ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Θεοφάνης Δ. Πολίτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Μάιος 2014

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RISK MEASURES IN ACTUARIAL SCIENCE

BY

Theofanis D. Politis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

May 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- …………………………………. (Επιβλέπων)
- ………………………………….
- ………………………………….

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθ’όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Η μέτρηση των κινδύνων είναι πολύ σημαντικό εργαλείο για την Αναλογιστική Επιστημή, διότι βοηθάει στην ποσοτικοποίηση και επομένως στην αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των κινδύνων που δύναται να αντιμετωπίζει π.χ. μια ασφαλιστική εταιρία. Στην παρούσα διπλωματική αρχικά θα ορίσουμε τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου και θα εξετάσουμε τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούν. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με κάποια μέτρα κινδύνου, όπως το Value at Risk, και θα εξετάσουμε ποιες από τις επιθυμητές ιδιότητες ικανοποιούν. Επίσης θα παρουσιάσουμε δύο θεωρητικές προσεγγίσεις (θεωρία Αναμενόμενης Ωφελιμότητας και θεωρία Στρεβλής Προσδοκίας) που ακολουθούν οι ιθύνοντες για να αποφασίσουν ανάμεσα σε ενδεχόμενα υπό κινδύνο. Στα πλαίσια επίσης της διπλωματικής θα εξετάσουμε πως μπορούμε να εκτιμήσουμε διάφορα μέτρα κινδύνου έχοντας στην διάθεσή μας κάποιο τυχαίο δείγμα. Τέλος θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές υπολογισμού και εκτίμησης των μέτρων κινδύνου, μέσω κατάλληλου λογισμικού (Wolfram Mathematica).

Abstract

The measurement of risk is a very important tool for actuarial science, in order to quantify the risk and find an efficient way to reduce it. In this MSc thesis we will initially review the most important risk measures and examine the properties that they must satisfy. Next, we will present in more detail specific risk measures such as Value at Risk, and consider their desired properties. In addition, we will present two theoretical approaches (Expected Utility theory and Distorted Expectation theory) which use decision makers in order to decide between risky possibilities. We will also review several methods for the estimation of risk measures via random samples. Finally we include some applications of calculation and estimation of risk measures using appropriate computer software (Wolfram Mathematica).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Μέτρα Κινδύνου βασισμένα στη θεωρία Αναμενόμενης Ωφελιμότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Μέτρα Κινδύνου βασισμένα στην θεωρία Στρεβλής Προσδοκίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Μη Παραμετρική Εκτίμηση Μέτρων Κινδύνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Εφαρμογές

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο όρος κίνδυνος έχει μια ποικιλία από έννοιες στις επιχειρήσεις και την καθημερινή ζωή. Γενικά η έννοια του κινδύνου χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια κατάσταση στην οποία υπάρχει αβεβαιότητα για το αποτέλεσμα που θα προκύψει. Στις πιθανότητες, την στατιστική, στα οικονομικά και στις επενδύσεις ο κίνδυνος χρησιμοποιείται για να δείξει πιθανή μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων γύρω από κάποια αναμενόμενη τιμή.

Ο κίνδυνος και η κάλυψη του είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες. Για αιώνες η κάλυψη κινδύνου ήταν αντικείμενο μόνο των ασφαλιστικών εταιριών. Τις τελευταίες δεκαετίες όμως τόσο τράπεζες όσο και χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πωλούν κάλυψη κινδύνου σε εταιρίες ή ιδιώτες. Πλέον και οι τρεις παραπάνω φορείς συλλέγουν και διαχειρίζονται κινδύνους. Στις δραστηριότητες της διοικητικής κινδύνου (*risk management*) είναι ο διαχωρισμός και η αντιστάθμιση των κινδύνων (*hedging*). Κάποιοι κίνδυνοι όμως δεν είναι δυνατό να αντισταθμιστούν λόγω μη ύπαρξης αντίθετου κινδύνου στην αγορά. Όταν λοιπόν δεν είναι δυνατή η αντιστάθμιση του κινδύνου πρέπει να μετρηθεί προσεκτικά ο κίνδυνος και να δημιουργηθούν τα κατάλληλα αποθέματα για την αντιμετώπιση του. Οι εταιρίες στις μέρες μας δίνουν μεγάλη σημασία και βελτιώνουν συνεχώς τις τεχνικές μέτρησης των κινδύνων και αξιολόγησης των κερδοφόρων τομέων της επιχείρησης. Η διοικητική κινδύνων πρέπει να βρει την χρυσή τομή μεταξύ των αντικρουόμενων συμφερόντων πελατών και ασφαλισμένων με αυτά των μετόχων. Οι μεν πρώτοι επιθυμούν φυσικά την μεγιστοποίηση του πλούτου τους ενώ οι μέτοχοι από την πλευρά τους απαιτούν απόδοση ιδίων κεφαλαίων σύμφωνα με τον κίνδυνο της επένδυσης τους.

Τα μέτρα κινδύνου δημιουργήθηκαν προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί η επικινδυνότητα των οικονομικών θέσεων και να παραχθεί ένα κριτήριο για να καθοριστεί αν ο κίνδυνος είναι αποδεκτός ή όχι. Πολλά μέτρα έχουν προταθεί για την μέτρηση του κινδύνου στην ασφάλιση και στα χρηματοοικονομικά, από τα πιο απλά έως πολύ σύνθετα. Γενικά στην μέτρηση κινδύνου ισχύει ένα αξίωμα: δεν υπάρχει ¨σωστό¨ μέτρο κινδύνου, καθώς διαφορετικά μέτρα κινδύνου αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Τα τελευταία χρόνια ωστόσο έχει γίνει σημαντική πρόοδος στην οικονομική επιστήμη και στα μέτρα κινδύνου ειδικότερα με την θέσπιση της έννοιας του καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τους κατόχους επικίνδυνων χαρτοφυλακίων. Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μέτρων κινδύνου έχει η αξιωματική προσέγγιση τους. Οι λειτουργικές μορφές και οι θεμελιώδεις ιδιότητες των μέτρων κινδύνου έχουν μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία από το 1970, με αφορμή τον υπολογισμό ασφαλίστρων. Η προέλευση των μέτρων κινδύνου και οι ιδιότητες τις οποίες πρέπει να πληροί ένα μέτρο κινδύνου θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 1.

Το πιο διαδεδομένο μέτρο κινδύνου είναι η *Αξία στον Κίνδυνο* (*Value at Risk, VaR*). Στο Κεφάλαιο 2 ορίζεται το *VaR* και οι ιδιότητες του. Στο *Value at Risk* στηρίζεται και το *Tail Value at Risk* (*Αξία στον Κίνδυνο ουράς*). Το *TVaR* και οι ιδιότητες του θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 3. Στο ίδιο κεφάλαιο αναλύονται και τα ακόλουθα μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με το *TVaR*.

Conditional tail expectation	*Δεσμευμένη προσδοκώμενη ουρά*
Conditional VaR	*Δεσμευμένη Αξία στον Κίνδυνο*
Expected shortfalls	*Αναμενόμενα ελλείμματα*

Σε πολλά συγγράμματα τα παραπάνω μέτρα κινδύνου συγχέονται μεταξύ τους ή μπορεί να ορίζονται λίγο διαφορετικά.

Υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τη λήψη αποφάσεων υπό κίνδυνο. Και στις δύο προσεγγίσεις οι προτιμήσεις ενός λήπτη αποφάσεων ακολουθούν απλές συγκρίσεις των αριθμητικών ποσοτήτων σε σχέση με τις εναλλακτικές επιλογές που εξετάζονται. Η πρώτη προσέγγιση είναι η κλασική θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας (*classical expected utility theory*) που προέρχεται από το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης (*St Petersburg paradox*) και έγινε αξίωμα από τους von Neumann and Morgenstern (1947). Στο πλαίσιο της θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας, μια συνάρτηση ωφελιμότητας αποδίδει την αξία οποιουδήποτε χρηματικού ποσού. Μια συνάρτηση ωφελιμότητας έχει υποκειμενικό χαρακτήρα καθώς αντικατοπτρίζει τις προτιμήσεις των ατόμων ή των ασφαλιστικών εταιρειών. Κάθε άνθρωπος ή επιχείρηση έχει διαφορετική συνάρτηση ωφελιμότητας. Ωστόσο όλες οι λογικές συναρτήσεις ωφελιμότητας έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά, όπως να είναι μη-φθίνουσες, αφού προφανώς όλοι προτιμούν περισσότερο πλούτο. Η θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας έχει συμβάλει σημαντικά στην κατανόηση των οικονομικών του κινδύνου και της αβεβαιότητας κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών. Η θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας καθώς και τα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε αυτήν θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 4.

Η δεύτερη προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε στο Κεφάλαιο 5 είναι η διπλή θεωρία του Yaari (*Yaari's dual theory*) (Yaari(1987)) για την επιλογή κάτω από κίνδυνο. Ο Yaari τροποποίησε το αξίωμα της ανεξαρτησίας των von Neumann and Morgenstern (1947). Στη θεωρία του Yaari πρέπει να είναι ανεξάρτητες οι άμεσες πληρωμές των επικίνδυνων προοπτικών και όχι οι πιθανότητές τους. Στο πλαίσιο της θεωρίας του Yaari, χρησιμοποιείται η έννοια της συνάρτησης στρέβλωσης, η οποία μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχη με την έννοια της συνάρτησης ωφελιμότητας στην κλασική θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας. Στη διπλή θεωρία του Yaari, η στάση απέναντι στον κίνδυνο χαρακτηρίζεται από μια στρέβλωση εφαρμοσμένη σε συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, ενώ στη θεωρία ωφελιμότητας χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας του πλούτου: επικίνδυνες προοπτικές αξιολογούνται από μια αριθμητική κλίμακα που μοιάζει με μια αναμενόμενη ωφελιμότητα αλλά με αντεστραμμένους τους ρόλους των πληρωμών και των πιθανοτήτων.

Αφού δούμε πως υπολογίζονται τα μέτρα κινδύνου πρέπει να εξετάσουμε πως μπορούν να εκτιμηθούν και από ένα άγνωστο δείγμα. Στο Κεφάλαιο 6 εκτιμούνται μη παραμετρικά το VaR και τα μέτρα κινδύνου του Κεφαλαίου 3.

Η διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται με κάποιες εφαρμογές. Τα σημαντικότερα από τα μέτρα κινδύνου που αναλύονται στην παρούσα εργασία υπολογίζονται για διάφορες κατανομές στο Κεφάλαιο 7. Επίσης τα ίδια μέτρα εκτιμούνται από άγνωστο δείγμα και συγκρίνονται οι τιμές τους με τις ακριβείς τιμές των μέτρων κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Μέτρα Κινδύνου

1.1 Ορισμός

Κάθε κίνδυνος μπορεί να εκφραστεί ως μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή. Έτσι η μέτρηση του κινδύνου ισοδυναμεί με μία αντιστοίχηση ρ μεταξύ του χώρου των τυχαίων μεταβλητών και των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$. Ο πραγματικός αριθμός που δηλώνει ένα γενικό μέτρο του κινδύνου που συνδέεται με τον κίνδυνο X στο εξής θα συμβολίζεται ως $\rho[X]$. Έτσι, ένα μέτρο κινδύνου είναι απλά μία συνάρτηση που αντιστοιχεί ένα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό σε ένα κίνδυνο.

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένα μέτρο κινδύνου που να μπορεί να αποδώσει τη συνολική εικόνα του κινδύνου, αλλά το καθένα από αυτά μπορεί επικεντρωθεί σε μία συγκεκριμένη πτυχή του. Είναι κάτι αντίστοιχο με την στατιστική, όπου τα διάφορα χαρακτηριστικά μίας κατανομής εξηγούν διαφορετικές πτυχές των δεδομένων, για παράδειγμα, η μέση τιμή μετράει την κεντρική τάση ενώ η διακύμανση την εξάπλωση γύρω από αυτήν.

Τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν και στα οποία θα επικεντρωθούμε στη συνέχεια είναι αυτά που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό κεφαλαιακών απαιτήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση. Από αυτήν την άποψη, μας ενδιαφέρουν τα μέτρα κινδύνου που μετρούν τις πάνω ουρές των συναρτήσεων κατανομής. Για απλότητα, θεωρούμε μοντέλα της αγοράς χωρίς επιτόκια.. Είναι εύκολο, ωστόσο, να επεκταθούν οι ορισμοί και τα αποτελέσματα στην «πραγματικότητα», θεωρώντας κατάλληλους συντελεστές προεξόφλησης.

Ορισμός 1.1. *Μέτρο κινδύνου είναι μια απεικόνιση ρ ενός κινδύνου X σε έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $\rho[X]$, ενδεχομένως άπειρο, που αντιπροσωπεύει το επιπλέον ποσό που πρέπει να προστεθεί στο X ώστε αυτό να γίνει αποδεκτό.*

Ουσιαστικά η ρ ποσοτικοποιεί την επικινδυνότητα του X δηλαδή μεγάλες τιμές του $\rho[X]$ σημαίνει ότι το X είναι ¨επικίνδυνο¨. Συγκεκριμένα, αν το X είναι μια πιθανή ζημία ενός οικονομικού χαρτοφυλακίου σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, τότε $\rho[X]$ είναι το ποσό του κεφαλαίου που πρέπει να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο σαν προστασία έτσι ώστε να γίνει αποδεκτό από έναν εσωτερικό ή εξωτερικό ελεγκτή κινδύνου. Η τιμή $\rho[X]$ είναι ο κεφαλαιακός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου. Τέτοια μέτρα κινδύνου χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση.

1.2 Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρου

Τα μέτρα κινδύνου είναι από πολλές απόψεις παρόμοια με τις αναλογιστικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Για μια ασφαλιστική εταιρεία εκτεθειμένη σε μια υποχρέωση X, οι γενικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου Π υποδεικνύουν το ελάχιστο ποσό $\Pi[X]$ που πρέπει να καταβάλλουν οι ασφαλισμένοι ώστε ο ασφαλιστής να προχωρήσει τη σύμβαση. Οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου (premium principles) αποτελούν έτσι εξέχουσα παραδείγματα πιθανών μέτρων κινδύνου. Ο αριθμός που προκύπτει από την εφαρμογή τους σε κάποιο ασφαλιστικό κίνδυνο X λαμβάνεται υπόψη για το ασφάλιστρο που θα συνδέεται με τη σύμβαση που προβλέπει την κάλυψη του X. Οι Αρχές Ασφαλίστρου αποτελούν ουσιαστικά πρόγονο των μέτρων κινδύνου που χρησιμοποιούνται στην Αναλογιστική επιστήμη. Σε γενικές γραμμές υπάρχει ομοφωνία στον υπολογισμό του καθαρού ασφαλίστρου, με εξαίρεση την κατανομή που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Όμως υπάρχουν πολλοί τρόποι συνυπολογισμού του περιθωρίου ασφαλείας ή της επιβάρυνσης του ασφαλίστρου (loading). Το περιθώριο ασφαλίστρου αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο που βαρύνει τον ασφαλιστή. Επίσης, οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου πρέπει να εκφράζουν τις προσδοκίες του ασφαλιστή σχετικά με τον κίνδυνο που αναλαμβάνει. Το ασφάλιστρο για έναν υψηλότερο κίνδυνο πρέπει να υπερβαίνει το ασφάλιστρο για έναν χαμηλότερο κίνδυνο.

Παρακάτω δίνουμε τον τρόπο υπολογισμού ενός ασφαλίστρου όπως αναφέρονται στο βιβλίο των Kaas, Goovaerts, Dhaene and Denuit (2001).

1) Το *καθαρό ασφάλιστρο* (net premium), γνωστό και ως αρχή της ισοδυναμίας, ισούται απλά με την αναμενόμενη τιμή ενός κινδύνου X,

$$\Pi(X) = E(X).$$

Αυτό το ασφάλιστρο είναι επαρκές μόνο για έναν ασφαλιστή που είναι ουδέτερος απέναντι στον κίνδυνο.

2) Σύμφωνα με την *αρχή αναμενόμενης τιμής* (expected value principle), το ασφάλιστρο ισούται με το καθαρό ασφάλιστρο, συν μια επιβάρυνση ίση με $\alpha E(X)$, όπου $\alpha > 0$ είναι μία παράμετρος. Δηλαδή,

$$\Pi(X) = (1 + \alpha)E(X)$$

3) Σύμφωνα με την *αρχή διακύμανσης*(variance principle) η επιβάρυνση ασφαλίστρου είναι ανάλογη της διακύμανσης $Var(X)$, έτσι προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$\Pi(X) = E(X) + \alpha Var(X), \qquad \alpha > 0.$$

4) Η *αρχή τυπικής απόκλισης* (standard deviation principle) είναι παρόμοια με αυτή της διακύμανσης μόνο που στη θέση της διακύμανσης χρησιμοποιείται η τυπική απόκλιση $\sigma(X)$, δηλαδή τώρα,

$$\Pi(X) = E(X) + \alpha\sigma(X), \qquad \alpha > 0$$

5) Σύμφωνα με την *εκθετική αρχή* (exponential principle) το ασφάλιστρο δίνεται από την εξίσωση:

$$\Pi(X) = \frac{1}{a} log(m_X(a))$$

όπου m_X είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της X και ορίζεται ως $m_X = E[e^{\alpha X}]$. Η παράμετρος $\alpha > 0$ ονομάζεται αποστροφή στον κίνδυνο. Για $\alpha \to 0$ προκύπτει το καθαρό ασφάλιστρο, και για $\alpha \to \infty$ λαμβάνεται η μέγιστη τιμή του κινδύνου X.

Οι Goovaerts, De Vijlder and Haazendonck (1984) κάνουν μία επισκόπηση των αρχών ή κανόνων υπολογισμού ασφαλίστρου. Από τους θεμελιωτές των αρχών αυτών είναι ο Buhlmann (1970) ο οποίος εισήγαγε την αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου μηδενικής ωφελιμότητας (zero-utility premium principle). Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2. Έστω u μια μη φθίνουσα συνάρτηση ωφελιμότητας. Το ασφάλιστρο μηδενικής ωφελιμότητας $\Pi(X)$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$u(0) = E[u(\Pi[X] - X)].$$

Η συνάρτηση $u(x)$ παριστά την ωφελιμότητα του εκάστοτε λήπτη αποφάσεων. Έτσι, $u(0)$ είναι η ωφελιμότητα μηδενικού κεφαλαίου (πριν την ασφάλιση) και $u(\Pi[X]$-$X)$ είναι η ωφελιμότητα μετά από μια ασφάλιση κατά του κινδύνου X με ασφάλιστρο $\Pi[X]$.

Ο Hardy (1952) υιοθέτησε την αρχή της μέσης τιμής (mean value principle) δίνοντας τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3. Έστω X μια μεταβλητή κινδύνου. Το μέτρο κινδύνου μέσης τιμής λαμβάνεται ως η ρίζα της εξίσωσης

$$f(\Pi[X]) = E[f(X)],$$

όπου f είναι μια μη φθίνουσα και μη αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε η $E[f(X)]$ να είναι πεπερασμένη. Για $f(x) = x$ παίρνουμε το καθαρό ασφάλιστρο, ενώ για $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$, παίρνουμε την εκθετική αρχή ασφαλίστρου.

Ο Gerber (1974) εισήγαγε την έννοια της Ελβετικής αρχής υπολογισμού ασφαλίστρου (the Swiss premium calculation principle) για να θέσει στο ίδιο πλαίσιο την αρχή της μέσης τιμής και την αρχή μηδενικής ωφελιμότητας.

Ορισμός 1.4. Έστω $w(.)$ μία μη αρνητική και μη φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και z μία παράμετρος στο (0,1). Το ασφάλιστρο $\Pi[X]$ σύμφωνα με την Ελβετική αρχή ασφαλίστρου είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$E[w(X - z\Pi[X])] = w((1-z)\Pi[X])$$

Οι Goovaerts, De Vijlder and Haezendonck (1982) εισήγαγαν την αρχή ασφαλίστρου Orlicz ως ένα πολλαπλασιαστικό ισοδύναμο της αρχής μηδενικής ωφελιμότητας. Για να εισαγάγουν την αρχή ασφαλίστρου, χρησιμοποίησαν την έννοια μιας συνάρτησης ψ, η οποία ορίζεται από $\mathbb{R}_0^-$ στο $\mathbb{R}_0^+$ και μπορεί να γραφτεί ως ολοκλήρωμα της μορφής

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

όπου f είναι μια συνεχής, αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}_0^+$ με $f(0) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Μια συνάρτηση αυτής της μορφής συναντάται στην βιβλιογραφία ως συνάρτηση Young. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση ψ είναι απόλυτα συνεχής, κυρτή και γνησίως αύξουσα και ισχύει $\psi'(0) = 0$. Λέμε ότι η ψ είναι κανονικοποιημένη αν $\psi(1) = 1$.

Ορισμός 1.5. Έστω ψ μια κανονικοποιημένη συνάρτηση Young. Η ρίζα της εξίσωσης

$$E[\psi(X/\Pi[X])] = 1$$

αποτελεί το ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου Orlicz για τον κίνδυνο X.

Παράδειγμα 1.1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x$. Τότε η συνάρτηση $\psi(x)$, όπως ορίζεται παραπάνω, είναι η $\psi(x) = x^2$ η οποία είναι μια κανονικοποιημένη συνάρτηση Young.

1.3 Επιθυμητές Ιδιότητες μέτρων κινδύνου

Τα μέτρα κινδύνου πρέπει να ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα. Στην αναλογιστική επιστήμη οι Goovaerts, De Vijlder and Hazendonck (1984) πρωτοπόρησαν στην συστηματική μελέτη των ιδιοτήτων που πρέπει να κατέχουν οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου. Στη συνέχεια, πολλοί συγγραφείς πρότειναν διάφορες ιδιότητες που κάθε μέτρο κινδύνου θα πρέπει να ικανοποιεί. Παρακάτω δίνουμε έναν κατάλογο λογικών (μη ανεξάρτητων) απαιτήσεων που ένα μέτρο κινδύνου θα πρέπει να πληροί, και την ερμηνεία τους.

Ιδιότητα 1: Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (Non - excessive loading or no-ripoff):

Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα για ένα μέτρο κινδύνου πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\rho[X] \leq max[X] = F_X^{-1}(1) \text{ για κάθε τυχαία μεταβλητή } X.$$

Πρακτικά η παραπάνω ιδιότητα εκφράζει το προφανές γεγονός ότι ο κίνδυνος είναι μικρότερος ή ίσος από την μέγιστη δυνατή ζημιά .

Ιδιότητα 2: Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (Non - negative loading):

Ένα μέτρο κινδύνου πρέπει να έχει μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας, δηλαδή:

$$\rho[X] \geq E[X] \text{ για κάθε τ.μ. } X.$$

Το μέτρο κινδύνου (δηλ. το ελάχιστο κεφάλαιο) πρέπει να υπερβαίνει την αναμένομενη ζημία, αλλιώς μακροπρόθεσμα θα έχουμε βέβαιη χρεοκοπία (σύμφωνα με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών).

Ιδιότητα 3: Προσθετικότητα ως προς σταθερά (Translativity):

Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα ισχύει:

$$\rho[X + c] = \rho[X] + c \text{ για κάθε τ.μ. } X \text{ και για κάθε } c.$$

Οποιαδήποτε αύξηση της υποχρέωσης με ένα ποσό c πρέπει να συνεπάγεται την ίδια αύξηση του κεφαλαίου. Από την παραπάνω, αν $c = -\rho[X]$ προκύπει ότι

$$\rho[X - \rho[X]] = 0,$$

δηλαδή όταν προσθέτουμε $\rho[X]$ στην αρχική θέση –X, παίρνουμε ουδέτερη θέση.

Ιδιότητα 4: Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας(Constancy or no unjustified loading):

Η ιδιότητα της σταθερότητας ενός μέτρου κινδύνου επιτάσσει:

$$\rho[c] \ = \ c, \ \textit{για κάθε σταθερά } c.$$

Για να αντιμετωπιστεί μία μη-τυχαία απώλεια c πρέπει προφανώς ο ασφαλιστής να κατέχει ισόποσο κεφάλαιο. Ειδικότερα $\rho[0] = 0$ και η ποσότητα $\rho[X]$ μπορεί να ερμηνευθεί ως απαίτηση περιθωρίου (margin requirement). Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ως το ελάχιστο ποσό του κεφαλαίου που αν προστεθεί στο X κατά την έναρξη της περιόδου και επενδυθεί σε ένα αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο, κάνει αποδεκτή την ποσότητα X.

Ιδιότητα 5: Υποπροσθετικότητα (Subadditivity):

Σύμφωνα με την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας πρέπει να ισχύει:

$$\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y], \text{για κάθε τ.μ. } X, Y$$

Όταν ισχύει η ισότητα μιλάμε για προσθετικότητα. Στην ουσία εκφράζει το γεγονός ότι μια συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπλέον κινδύνους. Οι κίνδυνοι μπορούν να μειωθούν με διαφοροποίηση. Η επίδραση της διαφοροποίησης στη συνέχεια ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των μέτρων κινδύνου των επιμέρους κινδύνων και του μέτρου κινδύνου όλων των κινδύνων μαζί.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho[X_i] - \rho[\sum_{i=1}^{n} X_i]$$

Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης είναι πάντα θετικό για τα υποπροσθετικά (subadditive) μέτρα κινδύνου. Το πρόβλημα της κατανομής των κινδύνων αποτελείται από την κατανομή του μη αρνητικού αποτελέσματος της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων με δίκαιο τρόπο στα συστατικά του.

Ιδιότητα 6: Συμμονοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity):

Όταν πρόκειται για συμμονοτονικούς κινδύνους δεν ισχύει η ιδιότητα τις υποπροσθετικότητας αλλά η παρακάτω ισότητα:

$$\rho[X+Y] = \rho[X] + \rho[Y] \text{ για κάθε συμμονοτονικές τ.μ. } X,Y$$

Υπενθυμίζεται ότι δύο τ.μ. *X, Y* καλούνται συμμονοτονικές αν έχουν την μεγαλύτερη δυνατή θετική εξάρτηση, και συγκεκριμένα αν και μόνο αν

$$(X,Y) =_d \left(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)\right),$$

όπου η τ.μ. U ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (0,1).

Η παραπάνω απαίτηση δικαιολογείται από το γεγονός ότι η τοποθέτηση συμμονοτονικού κινδύνου ποτέ δεν μειώνει την επικινδυνότητα της κατάστασης. Συμμονοτονικοί κίνδυνοι μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι τα στοιχήματα για το ίδιο γεγονός και δεν μπορούν να λειτουργήσουν ως αντιστάθμιση ο ένας έναντι του άλλου. Έτσι οι ασφαλιστές δεν είναι διατεθειμένοι να δώσουν τη μείωση του περιθωρίου του κινδύνου για μια συνδυασμένη πολιτική, με αποτέλεσμα την συμμονοτονική προσθετικότητα.

Ιδιότητα 7: Επαναληψιμότητα(Iterativity):

Σύμφωνα με την ιδιότητα της επαναληψιμότητας, η οποία αναφέρεται στο σύγγραμμα των Kaas, Goovaerts, Dhaene and Denuit (2001), ισχύει:

$$\rho[X] = \rho[\rho[X|Y]], \text{ για κάθε } X,Y$$

Το ασφάλιστρο για το X μπορεί να υπολογιστεί σε δύο στάδια. Κατ 'αρχάς, υπολογίζουμε το $\rho[\cdot]$ στη δεσμευμένη κατανομή της X, δεδομένου ότι $Y = y$. Το ασφάλιστρο που προκύπτει είναι μια συνάρτηση του y, έστω $h(y)$. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την ίδια αρχή ασφαλίστρου για την τ.μ. $\rho[X \mid Y] = h(Y)$.

Ιδιότητα 8: Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity):

Σύμφωνα με την ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας ισχύει:

$$\rho[cX] = c\rho[X] \text{ για κάθε τ.μ. } X \text{ και για κάθε } c > 0$$

Συχνά συνδέεται με την ανεξαρτησία. Προέρχεται από την συμμονοτονική προσθετικότητα

$$\rho[cX] = \rho[X + X + \ldots + X] = \rho[X] + \rho[X] + \ldots + \rho[X] = c\rho[X].$$

Ιδιότητα 9: Μονοτονία (Monotonicity):

Η μονοτονία των μέτρων κινδύνου εκφράζεται ως:

$$Pr[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \rho[X] \leq \rho[Y] \text{ για κάθε τ.μ. } X,Y$$

Το κεφάλαιο που απαιτείται για την κάλυψη του X είναι πάντα μικρότερο από το αντίστοιχο του Y όταν το Y υπερβαίνει το X.

Ιδιότητα 10: Συνέχεια όσον αφορά την σύγκλιση κατά κατανομή

Έστω $\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ μια ακολουθία κινδύνων η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην X, $X_n \to_d X,\ n \to \infty,$ δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ για κάθε σημείο συνέχειας } x \text{ της } F_X$$

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \rho[X_n] = \rho[X].$$

Ιδιότητα 11: Αντικειμενικότητα (Objectivity):

Η $\rho[X]$ εξαρτάται από το X μόνο μέσω της συνάρτησης κατανομής F_X του X. Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η F_X περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για την μέτρηση επικινδυνότητας του X. Καλείται και «νόμος αναλλοίωτου» και εκφράζεται

$$X =_d Y \Rightarrow \rho[X] = \rho[Y]$$

Είναι απαραίτητη προϋπόθεση για ένα μέτρο κινδύνου ώστε να μπορεί να εκτιμηθεί από εμπειρικά δεδομένα.

Παρατηρήσεις

- Οι παραπάνω ιδιότητες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Να σημειωθεί ότι ακόμα και οι γενικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου δεν συμμορφώνονται με όλες τις παραπάνω απαιτήσεις. Εκτός από την αρχή του καθαρού ασφαλίστρου καμία από τις αρχές που θεμελίωσαν οι Goovaerts, De Vijlder and Haazendonck (1984) δεν ικανοποιούν ταυτόχρονα την συνθήκη της θετικής ομοιογένειας και της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά. Η Ολλανδική αρχή ασφαλίστρων (Dutch premium principle) που καθιερώθηκε από τους Van Heerwaarden and Kaas(1992) πληροί και τις δύο αυτές ιδιότητες.

Ορισμός 1.6. Ένα ασφάλιστρο ικανοποιεί την ολλανδική αρχή τιμολόγησης ασφαλίστρων, αν, και μόνο εάν, είναι της μορφής:

$$\Pi[X] = E[X] + \theta E[(X - E[X])_+], \qquad 0 < \theta < 1$$

- Ας δούμε σε αυτό το σημείο τις ιδιότητες της υποπροσθετικότητας και της θετικής ομοιογένειας. Η υποπροσθετικότητα αμφισβητείται ότι περιγράφει την πραγματικότητα γιατί αγνοεί εντελώς την ύπαρξη υπολειμματικού κινδύνου (residual risk). Οι Follmer and Schied (2002) παρατήρησαν ότι και οι δύο ιδιότητες κάνουν τα μέτρα κινδύνου ευαίσθητα στον κίνδυνο ρευστότητας. Σύμφωνα με τους Rootzén and Klüppelberg (1999), η υποπροσθετικότητα είναι μια βολική μαθηματική ιδιότητα που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Ομοίως, τα υποπροσθετικά μέτρα κινδύνου αποδεικνύεται ότι είναι ασυμβίβαστα με την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας. Το ερώτημα μπορεί να τεθεί ως εξής: δοθέντων δύο χαρτοφυλακίων X και Y και της από κοινού κατανομής πιθανοτήτων τους, με ποιο τρόπο ο συνολικός κίνδυνος $\rho[X+Y]$ σχετίζεται με τους επιμέρους κινδύνους $\rho[X]$ και $\rho[Y]$; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο τα X και Y στοχαστικά αλληλοεξαρτώνται. Η συμμονοτονική προσθετικότητα είναι σύμφωνη με την προσέγγιση αυτή: αν X και Y είναι απόλυτα εξαρτημένες, τότε δεν υπάρχει έκπτωση διαφοροποίησης. Εκτός από αυτή την ακραία περίπτωση, κάποια επίδραση διαφοροποίησης συμβαίνει και η υποπροσθετικότητα επικρατεί.

  Μια άλλη σχολή σκέψης υποστηρίζει ότι η συγκέντρωση «θετικά εξαρτημένων» κινδύνων στην πραγματικότητα αυξάνει την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου και ότι αυτό θα πρέπει να προκαλέσει υψηλότερες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό οδηγεί σε υπερπροσθετικότητα για θετικώς εξαρτημένους κινδύνους και προσθετικότητα για ανεξάρτητους κινδύνους.

1.4 Συνεκτικά μέτρα κινδύνου

Πολλοί συγγραφείς συμφώνησαν ότι κάποιες ιδιότητες πρέπει όλα τα μέτρα κινδύνου να τις ικανοποιούν. Ο παρακάτω ορισμός δόθηκε από τον Artzner (1999).

Ορισμός 1.7. Ένα μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί τις ιδιότητες της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά, της θετικής ομοιογένειας, της υποπροσθετικότητας και της μονοτονίας ονομάζεται *συνεκτικό* (*coherent*).

Η συνεκτικότητα (συνοχή) ορίζεται ως ένα σύνολο αξιωμάτων και δεν είναι σύνολο καθολικά αποδεκτό. Τροποποίηση του συνόλου των αξιωμάτων οδηγεί σε άλλα «συνεκτικά» μέτρα κινδύνου.

1.5 Συνεκτικά και μέτρα κινδύνου βασισμένα σε σενάριο (scenario-based).

Τα scenario-based μέτρα κινδύνου ορίζονται ως

$$\rho[X] = sup\{E^{Q}[X] \,\big|\, Q\epsilon\mathcal{P}\} \tag{1.1}$$

Όπου η αναμενόμενη τιμή E^{Q} υπολογίζεται υπό το μέτρο πιθανότητας Q, και $\mathcal{P}$ είναι ένα μη κενό σύνολο μέτρων πιθανότητας. Τέτοια μέτρα κινδύνου έχουν θεωρηθεί για μεγάλο διάστημα στην υπολογιστική επιστήμη, ειδικά όταν $\mathcal{P}$ είναι ένας χώρος κατανομών(*moment space*) των οποίων οι ροπές ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες (ή γενικότερα, όταν $\mathcal{P}$ ορίζεται ως ένα σύνολο από περιορισμούς ολοκληρωμάτων).

Ορισμός 1.8. Συνοψίζουμε ορισμένες ιδιότητες του moment space. Έστω $F(x)$ μια συνάρτηση κατανομής στο διάστημα [0,1] και $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ένα σύνολο από m συνεχείς συναρτήσεις. Η i-οστή ροπή της F ορίζεται ως

$$r_i(F) = \int_0^1 f_i(x)\, dF(x)$$

Ορίζουμε το m-οστό moment space, $\mathbb{R}^m$, ως το σύνολο των σημείων $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ στο m-διάστατο Ευκλείδειο χώρο του οποίου οι συντεταγμένες είναι οι ροπές $r_1(F), r_2(F), \ldots, r_m(F)$ μιας συνάρτησης κατανομής F.

Ο Artzner (1999) ονόμαζε τα στοιχεία του $\mathcal{P}$ *γενικευμένα σενάρια* (*generalized scenarios*). Όλα τα μέτρα κινδύνου που ορίζονται όπως στην (1.1) μπορούν να εκφραστούν ως αναμενόμενες τιμές του «χειρότερου σεναρίου» (Αφού παίρνουμε το supremum πάνω από ένα σύνολο $\mathcal{P}$ των σεναρίων που αντιστοιχούν σε διαφορετικά Q_s).

Αποδεικνύεται ότι κάθε scenario-based μέτρο κινδύνου που ορίζεται στο (1.1) ικανοποιεί τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας, της μονοτονίας, της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά και της υποπροσθετικότητας. Επιπλέον, ο Artzner (1999) έδειξε ότι κάθε συνεκτικό μέτρο κινδύνου είναι της μορφής (1.1).

1.6 Οικονομικά Κεφάλαια

Οι ασφαλιστικές εταιρίες, όπως και οι τράπεζες, πρέπει να κρατούν κάποια κεφάλαια, ως προστασία, για την αντιμετώπιση των μη αναμενόμενων ζημιών. Ο πιο κοινός τρόπος για να ποσοτικοποιήσεις τα κεφάλαια κινδύνου είναι η έννοια του οικονομικού κεφαλαίου (economic capital (EC)) που ορίζεται ως:

$$EC[S] = \rho[S] - E[S]$$

όπου S είναι η συνολική απώλεια της εταιρίας (που σχετίζεται με κάποια συγκεκριμένη δραστηριότητα της εταιρίας).

Η παραπάνω σχέση στην ουσία δείχνει ότι το συνολικό κεφάλαιο κινδύνου $\rho[S]$ διασπάται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος $E[S]$ είναι για την κάλυψη των αναμενόμενων ζημιών και το δεύτερο $EC[S]$ λειτουργεί ως ασφάλεια έναντι των μη αναμενόμενων απωλειών.

Παρατήρηση 1.9. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αναμενόμενες ζημίες δεν εξαρτώνται από την δομή εξάρτησης του χαρτοφυλακίου. Αυτό συμβαίνει γιατί $E[S] = \sum_i E[S_i]$, όπου S_i υποδηλώνει τη συνολική ζημιά που δημιουργείται από το ασφαλιστικό συμβόλαιο i στο χαρτοφυλάκιο. Αντίθετα, τα οικονομικά κεφάλαια εξαρτώνται πολύ από την σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα, εάν το χαρτοφυλάκιο είναι ήδη καλά διαφοροποιημένο και ομοιογενές τότε το οικονομικό κεφάλαιο δεν πρέπει να είναι τόσο μεγάλο όσο θα ήταν στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου στο οποίο το νέο συμβόλαιο θα πρέπει να συσχετίζεται με τα ήδη υπάρχοντα. Αυτό καθιστά τον υπολογισμό του οικονομικού κεφαλαίου πιο περίπλοκο.

1.7 Αναμενόμενα, προσαρμοσμένα στο κίνδυνο κεφάλαια

Τα χαρτοφυλάκια συνήθως αναλύονται με τη βοήθεια μιας προσαρμοσμένης στον κίνδυνο μέτρηση της απώλειας. Ένα καλό μέτρο κινδύνου αξιολογεί την χρηματοοικονομική απόδοση με την δέουσα προσοχή στην έκθεση στον κίνδυνο: ένα ευρώ κερδισμένο ή που αναμένεται να κερδηθεί όταν υπάρχει μικρός κίνδυνος δεν αξίζει όσο όταν υπάρχει ουσιώδης κίνδυνος. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη απόδοση υπολογίζεται μέσω της μεθόδου απόδοσης των σταθμισμένων κεφαλαίων (Return On Risk-Adjusted Capital)(RORAC). Ειδικότερα έστω R τα κέρδη της εταιρείας, που είναι η διαφορά μεταξύ του ασφαλίστρου P και του συνολικού ποσού απαίτησης S. Υπό την προϋπόθεση $\rho[S] \neq 0$, ορίζουμε την *αναμενόμενη, προσαρμοσμένη στον κίνδυνο απόδοση* (*Expected Risk-Adjusted Return*)(*ERAR*) ενός χαρτοφυλακίου ως:

$$ERAR[R, \rho] = \frac{E[R]}{\rho[S]}$$

Στην πράξη οι εταιρίες έχουν στόχο την μεγιστοποίηση του *ERAR*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η Αξία σε κίνδυνο (Value at Risk)

2.1 Ορισμός

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί αύξηση του ενδιαφέροντος των επαγγελματιών για τα ποσοστημόρια κατανομών πιθανότητας. Μάλιστα έχουν βρει πρακτική εφαρμογή στη διοικητική κινδύνου με τη μορφή της *αξίας στον κίνδυνο* (Value at Risk). Η έννοια του VaR είναι η απάντηση στην ερώτηση «πόσες αναμένονται να είναι η ζημιές σε μία μέρα, μία εβδομάδα, ένα μήνα με δεδομένη πιθανότητα;». Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι το VaR είναι ένα συνολικό μέτρο του κινδύνου, που ορίζεται ως η μέγιστη απώλεια για έναν χρονικό ορίζοντα έτσι ώστε να υπάρχει μια μικρή, προκαθορισμένη πιθανότητα ότι η πραγματική απώλεια θα είναι μεγαλύτερη. Το VaR αναφέρθηκε για πρώτη φορά το 1993, αν και η έννοια του πηγάζει από τον Markowitz (1959). Στις μέρες μας το VaR είναι το σημαντικότερο και πιο διαδεδομένο μέτρο κινδύνου στον χρηματοοικονομικό τομέα. Η σημασία του είναι αδιαμφισβήτητη από τότε που οι ρυθμιστικές αρχές δέχτηκαν το μοντέλο του VaR ως τη βάση καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον κίνδυνο της αγοράς. Η γενικευμένη χρήση του, ωστόσο, έχει προκαλέσει ανησυχίες ότι θα μπορούσε πραγματικά να κάνει τις χρηματοπιστωτικές αγορές λιγότερο ασφαλείς από πριν, προκαλώντας υψηλότερη μεταβλητότητα (volatility).

Ορισμός 2.1. Δεδομένου ενός κινδύνου X και επίπεδο πιθανότητας $p \epsilon (0,1)$ το αντίστοιχο VaR, συμβολίζεται $VaR[X,p]$ και ορίζεται ως

$$VaR[X,p] = F_X^{-1}(p)$$

όπου $F_X^{-1}(p)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της σκ $F_X(p)$ και ορίζεται ως

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, F_X(x) < p\}$$

(Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την $F_X^{-1}(p)$ βλ. Chapter 1.5.8 Denuit. Dhaene, Goovaerts and Kaas (2005)). Να σημειωθεί ότι τα VaR πάντα υπάρχουν και εκφράζονται με κατάλληλη μονάδα μέτρησης, συνήθως την απώλεια χρημάτων. Για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$ και $p \epsilon (0,1)$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$VaR[X,p] \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$$

Η ισοδυναμία προκύπτει άμεσα από το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.2. Για κάθε πραγματικό αριθμό x και επίπεδο πιθανότητας p, ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

(i) $F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$

(ii) $x \leq F_X^{-1+}(p) \Leftrightarrow \Pr[X < x] = F_x(x-) \leq p$

2.2 Ιδιότητες του *VaR*

Ιδιότητα 1: Το *VaR* δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας

Εφόσον $X \leq \max[X] \Rightarrow VaR[X;p] \leq \max[X]\ \forall p$

Επομένως το VaR είναι μικρότερο από την μέγιστη δυνατή ζημία και δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας

Ιδιότητα 2: Το *VaR* δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας

Έστω $p^* = F_X(E[X])$ τότε για κάθε $p < p^*$ ισχύει

$$p < F_X(E[X]) \Leftrightarrow VaR[X,p] < E[X]$$

Είναι σαφές ότι το VaR δεν υπερβαίνει την αναμενόμενη απώλεια $E[X]$ για επίπεδο πιθανότητας μικρότερο από p^*.

Ιδιότητα 3: Το *VaR* είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά και θετικά ομοιογενές

Το VaR διαθέτει μια πολύ βολική ιδιότητα: το VaR μιας μη φθίνουσας συνάρτησης t ενός τυχαίου κινδύνου X λαμβάνεται εφαρμόζοντας την ίδια συνάρτηση με το αρχικό VaR. Αυτό προκύπτει εύκολα από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.3. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Για κάθε $0 < p < 1$, ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

(i) Αν t είναι μη φθίνουσα και συνεχής τότε $F_{t(X)}^{-1}(p) = t(F_X^{-1}(p))$

(ii) Αν t είναι μη φθίνουσα και συνεχής τότε $F_{t(X)}^{-1+}(p) = t(F_X^{-1+}(p))$

Έτσι προκύπτει άμεσα ότι $VaR[cX, p] = c\ VaR[X, p]$ που δείχνει ότι το VaR είναι θετικά ομοιογενές και $VaR[X + c, p] = VaR[X, p] + c$ που δείχνει ότι το VaR είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά.

Ιδιότητα 4: Το VaR δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας

Από την ιδιότητα της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά μπορούμε να δούμε ότι προκύπτει εύκολα και η παρακάτω ιδιότητα. Για κάθε $p > 0$ ισχύει $VaR[c, p] = c$ που δείχνει ότι το VaR δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας.

Ιδιότητα 5: Το VaR δεν είναι υποπροσθετικό

Το VaR αποτυγχάνει να είναι υποπροσθετικό (εκτός από κάποιες περιπτώσεις όπως όταν X_i είναι πολυμεταβλητή κατανομή). Έτσι, γενικά, το VaR έχει την απροσδόκητη ιδιότητα ότι το VaR ενός αθροίσματος μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των VaR των επιμέρους κινδύνων. Σε τέτοια περίπτωση η διαφοροποίηση οδηγεί σε εκτίμηση μεγαλύτερων κινδύνων.

Μια πιθανή επιβλαβή πτυχή της έλλειψης υποπροσθετικότητας είναι ότι ένα αποκεντρωμένο σύστημα διαχείρισης κινδύνου μπορεί να αποτύχει επειδή τα VaR που υπολογίζονται για τα μεμονωμένα χαρτοφυλάκια μπορεί να μην αθροίζονται για να παράγουν ένα άνω φράγμα για το VaR του συνολικού χαρτοφυλακίου.

Ιδιότητα 6: Το VaR είναι συμμονοτονικά προσθετικό

Ισχύει ότι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος συμμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών είναι απλά το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομής. Έτσι από τον ορισμό του VaR προκύπτει η παρακάτω ιδιότητα.

Έστω συμμονοτονικοί κίνδυνοι $X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c$, το VaR του αθροίσματος S^c αυτών γράφεται

$$VaR[S^c; p] = \sum_{i=1}^{n} VaR[X_i; p], 0 < p < 1$$

Επομένως το VaR είναι συμμονοτονικά προσθετικό.

Ιδιότητα 7: Το *VaR* είναι μονότονο

Αν $\Pr[X \leq Y] = 1$ τότε

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \text{και } F_X^{-1}(x) \leq F_Y^{-1}(x) \ \forall\, x$$

Ως εκ τούτου $VaR\,[\,X\,;p\,] \leq VaR\,[\,Y\,;p\,]$ ισχύει για κάθε επίπεδο πιθανότητας p και το VaR είναι μονότονο.

Ιδιότητα 8: Το *VaR* είναι συνεχές όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή

Είναι ευρέως γνωστό ότι η ασθενής σύγκλιση των συναρτήσεων κατανομής εξασφαλίζει τον ίδιο τύπο σύγκλισης για τα αντίστοιχα ποσοστημόρια

Ιδιότητα 9: Το *VaR* είναι αντικειμενικό

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του *VaR*, δεδομένου ότι εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση κατανομής της *X*.

Ιδιότητα 10: Το *VaR* είναι μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση για τις ασφαλιστικές εταιρείες

Σε μια ασφάλιση ο αντισυμβαλλόμενος πληρώνει τα ασφάλιστρα και εφόσον προκύψει ζημιά απαιτεί αποζημίωση από τον ασφαλιστή. Έτσι ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να είναι σε κίνδυνο αν η απώλεια του είναι θετική (ή το κέρδος του αρνητικό), επειδή οι υποχρεώσεις στους ασφαλισμένους δεν μπορούν να πληρωθούν σε αυτή την περίπτωση. Η *Φερεγγυότητα* (*Solvency*) αντικατοπτρίζει την οικονομική ικανότητα μιας συγκεκριμένης επικίνδυνης επιχείρησης (risky business) να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις της. Για την προστασία των αντισυμβαλλόμενων, η ρυθμιστική αρχή επιβάλει μια *κεφαλαιακή απαίτηση φερεγγυότητας (solvency capital requirement)* $p[X]$. Αυτό σημαίνει ότι το διαθέσιμο κεφάλαιο σε μία εταιρεία, το πλεόνασμα ενεργητικού-παθητικού πρέπει να είναι τουλάχιστον $p[X]$, έτσι ώστε η εταιρία να είναι σε θέση πάντα να καλύψει τις μελλοντικές απαιτήσεις. Είναι δηλαδή κάποιου είδους προστασία για την περίπτωση που τα ασφάλιστρα και τα αποθέματα της εταιρίας αποδειχθούν ανεπαρκή. Το $p[X]$ πρέπει να είναι επομένως μεγαλύτερο από κάθε πιθανή ζημιά.

Έστω χαρτοφυλάκιο με ζημιά X. Η ρυθμιστική αρχή επιβάλει οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας να είναι τέτοιες ώστε το έλλειμμα να είναι επαρκώς μικρό. Ο κίνδυνος ελλείμματος μετριέται ως $E[(X-p[X])_+]$. Η διαδικασία καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων απαιτεί δύο διαφορετικά μέτρα κινδύνου: το μέτρο κινδύνου για τον προσδιορισμό του κεφαλαίου φερεγγυότητας, και $E[(X-p[X])_+]$ για την μέτρηση του ελλείμματος. Προφανώς όσο μεγαλύτερο είναι το κεφάλαιο τόσο μικρότερο είναι το έλλειμμα. Από την άλλη όμως η κράτηση κεφαλαίων έχει κόστος. Η ρυθμιστική αρχή αποφεύγει να ζητάει υπερβολικά κεφάλαια φερεγγυότητας λαμβάνοντας υπόψη το κόστος κεφαλαίου. Η κεφαλαιακή απαίτηση $p[X]$ θα μπορούσε να προσδιορίζεται ως η λύση στο ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{p[X]}\{E[(X-p[X])_+]+\ p[X]\varepsilon\}\ ,\ \ 0<\varepsilon<1 \tag{2.1}$$

η οποία εξισορροπεί τα δύο αντικρουόμενα κριτήρια, του χαμηλού υπολειπόμενου κινδύνου και του χαμηλού κόστους κεφαλαίου. Το ε μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα μέτρο του βαθμού στον οποίο το κόστος κεφαλαίου λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό του κεφαλαίου. Η ρυθμιστική αρχή μπορεί να αποφασίσει το ε να είναι είτε φιλικό με την εταιρεία (company-specific) είτε φιλικό με τον κίνδυνο (risk-specific). Το $\varepsilon=0$ σημαίνει ότι το κόστος κεφαλαίου δεν λαμβάνεται υπόψη και τα κεφάλαια φερεγγυότητας είναι $p[X]\ =\max[X]$. Αύξηση της τιμής του ε, σημαίνει ότι η ρυθμιστική αρχή αυξάνει τη σχετική σημασία του κόστους κεφαλαίου και έτσι μειώνεται η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Οι Dhaene, Goovaerts and Kaas (2003) απέδειξαν την παρακάτω ιδιότητα.

Ιδιότητα 2.4. Το μικρότερο κεφάλαιο $p[X]$ που είναι λύση της (2.1) είναι η VaR και είναι:

$$p[X]=\ VaR[X\,;1-\varepsilon]$$

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση κόστους

$$C[X,d]\ =\ E[(\,X-d\,)_+]+d\ \varepsilon$$

και έστω $VaR[X;1-\varepsilon]>0$. Όταν $d>0$, η συνάρτηση $C[X,d]$ αντιστοιχεί στην επιφάνεια μεταξύ της συνάρτησης κατανομής του X και της οριζόντιας γραμμής $y=1$, για x από d και πάνω, μαζί με την επιφάνεια $d\varepsilon$. Μια ανάλογη ερμηνεία του $C[X,d]$ σαν μια επιφάνεια μπορεί να δοθεί και όταν $d<0$. Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι το $C[X,d]$ μειώνεται ως προς d αν $d\le VaR[X;1-\varepsilon]$ ενώ αυξάνεται ως προς d αν $d\ge\ VaR[X;1-\varepsilon]$. Καταλήγουμε επομένως ότι η συνάρτηση κόστους $C[X,d]$ ελαχιστοποιείται για $d=\ VaR[X;1-\varepsilon]$.

Ας υποθέσουμε ότι $VaR[X; 1-\varepsilon] < 0$. Με παρόμοιο τρόπο οδηγούμαστε πάλι στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται για $d = VaR[X; 1-\varepsilon]$.

Σημειώστε ότι το ελάχιστο της (2.1) καθορίζεται μοναδικά, εκτός από όταν 1 – ε αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο μέρος της συνάρτησης κατανομής. Στην τελευταία περίπτωση, το ελάχιστο λαμβάνεται για κάθε X για το οποίο $F_X(x) = 1-\varepsilon$. Ο προσδιορισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων ως το μικρότερο ποσό για το οποίο η συνάρτηση κόστους (2.1) ελαχιστοποιείται, οδηγεί στο VaR.

Η παραπάνω ιδιότητα εξηγεί την σημασία του VaR στον προσδιορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας. Εξάλλου *η συμφωνία της Βασιλείας ΙΙ* έχει υποβάλει μια προσέγγιση βασισμένη στο VaR για τις κεφαλαιακές απαιτήσεις. Ωστόσο, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το VaR δεν χρησιμοποιείται ως μέτρο κινδύνου εδώ, αλλά εμφανίζεται ως μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση.

2.3 Οικονομικό κεφάλαιο βασισμένο στο *VaR*

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών κεφαλαίων βασίζεται σίγουρα στο VaR. Αν S δηλώνει τις συνολικές απαιτήσεις ζημίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου σε μια δεδομένη περίοδο αναφοράς και P δηλώνει το συνολικό ασφάλιστρο για αυτό το χαρτοφυλάκιο, τότε $VaR[S; p] - P$ είναι το μικρότερο *πρόσθετο κεφάλαιο* (*additional capital*) ώστε ο ασφαλιστής να καθίσταται αφερέγγυος με μια μικρή πιθανότητα το πολύ 1 – p.

Για επίπεδο εμπιστοσύνης p, τα οικονομικά κεφάλαια (economic capital) βασισμένα στο VaR ορίζονται ως

$$EC[S; p] = VaR[S; p] - E[S]$$

Για παράδειγμα, αν το επίπεδο εμπιστοσύνης ορίζεται στο p=99,9% το κεφάλαιο κινδύνου $EC[S; p]$ θα είναι επαρκές για να καλύψει τις αναμενόμενες ζημιές κατά μέσο όρο τις 999 στις 1.000 φορές .

Ιδιότητα 2.5. Η χρήση του VaR για τον καθορισμό ενός κεφαλαίου φερεγγυότητας έχει νόημα σε καταστάσεις όπου το ενδεχόμενο αθέτησης πρέπει να αποφευχθεί, αλλά το μέγεθος του ελλείμματος δεν είναι σημαντικό.

2.4 Το *VaR* και το υπόδειγμα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων (CAPM)

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής είναι ότι αυτές οι κατανομές επιδέχονται τις κλασικές προσεγγίσεις της διοικητικής κινδύνου. Υποστηρίζουν τόσο τη χρήση του VaR ως μέτρο κινδύνου όσο και τη μέθοδο μέσου-διακύμανσης (Markowitz) για τη διαχείριση των κινδύνων και τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου.

Έστω ότι $\boldsymbol{X}$- αντιπροσωπεύει ένα τυχαίο διάνυσμα n διαστάσεων πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής και θεωρούμε γραμμικά χαρτοφυλάκια των κινδύνων αυτών της μορφής

$$\mathcal{P} = \{P \,\big|\, P = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \,, a_i \in \mathbb{R}\}$$

Η χρήση οποιουδήποτε θετικά ομοιογενούς, προσθετικού ως προς σταθερά, μέτρου κινδύνου για τον καθορισμό της ελαχιστοποίησης του κινδύνου του χαρτοφυλακίου, με βάρη $a_1, a_2, \dots, a_n$, υπό τον όρο ότι επιτυγχάνεται μια ορισμένη επιστροφή κεφαλαίου, ισοδυναμεί με την μέθοδο Markowitz, όπου χρησιμοποιείται η διακύμανση ως μέτρο κινδύνου. Εναλλακτικά μέτρα κινδύνου δίνουν διαφορετικές αριθμητικές τιμές αλλά δεν έχουν καμία επίδραση στη διαχείριση των κινδύνων. Τα παραπάνω φαίνονται πιο καθαρά στο ακόλουθο αποτέλεσμα των Embrechts, McNeil and Straumann (2002).

Πρόταση 2.6. Έστω $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ και $\mathcal{P}$ είναι ένα σύνολο γραμμικών χαρτοφυλακίων όπως ορίζονται παραπάνω. Τότε ισχύουν:

(i) Υποπροσθετικότητα της VaR: για κάθε δύο χαρτοφυλάκια $P_1, P_2 \in P$, και $0.5 \le p < 1$

$$VaR[P_1 + P_2\,;\, p] \le VaR[P_1\,; p] + VaR[P_2\,; p]$$

(ii) Ισοδυναμία της διακύμανσης για κάθε θετικά ομοιογενές μέτρο κινδύνου ρ για $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$

$$\rho\big[P_1 - E[P_1]\big] \le \rho[P_2 - E[P_2]] \Leftrightarrow V[P_1] \le V[P_2]$$

Απόδειξη. (i) Η κυρία παρατήρηση είναι ότι το (P_1, P_2) ακολουθεί μια διμεταβλητή κανονική κατανομή, ώστε P_1, P_2 και $P_1 + P_2$ να έχουν μονομετάβλητες κανονικές κατανομές. Έστω z_p το p-οστό ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής $N(0{,}1)$ κατανομής. Τότε,

$$VaR[P_1;p] = E[P_1] + z_p\sqrt{V[P_1]}$$
$$VaR[P_2;p] = E[P_2] + z_p\sqrt{V[P_2]}$$
$$VaR[P_1+P_2;p] = E[P_1+P_2] + z_p\sqrt{V[P_1+P_2]}$$
Το αποτέλεσμα προκύπτει καθώς $\sqrt{V[\,P_1+P_2\,]} \leq \sqrt{V[P_1]} + \sqrt{V[P_2]}$ ισχύει πάντα και $z_p \geq 0$ (γιατί υποθέτουμε ότι $p \geq 0$).

(ii) Εφόσον οι P_1 και P_2 ακολουθούν και οι δύο κανονική κατανομή, υπάρχει ένα $a > 0$ τέτοιο ώστε
$$P_1 - E[P_1] =_d a(P_2 - E[P_2])$$
Προκύπτει ότι
$$\rho\big[P_1 - E[P_1]\big] \leq \rho\big[P_2 - E[P_2]\big] \Leftrightarrow a \leq 1 \Leftrightarrow V[P_1] \leq V[P_2]$$
που ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Αξία στον κίνδυνο ουράς (Tail Value At Risk)

3.1 Ορισμός

Ένα μειονέκτημα του *VaR* είναι ότι σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης *p* δεν δίνει καμία πληροφορία για το πάχος της πάνω ουράς της συνάρτησης κατανομής. Εξετάζει δηλαδή μόνο την συχνότητα με την οποία μπορεί να συμβεί χρεοκοπία αλλά όχι την σφοδρότητα (severity) της. Συχνά απασχολεί τους κατόχους κινδύνων και η σοβαρότητα του κινδύνου, δηλαδή πόσο κακό μπορεί να προκαλέσει. Λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνει ένα άλλο μέτρο κινδύνου, η *αξία στον κίνδυνο ουράς* (*Tail Value at Risk, TVaR*) που ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 3.1. Δεδομένου ενός κινδύνου *X* και ενός επιπέδου πιθανότητας *p*, το αντίστοιχο *TVaR*, ορίζεται ως:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi \quad ,0 < p < 1$$

Παρατηρούμε ότι το *TVaR*[*X*;*p*] μπορεί να θεωρηθεί ¨αριθμητικός μέσος¨ των *VaR* του *X* από *p* και πάνω.

3.2 Ιδιότητες του *TVaR*

Ιδιότητα 1: Το *TVaR* δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει εύκολα αφού το *VaR* είναι γνωστό ότι δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας. Συγκεκριμένα:

$$TVaR[X;p] \leq \frac{1}{1-p}\int_p^1 \max[X]\, d\xi = \max\,[X]$$

Ιδιότητα 2: Το *TVaR* δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας

Και αυτή η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από την αντίστοιχη του *VaR*:

$$TVaR[c;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 c\, d\xi = c$$

Ιδιότητα 3: Το *TVaR* προκαλεί μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας

Το μέτρο κινδύνου *TVaR* προκαλεί μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας αφού

$$TVaR[X;p] \geq E[X]$$

για κάθε επίπεδο πιθανότητας p.

Έστω $U \sim Uni(0,1)$ τότε

$$E[X] = E[F_X^{-1}(U)] = \int_0^1 F_X^{-1}(p)\, dp = TVaR[X;0] \tag{3.1}$$

Η ιδιότητα ισχύει αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι *TVaR* είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς το επίπεδο πιθανότητας p. Αυτό αποδεικνύεται στην παρακάτω ιδιότητα.

Ιδιότητα 3.2. Η συνάρτηση $p \longmapsto TVaR[X;p]$ είναι μη φθίνουσα ως προς p.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του TVaR και χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες ολοκληρωμάτων παίρνουμε:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\left(\int_0^1 VaR[X;\xi]d\xi - \int_0^p VaR[X;\xi]\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{1-p}\left(TVaR[X;0] - \int_0^p VaR[X;\xi]d\xi \right)$$

Από την (3.1) ισχύει:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\left(E[X] - \int_0^p VaR[X;\xi]\, d\xi \right)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\frac{d}{dp}TVaR[X;p] = \frac{TVaR[X;p]}{1-p} - \frac{VaR[X;p]}{1-p}$$

Εφόσον $p \longmapsto VaR[X;p]$ είναι μη φθίνουσα ισχύει:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi \geq VaR[X;p]$$

από το οποίο προκύπτει $\frac{d}{dp}TVaR[X;p] \geq 0$.

Ιδιότητα 4: Το *TVaR* είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά και θετικά ομοιογενές

Η προσθετικότητα ως προς τη σταθερά προκύπτει άμεσα από την αντίστοιχη του *VaR*. Συγκεκριμένα για κάθε σταθερά c ισχύει:

$$TVaR[X+c;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X+c;\xi]\,d\xi$$

$$= \frac{1}{1-p}\int_p^1 (VaR[X;\xi]+c)d\xi = TVaR[X;p]+c.$$

Αντίστοιχα προκύπτει και η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας δηλαδή ισχύει:

$$TVaR[c\,X;p] = c\,TVaR[X;p].$$

Ιδιότητα 5: Το *TVaR* είναι συμμονοτονικό πρόσθετο

Έστω συμμονοτονικοί κίνδυνοι $X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c$, το *TVaR* του αθροίσματος S^c αυτών γράφεται

$$TVaR[\,S^c;p\,] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[S^c;\xi]\,d\xi = \frac{1}{1-p}\int_p^1 (\sum_{i=1}^n VaR[X_i\,;\xi])d\xi$$

$$= \sum_{i=1}^n (\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X_i;\xi]d\xi) = \sum_{i=1}^n TVaR[\,X_i;p\,], 0<p<1$$

που δείχνει ότι το *TVaR* είναι συμμονοτονικά πρόσθετο.

Ιδιότητα 6: Το *TVaR* είναι μονότονο

Αν $\Pr[X \leq Y] = 1$ τότε, από την αντίστοιχη ιδιότητα του *VaR*, για κάθε επίπεδο πιθανότητας p ισχύει:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi \leq \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[Y;\xi]d\xi = TVaR[Y;p]$$

Άρα το *TVaR* είναι μονότονο.

Ιδιότητα 7: Το *TVaR* είναι υποπροσθετικό

Σε αντίθεση με το *VaR*, η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας ισχύει για το *TVaR*. Για την απόδειξη βλ. Chapter 2.4.3.5 Denuit. Dhaene, Goovaerts and Kaas (2005).

Ιδιότητα 8: Το *TVaR* είναι αντικειμενικό και συνεχές όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή

Για το μέτρο κινδύνου *TVaR* ισχύουν οι ιδιότητες της αντικειμενικότητας και της συνέχειας όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή για τους ίδιους λόγους που ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες και για το *VaR*.

3.3 Βασισμένα στο *TVaR* οικονομικά κεφάλαια (*TVaR*-based economic capital)

Έστω ότι το S δηλώνει τις συνολικές απαιτήσεις ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου σε μια δεδομένη περίοδο αναφοράς και P είναι το συνολικό ασφάλιστρο για αυτό το χαρτοφυλάκιο. Ορίζοντας τις ποσότητες των ¨επιπλέον κεφαλαίων¨ ίσες με $TVaR[S;p]-P$, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ¨κακές στιγμές¨, ακραίες τιμές, αυτές στις οποίες το S παίρνει μια τιμή στο διάστημα

$$[\,VaR[S;p],\ TVaR[S;p]\,].$$

Ως εκ τούτου ¨κακές στιγμές¨ είναι εκείνες στις οποίες το σύνολο των απαιτήσεων υπερβαίνει το όριο $VaR[S;p]$, αλλά δεν χρησιμοποιούν όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο. Το πλάτος του διαστήματος είναι ένα μαξιλάρι ασφαλείας, που χρησιμοποιείται για τις ¨κακές στιγμές¨.

Για προκαθορισμένο επίπεδο πιθανότητας p, τα οικονομικά κεφάλαια βασισμένα στην *TVaR* ορίζονται ως:

$$EC[S;p]=TVaR[s;p]-E[S].$$

3.4 Σχετικά μέτρα κινδύνου

3.4.1 Δεσμευμένη προσδοκία ουράς (Conditional tail expectation)

Η *δεσμευμένη προσδοκία ουράς* (*Conditional Tail expectation*, *CTE*) αντιπροσωπεύει την υποθετική αναμενόμενη απώλεια δεδομένου ότι η απώλεια υπερβαίνει ένα καθορισμένο ποσοστημόριο. Στην πράξη εκφράζει την μέση τιμή των ζημιών που υπερβαίνουν το αντίστοιχο VaR. Συγκεκριμένα ορίζεται ως:

$$CTE[X;p] = E[X \,|\, X > VaR[X;p]]$$

Έτσι, η δεσμευμένη προσδοκία ουράς είναι η μαθηματική έκφραση της έννοιας της ¨μέσης απώλειας των χειρότερων 100(1-p)% περιπτώσεων¨. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι αν καθορίσουμε ένα κρίσιμο όριο απώλειας $c = VaR[X;p]$, που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης p, τότε η $CTE[X;p]$ παρέχει ένα μαξιλάρι προστασίας κατά της μέσης τιμής των ζημιών που υπερβαίνουν το κρίσιμο σημείο c.

Ιδιότητα: Το CTE είναι υποπροσθετικό για συνεχείς κινδύνους

Για να αποδειχθεί η υποπροσθετικότητα του CTE θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω ιδιότητα.

Λήμμα 3.3. Έστω X και x τέτοια ώστε $\overline{F}_X(x) > 0$. Για κάθε ενδεχόμενο A τέτοιο ώστε $\Pr[A] = \overline{F}_X(x)$ ισχύει:

$$E[X|A] \leq E[X \,|\, X > x]$$

Απόδειξη. Αρκεί

$$\begin{aligned} E[X|X > x] &= x + E[X - x|X > x\,, A]\Pr[A|X > x] \\ &\quad + E[X - x|X > x\,, \bar{A}]\Pr[\bar{A}|X > x] \\ &\geq x + E[X - x|X > x\,, A]\Pr[A|X > x] \\ &= x + E[X - x|X > x\,, A]\Pr[X > x|A] \\ &\geq x + E[X - x|X > x\,, A]\Pr[X > x\,|A] \\ &\quad + E[X - x|X \leq x\,, A]\Pr[X \leq x|A] \\ &= E[X \,|\, A] \end{aligned}$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα είναι εύκολο να δει κανείς ότι το μέτρο κινδύνου CTE είναι υποπροσθετικό όταν η σ.κ. του X είναι συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση πράγματι ισχύει $\Pr[X > VaR[X;p]] = 1 - p$ και έτσι

$$
\begin{aligned}
CTE[X+Y;p] &= E[X \,|\, X+Y > VaR[X+Y;p]] + E[Y \,|\, X+Y > VaR[X+Y;p]] \\
&\leq E[X \,|\, X > VaR[X;p]\,] + E[Y \,|\, Y > VaR[Y;p]\,] \\
&= CTE[X;p] + CTE[Y;p]
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση 3.4. Η παραπάνω ιδιότητα δείχνει ότι το μέτρο κινδύνου CTE μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια χείριστη περίπτωση δεσμευμένης προσδοκίας. Ακριβέστερα,

$$CTE[X;p] = \sup_A \left\{ E[X|A] \,\middle|\, \Pr[A] \geq \overline{F}_X(VaR[X;p]) \right\}$$

το οποίο απλοποιείται στο

$$CTE[X;p] = \sup_{\mathrm{A}} \{ E[X \,|\, A] \,|\, \Pr[A] \geq 1-p \}$$

όταν F_X είναι συνεχής. Αυτό το αποτέλεσμα είναι στενά συνδεδεμένο με την έννοια του stress testing. Το *CTE* εμφανίζεται ως η μεγαλύτερη δυνατή αναμενόμενη τιμή του X σύμφωνα με το σύνολο όλων των αληθοφανών σεναρίων (δηλαδή, εκείνα των οποίων οι πιθανότητες υπερβαίνουν το $1-p$).

Stress testing είναι μια ανάλυση της αντοχής των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων σε διαφορετικές, ακραίες καταστάσεις. Το stress testing (προσομοίωση ακραίων καταστάσεων) είναι ένα από τα εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της ευπάθειας των χαρτοφυλακίων σε ανώμαλες καταστάσεις και συνθήκες της αγοράς.

3.4.2 Δεσμευμένη αξία σε κίνδυνο *VaR* (Conditional *VaR*)

Ένα μέτρο κινδύνου εναλλακτικό του *CTE* είναι το *δεσμευμένο VaR* (*Conditional VaR, CVaR*). Το μέτρο κινδύνου *CVaR* δηλώνει την αναμενόμενη τιμή των ζημιών που υπερβαίνουν το *VaR*. Συγκεκριμένα,

$$
\begin{aligned}
CVaR[X;p] &= E\big[X - VaR[X;p] \big| X > VaR[X;p]\big] \\
&= CTE[X;p] - VaR[X;p] \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

3.4.3 Αναμενόμενο Έλλειμμα (Expected Shortfall)

Το *VaR* σε καθορισμένο επίπεδο πιθανότητας δίνει μόνο τοπικές πληροφορίες σχετικά με την κατανομή. Ένας τρόπος για να αποφευχθεί αυτή η αδυναμία είναι να εξεταστεί το λεγόμενο *Αναμενόμενο Έλλειμμα* (*Expected Shortfall, ES*). Αναμενόμενο Έλλειμμα σε επίπεδο πιθανότητας p είναι το ασφάλιστρο απαλοιφής ζημιάς (stop-loss premium) με όριο κατακράτησης $VaR[X;p]$. Συγκεκριμένα,

$$ES[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+]$$

3.4.4 Σχέσεις μεταξύ των μέτρων κινδύνου

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τις σχέσεις με τις οποίες συνδέονται μεταξύ τους τα παραπάνω μέτρα κινδύνου.

Ιδιότητα 3.5. Για κάθε επίπεδο πιθανότητας $p \in (0,1)$, ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \tfrac{1}{1-p} ES[X;p] \tag{3.3}$$

$$CTE[X;p] = VaR[X;p] + \tfrac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} ES[X;p] \tag{3.4}$$

$$CVaR[X;p] = \tfrac{ES[X;p]}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Η έκφραση (3.3) προκύπτει από:

$$ES[X;p] = \int_0^1 (VaR[X;\xi] - VaR[X;p])_+ d\xi$$

$$= \int_p^1 VaR[X;\xi] d\xi - VaR[X;p](1-p)$$

Η έκφραση (3.4) προκύπτει από:

$$ES[X;p] = E\big[X - VaR[X;p] \big| X > VaR[X;p]\big] \overline{F}_X(VaR[X;p])$$

Τέλος η έκφραση (3.5) προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (3.2) και (3.4).

Πόρισμα 3.6. Αν F_X είναι συνεχής τότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3) και (3.4) βρίσκουμε:

$$CTE[X;p] = TVaR[X;p], \quad p \in (0,1) \tag{3.6}$$

έτσι ώστε CTE και TVaR συμπίπτουν για κάθε p σε αυτή την περίπτωση. Γενικότερα, όμως, ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$TVaR[X;p] = CTE[X;p] + \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])}\right) ES[X;p]$$

Παρατήρηση 3.7. Από την σχέση (3.3) προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους της σχέσης (2.1) μπορεί να εκφραστεί ως

$$C\big[X, VaR[X;1-\varepsilon]\big] = E[(X - VaR[X;1-\varepsilon])_+] + VaR[X;1-\varepsilon]\varepsilon$$

$$= \varepsilon\, TVaR[X;1-\varepsilon]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:

Μέτρα Κινδύνου βασισμένα στη θεωρία Αναμενόμενης Ωφελιμότητας

4.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Αναμενόμενης Ωφελιμότητας

Η *Θεωρία Αναμενόμενης Ωφελιμότητας* είναι μια οικονομική θεωρία που εξηγεί γιατί οι ασφαλισμένοι είναι πρόθυμοι να πληρώσουν ένα ασφάλιστρο μεγαλύτερο από το καθαρό ασφάλιστρο, δηλαδή τη μαθηματική προσδοκία της ασφαλισμένης απώλειας. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της προσέγγισης αυτής στη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Θα εξετάσουμε επίσης τα ασφάλιστρα μηδενικής ωφελιμότητας και τα μέτρα κινδύνου του Esscher

4.1.1 Υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας

Έστω ότι υπάρχουν δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y και ένας λήπτης αποφάσεων πρέπει να αποφασίσει ανάμεσα σε αυτά τα δύο αβέβαιου μελλοντικού εισοδήματος μοντέλα. Ένας τρόπος απόφασης είναι ο υπολογισμός των αναμενόμενων τιμών και η επιλογή του εισοδήματος με την μεγαλύτερη μέση τιμή. Αυτή η μέθοδος αποτίμησης αμφισβητήθηκε από τον Bernoulli (1738) με το γνωστό στη βιβλιογραφία ως το *παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης* (*St Petersburg paradox*). Ο Bernoulli έθεσε το παρακάτω πρόβλημα: «Ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται επανειλημμένα μέχρι να έρθει κορόνα. Το εισόδημα που λαμβάνεται είναι ίσο με 2^n αν η πρώτη κορόνα εμφανίζεται στη n-οστή ρίψη. Πόσο είστε διατεθειμένοι να πληρώσετε για να παίξετε αυτό το παιχνίδι;» Δεδομένου ότι το νόμισμα είναι δίκαιο, το αναμενόμενο εισόδημα του στοιχήματος είναι ίσο με άπειρο διότι

$$E(2^N) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \infty$$

όπου N είναι το πλήθος των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί κορόνα. Ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι το μέγιστο ποσό που είναι κάποιος διατεθειμένος να καταβάλει για να συμμετάσχει στο παιχνίδι είναι πεπερασμένος αριθμός και μάλιστα όχι πολύ μεγάλος.

Αυτό συμβαίνει γιατί οι λήπτες αποφάσεων δεν βασίζουν τις αποφάσεις τους απλά συγκρίνοντας τις προσδοκίες των αναμενόμενων εισοδημάτων. Μάλιστα η αξία των διάφορων επιπέδων πλούτου δεν είναι ίδια για όλους. Με απλά λόγια 10€ για κάποιους είναι σεβαστό ποσό ενώ για κάποιους άλλους όχι. Έτσι προέκυψε η έννοια της *ωφελιμότητας*: κάθε λήπτης αποφάσεων διαθέτει μια συνάρτηση ωφελιμότητας u τέτοια ώστε η ωφελιμότητα (ηθική αξία) της περιουσίας X δίνεται από την $u(X)$.

Λέμε ότι ο λήπτης αποφάσεων βασίζει τις προτιμήσεις του στην *υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας* αν ενεργεί ώστε να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητά του. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια συνάρτηση u που αντιπροσωπεύει την ωφελιμότητα του πλούτου του λήπτη αποφάσεων για κάθε περιουσία. Σε αυτή την περίπτωση ο ιθύνων προτιμά το Y αντί του X αν, και μόνο αν, $E[u(X)] \leq E[u(Y)]$ εφόσον οι αναμενόμενες τιμές υπάρχουν. Με λόγια προτιμά την περιουσία Y από την X αν η αναμενόμενη ωφελιμότητα της Y είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της X.

Στο παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης, αν η αρχική περιουσία του λήπτη αποφάσεων είναι w, τότε αυτός θα ήταν πρόθυμος να πληρώσει ένα ποσό P για να συμμετάσχει στο παιχνίδι αν, και μόνο αν, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$u(w) = E(u(w)) \leq E\left(u(w - P + 2^N)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u(w - P + 2^n)\frac{1}{2^n}$$

Η ανισότητα δείχνει ότι ο λήπτης της απόφασης θα παίξει το παιχνίδι μόνο αν η αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου μετά από την συμμετοχή του στο παιχνίδι είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη ωφελιμότητα αν δεν παίξει.

Ας δούμε όμως τι μορφή μπορεί να έχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας. Όπως είναι εύκολα κατανοητό η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι μια αύξουσα συνάρτηση. Μπορεί να είναι γραμμική: $u(X) = X$, τετραγωνική: $u(X) = X^2$, $u(X) = X^c$, $0 < c \leq 1$ ή κάποιας άλλης μορφής. Ο Cramer πρότεινε την τετραγωνική ρίζα της περιουσίας X ως συνάρτηση ωφελιμότητας, $u(X) = \sqrt{X}$. Ο Bernoulli πρότεινε μια λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας, $u(X) = logX$.

Παρατήρηση 4.1. Σημειώστε ότι η απόφαση που βασίζεται σε μια συνάρτηση ωφελιμότητας ενός λήπτη αποφάσεων είναι αμετάβλητη ως προς θετικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας u^* που ορίζεται ως

$$u^*(x) = a\, u(x) + b\, , x \in \mathbb{R}$$

για πραγματικές σταθερές $a > 0$ και b οδηγεί στις ίδιες προτιμήσεις με την συνάρτηση χρησιμότητας u (σε αυτή την περίπτωση, η u^* λέγεται ότι είναι ισοδύναμη με την u). Αυτό συμβαίνει διότι αν $E[u(X)] \leq E[u(Y)]$ τότε και

$$E[u^*(X)] \leq E[u^*(Y)].$$

Ως εκ τούτου είναι πάντα δυνατό να τυποποιηθεί μια συνάρτηση ωφελιμότητας u, για παράδειγμα απαιτώντας $u(x_0) = 0$ και $u'(x_0) = 1$ για ένα συγκεκριμένο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Αξιώματα της θεωρίας Αναμενόμενης Ωφελιμότητας

Πρωτοπόροι στην θεωρία ωφελιμότητας υπήρξαν οι von Neumann and Morgenstern οι οποίοι στα μέσα της δεκαετίας του 1940, ανέπτυξαν μια θεωρία βασισμένη στην ιδέα του Bernoulli. Έδειξαν ότι αν μια σειρά προτιμήσεων από ένα σύνολο επικίνδυνων καταστάσεων ακολουθεί ορισμένες απαιτήσεις (αξιώματα), τότε υπάρχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας που θα δώσει ακριβώς την ίδια σειρά προτιμήσεων. Στο βιβλίο τους *Theory of Games and Economic Behavior*(1947) πρότειναν μια σειρά τέτοιων αξιωμάτων για την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας. Στη συνέχεια προστέθηκαν κι άλλα αξιώματα από άλλους συγγραφείς. Η πιο σύντομη και περιεκτική δήλωση των αξιωμάτων είναι του Yaari (1987).

Αξιώματα Αναμενόμενης Ωφελιμότητας(Axioms of Expected Utility)

i) Αξίωμα 1

Αν X και Y είναι ισόνομα τότε ο λήπτης απόφασης θεωρεί ότι X και Y είναι ισοδύναμα. Το αξίωμα αυτό μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι οι λήπτες αποφάσεων λαμβάνουν υπόψη τους μόνο την κατανομή πιθανότητας του τυχαίου εισοδήματος και δεν επηρεάζονται από άλλα στοιχεία του εισοδήματος ή από άλλες πτυχές του οικονομικού περιβάλλοντος.

ii) Αξίωμα 2

Οι προτιμήσεις ενός λήπτη απόφασης έχουν την ανακλαστική ιδιότητα $(E(u(X)) \leq E(u(X))$, και την μεταβατική ιδιότητα (αν $E(u(X)) \leq E(u(Y))$ και $E(u(Y)) \leq E(u(Z))$ τότε $E(u(X)) \leq E(u(Z))$).

iii) Αξίωμα 3

Οι προτιμήσεις του λήπτη απόφασης είναι συνεχείς όσον αφορά την "απόσταση Wasserstein d_w" (Wasserstein distance) μεταξύ των κατανομών της X και της Y. Η απόσταση Wasserstein ορίζεται ως:

$$d_w(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(t) - F_Y(t)|\, dt$$

(βλ. Chapter 9.6, Denuit. Dhaene, Goovaerts and Kaas (2005))

Το Αξίωμα 3 λέει ότι δεδομένων κινδύνων $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ τέτοιων ώστε το Y να προτιμάται έναντι του X και υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$max\{d_w(X,\tilde{X}), d_w(Y,\tilde{Y})\} < \varepsilon$$

τότε και το $\tilde{Y}$ προτιμάται έναντι του $\tilde{X}$. Με πιο απλά λόγια το Αξίωμα 3 λέει ότι αν το Y προτιμάται έναντι του X τότε το ίδιο ισχύει και για ζεύγη $\tilde{X}, \tilde{Y}$ αρκετά κοντά στο X, Y.

iv) <u>Αξίωμα 4</u>

Εάν $F_X \geq F_Y$ τότε το Y προτιμάται έναντι του X. Αυτό σημαίνει ότι ανάμεσα σε δύο υποθετικά εισοδήματα, ο λήπτης απόφασης προτιμάει αυτό που έχει τις μεγαλύτερες πιθανότητες καλού αποτελέσματος και τις λιγότερες πιθανότητες κακού αποτελέσματος.

v) <u>Αξίωμα 5</u>

Αν η περιουσία Y είναι προτιμότερη από την X και ορίσουμε τις τμ

$$\tilde{X}_p = \begin{cases} X, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ Z, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

και

$$\tilde{Y}_p = \begin{cases} Y, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p \\ Z, & \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-p \end{cases}$$

για μια αυθαίρετη τμ Z ανεξάρτητη των X και Y, τότε η μεικτή περιουσία $\tilde{Y}_p$ προτιμάται έναντι της $\tilde{X}_p$ για κάθε $p \in [0,1]$.

Το Αξίωμα 5 με λόγια λέει ότι η προτίμηση του Y έναντι του X δεν επηρεάζεται από την εισαγωγή μιας τρίτης εναλλακτικής λύσης Z με καθορισμένη πιθανότητα. Έτσι υπάρχει ανεξαρτησία αναφορικά με τις μίξεις αβέβαιων αποτελεσμάτων. Γι' αυτό και αναφέρεται συχνά ως αξίωμα της ανεξαρτησίας.

4.1.3 Αναμενόμενη ωφελιμότητα και ασφάλιση

Πάνω στην έννοια της ωφελιμότητας στηρίχθηκαν πολλοί συγγραφείς και ανέπτυξαν μια θεωρία ασφάλισης. Ο Barrois (1834) κατασκεύασε μια πλήρη θεωρία της ασφάλισης πυρός βασισμένη στην συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \log(x)$ που εισήγαγε ο Bernoulli. Βέβαια η έννοια της ωφελιμότητας στη θεωρία ασφάλισης αναπτύχθηκε μετά την αξιωματική της προσέγγιση από τους von Neumann and Morgenstern (1947). Έπειτα ακολούθησαν και άλλοι συγγραφείς που ασχολήθηκαν με την χρήση της θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας στον τομέα της ασφάλισης όπως ο Borch (1974,1990) ο οποίος εξηγεί την σημασία της στην επίλυση προβλημάτων ασφάλισης. Ακόμα ο Trowbridge (1989) επισήμανε ότι η θεωρία ωφελιμότητας μπορεί να θεωρηθεί ως η φιλοσοφική βάση της αναλογιστικής επιστήμης. Περισσότερα για την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας μπορείτε να βρείτε στα συγγράμματα των Huang and Litzenberger (1988), Schmidt (1998) και Panjer(1998).

4.1.4 Αποστροφή κινδύνου (risk aversion) στην θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας

Μια έννοια σημαντική στη θεωρία ασφαλίσεων είναι η αποστροφή στον κίνδυνο. Η αποστροφή στον κίνδυνο καθορίζει σε μεγάλο βαθμό της αποφάσεις μας, καθώς κάθε άνθρωπος προσπαθεί να αποφύγει τον κίνδυνο. Γι' αυτό το λόγο αγοράζουμε ασφάλειες ώστε να αποφύγουμε την αβεβαιότητα και τα απρόβλεπτα γεγονότα. Ένας λήπτης αποφάσεων λέγεται risk averse αν προτιμάει πάντα μια ορισμένη απόδοση $E[X]$ για έναν κίνδυνο X, όποια κι αν είναι η κατανομή του X. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση ωφελιμότητας ικανοποιεί την σχέση $E[u(X)] \leq u(E[X])$ για κάθε X. Αυτό είναι μια εφαρμογή της ανισότητας του Jensen αν u είναι κοίλη. Θεωρούμε $x < y \in \mathbb{R}$ και $0 < \lambda < 1$ και

$$X = \begin{cases} x, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \lambda, \\ y, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1-\lambda \end{cases}$$

τότε η αποστροφή στον κίνδυνο συνεπάγεται

$$E[u(X)] = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) \leq u(E[X]) = u(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

που δείχνει ότι η u είναι κοίλη. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ένας λήπτης αποφάσεων αποστρέφεται τον κίνδυνο αν η συνάρτηση ωφελιμότητας του είναι κοίλη.

Αν η u είναι διπλά διαφορίσιμη, τότε είναι κοίλη αν $u'' \leq 0$, οπότε ο λήπτης αποφάσεων αποστρέφεται τον κίνδυνο αν $u'' \leq 0$. Επίσης δεδομένου ότι μια συνάρτηση είναι κοίλη σε ένα διάστημα τότε είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα, με εξαίρεση ίσως τα άκρα του διαστήματος, άρα η συνάρτηση ωφελιμότητας ενός risk averse είναι συνεχής. Ακόμα αν μια συνάρτηση ωφελιμότητας είναι κοίλη τότε η παράγωγος της ωφελιμότητας u' είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιον risk averse όσο περισσότερος πλούτος συσσωρεύεται τόσο λιγότερη αξία έχει κάθε επιπλέον ποσό που προστίθεται.

Παρατήρηση 4.2. Στη θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας, η στάση του ιθύνοντα προς τον κίνδυνο και η στάση του προς τον πλούτο συνδέονται πάντα μεταξύ τους: αποστροφή κινδύνου και μείωση παραγώγου της ωφελιμότητας του πλούτου είναι το ίδιο. Αντίθετα στη διπλή θεωρία του Yaari, που θα εξεταστεί παρακάτω, αυτές οι δύο έννοιες διαχωρίζονται μεταξύ τους.

4.2 Ασφάλιστρα μηδενικής ωφελιμότητας (Zero-Utility premiums)

4.2.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια ασφαλιστική εταιρία με αρχική περιουσία w και συνάρτηση ωφελιμότητας u. Η εταιρία καλύπτει έναν κίνδυνο X και θέλει ασφάλιστρο για την κάλυψη του $\Pi[X]$ το οποίο προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση

$$E[u(w + \Pi[X] - X)] = u(w) \tag{4.1}$$

Το δεξιό μέρος της σχέσης (4.1) αντιπροσωπεύει την ωφελιμότητα της ασφαλιστικής εταιρίας αν δεν εκδώσει το συμβόλαιο για την κάλυψη του X και το αριστερό μέρος την αναμενόμενη ωφελιμότητα της εταιρίας με το συμβόλαιο. Έτσι εφόσον τα δύο μέρη είναι ίσα το ασφάλιστρο $\Pi[X]$ που προκύπτει είναι δίκαιο.

Θέτοντας $w = 0$, παίρνουμε την ονομαζόμενη αρχή μηδενικής ωφελιμότητας (zero-utility principle) που προτάθηκε από τον Buhlmann (1970). Σύμφωνα με αυτή την αρχή το ασφάλιστρο $\Pi[X]$ είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$E[u(\Pi[X] - X)] = u(0) \tag{4.2}$$

η οποία είναι μια ισότητα μεταξύ της αναμενόμενης ωφελιμότητας του εισοδήματος $\Pi[X] - X$ και της ωφελιμότητας στην περίπτωση που ο κίνδυνος δεν καλυφθεί από την εταιρία.

4.2.2 Ιδιότητες του ασφαλίστρου μηδενικής ωφελιμότητας

Το ασφάλιστρο μηδενικής ωφελιμότητας $\Pi[X]$ ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης (4.2) η οποία δεν δίνει σαφή λύση.

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η u έχει τυποποιηθεί έτσι ώστε $u(0) = 0$ και $u'(0) = 1$ (βλ. Παρατήρηση 4.1). Επειδή η u είναι μη φθίνουσα συνάρτηση έχουμε

$$0 = E[u(\Pi[X] - X)] \geq u(\Pi[X] - \max[X])$$

άρα ισχύει $\Pi[X] \leq \max\,[X]$ και επομένως *τα ασφάλιστρα μηδενικής ωφελιμότητας δεν έχουν υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.*

Επιπλέον, αν η u είναι κοίλη τότε από την ανισότητα του Jensen παίρνουμε

$$0 = E[u(\Pi[X] - X)] \leq u(\Pi[X] - E[X])$$

άρα ισχύει $\Pi[X] \geq E[X]$ και επομένως *τα ασφάλιστρα μηδενικής ωφελιμότητας προκαλούν μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας*.

Τέλος τα ασφάλιστρα μηδενικής ωφελιμότητας *είναι προσθετικά ως προς μια σταθερά* αλλά γενικά *δεν είναι θετικά ομοιογενή*. Για την απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Goovaerts, De Vijlder and Haezendonck (1984).

4.3 Μέτρα κινδύνου Esscher

4.3.1 Ορισμός

Η *αρχή Esscher* (*Esscher principle*) εισήχθη από τον Buhlmann (1980), ο οποίος θεώρησε το *ασφάλιστρο Esscher* (*Esscher premium*) ως μια βέλτιστη λύση *Pareto* σε μια κατάσταση αγοράς με ανταλλαγές κινδύνων, όπου όλοι οι κίνδυνοι είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι και όλοι οι ιθύνοντες έχουν μια εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας. Εμείς θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση των Goovaerts, De Vijlder and Haezendonck (1984), οι οποίοι περιγράφουν τα ασφάλιστρα Esscher ως την αναμενόμενη τιμή του κινδύνου πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με μια αύξουσα εκθετική συνάρτηση (η οποία φυσικά κάνει τον κίνδυνο λιγότερο ελκυστικό για τον ασφαλιστή).

Δεδομένου ότι πρέπει να καλύψει έναν κίνδυνο X, μια ασφαλιστική εταιρία θέλει να καθορίσει το ασφάλιστρο p έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η ωφελιμότητα του συμβολαίου $E[u(p-X)]$. Φυσικά, αυτό οδηγεί σε $p=+\infty$ καθώς η u είναι γνησίως αύξουσα. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η εταιρία δέχεται ότι το ασφάλιστρο είναι της μορφής

$$p = E[X\, w(X)] \tag{4.3}$$

όπου w είναι μια συνάρτηση και η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι της μορφής

$$u(x) = \frac{1-\exp(-cx)}{c} \tag{4.4}$$

Η σταθερά $c = -\frac{d}{dx}\, lnu^* > 0$ μετράει την αποστροφή στον κίνδυνο της ασφαλιστικής εταιρίας, όπου u^* η συνάρτηση ωφελιμότητας της ασφαλιστικής εταιρίας.

Μια διαφορετική έκφραση του ασφαλίστρου Esscher υπάρχει στο σύγγραμμα των Kaas et al. (2001).

Ιδιότητα 4.3. Η ωφελιμότητα $E[u(p-X)]$, με p και u όπως ορίστηκαν παραπάνω, μεγιστοποιείται ως προς όλες τις συνεχείς αύξουσες συναρτήσεις w για τις οποίες ισχύει $E[w(X)] = 1$ όταν

$$w(x) = \frac{\exp(cx)}{M_X(c)} \tag{4.5}$$

όπου $M_X(c)$ η ροπογεννήτρια της X. Έτσι το ασφάλιστρο υπολογίζεται ως:

$$p = E[X\, w(X)] = E\left[X \frac{\exp(cX)}{M_X(c)}\right] = \int_0^{+\infty} x \frac{\exp(cx)\, f_X(x)}{M_X(c)} dx$$

Η συνάρτηση βάρους w δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα σε μεγάλες τιμές του Χ, και έτσι συνεπάγεται ασφαλές περιθώριο ασφαλείας.

Ορισμός 4.4. Το ασφάλιστρο Esscher $Es[X;c]$ δίνεται από την (4.3) σταθμισμένο με την συνάρτηση (4.5). Πιο συγκεκριμένα, το ασφάλιστρο Esscher για τον κίνδυνο Χ είναι

$$Es[X;c] = \frac{E[X\, exp(cX)]}{M_X(c)} = \frac{d}{dc} lnM_X(c)$$

4.3.2 Σύνδεση με μετασχηματισμό Esscher

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε τον μετασχηματισμό Esscher και πως αυτός συνδέεται με το ασφάλιστρο Esscher. Ο μετασχηματισμός Esscher είναι μια απλή εκθετική κλίση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Συγκεκριμένα:

$$f^*(x) = k\, f_X(x) \exp(cx)\,, c > 0$$

όπου k είναι μια σταθερά κλιμάκωσης. Στο ασφάλιστρο Esscher παίρνουμε $k = \frac{1}{M_X(c)}$ επομένως ο μετασχηματισμός Esscher γίνεται

$$f_X^*(x) = \frac{f_X(x) \exp(cx)}{M_X(c)}\,, c > 0$$

Τότε το ασφάλιστρο Esscher για έναν κίνδυνο X, με παράμετρο c, μπορεί να υπολογιστεί ως η αναμενόμενη τιμή μιας τ.μ. X_c με σ.κ. $F_{X,c}$ και πυκνότητα $f_X^*(x)$:

$$Es[X,c] = E[X_c] = \int_0^{+\infty} x dF_{X,c}(x) = \int_0^{\infty} x\, \frac{f_X(x) \exp(cx)}{M_X(c)}\, dx = \frac{E(X \exp(cX))}{M_X(c)}$$

Η παράμετρος Esscher c αντανακλά το βαθμό της αποστροφής στον κίνδυνο του ασφαλιστή.

Ιδιότητα 4.5. Η συνάρτηση $c \mapsto Es[X,c] = E[X_c]$ είναι αύξουσα για κάθε κίνδυνο X.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται ευθέως από

$$\frac{d}{dc} E[X_c] = \int_0^{+\infty} x^2 dF_{X,c}(x) - \left(\int_0^{+\infty} x d\, F_{X,c}(x)\right)^2 = V[X_c] \geq 0$$

Αυτό το αποτέλεσμα εξασφαλίζει ότι, για $c > 0$

$$Es[X;c] \geq Es[X;0] = E[X]$$

Έτσι *το μέτρο κινδύνου Esscher περιλαμβάνει μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας*. Επιπλέον

$$Es[X;c] \leq \lim_{c \to +\infty} Es[X;c] = \max\,[X]$$

Άρα *το μέτρο κινδύνου Esscher δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.*

Ακόμα *το μέτρο κινδύνου Esscher δεν είναι θετικά ομοιογενές, δεν είναι μονότονο αλλά είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά*.

Παρατήρηση 4.6. Η χρήση του μέτρου κινδύνου Esscher μοιάζει με την ουδέτερη στον κίνδυνο μέθοδο αποτίμησης (risk-neutral valuation method) στη θεωρία αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης (options). Αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος arbitrage, τότε τα ασφάλιστρα των δικαιωμάτων δίνονται από μια αναμενόμενη τιμή θεωρώντας μια νέα κατανομής πιθανότητας που ονομάζεται ουδέτερη στον κίνδυνο κατανομή (risk-neutral distribution). Η ουδέτερη στον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας αντικαθιστά την αρχική κατανομή πιθανότητας, προκειμένου να δοθεί περισσότερη βαρύτητα σε δυσμενή γεγονότα σε ένα περιβάλλον χωρίς κίνδυνο. Με το μέτρο κινδύνου Esscher η ουδέτερη στον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας σχετίζεται με τη σ.κ. $F_{X,c}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Μέτρα Κινδύνου βασισμένα στη Θεωρία Στρεβλής Προσδοκίας

5.1 Εισαγωγή στη θεωρία στρεβλής προσδοκίας (distorted expectation theory)

5.1.1 Εισαγωγή

Πολλοί αναλυτές εναντιώνονται στη θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας και στα αξιώματά της. Υπάρχουν πολλές αντιρρήσεις σχετικά με την περιγραφική αξία της θεωρίας σε εμπειρικά στοιχεία. Από πειράματα και δοκιμές έχει διαπιστωθεί ότι δεν ισχύει πάντα στην πράξη η θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας για την λήψη αποφάσεων. Έτσι αναπτύχθηκαν εναλλακτικές θεωρίες επιλογής κάτω από κίνδυνο που είναι σε θέση να εξηγήσουν τις συμπεριφορές του λήπτη αποφάσεων σε αυτά τα πειράματα. Μια επισκόπηση των εν λόγω μοντέλων, που ονομάζονται συνήθως «μη-αναμενόμενη ωφελιμότητα» ή «γενικεύσεις σχετικά με την αναμενόμενη ωφελιμότητα» δίνεται από τον Sugden (1997) και τον Schmidt (1998).

5.1.2 Υπόθεση στρεβλής προσδοκίας

Θεωρούμε έναν λήπτη αποφάσεων με μελλοντική τυχαία περιουσία X. Η αναμενόμενη τιμή του X μπορεί να γραφτεί ως:

$$E[X] = -\int_{-\infty}^{0}(1-\bar{F}_X(x))dx + \int_{0}^{+\infty}\bar{F}_X(x)dx$$

Σύμφωνα με την ¨υπόθεση στρεβλής προσδοκίας¨ κάθε λήπτης αποφάσεων έχει μια μη φθίνουσα συνάρτηση $g: [0,1] \to [0,1]$ με $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$, η οποία ονομάζεται συνάρτηση στρέβλωσης. Έτσι η ¨στρεβλή προσδοκία¨ μιας περιουσίας X ορίζεται ως:

$$H_g[X] = -\int_{-\infty}^{0}(1-g(\bar{F}_X(x)))dx + \int_{0}^{+\infty}g\big(\bar{F}_X(x)\big)dx \qquad (5.1)$$

Εφόσον η $g(\bar{F}_X(x))$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του $\bar{F}_X(x)$ και η $\bar{F}_X(x)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του x, τότε και η $g(\bar{F}_X(x))$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του

x και μπορεί να θεωρηθεί ως σταθμισμένη συνάρτηση ουράς. Αν Χ είναι μη αρνητική τ.μ. τότε η (5.1) γίνεται:

$$H_g[X] = \int_0^{+\infty} g\big(\bar{F}_X(x)\big)dx$$

Για $g(0) = 0 \Rightarrow H_g[0] = 0$ και για $g(1) = 1 \Rightarrow H_g[1] = 1$.

Ο λήπτης αποφάσεων λέμε ότι βασίζει τις προτιμήσεις του στην ¨υπόθεση στρεβλής προσδοκίας¨ αν ενεργεί έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η στρεβλή προσδοκία του. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια συνάρτηση στρέβλωσης g τέτοια ώστε ο λήπτης αποφάσεων προτιμά την περιουσία Y έναντι της X αν και μόνο αν $H_g[X] \leq H_g[Y]$.

5.1.3 Αξιώματα της υπόθεσης στρεβλής προσδοκίας

Αντίστοιχα με την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας, υπάρχουν και στην θεωρία στρεβλής προσδοκίας αξιώματα τα οποία αν ικανοποιούνται υπάρχει μια συνάρτηση στρέβλωσης που δίνει την σειρά των προτιμήσεων του λήπτη αποφάσεων. Πιο συγκεκριμένα ο Yaari (1987), ξεκινώντας από μια αξιωματική προσέγγιση λίγο διαφορετική από αυτή της θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας, έδειξε ότι υπάρχει μια συνάρτηση στρέβλωσης g τέτοια ώστε ο λήπτης αποφάσεων προτιμά την περιουσία Y έναντι της X αν και μόνο αν ισχύει $H_g[X] \leq H_g[Y]$.

Η αξιωματική προσέγγιση του Yaari διαφέρει από την αντίστοιχη των von Neumann και Morgenstern στο αξίωμα ανεξαρτησίας (Αξίωμα 5, Παρατ. 4.1.2). Διάφορα πειράματα έχουν δείξει ότι η συμπεριφορά του λήπτη αποφάσεων δεν συμφωνεί με το αξίωμα της ανεξαρτησίας. Ένα διάσημο πείραμα σε αυτό το πλαίσιο είναι γνωστό ως το παράδοξο του Allais (*Allais paradox*)(βλ.Kaas et al (2001) Remark 1.3.5).

Παρατήρηση 5.1. Παράδοξο του Allais (*Allais paradox* (1953))

Θεωρούμε τα ακόλουθα πιθανά κεφάλαια:

$$X = 1\,000\,000 \quad \text{με πιθανότητα } 1$$

$$Y = \begin{cases} 5\,000\,000 & \text{με πιθανότητα } 0{,}10 \\ 1\,000\,000 & \text{με πιθανότητα } 0{,}89 \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 0{,}01 \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} 1\,000\,000 & \text{με πιθανότητα } 0{,}11 \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 0{,}89 \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} 5\,000\,000 & \textit{με πιθανότητα } 0{,}10 \\ 0 & \textit{με πιθανότητα } 0{,}90 \end{cases}$$

Πειράματα στην οικονομία έχουν δείξει ότι, έχοντας μια επιλογή μεταξύ X και Y, πολλοί άνθρωποι επιλέγουν την X δηλαδή το σίγουρο κέρδος, αλλά την ίδια στιγμή προτιμούν την επιλογή W από την V. Το αποτέλεσμα αυτό παραβιάζει την υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας, δεδομένου ότι, υποθέτοντας έναν αρχικό πλούτο 0, η τελευταία προτίμηση $E[u(W)] > E[u(V)]$ είναι ισοδύναμη με $0.11u(1000000) < 0.1u(5000000) + 0.01u(0)$. Όμως η επιλογή της X έναντι της Y, δηλαδή $E[u(X)] > E[u(Y)]$ οδηγεί σε ακριβώς αντίθετη ανισότητα. Προφανώς, η αναμενόμενη ωφελιμότητα δεν περιγράφει πάντα τη συμπεριφορά των φορέων λήψης αποφάσεων επαρκώς. Κρίνοντας από το παράδειγμα αυτό, φαίνεται ότι η έλξη του να είναι σε μια εντελώς ασφαλή κατάσταση είναι ισχυρότερη από την αναμενόμενη ωφελιμότητα και προκαλεί τους ανθρώπους να κάνουν παράλογες αποφάσεις.

Πολλοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα του Allais. Εμπειρικές μελέτες έχουν δοκιμάσει διάφορες τροποποιήσεις του προβλήματος. Σε όλες τις περιπτώσεις ένας σημαντικός αριθμός υποκειμένων παραβιάζει το αξίωμα της ανεξαρτησίας. Ο Yaari πρότεινε μια εναλλακτική θεωρία της λήψης αποφάσεων υπό κίνδυνο που έχει μια παρόμοια αξιωματική θεμελίωση, με τροποποιημένο το Αξίωμα 5. Αντί της απαίτησης της ανεξαρτησίας, ως προς τη μίξη πιθανοτήτων ριψοκίνδυνων προοπτικών, ο Yaari απαίτησε ανεξαρτησία σε σχέση με την άμεση ανάμειξη των πληρωμών επικίνδυνων προοπτικών. Αποδεικνύεται ότι η θεωρία αυτή οδηγεί σε παράδοξα που είναι παρόμοια με αυτά της θεωρία ωφελιμότητας.

<u>Αξίωμα 5*</u>

Δεδομένων δύο τ.μ. X και Y τέτοιες ώστε η Y προτιμάται έναντι της X, τότε $\tilde{Y}_p$ προτιμάται από τη $\tilde{X}_p$ για κάθε $p \in [0,1]$ αν οι αντίστροφες συναρτήσεις επιβίωσης των $\tilde{X}_p$ και $\tilde{Y}_p$ δίνονται από:

$$\bar{F}_{\tilde{X}_p}^{-1}(q) = p\bar{F}_X^{-1}(q) + (1-p)\bar{F}_Z^{-1}(q)$$

και

$$\bar{F}_{\tilde{Y}_p}^{-1}(q) = p\bar{F}_Y^{-1}(q) + (1-p)\bar{F}_Z^{-1}(q)$$

για μια αυθαίρετη σ.ε. $\bar{F}_Z$.

Η αντίστοιχη έκφραση του Αξιώματος 5 των von Neumann and Morgenstern είναι: εάν το Y προτιμάται έναντι του X και αν οι σ.κ. των $\tilde{X}_p$ και $\tilde{Y}_p$ δίνονται από:

$$F_{\tilde{X}_p}(x) = pF_X(x) + (1-p)F_Z(x), x \in \mathbb{R}$$

και

$$F_{\tilde{Y}_p}(x) = pF_Y(x) + (1-p)F_Z(x), x \in \mathbb{R}$$

για μια αυθαίρετη σ.κ. F_Z, τότε $\tilde{Y}_p$ προτιμάται από το $\tilde{X}_p$ για κάθε $p \in [0,1]$.

Η διαφορά είναι ότι στη θεωρία του Yaari μια τ.μ. $pX + (1-p)Z$ συγκρίνεται με την $pY + (1-p)Z$, ενώ στην θεωρία των von Neumann and Morgenstern η σύγκριση γίνεται μεταξύ $IX + (1-I)Z$ και $IY + (1-I)Z$, για κάποια τ.μ. $I \sim Ber(p)$ ανεξάρτητη των X,Y και Z.

5.1.4 Αποστροφή στον κίνδυνο στη θεωρία στρεβλής προσδοκίας

Η αποστροφή στον κίνδυνο είναι πολύ σημαντικός όρος στην ασφάλιση. Σύμφωνα με την υπόθεση στρεβλής προσδοκίας, ένας λήπτης απόφασης λέγεται ότι αποστρέφεται τον κίνδυνο (είναι κινδυνόφοβος (risk-averse)), αν η συνάρτηση στρέβλωσης του είναι κυρτή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για μια κυρτή συνάρτηση στρέβλωσης ισχύει:

$$g(p) \leq p \text{ για κάθε } p \Rightarrow g\big(\bar{F}_X(x)\big) \leq \bar{F}_X(x)\,, x \in \mathbb{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος λήπτης αποφάσεων υποτιμά συστηματικά τις ακραίες πιθανότητες που σχετίζονται με τα επίπεδα πλούτου του.

Για κυρτή g ισχύει: $H_g[X] \leq E[X] = H_g[E[X]]$. Επομένως ο κινδυνόφοβος λήπτης αποφάσεων προτιμά πάντα μια σίγουρη περιουσία από μια τυχαία με την ίδια αναμενόμενη τιμή. Έτσι η έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο είναι ίδια και στις δύο θεωρίες. Τέλος ίδια είναι αντίστοιχα και η έννοια της ουδετερότητας απέναντι στον κίνδυνο καθώς ένας λήπτης αποφάσεων είναι ουδέτερος στον κίνδυνο αν $g(p) = p$. Σε αυτή την περίπτωση η θεωρία στρεβλής προσδοκίας συμπίπτει με την σύγκριση αναμενόμενων τιμών.

5.1.5 Σύγκριση της θεωρίας στρεβλής προσδοκίας με την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας

Στη θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας, ένας κίνδυνος αξιολογείται από:

$$E[u(X)] = \int_0^1 u(VaR[X;p])dp \tag{5.2}$$

ενώ στην θεωρία στρεβλής προσδοκίας χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\begin{aligned} H_g[X] &= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{p=0}^{\bar{F}_X(x)} dg(p)dx \\ &= \int_0^1 VaR[X;1-p]dg(p) \\ &= \int_0^1 VaR[X;p]\, dg(1-p) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Η διαφορά των δύο προσεγγίσεων είναι ότι στην υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας, στα πιθανά ποσά μιας περιουσίας $VaR[X;p]$ εφαρμόζεται μια συνάρτηση ωφελιμότητας, ενώ στην υπόθεση στρεβλής προσδοκίας χρησιμοποιείται μια πιθανότητα ουράς. Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις στρέβλωσης τροποποιούν την πιθανότητα, και κρατάνε την συνάρτηση πλούτου αμετάβλητη, ενώ συναρτήσεις ωφελιμότητας τροποποιούν τον πλούτο και να κρατάνε την πιθανότητα αμετάβλητη.

Παρατήρηση 5.2. Από την (5.3) βλέπουμε ότι η H_g είναι μία μίξη από VaR όπου η συνάρτηση στρέβλωσης g δίνει τα βάρη που χρησιμοποιούνται σε κάθε VaR. Οι μίξεις των VaR ονομάστηκαν φασματικά μέτρα (spectral measures) από τον Acerbi (2002).

5.1.6 Συνδυασμός της θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας με τις παραδοχές της στρεβλής προσδοκίας

Η θεωρία της εξαρτημένης από τον βαθμό αναμενόμενης ωφελιμότητας (Rank Dependent Expected Utility) είναι ένας συνδυασμός της θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας με τις παραδοχές της στρεβλής προσδοκίας.

Ορισμός 5.3. Ένας λήπτης αποφάσεων συμπεριφέρεται σύμφωνα με το μοντέλο της εξαρτημένης από το βαθμό αναμενόμενης ωφελιμότητας αν οι προτιμήσεις του χαρακτηρίζονται από δύο συναρτήσεις: μια μη αρνητική συνάρτηση ωφελιμότητας u και μια συνάρτηση στρέβλωσης g. Ένας τέτοιος λήπτης αποφάσεων προτιμά μια περιουσία Y από μια περιουσία X, αν και μόνο αν

$$H_g^u[X] \le H_g^u[Y]$$

όπου $H_g^u[X] = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dg(\bar{F}_X(x)) = \int_0^{+\infty} g(\Pr[u(x) > t])dt$

- Αν $g(p) = p$, τότε $H_g^u[X] = E[u(X)]$, παίρνουμε δηλαδή το μοντέλο αναμενόμενης ωφελιμότητας.
- Αν $u(x) = x$, τότε $H_g^u[X] = H_g[X]$, παίρνουμε δηλαδή τη διπλή θεωρία του Yaari.
- Αν ισχύει ταυτόχρονα και $g(p) = p$ και $u(x) = x$ τότε $H_g^u[X] = E[X]$.

Τέλος οι Tsanakas and Desli (2003) ανέπτυξαν μια κατηγορία κυρτών μέτρων κινδύνου στο πλαίσιο της εξαρτημένης από τον βαθμό θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας. Χρησιμοποιώντας μια εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας, παρήγαγαν μια στρεβλή εκθετική αρχή με ελκυστικές ιδιότητες. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο βιβλίο των παραπάνω συγγραφέων.

5.2 Μέτρα κινδύνου Wang

5.2.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια ασφαλιστική εταιρία με αρχική περιουσία w και συνάρτηση στρέβλωσης g. Η εταιρία καλύπτει έναν κίνδυνο X και θέλει ασφάλιστρο για την κάλυψη του $\Pi[X]$ το οποίο είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης

$$w = H_g[X] = H_g[w + \Pi[X] - X] \qquad (5.4)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (5.4) με την (4.1) βλέπουμε ότι είναι ανάλογη της αρχής μηδενικής ωφελιμότητας. Η υπόθεση ότι η g είναι κυρτή αντανακλά την αποστροφή στον κίνδυνο.

Η δεξιά πλευρά της (5.4) είναι ίση με

$$H_g[w + \Pi[X] - X] = w + \Pi[X] + H_g[-X] = w + \Pi[X] - H_{\bar{g}}[X]$$

όπου $\bar{g}(p) = 1 - g(1 - p)$ είναι μια δυική συνάρτηση στρέβλωσης.

Η λύση της (5.4) δίνεται από

$$\Pi[X] = H_{\bar{g}}[X]$$

Όταν η συνάρτηση στρέβλωσης g είναι κυρτή η δυική $\bar{g}$ είναι κοίλη και παίρνουμε την *αρχή στρέβλωσης Wang.* Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.4. Το μέτρο κινδύνου Wang ρ_g ενός κινδύνου X ορίζεται ως

$$\rho_g[X] = \int_0^{+\infty} g\big(\bar{F}_X(x)\big)dx$$

για κάποια μη φθίνουσα συνάρτηση στρέβλωσης g που ικανοποιεί τις σχέσεις $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$.

Σημειώστε ότι τα μέτρα κινδύνου Wang είναι για την στρεβλή προσδοκία τα αντίστοιχα των μέτρων μηδενικής ωφελιμότητας της κλασικής θεωρίας αναμενόμενης ωφελιμότητας.

5.2.2 Ιδιότητες των μέτρων κινδύνου Wang

Ιδιότητα 5.5. Τα μέτρα κινδύνου Wang δεν προκαλούν υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας, είναι θετικά ομοιογενή, προσθετικά ως προς τη σταθερά και μονότονα.

Απόδειξη. Εφόσον το VaR κατέχει αυτές τις ιδιότητες και κάθε μέτρο κινδύνου Wang ρ_g μπορεί να παρασταθεί ως μια μίξη από VaR λόγω της (5.3), έχει και αυτό τις ίδιες ιδιότητες. Για παράδειγμα το μέτρο κινδύνου ρ_g είναι θετικά ομοιογενές αφού

$$\rho_g[cX] = \int_0^1 VaR[cX; 1-p]dg(p) = c\int_0^1 VaR[X; 1-p]dg(p) = c\rho_g\,[\mathrm{X}]$$

Αντίστοιχα το ρ_g δεν προκαλεί υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας αφού το VaR δεν προκαλεί υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας και

$$\rho_g[X] \le \int_0^1 \max[X]\, dg(p) = \max[X]\,\big(g(1) - g(0)\big) = \max\,[X]$$

Παρόμοια προκύπτουν και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

Τα μέτρα κινδύνου Wang περιέχουν μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας που προέρχεται από τη g για την οποία ισχύει

$$g(t) \ge t \text{ για όλα τα } t \in [0,1] \Rightarrow \rho_g[X] \ge E[X]$$

Τα μέτρα κινδύνου Wang δεν προκαλούν αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας, αφού

$$\rho_g[c] = \int_0^c g(1)dx = c$$

Ιδιότητα 5.6. Τα μέτρα κινδύνου Wang είναι συμμονοτονικά προσθετικά.

Απόδειξη. Έστω X και Y συμμονοτονικοί κίνδυνοι. Αφού το VaR είναι συμμονοτονικά προσθετικό, έχουμε

$$\rho_g[X+Y] = \int_0^1 VaR[X+Y;1-p]dg(p)$$

$$= \int_0^1 (VaR[X;1-p] + VaR[Y;1-p])dg(p)$$

$$= \rho_g[X] + \rho_g[Y]$$

Ιδιότητα 5.7. Τα μέτρα κινδύνου Wang είναι υποπροσθετικά αν και μόνο αν η g είναι κοίλη.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η g έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο g''. Αφού η g είναι κοίλη τότε $g'' \leq 0$. Κάθε μέτρο κινδύνου Wang μπορεί να γραφτεί από την (5.3) σαν μια μίξη από VaR. Έτσι

$$\rho_g[X] = \int_0^1 VaR[X;1-p]dg(p)$$

$$= -\int_0^1 (\int_0^\xi VaR[X;1-p]dp)g''(\xi)d\xi + g'(1)E[X]$$

$$= -\int_0^1 TVaR[X;1-\xi](1-\xi)g''(\xi)d\xi + g'(1)E[X]$$

Αυτό δείχνει ότι κάθε μέτρο κινδύνου Wang που συνδέεται με μια κοίλη συνάρτηση στρέβλωσης μπορεί να γραφτεί σαν ένα μίξη από $TVaR$. Τότε

$$\rho_g[X+Y] = -\int_0^1 TVaR[X+Y;1-\xi](1-\xi)g''(\xi)d\xi + g'(1)E[X+Y]$$

$$\leq -\int_0^1 (TVaR[X;1-\xi] + TVaR[Y;1-\xi])(1-\xi)g''(\xi)d\xi + g'(1)E[X+Y]$$

$$= \rho_g[X] + \rho_g[Y]$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα της $TVaR$.

Αν η g δεν είναι κοίλη τότε πρέπει να έχει αυστηρά κυρτό τμήμα αν η g είναι διπλά διαφορίσιμη. Αποδεικνύεται όμως μέσω αντιπαραδείγματος ότι αν η g έχει ένα αυστηρά κυρτό τμήμα τότε το ρ_g δεν μπορεί να είναι υποπροσθετικό (δηλαδή είναι δυνατόν να βρούμε δύο κινδύνους X και Y τέτοιους ώστε $\rho_g[X+Y] > \rho_g[X] + \rho_g[Y]$).

Έτσι, όταν η συνάρτηση στρέβλωσης είναι κοίλη, τα μέτρα κινδύνου Wang είναι συνεκτικά

Παρατήρηση 5.8. Κάθε μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί τις πέντε βασικές ιδιότητες: μονοτονία, προσθετικότητα ως προς τη σταθερά, θετική ομοιογένεια, υποπροσθετικότητα και συμμονοτονική προσθετικότητα, μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια στρεβλή προσδοκία. Για την απόδειξη βλ. Kusuoka (2001).

5.2.3 Επιπλέον περιθώριο ασφαλείας για την αβεβαιότητα των παραμέτρων

Οι αναλογιστές αντιμετωπίζουν παραμετρική αβεβαιότητα στα μοντέλα που χρησιμοποιούν. Στην πράξη οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων είναι άγνωστες και επομένως πρέπει να εκτιμηθούν. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση της παραμετρικής αβεβαιότητας είναι η χρήση μιας δευτερογενούς μικτής κατανομής για την περιγραφή της κατανομής των ζημιών μέσω της δεσμευμένης σ.κ. $F_X(\cdot\,|\theta) = F_X(\cdot\,|\Theta = \theta)$ όπου η παράμετρος Θ είναι τυχαία μεταβλητή με μια κατανομή F_Θ. Είναι μια επιθυμητή ιδιότητα για τα μέτρα κινδύνου γιατί δίνει επιπλέον περιθώριο ασφαλείας για την παραμετρική αβεβαιότητα. Ένα μέτρο κινδύνου Wang έχει αυτή την ιδιότητα όταν η συνάρτηση στρέβλωσης είναι κοίλη.

Ιδιότητα 5.9. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση στρέβλωσης g είναι κοίλη. Για κάθε κίνδυνο X με δεσμευμένη σ.κ. $F_X(\cdot \,\big|\, \theta)$ και δεσμευμένο μέτρο κινδύνου Wang $\rho_g[X \,\big|\, \theta]$, ισχύει

$$\rho_g[X] \geq E[\rho_g[X|\Theta]]$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen για την κοίλη συνάρτηση στρέβλωσης g παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\rho_g[X] &= \int_0^{+\infty} g\big(\bar{F}_X(t)\big)dt \\
&= \int_0^{+\infty} g\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_X(t|\theta)dF_\Theta(\theta)\Big)dt \\
&\geq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(t|\theta)dt\, dF_\Theta(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_g[X|\theta]dF_\Theta(\theta) = \; E\left[\rho_g[X|\Theta]\right]
\end{aligned}$$

5.3 Ειδικές περιπτώσεις των μέτρων κινδύνων Wang

5.3.1 Στρεβλές προσδοκίες και *VaR*

Ας ορίσουμε την συνάρτηση στρέβλωσης g ως $g(x) = \mathbb{I}[x \leq 1-p], 0 \leq x \leq 1$, για αυθαίρετη αλλά σταθερή πιθανότητα $p \in [0,1]$. Η συνάρτηση αυτή είναι ίση με 1 αν $x \leq 1-p$ και 0 διαφορετικά. Τότε είναι εύκολο να δούμε από την (5.3) ότι για κάθε κίνδυνο X ισχύει:

$$\rho_g[X] = VaR[X;p]$$

Η συνάρτηση στρέβλωσης που δημιουργεί το *VaR* δεν είναι κοίλη, άρα τα *VaR* δεν είναι συνεκτικά.

5.3.2 Στρεβλές προσδοκίες και *TVaR*

Ας ορίσουμε την συνάρτηση στρέβλωσης g ως $g(x) = min\left\{\frac{x}{1-p}, 1\right\}, 0 \leq x \leq 1$, για αυθαίρετη αλλά σταθερή πιθανότητα $p \in [0,1]$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε από την (5.3):

$$\begin{aligned}\rho_g[X] &= \frac{1}{1-p}\int_0^{1-p} VaR[X;1-\xi]d\xi \\ &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi \\ &= TVaR[X;p]\end{aligned}$$

Συνάρτηση στρέβλωσης που οδηγεί στο *TVaR* είναι κοίλη, άρα τα *TVaR* είναι συνεκτικά.

5.3.3 Μέτρα κινδύνου που δεν είναι στρεβλές προσδοκίες

Δεν μπορούνε να γραφτούν όμως όλα τα μέτρα κινδύνου ως μέτρα κινδύνου Wang.

Πρόταση 5.10. Το αναμενόμενο έλλειμμα δεν είναι μέτρο κινδύνου στρέβλωσης.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το μέτρο κινδύνου $ES[X;p]$ μπορεί να εκφραστεί ως μια στρεβλή προσδοκία για κάποια συνάρτηση στρέβλωσης g. Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι $X \sim Uni(0,1)$. Τότε για δεδομένη $p \in (0,1)$, έχουμε

$$ES[X;p] = \int_p^1 sds = \frac{1}{2}(1-p)^2 = \rho_g[X] = \int_0^1 g(s)ds \tag{5.5}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $X \sim Ber(r)$ για ένα αυθαίρετο $r \in (0,1-p]$. Εύκολα βρίσκουμε

$$ES[X;p] = E[X] = r = \rho_g[X] = \int_0^1 g(r)ds$$

έτσι ώστε $g(r) = r$ για $0 < r \leq 1-p$. Τότε αντικαθιστώντας στην (5.5) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}(1-p)^2 = \int_0^{1-p} sds + \int_{1-p}^1 g(s) \geq \frac{1}{2}(1-p)^2 + p(1-p)$$

το οποίο προφανώς οδηγεί σε άτοπο για $0 < p < 1$.

Πρόταση 5.11. Η δεσμευμένη προσδοκία ουράς δεν είναι ένα μέτρο κινδύνου στρέβλωσης.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, υποθέτουμε ότι το μέτρο κινδύνου $CTE[X;p]$ μπορεί να εκφραστεί ως μια στρεβλή προσδοκία για κάποια συνάρτηση στρέβλωσης g. Πρώτα θεωρούμε $X \sim Uni(0,1)$. Τότε για $p \in (0,1)$ από την (3.4) έχουμε:

$$p + \frac{1}{2}(1-p) = \int_0^1 g(1-x)dx$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}(1+p) = \int_0^1 g(x)dx \tag{5.6}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $Y \sim Ber(r)$, για ένα αυθαίρετο $r \in (0,1-p]$. Εφαρμόζοντας πάλι την (3.4) παίρνουμε το $CTE[Y;p]$. Ως εκ τούτου θα πρέπει να έχουμε $g(r) = 1$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης στρέβλωσης g και του αυθαίρετου $r \in (0,1-p]$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $g(\cdot) = 1$ στο $(0,1]$, το οποίο αντιτίθεται στη (5.6). Αυτό αποδεικνύει ότι η δεσμευμένη προσδοκία ουράς δεν είναι μέτρο κινδύνου στρέβλωσης.

5.3.4 Μέτρο κινδύνου διπλής δύναμης (Dual-power risk measure)

Θεωρώντας $g(p) = 1 - (1-p)^{\xi}, \xi \geq 1$, παίρνουμε

$$\rho_g[X] = \int_0^{+\infty} (1 - \left(F_X(x)\right)^{\xi}) dx$$

Όταν ξ είναι ακέραιος, το $\rho_g[X]$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η αναμενόμενη τιμή του μέγιστου $\max\{X_1, \dots, X_\xi\}$ από ένα σύνολο ξ ανεξάρτητων τ.μ. με κατανομή ίδια με το X.

Η μέθοδος διπλής δύναμης για την μέτρηση κινδύνου είναι μια μέθοδος δύο σταδίων. Πρώτα ο αρχικός κίνδυνος X μετασχηματίζεται σε

$$X_\xi^* = \max\{X_1, \dots, X_\xi\}$$

και έπειτα υπολογίζεται η αναμενόμενη τιμή $E[X_\xi^*]$.

5.3.5 Μέτρα κινδύνου αναλογικών κινδύνων (Proportional hazard risk measure)

Η μέθοδος μετατροπής αναλογικών κινδύνων (Proportional Hazard, *PH*) για την μέτρηση των κινδύνων προτάθηκε από τον Wang (1995). Παίρνοντας $g(p) = p^{1/\xi}, \xi \geq 1$, καταλήγουμε στο *PH* μέτρο κινδύνου:

$$PH_\xi[X] = \rho_g[X] = \int_0^{+\infty} (\bar{F}_X(x))^{1/\xi} dx$$

το οποίο μπορεί να ερμηνευθεί ως σταθμισμένο μέτρο κινδύνου, όπου ξ είναι ο δείκτης αποστροφής στον κίνδυνο. Η συνάρτηση $\bar{F}_\xi^* = (\bar{F}_X(x))^{1/\xi}$ είναι μια συνάρτηση ουράς. Τότε $PH_\xi[X] = E[X_\xi^*]$, όπου η X_ξ^* έχει συνάρτηση ουράς $\bar{F}_\xi^*$. Το μέτρο κινδύνου *PH* υπολογίζεται σε δύο στάδια: πρώτα ο αρχικός κίνδυνος X αντικαθίσταται από την μετατροπή του X_ξ^*, και έπειτα υπολογίζεται η αναμενόμενη τιμή του. Για $\xi = 1$, $PH_1[X] = E[X]$.

5.3.6 Μέτρα κινδύνου κανονικού μετασχηματισμού

Το μέτρο κινδύνου κανονικού μετασχηματισμού εισήχθη από τον Wang (2000). Για κάθε $p \in (0,1)$ ορίζουμε την συνάρτηση στρέβλωσης

$$g_p(q) = \Phi\big(\Phi^{-1}(q) + \Phi^{-1}(p)\big), 0 < q < 1\,, 0 < p < 1$$

όπου Φ είναι η σ.κ. της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$. Η συνάρτηση στρέβλωσης που ορίζεται παραπάνω ονομάζεται ¨κανονική μετατροπή σε επίπεδο p¨. Το αντίστοιχο μέτρο κινδύνου στρέβλωσης ονομάζεται μέτρο κινδύνου κανονικής μετατροπής και συμβολίζεται με $NT_p(X)$.

Αν $X{\sim}N(\mu, \sigma^2)$ τότε το μέτρο κινδύνου κανονικής μετατροπής είναι ταυτόσημο με το VaR στο ίδιο επίπεδο, δηλαδή

$$NT_p(X) = VaR[X; p]$$

Το μέτρο κινδύνου NT χρησιμοποιεί το σύνολο της κατανομής και λαμβάνει υπόψη του ακραίες τιμές. Παραδείγματα για τα παραπάνω μπορούν να βρεθούν στο σύγγραμμα του Wang (2002).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:Μη Παραμετρική Εκτίμηση Μέτρων Κινδύνου

6.1 Εισαγωγή

Στην πράξη πολλές φορές δεν ξέρουμε την κατανομή που ακολουθούν οι απώλειες. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει είτε να εκτιμήσουμε την κατανομή των ζημιών είτε να κάνουμε μη παραμετρική εκτίμηση των μέτρων κινδύνου. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να εκτιμήσουμε την κατανομή που ακολουθούν οι ζημιές. Αφού εκτιμηθεί η κατανομή των ζημιών και οι παράμετροί της, υπολογίζονται τα μέτρα κινδύνου όπως παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Η εκτίμηση της κατανομής των ζημιών ξεφεύγει από το θέμα της παρούσας εργασίας. Εμείς θα ασχοληθούμε με την μη παραμετρική εκτίμηση των μέτρων κινδύνου που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

6.2 Εκτίμηση *VaR*

Στην Αναλογιστική Επιστήμη συχνά χρησιμοποιείται η προσομοίωση Monte Carlo για να εκτιμηθεί η κατανομή ζημιάς. Χρησιμοποιώντας πρότυπες προσομοιώσεις Monte Carlo έχουμε δημιουργήσει ένα μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων προσομοιώσεων της τυχαίας μεταβλητής απώλειας X. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δημιουργήσει N τέτοιες τιμές, και τις έχουμε διατάξει από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, έτσι ώστε $X_{(j)}$ είναι η j-οστή μικρότερη προσομοιωμένη τιμή του X. Υποθέτουμε ότι η εμπειρική κατανομή της $X_{(j)}$ είναι μια εκτίμηση της πραγματικής υποκείμενης κατανομής της X.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιείται προσομοίωση Monte Carlo για να δημιουργήσει ένα δείγμα 1000 τιμών της τυχαίας απώλειας. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το $VaR[X; 0.95]$. Μια προφανής εκτίμηση είναι $X_{(950)}$. Είναι προφανής γιατί είναι το 95% ποσοστημόριο της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής που ορίζεται από το παραγόμενο διατεταγμένο δείγμα $\{X_{(j)}, j = 1,2, \dots ,1000\}$, δηλαδή το 95% των προσομοιωμένων τιμών του X είναι μικρότερες ή ίσες με $X_{(950)}$. Από την άλλη πλευρά, 5% του δείγματος είναι μεγαλύτερο ή ίσο με $X_{(951)}$, έτσι ώστε να είναι μια άλλη πιθανή εκτίμηση. Στο σύγγραμμα *Loss Models* (Klugman, Panjer και Willmot (2004)), η «εξομαλυμένη εμπειρική εκτίμηση» που προτείνεται είναι να υποθέσουμε ότι $X_{(j)}$ είναι μια εκτίμηση του $j/(N + 1)$ ποσοστημορίου της κατανομής, και να χρησιμοποιήσουμε γραμμική παρεμβολή για να πάρουμε το επιθυμητό ποσοστημόριο. Αυτό σημαίνει ότι $X_{(950)}$ θεωρείται ότι είναι μια εκτίμηση του 950/1001 = 94.905% ποσοστημορίου, και $X_{(951)}$ θεωρείται ότι είναι μια εκτίμηση της 951/1001 = 95,005% ποσοστημορίου. Η γραμμική παρεμβολή για το 95% ποσοστημόριο θα δώσει

$$VaR[X; 0.95] \approx (0.05)X_{(950)} + (0.95)X_{(951)}$$

Γενικεύοντας, έχουμε παρακάτω τρεις εκτιμητές για το $VaR[X; p]$, από ένα δείγμα N προσομοιωμένων τιμών της τυχαίας απώλειας X, όπου Np υποθέτουμε ότι είναι ένας ακέραιος.

1. $X_{(Np)}$

2. $X_{(Np+1)}$

3. Παρεμβολή μεταξύ $X_{(Np)}$ και $X_{(Np+1)}$υποθέτοντας $X_{(r)}$ είναι μια εκτίμηση του $r/(N+1)$ ποσοστημορίου.

Κανένας από αυτούς τους εκτιμητές δεν είναι εγγυημένα καλύτερος από τους άλλους. Καθένας είναι πιθανό να είναι μεροληπτικός, αν και η μεροληψία είναι γενικά πολύ μικρή για μεγάλα δείγματα. Δεν μπορεί ακόμη να είναι βέβαιο ότι το πραγματικό p-ποσοστημόριο απλώνεται μεταξύ $E[X_{(Np)}]$ και $E[X_{(Np+1)}]$. Στην πράξη, για τις αναλογιστικές κατανομές απώλειας, όπου μας ενδιαφέρει η δεξιά ουρά της κατανομής των ζημιών, παίρνουμε συνήθως μικρότερη μεροληψία από τη χρήση, είτε της $X_{(Np+1)}$, είτε της εξομαλυμένης εμπειρικής εκτίμησης.

Βέβαια, στην πράξη, όταν χρησιμοποιούμε προσομοίωση Monte Carlo, δεν γνωρίζουμε τις πραγματικές τιμές των ποσοστημορίων. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε την $X_{(Np)}$ ως εκτίμηση του $VaR[X; p]$. Η εκτίμηση αυτή θα υπόκειται σε δειγματοληπτική μεταβλητότητα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρατηρήσεις από την προσομοίωση για την κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαστήματος εμπιστοσύνης για το πραγματικό VaR της κατανομής.

Το πλήθος, M, των προσομοιωμένων τιμών που βρίσκονται κάτω από το πραγματικό p-ποσοστημόριο είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διωνυμική κατανομή. Κάθε προσομοιωμένο X είτε πέφτει κάτω από το VaR με πιθανότητα p είτε όχι, με πιθανότητα (1 - p). Έτσι,

$$M \sim διωνυμική(N, p)$$

Που σημαίνει ότι

$$E[M] = Np, \quad V[M] = Np(1-p).$$

Έστω ότι θέλουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $VaR[X;p]$. Πρώτα κατασκευάζουμε ένα 90% δ.ε. για το $E[M]$ τέτοιο ώστε

$$Pr[m_L \leq M \leq m_U] = 0.9,$$

και θέτουμε το διάστημα να είναι συμμετρικό γύρω από το $E(M) = Np$, δηλαδή θέτουμε $m_L = Np - a$ και $m_U = Np + a$. Έτσι, αν $F_M(x)$ είναι η Διωνυμική συνάρτηση κατανομής της M

$$F_M(Np + a) - F_M(Np - a) = 0.9.$$

Χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής, προκύπτει ότι

$$a = \Phi^{-1}(\frac{1 + 0.9}{2})\sqrt{Np(1-p)}$$

Το 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $E[M]$ δίνει το εύρος των διατεταγμένων προσομοιωμένων τιμών Monte Carlo που αντιστοιχούν σε 90% διάστημα εμπιστοσύνης του $VaR[X;p]$:

$$\Pr[VaR[X;p] \in (X_{(Np-a)}, X_{(Np+a)})] = 0.9$$

Γενικά η διαδικασία για την δημιουργία ενός μη παραμετρικού q-διαστήματος εμπιστοσύνης έχει τρία στάδια:

1. Υπολογίζουμε το
$$a = \Phi^{-1}(\frac{1 + q}{2})\sqrt{Np(1-p)}$$
2. Στρογγυλοποιούμε το a στον επόμενο ακέραιο.
3. Το q-διάστημα εμπιστοσύνης είναι
$$(X_{(Np-a)}, X_{(Np+a)})$$

6.3 Εκτίμηση του *CTE*

Το CTE είναι ο μέσος όρος των χειρότερων $100(1-p)\%$ παρατηρήσεων της κατανομής απώλειας, οπότε εκτιμούμε το CTE ως την μέση τιμή των χειρότερων $100(1-p)\%$ προσομοιώσεων, όπου, αν $N(1-p)$ είναι ακέραιος, υπολογίζεται από:

$$\widehat{CTE[X;p]} = \frac{1}{N(1-p)} \sum_{j=Np+1}^{N} X_{(j)}$$

Για παράδειγμα, για να εκτιμήσουμε το $CTE[X; 0.95]$ ενός δείγματος N = 1000 παρατηρήσεων παίρνουμε την μέση τιμή των χειρότερων 50 παρατηρήσεων.

Η πιο προφανής εκτιμητής της τυπικής απόκλισης της εκτίμησης του *CTE* είναι $s_1/\sqrt{N(1-p)}$ όπου s_1 είναι η τυπική απόκλιση των χειρότερων $100(1-p)\%$ προσομοιωμένων ζημιών:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{N(1-p)-1}\sum_{i=Np+1}^{N}(X_{(i)} - \widehat{CTE[X;p]})^2}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό διότι, σε γενικές γραμμές, γνωρίζουμε ότι η διακύμανση του μέσου ενός δείγματος είναι ίση με την διακύμανση του δείγματος προς με το μέγεθος του δείγματος. Ωστόσο, έτσι θα υποεκτιμήσουμε την $V[CTE[X; p]]$. Μπορούμε να την υπολογίσουμε με την βοήθεια του εκτιμητή τουVaR$[X; p]$, διότι ισχύει ότι

$$V\big[CTE[X;p]\big] = E[V\big[CTE[X;p]\big|VaR[X;p]\big]] + V[E\big[CTE[X;p]\big|VaR[X;p]\big]]$$

Ο εκτιμητής $s_1^2/N(1-p)$ που είδαμε παραπάνω εκτιμά μόνο τον πρώτο όρο στο δεξί μέρος της παραπάνω ισότητας. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε την παραπάνω διακύμανση είναι με τη χρήση της προσέγγισης της συνάρτησης επιρροής των Manistre and Hancock (2005). Από το άρθρο αυτό προκύπτει ότι η διακύμανση του εκτιμητή του *CTE* μπορεί τελικώς να εκτιμηθεί από:

$$s^2_{CTE[X;p]} = \frac{s_1^2 + p\big(\widehat{CTE[X;p]} - \widehat{VaR[x;p]}\big)}{N(1-p)}$$

Περισσότερα για τις εκτιμήσεις του *VaR* και του *CTE* βρίσκονται στο σύγγραμμα "*An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications*" του Hardy (2006).

6.3.1 Άλλοι εκτιμητές του *CTE*

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες μικρές παραλλαγές του παραπάνω εκτιμητή του CTE.

- **Εκτιμητής των Inui και Kijima**

Οι Inui and Kijima (2005) πρότειναν τον παρακάτω εκτιμητή του CTE. Θέτουμε $k = [Np]$, όπου $[x]$ δηλώνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος του x, και $a = Np - k$

$$\widehat{CTE[X; p]} = \begin{cases} \bar{X}_{k:N}, & \text{αν } Np \text{ είναι ακέραιος} \\ a\bar{X}_{k:N} + (1-a)\bar{X}_{k+1:N}, & \text{αν } Np \text{ δεν είναι ακέραιος} \end{cases}$$

όπου $\bar{X}_{k:N} = \frac{1}{N-k}\left(X_{(k+1)} + \cdots + X_{(N)}\right)$.

Παρατηρούμε ότι για Np ακέραιο ο εκτιμητής των Inui και Kijima είναι ίδιος με τον κλασικό εκτιμητή του CTE.

- **Εκτιμητής του Chen**

Έστω $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(N)}$ οι προσομοιωμένες παρατηρήσεις $X_{(j)}$ σε αύξουσα σειρά. Ο Chen (2008) πρότεινε τον ακόλουθο εκτιμητή για το CTE:

$$\widehat{CTE[X; p]} = \frac{1}{1 + [N(1-p)]} \sum_{i=1}^{N} X_i I(X_i \geq X_{([Np]+1)})$$

όπου I η δείκτρια συνάρτηση που παίρνει τιμές 0 και 1.

- **Εκτιμητής των Peracchi και Tanase**

Έστω πάλι $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(N)}$ οι προσομοιωμένες παρατηρήσεις $X_{(j)}$ σε αύξουσα σειρά. Οι Peracchi and Tanase (2008) πρότειναν τον παρακάτω εκτιμητή για το CTE:

$$\widehat{CTE[X; p]} = \frac{1}{N(1-p)} \sum_{i=[Np]+1}^{N} X_{(i)} + \left(1 - \frac{[Np]}{Np}\right) X_{([Np])}$$

6.4 Εκτίμηση των *ES*,*TVaR* και *CVaR*

Το Αναμενόμενο Έλλειμμα ES γράφεται με την βοήθεια του VaR και του CTE μέσω της σχέσης (3.4) (βλ. Ιδιότητα 3.5 Παράγραφο 3.4.4). Συγκεκριμένα η σχέση(3.4):

$$CTE[X;p] = VaR[X;p] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X;p])} ES[X;p]$$

οπότε

$$\widehat{ES[X;p]} = \overline{F}_X\left(\widehat{VaR[X;p]}\right)\left(\widehat{CTE[X;p]} - \widehat{VaR[X;p]}\right) \tag{6.1}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει

$$\overline{F}_X(VaR[X;p]) = 1 - F_X(F_X^{-1}(p)) = 1 - p \tag{6.2}$$

όταν η γενικευμένη αντίστροφη F_X^{-1} συμπίπτει με τη συνήθη αντίστροφη συνάρτηση της F (δηλαδή στην περίπτωση που η F αντιστρέφεται, γεγονός που ισχύει για όλες τις γνωστές συνεχείς κατανομές). Επομένως παραπάνω στην εκτίμηση του ES μπορεί απλά να ληφθεί ότι $\overline{F}_X\left(\widehat{VaR[X;p]}\right) = 1 - p$. Επίσης η εκτίμηση του *TVaR* γίνεται μέσω των υπολοίπων μέτρων κινδύνου με την χρήση των σχέσεων που τα συνδέουν. Συγκεκριμένα από τη σχέση (3.3) παίρνουμε την εκτίμηση του $\widehat{TVaR[X;p]}$:

$$\widehat{TVaR[X;p]} = \widehat{VaR[X;p]} + \frac{1}{1-p}\widehat{ES[X;p]}$$

Επίσης από τον ορισμό του *CVaR* (βλ. Παράγραφο 3.4.2) και συγκεκριμένα την σχέση (3.2) παίρνουμε την εκτίμηση του $\widehat{CVaR[X;p]}$

$$\widehat{CVaR[X;p]} = \widehat{CTE[X;p]} - \widehat{VaR[X;p]}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Εφαρμογές

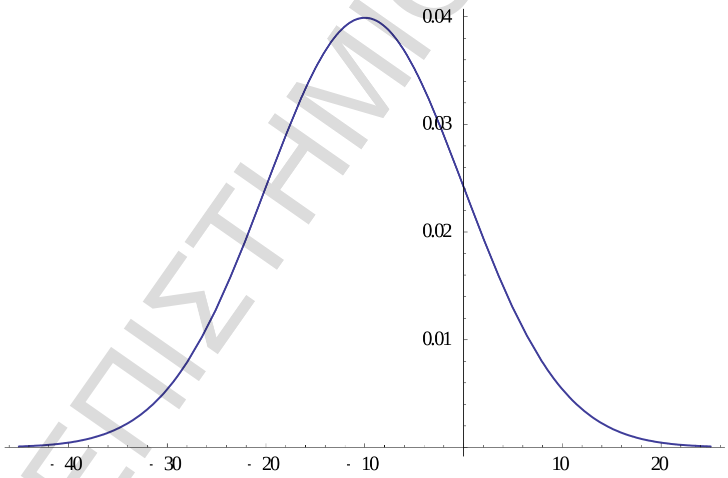
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται εφαρμογές των μέτρων κινδύνου που αναλύθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια με την χρήση του υπολογιστικού λογισμικού Mathematica. Γίνονται τόσο παραμετρικοί υπολογισμοί των μέτρων κινδύνου για γνωστές κατανομές των ζημιών όσο και μη παραμετρικοί υπολογισμοί αυτών.

7.1 Κανονική κατανομή

Υποθέτουμε αρχικά ότι οι ζημιές ακολουθούν κανονική κατανομή, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, έχουν επομένως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Έστω συγκεκριμένα ότι μ=-10 και $\sigma = 10$ με σ.π.π.



οπότε παρακάτω υπολογίζουμε σε επίπεδο σημαντικότητας p_0 = 95%, τα μέτρα κινδύνου που μας ενδιαφέρουν.

Ο υπολογισμός των συγκεκριμένων μέτρων κινδύνου μπορεί να γίνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο για οποιαδήποτε κατανομή *F* της ζημιάς *X*, αλλάζοντας την επιλογή **`NormalDistribution`** που χρησιμοποιούμε στις παρακάτω εντολές, με την *F*.

7.1.1 Ακριβής υπολογισμός των μέτρων κινδύνου

• Υπολογισμός του VaR

Αν συμβολίσουμε με $F_{\mu,\sigma}$ την συνάρτηση κατανομής της $N(\mu,\sigma^2)$ τότε ο υπολογισμός του VaR δίνεται από τον τύπο

$$VaR = F_{\mu,\sigma^2}^{-1}(p_0)$$

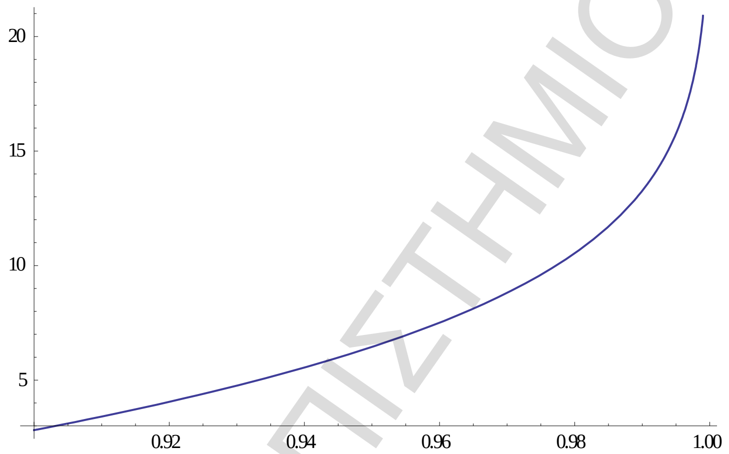
και μέσω του Mathematica για $p_0 = 0.95, \mu = -10, \sigma = 10$,

```
p0=0.95; μ=-10; σ=10; VaR = Quantile[NormalDistribution[μ,σ], p0]
```

```
6.44854
```

Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πως μεταβάλλεται το VaR για διάφορα επίπεδα σημαντικότητας.

```
Plot[Quantile[NormalDistribution[μ,σ],p],{p,0.9,0.999}]
```



Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για την περίπτωση της κανονικής κατανομής ισχύει ότι,

$$P\big(X < VaR(X;p)\big) = p \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{VaR(X;p)-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{VaR(X;p)-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\Leftrightarrow VaR(X;p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p),$$

και επομένως το $VaR(X;p)$ είναι γραμμική συνάρτηση των μ, σ.

• *Υπολογισμός του TVaR*

Υπενθυμίζεται ότι το TVaR δίνεται από τον τύπο,

$$TVaR = \frac{1}{1-p_0}\int_{p_0}^{1} F_{\mu,\sigma^2}^{-1}(p)dp$$

και ο υπολογισμός του μέσω του Mathematica είναι:

`TVaR=(1/(1-p0))*Integrate[Quantile[NormalDistribution[μ,σ],p],{p, p0,1}]`
10.6271

• *Υπολογισμός του CTE*

Υπενθυμίζεται επίσης ότι το CTE δίνεται από τον τύπο,

$$CTE = \frac{1}{1-p_0}\int_{VaR}^{\infty} x f_{\mu,\sigma^2}(p)dp$$

και ο υπολογισμός του μέσω του Mathematica είναι:

`CTE=(1/(1- p0))*Integrate[x*PDF[NormalDistribution[μ,σ],x],{x,VaR,+∞}]`
10.6271

Υπενθυμίζεται ότι, όπως επαληθεύεται και παραπάνω, CTE = TVaR όταν η κατανομή της ζημιάς είναι συνεχής.

• *Υπολογισμός του CVaR*

`CVaR = CTE-VaR`
4.17859

• *Υπολογισμός του ES*

το *ES* θα δίνεται από τον τύπο,

$$ES = \int_{VaR}^{\infty} (x - VaR) f_{\mu,\sigma^2}(p)dp$$

και ο υπολογισμός του είναι:

```
ES = Integrate[(x-VaR)*PDF[NormalDistribution[μ,σ],x],{x,VaR,+∞}]
```

```
0.20893
```

Επαληθεύεται ότι σε αυτή την περίπτωση (που η κατανομή των ζημιών είναι αντιστρέψιμη),

$$ES = CVaR \cdot (1 - p_0) = 4.17859 \cdot 0.05 = \ 0.20893$$

7.1.2 Εκτίμηση των μέτρων κινδύνου από δεδομένα

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίστηκαν τα μέτρα κινδύνου ακριβώς, θεωρώντας ότι η κατανομή της ζημίας είναι γνωστή (π.χ. κανονική με γνωστές παραμέτρους). Στην πράξη όμως η κατανομή της ζημιάς συνήθως δεν είναι γνωστή ή στην καλύτερη περίπτωση θεωρείται γνωστή (π.χ. κανονική) με άγνωστες όμως παραμέτρους. Έχει ενδιαφέρον να δούμε πως σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εκτιμήσουμε τα μέτρα κινδύνου, έχοντας στην διάθεσή μας μόνο ένα δείγμα από την κατανομή της ζημιάς.

Συγκεκριμένα, στη συνέχεια θα δημιουργήσουμε από την παραπάνω κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ ένα δείγμα 1000 παρατηρήσεων και θα εκτιμήσουμε τα μέτρα κινδύνου, πρώτα μη παραμετρικά (VaR1) και μετά παραμετρικά (VaR2), γνωρίζοντας δηλαδή ότι το δείγμα προέρχεται από κανονική κατανομή.

• ***Δημιουργία τυχαίου δείγματος***:

Αρχικά παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα $n = 1000$ παρατηρήσεων $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την $N(\mu, \sigma^2)$:

```
n=1000; μ=-10; σ=10;
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
```

1a) *Μη παραμετρική εκτίμηση του VaR*:

Εκτιμούμε απαραμετρικά το VaR του παραπάνω τυχαίου δείγματος (χωρίς να κάνουμε κάποια υπόθεση για την κατανομή από την οποία προέρχεται):

$$\widehat{VaR_1} = X_{([np_0])}$$

```
SX=Sort[X]; VaR1=SX[[Floor[n*p0]]]
```

```
6.09043
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m = 10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης VaR1 του *VaR*:

```
m = 10000; V1L = Table[0, {m}]; n = 1000;
Do[
 X = Table[RandomReal[NormalDistribution[μ, σ]], {n}];
 SX = Sort[X];
 VaR1 = SX[[Floor[n*p0]]];
 V1L[[i]] = VaR1
 , {i, 1, m}]
Histogram[V1L, Automatic, "PDF"]
Print["Mean = ", Mean[V1L], ",  StDeviation = ",
 StandardDeviation[V1L]]
```


```
Mean = 6.39449,  StDeviation = 0.667094
```

1b) *Παραμετρική εκτίμηση του VaR*:
Σε αυτό το σημείο εκτιμούμε το *VaR* από το παραπάνω δείγμα γνωρίζοντας ότι τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή αλλά όχι και τις παραμέτρους της:

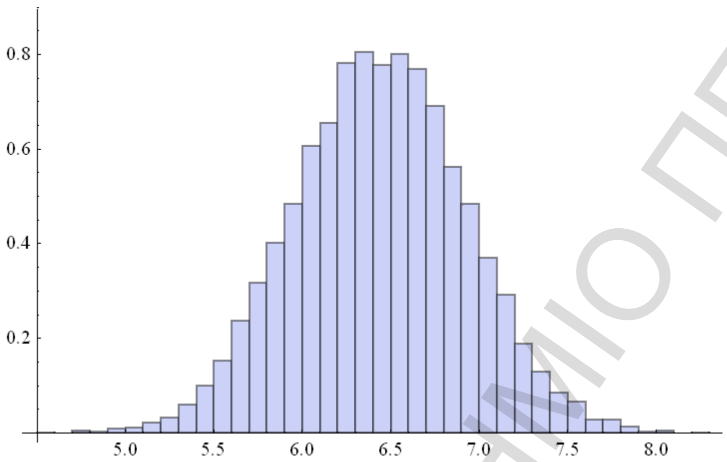
$$VaR = F^{-1}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}^2}(p_0), \qquad \hat{\mu} = \bar{X},\ \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

```
VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0]
```

```
6.188816
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης VaR2 του *VaR*:

```
m=10000;V2L=Table[0,{m}]; n=1000;
Do[
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
 V2L[[i]]=VaR2
 ,{i,1,m}]
Histogram[V2L,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[V2L],",  StDeviation = ",StandardDeviation[V2L]]
```




```
Mean = 6.43721,  StDeviation = 0.483809
```

Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, η παραμετρική εκτίμηση έχει μικρότερη διασπορά.

2a) ***Μη παραμετρική εκτίμηση του CTE:***

Παίρνουμε πάλι το τυχαίο δείγμα και εκτιμούμε το *CTE* απαραμετρικά:

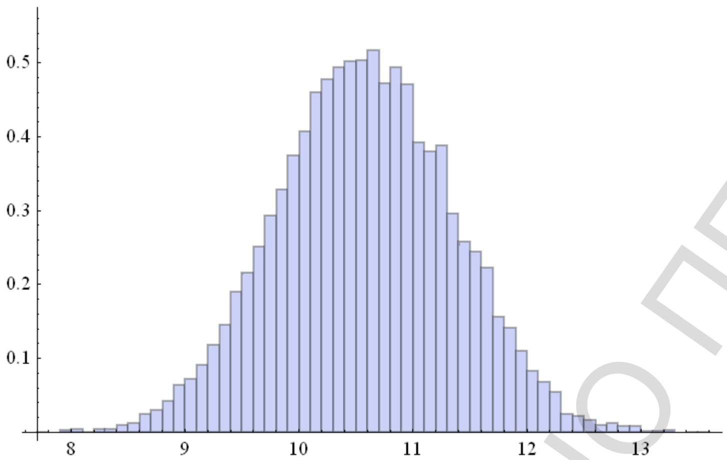
$$\widehat{CTE} = \frac{1}{n(1-p_0)} \sum_{i=[np_0]+1}^{n} X_{(i)}$$

```
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
SX=Sort[X];
CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}]
```

```
10.7255
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης CTE1 του *CTE*:

```
m=10000;CTElist=Table[0,{m}];n=1000;
Do[
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 SX=Sort[X];
 CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
 CTElist[[i]]=CTE1
 ,{i,1,m}]
Histogram[CTElist,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[CTElist],",  StDeviation =
",StandardDeviation[CTElist]]
```




```
Mean = 10.5774,  StDeviation = 0.772897
```

2b) *Παραμετρική εκτίμηση του CTE:*

Με την βοήθεια της παραμετρικής εκτίμησης του *VaR* (VaR2) εκτιμούμε και το *CTE* γνωρίζοντας ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή:

$$\widehat{CTE} = \frac{1}{1-p_0}\int_{\widehat{VaR}}^{\infty} x f_{\hat{\mu},\hat{\sigma}^2}(p)dp$$

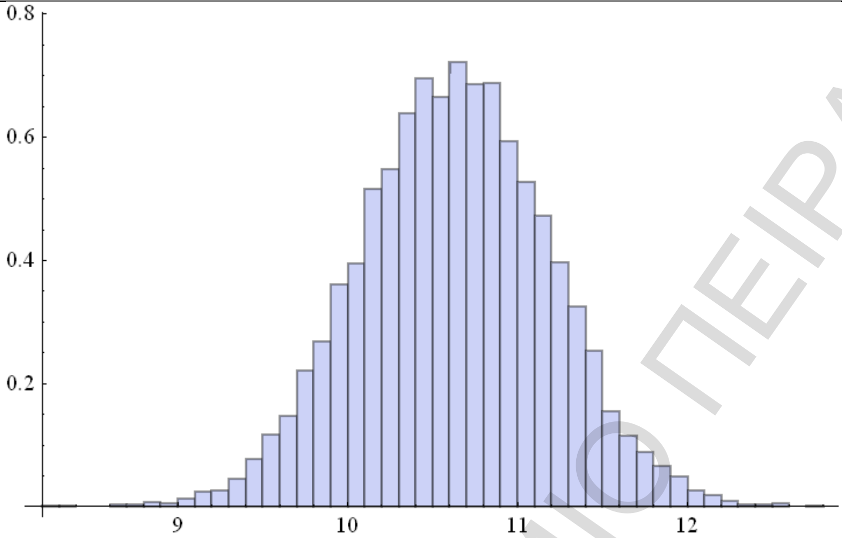
```
VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,V
aR2,Infinity}]
```

```
9.82585
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης CTE2 του CTE:

```
m=10000;CTE2L=Table[0,{m}]; n=1000;
Do[
```

```
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,V
aR2,Infinity}];
 CTE2L[[i]]=CTE2
 ,{i,1,m}]
Histogram[CTE2L,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[CTE2L],",  StDeviation =
",StandardDeviation[CTE2L]]
```




```
Mean = 10.6249,  StDeviation = 0.558795
```

Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η παραμετρική εκτίμηση του CTE έχει μικρότερη διασπορά.

2c) ***Άλλες μη παραμετρικές εκτιμήσεις του CTE:***

Ας υπολογίσουμε σε αυτό το σημείο και κάποιους άλλους μη παραμετρικούς εκτιμητές του *CTE*. Ο εκτιμητής των Inui and Kijima (CTE1ik) για n=1000 είναι ίδιος με τον παραπάνω εκτιμητή του *CTE*. Έστω όμως ότι παίρνουμε ένα δείγμα 1001 παρατηρήσεων έτσι ώστε η ποσότητα $N(1-p)$ να μην είναι ακέραιος. Με το ίδιο δείγμα θα υπολογίσουμε και τους εκτιμητές του Chen (CTE1c) και των Peracchi and Tanase (CTE1pt).

- *Ο εκτιμητής των Inui and Kijima*

$$\widehat{CTE[X;p]} = \begin{cases} \bar{X}_{k:N}, & \text{αν } Np \text{ είναι ακέραιος} \\ a\bar{X}_{k:N} + (1-a)\bar{X}_{k+1:N}, & \text{αν } Np \text{ δεν είναι ακέραιος} \end{cases}$$

```
n=1001;
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
SX=Sort[X];
```

```
k=Floor[n*p0];
a=n*p0-k
CTE1ik=a*(1/(n-k))*Sum[SX[[i]],{i,k,n}]+(1-a)*(1/(n-
k+1))*Sum[SX[[i]],{i,k+1,n}]
```

```
10.4684
```

- *Ο εκτιμητής του Chen*

$$\widehat{CTE[X;p]} = \frac{1}{1+[N(1-p)]}\sum_{i=1}^{N} X_i I(X_i \geq X_{([Np]+1)})$$

```
CTE1c=(1/(1+Floor[n*(1-p0)]))*Sum[SX[[i]]*If[SX[[i]]
>=SX[[Floor[n*p0]+1]],1,0],{i,1,n}]
```

```
10.5465
```

- *Ο εκτιμητής των Peracchi and Tanase*

$$\widehat{CTE[X;p]} = \frac{1}{N(1-p)}\sum_{i=[Np]+1}^{N} X_{(i)} + (1-\frac{[Np]}{Np})X_{([Np])}$$

```
CTE1pt=(1/(n*(1-p0)))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0]+1,n}]+(1-
Floor[n*p0]/(n*p0))*SX[[Floor[n*p0]]]
```

```
10.8459
```

3a) *Μη Παραμετρική Εκτίμηση του ES:*

Η μη παραμετρική εκτίμηση του *ES* γίνεται στηριγμένη στον εκτιμητή (VaR1) του *VaR* και στον κλασικό εκτιμητή για το *CTE* (CTE1) με την βοήθεια των σχέσεων (6.1) και (6.2):

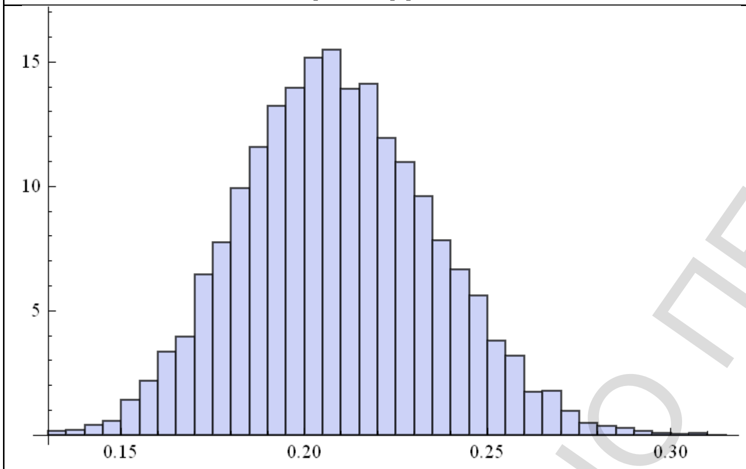
$$ES = (1-p)(CTE[X;p] - VaR[X;p])$$

```
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
SX=Sort[X];
VaR1=SX[[Floor[n*p0]]];
CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
ES1=(1-p0)*(CTE1-VaR1)
```

```
0.193018
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης ES1 του *ES:*

```
m = 10000; ES1L = Table[0, {m}]; n = 1000;
Do[
 X = Table[RandomReal[NormalDistribution[μ, σ]], {n}];
 SX = Sort[X];
 VaR1 = SX[[Floor[n*p0]]];
 CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
ES1=(1-p0)*(CTE1-VaR1);
 ES1L[[i]] = ES1
 , {i, 1, m}]
Histogram[ES1L, Automatic, "PDF"]
Print["Mean = ", Mean[ES1L], ",  StDeviation = ",
 StandardDeviation[ES1L]]
```




```
Mean = 0.209136,  StDeviation = 0.026386
```

3b) *Παραμετρική εκτίμηση του ES*:

Με την βοήθεια των παραμετρικών εκτιμήσεων του *VaR*(VaR2) και του *CTE*(CTE2) εκτιμούμε και το *ES*:

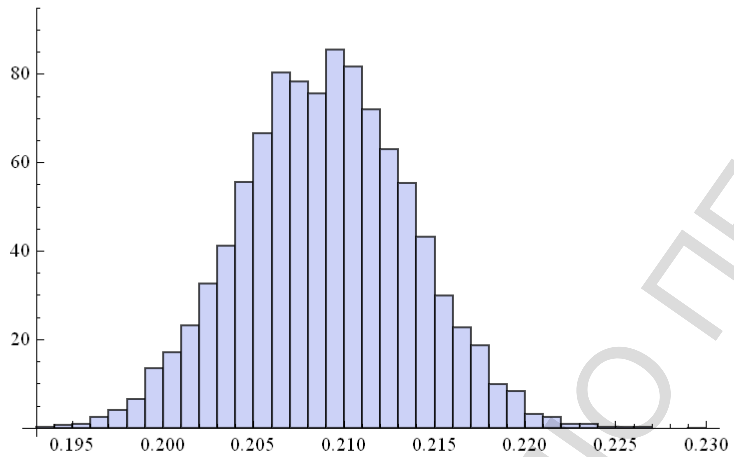
```
VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,VaR2,Infinity}];
ES2=(1-CDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],VaR2])*(CTE2-VaR2)
```

```
0.206076
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης ES2 του *ES*:

```
m=10000;ES2L=Table[0,{m}]; n=1000;
Do[
```

```
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,VaR2,Infinity}];
ES2=(1-CDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],VaR2])*(CTE2-VaR2);
 ES2L[[i]]=ES2
 ,{i,1,m}]
Histogram[ES2L,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[ES2L],",  StDeviation = ",StandardDeviation[ES2L]]
```




```
Mean = 0.208978,  StDeviation = 0.00470523
```

4a) ***Μη Παραμετρική Εκτίμηση του TVaR:***

Η μη παραμετρική εκτίμηση του TVaR γίνεται με την βοήθεια του μη παραμετρικού εκτιμητή του *VaR*(VaR1), του κλασικού εκτιμητή για το *CTE* (CTE1) και του εκτιμητή του *ES*(ES1) με τη χρήση της σχέσης (3.3):

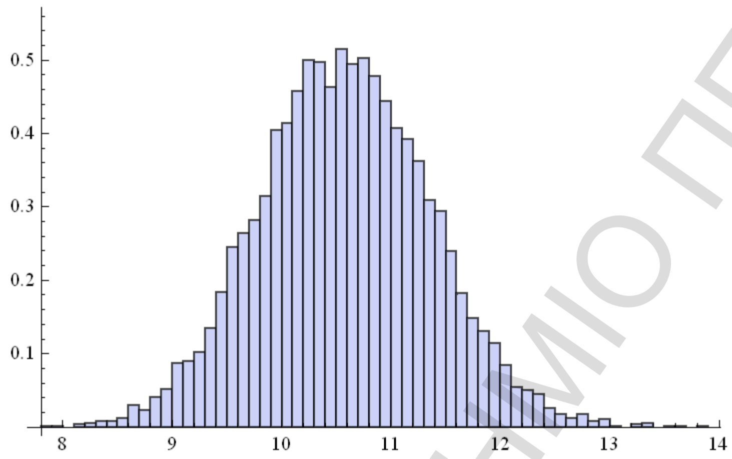
$$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p} ES[X;p]$$

```
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
SX=Sort[X];
VaR1=SX[[Floor[n*p0]]];
CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
ES1=(1-p0)*(CTE1-VaR1);
TVaR1=VaR1+(1/(1-p0))*ES1
```

```
10.6828
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης TVaR1 του *TVaR:*

```
m = 10000; TVaR1L = Table[0, {m}]; n = 1000;
Do[
 X = Table[RandomReal[NormalDistribution[μ, σ]], {n}];
 SX = Sort[X];
 VaR1 = SX[[Floor[n*p0]]];
 CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
ES1=(1-p0)*(CTE1-VaR1);
TVaR1=VaR1+(1/(1-p0))*ES1;
 TVaR1L[[i]] = TVaR1
 , {i, 1, m}]
Histogram[TVaR1L, Automatic, "PDF"]
Print["Mean = ", Mean[TVaR1L], ",  StDeviation = ",
 StandardDeviation[TVaR1L]]
```




```
Mean = 10.5781,  StDeviation = 0.77721
```

4b) *Παραμετρική εκτίμηση του TVaR*:
Με την βοήθεια των παραμετρικών εκτιμήσεων του *VaR*(VaR2), του *CTE*(CTE2) και του *ES*(ES1) εκτιμούμε το *TVaR*:

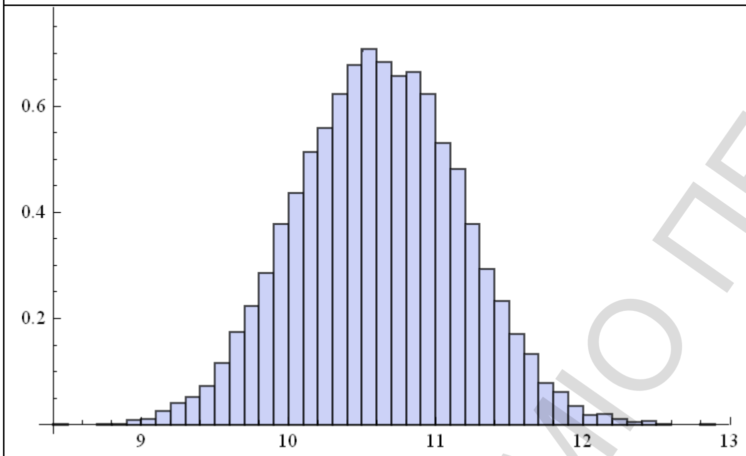
```
VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,VaR2,Infinity}];
ES2=(1-CDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],VaR2])*(CTE2-VaR2);
TVaR2=VaR2+(1/(1-p0))*ES2
```

```
10.0421
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης TVaR2 του *TVaR*:

```
m=10000;TVaR2L=Table[0,{m}]; n=1000;
```

```
Do[
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,VaR2,Infinity}];
ES2=(1-CDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],VaR2])*(CTE2-VaR2);
TVaR2=VaR2+(1/(1-p0))*ES2;
  TVaR2L[[i]]=TVaR2
 ,{i,1,m}]
Histogram[TVaR2L,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[TVaR2L],",  StDeviation = ",StandardDeviation[TVaR2L]]
```




```
Mean = 10.613,  StDeviation = 0.556957
```

5a) *Μη Παραμετρική Εκτίμηση του CVaR:*

Η μη παραμετρική εκτίμηση του CVaR γίνεται με την βοήθεια του μη παραμετρικού εκτιμητή του *VaR*(VaR1) και του κλασικού εκτιμητή για το *CTE* (CTE1) με τη χρήση της σχέσης (3.2):

$$CVaR[X;p] = CTE[X;p] - VaR[X;p]$$

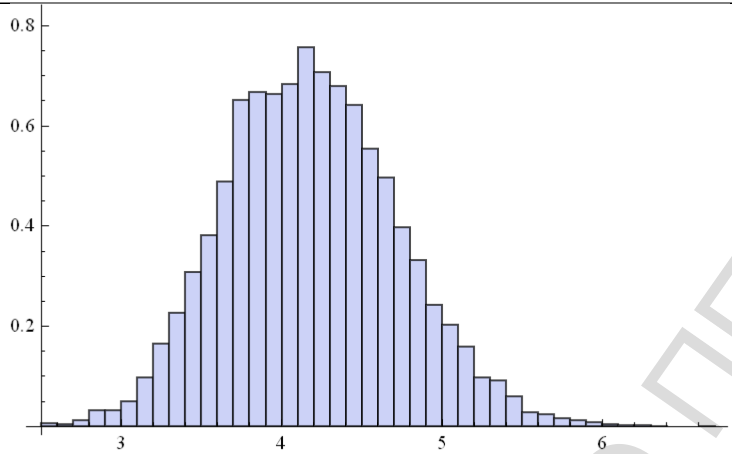
```
X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
SX=Sort[X];
VaR1=SX[[Floor[n*p0]]];
CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
CVaR1=CTE1-VaR1
```

```
3.99305
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης CVaR1 του *CVaR:*

```
m = 10000; CVaR1L = Table[0, {m}]; n = 1000;
Do[
```

```
 X = Table[RandomReal[NormalDistribution[μ, σ]], {n}];
 SX = Sort[X];
 VaR1 = SX[[Floor[n*p0]]];
 CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}];
CVaR1=CTE1-VaR1;
CVaR1L[[i]] = CVaR1
 , {i, 1, m}]
Histogram[CVaR1L, Automatic, "PDF"]
Print["Mean = ", Mean[CVaR1L], ",  StDeviation = ",
 StandardDeviation[CVaR1L]]
```




```
Mean = 4.18783,  StDeviation = 0.536765
```

5b) *Παραμετρική εκτίμηση του CVaR*:

Με την βοήθεια των παραμετρικών εκτιμήσεων του *VaR*(VaR2) και του *CTE*(CTE2) εκτιμούμε και το *CVaR*:

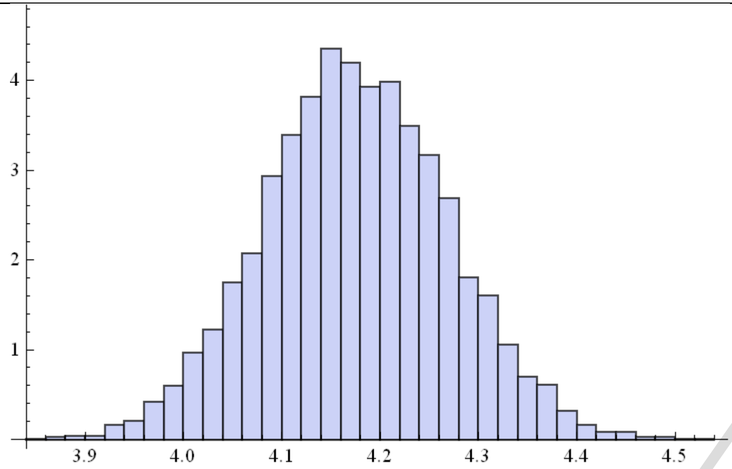
```
VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,V
aR2,Infinity}];
CVaR2=CTE2-VaR2
```

```
4.1301
```

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία m=10000 φορές τότε παίρνουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης CVaR2 του *CVAR*:

```
m=10000;CVaR2L=Table[0,{m}]; n=1000;
Do[
 X=Table[RandomReal[NormalDistribution[μ,σ]],{n}];
 VaR2=Quantile[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],p0];
CTE2=(1/(1-p0))
*NIntegrate[x*PDF[NormalDistribution[Mean[X],Variance[X]^0.5],x],{x,V
aR2,Infinity}];
CVaR2=CTE2-VaR2;
```

```
 CVaR2L[[i]]=CVaR2
 ,{i,1,m}]
Histogram[CVaR2L,Automatic,"PDF"]
Print["Mean = ",Mean[CVaR2L],",  StDeviation =
",StandardDeviation[CVaR2L]]
```




```
Mean = 4.17534,  StDeviation = 0.0935531
```

Πίνακας 1:Συγκεντρωτικά αποτελέσματα των μέτρων κινδύνου για την κανονική κατανομή

	VaR	CTE	ES	TVaR	CVaR
N(-10,10)	6,44854	10,6271	0,20893	10,6271	4,17859
Μέσος Όρος Μη Παραμετρικών Εκτιμήσεων (Τυπ. Απόκλιση)	6,39449 (0,66709)	10,5774 (0,77289)	0,209136 (0,02638)	10,5781 (0,77721)	4,18783 (0,53676)
Μέσος Όρος Παραμετρικών Εκτιμήσεων (Τυπ. Απόκλιση)	6,43721 (0,48381)	10,6249 (0,55879)	0,208978 (0,00470)	10,631 (0,55695)	4,17534 (0,09355)

Παρατηρούμε ότι οι παραμετρικές εκτιμήσεις είναι πιο κοντά στις πραγματικές τιμές των μέτρων κινδύνου και κυρίως έχουν πολύ μικρότερες διακυμάνσεις από τις μη παραμετρικές εκτιμήσεις.

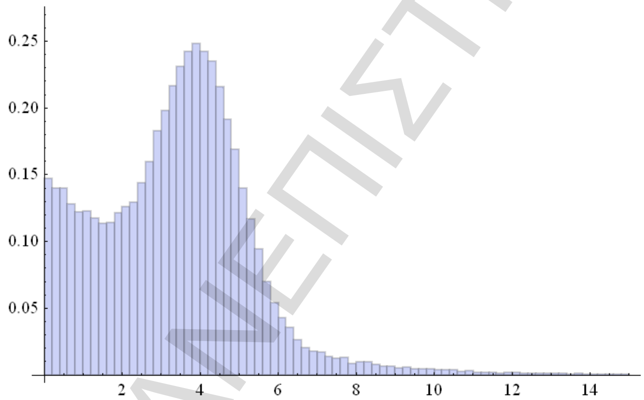
7.1.3 Εκτίμηση των *VaR* και *CTE* από μίξη κατανομών

Υποθέτουμε ότι κατέχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από τρεις ασφαλισμένους κινδύνους. Μια απαίτηση από τον πρώτο ακολουθεί Γάμμα κατανομή $X_1 \sim Gamma(1,2)$, μια απαίτηση από τον δεύτερο $X_2 \sim Gamma(2,2)$ και μια απαίτηση από τον τρίτο ακολουθεί Κανονική κατανομή $X_3 \sim N(4,1)$. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι μια τυχαία απαίτηση από το χαρτοφυλάκιο αυτό προέρχεται από τον πρώτο κίνδυνο με πιθανότητα p_1, από τον δεύτερο με p_2, και από τον τρίτο με $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Εκτιμούμε το VaR μιας απαίτησης από το χαρτοφυλάκιο μέσω προσομοίωσης (παράγουμε 100000 τυχαίες απαιτήσεις ζημίας):

```
n = 100000;
X = Table[0, {n}];
p1 = 0.3; p2 = 0.2; p3 = 1-p1-p2;
Do[
 U=RandomReal[];
 I1 = Boole[U < p1];
 X1 = I1*RandomReal[GammaDistribution[1, 2]];

 I2 = Boole[(p1<U)&& (U < p1+p2)];
 X2 = I2*RandomReal[GammaDistribution[2, 2]];

 I3 = Boole[U > p1+p2];
 X3 = I3*RandomReal[NormalDistribution[4, 1]];

 X[[i]] = X1 + X2 + X3;

 , {i, 1, n}]
Histogram[X, {0, 15, 0.2}, "PDF"]
SX = Sort[X];
VaR3k=SX[[Floor[n*p0]]]
```

```
6.39371
```

Η κατανομή μιας απαίτησης ζημίας από αυτό το χαρτοφυλάκιο έχει την μορφή (πρόκειται για μίξη των τριών κατανομών):




```
CTE3k=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,n*p0+1,n}]
```

```
8.60873
```

7.1.4 Εκτίμηση των *VaR* και *CTE* από σύνθετο χαρτοφυλάκιο

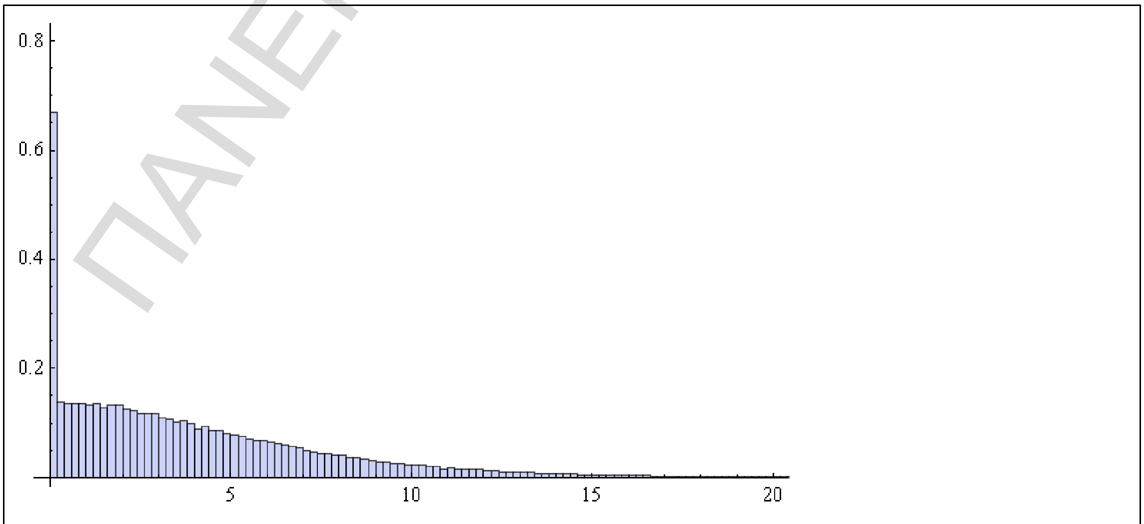
Έστω τώρα ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με k = 10 ασφαλισμένους κινδύνους, ο καθένας από τους οποίους θα οδηγήσει σε απαίτηση (μέσα σε ένα έτος) με πιθανότητα p = 0.2 ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Η κατανομή μιας τέτοιας απαίτησης ακολουθεί Γάμμα κατανομή, δηλ. $X_i \sim Gamma(1,2)$. Εκτιμούμε το ετήσιο VaR του συνόλου των απαιτήσεων ζημίας του χαρτοφυλακίου

$$S = \sum_{i=1}^{k} I_i X_i, \quad I_i \sim Be(p)$$

χρησιμοποιώντας ένα προσομοιωμένο δείγμα 100000 συνολικών απαιτήσεων ζημιάς S.

```
n = 100000; k = 10;
X = Table[0, {n}]; p = 0.2;
Do[
   S = 0;
  Do[

   I0 = Boole[RandomReal[] < p];
   X0 = I0*RandomReal[GammaDistribution[1, 2]];
   S = S + X0;
   , {j, 1, k}];
    X[[i]] = S;
    , {i, 1, n}];
SX = Sort[X];
Histogram[X, Automatic, "ProbabilityDensity",
 PlotRange -> {{0, 20}, {0, 0.75}}]
VaR10k=SX[[Floor[n*p0]]]

CTE10k=1/(n(1-p0))*Sum[SX[[i]],{i,n*p0+1,n}]
```

Η κατανομή μιας απαίτησης ζημίας από αυτό το χαρτοφυλάκιο των 10 ανεξάρτητων κινδύνων έχει την μορφή που δείχνει το παρακάτω ιστόγραμμα:



VaR Χαρτοφυλακίου
11.4425

CTE Χαρτοφυλακίου
14.5522

7.2 Εκτίμηση μέτρων κινδύνου σε ένα μοντέλο Compound Poisson

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των ζημιών N μιας χρονικής περιόδου σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων κινδύνων ακολουθεί Poisson κατανομή και το ύψος τον ζημιών X_i ακολουθεί μια οποιαδήποτε κατανομή.

Αν π.χ. οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Γάμμα τότε θα παρατηρούνται λεπτές δεξιές ουρές λόγω των μικρών ζημιών που παρουσιάζονται ενώ αν π.χ. ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή θα υπάρχουν κάποιες μεγάλες απώλειες που επισκιάζουν τις πολλές μικρότερες με αποτέλεσμα να δημιουργούνται παχιές ουρές στις ακραίες τιμές της κατανομής.

Έστω

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

η συνολική απώλεια, $F(z)$ η συνάρτηση κατανομής και $f(z)$ η συνάρτηση πιθανότητας της Z.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων για τον υπολογισμό της κατανομής της συνολικής απώλειας. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών συναρτήσεων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κατανομών της συνολικής απώλειας στον τομέα των ασφαλίσεων, του λειτουργικού κινδύνου και του πιστωτικού κινδύνου. Η μίξη κατανομών δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή, αλλά μπορεί να εκφραστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ των X_i ορίζεται ως:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η μονάδα των φανταστικών αριθμών. Επίσης, η πιθανογεννήτρια της κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας $p_k = \Pr[N = k]$ είναι

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$$

Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνολικής απώλειας Z μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια των παραπάνω συναρτήσεων ως

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(t))^k p_k = \psi(\varphi(t))$$

Στην περίπτωση μας που η συχνότητα των ζημιών ακολουθεί κατανομή Poisson, $N \sim Poisson(\lambda)$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνολικής απώλειας είναι

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(t))^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \exp\left(\lambda\varphi(t) - \lambda\right)$$

Γνωρίζοντας την χαρακτηριστική συνάρτηση, η συνάρτηση πυκνότητας της συνολικής απώλειας Z μπορεί να υπολογιστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ως:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) \exp(-itz)\, dt\,, \qquad z \geq 0$$

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier για μιγαδικούς αριθμούς όμως είναι πολύ δύσκολη και το υπολογιστικό λογισμικό Mathematica δεν μπορεί να δώσει αποτέλεσμα. Στην περίπτωση όμως θετικής συνάρτησης με πεπερασμένη μέση τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Laplace ο οποίος είναι απλούστερος του μετασχηματισμού Fourier.

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $t \geq 0$, και είναι μια συνάρτηση $L(s)$, η οποία ορίζεται ως:

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

όπου $s > 0$ είναι μιγαδικός αριθμός της μορφής $s = \sigma + i\omega$ με σ και ω πραγματικούς αριθμούς. Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας f, τότε μπορεί να βρεθεί και η ίδια η f ή η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής F μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (που είναι αντίστοιχος του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier), ή εναλλακτικά μπορεί να βρεθεί μέσω του ορίου:

$$F(t) = \lim_{T \to \infty} \sum_{k \leq Tx} \frac{(-t)^k}{k!} L^{(k)}(t)$$

όπου $L^{(k)}$ είναι η παράγωγος k-τάξης της L.

Γενικά οι μίξεις κατανομών δεν μπορούν να παρασταθούν σε κλειστή μορφή. Όμως μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές τους.

Πρόταση 7.1. Οι πρώτες ροπές της μίξης τυχαίας μεταβλητής $Z = X_1 + \cdots + X_N$, όπου $X_1, \dots, X_N$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες της τ.μ. N υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$E[Z] = E[N]E[X_1]$$

$$Var[Z] = E[N]VaR[X_1] + VaR[N](E[X_1])^2$$

Στην περίπτωση της Compound Poisson, $N \sim Poisson(\lambda)$, και επειδή $E[N] = \lambda$ και $Var[N] = \lambda$, η μέση τιμή και η διακύμανση γίνονται:

$$E[Z] = \lambda E[X_1]$$

$$Var[Z] = \lambda VaR[X_1] + \lambda(E[X_1])^2 = \lambda(E[X_1^2] - (E[X_1])^2) + \lambda(E[X_1])^2 = \lambda E[X_1^2]$$

Ας δούμε τώρα πως υπολογίζονται τα μέτρα κινδύνου της συνολικής απώλειας Z. Το $VaR[Z;p]$ της συνολικής απώλειας υπολογίζεται ως η αντίστροφη της μίξης κατανομής

$$VaR[Z;p] = H^{-1}(p) = inf\{z \in \mathbb{R} : \Pr[Z > z] \leq 1 - p\}$$

Η δεσμευμένη προσδοκία ουράς $CTE[Z;p]$, υποθέτοντας ότι $VaR[Z;p]$ είναι θετικό, είναι:

$$CTE[Z;p] = E\left[Z \middle| Z \geq VaR[Z;p]\right]$$

$$= \frac{1}{1 - H(VaR[Z;p])} \int_{VaR[Z;p]}^{\infty} zh(z)\, dz$$

$$= \frac{E[Z]}{1 - H(VaR[Z;p])} - \frac{1}{1 - H(VaR[Z;p])} \int_{0}^{VaR[Z;p]} zh(z) dz$$

Τα υπόλοιπα μέτρα κινδύνου υπολογίζονται μέσω αυτών και των σχέσεων που τα συνδέουν(βλ.παρ.3.4.4).

7.2.1 Compound Poisson με Γάμμα κατανομή

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα υπολογίσουμε τα μέτρα κινδύνου στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή Γάμμα. Με τον ίδιο όμως τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα κινδύνου για σχεδόν οποιαδήποτε κατανομή των αποζημιώσεων.

Έστω ότι το πλήθος των ζημιών N μιας χρονικής περιόδου σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων κινδύνων ακολουθεί Poisson κατανομή, $N{\sim}Poisson(\lambda)$ με $\lambda = 10$, και το ύψος τον ζημιών X_i ακολουθεί Γάμμα κατανομή, $X_i{\sim}Gamma(a = 2, \mu = 2)$. Τα μέτρα κινδύνου υπολογίζονται στη συνέχεια με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. Επειδή δεν είναι εύκολη η ακριβής αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο αριθμητικής αντιστροφής που, δεδομένης της L, επιστρέφει την αριθμητική τιμή της $f(t)$ για συγκεκριμένη τιμή του t. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο (function FT) από τη βιβλιοθήκη του Mathematica (Peter Valkó and Joe Abate):

http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/5026/,

Η συνάρτηση FT συγκεκριμένα είναι:

```
(*Laplace Transform Inversion function*)
FT[F_, t_, M_:32]:=
     Module[{np, r, S, theta, sigma},
      np = Max[M, $MachinePrecision];
      r = SetPrecision[2M/(5t), np];
      S = r theta (Cot[theta] + I);
      sigma = theta + (theta Cot[theta] - 1)Cot[theta];
      (r/M)Plus @@ Append[Table[Re[Exp[t S](1 + I sigma)F[S]],
                  {theta, Pi/M, (M - 1)Pi/M, Pi/M}],
                     (1/2) Exp[r t] F[r]]
      ]
```

Ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης Poisson με συνθέτουσα Gamma(a, μ) είναι

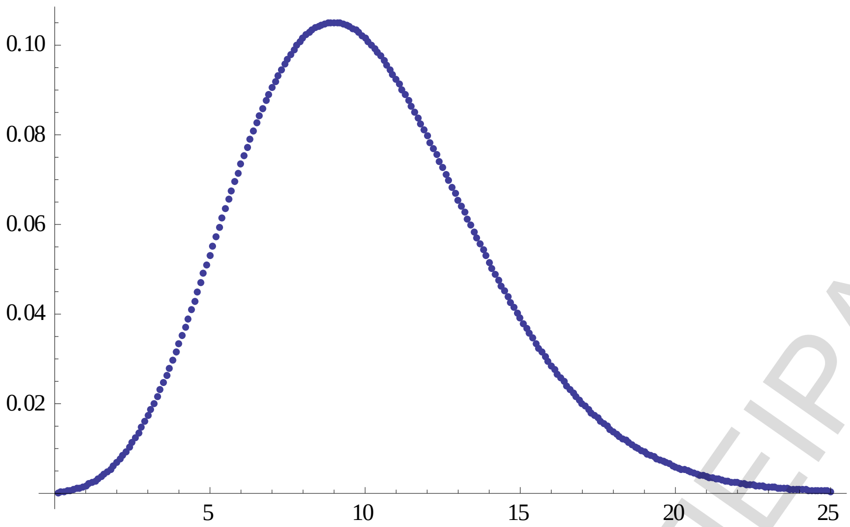
$$L(t) = E(e^{-tZ}) = E\left(e^{-t\sum_{j=1}^{N} X_j}\right) = E\left(E\left(e^{-t\sum_{j=1}^{N} X_j}|N\right)\right) = E(E(e^{-tX_1})^N)$$

$$= E\left(\left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^{aN}\right) = e^{\lambda\left(\frac{\mu}{\mu+t}\right)^{a}-\lambda}$$

Έπειτα υπολογίζουμε την σ.π.π. $f(t)$ της Compound Poisson κατανομής, για $t = 0.1, 0.2, \dots, 25$, αντιστρέφοντας την παραπάνω L

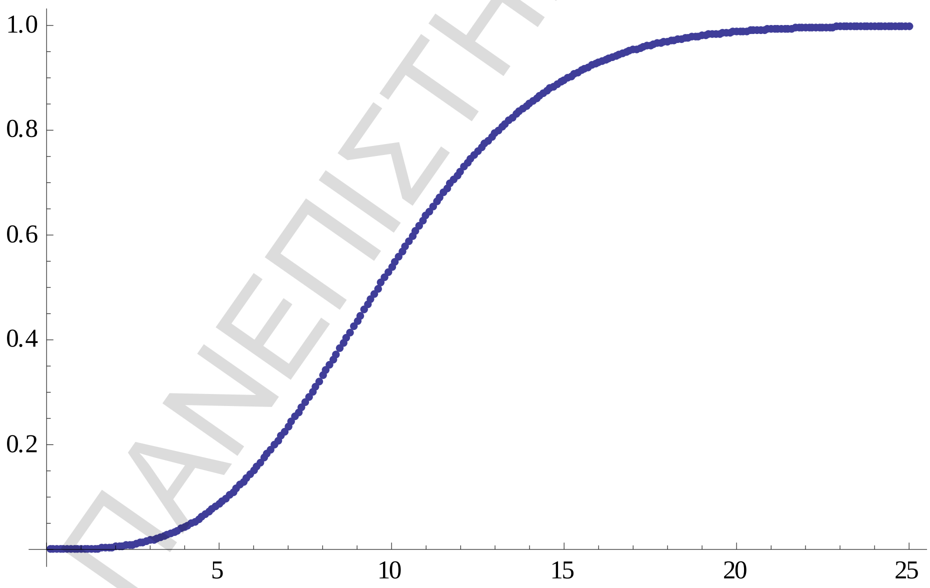
```
(*CP(λ=10) with Gamma(2,2) claims, Laplace Transform Inversion*)
λ=10;μ=2;a=2;
```

```
fun[x_]=Exp[λ((μ/(μ+x))^a-1)];
step=0.1;
ft=Table[{t,FT[fun,t]},{t,0.1,25,step}];
pl1=ListPlot[ft]
```



Από τα παραπάνω σημεία της $\boldsymbol{f(t)}, \boldsymbol{t = 0.1, 0.2, \ldots, 25}$ υπολογίζουμε (προσεγγιστικά) την σ.κ. $\boldsymbol{F(x)}$ της συνολικής αποζημίωσης $\boldsymbol{Z}$:

```
(*Calculation of CDF from inverted PDF*)
CDFt=Table[{ft[[k,1]],Sum[ft[[i,2]],{i,1,k}]*step},{k,1,Length[ft]}];
ListPlot[CDFt]
```



<u>Υπολογισμός *VaR*</u>

Ο (προσεγγιστικός) υπολογισμός του VaR τώρα γίνεται μέσω του ποσοστημορίου ($p_0 = 95\%$) της συνάρτησης κατανομής που υπολογίστηκε στα προηγούμενα βήματα χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

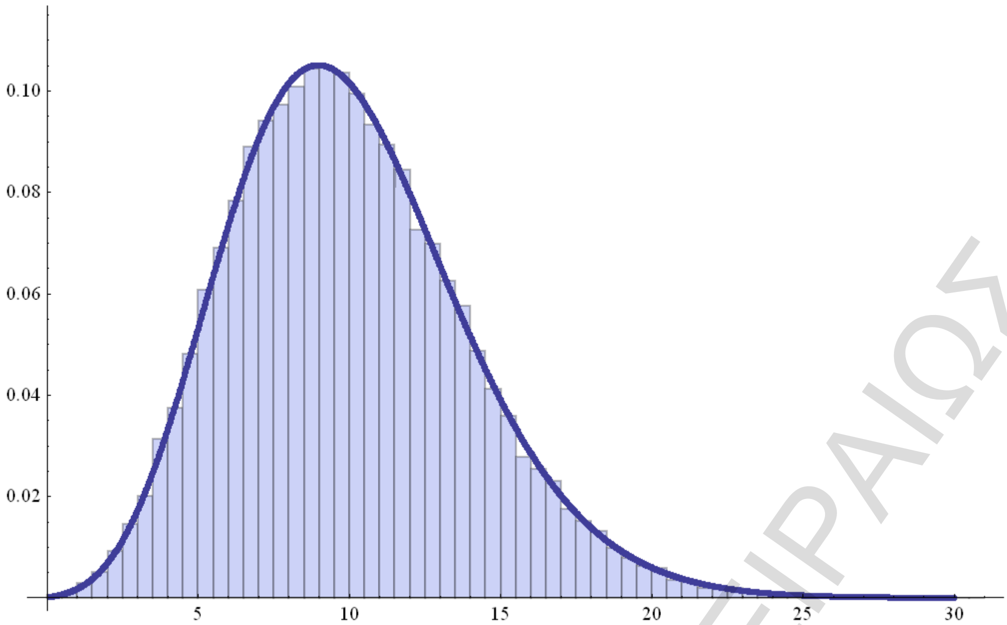
```
p0=0.95; k=1; While[CDFt[[k,2]]<p0,k++];
Print["Approximated VaR(",p0,")=",CDFt[[k,1]]]
```

```
Approximated VaR(0.95)=16.9
```

<u>Εκτίμηση *VaR* μέσω προσομοίωσης</u>

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίστηκε (προσεγγιστικά) το VaR του χαρτοφυλακίου (δηλ. της κατανομής της συνολικής αποζημίωσης Z) μέσω της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace. Ενας δεύτερος εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης του VaR είναι μέσω προσομοίωσης. Συγκεκριμένα, παράγουμε πρώτα το πλήθος N των αποζημιώσεων (από την Poisson (λ)), στη συνέχεια παράγουμε τις αποζημιώσεις $X_1, X_2, \dots, X_N$ (από την Γάμμα (a, μ)) και τελικά υπολογίζουμε την συνολική αποζημίωση $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Αυτό επαναλαμβάνεται $n = 50000$ φορές οπότε λαμβάνουμε n τυχαία αντίγραφα της Z. Από το δείγμα αυτό κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα που προσεγγίζει την πυκνότητα της συνολικής αποζημίωσης και το συγκρίνουμε με την πυκνότητα που βρέθηκε μέσω του μετασχηματισμού Laplace. Τέλος, από το ίδιο δείγμα εκτιμάται και το VaR.

```
n=50000;SL=Table[0,{n}];
Do[
  M=RandomInteger[PoissonDistribution[λ]];
  S=Sum[RandomReal[GammaDistribution[a,1/μ]],{M}];
  SL[[i]]=S
  ,{i,1,n}];
pl2=Histogram[SL,Automatic,"ProbabilityDensity"];
Show[pl2,pl1]
SSL=Sort[SL];
Print["Estimated VaR(",p0,")=",SSL[[Floor[n*p0]]]]
```




```
Estimated VaR(0.95)=16.8763
```

Όπως ήταν αναμενόμενο, το ιστόγραμμα των εκτιμώμενων συχνοτήτων από την προσομοίωση είναι πολύ κοντά στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που προέκυψε από τον μετασχηματισμό Laplace.

<u>Υπολογισμός *CTE*</u>

Ο υπολογισμός του CTE αρχικά θα γίνει μέσω της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης της f :

$$\widehat{CTE} = \frac{1}{(1-p_0)} \int_{\widehat{VaR}}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{(1-p_0)} \sum_{i \geq k} x_i f(x_i) \cdot step$$

Όπου το k είναι τέτοιο ώστε `VaR = CDFt[[k,1]]` (βλ. παραπάνω).

```
k=1; While[CDFt[[k,2]]<p0,k++];
CTE1 = 1/(1 - p0)*Sum[ft[[i, 1]]*ft[[i, 2]]*step, {i, k, Length[ft]}]
```

```
18.9588
```

Ο υπολογισμός του CTE επίσης μπορεί εναλλακτικά να γίνει και μέσω προσομοίωσης (δηλαδή από το προσομοιωμένο δείγμα $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$:

$$\widehat{CTE} = \frac{1}{n(1-p_0)} \sum_{i=[np_0]+1}^{n} Z_{(i)}$$

`CTE1=1/(n(1-p0))*Sum[SSL[[i]],{i,Floor[n*p0+1],n}]`
`19.0488`

Αν μειώσουμε το βήμα (step) κατά την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και αυξήσουμε τις επαναλήψεις n της προσομοίωσης θα έχουμε καλύτερη εκτίμηση του CTE με τις δύο παραπάνω μεθόδους αντίστοιχα.

Για παράδειγμα αν υπολογίσουμε μέσω της αντιστροφής τις τιμές $f(t), t = 0.01, 0.02, \dots, 30$ τότε όμοια με παραπάνω βρίσκουμε ότι $\widehat{CTE} = 19.0485$. Επίσης αν πάρουμε $n = 200000$ τότε βρίσκουμε όμοια μέσω προσομοίωσης ότι $\widehat{CTE} = 19.0506$. Οι τιμές αυτές είναι πιο κοντά στην πραγματική και επομένως είναι πιο κοντά και μεταξύ τους.

Τέλος, ο υπολογισμός ή εκτίμηση των υπόλοιπων μέτρων κινδύνου (ES, TVaR, CVaR) γίνεται μέσω του VaR και του CTE που έχουμε ήδη υπολογίσει, όπως σε παραπάνω παραδείγματα.

Βιβλιογραφία

Acerbi C. (2002), Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking and Finance* **26**, 1505-1518.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., and Heath D. (1999). Coherent risk measures. *Mathematical Finance* **9**, 203–228.

Barrois T. (1834). *Essai sur l'Application du Calcul des Probabilit´es aux Assurances contre l'Incendie*. Daniel, Lille.

Bernoulli D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **5**, 175–192. (Translated as 'Expositions of a new theory on the measurement of risk' in *Econometrica* 22, 23–46.)

Borch K. (1974). *The Mathematical Theory of Insurance*. D.C. Heath and Co., Lexington, MA.

Borch K. (1990). *Economics of Insurance*. North-Holland, Amsterdam

Buhlmann H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.

Chen S. X. (2008). Nonparametric estimation of expected shortfall. *Journal of Financial Econometrics*, **6**, 87-107.

Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models.* John Wiley & Sons, Ltd.

Dhaene J., Goovaerts M.J., and Kaas R. (2003). Economic capital allocation derived from risk measures. *North American Actuarial Journal* **7**, 44–59.

Embrechts P., McNeil A., and Straumann D. (2002). Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (eds M. Dempster and H. Moffatt). Cambridge University Press, Cambridge.

Follmer, H., and Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics* **6**, 429–447.

Gerber H.U. (1974) The dilemma between dividends and safety and a generalization of the Lundberg-Cramer formulas. *Scand. Actuarial J.*, 46-57

Goovaerts M.J., De Vijlder F., and Haezendonck J. (1982). Ordering of risks: a review. *Insurance: Mathematics & Economics* **1**, 131–163.

Goovaerts M.J., De Vijlder F.E., and Haezendonck J. (1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications*. North-Holland, Amsterdam.

Hardy G.H. (1952). *A Course of Pure Mathematics.* Cambridge Mathematic Library.

Hardy M. (2006). *An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications*. Education and Examination Committee of the Society of Actuaries.

Huang, C., and Litzenberger, R.H. (1988). *Foundations for Financial Economics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Inui K., and Kijima M. (2005). On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure. *Journal of Banking and Finance* **29**, 853-864.

Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., and Denuit M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Klugman S.A., Panjer H.H., and Willmot G.E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions.* 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons

Kusuoka S. (2001). On law invariant coherent risk measures. *Advances in Mathematical Economics* **3**, 83–95.

Manistre J., and Hancock G. (2005). *Variance of the CTE estimator.* North American Actuarial Journal, Vol.9, No.2, 129-156.

Markowitz H.M. (1959). *Portofolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* New York: Wiley.

Panjer H.H. (ed.) (1998). *Financial Economics, with Applications to Investments, Insurance and Pensions*. Actuarial Foundation, Schaumburg, IL.

Peracchi F., Tanase A.V., 2008. On estimating the conditional expected shortfall. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **24**, 471-493.

Rootzen H., and Kluppelberg C. (1999). A single number cannot hedge against economic catastrophes. *Ambio-Royal Swedish Academy of Science* 8, 550–555.

Schmidt U. (1998). *Axiomatic Utility Theory under Risk*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 461. Springer-Verlag, Berlin.

Sugden R. (1997). Alternatives to expected utility theory: Foundations and concepts. In *Handbook of Utility Theory* (eds S. Barbera, P.J. Hammond, and C. Seidl) Kluwer, Boston.

Trowbridge C.L. (1989). *Fundamental Concepts of Actuarial Sciences.* Actuarial Education and Research Fund, Itasca, IL.

Tsanakas A., and Desli E. (2003). Risk measures and theories of choice. *British Actuarial Journal* **9**, 959–981.

Van Heerwaarden A.E., and Kaas R. (1992). The Dutch premium principle. *Insurance: Mathematics & Economics* **11**, 129–133.

Von Neumann J., and Morgenstern O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd edn. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Wang S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazard transforms. *Insurance: Mathematics & Economics* **17**, 43–54.

Wang, S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of Risk and Insurance* **67**, 15–36.

Wang, S. (2002). A universal framework for pricing financial and insurance risks. *ASTIN Bulletin* **32**, 213–234.

Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* **55**, 95–115.