

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΤΗΝ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

# **Μέθοδοι αποθεματοποίησης γενικών ασφαλειών: επισκόπηση και σύγκριση**

Μπαρμπαρής Βασίλειος

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Αναλογιστικά Μαθηματικά και την Διοικητική Κινδύνου.

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL  
MATHEMATICS AND RISK MANAGEMENT**

# **Reserving Methods of General Insurance: review and comparison**

Barbaris Vasileios

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Mathematics and Risk Management.

PIRAEUS

JULY 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μέθοδοι αποθεματοποίησης γενικών ασφαλειών:  
επισκόπηση και σύγκριση**

Μπαρμπαρής Βασίλειος

Επιβλέπων:

Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος

Πειραιάς, Ιούλιος 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στα Αναλογιστικά Μαθηματικά και την Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ως επιβλέπων.
- Νεκτάριος Μιλτιάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.
- Βρόντος Σπυρίδων, Λέκτορας του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

Η ευτυχία του ανθρώπου συνίσταται στη μόρφωση και στην παιδεία, και όχι στα αγαθά που δίνει και παίρνει η τύχη.

–Πλούταρχος

Στην οικογένεια μου

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## Περίληψη

Η αποθεματοποίηση ζημιών είναι η κύρια δουλειά του αναλογιστή. Είναι σημαντικό να γίνεται η σωστή πρόβλεψή τους ώστε η εταιρεία να μπορεί να γνωρίζει τι ίδια κεφάλαια θα πρέπει να έχει στην αρχή του χρόνου ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις της. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι αποθεματοποίησης ζημιών, η κυριότερη των οποίων είναι η μέθοδος chain ladder αλλά και γενικεύσεις αυτής. Θα τις αναπτύξουμε παρακάτω και θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω μελετώντας μεθόδους που χρησιμοποιούν γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM) και γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAM). Με διάφορα παραδείγματα και εφαρμόζοντας τις μεθόδους αυτές σε κατάλληλα δεδομένα θα δούμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα αυτών των μοντέλων.



## Ευχαριστίες

Αυτή η εργασία δεν θα είχε περατωθεί δίχως την βοήθεια πολλών ανθρώπων. Στάθηκαν στο πλάι μου και με ενθάρρυναν ώστε να συνεχίσω να προσπαθώ μέχρι να φτάσω στο τέλος της. Με βοήθησαν να πιστέψω στον εαυτό μου και γι' αυτό τον λόγο τους εκτιμώ περισσότερο από κάθε ποσότητα συγγραφής δικής μου ή άλλων.

Πρώτα και περισσότερο θα ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, Αναπληρωτή Καθηγητή Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, για την καθοδήγηση του και την υπομονή που επέδειξε κατά την διάρκεια της έρευνας μου. Οι τεχνικές του συμβουλές σε σημεία που με δυσκόλεψαν ήταν καταλύτης στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογένεια μου για την υποστήριξη και την αγάπη τους.

Μπαρμπαρής Βασίλειος

Ιούλιος 2012

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

## Λεξιλόγιο

claim	ζημιά, απαίτηση
conditional	δεσμευμένη
contrast	αντίθεση
covariate	συμμεταβλητή
development factor	παράγοντας ανάπτυξης, συντελεστής εξέλιξης
estimator	εκτιμητής
inflation	πληθωρισμός
offset	αντισταθμιστής
overdispersed	υπερδιασκορπισμένος
power variance function	συνάρτηση δυναμικής διακύμανσης
predictor	προβλεπτής, συνάρτηση πρόβλεψης
runoff pattern	επαναληπτική διαδικασία, μοτίβο απορροής
smoother	ομαλοποιητής, συνάρτηση εξομάλυνσης
ultimate aggregate claims	απόλυτες αθροιστικές ζημιές

## Περιεχόμενα

<b>1. Εισαγωγή</b>	<b>14</b>
<b>2. Παραδοσιακές μέθοδοι αποθεματοποίησης</b>	<b>17</b>
2.1. Μία σύγκριση των μοντέλων για την μέθοδο chain ladder	17
2.1.1. Η γενική δομή	17
2.1.2. Η μέθοδος chain ladder	19
2.1.3. Ένα μοντέλο με οριακή εκτίμηση	20
2.1.4. Μοντέλα με εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας	22
2.1.5. Μοντέλα με πρόβλεψη υπό τετραγωνική απώλεια	25
2.1.6. Ένα διάγραμμα ροής για την επιλογή μοντέλου	30
2.2. Υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson και chain ladder	31
2.2.1. Σύνοψη των δύο μοντέλων	31
2.2.2. Απόδειξη ότι τα μοντέλα είναι διαφορετικά	34
2.2.3. Άλλες διαφορές ανάμεσα στον αλγόριθμο C-L και το ΥΔΜΡ	37
2.2.4. Επίλογος	39
2.3. Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson	39
2.3.1. Η μέθοδος του αναμενόμενου δείκτη ζημιών	39
2.3.2. Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson	40
<b>3. Ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση ζημιών</b>	<b>42</b>
3.1. Εισαγωγή	42
3.2. Υπάρχοντα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης	43
3.3. Ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων	50
3.4. Ακρίβεια των εκτιμήσεων του αποθέματος	54
3.5. Αποτίμηση της καλής προσαρμογής	56
3.6. Παράδειγμα: μέρος 1 <sup>ο</sup>	58
3.7. Παράδειγμα: μέρος 2 <sup>ο</sup>	63
3.8. Συζήτηση και συμπεράσματα	65

<b>4. Τα μοντέλα GLM και GAM</b>	<b>68</b>
4.1. Αποθεματοποίηση ζημιών και GAMs	68
4.1.1. Φίλτρο Kalman	68
4.2. Ο αλγόριθμος chain ladder και τα GLMs	69
4.3. GAMs	71
4.4. Αποθέματα ζημιών και μέσα τετραγωνικά σφάλματα	74
4.5. Επίλογος	77
<b>5. Επίλογος και συμπεράσματα</b>	<b>78</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>79</b>
<b>Παράρτημα Α</b>	<b>82</b>

## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγή

Η δημιουργία και η συνεχής παρακολούθηση των αποθεματικών είναι κάτι πολύ σημαντικό για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Για την δημιουργία των αποθεματικών ο αναλογιστής χρησιμοποιεί διάφορες μεθόδους, η πιο γνωστή των οποίων είναι το μοντέλο chain ladder. Ο κύριος σκοπός μιας μεθόδου αποθεματοποίησης είναι ο υπολογισμός των χρημάτων που πρέπει να αποταμιεύσει μια εταιρεία την δεδομένη χρονική στιγμή ώστε να μπορεί να αποπληρώσει απαιτήσεις που θα δημιουργηθούν στο μέλλον από υπάρχοντα συμβόλαια. Ο υπολογισμός αυτός δεν μπορεί να είναι ακριβής και ο αναλογιστής γνωρίζει ότι υπάρχει μια κατανομή πιθανών εκβάσεων, χρησιμοποιεί όμως αυτές τις μεθόδους ώστε να βρει την καλύτερη δυνατή εκτίμηση. Είναι προφανές ότι η ακρίβεια αυτής της εκτίμησης είναι επιθυμητή. Οι παραδοσιακές μέθοδοι αποθεματοποίησης μπορούν να δώσουν μια βέλτιστη εκτίμηση (ένα μέτρο της θέσης στην κατανομή των πιθανών εκβάσεων), αλλά δεν μπορούν να βοηθήσουν με μέτρα ακρίβειας. Φυσικά, ο αναλογιστής γνωρίζει ότι ο υπολογισμός του αποθέματος για μια «καλή» επιχείρηση θα είναι πιο ακριβής απ' ό,τι για μια «κακή».

Τα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης έχουν σκοπό να δώσουν μέτρα θέσης (βέλτιστης εκτίμησης) και μέτρα ακρίβειας (μέτρα διακύμανσης) αντιμετωπίζοντας την διαδικασία αποθεματοποίησης σαν μια άσκηση ανάλυσης δεδομένων και κατασκευάζοντας ένα μοντέλο αποθεματοποίησης μέσα σε ένα στατιστικό πλαίσιο. Έτσι, θα μπορούν να γίνουν διαγνωστικοί έλεγχοι των περιεχόμενων μοντέλων, όπως ανάλυση των καταλοίπων. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες έχουν προταθεί διάφορα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης και υπάρχει και συνέχεια όσο γίνονται διαθέσιμες νέες τεχνικές στον τομέα της στατιστικής μοντελοποίησης.

Έχει δοθεί ιδιαίτερη σημασία στη σχέση μεταξύ διάφορων στοχαστικών μοντέλων και της τεχνικής chain ladder. Τα στοχαστικά μοντέλα έχουν δημιουργηθεί ώστε να παράγουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα (εκτιμήσεις αποθεματικών) με αυτά του μοντέλου chain ladder. Αυτό ίσως να φαίνεται ανώφελο, αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι μέτρα ακρίβειας είναι άμεσα διαθέσιμα και ότι διευκρινίζονται οι υποθέσεις που συνεπάγονται το μοντέλο chain ladder. Ακόμα πιο σημαντικό είναι ότι αποτελεί μια γέφυρα μεταξύ παραδοσιακών και στοχαστικών μεθόδων βοηθώντας έτσι οποιονδήποτε θέλει να κάνει μια μετάβαση από τον ένα τομέα στον άλλο.

Άλλα μοντέλα στοχαστικής αποθεματοποίησης προσπαθούν να ξεπεράσουν τα ελαττώματα του μοντέλου chain ladder ενσωματώνοντας την ομαλοποίηση ή μια παραμετρική μορφή η οποία μειώνει τον αριθμό των συνεπαγόμενων παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για να ταιριάξει το μοντέλο. Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση που επιτρέπει στον εξασκόν να επιλέξει ανάμεσα στο αν θα χρησιμοποιήσει το βασικό μοντέλο chain ladder ή θα επιβάλλει κάποια ομαλοποίηση. Αρκετά μοντέλα που έχουν προταθεί έως σήμερα ταιριάζουν σε αυτό το πλαίσιο και υπάρχουν επιπλέον επεκτάσεις που δεν έχουν δοκιμαστεί ακόμα.

Η μέθοδος chain ladder είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος αποθεματοποίησης ζημιών. Αρχικά, δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας ελκυστικός αλγόριθμος ικανός για λύση αλλά χωρίς κρίση. Το ερώτημα που προκύπτει είναι το γιατί ή κάτω από ποιες προϋποθέσεις πρέπει ή όχι να εφαρμοστεί η μέθοδος chain ladder.

Εξαιτίας της στοχαστικής φύσης των ποσοτήτων στις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος chain ladder, αρκετοί ακαδημαϊκοί έχουν μελετήσει το ενδεχόμενο του αν η μέθοδος chain ladder μπορεί να δικαιολογηθεί από ένα στοχαστικό μοντέλο και από μια στατιστική μέθοδο που σχετίζεται με το μοντέλο.

Ένα στοχαστικό μοντέλο περιγράφει την επιλογή όλων των τυχαίων μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν και, σε ένα βαθμό, την από κοινού κατανομή τους. Γι' αυτό περιγράφει τον στοχαστικό μηχανισμό που παράγει τα δεδομένα. Το μοντέλο μπορεί να αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι παρατηρήσιμες και άλλες που δεν είναι (ακόμα) παρατηρήσιμες. Επομένως, πρέπει να προστεθεί στο μοντέλο μια στατιστική μέθοδος πρόβλεψης των μη παρατηρήσιμων τυχαίων μεταβλητών του μοντέλου ή υπολογισμού συγκεκριμένων αποκλίσεων ή πιθανοτήτων αυτών των τυχαίων μεταβλητών. Γενικά, η μέθοδος πρόβλεψης ή υπολογισμού εξαρτάται από την πληροφορία που παρέχεται από το μοντέλο.

Σε αυτή την εργασία, συγκρίνουμε διάφορα στοχαστικά μοντέλα τα οποία, αν τα συνδυάσουμε με μια στατιστική μέθοδο πρόβλεψης ή υπολογισμού η οποία είναι κατάλληλη για το μοντέλο, σχετίζονται με την μέθοδο chain ladder. Επίσης, τα μοντέλα ομαδοποιούνται προσέχοντας τις στατιστικές μεθόδους που αποδέχονται. Η σύγκριση καταλήγει σε ένα διάγραμμα ροής για την επιλογή μοντέλου το οποίο μπορεί να βοηθήσει στο να αποφασίσουμε σε μια συγκεκριμένη περίπτωση αν πρέπει ή όχι να εφαρμόσουμε την μέθοδο chain ladder. Από αρχή μέχρι τέλους αυτής της εργασίας, ως θεωρήσουμε ( $\Omega$ ,  $F$ ,  $P$ ) να είναι ένας χώρος πιθανοτήτων στον οποίο ορίζονται όλες οι τυχαίες μεταβλητές.

Τέλος θα εξετάσουμε μεθόδους αποθεματοποίησης που κάνουν χρήση γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (GLM) και γενικευμένων προσθετικών μοντέλων (GAM). Οι Renshaw και Verrall (1994) όρισαν το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο (GLM) που διέπει την μέθοδο chain ladder και πρότειναν κάποια άλλα GLM τα οποία μπορεί να είναι χρήσιμα στην αποθεματοποίηση ζημιών. Παρακάτω θα επεκτείνουμε το βασικό μοντέλο σε ένα γενικευμένο προσθετικό μοντέλο (GAM). Τα GAM επιτρέπουν να εφαρμοσθούν στα δεδομένα μη παραμετρικές τεχνικές ομαλοποίησης

από εκθετικές οικογένειες κατανομών. Διατηρούν την βασική δομή των GLM, αλλά αντικαθιστούν τον γραμμικό εκτιμητή με μία μη παραμετρική διαδικασία ομαλοποίησης. Αυτό επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία στον μοντέλο που έχει προσαρμοσθεί και αφαιρεί την απαίτηση ότι το παραμετρικό μοντέλο είναι αποτελεσματικό σε όλο το εύρος τιμών που είναι για ομαλοποίηση. Διάφοροι ομαλοποιητές μπορούν να εφαρμοσθούν στην αποθεματοποίηση ζημιών και θα δείξουμε παρακάτω πως μπορεί να γίνει αυτό καθώς και την χρησιμότητά τους. Αυτό μας δείχνει μία επιπλέον διεύρυνση των εργαλείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην διαδικασία της αποθεματοποίησης ζημιών. Να παρατηρηθεί ότι τα GAM μπορούν να εφαρμοσθούν σε ένα μεγάλο εύρος μοντέλων και όχι μόνο στο γραμμικό μοντέλο chain-ladder.

Ο κύριος λόγος που χρησιμοποιούμε τα GAM είναι για να γίνει ομαλοποίηση πάνω στα έτη ατυχήματος. Έχει παρατηρηθεί πολλές φορές ότι ο αλγόριθμος chain ladder είναι υπέρ-παραμετροποιημένος και ότι δεν περνάει αρκετή πληροφορία ανάμεσα σε διαδοχικά έτη ατυχήματος. Αυτό οδηγεί σε έλλειψη εμπιστοσύνης των αποθεμάτων για τα πιο πρόσφατα έτη ατυχήματος και στην πιθανότητα αστάθειας σε αυτές τις εκτιμήσεις, λόγω της μικρής ποσότητας των δεδομένων. Έχει παρατηρηθεί επίσης ότι τα έτη ατυχήματος σχετίζονται περισσότερο απ' ό,τι υποδηλώνει η παραμετροποίηση της μεθόδου chain ladder. Έχουν προταθεί διάφορες ιδέες για την αντιμετώπιση αυτού όπως η ομαδοποίηση των ετών ατυχήματος χρησιμοποιώντας πολλαπλά t-tests σύγκρισης (Renshaw 1989), Bayes και εμπειρικές μέθοδοι Bayes (Verrall 1990) και το φίλτρο Kalman (Verrall 1989, De Jong και Zehnwirth 1983). Τα GAM δίνουν μία επιπλέον μέθοδο αφού έχουν μερικές ομοιότητες με το φίλτρο Kalman και τα δυναμικά GLM, αλλά έχουν κάποια πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Μπορούν να εφαρμοσθούν απλά με το στατιστικό πακέτο S-PLUS χωρίς την ανάγκη για προγραμματισμό από την αρχή. Το S-PLUS επιτρέπει επίσης να χρησιμοποιηθούν τα GLM και μη γραμμικά μοντέλα και γι' αυτό παρέχει ένα περιεκτικό πλαίσιο για σύγκριση μοντέλων. Τα GAM είναι πιο ευέλικτα σε σχέση με την ομαδοποιημένη προσέγγιση του Renshaw (1989) αφού δεν απαιτούν ισότητα στις παραμέτρους του έτους ατυχήματος.

Ξεκινώντας από την ενότητα 2 θα δούμε κάποιες παραδοσιακές μεθόδους αποθεματοποίησης που χρησιμοποιούνται ως σήμερα. Στη συνέχεια, στην ενότητα 3 παρουσιάζεται ένα πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων όπου φαίνεται ένας τρόπος ομαλοποίησης των παραγόντων ανάπτυξης της chain ladder. Στην ενότητα 4 τέλος, αναπτύσσουμε τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM) και τα γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAM).



## Κεφάλαιο 2

### Παραδοσιακές μέθοδοι αποθεματοποίησης

#### 2.1 Μία σύγκριση των μοντέλων για την μέθοδο chain ladder

Η μέθοδος chain ladder είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος αποθεματοποίησης ζημιών. Αρχικά, δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας ελκυστικός αλγόριθμος ικανός για λύση αλλά χωρίς κρίση. Εξαιτίας της στοχαστικής φύσης των ποσοτήτων στις οποίες εφαρμόζεται ο αλγόριθμος, αρκετοί ακαδημαϊκοί έχουν μελετήσει το ενδεχόμενο του αν η μέθοδος chain ladder μπορεί να δικαιολογηθεί από ένα στοχαστικό μοντέλο και από μια στατιστική μέθοδο που σχετίζεται με το μοντέλο. Σε αυτό το κεφάλαιο συγκρίνουμε διάφορες παραλλαγές τέτοιων μοντέλων. Η σύγκριση καταλήγει σε ένα διάγραμμα ροής για την επιλογή μοντέλου το οποίο μπορεί να βοηθήσει στο να αποφασίσουμε σε μια συγκεκριμένη περίπτωση αν πρέπει ή όχι να εφαρμόσουμε την μέθοδο chain ladder.

##### 2.1.1 Η γενική δομή

Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{S_{i,k}\}$  με  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Η τυχαία μεταβλητή  $S_{i,k}$  ερμηνεύεται ως το αθροιστικό μέγεθος όλων των ζημιών που συμβαίνουν στο έτος εμφάνισης  $i$  και ρυθμίζονται πριν το τέλος του ημερολογιακού έτους  $i+k$  και έτσι πριν από το τέλος του έτους ανάπτυξης  $k$ .

Θεωρούμε ότι όλες οι ζημιές ρυθμίζονται πριν από το τέλος του έτους ανάπτυξης  $n$ . Γι' αυτόν τον λόγο οι τυχαίες μεταβλητές  $S_{i,n}$  θα αναφέρονται σαν τις απόλυτες αθροιστικές ζημιές (ultimate aggregate claims). Υποθέτουμε επίσης, ότι οι αθροιστικές ζημιές  $S_{i,k}$  είναι παρατηρήσιμες για  $i+k \leq n$  αλλά μη παρατηρήσιμες για  $i+k > n$ .

Οι παρατηρήσιμες αθροιστικές ζημιές μπορούν να αναπαρασταθούν από το τρίγωνο:

Έτος εμφάνισης	Έτος ανάπτυξης								
	0	1	...	k	...	n - i	...	n - 1	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$			
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
n - k	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$					
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
.	.	.		.		.			
n - 1	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Το πρόβλημα της αποθεματοποίησης ζημιών είναι να

- προβλέψουμε τις απόλυτες αθροιστικές ζημιές  $S_{i,n}$  ή
- εκτιμήσουμε τις αναμενόμενες απόλυτες αθροιστικές ζημιές  $E[S_{i,n}]$  όταν οι απόλυτες αθροιστικές ζημιές έχουν πεπερασμένες προσδοκίες,

και τα δυο με βάση τις παρατηρήσιμες αθροιστικές ζημιές. Συνεπώς, η πρόβλεψη αναφέρεται σε μη παρατηρήσιμες τυχαίες μεταβλητές ενώ η εκτίμηση αναφέρεται σε άγνωστες παραμέτρους. Για τυπικούς λόγους, περιλαμβάνουμε την περίπτωση όπου  $i=0$  στην συζήτηση της πρόβλεψης και της εκτίμησης αν και η απόλυτη αθροιστική ζημιά  $S_{0,n}$  είναι παρατηρήσιμη.

Θεωρούμε επίσης την οικογένεια  $\{X_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  των αυξητικών απαιτήσεων οι οποίες ορίζονται ως:

$$X_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0}, & \text{αν } k = 0, \\ S_{i,k} - S_{i,k-1}, & \text{αν } k \geq 1. \end{cases}$$

Τότε έχουμε

$$S_{i,k} = \sum_{l=0}^k X_{i,l}.$$

Η οικογένεια όλων των παρατηρήσιμων αυξητικών απαιτήσεων περιέχει την ίδια πληροφορία με την οικογένεια όλων των αθροιστικών απαιτήσεων.

### 2.1.2 Η μέθοδος chain-ladder

Για  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$ , ορίζουμε τον μεμονωμένο παράγοντα ανάπτυξης (αλλιώς, συντελεστής εξέλιξης)  $F_{i,k}$  ως

$$F_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}.$$

Τότε οι απόλυτες αθροιστικές ζημιές ικανοποιούν την σχέση

$$S_{i,n} = S_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^n F_{i,k}.$$

Συνεπώς, για  $i \in \{1, \dots, n\}$ , η απόλυτη αθροιστική απαίτηση  $S_{i,n}$  είναι το γινόμενο της τελευταίας παρατηρήσιμης αθροιστικής ζημιάς  $S_{i,n-i}$  με τους μη παρατηρήσιμους μεμονωμένους παράγοντες ανάπτυξης  $F_{i,n-i+1}, \dots, F_{i,n}$ . Η ιδέα της μεθόδου chain-ladder είναι να αντικαταστήσουμε τους μη παρατηρήσιμους μεμονωμένους παράγοντες ανάπτυξης με σταθμικούς μέσους των παρατηρήσιμων μεμονωμένων παραγόντων ανάπτυξης ώστε να αποκτήσουμε εκτιμητές των μη παρατηρήσιμων αθροιστικών απαιτήσεων ή εκτιμητές των προσδοκιών τους.

Ορίζουμε

$$\hat{F}_k := \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} F_{j,k}$$

και

$$\hat{S}_{i,n} := S_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^n \hat{F}_k.$$

Τότε το  $\hat{F}_k$  ονομάζεται ο παράγοντας chain-ladder του έτους ανάπτυξης  $k$  και το  $\hat{S}_{i,n}$  ονομάζεται ο προβλεπτής chain-ladder του  $S_{i,n}$  ή ο εκτιμητής chain-ladder του  $E[S_{i,n}]$ .

#### Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος chain-ladder δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιαδήποτε δεδομένα. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι οι παράγοντες chain-ladder ορίζονται μόνο όταν οι παρατηρήσιμες αθροιστικές απαιτήσεις που βρίσκονται εκτός της διαγωνίου είναι αυστηρά θετικές. Ένα ελαφρώς πιο αδύναμο τέτοιου είδους πρόβλημα εμφανίζεται ακόμα και όταν οι παράγοντες chain-ladder ορίζονται ως

$$\hat{F}_k := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

και η κατάσταση είναι ίδια με τις μεθόδους πρόβλεψης ή εκτίμησης που θα συζητήσουμε.

2. Οι chain-ladder προβλεπτές ή εκτιμητές είναι ίδιοι με αυτούς που αποκτήθηκαν με την μέθοδο της αναγωγής που περιγράφεται στο Claims Reserving Manual (1989), βλέπε Lorenz και Schmidt (1999).

3. Η μέθοδος chain-ladder μπορεί να τροποποιηθεί αλλάζοντας την  $\hat{F}_k$  σε

$$\hat{F}_k := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} F_{j,k}$$

Όπου κάθε βάρος  $W_{j,k}$  αποκτάται από έναν μετρήσιμο μετασχηματισμό των παρατηρήσιμων αυξητικών απαιτήσεων από τα έτη ανάπτυξης 0, 1, ..., k-1. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου  $W_{j,k} := 1/(n-k+1)$  το ίδιο βάρος δίνεται σε όλους παρατηρήσιμους μεμονωμένους παράγοντες ανάπτυξης του έτους ανάπτυξης k.

Στις επόμενες ενότητες, θεωρούμε τρεις ομάδες μοντέλων για την μέθοδο chain-ladder:

- Στην ενότητα 3 θεωρούμε ένα μοντέλο στο οποίο καθορίζεται μόνο η μορφή των αναμενόμενων αυξητικών απαιτήσεων. Σε αυτό το μοντέλο, η οριακή εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου αποφέρει τους chain ladder εκτιμητές των αναμενόμενων απόλυτων αθροιστικών απαιτήσεων.
- Στην ενότητα 4 θεωρούμε διάφορα μοντέλα στα οποία καθορίζεται πλήρως η από κοινού κατανομή όλων των αυξητικών απαιτήσεων. Σε καθένα από αυτά τα μοντέλα, η εκτίμηση της μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων του μοντέλου αποφέρει τους chain-ladder εκτιμητές των αναμενόμενων απόλυτων αθροιστικών απαιτήσεων.
- Στην ενότητα 5 θεωρούμε δύο μοντέλα στα οποία οι προαναφερθείσες διαφοροποιήσεις της μεθόδου chain-ladder μπορούν να συγκριθούν με συγκεκριμένα κριτήρια βελτιστοποίησης. Σε αυτά τα μοντέλα, η βέλτιστη πρόβλεψη αποφέρει τους chain-ladder προβλεπτές των μην παρατηρήσιμων αθροιστικών απαιτήσεων.

Αυτά τα μοντέλα θα συγκριθούν και τα αποτελέσματα θα συνοψισθούν σε ένα διάγραμμα ροής στην Ενότητα 6.

### 2.1.3 Ένα μοντέλο με οριακή εκτίμηση

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε ένα μοντέλο στο οποίο καθορίζεται μόνο η μορφή των προσδοκιών (μέσων τιμών) των αυξητικών απαιτήσεων. Αυτό το μοντέλο επιτρέπει οριακή εκτίμηση των παραμέτρων το οποίο καθορίζει τις προσδοκίες των αυξητικών απαιτήσεων.

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο δίνεται από τις ακόλουθες υποθέσεις:

- i. Οι αυξητικές απαιτήσεις έχουν πεπερασμένες προσδοκίες.
- ii. Υπάρχουν  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 1)$  που ικανοποιούν

$$\sum_{k=0}^n \theta_k = 1 \text{ και } E[X_{i,k}] = \alpha_i \theta_k \quad \text{για όλα τα } i, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Το πολλαπλασιαστικό μοντέλο στην γενική του μορφή είχε μελετηθεί για πρώτη φορά από τις Schmidt και Wunsche (1998).

Στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο έχουμε

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i \quad \text{για όλα τα } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός τις παραμέτρου  $\alpha_i$  σημαίνει υπολογισμός τις αναμενόμενης απόλυτης αθροιστικής απαίτησης  $E[S_{i,n}]$ .

Λέμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  είναι οριακοί εκτιμητές των  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$  αν ικανοποιούν την σχέση

$$\sum_{k=0}^n \widehat{\theta}_k = 1 \text{ και την}$$

$$\sum_{k=0}^{n-i} \widehat{\alpha}_i \widehat{\theta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} X_{i,k} \quad \text{για όλα τα } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ και}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \widehat{\alpha}_i \widehat{\theta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} X_{i,k} \quad \text{για όλα τα } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

**Θεώρημα 2.1.3.1.** Υπό τις υποθέσεις του πολλαπλασιαστικού μοντέλου και για τυχαίες μεταβλητές  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$ , τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- a) Τα  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  είναι οριακοί εκτιμητές.
- b) Τα  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  είναι οι chain-ladder εκτιμητές των αναμενόμενων απόλυτων αθροιστικών απαιτήσεων και η ταυτότητα

$$\widehat{\theta}_k = \begin{cases} \prod_{l=1}^n \frac{1}{\widehat{F}_l}, & \text{αν } k = 0, \\ \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\widehat{F}_l} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\widehat{F}_l} & \text{αν } k \geq 1 \end{cases}$$

ισχύει για όλα τα  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  
 Συγκεκριμένα, οι οριακοί εκτιμητές υπάρχουν και είναι μοναδικοί.

**Παρατήρηση:** Οι υποθέσεις του πολλαπλασιαστικού μοντέλου εκπληρώνονται όταν οι αυξητικές απαιτήσεις μπορούν να γραφούν ως  $X_{i,k} = A_i \theta_k$  όπου  $A_0, A_1, \dots, A_n > 0$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n > 0$  είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες έχουν πεπερασμένη δεύτερη ροπή και ικανοποιούν την  $\sum_{k=0}^n \theta_k = 1$  καθώς και την  $\text{cov}[A_i, \theta_k] = 0$  για όλα τα  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε  $A_i = S_{i,n}$  και η συλλογή  $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$  μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα τυχαίο μοτίβο ανάπτυξης.

#### 2.1.4 Μοντέλα με εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε μερικά μοντέλα στα οποία η από κοινού κατανομή όλων των αυξητικών απαιτήσεων ορίζεται πλήρως. Αυτά τα μοντέλα επιτρέπουν την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων που καθορίζουν την από κοινού κατανομή των αυξητικών απαιτήσεων. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα **B**, **P**, **NB** και **M** για να δηλώσουμε μια διωνυμική, Poisson, αρνητική διωνυμική και πολυωνυμική κατανομή, αντιστοίχως.

##### 2.1.4.1. Το μοντέλο Poisson

Το μοντέλο Poisson δίνεται από τις παρακάτω υποθέσεις:

- i. Οι αυξητικές απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες.
- iii. Υπάρχουν  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n \in (0,1)$  που ικανοποιούν

$$\sum_{k=0}^n \theta_k = 1 \text{ και } P_{X_{i,k}} = \mathbf{P}(\alpha_i \theta_k) \quad \text{για όλα τα } i, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Το μοντέλο Poisson είχε εισαχθεί από τους Hachemeister και Stanard (1975).

Στο μοντέλο Poisson έχουμε

$$E[X_{i,k}] = \alpha_i \theta_k \quad \text{για όλα τα } i, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Συνεπώς, το μοντέλο Poisson είναι μια ειδική περίπτωση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου.

Στο μοντέλο Poisson, η από κοινού κατανομή όλων των αυξητικών απαιτήσεων ορίζεται πλήρως και δίνεται από την

$$P[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{X_{i,k} = x_{i,k}\}] = \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^n e^{-\alpha_i \theta_k} \frac{(\alpha_i \theta_k)^{x_{i,k}}}{x_{i,k}!}.$$

Αυτό αποφέρει την από κοινού κατανομή όλων των παρατηρήσιμων αυξητικών απαιτήσεων. Συνεπώς, το μοντέλο Poisson επιτρέπει την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας.

Λέμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  είναι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$  αν ικανοποιούν την  $\sum_{k=0}^n \widehat{\theta}_k = 1$  και εκμηδενίζουν όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της (log-)πιθανοφάνειας συνάρτησης.

**Θεώρημα 2.1.4.1.** Στο μοντέλο Poisson, οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$  είναι οριακοί εκτιμητές.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4.1 δες Hachemeister και Stanard (1975).

#### 2.1.4.2 Το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson

Οι υποθέσεις για το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson πληρούνται αν και μόνον αν υπάρχουν κάποια  $\alpha \in (0, \infty)$  τέτοια ώστε η κλιμακωτή οικογένεια  $\{X_{i,k}/\alpha\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του μοντέλου Poisson. Επομένως, το Θεώρημα 2.1.4.1 ισχύει για το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson.

#### 2.1.4.3 Το πολυωνυμικό μοντέλο

Για  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , έστω  $F_{i,n}$  η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια  $\{S_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ .

Τότε η  $F_{i,n}$  είναι πανομοιότυπη με την σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια  $\{X_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$ .

Λέμε ότι τα έτη συμβάντος είναι ανεξάρτητα αν η οικογένεια  $\{F_{i,n}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$  είναι ανεξάρτητη. Το πολυωνυμικό μοντέλο δίνεται από τις παρακάτω υποθέσεις:

- i. Τα έτη συμβάντος είναι ανεξάρτητα.
- ii. Υπάρχουν  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  τέτοια ώστε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκπληρώνεται για κάθε  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ :
  1.  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{B}(m_i, \eta_i)$  με  $m_i \eta_i = \alpha_i$ .
  2.  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{P}(\alpha_i)$ .
  3.  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{NB}(\beta_i, \eta_i)$  με  $\beta_i \eta_i / (1 - \eta_i) = \alpha_i$ .
- iii. Υπάρχουν  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 1)$  που ικανοποιούν την  $\sum_{k=0}^n \theta_k = 1$  τέτοια ώστε η

$$P_{X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,n} | S_{i,n}} = \mathbf{M}(S_{i,n}; \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \text{ να ισχύει για κάθε } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Το πολυωνυμικό μοντέλο στην γενική του μορφή είχε εισαχθεί και μελετηθεί από τους Schmidt και Wunsche (1998).

Στο πολυωνυμικό μοντέλο, ορίζεται πλήρως η από κοινού κατανομή και δίνεται από την

$$P[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{X_{i,k} = x_{i,k}\}] = \prod_{i=0}^n \left( \frac{(\sum_{k=0}^n x_{i,k})!}{\prod_{k=0}^n x_{i,k}!} \prod_{k=0}^n \theta_k^{x_{i,k}} \right) P[\{S_{i,n} = \sum_{k=0}^n x_{i,k}\}].$$

Συγκεκριμένα, παίρνουμε τις κατανομές των αυξητικών απαιτήσεων:

- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{B}(m_i, \eta_i)$ , τότε  $P_{X_{i,k}} = \mathbf{B}(m_i, \eta_i \theta_k)$ .
- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{P}(\alpha_i)$ , τότε  $P_{X_{i,k}} = \mathbf{P}(\alpha_i \theta_k)$ .
- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{NB}(\beta_i, \eta_i)$ , τότε  $P_{X_{i,k}} = \mathbf{NB}(\beta_i, \frac{\eta_i \theta_k}{1 - \eta_i + \eta_i \theta_k})$ .

Και στις τρεις περιπτώσεις, οι αυξητικές απαιτήσεις έχουν πεπερασμένες προσδοκίες και ικανοποιούν την  $E[X_{i,k}] = \alpha_i \theta_k$  για όλα τα  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Θεώρημα 2.1.4.2.** Το πολυωνυμικό μοντέλο είναι μια ειδική περίπτωση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου.

Ας συγκρίνουμε τώρα το πολυωνυμικό μοντέλο με τον μοντέλο Poisson.

**Θεώρημα 2.1.4.3.** Το μοντέλο Poisson είναι μια ειδική περίπτωση του πολυωνυμικού μοντέλου.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4.3 είναι άμεση. Τα παρακάτω αποτελέσματα χαρακτηρίζουν το μοντέλο Poisson ως ένα συγκεκριμένο πολυωνυμικό μοντέλο.

**Θεώρημα 2.1.4.4.** Ας θεωρήσουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του πολυωνυμικού μοντέλου. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Οι αυξητικές απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες.
- Οι απόλυτες αθροιστικές απαιτήσεις έχουν μία κατανομή Poisson.

Το Θεώρημα 2.1.4.4 ακολουθεί το Λήμμα Α.1 που δίνεται στο Παράρτημα Α.

Στο πολυωνυμικό μοντέλο, η από κοινού κατανομή όλων των αυξητικών απαιτήσεων αποφέρει την από κοινού κατανομή όλων των παρατηρήσιμων αυξητικών απαιτήσεων. Επομένως, το πολυωνυμικό μοντέλο επιτρέπει την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας. Αφού ενδιαφερόμαστε για την εκτίμηση των αναμενόμενων απόλυτων αθροιστικών απαιτήσεων, αντικαθιστούμε τις παραμέτρους  $m_i$  στην διωνυμική περίπτωση και τις  $\beta_i$  στην περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής με την αξία των ταυτοτήτων  $m_i = \alpha_i / \eta_i$  και  $\beta_i = \alpha_i (1 - \eta_i) / \eta_i$ . Τότε η από κοινού κατανομή των παρατηρήσιμων αυξητικών απαιτήσεων εξαρτάται από τις παραμέτρους  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$  και στις τρεις περιπτώσεις και στις επιπρόσθετες παραμέτρους  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$  στην περίπτωση της διωνυμικής και της αρνητικής διωνυμικής.



Λέμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  (όπως επίσης και οι  $\widehat{\eta}_0, \widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_n$ ) είναι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  και  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$  (όπως επίσης και των  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ ) αν ικανοποιούν την  $\sum_{k=0}^n \widehat{\theta}_k = 1$  και μηδενίζουν τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της (log-)πιθανοφάνειας συνάρτησης.

**Θεώρημα 2.1.4.5.** *Ας θεωρήσουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του πολυωνυμικού μοντέλου. Αν  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  (όπως επίσης και οι  $\widehat{\eta}_0, \widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_n$ ) είναι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας, τότε οι  $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$  και  $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_n$  είναι οριακοί εκτιμητές.*

**Παρατήρηση:** Μπορεί να υποστηριχθεί ότι η εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας δεν είναι λογική στην περίπτωση της διωνυμικής αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ο περιορισμός ότι  $\alpha_i/\eta_i \in N_0$  κάτι το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη. Αυτό το επιχείρημα μπορεί να παραμεληθεί αν η αρχή της μεγίστης πιθανοφάνειας θεωρείται απλώς ως μια μέθοδος παραγωγής εκτιμητών των οποίων οι ιδιότητες πρέπει ακόμα να ερευνηθούν. Με άλλα λόγια, το να είσαι εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας δεν είναι μια στατιστική ιδιότητα ενός εκτιμητή. Κάτω από αυτή την άποψη, είναι επαρκές να καθορίσουμε τα κρίσιμα σημεία της (log-)πιθανοφάνειας συνάρτησης και δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις μερικές της παραγώγους δεύτερης τάξης.

### 2.1.5 Μοντέλα με πρόβλεψη υπό τετραγωνική απώλεια

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε δύο μοντέλα που επιτρέπουν την πρόβλεψη υπό τετραγωνική απώλεια. Υπάρχει σχέση ανάμεσα σε αυτά τα μοντέλα και την μέθοδο chain-ladder που συζητείται στο άρθρο των Schmidt και Schnaus (1996). Στα μοντέλα αυτά, χρειάζονται δύο είδη σ-άλγεβρας:

- Για  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , ας θέσουμε  $F_{i,k}$  τη σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια  $\{S_{i,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k\}}$ .
- Για  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , ας θέσουμε  $F_k$  τη σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια  $\{S_{i,l}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}, l \in \{0,1,\dots,k\}}$ .

Φυσικά,  $F_{i,k} \subseteq F_k$  για κάθε  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$  και η ανεξαρτησία των ετών εμφάνισης είναι ανεξαρτησία της οικογένειας  $\{F_{i,n}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$ .

### 2.1.5.1 Το μοντέλο του Mack

Το μοντέλο του Mack δίνεται από τις παρακάτω υποθέσεις:

- i. Τα έτη συμβάντος είναι ανεξάρτητα.
- ii. Οι αυξητικές απαιτήσεις έχουν πεπερασμένες και αυστηρά θετικές προσδοκίες.
- iii. Υπάρχουν  $f_1, \dots, f_n \in (1, \infty)$  και  $u_1, \dots, u_n \in (0, \infty)$  τέτοια ώστε

$$E(S_{i,k}|F_{i,k-1})=f_k S_{i,k-1}, \quad \text{var}(S_{i,k}|F_{i,k-1})=u_k S_{i,k-1}$$

να ισχύουν για κάθε  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Θεώρημα 2.1.5.1.** Το μοντέλο του Mack είναι μια ειδική περίπτωση του πολλαπλασιαστικού μοντέλου.

### 2.1.5.2 Το μοντέλο του Schnaus

Το μοντέλο του Schnaus δίνεται από τις παρακάτω υποθέσεις:

- i. Οι αυξητικές απαιτήσεις έχουν πεπερασμένες και αυστηρά θετικές προσδοκίες.
- ii. Υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές  $F_1, \dots, F_n > 1$  και  $V_1, \dots, V_n > 0$  τέτοιες ώστε

$$E(S_{i,k}|F_{k-1})=F_k S_{i,k-1}, \quad \text{cov}(S_{i,k}, S_{j,k}|F_{k-1})=\begin{cases} V_k S_{i,k-1}, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

να ισχύουν για κάθε  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Θεώρημα 2.1.5.2.** Το μοντέλο του Mack είναι μια ειδική περίπτωση του μοντέλου του Schnaus.

**Θεώρημα 2.1.5.3.** Το μοντέλο του Schnaus δεν περιέχεται στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την περίπτωση όπου  $n=1$  και υποθέτουμε ότι

$$P[\{X_{0,0} = p\} \cap \{X_{0,1} = q\} \cap \{X_{1,0} = r\} \cap \{X_{1,1} = s\}] = e^{-(2a+p^2+pr)} \frac{a^{p+r} p^{2q+sr}}{p!q!r!s!}$$

Να ισχύει για κάποιο  $a \in (0, \infty)$  και για όλα τα  $p, q, r, s \in N_0$ . Τότε έχουμε

$$P[\{X_{0,0} = p\} \cap \{X_{1,0} = r\}] = e^{-a} \frac{a^p}{p!} e^{-a} \frac{a^r}{r!}$$

και έτσι

$$P[\{X_{0,1} = q\} \cap \{X_{1,1} = s\} | \{X_{0,0} = p\} \cap \{X_{1,0} = r\}] = e^{-p^2} \frac{(p^2)^q}{q!} e^{-pr} \frac{(pr)^s}{s!}.$$

Αυτές οι ταυτότητες δείχνουν ότι τα  $X_{0,0}$  και  $X_{1,0}$  είναι ανεξάρτητα με  $P_{X_{0,0}} = P_{X_{1,0}} = \mathbf{P}(\alpha)$ , αν και τα  $X_{0,0}$  και  $X_{1,0}$  είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα για  $F_0 = \sigma(X_{0,0}, X_{1,0})$  με  $P_{X_{0,1}|F_0} = \mathbf{P}(X_{0,0}^2)$  και  $P_{X_{1,1}|F_0} = \mathbf{P}(X_{0,0}X_{1,0})$ . Δεν είναι άμεσο να δειχθεί ότι οι υποθέσεις του μοντέλου του Schnaus πληρούνται με

$$F_1 = X_{0,0} + 1, \quad V_1 = X_{0,0}$$

και

$$E[X_{0,0}] = \alpha, \quad E[X_{0,1}] = \alpha^2 + \alpha, \quad E[X_{1,0}] = \alpha, \quad E[X_{1,1}] = \alpha^2.$$

Επομένως, οι υποθέσεις του πολλαπλασιαστικού μοντέλου δεν πληρούνται. ■

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 2.1.5.1 και 2.1.5.2 παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

**Πόρισμα 2.1.5.4.** Το μοντέλο του Schnaus είναι μία κατάλληλη επέκταση του μοντέλου του Mack.

Ας συγκρίνουμε τώρα το μοντέλο του Schnaus με το πολυωνυμικό μοντέλο.

**Θεώρημα 2.1.5.5.** Το μοντέλο του Schnaus δεν είναι σε συνέχεια του πολυωνυμικού μοντέλου.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Έστω ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του μοντέλου του Schnaus. Αφού το  $S_{i,k-1}$  είναι  $F_{k-1}$ -μετρήσιμο, έχουμε ότι

$$E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = E(E(S_{i,k}|F_{k-1})|S_{i,k-1})E(F_k S_{i,k-1}|S_{i,k-1}) = E(F_k|S_{i,k-1})S_{i,k-1}.$$

Έστω επιπλέον, ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις και του πολυωνυμικού μοντέλου. Αφού

$$E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = S_{i,k-1} + E(X_{i,k}|S_{i,k-1})$$

παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{B}(m_i, \eta_i)$ , τότε  $P_{X_{i,k}|S_{i,k-1}} = \mathbf{B}\left(\frac{m_i - S_{i,k-1}\eta_i\theta_k}{1 - \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i\theta_l}\right)$  και αυτό μας δίνει

$$E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = \frac{\eta_i\theta_k}{1 - \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i\theta_l} m_i + \frac{1 - \sum_{l=0}^k \eta_i\theta_l}{1 - \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i\theta_l} S_{i,k-1}.$$

- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{P}(\alpha_i)$ , τότε η οικογένεια  $\{X_{i,k}\}_{k=0}^n$  είναι ανεξάρτητη με  $P_{X_{i,k}|S_{i,k-1}} = P_{X_{i,k}} = \mathbf{P}(\alpha_i\theta_k)$  και αυτό δίνει  $E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = \alpha_i\theta_k + S_{i,k-1}$ .

- Αν  $P_{S_{i,n}} = \mathbf{NB}(\beta_i, \eta_i)$ , τότε  $P_{X_{i,k}|S_{i,k-1}} = \mathbf{NB}\left(\frac{\beta_i + S_{i,k-1}\eta_i\theta_k}{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i\theta_l}\right)$  και αυτό δίνει

$$E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = \frac{\eta_i \theta_k}{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i \theta_l} \beta_i + \frac{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^k \eta_i \theta_l}{1 - \eta_i + \sum_{l=0}^{k-1} \eta_i \theta_l} S_{i,k-1}.$$

Έτσι, και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε

$$E(S_{i,k}|S_{i,k-1}) = \lambda_{i,k} + \mu_{i,k} S_{i,k-1} \quad \text{για κάποια } \lambda_{i,k}, \mu_{i,k} \in (0, \infty).$$

Οι δύο ταυτότητες για την  $E(S_{i,k}|S_{i,k-1})$  δίνουν

$$(E(F_k|S_{i,k-1}) - \mu_{i,k})S_{i,k-1} = \lambda_{i,k} > 0.$$

Αυτό αποτελεί αντίφαση αφού οι υποθέσεις του πολυωνυμικού μοντέλου συνεπάγονται και ότι  $P\{S_{i,n} = 0\} > 0$  και ως εκ τούτου  $P\{S_{i,k-1} = 0\} > 0$ . ■

Τέλος, ας συγκρίνουμε το μοντέλο του Schnaus με μοντέλα με ανεξάρτητες αυξητικές απαιτήσεις.

**Θεώρημα 2.1.5.6.** Για  $n \geq 2$ , το μοντέλο του Schnaus δεν αποτελεί συνέχεια για οποιοδήποτε μοντέλο με ανεξάρτητες αυξητικές απαιτήσεις.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του μοντέλου του Schnaus και ότι οι αυξητικές απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες. Για όλα τα  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$  έχουμε

$$F_k S_{i,k-1} = E(S_{i,k}|F_{k-1}) = S_{i,k-1} + E(X_{i,k}|F_{k-1}) = S_{i,k-1} + E(X_{i,k})$$

και έτσι

$$\frac{1}{F_{k-1}} = \frac{S_{i,k-1}}{E[X_{i,k}]}.$$

Για όλα τα  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  και  $k \in \{1, \dots, n\}$  τέτοια ώστε  $i \neq j$ , αυτό μας δίνει

$$\text{var} \left[ \frac{1}{F_{k-1}} \right] = \text{cov} \left[ \frac{1}{F_{k-1}}, \frac{1}{F_{k-1}} \right] = \text{cov} \left[ \frac{S_{i,k-1}}{E[X_{i,k}]}, \frac{S_{j,k-1}}{E[X_{j,k}]} \right] = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι τα  $F_k$  και συνεπώς και τα  $S_{i,k-1}$  είναι σταθερά. Παίρνουμε έτσι

$$\begin{aligned} 0 &= \text{var}[S_{i,n-1}] = E[\text{var}(S_{i,n-1}|F_{n-2})] + \text{var}[E(S_{i,n-1}|F_{n-2})] \\ &= E[V_{n-1}S_{i,n-2}] + \text{var}[F_{n-1}S_{i,n-2}] = E[V_{n-1}]S_{i,n-2} \end{aligned}$$

και συνεπώς  $E[X_{i,n-2}] \leq E[S_{i,n-2}] = S_{i,n-2} = 0$ , το οποίο είναι αντίφαση. ■

**Πόρισμα 2.1.5.7.** Για  $n \geq 2$  το μοντέλο το Schnaus δεν αποτελεί συνέχεια του μοντέλου Poisson.

Το μοντέλο του Schnaus επιτρέπει την βέλτιστη πρόβλεψη των μη παρατηρήσιμων αθροιστικών απαιτήσεων: Για  $k \in \{1, \dots, n\}$ , ας θέσουμε  $\Delta_k$  την συλλογή όλων των τυχαίων μεταβλητών  $\delta_k$  οι οποίες μπορούν να γραφούν ως

$$\delta_k = \sum_{h=0}^{n-k} W_h F_{h,k},$$

όπου τα  $W_0, W_1, \dots, W_{n-k}$  είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι  $F_{k-1}$ -μετρήσιμες και ικανοποιούν την  $\sum_{h=0}^{n-k} W_h = 1$ . Η τάξη  $\Delta_k$  περιέχει τον παράγοντα chain-ladder

$$\hat{F}_k = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} F_{j,k}.$$

Για  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  με  $i + k > n$ , ας θέσουμε  $\Delta_{i,k}$  την συλλογή όλων των τυχαίων μεταβλητών  $\delta_{i,k}$  οι οποίες μπορούν να γραφούν ως

$$\delta_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \delta_l$$

με  $\delta_l \in \Delta_l$  για όλα τα  $l \in \{n-i+1, \dots, k\}$ . Η τάξη  $\Delta_{i,k}$  περιέχει τον προβλεπτή chain-ladder

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \hat{F}_l.$$

Ένας προβλεπτής  $\delta_{i,k}^* \in \Delta_{i,k}$  λέγεται βέλτιστος αν ελαχιστοποιεί το δεσμευμένο σφάλμα πρόβλεψης  $E((S_{i,k} - \delta_{i,k})^2 | F_{n-i})$  πάνω σε όλους τους προβλεπτές  $\delta_{i,k} \in \Delta_{i,k}$ . Παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

#### **Θεώρημα 2.1.5.8.**

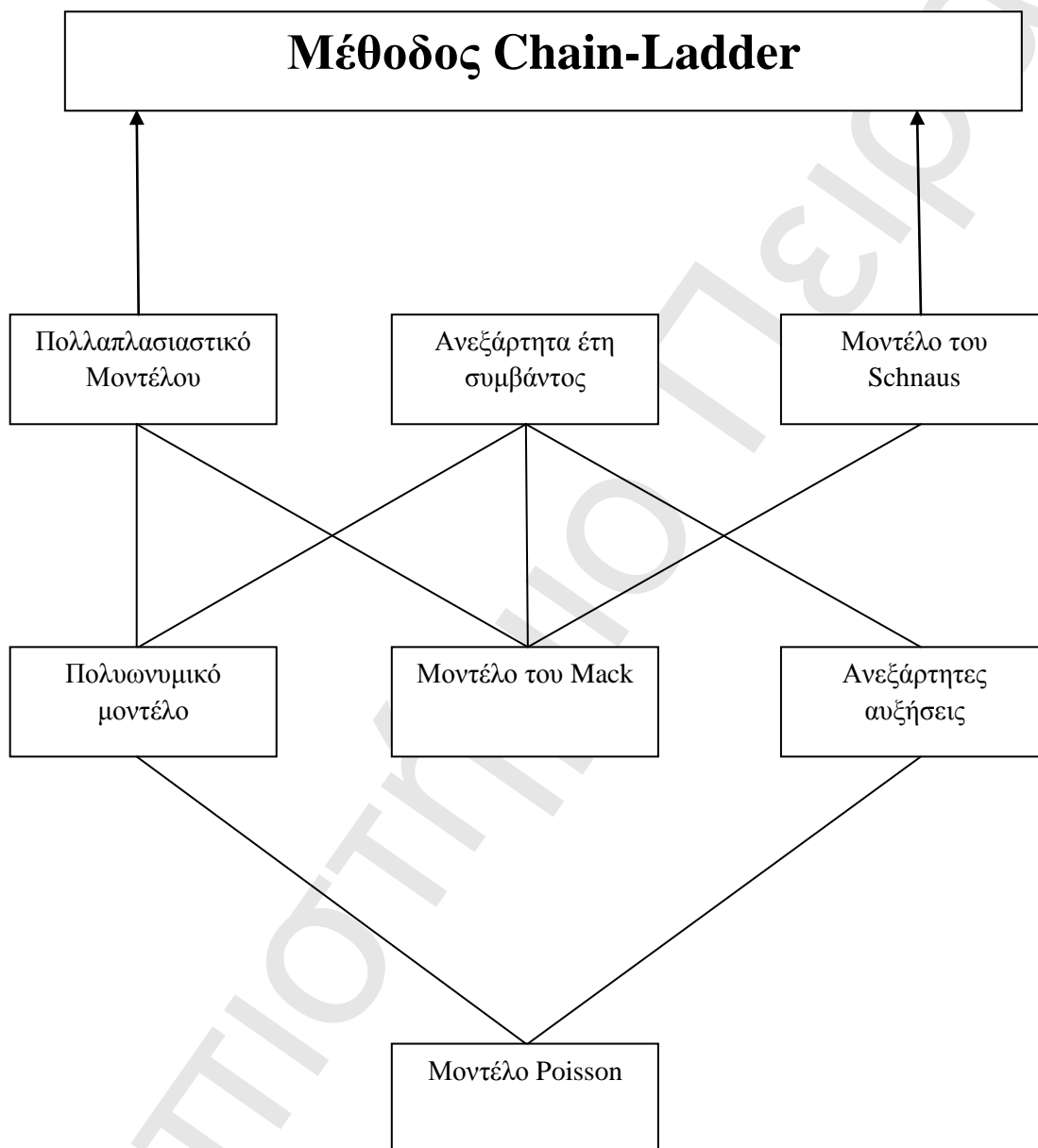
- (1) Στο μοντέλο του Schnaus, ο προβλεπτής chain-ladder του  $S_{i,n-i+1}$  είναι βέλτιστος.
- (2) Στο μοντέλο του Mack, ο προβλεπτής chain-ladder του  $S_{i,n-i+2}$  μπορεί να αποτύχει στο να είναι βέλτιστος.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5.8. δείτε το Schmidt και Schnaus (1996).

Τελικά σημειώνουμε ότι στο μοντέλο του Schnaus και υπακούοντας σε ένα κριτήριο ιεραρχικής βελτιστοποίησης (hierarchical optimality criterion) στο οποίο ο προβλεπτής του  $S_{i,n-i+l+1}$  αναγκάζεται να έχει την μορφή  $\hat{S}_{i,n-i+l} \delta_{i,n-i+l+1}$  με  $\delta_{i,n-i+l+1} \in \Delta_{i,n-i+l+1}$ , μπορεί να δειχθεί ότι όλοι οι chain-ladder προβλεπτές είναι βέλτιστοι. Το κριτήριο ιεραρχικής βελτιστοποίησης είναι λογικό αφού η πρόβλεψη για το κοντινό μέλλον είναι πολύ πιο σημαντική από την πρόβλεψη για το πιο μακρινό μέλλον.

### 2.1.6 Ένα διάγραμμα ροής για την επιλογή μοντέλου

Το παρακάτω διάγραμμα ροής αναπαριστά κάποιες από τις σχέσεις ανάμεσα στα μοντέλα που συζητήσαμε παραπάνω και ίσως μας βοηθήσει στην επιλογή του μοντέλου μας:



Κάθε γραμμή που ενώνει δύο μοντέλα δείχνει ότι το μοντέλο στο κατώτερο επίπεδο είναι μια ειδική περίπτωση του μοντέλου στο ανώτερο επίπεδο.

## 2.2 Υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson και chain ladder

Φαίνεται ότι το (υπερδιασκορπισμένο) Poisson μοντέλο δεν είναι το ίδιο με το μοντέλο chain-ladder χωρίς κατανομή του Mack αν και τα δύο αναπαριστούν τον ιστορικό chain-ladder εκτιμητή για την αποθεματοποίηση απαιτήσεων. Για παράδειγμα, τα πραγματικά αναμενόμενα αποθέματα απαιτήσεων, αγνοώντας θέματα εκτίμησης, που περιγράφονται από τα δύο μοντέλα είναι διαφορετικά. Επιπλέον, το μοντέλο Poisson αποκλίνει από τον ιστορικό αλγόριθμο chain-ladder σε αρκετά σημεία στα οποία το μοντέλο chain-ladder χωρίς κατανομή δεν το κάνει. Επομένως, μόνο το πιο πρόσφατο μπορεί να αναφέρεται ως το μοντέλο που διέπει τον αλγόριθμο chain-ladder.

### 2.2.1 Σύνοψη των δύο μοντέλων

Έστω  $D_{ij}$  οι σωρευτικές ζημιές για το έτος ατυχήματος  $i = 1, \dots, n$  και για ηλικία  $j = 1, \dots, n$ . Οι ποσότητες ζημιάς  $D_{ij}$  έχουν παρατηρηθεί για  $j \leq n + 1 - i$  ενώ οι υπόλοιπες ποσότητες, κυρίως οι απόλυτες ποσότητες  $D_{in}$ ,  $i > 1$ , πρέπει να προβλεφθούν. Ο αλγόριθμος chain-ladder αποτελείται από τον σταδιακό κανόνα πρόβλεψης:

$$\hat{D}_{ij} = \hat{D}_{i,j-1} \hat{f}_j \quad \text{με} \quad \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{i,j-1}}$$

Ξεκινώντας με την πιο πρόσφατη σωρευτική ποσότητα απαιτήσεων  $\hat{D}_{i,n+1-i} = D_{i,n+1-i}$  του έτους ατυχήματος  $i$ . Αυτό μας δίνει

$$\hat{D}_{in} = D_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+2-i} \dots \hat{f}_n$$

Σαν εκτιμητή για την απόλυτη ποσότητα απαιτήσεων για το έτος  $i$ .

Ο αλγόριθμος chain-ladder αναπτύχθηκε σαν ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος και δεν περιείχε κανένα στοχαστικό μοντέλο να τον διέπει. Συνεπώς η ερώτηση για το ποιο μοντέλο διέπει τον αλγόριθμο δεν μπορεί να απαντηθεί με ιστορική έρευνα ούτε από αυστηρά λογική επαγωγή. Αλλά για να αποτιμήσουμε το σφάλμα πρόβλεψής του, απαιτείται ένα στοχαστικό μοντέλο που να τον διέπει. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, αρκετά μοντέλα συσχετίστηκαν με τον αλγόριθμο chain-ladder, αλλά τα περισσότερα οδηγούν σε εκτιμητές για τα  $D_{i,n}$  που είναι διαφορετικά από τα  $\hat{D}_{in}$  παραπάνω. Τα μοντέλα που θα συγκρίνουμε στη συνέχεια είναι τα μοναδικά που είναι γνωστό ότι οδηγούν στον ίδιο εκτιμητή για το  $D_{i,n}$  με τον αλγόριθμο chain-ladder.

Ας θεωρήσουμε πρώτα το στοχαστικό μοντέλο χωρίς κατανομή (ΣΜΧΚ) του Mack (1993). Η κύρια υπόθεσή του είναι

(ΣΜΧΚ1)  $E(D_{ij}|D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{i,j-1}) = D_{i,j-1}f_j$  με άγνωστους παραμέτρους τα  $f_2, \dots, f_n$ .

Από το ΣΜΧΚ1 μπορεί να συναχθεί ότι

$$E(D_{in}|D_{i1}, \dots, D_{i,n+1-i}) = D_{i,n+1-i}f_{n+2-i} \dots f_n$$

Το οποίο μας δίνει άμεσα τον αλγόριθμο chain-ladder αν οι άγνωστες παράμετροι  $f_j$  εκτιμώνται από τα  $\hat{f}_j$ . Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι στην αποθεματοποίηση απαιτήσεων η σχετική ποσότητα που είναι να εκτιμηθεί είναι ο δεσμευμένος μέσος του  $D_{in}$  έχοντας τα δεδομένα που έχουν παρατηρηθεί ως τώρα επειδή αυτά τα δεδομένα είναι ένα μέρος της ποσότητας  $D_{in}$ . Στο άρθρο του Mack (1993) δείχνεται ότι το  $\hat{f}_j$  είναι ο ελάχιστος αμερόληπτος γραμμικός εκτιμητής διακύμανσης του  $f_j$  αν κάποιος κάνει τις παρακάτω επιπρόσθετες υποθέσεις:

$$(ΣΜΧΚ2) \text{ var}(D_{ij}|D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{i,j-1}) = D_{i,j-1}\sigma_j^2$$

με άγνωστους παραμέτρους τα  $\sigma_j^2$ .

(ΣΜΧΚ3) Τα έτη ατυχήματος  $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{i,n})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , είναι ανεξάρτητα.

Αν παραβιαστεί η υπόθεση ΣΜΧΚ2, κάποια άλλη παραλλαγή του αλγορίθμου chain-ladder μπορεί και πάλι να είναι βέλτιστη, όπως θα δούμε παρακάτω. Η αποτυχία της υπόθεσης ΣΜΧΚ3 συνήθως απαιτεί μια διαφορετική προσέγγιση.

Ένα άλλο στοχαστικό μοντέλο που οδηγεί στον αλγόριθμο chain-ladder παίρνουμε δουλεύοντας στις αυξητικές ποσότητες

$$C_{i1} = D_{i1} \quad \text{και} \quad C_{ij} = D_{ij} - D_{i,j-1}, \quad j > 1$$

και κάνοντας τις υποθέσεις

- 1)  $E(C_{ij}) = x_i y_j$  με άγνωστους παραμέτρους τα  $x_i$  και  $y_j$
- 2) κάθε  $C_{ij}$  ακολουθεί κατανομή Poisson
- 3) όλα τα  $C_{ij}$  είναι ανεξάρτητα.

Τότε ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας  $\hat{R}_i = \hat{x}_i \hat{y}_{n+2-i} + \dots + \hat{x}_i \hat{y}_n$  του αποθέματος απαιτήσεων για το έτος  $i$ ,  $R_i = C_{i,n+2-i} + \dots + C_{in} = D_{in} - D_{i,n+1-i}$  αποδεικνύεται ότι δίνει την ίδια πρόβλεψη  $\hat{D}_{in} = D_{i,n+1-i} + R_i$  με τον αλγόριθμο chain-ladder. Λόγω της υπόθεσης ανεξαρτησίας 3), ο  $D_{i,n+1-i} + R_i$  είναι ένας εκτιμητής της δεσμευμένης προσδοκίας  $E(D_{in}|D_{i1}, \dots, D_{i,n+1-i})$ . Η υπόθεση 2) υποδηλώνει πως όλες οι αυξητικές ποσότητες  $C_{ij}$  πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

Αυτό το μοντέλο Poisson μπορεί να ριχτεί στη μορφή ενός Γενικευμένου Γραμμικού Μοντέλου (GLM) με λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης μέσω της



$$1)^* \quad \ln(E(C_{ij})) = a_i + \beta_j.$$

Σε αυτή τη μορφή, οι παράμετροι  $a_i = \ln(x_i)$ ,  $\beta_j = \ln(y_j)$  μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας βασικό στατιστικό GLM λογισμικό. Βέβαια, αυτό αποφέρει τους ίδιους εκτιμητές για τα  $x_i, y_j, R_i$  και  $D_{in}$  επειδή η διαδικασία εκτίμησης των GLM είναι επίσης η μέγιστη πιθανοφάνεια. Ένα επιπλέον κέρδος της χρήσης των GLM είναι ότι δείχνουν ένα τρόπο να υπερνικήσουμε το εμπόδιο ότι τα  $C_{ij}$  πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Γι' αυτόν τον λόγο, υπενθυμίζουμε εδώ ότι οι μοναδικές υποθέσεις κατανομής που χρησιμοποιούνται στα GLM είναι η συναρτησιακή σχέση μεταξύ της διακύμανσης και του μέσου και το γεγονός ότι η κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια. Αυτή η σχέση είναι  $var(C_{ij}) = E(C_{ij})$  στην περίπτωση της Poisson. Μπορεί να γενικευθεί στην  $var(C_{ij}) = \phi E(C_{ij})$  χωρίς καμία αλλαγή στην μορφή και την λύση των εξισώσεων πιθανοφάνειας. Αυτό μας επιτρέπει την μεγαλύτερη διασπορά των δεδομένων. Για την λύση των εξισώσεων πιθανοφάνειας δεν είναι απαραίτητο ότι τα  $C_{ij}$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Επομένως δεν ενδιαφερόμαστε πλέον για το εύρος της βασικής κατανομής και μιλάμε για ένα υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson και για εξισώσεις ημι-πιθανοφάνειας (quasi-likelihood). Τουλάχιστον οι προσαρμοσμένες τιμές είναι πάντα θετικές. Ωστόσο, ο αλγόριθμος για την επίλυση των εξισώσεων ημι-πιθανοφάνειας χαλάει εκτός και αν τα αθροίσματα των αυξητικών ποσοτήτων που έχουν παρατηρηθεί σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη είναι μη αρνητικά όπως εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί από τις εξισώσεις ημι-πιθανοφάνειας

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} \exp(a_i + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n+1-i} C_{ij}, 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1-j} \exp(a_i + \beta_j) = \sum_{i=1}^{n+1-j} C_{ij}, 1 \leq j \leq n.$$

Αλλά μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα αν εργαστούμε χωρίς την log-σύνδεση και χωρίς το GLM λογισμικό. Τότε το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson (YAMP) είναι

1.  $E(C_{ij}) = x_i y_j$  με άγνωστους παραμέτρους τα  $x_i$  και  $y_j$
2. Η κατανομή του  $C_{ij}$  ανήκει στην εκθετική οικογένεια με  $var(C_{ij}) = \phi E(C_{ij})$  όπου το  $\phi$  είναι μία άγνωστη παράμετρο.
3. Όλα τα  $C_{ij}$  είναι ανεξάρτητα.

Και έτσι παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n+1-i} C_{ij}, 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1-j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n+1-j} C_{ij}, 1 \leq j \leq n.$$

Αυτές οι εξισώσεις έχουν την μοναδική λύση (αν όλα τα  $\hat{f}_j$  ορίζονται καλά και είναι μη μηδενικά, αλλά χωρίς περιορισμούς πάνω στα αθροίσματα των γραμμών ή των στηλών για τα  $C_{ij}$ )

$$\hat{x}_i \hat{y}_j = D_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+2-i} \dots \hat{f}_{j-1} (\hat{f}_j - 1) \quad \text{για } j > n + 1 - i,$$

$$\hat{x}_i \hat{y}_j = D_{i,n+1-i} \left( (\hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{n+1-i})^{-1} - (\hat{f}_j \dots \hat{f}_{n+1-i})^{-1} \right) \quad \text{για } j \leq n + 1 - i,$$

Με τα  $\hat{f}_j$  από τον αλγόριθμο chain-ladder. Επειδή  $(\hat{f}_j - 1) + \hat{f}_j(\hat{f}_{j+1} - 1) = \hat{f}_j \hat{f}_{j+1} - 1$  παίρνουμε άμεσα

$$\hat{R}_i = \hat{x}_i \hat{y}_{n+2-i} + \dots + \hat{x}_i \hat{y}_n = D_{i,n+1-i} (\hat{f}_{n+2-i} \dots \hat{f}_n - 1).$$

Αυτό μας δείχνει ότι η λύση των εξισώσεων ημί-πιθανοφάνειας του υπερδιασκορπισμένου μοντέλου Poisson μας δίνει τον ίδιο εκτιμητή για το  $D_{in}$  με τον αλγόριθμο chain-ladder και με το ΣΜΧΚ. Αργότερα θα εντοπίσουμε κάποιους περιορισμούς.

## 2.2.2 Απόδειξη ότι τα μοντέλα είναι διαφορετικά

Λόγω του ότι και τα δύο μοντέλα, ΣΜΧΚ1-3 και ΥΔΜΡ1-3, μας δίνουν τους ίδιους εκτιμητές  $\hat{R}_i$  και  $\hat{D}_{in}$  με τον ντετερμινιστικό αλγόριθμο chain-ladder, υπάρχουν ερωτήματα για το αν ένα μοντέλο είναι μία ειδική περίπτωση κάποιου άλλου και αν μπορούμε να πούμε και για τα δύο μοντέλα ότι «διέπουν τον αλγόριθμο chain-ladder». Πρώτα, δίνουμε πέντε επιχειρήματα που μας δείχνουν ότι τα μοντέλα είναι διαφορετικά.

### 2.2.2.1 Το ΥΔΜΡ έχει πιο πολλές παραμέτρους από το ΣΜΧΚ

Στο ΥΔΜΡ (υπόθεση 1), μία παράμετρος είναι περιττή γιατί αντικαθιστώντας το  $x_i$  με  $x_i/c$  και το  $y_i$  με  $y_i c$  παίρνουμε το ίδιο μοντέλο. Επομένως το ΥΔΜΡ έχει  $2n-1$  παραμέτρους ενώ το ΣΜΧΚ έχει μόνο  $n-1$  παραμέτρους  $f_2, \dots, f_n$ . Αν κάνουμε την παραμετροποίηση του ΥΔΜΡ μοναδική απαιτώντας ότι  $y_1 = 1$ , τότε έχουμε μία προς μία σχέση ανάμεσα στα  $\hat{y}_j$  και στα  $\hat{f}_j$ :

$$\hat{f}_j = (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_j) / (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{j-1})$$

$$\hat{y}_j = \hat{f}_2 \dots \hat{f}_{j-1} (\hat{f}_j - 1), \quad j > 1.$$

Οι παράμετροι  $x_i$  του ΥΔΜΡ δεν έχουν κάποια άλλη ισοδύναμη παράμετρο στον αλγόριθμο chain-ladder ή στο ΣΜΧΚ. Μέσα στο ΥΔΜΡ, μας βοηθούν στο να εκτιμήσουμε τους μέσους  $E(D_{ij})$ , ενώ στο ΣΜΧΚ μόνο οι δεσμευμένοι μέσοι  $E(D_{ij}|D_{i1}, \dots, D_{i,j-1})$  μπορούν να εκτιμηθούν.

Έχει ειπωθεί πως κάθε  $D_{i,n+1-i}$  θα ήταν μία επιπλέον παράμετρος στον αλγόριθμο chain-ladder, όντας ένας εκτιμητής για το  $E(D_{i,n+1-i})$ . Αλλά αυτό το επιχείρημα δεν είναι και τόσο ισχυρό καθώς τότε θα υπήρχαν καλύτεροι εκτιμητές, π.χ. κάθε μέσος όρος όλων των  $D_{ij}\hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{n+1-i}$ ,  $1 \leq j \leq n+1-i$ . Επιπλέον, το ΣΜΧΚ μας δείχνει ότι το  $D_{i,n+1-i}$  δεν είναι εκτιμητής του  $E(D_{i,n+1-i})$  αλλά είναι το αποτέλεσμα της προετοιμασίας για τα γνωστά δεδομένα.

### 2.2.2.2 Τα ΥΔΜΡ και ΣΜΧΚ έχουν αποκλίνουσες υποθέσεις ανεξαρτησίας

Και τα δύο μοντέλα υποθέτουν ότι τα έτη ατυχήματος (γραμμές) είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, το ΥΔΜΡ (υπόθεση 3) απαιτεί όλες οι αυξήσεις  $C_{ij}$  μέσα σε κάθε έτος ατυχήματος να είναι ανεξάρτητες, ενώ στο ΣΜΧΚ όλα τα  $C_{ij}$  μέσα στο ίδιο έτος ατυχήματος είναι συσχετισμένα: π.χ. δεδομένου  $D_{i,j-1}$  έχουμε (με  $E(\varepsilon_{j+1})=0$ )

$$C_{i,j+1} = D_{i,j+1} - D_{ij} = D_{ij}(f_{j+1} - 1) + \varepsilon_{j+1} = (D_{i,j-1} + C_{i,j})(f_{j+1} - 1) + \varepsilon_{j+1}$$

Το οποίο μας δείχνει ότι τα  $C_{i,j+1}$  και  $C_{i,j}$  συσχετίζονται.

### 2.2.2.3 Οι προσαρμοσμένες τιμές $\hat{C}_{ij}$ ή $\hat{D}_{ij}$ και επομένως και τα υπόλοιπα $r_{ij} = \hat{C}_{ij} - C_{ij}$ για το ΥΔΜΡ είναι διαφορετικά από αυτά του ΣΜΧΚ

η προσαρμοσμένη τιμή  $\hat{D}_{ij}$  για  $j \leq n+1-i$  για το ΣΜΧΚ είναι

$$\hat{D}_{ij} = D_{i,j-1}\hat{f}_j \quad \text{ή} \quad \hat{C}_{ij} = D_{i,j-1}(\hat{f}_j - 1).$$

Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχουν προσαρμοσμένες τιμές για την πρώτη στήλη  $D_{i1} = C_{i1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Η προσαρμοσμένη τιμή  $\hat{D}_{ij}$  για  $j \leq n+1-i$  για το ΥΔΜΡ είναι

$$\hat{C}_{ij} = \hat{x}_i\hat{y}_j = D_{i,n+1-i} \left( (\hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{n+1-i})^{-1} - (\hat{f}_j \dots \hat{f}_{n+1-i})^{-1} \right),$$

το οποίο μας δίνει

$$\hat{D}_{ij} = D_{i,n+1-i} / (\hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{n+1-i})$$

Το οποίο είναι διαφορετικό από αυτό του ΣΜΧΚ, γιατί π.χ. για  $j = n+1-i$  παίρνουμε  $D_{i,n-i}\hat{f}_{n+1-i}$  ως την προσαρμοσμένη τιμή για το ΣΜΧΚ και  $D_{i,n+1-i}$  ως

την προσαρμοσμένη τιμή για το ΥΔΜΡ τα οποία είναι διαφορετικά για  $i > 1$  γιατί το  $\hat{f}_{n+1-i}$  εξαρτάται όχι μόνο από το  $D_{i,n+1-i}/D_{i,n-i}$  του έτους ατυχήματος  $i$  αλλά και από τις αντίστοιχες αναλογίες όλων των παλαιότερων ετών ατυχήματος. Άλλος ένας τρόπος να δούμε την διαφορά είναι να κοιτάξουμε το  $\hat{D}_{ij}/\hat{D}_{i,j-1}$  για συγκεκριμένο  $j$  το οποίο είναι σταθερό για το ΥΔΜΡ ( $=f_j$ ) αλλά όχι και για το ΣΜΧΚ.

2.2.2.4 Τα πραγματικά αναμενόμενα αποθέματα  $E(R_i|\text{δεδομένα})$  που περιγράφονται από τα μοντέλα είναι διαφορετικά

Αν γνωρίζαμε τις πραγματικές παραμέτρους  $f_2, \dots, f_n$  και  $x_i, y_j$ , αντίστοιχα, και αν μπορούσαμε να φτιάξουμε αρκετά σερ παρατηρήσεων (τρίγωνα απορροής  $\{D_{ij}, i+j \leq n+1\}$ ) από τον ίδιο «πληθυσμό», τότε ο εκτιμητής αποθέματος (δηλαδή το αναμενόμενο απόθεμα)  $\hat{R}_i = E(R_i|\text{δεδομένα}) = D_{i,n+1-i}(f_{n+2-i} \dots f_n - 1)$  του αλγορίθμου chain-ladder όπως επίσης και του ΣΜΧΚ θα άλλαζε από την μία τυχαία κλήρωση στην άλλη όσο θα άλλαζε το  $D_{i,n+1-i}$ , αλλά ο εκτιμητής αποθέματος  $\hat{R}_i = E(R_i|\text{δεδομένα}) = x_i y_{n+2-i} + \dots + x_i y_n$  του ΥΔΜΡ δεν θα άλλαζε.

2.2.2.5 Η προσομοιωμένη μελλοντική εμφάνιση είναι διαφορετική

Για να προσομοιάζαμε τις μελλοντικές αξίες των  $C_{ij}$  για το ΥΔΜΡ, θα μπορούσαν να υπολογιστούν όλες οι αναμενόμενες τιμές τους και στη συνέχεια να προσθέταμε τυχαίες κληρώσεις. Για το ΣΜΧΚ, όμως, η καινούρια πρώτη διαγώνιος θα μπορούσε να προσομοιωθεί έτσι αλλά για την δεύτερη καινούρια διαγώνιο η προσομοιωμένη αθροιστική αξία για την πρώτη διαγώνιο θα έπρεπε να πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα ανάπτυξης για να πάρουμε την μέση τιμή για την δεύτερη διαγώνιο. Αυτός ο μέσος περιέχει έτσι την τυχαία συνιστώσα που έχει προσομοιωθεί για την πρώτη διαγώνιο, κάτι το οποίο δεν συμβαίνει στην προσομοίωση του ΥΔΜΡ.

2.2.2.6 Επίλογος

Αν και στην υποενότητα 2.2.2.1 το ΥΔΜΡ φαίνεται να είναι μία ειδική περίπτωση του ΣΜΧΚ, οι υποενότητες 2.2.2.2, 2.2.2.3, 2.2.2.4 και 2.2.2.5 δείχνουν ότι τα μοντέλα είναι σίγουρα διαφορετικά. Σε καθένα από αυτούς τους τομείς διαφοράς, το ΣΜΧΚ συμφωνεί με τον αλγόριθμο chain-ladder στο βαθμό ότι ο αλγόριθμος έχει σαφή συμπέρασμα. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος chain-ladder δεν υπολογίζει καμία παράμετρο εκτός από τους παράγοντες ανάπτυξης και αν θέλαμε να μετρήσουμε την καλή προσαρμογή του αλγορίθμου chain-ladder θα υπολογίζαμε τις προσαρμοσμένες τιμές σαν τους παράγοντες ανάπτυξης επί τις προηγούμενες αθροιστικές ζημιές. Το ΥΔΜΡ διαφέρει σε αυτά τα σημεία από τον αλγόριθμο chain-ladder.

Επιπλέον, το γεγονός ότι τα πραγματικά αναμενόμενα αποθέματα είναι διαφορετικά, μας δείχνει καθαρά ότι οι εκτιμητές αποθέματος και των δύο μοντέλων συμπίπτουν μόνο τυχαία και όχι λόγω κάποιας εσωτερικής σύνδεσης. Σαν αποτέλεσμα, ειδικά από τις 2.2.2.4 και 2.2.2.5, τα σφάλματα πρόβλεψης είναι επίσης διαφορετικά. Επομένως, τα σφάλματα πρόβλεψης που υπολογίζονται με την αυτοδύναμη προσέγγιση των England και Verrall (1998) δεν μπορούμε να τα δούμε ως τα σφάλματα πρόβλεψης του αλγορίθμου chain-ladder. Μία αυτοδύναμη προσέγγιση για τα σφάλματα πρόβλεψης του chain-ladder θα περιείχε μία εκ νέου δειγματοληψία των ανεξάρτητων παραγόντων ανάπτυξης  $F_{ij} = D_{ij}/D_{i,j-1}$  σε κάθε στήλη  $j$ , αλλά θα ήταν αμφισβητήσιμη για τις τελευταίες στήλες, λόγω των περιορισμένων δεδομένων.

### 2.2.3 Άλλες διαφορές ανάμεσα στον αλγόριθμο chain-ladder και το YAMP

Ο αλγόριθμος chain-ladder οδηγεί σε κοντινές εκδοχές όταν τα δεδομένα δεν είναι ακριβώς ότι χρειαζόμαστε και αυτές οι εκδοχές μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν από το ΣΜΧΚ με κατάλληλες ρυθμίσεις των υποθέσεων. Αυτό δεν συμβαίνει με το YAMP στα παρακάτω δύο παραδείγματα.

#### 2.2.3.1 Το YAMP δεν δουλεύει σε όλες τις περιπτώσεις όπου δουλεύει ο αλγόριθμος chain ladder

Στην πράξη, συχνά δεν έχουμε τα δεδομένα από παλαιότερα ημερολογιακά έτη. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο  $\{D_{ij} | i + j \leq n + 1\}$  αλλάζει και γίνεται τραπέζιο  $\{D_{ij} | m \leq i + j \leq n + 1\}$  με  $2 < m \leq n$ . Τότε το YAMP δεν μας δίνει εκτιμητές  $\hat{R}_i$  ίδιους με το ΣΜΧΚ και τον αλγόριθμο chain-ladder. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα στο παρακάτω τραπέζιο στο οποίο λείπει το  $D_{11}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D_{12} & D_{13} & \text{με αυξητικές ποσότητες} & & C_{13} \\
 D_{21} & & D_{22} & & & C_{21} & C_{22} \\
 D_{31} & & & & & C_{31} & 
 \end{array}$$

Το  $C_{12}$  δεν μπορεί να είναι γνωστό γιατί τότε θα ήταν γνωστό και το  $D_{11} = D_{12} - C_{12}$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι φανερό ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί το YAMP (έχουμε 4 παρατηρήσεις για 5 παραμέτρους) αλλά ο αλγόριθμος chain-ladder και το ΣΜΧΚ μπορούν (με  $\hat{f}_2 = \frac{D_{22}}{D_{21}}, \hat{f}_3 = \frac{D_{13}}{D_{12}}$ ) και μάλιστα μας δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Εδώ φαίνεται ξεκάθαρα το μειονέκτημα της επιπλέον παραμέτρου  $x_i$  του YAMP.

Γενικά, αν μία ή περισσότερες ποσότητες απαιτήσεων  $D_{ij}$  ή  $C_{ij}$  στο τρίγωνο είναι άγνωστες ή παραβλέπονται ως μη αξιόπιστες (π.χ. τυπογραφικό λάθος ή μία ξεχωριστή μεγάλη απαίτηση της οποίας η ποσότητα είναι άγνωστη), τότε το YAMP

μας δίνει διαφορετικές εκτιμήσεις για το  $D_{in}$  από τον αλγόριθμο chain-ladder (και από το ΣΜΧΚ). Ο λόγος είναι το γεγονός ότι η απόδειξη για τον τύπο

$$\hat{x}_i \hat{y}_j = D_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+2-i} \dots \hat{f}_{j-1} (\hat{f}_j - 1) \quad \text{για } j > n + 1 - i,$$

δουλεύει μόνο εάν το  $D_{i,n+1-i}$  είναι ίσο με το άθροισμα όλων των  $C_{ij}$  που είναι γνωστά για το έτος ατυχήματος  $i$  κάτι που δεν ισχύει αν λείπουν κάποια  $C_{ij}$ .

### 2.2.3.2 Το ΥΔΜΡ δεν μπορεί να προσαρμοστεί αν αλλάζουν τα βάρη στο $\hat{f}_j$

Στην πράξη ο εκτιμητής για το  $f_j$  συχνά υπολογίζεται διαφορετικά σε σχέση με τον  $\hat{f}_j$ , π.χ.

$${}' \hat{f}_j = \frac{1}{n+1-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} \frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}} \quad (\text{ευθύς μέσος})$$

ή

$${}'' \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{i,j-1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{i,j-1}^2} \quad (\text{γραμμική παλινδρόμηση})$$

Αυτοί οι εκτιμητές οδηγούν σε διαφορετικούς εκτιμητές για τα  $R_i$  και  $D_{in}$  από αυτούς που βασίζονται στο  $\hat{f}_j$ . Μπορεί να δειχθεί ότι το ΣΜΧΚ μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε αυτούς τους εκτιμητές μέσω των

$$(\text{ΣΜΧΚ2}') \quad \text{var}(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = D_{i,j-1}^2 \sigma_j^2$$

ή

$$(\text{ΣΜΧΚ2}'') \quad \text{var}(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = \sigma_j^2.$$

Αλλά αν κάποιος προσπαθήσει να προσαρμόσει το ΥΔΜΡ3 στο

$$(\text{ΥΔΜΡ}') \quad \text{var}(C_{ij}) = \varphi(E(C_{ij}))^2 \quad (\text{Γάμμα-GLM})$$

ή

$$(\text{ΥΔΜΡ}'') \quad \text{var}(C_{ij}) = \varphi \quad (\text{μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων του DeVyllder(1978)})$$

παίρνουμε εκτιμητές για τα  $R_i$  και  $D_{in}$  οι οποίοι είναι πάλι διαφορετικοί από αυτούς του αλγορίθμου chain-ladder με  $' \hat{f}_j$  ή  $'' \hat{f}_j$  αντίστοιχα. Δεν υπάρχουν άλλες γνωστές

υποθέσεις διακυμάνσεως κάτω από τις οποίες το ΥΔΜΡ θα μπορούσε να προσαρμοστεί ώστε να δώσει τις ίδιες προβλέψεις με τον αλγόριθμο chain-ladder με  $\hat{f}_j$  ή  $''\hat{f}_j$ .

#### 2.2.4 Επίλογος

Τα μοντέλα ΣΜΧΚ και ΥΔΜΡ είναι διαφορετικά και αποφέρουν τις ίδιες προβλέψεις μόνο σε μια ειδική αλλά συνήθη περίπτωση. Αλλά ακόμα και τότε, τα σφάλματα πρόβλεψης και οι περιγραφές των μοντέλων για τις πραγματικές ποσότητες που είναι προς πρόβλεψη είναι διαφορετικά. Επειδή το ΣΜΧΚ συμφωνεί με τον αλγόριθμο chain-ladder σε όλα τα σημεία, ενώ όχι το ΥΔΜΡ, αυτοί που χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο θα πρέπει να μπορούν να αποδεχτούν όλες τις υποθέσεις του ΣΜΧΚ. Στην πραγματικότητα, σε ένα άρθρο του ο Venter (1998) δείχνει πως όταν παραβιάζονται αυτές οι υποθέσεις, θα πρέπει να σκεφτούμε άλλες μεθόδους. Επομένως όταν χρειαζόμαστε ένα στοχαστικό μοντέλο για να εκτιμήσουμε τα σφάλματα πρόβλεψης του chain-ladder αλγορίθμου, μόνο το ΣΜΧΚ μπορεί να θεωρηθεί ότι διέπει τον αλγόριθμο chain-ladder.

### 2.3 Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson συνδυάζει τη μέθοδο του αναμενόμενου δείκτη ζημιών και τη μέθοδο chain ladder. Θα αναφέρουμε παρακάτω πρώτα την μέθοδο του αναμενόμενου δείκτη ζημιών.

#### 2.3.1 Η μέθοδος του αναμενόμενου δείκτη ζημιών

Με βάση την μέθοδο του αναμενόμενου δείκτη ζημιών θα πρέπει να εκτιμήσουμε τον τελικό αναμενόμενο δείκτη ζημιών (ΑΔΖ) για κάθε χρόνο ασφάλισης. Ο αναμενόμενος δείκτης ζημιών πολλαπλασιαζόμενος με το κατάλληλο δεδουλευμένο ασφάλιστρο (ΔΑ) θα μας δώσει τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές (ΕΤΖ). Το εκτιμώμενο αποθεματικό ζημιών (ΕΑΖ) που θα λάβουμε θα είναι οι εκτιμώμενες τελικές ζημιές μείον τις ζημιές που έχουν εξοφληθεί μέχρι σήμερα (ΕΖΣ). Έχουμε:

$$(ETZ)_{ij} = (AΔZ)_{ij} * (ΔA)_{ij}$$

όπου το  $i$  δηλώνει τον κλάδο ασφάλισης και το  $j$  δηλώνει την περίοδο ασφάλισης.

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$(EAZ)_{ij} = (ETZ)_{ij} - (EZZ)_{ij}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\text{Συνολικά EAZ} = \sum_{ij}(EAZ)_{ij}$$

Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μερικά προβλήματα και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο της εταιρείας, επειδή αν ο αναμενόμενος δείκτης ζημιών τροποποιηθεί από τη διαχείριση της εταιρείας μπορεί να έχουμε σαν αποτέλεσμα ανεπαρκή αποθεματικά.

Για παράδειγμα έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία για πολλά έτη και για έναν συγκεκριμένο κλάδο ασφάλισης εμφανίζει δείκτη ζημιών 70% και το τελευταίο έτος μείωσε αρκετά το ασφάλιστρο για τον συγκεκριμένο κλάδο. Αν ο δείκτης 70% εφαρμοσθεί σε ένα μικρότερο δεδουλευμένο ασφάλιστρο αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα μια αρκετή μείωση των αποθεματικών του συγκεκριμένου κλάδου. Αν η μείωση του ασφαλίστρου οφείλεται στον ανταγωνισμό της αγοράς και όχι στη μείωση των ζημιών αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει και να μειωθούν τα αποθεματικά.

Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η μέθοδος του αναμενόμενου δείκτη ζημιών είναι και η μόνη μέθοδος που μπορεί να εφαρμοσθεί. Τα πρώτα έτη μιας ασφαλιστικής εταιρείας, όπου δεν έχουμε επαρκή εμπειρία ζημιών για τον συγκεκριμένο κλάδο η μέθοδος του αναμενόμενου δείκτη ζημιών είναι η μόνη κατάλληλη για την εκτίμηση των αποθεματικών. Για συγκεκριμένους κλάδους ασφάλισης η εποπτική αρχή μπορεί να θέσει ελάχιστο δείκτη στόχο ζημιών που να ικανοποιεί τα αποθεματικά ζημιών.

### 2.3.2 Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Όπως αναφέραμε παραπάνω η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson συνδυάζει τη μέθοδο του αναμενόμενου δείκτη ζημιών και τη μέθοδο chain ladder. Σε κάθε σειρά για κάθε έτος ατυχήματος του τριγώνου ανάπτυξης ζημιών ο αναλογιστής εκτιμά τον αναμενόμενο δείκτη ζημιών γι' αυτό το έτος λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που αφορούν τις εξοφλημένες ζημιές και τα δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία τιμών του ασφαλίστρου.

Χρησιμοποιώντας τον εκτιμώμενο δείκτη ζημιών και το δεδουλευμένο ασφάλιστρο για το συγκεκριμένο έτος ο αναλογιστής υπολογίζει τον εκτιμώμενο τελικό δείκτη ζημιών γι' αυτό το έτος.



Γνωρίζουμε ότι με βάση τη μέθοδο του αναμενόμενου δείκτη ζημιών έχουμε

$$(ETZ)_{ij} = (AΔZ)_{ij} * (ΔA)_{ij} \quad \text{και}$$

$$(EAZ)_{ij} = (ETZ)_{ij} - (EZZ)_{ij}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι με βάση τη μέθοδο chain ladder

$$(ETZ)_{ij} = (EZZ)_{ij} * (\prod_j f_j)$$

όπου  $f_j$  είναι ο συντελεστής ανάπτυξης ζημιών του τριγώνου της μεθόδου chain ladder, κατά την διάρκεια j-1 μέχρι j και

$$(EAZ)_{ij} = (ETZ)_{ij} - (EZZ)_{ij} = (EZZ)_{ij} * (f_{ult} - 1)$$

$$\text{όπου } f_{ult} = (\prod_j f_j)$$

$$\text{Αυτό συνεπάγεται ότι } (EAZ)_{ij} = (ETZ)_{ij} * (1 - \frac{1}{f_{ult}}).$$

Όπως παρατηρείτε η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson είναι μια σύζευξη δύο άλλων μεθόδων και γι' αυτό το λόγο είναι δύσκολο να της δώσουμε μια πιο αυστηρή μαθηματική προσέγγιση και χρησιμοποιούμε γενικές έννοιες των δύο μεθόδων.

## Κεφάλαιο 3

### Ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση ζημιών

#### 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα παρατίθεται ένα πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων το οποίο περιλαμβάνει αρκετά μοντέλα τα οποία έχουν προταθεί μέχρι σήμερα σαν ειδικές περιπτώσεις. Η μεθοδολογία είναι ενσωματωμένη στην γενικευμένη πρόσθετη τάξη των μοντέλων. Η μεθοδολογία είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη αφού επιτρέπει την ομαλοποίηση των παραγόντων ανάπτυξης της chain ladder και τον υπολογισμό παραγόντων ουράς αυτόματα και εύκολα σαν μέρος της διαδικασίας προσαρμογής του μοντέλου. Το πλαίσιο παρέχει επίσης εκτιμήσεις της διακύμανσης των αποθεμάτων, κάτι το οποίο θα μπορούσε να αποβεί χρήσιμο στην δόμηση και ρύθμιση μοντέλων δυναμικής οικονομικής ανάλυσης (ΔΟΑ).

Για τεχνικούς λόγους θα θεωρήσουμε την μοντελοποίηση των ζημιών που έχουν πληρωθεί (paid losses) μόνο. Επίσης, δεν υπολογίζεται η πληροφορία που αφορά τον αριθμό των απαιτήσεων αλλά θεωρούμε την μοντελοποίηση της ποσότητας των απαιτήσεων μόνο. Έτσι, θα ξεκινήσουμε με το βασικό μοντέλο chain ladder με ζημιές που έχουν πληρωθεί. Αν και θα θεωρήσουμε ετήσια ανάπτυξη, οι μέθοδοι μπορούν να επεκταθούν και για εξαμηνιαία, τριμηνιαία ή μηνιαία ανάπτυξη. Τα δεδομένα δίνονται στη μορφή ενός τριγώνου (υποενότητα 6) από ζημιές που έχουν πληρωθεί όπου οι γραμμές  $i$  υποδεικνύουν τα έτη ατυχήματος και οι στήλες  $j$  τα έτη ανάπτυξης ή αλλιώς την καθυστέρηση. Το τρίγωνο αυξάνεται κάθε περίοδο με την προσθήκη μιας διαγωνίου. Ο στόχος είναι να προβλεφθούν πιθανές ποσότητες απαιτήσεων στην άδεια νοτιοανατολική γωνιά του τετραγώνου και το συνολικό απόθεμα είναι το άθροισμα αυτών των ποσοτήτων. Ίσως είναι χρήσιμο, για λόγους παρακολούθησης, και το απόθεμα για κάθε έτος ατυχήματος.

Στην επόμενη υποενότητα παρατίθενται κάποια στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης που ήδη υπάρχουν. Αυτό θα μας βοηθήσει ώστε να έχουμε ένα υπόβαθρο από το οποίο θα παραχθεί το ευέλικτο πλαίσιο στην υποενότητα 3. Στην υποενότητα 4 θεωρείται η διακύμανση των αποθεματικών εκτιμήσεων. Στην

υποενοότητα 5 θεωρείται ένα τυπικό **goodness-of-fit**. Στην υποενοότητα 6 παρέχεται ένα δουλεμένο παράδειγμα λαμβάνοντας υπ' όψιν την συστηματική δομή του μοντέλου και την δομή του σφάλματος στην υποενοότητα 7. Τέλος, στην υποενοότητα 8 βλέπουμε κάποια συμπεράσματα.

### 3.2 Υπάρχοντα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης

Ας θέσουμε  $C_{ij}$  την αυξητική ποσότητα απαιτήσεων από το έτος ατυχήματος  $i$  που πληρώθηκαν στο έτος εξέλιξης  $j$ . Προηγούμενη έρευνα επικεντρώθηκε στον λογάριθμο των αυξητικών ποσοτήτων απαιτήσεων  $Y_{ij} = \ln(C_{ij})$  και στην λογαριθμοκανονική τάξη των μοντέλων  $Y_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$  με

$$\varepsilon_{ij} \sim IN(0, \sigma^2) \quad \text{και} \quad Y_{ij} \sim IN(m_{ij}, \sigma^2), \quad (3.2.1)$$

Όπου η έκφραση « $IN(\mu, \sigma^2)$ » ερμηνεύεται ως «κατανέμεται ως ανεξάρτητη κανονική (Independent Normal) με μέσο  $\mu$  και διακύμανση  $\sigma^2$ .»

Η χρήση του λογαριθμικού μετασχηματισμού επιβάλλει ότι οι ποσότητες των απαιτήσεων πρέπει να είναι θετικές. Η κανονικότητα έχει σαν αποτέλεσμα τα  $Y_{ij}$  να σπάνε σε ένα αιτιοκρατικό μη τυχαίο κομμάτι με μέσο  $m_{ij} = \eta_{ij}$  και σε κομμάτια τα οποία είναι ομοσκεδαστικά κανονικά κατανεμημένα τυχαία σφάλματα με σχεδόν μηδενικό μέσο. Δύο μοντέλα είναι ιδιαίτερης σημασίας:

Περίπτωση 1

$$\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \quad (3.2.2)$$

Περίπτωση 2

$$\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_i \ln(j) + \gamma_{ij} \quad (j > 0). \quad (3.2.3)$$

Μία τρίτη περίπτωση, η οποία είναι μια μίξη των 2 προηγούμενων περιπτώσεων, χρησιμοποιεί την εξίσωση 3.2.2 για  $j \leq q$  και την εξίσωση 3.2.3 για  $j > q$  για κάποιον ακέραιο  $q$  που προσδιορίζεται.

Οι εξισώσεις 3.2.1 και 3.2.2 ορίζουν το μοντέλο που εισήγαγε ο Kremer και χρησιμοποιήθηκε από τους Renshaw, Verrall, Zehnirith και Christofides μεταξύ άλλων. Το έτος ατυχήματος και το έτος ανάπτυξης θεωρούνται παράγοντες, με μια παράμετρο  $\alpha$  για κάθε έτος ατυχήματος  $i$  και μια παράμετρο  $\beta$  για κάθε έτος ανάπτυξης  $j$ . Αυτή η αναπαράσταση είναι ανάλογη του μοντέλου chain ladder, το οποίο συνεπάγεται το ίδιο μοτίβο ανάπτυξης για όλα τα έτη ατυχήματος, όπου αυτό το μοτίβο ορίζεται από τις παραμέτρους  $\beta_j$ . Αυτό το μοντέλο παράγει τιμές κοντά σε αυτές της απλής μεθόδου chain ladder.

Οι εξισώσεις 3.2.1 και 3.2.3 ορίζουν ευρέως το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε από τον Zehnwirth. Μια ιδιαίτερη περίπτωση έχουμε όταν θέσουμε  $\beta_i = \beta$  για όλα τα  $i$  και  $\gamma_i = \gamma$  για όλα τα  $i$ , όπου το μοτίβο είναι το ίδιο για όλα τα έτη ατυχήματος και αναπαρίσταται από μόνο 2 παραμέτρους. Σε αντίθεση με την περίπτωση 1, αυτό επιβάλλει μια αυστηρή παραμετρική μορφή στην επαναληπτική διαδικασία. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι οι πληρωμές μπορούν να προβλεφθούν εξαγόμενες συμπερασματικά (extrapolation). Αυτή η αναπαράσταση είναι γνωστή ως καμπύλη Hoerl.

Οι παράμετροι στο  $\eta_{ij}$  υπολογίζονται με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία στην περίπτωση των κανονικά κατανομημένων δεδομένων είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του υπόλοιπου αθροίσματος των τετραγώνων. Η απόκτηση αυτής της λύσης των «ελαχίστων τετραγώνων» είναι άμεση και είναι ένας κύριος λόγος για την σημαντικότητα των log-γραμμικών μοντέλων στην ιστορία της στοχαστικής αποθεματοποίησης. Αν και ήταν δυνατό η χρησιμοποίηση άλλων κατανομών σφάλματος (χρησιμοποιώντας γενικευμένα γραμμικά μοντέλα) όταν προτάθηκαν αυτά τα μοντέλα, η χρήση τους δεν ήταν κοινή. Οι De Jong και Zehnwirth υιοθέτησαν το φίλτρο Kalman ώστε να περάσουν πληροφορίες μεταξύ των ετών ατυχήματος και για να παρέχουν ομαλοποιημένες εκτιμήσεις των παραμέτρων  $\beta_i$  και  $\gamma_i$  στην εξίσωση 3.2.3. Αυτή η ιδέα υιοθετήθηκε από τον Verrall ο οποίος χρησιμοποίησε το φίλτρο Kalman για να ομαλοποιήσει τις παραμέτρους  $\alpha_i$  και  $\beta_j$  στην εξίσωση 3.2.2.

Η άγνωστη διακύμανση  $\sigma^2$  υπολογίζεται από το άθροισμα των υπολοίπων των τετραγώνων (residual sum of squares) διαιρεμένο από τους βαθμούς ελευθερίας (ο αριθμός των παρατηρήσεων μείον τον αριθμό των παραμέτρων που υπολογίζονται). Ο Zehnwirth επίσης σκέπτεται να επιτρέψει έναν διαφορετικό εκτιμητή διακύμανσης για κάθε περίοδο ανάπτυξης.

Δεδομένων των εκτιμήσεων των παραμέτρων, οι προβλεπόμενες τιμές μακροπρόθεσμα μπορούν να αποκτηθούν εισάγοντας αυτές τις εκτιμήσεις πίσω στην κατάλληλη εξίσωση.

Σημαντική πρόοδος στην στοχαστική αποθεματοποίηση έγινε με την δημοσίευση ενός άρθρου του Wright, το οποίο είχε 2 κύριες απόψεις:

- Τα συστηματικά και τυχαία κομμάτια του βασικού μοντέλου για τα δεδομένα βασίζονται σε ένα κινδυνολογικό μοντέλο της διαδικασίας παραγωγής απαιτήσεων.
- Η κατανομή σφάλματος που υποδηλώθηκε από το μοντέλο δεν είναι πλέον λογαριθμοκανονική.

Ο Wright θεώρησε τις αυξητικές απαιτήσεις που έχουν πληρωθεί  $C_{ij}$  να είναι το άθροισμα  $N_{ij}$  (ανεξάρτητων) απαιτήσεων μεγέθους  $X_{ij}$ . Από τη θεωρία κινδύνου παίρνουμε:

$$E[C_{ij}] = E[N_{ij}]E[X_{ij}], \quad (3.2.4)$$

και

$$\text{Var}[C_{ij}] = E[N_{ij}]\text{Var}[X_{ij}] + \{E[X_{ij}]\}^2 \text{Var}[N_{ij}]. \quad (3.2.5)$$

Η διατύπωση ολοκληρώνεται ορίζοντας ένα μοντέλο για κάθε  $E[N_{ij}]$  και  $E[X_{ij}]$ , μια σχέση μεταξύ του μέσου και της διακύμανσης των αριθμών  $N_{ij}$  των απαιτήσεων και μια σχέση μεταξύ του μέσου και της διακύμανσης των μεγεθών (severities)  $X_{ij}$  των απαιτήσεων.

Ο Wright θεώρησε τον αριθμό  $N_{ij}$  των απαιτήσεων να είναι τυχαίες μεταβλητές Poisson όπου

$$E[N_{ij}] = e_i a_j k_{ij} A_i e^{-b_{ij}}, \quad (3.2.6)$$

και

$$\text{Var}[N_{ij}] = E[N_{ij}] \quad (3.2.7)$$

όπου  $k$ ,  $A$  και  $b$  είναι άγνωστες σταθερές προς εκτίμηση, το  $e_i$  είναι ένα μέτρο έκθεσης και το  $a$  είναι ένας γνωστός όρος προσαρμογής. (Σημείωση: ο Wright πρότεινε επίσης και μια τεχνική προσαρμογή στον χρόνο ανάπτυξης  $j$ , το οποίο παραλείπεται για απλοποίηση.)

Οι ποσότητες  $X_{ij}$  των απαιτήσεων θεωρήθηκαν να είναι τυχαίες μεταβλητές τύπου Γάμμα όπου

$$E[X_{ij}] = e^{\delta t} k j^\lambda, \quad (3.2.8)$$

και

$$\text{Var}[X_{ij}] = v \{E[X_{ij}]\}^2, \quad (3.2.9)$$

όπου  $k$  και  $\lambda$  είναι άγνωστες σταθερές. Ο προαιρετικός όρος  $e^{\delta t}$  εισάγεται για να επιτρέψει τυχόν διόγκωση (inflation) των απαιτήσεων, όπου το  $t = i + j$  αναπαριστά ημερολογιακό χρόνο και το  $\delta$  είναι η εκτιμώμενη σταθερή ένταση της διόγκωσης των απαιτήσεων. Ο Wright επέλεξε να μη θεωρήσει ότι οι ποσότητες των απαιτήσεων πραγματικά ακολουθούν Γάμμα κατανομή αλλά ότι υπάρχει η διακύμανση και είναι ανάλογη του τετραγωνικού μέσου με σταθερά αναλογίας  $v$ . Αυτή είναι μια περίπλοκη λεπτομέρεια η οποία δεν έχει καμία πρακτική διαφορά όταν οι ποσότητες των απαιτήσεων είναι όλες θετικές.

Οι εξισώσεις 3.2.6 και 3.2.8 σχεδιάστηκαν για να μοντελοποιούν τον μέσο αριθμό απαιτήσεων και την μέση ατομική σφοδρότητα (severity) των απαιτήσεων σαν συνάρτηση της καθυστέρησης  $j$ .

Αυτή η διατύπωση είναι ενδιαφέρουσα γιατί χρησιμοποιεί τις ίδιες προδιαγραφές τόσο στο πλαίσιο της αποθεματοποίησης απαιτήσεων όσο και στην τιμολόγηση (pricing). Πράγματι, αρκεί να σκεφτούμε ότι οι αριθμοί των απαιτήσεων μοντελοποιούνται σαν τυχαίες μεταβλητές Poisson και οι σφοδρότητες των απαιτήσεων σαν Γάμμα τυχαίες μεταβλητές.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.2.4 έως 3.2.9 παίρνουμε

$$E[C_{ij}] = m_{ij} = e_i a_j \kappa_j^{A_i} e^{-b_{ij}} e^{\delta t} \kappa_j^\lambda, \quad (3.2.10)$$

και

$$\text{Var}[C_{ij}] = (1 + v) \kappa_j^\lambda e^{\delta t} E[C_{ij}]. \quad (3.2.11)$$

Ο Wright έδειξε ότι με κατάλληλη παραμετροποίηση, οι εξισώσεις 3.2.10 και 3.2.11 αναπαριστούν ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο [generalized linear model (GLM)]. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κλασσικές στατιστικές μέθοδοι για την εκτίμηση των παραμέτρων που εμπλέκονται.

Μπορούμε να δούμε αυτή την διατύπωση σαν να επιτρέπουμε στις αυξητικές απαιτήσεις  $C_{ij}$  που έχουν πληρωθεί, να μοντελοποιούνται απευθείας χωρίς την αναγκαιότητα να μοντελοποιούμε τους αριθμούς των απαιτήσεων και τις σφοδρότητες ξεχωριστά και μετά να τα συνδυάζουμε. Η μόνη πληροφορία που χρειάζεται για να στηθεί το μοντέλο είναι το τρίγωνο των αυξητικών απαιτήσεων που έχουν πληρωθεί.

Ο Wright πήγε να χρησιμοποιήσει το φίλτρο Kalman ώστε να περάσει πληροφορία ανάμεσα στα έτη ατυχήματος για να παράγει ομαλοποιημένες εκτιμήσεις παραμέτρων, αποφεύγοντας προβλήματα που σχετίζονται με την υπερβολική παραμετροποίηση.

Η διατύπωση του προβλήματος σαν ένα GLM και η μέθοδος ταιριάσματος που υιοθέτησε ο Wright δεν είναι εύκολο να τα παρακολουθήσει κάποιος, οπότε παρουσιάζεται εδώ ένας απλούστερος τρόπος από τον Renshaw. Γράφοντας:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \ln(e_i a_j), \\ c &= \ln(\kappa), \\ a_i &= \ln(\kappa_i) \quad \text{με } \kappa_1 = 1, \\ \beta_i &= \lambda + A_i, \quad \text{και} \\ \gamma_i &= -b_i, \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$E[C_{ij}] = e^{(u_{ij} + c + a_i + \beta_i \ln(j) + \gamma_i j + \delta t)}.$$

Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\eta_{ij} = u_{ij} + c + a_i + \beta_i \ln(j) + \gamma_i j + \delta t, \quad (3.2.12)$$

και τότε

$$E[C_{ij}] = m_{ij}, \quad (3.2.13)$$

όπου

$$\ln(m_{ij}) = \eta_{ij}. \quad (3.2.14)$$

Αγνοώντας τα  $u_{ij}$  και  $\delta t$ , η εξίσωση 3.2.12 αναπαριστά την γνωστή καμπύλη Hoerl την οποία είδαμε στην εξίσωση 3.2.3.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 3.2.7 και 3.2.9 στην 3.2.5 παίρνουμε:

$$\text{Var}[C_{ij}] = E[N_{ij}] \nu \{E[X_{ij}]\}^2 + \{E[X_{ij}]\}^2 E[N_{ij}]$$

Τότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.2.4 παίρνουμε

$$\text{Var}[C_{ij}] = (1+\nu) E[X_{ij}] E[C_{ij}].$$

Γράφοντας

$$\varphi_{ij} = (1 + \nu)E[X_{ij}]$$

Παίρνουμε

$$\text{Var}[C_{ij}] = \varphi_{ij} E[C_{ij}] = \varphi_{ij} m_{ij}. \quad (3.2.15)$$

Οι εξισώσεις 3.2.13, 3.2.14 και 3.2.15 ορίζουν ένα GLM (γενικευμένο γραμμικό μοντέλο) στο οποίο το  $C_{ij}$  μοντελοποιείται με μια λογαριθμική συνάρτηση, η διακύμανση είναι ανάλογη του μέσου και η γραμμική παράμετρος που προβλέπει (predictor) δίνεται από την εξίσωση 3.2.12. Τα  $\varphi_{ij}$  είναι άγνωστοι παράμετροι αναλογίας (scale parameters) και είναι προς εκτίμηση από το μοντέλο.

Με τα GLM, η άγνωστη παράμετρος αναλογίας είναι συνήθως σταθερή για όλες τις παρατηρήσεις (π.χ.  $\varphi_{ij} = \varphi$  για κάθε  $i, j$ ) και υπολογίζεται από την απόκλιση (ή αλλιώς το Pearson  $X^2$  statistic) διαιρεμένη από τους βαθμούς ελευθερίας. Όμως, σε αυτή την διατύπωση, είναι εφικτό να υπολογίσουμε τις παραμέτρους αναλογίας σαν μέρος μιας εκτεταμένης διαδικασίας προσαρμογής, γνωστή ως από κοινού μοντελοποίηση (joint modeling).

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην διατύπωση του Renshaw, η υπόθεση ότι οι αριθμοί των απαιτήσεων ακολουθούν κατανομή Poisson δεν προσέχτηκε ιδιαίτερα, η μόνη προϋπόθεση είναι ότι η διακύμανση του αριθμού των απαιτήσεων υπάρχει και είναι ανάλογη του μέσου.

Επομένως

$$\text{Var}[N_{ij}] = \varphi E[N_{ij}]. \quad (3.2.16)$$

Αυτό είναι συναφές με τις υποθέσεις του Wright για την κατανομή των σφοδροτήτων των απαιτήσεων (claim severities). Οι αριθμοί των απαιτήσεων λέγεται να είναι κατανομημένοι σαν «υπερδιασκορπισμένες» Poisson τυχαίες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.2.16 αντί της 3.2.7 έχουμε:

$$\varphi_{ij} = (\varphi + \nu)E[X_{ij}]$$

χωρίς να αλλάζει ο προσδιορισμός ως ένα GLM.

Συγκρίνοντας την εξίσωση 3.2.12 με την 3.2.3, μπορεί να δειχθεί ότι ο Wright χρησιμοποιεί αποτελεσματικά τον ίδιο γραμμικό προβλεπτή με τον Zehnwirth, με τον συνυπολογισμό ενός προαιρετικού όρου στο μοντέλο που αφορά

τον πιθανό πληθωρισμό των απαιτήσεων. Οι όροι  $u_{ij}$  είναι γνωστοί και αναπαριστούν μικρές τεχνικές ρυθμίσεις. Οι κύριες διαφορές μεταξύ του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε από τον Zehnwirth και του μοντέλου που πρότεινε ο Wright είναι οι εξής:

- Ο Zehnwirth χρησιμοποιεί τον λογάριθμο των αυξητικών απαιτήσεων ως την απόκριση και συνδέει τον προβλεπτή (3.2.3) με την αναμενόμενη τιμή της απόκρισης μέσω της συνάρτησης σύνδεσης, επομένως απαιτείται η εισαγωγή μιας συνιστώσας διακύμανσης όταν επικεντρωνόμαστε στον μέσο. Ο Wright χρησιμοποιεί τις ίδιες τις αυξητικές απαιτήσεις ως τις αποκρίσεις και συνδέει τον ίδιο προβλεπτή με την αναμενόμενη τιμή της απόκρισης μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης σύνδεσης, αποφεύγοντας την αναγκαιότητα του συνυπολογισμού μιας συνιστώσας διακύμανσης όταν επικεντρωνόμαστε στον μέσο που έχει προβλεφθεί.
- Στο μοντέλο που προτείνει ο Zehnwirth, η διακύμανση είναι σταθερή για όλες τις παρατηρήσεις (ή σταθερή για κάθε περίοδο ανάπτυξης), αντίθετα στο μοντέλο που προτείνει ο Wright, η διακύμανση είναι ανάλογη του μέσου.
- Ο  $\log$  μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται από τον Zehnwirth εξαιρεί τη μάζα στο μηδέν (αν και είναι εφικτό να κάνει μικρές μετατροπές στις μηδενικές πληρωμές στα δεδομένα), κάτι το οποίο, το μοντέλο του Wright περιλαμβάνει φυσικά. Στην πραγματικότητα το μοντέλο του Wright μπορεί να χρησιμοποιηθεί για δεδομένα που περιλαμβάνουν και κάποιες αρνητικές πληρωμές.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στο πακέτο λογισμικού ICRFS, ο Zehnwirth περιλαμβάνει μια ποικιλία από δομές για τον προβλεπτή, όχι μόνο αυτόν που εννοείται παραπάνω, το οποίο θα μπορούσε να εξασφαλίσει μια βελτιωμένη εφαρμογή στα δεδομένα.

Οι εξισώσεις 3.2.12 έως 3.2.15 ορίζουν το μοντέλο που προτάθηκε από τον Wright και προτείνουν πιθανές εναλλακτικές. Για παράδειγμα, οι Renshaw και Verrall αντικαθιστούν τον γραμμικό προβλεπτή που χρησιμοποιήθηκε από τον Wright (εξίσωση 3.2.12) με τον γραμμικό προβλεπτή που πρότεινε ο Kremer και χρησιμοποιούν μια σταθερή παράμετρο κλίμακας θέτοντας  $\varphi_{ij} = \varphi$  για όλα τα  $i, j$ .

Συνεπώς,

$$E[C_{ij}] = m_{ij} \quad \text{και} \quad \text{Var}[C_{ij}] = \varphi m_{ij}, \quad (3.2.17)$$

όπου

$$\ln(m_{ij}) = \eta_{ij} = c + a_i + \beta_j. \quad (3.2.18)$$

Οι εξισώσεις 3.2.17 και 3.2.18 ορίζουν ένα GLM στο οποίο οι αυξητικές απαιτήσεις μοντελοποιούνται σαν υπερδιασκορπισμένες Poisson τυχαίες μεταβλητές. Αυτό το μοντέλο είναι ιδιαίτερος ενδιαφέρον αφού οι προβλεπόμενες τιμές που δίνονται από το μοντέλο είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές που δίνονται από το απλό



μοντέλο chain ladder, συνεπώς παρέχει μια στοχαστική έκδοση του μοντέλου chain ladder.

Οι Renshaw και Verrall δεν ήταν οι πρώτοι που παρατήρησαν την σύνδεση μεταξύ του μοντέλου chain ladder και της κατανομής Poisson, αλλά ήταν οι πρώτοι που εφάρμοσαν το μοντέλο χρησιμοποιώντας την βασική μεθοδολογία στην στατιστική μοντελοποίηση και που παρείχαν έναν σύνδεσμο με την ανάλυση πινάκων ενδεχομένων (contingency tables). Ο Wright περιγράφει επίσης ένα παρόμοιο μοντέλο, συμπεριλαμβάνοντας έναν όρο για την διόγκωση των απαιτήσεων του μοντέλου, αλλά δεν μελέτησε το μοντέλο λεπτομερώς. Ο Mack επισημαίνει ότι οι εκτιμήσεις της chain ladder μπορούν να αποκτηθούν μεγιστοποιώντας μια Poisson πιθανοφάνεια προσφεύγοντας στην αποκαλούμενη «μέθοδο των οριακών αθροισμάτων» (marginal totals method).

Ο Mack πρότεινε την χρησιμοποίηση του ίδιου γραμμικού προβλεπτή με του Kremer (και επομένως τον ίδιο με των Renshaw και Verrall) αλλά πρότεινε την χρησιμοποίηση μιας κατανομής Γάμμα για τις ποσότητες των απαιτήσεων. Ωστόσο, ο Mack ανέπτυξε την δική του διαδικασία προσαρμογής για την απόκτηση των εκτιμήσεων των παραμέτρων της μεγίστης πιθανοφάνειας. Όπως σημείωσαν οι Renshaw και Verrall, το ίδιο μοντέλο μπορεί να προσαρμοστεί χρησιμοποιώντας το GLM που περιγράφεται από τις εξισώσεις 3.2.17 και 3.2.18 αλλά αντικαθιστώντας το  $\text{Var}[C_{ij}] = \varphi m_{ij}$  με  $\text{Var}[C_{ij}] = \varphi m_{ij}^2$ . Βασικά στατιστικά πακέτα λογισμικού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόκτηση των εκτιμήσεων των παραμέτρων μεγίστης πιθανοφάνειας.

Σε έρευνα του Verrall, το στοχαστικό μοντέλο chain ladder των Renshaw και Verrall επεκτάθηκε για να ενσωματώσει την ομαλοποίηση των εκτιμήσεων των παραμέτρων στα έτη ατυχήματος (τα  $\alpha_i$  στην εξίσωση 3.2.18), αφήνοντας το μοντέλο να περιγράφει την επαναληπτική διαδικασία (τα  $\beta_j$ ). Μη παραμετρικοί «ομολοποιητές» (smoothers) χρησιμοποιήθηκαν και προσαρμόστηκαν χρησιμοποιώντας γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAMs). Τα GAMs διαφέρουν από τα GLMs στον τρόπο που μοντελοποιείται η σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και των συμμεταβλητών (covariates). Στα GLM η σχέση είναι παραμετρική ενώ στα GAM η απόκριση διαφέρει ομαλά με τις συμμεταβλητές μέσω της εισήγησης μιας διαδικασίας ομαλοποίησης. Σε αυτό το έγγραφο, η ιδέα επεκτείνεται ώστε να επιτρέπει την ομαλοποίηση στα έτη ανάπτυξης, το οποίο είναι χρήσιμο πλεονέκτημα και παρέχει ένα ευέλικτο πλαίσιο στοχαστικής αποθεματοποίησης.

### 3.3 Ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων

Ένα GLM ορίζεται εστιάζοντας σε ένα σετ από ανεξάρτητες μεταβλητές απόκρισης  $\{Y_u: u = 1, 2, \dots, n\}$ . Ο σκοπός είναι να μοντελοποιήσουμε την αναμενόμενη τιμή της απόκρισης σαν μια συνάρτηση μίας ή περισσότερων συμμεταβλητών. Υποθέτουμε ότι τα  $Y_u$  κατανέμονται σύμφωνα με ένα μέλος της εκθετικής οικογένειας μίας-παραμέτρου (one-parameter exponential family), η οποία περιλαμβάνει την κανονική, την Poisson και την Γάμμα μεταξύ άλλων. Δηλώνοντας την αναμενόμενη τιμή  $Y_u$  με  $m_u$ , έχουμε

$$E[Y_u] = m_u \quad \text{και} \quad \text{Var}[Y_u] = \frac{\varphi V(m_u)}{w_u},$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Κατανομή	Παράμετρος κλίμακας $\varphi$	Συνάρτηση διακύμανσης $V(m_u)$
Κανονική	$\sigma^2$	1
Poisson	1	$m_u$
Γάμμα	$> 0$	$m_u^2$
Αντίστροφη Gaussian	$> 0$	$m_u^3$

όπου το  $\varphi$  δηλώνει μια παράμετρο κλίμακας, τα  $w_u$  είναι βάρη (συνήθως είναι όλα ίσα με 1 για όλες τις παρατηρήσεις) και το  $V(\cdot)$  είναι η αποκαλούμενη συνάρτηση της διακύμανσης (μια συνάρτηση του μέσου). Η επιλογή της κατανομής υπαγορεύει τις τιμές των  $\varphi$  και  $V(\cdot)$ . Οι τιμές της παραμέτρου κλίμακας και της συνάρτησης διακύμανσης για διάφορες βασικές κατανομές εμφανίζονται στον πίνακα 3.3.1. Ο ορισμός ενός GLM ολοκληρώνεται ορίζοντας την αιτιοκρατική δομή, η οποία επιτυγχάνεται μέσω ενός γραμμικού εκτιμητή  $\eta_u$  όπου

$$\eta_u = \sum_{v=1}^p x_{uv} \beta_v \quad (3.3.1)$$

με γνωστές συμμεταβλητές  $x_v$  οι οποίες συνδέονται με κάθε παρατήρηση  $u$  και άγνωστες παραμέτρους  $\beta_v$ . Η αναμενόμενη τιμή της απόκρισης είναι συνδεδεμένη με τον γραμμικό εκτιμητή μέσο μια συνάρτησης σύνδεσης  $g(\cdot)$  τέτοια ώστε

$$g(m_u) = \eta_u.$$

Είναι χρήσιμο να σκεφτούμε τα GAMs σαν προέκταση των GLM. Ένα GAM ορίζεται αντικαθιστώντας την εξίσωση 3.3.1 με την

$$\eta_u = \sum_{v=1}^p s_v(x_u),$$

όπου το  $s(x)$  παριστάνει έναν μη παραμετρικό ομαλοποιητή στο  $x$ . Είναι εφικτό να επιλέξουμε από διαφορετικούς τύπους ομαλοποιητών, όπως τοπικά σταθμισμένους ομαλοποιητές παλινδρόμησης (loess), κυβικές splines ομαλοποίησης και ομαλοποιητές πυρήνα. Άλλα χαρακτηριστικά των GAM όπως η επιλογή της κατανομής σφάλματος, η συνάρτηση σύνδεσης, μέτρα goodness-of-fit και ορισμοί καταλοίπων είναι κοινά στα GLM με την κύρια διαφορά ανάμεσα στα GAM και τα GLM να είναι ο προσδιορισμός του εκτιμητή  $\eta$ .

Μια πλήρη έκθεση του στατιστικού υποβάθρου των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων και των γενικευμένων προσθετικών μοντέλων μπορεί να βρεθεί σε άρθρο των McCullagh και Nelder και σε άρθρο των Hastie και Tibshirani αντιστοίχως.

Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν είμαστε περιορισμένοι στην χρησιμοποίηση ενός ομαλοποιητή για όλες τις συμμεταβλητές. Ο εκτιμητής μπορεί να περιλαμβάνει μια σύνθεση παραμετρικών και μη παραμετρικών συνιστωσών. Ο εκτιμητής γίνεται σε αυτή την περίπτωση

$$\eta_u = \sum_{v=1}^{p-r} x_{uv}\beta_v + \sum_{v=p-r+1}^p s_v(x_u).$$

Στην αποθεματοποίηση, η κυβική spline ομαλοποίησης έχει παρατηρηθεί ότι είναι πολύ χρήσιμη. Όταν τα δεδομένα είναι κατανεμημένα κανονικά, η (μονοπαραγοντική) κυβική spline ομαλοποίησης  $s(x)$  υπολογίζεται ελαχιστοποιώντας το penalized άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων

$$\sum_{u=1}^n (y_u - s(x_u))^2 + \theta \int (s''(t))^2 dt. \quad (3.3.2)$$

Το δεύτερο μέρος της εξίσωσης 3.3.2 ορίζει μια ποινή (smoothness penalty) ομαλότητας βασισμένη στην καμπυλότητα της συνάρτησης spline  $s(x)$ . Το επίπεδο ομαλοποίησης ελέγχεται από την παράμετρο  $\theta (>0)$ . Όταν το  $\theta$  τείνει στο μηδέν, δεν υπάρχει ποινή ομαλότητας και το μοντέλο παρέχει τέλεια προσαρμογή: οι τιμές που έχουν προσαρμοστεί είναι τα ίδια τα δεδομένα. Όταν το  $\theta$  είναι μεγάλο (τείνει στο άπειρο), η προσαρμογή είναι τελείως ομαλή και οι τιμές που έχουν προσαρμοστεί πέφτουν κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, αναγκάζοντας αποτελεσματικά την σχέση να είναι γραμμική στο  $x$ . Η παράμετρος  $\theta$  ορίζεται ανάμεσα σε αυτά τα άκρα ώστε να παράγει ένα επιθυμητό επίπεδο ομαλότητας και ελέγχει την ανταλλαγή μεταξύ καλής προσαρμογής και ομαλότητας. Αν και η κυβική spline ομαλοποίησης έχει παρατηρηθεί πρόσφατα στην στατιστική μοντελοποίηση, συνήθως η πρώτη του εμφάνιση στην αναλογιστική βιβλιογραφία αποδίδεται σε ένα άρθρο από τον Whittaker.

Μέσα στο πλαίσιο των μη κανονικών κατανομών σφάλματος από την εκθετική οικογένεια, προσαρμόζεται μια σταθμισμένη εκδοχή της εξίσωσης 3.3.2 εισάγοντας έναν επιπλέον επαναληπτικό αλγόριθμο μέσα στην διαδικασία βελτιστοποίησης. Λεπτομέρειες στο άρθρο των Hastie και Tibshirani (1990) και σε αυτό των Green και Silverman (1994).

Για να κατασκευάσουμε ένα ευέλικτο πλαίσιο για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων, μέσα στο οποίο μερικά από τα μοντέλα που περιγράφηκαν στην υποενότητα 3.2 μπορούν να θεωρηθούν σαν ειδικές περιπτώσεις, επικεντρωνόμαστε στις αυξητικές απαιτήσεις που έχουν πληρωθεί  $C_{ij}$  και ορίζουμε

$$E[C_{ij}] = m_{ij}, \quad (3.3.3)$$

$$\text{Var}[C_{ij}] = \rho m_{ij}^{\rho}, \quad (3.3.4)$$

και

$$\ln(m_{ij}) = \eta_{ij} = u_{ij} + \delta t + c + s_{\theta_i}(i) + s_{\theta_j}(j) + s_{\theta_j}(\ln(j)). \quad (3.3.5)$$

Οι εξισώσεις 3.3.3, 3.3.4 και 3.3.5 ορίζουν ένα γενικευμένο προσθετικό μοντέλο με συνάρτηση δυναμικής διακύμανσης (power variance function) και σταθερή παράμετρο κλίμακας. Η δύναμη  $\rho$  υπαγορεύει την επιλογή της κατανομής σφάλματος και οι κατανομές κανονική, Poisson, Γάμμα και αντίστροφη Gaussian ορίζονται από  $\rho = 0, 1, 2$  και  $3$  αντίστοιχα. Ο εκτιμητής συνδέεται με την αναμενόμενη τιμή της απόκρισης μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης σύνδεσης. Οι αντισταθμιστές (offsets)  $u_{ij}$  και ο όρος πληθωρισμού  $\delta t$  είναι προαιρετικοί (όπου  $t=i+j$ ). Η συνάρτηση  $s(i)$  αναπαριστά μια ομαλοποίηση στο έτος ατυχήματος  $i$ , που αποκτήθηκε χρησιμοποιώντας μια spline ομαλοποίησης με παράμετρο ομαλοποίησης  $\theta_i$ . Ομοίως, οι συναρτήσεις  $s(j)$  και  $s(\ln(j))$  αναπαριστούν splines ομαλοποίησης που ορίζουν το σχήμα της επαναληπτικής διαδικασίας (runoff pattern), με παράμετρο ομαλοποίησης  $\theta_j$  το οποίο για λόγους απλοποίησης έχει επιλεγθεί να είναι το ίδιο και για τις δύο συναρτήσεις. Στην πράξη, μπορεί να μην είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε ομαλοποιήσεις και στα δυο  $j$  και  $\ln(j)$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι και το έτος ατυχήματος  $i$  αλλά και το έτος εξέλιξης  $j$  θεωρούνται συνεχείς συμμεταβλητές. Μπορεί να δειχθεί ότι η χρήση της εξίσωσης 3.3.5 υποθέτει το ίδιο μοτίβο επαναληπτικής διαδικασίας για όλα τα έτη ατυχήματος, αν και το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί χρησιμοποιώντας επιλεγμένους όρους αλληλεπίδρασης. Είναι ασήμαντο να επεκτείνουμε την εξίσωση 3.3.5 παραπάνω, για παράδειγμα, για να επιτρέψουμε μια αλλαγή σε ένα συγκεκριμένο ημερολογιακό έτος λόγω μιας αλλαγής στην νομοθεσία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.2

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ  
ΚΑΠΟΙΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ  
ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

	Δύναμη διακύμανσης $\rho$	Παράμετρος ομαλοποίησης $\theta_i$ γραμμής	Παράμετρος ομαλοποίησης $\theta_j$ στήλης
Wright (1990)*	1	0	$\infty$
Mack (1991)	2	0	0
Renshaw και Verrall (1994, 1998)	1	0	0
Renshaw (1994)	1,2	0	0
Verrall (1996)	1	>0	0

\*Θεωρούμε εδώ μόνο την ειδική περίπτωση στην οποία χρησιμοποιείται το ίδιο μοτίβο επαναληπτικής διαδικασίας για όλα τα έτη ατυχήματος, δεν χρησιμοποιείται το φίλτρο Kalman, και η παράμετρος κλίμακας είναι σταθερή.

Τα άκρα των παραμέτρων ομαλοποίησης είναι ενδιαφέροντα και παρέχουν τον σύνδεσμο μεταξύ της εξίσωσης 3.3.5 και των εξισώσεων 2.2.12 και 2.2.18 (αγνοώντας τους προαιρετικούς όρους  $u_{ij}$  και  $\delta t$ ). Όταν το  $\theta_i$  είναι μηδέν, δεν υπάρχει ομαλοποίηση και το μοντέλο είναι αναγκασμένο να περνάει από κάθε τιμή του  $i$ , και έτσι το έτος ατυχήματος  $i$  μεταχειρίζεται σαν να είναι ένας παράγοντας (όπως στις 2.2.12 και 2.2.18). Το ίδιο ισχύει και για το  $\theta_j$ , όταν είναι μηδέν το μοντέλο αναγκάζεται να περάσει από κάθε τιμή του  $j$ , και το έτος εξέλιξης μεταχειρίζεται σαν να είναι ένας παράγοντας (όπως στην 2.2.18). Όταν το  $\theta_j$  τείνει στο άπειρο, το μέρος του μοντέλου που σχετίζεται με τον χρόνο εξέλιξης είναι γραμμικό ως προς το  $j$  και το  $\ln(j)$ , δίνοντας την καμπύλη Hoerl (όπως στις 2.2.12 και 2.2.3). Είναι επίσης απαραίτητο να επιλέξουμε την συνάρτηση δύναμης  $\rho$  ώστε να ολοκληρωθεί ο ορισμός του μοντέλου.

Ο πίνακας 3.3.2 δείχνει πως μπορούμε, κάποια προηγούμενα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης, να τα δούμε ως ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου που ορίζεται από τις εξισώσεις 3.3.3, 3.3.4 και 3.3.5. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, οι προαιρετικοί όροι  $u_{ij}$  και  $\delta t$  αγνοούνται.

Τα προηγούμενα log-γραμμικά μοντέλα δεν ταιριάζουν τόσο καλά στο ίδιο πλαίσιο επειδή εκείνα τα μοντέλα χρησιμοποιούσαν log-αυξητικές απαιτήσεις σαν απόκριση και απαιτούσαν ενσωμάτωση μιας συνιστώσας διακύμανσης στον μέσο των προβλεπόμενων τιμών. Ωστόσο, το πλαίσιο θα μπορούσε εύκολα να επεκταθεί ώστε να επιτρέπεται αυτό.

Παρατηρήστε ότι θεωρούμε μοντέλα στα οποία η παράμετρος κλίμακας στην εξίσωση 3.3.4 θεωρείται σταθερή. Αυτό γίνεται για την διευκόλυνση της έκθεσης, αν και το μοντέλο μπορεί να γενικευθεί επιπλέον χαλαρώνοντας την υπόθεση και εκτιμώντας τις άγνωστες παραμέτρους κλίμακας με από κοινού μοντελοποίηση.

Έχοντας επιλέξει τον ορισμό του μοντέλου, το μοντέλο μπορεί να προσαρμοστεί χρησιμοποιώντας μέγιστη οιονεί πιθανοφάνεια για την απόκτηση των εκτιμήσεων των παραμέτρων (και στις προσεγγίσεις των τυπικών τους σφαλμάτων). Σε αυτό το στάδιο κάνουμε χρήση βασικών στατιστικών πακέτων λογισμικού που έχουν την ευχέρεια να προσαρμόζουν γενικευμένα προσθετικά μοντέλα. Προς το παρόν η επιλογή είναι περιορισμένη, αν και στο μέλλον θα υπάρχουν περισσότερες επιλογές όσο αυξάνεται ο πληθυσμός των γενικευμένων προσθετικών μοντέλων. Εμείς χρησιμοποιήσαμε S-PLUS για το παράδειγμα.

Έχοντας προσαρμόσει το μοντέλο, αποκτήσαμε εκτιμήσεις αποθεμάτων προσθέτοντας τις κατάλληλες προβλεπόμενες τιμές στην νοτιοανατολική περιοχή του τετραγώνου των απαιτήσεων. Το μόνο που μένει είναι η εκτίμηση της μεταβλητότητας στις εκτιμήσεις των αποθεμάτων.

### 3.4 Ακρίβεια των εκτιμήσεων του αποθέματος

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα των στοχαστικών μοντέλων αποθεματοποίησης είναι η διαθεσιμότητα των εκτιμήσεων της ακρίβειας. Κάτι που χρησιμοποιείται συνήθως σε προβλήματα πρόβλεψης (όπως στην δική μας περίπτωση) είναι το τυπικό σφάλμα της πρόβλεψης, γνωστό και ως σφάλμα πρόβλεψης, ή μέσο τετραγωνικό σφάλμα (root mean square error). Για πληρωμές απαιτήσεων στο έτος εξέλιξης  $j$  για το έτος ατυχήματος  $i$  το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης δίνεται από την σχέση

$$E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] \approx \text{Var}[C_{ij}] + \text{Var}[\hat{C}_{ij}]. \quad (3.4.1)$$

Να σημειωθεί ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα δύο συνιστωσών: μεταβλητότητα στα δεδομένα (διακύμανση επεξεργασίας) και μεταβλητότητα λόγω εκτίμησης (διακύμανση εκτίμησης). Η ακριβής μορφή των δύο συνιστωσών της διακύμανσης υπαγορεύεται από τον ορισμό του μοντέλου που προσαρμόζεται. Για λεπτομερή επεξήγηση της εξίσωσης 3.4.1 δείτε Renshaw [15].

Για το γενικό μοντέλο που ορίζεται παραπάνω, η διακύμανση επεξεργασίας δίνεται από την εξίσωση 3.3.4. Για την διακύμανση εκτίμησης παρατηρούμε ότι

$$\hat{C}_{ij} = \hat{m}_{ij} = e^{\hat{\eta}_{ij}}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor,

$$\text{Var}[\hat{C}_{ij}] \approx \left| \frac{\partial m_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right|^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}],$$

παίρνουμε

$$E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] \approx \varphi \hat{m}_{ij}^{\rho} + \hat{m}_{ij}^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}]. \quad (3.4.2)$$

Η τελευταία συνιστώσα στην εξίσωση 3.4.2, η διακύμανση του εκτιμητή, είναι συνήθως άμεσα διαθέσιμη από τα στατιστικά πακέτα λογισμικού και έτσι ο υπολογισμός του μέσου τετραγωνικού σφάλματος γίνεται χωρίς δυσκολία. Το τυπικό σφάλμα της πρόβλεψης είναι η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος της πρόβλεψης.

Το τυπικό σφάλμα πρόβλεψης για εκτιμήσεις του αποθέματος του έτους προέλευσης και οι συνολικές εκτιμήσεις αποθέματος μπορούν επίσης να υπολογιστούν. Θέτοντας το κενό νοτιοανατολικό τμήμα του τετραγώνου των απαιτήσεων με  $\Delta$ , τότε η εκτίμηση του αποθέματος στο έτος προέλευσης  $i$  δίνεται αθροίζοντας τις τιμές που έχουν προβλεφθεί στην γραμμή  $i$  του  $\Delta$ , δηλαδή,

$$\hat{C}_{i+} = \sum_{j \in \Delta_i} \hat{C}_{ij}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης του αποθέματος του έτους προέλευσης δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} E \left[ (C_{i+} - \hat{C}_{i+})^2 \right] &= \sum_{j \in \Delta_i} \varphi \hat{m}_{ij}^{\rho} + \sum_{j \in \Delta_i} \hat{m}_{ij}^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}] \\ &+ 2 \sum_{\substack{j_1, j_2 \in \Delta_i \\ j_2 > j_1}} \hat{m}_{ij_1} \hat{m}_{ij_2} \text{Cov} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Η συνολική εκτίμηση του αποθέματος δίνεται από την σχέση

$$\hat{C}_{++} = \sum_{i, j \in \Delta} \hat{C}_{ij}$$

και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης του συνολικού αποθεματικού δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} E \left[ (C_{++} - \hat{C}_{++})^2 \right] &= \sum_{i, j \in \Delta} \varphi \hat{m}_{ij}^{\rho} + \sum_{i, j \in \Delta} \hat{m}_{ij}^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}] \\ &+ 2 \sum_{\substack{i_1, j_1 \in \Delta \\ i_2, j_2 \in \Delta \\ i_1 j_1 \neq i_2 j_2}} \hat{m}_{i_1 j_1} \hat{m}_{i_2 j_2} \text{Cov}[\hat{\eta}_{i_1 j_1}, \hat{\eta}_{i_2 j_2}] \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Αν και οι εξισώσεις 3.4.3 και 3.4.4 δείχνουν αρκετά πολύπλοκες, είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστούν αθροίζοντας τα κατάλληλα στοιχεία. Οι μόνες συνιστώσες που δεν είναι έτοιμες σε στατιστικά πακέτα λογισμικού είναι οι όροι των συνδιακυμάνσεων. Υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας σχεδιασμού και ο πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των εκτιμήσεων της παραμέτρου, μπορούν να υπολογιστούν από το στατιστικό πακέτο λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε, μπορεί να υπολογιστεί ένας πλήρης πίνακας των όρων συνδιακύμανσης εύκολα για οποιοδήποτε προσδιορισμό του εκτιμητή  $\eta$ . Πράγματι, οι διακυμάνσεις των εκτιμητών είναι απλά η διαγώνιος ενός τέτοιου πίνακα.

Είναι επίσης πιθανό να αποκτήσουμε εκτιμήσεις πληρωμών που είναι να γίνουν στο μέλλον, απλά αθροίζοντας τις διαγώνιους στον  $\Delta$ . Επίσης είναι πιθανό να αποκτήσουμε το συσχετισμένο τυπικό σφάλμα της πρόβλεψης.

### 3.5 Αποτίμηση της καλής προσαρμογής

Για δεδομένη κατανομή σφάλματος, συγκεκριμένα μοντέλα επιλέγονται από τις παραμέτρους ομαλοποίησης  $\theta_i$  και  $\theta_j$  και προσαρμόζονται διάφορα μοντέλα διαφοροποιώντας τις παραμέτρους ομαλοποίησης μέχρι να επιτευχθεί μια ικανοποιητική προσαρμογή. Η αξιολόγηση του κατά πόσο ένα μοντέλο είναι ικανοποιητικό στην πράξη είναι κατά ένα μέρος τέχνη και κατά ένα μέρος επιστήμη. Συνήθως, στην πράξη αρκούν ανεπίσημοι έλεγχοι, αν και η σύγκριση μοντέλων μπορεί να γίνει επίσημα με τον συνήθη τρόπο συγκρίνοντας την διαφορά στις αποκλίσεις των μοντέλων που έχουν προσαρμοστεί (για καθορισμένα  $\rho$ ) με το κατάλληλο ποσοστημόριο (percentage point) στις κατανομές  $F$  ή  $\chi^2$ . Ωστόσο, επειδή οι ομαλοποιητές είναι μη παραμετρικοί, δεν είναι προφανές πόσοι βαθμοί ελευθερίας πρέπει να χρησιμοποιηθούν στην σύγκριση των μοντέλων. Σύμφωνα με την θεωρία των κυβικών splines ομαλοποίησης, είναι δυνατό να αποτιμήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας που χρησιμοποιούνται στην προσαρμογή της spline. Αυτό έχει μια αντίστροφη σχέση με την παράμετρο ομαλοποίησης: όσο αυξάνεται η παράμετρος ομαλοποίησης, μειώνονται οι βαθμοί ελευθερίας. Μετά την προσαρμογή μιας κυβικής spline ομαλοποίησης, τα στατιστικά πακέτα λογισμικού παρέχουν τους βαθμούς ελευθερίας σαν μέρος της εξόδου (output) του μοντέλου. Ένα πρόβλημα είναι ότι η παράμετρος ομαλοποίησης είναι ένα συνεχές μέτρο, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μη ακέραιο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Γι' αυτό το λόγο τα πακέτα λογισμικού τείνουν να επιτρέπουν στην ποσότητα της ομαλοποίησης να ορίζεται εναλλακτικά από τους βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι παρέχονται από τον χρήστη. Η παράμετρος ομαλοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί υπολογίζεται από τους βαθμούς ελευθερίας που δίνονται.

Η επιλογή της κατανομής σφάλματος δεν είναι εύκολο να αιτιολογηθεί αλλά μπορεί να προταθεί σε θεωρητικό επίπεδο. Λαμβάνοντας υπόψη τις ταυτόσημες



προδιαγραφές του εκτιμητή, η βέλτιστη τιμή του  $\rho$  (το οποίο καθορίζει της επιλογή της κατανομής σφάλματος) είναι αυτή που παράγει την υψηλότερη πιθανοφάνεια.

Για την αποτίμηση της επάρκειας οποιουδήποτε μοντέλου που έχει προσαρμοστεί χρησιμοποιούνται και διαγράμματα καταλοίπων. Δυο είδη καταλοίπων που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι τα Pearson και τα κατάλοιπα απόκλισης. Τα κλιμακωτά κατάλοιπα Pearson ορίζονται από την

$$r_{ij} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\varphi \hat{m}_{ij}^\rho}}$$

και τα κλιμακωτά κατάλοιπα απόκλισης ορίζονται από την

$$\sim r_{ij} = \text{sign}(C_{ij} - \hat{m}_{ij}) \sqrt{\frac{d_{ij}}{\varphi}}$$

όπου το  $d_{ij}$  είναι η συνεισφορά της παρατήρησης  $C_{ij}$  στην απόκλιση.

Για ένα λογικό μοντέλο, ένα ιστόγραμμα των κλιμακωτών καταλοίπων αναμένεται να είναι περίπου κανονικό με το 95% των καταλοίπων να είναι μεταξύ του μείον 2 και του συν 2. Τα κατάλοιπα μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά και με τον εκτιμητή, με το έτος προέλευσης και με το έτος εξέλιξης. Τα γραφήματα αναμένεται να μην ακολουθούν κάποιο μοτίβο, αν ακολουθούσαν κάποιο προφανές μοτίβο θα σήμαινε μια συστηματική απόκλιση από το προσαρμοσμένο μοντέλο. Μεμονωμένες αποκλίσεις από το μοντέλο θα υποδεικνύονταν από κατάλοιπα των οποίων οι τιμές είναι μακριά από το μηδέν. Άλλα γραφήματα καταλοίπων είναι επίσης δυνατά. Είναι σύνηθες να αποτιμώμαι γραφήματα καταλοίπων οπτικά, έτσι οποιαδήποτε σοβαρή ανεπάρκεια του μοντέλου θα ήταν άμεσα ορατή.

Ένας επιπλέον οπτικός έλεγχος ο οποίος είναι χρήσιμος όταν συγκρίνουμε μοντέλα είναι να αναπαραστήσουμε γραφικά εκείνο το μέρος του εκτιμητή που εξηγεί το μοτίβο απορροής (runoff pattern) σε σχέση με τον χρόνο εξέλιξης. Από την εξίσωση 3.3.5, αυτό μεταφράζεται στο να αναπαραστήσουμε γραφικά την  $c + s_{\theta_j}(j) + s_{\theta_j}(\ln(j))$  με το  $j$  για διάφορες τιμές του  $\theta_j$ . Η σταθερά  $c$  είναι αναγκαία για να διασφαλίσουμε ότι τα γραφήματα θα ξεκινούν από ισοδύναμα επίπεδα. Ένα γράφημα σαν αυτό μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την επιλογή ενός μοντέλου το οποίο δεν είναι βέλτιστο με την στατιστική έννοια, αλλά θα έχει βολικές ιδιότητες (για παράδειγμα, ο τρόπος συμπεριφοράς του όταν βγάζουμε συμπεράσματα για την ουρά).

### 3.6 Παράδειγμα: Μέρος 1<sup>ο</sup> – Σύγκριση δομών εκτιμητή

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6.1

ΑΥΞΗΤΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΠΛΗΡΩΘΕΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ  
ΑΘΡΟΙΖΟΝΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΑΞΕΙΣ

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10
i=1	45630	23350	2924	1798	2007	1204	1298	563	777	621
i=2	53025	26466	2829	1748	732	1424	399	537	340	
i=3	67318	42333	-1854	3178	3045	3281	2909	2613		
i=4	93489	37473	7431	6648	4207	5762	1890			
i=5	80517	33061	6863	4328	4003	2350				
i=6	68690	33931	5645	6178	3479					
i=7	63091	32198	8938	6879						
i=8	64430	32491	8414							
i=9	68548	35366								
i=10	76013									

Στον πίνακα 3.6.1 (England and Verrall 2001) υπάρχουν αυξητικές ζημιές που έχουν πληρωθεί από ένα σύνολο τάξεων και θα χρησιμοποιηθούν για να επεξηγήσουν την μεθοδολογία. Οι αυξητικές απαιτήσεις πέφτουν αρκετά γρήγορα, αλλά δεν απορρέουν τελείως μέχρι το τέλος του δέκατου έτους εξέλιξης, υποδηλώνοντας την ανάγκη για έναν παράγοντα ουράς μεγαλύτερο του 1 όταν χρησιμοποιούμε την παραδοσιακή μέθοδο chain ladder. Σημειώστε την αρνητική αυξητική απαίτηση στη θέση (3,3), η οποία δεν αποτελεί πρόβλημα όταν εφαρμόζονται τα μοντέλα.

Αρχικά, για να εξηγήσουμε την μεθοδολογία, προσαρμόζουμε τρία μοντέλα χρησιμοποιώντας ένα «υπερδιασκορπισμένο» Poisson μοντέλο ( $\rho=1$  στην εξίσωση 3.3.4) με μια λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης. Για τα τρία μοντέλα ισχύουν

$$E[C_{ij}] = m_{ij} \quad \text{Var}[C_{ij}] = \varphi m_{ij} \quad \text{και} \quad \ln(m_{ij}) = \eta_{ij}.$$

Τα μοντέλα διαφέρουν μόνο στην επιλογή του εκτιμητή. Οι δομές του εκτιμητή είναι:

- Μοντέλο 1: Το στοχαστικό μοντέλο των Renshaw και Verrall, το οποίο δίνει τις ίδιες εκτιμήσεις αποθεμάτων με το μοντέλο chain ladder:

$$\eta_{ij} = c + a_i + \beta_j$$

Αυτό το μοντέλο μπορεί να οριστεί ως ένα γενικευμένο αθροιστικό μοντέλο με  $\theta_i = 0$  και  $\theta_j = 0$  (όχι ομαλοποίηση) δίνοντας

$$\eta_{ij} = c + s_0(i) + s_0(j) + s_0(\ln(j))$$

- Μοντέλο 2: Η καμπύλη Hoerl, αγνοώντας τον πληθωρισμό:

$$\eta_{ij} = u_j + c + a_i + \beta \ln(j) + \gamma j$$

Αυτό είναι στο πνεύμα του μοντέλου που πρότεινε ο Wright. Εδώ υιοθετούμε τις τεχνικές προσαρμογές στον χρόνο εξέλιξης που πρότεινε ο Wright και το συναφές αντιστάθμισμα (offset) (αγνοώντας την πληροφορία έκθεσης). Ωστόσο, χρησιμοποιούμε το ίδιο μοτίβο απορροής για κάθε έτος ατυχήματος (εφόσον το  $\beta$  και το  $\gamma$  δεν εξαρτώνται από το  $i$ ), αγνοούμε το φίλτρο Kalman και χρησιμοποιούμε μια σταθερή παράμετρο κλίμακας.

Πάλι, αυτό το μοντέλο μπορεί να οριστεί ως ένα γενικευμένο προσθετικό μοντέλο με  $\theta_i = 0$  και  $\theta_j = \infty$  δίνοντας

$$\eta_{ij} = u_j + c + s_0(i) + s_\infty(j) + s_\infty(\ln(j)).$$

- Μοντέλο 3: Ένα γενικευμένο προσθετικό μοντέλο με μια παράμετρο για κάθε έτος ατυχήματος, αλλά με το μοτίβο πάνω στο έτος εξέλιξης να αναπαριστάται από έναν ομαλοποιητή σε  $\log$  χρόνο εξέλιξης. Έχουμε επιλέξει να μην συμπεριλάβουμε επιπροσθέτως έναν ομαλοποιητή στον χρόνο εξέλιξης, που σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται. Επομένως  $\theta_i = 0$  και το  $\theta_j$  επιλέγεται για να παρέχει ένα κατάλληλο επίπεδο ομαλοποίησης, δίνοντας

$$\eta_{ij} = u_j + c + s_0(i) + s_{\theta_j}(\ln(j))$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{ij} = u_j + c + \alpha_i + s_{\theta_j}(\ln(j))$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ομαλό μοντέλο ανάμεσα στα μοντέλα chain ladder και Hoerl καμπύλη. Για αυτό το παράδειγμα, η παράμετρος ομαλοποίησης υπαγορεύτηκε θέτοντας τους ισοδύναμους βαθμούς ελευθερίας που χρησιμοποιήθηκαν στην προσαρμογή (εδώ βαθμοί ελευθερίας=5).

Πρώτα, θεωρείστε το μέρος κάθε εκτιμητή το οποίο περιγράφει το σχήμα της αλλοίωσης των αυξητικών απαιτήσεων (το άθροισμα των συνιστωσών που δεν εξαρτώνται από το  $i$ ). Θα το ονομάζουμε αυτό «συνέπειες στήλης». Σε ένα γράφημα που δείχνει τις συνέπειες στήλης και για τα τρία μοντέλα μπορούμε να δούμε το ακανόνιστο σχήμα της αλλοίωσης στις αυξητικές απαιτήσεις που θεωρείται από το μοντέλο chain ladder και το ομαλό σχήμα του μοντέλου που χρησιμοποιεί η καμπύλη Hoerl. Η καμπύλη Hoerl διέρχεται από το μοντέλο chain ladder, ταιριάζοντας καλά στα πρώτα στάδια της εξέλιξης (όπου έχουμε τα περισσότερα δεδομένα) αλλά αποτυγχάνει να πέσει αρκετά γρήγορα στα μετέπειτα στάδια της εξέλιξης. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της αυστηρής παραμετρικής μορφής που επιβάλλεται από την καμπύλη Hoerl. (Κάποιος το πιο πιθανό είναι να απέρριπτε το μοντέλο σε αυτό το σημείο, αλλά εμείς θα συνεχίσουμε να επισημαίνουμε τα χαρακτηριστικά της καμπύλης Hoerl και να ενεργοποιήσουμε μια σύγκριση με την μεθοδολογία του γενικευμένου προσθετικού μοντέλου.) Το μοντέλο 3 είναι ανάμεσα στα άκρα των μοντέλων 1 και 2 και αναδεικνύει ένα ικανοποιητικό μείγμα ομαλότητας και επιμονής στα δεδομένα. Αν ο εκτιμητής ομαλοποίησης του μοντέλου 3 μειωθεί, θα τείνει προς το μοντέλο 1. Αντιστρόφως, αν ο εκτιμητής ομαλοποίησης του μοντέλου 3 αυξηθεί, θα τείνει προς το μοντέλο 2.

Με αυτό το παράδειγμα, ένας έμφυτος κίνδυνος για συμπερασματική εξαγωγή χρησιμοποιώντας αυστηρές παραμετρικές καμπύλες όπως η καμπύλη Hoerl επισημαίνεται αφού η καμπύλη κάμπτεται προς τα πάνω πέρα από το διάστημα των δεδομένων που παρατηρήθηκαν. Ένα πλεονέκτημα του μοντέλου 3 είναι ότι συνεχίζει προς μια πιο επιθυμητή κατεύθυνση όταν εξάγει συμπερασματικά.

Αν και φυσιολογικά στην στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων, δεν είναι σύνηθες να επικεντρωνόμαστε στο σχήμα της αλλοίωσης των αυξητικών απαιτήσεων χρησιμοποιώντας παραδοσιακές αναλογιστικές μεθόδους, στις οποίες είναι συνηθισμένο να επικεντρωνόμαστε στην σχετική αύξηση στις αθροιστικές απαιτήσεις μέσω παραγόντων εξέλιξης, οι παραδοσιακοί παράμετροι σε μια βασική άσκηση chain ladder. Μετά την προσαρμογή ενός μοντέλου στοχαστικής αποθεματοποίησης απαιτήσεων, είναι άμεσο να αποκτήσουμε ισοδύναμους παράγοντες εξέλιξης με το να εφαρμόσουμε το βασικό μοντέλο chain ladder στις τιμές που έχουν προσαρμοστεί στο στοχαστικό μοντέλο. Αν το μοντέλο είναι τελείως παραμετρικό, ίσως είναι εφικτό να αποκτήσουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων του μοντέλου και των παραγόντων εξέλιξης της chain ladder.

Οι ισοδύναμοι παράγοντες εξέλιξης φαίνονται στον Πίνακα 3.6.2 για τα μοντέλα 1 έως 3, μαζί με τους πραγματικούς παράγοντες εξέλιξης που αποκτήθηκαν προσαρμόζοντας το βασικό μοντέλο chain ladder στα δεδομένα στον Πίνακα 3.6.1. Μπορεί να δειχθεί ότι οι παράγοντες εξέλιξης που συνεπάγονται από το στοχαστικό μοντέλο chain ladder (μοντέλο 1) είναι πανομοιότυποι με αυτούς που αποκτήθηκαν χρησιμοποιώντας την βασική μεθοδολογία της chain ladder (επομένως οι εκτιμήσεις αποθέματος που αποκτήθηκαν χρησιμοποιώντας τα δύο μοντέλα θα είναι επίσης πανομοιότυπες). Μια σύγκριση των παραγόντων εξέλιξης που συνεπάγονται της καμπύλης Hoerl (μοντέλο 2) και των μοντέλων chain ladder μας δείχνει που διαφέρουν αυτά τα δύο μοντέλα. Συγκεκριμένα, η καμπύλη Hoerl δεν πιάνει πλήρως την πτώση στους παράγοντες εξέλιξης στα αργότερα στάδια της εξέλιξης. Μπορούμε να σκεφτούμε τους παράγοντες εξέλιξης που συνεπάγονται του μοντέλου 3 σαν μια ομαλοποιημένη έκδοση των παραγόντων εξέλιξης της chain ladder.

Στον Πίνακα 3.6.2 φαίνονται επίσης οι παράγοντες εξέλιξης που αποκτήθηκαν όταν εξάγουμε συμπερασματικά πέρα από το έτος εξέλιξης 10. Μπορεί να φανεί καθαρά ότι οι παράγοντες εξέλιξης που συνεπάγονται της καμπύλης Hoerl αυξάνουν σε αξία, αν και οι παράγοντες εξέλιξης που συνεπάγονται του μοντέλου 3 συνεχίζουν να μειώνονται.

Οι εκτιμήσεις των αποθεμάτων που συνεπάγονται των μοντέλων 1, 2 και 3 φαίνονται στον Πίνακα 3.6.3, μαζί με τα σφάλματα πρόβλεψης (σαν ποσοστό των αποθεμάτων). Για ευκολία σύγκρισης με το μοντέλο chain ladder, δεν έχουμε εξάγει συμπερασματικά μέσα στην ουρά. Οι εκτιμήσεις αποθέματος που δίνονται από την καμπύλη Hoerl είναι υψηλότερες για τα μεγαλύτερα έτη από αυτές που δίνονται από το μοντέλο chain ladder, εκφράζοντας τους υψηλότερους παράγοντες εξέλιξης στα μετέπειτα στάδια της εξέλιξης. Οι εκτιμήσεις αποθέματος που δίνονται από το μοντέλο 3 είναι κοντά σε αυτές που παρέχονται από το μοντέλο chain ladder για όλα

τα έτη ξεχωριστά και συνολικά, με οποιεσδήποτε διαφορές να ανέρχονται λόγω της ποσότητας της ομαλοποίησης.

### ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6.2

#### ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ: ΥΠΕΡΔΙΑΣΚΟΡΠΙΣΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ POISSON

Έτος καθυστέρησης	Βασική chain ladder	Μοντέλο 1 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 2 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 3 GAM (βαθμοί ελευθερίας=5)
2	1.4906	1.4906	1.4496	1.4891
3	1.0516	1.0516	1.0796	1.0537
4	1.0419	1.0419	1.0372	1.0395
5	1.0268	1.0268	1.0238	1.0292
6	1.0254	1.0254	1.0180	1.0224
7	1.0149	1.0149	1.0150	1.0163
8	1.0130	1.0130	1.0135	1.0120
9	1.0067	1.0067	1.0127	1.0091
10	1.0078	1.0078	1.0124	1.0071
11			1.0125	1.0057
12			1.0129	1.0047
13			1.0135	1.0039
14			1.0144	1.0033
15			1.0156	1.0029
16			1.0171	1.0025

Ο μειωμένος αριθμός παραμέτρων στην καμπύλη Hoerl σε σχέση με το στοχαστικό μοντέλο chain ladder θα έπρεπε να μειώσει το σφάλμα πρόβλεψης, αλλά αυτό αντισταθμίζεται από την αυξημένη διακύμανση που επιβάλλεται από την φτωχή προσαρμογή, με αποτέλεσμα τα σφάλματα πρόβλεψης για την καμπύλη Hoerl τα οποία είναι κοντά σε αυτά που παρέχονται από το στοχαστικό μοντέλο chain ladder. Οι ισοδύναμοι βαθμοί ελευθερίας που εξαντλήθηκαν στην προσαρμογή του μοντέλου 3 είναι λιγότεροι από τους βαθμούς ελευθερίας που εξαντλήθηκαν στην προσαρμογή του στοχαστικού μοντέλου chain ladder, κάτι που θα μειώσει τα σφάλματα πρόβλεψης. Επιπλέον, η προσαρμογή είναι καλή σε σχέση με το μοντέλο chain ladder, το οποίο έχει το επιθυμητό επακόλουθο των μικρότερων σφαλμάτων πρόβλεψης για το μοντέλο 3 σε σχέση με το στοχαστικό μοντέλο chain ladder.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6.3

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ:  
ΥΠΕΡΔΙΑΣΚΟΡΠΙΣΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ POISSON

Έτος ατυχήματος	Εκτιμήσεις αποθεμάτων			Σφάλμα πρόβλεψης		
	Μοντέλο 1 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 2 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 3 GAM (βαθμοί ελευθερίας=5)	Μοντέλο 1 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 2 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 3 GAM (βαθμοί ελευθερίας=5)
1	0	0	0	-	-	-
2	683	1085	622	159%	95%	110%
3	1792	3101	1998	100%	61%	62%
4	4363	6129	4470	63%	46%	43%
5	5657	7173	5940	50%	43%	38%
6	8209	8689	8106	40%	39%	33%
7	10914	11031	11106	34%	34%	29%
8	15199	14765	15112	28%	30%	25%
9	21135	24002	21293	24%	23%	22%
10	60335	59625	60377	17%	17%	16%
Σύνολο	128286	135600	129024	15%	15%	12%

Τα μοντέλα 1 και 2 μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε στατιστικό πακέτο λογισμικού που προσαρμόζει γενικευμένα γραμμικά μοντέλα. Το μοντέλο 3 μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε στατιστικά πακέτα λογισμικού που προσαρμόζουν γενικευμένα προσθετικά μοντέλα.

Η σύγκριση του μοντέλου 3 με τα μοντέλα 1 και 2 ξεκινάει για να δείξει πως μπορεί να θεωρηθεί γενικό το πλαίσιο μοντελοποίησής μας, αφού το μοντέλο chain ladder και το μοντέλο καμπύλη Hoerl μπορούν να προσαρμοστούν ως ειδικές περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας άκρα των παραμέτρων ομαλοποίησης. Ένα μοντέλο το οποίο έχει το επιθυμητό χαρακτηριστικό να μπορεί να ομαλοποιήσει παράγοντες εξέλιξης μπορεί να προσαρμοστεί επιλέγοντας τις παραμέτρους ομαλοποίησης μεταξύ αυτών των άκρων.

### 3.7 Παράδειγμα: Μέρος 2<sup>ο</sup> - Σύγκριση δομών σφάλματος

Συνεχίζοντας το παράδειγμα, χρησιμοποιούνται οι ίδιοι 3 εκτιμητές των μοντέλων, αλλά με Γάμμα δομή σφάλματος ( $\rho=2$ ) δίνοντας:

$$E[C_{ij}] = m_{ij}, \text{Var}[C_{ij}] = \varphi m_{ij}^2, \text{ και } \ln(m_{ij}) = \eta_{ij}$$

και τα παρακάτω τρία μοντέλα:

- Μοντέλο 4:

$$\eta_{ij} = c + a_i + \beta_j$$

- Μοντέλο 5:

$$\eta_{ij} = u_j + c + a_i + \beta \ln(j) + \gamma_j$$

- Μοντέλο 6:

$$\eta_{ij} = u_j + c + a_i + s_{\theta_j}(\ln(j))$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7.1

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ: ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΑΜΜΑ

Έτος καθυστέρησης	Βασική chain ladder	Μοντέλο 4 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 5 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 6 GAM(βαθμοί ελευθερίας=5)
2	1.4906	1.4969	1.4515	1.4771
3	1.0516	1.0470	1.0799	1.0512
4	1.0419	1.0381	1.0372	1.0357
5	1.0268	1.0259	1.0237	1.0280
6	1.0254	1.0251	1.0178	1.0221
7	1.0149	1.0154	1.0148	1.0165
8	1.0130	1.0131	1.0131	1.0125
9	1.0067	1.0084	1.0123	1.0098
10	1.0078	1.0086	1.0119	1.0079
11			1.0119	1.0066
12			1.0122	1.0055
13			1.0127	1.0048
14			1.0135	1.0041
15			1.0145	1.0036
16			1.0157	1.0032

Στον Πίνακα 3.7.1 φαίνονται οι ισοδύναμοι παράγοντες εξέλιξης και στον πίνακα 3.7.2 φαίνονται οι εκτιμήσεις αποθέματος και τα σφάλματα πρόβλεψης (αγνοώντας τους παράγοντες της ουράς).

### ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7.2

#### ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ: ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΑΜΜΑ

Έτος ατυχήματος	Εκτιμήσεις αποθεμάτων			Σφάλμα πρόβλεψης		
	Μοντέλο 4 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 5 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 6 GAM (βαθμοί ελευθερίας=5)	Μοντέλο 4 Στοχαστικό chain ladder	Μοντέλο 5 Καμπύλη Hoerl	Μοντέλο 6 GAM (βαθμοί ελευθερίας=5)
1	0	0	0	-	-	-
2	488	675	450	62%	46%	43%
3	2086	3296	2205	43%	36%	33%
4	5240	6818	5300	36%	32%	29%
5	6169	7061	6313	32%	30%	28%
6	9750	9305	9427	31%	29%	28%
7	15080	13029	15097	31%	29%	29%
8	18498	15069	17671	32%	30%	31%
9	20470	24400	20896	36%	35%	35%
10	60043	59576	58519	52%	48%	48%
Σύνολο	137824	139229	135878	25%	23%	24%

Η σύγκριση των ισοδύναμων παραγόντων εξέλιξης από το μοντέλο γάμμα με αυτούς από το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson είναι κατατοπιστική για το σύνολο. Σε πρώτη ματιά ίσως να εκπλήσσει ότι ο τελευταίος παράγοντας εξέλιξης για το γάμμα chain ladder μοντέλο (1.0086) είναι μεγαλύτερος από τον ισοδύναμο παράγοντα από το υπερδιασκορπισμένο μοντέλο Poisson (1.0078), αλλά την ίδια ώρα η εκτίμηση του αποθέματος είναι χαμηλότερη (488 έναντι 683). Αυτό συμβαίνει επειδή οι αθροιστικές τιμές που έχουν προσαρμοστεί για την τελευταία παρατηρηθείσα διαγώνιο των δύο μοντέλων δεν είναι ίδιες, έχοντας αυτό το αποτέλεσμα. Στην πραγματικότητα, οι αθροιστικές τιμές που έχουν προσαρμοστεί για την τελευταία παρατηρηθείσα διαγώνιο είναι πανομοιότυπες με τις αθροιστικές που έχουν πληρωθεί ως σήμερα για το υπερδιασκορπισμένο Poisson chain ladder μοντέλο μόνο.

Η κύρια διαφορά μεταξύ του υπερδιασκορπισμένου Poisson και του γάμμα μοντέλου σε αυτό το παράδειγμα είναι στα σφάλματα πρόβλεψης ως ποσοστό των συνολικών εκτιμήσεων αποθέματος, οι οποίες στην περίπτωση του γάμμα μοντέλου είναι περίπου διπλάσιες αυτών του μοντέλου Poisson. Ένας έλεγχος των σφαλμάτων πρόβλεψης των αποθεμάτων γραμμής μας δίνει μια υπόδειξη του γιατί συμβαίνει αυτό. Για το μοντέλο γάμμα, τα σφάλματα πρόβλεψης για τα πρώτα έτη είναι χαμηλότερα από αυτά για το μοντέλο Poisson. Ωστόσο, το μοτίβο είναι αντίστροφο στα μεταγενέστερα έτη, ειδικά για το έτος 10. Τα μεταγενέστερα έτη συνεισφέρουν με διαφορά το μεγαλύτερο ποσοστό των συνολικών αποθεμάτων, το οποίο αντανακλάται στο υψηλό σφάλμα πρόβλεψης του συνόλου.



Η προσαρμογή του μοντέλου γάμμα είναι στην πραγματικότητα κακή σε αυτό το παράδειγμα, κυρίως στα πρώτα στάδια εξέλιξης, όπου οι μεγάλες αυξητικές παρατηρηθείσες τιμές παίρνουν μικρότερο βάρος στην προσαρμογή του μοντέλου απ' ό,τι στο μοντέλο Poisson. Αυτό δεν είναι φανερό από έναν έλεγχο των γραφημάτων των καταλοίπων, που φαίνεται ικανοποιητικό και για τις δύο δομές σφάλματος, αλλά γίνεται φανερό όταν φτιάχνουμε γραφική παράσταση για τιμές που έχουν προσαρμοστεί με παρατηρηθείσες τιμές, το οποίο δείχνει ξεκάθαρα την ανωτερότητα του μοντέλου Poisson σε αυτό το παράδειγμα. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει πάντα και πρέπει να προσέχουμε όταν βγάζουμε συμπεράσματα από αυτά τα αποτελέσματα. Για ένα επιπλέον παράδειγμα όπου τα σφάλματα πρόβλεψης των αποθεμάτων απαιτήσεων συγκρίνονται χρησιμοποιώντας διαφορετικές δομές σφάλματος και διαφορετικές μεθοδολογίες, δείτε το άρθρο των England και Verrall.

### 3.8 Συζήτηση και συμπεράσματα

Έχοντας ένα τρίγωνο δεδομένων, μια απλή άσκηση αποθεματοποίησης θα μπορούσε να γίνει προσαρμόζοντας ένα μοντέλο chain ladder (συνήθως ένα 3,4 ή 5ετές chain ladder) και κοιτάζοντας στους απορρέοντες παράγοντες εξέλιξης. Θα ήταν τότε κοινό να ομαλοποιήσουμε τους παράγοντες χειροκίνητα και να σκεφτούμε την αναγκαιότητα ενός παράγοντα ουράς για να προβάλλουμε πέρα από το πεδίο των δεδομένων που παρατηρήθηκαν. Χρησιμοποιείται η κρίση μας για την ομαλοποίηση των παραγόντων με στόχο την εξομάλυνση τυχαίων αποκλίσεων, ειδικά στα μεταγενέστερα στάδια εξέλιξης, αφήνοντας άθικτη την συστηματική τάση. Ένας παράγοντας ουράς μπορεί να επιλεγεί υπολογίζοντας τον λόγο των αθροιστικών απαιτήσεων που έχουν πραγματοποιηθεί προς τις αθροιστικές πληρωθείσες απαιτήσεις για το παλιότερο έτος ατυχήματος, ή προσαρμόζοντας μια καμπύλη στους μεταγενέστερους παράγοντες εξέλιξης και προεκτείνοντας (extrapolating). Τα πλεονεκτήματα αυτής της διαδικασίας είναι ότι είναι εξαιρετικά ευέλικτη και ότι αναγκάζει τον αναλογιστή να προσέξει τα δεδομένα. Τα μειονεκτήματα είναι ότι καταναλώνει χρόνο, ότι είναι στατιστικά μη αποδοτικό και ότι δεν είναι πάντα εύκολο να είναι συνεπής στο επίπεδο της ομαλοποίησης (ή σίγουρη στα αποτελέσματα).

Η κύρια δύναμη της μεθόδου που παρουσιάζεται σε αυτό το άρθρο είναι ότι και η ομαλοποίηση και η προέκταση (extrapolation) μπορούν να γίνουν την ίδια ώρα στο ίδιο μοντέλο. Ο αναλογιστής πρέπει απλά να επιλέξει μια παράμετρο για ομαλοποίηση σε όλο τον χρόνο εξέλιξης, να επιλέξει μια κατανομή σφάλματος και να επιλέξει μέχρι που θα προεκταθεί (χρειάζεται μια επιπλέον παράμετρος στην περίπτωση της ομαλοποίησης στα έτη ατυχήματος). Επιπλέον πλεονεκτήματα είναι ότι καθίσταται πιθανό να αποκτήσουμε μέτρα ακρίβειας των εκτιμήσεων των αποθεμάτων και να εξετάσουμε που αποκλίνουν τα δεδομένα από το προσαρμοσμένο μοντέλο κάνοντας γραφήματα των καταλοίπων. Το γεγονός ότι τα βασικά μοντέλα

μπορούν να προσαρμοστούν επιλέγοντας παραμέτρους ομαλοποίησης στα άκρα είναι ένα επιπλέον χρήσιμο χαρακτηριστικό, αφού στο ένα άκρο το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί υπερπαραμετρικό και στο άλλο ότι η δομή είναι πολύ αυστηρή. Ωστόσο, δεν θεωρούμε ότι η μέθοδος είναι πανάκεια. Μια εκτενής άσκηση αποθεματοποίησης θα περιέχει μια σε βάθος έρευνα των δεδομένων, μια κατανόηση της κατηγορίας της επιχείρησης υπό εξέταση και μια σύγκριση των αποτελεσμάτων μερικών μεθόδων αποθεματοποίησης που βασίζονται σε συμπληρωματικά σετ δεδομένων. Πιστεύουμε ότι η μέθοδος που προτείνετε εδώ είναι απλά ένα εξαιρετικά χρήσιμο επιπλέον εργαλείο για τον ειδικό αποθεματοποίησης.

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούνται αυξητικά δεδομένα για την μέθοδο: αυτό είναι και πλεονέκτημα και μειονέκτημα. Είναι επωφέλες αφού η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το ιστορικό των δεδομένων είναι ημιτελές. Αν τα αυξητικά δεδομένα καταγράφηκαν από το έτος ατυχήματος μόνο μετά από μια συγκεκριμένη ημερομηνία, τα έτη ατυχήματος πριν από αυτήν την ημερομηνία θα έχουν μη ολοκληρωμένη πληροφορία απορροής και ένα τμήμα του τριγώνου των απαιτήσεων στην βορειοδυτική γωνιά θα λείπει (αυτό είναι ένα προφανές συμβάν). Αυτό εμφανίζει δυσκολίες χρησιμοποιώντας βασικές ντετερμινιστικές τεχνικές οι οποίες βασίζονται σε αθροιστικά δεδομένα, αλλά δεν αποτελεί πρόβλημα για στοχαστικές τεχνικές οι οποίες συμπεριφέρονται στα δεδομένα που δεν έχουν παρατηρηθεί σαν «χαμένα» και υπολογίζουν τα δεδομένα σαν μέρος της διαδικασίας προσαρμογής. Το μειονέκτημα είναι ότι οι αρνητικές αυξητικές τιμές μερικές φορές βρίσκονται στα δεδομένα που βασίζονται στις πληρωθείσες ζημιές και συχνά βρίσκονται σε δεδομένα που βασίζονται σε ζημιές που έχουν πραγματοποιηθεί όπου οι εκτιμήσεις συχνά εφαρμόζονται σε μια παραδοσιακή βάση και υπερεκτιμώνται. Η μέθοδος που προτείνεται είναι εντάξει σε ένα μικρό αριθμό αρνητικών αυξητικών απαιτήσεων (όπως στο παράδειγμα), αλλά θα παράγει πάντα θετικές προσαρμοσμένες τιμές (λόγω της χρήσης της λογαριθμικής συνάρτησης σύνδεσης) και έτσι θα παράγει πάντα παράγοντες εξέλιξης μεγαλύτερους του ένα. Γι' αυτό το λόγο, οι τεχνικές συχνά δεν είναι κατάλληλες για χρήση με δεδομένα που έχουν πραγματοποιηθεί τα οποία συχνά περιέχουν μια σειρά από αρνητικές αυξητικές ζημιές στα μεταγενέστερα στάδια της εξέλιξης απαιτώντας παράγοντες εξέλιξης μικρότερους του ένα.

Στο πλαίσιο που προτείνετε σε αυτή την ενότητα, έχει χρησιμοποιηθεί μια σταθερή παράμετρος κλίμακας. Αυτό γίνεται για ευκολία στη χρήση. Η υπόθεση μπορεί να γίνει ελαστικότερη ώστε να επιτρέπει στην παράμετρο κλίμακας να μοντελοποιείτε σαν ένα μέρος μιας εκτεταμένης διαδικασίας. Η διαφορά στα σφάλματα πρόβλεψης μεταξύ του μοντέλου της υπερδιασκορπισμένης Poisson και του γάμμα μοντέλου στην υποενότητα 3.7 είναι εν μέρει λόγω της χρησιμοποίησης μια σταθερής παραμέτρου κλίμακας και χρειάζεται επιπλέον έρευνα για να αποτιμήσουμε πόση από τη διαφορά μπορεί να βελτιωθεί με από κοινού μοντελοποίηση.

Η κύρια χρήση των μοντέλων στοχαστικής αποθεματοποίησης είναι στην παροχή εκτιμήσεων της διακύμανσης του αποθέματος, όχι στις ίδιες τις εκτιμήσεις

αποθέματος. Μέχρι πρόσφατα, τα μέτρα διακύμανσης δεν αποτελούσαν σημαντικό κομμάτι για τους περισσότερους αναλογιστές, αλλά είναι πιθανό να μεγαλώσει το ενδιαφέρον όσο η ανάγκη για παραμετροποίηση και βαθμονόμηση μοντέλων δυναμικής οικονομικής ανάλυσης (ΔΟΑ) γίνεται ρουτίνα. Μέρος μια άσκησης ΔΟΑ είναι η ποσοτικοποίηση του κίνδυνου αποθεματοποίησης και για να γίνει αυτό, είναι απαραίτητο να έχουμε ένα μοντέλο που προσομοιώνει τις πιθανές πληρωμές των σημαντικών υποχρεώσεων. Οι τεχνικές στοχαστικής αποθεματοποίησης παρέχουν μια δομή μοντέλου και ένα τρόπο για βαθμονόμηση του μοντέλου σε πραγματικά δεδομένα, από τα οποία μπορούν να εξομοιωθούν οι πληρωμές.

Όπως περιγράψαμε στην υποενότητα 3.2, υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων για στοχαστική αποθεματοποίηση απαιτήσεων. Αν αυξηθεί η χρήση αυτών των μεθόδων, είναι σημαντικό οι ομοιότητες και οι διαφορές των μοντέλων να γίνουν κατανοητές και να εξεταστούν οι ιδιότητές τους. Παρουσιάζοντας μερικά μοντέλα μέσα στο ίδιο πλαίσιο και προεκτείνοντας ώστε να επιτρέψουμε την ευλυγισία μεταξύ των άκρων δύο γνωστών μοντέλων, ευελπιστούμε ότι αυτή η ενότητα έχει συνεισφέρει στην διαδικασία.

## Κεφάλαιο 4

### Τα μοντέλα GLM και GAM

#### 4.1 Αποθεματοποίηση ζημιών και γενικευμένα προσθετικά μοντέλα

Παρακάτω θα δούμε πως η μη παραμετρική ομαλοποίηση μπορεί να εφαρμοσθεί στο πλαίσιο της αποθεματοποίησης ζημιών. Θα επικεντρωθούμε στον αλγόριθμο chain-ladder, εντός του πλαισίου του γραμμικού μοντέλου chain-ladder, αλλά οι μέθοδοι μπορούν εύκολα να εφαρμοσθούν σε άλλα μοντέλα. Θα δείξουμε ότι η μη παραμετρική ομαλοποίηση μπορεί να μας δώσει πιο σταθερές εκτιμήσεις αποθέματος και αποτελεί μια εναλλακτική για άλλες μεθόδους που έχουν προταθεί για αυτό το σκοπό όπως το φίλτρο Kalman.

##### 4.1.1 Φίλτρο Kalman

Μπορεί να φαίνεται περίεργο που ο όρος “φίλτρο” εφαρμόζεται για μια εκτίμηση. Πιο κοινά, ένα φίλτρο είναι μια φυσική συσκευή για την απομάκρυνση ανεπιθύμητων ποσοτήτων. Αρχικά, ένα φίλτρο έλυσε το πρόβλημα διαχωρισμού ανεπιθύμητων παραγόντων αέριων / υγρών / στερεών μειγμάτων.

Αυτή η ιδέα επεκτάθηκε στη δεκαετία του '30 και '40 στον διαχωρισμό των σημάτων από το θόρυβο, τα οποία χαρακτηρίζονταν από την πυκνότητα του φάσματός τους. Οι Kolmogorov και Wiener χρησιμοποίησαν αυτό τον στατιστικό χαρακτηρισμό της κατανομής πιθανότητας δημιουργώντας μια βέλτιστη εκτίμηση του σήματος, δεδομένου του αθροίσματος του σήματος και του θορύβου.

Με το φιλτράρισμα Kalman ο όρος περιέχει μια σημασία που ξεπερνά την αρχική ιδέα του χωρισμού παραγόντων ενός δείγματος. Έρχεται επίσης να συμπεριλάβει την λύση του προβλήματος αντιστροφής, στο οποίο γνωρίζουμε πως να αναπαραστήσουμε τις μετρούμενες μεταβλητές σαν συναρτήσεις των μεταβλητών κύριου ενδιαφέροντος. Στην ουσία, αντιστρέφει αυτήν την συναρτησιακή σχέση και εκτιμά τις ανεξάρτητες μεταβλητές ως αντεστραμμένες συναρτήσεις των εξαρτώμενων (μετρούμενων) μεταβλητών. Αυτές οι μεταβλητές επιτρέπεται να είναι δυναμικές, με δυναμική που είναι μόνο μερικώς προβλέψιμη. Δεν θα συνεχίσουμε με περαιτέρω λεπτομέρειες κυρίως γιατί εμπλέκονται και άλλες έννοιες που θα μας αποπροσανατολίσουν από το θέμα της παρούσας εργασίας.

## 4.2 Ο αλγόριθμος chain-ladder και τα GLMs

Σε αυτή την ενότητα θα συνοψίσουμε το περιεχόμενο του άρθρου των Renshaw και Verrall (1994) το οποίο μας παρέχει την βάση για τα GAM που θα περιγράψουμε στην υποενότητα 4.3.

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι τα δεδομένα αποτελούνται από ένα τρίγωνο  $n$  ετών ατυχήματος και  $n$  ετών ανάπτυξης. Θέτοντας  $Y_{ij}$  τις αυξητικές απαιτήσεις στο έτος ατυχήματος  $i$  και έτος ανάπτυξης  $j$ , τότε τα δεδομένα μας είναι  $\{y_{ij}: i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n - i + 1\}$ .

Υποθέτουμε ότι τα αθροίσματα όλων των στηλών είναι μη αρνητικά, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} y_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } j. \quad (4.2.1)$$

Παρατηρήστε πως δεν υποθέτουμε ότι όλες οι αυξητικές απαιτήσεις είναι μη αρνητικές, αλλά ότι τα αθροίσματα των στηλών. Αν δεν ικανοποιείται αυτή η υπόθεση υπάρχει καθαρή απόδειξη σταθερής υπερεκτίμησης των απόλυτων απαιτήσεων στα πρώτα έτη ανάπτυξης το οποίο ίσως να είναι εφικτό να διορθωθεί. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε η προσθήκη μιας μικρής σταθεράς σε όλα τα δεδομένα (και η επακόλουθη αφαίρεση από τις προβλέψεις) είναι λογική συνήθως.

Υποθέτουμε ότι τα  $Y_{ij}$  είναι ανεξάρτητα, κατανομημένα σύμφωνα με μία μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών και θέτουμε  $m_{ij}$  τον μέσο των  $Y_{ij}$ :

$$E[Y_{ij}] = m_{ij}. \quad (4.2.2)$$

Τότε, υπό την υπόθεση μίας μονοπαραμετρικής εκθετικής οικογένειας κατανομών, η διακύμανση του  $Y_{ij}$  μπορεί να γραφτεί ως

$$var[Y_{ij}] = \phi V(m_{ij})/w_{ij}, \quad (4.2.3)$$

όπου το  $\phi$  είναι η παράμετρος διασποράς, το  $V(m_{ij})$  η συνάρτηση διακύμανσης και το  $w_{ij}$  ένα προγενέστερο βάρος.

Τα προγενέστερα βάρη μπορούμε να τα πάρουμε ίσα με 1 για τα δεδομένα στο τρίγωνο μας (αργότερα θα κατανοήσουμε τον σκοπό τους).

Για το γραμμικό μοντέλο chain-ladder, έχουμε ότι  $\phi = 1$  και  $V(m_{ij}) = m_{ij}$ . Επομένως,  $var[Y_{ij}] = E[Y_{ij}]$  η οποία είναι η υπόθεση που διέπει την κατανομή Poisson. Παρατηρήστε πως δεν έχουμε ορίσει την κατανομή να είναι Poisson, κάτι το οποίο θα υποδήλωνε ότι τα δεδομένα θα έπρεπε να αποτελούνται από θετικούς ακεραίους. Αυτή η προσέγγιση ορίζει μία συνάρτηση quasi-πιθανοφάνειας και επιτρέπει στα δεδομένα να εφαρμοσθούν σε μεγαλύτερη τάξη δεδομένων.

Άλλες υποθέσεις μοντελοποίησης οι οποίες χρησιμοποιούνται στην αποθεματοποίηση απαιτήσεων μαζί με τις κατανομές τους περιλαμβάνει τις

$$\varphi = \sigma^2, \quad V(m_{ij}) = 1 \quad (\text{κανονική}),$$

$$\varphi > 0, \quad V(m_{ij}) = m_{ij}^2 \quad (\text{γάμμα}),$$

$$\varphi > 0, \quad V(m_{ij}) = m_{ij}^3 \quad (\text{αντίστροφη – Gaussian}).$$

Ο μέσος  $m_{ij}$  συνδέεται με τις συμμεταβλητές μέσω της συνάρτησης σύνδεσης:

$$g(m_{ij}) = \eta_{ij}. \quad (4.2.4)$$

όπου το  $\eta_{ij}$  είναι ο γραμμικός προβλεπτής και ορίζεται ως

$$\eta_{ij} = X_{ij}\beta, \quad (4.2.5)$$

όπου το  $X_{ij}$  είναι ένα διάνυσμα γραμμής των συμμεταβλητών και το  $\beta$  η παράμετρος διανύσματος.

Τα διανύσματα γραμμής ανεξάρτητων μεταβλητών μπορούν να συγχωνευθούν σε έναν πίνακα,  $X$ , τον πίνακα σχεδιασμού.

Η συνάρτηση σύνδεσης  $g$ , είναι μονοτονική διαφορήσιμη. Οι παρακάτω επιλογές είναι οι φυσιολογικές, ή κανονικές, συναρτήσεις σύνδεσης για τις quasi-πιθανοφάνειες που ορίζονται παραπάνω:

κανονική	σύνδεση ταυτότητα
Poisson	log σύνδεση
γάμμα	αμοιβαία σύνδεση
αντίστροφη Gaussian	αντίστροφη τετραγωνική σύνδεση

Το γραμμικό μοντέλο chain-ladder ορίζεται ως εξής. Θεωρούμε ένα τετράγωνο από «επαυξημένες αυξητικές απαιτήσεις» που αποτελείται από τις αυξητικές απαιτήσεις επαυξημένες σε ένα τετράγωνο ορίζοντας τις επαυξημένες αυξητικές απαιτήσεις ως  $y_{ij}$  για  $(i, j)$  που έχουν δεδομένα και 0 (μηδενικά) εκτός. Τα προγενέστερα βάρη ορίζονται να είναι 1 στην περιοχή των απαιτήσεων και 0 εκτός, το οποίο σημαίνει πως η εκτίμηση του διανύσματος παραμέτρου επηρεάζεται μόνο από τα δεδομένα που έχουμε ήδη πάρει. Το σχήμα των απαιτήσεων επαυξάνεται σε ένα τετράγωνο για υπολογιστική διευκόλυνση. Αν υπάρχουν εκθέσεις (exposures) για τα έτη ατυχήματος, τα θέτουμε  $\{e_i: i = 1, \dots, n\}$ . Ο γραμμικός προβλεπτής ορίζεται να έχει μία συνέπεια έτους ατυχήματος και μία συνέπεια έτους ανάπτυξης. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να το παραμετροποιήσουμε αυτό οι οποίοι δίνουν όλοι τις ίδιες εκτιμήσεις για τις απαιτήσεις που έχουν προσαρμοσθεί και προβλεφθεί, αλλά είναι χρήσιμοι σε διαφορετικές περιπτώσεις. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες στην υποενότητα 4.3. Η παραμετροποίηση αυτού του μοντέλου που χρησιμοποιείται στο άρθρο των Renshaw και Verrall (1994) είναι η

$$\eta_{ij} = \log(e_i) + \mu + \alpha_i + \beta_j, \quad (4.2.6)$$

η οποία εφαρμόζεται με συνάρτηση log-σύνδεσης. Υπάρχει υπέρ-παραμετροποίηση σε αυτό το μοντέλο το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί με διάφορους τρόπους, για παράδειγμα θέτοντας  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ . Θα το δούμε και αυτό παρακάτω στην υποενότητα 4.3.

Αυτή η μορφή του μοντέλου χρησιμοποιείται αφού μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα με το μοντέλο chain-ladder υπό τον όρο θετικότητας που αναφέρουμε παραπάνω. Αυτό δεν σημαίνει πως είναι το ιδανικότερο για όλα τα δεδομένα απαιτήσεων. Είναι πιθανό ότι η γάμμα quasi-πιθανοφάνεια θα μας δώσει ένα καλύτερο μοντέλο και άλλοι γραμμικοί προβλεπτές ίσως πιο χρήσιμοι στην πράξη. Ωστόσο, θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο chain-ladder λόγω της σημασίας του τόσο στην θεωρία αποθεματοποίησης απαιτήσεων όσο και στην πράξη.

### 4.3 Γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAMs)

Τα GAM διαφέρουν από τα GLM με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο μοντελοποιείται η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής και των συμμεταβλητών. Στα GLM η σχέση είναι παραμετρική. Στα GAM η ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται ότι διαφέρει ομαλά με τις συμμεταβλητές και εφαρμόζεται μια διαδικασία ομαλοποίησης. Είναι πιθανό να εκφράσουμε ένα γραμμικό μοντέλο σαν έναν ομαλοποιητή, και να θεωρήσουμε τα GLM ως ένα υποσύνολο των GAM. Ωστόσο, σκοπός μας είναι να δείξουμε πώς οι μέθοδοι μη παραμετρικής ομαλοποίησης μπορεί να είναι χρήσιμοι στην αποθεματοποίηση απαιτήσεων. Θα θεωρήσουμε την ομαλοποίηση πάνω στα έτη ατυχήματος και θα αφήσουμε το μοντέλο για τα έτη ανάπτυξης όπως στην (4.2.6).

Στην υποενότητα 4.2 η επίδραση του έτους ατυχήματος (accident year effect) χαρακτηρίστηκε ως ένας παράγοντας. Αν ήταν ένας απλός παράγοντας τότε οι γραμμές θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν χωρίς κανένα αποτέλεσμα στο μοντέλο. Αυτό όμως δεν υποστηρίζεται από την θεωρία μας και έτσι είναι καταλληλότερο να χαρακτηρίσουμε την επίδραση του έτους ατυχήματος σαν έναν τακτοποιημένο παράγοντα. Επιπλέον, οι επιδράσεις των ετών ατυχήματος είναι μόνιμα κατανομημένες και θα μπορούσαν να θεωρηθούν σαν μία μη παρατηρήσιμη χρονοσειρά. Αυτό υποδηλώνει την αντιμετώπιση των παραμέτρων του έτους ατυχήματος όχι σαν τακτοποιημένους παράγοντες αλλά σαν συνεχείς μεταβλητές. Έτσι, ορίζουμε μία τεχνητή μεταβλητή  $X$  στις γραμμές του τριγώνου μας και εξομαλύνουμε την εμπειρία των απαιτήσεων πάνω στη  $X$ . Θέτουμε  $X = i$  και να σημειώσουμε ότι το  $X$  αντιμετωπίζεται σαν μία συνεχή μεταβλητή.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ένα GAM, αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.2.6) με την

$$\eta_{ij} = \log(e_i) + v + f(x) + b_j, \quad (4.3.1)$$

όπου το  $v$  είναι ισοδύναμο με το  $\mu$  στην (4.2.6), το  $b_j$  είναι η επίδραση του έτους ανάπτυξης και η  $f(x)$  υποδεικνύει ότι το  $\eta_{ij}$  είναι μία (ομαλή) συνάρτηση του  $X$ .

Παρατηρήστε ότι η επίδραση του έτους ανάπτυξης μεταχειρίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως στο GLM. Επίσης, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μία παραμετρική συνάρτηση στην θέση της  $f(x)$  και να γυρίζαμε σε GLM. Αν  $f(x) = x$ , το μοντέλο γυρίζει στο γραμμικό μοντέλο chain-ladder. Ωστόσο, ενδιαφερόμαστε περισσότερο στην χρησιμοποίηση ενός μη παραμετρικού ομαλοποιητή για την  $f(x)$ .

Είναι πιο απλό και πιο ξεκάθαρο να γράψουμε την (4.3.1) ως εξής

$$\eta_{ij} = \log(e_i) + \nu + f(i) + b_j, \quad (4.3.2)$$

αλλά είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι το  $i$  στο  $f(i)$  μεταχειρίζεται σαν μία συνεχή μεταβλητή, ενώ στην (4.2.6) μεταχειρίζεται σαν παράγοντας τάξης. Αν και αυτό τονίζεται από την (4.3.1) και είναι κάπως δυσδιάκριτο στην (4.3.2), από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε την (4.3.2).

Το GAM παράγει εκτιμήσεις  $\{\hat{f}(1), \hat{f}(2), \dots, \hat{f}(n)\}$  και  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n\}$ , οι οποίες θα συγκριθούν με τις ισοδύναμες εκτιμήσεις  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n\}$  και  $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n\}$  του GLM. Η επίδραση της ομαλοποίησης πάνω στα έτη ατυχήματος θα είναι φανερή στις εκτιμήσεις  $\{\hat{f}(1), \hat{f}(2), \dots, \hat{f}(n)\}$  και  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n\}$ .

Παρακάτω θα δούμε δύο διαδικασίες ομαλοποίησης: τον «τοπικά σταθμισμένο ομαλοποιητή παλινδρόμησης» (loess) και τον ομαλοποιητή κυβικής spline. Τα ορίζουμε αυτά θεωρώντας την περίπτωση ενός μόνο προβλεπτή,  $X$ , για μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  κανονικά κατανοημένη (όπως και στην απλή γραμμική παλινδρόμηση). Θεωρείστε ένα δείγμα μεγέθους  $m$ :  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ . Οι προσαρμοσμένες τιμές σε ένα σημείο  $x_0$ ,  $\hat{f}(x_0)$  είναι μία εκτίμηση της τάσης ομαλοποίησης στο  $Y$ . Ένας ομαλοποιητής ορίζεται με την μέθοδο με την οποία παίρνουμε το  $\hat{f}(x_0)$ . Θεωρείστε πρώτα το loess, για το οποίο παίρνουμε το  $\hat{f}(x_0)$  ως εξής.

- Ορίζουμε το  $N(x_0)$  να είναι το σετ των  $k$  κοντινότερων γειτόνων του  $x_0$ . Το  $k$  μπορεί επίσης να οριστεί επιλέγοντας το ποσοστό των σημείων των δεδομένων που θα περιληφθούν στο  $N(x_0)$ : αυτό ονομάζεται *το διαστήλιο (the span)*.
- Υπολογίζουμε

$$\Delta(x_0) = \max_{x_i \in N(x_0)} |x_0 - x_i|.$$

- Υπολογίζουμε τα βάρη  $w_i$  για κάθε σημείο στο  $N(x_0)$ , όπου

$$w_i = T\left(\frac{|x_0 - x_i|}{\Delta(x_0)}\right)$$

και η  $T$  είναι η συνάρτηση βάρους:

$$T(u) = \begin{cases} (1 - u^3)^3 & \text{για } 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



- Κάνουμε παλινδρόμηση του  $Y$  στο  $X$  στο  $N(x_0)$  χρησιμοποιώντας τα βάρη  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ . Αυτή η παλινδρόμηση μπορεί να είναι γραμμική, τετραγωνική, κυβική κλπ. Η προσαρμοσμένη τιμή στο  $x_0$  είναι  $\hat{f}(x_0)$ .

Το προκαθορισμένο χαρακτηριστικό στο S-PLUS είναι μία τοπική γραμμική παλινδρόμηση, η οποία φαίνεται να είναι ικανοποιητική στο πλαίσιο τις αποθεματοποίησης ζημιών. Μπορεί ναδειχθεί ότι αυτό είναι παρόμοιο με μία κανονική παλινδρόμηση, εκτός του ότι η συνεισφορά των σημείων στο προσαρμοσμένο  $x_0$  εξαρτάται από την απόστασή τις από το  $x_0$ .

Έστω ο ομαλοποιητής κυβικής spline για τον οποίο παίρνουμε το  $\hat{f}(x_0)$  από το  $\hat{f}(x)$ , όπου το  $\hat{f}(x)$  ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int (f''(t))^2 dt.$$

Αυτό μας δίνει μία ομαλοποιημένη εκτίμηση της βασικής τάσης στο  $Y$ ,  $\hat{f}(x)$  το οποίο είναι μία φυσική κυβική spline ομαλοποίησης με κόμβους τις μοναδικές τιμές του  $X$ . Αυτός ο ομαλοποιητής είναι γνωστός στην αναλογιστική βιβλιογραφία ως η αποφοίτηση του Whittaker (Whittaker's graduation).

Και στους δύο ομαλοποιητές, υπάρχει μία παράμετρος που καθορίζει την ποσότητα ομαλοποίησης που γίνεται και την ανταλλαγή μεταξύ τις απόκλισης και τις διακύμανσης. Μεγαλύτερες τιμές των  $k$  και  $\lambda$  μας δίνουν περισσότερο ομαλές εκτιμήσεις, οι οποίες έχουν μικρότερη διακύμανση αλλά μεγαλύτερη απόκλιση.

Μέσα στο πλαίσιο των εκθετικών οικογενειών κατανομών, αντί των κανονικά κατανομημένων δεδομένων, προσαρμόζονται μη παραμετρικοί ομαλοποιητές εισάγοντας έναν επιπλέον επαναληπτικό αλγόριθμο στην διαδικασία βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται στα GLM. Αυτή η διαδικασία είναι διαθέσιμη στο S-PLUS.

Στο τέλος τις υποενότητας 4.2 ειπώθηκε ότι το μοντέλο είναι τεχνικά υπέρ-παραμετροποιημένο και είναι απαραίτητο να προσθέσουμε κάποιους περιορισμούς. Αυτό οδηγεί σε μία αναπαραμετροποίηση του μοντέλου, χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες «αντιθέσεις». Δεν είναι κατάλληλο να χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό  $\alpha_1 = 0$  στο πλαίσιο των GAM, αφού δεν μεταχειρίζεται όλα τα έτη ατυχήματος με τον ίδιο τρόπο (πρακτικά, δεν γίνεται καμία ομαλοποίηση στον πρώτο έτος ατυχήματος). Αντί αυτού, χρησιμοποιούνται ορθογώνια πολυώνυμα ως αντιθέσεις για να αναπαραστήσουν τις επιδράσεις του έτους ατυχήματος αφού αυτό σημαίνει πως όλες οι παράμετροι του έτους ατυχήματος θα ομαλοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις αντιθέσεις μπορείτε να βρείτε στο Chamber και Hastie (1992).

#### 4.4 Αποθέματα ζημιών και μέσα τετραγωνικά σφάλματα

Ο στόχος των μοντέλων αποθεματοποίησης ζημιών είναι να παράγουν εκτιμήσεις του  $Y_{ij}$  για τιμές των  $(i, j)$  που δεν έχουν παρατηρηθεί ακόμα, μαζί με αθροίσματα γραμμών και συνολικές απαιτήσεις που έχουν προβλεφθεί. Ένα πλεονέκτημα της στοχαστικής προσέγγισης είναι ότι γίνεται εφικτό επίσης να παράγουμε μέτρα του πιθανού σφάλματος σε αυτές τις προβλέψεις, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Οι εκτιμήσεις των  $Y_{ij}$ ,  $\hat{Y}_{ij}$  παράγονται από τα chain ladder GLM και GAM, όπως περιγράψαμε στις υποενότητες 4.2 και 4.3 και δίνονται από τις

$$\hat{Y}_{ij} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) \quad \text{και} \quad \hat{Y}_{ij} = \exp(\hat{\nu} + \hat{f}(i) + \hat{h}_j).$$

Τα αθροίσματα των γραμμών και μία εκτίμηση των συνολικών απαιτήσεων (έως το πιο νέο έτος ανάπτυξης που έχει παρατηρηθεί) μπορούμε να τα πάρουμε αθροίζοντας κατάλληλες τιμές.

Τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων των παραμέτρων καθώς και των τιμών των αυξητικών απαιτήσεων που έχουν προβλεφθεί και προσαρμοσθεί, είναι διαθέσιμα άμεσα από το S-PLUS. Είναι επίσης δυνατόν να παράγουμε τυπικά σφάλματα για αποθέματα αλλά στην αποθεματοποίηση απαιτήσεων χρησιμοποιούνται περισσότερο τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτά θα βρούμε στον Verrall(1991) και στον Renshaw(1994). Έστω ότι έχουμε να παρατηρήσουμε μία εκτίμηση  $\hat{R}$  μίας ποσότητας  $R$ . Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (RMSE) ορίζεται ως

$$\sqrt{E[(R - \hat{R})^2]}.$$

Αυτό είναι ένα μέτρο του σφάλματος πρόβλεψης και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσουμε διαστήματα πρόβλεψης (Verrall, 1991).

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης για το  $Y_{ij}$  (για  $(i, j)$  που δεν έχουν παρατηρηθεί) είναι

$$E[(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2] = E[(Y_{ij} - E(Y_{ij}))^2] - 2E[(Y_{ij} - E(Y_{ij}))(\hat{Y}_{ij} - E(Y_{ij}))] + E[(\hat{Y}_{ij} - E(Y_{ij}))^2].$$

Ο όρος του γινομένου των διανυσμάτων είναι μηδέν αφού το  $\hat{Y}_{ij}$  (το οποίο βασίζεται μόνο σε περασμένα δεδομένα) είναι ανεξάρτητο του  $Y_{ij}$ . Έτσι

$$E[(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2] = E[(Y_{ij} - E(Y_{ij}))^2] + E[(\hat{Y}_{ij} - E(Y_{ij}))^2] \cong \text{var}(Y_{ij}) + \text{var}(\hat{Y}_{ij}).$$

Αυτό μας δίνει μία μέθοδο για να υπολογίζουμε μία προσέγγιση του RMSE για μία μοναδική τιμή και είναι άμεσο να το επεκτείνουμε σε αθροίσματα τιμών για τα σύνολα γραμμών και για γενικά σύνολα. Περισσότερες λεπτομέρειες στον Renshaw (1994).

Πίνακας 1

Προσαρμοσμένες τιμές, τιμές που έχουν προβλεφθεί, σύνολα γραμμών και RMSE για την chain-ladder GLM

Σύνολα γραμμών											
5012	3257	2638	898	1734	2642	1828	599	54	172		
2111.382	4221.405	3948.635	2785.114	2243.192	1735.892	714.8022	590.7747	310.8052	172		
106	4179	1111	5270	3116	1817	103	673	535			
1889.859	3778.502	3534.35	2492.904	2007.84	1553.765	639.8063	528.7915	278.196	153.954	153.954	
									537.9366	537.9366	
3410	5582	4881	2268	2594	3479	649	603				
2699.861	5397.986	5049.19	3561.375	2868.41	2219.716	914.0303	755.4341	397.4321	219.9395	617.3716	
								815.2951	705.0895	1083.5659	
5655	5900	4211	5500	2159	2658	984					
3217.76	6433.449	6017.746	4244.533	3418.64	2645.511	1089.3634	900.3445	473.6692	262.1291	1636.1429	
									810.1939	1717.7795	
1092	8473	6271	6333	3786	225						
3242.826	6483.566	6064.624	4277.598	3445.271	2666.119	1097.8494	907.3582	477.3591	264.1711	2746.7378	
						1221.2092	1169.9877	929.4335	815.3393	2158.843	
1513	4932	5257	1233	2917							
2186.167	4370.928	4088.497	2883.764	2322.647	1797.377	740.1206	611.7	321.814	178.0923	3649.1043	
					1514.332	963.7349	909.7064	705.9066	599.9772	2360.7167	
557	3463	6926	1368								
1989.782	3978.284	3721.224	2624.713	2114.002	1635.918	673.635	556.7505	292.9052	162.0941	5435.3041	
				1658.216	1447.681	915.2278	860.6374	663.5616	559.4835	3022.899	
1351	5596	6165									
2692.667	5383.601	5035.735	3551.885	2860.766	2213.801	911.5946	753.4209	396.3731	219.3534	10907.1936	
			2263.849	2005.74	1748.673	1102.507	1045.1756	817.5322	704.9566	4868.4385	
3133	2262										
1798.72	3596.282	3363.905	2372.683	1911.011	1478.834	608.9513	503.2903	264.7799	146.5295	10649.9841	
		2418.39	1923.484	1683.162	1447.46	884.9659	825.1763	626.5701	521.5432	5878.2166	
2063											
2063	4124.673	3858.153	2721.294	2191.79	1696.114	698.4227	577.2372	303.6832	168.0587	16339.4267	
	3647.797	3458.72	2622.024	2228.858	1855.769	1042.8403	959.369	708.8582	585.4057	12566.0077	
										Γενικό σύνολο RMSE	52135.22 17602.98

Ο πίνακας 1 μας δείχνει τις πραγματικές απαιτήσεις και τις προσαρμοσμένες τιμές χρησιμοποιώντας την chain-ladder GLM. Αυτά είναι ίδια με αυτά που παίρνουμε από την μέθοδο chain-ladder. Επίσης φαίνονται και οι τιμές που έχουν προβλεφθεί και τα RMSE τους, τα αθροίσματα γραμμών και το γενικό σύνολο. Η μορφή του πίνακα είναι:

πραγματική απαίτηση

προσαρμοσμένη απαίτηση ή απαίτηση που έχει προβλεφθεί

RMSE

Παρατηρήστε τα RMSE των προσαρμοσμένων τιμών δεν δίνονται.

Ο πίνακας 2 μας δείχνει τις αντίστοιχες εκτιμήσεις για το GAM.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα είναι προσεγγίσεις και χρειάζεται περισσότερη ανάλυση για να πάρουμε πιο ακριβή εκτιμήσεις. Για να αποτιμήσουμε την αξιοπιστία αυτών των RMSE, εκτελέστηκε μια αυτοδύναμη άσκηση (bootstrap exercise).

Πίνακας 2

Προσαρμοσμένες τιμές, τιμές που έχουν προβλεφθεί, σύνολα γραμμών και RMSE για την chain-ladder GAM

Σύνολα γραμμών										
5012	3257	2638	898	1734	2642	1828	599	54	172	
1958.821	3891.363	3699.23	2551.806	2088.024	1645.423	661.6496	537.3876	273.1239	171.4074	
106	4179	1111	5270	3116	1817	103	673	535		
2252.353	4474.49	4253.566	2934.198	2400.917	1891.993	760.7989	617.9161	314.052	197.0931	197.0931
									615.1020	615.1020
3410	5582	4881	2268	2594	3479	649	603			
2604.128	5173.319	4917.891	3392.464	2775.895	2187.486	879.6211	714.4227	363.1009	227.8753	590.9762
								724.0187	688.9683	1001.3738
5655	5900	4211	5500	2159	2658	984				
3107.971	6174.247	5869.399	4048.834	3312.972	2610.718	1049.8092	852.6484	433.3533	271.9644	1557.9661
							1054.9033	820.5758	793.705	1566.529
1092	8473	6271	6333	3786	225					
2941.473	5843.485	5554.968	3831.932	3135.492	2470.859	993.5696	806.971	410.138	257.3949	2468.0734
						1076.615	1019.6761	789.9533	759.6992	1877.9353
1513	4932	5257	1233	2917						
2413.378	4794.379	4557.66	3143.969	2572.563	2027.255	815.1897	662.0919	336.5041	211.1837	4052.2242
					1492.439	957.0186	899.8757	689.1541	650.1474	2285.9608
557	3463	6926	1368							
2257.951	4485.61	4264.137	2941.49	2406.884	1896.695	762.6896	619.4517	314.8325	197.5829	6198.1359
				1616.65	1446.21	922.7089	865.3194	659.5574	617.9366	2865.5806
1351	5596	6165								
2283.405	4536.177	4312.208	2974.65	2434.018	1918.077	771.2877	626.435	318.3817	199.8104	9242.6599
			1821.184	1652.302	1474.529	934.0911	875.4041	666.0302	623.9425	3700.4652
3133	2262									
2139.408	4250.114	4040.268	2787.061	2280.522	1797.118	722.6482	586.9303	298.3037	187.2098	12700.0609
		2248.078	1824.091	1644.194	1457.31	908.5838	847.7421	639.9962	594.678	4720.5687
2063										
1929.659	3833.431	3644.159	2513.817	2056.939	1620.928	651.7995	529.3875	269.0579	168.8557	15288.3738
	2597.955	2524.792	1964.228	1734.035	1503.931	890.1336	820.573	606.3986	553.8844	6022.2902
									Γενικό σύνολο RMSE	52295.56 15382.97

Πίνακας 3

RMSE για την chain-ladder GAM και bootstrap εκτιμήσεις

Έτος ατυχήματος	RMSE	
	GAM	Bootstrap
2	615.1	518.7
3	1001.4	859.1
4	1566.5	1360.5
5	1877.9	1758.6
6	2286	2263
7	2865.6	2874.6
8	3700.5	3589.9
9	4720.6	4687
10	6022.3	6892.1
Σύνολο	15383	14356

Χρησιμοποιήθηκαν τα υπόλοιπα Pearson για να παράγουμε ένα bootstrap δείγμα και αποκτήθηκαν εκτιμήσεις των RMSE. Για λόγους σύγκρισης τα αποτελέσματα για κάθε έτος ατυχήματος και για το γενικό σύνολο φαίνονται στον πίνακα 3. Όπως φαίνεται, οι bootstrap εκτιμήσεις είναι συνεπείς με αυτές για το GAM, το οποίο επαληθεύει το γεγονός ότι είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε το τελευταίο στην πράξη.

## 4.5 Επίλογος

Η μέθοδος chain-ladder και το συνεταιρισμένο GLM χρησιμοποιούνται ευρέως σε μεθόδους αποθεματοποίησης απαιτήσεων. Το εύρος των μοντέλων μπορεί να επεκταθεί σημαντικά χρησιμοποιώντας άλλες υποθέσεις για την κατανομή των δεδομένων και για την συνάρτηση σύνδεσης. Άλλα παραμετρικά μοντέλα μπορούν εύκολα να ενσωματωθούν χρησιμοποιώντας διαφορετικούς γραμμικούς προβλεπτές. Δείξαμε εδώ πως μπορεί αυτό το πλαίσιο να επεκταθεί σε GAMs. Αν και εμείς χρησιμοποιήσαμε το γραμμικό μοντέλο chain-ladder, οι ίδιες τεχνικές μπορούν να εφαρμοσθούν με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις κατανομών ( όπως αυτές που είδαμε στην υποενότητα 4.2), άλλες συναρτήσεις σύνδεσης και άλλους γραμμικούς προβλεπτές.

Ένα πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης της μεθόδου που περιγράψαμε είναι πως είναι διαθέσιμα στατιστικά διαγνωστικά για την προσαρμογή του μοντέλου. Πολύ χρήσιμα είναι τα γραφήματα υπολοίπων τα οποία είναι διαθέσιμα στο S-PLUS. Μία διαδικασία πλήρους προσαρμογής μοντέλου και αποθεματοποίησης απαιτήσεων θα περιελάμβανε την χρησιμοποίηση διαγνωστικών για να συγκρίνουμε τα διάφορα πιθανά μοντέλα, κάποια από τα οποία περιγράψαμε στην υποενότητα 4.2, χρησιμοποιώντας και τα GLMs και τα GAMs. Η φιλοσοφία της προσέγγισης της αποθεματοποίησης ζημιών στην οποία βασιστήκαμε είναι πως πρέπει να αποκτήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερη κατανόηση των δεδομένων χρησιμοποιώντας στατιστικά μοντέλα. Η στατιστική προσέγγιση επιτρέπει ένα ευέλικτο πλαίσιο μοντέλων αντί για μία αυστηρή τεχνική, όπως η τεχνική chain-ladder.

Όπως έχουμε επισημάνει, η ομαλοποίηση πάνω στα έτη ατυχήματος παράγει πιο σταθερές εκτιμήσεις απαιτήσεων. Στην απλή τεχνική chain-ladder, οι τιμές που έχουν προβλεφθεί για το πιο πρόσφατο έτος ατυχήματος είναι ανάλογες των απαιτήσεων στην πρώτη περίοδο καθυστέρησης. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση του αποθέματος μπορεί να αλλάξει κατά ένα μεγάλο βαθμό αν αλλάξει αυτή η τιμή. Το ίδιο ισχύει σε μικρότερο βαθμό στα προηγούμενα έτη ατυχήματος. Όσο λιγότερα σημεία δεδομένων υπάρχουν ώστε να εκτιμήσουμε κάθε παράμετρο, τόσο μεγαλύτερη είναι η αστάθεια των εκτιμήσεων. Γι' αυτό το λόγο, η μέθοδος chain-ladder έχει χαρακτηριστεί ως υπέρ-παραμετρική. Ομαλοποιώντας πάνω στα έτη ατυχήματος βελτιώνουμε αυτό το πρόβλημα. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για κάθε έτος ατυχήματος είναι πληροφορία από όλες τις γραμμές.

## Κεφάλαιο 5

### Επίλογος και συμπεράσματα

Μετά το πέρας της παρούσας διπλωματικής εργασίας ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει πάρει μια ιδέα για την ιδέα της αποθεματοποίησης απαιτήσεων και την σημαντικότητά της για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Είναι επίσης θεμιτό να καταλάβουμε τον γενικό τρόπο με τον οποίο ένας αναλογιστής υπολογίζει τα αποθέματα έχοντας ως εργαλείο του τα ιστορικά δεδομένα.

Περιγράψαμε την μέθοδο chain ladder η οποία είναι η πιο βασική μέθοδος αποθεματοποίησης ζημιών πάνω στην οποία βασίστηκαν πολλοί ερευνητές ώστε να πάνε ένα βήμα πιο πέρα σε άλλες μεθόδους. Εισάγαμε και αναπτύξαμε όμως και κάποιες στατιστικές μεθόδους αποθεματοποίησης οι οποίες περιλαμβάνουν μεθόδους που χρησιμοποιούν γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM) και γενικευμένα προσθετικά μοντέλα (GAM).

Είναι βέβαιο πως ακόμα υπάρχει πολύ περιθώριο για ανάπτυξη νέων ιδεών και εργαλείων σε αυτό το πλαίσιο. Θεωρώ πως ανάλογα με τα δεδομένα που έχει στα χέρια του ο αναλογιστής θα ήταν χρήσιμο να μπορεί να φτιάξει κάποια παραλλαγή μίας μεθόδου η οποία θα του δώσει τους ιδανικούς συντελεστές εξέλιξης και επομένως να πάρει πιο ακριβείς εκτιμήσεις αποθεματικού. Είναι επομένως εμφανές πως ο χώρος της αποθεματοποίησης απαιτήσεων είναι ένας χώρος στον οποίο υπάρχει δυνατότητα ανάπτυξης.

## Βιβλιογραφία

1. Peter D. England and Richard J. Verrall, A flexible framework for stochastic claims reserving, CAS Proceedings, 2001.
2. Klaus Th. Hess and Klaus D. Schmidt, A comparison of models for the chain ladder method, Insurance: Mathematics and Economics 31 (2002) 351-364.
3. Thomas Mack and Gary Venter, A comparison of stochastic models that reproduce chain ladder reserve estimates, Insurance: Mathematics and Economics 26 (2000) 101-107.
4. Richard Verrall, Insurance: Mathematics and Economics 19 (1996) 31-43.
5. Greg Taylor, Loss Reserving: An Actuarial Perspective, Kluwer academic publishers, 2000.
6. Christofides Stavros, Regression Models Based on Log-Incremental Payments, Claims reserving manual 2, 1990, Institute of Actuaries, London.
7. Green, Peter J. and Bernanrd W. Silverman, Nonparametric Regression and Generalized Linear Models, Chapman and Hall, London, 2004.
8. Hastie Trevor J και Robert J. Tibshirani, Generalized Additive Models, Chapman and Hall, London, 1990.
9. Kremer, Erhard, IBNR Claims and the Two Way Model of ANOVA, Scandinavian Actuarial Journal, 1982.
10. Mack Thomas, A Simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance or Estimating IBNR Claims Reserves, ASTIN Bulletin 1991.
11. Renshaw, Arthur E., Chain Ladder and Interactive Modeling (Claims Reserving and GLIM), Journal of the Institute of Actuaries 116, 1989.

12. Renshaw, Arthur E., Claims Reserving by Joint Modeling, Actuarial Research Paper No. 72, 1994, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.
13. Renshaw, Arthur E. και Richard J. Verrall, A Stochastic Model Underlying the Chain Ladder Technique, Cannes, 1994.
14. Verrall, Richard J., A State Space Representation of the Chain Ladder Linear Model, Journal of the Institute of Actuaries 116, 1989.
15. Verrall, Richard J., On the Unbiased Estimation of Reserves from Log-Linear Models, Insurance: Mathematics and Economics 10, 1991.
16. Wright, Tom S., A Stochastic Method for Claims Reserving in General Insurance, Journal of the Institute of Actuaries 117, 1990.
17. Zehnwirth, Ben, The Chain Ladder Technique-A Stochastic Model, Claims Reserving Manual 2, 1989, Institute of Actuaries, London.
18. Zehnwirth, Ben, ICRFS Version 4 Manual and Users Guide, Benhar Nominees Pty. Ltd., Turramurra, NSW, Australia, 1985.
19. Zehnwirth, Ben, Interactive Claims Reserving Forecasting System (ICRFS), Insureware P/L, E. St. Kilda, Victoria 3183, Australia, 1991.
20. Hachemeister, C.A., Stanard, J.N., 1975, IBNR claims count estimation with static lag functions.
21. Lorenz, H., Schmidt, K.D., 1999, Grossinf up, chain ladder and marginal sum estimation.
22. Schmidt, K.D., 1996, Lectures on Risk Theory, Teuner, Stuttgart.
23. Schmidt, K.D., Schnaus, A., 1996, An extension of Mack's model for the chain ladder method. ASTIN Bulletin 26.
24. Schmidt, K.D., Wunsche, A., 1998, Chain ladder, marginal sum and maximum likelihood estimation.
25. DeVyllder, 1978, Estimation of IBNR claims by least squares, Mitteilungen der SVVM 78.



26. England, Verrall, 1998, Standard errors of prediction in claims reserving: a comparison of methods, Proceedings of the General Insurance Convention and ASTIN Colloquium, Glasgow.
27. Mack, 1993, Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, ASTIN Bulletin 23.
28. Venter, 1998, Testing the assumptions of age-to-age factors, Proceedings of the Casualty Actuarial Society LXXXV.
29. Chambers, J.M. και T.J. Hastie, 1992, Statistical Models in S. Chapman and Hall, London.
30. De Jong, P. και B. Zehnwirth, 1983, Claims reserving, state-space models and the Kalman Filter.
31. Renshaw A.E., 1994, On the second moment properties and the implementation of certain GLIM based stochastic claims reserving models. Actuarial Research paper No 65.
32. Verrall, R.J., 1990, Bayes and empirical Bayes estimation for the chain ladder model.
33. Verrall, R.J., 1991, On the estimation of reserves from loglinear models, Insurance: mathematics and economics 10.

## Παράρτημα Α

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4.4 βασίζεται στο παρακάτω λήμμα το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σταθερά του πολυωνυμικού μοντέλου για την διαδικασία Poisson. Το νόημα είναι ότι η ιδιότητα  $P_{N_l} = \mathbf{P}(a\theta_l)$  για κάθε  $l \in \{1, \dots, m\}$  δεν είναι μέρος της υπόθεσης (α) αλλά επακόλουθό της.

**Λήμμα Α.1.** Έστω  $N_1, \dots, N_m, N : \Omega \rightarrow N_0$  τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε  $N = \sum_{l=1}^m N_l$  και  $P_{N_1, \dots, N_m | N} = \mathbf{M}(N; \theta_1, \dots, \theta_m)$ . Έστω  $a := E[N]$ . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Η οικογένεια  $\{N_l\}_{l \in \{1, \dots, m\}}$  είναι ανεξάρτητη με  $a > 0$ .
- $P_N = \mathbf{P}(a)$ .

Σε αυτή την περίπτωση,  $P_{N_l} = \mathbf{P}(a\theta_l)$  ισχύει για κάθε  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

**Απόδειξη.** Από υπόθεση, έχουμε ότι για κάθε  $n_1, \dots, n_m, n \in N_0$  τέτοιο ώστε  $\sum_{l=1}^m n_l = n$ :

$$P[\bigcap_{l=1}^m \{N_l = n_l\}] = P(\bigcap_{l=1}^m \{N_l = n_l\} | \{N = n\})P(\{N = n\}) = \frac{n!}{\prod_{l=1}^m n_l!} \prod_{l=1}^m \theta_l^{n_l} P(\{N = n\})$$

Από αυτή την ταυτότητα είναι άμεσο να δείξουμε ότι το b) συνεπάγεται το α).

Έστω τώρα ότι ισχύει το α). Τότε η ταυτότητα

$$(*) \quad \prod_{l=1}^m P(\{N_l = n_l\}) = \frac{n!}{\prod_{l=1}^m n_l!} \prod_{l=1}^m \theta_l^{n_l} P(\{N = n\})$$

Ισχύει για κάθε  $n_1, \dots, n_m, n \in N_0$  τέτοιο ώστε  $\sum_{l=1}^m n_l = n$ . Αυτή η ταυτότητα θα χρησιμοποιηθεί ξανά.

- Αφού  $E[N] > 0$ , υπάρχουν μερικά  $p \in N$  τέτοια ώστε  $P(\{N=p\}) > 0$ .
- Για κάθε  $l \in \{1, \dots, m\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} P(\{N_l = k\}) &= \sum_{j=k}^{\infty} P(\{N_l = k\} | \{N = j\})P(\{N = j\}) \geq P(\{N_l = k\} | \{N = p\})P(\{N = p\}) \\ &= \binom{p}{k} \theta_l^k (1 - \theta_l)^{p-k} P(\{N = p\}). \end{aligned}$$

Αφού  $P(\{N = p\}) > 0$ , αυτό μας δίνει ότι  $P(\{N_l = k\}) > 0$  για κάθε  $l \in \{1, \dots, m\}$  και  $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ . Λόγω της (\*) παίρνουμε  $P(\{N = h\}) > 0$  για κάθε  $h \in \{0, 1, \dots, mp\}$ .

- Από επαγωγή βλέπουμε ότι η  $P\{N = n\} > 0$  ισχύει για κάθε  $n \in N_0$ .  
Λόγω της (\*), έχουμε

$$P\{N_1 = 0\} \prod_{l=2}^{m-1} P\{N_l = 0\} P\{N_m = n\} = \theta_m^n P\{N = n\},$$

$$P\{N_1 = 1\} \prod_{l=2}^{m-1} P\{N_l = 0\} P\{N_m = n\} = \binom{n+1}{n} \theta_1 \theta_m^n P\{N = n+1\}$$

και επομένως

$$\frac{P\{N = n+1\}}{P\{N = n\}} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{1 P\{N_1 = 1\}}{\theta_1 P\{N_1 = 0\}} \right).$$

Αυτό υποδηλώνει ότι η  $P_N$  είναι μία κατανομή Poisson, δες Schmidt (1996, Θεώρημα 5.3.1) ■