

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

#### Ιδιότητες και χαρακτηρισμοί της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας με εφαρμογές στα μέτρα κινδύνου

Κατερίνα Β. Κωσταρέλου

Διπλωματική εργασία  
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφα-  
λιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως  
μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μετα-  
πτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική  
Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς  
Ιούλιος 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό . . . . . συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ψαρράκος Γεώργιος
- Πολίτης Κωνσταντίνος
- Μαχαιράς Νικόλαος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM  
IN ACTUARIAL SCIENCE  
AND RISK MANAGEMENT**

**Some properties and characterization  
results of the generalized cumulative  
residual entropy with applications to risk  
measures**

**Katerina V. Kostarelou**

MSc Dissertation  
submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment  
of the requirements for the degree of Master of Science  
in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus  
July 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Στους γονείς μου  
Βασίλη και Παρασκευή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία μελετάμε την έννοια της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας (GCRE) καθώς και της δυναμικής της μορφής (DGCRE). Χρησιμοποιώντας την εντροπία DGCRE γενικεύουμε την έννοια του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αυτό μας επιτρέπει να εισάγουμε νέες κλάσεις κατανομών που σχετίζονται με τη μονοτονία της DGCRE και να τις μελετήσουμε σε παραμετρικά πρότυπα επιβίωσης. Επιπλέον, δίνουμε ένα θεώρημα που παρουσιάζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η DGCRE χαρακτηρίζει την κατανομή του υπό εξέταση μεγέθους. Ακόμα, γίνεται μία απόπειρα μέσα από κάποια παραδείγματα κατανομών προσέγγισης της GCRE και της DGCRE ως μέτρα κινδύνου.

## Abstract

In the present MSc Dissertation we examine the concept of generalized cumulative residual entropy (GCRE) and its dynamic version (DGCRE). We use the entropy DGCRE and extend the concept of mean residual lifetime. We introduce new aging classes related with the monotonicity of DGCRE and study them for particular probability models. We also show that under some assumptions the DGCRE function uniquely determines the distribution function. Moreover, we develop some new risk measures based on the entropies GCRE and DGCRE, and we compare them with known measures in the literature. Numerical examples are given to evaluate our results.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# Περιεχόμενα

Περίληψη	vii
Abstract	viii
Κατάλογος Σχημάτων	xii
Κατάλογος Πινάκων	xiv
Πρόλογος	1
<b>1 Εισαγωγικές έννοιες</b>	<b>5</b>
1.1 Βασικές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή . . . .	5
1.1.1 Η ένταση κινδύνου . . . . .	6
1.1.2 Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής . . . . .	8
1.2 Κάποιες γνωστές συνεχείς κατανομές . . . . .	11
1.3 Εισαγωγή στα μέτρα κινδύνου . . . . .	16
<b>2 Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία</b>	<b>19</b>
2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	19
2.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία . . . . .	28
2.2.1 Χαρακτηρισμός της κατανομής . . . . .	31
2.2.2 Μελέτη μονοτονίας . . . . .	33
<b>3 Γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία</b>	<b>41</b>
3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες . . . . .	41
3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία . .	47
3.2.1 Χαρακτηρισμός της κατανομής . . . . .	49
3.2.2 Μελέτη μονοτονίας . . . . .	55
<b>4 Εφαρμογές στα μέτρα κινδύνου</b>	<b>64</b>

4.1	Συσχέτιση γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και διακύμανσης . . . . .	64
4.1.1	Σύγκριση για παραμετρικά πρότυπα επιβίωσης . . . . .	66
4.1.2	Εμπειρική μελέτη στη χρηματιστηριακή αγορά . . . . .	68
4.2	Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου . . . . .	71
	<b>Παραρτήματα</b>	<b>81</b>
	<b>A' Συντημήσεις</b>	<b>81</b>
	<b>B' Εντολές στο Mathematica</b>	<b>83</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>89</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Γράφημα της συνάρτησης MRL $m(t)$ για $0 \leq t \leq 1$ του Παραδείγματος 2.2.1 .....	37
Σχήμα 2.2: Γράφημα των συναρτήσεων MRL $m(t)$ και DCRE $\mathcal{E}(X; t)$ για $0 \leq t \leq 1$ του Παραδείγματος 2.2.1 .....	38
Σχήμα 2.3: Γράφημα της συνάρτησης MRL $m(t)$ για $0 \leq t \leq 1$ του Παραδείγματος 2.2.2 .....	39
Σχήμα 2.4: Γράφημα των συναρτήσεων MRL $m(t)$ και DCRE $\mathcal{E}(X; t)$ για $0 \leq t \leq 1$ του Παραδείγματος 2.2.2 .....	40
Σχήμα 3.1: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $m(t)$ , $\mathcal{E}_1(X; t)$ για $0 \leq t \leq 0.1$ του Παραδείγματος 3.2.1 .....	60
Σχήμα 3.2: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $\mathcal{E}_1(X; t)$ , $\mathcal{E}_2(X; t)$ για $0 \leq t \leq 0.5$ του Παραδείγματος 3.2.1 .....	60
Σχήμα 3.3: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $m(t)$ , $\mathcal{E}_1(X; t)$ , $\mathcal{E}_2(X; t)$ , $\mathcal{E}_3(X; t)$ για $0 \leq t \leq 1$ του Παραδείγματος 3.2.1 .....	61
Σχήμα 3.4: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $m(t)$ , $\mathcal{E}_1(X; t)$ , $\mathcal{E}_2(X; t)$ για $0 \leq t \leq 2$ του Παραδείγματος 3.2.2 .....	62
Σχήμα 3.5: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $\mathcal{E}_2(X; t)$ , $\mathcal{E}_3(X; t)$ για $0 \leq t \leq 0.5$ του Παραδείγματος 3.2.2 .....	62
Σχήμα 3.6: Γράφημα των συναρτήσεων DGCRE $m(t)$ , $\mathcal{E}_1(X; t)$ , $\mathcal{E}_2(X; t)$ , $\mathcal{E}_3(X; t)$ για $0 \leq t \leq 2$ του Παραδείγματος 3.2.2 .....	63
Σχήμα 4.1: Γράφημα των μέτρων $TCE_q(X)$ , $TCV_q(X)$ , $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ για $400 \leq x_q \leq 1000$ του Παραδείγματος 4.2.1 .....	76
Σχήμα 4.2: Γράφημα των μέτρων $TCE_q(X)$ , $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ για $400 \leq x_q \leq 1000$ του Παραδείγματος 4.2.1 .....	76
Σχήμα 4.3: Γράφημα των μέτρων $TCE_q(X)$ , $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ , $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ για $400 \leq x_q \leq 1000$ του Παραδείγματος 4.2.2 .....	77

**Σχήμα 4.4:** Γράφημα των μέτρων  $TCE_q(X)$ ,  $TCV_q(X)$ ,  $\varepsilon_1(X; x_q)$ ,  $\varepsilon_2(X; x_q)$ ,  $\varepsilon_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 600$  του Παραδείγματος 4.2.3 .....79

**Σχήμα 4.5:** Γράφημα των μέτρων  $TCE_q(X)$ ,  $\varepsilon_1(X; x_q)$ ,  $\varepsilon_2(X; x_q)$ ,  $\varepsilon_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 600$  του Παραδείγματος 4.2.3 .....79

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΝ

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1: Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων $f(t)$ , $\bar{F}(t)$ , $\lambda(t)$ , $\Lambda(t)$ .....	7
Πίνακας 4.1: Τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ( $CRE$ ) για τις αποδόσεις των 12 δεικτών .....	69
Πίνακας 4.2: Τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ( $CRE$ ) για την απόδοση των 16 τριμήνων .....	70

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# Πρόλογος

Ο κυριότερος λόγος ύπαρξης των ασφαλιστικών και χρηματοοικονομικών οργανισμών είναι η αποκόμιση κέρδους, μέσω της ανάληψης κινδύνων έναντι κάποιου προκαθορισμένου χρηματικού ποσού. Όπως είναι γνωστό, το μέγεθος των κινδύνων δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων και προκειμένου να διασφαλιστεί η φερεγγυότητα της εταιρείας, θα πρέπει να υπάρχει ένα απόθεμα, δηλαδή τα έσοδα να είναι μεγαλύτερα από τα έξοδα, προκειμένου να αποφευχθεί το ενδεχόμενο της χρεωκοπίας. Γεννάται λοιπόν η ανάγκη θεώρησης ενός μέτρου που θα μπορεί να εκτιμήσει την αβεβαιότητα που περικλύεται στους κινδύνους που αναλαμβάνονται, προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος και να ληφθούν τα κατάλληλα αποθεματικά.

Για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου, διάφορα μέτρα έχουν χρησιμοποιηθεί ως σήμερα, μεταξύ αυτών η διακύμανση ή η τυπική απόκλιση και το ποσοστημόριο. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε δύο νέα μέτρα αβεβαιότητας την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και θα εξετάσουμε μέσα από κάποια παραδείγματα, αν τα δύο αυτά μέτρα μπορούν να οδηγήσουν σε συνεπείς εκτιμήσεις του κινδύνου, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν στο μέλλον για τον υπολογισμό της απαιτούμενης κεφαλαιακής επάρκειας.

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα είναι η εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει μία εισαγωγή σε κάποιες βασικές έννοιες που θα μας χρειαστούν, όπως είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας, η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Επίσης, θα αναφέρουμε κάποιες οικογένειες κατανομών με μονότονη γήρανση που σχετίζονται με τη μονοτονία της έντασης κινδύνου και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Έπειτα θα παραθέσουμε τις προαναφερθέντες ποσότητες για κάποια μοντέλα συνεχών κατανομών. Επιπλέον, γίνεται μία σύντομη αναφορά σε θεωρητική βάση στα μέτρα κινδύνου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο που ακολουθεί, αρχικά θα περιγράψουμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και μερικές βασικές ιδιότητες αυτής. Θα μελετηθεί επίσης, η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία του υπολειπόμενου χρόνου ζωής και θα παρουσιαστούν κάποια αποτελέσματα αυτής, που αφορούν τον χαρακτηρισμό της κατανομής ενός μεγέθους. Ειδικότερα, θα παραθέσουμε ένα αποτέλεσμα για τον χαρακτηρισμό της εκθετικής κατανομής, της δυναμοκατανομής και της κατανομής Pareto. Έπειτα θα μελετήσουμε τη μονοτονία της και θα ορίσουμε δύο νέες κλάσεις μονότονης γήρανσης για τις οποίες θα παραθέσουμε κάποια ακόμη σημαντικά αποτελέσματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα συνδέσουμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία με το μέσο χρόνο αναμονής μεταξύ διαδοχικών πραγματοποιήσεων μίας ανανεωτικής διαδικασίας και θα περιγράψουμε την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Επιπλέον, θα μελετηθεί η δυναμική της εκδοχή και θα γενικευτούν τα προαναφερθέντα αποτελέσματα που σχετίζονται με τον χαρακτηρισμό της κατανομής και τη μονοτονία της. Συγκεκριμένα, θα αναφέρουμε κάποιες γενικότερες κλάσεις μονότονης γήρανσης, που περιέχουν τις ήδη προαναφερθέντες, και θα παραθέσουμε ένα θεώρημα που περιγράφει κάτω από ποιές συνθήκες η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία χαρακτηρίζει την κατανομή ενός μεγέθους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, θα γίνει μία απόπειρα εφαρμογής της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας ως μέτρο κινδύνου. Συγκεκριμένα, μέσα από κάποια παραδείγματα, θα συγκριθεί με άλλα μέτρα κινδύνου, όπως είναι η τυπική απόκλιση, η αξία σε κίνδυνο και η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς. Εν κατακλείδι, θα παραθέσουμε κάποια συμπεράσματα και ερωτήματα για τον αν μπορεί να παρέχει συνετές εκτιμήσεις του κινδύνου, έτσι ώστε να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης στο μέλλον και να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου για την αμέριστη στήριξη τους, όχι μόνο για την παρούσα διπλωματική εργασία, αλλά, και για την απεριόριστη προσφορά τους σε όλη τη διάρκεια και σε όλα τα στάδια των σπουδών μου με ποικίλους τρόπους. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν να ολοκληρώσω τούτο το πόνημα, και μου συμπαραστέκονταν σε όποια δυσκολία



και αν προέκυπτε. Τέλος, θα ήταν άδικο να μην ευχαριστήσω τον λέκτορα καθηγητή κ. Γ. Ψαρράκο, επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, για τις εύστοχες υποδείξεις που μου έκανε και την καθοδήγηση για να έχω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιγράψουμε μερικές βασικές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή ενός μεγέθους, όπως η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας, η ένταση κινδύνου και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής, καθώς και τη σχέση που έχουν μεταξύ τους. Θα παρουσιάσουμε επίσης, κάποιες οικογένειες κατανομών με μονότονη γήρανση και θα μελετήσουμε τις παραπάνω ποσότητες για κάποια μοντέλα συνεχών κατανομών. Τέλος θα γίνει μία αρχική αναφορά σε θεωρητική βάση στα μέτρα κινδύνου.

### 1.1 Βασικές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή

Θεωρούμε μία μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή την οποία συμβολίζουμε με  $X$ , η οποία μπορεί να αναπαριστά διάφορα μεγέθη όπως το χρόνο ζωής μίας μονάδας ή το μέγεθος μίας ζημιάς, και συμβολίζουμε με  $f(t)$  και  $\bar{F}(t)$  την συνάρτηση πυκνότητας και την συνάρτηση αξιοπιστίας αυτής αντίστοιχα.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\bar{F}(t) = P(X > t) \quad \text{και} \quad f(t) = -\bar{F}'(t),$$

όπου η  $\bar{F}(t)$  είναι συνεχής και φθίνουσα στο  $[0, \infty)$ , με  $\bar{F}(0) = 1$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}(t) = 0$ . Στην ανάλυση προτύπων επιβίωσης η συνάρτηση αξιοπιστίας συμβολίζεται συνήθως με  $S(t)$  και λέγεται συνάρτηση επιβίωσης.

### 1.1.1 Η ένταση κινδύνου

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας  $\bar{F}(t)$ , τότε

$$\bar{F}'(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(t+x) - \bar{F}(t)}{x}$$

οπότε

$$-\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(t+x) - \bar{F}(t)}{x \bar{F}(t)},$$

όπου

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{F}(t+x) - \bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} &= \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{P(X > t) - P(X > t+x)}{P(X > t)} = \frac{P(X \leq t+x) - P(X \leq t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(t \leq X \leq t+x)}{P(X > t)} = P(X \leq t+x | X > t). \end{aligned}$$

Ο λόγος

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(X \leq t+x | X > t)}{x} \quad (1.1)$$

καλείται ένταση κινδύνου (hazard rate-HR) και εκφράζει το δεσμευμένο ρυθμό φθοράς της μονάδας στο διάστημα  $(t, t+x]$  για  $x \rightarrow 0$ , δεδομένου ότι  $X > t$ . Σημειώνουμε ότι η ένταση κινδύνου είναι πάντα μη αρνητική ποσότητα.

Η ένταση κινδύνου μπορεί να γραφτεί επίσης στη μορφή

$$\lambda(t) = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = (-\ln \bar{F}(t))', \text{ για } t \geq 0, \quad (1.2)$$

οπότε ολοκληρώνοντας ως προς  $t$ , τα δύο μέλη της (1.2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\bar{F}(0) = 1$ , παίρνουμε

$$\int_0^t \lambda(s) ds = -\ln \bar{F}(s) \Big|_0^t = -\ln \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(0)} = -\ln \bar{F}(t).$$

Επομένως, γνωρίζοντας την ένταση κινδύνου μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας ως

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}. \quad (1.3)$$

Η συνάρτηση

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \text{ για } t \geq 0, \quad (1.4)$$

## 1.1 Βασικές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή

καλείται αθροιστική συνάρτηση κινδύνου (cumulative hazard function) και αναπαριστά την αθροιστική ένταση κινδύνου, οπότε είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Από τις (1.2), (1.3) και (1.4), είναι φανερό ότι

$$\lambda(t) = \Lambda'(t), \quad \bar{F}(t) = e^{-\Lambda(t)} \quad \text{και} \quad \Lambda(t) = -\ln \bar{F}(t).$$

□

Γενικά, γνωρίζοντας μία από τις συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή του υπό εξέταση μεγέθους, μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι σχέσεις που συνδέουν την συνάρτηση πυκνότητας, την συνάρτηση αξιοπιστίας, την ένταση κινδύνου και την αθροιστική συνάρτηση κινδύνου.

Πίνακας 1.1: ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ  $f(t)$ ,  $\bar{F}(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $\Lambda(t)$

Συναρτήσεις	$f(t)$	$\bar{F}(t)$	$\lambda(t)$	$\Lambda(t)$
$f(t)$	—	$\int_t^\infty f(x)dx$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$	$-\ln\left(\int_t^\infty f(x)dx\right)$
$\bar{F}(t)$	$-\bar{F}'(t)$	—	$-\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}$	$-\ln\bar{F}(t)$
$\lambda(t)$	$-\left(e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}\right)'$	$e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$	—	$\int_0^t \lambda(x)dx$
$\Lambda(t)$	$-(e^{-\Lambda(t)})'$	$e^{-\Lambda(t)}$	$\Lambda'(t)$	—

Η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$ , αποτελεί μία από τις σημαντικότερες ποσότητες σε πολλές επιστήμες. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται με διαφορετική ονομασία και συμβολισμό, ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στη θεωρία αξιοπιστίας καλείται βαθμίδα αποτυχίας, ενώ στον αναλογισμό ένταση θνησιμότητας και συμβολίζεται με  $\mu(t)$ .

Μελετώντας τη μονοτονία της έντασης κινδύνου, μπορούμε να κατατάξουμε τις κατανομές σε οικογένειες κατανομών με μονότονη γήρανση. Υπάρχουν τέσσερις βασικές μορφές τέτοιων μοντέλων.

- Μοντέλα κατανομών με αύξουσα ένταση κινδύνου (increasing failure rate- IFR).
- Μοντέλα κατανομών με φθίνουσα ένταση κινδύνου (decreasing failure rate- DFR).
- Μοντέλα κατανομών με λεκανοειδούς μορφής ένταση κινδύνου (bathtub failure rate- BFR).

- Μοντέλα κατανομών με ανάποδης λεκανοειδούς μορφής ένταση κινδύνου (hump- shaped failure rate).

Στη συνέχεια, δίνουμε τον ορισμό για τις οικογένειες κατανομών  $IFR$  και  $DFR$  (βλέπε Lai and Xie, 2006, σελ. 28).

**Ορισμός 1.1.1.** Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ), θα λέμε ότι

- Έχει την ιδιότητα  $IFR$  (increasing failure rate), αν η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in IFR$  ή  $F \in IFR$ .
- Έχει την ιδιότητα  $DFR$  (decreasing failure rate), αν η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in DFR$  ή  $F \in DFR$ .

Στην περίπτωση των κατανομών με αύξουσα ένταση κινδύνου, έχουμε γήρανση ή φθορά με την πάροδο του χρόνου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η φυσική γήρανση των ατόμων που μελετάμε ή η φθορά των αντικειμένων αντίστοιχα.

Κατανομές με φθίνουσα ένταση κινδύνου εμφανίζονται λιγότερο συχνά στην πράξη, καθώς υπάρχει βελτίωση ή ομαλότερη λειτουργία με την πάροδο του χρόνου. Παρόλα αυτά, τέτοιου είδους μοντέλα μπορεί να εμφανιστούν σε περιπτώσεις που μελετάμε την πορεία ενός ασθενούς ή σε περιπτώσεις που η οικονομική κατάσταση μίας επιχείρησης σημειώνει ανοδική πορεία.

### 1.1.2 Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$ , παριστά το χρόνο ζωής μίας μονάδας, η οποία έχει επιβιώσει στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ , με  $t \geq 0$ , τότε η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή

$$X_t = X - t \mid X > t$$

εκφράζει το χρόνο ζωής της από τη στιγμή  $t$  και έπειτα και καλείται υπολειπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ηλικίας  $t$ .

## 1.1 Βασικές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή

Η συνάρτηση αξιοπιστίας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $X_t$  είναι

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_t}(x) &= P(X_t > x) = P(X - t > x \mid X > t) \\ &= \frac{P(X - t > x, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + x)}{P(X > t)} \\ &= \frac{\bar{F}(t + x)}{\bar{F}(t)}, \text{ για } t, x \geq 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

και εκφράζει την πιθανότητα η μονάδα να επιβιώσει για  $x$  επιπλέον χρονικές μονάδες, δηλαδή να επιβιώσει στο χρονικό διάστημα  $(t, t + x]$ , με  $x \geq 0$ .

Από την (1.2), η ένταση κινδύνου της  $X_t$  δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\lambda_{X_t}(x) &= -\frac{\bar{F}'_{X_t}(x)}{\bar{F}_{X_t}(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}}{\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}} \\ &= -\frac{\bar{F}'(x+t)}{\bar{F}(x+t)} = \lambda(x+t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

όπου  $\lambda(t)$  είναι η ένταση κινδύνου της  $X$ .

Η μέση τιμή της  $X_t$ ,

$$\begin{aligned}m(t) &= E(X_t) = \int_0^\infty \bar{F}_{X_t}(x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} dx = \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx, \end{aligned} \quad (1.7)$$

ονομάζεται μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής (mean residual lifetime-MRL) της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , ηλικίας  $t$ , και εκτιμά τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής της μονάδας, ή αντίστοιχα του εκάστοτε υπό μελέτη μεγέθους. Τονίζουμε ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής παίρνει πάντα μη αρνητικές τιμές.

Είναι φανερό ότι για  $t = 0$ ,

$$m(0) = E(X) = \mu,$$

όπου  $E(X) = \mu$  είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

Επίσης, παραγωγίζοντας την (1.7) ως προς  $t$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}m'(t) &= \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)^2} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx + \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \\ &= -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx - \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{F}(x) dx \\ &= \lambda(t) m(t) - 1\end{aligned}$$

λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx = -\frac{d}{dt} \int_0^t \bar{F}(x) dx = -\bar{F}(t).$$

Συνεπώς

$$m(t)' + 1 = \lambda(t) m(t)$$

και λύνοντας ως προς  $\lambda(t)$ , έχουμε

$$\lambda(t) = \frac{m(t)' + 1}{m(t)}. \quad (1.8)$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής  $m(t)$ , συνδέεται με την ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$ , σύμφωνα με τη σχέση (1.8), οπότε γνωρίζοντας τον, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις λοιπές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την κατανομή (βλέπε Πίνακα 1.1, σελ. 7) και επομένως και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής χαρακτηρίζει την κατανομή της ποσότητας που μελετάμε.

Όπως και στην περίπτωση της έντασης κινδύνου, ανάλογα με τη μονοτονία του υπολειπόμενου χρόνου ζωής έχουμε τις ακόλουθες οικογένειες κατανομών (βλέπε Lai and Xie, 2006, σελ. 28-29).

**Ορισμός 1.1.2.** Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ), θα λέμε ότι

- Έχει την ιδιότητα *IMRL* (*increasing mean residual lifetime*), αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής  $m(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in \text{IMRL}$  ή  $F \in \text{IMRL}$ .
- Έχει την ιδιότητα *DMRL* (*decreasing mean residual lifetime*), αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής  $m(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in \text{DMRL}$  ή  $F \in \text{DMRL}$ .

Επίσης, συγκρίνοντας το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μίας κατανομής με τη μέση τιμή της, προκύπτουν οι ακόλουθες οικογένειες κατανομών γήρανσης.

**Ορισμός 1.1.3.** Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ), με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και μέση τιμή  $\mu$ , θα λέμε ότι

- Έχει την ιδιότητα *NBUE* (*new better than used in expectation*), αν  $m(t) \leq \mu$ , για κάθε  $t \geq 0$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in \text{NBUE}$  ή  $F \in \text{NBUE}$ .



## 1.2 Κάποιες γνωστές συνεχείς κατανομές

- Έχει την ιδιότητα *NWUE* (new worse than used in expectation), αν  $m(t) \geq \mu$ , για κάθε  $t \geq 0$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in NWUE$  ή  $F \in NWUE$ .

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η οικογένεια των κατανομών που έχουν την ιδιότητα *IFR* (αντίστοιχα *DFR*) είναι υποσύνολο του συνόλου των κατανομών που έχουν την ιδιότητα *DMRL* (αντίστοιχα *IMRL*). Η ίδια ιδιότητα ισχύει και για την περίπτωση των κλάσεων *NBUE* και *NWUE* (βλέπε Lai and Xie, 2006, σελ. 29). Γενικά, ισχύει η ακόλουθη διάταξη

$$IFR (DFR) \Rightarrow DMRL (IMRL)$$

$$IFR (DFR) \Rightarrow NBUE (NWUE).$$

## 1.2 Κάποιες γνωστές συνεχείς κατανομές

Μερικές βασικές ποσότητες για συνεχείς κατανομές είναι η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας, η μέση τιμή και η διακύμανση. Θα παρουσιάσουμε τα παραπάνω μεγέθη για κάποια μοντέλα συνεχών κατανομών, που θα μελετήσουμε σε επόμενα κεφάλαια, και θα υπολογίσουμε την ένταση κινδύνου και το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, όπως ορίστηκαν παραπάνω στις σχέσεις (1.1), (1.7).

### 1. Ομοιόμορφη κατανομή

Η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , είναι μια κατανομή που σε υποδιαστήματα του  $(\alpha, \beta)$  με ίσο πλάτος, αντιστοιχεί ίδια πιθανότητα και συμβολίζεται με  $U(\alpha, \beta)$ . Τα κύρια μεγέθη της είναι

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & , \text{ αν } \alpha < t < \beta \\ 0 & , \text{ διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha}.$$

- Μέση τιμή και διακύμανση

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{και} \quad Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{\frac{\beta-t}{\beta-\alpha}} = \frac{1}{\beta-t}, \quad \alpha < t < \beta. \quad (1.9)$$

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{\beta-\alpha}{\beta-t} \int_t^\beta \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} dx = \frac{\beta-t}{2}, \quad \alpha \leq t < \beta. \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , για  $\alpha < t < \beta$ , επομένως η ομοιόμορφη κατανομή έχει την ιδιότητα *IFR*, άρα και τις ιδιότητες *DMRL*, *NBUE*.

## 2. Εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή είναι μία από τις πιο γνωστές κατανομές, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας που έχει και συμβολίζεται με  $\exp(\lambda)$ . Πιο συγκεκριμένα, για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ , ισχύουν τα εξής

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

όπου  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lambda$ .

- Συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

- Μέση τιμή και διακύμανση

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad t \geq 0. \quad (1.11)$$

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{1}{e^{-\lambda t}} \int_t^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} = E(X), \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

Προκύπτει λοιπόν, ότι η εκθετική κατανομή έχει σταθερή ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  για οποιοδήποτε  $t \geq 0$ , καθώς επίσης και σταθερό μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$ , ίσο με τη μέση της τιμή. Αυτό είναι μία άλλη σημαντική ιδιότητα, εφόσον οι  $\lambda(t)$  και  $m(t)$  είναι σταθερές συναρτήσεις ανεξάρτητες του χρόνου  $t$ , και κατά συνέπεια η εκθετική κατανομή ανήκει σε όλες τις κλάσεις κατανομών, δηλαδή έχει τις ιδιότητες *IFR*, *DFR*, *IMRL*, *DMRL*, *NBUE*, *NWUE*.

### 3. Κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα είναι μία γενίκευση της εκθετικής κατανομής και συμβολίζεται με  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ . Ειδικά, για την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ , έχουμε

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

όπου

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

είναι η λεγόμενη συνάρτηση γάμμα (βλέπε Χαραλαμπίδης, 2000, σελ. 236).

- Η συνάρτηση αξιοπιστίας δε μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή για οποιοδήποτε  $\alpha > 0$ . Ωστόσο, για  $\alpha$  θετικό ακέραιο αριθμό μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή ως εξής

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad \text{για } t \geq 0. \quad (1.13)$$

Διαφορετικά,

$$\bar{F}(t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

και με μία αλλαγή μεταβλητής

$$s = \lambda x \Rightarrow ds = \lambda dx,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{\lambda t}^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} e^{-s} \frac{1}{\lambda} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\lambda t}^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

όπου

$$\Gamma(\alpha, u) = \int_u^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0, \quad u \geq 0$$

είναι η μη πλήρης γάμμα συνάρτηση (βλέπε Χαραλαμπίδης, 2000, σελ. 236).

- Μέση τιμή και διακύμανση

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)}, \quad t \geq 0.$$

Η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , για  $\alpha > 1$  και φθίνουσα για  $\alpha < 1$  (βλέπε Lai and Xie, 2006, σελ. 17). Για  $\alpha = 1$  είναι η περίπτωση της εκθετικής κατανομής που αναφέραμε προηγουμένως. Επομένως, η κατανομή Γάμμα ανήκει στις κλάσεις κατανομών *IFR*, άρα και *DMRL*, *NBUE*, αν  $\alpha > 1$  και στις κλάσεις *DFR*, άρα και *IMRL*, *NWUE* αν  $\alpha < 1$ .

#### 4. Κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto είναι μία από τις κυριότερες εκ των συνεχών κατανομών, εξαιτίας της βαριάς δεξιάς ουράς που έχει και συμβολίζεται με  $Pareto(\alpha, \beta)$ . Τα βασικά μεγέθη για την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 0, \beta > 0$  είναι

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(t + \beta)^{\alpha+1}}, \quad t \geq 0.$$

- Συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = \left( \frac{\beta}{t + \beta} \right)^\alpha, \quad t \geq 0.$$

- Μέση τιμή και διακύμανση

$$E(X) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha-1} & , \text{αν } \alpha > 1 \\ \infty & , \text{αν } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} & , \text{αν } \alpha > 2 \\ \infty & , \text{αν } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

## 1.2 Κάποιες γνωστές συνεχείς κατανομές

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\alpha \beta^\alpha}{(t+\beta)^{\alpha+1}}}{\frac{\beta^\alpha}{(t+\beta)^\alpha}} = \frac{\alpha}{t+\beta}, \quad t \geq 0. \quad (1.14)$$

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\int_t^\infty \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^\alpha dx}{\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha} = (t+\beta)^\alpha \left[ \frac{(x+\beta)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_t^\infty \\ &= \begin{cases} \frac{t+\beta}{\alpha-1}, & \text{αν } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{αν } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ , για  $t \geq 0$ , επομένως η κατανομή Pareto έχει τις ιδιότητες *DFR* άρα και *IMRL*, *NWUE*. Στο σημείο αυτό, αξίζει να τονίσουμε ότι η μέση τιμή και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για την κατανομή Pareto ορίζονται μόνο για  $\alpha > 1$ , ενώ η διακύμανση της μόνο για  $\alpha > 2$ .

### 5. Δυναμοκατανομή

Τέλος, θα παρουσιάσουμε μία λιγότερο γνωστή κατανομή, που στα ελληνικά αποδίδεται ως δυναμοκατανομή και συμβολίζεται με  $Power(\alpha, \beta)$ . Γενικά, για τη δυναμοκατανομή με παραμέτρους  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  έχουμε

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{\alpha (\beta - t)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}, \quad 0 < t < \beta.$$

- Συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = \left(\frac{\beta - t}{\beta}\right)^\alpha, \quad 0 \leq t \leq \beta.$$

- Μέση τιμή και διακύμανση

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha + 1} \quad \text{και} \quad Var(X) = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha + 1)^2 (\alpha + 2)}.$$

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\alpha (\beta - t)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}}{\left(\frac{\beta - t}{\beta}\right)^\alpha} = \frac{\alpha}{\beta - t}, \quad 0 < t < \beta. \quad (1.16)$$

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\int_t^\infty \left(\frac{\beta-x}{\beta}\right)^\alpha dx}{\left(\frac{\beta-t}{\beta}\right)^\alpha} = \frac{1}{(\beta-t)^\alpha} \left[ -\frac{(\beta-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_t^\beta \\ &= \frac{\beta-t}{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Η ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , για  $0 < t < \beta$ , επομένως η δυναμοκατανομή ανήκει στις οικογένειες κατανομών *IFR*, *DMRL* και *NBUE*.

### 1.3 Εισαγωγή στα μέτρα κινδύνου

Το βασικό εγχείρημα των ασφαλιστικών και χρηματοοικονομικών οργανισμών είναι να συγκεντρώσουν και να διαχειριστούν κινδύνους φάχνοντας για αγορές στις οποίες οι κίνδυνοι αυτοί μπορούν να αντισταθμιστούν. Όταν δε μπορούν να υπάρξουν αντισταθμίσεις, λόγω ατελειών που υπάρχουν στην αντίστοιχη αγορά, ένα μέτρο κινδύνου χρειάζεται να καθιερωθεί, προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος και αν είναι απαραίτητο να βρεθούν τα κατάλληλα αποθεματικά. Στην οικονομική βιβλιογραφία αναπτύχθηκαν πολλές θεωρίες σχετικά με τα μέτρα κινδύνου, ως μέσο προσδιορισμού των απαιτούμενων κεφαλαίων για ιδιοκτήτες χαρτοφυλακίων με κίνδυνο, ενώ οι διάφορες μορφές και οι θεμελιώδεις ιδιότητες τους επεκτάθηκαν αργότερα και στην αναλογιστική βιβλιογραφία για τον υπολογισμό των ασφαλίσεων και των αποθεμάτων.

Το βασικό πρόβλημα λοιπόν, με το οποίο έρχεται αντιμέτωπος ένας διαχειριστής κινδύνου είναι να πετύχει τον συμβιβασμό των αντικρουόμενων συμφερόντων των πελατών και των ασφαλισμένων από τη μία πλευρά, και των μετόχων από την άλλη. Οι πρώτοι ενδιαφέρονται για ένα οικονομικό κέρδος, ενώ οι δεύτεροι απαιτούν την απόδοση των ιδίων κεφαλαίων που είναι άμεσα συνδεδεμένη με τον κίνδυνο που περιέχουν οι επενδυτικές τους επιλογές. Παρόλα αυτά, όσο η μέτρηση του κινδύνου βασίζεται σε μία αυταπόδεικτη προσέγγιση, είναι σημαντικό για τον διαχειριστή κινδύνου να βρεί το "σωστό" μέτρο κινδύνου. Στην πράξη βέβαια, η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου μπορεί να προκαλέσει διαφωνίες, καθώς διαφορετικό μέτρο μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές εκτιμήσεις.

### 1.3 Εισαγωγή στα μέτρα κινδύνου

---

Γενικά, ένα μέτρο κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας και των αποθεμάτων μίας εταιρείας, με σκοπό την αποφυγή της αφερεγγυότητας της. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό (βλέπε Denuit et al., 2005, σελ. 61).

**Ορισμός 1.3.1.** Για  $X$  μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον κίνδυνο, ένα μέτρο κινδύνου είναι μία συνάρτηση  $\rho$ , που απεικονίζει τον κίνδυνο  $X$  σε έναν μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό  $\rho[X]$ , πιθανόν άπειρο, ο οποίος εκφράζει το επιπλέον χρήμα που πρέπει να προστεθεί στον κίνδυνο  $X$ , προκειμένου να γίνει αποδεκτός.

Η ιδέα είναι ότι το μέτρο κινδύνου  $\rho$ , ποσοτικοποιεί τον κίνδυνο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  εκφράζει τη συνολική ζημιά ενός χαρτοφυλακίου, το  $\rho[X]$  ερμηνεύεται σαν το συνολικό κεφάλαιο που πρέπει να προστεθεί επιπλέον στο χαρτοφυλάκιο, σαν περιθώριο, προκειμένου να το κάνει αποδεκτό σε έναν εσωτερικό ή εξωτερικό παράγοντα. Επομένως, το μέτρο  $\rho$  μπορεί να χαρακτηρίσει τον κίνδυνο ως προς το μέγεθος του. Μεγάλη τιμή του  $\rho[X]$  υποδεικνύει μεγάλο κίνδυνο και κατά συνέπεια μεγάλη απαιτούμενη κεφαλαιακή επάρκεια. Αντίστοιχα μικρή τιμή υποδεικνύει μικρότερο κίνδυνο.

Αν και ο ορισμός είναι αρκετά γενικός, τα μέτρα κινδύνου πρέπει να πληρούν κάποιες βασικές αξιώσεις, προκειμένου να οδηγήσουν σε αξιόπιστες εκτιμήσεις. Από τα γνωστά στατιστικά μέτρα όπως είναι ο μέσος, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση, το ποσοστημόριο και άλλα, μόνο ορισμένα ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές και μπορούν να θεωρηθούν συνετά μέτρα κινδύνου. Θα δούμε ποιές είναι οι αξιώσεις αυτές, καθώς και πως μεταφράζονται (βλέπε Denuit et al., 2005, σελ. 62-64).

#### 1. Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (Non-excessive loading or non-ripoff)

$$\rho[X] \leq \max[X], \text{ για κάθε } X .$$

Προφανώς, δεν έχει νόημα να κρατηθεί περισσότερο κεφάλαιο από τη μέγιστη αναμενόμενη ζημιά.

#### 2. Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (Non-negative loading)

$$\rho[X] \geq E(X), \text{ για κάθε } X .$$

Το ελάχιστο κεφάλαιο πρέπει να υπερβαίνει την αναμενόμενη ζημιά, διαφορετικά η χρεωκοπία θεωρείται βέβαιη.

### 3. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (Translativity)

$$\varrho[X + c] = \varrho[X] + c, \text{ για κάθε } X \text{ και για κάθε σταθερά } c.$$

Είναι φανερό, ότι μία αύξηση ή μείωση στις υποχρεώσεις κατά ένα ντετερμινιστικό ποσό θα επιφέρει την ίδια μεταβολή στο κεφάλαιο.

### 4. Σταθερότητα (Constancy or no unjustified loading)

$$\varrho[c] = c, \text{ για κάθε σταθερά } c.$$

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί μία ζημιά το μέγεθος της οποίας είναι γνωστό, η εταιρεία χρειάζεται μόνο να έχει στη διάθεση της κεφάλαιο όσο και το ποσό της ζημιάς.

### 5. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

$$\varrho[X + Y] \leq \varrho[X] + \varrho[Y], \text{ για κάθε } X, Y.$$

Η συγχώνευση κινδύνων δε θα επιφέρει επιπλέον κίνδυνο. Αντιθέτως, μπορεί να μειωθεί ιδιαίτερα στην περίπτωση που οι κίνδυνοι είναι αρνητικά συσχετισμένοι.

### 6. Συμμοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity)

$$\varrho[X + Y] = \varrho[X] + \varrho[Y], \text{ για κάθε } X, Y \text{ τέλεια θετικά συσχετισμένες.}$$

Συμφηρίζοντας τέλεια θετικά συσχετισμένους κινδύνους δεν αυξάνεται η επικινδυνότητα της κατάστασης, αλλά, δε μπορεί και να μειωθεί εφόσον οι κίνδυνοι αφορούν το ίδιο γεγονός και δε μπορεί να λειτουργήσει ο ένας αντισταθμιστικά του άλλου.

### 7. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

$$\varrho[cX] = c \varrho[X], \text{ για κάθε } X \text{ και για κάθε σταθερά } c.$$

Αν ο κίνδυνος πολλαπλασιαστεί κατά μία σταθερά, τότε και το απαιτούμενο κεφάλαιο θα μεταβληθεί κατά τον ίδιο τρόπο.

### 8. Μογτονία (Monotonicity)

$$\text{Αν } P(X \leq Y) = 1, \text{ τότε } \varrho[X] \leq \varrho[Y] \text{ για κάθε } X, Y.$$

Το απαιτούμενο κεφάλαιο για την κάλυψη ενός κινδύνου είναι πάντα μικρότερο, από το αντίστοιχο ποσό που απαιτείται, για την κάλυψη ενός άλλου, πάντα μεγαλύτερου κινδύνου.



## Κεφάλαιο 2

# Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Στο προσεχές κεφάλαιο, θα μελετηθεί ένα νέο μέτρο αβεβαιότητας για μη αρνητικές, συνεχείς κατανομές, η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές ιδιότητες αυτής. Θα περιγράψουμε επίσης, την δυναμική της εκδοχή και θα παραθέσουμε κάποια ακόμη σημαντικά αποτελεσμάτα, που αφορούν τον χαρακτηρισμό της κατανομής του υπό μελέτη μεγέθους και τη μονοτονία της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας.

### 2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Υποθέτουμε ότι  $X$  είναι μία τυχαία μεταβλητή, διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας  $p_i = P(X = i)$ , ή συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας  $f(x)$ , και συμβολίζουμε με  $H(X)$  την εντροπία της, όπως ορίστηκε από τον Shannon (1948). Για κάθε περίπτωση, έχουμε

$$H(X) = - \sum_i p_i \ln p_i ,$$

αν η  $X$  είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή και

$$H(X) = - \int f(x) \ln f(x) dx ,$$

αν η  $X$  είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Για διακριτές κατανομές η εντροπία ως μέτρο αβεβαιότητας έχει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες, ενδεικτικά αναφέρουμε ότι είναι πάντα θετική και

είναι πάντα ίση με το μηδέν, αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή παριστά ένα βέβαιο γεγονός.

Αντιθέτως, στην περίπτωση των συνεχών κατανομών η εντροπία παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, καθώς ορίζεται μόνο για κατανομές με πυκνότητα, δε μπορεί να οριστεί για μία μικτή κατανομή που δεν έχει μάζα πιθανότητας και επίσης μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της συνεχούς ομοιόμορφης κατανομής, όπου αν θεωρήσουμε ότι η  $X$  έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, \alpha)$ , τότε

$$H(X) = - \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} dx = \ln \alpha ,$$

δηλαδή  $H(X) < 0$ , αν  $\alpha < 1$ . Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση των μη αρνητικών, συνεχών κατανομών.

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση πυκνότητας  $f(x)$  με την συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(x)$ , προκύπτει ένα νέο μέτρο αβεβαιότητας που ονομάζεται αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (cumulative residual entropy-CRE) και θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}(X)$ . Ισχύει ότι

$$\mathcal{E}(X) = - \int_0^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx = \int_0^\infty \bar{F}(x) \Lambda(x) dx , \quad (2.1)$$

όπου  $\bar{F}(x)$  είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας της τυχαίας μεταβλητής  $X$  και  $\Lambda(x)$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου (βλέπε (1.4) ).

Η βασική ιδέα προήλθε από τους Rao et al. (2004), βασιζόμενοι στο γεγονός ότι όταν έχουμε στη διάθεση μας στατιστικά δεδομένα, εκτιμάμε συνήθως την συνάρτηση αξιοπιστίας, και όχι την συνάρτηση πυκνότητας, και επιπλέον πολλές φορές μας ενδιαφέρει η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή και όχι να πάρει ακριβώς την τιμή αυτή. Αξίζει να σημειώσουμε, ότι η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία είναι πάντα μη αρνητική.

Το επόμενο θεώρημα (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007), δίνει τη σχέση που συνδέει την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X)$ , με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$ .

**Θεώρημα 2.1.1.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X)$ ,

## 2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

τέτοια ώστε  $\mathcal{E}(X) < \infty$ ,

$$\mathcal{E}(X) = E(m(X)) . \quad (2.2)$$

**Απόδειξη.**

Το δεύτερο μέλος της (2.2) εκφράζει τον αναμενόμενο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της  $X$ , δηλαδή

$$E(m(X)) = \int_0^{\infty} m(t)f(t)dt .$$

Αντικαθιστώντας την  $m(t)$  από την (1.7), λαμβάνουμε

$$E(m(X)) = \int_0^{\infty} \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)} f(t)dt$$

και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E(m(X)) &= \int_0^{\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} dt \bar{F}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^x \lambda(t) dt \bar{F}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} (-\ln \bar{F}(x)) \bar{F}(x) dx = \mathcal{E}(X) . \end{aligned}$$

□

Γνωρίζοντας το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, από τη (2.2) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία της τυχαίας μεταβλητής. Θα δούμε στη συνέχεια, κάποιες περιπτώσεις κατανομών που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### 1. Ομοιόμορφη κατανομή

Αν η  $X$  έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, \alpha)$ , για  $\alpha > 0$ , τότε

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{\alpha - t}{2} .$$

- Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= E\left(\frac{\alpha - X}{2}\right) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha - x}{2} \frac{1}{\alpha} dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \alpha x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{4} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

## 2. Εκθετική κατανομή

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ , έχουμε

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

- Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\mathcal{E}(X) = E\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.4)$$

## 3. Κατανομή Pareto

Για την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 0$ , παίρνουμε

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{t + \beta}{\alpha - 1}.$$

- Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= E\left(\frac{X + \beta}{\alpha - 1}\right) = \frac{E(X) + \beta}{\alpha - 1} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\alpha - 1} + \beta}{\alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha \beta}{(\alpha - 1)^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου  $E(X)$  είναι η μέση τιμή της κατανομής Pareto (βλέπε Κεφάλαιο 1, σελ. 14).

## 4. Δυναμοκατανομή

Για τη δυναμοκατανομή με παραμέτρους  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , λαμβάνουμε

- Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

$$m(t) = \frac{\beta - t}{\alpha + 1}.$$

- Αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) &= E\left(\frac{\beta - X}{\alpha + 1}\right) = \frac{\beta - E(X)}{\alpha + 1} \\ &= \frac{\beta - \frac{\beta}{\alpha + 1}}{\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha \beta}{(\alpha + 1)^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου  $E(X)$  είναι η μέση τιμή της δυναμοκατανομής (βλέπε Κεφάλαιο 1, σελ. 15).

Ένα άλλο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα, είναι ότι μπορούμε να βρούμε ένα άνω ή κάτω φράγμα για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία των κατανομών που ανήκουν στις κλάσεις κατανομών  $NBUE$  και  $NWUE$  αντίστοιχα (βλέπε Ορισμό 1.1.3).

**Λήμμα 2.1.1.** Έστω  $X$  μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu$  και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X)$ . Αν  $X \in NBUE$  ( $NWUE$ ), τότε

$$\mathcal{E}(X) \leq (\geq) \mu. \quad (2.7)$$

**Απόδειξη.**

Υποθέτουμε ότι  $X \in NBUE$  ( $NWUE$ ), τότε

$$m(t) \leq (\geq) \mu \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Επομένως,

$$\int_0^{\infty} m(t) f(t) dt \leq (\geq) \int_0^{\infty} \mu f(t) dt = \mu,$$

έχοντας λάβει υπόψιν ότι

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$$

και

$$\int_0^{\infty} m(t) f(t) dt = E(m(X)).$$

Οπότε από την (2.2), προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}(X) \leq (\geq) \mu.$$

□

Για τις κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια κατανομών  $NBUE$ , προκύπτει ένα άνω φράγμα για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, ή με άλλα

λόγια η αβεβαιότητα που περιέχεται στην τυχαία μεταβλητή  $X$ , λαμβάνοντας σαν μέτρο την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, είναι το πολύ όσο η μέση της τιμή. Αντίστοιχα για τις κατανομές της κλάσης  $NWUE$  έχουμε ένα κάτω φράγμα.

Γενικά, μπορούμε να βρούμε ένα άνω φράγμα για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία που βασίζεται στην πρώτη και δεύτερη ροπή, το οποίο ισχύει για όλες τις περιπτώσεις των μη αρνητικών συνεχών κατανομών (βλέπε Rao et al., 2004). Παραθέτουμε πρώτα δύο λήμματα, που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος.

**Λήμμα 2.1.2.** (Log integral inequality, βλέπε για παράδειγμα Honorio and Jaakkola, 2013)

Έστω  $f(x)$  μία μη αρνητική συνάρτηση και  $g(x)$  μία άλλη θετική συνάρτηση με πραγματικές τιμές. Τότε

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)} dx \geq \int_0^{\infty} f(x) dx \ln \frac{\int_0^{\infty} f(x) dx}{\int_0^{\infty} g(x) dx}. \quad (2.8)$$

□

**Λήμμα 2.1.3.** Έστω  $X$  μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή. Αν  $g$  είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, με  $g(0) = 0$ , τότε

$$E(g(X)) = \int_0^{\infty} g'(x) \bar{F}(x) dx.$$

□

Για  $g(x) = x$  με  $g'(x) = 1$ , προκύπτει η πρώτη ροπή της  $X$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx. \quad (2.9)$$

Για  $g(x) = x^2$  με  $g'(x) = 2x$ , παίρνουμε τη δεύτερη ροπή της  $X$

$$E(X^2) = 2 \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx. \quad (2.10)$$

**Θεώρημα 2.1.2.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με πρώτη και δεύτερη ροπή  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ , αντίστοιχα, ισχύει ότι

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{E(X^2)}{2E(X)}. \quad (2.11)$$

## 2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

### Απόδειξη.

Θεωρούμε μία άλλη τυχαία μεταβλητή  $Y$  η οποία έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ , και συμβολίζουμε με  $\bar{G}(x)$  τη συνάρτηση αξιοπιστίας της. Από την (2.8), έχουμε

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x) \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} dx \geq \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \ln \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\int_0^{\infty} \bar{G}(x) dx}.$$

Από την (2.9), παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \ln e^{-\lambda x} dx \geq E(X) \ln \frac{E(X)}{E(Y)}$$

επομένως,

$$-\mathcal{E}(X) + \lambda \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx \geq E(X) \ln(\lambda E(X))$$

ή ισοδύναμα από την (2.10)

$$-\mathcal{E}(X) \geq -\frac{\lambda}{2} E(X^2) + E(X) \ln(\lambda E(X)), \text{ για κάθε } \lambda > 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $\lambda$  το δεύτερο μέλος της ανίσωσης και θέτοντας το ίσο με το μηδέν, η ανισότητα μεγιστοποιείται για

$$\lambda = \frac{2E(X)}{E(X^2)}.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του  $\lambda$ , λαμβάνουμε

$$-\mathcal{E}(X) \geq -E(X) + E(X) \ln \frac{2(E(X))^2}{E(X^2)}$$

και έχοντας υπόψη ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{ για } x > 0,$$

προκύπτει ότι

$$-\mathcal{E}(X) \geq -E(X) + E(X) \left(1 - \frac{E(X^2)}{2(E(X))^2}\right)$$

ή

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{E(X^2)}{2E(X)}.$$

□

Συμπερασματικά, για τις κατανομές που περιέχονται στην κλάση  $NBUE$  προκύπτουν δύο άνω φράγματα για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, ενώ για τις κατανομές της κλάσης  $NWUE$  έχουμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα.

- Αν  $X \in NBUE$

$$\mathcal{E}(X) \leq \mu \quad \text{και} \quad \mathcal{E}(X) \leq \frac{E(X^2)}{2E(X)}.$$

- Αν  $X \in NWUE$

$$\mu \leq \mathcal{E}(X) \leq \frac{E(X^2)}{2E(X)}.$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας που ορίζεται ως το πηλίκο της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  προς το μέσο  $\mu$ ,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}}{E(X)},$$

για τις κατανομές των κλάσεων  $NBUE$  ( $NWUE$ ) είναι πάντα μικρότερος (αντίστοιχα μεγαλύτερος) από τη μονάδα (βλέπε Hall and Wellner, 1980). Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} X \in NBUE &\Rightarrow \frac{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}}{E(X)} < 1 \\ &\Rightarrow E(X^2) - E(X)^2 < E(X)^2 \\ &\Rightarrow \frac{E(X^2)}{2E(X)} < E(X) = \mu. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Από τη σχέση (2.12), έπεται το συμπέρασμα ότι για τις κατανομές που έχουν την ιδιότητα  $NBUE$ , για τις οποίες έχουμε δύο άνω φράγματα, το φράγμα που δίνει η σχέση (2.11) είναι καλύτερο από αυτό που δίνει η (2.7). Παρόλα αυτά, να σημειώσουμε ότι στην πρώτη περίπτωση απαιτείται και η ύπαρξη της δεύτερης ροπής, σε αντίθεση με τη δεύτερη περίπτωση που αρκεί η πρώτη μόνο ροπή. Για να αποσαφηνίσουμε το αποτέλεσμα αυτό, παραθέτουμε δύο παραδείγματα (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007).

**Παράδειγμα 2.1.1.** Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  κατανέμεται σαν μίξη δύο εκθετικών με παραμέτρους  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 > 0$ . Η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η ένταση κινδύνου δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = p \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - p) \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0, \quad p \in (0, 1).$$

- Συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = p e^{-\lambda_1 t} + (1 - p) e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0.$$



## 2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- Ένταση κινδύνου

$$\lambda(t) = \frac{p \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p) \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{p e^{-\lambda_1 t} + (1-p) e^{-\lambda_2 t}}, \quad t > 0.$$

Η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα  $DFR$  και η μίξη δύο  $DFR$  κατανομών έχει επίσης την ιδιότητα  $DFR$  (βλέπε Lai and Xie, 2006, σελ. 48). Επομένως,  $X \in DFR$  και κατά συνέπεια  $X \in NWUE$ . Επίσης, από τις (2.9), (2.10) η πρώτη και δεύτερη ροπή είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} (p e^{-\lambda_1 t} + (1-p) e^{-\lambda_2 t}) dt \\ &= p \frac{1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2 \int_0^{\infty} t (p e^{-\lambda_1 t} + (1-p) e^{-\lambda_2 t}) dt \\ &= 2 \left( p \frac{1}{\lambda_1^2} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2^2} \right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{E(X^2)}{2E(X)} = \frac{p \frac{1}{\lambda_1^2} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2^2}}{p \frac{1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2}}.$$

Συνεπώς, από τις (2.7), (2.11) έπεται ότι

$$p \frac{1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2} \leq \mathcal{E}(X) \leq \frac{p \frac{1}{\lambda_1^2} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2^2}}{p \frac{1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{1}{\lambda_2}}.$$

□

**Παράδειγμα 2.1.2.** Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Η πρώτη και δεύτερη ροπή της δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{και} \quad E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},$$

οπότε

$$\frac{E(X^2)}{2E(X)} = \frac{\alpha+1}{2\lambda}.$$

- Αν  $0 < \alpha < 1$ ,  $X \in DFR$ , επομένως  $X \in NWUE$ , οπότε από τις (2.7), (2.11)

$$\frac{\alpha}{\lambda} \leq \mathcal{E}(X) \leq \frac{\alpha+1}{2\lambda}.$$

- Αν  $\alpha > 1$ ,  $X \in IFR$ , δηλαδή  $X \in NBUE$ , συνεπώς

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{\alpha + 1}{2\lambda}$$

και

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Για  $\alpha > 1$  όμως

$$\frac{\alpha + 1}{2\lambda} \leq \frac{\alpha}{\lambda},$$

δηλαδή το άνω φράγμα στη σχέση (2.11), είναι καλύτερο από αυτό της (2.7).

□

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε, ότι από τη σχέση (2.11), αν ορίζεται η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , δηλαδή αν υπάρχει η δεύτερη ροπή της,  $E(X^2) < \infty$ , τότε υπάρχει και η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Η αντίστροφη σχέση δεν ισχύει πάντα, αφού όπως είδαμε για την κατανομή Pareto η διακύμανση ορίζεται για  $\alpha > 2$ , ενώ η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία υπάρχει για οποιοδήποτε  $\alpha > 1$ .

## 2.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Θεωρούμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $X_t$ , η οποία ονομάζεται δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (dynamic cumulative residual entropy-DCRE) και θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}(X; t)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= - \int_0^{\infty} \bar{F}_{X_t}(x) \ln \bar{F}_{X_t}(x) dx \\ &= - \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Επίσης, από την (1.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx + \ln \bar{F}(t) \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx \\ &= - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx + m(t) \ln \bar{F}(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Για  $t = 0$ ,

$$\mathcal{E}(X; 0) = \mathcal{E}(X).$$

## 2.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία μελετήθηκε για πρώτη φορά από τους Asadi and Zohrevand (2007) και παρέχει μία δυναμική μέτρηση πληροφόρησης για την τυχαία μεταβλητή  $X$  στο χρόνο  $t$ , αφού περιγράφει την αβεβαιότητα που περιέχεται στον υπολειπόμενο χρόνο ζωής της.

Στο επόμενο θεώρημα (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007), θα δούμε πως συνδέεται η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$ .

**Θεώρημα 2.2.1.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , τέτοια ώστε  $\mathcal{E}(X; t) < \infty$ , για κάθε  $t \geq 0$

$$\mathcal{E}(X; t) = E(m(X) | X \geq t). \quad (2.15)$$

**Απόδειξη.**

Το δεύτερο μέλος της (2.15) εκφράζει τη δεσμευμένη μέση τιμή του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της  $X$ , δοθέντος ότι έχει υπερβεί την ηλικία  $t$ , δηλαδή

$$E(m(X) | X \geq t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} m(x) f(x) dx ,$$

οπότε από την (1.7)

$$E(m(X) | X \geq t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \frac{\int_x^{\infty} \bar{F}(s) ds}{\bar{F}(x)} f(x) dx .$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης για  $t < x < s$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} E(m(X) | X \geq t) &= \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \left( \int_t^s \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} dx \right) \bar{F}(s) ds \\ &= \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \left( \int_0^s \lambda(x) dx - \int_0^t \lambda(x) dx \right) \bar{F}(s) ds \\ &= \int_t^{\infty} (-\ln \bar{F}(s) + \ln \bar{F}(t)) \frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}(t)} ds \\ &= - \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx \\ &= \mathcal{E}(X; t) . \end{aligned}$$

□

Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 2.2.1 αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 2.1.1, αφού για  $t = 0$

$$\mathcal{E}(X; 0) = \mathcal{E}(X) = E(m(X) | X \geq 0) = E(m(X)) .$$

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την (2.15) θα υπολογίσουμε τη δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία της ομοιόμορφης κατανομής, της εκθετικής κατανομής, της κατανομής Pareto και της δυναμοκατανομής.

### 1. Ομοιόμορφη κατανομή

Αν  $X \sim U(0, \alpha)$ , για  $\alpha > 0$ , από την (1.10) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= E\left(\frac{\alpha - X}{2} \mid X \geq t\right) = \frac{1}{\alpha - t} \int_t^\alpha \frac{\alpha - x}{2} \frac{1}{\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha - t}{4}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2. Εκθετική κατανομή

Αν  $X \sim exp(\lambda)$ , για  $\lambda > 0$ , από την (1.12) παίρνουμε

$$\mathcal{E}(X; t) = E\left(\frac{1}{\lambda} \mid X \geq t\right) = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.17)$$

### 3. Κατανομή Pareto

Αν  $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$ , για  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 0$ , τότε από την (1.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= E\left(\frac{X + \beta}{\alpha - 1} \mid X \geq t\right) \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(t + \beta)^\alpha} \int_t^\infty (x + \beta) \frac{\alpha \beta^\alpha}{(x + \beta)^{\alpha+1}} dx \\ &= \frac{\alpha (t + \beta)}{(\alpha - 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

### 4. Δυναμοκατανομή

Αν  $X \sim Power(\alpha, \beta)$ , για  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , από την (1.17) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= E\left(\frac{\beta - X}{\alpha + 1} \mid X \geq t\right) \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} \frac{1}{(\frac{\beta - t}{\beta})^\alpha} \int_t^\beta (\beta - x) \frac{\alpha (\beta - x)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha (\beta - t)}{(\alpha + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.2.1 Χαρακτηρισμός της κατανομής

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας είναι ότι χαρακτηρίζει την κατανομή του υπό εξέταση μεγέθους που αναπαριστά η τυχαία μεταβλητή  $X$ . Στο επόμενο θεώρημα (βλέπε Asasi and Zohrevand, 2007), θα παρουσιάσουμε ειδικά ένα αποτέλεσμα για τον χαρακτηρισμό της εκθετικής κατανομής, της κατανομής Pareto και της δυναμοκατανομής. Θα δώσουμε πρώτα ένα λήμμα για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, όπως απεδείχθη από τους Hall and Wellner (1981).

**Λήμμα 2.2.1.** Έστω  $X$  μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και μέση τιμή  $\mu$ . Η  $m(t)$  είναι γραμμική συνάρτηση του  $t$ , της μορφής

$$m(t) = (c - 1)t + \mu, \text{ για } c > 0, \quad (2.20)$$

αν και μόνο αν η  $X$  έχει

- Την εκθετική κατανομή, όταν  $c = 1$ .
- Την κατανομή Pareto, όταν  $c > 1$ .
- Την δυναμοκατανομή, όταν  $0 < c < 1$ .

□

**Θεώρημα 2.2.2.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , ισχύει ότι

$$\mathcal{E}(X; t) = c m(t), \text{ για } c > 0, \quad (2.21)$$

αν και μόνο αν η  $X$  έχει

- Την εκθετική κατανομή, όταν  $c = 1$ .
- Την κατανομή Pareto, όταν  $c > 1$ .
- Την δυναμοκατανομή, όταν  $0 < c < 1$ .

**Απόδειξη.**

Υποθέτουμε ότι η (2.21) ισχύει. Τότε από την (2.14)

$$-\frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx + m(t) \ln \bar{F}(t) = c m(t).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς  $t$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} c m'(t) &= m'(t) \ln \bar{F}(t) - m(t) \lambda(t) \\ &+ \ln \bar{F}(t) - \lambda(t) \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx \\ &= m'(t) \ln \bar{F}(t) - m(t) \lambda(t) \\ &+ \ln \bar{F}(t) + \lambda(t) [c m(t) - m(t) \ln \bar{F}(t)] , \end{aligned}$$

έχοντας λάβει υπόψη ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx &= -\frac{d}{dt} \int_0^t \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx \\ &= -\bar{F}(t) \ln \bar{F}(t) \end{aligned}$$

και

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)^2} = \frac{\lambda(t)}{\bar{F}(t)} .$$

Αντικαθιστώντας την  $m'(t)$  από την (1.8), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} c (m(t) \lambda(t) - 1) &= (m(t) \lambda(t) - 1) \ln \bar{F}(t) - \lambda(t) m(t) + \ln \bar{F}(t) \\ &+ c \lambda(t) m(t) - \lambda(t) m(t) \ln \bar{F}(t) . \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι για κάθε  $x > 0$

$$m(x) \lambda(x) = c ,$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την (1.8)

$$m'(x) = c - 1 .$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης ως προς  $x$ , στο διάστημα  $(0, t)$ , προκύπτει η παρακάτω γραμμική μορφή για τη  $m(t)$

$$m(t) = (c - 1) t + m(0) = (c - 1) t + \mu$$

και βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα τον Hall and Wellner έπεται το συμπέρασμα. □

Επίσης, για τη σταθερά  $c$  έχουμε

- Για την εκθετική κατανομή από τις (1.12), (2.17)

$$\mathcal{E}(X; t) = m(t) ,$$

οπότε πράγματι η (2.21) ισχύει για  $c = 1$ .

- Για την κατανομή Pareto από τις (1.15), (2.18)

$$\mathcal{E}(X; t) = \frac{\alpha (t + \beta)}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} m(t),$$

οπότε η (2.21) ισχύει για

$$c = \frac{\alpha}{\alpha - 1} > 1.$$

- Για τη δυναμοκατανομή από τις (1.17), (2.19)

$$\mathcal{E}(X; t) = \frac{\alpha (\beta - t)}{(\alpha + 1)^2} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} m(t),$$

που ισχύει η (2.21) για

$$c = \frac{\alpha}{\alpha + 1} < 1.$$

□

### 2.2.2 Μελέτη μονοτονίας

Εν συνεχεία, θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας μελετώντας τη μονοτονία της. Ορίζουμε πρώτα τις ακόλουθες οικογένειες κατανομών με μονότονη γήρανση (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007).

**Ορισμός 2.2.1.** Μία μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ), θα λέμε ότι

- Έχει την ιδιότητα *IDCRE* (*increasing dynamic cumulative residual entropy*), αν η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in IDCRE$  ή  $F \in IDCRE$ .
- Έχει την ιδιότητα *DDCRE* (*decreasing dynamic cumulative residual entropy*), αν η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in DDCRE$  ή  $F \in DDCRE$ .

Το επόμενο θεώρημα (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007), δίνει την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία μονότονη συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Παραθέτουμε πρώτα ένα λήμμα για την παράγωγο της  $\mathcal{E}(X; t)$ .

**Λήμμα 2.2.2.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X;t)$ , αν υποθέσουμε ότι η  $\mathcal{E}'(X;t)$  υπάρχει, τότε

$$\mathcal{E}'(X;t) = \lambda(t) [\mathcal{E}(X;t) - m(t)] , \quad (2.22)$$

όπου  $\lambda(t)$  είναι η ένταση κινδύνου της  $X$  και  $m(t)$  ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της.

**Απόδειξη.**

Παραγωγίζοντας την (2.14) ως προς  $t$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(X;t) &= -\lambda(t) \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx + \ln \bar{F}(t) \\ &+ m'(t) \ln \bar{F}(t) - m(t) \lambda(t) . \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την  $m'(t)$  από την (1.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(X;t) &= \lambda(t) \left( -\frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx \right) + \ln \bar{F}(t) \\ &+ \ln \bar{F}(t) [\lambda(t) m(t) - 1] - m(t) \lambda(t) . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας όμως πάλι την (2.14)

$$-\frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx = \mathcal{E}(X;t) - m(t) \ln \bar{F}(t) ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(X;t) &= \lambda(t) [\mathcal{E}(X;t) - m(t) \ln \bar{F}(t)] \\ &+ \lambda(t) m(t) \ln \bar{F}(t) - m(t) \lambda(t) \\ &= \lambda(t) [\mathcal{E}(X;t) - m(t)] . \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 2.2.3.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X;t)$ , η  $\mathcal{E}(X;t)$  είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου  $t$ , αν και μόνο αν

$$\mathcal{E}(X;t) \geq (\leq) m(t) \quad \text{για κάθε } t \geq 0 . \quad (2.23)$$

**Απόδειξη.**

Η  $\mathcal{E}(X;t)$  είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) συνάρτηση του  $t$ , αν και μόνο αν

$$\mathcal{E}'(X;t) \geq (\leq) 0 \quad \text{για κάθε } t \geq 0 ,$$



ή από την (2.22) και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\lambda(t) > 0$ , για  $t > 0$

$$\mathcal{E}(X;t) - m(t) \geq (\leq) 0 \quad \text{για κάθε } t \geq 0 ,$$

δηλαδή

$$\mathcal{E}(X;t) \geq (\leq) m(t) \quad \text{για κάθε } t \geq 0 .$$

□

Στο επόμενο θεώρημα (βλέπε Asadi and Zohrevand, 2007 και Navarro et al., 2010), θα παρουσιάσουμε τη σχέση που συνδέει τις κλάσεις κατανομών *IMRL*, *DMRL* (βλέπε Ορισμό 1.1.2) με τις κλάσεις *IDCRE* και *DDCRE* αντίστοιχα.

**Θεώρημα 2.2.4.** Για μία μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή  $X$  με μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $m(t)$  και δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X;t)$ , αν η  $m(t)$  είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου  $t$ , τότε και η  $\mathcal{E}(X;t)$  είναι επίσης αύξουσα (ή φθίνουσα).

**Απόδειξη.**

Υποθέτουμε ότι η  $m(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Τότε για  $x > t$

$$m(x) \geq m(t)$$

οπότε

$$\frac{\int_t^\infty m(x) f(x) dx}{\bar{F}(t)} \geq \frac{m(t) \int_t^\infty f(x) dx}{\bar{F}(t)} = m(t) ,$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_t^\infty f(x) dx = \bar{F}(t) .$$

Όμως, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι η δεσμευμένη μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής της  $X$ , οπότε από την (2.15), προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}(X;t) \geq m(t) ,$$

ή

$$\mathcal{E}(X;t) - m(t) \geq 0 , t \geq 0 .$$

Από την (2.22), έπεται ότι

$$\mathcal{E}'(X;t) \geq 0 , t \geq 0$$

δηλαδή η  $\mathcal{E}(X;t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για την περίπτωση που η  $m(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ . □

Προκύπτει επομένως το συμπέρασμα ότι οι οικογένειες κατανομών  $IMRL$  ( $DMRL$ ) περιέχονται στις κλάσεις  $IDCRE$  ( $DDCRE$ ), ισχύει δηλαδή η ακόλουθη διάταξη

$$DFR \Rightarrow IMRL \Rightarrow IDCRE$$

$$IFR \Rightarrow DMRL \Rightarrow DDCRE .$$

Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελούν η ομοιόμορφη κατανομή, η κατανομή Pareto και η δυναμοκατανομή. Συγκεκριμένα, η ομοιόμορφη κατανομή και η δυναμοκατανομή, όπως αναφέραμε (βλέπε Κεφάλαιο 1, σελ. 12, 15, 16), ανήκουν στην οικογένεια κατανομών  $DMRL$ , και όπως προκύπτει από τις (2.16), (2.19) έχουν και την ιδιότητα  $DDCRE$ , εφόσον η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Αντίστοιχα, η κατανομή Pareto περιέχεται στην κλάση  $IMRL$  και από την (2.18) έχει και την ιδιότητα  $IDCRE$ .

Παρόλα αυτά, αξίζει να τονίσουμε ότι η οικογένεια των κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $IMRL$  (αντίστοιχα  $DMRL$ ) είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $IDCRE$  (αντίστοιχα  $DDCRE$ ). Θα παραθέσουμε στη συνέχεια δύο παραδείγματα κατανομών που δεν ανήκουν στις κλάσεις  $IMRL$  και  $DMRL$ , αλλά περιέχονται στις κλάσεις  $IDCRE$  και  $DDCRE$  αντίστοιχα. Τα παραδείγματα έγιναν με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica.

**Παράδειγμα 2.2.1.** Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει την κατανομή Burr τύπου XII με παραμέτρους  $\alpha = 2$  και  $\kappa = 1.3$ . Τότε, η συνάρτηση αξιοπιστίας της δίνεται από τη σχέση

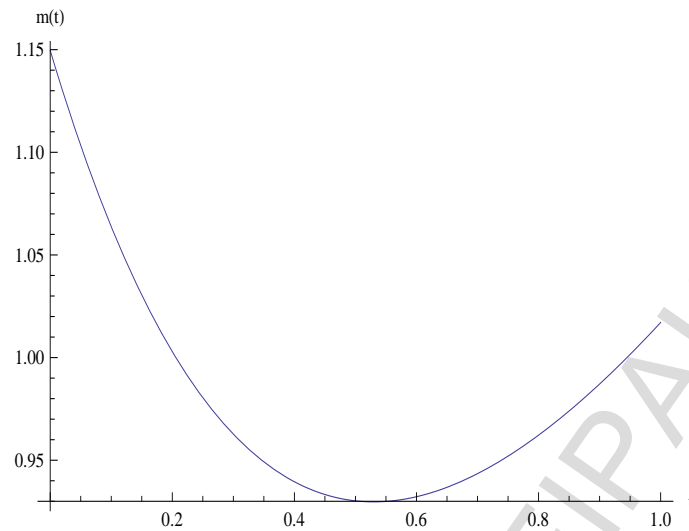
$$\bar{F}(t) = (1 + t^2)^{-1.3}, \quad t > 0 .$$

- Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής  $m(t)$ , θα είναι

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty (1 + x^2)^{-1.3} dx}{(1 + t^2)^{-1.3}}, \quad t > 0 .$$

Η γραφική παράσταση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $m(t)$  είναι

## 2.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία



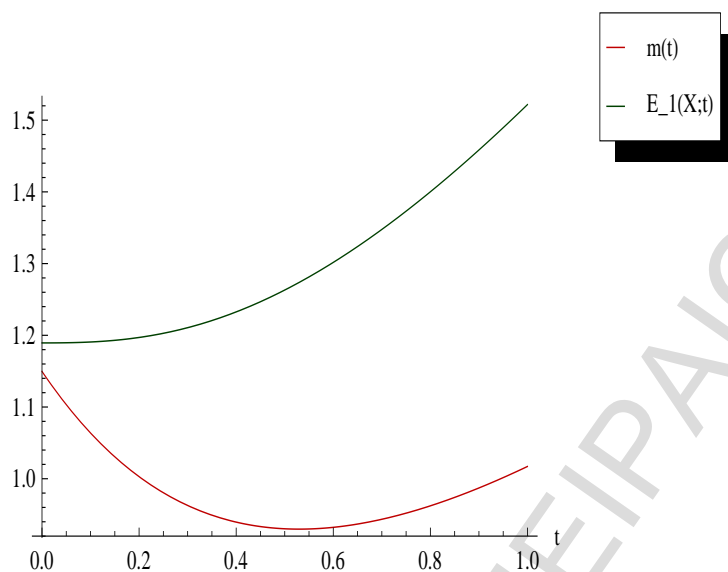
Σχήμα 2.1: Γράφημα της συνάρτησης  $m(t)$  για  $0 \leq t \leq 1$

Παρατηρούμε ότι η  $m(t)$  έχει ελάχιστο στο σημείο  $t = 0.529797$ , επομένως είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $t$  μέχρι το  $t = 0.529797$  και στη συνέχεια γίνεται αύξουσα. Συνεπώς, η  $m(t)$  δεν είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$  και η  $X$  δεν έχει την ιδιότητα *IMRL*.

- Η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , θα είναι

$$\mathcal{E}(X; t) = -\frac{1}{(1+t^2)^{-1.3}} \int_t^{\infty} (1+x^2)^{-1.3} \ln \frac{(1+x^2)^{-1.3}}{(1+t^2)^{-1.3}} dx, \quad t > 0.$$

Η από κοινού γραφική παράσταση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $m(t)$  και της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας  $\mathcal{E}(X; t)$  είναι



Σχήμα 2.2: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}(X; t)$  για  $0 \leq t \leq 1$

Για  $t > 0$ , είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι  $\mathcal{E}(X; t) \geq m(t)$ , επόμενως από την (2.23), έπεται ότι η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και επομένως η  $X$  έχει την ιδιότητα *IDCRE*.

□

**Παράδειγμα 2.2.2.** (βλέπε Navarro et al., 2010) Θεωρούμε ότι η  $X$  είναι μία μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση αξιοπιστίας

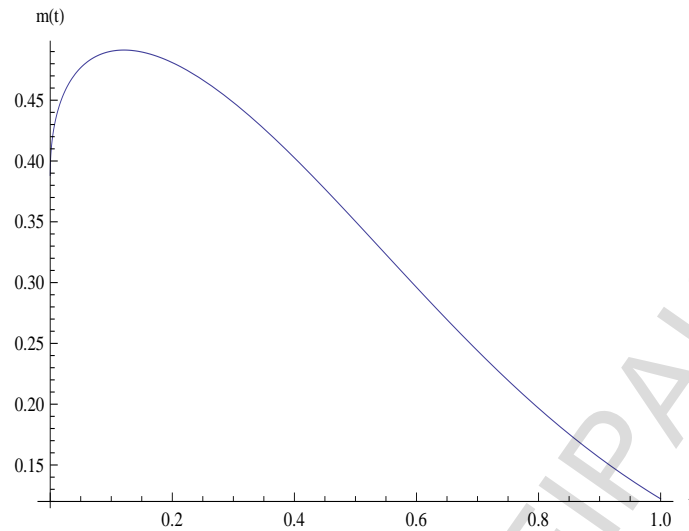
$$\bar{F}(t) = e^{-t^5 - (2t)^{1/2}}, \quad t \geq 0.$$

- Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής  $m(t)$ , θα είναι

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty e^{-x^5 - (2x)^{1/2}} dx}{e^{-t^5 - (2t)^{1/2}}}, \quad t \geq 0.$$

Η γραφική παράσταση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $m(t)$  είναι

## 2.2 Δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία



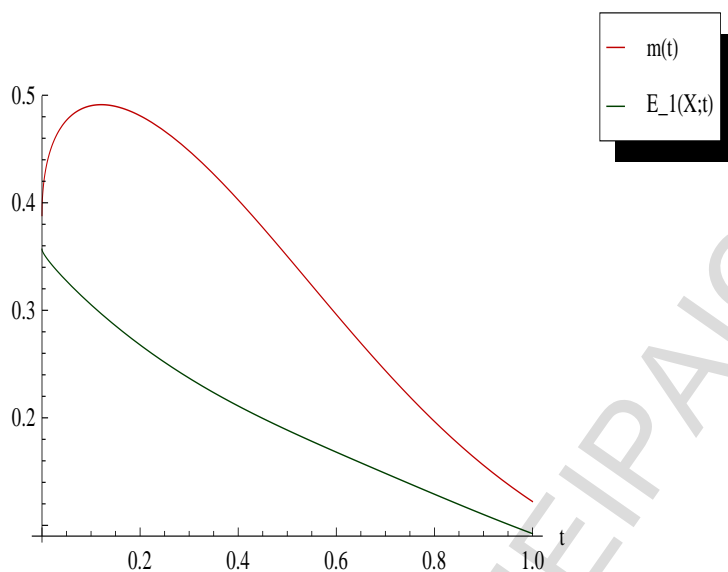
Σχήμα 2.3: Γράφημα της συνάρτησης  $m(t)$  για  $0 \leq t \leq 1$

Η  $m(t)$  έχει μέγιστο στο σημείο  $t = 0.120786$ , είναι δηλαδή αύξουσα συνάρτηση του  $t$  μέχρι το  $t = 0.120786$  και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα. Επομένως, η  $m(t)$  δεν είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$  και η  $X$  δεν έχει την ιδιότητα *DMRL*.

- Η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , θα είναι

$$\mathcal{E}(X; t) = -\frac{1}{e^{-t^5-(2t)^{1/2}}} \int_t^{\infty} e^{-x^5-(2x)^{1/2}} \ln \frac{e^{-x^5-(2x)^{1/2}}}{e^{-t^5-(2t)^{1/2}}} dx, \quad t \geq 0.$$

Η από κοινού γραφική παράσταση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $m(t)$  και της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας  $\mathcal{E}(X; t)$  είναι



Σχήμα 2.4: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}(X;t)$  για  $0 \leq t \leq 1$

Για  $t > 0$ , προκύπτει ότι  $\mathcal{E}(X;t) \leq m(t)$ , επομένως από την (2.23), έπεται ότι η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και επομένως η  $X$  έχει την ιδιότητα *DDCRE*.

□

## Κεφάλαιο 3

# Γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Στο παρόν κεφάλαιο, θα συσχετίσουμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία με το μέσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών τιμών μίας ανανεωτικής διαδικασίας και θα περιγράψουμε ένα νέο μέτρο αβεβαιότητας την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Θα μελετηθεί επίσης, η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και θα παρουσιαστούν κάποια βασικά αποτελέσματα για τον χαρακτηρισμό της κατανομής και τη μονοτονία της.

### 3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Σε μία ανανεωτική διαδικασία όπου οι μονάδες που αποτυγχάνουν αντικαθίστανται από νέες μονάδες, της ίδιας όμως ηλικίας, η κατανομή της διαδικασίας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό ανανέωσης της κατανομής των μονάδων (βλέπε Baxter, 1982 και Krakowski, 1973). Θεωρούμε ότι η  $X$  είναι μία μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το χρόνο ζωής της πρώτης μονάδας, με συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(x)$ , και  $Y$  είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο ζωής της δεύτερης μονάδας, με συνάρτηση αξιοπιστίας που δίνεται από τη σχέση  $\bar{G}(t+x)/\bar{G}(x)$ , δοθέντος ότι  $X = x$ . Τότε, η συνάρτηση αξιοπιστίας της ανανεωτικής διαδι-

κασίας είναι

$$\begin{aligned}\bar{F}_2(t) &= \int_0^\infty P(X+Y > t \mid X=x) f(x)dx \\ &= \int_0^t P(Y > t-x \mid X=x) f(x)dx + \int_t^\infty f(x)dx \\ &= \bar{F}(t) + \int_0^t \frac{\bar{G}(t)}{\bar{G}(x)} f(x)dx ,\end{aligned}$$

δεδομένου ότι

$$P(X+Y > t \mid X=x) = 1 \quad \text{για } x \geq t ,$$

όπου  $f(x)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

Γενικά, αν συμβολίσουμε με  $X_n$  την τυχαία μεταβλητή που αποτυπώνει το χρόνο μέχρι την πραγματοποίηση της  $n$ -οστής αποτυχίας, τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας της,  $\bar{F}_n(t)$  (βλέπε Krakowski, 1973), δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}_n(t) = \bar{F}(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} = q_n(\bar{F}(t)) \quad \text{για } n = 1, 2, \dots , \quad (3.1)$$

όπου  $\Lambda(t)$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου της  $X$  και

$$q_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[-\ln x]^k}{k!} \quad (3.2)$$

είναι μία αύξουσα συνάρτηση του  $x$ , τέτοια ώστε  $q_n(0) = 0$  και  $q_n(1) = 1$ .

### Παρατήρηση

1. Η σχέση (3.1) ισχύει με την προϋπόθεση ότι όλες οι μονάδες έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή  $\bar{F} = \bar{G}$ .
2. Η συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}_n$  της  $X_n$ , εκφράζεται σαν μία αύξουσα συνάρτηση της συνάρτησης αξιοπιστίας  $\bar{F}$  της κάθε μονάδας.

Παραγωγίζοντας την (3.1) ως προς  $t$ , η συνάρτηση πυκνότητας της  $X_n$  είναι

$$f_n(t) = \frac{[\Lambda(t)]^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \quad \text{για } n = 1, 2, \dots . \quad (3.3)$$

Η μέση τιμή της  $X_n$  δίνεται από τη σχέση (βλέπε (2.9))

$$\mu_n = \int_0^\infty \bar{F}_n(x)dx \quad \text{για } n \geq 1 ,$$



### 3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

οπότε ο αναμενόμενος χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών πραγματοποιήσεων της ανανεωτικής διαδικασίας είναι

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} - \mu_n &= \int_0^\infty \bar{F}(x) \sum_{k=0}^n \frac{[\Lambda(x)]^k}{k!} dx - \int_0^\infty \bar{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\Lambda(x)]^k}{k!} dx \\ &= \int_0^\infty \bar{F}(x) \frac{[\Lambda(x)]^n}{n!} dx .\end{aligned}\quad (3.4)$$

Για  $n = 1$

$$\begin{aligned}\mu_2 - \mu_1 &= \int_0^\infty \bar{F}(x) \Lambda(x) dx = - \int_0^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx \\ &= \mathcal{E}(X) ,\end{aligned}$$

προκύπτει η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία της τυχαίας μεταβλητής  $X$  (βλέπε (2.1)).

Βασιζόμενοι σε αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και να θεωρήσουμε ένα νέο μέτρο αβεβαιότητας για την τυχαία μεταβλητή  $X$ , που ονομάζεται γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (generalized cumulative residual entropy - GCRE) και θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_n(X)$ . Ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_n(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) \frac{[\Lambda(x)]^n}{n!} dx \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots . \quad (3.5)$$

Για  $n = 0$

$$\mathcal{E}_0(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx = E(X) .$$

Για  $n = 1$

$$\mathcal{E}_1(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) \Lambda(x) dx = \mathcal{E}(X) .$$

Η γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X)$ , ορίστηκε για πρώτη φορά από τους Psarrakos and Navarro (2013), και αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι εκφράζει το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των συναρτήσεων  $\bar{F}_{n+1}$  και  $\bar{F}_n$ . Ειδικά, για  $n = 0$ , όπου  $\mathcal{E}_0(X) = E(X)$  είναι η περιοχή κάτω από την  $\bar{F}_1 \equiv \bar{F}$ , που είναι το γνωστό αποτέλεσμα για τη μέση τιμή.

Στη συνέχεια, τα θεωρητικά αποτελέσματα μέχρι το τέλος του κεφαλαίου περιέχονται στις εργασίες των Psarrakos and Navarro (2013) και Navarro and Psarrakos (2013), ενώ στην παρούσα εργασία θα δώσουμε κάποια νέα αριθμητικά παραδείγματα που έγιναν με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica, και τα οποία επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Στο επόμενο θεώρημα, θα δούμε ποια είναι η σχέση που συνδέει την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία,  $\mathcal{E}_n(X)$ , με την ένταση κινδύνου,  $\lambda(t)$ , της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

**Θεώρημα 3.1.1.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X)$  και ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$ , ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_n(X) = E \left( \frac{1}{\lambda(X_{n+1})} \right). \quad (3.6)$$

**Απόδειξη.**

Από την (3.5), έχουμε

$$\mathcal{E}_n(X) = \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} \frac{[\Lambda(x)]^n}{n!} f(x) dx.$$

Επίσης, από την (3.3)

$$f_{n+1}(x) = \frac{[\Lambda(x)]^n}{n!} f(x).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(X) &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(x)} f_{n+1}(x) dx \\ &= E \left( \frac{1}{\lambda(X_{n+1})} \right). \end{aligned}$$

□

Εν συνεχεία, θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας που σχετίζονται με τη στοχαστική διάταξη των τυχαίων μεταβλητών. Δίνουμε πρώτα τους ακόλουθους ορισμούς (βλέπε Shaked and Shanthikumar, 2010, σελ. 3, 16, 42).

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω  $X$  και  $Y$  είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}$  και  $\bar{G}$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x) \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, \infty).$$

Τότε λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  με τη συνήθη στοχαστική διάταξη και το συμβολίζουμε με  $X \leq_{ST} Y$ .

**Ορισμός 3.1.2.** Έστω  $X$  και  $Y$  είναι δύο μη αρνητικές, συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με ένταση κινδύνου  $\lambda_X$  και  $\lambda_Y$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t), \quad t \geq 0.$$

### 3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Τότε λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  με τη διάταξη της έντασης κινδύνου και το συμβολίζουμε με  $X \leq_{HR} Y$ .

**Ορισμός 3.1.3.** Έστω  $X$  και  $Y$  είναι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$  και  $g(t)$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε ο λόγος

$$\frac{g(t)}{f(t)} \quad \text{για κάθε } t \in (-\infty, \infty),$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Τότε λέμε ότι η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  με τη διάταξη του λόγου πιθανοφανειών και το συμβολίζουμε με  $X \leq_{LR} Y$ .

Το επόμενο θεώρημα, δίνει μία διάταξη για την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία των κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $IFR$  ( $DFR$ ).

**Θεώρημα 3.1.2.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X)$  και ένταση κινδύνου  $\lambda(t)$ , αν  $X \in IFR$  ( $DFR$ ), τότε

$$\mathcal{E}_n(X) \geq (\leq) \mathcal{E}_{n+1}(X) \quad (3.7)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Απόδειξη.**

Από την (3.3) ο λόγος

$$\frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \frac{\Lambda(t)}{n}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , επομένως

$$X_n \leq_{LR} X_{n+1}.$$

Η διάταξη του λόγου πιθανοφανειών όμως, οδηγεί σε ίδια στοχαστική διάταξη (βλέπε Shaked and Shanthikumar, 2010, σελ. 18)

$$X_n \leq_{ST} X_{n+1}.$$

Αν  $X \in IFR$  ( $DFR$ ) τότε η ένταση κινδύνου,  $\lambda(t)$ , είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του  $t$ , οπότε από την (3.6) προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}_n(X) \geq (\leq) \mathcal{E}_{n+1}(X) \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots$$

□

Ειδικά, για την εκθετική κατανομή που η ένταση κινδύνου είναι σταθερή, προκύπτει η γνωστή ιδιότητα

$$\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_0(X) = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Στο επόμενο θεώρημα, παρουσιάζουμε μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα, χρησιμοποιώντας την διάταξη με βάση την ένταση κινδύνου.

**Θεώρημα 3.1.3.** Αν  $X$  και  $Y$  είναι δύο μη αρνητικές, συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε  $X \leq_{HR} Y$ , και μία από τις δύο έχει την ιδιότητα  $DFR$ , τότε

$$\mathcal{E}_n(X) \leq \mathcal{E}_n(Y) \quad (3.8)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Απόδειξη.**

Υποθέτουμε ότι  $X$  και  $Y$  είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}$  και  $\bar{G}$ , και ένταση κινδύνου  $\lambda_X$  και  $\lambda_Y$ , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε  $X \leq_{HR} Y$ . Τότε  $X \leq_{ST} Y$ , δηλαδή

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t), \quad t \geq 0.$$

Για  $n = 0$

$$\mathcal{E}_0(X) = \int_0^\infty \bar{F}(t) dt \leq \int_0^\infty \bar{G}(t) dt = \mathcal{E}_0(Y)$$

η (3.8) ισχύει. Από την (3.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $q_{n+1}$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , έχουμε

$$\bar{F}_{n+1}(t) = q_{n+1}(\bar{F}(t)) \leq q_{n+1}(\bar{G}(t)) = \bar{G}_{n+1}(t),$$

όπου  $\bar{F}_{n+1}(t)$ ,  $\bar{G}_{n+1}(t)$  είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας της  $X_{n+1}$  και  $Y_{n+1}$  αντίστοιχα.

Επομένως

$$X_{n+1} \leq_{ST} Y_{n+1}$$

και έπεται ότι

$$E(\phi(X_{n+1})) \leq E(\phi(Y_{n+1}))$$

για κάθε αύξουσα συνάρτηση  $\phi$  (βλέπε Shaked and Shanthikumar, 2010, σελ. 4).

Αν  $Y \in DFR$  τότε η  $\frac{1}{\lambda_Y}$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , οπότε από την (3.6)

$$\mathcal{E}_n(Y) = E\left(\frac{1}{\lambda_Y(Y_{n+1})}\right) \geq E\left(\frac{1}{\lambda_Y(X_{n+1})}\right).$$

Επίσης  $X \leq_{HR} Y$ , δηλαδή

$$\frac{1}{\lambda_X} \leq \frac{1}{\lambda_Y}$$

οπότε

$$E\left(\frac{1}{\lambda_Y(X_{n+1})}\right) \geq E\left(\frac{1}{\lambda_X(X_{n+1})}\right) = \mathcal{E}_n(X)$$

και έπεται το ζητούμενο

$$\mathcal{E}_n(X) \leq \mathcal{E}_n(Y) .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι η  $X$  έχει την ιδιότητα  $DFR$ .  $\square$

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Όπως και στην περίπτωση της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας, θεωρούμε ανάλογα την δυναμική εκδοχή της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας, ως την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία του υπολειπόμενου χρόνου ζωής,  $X_t$ , η οποία καλείται δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (dynamic generalized cumulative residual entropy-DGCRE) και θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_n(X; t)$  (βλέπε Psarrakos and Navarro, 2013). Ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_n(X; t) = \frac{1}{n!} \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \left[ -\ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \right]^n dx \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Για  $t = 0$

$$\mathcal{E}_n(X; 0) = \mathcal{E}_n(X) .$$

Για  $n = 0$

$$\mathcal{E}_0(X; t) = E(X_t) = m(t) .$$

Για  $n = 1$

$$\mathcal{E}_1(X; t) = \mathcal{E}(X; t) .$$

Εν συνεχεία, θα δούμε μία διαφορετική έκφραση για την δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x - y)^n . \quad (3.10)$$

Από την (3.9), η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathcal{E}_n(X; t) = \frac{1}{n!} \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} [\Lambda(x) - \Lambda(t)]^n dx$$

οπότε από την (3.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(X; t) &= \frac{1}{n! \bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [\Lambda(x)]^k [\Lambda(t)]^{n-k} dx \\ &= \frac{1}{n! \bar{F}(t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(t)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} [\Lambda(t)]^{n-k} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx. \quad (3.12)$$

Επίσης, από την (3.11) λύνοντας ως προς

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^n dx$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^n dx &= n! \bar{F}(t) \mathcal{E}_n(X; t) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx \quad (3.13) \end{aligned}$$

Ειδικά για  $n = 1$ , από την (3.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X; t) &= \frac{1}{\bar{F}(t)} \left[ -\Lambda(t) \int_t^\infty \bar{F}(x) dx + \int_t^\infty \bar{F}(x) \Lambda(x) dx \right] \\ &= m(t) \ln \bar{F}(t) - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x) dx \end{aligned}$$

που είναι η γνωστή έκφραση για τη δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία όπως δόθηκε στη σχέση (2.14).  $\square$

Από τη σχέση (1.6), η ένταση κινδύνου του υπολειπόμενου χρόνου ζωής,  $X_t$ , είναι

$$\lambda_{X_t}(x) = \lambda(x + t)$$

επομένως, αν  $X \in IFR$  ( $DFR$ ) τότε και  $X_t \in IFR$  ( $DFR$ ), και από την (3.7) προκύπτει η ακόλουθη διάταξη για τη δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\mathcal{E}_n(X; t) \geq (\leq) \mathcal{E}_{n+1}(X; t) \quad (3.14)$$

για  $t > 0$  και  $n = 0, 1, \dots$

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, από τη σχέση (3.6), η δυναμική γενικευμένη

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία συνδέεται αντίστοιχα με την ένταση κινδύνου σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathcal{E}_n(X; t) = E \left( \frac{1}{\lambda(t + X_{t,n+1})} \right),$$

όπου  $X_{t,n+1}$  είναι ο χρόνος αναμονής της ανανεωτικής διαδικασίας ως την  $n$ -οστή αποτυχία από τη στιγμή  $t$  και έπειτα.  $\square$

#### 3.2.1 Χαρακτηρισμός της κατανομής

Κατόπιν, θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα για την δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία σχετικά με τον χαρακτηρισμό της κατανομής του υπό μελέτη μεγέθους που αναπαριστά η τυχαία μεταβλητή  $X$ . Το επόμενο λήμμα, δίνει μία διαφορετική έκφραση για την παράγωγο της δυναμικής γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας.

**Λήμμα 3.2.1.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X; t)$ , αν υποθέσουμε ότι η  $\mathcal{E}'_n(X; t)$  υπάρχει, τότε

$$\mathcal{E}'_n(X; t) = \lambda(t) [\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)] \quad (3.15)$$

για  $n = 1, 2, \dots$ , όπου  $\lambda(t)$  είναι η ένταση κινδύνου της  $X$ .

**Απόδειξη.**

Η σχέση (3.12) μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{E}_n(X; t) \bar{F}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k}}{k! (n-k)!} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς  $t$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_n(X; t) \bar{F}(t) - \mathcal{E}_n(X; t) f(t) &= \lambda(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k-1}}{k! (n-k-1)!} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx \\ &\quad - [\Lambda(t)]^n \bar{F}(t) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} \end{aligned}$$

γνωρίζοντας ότι

$$\frac{d}{dt} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx = -\bar{F}(t) [\Lambda(t)]^k.$$

Από την (3.10) όμως

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 1^k \binom{n}{k} = \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0.$$

Επομένως,

$$\mathcal{E}'_n(X; t) \bar{F}(t) - \mathcal{E}_n(X; t) f(t) = \lambda(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k-1}}{k! (n-k-1)!} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την (3.12), έχουμε

$$\lambda(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} [\Lambda(t)]^{n-k-1}}{k! (n-k-1)!} \int_t^\infty \bar{F}(x) [\Lambda(x)]^k dx = -\lambda(t) \bar{F}(t) \mathcal{E}_{n-1}(X; t).$$

Οπότε

$$\mathcal{E}'_n(X; t) \bar{F}(t) = \mathcal{E}_n(X; t) f(t) - \lambda(t) \bar{F}(t) \mathcal{E}_{n-1}(X; t)$$

και διαιρώντας με την  $\bar{F}(t)$

$$\mathcal{E}'_n(X; t) = \lambda(t) [\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)].$$

□

Για  $n = 1$ ,

$$\mathcal{E}'(X; t) = \lambda(t) [\mathcal{E}(X; t) - m(t)]$$

όπως είδαμε στη σχέση (2.22) για την παράγωγο της δυναμικής αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας (βλέπε Λήμμα 2.2.2).

Στο επόμενο θεώρημα, γενικεύουμε τον χαρακτηρισμό των κατανομών Pareto, εκθετική και δυναμοκατανομή που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλέπε Θεώρημα 2.2.2) για την δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία.

**Θεώρημα 3.2.1.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X; t)$ , ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_n(X; t) = c \mathcal{E}_{n-1}(X; t) \quad \text{για } c > 0 \tag{3.16}$$

και για ένα σταθερό  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , αν και μόνο αν η  $X$  έχει

- Την εκθετική κατανομή, όταν  $c = 1$ .
- Την κατανομή Pareto, όταν  $c > 1$ .



### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

- Την δυναμοκατανομή, όταν  $0 < c < 1$ .

Απόδειξη.

Για  $n = 1$

$$\mathcal{E}(X; t) = c m(t)$$

οπότε το αποτέλεσμα ισχύει, όπως δείξαμε στην (2.21).

Υποθέτουμε ότι η (3.16) ισχύει για  $n > 1$ , και θα δείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ . Παραγωγίζοντας την (3.16) ως προς  $t$ , έχουμε

$$\mathcal{E}'_n(X; t) = c \mathcal{E}'_{n-1}(X; t) .$$

Επίσης, από την (3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_n(X; t) &= \lambda(t) [\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)] \\ &= \lambda(t) [c \mathcal{E}_{n-1}(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)] \\ &= \lambda(t) (c - 1) \mathcal{E}_{n-1}(X; t) . \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις, παίρνουμε

$$c \mathcal{E}'_{n-1}(X; t) = \lambda(t) (c - 1) \mathcal{E}_{n-1}(X; t) .$$

Ακόμη, από την (3.15)

$$c \mathcal{E}'_{n-1}(X; t) = c \lambda(t) [\mathcal{E}_{n-1}(X; t) - \mathcal{E}_{n-2}(X; t)] .$$

Επομένως

$$(c - 1) \mathcal{E}_{n-1}(X; t) = c [\mathcal{E}_{n-1}(X; t) - \mathcal{E}_{n-2}(X; t)] ,$$

δηλαδή

$$\mathcal{E}_{n-1}(X; t) = c \mathcal{E}_{n-2}(X; t) \quad \text{για κάθε } n \geq 2 .$$

Καταλήγουμε λοιπόν, ότι

$$\mathcal{E}_n(X; t) = c \mathcal{E}_{n-1}(X; t) = c^2 \mathcal{E}_{n-2}(X; t) = \dots = c^n m(t) \quad (3.17)$$

και το αποτέλεσμα ισχύει.  $\square$

- Για την εκθετική κατανομή δείξαμε ήδη ότι

$$\mathcal{E}_n(X; t) = \mathcal{E}_{n-1}(X; t) = \dots = \mathcal{E}(X; t) = m(t) = \mu .$$

Επίσης, το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει ότι αν η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathcal{E}_n(X; t) = \mathcal{E}_{n-1}(X; t)$$

για κάποιο  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , και για κάθε  $t > 0$ , τότε χαρακτηρίζει την εκθετική κατανομή.

- Για την κατανομή Pareto ισχύει η σχέση (3.17) για  $c > 1$ , επομένως προκύπτει η ακόλουθη διάταξη

$$\mathcal{E}_n(X; t) \geq \mathcal{E}_{n-1}(X; t) \geq \dots \geq \mathcal{E}(X; t) \geq m(t)$$

και όπως αναφέραμε η  $m(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , επομένως η

$$\mathcal{E}_n(X; t) = c^n m(t)$$

είναι επίσης αύξουσα. Για τη σταθερά  $c$ , είδαμε ότι

$$c = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

επομένως, αν η  $X$  έχει την κατανομή Pareto η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}_n(X; t) = c^n m(t) = \frac{\alpha^n (t + \beta)}{(\alpha - 1)^{n+1}} \quad (3.18)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$

- Για τη δυναμοκατανομή η (3.17) ισχύει για  $0 < c < 1$ , οπότε προκύπτει η εξής διάταξη

$$\mathcal{E}_n(X; t) \leq \mathcal{E}_{n-1}(X; t) \leq \dots \leq \mathcal{E}(X; t) \leq m(t)$$

και η  $m(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ , επομένως και η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι επίσης φθίνουσα. Για τη σταθερά  $c$ , έχουμε

$$c = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

έπεται ότι αν η  $X$  έχει τη δυναμοκατανομή, τότε η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία θα είναι

$$\mathcal{E}_n(X; t) = c^n m(t) = \frac{\alpha^n (\beta - t)}{(\alpha + 1)^{n+1}} \quad (3.19)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Στη συνέχεια, θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό και θα περιγράψουμε κάτω από ποιες συνθήκες η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία καθορίζει μοναδικά την κατανομή. Παραθέτουμε πρώτα ένα λήμμα γνωστό από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων (βλέπε Hairer et al., 2008).

**Λήμμα 3.2.2.** Έστω  $U$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον  $\mathbb{R}^{n+1}$  και  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  είναι συνεχείς στο  $U$  για κάθε  $i, j = 1, \dots, n$ . Τότε, για κάθε  $(x_0, z_1, \dots, z_n) \in U$  υπάρχει μία μοναδική λύση

$$y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

...

$$y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n),$$

τέτοια ώστε  $y_j(x_0) = z_j$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$  που είναι συνεχής στο σύνολο του  $U$ .

□

Παρουσιάζουμε τώρα, το κύριο θεώρημα όπως διατυπώθηκε από τους Navarro and Psarrakos (2013).

**Θεώρημα 3.2.2.** Έστω  $X$  μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνεχή δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_i(X; t)$ , για  $i = 0, 1, \dots, n$ . Υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{E}_n(X; t) \neq \mathcal{E}_{n-1}(X; t) \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (3.20)$$

Τότε οι  $\mathcal{E}_i(X; t_0)$  για  $i = 0, 1, \dots, n-1$  σε ένα σταθερό σημείο  $t_0 \geq 0$ , και η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  καθορίζουν μοναδικά την κατανομή της  $X$ .

**Απόδειξη.**

Από την (3.15), έχουμε

$$\mathcal{E}'_1(X; t) = \lambda(t) (\mathcal{E}_1(X; t) - \mathcal{E}_0(X; t))$$

$$\mathcal{E}'_2(X; t) = \lambda(t) (\mathcal{E}_2(X; t) - \mathcal{E}_1(X; t))$$

...

$$\mathcal{E}'_n(X; t) = \lambda(t) (\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t))$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Από την τελευταία εξίσωση λύνοντας ως προς  $\lambda(t)$  και λαμβάνοντας υπόψη την (3.20), παίρνουμε

$$\lambda(t) = \frac{\mathcal{E}'_n(X; t)}{\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)}$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Επομένως,

$$\mathcal{E}'_j(X; t) = \frac{\mathcal{E}_j(X; t) - \mathcal{E}_{j-1}(X; t)}{\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)} \mathcal{E}'_n(X; t)$$

για κάθε  $t \geq 0$  και  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Επίσης,

$$\mathcal{E}_0(X; t) = m(t)$$

οπότε από την (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_0(X; t) &= \lambda(t) \mathcal{E}_0(X; t) - 1 \\ &= \frac{\mathcal{E}_0(X; t) \mathcal{E}'_n(X; t)}{\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)} - 1 \end{aligned}$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Επομένως, έχουμε να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$y'_0 = f_0(t, y_0, \dots, y_{n-1})$$

$$y'_1 = f_1(t, y_0, \dots, y_{n-1})$$

...

$$y'_{n-1} = f_{n-1}(t, y_0, \dots, y_{n-1}),$$

όπου

$$y_j = \mathcal{E}_j(X; t), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$f_0(t, y_0, \dots, y_{n-1}) = \frac{y_0 \mathcal{E}'_n(X; t)}{\mathcal{E}_n(X; t) - y_{n-1}} - 1,$$

$$f_j(t, y_0, \dots, y_{n-1}) = \frac{y_j - y_{j-1}}{\mathcal{E}_n(X; t) - y_{n-1}} \mathcal{E}'_n(X; t), \quad j = 1, \dots, n - 1,$$

και  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι μία γνωστή διαφορίσιμη συνάρτηση.

Από το Λήμμα 3.2.2 το σύστημα αυτό των διαφορικών εξισώσεων έχει μοναδική λύση, όταν σταθεροποιήσουμε τις τιμές  $\mathcal{E}_i(X; t_0)$  για  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  σε ένα σταθερό σημείο  $t_0 \geq 0$ .

Επομένως, κάτω από αυτές τις συνθήκες η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  καθορίζει μοναδικά την  $\mathcal{E}_j(X; t)$  για  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , άρα και το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής  $\mathcal{E}_0(X; t) = m(t)$ , και επομένως χαρακτηρίζει μοναδικά την κατανομή.  $\square$

Σαν άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για τη δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία (βλέπε Gupta, 2009).

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

**Λήμμα 3.2.3.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\mu$  και συνεχή δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}(X; t)$ , αν υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{E}(X; t) \neq m(t), \quad t \geq 0 \quad (3.21)$$

τότε η  $\mu$  και η  $\mathcal{E}(X; t)$  χαρακτηρίζουν την κατανομή της  $X$ .

**Απόδειξη.**

Από το προηγούμενο θεώρημα για  $n = 1$  προκύπτει η  $\mathcal{E}(X; t)$ , και σταθεροποιώντας στο  $t_0 = 0$  την  $\mathcal{E}_0(X; t)$ , προκύπτει η μέση τιμή της  $X$

$$\mathcal{E}_0(X; 0) = m(0) = \mu .$$

Επομένως, έπεται το αποτέλεσμα.  $\square$

**Παρατήρηση**

1. Τονίζουμε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  χαρακτηρίζει την κατανομή μόνο στην περίπτωση που ικανοποιείται η συνθήκη στη σχέση (3.20).
2. Το παραπάνω θεώρημα δε μπορεί να χαρακτηρίσει την εκθετική κατανομή, εφόσον όπως αναφέραμε  $\mathcal{E}_n(X; t) = \mathcal{E}_{n-1}(X; t)$  για κάθε  $t \geq 0$ , δηλαδή δεν ισχύει η υπόθεση στη σχέση (3.20).

### 3.2.2 Μελέτη μονοτονίας

Κατόπιν, θα μελετήσουμε τη μονοτονία της δυναμικής γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και θα παρουσιάσουμε κάποια ακόμη αποτελέσματα που απορρέουν από αυτή. Ορίζουμε αντίστοιχα, τις ακόλουθες οικογένειες κατανομών (βλέπε Psarrakos and Navarro, 2013).

**Ορισμός 3.2.1.** Μία μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$ , θα λέμε ότι

- Έχει την ιδιότητα  $IDGCRE_n$  (increasing dynamic generalized cumulative residual entropy), αν η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in IDGCRE_n$ .
- Έχει την ιδιότητα  $DDGCRE_n$  (decreasing dynamic generalized cumulative residual entropy), αν η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ , και θα το συμβολίζουμε  $X \in DDGCRE_n$ .

Για  $n = 0$

$$IDGCRE_0 \equiv IMRL$$

$$DDGCRE_0 \equiv DMRL .$$

Για  $n = 1$

$$IDGCRE_1 \equiv IDCRE$$

$$DDGCRE_1 \equiv DDCRE .$$

Το επόμενο θεώρημα, παρουσιάζει τη σχέση που συνδέει τις κλάσεις κατανομών  $DFR$  (αντίστοιχα  $IFR$ ) με τις κλάσεις  $IDGCRE_n$  (αντίστοιχα  $DDGCRE_n$ ) για οποιοδήποτε  $n \in \{1, 2, \dots\}$ .

**Θεώρημα 3.2.3.** Αν  $X \in IFR$  ( $DFR$ ), τότε η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία,  $\mathcal{E}_n(X; t)$ , είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του χρόνου  $t$  για  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Απόδειξη.**

Για  $n = 0$

$$\mathcal{E}_0(X; t) = m(t)$$

οπότε το αποτέλεσμα ισχύει, αφού όπως αναφέραμε αν  $X \in IFR$  ( $DFR$ ) τότε  $X \in DMRL$  ( $IMRL$ ).

Για  $n \geq 1$ , από την (3.15)

$$\mathcal{E}'_n(X; t) = \lambda(t) [\mathcal{E}_n(X; t) - \mathcal{E}_{n-1}(X; t)] .$$

Επιπλέον, από την (3.14)

$$\mathcal{E}_n(X; t) \leq (\geq) \mathcal{E}_{n-1}(X; t) .$$

Συνεπώς

$$\mathcal{E}'_n(X; t) \leq (\geq) 0 \quad \text{για } t > 0 ,$$

δηλαδή η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι φθίνουσα (αύξουσα) συνάρτηση του  $t$  και η  $X$  έχει την ιδιότητα  $DDGCRE_n$  ( $IDGCRE_n$ ). □

Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 3.2.3 αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 2.2.4 που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, αφού για  $n = 1$  προκύπτει η εξής διάταξη

$$IFR (DFR) \Rightarrow DMRL (IMRL) \Rightarrow DDCRE (IDCRE) .$$

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Στο επόμενο θεώρημα, θα γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα και θα δούμε ότι η οικογένεια των κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $IDGCRE_{n-1}$  (αντίστοιχα  $DDGCRE_{n-1}$ ), περιέχεται στην οικογένεια των κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $IDGCRE_n$  (αντίστοιχα  $DDGCRE_n$ ). Παραθέτουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα (βλέπε Navarro and Psarrakos, 2013).

**Λήμμα 3.2.4.** Έστω  $X$  μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία  $\mathcal{E}_n(X; t)$ , τέτοια ώστε  $\mathcal{E}_n(X; 0) < \infty$ , για κάποιο  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε

$$\mathcal{E}_n(X; t) = \frac{\int_t^\infty \mathcal{E}_{n-1}(X; z) f(z) dz}{\bar{F}(t)} \quad (3.22)$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

□

**Θεώρημα 3.2.4.** Για  $X$  μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή, αν η  $X$  έχει την ιδιότητα  $IDGCRE_{n-1}$  ( $DDGCRE_{n-1}$ ), τότε έχει και την ιδιότητα  $IDGCRE_n$  ( $DDGCRE_n$ ).

**Απόδειξη.**

Υποθέτουμε ότι  $X \in IDGCRE_{n-1}$ , δηλαδή η  $\mathcal{E}_{n-1}(X; t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Με άλλα λόγια

$$\mathcal{E}_{n-1}(X; z) \geq \mathcal{E}_{n-1}(X; t) \quad \text{για } z > t.$$

Από την (3.22), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(X; t) &= \frac{\int_t^\infty \mathcal{E}_{n-1}(X; z) f(z) dz}{\bar{F}(t)} \\ &\geq \frac{\int_t^\infty \mathcal{E}_{n-1}(X; t) f(z) dz}{\bar{F}(t)} = \mathcal{E}_{n-1}(X; t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Επομένως, από την (3.15)

$$\mathcal{E}'_n(X; t) \geq 0, \quad t \geq 0,$$

δηλαδή η  $X$  έχει την ιδιότητα  $IDGCRE_n$ . Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για την περίπτωση που  $X \in DDGCRE_{n-1}$ . □

Συμπερασματικά, προκύπτει η εξής διάταξη

$$IMRL \Rightarrow IDCRCR \Rightarrow IDGCR_{E_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow IDGCR_{E_{n-1}} \Rightarrow IDGCR_{E_n}$$

$$DMRL \Rightarrow DDCRCR \Rightarrow DDGCR_{E_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow DDGCR_{E_{n-1}} \Rightarrow DDGCR_{E_n} .$$

### Παρατήρηση

1. Σε προηγούμενα κεφάλαια, είδαμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή και η δυναμοκατανομή έχουν τις ιδιότητες  $DMRL$  και  $DDCRCR$ . Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει ότι έχουν την ιδιότητα  $DDGCR_{E_n}$  για οποιοδήποτε  $n \geq 0$ . Αντίστοιχα η κατανομή Pareto έχει την ιδιότητα  $IDGCR_{E_n}$  για κάθε  $n \geq 0$ .
2. Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάσαμε παραδείγματα κατανομών για τις οποίες ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής,  $m(t)$ , δεν είναι μονότονη συνάρτηση του χρόνου  $t$ , αλλά η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία,  $\mathcal{E}(X; t)$ , είναι μονότονη. Στη συνέχεια, θα δούμε παραδείγματα στα οποία οι  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}(X; t)$ , δεν είναι μονότονες συναρτήσεις, αλλά η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι μονότονη συνάρτηση του  $t$  για κάποιο  $n \geq 2$  και έπειτα.

Με ανάλογο τρόπο, η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για την περίπτωση της γνήσιας μονοτονίας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

- Αν η  $\mathcal{E}_{n-1}(X; t)$  είναι γνησίως αύξουσα, από την (3.23)

$$\mathcal{E}_n(X; t) > \mathcal{E}_{n-1}(X; t) , t > 0 \tag{3.24}$$

οπότε

$$\mathcal{E}'_n(X; t) > 0 , t > 0 ,$$

δηλαδή η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι επίσης γνησίως αύξουσα συνάρτηση του  $t$ .

- Αν η  $\mathcal{E}_{n-1}(X; t)$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε

$$\mathcal{E}_n(X; t) < \mathcal{E}_{n-1}(X; t) , t > 0 , \tag{3.25}$$

και η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  είναι επίσης γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ .

Στο σημείο αυτό, αξίζει να τονίσουμε ότι αν η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση του χρόνου



### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$t$ , για κάποιο σταθερό  $n$  και έπειτα, τότε χαρακτηρίζει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής. Πράγματι, αν ισχύουν οι σχέσεις (3.24), (3.25), τότε

$$\mathcal{E}_n(X; t) \neq \mathcal{E}_{n-1}(X; t)$$

επομένως ισχύει η υπόθεση στη σχέση (3.20), και κατά συνέπεια η  $\mathcal{E}_n(X; t)$  χαρακτηρίζει την κατανομή. Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για περιπτώσεις κατανομών στις οποίες ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία δεν είναι μονότονες συναρτήσεις του χρόνου  $t$ .

Στη συνέχεια, για να επαληθεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 3.2.1.** Θεωρούμε ότι η  $X$  είναι μία μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = e^{-t^{1.5}-t^{0.5}}, \quad t \geq 0.$$

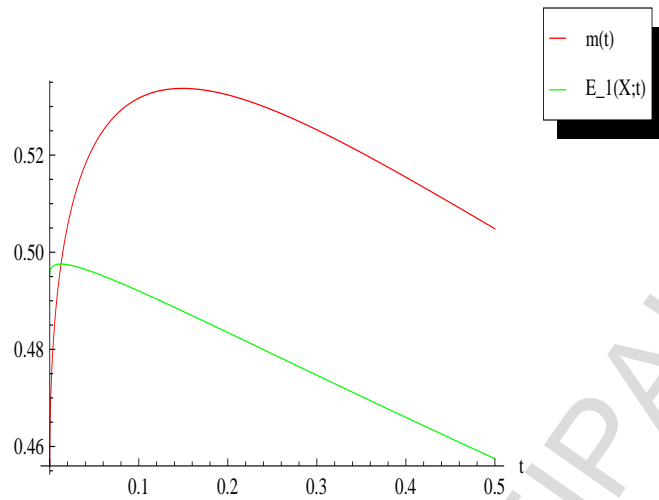
Τότε

$$m(0) = 0.455765, \quad \mathcal{E}_1(X; 0) = 0.495448, \quad \mathcal{E}_2(X; 0) = 0.463393, \quad \mathcal{E}_3(X; 0) = 0.427791,$$

έπεται ότι

$$\mathcal{E}_1(X; 0) > \mathcal{E}_2(X; 0) > m(0) > \mathcal{E}_3(X; 0).$$

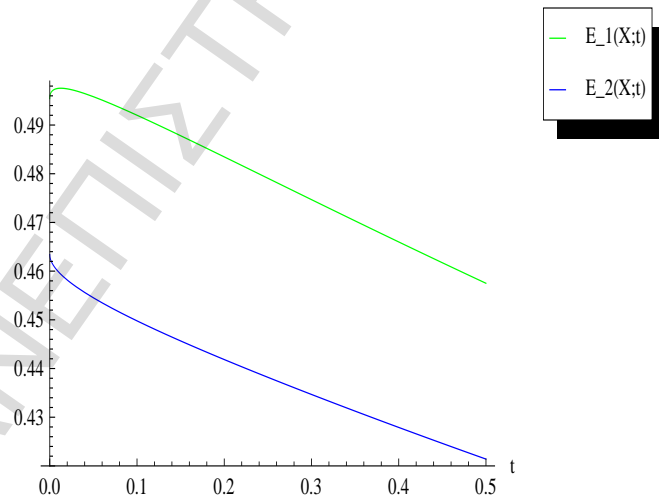
- Η από κοινού γραφική παράσταση της  $m(t)$  και της  $\mathcal{E}_1(X; t)$  είναι



Σχήμα 3.1: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X;t)$  για  $0 \leq t \leq 0.5$

Η  $m(t)$  δεν είναι μονότονη συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Επίσης, η  $\mathcal{E}_1(X;t)$  έχει ένα κοινό σημείο με την  $m(t)$ , επομένως είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$  ως εκεί και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα. Συνεπώς, ούτε η  $\mathcal{E}_1(X;t)$  είναι μονότονη.

- Η από κοινού γραφική παράσταση της  $\mathcal{E}_1(X;t)$  και της  $\mathcal{E}_2(X;t)$  είναι



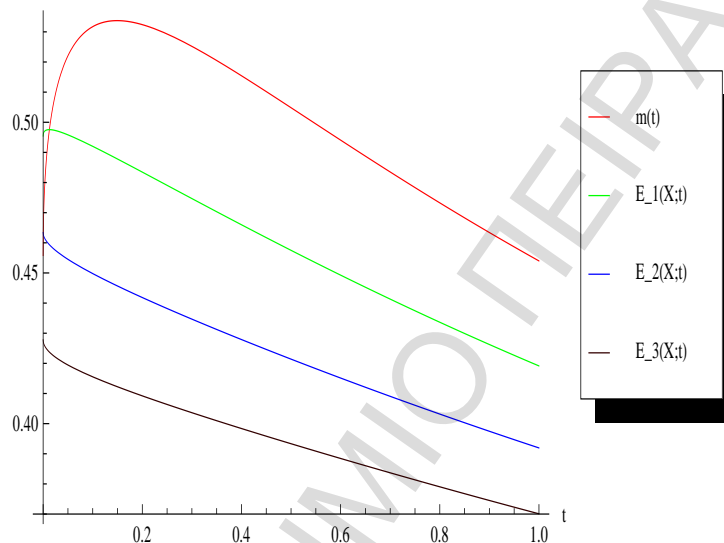
Σχήμα 3.2: Γράφημα των συναρτήσεων  $\mathcal{E}_1(X;t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X;t)$  για  $0 \leq t \leq 0.5$

Στην περίπτωση αυτή,  $\mathcal{E}_2(X;0) < \mathcal{E}_1(X;0)$ , και όπως διαφαίνεται στο παραπάνω γράφημα  $\mathcal{E}_2(X;t) < \mathcal{E}_1(X;t)$ , για κάθε  $t \geq 0$ . Επομένως, η  $\mathcal{E}_2(X;t)$  είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ .

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

Επίσης,  $\mathcal{E}_2(X; t) \neq \mathcal{E}_1(X; t)$ , δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη στη σχέση (3.20) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.2 για  $t_0 = 0$ , η  $\mathcal{E}_2(X; t)$  χαρακτηρίζει την κατανομή της  $X$ .

- Τελικώς, θα παρουσιάσουμε ένα γράφημα που θα περιλαμβάνει τις δυναμικές γενικευμένες αθροιστικές υπολειπόμενες εντροπίες  $\mathcal{E}_n(X; t)$ , για  $n = 0, 1, 2, 3$ .



Σχήμα 3.3: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; t)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; t)$  για  $0 \leq t \leq 1$

Είναι φανερό, ότι και η  $\mathcal{E}_3(X; t)$  είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ , και επομένως χαρακτηρίζει επίσης την κατανομή της  $X$ .

□

**Παράδειγμα 3.2.2.** Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει την κατανομή Burr τύπου XII με παραμέτρους  $\alpha = 3$  και  $\kappa = -2.5$ , έχει δηλαδή συνάρτηση αξιοπιστίας που δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(t) = (1 + t^3)^{-2.5}, \quad t \geq 0.$$

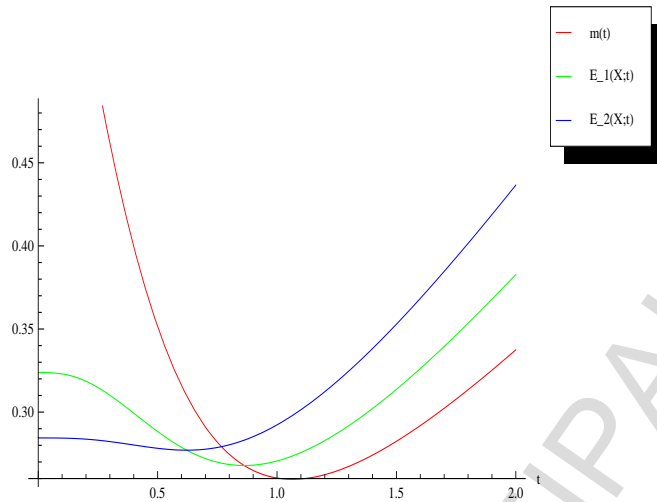
Έχουμε

$$m(0) = 0.727057, \quad \mathcal{E}_1(X; 0) = 0.323797, \quad \mathcal{E}_2(X; 0) = 0.284452, \quad \mathcal{E}_3(X; 0) = 0.287916,$$

δηλαδή

$$m(0) > \mathcal{E}_1(X; 0) > \mathcal{E}_3(X; 0) > \mathcal{E}_2(X; 0).$$

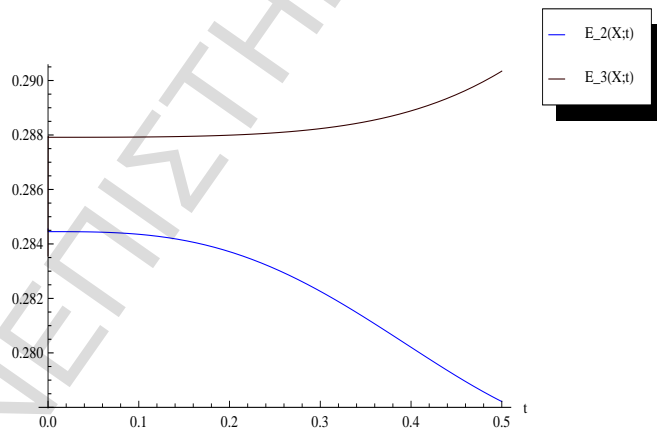
- Η από κοινού γραφική παράσταση των  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; t)$  είναι



Σχήμα 3.4: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X;t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X;t)$  για  $0 \leq t \leq 2$

Είναι εύκολο να διακρίνουμε, ότι οι  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X;t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X;t)$  έχουν κοινά σημεία μεταξύ τους, και επομένως δεν είναι μονότονες συναρτήσεις του χρόνου  $t$ .

- Η από κοινού γραφική παράσταση της  $\mathcal{E}_2(X;t)$  και  $\mathcal{E}_3(X;t)$  είναι

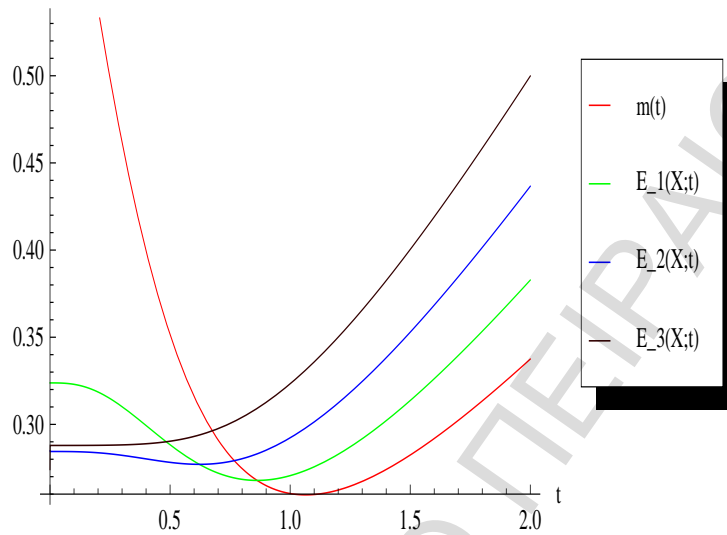


Σχήμα 3.5: Γράφημα των συναρτήσεων  $\mathcal{E}_2(X;t)$ ,  $\mathcal{E}_3(X;t)$  για  $0 \leq t \leq 0.5$

Είναι προφανές, ότι  $\mathcal{E}_3(X;t) > \mathcal{E}_2(X;t)$  για κάθε  $t \geq 0$ . Επομένως, η  $\mathcal{E}_3(X;t)$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του  $t$ , δηλαδή  $X \in IDGCRE_3$  και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.2 για  $t_0 = 0$ , η  $\mathcal{E}_3(X;t)$  χαρακτηρίζει μοναδικά την κατανομή της  $X$ .

### 3.2 Δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

- Τέλος, παραθέτουμε ένα κοινό γράφημα με τις δυναμικές γενικευμένες αθροιστικές υπολειπόμενες εντροπίες  $\mathcal{E}_n(X; t)$  της  $X$ , για  $n = 0, 1, 2, 3$ .



Σχήμα 3.6: Γράφημα των συναρτήσεων  $m(t)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; t)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; t)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; t)$  για  $0 \leq t \leq 2$

## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογές στα μέτρα κινδύνου

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα θεωρήσουμε την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως ένα μέτρο για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου και θα δούμε ποια είναι η σχέση που τη συνδέει με το συνήθες μέτρο της διακύμανσης. Θα μελετηθεί επίσης η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και θα συγκριθεί με άλλα γνωστά μέτρα κινδύνου, όπως η αξία σε κίνδυνο, η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς και η υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς.

### 4.1 Συσχέτιση γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και διακύμανσης

Ένα από τα πιο ευρέως διαδεδομένα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται στον ασφαλιστικό και χρηματοοικονομικό κλάδο για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας και των αποθεμάτων είναι η διακύμανση ή η τυπική απόκλιση. Θεωρούμε μία μη αρνητική, συνεχή τυχαία μεταβλητή  $X$ , που αναπαριστά τον υπό ποσοτικοποίηση κίνδυνο, με συνάρτηση πυκνότητας  $f(x)$  και συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(x)$ , αντίστοιχα, και συμβολίζουμε με  $\sigma^2$  την διακύμανση της  $X$ . Ισχύει ότι

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx ,$$

αν  $E(X^2) < \infty$ . Η  $\sigma$  καλείται τυπική απόκλιση και στην οικονομική βιβλιογραφία συχνά αναφέρεται με τον όρο μεταβλητότητα (volatility). Τονίζουμε ότι η ύπαρξη της διακύμανσης απαιτεί την ύπαρξη της δεύτερης ροπής,  $E(X^2)$ , επομένως δεν ορίζεται για όλες τις κατανομές και κυρίως για κατανομές με βαριά ουρά.

#### 4.1 Συσχέτιση γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και διακύμανσης

---

Στη συνέχεια, βασιζόμενοι σε ένα άρθρο του Lijuan Yang, ο οποίος συσχέτισε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία με την διακύμανση (βλέπε Yang, 2012), θα θεωρήσουμε την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία,  $\mathcal{E}_n(X)$ , ως ένα μέτρο κινδύνου και θα τη συγκρίνουμε με το μέτρο της διακύμανσης.

Για  $n = 1$ , είδαμε ότι (βλέπε Θεώρημα 2.1.2)

$$\mathcal{E}_1(X) \leq \frac{E(X^2)}{2E(X)}$$

επομένως αν  $E(X^2) < \infty$ , έπεται ότι  $\mathcal{E}_1(X) < \infty$ . Επίσης, αν  $X \in IFR$  δείξαμε ότι (βλέπε Θεώρημα 3.1.2)

$$\mathcal{E}_n(X) \geq \mathcal{E}_{n+1}(X), \quad n \geq 0,$$

έπεται ότι αν  $E(X^2) < \infty$ , τότε  $\mathcal{E}_n(X) < \infty$ , για κάθε  $n \geq 0$ .

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα, ότι η ύπαρξη της διακύμανσης αποτελεί ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας. Παρόλα αυτά, η ύπαρξη της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας δεν αποδεικνύει την ύπαρξη της διακύμανσης, επομένως όταν η διακύμανση δεν ορίζεται, ειδικά για κατανομές με βαριά δεξιά ουρά, μπορούμε να θεωρήσουμε την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε τον κίνδυνο. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η κατανομή Pareto, όταν  $1 < \alpha < 2$ . Σημειώνουμε ότι για κινδύνους που προέρχονται από κατανομές της κλάσης *NBUE*, η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία δεν είναι συνετό μέτρο κινδύνου, αφού  $\mathcal{E}(X) \leq \mu$  (βλέπε Λήμμα 2.1.1), δηλαδή παραβιάζεται η υπόθεση του μη αρνητικού περιθωρίου ασφαλείας (βλέπε Κεφάλαιο 1, σελ. 18).

Επίσης, για τις κατανομές που έχουν την ιδιότητα *IFR*, και κατά συνέπεια και την ιδιότητα *DDGCRE<sub>n</sub>* (βλέπε θεώρημα 3.2.3), η ύπαρξη της διακύμανσης αποτελεί ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας, για οποιοδήποτε  $n \geq 0$ . Ακόμη, επιλέγοντας μεγαλύτερο  $n$ , λαμβάνουμε λιγότερο συντηρητική μέτρηση του κινδύνου. Γενικεύοντας, και σε αυτή την περίπτωση, παραβιάζεται η υπόθεση του μη αρνητικού περιθωρίου ασφαλείας, αφού  $\mathcal{E}_n(X) \leq \mu$ , για οποιοδήποτε  $n \geq 1$ .

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύουν ένα σημαντικό πλεονέκτημα της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας, καθώς μπορεί να έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους της επιστήμης. Ειδικά στον αναλογισμό, οι περισσότεροι κίνδυνοι προέρχονται από κατανομές με βαριά δεξιά ουρά, η οποία αναπαριστά γεγονότα που συμβαίνουν με μικρή συχνότητα αλλά έχουν μεγάλο μέγεθος ζημιάς και στην ουσία είναι αυτά που απειλούν την οικονομική ευρωστέια της εταιρείας. Στο σημείο αυτό όμως, τίθεται το ερώτημα αν η γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία, μπορεί να παρέχει το ίδιο συνεπείς εκτιμήσεις με την διακύμανση.

#### 4.1.1 Σύγκριση για παραμετρικά πρότυπα επιβίωσης

Προκειμένου να προσεγγίσουμε το παραπάνω ερώτημα, θα συγκρίνουμε την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία με την διακύμανση και την τυπική απόκλιση κάποιων γνωστών συνεχών κατανομών.

##### 1. Ομοιόμορφη κατανομή

Αν η  $X$  έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, \alpha)$ , για  $\alpha > 0$ , τότε

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2}{12} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}},$$

οπότε από την (2.3) έχουμε

$$\mathcal{E}_1(X) = \frac{\alpha}{4} = \frac{3}{\alpha}\sigma^2 \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_1(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma,$$

έπεται ότι  $\mathcal{E}_1(X) < \sigma$ . Γενικά, ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_n(X) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{n-1}(X) = \dots = \frac{1}{2}^{n-1} \mathcal{E}_1(X) = \frac{1}{2}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2^n}\sigma$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , οπότε έχουμε την εξής διατάξη

$$\mathcal{E}_n(X) < \mathcal{E}_{n-1}(X) < \dots < \mathcal{E}_1(X) < \sigma$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$

##### 2. Εκθετική κατανομή

Αν η  $X$  έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ , τότε

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda},$$



#### 4.1 Συσχέτιση γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και διακύμανσης

επομένως από την (2.4)

$$\mathcal{E}_1(X) = \frac{1}{\lambda} = \lambda \sigma^2 \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_1(X) = \sigma,$$

και γενικεύοντας το αποτέλεσμα αυτό έχουμε

$$\mathcal{E}_n(X) = \sigma \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

### 3. Κατανομή Pareto

Αν η  $X$  έχει την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha > 2$ ,  $\beta > 0$ , τότε

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha-2}},$$

οπότε από την (2.5), έχουμε

$$\mathcal{E}_1(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-2}{\beta} \sigma^2$$

και

$$\mathcal{E}_1(X) = \sqrt{1 - \frac{1}{(\alpha-1)^2}} \sigma = \kappa_1 \sigma,$$

όπου  $\kappa_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{(\alpha-1)^2}} < 1$ , προκύπτει ότι  $\mathcal{E}_1(X) < \sigma$ .

Επίσης, από την (3.17) για  $t = 0$  παίρνουμε

$$\mathcal{E}_n(X) = c \mathcal{E}_{n-1}(X) = \dots = c^{n-1} \mathcal{E}_1(X) = c^{n-1} \kappa_1 \sigma$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , όπου  $c = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$ , επομένως  $\mathcal{E}_n(X) < \sigma$  αν και μόνο αν  $c^{n-1} \kappa_1 < 1$ .

Λύνοντας ως προς  $n$ , παίρνουμε

$$n < \ln \frac{c}{\kappa_1} + 1,$$

ή ισοδύναμα

$$n < \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\alpha-2} + 1.$$

Για  $\alpha = 3$ , έχουμε  $n = 1.54931$ , δηλαδή προκύπτει η εξής διάταξη

$$\mathcal{E}_1(X) < \sigma < \mathcal{E}_2(X) < \dots < \mathcal{E}_n(X)$$

για κάθε  $n = 2, 3, \dots$

Επίσης, από την (3.18) για  $n = 2$  και  $t = 0$

$$\mathcal{E}_2(X) = \frac{\alpha^2\beta}{(\alpha-1)^3},$$

οπότε  $\mathcal{E}_2(X) > \sigma$ , αν και μόνο αν

$$\frac{\alpha^2 \beta}{(\alpha - 1)^3} > \frac{\sqrt{\alpha} \beta}{(\alpha - 1) \sqrt{\alpha - 2}},$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha^{3/2} (\alpha - 2) - (\alpha - 1)^2 > 0,$$

που ισχύει για κάθε  $\alpha > 2.61803$ . Επομένως, για οποιοδήποτε  $\alpha > 2.61803$  ισχύει η παραπάνω διάταξη.

#### 4. Δυναμοκατανομή

Αν η  $X$  έχει τη δυναμοκατανομή με παραμέτρους  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , τότε

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha + 1)^2 (\alpha + 2)} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha} \beta}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha + 2}},$$

επομένως από την (2.6)

$$\mathcal{E}_1(X) = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + 1)^2} = \frac{\alpha + 2}{\beta} \sigma^2$$

και

$$\mathcal{E}_1(X) = \sqrt{1 - \frac{1}{(\alpha + 1)^2}} \sigma = \kappa_2 \sigma,$$

με  $\kappa_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{(\alpha + 1)^2}} < 1$ , έπεται ότι  $\mathcal{E}_1(X) < \sigma$ .

Όμοια από την (3.17)

$$\mathcal{E}_n(X) = c \mathcal{E}_{n-1}(X) = \dots = c^{n-1} \mathcal{E}_1(X) = c^{n-1} \kappa_2 \sigma$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , όπου  $c = \frac{\alpha}{\alpha + 1} < 1$ , οπότε προκύπτει η ακόλουθη διάταξη

$$\mathcal{E}_n(X) < \mathcal{E}_{n-1}(X) < \dots < \mathcal{E}_1(X) < \sigma$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$

□

#### 4.1.2 Εμπειρική μελέτη στη χρηματιστηριακή αγορά

Τελικώς, θα περιγράψουμε μία εμπειρική μελέτη που διεξήχθη από τον Lijuan Yang (2012), για την ανάλυση του κινδύνου στις χρηματιστηριακές αγορές και θα ερμηνεύσουμε τη σχέση μεταξύ της τυπικής απόκλισης και

#### 4.1 Συσχέτιση γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας και διακύμανσης

της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας βασιζόμενοι στα εμπειρικά αποτελέσματα. Ο Yang για την ανάλυση του κατέγραψε τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος από 12 μεγάλους δείκτες μετοχών για ένα χρονικό διάστημα τεσσάρων ετών (01/01/2007 - 31/12/2010), προκειμένου να συγκρίνει την τυπική απόκλιση με την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία της απόδοσης τους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.1: Τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ( $CRE$ ) για τις αποδόσεις των 12 δεικτών

Δείκτες	$\sigma$	$CRE$
<i>DJIA</i>	0.0157	0.0137
<i>NASDAQ</i>	0.0178	0.0156
<i>SP500</i>	0.0173	0.0149
<i>NYSE</i>	0.0183	0.0157
<i>HSI</i>	0.0214	0.0190
<i>TWII</i>	0.0164	0.0143
<i>STI</i>	0.0159	0.0140
<i>N225</i>	0.0192	0.0166
<i>FTSE100</i>	0.0160	0.0140
<i>DAX30</i>	0.0167	0.0146
<i>CAC40</i>	0.0178	0.0157
<i>SMI</i>	0.0143	0.0126

Ο Πίνακας 4.1 δείχνει την θετική συσχέτιση μεταξύ της τυπικής απόκλισης και της αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας, παρόλα αυτά αποτελεί μόνο μία απλή ένδειξη παρόμοιας συμπεριφοράς ανάμεσα στα δύο μέτρα. Για να αποδείξει μία τέλεια θετική συσχέτιση ο Yang επέλεξε τις ημερήσιες αποδόσεις του δείκτη *SP500* και χώρησε το διάστημα των τεσσάρων ετών σε 16 τριμηνιαίες υποπεριόδους, για κάθε μία από τις οποίες υπολόγισε την τυπική απόκλιση και την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία της συνολικής απόδοσης της. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα αποτελέσματα από την παραπάνω έρευνα.

Πίνακας 4.2: Τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) και αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ( $CRE$ ) για την απόδοση των 16 τριμήνων

Τρίμηνο	$\sigma$	$CRE$
1	0.0078	0.0073
2	0.0067	0.0062
3	0.0124	0.0112
4	0.0124	0.0112
5	0.0154	0.0133
6	0.0104	0.0096
7	0.0228	0.0214
8	0.0428	0.0371
9	0.0263	0.0224
10	0.0166	0.0151
11	0.0110	0.0100
12	0.0099	0.0091
13	0.0090	0.0086
14	0.0158	0.0138
15	0.0115	0.0101
16	0.0075	0.0064

Είναι φανερό, ότι μεγαλύτερη τυπική απόκλιση αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Γενικά, ο Yang απέδειξε με τη μέθοδο της παλινδρόμησης ότι για έναν τίτλο η τυπική απόκλιση και η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία έχουν μία σχέση θετικής γραμμικής συσχέτισης στην χρηματιστηριακή αγορά, ειδικά για περιπτώσεις στις οποίες τα δεδομένα προέρχονται από μία κατανομή με βαριά ουρά.

### Συμπέρασμα

Λαμβάνοντας υπόψη και τα εμπειρικά αποτελέσματα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία παρέχει παρόμοιες εκτιμήσεις του κινδύνου με την τυπική απόκλιση, οπότε για κατανομές με βαριά δεξιά ουρά για τις οποίες η διακύμανση δεν υπάρχει, αν θεωρήσουμε σαν μέτρο κινδύνου την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία οδηγούμαστε σε ίδιου βαθμού συνεπείς εκτιμήσεις. Στο σημείο αυτό, γεννάται το ερώτημα αν λαμβάνοντας σαν μέτρο κινδύνου την γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία για κάποιο μεγαλύτερο  $n$ , παίρνουμε το ίδιο ή και περισσότερο

## 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου

---

συνεπείς εκτιμήσεις. Ωστόσο, θα παρουσίαζε μεγάλο ενδιαφέρον μία εμπειρική μελέτη προκειμένου να συγκριθεί η σχέση της γενικευμένης αθροιστικής υπολειπόμενης εντροπίας με το μέτρο της διακύμανσης.

### 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου

Ένα άλλο δημοφιλές μέτρο κινδύνου είναι το ποσοστημόριο που συνήθως στην οικονομική βιβλιογραφία αναφέρεται με την ορολογία αξία σε κίνδυνο (Value at Risk- VaR). Θεωρούμε ότι η  $X$  είναι μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά την υπό μελέτη παράμετρο, όπως για παράδειγμα το μέγεθος της ζημιάς ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, με συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(x)$ , και συμβολίζουμε με  $VaR_q(X)$  την αξία σε κίνδυνο. Ισχύει ότι

$$VaR_q(X) = x_q = \bar{F}^{-1}(1 - q) \quad (4.1)$$

ή

$$\bar{F}(x_q) = P(X > x_q) = 1 - q, \quad (4.2)$$

όπου  $q$  είναι ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, που συνήθως επιλέγεται 0.95 ή 0.99. Με άλλα λόγια η αξία σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης  $q$ , είναι το  $q$ -ποσοστημόριο της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής και εκφράζει την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η  $X$  για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο με πιθανότητα  $q$ .

Η αξία σε κίνδυνο σαν μέτρο κινδύνου παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής.

1. Δεν είναι συνετό μέτρο κινδύνου, καθώς όπως απέδειξαν οι Artzner et al. (1999), δεν ισχύουν όλες οι ιδιότητες που πρέπει να πληρεί ένα μέτρο, ώστε να θεωρηθεί συνετό μέτρο κινδύνου και συγκεκριμένα παραβιάζεται η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας (βλέπε Κεφάλαιο 1, σελ. 19).
2. Η αξία σε κίνδυνο αποτελεί μόνο ένα κάτω όριο για μεγάλους κινδύνους κάτω από κάποιες συνθήκες και δεν παρέχει κάποια πληροφορία σε περίπτωση που ξεπεραστεί.

Προκύπτει λοιπόν, η ανάγκη θεώρησης ενός άλλου μέτρου προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος της δεξιάς ουράς της κατανομής. Για το σκοπό

αυτό, οι Artzner et al. (1999) εισήγαγαν ένα άλλο μέτρο κινδύνου που στα ελληνικά θα μπορούσε να αποδοθεί ως υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς (tail conditional expectation-TCE ή Conditional VaR-CVaR). Αν  $X$  είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον υπό εξέταση κίνδυνο και συμβολίσουμε με  $TCE_q(X)$  την υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς της, τότε

$$\begin{aligned} TCE_q(X) &= E(X | X > x_q) \\ &= \frac{1}{\bar{F}(x_q)} \int_{x_q}^{\infty} x f(x) dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου  $x_q$  είναι η αξία σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης  $q$ .

Η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς αναπαριστά τη χειρότερη πιθανή ζημιά που μπορεί να προκύψει, δεδομένου ότι η αξία σε κίνδυνο έχει ξεπεραστεί, καθώς εκτιμά τον κίνδυνο που εμπεριέχεται στην δεξιά ουρά της κατανομής του υπό μελέτη μεγέθους. Με άλλα λόγια, παρέχει μία μέτρηση λαμβάνοντας υπόψη ακραίες τιμές, κάτι που όπως αναφέραμε είναι πολύ συνήθες στον αναλογισμό. Επίσης, σε πολλά ασφαλιστικά συμβόλαια ορίζεται ένα αφαιρετέο ποσό και οι αποζημιώσεις παρέχονται μόνο σε περίπτωση που αυτό ξεπεραστεί, συνεπώς η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς δίνει μία εκτίμηση του κινδύνου για την περίπτωση που το μέγεθος της ζημιάς έχει υπερβεί το αφαιρετέο ποσό  $x_q$ . Αναφέρουμε ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες ενός συνετού μέτρου κινδύνου, όπως απέδειξαν οι Artzner et al. (1999).

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε τα δύο μέτρα και θα δούμε ότι πράγματι η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς παρέχει μία πιο συντηρητική μέτρηση του κινδύνου για το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης  $q$ .

Από τις (4.1) και (4.3), έχουμε

$$\begin{aligned} TCE_q(X) &= E(X | X > x_q) \\ &= x_q + E(X - x_q | X > x_q) \\ &= VaR_q(X) + m(x_q), \end{aligned}$$

όπου  $m(x_q)$  είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της  $X$  ηλικίας  $x_q$ . Επομένως,

$$TCE_q(X) \geq VaR_q(X)$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $m(t)$  παίρνει πάντα μη αρνητικές τιμές. □

## 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου

Κατόπιν, θα περιγράψουμε ένα λιγότερο γνωστό μέτρο κινδύνου, αλλά εξίσου σημαντικό με την υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς, που θα μπορούσαμε να μεταφράσουμε ως υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς (tail conditional variance-TCV). Αν  $X$  είναι μη αρνητική, συνεχής τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον κίνδυνο, με μέση τιμή  $\mu = E(X)$ , και συμβολίσουμε με  $TCV_q(X)$  την υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς της, έχουμε

$$\begin{aligned} TCV_q(X) &= \text{Var}(X | X > x_q) \\ &= E[(X - \mu)^2 | X > x_q] \\ &= \frac{1}{\bar{F}(x_q)} \int_{x_q}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου  $\bar{F}$ ,  $f$ , είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας και η συνάρτηση πυκνότητας, αντίστοιχα, της  $X$ .

Η υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς εισήχθη για πρώτη φορά από τον Valdez (2005) για τη μέτρηση της μεταβλητότητας του κινδύνου κατά μήκος της δεξιάς ουράς της κατανομής του.

Εν συνεχεία, θα συγκρίνουμε την υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς με την διακύμανση της κατανομής. Είναι γνωστό ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[(X - \mu)^2 I(X > x_q)] + E[(X - \mu)^2 I(X \leq x_q)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

όπου

$$I(X > x_q) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x > x_q \\ 0 & , \text{αν } x \leq x_q \end{cases}$$

είναι η λεγόμενη δείκτρια συνάρτηση της  $X$ . Όμως

$$\begin{aligned} E[(X - \mu)^2 I(X > x_q)] &= \int_{x_q}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \bar{F}(x_q) \int_{x_q}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{f(x)}{\bar{F}(x_q)} dx \\ &= (1 - q) E[(X - \mu)^2 | X > x_q] \\ &= (1 - q) TCV_q(X), \end{aligned} \quad (4.6)$$

οπότε από τις (4.5) και (4.6), έπεται ότι

$$\text{Var}(X) \geq (1 - q) TCV_q(X)$$

ή

$$TCV_q(X) \leq \frac{1}{1-q} Var(X), \quad (4.7)$$

δεδομένου ότι

$$E[(X - \mu)^2 I(X \leq x_q)] \geq 0.$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $1 - q < 1$  προκύπτει ότι

$$TCV_q(X) > Var(X). \quad (4.8)$$

### Παρατήρηση

Τονίζουμε ότι από τη σχέση (4.7), προκύπτει το συμπέρασμα ότι αν ορίζεται η διακύμανση της  $X$ , τότε ορίζεται και η υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς της. Με άλλα λόγια η ύπαρξη της διακύμανσης αποτελεί ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της  $TCV$ , αποτέλεσμα που όπως είδαμε ισχύει και για την αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία. Παρόλα αυτά, από την (4.8) είναι φανερό ότι η ύπαρξη της διακύμανσης είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της  $TCV$ , δηλαδή δεν ορίζεται για κατανομές για τις οποίες η διακύμανση δεν υπάρχει.

Λαμβάνοντας υπόψιν το παραπάνω αποτέλεσμα και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση  $g(X) = (\mu - X)^2$  με το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής,  $m(X)$ , της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , προκύπτει η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία

$$\mathcal{E}_1(X; x_q) = E(m(X) | X > x_q)$$

όπως παρουσιάστηκε στη σχέση (2.15).

### Ανοιχτό πρόβλημα

Στο σημείο αυτό, γεννάται το ερώτημα αν η δυναμική αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και κατ'επέκταση η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία για κάποιο μεγαλύτερο  $n$  μπορεί να αποτελέσει ένα "σωστό" μέτρο κινδύνου, που θα οδηγήσει σε συνεπείς εκτιμήσεις.

Εν συνεχεία, προκειμένου να προσεγγίσουμε το παραπάνω ερώτημα θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα από την κατανομή Pareto, που είναι μία κατανομή με βαριά δεξιά ουρά και θα συγκρίνουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς της και την υπό συνθήκη διακύμανση με την δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία.



## 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου

**Παράδειγμα 4.2.1.** Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha = 3$  και  $\beta = 800$ , έχει δηλαδή μέση τιμή  $\mu = 400$  και συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = \left( \frac{800}{t + 800} \right)^3, \quad t \geq 0.$$

Η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς, η υπό συνθήκη διακύμανση και η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία για  $n = 1, 2, 3$  (βλέπε (3.18)) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

•

$$TCE_q(X) = \left( \frac{x_q + 800}{800} \right)^3 \int_{x_q}^{\infty} x \frac{800^3 3}{(x + 800)^4} dx,$$

•

$$TCV_q(X) = \left( \frac{x_q + 800}{800} \right)^3 \int_{x_q}^{\infty} (x - 400)^2 \frac{800^3 3}{(x + 800)^4} dx,$$

•

$$\mathcal{E}_1(X; x_q) = \frac{\alpha (x_q + \beta)}{(\alpha - 1)^2} = \frac{3 (x_q + 800)}{2^2},$$

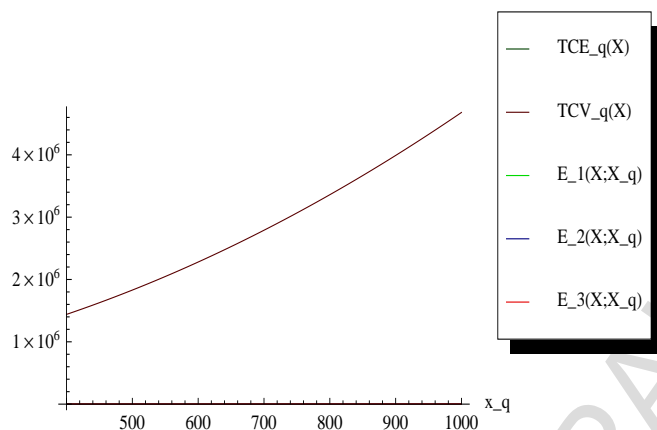
•

$$\mathcal{E}_2(X; x_q) = \frac{\alpha^2 (x_q + \beta)}{(\alpha - 1)^3} = \frac{3^2 (x_q + 800)}{2^3},$$

•

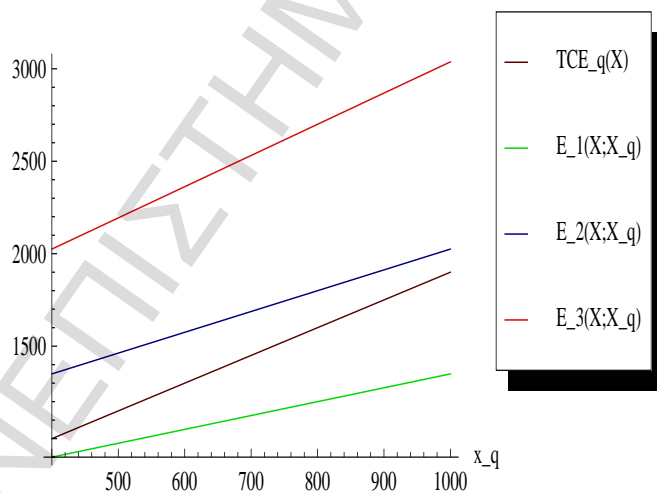
$$\mathcal{E}_3(X; x_q) = \frac{\alpha^3 (x_q + \beta)}{(\alpha - 1)^4} = \frac{3^3 (x_q + 800)}{2^4},$$

όπου  $x_q$  είναι η αξία σε κίνδυνο για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $q$ . Το παρακάτω γράφημα δίνει μία εικόνα για το πώς μεταβάλλονται τα παραπάνω μέτρα καθώς η αξία σε κίνδυνο  $x_q$  αυξάνεται, δηλαδή για μεγαλύτερο επίπεδο εμπιστοσύνης.



Σχήμα 4.1: Γράφημα των  $TCE_q(X)$ ,  $TCV_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 1000$

Είναι φανερό, ότι η  $TCV_q(X)$  παρέχει μία αρκετά πιο συντηρητική μέτρηση του κινδύνου, εφόσον περιγράφει την μεταβλητότητα στην δεξιά ουρά της κατανομής του. Παρουσιάζουμε ακόμη, ένα από κοινού γράφημα που περιλαμβάνει μόνο τις  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ .



Σχήμα 4.2: Γράφημα των  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 1000$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\mathcal{E}_1(X; x_q) < TCE_q(X) < \mathcal{E}_2(X; x_q) < \mathcal{E}_3(X; x_q)$$

επομένως, η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία για  $n = 2, 3$ , παρέχει μία πιο συντηρητική μέτρηση του κινδύνου από την υπό

## 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου

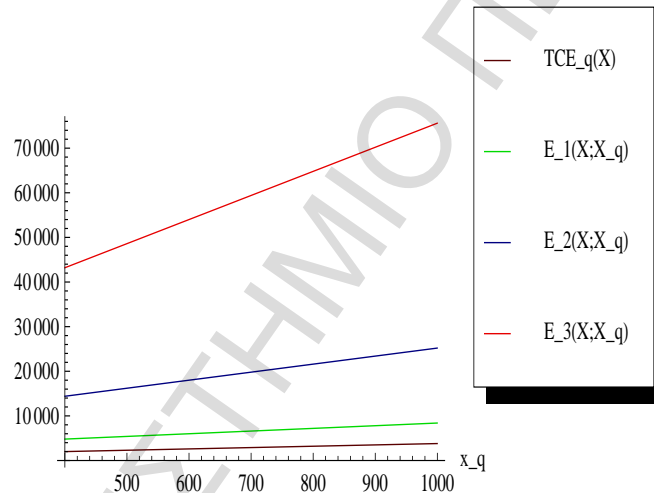
συνθήκη μέση τιμή της ουράς και συνεπώς από την αξία σε κίνδυνο για το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης.

□

**Παράδειγμα 4.2.2.** Αν η  $X$  έχει την κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\alpha = 3/2$  και  $\beta = 400$ , τότε η συνάρτηση αξιοπιστίας της δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(t) = \left( \frac{400}{t + 400} \right)^{3/2}, \quad t \geq 0.$$

Η μέση τιμή της είναι  $\mu = 800$ , ενώ η διακύμανση της δεν ορίζεται, συνεπώς και η υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς δεν υπάρχει. Παραθέτουμε ένα από κοινού γράφημα των μέτρων  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ .



Σχήμα 4.3: Γράφημα των  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 1000$

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι

$$TCE_q(X) < \mathcal{E}_1(X; x_q) < \mathcal{E}_2(X; x_q) < \mathcal{E}_3(X; x_q)$$

με άλλα λόγια η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία εκτιμά μεγαλύτερο κίνδυνο από την TCE για οποιοδήποτε  $n = 1, 2, \dots$ . Επίσης,  $X \in IDGCRE_n$  για  $n = 1, 2, \dots$ , έπεται ότι  $\mathcal{E}_n(X; x_q) > \mathcal{E}_{n-1}(X; x_q)$  (βλέπε (3.24)), επομένως όσο μεγαλύτερο  $n = 1, 2, \dots$  επιλέξουμε, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η εκτίμηση του κινδύνου που θα λάβουμε.

□

Τέλος, θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα από την δυναμοκατανομή, που δεν εμφανίζεται συχνά στον αναλογισμό καθώς δεν έχει βαριά δεξιά ουρά και συνεπώς δεν αναπαριστά ακραία γεγονότα.

**Παράδειγμα 4.2.3.** Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει τη δυναμοκατανομή με παραμέτρους  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 800$ , με μέση τιμή  $\mu = 200$  και συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(t) = \left( \frac{800 - t}{800} \right)^3, \quad 0 < t < 800.$$

Η υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς, η υπό συνθήκη διακύμανση και η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία για  $n = 1, 2, 3$  (βλέπε (3.19)) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

•

$$TCE_q(X) = \left( \frac{800}{800 - x_q} \right)^3 \int_{x_q}^{800} x \frac{3(800 - x)^2}{800^3} dx,$$

•

$$TCV_q(X) = \left( \frac{800}{800 - x_q} \right)^3 \int_{x_q}^{800} (x - 200)^2 \frac{3(800 - x)^2}{800^3} dx,$$

•

$$\mathcal{E}_1(X; x_q) = \frac{\alpha(\beta - x_q)}{(\alpha + 1)^2} = \frac{3(800 - x_q)}{4^2},$$

•

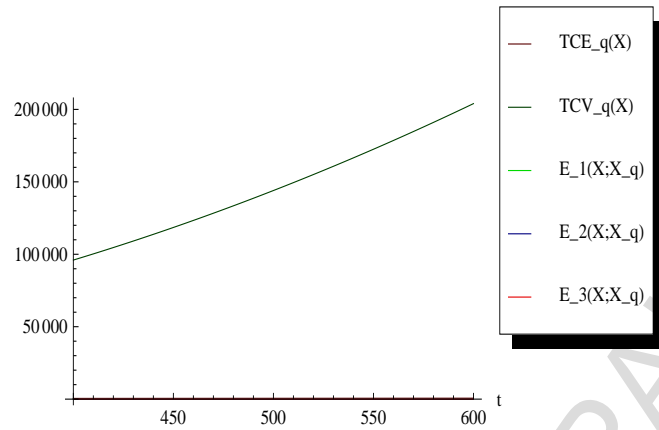
$$\mathcal{E}_2(X; x_q) = \frac{\alpha^2(\beta - x_q)}{(\alpha + 1)^3} = \frac{3^2(800 - x_q)}{4^3},$$

•

$$\mathcal{E}_3(X; x_q) = \frac{\alpha^3(\beta - x_q)}{(\alpha + 1)^4} = \frac{3^3(800 - x_q)}{4^4},$$

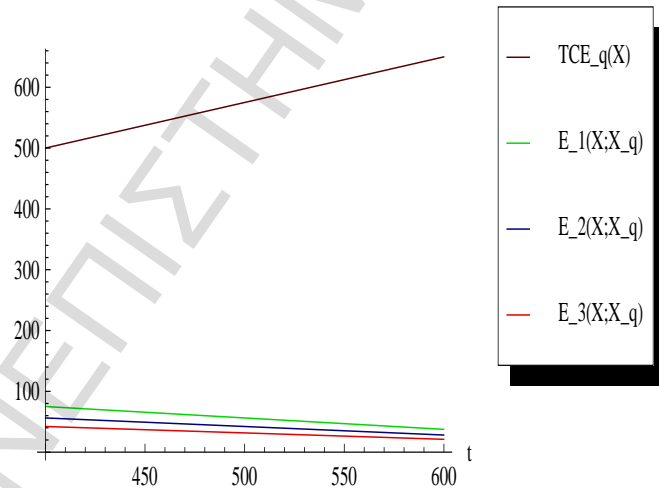
όπου  $x_q < 800$  είναι η αξία σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης  $q$ . Η από κοινού γραφική παράσταση των προαναφερθέντων μέτρων είναι

## 4.2 Η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία ως μέτρο κινδύνου



Σχήμα 4.4: Γράφημα των  $TCE_q(X)$ ,  $TCV_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 600$

Όπως διαφαίνεται στο γράφημα, η  $TCV_q(X)$  παρέχει μία αρκετά μεγαλύτερη μέτρηση του κινδύνου σε σχέση με τα λοιπά μέτρα και σε αυτή την περίπτωση. Παραθέτουμε τέλος, ένα γράφημα των μέτρων  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$ .



Σχήμα 4.5: Γράφημα των  $TCE_q(X)$ ,  $\mathcal{E}_1(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_2(X; x_q)$ ,  $\mathcal{E}_3(X; x_q)$  για  $400 \leq x_q \leq 600$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$TCE_q(X) > \mathcal{E}_1(X; x_q) > \mathcal{E}_2(X; x_q) > \mathcal{E}_3(X; x_q)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $X \in DDGCRE_n$ , δηλαδή  $\mathcal{E}_n(X; x_q) < \mathcal{E}_{n-1}(X; x_q)$  για  $n = 1, 2, \dots$  (βλέπε (3.25)), έπεται ότι για μεγαλύτερο  $n$  η δυναμική

γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία εκτιμά μικρότερο κίνδυνο και αρκετά μικρότερο από την υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς.

□

### Συμπεράσματα

1. Από τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να αποφανθούμε ότι η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία μπορεί να παρέχει μία πιο συντηρητική μέτρηση του κινδύνου από την αξία σε κίνδυνο και από την υπό συνθήκη μέση τιμή της ουράς, για μεγέθη που χαρακτηρίζονται από κατανομές με βαριά δεξιά ουρά, όπως η περίπτωση της κατανομής Pareto.
2. Για κατανομές που έχουν την ιδιότητα  $IDGCRE_n$  μπορεί να παρέχει τη δυνατότητα επιλογής του επιπέδου ανάληψης κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη λιγότερο η περισσότερα τα ακραία γεγονότα, αφού όσο μεγαλύτερο  $n$  επιλέξουμε τόσο πιο συντηρητική θα είναι η μέτρηση του κινδύνου που θα λάβουμε.
3. Τέλος, θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο για την εκτίμηση της μεταβλητότητας του κινδύνου κατά μήκος της δεξιάς ουράς του, όταν προέρχεται από κατανομές με βαριά δεξιά ουρά για τις οποίες η διακύμανση και η υπό συνθήκη διακύμανση της ουράς δεν ορίζονται, όπως στην περίπτωση της κατανομής Pareto του Παραδείγματος 4.2.2.

Παρόλα αυτά, θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια εμπειρική μελέτη, προκειμένου να συγκριθούν τα παραπάνω μέτρα και να ελεγχθεί αν υπάρχει μεταξύ τους κάποια σχέση θετικής συσχέτισης, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί η δυναμική γενικευμένη αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία στο μέλλον, ως μέσο προσδιορισμού της απαιτούμενης κεφαλαιακής επάρκειας.

# Παράρτημα Α΄

## Συντμήσεις

$CRE$	Cumulative residual entropy
$CVaR$	Conditional value at risk
$DCRE$	Dynamic cumulative residual entropy
$DDCRE$	Decreasing dynamic cumulative residual entropy
$DDGCRE_n$	Decreasing dynamic generalized cumulative residual entropy
$DFR$	Decreasing failure rate
$DGCRE$	Dynamic generalized cumulative residual entropy
$DMRL$	Decreasing mean residual lifetime
$GCRE$	Generalized cumulative residual entropy
$HR$	Hazard rate
$IDCRE$	Increasing dynamic cumulative residual entropy
$IDGCRE_n$	Increasing dynamic generalized cumulative residual entropy
$IFR$	Increasing failure rate
$IMRL$	Increasing mean residual lifetime
$MRL$	Mean residual lifetime
$NBUE$	New better than used in expectation
$NWUE$	New worse than used in expectation

$TCE$	Tail conditional expectation
$TCV$	Tail conditional variance
$VaR$	Value at risk
$Var$	Variance

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



# Παράρτημα Β΄

## Εντολές στο Mathematica

Στη συνέχεια, δίνονται οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν στο υπολογιστικό πακέτο Mathematica για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων που περιέχονται στη διπλωματική εργασία.

### 1. Κατασκευή των Σχημάτων 2.1, 2.2 - Παράδειγμα 2.2.1

```
tailF[x_] := (1 + x^2)^{-1.3}
L[x_] := -Log[tailF[x]]
mrl[t_] := Integrate[tailF[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entrol[t_] := -L[t] * mrl[t] + Integrate[tailF[x] * L[x] / tailF[t], {x, t, Infinity}]
FindMinimum[mrl[t], {t, 0, 1}]
FindMinimum[Entrol[t], {t, 0, 1}]
Plot[mrl[t], {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "m(t)"}]
Plot[{mrl[t], Entrol[t]}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> {RGBColor[0.75, 0, 0], RGBColor[0, 0.25, 0]},
LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", " "}]
```

### 2. Κατασκευή των Σχημάτων 2.3, 2.4 - Παράδειγμα 2.2.2

```
tailF[x_] := Exp[-x^4 - (3 * x)^{1/3}]
L[x_] := -Log[tailF[x]]
mrl[t_] := Integrate[tailF[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entrol[t_] := -L[t] * mrl[t] + Integrate[tailF[x] * L[x] / tailF[t], {x, t, Infinity}]
FindMaximum[mrl[t], {t, 0, 1}]
FindMaximum[Entrol[t], {t, 0, 1}]
Plot[mrl[t], {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "m(t)"}]
Plot[{mrl[t], Entrol[t]}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> {RGBColor[0.5, 0, 0], RGBColor[0, 0.75, 0]},
LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", " "}]
```

3. Κατασκευή των Σχημάτων 3.1, 3.2, 3.3 - Παράδειγμα 3.2.1

```
Needs["PlotLegends`"]
tailF[x_] := Exp[-x^{1.5} - x^{0.5}]
L[x_] := -Log[tailF[x]]
mrl[t_] := Integrate[tailF[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entro1[t_] := -L[t] * mrl[t] + Integrate[tailF[x] * L[x] / tailF[t], {x, t, Infinity}]
Entro2[t_] :=
  (L[t])^2 * mrl[t] / 2 - (L[t] / tailF[t]) * Integrate[tailF[x] * L[x], {x, t, Infinity}] +
  (1 / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^2, {x, t, Infinity}]
Entro3[t_] := -L[t]^3 * mrl[t] / 6 +
  ((L[t])^2 / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * L[x], {x, t, Infinity}] -
  (L[t] / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^2, {x, t, Infinity}] +
  (1 / (6 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^3, {x, t, Infinity}]
mrl[0]
Entro1[0]
Entro2[0]
Entro3[0]
Plot[{mrl[t], Entro1[t]}, {t, 0, 0.1}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
Plot[{Entro1[t], Entro2[t]}, {t, 0, 0.5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"E_1(X;t)", "E_2(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
Plot[{mrl[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 0, 1},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0.2, 0, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, -0.3}, LegendSize -> 0.7, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)", "E_2(X;t)", "E_3(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
```

#### 4. Κατασκευή των Σχημάτων 3.4, 3.5, 3.6 - Παράδειγμα 3.2.2

```
Needs["PlotLegends`"]
tailF[x_] := (1 + x^3)^{-2.5}
L[x_] := -Log[tailF[x]]
mrl[t_] := Integrate[tailF[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entro1[t_] := -L[t] * mrl[t] + Integrate[tailF[x] * L[x] / tailF[t], {x, t, Infinity}]
Entro2[t_] :=
  (L[t])^2 * mrl[t] / 2 - (L[t] / tailF[t]) * Integrate[tailF[x] * L[x], {x, t, Infinity}] +
  (1 / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^2, {x, t, Infinity}]
Entro3[t_] := -L[t]^3 * mrl[t] / 6 +
  ((L[t])^2 / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * L[x], {x, t, Infinity}] -
  (L[t] / (2 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^2, {x, t, Infinity}] +
  (1 / (6 * tailF[t])) * Integrate[tailF[x] * (L[x])^3, {x, t, Infinity}]
N[mrl[0]]
N[Entro1[0]]
N[Entro2[0]]
N[Entro3[0]]
Plot[{mrl[t], Entro1[t], Entro2[t]}, {t, 0, 2},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)", "E_2(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
Plot[{Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 0, 0.5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0.2, 0, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, 0.4}, LegendSize -> 0.4, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"E_2(X;t)", "E_3(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
Plot[{mrl[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 0, 2},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0.2, 0, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, -0.3}, LegendSize -> 0.7, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"m(t)", "E_1(X;t)", "E_2(X;t)", "E_3(X;t)"}, AxesLabel -> {"t", ""}]
```

5. Κατασκευή των Σχημάτων 4.1, 4.2 - Παράδειγμα 4.2.1

```
Needs["PlotLegends`"]
Alphapar := 3
Betapar := 800
tailF[x_] := (Betapar / (x + Betapar)) ^ {Alphapar}
Piknotita[x_] := (Alphapar * (Betapar ^ {Alphapar})) / ((x + Betapar) ^ {Alphapar + 1})
Mu := Integrate[tailF[x], {x, 0, Infinity}]
Tce[t_] := Integrate[x * Piknotita[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Tcv[t_] := Integrate[(x - Mu) ^ {2} * Piknotita[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entro1[t_] := (Alphapar * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {2}
Entro2[t_] := (Alphapar ^ {2} * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {3}
Entro3[t_] := (Alphapar ^ {3} * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {4}
N[Mu]
Plot[{Tce[t], Tcv[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]},
  {t, 400, 1000}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0.25, 0], RGBColor[0.35, 0, 0],
  RGBColor[0, 0.85, 0], RGBColor[0, 0, 0.5], RGBColor[0.9, 0, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, -0.3}, LegendSize -> 1.1, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"TCE_q(X)", "TCV_q(X)", "E_1(X;X_q)", "E_2(X;X_q)", "E_3(X;X_q)"},
  AxesLabel -> {"x_q", ""}]
Plot[{Tce[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 400, 1000}, PlotStyle ->
  {RGBColor[0.35, 0, 0], RGBColor[0, 0.85, 0], RGBColor[0, 0, 0.5], RGBColor[0.9, 0, 0]},
  LegendPosition -> {0.95, -0.3}, LegendSize -> 0.9, LegendTextSpace -> 2,
  PlotLegend -> {"TCE_q(X)", "E_1(X;X_q)", "E_2(X;X_q)", "E_3(X;X_q)"},
  AxesLabel -> {"x_q", ""}]
```

---

6. Κατασκευή των Σχημάτων 4.3 - Παράδειγμα 4.2.2

```
Needs["PlotLegends`"]
Alphapar := 1.5
Betapar := 400
tailF[x_] := (Betapar / (x + Betapar)) ^ {Alphapar}
Piknotita[x_] := (Alphapar * (Betapar ^ {Alphapar})) / ((x + Betapar) ^ {Alphapar + 1})
Mu := Integrate[tailF[x], {x, 0, Infinity}]
Tce[t_] := Integrate[x * Piknotita[x], {x, t, Infinity}] / tailF[t]
Entro1[t_] := (Alphapar * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {2}
Entro2[t_] := (Alphapar ^ {2} * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {3}
Entro3[t_] := (Alphapar ^ {3} * (t + Betapar)) / (Alphapar - 1) ^ {4}
Plot[{Tce[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 400, 1000}, PlotStyle →
  {RGBColor[0.35, 0, 0], RGBColor[0, 0.85, 0], RGBColor[0, 0, 0.5], RGBColor[0.9, 0, 0]},
  LegendPosition → {0.95, -0.3}, LegendSize → 1.1, LegendTextSpace → 2,
  PlotLegend → {"TCE_q(X)", "E_1(X;X_q)", "E_2(X;X_q)", "E_3(X;X_q)"},
  AxesLabel → {"x_q", " "}]
```

## 7. Κατασκευή των Σχημάτων 4.4, 4.5 - Παράδειγμα 4.2.3

```
Needs["PlotLegends`"]
Alphapow := 3
Betapow := 800
tailF[x_] := ((Betapow - x) / Betapow) ^ {Alphapow}
Piknotita[x_] := (Alphapow * (Betapow - x) ^ {Alphapow - 1}) / (Betapow ^ {Alphapow})
Mu := Integrate[tailF[x], {x, 0, Betapow}]
Tce[t_] := Integrate[x * Piknotita[x], {x, t, Betapow}] / tailF[t]
Tcv[t_] := Integrate[((x - Mu) ^ {2}) * Piknotita[x], {x, t, Betapow}] / tailF[t]
Entro0[t_] := (Betapow - t) / (Alphapow + 1)
Entro1[t_] := (Alphapow * (Betapow - t)) / ((Alphapow + 1) ^ {2})
Entro2[t_] := (Alphapow ^ {2} * (Betapow - t)) / ((Alphapow + 1) ^ {3})
Entro3[t_] := (Alphapow ^ {3} * (Betapow - t)) / ((Alphapow + 1) ^ {4})
N[Mu]
Plot[{Tce[t], Tcv[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]},
  {t, 400, 600}, PlotStyle → {RGBColor[0.35, 0, 0], RGBColor[0, 0.25, 0],
  RGBColor[0, 0.85, 0], RGBColor[0, 0, 0.5], RGBColor[0.9, 0, 0]},
  LegendPosition → {0.95, -0.3}, LegendSize → 1.1, LegendTextSpace → 2,
  PlotLegend → {"TCE_q(X)", "TCV_q(X)", "E_1(X;X_q)", "E_2(X;X_q)", "E_3(X;X_q)"},
  AxesLabel → {"t", " "}]
Plot[{Tce[t], Entro1[t], Entro2[t], Entro3[t]}, {t, 400, 600}, PlotStyle →
  {RGBColor[0.35, 0, 0], RGBColor[0, 0.85, 0], RGBColor[0, 0, 0.5], RGBColor[0.9, 0, 0]},
  LegendPosition → {0.95, -0.3}, LegendSize → 0.9, LegendTextSpace → 2,
  PlotLegend → {"TCE_q(X)", "E_1(X;X_q)", "E_2(X;X_q)", "E_3(X;X_q)"}, AxesLabel → {"t", " "}]
```

# Βιβλιογραφία

## A. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- [1] Κούτρας, Μ.Β. (2004). Εισαγωγή στις Πιθανότητες - Θεωρία και Εφαρμογές, μέρος Ι, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- [2] Κούτρας, Μ.Β. (2004). Εισαγωγή στις Πιθανότητες - Θεωρία και Εφαρμογές, μέρος ΙΙ, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- [3] Χαραλαμπίδης, Χ.Α. (2000). Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία.

## B. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

- [4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9, 203-228.
- [5] Asadi, M. and Zohrevand, Y. (2007). On the dynamic cumulative residual entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, 1931-1941.
- [6] Baxter, L.A. (1982). Reliability applications of the relevation transform, *Naval Research Logistics Quarterly* 29, 323-330.
- [7] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, New York.
- [8] Gupta, R.C. (2009). Some characterization results based on residual entropy function, *Journal of Statistical Theory and Applications* 8, 45-59.
- [9] Hairer, E., Norsett, P. and Wanner, G. (2008). *Solving ordinary differential equations I*, Corrected 3rd printing, *Spring Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

- [10] Hall, W.J. and Wellner, J.A. (1981). Mean residual life, *Statistics and Related Topics*, 169-184.
- [11] Honorio, J. and Jaakkola, T. (2013). Two-Sided Exponential Concentration Bounds for Bayes Error Rate and Shannon Entropy, *Proceedings of the 30<sup>th</sup> International Conference on Machine Learning*, Atlanta, Georgia, USA, *JMLR: WCP* volume 28.
- [12] Krakowski, M. (1973). The relevation transform and a generalization of the Gamma distribution function, *Rev. Francaise Autom. Infor. Res. Oper.* 7, 107-120.
- [13] Lai, C.D. and Xie, M. (2006). *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, Springer, New York.
- [14] Landsman, Z. and Valdez, E.A. (2003). Tail Conditional expectations for Elliptical Distributions, *North American Actuarial Journal* 4, 55-71.
- [15] Navarro, J., del Aguila, Y. and Asadi, M. (2010). Some new results on the cumulative residual entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference* 140, 310-322.
- [16] Navarro, J. and Psarrakos, G. (2013). Characterizations based on Generalized Cumulative Residual Entropy Functions, Submitted.
- [17] Psarrakos, G. and Navarro, J. (2013). Generalized Cumulative Residual Entropy and Record Values, *Metrika* 5, 623-640.
- [18] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C. and Wang, F. (2004). Cumulative Residual Entropy: a New Measure of Information, *IEEE Transactions Information Theory* 6, 1220-1228.
- [19] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2010). *Stochastic Orders*, Springer, New York.
- [20] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal* 27, 379-423.
- [21] Valdez, E.A. (2005). Tail Conditional Variance for Elliptically Contoured Distributions, *Belgian Actuarial Bulletin* 5, 26-36.
- [22] Yang, L. (2012). Study on Cumulative Residual Entropy and Variance as Risk Measure, 2012 Fifth International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering, *IEEE*, 210-213.