

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ  
ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ  
ΖΩΗΣ**

Παναγιώτα Εξαρχοπούλου

*Διπλωματική εργασία*

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική κινδύνου.

ΠΕΙΡΑΙΑΣ  
ΜΑΙΟΣ 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ  
ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ  
ΖΩΗΣ**

Παναγιώτα Εξαρχοπούλου

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική κινδύνου.

ΠΕΙΡΑΙΑΣ  
ΜΑΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Σπυρίδων Βρόντος (Επιβλέπων)
- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης
- Μιλτιάδης Νεκτάριος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAMM IN ACTYUARIAL SCIENCE AND RISK  
MANAGEMENT

**PRICING AND RESERVING FOR  
COMPOSITE LIFE INSURANCE POLICIES**

By

Panagiota Exarchopoulou

MSc Dissertation

submitted to the department of Statistics and Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk  
Management.

Piraeus, Greece

May 2013

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## Περίληψη

Στη παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τη μοντελοποίηση των απαιτήσεων των σύνθετων ασφαλιστηρίων ζωής, συναρτήσει των επικρατουσών οικονομικών συνθηκών και του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος. Το καθαρό ασφάλιστρο, καθώς και τα απαραίτητα κεφάλαια αποθέματα υπολογίζονται σύμφωνα με τις απαιτήσεις της οδηγίας Φερεγγυότητα II και του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας. Τα δεδομένα μας αφορούν τις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής και προέρχονται από την Ομοσπονδιακή Τράπεζα Οικονομικών Δεδομένων αλλά και από την Αμερικάνικη Ένωση Ασφαλιστικών Εταιριών Ζωής.

Στη μελέτη μας θα συμπεριλάβουμε τους οικονομικούς κύκλους, δεδομένου ότι, κατά την περίοδο μιας οικονομικής κρίσης οι οικονομικές απώλειες μπορεί να είναι καταστροφικές. Η πρόβλεψη της συχνότητας και του μεγέθους των περιόδων ύφεσης γίνεται μέσω ενός Μαρκοβιανού μοντέλου εναλλαγής καταστάσεων, ενώ η εκτίμηση του μοντέλου αυτού γίνεται με τη χρήση Μπεϋζιανών μεθόδων. Παράλληλα, οι μελλοντικές αποζημιώσεις προβλέπονται μέσω ενός μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς, όπου ως επεξηγηματική μεταβλητή χρησιμοποιείται το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν. Τέλος ο υπολογισμός του καθαρού ασφάλιστρου και των απαιτούμενων κεφαλαίων επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης κατανομών πρόβλεψης.

Από τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε, αν και σπάνιο φαινόμενο, η οικονομική κρίση επιβαρύνει σημαντικά τα αρχικά αποθεματικά και για το λόγο αυτό θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη στον υπολογισμό τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## Abstract

In this paper we discuss the modeling of the requirements of composite life insurance policies, depending on the prevailing economic conditions and the Gross Domestic Product. The net premium and the necessary capital reserves are calculated in accordance with the requirements of the directive Solvency II and the Swiss Solvency Test. Our data regarding the United States of America are derived from the Federal Reserve of Economic Data and the American Council of Life Insurers.

In our study we will include economic cycles given that during an economic crisis the losses can be devastating. The prediction of the frequency and the magnitude of the recessions is made through a Markov regime switching model, while the estimation of this model is performed using Bayesian methods. At the same time, the future claim amounts are predicted through a transfer function model, where the explanatory variable is the Gross Domestic Product. Finally, the calculation of the net premium and the required capital is achieved through the use of predictive distributions.

The results of our study showed that, although rare, the economic crisis places a significant burden on the initial reserves and therefore it should be seriously taken into account in their calculation.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# Περιεχόμενα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	XIII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	XV
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ.....	XVII
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	1
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>4</b>
1.1. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ.....	4
1.2. ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟ ΕΓΧΩΡΙΟ ΠΡΟΙΟΝ ΚΑΙ ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟ ΕΘΝΙΚΟ ΠΡΟΙΟΝ.....	8
<b>2. ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ II.....</b>	<b>12</b>
2.1. ΠΥΛΩΝΑΣ I: ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ.....	14
2.1.1. Αποτίμηση των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού.....	14
2.1.2. Αποτίμηση των Υποχρεώσεων.....	15
2.1.3. Καθορισμός Ιδίων Κεφαλαίων.....	16
2.1.4. Κεφαλαιακές Απαιτήσεις.....	17
2.1.4.1. Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις (MCR).....	17
2.1.4.2. Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (SCR).....	23
2.1.5. Επενδύσεις.....	23
2.2. ΠΥΛΩΝΑΣ III: ΔΗΜΟΣΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΟΠΤΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ.....	24
2.3. ΠΥΛΩΝΑΣ II: ΠΟΙΟΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ.....	25
<b>3. ΕΛΒΕΤΙΚΟ ΤΕΣΤ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑΣ.....</b>	<b>26</b>
3.1. Αποτίμηση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων.....	27
3.2. Επισφαλές κεφάλαιο & Κεφάλαιο στόχος.....	28
3.3. Τυποποιημένα μοντέλα και Σενάρια.....	31
3.4. Ασφαλίσεις Ζωής.....	33
3.4.1. Κίνδυνος αγοράς.....	34
3.4.2. Πιστωτικός κίνδυνος.....	35
3.4.3. Ασφαλιστικός κίνδυνος ζωής.....	35

3.5. Εσωτερικά μοντέλα.....	38
3.6. Αναφορά Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας (SST report).....	38
<b>4. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....</b>	<b>40</b>
4.1. ΜΠΕΥΖΙΑΝΑ	
ΜΟΝΤΕΛΑ.....	40
4.1.1. Θεώρημα Bayes.....	41
4.1.2. Α priori κατανομές.....	43
4.1.3. Γενεσιουργά μοντέλα (generative models).....	47
4.1.4. Το μοντέλο.....	48
4.1.5. Προσεγγίσεις του μοντέλου.....	50
4.2. ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΝΑΛΛΑΓΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ- ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.....	51
4.2.1. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης (Markov model of trend).....	52
4.2.1.1. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης σε επίπεδα (Markov Trend in levels).....	54
4.2.1.2. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης σε λογαρίθμους (Markov Trend in logs).....	55
4.2.2. Στοχαστικό μοντέλο.....	58
4.2.2.1. Φίλτρο και εξομαλυντής.....	59
4.3. METROPOLIS-HASTINGS ALGORITHM & GIBB'S SAMPLER.....	61
4.3.1. Ο δειγματολήπτης Gibbs.....	64
4.4. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.....	68
4.4.1. Διωνυμική κατανομή.....	71
4.4.1.1. Logit link.....	72
4.4.1.2. Probit link.....	73
4.4.2. Έλεγχος καλής προσαρμογής.....	74
<b>5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.....</b>	<b>76</b>
5.1. Δεδομένα.....	76
5.2. Περιγραφή του μοντέλου.....	79
5.3. Αποτελέσματα.....	84

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 Οι φάσεις του Οικονομικού Κύκλου και τα σημεία καμπής .....	5
Εικόνα 2 Γενικό Περίγραμμα ΠΥΛΩΝΑ Ι.....	14
Εικόνα 3 Προτεινόμενη Δομή Τυπικής Προσέγγισης.....	18
Εικόνα 4 Αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων.....	27
Εικόνα 5 Ορισμός επισφαλούς κεφαλαίου.....	29
Εικόνα 6 Ορισμός του κεφαλαίου στόχος.....	29
Εικόνα 7 Σύγκριση VaR και Tail VaR.....	30
Εικόνα 8 Ποσοτικοί και Ποιοτικοί κίνδυνοι για το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας .....	33
Εικόνα 9 Γενεσιουργό Μοντέλο.....	47
Εικόνα 10 Ετήσιο ΑΕγχΠ εκφρασμένο σε δις δολάρια για τη περίοδο 1929- 2009.....	77
Εικόνα 11 Διαχρονική εξέλιξη αποζημιώσεων και αποθεματικών .....	78
Εικόνα 12 Γράφημα παραμέτρου $\alpha_0$ .....	85
Εικόνα 13 Γραφική απεικόνιση παραμέτρου $\alpha_1$ .....	85
Εικόνα 14 Γραφική απεικόνιση παραμέτρου $\phi_1$ .....	86
Εικόνα 15 Γραφική απεικόνιση παραμέτρου $\phi_2$ .....	86
Εικόνα 16 Γραφική απεικόνιση της $\sigma_\varepsilon$ .....	87
Εικόνα 17 Γραφική απεικόνιση της πιθανότητας $p$ .....	87
Εικόνα 18 Γραφική απεικόνιση της πιθανότητας $q$ .....	88
Εικόνα 19 Γραφική απεικόνιση της $S(t)$ .....	88

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1 Μέσος, τυπική απόκλιση και τυπικό σφάλμα του μέσου .....	89
Πίνακας 2 Ποσοστημόρια για κάθε μεταβλητή .....	89
Πίνακας 3 Διαγνωστικά Gelman και Rubin .....	90
Πίνακας 4 Μέση απόκλιση συναρτήσεων σύνδεσης .....	91
Πίνακας 5 Καθαρό ασφάλιστρο εκφρασμένο ως ποσοστό % επί του εμπορικού ασφάλιστρου .....	92
Πίνακας 6 Κεφαλαιακές απαιτήσεις για 99,5% VaR, 99% VaR, 99,5% TVaR και 99% TVaR .....	93

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

ΑΕΠ	ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν
ΑΕγχΠ	ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν
Δ.Λ.Π	Διεθνή Λογιστικά Πρότυπα
Η.Π.Α.	Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής
ΟΕΟΣ	Οργανισμού Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας
ΟΟΣΑ	Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης
σ.π.π	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
τ.μ	τυχαία μεταβλητή
ACLI	Αμερικάνικου Συμβουλίου Ασφαλιστικών Εταιριών Ζωής
BEA	Γραφείο Οικονομικών Αναλύσεων
BEL	βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων
BSCR	βασικές κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας
CEA	Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Ασφάλισης και Αντασφάλισης
CEIOPS	Ευρωπαϊκή Επιτροπή Εποπτικών Αρχών Ασφαλίσεων και Επαγγελματικών Συντάξεων
CR <sub>SUB</sub>	συνολικός πιστωτικός κινδύνων όλων των υποκατηγοριών πιστωτικού κινδύνου
ES	Αναμενόμενο Έλλειμμα
FINMA	Ελβετική Αρχή Εποπτείας Χρηματοπιστωτικών Αγορών
FOPI	Ομοσπονδιακή Υπηρεσία Ιδιωτικής Ασφάλισης
FRED	Ομοσπονδιακής Τράπεζας Οικονομικών Δεδομένων
GNE	ακαθάριστες Εθνικές Δαπάνες
i.i.d.	ανεξάρτητη και ομοιόμορφα κατανεμημένη
Log	λογάριθμος
M-H algorithm	αλγόριθμος Metropolis- Hastings
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
MCR.	ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας
MVA	τρέχουσα αξία των περιουσιακών στοιχείων στην αγορά
NBER	Εθνικό Γραφείο Οικονομικών Αναλύσεων

NR	καθαρά Έσοδα από περιουσιακά στοιχεία στο εξωτερικό
psrf	δυναμικός παράγοντας μείωσης κλίμακας
QIS	Μελέτη Ποσοτικών Επιπτώσεων
RBC	επισφαλές κεφαλαίο
$r_0$	ακίνδυνο επιτόκιο για ένα χρόνο
SCR	κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας
$SCR_{AG}$	κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο αγοράς
$SCR_{A\theta\epsilon\tau}$	κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο αθέτησης αντισυμβαλλόμενου
$SCR_{Z\omega\eta\varsigma}$	κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής
$SCR_{Intang}$	κεφαλαιακές απαιτήσεις για κίνδυνο άυλων περιουσιακών στοιχείων
$SCR_{op}$	κεφαλαιακές απαιτήσεις για λειτουργικούς κινδύνους
SST	Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας
TailVaR	Αξία στον Κίνδυνο της ουράς
Tier	Κλάση
TC	κεφαλαίο στόχος
$TC_{AG}$	κεφάλαιο στόχος για τον κίνδυνο αγοράς
$TC_Z$	κεφάλαιο στόχος για τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής
$TC_{KIND}$	κεφάλαιο στόχος για τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου
$TC_{\Pi}$	κεφάλαιο στόχος για τον πιστωτικό κίνδυνο
VaR	Αξία στον Κίνδυνο

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τον 21<sup>ο</sup> αιώνα οι ασφαλίσεις ζωής αναπτύχθηκαν ευρύτατα, ως συνέπεια του σύνθετου χρηματοοικονομικού περιβάλλοντος που επικρατεί, με σκοπό την εξασφάλιση οικονομικής προστασίας έναντι της επέλευσης διαφόρων κινδύνων. Τόσο η πληθώρα, όσο και η σύνθετη φύση των κινδύνων που πρέπει να αναληφθούν, οδήγησαν στην δημιουργία όλο και πιο σύνθετων προγραμμάτων ασφαλίσεων ζωής. οι οποίοι διαφέρουν ανάλογα με το είδος του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Ενώ λοιπόν, οι ασφαλίσεις ζωής αρχικά αποτελούσαν απλά ένα μέσο προστασίας έναντι του κινδύνου του θανάτου, πλέον χρησιμοποιούνται και ως μέσο επένδυσης ή και αντιστάθμισης κινδύνων που ενέχουν οι διάφορες χρηματοοικονομικές συναλλαγές

Ως εκ τούτου, ανάλογα με το είδος του ασφαλιστηρίου συμβολαίου έχουμε την καταβολή αποζημιώσεων είτε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου είτε κατά τη λήξη του συμβολαίου, με τη μορφή χορηγήσεων. Ειδικότερα στις σύνθετες ασφαλίσεις ζωής, όπως είναι οι ασφαλίσεις συνδεδεμένες με μονάδες επένδυσης, κατά τη λήξη του συμβολαίου καταβάλλεται στον ασφαλισμένο ποσό ίσο με την αξία εξαργύρωσης των μονάδων επένδυσης που έχουν συσσωρευτεί στο ασφαλιστήριό του. Σε περίπτωση όμως θανάτου, το ποσό που λαμβάνει ο ασφαλισμένος είναι το μεγαλύτερο μεταξύ του ασφαλισμένου ποσού και της αξίας εξαργύρωσης.

Οι χρηματοοικονομικοί αυτοί κίνδυνοι που δύναται να είναι αποτέλεσμα της κακής διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου, αλλά και εξωγενών παραγόντων όπως οι δυσμενείς οικονομικές συνθήκες, η μείωση των επιτοκίων, κα. Κατά το παρελθόν έχει επισημανθεί ότι τα μία οικονομική κρίση μπορεί να επιφέρει καταστροφικά αποτελέσματα σε πολλούς κλάδους της οικονομίας, συμπεριλαμβανομένου και του ασφαλιστικού. Ο αριθμός και το ύψος των απαιτήσεων αυξάνονται δραματικά, συγκριτικά με προηγούμενα διαστήματα, σε σημείο που οι επιχειρήσεις να μη μπορούν να αντεπεξέλθουν στις υποχρεώσεις τους. Αντίθετα σε περιόδους ανάπτυξης ή ήπιας ύφεσης, η ζημιές είναι αρκετά μικρότερες και δεν τίθεται θέμα επιβιώσής τους. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει την οικονομία, χαρακτηρίζει και τις μελλοντικές απαιτήσεις, και συνεπώς πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη κατά τη πρόβλεψή τους.

Η μελέτη της διαχρονικής εξέλιξης των απαιτήσεων αποτελεί πλέον επιτακτική ανάγκη, και για το σκοπό αυτό έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις, μακροοικονομικά και αναλογιστικά μοντέλα, τα περισσότερα εκ των οποίων όμως απέτυχαν να απεικονίσουν επαρκώς την πραγματικότητα. Στη παρούσα μελέτη θα επικεντρωθούμε στην μοντελοποίηση της διαχρονικής εξέλιξης των απαιτήσεων, στα πλαίσια όμως των οικονομικών επιχειρηματικών κύκλων και της οδηγίας Φερεγγυότητα II. Ειδικότερα, θα εξετάσουμε αν οι διακυμάνσεις στις τιμές των απαιτούμενων καθαρών ασφαλιστρών αλλά και των αρχικών αποθεμάτων, σχετίζονται με τις εναλλαγές μεταξύ των φάσεων του οικονομικού κύκλου. Η μελέτη μας συνίσταται στην χρήση Μπεϋζιανών μοντέλων, τα οποία μας δίνουν τη δυνατότητα να ενσωματώσουμε μεγάλο μέρος των κινδύνων που πιθανόν να επέλθουν και να παράγουμε πιο ρεαλιστικές και ακριβείς εκτιμήσεις.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στους οικονομικούς επιχειρηματικούς κύκλους, κατά την οποία αναλύονται εκτενώς οι τρεις φάσεις των κύκλων αυτών καθώς και των βασικότερων τεχνικών δεικτών που τις οριοθετούν. Επιπρόσθετα, παρατίθενται οι έννοιες και τα χαρακτηριστικά των βασικότερων δεικτών οικονομικής δραστηριότητας, όπως είναι το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕγχΠ) και το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν (ΑΕΠ).

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική αναφορά στη κοινοτική οδηγία Φερεγγυότητα II, που αναπτύχθηκε με σκοπό την ρύθμιση της κεφαλαιακής επάρκειας των ασφαλιστικών επιχειρήσεων. Παρουσιάζονται οι τρεις Πυλώνες από τους οποίους συνίσταται η νέα αυτή οδηγία και αναλύονται οι ποσοτικές και ποιοτικές απαιτήσεις, αλλά και οι απαιτήσεις για διαφάνεια και δημοσίευση, όπως αυτές καθορίζονται σε καθένα από τους πυλώνες αυτούς.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στη Μπεϋζιανή Θεωρία και τα Μπεϋζιανά μοντέλα, που αποτελούν το βασικότερο συστατικό της μελέτης αυτής. Με αφετηρία το Θεώρημα Bayes προχωράμε στην ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου, και συνεχίζουμε με τις priors κατανομές, τα γενεσιουργά μοντέλα και τις επικρατέστερες προσεγγίσεις.

Στη συνέχεια του τρίτου κεφαλαίου ακολουθεί η θεωρητική ανάλυση του μαρκοβιανού μοντέλου εναλλαγής καταστάσεων, στις διάφορες μορφές του, το οποίο χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό πιθανών εναλλαγών μεταξύ των φάσεων του επιχειρηματικού κύκλου και την εκτίμηση της χρονικής διάρκειας κάθε φάσης. Επίσης παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο

γύρω από τον αλγόριθμο Metropolis- Hastings, και κυριότερα του δειγματολήπτη του Gibb's, βάσει του οποίου επιλέγονται τα στοιχεία από τα οποία συνίσταται μια αλυσίδα Markov, έτσι ώστε η αλυσίδα αυτή να συγκλίνει σε μία σταθερή κατανομή. Στο τελευταίο μέρος του τρίτου κεφαλαίου αναπτύσσεται η θεωρία γύρω από τα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα, και των βασικότερων συνδετικών συναρτήσεων probit, logit και t-link.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν και του μοντέλου που εφαρμόστηκε για την εκτίμηση του καθαρού ασφαλιστρού και των αρχικών αποθεμάτων. Εν συνεχεία αναλύονται τα αποτελέσματα με τη χρήση γραφημάτων και συγκεντρωτικών πινάκων.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα που διεξήχθησαν από την μελέτη αυτή, γίνεται συνοπτική αναφορά στα βασικότερα σημεία και αποτελέσματα.

# 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

Θα αποσαφηνίσουμε αρχικά την έννοια του οικονομικού κύκλου, καθώς και τις διάφορες φάσεις του. Με τον όρο **οικονομικός κύκλος**, αναφερόμαστε στις διακυμάνσεις του επιπέδου της συνολικής οικονομικής δραστηριότητας. Σύμφωνα με τους Burns και Mitchell<sup>1</sup>, ο οικονομικός- επιχειρηματικός κύκλος ορίζεται ως το σύνολο των διακυμάνσεων που εντοπίζονται στη συνολική οικονομική δραστηριότητα ενός κράτους. Ένας οικονομικός κύκλος αποτελείται από διαστολές και περιόδους ανάπτυξης, που συμβαίνουν ταυτόχρονα σε πολλές οικονομικές δραστηριότητες, τις οποίες διαδέχονται γενικές συστολές και υφέσεις, που οδηγούν στη φάση ανόδου του επόμενου οικονομικού κύκλου<sup>2</sup>. Η ακολουθία των αλλαγών αυτών δεν χαρακτηρίζεται απαραίτητα από περιοδικότητα, αφού αυτές μπορεί να επαναλαμβάνονται σε άτακτα χρονικά διαστήματα. Όσον αφορά τη διάρκειά τους, αυτή ποικίλει από περισσότερο από ένα έτος έως δέκα ή δώδεκα έτη<sup>3</sup>; κατά τη διάρκεια αυτή ένας οικονομικός κύκλος δεν μπορεί να διαιρεθεί σε άλλους μικρότερους με παρόμοια χαρακτηριστικά.

Εκτός όμως από τον κλασσικό ορισμό για τους οικονομικούς κύκλους, κατά καιρούς έχουν αποδοθεί και κάποιοι εναλλακτικοί ορισμοί, οι οποίοι καθορίζουν τους οικονομικούς κύκλους ως τις επαναλαμβανόμενες παρεκκλίσεις από την ‘κανονική κατάσταση του εμπορίου’ ή από την ‘θέση ισορροπίας της οικονομίας’ και τις επιστροφές σε αυτή, ή ως τις επαναλαμβανόμενες εναλλαγές μεταξύ ευημερίας και ύφεσης που δημιουργούνται από ‘παράγοντες’ προερχόμενους από το ίδιο το οικονομικό σύστημα.

Οι κύριες φάσεις του οικονομικού κύκλου είναι η **μεγέθυνση** και η **ύφεση**, οι οποίες φαίνονται και στην Εικόνα 1 που ακολουθεί. Θα θεωρήσουμε επίσης μια ακόμη φάση, αυτή της **έντονης οικονομικής ύφεσης ή οικονομικής κρίσης**. Σύμφωνα με το Εθνικό Γραφείο

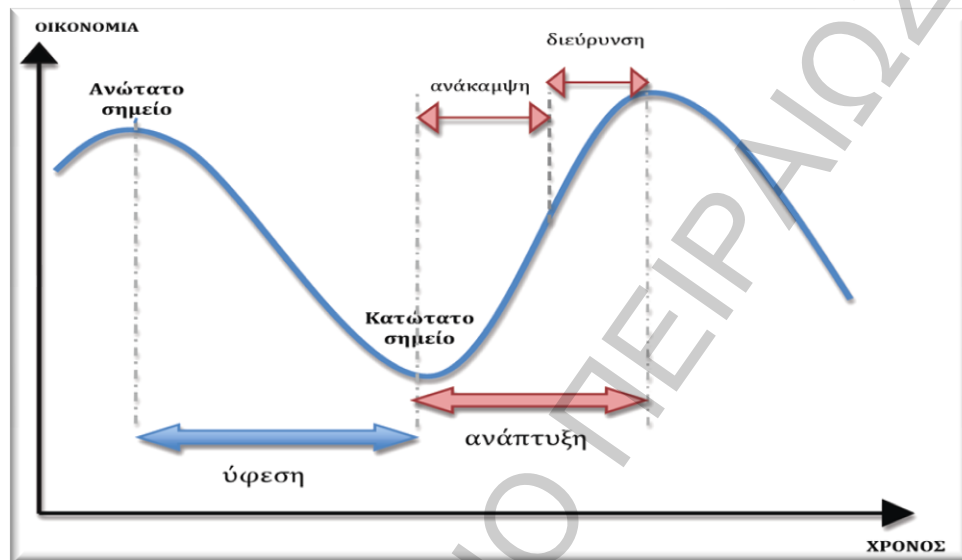
---

<sup>1</sup> Arthur F. Burns and Wesley C. Mitchell, “*Measuring Business Cycles*”, NBER, 1946, p.5

<sup>2</sup> Η ακολουθία αυτή φαίνεται σε πολλές περιπτώσεις να διακόπτεται από κινήσεις προς την αντίθετη κατεύθυνση δημιουργώντας πολλές φορές πολλαπλά μέγιστα ή ελάχιστα.

<sup>3</sup> Η διάρκεια αυτή είναι ενδεικτική και καθορίστηκε βάσει στοιχείων των στατιστικών επετηρίδων και των οικονομικών δεικτών. Ωστόσο, για τον ακριβή προσδιορισμό της είναι απαραίτητη και η σύγκριση μεμονωμένων χρονοσειρών που καλύπτουν διαφορετικές οικονομικές δραστηριότητες.

Οικονομικών Ερευνών<sup>4</sup> (National Bureau of Economic Research) των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, ως **οικονομική μεγέθυνση** ορίζουμε την αύξηση του επιπέδου της οικονομικής δραστηριότητας, καθώς και της ικανότητας της οικονομίας να παράγει αγαθά και υπηρεσίες, συγκριτικά με προηγούμενες περιόδους.



Εικόνα 1 Οι φάσεις του Οικονομικού Κύκλου και τα σημεία καμψής

Η φάση αυτή χαρακτηρίζεται από αύξηση της παραγωγικότητας και της διαχείρισης πόρων, από τεχνολογικές αλλαγές, αλλά και από την άνοδο του βιοτικού επιπέδου. Η οικονομική διεύρυνση μπορεί να είναι αποτέλεσμα είτε εξωτερικών παραγόντων, όπως είναι οι καιρικές συνθήκες, τεχνικές αλλαγές, είτε εσωτερικών διαδικασιών όπως είναι η δημοσιονομική και νομισματική πολιτική, επιτόκια, κίνητρα παραγωγικότητας. Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι παγκόσμιες συνθήκες μπορούν να επηρεάσουν τα επίπεδα της οικονομικής δραστηριότητας της κάθε χώρας.

Η οικονομική μεγέθυνση μετρείται βάσει της ποσοστιαίας μεταβολής του πραγματικού<sup>5</sup> Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕγχΠ), το οποίο έχει αναπροσαρμοστεί βάσει του

<sup>4</sup> Ιδρύθηκε το 1920, και αποτελεί έναν ιδιωτικό, μη κερδοσκοπικό οργανισμό, ανεξάρτητο, ερευνητικό οργανισμό με σκοπό τη διεξαγωγή οικονομικών ερευνών και τη διάδοσή τους σε δημόσιους οργανισμούς, επαγγελματίες και την ακαδημαϊκή κοινότητα

<sup>5</sup> Χρησιμοποιούμε το πραγματικό ΑΕγχΠ και όχι το ονομαστικό διότι σε οικονομίες με μεγάλο πληθωρισμό μπορεί το ονομαστικό ΑΕγχΠ να μεταβάλλεται με μεγάλο ρυθμό αλλά η οικονομία να παραμένει στάσιμη, χωρίς να βελτιώνεται η θέση της.

πληθωρισμού. Με αυτό τον τρόπο ανακλά τον ρυθμό της οικονομικής μεγέθυνσης, καθώς και τη διαχρονική πορεία της οικονομίας<sup>6</sup>.

Η φάση αυτή του οικονομικού κύκλου διακρίνεται στις επιμέρους φάσεις της οικονομικής ανάκαμψης και της οικονομικής ευημερίας. Η φάση της οικονομικής ανάκαμψης είναι η φάση αυτή του οικονομικού κύκλου που διαδέχεται την ύφεση, κατά την οποία η οικονομία ανακτά τα προ της ύφεσης επίπεδα οικονομικής παραγωγής και δραστηριότητας. Στη φάση αυτή το ΑΕγχΠ, αλλά και οι περισσότεροι οικονομικοί δείκτες, αναπτύσσονται με ασυνήθιστα υψηλούς ρυθμούς. Στη συνέχεια ακολουθεί η φάση της οικονομικής ευημερίας, κατά την οποία τα επίπεδα ανεργίας είναι εξαιρετικά χαμηλά, γεγονός που σε συνδυασμό με τα υψηλά εισοδήματα, έχει ως αποτέλεσμα την υψηλή αγοραστική δύναμη.

Αφού η οικονομία φτάσει στο ανώτερο σημείο καμψής, όπου παρατηρούνται τα μέγιστα επίπεδα οικονομικής δραστηριότητας, ακολουθεί η φάση της **οικονομικής ύφεσης**, η οποία χαρακτηρίζεται από σημαντική υποχώρηση της οικονομικής δραστηριότητας για το σύνολο της οικονομίας, που διαρκεί περισσότερο από μερικούς μήνες, τις οποίες οι επιπτώσεις είναι ορατές στην παραγωγή, την απασχόληση, το πραγματικό εισόδημα και άλλους δείκτες.

Σύμφωνα με τον οικονομολόγο Christopher Rush (2006)<sup>7</sup>, ως τεχνικό δείκτη οριοθέτησης της ύφεσης, ορίζουμε τα δύο συναπτά τρίμηνα αρνητικού ρυθμού ανάπτυξης, όπως αυτός μετράται βάσει του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος. Από αυτά το πρώτο τρίμηνο σηματοδοτεί την αρχή της ύφεσης, ενώ ως τέλος της ύφεσης ορίζεται το πρώτο από τα δύο συναπτά τρίμηνα θετικού ρυθμού ανάπτυξης.

Ωστόσο το NBER -το οποίο δεν υιοθετεί τον παραπάνω τεχνικό δείκτη αναφορικά με την οριοθέτηση της ύφεσης- η ύφεση αρχίζει όταν η οικονομία φτάνει στη κορύφωση της δραστηριότητάς της, και τελειώνει όταν η οικονομία φτάσει στο χαμηλότερο σημείο της. Μεταξύ των ανώτατου και κατώτατου σημείου καμψής, η οικονομία βρίσκεται σε διεύρυνση. Το NBER, όπως αναφέρεται και σε έκθεσή του<sup>8</sup>, δέχεται ως κύρια εννοιολογικά μέτρα της οικονομικής δραστηριότητας, την εγχώρια παραγωγή και την απασχόληση. Τα εθνικά μισθολόγια θεωρούνται ως το πιο ακριβές και αξιόπιστο μέτρο εκτίμησης της απασχόλησης,

---

<sup>6</sup> Μπορεί επίσης να μετρηθεί βάσει της απόλυτης τιμής του ΑΕγχΠ, αντικατοπτρίζοντας έτσι το επίπεδο της οικονομικής μεγέθυνσης, και δίνοντας μας μια ποσοτική, αλλά όχι ποιοτική, εικόνα για την οικονομία.

<sup>7</sup> Christopher Rush, “*Guide to Economic indicators: Making Sense of Economics*”, The Economist in association with Profile Books Ltd, 2006, p.55

<sup>8</sup> National Bureau of Economic Research, “*Determination of the December 2007 Peak in Economic Activity*”, 2008.



ενώ για την εκτίμηση της συνολικής εγχώριας παραγωγής χρησιμοποιούνται οι τριμηνιαίες εκτιμήσεις για το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕγχΠ). Παράλληλα λαμβάνονται υπόψη και άλλοι οικονομικοί δείκτες όπως το καθαρό κατά κεφαλήν εισόδημα, το χονδρικό- λιανικό εμπόριο, η βιομηχανική παραγωγή και οι εκτιμήσεις για την απασχόληση μέσω της έρευνας νοικοκυριών.

Επιπροσθέτως, υπάρχουν και περιπτώσεις που η οικονομική ύφεση βαθαίνει τόσο, που μπορούμε πλέον να μιλήσουμε για μια νέα φάση του οικονομικού κύκλου, αυτή της **βαθιάς ύφεσης ή οικονομικής κρίσης**. Η φάση αυτή ορίζεται ως μια παρατεταμένη χρονικά και εντονότερη οικονομική ύφεση, η οποία χαρακτηρίζεται από ανεπαρκή παραγωγικότητα, υψηλά ποσοστά ανεργίας και πτώση του επιπέδου των τιμών.

Η οικονομική κρίση οριοθετείται από μια μείωση του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος της τάξεως του 10% ή και περισσότερο, ή από τη μείωση της οικονομική παραγωγής τουλάχιστον για τρία συναπτά έτη, και διαρκεί έως ότου η οικονομική δραστηριότητα επανέλθει στα φυσιολογικά επίπεδα<sup>9</sup>.

Η φάση αυτή του οικονομικού κύκλου είναι πολύ πιο σοβαρή από την ύφεση και αποτελεί μια σοβαρή οικονομική καταστροφή. Οι μακροχρόνιες επιπτώσεις της αποτελούν πρόκληση για τα επιχειρήσεις και τους καταναλωτές, καθώς κατά τη περίοδο αυτή παρατηρούνται καταστροφές στον τραπεζικό τομέα, το εμπόριο, τη βιομηχανία, και αύξηση των πτωχεύσεων. Η οικονομία βρίσκεται σε κρίση αφού χάνεται η εμπιστοσύνη των καταναλωτών όπως και των επενδυτών.

Η οικονομική κρίση είναι το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης εμφάνισης μιας πληθώρας παραγόντων. Ξεκινάει με τη υπερπαραγωγή και μείωση της ζήτησης, και ακολουθεί η ανάπτυξη κλίματος των επιχειρήσεων και των επενδυτών. Ο συνδυασμός των παραπάνω παραγόντων προκαλεί μείωση των δαπανών τους και εν συνεχεία ακολουθεί η αύξηση της ανεργίας και η μείωση των μισθών με άμεση συνέπεια στην αγοραστική δύναμη των καταναλωτών και αδυναμία καταβολής των υποχρεώσεων τους. Από τη μεριά των τραπεζών τις τράπεζες αυτές ενισχύουν τα πρότυπα δανεισμού τους, γεγονός που τελικά οδηγεί σε πτωχεύσεις. Άλλα αποτελέσματα είναι η ακανόνιστες διακυμάνσεις στη αξία του νομίσματος, και ως επί το πλείστον η νομισματική υποτίμηση, και ο υπερπληθωρισμός. Ωστόσο από τα παραπάνω φαινόμενα απορρέουν και θετικά αποτελέσματα, μερικά από τα οποία είναι η

---

<sup>9</sup>“Diagnosing Depression”, The Economist Newspaper, January, 2009. 29 January, 2013.

εξάλειψη των καταχρήσεων, η εξισορρόπηση της οικονομικής ανάπτυξης, οι νέες αγοραστικές ευκαιρίες και οι αλλαγές της συμπεριφοράς των καταναλωτών.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι η ύφεση, ήπια ή βαθιά έχει πολλές επιπτώσεις στο σύνολο της οικονομίας. Οι μεταξύ τους διαφορές συνίσταται τόσο στην συχνότητα εμφάνισής τους, όσο και στο μέγεθος των επιπτώσεών τους στη συνολική οικονομία. Για να επιβιώσει κανείς και να αναπτυχθεί σε ένα τέτοιο περιβάλλον απαιτείται αρχικά να καταλάβει τί είναι αυτό που τις προκαλεί και πώς αυτές οι αιτίες δημιουργούν αρνητικές και θετικές επιπτώσεις. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι, ενώ η οικονομική ύφεση περιγράφει μια οικονομία σε ‘πτώση’, η οικονομική κρίση περιγράφει μια οικονομία ‘ανήμπορη να επανέλθει στην αρχική της κατάσταση’.

## 1.2 ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟ ΕΓΧΩΡΙΟ ΠΡΟΪΟΝ και ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟ ΕΘΝΙΚΟ ΠΡΟΪΟΝ

Στη ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τις έννοιες του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕγχΠ) και του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος (ΑΕΠ), που αποτελούν δύο από τους βασικότερους δείκτες οικονομικής δραστηριότητας.

Σύμφωνα με το Γραφείο Οικονομικών Αναλύσεων (BEA<sup>10</sup>) των Η.Π.Α., ως **Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕγχΠ)** ορίζεται η συνολική αγοραστική αξία, σε νομισματικές μονάδες, της εθνικής παραγωγής σε ένα δεδομένο έτος, συμπεριλαμβανομένου του τομέα των υπηρεσιών, της έρευνας και της ανάπτυξης<sup>11</sup>. Αυτό μεταφράζεται ως το άθροισμα της βιομηχανικής παραγωγής, της εργασίας, των πωλήσεων και της δραστηριότητας του τομέα των υπηρεσιών. Με τον όρο ‘Ακαθάριστο’ εννοούμε ότι το ΑΕγχΠ μετράει την παραγωγή ανεξάρτητα από τη χρήση για την οποία αυτή προορίζεται. Δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη αν η παραγωγή προορίζεται για άμεση κατανάλωση ή για επενδύσεις σε νέα περιουσιακά στοιχεία ή για την αντικατάσταση αποσβεσθέντων στοιχείων. Επίσης στον όρο ‘Εγχώριο’

<sup>10</sup> Με τον όρο BEA αναφερόμαστε στο Bureau of Economic Analysis.

<sup>11</sup> “*Measuring the Economy: A Primer on GDP and the National Income and Product Accounts*”, Bureau of Economic Analysis, September 2007, p.2-5

συμπεριλαμβάνονται όλα τα αγαθά και οι υπηρεσίες που παρήχθησαν εντός των συνόρων μιας χώρας.

Συνήθως το ΑΕγχΠ αποτιμάται σε τιμές της αγοράς, και περιλαμβάνει μόνο την αξία των “τελικών” αγαθών και των υπηρεσιών. Με τον όρο “τελικά” αγαθά εννοούμε τα αγαθά που καταναλώθηκαν και όχι αυτών που προορίζονται για χρήση σε μεταγενέστερο στάδιο της παραγωγικής διαδικασίας, τα αγαθά που πωλούνται σε ξένους κατοίκους, τα διαρκή αγαθά και τις δομές που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή νέων αγαθών, καθώς και τα αγαθά που μπορεί να έχουν απογραφεί για μελλοντική κατανάλωση. Το ΑΕγχΠ υπολογίζεται σε διάστημα ενός έτους, αλλά μπορεί να υπάρξει και ανάλυση των βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων τάσεων, ώστε να χρησιμοποιηθούν στις οικονομικές προβλέψεις. Το κατά κεφαλήν ΑΕγχΠ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως δείκτης της οικονομικής ανάπτυξης των κρατών.

Η πιο κοινή προσέγγιση για τη μέτρηση του ΑΕγχΠ είναι η Μέθοδος της Δαπάνης (Expenditure Approach) σύμφωνα με την οποία

$$\text{ΑΕγχΠ} = \text{C} + \text{I} + \text{G} + \text{NX}$$

όπου C: κατανάλωση, I: επενδύσεις, G: δημόσιες δαπάνες, NX: καθαρές εξαγωγές μείον τις εισαγωγές.

Άλλες προσεγγίσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι η Παραγωγική Προσέγγιση (Production Approach), σύμφωνα με την οποία υπολογίζεται η αγοραστική αξία των αγαθών για διάρκεια ενός έτους, και η Εισοδηματική Προσέγγιση (Income Approach), κατά την οποία υπολογίζονται το άθροισμα των εισοδημάτων για το σύνολο των κατοίκων μιας χώρας στη διάρκεια ενός έτους.

Από την άλλη μεριά, το **Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν (ΑΕΠ)** ορίζεται ως το σύνολο της παραγωγής των επιχειρήσεων και της βιομηχανίας παροχής υπηρεσιών μιας χώρας, συν τα κέρδη από επενδύσεις στο εξωτερικό.<sup>12</sup>

Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα για το υπολογισμό του αφαιρούνται τα κέρδη των ξένων υπηκόων ή επιχειρήσεων, που αποκτήθηκαν εντός της χώρας. Η ανάλυση και μελέτη των τάσεων του ΑΕΠ βοηθάει στο σχηματισμό μιας ρεαλιστικής εικόνας για τη πορεία της οικονομίας, μιας και στον υπολογισμό του λαμβάνεται υπόψη το συνολικό εισόδημα των υπηκόων της χώρας. Ο κατά κεφαλήν υπολογισμός του αποτελεί ένδειξη της καταναλωτικής

---

<sup>12</sup> “Bea: Glossary “G””, Bureau of Economic Analysis. Sept. 5<sup>th</sup>, 2007.

δύναμης των υπηκόων μιας χώρας, καθώς και μια εκτίμηση του μέσου όρου του πλούτου, των μισθών και της κατανομής ιδιοκτησίας μιας κοινωνίας.

Για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούνται διάφορες προσεγγίσεις, με κυριότερες τη Μέθοδος της Δαπάνης, τη Μέθοδος του Εισοδήματος και τη Μέθοδος της Απόδοσης. Όλες δίνουν τα ίδια αποτελέσματα μιας και οι συνολικές δαπάνες για αγαθά και υπηρεσίες (Ακαθάριστες Εθνικές Δαπάνες, GNE) είναι ίσες με την αξία των παραγόμενων αγαθών και υπηρεσιών (ΑΕΠ), το οποίο με τη σειρά του είναι ίσο με το συνολικό εισόδημα που αποδίδεται στους παράγοντες που παρήγαγαν τα αγαθά και τις υπηρεσίες αυτές (Ακαθάριστο Εθνικό Εισόδημα). Με τη Μέθοδο της Δαπάνης το ΑΕΠ υπολογίζεται ως

$$\text{ΑΕΠ} = \text{ΑΕγχΠ} + \text{NR}$$

όπου NR (Net Income Receipts): τα Καθαρά Έσοδα από περιουσιακά στοιχεία στο εξωτερικό.

Βλέπουμε λοιπόν ότι με τον υπολογισμό του κατά κεφαλήν ΑΕγχΠ και ΑΕΠ μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την οικονομική ανάπτυξη μιας χώρας. Η μεταξύ τους σύγκριση μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των εξαγωγών και της τοπικής οικονομίας. Τα στοιχεία που παίρνουμε από τις μετρήσεις των παραπάνω δεικτών μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για τον προσδιορισμό της διανομής πλούτου καθώς και της αγοραστικής δύναμης των πολιτών. Ενώ όμως το ΑΕγχΠ είναι ένας δείκτης μέτρησης της τοπικής οικονομίας, το ΑΕΠ μετρά τη συνολική οικονομική ισχύ μιας χώρας.

Η μεταξύ τους σχέση δεν μπορεί αν προσδιοριστεί με ακρίβεια. Για παράδειγμα μια αύξηση των εξαγωγών μπορεί να επιφέρει ταυτόχρονη άνοδο και των δύο δεικτών ή να επηρεάσει μόνο τον ένα δείκτη ενώ ο άλλος να παραμείνει στάσιμος, γεγονός που εξαρτάται από την εθνικότητα της εταιρίας που κάνει τις εξαγωγές αυτές.

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι, παρόλο που το ΑΕγχΠ είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο για την εκτίμηση της πορείας της οικονομίας και συνίσταται για βραχυπρόθεσμη παρακολούθηση και ανάλυση, δεν οδηγεί σε σωστά συμπεράσματα αναφορικά με την οικονομική ευημερία των πολιτών και γενικότερα της κοινωνίας<sup>13</sup>. Αντίθετα πολλοί οικονομολόγοι έχουν διατυπώσει την άποψη ότι το ΑΕΠ είναι αυτό το μέτρο

---

<sup>13</sup> Joseph E. Stiglitz, "GDP Fetishism", Project Syndicate: A World of Ideas, Sept 7th, 2009. Jan 28<sup>th</sup>, 2013.

που μας παρέχει επαρκή πληροφόρηση για την πορεία των εισοδημάτων των πολιτών και του επιπέδου διαβίωσης τους.

Στη συνέχεια ακολουθεί μια συνοπτική αναφορά της κοινοτικής οδηγίας Φερεγγυότητα II, σύμφωνα με τη οποία καθορίζονται οι κεφαλαιακές απαιτήσεις και γενικότερα όλο το εποπτικό πλαίσιο με το οποίο οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις θα πρέπει να συμμορφωθούν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## 2.ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ II

Ο ασφαλιστικός κλάδος κινείται από ένα σύστημα άμεσου εποπτικού ελέγχου, σε ένα πιο απορρυθμισμένο και ελεύθερο περιβάλλον. Δεδομένου ότι οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις είναι από τους μεγαλύτερους επενδυτές, η οικονομική τους ευρωστία συνιστά σημαντικό παράγοντα σταθερότητας του χρηματοπιστωτικού συστήματος και των αγορών. Για το λόγο αυτό χρειάζεται να υιοθετηθούν νέες και βελτιωμένες τεχνικές ελέγχου και διαχείρισης κινδύνων.

Η ανάγκη εφαρμογής ενός εποπτικού συστήματος των ασφαλιστικών οργανισμών άρχισε να γίνεται ορατή από το 1958, όταν με αίτημα του Οργανισμού Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας<sup>14</sup> (ΟΕΟΣ), ο καθηγητής Campagne<sup>15</sup> συνέταξε μια αναφορά<sup>16</sup>, σχετικά με την φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιριών, βάσει της οποίας το περιθώριο φερεγγυότητας, ικανό να αποτρέψει την πιθανότητα χρεοκοπίας, πρέπει να αντιστοιχεί στο 4% των τεχνικών προβλέψεων. Στην αναφορά αυτή στηρίχθηκαν αργότερα η Ευρωπαϊκή Οικονομική Κοινότητα (Ε.Ο.Κ.) και οι διάφορες εποπτικές αρχές για να καταλήξουν στην πρώτη οδηγία, **Φερεγγυότητα 0** για την Ασφαλίσεις Ζωής (EEC, 1979), σύμφωνα με την οποία το απαιτούμενο περιθώριο φερεγγυότητας συνίσταται από το 4% των ακαθάριστων μαθηματικών αποθεμάτων, αυξανόμενο κατά 0,3% του κεφαλαίου στον κίνδυνο.

Στα χρόνια που ακολούθησαν το πλαίσιο αυτό αντικαταστάθηκε από τη νεότερη οδηγία **Φερεγγυότητας I** (COM, 2002b), η οποία ήταν σαφώς πιο προσαρμοσμένη στις ανάγκες της εποχής. Σύμφωνα με την οδηγία αυτή, το διαθέσιμο περιθώριο φερεγγυότητας που καλύπτει τις τεχνικές προβλέψεις πρέπει να είναι καλής ποιότητας, και γίνεται εκτενής αναφορά για τα αποδεκτά περιουσιακά στοιχεία (Άρθρο 23). Επίσης, για τα unit- linked συμβόλαια εισάγεται ένα περιθώριο φερεγγυότητας που αντιστοιχεί στο 25% των καθαρών διοικητικών δαπανών του προηγούμενου οικονομικού έτους (Άρθρο 28(7)(c)) και ορίζεται εγγυητικό κεφάλαιο ύψος 3 εκατομμυρίων ευρώ (Άρθρο 29)

Κατά την εφαρμογή όμως της Φερεγγυότητας I παρατηρήθηκαν σοβαρά μειονεκτήματα αναφορικά με τους τρόπους υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων και τους

---

<sup>14</sup> Πλέον γνωστός ως ΟΟΣΑ, Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης

<sup>15</sup> Ο καθηγητής Campagne ήταν ο τότε πρόεδρος της *Verzekeringskamer της Ολλανδίας*

<sup>16</sup> Βλέπε Champagne, 1961, p. 65; Kastelijn and Remmerswaal, 1986, pp. 32–33; Sandström, Arne, 2006. pp. 22

κανονισμούς. Η οδηγία αυτή έχει χαρακτηριστεί κατά «υπεραπλουστευμένη», αναφορικά με τους τρόπους υπολογισμού της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών οργανισμών, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε διαστρέβλωση των κεφαλαιακών τους αναγκών. Σε άρθρο της η C.E.A.<sup>17</sup> ([CEA, 2007](#)) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι αυτή η μορφή υπολογισμού που απευθύνεται σε όλες τις εταιρίες ανεξαρτήτως είδους ή μεγέθους και βασίζεται σε πολύ συγκεκριμένους κανόνες, συνεπώς και δεν μπορεί να εναρμονιστεί με όλο το εύρος των προφίλ κινδύνου που παρουσιάζουν οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Αρκετές δε είναι οι περιπτώσεις όπου η Φερεγγυότητα I, έρχεται σε αντιπαράθεση με τους κανόνες σωστής διαχείρισης κινδύνων. Επιπλέον, το ισχύον νομοθετικό πλαίσιο δεν καλύπτει όλες τις ομάδες κινδύνων μιας και επικεντρώνεται μόνο στον underwriting risk και ταυτόχρονα αγνοεί τον κίνδυνο αγοράς (market risk).

Οι παραπάνω λόγοι οδήγησαν στη **Φερεγγυότητα II**, η οποία αποτελεί μια νέα κοινοτική οδηγία σύμφωνα με την οποία θα ρυθμίζεται η κεφαλαιακή επάρκεια των ασφαλιστικών επιχειρήσεων, η οποία θα αντικαταστήσει πλήρως τις μέχρι τώρα ισχύουσες διαδικασίες υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Οι νέες τεχνικές που θα εφαρμοστούν, αφορούν κυρίως τη διαχείριση κινδύνων, την εταιρική διακυβέρνηση καθώς και τη διαφάνεια των ασφαλιστικών οργανισμών, και κρίνονται απαραίτητες για την σταθερότητα των αγορών και την διασφάλιση των συμφερόντων των ασφαλισμένων.

Κύριες υποχρεώσεις των ασφαλιστικών επιχειρήσεων είναι οι αναμενόμενες ασφαλιστικές απαιτήσεις και οι διάφορες δαπάνες που σχετίζονται με αυτές, ο υπολογισμός των οποίων γίνεται βάσει αναλογιστικών μεθόδων και στα πλαίσια των ισχύοντων κανονισμών. Οι υπολογισμοί αυτοί όμως δεν παύουν να αποτελούν προβλέψεις, οι ενέχουν και κάποια πιθανότητα σφάλματος. Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους παραπάνω λόγους, η Φερεγγυότητα II υποχρεώνει τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις να διατηρούν επιπλέον ένα ορισμένο ποσό περιουσιακών στοιχείων ως ρυθμιστικό κεφάλαιο, που ονομάζεται **περιθώριο φερεγγυότητας**.

Ο νέος αυτός εποπτικός μηχανισμός βασίζεται σε τρεις πυλώνες, οι οποίοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στον Πυλώνα I καθορίζονται οι ποσοτικές απαιτήσεις φερεγγυότητας, δηλαδή οι απαραίτητοι χρηματοοικονομικοί πόροι που χρειάζεται μια εταιρία ώστε να είναι

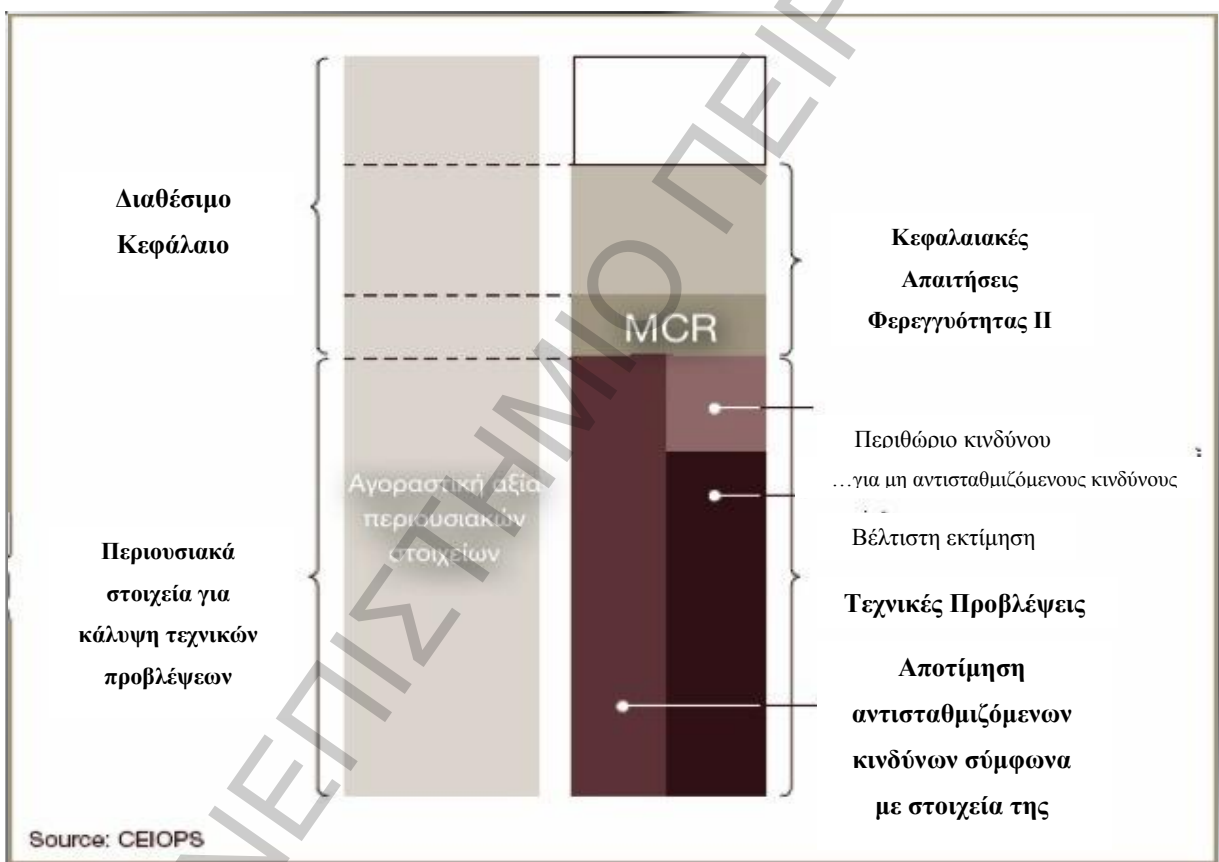
---

<sup>17</sup> Την 1<sup>η</sup> Μαρτίου 2012, η C.E.A, η Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Ασφάλισης και Αντασφάλισης, μετονομάστηκε σε Insurance Europe

φερέγγυα. Ο Πυλώνας II καθορίζει τις ποιοτικές απαιτήσεις και ο Πυλώνας III καθορίζει τις απαιτήσεις για δημοσίευση και διαφάνεια.

## 2.1. ΠΥΛΩΝΑΣ I: Ποσοτικές Απαιτήσεις

Στον Πυλώνα I γίνεται εκτενής αναφορά στις ποσοτικές απαιτήσεις της οδηγίας. Τα κυριότερα σημεία που αναλύονται είναι η αποτίμηση των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού, η αποτίμηση των υποχρεώσεων, η κατηγοριοποίηση των ιδίων κεφαλαίων, ο υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων και οι επενδύσεις.



Εικόνα 2 Γενικό Περίγραμμα ΠΥΛΩΝΑ I

### 2.1.1. Αποτίμηση των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού

Τόσο τα στοιχεία του Ενεργητικού όσο και του Παθητικού αποτιμώνται στην εμπορική τους αξία, δηλαδή στη αξία που μπορούν να συναλλαγούν ή να μεταβιβαστούν αντίστοιχα, υπό τη προϋπόθεση ότι οι πράξεις αυτές πραγματοποιούνται επί ίσοις όροις και μεταξύ



καλώς πληροφορούμενων ατόμων. Οι συναλλαγές αυτές διέπονται από την αρχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας (going concern) και τις βασικές αρχές των Διεθνών Λογιστικών Προτύπων (Δ.Λ.Π.), εκτός κι αν αναφέρεται διαφορετικά. Σύμφωνα με την οδηγία τα στοιχεία του Παθητικού διαχωρίζονται στις Τεχνικές Προβλέψεις, ή αλλιώς ασφαλιστικές υποχρεώσεις, και στις μη- ασφαλιστικές υποχρεώσεις (non- insurance liabilities).

Τα στοιχεία του ισολογισμού αποτιμώνται βάσει της μεθόδου mark-to-market, χρησιμοποιώντας δηλαδή για την αποτίμηση των ακριβώς ίδιων περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων, τις αγοραίες τιμές τους από ενεργές αγορές. Όταν αυτό δεν είναι εφικτό τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος mark-to-model, δηλαδή η αποτίμηση γίνεται με τη χρήση υποδείγματος. Ειδικότερα για της Ασφαλίσεις Ζωής αναλύεται η μεθοδολογία αποτίμησης των προαιρετικών παροχών και των εγγυήσεων.

### **2.1.2. Αποτίμηση των Υποχρεώσεων**

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί από τις ασφαλιστικές εταιρίες στον τρόπο υπολογισμού των τεχνικών τους αποθεμάτων. Όπως αναφέρεται στα άρθρα 76-86 της Οδηγίας<sup>18</sup>, οι τεχνικές προβλέψεις πρέπει να υπολογίζονται έτσι ώστε η αξία τους να μεταφράζεται ως ίση με το άθροισμα της *Βέλτιστης Εκτίμησης* (Best Estimate) των μελλοντικών χρηματικών ροών συν ένα *Περιθώριο Κινδύνου* (Risk Margin). Οι υπολογισμοί πρέπει να βασίζονται στην «τρέχουσα αξία ρευστοποίησης» και τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται να συνάδουν με αυτά των χρηματοοικονομικών αγορών. Βασική αρχή υπολογισμού των τεχνικών αποθεμάτων είναι η χρήση τιμών από την αγορά, δηλαδή οι μελλοντικές ταμειακές ροές των υποχρεώσεων να μπορούν να αναπαραχθούν με ακρίβεια από εμπορεύσιμα αξιόγραφα. Στη περίπτωση που αυτό δεν καθίσταται δυνατό τότε θα πρέπει να χρησιμοποιούνται παραπλήσια αυτών χρεόγραφα ή αν δεν υπάρχει καθόλου αγοραία αξία να υπολογίζονται με τη χρήση της μεθόδου των μελλοντικών χρηματικών ροών, κατάλληλα σταθμισμένων στον κίνδυνο. Οι βασικές θεωρητικές μέθοδοι υπολογισμού των τεχνικών προβλέψεων, στηρίζονται είτε στη προεξόφληση της πραγματικής, πιθανοθεωρητικά σταθμισμένης μέσης τιμής των χρηματοροών (χρησιμοποιείται και στο Solvency I), είτε τη προεξόφληση της τροποποιημένης, πιθανοθεωρητικά σταθμισμένης μέσης τιμής των

<sup>18</sup> Βλέπε <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:EL:PDF>

χρηματοροών (υπό πιθανοθεωρητικό μέτρο  $Q$  όταν πρόκειται για σταθμιζόμενους κινδύνους, και υπό το πραγματικό μέτρο  $P$  όταν πρόκειται για μη – σταθμιζόμενους κινδύνους)

Στον υπολογισμό της Βέλτιστης Εκτίμησης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλα τα μελλοντικά πιθανά σενάρια, εξαιρουμένου αυτού της πιθανής χρεωκοπίας. Άλλα στοιχεία τα οποία συνυπολογίζονται είναι τα έξοδα που πραγματοποιούνται για την εξυπηρέτηση των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών υποχρεώσεων, ο πληθωρισμός, οι πληρωμές προς τους αντισυμβαλλόμενους και τους δικαιούχους, καθώς και η αποτίμηση των συμβατικών δικαιωμάτων εκλογής των συμβολαίων και των χρηματοοικονομικών εγγυήσεων.

Τέλος στο άρθρο 75 της οδηγίας αναφέρεται ότι το περιθώριο κινδύνου πρέπει να είναι τέτοιο που να εξασφαλίζει ότι η αξία των τεχνικών προβλέψεων να ισοδυναμεί με το επιπρόσθετο ποσό, το οποίο οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις αναμένεται να χρειαστούν προκειμένου να αναλάβουν και να ικανοποιήσουν τις υποχρεώσεις τους. Υπολογίζεται βάσει του κόστους κεφαλαίου και με επιτόκιο ίδιο για όλες τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις, το οποίο αναθεωρείται περιοδικά.

### **2.1.3. Καθορισμός Ιδίων Κεφαλαίων**

Σύμφωνα με την νέα οδηγία τα Ίδια Κεφάλαια διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη αφορά τα Βασικά Ίδια Κεφάλαια τα οποία αποτελούνται από τη θετική διαφορά μεταξύ ενεργητικού και παθητικού και από τα Δάνεια μειωμένης εξασφάλισης. Στη δεύτερη κατηγορία, τα Συμπληρωματικά Ίδια Κεφάλαια, συμπεριλαμβάνονται κεφάλαια εκτός του ισολογισμού που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απορρόφηση ζημιών, όπως το μη καταβεβλημένο μετοχικό κεφάλαιο, εγγυητικές επιστολές και λοιπές δεσμεύσεις.

Επιπρόσθετα κατηγοριοποιούνται σε τρεις κλάσεις, Tier 1, Tier 2 και Tier 3 ανάλογα με τη δυνατότητα τους να απορροφήσουν ζημιές και αναλόγως του βαθμού που πληρούν ορισμένα βασικά ποιοτικά κριτήρια όπως είναι η μόνιμη διαθεσιμότητα, η εξασφάλιση, η απουσία νομικών βαρών, η απουσία κινήτρων εξόφλησης και η απουσία υποχρεωτικών δαπανών.

Ωστόσο το ποσό των επιλέξιμων ιδίων κεφαλαίων υπόκειται σε περιορισμούς, ώστε να διασφαλιστεί η συνολική ποιότητα των κεφαλαίων. Οι ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (MCR) θα πρέπει να καλύπτονται αποκλειστικά από κεφάλαια Tier 1 και Tier 2, με αυτά του Tier 1 να αντιστοιχούν στο 50 τοις εκατό τουλάχιστον του MCR. Αντίθετα οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας (SCR) μπορούν να καλυφθούν και από τις τρεις κατηγορίες

κεφαλαίων, υπό την προϋπόθεση ότι τουλάχιστον το ένα τρίτο καλύπτεται από κεφάλαια Tier 1, ενώ τα κεφάλαια Tier 3 δεν πρέπει να υπερβαίνουν το ένα τρίτο του SCR.

#### **2.1.4. Κεφαλαιακές Απαιτήσεις**

Η ανάγκη διατήρησης επιπλέον κεφαλαίων, που πηγάζει λόγω της ασύμμετρης πληροφόρησης που επικρατεί στον ασφαλιστικό χώρο, έχει ως αποτέλεσμα επιπλέον κόστη τόσο για την επιχείρηση όσο και για τον ασφαλισμένο. Τα επιπρόσθετα αυτά κεφάλαια συμβάλλουν σημαντικά στο μετριασμό του κόστους αυτού, και παρέχουν σημαντικά οφέλη για τα δύο συμβαλλόμενα μέρη. Στην ενότητα αυτή αναλύονται τόσο οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (SCR), αλλά και οι Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις, όπως αυτές αναφέρονται στα άρθρα 100- 127 της Οδηγίας της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Η ανάγκη διατήρησης επιπλέον κεφαλαίων, που πηγάζει λόγω της ασύμμετρης πληροφόρησης που επικρατεί στον ασφαλιστικό χώρο

##### **2.1.4.1. Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (SCR)**

Με τη Φερεγγυότητα II εισάγεται για πρώτη φορά στην ασφαλιστική νομοθεσία η έννοια των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας (SCR) και πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην εφαρμογή της. Το SCR λαμβάνει υπόψη όλους τους ποσοτικοποιημένους κινδύνους στους οποίους εκτίθεται μια ασφαλιστική επιχείρηση, τις ενδεχόμενες ζημιές σε διάστημα ενός έτους, δηλαδή τις μεταβολές μεταξύ ενεργητικού και παθητικού, καθώς και την καθαρή επίπτωση όλων των τεχνικών μείωσης του κινδύνου (αντασφάλιση, τιτλοποίηση κτλ)

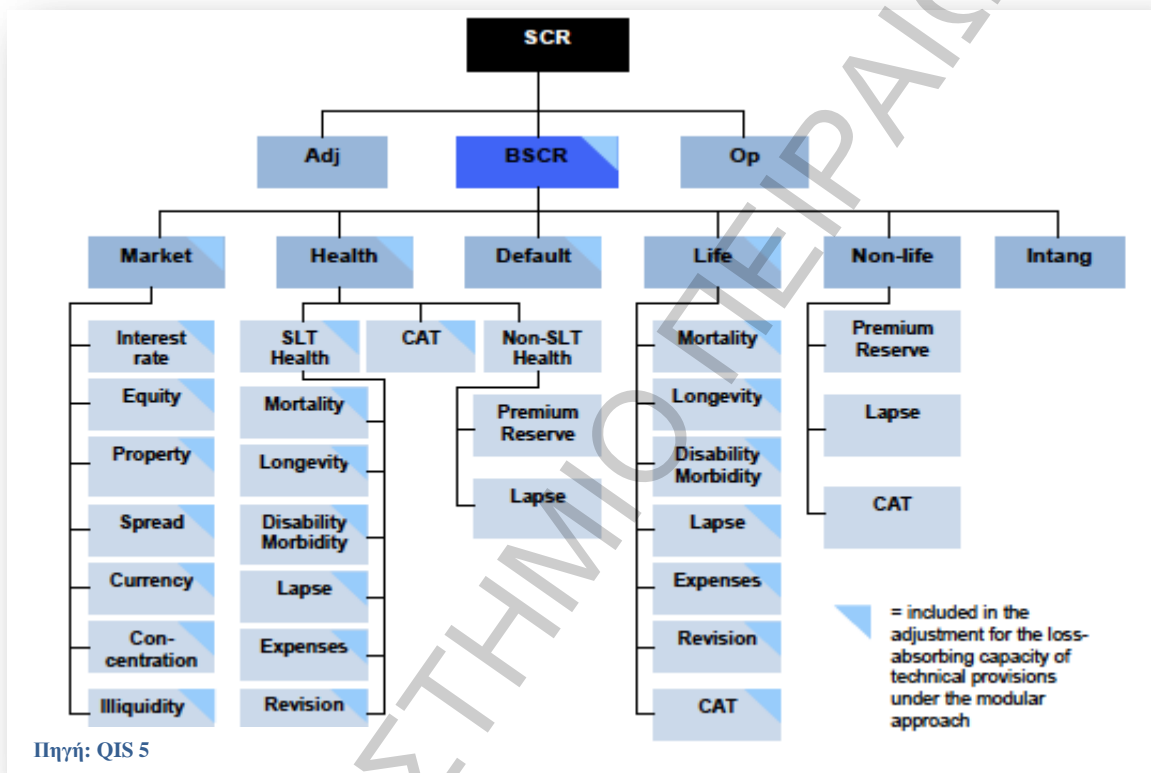
Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας είναι η αξία στον κίνδυνο (Value at Risk, VaR) των βασικών ιδίων κεφαλαίων με επίπεδο εμπιστοσύνης 99.5% για την περίοδο ενός έτους. Αντιπροσωπεύουν το επιθυμητό επίπεδο κεφαλαίου που δίνει τη δυνατότητα στην ασφαλιστική επιχείρηση να απορροφήσει σημαντικές και απρόβλεπτες ζημιές, εξασφαλίζοντας παράλληλα και τους ασφαλισμένους σε αυτή. Για τον υπολογισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου κινδύνου γίνεται χρήση είτε της Τυποποιημένης Μεθόδου (Standard Approach), είτε εσωτερικών ή μερικώς εσωτερικών μοντέλων (Internal Models or Partial Internal Models).

Βασικές αρχές που διέπουν τη Τυποποιημένη Προσέγγιση είναι η δυνατότητα χρήσης ιδίων παραμέτρων από την εκάστοτε ασφαλιστική, η δυνατότητα απλοποιήσεων και η μη ύπαρξη ποσοτικών περιορισμών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το SCR υπολογίζεται ως το

άθροισμα του βασικού SCR (basic), του SCR που απαιτείται για τους λειτουργικούς κινδύνους (operational) και της προσαρμογής (adjustment) του SCR και του, δηλαδή

$$\text{SCR} = \text{BSCR} \pm \text{Adjustment} + \text{SCR}_{\text{op}}$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η βασική δομή των απαιτούμενων κεφαλαίων φερεγγυότητας καθώς και οι κίνδυνοι που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε κατηγορία, όπως αυτή διαμορφώθηκε σύμφωνα με τη Μελέτη Ποσοτικών Επιπτώσεων (QIS 5, 2010)<sup>19</sup>.



Εικόνα 3 Προτεινόμενη Δομή Τυπικής Προσέγγισης

Αναλυτικότερα, ο *λειτουργικός κίνδυνος*, ορίζεται ως ο κίνδυνος εμφάνισης ζημιών λόγω ακατάλληλων ή προβληματικών εσωτερικών διαδικασιών, προσωπικού, λειτουργικών συστημάτων ή εξωτερικών διαδικασιών. Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για λειτουργικούς κινδύνους  $\text{SCR}_{\text{op}}$  υπολογίζονται, σύμφωνα με την τυπική προσέγγιση, ως

$$\text{SCR}_{\text{op}} = \min(0.3 \cdot \text{BSCR}; \text{Op}) + 0.25 \text{Exp}_{\text{ul}}$$

όπου  $\text{Op}$ : η μέγιστη τιμή μεταξύ των λειτουργικών εξόδων για ασφάλιστρα και των λειτουργικών εξόδων για τεχνικές προβλέψεις, και  $\text{Exp}_{\text{ul}}$ : το ύψος των εκτιμώμενων μη αναμενόμενων απωλειών. Όσον αφορά τις ασφαλίσεις ζωής, όπου ο επενδυτικός κίνδυνος

<sup>19</sup> Βλέπε [http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical\\_specifications\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf)

αναλαμβάνεται από τους αντισυμβαλλόμενους, για τον υπολογισμό του  $SCR_{op}$  λαμβάνεται υπόψη το ποσό των ετήσιων εξόδων για λειτουργικούς κινδύνους σε σχέση με τις αντίστοιχες ασφαλιστικές υποχρεώσεις.

Η προσαρμογή των κεφαλαιακών απαιτήσεων με σκοπό τη καλύτερη απορρόφηση των ζημιών, εκφράζει τη μείωση του κινδύνου εμφάνισης μη αναμενόμενων ζημιών μέσω της ταυτόχρονης μείωσης των τεχνικών προβλέψεων ή των αναβαλλόμενων φόρων ή και των δύο. Για τον υπολογισμό της λαμβάνονται υπόψη οι μελλοντικές έκτακτες παροχές ασφάλισης εφόσον το ύψος τους είναι ικανό να καλύψει τυχόν μη αναμενόμενες ζημιές, όταν αυτές προκύψουν. Το αποτέλεσμα της μείωσης μέσω των μελλοντικών έκτακτων παροχών, δεν μπορεί να υπερβαίνει το ύψος των τεχνικών προβλέψεων και των αναβαλλόμενων φόρων σε σχέση με τα μελλοντικά έκτακτα αυτά οφέλη. Για το σκοπό αυτό, γίνεται σύγκριση της αξίας των παροχών αυτών υπό δυσμενείς κοινωνικοοικονομικές συνθήκες σε σχέση με την τρέχουσα αξία τους.

Σύμφωνα με το QIS 5, οι βασικές κεφαλαιακές απαιτήσεις για φερεγγυότητα συνίσταται από τους παρακάτω κινδύνους

#### **i. Κίνδυνος Άυλων Περιουσιακών Στοιχείων $SCR_{Intang}$**

Συνίσταται στον κίνδυνο μείωσης της αξίας των άυλων περιουσιακών στοιχείων λόγω αδυναμίας ρευστοποίησης τους, και σε εσωτερικούς κινδύνους όπως για παράδειγμα ο κίνδυνος μη δυνατότητας ρευστοποίησής τους. Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο των άυλων περιουσιακών στοιχείων υπολογίζονται ως ποσοστό της τρέχουσας αξίας τους, δηλαδή

$$SCR_{Intang} = 80\% * \text{Αξία Άυλων Περιουσιακών Στοιχείων}$$

#### **ii. Κίνδυνος Αγοράς**

Ο κίνδυνος αγοράς είναι ο κίνδυνος απώλειας ή δυσμενούς μεταβολής στη χρηματοοικονομική κατάσταση και αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο μείωσης της αξίας των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού ως συνέπεια της μεταβλητότητας που διέπει τις χρηματοοικονομικές αγορές, καθώς και τον κίνδυνο αναντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων αυτών, αναφορικά με τη διάρκειά τους.

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο αγοράς υπολογίζονται συναρτήσει των επιμέρους κεφαλαιακών απαιτήσεων για τους παρακάτω κινδύνους

- (a) *Κίνδυνος Επιτοκίων (interest rate risk)*, που εκφράζει την ευαισθησία των στοιχείων του ενεργητικού ή του παθητικού σε μεταβολές της διαχρονικής δομής των επιτοκίων (καμπύλη επιτοκίων) ή στη μεταβλητότητα των επιτοκίων
- (b) *Κίνδυνος Μετοχών (equity risk)*, που εκφράζει την ευαισθησία των στοιχείων του ενεργητικού ή του παθητικού σε μεταβολές του επιπέδου ή στη μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών, και προκύπτει είτε λόγω ανεπαρκούς διασποράς των επενδύσεων (μη- συστηματικός), είτε λόγω ευαισθησίας των αποδόσεων των μετοχών (συστηματικός).
- (c) *Κίνδυνος Ακινήτων (property risk)*, που προκύπτει από τη μεταβολή στο επίπεδο ή τη μεταβλητότητα των αγοραίων τιμών των ακινήτων.
- (d) *Κίνδυνος Πιστωτικών Περιθωρίων (spread risk)*, που ανακλά την μεταβολή της αξίας των περιουσιακών στοιχείων, ως συνέπεια των μεταβολών της καμπύλης απόδοσης σε σχέση με τα ακίνδυνα επιτόκια.
- (e) *Κίνδυνος Συναλλάγματος (currency risk)*, που προκύπτει από τη μεταβολή στο επίπεδο ή τη μεταβλητότητα των τιμών συναλλάγματος.
- (f) *Κίνδυνος Συγκέντρωσης (concentration risk)*, ο οποίος αποτελεί ένα επιπρόσθετο κίνδυνο που εκφράζει την επιπρόσθετη μεταβλητότητα που ενυπάρχει σε χαρτοφυλάκια λόγω της μεγάλης συγκέντρωσης σε ένα εκδότη μετοχών, πιστωτικών περιθωρίων, ακινήτων. Εμπεριέχει επίσης και τον κίνδυνο αθέτησης αντισυμβαλλόμενου εφόσον λαμβάνεται υπόψη ο κίνδυνος συγκέντρωσης ανά εκδότη και όχι ανά γεωγραφική περιοχή ή κλάδο.

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για κάθε κίνδυνο προκύπτουν ως η μεταβολή στη καθαρή αξία του περιουσιακού στοιχείου που μας αφορά, αν εφαρμόσουμε σενάρια ακραίας ανόδου ή ακραίας πτώσης του επιπέδου των τιμών του στοιχείου αυτού.

Βάσει της τυπικής προσέγγισης, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο αγοράς υπολογίζονται ως

$$SCR_{AY} = \max \left( \frac{\sqrt{\sum_{a \times b} CorrAY_{a,b}^{Av} \cdot AY_a^{Av} \cdot AY_b^{Av}}}{\sqrt{\sum_{a \times b} CorrAY_{a,b}^{\Pi\tau} \cdot AY_a^{\Pi\tau} \cdot AY_b^{\Pi\tau}}} \right)$$

όπου  $CorrAY_{a,b}^{Av}$ ,  $CorrAY_{a,b}^{\Pi\tau}$ : η συσχέτιση μεταξύ δύο κινδύνων  $a$  και  $b$  υπό συνθήκες ακραίας ανόδου, ή πτώσης αντίστοιχα, στα επίπεδα των τιμών για κάθε στοιχείου.

$Αγ_a^{Av}, Αγ_a^{Pτ}$ : οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο  $a$  όταν εφαρμόσουμε σενάριο ακραίας ανόδου, ή καθόδου αντίστοιχα, στο επίπεδο των τιμών του στοιχείου  $a$ .

$Αγ_b^{Av}, Αγ_b^{Pτ}$ : οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο  $b$  όταν εφαρμόσουμε σενάριο ακραίας πτώσης, ή καθόδου αντίστοιχα, στο επίπεδο των τιμών του στοιχείου  $b$ .

### iii. Κίνδυνος Αθέτησης Αντισυμβαλλόμενου

Ο κίνδυνος αθέτησης αντισυμβαλλόμενου είναι ο κίνδυνος πιθανών ζημιών λόγω απρόσμενης αθέτησης των υποχρεώσεων ή μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας αντισυμβαλλόμενων ή πιστωτών. Για τον υπολογισμό του κινδύνου αυτού λαμβάνονται υπόψη συμβάσεις οι οποίες ανάλογα με το είδος τους κατηγοριοποιούνται σε συμβάσεις ΤΥΠΟΥ 1 και συμβάσεις ΤΥΠΟΥ 2. Η κατηγορία ΤΥΠΟΣ 1 αφορά συμβόλαια μείωσης κινδύνου όπως είναι οι αντασφαλιστικές συμβάσεις, οι τιτλοποιήσεις και τα παράγωγα προϊόντα. Από την άλλη, ο ΤΥΠΟΣ 2 περιλαμβάνει τις πιστώσεις προς τρίτους, όπως για παράδειγμα, τις απαιτήσεις από διαμεσολαβούντες, καθώς και οποιαδήποτε άλλη έκθεση σε πιστωτικό κίνδυνο που δεν περιλαμβάνεται στον κίνδυνο των πιστωτικών περιθωρίων. Ο κίνδυνος αθέτησης αντισυμβαλλόμενου υπολογίζεται ως

$$SCR_{Aθ\epsilon\tau} = \sqrt{SCR_{Aθ\epsilon\tau,1}^2 + 1,5 \cdot SCR_{Aθ\epsilon\tau,1} \cdot SCR_{Aθ\epsilon\tau,2} + SCR_{Aθ\epsilon\tau,2}^2}$$

### iv. Ασφαλιστικός κίνδυνος Ζωής

Η ενότητα του αναλαμβανομένου κινδύνου ζωής, ανακλά τον κίνδυνο που απορρέει από υποχρεώσεις στον κλάδο ζωής, τόσο σε σχέση με τις παρεχόμενες καλύψεις όσο και με τις απαραίτητες διαδικασίες που πρέπει να ακολουθηθούν για την άσκηση της δραστηριότητας. Οι επιμέρους κίνδυνοι που λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό του, σύμφωνα με το QIS 5 είναι:

- (a) *Κίνδυνος Θνησιμότητας (mortality risk)*, ανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας, στο βαθμό που αυτά δεν λαμβάνονται υπόψη στα τεχνικά αποθέματα, και αφορά συμβόλαια που οι παροχές τους εξαρτώνται από τη θνησιμότητα του ασφαλισμένου
- (b) *Κίνδυνος Μακροβιότητας (longevity risk)*, ανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της μακροβιότητας, στο βαθμό που αυτά δεν λαμβάνονται

υπόψη στα τεχνικά αποθέματα, και αφορά συμβόλαια που οι παροχές τους εξαρτώνται από τη μακροβιότητα του ασφαλισμένου

- (c) *Κίνδυνος Ανικανότητας- Νοσηρότητας (disability risk)*, ανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της νοσηρότητας ή ανικανότητας, στο βαθμό που αυτά δεν λαμβάνονται υπόψη στα τεχνικά αποθέματα, και αφορά συμβόλαια που οι παροχές τους εξαρτώνται από το ενδεχόμενο ανικανότητας ή ασθένειας.
- (d) *Κίνδυνος Εξόδων Ασφάλισης Ζωής (expense risk)*, προκύπτει από τη μεταβλητότητα των εξόδων εξυπηρέτησης των ασφαλιστηρίων συμβολαίων.
- (e) *Κίνδυνος Αναθεώρησης (revision risk)*, προκύπτει από το ενδεχόμενο αναθεώρησης του ποσού ετήσιας προσόδου (ράντας) και αφορά μόνο τα συμβόλαια εκείνα όπου οι παροχές καταβάλλονται με μορφή προσόδου και δύναται να αναπροσαρμοστούν.
- (f) *Κίνδυνος Ακύρωσης (lapse risk)*, εκφράζει την ζημιά ή δυσμενή μεταβολή της αξίας των τεχνικών αποθεμάτων, που προκύπτει από μεταβολές στο επίπεδο και στη μεταβλητότητα των ρυθμών ακύρωσης/ εξαγοράς ή απελευθέρωσης. Στη περίπτωση αυτή λαμβάνεται υπόψη και ο κίνδυνος μόνιμης μεταβολής των παραπάνω ρυθμών.
- (g) *Καταστροφικός Κίνδυνος Ασφάλισης Ζωής (catastrophic risk)*, εκφράζει τον κίνδυνο που πηγάζει από ακραία ή έκτακτα γεγονότα (π.χ. πανδημίες)

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για κάθε ένα από τους παραπάνω κινδύνους, υπολογίζονται βάσει της μεταβολής του ύψους των τεχνικών αποθεμάτων, που προκύπτει από την εφαρμογή ακραίων σεναρίων παρατεταμένης έκθεσης στον εκάστοτε κίνδυνο.

Έπειτα οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής προκύπτουν ως

$$SCR_{Zωής} = \sqrt{\sum_{a \times b} Corr_{Zωής}^{a \times b} \cdot Zωής_a \cdot Zωής_b}$$

όπου **Corr<sub>Zωής</sub>**: ο συντελεστής συσχέτισης των κινδύνων *a* και *b*, υπό συνθήκες παρατεταμένης έκθεσης στον κίνδυνο.

**Zωής<sub>a</sub>, Zωής<sub>b</sub>**: οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον κίνδυνο *a* και *b* αντίστοιχα, που προκύπτουν από την εφαρμογή ακραίων σεναρίων.



#### **2.1.4.2. Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις (MCR)**

Οι Ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις ορίζονται η αξία στον κίνδυνο (VaR) των βασικών ιδίων κεφαλαίων, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 85%, για περίοδο ενός έτους. Ουσιαστικά συνιστούν το απαιτούμενο κεφάλαιο, κάτω από το οποίο οι αντισυμβαλλόμενοι και οι δικαιούχοι εκτίθενται σε μη αποδεκτό κίνδυνο εάν η ασφαλιστική επιχείρηση συνεχίσει τη δραστηριότητά της.

Οι Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ του 25% και του 45% των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας. Παράλληλα το απόλυτο κατώτατο όριο των Ελάχιστων Κεφαλαιακών Απαιτήσεων, σύμφωνα με το άρθρο 129 παράγραφος (δ), καθορίζεται σε

- 2.200.000 ευρώ για ασφαλιστικές επιχειρήσεις Ζημιών
- 3.200.000 ευρώ για ασφαλιστικές επιχειρήσεις Ζωής
- 3.200.000 ευρώ για Αντασφαλιστικές επιχειρήσεις.

Οι Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις υπολογίζονται, σε τριμηνιαία βάση, ως γραμμική συνάρτηση ενός συνόλου (ή υποσυνόλου) των Τεχνικών Αποθεμάτων, των εγγεγραμμένων ασφαλιστρών, των κεφαλαίων σε κίνδυνο, του αναβαλλόμενου φόρου και των διοικητικών δαπανών. Επιπρόσθετα, η μη τήρηση των απαιτούμενων κεφαλαίων, έχει ως άμεση συνέπεια την εσχάτη εποπτική παρέμβαση, δηλαδή την άρση της άδειας λειτουργίας της ασφαλιστικής επιχείρησης.

#### **2.1.5. Επενδύσεις**

Στα άρθρα 132- 135 της Οδηγίας 2009/138/EC ( Solvency II Framework Directive) , εισάγεται η «Αρχή του Συνετού Επενδύτη» και περιγράφεται η λειτουργία των επενδύσεων εντός μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις πρέπει να επενδύουν σε περιουσιακά στοιχεία των οποίων οι κίνδυνοι είναι μετρήσιμοι, μπορούν να αναγνωριστούν και να διαχειριστούν. Επιπρόσθετα τα περιουσιακά στοιχεία, εφόσον προορίζονται για την κάλυψη των υποχρεώσεων, θα πρέπει να πρέπει να επενδύονται κατάλληλα αναφορικά με τη φύση και τη διάρκεια των ασφαλιστικών υποχρεώσεων, εξασφαλίζοντας με τον τρόπο αυτό τη σωστή διαχείριση ενεργητικού-παθητικού. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στους κινδύνους ρευστότητας και συγκέντρωσης που μπορεί να προκύψουν εξαιτίας λανθασμένων επιλογών

## 2.2. ΠΥΛΩΝΑΣ ΙΙ: Ποιοτικές Απαιτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στα βασικότερα στοιχεία που απαρτίζουν τον Πυλώνα ΙΙ, καθώς και στα χαρακτηριστικά τους. Σύμφωνα με την Οδηγία, ο Πυλώνας ΙΙ καθορίζει τις ποιοτικές προδιαγραφές της φερεγγυότητας, καθιερώνοντας αρχές εσωτερικού ελέγχου για την αξιολόγηση των κινδύνων και προχωρά στην αναθεώρηση της εποπτικής διαδικασίας.

Βασικός σκοπός της εποπτείας των ασφαλιστικών εταιριών είναι η διασφάλιση των συμφερόντων των ασφαλισμένων και γενικότερα όλων των αντισυμβαλλομένων μερών, καθώς και εξασφάλιση ενός σταθερού χρηματοοικονομικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αυτές δραστηριοποιούνται. Κατά της διαδικασία της εποπτικής αξιολόγησης εξετάζονται και εντοπίζονται οι επιχειρήσεις με υψηλό προφίλ κινδύνου και αξιολογείται η συμμόρφωσή τους με την οδηγία. Επίσης, εκτιμάται ο βαθμός ετοιμότητας της επιχείρησης σε πιθανές δυσμενείς μεταβολές των οικονομικών συνθηκών, και η αποτελεσματικότητα των εργαλείων και των μεθόδων διαχείρισης μιας τέτοιας κατάστασης. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού ο μηχανισμός εποπτείας διέπεται από ορισμένες γενικές αρχές, με σημαντικότερη αυτή της *αναλογικότητας*. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η εποπτεία θα πρέπει να είναι ανάλογη τόσο της φύσης, όσο και της πολυπλοκότητας και της κλίμακας εργασιών της εκάστοτε ασφαλιστικής επιχείρησης. Στη περίπτωση που απαιτείται εποπτική παρέμβαση, τότε αυτή είναι ανάλογη του βαθμού μη- συμμόρφωσης της εκάστοτε επιχείρησης (ladder of intervention). Δηλαδή, η παρέμβαση αυτή μπορεί να περιλαμβάνει είτε απλώς ένα σχέδιο ανάκαμψης, είτε σε πιο δύσκολες περιπτώσεις ένα σχέδιο χρηματοδότησης.

Αναφορικά με τα συστήματα διακυβέρνησης, τα οποία πρέπει να εφαρμοστούν αυτά αναλύονται διεξοδικά στο Συμβουλευτικό Έγγραφο 33<sup>20</sup> των CEIOPS<sup>21</sup> (CP33- Advice on System Governance). Στο άρθρο αυτό παρατίθενται οδηγίες και κανόνες για θέματα όπως

- ✓ Οι Γενικές Απαιτήσεις Διακυβέρνησης
- ✓ Απαιτήσεις Ικανότητας και Ήθους των διοικούντων της επιχείρησης
- ✓ Συστήματα Διαχείρισης Κινδύνων (πολιτικές ανάληψης, ORSA<sup>22</sup>)

<sup>20</sup> Βλέπε [https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx\\_dam/files/consultations/consultationpapers/CP33/CEIOPS-CP-33-09-Draft-L2-Advice-on-Governance.pdf](https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/CP33/CEIOPS-CP-33-09-Draft-L2-Advice-on-Governance.pdf)

<sup>21</sup> Αναφερόμαστε στην Ευρωπαϊκή Επιτροπή Εποπτικών Αρχών Ασφαλίσεων και Επαγγελματικών Συντάξεων

<sup>22</sup> Με τον όρο ORSA αναφερόμαστε στην Εκτίμηση Ιδίου Κινδύνου και Φερεγγυότητας (Own-Risk and Solvency Assessment)

- ✓ Συστήματα Εσωτερικού Ελέγχου
- ✓ Εσωτερική Επιθεώρηση
- ✓ Εξωτερική Ανάθεση.

Η σωστή εφαρμογή και τήρηση αυτών των απαιτούμενων διαδικασιών εγγυάται την ορθή λειτουργία των ασφαλιστικών εταιριών, όπως και τη συνετή διαχείριση των δραστηριοτήτων τους.

### **2.3. ΠΥΛΩΝΑΣ ΙΙΙ: Δημοσιοποίηση και Εποπτική Αναφορά**

Στο Πυλώνα ΙΙΙ παρατίθενται αναλυτικά τα απαραίτητα, από τις εποπτικές αρχές, στοιχεία που πρέπει να δημοσιευθούν, με απώτερο σκοπό τη διαφάνεια εντός της ασφαλιστικής αγοράς. Σύμφωνα με τα Συμβουλευτικά Έγγραφα CP-34 και CP-58<sup>23</sup> των CEIOPS, απαιτείται από μέρους των ασφαλιστικών επιχειρήσεων, η δημοσίευση έκθεσης σχετικά με τη Φερεγγυότητα και τη Χρηματοοικονομική Κατάσταση τους. Επιπρόσθετα, από τις εποπτικές αρχές είναι απαραίτητη η κοινοποίηση στους CEIOPS, πληροφοριών σχετικά με την μέση πρόσθετη κεφαλαιακή απαίτηση ανά επιχείρηση καθώς και για την κατανομή των πρόσθετων κεφαλαιακών απαιτήσεων που επιβλήθηκαν κατά το προηγούμενο έτος. Οι CEIOPS με τη σειρά τους προχωρούν σε δημοσίευση των συγκεντρωτικών αποτελεσμάτων για το σύνολο των καρτών- μελών.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάσουμε τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων σύμφωνα με το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας. Θα αναλύσουμε τη χρήση της αξίας στον κίνδυνο της ουράς ως ένα εναλλακτικό μέτρο σύγκρισης, καθώς και τις βασικές αρχές που διέπουν την οδηγία αυτή.

---

<sup>23</sup> [http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical\\_specifications\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf)

### 3. ΕΛΒΕΤΙΚΟ ΤΕΣΤ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑΣ

Το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας (Swiss Solvency Test) πρωτοσυστάθηκε από την ελβετική ρυθμιστική αρχή, την Ομοσπονδιακή Υπηρεσία Ιδιωτικής Ασφάλισης (Federal Office of Private Insurance, FOPI), με σκοπό την βελτίωση της διαδικασίας αναγνώρισης των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται μια ασφαλιστική εταιρία καθώς και την προστασία των συμφερόντων των ασφαλισμένων. Μέσω του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας επιχειρείται η προώθηση καλύτερων πρακτικών διαχείρισης των κινδύνων που ενέχουν οι ασφαλιστικές συμβάσεις.

Πριν τεθεί σε εφαρμογή η νέα οδηγία, οι ασφαλιστικές εταιρίες ζωής της Ελβετίας χρησιμοποιούσαν την τυποποιημένη σχέση<sup>24</sup> της Φερεγγυότητας I, για τον καθορισμό των απαιτούμενων κεφαλαίων. Η στερεότυπη αυτή προσέγγιση, όμως, κρίθηκε ακατάλληλη αφού απέτυχε να απεικονίσει σαφώς το εταιρικό προφίλ κινδύνου μιας ασφαλιστικής εταιρίας. Η έλευση λοιπόν, της Φερεγγυότητας II<sup>25</sup> αποτέλεσε εφελκυστήριο για τις Ελβετικές αρχές να δημιουργήσουν μια νέα μεθοδολογία (Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας), όπου οι κεφαλαιακές απαιτήσεις υπολογίζονται βάσει των κινδύνων που αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική εταιρία, και συνάδουν με αυτές του δεύτερου Πυλώνα της Φερεγγυότητας II.

Το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας αποτελεί ένα στοχαστικό μοντέλο κινδύνου, στο οποίο περιλαμβάνονται και σενάρια για τον κίνδυνο αγοράς και διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων, τον ασφαλιστικό κίνδυνο και τον πιστωτικό κίνδυνο. Εισάγονται οι έννοιες του Επισφαλούς Κεφαλαίου (risk-bearing capital, RBC), και του Κεφαλαίου Στόχου (target capital, TC), όπου η πρώτη αφορά τα οικονομικά κεφάλαια ενώ η δεύτερη μετρά τον κίνδυνο. Για τον υπολογισμό του Κεφαλαίου Στόχου απαιτείται η συσσωμάτωση των αποτελεσμάτων του τυποποιημένου στοχαστικού μοντέλου, με αυτά των σεναρίων. Δεδομένου όμως ότι το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας στοχεύει περισσότερο στον καθορισμό των αρχών που πρέπει να τηρούνται και όχι στη δομή του μοντέλου, κάθε ασφαλιστής έχει την δυνατότητα να αποκλίνει από αυτό το τυποποιημένο πλαίσιο. Ο βαθμός απόκλισης μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ μικρών αλλαγών στις τιμές κάποιων

---

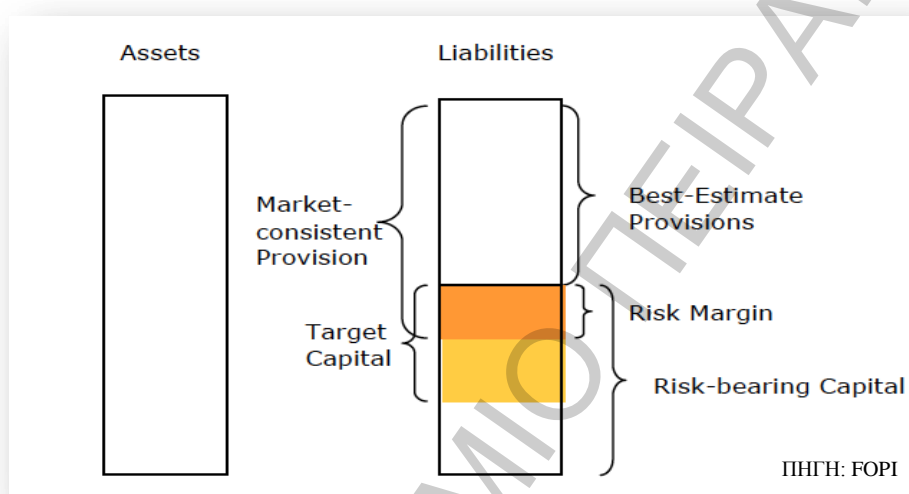
<sup>24</sup> Τα απαιτούμενα κεφάλαια αναλογούν στο 4 τοις εκατό επί των μαθηματικών αποθεμάτων, συν 0,1 τοις εκατό επί του καθαρού ποσού στον κίνδυνο.

<sup>25</sup> Η Φερεγγυότητα II αφορά τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης και όχι την Ελβετία.

προκαθορισμένων παραμέτρων έως την πλήρη αντικατάσταση του τυποποιημένου από ένα εσωτερικό μοντέλο.

Παρακάτω θα αναλύσουμε εκτενέστερα τις αρχές για την αποτίμηση των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού, τις έννοιες του Επισφαλούς Κεφαλαίου και του Κεφαλαίου Στόχου καθώς και τους κινδύνους που φέρουν οι ζωικές ασφαλιστικές επιχειρήσεις.

### 3.1. Αποτίμηση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων



Εικόνα 4 Αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων

Η συνεπής αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων είναι ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας. Η έκθεση της Ομοσπονδιακής Υπηρεσίας Ιδιωτικής Ασφάλισης (FOPI, 2004) αναφέρει ως βασικό κανόνα ότι, όλα τα περιουσιακά στοιχεία και οι υποχρεώσεις πρέπει να αποτιμώνται σύμφωνα με τις αρχές που διέπουν την οικονομία και με τρόπο συνεπή προς τις τιμές της αγοράς. Αναφορικά με τα περιουσιακά στοιχεία αυτό σημαίνει ότι η αποτίμησή τους πρέπει να γίνεται βάσει των τρεχουσών τιμών της αγοράς και όχι βάσει της λογιστικής τους αξίας ή άλλων μεθόδων. Από την άλλη μεριά η αγοραστική αξία των υποχρεώσεων είναι το πόσο που πρέπει να καταβληθεί σε κάποιο τρίτο ώστε να αναλάβει τις υποχρεώσεις αυτές, δεδομένου ότι η συναλλαγή αυτή λαμβάνει μέρος σε μια ρευστή αγορά. Ο τρίτος αυτός θα πρέπει να συμμορφώνεται με τις απαιτήσεις της ρυθμιστικής αρχής, σχετικά με τη διατήρηση της χρηματοοικονομικής σταθερότητας των αγορών και να παρέχει υψηλού επιπέδου ασφάλεια προς τους ασφαλισμένους.

Πιο συγκεκριμένα η αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων που αναφέρονται στον ισολογισμό θα πρέπει να είναι σύμφωνη με τις τιμές που μπορούν να αντληθούν από τις αγορές. Εάν η τρέχουσα εμπορική του αξία ενός χρηματοοικονομικού μέσου είναι άμεσα διαθέσιμη από την αγορά, τότε η αξία αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την αποτίμησή του (μέθοδος marking-to-market). Σε διαφορετική περίπτωση η αξία του πρέπει να υπολογιστεί μέσω ενός μοντέλου αποτίμησης (μέθοδος marking-to-model). Τα μοντέλα αυτά συνίσταται κυρίως από μαθηματικά, χρηματοοικονομικά και αναλογιστικά μοντέλα, οι παράμετροι των οποίων πρέπει να ορίζονται έτσι ώστε να παράγουν όσο το δυνατό πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Από την άλλη μεριά, για την αποτίμηση των υποχρεώσεων<sup>26</sup> δεν ορίζεται κάποια συγκεκριμένη μέθοδος. Μια προσέγγιση ορίζει την αξία των υποχρεώσεων ως το άθροισμα της βέλτιστης εκτίμησης και του περιθωρίου κινδύνου. Ως επί το πλείστον όμως, η αποτίμηση τους γίνεται μέσω των μοντέλων αποτίμησης, μιας και δεν υπάρχουν αγορές των υποχρεώσεων αυτών με υψηλή ρευστότητα. Οι προσεγγίσεις αυτές περιλαμβάνουν την αποτίμηση ενός αντίγραφου χαρτοφυλακίου, τη χρήση στοχαστικών μοντέλων για τη μοντελοποίηση των υποχρεώσεων των ασφαλισμένων και των αλληλεπιδράσεων με τις χρηματοοικονομικές αγορές, καθώς και την χρήση μεθόδων προεξόφλησης και σεναρίων<sup>27</sup>.

### **3.2. Επισφαλές κεφάλαιο & Κεφάλαιο στόχος**

Βασικός στόχος του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας είναι να καθοριστεί τόσο το ποσό του κινδύνου που ενέχει μια ένα χαρτοφυλάκιο, όσο και η οικονομική δυνατότητα της ασφαλιστικής να φέρει τον κίνδυνο αυτό. Για τη μέτρηση λοιπόν του ποσού του κινδύνου χρησιμοποιείται το κεφάλαιο στόχος, ενώ για τη μέτρηση της δυνατότητας μιας ασφαλιστικής να καλύψει του κινδύνους χρησιμοποιείται το επισφαλές κεφάλαιο. Σύμφωνα λοιπόν με το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας μια ασφαλιστική επιχείρηση χαρακτηρίζεται φερέγγυα αν ο λόγος

$$\frac{\text{RBC}}{\text{TC}} \geq 1$$

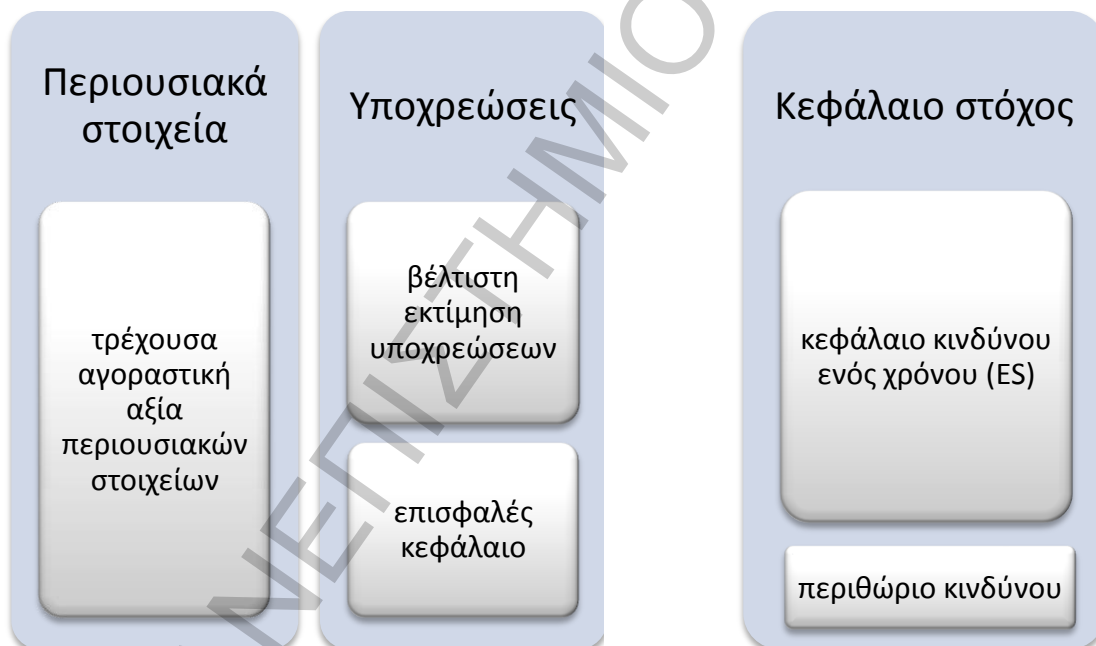
<sup>26</sup> Για τους σκοπούς του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας πρέπει να ληφθούν υπόψη όλες οι υποχρεώσεις, με εξαίρεση τα ίδια κεφάλαια της εταιρίας, ακόμα και αυτές που δεν συμπεριλαμβάνονται στον ισολογισμό.

<sup>27</sup> Για την αποτίμηση υποχρεώσεων όπως είναι οι εγγυήσεις, συνίσταται η χρήση της καμπύλης αποδόσεων μηδενικού κινδύνου.

Το επισφαλές κεφάλαιο (RBC) (Εικόνα 5) ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στην τρέχουσα αξία των περιουσιακών στοιχείων στην αγορά (MVA) και της βέλτιστης εκτίμησης των υποχρεώσεων (BEL), δηλαδή

$$RBC = MVA - BEL$$

Βασικό συστατικό του επισφαλούς κεφαλαίου είναι το περιθώριο κινδύνου (RM), το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα των παρούσων αξιών του κόστους κεφαλαίου του επισφαλούς κεφαλαίου, για όλα τα μελλοντικά έτη. Ως συστατικό του επισφαλούς κεφαλαίου το περιθώριο κινδύνου δεν δημιουργεί επιπλέον κεφαλαιακά κόστη, άρα οι παρούσες αξίες των κεφαλαιακών κοστών του επισφαλούς κεφαλαίου είναι ίσες με τα κεφαλαιακά κόστη του ετήσιου κεφαλαίου κινδύνου.



Εικόνα 5 Ορισμός επισφαλούς κεφαλαίου

Εικόνα 6 Ορισμός του κεφαλαίου στόχος

Επιπρόσθετα, το κεφάλαιο στόχος ορίζεται ως η διαφορά του προεξοφλημένου περιθωρίου κινδύνου (RM) σε ένα χρόνο μείον το αναμενόμενο έλλειμμα (expected shortfall), σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , της διαφοράς του προεξοφλημένου επισφαλούς κεφαλαίου σε ένα χρόνο μείον το επισφαλές κεφάλαιο του τρέχοντος έτους, δηλαδή

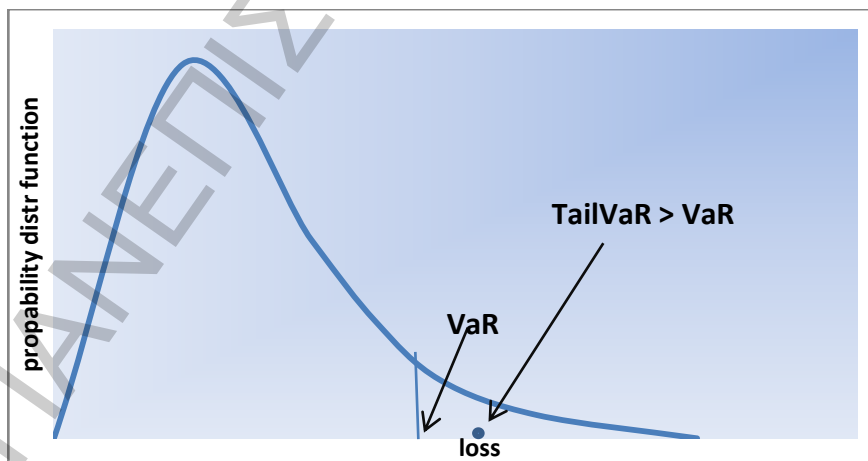
$$TC_0 = \frac{RM_1}{(1+r_0)} - ES_\alpha\left(\frac{RBC_1}{(1+r_0)} - RBC_0\right)$$

όπου  $r_0$ : το ακίνδυνο επιτόκιο για ένα χρόνο.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο υπολογισμός του κεφαλαίου στόχου γίνεται σε χρονικό ορίζοντα ενός χρόνου, δηλαδή το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε αφορά το κεφάλαιο στόχο που απαιτείται ώστε να διασφαλιστεί, ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , τα περιουσιακά στοιχεία στο τέλος του έτους επαρκούν για τη κάλυψη των υποχρεώσεων.

Το αναμενόμενο έλλειμμα ορίζεται ως το ποσό του επισφαλούς κεφαλαίου που απαιτείται σήμερα, έτσι ώστε αν θεωρήσουμε το χειρότερο 100α% των σεναρίων για τον επόμενο χρόνο, τότε στο μέσο όρο των σεναρίων αυτών το εναπομείναν επισφαλές κεφάλαιο θα είναι μεγαλύτερο του περιθωρίου κινδύνου. Ενώ λοιπόν η Αξία στον Κίνδυνο (VaR) είναι η τιμή εκείνη για την οποία το (1- $\alpha$ )% των ζημιών είναι μικρότερες της τιμής αυτής, το αναμενόμενο έλλειμμα (expected shortfall) είναι ο μέσος όρος του μεγέθους των ζημιών που ξεπερνούν το προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Η σχέση μεταξύ της αξίας στον κίνδυνο  $VaR_\alpha$  και του αναμενόμενου ελλείμματος  $ES_\alpha$  δίνεται από τη σχέση

$$ES_\alpha = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]$$



Εικόνα 7 Σύγκριση VaR και Tail VaR



Στην Εικόνα 7 γίνεται εμφανές ότι για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης το αναμενόμενο έλλειμμα, ή αλλιώς Αξία στον κίνδυνο της ουράς (TailVaR), συνιστά ένα πιο συντηρητικό και αυστηρό μέτρο από την Αξία στον Κίνδυνο, αφού μας δείχνει την έκταση (κατά μέσο όρο) των μεγάλων ζημιών.

Αν λοιπόν σε 10.000 προσομοιωμένες ζημιές και υποθέτοντας επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% η VaR αντιστοιχεί στη 50<sup>η</sup> χειρότερη, τότε η TailVaR θα υπολογιστεί ως ο μέσος όρος των 50 χειρότερων ζημιών.

Το τυποποιημένο μοντέλο του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας συνιστά τη χρήση της Αξίας στον κίνδυνο της ουράς για τον υπολογισμό του κεφαλαίου στόχου. Υποθέτοντας ότι οι παράγοντες κινδύνου είναι κανονικά κατανομημένοι, τότε η αξία στον κίνδυνο της ουράς υπολογίζεται ως

$$\text{TailVaR} = \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right) \frac{1}{\alpha} \times \text{Τυπική Απόκλιση}$$

όπου  $\alpha$ : το επίπεδο εμπιστοσύνης 1%,  $\varphi(\cdot)$ : η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής και  $\Phi(\cdot)$ : η αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Επίσης η τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο

$$\text{Τυπική Απόκλιση} = \frac{(\Delta RBC_+ - \Delta RBC_-)}{2k\%} \times \text{μεταβλητότητα παράγοντα}$$

όπου  $\Delta RBC_+, \Delta RBC_-$ : η μεταβολή στο επισφαλές κεφάλαιο (RBC), συνέπεια της εφαρμογής σεναρίων της τάξεως του  $\pm k\%$  αντίστοιχα, και η μεταβλητότητα παράγοντα: όπως αυτή ορίζεται από την FINMA<sup>28</sup>, βάσει των τιμών του παράγοντα κινδύνου που έχουν παρατηρηθεί ιστορικά.

### 3.3. Τυποποιημένα μοντέλα και Σενάρια

Το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας συνίσταται από ένα σύνολο τυποποιημένων μοντέλων και σεναρίων. Τα μοντέλα αυτά αφορούν τους κινδύνους των περιουσιακών στοιχείων, των

<sup>28</sup> Με τον όρο FINMA αναφερόμαστε στην Ελβετική Αρχή Εποπτείας των Χρηματοπιστωτικών Αγορών. Δημιουργήθηκε με σκοπό την προστασία των πιστωτών, των επενδυτών, και των ασφαλισμένων, καθώς και τη διασφάλιση της ομαλής λειτουργίας των χρηματοπιστωτικών αγορών

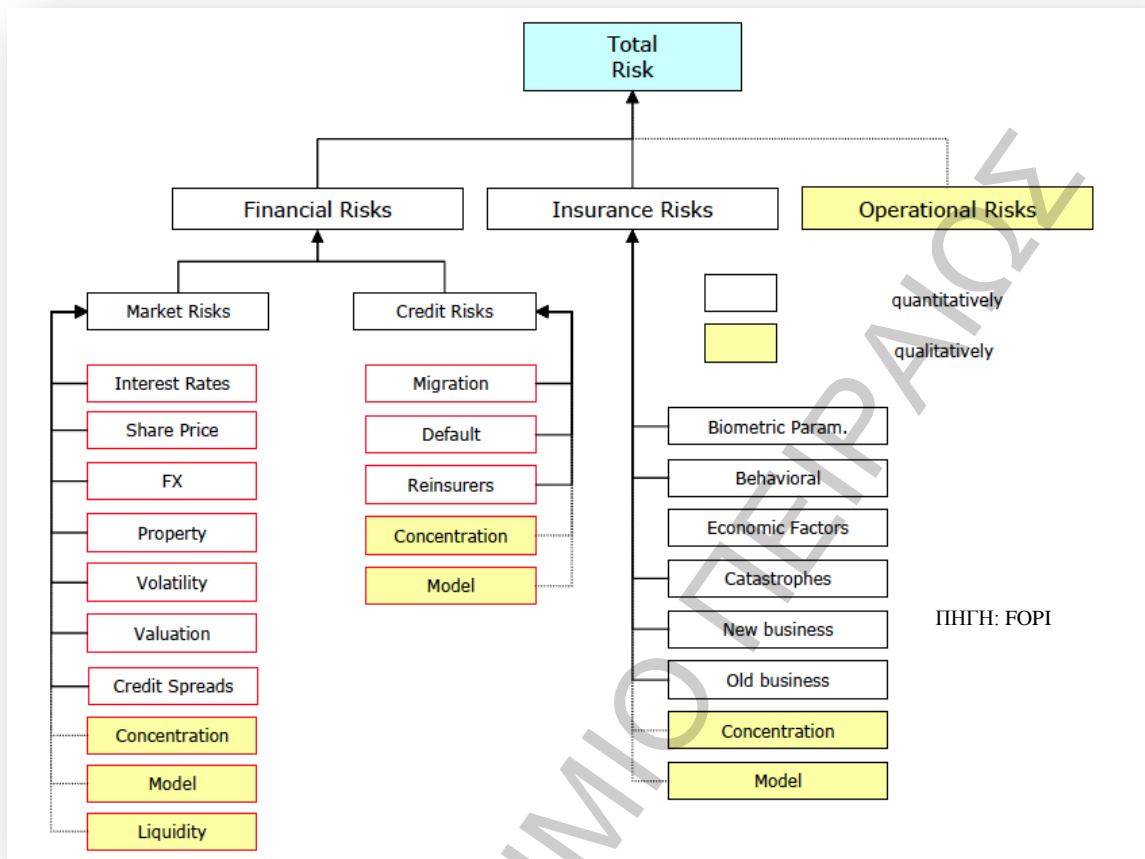
υποχρεώσεων, καθώς και τον πιστωτικό κίνδυνο. Μέσω των μοντέλων αυτών<sup>29</sup> καταλήγουμε στις συναρτήσεις πιθανότητας, οι οποίες χαρακτηρίζουν τις μεταβολές των επισφαλών κεφαλαίων, δεδομένων των μεταβολών κινδύνων που μοντελοποιήθηκαν. Εν συνεχεία τα αποτελέσματα από τα τυποποιημένα μοντέλα συνδυάζονται με αυτά των σεναρίων μέσω διαφόρων μεθόδων συσσωμάτωσης. Σε γενικές γραμμές η συσσωμάτωση συνίσταται στον υπολογισμό του σταθμισμένου μέσου της κατανομής πιθανότητας δεδομένων των φυσιολογικών συνθηκών αλλά και των ακραίων σεναρίων.

Τα τυποποιημένα μοντέλα χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση του κινδύνου αγοράς, του ασφαλιστικού κινδύνου ζωής, του ασφαλιστικού κινδύνου υγείας, του κινδύνου γενικών ασφαλίσεων και του πιστωτικού κινδύνου. Ειδικότερα για τον πιστωτικό κίνδυνο το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι η τυποποιημένη προσέγγιση της Βασιλείας II. Αναφορικά με τον κίνδυνο γενικών ασφαλίσεων, το μοντέλο περιλαμβάνει τόσο τον κίνδυνο μελλοντικών ζημιών του τρέχοντος έτους αλλά και των αποθεματικών, ενώ το μοντέλο ασφαλίσεων υγείας περιγράφει την κατανομή των ασφαλιστικών κινδύνων υγείας. Όσον αφορά το μοντέλο των ασφαλίσεων ζωής αυτό λαμβάνει υπόψη τους βιομετρικούς κινδύνους καθώς και τον κίνδυνο συμπεριφοράς τους ασφαλισμένου. Τέλος το μοντέλο περιουσιακών στοιχείων συνίσταται από τους κινδύνους συναλλάγματος, μετοχών επιτοκίων, πιστωτικών περιθωρίων και πρέπει να υπολογιστεί για τις ασφαλίσεις ζωής και υγείας και για τις γενικές ασφαλίσεις.

Από την άλλη μεριά τα σεναρία συνθέτουν ένα πολύ σημαντικό κομμάτι του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας και περιγράφουν πιθανά ακραία γεγονότα που μπορεί να συμβούν. Δεν αποτελούν απλώς τεστ ανθεκτικότητας αφού, επηρεάζουν περισσότερους από ένα παράγοντες κινδύνου, δίνοντάς μας έτσι μια πληρέστερη εικόνα. Διαχωρίζονται σε ποσοτικά και ποιοτικά σεναρία, με τα πρώτα να συνυπολογίζονται στον καθορισμό του κεφαλαίου στόχου, ενώ τα δεύτερα να μη λαμβάνονται υπόψη. Σχετικά με τις ασφαλίσεις ζωής τα ανάμεσα στα συνηθέστερα σεναρία συγκαταλέγονται αυτά της πανδημίας, της ανικανότητας, της μακροζωίας, της πτώχευσης του αντασφαλιστή και των χρηματοοικονομικών κινδύνων.

---

<sup>29</sup> Εξαιρουμένου του μοντέλου του πιστωτικού κινδύνου



Εικόνα 8 Ποσοτικοί και Ποιοτικοί κίνδυνοι για το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας

### 3.4. Ασφαλίσεις Ζωής

Οι κίνδυνοι που πρέπει να υπολογιστούν διαφοροποιούνται ανάλογα με τον κλάδο ασφάλισης που μας ενδιαφέρει. Για τις ασφαλίσεις ζωής το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας προβλέπει τους παρακάτω κινδύνους

1. τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής
2. τον κίνδυνο αγοράς
3. τον πιστωτικό κίνδυνο

Ο κεφάλαιο στόχος (TC) για τους κινδύνους ενός χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ζωής υπολογίζεται από τη σχέση

$$TC_{KINΔ} = \sqrt{TC_Z^2 + TC_{ΑΓ}^2} + TC_{Π}$$

όπου  $TC_{KINΔ}$ : το κεφάλαιο στόχος για τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου,  $TC_Z$ : το κεφάλαιο στόχος για τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής,  $TC_{ΑΓ}$ : το κεφάλαιο στόχος για τον κίνδυνο αγοράς,  $TC_{Π}$ : το κεφάλαιο στόχος για τον πιστωτικό κίνδυνο.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι ο λειτουργικός κίνδυνος δε συγκαταλέγεται στους κινδύνους που πρέπει να ποσοτικοποιηθούν, εκτός και αν αυτό απαιτηθεί από τη ρυθμιστική αρχή. Ωστόσο ο λειτουργικός κίνδυνος πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη κατά τη διαχείριση κινδύνων των ασφαλιστικών εταιριών και συναχθεί αναφορά σχετικά και τα ποιοτικά κριτήρια που πρέπει να πληρούνται. Επίσης δεν απαιτείται ο υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων για άυλα περιουσιακά στοιχεία, αφού αυτά δεν υφίστανται στον ισολογισμό.

### 3.4.1. Κίνδυνος αγοράς

Το μοντέλο περιουσιακών στοιχείων στοχεύει στη ποσοτικοποίηση των κινδύνων αγοράς, που είναι συνέπεια των μεταβολών των περιουσιακών στοιχείων όσο και των υποχρεώσεων. Αποτελείται από εικοσιτρείς παράγοντες κινδύνου και αποβλέπει στην όσο το δυνατό καλύτερη απεικόνιση του κινδύνου της αγοράς. Οι μεταβολές σε κάθε παράγοντα κινδύνου ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και θεωρούνται ότι είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβολών του επισφαλούς κεφαλαίου, με τους συντελεστές να ορίζονται ως το πηλίκο της μεταβολής κάθε παράγοντα κινδύνου.

Ο κίνδυνος αγοράς συνίσταται από επιμέρους κινδύνους, όπως είναι

- (a) ο Κίνδυνος Επιτοκίων (interest rate risk),
- (b) ο Κίνδυνος Μετοχών (equity risk)<sup>30</sup>,
- (c) ο Κίνδυνος Ακινήτων (real estate risk)<sup>31</sup>,

<sup>30</sup> Ο κίνδυνος υπολογίζεται για τις διαφορετικές νομισματικές μονάδες όπως είναι το Ελβετικό φράγκο (CHF), το Δολάριο Ηνωμένων Πολιτειών (USD), η Αγγλική Λίρα (GBP) και το Ευρώ (EUR).

<sup>31</sup> Ο κίνδυνος διαχωρίζεται σε μικρότερες υποκατηγορίες και εφαρμόζονται ακραία αρνητικά αλλά και θετικά σενάρια, σε αντίθεση με τη Φερεγγυότητα II, όπου εφαρμόζεται μόνο ένα αρνητικό σενάριο για το σύνολο του κινδύνου.

- (d) ο Κίνδυνος Πιστωτικών Περιθωρίων (spread risk)
- (e) ο Κίνδυνος Συναλλάγματος (foreign exchange risk),
- (f) ο Κίνδυνος Εναλλακτικών Επενδύσεων (alternative investments risk)<sup>32</sup>,
- (g) ο Κίνδυνος από μεταβολές στη μεταβλητότητα και τις συσχετίσεις, και
- (h) ο Κίνδυνος από συμμετοχές ή δάνεια (holdings or loans risk),

Στη τελική φάση καθένα από τα απαιτούμενα κεφάλαια για κάθε παράγοντα κινδύνου χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του συνολικού απαιτούμενου κεφαλαίου για τον κίνδυνο αγοράς. Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιείται επίσης ένας 77×77 πίνακας συσχετίσεων.

### 3.4.2. Πιστωτικός κίνδυνος

Ο πιστωτικός κίνδυνος όπως προαναφέραμε υπολογίζεται βάσει των προδιαγραφών που θέτει η Βασιλεία II. Στη περίπτωση αυτή τα περιουσιακά στοιχεία διαχωρίζονται σε δεκατέσσερις κατηγορίες και άλλες υποκατηγορίες, και σταθμίζονται βάσει του κινδύνου που ενέχουν. Τότε ο πιστωτικός κίνδυνος κάθε κατηγορίας αντιστοιχεί στο 8 τοις εκατό του συνόλου των σταθμισμένων βάσει κινδύνου περιουσιακών στοιχείων και ο συνολικός πιστωτικός κίνδυνος είναι το άθροισμα των κινδύνων όλων των υποκατηγοριών.

$$CR_{SUB} = 8\% \times (\text{σταθμισμένων βάσει κινδύνου περιουσιακών στοιχείων})$$

Το συνολικό κεφάλαιο στόχος για τον πιστωτικό κίνδυνο υπολογίζεται απλά ως άθροισμα των επιμέρους κινδύνων κάθε υποκατηγορίας, αφού οι όποιες διαφοροποιήσεις έχουν ληφθεί υπόψη στα βάρη των κινδύνων που χρησιμοποιήθηκαν.

$$TC_{\Pi} = \sum CR_{SUB}$$

### 3.4.3. Ασφαλιστικός κίνδυνος ζωής

Το τυποποιημένο μοντέλο των ασφαλιστικών κινδύνων ζωής καθορίζεται και αυτό από ένα πλήθος παραγόντων κινδύνου. Οι παραδοχές που κάνουμε στη περίπτωση αυτή είναι ότι παράγοντες κινδύνου είναι κανονικά κατανεμημένοι και κατ' αναλογία του μοντέλου

<sup>32</sup> Όπως είναι τα αμοιβαία κεφάλαια και τα εμπορεύματα.

περιουσιακών στοιχείων. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η σχέση μεταξύ των μεταβολών των επισφαλών κεφαλαίων και αυτών των παραγόντων κινδύνου είναι γραμμική. Οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις υπολογίζουν την ευαισθησία των επισφαλών κεφαλαίων σε σχέση με καθένα παράγοντα κινδύνου. Στη συνέχεια οι ευαισθησίες αυτές συσσωματώνονται, λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβλητότητες των παραγόντων κινδύνου καθώς και των μεταξύ τους συσχετίσεων.

Στη περίπτωση των ασφαλιστικών κινδύνων ζωής διακρίνουμε τους παρακάτω παράγοντες κινδύνου

- (a) Θνησιμότητα (mortality),
- (b) Μακροβιότητα (longevity),
- (c) Ανικανότητα- Νοσηρότητα (disability),
- (d) Αποκατάσταση (recovery rate),
- (e) Έξοδα Ασφάλισης Ζωής (expenses),
- (f) Δείκτης Ακυρώσεων (lapse rate).

Για καθένα από τους παραπάνω παράγοντες κινδύνου το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας προσδιορίζει τον στοχαστικό κίνδυνο (stochastic risk), ως αποτέλεσμα τυχαίων διακυμάνσεων και τον παραμετρικό κίνδυνο (parameter and trend risk) ως αποτέλεσμα του κινδύνου λανθασμένων εκτιμήσεων. Επίδραση των κινδύνων αυτών εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από το μέγεθος του χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από συμβόλαια που ανανεώνονται ετησίως τότε ο στοχαστικός κίνδυνος θνησιμότητας θα είναι σχετικά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο παραμετρικό. Αντίθετα, όταν το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από συμβόλαια με μεγάλη διάρκεια τότε ο στοχαστικός κίνδυνος μακροζωίας είναι κατά πολύ μεγαλύτερος του στοχαστικού.

Για τον υπολογισμό του παραμετρικού κινδύνου μετριέται η ευαισθησία των επισφαλών κεφαλαίων σε ακραίες θετικές ή αρνητικές συνθήκες για κάθε παράγοντα κινδύνου. Στη συνέχεια η ευαισθησία αυτή χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης και εν τέλει της Αξίας στον Κίνδυνο της ουράς. Επιπλέον ο στοχαστικός κίνδυνος υπολογίζεται από το τυποποιημένο μοντέλο κάνοντας χρήση του συλλογικού μοντέλου κινδύνου, για κάθε παράγοντα κινδύνου ξεχωριστά. Στη συνέχεια υπολογίζονται ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών, η διακύμανση της κατανομής μιας ζημιάς. Υπό την παραδοχή της σύνθετης Poisson κατανομής και μέσω της τυπικής απόκλισης υπολογίζεται η Αξία στον Κίνδυνο της ουράς για τον στοχαστικό

κίνδυνο. Τέλος, μέσω του πίνακα συσχετίσεων, υπολογίζεται ο συνολικός στοχαστικός και παραμετρικός κίνδυνος, συσχετίζοντας τους επιμέρους στοχαστικούς και παραμετρικούς κινδύνους αντίστοιχα. Καταλήγουμε τελικά στο κεφάλαιο στόχο για τον κίνδυνο ζωής ( $TC_Z$ ) συσσωματώνοντας τον συνολικό στοχαστικό ( $TC_Z^{\Sigma T}$ ) και τον συνολικό παραμετρικό κίνδυνο ( $TC_Z^{\Pi}$ ), υποθέτοντας μηδενική μεταξύ τους συσχέτιση.

$$TC_Z = TC_Z^{\Sigma T} + TC_Z^{\Pi}$$

Για τον ασφαλιστικό κίνδυνο ζωής έχουν καθοριστεί οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε παράγοντα κινδύνου καθώς και οι μεταξύ τους συσχετίσεις.

Επιπρόσθετα στους παραπάνω κινδύνους το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας λαμβάνει υπόψη και τον κίνδυνο των σεναρίων. Ο κίνδυνος αυτός αφορά το κεφάλαιο στόχο που ισούται με τη μεταβολή τις τιμής της αξίας στον κίνδυνο της ουράς μετά την εφαρμογή του σεναρίου, σε σχέση με αυτή που είχε υπολογιστεί με την τυποποιημένη μέθοδο. Η σταθμισμένη αξία στον κίνδυνο της ουράς υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τη κατανομή που ακολουθούν οι μεταβολές στο επισφαλές κεφάλαιο. Για κάθε σενάριο η κατανομή αυτή διατηρεί την ίδια μορφή αλλά μετατοπίζεται ανάλογα με το σενάριο. Υπό την παραδοχή ότι κάθε σενάριο είναι ανεξάρτητο και αλληλοαποκλειόμενο, η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα από τα σεναρία είναι

$$1 - \sum_i P(\text{να συμβεί το } i \text{ σενάριο}).$$

Για κάθε σενάριο που εφαρμόζεται η κατανομή μετατοπίζεται ανάλογα με πόσο ακραίο είναι το σενάριο που εφαρμόζεται. Στη συνέχεια τα σεναρία αυτά συσσωματώνονται βάσει της πιθανότητας πραγματοποίησής τους. Τότε η αξία στον κίνδυνο της ουράς υπολογίζεται από την κατανομή συνδυασμού των διαφόρων σεναρίων. Σε τελευταία φάση έχουμε ότι

$$TC_S = \text{TailVaR}_S - \text{TailVaR}_M$$

όπου  $\text{TailVaR}_S$ ,  $\text{TailVaR}_M$ : οι αξία στον κίνδυνο της ουράς για τις περιπτώσεις του σεναρίου και του μοντέλου αντίστοιχα.

### **3.5. Εσωτερικά μοντέλα**

Η χρήση των εσωτερικών μοντέλων για τον υπολογισμό του κεφαλαίου στόχου συνίσταται από τις εποπτικές αρχές, αφού με τον τρόπο αυτό μειώνεται σημαντικά ο συστηματικός κίνδυνος που ενέχει το τυποποιημένο μοντέλο. Τα εσωτερικά μοντέλα θα πρέπει να καταλήγουν στη κατανομή του επιθυμητού κεφαλαίου, είτε από μόνα τους είτε αφού ενσωματωθούν στο τυποποιημένο μοντέλο.

Ωστόσο για να γίνουν αποδεκτά από την εποπτική αρχή πρέπει να πληρούν ορισμένα ποσοτικά και ποιοτικά κριτήρια. Τα ποιοτικά κριτήρια περιλαμβάνουν τον συνυπολογισμό όλων των παραγόντων κινδύνου, την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων, την αξιολόγησή των αποτελεσμάτων, και την αναθεώρηση και αναπροσαρμογή τους αν αυτό κριθεί απαραίτητο.

Από την άλλη τα ποιοτικά κριτήρια συνίσταται στη χρήση της αγοραστικής αξίας των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν, καθώς και στη χρήση ίδιου επιπέδου εμπιστοσύνης και μέτρου κινδύνου με αυτό του τυποποιημένου μοντέλου.

### **3.6. Αναφορά Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας (SST report)**

Σύμφωνα με την Ομοσπονδιακή Υπηρεσία Ιδιωτικής Ασφάλισης, η αναφορά του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας αποτελεί μια περίληψη των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για τον υπολογισμό του κεφαλαίου στόχου (TC) και του επισφαλούς κεφαλαίου (RBC), καθώς και πληροφορίες σχετικά με την αξιολόγηση των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Δίνεται έτσι η δυνατότητα στην εποπτική αρχή να κατανοήσει το προφίλ κινδύνου της ασφαλιστικής και να παρέμβει όπου είναι απαραίτητο. Η αναφορά αυτή πρέπει να παραδίδεται, υπογεγραμμένη από τον Διευθύνοντα Σύμβουλο, στην εποπτική αρχή σε ετήσια βάση. Θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής και να περιέχει οποιαδήποτε πληροφορία κρίνεται απαραίτητη για την αξιολόγησή. Η αναφορά αυτή συνίσταται από δύο μέρη, εκ των οποίων το ένα ορίζεται από την εποπτική αρχή και συμπληρώνεται από την επιχείρηση, ενώ το δεύτερο παρέχει σχόλια και διευκρινήσεις αναφορικά με την αποτίμηση των στοιχείων, τον υπολογισμό του περιθωρίου κινδύνου, των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν κ.α.



Παράλληλα κατατίθεται στην εποπτική αρχή μια αναφορά σχετικά με τη διαχείριση και τη διακυβέρνηση των κινδύνων, στην οποία περιγράφονται οι στρατηγικές και οι διαδικασίες αναγνώρισης, ποσοτικοποίησης και ελέγχου των κινδύνων

Ακολουθεί η παρουσίαση, σε θεωρητικό επίπεδο, των μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς καθώς και των βασικών θεωρημάτων που τα διέπουν. Αναλύονται οι διάφορες μεθοδολογίες βάσει των οποίων γίνονται οι υπολογισμοί, καθώς και οι ιδιότητές τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## 4. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το θεωρητικό πλαίσιο και την ανάλυση των επιμέρους στοιχείων, που συνθέτουν το μοντέλο μας. Ειδικότερα, θα αναπτύξουμε τις βασικές αρχές της Μπεϋζιανής Θεωρίας και Μοντελοποίησης (Bayesian Models), το Μαρκοβιανό Σύστημα Εναλλαγής Συστημάτων (Markov Regime Switching Model), το δειγματολήπτη Gibb's (Gibb's Sampler), καθώς και τη θεωρία των Γενικευμένων Γραμμικών Μοντέλων (Generalized Linear Models).

### 4.1. Μπεϋζιανά Μοντέλα

Με τη πάροδο των χρόνων η κοινωνία στην οποία ζούμε γίνεται όλο και πιο σύνθετη και μαζί με αυτή γίνονται όλο και πιο περίπλοκα τα διάφορα φαινόμενα, τα οποία καλούμαστε να αναλύσουμε. Στη προσπάθειά μας να διερευνήσουμε και να κατανοήσουμε διάφορα φαινόμενα που πραγματοποιούνται γύρω μας, συναντάμε διάφορες δυσκολίες οι οποίες έγκειται ως επί το πλείστον στη πολυπλοκότητα και τη σύνθετη φύση τους. Ως εκ τούτου προχωράμε στη διάσπαση των φαινομένων αυτών σε άλλα μικρότερα, τα οποία είναι πιο εύκολα να κατανοηθούν και να επεξηγηθούν. Τα κομμάτια αυτά αναλύονται ξεχωριστά ώστε να εξακριβωθεί ο ρόλος του καθενός από αυτά, αλλά ως σύνολο ώστε να καταλάβουμε πως σχετίζονται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Το σύνολο αυτών των κομματιών, τα οποία αποτελούν μια απλοποιημένη περιγραφή ενός σύνθετου φαινομένου συνιστούν ένα μοντέλο.

Τα μοντέλα κωδικοποιούν τις παραδοχές και τις πεποιθήσεις που έχει κανείς γύρω από ένα σύστημα και τις διαδικασίες του, επεξηγώντας με τον τρόπο αυτό τα παρατηρηθέντα δεδομένα. Ωστόσο, κατά την εφαρμογή ενός μοντέλου οι παραδοχές τις οποίες κάνουμε πρέπει να αναπροσαρμόζονται, και όταν τα δεδομένα το απαιτούν να διαχειρίζονται με ορθολογικό και συνεπή τρόπο.

Οι πεποιθήσεις που ανακλώνται μέσω ενός μοντέλου  $M$ , κωδικοποιούνται από τόσο από τις παραμέτρους όσο και από τη δομή του μοντέλου. Το σύνολο των παραμέτρων  $Q$  εμπεριέχει τις συμπεριφορές των διάφορων υποσυνόλων, στα οποία διασπάσαμε το αρχικό φαινόμενο που παρατηρούμε, και η δομή του μοντέλου  $S$  ορίζει τον τρόπο κατά τον οποίο τα υποσύνολα αυτά

σχετίζονται μεταξύ τους. Τα υποσύνολα αυτά μπορεί να συνίσταται είτε από μεταβλητές, είτε από ποσότητες που μας ενδιαφέρουν για τη μελέτη μας, είτε ακόμα από άλλα μικρότερα ανεξάρτητα μοντέλα. Ειδικότερα, οι τιμές των μεταβλητών προέρχονται από τα δεδομένα τα οποία μελετούμε, αλλά μπορεί και να μην είναι άμεσα εμφανείς. Στη περίπτωση αυτή οι τιμές των κρυφών μεταβλητών πρέπει να συναχθούν μέσω της σχέσεις τους με τις τιμές των άμεσα παρατηρηθέντων μεταβλητών. Όταν λοιπόν ένα μοντέλο χρησιμοποιείται για την ανάλυση των δεδομένων, πρέπει να κατασκευαστεί αρχικά επιλέγοντας τις κατάλληλες παραμέτρους και την κατάλληλη δομή, ώστε να προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα. Μετά και την απαραίτητη η προσαρμογή των παραμέτρων και η εύρεση των τιμών των κρυφών μεταβλητών βάσει των παρατηρηθέντων δεδομένων, μπορεί το μοντέλο αυτό να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή προβλέψεων και συμπερασμάτων.

#### 4.1.1. Θεώρημα Bayes

Η Μπεϋζιανή Θεωρία θεωρείται ως το πλέον αποδεκτό μαθηματικό πλαίσιο για την αιτιολόγηση και διεξαγωγή συμπερασμάτων, με τη χρήση πιθανοτήτων. Η θεμελίωση της Μπεϋζιανής Θεωρίας πιθανοτήτων ωστόσο έγινε από τον Bayes αλλά σε μεγάλο βαθμό αναπτύχθηκε από τους Bernoulli και Laplace. Παρόλο που για πολλά χρόνια δέχτηκε αρνητικές τεχνικές, τη τελευταία δεκαετία χρησιμοποιείται με πολλή μεγάλη επιτυχία από σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Το Θεώρημα Bayes έχει χαρακτηριστεί ως ο πιο ορθολογικός και συνετός τρόπος να μεταχειριστεί κάποιος τις παραπάνω πεποιθήσεις. Χρησιμοποιείται τόσο για να επαληθεύσει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων, αναφορικά με δεδομένα που ενέχουν μεγάλη πολυπλοκότητα και αβεβαιότητα αλλά και μικρή συχνότητα εμφάνισης, όσο και για την επιλογή και κατάλληλη προσαρμογή των παραμέτρων του μοντέλου.

Η από κοινού πιθανότητα δύο γεγονότων εκφράζεται ως

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

αν υποθέσουμε ότι το ένα από αυτά τα γεγονότα είναι τη υπόθεση  $H$  και το άλλο είναι τα δεδομένα  $D$  τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bayes ελέγχουμε αν η υπόθεση  $H$  που κάναμε για τις παραμέτρους είναι αληθής, δεδομένων των  $D$  από τη σχέση

$$p(H|D) = \frac{p(D|H)p(H)}{p(D)}.$$

Ο όρος  $p(D|H)$  ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας, αφού εκφράζει την πιθανότητα τα παρατηρηθέντα δεδομένα να προκύπτουν από την υπόθεση. Συνήθως είναι γνωστός από τον αναλυτή αφού εκφράζει την προσδοκία για τα αποτελέσματα δεδομένου ότι η υπόθεση  $H$  είναι αληθής. Ο όρος  $p(H)$  ονομάζεται a priori πιθανότητα (εκ των προτέρων) και εκφράζει την προγενέστερη των δεδομένων γνώση. Με άλλα λόγια το θεώρημα αυτό υποδηλώνει ότι η a posteriori (εκ των υστέρων) πιθανότητα για την υπόθεση  $H$ , δεδομένων των παρατηρήσεων  $D$ , είναι αποτέλεσμα της πρότερης γνώσης για την  $H$ , τροποποιημένης κατά την πιθανότητα να συμβεί η  $D$  έχοντας υπόψη την υπόθεση  $H$ . Οι προδιαγραφές τις οποίες θα πρέπει να πληρεί ο πρότερος όρος, καθορίζονται υποκειμενικά από τον αναλυτή, και αυτός είναι ένας από τους κύριους λόγους που η Μπεϋζιανή Θεωρία πιθανοτήτων έλαβε αρχικά σχετικά αρνητικές κριτικές. Ωστόσο έχει αποδειχθεί ότι σχεδόν όλες οι στατιστικές μέθοδοι βασίζονται σε υποκειμενικές υποθέσεις και τεχνικές, και ότι το γεγονός ότι στη Μπεϋζιανή Θεωρία πιθανοτήτων, οι υποθέσεις αυτές γίνονται εξαρχής αποτελεί περισσότερο πλεονέκτημα παρά μειονέκτημα. Ο παρονομαστής  $p(D)$  προκύπτει ολοκληρώνοντας ως προς  $H$  τον γινόμενο  $p(D|H)p(H)$ , και ως επί το πλείστον αποτελεί μια σταθερά κανονικοποίησης ή αλλιώς περιθώρια πιθανότητα, η οποία διασφαλίζει ότι ο όρος  $p(H|D)$  συμπεριφέρεται ως μια πιθανότητα. Τέλος ο a posteriori όρος  $p(H|D)$  εκφράζει την πιθανότητα να της υπόθεσης. Ωστόσο σύμφωνα με το Θεώρημα Bayes, αν θεωρήσουμε τον παρονομαστή ως μια σταθερά κανονικοποίησης  $c$ , τότε έχουμε ότι

$$p(H|D) = \frac{p(D|H)p(H)}{c}$$

Τότε η ισότητα (=) μπορεί να αντικατασταθεί από την αναλογία ( $\propto$ )<sup>33</sup>, και άρα έχουμε

$$p(H|D) \propto p(D|H)p(H)$$

Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι το Θεώρημα Bayes μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων που σε διαφορετική περίπτωση θα ήταν πολύ δύσκολο να αποκτηθούν, αλλά και να αξιολογήσει ποσοτικά τις υποθέσεις στις οποίες στηρίζονται διάφορα μοντέλα.

<sup>33</sup> Το σύμβολο  $\propto$ , σημαίνει ότι δύο ποσότητες είναι ανάλογες, αν διαφέρουν κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μια να είναι σταθερός πολλαπλασιαστής της άλλης. Στη περίπτωση μας αυτό προκύπτει από την σταθερά  $c$

Αν τώρα θεωρήσουμε τώρα ότι  $\mathbf{H}$  είναι το σύνολο  $j$  παραμέτρων, και δεδομένου ότι συνήθως τα μοντέλο που ασχολούμαστε είναι πολυπαραμετρικά τότε

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_j)$$

Επίσης όπως γνωρίζουμε το σύνολο των παραμέτρων  $\mathbf{H}$  αποτελείται από το υποδιάνυσμα  $\Phi$  των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν και από το υποδιάνυσμα  $\Lambda$  των παραμέτρων που υπάρχουν στο μοντέλο αλλά δεν παρουσιάζουν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Τότε οι τιμές των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν  $\varphi$  υπολογίζονται από την a posteriori περιθώρια κατανομή, που είναι της μορφής

$$p(\varphi|\mathbf{D}) = \int p(\varphi, \Lambda|\mathbf{D}) d\Lambda$$

#### 4.1.2. A priori κατανομές

Η a priori (εκ των προτέρων) κατανομή πιθανότητας, μιας αβέβαιης παραμέτρου  $h$  ή μιας λανθάνουσας μεταβλητής, είναι μια κατανομή πιθανότητας που εκφράζει την αβεβαιότητα γύρω από τη  $h$  προτού λάβουμε υπόψη τα δεδομένα μας. Υπερπαραμέτροι  $h$  ονομάζονται οι παράμετροι μιας a priori κατανομής και με τον τρόπο αυτό μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε από τις παραμέτρους  $\mathbf{H}$  του μοντέλου.

Η εκ των υστέρων κατανομή επηρεάζεται άμεσα από την εκ των προτέρων, αφού προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της δευτέρης με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας και την κανονικοποίησής της από τη σταθερά  $c$ .

Ανάλογα με την πληροφόρηση<sup>34</sup> που παρέχουν οι εκ των προτέρων κατανομές διαχωρίζονται, κατά κύριο λόγο σε δύο κατηγορίες, τις επεξηγηματικές (informative) και τις μη επεξηγηματικές (non-informative). Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που έχουν διαχωριστεί και σε περισσότερες των δύο κατηγοριών, όπου ανάμεσα από τις δύο βασικές συμπεριλαμβάνονται παρεμβάλλονται οι κατηγορίες των ασθενώς επεξηγηματικών (weak informative) και των ελάχιστα επεξηγηματικών (least informative).

---

<sup>34</sup> Με το όρο πληροφόρηση εννοούμε είτε την προηγούμενη ενημέρωση που μπορεί να έχει κάποιος λόγω προσωπικών πεποιθήσεων, είτε θεωρητικές πληροφορίες γύρω από τα δεδομένα που εξετάζουμε

### **Επεξηγηματικές εκ των προτέρων κατανομές**

Στη κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται οι εκ των προτέρων κατανομές που λαμβάνουν υπόψη προηγούμενη πληροφόρηση για την  $h$ , όταν αυτή υπάρχει. Όταν λοιπόν ένα μοντέλο αποτελεί κατά ένα τρόπο μια ανανεωμένη έκδοση ενός προηγούμενου μοντέλου, με σκοπό να συμπεριλάβει και πιο πρόσφατες πληροφορίες τότε η εκ των υστέρων κατανομή του προηγούμενου μοντέλου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκ των προτέρων κατανομή του  $h$  για το νέο μοντέλο.

Με τον τρόπο αυτό ενσωματώνονται στο νέο μοντέλο -εκτός από τα νέα δεδομένα- και τα παλαιότερα δεδομένα, και το νέο μοντέλο δεν ξεκινάει από το μηδέν, παράγοντας με τον τρόπο αυτό καλύτερα αποτελέσματα. Στη περίπτωση αυτή όμως για να διασφαλιστεί ότι τα νέα δεδομένα δεν θα υπερτερήσουν της *prior*, εισήχθη, από τους Ibrahim and Chen (2000)<sup>35</sup>, η έννοια της ισχυρής *prior*. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή μια ισχυρή εκ των προτέρων κατανομή λαμβάνει υπόψη προηγούμενα δεδομένα και αποτελέσματα και στη περίπτωση που τα νέα δεδομένα είναι παρόμοια με τα προηγούμενα τότε αυξάνεται η ακρίβεια της *posterior* κατανομής, αφού τα αποτελέσματα στηρίζονται σε περισσότερες πληροφορίες. Στην αντίθετη περίπτωση η *posterior* κατανομή του  $h$  βρίσκεται στην ούρα της *a priori*, όπου η πυκνότητα είναι μικρότερη, μειώνοντας αυτό τον τρόπο αυτό την επίδρασή της. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η πληροφόρηση που μας παρέχει μια εκ των προτέρων κατανομή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας, αλλά αντί αυτής να εκμαιευθεί από αυτή μια κατάλληλη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που θα ανακλά τις προσωπικές πεποιθήσεις του αναλυτή σχετικά με την πιθανότητα ενός γεγονότος. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εκμαίευση της εκ των προτέρων κατανομής.

### **Ασθενώς Επεξηγηματικές εκ των προτέρων κατανομές**

Μια ασθενώς επεξηγηματική εκ των προτέρων κατανομή, ή αλλιώς *WIP*<sup>36</sup>, κατανομή χρησιμοποιεί προηγούμενη πληροφόρηση με σκοπό την συστηματοποίηση<sup>37</sup> και σταθεροποίηση

<sup>35</sup> Ibrahim J., Chen M. (2000), "Power Prior Distributions for Regression Models", *Statistical Science*, 15, 46-60.

<sup>36</sup> Ο όρος *WIP*, προέρχεται από τα αρχικά των λέξεων της πλήρους ονομασίας, δηλαδή της *Weakly Informative Prior*

<sup>37</sup> Εννοώντας ότι με την παροχή πρόσθετων δεδομένων θα προσδιοριστεί καλύτερα το πρόβλημα

του μοντέλου και αποτελεί την πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη εκ των προτέρων κατανομή. Σκοπός της είναι να παρέχει αρκετή πληροφόρηση ώστε να αποτρέψει την εξαγωγή αποτελεσμάτων που έρχονται σε αντίθεση με την μέχρι τώρα γνώση μας. Σκοπός των WIPs είναι η χρησιμοποίηση λιγότερης πληροφόρησης από αυτή που είναι πραγματικά διαθέσιμη, ώστε να παρέχει στο μοντέλο τα πλεονεκτήματα των προηγούμενων πληροφοριών, χωρίς όμως να ενέχεται ο κίνδυνος χρησιμοποίησης πληροφοριών που πιθανώς να μην υπάρχουν. Σύμφωνα με τον Gelman (2008)<sup>38</sup>, στις περισσότερες αναλύσεις οι συντελεστές πρόβλεψης πρέπει να είναι σταθμισμένοι και κλιμακούμενοι, η πιο συνήθης WIP που χρησιμοποιείται είναι η

$$h \sim N(0, 10000),$$

δηλαδή η  $h$  να είναι κανονικά κατανεμημένη, με μηδενικό μέσο και διακύμανση 10.000. Τότε η πυκνότητα της  $h$  είναι σχεδόν επίπεδη. Ωστόσο η επίπεδη πυκνότητα μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εμπόδιο στην εφαρμογή τον αλγορίθμων και της αριθμητικές προσεγγίσεις. Στη περίπτωση μας όμως, που η πυκνότητα της  $h$  είναι σχεδόν επίπεδη, δίνεται η δυνατότητα στους αλγορίθμους να προσεγγίσουν και να υπολογίσουν την εκ των υστέρων συνάρτηση.

### **Ελάχιστα Επεξηγηματικές εκ των προτέρων κατανομές**

Οι ελάχιστα επεξηγηματικές εκ των προτέρων κατανομές, γνωστές και ως LIPs, αποτελούν μια κατηγορία των κατανομών οι οποίες στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση των παρεχόμενων παρελθοντικών πληροφοριών, και την μέγιστη αξιοποίηση των νέων δεδομένων.

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι επίπεδες εκ των προτέρων κατανομές, όπου είναι της μορφής

$$h \sim U(-\infty, +\infty)$$

δηλαδή η  $h$  κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$ . Παρόλο όμως που φαινομενικά στη περίπτωση αυτή οι posteriori κατανομές επηρεάζονται αποκλειστικά και μόνο από τα νέα δεδομένα, το γεγονός ότι η  $p(h)$  δεν συγκλίνει στη μονάδα<sup>39</sup> -και εν μέρει παραβιάζει τον νόμο των πιθανοτήτων- μπορεί να οδηγήσει σε ακατάλληλες εκ των υστέρων κατανομές και συνεπώς

---

<sup>38</sup> Gelman A., (2008), “ *Scaling Regression Inputs by dividing Two Standard Deviations*”, *Statistics Medicine*, 27, 2865- 2873

<sup>39</sup> Αφού το ολοκλήρωμά της είναι στο άπειρο

και ακατάλληλα μοντέλα. Ένα ακόμη πρόβλημα που παρουσιάζουν οι επίπεδες prior κατανομές είναι ότι δεν παραμένουν αμετάβλητες στους μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα η επίπεδη prior της παραμέτρου της τυπικής απόκλισης, δεν είναι απαραίτητα επίπεδη και για την διακύμανση της.

Ακόμα μία κατηγορία ελάχιστα επεξηγηματικών prior κατανομών είναι οι ιεραρχικές prior, σύμφωνα με τις οποίες οι παράμετροι της εκ των προτέρων κατανομής εκτιμώνται μέσω των υπέρ- πρότερων κατανομών και των δεδομένων. Σημαντικό πλεονέκτημά της είναι ότι μέσω της εκτίμησης των παραμέτρων από την υπέρ-πρότερη κατανομή και από τα δεδομένα μπορούμε να εκμαιεύσουμε την βέλτιστη εκ των προτέρων κατανομή.

Άλλες ελάχιστα επεξηγηματικές prior κατανομές είναι η Jeffrey's prior, η MAXENT prior και η αναφορική prior.

### **Μη Επεξηγηματικές εκ των προτέρων κατανομές**

Παραδοσιακά όλες οι παραπάνω κατηγορίες prior κατανομών μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη επεξηγηματικές. Αφού όμως οι μη επεξηγηματικές prior κατανομές δε υφίστανται στη πραγματικότητα, όλες οι prior κατανομές ονομάζονται επεξηγηματικές.

### **Κατάλληλες και Ακατάλληλες εκ των προτέρων κατανομές**

Μια prior κατανομή μπορεί να χαρακτηριστεί ως ακατάλληλη αν

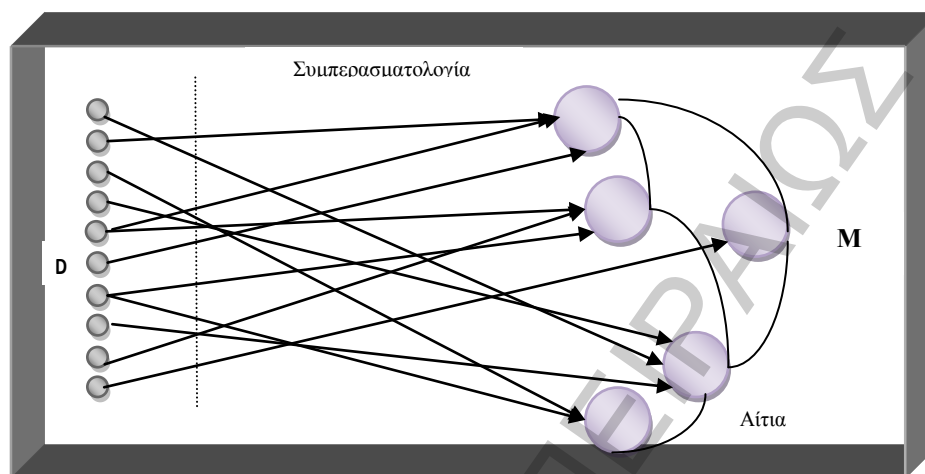
$$\int p(h) dh = \infty$$

Όπως λοιπόν προαναφέραμε μια κατανομή μια ομοιόμορφη κατανομή με όρια  $(-\infty, +\infty)$  είναι ακατάλληλη αφού  $p(h) \propto 1$ , για κάθε  $h \in (-\infty, +\infty)$ . Ως εκ τούτου η posterior κατανομή που θα δημιουργηθεί θα είναι και αυτή ακατάλληλη, αλλά και τα συμπεράσματα που θα διεξαχθούν κρίνονται αναξιόπιστα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μια βασική προϋπόθεση για την από κοινού posterior κατανομή, είναι η περιθώρια πιθανότητα να ορίζεται για κάθε  $D$ , δηλαδή

$$p(D) = \int p(D|H)p(H) dH = \infty$$



### 4.1.3. Γενεσιουργά μοντέλα (generative models)



Εικόνα 9 Γενεσιουργό Μοντέλο

Τα γενεσιουργά μοντέλα (generative models), γνωστά και ως μοντέλα λανθάνουσων μεταβλητών ή αιτιατά μοντέλα, εκφράζουν τον τρόπο κατά τον οποίο ένα σύνολο παρατηρηθέντων δεδομένων, μπορεί να προκύψει από ένα σύνολο υποκείμενων παραγόντων (αιτιών). Τα μοντέλα αυτά έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί στις κοινωνικές επιστήμες, με τη μορφή της παραγοντικής ανάλυσης, για να αιτιολογήσουν κοινωνικά φαινόμενα και συμπεριφορές. Στη περίπτωση των γενεσιουργών μοντέλων, επιχειρείται η επεξήγηση ενός συνόλου πολυμεταβλητών δεδομένων μέσω της ανάλυσης των αιτιών που τα προκάλεσαν, καθώς και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των αιτιών αυτών. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 9, οι σχέσεις μεταξύ τους μπορεί να είναι γραμμικές (παραγοντική ανάλυση), όμως στις περισσότερες των περιπτώσεων οι σχέσεις αυτές είναι εξαιρετικά μη- γραμμικές είτε μεταξύ των αιτιών είτε μεταξύ αιτιών και παρατηρήσεων.

Σύμφωνα με τον Olshausen (2004)<sup>40</sup> Τα δύο κυριότερα προβλήματα που καλούμαστε να επιλύσουμε με τα γενεσιουργά μοντέλα είναι πρώτον να καταλήξουμε σε αυτό το σύνολο αιτιών που επεξηγεί καλύτερα μια συγκεκριμένη παρατήρηση  $D_i$ , και δεύτερον να επιλέξουμε το

<sup>40</sup> Olshausen B. A., (2004). *Bayesian Probability Theory*. <http://redwood.berkeley.edu/bruno/npb163/bayes.pdf>

μοντέλο εκείνο που επεξηγεί καλύτερα ολόκληρο το σύνολό των παρατηρήσεων  $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ .

#### 4.1.4. Το μοντέλο

Στη Μπεϋζιανή Θεωρία πιθανοτήτων, η συμπερασματολογία συνίσταται στον υπολογισμό της *a posteriori* πυκνότητας πιθανότητας των λανθάνουσων μεταβλητών ενώ κατά η εκμάθηση του μοντέλου στον υπολογισμό της *a posteriori* πυκνότητας πιθανότητας των παραμέτρων του μοντέλου. Υπό το πλαίσιο αυτό όμως, συμπερασματολογία και εκμάθηση είναι πρακτικά το ίδιο. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τα βάρη  $W$ , ως συνένωση των παραμέτρων και των λανθάνουσων μεταβλητών.

##### Εκμάθηση του μοντέλου

Η *a posteriori* πυκνότητα πιθανότητας των βαρών  $W$  δίνεται από τη σχέση

$$p(W|D, H) = \frac{p(D|W, H)p(W|H)}{p(D|H)}$$

όπου  $H$ : οι υποθέσεις που έχουν γίνει γύρω από το μοντέλο,

$p(W|H)$ : η *a priori* πυκνότητα πιθανότητας,

$p(D|H)$ : ο συντελεστής κανονικοποίησης της *a posteriori* κατανομής.

Η *a priori* πυκνότητα πιθανότητας καταγράφει τις πληροφορίες που ήδη γνωρίζουμε σχετικά με τις τιμές των βαρών και τους περιορισμούς προτού λάβουμε γνώση των παρατηρηθέντων δεδομένων και λειτουργεί ως ρυθμιστής. Συνέπεια των περιορισμών αυτών είναι οι πιθανές τιμές των βαρών να συνεπάγονται αξιόλογα αποτελέσματα σχετικά με την *a posteriori* πυκνότητα πιθανότητας. Η *a posteriori* πυκνότητα πιθανότητας αποτελεί ένα μέτρο της γνώσης που λάβαμε μετά την απόκτηση των δεδομένων και ποσοτικοποιεί τη γνώση αυτή. Η πιθανότητα  $p(D|W, H)$  αποτελεί ένα μέτρο του πόσο καλά το μοντέλο προέβλεψε τα δεδομένα και ουσιαστικά αποφασίζει αν τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν περιείχαν νέες πληροφορίες.

Ο παρονομαστής  $p(D|H)$  προκύπτει από την ολοκλήρωση ως προς  $W$  της  $p(D|W, H)$ , δηλαδή έχουμε ότι

$$p(D|H) = \int p(D|W, H) p(W|H) dW$$

Επειδή όμως, η ολοκλήρωση αυτή είναι πολύ δύσκολη υπολογιστικά αφού πρέπει να γίνει για κάθε  $W$ , θεωρούμε ότι τα  $W$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Επίσης τα βάρη μπορούν να διαχωριστούν στις παραμέτρους  $Q$  του μοντέλου και τις λανθάνουσες μεταβλητές  $L$ , επιτυγχάνοντας έτσι τον υπολογισμό a posteriori πυκνότητας πιθανότητας των  $Q$ , η οποία εξαρτάται από τις τιμές των λανθάνουσων μεταβλητών  $L$ . Οι τιμές των λανθάνουσων μεταβλητών δίνονται από την a posteriori περιθώρια κατανομή του  $L$ , είναι της μορφής

$$p(L|D, H) = \int p(L|Q, D, H) p(Q|D, H) dQ$$

όπου

$$p(L|Q, D, H) = \frac{p(D|Q, L, H)p(L|Q, H)}{\int p(D|Q, L, H)p(L|Q, H)dL}$$

Ομοίως για το  $Q$  έχουμε,

$$p(Q|D, H) = \int p(Q|L, D, H) p(L|D, H) dL$$

όπου

$$p(Q|L, D, H) = \frac{p(D|Q, L, H)p(L|Q, H)p(Q|H)}{\int p(D|Q, L, H)p(L|Q, H)p(Q|H)dQ}$$

Όταν οι a posteriori πυκνότητες πιθανότητας των παραμέτρων  $L$  και  $Q$  συγκλίνουν τότε, το μοντέλο θεωρείται έτοιμο για να χρησιμοποιηθεί.

### Χρήση του μοντέλου

Όταν η εκμάθηση του μοντέλου ολοκληρωθεί τότε αυτό θεωρείται μια ακριβής αναπαράσταση των διαδικασιών που παράγουν τα υπό ανάλυση δεδομένα. ο σκοπός του μοντέλου στο στάδιο αυτό είναι η διεξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις τιμές των λανθάνουσων μεταβλητών. Τότε οι πιθανές τιμές των λανθάνουσων μεταβλητών υπολογίζονται, από την a posteriori περιθώρια κατανομή

$$p(L|d_{new}D, H) = \int p(L|Q, d_{new}, H) p(Q|D, H) dQ$$

όπου

$$p(L|Q, d_{new}, H) = \frac{p(d_{new}|W, H)p(L|Q, H)}{\int p(d_{new}|W, H)p(L|Q, H)dL}$$

Το μοντέλο αυτό μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη νέων παρατηρήσεων, μέσω του υπολογισμού της a posteriori πυκνότητας πιθανότητας των νέων δεδομένων, η οποία ονομάζεται a posteriori πρόβλεψη, και είναι της μορφής

$$p(d_{new}|\mathbf{D}, \mathbf{H}) = \int p(d_{new}|\mathbf{W}, \mathbf{H})p(\mathbf{L}|\mathbf{Q}, d_{new}, \mathbf{H})p(\mathbf{Q}|\mathbf{D}, \mathbf{H})d\mathbf{L}d\mathbf{Q}.$$

#### 4.1.5. Προσεγγίσεις του μοντέλου

Το βασικό εμπόδιο στην αξιοποίηση των Μπεϋζιανών μεθόδων για κατασκευή και σύγκριση μοντέλων, έγκειται στην δυσκολία των υπολογισμών που πρέπει να γίνουν. Χαρακτηριστικά οι συσχετίσεις που μεταξύ των παραμέτρων αλλά και των δεδομένων καθιστούν εξαιρετικά δύσκολο τον υπολογισμό του ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του συντελεστή κανονικοποίησης της a posteriori κατανομής. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού είναι δύσκολος υπολογιστικά, ακόμα και στα πιο απλά μοντέλα.

Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν διάφορες προσεγγίσεις, οι οποίες βοηθούν να ξεπεραστεί το εμπόδιο αυτό και εν τέλει στη διεξαγωγή συμπερασμάτων. μια από αυτές είναι η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας, κατά την εκτιμώνται εκείνες οι παράμετροι που μας οδηγούν στην μέγιστη πιθανότητα ή λογαριθμική πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός. Παρόλο όμως που η μέθοδος αυτή είναι πολύ εύκολη υπολογιστικά, μπορεί να οδηγήσει σε πιο σύνθετα μοντέλα και σε λάθος αποτελέσματα λόγω της έλλειψης περιορισμών σχετικά με τα βάρη  $W$ .

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω προβλήματα, το η επόμενη μέθοδος περιλαμβάνει τον υπολογισμό της μεγίστης εκ των υστέρων κατανομής κατά την οποία επιχειρείται η μεγιστοποίηση του γινομένου του αριθμητή

$$p(\mathbf{D}|\mathbf{W}, \mathbf{H})p(\mathbf{W}|\mathbf{H})$$

Και στην περίπτωση αυτή όμως μπορεί να καταλήξουμε σε λανθασμένες εκτιμήσεις των βαρών  $W$ , καθώς και οδηγηθούμε σε πολύ σύνθετα μοντέλα.

Άλλες προσεγγίσεις είναι ο αλγόριθμος προσδοκίας- μεγιστοποίησης (Expectation – Maximization algorithm), ο οποίος αποτελεί την πιο αποτελεσματική μέθοδο βελτιστοποίησης των προσεγγίσεων μεγίστης πιθανοφάνειας και της μεγίστης εκ των υστέρων κατανομής, καθώς

και οι Μόντε Κάρλο μέθοδοι (Monte Carlo methods). Σύμφωνα με τον Mackay<sup>41</sup> (1996) οι Monte Carlo μέθοδοι αποτελούν τις πιο ικανοποιητικές προσεγγίσεις όσον αφορά πολυδιάστατα μοντέλα και ένα ισχυρό εργαλείο που επιτρέπει τον υπολογισμό οποιασδήποτε συνάρτησης πιθανότητας. Στην επόμενη ενότητα θα αναλύσουμε διεξοδικά το μαρκοβιανό μοντέλο εναλλαγής συστημάτων, το οποίο συγκαταλέγεται στις Monte Carlo μεθόδους και θα δούμε πώς το μοντέλο αυτό μπορεί να διευκολύνει τους υπολογισμούς μας.

## 4.2. Μαρκοβιανό Μοντέλο Εναλλαγής Καταστάσεων

Πληθώρα μοντέλων και ερευνών, τα τελευταία χρόνια, απέτυχαν να χαρακτηρίσουν τη μακροχρόνια τάση του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος, καθώς και τη σχέση του με τους Οικονομικούς Κύκλους. Οι προσεγγίσεις αυτές στηρίζοντα στις παρακάτω υποθέσεις:

- i. οι πρώτες διαφορές του λογάριθμου (log) του ΑΕΠ ακολουθούν μια στάσιμη γραμμική διαδικασία και,
- ii. οι βέλτιστες προβλέψεις των μεταβλητών είναι γραμμική συνάρτηση των υστερήσεών τους.

Προτείνεται λοιπόν, από τον James D. Hamilton (Hamilton, 1989), μια εναλλακτική προσέγγιση η οποία στηρίζεται στη μη-συγγραμικότητα και τη χρήση επεξηγηματικών παραμέτρων της δυναμικής των χρονοσειρών. Οι μη-συγγραμικότητα την οποία εξετάζουμε είναι αποτέλεσμα των διακριτών εναλλαγών μεταξύ δύο συστημάτων- καταστάσεων, κατά τις οποίες παρουσιάζεται σημαντική αλλαγή στη συμπεριφορά των χρονοσειρών που προκύπτει από. Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στη Παλινδρόμηση Μαρκοβιανής Εναλλαγής, όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους Goldfield και Quandt (1973)<sup>42</sup> για να χαρακτηρίσει τις αλλαγές στις παραμέτρους μιας αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας χρονοσειράς. Επίσης θα προτείνεται ένα μη-γραμμικό φίλτρο και ένας εξομαλυντής, με σκοπό τον υπολογισμό των βέλτιστων στατιστικών εκτιμήσεων της κατάστασης, στην οποία βρίσκεται η μη παρατηρηθείσα μεταβλητή σε μία δεδομένη χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό εξάγουμε τις βέλτιστες δυνατές εκτιμήσεις

---

<sup>41</sup> D.J.C Mackay, “ An introduction to Monte Carlo methods”, Proceedings of the 1996 Erice Summer School, <http://www.cs.toronto.edu/mackay/abstracts/erice.html>, 1996.

<sup>42</sup> Ο Hamilton επέκτεινε τη χρήση του μοντέλου των Goldfield και Quandt (1973), στην ανάλυση των δεδομένων των χρονοσειρών.

αναφορικά με τη πιθανότητα να συμβεί μια αλλαγή της κατάστασης, δεδομένης της παρατηρηθείσας συμπεριφοράς του ΑΕγχΠ.

Για τη μοντελοποίηση του ρυθμού ανάπτυξης των οικονομικών χρονοσειρών με μια μαρκοβιανή διαδικασία εναλλαγής συστημάτων πρέπει να ληφθεί υπόψη τόσο η χρονική διάρκεια κάθε κατάστασης όσο και οι διακυμάνσεις της χρονοσειράς κατά τη διάρκεια αυτή. Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι:

1. ο υπολογισμός της περιθώριας συνάρτησης πιθανότητας του ΑΕγχΠ.
2. η μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης πιθανότητας αναφορικά με τις πληθυσμιακές παραμέτρους,
3. η χρήση των παραμέτρων αυτών κι των δεδομένων για την εξαγωγή στατιστικών συμπερασμάτων για τα μη παρατηρηθείσες καταστάσεις –συστήματα.

Ο αλγόριθμος EM (EM algorithm) που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να θεωρηθεί και ως ένας τρόπος τυποποίησης των σημείων καμπής<sup>43</sup> (ορόσημων) μιας χρονοσειράς.

#### 4.2.1. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης (Markov model of trend)

Σύμφωνα με τον Hamilton (1989), η μετάβαση μεταξύ των περιόδων ανάπτυξης και ύφεσης της οικονομίας μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια πρώτης τάξεως διαδικασία Markov.

Έστω  $n_t$  η συνιστώσα της τάσης μιας χρονοσειράς  $\tilde{y}_t$ . Τότε η  $n_t$  είναι Μαρκοβιανή τάση με δύο επίπεδα αν

$$n_t = \alpha_1 s_t + \alpha_0 + n_{t-1},$$

όπου  $s_t$ : η κατάσταση στη οποία βρίσκεται το σύστημα και ισούται με 0 αν η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση ή 1 αν βρίσκεται σε ανάπτυξη. Υποθέτουμε επίσης ότι η μετάβαση μεταξύ των καταστάσεων ακολουθεί μία πρώτης τάξεως διαδικασία Markov, τέτοια ώστε

$$\text{Prob } [S_t=1 | S_{t-1}=1] = p$$

$$\text{Prob } [S_t=0 | S_{t-1}=1] = 1-p$$

$$\text{Prob } [S_t=0 | S_{t-1}=0] = q$$

$$\text{Prob } [S_t=1 | S_{t-1}=0] = 1-q$$

---

<sup>43</sup> Με τον όρο σημείο καμπής, εννοούμε κάθε διαρθρωτικό γεγονός που αντικατοπτρίζεται στα δεδομένα που παράγονται.

Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία  $S_t$  είναι στάσιμη και επιτρέπει την απεικόνισή της από ένα AR(1) μοντέλο. Έχουμε λοιπόν ότι

$$s_t = (1 - q) + \lambda s_{t-1} + u_t,^{44} \text{ όπου } \lambda \equiv -1 + p + q$$

όπου  $u_t$ : μια ακολουθία καταλοίπων, ασυσχέτιστη με τις στερήσεις του  $S_t$ . Για  $S_{t-1} = 1$  έχουμε  $V_t = (1 - p)$  με πιθανότητα  $p$  και  $V_t = -p$  με πιθανότητα  $1 - p$ . Ομοίως για  $S_{t-1} = 0$  έχουμε  $V_t = -(1 - q)$  με πιθανότητα  $q$  και  $V_t = q$ , με πιθανότητα  $1 - q$ .

Τότε η παραπάνω εξίσωση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες .

**1.** Η δεσμευμένη πιθανότητα  $P_0 [ S_t = 1 ]$  συγκλίνει ασυμπτωτικά στην αδέσμευτη οριακή πιθανότητα  $\mathbf{P [ S_t = 1 ] = \pi}$ .

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα δεδομένου ότι  $E_0 V_t = 0$  για κάθε  $t > 0$ . Αντικαθιστώντας λοιπόν στην  $s_t = (1 - q) + \lambda s_{t-1} + u_t$  έχουμε

$$E_0 S_t = \frac{(1-q)(1-\lambda^t)}{(1-\lambda)} + \lambda^t E_0 S_0,$$

όπου  $E_0$  συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή δεδομένων των πληροφοριών που έχουμε στο χρόνο 0. Τότε η  $E_0 S_t$  ερμηνεύεται ως η πιθανότητα το  $S_t = 1$  δεδομένων των πληροφοριών τη χρονική στιγμή 0 και μπορεί να συμβολιστεί ως  $P_0 [ S_t = 1 ]$ . Έχουμε λοιπόν ότι

$$P_0 [ S_t = 1 ] = \pi + \lambda^t (\pi_0 - \pi),$$

όπου  $\pi \equiv \frac{(1-q)}{(2-p-q)}$  και  $\pi_0 \equiv P_0 [ S_0 = 1 ]$ . Από τη παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι στη περίπτωση που δεν έχουμε αρχική πληροφόρηση, τότε

$$P [ S_t = 1 ] = \pi.$$

**2.** Η ακολουθία  $V_t$  είναι ασυσχέτιστη από τις υστερήσεις των  $S_t$  αφού

$$\mathbf{E [ V_t | S_{t-j} = 1 ] = E [ V_t | S_{t-j} = 0 ] = 0} \text{ για } j = 1, 2, \dots,$$

δεν είναι όμως και ανεξάρτητη από αυτές, αφού  $E [ V_t^2 | S_{t-1} = 1 ] = p(1 - p)$  και  $E [ V_t^2 | S_{t-1} = 0 ] = q(1 - q)$ . Η ιδιότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική όταν η κατάσταση  $s_t$  δεν είναι αυτή που μελετάμε, αλλά αποτελεί μια από τις πολλές μεταβλητές που επηρεάζουν τη σειρά για την οποία έχουμε ακριβείς παρατηρήσεις.

<sup>44</sup> Η σχέση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση ενός ARIMA μοντέλου.

#### 4.2.1.1. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης σε επίπεδα (Markov Trend in levels)

Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή  $i_t$  υποδηλώνει το σύνολο των μονάδων ξεκινώντας από το χρόνο μηδέν, δηλ.

$$i_t \equiv s_1 + s_2 + \dots + s_t$$

Τότε σε συνδυασμό με την  $n_t = \alpha_1 s_t + \alpha_0 + n_{t-1}$  έχουμε ότι

$$n_t = n_0 + \alpha_1 i_t + \alpha_0 t.$$

Στη περίπτωση αυτή η  $E_0\{S_t | Prob[S_0 = 1] = \pi_0\} = \pi + \lambda^t(\pi_0 - \pi)$  (Ιδιότητα 1), γίνεται

$$\begin{aligned} & E_0\{N_t | E_0[N_0] = 0, Prob[S_t = 1] = \pi_0\} \\ &= n_0 + \alpha_1 \left[ \pi t + \sum_{\tau=1}^t \lambda^\tau (\pi_0 - \pi) \right] + \alpha_0 t = n_0 + [\alpha_1 \pi + \alpha_0] t + \left[ \frac{\alpha_1 \lambda (1 - \lambda^t)}{(1 - \lambda)} \right] (\pi_0 - \pi). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για  $t \rightarrow \infty$  έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[N_{t+1} - N_t | n_0, \pi_0] = \alpha_1 \pi + \alpha_0.$$

Δηλαδή για πολύ μεγάλο  $t$  ο ρυθμός ανάπτυξης είναι ανεξάρτητος από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν το σύστημα στο χρόνο 0.

Η παραπάνω σχέση, σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 1, υποδηλώνει ότι για πολύ μεγάλο  $t$  η πιθανότητα η οικονομία να βρίσκεται σε κατάσταση 1 είναι  $\pi$  και ο αντίστοιχος ρυθμός ανάπτυξης  $\alpha_1 + \alpha_0$ . Συνεπώς, η πιθανότητα η οικονομία να βρίσκεται σε κατάσταση 0 είναι  $1 - \pi$  με αντίστοιχο ρυθμό ανάπτυξης  $\alpha_0$ .

Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν μας παρέχεται προηγούμενη πληροφορία, π.χ.  $\pi_0 > \pi$  και βάσει της σχέσης (1.7) τότε για  $\alpha_1 \lambda > 0$  η  $E\{N_t | P_0[S_t = 1] = \pi_0\}$  είναι συστηματικά μεγαλύτερη από την  $E\{N_t | P_0[S_t = 1] = \pi\}$ , με τη διαφορά μεταξύ τους να αυξάνεται όσο μεγαλώνει το  $t$ , αφού  $(1 - \lambda^t) \rightarrow 1$ . Πιο συγκεκριμένα αν γνωρίζουμε ότι  $S_0 = 1$  ή  $S_0 = 0$ , τότε από τη μεταξύ τους σύγκριση έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{E[N_t | S_0 = 1] - E[N_t | S_0 = 0]\} = \frac{\alpha_1 \lambda}{(1 - \lambda)}$$



Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν και η αρχική πληροφόρηση, αναφορικά με τη κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα, δεν έχει μακροχρόνια επίδραση στο ρυθμό ανάπτυξης, ωστόσο επηρεάζει σημαντικά το επίπεδο  $N_t$ .

Βάσει των παραπάνω η προεξοφλημένη παρούσα αξία μπορεί να υπολογιστεί ως

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t | n_0, \pi_0 = \frac{n_0}{(1-\beta)} + \alpha_1 \left[ \frac{\beta(1-q)}{(1-\beta)^2(1-\beta\lambda)} + \frac{\beta\lambda\pi_0}{(1-\beta)(1-\beta\lambda)} \right] + \frac{\alpha_0\beta}{(1-\beta)^2},$$

όπου  $\beta$ : ο συντελεστής προεξόφλησης

#### 4.2.1.2. Μαρκοβιανό μοντέλο τάσης σε λογαρίθμους (Markov Trend in logs)

Η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας χρονοσειράς μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας διανύσματα για την απεικόνιση των αναδρομικών τύπων των αναμενόμενων τιμών. Έστω, λοιπόν, η πιθανότητα  $P_\tau(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , τα γεγονότα  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  να συμβούν ταυτόχρονα δεδομένων των συνθηκών του επικρατούν στο χρόνο  $\tau$ . Επίσης γνωρίζουμε ότι  $i_t \equiv s_1 + s_2 + \dots + s_t$ , υποδηλώνει το άθροισμα των ξεκινώντας από το χρόνο μηδέν. Τότε ο αναδρομικός τύπος

$$P_0[I_t = i, S_t = 1] = p P_0[I_{t-1} = i-1, S_{t-1} = 1] + (1-q)P_0[I_{t-1} = i-1, S_{t-1} = 0]$$

ισχύει για  $t = 1, 2, \dots$  και  $i = 1, 2, \dots, t$ . Για  $i = 0$  έχουμε  $P_0[I_t = 0, S_t = 1] = 0$ , όπου η μεταβλητή  $I_t$  υποδηλώνει το άθροισμα των μονάδων. Επίσης έχουμε ότι

$$P_0[I_t = i, S_t = 0] = (1-p) P_0[I_{t-1} = i-1, S_{t-1} = 1] + qP_0[I_{t-1} = i-1, S_{t-1} = 0]$$

που ισχύει για  $t = 1, 2, \dots$  και  $i = 1, 2, \dots, t-1$ . Επίσης έχουμε ότι  $P_0[I_t = t, S_t = 0] = 0$ , για  $i = t$  και  $t = 1, 2, \dots$ . Στη συνέχεια θεωρούμε τις μεταβλητές  $\hat{\alpha}_1 \equiv \exp(\mathbf{a})$  και  $\hat{\alpha}_0 \equiv \exp(\alpha_0)$ . Τότε πολλαπλασιάζοντας τους αναδρομικούς τύπους για  $S_t = 1$  και  $S_t = 0$ , με το συντελεστή  $\hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t$  και αθροίζοντας για  $i = 1, 2, \dots, t$  και για  $i = 0, 1, \dots, t-1$  αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^t \hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t P_0[I_t = i, S_t = 1] \\
&= \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 p \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 1] \\
&\quad + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 (1 - q) \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 0]
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^t \hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t P_0[I_t = i, S_t = 0] \\
&= (1 - p) \hat{\alpha}_0 \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 1] \\
&\quad + q \hat{\alpha}_0 \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 0]
\end{aligned}$$

Ορίζοντας τώρα το διάνυσμα

$$M_0(t, s) = \sum_{i=0}^t \hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t P_0[I_t = i, S_t = s], \text{ για } s = 0, 1$$

οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\begin{bmatrix} M_0(t, 1) \\ M_0(t, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 p & \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 (1 - q) \\ (1 - p) \hat{\alpha}_0 & q \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0(t-1, 1) \\ M_0(t-1, 0) \end{bmatrix} = \hat{\alpha}_0 B \begin{bmatrix} M_0(t-1, 1) \\ M_0(t-1, 0) \end{bmatrix}$$

Για λόγους συντομίας ονομάζουμε  $B$  τον πίνακα των συντελεστών, οπότε κι έχουμε

$$B \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 p & \hat{\alpha}_1 (1 - q) \\ (1 - p) & q \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι  $M_0(0, s) = P_0[S_0 = s]$ , για  $s = 0, 1$  έχουμε ότι η παραπάνω εξίσωση αποτελεί λύση της

$$\begin{bmatrix} M_0(t, 1) \\ M_0(t, 0) \end{bmatrix} = \hat{\alpha}_0^t B^t \begin{bmatrix} \pi_0 \\ 1 - \pi_0 \end{bmatrix}$$

Επίσης λύνοντας την  $|μΙ + Β| = 0$  έχουμε τις ρίζες  $μ_1, μ_2$  για τις οποίες ισχύει

$$μ_1 + μ_2 = q + \hat{\alpha}_1 p \text{ και } μ_1 μ_2 = \hat{\alpha}_1 (1 + p + q).$$

Ορίζοντας λοιπόν  $B^t = T \begin{bmatrix} μ_1^t & 0 \\ 0 & μ_2^t \end{bmatrix} T^{-1}$ ,  $T = \begin{bmatrix} (μ_1 - q) & (μ_2 - q) \\ (1 - p) & (1 - p) \end{bmatrix}$  και

$$T^{-1} = \frac{1}{(μ_1 - μ_2)(1 - p)} \begin{bmatrix} (1 - p) & (q - μ_2) \\ -(1 - p) & (μ_1 - q) \end{bmatrix}, \text{ τότε η αναμενόμενη τιμή του επιπέδου μιας σειράς}$$

που ακολουθεί τάση Markov, είναι της μορφής

$$\begin{aligned} E_0 \hat{N}_t &= \hat{n}_0 [M_0(t, 1) + M_0(t, 0)] \\ &= \hat{n}_0 [1 \quad 1] \hat{\alpha}_0^t B^t [\pi_0 \quad 1 - \pi_0]' = \frac{\hat{n}_0 \hat{\alpha}_0^t \{(k_0 - μ_2) μ_2^t - (k_0 - μ_1) μ_1^t\}}{μ_1 - μ_2} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } k_0 = \left[ \frac{μ_1 μ_2}{\hat{\alpha}_1} \right] [\pi_0 + \hat{\alpha}_1 (1 - \pi_0)] = (-1 + p + q) [\pi_0 + \hat{\alpha}_1 (1 - \pi_0)].$$

Όπως προηγουμένως έτσι και εδώ παρατηρούμε ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος δεν επηρεάζει μακροπρόθεσμα το ρυθμό ανάπτυξης αφού

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0 \hat{N}_{t+1}}{E_0 \hat{N}_t} = \hat{\alpha}_0 μ_1.$$

Ωστόσο κάθε αλλαγή στην επικρατούσα κατάσταση έχει επηρεάζει σημαντικά τις εκάστοτε εκτιμήσεις για το επίπεδο  $N_t$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{\hat{N}_t | \pi_0 = \mathbf{1}\}}{\{\hat{N}_t | \pi_0 = \mathbf{0}\}} = \frac{μ_1 - (-1 + p + q)}{μ_1 - \hat{\alpha}_1 (-1 + p + q)}$$

Η προεξοφλημένη παρούσα αξία είναι

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \hat{N}_t = \frac{\hat{n}_0 (1 - k_0 \beta \hat{\alpha}_0)}{1 - \beta \hat{\alpha}_0 (p \hat{\alpha}_1 + q) + (\beta \hat{\alpha}_0)^2 (-1 + p + q) \hat{\alpha}_1}$$

όπου  $\beta$ : ο συντελεστής προεξόφλησης.

### 4.2.2. Στοχαστικό μοντέλο

Στη θεωρία του ο Hamilton (1989)<sup>45</sup> μελετά τον τρόπο κατά τον οποίο μπορούμε να συνδυάσουμε την τάση  $\mathbf{n}_t$  με κάποια άλλη στοχαστική διαδικασία. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη χρονοσειρά  $\{\tilde{\mathbf{y}}_t\}$  για την οποία διαθέτουμε παρατηρήσεις. Η  $\tilde{\mathbf{y}}_t$  είναι της μορφής

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{n}_t + \tilde{\mathbf{z}}_t$$

όπου  $\mathbf{n}_t = \alpha_1 \mathbf{s}_t + \alpha_0 + \mathbf{n}_{t-1}$ , για την οποία ισχύουν οι πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}$  όπως αυτές περιγράφονται στην προηγούμενη ενότητα. Δεχόμαστε επίσης ότι η χρονοσειρά  $\tilde{\mathbf{z}}_t$  ακολουθεί μια μηδενικού μέσου διαδικασία ARIMA( $r, 1, 0$ ), τέτοια ώστε

$$\tilde{\mathbf{z}}_t - \tilde{\mathbf{z}}_{t-1} = \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{\mathbf{z}}_{t-1} - \tilde{\mathbf{z}}_{t-2}) + \boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{\mathbf{z}}_{t-2} - \tilde{\mathbf{z}}_{t-3}) + \dots + \boldsymbol{\varphi}_r(\tilde{\mathbf{z}}_{t-r} - \tilde{\mathbf{z}}_{t-r-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

όπου  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  είναι μια i.i.d. ακολουθία με κανονική κατανομή  $N(0, \sigma^2)$ , ανεξάρτητη από τη  $\{n_{t+j}\}$  για κάθε  $j$ .

Αν για τις παραπάνω μεταβλητές θέσουμε  $\mathbf{y}_t = \tilde{\mathbf{y}}_t - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1}$  και  $\mathbf{z}_t = \tilde{\mathbf{z}}_t - \tilde{\mathbf{z}}_{t-1}$ . Τότε για τις  $\mathbf{y}_t$  και  $\mathbf{z}_t$  έχουμε ότι

$$\mathbf{y}_t = \alpha_1 \mathbf{s}_t + \alpha_0 + \mathbf{z}_t,$$

όπου  $\mathbf{s}_t$ : η κατάσταση της οικονομίας,  $\mathbf{z}_t$ : μια στάσιμη τυχαία διαδικασία μηδενικού μέσου, ανεξάρτητη από την  $\mathbf{s}_t$  και  $\alpha_1, \alpha_0$ : παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν.

Τότε η  $\mathbf{z}_t$  μπορεί να απεικονιστεί από ένα AR( $r$ ) μοντέλο της μορφής

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\varphi}_2 \mathbf{z}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\varphi}_r \mathbf{z}_{t-r} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

όπου  $(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_r)$ : οι συντελεστές στέρισης και  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ : μια i.i.d. ακολουθία καταλοίπων.

#### 4.2.2.1. Φίλτρο και εξομαλυντής

---

<sup>45</sup>Hamilton, J., 1989. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 357- 384.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη χρήση του φίλτρου και του εξομαλυντή στη παραγωγή δεδομένων μέσω της αλληλεπίδρασης μιας μη γραμμικής και μιας γραμμικής τάσης. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή το φιλτράρισμα είναι μια διαδικασία με την οποία μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε τη μεταβλητή  $s_t$ , δεδομένων των παρατηρήσεων για την  $y_t$ .

Το βασικό φίλτρο δέχεται ως δεδομένο την από κοινού δεσμευμένη πιθανότητα

$$P[\mathcal{S}_{t-1} = s_{t-1}, \mathcal{S}_{t-2} = s_{t-2}, \dots, \mathcal{S}_{t-r} = s_{t-r} | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}]$$

από την οποία παράγει την

$$P[\mathcal{S}_t = s_t, \mathcal{S}_{t-1} = s_{t-1}, \dots, \mathcal{S}_{t-r+1} = s_{t-r+1} | \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}]$$

καθώς και τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανοφάνειας για την  $y_t$

$$f(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1})$$

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι οι συμβολισμοί  $[s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-r+1}]$  αναφέρονται στις πιο πρόσφατες τιμές του  $s$ , ενώ οι  $[\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}]$  αναφέρονται στο σύνολο των παρατηρηθείσων τιμών της  $y$  μέχρι το χρόνο  $t$ . Επίσης η παραγόμενη συνάρτηση αποτελεί ένα διάνυσμα με  $2^r$  στοιχεία, των οποίων οι πιθανότητες αθροίζουν στη μονάδα.

Έχοντας υπολογίσει την  $f(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1})$  μπορούμε πλέον να εκτιμήσουμε το λογάριθμο της δειγματικής δεσμευμένης πιθανοφάνειας ως

$$\log f(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_{T-1}, \mathbf{y}_{T-2}, \dots, \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}) = \sum_{t=1}^T \log f(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1})$$

και συνέχεια να την μεγιστοποιήσουμε ως προς  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_r)$ .

Ο μέγιστος εκτιμητής  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  χρησιμοποιείται στη συνέχεια για ένα τελευταίο πέρασμα από το φίλτρο από το οποίο και παράγονται πιθανοτικά συμπεράσματα για το  $\mathbf{s}$ .

Η περίπτωση ύπαρξης περισσότερων των 2 καταστάσεων αποτελεί γενίκευση του παραπάνω φίλτρου κατά την οποία το διάνυσμα αποτελείται από  $n^2$  στοιχεία και τα αθροίσματα που αναφερθήκαμε θα είναι στο  $(0, n-1)$  αντί του  $(0,1)$  που είχαμε προηγουμένως. Η χρήση του φίλτρου μπορεί επίσης να γενικευθεί αν θεωρήσουμε τις αυτοπαλίνδρομες παραμέτρους  $(\boldsymbol{\varphi})$  ως

συνάρτηση του συστήματος, αν δηλαδή αντί για  $\varphi_j$  θα είχαμε για παράδειγμα  $\varphi_j(S_t)$ . Το ίδιο μπορεί να συμβεί και με την τυπική απόκλιση  $\sigma(S_t)$

Αφού ολοκληρώσουμε το φιλτράρισμα συνεχίζουμε με την εξομάλυνση (smoothing) των εκτιμήσεων. Η εξομάλυνση στηρίζεται στη χρήση των πιο πρόσφατων περιόδων για την διεξαγωγή συμπερασμάτων για την  $s$ . Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να εξάγει πιο αξιόπιστα συμπεράσματα για την υστέρηση της  $s$ .

Μια από τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την εξομάλυνση είναι ο εξομαλυντής  $r$ -στερήσεων ( $r$ -lagged smoother). Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται με σκοπό τη διεξαγωγή συμπερασμάτων για την κατάσταση  $s_t$ , και στηρίζεται στον υπολογισμό της πιθανότητας

$$P[S_{t-r+1} = s_{t-r+1} | \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}],$$

ως το άθροισμα των  $s_{t-j}$  στο  $(0,1)$  για  $j = 1, 2, \dots, r-1$  της συνάρτησης

$$P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}]$$

την οποία έχουμε υπολογίσει παραπάνω.

Έχουμε δηλαδή ότι

$$\begin{aligned} P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}] \\ = \sum_{\substack{j=1, \dots, r-1 \\ s_{t-j}=0}}^1 P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}] \end{aligned}$$

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι ο εξομαλυντής πλήρους δείγματος (full-sample smoother), όπου για τους υπολογισμούς μας εισάγουμε ως δεδομένο για το βασικό φίλτρο μία διαφορετική συνάρτηση από αυτή που χρησιμοποιήσαμε προτούτερα.

Η αρχική μας συνάρτηση είναι η

$$\begin{aligned} P[S_{t-1} = s_{t-1}, S_{t-2} = s_{t-2}, \dots, S_{t-r} \\ = s_{t-r} | S_t = \hat{s}_t, S_{t-1} = \hat{s}_{t-1}, \dots, S_{t-r+1} = \hat{s}_{t-r+1}, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_{-r+1}] \end{aligned}$$

Για  $\tau < t - 1$  και για το διάνυσμα τιμών  $(\hat{s}_\tau, \hat{s}_{\tau-1}, \dots, \hat{s}_{\tau-r+1})$ . Εκτελώντας ξανά τα βήματα του βασικού φίλτρου μπορούμε να υπολογίσουμε την

$$P[\mathcal{S}_t = \mathbf{s}_t, \mathcal{S}_{t-1} = \mathbf{s}_{t-1}, \dots, \mathcal{S}_{t-r} = \mathbf{s}_{t-r} | \mathcal{S}_\tau = \hat{\mathbf{s}}_\tau, \mathcal{S}_{\tau-1} = \hat{\mathbf{s}}_{\tau-1}, \dots, \mathcal{S}_{\tau-r+1} = \hat{\mathbf{s}}_{\tau-r+1}, \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_{\tau-r+1}]$$

Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός της μέγιστης διάρκειας της ύφεσης, γεγονός που μας επιτρέπει τη σύγκριση του μεγέθους της τον ιστορικό μέσο και τη διεξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Δεδομένου λοιπόν, ότι βρισκόμαστε στη κατάσταση 0, η αναμενόμενη διάρκεια της ύφεσης είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k(1-q) = (1-q)^{-1}$$

Ομοίως η αναμενόμενη διάρκεια της περιόδου ανάπτυξης ισούται με  $(1-p)^{-1}$

Τα αποτελέσματα και οι εκτιμήσεις που παίρνουμε από την εφαρμογή του φίλτρου και του εξομαλυντή πλησιάζουν αρκετά αυτά των συμβατικών μεθόδων χρονολόγησης των επιχειρηματικών κύκλων. Για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα για την χρονολόγησή τους.

### 4.3. Αλγόριθμος METROPOLIS-HASTINGS & δειγματολήπτης GIBBS

Οι MCMC μέθοδοι, και ειδικότερα ο δειγματολήπτης Gibbs, συνέβαλαν καθοριστικά στην εξάπλωση της χρήσης της Μπεϋζιανής ανάλυσης, καθιστώντας εύκολο τον υπολογισμό σύνθετων και πολυδιάστατων συναρτήσεων. Τα πρώτα βήματα έγιναν με τον αλγόριθμο Metropolis–Hastings (M-H algorithm), ο οποίος ήταν αποτέλεσμα της προσπάθειας των μαθηματικών να ολοκληρώσουν σύνθετες συναρτήσεις μέσω της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό, βασικός μας στόχος είναι να επιλέξουμε δείγματα από μια σύνθετη κατανομή  $p(\theta)$ , όπου

$$p(\theta) = f(\theta) | \mathbf{K}$$

όπου  $K$ : μια σταθερά κανονικοποίησης, όχι απαραίτητα γνωστή και δύσκολη να υπολογιστεί. Ο αλγόριθμος Metropolis (M algorithm) δημιουργεί μια ακολουθία κληρώσεων από την  $p(\theta)$  ως εξής:

1. Ξεκινάμε από οποιαδήποτε αρχική τιμή  $\theta_0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f(\theta_0) > 0$ .
2. Χρησιμοποιώντας πιο πρόσφατη τιμή  $\theta$ , επιλέγουμε ένα υποψήφιο σημείο  $\theta^*$ , μέσω μιας συνάρτησης άλματος  $q(\theta_1, \theta_2)$ , η οποία μας δίνει την πιθανότητα να πάρουμε την τιμή  $\theta_2$ , δεδομένης της προηγούμενης τιμής  $\theta_1$ . Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται και γεννήτρια συνάρτηση υποψηφίων σημείων ή συνάρτηση πρότασης. Ο μόνος περιορισμός που έχουμε σε αυτό το σημείο είναι ότι η συνάρτηση άλματος πρέπει να είναι συμμετρική δηλαδή  $q(\theta_1, \theta_2) = q(\theta_2, \theta_1)$ .
3. Δεδομένου του σημείου  $\theta^*$ , υπολογίζουμε το λόγο<sup>46</sup> της σ.π.π στο υποψήφιο ( $\theta^*$ ) προς το τρέχον ( $\theta_{t-1}$ ).

$$\alpha = \frac{p(\theta^*)}{p(\theta_{t-1})} = \frac{f(\theta^*)}{f(\theta_{t-1})}$$

4. Αν  $\alpha > 1$ , δεχόμαστε το υποψήφιο σημείο  $\theta^*$ , δηλαδή  $\theta_t = \theta^*$  κι επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα. Αν όμως  $\alpha < 1$ , τότε δεχόμαστε το  $\theta^*$  με πιθανότητα  $\alpha$ , διαφορετικά το απορρίπτουμε και επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι ξεκινάμε υπολογίζοντας τη πιθανότητα να συμβεί η κίνηση

$$\alpha = \min\left(\frac{f(\theta^*)}{f(\theta_{t-1})}, 1\right)$$

και στη αποδεχόμαστε το  $\theta^*$ , με πιθανότητα  $\alpha$ . Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή δημιουργείται μια αλυσίδα Markov  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$ , αφού οι πιθανότητα μετάβασης από το σημείο  $\theta_t$  στο σημείο  $\theta_{t+1}$  εξαρτάται μόνο από την πιο πρόσφατη τιμή  $\theta_t$ , και όχι από τις προηγούμενες τιμές  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{t-1})$ . Μετά από  $k$  βήματα η αλυσίδα προσεγγίζει μια στάσιμη κατανομή, και τότε τα δείγματα του διανύσματος  $(\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \dots, \theta_{k+n})$  είναι δείγματα από την  $p(x)$ .

Εν συνεχεία ο Hastings γενίκευσε τον αλγόριθμο του Metropolis χρησιμοποιώντας μια αυθαίρετη μεταβατική συνάρτηση πιθανότητας

<sup>46</sup> Αφού υπολογίζουμε τον λόγο της  $p(x)$ , η σταθερά κανονικοποίησης  $K$  απαλείφεται.



$$q(\theta_1, \theta_2) = P(\theta_1 \rightarrow \theta_2)^{47}$$

και ορίζοντας την πιθανότητα να αποδεχτούμε το υπονήφιο σημείο ως

$$\alpha = \min\left(\frac{f(\theta^*) q(\theta^*, \theta_{t-1})}{f(\theta_{t-1}) q(\theta_{t-1}, \theta^*)}, 1\right)$$

Αυτός είναι ο **αλγόριθμος Metropolis- Hastings**.

Ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει αφορά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε η αλυσίδα Markov να συγκλίνει σε μια στάσιμη κατανομή. Τυπικά μετά 1000- 5000 βήματα μπορούμε εκτιμήσουμε αν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση, χρησιμοποιώντας κάποιο από τα πολλά τεστ σύγκλισης. Επίσης, μια κακή επιλογή είτε των αρχικών τιμών  $\theta_0$ , είτε της γεννήτριας συνάρτησης υπονήφιων σημείων θα μπορούσε να οδηγήσει στην αύξηση του απαιτούμενου χρόνου της δοκιμαστικής περιόδου. Υπάρχει δηλαδή η ανάγκη εύρεσης της βέλτιστης αρχικής τιμής ή γεννήτριας συνάρτησης.

Για την επιλογή της βέλτιστης συνάρτησης άλματος ακολουθούνται οι προσεγγίσεις του Τυχαίου Περιπάτου και της Ανεξάρτητης Αλυσίδας. Σύμφωνα με τη προσέγγιση του Τυχαίου Περιπάτου, η νέα τιμή  $y$  ισούται με την τωρινή τιμή  $x$  συν μια τυχαία μεταβλητή  $z$ .

$$y = x + z$$

Τότε έχουμε ότι

$$q(x, y) = g(y - x) = g(z)$$

όπου  $g(z)$ : η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.  $z$ .

Αν η  $g(z)$  είναι συμμετρική, δηλαδή  $g(z) = g(-z)$ , τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Metropolis ως

$$\frac{q(x, y)}{q(y, x)} = \frac{g(z)}{g(-z)} = 1$$

Η διακύμανση της γεννήτριας συνάρτησης μπορεί να προσαρμοστεί κατάλληλα έτσι ώστε να έχουμε καλύτερη μίξη<sup>48</sup>, και συνεπώς μεγαλύτερη πιθανότητα αποδοχής του  $\theta^*$ . Η προσαρμογή

<sup>47</sup> Η συνάρτηση αυτή είναι συμμετρική, όπως και προηγουμένως. Ωστόσο, να πιθανόν να χρειαστεί να υιοθετήσουμε μια μη συμμετρική κατανομή, ώστε να έχουμε καλή μίξη.

<sup>48</sup> Μια αλυσίδα καλής μίξης περιφέρεται στο παραμετρικό χώρο, ενώ μια κακής μίξης όταν παραμένει για μεγάλο χρονικό διάστημα σε μικρές περιοχές του χώρου αυτού

της διακύμανσης γίνεται μέσω της προσαρμογής της τυπικής απόκλισης<sup>49</sup>. Βάσει λοιπόν της υπόθεσης της ανεξαρτησίας της αλυσίδας, η πιθανότητα να περάσουμε στο σημείο  $y$  είναι ανεξάρτητη από την τωρινή θέση  $x$  της αλυσίδας, δηλαδή

$$q(x, y) = g(y)$$

Στη περίπτωση αυτή όμως η γεννήτρια συνάρτηση  $g(x)$ , δεν είναι απαραίτητο να είναι συμμετρική οπότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμός των Metropolis και Hastings.

Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης άλματος πρέπει να γίνει με προσοχή αφού αν η τυπική απόκλιση είναι πολύ μεγάλη, τότε οι κινήσεις είναι πολύ μεγάλες με αποτέλεσμα η πιθανότητα αποδοχής να μειώνεται, να δημιουργούνται υψηλές αυτοσυσχετίσεις και να έχουμε πολύ κακή μίξη της αλυσίδας. Αντίθετα αν η τυπική απόκλιση είναι πολύ μικρή, με αποτέλεσμα οι κινήσεις να έχουν μεν υψηλή πιθανότητα αποδοχής αλλά να παραμένουν πολύ μικρές δημιουργώντας και πάλι μεγάλες αυτοσυσχετίσεις και κακή μίξη.

#### 4.3.1. Ο δειγματολήπτης Gibbs

Ο δειγματολήπτης του Gibbs, πρωτοσυστάθηκε από τους Geman and Geman<sup>50</sup> (1984), και αποτελεί ειδική περίπτωση του M-H αλγόριθμου, όπου η τυχαία μεταβλητή είναι πάντα αποδεκτή, δηλαδή  $\alpha = 1$ . Σύμφωνα με τον δειγματολήπτη του Gibbs υποθέτουμε ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι μια μονομετάβλητη δεσμευμένη κατανομή. Τέτοιες δεσμευμένες κατανομές<sup>51</sup> είναι πιο εύκολες στη προσομοίωσή τους από τις σύνθετες από κοινού κατανομές. Αντί λοιπόν να δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα  $n$ -διαστάσεων με ένα μόνο πέρασμα χρησιμοποιώντας μια από κοινού κατανομή, προσομοιώνουμε  $n$  τυχαίες μεταβλητές από τις  $n$  δεσμευμένες κατανομές.

---

<sup>49</sup> Για να αυξήσουμε την πιθανότητα αποδοχής πρέπει, να μειώσουμε την τυπική απόκλιση της γεννήτριας συνάρτησης. Για παράδειγμα στη κανονική κατανομή ρυθμίζουμε την διακύμανση, στην ομοιόμορφη αυξάνουμε ή μειώνουμε το εύρος τιμών  $(\alpha, -\alpha)$ , ενώ στην  $\chi^2$  αυξάνουμε ή μειώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας.

<sup>50</sup> Οι Geman and Geman, ασχολήθηκαν με τα ανάλυση μοντέλων απεικόνισης. Εκτενής αναφορά για τον δειγματολήπτη Gibbs γίνεται στην εργασία τους Geman S. and Geman D. 1984. "Stochastic relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images". *IEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6: 721- 741.

<sup>51</sup> Όπως είναι η Κανονική και η αντίστροφη  $\chi^2$ .

Υποθέτουμε λοιπόν μια διμετάβλητη τυχαία μεταβλητή  $(x, y)$  της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας  $p(x)$  και  $p(y)$ . Σε αυτή τη περίπτωση είναι ευκολότερο δημιουργήσουμε την ακολουθία των δεσμευμένων  $p(x|y)$  και  $p(y|x)$ , από το να υπολογίσουμε τις περιθώριες σ.π.π. ολοκληρώνοντας την από κοινού  $p(x, y)$ , δηλαδή

$$p(x) = \int p(x, y) dy.$$

Ο δειγματολήπτης ξεκινά με μια αρχική τιμή  $y_0$  για την  $y$  και στη συνέχεια υπολογίζει την  $p(x|y = y_0)$  από η οποία μας δίνει την  $x_0$ . Έπειτα χρησιμοποιεί την  $x_0$  για να υπολογίσει την  $p(y|x = x_0)$  από την οποία παίρνουμε την  $y_1$ . Έχουμε δηλαδή

$$x_i \sim p(x|y = y_i)$$

$$y_i \sim p(y|x = x_{i-1})$$

Μετά από  $k$  επαναλήψεις της παραπάνω διαδικασίας δημιουργείται μια **ακολουθία Gibbs μήκους  $k$** , όπου τα σημεία  $(x_j, y_j)$ , για  $1 \leq j \leq m < k$ , θεωρούνται οι προσομοιωμένες κληρώσεις από της από κοινού κατανομής.<sup>52</sup>

Παρατηρούμε ότι οι αρχικές τιμές τις αλυσίδας εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την  $y_0$  με την οποία επιλέξαμε να ξεκινήσουμε την αλυσίδα μας. Ωστόσο η εξάρτηση αυτή γίνεται όλο και μικρότερη όσο το μήκος της αλυσίδας μεγαλώνει. Για το λόγο αυτό η καταγραφή της ακολουθίας ξεκινά είτε μετά από ένα ικανοποιητικό χρονικό διάστημα δοκιμών ώστε να εξαλειφθούν οι επιδράσεις των αρχικών τιμών, είτε επιλέγοντας προκαθορισμένα διαστήματα π.χ. κάθε  $n$  δείγματα τα οποία έπονται της δοκιμαστικής περιόδου. Εν τέλει ο δειγματολήπτης συγκλίνει σε μια στάσιμη κατανομή<sup>53</sup> ανεξάρτητη από τις αρχικές τιμές, η οποία είναι και η κατανομή που θέλουμε να προσομοιώσουμε,

Γενίκευση της αρχικής μορφής του δειγματολήπτη αποτελεί η περίπτωση όπου έχουμε περισσότερες των δύο μεταβλητών, δηλαδή

$$p(\theta^{(k)} | \theta^{(-k)})$$

όπου  $\theta^{(-k)}$ : το διάνυσμα των όλων παραμέτρων εξαιρουμένης της παραμέτρου  $k$ . Τότε κατά την  $i$ -επανάληψη η κατανομή που μας δίνει την  $\theta_i^{(k)}$  είναι της μορφής

<sup>52</sup> Μια επανάληψη όλων των μονομετάβλητων κατανομών ονομάζεται **σάρωση** του δειγματολήπτη.

<sup>53</sup> Η κατανομή αυτή είναι γνωστή και ως *κατανομή ισορροπίας*.

$$\theta_i^{(k)} \sim p(\theta^{(k)} | \theta^{(1)} = \theta_i^{(1)}, \dots, \theta^{(k-1)} = \theta_i^{(k-1)}, \theta^{(k+1)} = \theta_{i-1}^{(k+1)}, \dots, \theta^{(n)} = \theta_{i-1}^{(n)})$$

Για παράδειγμα αν έχω τέσσερις μεταβλητές  $(\omega, x, y, z)$ , τότε ο δειγματολήπτης γίνεται

$$\omega_i \sim p(\omega | x = x_{i-1}, y = y_{i-1}, z = z_{i-1})$$

$$x_i \sim p(x | \omega = \omega_i, y = y_{i-1}, z = z_{i-1})$$

$$y_i \sim p(y | \omega = \omega_i, x = x_{i-1}, z = z_{i-1})$$

$$z_i \sim p(z | \omega = \omega_i, x = x_{i-1}, y = y_{i-1})$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές των περιθωρίων συναρτήσεων μέσω των  $m$  πραγματοποιήσεων της ακολουθίας του Gibbs. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσεγγίσουμε την αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης  $f$  μιας τυχαίας μεταβλητής  $x$  αφού

$$E[f(x)]_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i)$$

όπου για  $m \rightarrow \infty$  έχουμε  $E[f(x)]_m \rightarrow E[f(x)]$ , οποία είναι η **Monte Carlo εκτιμήτρια** της  $f(x)$ . Αντίστοιχα, στη γενικευμένη περίπτωση που έχω μια συνάρτηση  $n$  μεταβλητών  $(\theta_i^{(1)}, \dots, \theta_i^{(n)})$  τότε η Monte Carlo εκτιμήτρια δίνεται από τη σχέση

$$E[f(\theta_i^{(1)}, \dots, \theta_i^{(n)})]_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(\theta_i^{(1)}, \dots, \theta_i^{(n)})$$

Επίσης υπολογίζοντας την

$$E[f(x^2)]_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i^2)$$

μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε και τη διακύμανση ως  $E[f(x^2)] - (E[f(x)])^2$ .

Ενώ όμως ο υπολογισμός των ροπών γίνεται εύκολα μέσω των ανεξάρτητων  $m$  πραγματοποιήσεων, το ίδιο δεν συμβαίνει και για τον προσδιορισμό της περιθώριας συνάρτησης της  $x$ . Στη περίπτωση αυτή είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε τον μέσο των δεσμευμένων σ.π.π.  $p(x|y = y_i)$ , καθώς αποκομίζουμε περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μορφή της κατανομής<sup>54</sup>.

<sup>54</sup> Στη περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία Gibbs των  $x_i$ , τότε θα λάβουμε επαρκείς πληροφορίες μόνο για την ουρές των κατανομών.

$$p(x) = \int p(x|y) p(y) dy = E_y[p(x|y)]$$

Τότε η κατά προσέγγιση σ.π.π. των  $m$  επαναλήψεων είναι

$$\hat{p}_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p(x|y = y_i)$$

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και ο υπολογισμός της διακύμανσης της MC εκτιμήτριας που προσδιορίσαμε μέσω του δειγματολήπτη Gibbs. Υποθέτουμε λοιπόν μια ακολουθία του Gibbs  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  για να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση  $h(\theta)$ , η οποία περιγράφει κάποιο από τα χαρακτηριστικά (μέσος, διάμεσος, τεταρτημόριο) της κατανομής στην οποία στοχεύουμε. Η δειγματική διακύμανση που υπάρχει, εφόσον επιλέγουμε τυχαίες μεταβλητές, και σχετίζεται με την MC εκτιμήτρια, εκφράζεται ως

$$\hat{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\theta_i)$$

Ένας τρόπος να μειώσουμε τη δειγματική διακύμανση της  $\hat{h}$  είναι να αυξήσουμε το μήκος της αλυσίδας. Προϋπόθεση αυτού όμως είναι να βρεθούν τρόποι μέτρησης της διακύμανσης αυτής. Μια μέθοδος είναι να τρέξουμε ταυτόχρονα  $m$  αλυσίδες ίδιου μήκους, και στη συνέχεια να μετρήσουμε την διακύμανση μεταξύ των αλυσίδων αυτών. Αν υποθέσουμε ότι  $\hat{h}_j$  είναι η διακύμανση της  $j$  αλυσίδας, όπου  $1 \leq j \leq m$ , τότε η διακύμανση της MC εκτιμήτριας είναι

$$Var(\hat{h}_j) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\hat{h}_j - \hat{h}^*)^2$$

$$\text{όπου } \hat{h}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{h}_j.$$

Η δεύτερη μέθοδος συνίσταται στην εκτίμηση της αυτοσυνδιακύμανσης της  $k$  υστέρησης, που σχετίζεται με την  $h$ . Αυτή δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} [(h(\theta_i) - \hat{h})(h(\theta_{i+k}) - \hat{h})]$$

Τότε η διακύμανση της  $\hat{h}$  δίνεται από τον τύπο

$$Var(\hat{h}) = \frac{1}{n} (\hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{i=1}^{2\delta+1} \hat{\gamma}(1))$$

όπου  $\delta$ : ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την εξίσωση  $\hat{\gamma}(2\delta) + \hat{\gamma}(2\delta + 1) > 0$  που σημαίνει ότι οι αυτοσυνδιακυμάνσεις των υστερήσεων των υψηλότερων τάξεων είναι μηδενικές.

Ένας τρόπος να εκτιμήσουμε την επίδραση των αυτοσυσχετίσεων των στοιχείων του δειγματολήπτη είναι ο υπολογισμός του αποτελεσματικού μεγέθους  $\hat{n}$  της αλυσίδας, που ισούται με

$$\hat{n} = \frac{\hat{\gamma}(\mathbf{0})}{\text{Var}(\hat{h})}$$

Στη περίπτωση που δεν υπάρχουν αυτοσυσχετίσεις τότε  $\hat{n} = n$ .

Ένας τρόπος να διαπιστώσουμε αν η ακολουθία Gibbs συγκλίνει στην επιθυμητή κατανομή, προτάθηκε από τον Tanner (1991), και είναι η μέθοδος **Gibbs Stopper**. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή τα βάρη που προκύπτουν από την σύγκριση του δειγματολήπτη Gibbs και της επιθυμητής κατανομής, υπολογίζονται και σχεδιάζονται ως συνάρτηση του αριθμού των επαναλήψεων. Τότε όσο ο δειγματολήπτης πλησιάζει την στάσιμη κατανομή, η κατανομή των βαρών αναμένεται να αυξηθεί κατακόρυφα. Επίσης οι Gelfand and Smith (1990), πρότειναν τη δημιουργία  $m$  ανεξάρτητων ακολουθιών Gibbs, μήκους  $k$ , και επιλέγοντας το  $k$  εκείνο ως το πρώτο σημείο όπου οι πυκνότητες καθεμιάς από τις  $m$  ακολουθίες είναι ίδιες.

Παρατηρούμε ότι η χρησιμότητα του δειγματολήπτη Gibbs αυξάνεται όσο αυξάνονται και οι διαστάσεις ενός προβλήματος, αφού επιτρέπει μαθηματικούς υπολογισμούς που σε διαφορετική περίπτωση θα ήταν απαγορευτικοί. Έτσι, ο υπολογισμός σύνθετων ολοκληρωμάτων έχει πλέον αντικατασταθεί από την δημιουργία μιας σειράς μονοδιάστατων τυχαίων μεταβλητών που είναι πιο εύκολο να εκτιμηθεί. Για το λόγο αυτό βρίσκει πρακτικής εφαρμογής και σε άλλα γνωστικά πεδία, όπως τα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα, τα οποία θα αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα.

#### 4.4. Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα

Η θεωρία των Γενικευμένων Γραμμικών Μοντέλων (Generalized Linear Models) αναπτύχθηκε σε μια προσπάθεια να μελετήσουμε μια ευρεία ομάδα στατιστικών μοντέλων, όπως το γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης και άλλα πιθανοτικά μοντέλα, τα οποία παρουσιάζουν όμοια χαρακτηριστικά. Αποτελούν μια γενίκευση του κλασσικού γραμμικού μοντέλου, όπως

αυτό αναπτύχθηκε από τους Gauss<sup>55</sup> και Legendre<sup>56</sup>, και συνίσταται από μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης, ανάλυσης διακύμανσης, πολυωνυμικά μοντέλα απόκρισης καθώς και κάποια μοντέλα επιβίωσης. Οι κοινές ιδιότητες των παραπάνω μοντέλων, όπως η γραμμικότητα και η εφαρμογή κοινής μεθοδολογίας για την εκτίμηση των παραμέτρων, μας επέτρεψαν να μελετήσουμε τα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα ως μια ξεχωριστή κατηγορία.

Το **κλασσικό γραμμικό μοντέλο**, που είναι τη μορφής

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

όπου  $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)^T$  είναι το  $n \times 1$  διάνυσμα στήλης των παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής και  $X$  είναι ο  $n \times p$  πίνακας των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών, όπου κάθε γραμμή αφορά τις παρατηρήσεις για κάθε μεταβλητή και κάθε στήλη αφορά μια διαφορετική ανεξάρτητη μεταβλητή. Το  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_p)^T$  είναι το  $p \times 1$  διάνυσμα στήλης των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν και  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T$  το  $n \times 1$  διάνυσμα στήλης των καταλοίπων.

Αν υποθέσουμε ότι το διάνυσμα των παρατηρήσεων  $y$  αποτελείται από  $n$  το πλήθος συνιστώσες, είναι οι πραγματοποιήσεις μιας τ.μ.  $Y$ , της οποίας η συνιστώσες  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ανεξάρτητα κατανομημένες με μέσο  $\mu$ , τότε έχουμε ότι

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^p x_j \boldsymbol{\beta}_j$$

Καταλήγουμε δηλαδή ότι ένα κλασσικό γραμμικό μοντέλο αναλύεται σε τρία μέρη

1. το **στοχαστικό συντελεστή**: Οι συνιστώσες της  $Y$  ακολουθούν Κανονική Κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ .
2. το **συστηματικό συντελεστή**: που περιλαμβάνει τις συμμεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , οι οποίες σχηματίζουν την **γραμμική παράμετρο πρόβλεψης  $\eta$**  όπου

<sup>55</sup> Ο Gauss ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τη Κανονική κατανομή των καταλοίπων ως μέτρο μεταβλητότητας και απέδειξε ότι οι ιδιότητες της εκτιμήτριας ελαχίστων τετραγώνων εξαρτώνται κατά βάσει από τις υποθέσεις της σταθερής διακύμανσης και της ανεξαρτησίας.

<sup>56</sup> Χρησιμοποιώντας αστρονομικά δεδομένα, κατάφεραν να αποδείξουν ότι οι μεταβλητότητα στις παρατηρήσεις ήταν κατά κύριο λόγο έμμεσο αποτέλεσμα λανθασμένων μετρήσεων

$$\eta = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

3. τη *σύνδεση* μεταξύ του στοχαστικού και του συστηματικού συντελεστή

$$\mu = \eta$$

Τα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα αποτελούν επεκτάσεις των κλασικών γραμμικών μοντέλων οι οποίες αφορούν το στοχαστικό συντελεστή και τη σύνδεση μεταξύ των δύο συντελεστών. Σύμφωνα με τους McCullagh και Nelder<sup>57</sup> (McCullagh & Nelder, 1989) η βασική αρχή που διέπει τη θεωρία των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων είναι ότι ο συστηματικός συντελεστής του γραμμικού μοντέλου μπορεί να μετασχηματιστεί, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό ένα πλαίσιο ανάλυσης, παρόμοιο με αυτό του κλασικού μοντέλου, που θα μπορεί να συμπεριλάβει και μη κανονικές εξαρτημένες μεταβλητές. Το κλειδί για να επιτευχθεί αυτό είναι ο προσδιορισμός της συνδετικής συνάρτησης, η οποία θα συνδέει τον συστηματικό συντελεστή  $X\beta$  με το ευρύτερο σύνολο των εξαρτημένων μεταβλητών και των καταλοίπων. Ειδικότερα

1. ο στοχαστικός συντελεστής πλέον μπορεί να προέρχεται από οποιαδήποτε κατανομή ανήκει στην Εκθετική Οικογένεια, συμπεριλαμβανομένης και της Κανονικής. Εξ' ορισμού λοιπόν λέμε ότι μια τ.μ.  $Y$  ανήκει στην Εκθετική Οικογένεια κατανομών όταν η σ.π.π είναι της μορφής

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left[ \sum b_i(\boldsymbol{\theta}) T_i(\mathbf{y}) + c(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{y}) \right]$$

όπου  $b_i$ ,  $T_i$ ,  $c$ ,  $h$  γνωστές κατανομές. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \exp[b(\boldsymbol{\theta})a(\mathbf{y}) + c(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{y})]$$

όπου  $b(\boldsymbol{\theta})$  ονομάζεται **φυσική παράμετρος**. Οι κατανομές που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση είναι η Κανονική, η Εκθετική, η Poisson, η Διωνυμική, η Αρνητική Διωνυμική, η Γάμμα, η Γεωμετρική και η Inverse- Gaussian (Αντίστροφη Κανονική)

2. Επίσης η σύνδεση μεταξύ των δύο συντελεστών γίνεται πλέον μέσω της συνάρτησης  $g(\cdot)$ , δηλαδή

<sup>57</sup> McCullagh, P. and Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*, Great Britain: Cambridge



$$g(\mu_i) = \eta_i$$

$$g(\mu_i) = g(E(Y_i)) = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j = \eta_i$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση σύνδεσης** (link function). Ονομάστηκε έτσι αφού συνδέει τον μέσο  $\mu_i$  των τ.μ.  $Y_i$  με τον γραμμικό συντελεστή  $x_i^T \beta$ , δίνοντας μας έτσι τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε τα Γ.Γ.Μ ακόμα και όταν οι τ.μ.  $Y_i$  να προέρχονται και από άλλες κατανομές εκτός της κανονικής.

Επίσης ισχύει ότι

$$g^{-1}(g(\mu_i)) = g^{-1}(x_i^T \beta) = g^{-1}(\eta_i) = \mu_i = E(Y_i)$$

Μέσω της αντίστροφης συνάρτησης εξασφαλίζεται ότι ο  $x_i^T \hat{\beta}$ , όπου  $\hat{\beta}$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων των παραμέτρων, διατηρεί τις υποθέσεις περί **θεωρήματος Gauss- Markov**<sup>58</sup> περί **γραμμικότητας**.

Παρατηρούμε επίσης ότι ενώ στα κλασσικά γραμμικά μοντέλα ο γραμμικός συντελεστής πρόβλεψης  $\eta$  ισούται με  $\mu$ , τα οποία παίρνουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή στο  $\mathcal{R}$ , στα Γ.Γ.Μ ο  $\mu$  περιορίζεται σε ένα μικρότερο πεδίο, υποσύνολο του  $\mathcal{R}$  οπότε και η συνδετική συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί τους εκάστοτε περιορισμούς. Για παράδειγμα στη Διωνυμική Κατανομή όπου  $0 \leq \mu \leq 1$  πρέπει η συνάρτηση σύνδεσης να ικανοποιεί τη συνθήκη της απεικόνισης των τιμών από το  $[0,1]$  στο  $(-\infty, +\infty)$ .

#### 4.4.1. Διωνυμική κατανομή

Ένας συνηθισμένος τύπος δεδομένων που συναντάμε είναι όταν σε ένα πείραμα έχουμε δύο πιθανά αποτελέσματα ή αποκρίσεις  $Y_i$ . Με τον όρο  $Y_i$  αναφερόμαστε στο αποτέλεσμα της  $i$ -οστής δοκιμής, το οποίο μπορεί να είναι είτε “επιτυχία” δηλαδή  $Y_i = 1$ , είτε “αποτυχία” δηλαδή  $Y_i = 0$ . Οι αντίστοιχες πιθανότητες απόκρισης είναι

<sup>58</sup> Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, σε ένα γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης, στο οποίο τα σφάλματα έχουν αναμενόμενη τιμή μηδέν, είναι ασυσχέτιστα κι έχουν ίσες διακυμάνσεις, η άριστη γραμμική αμερόληπτη εκτιμήτρια των συντελεστών δίνεται από την εκτιμήτρια των ελαχίστων τετραγώνων.

$$P(Y_i = 1) = \pi_i \text{ και } P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε κατανομή της  $Y$  μετά από  $m$  δοκιμές είναι μία Διωνυμική Κατανομή, δηλαδή  $Y \sim \text{Bin}(m, \pi)$  με συνάρτηση κατανομής

$$P(Y = y|m) = \binom{m}{y} \pi^y (1 - \pi)^{m-y}$$

Για να εξετάσουμε τη σχέση της  $\pi$  και του διανύσματος των επεξηγηματικών μεταβλητών  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  είναι χρήσιμο να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο ικανό να περιγράψει την επίδραση κάθε αλλαγής των  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  στην  $\pi$ .

Θεωρούμε λοιπόν ότι η εξάρτηση της  $\pi$  από τα  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  εκφράζεται μέσω ρπου γραμμικού συντελεστή

$$\eta = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

όπου  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  είναι το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων και  $\beta \in (-\infty, +\infty)$ , εκτός κι αν οριστεί διαφορετικά. Τώρα όμως βλέπουμε ότι η παραπάνω σχέση δεν συνάδει με τους νόμους των πιθανοτήτων οπότε πρέπει να οριστεί ένας μετασχηματισμός  $g(\pi)$  ο οποίος απεικονίζει τις τιμές από το  $[0,1]$  στο  $(-\infty, +\infty)$ . Οδηγούμαστε λοιπόν στη περίπτωση των Γ.Γ.Μ., όπου το συστηματικό μέρος είναι

$$g(\pi_i) = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j = \eta_i$$

Τότε οι συνδεδεμένες συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι η Logit, η Probit, και η Log-log

Οι ιδιότητες των δύο πρώτων συναρτήσεων είναι ότι είναι **συμμετρικές** υπό την έννοια ότι  $g_1(\pi) = -g_1(1 - \pi)$ , **συνεχείς**, και **αύξουσες** στο  $[0,1]$ .

#### 4.4.1.1. Logit link

Η λογαριθμική σύνδεση (logit link) ερμηνεύεται ως ο λογάριθμος του λόγου των πιθανοτήτων, εννοώντας ότι για κάθε μια αποτυχία υπάρχουν  $\frac{\pi}{1-\pi}$  επιτυχίες. Η κανονική της συνάρτηση είναι

$$g(\pi) = \eta = \log \frac{\pi}{1-\pi}$$

η οποία ανήκει στο  $[-\infty, +\infty]$  αφού  $0 \leq \pi \leq 1$  οπότε και  $\frac{\pi}{1-\pi} > 0$ . Η αντίστροφη της είναι η

$$g^{-1}(\pi) = \frac{e^{\pi}}{1 + e^{\pi}}$$

Για παράδειγμα ένα γραμμικό λογαριθμικό μοντέλο με δύο συμμεταβλητές  $x_1$  και  $x_2$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\log \frac{\pi}{1-\pi} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

η οποία ερμηνεύεται ως ο λογαριθμικός δείκτης επιτυχίας (log odds). Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε τον δείκτη επιτυχίας

$$\frac{\pi}{1-\pi} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}$$

και την πιθανότητα επιτυχίας

$$\pi = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε μεταβολή του  $x_2$  κατά μια μονάδα συνεπάγεται μεταβολή του λογαριθμικού δείκτη επιτυχίας κατά  $\beta_2$  μονάδες<sup>59</sup>. Προϋπόθεση βέβαια όλων των παραπάνω είναι ότι η  $x_1$  παραμένει σταθερή και δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές της  $x_2$ . Όσον αφορά το μέγεθος της μεταβολής της πιθανότητας  $\pi$  σε κάθε μεταβολή του  $x_2$  κατά μια μονάδα, αυτή εξαρτάται από τις τιμές των  $x_1$  και  $x_2$ . Η μερική παράγωγος της  $\pi$  ως προς  $x_2$  είναι

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \pi(1-\pi)\beta_2$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι μια μικρή μεταβολή της  $x_2$  συνεπάγεται μεγαλύτερη μεταβολή της  $\pi$  όταν για παράδειγμα  $\pi = 0.5$  παρά όταν  $\pi = 0$  ή  $\pi = 1$ .

<sup>59</sup> Αυξάνεται δηλαδή ο δείκτης επιτυχίας, πολλαπλασιαστικά με τον παράγοντα  $e^{\beta_2}$

Γενικότερα η logit link είναι απλή στην εφαρμογή της και η κατ' εξοχήν κατάλληλη για δεδομένα που συλλέγονται αναδρομικά.

#### 4.4.1.2. Probit link

Μια εναλλακτική μέθοδος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όταν η εξαρτημένη μεταβλητή είναι διχοτομημένη είναι και η probit παλινδρόμηση. Σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξαρτημένη μεταβλητή αποτελεί ένδειξη μιας συνεχούς μεταβλητής και αντίστοιχα οι συνεχής μεταβλητή αποτελεί τη βάση για πολλές διχοτομημένες μεταβλητές. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην πρόβλεψη αυτής της συνεχούς μεταβλητής, η οποία ονομάζεται και λανθάνουσα μεταβλητή.

Το μοντέλο μας είναι της μορφής

$$Y^* = B_0 + B_1x$$

όπου  $Y^*$  ορίζεται ως το λανθάνουσα προβλεπόμενη απόκριση.

Αν η υποκείμενη μεταβλητή είναι πραγματικά συνεχής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα κατάλοιπα είναι κανονικά κατανομημένα. Αντί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Διωνυμική αθροιστική συνάρτηση κατανομής, χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση σύνδεσης με βάση την κανονική αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Έχουμε λοιπόν ότι

$$g(\pi) = \Phi^{-1}(\pi)$$

Και με αντίστροφη συνάρτηση σύνδεσης τη  $\Phi(\eta)$ , όπου  $\Phi(\cdot)$ : η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Κανονικής κατανομής

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dy$$

Μέσω της  $\Phi^{-1}(\pi)$  εκφράζεται και η γραμμικότητα των παραμέτρων, η διατήρηση της οποίας είναι πολύ σημαντική στο probit μοντέλο.

Η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$\pi_x = \Phi(\alpha + \beta x)$$

όπου  $\alpha, \beta$ : παράμετροι και  $0 \leq \pi_x \leq 1$ .

Στη περίπτωση αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- αν  $\beta > 0$  τότε η  $\pi_x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0,1]$
- αν  $\beta < 0$  τότε η  $\pi_x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0,1]$

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι ότι η διακύμανση της αναλογίας επιβίωσης  $Y/m$  δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από την  $\pi_x$ , αφού  $\pi_x = E(Y/m)$ . Ειδικότερα κάτω από την υπόθεση της Διωνυμικής κατανομής η  $Y/m$  έχει διακύμανση  $\pi(1-\pi)/m$  με μέγιστο στο  $\pi=0.5$ .

#### 4.4.2. Έλεγχος καλής προσαρμογής

Μετά την επιλογή της συνάρτησης σύνδεσης, πρέπει να εξετάσουμε αν αυτή προσαρμόζεται σωστά στα δεδομένα. Ένας από τους προτεινόμενους ελέγχους είναι η απόκλιση (deviance). Η απόκλιση ορίζεται ως το διπλάσιο της διαφοράς μεταξύ της μεγίστης λογαριθμικής πιθανοφάνειας που μπορούμε να πετύχουμε και της εκτιμώμενης λογαριθμικής πιθανοφάνειας που προκύπτει από το μοντέλο που εφαρμόσαμε. Όσο μικρότερη είναι η απόκλιση τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή του μοντέλου μας, αφού τόσο κοντά είναι το μοντέλο μας στο βέλτιστο μοντέλο.

Αν υποθέσουμε ότι οι τ.μ.  $Y$  ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή,  $Y_i \sim \text{Bin}(m, \pi)$  με

$$P(Y = y|m) = \binom{m}{y} \pi^y (1 - \pi)^{m-y}$$

Τότε ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας είναι

$$l(\pi|y) = y \log \pi + (m - y) \log(1 - \pi) = \frac{\frac{y}{m} \log \frac{\pi}{1 - \pi} + \log(1 - \pi)}{1/m}$$

Η μέγιστη λογαριθμική πιθανοφάνεια επιτυγχάνεται στο σημείο  $\tilde{\pi}_i = \frac{y_i}{m_i}$ . Τότε η απόκλιση είναι

$$D(y; \hat{\pi}) = 2l(\tilde{\pi}; y) - 2l(\hat{\pi}; y) = 2 \sum_i \left\{ y_i \log \left( \frac{y_i}{m_i} \right) + (m_i - y_i) \log \left( \frac{m_i - y_i}{m_i - \hat{\mu}} \right) \right\}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η τ.μ.  $D(y; \hat{\pi})$  συγκλίνει ασυμπτωτικά στη  $\chi_{n-p}^2$ , για αυτό και χρησιμοποιείται και ως τεστ Καλής Προσαρμογής.

## 5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην ενότητα αυτή μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μια οικονομική ύφεση μπορεί να επηρεάσει τις εισροές αλλά και τις εκροές μιας ασφαλιστικής εταιρίας, θέτοντας σε κίνδυνο τη βιωσιμότητά της. Θα εξετάσουμε δηλαδή, αν κατά τις περιόδους έντονης οικονομικής ύφεσης, παρουσιάζονται τυχόν διακυμάνσεις στις καταβολές αποζημιώσεων, που συμπίπτουν χρονικά με τις περιόδους αυτές. Για το σκοπό αυτό θα αναλύσουμε διεξοδικά το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του σε δεδομένα των ασφαλίσεων ζωής των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής.

### 5.1. Δεδομένα

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε στη παρούσα εργασία αφορούν τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, μια από της μεγαλύτερες χρηματοοικονομικές αγορές παγκοσμίως. Η οικονομία αυτή χαρακτηρίζεται από ένα συνεχή ρυθμό ανάπτυξης, στο διάστημα που έπεται του Οικονομικού Κραχ του 1929. Εξαιρέση αποτελεί το διάστημα από το 2008- 2009, οπότε και οι Η.Π.Α, αντιμετώπισαν και πάλι μια νέα οικονομική ύφεση. Σύμφωνα μελέτη του Craig K. Elwell<sup>60</sup>, η νέα αυτή ύφεση αποτέλεσε -βάσει διαφόρων οικονομικών δεικτών- τη πιο σοβαρή οικονομική συρρίκνωση από το 1930. Ο αρχικά μέτριος ρυθμός επιβράδυνσης της οικονομικής δραστηριότητας ακολουθήθηκε από έντονη οικονομική ύφεση, που συνεχίστηκε μέχρι και το πρώτο εξάμηνο του 2009 οπότε και παρατηρήθηκαν τα πρώτα σημάδια ανάκαμψης.

Η οικονομία των Η.Π.Α. αναπτύχθηκε κατά μέσο όρο 3,8 % κατά το διάστημα 1946- 1973<sup>61</sup>, ενώ το μέσο πραγματικό εισόδημα των νοικοκυριών αυξήθηκε κατά 74% (2,4% ετησίως). Ωστόσο, από το 1973 κι έπειτα χαρακτηρίζεται από χαμηλούς ρυθμούς ανάπτυξης, 2,7% κατά μέσο όρο, και από ένα στάσιμο βιοτικό επίπεδο, με τα εισοδήματα των νοικοκυριών να

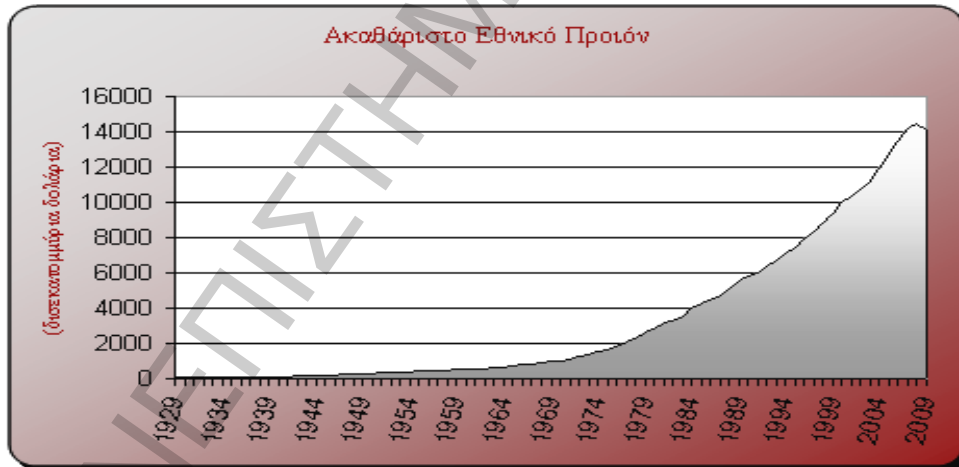
---

<sup>60</sup> Craig K. Elwell , 2012, Economic Recovery: Sustaining U.S. Economic Growth in a Post-Crisis Economy, <http://www.fas.org/sgp/crs/misc/R41332.pdf>

<sup>61</sup> Βλέπε <http://www2.census.gov/prod2/popscan/p60-162.pdf>

αυξάνονται μόνο κατά 10% (0,3% ετησίως), σύμφωνα με έκθεση<sup>62</sup> της Υπηρεσίας Απογραφής (Census Bureau) των Η.Π.Α..

Η χειρότερη ύφεση των τελευταίων δεκαετιών, επήλθε το 2008 όταν το ΑΕγχΠ μειώθηκε κατά 5 ποσοστιαίες μονάδες από την άνοιξη του 2008 μέχρι την άνοιξη του 2009. Πριν όμως το 2008, παρατηρήθηκαν κι άλλα διαστήματα σημαντικής ύφεσης, όπως αυτό κατά τη περίοδο 1957- 58, όταν το ΑΕγχΠ μειώθηκε κατά 3,7%, το διάστημα 1973- 75 μετά την πετρελαϊκή κρίση του 1973 με πτώση 3,1%, και το διάστημα 1981- 1982 όταν το ΑΕγχΠ συρρικνώθηκε κατά 2,9%. Πιο ήπιες υφέσεις σημειώθηκαν κατά τα διαστήματα 1990- 1991 και τους οχτώ πρώτους μήνες του 2001 όταν το ΑΕγχΠ υποχώρησε κατά 1,3% και 0,3% αντίστοιχα. Από την άλλη μεριά, μεταξύ των υφέσεων υπήρχαν και παρατεταμένα διαστήματα ανάπτυξης τα οποία πραγματοποιήθηκαν από τις αρχές του 1961 έως τα μέσα του 1969, που συνοδεύτηκε από αύξηση του ΑΕγχΠ κατά 53% (5,1 ετησίως), από τα τέλη του 1982 έως τα μέσα του 1990 με αύξηση 37% (4% ετησίως) και από τα μέσα του 1991 έως τα τέλη του 2000 με αύξηση 43% (3,8 ετησίως)<sup>63</sup>.



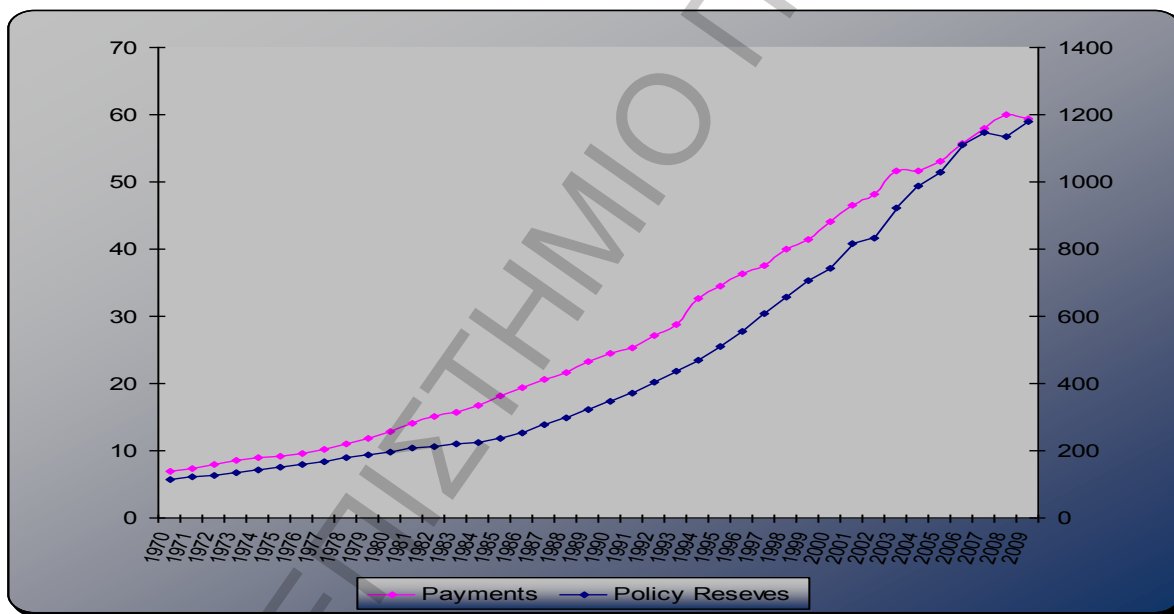
Εικόνα 10 Ετήσιο ΑΕγχΠ εκφρασμένο σε δις δολάρια για τη περίοδο 1929- 2009

<sup>62</sup> Βλέπε U.S Census Bureau, *Income, Poverty, and Health Insurance in United States: 2008*, στο <http://www.census.gov/prod/2009pubs/p60-236.pdf> (συνέχεια)

<sup>63</sup> Kimberly Amadeo, *The history of recessions in the United States*, Νοέμβριος 2012. στο [http://useconomy.about.com/od/grossdomesticproduct/a/recession\\_histo.htm](http://useconomy.about.com/od/grossdomesticproduct/a/recession_histo.htm).

Για την εκτίμηση του Μαρκοβιανού Μοντέλου Εναλλαγής Καταστάσεων χρησιμοποιήσαμε δεδομένα για το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν (Α.Ε.Π) των Η.Π.Α. για τη περίοδο 1929- 2009, που συλλέξαμε από τη Federal Reserve Economic Data (FRED)<sup>64</sup> . Τα δεδομένα αυτά αφορούν το ετήσιο Α.Ε.Π. εκφρασμένο σε δισεκατομμύρια δολάρια, όπως αυτό έχει καταγραφεί από το Γραφείο Οικονομικών Αναλύσεων<sup>65</sup> (Bureau of Economic Analysis, B.E.A.) του Υπουργείου Εμπορίου (Department of Commerce) των Η.Π.Α.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 11 το ΑΕγχΠ καταγράφει μια σταθερά ανοδική πορεία μέχρι και το 2008, όπου και παρατηρείται μια σημαντική μείωση η οποία συνεχίζεται και μέχρι το 2009. Προφανώς η πτώση αυτή οφείλεται στην οικονομική κρίση που είχε χτυπήσει τις Η.Π.Α τη περίοδο αυτή.



Εικόνα 11 Διαχρονική εξέλιξη αποζημιώσεων και αποθεματικών

Στην Εικόνα 11 παρατηρούμε την ομαλή διαχρονική εξέλιξη, τόσο των αποζημιώσεων, όσο και των αποθεματικών. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί το διάστημα από το 2007- 2009, όπου

<sup>64</sup> Όπου Federal Reserve Economic Data, η βάση οικονομικών δεδομένων της Ομοσπονδιακής Τράπεζας του St. Louis, <http://research.stlouisfed.org/fred2/series/GNPA>

<sup>65</sup> Το Γραφείο Οικονομικών Αναλύσεων, μαζί με την Υπηρεσία Απογραφής αποτελούν υπηρεσίες του Τμήματος Οικονομικής Διοίκησης και Στατιστικής.



παρατηρείται έντονη αύξηση στα ποσά των αποζημιώσεων, η οποία συνοδεύεται από την ταυτόχρονη μείωση των αποθεματικών των εταιριών. Η ανωμαλία αυτή μπορεί εν μέρει να χαρακτηριστεί ως αποτέλεσμα της γενικότερης οικονομικής ύφεσης που επικρατούσε στις Η.Π.Α τη περίοδο αυτή.

## 5.2. Περιγραφή του μοντέλου

Το μοντέλο που εφαρμόσαμε αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τους Puustelli, Koskinen και Luoma<sup>66</sup> (Puustelli, Koskinen, & Luoma, 2008), οι οποίοι βασιζόμενοι σε μπεϋζιανές μεθόδους κατάφεραν να προβλέψουν τόσο τις μελλοντικές αποζημιώσεις όσο και τα απαιτούμενα αποθεματικά. Πιο συγκεκριμένα, για τη πρόβλεψη της συχνότητας και της έκτασης των περιόδων έντονης οικονομικής ύφεσης, εφαρμόστηκε το μαρκοβιανό μοντέλο εναλλαγής συστημάτων και εν συνεχεία μελετήθηκε η επίδραση του στην αύξηση του ποσού των αποζημιώσεων και στη διατήρηση επαρκών αποθεματικών. Για την εκτίμηση των μελλοντικών αποζημιώσεων χρησιμοποιήθηκε μια συνάρτηση μεταφοράς, στην οποία η επεξηγηματική μεταβλητή είναι ο εκτιμώμενος ρυθμός ανάπτυξης του πραγματικού ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ)<sup>67</sup>.

Αρχικά, επιλέγουμε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους ως περιόδους ύφεσης βασιζόμενοι σε πραγματικά δεδομένα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι ο επιχειρηματικός κύκλος του μοντέλου μας συνίσταται από δύο καταστάσεις – συστήματα:

- i. τη κατάσταση ανάπτυξης και ήπιας ύφεσης, όπου παρουσιάζονται χαμηλές απώλειες,
- ii. τη κατάσταση έντονης ύφεσης, οικονομικής δυσπραγίας, που χαρακτηρίζεται από έντονη αύξηση της συχνότητας και του μεγέθους των απαιτήσεων.

Συνεπώς επικρατούσα κατάσταση τη χρονική στιγμή την οποία εξετάζουμε αποτελεί τον πλέον σημαντικό παράγοντα του ρυθμού ανάπτυξης του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος.

---

<sup>66</sup> Βλέπε Puustelli, A., Koskinen, L., & Luoma, A. 2008. “Bayesian modeling of financial guarantee insurance”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43.2: 245-254.

<sup>67</sup> Με τον τρόπο αυτό λαμβάνεται υπόψη και ο παράγοντας της οικονομικής αβεβαιότητας, και εξασφαλίζεται η σωστή τιμολόγηση και αποθεματοποίηση

Για την πρόβλεψη του ρυθμού ανάπτυξης του ΑΕΠ θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο Markov εναλλαγής δύο συστημάτων- καταστάσεων<sup>68</sup>, όπως αυτές ορίστηκαν παραπάνω. Το μοντέλο αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 s_t + z_t,$$

όπου

$y_t$ : ο ετήσιος ρυθμός ανάπτυξης του ΑΕΠ, τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$s_t$ : η κατάσταση της οικονομίας τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$z_t$ : μια στάσιμη τυχαία ανάλιξη μηδενικού μέσου, η οποία απεικονίζεται ικανοποιητικά από ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξεως  $r$ , δηλ.  $z_t \sim AR(r)$  και είναι της μορφής

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_r z_{t-r} + \varepsilon_t,$$

με  $\varepsilon_t$ : μια i.i.d. ανάλιξη σφαλμάτων,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Η αυτοσυσχέτιση μεταξύ των  $z_t$  μπορεί να απεικονιστεί επαρκώς από ένα AR(2) μοντέλο, δηλαδή

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Παράλληλα, ο ρυθμός ανάπτυξης του ΑΕΠ υπολογίζεται ως η διαφορά των λογαρίθμων του ΑΕΠ μεταξύ δύο χρονικών στιγμών

$$y_t = \log(GNP_t) - \log(GNP_{t-1}).$$

Ορίζουμε επίσης

$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{αν η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ανάπτυξης ή ήπιας ύφεσης} \\ 1, & \text{αν η οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση έντονης ύφεσης} \end{cases}$$

Στην επόμενη φάση ορίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης, οι οποίες εκφράζουν την ένταση και χρονική διάρκεια κάθε κατάστασης, και ορίζονται ως η πιθανότητα μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη, δημιουργώντας μια πρώτης τάξεως διαδικασίας Markov

$$P(s_{t+1}=0 / s_t=0) = p$$

$$P(s_{t+1}=1 / s_t=0) = 1-p$$

$$P(s_{t+1}=0 / s_t=1) = q$$

$$P(s_{t+1}=1 / s_t=1) = 1-q.$$

Σχηματίζεται έτσι ένας πίνακας μετάβασης, που είναι της μορφής

<sup>68</sup> Το μοντέλο αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου του Hamilton.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

και τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τη σχέση  $p_{i0} + p_{i1} = 1$ , για  $i = \{0,1\}$ .

Στη περίπτωση μας δηλαδή έχουμε,

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

μέσω του οποίου παρατηρούμε τη σχέση μεταξύ των δύο καταστάσεων καθώς και την εξέλιξή τους.

Στη συνέχεια για την εκτίμηση του μοντέλου του Hamilton, χρησιμοποιούμε το δειγματολήπτη Gibbs. Ο δειγματολήπτης αυτός αναλύεται διεξοδικά στη παράγραφο 3.3.1, και ουσιαστικά αποτελεί ένα λογάριθμο χρήσιμο για την προσομοίωση πολυμεταβλητών κατανομών, για καθεμία από τις οποίες γνωρίζουμε την υπό συνθήκη κατανομή της.

Στη περίπτωση μας ορίζουμε τις μεταβλητές

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_T)', s = (s_1, s_2, \dots, s_T)', \text{ και } z_{t-1} = (z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-r})'.$$

Επίσης ορίζουμε το διάνυσμα των αυτοπαλίνδρομων συντελεστών

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)'$$

και το διάνυσμα όλων των παραμέτρων

$$n = (a_0, a_1, \varphi', \sigma_\varepsilon^2, p, q).$$

Τότε η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του  $y$ , δεδομένων των  $s$  και  $n$  είναι

$$p(y/s, n) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (y_t - a_0 - a_1 s_t - \varphi' z_{t-1})^2\right).$$

Θεωρώντας ότι οι παράμετροι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, ορίζουμε τις  $a$  priori κατανομές των παραμέτρων όπως φαίνεται παρακάτω

$$p \sim \text{Beta}(\alpha_p, \beta_p)^{69}$$

$$q \sim \text{Beta}(\alpha_q, \beta_q)$$

$$p(\varphi) \propto 1$$

$$p(a_0) \propto 1$$

$$p(\sigma_\varepsilon^2) \propto \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}$$

<sup>69</sup> Αν θεωρήσουμε τις πιθανότητες των  $p$  και  $q$  γνωστές και ίσες με 0,5 τότε αυτό που παίρνουμε είναι μια κατανομή Bernoulli.

$$p(\alpha_1) \propto N(\alpha_1/\mu_0, \sigma_0) \times I(\alpha_1 < -0,03),$$

όπου  $N(\alpha_1/\mu_0, \sigma_0)$ : η Κανονική κατανομή με μέσο  $\mu_0$  και διακύμανση  $\sigma_0^2$ . και  $I$ : δείκτρια συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$I(\alpha_1 < -0,03) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha_1 < -0,03 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}^{70}$$

Βασικό στοιχείο της μελέτης μας αποτελεί η εκτίμηση του καθαρού ασφαλιστρου καθώς και του απαιτούμενου κεφαλαίου κινδύνου για την κάλυψη των υποχρεώσεων της ασφαλιστικής. Για την πρόβλεψη των μελλοντικών αποζημιώσεων, χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο παλινδρόμησης της μορφής

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 s_{t-1} + \beta_2 y_t + u_t$$

όπου,

$x_t = G^{-1}(x_t^*)$ , με  $x_t^*$ : αναλογία των ακαθάριστων αποζημιώσεων προς τις τεχνικές προβλέψεις στο χρόνο  $t$  και,  $G^{-1}$ : αύξουσα και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση μετατροπής του μοναδιαίου διαστήματος  $(0, 1)$  σε  $(-\infty, \infty)$

$y_t$ : ρυθμός ανάπτυξης του ΑΕΠ

$u_t$ : μια i.i.d. ανέλιξη σφαλμάτων ανεξάρτητη της  $y_t$ , με  $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ .

Αφού λοιπόν εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  και  $\sigma_u^2$  και το μελλοντικό ρυθμό ανάπτυξης του ΑΕΠ  $y_t$ , μπορούμε στην συνέχεια να εκτιμήσουμε και τις μελλοντικές αποζημιώσεις  $x_t$  για  $t = T+1, T+2, \dots$ .<sup>71</sup> Τότε η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*)$ , δεδομένων των  $y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$  και των παραμέτρων είναι της μορφής

$$p(x^*/y, \beta, \sigma_u^2) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{g(x_t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2} \left(-\frac{1}{2\sigma_u^2} (x_t - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1} - \beta_2 y_t)^2\right)\right)$$

όπου  $g(x) = \frac{d}{dx} G(x)$ .

<sup>70</sup> Το σημείο  $-0,03$  έχει επιλεγεί έτσι ώστε να επιταχύνει την προσομοίωση, σε διαφορετική περίπτωση παρουσιάζονται καθυστερήσεις μεταξύ των επαναλήψεων.

<sup>71</sup> Η ανεξαρτησία μεταξύ των  $u_t$  και  $y_t$  μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε ξεχωριστά το μοντέλο αυτό από το μοντέλο του Hamilton.

Όσον αφορά το G, αυτή αποτελεί μια συνάρτηση σύνδεσης<sup>72</sup>, για την οποία θεωρούμε τρεις περιπτώσεις

- i. το G ακολουθεί την **τυπική Κανονική Κατανομή** (probit link). Τότε

$$\mathbf{x}_t = \Phi^{-1}(\mathbf{x}_t^*),$$

όπου  $\Phi^{-1}(\cdot)$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής.

- ii. το G ακολουθεί την **Λογαριθμική Κατανομή** (logit link). Τότε

$$\mathbf{x}_t = \text{logit}(\mathbf{x}_t^*) = \log \frac{\mathbf{x}_t^*}{1 - \mathbf{x}_t^*}$$

- iii. το G ακολουθεί την **Κατανομή Student** με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας<sup>73</sup> (t link). Οι δύο εναλλακτικές a priori κατανομές του  $\nu$  είναι:

1.  $\mathbf{p}_1(\nu) = \frac{1}{200}, \nu = 1, 2, \dots, 200.$

2.  $\mathbf{p}(\nu) \propto \frac{1}{\nu}, \nu = 1, 2, \dots, 200.$

Όπως προαναφέραμε, το ασφάλιστρο P καθώς και το αρχικό κεφάλαιο κινδύνου υπολογίζονται βάσει της αναλογίας του ποσού των αποζημιώσεων προς τεχνικές προβλέψεις.<sup>74</sup> Συμβολίζουμε λοιπόν με  $\mathbf{x}_{it}^*$ , τη πρόβλεψη του ποσού των αποζημιώσεων στο  $i$ -μονοπάτι,  $i = 1, 2, \dots, n$  και στο χρόνο  $t, t = T+1, T+2, \dots, T+h$ . Τότε το ασφάλιστρο P είναι ίσο με

$$\mathbf{P} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \sum_{t=T+1}^{T+h} \mathbf{x}_{it}^*,$$

και η ισορροπία  $\mathbf{b}_{it}$  ισούται με

$$\mathbf{b}_{it} = \mathbf{P}(t - T) - \sum_{j=T+1}^t \mathbf{x}_{jt}^*.$$

Στη συνέχεια για κάθε μονοπάτι  $i$  υπολογίζουμε την ελάχιστη ισορροπία  $\mathbf{b}_i^{\min} = \min_t \mathbf{b}_{it}$ , δημιουργώντας την προσομοιωμένη κατανομή ελάχιστης ισορροπίας, η οποία με τη σειρά της χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της Αξίας στον Κίνδυνο (VaR) και στην εκτίμηση του κεφαλαίου κινδύνου. Σύμφωνα με την οδηγία Φερεγγυότητα II, Αξία στον Κίνδυνο υπολογίζεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%, και σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους.

<sup>72</sup> Οι συνδετικές συναρτήσεις αναλύονται στις παραγράφους 4.4.1.1 και 4.4.1.2.

<sup>73</sup> Οι βαθμοί ελευθερίας δεν ορίζονται από την αρχή αλλά εκτιμώνται βάσει του δείγματος. Το probit link αποτελεί ειδική περίπτωση του t link για  $\nu \rightarrow \infty$ , ενώ για  $\nu = 14$  το t link συγκλίνει στο logit link.

<sup>74</sup> Αν θέσουμε τις τεχνικές προβλέψεις ίσες με 1, τότε οι  $\mathbf{x}_t^*$  ισούται με τις προβλέψεις για μελλοντικές αποζημιώσεις.

Στη τελευταία φάση του μοντέλου διεξάγουμε ένα έλεγχο καλής προσαρμογής του μοντέλου του Hamilton, ο οποίος επιτυγχάνεται με την αναπαράγωγή πολλών σετ δεδομένων από την κατανομή πρόβλεψης  $\mathbf{p}(\mathbf{y}/s, \mathbf{n})$ .

Στην περίπτωση μας θα αναπαράγουμε τις άγνωστες παραμέτρους και τις δύο καταστάσεις της οικονομίας, στις οποίες δίνουμε νέες τιμές και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα στατιστικά, όπως ο μέσος, η τυπική απόκλιση, η κύρτωση, η ασυμμετρία, κτλ, και την κατανομή της ουράς για καθένα από τα αντίγραφα σετ δεδομένων που δημιουργήσαμε. Τέλος συγκρίνουμε τα στατιστικά του αρχικού σετ δεδομένων με αυτά των αντιγράφων και παρατηρούμε αν τυχόν υπάρχουν μεγάλες και συστηματικές διαφορές.

Ένα δεύτερο στοιχείο που μετρήσαμε είναι η απόκλιση μεταξύ των δεδομένων και του μοντέλου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μέσης απόκλισης, όπως αυτή αναλύεται στην παράγραφο 4.4.2. ορίζουμε λοιπόν τη μέση απόκλισης ως

$$D_{avg}(\mathbf{y}) = E(D(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{y}), \text{ όπου } D(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = -2 \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}),$$

και μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση

$$\hat{D}_{avg}(\mathbf{y}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L D(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_l),$$

όπου τα διανύσματα  $\boldsymbol{\theta}_l$  απεικονίζουν τις προσομοιώσεις.

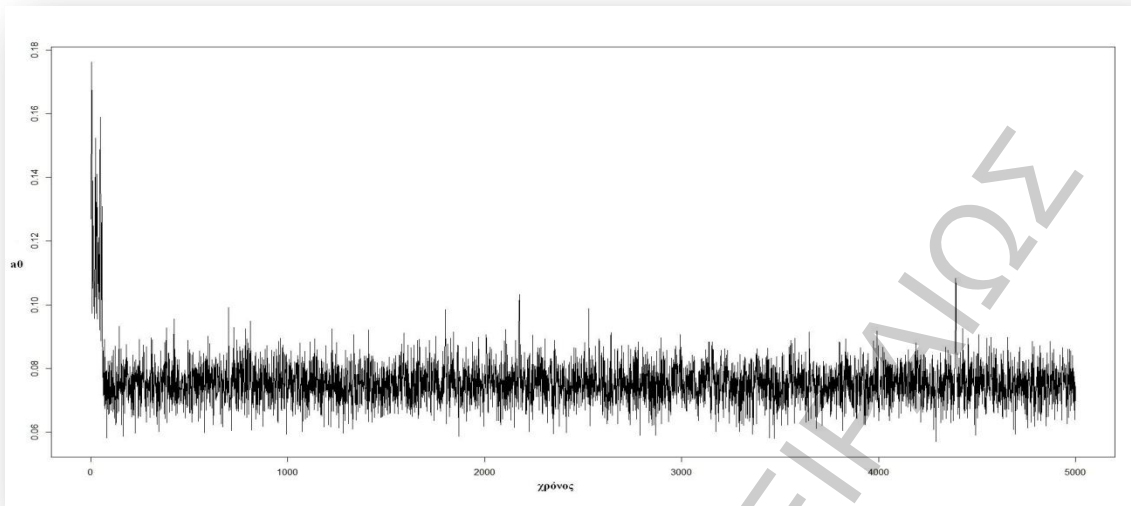
Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό όσο μικρότερη είναι η απόκλιση, τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα μας.

### 5.3. Αποτελέσματα

Για τη διεξαγωγή των υπολογισμών και τη παραγωγή των γραφημάτων χρησιμοποιήσαμε την γλώσσα προγραμματισμού R<sup>75</sup>.

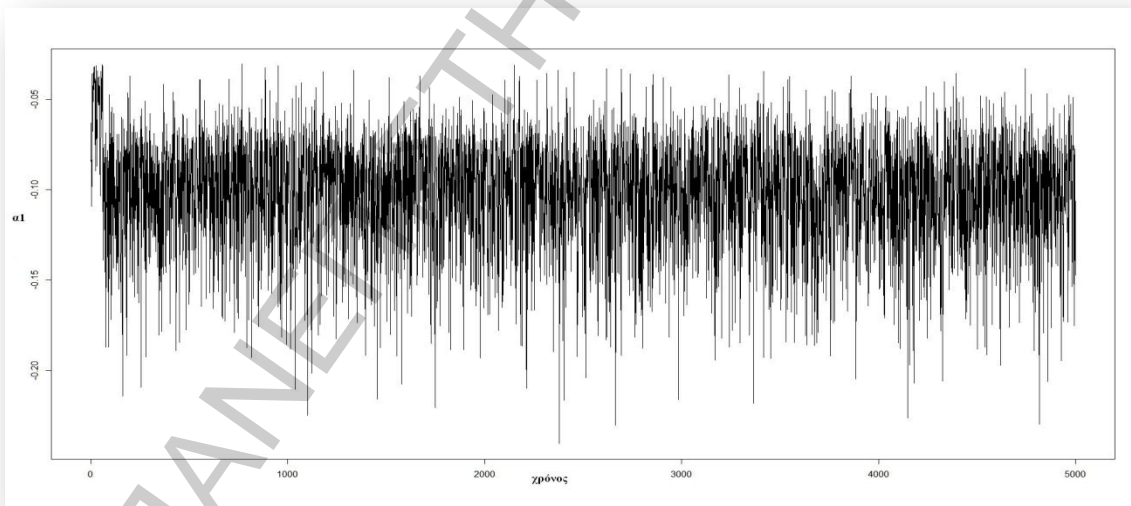
Αρχικά προβήκαμε στην εκτίμηση του μοντέλου του Hamilton, μέσω του δειγματολήπτη Gibbs. Στα παρακάτω γραφήματα παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες ακολουθίες των παραμέτρων, μίας αλυσίδας που παρήχθη κατά τη προσομοίωση, αναμειγνύονται ικανοποιητικά. Ξεκινώντας με τη παράμετρο  $\alpha_0$  (Εικόνα 12) παρατηρούμε ότι συγκλίνει αρκετά γρήγορα γύρω από τη τιμή 0,075 και παραμένει αρκετά σταθερή για το μεγαλύτερο διάστημα.

<sup>75</sup> Βλέπε <http://cran.r-project.org>

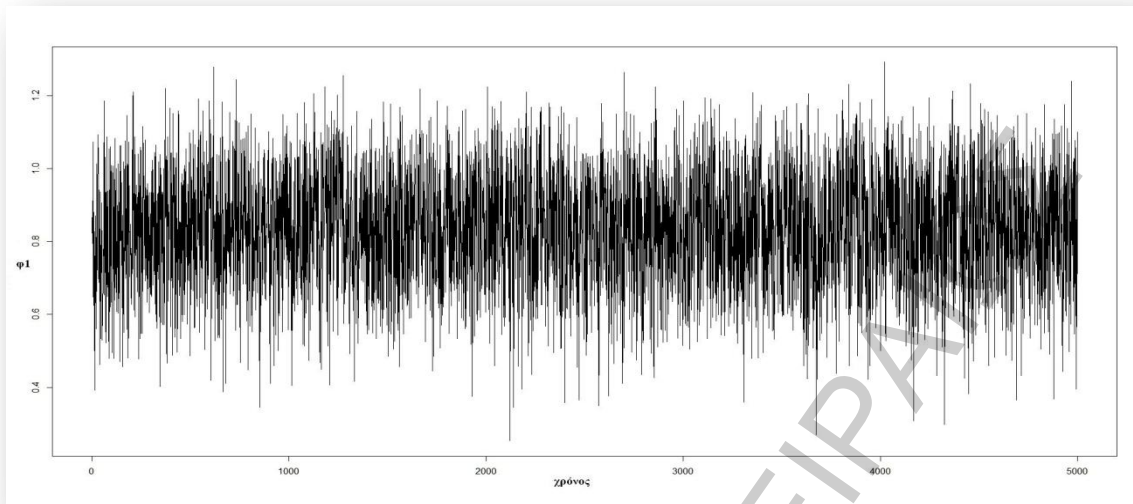


**Εικόνα 12** Γράφημα παραμέτρου  $\alpha_0$

Στη συνέχεια ακολουθεί η γραφική απεικόνιση της παραμέτρου  $\alpha_1$ , (βλέπε Εικόνα 13), την οποία βλέπουμε να κινείται στο χώρο μεταξύ των τιμών  $-0,045$  και  $-0,22$ , με τη μάζα, όμως, της κατανομής να συγκεντρώνεται γύρω από την τιμή  $-0,10$  κατά το μεγαλύτερο μέρος της προσομοίωσης.

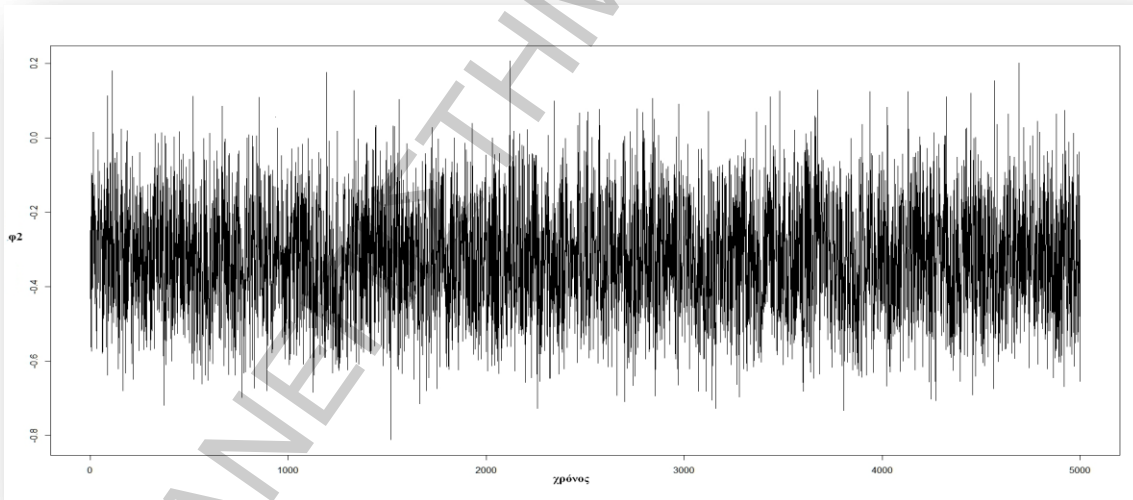


**Εικόνα 13** Γραφική απεικόνιση παραμέτρου  $\alpha_1$



**Εικόνα 14** Γραφική απεικόνιση παραμέτρου  $\varphi_1$

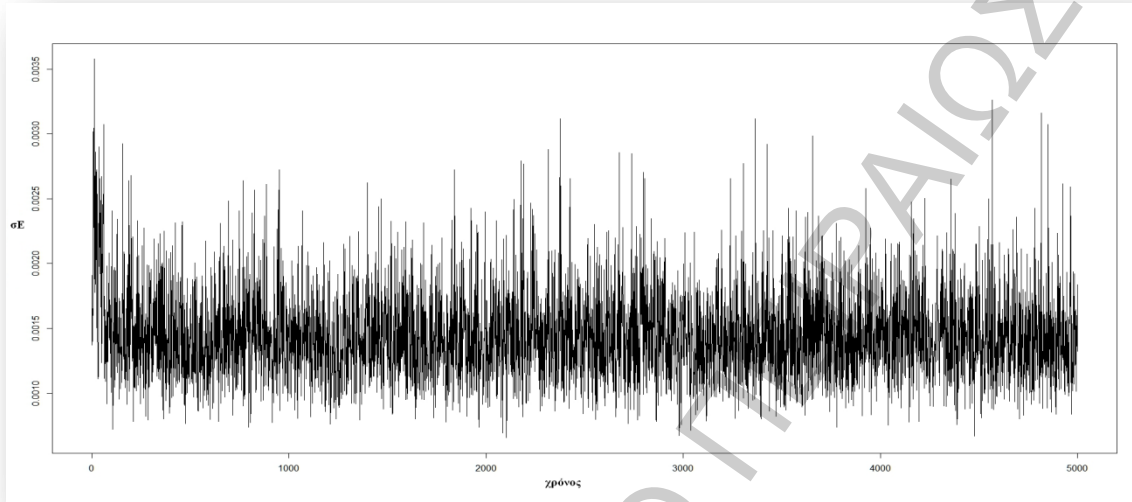
Παρακολουθώντας στη συνέχεια τις απεικονίσεις των αυτοπαλίνδρομων συντελεστών  $\varphi_1$  (Εικόνα 14) και  $\varphi_2$  (Εικόνα 15) παρατηρούμε ότι και αυτές συγκλίνουν γύρω από τις τιμές 0,8 και  $-0,3$  αντίστοιχα.



**Εικόνα 15** Γραφική απεικόνιση παραμέτρου  $\varphi_2$

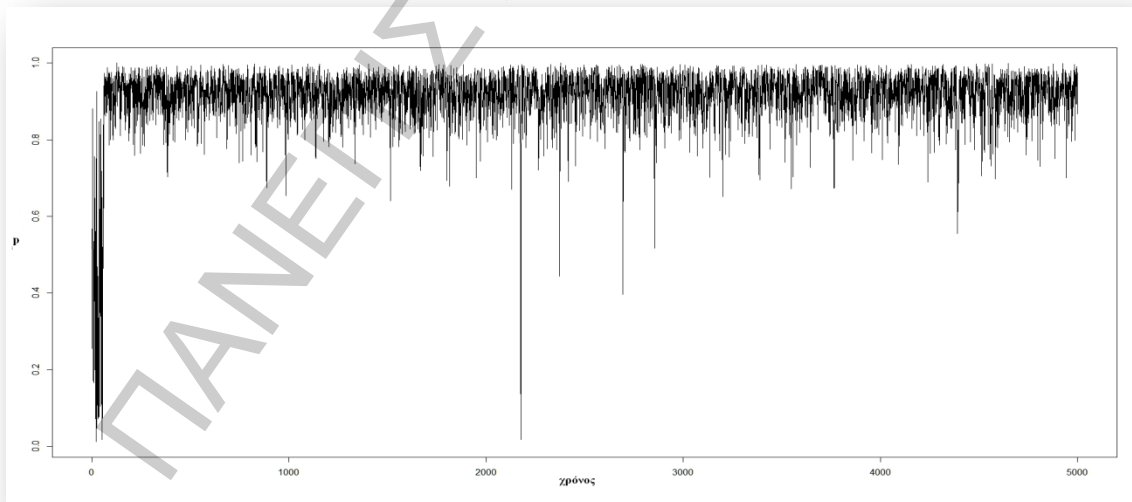


Το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για την τυπική απόκλιση των καταλοίπων  $\sigma_\varepsilon$  φαίνεται στην Εικόνα 16, όπου τα κατάλοιπα φαίνεται να κατανέμονται κανονικά, με κάποιες μικρές αποκλίσεις.

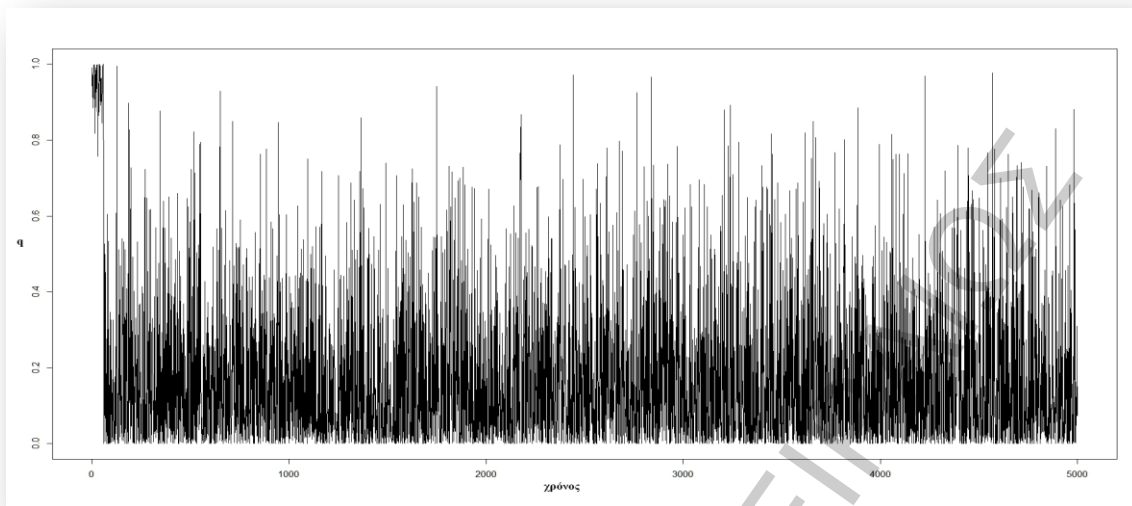


Εικόνα 16 Γραφική απεικόνιση της  $\sigma_\varepsilon$

Παράλληλα, στην Εικόνα 17 και Εικόνα 18 απεικονίζονται τα αποτελέσματα για τις πιθανότητες  $p$  και  $q$ , όπου παρατηρούμε την  $p$  να κινείται γύρω από την τιμή 0,97 και την  $q$  αντίστοιχα να συγκλίνει την τιμή 0.03.

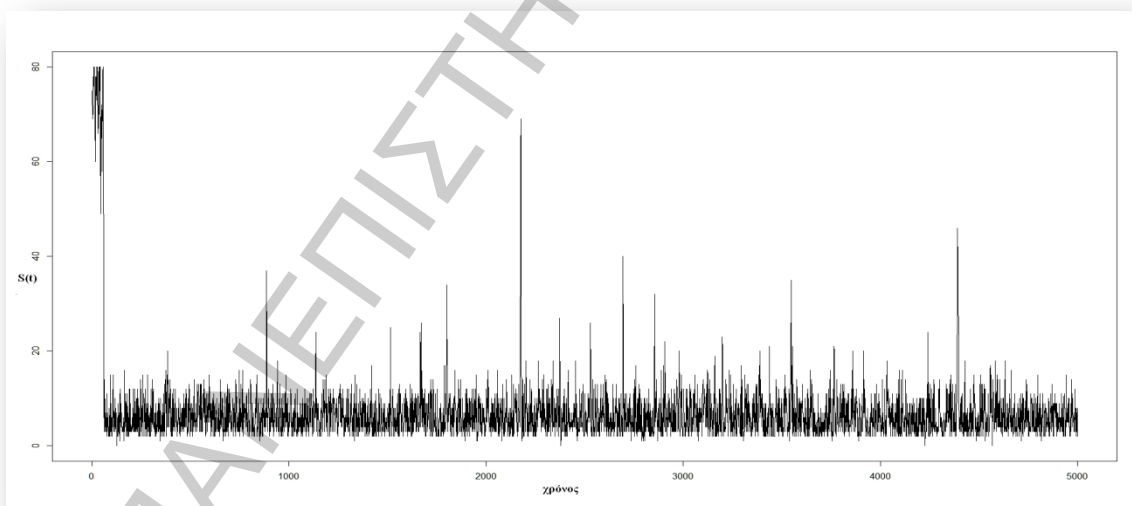


Εικόνα 17 Γραφική απεικόνιση της πιθανότητας  $p$



Εικόνα 18 Γραφική απεικόνιση της πιθανότητας  $q$

Τελευταίο παρουσιάζουμε το γράφημα της ακολουθίας  $S(t)$ , σύμφωνα με το οποίο η ακολουθία φαίνεται να παίρνει τιμές γύρω από το 6,5, εμφανίζοντας κατά διαστήματα και κάποιες ακραίες τιμές.



Εικόνα 19 Γραφική απεικόνιση της  $S(t)$

Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων των παραμέτρων, για τις τρεις αλυσίδες προσομοίωσης και μέγεθος δείγματος 2500 ανά αλυσίδα, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1).

	Μέσος	Τυπική Απόκλιση	Τυπικό Σφάλμα	Ασυμπτωτικό Τυπικό Σφάλμα
<b>alpha0</b>	0.075228	0.0057474	6.637e-05	8.618e-05
<b>alpha1</b>	-0.102434	0.0306941	3.544e-04	4.281e-04
<b>phi 1</b>	0.834266	0.1631967	1.884e-03	2.311e-03
<b>phi2</b>	-0.322364	0.1588334	1.834e-03	2.284e-03
<b>sigmaE</b>	0.001446	0.0003347	3.865e-06	4.482e-06
<b>p</b>	0.918783	0.0583251	6.735e-04	1.122e-03
<b>q</b>	0.170897	0.1863037	2.151e-03	2.306e-03
<b>sum(St)</b>	6.367067	4.1615988	4.805e-02	9.794e-02

Πίνακας 1 Μέσος, τυπική απόκλιση, τυπικό σφάλμα και ασυμπτωτικό τυπικό σφάλμα του μέσου

Στον παραπάνω πίνακα η τυπική απόκλιση υπολογίζεται ως τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης της *a posteriori* κατανομής κάθε παραμέτρου, ενώ το τυπικό σφάλμα αποτελεί ένα μέτρο υπολογισμού της ακρίβειας του δειγματικού μέσου, ως εκτιμήτρια του πραγματικού μέσου της *a posteriori* κατανομής. Υπολογίζεται επίσης το απλό τυπικό σφάλμα<sup>76</sup>, στο οποίο δεν λαμβάνονται υπόψη οι αυτοσυσχετίσεις, καθώς και το τυπικό σφάλμα της χρονοσειράς δηλαδή το ασυμπτωτικό τυπικό σφάλμα. Στη συνέχεια παρατίθεται ο

Πίνακας 2, στον οποίο περιλαμβάνονται οι τιμές κάθε μεταβλητής για κάθε ποσοστημόριο.

	2.5%	25%	50%	75%	97.5%
<b>alpha0</b>	0.0641230	0.071491	0.075166	0.078925	0.086475
<b>alpha1</b>	-0.1708164	-0.121343	-0.097768	-0.080207	-0.053455
<b>phi 1</b>	0.5216793	0.717328	0.839669	0.958800	1.127184
<b>phi2</b>	-0.6056187	-0.442852	-0.329830	-0.206746	-0.009644
<b>sigmaE</b>	0.0008995	0.001207	0.001411	0.001645	0.002193
<b>p</b>	0.7875451	0.890239	0.930919	0.959961	0.989647
<b>q</b>	0.0001740	0.023686	0.104302	0.261509	0.654545
<b>sum(St)</b>	2.0000000	3.000000	6.000000	8.000000	15.000000

Πίνακας 2 Ποσοστημόρια για κάθε μεταβλητή

<sup>76</sup> Ως διαίρεση της τυπικής απόκλισης με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των επαναλήψεων.

Εκτός όμως από τη παραγωγή των στατιστικών των παραμέτρων προχωρήσαμε και στη χρήση των διαγνωστικών των Gelman και Rubin. Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τους Gelman και Rubin (1992)<sup>77</sup>, ως μια μέθοδος εκτίμησης της σύγκλισης των αποτελεσμάτων των μαρκοβιανών αλυσίδων (mcmc). Εκτιμήσαμε, λοιπόν, τα ανώτατα και κατώτατα όρια εμπιστοσύνης για κάθε μεταβλητή, και τα αποτελέσματα των υπολογισμών συνοψίζονται στον Πίνακα 3.

	Point est.	Upper C.I.
<b>alpha0</b>	1.01	1.01
<b>alpha1</b>	1.00	1.01
<b>phi 1</b>	1.00	1.00
<b>phi2</b>	1.00	1.00
<b>sigmaE</b>	1.01	1.01
<b>p</b>	1.00	1.00
<b>q</b>	1.00	1.00
<b>sum(St)</b>	1.01	1.01

Πίνακας 3 Διαγνωστικά Gelman και Rubin

Βασικό όμως κομμάτι των διαγνωστικών των Gelman και Rubin είναι υπολογισμός του δυνητικού παράγοντα μείωσης κλίμακας (potential scale reduction factor, prsf). Σύμφωνα με τους Brooks και Gelman (1997)<sup>78</sup>, για πολυπαραγοντικές αλυσίδες υπολογίζεται μόνο μια τιμή για τον παράγοντα αυτό, η οποία αποτελεί το άνω φράγμα των δυνητικών παραγόντων μείωσης κλίμακας για κάθε πιθανό γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών. Η τιμή του παράγοντα αυτού στο παράδειγμά μας είναι ίση με 1. Παρατηρούμε ότι η τιμή του ανώτατου ορίου είναι η μονάδα, γεγονός που υποδηλώνει ότι το μοντέλο μας έχει συγκλίνει.

<sup>77</sup> Gelman, A. and Rubin, DB. (1992). *Inference from iterative simulation using multiple sequences*. Statistical Science, 7: 457-511.

<sup>78</sup> Brooks, SP and Gelman, A. (1997). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. Journal of Computational and Graphical Statistics, 7: 434-455.

Στη συνέχεια για να εξετάσουμε αν το μοντέλο του Hamilton προσαρμόζεται σωστά στα δεδομένα μας, χρησιμοποιήσαμε το κριτήριο της μέσης απόκλισης. Το αποτέλεσμα των υπολογισμών είναι

$$\hat{D}_{\text{avg}}(y) = -290,1569$$

που υποδηλώνει ότι το μοντέλο προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα μας.

Στον ίδιο έλεγχο προχωρήσαμε και για το μοντέλο της συνάρτησης σύνδεσης, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό του καθαρού ασφαλιστρου και των απαραίτητων κεφαλαίων κινδύνου. Η εκτιμηθείσα μέση απόκλιση για τις διαφορετικές συναρτήσεις σύνδεσης παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα ( Πίνακας 4).

	probit link	logit link	t link, a priori 1	t link, a priori 2
$\hat{D}_{\text{avg}}$	-384.7502	-383.1967	-384.5884	-383.8687

Πίνακας 4 Μέση απόκλιση συναρτήσεων σύνδεσης

Στον παραπάνω πίνακα, με τους όρους t link, a priori 1 και t link, a priori 2 εννοούμε τις συναρτήσεις σύνδεσης που χρησιμοποιούν την επεξηγηματική  $p(v) = \frac{1}{200}$  και την μη επεξηγηματική  $p(v) = \frac{1}{v}$ ,  $v = 1, 2, \dots, 200$  a priori κατανομή. Παρατηρούμε ότι η μέση απόκλιση για τα δύο t link κυμαίνεται περίπου στα ίδια επίπεδα. Τη μεγαλύτερη μέση απόκλιση έχει το logit link, με -383.1967 και για το λόγο αυτό δεν ενδείκνυται η χρήση του στο μοντέλο μας. Αντίθετα το probit link φαίνεται να έχει τη μικρότερη μέση απόκλιση, και συνεπώς το μοντέλο αυτό έχει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα μας. Ωστόσο λόγω της αβεβαιότητας που ενέχει ένα μοντέλο, συνίσταται t link με την επεξηγηματική a priori κατανομή, ώστε να σταθμιστεί η αβεβαιότητα αυτή.

Ο υπολογισμός του καθαρού ασφαλιστρου και των απαιτούμενων αποθεματικών έγινε για καθεμία από τις τέσσερις συνδετικές συναρτήσεις. Τα απαιτούμενα αποθεματικά υπολογίστηκαν σύμφωνα με τις απαιτήσεις τόσο της ευρωπαϊκής οδηγίας Φερεγγυότητα II, όσο και του

Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας. Το μέτρο κινδύνου που ορίζεται από την Φερεγγυότητα II είναι η Αξία στον Κίνδυνο (VaR), σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%. Εκτενής αναφορά της Αξίας στον Κίνδυνο (VaR), έχει προηγηθεί στη παράγραφο 2.1.4.2, όπου αναλύονται οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας σύμφωνα με τη Φερεγγυότητα II. Αντίστοιχα το Ελβετικό Τεστ Φερεγγυότητας (SST), προτείνει ως το πλέον κατάλληλο μέτρο την Αξία στον Κίνδυνο της ουράς (TailVaR), όπως αυτή ορίζεται στη παράγραφο 3.2, και οι υπολογισμοί διεξάγονται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Ο χρονικός ορίζοντας, βάσει του οποίου διεξήχθησαν οι υπολογισμοί, είναι το ένα έτος, όπως αυτό ορίζεται από τις παραπάνω οδηγίες. Παράλληλα με τα παραπάνω μέτρα υπολογίστηκαν ενδεικτικά η Αξία στον Κίνδυνο (VaR), σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% και η Αξία στον Κίνδυνο της ουράς (TailVaR) επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%.

Από τους υπολογισμούς μας προκύπτει ότι η επιβάρυνση στο επίπεδο του καθαρού ασφαλιστρού, όπως αυτή υπολογίστηκε με τη μέθοδο των ακαθάριστων αποζημιώσεων, κυμαίνεται γύρω στο 5 %.

Premium (%)	
<b>probit link</b>	4,96
<b>t link, a priori 1</b>	4,96
<b>t link, a priori 2</b>	4,97
<b>logit link</b>	4,97

**Πίνακας 5 Καθαρό ασφαλιστρο εκφρασμένο ως ποσοστό % επί του εμπορικού ασφαλιστρού**

Η προσαύξηση στο καθαρό ασφαλιστρο δε παρουσιάζει σημαντικές διακυμάνσεις μεταξύ των διαφορετικών συναρτήσεων σύνδεσης. Ειδικότερα για τις δύο επικρατέστερες επιλογές μας, το probit link και το t link με επεξηγηματική a priori κατανομή, ισούται με 4,96%. Παράλληλα για το t link με μη επεξηγηματική a priori κατανομή και το logit link η αντίστοιχη προσαύξηση είναι

4,97%. Στο μοντέλο με probit συνάρτηση σύνδεσης αντιστοιχεί καθαρό ασφάλιστρο 4,96%, το οποίο είναι ίδιο με αυτό του t link με επεξηγηματική a priori κατανομή. Τέλος για το logit link η επιβάρυνση υπολογίστηκε στο 4,97%. Σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι η επιβάρυνση του καθαρού ασφαλιστρού συνιστά ένα σημαντικό ποσοστό, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι μελλοντικές απαιτήσεις αναμένεται να είναι σχετικά υψηλές.

Όσον αφορά τα απαιτούμενα κεφάλαια κινδύνου για κάθε συνάρτηση σύνδεσης, αυτά συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6). Τα κεφάλαια για κάθε συνάρτηση σύνδεσης εκφράζονται σε αναλογία με την αντίστοιχη επιβάρυνση του καθαρού ασφαλιστρού (Πίνακας 5). Για το t link με επεξηγηματική a priori κατανομή η 99,5% VaR και η 99% VaR ισούται με 4 και 3.5 φορές αντίστοιχα, την επιβάρυνση. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν ότι για μικρότερο επίπεδο εμπιστοσύνης απαιτούνται λιγότερα κεφαλαιακά αποθέματα.

	99,5% VaR	99% VaR	99,5% TVaR	99% TVaR
<b>probit link</b>	3.99	3.53	4.65	4.19
<b>t link, a priori 1</b>	3.98	3.52	4.65	4.19
<b>t link, a priori 2</b>	3.88	3.41	4.50	4.07
<b>logit link</b>	3.90	3.44	4.55	4.01

Πίνακας 6 Κεφαλαιακές απαιτήσεις για 99,5% VaR, 99% VaR, 99,5% TVaR και 99% TVaR

Επιπλέον οι 99,5% TVaR και 99% TVaR αντιστοιχούν σε 4.6 και 4.2 φορές την επιβάρυνση του καθαρού ασφαλιστρού. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι κεφαλαιακές απαιτήσεις του SST, παρότι υπολογισμένες σε μικρότερο επίπεδο εμπιστοσύνης, είναι κατά 5% μεγαλύτερες αυτών της Φερεγγυότητας II. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η TailVaR αποτελεί ένα πιο αυστηρό και ακραίο μέτρο κινδύνου και τα απαιτούμενα κεφάλαια για φερεγγυότητα είναι σαφώς μεγαλύτερα. Την πιο ακραία περίπτωση αποτελεί η 99,5% TVaR, σύμφωνα με την οποία απαιτείται επιβάρυνση, σχεδόν 5 ετών, στο καθαρό ασφάλιστρο, ώστε να διασφαλιστεί η κεφαλαιακή επάρκεια σε περίπτωση που επέλθει μια ακραία ζημιά.

Αντίστοιχα για το t link με μη επεξηγηματική a priori κατανομή οι 99,5% VaR, 99% VaR, 99,5% TVaR και 99% TVaR ισούται με 3.9, 3.4, 4.5 και 4 φορές τη προσαύξηση αντίστοιχα. Στη περίπτωση αυτή, μολονότι η προσαύξηση στο καθαρό ασφάλιστρο είναι σχεδόν το ίση με αυτή του t link με επεξηγηματική a priori κατανομή, τα κεφάλαια για φερεγγυότητα είναι σαφώς μικρότερα, με τη μεγαλύτερη διαφορά να παρατηρείται στην 99% VaR (3,2%).

Αναφορικά με το probit link, τα αποτελέσματα κυμαίνονται σε σχετικά ίδια επίπεδα με αυτά του t link με επεξηγηματική a priori κατανομή. Οι 99,5% VaR και 99% VaR είναι ελαφρώς μεγαλύτερες, με τιμές 3.99 και 3.53 αντίστοιχα, ενώ οι 99,5% TVaR και 99% TVaR είναι ακριβώς ίσες με τις αντίστοιχες του t link με επεξηγηματική a priori κατανομή.

Τέλος για το logit link οι κεφαλαιακές απαιτήσεις σύμφωνα με τη Φερεγγυότητα II αντιστοιχούν σε 3,9 φορές τη προσαύξηση στο καθαρό ασφάλιστρο, ενώ βάσει του Ελβετικού Τεστ Φερεγγυότητας οι απαιτήσεις αυτές αυξάνονται στο τετραπλάσιο. Επιπρόσθετα, η 99% VaR και 99,5% TVaR υπολογίζονται σε 3,44 και 4,55 φορές, αντίστοιχα, της επιβάρυνσης του καθαρού ασφαλίστρου.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι αν κατά την τιμολόγηση δεν ληφθούν σοβαρά υπόψη οι συνέπειες μιας οικονομικής κρίσης, υπάρχει σοβαρός κίνδυνος υποεκτίμησης του κινδύνου, και κατά συνέπεια της βιωσιμότητας μιας εταιρίας ασφαλίσεων ζωής. Δεδομένων, λοιπόν, των αναμενόμενων αποζημιώσεων, η επιβάρυνση στο επίπεδο του καθαρού ασφαλίστρου πρέπει να οριστεί περίπου στο 5%, ώστε να διασφαλιστούν επαρκή κεφαλαιακά αποθέματα σε περίπτωση μιας μακράς περιόδου οικονομικής ύφεσης. Παράλληλα, τα αποτελέσματα αυτά συνιστούν ενδείξεις των οφελών που πιθανόν να προκύψουν, από την ενσωμάτωση των οικονομικών κύκλων και της συνάρτησης μεταφοράς στα εσωτερικά μοντέλα που χρησιμοποιούν για την τιμολόγηση των προϊόντων τους και τον υπολογισμό των αποθεμάτων.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Ένωση Ασφαλιστικών Εταιριών Ελλάδος. (2007). Solvency II FAQs.  
<<http://www.eaee.gr/cms/uploads/SolvencyII-FAQ-Greek.pdf>>

### ΞΕΝΗ

Brooks, SP and Gelman, A. (1997). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **7**, 434-455.

Bureau of Economic Analysis. (2007). Bea: Glossary “G”.

Bureau of Economic Analysis. (2007). Measuring the Economy: A Primer on GDP and the National Income and Product Accounts.p.2- 5

Burns, A and Mitchell, W. (1946). Measuring Business Cycles. *NBER*, 5.

Casella, G., George, Ed. (1992). Explaining the Gibbs Sampler. *The American Statistician*, **46**: 167- 174.

CEA, Insurers of Europe. (2006). Working paper on risk measures VaR kai TailVaR.  
[http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/2006-markt-docs/2534-06-annex-cea\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/2006-markt-docs/2534-06-annex-cea_en.pdf)

Census Bureau. (2008). Income, Poverty, and Health Insurance in United States: 2008. <  
<http://www.census.gov/prod/2009pubs/p60-236.pdf>>

Census Bureau. (2013). The 2012 Statistical Abstract- U.S. Life Insurance Companies Summary,  
<[http://www.census.gov/compendia/statab/cats/banking\\_finance\\_insurance.html](http://www.census.gov/compendia/statab/cats/banking_finance_insurance.html)> .

Cowles, M. and Bradley P.Carlin. Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A comparative review. *Journal of American Statistical Association*, **91:434**, 5- 8.

Elwell, C. (2012). Economic Recovery: Sustaining U.S. Economic Growth in a Post-Crisis Economy.  
<<http://www2.census.gov/prod2/popscan/p60-162.pdf>> .

Federal Reserve of Economic Data. (2013). Gross National Product in million dollars.  
<<http://research.stlouisfed.org/fred2/series/GNPA>>.

Gelman, A. and Rubin, DB. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, **7**, 457- 511.

Geman S. and Geman D., (1984). Stochastic relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721- 741.

Gill, J. (2001). Generalized Linear Models: A Unified Approach. *Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences*, **07- 134**, 29- 32.

- Hamilton, J., (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* **57**, 357- 384.
- Ibrahim J., Chen M. (2000). *Power Prior Distributions for Regression Models*. *Statistical Science*, **15**, 46-60.
- Kass, R. and Raftery A. (1994). Bayes Factors. University of Washington Technical Report **751**, 19-30.
- Koskinen, L., Pukkila, T. (2002). Risk caused by the catastrophic downturns of the national economy. 27<sup>th</sup> *Transactions of the International Congress of Actuaries, Cancun, Mexico*.
- Mackay , D.J.C. (1996). An introduction to Monte Carlo methods. Proceedings of the 1996 Erice Summer School, <<http://www.stat.ucla.edu/~yuille/courses/Stat202C-Spring10/mackay.pdf>>.
- McCullagh, P. and Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*, *Great Britain: Cambridge*
- National Bureau of Economic Research. (2008). Determination of the December 2007 Peak in Economic Activity. < <http://www.nber.org/cycles/dec2008.html>>
- Olshausen B. A., (2004). Bayesian Probability Theory. <<http://redwood.berkeley.edu/bruno/npb163/bayes.pdf>>
- Puustelli, A., Koskinen, L., & Luoma, A., 2008. Bayesian modeling of financial guarantee insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **43.2**, 245- 254.
- Rush, Ch. (2006). Guide to Economic indicators: Making Sense of Economics. *The Economist in association with Profile Books Ltd*, 55.
- Sandstrom, A. (2006). Solvency: Models, Assessment and Regulation. Chapman and Hall 2<sup>nd</sup> Edition. New York.
- Walsh, B. (2004). Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling. *EEB* **581**.
- West, M. and Harrison, F. (1997). Bayesian Forecasting and Dynamic Modeling, Springer 2<sup>nd</sup> Edition, 561- 571.
- <[http://useconomy.about.com/od/grossdomesticproduct/a/recession\\_histo.htm](http://useconomy.about.com/od/grossdomesticproduct/a/recession_histo.htm)>
- <<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:EL:PDF>>
- <[http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical\\_specifications\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf)>
- <[https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx\\_dam/files/consultations/consultationpapers/CP33/CEIOPS-CP-33-09-Draft-L2-Advice-on-Governance.pdf](https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/CP33/CEIOPS-CP-33-09-Draft-L2-Advice-on-Governance.pdf)>
- <<http://www.economist.com/node/12852043>>
- <<http://www.project-syndicate.org/commentary/gdp-fetishism>>

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ