσέγγιση της στρατηγικής των παιγνίων

Η μέθοδος ανάλυσης των διεθνών σχέσεων και διενέξεων – κρίσεων που προκύπτουν, με τη βοήθεια της θεωρίας των παιγνίων ουσιαστικά συμπληρώνει την εμπειρική – αναλυτική μέθοδο. Η θεωρία αυτή δεν λαμβάνει υπόψη ορισμένους κοινωνικούς, ιστορικούς και ψυχολογικούς παράγοντες που μπορεί όμως να συμβάλλουν σημαντικά στη λήψη αποφάσεων, όπως π.χ. την ιστορική διάσταση διαφόρων προβλημάτων, την έκφραση της κοινής γνώμης κλπ.

Στην μέθοδο ανάλυσης προβλημάτων με την προσέγγιση αυτή, με τον όρο παίγνιο εννοούμε μία σειρά από κανόνες συμπ εριφοράς μεταξύ των φορέων, συμφερόντων (πρόσωπα, ομάδες, κράτη) που βρίσκονται σε μια ανταγωνιστική μεταξύ τους σχέση. Οι κανόνες του «παιγνίου» καθορίζουν τον τρόπο συμπεριφοράς των παικτών και περιλαμβάνουν ένα σύνολο οδηγιών που θέτει τα 16όρια συμπεριφοράς των φορέων του παιγνίου.

Ενδιαφερόμαστε πάντα για την ορθολογική συμπεριφορά σε συγκρουσιακές και άλλου είδους συμπεριφορές και καταστάσεις που παρουσιάζονται στις διεθνείς σχέσεις, όπου οι συμμετέχοντες προσπαθούν να κερδίσουν και όχι για τον τρόπο συμπεριφοράς. Παρουσιάζει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη των διεθνών σχέσεων γιατί συνδυάζει άμεσα τη θεωρία με την πράξη και αξιοποιεί την ορθολογική σκέψη στην εφαρμογή της πρακτικής πολιτικής. Μπορεί επομένως να συμβάλει στη βελτίωση της κατανόησης και χρήσιμο υλικό μελέτης για τα διάφορα πεδία των διεθνών σχέσεων. Χαρακτηριστικότερα παραδείγματα:

• Η στρατηγική της αποτροπής που ακολούθησαν οι μεγάλες δυνάμεις κατά τον ψυχρό πόλεμο. Μελετώντας για παράδειγμα το παίγνιο του δειλού στην κρίση της Κούβας έχουμε μια εικόνα της σημασίας της πολιτικής της αποτροπής και την κατανόηση των στρατηγικών από τις δύο πλευρές , οι οποίες τελικά έδωσαν συμβιβαστική λύση και καμιά από τις δύο πλευρές δεν παρουσιάστηκε «δειλή» αφού δεν υπήρχε «νικήτρια».

• Ο ανταγωνισμός και η κούρσα των εξοπλισμών, σε διεθνές και τοπικό επίπεδο. Οι εξοπλισμοί συμβάλλουν στην ισορροπία δυνάμεων και γενικά στη διατήρηση του συσχετισμού δυνάμεων. Όταν δύο φορείς συμφερόντων (κράτη - συμμαχίες) βρίσκονται σε κατάσταση διένεξης, η κλιμάκωση της διένεξης γίνεται περισσότερο αντιληπτή από τον ανταγωνισμό των εξοπλισμών τους. Σε έναν ανταγωνισμό εξοπλισμών, το είδος και το μέγεθος των εξοπλισμών του ενός φορέα δημιουργεί μια αντίδραση στον άλλο φορέα και αντίθετα. Η αύξηση των εξοπλισμών ενός κατανοείται από το αντίπαλο ως μια εχθρική ενέργεια και οδηγεί έτσι σε μία ανάλογη αύξηση των δικών του αμυντικών δαπανών.

ν τοποθετήσουμε το πρόβλημα αυτό στο συσχετισμό δυνάμεων μεταξύ δύο κρατών, τότε με τη βοήθεια της θεωρίας των παιγνίων (δίλημμα του φυλακισμένου) μπορούμε να σχηματίσουμε 2x2 δυνατούς σχηματισμούς («εξοπλισμός» και «μη εξοπλισμός») κατανοώντας καλύτερα τη συγκρουσιακή κατάσταση και διατυπώνοντας προτάσεις για το πώς θα φτάσουμε αμοιβαία στη βέλτιστη δυνατή ισορροπία.

Θεωρητική προσέγγιση της έννοιας της αξιοπιστίας σε καταστάσεις κρίσεων

Η αποτελεσματικότητα μιας απειλής σε μια κρίση εξαρτάται τόσο από την έκτασή της, όσο και από το βαθμό αξιοπιστίας της. Ο όρος αξιοπιστία βασικά είναι συνάρτηση της ικανότητας (δυναμικότητα και αποτελεσματικότητα μέσων ισχύος του φορέα) και της εκτίμησης της αποφασιστικότητας (ψυχολογικός παράγοντας) της απειλής. Το σημαντικότερο πρόβλημα για κάθε «παίχτη» σε μία κρίση είναι να αποδείξει την αξιοπιστία των απειλών του και να επιβάλει στον αντίπαλό του τη δύναμη της θέλησής του. Αν μια χώρα μπορεί να δεσμευτεί απολύτως για την αποφασιστικότητα και την ικανότητά της να προβεί σε αντίποινα, τότε η αντίπαλός της είναι μάλλον απίθανο να της επιτεθεί. Επίσης η δημοσιοποίηση μιας συγκεκριμένης δέσμευσης πρέπει να γίνεται μόνο όταν, πραγματικά σε κατάσταση αδιεξόδου, μπορεί αυτή να υλοποιηθεί. Το να αναιρεθεί μια δημόσια δέσμευση, όταν το κράτος βρίσκεται σε δύσκολη θέση και υπό μεγάλη πίεση, μπορεί να προξενήσει σημαντική ζημιά στη «διαπραγματευτική ικανότητα», εικόνα και αξιοπιστία του απέναντι στον αντίπαλο, στα άλλα κράτη αλλά και στο εσωτερικό της χώρας.

Παράδειγμα. Το Παράδοξο του Εκβιαστή

Το παράδοξο που εμφανίζεται στα παίγνια αυτού του είδους είναι ότι ένας ορθολογικός παίκτης επιλέγει να δράσει με τρόπο που μπορεί να χαρακτηριστεί παράλογος προκειμένου να αποκομίσει το μέγιστο δυνατό κέρδος για αυτόν. Η εξήγηση αυτής της παράδοξης συμπεριφοράς βασίζεται στο ότι ο κάθε παίκτης επιλέγει να δράσει με τρόπο ώστε να πείσει τον αντίπαλο του να κάνει τα πάντα για να εξασφαλίσει το μέγιστο κέρδος.

Η σχέση μεταξύ του κράτους του Ισραήλ και του Αραβικού κόσμου, περιγράφεται πολλές φορές και ερμηνεύεται με τους όρους του παράδοξου αυτού που αναφέραμε. Η Αραβική πλευρά παρουσιάζεται αμετακίνητη και παράλογη στις απαιτήσεις της σε κάθε διαπραγμάτευση. Δείχνει αυτοπεποίθηση και σιγουριά στις επιδιώξεις που έχει κάθε φορά και κάνει απολύτως ξεκάθαρο ότι δεν θα υποχωρήσει ποτέ παρά μόνο με την πλήρη αποδοχή τους, χωρίς να δέχεται εναλλακτικές προτάσεις.

Οι αντίπαλοι κατανοούν ότι το παίγνιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές και ως εκ τούτου θα πρέπει να σκεφτούν ποια θα είναι η επίπτωση των τωρινών τους κινήσεων στα μελλοντικά παίγνια, όταν ο φόβος για μελλοντικές απώλειες λειτουργεί ως εξισορροπητικός παράγοντας. Παρόμοια, ο χαμένος δρα με υπομονή και με μακροπρόθεσμη προοπτική ακόμη και με κόστος να μην επιτευχθεί καμία συμφωνία και να συνεχίζεται η κατάσταση της επιθετικότητας προκειμένου να βελτιώσει την θέση του σε μελλοντικές διαπραγματεύσεις.

Η αξιοπιστία της επιμονής αυτής, χωρίς εναλλακτικές λύσεις, εξαναγκάζει το Ισραήλ να υποκύψει στον εκβιασμό, γνωρίζοντας ότι διαφορετικά θα φύγει από το τραπέζι των διαπραγματεύσεων χωρίς να έχει κερδίσει τίποτε.

Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι διαπραγματεύσεις με την Συρία για την παραχώρηση των υψωμάτων του Γκολάν, τα οποία κατέλαβαν οι Ισραηλινοί το 1967. Οι Σύριοι κατέστησαν σαφές εκ των προτέρων ότι δεν πρόκειται να παραχωρήσουν ούτε χιλιοστό των υψωμάτων.

Η Ισραηλινή πολιτική προσέγγιση βασίζεται στην υπόθεση ότι μια συμφωνία με τους Άραβες πρέπει να επιτευχθεί με κάθε κόστος. Η απουσία συμφωνίας δεν εξυπηρετεί τα στρατηγικά τους συμφέροντα και δεν μπορεί να γίνει ανεκτή. Παρόμοια, το Ισραήλ διεξάγει τις διαπραγματεύσεις μέσα από ένα πλαίσιο σκέψης που δεν του επιτρέπει να απορρίψει υποδείξεις που δεν συμφωνούν με τα συμφέροντά του.

Τελικά η Ισραηλινή πλευρά, η οποία επιδιώκει με κάθε κόστος μια ειρηνευτική συμφωνία με τη Συρία, κάνει αποδέκτη τη θέση της πλήρους αποχώρησης. Στον δημόσιο λόγο στο Ισραήλ είναι ξεκάθαρο ότι το σημείο ενάρξεως διαπραγματεύσεων με την Συρία πρέπει να συμπεριλαμβάνει και την πλήρη απόσυρση από τα υψώματα του Γκολάν, παρά την κρίσιμη στρατηγική σημασία τους για την ασφάλεια του κράτους τους. Για την επίτευξη ισορροπίας στο παίγνιο, ο «λογικός» οφείλει να κάνει κάποιες αλλαγές στις αντιλήψεις του προκειμένου να βελτιώσει τη θέση του και να αποκομίσει το μέγιστο όφελος.

9.5 Εξελίσσοντας την παγίδα της ανυπομονησίας

Γιατί είμαστε συχνά παρορμητικοί περισσότερο από ότι θα θέλαμε να ήμασταν. Να πάρουμε ένα από τα πολλά παραδείγματα: ενώ το «κόστος» του να παίρνεις ένα αντίγραφο ενός καινούριου βιβλίου ή το τελευταίο μοντέλο ενός υπολογιστή μειώνεται ουσιαστικά μέσα στο χρόνο, λίγοι άνθρωποι επιλέγουν να περιμένουν. Ακόμα παραπάνω σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχουν ανθρώποι που περνούν τις νύχτες τους στο ίντερνετ για να είναι οι πρώτοι αγοραστές. Από αυτή την οπτική της εξέλιξης αυτό γεννά ένα ερώτημα: η ανυπομονησία ευνοείται στην μακροχρόνια εξέλιξη. Δίνοντας την μεγαλύτερη παραλλαγή στην υπομονή και την αυτοσυγκράτηση στον πληθυσμό, θα μπορούσαν οι εξελικτικές δυνάμεις να ευνοήσουν αυτούς που θα επιθυμήσουν να περιμένουν; Θα έπρεπε να εξελίχτούμε προς μία κοινωνία ακόμα μεγαλύτερης υπομονής και απουσίας της παρορμητικότητας; Όντως, ερευνητές δείχνουν την παρακείμενη συσσώρευση πλούτου να ευνοούν την αναμονή τόσο δυναμικά που ευνοεί τον αναμένοντα ακόμα περισσότερο και από τον έξυπνο.

Μία εξήγηση είναι η φυσική εξήγηση, ένα παράδειγμα πως είμαστε ανυπόμονοι γιατί μπορεί να μην ζούμε αύριο. Ωστόσο αυτό από μόνο του δεν εξηγεί γιατί θα έπρεπε να εξελίξουμε την ανυπομονησία: ακόμα και ένα πολύ υπομονετικό άτομο θα συμπεριφερθεί ανυπόμονα στα πρόθυρα μιας αβέβαιης ζωής.

Εδώ θα ερευνήσουμε μία εναλλακτική εξήγηση της εξέλιξης της ανυπομονησίας. Σε μία επένδυση μυωπική τα προβλήματα είναι δυσλειτουργικά. Το ίδιο δεν είναι αληθές σε ένα παίγνιο. Τα χαρακτηριστικά μπορούν να συμπεριφερθούν ως ένα μέσο δέσμευσης. Για παράδειγμα, η φήμη για τεμπελιά είναι πολύ ποθητή ούτως ώστε κάποιος να αποφύγει αιτήματα για εκθέσεις διαιτησίας ή συστατικές επιστολές. Σε ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ένας ανυπόμονος παίχτης δεν μπορεί να απειληθεί με μελλοντική τιμωρία, και γίνεται ακόμα πιο δύσκολο να εξερευνηθεί το παίγνιο.

Η ιδέα της ανυπομονησίας ως δεσμευμένη είναι αρκετά λεπτή. Η επιτυχής δέσμευση - ως εραστές του Dr. Strangelove θα γνωρίζουν - απαιτεί δύο στοιχεία: αξιοπιστία και δημοσιότητα. Οι εξελικτικές δυνάμεις χτίζοντας την ανυπομονησία με προτιμήσεις κάνουν την ανυπόμονη συμπεριφορά αξιόπιστη. Αλλά πώς αυτό βοηθάει ενάντια σε ένα παρατηρητή που δεν μπορεί να παρατηρήσει απευθείας τις προτιμήσεις. Βέβαια είναι λογικό το ότι αυτές οι προτιμήσεις μπορεί να προέρχονται από προηγούμενη συμπεριφορά - αλλά τότε υπάρχει ένα κίνητρο και για τον υπομονετικό παίχτη ώστε να φτιάξει μία φήμη γύρω από την ανυπομονησία, και τότε είναι ξεκάθαρο γιατί η εξέλιξη θα ευνοούσε την ακαμψία της δέσμευσης σε σχέση με την ευκαμψία της υπομονής. Ακόμα περισσότερο, είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως η προσποίηση απαιτεί υπομονή για να έχει αποτελέσματα. Φτιάχνοντας μία φήμη είναι κάτι που ένας ανυπόμονος παίχτης δεν θα διάλεγε να κάνει. Ο υπομονετικός μπορεί να μιμηθεί τον ανυπόμονο, αλλά ο ανυπόμονος δεν μπορεί να μιμηθεί κανένα.

Για να αναλύσουμε αυτό το θέμα, κάνουμε μία απλουστευτική παραδοχή πως το παίγνιο ενός παίχτη παρατηρείται μόνο στο τέλος της ζωής του. Αυτό ελαχιστοποιεί το κίνητρο για έναν υπομονετικό παίχτη ώστε να μιμηθεί τον ανυπόμονο παίχτη. Γιατί τότε η εξέλιξη θα ευνοούσε τον ανυπόμονο από τον υπομονετικό? Η απάντηση ότι ενώ ο παίχτης δεν κερδίζει σε καταλληλότητα όντας ανυπόμονος, τα παιδιά του κερδίζουν. Η παίχτρια η ίδια δεν νοιάζεται γι' αυτό, μόνο για την δικιά της χρησιμότητα δεδομένου της υπομονής της. Η εξελικτική επιλογή από την άλλη είναι υψηλά εξαρτώμενη από τις συνέπειες των γονικών πράξεων για τα παιδιά. Εάν άλλοι παίχτες είναι ικανοί να συμπεράνουν την υπομονή του παίχτη εκ των προτέρων, εάν μπορούν να παρατηρήσουν ποια είναι τα παιδιά της, και αν καταλαβαίνουν πως η υπομονή είναι κληρονομική - τότε τα παιδιά δυνητικά ωφελούνται από την ανυπομονησία των γονιών.

Εμείς διερευνούμε αυτά τα θέματα στο πλαίσιο ενός απλού παιγνίου που σχεδιάστηκε για να απεικονίσει το πώς η ανυπομονησία μπορεί αναδυθεί ως ένα εξελικτικό αποτέλεσμα και επίσης να καταλάβουμε πώς διαφορετικοί κοινωνικοί ρόλοι μπορούν να έχουν αποτέλεσμα σε διάφορα επίπεδα της υπομονής. Όντως παρά τις ανέκδοτες αποδείξεις - η συμπεριφορά του Charles Sheen μας έρχεται στο μυαλό - ότι ο πλούσιος μπορεί να είναι τόσο παρορμητικός όσο και ο φτωχός σύμφωνα με τις στατιστικές αποδείξεις, για παράδειγμα όπως αναφέρεται στο Cuhna και Heckman ότι υπάρχει μία δυνατή σύνδεση μεταξύ των οικονομικά ανεπιτυχής οικογενειών της ανυπομονησίας και της έλλειψης αυτό ελέγχου.

Αυτή η δημοσίευση είναι σχεδιασμένη για να αναπτύξει περισσότερο την βιβλιογραφία των προτιμήσεων της εξέλιξης. Η εξέλιξη του αλτρουισμού έχει μελετηθεί αρκετά, για παράδειγμα, στο Bowles. Έχει μελετηθεί στο πλαίσιο της πολιτιστικής εξέλιξης από τους Bisin και Topa και το γενικότερο ζήτημα του πολιτισμού έναντι άλλων φορμών μετάδοσης έχει μελετηθεί από τον Bisin. Άλλα βαθιά ζητήματα για τη συγγένεια και την επιλογή έχουν εξεταστεί από τους Alger και Weibull. Εκδότες όπως ο Ely και Dekel, Ely και Yalankaya έχουν εξετάσει τα θεωρητικά ερείσματα της εξελικτικής ισορροπίας όταν οι προτιμήσεις εξελίσσονται, σχετίζοντας εξελικτικά αποτελέσματα με τις ισορροπίες των παιχνιδιών καταλληλότητας. Ωστόσο η εξέλιξη της ανυπομονησίας (ως αντίθετο στην υπομονή) δεν έχει μελετηθεί αρκετά.

Υπάρχει μία ποικιλία από μικρότερα ζητήματα γύρω από την παρορμητική συμπεριφορά και τον αυτοέλεγχο που θα διερευνηθεί στην βιβλιογραφία της συμπεριφορικής οικονομίας- για παράδειγμα οι Fundenberg και Levine. Ωστόσο, δεν εξετάζουμε αυτά τα ζητήματα δέσμευσης, της παρούσας προκατάληψης και της συνοχής του χρόνου εδώ - περισσότερο εστιάζουμε σε μία πιο απλή ερώτηση του γιατί διαχρονικές προτιμήσεις με χαμηλά γεωμετρικούς παράγοντες μπορεί να προκύψουν σε μία εξελικτική ρύθμιση. Επίσης κοιτάμε την ανεπάρκεια της ισορροπίας, η οποία έχει μία φυσική ερμηνεία όταν το μοντέλο γίνεται αντιληπτό ως ένα μοντέλο πωλητή-αγοραστή.

Σε όλες τις παραπάνω αναφερόμενες περιπτώσεις, τα κέρδη από την ανυπομονησία είναι ιδιωτικά. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες υπάρχουν κοινωνικά κέρδη από την ανυπομονησία. Ένα παράδειγμα αυτού παρέχεται στην βιβλιογραφία μέσω της σύγκρουσης. Σε αυτή την βιβλιογραφία οι άνθρωποι μπορούν να ικανοποιούν τις επιθυμίες τους είτε παράγοντας είτε ιδιοποιόντας την παραγωγή των άλλων(αυτό γίνεται μέσω της σύγκρουσης). Γενικά, οι πόροι που σπαταλιούνται σε συγκρούσεις είναι μία κοινωνική σπατάλη. Έτσι, είναι καλύτερο για την κοινωνία είναι οι άνθρωποι να μην εμπλέκονται σε σφετερισμούς μέσω σύγκρουσης, ως μία δεύτερη καλύτερη λύση, είναι πως αυτοί που το κάνουν να είναι πιο ανυπόμονοι, έτσι ώστε να μην επενδύουν πολλά στις τεχνολογίες που είναι επιβλαβείς στην κοινωνική πρόνοια. Αυτή είναι μία ακραία περίπτωση που μπορεί να εξηγηθεί στο μοντέλο μας. Μία εναλακτική, λιγότερο ακραία περίπτωση, είναι για παράδειγμα η περίπτωση των κερδοσκόπων. Θα μπορούσαν να έχουν μία κοινωνική λειτουργία, ονομαστικά, να βοηθάνε στην ευθυγράμμιση των τιμών, ωστόσο παίρνουν το κατάλληλο μέρος για το κέρδος των επενδύσεων.

Παράδειγμα. Παίγνιο του αγρότη και του σερίφη

Υπάρχει μία σειρά από παίχτες που χωρίζονται σε δύο πληθυσμούς, οι Αγρότες που αποτελούνται από ένα μέρος του φ που είναι ο πληθυσμός και των Σερίφηδων οι οποίοι είναι το υπόλοιπο $1 - \varphi$ του πληθυσμού. Σε κάθε γύρο οι Αγρότες και οι Σερίφηδες συνδυάζονται τυχαία όταν η πιθανότητα για να βρεθούν ένας Αγρότης και ένας Σερίφης είναι $2\varphi(1-\varphi)$. Οι εναπομείναντες Αγρότες και Σερίφηδες μένουν χωρίς ταίρι. Όλοι οι παίχτες έχουν μία αρχική προικοδότηση ενός βαρελιού σιτάρι, και η καταλληλότητα είναι γραμμική στο σιτάρι.

Ένας γύρος αποτελείται είτε από ενός ατόμου είτε δύο ατόμων παίγνιο που έχει τρείς περιόδους.

Αταίριαστος Αγρότης [Παίγνιο Επένδυσης]

- Περίοδος 1: επένδυση $k_I \in [0,1]$, κατανάλωση $1- k_I$
- Περίοδος 2: αποτέλεσμα λήψης και κατανάλωσης $y_I = A\ k_I^a$,όπου $aA \leq 1$ και $0<a<1, A>0$.
- Περίοδος 3: τίποτα

Αταίριαστος Σερίφης:

- Περίοδος 1: κατανάλωση της προικωδότησης του *1*
- Περίοδος 2: τίποτα.
- Περίοδος 3: τίποτα.

Παίγνιο Αγρότη-Σερίφη:

- Περίοδος 1a: Ο Σερίφης επενδύει $k_s \in [0,1]$, καταναλώνει $1\text{-}k_S$ και δηλώνει απαιτήσεις $d_s \geq 0$
- Περίοδος 1b: Ο Αγρότης επενδύει $k_f \in [0,1]$, καταναλώνει $1\text{-}k_F$ και συμφωνεί να πληρώσει στο σερίφη $d_F \geq 0$.
- Περίοδος 2: Ο Αγρότης παράγει αποτέλεσμα $y_F = Ak_F^a + G$, καταναλώνει $y_F – d_F$ και ο Σερίφης καταναλώνει d_F όπου το $G \geq 0$ είναι " το κέρδος του εμπορίου" από το ταίριασμα.
- Περίοδος 3: Εάν $d_f \geq ds$ τίποτα. Εάν $d_f < ds$ ο Σερίφης χρησιμοποιεί μία τιμωρία που θα κοστίσει στον αγρότη ABk_S όπου $B > 1$. Αυτή η τελευταία υπόθεση υπονοεί ότι είναι ευκολότερο να καταστρέψεις το αποτέλεσμα από να το παράγεις.

Σημειώστε πως γίνεται ανεκτό η τιμωρία να έχει ως αποτέλεσμα αρνητική καταλληλότητα.

Η προτίμηση ενός παίχτη εξαρτάται στην καταλληλότητα και χαρακτηρίζεται από την εκπτωτικό παράγοντα δ_F, δ_S.. Οι εκπτώσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ περιόδων. Στο παίγνιο της Επένδυσης η αντικειμενική συνάρτηση του Αγρότη είναι $1 - k_I + \delta_F y_I$. Στο παίγνιο του αταίριαστου Σερίφη η αντικειμενική συνάρτηση του σερίφη είναι *1*. Στο παίγνιο του Αγρότη - Σερίφη η αντικειμενική συνάρτηση του παιγνίου του αγρότη είναι:

$$1 – k_F + \delta_F(y_F – d_F) – \delta_F^2\, 1_{df<ds}\, ABk_s^a$$

όπου το $1_{df<ds}$ είναι το δεικτικό στοιχείο της συνάρτησης που αξιολογεί το 1 όταν το $d_f < d_s$ και 0 αλλιώς,

και αυτή του Σερίφη:

$$1 – k_S + \delta_S d_F.$$

Μπαίνοντας σε κάθε παίγνιο ο Αγρότης και ο Σερίφης γνωρίζουν τον δικό τους εκπτωτικό παράγοντα και έχουν ανεξάρτητα κοινά πιστεύω για τον εκπτωτικό παράγοντα του άλλου παίχτη που δίνεται από τις μετρήσεις των πιθανοτήτων $\mu_F(\delta_S)$, $\mu_S(\delta_F)$. Εκτός του παιγνίου του Αγρότη και του Σερίφη, αυτοί οι παράγοντες είναι άσχετοι. Υποθέτουμε ότι στο τέλος κάθε γύρου οι στρατηγικές που υπήρξαν κατά την διάρκεια του γύρου παρατηρούνται από όλους.

Σημειώστε πως αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι παρατηρείται πως ένας ταιριαγμένος αγρότης «θα έπαιζε» εάν δεν είχε ταίρι και πως ένας αταίριαστος Σερίφης «θα έπαιζε» εάν είχε ταίρι. Αυτό που έχουμε στο μυαλό μας είναι πως οι παίχτες στο πραγματικό παίγνιο παίζουν παραπάνω από μία φορά και μερικές φορές ταιριάζουν ενώ μερικές όχι ώστε στην πραγματικότητα το παίγνιο τους να παρατηρείται και στις δύο περιπτώσεις απρόβλεπτα, ωστόσο η σημείωση ώστε να γίνει αυτό επίσημο είναι αρκετά δυσκίνητη και επιδρά στο ίδιο το μοντέλο.

Για να δείτε τι έγινε αντιληπτό από αυτό το παίγνιο, θεωρήστε στην πρώτη περίπτωση το G = 0. Σε αυτή την περίπτωση ο Σερίφης δεν συνεισφέρει στην κοινωνική πρόνοια παραπάνω από το ίδιο το όργανο: μόνο οι Αγρότες είναι κοινωνικά παραγωγικοί με την έννοια του ότι μπορούν να κάνουν επενδύσεις που να έχουν αποτέλεσμα στην αύξηση του σιταριού. Ωστόσο, ο Σερίφης μπορεί σφετεριστεί κάποια από την παραγωγή των Αγροτών. Υπό αυτή την έννοια το μοντέλο έχει γεύση θηρευτή - θηραμάτων. Σημειώστε, ωστόσο, πως το μοντέλο είναι μορφοποιημένο ώστε να μην υπάρχουν εγγενής στρεβλώσεις στην θήρευση: το ποσό το οποίο ο Σερίφης μπορεί να θεωρεί κατάλληλο είναι ανεξάρτητο από το πόσο έχει παραχθεί από τους Αγρότες. Η θήρευση γίνεται μέσω της μεθόδου της τιμωρίας: οι Αγρότες πρέπει να επιλέξουν εάν θα συμμορφωθούν με τις απαιτήσεις του Σερίφη. Εάν οι Αγρότες αποτύχουν να συμβιβαστούν με τις απαιτήσεις του Σερίφη τιμωρούνται. Το επίπεδο της τιμωρίας εξαρτάται από την επένδυση που έγινε από τον Σερίφη. Σημειώστε πως δεν υπάρχει κανένα θέμα δέσμευσης για τον Σερίφη: όσο πιο υπομονετικός είναι τόσο περισσότερο θα επενδύσει στην τιμωρία - και όπως θα δούμε ο Σερίφης θα εξελιχθεί προς ένα μεγάλο βαθμό υπομονής.

Αυτό το παίγνιο δεν είναι ίδιο με το παίγνιο Χωρικός - Δικτάτορας όπου ο Δικτάτορας αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα δέσμευσης - αλλά δεν είναι ευαίσθητος στην υπομονή. Εδώ είναι οι Αγρότες που αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα δέσμευσης: η τιμωρία λαμβάνει χώρα με κάποια καθυστέρηση. Εξαιτίας της καθυστέρησης ένας λιγότερο υπομονετικός Αγρότης είναι λιγότερο πρόθυμος να ενδώσει στις απαιτήσεις του Σερίφη, και αν ο Σερίφης το ξέρει αυτό θα απαιτήσει λιγότερα. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένα πρόβλημα δέσμευσης στο κομμάτι του Αγρότη.

Μέχρι στιγμής έχουμε συζητήσει την περίπτωση όπου το G = 0. Εδώ ο Σερίφης δεν έχει καμία κοινωνική λειτουργία και είναι απλώς θηρευτής ή παράσιτο. Εάν σκεφτούμε τους Σερίφηδες ως ιδιοκτήτες γής και τους Αγρότες ως χωρικούς, γενικά οι ιδιοκτήτες παρέχουν κάποιες υπηρεσίες, που κυμαίνονται από την προστασία για την βελτίωση του μετοχικού κεφαλαίου. Αυτό το συλλαμβάνουμε - κάπως ωμά - μέσω του G>0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα θετικό πλεόνασμα που προκύπτει να ταιριάζει με τον Σερίφη. Σημειώστε πως το αποτέλεσμα αυτού του ταιριάσματος συσσωρεύεται στον Αγρότη, όχι στον Σερίφη. Εδώ το μοντέλο γίνεται ένα δυνητικά ευεργετικό εμπόριο - αλλά ο μόνος μηχανισμός που έχει ο Σερίφης για την ιδιοποίηση μέρους από τα κέρδη ώστε να εμπορεύεται, είναι να απειλεί τον Αγρότη. Δυστυχώς αυτός ο μηχανισμός δεν σχετίζεται με το κέρδος για το εμπόριο: το ποσό που ο Σερίφης μπορεί να ιδιοποιηθεί δεν εξαρτάται από το πόσο καλό είναι το ταίρι του. Αυτό αποκαλύπτει μία κατάσταση που μερικές φορές προκύπτει στην πραγματικότητα: εάν το ένα μέρος κατέχει ένα μηχανισμό επβολής, γιατί να μην ιδιοποιηθεί όσα περισσότερα μπορεί από το να περιοριστεί σε κάποια ποσότητα ορισμένη από τα κριτήρια αποδοτικότητας? Γιατί θα πρέπει ένα μεγάλο πολιτικά συνδεδεμένο μονοπώλιο απλώς να ιδιοποιείται ό,τι η αγορά είναι διατεθειμένη να πληρώσει, όταν μπορούν να έχουν και ένα ωραίο κομμάτι των φορολογικών εσόδων να πηγαίνουν μαζί?

Μία ερμηνεία όταν το G>0 είναι πως ο Σερίφης είναι ο αγοραστής και οι Αγρότες οι πωλητές, η ποσότητα του σιταριού που παρέχεται στον Σερίφη/αγοραστή αντιπροσωπεύει την ποιότητα της παραγωγής και το G το κέρδος του εμπορίου. Εδώ ο Αγρότης/πωλητής έχει ένα κίνητρό να κλέψει τον Σερίφη/αγοραστή- και η μόνη πηγή που έχουν ο Σερίφης/Αγοραστής είναι να ανταποδώσει στον Αγρότη/πωλητή που παρέχει χαμηλή ποιότητα. Ως εκ τούτου, η ποιότητα που παρέχεται θα είναι ένα προαπαιτούμενο για την ικανότητα του Σερίφη/αγοραστή να τιμωρήσει τον Αγρότη/πωλητή. Κατά μία έννοια αυτό μας παρέχει το αντίθετο από την περίπτωση όπου το G=0: σε αυτή την περίπτωση ο Σερίφης ήταν παράσιτο. Στο πλαίσιο του αγοραστή/πωλητή είναι αγοραστές που μπορεί να πάρουν πολύ μικρό μερίδιο του πλεονάσματος για να τους παρέχουν επαρκή κίνητρα.

Γυρνάμε τώρα μελετήσουμε το υποπαίγνιο της τέλειας ισορροπίας σε διαφορετικούς αγώνες. Αρχικά, και αυτό είναι ένα κρίσιμο σημείο, οι πληροφορίες για την στρατηγική ενός παίχτη γίνεται δημόσια μόνο μετά το τέλος του παιγνίου, σε αυτό το σημείο ο παίχτης πεθαίνει και δεν ξαναπαίζει, ώστε τα μόνα στοιχεία που θα έχει ένας παίχτης θα είναι η χρησιμότητα που θα λαμβάνεται κατά την διάρκεια του αγώνα δοσμένων των προτιμήσεων.

Στο παίγνιο της επένδυσης η αντικειμενική συνάρτηση για τον Αγρότη είναι $1 - k_I + \delta_F A k_I^a$, ο πρώτος όρος κατά σειρά είναι $a\delta_F A k^{a-1} - 1 = 0$, από το οποίο το βέλτιστο είναι $k_I = (aA)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)}$.

Στο παίγνιο Αγρότη-Σερίφη η αντικειμενική συνάρτηση του Αγρότη είναι

$$1 - k_F + \delta_F(Ak_F^a - d_F + G) \text{ εάν } d_F \geq d_s \text{ ή}$$
$$1 - k_F + \delta_F(Ak_F^a - d_F + G) - \delta_F^2 ABk_s^a \text{ εάν } d_F < d_s$$

Σημειώστε αυτή η συνάρτηση είναι έτσι στημένη ώστε η βέλτιστη επένδυση για τον Αγρότη να είναι ανεξάρτητη από το d_F και τα πιστεύω του Αγρότη, είτε υπάρχει τιμωρία είτε όχι, και είναι το ίδιο και όταν ο Αγρότης δεν αγωνίζεται και είναι χωρίς ζευγάρι: $k_F = k_I = (aA)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)}$. Παρατηρήστε πως όσο περισσότερο ανυπόμονος είναι ο Αγρότης, παράγει λιγότερο, έτσι είναι δυνητικά λιγότερο κατάλληλος από ένα υπομονετικό Αγρότη. Ως εκ τούτου σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει μια δεδομένη κατάληξη όπου οι εξελικτικές δυνάμεις θα ευνοούν τον λιγότερο υπομονετικό Αγρότη.

Διαλέγοντας πόσο να πληρώσουν, ξεκάθαρα ο Αγρότης θα έπρεπε να διαλέγει είτε $d_F = 0$ και να παίρνει $1 - k_F + \delta_F(Ak_F^a - d_F + G) - \delta_F^2 ABk_s^a$ είτε $d_F = d_S$ και να παίρνει $1 - k_F + \delta_F(Ak_F^a - d_F + G)$, όποιο από τα δύο είναι μεγαλύτερα - και πάλι ανεξάρτητα από τις πεποιθήσεις του.
Η βέλτιστη πληρωμή για τον Σερίφη εξαρτάται από τα πιστεύω του. Αφού αυτή είναι η περίπτωση την οποία εξετάζουμε, λύνουμε την περίπτωση όπου τα πιστεύω του είναι ένα μαζικό σημείο $\bar{\delta}$. Τότε ο Σερίφης θα μπορούσε να διαλέξει την μεγαλύτερη απαίτηση με συσχετιζόμενη με την πληρωμή: $d_S = \bar{\delta}_F ABk_S^a$. Η πιστευτή χρησιμότητα του Σερίφη τότε είναι $1\text{-}k_S + \delta_S \bar{\delta}_F ABk_S^a$. Τελικώς, το k_S επιλέγεται από τον Σερίφη για να μεγιστοποιήσει την χρισημότητα του, έτσι ώστε $k_S = (aAB)^{1/(1-a)}(\bar{\delta}_F \delta_S)^{1/(1-a)}$. Η αντίστοιχη ζήτηση είναι :

$$d_S = \bar{\delta}_F AB((aAB)^{1/(1-a)} (\bar{\delta}_F \delta_S)^{1/(1-a)})^a$$
$$= a^{a/(1-a)} (AB)^{1/(1-a)} \bar{\delta}_F^{\ 1/(1-a)} \delta_S^{a/(1-a)}$$

Το ποσό που απαιτεί ο Σερίφης είναι μία αυξανόμενη συνάρτηση και για τους δύο παράγοντες ο παράγοντας προεξόφλησης του Σερίφη – απο τη στιγμή που ο υπομονετικός Σερίφης θα επενδύσει περισσότερα – και η πιθανή προεξόφληση – απο τη στιγμή που ο υπομονετικός Αγρότης είναι πιο ευαίσθητος σε μία απειλή.

Παράδειγμα. Η Εξελικτική Διαδικασία: Δύο Τύποι.

Τώρα θα θέλαμε να ορίσουυμε την παράλληλη εξέλιξη των προτιμήσεων όπως μετρήθηκαν από τους προεξοφλημένους παράγοντες και τον αριθμό των Αγροτών και των Σερίφηδων. Στην ανάλυση η συνολική καταλληλότητα ενός συγκεκριμένου πλυθησμού δεν εξαρτάται από τις προτιμήσεις, αλλά από το σύνολο, μη προεξοφλημένης αναμενόμενης χρησιμότητας υπεράνω της ζωής του ατόμου.

Για λόγους απλότητας θεωρούμε την πρώτη περίπτωση όταν υπάρχουν δύο πιθανές προτιμήσεις: είτε υπομονετικές προτιμήσεις με προξοφλημένο τον πρώτο παράγοντα – που ανταποκρίνεται στη μεγιστοποίηση του ίδιου συνόλου καταλληλότητας συνάρτησης αντικειμένων – ή ανυπόμονες προτιμήσεις με κάποιο $0<\delta<1$, που είναι $\delta_F, \delta_S \in \{\delta, 1\}$.

Είναι ένα απλό μοντέλο όπου υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητοι τύποι: ο υπομονετικός Αγρότης, ο υπομονετικός Σερίφης, οι ανυπόμονοι Αγρότες και οι ανυπόμονοι Σερίφηδες. Στο τέλος κάθε γύρου κάθε γκρουπ γεννάει έναν απόγονο που είναι πανομοιότυπος σε προτιμήσεις και τύπο: οι απόγονοι παρατηρούνται συχνά. Από τη στιγμή που οι πεπειθήσεις με τις οποίες μπαίνουν σε ένα γύρω είναι δεδομένες και κανένας παίχτης δεν έχει κανένα κίνητρο να κάνει κάτι άλλο από το να μεγιστοποιήσει με αξιοπρέπεια της προτιμήσεις του, όπως παρατηρούμε τα παραπάνω σημαίνουν πως στο τέλος ενός γύρου οι προτιμήσεις των παιχτών μπορεί να συναχθούν από τη συμπεριφορά, ώστε οι προτιμήσεις των απογόνων να είναι γνωστές και σίγουρες – και ίσες με την πραγματική τους αξία. Σε αυτό το πλαίσιο: γιατί η εξέλιξη δεν θα μπορούσε να ευνοεί απλά τους υπομονετικούς παίχτες καθώς αυτοί μεγιστοποιούν την καταλληλότητα του. Ο λόγος γι αυτό είναι πως ο κάθε ένας ατομικά απλά μεγιστοποιεί τις με αξιοπρέπεια τις δικές του προτιμήσεις και δεν υπολογίζει πως αυτό θα επιρρεάσει τις επακόλουθες γενιές. Συγκεκριμένα, για τα σταθερά πιστεύω του Σερίφη είναι κοστοβόρρο σε καταλληλότητα γιά κάθε ξεχωριστό Αγρότη να μεγιστοποιήσει με τόκο σε ένα προεξοφλημένο παράγοντα μικρότερο της μονάδας. Ωστόσο, κάνοντας έτσι, αυτός (ακούσια) καθιερώνει πως ο απόγονος του θα είναι ανυπόμονος – και αυτό σημαίνει πως οι επακόλουθοι Σερίφηδες θα ζητάνε λιγότερα από τους απογόνους του. Ενώ ο ανυπόμονος Αγρότης χάνει μέσω της ανυπομονησίας του, ο απόγονος επωφελήται, και αυτό δημιουργεί μια πιθανή εξελικτική δύναμη προς την ανυπομονησία.

Ανακαλέστε πως το φ είναι το μέρος του πληθυσμού που είναι Αγρότες, ας πούμε πως το ψ συμβολίζει το κλάσμα των Αγροτών που είναι ανυπόμονοι. Θέτουμε $V_F(\delta_F), V_S(\delta_S)$ την εξελικτική καταλληλότητα των Αγροτών και των Σερίφηδων ως μία συνάρτηση των προτιμήσεων $\overline{V}$ τους. Για να υπολογίσουμε αυτό, υπολογίζουμε την καταλληλότητα σε διαφορετικά ταιριάγματα. Η καταλληλότητα ενός Αγρότη που δεν έχει ταίρι είναι

$$V_F^{U}(\delta_F) = 1 + a^{a/(1-a)} A^{1/(1-a)} \delta_F^{a/(1-a)} - (aA)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)},$$

Ενώ στο παίγνιο Αγρότη – Σερίφη είναι

$$\begin{aligned} V_F^{FS}(\delta_F,\delta_S) &= V_F^{U}(\delta_F) - d_S + G \\ &= V_F^{U}(\delta_F) - a^{a/(1-a)} (AB)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)} \delta_S^{a/(1-a)} + G\,. \end{aligned}$$

Η καταλληλότητα ενός αταίριασου Σερίφη είναι ένα, ενώ στο παίγνιο Αγότη Σερίφη είναι

$$\begin{aligned} V_F^{FS}(\delta_F,\delta_S) &= 1 - k_S + d_S \\ &= 1 + a^{a/(1-a)} (AB)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)} (\delta_S^{a/(1-a)} - a\delta_S^{1/(1-a)}) \end{aligned}$$

Το μοντέλο της εξέλιξης πρότυπο δυναμικό αντίγραφο που βασίζεται στην εξελικτική καταλληλότητας. Εάν το φ_j είναι η ένωση του πλυθησμού των κρούπ j, V_J και η καταλληλότητα του γκρούπ $\overline{V}$ είναι η μέση καταλληλότητα του πλυθησμού, τότε

$$\varphi_j = \varphi_j (V_j - \overline{V})$$

Η ανάλυση μας λαμβάνει μεγάλη βοήθεια από την παρατήρηση πως οι Σερίφηδες εξελίσονται προς μία μεγαλύτερη υπομονετικότητα:

Πρόταση. $\psi_S < 0$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε πως V_S^{FS} (δ_F,δ_S) αυξάνεται το δ_S. Υπολογίζουμε :

$$D_{\delta s} V_S^{FS}(\delta_F,\delta_S) = a^{a/(1-a)} (AB)^{1/(1-a)} \delta_F^{1/(1-a)} (a/(1-a))\, \delta_S^{-1} (\delta_S^{a/(1-a)} - \delta_S^{1/(1-a)}) > 0$$

Η ενδιαφέρουσα περίπτωση φαίνεται μακροχρόνια, γι αυτό, έχει μόνο τρίς τύπους: ο υπομονετικός Σερίφης, και οι δύο ανυπόμονοι και υπομονετικοί Αγρότες. Σε αυτή την περίπτωση, στην οποία επικεντρονώμαστε τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική καταλληλότητα ενός (υπομονετικού) Σερίφη να είναι

$$V_S = a^{a/(1-a)}(AB)^{1/(1-a)} (1-a)\{(1 - \psi)\varphi + \psi\varphi\delta^{1/(1-a)}\}$$

ενώ του Αγρότη δίνεται από το

$$V_F(\delta_F) = 1 + a^{a/(1-a)} A^{1/(1-a)} \delta_F{}^{a/(1-a)} (1 - a\, \delta_F) - (1 - \varphi)\, a^{a/(1-a)}(AB)^{1/(1-a)}\, \delta_F{}^{1/(1-a)} + (1-\varphi)G$$

Σημειώστε πως αυτό εξαρτάται από το πόσοι Αγρότες υπάρχουν, και σίγουρα όχι, τι τύπου Αγρότες είναι. Η δυναμική του αντιγράφου μπορεί να συμπτυχθεί σε δύο εξισώσεις.

$$\psi = \psi\ (1 - \psi)[\ V_F(\delta) - V_F(1)]$$
$$\varphi = \varphi(1 - \varphi)\{[\ V_F(\delta) - V_S]\} - (1 - \psi)[\ V_F(\delta) - V_F(1)]$$

Θεώρημα. Υποθέτουμε πως $B^{1/(1-\alpha)}\alpha < (1 - \alpha)(B^{1/(1-\alpha)} - 1)$. Τότε για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα G τέτοιο ώστε να υπάρχει μία σταθερή μοναδική κατάσταση και που να είναι και δυναμικά σταθερή. Στο σταθερό επίπεδο

$$\varphi = \varphi^* \equiv 1 - [(1 - \alpha - \delta^{\alpha/(1-\alpha)}(1- \alpha\delta))/B^{1/(1-\alpha)}\ (1-\delta^{1/(1-\alpha)})$$

Παρατηρήστε πως το φ* δεν εξαρτάται από το G. Παρατηρήστε επίσης πως το υποθετικό $B^{1/(1-a)}a < (1 - a)\ (B^{1/(1-a)} - 1)$ απο την στιγμή που για κάθε $B > 1$ υπάρχει ένα ικανοποιητικά μικρό α. Μπορούμε επίσης να υπλογίσουμε

$$D_\delta\varphi^* \equiv (\alpha / (1-\alpha))\ \delta^{\alpha/(1-\alpha)}\ ((\delta^{-1} - 1) / [B^{1/(1-\alpha)}\ (1-\delta^{1/(1-\alpha)})]) + (\varphi^* / [(1-\alpha)(1-\delta^{1/(1-\alpha)})])\ \delta^{\alpha/(1-\alpha)} > 0$$

Έτσι ώστε αν οι ανυπόμονοι Αγρότες είναι λιγότεροι θα υπάρχουν περισσότεροι από αυτούς σε μία σταθερή κατάσταση.

Το κλειδί της παρατήρησης εδώ είναι πως σε μία εσωτερικά σταθερή κατασταση με μακροπρόθεσμη λογική θα υπάρχει ένα κομμάτι των αγροτών που θα είναι ανυπόμονοι: η εξέλιξη οδηγεί στην ανυπομονησία. Ακόμα περισσότερο, βλέπουμε πως το κομμάτι του πληθυσμού που είναι Αγρότες πέφτει κάτω από το φ^* ενώ το κομμάτι των αγροτών που είναι ανυπόμονοι αυξάνεται, και αν το κομμάτι του πληθυσμού των Αγροτών αυξάνεται πάνω από το φ^* το αντίστοιχο κομμάτι των υπομονετικών Αγροτών αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει γιατί: πολλοί Σερίφηδες ευνοούν τους ανυπόμονους απο τη στιγμή που οι ανυπόμονοι μειώνουν τις απαιτήσεις από τους Σερίφηδες, ενώ μερικοί Σερίφηδες ευνοούν τους υπομονετικούς απο τη στιγμή που η υπομονετικοί Αγρότες τους οδηγούν σε πιο παραγωγικές επενδύσεις. Η προβληματική άποψη αυτής της ανάλυσης είναι ότι με μόνο δύο πιθανούς προεξοφλητικούς παράγοντες το επίπεδο της ανυπομονονυσίας δ συγκεκριμενοποιήται εξογενώς. Μία πιο ικανοποιητική ανάλυση θα άφηνε πολλά διαφορετικά επίπεδα ανυπομονησίας και θα ρώταγε ποιό επίπεδο προκύπτει ενδογενώς.

Παράδειγμα. Η Εξελικτική Διαδικασία: Πολλοί Τύποι.

Δεν είναι πολύ φυσικό να υποθέτουμε πως η μόνη πιθανή προτίμηση δίνεται μόνο από δύο παράγοντες μείωσης τα *δ, 1*. Υποθέτουμε αντ αυτού πως υπάρχουν άτομα με κάθε παράγοντα μείωσης στο διάστημα $\delta \in [0,1]$. Η γενική περίπτωση είναι δυσεπίλυτη, αλλά μία μικρή προσέγγιση μας δίνει μία ενδοσκόπιση στην δυναμική και μας ενεργοποιεί να ορίσουμε μια σταθερή κατάσταση της αξίας του *δ.*

Πρώτα παρατηρούμε πως όπως στην περίπτωση των δύο περιπτώσεων, οι Σερίφηδες με $\delta = 1$ έχουν πάντα μεγαλύτερη καταλληλότητα απο αυτούς που έχουν χαμηλότερους μειωτικούς παράγοντες, όποτε με μακροπρόθεσμο ορίζοντα οι Σερίφηδες θα εξελίσονται προ μία υπομονετική συμπεριφορά. Όπως και προηγούμενα, η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκεί όπου υπάρχει ένα μόνο γκρουπ υπομονετικών Σερίφηδων, και θα εστιάσουμε σε αυτή την περίπτωση.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι υπάρχει μία πυκνή συνάρτηση πάνω από τους παράγοντες μείωσης ψ_δ και πως είμαστε κοντά σε μία ενδογενή σταθερή κατάσταση, την περίπτωση ενδιαφέροντος. Τότε ενώ η σταθερή κατάσταση είναι πολύ κοντά η πυκνή αυτή συνάρτης πλησιάζει ένα spike όπως παρεμβάλεται κάθε τύπος Αγρότη προς τον καλύτερο δυνατό παράγοντα μείωσης. Η δυναμική του αντιγραφου δίνεται από τα παρακάτω

$$\psi_\delta = \psi_\delta\, (V_F(\delta) - \overline{V}_F)$$

όπου το $\overline{V}_F$ είναι η μέση καταλληλότητα των αγροτών. Από τη στιγμή που η διανομή των τύπων είναι πολύ συμπηκνομένη κοντά στην μέση τιμή δ_F κάνουμε εισαγωγή μίας προσέγγισης. Πρώτα , κάνουμε μία προσέγγιση της μέσης καταλληλότητας $\overline{V}_F$ από την καταλληλότητα V_F αξιολογημένη με τον μέσο παράγοντα μείωσης δ_F.

$$\begin{aligned} \psi_\delta &= \psi_\delta\, (V_F(\delta) - \overline{V}_F) \\ &\approx \psi_\delta(V_F + DV_F[\delta - \delta_F] - V_F) \\ &= \psi_\delta\, DV_F[\delta - \delta_F] \end{aligned}$$

Μετά από ένα σύντομο χρονικό διάστημα τ το σύστημα θα εξελιχθεί σύμφωνα με το παρακάτω:

$$\begin{aligned} \psi_\delta(t + \tau) &\approx \psi_\delta(t) + \psi_\delta(\tau) \\ &\approx \psi_\delta(t) + \psi_\delta(t)\, DV_F[\delta - \delta_F]\tau \end{aligned}$$

Μπορούμε μετά να υπολογίσουμε τον παράγοντα μείωσης με επανάλληψη.

$$\begin{aligned} \delta(t + \tau) &= \int \delta\, \psi_\delta(t + \tau)\, d\delta \\ &\approx \int \delta[\psi_\delta(t) + \psi_\delta(t)\, DV_F[\delta - \delta_F]\ \tau]\, d\delta \\ &= \int \delta\, \psi_\delta(t)\, d\delta + \int \delta\, \psi_\delta(t)\, DV_F[\delta - \delta_F]\ \tau]\, d\delta \\ &= \delta_F(t) + DV_F\tau \int \delta\, \psi_\delta(t)\, [\delta - \delta_F]\ \tau]\, d\delta \\ &= \delta_F(t) + \sigma^2(t)\, DV_F\tau. \end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει την εξίσωση δυναμικής προσέγγισης για τον μέσο παράγοντα μείωσης των Αγροτών

$$\dot{\delta}_F \approx \sigma^2\, (t)DV$$

Το γεγονός πως η διακύμανση σ^2 είναι συνάρτηση του χρόνου δεν μας ενδιαφέρει για την δική μας ανάλυση σταθερότητας, έτσι την κρατάμε σταθερή, και μελετούμε την δυναμική εξίσωση

$$\dot{\delta}_F \approx \sigma^2\, DV$$

Δεδομένης αυτής της καλύτερης δυναμικής απάντησης συνεχούς χρόνου – αυτές είναι η μέση κίνηση προς την κατεύθυνση της αύξησης καταλληλότητας. Η δυναμική του φ είναι το δυναμικό αντίγραφο, τώρα βασισμένοι στο μέσο παράγοντα μείωσης, ώστε

$$\dot{\phi} = \varphi(1-\varphi)(V - V) \, .$$

Θεώρημα 3: Υποθέτουμε $G > (aAB)^{1/(1-a)}$. Τότε υπάρχει μια μοναδική εσωτερική σταθερή κατάσταση και να είναι δυναμικά σταθερή.

Σημειώστε πως όπως στο θεώρημα 2, η σταθερότητα του Θεωρήματος 3 απαιτεί ότι το G να μην είναι πολύ μικρό. Ωστόσο, σε αντίθεση με το Θεώρημα 2 δεν βάζει ένα ανώτερο όριο για το G. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2 δείχνει πως ο λόγος για το ανώτατο όριο του G δεν συνεπάγεται στεθερότητα, αλλά μάλλον χρειάζεται για να ασφαλίσει την ύπαρξη ενός εσωτερικού σταθερού σημείου. Για να καταλάβουμε τί συμβαίνει, ανακαλέστε την Πρόταση 1 όπου το φ^* το οποίο δεν εξαρτάται από το G. Όπως αυξάνουμε το G κρατόντας το σταθερές τις άλλες παραμέτρους αυτό αυξάνει την χρισημότητα των Αγροτών, ενώ δεν αυξάνει την χρισημότητα του Σερίφη. Ως εκ τούτου από τη στιγμή που το G είναι αρκετά μεγάλο στο φ^* - ανεξάρτητα της τιμής του ψ οι Αγρότες και των δύο τύπων θα τα πάνε καλύτερα από τους Σερίφηδες και έτσι ο αριθμός των Αγροτών θα αυξηθεί. Αυτό υπονοεί πως δεν υπάρχει μεγαλύτερη σταθερή κατάσταση: στα δεξιά των φ^* υπομονετικών Αγροτών υπάρχουν οι ευνοημένοι πάνω από τους ανυπόμονους. Ωστόσο, αυτό είναι ένα τεχνούργημα του γεγονότος πως υπάρχουν μόνο δύο τύποι. Εάν ο ανυπόμονος Αγρότης ήταν λιγότερο ανυπόμονος - αυτό να λέγεται, εάν το δ ήταν μεγαλύτερο, θα βλέπαμε ότι αυτό θα κινούσε το φ^* προς τα δεξιά, και προς την μεγαλύτερη τιμή του δ όπου θα μπορούσαμε να έχουμε μία σταθερή κατάσταση. Από τη στιγμή που το δ_F έγινε ενδογενές, το Θεώρημα 3 μας δείχνει πως αυτή είναι η σωστή διαίσθηση: ανεξάρτητα του πόσο μεγάλο είναι G υπάρχει πάντα μία σταθερή κατάσταση. Τώρα καθιερώνουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με την σταθερή κατάσταση.

Θεώρημα 4:
(1) Το σταθερό σημείο της τιμή του φ είναι μεγαλύτερο από 1/2, και όσο μεγαλύτερο είναι τόσο μεγαλύτερο είναι και το G.

Τα συγκριτικά στατιστικά με εκτιμήσεις για τα G και B είναι τα ακόλουθα:

(2) $D_G\delta_F > 0$, $D_G\varphi > 0$,$D_B\delta_F < 0$, και για πολύ μεγάλα G, $D_B\varphi < 0$.

Παράδειγμα. Αποδοτικότητα και η Παγίδα της Ανυπομονησίας

Τωρα αναλύουμε το θέμα της πρόνοιας. Το μέτρο της πρόνοιας είναι η μέση καταλληλότητα για τον συνολικό πληθυσμό. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε πως μία αναποτελεσματική παγίδα ανυπομονησίας ανακύπτει στο ποιος λάθος πληθυσμός θα γίνει ανυπόμονος.

Για να υπολογίσουμε την μέση καταλληλότητα του συνολικού πληθυσμού, παρατηρούμε πως: υπάρχει ένα μέρος φ^2 από αταίριαστους αγρότες με καταλληλότητα $V_F^U(\delta_F)$, ένα κομμάτι $(1 - \varphi)^2$ από αταίριαστους Σερίφηδες με καταλληλότητα 1, και ένα κομμάτι $2\varphi(1 - \varphi)$ από ταιριαγμένους αγρότες και σερίφηδες οι οποίοι μοιράζονται μία συνολική καταλληλότητα $V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S) + V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S)$. Ως εκ τούτου η αναμενόμενη μέση καταλληλότητα είναι

$$V = \varphi^2 \int_0^1 V_F^U(\delta_F)\, f_F(\delta_F)\, d\delta_F + (1 - \varphi)^2 1$$

$$+ \varphi(1 - \varphi) \int_0^1 \int_0^1 (V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S) + V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S)) f_F(\delta_F)\, f_S(\delta_S) d\delta_F\, d\delta_S$$

Πιστεύουμε πως ο κοινωνικός σχεδιαστής θα διαλέγει μία κατανομή γύρω από τους παράγοντες μείωσης για τον Σερίφη και τον Αγρότη, $f_F(\delta_F)$, $f_S(\delta_S)$ αντίστοιχα (το οποί μπορεί και θα είναι μία συνάρτηση δέλτα, κατά Dirac), και το μέρος φ του πληθυσμού που θα του τεθεί ο ρόλος του Αγρότη, με στόχο την μεγιστοποίηση της καταλληλότητας τους. Σε όρους, ο κάθε ένας ξεχωριστά διαλέγει το καλύτερο δυνατό του επίπεδο επένδυσης. Από τη στιγμή που ο σχεδιαστή είναι περιορισμένος να διαλέξει τους παράγοντες μειώσεων, αναφερόμαστε σε αυτό σαν το δεύτερο καλύτερο.

Θεώρημα. Η δεύτερη καλύτερη κατανομή δίνεται από:

$$\phi = \min\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1 - A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} - \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{G}\right\}$$

όπου το f_F και το f_S θέτοντας ένα μαζικό σημείο στο $\delta_F = 1$ και $\delta_S = 0$, αντίστοιχα.

$$k_F = k_I = (aA)^{1/(1-a)}\delta_F^{1/(1-a)}$$
$$k_S = (aAB)^{1/(1-a)}\,(\bar{\delta}_F\delta_S)^{1/(1-a)}$$

Απόδειξη: Ο κοινωνικός σχεδιαστής επιλέγει τα επίπεδα επενδύσεων k_F και k_S έμεσα, επιλέγοντας τους παράγοντες μείωσης. Τ

$V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S)$

Σε όρους επένδυσης, η καταλληλότητα δίνεται από:

$$V_F^U(\delta_F) = 1 + Ak_F^a - k_F$$

$$V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S) + V_F^{FS}(\delta_F, \delta_S) = 2 + Ak_F^a + G - k_F - k_S$$

Δοσμένου του ότι η καταλληλότητα μειώνεται αυστηρά στο k_S, η καλύτερη δυνατή κατανομή θέτει το μαζικό σημείο στην τιμή του δ_S το οποίο υλοποιεί το $k_S = 0$, δηλαδή $\delta_S = 0$. Αντίστοιχα, η καταλληλότητα μεγιστοποιείται όταν οι Αγρότες επιλέγουν να μεγιστοποιήσουν την καθαρή παραγωγή, το οποίο κάνουν εάν $\delta_F = 1$. Κάθε ένα από τα δύο συμπεράσματα κρατιούνται ανεξάρτητα από το φ. Ως εκ τούτου, μπορεί να βρούμε την καλύτερη τιμή αυτού τελευταίου παραδείγματος μεγιστοποιώντας την Ισοδυναμία (1) όταν το f_F και το f_S αξιολογούνται στις καλύτερες τους τιμές, αυτό γίνεται, όταν θέτουμε ως μαζικό σημείο το $\delta_F = 1$ και το $\delta_S = 0$, αντίστοιχα. Έτσι, ο αντικειμενικός μας στόχος γίνεται:

$$V = \varphi^2\,(1 + (Ak_F)^a - k_F) + (1 - \varphi)^2 + \varphi(1 - \varphi)(2 + Ak_F - k_F + G - k_S)$$

το οποίο μεγιστοποιείται καθώς υποστηρίζεται.

Η διαίσθηση για τους καλύτερους παράγοντες μείωσης είναι απλή: οι επενδύσεις του Σερίφη είναι μία κοινωνική δαπάνη, οι οποίες δεν θα κάνουν αν γίνουν πολύ ανυπόμονοι. Από την άλλη πλευρά, οι Αγρότες είναι παραγωγικοί, και θα διάλεγαν την καλύτερη επένδυση εάν ήταν εξαιρετικά υπομονετικοί. Για την ακρίβεια, στη γλώσσα των Hirshleifer οι Σερίφηδων αποκτούν τον πλούτο τους μέσω της σύγκρουσης, στην γλώσσα των Tullock και Krueguer, οι Σερίφηδες είναι ενοικιαστές ασύλου. Σε αντίθεση, οι Αγρότες αποκτούν τον πλούτο τους μέσω της παραγωγής τους.

Όσο για το καλύτερο κομμάτι Αγροτών, είναι μικρότερο από 1 γιατί υπάρχει ένα κοινωνικό κέρδος του μεγέθους G όποτε οι Αγρότες και οι Σερίφηδες συναντιούνται. Το μέρος του πληθυσμού μεγιστοποιείται στο

$$\varphi = 1/2.$$

Στο πνεύμα της βιβλιογραφίας των ενοικιαστών ασύλου λέγεται πως οι κοινωνίες, κατά τον βέλτιστο τρόπο, θα θέλουν ενοικιαστές ασύλου μόνο εάν όταν έρχονται αντιμέτωποι με παραγωγικούς φορείς και θέλουν να αυξήσουν την "κοινωνική παραγωγή" (αυτό συμβαίνει, $G > 0$). Αλλιώς, εάν $G = 0$, θα ήταν βέλτιστο να μην ενοικιαστούν άσυλα.

Μία σχετική ερώτηση έχει να κάνει με την βέλτιστη μίξη Αγροτών και Σερίφηδων όταν ο κοινωνικός σχεδιαστής δεν επιλέγει του δικούς τους παράγοντες μείωσης, αλλά αντίθετα όταν έχουν τιμές ισορροπίας. Η πρώτη σειρά όρων σε αυτό το περιορισμένο πρόβλημα μεγιστοποίησης μας δίνει

$$\varphi = \min \{ 1, 1/2 + (1/2) [(\psi_F - G - k_F)/(G - k_S)]\}$$

το οποίο είναι επαρκές υπό την προϋπόθεση $G - k_S > 0$. Είναι μικρότερο από 1 για G αρκετά μεγάλο, και τείνει στο 1/2 καθώς το G μεγαλώνει.

Για την ακρίβεια η σταθερή κατάσταση $\varphi > 1/2$ υπονοεί πως εάν το G είναι αρκετά μεγάλο, στην σταθερή κατάσταση υπάρχουν αναποτελεσματικά πολλοί Αγρότες, και πολύ λίγοι Σερίφηδες. Η διαίσθηση ότι αυτό προκύπτει γιατί οι Σερίφηδες πρέπει να πληρώσουν για να μαζέψουν ένα μερίδιο G.

Αυτό είναι που καλούμε παγίδα της ανυπομονησίας. Το βλέπουμε σαν παγίδα όταν διερμηνεύουμε το μοντέλο ως ένας Σερίφης να είναι Αγοραστής και ένας Αγρότης να είναι Πωλητής, βλέποντας το k_S σαν το ποσό του τρέχοντος κόστους επιβάλλοντας αξιοπιστία και G καθώς μακροχρόνια κερδίζεται μία συνεργασία και η εμπιστοσύνη. Σημειώστε πως η ανεπάρκεια χειροτερεύει καθώς το G μεγαλώνει.

Με αυτή την διερμηνεία, το τελικό αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4 λέει πως αν τα κέρδη για να ανταλλάξεις το G είναι αρκετά μεγάλα μειώνοντας την αποτελεσματικότητα της τιμωρίας θα αύξανε τον αριθμό των Σερίφηδων στην σταθερή κατάσταση, έτσι θα μειωνόταν η ανεπάρκεια.

Προεκτάσεις

Σε όλη μας την ανάλυση εστιάσαμε στην συγκεκριμένη σειρά του παιγνίου. Τωρα συζητάμε τα αποτελέσματα κάτω από εναλλακτικές ακολουθίες του παιγνίου.

Στην ανάλυση της ισορροπίας του μοντέλου υπάρχει ένα "όχι σταθερό" αποτέλεσμα, δηλαδή, σε μία κατάσταση διαπραγμάτευσης το να είσαι ανυπόμονος μπορεί να είναι καλύτερο. Συνήθως παίρνουμε το αντίθετο αποτέλεσμα (για παράδειγμα το μοντέλο του Rubinstein). Ο λόγους γι' αυτό έχει να κάνει με την δομή του παιγνίου. Εδώ, οι τιμωρίες εφαρμόζονται στο μέλλον και ως τέτοιες , ο πιο υπομονετικός Αγρότης είναι πιο εύκολο να επηρεαστεί από τις απειλές, κάνοντας ακόμα πιο αδύναμη την θέση του στην διαπραγμάτευση προς όφελος του Σερίφη που πληρώνεται περισσότερα. Σε αντίθεση, στο μοντέλο του Rubistein το να είσαι πιο υπομονετικός σημαίνει πως το κόστος που σχετίζεται με την καθυστέρηση του να γίνει κάποια συμφωνία είναι μικρότερη, δυναμώνοντας την θέση της διαπραγμάτευσης.

Κάτω από την συγκεκριμένη δομή του παιγνίου (δηλαδή, kF και ks που επιλέγονται αφού η γίνεται η συνάντηση, μαζί με την γνώση του τύπου του αντιπάλου) μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο αποτελέσματα: (Ε1, ή απευθείας επίδραση) Η συνάντηση με έναν πιο υπομονετικό Αγρότη καθιστά κάθε πιθανή επένδυση kS από τον Σερίφη πιο παραγωγική(ιδιωτικά), από την στιγμή που μία μεγαλύτερη ζήτηση d θα ήταν αποδεκτή από τον Αγρότη, και (Ε2, έμμεση επίδραση) ο Σερίφης μπορεί να πάρει ακόμα παραπάνω πλεονέκτημα από αυτό κλιμακώνοντας την επένδυση του στο επίπεδο του δF. Στην περίπτωση μας, το kS αυξάνεται στο δF. Το E1 κάνει το d εξαρτώμενο του δF, και το E2 κάνει το kS εξαρτώμενο του δF.

Εάν ο Σερίφης κάνει την επενδυτική του επιλογή kS πριν γνωρίσει το δF του αντιπάλου του, το E1 παραμένει και το E2 εξαφανίζεται. Το κύριο αποτέλεσμα θα είχε αποκτηθεί, ακόμα και ο Σερίφης είχε μια χαμηλότερη χρησιμότητα από την αναμενόμενη υπονοώντας ένα μεγαλύτερο ισορροπιστή φ. Αυτό θα ήταν επίσης μία περίπτωση εάν ο Σερίφης ήταν να κάνει την απόφαση για την επένδυσή του πριν γνωρίσει εάν θα έχει ταίρι ή όχι, ωστόσο ομολογουμένως αποτελεσματικό ακόμα και σε χαμηλότερη καταλληλότητα.

Εάν ο Σερίφης κάνει και τα δύο, πάρει την απόφαση του για επένδυση και διαμορφώσει την απαίτηση του πριν να γνωρίσει το δF αντίπαλου του, και τα δύο αποτελέσματα εξανεμίζονται. Εξάλλου χωρίς την απόκτηση του αποτελέσματος που θέλουμε αυτή η περίπτωση είναι δύσκολο να αναλυθεί γιατί στην ισορροπία θα υπάρχουν απαιτήσεις μη αποδεκτές από περισσότερο ανυπόμονους αγρότες.

Τα δύο αποτελέσματα θα εξαφανίζονταν επίσης εάν η τιμωρία λάμβανε χώρα στην δεύτερη περίοδο αντί στην τρίτη περίοδο. Όντως, οι παράγοντες μείωσης επηρεάζουν την σχέση μεταξύ υποσχόμενης τιμωρίας και της θέλησης για να γίνουν δεκτά τα αιτήματα αποκλειστικά γιατί οι τιμωρίες υποσχεθεί να γίνουν σε μία μελλοντική περίοδο.

Όσον αφορά την ευημερία, τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα της σειράς του παιγνίου. Η αποτελεσματικότητα της κατανομής των φ, δS και δF είναι ανεξάρτητα της σειράς. Ακόμα περισσότερο, δοσμένης της αποτελεσματικότητας της κατανομής όλα τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα της σειράς.

Υπάρχουν και εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί, και καταστάσεις πραγματικού κόσμου, όπου στα παίγνια οι λιγότερο υπομονετικοί τα πάνε καλύτερα από τους υπομονετικούς ανθρώπους. Για παράδειγμα, ο Blaydes (2004) χρησιμοποιεί μία εκδοχή του μοντέλου του Fearon's [1998] για να εξηγήσει το διαχωρισμό των κερδών των καρτέλ μέσα στον OPEC. Σε αυτό το μοντέλο υπάρχει ένα πρώτο βήμα στο οποίο υπάρχει μια διαπραγμάτευση που καθορίζει τις εξοφλήσεις ενός στατικού και ασταμάτητα επαναλαμβανόμενου παιγνίου. Για να επιβάλουν τα "αποτελεσματικά" αποτελέσματα στο αέναα επαναλαμβανόμενο παίγνιο, περισσότεροι ανυπόμονοι παίχτες χρειάζονται μία μεγαλύτερη "στατική" πληρωμή. Έτσι, η ανυπομονησία είναι επίσης και σε αυτή την περίπτωση μία πηγή δυναμικής διαπραγμάτευσης.

Παράδειγμα. Θεωρία Παιγνίων: Από την πλευρά των τρομοκρατών

Η εργασία αυτή διερευνά την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο διαφορετικών τρομοκρατικών πυρήνων της ίδιας της τρομοκρατικής οργάνωσης που χρησιμοποιεί παιγνιο-θεωρητικά μοντέλα. Θα αναλύσει τις οικονομικές συνέπειες της τρομοκρατίας και θα παρέχει μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας. Ένα μεγάλο μέρος της διαθέσιμης βιβλιογραφίας επικεντρώνεται στις εθνικές πολιτικές και στις επιπτώσεις που έχουν αυτές οι πολιτικές στη συμπεριφορά των τρομοκρατών ». Η προσέγγιση που υιοθετείται εδώ διαφέρει στο ότι η προσοχή εστιάζεται πρωτίστως στη συμπεριφορά των τρομοκρατών. Με τη μελέτη των αποφάσεων που παίρνουν οι τρομοκράτες και την κατανόηση τους μπορούν να αναπτυχθούν καλύτερες αντιτρομοκρατικές πολιτικές.

Η τρομοκρατική επίθεση στο Παγκόσμιο Κέντρο Εμπορίου και το Πεντάγωνο την 11 Σεπτεμβρίου 2001 (9/11) σηματοδότησε μια κρίσιμη καμπή στην παγκόσμια ιστορία. Αυτή η πρωτοφανής και απρόκλητη επίθεση συγκλόνισε την αμερικανική κοινή γνώμη και επηρέασε τις διεθνείς αγορές. Παρά την απουσία επιθέσεων στο στυλ της 9/11 τα τελευταία χρόνια, οι τρομοκράτες εξακολουθούν να υπάρχουν και δεν θέλουν τίποτα λιγότερο από το να προκαλέσουν μαζικές απώλειες στους Αμερικανούς. Σύμφωνα με τα λόγια του εκπροσώπου της Αλ Κάιντα Suleiman Abu Gheith:

Δεν έχουμε πατσίσει ακόμα μαζί τους. Έχουμε το δικαίωμα να σκοτώσουμε 4 εκατομμύρια Αμερικάνους, 2 εκατομμύρια από αυτούς παιδιά, να εξορίσουμε τους διπλάσιους και να πληγώσουμε και να ακρωτηριάσουμε εκατοντάδες χιλιάδες. Επιπλέον, είναι δικαίωμά μας να τους πολεμήσουμε με χημικά και βιολογικά όπλα, έτσι ώστε να τους ταλαιπωρήσουμε με τις θανατηφόρες ασθένειες που έχουν ταλαιπωρήσει τους μουσουλμάνους λόγω της χρήσης [από τους Αμερικάνους] χημικών και βιολογικών όπλων.

Για να επιτύχουν αυτόν τον άθλο, οι τρομοκράτες να βελτιώνουν συνεχώς τις τεχνικές τους, ανταγωνίζοντας ο ένας τον άλλο για να δουν ποιος θα μπορέσει να εκτελέσει το επόμενο 9/11.

Τα οικονομικά μέσα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση των βαθύτερων αιτίων της τρομοκρατίας, έτσι ώστε να αποφευχθούν μελλοντικές τραγωδίες. Ένα από τα οικονομικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της τρομοκρατικής δραστηριότητας είναι η θεωρία παιγνίων. Τα παιγνιο-θεωρητικά μοντέλα είναι ιδανικά για να καταλάβουμε την ουσία της αλληλεπίδρασης μεταξύ των τρομοκρατών και των οργανισμών αντιτρομοκρατικής δράσης. Τέτοια μοντέλα διευκρινίζουν τα κίνητρα των τρομοκρατών μέσα από την εξέταση των αποφάσεων που έχουν να αντιμετωπίσουν. Πολλές έρευνες επικεντρώνονται στις αποφάσεις των εθνών-κρατών και τις αντιδράσεις των τρομοκρατών, ωστόσο, λίγες έρευνες, αν υπάρχουν, εστιάζουν στις αποφάσεις των τρομοκρατών και τις αντίστοιχες αντιδράσεις των εθνών-κρατών. Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η ανάπτυξη παιγνιοθεωρητικών μοντέλων που να περιγράφουν τα πιθανά σενάρια που αντιμετωπίζουν οι τρομοκρατικοί πυρήνες. Οι τρομοκρατικοί πυρήνες είναι ενεργοί παίκτες σε αυτά τα μοντέλα, και τα έθνη-κράτη είναι παθητικοί παίκτες που ανταποκρίνονται είτε με αλλαγές στη στρατιωτική κατανομή από τα αντίπαλα κράτη ή στην τρομοκρατική ενίσχυση από κράτη που τους υποστηρίζουν. Η κατανόηση των αλληλεπιδράσεων που περιγράφονται στο πλαίσιο αυτών των μοντέλων είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη καλύτερων πολιτικών καταπολέμησης της τρομοκρατίας.

Η «τρομοκρατία» είναι μια λέξη που δύσκολα μπορεί να καθοριστεί, εν μέρει επειδή για να θεωρηθεί ότι μια πράξη είναι «τρομοκρατία» υποκειμενικά εξαρτάται από το σε ποιά πλευρά βρισκόμαστε, με τους επιτιθέμενους ή με τα θύματα. Ένας ορισμός της «τρομοκρατίας» είναι «η προμελετημένη χρήση ή απειλή χρήσης, πέρα του φυσικού, βίας ώστε να επιτευχθεί ένας πολιτικός στόχος, μέσω του εκφοβισμού που απευθύνεται σε ευρύ κοινό». Ένα βασικό μέρος του ορισμού αυτού είναι ο πολιτικός στόχος, χωρίς τον οποίο παρόμοιες επιθέσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν απλώς εγκληματικές. Ένα άλλο κρίσιμο μέρος του ορισμού αυτού είναι πέρα του φυσικού βία. Οι τρομοκράτες προσπαθούν συνεχώς "να ξεπεράσουν ο ένας τον άλλο [με όλο και ακραίες βαρβαρότητες] στον ανταγωνισμό τους για τη δημοσιότητα, τη χρηματοδότηση, τις προσλήψεις, και τις επαφές." Για παράδειγμα, μια ληστεία στο δρόμο διαπράττεται από ένα άτομο που με αυτό το τρόπο διαμαρτύρεται σχετικά με τη πολιτική της κυβέρνησης που τον οδήγησε στην απώληση από τη δουλειά του δεν συνιστά τρομοκρατία.

Μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που χρησιμοποιεί οικονομικά εργαλεία για την ανάλυση της τρομοκρατικής συμπεριφοράς επικεντρώνεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των εθνών. Αυτή η έρευνα αναπτύσσει παιγνιοθεωρητικά μοντέλα που δίνουν έμφαση στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο ξεχωριστών τρομοκρατικών πυρήνων που είναι μέλη της ίδιας τρομοκρατικής οργάνωσης. Πριν από την ανάπτυξη αυτών των μοντέλων, η παρούσα έρευνα παρουσιάζει μια επισκόπηση των συνεπειών των τρομοκρατικών επιθέσεων και μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που ασχολείται με το πώς η θεωρία παιγνίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της τρομοκρατίας.

Το 2002, η Κοινή Οικονομική Επιτροπή του Κογκρέσου των ΗΠΑ περιέγραψε το κόστος της τρομοκρατίας, σαν απώλεια ανθρώπινου και μη ανθρώπινου κεφαλαίου, αβεβαιότητα στην συμπεριφορά των καταναλωτών και των επενδυτών, περικοπές σε συγκεκριμένους κλάδους ή περιοχές, αύξηση του κόστους της ασφάλειας («τρομοκρατικός φόρος"), και τις αντι-τρομοκρατικές δαπάνες να παραγκωνίζουν τις πιο παραγωγικές δραστηριότητες.

Οι τρομοκρατικές επιθέσεις κοστίζουν ζωές και καταστρέφουν τις υποδομές. Εκτός από την πραγματική απώλεια της ζωής, η οικονομία υποφέρει με απώλειες στην παραγωγικότητα εξαιτίας των ζωών αυτών που χάνονται. Η απώλεια των υποδομών δεν περιλαμβάνουν μόνο την περιουσία που καταστρέφεται, αλλά και τα κόστη καθαρισμού και επισκευής. Επιπλέον, μετά από μια τρομοκρατική επίθεση οι αγορές βιώνουν αυξημένη αστάθεια και αυξάνονται τα ασφάλιστρα κινδύνου εξαιτίας του δημόσιου φόβου. Η ζήτηση μειώνεται για τα περιουσιακά στοιχεία υψηλού κινδύνου και αυξάνεται για τα ασφαλή περιουσιακά στοιχεία καθώς οι επενδυτές προσπαθούν να προστατευτούν από αυτή την αυξημένη αστάθεια. Γενικά, όταν η κατανάλωση και οι επενδύσεις μειώνονται, επηρεάζεται αντίστροφα το Χρηματιστήριο. Επιπλέον, ορισμένες βιομηχανίες, όπως οι αεροπορικές εταιρείες, ο τουρισμός, και τα καζίνο, φέρουν ένα δυσανάλογο ποσό αρνητικών επιβαρύνσεων που συνδέονται με τις τρομοκρατικές επιθέσεις. Τοποθεσίες που συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με αυτές τις βιομηχανίες, όπως το Ντητρόιτ και το Λας Βέγκας, επηρεάζονται εξίσου.

Μετά από μια τρομοκρατική επίθεση, η ασφάλεια αυξάνεται, καθώς οι επιχειρήσεις θα προσπαθήσουν να προστατευτούν από μια άλλη επίθεση. Οι έμμεσες δαπάνες για την αύξηση της ασφάλειας διανέμονται σε ολόκληρη την κοινωνία, με τη μορφή των καθυστερήσεων στα ταξίδια, πιο ακριβές ασφάλειες, την αύξηση του κόστους αποστολής, και πιο την πιο αργή παραλαβή του ταχυδρομείου. Οι ανεπάρκειες που σχετίζονται με αυτό το "τρομοκρατικό φόρο" δημιουργούν ένα αρνητικό σοκ προσφοράς στο σύνολο της παραγωγής. Επιπλέον, υπάρχουν μειώσεις στις ενοικιάσεις, την παραγωγικότητα και τον ρυθμό δυνητικής ανάπτυξης.

Οι Alberto Abadie και Javier Gardeazabal περιγράφουν τις μειωμένες Άμεσες Ξένες Επενδύσεις (ΑΞΕ) σαν ένα επιπλέον κόστος της τρομοκρατίας. Οι χώρες που πλήττονται από υψηλά επίπεδα τρομοκρατίας βιώνουν επίσης χαμηλότερες αποδόσεις στις επενδύσεις, με αποτέλεσμα τη μείωση του αποθέματος των ξένων επενδύσεων. Οι Abadie και Gardeazabal γράφουν ότι αν και η τρομοκρατία συμβάλλει μόνο σε ένα μικρό μέρος του οικονομικού κινδύνου μιας χώρας, η επίδραση επί των ΑΞΕ είναι πολλαπλάσια. Για παράδειγμα, η επίθεση της 11/9 προκάλεσε απώλειες 0,06% στο σύνολο των παραγωγικών περιουσιακών στοιχείων της οικονομίας των ΗΠΑ, αλλά οι εισροές των ΑΞΕ από το 2000 μέχρι το 2003 μειώθηκαν από 15,8% σε 1,5% της δημιουργίας του ακαθάριστου παγίου κεφαλαίου στις ΗΠΑ.

Λόγω των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των τρομοκρατών και των οργανισμών καταπολέμησης της τρομοκρατίας, η θεωρία παιγνίων είναι ένα ιδανικό εργαλείο για την κατανόηση της τρομοκρατικής συμπεριφοράς. Για παράδειγμα, ο μεγάλος αριθμός αεροπειρατειών στη δεκαετία του 1970 έκανε τα αεροδρόμια να αυξήσουν τη χρήση των ανιχνευτών μετάλλων, αυξάνοντας έτσι το σχετικό κόστος των αεροπειρατειών για τους τρομοκράτες. Ως αποτέλεσμα, οι τρομοκράτες μεταπήδησαν από τις αεροπειρατείες στις απαγωγές. Ο μεγάλος αριθμός των απαγωγών προκάλεσε τις κυβερνήσεις να αυξήσουν τα μέτρα ασφαλείας για τους ξένους διπλωμάτες, έτσι ώστε οι τρομοκράτες να αντικαταστήσουν τις απαγωγές με τις βομβιστικές επιθέσεις αυτοκτονίας.

Η θεωρία παιγνίων μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την υπαγόρευση πολιτικών για τα μελλοντικά γεγονότα. Οι Harvey Lapan και Todd Sandler χρησιμοποιούν ένα απλό μοντέλο για να περιγράψουν εάν και πότε μια κυβέρνηση μπορεί ή πρέπει να υποχωρήσει στα αιτήματα των τρομοκρατών. Η κοινή πολιτική της κυβέρνησης, και ένας από τους τέσσερις πυλώνες της αμερικανικής πολιτικής αντιμετώπισης της τρομοκρατίας, είναι "όχι παραχωρήσεις προς τους τρομοκράτες.", Ωστόσο Lapan και Sandler σημειώνουν ότι αυτή η πολιτική είναι η βέλτιστη μόνο αν οι κυβερνήσεις εμμένουν σε αυτήν και οι τρομοκράτες έχουν ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με το κύρος της κυβέρνησης.

Οι Todd Sandler και Daniel Arce χρησιμοποιούν τη θεωρία των παιγνίων για να περιγράψουν αυτό που αποκαλούν μια «κούρσα αποτροπής» μεταξύ δύο χωρών. Αν η μια χώρα αυξάνει τις εγχώριες προσπάθειες αποτροπής, το κόστος των τρομοκρατών που συνδέονται με την επίθεση κατά της χώρας αυτής αυξάνεται. Αυτό δημιουργεί μια αρνητική εξωτερικότητα στην άλλη χώρα, επειδή το σχετικό κόστος για τους τρομοκράτες να επιτεθούν σ' αυτή μειώνεται. Ως εκ τούτου, η άλλη χώρα θα πρέπει επίσης να αυξήσει τις προσπάθειες αποτροπής ή θα πρέπει να αντιμετωπίσει αυξημένη πιθανότητα να δεχθεί επίθεση. Όταν η ξένη χώρα αυξάνει τις προσπάθειες αποτροπής, η πρώτη χώρα πρέπει να ανταποκριθεί επειδή αντιμετωπίζει τώρα μια αυξημένη πιθανότητα να δεχθεί επίθεση τώρα που η άλλη χώρα είναι πιο ασφαλής. Η επαναληπτική φύση αυτού του σεναρίου αναγκάζει τις χώρες να υπερξοδεύουν προσπαθώντας να αποτρέψουν μια επίθεση. Οι Sandler και Arce συνεχίζουν περιγράφοντας πώς η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των χωρών μπορεί να επιδεινώσει το δίλημμα εάν οι προσπάθειες αποτροπής δεν είναι συνδυασμένες.

Οι Sandler και Arce απεικονίζουν επίσης το πλεονέκτημα της συνεργασίας μέσω ενός μοντέλου της θεωρίας παιγνίων που χρησιμοποιεί δύο χώρες και μια τρομοκρατική ομάδα για να δείξει το δίλημμα του κρατουμένου. Σε αυτό το μοντέλο οι δύο χώρες, χωρίς να συνεργάζονται, επιλέγουν να αποτρέψουν τους τρομοκράτες, αν και η βέλτιστη επιλογή είναι και για τις δύο χώρες να συνεργαστούν και να κάνουν πρόληψη. Οι Sandler και Arce διερευνούν και άλλα σενάρια όπου το επιθυμητό αποτέλεσμα εξαρτάται από τις δύο χώρες που ενεργούν μαζί. Για παράδειγμα, όταν ο στόχος είναι για τις συμμαχικές χώρες να παγώσει τις δυνάμεις των τρομοκρατών, το επιθυμητό αποτέλεσμα επιτυγχάνεται μόνο όταν και οι δύο χώρες επιλέξουν να το κάνουν. αν μία μόνο χώρα παγώνει τις τρομοκρατικές δυνάμεις, οι τρομοκράτες θα τις εκτρέψουν στην άλλη χώρα. Αυτό το σενάριο είναι ένα παίγνιο «αδύναμου κρίκου». Ένα άλλο σενάριο που λαμβάνεται υπ' όψιν περιλαμβάνει τη συλλογή και τον μοίρασμα πληροφοριών. Αν και οι δύο χώρες διεισδύσουν στην ίδια τρομοκρατική οργάνωση, δεν είναι μόνο περιττή η προσπάθεια, αλλά αυξάνεται ο κίνδυνος να αποκαλυφθούν.

Μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας σχετικά με τη θεωρία παιγνίων επικεντρώνεται σε παίγνια όπου οι τρομοκράτες είναι παθητικοί παίκτες, πράγμα που σημαίνει ότι οι τρομοκρατικές ενέργειες ορίζονται από τις δραστικές αποφάσεις των άλλων παικτών. Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μοντέλων όπου οι τρομοκράτες είναι οι ενεργοί παίκτες και τα έθνη, είτε υποστηρίζουν είτε είναι κατά των τρομοκρατών, είναι οι παθητικοί παίκτες. Η ανάπτυξη τέτοιων μοντέλων θα παρέχει πληροφορίες για την τρομοκρατική συμπεριφορά και θα οδηγήσει σε χρήσιμες συστάσεις πολιτικής για την καταπολέμηση της τρομοκρατίας.

Αυτά τα μοντέλα υποθέτουν μια αποκεντρωμένη τρομοκρατική οργάνωση της οποίας οι πυρήνες δρουν ανεξάρτητα. Οι δύο ενεργοί παίκτες σε αυτά τα μοντέλα (A και B) είναι διακριτές φατρίες της ίδιας τρομοκρατικής ομάδας. Η Αλ Κάιντα είναι ένα τέλειο παράδειγμα επειδή η Αλ Κάιντα κινείται προς την κατεύθυνση της αποκέντρωσης από την εισβολή στο Αφγανιστάν, με απομονωμένους πυρήνες και ελαφρά διασυνδεδεμένες ομάδες που έχουν μόνο μια ισχνή επαφή με την ανώτερη [Αλ Κάιντα] ιεραρχία συμμετέχοντας στο franchise του Μπιν Λάντεν», «ιδιοποιώντας ιδεολογικά το σήμα κατατεθέν (Bin Laden) για τις πράξεις τους.» Σύμφωνα με ορισμένους εμπειρογνώμονες, «η Αλ Κάιντα έχει αυτόνομα υπόγεια κελιά σε ορισμένες [εκατό] χώρες,» και βασίζεται όλο και περισσότερο σε φιλικές θυγατρικές άλλων τρομοκρατικών οργανώσεων. Τα μοντέλα αυτά περιλαμβάνουν επίσης δύο τύπους παθητικών παικτών, οι χώρες που τους υποστηρίζουν και οι χώρες που τους αντιτίθενται. Οι χώρες που τους υποστηρίζουν παρέχουν πόρους σε τρομοκρατικούς πυρήνες, με βάση τη σχετική αξία κάθε πυρήνα. Οι αντίπαλες χώρες, για τις οποίες η επίθεση των τρομοκρατών, καθορίζει τις στρατιωτικές κατανομές βάσει της τρομοκρατικής δραστηριότητας.

		B	
		Attack	Do Not Attack
A	Attack	5,5	4,1
	Do Not Attack	1,4	0,0

Σχήμα 9.9 Απλό παίγνιο με δύο τρομοκρατικούς πυρήνες

Το μοντέλο που φαίνεται στο Σχήμα 9.9 απεικονίζει ένα παίγνιο με δύο επιλογές για τους τρομοκρατικούς πυρήνες, "επίθεση" ή "μη επίθεση". Σε αυτό το παίγνιο, μια επίθεση υποτίθεται ότι πετυχαίνει. Η καθαρή πληρωμή των τρομοκρατών για την επίθεση είναι +4, το οποίο περιλαμβάνει +4 πόντους υπερηφάνειας, +1 πόντο πόρων από τις χώρες που τους υποστηρίζουν, και κόστος -1 πόντο για τους πόρους που δαπανώνται. Το αποτέλεσμα μιας τρομοκρατικής επίθεσης για τον άλλο πυρήνα είναι +1, το οποίο περιλαμβάνει +2 πόντους υπερηφάνειας επειδή είναι μέλη της ίδιας ομάδας, και -1 πόντο πόρων, επειδή οι χώρες που τους υποστηρίζουν θεωρούν ότι ο πυρήνας που επιτέθηκε έχει υψηλότερη αξία και ανακατανέμουν την υποστήριξή τους, αφαιρώντας πόρους από τους παθητικούς πυρήνες. Η κυρίαρχη στρατηγική σε αυτό το παίγνιο είναι για τους δύο πυρήνες να επιτεθούν. Όταν ένας τρομοκρατικός πυρήνας επιτίθεται, βιώνει μια καθαρή αύξηση χρησιμότητας +4 γιατί 5 > 1 και 4 > 0 (βλ. Σχήμα 9.9).

Για να αναπτυχθεί ένα μοντέλο που να υπολογίζει την πιθανότητα των αποτυχημένων επιθέσεων, το Σχήμα 9.10 δείχνει τη βραχυπρόθεσμη αλλαγή στην στρατιωτική κατανομή μιας αντίθετης χώρας που βασίζεται στις ενέργειες των δύο τρομοκρατικών πυρήνων. Το m_A αντιπροσωπεύει το ποσοστό των στρατιωτικών δυνάμεων που χρησιμοποιούνται για να καταστείλουν τον πυρήνα Α, και το m_B αντιπροσωπεύει το ποσοστό των στρατιωτικών δυνάμεων που χρησιμοποιείται για την καταστολή του πυρήνα Β. Το μοντέλο υποθέτει οτι το αντίθετο έθνος αφιερώνει τη διαθέσιμη στρατιωτική του δύναμη αποκλειστικά για την καταστολή των δύο τρομοκρατικών πυρήνων, έτσι ώστε m_A + m_B = 1. Εμμένοντας στον ορισμό της θεωρίας παιγνίων όπου οι παίκτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τις απολαβές τους, οι τιμές στο Σχήμα 2 είναι όλες μεταξύ -1 και 0, έτσι ώστε ένας τρομοκρατικός πυρήνας που λαμβάνει το 100% της στρατιωτικής προσοχής του αντιπάλου έθνους έχει μια πληρωμή ίση με -1 και ο τρομοκρατικός πυρήνας που λαμβάνει το 0% της στρατιωτικής προσοχής του αντιπάλου έθνους έχει μια πληρωμή ίση με 0.

Όταν και οι δύο πυρήνες κάνουν επίθεση, το αντίπαλο έθνος δεν αλλάζει την κατανομή των στρατιωτικών δυνάμεων του. Επίσης, όταν οι δύο πυρήνες δεν κάνουν τίποτα η κατανομή των στρατιωτικών δυνάμεων δεν αλλάζει. Όταν ο ένας πυρήνας επιτίθεται και ο άλλος δεν κάνει τίποτα, ο επιτιθέμενος πυρήνας (Δm_A ή Δm_B) προσελκύει αυξημένη στρατιωτική προσοχή μειώνοντας την πληρωμή αυτού του πυρήνα. Ο μη επιτιθέμενος πυρήνας βιώνει μια παρόμοια μείωση στην στρατιωτική προσοχή προς αυτό, η οποία αυξάνει την πληρωμή του (βλέπε σχήμα 9.10). Επειδή το μοντέλο αυτό αντιπροσωπεύει το βραχυπρόθεσμο, το αντίπαλο έθνος δεν μπορεί να αλλάξει τη συνολική στρατιωτική δύναμη με ενισχύσεις ή ελιγμούς και υποχωρήσεις.

		B	
		Attack	Do Not Attack
A	Attack	$-m_A, -m_B$	$-m_A - \Delta m_A, -m_B + \Delta m_A$
	Do Not Attack	$-m_A + \Delta m_B, -m_B - \Delta m_B$	$-m_A, -m_B$

Σχήμα 9.10 Βραχυπρόθεσμη κατανομή των στρατιωτικών δυνάμεων αντίπαλου έθνους σε σχέση με δύο τρομοκρατικούς πυρήνες.

Η κυρίαρχη στρατηγική για τους δύο πυρήνες σε αυτό το παίγνιο είναι "μη επίθεση". Για να το δούμε, υποθέστε ότι και οι δύο πυρήνες επιτίθονται. Κάθε πυρήνας μπορεί να βελτιώσει την πληρωμή του με το να μην επιτεθεί (-m_A + Δm_B> -m_A ή -m_B+ Δm_A> - 〖m〗 _B) και όταν ένας πυρήνας αποφασίζει να μην επιτεθεί, ο επιτιθέμενος πυρήνας βιώνει μια μείωση στην πληρωμή (-m_A - Δm_A < - m_A ή -m_B -Δm_B < - m_B). Εάν και αυτός ο πυρήνας αποφασίσει επίσης να μην επιτεθεί, η πληρωμή είναι ίδια με αυτήν της περίπτωσης "επίθεση, επίθεση" (-m_A ή -m_B). Επειδή ένας πυρήνας βελτιώνει την πληρωμή του με το να μην επιτίθεται, ανεξάρτητα από το πώς παίζει ο άλλος πυρήνας, "μη επίθεση" είναι η κυρίαρχη στρατηγική για τους δυο πυρήνες που οδηγεί σε μια ισορροπία Nash του «μη επίθεση, μη επίθεση".

Μακροχρόνια ένα αντίθετο έθνος μπορεί να αλλάξει τη συνολική στρατιωτική του δύναμη, που χρησιμοποιείται για την καταστολή των τρομοκρατικών πυρήνων, με ενισχύσεις ή υποχωρήσεις. Το να λάβουμε υπόψη το μέγεθος της στρατιωτικής δύναμης μιας αντίπαλης χώρας και την κατανομή της ανάμεσα στους τρομοκρατικούς πυρήνες είναι σημαντικό, διότι υπάρχει διαφορά σε έναν πυρήνα που δέχεται το 100% της προσοχής μιας μικρής διμοιρίας, σε αντίθεση με ένα που δέχεται το 50% της προσοχής ενός ολόκληρου τάγματος. Το σχήμα 9.11 απεικονίζει ένα μακροπρόθεσμο μοντέλο παρόμοιο με το σχήμα 9.10, όπου M παριστάνει στρατιωτική δύναμη του αντίπαλου έθνους ως κλάσμα της συνολικής στρατιωτικής δύναμης ($0 \leq M \leq 1$). Σε αυτό το μοντέλο, οποιαδήποτε αλλαγή στη στρατιωτική δύναμη του αντιπάλου έθνους επηρεάζει και τους δύο πυρήνες, λόγω της εγγύτητας τους, του ενός με το άλλο. Κάθε τρομοκρατική επίθεση προκαλεί αύξηση M, εκπροσωπούμενη από τον ΔM. Όταν και οι δύο πυρήνες δεν επιτίθενται το M μειώνεται, το οποίο αντιπροσωπεύεται από -ΔM. Παρόμοια με το υπόδειγμα του Σχ. 9.10, η βέλτιστη στρατηγική για τους δύο πυρήνες στο Σχήμα 9.11, είναι "μη επίθεση".

Οι αλλαγές στη συνολική στρατιωτική δύναμη που περιγράφονται στο σχήμα 9.11 είναι σύμφωνες με την κυκλική φύση της τρομοκρατίας και της αντιτρομοκρατίας, όπως περιγράφεται από τον Joao Faria. Ο κυκλικός χαρακτήρας των τρομοκρατικών επιθέσεων είναι αποτέλεσμα δράσης και αντίδρασης. Όταν οι δυνάμεις καταστολής είναι περιορισμένες το M είναι μικρό, συνεπώς το κόστος των τρομοκρατών σχετικά με τις τρομοκρατικές δραστηριότητες είναι χαμηλότερο, άρα οι τρομοκρατικές επιθέσεις θα αυξηθούν. Σε απάντηση, οι κυβερνήσεις θα αυξήσουν το επίπεδο της καταστολής και το M αυξάνεται, γεγονός που αυξάνει το κόστος για τους τρομοκράτες και αποτελεσματικά μειώνει το επίπεδο των τρομοκρατικών δραστηριοτήτων. Αφού η συχνότητα των τρομοκρατικών επιθέσεων μειώνεται, οι κυβερνήσεις έχουν λιγότερα κίνητρα για να επενδύσουν στην καταστολή, έτσι το M μειώνεται και ο κύκλος επαναλαμβάνεται. Αυτοί οι κύκλοι της τρομοκρατίας είναι παρόμοιοι με τους κύκλους των μοντέλων θηρευτών-θηραμάτων που περιγράφονται στην οικολογία και τη βιολογία.

		B	
		Attack	Do Not Attack
A	Attack	$-(M+\Delta M) * m_A$, $-(M+\Delta M) * m_B$	$-(M+\Delta M)(m_A+\Delta m_A)$, $-(M+\Delta M)(m_B-\Delta m_A)$
	Do Not Attack	$-(M+\Delta M)(m_A-\Delta m_B)$, $-(M+\Delta M)(m_B+\Delta m_B)$	$-(M-\Delta M) * m_A$, $-(M-\Delta M) * m_B$

Σχήμα 9.12 Μακροπρόθεσμη Στρατιωτική Κατανομή αντίπαλου έθνους εναντίον δύο τρομοκρατικών πυρήνων

Συνδυάζοντας το μακροπρόθεσμο μοντέλο για την στρατιωτική ισχύ και την κατανομή με το αρχικό μοντέλο, όπου οι επιθέσεις έχουν πάντα επιτυχία, δημιουργείται ένα μοντέλο που εξετάζει τη δυνατότητα αποτυχημένων επιθέσεων. Ως ενδιάμεσο μοντέλο που δεν υπολογίζει τη στρατιωτική ισχύ της αντίπαλης χώρας, το Σχήμα 4 δείχνει τις εξοφλήσεις που σχετίζονται με τις ανεπιτυχείς επιθέσεις. Αυτό το μοντέλο θα γενικευθεί και θα χρησιμοποιηθεί σαν τύπος αναμενόμενης αξίας για το τελικό μοντέλο.

		B		
		Successful Attack	Do Not Attack	Unsuccessful Attack
	Successful Attack	5,5	4,1	3,-5
A	Do Not Attack	1,4	0,0	-1,-6
	Unsuccessful Attack	-5,3	-6,-1	-7,-7

Σχήμα 9.13 Πληρωμές Με Δυνατότητα Αποτυχημένης Επίθεσης

Οι επιτυχείς επιθέσεις διατηρούν τις ίδιες απολαβές με το σχήμα 9.9. Οι ανεπιτυχείς επιθέσεις δίνουν -6 για τον επιτιθέμενο πυρήνα: -4 πόντους ντροπής, -1 πόντο πόρων, επειδή ο πυρήνας χάνει αξία στα μάτια των χωρών που υποστηρίζουν τους τρομοκράτες, και -1 πόντο για τους πόρους που δαπανώνται. Μια αποτυχημένη επίθεση δίνει επίσης στον άλλο πυρήνα -1 σημείο: -2 πόντοι ντροπής και +1 πόντος πόρων από τις χώρες που τους υποστηρίζουν αφού βλέπουν πιο ευνοϊκά αυτόν το πυρήνα από αυτόν που απέτυχε.

Η πιθανότητα μιας τρομοκρατικής επίθεσης να είναι επιτυχής εξαρτάται από τη στρατιωτική ισχύ του αντίπαλου έθνους. Το σχήμα 9.14 γενικεύει το προηγούμενο μοντέλο, με το M*m_T να αντιπροσωπεύει την στρατιωτική ισχύ του αντιπάλου έθνους και την κατανομή της που δαπανάται στην πρόληψη τρομοκρατικού πυρήνα T (A ή B). Αυτός ο πολλαπλασιαστής κάνει δύο πράγματα. Πρώτον, εάν m_A> m_B τότε για ένα σταθερό M ο πολλαπλασιαστής δείχνει μεγαλύτερη στρατιωτική προσοχή στον πυρήνα A απ’ ότι στον B. Δεύτερον, για σταθερές m_A και m_B, ένα μεγαλύτερο M υποδεικνύει μεγαλήτερη στρατιωτική προσοχή και για τους δυο τρομοκρατικούς πυρήνες. Η πιθανότητα επιτυχίας p, της τρομοκρατικής επίθεσης ισούται με το ποσοστό επιτυχίας της επίθεσης χωρίς καταστολή επί (1 - M*m_T). Χρησιμοποιώντας αυτή την πιθανότητα, η αναμενόμενη τιμή μιας επίθεσης των πυρήνων είναι: V = p (υπερηφάνεια +πόροι) + (1 - p) (ντροπή - πόροι). Η αναμενόμενη τιμή για τον άλλο πυρήνα είναι: v = p (υπερηφάνεια - πόροι) + (1 - p) (εξωτερίκευση ντροπής + πόροι). Σε αυτό το μοντέλο το C αντιπροσωπεύει το κόστος των πόρων για την επίθεση.

		B	
		Attack	Do Not Attack
A	Attack	$V-C+v, V-C+v$	$V-C, v$
	Do Not Attack	$v, V-C$	0,0

Σχήμα 9.14 Γενικευμένο παίγνιο μεταξύ δύο τρομοκρατικών πυρήνων

Σε αυτό το παίγνιο η ισορροπία Nash εξαρτάται από τις τιμές των V και C. Εάν V> C, η κυρίαρχη στρατηγική για κάθε πυρήνα είναι η επίθεση, με αποτέλεσμα την ισορροπία Nash «επίθεση, επίθεση». Για να το δει κανείς, θα πρέπει να ξεκινήσει με την εξέταση του σεναρίου «μη επίθεση, μη επίθεση». Επειδή V> C και V-C> 0, είναι επομένως πλεονεκτικό για έναν πυρήνα να επιτεθεί. Επιπλέον, επειδή V - C + v> v, είναι πλεονεκτικό και για τον άλλο πυρήνα να επιτεθεί. Ως εκ τούτου, όταν το V> C, αμφότεροι οι πυρήνες ενδέχεται να επιτεθούν. Αντιστρόφως, όταν το V < C η κυρίαρχη στρατηγική για κάθε πυρήνα είναι να μην επιτεθεί. Για να το δούμε αυτό, πρέπει να ξεκινήσουμε με την εξέταση του σεναρίου «επίθεση, επίθεση». Επειδή V < C και V - C <0, είναι επομένως πλεονεκτικό για έναν πυρήνα να μην επιτεθεί επειδή v > V - C + v. Για το άλλο κύτταρο, 0 > V - C, ως εκ τούτου καθιστά συμφέρουσα την μη επίθεση και εδώ. Ένα ενδιαφέρον σενάριο συμβαίνει όταν V = C γιατί και οι τέσσερις δυνατότητες είναι ισορροπίες Nash επειδή η ανταμοιβή κάθε πυρήνα εξαρτάται αποκλειστικά από τη δράση του άλλου πυρήνα.

		B	
		Attack	Do Not Attack
A	Attack	v, v	0, v
	Do Not Attack	v, 0	0,0

Σχήμα 9.15 Γενικευμένο παίγνιο μεταξύ δύο τρομοκρατικών πυρήνων όταν το V = C

Με την πρώτη ματιά, οι επιπτώσεις αυτών των μοντέλων φαίνονται με το μάτι. Ένα αντίθετο έθνος μπορεί να μειώσει την πιθανότητα μιας επιτυχούς τρομοκρατικής επίθεσης (p) με την αύξηση της στρατιωτικής του δύναμης. Επιπλέον, η εξίσωση V = p (υπερηφάνεια +πόροι) + (1 - p) (ντροπή - πόροι) συνεπάγεται ότι το αντίπαλο έθνος μπορεί να μειώσει τη χρησιμότητα των πυρήνων με τη μείωση των πόρων που δίνονται από τα υποστηρίζοντα έθνη για τις επιθέσεις, με τη μείωση της υπερηφάνειας των τρομοκρατών για τις επιτυχείς επιθέσεις, ή την αύξηση της ντροπής των πυρήνων για τις ανεπιτυχείς επιθέσεις (βλ. Σχήμα 5). Με λίγα λόγια, για να μειωθεί η συχνότητα των τρομοκρατικών επιθέσεων σε αυτά τα μοντέλα υποδεικνύεται η αύξηση της στρατιωτικής δύναμης για την παρακολούθηση των πόρων από τα υποστηρίζοντα έθνη και μειώνοντας τις πιθανότητες επιτυχίας των επιθέσεων των τρομοκρατικών πυρήνων, καθώς και αυξάνοντας την «ήπιας δύναμη» τακτική για να αλλάξει η υπερηφάνεια και η ντροπή που αισθάνονται οι τρομοκρατικοί πυρήνες και να αποτρέψει τα υποστηρίζοντα έθνη να παρέχουν στους πυρήνες πόρους.

Το ερώτημα είναι ποια από αυτές τις στρατηγικές καταπολέμησης της τρομοκρατίας, η αύξηση της στρατιωτικής δύναμης ή η αύξηση της τακτικής «ήπιας δύναμης», είναι πιο αποτελεσματική. Η απάντηση εξαρτάται από την ελαστικότητα του p ,την περηφάνια, τη ντροπή, και τους πόροι. Για ένα απλοϊκό παράδειγμα, στην εξίσωση: V = p (υπερηφάνεια + πόροι) + (1 - p) (ντροπή - πόροι), μια επένδυση 1 τρισεκατομμυρίου δολαρίων θα ήταν καλύτερο να δαπανηθεί για την αύξηση μόνο του p ή συλλογικά μειώνοντας την υπερηφάνεια και τους πόρους, αυξάνοντας παράλληλα τη ντροπή; Εάν η επένδυση αυξήσει το p κατά 20% ή μειώσει τη υπερηφάνεια και τους πόρους κατά 25%, αυξάνοντας παράλληλα και τη ντροπή κατά 25%, η επένδυση θα ήταν καλύτερο να δαπανηθεί για την εφαρμογή μιας «ήπιας ισχύος» τακτικής, γιατί μια τέτοια επένδυση θα μειώσει το V κατά πολύ περισσότερο από το αν κάνουμε την επένδυση μόνο σε στρατιωτική δύναμη. Ομοίως, αν η επένδυση αυξήσει το p κατά 30% μειώνοντας παράλληλα την περηφάνια και τους πόρους κατά 25%, αυξάνοντας την ντροπή κατά 25%, η επένδυση θα ήταν καλύτερο να δαπανηθεί σε στρατιωτική ισχύ.

Ο καθορισμός της ελαστικότητας αυτών των παραγόντων είναι πέρα από το πεδίο εφαρμογής του παρόντος εγγράφου και θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας. Η μελλοντική έρευνα μπορεί επίσης να διερευνήσει τις επιπτώσεις της αυξημένης στρατιωτικής δύναμης στις ευκαιρίες επίθεσης των τρομοκρατών ,αν η πιθανότητα μιας επιτυχούς τρομοκρατικής επίθεσης αυξάνεται ή μειώνεται όταν υπάρχουν περισσότεροι στόχοι, και κατά πόσον ή όχι αυτό αλλάζει ισχύ από το βραχυπρόθεσμο στο μακροπρόθεσμο. Ο σκοπός της παρούσας παραγράφου είναι να προσεγγίσει τους λόγους για τους οποίους η μελέτη της τρομοκρατίας είναι σημαντική, να κάνει μια επισκόπηση των προηγούμενων μελετών, και να αναπτύξει παιγνιο-θεωρητικά μοντέλα από την πλευρά των τρομοκρατών. Αυτά τα μοντέλα είναι μακριά από την ολοκλήρωσή τους, αλλά παρέχουν γνώσεις σχετικά με την αλληλεπίδραση μεταξύ των τρομοκρατών και των εθνών-κρατών. Η σημασία των μελετών επί της τρομοκρατίας είναι εμφανής, και με την περαιτέρω έρευνα, καλύτερες πολιτικές μπορούν να εφαρμοστούν για την πρόληψη και κατανόηση των συνεπειών της τρομοκρατίας.

Βιβλιογραφία

[1] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press, 2007.

[2] Anonymous, Game Theory, msl1.mit.edu/ESD10/block4/4.4_-_Game_Theory.pdf

[3] Steven J. Brams, Game Theory, New York University, December 2005. http://www.nyu.edu/gsas/dept/politics/faculty/brams/GameTheory.pdf

[4] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. A Course in Game Theory. Oxford University Press, 1994.

[5] Hex information. http://www.cs.unimaas.nl/icga/games/hex/.

[6] V. V. Anshelevich. The game of hex: An automatic theorem provingapproach to game programming.http://home.earthlink.net/~vanshel/VAnshelevich-01.pdf.

[7] A. Arratia. On the descriptive complexity of a simplified game of hex. Log. J. IGPL, 10:105-122, 2002.

[8] Kenneth J. Arrow. Social Choice and Individual Values. Cowles Commission Monograph No. 12. John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y., 1951.

[9] Robert J. Aumann. Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality. Econometrica, 55(1):1-18, jan 1987.

[10] Robert Axelrod. The Evolution of Cooperation. Basic Books, 387 Park Avenue So., New York, NY 10016, 1985.

[11] Robert Axelrod. The evolution of strategies in the iterated prisoner's dilemma. In The dynamics of norms, Cambridge Stud. Probab. Induc. Decis. Theory, pages 1-16. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[12] Robert Axelrod and William D. Hamilton. The evolution of cooperation. Science, 211(4489):1390-1396, 1981.

[13] A. Beck, M. Bleicher, and J. Crow. Excursions into Mathematics. Worth, 1969.

[14] Itai Benjamini, Oded Schramm, and David B. Wilson. Balanced Boolean functions that can be evaluated so that every input bit is unlikely to be read. In Proc. 37th Symposium on the Theory of Computing, 2005.

[15] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays, volume 2. Academic Press, 1982.

[16] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays, volume 1. Academic Press, 1982.

[17] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. Ann. Math., (3):35-39, 1902.

[18] C. Browne. Hex Strategy: Making the Right Connections. A. K. Peters, 2000.

[19] John L. Cardy. Critical percolation in finite geometries. J. Phys. A, 25(4):L201- L206, 1992.

[20] Antonio Coniglio. Fractal structure of Ising and Potts clusters: exact results. Phys. Rev. Lett., 62(26):3054-3057, 1989.

[21] J. H. Conway. On numbers and games. A K Peters Ltd., Natick, MA, second edition, 2001.

[22] H. Everett. Recursive games. In Contributions to the theory of games, vol. 3,

[23] Annals of Mathematics Studies, no. 39, pages 47{78. Princeton University
Press, Princeton, N. J., 1957.

[24] Dean P. Foster and Rakesh V. Vohra. Calibrated learning and correlated equilibrium. Games Econom. Behav., 1997.

[25] Dean P. Foster and Rakesh V. Vohra. Calibration, expected utility and local optimality. Discussion Papers 1254, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, March 1999.

[26] http://ideas.repec.org/p/nwu/cmsems/1254.html.

[27] Foster, Dean P. and Vohra, Rakesh V. A randomization rule for selecting forecasts.
Operations Research, 41(4):704{709, jul 1993.

[28] D. Gale. The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. Amer. Math. Monthly, 86:818-827, 1979.

[29] D. Gale and L. S. Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. Amer.
Math. Monthly, 1962.

[30] M. Gardner. The game of Hex. In Hexaflexagons and Other Mathematical Diver-sions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games, pages 73-83. Simon and Schuster, 1959.

[31] H. Gintis. Game Theory Evolving; A problem-centered introduction to modeling strategic interaction. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[32] S. Goldwasser, M. Ben-Or, and A. Wigderson. Completeness theorems for non-cryptographic fault-tolerant distributed computing. In Proc. of the 20th STOC, pages 1-10, 1988.

[33] Peter Grassberger. Pair connectedness and shortest-path scaling in critical percolation. J. Phys. A, 32(35):6233-6238, 1999.

[34] Hart, Sergiu and Mas-Colell, Andreu. A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium. Econometrica, 68(5):1127-1150, sep 2000.

[35] Geanakoplos. J. Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem. Cowles Commission Monograph No. 1123R4. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, Box 208281, New Haven, Connecticut 06520-8281., 1996 (updated 2004).

[36] S. Karlin. Mathematical methods and theory in games, programming and economics, volume 2. Addison-Wesley, 1959.

[37] H. W. Kuhn and S. Nasar, editors. The Essential John Nash. Princeton University Press, 2002.

[38] Robert Langlands, Philippe Pouliot, and Yvan Saint-Aubin. Conformal invariance in two-dimensional percolation. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 30(1):1-61, 1994.

[39] E. Lasker. Brettspiele der VÄolker, RÄatsel und mathematische Spiele. Berlin, 1931.

[40] Andrew J. Lazarus, Daniel E. Loeb, James G. Propp, Walter R. Stromquist, and Daniel H. Ullman. Combinatorial games under auction play. Games Econom. Behav., 27(2):229-264, 1999.

[41] E. H. Moore. A generalization of the game called nim. Ann. of Math. (Ser. 2), 11:93-94, 1909-1910.

[42] Alfred Lehman. A solution of the Shannon switching game. J. Soc. Indust. Appl. Math., 12:687- 725, 1964.

[43] Richard Mansfield. Strategies for the Shannon switching game. Amer. Math. Monthly, 103(3):250 - 252, 1996.

[44] Donald A. Martin. The determinacy of Blackwell games. J. Symbolic Logic, 63(4):1565-1581, 1998.

[45] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Potential games. Games Econom. Behav., 14(1):124 - 143, 1996.

[46] Adi Shamir. How to share a secret. Comm. ACM, 22(11):612 - 613, 1979.

[47] E. H. Moore. A generalization of the game called nim. Ann. of Math. (Ser. 2), 11:93 - 94, 1909 - 1910.

[48] J. von Neumann and O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, Princeton, NJ., 3rd edition, 1953.

[49] Aoki, K. (1982) A condition for group selection to prevail over coun- teracting individual selection, Evolution 36: 832-42.

[50] Aoki, K, L. Lehmann and M. W. Feldman (2011): Rates of cultural change and patterns of cultural accumulation in stochastic models of social transmission, Theoretical Population Biology 79: 192-202.

[51] Acemoglu, Daron and Alexander Wolitzky (2011): The Economics of Labor Coercion, Econometrica 79: 555 -600.

[52] Acemoglu, Daron and James A. Robinson (2000): Why did the West Extend the Franchise? Democracy, Inequality, and Growth in Histori- cal Perspective, Quarterly Journal of Economics 115: 1167-1199.

[53] Acemoglu, Daron and James A. Robinson (2012): Why Nations Fail: The Origins of Power, Prosperity, and Poverty, Crown Publishing Group.

[54] Alesina, Alberto and Enrico Spolaore (2003): The Size of Nations, MIT University Press.

[55] Alger, I. and J. Weibull (2010): Kinship, Incentives and Evolution, American Economic Review 100(4): 1725-1758.

[56] Ashraf, Quamrul and Oded Galor (2011): Dynamics and Stagnation in the Malthusian Epoch, American Economic Review 101: 2003

[57] Bacci, Massimo (2006) A Concise History of World Population.

[58] Bergstrom, Ted (2003): The Algebra of Assortative Encounters and the Evolution of Cooperation, International Game Theory Review 5: 1-18.

[59] Bisin, A. (2001): The economics of cultural transmission and the evo- lution of preferences, Journal of Economic Theory 97, 298-319.

[60] Bisin, A. and G. Topa (2004): Cooperation as a transmitted cultural trait, Rationality and Society 16: 477-507.

[61] Blume, L. and D. Easley (1992): Evolution and Market Behavior, Journal of Economic Theory 58: 9-40.

[62] Bocquet-Appel, Jean-Pierrre (2002): The paleoanthropological traces of the Neolithic demographic transition, Current Anthropology 43: 638-50.

[63] Bocquet-Appel, Jean-Pierrre (2006): Testing the Hypothesis of a Worldwide Neolithic Demographic Transition: Corroboration from American Cemeteries, Current Anthropology 47: 341-65.

[64] Bocquet-Appel, Jean-Pierrre (2011): When the world's population took o: The springboard of the Neolithic demographic transition, Science 333: 560-61.

[65] Boorman, S. and P.R. Levitt (1973): Group Selection on the Boundary of a Stable Population, Theoretical Population Biology 4: 85-128.

[66] Bottazzi G. and P. Dindo (2011): Evolution and Market Behav- ior with Endogenous Investment Rules, LEM Papers Series 2010/20, Sant'Anna School of Advanced Studies, Pisa, Italy.

[67] Bowles, Samuel (2004) Microeconomics: Behavior, Institutions, and Evolution, Princeton: Princeton University Press.

[68] Bowles, Samuel (2006): Group competition, reproductive leveling and the evolution of human altruism, Science 314: 1569-72.

[69] Bowles, Samuel (2009): Did Warfare among Ancestral Hunter- Gatherer Groups Aect the Evolution of Human Social Behaviors, Science 324: 1293-98.

[70] Bowles, Samuel (2011a): Better mousetraps? Beware simple history, New Scientist, 2823.

[71] Bowles, Samuel (2011b): The cultivation of cereals by the first farmers was not more productive than foraging, Proceedings of the National Academy of Science, 108: 4760-4765.

[72] Bowles, Samuel, Jung-Kyoo Choi and Astrid Hopfensitz (2003): The coevolution of individual behaviors and group level institutions, Jour- nal of Theoretical Biology 223: 135-47.

[73] Boyd, Robert and Peter J. Richerson (1990): Group Selection among Alternative Evolutionary Stable Strategies, Journal of Theoretical Bi- ology 145: 331-342

[74] Choi, Jung-Kyoo and Samuel Bowles (2007): The coevolution of parochial altruism and war, Science 318: 636-40.

[75] Cipolla, Carlo (1965): Guns, Sails, and Empires: Technological Inno- vation and the Early Phases of European Expansion, 1400- 1700.

[76] Clark, Gregory (2007): A Farewell to Alms, Princeton University Press.

[77] Dekel, E. J. C. Ely and O.Yilankaya (2007): Evolution of Preferences, The Review of Economic Studies 74(3):685-704.

[78] Diamond, Jared (1998): Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies.

[79] Dincecco, Mark, Giovanni Federico and Andrea Vindigni (2011): War- fare, Taxation, and Political Change: Evidence from the Italian Risorg- imento, The Journal of Economic History 71: 887-914

[80] Benoit, Jean-Pierre and Krishna, Vijay (1987): Nash equilibria of nitely repeated games, International Journal of Game Theory 16: 197-204.

[81] Ellison, Glenn (2000): Basins of Attraction, Long Run Stochastic Sta- bility and the Speed of Step-by-step Evolution, Review of Economic Studies 67: 17-45.

[82] Ely, Jerey (2002): Local conventions, The BE Journal of Theoretical Economics.

[83] Foster, Dean and Peyton Young (2003): Learning, hypothesis testing, and Nash equilibrium, Games and Economic Behavior.

[84] Friedlin and Wentzell (1984): Random Perturbations of Dynamical Sys- tems, Springer-Verlag.

[85] Fudenberg, Drew and David K. Levine (1998): Theory of Learning in Games, MIT Press.

[86] Fudenberg, Drew, David K. Levine and Eric Maskin (1994): The folk theorem with imperfect public information, Econometrica.

[87] Fudenberg, Drew and Eric Maskin (1986): The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, Econometrica.

[88] Garnkel, Michelle and Stergios Skaperdas (2007): Economics of Conflict: An Overview, Handbook of Defense Economics, Elsevier.

[89] Hansen, Gary and Edward Prescott (2002): Malthus to Solow, The American Economic Review.

[90] Hausken, Kjell (2005): Production and Conflict Models Versus Rent Seeking Models, Public Choice 123: 59-93.

[91] Hirshleifer, Jack (2001): The dark side of the force: economic founda- tions of conflict theory, Cambridge University Press.

[92] Ho□man, Philip T. and Jean-Laurent Rosenthal (2000): Divided We Fall: The Political Economy of Warfare and Taxation, Mimeo, Cali- fornia Institute of Technology

[93] Kandori, Michihiro (1992): Social norms and community enforce- ment, The Review of Economic Studies.

[94] Kandori, Michihiro, George Mailath, and Rafael Rob (1993): Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games, Econometrica 61: 29-56.

[95] Ladurie, Le Roy (1974): The Peasants of Languedoc.

[96] Levine, David, Salvatore Modica, Federico Weinschelbaum and Felipe Zurita (2011): Evolving to the Impatience Trap: The Example of the Farmer-Sheri Game, mimeo Washington University of St. Louis.

[97] Levine, David and Wolfgang Pesendorfer (2007): The Evolution of Cooperation Through Imitation, Games and Economic Behavior.

[98] Maddison, Angus (2007): Contours of the World Economy 1-2030 AD.

[99] Malthus, Thomas (1798): An Essay on the Principle of Population, J. Johnson: London.

[100] Maynard Smith, John (1982): Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press.

[101] McNeil, William (1963): The Rise of the West, University of Chicago Press.

[102] Price, George R. (1970): Selection and Covariance, Nature 227: 520- 21.

[103] Price, George R. (1972): Extension of Covariance Selection Mathe- matics, Annals of Human Genetics 35: 485-90.

[104] Richerson, Peter J. and Robert Boyd (2001) Commitment to Groups: A Tribal Instincts Hypothesis in Evolution and the Capacity for Com- mitment, ed. Randolph M. Nesse, Russell Sage Foundations.

[105] Rogers D. S., O. Deshpande and M. W. Feldman (2011): The Spread of Inequality, PLoS ONE 6(9): e24683. doi:10.1371/journal.pone.0024683

[106] Rowthorn, Robert and Paul Seabright (2010): Property rights, warfare and the neolithic transition, Toulouse School of Economics Working Paper 10-207.

[107] Thompson, Earl and Charles Hickson (2000): Ideology and the evo- lution of vital economic institutions: guilds, the gold standard, and modern international cooperation.

[108] Weightman, Gavin (2009): Industrial Revolutionaries: The Making of the Modern World 1776-1914, Grove Press

[109] Young, Peyton (1993): The Evolution of Conventions, Econometrica 61: 57-84.

[110] Bachi, B., S. Ghosh and Z. Neeman (2011): “Real Talk, Deception Equilibrium and Co-operation,” mimeo, Tel Aviv University.

[111] Binmore, K., J. McCarthy, G. Ponti, L. Samuelson and A. Shaked (2002): "A Backward Induction Experiment," Journal of Economic Theory, 104: 48-88.

[112] Binmore, K. G. and L. Samuelson (1992): “Evolutionary Stability in Repeated Games Played by Finite Automata,” Journal of Economic Theory, 57: 278-305.

[113] Frank, R. H. (1987): “If Homo Economicus Could Choose His Own Utility Function, Would He Want One with a Conscience?” American Economic Review, 77: 593- 604.

[114] Fudenberg, D., D. Kreps and D. K. Levine (1988): "On the Robustness of Equilibrium Refinements," Journal of Economic Theory, 44: 354-380

[115] Fudenberg, D. and D. K. Levine (1991) "An Approximate Folk Theorem with Imperfect Private Information," Journal of Economic Theory, 54: 26-47.

[116] Fudenberg, D., D. K. Levine and E. Maskin (1994): "The Folk Theorem with Imperfect Public Information," Econometrica, 62: 997-1039.

[117] Fudenberg, D. and E. Maskin (1986): “The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information,” Econometrica, 54: 533-554.

[118] Howard, J. (1988): “Cooperation in the Prisoner’s Dilemma,” Theory and Decision, 24:203-213.

[119] Kalai, A. T., E. Kalai, E. Lehrer, and D. Samet (2010): “A Commitment Folk Theorem,”Games and Economic Behavior, 69: 127-137.

[120] Kandori, M. (1992): “Social Norms and Community Enforcement,” Review of Economic Studies, 59: 61-80.

[121] Levine, D. K. and W. Pesendorfer (2007): "Evolution of Cooperation through Imitation,"Games and Economic Behavior, 58: 293-315.

[122] Levine, D. K. and B. Szentes (2006): "Can A Turing Player Identify Itself?," Economics Bulletin, 1: 1-6. Radner, R. (1980): “Collusive Behavior in Noncooperative Epsilon-equilibria of Oligopolies with Long but Finite Lives,” Journal of Economic Theory, 22: 136- 154.32

[123] Robson, A. J. (1990): “Efficiency in Evolutionary Games: Darwin, Nash and the Secret Handshake,” Journal of Theoretical Biology, 144: 379-396.

[124] Rubinstein, A. (1986): “Finite Automata Play the Repeated Prisoner's Dilemma,” Journal of Economic Theory, 39: 83-96.

[125] Sugaya, T. (2011): “Folk Theorem in Repeated Games with Private Monitoring,” mimeo, Princeton University.

[126] Tooby, J. and L. Cosmides (1996): “The computationalist theory of communication,” Paper presented at the meeting of the Human Behavior and Evolution Society Meetings, University of Arizona, Tucson.

[127] Kevin Chlebik, (2010): Terrorism and Game Theory: From the Terrorists’ Point of View.