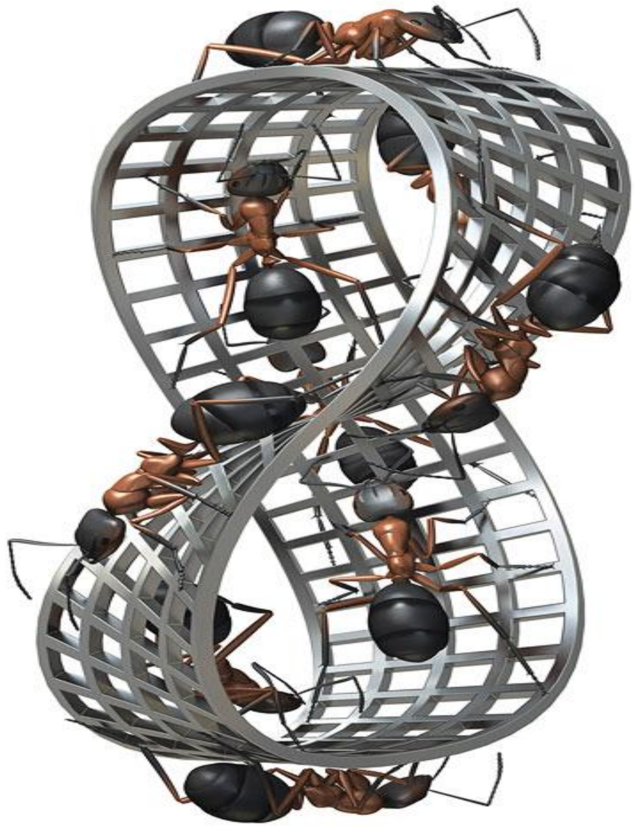
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

MSc
ACTUARIAL SCIENCE & RISK MANAGEMENT



ΕΝΑ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

ΤΣΑΓΚΟΥΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΜΑΕ08036

ΠΕΙΡΑΙΑΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Ευχαριστίες:

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, για την προσοχή, την υπομονή και τον χρόνο που μου αφιέρωσε, ώστε αυτή η εργασία να υλοποιηθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αρτιότητα. Ευχαριστώ επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον κ. Γεώργιο Πιτσέλη, και τον κ. Σπυρίδωνα Βρόντο.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται η μελέτη του ανανεωτικού μοντέλου Erlang (2), το οποίο αποτελεί τη γενίκευση του κλασσικού ανανεωτικού μοντέλου. Τόσο στο κλασσικό, όσο και στο μοντέλο Erlang (2), μία τυχαία μεταβλητή υψίστης σημασίας είναι αυτή του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή την στιγμή που το πλεόνασμα θα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή.

Δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές, που σχετίζονται με τον χρόνο χρεοκοπίας, είναι η τυχαία μεταβλητή του πλεονάσματος την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία και την στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας.

Προφανώς, η από κοινού μελέτη των μεγεθών αυτών δίνει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά του πλεονάσματος, από ότι η μελέτη του κάθε μέτρου ξεχωριστά. Ως εκ τούτου, θα μελετήσουμε την συνάρτηση Gerber και Shiu, η οποία περιγράφει ταυτόχρονα αυτά τα μεγέθη, στην περίπτωση ενός μοντέλου άνευ μερίσματος καθώς και στην περίπτωση καταβολής μερίσματος.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος. Παρουσιάζονται βασικές έννοιες από την θεωρία χρεοκοπίας και γίνεται η αναφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber και Shiu. Είναι η περίπτωση του μοντέλου χωρίς μέρισμα. Θα δειχθεί επίσης ότι η συνάρτηση των Gerber και Shiu ικανοποιεί μία ολόκληρο-διαφορική εξίσωση, η προσέγγιση της οποίας μπορεί να γίνει μέσω μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, οι έννοιες που μας απασχόλησαν στο πρώτο θα μελετηθούν σε βάθος, στην περίπτωση ενός μοντέλου με καταβολή μερίσματος, όταν το πλεόνασμα περάσει ένα προκαθορισμένο όριο. Θα δοθεί η λύση της ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης μέσω της αντίστοιχου της ομογενούς και χρήσης μετασχηματισμών Laplace. Τέλος, θα προσφερθεί και ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την πορεία των μερισμάτων μέσω των ροπών τους. Θα δούμε ότι η ροπογεννήτρια του συνόλου των προεξοφληθέντων μερισμάτων, ικανοποιεί μία ολόκληρο-διαφορική εξίσωση, ίδια με αυτή που μελετήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο και θα προσφέρουμε την λύση της μέσω μιας παρόμοιας μεθοδολογίας. Τέλος, θα προσφέρουμε και εδώ ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Abstract

In this thesis, the study of of the renewal Erlang (2) model is presented, which constitutes the generalization of the classical renewal model. Both in the classical , as well in the Erlang (2) model, a random variable of high importance is the time of default, which is the moment that for the first time the surplus will have a negative value.

Two other random variables related to the time of default are the random variable of the surplus at the exact time before the ultimate ruin and at the exact time of the ultimate ruin.

Obviously, the joint study of these variables provides more information in regard to the surplus behaviour, compared to the inividual study of each variable. Therefore, we shall study the expected discounted penalty function of Gerber and Shiu, which defines these variables, both in the case of a non-dividend model and the case of a dividend paying one.

Chapter one is an introductory part. Fundamental concepts of the ruin theory are presented and the reference of the expected discounted penalty function of Gerber and Shiu is also provided. This is the case of a model without divident. It will also be siplayed that the Gerber and Shiu function satisfies an integro-differential equation, which can be approached by the use of a compound geometrical distribution.

In chapter two, the central concepts of chapter one will be studied in depth, in the case of a dividends-paying model, by the time the surplus exceeds a predermined barrier. The solution of the integro-differential equation will be given through the use of the respective homogenous one and by the use of relevant Laplace transformations. Finally, a numerical example will be provided.

In chapter three, we will study the behaviour of the dividends through their moments. It will be displayed that the moment-generatin function of the sum of the discounted dividend payments satisfies an integro-differential equation, similar to the one we studied in chapter one and we will provide its solution with the use of a similar methodology. Finally, a numerical example will be provided here too.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρία κινδύνου

Η Θεωρία Χρεοκοπίας (*Ruin Theory*), η οποία συχνά αναφέρεται ως Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου (*collective risk theory*), αποτελεί έναν κλάδο της αναλογιστικής επιστήμης ο οποίος ασχολείται με την έκθεση ενός ασφαλιστή στον κίνδυνο χρεοκοπίας και στηρίζεται στην μαθηματική μοντελοποίηση του πλεονάσματος του ασφαλιστή. Αυτό προφανώς είναι πολύ σημαντικό, καθώς η εύρυθμη λειτουργία μιας ασφαλιστικής επιχείρησης ή ενός αντίστοιχου δημόσιου φορέα, εξαρτάται άμεσα από τον σχηματισμό επαρκών αποθεμάτων, προκειμένου να μπορεί να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις του. Οι υποχρεώσεις αυτές μπορεί να είναι τόσο έναντι τρίτων (επιχειρηματικά και επενδυτικά ρίσκα) όσο και έναντι των ασφαλισμένων του (ασφαλιστικά ρίσκα).

Η θεωρία επιτρέπει την εξαγωγή και τον υπολογισμό πολλών μέτρων χρεοκοπίας και αντίστοιχων ποσοτήτων, συμπεριλαμβανομένης της πιθανότητας απολύτου καταστροφής, της κατανομής του πλεονάσματος του ασφαλιστή την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία, του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας, της κατανομής της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος (αν και εφόσον συμβεί κάτι τέτοιο φυσικά) κ.τ.λ.

Θεωρείται ένας κλάδος εφαρμοσμένης θεωρίας πιθανοτήτων, διότι οι περισσότερες από τις μεθοδολογίες και τις τεχνικές που έχουν ενσωματωθεί στηρίζονται στην εφαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών. Και παρόλο που τα περισσότερα προβλήματα στην θεωρία χρεοκοπίας προέρχονται από τον εφαρμοσμένο κόσμο των ασφαλιστικών επιχειρήσεων, είναι αυτές ακριβώς οι μαθηματικές πλευρές της θεωρίας, οι οποίες έχουν προκαλέσει το ενδιαφέρον τόσο των αναλογιστών, όσο και των θεωρητικών των στοχαστικών μοντέλων.

Ιστορικό Σημείωμα

Η θεωρητική βάση της θεωρίας χρεοκοπίας, γνωστή στην σχετική βιβλιογραφία ως το κλασσικό μοντέλο σύνθετης κατανομής Poisson (*classical compound-Poisson risk model*), εισήχθη το 1903 από τον Σουηδό αναλογιστή Filip Lundberg, μέσα από την μνημειώδη διατριβή του Approximerad fremstaellning au sannolikheets functionen.Το κλασσικό μοντέλο κατόπιν επεκτάθηκε για να ενσωματώσει υποθέσεις για την κατανομή του χρόνου ανάμεσα στις ασφαλιστικές απαιτήσεις, την κατανομή του μεγέθους αυτών των απαιτήσεων και ούτω καθεξής. Πρωτοπόροι όπως ο Harald Cramer (1930), μέσα από εργασίες ενσωμάτωσαν την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στην θεωρία κινδύνου. Το αποτέλεσμα αυτών των συνεισφορών ήταν το κλασσικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου ή αλλιώς μοντέλο Cramer – Lundberg ή μοντέλο Lundberg, με κύριο χαρακτηριστικό όπως αναφέραμε την μοντελοποίηση του αριθμού των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, μέσα από την κατανομή Poisson.

Η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου έγινε το 1957 από τον Νορβηγό Sparre Andersen, μέσω της εργασίας *On the collective theory of risk in case of contagion between claims*. Το μοντέλο Sparre Andersen εισήγαγε επίσης την ιδέα, ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Πρόκειται δηλαδή για ένα ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, που δίνει έμφαση στην επιλογή της κατάλληλης στοχαστικής διαδικασίας για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αντικειμενικός στόχος του κλασσικού μοντέλου και των επεκτάσεων του ήταν να υπολογίσει την πιθανότητα της απόλυτης χρεοκοπίας.

Τελευταία, η θεωρία χρεοκοπίας ωθήθηκε σημαντικά από τα άρθρα του Powers, *A theory of risk, return*, and solvency, (1995), και φυσικά των κλασσικών εργασιών των Gerber και Shiu, *From ruin theory to option pricing*, (1997) και *On the time value of ruin* ,(1998) , οι οποίοι εισήγαν την συνάρτηση αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης (*expected discounted penalty function*), μια γενίκευση της πιθανότητας απόλυτης χρεοκοπίας. Αυτό αποτέλεσε ένα κομβικό σημείο, το οποίο ακολούθησε πλήθος δημοσιεύσεων πάνω στην εξαγωγή μέτρων, από μία πληθώρα μοντέλων κινδύνου.

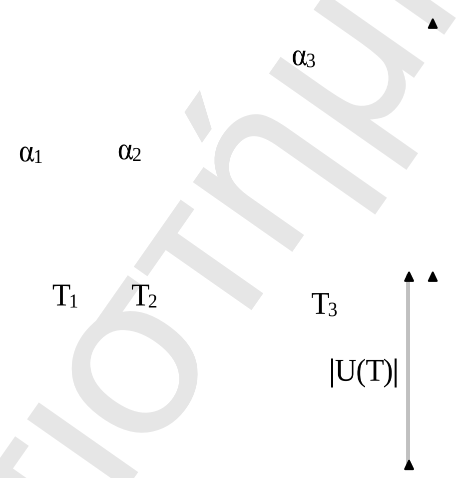
1.1. Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Παραδοσιακά, το πλεόνασμα ενός ασφαλιστή έχει μοντελοποιηθεί σαν το αποτέλεσμα δύο αντίθετων χρηματορροών: μία εισερχόμενη ροή ρευστού, προέλευση της οποίας είναι το ασφάλιστρο, το οποίο συλλέγεται συνεχώς με ρυθμό c, και μια εξερχόμενη ροή ρευστού, η οποία οφείλεται σε μια αλληλουχία από ασφαλιστικές απαιτήσεις $X_1, X_2, ..., X_i$, αμοιβαία ανεξάρτητες και ισόνομες, με κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Η άφιξη των απαιτήσεων υποθέτουμε ότι ακολουθεί την διαδικασία Poisson με ένταση λ, το οποίο σημαίνει ότι ο αριθμός των δεδομένων απαιτήσεων $N(t)$ σε έναν χρόνο t, καθορίζεται από μία κατανομή Poisson με μέσο λt. Οπότε, το πλεόνασμα του ασφαλιστή σε κάθε χρόνο t δίνεται από την σχέση

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i,$$

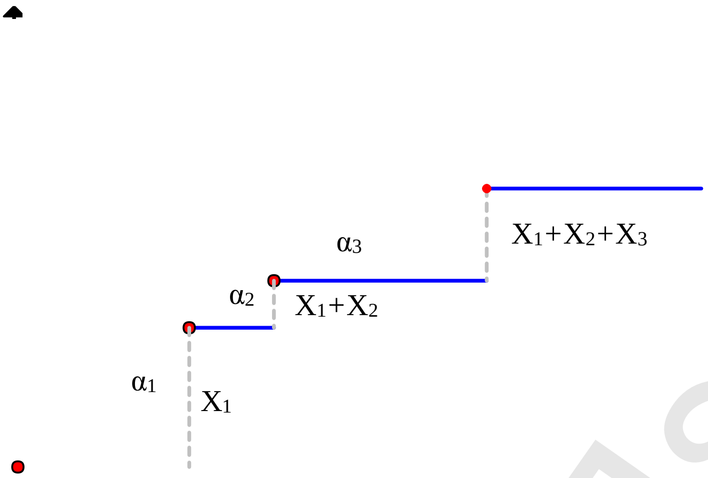
όπου η ασφαλιστική επιχείρηση ξεκινάει με αρχικό κεφάλαιο u (φυσικά ισχύει $U(0) = u$) κάτω από το μέτρο πιθανότητας P^u.

Σχήμα 1:Η διαδικασία πλεονάσματος U(t)



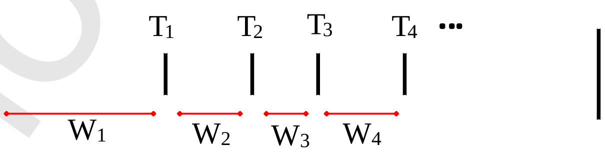
Προφανώς οι άνοδοι οφείλονται στην είσπραξη ασφαλίστρων, ενώ οι πτώσεις στην εμφάνιση ζημιών, το μέγεθος των οποίων ισούται με τα $a_1, a_2, ... a_{N(t)}$ της ακόλουθης παράστασης:

Σχήμα 2: Η διαδικασία αποζημιώσεων S(t)



Ερμηνεύοντας τα διαγράμματα: έστω T_i : οι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων και W_i : οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων. Έχουμε δηλαδή μία στοχαστική διαδικασία, την $N(t)$ που απαριθμεί το πλήθος των ζημιών στο χρόνο. Προφανώς $T_2 - T_1$ είναι το διάστημα για να εμφανιστεί ο δεύτερος κίνδυνος, εφόσον έχει εμφανιστεί ο πρώτος. Για $W_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 2$ ισχύει φυσικά $W_1 = T_1$. Για να μελετήσουμε τις W_i , δηλαδή τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ζημιών, θεωρούμε ότι είναι ένα σύνολο από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ότι η $N(t)$ είναι μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη.

Σχήμα 3:Τα διαστήματα εμφάνισης των ζημιών



Η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ εμφανίζει άλματα “προς τα κάτω” κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των απαιτήσεων. Τα άλματα αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα “προς τα πάνω” της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων S(t), με την εξής διαφορά: Η δειγματοσειρά S(t) είναι σταθερή (η S(t) έχει σταθερή τιμή μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων W_i), ενώ η αντίστοιχη δειγματοσυνάρτηση U(t) είναι μεταξύ δύο διαδοχικών χρόνων W_i ένα ευθύγραμμο τμήμα θετικής κλίσεως c.

Αντίστοιχα στο σχήμα 2, στο διάστημα $[0,T_1]$ δεν έχει εμφανιστεί ο κίνδυνος, άρα $S(t)=0$. Έχουμε λοιπόν μία κλιμακωτή διαδικασία με εμφανή άλματα στα $T_1,T_2,...$ και τα οποία ισούνται με το ύψος της εκάστοτε απαίτησης.

Αντίστοιχα ορίζεται και η Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια, δηλαδή

$$L=\max_{t\geq 0}\left[\underset{\acute{\varepsilon}\xi o\delta\alpha}{S(t)}-\underset{\acute{\varepsilon}\sigma o\delta\alpha}{ct}\right]$$

η οποία, για $S(t)-ct$ η διαφορά των εσόδων από τα έξοδα, αποτελεί την μέγιστη δυνατή απώλεια και προφανώς για $t\geq 0$ αποτελεί μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή.

Κεντρικό στόχο του μοντέλου του Lundberg αποτελούσε να διερευνήσει την πιθανότητα, το επίπεδο του πλεονάσματος του ασφαλιστή να πέσει τελικά κάτω του μηδενός, οπότε και ,μαθηματικά μιλώντας, θα χρεοκοπούσε η εταιρία. Αυτή ακριβώς η πιθανότητα, γνωστή ως πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, ορίστηκε ως

$$\psi(u)=\Pr\left[T<\infty \,|\, U(0)=u\right],$$

όπου η στιγμή της χρεοκοπίας είναι η

$$T=\inf\left[t:U(t)<0\right],$$

υπό την σύμβαση $\inf\varnothing=\infty$.

Είναι ευρέως γνωστό ότι η πιθανότητα της απόλυτης χρεοκοπίας αποτελεί την ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Οι ακριβείς λύσεις και οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις της πιθανότητας χρεοκοπίας στηρίζονται κυρίως στις τεχνικές της θεωρίας ανανέωσης.

1.2. Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Τα άρθρα των Powers το 1995 και των Gerber και Shiu, ανέλυαν την συμπεριφορά του πλεονάσματος του ασφαλιστή μέσω της συνάρτησης αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης, η οποία κατέληξε να λέγεται και συνάρτηση των Gerber-Shiu στην σχετική βιβλιογραφία. Κατά μερικούς, ενδεχομένως να έπρεπε να λέγεται συνάρτηση των Gerber-Shiu-Powers, λόγω και της δικής του συμβολής.

Κατά τον Powers, ορίζεται

$$\varphi(u) = E^u[e^{-\delta T} K_T],$$

όπου δ είναι η προεξοφλημένη ένταση ανατοκισμού, K_T είναι μία γενική συνάρτηση ποινής (penalty function) αντανακλούσα το οικονομικό κόστος για τον ασφαλιστή την στιγμή της χρεοκοπίας, ενώ το E^x αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας P^x. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται, κατά τον Powers, αναμενόμενο κόστος προεξόφλησης έλλειψης φερεγγυότητας (expected discounted cost of insolvency).

Κατά τους Gerber και Shiu, ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(x) = E^u[e^{-\delta T} w(U(T-), U(T)) I(T < \infty) \mid U(0) = u],$$

όπου δ είναι η προεξοφλημένη ένταση ανατοκισμού και $w(U(T-),U(T))$ μία συνάρτηση ποινής, η ποία καλύπτει το οικονομικό κόστος του ασφαλιστή την στιγμή της χρεοκοπίας (για την οποία υποθέτουμε ότι βασίζεται στο πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U(T-)$ και το έλλειμμα $U(T)$), ενώ το E^u συνεχίζει να αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας P^u. Εδώ η δείκτρια συνάρτηση $I(T < \infty)$ τονίζει ότι, η ποινή ασκείται εάν και εφόσον τελικά συμβεί η χρεοκοπία.

Η ερμηνεία της συνάρτησης αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης είναι κάπως διαισθητική:εφόσον η συνάρτηση μετρά την αναλογιστική παρούσα αξία της ποινής που επέρχεται στο τ, η συνάρτηση ποινής πολλαπλασιάζεται επί τον παράγοντα προεξόφλησης $e^{-\delta T}$, και κατόπιν παίρνουμε τον μέσο της συνάρτησης πιθανότητας του αναμενόμενου χρόνου ως το T. Ενώ οι Gerber και Shiu εφάρμοσαν την συνάρτηση στο κλασσικό μοντέλο σύνθετης κατανομής Poisson, ο Powers υποστήριξε ότι το πλεόνασμα του ασφαλιστή μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία οικογένεια diffusion κατανομών.

Υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία από μέτρα που σχετίζονται με την χρεοκοπία, τα οποία εμπίπτουν στην κατηγορία των συναρτήσεων αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης:

Ειδική περίπτωση	Μαθηματική Απεικόνιση	Επιλογή συνάρτησης ποινής
Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας	$\Pr(T < \infty \mid U(0) = u) = \psi(u)$	$\delta = 0, w(x,y) = 1$
Μετασχηματισμός Laplace χρόνου χρεοκοπίας	$\varphi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]$	$w(x,y) = 1, \forall x,y > 0$
Προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π των U(T-) και |U(T)|	$\varphi_\delta(u) = f_\delta(x,y \mid u)$	$w(x_1,x_2) = I(X_1 = x)I(X_2 = y)$
Προεξοφλημένη από κοινού σ.κ των U(T-) , |U(T)|	$\varphi_\delta(u) = F_\delta(x,y \mid u)$	$w(x_1,x_2) = I(X_1 \le x)I(X_2 \le y)$
Ροπή τάξεως κ	$\varphi_\delta(u) = E\left(\lvert\lvert U(T)\rvert^\kappa \, \mathrm{I}(\mathrm{T} < \infty) \mid U(0) = u\right)$	$\delta = 0, w(x_1,x_2) = X_2^\kappa$

Προφανώς και ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ροπογεννητριών και των μετασχηματισμών Laplace. Ενημερωτικά, άλλα χρηματοοικονομικά στοιχεία που ανήκουν στην κατηγορία των συναρτήσεων αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης περιλαμβάνουν τα Αμερικάνικα δικαιώματα put option και διάφορα ομόλογα.

1.3. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας, η αρχή γίνεται προσδιορίζοντας τον αριθμό των κινδύνων. Εδώ θα εισάγουμε μερικές από τις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Ορισμός 1.1. *Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία. Η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία (counting process) αν και μόνο αν*

- *N(t) > 0 με N(0)=0.*
- *Η N(t) είναι διακριτή.*
- *Αν $s \le t$, τότε και $N(s) \le N(t)$.*

Η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ λοιπόν, η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα [0,t], είναι μία απαριθμήτρια διαδικασία.

Ένας άλλος πολύ σημαντικός ορισμός είναι αυτός της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας και στηρίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης αυτών ακριβώς των γεγονότων (ενδεχομένων), που απαριθμεί μια απαριθμήτρια διαδικασία. Πρόκειται για μια από τις πιο γενικές οικογένειες στοχαστικών διαδικασιών, ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στην θεωρία κινδύνου, όσο και στην προαναφερθείσα θεωρία ουρών. Έστω $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μία ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ με σ.κ $F_W(t)$, σ. π.π. $f_W(t)$, μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_W(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t)dt$ και πρώτη ροπή $E(W)<\infty$, όπου W_i ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της i-ζημιάς (ενδεχομένου). Τότε η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.2. *Έστω $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών και ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ. Η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, με $\sigma_0=0$ και $\sigma_n=W_1+W_2+...+W_n$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ με N(0)=0 δίνεται από την σχέση*

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n\le t)},$$

παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα [0,t] και ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Για κάθε ανανεωτική εξέλιξη ισχύει ότι N(t) = t αν και μόνο αν $\{\sigma_n \le t \le \sigma_{n+1}\}$.

Ερμηνεία: Το ενδεχόμενο {N(t) = t}, περιορίζει τον αριθμό των γεγονότων έως τον χρόνο t σε ακριβώς n γεγονότα. Το ενδεχόμενο $\{\sigma_n \le t \le \sigma_{n+1}\}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση n γεγονότων είναι t. Οι δύο αυτές σχέσεις αποτελούν δύο διαφορετικές σχέσεις του ίδιου ενδεχομένου.

Θεώρημα 1.1. *Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε, με πιθανότητα 1 (βέβαιο ενδεχόμενο) ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{E(W_1)}.$$

Απόδειξη: Εκ του ορισμού της N(t) οι ανισότητες $\sigma_n \le t \le \sigma_{n+1}$ ισχύουν με πιθανότητα 1 (βέβαιο ενδεχόμενο). Διαιρώντας την παραπάνω ανισότητα με N(t) και χρησιμοποιώντας τον νόμο των μεγάλων αριθμών, παίρνω

$$E(W_1)\le \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)}\le \lim_{n\to\infty}\frac{t}{N(t)}$$

$$\leq \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+1}}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=E(W_1).$$

Θεώρημα 1.2. (Θεμελιώδες Ανανεωτικό Θεώρημα). *Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε ισχύει*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}=\frac{1}{E(W_1)}$$

Απόδειξη:
Rolski, Schmidt και Teugels (1996) σελ. 211.

1.4. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Υποχρέωση της ασφαλιστικής εταιρίας είναι η καταβολή των προσυμφωνημένων αποζημιώσεων στους ασφαλισμένους, κατά την χρονική στιγμή της έλευσης του κινδύνου-ζημιάς. Συνήθης πρακτική είναι η καταβολή να γίνεται σε κάποια διακριτή χρονική στιγμή (συνήθως στο τέλος του έτους, ή έστω στο τέλος ενός οικονομικού εξαμήνου), εμείς όμως στα μοντέλα μας δεχόμαστε συμβατικά ότι η πληρωμή γίνεται σε συνεχή χρόνο. Σε κάθε περίπτωση, κάθε ασφαλιστική πρέπει να έχει στην κατοχή της όσο το δυνατόν πιο αναλυτικά στοιχεία αναφορικά με το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων, που ενδέχεται να κληθεί να καταβάλει ανά πάσα στιγμή.

Ορισμός 1.3. *Ορίζουμε ως $\{W_n, n \geq 1\}$ μία ακολουθία η οποία απαριθμεί τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και ως T_n τον χρόνο επέλευσης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα ισχύει*

$$T_n=\sum_{i-1}^{n}W_i.$$

Ορισμός 1.4. *Ορίζουμε ως $N(t)=\sup\{n:T_n<t\}$ μια διακριτή στοχαστική διαδικασία, που εκφράζει το πλήθος των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα [0,t]. Για την N(t) ισχύουν εξ'ορισμού τα εξής:*

- *N(t) > 0 με N(0)=0.*
- *Η N(t) είναι διακριτή.*
- *Αν $s \leq t$, τότε και $N(s)\leq N(t)$.*

Ορισμός 1.5. *Έστω S(t) η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, που καταβάλλονται έως και τον χρόνο t. Έστω X_n η τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει το μέγεθος της συνολικής ζημιάς κατά την* *επέλευση του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου, σύμφωνα και με το μοντέλο συνολικού κινδύνου. Άρα το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί ως τον χρόνο t θα δίνεται από την*

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}.$$

Οι ακολουθίες $\{W_n, n \geq 1\}$ *και* $\{X_n, n \geq 1\}$ *θεωρούνται ως δύο ανεξάρτητες ακολουθίες, αποτελούμενες από ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.*

1.5. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος

Μία θεμελιώδης έννοια στην θεωρία χρεοκοπίας αποτελεί η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος. Πρόκειται πολύ απλά για την στοχαστική διαδικασία, η οποία περιγράφει την εξέλιξη των τιμών του πλεονάσματος μέσα στον χρόνο.

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, το ύψος του πλεονάσματος εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

1) Το *αρχικό κεφάλαιο*, έστω u.

2) Τα *ασφάλιστρα* που έχουν εισπραχθεί μέχρις εκείνη την στιγμή. Υπολογίζονται από το γινόμενο του *ρυθμού είσπραξης c* επί την αντίστοιχη μονάδα χρόνου t.

3) Τις *αποζημιώσεις* που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη την στιγμή. Αυτό αποτελεί ξεχωριστή στοχαστική διαδικασία.

Σχηματικά λοιπόν, σε μία τυχαία χρονική στιγμή t, για t > 0, ισχύει

$$\begin{pmatrix} \text{Πλεόνασμα} \\ \text{την χρονική} \\ \text{στιγμή } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Αρχικό} \\ \text{Κεφάλαιο} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Εισπραχθέντα} \\ \text{Ασφάλιστρα} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Καταβληθείσες} \\ \text{Αποζημιώσεις} \end{pmatrix}.$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι ανά πάσα στιγμή, το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας είναι η διαφορά εσόδων-εξόδων. Τα εν λόγω έσοδα είναι φυσικά το αρχικό αποθεματικό και τα εισπραχθέντα ασφάλιστρα, ενώ έξοδα είναι οι αποζημιώσεις των απαιτήσεων.

Ορισμός 1.4. *Έστω U(t) η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος. Την χρονική στιγμή t θα ισχύει*

$$U(t) = u + ct - S(t). \tag{1.1}$$

Ως c συμβολίζουμε τον ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου(συνήθως δεχόμαστε συμβατικά ότι ο ρυθμός είναι σταθερός), ενώ S(t) *είναι οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα [0,t]. Το S(t) δηλαδή ορίζεται ως*

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , N(t) > 0 \\ \\ 0 \qquad , N(t) = 0 \end{cases} , \qquad (1.2)$$

όπου $\left[X_i\right]_{i\geq 1}^{\infty}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ, με X_i να περιγράφει το μέγεθος της ι – οστής ζημιάς. Θεωρούμε επίσης ότι η τ.μ X_i έχει σ.π.π. $f(x)$, σ.κ $F(x) = \Pr(X \leq x)$ και μέση τιμή $m = E(X) < \infty$. Βασική υπόθεση του μοντέλου αυτού είναι φυσικά ότι οι ακολουθίες $\left[X_i\right]_{i\geq 1}^{\infty}$ και $\left[N(t)\right]_{t=0}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες.

Ο τρόπος άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων παίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος και κάθε ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη δια νόμου, να διαθέτει συγκεκριμένο αρχικό κεφάλαιο κατά την έναρξη των εργασιών της. Προφανώς την χρονική στιγμή $t = 0$ το αρχικό της κεφάλαιο ισούται με το αποθεματικό της και φυσικά είναι και το πλεόνασμα της. Δηλαδή $U(0) = u$.

Είδαμε ότι το πλεόνασμα σε μια τυχαία χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

με συμπληρωματική σχέση

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda E(y) - S(t), \qquad (1.3)$$

όπου $\theta > 0$ ένα *περιθώριο ασφαλείας* με της μορφή μίας επιπρόσθετης επιβάρυνσης επί των ασφαλίστρων.

Προφανώς, η διαδικασία πλεονάσματος κατά τις χρονικές στιγμές W_i μπορεί να γίνει και αρνητική. Στην ορολογία του κλάδου, αυτό το ενδεχόμενο ονομάζεται *χρεοκοπία*, και η αντίστοιχη πιθανότητα, πιθανότητα χρεοκοπίας.

Προτού ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, οφείλουμε να ορίσουμε την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας.

1.6. Στιγμή χρεοκοπίας (*time to ruin*)

Ορισμός 1.7. *Για κάποιο $t \geq 0$, ορίζουμε ως*

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \ \text{με} \ \inf\varnothing = \infty, \qquad (1.4)$$

την στιγμή που για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

1.7. Πιθανότητα χρεοκοπίας *(probability of ruin)*

Αντίστοιχα με το κλασσικό μοντέλο, έχουμε ότι

Ορισμός 1.8. *Για* $u \geq 0$*, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι*

$$\psi(u) = P(T < \infty \,|\, U(0) = u). \tag{1.5}$$

Πάντα μιλάμε για *μαθηματική χρεοκοπία*. Η πραγματικότητα φυσικά είναι πιο σύνθετη. Στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν αποτελεί τον μοναδικό πόρο μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Ενδεικτικά, στον χώρο των γενικών ασφαλίσεων κύρια πηγή εσόδων αποτελούν πλέον οι επενδύσεις των ασφαλίστρων, αφού τα προϊόντα προσφέρονται, για λόγους μάρκετινγκ και ανταγωνιστικότητας, σε χαμηλότερες τιμές από την αντίστοιχη μαθηματική ελπίδα. Η ασφαλιστική πρακτική επίσης θέλει τις αποζημιώσεις με κάποια χρονική υστέρηση (*lag*), συνήθως στο τέλος ενός οικονομικού έτους ή εξαμήνου, και όχι στιγμιαία γεγονότα “πραγματικού χρόνου”. Συνεπώς, η μαθηματική χρεοκοπία, όπως την ορίζουμε εδώ, δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την πραγματική χρεοκοπία μίας επιχείρησης. Σε κάθε περίπτωση πάντως, συνεχίζει να αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, ένα ενδεικτικό εργαλείο από το οποίο μία επιχείρηση μπορεί να εξάγει πολύτιμα συμπεράσματα. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι μία εταιρία, υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορεί να προσδιορίσει το απαιτούμενο αρχικό απόθεμα u, το ασφάλιστρο c, και φυσικά το επιπλέον περιθώριο ασφαλείας θ. Πρακτικά, η επιχείρηση θα έχει κάποιες ενδείξεις όσον αφορά την φύση των υποχρεώσεων της και θα πράξει ανάλογα, π.χ. με αύξηση μετοχικού κεφαλαίου ή αύξηση των ασφαλίστρων.

Ένα άλλο πολύτιμο συμπέρασμα, το οποίο προκύπτει άμεσα από τον παραπάνω ορισμό. είναι ότι τα ασφάλιστρα c της επιχείρησης δεν μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε τυχαίο ποσό, και σίγουρα δεν μπορούν να είναι μηδενικά. Η φυσική υπόθεση είναι ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου c σε ένα διάστημα $[0,t]$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος από την αναμενόμενη συνολική ζημιά $E(S(t))$, που εμφανίζεται στο ίδιο διάστημα, διαφορετικά η χρεοκοπία στο $[0,t]$ είναι βέβαιη από την πρώτη κιόλας ζημιά. Υποθέτουμε επίσης ότι το αρχικό κεφάλαιο u είναι διάφορο του μηδενός, για τους ίδιους λόγους. Αντίστοιχα, δίχως το περιθώριο ασφαλείας θ (δηλαδή ασφάλιστρα ίσα με την τιμή της μαθηματικής ελπίδας του ζημιογόνου ενδεχομένου), μια ασφαλιστική επιχείρηση μακροπρόθεσμα θα οδηγηθεί στην χρεοκοπία.
Η πιθανότητα χρεοκοπίας, αν και αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι και το μοναδικό. Δύο άλλες τ.μ. που σχετίζονται με την τ.μ. T είναι η |U(T)|, δηλαδή το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας, και η U(T-), το πλεόνασμα λίγο πριν την επέλευση της χρεοκοπίας. Αρκετοί ερευνητές μελέτησαν τις τρεις παραπάνω ποσότητες, τόσο ξεχωριστά δια των

περιθώριων συναρτήσεων τους, όσο και μαζί, από τις από κοινού κατανομές τους. Οι Gerber και Shiu, το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τρεις τ.μ. T, |U(T)| και |U(T-)| σε μία και μόνη συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (*expected discounted penalty function*).

1.8. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Είναι προφανές ότι η ταυτόχρονη μελέτη και των τριών ποσοτήτων, δηλαδή των τ.μ. T, |U(T)| και |U(T-), δίνει πολύ περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την συμπεριφορά της διαδικασίας πλεονάσματος U(t), από ότι η μελέτη μόνο μίας από αυτές.

Ορισμός 1.9. *Για* $u \geq 0$, $\delta \geq 0$*, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως*

$$\varphi(u) = E(e^{-\delta T} w(U(T-),|U(T)|) 1_{(T<\infty)} \mid U(0)=u)), u \geq 0, \qquad (1.6)$$

που δ η ένταση ανατοκισμού, $0 \leq w(x,y) < \infty$ *μια δισδιάστατη συνάρτηση ορισμένη στο* R^2 *που λειτουργεί ως συνάρτηση ποινής, U(T-), το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία, |U(T)|, δηλαδή το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία και φυσικά* $1_{(.)}$ *είναι η αντίστοιχη δείκτρια.*

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η ερμηνεία της συνάρτησης των Gerber-Shiu είναι σε μεγάλο βαθμό διαισθητική: συμβατικά, πρόκειται για την προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται εάν και όταν επέρχεται η χρεοκοπία. Από την ορισμό της φ(u), και ανάλογα με τις μορφές της, προκύπτουν ποικίλα μέτρα κινδύνου.

Ειδικές Περιπτώσεις

- Για δ = 0, w(x,y) = 1, παίρνουμε την *πιθανότητα χρεοκοπίας*

$$\psi(u) = E(1_{(T<\infty)} \mid U(0)=u).$$

- Για δ > 0, w(x,y) = 1, παίρνουμε τον *μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,*

$$\varphi_T(u) = E(e^{-\delta T} 1_{(T<\infty)} \mid U(0)=u).$$

- Για δ > 0, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)} 1_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την *προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος* (U(T-), |U(T)|),

$$f(x_1,x_2 \mid u) = E(e^{-\delta T} 1_{(|U(T)|=x_2, U(T-)=x_1)} 1_{(T<\infty)} \mid U(0)=u).$$

- Για $\delta = 0$, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)} 1_{(y=x_2)}$, έχουμε την *από κοινού σ.π.π των τ.μ. (U(T-), |U(T)|),*

$$f_0(x,y \mid u) = E[1_{(x_1=x)} 1_{(x_2=y)} \mid U(0) = u].$$

- Όταν $\delta > 0$, $w(x_1,x_2) = 1_{(x_1 \le x)} 1_{(x_2 \le y)}$, έχουμε την *από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία, και του ελλείμματος την στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας*,

$$F_\delta(x,y \mid u) = E[e^{-\delta T} 1_{(x_1 \le x)} 1_{(x_2 \le y)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta = 0$, $w(x_1,x_2) = 1_{(x_1 \le x)} 1_{(x_2 \le y)}$, παίρνουμε την *από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. U(T-) και |U(T)|*, δηλαδή την

$$F_0(x,y \mid u) = E[1_{(x_1 \le x)} 1_{(x_2 \le y)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)}$, παίρνουμε την *προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ.*

$$\text{(U(T-)} \ h(x_1, \mid u) = E(e^{-\delta T} 1_{(U(T-)=x_1)} 1_{(T<\infty)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(x \le x_1)}$, παίρνουμε *την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία*,

$$H_\delta(x \mid u) = E(e^{-\delta T} 1_{(x_1 \le x)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta = 0$, $w(x_1,x_2) = 1_{(x \le x_1)}$, προκύπτει η *συνάρτηση κατανομής της*

$$\text{U(T-)} \ H_0(x \mid u) = E(1_{(x_1 \le x)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(x=x_1)}$, έχουμε την *σ.π.π. της τ.μ U(T-)*

$$h_0(x_1, \mid u) = E(1_{(x=x_1)} \mid U(0) = u).$$

- Αν $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(y \le x_2)}$, προκύπτει η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος, την στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας*

$$G(x_2 \mid u) = E(e^{-\delta T} 1_{(|x_2 \le y)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta = 0$, $w(x,y) = 1_{(y \le x_2)}$, έχω την *συνάρτηση κατανομής της τ.μ. |U(T)|*,

$$G_0(x_2 \mid u) = E(1_{(|x_2 \le y)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1_{(y = x_2)}$, παίρνουμε *την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. |U(T)|),*

$$g(x_2 \mid u) = E(e^{-\delta T} 1_{(|U(T)| = x_2)} 1_{(T<\infty)} \mid U(0) = u).$$

Αν $\delta = 0$, $w(x,y) = 1_{(y = x_2)}$, προκύπτει *η σ.π.π της τ.μ. |U(T)|,*

$$g_0(x_2 \mid u) = E(1_{(|U(T)| = x_2)} \mid U(0) = u).$$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = x_1^k (w(x,y) = x_2^k)$, παίρνουμε την *προεξοφλημένη ροπή τάξεως k του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία (ή αντίστοιχα του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία)*

$$E(e^{-\delta T} \mid U(T)^K 1_{(T<\infty)} \mid U(0) = u),$$

(εναλλακτικά, $E(e^{-\delta T} \mid U(T-)^K 1_{(T<\infty)} \mid U(0) = u)$).

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, θα ήταν σφάλμα να νομίζουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu βρίσκει εφαρμογή μόνο στα αναλογιστικά μαθηματικά. Πρόκειται για ένα πανίσχυρο εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρέως και στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Οι ίδιοι οι Gerber- Shiu πρότειναν, για w(x,y) = max {0,K-x}, την χρήση της φ(u) για την τιμολόγηση αμερικάνικών put options με τιμή άσκησης K.

Ένα άλλο σημείο των μελετών των Gerber- Shiu που θα μας απασχολήσει επί του παρόντος, είναι ότι η φ(u) ικανοποιεί μία ολόκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με την βοήθεια μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε το 1999 από τους Lin και Willmot, σε όρους της ουράς μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Στην κλασσική πλέον εργασία γίνεται και ο υπολογισμός μέσω της σύνθετης γεωμετρικής.

1.9. Στοχαστικές ανελίξεις Martingale:

Έστω (Ω,F,P) ένας χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 1.10. *Έστω μια στοχαστική διαδικασία* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Τότε η ακολουθία* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ονομάζεται διύλιση της διαδικασίας* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *και ορίζεται ως μία αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών της* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *μέχρι τον χρόνο t. Σχηματικά αυτό φαίνεται*

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F : F_n = \sigma\{Y_s \; ; s \leq n\}.$$

Η F_n *είναι το σύνολο το οποίο περιέχει όλη την πληροφορία της στοχαστικής διαδικασίας* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *μέχρι τον χρόνο n.*

Ορισμός 1.11. *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ονομάζεται προσαρμοσμένη, αν και μόνο αν για κάθε* $n \geq 0$ *η* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *είναι μετρήσιμη.*

Ορισμός 1.11. *Μια στοχαστική ανέλιξη* $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ονομάζεται martingale, αν ισχύουν οι εξής συνθήκες:*

1) $E\left[|Y_n|\right] < \infty$.

2) *Η* Y_n *είναι* F_s *προσαρμοσμένη,* $\forall n \geq 0$.

3) $E\left[Y_{n+1} \,|\, Y_0, Y_1, ..., Y_n\right] = Y_n, \forall n \geq 0$.

Ερμηνεία:Πρόκειται για τις στοχαστικές διαδικασίες που μοντελοποιούν τα δίκαια τυχερά παίγνια. Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή n, και ασχέτως προηγούμενου ιστορικού, ο αναμενόμενος πλούτος ενός παίκτη θα πρέπει να ισούται με τον πλούτο του την στιγμή n-1.

1.10. Γενικευμένη εξίσωση του Lundberg

Έστω η τ.μ $T_\kappa = \sum_{j=1}^{\kappa} V_j$ για κ = 1, 2 , … να συμβολίζει τον χρόνο εμφάνισης της κ-οστής απαίτησης, με $T_0 = 0$ και έστω η τ.μ U_κ η οποία παριστάνει το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της κ-οστής απαίτησης, προφανώς με $U_0 = u$ το οποίο και δίνεται από την σχέση

$$U_\kappa = U(T_\kappa) = u + cT_\kappa - \sum_{j=1}^{\kappa} X_j = u + \sum_{j=1}^{\kappa}\left(cV_j - X_j\right). \qquad (1.7)$$

Αυτή η σχέση είναι πολύ σημαντική, γιατί συνδέει το μέγεθος (δεινότητα) των ζημιών με τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών ζημιών. Εμείς αυτό για το οποίο ψάχνουμε είναι μία συνάρτηση υ(.), τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa), \kappa \in \mathrm{N}\}$ σε διακριτό χρόνο να είναι martingale.

Από τον ορισμό (1.11), η στοχαστική διαδικασία $\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa), \kappa \in \mathrm{N}\}$ είναι martingale αν ισχύει

$$E\left[e^{-\delta T_{\kappa+1}}\upsilon(U_{\kappa+1}) \,|\, F_\kappa\right] = e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa)\,,\ \kappa \in \mathrm{N}. \tag{1.8}$$

Η εξίσωση (1.8.) ισοδυναμεί με την σχέση

$$E\left[e^{-\delta V_{\kappa+1}}\upsilon(U_\kappa + cV_{\kappa+1} - X_{\kappa+1}) \,|\, F_\kappa\right] = \upsilon(U_\kappa)\,. \tag{1.9}$$

Όμως, για κ = 0, η (1.9) γίνεται $E\left[e^{-\delta V_1}\upsilon(U_0 + cV_1 - X_1)\right] = \upsilon(U_0)$ και αφού ισχύει ότι $U_0 = u$, τότε είναι ίση με την σχέση

$$E\left[e^{-\delta V_1}\upsilon(U_0 + cV_1 - X_1)\right] = \upsilon(u)\,. \tag{1.10}$$

Άρα η σχέση (1.10) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η στοχαστική διαδικασία$\{e^{-\delta T_\kappa}\upsilon(U_\kappa), \kappa \in \mathrm{N}\}$ να είναι martingale. Αυτό είναι αναμενόμενο άλλωστε: οι στοχαστικές διαδικασίες martingale μοντελοποιούν τα δίκαια τυχερά παίγνια, και κάθε ασφαλιστικό σχήμα στον πυρήνα του παραμένει ένα τυχερό παίγνιο.

Έστω τώρα η συνάρτηση υ, με $\upsilon(u) = e^{su}$ $, s \in C$, έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa}$ $, \kappa \in \mathrm{N}\}$ να είναι martingale. Ουσιαστικά, αρκεί εμείς να υπολογίσουμε τον αριθμό $s \in C$ ώστε να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $\upsilon(u)$. Άρα, ψάχνουμε για έναν αριθμό $s \in C$ τ.ω η στοχαστική διαδικασία$\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa}$ $, \kappa \in \mathrm{N}\}$ να είναι martingale. Τότε η σχέση (1.10) απλοποιείται στην $E\left[e^{-\delta V_1}e^{s(u+cV_1-X_1)}\right] = e^{su}$ και λόγω ανεξαρτησίας των τ,μ V_1, X_1 καταλήγουμε στην ισότητα

$$E\left[e^{-(\delta-cs)V_1}\right]E\left[e^{-sX_1}\right] = 1.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι η στοχαστική διαδικασία $\{e^{-\delta T_\kappa + sU_\kappa}$ $, \kappa \in \mathrm{N}\}$ martingale, η οποία στην περίπτωση μας θέλει το $s \in C$ να αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$\hat{\kappa}(\delta - cs)\hat{f}(s) = 1, \tag{1.11}$$

με $\hat{\kappa}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\kappa(x)dx$ και $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ να αποτελούν τους μετασχηματισμούς Laplace των τ.μ $V_i, \kappa\alpha\iota\ X_i$ αντίστοιχα.

Επειδή $\hat{\kappa}(s)=\left(\dfrac{\beta}{\beta+s}\right)^2$, η σχέση (1.11) είναι ισοδύναμη με την εξής εξίσωση, η οποία και καλείται *γενικευμένη εξίσωση του Lundberg*:

$$\left(cs-(\beta+\delta)\right)^2=\beta^2\hat{f}(s). \qquad (1.12)$$

Η σχέση (1.12), δηλαδή η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει *ακριβώς δύο θετικές ρίζες*, όπως απέδειξαν το 2001 οι Dickson και Hipp.

Θεώρημα 1.3.

1) *Για δ > 0, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg της σχέσης (1.9) έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες, τις $r_i(\delta)$ για $i=1,2$ τ.ω*

$$r_1(\delta)<\frac{(\beta+\delta)}{c}<r_2(\delta).$$

.

2) *Όταν $\delta\to 0^+$, τότε η $r_i(\delta)\to r_i(0)$, με $r_1(0)=0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει η σχέση

$$l(s)=[cs-(\beta+\delta)]^2. \qquad (1.13)$$

1) Αν δ> 0 , τότε για s = 0 , η σχέση (1.13) γίνεται $l(0)=(\beta+\delta)^2>\beta^2$ και επειδή $\hat{f}(0)=1$, έπεται ότι $l(0)>\beta^2\hat{f}(0)$.

Στην συνέχεια αν παραγωγίσουμε την σχέση (1.13) θα μας προκύψει η εξίσωση

$$l'(s)=2c^2s-2(\beta+\delta)c. \qquad (1.14)$$

Αν θέσουμε την παραπάνω σχέση ίση με το μηδέν και λύσουμε ως προς s, παίρνουμε $2c^2s-2(\beta+\delta)c=0$, από την οποία καταλήγουμε στην ισότητα $s=\dfrac{\beta+\delta}{c}$.

Παραγωγίζοντας για 2η φορά την σχέση (1.14), προκύπτει η σχέση $l''(s)=2c^2>0$, και επειδή η 2η παράγωγος της συνάρτησης $l(s)=[cs-(\beta+\delta)]^2$ είναι θετική, τότε η εξίσωση $l(s)=\beta^2\hat{f}(s)$ ελαχιστοποιείται για $s=\dfrac{\beta+\delta}{c}$ και αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή στην σχέση (1.13) θα προκύψει η εξίσωση

$$I\left(\frac{\beta+\delta}{c}\right)=\left(c\frac{\beta+\delta}{c}-(\beta+\delta)\right)^2=\left((\beta+\delta)-(\beta+\delta)\right)^2=0.$$

Το όριο της συνάρτησης $I(s)$ όταν το s τείνει στο άπειρο, $s\to\infty$, είναι

$$\lim_{s\to\infty}I(s)=\lim_{s\to\infty}\left(c^2s^2-2(\beta+\delta)+(\beta+\delta)^2\right)=\infty,$$

και η παράγωγος της συνάρτησης $I(s)=\beta^2\hat{f}(s)$ δίνεται από την εξής εξίσωση:

$$\frac{d}{ds}I(s)=\frac{d}{ds}\beta^2\hat{f}(s)=\frac{d}{ds}\beta^2\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=-\beta^2\int_0^\infty xe^{-sx}f(x)dx<0.$$

Καθώς η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $I(s)$ είναι αρνητική $\left(I'(s)=2c^2s-2(\beta+\delta)c<0\right)$, τότε η $\beta^2\hat{f}(s)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς την μεταβλητή s και παίρνει πάντοτε θετικές τιμές. Για $s>0$, η συνάρτηση $I(s)$ τέμνει την συνάρτηση $\beta^2\hat{f}(s)$ σε δύο διακριτά σημεία, το ένα δεξιά και το άλλο αριστερά της ρίζας $\dfrac{\beta+\delta}{c}$.

2) Αν $\delta\to0^+$ και $s=0$, η σχέση (1.13) γίνεται $I(0)=\beta^2$ και επειδή $\hat{f}(0)=1$, ισχύει ότι $I(0)=\beta^2\hat{f}(0)$.

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.13) προκύπτει η εξίσωση $I'(s)=2c^2s-2\beta c$ και αν θέσουμε την παραπάνω σχέση ίση με το μηδέν και την λύσουμε ως προς s, έχουμε την ισότητα $2c^2s-2\beta c=0$ από την οποία προκύπτει φυσικά $s=\dfrac{\beta}{c}$.
Παραγωγίζοντας για 2η φορά την (1.13), προκύπτει ότι $I''(s)=2c^2>0$ και επειδή φυσικά η 2η παράγωγος της συνάρτησης $I(s)$ είναι θετική, τότε και η εξίσωση $I(s)=\beta^2\hat{f}(s)$ ελαχιστοποιείται για $s=\dfrac{\beta}{c}$. Αντικαθιστώντας τώρα στην (1.13) την τιμή αυτή, θα καταλήξουμε στην σχέση

$$I\left(\frac{\beta}{c}\right)=\left(c\frac{\beta}{c}-\beta\right)^2=\left(\beta-\beta\right)^2=0.$$

Το όριο της συνάρτησης $I(s)$ για $s\to\infty$ είναι αντίστοιχα

$$\lim_{s\to\infty}I(s)=\lim_{s\to\infty}\left(c^2s^2-2\beta+\beta^2\right)=\infty.$$

Όπως και στο ερώτημα 1), επειδή η 1η παράγωγος της συνάρτησης $I(s)$ είναι αρνητική, τότε η $\beta^2\hat{f}(s)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς την μεταβλητή s και παίρνει πάντα θετικές τιμές.

Για $s > 0$, η συνάρτηση $I(s)$ τέμνει την $\beta^2\hat{f}(s)$ σε δύο διακριτά σημεία, το ένα είναι το 0 και το άλλο το $s = \dfrac{\beta}{c}$.

1.11. Τελεστής των Dickson-Hipp

Ένα πολύ σημαντικό εργαλείο που θα μας διευκολύνει στους υπολογισμούς μας είναι και ο τελεστής μιας συνάρτησης f(x), όπως ορίστηκε από τους Dickson-Hipp το 2004:

Ορισμός 1.13 *Για μια συνάρτηση f(x) ορίζεται τελεστής $T_r f(x)$, ο οποίος και δίνεται από την σχέση*

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} f(u)du \,, r \in C \,, x \geq 0. \qquad (1.14)$$

Λήμμα 1.1 *Ισχύουν τα εξής:*

1) $T_r f(0) = \hat{f}(r)$. (1.15)

2) *Αν $T_r \hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$, τότε*

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}. \qquad (1.16)$$

3) $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \forall\, r_1 \neq r_2.$ (1.17)

Απόδειξη:

1) Προφανώς και για x = 0, η σχέση (1.14) γίνεται

$$T_r f(0) = \int_x^{\infty} e^{-ru} f(u)du = \hat{f}(r) \,, r \in C$$

2) Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$ δίνεται από την σχέση

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} T_r f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{y} e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y)dx \right) dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \left(\int_0^y e^{-x(r-s)} dx \right) dy,$$

και άρα προκύπτει το αποτέλεσμα $T_r \hat{f}(s) = \dfrac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}$.

3) Έστω η συνάρτηση $g(x) = T_{r_2} f(x)$, τότε ισχύει η σχέση

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_1} g(x)$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} g(u) du$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} T_{r_2} f(u) du$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} \int_u^\infty e^{-r_2(s-u)} f(s) ds du,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι προκύπτει η εξίσωση

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty \int_u^\infty e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s) ds du. \tag{1.18}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι περιορισμοί $x \le u < \infty \; \kappa\alpha\iota \; u \le s < \infty$. Με αλλαγή των ορίων $x \le u < s \; \kappa\alpha\iota \; x \le s < \infty$ και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \int_x^\infty \int_x^s e^{-r_1(u-x)} e^{-r_2(s-u)} f(s) du ds = \int_x^\infty f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^s e^{-r_1 u} e^{r_2 u} du \right) ds$$

$$= \int_x^\infty f(x) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left(\int_x^s e^{(r_2 - r_1)u} du \right) ds = \int_x^\infty f(s) e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left[\frac{1}{r_2 - r_1} (e^{(r_2 - r_1)s} - e^{(r_2 - r_1)x}) \right] ds$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left\{ \int_x^\infty e^{r_1 x} e^{-r_2 s} \left[e^{(r_2 - r_1)s} - e^{(r_2 - r_1)x} \right] f(s) ds \right\}$$

$$= \frac{1}{r_2 - r_1} \left\{ \int_x^\infty e^{-r_1(s-x)} f(s) ds - \int_x^\infty e^{-r_2(s-x)} f(s) ds \right\}.$$

Άρα, και από τον ορισμό (1.15) προκύπτει άμεσα ότι

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1} \; .$$

1.12. Το μοντέλο χρεοκοπίας για Erlang (2)

Πλέον είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το μοντέλο Χρεοκοπίας για Erlang (2). Ως διαδικασία ασφαλιστικού κινδύνου θεωρούμε την

$$U(t) = u + ct - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , t \geq 0, \tag{1.19}$$

με σταθερό συμβολισμό και μία επιπλέον διευκρίνιση: $\{X_i, i \geq 1\}$ η ακολουθία των ανεξάρτητων, ισόνομων, μη αρνητικών ασφαλιστικών απαιτήσεων, ενώ $\{N(t), t \geq 0\}$ συμβολίζει τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι την χρονική στιγμή t, η οποία λειτουργεί ως απαριθμήτρια διαδικασία στο $\{X_i, i \geq 1\}$. Αν η N(t) είναι η διαδικασία ανανέωσης, τότε ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των συμβάντων W_i , $i \geq 1$ αποτελεί με την σειρά του μία ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων, μη αρνητικών τ.μ και το μοντέλο καταλήγει το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου των Sparre-Anderson.

Στην δική της περίπτωση λοιπόν, ο ενδιάμεσος χρόνος των δύο πρώτων συμβάντων, W_1 ακολουθεί μία σ.π.π Erlang (2) k(t) με παράμετρο κλίμακας $\beta > 0$:

$$k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t} \text{ για } t > 0. \tag{1.20}$$

Την στιγμή της χρεοκοπίας την ορίσαμε ως

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}, \tag{1.21}$$

με |U(T)| το έλλειμμα κατά την στιγμή της χρεοκοπίας και U(T-), το πλεόνασμα λίγο πριν την επέλευση της χρεοκοπίας.

Έστω

$$\varphi(u) = E(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty)} \mid U(0) = u)) \, , u \geq 0$$

με τον ίδιο συμβολισμό, τους ίδιους περιορισμούς και περαιτέρω διευκρίνιση ότι η συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2)$ αποτελεί μία μη αρνητική δι-μεταβλητή συνάρτηση για $x_1, x_2 > 0$.

Ένα ενδιαφέρον θεωρητικό πρόβλημα της αναφέραμε, παραμένει ο υπολογισμός των ροπών, ειδικότερα, των ροπών των Της, U(T-) και |U(T)|. Οι Dickson και Hipp μελέτησαν την ειδική περίπτωση όπου $w(x_1, x_2)$=1. Φυσικά, επιλέγοντας διαφορετικές μορφές για την συνάρτηση ποινής οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα για της τ.μ. Της, U(T-) και |U(T)|. Παραδείγματος χάριν, στην πλέον απλή περίπτωση, για $w(x_1, x_2)$=1, $\delta = 0$, η ροπή $\varphi_0(u)$

ταυτίζεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή την $\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u)$.

Επί του παρόντος θα υποθέτουμε ότι το μέγεθος των απαιτήσεων $X_i, i \geq 1$ είναι ένα σύνολο ανεξάρτητων, ισόνομων τ. μ με κοινή σ.κ F ορισμένη στο $[0,\infty)$ πεπερασμένο μέσο μ και σ.π.π. p(x)=f. Επιπρόσθετα ορίζουμε ως

$$F_e = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} \overline{F}(s)ds \text{ , } x \geq 0$$

το ολοκλήρωμα της δεξιάς ουράς.

1.13. Σχέσεις για την φ(u)

Ολόκληρο-διαφορική εξίσωση της $\varphi(u)$

Οι Gerber και Shiu απέδειξαν το 1998 ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ολόκληρο-διαφορική εξίσωση. Η λύση της συγκεκριμένης ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με χρήση μετασχηματισμών Laplace, τους οποίους θα αναπτύξουμε αργότερα, αποδεικνύοντας παράλληλα ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Όπως θα δούμε, η γενική λύση της προαναφερθείσας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται σε όρους ουράς της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Προϋπόθεση για την μελέτη της $\varphi_\delta(u)$ αποτελεί η ισχύς του παρακάτω λήμματος:

Λήμμα 1.2. *Αν* $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w(x_1,x_2)f(x_1+x_2)dx_1dx_2 < \infty$, *τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- $\varphi_\delta(u) < \infty \ \forall \ u \geq 0$.
- $\hat{\varphi}_\delta(s) < \infty \ \forall \ s > 0$.
- $\lim_{u\to\infty} \varphi_\delta(u) = 0$.
- $\lim_{u\to\infty} e^{-su}\varphi'_\delta(u) = 0 \ \forall s > 0$.

Με την ισχύ του παραπάνω λήμματος, οι Dickson και Hipp έδειξαν ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\varphi_\delta(u)$ ικανοποιεί την κάτωθι ολόκληρο-διαφορική εξίσωση. Η απόδειξη έχει σημασία, γιατί η μεθοδολογία της καταδεικνύει κάποιες έννοιες και θέματα που θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 1.4. *Η* $\varphi_\delta(u), \forall\, u \ge 0$, *ικανοποιεί την ολόκληρο-διαφορική εξίσωση*

$$c^2 \frac{d^2}{du^2}\varphi_\delta(u) - 2c(\beta+\delta)\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) + (\beta+\delta)^2\varphi_\delta(u) = \beta^2 \int_0^u \varphi(u-x) f_x(x)dxds + \beta^2 w(u) \quad (1.22)$$

όπου

$$w(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f(y) dy.$$

Απόδειξη: Έστω ότι δεσμεύουμε ως της τον χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και θέσουμε όπου T=t και X=x, οπότε και προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\varphi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_\delta(u \mid t, x) f(x) k(t) dx dt = \int_0^\infty k(t)\left(\int_0^\infty \varphi_\delta(u \mid t, x) f(x) dx\right)dt. \quad (1.23)$$

Την στιγμή της πρώτης απαίτησης η διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από την σχέση

$$U(t) = u + ct - x.$$

Ορίζουμε την δείκτρια συνάρτηση I ως εξής:

$$I = \begin{cases} 0 \le x \le u + ct \text{ , } \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha. \\ \\ x > u + ct \text{ , } \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha. \end{cases}$$

Από τον ορισμό της Gerber-Shiu, η $U(T-) = u + ct$ είναι η τιμή του πλεονάσματος την χρονική στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία, ενώ $|U(T)| = x - u - ct$ είναι η τιμή του ελλείμματος την στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας. Άρα, μέσω της δείκτριας συνάρτησης I, η σχέση (1.23) γίνεται

$$\varphi_\delta(u) = \int_0^\infty k(t)\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\varphi_\delta(u+ct-x) f(x) dx + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) f(x) dx\right)dt. \quad (1.24)$$

Θέτοντας s = u+ct, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\varphi_\delta(u) = \int_0^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s \varphi_\delta(s-x) f(x) dx \frac{1}{c} ds$$

$$+\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_s^\infty w(U(T-), |U(T)|) f(x) dx \frac{1}{c} ds. \quad (1.25)$$

Κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε σε

$$\varphi_\delta(u)=\int_0^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left(\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds+\int_s^\infty w(U(T-),|U(T)|)f(x)dxds\right)$$

$$=\int_0^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds+\int_0^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds. \quad (1.26)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη βρίσκουμε άμεσα την εξίσωση

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds$$

$$-\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds+\frac{\delta}{c}c\varphi_\delta(u). \qquad (1.27)$$

Αφού η τ.μ. $V_i=T_i-T_{i-1}, i\ge 1$, η οποία περιγράφει το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθεί την κατανομή Erlang (2,β), τότε φυσικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της είναι $k(t)=\beta^2 te^{-\beta t}$, t > 0, με πρώτη παράγωγο $k'(t)=\beta^2 e^{-\beta t}-\beta k(t)$. Αντικαθιστώντας στην (1.23), παίρνουμε

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty \left(\beta^2 e^{-\beta\left(\frac{s-u}{c}\right)}-\beta k\left(\frac{s-u}{c}\right)\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds$$

$$-\frac{1}{c}\int_u^\infty \left(\beta^2 e^{-\beta\left(\frac{s-u}{c}\right)}-\beta k\left(\frac{s-u}{c}\right)\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds+\delta\varphi_\delta(u), \qquad (1.28)$$

από όπου καταλήγουμε στην σχέση

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u)=-\frac{1}{c}\int_u^\infty \beta^2 e^{\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds$$

$$-\frac{1}{c}\int_u^\infty \beta^2 e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}w(s)ds$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds+\delta\varphi_\delta(u). \qquad (1.29)$$

Χάριν απλότητας, θα θέσουμε της συναρτήσεις

$$g_1(u,s)=k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx, \tag{1.30}$$

και

$$g_2(u,s)=k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s), \tag{1.31}$$

οπότε, με αυτές της πολύ πρακτικές απλοποιήσεις, καταλήγουμε στην εξής εξίσωση

$$c\varphi_\delta(u)=\int_u^\infty g_1(u,s)ds+\int_u^\infty g_2(u,s)ds. \tag{1.32}$$

Πλέον, αν παραγωγίσουμε αυτή την απλοποιημένη μορφή, αυτό που θα προκύψει είναι

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u)=-g_1(u,u)+\int_u^\infty \frac{d}{du}g_1(u,s)ds-g_2(u,u)+\int_u^\infty \frac{d}{du}g_2(u,s)ds. \tag{1.33}$$

στο οποίο, αν αντικαταστήσουμε της προηγούμενες συναρτήσεις, θα καταλήξουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) &= -\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds \\
&\quad +\int_u^\infty \frac{\delta}{c}k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds \\
&\quad +\int_u^\infty\left[-\frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)+\frac{\delta}{c}k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)\right]ds \\
&= -\int_u^\infty \frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dxds \\
&\quad -\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}w(s)ds \\
&\quad +\frac{\delta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx+w(s)\right]ds.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

οπότε τελικά προκύπτει η σχέση

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) = -\int_u^\infty \frac{1}{c}k'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds + \delta\varphi_\delta(u). \quad (1.35)$$

Επειδή $k'(t) = \beta^2 e^{-\beta t} - \beta k(t)$, η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) = -\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds$$

$$+\frac{\beta}{c}\int_u^\infty k\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left[\int_o^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds + \delta\varphi_\delta(u), \quad (1.36)$$

οπότε και απλοποιείται σε

$$c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) = (\beta+\delta)\varphi_\delta(u) - \frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_u^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds. \quad (1.37)$$

Θέτοντας, χάριν ευκολίας

$$g(u,s) = e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_u^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds, \quad (1.38)$$

και παραγωγίζοντας την (1.22), καταλήγουμε σε

$$c\frac{d^2}{du^2}\varphi_\delta(u) = (\beta+\delta)\varphi_\delta(u) - \frac{\beta^2}{c}\left[-g(u,u) + \int_u^\infty \frac{d}{du}g(u,s)\right]$$

$$= (\beta+\delta)\varphi_\delta(u) + \frac{\beta^2}{c}\left[\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right] \quad (1.39)$$

$$-\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty \frac{\beta+\delta}{c}e^{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}}\left[\int_0^s \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right]ds.$$

Οπότε και τελικά θα προκύψει, άμεσα, η ζητούμενη σχέση, καθώς η τελευταία σχέση, ως δεύτερη παράγωγος, μπορεί να γραφεί

$$c\frac{d^2}{du^2}\varphi_\delta(u) = (\beta+\delta)\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) + \frac{\beta^2}{c}\left[\int_0^u \varphi_\delta(s-x)f(x)dx + w(s)\right] \quad (1.40)$$

$$+\frac{(\beta+\delta)}{c}\left[c\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) - (\beta+\delta)\varphi_\delta(u)\right].$$

Ως τελευταίο της σημαντικό σχόλιο, θα αναφέρουμε ότι οι λύσεις της ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης βασίζονται στις ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

1.14. Μετασχηματισμός Laplace της $\varphi(u)$

Ο μετασχηματισμός Laplace, όπως γνωρίζουμε, είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο, τόσο στην θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, όσο και στην θεωρία συλλογικού κινδύνου. Καθώς αποτελεί μέρος της «ταυτότητας» μιας κατανομής, η γνώση του ισοδυναμεί με γνώση της ζητούμενης κατανομής. Ακόμα καλύτερα, έχει της ιδιότητες τελεστή, το οποίο μπορεί να της διευκολύνει σημαντικά με της πράξεις.

Φυσικά, ο μετασχηματισμός Laplace για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi_\delta(u)$, ισούται με

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi_\delta(u)du, \tag{1.41}$$

με πρώτη και δεύτερη παράγωγό της

$$\hat{\varphi}'_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi'_\delta(u)du = s\hat{\varphi}_\delta(s) - \varphi_\delta(0), \tag{1.42}$$

και

$$\hat{\varphi}''_\delta(s) = s^2\hat{\varphi}'_\delta(s) - s\hat{\varphi}_\delta(s) - \varphi'_\delta(0), \tag{1.43}$$

αντίστοιχα.

Ορίζουμε ως

$$\hat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}w(x)f(x)dx.$$

Παίρνοντας της μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (1.22), συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$c^2\beta^2\hat{\varphi}_\delta(s)\hat{f}(x) + \beta^2\hat{w}(s) = (s^2\hat{\varphi}_\delta(s) - s\varphi_\delta(0) - \varphi'_\delta(0)) - 2c(\beta+\delta)(s\hat{\varphi}_\delta(s) - \varphi_\delta(0)) + (\beta+\delta)^2\hat{\varphi}_\delta(s).$$

Λύνοντας ως της $\hat{\varphi}_\delta(s)$, καταλήγουμε σε

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \frac{c^2 s\varphi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) + c^2\varphi'_\delta(0) + \beta^2\hat{w}(s)}{l(s) - \beta^2\hat{f}(x)}, \tag{1.44}$$

παρονομαστής της οποίας είναι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg.

Έχοντας προηγουμένως ορίσει την έννοια του τελεστή των Dickson και Hipp, θα σταθούμε και σε ένα θεώρημα που απέδειξαν οι Dickson και Hipp το 2001 και το οποίο μας προσφέρει μία εναλλακτική έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής $\hat{\varphi}_\delta(s)$. Η δε απόδειξη έχει το επιπλέον όφελος ότι συνδέει το $\hat{\varphi}_\delta(s)$ με την θεωρία των ρητών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.5. *Ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής* $\hat{\varphi}_\delta(s)$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \frac{\beta^2 T_{r_2} T_{r_1} \hat{w}(s)}{c^2 - \beta^2 T_{r_2} T_{r_1} f(s)}. \tag{1.45}$$

*Απόδειξη:*Ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\varphi}_\delta(s)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

όπου

$$A(s) = c^2 s \varphi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) + c^2 \varphi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(s),$$

και

$$B(s) = l(s) - \beta^2 \hat{f}(x).$$

Επειδή η r_1 είναι η ρίζα του παρονομαστή και η $\hat{\varphi}_\delta(s)$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\hat{\varphi}_\delta(s) < \infty$, $\forall s$, (από λήμμα1), τότε η r_1 θα είναι ρίζα και του αριθμητή, το οποίο φυσικά μεταφράζεται σε $A(r_1) = 0$. Άρα αν αντικαταστήσουμε στην σχέση A(s), όπου s το r_1, θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$$c^2 r_1 \varphi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) + c^2 \varphi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = 0,$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$c^2 r_1 \varphi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) - c^2 \varphi'_\delta(0). \tag{1.46}$$

Ομοίως, αφού η ρίζα r_2 του παρονομαστή και η $\hat{\varphi}_\delta(s)$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\hat{\varphi}_\delta(s) < \infty$, $\forall s$, τότε και η r_2 θα είναι ρίζα και του αριθμητή, το οποίο σημαίνει $A(r_2) = 0$. Αντικαθιστώντας στην σχέση A(s), όπου s το r_2, παίρνουμε

$$c^2 r_2 \varphi_\delta(0) - 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) + c^2 \varphi'_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2) = 0,$$

από την οποία θα καταλήξουμε φυσικά στην σχέση

$$c^2 r_2 \varphi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2) = 2c(\beta+\delta)\varphi_\delta(0) - c^2 \varphi'_\delta(0). \tag{1.47}$$

Από τις σχέσεις (1.46) και (1.47) παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα μπορούμε να εξισώσουμε και τα πρώτα μέλη ως εξής:

$$c^2 r_1 \varphi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_1) = c^2 r_2 \varphi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(r_2),$$

οπότε και βγάζοντας κοινούς παράγοντες προκύπτει ότι

$$\varphi_\delta(0) c^2 (r_2 - r_1) = \beta^2 \left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(r_2) \right),$$

το οποίο θα μας οδηγήσει φυσικά στην σχέση

$$\varphi_\delta(0) = \frac{\beta^2 \left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(r_2) \right)}{c^2 (r_2 - r_1)}. \tag{1.48}$$

Αφού λοιπόν είδαμε ότι ισχύει η συνάρτηση $A(r_1) = 0$, αν την αφαιρέσουμε από τον αριθμητή θα προκύψει η σχέση

$$A(s) = A(s) - A(r_1) = c^2 s \varphi_\delta(0) + \beta^2 \hat{w}(s) - c^2 r_1 \varphi_\delta(0) - \beta^2 \hat{w}(r_1).$$

Και βγάζοντας κοινούς παράγοντες, καταλήγουμε στην σχέση

$$A(s) = c^2 \varphi_\delta(0)(s - r_1) - \beta^2 \left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(s) \right).$$

Αν αντικαταστήσουμε σε αυτή την ισότητα την σχέση (1.48), προκύπτει

$$A(s) = (s - r_1)\left(c^2 \varphi_\delta(0) - \beta^2 \frac{\left(\hat{w}(r_1) - \hat{w}(s) \right)}{(s - r_1)} \right),$$

από την οποία καταλήγουμε στην σχέση

$$A(s) = (s - r_1)\left(c^2 \varphi_\delta(0) - \beta^2 T_{r_1} \hat{w}(s) \right). \tag{1.49}$$

Επειδή όμως ισχύει A(s) = 0, τότε από την σχέση (1.49) συμπεραίνουμε ότι ισχύει η εξίσωση

$$c^2 \varphi_\delta(0) = \beta^2 T_{r_1} \hat{w}(r_2). \tag{1.50}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην σχέση (1.49) την (1.50), καταλήγουμε στην σχέση

$$A(s)=(s-r_1)(s-r_2)\left(\frac{\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(r_2)-\beta^2 T_{r_1}\hat{w}(s)}{(s-r_2)}\right),$$

από την οποία θα προκύψει η παρακάτω ισότητα:

$$A(s)=(s-r_1)(s-r_2)\left(\beta^2 T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)\right). \tag{1.51}$$

Στην συνέχεια, και αφού ισχύει η συνάρτηση $B(r_1)=0$, αν την αφαιρέσουμε από τον παρονομαστή και ύστερα από πράξεις, θα προκύψει η σχέση

$$B(s)=B(s)-B(r_1)=I(s)-\beta^2\hat{f}(s)-I(r_1)+\beta^2\hat{f}(r_1)$$

$$=c^2s^2-2cs(\beta+\delta)+(\beta+\delta)^2-\beta^2\hat{f}(s)-c^2r_1^2+2cr_1(\beta+\delta)-(\beta+\delta)^2+\beta^2\hat{f}(r_1)$$

$$=c^2(s^2-r_1^2)-2c(\beta+\delta)(s-r_1)+\beta^2\left(\hat{f}(r_1)-\hat{f}(s)\right)$$

$$=(s-r_1)\left(c^2(s+r_1)-2c(\beta+\delta)+\frac{\beta^2\left(\hat{f}(r_1)-\hat{f}(s)\right)}{(s-r_1)}\right).$$

από την οποία καταλήγουμε στην εξίσωση

$$B(s)=(s-r_1)\left(c^2(s+r_1)-2c(\beta+\delta)+T_{r_1}\hat{f}(s)\right). \tag{1.52}$$

Επιπλέον, αφού ισχύει ότι $B(s)=0$ και η r_2 είναι η ρίζα του παρονομαστή, δηλαδή

$B(r_2)=0$, τότε $I(s)-\beta^2\hat{f}(s)=0$ και $(r_2-r_1)\left(c^2(r_2+r_1)-2c(\beta+\delta)+T_{r_1}\hat{f}(r_2)\right)=0$,

$$\left(c^2(r_2+r_1)-2c(\beta+\delta)+T_{r_1}\hat{f}(r_2)\right)=0,$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$2c(\beta+\delta)=-c^2(r_2+r_1)-T_{r_1}\hat{f}(r_2). \tag{1.53}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην σχέση (1.52) την τελευταία ισότητα, έχουμε την σχέση

$$B(s)=(s-r_1)\left(c^2(s+r_1)-c^2(r_2+r_1)-\beta^2 T_{r_1}\hat{f}(r_2)+\beta^2 T_{r_1}\hat{f}(s)\right),$$

από την οποία, και κατόπιν πράξεων, έχουμε

$$B(s)=(s-r_1)\left(c^2(s-r_2)-\beta^2T_{r_1}\hat{f}(r_2)+\beta^2T_{r_1}\hat{f}(s)\right)$$
$$=(s-r_1)(s-r_2)\left(c^2-\beta^2\frac{T_{r_1}\hat{f}(r_2)-T_{r_1}\hat{f}(s)}{(s-r_2)}\right).$$

Άρα ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$B(s)=(s-r_1)(s-r_2)\left(c^2-\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}(s)\right). \tag{1.54}$$

Οπότε, και από τις σχέσεις (1.51) και (1.54) προκύπτει άμεσα ότι ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης $\varphi_\delta(u)$ είναι

$$\hat{\varphi}_\delta(s)=\frac{(s-r_1)(s-r_2)\left(\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)\right)}{(s-r_1)(s-r_2)\left(c^2-\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}(s)\right)}$$

$$=\frac{\beta^2T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)}{c^2-\beta^2T_{r_2}T_{r_1}f(s)},$$

κάνοντας φυσικά την απαλοιφή των κοινών όρων στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Αν μάλιστα θέσουμε $\hat{\eta}(s)=T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)$ και $\hat{\gamma}(s)=T_{r_2}T_{r_1}\hat{f}(s)$ το απλοποιούμε στο αποτέλεσμα

$$\hat{\varphi}_\delta(s)=\frac{\beta^2\hat{\eta}(s)}{c^2-\beta^2\hat{\gamma}(s)}. \tag{1.55}$$

1.15. Ανανεωτική συνάρτηση (renewal equation)

Οι Dickson - Hipp απέδειξαν το 2001, ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\varphi_\delta(u), u\geq 0$ ικανοποιεί μία ανανεωτική εξίσωση.

Θεώρημα 1.6. *Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\varphi_\delta(u), u\geq 0$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$\varphi_\delta(u)=\frac{\beta^2}{c^2}\int_0^u\varphi_\delta(u-x)\gamma(x)dx+\frac{\beta^2}{c^2}\eta(u), \tag{1.56}$$

όπου $\gamma(x)=T_{r_2}T_{r_1}f(x)$ και $\eta(u)=T_{r_2}T_{r_1}w(u)$.

Απόδειξη: Η σχέση (1.55) μπορεί να γραφεί ως $\hat{\varphi}_\delta(s)\left(c^2-\beta^2\hat{\gamma}(s)\right)=\beta^2\hat{\eta}(s)$ και ύστερα από απλοποίηση γίνεται

$$c^2\hat{\varphi}_\delta(s) = \beta^2\hat{\gamma}(s)\hat{\varphi}_\delta(s) + \beta^2\hat{\eta}(s),$$

οπότε, και παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην εξίσωση

$$c^2\hat{\varphi}_\delta(s) = \beta^2(\gamma * \varphi_\delta)(u) + \beta^2\eta(s),$$

όπου η $\gamma * \varphi_\delta$ αποτελεί την συνέλιξη του γινομένου $\hat{\gamma}(s)\hat{\varphi}_\delta(s)$.

1.16. Ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Ορισμός 1.14. *Μία εξίσωση της μορφής*

$$\mu(u) = g(u) + \int_0^u \mu(u-x)dG(x), \tag{1.57}$$

λέγεται ανανεωτική εξίσωση, όπου

g: μια φραγμένη συνάρτηση και g(u) είναι συνεχής για $u \geq 0$.

G: μία αθροιστική συνάρτηση της κατανομής με G(0) = 0 και

μ: η άγνωστη συνάρτηση.

Ορισμός 1.15.*Μία εξίσωση της μορφής*

$$\mu(u) = g(u) + \phi\int_0^u \mu(u-y)g(y)dy\ , u \geq 0, \tag{1.58}$$

όπου φ μία σταθερά τέτοια ώστε $0 < \varphi < 1$ *και* $g(y) = G'(y)$, *λέγεται ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.*

Στο ακόλουθο θεώρημα, θέτοντας $\phi = \dfrac{1}{1+\beta}$ και $g(u) = \dfrac{1}{1+\beta}H(u)$, $\beta > 0$, η ανανεωτική εξίσωση θα πάρει μορφή τύπου

$$\mu(u) = \frac{1}{1+\beta}H(u) + \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \mu(u-y)g(y)dy\ , u \geq 0. \tag{1.59}$$

Η λύση της (1.58) δίνεται στο παρακάτω θεώρημα, όπως το απέδειξαν οι Lin και Willmot το 1999. Θα ορίσουμε την αντίστοιχη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση κατανομής $K(u) = 1 - \overline{K}(u)$ και με δεξιά ουρά

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n \overline{G}^{*n}(u)\, , u \geq 0, \tag{1.60}$$

όπου $\overline{G}^{*n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ είναι η ουρά της n-οστής συνέλιξης της δεξιάς ουράς της $G(u) = 1 - \overline{G}(u)$.

Θεώρημα 1.7. *Για $u \geq 0$, η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως*

$$\mu(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u)\,,\, u \geq 0, \tag{1.61}$$

ή ισοδύναμα,

$$\mu(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u)\,,\, u \geq 0. \tag{1.62}$$

Αν μάλιστα η συνάρτηση H(u) είναι διαφορίσιμη, τότε η μ(u) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mu(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)H'(x)dx - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u)\,,\, u \geq 0. \tag{1.63}$$

Απόδειξη: Έστω

$$\hat{g}(s) = \int_0^u e^{-su}g(u)du = \int_0^\infty e^{-su}dG(u),$$

και

$$\hat{\mu}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\mu(u)du,$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των αντίστοιχων συναρτήσεων g(s) και μ(s). Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής είναι ο

$$\hat{k}(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}K(u)du.$$

Για u = 0, ισχύει η ανισότητα

$$\overline{K}(0) = 1 - K(0) = \frac{1}{1+\beta}. \tag{1.64}$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace για την δεξιά ουρά της γεωμετρικής κατανομής θα είναι ο

$$\hat{k}(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}dK(u) = \frac{\beta}{1+\beta-\hat{g}(s)}. \tag{1.65}$$

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\hat{\mu}(s) = \frac{1}{1+\beta}\hat{\mu}(s)\hat{g}(s) + \frac{1}{1+\beta}\hat{H}(s),$$

από την οποία φυσικά προκύπτει η

$$\hat{\mu}(s)\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\hat{g}(s)\right) = \frac{1}{1+\beta}\hat{H}(s), \tag{1.66}$$

οπότε, και λύνοντας ως προς $\hat{\mu}(s)$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\hat{\mu}(s) = \frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)}, \tag{1.67}$$

όπου φυσικά, $\hat{H}(s) = \int_0^\infty e^{-su}H(u)du$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της H(u). Από τα παραπάνω, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\hat{\mu}(s) = \frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)} = \frac{\hat{H}(s)}{\dfrac{\beta}{\hat{k}(s)}},$$

από όπου και προκύπτει η τελευταία εξίσωση, $\hat{\mu}(s) = \frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\hat{k}(s)$.

Αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στην παραπάνω σχέση, προκύπτει η μορφή (1.60) της λύσης του θεωρήματος. Η δεύτερη μορφή (1.61) προκύπτει άμεσα από την (1.60), ολοκληρώνοντας την κατά μέρη.

Συνοπτικά, και ξεκινώντας από τον πρώτο όρο της (1.65), έχουμε

$$\int_0^u H(u-x)dK_\delta(x) = \int_0^u H(u-x)d\left(1-\bar{K}_\delta(x)\right) = -\int_0^u H(u-x)d\bar{K}_\delta(x)$$

$$= \left[H(u-x)\bar{K}(x)\right]_0^u + \int_0^u \bar{K}_\delta(x)dH(u-x),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$\int_0^u H(u-x)dK(x) = -H(0)\bar{K}(0) + H(0)\bar{K}(0) - \int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x). \tag{1.68}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.68) την σχέση (1.65), καταλήγω στις σχέσεις (1.62) και (1.63).

1.17. Ελαττωματική Ανανεωτική Εξίσωση

Θεώρημα 1.8. *Η συνάρτηση* $\varphi_\delta(u), u \geq 0$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation)*

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{1+\beta_\delta}\int_0^u \varphi_\delta(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\beta_\delta}B_\delta(u), u \geq 0 \qquad (1.69)$$

με

$$B_\delta(u) = \frac{\left(1+\beta_\delta\right)\beta^2}{c^2}\eta(u), \qquad (1.70)$$

και

$$\frac{1}{1+\beta_\delta} = 1 - \frac{2\beta\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2}, \qquad (1.71)$$

με $\beta_\delta > 0$.

Όταν $\delta \to 0^+$, τότε ισχύει $\frac{1}{1+\beta_0} = 1 - \frac{\beta(2c\delta - \beta E(x))}{c^2 r_2(0)}$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τους Willmot και Lin, *"Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory",1999.*

Όσον αφορά την λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.69), αυτή θα γίνει, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, μέσω της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Ορίζουμε την εξής συνάρτηση

$$K_\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\right)^n G_\delta^{*n}(u), u \geq 0,$$

όπου προφανώς $K_\delta(u) = 1 - \overline{K}_\delta(u)$ και G_δ^{*n} η n- οστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής $G_\delta(x)$. Προφανώς και η αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης θα δίνεται από

$$\overline{K}_\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\right)^n \overline{G}_\delta^{*n}(u), u \geq 0,$$

με $\overline{G_\delta^{*n}}$ την n- οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\overline{G}_\delta(x)$.

Θεώρημα 1.9. *Η λύση της προηγούμενης ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από την*

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u B_\delta(u-x)dK_\delta(u) + \frac{1}{1+\beta_\delta}B_\delta(u), \tag{1.72}$$

ή

$$\varphi_\delta(u) = -\frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)dB_\delta(u) + \frac{B_\delta(0)}{\beta_\delta}\overline{K}_\delta(u) + \frac{1}{\beta_\delta}B_\delta(u). \tag{1.73}$$

Αν μάλιστα η συνάρτηση $B_\delta(u)$ είναι διαφορίσιμη, τότε

$$\varphi_\delta(u) = -\frac{1}{\beta_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)B'_\delta(u)dx + \frac{B_\delta(0)}{\beta_\delta}\overline{K}_\delta(u) + \frac{1}{\beta_\delta}B_\delta(u), u \geq 0. \tag{1.74}$$

Απόδειξη: Πρόκειται για το Θεώρημα 2.1, Willmot και Lin, “Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory”,1999.

Το τελευταίο θεώρημα αρκεί τόσο για τον υπολογισμό της λύσης της συνάρτησης $\varphi_\delta(u)$ των Gerber –Shiu, όσο και οποιασδήποτε αντίστοιχης συνάρτησης. Αρκεί φυσικά να μπορεί να υπολογισθεί η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Σε ορισμένες περιπτώσεις δύναται να βρεθούν αρκετά αναλυτικοί τύποι υπολογισμού για την $\overline{K}_\delta(u)$. Π.χ, στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους της ατομικής ζημιάς ανήκει στην οικογένεια των ρητών κατανομών (που σημαίνει ότι μπορεί να εκφρασθεί ως πηλίκο πολυωνύμων ως προς την s), τότε και ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{K}_\delta(u)$ είναι επίσης πηλίκο πολυώνυμων, οπότε δια της μεθόδου των μερικών κλασμάτων μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $\overline{K}_\delta(u)$, που είναι φυσικά η ίδια η $\overline{K}_\delta(u)$. Η ίδια η ρητή οικογένεια κατανομών είναι μία ευρεία οικογένεια κατανομών η οποία περιέχει τις εκθετικές κατανομές, τις Erlang, τις κατανομές Phase-Type, μαζί με όλες τις δυνατές μίξεις τους.

Κλείνοντας, θα αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά της $\overline{K}_\delta(u)$ που ορίσαμε προηγουμένως, δηλαδή της μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Προφανώς, όταν $\delta = 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με την δεξιά ουρά $\overline{K}_0(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής.

Λήμμα 1.3.

1. $\varphi_T = E\left[e^{-\delta T} I\left(T < \infty \mid U(0) = u\right)\right] = \overline{K}_\delta(u).$ (1.75)

2. $\psi(u) = E\left[I\left(T < \infty \mid U(0) = u\right)\right] = \overline{K}_0(u).$ (1.76)

Απόδειξη:

1. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.8., η $\varphi_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση της μορφής (1.69), όπου

$$g_\delta(x) = (1+\beta_\delta)z(x) = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}\gamma(x),$$

και

$$\gamma(x) = T_{r_1}T_{r_2}f(x).$$

Οπότε, αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση, η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ Χ δίνεται από την εξίσωση

$$g_\delta(x) = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}T_{r_1}T_{r_2}f(x).$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ Χ μπορεί να γραφεί και στην παρακάτω μορφή

$$\bar{G}_\delta(u) = \int_0^u g_\delta(x)dx = \int_0^u (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}\gamma(x)dx = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}\int_0^u T_{r_1}T_{r_2}f(x)dx.$$

Επομένως, η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής της τ.μ Χ δίνεται από την εξίσωση

$$\bar{G}_\delta(u) = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}T_{r_1}T_{r_2}\bar{F}(u). \tag{1.77}$$

Σύμφωνα με την σχέση

$$w(s) = \int_s^\infty w(s, x-s)f(x)dx = \int_s^\infty f(x)dx = \int_s^\infty dF(x) = 1-s = \bar{F}(s),$$

και αφού $w(x,y)=1$, τότε ισχύει $\eta(s) = T_{r_1}T_{r_2}w(s) = T_{r_1}T_{r_2}\bar{F}(s)$. Οπότε και προκύπτει η σχέση

$$B_\delta(u) = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}\eta(u) = (1+\beta_\delta)\frac{\beta^2}{c^2}T_{r_1}T_{r_2}\bar{F}(u). \tag{1.78}$$

Προφανώς, και εφόσον τα δύο μέλη των σχέσεων (1.77) και (1.78) είναι ίσα, θα ισούνται και τα πρώτα μέλη. Επομένως

$$\bar{G}_\delta(u) = B_\delta(u).$$

Αντικαθιστώντας στην ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση την πάνω ισότητα, προκύπτει η κάτωθεν σχέση

$$\varphi_T(u) = \frac{1}{1+\beta_\delta}\int_0^u \varphi_T(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\beta_\delta}\bar{G}_\delta(u),$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι ισχύει η εξής σχέση

$$\varphi_T(u) = \frac{1}{1+\beta_\delta}\int_0^u \varphi_T(u-x)dG_\delta(x) + \frac{1}{1+\beta_\delta}\bar{G}_\delta(u).$$

Προηγουμένως δείξαμε ότι η λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από την προσέγγιση της από την δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Ως λογικό επακόλουθο, καταλήγουμε άμεσα στο συμπέρασμα

$$\varphi_T(u) = \bar{K}_\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_\delta}{1+\beta_\delta}\left(\frac{1}{1+\beta_\delta}\right)^n \bar{G}_\delta^{*n}(u)\,, u \geq 0\,.$$

2. Όταν $\delta = 0$, παίρνοντας το όριο της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης με $\delta \to 0$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Δηλαδή

$$\psi(u) = \lim_{\delta\to 0}\varphi_T(u) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\beta_\delta}\int_0^u \varphi_T(u-x)g_\delta(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\beta_\delta}\bar{G}_\delta(u),$$

από την οποία προκύπτει

$$\psi(u) = \lim_{\delta\to 0}\varphi_T(u) = \frac{1}{1+\beta_0}\int_0^u \varphi_T(u-x)g_0(x)dx + \frac{1}{1+\beta_0}\bar{G}_\delta(u).$$

Άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\varphi_T(u) = \bar{K}_0(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_0}{1+\beta_0}\left(\frac{1}{1+\beta_0}\right)^n \bar{G}_0^{*n}(u)\,, u \geq 0\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1. Το μοντέλο Erlang (2,β) με στρατηγική σταθερού μερίσματος

Όπως αναφέραμε, η περισσότερη βιβλιογραφία της Θεωρίας Κινδύνου επικεντρώνεται στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου, σύμφωνα με το οποίο οι ασφαλιστικές απαιτήσεις μοντελοποιούνται σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson. Ο Andersen (1957) θέλει τις απαιτήσεις να ακολουθούν μία περισσότερο γενική ανανεωτική διαδικασία και καταλήγει σε μία ολοκληρωτική εξίσωση, για την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας. Από τότε, οι τυχαίοι περίπατοι (*random walks*) και η θεωρία ουρών (*queing theory*) συνεχίζουν να παρέχουν ένα πιο γενικό θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο με την σειρά του έχει οδηγήσει σε αναλυτικά αποτελέσματα στην περίπτωση που οι χρόνοι αναμονής ή δεινότητα των απαιτήσεων έχουν κατανομές σχετικές της Erlang και phase-type, ή πιο γενικές K_n κατανομές, των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes είναι μία λογική συνάρτηση. Η συνεισφορά πρόσφατων εργασιών, όπως των Dickson και Hipp (1998, 2000, 2001), Cheng και Tang (2003), Willmot και Dickson (2003), Dickson και Drekic (2004) , Gerber και Shiu (2003, 2004), Li (2003), Li και Garrido (2004) καθώς και άλλων ερευνητών, έδωσε νέα ώθηση στο παλιό πρόβλημα της μοντελοποίησης του κινδύνου.

Η στρατηγική του σταθερού ορίου ή μερίσματος (*barrier strategy*), σύμφωνα γενικά με την οποία, από την στιγμή που η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει ένα κατώφλι (*threshold*), επιστρέφει ένα μέρισμα στους κατόχους των συμβολαίων (συνήθως με την μορφή έκπτωσης στα ασφάλιστρα του επόμενου χρόνου), προτάθηκε ήδη το 1957 από τον De Finetti, για ένα διωνυμικό μοντέλο. Πιο γενικές στρατηγικές φραγμού/ σταθερού ορίου, για μία διαδικασία κινδύνου σύνθετης Poisson, έχουν αναπτυχθεί σε πλειάδα βιβλίων και μελετών. Ενδεικτικά αναφέρω τις μελέτες των Buehlmann (1970), Segerdahl (1970), Gerber (1973, 1979, 1981), Paulsen και Gjessing (1997), Albrecher και Kainhofer (2002). Έμφαση δίνεται στη βέλτιστη αποπληρωμή μερισμάτων και στον χρόνο της χρεοκοπίας, κάτω από ποικίλες στρατηγικές σταθερών ορίων και άλλων οικονομικών συνθηκών.

Εμείς θα επικεντρωθούμε στις ποσότητες και στα μέτρα κινδύνου, κάνοντας χρήση της συνάρτησης των Gerber-Shiu την οποία αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, όπως άλλωστε τα αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι συγγραφείς, οι οποίοι εργάζονται με συναρτήσεις αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής. Θα αναπτύξουμε ένα μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen, με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν την κατανομή Erlang (2), παρουσία ενός σταθερού φραγμού/ ορίου μερισμάτων b, όπως αυτό πρώτο-αναπτύχθηκε σε μία σχετική μελέτη του Lin. Η ανάλυση στηρίζεται στον υπολογισμό της συνάρτησης των Gerber-Shiu $\varphi_b(u)$, όπου u είναι φυσικά το αρχικό κεφάλαιο. Ο υπολογισμός αυτός, της συνάρτησης των Gerber και Shiu, είχε γίνει για πρώτη φορά για ένα μοντέλο Erlang (n) και χωρίς μέρισμα από τους ίδιους τους Gerber και Shiu.

Οι πάσης φύσεως υποθέσεις που κάναμε στο 1^o κεφάλαιο πάνω στο μοντέλο χωρίς μερίσματα, ισχύουν και εδώ. Όπως είδαμε από τις μελέτες των Gerber και Shiu, για μια συνάρτηση $\varphi(u)$ σε ένα μοντέλο Sparre-Andersen του οποίου ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων είναι μία Erlang (2) κατανομή, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας k δίνεται από

$$\hat{k}(s) = \int_0^\infty e^{-st}k(t)dt = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^2, \tag{2.1}$$

για $k(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}$.

Έστω επίσης *I* και *D* τα οποία ορίζουν έναν τελεστή ταυτότητας (*identity operator*) και έναν τελεστή διαφορισμού (*differentiation operator*) αντίστοιχα. Κάτω από την υπόθεση της γενικευμένης Erlang (n,β_i) κατανομής του χρόνου των απαιτήσεων, οι Gerber και Shiu απέδειξαν ότι η $\varphi(u)$ ικανοποιεί την εξής ολόκληρο-διαφορική εξίσωση, για $u \geq 0$:

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\beta_j}\right)I - \frac{c}{\beta_j}D\right]\right\}\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + w(u), \tag{2.2}$$

το οποίο στην περίπτωση μας, και με τον ενδιάμεσο χρόνο να μοντελοποιείται σύμφωνα με μια Erlang $(2,\beta)$ κατανομή, απλοποιείται σε

$$c^2\frac{d^2}{du^2}\varphi_\delta(u) - 2c(\beta+\delta)\frac{d}{du}\varphi_\delta(u) + (\beta+\delta)^2\varphi_\delta(u) = \beta^2\int_0^u \varphi(u-x)f_x(x)dxds + \beta^2 w(u), \tag{2.3}$$

όπου

$$w(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy\,.$$

Είδαμε επίσης ότι η ολόκληρο-διαφορική εξίσωση (2.3) μπορεί να γραφεί σαν μία ανανεωτική εξίσωση της μορφής

$$\varphi_\delta(u) = \frac{\beta^2}{c^2}\int_0^u \varphi_\delta(u-x)\gamma(x)dx + \frac{\beta^2}{c^2}\eta(u), \qquad (2.3)$$

όπου

$$\gamma(x) = T_{r_2}T_{r_1}f(x),$$

και

$$\eta(u) = T_{r_2}T_{r_1}w(u),$$

εφόσον φυσικά

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy \;, r \in C$$

για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση f είναι ο γνωστός τελεστής των Dickson – Hipp, του οποίου τις πιο χρήσιμες ιδιότητες αναλύσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Κλείνοντας, θα θυμίσουμε ότι

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi_\delta(u)du,$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, $\varphi_\delta(u)$, με πρώτη και δεύτερη παράγωγο τις

$$\hat{\varphi}'_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi'_\delta(u)du = s\hat{\varphi}_\delta(s) - \varphi_\delta(0),$$

και

$$\hat{\varphi}''_\delta(s) = s^2\hat{\varphi}'_\delta(s) - s\hat{\varphi}_\delta(s) - \varphi'_\delta(0),$$

αντίστοιχα, ενώ ισχύει και

$$\hat{\varphi}_\delta(s) = \frac{\beta^2 T_{r_2}T_{r_1}\hat{w}(s)}{c^2 - \beta^2 T_{r_2}T_{r_1}f(s)}, \qquad (2.4)$$

καταδεικνύοντας την σχέση ανάμεσα στους δύο τελεστές.

2.2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος:

Όλες οι έννοιες που θα αναπτύξουμε για στρατηγικές σταθερού μερίσματος, είναι αντίστοιχες με αυτές του πρώτου κεφαλαίου, απουσία σταθερού ορίου. Πρόκειται για το ίδιο μοντέλο κινδύνου Sparre – Andersen, με τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ των απαιτήσεων να μοντελοποιείται από μία Erlang (2) κατανομή. Η ειδοποιός διαφορά έγκειται στην ύπαρξη ενός σταθερού ορίου $b \geq u$: αν το πλεόνασμα ξεπεράσει το κατώφλι (threshold) b, τα αντίστοιχα μερίσματα πληρώνονται σε συνεχή χρόνο και με ρυθμό c, μέχρις ότου φυσικά να επέλθει μία νέα απαίτηση.

Ορισμός 2.1. *Έστω $U_b(t)$ η διαδικασία πλεονάσματος με αρχικό πλεόνασμα $U_b(0) = u$. Υπό την στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος, η διαδικασία πλεονάσματος θα είναι της μορφής*

$$U_b(t) = \begin{cases} u + ct - S(t), U_b(t) < b \\ \\ u - S(t) \qquad , U_b(t) = b \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Ισοδύναμα η δυναμική της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$ μπορεί να περιγραφεί και ως εξής :

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), U_b(t) < b \\ \\ -dS(t) \qquad , U_b(t) = b \end{cases}. \qquad (2.6)$$

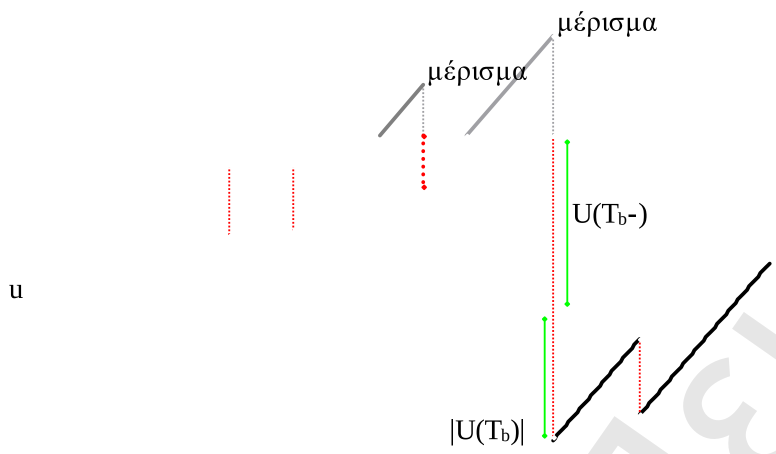
Ορισμός 2.2. *Έστω*

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\} \qquad (2.7)$$

ο χρόνος χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Ο χρόνος χρεοκοπίας T_b αποτελεί έννοια πρωτίστης σημασίας και θα μελετηθεί αναλυτικά, καθώς όπως είδαμε σχετίζεται με μέτρα κινδύνου όπως το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U_b(T_b-)$ και το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_b(T_b)|$.

Σχήμα 4: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$



Ορισμός 2.3. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζεται ως*

$$\psi_b(u) = \Pr(T_b < \infty) = \Pr(U_b(t) < 0), \; u \le b. \qquad (2.8)$$

Ορισμός 2.4. *Ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, με αρχικό απόθεμα u και για ένταση ανατοκισμού* $\delta \ge 0$ *και αρχικό πλεόνασμα* $u \le b$

$$\varphi_{b,\delta}(u) = E\left(e^{\delta T_b} w(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|) I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right), \qquad (2.8)$$

όπου $0 \le w(x,y) < \infty$ *είναι φυσικά μία δισδιάστατη συνάρτηση ποινής και* $I(T_b < \infty)$ *μια δείκτρια συνάρτηση με τιμές* $I(T_b < \infty) = 1$ *για* $T_b < \infty$ *και* $I(T_b < \infty) = 0$ *αλλιώς.*

Η συνάρτηση $\varphi_{b,\delta}(u)$ χρησιμεύει στο να παράγουμε αποτελέσματα με τις από κοινού και τις περιθώριες συναρτήσεις των $T_b, U_b(T_b-)$ και $|U_b(T_b)|$, σχέσεις αντίστοιχες με αυτές που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής $w(x,y)$ και από τον ορισμό της $\varphi_\delta(u,b)$ προκύπτουν οι εξής ειδικές περιπτώσεις:

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = 1$ παίρνουμε τον *μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας*

$$\varphi_{T_b}(u,b) = E(e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u).$$

- Για $\delta = 0$, $w(x,y) = 1$, έχουμε

$$\varphi_{b,\delta}(u) = E\left(I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right),$$

  δηλαδή την *πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi_b(u)$ (Ορισμός 2.3.)

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I(x \le x_1) I(y \le x_2)$, προκύπτει η *προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας*, δηλαδή η

$$f(x_1, x_2 \,|\, u) = E\left(e^{-\delta T_b} I(U_b(T_b -) \le x_1) I(|U_b(T_b)| \le x_2) I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right).$$

Η $f(x_1, x_2 \,|\, u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό πλεόνασμα u και το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1, ενώ το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ x_2.

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I(x \le x_1)$ προκύπτει η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία* $U(T_b -)$, δηλαδή η

$$h(x_1 \,|\, u) = E\left(e^{-\delta T_b} I(U_b(T_b -) \le x_1) I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right).$$

Η $h(x_1 \,|\, u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1.

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I(y \le x_2)$, προκύπτει η *προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας* $|U(T_b)|$, δηλαδή η

$$f(x_2 \,|\, u) = E\left(e^{-\delta T_b} I(|U_b(T_b)| \le x_2) I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u\right).$$

Η $f(x_2 \,|\, u)$ εκφράζει το ενδεχόμενο να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το μέγεθος του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ x_2.

- Για $\delta \ge 0$, $w(x,y) = x_1^k$ ή $w(x,y) = x_2^k$, παίρνουμε την *προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία ή του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία*, δηλαδή τις ποσότητες

$$E\left(e^{-\delta T_b} \mid U_b(T_b)\mid^k I(T_b<\infty) \mid U_b(0)=u\right)$$

και

$$E\{e^{-\delta T_b} U_b(T_b-)^k I(T_b<\infty) \mid U_b(0)=u\}.$$

Από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$, είναι φανερό ότι πρόκειται φυσικά για μία ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς μέρισμα, δηλαδή της U(t). Έτσι για $b\to\infty$ έχουμε ότι $\lim_{b\to\infty} U_b(t)=U(t)$ και ομοίως $\lim_{b\to\infty}\varphi_{b,\delta}(u)=\varphi_{b,\delta}(u,\infty)=\varphi_\delta(u)$.

2.3. Η ολόκληρο-διαφορική εξίσωση της $\varphi_{b,\delta}(u)$

Αντίστοιχα με το πρώτο κεφάλαιο, σκοπός μας και εδώ είναι να ορίσουμε μία ολόκληρο- διαφορική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $\varphi_{b,\delta}(u)$ των Gerber και Shiu, ίδιας μορφής σε όλα με ειδοποιό διαφορά την παρουσία συνθήκης μερίσματος.

Θεώρημα 2.1. *Για $n\in\mathrm{N}^+$, αν η συνάρτηση πυκνότητας* k (t) *της εμφάνισης των απαιτήσεων είναι τέτοια ώστε*

$$k^{(l)}(0)=0\,,\quad l=1,2,3,...,n-1, \tag{2.9}$$

με $k^{(0)}=k$, τότε η συνάρτηση $\varphi_{b,\delta}$ ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες φραγμού:

$$\varphi^{(m)}{}_b=0\,,\quad m=1,2,3,...,n\,. \tag{2.10}$$

Απόδειξη: Οριοθετώντας ως προς τον χρόνο και την δεινότητα (ποσό) της πρώτης απαίτησης, βρίσκουμε ότι για $0\le u\le b$

$$\varphi_b(u)=\int_0^{(b-u)/c} e^{-\delta t}\gamma_b(u+ct)k(t)dt+\int_{(b-u)/c}^{\infty} e^{-\delta t}\gamma_b(b)k(t)dt, \tag{2.11}$$

όπου

$$\gamma_b(t)=\int_0^t\varphi_b(t-x)f(x)dx+w(t)\,,\quad 0\le t\le b\,.$$

Αντικαθιστώντας την μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα στην σχέση (2.11) σημαίνει ότι

$$\varphi_b(u)=\frac{1}{c}\int_u^b e^{-(\delta/c)(t-u)}k(\frac{t-u}{c})\gamma_b(t)dt+\gamma_b(b)\int_{(b-u)/c}^{\infty} e^{-\delta t}k(t)dt$$

$$= \hat{k}_{\delta}(t)\left[\frac{1}{c}\int_u^b k_{\delta}(\frac{t-u}{c})\gamma_b(t)dt + \gamma_b(b)\int_{(b-u)/c}^{\infty} k_{\delta}(t)dt\right], \qquad (2.12)$$

όπου

$$k_{\delta}(t) = \frac{e^{-\delta t}k(t)}{\hat{k}(t)},$$

ο μετασχηματισμός Esscher ($\hat{k}(t)$ παραμένει ο μετασχηματισμός Laplace) της συνάρτησης k ως προς την παράμετρο –δ.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι και για τον μετασχηματισμό Esscher ισχύει επίσης

$$k^{(l)}{}_{\delta}(0) = 0\,, \quad l = 1,2,3,...n-1 \qquad (2.13)$$

με $k^{(0)}{}_{\delta} = k_{\delta}$. Παραγωγίζοντας την (2.12) ως προς το u και στις δύο πλευρές της ισότητας παίρνουμε

$$\varphi_b'(u) = \hat{k}(\delta)\left[\frac{1}{c}\gamma_b(b)k_{\delta}(\frac{b-u}{c}) - \frac{1}{c}\int_u^b k_{\delta}'(\frac{t-u}{c})\gamma_b(t)dt\right] \quad 0 \le u < b. \quad (2.14)$$

Θέτοντας u = b (2.14) παίρνουμε $\varphi_b'(b) = 0$. Για $2 \le m \le n$ και παίρνοντας την (m-1)-οστή παράγωγο ως προς το u στην (2.14) μας δίνει

$$\varphi^{(m)}{}_b(u) = \frac{(-1)^{m-1}\hat{k}(\delta)}{c^m}\left[\gamma_b(b)k^{(m-1)}{}_{\delta}(\frac{b-u}{c}) - \frac{1}{c}\int_u^b \gamma_b(t)k^{(m)}{}_{\delta}(\frac{t-u}{c})dt\right] \quad 0 \le u \le b,$$

οπότε και για u = b και με την (2.13) εν ισχύ αποδείξαμε ότι

$$\varphi^{(m)}{}_b = 0\,, \quad m = 1,2,3,...,n\,.$$

Επιπρόσθετα, για $n \ge 2$, η γενικευμένη Erlang (n) συνάρτηση πυκνότητας k(t) έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι

$$k^{(l)}(0) = 0\,, \quad l = 0,1,2,3,...,n-2. \qquad (2.15)$$

Το Θεώρημα Αρχικών Τιμών (*Initial Value Theorem*) μας παρέχει επίσης για $n \ge 2$

$$k(0) = \lim_{s\to\infty} s\hat{k}(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s\prod_{i=1}^{n}\beta_i}{\prod_{i=1}^{n}(s+\beta_i)} = 0, \qquad (2.16)$$

και εφόσον

$$\int_0^\infty e^{-st}k'(t)dt = s\hat{k}(s) - k(0) = \frac{s\prod_{i=1}^{n}\beta_i}{\prod_{i=1}^{n}(s+\beta_i)},$$

από το Θεώρημα Αρχικών Τιμών καταλήγουμε ότι

$$k'(0) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2\prod_{i=1}^{n}\beta_i}{\prod_{i=1}^{n}(s+\beta_i)} = 0. \qquad (2.17)$$

Παρομοίως, και για $2 \le l \le n-2$ καταλήγουμε στην γενική σχέση

$$k^{(l)}(0) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^{l+1}\prod_{i=1}^{n}\beta_i}{\prod_{i=1}^{n}(s+\beta_i)} = 0. \qquad (2.18)$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν για το γενικευμένο μοντέλο Erlang (n,β_i). Στην περίπτωση μας, και για $n=2,\beta$, $k(t)=\beta^2 te^{-\beta t}$ υφίστανται οι εξής απλοποιήσεις:

1) Για $k(0)=0$, $\hat{k}(s)=\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^2$ ο μετασχηματισμός Laplace, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Esscher είναι

$$k_\delta(t) = \frac{e^{-\delta t}k(t)}{\hat{k}(\delta)} = \frac{e^{-\delta t}\beta^2 te^{-\beta t}}{\left(\frac{\beta}{\beta+\delta}\right)^2} = e^{-(\delta+\beta)t}t(\beta+\delta)^2, \qquad (2.19)$$

προφανώς με $k_\delta(0)=0$.

2) Για $\varphi_b'(u)=\varphi_b''(u)\big|_{u=b}=0 \Rightarrow \varphi_b'(b)=0, \varphi_b''(u)=0$.

Η σχέση (2.14) γίνεται

$$\varphi_b'(b) = \hat{k}(s)\frac{1}{c}\gamma_b(b)k_\delta(0) = 0, \qquad (2.20)$$

με

$$\varphi_b''(b) = -\frac{1}{c^2}\hat{k}(\delta)\gamma_b(b)k_\delta''(0) = 0, \qquad (2.21)$$

και

$$k_{\delta}'(t)=\left(\frac{e^{-\delta t}k(t)}{\hat{k}(\delta)}\right)'=\frac{1}{\hat{k}(\delta)}\left(-\delta e^{-\delta t}k(t)+e^{-\delta t}k'(t)\right). \qquad (2.21)$$

Προς όφελος μας μπορούμε επίσης να ανατρέξουμε και σε δύο πολύ χρήσιμα θεωρήματα:

Θεώρημα 2.2. *Αν ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθεί την γενικευμένη κατανομή* Erlang (n, β_j) *, τότε η* $\varphi_b(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:*

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\beta_j}\right)I-\frac{c}{\beta_j}D\right]\right\}\varphi_b(u)=\int_0^u\varphi_b(u-x)f(x)dx+w(u) \quad 0\le u\le b<\infty, \ (2.22)$$

με συνθήκες φράγματος

$$\varphi^{(k)}{}_b(b)=0\,, \quad k=1,2,3,...,n. \qquad (2.23)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη της σχέσης (2.22) δόθηκε από τους Gerber και Shiu το 2003. Από το Θεώρημα 2.1. και την συνθήκη (2.15)

$$\varphi^{(k)}{}_b(b)=0\,, \quad k=1,2,3,...,n-1.$$

Θέτοντας $u=b$ στην (2.22) και για

$$\varphi_b(b)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\beta_i}{\prod_{i=1}^{n}(\delta+\beta_i)}\left[\int_0^b\varphi_b(b-x)p(x)dx+w(b)\right],$$

αποδεικνύουμε ότι $\varphi^{(n)}{}_b(b)=0$.

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα οδηγούμαστε και από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. *Αν ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθεί την γενικευμένη κατανομή Erlang (n) με παράμετρο* β*, τότε η* $\varphi_b(u)$ *ικανοποιεί για* $0\le u\le b<\infty$ *την παρακάτω εξίσωση:*

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_b^{(k)}(u)\left[\frac{-(\lambda+\delta)}{c}\right]^{n-k}\binom{n}{n-k}=\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n\left[\int_0^u\varphi_b(u-x)p(x)dx+\int_u^{\infty}w(u,x-u)p(x)dx\right],$$

με οριακές συνθήκες $\varphi_b^{(k)}(b)=0$, *για* $k=1,2,...,n$.

Απόδειξη: Με αφετηρία την σχέση (2.22), σε αυτή την περίπτωση εξαρχής υποθέτουμε ότι όλα τα ποικίλα β_i έχουν κοινή τιμή β, οπότε και προφανώς

$$\left[D-\frac{\beta+\delta}{c}I\right]^n=\sum_{k=0}^{n}\left[-\frac{\beta+\delta}{c}\right]^{n-k}\binom{n}{n-k}D^k,$$

δηλαδή η σχέση (2.22) μπορεί να ξαναγραφτεί ως η σχέση του θεωρήματος.

Προφανώς η σχέση (2.22) ακολουθεί την σημειολογία της σχέσης για το μοντέλο χωρίς σταθερό όριο μερίσματος, με *I* και *D* τα οποία ορίζουν έναν τελεστή ταυτότητας (*identity operator*) και έναν τελεστή διαφορισμού (*differentiation operator*) αντίστοιχα. Για $n=2$, β ο ρυθμός, ισχύουν επίσης οι ίδιες απλοποιήσεις:

$$\left[\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)I-\frac{c}{\beta}D\right]^2=\left[\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)I\right]^2+\frac{c^2}{\beta^2}D^2-2\frac{c}{\beta}\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)D$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{c^2}{\beta^2}D^2-2c\frac{\delta+\beta}{\beta^2}D+\frac{(\delta+\beta)^2}{\beta^2}I\\ &\left[\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)I-\frac{c}{\beta}D\right]^2\varphi_b(u)=\int_0^u\varphi_b(u-x)f(x)dx+w(u)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{c^2}{\beta^2}D^2-2c\frac{\delta+\beta}{\beta^2}D+\frac{(\delta+\beta)^2}{\beta^2}I\right)\varphi_b(u)=\int_0^u\varphi_b(u-x)f(x)dx+w(u)$$

$$\Leftrightarrow\frac{c^2}{\beta^2}\varphi_b''(u)-2c\frac{\delta+\beta}{\beta^2}\varphi_b(u)'+\frac{(\delta+\beta)^2}{\beta^2}\varphi_b(u)=\int_0^u\varphi_b(u-x)f(x)dx+w(u)\quad(2.24)$$

Πολλαπλασιάζοντας με β^2, αποκτούμε μία πιο εύχρηστη γραμμική μορφή:

$$c^2\varphi_b''(u)-2c(\delta+\beta)\varphi_b(u)'+(\delta+\beta)^2\varphi_b(u)=\beta^2\int_0^u\varphi_b(u-x)f(x)dx+\beta^2w(u)\,,0\le u\le b\,(2.25)$$

Δείξαμε ήδη ότι $\varphi_b'(b)=0$. Προφανώς, για $u=b$ η (2.25) θα απλοποιείται περαιτέρω:

$$c^2\varphi_b''(b)-2c(\delta+\lambda)\varphi_b(b)'+(\delta+\lambda)^2\varphi_b(b)-\lambda^2\int_0^u\varphi_b(b-x)p(x)dx+\lambda^2\omega(b)=0$$

και

$$\varphi_b(b)=\frac{\lambda^2}{(\delta+\lambda_i)^2}\left[\int_0^b\varphi_b(b-y)p(y)dy+\omega(b)\right].$$

Από την σχέση (2.14) έχουμε

$$\varphi_b(b)=\hat{k}(\delta)\gamma_b(b)\int_0^\infty\hat{k}_\delta(t)dt\,. \qquad (2.26)$$

Όμως για $k_\delta(t)=\dfrac{e^{-\delta t}k(t)}{\hat{k}(\delta)}$ για τον μετασχηματισμό Esscher ισχύει

$$k_\delta(t)=\frac{e^{-\delta t}k(t)}{\hat{k}(\delta)}\Leftrightarrow k_\delta(t)\hat{k}(\delta)=e^{-\delta t}k(t) \qquad (2.27)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^\infty k_\delta(t)\hat{k}(\delta)dt=\int_0^\infty e^{-\delta t}k(t)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^\infty k_\delta(t)\hat{k}(\delta)dt=\hat{k}(\delta).$$

Καταλήγοντας στην (2.27), από την σχέση (2.26) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\varphi_b(b)&=\hat{k}(\delta)\gamma_b(b)\int_0^\infty\hat{k}_\delta(t)dt\\&=\gamma_b(b)\int_0^\infty\hat{k}(\delta)\hat{k}_\delta(t)dt\\&=\gamma_b(b)\hat{k}(\delta)=\frac{\beta^2}{(\beta+\delta)^2}\gamma_b(b),\end{aligned}$$

από όπου, και για

$$\gamma_b(b)=\int_0^b\varphi_b(b-y)f(y)dy+w(b),$$

θα καταλήξουμε φυσικά σε

$$(\delta+\beta)^2\varphi_b(b)=\beta^2\int_0^b\varphi_b(b-x)f(x)dx+\beta^2w(b).$$

2.4. Γενική θεωρία διαφορικών εξισώσεων

Οι *ομογενείς* διαφορικές εξισώσεις αποτελούν την απλούστερη κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, ανάγονται σε διαχωρίσιμες με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών και άρα μπορούν να ολοκληρωθούν. Η πιο χαρακτηριστική τους ιδιότητα είναι ότι για μία συνάρτηση $F(.)$, ισχύει

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d F(x, y),$$

όπου

d=ο *βαθμός ομογένειας* της συνάρτησης.

Για παράδειγμα, μια συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F(x,y) = f(x,y),$$

προφανώς για $d=0$, δεν μπορεί παρά να είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Όσον αφορά την *γραμμικότητα*: Η γενική μορφή μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n-οστής τάξης είναι

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_0(x)y = R(x), \qquad \text{(Συμβολικά: } Ly=R)$$

όπου

$$L = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_0(x), \tag{2.28}$$

ο διαφορικός τελεστής της εξίσωσης, του οποίου η δράση πάνω στην άγνωστη συνάρτηση y, πρέπει να μας δίνει την δεδομένη συνάρτηση R.

Θεμελιώδες χαρακτηριστικό των ομογενών διαφορικών εξισώσεων είναι ότι ένας τυχών γραμμικός συνδυασμός λύσεων αποτελεί πάλι λύση. Ο διαφορικός τελεστής (2.28) περιέχει μόνο την μεταβλητή x και την πράξη της παραγώγισης, δηλαδή είναι ανεξάρτητος από τις συναρτήσεις στις οποίες δρα.

Υπενθυμίζοντας, οι n συναρτήσεις $y_1, y_2, ..., y_n$ θα ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητες,* αν καμία από αυτές δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αλλιώτικα θα ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες*. Επιπρόσθετα, σε μία σχέση της μορφής

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = 0,$$

δεν μπορεί παρά να ισχύει $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ αν θέλουμε να ικανοποιείται.

2.5. Ρητές συναρτήσεις

Στα μαθηματικά, *ρητή* συνάρτηση ονομάζεται οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σε μορφή λόγου δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων. Όσον αφορά τόσο τους συντελεστές των πολυωνύμων, όσο και τις τιμές της συνάρτησης, δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι ρητοί αριθμοί.

Ορισμός 2.5. *Έστω η περίπτωση μίας και μόνο μεταβλητής x. Μία συνάρτηση ονομάζεται ρητή αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου P *και* Q *αποτελούν πολυωνυμικές συναρτήσεις ορισμένες στο x και Q διάφορο του μηδενικού πολυωνύμου.*

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των σημείων x για τα οποία ο παρονομαστής Q(x) δεν είναι μηδέν, ενώ υποθέτουμε ότι η συνάρτηση γράφεται στο μικρότερο δυνατό βαθμό και ότι τα P και Q έχουν πολλούς παράγοντες θετικού βαθμού.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι και ρητή, για Q(x) =1. Μια συνάρτηση η οποία δεν μπορεί να γραφεί σε αυτή την μορφή (π.χ $f(x) = \sin x$) δεν μπορεί να αποτελεί ρητή συνάρτηση. Ωστόσο, ο χαρακτηρισμός «άρρητη» ενώ χρησιμοποιείται για να περιγράψει αριθμούς, δεν χρησιμοποιείται για να περιγράψει συναρτήσεις.

Μια έκφραση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ονομάζεται ρητή έκφραση. Το x δεν χρειάζεται να είναι μεταβλητή. Στην αφηρημένη άλγεβρα (*abstract algebra*) το x ονομάζεται *ενδιάμεσος*. Μια ρητή συνάρτηση είναι μία συνάρτηση, στην οποία δύο ρητές εκφράσεις καθίστανται ισοδύναμες. Αυτές οι εκφράσεις τηρούν τους ίδιους όρους με τα κλάσματα, οπότε και μπορούν να επιλυθούν με την μέθοδο του πολλαπλασιασμού διαγωνίως (χιαστί). Η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται, οπότε και προφανώς, όποια λύση προκαλεί διαίρεση με το μηδέν απορρίπτεται.

Για κάθε ρητή συνάρτηση, οι συντελεστές μιας *σειράς Taylor* ικανοποιούν μία γραμμική επαναληπτική σχέση, η οποία μπορεί να βρεθεί εξισώνοντας την ρητή συνάρτηση με την αντίστοιχη σειρά Taylor και αθροίζοντας τους όμοιους όρους. Αντίστροφα, κάθε ακολουθία η οποία ικανοποιεί μία γραμμική επαναληπτική σχέση καθορίζει μία ρητή συνάρτηση, όταν χρησιμοποιούνται οι συντελεστές μιας σειράς Taylor. Αυτό είναι χρήσιμο όταν απαιτείται να λύσουμε επαναληπτικές σχέσεις, οπότε χρησιμοποιώντας απλώς ανάλυση σε μερικά κλάσματα, μπορούμε να γράψουμε κάθε ρητή συνάρτηση σαν ένα σύνολο παραγόντων της μορφής $1/(ax+b)$ και να το επεκτείνουμε σαν μία γεωμετρική σειρά, δίνοντας μία καθαρή σχέση για τους συντελεστές Taylor.

2.6. Λύση της ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης $\varphi_{b,\delta}(u)$

Η λύση στην παραπάνω ομογενή εξίσωση καθορίζεται μοναδικά από τις αρχικές συνθήκες $\upsilon^{(k)}(0)$ για $k = 0,1,2...,n-1$ και θα δοθεί με μετασχηματισμούς Laplace. Εφόσον στο δικό μας μοντέλο έχουμε $Erlang(2,\beta)$, θα ισχύουν και μερικές απλουστεύσεις.

Όπως είδαμε, για το $Erlang(2,\lambda)$, $0 \le u < \infty$, χωρίς φράγμα ισχύει

$$c^2\varphi''(u) - 2c(\delta+\beta)\varphi'(u) + (\delta+\beta)^2\varphi(u) - \beta^2\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \beta^2 w(u) = 0, \quad (2.29)$$

Θεωρώ το αντίστοιχο ομογενές για την (2.15) , δηλαδή θεωρώ μία συνάρτηση $\upsilon(\mathrm{u})$, $\mathrm{u} \ge 0$ που ικανοποιεί την

$$c^2\upsilon''(\mathrm{u}) - 2c(\delta+\beta)\upsilon'(\mathrm{u}) + (\delta+\beta)^2\upsilon(\mathrm{u}) - \beta^2\int_0^u \upsilon(u-x)f(x)dx = 0. \quad (2.30)$$

Για $\mathrm{n} = 2$, η (2.15) έχει ισάριθμες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τις έστω $\upsilon_1(u), \upsilon_2(u)$, οι οποίες και εξαρτώνται από τις αρχικές τιμές $\upsilon(0)$ και $\upsilon'(0)$, δηλαδή τις $\upsilon_1(0), \upsilon_2(0), \upsilon_1'(0), \upsilon_2'(0)$. Δηλαδή η γενική λύση της (2.30) είναι της μορφής

$$\upsilon(u) = \kappa_1\upsilon_1(u) + \kappa_2\upsilon_2(u).$$

Προφανώς για

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1(0) = 1, \upsilon_1'(0) = 0 \\ \\ \upsilon_2(0) = 0, \upsilon_2'(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{οι } \upsilon_1(u), \upsilon_2(u) \textit{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.}$$

Πράγματι, οι $\upsilon_1(u), \upsilon_2(u)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν $c_1\upsilon_1(u) + c_2\upsilon_2(u) = 0$, προφανώς για $c_1 = c_2 = 0$.

Για $u = 0$,

$$c_1\upsilon_1(0) + c_2\upsilon_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Για $u = 0$,

$$c_1\upsilon_1'(0) + c_2\upsilon_2'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Από την γενική θεωρία των ομογενών διαφορικών εξισώσεων, επειδή η $\varphi(u)$ αποτελεί μία μερική λύση της (2.15), αναπτυσσόμενο στην μορφή

$$\varphi_b(u) = \varphi(u) + \eta_1(b)\upsilon_1(u) + \eta_2(b)\upsilon_2(u)\,,\, 0 \le u \le b, \tag{2.31}$$

όπου οι σταθερές $\eta_1(b)\,,\eta_2(b)$ θα βρεθούν προφανώς από τις οριακές συνθήκες, εν προκειμένω $\varphi_b'(u) = \varphi_b''(u) = 0$.

Από την (2.30) παίρνουμε

$$\varphi_b'(u) = \varphi'(u) + \eta_1(b)\upsilon_1'(u) + \eta_2(b)\upsilon_2'(u),$$

$$\varphi_b''(u) = \varphi''(u) + \eta_1(b)\upsilon_1''(u) + \eta_2(b)\upsilon_2''(u),$$

εκ των οποίων και για $u = b$ καταλήγουμε

$$\varphi_b'(b) = \varphi'(b) + \eta_1(b)\upsilon_1'(b) + \eta_2(b)\upsilon_2'(b),$$

$$\varphi_b''(b) = \varphi''(b) + \eta_1(b)\upsilon_1''(b) + \eta_2(b)\upsilon_2''(b),$$

και εφόσον $\varphi_b'(u) = \varphi_b''(u) = 0$, έπεται ότι και τα $\eta_1(b)$, $\eta_2(b)$ είναι λύσεις του εξής γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων:

$$\eta_1(b)\upsilon_1'(b) + \eta_2(b)\upsilon_2'(b) = -\varphi'(b), \tag{2.32}$$

$$\eta_1(b)\upsilon_1''(b) + \eta_2(b)\upsilon_2''(b) = -\varphi''(b), \tag{2.33}$$

Οπότε αυτό που μένει είναι ο υπολογισμός των $\upsilon_1(u), \upsilon_2(u)$. Αυτές, όπως αναφέραμε στην αρχή, θα βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών Laplace.

Έστω λοιπόν $\hat{\upsilon}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\upsilon(u)du$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης υ(u). Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην (2.30) έχω

$$c^2\int_0^\infty e^{-su}\upsilon''(u)du - 2c(\delta+\beta)\int_0^\infty e^{-su}\upsilon'(u)du$$

$$+(\delta+\beta)^2\int_0^\infty e^{-su}\upsilon(u)du - \beta^2(\delta+\beta)\int_0^\infty e^{-su}\int_0^u \upsilon(u-x)f(x)dx = 0. \tag{2.34}$$

Προφανώς, από παραγοντική ολοκλήρωση ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-su}\upsilon'(u)du = e^{-su}\upsilon(u)\Big|_{u=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-su}\upsilon(u)du$$

$$= s\hat{\upsilon}(s) - \upsilon(0), \tag{2.35}$$

$$\int_0^\infty e^{-su}\upsilon''(u)du = e^{-su}\upsilon'(u)\Big|_{u=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-su}\upsilon'(u)du$$

$$= s\left[s\hat{\upsilon}(s) - \upsilon(0)\right] - \upsilon'(0)$$

$$= s^2\hat{\upsilon}(s) - s\upsilon(0) - \upsilon'(0), \tag{2.36}$$

οπότε, και αντικαθιστώντας στην (2.34) τις (2.35) και (2.36) καταλήγουμε στην σχέση

$$c^2\left[s^2\hat{\upsilon}(s) - s\upsilon(0) - \upsilon'(0)\right] - 2c(\delta+\lambda)\left[s\hat{\upsilon}(s) - \upsilon(0)\right] + (\delta+\beta)^2\hat{\upsilon}(s) - \beta^2\hat{\upsilon}(s)\hat{f}(s) = 0, \tag{2.37}$$

όπου φυσικά $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(s)$.

Τελικά παίρνουμε

$$\left[c^2s^2 - 2c(\delta+\beta)s + (\delta+\beta)^2 - \beta^2\hat{f}(s)\right]\hat{\upsilon}(s) = c^2s^2\upsilon(0) + c^2\upsilon'(0) - 2c(\delta+\beta)\upsilon(0),$$

το οποίο και επιλύνοντας ως προς τον μετασχηματισμό Laplace της υ(u) μας δίνει

$$\hat{\upsilon}(s) = \frac{\left[c^2s - 2c(\delta+\beta)\right]\upsilon(0) + c^2\upsilon'(0)}{\left[cs - (\delta+\beta)\right]^2 - \beta^2\hat{f}(s)}. \tag{2.38}$$

Εμείς αναζητούσαμε δύο λύσεις, οπότε

$$\hat{\upsilon}_1(s) = \frac{c\left[s - 2(\beta+\delta)\right]}{\left[cs - (\beta+\delta)\right]^2 - \beta^2\hat{f}(s)}, \tag{2.39}$$

και

$$\hat{\upsilon}_2(s) = \frac{c^2}{\left[cs - (\beta+\delta)\right]^2 - \beta^2\hat{f}(s)}, \tag{2.40}$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $\upsilon_1(s)$ και $\upsilon_2(s)$. Προφανώς, για να βρούμε τις τιμές των δύο λύσεων δεν έχουμε παρά να αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για να βρούμε τις $\upsilon_1(u), \upsilon_2(u)$, συναρτήσεις φυσικά του αρχικού κεφαλαίου u.

2.7. Αριθμητικό παράδειγμα

Η θεωρία μας θα φανεί καλύτερα με την χρήση παραδειγμάτων. Εδώ θα υποθέσουμε ότι ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθεί την κατανομή Erlang $(2,\beta)$, με μετασχηματισμό Laplace της μορφής

$$\hat{k}(s)=\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^2.$$

Για την κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια οποιαδήποτε κατανομή, οπότε χάρη ευκολίας ας πάρουμε μια εκθετική με παράμετρο λ και αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{f}(s)=\frac{\lambda}{(s+\lambda)}.$$

Τότε

$$\hat{\upsilon}_1(s)=\frac{c\left[s-2(\beta+\delta)\right]}{\left[cs-(\beta+\delta)\right]^2-\beta^2\hat{f}(s)}=\frac{c\left[s-2(\beta+\delta)\right]}{\left[cs-(\beta+\delta)\right]^2-\beta^2\frac{\lambda}{(s+\lambda)}}$$

$$=\frac{\left[c^2s-2c(\beta+\delta)\right](s+\lambda)}{(s+\lambda)\left[cs-(\beta+\delta)\right]^2-\beta^2\lambda}=\frac{A_1(s)}{B_1(s)}. \tag{2.41}$$

Προφανώς, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg $\hat{k}(\delta-cs)\hat{f}(s)=1$ που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο παίρνει την μορφή:

$$\left[cs-(\delta+\beta)\right]^2-\beta^2\hat{f}(s)=0, \tag{2.42}$$

η οποία και έχει δύο θετικές ρίζες, έστω τις $\rho_1(\delta)$ και $\rho_2(\delta)$. Συμβολίζουμε $\rho_i=\rho_i(\delta)$, $\delta>0$.

Άρα η εξίσωση $B_1(s)=0$ έχει τρεις ρίζες, εκ των οποίων οι δύο είναι οι ρ_1, ρ_2 και η τρίτη είναι η $-R$, όπου $R>0$. Δηλαδή

$$B_1(s)=c^2(s-\rho_1)(s-\rho_2)(s+R),$$

οπότε και εφαρμόζοντας μεθοδολογία μερικών κλασμάτων στην (2.41) παίρνουμε

$$\hat{\upsilon}_1(s)=\frac{\alpha_1}{s-\rho_1}+\frac{\alpha_2}{s-\rho_2}+\frac{\alpha_3}{s+R}, \tag{2.43}$$

το οποίο αντιστρέφοντας γίνεται

$$\upsilon_1(u)=\alpha_1e^{\rho_1u}+\alpha_2e^{\rho_2u}+\alpha_3e^{-Ru}. \tag{2.44}$$

Αντίστοιχα εφαρμόζουμε και για τα $\hat{\upsilon}_2(u)$ και $\upsilon_2(u)$.

Είδαμε λοιπόν ότι για τις $\upsilon_1(u), \upsilon_2(u)$ ισχύει $\upsilon_1(0)=1$, $\upsilon_2(0)=0$, $\upsilon_1'(0)=0$ και $\upsilon_2'(0)=1$, οι οποίες και αποτελούν τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις μιας ομογενούς ολόκληρο-διαφορικής εξίσωσης, με ρίζες (γενικότερη περίπτωση πάντα)

$$\upsilon_1(u)=\frac{[c\rho_1-2\beta\delta](\rho_1+\lambda)}{c(R+\rho_1)(\rho_2-\rho_1)}e^{\rho_1 u}+\frac{[c\rho_2-2\beta\delta](\rho_2+\lambda)}{c(R+\rho_2)(\rho_1-\rho_2)}e^{\rho_2 u}-\frac{[cR+2\beta\delta](\lambda-R)}{c(R+\rho_1)(\rho_2+R)}e^{Ru}, \quad (2.45)$$

και

$$\upsilon_2(u)=\frac{\rho_1+\lambda}{(R+\rho_1)(\rho_2-\rho_1)}e^{\rho_1 u}+\frac{\rho_2+\lambda}{(R+\rho_2)(\rho_1-\rho_2)}e^{\rho_2 u}-\frac{\beta-R}{(R+\rho_1)(\rho_2+R)}e^{-Ru}. \quad (2.46)$$

Για το μοντέλο χωρίς μέρισμα, και με τον ενδιάμεσο χρόνο να ακολουθεί κατανομή *Erlang* $(2,\beta)$, ισχύει

$$\phi_T(u)=E\left\{e^{-\delta t}I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right\}=\frac{\beta-R}{\beta}e^{-Ru}, \quad u\geq 0$$

γνωστό και ως τύπος του De Finetti (Gerber-Shiu, 2004).

Έστω επίσης $h(x\,|\,u)$ η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πριν την χρεοκοπία $U(T-)$. Ο Li[1] το 2004 έδειξε ότι για $0\leq x\leq u$ αυτή ισούται με

$$h_1(x\,|\,u)=\frac{\beta^2(\lambda-R)}{c^2(\rho_2-\rho_1)(R+\rho_1)(R+\rho_2)}e^{-Ru}$$
$$\times\left[(\rho_2-\rho_1)e^{(\lambda-R)x}+(R+\rho_1)e^{-(\rho_2+\lambda)x}-(R+\rho_2)e^{-(\rho_1+\lambda)x}\right], \quad (2.47)$$

ενώ για $x\geq u$

$$h_1(x\,|\,u)=\frac{\beta^2}{c^2(\rho_2-\rho_1)}\left[\frac{\lambda+\rho_1}{R+\rho_1}e^{-(\rho_1+\lambda)x}e^{\rho_1 u}-\frac{\lambda-R}{R+\rho_1}e^{-(\rho_1+\lambda)x}e^{-Ru}\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda+\rho_2}{R+\rho_2}e^{-(\rho 2+\lambda)x}e^{\rho_2 u}+\frac{\lambda-R}{R+\rho_2}e^{-(\rho_2+\lambda)x}e^{-Ru}\right]. \quad (2.48)$$

[1] Li, Juan Sun, 2004, The expected discounted penalty at ruin in the Erlang (2) risk process, Satistics & Probability Letters, 205-217

Η σχέση

$$h_2(x,y\,|\,u) = h_1(x\,|\,u)\frac{f(x+y)}{F(x)} = \lambda e^{-\lambda y} h_1(x\,|\,u),$$

μας δίνει

$$g(y\,|\,u) = \int_0^\infty h_2(x,y\,|\,u)dx = \lambda e^{-\lambda y}\phi_T(u) = (\lambda - R)e^{-(Ru+\lambda y)}. \qquad (2.49)$$

Τότε, και βάση προηγούμενης ανάλυσης,

$$\phi_{T_b}(u) = \phi_T(u) + c_1\upsilon_1(u) + c_2\upsilon_2(u), \qquad (2.50)$$

όπου φυσικά και μπορούμε να καθορίσουμε τα c_1, c_2 λύνοντας τις εξισώσεις

$$c_1\upsilon_1^{(i)}(u) + c_2\upsilon^{(i)}{}_2(u) = -\phi^{(i)}{}_T(u), \quad i = 1,2.$$

Έστω επίσης $f_{b,1}(x\,|\,u)$ η προεξοφλημένη πυκνότητα της $U_b(T_b)$ και $g_b(y\,|\,u)$ η προεξοφλημένη πυκνότητα της $|U_b(T_b)|$. Τότε, αντίστοιχα ισχύει

$$f_{b,1}(x\,|\,u) = f_1(x\,|\,u) + z_1\upsilon_1(u) + z_2\upsilon_2(u), \quad 0 \le u, x \le b, \qquad (2.51)$$

όπου τα $z_{1,}z_2$ καθορίζονται από τις συνθήκες

$$z_1\upsilon_1^{(i)}(b) + z_2\upsilon_2^{(i)}(b) = -\left.\frac{\partial^i f_1(x\,|\,u)}{\partial u^i}\right|_{u=b}, \quad i = 1,2$$

και

$$g_b(y\,|\,u) = g(y\,|\,u) + \zeta_1\upsilon_1(u) + \zeta_2\upsilon_2(u), \quad 0 \le u \le b, \qquad (2.52)$$

όπου τα $\zeta_{1,}\zeta_2$ με την σειρά τους καθορίζονται από μία αντίστοιχη σχέση:

$$\zeta_1\upsilon_1^{(i)}(b) + \zeta_2\upsilon_2^{(i)}(b) = -\left.\frac{\partial^i g(x\,|\,u)}{\partial u^i}\right|_{u=b}, \quad i = 1,2.$$

Ας δούμε τώρα μερικά αριθμητικά αποτελέσματα δίνοντας τιμές:

Έστω $c = 1.1$, $\beta = 1$, $\lambda = 0.5$ και $\delta = 0.03$. Οπότε και η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg απλοποιείται στην μορφή

$$(1.03 - 1.1s)^2(s + 0.5) = 0.5,$$

η οποία φυσικά μας δίνει τρεις ρίζες, εν προκειμένω $\rho_1 = 0.1199$, $\rho_2 = 1.4024$ και αρνητική την $-R = -0.1496$.

Με μία απλή αντικατάσταση παίρνουμε

$$\upsilon_1(u) = -1.6937e^{-0.1496u} + 3.1432e^{0.1199u} - 0.4495e^{1.4024u},$$

$$\upsilon_2(u) = 0.8375e^{-0.1496u} - 1.7933e^{0.1199u} + 0.9558e^{1.4024u},$$

πάντα για $u \geq 0$, ενώ με τις ίδιες συνθήκες

$$\phi_T(u) = 0{,}7008e^{-0{,}1496}. \qquad (2.53)$$

Για $0 \leq x \leq u$ ισχύει

$$h_1(x\,|\,u) = e^{-0.1496u}\left[1.4822e^{-0.3504x} + 0.1455e^{-1.9024x} - 1.5520e^{-0.6199x}\right],$$

ενώ για την περίπτωση που $x \geq u$

$$h_1(x\,|\,u) = e^{-0.6199x}\left[1.4822e^{-0.1199u} - 0.8378e^{-0.1496u}\right]$$

$$+ e^{-1{,}9024}\left[0.1455e^{-0.1496u} - 0.7899e^{1.4024u}\right].$$

Θέτοντας τώρα το όριο σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, παραδείγματος χάριν $b = 10$, και επιλύοντας τις συνθήκες φραγμού, καταλήγουμε με τιμές για τις σταθερές c_1, c_2.

Στην περίπτωση μας, και για $c_1 = 0.02936$, $c_2 = 0.01381$ οπότε και για $0 \leq u \leq 10$ παίρνω

$$\phi_{T_b}(u) = 0.6626e^{-0.1496u} + 0.06753e^{0.1199u} - 0.269 \times 10^{-8}e^{1.4024u}. \qquad (2.54)$$

Αν $0 \leq x \leq u$,

$$f_{b,1}(x\,|\,u) = e^{-0.1496u}\left[0{,}6546e^{-0.3504x} + 0.1376e^{-1.9024x} - 1.4675e^{-0.6199x}\right]$$

$$+ e^{0.1199u}\left[0.0667e^{-0.3504x} + 0.01402e^{-1.9024x} - 0.1496e^{-0.6199x}\right].$$

Για $u \leq x \leq 10$

$$f_{b,1}(x\,|\,u) = e^{-0.1496u}\left[-0.03768e^{-0.3504x} + 0.1376e^{-1.9024x} - 0.7533e^{-0.6199x}\right]$$

$$+ e^{0{,}1199u}\left[0{,}0667e^{-0{,}3504x} + 0{,}01402e^{-1{,}9024x} - 1{,}3326e^{-0{,}6199x}\right]$$

$$-0{,}7899e^{1{,}4024u}e^{-1{,}9024x},$$

ενώ δεν πρέπει να ξεχνάμε και ότι το $U_b(T_b)$ έχει και σημειακή μάζα πιθανότητας στο $b=10$, η οποία φυσικά υπολογίζεται από την σχέση

$$P(U_b(T_b-)=10)=1.0837e^{-0.1496u}-1.1521e^{-0.7695u}+0.1211e^{0.1199u},$$

ενώ βέβαια για $0\leq u\leq 10$ παίρνουμε

$$g_b(y\,|\,u)=0.5e^{-0.5y}\left[0.6626e^{-0.1496u}+0.06753e^{0.1199u}-0.269\times 10^{-8}e^{1.4024u}\right].$$

Από εκεί και πέρα έχουμε μεγάλο περιθώριο να παίξουμε με τις τιμές των μεταβλητών μας. Ενδεικτικά παραθέτουμε:

c	1.1	0	1
β	1	1	1
λ	0.5	0.5	0.5
δ	0.03	0.03	0
ρ_1	0.1199	–	0
ρ_2	1.4024	–	0
$-R$	0.1496	0.0287	0.05996

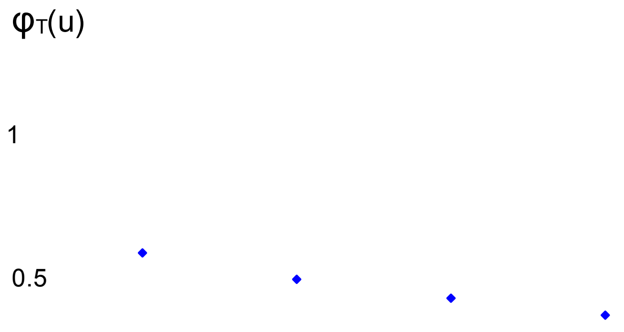
Πρόκειται δηλαδή οι επιπλέον περιπτώσεις για τις οποίες ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων c και η ένταση ανατοκισμού δ είναι μηδέν, αντίστοιχα με τις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Τώρα για $u=0,1,2,3,4$ έχουμε:

u	$\upsilon_1(u)$	$\upsilon_2(u)$	$\varphi_T(u)$	φ_{T_b}	$P\left(U_b(T_b-)=10\right)$
0	1	0	0.7008	0.73013	0.0527
1	0.258037	2.584667	0.603425	0.646666	0.097176274
2	-4.68817	14.13508	0.519581	0.577089	0.136533678
3	-26.7695	62.16441	0.447386	0.519763	0.172481968
4	-118.583	258.5303	0.385223	0.473314	0.206485918

Πρόκειται για τους υπολογισμούς της πρώτης και της δεύτερης λύσης του $\upsilon(u)$, καθώς και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace του χρόνου μαθηματικής χρεοκοπίας T, με και άνευ την ύπαρξη ορίου μερίσματος, και βέβαια τον υπολογισμό της σημειακής μάζας του $U_b(T_b)$ στο σημείο $b=10$ που διαλέξαμε για όριο, πάντα για $c=1.1$, $\beta=1$, $\lambda=0.5$ και $\delta=0.03$. Τα διαγράμματα

Σχήμα 5

Μοντέλο άνευ μερίσματος



Σχήμα 6

Υπό την ύπαρξη ορίου b=10

Είναι προφανές, και λογικό άλλωστε, όσο αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο u, να μειώνεται η ποσότητα που συμβολίζει τον μετασχηματισμό Laplace του Χρόνου χρεοκοπίας, το οποίο μάλιστα αποτελεί και ένα κριτήριο της πιθανότητας χρεοκοπίας. Ας μην ξεχνάμε άλλωστε ότι για $\delta = 0$ η συνάρτηση $\varphi_T(u)$ των Gerber-Shiu ταυτίζεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, τόσο στο μοντέλο με την ύπαρξη μερίσματος όσο και στο απλό, άνευ μερίσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1. Ροπές των μερισμάτων

Τόσο για το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας όσο και για τα μοντέλα με την ύπαρξη ενός σταθερού ορίου (*barrier*), το μέγεθος το οποίο έχει κυρίως μελετηθεί, από ερευνητές όπως παραδείγματος χάρη ο Lin (2003), είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, είναι ένα σημαντικό μέτρο κινδύνου όσον αφορά στην διαδικασία πλεονάσματος, με η χωρίς την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος. Υπάρχει όμως και ένα δεύτερο πολύ σημαντικό μέγεθος, το οποίο έχει ιδιαίτερη αξία στα μοντέλα με στρατηγική μερίσματος, και δεν είναι άλλο από την κατανομή του προεξοφλημένου αθροίσματος των αποπληρωμένων μερισμάτων μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας. Επομένως, ένα άλλο πολύ σημαντικό εργαλείο το οποίο συνδέεται άμεσα με την *ποιότητα* της στρατηγικής μερίσματος είναι οι ροπές.

Ενώ η συνάρτηση των Gerber και Shiu σχετίζεται με την μέτρηση του κινδύνου, οι ροπές των προεξοφλημένων σωρευτικών πληρωμών μερίσματος μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας σχετίζονται με το ύψος του ποσού των μερισμάτων, που διανέμεται πίσω στους δικαιούχους της ασφάλισης. Ο De Finetti (1957) μελέτησε για πρώτη φορά την στρατηγική βέλτιστων μερισμάτων, εισάγοντας ένα μοντέλο κινδύνου σε διακριτό χρόνο και έδωσε κάποια αποτελέσματα στην περίπτωση που το συνολικό κέρδος του ασφαλιστή είναι είτε 1 είτε -1. Μέχρι πρόσφατα ωστόσο, οι μελετητές ενδιαφέρονταν για τον υπολογισμό μόνο της πρώτης ροπής. Ερευνητές όπως οι Dickson και Waters (2004) καθώς και ο Albrecher (2005) μελέτησαν ροπές σε καθεστώς arbitrage, ενώ οι Gerber και Shiu (2004) μελέτησαν την κατανομή των προεξοφλημένων σωρευτικών μερισμάτων για ένα Μπραουνιανό (*Brownian*) μοντέλο κινδύνου.

Εμείς στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με την μελέτη των ροπών της παρούσας αξίας των μερισμάτων της διαδικασίας $U_b(t)$.
Έστω το μοντέλο Sparre-Anderson

$$U_b(t) = u + ct - S(t) - D(t),$$

όπου φυσικά

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

και $D(t)$ τα συνολικά μερίσματα που πληρώνονται μέχρι την χρονική στιγμή t, κατά τα υπόλοιπα με τον ίδιο συμβολισμό και τις ίδιες υποθέσεις. Συνοπτικά, το μέγεθος των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την συνάρτηση κατανομής F με μέσο $\mu < \infty$, u το αρχικό κεφάλαιο και c το σταθερό ασφάλιστρο το οποίο εισπράττεται τακτικά.

Ο αριθμός των απαιτήσεων περιγράφεται από την διαδικασία

$$N(t) = \sup\left(n : T_n < t\right),$$

η οποία βεβαίως και αποτελεί μία ανανεωτική διαδικασία, ενώ και οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων αποτελούν επίσης ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες εν προκειμένω ακολουθούν μία Erlang $(2,\beta)$ κατανομή, με το κάθε T_i να αποτελεί το άθροισμα n ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή παράμετρο β. Άλλωστε, η Erlang (1, β) κατανομή είναι η Εκθετική, και μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα των εκθετικών κατανομών είναι φυσικά η έλλειψη μνήμης (*lack-of-memory property*).

Όσον αφορά το μοντέλο με την ύπαρξη σταθερού μερίσματος b, $(b > 0)$, όταν το πλεόνασμα ξεπεράσει το επίπεδο b, το πλεονάζον ασφάλιστρο αποπληρώνεται υπό την μορφή μερίσματος και η διαδικασία παραμένει στο επίπεδο b, μέχρι φυσικά την εμφάνιση του επόμενου ζημιογόνου γεγονότος.

Ορισμός 3.1. *Για* $0 \le u \le b$ *και* $\delta \ge 0$*, ορίζουμε*

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t), \tag{3.1}$$

ως την παρούσα αξία του συνόλου των καταβληθέντων μερισμάτων πριν την στιγμή της χρεοκοπίας, όπου $D(t)$ *τα σωρευτικά μερίσματα που πληρώνονται μέχρι τον χρόνο* t *και* δ *να συμβολίζει την ένταση ανατοκισμού.*

Ορισμός 3.2. *Για* $0 \le u \le b$ *και* y *για τις τιμές που υφίσταται, ορίζουμε*

$$M(u,y,b) = E[e^{yD_{u,b}} \mid U_b(0) = u], \tag{3.2}$$

ως την ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$.

Ορισμός 3.2. *Για* $0 \le u \le b$ *και* $m \in N^+$, *ορίζουμε την m- οστής τάξης ροπή της τυχαίας μεταβλητής* $D_{u,b}$ ίση με

$$W_m(u,b) = E\left(D_{u,b}^m \mid U_b(0) = u\right), \quad m \in N \tag{3.3}$$

όπου $W_1(u,b) = W(u,b)$ *και* $W_0(u,b) = 1$.

Υποθέτουμε πάντα ότι $0 \le u \le b$, αλλιώς φυσικά η διαφορά $b-u$ άμεσα αποπληρώνεται ως μέρισμα και ότι τα $M(u,y,b)$ και $W_m(u,b)$ είναι επαρκώς *λείες* συναρτήσεις των u και y αντίστοιχα.

3.2. Ολόκληρο- διαφορική συνάρτηση του $M(u,y,b)$

Έστω $\frac{\partial}{\partial y}$ ο τελεστής διαφόρισης ως προς το y και αντίστοιχα $\frac{\partial}{\partial u}$ ο τελεστής διαφόρισης ως προς το u.

Θεώρημα 3.1. *Για* $0 \le u \le b$, *η γεννήτρια συνάρτηση* $M(u,y,b)$ *αποτελεί την λύση της μερικής ολόκληρο- διαφορικής εξίσωσης*

$$\left(\delta y \frac{\partial}{\partial y} - c\frac{\partial}{\partial u} + \beta\right)^2 M(u,y,b) - \beta^2 \int_0^u M(u-x,y,b) f(x)dx - \beta^2 \bar{F}(u) = 0, \tag{3.4}$$

με οριακές συνθήκες τις

$$\left.\frac{\partial M(u,y,b)}{\partial u}\right|_{u=b} = yM(u,y,b), \tag{3.5}$$

και

$$\left(\delta y \frac{\partial .}{\partial y} - c\frac{\partial .}{\partial u} + \beta\right) \left.\frac{\partial M(u,y,b)}{\partial u}\right|_{u=b} = \left(\delta y \frac{\partial .}{\partial y} - c\frac{\partial .}{\partial u} + \beta\right) \left.M(u,y,b)\right|_{u=b}. \tag{3.6}$$

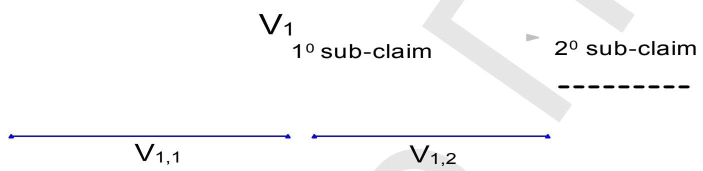
Απόδειξη: Η (3.4) ισούται με

$$\delta^2 y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} M(u,y,b) + c^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} M(u,y,b) + \beta^2 M(u,y,b) - 2\delta c y M(u,y,b)$$

$$+2\delta\beta cyM(u,y,b)-2\beta c\frac{\partial}{\partial u}M(u,y,b)-\beta^2\int_0^u M(u-x,y,b)f(x)dx-\beta^2\bar{F}(u)=0. \quad (3.7)$$

Το κλειδί εδώ βρίσκεται στην αποδόμηση κάθε ενδιάμεσου διαστήματος, το οποίο θεωρούμε ότι ακολουθεί την κατανομή Erlang $(2,\beta)$, σε ένα ανεξάρτητο άθροισμα 2 εκθετικών τυχαίων μεταβλητών παραμέτρου β, κάθε μία εκ των οποίων προκαλεί ένα "υπό-συμβάν" (*sub-claim*) μεγέθους 0, ενώ στην στιγμή του 2 υπό-συμβάντος επέρχεται μία πραγματική απαίτηση με συνάρτηση κατανομής F. Αυτό το νοητικό σχήμα γίνεται ευκολότερα αντιληπτό ως εξής:

Σχήμα 7



Ισχύει

$$V_1 = V_{1,1} + V_{1,2},$$

όπου $V_{1,1} \sim Exp(\beta)$, $V_{1,2} \sim Exp(\beta)$.

Άρα έχω δύο καταστάσεις, έστω τις $\{1,2\}$. Ξεκινώντας από την κατάσταση 1 την χρονική στιγμή 0, το υπό-συμβάν προκαλεί μία μετάβαση στην κατάσταση 2, όπου εμφανίζεται πραγματική απαίτηση. Στην συνέχεια, η διαδικασία κινδύνου επιστρέφει ξανά στην κατάσταση 1, οπότε ορίζουμε δύο ροπογεννήτριες, τις $M^{(1)}(u,y,b)$ και $M^{(2)}(u,y,b)$, ανάλογα με την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η διαδικασία κινδύνου.

Τότε,

$$M(u,y,b) = M^{(1)}(u,y,b).$$

Θεωρώ ένα απειροστό διάστημα $(0,dt)$. Δεσμεύοντας ως προς την εμφάνιση ενός υπό-συμβάντος έχουμε

$$M^{(1)}(u,y,b) = (1-\beta dt)M^{(1)}(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b) + \beta dt M^{(1)}(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b) + o(dt). \quad (3.8)$$

και

$$M^{(2)}(u,y,b) = (1-\beta dt)M^{(2)}(u+cdt, ye^{-\delta dt}, b)$$

$$+\beta dt\int_0^{u+ct} M^{(2)}(u+cdt-x,ye^{-\delta dt},b)f(x)dx$$

$$+\beta dt\bar{F}(u+cdt)+o(dt). \tag{3.9}$$

Αναπτύσσοντας τα σε σειρά Taylor, συλλέγοντας όλους τους όρους που έχουν dt και κατόπιν διαιρώντας με dt για $dt \to 0$, οι (3.8) *και* (3.9) μας δίνουν

$$c\frac{\partial}{\partial u}M^{(1)}(u,y,b)-\beta M^{(1)}(u,y,b)-\delta y\frac{\partial}{\partial y}M^{(1)}(u,y,b)+\beta M^{(2)}(u,y,b)=0, \tag{3.10}$$

και

$$c\frac{\partial}{\partial u}M^{(2)}(u,y,b)-\beta M^{(2)}(u,y,b)-\delta y\frac{\partial}{\partial y}M^{(2)}(u,y,b)$$

$$+M^{(2)}(u,y,b)+\beta\int_0^u M^{(1)}(u-x,y,b)f(x)dx+\beta\bar{F}(u)=0. \tag{3.11}$$

Ισχύει $M(u,y,b)=M^{(1)}(u,y,b)$. Από την (3.10) παίρνουμε

$$M^{(2)}(u,y,b)=\frac{\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta}{\beta}M^{(1)}(u,y,b). \tag{3.12}$$

Η (3.11) γράφεται

$$\delta y\frac{\partial}{\partial y}M^{(2)}(u,y,b)-c\frac{\partial}{\partial u}M^{(2)}(u,y,b)+\beta M^{(2)}(u,y,b)$$

$$=\beta\int_0^u M^{(1)}(u-x,y,b)f(x)dx+\beta\bar{F}(u)$$

ή αλλιώς

$$\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)M^{(2)}(u,y,b)=\beta\int_0^u M^{(1)}(u-x,y,b)f(x)dx+\beta\bar{F}(u). \tag{3.13}$$

Από την (3.12) παίρνουμε

$$\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)M^{(2)}(u,y,b)=\frac{\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta}{\beta}M^{(1)}(u,y,b), \tag{3.14}$$

οπότε από την τελευταία σχέση και την (3.13) καταλήγουμε στο

$$\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)^2 M(u,y,b)=\beta^2\int_0^u M(u-x,y,b)f(x)dx+\beta^2\bar{F}(u).$$

Όσον αφορά τώρα τις οριακές συνθήκες, για $u=b$

$$M^{(1)}(b,y,b)=(1-\beta dt)e^{ycdt}M^{(1)}(b,ye^{-\delta dt},b)+\beta dtM^{(2)}(b,ye^{-\delta dt},b)+o(dt),$$

το οποίο παραγωγίζοντας μας δίνει

$$-\delta y\frac{\partial}{\partial y}M^{(1)}(b,y,b)+(yc-\beta)M^{(1)}(b,y,b)+\beta M^{(2)}(u,y,b)=0. \quad (3.15)$$

Επειδή η $M^{(1)}(u,y,b)$ είναι συνεχής στο $u=b$, από την (3.10) παίρνουμε για $u=b$

$$c\frac{\partial}{\partial u}M^{(1)}(b,y,b)-\beta M^{(1)}(b,y,b)-\delta y\frac{\partial}{\partial y}M^{(1)}(b,y,b)+\beta M^{(2)}(b,y,b)=0. \quad (3.16)$$

Από τις (3.15) και (3.16) παίρνουμε

$$c\frac{\partial}{\partial u}M(b,y,b)=cyM(b,y,b),$$

ενώ με τον ίδιο τρόπο έχουμε και ότι

$$c\frac{\partial}{\partial u}M^{(2)}(b,y,b)=cyM^{(2)}(b,y,b). \quad (3.17)$$

Από την (3.12) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}M^{(2)}(u,y,b)=\left(\frac{\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial y}M^{(1)}(u,y,b),$$

όποτε από την (3.17) θα έχουμε ότι

$$\left(\frac{\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial y}M^{(1)}(u,y,b)=yM^{(2)}(u,y,b)\Big|_{u=b},$$

η οποία, πάλι λόγω της (3.12), και πάντα για $u=b$ γίνεται τελικά

$$\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)\frac{\partial}{\partial y}M(u,y,b)\bigg|_{u=b}=\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)M(u,y,b)\bigg|_{u=b},$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος.

3.3. Ροπές του $D_{u,b}$

Ορίσαμε το

$$W_m(u,b)=E[D_{u,b}^m \mid U_b(0)=u].$$

Για την γενικευμένη $Erlang\,(n)$ διαδικασία κινδύνου, η $m-$τάξης ροπή $W_m(u,b)$ ικανοποιεί μία ολόκληρο - διαφορική εξίσωση, όπως δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2. *Για $0\le u\le b$ και $m\in N$, η $m-$τάξης ροπή της τυχαίας μεταβλητής $D_{u,b}$,*

$$E\left(D_{u,b}^m \mid U_b(0)=u\right),$$

ικανοποιεί την ακόλουθη ολόκληρο – διαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\delta m-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta_j\right)W_m(u,b)-\prod_{j=1}^{n}\beta_j\int_0^n W_m(u-x,b)f(x)dx=0, \qquad (3.18)$$

με οριακές συνθήκες

$$\prod_{j=2}^{k}\left(\delta m+\beta_{j-1}-c\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial W_m(u,b)}{\partial u}\bigg|_{u=b}=m\prod_{j=2}^{k}\left(\delta(m-1)+\beta_{j-1}-c\frac{\partial}{\partial u}\right)W_{m-1}(u,b)\bigg|_{u=b},$$

για $k=1,2,...n$ και κάθε $m\in N$, ενώ $\prod_{j=2}^{1}.=1$. Επιπλέον

$$\lim_{b\to\infty}W_m(u,b)=0.$$

Απόδειξη: Albrecher, Claramunt και Marmol, On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang (n) interclaim times (2005)

Άμεσο παράγωγο του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 3.1. *Για $0\le u\le b$, $n=2$, $\beta_j=\beta$, η σχέση* (3.18) *γίνεται*

$$\left(\delta m - c\frac{\partial}{\partial u} + \beta\right)^2 W_m(u,b) - \beta^2 \int_0^n W_m(u-x,b) f(x)dx = 0, \tag{3.19}$$

με οριακές συνθήκες

$$\left(\delta m + \beta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial W_m(u,b)}{\partial u}\Bigg|_{u=b} = m\left(\delta(m-1) + \beta_{j-1} - c\frac{\partial}{\partial u}\right)W_{m-1}(u,b)\Bigg|_{u=b}, \tag{3.20}$$

και

$$\frac{\partial W_m(u,b)}{\partial u}\Bigg|_{u=b} = mW_{m-1}(u,b). \tag{3.21}$$

Απόδειξη: Ορίσαμε το

$$W_m(u,b) = E[D_{u,b}^m \mid U_b(0) = u].$$

Επειδή

$$M(u,y,b) = E[e^{yD_{u,b}} \mid U_b(0) = u],$$

έχουμε ότι

$$M(u,y,b) = E[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(yD_{u,b}\right)^m}{m!} \mid U_b(0) = u]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} E[D^m{}_{u,b} \mid U_b(0) = u]$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} E[D^m{}_{u,b} \mid U_b(0) = u].$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής

$$M(u,y,b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} W_m(u,b).$$

Οπότε, παίρνοντας τις μερικές παραγώγους, έχουμε πρώτη παράγωγο

$$\frac{\partial}{\partial u}M(u,y,b)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(u,y,b)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{my^{m-1}}{m!}W_m(u,b)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}W_m(u,b),$$

και δεύτερη παράγωγο

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial u}M(u,y,b)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}M(u,y,b)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{\partial^2}{\partial u^2}W_m(u,b),$$

και

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}M(u,y,b)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}W_m(u,b),$$

οπότε και αντικαθιστώντας στην (3.7) καταλήγουμε στην μορφή

$$\delta^2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}W_m(u,b)+c^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{\partial^2}{\partial u^2}W_m(u,b),+\beta^2\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}W_m(u,b)\right)$$

$$-2\delta cy\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b)\right)+2\delta\beta cy\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}W_m(u,b)\right)$$

$$-2\beta c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{\partial}{\partial u}W_m(u,b)-\beta^2\int_0^u W_m(u-x,b)f(x)dx=0,$$

οπότε και εξισώνοντας τους συντελεστές του y^m καταλήγουμε στην σχέση (3.19),

$$\left(\delta m-c\frac{\partial}{\partial u}+\beta\right)^2 W_m(u,b)-\beta\int_0^n W_m(u-x,b)f(x)dx=0,$$

ενώ αντίστοιχα για τις οριακές συνθήκες, παίρνουμε τις σχέσεις (3.20) και (3.21).

3.4. Λύσεις για μεγέθη απαιτήσεων με ρητούς μετασχηματισμούς Laplace

Έστω πως αγνοούμε ότι η $W_m(u,b)$ ορίζεται μόνο στο $0 \le u \le b$ και ορίζουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{W}_m(s,b) = \int_0^{\infty} e^{-su} W_m(u,b)du.$$

Η εξίσωση (3.19) δεν εξαρτάται από το b και άρα η όλη ιδέα έγκειται στην χρήση μετασχηματισμών Laplace για να καταλήξουμε στην δομή του $W_m(u,b)$ μέχρι τις σταθερές του και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες προκειμένου να καθορίσουμε αυτές ακριβώς τις σταθερές, με έναν τρόπο αντίστοιχο με αυτό που είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της (3.19), δηλαδή θεωρούμε ότι για $u \ge 0$, η συνάρτηση $\upsilon_m(\mathrm{u})$ ικανοποιεί την ολόκληρο-διαφορική εξίσωση

$$c^2 \upsilon_m''(\mathrm{u}) - 2c(\delta m + \beta)\upsilon_m'(\mathrm{u}) + (\delta m + \beta)^2 \upsilon_m(\mathrm{u}) - \beta^2 \int_0^u \upsilon_m(u-x) f(x)dx = 0. \quad (3.22)$$

Η λύση της (3.19) θα εξαρτάται άμεσα από την λύση της (3.22), η οποία μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής

$$W_m(u,b) = \kappa_1(b)\upsilon_{m,1}(u) + \kappa_2(b)\upsilon_{m,2}(u), \quad (3.23)$$

για $\forall m \ge 1$ και $0 \le u \le b$, όπου $\upsilon_{m,1}(u)$, $\upsilon_{m,2}(u)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (3.22), ενώ οι σταθερές $\kappa_1(b)$ και $\kappa_2(b)$ θα βρεθούν από τις οριακές συνθήκες (3.20) και (3.21).

Παρατηρούμε ότι η $\upsilon_m(\mathrm{u})$ ικανοποιεί την ίδια ολόκληρο-διαφορική εξίσωση με αυτή που ικανοποιεί και η $\upsilon(\mathrm{u}), \mathrm{u} \ge 0$ που μελετήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, δηλαδή η (3.22) είναι η ίδια με την (2.30), με δm βέβαια αντί για δ.

Επομένως, αν στις λύσεις της $\upsilon(\mathrm{u})$ θέσουμε όπου δ το δm, καταλήγουμε εύκολα στις λύσεις της $\upsilon_m(\mathrm{u})$. Άρα και σε αντιστοιχία με το δεύτερο κεφάλαιο, για $m=1$, $\upsilon_1(u) = \upsilon(\mathrm{u})$, $\upsilon_{1,1}(u) = \upsilon_1(u)$, $\upsilon_{2,2}(u) = \upsilon_2(u)$.

Όσον αφορά στις σταθερές, από την (3.23) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b) = \kappa_1(b)\upsilon_{m,1}'(u) + \kappa_2(b)\upsilon_{m,2}'(u),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} W_m(u,b)\Big|_{u=b} = \kappa_1(b)\upsilon_{m,1}(b) + \kappa_2(b)\upsilon_{m,2}(b),$$

οπότε και από την (3.21) σε συνδυασμό πάλι με την (3.23) παίρνουμε τελικά

$$\kappa_1(b)\upsilon'_{m,1}(b)+\kappa_2(b)\upsilon'_{m,2}(b)=m\left(\kappa_1(b)\upsilon_{m-1,1}(b)+\kappa_2(b)\upsilon_{m-1,2}(b)\right). \quad (3.24)$$

Παρομοίως, από την (3.20) έχουμε

$$\kappa_1(b)\upsilon''_{m,1}(b)+\kappa_2(b)\upsilon''_{m,2}(b)=m(m-1)\left(\kappa_1(b)\upsilon_{m-2,1}(b)+\kappa_2(b)\upsilon_{m-2,2}(b)\right)$$

$$+\frac{m\delta}{c}\left(\kappa_1(b)\upsilon_{m,1}(b)+\kappa_2(b)\upsilon_{m,2}(b)\right). \quad (3.25)$$

Προφανώς λοιπόν, και σε αντιστοιχία με το δεύτερο κεφάλαιο, αυτό που μένει είναι μόνο ο υπολογισμός των $\upsilon_{m,1}(u),\upsilon_{m,2}(u)$, τα οποία επίσης θα βρεθούν με χρήση μετασχηματισμών Laplace.

Θέτοντας

$$\hat{\upsilon}_m(s)=\int_0^\infty e^{-su}\upsilon_m(u)du,$$

τον μετασχηματισμό Laplace της $\upsilon_m(u)$, και για

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx,$$

ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(s)$, και με διαδικασία σαν αυτή που ακολουθήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\hat{\upsilon}_m(s)=\frac{\left[c^2s-2c(\delta m+\beta)\right]\upsilon_m(0)+c^2\upsilon'_m(0)}{\left[cs-(\delta m+\beta)\right]^2-\beta^2\hat{f}(s)}, \quad (3.26)$$

$$\hat{\upsilon}_{m,1}(s)=\frac{c\left[s-2(\beta+\delta m)\right]}{\left[cs-\left(\beta+\delta m\right)\right]^2-\beta^2\hat{f}(s)}, \quad (3.27)$$

$$\hat{\upsilon}_{m,2}(s)=\frac{c^2}{\left[cs-\left(\beta+\delta m\right)\right]^2-\beta^2\hat{f}(s)}, \quad (3.28)$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $\upsilon_{m,1}(s)$ και $\upsilon_{m,2}(s)$. Προφανώς, για να βρούμε τις τιμές των δύο λύσεων δεν έχουμε παρά να αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για να βρούμε τις $\upsilon_{m,1}(u),\upsilon_{m,2}(u)$, συναρτήσεις φυσικά του αρχικού κεφαλαίου u.

Αν τώρα θέσουμε $m=1$, παίρνουμε την πρώτη ροπή των προεξοφλημένων μερισμάτων, που δεν είναι άλλα από την αναμενόμενη τιμή φυσικά. Σε αυτή την περίπτωση, δηλαδή για $W_1(u,b)=W(u,b)$, οι προηγούμενες σχέσεις απλοποιούνται.

Για $0 \le u \le b$, $m=1$ η (3.19) γίνεται

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} W(u,b) - 2c\left(\delta+\beta\right)\frac{\partial}{\partial u}W(u,b) + \left(\delta+\beta\right)^2 W(u,b) - \beta^2 \int_0^n W(u-x,b) f(x)dx = 0,$$

με οριακές συνθήκες

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}W(u,b)\right|_{u=b} = 1,$$

και

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial u^2}W(u,b)\right|_{u=b} = \frac{\delta}{c},$$

οπότε από την (3.23), καταλήγουμε στις

$$W_m(u,b) = \kappa_1(b)\upsilon_1(u) + \kappa_2(b)\upsilon_2(u), \qquad 0 \le u \le b$$

και

$$\kappa_1(b)\upsilon_1'(b) + \kappa_2(b)\upsilon_2'(b) = 1, \tag{3.29}$$

$$\kappa_1(b)\upsilon_1''(b) + \kappa_2(b)\upsilon_2''(b) = \frac{\delta}{c}. \tag{3.30}$$

3.5 Αριθμητικό παράδειγμα

Ως απεικόνιση των αποτελεσμάτων της θεωρίας που αναπτύξαμε, έστω ένα μοντέλο Sparre-Andersen που ο χρόνος μεταξύ δύο απαιτήσεων ακολουθεί μία κατανομή Erlang $(2,\beta)$, δηλαδή $\Pr(T_i \le t) = 1-(\beta t+1)e^{-\beta t}$ για $t \ge 0$.

Χάριν ευκολίας, ας υποθέσουμε επίσης ότι και η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων ακολουθεί την Erlang (2) κατανομή, με κοινή παράμετρο λ. Δηλαδή $X_i \sim Erlang(2,\lambda)$ με

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2},$$

οπότε και όπως στο αριθμητικό παράδειγμα του δευτέρου κεφαλαίου, μπορούμε να το εκφράσουμε σε μία μορφή τύπου

$$W_m(u,b) = \sum_{i=1}^{4} a_i(b) e^{R_i u}, \qquad (3.31)$$

που εννοείται για $i = 1,2,3,4$ είναι οι ισάριθμες λύσεις R_i της συνάρτησης

$$\left(\delta m - cR + \beta\right)^2 - \frac{\beta^2 \lambda^2}{(R+\lambda)^2} = 0. \qquad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας το (3.31) στο

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} W(u,b) - 2c\left(\delta + \beta\right)\frac{\partial}{\partial u} W(u,b) + \left(\delta + \beta\right)^2 W(u,b) - \beta^2 \int_0^n W(u-x,b) f(x) dx = 0,$$

και μεταφέροντας τους όρους μας δίνει

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i(b)}{(R_i+\lambda)} \left(\left(cR_i - \beta - m\delta\right)^2 - \frac{\lambda^2 \beta^2}{\left(R_i + \lambda\right)^2} \right) e^{R_i u} = \lambda^2 \beta^2 \sum_{i=1}^{4} a_i(b) \left(\frac{u}{R_i + \lambda} - \frac{1}{(R_i+\lambda)^2} \right) e^{-\lambda u},$$

από την οποία και παράγονται και οι δύο συνθήκες που θα μας επιλύσουν το σύστημα, δηλαδή οι

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i(b)}{(R_i+\eta)} = 0, \qquad (3.33)$$

και

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i(b)}{(R_i+\eta)^2} = 0. \qquad (3.34)$$

Θέτοντας λοιπόν π.χ $m = 1$, έχουμε από $\left.\frac{\partial W_1(u,b)}{\partial u}\right|_{u=b} = 1$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(b) R_i e^{R_i u} = 1, \qquad (3.35)$$

ενώ από την (3.20) έχουμε

$$\left.\frac{\partial^2 W_1(u,b)}{\partial u^2}\right|_{u=b} = \frac{\delta}{c}, \qquad (3.36)$$

με το οποίο τελικά καταλήγουμε στην σχέση

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(b) R_i^2 e^{R_i u} = \frac{\delta}{c}. \qquad (3.37)$$

Οπότε οι συντελεστές a_i μπορούν εύκολα να καθορισθούν ως η λύση των τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων (3.33) έως και (3.37). Αυτό θα φανεί πιο εύκολα με ένα παράδειγμα.

Έστω λοιπόν $T_i \sim Erlang(2,2)$, $X_i \sim Erlang(2,2)$, $c = 1.1$και $\delta = 0.03$. Έστω επίσης ότι $m = 1$.

Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις της (3.32) είναι οι $R_1 = -2,79$, $R_2 = -0,32$, $R_3 = 0,17$ και $R_4 = 2,63$ (κατόπιν στρογγυλοποίησης), οπότε από την (3.31) έχουμε το ανάπτυγμα

$$W_1(u,b) = a_1(b)e^{-2,79u} + a_2(b)e^{-0,32u} + a_3(b)e^{0,17u} + a_4(b)e^{2,63u}.$$

Οι συντελεστές $a_i(b)$ μπορούν εύκολα να ορισθούν από τις εξισώσεις (3.33)-(3.36) και περιλαμβάνουν εκθετικές στο b. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει μερικές από τις τιμές της $W_1(u,b)$ για κάποιο δεδομένο αρχικό κεφάλαιο u, σε περιβάλλον κάποιου συγκεκριμένου φράγματος b:

$b \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.076									
1	0.836	1.808								
2	0.856	1.847	2.846							
3	0.848	1.828	2.815	3.803						
4	0.801	1.728	2.661	3.597	4.574					
5	0.730	1.575	2.424	3.277	4.174	5.143				
6	0.648	1.397	2.151	2.908	3.705	4.575	5.538			
7	0.565	1.218	1.875	2.535	3.229	3.988	4.840	5.799		
8	0.486	1.049	1.615	2.184	2.782	3.436	4.170	5.010	5.967	
9	0.416	0.897	1.381	1.867	2.379	2.938	3.566	4.285	5.118	6.073

ενώ το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει την συμπεριφορά της $W_1(u,b)$ ως συνάρτηση του b για διάφορες τιμές αρχικού κεφαλαίου u.

Σχήμα 8: Το $W_1(u,b)$ ως συνάρτηση του b για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου u.

Για $m = 2$ οι λύσεις της (3.32) είναι οι $R_1 = -2{,}78$, $R_2 = -0{,}40$, $R_3 = 0{,}27$ και $R_4 = 2{,}65$ (πάντα κατόπιν στρογγυλοποίησης), οπότε και εδώ οι συντελεστές $a_i(b)$ αποτελούν τις λύσεις ενός συστήματος ισάριθμων γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} a_i(b) \mathrm{R}_i \mathrm{e}^{R_i b} = 2W_1(b,b) \\[2ex] \sum_{i=1}^{4} a_i(b) \mathrm{R}_i^2 \mathrm{e}^{R_i b} = 2 + \dfrac{2\delta}{c} W_1(b,b) \\[2ex] \sum_{i=1}^{4} \dfrac{a_i(b)}{R_i + 2} = 0 \\[2ex] \sum_{i=1}^{4} \dfrac{a_i(b)}{(R_i + 2)^2} = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ευθέως υπολογίσιμο. Επιπρόσθετα, θα δείξουμε μερικές αριθμητικές τιμές της τυπικής απόκλισης

$$SD(u,b) = \sqrt{W_2(u,b) - W_1^2(u,b)},$$

των προεξοφλημένων αθροισμάτων των αποπληρωμών μερισμάτων.

$b \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.744									
1	1.240	1.399								
2	1.667	2.11	2.193							
3	1.864	2.456	2.695	2.742						
4	1.884	2.528	2.846	2.989	3.02					
5	1.797	2.436	2.783	2.981	3.085	3.111				
6	1.656	2.263	2.613	2.836	2.988	3.08	3.104			
7	1.496	2.058	2.396	2.629	2.807	2.945	3.035	3.06		
8	1.334	1.847	2.167	2.399	2.59	2.755	2.892	2.984	3.011	
9	1.181	1.644	1.942	2.167	2.362	2.54	2.705	2.845	2.942	2.969

Σχήμα 9: Το $SD(u,b)$ ως συνάρτηση του b για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου u.

Το παραπάνω γράφημα απεικονίζει την συμπεριφορά της $SD(u,b)$ ως συνάρτηση του b, για διάφορες τιμές του αρχικού κεφαλαίου u. Αυτό που έχει ενδιαφέρον και στα δύο σχήματα είναι ότι γραφιστικά αποδεικνύεται αυτό που γνωρίζαμε και μαθηματικά, δηλαδή ότι οι των $W_1(u,b)$ και $SD(u,b)$ συγκλίνουν προς μία πεπερασμένη τιμή, ονομαστικά τις $\lim_{b\to\infty} W_1(b,b) = 6.245$ και $\lim_{b\to\infty} SD(b,b) = 2.904$. Μαθηματικά μιλώντας, αυτό οφείλεται στο ότι κάθε ένας από τους όρους $a_i(b)e^{R_i b}$ είτε μηδενίζεται είτε καταλήγει σε ένα πεπερασμένο όριο.

Τελευταίο σχόλιο: η κατάλληλη επιλογή ενός ορίου μερίσματος b επηρεάζεται πολύ από το όποιο κριτήριο βελτιστοποίησης εφαρμόζουμε. Στην περίπτωση που δίνουμε έμφαση στην ασφάλεια, όπως αυτή εκφράζεται από την πιθανότητα και τον χρόνο χρεοκοπίας, τότε ενδεχομένως να μας ενδιέφεραν τα αποτελέσματα των Li και Garrido (2004) πάνω στην προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από το πρώτο σχήμα, αν κανείς επιδιώκει να μεγιστοποιήσει τις πληρωμές μερισμάτων έως ότου επέλθει η χρεοκοπία, τότε το b που θα διαλέξει θα πρέπει να είναι σχετικά μικρό. Και πάλι όμως το δεύτερο σχήμα μας δείχνει ότι η τυπική απόκλιση αυτών των αποπληρωμών έχει ένα μέγιστο για τις σχετικά μικρές τιμές του b, υποδεικνύοντας ότι θα πρέπει να διαλέξει κανείς με προσοχή τον κανόνα βελτιστοποίησης που θα ακολουθήσει και ότι η απλή επιλογή της πρώτης ροπής δεν επαρκεί ως διαγνωστικό εργαλείο.

Παράρτημα

Κατανομή Erlang

Ορισμός: *Μια Erlang κατανομή είναι η κατανομή του αθροίσματος k ανεξάρτητων ισόνομών τυχαίων μεταβλητών που η κάθε μία ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Ο ρυθμός της Erlang κατανομή είναι ίδιος με τον ρυθμό της εκθετικής κατανομής.*

Η Erlang κατανομή είναι μία συνεχής κατανομή πιθανότητας με ευρεία εφαρμογή, κυρίως λόγω της σχέσης της με την εκθετική και την κατανομή Γάμα. Η κατανομή Erlang αναπτύχθηκε από τον A. K. Erlang, στην προσπάθεια του να εξετάσει τον αριθμό από τηλεφωνήματα, που μπορεί να γίνουν ταυτόχρονα, σε χειριστές που αλλάζουν γραμμές. Αυτή η αρχική εργασία ξεπέρασε τα όρια της διαχείρισης τηλεφωνικών κλήσεων και επεκτάθηκε σε όλα τα συστήματα, τα οποία με κάποιον τρόπο περιέχουν την έννοια της αλυσίδας συμβάντων και απαιτούν την μελέτη του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ των συμβάντων. Σήμερα απασχολεί κυρίως τους μελετητές των στοχαστικών διαδικασιών και των βιο-μαθηματικών.

Η κατανομή είναι συνεχής και έχει θετική τιμή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς μεγαλύτερους του μηδενός, ενώ ορίζεται από δύο παραμέτρους: το σχήμα k, το οποίο είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, και τον ρυθμό β, ο οποίος φυσικά είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Η κατανομή μερικές φορές ορίζεται και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του ρυθμού, την κλίμακα μ.

Φυσικά, όταν η παράμετρος σχήματος k ισούται με 1, η κατανομή Erlang απλοποιείται στην *εκθετική* κατανομή. Η ίδια η κατανομή Erlang αποτελεί μια ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμα, με την διαφορά ότι η παράμετρος k περιορίζεται στους ακέραιους.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την περίπτωση για k=2.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang κατανομής είναι

$$f(x;k,\beta)=\frac{\beta^k x^{k-1}e^{-\beta x}}{(k-1)!},$$

για $x,\beta\geq 0$, ή εναλλακτικά

$$f(x;k,\mu)=\frac{x^{k-1}e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu^k(k-1)!},$$

για $x,\beta\geq 0$, $\mu=\frac{1}{\beta}$.

Στην περίπτωση μας θα περιοριστούμε στην

$$f(x;2,\beta)=\frac{\beta^2 x e^{-\beta x}}{(2-1)!}=\beta^2 x e^{-\beta x},$$

για $x,\beta \geq 0$.

Λόγω του παραγοντικού του παρονομαστή, η κατανομή Erlang ορίζεται μόνο όταν η παράμετρος k είναι θετικός ακέραιος, οπότε και αποκαλείται γενικά κατανομή Erlang- k. Φυσικά, μία κατανομή με k=2 θα αποκαλείται Erlang-2 κατανομή. Η κατανομή Γάμα γενικεύει την κατανομή Erlang επιτρέποντας στο k να είναι πραγματικός αριθμός, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Γάμα αντί της παραγοντικής.

Ενημερωτικά, όταν η παράμετρος κλίμακας μ ισούται με 2, τότε η κατανομή απλοποιείται στην κατανομή χ-τετράγωνο (x^2, *chi-square distribution*) με 2k βαθμούς ελευθερίας. Από αυτή την άποψη, η κατανομή Erlang μπορεί να θεωρηθεί μία *γενικευμένη κατανομή χ-τετράγωνο*.

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Erlang κατανομής είναι η

$$F(x,k,\beta)=\frac{\gamma(k,\beta x)}{(k-1)!},$$

όπου $\gamma()$ είναι η μικρότερη ανολοκλήρωτη συνάρτηση Γάμα, ενώ μπορεί να εκφραστεί και στην μορφή

$$F(x,k,\beta)=1-\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^n}{n!}.$$

Στην περίπτωση μας, οι σχέσεις περιορίζονται στο

$$F(x,2,\beta)=\frac{\gamma(2,\beta x)}{(2-1)!}=\gamma(2,\beta x),$$

και

$$F(x,2,\beta)=1-\sum_{n=0}^{2-1} e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^n}{n!}$$

$$=1-e^{-\beta x}-e^{-\beta x}\beta x$$

$$= 1 - e^{-\beta x}(1 + \beta x).$$

Χρόνοι αναμονής

Γεγονότα τα οποία συμβαίνουν με κάποιον μέσο ρυθμό, μοντελοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία *Poisson*.

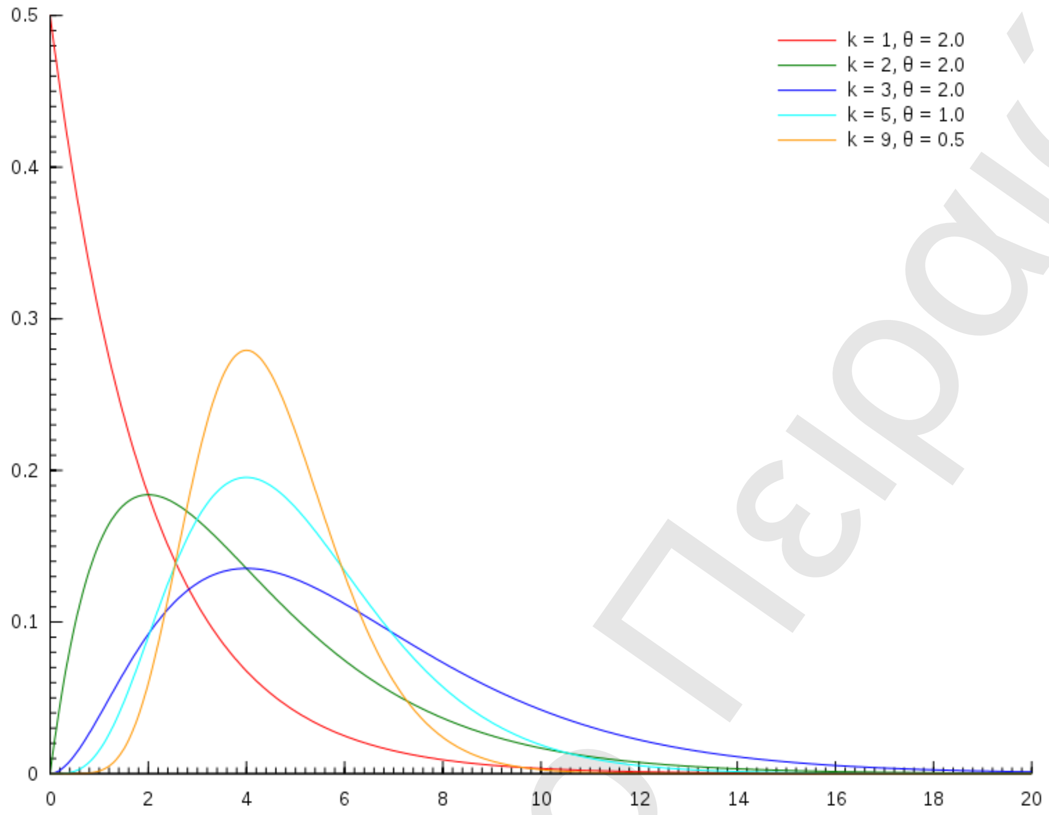
Ο χρόνος αναμονής μεταξύ των k συμβάντων ενός γεγονότος, ακολουθεί μία κατανομή Erlang.

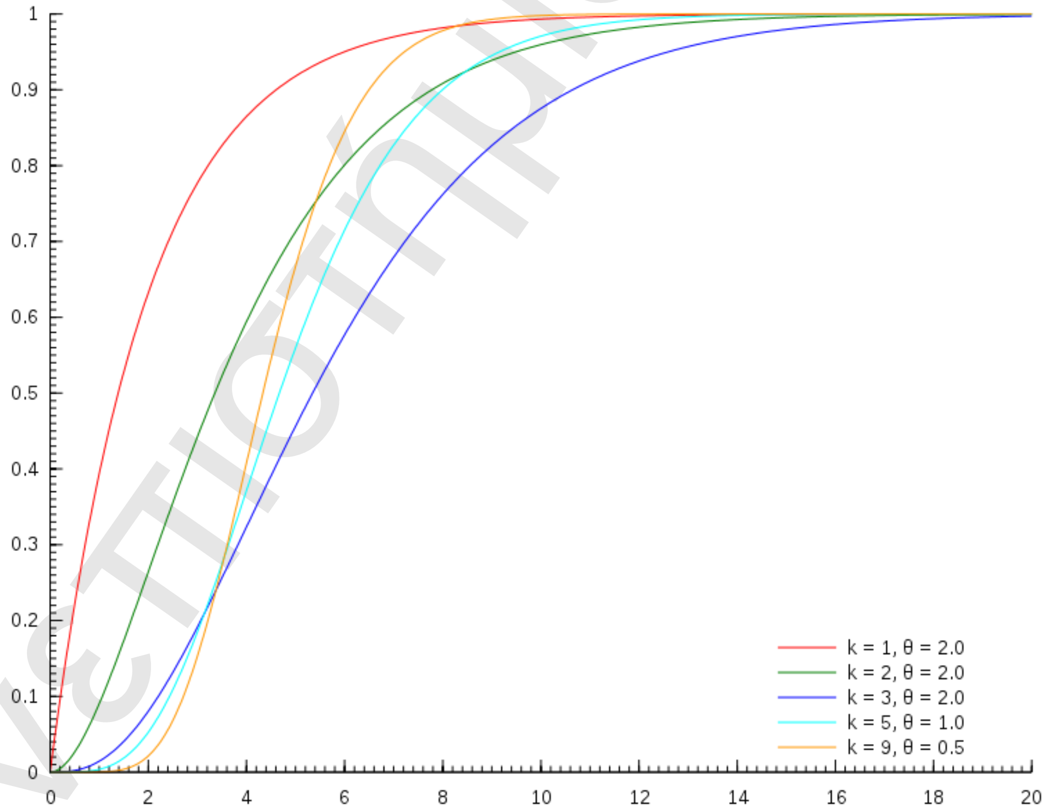
Η σχετική ερώτηση του αριθμού των συμβάντων σε μία δεδομένη μερίδα χρόνου περιγράφεται από μία κατανομή *Poisson*. Η κατανομή *Erlang*, η οποία αποτιμά τον χρόνο μεταξύ εισερχομένων κλήσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνδυαζόμενη με την αναμενόμενη διάρκεια των εισερχομένων κλήσεων, για να μας δώσει πληροφορίες πάνων στον όγκο των μονάδων. Αντίστοιχα θα χρησιμοποιηθεί και στα προβλήματα που εξετάζουμε.

Τμηματικά μοντέλα

Μια σημαντική ιδιότητα της κατανομής Erlang είναι ότι περιγράφει τον ρυθμό μετάβασης των στοιχείων διαμέσου των σταδίων ενός τμηματικού συστήματος ή συστήματος κλάσεων. Τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται ευρέως, τόσο στην θεωρία κινδύνου όσο και σε άλλους κλάδους, όπως η μαθηματικοποιημένη βιολογία και η οικολογία.

Παραδείγματος χάρη, σε ένα μαθηματικό μοντέλο επιδημιολογίας, μπορεί ένα άτομο να νοσεί με εκθετικό ρυθμό, από υγιές σε φορέα, και ξανά με εκθετικό ρυθμό, από φορέα σε ασθενή / πηγή λοίμωξης. Η πιθανότητα να βρεθεί ένα τέτοιο άτομο θα δινόταν από μία κατανομή Erlang(2). Τέτοια μοντέλα, σε σχέση με άλλα εκθετικά, έχουν την χρήσιμη ιδιότητα ότι η διακύμανση τους μπορεί να είναι μεγάλη. Στην πιο απλή περίπτωση, το εκθετικό μοντέλο, η διακύμανση ισούται με $\frac{1}{\lambda^2}$, το οποίο συχνά δεν κρίνεται ρεαλιστικό.


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
k = 1, θ = 2.0
k = 2, θ = 2.0
k = 3, θ = 2.0
k = 5, θ = 1.0
k = 9, θ = 0.5


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
k = 1, θ = 2.0
k = 2, θ = 2.0
k = 3, θ = 2.0
k = 5, θ = 1.0
k = 9, θ = 0.5

Βιβλιογραφία

1) Albrecher H., Kainhofer R. 2002, *Risk theory with a non-linear dividend barrier*, Computing 68, 289-311

2) Albrecher H., Claramunt M. Merce, Marmol Maite, 2005, *On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang (n) interclaim times,* Insurance:Mathematics & Economics 37: 324-334

3) Buehlmann H. 1970*, Mathematical methods in risk theory,* Sringer, New York

4) *Chen Y., Tang Q. 2005, Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang (2) risk process , North American Actuarial journal 7,1-12.*

5) Dickson D.C.M, Hipp C. M. 1997, *Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes.* Insurance: Mathematics & Economics 22: 251-262

6) Dickson D.C.M, Hipp C. M. 2001, *On the time to ruin for Erlang (2) risk processes,* Insurance: Mathematics & Economics 29:333-44

7) Dickson D.C.M. Waters H. R. 2004, *Some optimal dividend problems, ASTIN Bull 34.(1), 49-74*

8) Gerber H .U. and Shiu, E.S.W. 1997, *From ruin theory to option pricing*, AFIR Colloquium, Cairns, Australia 1997.

9) Gerber H.U. and Shiu E.S.W. 1998, *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal 2(1): 48-78.

10) Li S., Garrido J., 2004, *On ruin for the Erlang (n) risk process* ,Insurance: Mathematics & Economics 34:391-408

11) Li S., Garrido J., 2004, *On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier,* Insurance: Mathematics & Economics 35,:691-702

12) Li S., Dickson D.C.M, 2005, *The maximum surplus before ruin in an Erlang (n) risk process and related problems*

13) Powers, M.R. (1995) *A theory of risk, return, and solvency,* Insurance: Mathematics and Economics 17(2): 101-118.

14) Willmot G, Lin S., 2000, *The moments of the time of ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin,* Insurance:Mathematics And Economics 27, 19-44

15) Willmot G, Lin S., 2001, *Lundberg approximations for compound distributions*, Sringer- Verlang, New York, Inc.

16) Willmot G, Lin S., 2003, *the classical risk model, with constant dividend barrier: analysis of the Gerber – Shiu discounted penalty function.* Insurance:Mathematics And Economics 33, 551-566