Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**ΕΠΩΝΥΜΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 1** **EPONYMOUS PRIME NUMBERS1**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Μπαϊρακτάρη Ιωάννα**
Πατρώνυμο	**Σταύρος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/07008**
Επιβλέπων	**Τσικούρας Παναγιώτης, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **21/03/2013**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή) (υπογραφή) (υπογραφή)

Παναγιώτης Τσικούρας
Καθηγητής

Αριστείδης Σαπουνάκης
Καθηγητής

Περίληψη

Η παρούσα διατριβή αναφέρεται σε μερικούς από τους επώνυμους πρώτους αριθμούς δηλαδή σε πρώτους αριθμούς που φέρουν είτε ονόματα μαθηματικών, είτε ονόματα που προκύπτουν από κάποιες ιδιότητες τους.
Στην εργασία αυτή, εκτός από τον ορισμό και τις ιδιότητες αυτών των αριθμών, υπάρχουν βιογραφικά στοιχεία των Μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτούς.

Abstract

The present thesis refers to certain of the eponymous prime numbers, i.e, prime numbers that either carry names of mathematicians or names that originate from some of their properties.
In this work, except for the definition and properties of these numbers, biographical details of Mathematicians who dealt with them are given.

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

Όσοι ασχολούνται με τον μαγικό κόσμο των μαθηματικών, σίγουρα γνωρίζουν για τους αινιγματικούς «πρώτους» αριθμούς, των οποίων ο εντοπισμός έχει απασχολήσει γενιές μαθηματικών και έχει γεννήσει πλήθος θεωρημάτων.
Αν και μέχρι τώρα το να εντοπιστεί ένας μεγαλύτερος πρώτος ακέραιος θεωρούνταν μια επίπονη διαδικασία, οδηγούσε τελικά στην εύρεση ενός ακέραιου που ήταν «χωμένος τυχαία» μέσα στο χάος των ακεραίων. Τώρα κάποιοι επιστήμονες διαπίστωσαν ότι, οι πρώτοι αριθμοί δεν εμφανίζονται τελικά τόσο τυχαία. Ο Pradeep Kumar απ' το πανεπιστήμιο της Βοστόνης κατάφερε να εντοπίσει μια κρυμμένη τάξη στην κατανομή τους.
Για τους μαθηματικά «αμύητους», ας αρκεστούμε να πούμε ότι «πρώτοι» χαρακτηρίζονται οι ακέραιοι αριθμοί που δεν διαιρούνται από άλλους ακέραιους (εκτός απ' τον εαυτό τους και το 1). Είναι δηλαδή κάπως «ασυμβίβαστοι» και «μοναχικοί». Για παράδειγμα «πρώτοι» αριθμοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 13 ενώ ο μεγαλύτερος που έχει εντοπιστεί προς το παρόν έχει 4.000.000 ψηφία !!!
Επειδή οι μεγάλοι αριθμοί έχουν εν γένει πιο πολλούς διαιρέτες, οι πρώτοι γίνονται όλο και πιο αραιοί καθώς εξετάζουμε μεγάλους αριθμούς. Κάποιος θα μπορούσε μάλιστα να εικάσει ότι οι πρώτοι αριθμοί, τελικά, θα σταματήσουν κάπου, δηλαδή είναι λογικά αποδεκτό να υποθέσουμε ότι πέρα από κάποιο σημείο όλοι οι αριθμοί είναι σύνθετοι. Αυτό όμως δεν συμβαίνει, όπως αποδείχθηκε από τον Ευκλείδη πριν από είκοσι δύο και πλέον αιώνες. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θεωρείται υπόδειγμα κομψότητας. Πράγματι, σε ένα δημοψήφισμα ανάμεσα στους μαθηματικούς που έγινε το 1990, το εν λόγω θεώρημα μαζί με την απόδειξη του ψηφίστηκε ως το τρίτο πιο όμορφο σε όλα τα Μαθηματικά.
Ο Ευκλείδης, στα στοιχεία του, μας απέδειξε ότι αυτοί οι εγωιστικοί αριθμοί που διαιρούνται μόνο από τη μονάδα και τον εαυτό τους είναι άπειροι, χωρίς όμως να γνωρίζουμε πως παράγεται αυτή η απειρία και πως παράγεται από έναν πρώτο, ο επόμενος πρώτος αριθμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ευκλείδης).
Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων ούτως ώστε να μπορούμε να τους καταχωρίσουμε όλους στην ακολουθία $p_1,p_2\ldots\ p_\kappa$. Ο συμβολισμός εδώ υποδηλώνει ότι ο p_1 είναι ο πρώτος πρώτος αριθμός, δηλαδή $p_1 = 2$, ο p_2 είναι ο αμέσως επόμενος, δηλαδή $p_2 = 3$, κ.λπ., με τον p_κ να είναι ο τελευταίος πρώτος από τους συνολικά κ πρώτους. Δεν μας ενδιαφέρει η τιμή του κ, αλλά μόνον ότι υπάρχει. Αν ο κ δεν υπάρχει τότε οι πρώτοι είναι άπειροι. Θεωρήστε, λοιπόν, τον ακέραιο που παίρνουμε πολλαπλασιάζοντας όλους τους πρώτους μεταξύ τους και προσθέτοντας τον 1. Ονομάστε τον τεράστιο αυτόν αριθμό N. Δηλαδή $N= (p_1{\cdot}p_2{\cdots}\ p_\kappa) + 1$. Ο αριθμός αυτός μπορεί να σχηματιστεί υπό την προϋπόθεση ότι το πλήθος των πρώτων είναι πεπερασμένο. Για κάθε πρώτο p_i ο αριθμός N είναι κατά 1 μεγαλύτερος από ένα πολλαπλάσιο του p_i. Εφόσον λοιπόν ο N, διαιρούμενος με τον p_i αφήνει υπόλοιπο 1, δεν είναι πολλαπλάσιο κανενός πρώτου p_i, και άρα δεν διαιρείται με κανέναν πρώτο. Συνεπώς και ο ίδιος είναι πρώτος. Επειδή όμως ο N είναι (κατά πολύ) μεγαλύτερος από κάθε p_i της λίστας μας, αυτό αντιφάσκει με τον ισχυρισμό ότι είχαμε καταχωρίσει όλους τους πρώτους. □

Μια χρήσιμη πρόταση για τους πρώτους αριθμούς είναι η εξής:

Πρόταση:
Ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 3 ισούται με 6k+1 ή με 6k+5 για κάποιο $k \in N^*$.

Απόδειξη: Ένας φυσικός p>3 γράφεται σε μια από τις παρακάτω μορφές:
p=6k , p=6k+1, p=6k+2, p=6k+3, p=6k+4, p=6k+5 για κάποιο $k \in N^*$.
Όμως οι αριθμοί 6k=2*3k, 6k+2=2(3k+1), 6k+3=3(2k+1) και 6k+4=2(3k+2) δεν είναι πρώτοι. Άρα οι μόνοι αριθμοί που μπορεί να είναι πρώτοι είναι αυτοί της μορφής 6κ+1 και 6κ+5. □

Παρατήρηση: Αντί για 6κ+5 μπορούμε να θεωρήσουμε τους αριθμούς 6k-1=6(k-1)+5.

Το ερώτημα για την κατανομή των πρώτων αριθμών έμενε αναπάντητο ως το 1859, οπότε ο γερμανός μαθηματικός Bernard Riemann ισχυρίσθηκε στην Υπόθεσή του ότι βρήκε τη λύση του γρίφου. Ο Riemann όμως, πέθανε αιφνιδίως, χωρίς να προλάβει να μας δώσει τα στοιχεία αυτά. Σήμερα, οι μαθηματικοί όλου του κόσμου ψάχνουν ακόμη την απάντηση, χαμένη στα σύνορα της Κβαντομηχανικής και της Θεωρίας του Χάους. Ένα εκατομμύριο δολάρια περιμένουν να επιβραβεύσουν αυτόν που θα επιλύσει το «πλέον καταζητούμενο πρόβλημα»!
Το 1876, ο Eduard Lucas απέδειξε ότι ο 2^{127}-1 είναι πρώτος. Αυτός παρέμεινε ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός αυτής της μορφής μέχρι το 1951. Σήμερα, ένας πρώτος αυτού του μεγέθους μπορεί να αποδειχθεί πρώτος μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα, αν και η παραγοντοποίηση για μεγάλους αριθμούς παραμένει ένα δύσκολο πρόβλημα. Μ' αυτό το τρόπο τα δημόσια κλειδιά κρυπτογράφησης και μέθοδοι όπως ο RSA αλγόριθμος έχουν αναδείξει τους πρώτους αριθμούς σε σημαντικά εργαλεία για την κρυπτογραφία, τη διασφάλιση των επικοινωνιών, των τραπεζικών συναλλαγών και του ηλεκτρονικού εμπορίου.
Η αναζήτηση πρώτων αριθμών και η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει εφαρμογή στην κρυπτογραφία δεδομένου ότι είναι δύσκολη η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για να πιστοποιήσουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος χρησιμοποιούμε τα primality test.
Το primality test είναι μια δοκιμή για να καθοριστεί εάν ένας συγκεκριμένος αριθμός, είναι πρώτος.
Οι δοκιμές αυτές είναι δύο ειδών: προσδιοριστικές και πιθανοτικές. Οι προσδιοριστικές προσδιορίζουν με απόλυτη βεβαιότητα αν ένας αριθμός είναι πρώτος, αλλά είναι πολύ χρονοβόρες. Παραδείγματα προσδιοριστικών δοκιμών είναι η δοκιμή Lehmer-Lucas όπως και το κόσκινο του Ερατοσθένη.
Οι πιθανοθεωρητικές δοκιμές μπορούν με πολύ μικρή πιθανότητα λάθους να ελέγξουν αν ένας αριθμός είναι πρώτος. Ωστόσο, είναι γενικά πολύ γρηγορότερες από ότι οι προσδιοριστικές δοκιμές. Παραδείγματα πιθανοθεωρητικών δοκιμών είναι η δοκιμή Miller – Rabin, το μικρό θεώρημα του Fermat και η Solovay – Strassen.
Αριθμοί που έχει αποδειχθεί ότι είναι πρώτοι μέσα από πιθανοτικά τεστ, ορθώς αναφέρονται ως πιθανοί πρώτοι μέχρι να αποδειχθούν ως πρώτοι και προσδιοριστικά.
Οι 100 πρώτοι πρώτοι αριθμοί είναι οι εξής:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541…

(Ακολουθία A000040 στην Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) [14]

2.Επώνυμοι Πρώτοι Αριθμοί

2.1.Πρώτοι αριθμοί Sophie Germain

Βιογραφικά στοιχεία (1776-1831)

Η Marie - Sophie Germain γεννήθηκε σε μια εποχή επαναστάσεων. Τη χρονιά που γεννήθηκε έγινε η Αμερικανική επανάσταση και δεκατρία χρόνια αργότερα, στη χώρα της, το 1789 η Γαλλική. Παρατηρώντας τη ζωή της θα λέγαμε πως η Germain ενσωμάτωσε το πνεύμα της επανάστασης μέσα στο οποίο γεννήθηκε. Ήταν μια γυναίκα που προερχόταν από τη μεσαία τάξη, η οποία πήγε ενάντια στις επιθυμίες της οικογένειάς της και τις κοινωνικές προκαταλήψεις της εποχής, για να γίνει αργότερα μια ιδιαίτερα αναγνωρισμένη μαθηματικός .

Από παιδί είχε μεγάλο πάθος για τα μαθηματικά. Οι γονείς της όμως θεωρούσαν ότι το πάθος της αυτό ήταν ακατάλληλο για ένα κορίτσι, δεδομένου ότι χρονολογικά τοποθετούμαστε στο μεσαίωνα και κάτι τέτοιο τότε, θεωρείτο απαράδεκτο έως και ντροπιαστικό. Έτσι, έκαναν ότι περνούσε από το χέρι τους για να την αποθαρρύνουν. Αναφέρεται, π.χ. ότι της στερούσαν τη θέρμανση και το φως, παίρνοντας τα κεριά από το δωμάτιό της και σβήνοντας τη φωτιά που το ζέσταινε και όλα αυτά με σκοπό να την αποτρέψουν από το διάβασμα. Αποτέλεσμα όλων αυτών των ενεργειών, εν τέλει, δεν ήταν η αποθάρρυνση του πνεύματος, αλλά αντιθέτως η έντονη επιθυμία για μάθηση. Το μελάνι πάγωνε από το κρύο αλλά η Germain τυλιγόταν με τα σκεπάσματα του κρεβατιού της, άναβε κεριά που είχε κρύψει και μελετούσε μέσα στη νύχτα. Έτσι, αντιμέτωποι με την αποφασιστικότητα και την επιμονή της κόρης τους, οι γονείς της Germain λύγισαν και της επέτρεψαν να μελετά, ότι περισσότερο είχε ανάγκη και επιθυμούσε, τα μαθηματικά. Αξιοσημείωτο όμως είναι ότι μελετούσε μόνη της και ότι κατάφερε στη ζωή της το κατάφερε χωρίς να έχει κάποιο δάσκαλο. [11]

Όταν έκλεισε τα 18 της χρόνια, ένα νέο πανεπιστήμιο ιδρύθηκε στο Παρίσι, το «Ecole Polytechnique». Η Germain κατάφερε να εξασφαλίσει σημειώσεις των διαλέξεων μέσω του ονόματος Antoine-August le Blanc. O Le Blanc ήταν φοιτητής ο οποίος εγκατέλειψε τις σπουδές του γιατί δεν μπορούσε να αντεπεξέλθει στις υψηλές απαιτήσεις της σχολής. Το πώς όμως έφταναν οι σημειώσεις στα χέρια της, αποτελεί μυστήριο μέχρι και σήμερα.

Έτσι σε μια εποχή όπου η είσοδος στα πανεπιστήμια ήταν κλειστή σε γυναίκες, η απόκρυψη της γυναικείας ταυτότητας και η υιοθέτηση μιας αντρικής, αποτελούσε την μόνη λύση για μια «εκ του παραθύρου» είσοδο σε αυτά. Ο καθηγητής Lagrange στο τέλος των διαλέξεών του ζήτησε από τους σπουδαστές να υποβάλλουν μια τελική εργασία. Όταν διάβασε την δουλειά της Germain (υπό το όνομα Le Blanc) ζήτησε μια συνάντηση ώστε να δει από κοντά αυτόν τον φωτισμένο νεαρό «άντρα». Έμεινε έκπληκτος όταν μπροστά του εμφανίσθηκε μια γυναίκα. Γοητευμένος όμως από την εξυπνάδα της Germain, την παρότρυνε να συνεχίσει τη μελέτη ώστε να εμπλουτίσει ακόμη περισσότερο της μαθηματικές της γνώσεις και συνέχισε να έχει επαφή μαζί της ως μαθηματικός σύμβουλος και συνεργάτης.

Ο Lagrange συμπεριέλαβε μερικές από τις ανακαλύψεις της σε ένα παράρτημα στη δεύτερη έκδοση του *Théorie de Fonctions Analytiques.* Αρκετές από τις επιστολές της δημοσιεύθηκαν αργότερα στο έργο *Oeuvres Philosophique de Sophie Germain*. Κρυμμένη για πολλά χρόνια πίσω από το αντρικό όνομα Antoine-August le Blanc, η Germain συνεργαζόταν δια αλληλογραφίας με ένα κορυφαίο μαθηματικό, τον *Gauss*, ανταλλάσσοντας ιδέες και προτάσεις. Η επικοινωνία τους ξεκίνησε μετά την εμφάνιση του περίφημου έργου του Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* το 1801. Μέσω αλληλογραφίας συζητούσαν για τα αποτελέσματά της Germain γύρω από την *θεωρία των αριθμών*. Για τα αποτελέσματα αυτά της έδωσε πολλούς επαίνους, μια αξιολόγηση που επανέλαβε με επιστολές του στους συναδέλφους του. Η αληθινή ταυτότητα της Germain αποκαλύφθηκε στον *Gauss* μετά το 1806, όταν αυτή μεσολάβησε για την ασφάλεια του όταν διέτρεχε κίνδυνο. Όταν ο *Gauss* ανακάλυψε όλη την αλήθεια για την πραγματική της ταυτότητα, την επαίνεσε ακόμη περισσότερο. Οι δυο τους δεν συναντήθηκαν ποτέ.

Η Germain έχει γίνει γνωστή για το έργο της σχετικά με τους πρώτους αριθμούς, την μερική λύση του θεωρήματος Fermat, και την συνεισφορά της στη μελέτη της ελαστικότητας και των μαθηματικών της φυσικής. Η ανάλυση της Germain οδήγησε στη μερική λύση του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, το οποίο συναντάμε και ως θεώρημα Germain. Έκανε έτσι το πρώτο μικρό αλλά αποφασιστικό βήμα προς τη λύση και η πρότασή της παρέμεινε η σημαντικότερη συμβολή σχετικά με το άλυτο αυτό θεώρημα του Fermat για τα επόμενα 100 χρόνια. Η Germain, επίσης, έλαβε ανώνυμα μέρος σε τρεις διαγωνισμούς που διεξήγαγε η Γαλλική Επιστημονική Ακαδημία το 1811, 1813 και το 1816. Το 1816 κέρδισε το πρώτο βραβείο για την μελέτη της σχετικά με τη «θεωρία της ελαστικότητας». Το βραβείο αυτό ήταν μεγάλης σημασίας, επειδή την εισήγαγε στις τάξεις των διαπρεπών μαθηματικών ενώ αποτέλεσε την πρώτη γυναίκα που της επετράπη η είσοδος στις συναντήσεις της Ακαδημίας. Έτσι μπορούσε πια να συναντά κορυφαίους μαθηματικούς χωρίς να χρειάζεται να κρυφτεί πίσω από ένα αντρικό όνομα η Germain πέθανε τον Ιούνιο του 1831 από καρκίνο του μαστού, και το πιστοποιητικό θανάτου της δεν την κατέταξε στην κατηγορία των μαθηματικών ή των επιστημόνων, αλλά στην κατηγορία των «rentier*»,* δηλαδή a person of private means. Εντούτοις, λίγα χρόνια αργότερα, μια πινακίδα αναρτήθηκε στο σπίτι όπου πέθανε, με την επιγραφή “Sophie Germain, philosophe et mathématicienne*” (*Sophie Germain, φιλόσοφος και μαθηματικός*)*.[15]

Οι πρώτοι αριθμοί Sophie Germain

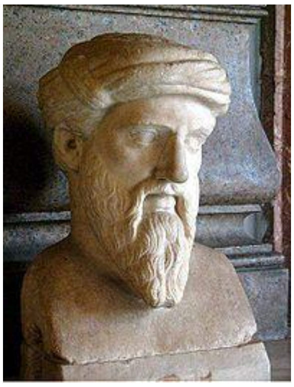
Στη θεωρία αριθμών, ένας πρώτος αριθμός p λέγεται **πρώτος αριθμός της Sophie Germain** εάν 2p + 1 είναι επίσης πρώτος. Οι πρώτοι αριθμοί 2p + 1 που σχηματίζονται από τους Sophie Germain πρώτους p λέγονται ασφαλείς **πρώτοι**. Παραδείγματος χάριν, το 23 είναι ένας Sophie Germain πρώτος αριθμός διότι είναι πρώτος και ο 2 × 23 + 1 = 47, είναι επίσης πρώτος.

Ένας Sophie Germain πρώτος p > 3 είναι της μορφής 6κ – 1, ή ισοδύναμα:
p ≡ 5(mod6) (όπως και ο αντίστοιχος ασφαλής πρώτος 2p +1).
Σημειώνουμε ότι με βάση την πρόταση της εισαγωγής η άλλη μορφή για ένα πρώτο αριθμό p > 3 είναι 6k + 1, ή ισοδύναμα p ≡ 1(mod6), και ότι στην περίπτωση αυτή, 3|(2p+1) (οπότε αυτά τα p δεν είναι πρώτοι αριθμοί).

Οι πρώτοι πρώτοι Sophie Germain αριθμοί είναι:

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191, 233, …...

Αυτή είναι η ακολουθία A005384 στην OEIS. Δεν είναι γνωστό αν υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί Sophie Germain.
Μια ακολουθία {p, 2p + 1, 2 (2p + 1) + 1,…} από έναν ή περισσότερους πρώτους Sophie Germain αριθμούς, τελειώνοντας με έναν πρώτο που δεν είναι απαραίτητο να είναι ένας Sophie Germain αριθμός καλείται **αλυσίδα Cunningham του πρώτου είδους**. Κάθε όρος μιας τέτοιας ακολουθίας εκτός από τον πρώτο και το τελευταίο είναι και πρώτος Sophie Germain και ασφαλής πρώτος συγχρόνως. Εάν ένας πρώτος Sophie Germain p ισούται με 3(mod4), τότε ο αντίστοιχος ασφαλής πρώτος 2p+1 είναι ένας διαιρέτης του **αριθμού Mersenne** 2^p-1.[18]



2.2. Πυθαγόρειοι πρώτοι αριθμοί

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος, ή απλά Πυθαγόρας (570 π.Χ. – 495 π. Χ.) ήταν Έλληνας φιλόσοφος και ιδρυτής του θρησκευτικού κινήματος που ονομάζεται Πυθαγορισμός. Οι περισσότερες από τις πληροφορίες μας σχετικά με τον Πυθαγόρα γράφτηκαν αιώνες μετά το θάνατο του, έτσι πολύ λίγα αξιόπιστα στοιχεία είναι γνωστά γι' αυτόν. Γεννήθηκε στο νησί της Σάμου, και ταξίδεψε πολύ στα νιάτα του, επισκέφθηκε την Αίγυπτο και άλλα μέρη όπου αναζητούσε τη γνώση.
Γύρω στο 530 π.Χ., μετανάστευσε στον Κρότωνα, μια ελληνική αποικία στη νότια Ιταλία, όπου δημιούργησε μια θρησκευτική αδελφότητα. Οι οπαδοί του ακολούθησαν θρησκευτικές τελετές και πρακτικές που αναπτύχθηκαν από τον Πυθαγόρα, και σπούδασαν τις φιλοσοφικές θεωρίες του. Η αδελφότητα ανέλαβε ενεργό ρόλο στην πολιτική του Κρότωνα, αλλά αυτό τελικά οδήγησε στην πτώση τους, και ο Πυθαγόρας αναγκάστηκε να φύγει από την πόλη. Λέγεται ότι τελείωσε τις μέρες του στους Μετάποντιους.
Ο Πυθαγόρας επηρέασε τη φιλοσοφία και τη θρησκευτική διδασκαλία στα τέλη του 6ου π.Χ. αιώνα. Τιμήθηκε ως σπουδαίος μαθηματικός, μυστικιστικός και επιστήμονας, και είναι περισσότερο γνωστός για το Πυθαγόρειο θεώρημα που φέρει την επωνυμία του. Πολλά από τα επιτεύγματα που πιστώνονται στον Πυθαγόρα μπορεί στην πραγματικότητα να έχουν επιτευχθεί από τους συναδέλφους και τους διαδόχους του. Εάν οι μαθητές του πίστεψαν ότι τα πάντα αφορούσαν τα μαθηματικά και ότι οι αριθμοί ήταν η απόλυτη πραγματικότητα, είναι άγνωστο. Έλεγαν ότι ήταν ο πρώτος άνθρωπος που ονόμασε τον εαυτό του φιλόσοφο, ή εραστή της σοφίας, και οι πυθαγόρειες ιδέες του άσκησαν σημαντική επίδραση στον Πλάτωνα, και μέσω αυτού, στο σύνολο της δυτικής φιλοσοφίας. Ο Πυθαγόρας δεν έγραψε ποτέ οποιεσδήποτε λεπτομερείς περιγραφές των σκέψεων του
Σύμφωνα με μερικούς απολογισμούς, ο Πυθαγόρας ήταν παντρεμένος με τη Θεανώ, μια γυναίκα από τον Κρότωνα και απέκτησε τέσσερα παιδιά, ένα γιο, τον Τηλαύγη και τρεις κόρες, τη Δάμω, την Αριγνώτη και τη Μυϊά.

Πυθαγόρειοι πρώτοι αριθμοί

Οι πρώτοι πυθαγόρειοι αριθμοί είναι αριθμοί της μορφής $4n + 1$ όπου $n \in N^*$. Αυτοί ακριβώς οι πρώτοι αριθμοί μπορούν να είναι η υποτείνουσα ενός Πυθαγόρειου τριγώνου δηλαδή ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές που είναι μήκη φυσικών αριθμών.

Οι πρώτοι πυθαγόρειοι πρώτοι αριθμοί είναι:
5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, … (ακολουθία A002144 στην OEIS)
Το θεώρημα του Fermat για το άθροισμα δυο τετραγώνων αναφέρει ότι οι εν λόγω πρώτοι αριθμοί μπορούν να παρασταθούν κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυο τετραγώνων, και κανένας άλλος πρώτος δεν μπορεί να παρασταθεί μ΄ αυτόν τον τρόπο εκτός από το $2 = 1^2 + 1^2$.

Ένας ακέραιος q ονομάζεται **τετραγωνικό υπόλοιπο modq** αν ισχύει ότι $x^2 \equiv q \bmod n$, για κάποιο $x \in N^*$. Για παράδειγμα ο αριθμός 10 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο mod3 αφού $5^2 = 10 \bmod 3$ ενώ ο αριθμός 14 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο mod5 αφού $7^2 = 14 \bmod 5$.
Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση:
Αν τα p και q είναι περιττοί πρώτοι και τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι πυθαγόρειος, τότε ο p είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modq αν και μόνο αν το q είναι ένα τετραγωνικό υπόλοιπο modp. Αντίθετα, αν ούτε το p ούτε το q είναι πυθαγόρειοι, τότε το p είναι ένα τετραγωνικό υπόλοιπο modq αν και μόνο αν το q δεν είναι ένα τετραγωνικό υπόλοιπο modp. [13]

2.3. Πρώτοι αριθμοί Fibonacci

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Leonardo Pisano Fibonacci (1170 - 1250) ήταν ένας διάσημος ιταλός μαθηματικός. Το πραγματικό όνομά του ήταν Λεονάρντο της Πίζας (Leonardo Pisano). Το παρατσούκλι Fibonacci είναι συντομογραφία του Filius Bonaccio (γιός του Bonaccio). Ο πατέρας του κατείχε διπλωματική θέση στη πόλη της Bugia στη βόρεια ακτή της Αφρικής, με αποτέλεσμα η εκπαίδευση του να προέρχεται από εκεί.

Ο Fibonacci θεωρείται «Πατέρας των Μαθηματικών». Είχε διδαχθεί το αραβικό σύστημα αριθμών και γύρω στο έτος 1200 σταμάτησε τα ταξίδια του και επέστρεψε στην Πίζα. Εκεί έγραψε διάφορα σημαντικά κείμενα που διαδραμάτισαν έναν σημαντικό ρόλο στην αναβίωση των αρχαίων μαθηματικών δεξιοτήτων. Το 1202 εξέδωσε το βιβλίο Liber Abaci (Book of Abacus) Ο Fibonacci έζησε στις ημέρες που τα βιβλία ήταν χειρόγραφα. Από τα βιβλία του, έχουμε ακόμα τα αντίγραφα των Liber abaci (1202), των Practica geometriae (1220), του Flos και Liber quadratorum (1225).

Το βιβλίο του Liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών) το οποίο ολοκληρώθηκε το 1202 έπεισε αρκετούς Ευρωπαίους μαθηματικούς να χρησιμοποιήσουν το «νέο» σύστημα. Το βιβλίο, γραμμένο στα λατινικά, περιγράφει με λεπτομέρεια τους μαθηματικούς κανόνες που σήμερα διδάσκονται στο δημοτικό για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και περιέχει πολλές ασκήσεις-παραδείγματα με λεπτομέρειες για την εφαρμογή αυτών των κανόνων. Μ' αυτό το βιβλίο εισήγαγε το Αραβικό σύστημα αριθμών στην Ευρώπη και το βιβλίο αυτό είναι υπεύθυνο για τη μεγάλη φήμη του ως μαθηματικού τον Μεσαίωνα[25].

Ο Fibonacci ήταν ένας μαθηματικός που τα επιτεύγματά του και οι πρακτικές εφαρμογές τους, αναγνωρίστηκαν και τον κατέστησαν διάσημο στους σύγχρονους του.

Μετά το 1228 υπάρχει μόνο ένα γνωστό επίσημο έγγραφο που αναφέρεται στον Fibonacci. Αυτό είναι ένα διάταγμα που συντάχθηκε από τη Δημοκρατία της Πίζας το 1240 στο οποίο ένας μισθός απονέμεται στον:

´´Πιο σοβαρό και μορφωμένο καθηγητή Leonardo Bigollo´´

Αυτός ο μισθός δόθηκε στον Fibonacci τιμώντας τον, για τις υπηρεσίες που είχε προσφέρει στην πόλη, επειδή συμβούλευε τους πολίτες σε θέματα λογιστικής και διδασκαλίας.

Γνωστοί αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία αριθμών στην οποία ο κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων είναι γνωστή ως **ακολουθία Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ... κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων και ονομάζεται **αριθμός Fibonacci**. Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη **Χρυσή Τομή**, ή **Χρυσή αναλογία**, ή Αριθμό φ =1.618033989. Ο αντίστροφος της Χρυσής Τομής είναι 1/φ = 0.618033989, με αποτέλεσμα να ισχύει: 1/φ=φ-1. Ένα ορθογώνιο τετράπλευρο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με 1/φ ονομάζεται Χρυσό Ορθογώνιο. Η ακολουθία Fibonacci παράγεται από τη σχέση f(1) = f(2) = 1, f(n+1) = f(n) + f(n-1), και απαντάται συχνά σε πολλούς τομείς των

μαθηματικών και των άλλων επιστημών. Είναι όμως σημαντικό και το πόσο συχνά συναντάται στη φύση, σε μοτίβα όπως τα λουλούδια ή τα φύλλα των φυτών.
Ο Stan Grist έγραψε ότι:

«Οι αριθμοί Fibonacci είναι το αριθμητικό σύστημα της φύσης. Εμφανίζονται παντού στη φύση, από τη διάταξη των φύλλων στα φυτά μέχρι το μοτίβο των πετάλων στα λουλούδια, τις πευκοβελόνες, ή τα στρώματα του φλοιού ενός ανανά. Φαίνεται πώς οι αριθμοί Fibonacci σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού, ενός κυττάρου, ενός σπυριού σταριού, μιας κυψέλης μελισσών, ακόμα της ίδιας της ανθρωπότητας» .

Οι **πρώτοι αριθμοί Fibonacci** είναι οι αριθμοί Fibonacci που είναι πρώτοι.
Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Fibonacci είναι:

2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073, ...

Οι πρώτοι 33 πρώτοι Fibonacci αριθμοί είναι οι αριθμοί F_n για τις παρακάτω τιμές των n:

3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 50833, 81839.

Δεν είναι γνωστό αν υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί Fibonacci.[16]

2.4. Ευκλείδειοι πρώτοι αριθμοί

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Ευκλείδης ήταν Έλληνας μαθηματικός και τον αποκαλούσαν "Πατέρα της γεωμετρίας". Η ημερομηνία, ο τόπος γέννησης του Ευκλείδη όπως και οι συνθήκες που προκάλεσαν τον θάνατο του είναι άγνωστες, και μόνο κατά προσέγγιση υπολογίζονται σε σχέση με σύγχρονες του προσωπικότητες και γεγονότα που σημειώνονται σε διάφορες αναφορές. Κατά τη διάρκεια της ζωής του Ευκλείδη δεν έγινε καμία περιγραφή για την εμφάνιση του, έτσι η απεικόνιση του στα έργα τέχνης είναι προϊόν φαντασίας καλλιτεχνών.
Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του Ευκλείδη. Στην πραγματικότητα οι βασικές αναφορές στο όνομά του έγιναν μετά το θάνατό του από τον Πρόκλο και τον Πάππο της Αλεξάνδρειας. Ο Πρόκλος αναφέρει τον Ευκλείδη μόνο εν συντομία στο έργο του «Σχόλια για τα Στοιχεία», που γράφτηκε τον πέμπτο αιώνα, ως τον συγγραφέα τον ″Στοιχείων″. Όταν ο Πτολεμαίος ο πρώτος ρώτησε τον Ευκλείδη εάν υπήρχε κανένας συντομότερος δρόμος στη γεωμετρία από τα ″Στοιχεία″, αυτός απάντησε: " Δεν υπάρχει κανένας βασιλικός δρόμος προς στη γεωμετρία".
Αν και τα ¨Στοιχεία¨ είναι κυρίως γνωστά για τα γεωμετρικά αποτελέσματά τους, περιλαμβάνουν και θεωρία αριθμών. Εξετάζεται η σύνδεση μεταξύ των τέλειων αριθμών και των πρώτων αριθμών Mersenne, η απειρία των πρώτων αριθμών, το λήμμα του Ευκλείδη στην παραγοντοποίηση (που οδηγεί στο θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για τη μοναδικότητα των πρώτων παραγοντοποιήσεων), και ο Ευκλείδειος αλγόριθμος για το μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο αριθμών.[7]

Ευκλείδειοι αριθμοί

Οι **Ευκλείδειοι αριθμοί** είναι οι αριθμοί που σχηματίζονται αν προσθέσουμε μια μονάδα στο γινόμενο των πρώτων πρώτων αριθμών.

Η ακολουθία των Ευκλείδειων αριθμών αρχίζει ως εξής :
3, 7, 31, 211, 2311, 30031, 510511… (ακολουθία A006862 των OEIS)
Δεν είναι γνωστό εάν υπάρχουν άπειροι πρώτοι Ευκλείδειοι αριθμοί.

Πρόταση:
Ένας Ευκλείδειος αριθμός δεν ισούται ποτέ με το τετράγωνο κάποιου αριθμού.

Ευκλείδειοι πρώτοι αριθμοί λέγονται οι ευκλείδειοι αριθμοί που είναι πρώτοι.

Ο ευκλείδειος αριθμός A_6=2*3*5*7*11*13+1=30031=59*509 είναι ο πρώτος σύνθετος αριθμός του Ευκλείδη, αποδεικνύοντας ότι δεν είναι όλοι οι αριθμοί του Ευκλείδη πρώτοι. [24]

2.5. Πρώτοι αριθμοί Mersenne

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Marin Mersenne ή Marin Mersennus ή Πατήρ Mersenne (8 Σεπτεμβρίου 1588 – 1 Σεπτεμβρίου 1648) ήταν ένας Γάλλος θεολόγος, φιλόσοφος, μαθηματικός και θεωρητικός της μουσικής, συχνά καλούμενος "πατέρας της ακουστικής".
Ο Marin Mersenne γεννήθηκε από γονείς αγρότες στο Sarthe της Γαλλίας. Εκπαιδεύτηκε στο Le Mans και στο κολλέγιο Jesuit La Flèche. Στις 17 Ιουλίου 1611, έγινε μέλος του Friars Minim, και κατόπιν ασχολήθηκε με τη θεολογία και τα εβραϊκά στο Παρίσι, όπου χειροτονήθηκε το 1613.
Μεταξύ 1614 και 1618, δίδαξε θεολογία και φιλοσοφία στους Nevers, μετά επέστρεψε στο Παρίσι και εγκαταστάθηκε στη μονή L' Annonciade το 1620. Εκεί, με άλλα συγγενικά πνεύματα όπως ο René Descartes, ο Etienne Pascal, ο Gilles de Roberval και ο Nicolas-Claude Fabri de Peiresc, μελέτησε μαθηματικά και μουσική. Αλληλογραφούσε με το Giovanni Doni, τον Constantijn Huygens και άλλους μελετητές στην Ιταλία, την Αγγλία και την Ολλανδία. Ήταν ένας αφοσιωμένος υπερασπιστής του Γαλιλαίου, βοηθώντας τον στις μεταφράσεις ορισμένων εργασιών του στη μηχανική. Για τέσσερα έτη, ο Mersenne αφιερώθηκε εξ ολοκλήρου στο φιλοσοφικό και θεολογικό γράψιμο, και δημοσίευσε τα Celeberrimae Quaestiones in Genesim (1623), L' Impieté des déistes (1624), La Vérité des sciences (Η αλήθεια των επιστημών ενάντια στους σκεπτικιστές, 1624).
Μερικές φορές ανακριβώς δηλώνεται ότι ήταν Ιησουίτης. Εκπαιδεύτηκε από Ιησουίτες, αλλά δεν προσχώρησε ποτέ στο τάγμα των Ιησουιτών. Το 1635 ο Mersenne συναντήθηκε με τον Tommaso Campanella, για τον οποίο όμως κατέληξε στο συμπέρασμα ότι θα μπορούσε " να μην διδάξει τίποτα στις επιστήμες (...) αλλά ακόμα, έχει καλή μνήμη και γόνιμη φαντασία ". Ο Mersenne ρώτησε τον René Descartes αν ήθελε να συναντηθεί με τον Campanella, αλλά ο Descartes αρνήθηκε. Το 1643-1644 ο Mersenne αλληλογραφούσε επίσης με το γερμανό άθεο Marcin Ruar σχετικά με τις κοπερνίκειες ιδέες του Pierre Gassendi, διαπιστώνεται ότι ο Ruar ήταν ήδη υποστηρικτής του Gassendi.
Πέθανε λόγω των περιπλοκών που πρόεκυψαν από απόστημα στους πνεύμονες.

Οι πρώτοι αριθμοί του Mersenne

Οι **αριθμοί Mersenne** M_P είναι οι αριθμοί της μορφής $M_p=2^p-1$ όπου p ϵN^*. Η ακολουθία των αριθμών Mersenne αρχίζει ως εξής:
0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, 65535, 131071, 262143, 524287, 1048575, 2097151, 4194303, 8388607, 16777215, 33554431, 67108863, 134217727, 268435455, 536870911, 1073741823, 2147483647, 4294967295 …………(ακολουθία A000225 στην OEIS)

Οι **πρώτοι αριθμοί Mersenne** είναι οι αριθμοί Mersenne που είναι πρώτοι (ακολουθία A001348 στην OEIS)

Η ταυτότητα:
$2^{\alpha\beta} -1 = (2^{\alpha} – 1) * (1 + 2^{\alpha} + 2^{2\alpha} + 2^{3\alpha} + … + 2^{(b-1)\alpha})$

δείχνει ότι ο M_p μπορεί να είναι πρώτος, μόνο εάν το ίδιο το p είναι πρώτο – δηλαδή το να είναι ο p πρώτος είναι αναγκαίο αλλά όχι ικανό για να είναι το M_p πρώτο. Αυτό απλοποιεί σημαντικά την αναζήτηση για πρώτους αριθμούς Mersenne. Η αντίστροφη δήλωση, δηλαδή ότι ο M_p είναι απαραιτήτως πρώτος εάν το p είναι πρώτο, είναι ψευδής. Το μικρότερο αντιπαράδειγμα είναι , ο αριθμός 2^{11}-1=2047=23*89.

Η καλύτερη μέθοδος που είναι γνωστή προς το παρόν για τον έλεγχο αν ένας αριθμός Mersenne είναι πρώτος είναι βασισμένη στον υπολογισμό μιας ακολουθίας (η ορισμένη αναδρομικά ακολουθία A003010 στην OEIS), όπως αναπτύσσεται αρχικά από τον Lucas το 1856 και βελτιωμένη από Lehmer στη δεκαετία του '30, τώρα γνωστή ως **δοκιμή πρώτων Lucas-Lehmer.**

Συγκεκριμένα, μπορεί να αποδειχθεί ότι (για έναν πρώτο p > 2) ο $M_P=2^p-1$ είναι πρώτος αν και μόνο αν ο M_p διαιρεί τον S_p-2.
όπου $S_0 = 4$ και, για k > 0, S_{k-1}-2.
Τα πρώτα στοιχεία ακολουθίας S_n είναι: 4,14,124,37634,1416317954,….

Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Mersenne είναι:

2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1,2^{13}-1, 2^{17}-1, 2^{19}-1, 2^{31}-1,2^{61}-1, 2^{89}-1, 2^{107}-1, 2^{127}-1, 2^{521}-1, 2^{607}-1, 2^{1279}-1, 2^{2203}-1,2^{2281}-1, 2^{3217}-1, 2^{4253}-1, 2^{4423}-1,2^{9869}-1, 2^{9941}-1, 2^{11213}-1, 2^{19937}-1,2^{21701}-1, 2^{23209}-1, 2^{44497}-1, 2^{86243}-1, 2^{110503}-1, 2^{132049}-1, 2^{216091}-1, 2^{756839}-1, 2^{859433}-1, $2^{1257787}$-1, $2^{1398269}$-1, $2^{2976221}$-1, $2^{3021377}$-1, $2^{6972593}$-1, $2^{13466917}$-1, $2^{20996011}$-1, $2^{24036583}$-1, $2^{25964951}$-1.

Πίνακας 1. Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Mersenne (Πηγή: Prime numbers A Computational Perspective.)

Πράγματι για παράδειγμα, ο $M_3=2^3-1=7$ διαιρεί τον $S_1=14$,
ο $M_9=2^5-1=31$ διαιρεί τον $S_3=37634$ κ.ο.κ.[23]

2.6. Πρώτοι αριθμοί Ramanujan

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Srinivasa Ramanujan γεννήθηκε στις 22 Δεκεμβρίου 1887 σε μία κωμόπολη κοντά στο Madras των Ινδιών. Το 1892 γράφτηκε στο Δημοτικό σχολείο της Kumbakonam και στη συνέχεια φοίτησε σε διάφορα δημοτικά σχολεία. Το 1898 πέρασε με άριστα τις εξετάσεις και γράφτηκε στο Γυμνάσιο. Στις τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου δανείστηκε ένα βιβλίο Μαθηματικών με τίτλο "Σύνοψις στοιχειωδών αποτελεσμάτων Καθαρών Μαθηματικών" με συγγραφέα τον G. S. Carr, το οποίο επηρέασε αποφασιστικά την Μαθηματική του πορεία.

Το 1904 εισήλθε στο Κρατικό Κολλέγιο της Kumbakonam με υποτροφία. Μέχρι τότε πήγαινε πολύ καλά στα σχολικά μαθήματα, αλλά βαθμιαία άρχισε να παραμελεί όλα τα αντικείμενα εκτός από τα μαθηματικά. Το 1906 γράφτηκε στο Pachaiyappa College στο Madras και παρακολούθησε μαθήματα για 3 μήνες σε μία προσπάθεια να περάσει τις εισαγωγικές εξετάσεις για το Πανεπιστήμιο του Madras. Εν τούτοις απέτυχε σε όλα τα αντικείμενα εκτός από τα Μαθηματικά.

Το 1909 η μητέρα του κανόνισε να παντρευτεί την S. Janaki Anmal, μία 9χρονη θυγατέρα ενός μακρινού συγγενή, με την οποία όμως έζησε χωριστά μέχρι το 1912.

Από τότε άρχισε να γίνεται γνωστός για τις μαθηματικές του ικανότητες, κυρίως λόγω των μαθηματικών προβλημάτων που έθετε και έλυνε στο περιοδικό Journal of the Indian Mathematical Society. Τα οικονομικά του δεν ήταν όμως καλά και η οικογένεια του ήταν πτωχή. Με τη βοήθεια ανθρώπων που αναγνώριζαν τις μαθηματικές του ικανότητες εύρισκε προσωρινές απασχολήσεις, η κυριότερη των οποίων ήταν, ως υπάλληλος στο Λογιστήριο του Madras Port Trust με 30 ρουπίες το μήνα. [2]

Ο Ramanujan ήταν ήδη γνωστός σε καθηγητές μαθηματικών διαφόρων Κολλεγίων και Πανεπιστημίων, οι οποίοι προσπάθησαν να τον βοηθήσουν να διευρύνει τις σπουδές του σε κατάλληλο περιβάλλον. Είχαν έλθει σε επαφή με διάφορους διακεκριμένους Βρεττανούς μαθηματικούς των οποίων η ανταπόκριση ήταν μάλλον αδιάφορη, αλλά η ανταπόκριση από τον G. H. Hardy, που ήταν ήδη πολύ γνωστός και Fellow of Trinity College στο Cambridge ήταν πολύ ευνοϊκή και ενθαρρυντική. Ο Hardy αντάλλαξε πολλές επιστολές με τον Ramanujan. Με την σύστασή του το Πανεπιστήμιο του Madras χορήγησε στον Ramanujan μία υποτροφία 75 ρουπίες το μήνα για δύο χρόνια και ο Hardy κανόνισε να πάει ο Ramanujan στο Cambridge και να πάρει και κατάλληλη οικονομική υποστήριξη.

Υπήρξαν δυσκολίες γι' αυτήν τη μετακίνηση, μια που η μετάβαση ενός ορθοδόξου Βραχμάνου στο εξωτερικό δεν επιτρεπόταν. Τελικά, η μητέρα του συμφώνησε και στις 17 Μαρτίου 1914 ο Ramanujan απέπλευσε για την Αγγλία με £ 250 το χρόνο από το Πανεπιστήμιο του Madras και £60 από το Trinity College, που ήταν αρκετά για να υποστηρίξουν όχι μόνον αυτόν στο Cambridge αλλά επίσης την οικογένειά του, που άφησε στην Ινδία.

Υπήρχαν προβλήματα με τη ζωή του στο Cambridge, κυρίως επειδή ήταν αυστηρά χορτοφάγος και υπήρχε δυσκολία να προμηθευτεί κάποια τρόφιμα και λόγω του πολέμου (Α' Παγκ. Πόλεμος). Εν τούτοις ο Ramanujan και ο Hardy συναντώνται κάθε μέρα και η συνεργασία τους ήταν πολύ καρποφόρα και για του δύο. [3]

Δυστυχώς το 1917 αρρώστησε και την υπόλοιπη διαμονή του στην Αγγλία την πέρασε σε διάφορα σανατόρια. Είχε βελτιώσεις στην υγεία του, πιθανώς λόγω της εκλογής του το 1918 ως

Fellow of the Royal Society (Ακαδημαϊκός) και επίσης Fellow of Trinity College, μεγάλες τιμές για ένα Μαθηματικό.
Στις 13 Μαρτίου 1919 ο Ramanujan επέστρεψε στην Ινδία πολύ άρρωστος και νοσηλεύτηκε σε διάφορα ιδρύματα με την καλύτερη ιατρική μεταχείριση για την Ινδία. Η υγεία του όμως χειροτέρευε και τελικά πέθανε στις 26 Απριλίου 1920. Η ασθένειά του ήταν μάλλον φυματίωση και έλλειψη βιταμινών.
Ο Ramanujan είχε θεμελιώδη συμβολή στα Μαθηματικά κυρίως στις άπειρες σειρές σε άπειρα γινόμενα, στα συνεχή κλάσματα και άλλα, κυρίως στη Θεωρία Αριθμών. Πολλά δημοσιεύθηκαν σε διακεκριμένα περιοδικά και άλλα που δεν πρόλαβε να δημοσιεύσει δημοσιεύθηκαν από τον Hardy και άλλους.
Οι πρώτες του δημοσιεύσεις ήταν, όπως είπαμε, στο Journal of the Indian Math Society και ήταν σε στοιχειώδη Μαθηματικά. Δεν υπάρχουν αποδείξεις για το πως βρήκε τα παραπάνω αποτελέσματα. Υπάρχουν ενδείξεις ότι σε μερικές χρησιμοποίησε τους τύπους που δίνουν τις ρίζες τριτοβάθμιων εξισώσεων. [10]

Πρώτοι αριθμοί Ramanujan

Το 1919, ο Ramanujan δημοσίευσε μια νέα απόδειξη του αιτήματος του Bertrand, το οποίο, όμως αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Chebyshev. Στις δυο τελευταίες σελίδες του δημοσιευμένου άρθρου, ο Ramanujan απέδειξε την εξής γενίκευση.

Πρόταση:
Ισχύει ότι

$$\pi(x) - \pi(x/2) \geq 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

για όλα τα $x \geq 2, 11, 17, 29, 41, \ldots$(ακολουθία A104272 σε OEIS), αντίστοιχα, όπου $\pi(x)$ είναι το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το x.

Το αντίστροφο αυτής της πρότασης είναι ο ορισμός των πρώτων αριθμών Ramanujan, εκ των οποίων οι αριθμοί 2, 11, 17, 29, 41 είναι τα πρώτα παραδείγματα. Με άλλα λόγια:

Ο **n-οστός πρώτος του Ramanujan** είναι ο ακέραιος R_n ο οποίος είναι ο μικρότερος πρώτος που ικανοποιεί την προϋπόθεση:

$$\pi(x) - \pi(x/2) \geq n, \text{ για όλα τα } x \geq R_n.$$

Ισοδύναμα:

Οι πρώτοι αριθμοί Ramanujan είναι οι μικρότεροι ακέραιοι R_n που εξασφαλίζουν ότι υπάρχουν n πρώτοι αριθμοί μεταξύ x και x / 2 για όλα τα $x \geq R_n$.

Για παράδειγμα, δεδομένου ότι οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί είναι οι:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,19, 23, 29, 31….
Έχουμε ότι:
$\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=\pi(4)=2$, $\pi(5)=\pi(6)=3$, $\pi(7)=\pi(8)=\pi(9)=\pi(10)=4$, $\pi(11)=\pi(12)=5$,
$\pi(13)=\pi(14)=\pi(15)=\pi(16)=6$, $\pi(17)=\pi(18)=7$, $\pi(19)=\pi(20)=\pi(21)=\pi(22)=8$,
$\pi(23)=\pi(24)=\pi(25)=\pi(26)=\pi(27)=\pi(28)=9$,$\pi(29)=\pi(30)=10$
Οπότε για το $\pi(x)-\pi(x/2)$ έχουμε:
$\pi(2)-\pi(2/2)=1-0=1$
$\pi(3)-\pi(3/2)=2-0=2$
$\pi(4)-\pi(4/2)=2-1=1$
$\pi(5)-\pi(5/2)=3-1=2$
$\pi(6)-\pi(6/2)=3-2=1$
$\pi(7)-(\pi7/2)=4-2=2$
$\pi(8)-\pi(8/2)=4-2=2$
$\pi(9)-\pi(9/2)=4-2=2$
$\pi(10)-\pi(10/2)=4-3=1$
$\pi(11)-\pi(11/2)=5-3=2$
$\pi(12)-\pi(12/2)=5-3=2$

π(13)-π(13/2)=6-3=3
π(14)-π(14/2)=6-4=2
π(15)-π(15/2)=6-4=2
π(16)-π(16/2)=6-4=2
π(17)-π(17/2)=7-4=3
π(18)-π(18/2)=7-4=3
π(19)-π(19/2)=8-4=4
π(20)-π(20/2)=8-4=4
π(21)-π(21/2)=8-4=4
π(22)-π(22/2)=8-5=3
π(23)-π(23/2)=9-5=4
π(24)-π(24/2)=9-5=4
π(25)-π(25/2)=9-5=4
π(26)-π(26/2)=9-6=3
π(27)-π(27/2)=9-6=3
π(28)-π(28/2)=9-6=3
π(29)-π(29/2)=10-6=4
………

Παρατηρούμε λοιπόν ότι πράγματι ο μικρότερος ακέραιος R_1 που ικανοποιεί τη συνθήκη:
π(x)-π(x/2)≥1 για κάθε x≥R_1 είναι ο R_1=2

Όμοια για τις συνθήκες:
π(x)-π(x/2)≥2 για κάθε x≥R_2 είναι ο R_2=11,
π(x)-π(x/2)≥3 για κάθε x≥R_3 είναι ο R_3=17,
π(x)-π(x/2)≥4 για κάθε x≥R_4 είναι ο R_4=29.

2.7. Πρώτοι αριθμοί Fermat

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Pierre de Fermat γεννήθηκε στις 17 Αυγούστου του 1601 και πέθανε 12 Ιανουαρίου του 1665. Έζησε σε μια μικρή πόλη της Νοτιοδυτικής Γαλλίας, την Beaumont-de-Lomange κοντά στην Toulouse. Ο πατέρας του ήταν πλούσιος έμπορος δερμάτων και δεύτερος πρόξενος (άρχοντας) της Beaumont-de-Lomange. Είχε έναν αδερφό και 2 αδερφές. Άφησε μόνο ένα υιό που έγραψε βιβλία νομικής και εξέδωσε τις εργασίες του πατέρα του. Το αρχοντικό στην Beaumont-de-Lomange υπήρξε τόπος κατοικίας του, που αργότερα χρησιμοποιήθηκε σαν μουσείο.
Ο Fermat ξεκίνησε από το πανεπιστήμιο της Toulouse πριν μετακομίσει στην όμορφη παραλιακή πόλη Bordeaux το δεύτερο μισό του 1620. Εδώ ξεκίνησε τις πρώτες σοβαρές έρευνές του στα Μαθηματικά.
Όσο βρισκόταν στην Bordeaux το 1629 έδωσε ένα αντίγραφο της δικιάς του αναθεώρησης του Γεωμετρικού τόπου του Απολλώνιου επιπέδου σ' έναν από τους εκεί μαθηματικούς. Στο Bordeaux είχε επαφές με τον Beaugrand και κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου παρήγαγε σημαντικό έργο στα μέγιστα (maxima) και στα ελάχιστα (minima) τα οποία έδωσε στον Etienne d'Espagnet ο οποίος μοιράστηκε τα μαθηματικά του ενδιαφέροντα με τον Fermat. Ο Pierre δέχτηκε περισσότερη επιρροή από τον Vieta.
Μετά πήγε στη Orléans (πόλη νοτιοδυτικά του Παρισιού) όπου σπούδασε και πήρε πτυχίο Νομικής και ακολούθησε καριέρα ως δικαστικός και εργάστηκε για λογαριασμό της τοπικής κυβέρνησης, παίρνοντας τον τίτλο του συμβούλου στο Ανώτατο Δικαστήριο της Toulouse, θέση την οποία κράτησε μέχρι το τέλος της ζωής του. Για να εξασφαλισθεί το αμερόληπτο των δικαστών την εποχή εκείνη, δεν τους επιτρεπόταν να έρχονται σε επαφή με τον πολύ κόσμο και περιόριζαν τις κοινωνικές τους εκδηλώσεις. Για τον λόγο αυτό ο Fermat στον ελεύθερο χρόνο του όταν σταματούσε τη δουλειά του, ξεκινούσε την ενασχόλησή του με το χόμπι του, τα Μαθηματικά. Παρ'ότι ερασιτέχνης, ο Fermat ήταν αρκετά καλλιεργημένος μαθηματικά και σε αυτόν οφείλονται κατά ένα μεγάλο μέρος η ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων και οι βάσεις του μαθηματικού λογισμού.
Περισσότερο από όλα, ο Fermat ήταν πολύ καλός γνώστης της θεωρίας αριθμών και ασχολήθηκε με τη μελέτη των ακεραίων αριθμών και τις σχέσεις που ισχύουν μεταξύ τους. Συχνά έγραφε επιστολές προς γνωστούς μαθηματικούς της εποχής του, στις οποίες εξέθετε τις απόψεις και αναλύσεις του πάνω σε μαθηματικά προβλήματα, αλλά επίσης ζητούσε και την άποψή τους για την επιβεβαίωση των δικών του μεθόδων. Αυτές οι «προκλήσεις» καθώς και το γεγονός ότι δεν αποκάλυπτε τους δικούς του υπολογισμούς, προκαλούσαν συχνά μια κάποια απογοήτευση. Αυτό οδήγησε σε αντιπαραθέσεις με τους συγχρόνους του όπως τον Descartes και τον Wallis. Τέλος, ανέπτυξε στενή σχέση με τον Pascal. Εκείνη την περίοδο άλλαξε και το όνομα του από Pierre Fermat σε Pierre de Fermat. Μιλούσε Λατινικά, Ελληνικά, Ιταλικά και Ισπανικά και επαινέθηκε για τα εδάφια που έγραψε σε πολλές γλώσσες, και έγινε περιζήτητος από όσους ασχολούνταν με την διόρθωση Ελληνικών εδαφίων.
Ο Fermat έγραψε κάποτε μια πραγματεία σχετική με το περίφημο πια «τελευταίο θεώρημα του», κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής του με το αρχαίο ελληνικό κείμενο Αριθμητικά που ήταν γραμμένο από τον Διόφαντο της Αλεξάνδρειας. Το βιβλίο αυτό ανέλυε το θέμα της ύπαρξης ακεραίων λύσεων για την εξίσωση $a^2+b^2=c^2$, που είναι ο γνωστός τύπος του Πυθαγόρα για τα ορθογώνια τρίγωνα. Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες τριάδες λύσεων, που καλούνται **πυθαγόρειες**

τριάδες. Μια γνωστή σε όλους λύση είναι η a=3, b=4, c=5. Ο Fermat επέκτεινε τον τύπο του Πυθαγόρα ένα βήμα παραπάνω και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις (τριάδες) για μια οικογένεια παρόμοιων εξισώσεων της μορφής $a^n+b^n=c^n$, όπου n= ακέραιος >2. Είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι παρόλο που υπάρχουν άπειρες πυθαγόρειες τριάδες, δεν υπάρχει καμία τριάδα Fermat. Παρ' όλ' αυτά ο Fermat πίστευε ότι μπορούσε να υποστηρίξει τον ισχυρισμό του με μια αυστηρή απόδειξη. Στο περιθώριο του βιβλίου Αριθμητικά, ο Fermat έγραψε μια υποσημείωση που ταλάνισε γενιές μαθηματικών: «Έχω βρει μια εκπληκτική απόδειξη αυτής της πρότασης, την οποία το περιθώριο αυτού εδώ του βιβλίου είναι πολύ μικρό για να χωρέσει».
Ο Fermat έγραψε και άλλα τέτοια εξοργιστικά σημειώματα και μετά το θάνατό του ο γιος του εξέδωσε μια έκδοση των Αριθμητικών η οποία περιείχε όλα αυτά τα προκλητικά προς τους μαθηματικούς σχόλια.
Ο Fermat (16/01/1665) ασχολήθηκε με πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και μάλιστα με μεγάλη επιτυχία. Η Θεωρία Αριθμών, οι Πιθανότητες η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Διαφορικός Λογισμός του οφείλουν πάρα πολλά. Το έργο του είναι γνωστό από το μεγάλο πλήθος των επιστολών του με Μαθηματικούς της εποχής, δεδομένου ότι ο ίδιος δεν δημοσίευσε απολύτως τίποτα. Ο Fermat είναι γνωστός στο ευρύ κοινό, κυρίως από την τελευταία υπόθεση του, η οποία δηλώνει:

« Δεν είναι δυνατόν να βρεθούν 4 ακέραιοι μη μηδενικοί αριθμοί x,y,z και n με n > 2 τέτοιοι ώστε $x^n+y^n = z^n$ ».

Όπως ήδη αναφέραμε ο Fermat σε μια επιστολή του, στο περιθώριο μιας σελίδας σημειώνει «έχω βρει μια θαυμάσια απόδειξη, η οποία δεν είναι δυνατόν να χωρέσει σε αυτό τον χώρο». Έτσι ένα στενό περιθώριο, στέρησε το δικαίωμα από την υπόθεση να τεκμηριωθεί ως Θεώρημα, για τρεις ολόκληρους αιώνες! Κατά την διάρκεια των τριών αιώνων, που πέρασαν, έγιναν πολλές προσπάθειες για την απόδειξη του, που ναι μεν απέτυχαν, βοήθησαν όμως στην παραγωγή άλλων αξιόλογων Μαθηματικών Προτάσεων. Δεν έλειψαν και εκείνοι, οι οποίοι διατύπωσαν την άποψη ότι η υπόθεση του Fermat είναι λανθασμένη!
Πολλοί μαθηματικοί πολέμησαν κατά καιρούς να βρουν κάποια απόδειξη, όμως τελικά αποτύγχαναν. Το 1742 ο Leonard Euler , ο μεγαλύτερος θεωρητικός της θεωρίας των αριθμών του $18^{ου}$ αιώνα , απογοητεύτηκε τόσο από την ανικανότητά του να επιλύσει το πρόβλημα, που ζήτησε από ένα φίλο του να ψάξει το σπίτι του Fermat μήπως και τυχόν έβρισκε κάποιο μυστικό παραπεταμένο σημείωμα που θα βοηθούσε στην προσπάθεια επίλυσης. Τον $19^{ο}$ αιώνα η Sophie Germain, η οποία λόγω προκατάληψης προς τις γυναίκες μαθηματικούς χρησιμοποιούσε τον ανδρικό τίτλο Monsieur Leblanc, έκανε το πρώτο μικρό αλλά αποφασιστικό βήμα. Η Germain απέδειξε ένα γενικό θεώρημα το οποίο επιχειρούσε να βοηθήσει στην εύρεση λύσεων για την εξίσωση Fermat για τιμές του n>2 που είναι πρώτοι αριθμοί έτσι ώστε και ο αριθμός 2n+1 να είναι επίσης πρώτος. Αλλά μια πλήρης απόδειξη για ύπαρξη τέτοιου είδους εκθετών που δίνουν λύσεις παρέμεινε έξω από τις δυνατότητές της.
Στην αρχή του 20ού αιώνα, ο Paul Wolfskehl, ένας Γερμανός βιομήχανος κληροδότησε 100.000 μάρκα σε όποιον θα αντιμετώπιζε επιτυχώς την πρόκληση του Fermat. Σύμφωνα με κάποιους ιστορικούς, ο Wolfskehl βρισκόταν σε κάποια περίοδο στα πρόθυρα αυτοκτονίας, αλλά απέκτησε τόσο πάθος στην προσπάθεια να βρει τη λύση στο πρόβλημα που είχε θέσει ο Fermat που σύντομα εγκατέλειψε την ιδέα περί αυτοκτονίας. Επηρεασμένος από αυτήν την τροπή που είχαν πάρει τα πράγματα ο Wolfskehl ξαναέγραψε την διαθήκη του. Το βραβείο που θέσπισε ήταν κάτι σαν χρέος στον γρίφο που του είχε σώσει την ζωή.
Παραδόξως, παρόλο που το βραβείο Wolfskehl ωθούσε τους χομπίστες μαθηματικούς να βρουν τη λύση, οι επαγγελματίες έχαναν κάθε ελπίδα. Γενικά μέχρι εκείνη την εποχή η απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat αποτελούσε ένα ρομαντικό και απραγματοποίητο όνειρο από το παρελθόν και τίποτα παραπάνω.

Τελικά, η πλήρης απόδειξη παρουσιάστηκε το 1994 από τον Andrew Wiles, με τη βοήθεια και του μαθητή του Richard Taylor.

Πρώτοι αριθμοί Fermat

Αριθμός Fermat, ονομάζεται ένας θετικός ακέραιος αριθμός της μορφής:

$$F_n=2^{2^n}+1,\ n \in N$$

Η ακολουθία των αριθμών Fermat αρχίζει ως εξής:
3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, (ακολουθία A000215 στην OEIS)

Πρόταση:
Αν ο 2^n+1 είναι πρώτος και $n > 0$, τότε το n πρέπει να είναι δύναμη του 2.

Απόδειξη:
Αν ο n δεν ήταν δύναμη του 2 τότε (διαιρώντας τον επαναληπτικά με το 2) θα μπορούσε να γραφεί $n=2^k s$, όπου $1 \le 2^K < n$, $1 < s \le n$ και s :περιττός.

Από την ταυτότητα $(a^m - b^m)=(a-b)\sum_{l=0}^{m-1} a^l b^{m-1-l}$ όμως παίρνουμε ότι

$$(a-b)|(a^m-b^m).$$

Θέτοντας $a=2^{2^k}$, $b=-1$ και $m=s$, έχουμε ότι

$$(2^{2^k} - (-1))|((2^{2^k})^s-(-1)^s),$$

ή ισοδύναμα (δεδομένου ότι $n=2^k s$ και s=περιττός) ότι :

$$(2^{2^k}+1)|(2^n+1),\ \text{με}\ 1 < 2^{2^k} < 2^n + 1\ (\text{αφού}\ 2^k < n).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο ,αφού 2^n+1:πρώτος. □

Με βάση την προηγούμενη πρόταση κάθε πρώτος της μορφής 2^m+1 είναι ένας αριθμός Fermat. Τέτοιοι πρώτοι καλούνται **πρώτοι αριθμοί του Fermat**. Οι μόνοι γνωστοί πρώτοι αριθμοί Fermat είναι οι F_0, F_1, F_2, F_3 και F_4.

Ο Fermat είχε ισχυριστεί ότι όλοι οι αριθμοί Fermat είναι πρώτοι. Ο Euler όμως το 1732, απέδειξε ότι

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

(άρα οι αριθμοί Fermat δεν είναι όλοι πρώτοι), καταρρίπτοντας έτσι την εικασία αυτή του Fermat.
Ο Euler προχωρώντας παραπέρα απέδειξε ότι κάθε παράγοντας του F_n πρέπει να είναι της μορφής $k \cdot 2^{n+1} + 1$.

Για παράδειγμα,
$F_0=3=1 \cdot 2^1+1$
$F_1=5=1 \cdot 2^2+1$
$F_2=17=1 \cdot 2^4+1$
$F_3=257=1 \cdot 2^8+1$
$F_4=65537=1 \cdot 2^{15}+1$
$F_5=4294967297=641 \cdot 6700417$
όπου οι δυο παράγοντες του είναι $641=10 \cdot 2^6+1$ και $6700417=1657104 \cdot 2^2+1$.[1]

2.8. Πρώτοι αριθμοί Lucas

Βιογραφικά στοιχεία

Ο François Édouard Anatole Lucas (4 Απριλίου 1842 - 3 Οκτωβρίου 1891) ήταν Γάλλος μαθηματικός. Ο Lucas είναι γνωστός για τη μελέτη του στην ακολουθία Fibonacci. Έδωσε έναν τύπο για την εύρεση του n-οστου όρου της ακολουθίας Fibonacci. Κάποιες ακολουθίες και αριθμοί που χρησιμοποίησε για το σκοπό ,αυτό, ονομάστηκαν ακολουθίες και αριθμοί Lucas.
Ο Lucas εκπαιδεύτηκε στο σχολείο Normale Supérieure. Εργάστηκε στο αστεροσκοπείο του Παρισιού και έγινε αργότερα καθηγητής μαθηματικών στο Παρίσι.
Ο Lucas έθεσε μια πρόκληση να αποδείξει ότι η μόνη λύση της διοφαντικής εξίσωσης είναι:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = M^2 \text{ όπου } N>1$$

είναι N=24 και M=70.
Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σαν το πρόβλημα των οβίδων του κανονιού (the cannonball problem) γιατί μπορεί να θεωρηθεί σαν το πρόβλημα της τοποθέτησης στο έδαφος στρογγυλών οβίδων κανονιού, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα τετράγωνο το οποίο να είναι η βάση μιας τετραγωνικής πυραμίδας.
Το 1918 βρέθηκε η απόδειξη (χρησιμοποιώντας υπερελλειπτικές συναρτήσεις) γι 'αυτό το εντυπωσιακό αποτέλεσμα, το οποίο έχει σημασία για την μποζονική θεωρία χορδών σε 26 διαστάσεις.
Ο Lucas επινόησε μεθόδους για τον έλεγχο των πρώτων αριθμών. Το 1857, σε ηλικία 15 ετών, ο Lucas ξεκίνησε τη δοκιμή του αριθμού $2^{127}-1$ με το χέρι, χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες Lucas. Το 1876, μετά από 19 χρόνια δοκιμών, τελικά αποδεικνύεται ότι το $2^{127}-1$ είναι πρώτος! Αυτός θα παραμείνει ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος του Mersenne για τρία τέταρτα του αιώνα και πιθανόν να παραμείνει ως ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που αποδείχτηκε με το χέρι. Αργότερα ο Derrick Henry Lehmer προχώρησε στην εξέλιξη των δοκιμών πρώτων του Lucas δημιουργώντας τη **μέθοδο ελέγχου των Lucas-Lehmer**.
Ο Lucas ενδιαφερόταν επίσης για τα ψυχαγωγικά μαθηματικά! Βρήκε μια κομψή δυαδική λύση στο γρίφο Baguenaudier. Επίσης, πιο συγκεκριμένα εφηύρε το πάζλ για τον Πύργο του Ανόι, που διέθεσε στο εμπόριο με το ψευδώνυμο N. Claus de Siam, αναγραμματισμός του Lucas d'Amiens, και δημοσίευσε για πρώτη φορά, μια περιγραφή του παιχνιδιού Dots and Boxes, το 1889.
Ο Lucas πέθανε κάτω από ασυνήθιστες περιστάσεις. Στο συμπόσιο του ετήσιου συνεδρίου του Γαλλικού συνδέσμου για την πρόοδο των επιστημών, από έναν σερβιτόρο έπεσαν ορισμένα πήλινα σκεύη και ένα κομμάτι έκοψε τον Lucas στο μάγουλο. Πέθανε λίγες ημέρες αργότερα, από μια σοβαρή φλεγμονή του δέρματος που προκλήθηκε πιθανώς από σηψαιμία. Ο Lucas ήταν μόνο 49 χρονών όταν πέθανε.[19]

Πρώτοι αριθμοί του Lucas

Οι **αριθμοί Lucas** είναι μια ακολουθία ακεραίων(ακολουθία Lucas) και είναι στενά συνδεδεμένοι με τους αριθμούς και την ακολουθία Fibonacci. Όπως οι αριθμοί Fibonacci, κάθε αριθμός Lucas καθορίζεται για να είναι το άθροισμα των δύο αμέσως προηγούμενων αριθμών της ακολουθίας. Συνεπώς, ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών Lucas συγκλίνει στη χρυσή αναλογία.
Εντούτοις, οι πρώτοι δύο αριθμοί Lucas είναι 2 και 1 αντί για 0 και 1 αντίστοιχα, και οι ιδιότητες των αριθμών Lucas είναι επομένως κάπως διαφορετικές από εκείνες των αριθμών Fibonacci.[19]
Ένας **αριθμός Lucas** λοιπόν ορίζεται ως εξής:

$$L_n := \begin{cases} 2 & \text{εάν } n=0; \\ 1 & \text{εάν } n=1; \\ L_{n-1} + L_{n-2} & \text{εάν } n>1. \end{cases}$$

Η ακολουθία των αριθμών Lucas αρχίζει ως εξής:
2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349... (ακολουθία A000032 στην OEIS)

Οι **πρώτοι αριθμοί Lucas** είναι οι αριθμοί Lucas που είναι πρώτοι. Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Lucas είναι:
2,3,7,11,29,47,199,521,1207,3571,9349,…(ακολουθία A005479 στην OEIS).

Εάν L_n είναι πρώτος τότε n=0, πρώτος ή δύναμη του 2.

Ο L_{2^m} είναι πρώτος για m=1,2, 3 και 4 και όχι για άλλες γνωστές τιμές του m.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Lucas είναι οι

$$L_0,L_2,L_4,L_5,L_7,L_8,L_{11},L_{13},L_{16},L_{17},L_{19},$$

όπου οι δείκτες είναι : Το 0, οι πρώτοι αριθμοί 5,7,11,13,17,19 και οι δυνάμεις $2^1,2^2,2^3,2^4$. Παρατηρούμε όμως και ότι δεν είναι όλοι οι πρώτοι αριθμοί κατάλληλοι δείκτες για πρώτους αριθμούς Lucas. Για παράδειγμα, ο $L_3=4$ προφανώς δεν είναι πρώτος αριθμός Lucas.[4]

2.9. Πρώτοι αριθμοί Leyland

Βιογραφικά στοιχεία

O Paul Leyland είναι βρετανός ερευνητής στο πεδίο των πρώτων αριθμών, που έχει μελετήσει την παραγοντοποίηση ακεραίων και τις **δοκιμές** για τους πρώτους αριθμούς.
Έχει συμβάλει στην παραγοντοποίηση πολύ μεγάλων **ημι-πρώτων αριθμών** RSA-129, RSA-140 και RSA-155 (δηλαδή αριθμών με ακριβώς δυο πρώτους παράγοντες), καθώς και μεγάλων πιθανών **παραγοντικών πρώτων** (δηλαδή πρώτων αριθμών που είναι κατά 1 μεγαλύτεροι ή μικρότεροι από το n!, για κάποιο n ϵN, όπως οι αριθμοί 2=0!+1, 3=2!+1, 5=3!-1, 7=3!+1, 23=4!-1, 719=6!-1,(ακολουθία 088054 στην OEI) όπως το 400!+1.
Επίσης έχει ασχοληθεί εκτενώς με τους αριθμούς Cunningham, Cullen, Woodall, και αριθμούς της μορφής x^y+y^x, x,y ϵN* οι οποίοι τώρα καλούνται **Leyland αριθμοί**. Έχει ασχοληθεί επίσης με το πρόγραμμα NFSNet, το οποίο είναι ένα πρόγραμμα για συντονισμένα, εξελισσόμενα προγράμματα, χρηματοδοτούμενο από το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνητών των ΗΠΑ, το οποίο ξεκίνησε το 1985,με σκοπό την προώθηση προηγμένης ερευνητικής και εκπαιδευτικής δικτύωσης.
Μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις στην ιστορία του Internet οφείλεται στην πρωτοβουλία του NSF (National Science Foundation), κυβερνητικής υπηρεσίας των ΗΠΑ, να δημιουργηθούν στο μέσο της δεκαετίας του 1980 πέντε μεγάλα κέντρα υπολογιστών.

Πρώτοι αριθμοί Leyland

Όπως ήδη αναφέραμε, οι αριθμοί Leyland είναι οι αριθμοί της μορφής x^y+y^x, x,y ϵN*(ακολουθία A076980 στην OEIS).
Η ακολουθία των αριθμών Leyland αρχίζει ως εξής:

8, 17, 32, 54, 57, 100, 145, 177, 320, 368, 512, 593, 945, 1124, 1649, 2169, 2530, 4240, 5392, 6250, 7073, 8361, 16580, 18785, 20412, 23401, 32993, 60049, 65792, 69632, 93312, 94932, 131361, 178478, 262468, 268705, 397585, 423393, 524649, 533169

Η υπόθεση x,y≠1 είναι σημαντική, αφού αλλιώς όλοι οι φυσικοί μεγαλύτεροι του 2, θα ήταν αριθμοί Leyland αφού για κάθε τέτοιο φυσικό x, έχουμε $(x-1)^1+1^{x-1}$, με x-1,1 ϵN*.
Πολλές φορές, ο αριθμός συνοδεύεται από τον περιορισμό x ≥ y για να αποφύγουμε την επανάληψη των αριθμών $x^y + y^x$ και $y^x + x^y$.
Οι **πρώτοι αριθμοί Leyland** είναι οι αριθμοί Leyland που είναι πρώτοι (ακολουθία A094133 στην OEIS).
Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Leyland είναι:

17,593,32993,2097593, 8589935681, 59604644783353249, 523347633027360537213687137, 43143988327398957279342419750374600193,4318114567396436564035293097707729426477458833, 5052785737795758503064406447721934417290878968063369478337….

Μέχρι το 2008, ο μεγαλύτερος αριθμός Leyland, που έχει αποδειχθεί πρώτος είναι ο αριθμός $2638^{4405} + 4405^{2638}$ ο οποίος έχει 15071 ψηφία. [5]

2.10. Δίδυμοι πρώτοι αριθμοί

Ο Alphonse de Polignac (1817 - 1890) είναι ένας γάλλος μαθηματικός του 19ου αιώνα ο οποίος ως επί το πλείστον ασχολήθηκε με τη θεωρία αριθμών και ειδικά με τους πρώτους αριθμούς.
Το 1849 διατύπωσε την **εικασία του Polignac :**

Για κάθε άρτιο φυσικό n ϵN*, υπάρχουν άπειρα ζεύγη διαδοχικών πρώτων αριθμών που διαφέρουν κατά n

Η εικασία αυτή δεν έχει αποδειχθεί, ή καταρριφθεί μέχρι σήμερα, για καμία τιμή του n
Ο de Polignac διατύπωσε επίσης, τον **τύπο του Polignac** ο οποίος δίνει την ανάλυση του n! σε πρώτους παράγοντες.

Δίδυμος πρώτος ονομάζεται ο πρώτος αριθμός που διαφέρει από έναν άλλο πρώτο κατά 2, π.χ 11 ,13 και 17, 19, και 1.000.037, 1.000.039. Ένα γνωστό άλυτο πρόβλημα της Θεωρίας αριθμών είναι η εικασία των Διδύμων Πρώτων στην οποία πρέπει να αποδειχτεί πως υπάρχουν άπειροι πρώτοι p τέτοιοι ώστε και ο αριθμός p + 2 να είναι πρώτος. Σημειώνεται ότι 2 είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο πρώτων με μοναδική εξαίρεση το ζεύγος 2, 3 καθώς αν ο p είναι πρώτος τότε θα είναι περιττός και άρα ο p+1 θα είναι άρτιος και άρα σύνθετος αριθμός. Η εικασία των Δίδυμων πρώτων είναι ειδική περίπτωση της εικασίας του Polignac για n=2.

Τα πρώτα ζεύγη διδύμων πρώτων κάτω από 1000 είναι τα εξής:

3, 5, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, 59, 61, 71, 73, 101, 103, 107, 109, 137, 139, 149, 151, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 227, 229, 239, 241, 269, 271, 281, 283, 311, 313, 347, 349, 419, 421, 431, 433, 461, 463, 521, 523, 569, 571, 599, 601, 617, 619 (Ακολουθία A077800 στην OEIS).

Δεδομένου ότι για κάθε τρεις διαδοχικούς περιττούς αριθμούς, ο ένας διαιρείται με το 3 (και άρα δεν είναι πρώτος, εκτός αν είναι ο 3) το 5 είναι ο μόνος πρώτος που ανήκει σε δύο ζεύγη διδύμων πρώτων. Επίσης, δεδομένου ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός γράφεται σε μια από της μορφές 6k+1,6k+3 και 6k+5 και ότι από αυτούς ο 6k+3=3(2k+1) δεν είναι πρώτος (εκτός αν k=0), ο αριθμός ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δίδυμους πρώτους (δηλαδή το ημι-άθροισμα τους) θα είναι ο (6k+1)+(6k+5)=12k+6=6(2k+1). Δηλαδή ο αριθμός ανάμεσα σε ένα ζεύγος διδύμων πρώτων είναι πάντα πολλαπλάσιο του 6 (εκτός από το πρώτο ζεύγος (3,5)).
Το 1915, ο Viggo Brun απέδειξε ότι το άθροισμα των αντίστροφων των διδύμων πρώτων αριθμών συγκλίνει προς τον αριθμό $B \approx 1{,}902161$(**σταθερά του Brun**). Αυτό το διάσημο **θεώρημα του Brun** είχε αποτέλεσμα το κόσκινο του Brun (Brun sieve) και βοήθησε στην ανάπτυξη της μοντέρνας θεωρίας του κόσκινου (sieve theory). Η σύγχρονη έκδοση του επιχειρήματος του Brun μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι ο αριθμός των δίδυμων πρώτων που είναι μικρότεροι του N δεν υπερβαίνει το

$$\frac{CN}{\log^2 N}$$

για κάποια σταθερά C > 0. Το 1940, ο Paul Erdős απέδειξε ότι υπάρχει μία σταθερά c < 1 και άπειροι πρώτοι p τέτοιοι ώστε p′ - p < c ln p όπου το p′ δηλώνει τον επόμενο πρώτο ακριβώς μετά τον p. Αυτό το αποτέλεσμα βελτιώθηκε σταδιακά: το 1986 ο Helmut Maier έδειξε ότι μία σταθερά c < 0.25 μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Το 2004, ο Daniel Goldston και ο Cem Yıldırım έδειξαν ότι η σταθερά μπορούσε να βελτιωθεί περαιτέρω στο c = 0.085786. Το 2005, ο Goldston, ο Pintz και ο Yıldırım απέδειξαν ότι η σταθερά c μπορεί να επιλεγεί αυθαιρέτως μικρή.[22]

2.11. Πρώτοι αριθμοί Chen

Βιογραφικά στοιχεία

Ο Chen Jingrun γεννήθηκε 22 Μαΐου του1933 και πέθανε το 13 Μαρτίου του 1996. Ήταν κινέζος μαθηματικός που συνέβαλε σημαντικά στη θεωρία αριθμών. Ο Chen κατατάσσεται ως ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς του εικοστού αιώνα και ένας από τους πλέον σημαίνοντες μαθηματικούς στην ιστορία της Κίνας.
Ο Chen ήταν ο τρίτος γιος σε μια μεγάλη οικογένεια από το Fuzhou, Fujian, της Κίνας. Ο πατέρας του ήταν ταχυδρομικός υπάλληλος. Ο Chen Jingrun αποφοίτησε από το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Xiamen το 1953. Ο επιβλέπων Καθηγητής του στην Κινεζική Ακαδημία Επιστημών ήταν ο Hua Luogeng.
Οι εργασίες του σχετικά με την εικασία των δίδυμων πρώτων, το πρόβλημα Waring, την εικασία του Γκόλντμπαχ και την εικασία του Legendre αποτέλεσαν βήματα προόδου στην αναλυτική θεωρία αριθμών. Σε μια εργασία του το 1966 απέδειξε αυτό που καλείται τώρα **θεώρημα Chen**, δηλαδή ότι κάθε αρκετά μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός πρώτου αριθμού και ενός ημι-πρώτου αριθμού (δηλαδή αριθμού με ακριβώς δυο πρώτους παράγοντες) π.χ., $100 = 23 + 7 \cdot 11$.

Πρώτοι αριθμοί του Chen

Ένας πρώτος αριθμός p ονομάζεται **πρώτος αριθμός Chen** ο p +1 είναι πρώτος ή ημι-πρώτος. Ο Chen απέδειξε το 1966 ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί Chen.
Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Chen είναι:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 67, 71, 83, 89, 101, …(Ακολουθία A109611 στην OEIS).
Εξ ορισμού, ο μικρότερος πρώτος σε κάθε ζεύγος δίδυμων πρώτων είναι ένας πρώτος αριθμός Chen.
Οι πρώτοι τέτοιοι αριθμοί είναι:

3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227, 239, 269, 281, 311, 347, 419, 431, 461, 521, 569, 599, 617, 641, 659, 809, 821, 827, 857, 881, 1019, 1031, 1049, 1061, 1091, 1151, 1229, 1277, 1289, 1301, 1319, 1427, 1451, 1481, 1487, 1607 (Ακολουθία A001359 στην OEIS)
ενώ οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί Chen που δεν είναι οι μικρότεροι σε κάποιο ζεύγος διδύμων πρώτων είναι οι:

2, 7, 13, 19, 23, 31, 37, 47, 53, 67, 83, 89, 109, 113, 127, 131, 139, 157, 167, 181, 199, 211, 233, 251, 257, 263, 293, 307, 317, 337, 353, 359, 379, 389, 401, 409, 443, 449, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 541, 557, 563, 571, 577, 587, 631, 647, 653, 677 (Ακολουθία A063637 στην OEIS).
Οι πρώτοι πρώτοι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι αριθμοί Chen είναι οι:
43, 61, 73, 79, 97, 103, 151, 163, 173, 193, 223, 229, 241, 271, 277, 283, 313, 331, 349, 367, 373, 383, 397, 421, 433, 439, 457, 463, 523, 547, 593, 601, 607, 613, 619, 643, 661, 673, 691,

709, 727, 733, 739, 757, 773, 823, 853, 859, 883, 907, 929, 967, 997 (Ακολουθία A102540 στην OEIS).
O Terence Tao και ο Ben Green απέδειξαν το 2005 ότι υπάρχουν άπειρες αριθμητικές πρόοδοι με τρεις όρους που αποτελούνται από πρώτους του Chen. Πρόσφατα ο Binbin Zhou απέδειξε ότι η ακολουθία των πρώτων αριθμών Chen περιέχει αριθμητικές προόδους οποιουδήποτε μήκους.
O Rudolf Ondrejka ανακάλυψε το ακόλουθο 3x3 μαγικό τετράγωνο εννέα πρώτων αριθμών του Chen.

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Τον Αύγουστο του 2009 η αναζήτηση δίδυμων πρώτων και το Prime Grid (δύο προγράμματα αναζήτησης πολύ μεγάλων πρώτων αριθμών) βρήκαν τον μεγαλύτερο γνωστό πρώτο του Chen, $65516468355 \cdot 2^{333333} - 1$, με 100355 ψηφία.[8]

2.12. Πρώτοι αριθμοί Cullen

Βιογραφικά στοιχεια

Ο πατέρας James Cullen, S.J. (19 Απριλίου 1867 - 7 Δεκεμβρίου 1933) γεννήθηκε στην Drogheda, κομητεία του Louth, στην Ιρλανδία. Αρχικά διάβαζε μόνος του, στη συνέχεια, με τους Christian Brothers. Έπειτα πήγε στο Trinity College του Δουβλίνου και για τη μελέτη θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών.
Στη συνέχεια ασχολήθηκε με επιχειρήσεις για λίγο, αλλά μετά από μια σύντομη περίοδο σε ένα αποστολικό σχολείο στην Ιρλανδία: που πήγε για να μάθει τη Λατινική γλώσσα, μπήκε στους δόκιμους μοναχούς των Άγγλων Ιησουϊτών στο Manresa House, Roehampton, του Λονδίνου, καθώς είχε αποφασίσει να γίνει ιερέας. Από το 1892 μέχρι το 1895 ήταν στη Manresa στους δόκιμους και για ένα έτος ακόμα για μελέτη.
Από το 1895 έως το 1897 σπούδασε φιλοσοφία στη σχολή των Ιησουιτών για φιλοσοφικές σπουδές στο St Mary's Hall, στο Lancashire. Από το 1897 έως το 1901 σπούδασε θεολογία στη θεολογική σχολή των Άγγλων Ιησουίτών στο Κολλέγιο St Beuno στη Βόρεια Ουαλία, όπου και χειροτονήθηκε ως ιερέας στις 31 Ιουλίου 1901. Το 1902 και 1903 δίδαξε Μαθηματικά σε νέους Ιησουίτες που είχαν τελειώσει ως δόκιμοι μοναχοί στο Manresa House. Το 1905 δίδαξε Μαθηματικά σε Κολλέγιο Ιησουιτών στο οικοτροφείο Mount St Mary στο Derbyshire και δημοσίευσε την εύρεση αυτών που είναι τώρα γνωστοί ως αριθμοί Cullen στη θεωρία των αριθμών.
Το 1906 στάλθηκε στην Stonyhurst College, επίσης οικοτροφείο, ως λογιστής και αργότερα διευθυντής του αγροκτήματος των Κολλεγίων και της περιουσίας του αγροκτήματος. Εν τω μεταξύ, διατηρούσε επαφή με κορυφαίους μαθηματικούς και συνέβαλε σε άρθρα στο Nature, στο Mathematic Gazette και στον Messenger of Mathematicians. Το 1921 έφυγε από το Stonyhurst και διορίστηκε για να εποπτεύει τους λογαριασμούς των άλλων αγγλικών σπιτιών των Ιησουιτών. Πέθανε στις 7 Δεκεμβρίου 1933. [9]

Οι πρώτοι αριθμοί Cullen

Αριθμός Cullen είναι ένας φυσικός αριθμός C_n της μορφής $C_n= n\cdot 2^n+1$. Οι αριθμοί Cullen μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον James Cullen το 1905. **Πρώτοι αριθμοί Cullen** ονομάζονται οι αριθμοί Cullen που είναι πρώτοι.
Το 1976 ο Christopher Hooley έδειξε ότι σχεδόν όλοι οι αριθμοί Cullen είναι σύνθετοι! Οι μόνοι γνωστοί πρώτοι αριθμοί Cullen είναι οι C_n, με

n : 1, 141, 4713, 5795, 6611, 18496, 32292, 32469, 59656, 90825, 262419, 361275, 481899, 1354828, 6328548, 6679881 (Ακολουθία A005849 στην OEIS).

Εικάζεται ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι του Cullen. Ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός του Cullen, μέχρι το 2009 είναι ο αριθμός $6679881\cdot 2^{6679881}+1$, με 2.010.852 ψηφία, ο οποίος βρέθηκε από ένα μέλος των Prime Grid στην Ιαπωνία. Έχει αποδειχθεί ότι ο C_n διαιρείται από τον αριθμό p=2n-1 αν ο p είναι πρώτος της μορφής 8k-3, k ∈N*. Τέλος, **γενικευμένος αριθμός Cullen** ονομάζεται κάθε αριθμός της μορφής $n\cdot b^n+1$, όπου n > b-2. **Γενικευμένος πρώτος αριθμός Cullen** ονομάζεται ένας γενικευμένος αριθμός Cullen που είναι πρώτος. [6]

2.13. Εξάδελφοι πρώτοι αριθμοί

Εξάδελφος πρώτος αριθμός ονομάζεται κάθε πρώτος αριθμός που διαφέρει από έναν άλλο πρώτο αριθμό κατά τέσσερα.
Τα πρώτα ζεύγη εξάδελφων πρώτων αριθμών κάτω από 1000 είναι τα εξής:

(3, 7), (7, 11), (13, 17), (19, 23), (37, 41), (43, 47), (67, 71), (79, 83), (97 , 101), (103, 107), (109, 113), (127, 131), (163, 167), (193, 197), (223, 227), (229, 233), (277, 281), (307, 311), (313, 317), (349, 353), (379, 383), (397, 401), (439, 443), (457, 461), (463.467), (487 , 491), (499, 503), (613, 617), (643, 647), (673, 677), (739, 743), (757, 761), (769, 773), (823, 827), (853, 857), (859, 863), (877, 881), (883, 887), (907, 911), (937, 941), (967, 971) (Ακολουθία A023000 και A046132 στην OEIS)

Τον Μάιο του 2009 ο μεγαλύτερος γνωστός εξάδελφος πρώτος αριθμός βρέθηκε από τον Ken Davis και έχει 11.594 ψηφία. Κατ΄ αναλογία με το αποτέλεσμα για τους δίδυμους πρώτους αριθμούς, ισχύει ότι το άθροισμα των αντιστρόφων των εξαδέλφων πρώτων αριθμών (παραλείποντας το πρώτο ζεύγος) συγκλίνει προς τη σταθερά B_4, η οποία εκτιμήθηκε από τον Marek Wolf το 1996 όπου $B_4 \approx 1{,}1970449$ [20]

2.14. Sexy πρώτοι αριθμοί

Sexy πρώτος αριθμός ονομάζεται κάθε πρώτος αριθμός, που διαφέρει από έναν άλλο πρώτο αριθμό κατά έξι (Ακολουθία A046117 στην OEIS). Το όνομα τους οφείλεται στη λέξη "σεξ" που είναι η λατινική λέξη για το «έξι»..
Τα πρώτα ζεύγη sexy πρώτων αριθμών είναι:

(5, 11), (7, 13), (11, 17), (13, 19), (17, 23), (23, 29), (31, 37), (37, 43), (41, 47), (47, 53), ...

Το Νοέμβριο του 2005, ο μεγαλύτερος γνωστός sexy πρώτος αριθμός βρέθηκε από τον J. K. Andersen και έχει 10154 ψηφία.[21]

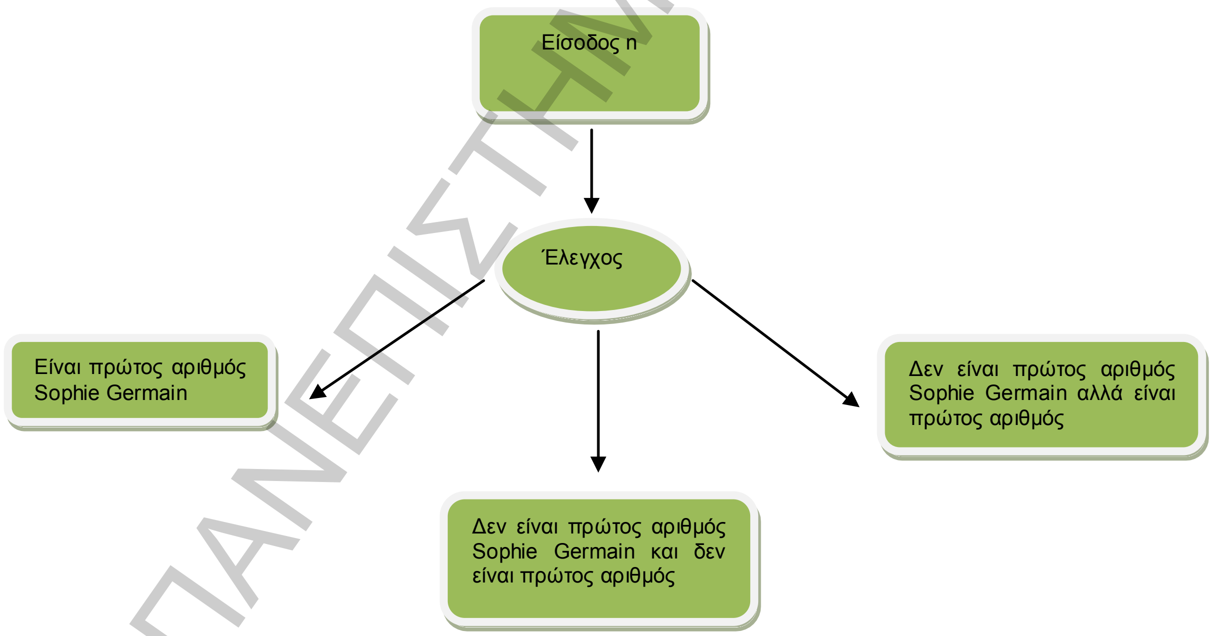
3.Παραρτημα

Έλεγχος πρώτων αριθμών

```
package thesis;

/**
 *
 * @author user
 */

import java.awt.*;
import java.util.*;

public class Ptixiaki{

//H parakatw methodos elegxei an enas arithmos
//einai prwtos h oxi.
//An einai prwtos epistrefei true, an den einai
//epistrefei false
public static boolean check_prime(long n)
{
      if(n==2) {return true;}
      for(int i=2;i<=Math.sqrt(n)+1;i++)
      {
            // An o n diairetai me kapoio i tote einai einai synthetos
            if(n%i==0) { return false; }
      }
      return true;
}

public static long check_prime_with_factoring(long n)
{
      if(n==2) {return 0;}
      for(long i=2;i<=Math.sqrt(n)+1;i++)
      {
            // An o n diairetai me kapoio i tote einai einai synthetos
            if(n%i==0) { return i; }
      }
      return 0;
}

//generate all primes up to  n
      public static ArrayList<Integer> generate_Primes(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++){
            if(check_prime(i)) { Primes.add(i); }
                }
      return Primes;
      }

public static void print_prime_list(int n)
{
      for(int i=2;i<=n;i++)
      {
            if(check_prime(i)) { System.out.println(i); }
      }
}
```

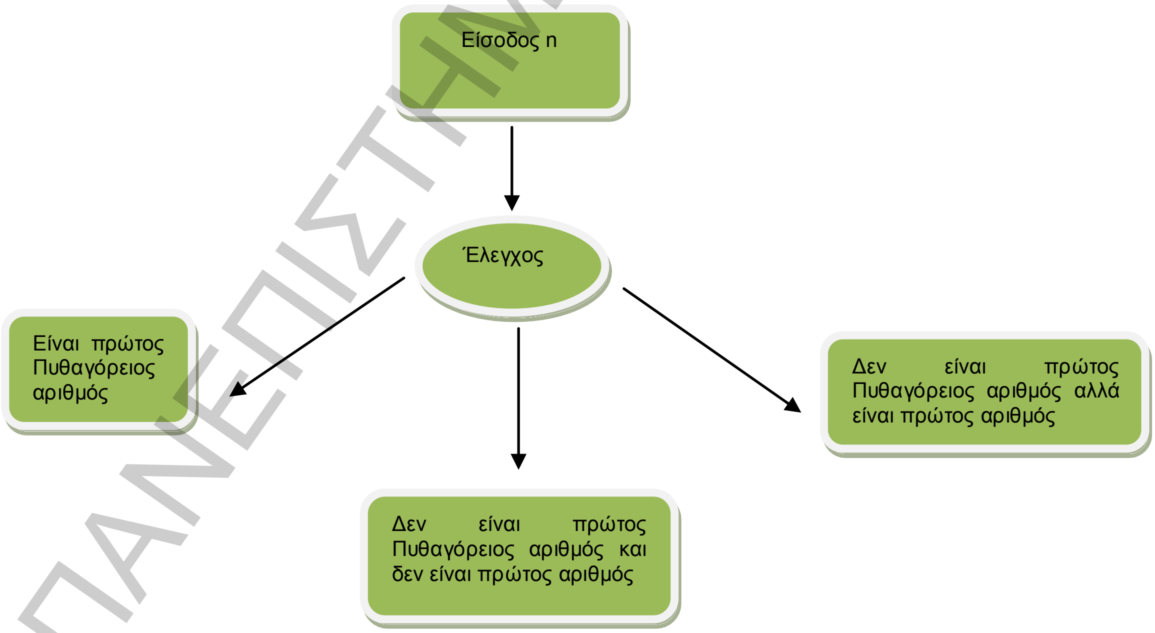
Πρώτοι αριθμοί Germain

```
//generate all germain primes up to  n
      public static ArrayList<Integer> generate_germain(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++)
                {
            if(check_prime(i) && check_prime(2*i+1)) {   Primes.add(i);
}
                }
        return Primes;
      }


        public static boolean check_germain_prime(long n)
        {
      if(check_prime(n) && check_prime(2*n+1)) {return true;}
        return false;
        }


public static void print_germain_list(int n){
      for(int i=2;i<=n;i++)
      {
            if(check_prime(i)       &&       check_prime(2*i+1))       {
System.out.println(i); }
      }

}
```



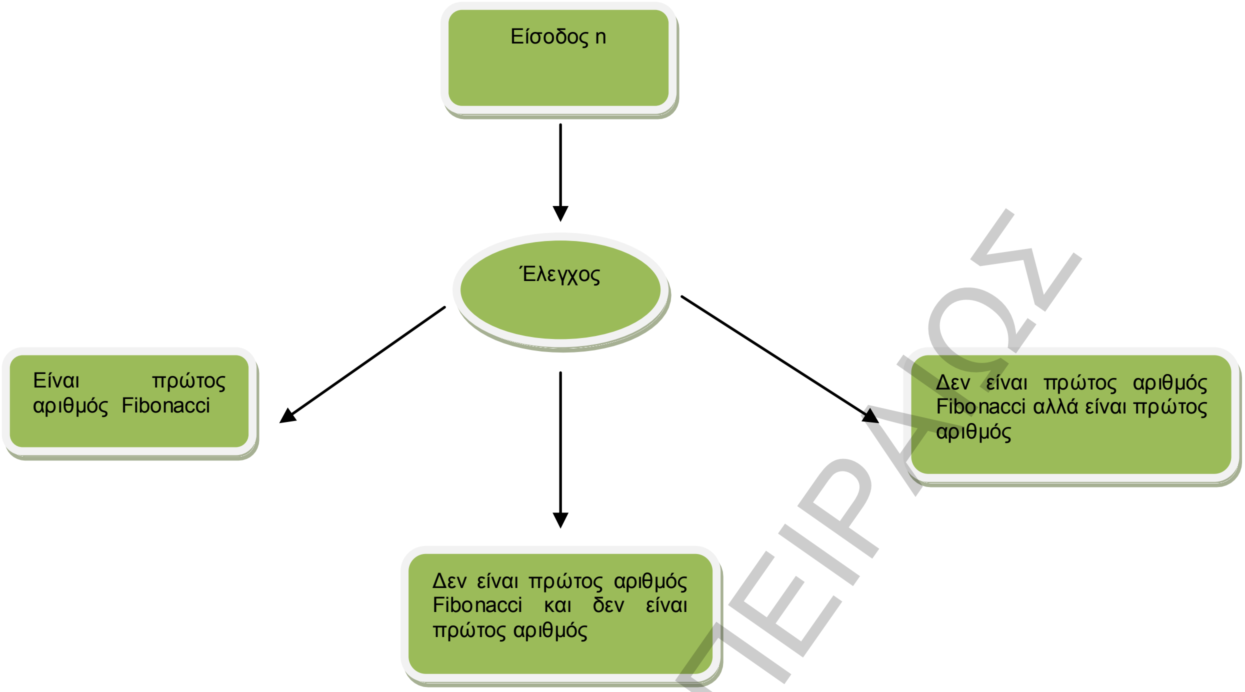
Πρώτοι Πυθαγόρειοι αριθμοί

```
//generate all pythagorean primes up to  n
      public static ArrayList<Integer> generate_pythagorean(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++)
                {
            if(i%4==1 && check_prime(i)) {  Primes.add(i); }
                }
        return Primes;
      }


         public static boolean check_pythagorean_prime(long n)
        {
      if(n%4==1 && check_prime(n)) {return true;}
        return false;
        }


public static void print_pythagorean_list(int n){
      for(int i=2;i<=n;i++)
      {
            if(i%4==1 && check_prime(i) ) { System.out.println(i); }
      }

}
```



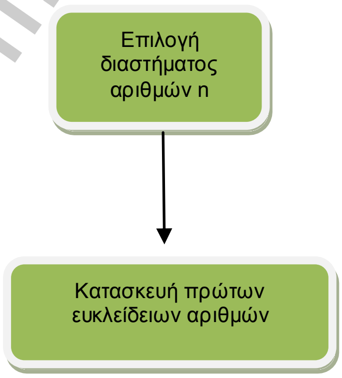
<u>Πρώτοι αριθμοί Fibonacci</u>

```
public static void print_fibonacci_list(int n){
      long fib1 = 1;
      long fib2 = 1;
      long fib = 0;
      for(int i=1;i<=n;i++){
            fib = fib1 + fib2;
            System.out.println(fib);
            fib1 = fib2;
            fib2 = fib;
      }
}

//generate all fibonacci primes up to  n
      public static ArrayList<Long> generate_prime_fibonacci(int n){
            ArrayList<Long> Primes = new ArrayList<Long>();
            long fib1 = 1;
                long fib2 = 1;
                long fib = 0;
                while(fib<=n){
            fib = fib1 + fib2;
                    if(check_prime(fib)) { Primes.add(fib); }
            fib1 = fib2;
            fib2 = fib;
      }
                return Primes;
      }

 public static boolean check_fibonacci_prime(long n)
        {
        if(!check_prime(n)) {return false;}
              long fib1 = 1;
                long fib2 = 1;
                long fib = 0;
                while(fib<n){
                    fib = fib1 + fib2;
                    fib1 = fib2;
                    fib2 = fib;
                }
                if(fib==n) {return true;}
        return false;
        }



public static void print_prime_fibonacci_list(int n){
      long fib1 = 1;
      long fib2 = 1;
      long fib = 0;
      for(int i=1;i<=n;i++){
            fib = fib1 + fib2;
            if(check_prime(fib)) {System.out.println(fib);}
            fib1 = fib2;
            fib2 = fib;
      }
}
```


Είσοδος n
Έλεγχος
Είναι πρώτος αριθμός Fibonacci
Δεν είναι πρώτος αριθμός Fibonacci αλλά είναι πρώτος αριθμός
Δεν είναι πρώτος αριθμός Fibonacci και δεν είναι πρώτος αριθμός

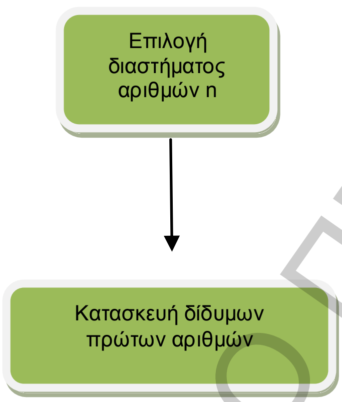
Πρώτοι Ευκλείδειοι αριθμοί

```
//generate the first n euclidean primes
      public static ArrayList<Long> generate_euclidean(int n){
            ArrayList<Long> Primes = new ArrayList<Long>();
                int counter = 0;
                int i=2;
                long euclidean = 1;
                while(counter < n){
                if(check_prime(i)) { euclidean = euclidean*i;   };
            i++;
                euclidean++;
                if(check_prime(euclidean))                  {counter++;
Primes.add(euclidean); }
                }
                return Primes;


public static void print_euclidean_prime(int n){
      int counter = 0;
    int i=2;
    long euclidean = 1;
    while(counter < n){
      if(check_prime(i))  {  counter++;  euclidean  =  euclidean*i;   };

            i++;
    }
    euclidean++;
    if(check_prime(euclidean))
    {
      System.out.println(euclidean + " is euclidean and it is prime");
return;
    }
    System.out.println(euclidean+  "  is  euclidean  but  it  is  not
prime");

}
```



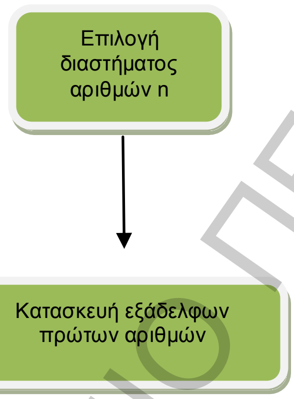
Δίδυμοι πρώτοι αριθμοί

```
//generate twin primes up to n
        public static ArrayList<Integer> generate_twins(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++)
                {
            if(check_prime(i) && check_prime(i+2)) {  Primes.add(i); }
                }
        return Primes;
      }
```



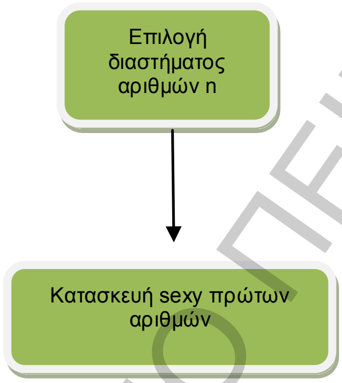
<u>Εξάδελφοι πρώτοι αριθμοί</u>

```
//generate cousin primes up to n
        public static ArrayList<Integer> generate_cousins(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++)
                {
            if(check_prime(i) && check_prime(i+4)) {  Primes.add(i); }
                }
        return Primes;
      }
```



Sexy πρώτοι αριθμοί

```
//generate sexy primes up to n
        public static ArrayList<Integer> generate_sexy(int n){
            ArrayList<Integer> Primes = new ArrayList<Integer>();
            for(int i=2;i<=n;i++)
                {
            if(check_prime(i) && check_prime(i+6)) {  Primes.add(i); }
                }
        return Primes;
      }
```




```
public static void main(String[] args)
{
      //System.out.println(check_prime(510511));
      //System.out.println(
      //print_prime_list(100);
      //print_germain_list(10000);
      //print_pythagorean_list(100000);
      //print_fibonacci_list(60);
      //print_prime_fibonacci_list(60);
      print_euclidean_prime(15);
}
```

4.Βιβλιογραφία

Βιβλία - Άρθρα

[1] Klaus Barner, (2001), How old did Fermat become? *Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, vol 9, No 4, pp. 209-228

[2] Bruce G. Berndt and Roberta Rankin (eds), Ramanujan Essays and Surveys *History of Mathematics* vol. 9.

[3] Bruce C. Bernot and Rovert A. Rankin: Ramanujan, Letters and commentary *History of Mathematics* vol. 9.

[4] Chris Caldwell, *The Prime Glossary: Lucas prime*

[5] Richard Crandall and Carl Pomerance, (2005), *Prime Numbers: A Computational Perspective*, Springer.

[6] James Cullen, (1905), Question 15897, *Educ. Times*, 534.

[7] Euclid, (2008), *Encyclopedia Britannica*, Retrieved 2008-04-18

[8] Ben Green and Terence Tao (2006). Restriction theory of the Selberg sieve, with applications, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux.*

[9] Wilfrid Keller, (1995), New Cullen primes, *Math.Comp*., vol 64, pages 1733-1741

[10] Alladi Krishnaswami, (1998), *Analytic and Elementary Number Theory: A Tribute to Mathematical Legend Paul Erdös*, Norwell, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers. pp. 6

[11] Susan Landau, (1998), V2 + V3 Four Different views, *Notices of the American Math. Society*, vol 20, No 4.

[12] Paulo Ribenboim, (1996), *The New Book of Prime Number Records*, New York, Springer

[13] C. Riedweg, (2005), *Pythagoras His Life, Teaching, And Influence.*

[14] N.J. Sloane, *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, published electronically at oeis.org

[15] Marta Sved, (1990), On the rational solutions of $x^y = y^x$, *Mathematics Magazine*, vol. 63 No 1.

[16] K Vogel, (1970-1990), *Biography in Dictionary of Scientific Biography*, New York

[17] D. Wells, (2005), *PRIME NUMBERS The Most Mysterious Figures in Maths*, John Wiley & Sons.

Ιστοσελίδες

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain_prime

[19] http://primes.utm.edu/curios/page.php?number_id=135

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Cousin_prime

[21] http://mathworld.wolfram.com/SexyPrimes.html

[22] http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime

[24] http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid

[25] http://mathworld.wolfram.com