Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Κοίλες και Οιονεί Κοίλες Συναρτήσεις**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Πεσλή Στυλιανή**
Πατρώνυμο	**Κωνσταντίνος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 08019**
Επιβλέπων	**Φούντας Ευάγγελος, καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Σεπτέμβριος 2012**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Φούντας Ευάγγελος Καθηγητής	Τσικούρας Παναγιώτης Γεώργιος Καθηγητής	Αποστόλου Δημήτριος Επίκουρος Καθηγητής

Ευχαριστίες

Νιώθω την ανάγκη να εκφράσω την εκτίμηση μου και τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή Ευάγγελο Φούντα , επιβλέποντα της μεταπτυχιακής μου διατριβής, για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθώς και για τις σπουδαίες γνώσεις και εμπειρίες που αποκόμισα από τη συνεργασία μαζί του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο τμήμα Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιά.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω επίσης, στους οικονομολόγους Ρεβέκκα Γεωργιάδου και Κωνσταντίνο Πεσλή , για το ενδιαφέρον και τις καθοριστικές τους υποδείξεις καθ’ όλη τη διάρκεια της ενασχόλησης μου με την παρούσα εργασία, η εκπόνησης της οποίας θα ήταν πραγματικά αδύνατη χωρίς τη συμβολή τους.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια μου , που με στήριζε και εξακολουθεί να με στηρίζει σε κάθε μου βήμα.

Στους Κωνσταντίνο & Λίλα

Περίληψη

Οι κοίλες συναρτήσεις παίζουν στην οικονομική θεωρία τον ίδιο ρόλο με τις ομοιογενείς συναρτήσεις, και οι δύο κατηγορίες συναρτήσεων εμφανίζονται κατά τρόπο φυσικό στα οικονομικά μοντέλα. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις ζήτησης είναι ομοιογενείς ενώ οι συναρτήσεις κατανάλωσης είναι κοίλες . Η σημασία των δύο κατηγοριών συναρτήσεων στις θεωρίες παραγωγής και ωφελιμότητας είναι μεγάλη. Επιπλέον βασίζονται σε απλή μαθηματική ανάλυση, οι ομοιογενείς με το θεώρημα του Euler και οι κοίλες μέσω της δεύτερης παραγώγου. Τέλος και οι δύο κατηγορίες αποτελούν θεμελιώδεις συναρτήσεις και χρειάζεται να τροποποιηθούν για να χρησιμοποιηθούν πλήρως στην θεωρία της χρησιμότητας.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να καταλάβουμε σε βάθος τις κοίλες και κυρτές συναρτήσεις δουλεύοντας προς τρεις συγκεκριμένους στόχους:

1. *Να αναπτύξουμε λογισμούς βασισμένους σε δοκιμές για την κοιλότητα ή την κυρτότητα*
2. *Να ανακαλύψουμε αξιοσημείωτες ιδιότητες που έχουν οι κοίλες και κυρτές συναρτήσεις, και*
3. *Να δούμε πώς κοίλες και κυρτές συναρτήσεις εφαρμόζονται στα οικονομικά μοντέλα*.

Abstract

Concave functions play a role in economic theory similar to the role that homogeneous functions play. Both classes arise naturally in economic models –homogeneous functions as demand functions, concave functions as expenditure functions. Profit functions and cost functions are naturally both homogeneous and concave. Both classes have desirable properties for utility and production functions. Both classes have straightforward calculus-based characterizations- homogeneous functions via Euler's theorem, concave functions via a second derivative test. Finally, both classes are cardinal and need to be modified for full use in utility theory.

The goal of this dissertation is to understand concave and convex functions more deeply by working three concrete goals:

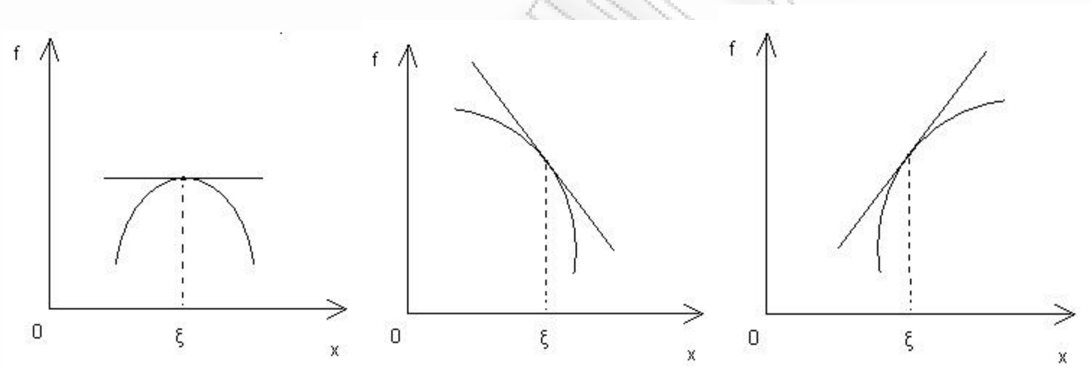
1. To develop simple calculus-based tests for concavity or convexity,
2. To discover the desirable properties that concave and convex functions have and
3. To see how concave and convex functions arise in economic models.

Εισαγωγή στις έννοιες: Κυρτότητα- Κοιλότητα και Οιονεί Κυρτότητα- Οιονεί Κοιλότητα

Κοιλότητα

Προκειμένου να ορίσουμε σωστά την οιονεί – κοιλότητα και την οιονεί – κυρτότητα, πρέπει πρώτα να ορίσουμε πότε μία συνάρτηση θεωρείται κυρτή και πότε κοίλη.

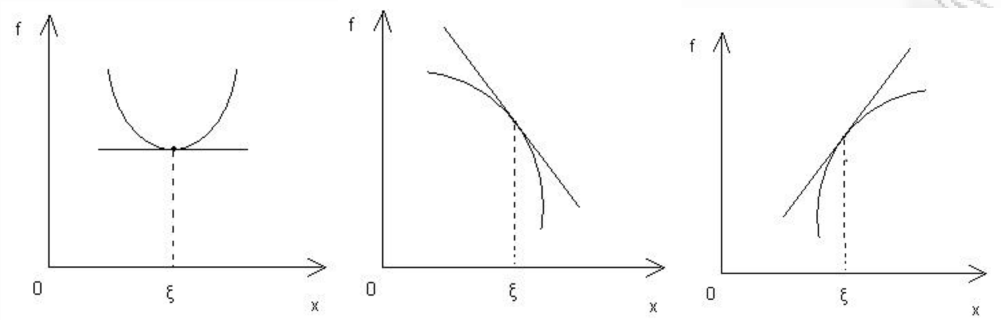
Εάν μία συνάρτηση f/A έχει παραγώγους *f'*,*f''*/ *A* συνεχείς με $f''(x) \leq 0 \forall x \in a$ (αντίστοιχα $f''(x) > 0 \forall x \in a$ τότε είναι κοίλη (αντίστοιχα γνήσια κοίλη) στο A και αντίστροφα. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις στις οποίες η εφαπτομένη του διαγράμματος της συναρτήσεως σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της «στηρίζεται» πάνω σε αυτό.



Εικόνα : f΄(ξ) = 0, f΄΄(ξ) < 0 f΄(ξ) > 0, f΄΄(ξ) < 0 f΄(ξ) < 0, f΄΄(ξ) <0

Κυρτότητα

Εάν μία συνάρτηση f/A έχει παραγώγους *f'*,*f''*/ *A* συνεχείς με $f''(x) \geq 0 \forall x \in a$ (αντίστοιχα $f''(x) < 0 \forall x \in a$ τότε είναι κυρτή (αντίστοιχα γνήσια κυρτή) στο A και αντίστροφα. Σε δεύτερο επίπεδο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το Θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο εάν μία συνάρτηση f/A είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $\xi \in a$, που είναι σημείο τοπικού ακρότατου, τότε θα είναι *f'*(ξ) = 0 και τις προτάσεις περί μονοτονίας των πραγματικών συναρτήσεων: α) Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση *f* / (*a*,β) είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) εάν και μόνο εάν $f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, \beta)$, β) Εάν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση *f* / (*a*,β) ισχύει *f'*(*x*) > 0 (αντίστοιχα $f'(x) < 0 \forall x \in (a, \beta)$) τότε η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα γνήσια φθίνουσα). Αν συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω προκύπτουν αντίστοιχα οι παρακάτω περιπτώσεις στις οποίες το διάγραμμα σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως «στηρίζεται» πάνω στην εφαπτομένη του.



Εικόνα : $f'(\xi) = 0, f''(\xi) > 0$ $f'(\xi) > 0, f''(\xi) > 0$ $f'(\xi) < 0, f''(\xi) > 0$

Η πλαισιωμένη ορίζουσα

Μια πλαισιωμένη ορίζουσα $|B|$, διαφέρει από την πλαισιωμένη Εσσιανή σε δύο σημεία:

1) τα στοιχεία του πλαισίου στην $|B|$ είναι οι πρώτης τάξης παράγωγοι της συνάρτησης f αντί για g και

2) τα υπόλοιπα στοιχεία στην $|B|$ είναι δεύτερης τάξης παράγωγοι της f αντί της συνάρτησης Lagrange Z. Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση των περιορισμών που είναι γραμμικές εξισώσεις,$g(x_1,.....,x_n) = α_1x_1 + ... + α_nx_n = c$ το Z_{ij} ανάγεται στη f_{ij}. Διότι τότε η συνάρτηση Lagrange είναι:

$Z = f(x_1,....,x_n) + λ[c - α_1x_1 - .... - α_nx_n]$

έτσι ώστε

$Z_j = f_j - λα_j$ και $Z_{ij} = f_{ij}$

Η συνάρτηση γραμμικού περιορισμού δίνει την πρώτη παράγωγο $g_j = a_j$.

Όταν η συνθήκη πρώτης τάξης ικανοποιείται, έχουμε $Z_j = f_j - λα_j = 0$ έτσι ώστε $f_j = λα_j$ ή $f_j = λg_j$.

Έτσι, το πλαίσιο της $|B|$ είναι απλά αυτό της $|\bar{H}|$ πολλαπλασιασμένο με το θετικό βαθμωτό λ. Βγάζοντας κοινό παράγοντα το λ διαδοχικά από το οριζόντιο και το κάθετο πλαίσιο της $|\bar{H}|$ έχουμε:

$$|B| = \lambda^2 |\bar{H}|$$

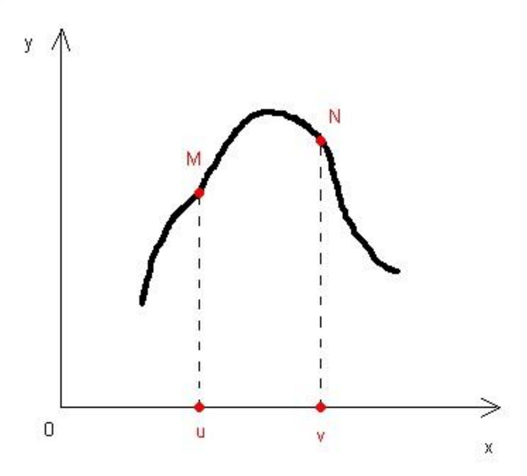
Συνεπώς, στην περίπτωση ενός γραμμικού περιορισμού, οι δύο πλαισιωμένες ορίζουσες έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο στο ίδιο στάσιμο σημείο της Z. Αντίστοιχα, οι κύριες ελάσσονες πρέπει επίσης να έχουν το ίδιο πρόσημο στο σημείο αυτό. Κατά συνέπεια, αν η πλαισιωμένη ορίζουσα $|B|$ ικανοποιεί την ικανή συνθήκη της οιονεί κοιλότητας, η πλαισιωμένη Εσσιανή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη δεύτερης τάξης για τη μεγιστοποίηση με περιορισμό. Ένας τέτοιος σύνδεσμος υπάρχει μεταξύ της οιονεί κυρτότητας και της συνθήκης δεύτερης τάξης για ελαχιστοποίηση που υπόκειται σ' ένα γραμμικό περιορισμό.

Οιονεί-Κοιλότητα και Οιονεί-Κυρτότητα

Η οιονεί κοιλότητα και η οιονεί κυρτότητα , όπως και η κοιλότητα και η κυρτότητα , μπορεί να είναι αυστηρές είτε όχι. Έστω u και υ δύο οποιαδήποτε διακριτά σημεία στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (το οποίο είναι ένα κυρτό σύνολο), και έστω το ευθύγραμμο τμήμα uυ στο πεδίο ορισμού που αντιστοιχεί στο τόξο MN του γραφήματος της συνάρτησης , έτσι ώστε το ύψος του σημείου N να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το ύψος του σημείου M. Τότε η συνάρτηση f λέγεται ότι είναι οιονεί κοίλη (οιονεί κυρτή) (quasi concave, quasi convex) αν όλα τα σημεία στο τόξο MN εκτός του M και του N έχουν ύψος μεγαλύτερο ή ίσο του ύψους του M (μικρότερο ή ίσο του ύψους του N). Η συνάρτηση f λέγεται ότι είναι αυστηρώς οιονεί κοίλη (αυστηρώς οιονεί κυρτή) αν όλα τα ύψη των σημείων του τόξου MN εκτός των M και N είναι αυστηρώς μεγαλύτερα του ύψους του σημείου M (αυστηρώς μικρότερα του ύψους του N). Είναι φανερό ότι κάθε αυστηρώς οιονεί κοίλη (αυστηρώς οιονεί κυρτή) συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη (οιονεί κυρτή), αλλά το αντίστροφο δεν αληθεύει.

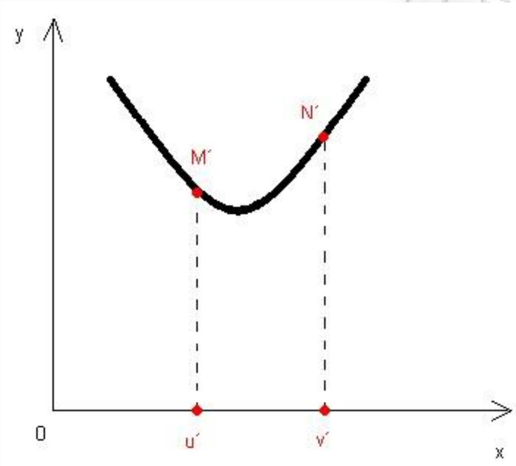
Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση μιας μεταβλητής, παίρνοντας την συνάρτηση που απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα, το ευθύγραμμο τμήμα uv στο πεδίο ορισμού αντιστοιχεί στο τόξο MN της καμπύλης προκειμένου το σημείο N να είναι υψηλότερο του M. Το συγκεκριμένο τόξο ικανοποιεί τη συνθήκη της αυστηρώς οιονεί-κυρτότητας που αναφέρθηκε παραπάνω καθώς όλα τα σημεία μεταξύ του M και του N στο συγκεκριμένο τόξο έχουν ύψος αυστηρώς μεγαλύτερο του M. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτό ότι για να είναι μία καμπύλη αυστηρώς οιονεί κοίλη πρέπει απαραιτήτως όλα τα πιθανά ζεύγη (u, v) του πεδίου ορισμού να αντιστοιχούν σε τόξα τα οποία ικανοποιούν την ίδια συνθήκη.

Η συνάρτηση του ακόλουθου διαγράμματος ναι μεν ικανοποιεί τη συνθήκη ώστε να είναι οιονεί κοίλη αλλά δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του να είναι αυστηρώς οιονεί κοίλη ούτε τη συνθήκη της οιονεί – κυρτότητας καθώς μερικά σημεία του τόξου MN βρίσκονται πάνω από το σημείο N. Γενικά, μία οιονεί κοίλη συνάρτηση, χωρίς να είναι συγχρόνως και κοίλη, απεικονίζεται γραφικά με το σχήμα μίας καμπάνας



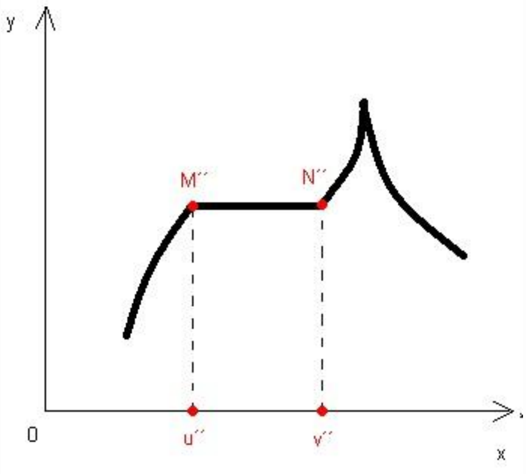
Εικόνα 1

Η συνάρτηση του παρακάτω διαγράμματος εκτός της συνθήκης της αυστηρώς οιονεί κυρτότητας, ικανοποιεί και την συνθήκη της μη αυστηρώς οιονεί κυρτότητας. Ωστόσο, δεν ικανοποιεί τη συνθήκη της οιονεί κοιλότητας. Γενικά, μία οιονεί κυρτή συνάρτηση, χωρίς να είναι συγχρόνως κυρτή, απεικονίζεται γραφικά με το σχήμα μίας αντίστροφης καμπάνας.



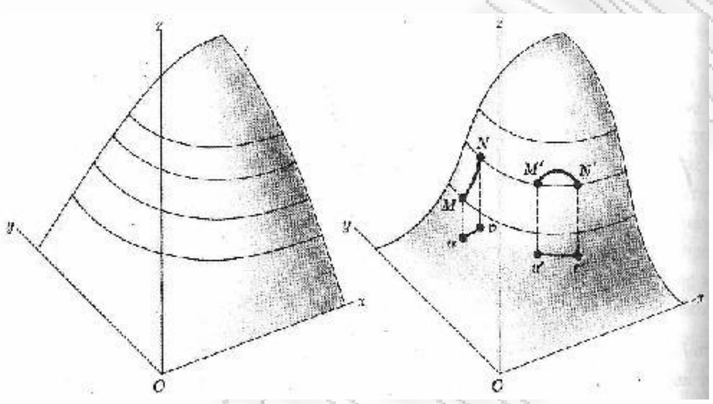
Εικόνα 2

Τέλος, αν πάρουμε μία συνάρτηση που λόγω πιθανών περιορισμών σχηματίζει γραφικά οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα Μ΄΄Ν΄΄ για ένα σύνολο τιμών της, επομένως, όχι μόνο το τμήμα αυτό αλλά και όλη η καμπύλη δύναται να ικανοποιεί τη συνθήκη της οιονεί κοιλότητας αλλά όχι της αυστηρής οιονεί κοιλότητας.



Εικόνα 3

Γεωμετρικά μπορούμε να θυμόμαστε ότι η οιονεί κοιλότητα (κυρτότητα) έχει το σχήμα της καμπάνας



Εικόνα 4

Κοίλες και οιονεί κοίλες συναρτήσεις

Οι κοίλες συναρτήσεις παίζουν στην οικονομική θεωρία τον ίδιο ρόλο με τις ομοιογενείς συναρτήσεις, και οι δύο κατηγορίες συναρτήσεων εμφανίζονται κατά τρόπο φυσικό στα οικονομικά μοντέλα. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις ζήτησης είναι ομοιογενείς ενώ οι συναρτήσεις κατανάλωσης είναι κοίλες . Η σημασία των δύο κατηγοριών συναρτήσεων στις θεωρίες παραγωγής και ωφελιμότητας είναι μεγάλη. Επιπλέον βασίζονται σε απλή μαθηματική ανάλυση, οι ομοιογενείς με το θεώρημα του Euler και οι κοίλες μέσω της δεύτερης παραγώγου. Τέλος και οι δύο κατηγορίες αποτελούν θεμελιώδεις συναρτήσεις και χρειάζεται να τροποποιηθούν για να χρησιμοποιηθούν πλήρως στην θεωρία της χρησιμότητας (UTILITY THEORY)

Ωστόσο, η κοιλότητα είναι έννοια πολύ διαφορετική από την ομοιογένεια. Υπάρχουν συναρτήσεις, που είναι ομοιογενείς αλλά όχι κοίλες ή κυρτές, όπως επίσης υπάρχουν άλλες που είναι κοίλες ή κυρτές αλλά όχι ομοιογενείς. Κατά μία έννοια αυτές οι ιδιότητες είναι συμπληρωματικές και οι οικονομολόγοι προτιμούν να δουλεύουν με συναρτήσεις που τις συμπεριλαμβάνουν και τις δυο.

Κοίλες και κυρτές συναρτήσεις

Ο ορισμός των κοίλων και κυρτών συναρτήσεων είναι ο ίδιος για n μεταβλητές όπως είναι και για μια μεταβλητή.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη πάνω σε ένα κυρτό υποσύνολο U του R^n είναι **κοίλη** εάν για όλα τα x, y μέσα στο U και για όλα τα t μεταξύ 0 και 1 ισχύει :

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\geq tf\left(x\right)+(1-t)f\left(y\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Μια πραγματική συνάρτηση g ορισμένη πάνω σε κυρτό υποσύνολο U του R^n είναι **κυρτή** εάν για όλα τα x, y μέσα στο και για όλα t τα μεταξύ 0 και 1 ισχύει:

$$g(tx+(1-t)y)\leq tg(x)+(1-t)g(y) \qquad \textbf{(2)}$$

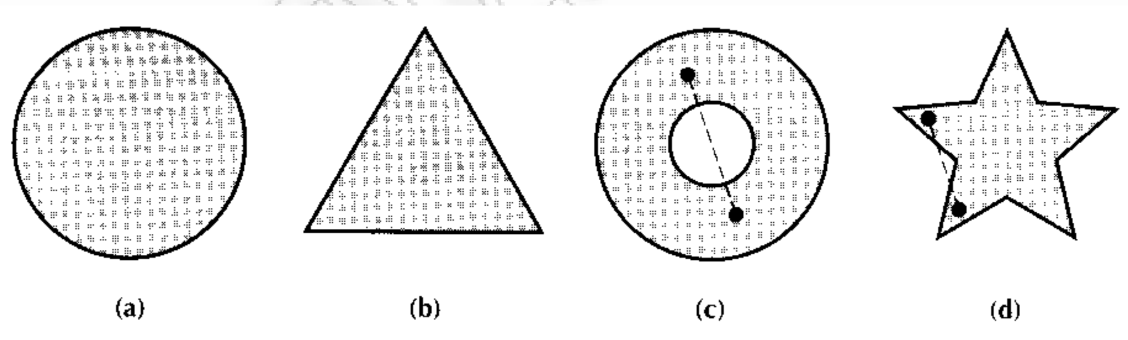
Παρατηρήσεις :

1. Η f είναι κοίλη αν και μόνο αν η $-f$ είναι κυρτή

2. Σε πολλά εγχειρίδια μαθηματικών οι κυρτές συναρτήσεις λέγονται « concave up» (τα κοίλα προς τα επάνω) και οι κοίλες «concave down » (τα κοίλα προς τα κάτω)
3. Ας μην συγχέουμε την έννοια μιας κυρτής συνάρτησης με εκείνη ενός κυρτού συνόλου. Ένα σύνολο U είναι κυρτό σύνολο εάν οποιαδήποτε x και y είναι σημεία του , καθώς και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x με τα y βρίσκεται επίσης στο U .

$$l(x,y) \equiv \{(tx+(1-t)y : 0 \le t \le 1\} ,$$

Στην εικόνα 5 ο κύκλος στο (a) και το εσωτερικό του τριγώνου στο (b) είναι κυρτά σύνολα, ενώ η σπείρα (η περιοχή ανάμεσα σε 2 ομόκεντρους κύκλους) στο (c) και το αστέρι στο (d) δεν είναι κυρτά σύνολα, όπως δείχνουν τα τμήματα των γραμμών σε αυτά τα δύο τελευταία σχήματα. Ο ορισμός μιας κοίλης ή μιας κυρτής συνάρτησης f απαιτεί ότι κάθε φορά που η f ορίζεται στο x και στο y, είναι ορισμένη και στο τμήμα $l(x,y)$. Έτσι κυρτές και κοίλες συναρτήσεις πρέπει να έχουν κυρτούς τομείς. Σε αυτό το τμήμα, όλες οι συναρτήσεις θα οριστούν ως κυρτά σετ, είτε η συνάρτηση είναι κοίλη , κυρτή ή τίποτα από όλα αυτά. Αυτή δεν είναι η μόνη σύνδεση ανάμεσα στα κυρτά σετ και στις κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η f είναι κοίλη αν και μόνο αν $\{(x,y): y \le f(x)\}$ είναι ένα κυρτό σύνολο και ισχύει η αντίστοιχη κατάσταση για τις κυρτές συναρτήσεις. Οιονεί όλες οι συναρτήσεις στα οικονομικά , ειδικά οι συναρτήσεις χρησιμότητας και παραγωγής έχουν κυρτά σετ ως φυσικούς τομείς τους.

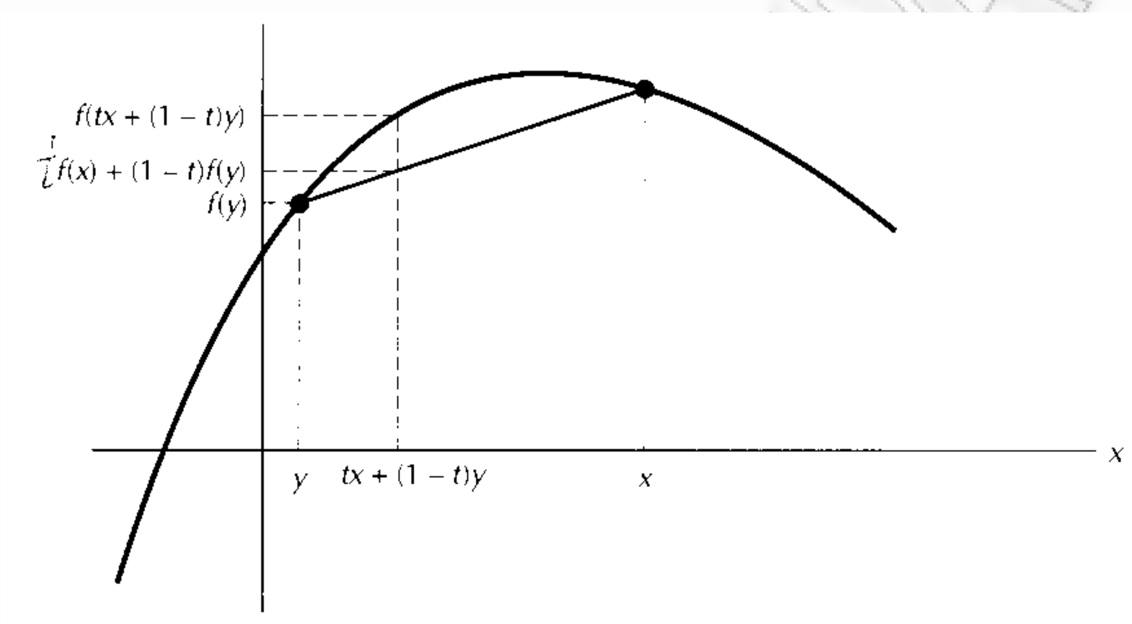


Εικόνα 5

Οι μαθητές συνήθως αναπτύσσουν μια γεωμετρική ιδέα για τις κοίλες και τις κυρτές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Μπορούν να αναγνωρίσουν μια κοίλη συνάρτηση από το γράφημα της επειδή, όπως παρουσιάζεται το διάγραμμα στην εικόνα 6, η ανισότητα (1) στον ορισμό της κοίλης συνάρτησης έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία :

Μια συνάρτηση f n μεταβλητών είναι κοίλη εάν και μόνο εάν οποιαδήποτε τέμνουσα γραμμή που συνδέει δύο σημεία στο γράφημα της f βρίσκεται **κάτω** από το γράφημα.

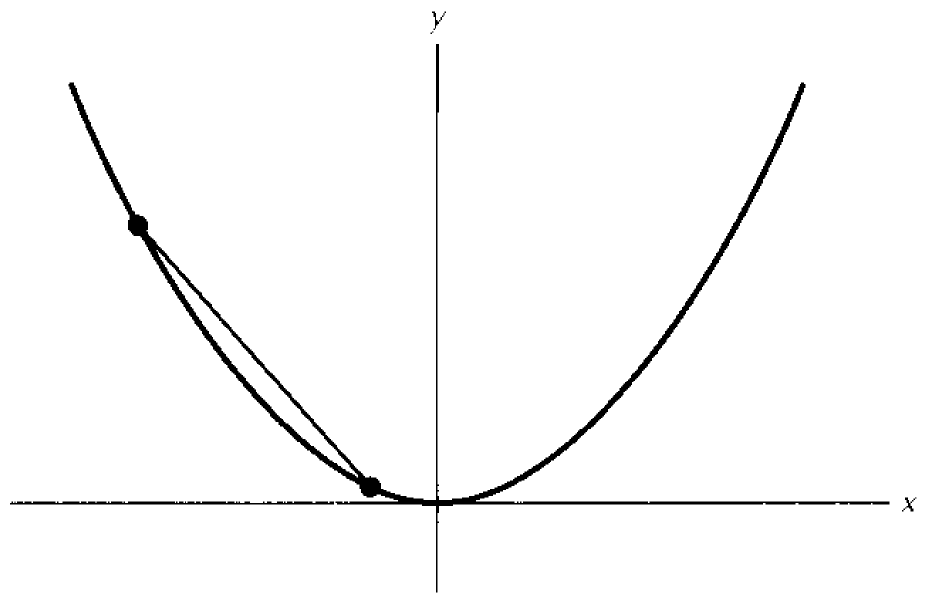
Μια συνάρτηση είναι κυρτή αν και μόνο αν κάθε τέμνουσα γραμμή που συνδέει δύο σημεία στο γράφημα της βρίσκεται **πάνω** από το γράφημα.



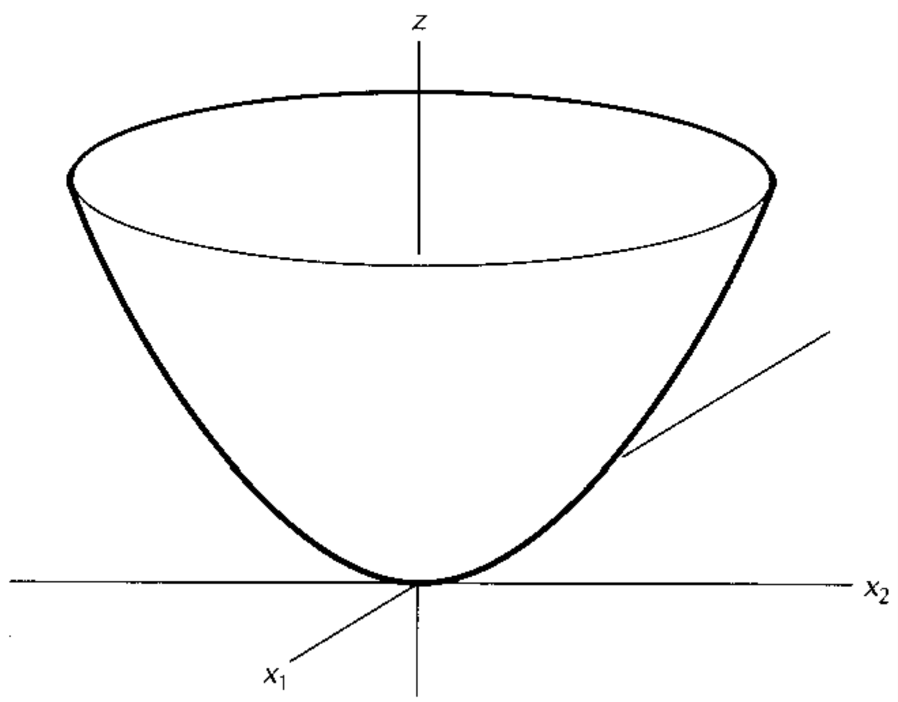
Εικόνα 6

Αυτή η ιδιότητα παρουσιάζεται στις εικόνες 7 και 8, οι οποίες απεικονίζουν τα γραφήματα δυο πρωτότυπων κυρτών συναρτήσεων : $y = x^2$ και $z = x\frac{1}{2} + x\frac{2}{2}$.

Αναπτύσσοντας μια ιδέα για τις κοίλες συναρτήσεις διαφόρων μεταβλητών και αποδεικνύοντας θεωρίες για τις ιδιότητες τους , είναι χρήσιμο να δούμε ότι μια συνάρτηση n μεταβλητών ορίζεται σε ένα κυρτό σύνολο U είναι κοίλη αν και μόνο αν ο περιορισμός της για οποιοδήποτε τμήμα της γραμμής στο U είναι μια κοίλη συνάρτηση μιας μεταβλητής. Αυτό είναι ξεκάθαρο από τη στιγμή που ο ορισμός (1) για μια κοίλη συνάρτηση είναι μια πρόταση για τη συμπεριφορά της στα διάφορα τμήματα της γραμμής. Επειδή το γεγονός αυτό είναι τόσο χρήσιμο, παρέχεται μια προσεκτική αναλυτική απόδειξη. Στη συνέχεια αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να μειώσουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με τις λειτουργίες των κοίλων συναρτήσεων στο R^n σε διατυπώσεις για τις κοίλες συναρτήσεις μιας ενιαίας μεταβλητής.



Εικόνα 7



Εικόνα 8

Θεώρημα 1.1

Έστω f συνάρτηση προσδιορισμένη στο κυρτό υποσύνολο U του συνόλου R^n. Τότε η f είναι κοίλη (κυρτή) αν ο περιορισμός του σε κάθε γραμμή του τμήματος που ανήκει στο U είναι κοίλη (κυρτή) συνάρτηση από μια μεταβλητή.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι ο περιορισμός της f για κάθε γραμμικό τμήμα στο U είναι μια κοίλη συνάρτηση. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι κοίλη συνάρτηση στο U έστω x, y τυχαία σημεία στο U.

Έστω $g(t) \equiv f(tx+(1-t)y)$. Από την υπόθεση, η g είναι κοίλη. Έτσι για t μεταξύ 0 και 1,

$$f(tx+(1-t)y) = g(t) \qquad \text{(ορισμός του } g \text{)}$$

$$\begin{aligned} &= g(t\cdot 1+(1-t)\cdot 0) \\ &\geq tg(1)+(1-t)g(0) \qquad \text{(αφού η } g \text{ είναι κοίλη)} \\ &= tf(x)+(1-t)f(y) \end{aligned}$$

Συνεπώς, f είναι κοίλη.

Αντιστρόφως υποθέτουμε ότι f είναι κοίλη και θέλουμε να δείξουμε ότι $g(t) \equiv f(tx+(1-t)y)$, ο περιορισμός της f για τη γραμμή που περιέχει τα x και y είναι κοίλη. Για να κάνουμε αυτό φτιάχνουμε τα s_1 και s_2 και έστω t τα παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Τότε :

$$g(ts_1+(1-t)s_2) = f((ts_1+(1-t)s_2)x+(1-(ts_1+(1-t)s_2))y)$$

(ορισμός του g)

$$= f(t(s_1x+(1-s_1)y)+(1-t)(s_2x+(1-s_2)y))$$

(αναδιάταξη)

$$\geq tf(s_1x+(1-s_1)y)+(1-t)f(s_2x+(1-s_2)y)$$

(κοιλότητα της f)

$$= tg(s_1)+(1-t)g(s_2)$$

(ορισμός της g)

Έτσι g είναι κοίλη. Η απόδειξη για κυρτές συναρτήσεις είναι σχεδόν η ίδια.

Ο στόχος της υπόλοιπης εργασίας είναι να καταλάβουμε σε βάθος τις κοίλες και κυρτές συναρτήσεις δουλεύοντας προς τρεις συγκεκριμένους στόχους:

4. *Να αναπτύξουμε λογισμούς βασισμένους σε τεστ για την κοιλότητα ή την κυρτότητα*

5. *Να ανακαλύψουμε αξιοσημείωτες ιδιότητες που έχουν οι κοίλες και κυρτές συναρτήσεις, και*

6. *Να δούμε πώς κοίλες και κυρτές συναρτήσεις εφαρμόζονται στα οικονομικά μοντέλα*.

Στην παρούσα εργασία θα δουλεύουμε κυρίως με κοίλες συναρτήσεις παρά με κυρτές, καθώς κάθε δήλωση για τη μια μπορεί εύκολα να μεταφραστεί σαν δήλωση για την άλλη. Όταν συνοψίσουμε τα αποτελέσματα μας στις αποδείξεις των θεωρημάτων, θα αναφέρουμε τα αποτελέσματα και για τους δυο τύπους συναρτήσεων.

Υπολογιστικά κριτήρια για την κοιλότητα

Όπως φαίνεται από τη μέχρι τώρα ανάλυση μας, κάποιος μπορεί να πει αν μια συνάρτηση στο R^n είναι κοίλη ή όχι, κοιτώντας το γράφημά της στο R^{n+1}. Στην πραγματικότητα, ένας πιο γεωμετρικός τρόπος του ορισμού της κοιλότητας είναι : μια συνάρτηση n μεταβλητών είναι κοίλη αν και μόνο αν το σετ **κάτω** από το γράφημα της στο R^{n+1} R^{n+1} είναι κυρτό σύνολο, όπως στο διάγραμμα της εικόνας 6, μια συνάρτηση είναι κυρτή αν και μόνο αν το σετ **πάνω** από το γράφημα της στο είναι κυρτό σύνολο όπως στα διαγράμματα των εικόνων 7 και 8.

Βέβαια, δεν είναι πρακτικό ή πιθανό να σχεδιάσουμε ένα γράφημα μιας συνάρτησης για να ελέγξουμε για κοιλότητα. Χρειαζόμαστε ένα πιο αναλυτικό κριτήριο. Οι μαθητές που μελετούν συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μαθαίνουν δυο απλά αναλυτικά τεστ για την κοιλότητα:

1. Μια C^1 συνάρτηση σε ένα εσωτερικό I είναι κοίλη αν και μόνο αν η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x για ένα x στο I.
2. Μια C^2 συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα εσωτερικό I αν και μόνο αν η δεύτερη παράγωγος της $f''(x)$ είναι ≤ 0 για όλα τα x στο I.

Όπως ίσως μαντεύει κάποιος από το θεώρημα 1.1 οι γενικεύσεις αυτών των κριτηρίων δουλεύουν σε όλες τις διαστάσεις. Βέβαια, θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ποιες είναι αυτές οι γενικεύσεις.

Η φυσική γενίκευση της πρώτης παραγώγου $f'(x)$ σε συναρτήσεις διαφόρων μεταβλητών είναι η (Ιακωβιανή) μήτρα των 1ης τάξεως μερικών παραγώγων της f :

$$Df(x) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\frac{\partial f}{\partial x^2}(x)...\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)).$$

Δεδομένου ότι αυτή είναι η πρώτη παράγωγος μπορεί να θεωρηθεί ως παράγωγος n συναρτήσεων n μεταβλητών, η οποία είναι συνάρτηση από R^n σε R^n ,χρειάζεται να δουλέψουμε λίγο ώστε να ερμηνεύσουμε τη δήλωση ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μια στενή σχέση με την πρώτης τάξεως συνθήκη κοιλότητας στο R^1 το οποίο έχει μια προφανή γενίκευση σε συναρτήσεις διαφόρων μεταβλητών

Θεώρημα 1.2

Έστω f μια συνάρτηση C^1 σε ένα διάστημα I στο R τότε, f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν

$$f(y) - f(x) \le f'(x)(y-x) \text{ για κάθε } x, y \in I. \qquad (3)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν

$$f(y) - f(x) \ge f'(x)(y-x) \text{ για κάθε } x, y \in I.$$

Σημείωση

Πρώτα βλέπουμε ότι η υπόθεση (3) σημαίνει ότι η f' είναι φθίνουσα εξίσωση.

Διαιρώντας τις 2 πλευρές της (3) με ($y - x$) ΄ πρέπει να αντιστρέψουμε την ανισότητα όταν $y - x < 0$. Τα αποτελέσματα είναι

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(x) \qquad \text{για κάθε } y \succ x \in I \qquad (4)$$

Και

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge f'(x) \qquad \text{για κάθε } y \prec x \in I \qquad (5)$$

Για να δούμε ότι (4) και (5) συνεπάγονται ότι $f\,'$ είναι φθίνουσα υποθέτουμε $z_1 \prec z_2$ στο I. Τότε,

$$f\,'(z_1) \geq \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \qquad \text{(από (4) με } x=z_1 \text{ και } y=z_2\text{)}$$

$$= \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} \qquad \text{(πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με -1)}$$

$$\geq f\,'(z_2) \qquad \text{(από (5) με } x=z_2 \text{ και } y=z_1\text{)}$$

Απόδειξη του θεωρήματος 1.2

Υποθέτουμε ότι f είναι κοίλη συνάρτηση και ανήκει στο I. Έστω x, $y \in I$ και έστω $t \in$ (0, 1]. Τότε ,

$$f(y)+(1-t)f(x) \leq f(ty+(1-t)x)$$

ή

$$tf(y)-f(x) \leq \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}$$

$$= \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t(y-x)}(y-x)$$

Υπόθεση (3) ακολουθείται επομένως αφήνοντας το $t \to 0$ κατά την τελευταία έκφραση.

Από την άλλη μεριά η υπόθεση (3) διατηρείται για όλα τα x, y στο I. Τότε ,

$$f(x)-f((1-t)x+ty) \leq f\,'(1-t)x+ty)(x-((1-t)x+ty))$$

$$= -tf\,'((1-t)x+ty)(y-x)$$

Ομοίως,

$$f(y)-f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f\,'((1-t)x+ty)(y-x)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανισότητα με το (1 – t) και τη δεύτερη με t, τότε προσθέτουμε τις δυο ώστε

$$(1-t)f(x)+tf(y) \leq f((1-t)x+ty).$$

Η φυσική γενίκευση της συνθήκης (3) των συναρτήσεων πολλαπλών μεταβλητών είναι τώρα απλή.

Θεώρημα 1.3

Έστω f μια C^1 συνάρτηση σε ένα κυρτό υποσύνολο U του R^n. Τότε η f είναι κοίλη στο U αν και μόνο αν για όλα τα x, y που ανήκουν στο U :

$$f(y)-f(x)\le Df(x)(y-x)$$

Αυτό είναι ,

$$f(y)-f(x)\le \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1-x_1)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(y_n-x_n). \qquad (6)$$

Ομοίως, η f είναι κυρτή στο U αν και μόνο αν $f(y)-f(x)\ge Df(x)(y-x)$ για όλα τα x, y στο U.

Απόδειξη

Έστω x, y είναι τυχαία σημεία που ανήκουν στο U. Έστω

$$g_{x,y}(t)\equiv f(ty+(1-t)x)$$

$$= f(x_1+t(y_1-x_1),...,x_n+t(y_n-x_n))$$

Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας ,

$$g'_{x,y}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+t(y-x))(y_i-x_i) \qquad (7)$$

Και

$$g'_{x,y}(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i-x_i)=Df(x)(y-x)$$

Από τα θεωρήματα 1.1 και 1.2, η f είναι κοίλη αν και μόνο αν για κάθε $g_{x,y}$ είναι κοίλα εάν και μόνο εάν για κάθε x, $y\in U$,

$$g_{x,y}(1) - g_{x,y}(0) \le g'_{x,y}(0)(1-0) = g'_{x,y}(0)$$

Εάν και μόνο εάν για κάθε x, $y \in U$,

$$f(y) - f(x) \le Df(x)(y-x)$$

Πόρισμα 1.4

Αν f είναι μια C^1 κοίλη συνάρτηση σε ένα κυρτό σύνολο U και αν $x_0 \in U$, τότε

$$Df(x_0)(y-x_0) \le 0 \text{ συνεπάγεται } f(y) \le f(x_0) \qquad \textbf{(8)}$$

Συγκεκριμένα, αν $Df(x_0)(y-x_0) \le 0$ για κάθε $y \in U$, τότε x_0 ολικό μέγιστο της f.

Ας σταματήσουμε να σκεφτόμαστε γεωμετρικά αυτή την κατάσταση. Στο τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερο τη γεωμετρική ιδέα του διανύσματος κλίσης $\nabla f(x_0)$ αντί για τη μήτρα παραγώγων $Df(x_0)$. Το $\nabla f(x_0)$ είναι ένας κατακόρυφος πίνακας στο κάθετο σετ της f μέσα από το x_0. Η ανίσωση (8) λέει ότι αν ο πίνακας από x_0 στο y κάνει μια αμβλεία γωνία με το $\nabla f(x_0)$ στο x_0, αυτό είναι, αν $\nabla f(x_0)\ (y-x_0) \le 0$, τότε $f(y) \le f(x_0)$.Εναλλακτικά, αφού $\nabla f(x_0)$ είναι κάθετη προς την εφαπτόμενη υπερεπιπέδου στο επίπεδο σύνολο της f στο x_0, η συνθήκη (8) λέει ότι για μια κοίλη συνάρτηση το σετ $\{z : f(z) \ge f(x_0)\}$, το οποίο περιλαμβάνει το σετ επιπέδου $\{z : f(z) = f(x_0)\}$, βρίσκεται πάνω από το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο επίπεδο σύνολο της f στο x_0. Συνοπτικά, αν η f είναι κοίλη, τότε κάθε σετ επιπέδου της f βρίσκεται πάνω από οποιοδήποτε εφαπτόμενο επίπεδο, όπου το πάνω σημαίνει την κατεύθυνση των αυξουσών τιμών της f.

Παράδειγμα 1

Ας εφαρμόσουμε το τεστ του θεωρήματος 1.3 για να δείξουμε ότι $f(x_{1,}x_2) = x_1^2 + x_2^2$ είναι κυρτή στο R^n. Η συνάρτηση είναι κυρτή αν και μόνο αν

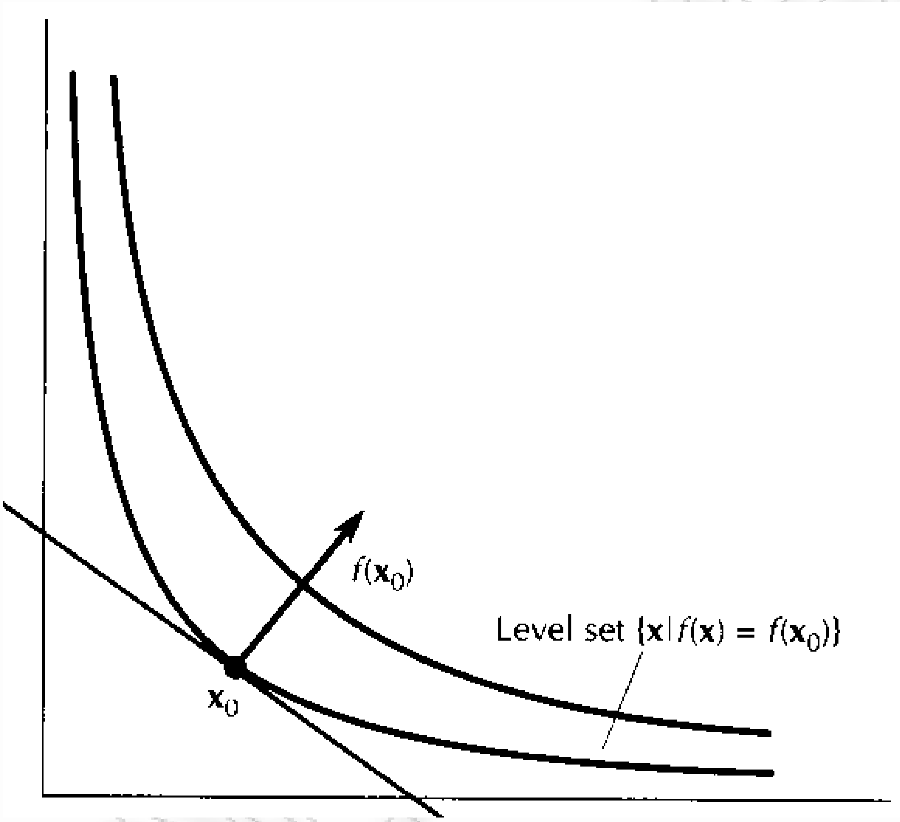
$$(y_1^2 + y_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) \geq (2x_1 \, 2x_2)\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1 y_1 - 2x_1^2 + 2x_2 y_2 - 2x_2^2$$

αν και μόνο αν

$$y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 y_1 - 2x_2 y_2 \geq 0$$

που είναι αλήθεια για όλα (x_1, x_2) και (y_1, y_2) στο R^2.



Εικόνα 9

Το θεώρημα 1.3 είναι μια πολύ χρήσιμη τεχνική για την απόδειξη ιδιοτήτων για τις κοίλες και κυρτές συναρτήσεις . Ωστόσο, από τη στιγμή που περιέχει τον έλεγχο μιας ανισότητας για όλα τα x και y στον τομέα, δεν είναι συνήθως ένα πρακτικό κριτήριο για να ελέγξουμε αν οποιαδήποτε δοθείσα συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή. Για τον τελευταίο σκοπό, θα βρούμε πιο πρακτικό να χρησιμοποιήσουμε τη γενίκευση του τεστ δευτέρων παραγώγων: η f είναι κοίλη στο εσωτερικό I αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$ για όλα τα x στο I. Η φυσική γενίκευση της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$ σε συναρτήσεις διαφόρων μεταβλητών είναι μια Εσσιανή μήτρα όλων των 2ης τάξης μερικών παραγώγων της f στο R^1:

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} fx_1x_1 & \dots & fx_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ fx_nx_1 & \cdots & fx_nx_n \end{pmatrix}$$

Όπου γράφουμε $f_{x_i x_j}$ για $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ και κάθε είσοδος αξιολογείται στο σημείο x. Η φυσική γενίκευση της $f''(x) \le 0$ είναι μια κατάσταση όπου η Εσσιανή μήτρα $D^2 f(x)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη για κάθε x στον τομέα της f. Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει το τεστ 2ης τάξης για κοίλες και κυρτές συναρτήσεις στο R^n.

Θεώρημα 1.5

Έστω η f μια C^2 συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του R^n. Τότε η f είναι κοίλη συνάρτηση στο U αν και μόνο αν η Εσσιανή $D^2 f(x)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη για κάθε x στο U. Η συνάρτηση f είναι κυρτή αν και μόνο αν $D^2 f(x)$ είναι θετικά ημι-προσδιορισμένος για όλα τα x στο U.

Παρατήρηση

Η μήτρα H είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $v^T H v \succ 0$ για όλα τα $v \neq 0$ στο R^n. Η H είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $v^T H v \prec 0$ για όλα τα $v \neq 0$ στο R^n. Αντικαθιστώντας τις αυστηρές ανισότητες πάνω με ασθενείς οδηγεί στους ορισμούς των θετικά και αρνητικά ημι-ορισμένων. Μια μήτρα για να είναι ορισμένη ή ημι-ορισμένη θα πρέπει να :

1. Μια μήτρα H είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν οι n ηγετικές κύριες ελάσσονες είναι όλες $\succ 0$.
2. Μια μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν οι n ηγετικές κύριες ελάσσονες εναλλάσσουν το πρόσημό τους ξεκινώντας με αρνητικό ακολουθούμενο από θετικό.
3. Μια μήτρα H είναι θετικά ημι-ορισμένη αν κ μόνο αν οι $2^n - 1$ κύριες ελάσσονες της είναι όλες ≥ 0.

4. Μια μήτρα H είναι αρνητικά ημι-ορισμένη αν και μόνο αν οι $2^n - 1$κύριες ελάσσονες εναλλάσσουν το πρόσημο τους έτσι ώστε οι πρώτες να είναι ≤ 0 και οι επόμενες ≥ 0

Απόδειξη του θεωρήματος 1.5

Όπως στην προηγούμενη απόδειξη έστω x και y τυχαία σημεία στο U και έστω $g_{x,y}(t) \equiv f(ty + (1-t)x)$. Τότε f είναι κοίλη στο U αν και μόνο αν κάθε $g_{x,y}(t)$ είναι κοίλο , το οποίο είναι ισοδύναμο με κάθε $g''_{x,y}(t) \leq 0$. Από την εξίσωση (7) και τον κανόνα της αλυσίδας (Chain Rule),

$$g''_{x,y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y-x))(y_i - x_i)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + t(y-x))(y_j - x_j)(y_i - x_i)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (y_j - x_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + t(y-x))(y_i - x_i)$$

$$= (y-x)^T D^2 f(x + t(y-x))(y-x) .$$

Αν κάθε $D^2 f(z)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη, τότε προκύπτει ότι:

A. Κάθε $g''_{x,y}(t) \leq 0$,

B. Κάθε $g_{x,y}$ είναι κοίλη

C. f είναι κυρτή

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι η f είναι κοίλη στο U . Έστω z ένα αυθαίρετο σημείο στο U και έστω v ένας αυθαίρετος αντικαταστάσιμος πίνακας στο R^n . Θέλουμε να δείξουμε ότι $v^T D^2 f(z) v \leq 0$. Αφού το U είναι ανοιχτό, υπάρχει ένα $t_0 \succ 0$ τέτοιο ώστε $y = z + t_0 v$ που είναι στο U . Αφού η f είναι κοίλη, το $g_{x,y}$ είναι κοίλο και το $g''_{z,y}(0) \leq 0$. Από την προηγούμενη παράγραφο

$$0 \geq g''_{z,y}(0) = (y-z)^T D^2 f(z)(y-z)$$
$$= (t_0 v)^T D^2 f(z)(t_0 v)$$
$$= (t_0^2)\left[v^T D^2 f(z) v\right]$$

Ωστόσο $v^T [D^2 f(z)] v \leq 0$ και $D^2 f(z)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένα για όλα τα z στο U

Παράδειγμα 1.2

Η Εσσιανή της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 + x^2 y^2 + y^4 - 3x - 8y$

Είναι

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+12y^2 \end{pmatrix}.$$

Για $(x,y) \neq (0,0)$, οι δυο κύριες ελάσσονες, $12x^2 + 2y^2$ και $24x^4 + 132x^2y^2 + 24y^4$ είναι και οι δυο θετικές, έτσι η f είναι μια κυρτή συνάρτηση σε όλο το R^n.

Παράδειγμα 1.3

Μια συνήθης χρησιμοποιούμενη συνάρτηση χρησιμότητας ή παραγωγής είναι $F(x,y) = xy$. Η Εσσιανή είναι,

$$D^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

της οποίας η δεύτερης τάξης κύρια ελάσσονα είναι $\det D^2 F(x,y) = -1$. Αφού η 2ης τάξης κύρια ελάσσονα είναι αρνητική , η $D^2 F$ είναι αόριστη και η f είτε είναι κοίλη είτε κυρτή.

Παράδειγμα 1.4

Θεωρούμε το μονοτονικό σχηματισμό της συνάρτησης f του προηγούμενου παραδείγματος ως τη συνάρτηση $g(z) = z^{1/4} : G(x, y) = x^{1/4} y^{1/4}$, ορισμένη μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του R_{+}^{2}. Η Εσσιανή της G θα είναι :

$$D^2 G = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} x^{-7/4} y^{1/4} & \frac{1}{16} x^{-3/4} y^{-3/4} \\ \frac{1}{16} x^{-3/4} y^{-3/4} & -\frac{3}{16} x^{1/4} y^{-7/4} \end{pmatrix}$$

Για κάθε $x \succ 0, y \succ 0$ η πρώτης τάξης κύρια ελάσσονα είναι αρνητική και η δεύτερης τάξης $x^{-3/2} y^{-3/2} / 128$ είναι θετική. Ωστόσο η $D^2 G(x, y)$ είναι αρνητικά ορισμένη στο R_{+}^{2} και η G είναι μια κοίλη συνάρτηση στο R_{+}^{2}.

Παράδειγμα 1.5

Φέρνουμε στο μυαλό μας τη γενική συνάρτηση Cobb-Douglas στο R_{+}^{2} η Εσσιανή είναι :

$$D^2 U(x, y) = \begin{pmatrix} a(a-1) x^{a-2} y^{b} & abx^{a-1} y^{b-1} \\ abx^{a-1} y^{b-1} & b(b-1) x^{a} y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Της οποίας η ορίζουσα είναι

$$\det D^2 U(x, y) = ab(1-a-b) x^{2a-2} y^{2b-2}$$

Για να είναι το U κοίλο στο R_{+}^{2} χρειαζόμαστε το $a(a-1) \prec 0$ και $ab(1-a-b) \succ 0$, δηλαδή χρειαζόμαστε $0 \prec a \prec 1$, $0 \prec b \prec 1$ και $a + b \leq 1$. Γενικά μια Cobb-Douglas συνάρτηση παραγωγής στο R_{+}^{2} είναι κοίλη αν και μόνο αν παρουσιάζει σταθερές ή φθίνουσες αποδόσεις στην κλίμακα.

Παρατήρηση

Αυτά τα 4 παραδείγματα παρουσιάζουν κάποιες σχέσεις για τις διάφορες τάξεις των συναρτήσεων που έχουμε δει. Τα παραδείγματα 1.3 και 1.5 δείχνουν ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι ομογενής ή ομοθετική και όχι κοίλη ή κυρτή. Το παράδειγμα 1.2 δείχνει ότι η συνάρτηση μπορεί να είναι κοίλη ή κυρτή και όχι ομογενής ή ομοθετική. Τα παραδείγματα 1.4 και 1.5 δείχνουν ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι και κοίλη (ή κυρτή) και ομογενής (ή ομοθετική) . Τέλος, τα τελευταία τρία παραδείγματα δείχνουν καθαρά ότι η κοιλότητα είναι μια κύρια ιδιότητα, ένας μονοτονικός μετασχηματισμός μιας κοίλης συνάρτησης δεν χρειάζεται να είναι κοίλος.

Ιδιότητες των κοίλων συναρτήσεων

Οι τρεις ιδιότητες που κάνουν τις κοίλες συναρτήσεις τόσο χρήσιμες στα οικονομικά είναι ότι τα κρίσιμα τους σημεία είναι αυτόματα ολικά μέγιστα, ότι το σταθμισμένο άθροισμα των κοίλων συναρτήσεων είναι μια κοίλη συνάρτηση και ότι τα σύνολα επιπέδου μιας κοίλης συνάρτησης έχουν σωστές μορφές για τη θεωρία κατανάλωσης και παραγωγής.

Χρησιμοποιώντας υπολογισμούς για να βρούμε το εσωτερικό μέγιστο μιας συνάρτησης f , κάποιος θα πρέπει πρώτα να βρει τα κρίσιμα σημεία της f , θέτοντας τις πρώτες παραγώγους ίσες με το μηδέν και λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Έπειτα, κάποιος χρησιμοποιεί τις συνθήκες δεύτερης τάξης για να διαχωρίσει τα μέγιστα από τα ελάχιστα και αξιολογεί τη συνάρτηση σε όλα τα τοπικά μέγιστα για να αποφασίσει ποιό από αυτά τα τοπικά μέγιστα είναι και ολικό μέγιστο. Ωστόσο, κανείς χρειάζεται αυτά τα επιπλέον βήματα για μια κοίλη συνάρτηση. Ένα κρίσιμο σημείο μιας κοίλης συνάρτησης είναι αυτόματα μέγιστο και μάλιστα ολικό μέγιστο.

Θεώρημα 1.6

Έστω f μια κοίλη (κυρτή) συνάρτηση σε ένα ανοιχτό, κυρτό υποσύνολο U του R^n. Αν x_0 είναι ένα κρίσιμο σημείο της f τέτοιο ώστε $Df(x_0)=0$ τότε $x_0 \in U$ είναι ένας ολικός μεγιστοποιητής (ελαχιστοποιητής) της f στο U .

Απόδειξη :

Για να αποδείξουμε ότι τα κρίσιμα σημεία μιας κοίλης συνάρτησης είναι αυτόματα και ολικά μέγιστα, ουσιαστικά αναφερόμαστε στο θεώρημα 1.3 και στο πόρισμα 1.4. Αν η f είναι κοίλη και $Df(x_0)=0$ τότε από τις ανισότητες (6) και (8), $f(y)-f(x_0)\leq 0$ για όλα τα y στο U . Με άλλα λόγια για όλα τα $y \in U$, $f(y)\leq f(x_0)$ ή το x_0 είναι ολικός μεγιστοποιητής της f στο U .

Στην πραγματικότητα, ένα ακόμα ισχυρότερο αποτέλεσμα από το θεώρημα 1.6 ισχύει για τις κοίλες συναρτήσεις. Στην παραπάνω αναφορά του θεωρήματος 1.6 αναφερόμαστε μόνο σε εσωτερικά μέγιστα. Όμως συχνά, το ολικό μέγιστο υπάρχει στο όριο πάνω στον κυρτό τομέα το U . Το πόρισμα 1.4 δίνει αμέσως την ακόλουθη συνθήκη για ολικό μέγιστο μιας κοίλης συνάρτησης, ακόμα και αν ο μεγιστοποιητής είναι στο όριο του τομέα. Στο θεώρημα αυτό περιλαμβάνεται το θεώρημα 1.6 ως μια ειδική περίπτωση.

Θεώρημα 1.7

Έστω f είναι μια C^1 συνάρτηση ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο U του R^n . Αν η f είναι μια κοίλη συνάρτηση και αν x_0 είναι ένα σημείο στο U το οποίο ικανοποιεί $Df(x_0)(y-x_0) \le 0$ για όλα τα $y \in U$, τότε x_0 είναι ολικός μεγιστοποιητής της f στο U . Αν η f είναι μια κυρτή συνάρτηση και αν x_0 είναι ένα σημείο στο U το οποίο ικανοποιεί $Df(x_0)(y-x_0) \ge 0$ για όλα τα $y \in U$, τότε το x_0 είναι ένας ολικός ελαχιστοποιητής της f στο U .

Παράδειγμα 1.6

Αν f είναι μια C^1 αύξουσα, κοίλη συνάρτηση μιας μεταβλητής στο διάστημα $[a,b]$, τότε $f'(b)(x-b) \le 0$ για όλα τα $x \in U$.(Γιατί;) Από το θεώρημα 1.7 b είναι ένας ολικός μεγιστοποιητής της f στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 1.7

Θεωρούμε μια κοίλη συνάρτηση $U(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ σε ένα (κυρτό) τρίγωνο

$$B = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\}.$$

Λόγω συμμετρίας θα περιμέναμε ότι $(x_0, y_0) = (1,1)$ είναι ένας μεγιστοποιητής του U στο B. Για να το αποδείξουμε, χρησιμοποιούμε το θεώρημα 1.7 . Έστω (x,y) είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο B. Έπειτα ,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial U}{\partial y}(1,1)(y-1) = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1)$$

$$= \frac{1}{4}(x + y - 2)$$

$$\le 0$$

Αφού $x + y - 2 \le 0$ για (x, y) στο σετ περιορισμών B. Από το θεώρημα 1.7 , $(1,1)$ είναι ένας ολικός μεγιστοποιητής του U στο B.

Η ιδιότητα ότι τα κρίσιμα σημεία των κοίλων συναρτήσεων είναι ολικά μέγιστα, είναι σημαντική στην οικονομική θεωρία. Για παράδειγμα, πολλές οικονομικές αρχές, όπως ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης ισούται με το λόγο των τιμών ή ότι το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος, είναι απλά αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης των αντίστοιχων προβλημάτων μεγιστοποίησης. Ιδανικά, ένας οικονομολόγος θα ήθελε μια τέτοια συνθήκη να είναι και ικανή εξασφαλίζοντας ότι η χρησιμότητα ή το κέρδος μεγιστοποιούνται, ώστε να μπορεί να παρέχει έναν οδηγό για την οικονομική συμπεριφορά. Αυτή η κατάσταση συμβαίνει όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι κοίλη.

Επιπρόσθετα, ένας οικονομολόγος, ο οποίος θέλει να αναλύσει πώς ο μεγιστοποιητής σ΄ένα πρόβλημα παραμετροποίησης βασίζεται στις παραμέτρους, συνήθως θα εφαρμόσει το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem) στις εξισώσεις των αναγκαίων συνθηκών της πρώτης τάξης για μεγιστοποίηση. Η μόνη περίπτωση στην οποία μπορεί να εγγυηθεί ότι η λύση σε αυτές τις εξισώσεις είναι πράγματι μέγιστο για όλες τις τιμές των παραμέτρων είναι όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι κοίλη.

Παράδειγμα 1.8

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους μιας επιχείρησης της οποίας η συνάρτηση παραγωγής είναι $y = g(x)$, όπου y δηλώνει την εκροή και το x την εισροή. Αν το p είναι η τιμή της εκροής και w_i το κόστος ανά μονάδα εισροής i, τότε η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι :

$$\Pi(x) = pg(x) - (w_1 x_1 + ... + w_n x_n) \qquad \textbf{(9)}$$

Όπως εύκολα μπορεί να ελεγχθεί, το Π θα είναι μια κοίλη συνάρτηση παραγωγής είναι μια κοίλη συνάρτηση. Σ΄αυτήν την περίπτωση η συνθήκη της πρώτης τάξης

$$p\frac{\partial g}{\partial x_i} = w_i \quad \text{για } i = 1, 2, ..., n, \qquad \textbf{(10)}$$

η οποία λέει ότι το οριακό έσοδο του προϊόντος είναι ίσο με τον παράγοντα τιμή για κάθε εισροή και είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για έναν εσωτερικό μεγιστοποιητή κέρδους. Αν κάποιος θέλει να μελετήσει το αποτέλεσμα των αλλαγών στο w_i ή στο p στον άριστο συνδυασμό εισροών, θα μπορούσε να εφαρμόσει συγκριτική στατική ανάλυση στο σύστημα (10) . Από τη στιγμή που τα κέρδη είναι κοίλα για όλα τα p και w , η λύση του (10) θα είναι αυτόματα η άριστη εισροή για όλες τις επιλογές p και w .

Μια δεύτερη χρήσιμη ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων είναι ότι συμπεριφέρονται καλά κάτω από άθροιση και πολλαπλασιασμό με κάποιους σταθερούς αριθμούς, που πρέπει όμως να είναι θετικοί, όπως δείχνει και το ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξη του προκύπτει αμέσως από τον ορισμό (1) για τις κοίλες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.8

Έστω $f_1,...,f_k$ είναι κοίλες (κυρτές) συναρτήσεις , κάθε μια εκ των οποίων ορίζεται στο ίδιο κυρτό υποσύνολο U του R^n . Έστω $a_1,...,a_k$ θετικοί αριθμοί. Τότε , $a_1 f_1 + ... + a_k f_k$ είναι μια κοίλη (κυρτή) συνάρτηση στο U .

Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει το θεώρημα 1.8 και το γεγονός ότι οι γραμμικές συναρτήσεις είναι κοίλες για να αποφασίσει αμέσως αν η συνάρτηση παραγωγής g στο παράδειγμα 1.8 είναι κοίλη, και έτσι είναι και η αντίστοιχη συνάρτηση κέρδους Π. Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει το θεώρημα 1.8 για να αποδείξει ότι ένα άθροισμα συναρτήσεων είναι κοίλο δείχνοντας ότι κάθε ποσό ζήτησης είναι κοίλο.

Για παράδειγμα $f(x_1,...,x_n) = a_1 x_1^{k_1} + ... + a_n x_n^{k_n}$ είναι κοίλο στο R_+^n δεδομένου ότι κάθε $a_1 \geq 0$ και κάθε k_i βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1.

Μια τέτοια άθροιση συμβαίνει στη θεωρία της κοινωνικής ευημερίας. Σε μια οικονομία με m καταναλωτές με συναρτήσεις χρησιμότητας $u_1,...,u_m$ αντίστοιχα, η μέτρηση της κοινωνικής ευημερίας με οποιαδήποτε υπόθεση για τις πηγές είναι το άθροισμα $a_1 u_1 + ... + a_m u_m$ όπου τα a_i είναι οποιοδήποτε σύνολα θετικών βαρών. Αν τα u_i είναι όλα κοίλα, η αντίστοιχη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας θα είναι κοίλη. Σ αυτή την περίπτωση, το σύνολο των μεγιστοποιητών των διαφόρων συναρτήσεων κοινωνικής ευημερίας θα είναι ένα σύνολο βέλτιστων κατά Pareto συνδυασμών.

Ένα τρίτο πλεονέκτημα των κοίλων συναρτήσεων είναι ότι τα σύνολά επιπέδων τους έχουν τις σωστές μορφές που δεσμεύουν τα κυρτά υποσύνολα «από κάτω».

Θεώρημα 1.9

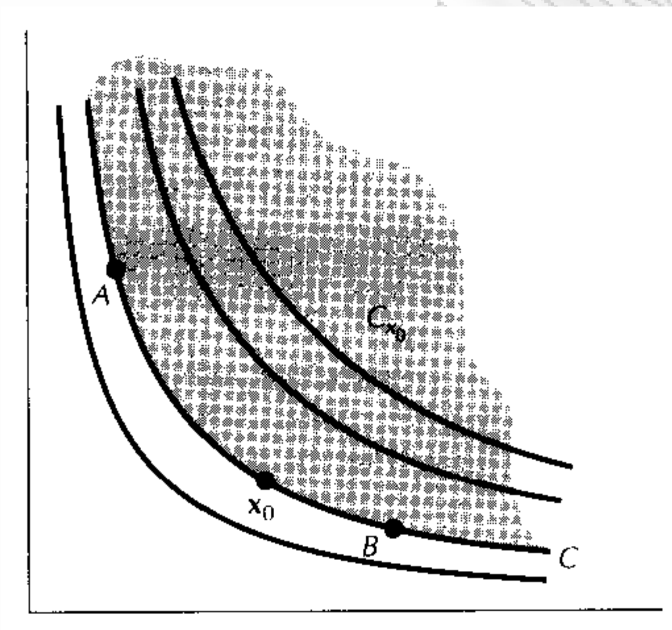
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο κυρτό σύνολο U του R^n. Αν η f είναι κοίλη, τότε για οποιοδήποτε x_0 στο U, το σύνολο

$$C_{x_0}^{+} \equiv \{x \in U : f(x) \geq f(x_0)\}$$

είναι ένα κυρτό σύνολο. Αν η f είναι κυρτή, τότε για οποιοδήποτε x_0 στο U το σύνολο

$$C_{x_0}^{-} \equiv \{x \in U : f(x) \leq f(x_0)\}$$

Είναι ένα κυρτό σύνολο.



Εικόνα 10

Απόδειξη:

Έστω x και y δυο σημεία στο $C_{x_0}^{+}$ έτσι ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ και $f(y) \geq f(x_0)$.

Τότε

$$
\begin{aligned}
f(tx+(1-t)y) &\geq tf(x)+(1-t)f(y) \\
&\geq tf(x_0)+(1-t)f(x_0) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}
$$

Άρα $tx+(1-t)y$ είναι στο $C_{x_0}^{+}$ και το $C_{x_0}^{+}$ είναι ένα κυρτό σύνολο.

Η ιδιότητα ότι το σετ πάνω από οποιοδήποτε επίπεδο σετ μιας κοίλης συνάρτησης, είναι ένα κυρτό σετ είναι μια φυσικό απαιτούμενο για τις συναρτήσεις χρησιμότητας και παραγωγής. Για παράδειγμα, θεωρούμε μια καμπύλη αδιαφορίας C της κοίλης συνάρτησης χρησιμότητας U που απεικονίζεται στην εικόνα 10. Δυο συνδυασμοί A και B έχουν απεικονιστεί πάνω στο C. Από το θεώρημα 1.9 , η σκιασμένη περιοχή στην εικόνα 10 , όπου απεικονίζει όλους τους συνδυασμούς που είναι προτιμότεροι από τα A και B, είναι ένα κυρτό σύνολο. Συγκεκριμένα, το σετ των κυρτών συνδυασμών των A και B – οι συνδυασμοί που μπορούν να δημιουργηθούν ανακατεύοντας τα περιεχόμενα των συνδυασμών A και B – βρίσκονται όλοι πάνω από τη γραμμή που συνδέει τα A και B και βρίσκονται στη σκιασμένη περιοχή. Έτσι, οι κοίλες συναρτήσεις χρησιμότητας έχουν την επιθυμητή ιδιότητα ότι δοθέντων δυο οποιονδήποτε συνδυασμών A και B κάποιων αγαθών ένας καταναλωτής με κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας, θα προτιμάει πάντοτε ένα συνδυασμό των A και B από τα A και B ξεχωριστά. Ένα μικροοικονομικό κείμενο θα μπορούσε να αποδώσει την ιδιότητα αυτή ως εξής: ένας καταναλωτής προτιμάει ένα συνδυασμό που περιέχει ένα μίγμα σόδας και τσιπς από ένα συνδυασμό μόνο με σόδα και καθόλου τσιπς ή ένα συνδυασμό μόνο με τσιπς και καθόλου σόδα.

Ένα πιο σημαντικό πλεονέκτημα της μορφής των καμπύλων αδιαφορίας στην εικόνα 10 είναι ότι παρουσιάζει ένα φθίνων οριακό ρυθμό υποκατάστασης. Καθώς κάποιος κινείται από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της καμπύλης αδιαφορίας C αυξάνει την κατανάλωση του ενός αγαθού και ο καταναλωτής επιθυμεί να σταματήσει όλο και περισσότερες μονάδες από το αγαθό 1 για να κερδίσει επιπρόσθετες μονάδες από το αγαθό 2. Αυτή η ιδιότητα – το κεντρικό αξίωμα της θεωρίας του καταναλωτή – είναι μια ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας επειδή κάθε επίπεδο που αποτελεί το όριο είναι μια κυρτή περιοχή.

Κοίλες συναρτήσεις στα οικονομικά

Έχουμε ήδη περιγράψει 3 ιδιότητες των κοίλων συναρτήσεων οι οποίες τις κάνουν ιδιαίτερα χρήσιμες στα οικονομικά μοντέλα. Επιπλέον, υπάρχουν κάποιες συναρτήσεις που προκύπτουν από τα οικονομικά μοντέλα που είναι φυσικά κοίλες. Για παράδειγμα θεωρείστε τη συνάρτηση δαπανών $e(p,u)$ η οποία περιγράφει την ελάχιστη ποσότητα εισοδήματος που είναι απαραίτητη για να πετύχουμε χρησιμότητα u στις τιμές p. Μπορεί να περιγραφεί αναλυτικά ως εξής:

$$e(p,u) = \min\{p_1x_1 + \ldots + p_nx_n : u(x) \geq u\}$$

Θεώρημα 1.10

Η συνάρτηση δαπανών είναι κοίλη και ομογενής πρώτου βαθμού στο p.

Απόδειξη:

Έστω (p,x) και (p',x') δυο συνδυασμοί τιμής – κατανάλωσης που ελαχιστοποιούν τις δαπάνες σε επίπεδο χρησιμότητας u. Έστω $p'' = tp + (1-t)p'$ για οποιοδήποτε t ανάμεσα στο 0 και στο 1 και έστω x'' ο αντίστοιχος συνδυασμός που ελαχιστοποιεί τις δαπάνες. Τότε,

$$e(p'',u) = p''\cdot x'' = tp\cdot x'' + (1-t)p'\cdot x'' \qquad (11)$$

Αλλά το x'' δεν είναι απαραίτητα ο φθηνότερος τρόπος για αν πετύχουμε χρησιμότητα u στις τιμές p και p'

Ωστόσο

$$p\cdot x'' \geq e(p,u) \quad \text{και} \quad p'\cdot x'' \geq e(p',u) \qquad (12)$$

Συνδυάζοντας την (11) και (12) οδηγούμαστε στην κοιλότητα της $e(p,u)$ στο p:

$$e(p'',u) \geq te(p,u) + (1-t)e(p'u)$$

Για να δούμε ότι $e(tp,u) = te(p.u)$, αξίζει να σημειώσουμε ότι από τον παραπάνω ορισμό της συνάρτησης δαπανών, το x το οποίο ελαχιστοποιεί το $p\cdot x$ υπό τον περιορισμό $u(x) \geq u$ θα ελαχιστοποιεί επίσης το $tp\cdot x$ με τον ίδιο περιορισμό.

Στην πραγματικότητα, όλα όσα απαιτεί η παραπάνω απόδειξη είναι ότι ελαχιστοποιούμε μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση με ένα σετ περιορισμών και ότι υπό εξέταση συνάρτηση είναι απλά μια ελάχιστη τιμή. Ένας αριθμός άλλων οικονομικών συναρτήσεων προκύπτει με αυτόν τον τρόπο. Για παράδειγμα η συνάρτηση κόστους $c(w,y)$ που αντιστοιχεί σε μια δοθείσα συνάρτηση παράγωγης g, αναφέρεται στο ελάχιστο κόστος που χρειάζεται για να παραχθεί προϊόν y όταν οι τιμές των εισροών δίνονται με w:

$$c(w,y) = \min\{w_1x_1 + \ldots + w_nx_n : g(x) = y\}$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1.10 δείχνουμε ότι η $c(w, y)$ είναι κοίλη και ομογενής ως προς τις τιμές w. Τελικά, θεωρούμε την βέλτιστη συνάρτηση κέρδους $\pi(p, w)$ η οποία είναι το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτευχθεί όταν η τιμή των εκροών είναι p και το κόστος των εισροών είναι w. Γράφουμε το π ως :

$$\pi(p, w) = \max_{y,x}\{py - w \cdot x : y \leq g(x)\} \qquad (13)$$

Άρα, $\pi(p, w)$ είναι κυρτή και ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού στα (p, w).

Αυτές οι 3 συναρτήσεις παρουσιάζουν ένα γενικό φαινόμενο για την βελτιστοποίηση γραμμικών αντικειμενικών συναρτήσεων τις οποίες παρουσιάζουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.11

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης $a \cdot x$ ως προς x σε ένα δοσμένο σετ περιορισμών . Η τιμή της βέλτιστης αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι κυρτή και ομογενής πρώτου βαθμού συνάρτηση ως προς το a. Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι κοίλη και ομογενής πρώτου βαθμού στο a .

Τελικά, οι κοίλες συναρτήσεις χρησιμότητας παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη θεωρία προσδοκώμενης χρησιμότητας διότι, καθώς ο Arrow πρώτος παρατήρησε, σε τέτοια μοντέλα το επίπεδο της αποστροφής κινδύνου ενός καταναλωτή μετριέται από την κοιλότητα της συνάρτησης χρησιμότητας του καταναλωτή.

Οιονεί κοίλες και οιονεί κυρτές συναρτήσεις

Οι κοίλες συναρτήσεις θέτουν το ίδιο δίλημμα όπως και οι ομογενείς. Έχουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες για τις συναρτήσεις παραγωγής και χρησιμότητας. Ωστόσο, όπως ξεκάθαρα δείχνουν τα παραδείγματα 1.3, 1.4 και 1.5, η κοιλότητα είναι μια θεμελιώδης ιδιότητα. Βασίζεται στους αριθμούς που οι συναρτήσεις δίνουν στα σετ επιπέδων και όχι μόνο στη μορφή τους. Με άλλα λόγια, μια μονοτονική μετατροπή μιας κοίλης συνάρτησης δε χρειάζεται να είναι κοίλη.

Ωστόσο, οι κοίλες συναρτήσεις έχουν μια θεμελιώδη σειριακή ιδιότητα, όπως δείχνει το θεώρημα 1.9. Τα επίπεδά τους ορίζονται από κυρτά σύνολα από κάτω. Αυτή η ιδιότητα οδηγεί στην πολύ επιθυμητή συνθήκη του φθίνοντος οριακού ρυθμού υποκαταστάσεως των καμπύλων αδιαφορίας.

Όπως κάναμε και στις ομογενείς συναρτήσεις, δίνουμε ένα όνομα στην τάξη των συναρτήσεων που έχουν την επιθυμητή σειριακή ιδιότητα που έχουν οι κοίλες συναρτήσεις. Ένα φυσικό όνομα που προκύπτει για μια συνάρτηση που είναι μια εκδοχή των κοίλων συναρτήσεων, είναι οιονεί κοίλες συναρτήσεις.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο U του R^n είναι οιονεί κοίλη αν για κάθε πραγματικό αριθμό a,

$$C_a^+ \equiv \{x \in U : f(x) \geq a\}$$

Είναι ένα κυρτό σύνολο. Ομοίως, η f είναι οιονεί κυρτή αν για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό a,

$$C_a^- \equiv \{x \in U : f(x) \leq a\}$$

Είναι ένα κυρτό σύνολο

Παρουσιάζονται στο ακόλουθο θεώρημα, κάποιοι εναλλακτικοί ορισμοί των οιονεί κοίλων και οιονεί κυρτών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.12

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο κυρτό σύνολο U στο R^n. Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι ισοδύναμες:

a. Η f είναι οιονεί κοίλη συνάρτηση ορισμένη στο κυρτό σύνολο U στο R^n.

b. Για όλα τα x και y που ανήκουν στο U και όλα $t \in [0,1]$,

$$f(x) \geq f(y) \text{ συνεπάγεται } f(tx+(1-t)y) \geq f(y)$$

c. Για όλα τα x, $y \in U$ και για όλα $t \in [0,1]$,

$$f(tx+(1-t)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

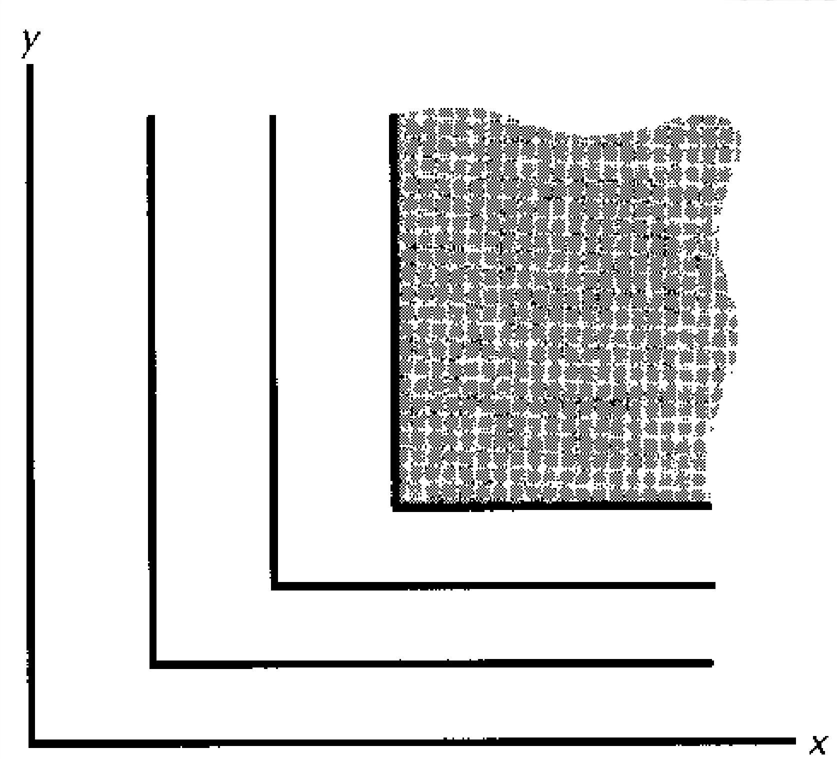
Από το θεώρημα 1.9, κάθε κοίλη συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη και κάθε κυρτή είναι οιονεί κυρτή. Επιπλέον οποιοσδήποτε μονοτονικός μετασχηματισμός μιας κοίλης συνάρτησης είναι οιονεί κοίλη συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, από τη στιγμή που οποιαδήποτε συνάρτηση Cobb-Douglas είναι ένας μονοτονικός μετασχηματισμός της συνάρτησης Cobb-Douglasμε φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας, κάθε συνάρτηση Cobb-Douglasδυο μεταβλητών είναι οιονεί κοίλη.

Θεώρημα 1.13

Κάθε συνάρτηση Cobb-Douglas $F(x,y) = Ax^a y^b$ με A, a και b όλα θετικά είναι οιονεί κοίλη.

Παράδειγμα 1.9

Θεωρούμε τη συνάρτηση Leontief ή τη συνάρτηση σταθερών συντελεστών $Q(x,y)=\min\{ax,by\}$ με $a,b \succ 0$. Τα σύνολα του επίπεδο Q φαίνονται στην εικόνα 11. Σίγουρα, η περιοχή πάνω και δεξιά από οποιαδήποτε L–μορφής σύνολο είναι ένα κυρτό σύνολο. Επομένως η Q είναι οιονεί κοίλη.



Εικόνα 11

Παράδειγμα 1.10

Θεωρούμε την σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης συνάρτηση παραγωγής

$$Q(x,y)=(a_1x_1^r + a_2x_2^r)^{1/r}, \qquad \text{όπου } 0 \prec r \prec 1$$

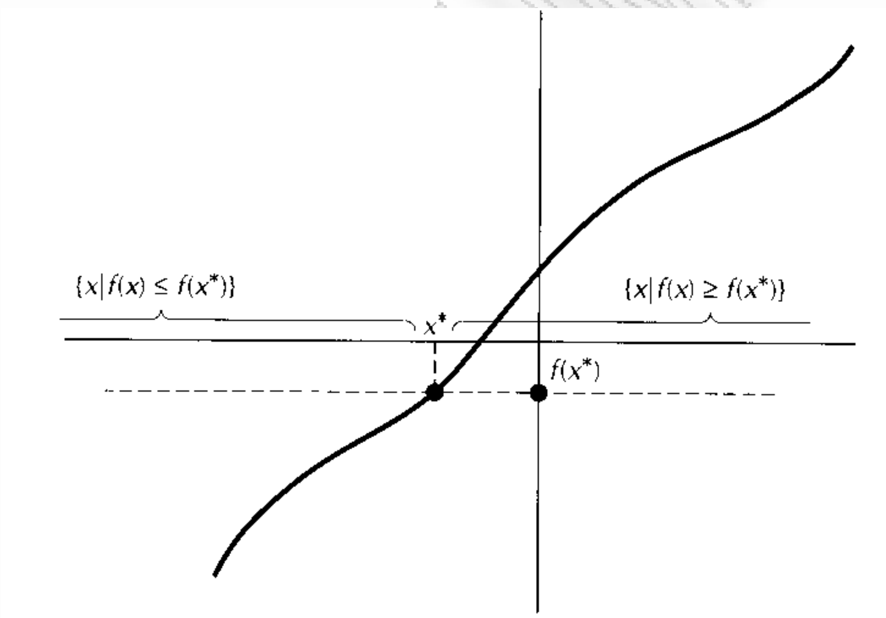
Από το θεώρημα 1.8 το $(a_1x_1^r + a_2x_2^r)$ είναι κοίλο. Από τη στιγμή που $g(z)=z^{1/r}$ είναι ένας μονοτονικός μετασχηματισμός, η Q είναι ένας μονοτονικός μετασχηματισμός μιας κοίλης συνάρτησης και επομένως είναι οιονεί κοίλη.

Παράδειγμα 1.11

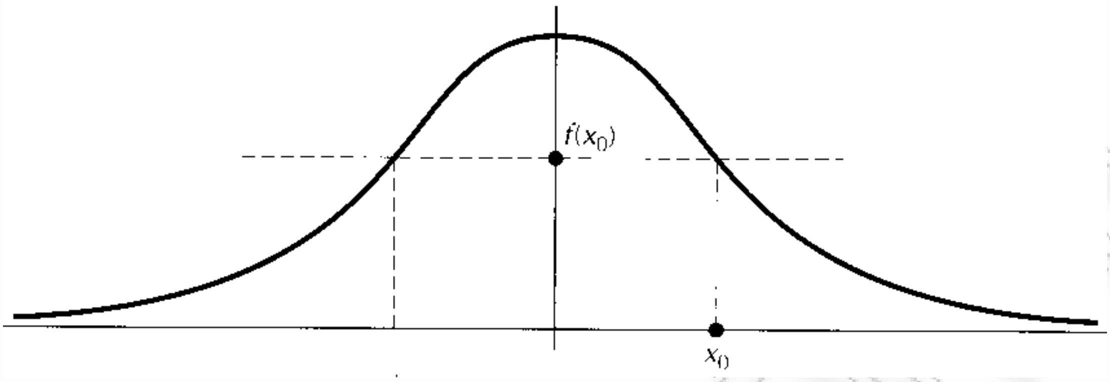
Έστω $y = f(x)$ είναι μια οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση στο R^1, όπως στην εικόνα 12. Για οποιοδήποτε $x^*, \{x : f(x) \geq f(x^*)\}$ είναι μέσα στο διάστημα $[x^*, \infty)$,είναι ένα κυρτό υποσύνολο του R^1 . Έτσι η f είναι οιονεί κοίλη. Από την άλλη πλευρά το $\{x : f(x) \leq f(x^*)\}$ είναι ένα κυρτό σύνολο $(-\infty, x^*]$. Έτσι, μια αύξουσα συνάρτηση στο R^1 είναι και οιονεί κοίλη είναι και οιονεί κυρτή. Το ίδιο ισχύει και για μια φθίνουσα συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.12

Οποιαδήποτε συνάρτηση στο R^1 η οποία αυξάνεται μονοτονικά μέχρι να φτάσει σε ένα ολικό μέγιστο κι έπειτα μονοτονικά πέφτει, τέτοια ώστε $y = -x^2$ ή η συνάρτηση με τη μορφή καμπάνας ως πυκνότητα πιθανότητας $y = ke^{-x^2}$, είναι μια οιονεί κοίλη συνάρτηση, όπως δείχνει η εικόνα 13. Για όποιο x_1 όπως στην εικόνα 13, υπάρχει ένα x_2 τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Έπειτα, το $\{x : f(x) \geq f(x_1)\}$ είναι ένα κυρτό διάστημα $[x_1, x_2]$.



Εικόνα 12



Εικόνα 13

Παρατήρηση

Υπάρχει μια διάφορα πηγαίνοντας από τις κοίλες στις οιονεί κοίλες συναρτήσεις σε σχέση με το να πάμε από τις ομογενείς στις ομοθετικές .Στην τελευταία περίπτωση, ορίζουμε απλά μια ομοθετική συνάρτηση ως οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία έχει τα ίδια σύνολα επιπέδων όπως και μια ομογενής συνάρτηση. Στην προηγούμενη περίπτωση, ορίζουμε μια οιονεί κοίλη συνάρτηση ως κάθε συνάρτηση η οποία έχει την επιθυμητή σειριακή ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων. Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν πράγματι οποιαδήποτε οιονεί κοίλη συνάρτηση είναι ισοδύναμη με κάποια κοίλη συνάρτηση με ένα μονοτονικό μετασχηματισμό. Οι Arrow και Enthoven ασχολήθηκαν με αυτή την ερώτηση στη μελέτη τους για τις οιονεί κοίλες συναρτήσεις και παρείχαν ένα ακριβές παράδειγμα μιας οιονεί κοίλης συνάρτησης η οποία δεν είναι ένας μονοτονικός μετασχηματισμός οποιασδήποτε κοίλης συνάρτησης.

Υπολογισμός Κριτηρίων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την ανάπτυξη υπολογιστικών κριτηρίων για την οιονεί κοιλότητα. Ανάλογα με το θεώρημα 1.3 για τις κοίλες συναρτήσεις, υπάρχει μια αναγκαία και ικανή πρώτης παραγώγου συνθήκη για την οιονεί κοιλότητα, η οποία παρέχει μια χρήσιμη τεχνική για να αποδεικνύονται θεωρήματα για τις οιονεί κοίλες συναρτήσεις. Όπως στο θεώρημα 1.3, είναι τόσο δυσμεταχείριστο να χρησιμοποιήσουμε για να ελέγξουμε αν οποιαδήποτε συγκεκριμένη συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη, έτσι θα αναπτύξουμε ένα απλό τεστ δεύτερης τάξης στην επόμενη ενότητα . Αφού έχουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης για άλλες ειδικές τάξεις συναρτήσεων θα παρουσιάσουμε τη συνθήκη πρώτης τάξης για οιονεί κοίλες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.14

Υποθέστε ότι η F είναι μια C^1 συνάρτηση σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο U του R^n. έπειτα, η F είναι οιονεί κοίλη στο U αν και μόνο αν

$$F(y) \geq F(x) \text{ συνεπάγεται ότι } DF(x)(y-x) \geq 0 \qquad (14)$$

Η F είναι οιονεί κυρτή στο U αν και μόνο αν

$$F(y) \leq F(x) \text{ συνεπάγεται ότι } DF(x)(y-x) \leq 0$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι η F είναι οιονεί κοίλη στο U και ότι $F(y) \geq F(x)$ για κάποια $x, y \in U$.

Τότε για όλα τα $t \in [0,1]$, Ισχύει

$$F(x+t(y-x)) \geq F(x)$$

Αφού

$$\frac{F(x+t(y-x))-F(x)}{t} \geq 0$$

Για όλα τα $t \in (0,1)$, αφήνουμε το $t \to 0$ για να παρατηρήσουμε

$$DF(x)(y-x) \geq 0$$

Η απόδειξη του αντίστροφου ακολουθεί τον ίδιο τύπο όπως και παραπάνω , αλλά είναι λίγο πιο περίπλοκη και υπάρχει στο παράρτημα.

Παρατήρηση

Από το θεώρημα 1.9 , όλες οι κοίλες συναρτήσεις είναι οιονεί κοίλες . Αυτό το γεγονός φαίνεται συγκρίνοντας τις αντίστοιχες συνθήκες πρώτης τάξης (6) και (14). Όπως δείχνουν τα παραδείγματα 1.8 και 1.9, δεν είναι όλες οι οιονεί κοίλες συναρτήσεις κοίλες. Στην πραγματικότητα οι οιονεί κοίλες συναρτήσεις αποτυγχάνουν να έχουν 2 από τις 3 ιδιότητες των κοίλων συναρτήσεων οι οποίες έχουν αναφερθεί νωρίτερα. Πρώτα από όλα, ένα κρίσιμο σημείο μιας οιονεί κοίλης συνάρτησης δε χρειάζεται να είναι μέγιστο, πόσο μάλλον ολικό μέγιστο. Για παράδειγμα , η συνάρτηση $y = x^3$ στο R^1 είναι οιονεί κοίλη σύμφωνα με το παράδειγμα 1.8. Το κρίσιμο σημείο $x = 0$ δεν είναι κανένα είδος μέγιστου. Δεύτερον, το άθροισμα των οιονεί κοίλων συναρτήσεων δε χρειάζεται να είναι οιονεί κοίλο. Για παράδειγμα $f_1(x) = x^3$ και

$f_2(x) = -x$ είναι και οι δυο μονοτονικές συναρτήσεις στο R^1 (και επομένως οιονεί κοίλες). Ωστόσο, η $f_3 = x^3 - x$ δεν είναι ούτε οιονεί κοίλη ούτε οιονεί κυρτή.

Ωστόσο, μια οιονεί κοίλη συνάρτηση που είναι επίσης ομογενής πρώτου βαθμού, είναι κοίλη όπως δείχνει και το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.15

Υποθέστε ότι η F είναι μια πραγματική θετική συνάρτηση ορισμένη στον κυρτό κώνο C στο R^n. Αν η F είναι ομογενής πρώτου βαθμού και οιονεί κοίλη στο C τότε είναι κοίλη στο C.

Η απόδειξη του θεωρήματος 1.15 είναι εύκολη αλλά λίγο μεγάλη και παρουσιάζεται στο παράρτημα της εργασίας.

Ψευδοκοίλες Συναρτήσεις

Για να αναπτύξουμε το πιο χρήσιμο υπολογιστικό κριτήριο για την οιονεί κοιλότητα και οιονεί κυρτότητα, ουσιαστικά δηλαδή την κατάλληλη συνθήκη δεύτερης τάξης, εισάγουμε μια νέα κλάση συναρτήσεων, μια κλάση που ενώνει τις κοίλες με τις οιονεί κοίλες συναρτήσεις. Αυτή η κλάση συναρτήσεων ορίστηκε από τον O. Mangasarian ώστε να είναι πολύ κοντά στην κλάση των οιονεί κοίλων συναρτήσεων και διατηρεί μια σημαντική ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων ότι τα κρίσιμα σημεία είναι αυτόματα ολικά μέγιστα.

Ορισμός : Έστω U ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο στο R^n. Μια C^1 συνάρτηση F : $U \to R$ είναι ψευδοκοίλη στο $x^* \in U$ αν

$$DF(x^*)(y - x^*) \leq 0 \text{ δείχνει ότι } F(y) \leq F(x^*) \qquad \textbf{(15)}$$

για όλα τα $y \in U$. Η συνάρτηση F είναι ψευδοκοίλη στο U αν ισχύει η (15) για όλα τα $x^* \in U$. Για να ορίσουμε μια ψευδοκυρτή συνάρτηση στο U, πρέπει απλά να αντιστρέψουμε την πρώτη ανισότητα στη (15).

Όπως δείχνει το πόρισμα 1.4, το κριτήριο πρώτης τάξης 1.3 για την κοιλότητα δείχνει ξεκάθαρα τη συνθήκη (15) για ψευδοκοιλότητα. Έτσι μια C^1 κοίλη συνάρτηση είναι πάντοτε ψευδοκοίλη. Επιπλέον, η συνθήκη (15) είναι ακριβώς η ίδια συνθήκη που κάποιος χρησιμοποιεί για να αποδείξει ότι ένα κρίσιμο σημείο μιας κοίλης συνάρτησης είναι αυτόματα ολικό μέγιστο.

Θεώρημα 1.16

Έστω U ένα κυρτό υποσύνολο στο R^n και έστω $F : U \to R$ είναι μια C^1 ψευδοκοίλη συνάρτηση. Αν $x^* \in U$ έχει την ιδιότητα $DF(x^*)(y - x^*) \leq 0$ για όλα τα $y \in U$ για παράδειγμα $DF(x^*) = 0$ τότε το x^* είναι ολικό μέγιστο της F στο U. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για ψευδοκυρτές συναρτήσεις.

Για να δούμε πως η ψευδοκοιλότητα σχετίζεται με την οιονεί κοιλότητα στην άλλη πλευρά της ένωσης, σημειώστε ότι το «contrapositive» του κριτηρίου πρώτης τάξης (14) για την οιονεί κοιλότητα

$$DF(x)(y - x) < 0 \quad \text{δείχνει} \quad F(y) < F(x)$$

είναι όμοιο με τον ορισμό (15) μιας ψευδοκοίλης συνάρτησης. Κάποιος απλά έχει να αλλάξει το **<** στη (16) με το **≤** στη (15). Το ακόλουθο θεώρημα κάνει ακριβή τη στενότερη σχέση ανάμεσα στις ψευδοκοίλες και τις οιονεί κοίλες συναρτήσεις. Η απόδειξη είναι απλή. Ωστόσο, η απόδειξή της θα γίνει στο παράρτημα ώστε να μη διασπάσουμε τη ροη της παρουσίασης σε αυτό το σημείο.

Θεώρημα 1.17

Έστω U είναι ένα κυρτό υποσύνολο στο R^n . Έστω $F : U \to R$ είναι μια C^1 συνάρτηση. Τότε ,

Α. Αν η F είναι ψευδοκοίλη στο U , η F είναι οιονεί κοίλη στο U και

Β. Αν η U είναι ανοιχτό και αν $\nabla F(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in U$, τότε η F είναι ψευδοκοίλη στο U αν και μόνο αν η F είναι οιονεί κοίλη στο U

Η κύρια αιτία για να εισάγουμε ψευδοκοίλες συναρτήσεις είναι το γεγονός ότι υπάρχει μια απλή δοκιμή δευτέρων παραγώγων για τέτοιες συναρτήσεις, μια δοκιμή που είναι επίσης ο πιο αποτελεσματικός έλεγχος για το αν μια συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη. Αυτή η συνθήκη δεύτερης τάξης προκύπτει από μια περιορισμένη μεγιστοποίηση που πλησιάζει τις ψευδοκοίλες συναρτήσεις, οι οποίες συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.18

Έστω U ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο στο R^n. Έστω $F : U \to R$ είναι μια C^1 συνάντηση στο U. Έπειτα, η F είναι ψευδοκοίλη στο U αν και μόνο αν για κάθε $x*$ στο U, το $x*$ είναι η λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης με περιορισμούς

maximize $F(x)$

$$C_{x^*} \equiv \{y \in U : DF(x^*)(y - x^*) \le 0\} \qquad \textbf{(17)}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος 1.18 προκύπτει αμέσως σημειώνοντας ότι η συνθήκη (15) για ψευδοκοιλότητα ισοδυναμεί με το πρόβλημα μεγιστοποίησης του θεωρήματος 1.18. Χρειάζονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για προβλήματα μεγιστοποίησης όπως το (17). Για οποιοδήποτε $x*$ η συνάρτηση Lagrangian του προβλήματος (17) είναι :

$$L(x,\lambda) = F(x) - \lambda DF(x^*) \cdot (x - x^*)$$

$$= F(x) - \lambda \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_i^*)$$

Από τη στιγμή που ο περιορισμός στη (17) είναι γραμμικός δε χρειαζόμαστε ένα πολλαπλασιαστή για την αντικειμενική συνάρτηση . Αφού

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,1) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) - 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0$$

$x = x*, \lambda = 1$ είναι η λύση της συνθήκης πρώτης τάξης του (17). Η αντίστοιχη ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης που το $x*$πρέπει να ικανοποιεί για να είναι λύση της (17) περιλαμβάνει μια περιορισμένη Hessian H της F. Αυτή η μήτρα H δημιουργείται περιορίζοντας τη συνθήκη Hessian $D^2F(x)$ πάνω και αριστερά από τις πρώτες μερικές παραγώγους $DF(x)$ της F

$$H = \begin{pmatrix} 0 & F'_{x_1} & F'_{x_2} & \cdots & F'_{x_n} \\ F'_{x_1} & F''_{x_1x_1} & F''_{x_1x_2} & \cdots & F''_{x_1x_n} \\ F'_{x_2} & F''_{x_2x_1} & F''_{x_2x_2} & \cdots & F''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F'_{x_n} & F''_{x_nx_1} & F''_{x_nx_2} & \cdots & F''_{x_nx_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

Για να διεξάγουμε τη δοκιμή δεύτερης τάξης υπολογίζουμε τις $(n-1)$ μεγαλύτερες ηγετικές ελάσσονες της H , ξεκινώντας με τις παραπάνω αριστερά $3 \text{ X } 3$ υπομήτρες και συνεχίζοντας την πλήρη $(n+1) \text{ X } (n+1)$ μήτρα H . Θέλουμε οι τελευταίες αυτές $(n-1)$ κύριες ηγετικές ελάσσονες της H να εναλλάσσουν πρόσημο με τη μικρότερη, την $3 \text{ X } 3$ ελάσσονα που είναι θετική . Η αντίστοιχη ικανή συνθήκη για ψευδοκυρτότητα απαιτεί ότι οι τελευταίες $(n-1)$ ηγετικές ελάσσονες της H είναι όλες αρνητικές. Και στις δυο περιπτώσεις, αυτά τα πρόσημα θα πρέπει να ισχύουν για όλα τα x στον τομέα της F . Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει αυτή τη δοκιμή για την κοιλότητα.

Θεώρημα 1.19

Έστω F μια C^2 συνάρτηση σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο W του R^2 . Θεωρούμε την περιορισμένη Hessian H στη (18).

Α. Αν οι μεγαλύτερες $(n-1)$ ηγετικές κύριες ελάσσονες της H εναλλάσσουν το πρόσημό τους για όλα τα $x \in W$, με τις μικρότερες από αυτές – τις τρίτης τάξης ηγετικές κυρτές ελάσσονες- να είναι θετικές, τότε η F είναι ψευδοκοίλη και έτσι οιονεί κοίλη στο W .

Β. Αν αυτές οι μεγαλύτερες $(n-1)$ ηγετικές κύριες ελάσσονες είναι όλες αρνητικές για όλα τα $x \in W$, τότε η F είναι ψευδοκυρτή κι έτσι οιονεί κυρτή στο W .

Παρατήρηση

Η συνθήκη του θεωρήματος 1.19 είναι μια ικανή συνθήκη άλλα όχι αναγκαία . Υπάρχει ένας αριθμός αναγκαίων συνθηκών στη βιβλιογραφία. Μια τέτοια αναγκαία συνθήκη είναι ότι αντικαθιστούμε όλες τις ισχυρές ανισότητες με βάση τις κύριες ηγετικές ελάσσονες της H στο θεώρημα 1.19 με ασθενείς ανισότητες και εφαρμόζουμε αυτό το τεστ για όλες τις κύριες ελάσσονες της H οι οποίες περιλαμβάνουν την πρώτη σειρά και στήλη και οι οποίες έχουν τουλάχιστον μέγεθος $3 \text{ X } 3$ και όχι μόνο για τις κύριες ηγετικές ελάσσονες.

Για να καταλάβουμε καλύτερα το θεώρημα 1.19, γράφουμε τη 2 διαστάσεων μορφή – μια μορφή η οποία απαιτεί υπολογισμό του πρόσημου μόνο μιας ορίζουσας , αφού η αντίστοιχη περιορισμένη Hessian είναι $3 \text{ X } 3$. Παρουσιάζουμε μια ειδική απόδειξη για αυτή τη δυο διαστάσεων μορφή στο παράρτημα του κεφαλαίου , η οποία δεν απαιτεί προσέγγιση περιορισμένης βελτιστοποίησης για ψευδοκοιλότητα. Για να το απλοποιήσουμε , εστιάζουμε στις οιονεί κοίλες μονοτονικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.20

Έστω η F είναι μια C^2 συνάρτηση σε ένα κυρτό σύνολο W του R^2. Υποθέτουμε ότι η F είναι μονοτονική έτσι ώστε $F_x^{'} > 0$ και $F_y^{'} > 0$ στο W. Αν η ορίζουσα,

$$\begin{vmatrix} 0 & F_x^{'} & F_y^{'} \\ F_x^{'} & F_{xx}^{''} & F_{xy}^{''} \\ F_y^{'} & F_{xy}^{''} & F_{yy}^{''} \end{vmatrix}$$

Είναι >0 για όλα τα $(x,y)\in W$ τότε η F είναι οιονεί κοίλη στο W. Αν η ορίζουσα (19) είναι αρνητική για όλα τα $(x,y)\in W$ τότε η F είναι οιονεί κυρτή στο W.

Αντίστροφα , αν η F είναι οιονεί κοίλη στο W, τότε η ορίζουσα (19) είναι ≥ 0. Αν η F είναι οιονεί κυρτή στο W τότε η 19 είναι ≤ 0 για όλα τα $(x,y)\in W$.

Παρατήρηση

Οι αναφορές για τις περιορισμένες μήτρες, σε κάποια κείμενα ως «περιορισμός της Hessian» από δεξιά και κάτω από τη $DF(x)$ παρά από αριστερά και πάνω όπως κάναμε στην (18) οδηγούν στη

$$\begin{pmatrix} F_{x_1x_1}^{''} & F_{x_1x_2}^{''} & \cdots & F_{x_1x_n}^{''} & F_{x_1}^{'} \\ F_{x_2x_1}^{''} & F_{x_2x_2}^{''} & \cdots & F_{x_nx_2}^{''} & F_{x_2}^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{x_nx_1}^{''} & F_{x_nx_2}^{''} & \cdots & F_{x_nx_n}^{''} & F_{x_n}^{'} \\ F_{x_1}^{'} & F_{x_2}^{'} & \cdots & F_{x_n}^{'} & 0 \end{pmatrix}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, εφαρμόζουμε τη δοκιμή του θεωρήματος 1.19 στις τελευταίες $(n-1)$ σύροντας κύριες ελάσσονες, οι οποίες δημιουργούνται διαγράφοντας τις πρώτες σειρές και στήλες από την περιορισμένη Hessian. Όπως στο θεώρημα 1.19, χρειαζόμαστε την κάτω δεξιά 3 X 3 κύρια ελάσσονα να είναι θετική και όλες οι μεγαλύτερες σύροντας κύριες ελάσσονες να εναλλάσσουν το πρόσημο τους έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι η F είναι οιονεί κοίλη.

Παράδειγμα 1.13

Το θεώρημα 1.13 δείχνει ότι η συνάρτηση Cobb-Douglas $U(x,y)=x^a y^b$ είναι οιονεί κοίλη στο R_+^2 για $a,b>0$ αφού είναι μονοτονικός μετασχηματισμός μιας κοίλης συνάρτησης. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1.20 για να αποδείξουμε την οιονεί κοιλότητα του U . Η περιορισμένη Hessian (19) είναι :

$$\begin{pmatrix} 0 & ax^{a-1}y^b & bx^a y^{b-1} \\ ax^{a-1}y^b & a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ bx^a y^{b-1} & abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Της οποίας η ορίζουσα είναι

$$(ab+ab^2+a^2b)x^{3a-2}y^{3b-2},$$

η οποία είναι πάντα θετική για $x>0,\ y>0,\ a>0,$ και $b>0,$. Από το θεώρημα 1.20 η U είναι ψευδοκοίλη, και άρα οιονεί κοίλη.

Κοίλος προγραμματισμός

Όπως έχουμε δει σε αυτή την εργασία όχι μόνο οι κοίλες και οι οιονεί κοίλες συναρτήσεις προκύπτουν φυσικά στα οικονομικά αλλά και άλλες συναρτήσεις που παρέχουν περισσότερη δομή στην ανάλυση των προβλημάτων αριστοποίησης, οι οποίες βρίσκονται στην καρδιά της οικονομικής θεωρίας . Πιο συγκεκριμένα οι αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης που χαρακτηρίζουν τη λύση στο γενικό διαφοροποιήσιμο πρόβλημα αριστοποίησης είναι επίσης ικανές συνθήκες όταν οι συναρτήσεις που εξετάζονται είναι κοίλες.

Προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Ξεκινάμε επαναδιατυπώνοντας το θεώρημα 1.6 για το πρόβλημα κοίλου προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς. Αξίζει να θυμηθούμε από το θεώρημα 1.16 ότι το θεώρημα 1.6 ισχύει ακόμα και αν η F είναι ψευδοκοίλη, αλλά όχι απαραίτητα αν η F είναι οιονεί κοίλη.

Θεώρημα 1.21

Έστω U ένα κυρτό υποσύνολο του R^n . Έστω $f : U \to R$ είναι μια C^1 κοίλη (κυρτή) συνάρτηση στο U . Τότε, $x*$ είναι ένα ολικό μέγιστο της f στο U αν και μόνο αν $Df(x*)(x - x*) \le 0$ για όλα τα $x \in U$. Συγκεκριμένα, αν το U είναι ανοιχτό , ή αν το $x*$ είναι ένα εσωτερικό σημείο στο U , τότε το $x*$ είναι ένα ολικό μέγιστο (ελάχιστο) της f στο U αν και μόνο αν $Df(x*) = 0$.

Προβλήματα με περιορισμούς

Για τα προβλήματα με περιορισμούς, χρειαζόμαστε κάποιες υποθέσεις κοιλότητας ή κυρτότητας στις συναρτήσεις με περιορισμούς.

Θεώρημα 1.22

Έστω U ένα κυρτό ανοιχτό υποσύνολο του R^n. Έστω $f : U \to R$ είναι μια C^1 ψευδοκοίλη συνάρτηση στο U , για παράδειγμα, η f οιονεί κοίλη χωρίς βαθμό εξαφάνισης

Έστω $g_1, ..., g_k : U \to R$ είναι C^1 ψευδοκυρτές συναρτήσεις . θεωρείστε το πρόβλημα προγραμματισμού

$$\text{maximize } f(x) \qquad (20)$$

$$\text{subject to } \quad x \in C_b \equiv \{x \in U : g_i(x) \le b_{i,} \quad i = 1, ..., k\} .$$

Σχηματίζουμε τη Lagrangian

$$L(x, \lambda_1, ..., \lambda_k) \equiv f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [g_i(x) - b_i] \qquad (21)$$

Αν υπάρχουν $x*$ και λ^* τέτοια ώστε

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda^*) = 0 \qquad \text{για} \quad j = 1, ..., n, \qquad (22)$$

Και $\lambda_i^* \ge 0$, $g_i\,(x^*) \le b_i$, $\lambda_i^* \cdot (g_i(x^*) - b_i) = 0$, για $j = 1, ..., n$ (23)

Τότε το $x*$είναι ολικό μέγιστο της f στο σετ περιορισμών C_b .

Απόδειξη : Γράφουμε τη συνθήκη (22) ως :

$$Df(x^*) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* Dg_i(x^*) = 0 \qquad (24)$$

Έστω x ένα αυθαίρετο σημείο στο σετ περιορισμών. Για κάθε δεσμευτικό περιορισμό g_i, $g_i(x) \le g_i(x^*)$.Αφού η g_i είναι οιονεί κυρτή,

$$Dg_i(x^*)(x - x^*) \le 0 \qquad (25)$$

από το θεώρημα 1.14. Αφού $\lambda_i^* = 0$ για μη δεσμευτικούς περιορισμούς g_i από την (23), το

$$\lambda_i^* Dg_i(x^*)(x - x^*) \le 0$$

Για όλα τα i και όλα τα $x \in C_b$ από την (24),

$$Df(x^*)(x - x^*) \le 0 \qquad (26)$$

Για όλα τα $x \in C_b$ από τη στιγμή που η f είναι ψευδοκοίλη, η (26) δείχνει ότι $f(x) \le f(x^*)$ και έτσι το x^*είναι ολικό μέγιστο της f στο C_b

Παρατήρηση

1. Πραγματικά χρειαζόμαστε τους δεσμευτικούς ανισοτικούς περιορισμούς για να είναι οιονεί κυρτό στην απόδειξη του θεωρήματος 1.21
2. Οι φυσικότεροι περιορισμοί για το πρόβλημα (20) είναι είτε τα g_i 's να είναι γραμμικά ή ότι τα g_i 's είναι κυρτές συναρτήσεις με το $g_i(z^*) < b_i$ για κάποια $z^* \in U$ και για όλα τα i.
3. Όπως στη διατύπωση του θεωρήματος 1.7, η ικανή συνθήκη (22) για ένα ολικό μέγιστο του προβλήματος (20) μπορεί να γίνει πιο ασθενής ως:

$$D_x L(x^*, \lambda)(x - x^*) \le 0 \qquad (27)$$

Όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα , και το σετ των μεγιστοποιητών και η συνάρτηση μέγιστης τιμής του προβλήματος (20) έχουν καλές ιδιότητες στα προβλήματα κοίλου προγραμματισμού.

Θεώρημα 1.23

Έστω $f, g_{1,}.....g_k$ είναι όπως και στην υπόθεση του θεωρήματος 1.22

Α) Για οποιαδήποτε $b = (b_1,...,b_k) \in R^k$ έστω $Z(b)$ ορίζει το σετ των $x \in C_b$ τα οποία είναι ολικοί μεγιστοποιητές της f στο C_b είναι ένα κυρτό σετ.

Β) Για όποιο $b \in R^k$,έστω $V(b)$ ορίζει τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f στο πρόβλημα (20). Αν η f είναι κοίλη και τα $g_i\text{'}s$ κυρτά, τότε $b \mapsto V(b)$ είναι μια κοίλη συνάρτησης του b .

Απόδειξη :

a. Υποθέστε ότι x^1 και x^2 ανήκουν στο $Z(b)$ και έστω

$$x^3 = tx^1 + (1-t)x^2 \in \ell(x^1, x^2)$$

Αφού τα $g_i\text{'}s$ είναι οιονεί κυρτές συναρτήσεις, το C_b είναι ένα κυρτό σετ και το $x^3 \in C_b$.

Αφού η f είναι οιονεί κοίλη ,

$$f(x^3) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$$

Αφού $f(x^1) = f(x^2) = \max\{f(x) : x \in C_b\}$, $f(x^3) = f(x^2)$ και το x^3 ανήκει στο $Z(b)$,επίσης . Έτσι, το $Z(b)$ είναι ένα κυρτό σετ.

b. Έστω $b^3 = tb^1 + (1-t)b^2$, και έστω $x^i \in Z(b^i)$ για όλα τα $i = 1,2,3$. Έπειτα, για $j = 1,...,k,$

$$g_i(tx^1 + (1-t)x^2) \leq tg_j(x^1) + g_j(x^2) \qquad \text{(κυρτότητα των } g_j\text{)}$$

$$\leq tb_j^1 + (1-t)b_j^2 \qquad \text{αφού} \quad (g_j(x^i) \leq b_j^i, i = 1,2)$$

$$= b_j^3$$

κι έτσι $tx^1 + (1-t)x^2$ είναι στο Cb_3. Έτσι ,

$$V(b^3) = f(x^3)$$

$\geq f(tx^1 + (1-t)x^2)$ (αφού $x^3 \in Z(b^3)$)

$\geq tf(x^1) + (1-t)f(x^2)$ (κοιλότητα της f)

$= tV(b_1) + (1-t)V(b^2)$

Σαγματική προσέγγιση

Για να υπολογίσουμε τα μέγιστα ενός προβλήματος αριστοποίησης με περιορισμούς όπως το (20), συχνά μπορούμε να θεωρήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα του σαγματικού σημείου , ιδίως όταν οι συναρτήσεις που εμπλέκονται είναι κοίλες.

Ορισμός: έστω U ένα κυρτό υποσύνολο του R^n. θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange(21) για το πρόβλημα προγραμματισμού (20), ως μια συνάρτηση των x και λ. Έπειτα, (x^*, λ^*) είναι ένα σαγματικό σημείο της L αν

$$L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \qquad \textbf{(28)}$$

για όλα τα $\lambda \geq 0$ και όλα τα $x \in U$. Συνήθως, $U = R^n$ ή $U = R_+^n$, το θετικό orthant- υπερ *οκτημόριο* του R^n. Στην τελευταία περίπτωση, λέμε ότι το (x^*, λ^*) είναι ένα μη αρνητικό σαγματικό σημείο
της L.

Θεώρημα 1.24

Αν το (x^*, λ^*) είναι ένα (μη αρνητικό) σημείο της L στο πρόβλημα (20), τότε το x^* μεγιστοποιεί την f στο $C_b(C_b \cap R_+^n)$

Απόδειξη :

Δείχνουμε πρώτα ότι το x^* ανήκει στο C_b .Το δεξιό μέρος της (28)δείχνει ότι

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\lambda_i^*)(g_i(x^*)-b_i)\leq 0 \qquad (29)$$

για όλα τα $\lambda_i \geq 0$. Για οποιοδήποτε σταθερό h, $\lambda_h=\lambda_h^*+1$και $\lambda_i=\lambda_i^*$ τα $i\neq h$ στην (29). Έπειτα, η (29) γίνεται $g_h(x^*)-b_h\leq 0$. Έτσι, $x^*\in Cb$.

Ακολουθεί ότι $\sum_i \lambda_i^*(g_i(x^*)-b_i\leq 0$. Από την άλλη μεριά, βάζοντας κάθε $\lambda_h=0$ στην (29) οδηγεί στο $\sum_i \lambda_i^*(g_i(x^*)-b_i\geq 0$ και έτσι

$$\sum_i \lambda_i^*(g_i(x^*)-b_i)=0 \quad \text{και κάθε} \quad \lambda_i^*(g_i(x^*)-b_i)=0 \qquad (30)$$

Αν το $x\in C_b$ τότε αφού κάθε $\lambda_i^*(g_i(x)-b_i)\leq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x)-\sum_i \lambda_i^*(g_i(x)-b_i) \\ &\leq f(x^*)-\sum_i \lambda_i^*(g_i(x^*)-b_i) && \text{από (28)} \\ &= f(x^*) && \text{από (30).} \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν υπήρχαν καθόλου υποθέσεις κοιλότητας στη διατύπωση του θεωρήματος 1.24. Στον κοίλο προγραμματισμό, οι λύσεις των προβλημάτων σαγματικών σημείων είναι περισσότερο ή λιγότερο ισοδύναμες με τις λύσεις των προβλημάτων προγραμματισμού, όπως δείχνει και το ακόλουθο θεώρημα των και Kuhn και Tucker.

Θεώρημα 1.25

Υποθέστε ότι $U=R_+^n$ ή ότι το U είναι ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του R^n .Υποθέστε ότι η f είναι μια C^1 κοίλη συνάρτηση και ότι οι $g_{1,\dots,}g_k$ είναι C^1 κυρτές συναρτήσεις στο U. Υποθέστε ότι το x^* μεγιστοποιεί την f υπό το σετ περιορισμών C_b όπως ορίστηκε στην

(20) .Τότε υπάρχει $\lambda^* \geq 0$ τέτοιο ώστε (x^*, λ^*) να είναι ένα σαγματικό σημείο της συνάρτησης Lagrangian(21)

Απόδειξη :

Πρώτα , θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του R^n , για παράδειγμα το ίδιο το R^n . Από τη συνήθη συνθήκη πρώτης τάξης, υπάρχει $\lambda^* \geq 0$ τέτοιο ώστε $\lambda_i^* \cdot (g_i(x^*) - b_i) = 0$ για $i = 1, ..., k$ και

$$D_x L(x^*, \lambda^*) = Df(x^*) - \sum_i \lambda_i^* Dg_i(x^*) = 0 \qquad (31)$$

Από το θεώρημα 1.8, η συνάρτηση $x \mapsto L(x^*, \lambda^*)$ είναι μια κοίλη συνάρτηση του x . Από το κριτήριο πρώτης παραγώγου για κοιλότητα στο θεώρημα 1.3 και από την (31), για όποιο $x \in C_b$ ισχύει:

$$L(x, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*) \leq D_x L(x^*, \lambda^*)(x - x^*) = 0 \qquad (32)$$

Από την άλλη πλευρά, για όποιο $\lambda^* \geq 0$ στο R^n

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) - \sum_i \lambda_i^* (g_i(x^*) - b_i)$$

$$= f(x^*) \qquad (\text{ αφού κάθε } \lambda_i^* (g_i(x^*) - b_i) = 0 \text{ })$$

$$\leq f(x^*) - \sum_i \lambda_i \, (g_i(x^*) - b_i)$$

$$= L(x^*, \lambda)$$

Τώρα υποθέστε ότι $U = R_+^n$, έτσι ώστε να ψάχνουμε για ένα μη αρνητικό σαγματικό σημείο Η συνάρτηση (21) είναι τώρα μια Kuhn –Tucker Lagrangian του προβλήματος (20) . Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για ένα μέγιστο υπό περιορισμούς στο x^* , υπάρχει ένα τέτοιο $\lambda^* \geq 0$ ώστε

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda^*) \le 0 \,, \quad x_i^* \ge 0 \quad \text{και} \quad x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda^*) = 0 \,. \qquad \textbf{(33)}$$

Οι συνθήκες στην (33) αντικαθιστούν την παραπάνω εξίσωση (31). Τώρα

$$D_x L(x^*,\lambda^*)(x-x^*) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda^*)x_i - \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda^*)x_i^* \le 0$$

Για $x_i \ge 0$ από την (33) . Η υπόλοιπη από την παραπάνω απόδειξη συνεχίζει αφού αντικαταστήσουμε το'' $=0$ '' στο τέλος της (32) με '' ≤ 0 ''.

Για να δώσουμε κάποιο στοιχείο σχετικά με το ενδιαφέρον που υπάρχει για την προσέγγιση του σαγματικου σημείου στα οικονομικά, θα γυρίσουμε στα μοντέλα ανάλυσης δραστηριότητας της συμπεριφοράς μιας επιχείρησης. Σε αυτά τα μοντέλα, μια επιχείρηση έχει n παραγωγικές διαδικασίες. Τα $x_i \ge 0$ παρουσιάζουν το επίπεδο δραστηριότητας της διαδικασίας i , για $i=1,...,n$. Για κάθε πίνακα δραστηριότητας $x=(x_1,....,x_n)$ η $f(x)$ ορίζει τα κέρδη της επιχείρησης όταν έχει διαδικασίες i στο επίπεδο x_i και $g_j(x)$ ορίζει την ποσότητα των πηγών j που απαιτούνται στο επίπεδο δραστηριότητας x . Έστω ότι το b_j ορίζει την ποσότητα των πηγών που είναι διαθέσιμες την τρέχουσα περίοδο. Το πρόβλημα αριστοποίησης της επιχείρησης είναι να επιλέξει το x που μεγιστοποιεί την $f(x)$ υπό τον περιορισμό $g_i(x) \le b_j$ για $j=1,...,k$ και $x \ge 0$.

Αν έστω U είναι ένα θετικό orthant-υπεροκτημόριο του R^n , η (Kuhn- Tucker) Lagrangian για αυτό το πρόβλημα είναι :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (b_j - g_j(x)) \qquad \textbf{(34)}$$

Ο πολλαπλασιαστής λ_j μπορεί να θεωρηθεί ως η σκιώδης τιμή ή η εσωτερική αξία του παράγοντα j . Έτσι η συνάρτηση Lagrangian (34) μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνδυασμένη αξία του προϊόντος της επιχείρησης $f(x)$ και της αχρησιμοποίητης ισορροπίας των πηγών $\sum_j \lambda_j (b_j - g_j(x))$ η ύπαρξη του σαγματικού σημείου (x^*,λ^*) εκφράζει μια ισορροπία ανάμεσα στην αξία του προϊόντος και στην αξία των αχρησιμοποίητων πηγών . Είναι ένα βασικό βήμα στη θεωρία ισορροπίας των οικονομιών παραγωγής. Είναι πολύ σημαντικό στη μελέτη των επιχειρήσεων που ασχολούνται με δραστηριότητες όπως επενδύσεις , αλιεία ή ξυλεία, στις οποίες οι αποφάσεις που πρέπει να παρθούν αφορούν αν θα χρησιμοποιήσουν τις πηγές ή Θα τις αφήσουν να συνεχίσουν να μεγεθύνονται με το φυσικό τους ρυθμό.

Παράρτημα

Αυτή η ενότητα παρουσιάζει αποδείξεις οι οποίες αναφέρθηκαν σε προηγούμενες ενότητες.

Απόδειξη για το τεστ ικανότητας του θεωρήματος 1.14

Θεώρημα 1.41

Υποθέστε ότι η F είναι μια C^1 συνάρτηση σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο U του R^n .

Αν για όλα τα $x, y \in U$,

$$F(y) \geq F(x) \quad \text{δείχνει ότι} \quad DF(x)(y-x) \geq 0, \qquad (35)$$

τότε η F είναι οιονεί κοίλη στο U .

Απόδειξη :

Επιλέγουμε x_0 και x_1 που ανήκουν στο U με $x_0 \neq x_1$ και $F(x_1) \geq F(x_0)$. Έστω $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$ παραμετροποιεί τη γραμμή από το x_0 στο x_1 . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $F(x_t) \geq F(x_0)$ για όλα τα $t \in [0,1]$.

Για να φτάσουμε σε μια αντίφαση, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $t^* \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $F(x_1) \geq F(x_0) > F(x_{t^*})$. Έστω $J = [t_1, t_2]$ είναι ένα (συνδεδεμένο) εσωτερικό σημείο στο $(0,1)$ με το $t^* \in J$, με $F(x_0) \geq F(x_t)$ για όλα τα $t \in J$, και $F(x_{t_1}) = F(x_0)$. Πρώτα ισχυριζόμαστε ότι

$$DF(x_t)(x_1 - x_0) = 0 \quad \text{για όλα } t \in J \qquad (36)$$

επειδή αν $t \in J$, $F(x_1) \geq F(x_0) \geq F(x_t)$. Από (35)

$$DF(x_t)(x_0 - x_t) \geq 0 \text{ και } DF(x_t)(x_1 - x_t) \geq 0 \qquad (37)$$

εξ' ορισμού ,

$$x_0 - x_t = -t(x_1 - x_0) \text{ και } x_1 - x_t = (1-t)(x_1 - x_0) .$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (37) οδηγεί:

$$-tDF(x_t)(x_1 - x_0) \geq 0 \text{ και } (1-t)DF(x_t)(x_1 - x_0) \geq 0 .$$

Αφού τα t και $1-t$ είναι θετικά , $DF(x_t)(x_1-x_0)=0$ αποδεικνύει τον ισχυρισμό (36). Από την άλλη μεριά ,

$$0<F(x_0)-F(x_{t^*})$$

$$=F(x_{t_1})-F(x_{t^*})$$

$$=DF(x_{t_3})-(x_{t_1}-x_{t^*})$$ για κάποιο $t_3\in(t_1,t^*)$

(από το θεώρημα Μέσης Τιμής και τον Αλυσιδωτό Κανόνα)

$$=(t^*-t_1)DF(x_{t_3})(x_1-x_0),$$

αφού $x_{t_1}-x_{t^*}=(t_1-t^*)(x_1-x_0)$. Αυτή η αντίφαση στον ισχυρισμό (36) δείχνει ότι δεν υπάρχει t^* με $F(x_{t^*})<F(x_0)$. Από τη στιγμή που το $F(x_t)\geq F(x_0)$ για όλα τα $t\in[0,1]$, η F είναι οιονεί κοίλη από το 1.12.

Απόδειξη του θεωρήματος 1.15

Θεώρημα 1.15

Υποθέστε ότι η F είναι μια πραγματική , θετική συνάρτηση ορισμένη στον κυρτό κώνο C στο R^n. Αν η F είναι ομογενής πρώτου βαθμού και οιονεί κοίλη στο C, τότε είναι κοίλη στο C.

Απόδειξη :

Θα δείξουμε ότι το γράφημα της F το οποίο είναι το σετ κάτω από το γράφημα , της F στο R^{n+1},

$$G_F\equiv\{(x,y)\in C\times R_+ : y\leq F(x)\},$$

είναι ένα κυρτό σύνολο . Θα δείξουμε πρώτα ότι :

$$G_F^+\equiv\{(x,y)\in G_F : 0<y\leq F(x)\}$$

είναι ένα κυρτό σύνολο . Έστω (x,y) και (x',y') είναι σημεία στο G_F^+ έτσι ώστε $0<y\leq F(x)$ και $0<y'\leq F(x')$. Αφού η F είναι ομογενής βαθμού πρώτου $y>0$ και $(x,y)\in G_F^+$,

$$F\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot F(x)\geq\frac{1}{y}\cdot y=1.$$

Ομοίως, $F\left(\frac{x'}{y'}\right)\geq 1$. Έτσι

$$\left(\frac{x}{y},1\right) \text{ και } \left(\frac{x'}{y'},1\right) \text{ είναι στο } G_F^+$$

Έστω $\lambda\in[0,1]$, και ορίζουμε

$$\theta\equiv\frac{\lambda y}{\lambda y+(1-\lambda)y'}$$

Έπειτα, το θ ανήκει επίσης στο [0,1]. Αφού η F είναι οιονεί κοίλη ,

$$F\left(\theta\left(\frac{x}{y}\right)+(1-\theta)\left(\frac{x'}{y'}\right)\right)\geq 1,$$

έτσι ώστε

$$\left(\theta\left(\frac{x}{y}\right)+(1-\theta)\left(\frac{x'}{y}\right),1\right) \text{ να ανήκει στο } G_F^+$$

Από τον ορισμό του θ,

$$\left(\theta\left(\frac{x}{y}\right)+(1-\theta)\left(\frac{x'}{y}\right),1\right)=\left(\frac{\lambda x+(1-\lambda)x'}{\lambda y+(1-\lambda)y'},1\right).$$

Και πάλι από την ομογένεια της F ,

$$(\lambda x+(1-\lambda)x',\lambda y+(1-\lambda)y') \text{ ανήκει στο } G_F^+.$$

έτσι ώστε $\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')$ ανήκει στο G_F^+ , και το G_F^+ είναι ένα κυρτό σύνολο.

Για να δούμε ότι η G_F είναι κυρτή , έστω ότι $\gamma = \{(x_t, y_t): 0 \le t \le 1\}$ είναι μια γραμμή με τελικά σημεία στο G_F. Αν τα τελικά σημεία του γ βρίσκονται στο G_F^+ τότε το γ βρίσκεται στο G_F^+ σύμφωνα με την παράγραφο που ακολουθεί. Αν και τα δυο τελικά σημεία του γ βρίσκονται κάτω από την $y = 0$, το ίδιο κάνει και η γραμμή. Σε αυτή την περίπτωση η γραμμή γ βρίσκεται κάτω από το γράφημα της F , επειδή το γράφημα θετικής συνάρτησης F βρίσκεται πάνω από το $\{y = 0\}-$ υπερεπίπεδο. Αν κάποιο τελικό σημείο του γ βρίσκεται πάνω από την $\{y = 0\}$ και ένα κάτω , σπάει τη γ σε δυο κομμάτια, ένα κάτω από την $\{y = 0\}$ και ένα πάνω από την $\{y = 0\}$, και εφαρμόζουμε τα το παραπάνω σε κάθε κομμάτι χωριστά.

Απόδειξη του θεωρήματος 1.17

Θεώρημα 1.17

Έστω U ένα κυρτό υποσύνολο του R^n. Έστω $F: U \to R$ είναι μια C^1 συνάρτηση. Τότε,

A. Αν η F είναι ψευδοκοίλη στο U , η F είναι οιονεί κοίλη στο U .

B. Αν το U είναι ανοιχτό και αν για όλα τα , τότε η F είναι ψευδοκοίλη στο U αν και μόνο αν η F είναι οιονεί κοίλη στο U .

Απόδειξη :

a) Υποθέστε ότι η F είναι ψευδοκοίλη στο U . Έστω y_0 και y_1 δυο σημεία στο U με $F(y_1) \ge F(y_0)$. Έστω $y_t \equiv y_0 + t(y_1 - y_0)$ για $0 \le t \le 1$ έτσι έστω το ευθύγραμμο τμήμα να είναι παραμετροποιήσιμο από το y_0 στο y_1. Έστω $g(t) = F(y_t)$.

Θεωρούμε ότι $F(y_1) \ge F(y_0)$ για όλα τα $t \in [0,1]$. Αυτός ο ισχυρισμός ισχύει αυτόματα αν η ελάχιστη τιμή του g στο $[0,1]$ εμφανίζεται στο $t = 0$ ή $t = 1$.Μπορούμε να υποθέσουμε τότε ότι η ελάχιστη τιμή του g στο $[0,1]$ εμφανίζεται σε κάποιο t^* στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$0 = g'(t^*) = DF(y_0 + t^*(y_1 - y_0)) \cdot (y_1 - y_0)$$

από τη συνθήκη της πρώτης τάξης για το ελάχιστο και τον αλυσιδωτό κανόνα, τότε,

$$0 = DF(y_0 + t^*(y_1 - y_0)) \cdot (-t^*(y_1 - y_0))$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό (15) για την ψευδοκοιλότητα με $x^* = y_0 + t^*(y_1 - y_0)$ και $y = y_0$, και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$F(y_0 + t^*(y_1 - y_0)) \geq F(y_0)$$

αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό στην αρχή της παραγράφου. Από το θεώρημα 1.12, η F είναι οιονεί κοίλη στο U.

b) Υποθέστε τώρα , ότι η F είναι οιονεί κοίλη στο U , ότι το U είναι ανοιχτό και ότι $\nabla F(x)$ δεν είναι ποτέ μηδέν για $x \in U$. Για να αποδείξουμε ότι η F είναι ψευδοκοίλη, θεωρούμε ότι $DF(x^*)(y - x^*) \leq 0$ όπως στην υπόθεση της (15) και αποδεικνύουμε ότι $F(y) \leq F(x^*)$. Αν ισχύει ότι $DF(x^*)(y - x^*) < 0$ τότε $F(y) < F(x^*)$ από τη (16). Αρκεί μόνο να αποκλείσουμε την περίπτωση:

$$DF(x^*)(y - x^*) = 0 \quad \text{και} \quad F(y) > F(x^*) \qquad \textbf{(38)}$$

θα δείξουμε ότι κάτω από τις υποθέσεις αυτού του θεωρήματος και κάτω από την υπόθεση (38), μπορούμε να αντικαταστήσουμε το y με y'

$$DF(x^*)(y' - x^*) < 0 \quad \text{και} \quad F(y') > F(x^*) \qquad \textbf{(39)}$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι η F είναι οιονεί κοίλη . Έστω v είναι ένας μη μηδενικός παράγοντας $-\nabla F(x^*)$. Για όλα τα $t > 0$,

$$DF(x^*)(tv + y - x^*) = DF(x^*)(tv + y - x^*)$$

$$= tDF(x^*)(v) + DF(x^*)(y - x^*)$$

$$= -t\left\|\nabla F(x^*)\right\|^2 + 0$$

$$< 0$$

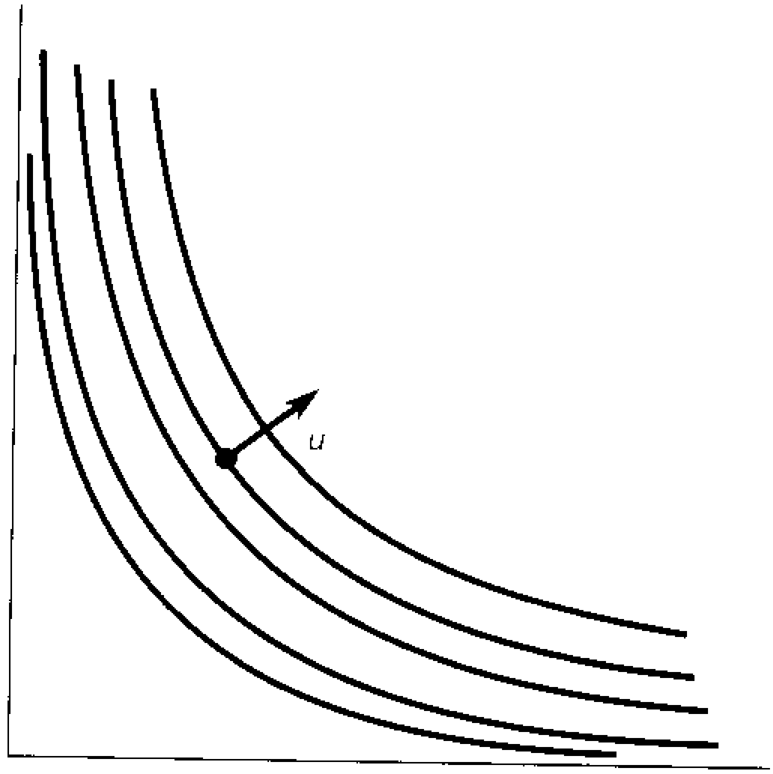
Αφού η F είναι συνεχής στα μπορούμε να διαλέξουμε ένα μη μηδενικό t αρκετά μικρό ώστε

$$F(y+tv) > F(x^*) \text{ και } DF(x^*)(y+tv-x^*) < 0$$

αυτό σημαίνει ότι το $y' = y + tv$ ικανοποιεί την (39) –μια αντίφαση στο χαρακτηρισμό (16) της οιονεί κοιλότητας. Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι ψευδοκοίλη.

Απόδειξη του θεωρήματος 1.20

Θα αποδείξουμε ότι ο έλεγχος της περιορισμένης Hessian για την ψευδοκοιλότητα και οιονεί κοιλότητα για συναρτήσεις δυο μεταβλητών , είναι μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος 1.19. Για μεγαλύτερη ευκολία , θα εργαστούμε με C^2 συναρτήσεις χρησιμότητας U , σε ένα πλάνο όπου είναι οιονεί κοίλες και μονοτονικές . Αυτό σημαίνει ότι οι καμπύλες αδιαφορίας ορίζουν κυρτά σετ από κάτω . Το τελευταίο σημαίνει ότι η χρησιμότητα είναι αυστηρώς αύξουσα καθώς η ποσότητα από τα δυο αγαθά αυξάνεται . Στην πραγματικότητα, θα γράψουμε αυτή την υπόθεση μονοτονικότητας ως $U_x' > 0$ και $U_y' > 0$. Οιονεί κοιλότητα και μονοτονικότητα δείχνουν ότι τα σετ επιπέδου του U είναι όπως στην εικόνα 14.



Εικόνα 14

Θεώρημα 1.20

Έστω U μια C^2 συνάρτηση σε ένα κυρτό σύνολο W του R^2 . Υποθέτουμε ότι η U είναι μονοτονική έτσι ώστε $U'_x > 0$ και στο $U'_y > 0$. Αν η ορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & U'_x & U'_y \\ U'_x & U''_{xx} & U''_{xy} \\ U'_y & U''_{xy} & U''_{yy} \end{vmatrix} \quad (40)$$

είναι >0 στο W τότε, η U είναι οιονεί κοίλη στο W. Αντίστροφα, αν η U είναι οιονεί κοίλη στο W τότε η ορίζουσα (40) είναι ≥ 0

Απόδειξη :

Μπορούμε να σκεφτούμε κάθε καμπύλη στο επίπεδο ως ένα γράφημα μιας συνάρτησης $y = g(x)$. (Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με την υπόθεση της μονοτονικότητας $U_y^{'} > 0$. Αφού η U είναι οιονεί κοίλη, το σετ πάνω από γράφημα g (πάνω από το σετ επιπέδου της U) είναι ένα κυρτό σύνολο. Ωστόσο η οιονεί κοιλότητα της U δείχνει την κυρτότητα της g ως μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, η οποία με τη σειρά της δείχνει ότι $g^{''}(x) \geq 0$. Τώρα, η $g^{'}(x)$ είναι ο οριακός ρυθμός υποκατάστασης $-U_x^{'}(x, g(x)) / U_y^{'}(x, g(x))$. Ωστόσο,

$$0 \leq g^{''}(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{U_x^{'}(x, g(x))}{U_y^{'}(x, g(x))} \right)$$

$$= -\frac{(U_{xx}^{''} + U_{xy}^{''} g^{'}(x))U_y^{'} - (U_{yx}^{''} + U_{yy}^{''} g^{'}(x))U_x^{'}}{(U_y^{'})^2}$$

$$= \frac{-(U_y^{'})^2 U_{xx}^{''} - (U_x^{'})^2 U_{yy}^{'} + 2U_x^{'} U_y^{'} U_{xy}^{''}}{(U_y^{'})^3} \qquad (41)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $g'(x) = -U_x^{'} / U_y^{'}$. Ο αριθμητής στη (41) είναι απλά η ορίζουσα (40). Αντίστροφα, μπορεί κάποιος να ακολουθήσει τα παραπάνω βήματα για να καταλήξει ότι η ορίζουσα (40) είναι θετική, επειτα το $g'(x) > 0$ η g είναι μια κυρτή συνάρτηση, το σετ πάνω από το γράφημά της είναι ένα κυρτό σετ και τέλος ότι το σετ πάνω από κάθε καμπύλη στο επίπεδο U είναι ένα κυρτο σετ. Έτσι, U είναι οιονεί κοίλη.

Βιβλιογραφία

Varian, Hal A. (1992) *Microeconomic Analysis*.Third Edition. W.W. Norton and Company

Thomas M. Cover and J. A. Thomas (1988)."Determinant inequalities via information theory".*SIAM journal on matrix analysis and applications* 9 (3): 384–392.

Arrow K.J. and Debreu G., Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica 22 (3), pp. 265-290 (1954).

Arrow K.J. and Enthoven A.C. (1961). Quasi-Concave Programming, Econometrica 29(4):779-800

William E. Boyce kai Richard C. DiPrima.Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.John Wiley & Sons, New York, 1986.

Alpha Chiang.Fundamental Methods of Mathematical Economics.Mc- Graw Hill, New York, 2005.

Angel de la Fuente. Mathematical Methods and Models for Economists.CambridgeUniversity Press, Cambridge, 2000.

Michael Hoy, John Livernois, Chris McKenna, Thanasis Stengos and Ray Rees.Mathematics for economics.The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 2001.

Michael D. Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory.Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston kai Jerry R. Green. Microeconomic Theory.OxfordUniversity Press, Oxford, 1995.

Carl P. Simon kai Lawrence Blume.Mathematics for Economics. W W Norton & Co, New York, 1994.

Gilbert Strang. Linear Algebra and Its Applications. Brooks Cole, San Diego, 1988.

Akira Takayama. Mathematical Economics.CambridgeUniversity Press, Cambridge, 1985.
Wilkes F .M 1994 Mathematics for Business Finance and Economics , Rutledge London.

YamaneT. 1981, Μαθηματικά για Οικονομολόγους. Gutenburg, Αθήνα.

Chiang 1964, Mathematics for Economists.

Kortanek K. O. and J. P. Evans (1967). Pseudo-Concave Programming and Lagrange Regularity, *Operations Research,* 15(5): 882-891.

Balas, E. (1969). Intersection cuts: a new type of cutting planes for integers programming Management Sci. Research Report No. 187, Carnegie-MellonUniversity.

Balinski, M.L. (1961). An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets. J. Soc. Ind. Appl. Math., 9:72–88.

M.L. Balinski, M.L. (1965). Integer programming methods, uses, computation. Management Sci., 12:253–313.

Cabot ,V.A., (1972).Variations on a cutting plane method for solving concave minimization problems with linear constraints. 41st ORSA Meeting, New Orleans.

Cooper, L. and Drebes, C. (1967).An approximate solution method for the fixed change problem.Naval Res. Logist. 14:101–113.

Glover, F. ( ) Convexity cuts for multiple choice problems, Management Sci. Report 71-1, University of Colorado.

Tui, H.,(1964). Concave programming under linear constraints. Soviet Math.Dokl. 5:1937–1940.

Richard, S. and Zame, W. (1968).Proper preferences and quasi-concave utility functions, Journal of Mathematical Economics,15(3):231-247.

Majthay, A. and Whinston, A. (1974).Quasi-concave minimization subject to linear constraints, Discrete Mathematics. 9(1):35-59.

Winston W. L. (1995), Introduction to Mathematical Programming, Applications and Algorithms, Wadsworth, Inc., California

http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.