ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΓΕΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Βασίλειος Τζιώτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
- Επίκουρος Καθηγητής *Μπούτσικας Μιχαήλ* (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής *Ηλιόπουλος Γεώργιος*
- Λέκτορας *Σωτήριος Μπερσίμης*

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

REVIEW OF GENERAL AND SPECIAL METHODS FOR GENERATING RANDOM NUMBERS FROM UNIVARIATE AND MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS

BY

Vasileios Tziotis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

September 2012

Στους γονείς

μου

Αυγουστή και Αθανασία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή Μιχαήλ Μπούτσικα για την αμέριστη βοήθεια του καθόλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, όπως επίσης και τους καλούς μου φίλους Ιωάννη Μπαντούνα και Κωνσταντίνο Χριστοφορίδη για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και την εποικοδομητική συνεργασία τους που συνέβαλλαν σημαντικά στην επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας.

Περίληψη

Στη συγκεκριμένη εργασία αρχικά γίνεται μια παρουσίαση των πιο γνωστών μεθόδων παραγωγής αριθμών από γνωστές και μη κατανομές, όπως την μέθοδο της αντιστροφής, την μέθοδο αποδοχής-απόρριψης και τη μέθοδο της σύνθεσης, τόσο στην διακριτή όσο και στην συνεχή περίπτωση. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η παρουσίαση κάποιων λιγότερο γνωστών και περισσότερο εξειδικευμένων μεθόδων παραγωγής τυχαίων αριθμών από συνεχείς κατανομές οι οποίες εφαρμόζονται και σε περιπτώσεις που οι γνωστές μέθοδοι είναι αρκετά δύσκολο να εφαρμοστούν. Οι ειδικές μέθοδοι που παρουσιάζονται είναι η μέθοδος Forsythe –Von Neymann, η μέθοδος της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής, η επέκταση της μεθόδου της αντιστροφής για συναρτήσεις που δεν είναι 1 προς 1, η μέθοδος αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα και η μέθοδος του πηλίκου ομοιόμορφων. Τέλος, δίνεται μια σύντομη αναφορά στην παραγωγή αριθμών από κάποιες συγκεκριμένες πολυδιάστατες κατανομές, όπως η πολυδιάστατη κανονική κατανομή και κατανομές που προκύπτουν από αυτήν, όπως η κατανομή Wishart, κ.α. Επίσης κατά την ανάπτυξη των παραπάνω γίνεται προσπάθεια προκειμένου να εντοπιστούν οι αποτελεσματικότεροι αλγόριθμοι για συγκεκριμένες κατανομές και να συγκριθεί η αποτελεσματικότητα τους. Στα περισσότερα παραδείγματα οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι υλοποιούνται με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica.

Abstract

In this dissertation we intitally conduct a review of the most well known random number generation methods, such as the inversion method, the rejection-acceptance method and the composition method, for discrete and continuous distributions. Next we carry out a presentation of some special, lesser known but equally satisfactory methods for random number generation that can be used in cases where the previous methods are difficult to implement. These special methods include the Forsythe-Von Neymann method, the "almost exact inversion" method, the "many to one transformation" method, the method of presentations of densities as integrals and the ratio of uniforms method. Finally, a brief reference is made regarding random number generation for some specific multivariate distributions, including the Multivariate Normal Distribution and other related Distributions. In the process of presenting these techniques, an attempt was made in order to identify the most efficient algorithms for specific distributions and to compare their effectiveness. All corresponding algorithms were implemented using the software package "Wolfram Mathematica".

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε πολλά στοχαστικά φαινόμενα παρουσιάζεται η ανάγκη παραγωγής "τυχαίων" αριθμών, οι οποίοι προέρχονται από κάποιες (συνεχείς η διακριτές) κατανομές, προκειμένου αυτά να μελετηθούν εμπειρικά μέσω προσομοίωσης. Η συμπεριφορά των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν δεν είναι συνήθως γνωστή, και συνεπώς θα πρέπει με κάποιο τρόπο να εκτιμηθεί μέσω προσομοίωσης. Αυτό γίνεται αν μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να κατασκευάσουμε και να παρακολουθήσουμε κάποιο κατάλληλο πειραματικό μοντέλο με τη βοήθεια ενός Η/Υ, κυρίως σε προγραμματιστικό περιβάλλον, και για αυτό μας είναι απαραίτητη η παραγωγή "ψευδοτυχαίων" αριθμών. Αναφερόμαστε με τον όρο ψευδοτυχαίοι διότι οι αριθμοί αυτοί δεν παράγονται στην πραγματικότητα εντελώς τυχαία, αλλά μέσα από κάποιες προσδιοριστικές και προκαθορισμένες διαδικασίες (π.χ. με κάποια αρχική τιμή, μια αρχική συνθήκη κ.λπ.). Οι αριθμοί αυτοί προέρχονται από κάποια (μονοδιάστατη η πολυδιάστατη) κατανομή, έτσι ώστε να είναι δυνατή η παρακολούθηση του στοχαστικού φαινομένου που εξετάζουμε και η εξαγωγή κατάλληλων συμπερασμάτων.

Για να γίνει ευκολότερη η παραγωγή τέτοιων αριθμών, βασιζόμαστε γενικά σε κάποιες μεθόδους παραγωγής τυχαίων αριθμών, αρχικά παράγοντας n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), δηλαδή τ. μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X_i \leq x) = x, \;\; 0 < x < 1$$

και στη συνέχεια μέσω αυτών των αριθμών, με κατάλληλους μετασχηματισμούς και κατασκευάζοντας κατάλληλους αλγορίθμους, μπορούμε και παράγουμε τους αριθμούς από τις κατανομές που μας ενδιαφέρουν.

Στη συγκεκριμένη εργασία αρχικά γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση των πιο γνωστών γενικών μεθόδων παραγωγής αριθμών από γνωστές και μη κατανομές. Έπειτα γίνεται μια παρουσίαση κάποιων λιγότερο γνωστών αλλά εξίσου ικανοποιητικών μεθόδων παραγωγής τυχαίων αριθμών από κάποιες συνεχείς κατανομές που οι προηγούμενες μέθοδοι είναι αρκετά δύσκολο, ως και ανέφικτο να εφαρμοστούν. Τέλος, δίνεται μια σύντομη αναφορά στην παραγωγή αριθμών από κάποιες συγκεκριμένες πολυδιάστατες κατανομές. Κατά την ανάπτυξη των παραπάνω γίνεται προσπάθεια προκειμένου να εντοπιστούν οι αποτελεσματικότεροι αλγόριθμοι για συγκεκριμένες κατανομές και να συγκριθεί η αποτελεσματικότητα τους.

Στα περισσότερα παραδείγματα οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι υλοποιούνται με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica. Για να εξεταστεί η προσαρμογή των παραγόμενων αριθμών στην επιθυμητή κατανομή, απαιτούνται εξειδικευμένα τεστ (π.χ. το Kolmogorov-Smirnov τεστ ή το χ^2 τεστ). Επειδή όμως αυτό ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, σε αρκετά από τα παραδείγματα παρατίθενται απλώς κάποιες συγκεκριμένες στατιστικές περιγραφικές τεχνικές μέσω γραφημάτων (π.χ., με σύγκριση της πυκνότητας πιθανότητας και του αντίστοιχου ιστογράμματος συχνοτήτων) μέσα από τις οποίες μπορούμε να πάρουμε μια εικόνα του πόσο καλά προσαρμόζεται το παραγόμενο δείγμα στην εκάστοτε κατανομή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.
Η μέθοδος της αντιστροφής (The inversion method).

1.1. Διακριτή περίπτωση

Η μέθοδος της αντιστροφής είναι η πιο γνωστή μέθοδος παραγωγής τυχαίων αριθμών. Είναι γνωστή τόσο για την απλότητά της όσο και για το πλήθος των κατανομών που μπορεί να εφαρμοστεί. Η διαδικασία μέσω της οποίας εφαρμόζεται η μέθοδος της αντιστροφής είναι η ακόλουθη. Έστω μια τ.μ. $U \sim U(0,1)$ και έστω ακόμη η διακριτή τ.μ. X που μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$X = \begin{cases} x_0, & 0 \leq U < p_0 \\ x_1, & p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ & \vdots \\ x_k, & p_0 + .. + p_{k-1} \leq U < p_0 + p_1 + .. + p_k \\ & \dots \end{cases}$$

έχει συνάρτηση πιθανότητας ίση με $\{p_0, p_1, .., p_k\}$, καθώς

$$P(X = x_k) = P\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i \leq U \leq \sum_{i=1}^{k} p_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \ = p_k.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, η συνάρτηση κατανομής της τ. μ. X ισούται με

$$F(x) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών με την μέθοδο της αντιστροφής για διακριτές κατανομές είναι ο επόμενος.

Βήμα 1. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* $U \sim$ U(0,1)
Βήμα 2. *Αν* $U < p_0$ *τότε θέτουμε* $X = x_0$ *και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 3**.
Βήμα 3. *Αν* $U < p_0 + p_1$ *τότε θέτουμε* $X = x_1$ *και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 4.**
κ. ο. κ.

Το αναμενόμενο πλήθος των βημάτων αυτού του αλγορίθμου ισούται με

$$E(N) = \sum_{i=1}^{k} iP(N = i) = \sum_{i=1}^{k} ip_i$$

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω η τ.μ. με σ.π.

$$p_1 = 0.12, p_2 = 0.18, p_3 = 0.2, p_4 = 0.15, p_5 = 0.35$$

με $p_i = P(Y = i), i = 1,2,3,4,5$. Θα παράγουμε αριθμούς από αυτή τη κατανομή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιστροφής. Η σ.κ. μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι είναι η

$$Y \sim F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.12, & 0 \le y < 1 \\ 0.3, & 1 \le y < 2 \\ 0.5, & 2 \le y < 3 \\ 0.65, & 3 \le y < 4 \\ 1, & 4 \le y < 5 \end{cases}$$

Μέσω του Mathematica μπορούμε να παράγουμε ένα αριθμό από αυτή τη κατανομή με το επόμενο πρόγραμμα.

```
pi={0.12,0.3,0.5,0.65,1};yi={1,2,3,4,5};
SeedRandom[];
U=Random[];i=1;
While[U>pi[[i]],i=i+1];
y=yi[[i]]
```

Ή μπορούμε να παράγουμε π.χ. 20 τ.α. από αυτή τη κατανομή με το επόμενο πρόγραμμα.

```
n=20;L={};pi={0.12,0.3,0.5,0.65,1};
yi={1,2,3,4,5}; SeedRandom[];
Do[
  U=Random[];i=1;
  While[U>pi[[i]],i=i+1];
  y=yi[[i]];
  L=Append[L,y];
,{j,1,n}]
Print[L]
```

Ο μέσος αριθμός βημάτων του αλγόριθμου με αυτή τη μέθοδο ισούται με

$$E(N) = \sum_{j=1}^{5} jp_j = 1 * 0.12 + 2 * 0.18 + \cdots + 5 * 0.35 = 3.43$$

Σε περίπτωση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το $E(N)$, αρκεί να τοποθετήσουμε τις τιμές $x_1, \dots, x_5$ έτσι ώστε $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_5$, δηλαδή $x_1 = 5, x_2 = 3,\ x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 1$ και τότε ο μέσος αριθμός βημάτων ισούται με

$$0.12 * 5 + 0.18 * 3 + 0.15 * 4 + 0.2 * 2 + 0.35 * 1 = 2.49.$$

Μέσω της μεθόδου της αντιστροφής μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από τις περισσότερες γνωστές διακριτές κατανομές, όπως την διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1,2,\dots,n\}$, τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, τη δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p κ.α..

Παράδειγμα 1.1.2 (*Διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα* $\{1,2,\dots,n\}$). Έστω μια τ.μ. X η οποία ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $\{1,2,..,n\}$ με σ.π. $p_i = 1/n, i = 1,2,..,n$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής αφού αν παράγουμε $U \sim$ U(0,1) και έχουμε ότι $U < 1/n = p_1$ θέτουμε $X = 1$, αλλιώς αν $U < 2/n = p_1 + p_2$ θέτουμε $X = 2$ κ.ο.κ. Για την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η πιθανότητα η τ. μ. X να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή ισούται με (όπου $\lfloor x \rfloor$ δηλώνεται το ακέραιο μέρος του αριθμού x)

$$P(X = i) = P(\lfloor nU \rfloor = i - 1) = P\big((i-1) \leq \lfloor n * U \rfloor \leq i\big)$$

$$= P(\big((i-1) \leq n * U \leq i\big) = P\left(\frac{i-1}{n} \leq U \leq \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n},$$

Οπότε ο αλγόριθμος παραγωγής από τη διακριτή ομοιόμορφη στο διάστημα $\{1,2,..,n\}$ είναι ο ακόλουθος

Βήμα 1: *Παράγουμε ένα* τ.α. $U \sim$ U(0,1).

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = \lfloor nU \rfloor + 1$

Με το Mathematica μπορούμε π.χ. να παράγουμε 50 αριθμούς από την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα {1,2,..,20} με τον κώδικα

```
L={};n=20;
Do[U=Random[];
  x=Floor[n*U]+1;
  L=Append[L,x];
,{50}];
Print[L]
```

Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις διακριτών κατανομών, δεν είναι εύκολο να βρούμε απευθείας κάποιο μετασχηματισμό της τ. μ. U έτσι ώστε να παράγουμε την διακριτή τ.μ. X, και έτσι καταφεύγουμε σε κάποιο αναδρομικό τύπο υπολογισμού των πιθανοτήτων για να παράγουμε τ.α. με τη μέθοδο της αντιστροφής, όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.3 (*Αρνητική Δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p, r θετικός ακέραιος και* $0 < p < 1$).

Έστω μια διακριτή τ.μ. X η οποία ακολουθεί την αρνητική δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους r, p $(X \sim Nb(r,p), r \in N^+, 0 < p < 1$) με πυκνότητα πιθανότητας

$$p_i = P(X = i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}, i = r, r+1, \ldots$$

Θα παράγουμε αριθμούς από την αρνητική δυωνυμική βασιζόμενοι σε έναν αναδρομικό τύπο υπολογισμού των πιθανοτήτων. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
p_{i+1} &= \binom{i}{r-1} p^r (1-p)^{i-r+1} \\
&= \frac{i!}{(r-1)!\,(i-r+1)!} p^r (1-p)^{i-r+1} \\
&= \frac{i(i-1)!}{(r-1)!\,(i-r)!\,(i-r+1)} p^r (1-p)^{i-r} (1-p) \\
&= \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r} \frac{i}{(i-r+1)} (1-p) \\
&= \frac{i}{(i-r+1)} (1-p) p_i \\
&= [(1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{i-r+1}]\, p_i
\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η σ.π.π. μπορεί να γραφτεί με το ακόλουθο αναδρομικό σχήμα

$$p_{i+1} = [(1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{i-r+1}] p_i,$$

με αρχική συνθήκη

$p_r = p^r$,

ή ισοδύναμα με το αναδρομικό σχήμα

$$p_{i+1} = \left[\alpha + \frac{\beta}{i-r+1}\right] p_i, \qquad \text{όπου } \alpha = 1-p, \beta = (r-1)(1-p),$$

με αρχική συνθήκη, $p_r = p^r$

Ένας αλγόριθμος που παράγει αριθμούς από αυτή τη κατανομή με τη μέθοδο της αντιστροφής είναι ο επόμενος.

Βήμα 1: *Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό* $U \sim U(0,1)$.

Βήμα 2: *Θέτουμε* $\alpha = 1 - p, b = (r-1)(1-p)$, $pr = p^r, i = r, F = p$.

Βήμα 3: *Αν* $U < F$, *θέτουμε* $X = i$ *και σταματάμε*

Βήμα 4: *Θέτουμε* $pr = [(1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{i-r+1}]pr, F = F + p, i = i + 1$.

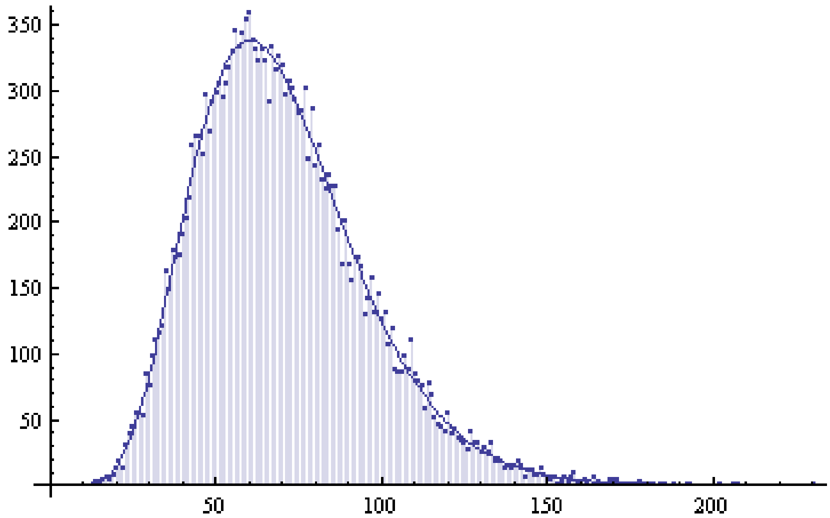
Μέσω του Mathematica υλοποιούμε τον προηγούμενο αλγόριθμο και παράγουμε 50 αριθμούς από αυτή τη κατανομή (αριθμητική εφαρμογή για $r = 7$, $p = 0.1$)

```
p=0.1;r=7;R={};
Do[a=(1-p);b=(r-1)*(1-p);
 U=Random[];
 i=r;pr=p^r;F=pr;
 While[U>F,pr=(a+(b/(i-r+1)))*pr;F=F+pr;i=i+1];
AppendTo[R,i],{j,1,50}]
Print[R]
```

Μπορούμε να εξακριβώσουμε ότι πράγματι η μέθοδος αυτή προσαρμόζει με ακρίβεια την αρνητική δυωνυμική κατανομή, π.χ. για 20000 παραγόμενα αντίγραφα της X με το παρακάτω διάγραμμα εμφάνισης σημείων.

```
p=0.1;r=7;R={};n=20000;
Do[a=(1-p);b=(r-1)*(1-p);
 U=Random[];
 i=r;pr=p^r;F=pr;
 While[U>F,pr=(a+(b/(i-r+1)))*pr;F=F+pr;i=i+1];
 AppendTo[R,i],{j,1,n}]
T=Table[{x,n*PDF[NegativeBinomialDistribution[r,p],x-
r]},{x,r,200}];
t1=Tally[R];
m1=ListPlot[t1,Filling->Axis,Axes->True];
m2=ListPlot[T,Joined→True];
Show[m1,m2]
```

Σχήμα 1.Αρνητική Δυωνυμική κατανομή NB(r=7 , p=0.1)



Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες από τις γνωστότερες διακριτές κατανομές με την μέθοδο της αντιστροφής, καθώς και τους μετασχηματισμούς η τους αναδρομικούς τύπους που προκύπτουν ανάλογα με κάθε περίπτωση.

Κατανομή	$\boldsymbol{p_i = P(X = i)}$	***Τύπος αντιστροφής, Αναδρομικός τύπος***
Διακριτή Ομοιόμορφη στο $\{1,2,\ldots,n\}$	$\frac{1}{n}, i = 1,2,..,n$	$X = \lfloor nU \rfloor + 1$
Γεωμετρική με παράμετρο p, $0 < p < 1$	$p(1-p)^{i-1}, q = 1-p$ $i = 1,2,\ldots$	$X = \left\lfloor \frac{lnU}{lnq} \right\rfloor + 1$
Poisson με παράμετρο λ, $\lambda > 0$.	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, i = 0,1,2,..$	$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i$, με αρχική συνθήκη $p_0 = e^{-\lambda}$
Διωνυμική με παραμέτρους $n, p, n\epsilon N$, $0 < p < 1$	$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0,1,2,..$	$p_{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p} p_i$, με αρχ. συνθήκη $p_0 = (1-p)^n$
Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $r, p, r\epsilon N$, $0 < p < 1$	$\binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$, $i = r, r+1, \ldots$	$p_{i+1} = \left[\alpha + \frac{\beta}{i-r+1}\right] p_i$, $\alpha = 1-p, \beta = (r-1)(1-p)$, με αρχ. συνθήκη $p_r = p^r$

Παράδειγμα 1.1.4 (*Αρνητική Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p μέσω αθροίσματος ανεξάρτητων γεωμετρικών κατανομών με παράμετρο p, r θετικός ακέραιος και* $0 < p < 1$).

Ένας άλλος τρόπος να παράγουμε αριθμούς από την αρνητική δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p είναι μέσω του αθροίσματος r ανεξάρτητων γεωμετρικών κατανομών με παράμετρο p, το οποίο ως γνωστό ακολουθεί την αρνητική δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p. Αν έχουμε δηλαδή ανεξάρτητες τ.μ.

$X_i \sim G(p), (1 \leq i \leq r)$ τότε $X_1 + .. + X_r \sim NB(r, p)$.

Για παράδειγμα, μέσω του Mathematica παράγουμε ένα τ. α. από την αρνητική δυωνυμική με παραμέτρους $r = 5$ και $p = 0.3$ με αυτό τον τρόπο.

```
p=0.3;r=5;
s=0;
Do[U=Random[];X=Floor[Log[U]/Log[1-p]]+1; s=s+X,{r}]
Y=s
```

Η π.χ. μπορούμε να παράγουμε 100 αριθμούς με τον επόμενο κώδικα

```
p=0.3;r=5;n=100;T={};
Do[s=0;
 Do[U=Random[];X=Floor[Log[U]/Log[1-p]]+1;s=s+X,{r}];
  AppendTo[T,s];,{n}]
Print[T]
```

Η μέθοδος της αντιστροφής αν και είναι αρκετά απλή, υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να εφαρμοστεί (π.χ. όταν δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την αντίστροφη συνάρτηση κατανομής, ή ο μέσος αριθμός βημάτων που απαιτεί ο αλγόριθμος είναι πολύ μεγάλος). Σε τέτοιες περιπτώσεις, μια άλλη μέθοδος που είναι πιο αποτελεσματική είναι η μέθοδος της απόρριψης (η αποδοχής-απόρριψης) που θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

1.2. Συνεχής περίπτωση.

Η μέθοδος της αντιστροφής είναι ακόμα πιο ευέλικτη στη συνεχή περίπτωση, καθώς βασίζεται στο γεγονός ότι μπορούμε να παράγουμε με ευκολία έναν αριθμό U από την ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1) και στη συνέχεια με ένα κατάλληλο μετασχηματισμό (δηλαδή μια συνάρτηση $g(U)$) να παράγουμε την συνεχή τ.μ. X. Συγκεκριμένα, αν η συνεχής τ.μ. X έχει σ.κ. F, τότε η τ.μ. $Y = F^{-1}(U)$ $(U \sim U(0,1))$ είναι ισόνομη με την τ.μ. X. Πράγματι, η τ.μ. Y έχει σ.κ. ίση με

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P\big(U \leq F(x)\big) = F_U\big(F(x)\big) = F(x),$$

$$0 < F(x) < 1.$$

Επομένως ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής τ.α. μιας συνεχούς τ.μ. X με την μέθοδο της αντιστροφής είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1: *Παράγουμε έναν αριθμό* U~U(0,1).
Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = F^{-1}(U)$

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω X μια τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{e^x}{e-1}, 0 \leq x \leq 1.$$

Θα παράγουμε αριθμούς από αυτή τη κατανομή με τη μέθοδο της αντιστροφής. Θα βρούμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της. Εύκολα βρίσκουμε ότι είναι ίση με

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{e-1}\int_0^x e^x dx = \frac{e^x - 1}{e-1}, 0 \leq x \leq 1$$

η οποία εύκολα μπορεί να αντιστραφεί επιλύοντας την εξίσωση

$$F(x) = u \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e-1} = u \Leftrightarrow e^x = u(e-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \log(u(e-1)+1) = F^{-1}(u).$$

Οπότε ο αντίστοιχος αλγόριθμος παραγωγής αριθμών είναι ο επόμενος.

Βήμα 1: *Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό* U~U(0,1)
Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = \log(U * (e-1) + 1)$

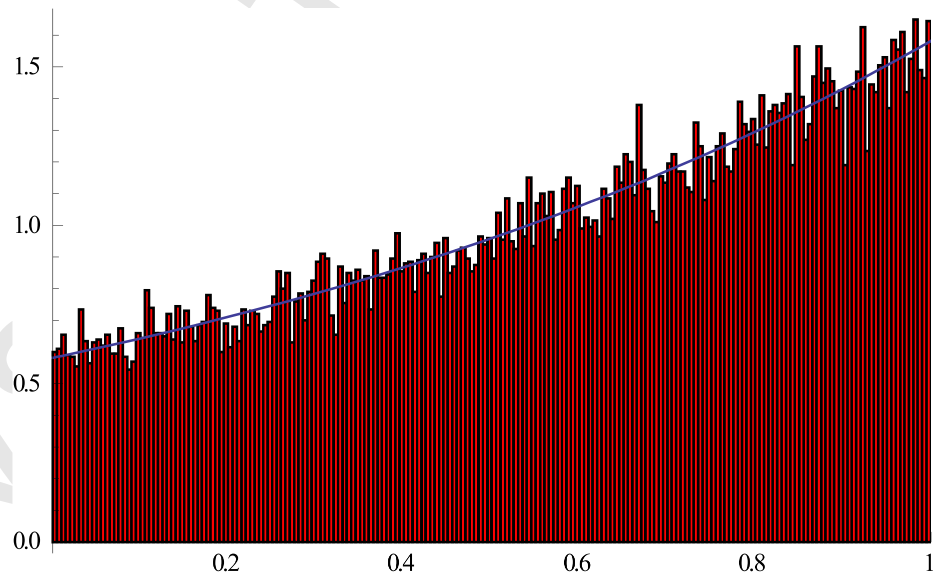
Μέσω του Mathematica παράγουμε 100 αριθμούς από αυτή την κατανομή, με τις παρακάτω εντολές.

```
n=100;randomnumbers={};
Do[x=Log[Random[]*(E-1)+1];
  randomnumbers=Append[randomnumbers,x];
,{100}];
Print[randomnumbers]
```

Επίσης μπορούμε να συγκρίνουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων π.χ. 40000 παραγόμενων αντιγράφων της X με την γραφική παράσταση της συνάρτηση πυκνότητας της. Έχουμε μια καλή προσαρμογή των δεδομένων.

```
n=40000;randomnumbers={};
Do[x=Log[Random[]*(E-1)+1];
  randomnumbers=Append[randomnumbers,x];
,{n}];
h1=Histogram[randomnumbers,HistogramScale→1];
p1=Plot[Exp[x]/(Exp[1]-1),{x,0,1}];
Show[h1,p1]
```

Σχήμα 2. Ιστόγραμμα συχνοτήτων της f (1.2.1.)



Παράδειγμα 1.2.2 (Λογιστική Κατανομή) Μια τ.μ. X λέμε ότι ακολουθεί τη λογιστική κατανομή με παραμέτρους $a \in R, b \in (0, \infty)$ αν έχει συνάρτηση κατανομής

$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-a}{b}}}, x \in R.$

Ειδικά για $a = 0$, $b = 1$ η παραπάνω κατανομή καλείται **τυπική λογιστική κατανομή** (συμβολικά $Log(0,1)$). Αν τώρα έχουμε μια τ. μ. $U \sim U(0,1)$ αποδεικνύεται πως η τ. μ.

$$X = \log \frac{U}{1-U}$$

ακολουθεί την τυπική λογιστική κατανομή. Αυτό είναι εύκολο να δειχθεί, καθώς η τ. μ. X έχει σ.κ. ίση με

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) \\ &= P\left(\log \frac{U}{1-U} \le x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \le e^x\right) \\ &= P\left(U \le \frac{e^x}{1+e^x}\right) = F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \\ &= \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}, x \in R. \end{aligned}$$

Οπότε ο αλγόριθμος παραγωγής τ.α. από την τυπική λογιστική κατανομή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιστροφής είναι ο ακόλουθος.

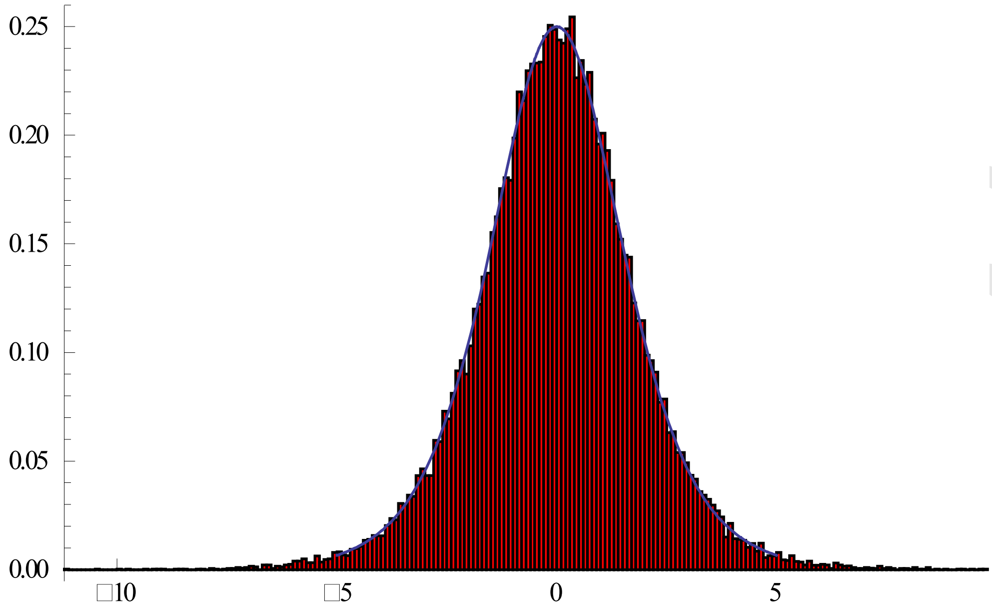
Βήμα 1: *Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό* U~U(0, 1).

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = \log\left[\frac{U}{1-U}\right]$.

Συγκρίνοντας το ιστόγραμμα 40000 προσομοιωμένων τιμών της τ.μ. X με την καμπύλη της σ.π.π. της $Log(0,1)$, παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι έχουμε μια αρκετά καλή προσαρμογή.

```
n=40000;T={};
Do[U=Random[];X=Log[U/(1-U)];
  AppendTo[T,X];,{n}];
h1=Histogram[T,HistogramScale→1];
h2=Plot[PDF[LogisticDistribution[0,1],x],
{x,-5,5}];
Show[h1,h2]
```

Σχήμα 3.Τυπική Λογιστική Κατανομή Log(0,1).



Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές από τις κυριότερες γνωστές συνεχείς κατανομές με τις αντίστοιχες σ.π.π. f, τις σ.κ. F καθώς και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί της συνάρτησης κατανομής έτσι ώστε να μπορούμε να παράγουμε αριθμούς εφαρμόζοντας τη μέθοδο της αντιστροφής.

Πίνακας 2.Οι κυριότερες συνεχείς κατανομές με την μέθοδο της αντιστροφής.

Κατανομή	**σ.π.π** $f(x)$	**σ.κ.** $F(x)$	$X = F^{-1}(U)$, $U \sim U(0,1)$
Ομοιόμορφη στο διάστημα (α,b), $a, b \in R$	$\frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\alpha + U(b-a)$
Εκθετική με παράμετρο λ ($\lambda > 0$)	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$	$1 - e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)$
Weibull με παραμέτρους $a, b > 0$	$abx^{b-1}e^{-ax^b}$, $x > 0$	$1 - e^{-ax^b}$	$\sqrt[b]{-\frac{\log(1-U)}{a}}$
Cauchy με παράμετρο σ, σ > 0.	$\frac{\sigma}{\pi(x^2+\sigma^2)}$, $x \in R$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sigma})$	$\sigma \tan(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right))$
Rayleigh με παράμετρο σ, σ > 0.	$\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x > 0$	$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{-2\log(1-U)}$

Υπάρχουν φυσικά και κάποιες περιπτώσεις όπου η μέθοδος της αντιστροφής δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας, όπως όταν η συνάρτηση κατανομής δεν έχει ένα κλειστό τύπο και συνεπώς δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την αντιστροφή της. Σε αυτές τις περιπτώσεις συνήθως καταφεύγουμε σε άλλες ιδιότητες των κατανομών αυτών για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς (π.χ. κατανομές αθροισμάτων η άλλων συναρτήσεων της ζητούμενης τ. μ.).

Παράδειγμα 1.2.3.

Έστω Y μια τ. μ. που ακολουθεί τη κατανομή Gamma(2, 1) με σ. π. π.

$$f(x) = xe^{-x}, x > 0$$

Η τ. μ. Y έχει σ.κ. ίση με

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt = 1 - e^{-x}(1 + x), x > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y δεν μπορεί να αντιστραφεί με κλειστό τύπο και συνεπώς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα την μέθοδο της αντιστροφής. Μπορούμε όμως, βασιζόμενοι στο γεγονός ότι αν έχουμε 2 ανεξάρτητες μεταξύ τους εκθετικές κατανομές με παράμετρο 1, τότε το άθροισμά τους ακολουθεί τη κατανομή $Gamma(2,1)$, δηλαδή αν

$$X_1, X_2 \sim E(1) \Rightarrow Y = X_1 + X_2 \sim Gamma(2,1)$$

Οπότε ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με τη μέθοδο της αντιστροφής είναι ο ακόλουθος

Βήμα 1: *Παράγουμε* $X_1, X_2 \sim E(1)$ (*θέτοντας* $X_1 = -logU_1$, $X_2 = -logU_2$).
Βήμα 2: *Θέτουμε* $Y = X_1 + X_2$.

Και για να παράγουμε π. χ. 50 αριθμούς μέσω του Mathematica, θα έχουμε

```
n=50;L={};
Do[U1=Random[];U2=Random[];X1=-Log[U1];X2=-Log[U2];
  Y=X1+X2;AppendTo[L,Y];
,{j,1,n}];
Print[L]
```

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που $X \sim Gamma(n, 1)$, όπου η τ. μ. X μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα n ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών με παράμετρο 1 και ο αλγόριθμος θα λάβει τώρα τη μορφή

Βήμα 1: *Παράγουμε* $X_1, \dots, X_n \sim E(1)$

$$X_1 = -logU_1, \quad \dots, \quad X_n = -logU_n$$

Βήμα 2:*Θέτουμε* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} -logU_i$

Παράδειγμα 1.2.4.

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π.(γνωστή και σαν αντίστροφη κατανομή Γάμμα).

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^4}, x > 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X μπορεί επίσης να διαπιστωθεί πως δεν μπορεί να αντιστραφεί με αλγεβρικό τρόπο, αλλά υπάρχει έμμεσος τρόπος να παράγουμε αριθμούς από αυτή τη κατανομή με τη μέθοδο της αντιστροφής. Θυμίζουμε πως η τ.μ. $X \sim Gamma\ (a, 1)$ έχει σ.π.π. που ισούται με

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \alpha > 0, x > 0.$$

Η σ.κ. της τ.μ. $\Upsilon = 1/X$ ισούται με

$$\begin{aligned} G_Y(x) &= P(\Upsilon \leq x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\ &= P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

όπου F_X η σ.κ. της $Gamma(a, 1)$. Έτσι η σ.π.π. της τ.μ. Υ ισούται με

$$g_Y(x) = G_Y'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)'\left(1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-f_X\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^{a-1}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{a+1}\frac{e^{-1/x}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0, \alpha > 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Η πυκνότητα πιθανότητας που θέλουμε να παράγουμε αριθμούς είναι στην ουσία η σ.π.π. μιας τ. μ. $\Upsilon = \frac{1}{X}$, όπου $X \sim$ Gamma(3,1) όπως φαίνεται στη συνέχεια

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{2x^4} = \left(\frac{1}{x}\right)^{3+1}\frac{e^{-1/x}}{\Gamma(3)}, x > 0.$$

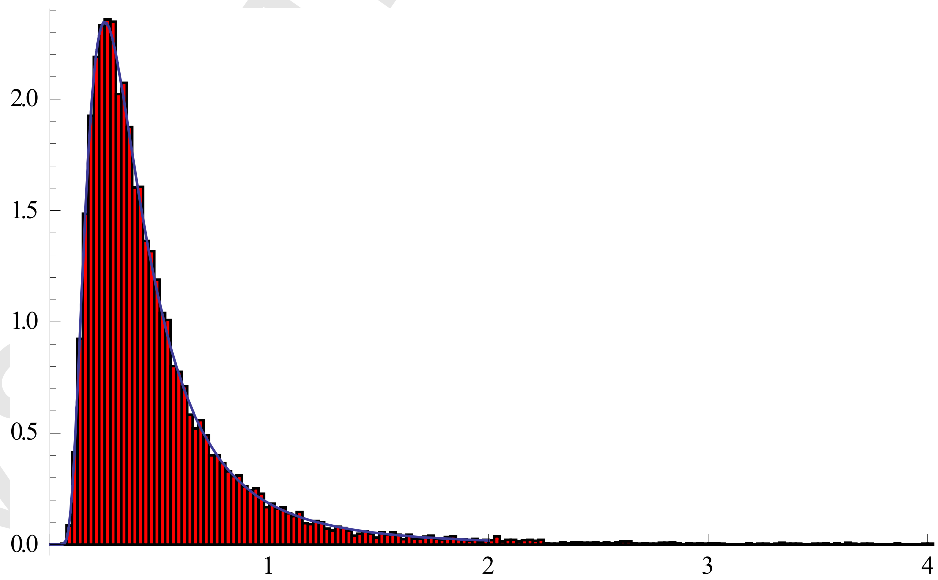
Γνωρίζουμε ήδη πώς να παράγουμε αριθμούς από την $Gamma(3,1)$ χρησιμοποιώντας εμμέσως τη μέθοδο της αντιστροφής (από το προηγούμενο παράδειγμα), δηλαδή προσθέτοντας 3 ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ. που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Έτσι ένας σύντομος αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από αυτή τη κατανομή με την μέθοδο της αντιστροφής είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1: *Παράγουμε Y* ~ Gamma(3,1) (*ή απευθείας ή μέσω αθροίσματος ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών*).
Βήμα 2: *Θέτουμε X=1/Y*.

Μέσω του Mathematica παράγουμε 20000 αριθμούς από τη ζητούμενη κατανομή και μέσω του προηγούμενου αλγορίθμου κατασκευάζουμε το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων, και παρατηρούμε πως υπάρχει πολύ καλή προσαρμογή των προσομοιωμένων τιμών.

```
n=20000;L={};
Do[U1=Random[];U2=Random[];U3=Random[];
   X1=-Log[U1];X2=-Log[U2];X3=-Log[U3];
   Y=X1+X2+X3;AppendTo[L,1/Y];
,{j,1,n}];
 H=Histogram[L,HistogramScale→1,HistogramRange→{0,4}];
P=Plot[Exp[-1/x]/(2*(x^4)),{x,0,2}];
Show[H,P]
```

Σχήμα 4. Ιστόγραμμα συχνοτήτων της *f* (1.2.4.).



Σημειώνουμε ακόμα ότι με την μέθοδο της αντιστροφής μπορούμε να παράγουμε διακριτές τ.μ. *X* μέσω του ακέραιου μέρους συνεχών τ.μ. *Y*. Συγκεκριμένα, αν μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της τ. μ. *Y* με την μέθοδο της αντιστροφής και με τον μετασχηματισμό $Y = F^{-1}(U)$, $U \sim U(0,1)$, τότε παράγουμε την τ.μ. *X* με τον μό $X = \lfloor F^{-1}(U) \rfloor = \lfloor Y \rfloor$.

Οπότε εναλλακτικά ένας αλγόριθμος παραγωγής διακριτών τ. μ. μέσω συνεχών τ. μ. με τη μέθοδο της αντιστροφής θα μπορούσε να είναι ο επόμενος

Βήμα 1: *Παράγουμε ένα τ.α.* $U \sim U(0,1)$.
Βήμα 2: *Θέτουμε* $Y = F^{-1}(U)$ (ή $F^{-1}(1-U)$) *και στην συνέχεια* $X = \lfloor Y \rfloor$.

Παράδειγμα 1.2.5.

Έστω η τ. μ. *Y* με σ.κ.

$$F(y) = 1 - y^{-b}, y > 1, F(1) = 0, b > 0$$

Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ. μ. *X* με

$X = \lfloor Y \rfloor = \lfloor F^{-1}(1-U) \rfloor = \left\lfloor U^{-\frac{1}{b}} \right\rfloor, U \sim U(0,1),$

θα ισούται με

$$P(X = i) = P\left(\left\lfloor U^{-\frac{1}{b}} \right\rfloor = i\right) = P(i < U^{-\frac{1}{b}} < i + 1)$$
$$= F(i+1) - F(i) = \frac{1}{i^b} - \frac{1}{(i+1)^b}, i \geq 1.$$

Μέσω του Mathematica, θα μπορούσαμε π.χ. να παράγουμε 100 αριθμούς από αυτή την κατανομή για *b*=2.5 μέσω του παραπάνω τρόπου με τις εντολές

```
n=100;b=2.5;Randomnumbers={};
Do[U=Random[];X=Floor[U^(-1/b)];
 AppendTo[Randomnumbers,X];
,{j,1,n}]
Print[Randomnumbers]
```

Η μέθοδος της αντιστροφής είναι αρκετά σημαντική, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορεί να εφαρμοστεί ούτε καν προσεγγιστικά (π.χ., όταν δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να βρούμε τη σ.κ. της τ.μ. που μελετάμε και δεν μπορούμε να την αντιστρέψουμε). Αυτό το σημείο έρχεται να καλύψει η μέθοδος της απόρριψης (η αποδοχής- απόρριψης).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

Η μέθοδος της απόρριψης-αποδοχής (The rejection-acceptance method).

2.1 Διακριτή περίπτωση

Έστω ότι επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία διακριτή τ. μ. X με σ.π. $p_j = P(X = j)$, γνωρίζοντας ήδη ότι μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από μια άλλη κατανομή με σ.π. $q_j = P(Y = j), j = 0,1,2,..$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι απόλυτα συνεχής ως προς την κατανομή της X, δηλαδή έχει μεγαλύτερο ή ίσο πεδίο τιμών με την κατανομή της X.
Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, (π.χ. βλ. Μπούτσικας (2004)) παράγουμε (με οποιοδήποτε τρόπο) έναν αριθμό Y από την q_j και στη συνέχεια τον αποδεχόμαστε με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου p_Y/q_Y. Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχει κάποια σταθερά $c > 0$ για την οποία μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $p_j/q_j \leq c, \forall j > 0$, τότε ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής τ.α. με τη μέθοδο της απόρριψης είναι ο επόμενος.

ΒΗΜΑ 1. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από κατανομή με σ.π.* $\{q_j, j = 0,1,2,...\}$.

ΒΗΜΑ 2. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* $U \sim \mathrm{U}(0,1)$

ΒΗΜΑ 3. *Εάν* $U < \frac{p_Y}{cq_Y}$, *θέτουμε* $X = Y$ *και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο* 1.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι σε κάθε επανάληψη δεχόμαστε ή απορρίπτουμε την τιμή Y ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επαναλήψεις με πιθανότητα

$$P\left(U < \frac{p_Y}{cq_Y}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(U < \frac{p_Y}{cq_Y}\middle| Y = i\right) P(Y = i)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(U < \frac{p_Y}{cq_Y}\middle| Y = i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{cq_i} q_i = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{c}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τ. μ. X έχει σ.π.π. $P(X = i) = p_i$. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\text{αποδεχόμαστε την } Y \text{ στην n} - \text{οστή επανάληψη για Y} = \text{i}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(\text{συνολικά } n-1 \text{ απορρίψεις κι στην } n - \text{οστή επανάληψη}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(1-\frac{1}{c}\right)^{n-1} P(n - \text{οστή επανάληψη για } Y=i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{c}\right)^{n-1} P(U<\frac{p_Y}{cq_Y}|Y=i)P(Y=i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{c}\right)^{n-1} P(U<\frac{p_Y}{cq_Y}|Y=i)q_i \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{c}\right)^{n-1} p_i}{cq_i} q_i \ = p_i.
\end{aligned}
$$

Το μέσο πλήθος των επαναλήψεων του αλγορίθμου ισούται με $E(N)=c$, καθώς η τ. μ. N ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p=\frac{1}{c}$.

Το μικρότερο c που μπορούμε να πετύχουμε είναι το

$$c=\sup\left\{\frac{p_j}{q_j}, j=0,1,\ldots\right\}.$$

Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς το ποια βοηθητική κατανομή F_Y θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε αριθμούς από την X, αρκεί φυσικά να έχει το ίδιο (η μεγαλύτερο) στήριγμα με τη κατανομή F_X.

Παράδειγμα 2.1.1.

Έστω η τ.μ. X από το Παράδειγμα 1.1.1. με σ.π.

$$p_1=0.12, p_2=0.18, p_3=0.2, p_4=0.15, p_5=0.35$$

με $p_i=P(X=i), i=1,2,3,4,5$

Θα παράγουμε αριθμούς από αυτή τη κατανομή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απόρριψης. Χρειαζόμαστε μια κατανομή με το ίδιο η μεγαλύτερο στήριγμα από την οποία μπορούμε να παράγουμε εύκολα αριθμούς. Μία κατανομή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ είναι η διακριτή ομοιόμορφη $Y \sim \mathrm{DU}\{1,2,3,4,5\}$ με σ.π.π.,

$$q_j = \frac{1}{5}, j = 1,2,3,4,5$$

καθώς μπορούμε να παράγουμε εύκολα αριθμούς από αυτήν (αρκεί να παράγουμε $U \sim U(0,1)$ και μετά να θέσουμε $Y = \lfloor 5 * U \rfloor + 1)$, με μέσο αριθμό επαναλήψεων

$$\begin{aligned} c &= \max\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 0,1,..\right\} \\ &= \max\left(\frac{p_j}{0.2}, j = 1,2,3,4,5\right\} \\ &= \max\{5p_j, j = 1,2,3,4,5\} \\ &= 5 * \max(0.12, 0.15, 0.18, 0.2, 0.35\} \\ &= 5 * 0.35 = 1.75 \end{aligned}$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος με τη μέθοδο της απόρριψης θέλει κατά μέσο όρο 1.75 βήματα , ενώ ο αντίστοιχος αλγόριθμος με τη μέθοδο της αντιστροφής θέλει κατά μέσο όρο 2.49 βήματα (από το παράδειγμα 1.1.1), και συνεπώς οδηγεί σε καλύτερο (δηλαδή γρηγορότερο) αλγόριθμο, ο οποίος είναι ο ακόλουθος. Στη συνέχεια δίνονται εντολές στο Mathematica που παράγουν 20 αριθμούς από αυτή τη κατανομή με βάση τον προηγούμενο αλγόριθμο.

Βήμα 1. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* $U_1 \sim \mathrm{U}(0,1)$
Βήμα 2. *Θέτουμε* $Y = \lfloor 5 * U \rfloor + 1$ (*δηλ.* $Y \sim \mathrm{U}\{1,...,5\}$)
Βήμα 3. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* $U_2 \sim \mathrm{U}(0,1)$
Βήμα 4.Αν $U_2 \leq \frac{q_Y}{cp_Y} = \frac{q_Y}{0.35}$, *θέτουμε X=Y και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 1**.

Μια υλοποίηση του παραπάνω αλορίθμου μέσω του Mathematica είναι:

```
px={0.12,0.18,0.2,0.15,0.35};n=20;T={};k=5;i=1;
While[i≤ n,U1=Random[];Y=Floor[k*U1]+1;U2=Random[];
     If[U2<px[[Y]]/0.35,T=Append[T,Y];i++];
];
Print[T]
```

Η διακριτή ομοιόμορφη κατανομή είναι μια αρκετά απλή και βολική κατανομή, αλλά σε μερικές περιπτώσεις δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βοηθητική κατανομή, κάτι που θα διαπιστώσουμε από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.1. 2.

Έστω η τ. μ. X με σ. π.

$$p_i = \frac{6}{\pi^2 i^2}, i = 1,2, \dots$$

Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής, αλλά αφού ο μέσος αριθμός των βημάτων που απαιτεί ο αλγόριθμος είναι ίσος με

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{6i}{\pi^2 i^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

δηλαδή η μέση τιμή δεν υπάρχει, και αυτό οδηγεί σε πολύ αργό αλγόριθμο, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της απόρριψης. Δεν μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε κάποια διακριτή ομοιόμορφη κατανομή, αφού εδώ το στήριγμα είναι το N^+. Μια κατάλληλη κατανομή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η τ. μ. Y που ορίζεται ως το ακέραιο μέρος του αντιστρόφου ενός τ.α. στο διάστημα (0, 1), δηλαδή την τ. μ. που ορίζεται ως εξής:

$$Y = \left[\frac{1}{U}\right], U \sim U(0,1)$$

με σ.π.π.

$$\begin{aligned} q_j &= P(Y = j) = P\left(\left\lfloor\frac{1}{U}\right\rfloor = j\right) = P\left(j \le \frac{1}{U} < j+1\right) = P\left(\frac{1}{j+1} < U \le \frac{1}{j}\right) \\ &= \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \frac{1}{j(j+1)}, \qquad j \ge 1. \end{aligned}$$

Τότε, η σταθερά με τη μέθοδο της απόρριψης είναι η

$$c = \max\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 1, ..\right\} = sup_{j\ge 1}\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 1,2, ..\right\} = \frac{6}{\pi^2} sup_{j\ge 1}\left\{\frac{j+1}{j}\right\} = \frac{6}{\pi^2} \cdot 2 = \frac{12}{\pi^2}.$$

Βρίσκουμε έπειτα ότι

$$\frac{p_Y}{c q_Y} = \frac{\frac{6}{\pi^2 Y^2}}{\frac{12}{\pi^2} \frac{1}{Y(Y+1)}} = \frac{Y+1}{2Y},$$

και ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών είναι ο επόμενος.

.

Βήμα 1. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* U_1~ U(0,1)
Βήμα 2. *Θέτουμε* $Y = \lfloor 1/U \rfloor$
Βήμα 3. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό* U_2~ U(0,1)
Βήμα 4.Αν $U_2 \leq \frac{q_Y}{cp_Y} = \frac{Y+1}{2Y}$, *θέτουμε X=Y και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 1.**

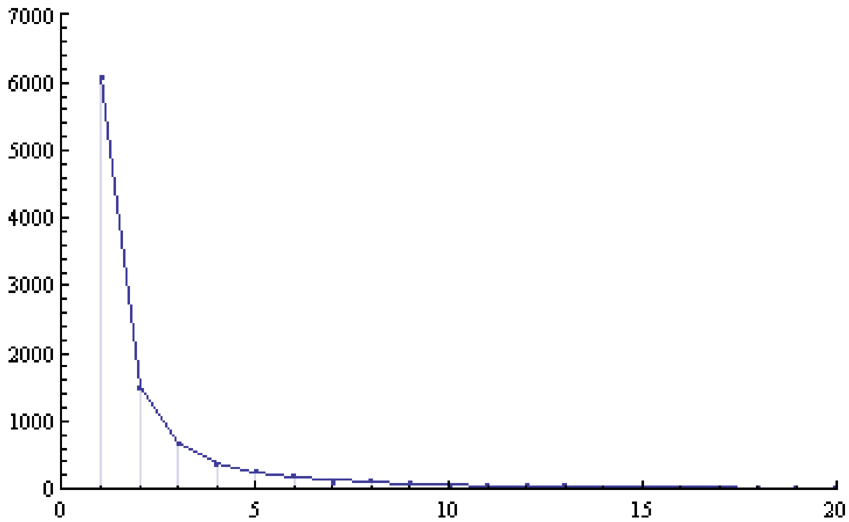
Μέσω του Mathematica μπορούμε π.χ. παράγουμε 100 αριθμούς από την κατανομή της *X* με τις επόμενες εντολές.

```
n=100;randomnumbers=Table[0,{n}];j=1;
While[j≤n,U1=Random[];Y=Floor[1/U1];U2=Random[];
     If[U2≤(Y+1)/(2*Y),randomnumbers[[j]]=Y;j++]
;]
Print[randomnumbers]
```

Συγκρίνοντας ένα προσομοιωμένο δείγμα 10000 αριθμών με αυτή τη μέθοδο σε σχέση με παραγόμενους αριθμούς από αυτήν την κατανομή, έχουμε πολύ καλή προσαρμογή.

```
n=10000;c=6/(Pi^2);randomnumbers=Table[0,{n}];
j=1;
While[j≤n,U1=Random[];Y=Floor[1/U1];U2=Random[];
   If[U2≤(Y+1)/(2*Y),randomnumbers[[j]]=Y;j++];
]
m=Table[{x,n*c/(x^2)},{x,1,50}];
t1=Tally[randomnumbers];
m1=ListPlot[t1,Filling→Axis,PlotRange→{{0,50},{0,7000}}];
m2=ListPlot[m,Joined→True];
Show[m1,m2,PlotRange→{{0,50},{0,7000}}]
```

Σχήμα 5.Διάγραμμα εμφάνισης σημείων της προηγούμενης κατανομής σε σύγκριση με την πυκνότητα πιθανότητας.



Παράδειγμα 2.1.3.

Έστω η τ. μ. *X* με σ.π.

$$p_i = \frac{r}{2i(2i-1)} = r\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i}\right), \quad i = 1,2,..$$

όπου

$$r = \frac{1}{log2}$$

Είναι γνωστό ότι

$$log2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i+1}$$

Για να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της τ.μ. *X* θα βασιστούμε και πάλι στην τ.μ. $Y = \left[\frac{1}{U}\right]$, καθώς έχει το ίδιο στήριγμα με την κατανομή της *X*. Η σταθερά με τη μέθοδο της απόρριψης μπορεί να βρεθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$c = \max\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 1, ..\right\} = sup_{j\geq 1}\left\{\frac{p_j}{q_j}, j = 1,2, ..\right\}$$

$$= sup_{i\geq 1}\left\{\frac{r\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)}{\frac{1}{i(i+1)}}\right\} = sup_{i\geq 1}\left\{\frac{\frac{r}{2i(2i-1)}}{\frac{1}{i(i+1)}}\right\}$$
$$= \frac{r}{2} sup_{i\geq 1}\left\{\frac{i+1}{(2i-1)}\right\} = r = \frac{1}{log2}$$

Επίσης καθορίζουμε το πηλίκο

$$\frac{p_Y}{cq_Y} = \frac{\frac{r}{2Y(2Y-1)}}{\frac{r}{Y(Y+1)}} = \frac{Y+1}{4Y-2}$$

Επομένως το μόνο που αλλάζει στον αλγόριθμο του προηγούμενου παραδείγματος (2.1.2.) είναι το **Βήμα 4**, όπου τώρα θα διατυπώνεται ως εξής:

Βήμα 4. *Αν* $U_2 \leq \frac{q_Y}{cp_Y} = \frac{Y+1}{4Y-2}$, *θέτουμε X=Y και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 5.**

```
n=100;randomnumbers=Table[0,{n}];j=1;
While[j≤n,U1=Random[];Y=Floor[1/U1];U2=Random[];
 If[U2≤ (Y+1)/(4*Y-2),randomnumbers[[j]]=Y;j++];]
Print[randomnumbers]
```

Η μέθοδος της απόρριψης είναι αρκετά ισχυρή στη συνεχή περίπτωση, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

2.2 Συνεχής περίπτωση

Η μέθοδος της απόρριψης για την συνεχή περίπτωση διαφέρει ελάχιστα από τη διακριτή περίπτωση. Εδώ τώρα σκοπός μας είναι να παράγουμε την τ. μ. X με στήριγμα το $S_X \subseteq R$ και σ.π.π. f βασιζόμενοι σε μια τ.μ. Y με αντίστοιχο στήριγμα $S_X \subseteq S_Y \subseteq R$ και σ.π.π. g . Όπως και στην διακριτή περίπτωση, υποθέτουμε πως μπορούμε να παράγουμε με ευκολία ένα τ. α. Y και τον αποδεχόμαστε με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου $f(Y)/g(Y)$. Θεωρούμε πάλι ότι υπάρχει μια σταθερά c για την οποία ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \forall x \in R, g(x) \neq 0$$

Και ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με τη μέθοδο της απόρριψης είναι ο ακόλουθος.

ΒΗΜΑ 1. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Υ από κατανομή με σ.π.π.* g
ΒΗΜΑ 2. *Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U* ~ U(0,1).
ΒΗΜΑ 3. *Εάν* $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$, *τότε θέτουμε X=Y και σταματάμε.*
Εάν όχι, επιστρέφουμε στο 1.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την διακριτή περίπτωση, με τη διαφορά ότι επειδή τώρα μελετάμε συνεχείς κατανομές, τα αθροίσματα αντικαθίστανται από ολοκληρώματα. Όπως και πριν, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για το ποια βοηθητική κατανομή *Y* ~ *G* μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, αρκεί να πληρεί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω (να έχει το ίδιο η μεγαλύτερο στήριγμα από της *X*). Συνήθως επιλέγουμε κάποια κατανομή με "παρόμοια" σ.π.π. έτσι ώστε να μην έχουμε πολύπλοκους υπολογισμούς, αλλά στη γενική περίπτωση προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

και έπειτα εντοπίσουμε τη κατάλληλη σταθερά *c* για την οποία ισχύει

$$c = \sup\{\frac{f(x)}{g(x)}, x \in R\}$$

.

Παράδειγμα 2.2.1

Έστω *X* μια τ. μ. που ακολουθεί τη κατανομή Gamma(2, 1) με σ.π.π.

$$f_1(x) = xe^{-x}, x > 0$$

Θα παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της τ. μ. *X* χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απόρριψης (αν και είναι εφικτή η παραγωγή αριθμών και μέσω της μεθόδου της αντιστροφής, όπως είδαμε προηγουμένως στο Παράδειγμα 1.2.3). Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια κατανομή με το ίδιο η μεγαλύτερο στήριγμα (που εδώ είναι το $S_X = (0, \infty)$). Μια κατανομή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η εκθετική με παράμετρο θ ($Y \sim E(\theta)$), γιατί έχει το ίδιο στήριγμα $S_Y = (0, \infty)$ και σχετικά "απλή" σ.π.π.

$$g(x) = \theta e^{-\theta x}, x > 0.$$

Πρέπει να εντοπίσουμε στη συνέχεια κατάλληλη σταθερά *c* για την οποία θα ισχύει ότι

$$\frac{f_1(x)}{g(x)} = h_1(x) \leq c, c > 0$$

και θα είναι λοιπόν

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{g(x)} = \frac{xe^{-x}}{\theta e^{-\theta x}} = \frac{xe^{x(\theta-1)}}{\theta}, x, \theta > 0.$$

Η παραπάνω συνάρτηση για $\theta \geq 1$ δεν μπορεί να φραχθεί άνω, αλλά για $0 < \theta < 1$ ίσως υπάρχουν πιθανά ακρότατα. Παραγωγίζοντας και μηδενίζοντας την προηγούμενη συνάρτηση θα έχουμε

$$h_1{}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta} - \frac{x(1-\theta)e^{x(\theta-1)}}{\theta} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{1-\theta}$$

Μπορεί να εξακριβωθεί ότι η δεύτερη παράγωγος σε αυτό το σημείο είναι αρνητική και έτσι είναι τοπικό μέγιστο. Η σταθερά με τη μέθοδο της απόρριψης *c* ισούται με

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \max\left\{x \in (0,\infty) : \frac{f_1(x)}{g(x)} \geq 0\right\} \\ &= h_1\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{e^{-1}}{\theta(1-\theta)} \\ &= e^{-1}\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right). \end{aligned}$$

Προφανώς θα ψάξουμε για το *θ* που ελαχιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση, καθώς έτσι θα έχουμε τον ταχύτερο αλγόριθμο. Παραγωγίζοντας την προηγούμενη συνάρτηση θα είναι

$$c'(\theta) = e^{-1}\left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2}\right] = 0.$$

Η παράγωγος επομένως θα μηδενίζεται για *θ* = 1/2. Καθορίζουμε στη συνέχεια το πηλίκο

$$\frac{f_1(x)}{cg(x)} = \frac{xe^{x\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{4e^{-1}\frac{1}{2}} = \frac{xe^{1-\frac{x}{2}}}{2}.$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής από την Gamma(2, 1) με την μέθοδο της απόρριψης μπορεί να είναι ο επόμενος.

Βήμα 1.*Παράγουμε έναν αριθμό* $U_1 \sim U(0,1)$ *και Y~Exp(θ)*
Βήμα 2. *Παράγουμε έναν αριθμό* $U_2 \sim U(0,1)$.
Βήμα 3.Αν $U_2 \leq \frac{f_1(Y)}{cg(Y)} = \frac{Ye^{1-\frac{Y}{2}}}{2}$, *τότε θέτουμε X = Y και σταματάμε.*

Ο αλγόριθμος θέλει κατά μέσο όρο

$$c = c\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{-1}$$

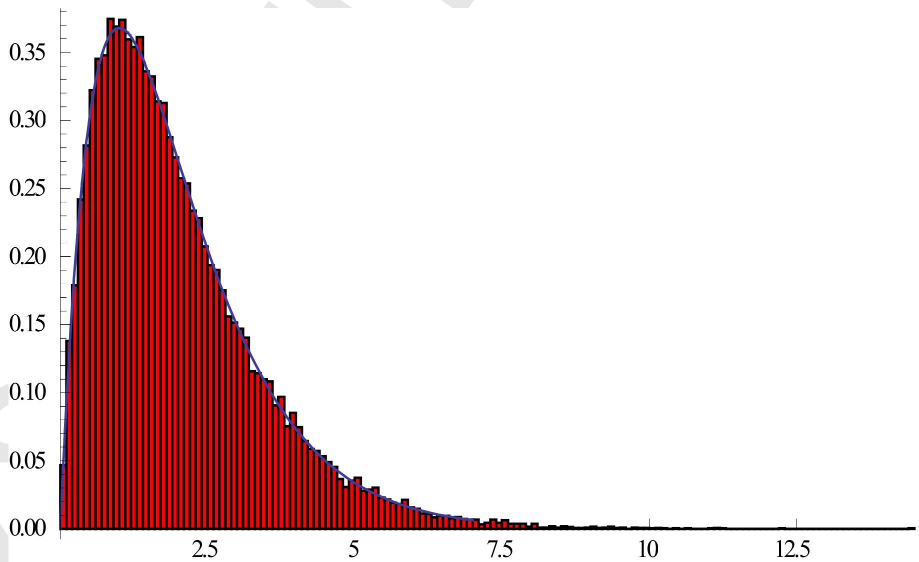
βήματα για να τερματιστεί. Μέσω Mathematica μπορούμε να παράγουμε π.χ. 50 αριθμούς, χρησιμοποιώντας σαν βοηθητική μια εκθετική κατανομή με παράμετρο θ=0.5 και υλοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο με τις παρακάτω εντολές.

```
n=50;T=Table[0,{n}];i=1;
While[i≤n,U1=Random[];Y=-2*Log[1-U1];
   U2=Random[];If[U2≤Y*Exp[-Y/2+1]/2,T[[i]]=Y;i++];
]
Print[T]
```

Συγκρίνοντας το ιστόγραμμα 30000 παραγόμενων αντιγράφων της X με την καμπύλη της πυκνότητας πιθανότητας f_1, παρατηρούμε πως, όπως ήταν αναμενόμενο, έχουμε μια πολύ καλή προσαρμογή, μέσω του επόμενου συνόλου εντολών του Mathematica.

```
n=30000;T=Table[0,{n}];i=1;
While[i<=n,U1=Random[];Y=-2*Log[1-U1];
    U2=Random[];If[U2<=Y*Exp[-Y/2+1]/2,T[[i]]=Y;i++];
 ]
p1=Histogram[T,HistogramScale→1];
p2=Plot[x*Exp[-x],{x,0,7}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 6.Κατανομή Γάμμα (2, 1)



Παράδειγμα 2.2.2.

Έστω η τ. μ. X με σ.π.π.

$$f_2(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, x > 0.$$

Θα παράγουμε αριθμούς από αυτή τη κατανομή με τη μέθοδο της απόρριψης. Υπάρχουν πολλές κατανομές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο. Για παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε τη κατανομή Gamma με παραμέτρους 3 και 1, επειδή έχει το ίδιο στήριγμα $(0, \infty)$ και σ.π.π.

$$g(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2}, x > 0,$$

που είναι αρκετά παρόμοια με την $f_2(x)$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απόρριψης, όπως και πριν, έτσι και τώρα θα καθορίσουμε κατάλληλη σταθερά c έτσι ώστε να ισχύει

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)}{g(x)} = \frac{\frac{4x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}}{\frac{x^2 e^{-x}}{2}} = \frac{8e^{-x^2+x}}{\sqrt{\pi}} \leq c$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την συνάρτηση

$$h_2(x) = \frac{8e^{-x^2+x}}{\sqrt{\pi}}, x > 0$$

ως προς την ύπαρξη πιθανών ακροτάτων. Παρατηρούμε ότι

$$h_2{}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8e^{-x^2+x}(-2x+1)}{\sqrt{\pi}} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1/2.$$

Η δεύτερη παράγωγος στο $x_0 = 1/2$ είναι ίση με

$$h_2{}''(x_0) = -\frac{16}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}} < 0,$$

Δηλαδή το παραπάνω σημείο αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο. Οπότε η σταθερά με τη μέθοδο της απόρριψης c ισούται με

$$c = \max\left\{x \in (0, \infty): \frac{f_2(x)}{g(x)} \geq 0\right\} = h(1/2) = \frac{8e^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από αυτή τη κατανομή με τη μέθοδο της απόρριψης μπορεί να είναι ο επόμενος.

Βήμα 1.*Παράγουμε* $Y\sim Gamma(3,1)$.
Βήμα 2. *Παράγουμε έναν αριθμό* $U\sim U(0,1)$.
Βήμα 3.*Αν* $U \leq \frac{f_2(Y]}{cg(Y)} = e^{-Y^2+Y-1/4}$, *τότε θέτουμε X = Y και σταματάμε.*

Ο προηγούμενος αλγόριθμος απαιτεί κατά μέσο όρο

$$E(N) = c = \frac{8e^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cong 5{,}794$$

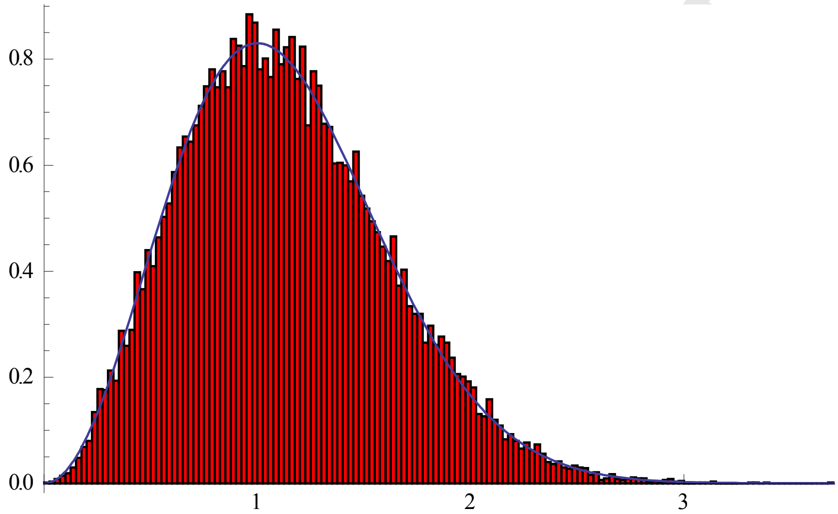
βήματα προκειμένου να γίνει αποδεκτός ένας αριθμός. Πιθανώς με κάποια άλλη βοηθητική κατανομή να είχαμε οδηγηθεί σε μικρότερο *c* και ταχύτερο αλγόριθμο, αλλά και αυτή είναι μια αρκετά καλή κατανομή. Μέσω Mathematica υλοποιούμε τον παραπάνω αλγόριθμο, παράγοντας 50 αριθμούς από αυτή την κατανομή με τη μέθοδο της απόρριψης.

```
n=50;t=Table[0,{n}];i=1;
While[i≤n,Y=RandomReal[GammaDistribution[3,1]];U2=Random[];
If[U2≤Exp[-Y^2+Y-0.25],t[[i]]=Y;i++];
]
Print[t]
```

Στη συνέχεια μπορούμε να συγκρίνουμε τις τιμές με ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων (για π.χ. 25000 παραγόμενες τιμές) και την καμπύλη της πυκνότητας πιθανότητας f_2.Από το επόμενο σχήμα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι έχουμε μια αρκετά καλή προσαρμογή των προσομοιωμένων τιμών, ενώ αυξάνοντας και άλλο το δείγμα θα πάρουμε ακόμα καλύτερη προσέγγιση.

```
n=25000;t=Table[0,{n}];i=1;
While[i≤n,Y=RandomReal[GammaDistribution[3,1]];
      U2=Random[];If[U2≤Exp[-Y^2+Y-0.25],t[[i]]=Y;i++];
]
H=Histogram[t,HistogramScale→1];
P=Plot[4*x^2*Exp[-x^2]/Sqrt[Pi],{x,0,5}];
Show[H,P]
```

Σχήμα 7.Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πυκνότητας $\mathbf{f_2}$.



Παράδειγμα 2.2.3

Έστω X η τ.μ. με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_3(x) = \frac{e^{-x^a}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}, x > 0, a > 1.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν βοηθητική κατανομή μια εκθετική κατανομή με παράμετρο θ προκειμένου να εφαρμόσουμε την μέθοδο της απόρριψης, με πυκνότητα

$$g(x) = \theta e^{-\theta x}, \qquad x, \theta > 0.$$

Σχηματίζουμε έπειτα την συνάρτηση

$$h_3(x) = \frac{f_3(x)}{g(x)} = \frac{\frac{e^{-x^a}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}}{\theta e^{-\theta x}}$$
$$= \frac{e^{-x^a}e^{\theta x}}{\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)} = \frac{e^{x(\theta - x^{a-1})}}{\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}.$$

Και έπειτα θα την μελετήσουμε ως προς την ύπαρξη ακροτάτων. Έτσι θα είναι

$$h_3{}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\theta - ax^{a-1})e^{x(\theta - x^{a-1})}}{\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\theta - ax^{a-1}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_0 = \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}.$$

Μπορούμε να δούμε πως η δεύτερη παράγωγος της προηγούμενης συνάρτησης είναι αρνητική σε αυτό το σημείο, και έτσι θα αποτελεί τοπικό μέγιστο.Η σταθερά με τη μέθοδο της απόρριψης που θα χρησιμοποιήσουμε καθορίζεται από την ισότητα

$$c = c(\theta) = \max\left\{x \in (0,\infty): \frac{f_3(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$$
$$= \frac{\exp\left(\left(\frac{\theta}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}\left(\theta - \left(\frac{\theta}{a}\right)\right)\right)}{\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)} = \cdots = \frac{\exp\left(\left(\frac{\theta}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}(a-1)\right)}{\theta\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}$$

Έπειτα θα χρειαστεί να δούμε που ελαχιστοποιείται η παραπάνω συνάρτηση, καθώς για αυτό το σημείο θα είναι πιο αποδοτικός ο αλγόριθμος. Ελαχιστοποιείται για $\theta = a^{1/a}$ και άρα

$$c = \frac{\exp\left(\frac{a-1}{a}\right)}{a^{1/a}\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}.$$

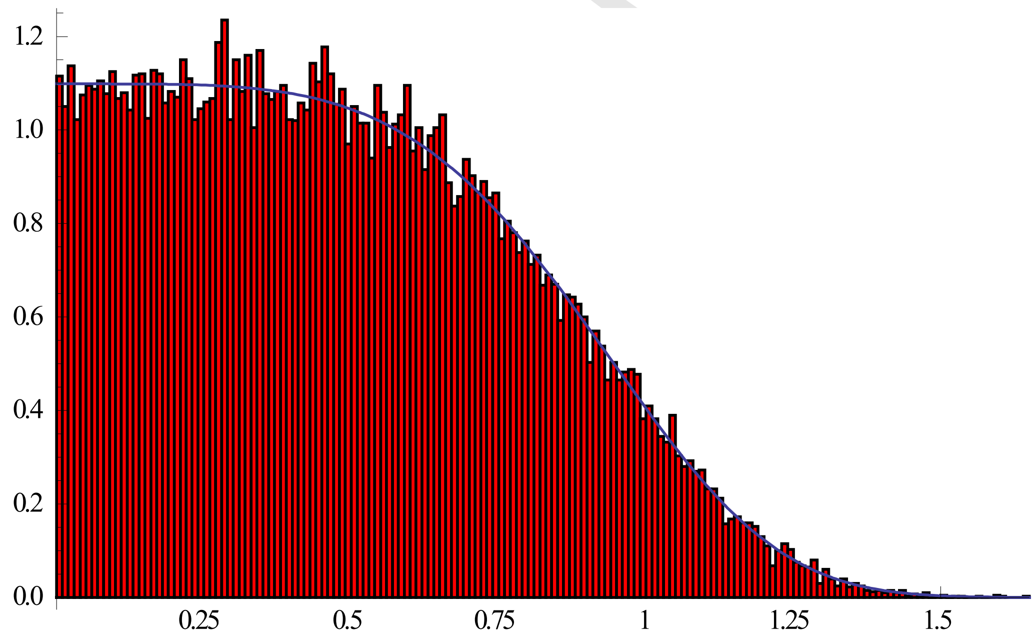
Μπορούμε να δώσουμε έπειτα τον αλγόριθμο παραγωγής αριθμών από αυτή την κατανομή με την μέθοδο της απόρριψης.

Βήμα 1.*Παράγουμε έναν αριθμό* $Y \sim Exp(a^{\frac{1}{a}}.)$
Βήμα 2. *Παράγουμε έναν αριθμό* U~U(0,1).
Βήμα3.*Αν*$U \leq \frac{f_3(Y)}{cg(Y)} = \cdots = e^{Y\left(a^{\frac{1}{a}}-Y^{a-1}\right)-\frac{a-1}{a}}$, *τότε θέτουμε X = Y και σταματάμε.*

Υλοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο μέσω του Mathematica, παράγοντας 40000 αντίγραφα της *X* και κατασκευάζοντας το αντίστοιχο ιστόγραμμα, έχουμε μια ικανοποιητική προσαρμογή (π.χ. για *α=4.3*).

```
a=4.3; m=40000; RandomNumbers=Table[0,{m}];
t=a^(1/a); j=1;
While[j≤m,Y=-(1/t)*Log[1-Random[]];U=Random[];
  If[U≤ Exp[Y*(t-Y^(a-1)/(a)],RandomNumbers[[j]]=Y;j++];
]
pl1=Histogram[RandomNumbers,HistogramScale→1];
pl2=Plot[Exp[-x^a]/Gamma[1+(1/a)],{x,0,2}];
Show[pl1,pl2]
```

Σχήμα 8. Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πυκνότητας f_3.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η μέθοδος της σύνθεσης (The Composition Method).

3.1. Διακριτή περίπτωση.

Η μέθοδος της σύνθεσης χρησιμοποιείται κυρίως για να παράγουμε αριθμούς από διάφορες μίξεις κατανομών, δηλαδή για κατανομές με σ.π.π. της μορφής

$$p_i = a_1 f_1(i) + a_2 f_2(i) + \cdots + a_k f_k(i), i \in N,$$

όπου $a_1, a_2, .., \alpha_\kappa$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\sum_{j=1}^{k} a_k = 1$ και $f_1, \dots, f_k$ περιθώριες σ.π.π. από κατανομές $F_1, \dots, F_k$. Η πιο απλή περίπτωση είναι για *k*=2, όπου η σ.π.π. είναι της μορφής

$$p_i = \alpha f_1(i) + (1-\alpha) f_2(i) (0 < \alpha < 1), i \in N.$$

Ο ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την μίξη κατανομής με τη μέθοδο της σύνθεσης είναι ο επόμενος (βλ., *Ross* (2006))

Βήμα 1: *Παράγουμε έναν τ. α.* $U \sim U(0,1)$
Βήμα 2: *Αν* $U < \alpha$ *παράγουμε X από την* F_1 *αλλιώς παράγουμε από την* F_2.

Παράδειγμα 3.1

Έστω η τ.μ. *X* με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_i = P(X = i) = \frac{1}{3} q_1 (1-q_1)^{i-1} + \frac{2}{3} q_2 (1-q_2)^{i-1}, i = 1,2,.., \qquad 0 < q_1, q_2 < 1.$$

Η παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας είναι στην πραγματικότητα η συνάρτηση πιθανότητας της μίξης 2 γεωμετρικών κατανομών, έστω F_1, F_2 με παραμέτρους q_1, q_2 αντίστοιχα. Μπορούμε να παράγουμε εύκολα αριθμούς από αυτές τις κατανομές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιστροφής (βλ. Πίνακα Κεφαλαίου 1), οπότε θα παράγουμε αριθμούς από αυτή τη μίξη κατανομών με τη μέθοδο της σύνθεσης βασιζόμενοι στον επόμενο αλγόριθμο.

Βήμα 1: *Παράγουμε έναν τ.α.* $U_1, U_2 \sim U(0,1)$
Βήμα 2: *Αν* $U_1 < 1/3$ *παράγουμε από την* F_1 (*θέτουμε* $X = \left\lfloor \frac{lnU_2}{ln\,(1-q_1)} \right\rfloor + 1$), *αλλιώς παράγουμε από την* F_2 (*θέτουμε* $X = \left\lfloor \frac{lnU_2}{ln(1-q_2)} \right\rfloor + 1$)

Και μέσω Mathematica (αριθμητική εφαρμογή για $q_1 = 0.2, q_2 = 0.4$) για να παράγουμε 100 αριθμούς θα είναι οι επόμενες εντολές.

```
n=100;RandomNumbers={};q1=0.2;q2=0.4;a=1/3;
Do[U1=Random[];U2=Random[];
If[U1<a,X=Floor[Log[U2]/Log[1-q1]]+1,
        X=Floor[Log[U2]/Log[1-q2]+1]];
 AppendTo[RandomNumbers,X];
,{n}]
Print[RandomNumbers]
```

3.2. Συνεχής περίπτωση

Η μέθοδος της σύνθεσης τροποποιείται ελάχιστα για να μπορεί να εφαρμοστεί και στην συνεχή περίπτωση, όπου έχουμε μια συνεχή κατανομή που προκύπτει από μια μίξη άλλων συνεχών κατανομών. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή με σ.π.π. της μορφής

$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_k f_k(x),\ x \in S \subseteq R,$

όπου $a_1, a_2, .., \alpha_\kappa$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

$\sum_{j=0}^{k} a_k = 1$ και $f_1, \dots, f_k$ περιθώριες σ.π.π. από κατανομές $F_1, \dots, F_k$.

Στην πιο απλή περίπτωση όπου k=2, η σ.π.π. είναι της μορφής

$$f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)\ \ (0 < \alpha < 1),\ \ x \in R$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με τη μέθοδο της σύνθεσης είναι ο επόμενος.

Βήμα 1:*Παράγουμε έναν τ. α. U*~U(0,1).
Βήμα 2:*Αν $U < \alpha$ παράγουμε από την F_1 αλλιώς παράγουμε από την F_2.*

Παράδειγμα 3.2 (Μίξη Εκθετικών Κατανομών)

Έστω η τ. μ. *X* με σ. π.

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-2x}, x > 0$$

Η παραπάνω πυκνότητα πιθανότητας είναι η μίξη 2 ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ.*Exp*(1), *Exp*(2). Η σ.κ. εύκολα διαπιστώνεται ότι ισούται με

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-2t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{3}(1-e^{-x})+\frac{2}{3}(1-e^{-2x})$$
$$=\frac{1}{3}F_1(x)+\frac{2}{3}F_2(x), x>0.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής για να παράγουμε αριθμούς από τις F_1, F_2 θέτοντας απλά $X=-logU$ ή $X=-\frac{logU}{2}, U\sim U(0,1)$. Οπότε ο αλγόριθμος χρησιμοποιώντας την μέθοδο της σύνθεσης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

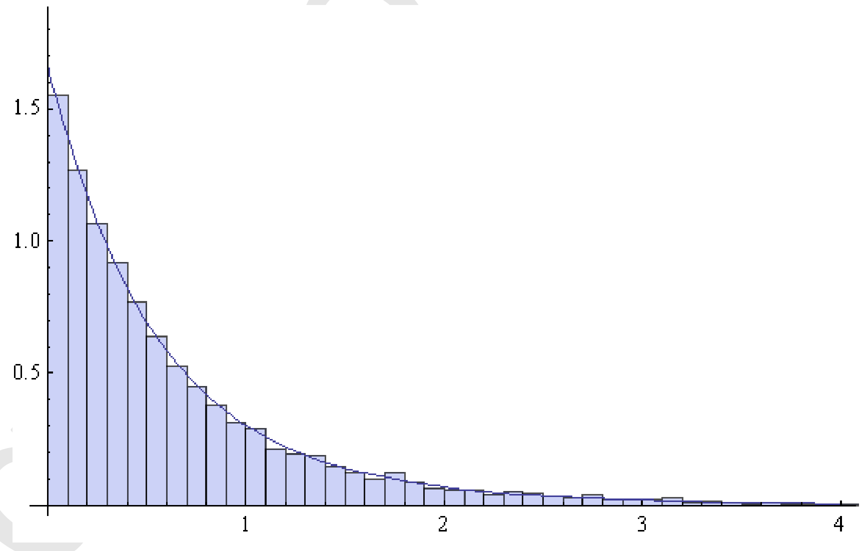
Βήμα 1:Παράγουμε. $U_1, U_2\sim U(0,1)$.
Βήμα 2:Αν $U_1<\frac{1}{3}$, τότε παράγουμε $X=-logU_2$ αλλιώς παράγουμε $X=-\frac{logU_2}{2}$.

Παράγουμε στη συνέχεια 100 αριθμούς από την παραπάνω μίξη κατανομών.

```
a=1/3;n=10000;numbers={};
Do[U1=Random[];U2=Random[];
 If[U1<a,X=-Log[U2],X=-Log[U2]/2];
 AppendTo[numbers,X];,{n}]
Print[numbers]
```

Από το παρακάτω σχήμα (ιστόγραμμα 10000 παραγόμενων αριθμών, μαζί με την παραπάνω σ.π.π. f), διαπιστώνουμε πως πρόκειται πράγματι για τυχαίους αριθμούς από την παραπάνω μίξη κατανομών.

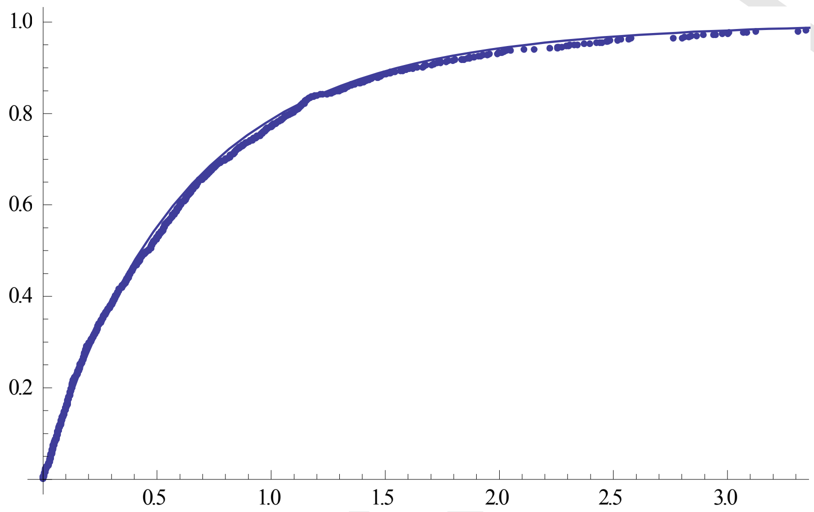
Σχήμα 9. Ιστόγραμμα συχνοτήτων της προηγούμενης πυκνότητας.



Αυτή η μέθοδος έχει καλή ακρίβεια, όπως βλέπουμε από το επόμενο σχήμα της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής.

```
a=1/3;n=1000;numbers={};
Do[U1=Random[];U2=Random[];
 If[U1<a,X=-Log[1-U2],X=-Log[1-U2]/2];
 AppendTo[numbers,X];,{n}]
s=Sort[numbers];
t=Table[{s[[j]],j/n},{j,1,n}];
L=ListPlot[t];
P=Plot[a*(1-Exp[-x])+(1-a)*(1-Exp[-2*x]),{x,0,4}];
Show[L,P]
```

Σχήμα 10.Εμπειρική συνάρτηση κατανομής της μίξης εκθετικών.



Παραγωγή αριθμών από κανονική κατανομή συνδυάζοντας κάποια από τις τρείς παραπάνω μεθόδους.

Η κανονική κατανομή μπορεί να θεωρηθεί ως η βασικότερη όλων των κατανομών, οπότε η παραγωγή αριθμών από αυτήν είναι αρκετά σημαντική.Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες μεθόδους για να παράγουμε αριθμούς από την κανονική κατανομή. Έστω λοιπόν μια τ.μ. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Υπενθυμίζουμε πως η τ.μ. X έχει σ.π.π.

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}, x \in R$$

Η παραγωγή αριθμών από οποιαδήποτε κανονική κατανομή μπορεί να γίνει αν παράγουμε αρχικά αριθμούς από την τυπική κανονική κατανομή Z~N(0, 1) με σ.π.π.

$$\varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, z \in R$$

και έπειτα εκτελώντας απλά τον μετασχηματισμό $X = \mu + \sigma Z$ λαμβάνουμε την $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Το ερώτημα λοιπόν είναι πως θα παράγουμε αριθμούς από την τ. μ. $Z \sim$ N (0, 1) με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους. Δεν μπορούμε φυσικά να εφαρμόσουμε απευθείας την μέθοδο της αντιστροφής, καθώς η σ.κ. της N(0,1), με

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

δεν μπορεί να δοθεί σε απλούστερη μορφή, και αν και υπάρχει η αντίστροφή της, είναι αδύνατον να επιλυθεί με αναλυτικό τρόπο. Έτσι θα καταφύγουμε στην μέθοδο της απόρριψης η στην μέθοδο της σύνθεσης.

Υπάρχουν αρκετές κατανομές παρόμοιες με την καμπανοειδή συμμετρική μορφή της κανονικής κατανομής. Μια αρκετά καλή βοηθητική κατανομή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η κατανομή της τ. μ. *Y~Laplace (α, β)* (Διπαραμετρική εκθετική) με πυκνότητα πιθανότητας

$g(y) = \frac{1}{2} e^{-|y-\alpha|/\beta}, \alpha \in R, \beta > 0, y \in R.$

Σημειώνεται ότι μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή $Laplace(\alpha, \beta)$ βασιζόμενοι στην τυπική κατανομή *Laplace*(0,1) με σ.π.π.

$g(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|}, y \in R,$

και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την κατανομή για να παράγουμε αριθμούς από την τυπική κανονική N(0,1) γιατί έχει το ίδιο στήριγμα R. Μάλιστα μπορούμε να βρούμε μια αρκετά ικανοποιητική συνθήκη απόρριψης. Πράγματι, $\forall x \in R$ ισχύει πως

$$\frac{1}{2}(|x| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + 1 - 2|x|) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - |x| \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 \geq |x| \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 \geq -\frac{1}{2} + |x| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}-|x|}$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x) \leq cg(x),$$

όπου $\varphi(.)$ η σ.π.π. της N(0,1), $g(.)$ η σ.π.π.της Laplace(0,1) και $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$ η σταθερά της απόρριψης.

Μπορούμε επίσης εύκολα να παράγουμε αριθμούς από την Laplace π.χ. με την μέθοδο της αντιστροφής ή με τη μέθοδο της σύνθεσης παράγοντας μια τ.μ. $X_1 \sim Exp(1)$. Η σ.π.π.της *Laplace* (0,1) στον θετικό ημιάξονα συμπεριφέρεται ουσιαστικά σαν την κατά το ήμισυ πυκνότητα πιθανότητας της $Exp(1)$, κάτι που είναι και διαισθητικό, γιατί η κατανομή *Laplace* (0,1) είναι συμμετρική γύρω από το 0 και έτσι το ολοκλήρωμα στον θετικό ημιάξονα θα ισούται με ½ , και στον αρνητικό πάλι με ½, έτσι ώστε να αθροίζει στην μονάδα(για αυτό και η Laplace καλείται αλλιώς διπλή εκθετική κατανομή). Οπότε, για να παράγουμε την $Y \sim \ Laplace(0,1)$ με την μέθοδο της σύνθεσης, αρκεί απλά να παράγουμε $X_1 \sim Exp(1)$, $U_1 \sim U(0,1)$ και αν $U_1 < 1/2$, τότε να θέσουμε $Y = -X_1$, αλλιώς να θέσουμε $Y = X_1$. Συνοψίζοντας , ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την κανονική $N(\mu, \sigma^2)$ μέσω της *Laplace* με την μέθοδο της απόρριψης μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με τα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1:*Παράγουμε* $U_1 \sim U(0,1)$ *και θέτουμε* $X_1 = -lnU_1 \sim Exp(1)$.
Βήμα 2:*Παράγουμε* $U_2 \sim U(0,1)$ *και αν* $U_2 < \frac{1}{2}$, *θέτουμε* $Y = -X_1$, *αλλιώς* $Y = X_1$.
Βήμα 3:*Παράγουμε* $U_3 \sim U(0,1)$.
Βήμα 4:*Αν* $U_3 \leq \frac{\varphi(Y)}{cg(Y)} = \cdots = e^{-\frac{Y^2}{2}+|Y|-\frac{1}{2}}$, *θέτουμε* $Z = Y$ *και συνεχίζουμε, αλλιώς σταματάμε.*
Βήμα 5:*Θέτουμε τέλος* $X=\mu+\sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο και χρησιμοποιώντας το Mathematica, παράγουμε π.χ. 60 αριθμούς από την κανονική κατανομή $N(\mu = \ 1.8, \sigma^2 = 2.25)$

```
m=1.8;s=1.5;n=60;Randomnumbers=Table[0,{n}];j=1;
While[j≤n,U1=Random[];X1=-Log[Random[]];U2=Random[];
 If[U2<0.5,Y=-X1,Y=X1];U3=Random[];
 If[U3≤                                  Exp[-(Y^2/2)+Abs[Y]-
1/2],Randomnumbers[[j]]=m+s*Y;j++];]
Print[Randomnumbers]
```

Ο προηγούμενος αλγόριθμος απαιτεί κατά μέσο όρο

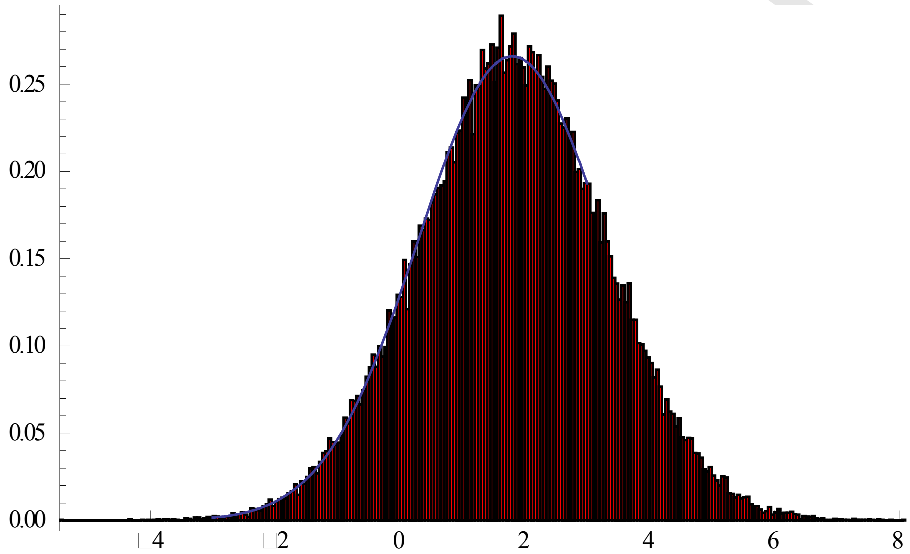
$$c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \cong 1.31,$$

βήματα για να επιστρέψει μια παρατήρηση, και είναι ένας αρκετά ικανοποιητικός αλγόριθμος.

Όπως διαπιστώνουμε από το παρακάτω σχήμα που είναι το ιστόγραμμα 60000 παραγόμενων αντιγράφων της *X* και την καμπύλη της σ.π.π. της κατανομής, αυτή η μέθοδος είναι αρκετά ικανοποιητική.

```
m=1.8;s=1.5;n=60000;Randomnumbers=Table[0,{n}];j=1;
While[j≤n,U1=Random[];X1=-Log[Random[]];U2=Random[];
 If[U2<0.5,Y=-X1,Y=X1];U3=Random[];
 If[U3≤Exp[-(Y^2/2)+Abs[Y]-1/2],
    Randomnumbers[[j]]=m+s*Y;j++];]
p1=Histogram[Randomnumbers, HistogramScale→1];
p2=Plot[PDF[NormalDistribution[m,s],x],
{x,-3,3}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 11.Κανονική Κατανομή Ν(μ, σ^2)



Φυσικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε κατανομή με το ίδιο στήριγμα και παρόμοια συμπεριφορά με την κανονική, όπως την Cauchy, την Λογιστική κ.α.. Σε κάθε περίπτωση εξαρτάται η σταθερά της απόρριψης που θα χρησιμοποιήσουμε, καθώς όσο μικρότερη είναι, τόσο πιο αποτελεσματικός είναι ο αλγόριθμος. Αν π.χ. είχαμε χρησιμοποιήσει την τυπική Cauchy(0,1) με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in R$$

τότε η σταθερά της απόρριψης που θα βρίσκαμε θα ήταν ίση με $c = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \cong 1.52$ και ο αλγόριθμος θα ήταν ελαφρώς αργότερος.

Η παραγωγή αριθμών από κανονική κατανομή είναι ένα σημαντικό κομμάτι στην θεωρία παραγωγής τυχαίων αριθμών, γιατί η κανονική κατανομή είναι αυτή που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές στην πράξη. Το ποιος είναι ο αποτελεσματικότερος τρόπος παραγωγής αριθμών από κανονικές κατανομές είναι αντικείμενο συζήτησης και μελέτης, και κατά καιρούς έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι , όπως π.χ. στις πρώτες εφαρμογές της γλώσσας προγραμματισμού FORTRAN, μέσω αθροίσματος 12 ανεξάρτητων ομοιόμορφων τ.μ. $U_1, \dots$, U_{12} έτσι ώστε η τ.μ.

$$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

προσεγγιστικά να ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,1)$, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Αυτή η μέθοδος, αν και πολύ εύκολη και υλοποιήσιμη, δεν έχει φυσικά πολύ μεγάλη ακρίβεια. Άλλη γνωστή μέθοδος παραγωγής αριθμών από κανονικές κατανομές είναι η μέθοδος των πολικών συντεταγμένων (βλ. Box-Muller, 1958), που είναι μια αρκετά καλή μέθοδος. Αλλά το ποια είναι η αποτελεσματικότερη μέθοδος, αυτό παραμένει ακόμα και σήμερα αμφισβητήσιμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

Η μέθοδος Forsythe-Von Neumann (The Forsythe-Von Neumann Method).

Η μέθοδος των Forsythe – Von Neymann είναι μια ειδική μέθοδος που μοιάζει με την μέθοδο της απόρριψης και χρησιμοποιείται για κάποιες κατανομές που μπορούν να γραφούν σε μια συγκεκριμένη μορφή. Πριν προχωρήσουμε στον αλγόριθμο της μεθόδου Forsythe-Von Neumann, θα αποδείξουμε κάποιες βασικές προτάσεις που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Πρόταση 1. (Devroye (1986)). *Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα* $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$ *από* κ *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής* F. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα*

(1) $P(x \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{\kappa-1} < X_\kappa) = \frac{F(x)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} - \frac{F(x)^\kappa}{\kappa!}, \quad \forall x.$

(2) *Αν η διακριτή τ.μ.* K *καθορίζεται από τις* $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$ *από την συνθήκη*

$x \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{K-1} < X_K$,

τότε ισχύει ότι

$$P(K = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = e^{-F(x)}, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x.$$

(3) *Έστω μια τ. μ.* Y *με συνάρτηση κατανομής* G *ανεξάρτητη από τις* $X_1, X_2, \dots$ *και έστω ότι καθορίζεται από την συνθήκη*

$Y \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{K-1} < X_K$.

Τότε, για κάθε x,

$$P(Y \leq x | K\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-F(y)} dG(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)} dG(y)}.$$

Απόδειξη. Για σταθερό $x \in R$ η πιθανότητα του παρακάτω ενδεχομένου

$A := \{x \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_\kappa\}$

ισούται με

$$P(A) = P(x \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_\kappa)$$

$$= P(max\{X_i\} \leq x)P(X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_\kappa)$$

$$= \frac{P(max\{X_i\} \leq x)}{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \mu\varepsilon\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\omega\nu\ \tau\omega\nu\ \kappa\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu}$$

$$= \frac{P(X_1 \leq x, \dots, X_k \leq x)}{k!}$$
$$= \frac{P(X_1 \leq x) \dots P(X_k \leq x)}{k!}$$
$$= \frac{F(x)^k}{k!}.$$

Έτσι θα έχουμε την παρακάτω πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(x \geq\ X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{\kappa-1} < X_\kappa) \\ &= P(x \geq\ X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{\kappa-1}) - P(x \geq\ X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_\kappa) \\ &= \frac{F(x)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} - \frac{F(x)^\kappa}{\kappa!}. \end{aligned}$$

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος, από την υπόθεση έχουμε ότι η διακριτή τ.μ. K προκαθορίζεται από την συνθήκη

$$x \geq\ X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq\ X_{K-1} < X_K$$

οπότε η πιθανότητα η τ. μ. K να είναι περιττός αριθμός θα ισούται με

$$\begin{aligned} P(K = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) &= P(X = 2 * k + 1), k = 0,1,2 \dots \\ &= P(X = 1) + P(X = 3) + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{F(x)}{1!}\right) + \left(\frac{F(x)^2}{2!} - \frac{F(x)^3}{3!}\right) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k F^k(x)}{k!} \\ &= e^{-F(x)}. \end{aligned}$$

Για το τρίτο σκέλος, γνωρίζουμε από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας θα ισχύει ότι

$$P(Y \leq x, K\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = \int_{-\infty}^{x} P(K\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma | Y = y) dG(y) \qquad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} e^{-F(y)} dG(y).$$

Ενώ από το προηγούμενο αποτέλεσμα ξέρουμε ότι

$P(K\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = E(e^{-F(x)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)}\, dG(y)$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$P(Y \leq x | K\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-F(y)} dG(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)}\, dG(y)}$$

και εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε τη μέθοδο του Forsythe-Von Neumann, που χρησιμοποιείται για σ.π.π. της μορφής

$$f(x) = cg(x)\exp\{-F(x)\}, \qquad \textbf{(4.1)}$$

όπου c κατάλληλη σταθερά, $g(\cdot)$ μια σ.π.π. και επίσης μια συνάρτηση $F(\cdot)$ που ικανοποιεί την συνθήκη

$0 \leq\ F(x) \leq 1\ \forall x,$

η οποία δεν είναι απαραίτητα μια συνάρτηση κατανομής. Ο αλγόριθμος με την μέθοδο των Forsythe von Neymann για την παραγωγή αριθμών από την *X* είναι ο ακόλουθος. (Devroye (1986)).

Βήμα 1: *Παράγουμε* $U{\sim}U(0{,}1)$ *και θέτουμε* $X{\sim}g$.

Βήμα 2: *Θέτουμε* $W = F(X)$, *K* = 1, *Stop = False*.

Βήμα 3: *Παράγουμε μια* τ. μ. $U{\sim}U(0{,}1)$.

Βήμα 4: Αν *U>W*, *θέτουμε Stop=True*, *αλλιώς θέτουμε K=K*+1 *και W = U.*

Βήμα 5: *Επαναλαμβάνουμε τα Βήματα* 3,4 *μεχρι Stop=True.*

Βήμα 6 *: Αν K = περιττός σταματάμε και επιστρέφουμε το X, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε όλα τα παραπάνω βήματα.*

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος οδηγεί σε παραγωγή ενός $x{\sim}f(x)$. Είναι φανερό ότι από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ένα *X* δεδομένου ότι ο *K* είναι περιττός. Επομένως για το παραγόμενο *X* θα ισχύει ότι (βλ. **Πρόταση 1.(**3))

$$P(X \leq x | K\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-F(y)} dG(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)} dG(y)} = \int_{-\infty}^{x} ce^{-F(y)} g(y) dy.$$

και άρα η X που προκύπτει θα έχει σ.π.π.

$f(x) = cg(x)e^{-F(x)}$.

Ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο

$$p = P(K\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)} g(y) dy.$$

οπότε ο αναμενόμενος αριθμός των επαναλήψεων του προηγούμενου αλγορίθμου είναι ίσος με $1/p$. Στην ουσία λοιπόν, η παραπάνω μέθοδος είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου της απόρριψης που χρησιμοποιείται για κατανομές της μορφής (**4.1**).

Επίσης, η μέση τιμή της διακριτής τ. μ. K ισούται με

$$E(K) = \int \left[1\left(1 - \frac{F(x)}{1!}\right) + 2\left(\frac{F(x)}{1!} - \frac{F(x)^2}{2!}\right) + \cdots \right] g(x)dx$$

$$= \int \left[1 + \frac{F(x)}{1!} + \frac{F(x)^2}{2!} + \frac{F(x)^3}{3!} + \cdots \right] g(x)dx$$

$$= \int e^{F(x)} g(x)dx.$$

Τέλος, αν έστω N είναι το συνολικό πλήθος των αριθμών που πρέπει να παράγουμε από την ομοιόμορφη στο (0,1), η μέση τιμή της αποδεικνύεται ότι ισούται με

$$E(N) = \frac{1 + E(K)}{p} = \frac{1 + \int e^{F(x)} g(x)dx}{\int e^{-F(x)} g(x)dx}.$$

Μπορεί επίσης να εξακριβωθεί πως για τη μέση τιμή ισχύει ότι (Devroye (1986))

$$2 \leq E(N) \leq \frac{1 + e}{\frac{1}{e}} = e + e^2 \cong 10.1$$

Παράδειγμα 4.1:

Έστω μια τ. μ. X που ακολουθεί την κατανομή με σ.π.π.

$f(x) = \frac{e}{(e-2)} xe^{-x}, \quad 0 < x < 1.$

Η παραπάνω σ.π.π. ικανοποιεί την μορφή **(4.1),** με

$$c = \frac{e}{2(e-2)}, \qquad g(x) = 2x, \qquad F(x) = x, \qquad \forall\, 0 < x < 1.$$

Σημειώνεται πως σε αυτό το παράδειγμα η συνάρτηση

$F(x) = x, 0 \leq F(x) \leq 1$,

είναι μια συνάρτηση κατανομής, αν κι δεν είναι απαραίτητο. Η συνάρτηση

$$g(x) = 2x, 0 < x < 1$$

αποτελεί μια σ.π.π., αφού ικανοποιεί την συνθήκη

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1.$

και η οποία έχει σ.κ.

$$G(x) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx = \int_0^t 2xdx = [x^2]_0^t = t^2, 0 < t < 1,$$

και μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από αυτήν με τη μέθοδο της αντιστροφής, καθώς θα είναι

$G(x) = u \Leftrightarrow x^2 = u \Leftrightarrow t = \sqrt{u}$, οπότε εκτελώντας απλά τον μετασχηματισμό

$X = G^{-1}(U) = \sqrt{U}.$

(Η σταθερά c χρησιμοποιείται αποκλειστικά έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της προηγούμενης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X να ισούται με τη μονάδα).Υλοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο με τη μέθοδο Forsythe Von Neumann για τα δεδομένα της κατανομής, θα έχουμε τον επόμενο αλγόριθμο.

Βήμα 1:*Παράγουμε* $U\sim U(0,1)$ *και θέτουμε* $X = \sqrt{U}$.

Βήμα 2:*Θέτουμε* $W = F(X) = X$, $K = 1$, *Stop = False*.

Βήμα 3:*Παράγουμε μια* τ. μ. $U\sim U(0,1)$.

Βήμα 4:Αν $U > W$, *θέτουμε Stop = True*, *αλλιώς θέτουμε* $K = K + 1$ *και* $W = U$

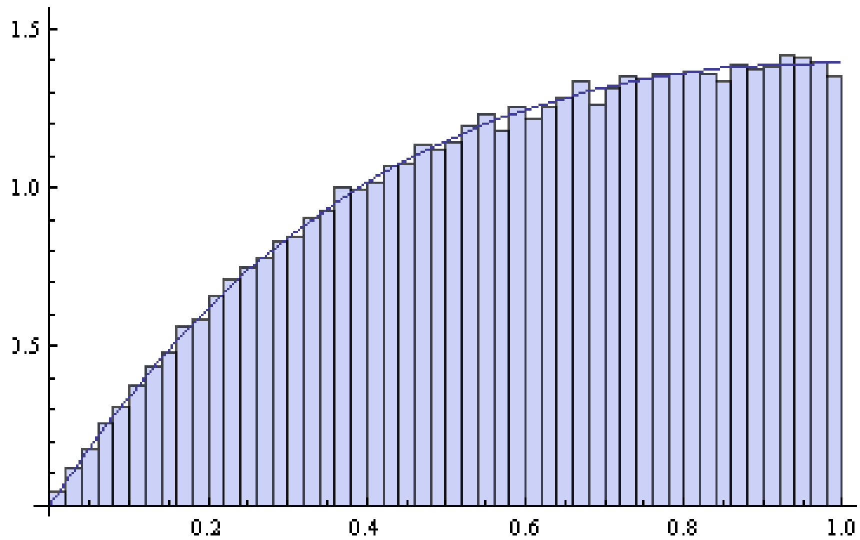
Βήμα 5:*Επαναλαμβάνουμε τα Βήματα* 3,4 *μεχρι Stop=True*

Βήμα 6 *: Αν K = περιττός σταματάμε και επιστρέφουμε το X, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε όλα τα παραπάνω βήματα.*

Μέσω του Mathematica παράγουμε αριθμούς από την ζητούμενη κατανομή.Από το επόμενο σχήμα, που είναι το ιστόγραμμα 100000 παραγόμενων αντιγράφων της X μέσω του Mathematica, επαληθεύουμε πως αυτή η μέθοδος είναι ακριβής.

```
c=Exp[1]/(Exp[1]-2);Randomnumbers={};n=1;
While[n<100000,X=Sqrt[Random[]];
 W=X;K=1;Stop=False;
 While[Not[Stop],U=Random[];
  If[U>W,Stop=True,K=K+1;W=U];
 ];
If[Mod[K,2]==1,AppendTo[Randomnumbers,X];n=n+1
]
p1=Histogram[Randomnumbers,HistogramScale->1];
p2=Plot[c*x*Exp[-x],{x,0,1}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 12. Ιστόγραμμα συχνοτήτων της πυκνότητας 4.1.



Για σταθερό $1 < x < \infty$ η πιθανότητα η διακριτή τ.μ. K να πάρει οποιαδήποτε τιμή είναι επίσης σταθερή και ίση με

$P(K\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma | X = x) = e^{-F(x)} = e^{-x}$,

ενώ ο αριθμός K των επαναλήψεων που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να συγκλίνει ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο

$$p = P(K = \kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(y)} g(y) dy$$

$$= \int_0^1 2ye^{-y}dy \ = 2([-ye^{-y}]_0^1 - \int_0^1 e^{-y}dy)$$

$$= 2[-e^{-1} + (1 - e^{-1})] = \frac{2(e-2)}{e} \cong 0.5284$$

Ο αναμενόμενος αριθμός των επαναλήψεων του παραπάνω αλγορίθμου ισούται με

$E(K) = \frac{1}{p} \cong 1.89$,

και τέλος ο αναμενόμενος αριθμός N των αριθμών των τ.α. $U_N \sim U(0,1)$ που απαιτεί ο αλγόριθμος ισούται με

$$E(N) = \frac{1 + E(K)}{p} = \frac{1 + 1.89}{0.5284} \cong 5.47.$$

Σημειώνεται πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της απόρριψης για να παράγουμε αριθμούς από αυτή την κατανομή με καλύτερα αποτελέσματα. Η μέθοδος των Forsythe Von Neymann γενικά είναι μια περιορισμένη μέθοδος κι έχει ένα μικρό μόνο φάσμα εφαρμογών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

Η μέθοδος της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής (The Almost-Exact Inversion Method).

Συχνά, η μέθοδος της αντιστροφής δεν μπορεί να εφαρμοστεί (π.χ. όταν δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο κλειστό τύπο για την συνάρτηση κατανομής, η όταν η σ.π.π. της τ. μ. X είναι μια δύσχρηστη η πολύπλοκη έκφραση). Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, προσπαθούμε να παράγουμε την τ. μ. $X \sim F$ μέσω του μετασχηματισμού $X = \psi(Y)$, όπου Y γνωστή τ. μ. με γνωστή πυκνότητα πιθανότητας h**.** Η συνάρτηση $\psi(U)$, $U \sim U(0,1)$, δεν έχει φυσικά την ίδια κατανομή με την X. (Εκτός βέβαια από την περίπτωση όπου η συνάρτηση ψ συμπίπτει με την αντίστροφη της σ.κ. F).

Υποθέτουμε ότι η τ. μ. Y έχει γνωστή σ.π.π. h, η οποία μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με την παρακάτω μορφή:

$$Y \sim h(y) = f\big(\psi(y)\big)|\psi'(y)|, y \in R. \qquad \textbf{(5.1)}$$

όπου $\psi(\cdot) > 0$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση και $f(\cdot)$ η σ.π.π. της τ. μ. X.

Ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με τη μέθοδο της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής στην γενική του μορφή είναι ο επόμενος.

Βήμα 1:*Παράγουμε την τ. μ. Y με* σ.π.π. h *με οποιονδήποτε τρόπο*.

Βήμα 2:*Θέτουμε* $X=\psi(Y)$.

Η μέθοδος της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής αποτελεί γενίκευση της μεθόδου της αντιστροφής, και μπορεί να καλύψει πολλές από τις περιπτώσεις όπου η προηγούμενη μέθοδος δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 5.1

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε αριθμούς από την τ. μ. X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 με τη παραπάνω μέθοδο. Έστω επίσης η τ.μ. $Y \sim Weibull(1,2)$, ανεξάρτητη από την *X.* Τότε η σ.π.π. της τ. μ. *Y* μπορεί να γραφτεί με την απαιτούμενη μορφή (5.1), καθώς

$Y \sim h(y) = 2ye^{-y^2} = f\big(\psi(y)\big)\psi'(y),$

όπου

$f(t) = e^{-t},\ \psi(t) = t^2, t > 0.$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τ. μ.

$$X = \psi(Y) = Y^2$$

ακολουθεί την *Exp*(1)*,* αφού έχει σ.κ.

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y^2 \leq x) = P\big(Y \leq \sqrt{x}\big) = F_Y(\sqrt{x}),$

και η σ.π.π. της ισούται με

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = F_Y\big(\sqrt{x}\big)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}h\big(\sqrt{x}\big) = \frac{1}{2\sqrt{x}}2\sqrt{x}e^{-x} = e^{-x}, x > 0$$

που είναι η σ.π.π. της *Exp* (1).

Μπορούμε εύκολα να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή *Weibull*(1,2) με τη μέθοδο της αντιστροφής (από τον αντίστοιχο πίνακα της μεθόδου της αντιστροφής του Κεφ.1) και συγκεκριμένα εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$Y = \sqrt{-\log(1-U)}\ , (U \sim U(0,1)).$

Τότε ο αλγόριθμος παραγωγής τ. α. από τη τ. μ. *X* με την μέθοδο της σχεδόν ακριβής αντιστροφής είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1: *Παράγουμε την τ.μ. Y~Weibull*(1,2) (π.χ. *με τη μέθοδο της αντιστροφής*)

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = \psi(Y) = Y^2$.

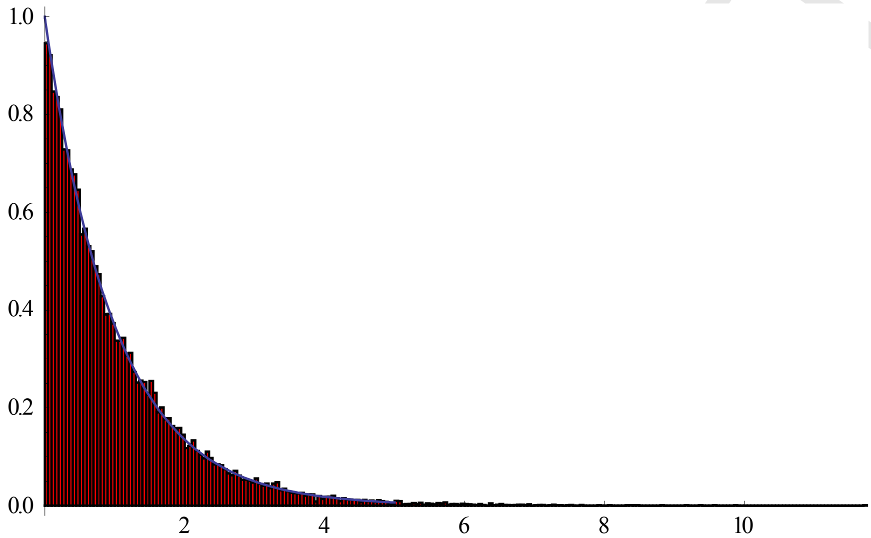
Με το Mathematica υλοποιούμε τον παραπάνω αλγόριθμο και παράγουμε 30 τ. α. από την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, με τις εντολές.

```
n=30;T={};
Do[Y=Sqrt[-Log[1-Random[]]];
 AppendTo[T,Y^2];,{n}];
Print[T]
```

Στη συνέχεια συγκρίνουμε ένα προσομοιωμένο δείγμα *n*=30000 τιμών από την κατανομή της $X \sim Exp[1]$ με την αντίστοιχη καμπύλη της πυκνότητας πιθανότητας της και επαληθεύουμε την ορθότητα του αλγορίθμου.

```
n=30000;T={};
Do[Y=Sqrt[-Log[1-Random[]]];
 AppendTo[T,Y^2];,{n}]
p1=Histogram[T,HistogramScale->1];
p2=Plot[Exp[-x],{x,0,5}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 13. Εκθετική Κατανομή με παράμετρο 1.



Προσεγγίσεις κατανομών Γάμμα με απλές συναρτήσεις κανονικών τ. μ..

Η μέθοδος της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή της τ.μ. $X \sim Gamma(a, 1)$ (ακριβώς ή προσεγγιστικά) με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)}, a > 0, x > 0,$$

με την βοήθεια (τετραγωνικών, συνήθως) συναρτήσεων τυπικών κανονικών κατανομών $Y \sim$ N(0,1). Σκοπός δηλαδή είναι να βρούμε μια κατάλληλη συνάρτηση $\psi(y)$, έτσι ώστε η

$$h(y) = f\big(\psi(y)\big)\psi'(y)$$

να ισούται (ακριβώς ή κατά προσέγγιση) με την σ.π.π. της κανονικής κατανομής $N(0,1)$, δηλαδή

$$h(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, y \in R \ ,$$

και στην συνέχεια να παράγουμε την τ.μ. $X \sim$ Gamma (α, 1) με τον μετασχηματισμό $X = \psi(Y)$.

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες συναρτήσεις (βλ. Devroye, 1984(b)) για την μορφή της συνάρτησης $\psi(\cdot)$ που μετασχηματίζουν τυπικές κανονικές τ.μ. $N(0,1)$ σε κατά προσέγγιση Γάμμα κατανομές $X \sim Gamma(a, 1)$, ορισμένες από τις οποίες απεικονίζονται στον κάτωθι πίνακα.

Πίνακας 3. Μετασχηματισμοί τυπικών κανονικών κατανομών N(0,1) σε κατανομή Γάμμα(α,1).

Μέθοδος	**Μετασχηματισμός $\boldsymbol{\psi(y)}$**
***Freeman-Tukey* (1950)**	$\frac{(y+\sqrt{4a})^2}{4}$
Fisher	$\frac{(y+\sqrt{4a-1})^2}{4}$
***Wilson –Hilferty* (1931)**	$\alpha(\frac{y}{\sqrt{9a}}+1-\frac{1}{9a})^3$
***Marsaglia* (1984)**	$a-\frac{1}{3}+py\sqrt{a}+\frac{y^2}{3},\ p=1-\frac{0.16}{a}$

Παράδειγμα 5.2

Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός που προτείνει ο Marsaglia (1984 (b))είναι η συνάρτηση

$$\psi(y) = a - \frac{1}{3} + py\sqrt{a} + \frac{y^2}{3}, y \in R,$$

όπου το p συνδέεται με το a μέσω της σχέσης

$$p = 1 - \frac{0.16}{a}, 0 < p < 1, a > 0.$$

Ο Αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος (βλ. Devroye (1984, b)):

Βήμα 1:*Παράγουμε* $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$

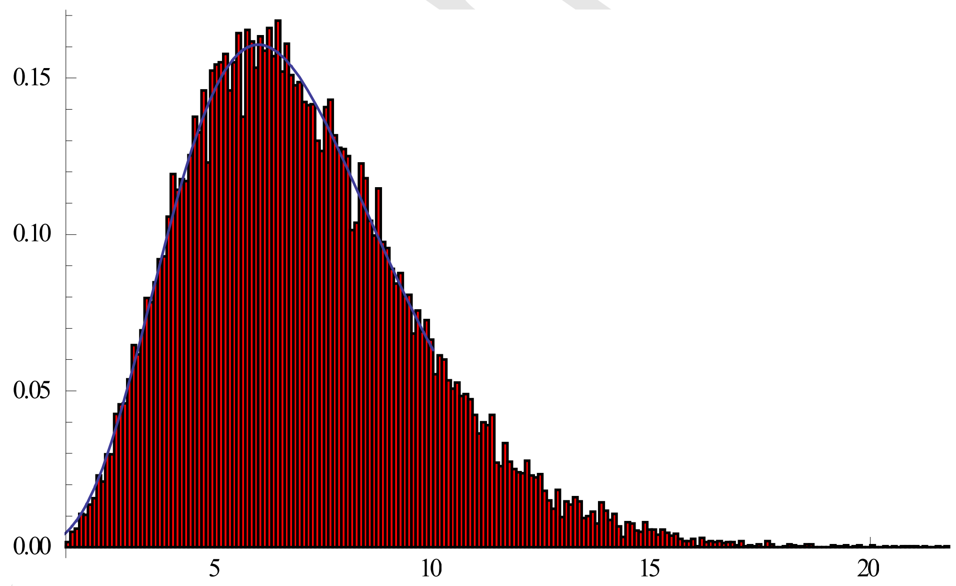
Βήμα 2:*Θέτουμε τέλος* $X = \psi(Y) \sim Gamma(a,1)$ προσεγγιστικά.

Ακολουθεί μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου. Για ευκολία παράγουμε τ.α. από την N(0,1) χρησιμοποιώντας την ενσωματωμένη γεννήτρια του Mathematica, κατασκευάζοντας το ιστόγραμμα και την εμπειρική συνάρτηση κατανομής για n=30000 αριθμούς.

```
a=7;p=1-0.16/a;n=30000;b=Table[0,{n}];
Do[
 Y=Random[NormalDistribution[0,1]];
 X=a-1/3+p*Y*a^(1/2)+Y^2/3;
 b[[i]]=X
 ,{i,1,n}]
pl1=Histogram[b,HistogramScale->1];
pl2=Plot[PDF[GammaDistribution[a,1],x],{x,0,20}];
Show[pl1,pl2]
```

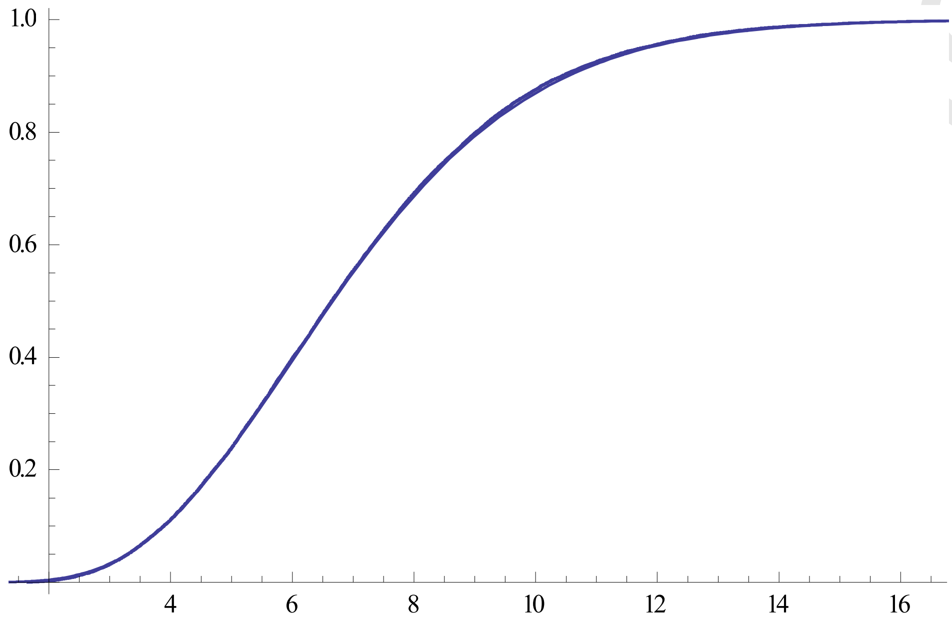
.

Σχήμα 14.Κατανομή Γάμμα(α, 1), Ιστόγραμμα συχνοτήτων.



```
s=Sort[b];
t=Table[{s[[j]],j/n},{j,1,n}];
pl1=ListPlot[t,PlotJoined→True];
pl2=Plot[CDF[GammaDistribution[a,1],x],{x,0,20}];
Show[pl1,pl2]
```

Σχήμα 15.Κατανομή Γάμμα(α, 1), Εμπερική συνάρτηση κατανομής.



Παρατηρούμε πολύ καλή προσέγγιση της Γάμμα (a = 7, 1).

Επέκταση της μεθόδου για την διακριτή περίπτωση.

Σημειώνεται πως η μέθοδος της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής μπορεί επίσης να επεκταθεί (όπως και η μέθοδος της αντιστροφής) για να καλύψει και τη διακριτή περίπτωση. Εδώ, σκοπός είναι να παράγουμε αριθμούς από την διακριτή τ.μ. X, η οποία μπορεί να γραφτεί σαν το διακριτό μέρος μιας συνάρτησης $\psi(Y)$, όπου η συνεχής τ.μ. Y έχει γνωστή συνάρτηση πυκνότητας h. Ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με την μέθοδο της σχεδόν ακριβούς αντιστροφής αλλάζει ως εξής.(βλ. Devroye (1986)).

Βήμα 1: *Παράγουμε την τ. μ. Y με σ.π.π. h με οποιονδήποτε τρόπο μπορούμε.*

Βήμα 2: ***Θέτουμε*** $X = \lfloor \psi(Y) \rfloor$.

Παράδειγμα 5.3

Από το παράδειγμα 1.2.5, όπου έχουμε την τ. μ. Y με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(y) = 1 - y^{-b}, F(1) = 0, y > 1, b > 0.$$

Έστω η συνάρτηση $\psi(Y) = Y^3$. Είναι εύκολο μέσα από την διαδικασία που περιγράψαμε να παράγουμε την διακριτή τ. μ. X με σ.π.π.

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P(\lfloor \psi(Y) \rfloor = i) = P(i < U^{-\frac{1}{3b}} < i + 1) \\ &= F(i + 1) - F(i) = \frac{1}{i^{\frac{b}{3}}} - \frac{1}{(i + 1)^{\frac{b}{3}}}, i \geq 1. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.

Επέκταση της μεθόδου της αντιστροφής για συναρτήσεις που δεν είναι 1-1 (Many to one transformation method)

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η μέθοδος της αντιστροφής εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που η σ.κ. F μιας τ.μ. X αντιστρέφεται, και μπορούμε απευθείας να χρησιμοποιήσουμε τον (ένα προς ένα) μετασχηματισμό X=$F^{-1}(Y)$, όπου η $Y = F(X)$ παράγεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο (0.1). Γενικεύοντας τη συγκεκριμένη μέθοδο θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν η $\psi(X)$ έχει μια εύκολη πυκνότητα h τότε μπορούμε να παράγουμε την $Y \sim h$ και αν η ψ αντιστρέφεται (δηλ. είναι 1-1), θέτουμε $X = \psi^{-1}(Y)$. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις η εξίσωση $Y = \psi(X)$, μπορεί να καταλήγει σε περισσότερες από μία λύσεις. Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να βρούμε μία και μοναδική λύση για την ισότητα $Y = \psi(X)$. Υπάρχουν δηλαδή περιπτώσεις όπου η παραπάνω ισότητα έχει $k > 1$ λύσεις, οπότε καταλήγουμε σε συνολικά k αντίστροφες συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε k ξένα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της ψ. Η πλέον απλή και σημαντική περίπτωση είναι η περίπτωση $k = 2$, όπου τα πράγματα είναι σχετικά απλά, και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με αυτήν αποκλειστικά τη περίπτωση. Αυτή η μέθοδος μοιάζει με την μέθοδο της σύνθεσης, με την διαφορά ότι δεν χρησιμοποιείται για μίξεις κατανομών, αλλά για κάποιες πολύ ειδικές περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in R$ η παράγωγος συνάρτηση ψ' είναι θετική (η αντίστοιχα αρνητική) στο $(-\infty, t)$ και αρνητική (η αντίστοιχα θετική) στο (t, ∞). (Π.χ. η συνάρτηση $\psi(x) = x^2$, που έχει παράγωγο $\psi'(x) = 2x$, αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και θετική στο $(0, \infty)$.). Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τις αντίστροφες

$x = l(y), x = r(y),$

στα διαστήματα $(-\infty, t)$ και (t, ∞) αντίστοιχα.

Αν η τ.μ. X έχει σ.π.π. f , τότε η συνάρτηση $Y = \psi(X)$ έχει σ.π.π.

$$h(y) = |l'(y)|f\big(l(y)\big) + |r'(y)|f(r(y).$$

Επομένως, αντίστροφα, αν η τ.μ. $Y \sim h$, τότε μπορούμε να παράγουμε το $X \sim f$ θέτοντας $X =$ τας $X = l(Y)$ με πιθανότητα

$$\frac{|l'(Y)|f(l(Y))}{h(Y)}$$

και $X = r(Y)$ με πιθανότητα 1 μείον την παραπάνω. Ο αντίστοιχος 2 προς 1 μετασχηματισμός βασίζεται στον παρακάτω αλγόριθμο (βλ.Michael, Schucany and Haas, 1976).

Βήμα 1: *Παράγουμε* $Y \sim h$, $U \sim \mathrm{U}(0,1)$.

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X_1 = l(Y), X_2 = r(Y)$

Βήμα 3: *Αν*

$$U \leq \frac{f\big(l(Y)\big)|l'(Y)|}{h(Y)} = \frac{1}{1 + \frac{f\big(r(Y)\big)}{f\big(l(Y)\big)}\left|\frac{r'(Y)}{l'(Y)}\right|} = \frac{1}{1 + \frac{f\big(r(Y)\big)}{f\big(l(Y)\big)}\left|\frac{\psi'\big(l(Y)\big)}{\psi'\big(r(Y)\big)}\right|}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{f(X_2)}{f(X_1)}\left|\frac{\psi'(X_1)}{\psi'(X_2)}\right|}$$

τότε *θέτουμε* $X = X_1$, αλλιώς θέτουμε $X = X_2$.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δεν φαίνεται ιδιαίτερα κατατοπιστικός, αλλά μέσα από κάποια παραδείγματα μπορεί να γίνει πιο κατανοητός. Στη συνέχεια εξετάζονται οι 2 κυριότερες περιπτώσεις που εφαρμόζεται αυτός ο αλγόριθμος, ο μετασχηματισμός της απόλυτης τιμής και οι αντίστροφοι Gaussian μετασχηματισμοί.

Ο μετασχηματισμός της απόλυτης τιμής.

Ο μετασχηματισμός $y = |x - t|$ για σταθερό $t \in R$ ικανοποιεί απόλυτα τις συνθήκες που περιγράψαμε παραπάνω, γιατί εδώ έχουμε τις συναρτήσεις

$$x = l(y) = t - y \quad \text{και} \quad r(y) = t + y\,,$$

και η συνάρτηση ψ' παραμένει σταθερή για κάθε t και ο αλγόριθμος του 2 προς 1 μετασχηματισμού γίνεται ως εξής.

Βήμα 1:*Παράγουμε* $Y \sim h(y) = f(t-y) + f(t+y)$, $U \sim \mathrm{U}(0,1)$.

Βήμα **2**:*Αν*

$$U \leq \frac{f(t - Y)}{f(t - Y) + f(t + Y)}$$

θέτουμε $X = t - Y$ *αλλιώς θέτουμε* $X = t + Y$.

Ιδιαίτερη ευκολία παρουσιάζεται όταν η τ. μ. X είναι συμμετρική γύρω από το σημείο *t*, καθώς τότε οι εκφράσεις $t - Y$ και $t + Y$ είναι σχεδόν ισοπίθανες, κάτι που θα διαπιστώσουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6.1.

Έστω η τ. μ. X με σ.π.π. (γνωστή και σαν κατανομή Raab-Green).

$$f(x) = \frac{1 + cosx}{\pi}, 0 \leq x \leq \pi.$$

Για $t = \frac{\pi}{2}$, θα έχουμε ότι

$$h(y) = f(t-y) + f(t+y) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\pi} + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

και εφαρμόζοντας τον προηγούμενο αλγόριθμο θα είναι

Βήμα 1:*Παράγουμε* 2 *ανεξάρτητες τ. μ.* $U_1, U_2 \sim U(0,1)$

Βήμα 2:*Θέτουμε* $Y = \frac{\pi U_2}{2}$

Βήμα 3:*Αν* $U_1 \leq \frac{1+cosY}{2}$, *θέτουμε* $X = Y$, *αλλιώς* $X = \pi - Y$.

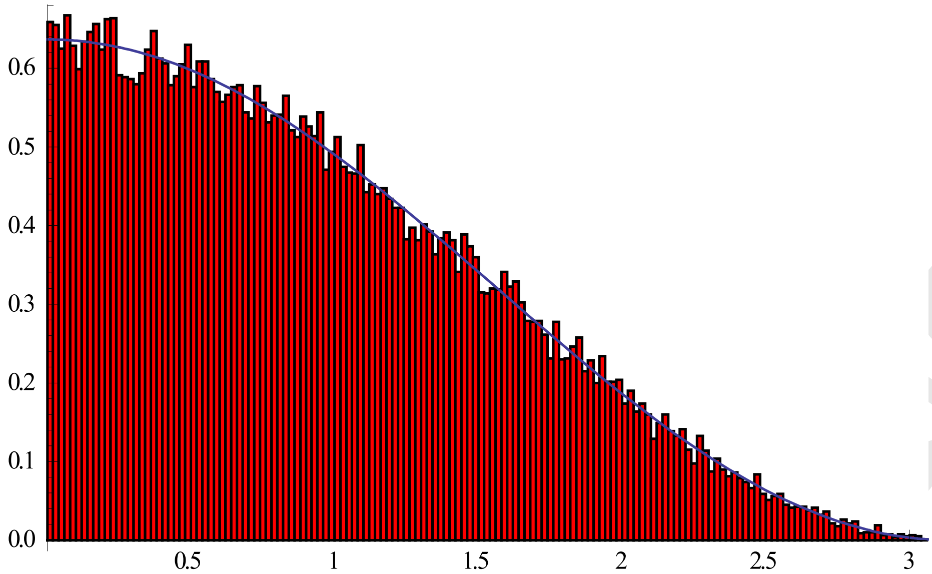
Υλοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο στο Mathematica παράγουμε 100 αριθμούς με τον παρακάτω κώδικα.

```
L={};Do[U1=Random[];U2=Random[];
 Y=Pi*U2/2;
 If[U1≤(1+Cos[Y])/2,X=Y,X=Pi-Y];
 AppendTo[L,X];,{100}]
Print[L]
```

Στη συνέχεια συγκρίνουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων από 40000 παραγόμενα αντίγραφα της X με την καμπύλη της πυκνότητας πιθανότητας της X.Έχουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση.

```
L={};Do[U1=Random[];U2=Random[];
 Y=Pi*U2/2;
 If[U1≤ (1+Cos[Y])/2,X=Y,X=Pi-Y];
 AppendTo[L,X];,{40000}]
H=Histogram[L,HistogramScale→1];
P=Plot[(1+Cos[x])/Pi,{x,0,Pi}];
Show[H,P]
```

Σχήμα 16.Κατανομή Raab-Green.



Οι αντίστροφοι Gaussian μετασχηματισμοί.

Δεύτερη σημαντική κατηγορία 2 προς 1 μετασχηματισμών είναι οι αντίστροφοι Gaussian μετασχηματισμοί, που βασίζονται στην αντίστροφη Gaussian κατανομή.

Ορισμός: *Μια τ.μ. X ακολουθεί την αντίστροφη κατανομή Gaussian με παραμέτρους μ, λ >0 αν έχει σ.π.π. ίση με*

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}, x > 0$$

συμβολικά X ~ IG(μ,λ).

Η παραπάνω κατανομή είναι επίσης γνωστή σαν κατανομή Wald. Η αντίστροφη Gaussian κατανομή έχει καμπανοειδές σχήμα και περίπου παρόμοιο με τις κατανομές Γάμμα. Η μέση τιμή της ισούται με μ και η διακύμανση της με $\frac{\mu^3}{\lambda}$. Ακολουθούν κάποιες ενδεικτικές πληροφορίες για αυτήν την κατανομή (βλ. Folks and Chicara, 1978, Shuster, 1968).

Πρόταση 2. *Για μια τ.μ. $X \sim IG(\mu, \lambda)$ ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα.*

I. $cX \sim IG(c\mu, c\lambda)$, $c > 0$.
II. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής ισούται με*

$$\varphi(t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right)}$$

όπου i η φανταστική μονάδα.

III. *Αν έχουμε ανεξάρτητες τ.μ. $X_j \sim IG\left(\mu_j, c{\mu_j}^2\right), 1 \le j \le n$, τότε το άθροισμα τους ακολουθεί πάλι την αντίστροφη Gaussian, και πιο συγκεκριμένα*

$$S = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim IG(\sum_{j=1}^{n} \mu_j\,, c(\sum_{j=1}^{n} \mu_j)^2)$$

IV. *Αν $X \sim IG(\mu,\lambda)$ τότε η τ μ.*

$$\psi(X) = \frac{\lambda(X-\mu)^2}{\mu^2 X} \sim {\chi_1}^2.$$

Απόδειξη.
I. Η τ.μ. $Y = cX$ έχει σ κ. ίση με

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(cX \le x) = P\left(X \le \frac{x}{c}\right) = F(\frac{x}{c})$$

οπότε η σ.π.π. της ισούται με

$$f_Y(x) = \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\left(\frac{x}{c}\right)^3}}\; e^{-\frac{\lambda\left(\frac{x}{c}-\mu\right)^2}{2\mu^2\frac{x}{c}}}$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\lambda c^3}{2x^3\pi}}\, e^{-\frac{\lambda c(\frac{x}{c}-\mu)^2}{2\mu^2 x}} = \sqrt{\frac{c\lambda}{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{c\lambda(x-c\mu)^2}{2c^2\mu^2 x}}, x > 0$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.
II.Παραλείπεται.
III. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα, η τ.μ. $X_j \sim IG\left(\mu_j, c{\mu_j}^2\right)$ θα έχει χαρακτηριστική συνάρτηση ίση με

$$\varphi_j(t) = e^{\frac{c\mu_j^2}{\mu_j}\left(1-\sqrt{1-\frac{2i\mu_j^2 t}{c\mu_j^2}}\right)} = e^{c\mu_j\left(1-\sqrt{1-\frac{2it}{c}}\right)}, \qquad 1 \le j \le n.$$

Καθώς οι τ.μ. X_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος S θα ισούται με το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των τ.μ., οπότε η χ.σ. της τ.μ. S ισούται με

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{c\mu_j\left(1-\sqrt{1-\frac{2it}{c}}\right)}$$
$$= e^{\sum_{j=1}^{n} c\mu_j\left(1-\sqrt{1-\frac{2it}{c}}\right)} = e^{c\left(1-\sqrt{1-\frac{2it}{c}}\right)\sum_{j=1}^{n}\mu_j}$$

Η παραπάνω συνάρτηση εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι πράγματι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ. μ. S, που αποδεικνύει το ζητούμενο. Άμεσο αποτέλεσμα είναι πως όταν οι τ. μ. X_j εκτός από ανεξάρτητες είναι και ισόνομες ($X_j \sim IG(\mu, \lambda)$), τότε το άθροισμά τους ακολουθεί την κατανομή $IG(n\mu, n^2\lambda)$.
IV. Παραλείπεται. (Βλ. Shuster, 1968)

Οι αντίστροφοι 2-1 μετασχηματισμοί Gaussian βασίζονται στην συνάρτηση

$$\psi(x) = \frac{\lambda(x-\mu)^2}{\mu^2 x}$$

Αποδεικνύεται πως η λύση του συστήματος $\Psi(X) = Y$ έχει 2 λύσεις ως προς X_1, X_2, οι οποίες είναι οι ακόλουθες

$$X_1 = \mu + \frac{\mu^2 Y}{2\lambda} - \frac{\mu}{2\lambda}\left(\sqrt{4\mu\lambda Y + \mu^2 Y^2}\right), \quad X_2 = \frac{\mu^2}{X_1}.$$

Μπορεί επίσης να διαπιστωθεί ότι

$$\frac{f(X_2)}{f(X_1)} = \frac{{X_1}^3}{\mu^3}, \quad \frac{\psi'(X_1)}{\psi'(X_2)} = -\left(\frac{\mu}{X_1}\right)^2,$$

και έτσι προκύπτει ένας αριθμός X_1, ο οποίος μπορεί να γίνει αποδεκτός με πιθανότητα $\frac{\mu}{\mu+X_1}$.

Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την αντίστροφη Gaussian κατανομή $IG(\mu,\lambda)$ μπορεί να περιγραφεί σύμφωνα με τα επόμενα βήματα (βλ.Michael, Schucany and Hass, 1976).

Βήμα 1:*Παράγουμε* $Y \sim \chi_1^2$.

Βήμα 2: *Θέτουμε στην συνέχεια*

$$X_1 = \mu + \frac{\mu^2 Y}{2\lambda} - \frac{\mu}{2\lambda}(4\mu\lambda Y + \mu^2 Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Βήμα 3:*Παράγουμε* $U \sim U(0,1)$.

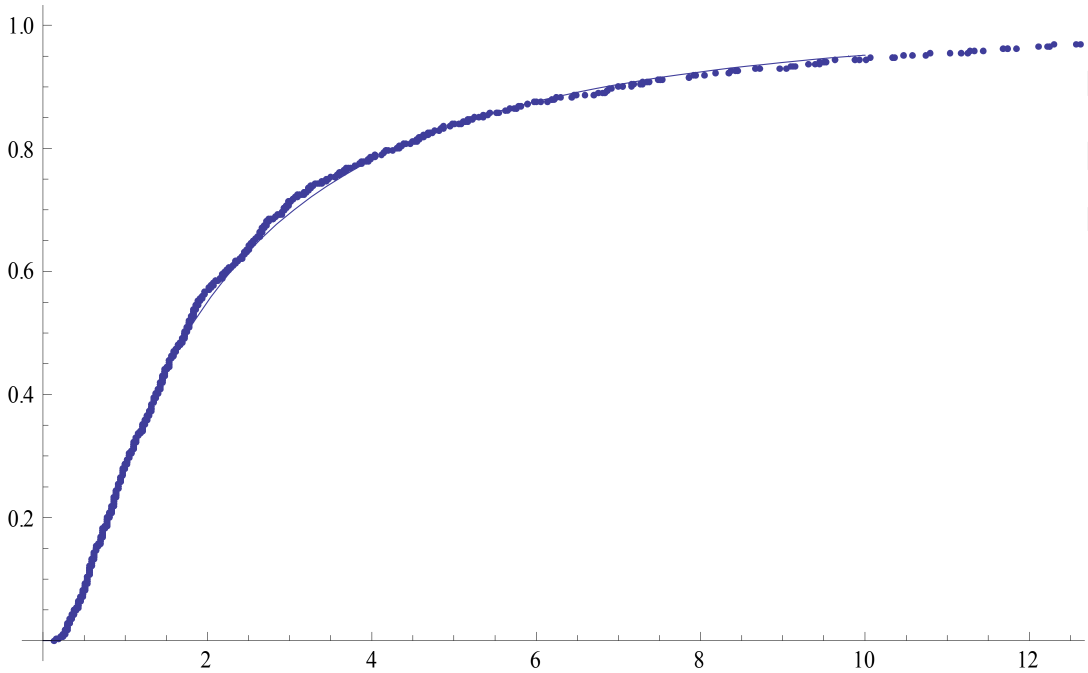
Βήμα 4:*Αν* $U \leq \frac{\mu}{\mu+X_1}$, *θέτουμε* $X = X_1$.*Αλλιώς θέτουμε* $X = \mu^2/X_1$ *και συνεχίζουμε.*

Παράδειγμα 6.2.

Οι παρακάτω εντολές του Mathematica παράγουν αριθμούς από την αντίστροφη Gaussian κατανομή με παραμέτρους $\mu = 3$, $\lambda = 2$ και στη συνέχεια συγκρίνουν την καμπύλη της συνάρτησης κατανομής της *IG*(3, 2) με την εμπειρική συνάρτηση κατανομής του δείγματος 100 τιμών, όπου υπάρχει μια ικανοποιητική προσέγγιση.

```
m=3;l=2;n=1000;numbers={};
Do[Z=Random[NormalDistribution[0,1]];Y=Z^2;
 X1=m+(m^2)*Y/(2*l)-(m/(2*l))*Sqrt[4*m*l*Y+m^2*Y^2];
 U=Random[];
 If[U≤m/(m+X1),X=X1,X=m^2/X1];
 numbers=Append[numbers,X];,{j,1,n}]
Print[numbers]
srt=Sort[numbers];
t=Table[{srt[[j]],j/1000.},{j,1,1000}];
L=ListPlot[t];
P=Plot[NIntegrate[Sqrt[l/(2*Pi*x^3)]*Exp[-l*(x-
m)^2/(2*m^2*x)],{x,0,t}],{t,0,5}];
Show[L,P]
```

Σχήμα 17.Αντίστροφη κατανομή Gaussian(μ=3, λ=2)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7.

Η μέθοδος αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα (Representations of densities as integrals method).

Η μέθοδος αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα βασίζεται σε κάποιους κανόνες που απαιτούν γνώση του σχήματος της κατανομής που μελετάμε, όπως αν είναι μονοκόρυφη (π.χ. καμπανοειδής μορφή). Στην συγκεκριμένη ενότητα θα δείξουμε πως μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από κάποιες συγκεκριμένες κατανομές και θα παρουσιάσουμε κάποια θεωρήματα που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση αυτής της μεθόδου.

Η πιο σημαντική κλάση πυκνοτήτων είναι η κλάση των μονοκόρυφων πυκνοτήτων, δηλαδή κατανομές των οποίων η πυκνότητα πιθανότητας έχει μια κορυφή (όπως π.χ., η κανονική κατανομή , η κατανομή Cauchy, η κατανομή Laplace κ.α.), και είναι χρήσιμο να δοθούν κάποιες αναπαραστάσεις ως ολοκληρώματα από κατανομές αυτής της μορφής. Πιο συγκεκριμένα, αναζητούμε κατανομές που ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη σε κατάλληλα υποσύνολα του πεδίου ορισμού τους..

Ορισμός: *Μια κατανομή F λέγεται κυρτή σε μια περιοχή $A \subseteq R$ αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ότι*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y), \qquad \text{για κάθε } \ 0 \leq \lambda \leq 1$$

και κοίλη αν αντιστραφεί η παραπάνω ανισότητα.

Ως εκ τούτου, μια μονοκόρυφη κατανομή είναι κυρτή (κοίλη) στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη (κυρτή) στο $(0, \infty)$, και έτσι το σημείο 0 καλείται κορυφή της κατανομής. Για απλότητα δεν θεωρούμε άλλα σημεία ως κορυφές για τις κατανομές που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Η μέθοδος αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα βασίζεται στην εξής ιδέα. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της τ.μ. X, η οποία μπορεί να δημιουργηθεί από τον μετασχηματισμό $X = UY$, όπου U, Y ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ, με $U \sim U(0,1)$ και Y μια βοηθητική τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, έστω g.

Βασικό αποτέλεσμα που ακολουθεί τον παραπάνω ισχυρισμό είναι ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με την μέθοδο αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα, που στην πιο απλή του μορφή περιγράφεται ως εξής:

Βήμα 1:*Παράγουμε U~U(0,1) και στην συνέχεια την τ.μ. Y με σ.π.π.* g

Βήμα 2:*Θέτουμε X =UY*

Ακολουθεί στη συνέχεια ένα ενδεικτικό παράδειγμα που είναι μάλλον απλοϊκό, αλλά κατάλληλο για να κατανοήσουμε πως λειτουργεί η εξεταζόμενη μέθοδος στην γενική της μορφή.

Παράδειγμα 7.1

Έστω μια τ. μ. *X* που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, με σ.π.π.

$$f(x) = e^{-x}, x > 0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα για να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της *X* και συγκεκριμένα με τον μετασχηματισμό *X = UY*. (όπου *U, Y* ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ.) , *U* ~ *U*(0,1), *Y* ~ *Gamma*(2, 1)).

Θα αποδείξουμε αρχικά πως η τ. μ. *X =UY*, ακολουθεί πράγματι την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Αρχικά παρατηρούμε πως η τ. μ. *Y* έχει στήριγμα το $(0, \infty)$, που συμπίπτει με το στήριγμα της κατανομής της *X* . Η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. *X* μπορεί να δοθεί από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό του γινομένου 2 ανεξάρτητων τ.μ. ως εξής

$$f_X(x) = f_{UY}(x) = \int_0^1 \frac{1}{u} f_U(u) f_Y\left(\frac{x}{u}\right) du = \int_0^1 \frac{1}{u}\frac{x}{u} e^{-\frac{x}{u}} du = x \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u^2} du.$$

Εκτελώντας τον παρακάτω μετασχηματισμό θα έχουμε έπειτα

$$\frac{x}{u} = t \to du = -\frac{x}{t^2} dt$$

$(όταν\ u \to 0\ , τότε\ t \to \infty\ κι\ όταν\ u \to 1, τότε\ t \to\ x)$. Και έτσι στη συνέχεια το προηγούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$f_X(x) = x \int_\infty^x \frac{e^{-t}}{\frac{x^2}{t^2}} \left(-\frac{x}{t^2}\right) dt = -x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{x} (-dt) = \int_x^\infty e^{-t} dt = e^{-x}, x > 0,$$

και η τελευταία έκφραση είναι η πυκνότητα πιθανότητας της εκθετικής με παράμετρο 1, που αποδεικνύει το ζητούμενο. Οπότε ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την εκθετική με παράμετρο 1 με αυτή τη μέθοδο είναι ο ακόλουθος.

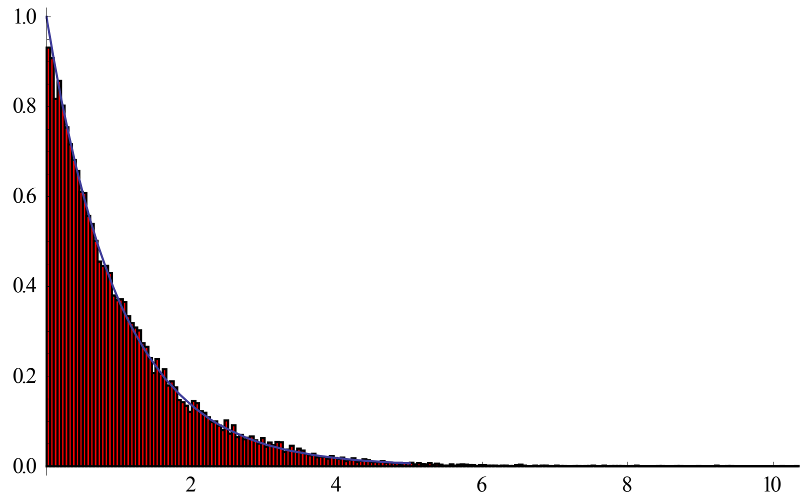
Βήμα 1: *Παράγουμε* $U \sim U(0,1)$, $Y \sim \text{Gamma}(2,1)$

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = UY$

Συγκρίνοντας το ιστόγραμμα μέσω του επόμενου συνόλου εντολών του Mathematica από ένα δείγμα 30000 τ.α. που παράγονται με αυτή τη μέθοδο και την καμπύλη της σ.π.π. της X έχουμε μια καλή προσαρμογή.

```
n=30000;T={};
Do[U=RandomReal[];Y=RandomReal[GammaDistribution[2,1]];
 X=U*Y;AppendTo[T,X];,{n}];
p1=Histogram[T,HistogramScale→1];
p2=Plot[Exp[-x],{x,0,5}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 18.Εκθετική κατανομή με παράμετρο 1



Το Θεώρημα Khinchine.

Το Θεώρημα Khinchine περιγράφει πως μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από μια μονοκόρυφη πυκνότητα μιας τ.μ. X χρησιμοποιώντας το γινόμενο μιας τ.μ. $U \sim U(0,1)$ και μιας γνωστής τ. μ. Y, γενικεύοντας έτσι το παραπάνω αλγόριθμο.Συγκεκριμένα, το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής (βλ. Devroye, 1986):

Θεώρημα Khinchine. *Μια τ.μ. X είναι μονοκόρυφη αν και μόνο αν η X κατανέμεται σαν την UY, όπου U, Y ανεξάρτητες τ.μ. με U ~* U(0,1) *και Y τ.μ. με σ.κ. G στο* [0,∞) (*δεν προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιας σ.π.π. g*). *Επίσης, η τ.μ. X = UY θα έχει σ.κ. ίση με*

$$F(x) = \int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right) du$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον Feller, 1971. Όσο για την κατανομή της τ. μ. *X = UY,* αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$F(x) = P(X \leq x) = P(UY \leq x) = \int_0^1 P\left(Y \leq \frac{x}{u}\right) f_U(u)\, du$$
$$= \int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right) du.$$

Η επόμενη πρόταση (βλ. Devroye, (1984, (a))), που αναφέρεται στην μονοτονία μιας σ.π.π. *f* είναι αρκετά χρήσιμη για τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

Πρόταση 3

- *Αν X είναι μια τ.μ. με φθίνουσα σ.π.π. f τότε ισχύουν τα εξής:*

$$\lim_{x\to\infty} x\, f(x) = \lim_{x\to 0} x\, f(x) = 0$$

- *Αν η f είναι απόλυτα συνεχής σε όλα τα κλειστά διαστήματα του $(0,\infty)$ τότε υπάρχει (σχεδόν παντού) η παράγωγος f' και*

$$f(x) = -\int_x^\infty f'(u)du,$$

και η κατανομή της X μπορεί να γραφτεί ως η κατανομή του γινομένου 2 ανεξάρτητων τ. μ. UY, όπου

$$U \sim U(0,1), \qquad Y \sim g(x) = -xf'(x).$$

Απόδειξη:

I) Υποθέτουμε αρχικά ότι

$$\limsup_{x\to\infty} xf(x) \geq 2a > 0.$$

Τότε υπάρχει μια υπακολουθία $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ τέτοια έτσι ώστε $x_{i+1} \geq 2x_i$, $\forall\, i$ και

$x_i f(x_i) \geq a > 0, \forall\, i = 1,2,.$

Βλέπουμε ότι

$$1 = \int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{i=1}^{\infty}(x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}x_{i+1}f(x_{i+1}) = \infty,$$

κάτι το οποίο είναι άτοπο, οπότε

$$\lim_{x\to\infty} x\, f(x) = 0.$$

Έπειτα υποθέτουμε ότι

$$\limsup_{x\to 0} xf(x) \geq 2a > 0$$

και με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $x_1 > x_2 > x_3 \dots$ τέτοια έτσι ώστε

$x_{i+1} \leq \frac{x_i}{2}$ και $x_i f(x_i) \geq a > 0$, για κάθε i.

Πάλι, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$1 = \int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - x_{i+1})f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}x_i f(x_i) = \infty,$$

και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο, άρα $\lim_{x\to 0} x\, f(x) = 0$.

II) Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση

$$g(x) = -xf'(x)$$

είναι πράγματι μια σ.π.π. Η παράγωγος f' είναι σχεδόν παντού αρνητική, και η xf είναι α-πολύτως συνεχής σε όλο το$[0,\infty)$, και έτσι για $0 < a < b < \infty$ θα είναι

$$bf(b) - af(a) = \int_a^b \big(xf(x)\big)'dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b xf'(x)dx$$

Το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας τείνει στο 0 για $a \to 0, b \to \infty$ και το δεξί μέλος συγκλίνει στο $1 + \int_0^\infty xf'(x)dx$, οπότε η g είναι μια σ.π.π. Τέλος, αν η τ.μ. Y έχει σ.π.π. g, τότε η τ. μ. UY έχει σ.π.π.

$$\int_x^{\infty} \frac{g(u)}{u} du = -\int_x^{\infty} f'(u) du = f(x)$$

και εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Στο παραπάνω θεώρημα η υπόθεση της απόλυτης συνέχειας είναι αναγκαία γιατί κάποιες μονότονες πυκνότητες έχουν πρώτη παράγωγο $f' = 0$ σχεδόν παντού (π.χ., οι κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις). Με αυτή την επιπλέον υπόθεση εξασφαλίζεται και η ύπαρξη της πυκνότητας της τ.μ. Y , η οποία γενικά έχει σ.κ. ίση με

$$G(x) = 1 - xf(x) - \int_x^{\infty} f(u) du, \qquad x > 0.$$

Για γνησίως φθίνουσες πυκνότητες f που είναι απολύτως συνεχείς σε όλα τα κλειστά διαστήματα του $(0, \infty)$ και σε συνδυασμό με το Θεώρημα Khinchine, ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών με την μέθοδο αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα διατυπώνεται και με την ακόλουθη μορφή.

Βήμα 1:*Παράγουμε U* ~ U(0,1).

Βήμα 2:*Παράγουμε Y με σ.π.π.* $g(x) = -xf'(x), x > 0$

Βήμα 3:*Θέτουμε X=UY*

Παράδειγμα 7.2.

Έστω η τ.μ. *X* με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{a+1}{a}(1 - x^a), \qquad 0 < x < 1.$$

Θα παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της *X* μέσω του μετασχηματισμού *X=UY*, όπου *U*~U(0,1), και *Y* μια ανεξάρτητη τ.μ. από την *U* με σ.π.π.

$$g(x) = (a+1)x^a, \qquad 0 < x < 1, a > 0.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$-xf'(x) = -x\frac{a+1}{a}(1 - x^a)' = -x\frac{a+1}{a}(-ax^{a-1}) = (a+1)x^a = g(x),$$

που σημαίνει πως πράγματι μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της τ.μ. *X* με τον παραπάνω τρόπο. Σημειώνεται ότι η τ.μ. *Y* έχει σ.κ.

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x (a+1)t^a dt = x^{a+1}, 0 < x < 1$$

Και μπορούμε εύκολα να βρούμε την αντίστροφή της λύοντας ως προς

$G(x) = v \leftrightarrow x^{a+1} = v \leftrightarrow x = v^{\frac{1}{a+1}}$,

οπότε μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από την τ. μ. *Y* χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιστροφής και συγκεκριμένα θέτοντας

$$Y = V^{\frac{1}{a+1}}, \qquad V \sim U(0,1).$$

Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα για να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή της *X*. Ο σχετικός αλγόριθμος μπορεί να περιγραφεί ως εξής :

Βήμα 1: *Παράγουμε* $U \sim$ U(0,1), $V \sim$ U(0,1).

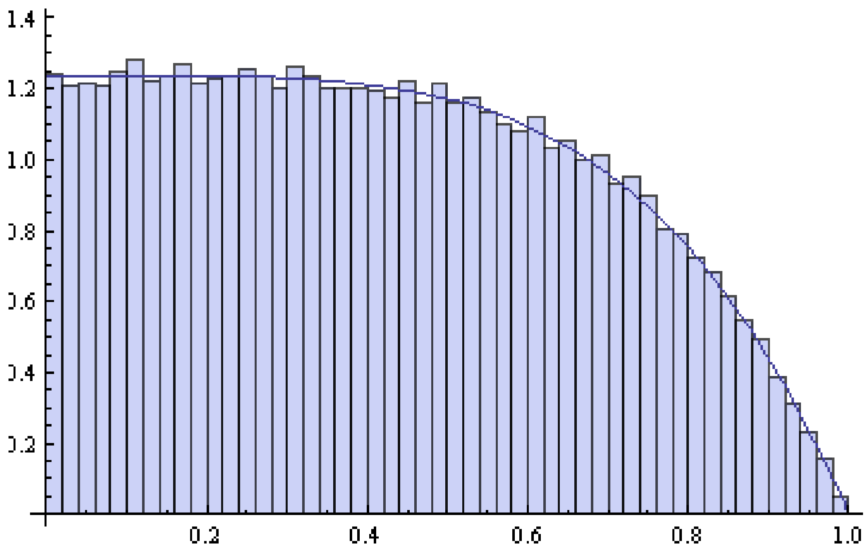
Βήμα 2: *Παράγουμε Y με σ.π.π.* $g(x) = (a+1)x^a$ *θέτοντας* $Y = V^{\frac{1}{a+1}}$

Βήμα 3: *Θέτουμε X=UY*

Μέσω του Mathematica παράγουμε 45000 τ.α. από την κατανομή της *X* και συγκρίνουμε το ιστόγραμμα των συχνοτήτων που δημιουργείται με την αντίστοιχη καμπύλη της σ.π.π. f. (Αριθμητική εφαρμογή για *α*=4.2).

```
n=45000;Randomnumbers={};a=4.2;
Do[U=Random[];V=Random[];Y=V^(1/(a+1));
  X=U*Y;AppendTo[Randomnumbers,X];,{n}];
p1=Histogram[Randomnumbers,HistogramScale→1];
p2=Plot[((a+1)/a)*(1-x^a),{x,0,1}];
Show[p1,p2]
```

Σχήμα 19 .Ιστόγραμμα συχνοτήτων της προηγούμενης πυκνότητας.



Έπειτα παραθέτουμε έναν πίνακα με κάποιες γνωστές κατανομές από τις οποίες μπορούμε σχετικά εύκολα να παράγουμε αριθμούς χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα . Στο δεξιό μέρος του πίνακα παρουσιάζονται οι πυκνότητες πιθανότητας των κατανομών που θέλουμε να παράγουμε αριθμούς και στο αριστερό μέρος παρουσιάζονται οι πυκνότητες πιθανότητας των βοηθητικών κατανομών που χρησιμοποιούνται για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.(βλ. Devroye,1986).

Πίνακας 4.Κατανομές που προκύπτουν με την μέθοδο αναπαράστασης πυκνοτήτων σαν ολοκληρώματα.

Βοηθητική κατανομή *Y*	**σ.π.π. της τ.μ.** $X = UY,\ U$~U(0,1)
Ομοιόμορφη U(0,1)	$-log x$
Εκθετική $E(\lambda)$,λ>0	$\int_x^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{u} du$
Γάμμα(1, 2)	*Εκθετική με παράμετρο* 1
Βήτα(2, β), $\beta > 0$	*Βήτα*(1, β+1)
Rayleigh	$\int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
Maxwell $(\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R)$	*Τυπική κανονική κατανομή* N(0,1)

Παράδειγμα 7.3. Η κατανομή *Gamma* με την μορφή αναπαράστασης πυκνοτήτων ως ολοκληρώματα.

Έστω οι ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ. *U*~U(0,1), *Y*~Gamma(*α*, 1), $\alpha > 0$, με σ.π.π.

$$f_Y(y) = \frac{y^{a-1}e^{-y}}{\Gamma(a)}, y > 0$$

Θα βρούμε αρχικά την κατανομή της τ.μ. *X = UY*, και έπειτα θα μελετήσουμε πως μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από αυτήν χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Khinchine. Η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. *X* μπορεί να δοθεί από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό του γινομένου 2 ανεξάρτητων τ.μ. *U, Y* ως εξής:

$$f_X(x) = f_{UY}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} f_U(u) f_Y\left(\frac{x}{u}\right) du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u} \frac{(\frac{x}{u})^{a-1} e^{-\frac{x}{u}}}{\Gamma(a)} = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u^a} du.$$

Εκτελώντας αλλαγή μεταβλητής στο προηγούμενο ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$\frac{x}{u} \to t, \qquad u = \frac{x}{t} \leftrightarrow du = -\frac{xdt}{t^2}$$

Και έτσι το προηγούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^a} \left(-\frac{xdt}{t^2}\right) = \int_x^{\infty} \frac{t^{a-2}e^{-t}}{\Gamma(a)} dt$$

Συμβολικά, θα είναι *X* ~ IGamma(α) (*Gamma Integral with parameter a* > 0.). Η παραπάνω πυκνότητα δεν μπορεί να δοθεί σε απλούστερη μορφή, εκτός από τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις.

- a = 1 (Εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 και αναπαράσταση με τη μορφή ολοκληρώματος, βλ. Προηγούμενο πίνακα για λ=1),
- a = 2 (Εκθετική κατανομή με παράμετρο 1)
- a = 3, τότε η παραπάνω κατανομή είναι πολύ κοντά στην τυπική κανονική με πολύ μικρή απόκλιση.Έτσι, ένας απλός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από αυτήν την κατανομή είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1: *Παράγουμε* $U \sim$ U(0,1), $Y \sim$ Gamma(a,1)

Βήμα 2: *Θέτουμε* $X = UY$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8.

Η μέθοδος του πηλίκου ομοιόμορφων (The ratio of uniforms method).

Η μέθοδος της απόρριψης για την συνεχή περίπτωση έχει σε μερικές περιπτώσεις ένα συγκεκριμένο μειονέκτημα. Κατανομές με πολύ βαριές ουρές πρέπει να μελετούνται εκτενέστερα, απαιτώντας συνήθως πολλούς υπολογισμούς και οδηγώντας σε αργούς αλγόριθμους . Η μέθοδος πηλίκου ομοιόμορφων χρησιμοποιείται συγκεκριμένα για να ελαττώσει αυτό το πρόβλημα. Οι κύριες κατανομές που εφαρμόζεται είναι συνήθως κατανομές με καμπανοειδές σχήμα και ουρές που μειώνονται αρκετά αργά όπως π.χ., η συνάρτηση x^{-2}. Η μέθοδος αυτή μπορεί να οδηγήσει σε σχετικά εύκολους και γρήγορους αλγόριθμους, χρησιμοποιώντας αριθμούς από την ομοιόμορφη στο (0,1). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια πρόταση που θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πώς δουλεύει αυτή η μέθοδος, και θα μελετήσουμε έπειτα τις περιπτώσεις μερικών γνωστών συμμετρικών κατανομών(π.χ. την κανονική κατανομή, την κατανομή *t (Student)* με *n* βαθμούς ελευθερίας κ.α..).

Πρόταση 4. (βλ, Kinderman and Monahan (1977)) *Έστω $f \geq 0$ μια πραγματική ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω μια περιοχή (χωρίο) $A \subseteq [0,\infty] \times R$, που ορίζεται ως εξής:*

$$A = \left\{(u,v): 0 \leq u \leq \sqrt{f\left(\frac{v}{u}\right)}\right\}.$$

Αν τώρα έχουμε μια δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (U,V) ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή Α, τότε η τ.μ. $Y = \frac{V}{U}$ έχει σ.π.π. ίση με $\frac{1}{c}f$, όπου

$$c = \int f = 2 * Εμβαδόν(A)$$

Απόδειξη: Έστω ο μετασχηματισμός

$$X = U, \qquad Y = \frac{V}{U}$$

με αντίστροφο τον

$v = xy, \quad u = x$.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού ισούται με $|J| = x$, ενώ αφού το ζεύγος (U,V) κατανέμεται ομοιόμορφα στην περιοχή A, τότε έχει από κοινού σ.π.π.

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{I_A(u,v)}{\frac{c}{2}}, \qquad \mu\varepsilon \ I_A(u,v) = \begin{cases} 1, (u,v): 0 \le u \le \sqrt{f\left(\frac{v}{u}\right)} \\ \quad 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Επομένως η τ.μ. (X,Y) έχει από κοινού σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = |J| f_{U,V}(x,yx) = \frac{2x I_{\left[0,\sqrt{f(y)}\right]}(x)}{c}.$$

Τέλος, η τ.μ. $Y = V/U$ έχει σ.π.π.

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{f(y)}} \frac{2x}{c} dx = \frac{2}{c}\int_0^{\sqrt{f(y)}} x dx$$
$$= \frac{2}{c}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{f(y)}} = \frac{f(x)}{c},$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Γνωρίζουμε πως να παράγουμε αριθμούς από ομοιόμορφα κατανεμημένα διανύσματα, αρκεί να καθορίσουμε συγκεκριμένα την περιοχή A σαν ένα χωρίο που μπορούμε να παράγουμε αυτά τα διανύσματα και έπειτα να εφαρμόσουμε την μέθοδο της απόρριψης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιοχές της μορφής

$A \subseteq [0,b] \times [a_-, a_+] \subseteq [0,\infty] \times R,$

όπου b, a_-, a_+ πραγματικές σταθερές που καθορίζονται από τις συναρτήσεις

$$u = u(x) = \sqrt{f(x)}, \qquad v = v(x) = x\sqrt{f(x)},$$

έτσι ώστε να φράξουμε άνω και κάτω τις συναρτήσεις u^2, v^2. Κατανομές από τις οποίες μπορούμε να παράγουμε αριθμούς με αυτή την μέθοδο είναι κυρίως κατανομές με υποτετραγωνικές ουρές, όπως π.χ. η κανονική, η Βήτα κ.α. Ο γενικός αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την κατανομή της τ.μ. X με αυτή την μέθοδο θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής(βλ. Devroye, (1984, (a))).

Βήμα 1:*Καθορίζουμε αρχικά τις σταθερές* b, a_-, a_+ *έτσι ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$b \geq \sup\left[\sqrt{f(x)}\right], \qquad a_- \leq \inf\,[x\sqrt{f(x)}], \qquad a_+ \geq \sup\,[x\sqrt{f(x)}]$$

Βήμα 2: *Παράγουμε τις τ.μ.* $U \sim U(0, b), V \sim U(a_-, a_+)$.

Βήμα 3: *Θέτουμε* $X = \frac{V}{U}$.

Βήμα 4: *Αν* $U^2 \leq f(X)$, *θέτουμε* $Y = X$ *και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο* **Βήμα 2**.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι έγκυρος, καθώς η τ.μ. *X* έχει πυκνότητα πιθανότητας ανάλογης της *f* και μπορούμε να αντικαταστήσουμε την *f* με την *cf.* Ο αναμενόμενος αριθμός των βημάτων του αλγορίθμου $E(N)$ ισούται με

$$\frac{b(a_+ - a_-)}{Εμβαδόν\ περιοχής\ A} = \frac{2b(a_+ - a_-)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}.$$

Παράδειγμα 8.1. Τυπική κανονική κατανομή N(0,1).

Έστω μια τ.μ. *Z* που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή *N* (0, 1) με σ.π.π.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad z \in R.$$

Η σ.π.π. της είναι της ζητούμενης μορφής, καθώς μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{c},$$

με

$$f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \ \ (z \in R)$$

$$c = 2 * Εμβαδόν(A) = 2\int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz = 2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Για να παράγουμε αριθμούς από την τυπική κανονική κατανομή χρησιμοποιώντας την μέθοδο πηλίκου ομοιόμορφων θα πρέπει αρχικά να προσδιορίσουμε τις σταθερές b, a_-, a_+ . Η σταθερά *b* υπολογίζεται εύκολα από την σχέση

$$b = sup_{z\in R}\left\{\sqrt{f(z)}\right\} = sup_{z\in R}\left\{\sqrt{e^{-\frac{z^2}{2}}}\right\} = 1$$

Οι σταθερές a_-, a_+ υπολογίζονται από τις παρακάτω ισότητες.

$$a_- = inf_{z \in R}\left\{z\sqrt{f(z)}\right\} = inf_{z \in R}\left\{z\sqrt{e^{-\frac{z^2}{2}}}\right\},$$

$$a_+ = sup_{z \in R}\left\{z\sqrt{f(z)}\right\} = sup_{z \in R}\left\{z\sqrt{e^{-\frac{z^2}{2}}}\right\}$$

Θα χρειαστεί να βρούμε στη συνέχεια πιθανά ακρότατα για τη συνάρτηση

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} = x\sqrt{e^{-\frac{x^2}{2}}}, x \in R\ .$$

Παραγωγίζοντας και εξισώνοντας με το 0 την παραπάνω συνάρτηση θα έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ \sqrt{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}. & \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε πως η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -\sqrt{2}$ και τοπικό μέγιστο για $x = \sqrt{2}$, οπότε

$$a_- = g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{\frac{2}{e}}, \quad \alpha_+ = g(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}} = -a_-.$$

Έτσι ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την τυπική κανονική κατανομή N(0,1) με την μέθοδο πηλίκου ομοιόμορφων μπορεί να είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1: *Παράγουμε τις τ.μ.* $U \sim U(0,1), V \sim U(-\sqrt{\frac{2}{e}}, \sqrt{\frac{2}{e}})$

(π.χ. με τη μέθοδο της αντιστροφής).

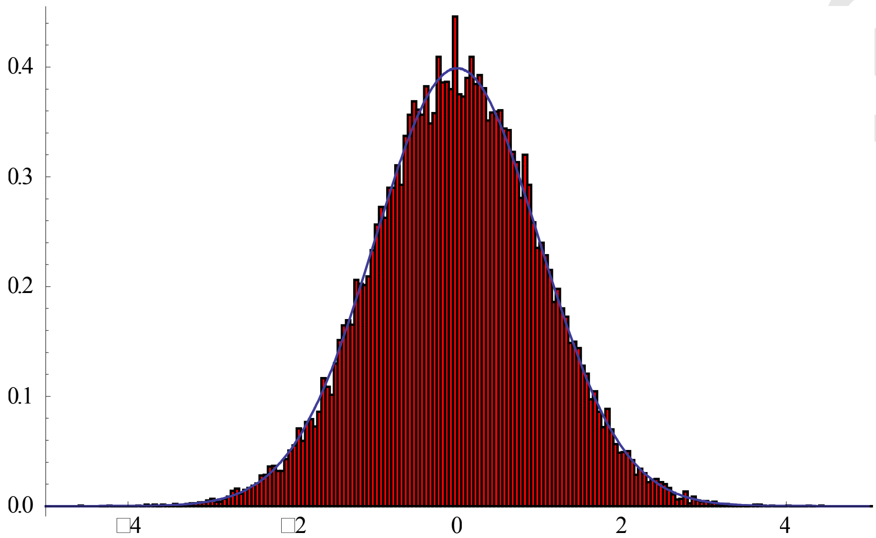
Βήμα 2: *Θέτουμε* $Y = V/U$.

Βήμα 3: *Αν* $U^2 \leq f(Y) = e^{-Y^2/2}$, *θέτουμε* $Z = Y$ *και σταματάμε.*

Υλοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο μέσω του Mathematica κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα 40000 παραγόμενων αντιγράφων της Z και το συγκρίνουμε με την πυκνότητα πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής N(0,1).

```
a=Sqrt[2/Exp[1]];n=40000;Z=Table[0,{n}];i=1;
While[i≤n,U=Random[];V=2*a*Random[]-a;
 Y=V/U;
 If[U^2<Exp[-Y^2/2],Z[[i]]=Y;i++];]
h=Histogram[Z,HistogramRange→{-5,5},HistogramScale→1];
p=Plot[Exp[-x^2/2]/Sqrt[2*Pi],{x,-5,5}];
Show[h,p]
```

Σχήμα 20.Τυπική Κανονική Κατανομή N(0,1).



Ο προηγούμενος αλγόριθμος απαιτεί κατά μέσο όρο

$$E(N)=\frac{b(a_+-a_-)}{E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu(A)}=\frac{2\sqrt{\frac{2}{e}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{4}{\sqrt{\pi e}}\cong 1.36 \text{ βήματα},$$

και είναι ελάχιστα αργότερος από τον αντίστοιχο αλγόριθμο που περιγράψαμε για την κανονική κατανομή με την μέθοδο της απόρριψης.

Παράδειγμα 8.2. Κατανομή t με 3 βαθμούς ελευθερίας t_3

Έστω *X* μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή *t* με *n* = 3 βαθμούς ελευθερίας, και σ.π.π. που δίνεται από τον τύπο

$$f_{t_3}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}, \qquad x \in R$$

Η σ.π.π. της είναι της ζητούμενης μορφής, καθώς μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$f_{t_3}(x) = \frac{f(x)}{c}$$

με

$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}, (x \in R), \qquad c = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Όπως και στο παράδειγμα 8.1, έτσι και τώρα θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές b, a_-, a_+ . Η σταθερά b υπολογίζεται εύκολα από την σχέση

$$b = sup_{x \in R}\left\{\sqrt{f(z)}\right\} = sup_{x \in R} \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}}$$

$$= sup_{x \in R}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}\right) = 1.$$

Οι σταθερές a_-, a_+ υπολογίζονται από τις παρακάτω ισότητες.

$$a_- = inf_{x \in R}\left\{x\sqrt{f(x)}\right\} = inf_{x \in R}\left\{x \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}}\right\},$$

$$a_+ = sup_{x \in R}\left\{x\sqrt{f(x)}\right\} = sup_{x \in R}\left\{x \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^2}}\right\}.$$

Θα χρειαστεί να βρούμε στη συνέχεια πιθανά ακρότατα για τη συνάρτηση

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} = x\frac{1}{(1+\frac{x^2}{3})} = \frac{3x}{3+x^2}, \qquad x \in R$$

Παραγωγίζοντας και εξισώνοντας με το 0 την παραπάνω συνάρτηση θα έχουμε αντίστοιχα

$$g'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3x)'(x^2+3) - 3x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 6x^2 + 9 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x = -\sqrt{3} \ \eta \ x = \sqrt{3}.$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε πως η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -\sqrt{3}$ και τοπικό μέγιστο για $x = \sqrt{3}$, οπότε

$$a_- = g(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_+ = g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

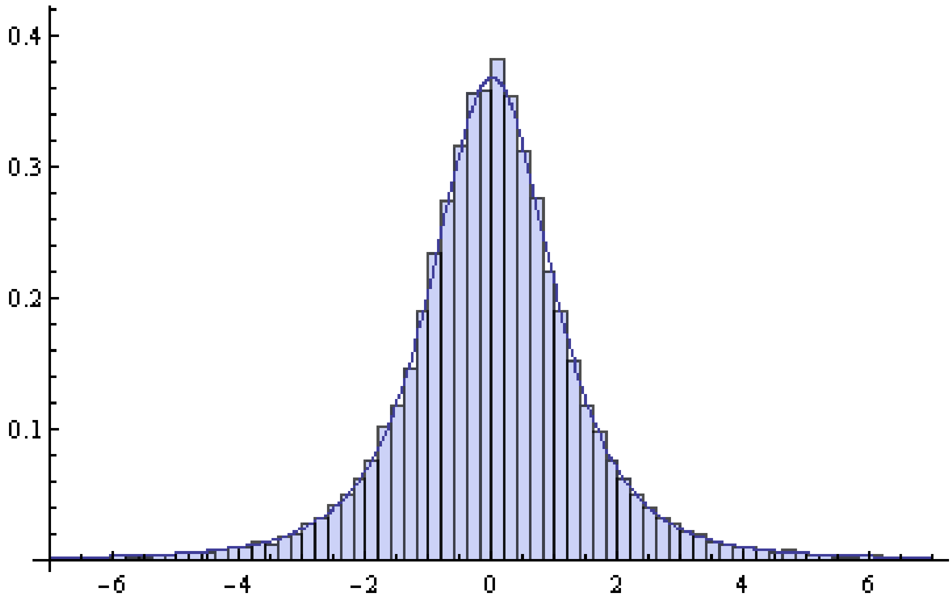
και ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την t_3 με τη μέθοδο πηλίκου ομοιόμορφων είναι ο ακόλουθος.

Βήμα 1:Παράγουμε τις τ.μ. $U \sim U(0,1), V \sim U(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (π. χ. με τη μέθοδο της αντιστροφής).
Βήμα 2:Θέτουμε $Y = V/U$.
Βήμα 3:Αν $U^2 \leq f(Y) = \frac{1}{\left(1+\frac{Y^2}{3}\right)^2}$, θέτουμε $X = Y$ και σταματάμε.

Υλοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο μέσω του Mathematica κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα 40000 παραγόμενων αντιγράφων της τ.μ. X και το συγκρίνουμε με την πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής t_3. Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι έγκυρος, όπως διαπιστώνουμε και από το επόμενο σχήμα.

```
a=Sqrt[3]/2;n=40000;X=Table[0,{n}];i=1;
While[i≤n,U=Random[];V=2*a*Random[]-a;
 Y=V/U;
 If[U^2<(1+Y^2/3)^(-2),X[[i]]=Y;i++];]
h=Histogram[X,{Table[x,{x,-
7,7,0.2}]},"ProbabilityDensity"];
p=Plot[2*(1+x^2/3)^(-2)/(3^(1/2)*Pi),{x,-7,7}];
Show[h,p]
```

Σχήμα 21 .Κατανομή t με 3 βαθμούς ελευθερίας.



Παρατήρηση : Το θεώρημα πηλίκου ομοιόμορφων μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να καλύψει και τις ακόλουθες περιπτώσεις (άθροισμα ομοιόμορφων και πηλίκου-ρίζας ομοιόμορφων, βλ. Barbu (1982 a, b)),

1. Αν έχουμε την τ.μ. (U, V) ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή

$$B = \{(u, v): 0 \leq u \leq f(u + v)\}$$

τότε η τ.μ. $Y = V + U$ έχει σ.π.π. ανάλογη της f.

2. Αν έχουμε την τ.μ. (U, V) ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιοχή

$\Gamma = \{(u, v): 0 \leq u \leq f(\frac{v}{\sqrt{u}})^{2/3}\}$,

τότε η τ.μ. $Y = V/\sqrt{U}$ έχει σ.π.π. ανάλογη της f.

Η απόδειξη είναι ανάλογη της Πρότασης 4. Συγκεκριμένα, έστω ο μετασχηματισμός $X = U,\ Y = V + U$, ο οποίος έχει αντίστροφο τον $u = x, v = y - x$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού ισούται με

$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$

ενώ αφού το ζεύγος (U, V) κατανέμεται ομοιόμορφα στην περιοχή B, έχει σ.π.π.

$$f_{U,V}(u,v) = I_B(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{E\mu\beta(B)}, & (u,v): \quad 0 \le u \le f(u+v) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Επομένως η τ.μ. (X, Y) έχει από κοινού σ.π.π .

$$f_{X,Y}(x,y) = |J| f_{U,V}(x, y-x) = f_{U,V}(x, y-x) = I_B(u,v)$$

Τέλος, η τ.μ. $Y = V + U$ έχει σ.π.π.

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{f(y)} \frac{1}{E\mu\beta(B)} dx = \frac{1}{E\mu\beta(B)} f(y),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. Παρόμοια, η τ.μ. (U, V) έχει από κοινού πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = I_\Gamma(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{E\mu\beta(\Gamma)}, (u,v): 0 \le u \le f(\dfrac{v}{\sqrt{u}})^{2/3}) \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Και το σύστημα 2 εξισώσεων $X = U, Y = V/\sqrt{U}$ δίνει μοναδική λύση ως προς

$u = h_1(x,y) = x, v = h_2(x,y) = y\sqrt{x},$

και η αντίστοιχη Ιακωβιανή ορίζουσα ισούται με

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \end{vmatrix} = \sqrt{x}$$

Επομένως η τ.μ. (X, Y) έχει από κοινού σ.π.π .

$$f_{X,Y}(x,y) = |J| f_{U,V}\left(x, y\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} I_\Gamma(u,v)$$

Τέλος, η περιθώρια τ.μ. $Y = V/\sqrt{U}$ έχει σ.π.π.

$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{f(y)^{2/3}} \sqrt{x} \frac{1}{E\mu\beta(\Gamma)} dx = \frac{2}{3\, E\mu\beta(\Gamma)} f(y),$

και αποδεικνύει το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Παραγωγή αριθμών από πολυδιάστατες κατανομές.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε και παρουσιάσαμε διάφορες μεθόδους για την παραγωγή αριθμών από αρκετές μονοδιάστατες τ.μ.. Σε αρκετές περιπτώσεις ωστόσο, που μελετούνται πολυδιάστατα δεδομένα, είναι απαραίτητη η παραγωγή αριθμών από κάποιες πολυδιάστατες κατανομές. Σκοπός μας αυτή τη φορά είναι να παράγουμε αριθμούς από το τυχαίο μα $\boldsymbol{X}$**,** με

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_\kappa \end{pmatrix},$$

όπου $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$ τ.μ. όχι απαραίτητα ισόνομες ή ανεξάρτητες μεταξύ τους, με αντίστοιχες σ.π.π. f_i και σ.κ. $F_i, i = 1, \dots, \kappa$.

Οι γενικές και ειδικές μέθοδοι που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια δεν έχουν κάποια γενική επέκταση στην πολυδιάστατη περίπτωση, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις τα πράγματα είναι σχετικά απλά. Στην γενική περίπτωση, προκειμένου να παράγουμε αριθμούς από τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$, θα βασιστούμε στο παρακάτω βασικό αποτέλεσμα από την Θεωρία Πιθανοτήτων.

Πρόταση 5. *Έστω $A_1, \dots, A_\kappa$ ενδεχόμενα ενός συνόλου , ξένα ανά 2 μεταξύ τους.*
Τότε θα ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\kappa) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_\kappa|A_1 \dots A_{\kappa-1})$$

Έτσι, προκύπτει πως η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$ ισούται με

$$f(x_1, \dots, x_\kappa) = f_1(x_1) f_{2|1}(x_2|x_1) \dots . f_{\kappa|1 \dots \kappa-1}(x_\kappa|x_1 \dots . x_{\kappa-1})$$

Όπου $f_{i|1 \dots i-1}(x_i|x_1 \dots . x_{i-1})$ η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. X_i δοθέντος των $X_1, \dots, X_{i-1}, i = 1, \dots, k$.

Σε περίπτωση που όλες οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η από κοινού πυκνότητα ισούται φυσικά με το γινόμενο των πυκνοτήτων f_i.

Η γενική μέθοδος παραγωγής τυχαίων διανυσμάτων $(X_1, X_2, \dots, X_\kappa)$ από την κατανομή με σ.π.π. $f(x_1, \dots, x_\kappa)$ βασίζεται στο παραπάνω αποτέλεσμα. Αρχικά παράγουμε την X_1 από την f_1. Στην συνέχεια παράγουμε την X_2 από την $f_{2|1}(x_2|X_1)$ κ.ο.κ. τελικά παράγουμε την X_κ από την $f_{\kappa|1\dots\kappa-1}(x_\kappa|X_1, \dots, X_{\kappa-1})$.

Στην ειδική περίπτωση της ανεξαρτησίας των X_i, αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να παράγουμε π.χ. τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_\kappa$ με την μέθοδο της αντιστροφής, μπορούμε εύκολα να παράγουμε το τ.δ. $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_\kappa)$ μέσω κ ανεξάρτητων τ.μ. $U_1, U_2, \dots, U_\kappa \sim U(0,1)$, θέτοντας απλά

$$X_1 = {F_1}^{-1}(U_1), \dots, X_\kappa = {F_\kappa}^{-1}(U_\kappa).$$

Φυσικά αυτό δεν συμβαίνει πάντα, καθώς όπως έχουμε δει αρκετές φορές, δεν είναι εύκολη η παραγωγή αριθμών από όλες τις κατανομές. Για να παράγουμε όλο το τυχαίο διάνυσμα, θα πρέπει να ελέγξουμε την εγκυρότητα της εκάστοτε μεθόδου που χρησιμοποιείται κάθε φορά σε όλες τις διαστάσεις, κάτι το οποίο φυσικά είναι χρονοβόρο και απαιτεί πολλούς υπολογισμούς. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιες συγκεκριμένες πολυδιάστατες κατανομές από τις οποίες μπορούμε σχετικά εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς βασιζόμενοι σε ιδιότητές τους και συνδυάζοντας τις αντίστοιχες μεθόδους από την μονοδιάστατη περίπτωση. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την παραγωγή αριθμών από ορισμένες από αυτές τις γνωστές πολυδιάστατες τ.μ. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε πως μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από την πολυδιάστατη κανονική, κατανομές που προκύπτουν μέσω αυτής, καθώς και κατανομές που προκύπτουν από γενικεύσεις γνωστών κατανομών της μονοδιάστατης περίπτωσης.

9.1. Παραγωγή αριθμών από πολυδιάστατη κανονική κατανομή .

Η κανονική κατανομή είναι η βασικότερη από όλες τις γνωστές κατανομές, τόσο στην μονοδιάστατη όσο και στην πολυδιάστατη περίπτωση, και αξίζει να περιγραφεί πρώτα η παραγωγή τυχαίων αριθμών από αυτήν. Είναι γνωστό πως αν έχουμε $p \geq 2$ ανεξάρτητες τυπικές κατανομές $Z_1, \dots, Z_p \sim N(0,1)$, τότε λέμε πως το τ. δ.

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix}$$

ακολουθεί την p-διάστατη κανονική κατανομή με μέσο διάνυσμα $\mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακύμανσης τον μοναδιαίο πίνακα $\mathbf{I_p}$ $(\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I_p}))$, με σ.π.π. που δίνεται από τον τύπο

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} z_i^2}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}, \qquad \boldsymbol{z} \in R^p$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα μέσο διάνυσμα $\boldsymbol{\mu} \in R^p$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ ένα $p \times p$ θετικά ορισμένο πίνακα με τετραγωνική ρίζα τον πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$. Τότε το τυχαίο διάνυσμα

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}$$

ακολουθεί την p-διάστατη κανονική κατανομή με μέσο διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων $\boldsymbol{\Sigma}$ (συμβολικά $\mathbf{X} \sim \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$), με σ.π.π.

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{-1/2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}, \qquad \boldsymbol{x} \in R^p$$

Οπότε ένας απλός τρόπος για να παράγουμε αριθμούς από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή μπορεί να είναι ο κάτωθι αλγόριθμος.

Βήμα 1: *Θέτουμε το διάνυσμα* $\boldsymbol{\mu}$, *τον πίνακα συνδιακυμάνσεων* $\boldsymbol{\Sigma}$ *και υπολογίζουμε τον* $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$.
Βήμα 2: *Παράγουμε* $Z_1, Z_2, .., Z_p \sim N(0,1)$ (*με οποιοδήποτε τρόπο*) .
Βήμα 3: *Θέτουμε* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu} \sim \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ μπορεί να γραφτεί με τη μορφή της φασματικής ανάλυσης

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^{-1}$$

όπου $\boldsymbol{P}$ ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του $\boldsymbol{\Sigma}$ και $\boldsymbol{L}$ ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του $\boldsymbol{\Sigma}$ στα διαγώνια στοιχεία του.

Παράδειγμα. Έστω ο 3×3 πίνακας συνδιακύμανσης με

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

και το μέσο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Μέσω του Mathematica παράγουμε μια τυχαία τριάδα (X_1, X_2, X_3) από την κατανομή $\boldsymbol{N_3(\mu, \Sigma)}$ με τις παρακάτω εντολές.

```
m={4,5,2};S={{4,2,2},{2,5,1},{2,1,3}};
l=Eigenvalues[N[S]];l1=l^(1/2);L1=DiagonalMatrix[l1];
P=Transpose[Eigenvectors[N[S]]];
P1=Inverse[P];
S1=P.L1.P1;
Z=Table[Random[NormalDistribution[0,1]],{3}];
X=S1.Z+m;X
```

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το Mathematica για να παράγουμε περισσότερες τριάδες από το διάνυσμα (X_1, X_2, X_3) .Ένας τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι με τις εντολές (παράγει 20 τυχαίες τριάδες από την ζητούμενη τρισδιάστατη κατανομή).

```
n=20;Randomvectors={};
m={4,5,2};S={{4,2,2},{2,5,1},{2,1,3}};
 l=Eigenvalues[N[S]];l1=l^(1/2);L1=DiagonalMatrix[l1];
P= Transpose[Eigenvectors[N[S]]];
P1=Inverse[P];
 S1=P.L1.P1;
 Do[Z=Table[Random[NormalDistribution[0,1]],{3}];
 X=S1.Z+m;AppendTo[Randomvectors,X];,{n}]
Print[Randomvectors]
```

```
{{1.10704,3.68037,0.306115},{6.19369,4.17701,3.66373},
{8.72155,9.36974,1.71272},{1.89195,7.19387,1.80563},
{1.83951,-1.20122,1.71478},{1.36365,2.58665,0.557651},
{3.5236,3.19728,5.01006},{6.87356,7.57977,3.53641},
{2.22865,3.62141,0.599998},{5.23863,2.8137,0.197142},
{6.50656,7.36766,4.13542},{7.68829,6.56275,4.10681},
{2.39676,5.1396,1.08379},{4.18019,1.65218,-0.212035},
{1.54843,2.84837,0.734829},{2.12321,4.38693,1.67408},
{5.6893,1.11739,4.12925},{2.53643,4.72564,3.90364},
{3.13851,4.29787,2.98238},{3.06553,4.61322,2.78664}}
```

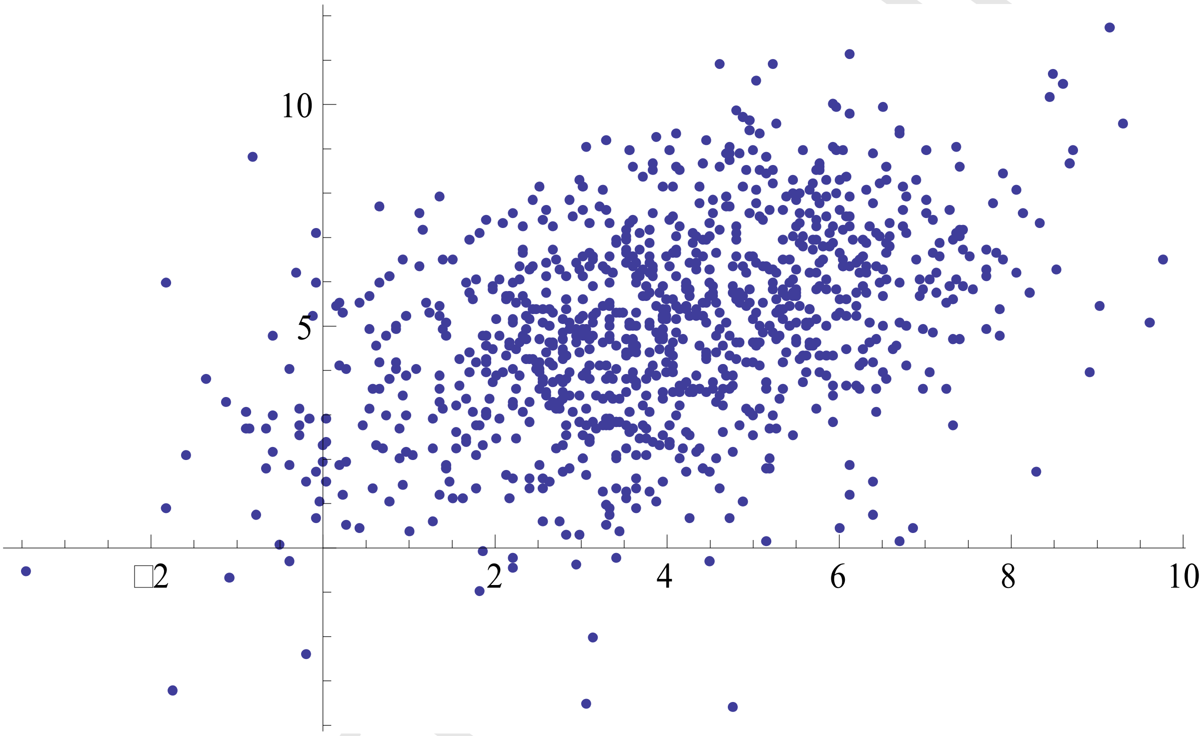
Αν π.χ. έχουμε τον παρακάτω υποπίνακα 2×2 από το προηγούμενο παράδειγμα, με

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Τότε n = 1000 τυχαία ζεύγη (X_1, X_2) από την κατανομή $\boldsymbol{N_2(\mu, \Sigma)}$ απεικονίζονται στο επίπεδο χρησιμοποιώντας την εντολή ListPlot και το επόμενο σύνολο εντολών του Mathematica.

```
n=1000;Randomvectors={};
m={4,5};S={{4,2},{2,5}};
S1=MatrixPower[S,0.5];
Do[Z=Table[Random[NormalDistribution[0,1]],{2}];
 X=S1.Z+m;AppendTo[Randomvectors,X];,{n}]
ListPlot[Randomvectors]
```

Σχήμα 22. Δισδιάστατη Κανονική Κατανομή



Πράγματι, από το προηγούμενο ελλειψοειδές σχήμα συμπεραίνουμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν την προηγούμενη δισδιάστατη κανονική κατανομή.

9.2. Παραγωγή αριθμών από κατανομή Wishart.

Ορισμός: Η πολυδιάστατη κατανομή Wishart αποτελεί την γενίκευση της κατανομής χι τετράγωνο με *n* βαθμούς ελευθερίας χ_n^2 , που έχει σ.π.π. ίση με

$$f_{\chi_n^2}(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} = f_{Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}(y).$$

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε πως μπορούμε να παράγουμε αριθμούς από πολυδιάστατες κανονικές κατανομές με μηδενικό μέσο διάνυσμα και πίνακα συνδιακυμάνσεων τον μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή πως μπορούμε να παράγουμε *n* τυχαία διανύσματα

$$\boldsymbol{Z_1}, .., \boldsymbol{Z}_n \sim \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I_p})$$

Τότε η κατανομή του τυχαίου πίνακα

$$W_{p\times p} = \left[\sum_{i=1}^{n} Z_{ij} Z_{ik}\right]_{j,k}$$

καλείται p -διάστατη κατανομή Wishart με n βαθμούς ελευθερίας και πίνακα συνδιακύμανσης $\boldsymbol{I_p}$ Γενικότερα μπορούμε εύκολα να θεωρήσουμε τα τυχαία διανύσματα

$$\boldsymbol{X}_1, .., \boldsymbol{X}_n \sim \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

και έπειτα να θέσουμε τον τυχαίο πίνακα

$$\boldsymbol{A} = \left[\sum_{i=1}^{n} X_{ij} X_{ik}\right]_{j,k} = \mathbf{X}\,\mathbf{X}',$$

όπου $\mathbf{X}$ είναι ο $p \times n$ πίνακας

$$\mathbf{X} = [\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n].$$

Η κατανομή του τυχαίου πίνακα $\boldsymbol{A}$ (διάστασης $p\times p$) καλείται p – διάστατη κατανομή Wishart με n βαθμούς ελευθερίας και πίνακα συνδιακύμανσης $\boldsymbol{\Sigma}$ (συμβολικά, $\boldsymbol{A} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω κατανομή έχει πυκνότητα πιθανότητας (βλ. Eaton (2007))

$$f_{p,n}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{|\boldsymbol{A}|^{\frac{n-p-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}tr[\boldsymbol{\Sigma^{-1}A}]}}{2^{\frac{pn}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n-i+1}{2})}, \boldsymbol{A} > 0$$

και πράγματι για $p = 1$, $\mathbf{\Sigma} = 1$, προκύπτει ότι

$$f_{1,n}(a, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{a^{\frac{n}{2}-1} e^{-a/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{n-2}}, \alpha > 0$$

που είναι η σ.π.π. της χ_n^2.

Οπότε συνδυάζοντας τον αλγόριθμο παραγωγής αριθμών από πολυδιάστατη κανονική και το προηγούμενο αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την κατανομή $W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ έχει ως εξής:

Βήμα 1: *Παράγουμε* $\boldsymbol{X}_1, .., \boldsymbol{X}_n \sim \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ (π.*χ.με την μέθοδο που περιγράψαμε στη προηγούμενη παράγραφο*) *και θέτουμε* $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n]$.
Βήμα 2: *Θέτουμε* $\boldsymbol{A} = \mathbf{X}\,\mathbf{X}' \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ **.**

Παράδειγμα . Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του προηγούμενου παραδείγματος,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

για να παράγουμε αριθμούς από την p = 3-διάστατη κατανομή Wishart με n = 4 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή να παράγουμε έναν τυχαίο πίνακα $\boldsymbol{A} \sim W_3(4, \boldsymbol{\Sigma})$**.** Μέσω του Mathematica παράγουμε τον τυχαίο πίνακα 3×3, με τις παρακάτω εντολές.

```
S={{4,2,2},{2,5,1},{2,1,3}};n=4;
S1=MatrixPower[S,0.5];X={};
Do[
 Xi=S1.Table[Random[NormalDistribution[0,1]],{3}];
 AppendTo[X,Xi]
 ,{i,1,n}]
Transpose[X].X
```

```
{{12.8139,3.18813,10.7887},
{3.18813,22.6529,-3.30469},
{10.7887,-3.30469,11.9887}}
```

9.3. Παραγωγή αριθμών από πολυδιάστατη κατανομή Dirichlet.

Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_k \end{pmatrix}$$

που ακολουθεί την k-διάστατη κατανομή Dirichlet με παραμέτρους $a_1, \dots, a_k > 0$ με πυκνότητα πιθανότητας

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{k} a_i)}{\prod_{i=1}^{k} \Gamma(a_i)} \prod_{i=1}^{k} {x_i}^{a_i - 1}, \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})^k,$$

ενώ επίσης τα x_i ικανοποιούν τις συνθήκες

$$x_1 + \cdots + x_\kappa = 1,$$

και η σ.π.π. του τ.δ. είναι μηδενική αλλού. (βλ. Fisher, Haans(1994)).

Η k- διάστατη κατανομή Dirichlet αποτελεί γενίκευση της κατανομής Βήτα στις k διαστάσεις. Συγκεκριμένα, είναι εύκολο να δείξουμε πως μια τ.μ. Y που ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους $a_1 > 0, a_2 = 1$ προκύπτει από το πηλίκο 2 ανεξάρτητων τ.μ.

$X_1 \sim Gamma(a_1, b),\ \ X_2 \sim Gamma(a_2, b),$

ως $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, και είναι ανεξάρτητη από το άθροισμα

$S = X_1 + X_2 \sim Gamma(a_1 + a_2, b).$

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στις κ διαστάσεις , θεωρούμε ότι έχουμε k ανεξάρτητες τ.μ. $Y_1 \sim Gamma(a_1, 1), \dots, Y_\kappa \sim Gamma(a_k, 1)$, οπότε το άθροισμά τους ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους το άθροισμα των παραμέτρων και 1, δηλαδή

$$S = Y_1 + \cdots + Y_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i \sim Gamma(\sum_{i=1}^{k} a_i, 1),$$

και έτσι μπορούμε να σχηματίσουμε τις τ.μ. (η αντίστοιχα το τυχαίο διάνυσμα)

$$\boldsymbol{X^T} = (X_1, \dots, X_k) = \left(\frac{Y_1}{S}, \dots, \frac{Y_k}{S}\right) \sim Dirichlet(a_1, \dots, a_k)$$

Φυσικά οι τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά προκύπτουν από συναρτήσεις ανεξάρτητων τ.μ. $Gamma$ και είναι επίσης ανεξάρτητες από το άθροισμα S.Έτσι ένας απλός και γρήγορος αλγόριθμος παραγωγής αριθμών από την k-διάστατη κατανομή Dirichlet μπορεί να είναι ο ακόλουθος(βλ, Devroye , 1986).

Βήμα 1: *Παράγουμε* $Y_1 \sim Gamma(a_1, 1), \dots, Y_\kappa \sim Gamma(a_k, 1)$.

Βήμα 2: *Θέτουμε* $S = Y_1 + \cdots + Y_k$

Βήμα 3: *Θέτουμε τέλος* $X_1 = \frac{Y_1}{S}, \ldots X_k = \frac{Y_k}{S}$.

Παράδειγμα : Για να παράγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα (μια τυχαία τριάδα) από την τρισδιάστατη κατανομή Dirichlet (2, 3, 3.5) μέσω Mathematica, εκτελούμε τις παρακάτω εντολές.

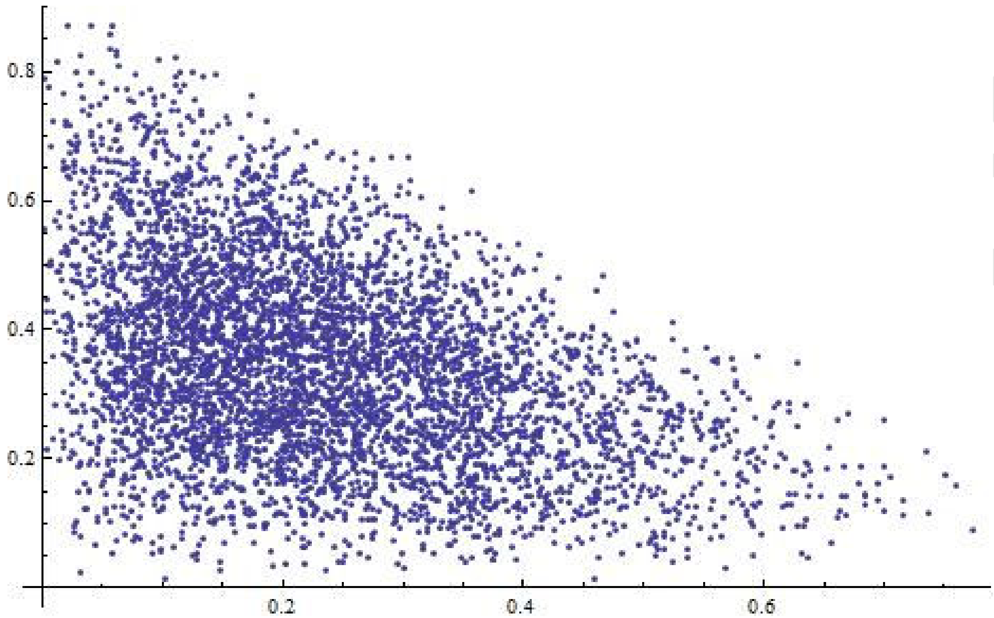
```
Y1=RandomReal[GammaDistribution[2,1]];
Y2=RandomReal[GammaDistribution[3,1]];
Y3=RandomReal[GammaDistribution[3.5,1]];
S=Y1+Y2+Y3;
X1=Y1/S;
X2=Y2/S;
X3=Y3/S;
```

Για να παράγουμε π.χ. 20 τυχαία διανύσματα από την παραπάνω κατανομή μέσω του Mathematica, έχουμε τον επόμενο κώδικα.

```
n=20;L={0,0,0};
Do[Y1=RandomReal[GammaDistribution[2,1]];
 Y2=RandomReal[GammaDistribution[3,1]];
 Y3=RandomReal[GammaDistribution[3.5,1]];
 S=Y1+Y2+Y3;
 L[[1]]=Y1/S;
 L[[2]]=Y2/S;
 L[[3]]=Y3/S;
 Print[L],{n}]
```

Μπορούμε έπειτα να παράγουμε $n = 5000$ τυχαία διανύσματα (X_1, X_2, X_3) από την παραπάνω Dirichlet και να κατασκευάσουμε το διάγραμμα διασποράς π.χ. των (X_1, X_2) στο επίπεδο:

Σχήμα 23.Κατανομή Dirichlet , Διάγραμμα διασποράς ζευγών .



Ένας άλλος λιγότερο αποτελεσματικός τρόπος για να παράγουμε αριθμούς από την κατανομή $Dirichlet(a_1, \dots, a_k)$ είναι ο ακόλουθος.

Παράγουμε το τ. δ. $\boldsymbol{X}$ μέσω ανεξάρτητων κατανομών Βήτα ως εξής: Παράγουμε αρχικά τις ανεξάρτητες τ.μ.

$$X_1 \sim B(a_1, \sum_{i=2}^{k} a_i), \quad Y_j \sim B(a_j, \sum_{i=j+1}^{k} a_i), j = 2, \dots, k-1$$

και θέτουμε μετά

$$X_j = \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} X_i\right) Y_j, \qquad j = 2,3, \dots, k-1$$

Τέλος, θέτουμε $X_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} X_i$.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δεν είναι ιδιαίτερα καλός, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερους υπολογισμούς από την προηγούμενη μέθοδο .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] S.Ross (2006) *Simulation*. Academic Press.

[2] G.G.P.Box and M.E.Muller (1958) A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, **29**, pp. 610-611.

[3] L.Devroye (1986) *Non Uniform Random Variate Generation.* Springer-Verlag

[4] L.Devroye (1984a), Random variate generation for unimodal and monotone densities, *Computing*, **32**, pp. 43-68.

[5] L.Devroye (1984b), A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density, *Computing*, **33**, pp. 247-257.

[6] G.Marsaglia and W.W.Tsang (2001) A simple method for generating gamma variables, *ACM Transactions on Mathematical Software,* **24**, pp.341-350.

[7] G.Marsaglia (1977) The squeeze method for generating gamma variates, *Computers and Mathematics with Applications,* **3**, pp. 321-325.

[8] J.L.Folks and R.S. Chhicara (1978) The inverse Gaussian distribution and its statistical application- a review, *Journal of the Royal Statistical Society,* **40**, pp. 263-289.

[9] J.Michael, W.R.Schucany and R.W.Hass (1976) Generating random variates using transformations with multiple roots, *The American Statistician*, **30**, pp. 88-90.

[10] J.J.Schuster (1968) On the Inverse Gaussian Distribution, *Journal of American Statistical Association,* **63**, pp. 1514-1516.

[11] A.J.Kindermann and J.F.Monahan (1977) Computer Generation of Random Variables Using the Ratio of Uniforms Deviates, *ACM Transaction Mathematical Software,* **3**, pp. 257-260.

[12] M.F.Freeman and J.W.Tukey (1950) Transformations related to the angular and the square root, *Annals of Mathematical Statistics* **21**, pp. 607-611.

[13] E.R.Wilson and M.M.Hilferty (1931) The distribution of chi-squared. *Proceedings of the National Academy of Sciences, Washington*, **17**, pp 684-688.

[14] G.Barbu (1982a), On computer generation of random variables by transformations of uniform variables, *Bull Math. Soc. Sci.Math. Roumanie*, pp.129-139.

[15] G.Barbu (1982b), On computer generation of random variables as ratio of uniform variables, *Econom. Comput. Econom. Cybernet. Stud. Res,* pp. 49-65.

[16] M.L.Eaton (2007), *Multivariate Statistics: A Vector Space Approach* , Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes. Volume 53.

[17] G.Marsaglia and W.W.Tsang (1984) A fast, easily implemented method for sampling from decreasing or symmetric unimodal density functions, *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing,* **5**, pp. 349-359.

[18] L.Devroye (1986) *Non Uniform Random Variate Generation.* Ch 11, pp. 594.