Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Ακέραιος Προγραμματισμός**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Δήλια Κων/να**
Πατρώνυμο	**Ιωάννης**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΠΛ/ 08022**
Επιβλέπων	**Ε.Φούντας, Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Οκτώβριος 2011**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Ε.ΦΟΥΝΤΑΣ	Π.ΤΣΙΚΟΥΡΑΣ	Δ.ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ
Καθηγητής	Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής.

Περιεχόμενα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη (αγγλική)

The integer programming that we will examine, as well as the linear programming, includes a sector of the mathematical programming. The integer programming is used in various applications such as:

- Parallel implementation of work
- Scheduling
- Resource allocation
- Problem of k queens
- Telecommunications

This postgraduate thesis will give the possibility of an extensive analysis of popular and wide used algorithms, as well as, examples of integer programming problems. More concretely our object of study will be the following algorithms:

- Branch and Bound,
- Cutting-planes
- Lagrangian relaxation
- Benders decomposition
- Heuristics

Moreover we will examine certain models of use of integer programming. Due to the complexity we will be reported in regions, where integer programming has played important role as (relatively):

- Capital budgeting
- Warehouse location

Περίληψη (ελληνική)

Ο ακέραιος προγραμματισμός (integer programming), τον οποίο εξετάζουμε, όπως και ο γραμμικός, αποτελεί κλάδο του μαθηματικού προγραμματισμού (mathematical programming). Ο ακέραιος προγραμματισμός χρησιμοποιείται σε διάφορες εφαρμογές όπως:

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k-βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Μέσα από αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή θα δοθεί η δυνατότητα της εκτενούς ανάλυσης πολύ γνωστών και ευρείας χρήσης αλγορίθμων, όπως επίσης και παραδειγμάτων που αφορούν προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, αντικείμενο μελέτης μας θα είναι οι παρακάτω αλγόριθμοι:

- Branch and Bound,
- Cutting-planes
- Lagrangian relaxation
- Benders decomposition και
- Heuristics

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Εκτός αυτού θα εξετάσουμε μερικά πρότυπα χρήσης του ακέραιου προγραμματισμού. Λόγω πολυπλοκότητας, θα αναφερθούμε σε περιοχές που ο προγραμματισμός ακεραίων αριθμών έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο όπως (αναφορικά):

- Κύρια σύνταξη προϋπολογισμού
- Τοποθεσία των αποθηκών των εμπορευμάτων

Εισαγωγή-Σύντομη περιγραφή στον ακέραιο προγραμματισμό

Τα προβλήματα του ακέραιου προγραμματισμού είναι εμφανώς δύσκολο να λυθούν. Μπορούν να λυθούν από διάφορους πολύ διαφορετικούς αλγορίθμους. Σήμερα, η επιλογή αλγορίθμου είναι τέχνη καθώς μερικοί αλγόριθμοι λειτουργούν καλύτερα σε μερικά προβλήματα. Θα συζητήσουμε εν συντομία τους αλγορίθμους προσπαθώντας να εκθέσουμε τα χαρακτηριστικά τους. Όταν κάποιος επιθυμεί να λύσει ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού είναι απαραίτητα: οι διαβουλεύσεις με τους εμπειρογνώμονες, ο πειραματισμός λύσης και μια αναθεώρηση της βιβλιογραφίας στους κώδικες λύσης. Ας αναπτύξουμε μια συνοπτική ιστορία των προσεγγίσεων λύσης του ακέραιου προγραμματισμού. Ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming (LP)) εφευρέθηκε προς το τέλος του 1940. Εκείνοι που εξέταζαν τα LP προβλήματα έφθασαν γρήγορα στο συμπέρασμα ότι θα ήταν επιθυμητό να λυθούν τα προβλήματα που είχαν με μερικές μεταβλητές ακέραιων αριθμών (Dantzig, 1960). Αυτό οδήγησε στους αλγορίθμους για τη λύση των καθαρών προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Οι πρώτοι αλγόριθμοι ήταν οι cutting-planes, όπως αναπτύσσονται από τους Dantzig, Fulkerson και Johnson (1954) και Gomory (1958, 1960, 1963). Οι Land και Doig εισήγαγαν στη συνέχεια τον Branch-and-Bound αλγόριθμο. Πιο πρόσφατα έχουν χρησιμοποιηθεί: η υπονοούμενη απαρίθμηση (enumeration) (Balas), η αποσύνθεση (decomposition) (Benders), η lagrangian relaxation (Geoffrion, 1974) και οι προσεγγίσεις heuristics (Zanakis και Evans). Δυστυχώς, μετά από 20 έτη, που περιλαμβάνουν κυριολεκτικά χιλιάδες μελέτες (Von Randow) κανένας από τους διαθέσιμους αλγορίθμους δεν είναι σε θέση να αποδώσει ικανοποιητικά για όλα τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Εντούτοις, ορισμένοι τύποι αλγόριθμων είναι καλοί στην επίλυση ορισμένων τύπων προβλημάτων. Συνεπώς διάφορες προσπάθειες έχουν επικεντρωθεί στην αλγοριθμική ανάπτυξη για ειδικά δομημένα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Οι εντυπωσιακότερες πρόσφατες προσπάθειες περιλαμβάνουν την εκμετάλλευση της δομής προβλήματος. Εν συντομία, το τμήμα κατωτέρω, αναθεωρεί τις ιστορικές προσεγγίσεις, καθώς επίσης και τις τεχνικές και τις επιτυχίες της δομικής εκμετάλλευσης. Έχει υπάρξει μια ευρεία ποικιλία των προσεγγίσεων στα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού, η οποία περιλαμβάνει τη στρογγυλοποίηση, τον αλγόριθμο περιορισμού και διακλάδωσης, τα cutting-planes , τη lagrangian relaxation, τη benders decomposition και τα Heuristics. Επιπλέον εξετάζουμε τη δομική εκμετάλλευση και άλλες κατηγορίες.

Εφαρμοσμένος προγραμματισμός ακέραιων αριθμών

Ο γραμμικός προγραμματισμός (LP) είναι μία μαθηματική μέθοδος με την οποία επιτυγχάνουμε το καλύτερο αποτέλεσμα σε ένα πρόβλημα. Οι μεταβλητές απόφασης LP μπορούν να είναι ίσοι με τους ακέραιους αριθμούς ή οποιοδήποτε άλλο πραγματικό αριθμό (3 ή 4 καθώς επίσης και 3.49876). Εντούτοις οι κλασματικές λύσεις δεν είναι πάντα αποδεκτές. Τα ιδιαίτερα στοιχεία έχουν νόημα μόνο όταν αγοράζονται σε ολόκληρες τις μονάδες (π.χ., τρακτέρ ή αεροπλάνα). Ο ακέραιος προγραμματισμός (IP) απαιτεί ένα υποσύνολο των μεταβλητών απόφασης προκειμένου να πάρει τις τιμές ακέραιων αριθμών (δηλ., 0, 1, 2, κ.λπ.). Ο ακέραιος προγραμματισμός επιτρέπει επίσης τη μοντελοποίηση των σταθερών δαπανών, των λογικών όρων, των επιπέδων των πόρων και των μη γραμμικών λειτουργιών.

Τα προβλήματα του ακέραιου προγραμματισμού περιλαμβάνουν συνήθως τη βελτιστοποίηση μιας γραμμικής αντικειμενικής λειτουργίας σχετικά με τους γραμμικούς περιορισμούς, τους μη αρνητικούς όρους και τους όρους αξίας ακέραιων αριθμών. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται μεταβλητές ακέραιων αριθμών. Τα προβλήματα που περιέχουν μεταβλητές ακέραιων αριθμών περιέρχονται σε διάφορες κατηγορίες. Ένα πρόβλημα στο οποίο όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιοι αριθμοί είναι ένα καθαρό πρόβλημα (pure problem) ακέραιου προγραμματισμού. Ένα πρόβλημα με μερικούς ακεραίους αριθμούς και μερικές συνεχείς μεταβλητές, είναι ένα mix-integer πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Ένα πρόβλημα στο οποίο οι μεταβλητές ακέραιων αριθμών είναι περιορισμένες να είναι ίσες είτε με το μηδέν είτε με το ένα ονομάζεται zero-one (0-1) πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Υπάρχουν pure zero-one προβλήματα προγραμματισμού όπου όλες οι μεταβλητές είναι 0-1 και μικτά προβλήματα μηδέν-ένα που περιέχουν και 0-1 και συνεχείς μεταβλητές.

Η πιο γνωστή μορφοποίηση ενός προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού είναι:

$$\text{Max} \quad W + \quad X + \quad Y$$

υπό τον όρο:

$$\begin{array}{llll} W + & X + & Y & b \\ W & & & 0 \\ & X & & 0 \ \text{και ακέραιος} \\ & & Y & 0 \ \text{ή} \ 1 \end{array}$$

Όπου το W αντιπροσωπεύει τις συνεχείς μεταβλητές, το X τις ακέραιες μεταβλητές και το Y τις μεταβλητές μηδέν-ένα.

Η ανάλυση του ακέραιου προγραμματισμού διαιρείται σε δύο κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο καλύπτει τις βασικές τεχνικές διατύπωσης προβλήματος προγραμματισμού ακέραιων αριθμών και μερικά χαρακτηριστικά σχετικά με τη λύση και την ερμηνεία των προβλημάτων προγραμματισμού ακέραιων αριθμών. Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται σε ένα σύνολο από παραδείγματα προβλημάτων.

Γιατί προγραμματισμός ακέραιων αριθμών;

Το πιο θεμελιώδες ζήτημα σχετικά με τη χρήση του ακέραιου προγραμματισμού είναι γιατί τον χρησιμοποιούμε. Προφανώς ο ακέραιος προγραμματισμός επιτρέπει την απεικόνιση των ασυνεχών μεταβλητών απόφασης, όπως εκείνους που αντιπροσωπεύουν την απόκτηση των αδιαίρετων στοιχείων όπως οι μηχανές, η μισθωμένη εργασία ή τα ζώα. Επιπροσθέτως ο ακέραιος προγραμματισμός επιτρέπει επίσης τη διαμόρφωση των σταθερών δαπανών, των λογικών όρων και των ιδιαίτερων επιπέδων πόρων.

Σταθερό κόστος

Οι διαδικασίες παραγωγής περιλαμβάνουν συχνά τις σταθερές δαπάνες(fixed cost). Παραδείγματος χάριν όταν κατασκευάζουμε πολλαπλάσια προϊόντα οι σταθερές δαπάνες μπορούν να προκύψουν κατά τη μετατόπιση της παραγωγής μεταξύ των προϊόντων (δηλ. π.χ. οι χειριστές εγκαταστάσεων γάλακτος πρέπει να αναλάβουν τις δαπάνες καθαρισμού κατά τη μεταπήδηση από το σοκολατένιο στο άσπρο γάλα). Οι σταθερές δαπάνες μπορούν να διαμορφωθούν χρησιμοποιώντας την ακόλουθη μικτή στρατηγική διατύπωσης ακέραιων αριθμών:

Έστω: X ο αριθμός μονάδων καλής παραγωγής

Y δείχνει μια μηδέν-ένα μεταβλητή που δείχνει εάν υφίστανται οι σταθερές δαπάνες ή όχι ,

C δείχνει το ανά μονάδα εισόδημα από την παραγωγή του ‘X’ ,

F δείχνει το φορολογημένο κόστος που αναλαμβάνεται κατά την παραγωγή μιας διαφορετικής από το μηδέν ποσότητας ανεξάρτητα από τις πόσες μονάδες παράγονται

M δείχνει έναν μεγάλο αριθμό.

Η παρακάτω διατύπωση απεικονίζει αυτό το πρόβλημα:

Max CX - FY

υπό τον όρο:

X - MY 0

X 0

Y 0 ή 1

Εδώ, εάν το X=0 , ο περιορισμός που αφορά το X και το Y επιτρέπει στο Y να είναι 0 ή 1. Λαμβάνοντας υπόψη ότι F > 0 τότε η αντικειμενική λειτουργία Y θα ήταν ίση με 0. Εντούτοις, όταν 0 < X# M, τότε το Y πρέπει να είναι ίσο με 1. Συνεπώς, οποιοδήποτε διαφορετικό από το μηδέν επίπεδο παραγωγής για το X αναγκάζει το σταθερό κόστος (F) να αναληφθεί. Η παράμετρος M είναι ένας ανώτερος δεσμός στην παραγωγή του X (ένα όριο ικανότητας).

Το σταθερό κόστος της επένδυσης εξοπλισμού μπορεί να διαμορφωθεί ομοίως. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος διαμορφώνει την πιθανή απόκτηση αρκετών διαφορετικών μηχανημάτων όλων ικανών για τον ίδιο σκοπό.

Ακόμη, ας υποθέσουμε ότι το ανά μονάδα κέρδος είναι ανεξάρτητο από τις μηχανές που χρησιμοποιούνται, η παραγωγή αποσυντίθεται ανά μήνα και ότι η μηνιαία χωρητικότητα κάθε μηχανής είναι γνωστή. Αυτό το πρόβλημα απόκτησης και απόφασης χρήσης μπορεί να διατυπωθεί όπως:

Max -

υπό τον όρο:

- 0 για κάθε m

0, 0 ή 1 για κάθε k και m,

Όπου m είναι οι μήνες , K οι μηχανές, Cm είναι το κέρδος που λαμβάνεται από την παραγωγή στο μήνα m, είναι η ποσότητα που παράγεται στο μήνα, είναι το ετήσιο σταθερό κόστος της μηχανής, είναι μια μεταβλητή με τιμές 0 ή 1 που δείχνει αν η μηχανή είναι αγορασμένη ή όχι και είναι η χωρητικότητα της μηχανής σε μήνα.

Η γενική μορφοποίηση μεγιστοποιεί τα ετήσια λειτουργικά οφέλη, ελαχιστοποιεί τις σταθερές δαπάνες υπό τον όρο οι περιορισμοί να επιτρέπουν την παραγωγή μόνο όταν αγοραστούν τα μηχανήματα. Επιτρέπεται η αγορά αρκετών μηχανημάτων με διαφορετικά χαρακτηριστικά χωρητικότητας. Αυτή η μορφοποίηση επιτρέπει το να είναι διαφορετικό από το μηδέν μόνο όταν τουλάχιστον ένα δεν είναι μηδέν. Ακόμη, τα μηχανήματα πρέπει να αγοραστούν με το σταθερό κόστος που αναλαμβάνεται προτού να χρησιμοποιηθούν. Μόλις αγοραστούν, κάθε μηχανή επιτρέπει την παραγωγή μέχρι τη χωρητικότητα της σε κάθε έναν από τους δώδεκα μήνες. Αυτή η μορφοποίηση επεξηγεί μια σύνδεση μεταξύ της παραγωγής και της αγοράς μηχανημάτων (ισοδύναμα αγορά και χρήση ενός κομματιού του κύριου εξοπλισμού) μέσω του περιορισμού χωρητικότητας. Κάποιος πρέπει να είναι προσεκτικός για να διευκρινίσει κατάλληλα τις σταθερές δαπάνες έτσι ώστε να αντιπροσωπεύουν το κόστος ανά μερίδα που υφίσταται κατά τη διάρκεια του χρονικού πλαισίου του προτύπου.

Οι λογικοί όροι

Ο ακέραιος προγραμματισμός επιτρέπει την απεικόνιση των λογικών όρων. Μερικά παραδείγματα είναι:

a) Υπό όρους χρήση - μια αποθήκη εμπορευμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο εάν κατασκευάζεται.
b) Συμπληρωματικά προϊόντα - εάν ένα οποιοδήποτε προϊόν A παράγεται, τότε μια ελάχιστη ποσότητα προϊόντος B θα πρέπει να παραχθεί.
c) Συμπληρωματική επένδυση – εάν αγοραστεί μια συγκεκριμένη κατηγορία εξοπλισμού τότε μόνο ένας συμπληρωματικός εξοπλισμός μπορεί να αποκτηθεί.
d) Αλληλουχία - η λειτουργία A πρέπει να έχει ολοκληρωθεί πλήρως προτού να αρχίσει η λειτουργία B.

Όλοι οι παραπάνω όροι μπορούν να επιβληθούν χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή δεικτών μηδέν-ένα. Μια μεταβλητή δεικτών μπορεί να δείξει εάν ένα ποσό είναι μηδέν ή διαφορετικό από το μηδέν. Η μεταβλητή δεικτών παίρνει μια τιμή εάν το ποσό είναι διαφορετικό από το μηδέν και ειδάλλως παίρνει την τιμή μηδέν. Μια μεταβλητή δεικτών επιβάλλεται χρησιμοποιώντας έναν περιορισμό όπως τον ακόλουθο:

$$- \; MY \quad 0$$

όπου το M είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός, το απεικονίζει μια ομάδα συνεχών μεταβλητών και το Y είναι μια μεταβλητή δεικτών που περιορίζεται στις τιμές 0 ή 1. Η μεταβλητή Y δείχνει εάν ή όχι οποιαδήποτε από τα X είναι διαφορετικό από το μηδέν με Y= 1, ειδάλλως μηδέν. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μορφοποίηση απαιτεί ότι το M πρέπει να είναι τόσο μεγάλο όσο οποιαδήποτε λογική αξία για το ποσό των X.

Οι μεταβλητές δεικτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν από πολλές απόψεις. Παραδείγματος χάριν, ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα που περιλαμβάνει δύο αποκλειστικούς παραγωγούς X και Z. Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{llll}
X & - \; M & & 0 \\
& Z & - \; M & 0 \\
& & + & 1 \\
X, \; Z & & & 0 \\
& & , & 0 \text{ ή } 1
\end{array}
$$

Εδώ, το δείχνει εάν το X παράγεται ή όχι, ενώ το δείχνει εάν το Z παράγεται ή όχι. Ο τρίτος περιορισμός + # 1, σε συνδυασμό με το περιορισμό ότι τα , μπορούν να πάρουν τιμές 0 ή 1 , επιβάλλουν την αμοιβαία αποκλειστικότητα. Κατά συνέπεια, όταν =1 το X μπορεί να παραχθεί ενώ το Z όχι. Ομοίως όταν = 1 τότε το X=0 ενώ 0 # Z # M. Συνεπώς, είτε το X είτε το Z μπορεί να παραχθεί, αλλά όχι και τα δύο.

Ενεργοί περιορισμοί

Πολλοί τύποι λογικών όρων μπορούν να διαμορφωθούν χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές δεικτών και την αμοιβαία αποκλειστικότητα. Ας υποθέσουμε ότι μόνο ο ένας από τους δύο περιορισμούς πρόκειται να είναι ενεργοί, δηλ.,

είτε X <

είτε X <

Η μορφοποίηση αυτής της κατάστασης μπορεί να ολοκληρωθεί χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή Y ως εξής

X - MY

X - M(1-Y)

X , Y = 0 ή 1

Αυτό ξαναγράφεται ως εξής:

X - MY

X - M(1-Y)

X Y = 0 ή 1

Εδώ το M είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός και η μεταβλητή Y καθορίζει ποια μεταβλητή είναι ενεργή. Όταν Y=1 ο δεύτερος περιορισμός είναι ενεργός, ενώ ο πρώτος περιορισμός το αφαιρεί από την ενεργό εκτίμηση. Αντιθέτως, όταν Y = 0 ο πρώτος περιορισμός είναι ενεργός.

Αμοιβαία Αποκλειστικότητα

Η ανωτέρω μορφοποίηση περιλαμβάνει ένα κοινό τέχνασμα για την επιβολή της αμοιβαίας αποκλειστικότητας. Η μορφοποίηση θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής:

X

X - M

X 0, , 0 ή 1

Εντούτοις, κάποιος μπορεί να λύσει ως προς στον τρίτο περιορισμό θέτοντας ως =1 – . Στη συνέχεια, η αντικατάσταση στις πρώτες δύο εξισώσεις δίνει

X – M

X – M(1-)

που είναι η διατύπωση ανωτέρω. Εντούτοις, ο Williams (1978) δείχνει ότι η πιο εκτενής μορφοποίηση θα λυθεί γρηγορότερα.

Πολλαπλάσιοι ενεργοί περιορισμοί

Η μορφοποίηση περιορίζοντας τον αριθμό των ενεργών περιορισμών μπορεί να γενικευτεί στους λογικούς όρους όπου P από τους K περιορισμούς είναι ενεργοί (P < K).

Αυτό αντιπροσωπεύεται από

X - M

X - M

:

:

AKX - MYK

Σ = K-P

X

Όπου, Y προσδιορίζει αν ο περιορισμός i είναι ενεργός (Yi= 0) ή όχι (Yi =1).Ο τελευταίος περιορισμός απαιτεί ακριβώς K-P από τους K περιορισμούς για να είναι ανενεργός, συνεπώς οι P περιορισμοί είναι ενεργοί.

Υπό όρους περιορισμοί

Οι λογικοί περιορισμοί και οι μεταβλητές δεικτών είναι χρήσιμοι στην υπό όρους επιβολή περιορισμών. Παραδείγματος χάριν, οι μη μηδενικές τιμές στις μεταβλητές μιας ομάδας (X) μπορούν να υπονοήσουν μη μηδενικές τιμές και για μια άλλη ομάδα μεταβλητών(Y).

Αυτό μπορεί να μορφοποιηθεί ως εξής:

- MZ

- RZ

, , Z = 0 ή 1

Εδώ είναι τα στοιχεία της πρώτης ομάδας, Z είναι μια μεταβλητή δεικτών που δείχνει εάν γ οποιοδήποτε έχει αγοραστεί , είναι τα στοιχεία της δεύτερης ομάδας και το M είναι ένας μεγάλος αριθμός. Το Z μπορεί να είναι μηδέν μόνο εάν όλα τα X είναι 0 αλλιώς έχει τιμή 1. Το σύνολο των Y πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το R εάν ο δείκτης μεταβλητών Z είναι ένα.

Τα ιδιαίτερα επίπεδα των πόρων

Καταστάσεις μπορούν να προκύψουν όταν οι μεταβλητές περιορίζονται από τους ιδιαίτερους όρους των πόρων. Για παραδείγματα, ας υποθέσουμε ότι ένα αγρόκτημα έχει τρία χωράφια. Οι αγρότες φυτεύουν συνήθως σε κάθε χωράφι μία συγκεκριμένη συγκομιδή. Συνεπώς, μια κατάσταση μπορεί να απαιτήσει να φυτευτούν συγκομιδές σε εκτάσεις σύμφωνα με την οποία ένα ολόκληρο χωράφι θα φυτευτεί με μία καλλιέργεια. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να επιβληθεί χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές δεικτών. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν 3 χωράφια σε διαφορετικά μεγέθη , , καθένα από τα οποία πρέπει να είναι διαθέσιμα είτε για τη συγκομιδή 1 ( ) είτε για τη συγκομιδή 2 ( ). Οι περιορισμοί που επιβάλλουν έναν τέτοιο όρο είναι:

- - - = 0

- (1-) - (1-) - (1-) = 0

ή

+ + + = + +

, = 0 ή 1 για κάθε k και i

Η μεταβλητή δείχνει εάν στο χωράφι i έχει φυτευτεί η καλλιέργεια 1 (=1) ή η καλλιέργεια 2 (=0). Οι μεταβλητές είναι ίσες με τη συνολική επιφάνεια της καλλιέργειας i που φυτεύεται. Όταν =1 και , =0 τότε η επιφάνεια της καλλιέργειας 1 ( ) θα είναι ίση με ενώ η επιφάνεια της καλλιέργειας 2 ( ) θα είναι ίση με + . Οι ιδιαίτερες μεταβλητές διασφαλίζουν ότι οι τομείς ορίζονται με έναν αμοιβαίως αποκλειστικό τρόπο διατύπωσης.

Ευδιάκριτες μεταβλητές τιμές

Οι καταστάσεις απαιτούν ότι οι μεταβλητές απόφασης εκθέτουν μόνο ορισμένες ευδιάκριτες τιμές (δηλ., μια μεταβλητή που περιορίζεται να είναι ίση με 2, 4, ή 12). Αυτό μπορεί να διατυπωθεί με δύο τρόπους. Πρώτα, αν η μεταβλητή μπορεί να πάρει τις ευδιάκριτες τιμές που δεν εκθέτουν κανένα ιδιαίτερο σχέδιο τότε:

X - - - = 0

\+ + = 1

X , Y = 0 ή 1

Εδώ, η μεταβλητή X μπορεί να πάρει είτε την ιδιαίτερη αξία , , ή , όπου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Ο δεύτερος περιορισμός επιβάλει αμοιβαία αποκλειστικότητα περιορισμού μεταξύ των επιτρεπόμενων τιμών. Από την άλλη πλευρά εάν οι τιμές πέσουν μεταξύ δύο ορίων και χωρίζονται από ένα σταθερό διάστημα, τότε είναι εφαρμόσιμη μια διαφορετική διατύπωση. Η μορφοποίηση που χρησιμοποιείται εξαρτάται από το αν χρησιμοποιούνται μεταβλητές που παίρνουν τιμές 0,1 ή ακέραιων αριθμών. Όταν χρησιμοποιούμε μεταβλητές μηδέν-ένα, τότε ξεκινάμε να ασχολούμαστε με μία δυαδική επέκταση. Αν για παράδειγμα το X είναι περιορισμένο να κυμαίνεται μεταξύ του 5 και του 20 ο τύπος θα διατυπωθεί ως εξής :

X - - 2 - 4 - 8 = 5

X , = 0 ή 1

Εδώ κάθε είναι μια μηδέν-ένα μεταβλητή δεικτών και το X είναι μια συνεχής μεταβλητή, αλλά στη λύση, το X θα είναι ίσο με μια ακέραια τιμή. Όταν όλα τα είναι ίσα με το μηδέν, τότε το X = 5. Εάν το = =1 τότε X =15. Μέσω αυτής της αντιπροσώπευσης, οποιαδήποτε αξία ακέραιων αριθμών του X μεταξύ 5 και 20 μπορεί να εμφανιστεί. Γενικά, μέσω της χρήσης N μεταβλητών μηδέν-ένα, οποιαδήποτε αξία ακέραιων αριθμών μεταξύ της δεξιάς πλευράς και της δεξιάς πλευράς αντιπροσωπεύεται.

Συνεπώς ο περιορισμός X - = a

περιορίζει το X για να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός μεταξύ του α και a+ - 1. Αυτή η διατύπωση επιτρέπει τη μοντελοποίηση των γενικών ακέραιων τιμών κατά τη χρήση ενός μηδέν-ένα αλγορίθμου ακέραιου προγραμματισμού.

Μη γραμμικές αντιπροσωπεύσεις

Μια άλλη χρήση του ακέραιου προγραμματισμού περιλαμβάνει την αντιπροσώπευση του πολλαπλασιασμού των μεταβλητών μηδέν-ένα. Ένας όρος που περιλαμβάνει το προϊόν δύο μεταβλητών μηδέν-ένα θα είναι ίσος με 1 όταν και οι δύο ακέραιες μεταβλητές είναι ίσες με το ένα ή το μηδέν. Ας υποθέσουμε ότι το Z είναι ίσο με το προϊόν δύο μηδέν-ένα μεταβλητών και ,

Z =

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτόν τον όρο με το να εισάγουμε ένα Z ως μία μεταβλητή μηδέν-ένα ως εξής:

-Z + +

2Z - -

Z, , = 0 ή 1

Ο πρώτος περιορισμός απαιτεί ότι το Z +1 είναι μεγαλύτερο ή ίσο με + . Συνεπώς, το Z αναγκάζεται να είναι ίσο με το 1 εάν τα και είναι ίσα με 1. Ο δεύτερος περιορισμός απαιτεί το 2Z να είναι λιγότερο ή ίσο με + . Αυτό επιτρέπει στο Z να είναι διαφορετικό από το μηδέν μόνο όταν και και είναι ίσα με το 1. Άρα, το Z θα είναι ίσο με μηδέν εάν καθεμία από τις μεταβλητές είναι ίση με μηδέν και θα είναι ίσο με 1 όταν και και είναι ίσα με ένα. Βέβαια μπορεί να μη χρειαστούμε και τους δύο περιορισμούς, παραδείγματος χάριν, όταν εμφανίζεται το Z με τις θετικές τιμές σε μία συνάρτηση αντικειμενικής μεγιστοποίησης κέρδους, τότε ο πρώτος περιορισμός μπορεί να παραβλεφθεί, αν και όπως θα δούμε αργότερα είναι σημαντικό να υπάρχουν πολλοί περιορισμοί κατά την εφαρμογή του ακέραιου προγραμματισμού.

Η προσέγγιση των μη γραμμικών λειτουργιών

Ο ακέραιος προγραμματισμός είναι χρήσιμος για τις μη γραμμικές λειτουργίες, οι οποίες δεν μπορούν να προσεγγιστούν με το γραμμικό προγραμματισμό δηλ., τις λειτουργίες με το αυξανόμενο ασήμαντο εισόδημα ή τη μειωμένη πρόσθετη δαπάνη. (Οι προσεγγίσεις βημάτων LP δεν μπορούν να το προσεγγίσουν επαρκώς ·η αντικειμενική λειτουργία δεν είναι κοίλη.) Μπορούμε να διατυπώσουμε έναν ακέραιο προγραμματισμό ο οποίος να απαιτεί τα προσεγγίσιμα σημεία να είναι παρακείμενα κάνοντας την εργασία λήξης κατάλληλη. Εάν κάποιος έχει τέσσερις μεταβλητές βημάτων, ένας περιορισμός γειτνίασης μπορεί να επιβληθεί ως εξής :

\+ + + = 1

\-

\-

\-

\-

\+ + +

\+

\+

\+

= 0 ή 1

Τα λ (8) είναι οι μεταβλητές βημάτων προσέγγισης. Τα είναι μεταβλητές δεικτών που δείχνουν εάν μια ιδιαίτερη μεταβλητή βημάτων είναι διαφορετική από το μηδέν. Ο πρώτος περιορισμός που περιέχει το μέσω του δεν επιτρέπει παραπάνω από δύο μη μηδενικές μεταβλητές βημάτων. Υπάρχει επίσης ένας δεύτερος τύπος μη γραμμικής προσέγγισης που χρησιμοποιεί τις μεταβλητές μηδέν-ένα.

Στρογγυλοποίηση

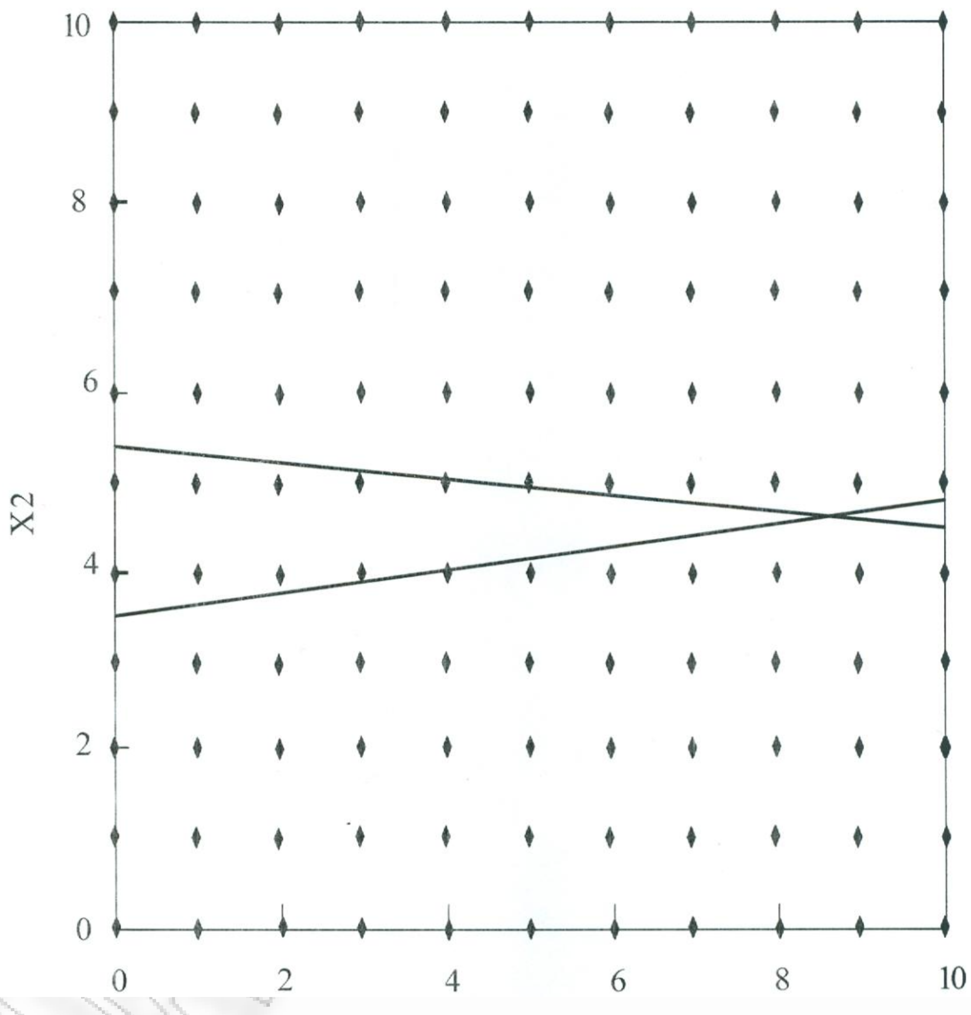
Η στρογγυλοποίηση είναι η πιο αφελής προσέγγιση στη λύση ενός προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Η προσέγγιση στρογγυλοποίησης περιλαμβάνει τη λύση του προβλήματος ως ένα LP πρόβλημα που ακολουθείται από μια προσπάθεια να στρογγυλοποιηθεί η λύση σε έναν ακέραιο αριθμό ή με: α) τη ρίψη όλων των κλασματικών μερών ή β) ψάχνοντας έξω τις ικανοποιητικές λύσεις όπου οι μεταβλητές τιμές προσαρμόζονται στις κοντινές μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές ακέραιων αριθμών. Η στρογγυλοποίηση είναι πιθανώς η πιο κοινή προσέγγιση στην επίλυση των προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Τα περισσότερα LP προβλήματα περιλαμβάνουν μεταβλητές με κλασματικές τιμές λύσεων που στη πραγματικότητα είναι ακέραιος αριθμός. Οι κλασματικοί όροι στις λύσεις δεν έχουν ακριβές νόημα, αλλά είναι μερικές φορές αποδεκτοί εάν η στρογγυλοποίηση εισάγει μια πολύ μικρή αλλαγή στην αξία της μεταβλητής (δηλ. στρογγυλοποιώντας το 1003421,1 σε 1003421 ή ακόμα και το 1003420 είναι πιθανώς αποδεκτό).

Υπάρχει, εντούτοις, μια σημαντική δυσκολία με τη στρογγυλοποίηση. Ας θεωρήσουμε το παρακάτω παράδειγμα όπως δίνεται με τη γραφική παράσταση στην εικόνα 1 :

- 7 ≤ -22,5

\+ 10 ≤ 54

, ≥ 0 και ακέραιος



Εικόνα 1 Γραφική παράσταση των εφικτών σημείων ακεραίων αριθμών

Σε αυτό το πρόβλημα η στρογγυλοποίηση θα παράγει μια λύση έξω από την εφικτή περιοχή. Γενικά, η στρογγυλοποίηση είναι συχνά πρακτική, αλλά πρέπει να χρησιμοποιηθεί με προσοχή. Κάποιος πρέπει να συγκρίνει τις στρογγυλοποιημένες και απεριόριστες λύσεις για να δει εάν μετά από τη στρογγυλοποίηση: α) οι περιορισμοί ικανοποιούν επαρκώς) και β) εάν η διαφορά μεταξύ του βέλτιστου LP και της θέσης που στρογγυλοποιούν την αντικειμενική αξία λειτουργίας είναι εύλογα μικρή. Αν συμβαίνει αυτό ο ακέραιος προγραμματισμός δεν είναι οικονομικώς αποδοτικός και η στρογγυλοποιημένη λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Από την άλλη πλευρά, εάν κάποιος βρίσκει την αντικειμενική λειτουργία να έχει αλλάξει ή τους περιορισμούς να παραβιάστηκαν από μια πραγματική άποψη, τότε μια επίσημη άσκηση ακέραιου προγραμματισμού πρέπει να αναληφθεί.

Ο αλγόριθμος Cutting planes

Οι πρώτοι επίσημοι αλγόριθμοι ακέραιου προγραμματισμού περιλάμβαναν την έννοια των cutting-planes. Τα cutting-planes αφαιρούν μέρος της εφικτής περιοχής χωρίς να αφαιρούν τα σημεία λύσης ακέραιων αριθμών. Η βασική ιδέα πίσω από ένα cutting-plane είναι ότι το βέλτιστο σημείο ακέραιων αριθμών είναι κοντά στη βέλτιστη λύση LP, αλλά δεν πέφτει στη διατομή του περιορισμού οπότε πρέπει να επιβληθούν πρόσθετοι περιορισμοί. Συνεπώς, οι περιορισμοί προστίθενται για να αναγκάσουν τη μη ακέραια LP λύση να είναι ανέφικτη, χωρίς την εξάλειψη οποιωνδήποτε λύσεων ακέραιων αριθμών. Αυτό γίνεται με την προσθήκη ενός περιορισμού που αναγκάζει τις μη βασικές μεταβλητές να είναι μεγαλύτερες από μια μικρή διαφορετική μη μηδενική αξία. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο πρόγραμμα ακέραιων αριθμών:

Μεγιστοποίηση

3 + 2 ≤ 16

, ≥ 0 και ακέραιος

Η βέλτιστη εικόνα λύσης LP είναι :

					b
obj	1.4	1	0	0	
	1	0	0.6	-0.4	3.2
	0	1	-0.4	0.6	3.2
	0	0	0.2	0.2	6.4

Όπου έχει = =3.2 που είναι μη ακέραιος. Το απλούστερο cutting-plane θα ήταν να απαιτηθεί το ποσό των μη βασικών μεταβλητών να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κλασματικό μέρος κάποιας από τις μεταβλητές. Συγκεκριμένα, η παραγωγή ενός από τη σειρά όπου το είναι βασικό επιτρέπει να προστεθεί ένας περιορισμός που απαιτείται ώστε 0.6 - 0.4 . Ο αλγόριθμός cutting-plane συνεχώς προσθέτει τέτοιους περιορισμούς μέχρι να βρεθεί μία ακέραια λύση.

Πολλές περισσότερες καθαρισμένες περικοπές (cuts) έχουν αναπτυχθεί. Το ζήτημα είναι πώς θα διαμορφωθεί ο περιορισμός περικοπών. Τέτοιες μέθοδοι εμφανίζονται από τον Gomory (1958,1960,1963)

Διάφορα σημεία πρέπει να γίνουν για τις προσεγγίσεις των cutting-planes. Είναι πιθανό να απαιτηθούν πολλές περικοπές για να λάβουν μια λύση ακέραιων αριθμών. Παραδείγματος χάριν, ο Beale (1977) αναφέρει ότι συχνά απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός περικοπών (στην πραγματικότητα συχνά απαιτούνται περισσότεροι από ότι μπορεί να διατεθούν). Δεύτερον, η πρώτη λύση ακέραιων αριθμών είναι η βέλτιστη λύση. Αυτή η λύση ανακαλύπτεται μόνο αφότου έχουν προστεθεί αρκετές περικοπές για να παράγουν μια λύση ακέραιων αριθμών. Συνεπώς, εάν η λύση του αλγορίθμου ξεμείνει από το χρόνο ή το χώρο, τότε αφήνεται χωρίς αποδεκτή λύση (αυτό είναι συχνή περίπτωση). Τρίτον, λαμβάνοντας υπόψη τη συγκριτική απόδοση έναντι άλλων αλγορίθμων, οι προσεγγίσεις cutting-planes δεν είναι τόσο δημοφιλείς (Beale, 1977).

Αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης (Branch and Bound)

Η δεύτερη προσέγγιση λύσης που αναπτύσσεται είναι ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης (Branch and Bound). Ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης, που πρωτοεμφανίστηκε από τους Land και Doig, ακολουθεί μία στρατηγική του ‘διαίρει και βασίλευε’. Ο αλγόριθμος ξεκινάει με μια λύση LP και επιβάλλει, επίσης, περιορισμούς για να αναγκάσουν τη λύση LP να γίνει μια λύση ακέραιων αριθμών, όπως τα cutting-planes. Εντούτοις, οι περιορισμοί του αλγόριθμου του περιορισμού και διακλάδωσης είναι τα ανώτερα και τα κατώτερα όρια των μεταβλητών. Λαμβάνοντας υπόψη μία μη ακέραια προαιρετική λύση για το ανωτέρω παράδειγμα (δηλ., = 3.2), ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης επιβάλλει περιορισμούς που απαιτούν από το να είναι ίσο ή κάτω από τις παρακείμενες τιμές ακέραιων αριθμών γύρω από το 3.2 π.χ. # 3 και .Αυτό οδηγεί σε δύο διασπώμενα προβλήματα π.χ.

Και

Η διαδικασία λύσης του αλγόριθμου περιορισμού και διακλάδωσης δημιουργεί δύο προβλήματα (branches) μετά από κάθε λύση LP. Κάθε πρόβλημα αποκλείει την ανεπιθύμητη μη ακέραια λύση, διαμορφώνοντας ένα όλο αυξανόμενο και περιορισμένο LP πρόβλημα. Υπάρχουν διάφορες αποφάσεις που απαιτούνται. Κάποιος πρέπει να αποφασίσει ποια μεταβλητή του κλάδου και ποιο πρόβλημα θα λύσει. Όταν το ένα λύνει ένα ιδιαίτερο πρόβλημα το άλλο μπορεί να βρει μια λύση ακέραιων αριθμών. Εντούτοις, κάποιος δεν μπορεί να είναι σίγουρος ότι είναι το βέλτιστο έως ότου εξεταστούν όλα τα προβλήματα. Τα προβλήματα μπορούν να εξεταστούν σιωπηρά ή αναλυτικά. Η μεγιστοποίηση προβλημάτων θα εκθέσει τις μειωμένες αντικειμενικές τιμές λειτουργίας όποτε οι πρόσθετοι περιορισμοί προστίθενται. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη ότι έχει βρεθεί μία εφικτή ακέραια λύση, οποιαδήποτε λύση, ακέραια ή μη με μικρότερη αντικειμενική αξία λειτουργίας δε μπορεί να είναι βέλτιστη, ούτε μπορεί να διακλαδωθεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα πριν δοθεί καλύτερη λύση από την ήδη υπάρχουσα (καθώς η αντικειμενική λειτουργία μόνο θα μειώνεται). Άρα, η καλύτερη λύση ακέραιων αριθμών που βρίσκεται σε οποιοδήποτε στάδιο του αλγορίθμου παρέχει έναν περιορισμό που οριοθετεί τα προβλήματα (κλάδοι) που αναζητούνται. Ο δεσμός ενημερώνεται συνεχώς όταν βρίσκονται καλύτερες λύσεις ακέραιων αριθμών.

Τα προβλήματα που παράγονται σε κάθε στάδιο διαφέρουν από το αρχικό πρόβλημα μόνο στα όρια των μεταβλητών των ακεραίων αριθμών. Ένας αλγόριθμος ακέραιου προγραμματισμού που μπορεί να χειριστεί τις συνδεδεμένες αλλαγές, μπορεί εύκολα να πραγματοποιήσει τους υπολογισμούς περιορισμού και διακλάδωσης. Η προσέγγιση περιορισμού και διακλάδωσης είναι η πιο συχνά χρησιμοποιημένη λύση ακέραιου προγραμματισμού αλγόριθμου γενικού σκοπού (Beale,1977 Lawler και Wood). Εφαρμόζεται σε πολλούς κώδικες (π.χ., OSL, LAMPS και LINDO) συμπεριλαμβανομένων και των διεπαφών με GAMS. Εντούτοις, η χρήση της μπορεί να είναι ακριβή. Οι αλγόριθμοι παράγουν ενδιάμεσες λύσεις που είναι εφαρμόσιμες αν και μη βέλτιστες. Συχνά ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης θα φτάσει κοντά στις βέλτιστες λύσεις αλλά θα ξοδέψει πολύ χρόνο ελέγχοντας τη βελτιστοποίηση. Οι τιμές σκιών από τον αλγόριθμο μπορούν να είναι παραπλανητικές, δεδομένου ότι περιλαμβάνουν τιμές σκιών των οριοθετημένων περιορισμών. Μία εξειδικευμένη μορφή αλγορίθμου περιορισμού και διακλάδωσης για 0-1 προγραμματισμό αναπτύχθηκε από τον Balas. Αυτός ο αλγόριθμος ονομάζεται υπονοούμενη απαρίθμηση. Αυτή η μέθοδος έχει επεκταθεί και στη μικτή περίπτωση ακέραιων αριθμών, όπως στη LINDO (Schrage, 1981).

Lagrangian relaxation

Η Lagrangian relaxation (Geoffrion (1974), Fisher (1981 ,1985)) είναι ένας άλλος τομέας της αλγοριθμικής ανάπτυξης του ακέραιου προγραμματισμού. Η Lagrangian relaxation αναφέρεται σε μια διαδικασία, στην οποία μερικοί από τους περιορισμούς είναι χαλαρωμένοι στην αντικειμενική λειτουργία που χρησιμοποιεί μια προσέγγιση που παρακινείται από τους Lagrangian πολλαπλασιαστές. Το βασικό Lagrangian relaxation πρόβλημα για το μικτό πρόγραμμα ακέραιων αριθμών

Μεγιστοποίηση $CX + FY$

$AX + GY$

$DX + HY$

X , Y και ακέραιοι,

περιλαμβάνει την ανακάλυψη ενός συνόλου πολλαπλασιαστών Lagrange για μερικούς περιορισμούς και τη χαλάρωση του σύνολο περιορισμών στην αντικειμενική λειτουργία. Δεδομένου ότι επιλέγουμε να χαλαρώσουμε τους δεύτερους καθορισμένους περιορισμούς χρησιμοποιώντας lagrange πολλαπλασιαστές (8) το πρόβλημα γίνεται :

Μεγιστοποίηση $CX + FY - \lambda(DH + HY - e)$

$AX + GY$

X , Y και ακέραιοι,

Η κύρια ιδέα είναι να αφαιρεθούν οι δύσκολοι περιορισμοί από το πρόβλημα έτσι ώστε τα προγράμματα ακέραιων αριθμών να είναι πολύ πιο εύκολα να λυθούν. Τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού με τις δομές ,όπως αυτές του προβλήματος μεταφορών, μπορούν να λυθούν άμεσα με LP. Το τέχνασμα είναι να επιλεχτεί να χαλαρώσει ο σωστός περιορισμός και να αναπτυχθούν οι τιμές για τους lagrange πολλαπλασιαστές ( ) που οδηγούν στην κατάλληλη λύση. Η Lagrangian χαλάρωση έχει χρησιμοποιηθεί σε δύο τοποθετήσεις: 1) για να βελτιωθεί η απόδοση των ορίων σε λύσεις και 2) για να αναπτυχθούν λύσεις που μπορούν να ρυθμιστούν άμεσα ή μέσω heuristics έτσι ώστε να είναι εφικτοί στο γενικό πρόβλημα (Fisher(1981 - 1985)). Ένα σημαντικό Lagrangian αποτέλεσμα χαλάρωσης είναι ότι το χαλαρωμένο πρόβλημα παρέχει ένα ανώτερο όριο στη λύση του ανεξάρτητου προβλήματος σε οποιοδήποτε στάδιο. Η Lagrangian χαλάρωση χρησιμοποιείται κυρίως στους αλγορίθμους περιορισμού και διακλάδωσης (branch και bound) για να παράγει τα ανώτερα όρια για ένα πρόβλημα προκειμένου να δούμε εάν η περαιτέρω διάσχιση είναι σημαντική.

Η Lagrangian Relaxation έχει εφαρμοστεί εκτενώς. Έχουν υπάρξει μελέτες του διακινούμενου προβλήματος πωλητών (Bazaraa και Goode), συστημάτων ηλεκτρικής παραγωγής (Muckstadt και Koenigl), εξουσιοδοτημένου προβλήματος θέσης (Cornuejols), εξουσιοδοτημένου προβλήματος δυνατότητας θέσης (Goodwin και McBride) και γενικευμένα προβλήματα ανάθεσης (Ross και Soland). Ακόμη οι Fisher (1981, 1985) και Shapiro (1979) παρουσιάζουν διάφορα ερευνητικά άρθρα.

Ο αλγόριθμος Benders Decomposition

Ένας άλλος αλγόριθμος για τον ακέραιο προγραμματισμό καλείται benders decomposition. Αυτός ο αλγόριθμος λύνει τα μικτά προγράμματα ακέραιων αριθμών μέσω της δομικής εκμετάλλευσης. Οι Benders ανέπτυξαν τη διαδικασία, γι'αυτό έκτοτε έχει πάρει αυτό το όνομα, η οποία αποσυνθέτει ένα μικτό πρόβλημα ακέραιων αριθμών σε δύο προβλήματα που λύνονται επαναληπτικά - ένα κύριο πρόβλημα ακέραιων αριθμών και ένα γραμμικό υπο-πρόβλημα. Η επιτυχία της διαδικασίας περιλαμβάνει τη δομή και την επιλογή του υπο-προβλήματος. Η διαδικασία μπορεί να λειτουργήσει άσχημα για ορισμένες δομές. (π.χ. Mccarl, 1982 ή Bazarra, Jarvis και Sherali.) Ένα 'decomposable' μικτό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού είναι:

Μεγιστοποίηση FX + CZ

GX

HX + AZ

DZ

X είναι ακέραιος, Z

Η ανάπτυξη της αποσύνθεσης αυτού του προβλήματος προχωρά με την επαναληπτική ανάπτυξη των εφικτών σημείων X και τη λύση του υπο-προβλήματος:

Μεγιστοποίηση CZ

AZ - HX * (α)

DZ (λ)

Z

Η λύση σε αυτό το υπο-πρόβλημα παράγει τις διπλές μεταβλητές στην παρένθεση. Στη συνέχεια ένα κύριο πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής :

Μεγιστοποίηση FX + Q

X,α,γ,Q

Q ( ) + i = 1,2…..p

GX

X ακέραιος

Q – 0

Αυτό το πρόβλημα περιέχει τις διπλές πληροφορίες από το παραπάνω και παράγει μια νέα αξία X. Ο περιορισμός που περιλαμβάνει το Q δίνει μια πρόβλεψη στο υπο-πρόβλημα αντικειμενικής λειτουργίας που προκύπτει από τις διπλές μεταβλητές, από το έως το X. Στη συνέχεια αυτό το πρόβλημα παράγει μια νέα και καλύτερη εικασία στο X. Κάθε επανάληψη προσθέτει έναν περιορισμό στο κύριο πρόβλημα. Η αντικειμενική λειτουργία αποτελείται από FX + Q, όπου το Q είναι μια προσέγγιση του CZ. Η κύρια αντικειμενική λειτουργία προβλήματος αποτελεί ,επομένως, ένα μη αυξανόμενο ανώτερο όριο καθώς οι επαναλήψεις προχωρούν. Η αντικειμενική λειτουργία υπο-προβλήματος (CZ) σε οποιαδήποτε επανάληψη συν το FX μπορεί να θεωρηθεί ως το κατώτατο όριο. Το κατώτατο όριο δεν αυξάνεται μονότονα. Εντούτοις, με την επιλογή του μεγαλύτερου από τα διάφορα υποψήφια και επιβεβλημένα κατώτερα όρια, διαμορφώνεται μια μονοτονική μη αυξανόμενη ακολουθία ορίων. Έπειτα τα ανώτερα και τα χαμηλότερα όρια δίνουν ένα μονότονο ρυθμό μείωσης μεταξύ των ορίων. Ο χρήστης του αλγορίθμου μπορεί να σταματήσει τη διαδικασία λύσης κατά ένα μη αποδεκτά μικρό όριο διάδοσης. Η τελευταία λύση που παρήγαγε ένα χαμηλότερο όριο είναι η λύση που είναι μέσα στη διάδοση της βέλτιστης λύσης του αλγορίθμου περιορισμού και διακλάδωσης. Η μορφή του γενικού προβλήματος εγγυάται σφαιρική βελτιστοποίηση στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις. Σφαιρική βελτιστοποίηση θα εμφανιστεί όταν όλα τα πιθανά X θα έχουν απαριθμηθεί (είτε σιωπηρά είτε ρητά). Έτσι, η σύγκλιση των benders decomposition εμφανίζεται όταν η διαφορά μεταξύ των ορίων οδηγείται σε μηδέν. Όταν το πρόβλημα σταματά με μια ανοχή, η αντικειμενική έλξη θα είναι μέσα στην ανοχή, αλλά δεν υπάρχει καμία σχέση που δίνει την απόσταση μεταξύ των μεταβλητών λύσεων και των αληθινών βέλτιστων λύσεων για τις μεταβλητές. (δηλ., η απόσταση Z* και X* από το αληθινό βέλτιστο των Z και των X). Η σύγκλιση θα εμφανιστεί σε μια πρακτική ρύθμιση μόνο εάν για κάθε X επιστρέφεται ένα σχετικό σύνολο διπλών μεταβλητών. Αυτό θα συμβεί μόνο εάν το υπο-πρόβλημα είναι οριακό και έχει μία εφικτή λύση για κάθε X του κύριου προβλήματος. Αυτό μπορεί να μην είναι γενικά αλήθεια, διότι μπορεί να απαιτηθούν τεχνητές μεταβλητές.

Εντούτοις, η οριοθέτηση και η δυνατότητα πραγματοποίησης του υπο-προβλήματος δε δηλώνουν τίποτα για το ποσοστό σύγκλισης. Ένα γραμμικό πρόγραμμα μετρίου μεγέθους θα έχει πολύ πιθανόν (χιλιάδες) ακραίες λύσεις σημείου. Η πραγματική τέχνη της χρησιμοποίησης των Benders περιλαμβάνει την αναγνώριση των κατάλληλων προβλημάτων ή και του προβλήματος δομής που θα συγκλίνουν γρήγορα. Οι γενικές δηλώσεις που μπορούν να γίνουν είναι:

1. Η μέθοδος αποσύνθεσης δε λειτουργεί καλά όταν οι μεταβλητές X που επιλέγονται από τα κύρια προβλήματα δεν παράγουν ένα εφικτό υπο-πρόβλημα. Συνεπώς, όσο ακριβέστερα απεικονίσουν οι περιορισμοί του κύριου προβλήματος τους όρους του υπο-προβλήματος, τόσο γρηγορότερα θα γίνει σύγκλιση.(Geoffrion και Graves,Danok,McCarl και White Magnanti και Wong και Sherali)
2. Όσο περισσότερο περιορισμένη είναι η εφικτή περιοχή του κύριου προβλήματος τόσο καλύτερα. (Magnanti και Wong και Sherali.)
3. Όταν είναι πιθανό, οι περιορισμοί πρέπει να εισαχθούν στο κύριο πρόβλημα που αποκλείει τις εφικτές, όμως μη ρεαλιστικές, λύσεις στο γενικό πρόβλημα. (Danok,McCarl και White,1978)

Ο πιο κοινός λόγος να χρησιμοποιηθούν οι Benders είναι να αποσυντεθεί το μεγάλο μικτό πρόβλημα ακέραιων αριθμών σε ένα μικρό δύσκολο κύριο πρόβλημα και σε ένα μεγαλύτερο απλό γραμμικό πρόγραμμα. Αυτό επιτρέπει τη λύση του προβλήματος από δύο κομμάτια του λογισμικού, τα οποία αυτόνομα δεν πρέπει να είναι επαρκή για το γενικό πρόβλημα αλλά συλλογικά είναι ικανοποιητικά για τα επακόλουθα κομμάτια. Επιπλέον, η αποσύνθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απομονώσει ιδιαιτέρως εύκολα και να λύσει τις δομές των υπο-προβλημάτων (π.χ. απομόνωση των προβλημάτων μεταφορών των Geoffrion και Graves ή Hilgel). Τέλος, τα πολλαπλάσια επίπεδα αποσύνθεσης μπορούν να γίνουν στην εκμετάλλευση της δομής (Polito).

Heuristics

Πολλά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού είναι συνδυαστικά και δύσκολο να λυθούν από τη φύση τους. Στην πραγματικότητα, η μελέτη των πλήρων προβλημάτων του NP (Papadimitrou και Steiglitz) έχει παρουσιάσει ακραία υπολογιστική πολυπλοκότητα για προβλήματα όπως το διακινούμενο πρόβλημα πωλητών. Τέτοιες υπολογιστικές δυσκολίες έχουν οδηγήσει σε έναν μεγάλο αριθμό heuristics. Αυτά τα heuristics (Zanakis και Evans) χρησιμοποιούνται όταν:

α) η ποιότητα των στοιχείων δεν αξίζει την παραγωγή ακριβούς βέλτιστης λύσης

β) ένα απλουστευμένο πρότυπο έχει χρησιμοποιηθεί ή

γ) όταν μια αξιόπιστη ακριβής μέθοδος δεν είναι διαθέσιμη, υπολογιστικά ελκυστική και προσιτή.

Τα επιχειρήματα για heuristics παρουσιάζονται, επίσης, σχετικά με τη βελτίωση της απόδοσης ενός βελτιστοποιητή, όπου ένα heuristic μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κερδίσει χρόνο σε έναν κώδικα του αλγόριθμου περιορισμού και διακλάδωσης, ή εάν το πρόβλημα λύνεται επανειλημμένα. Πολλά heuristics ακέραιου προγραμματισμού έχουν αναπτυχθεί, μερικά εκ των οποίων είναι συγκεκριμένα για τους ιδιαίτερους τύπους προβλημάτων. Παραδείγματος χάριν, έχουν υπάρξει αρκετά heuristics διακινούμενων προβλημάτων πωλητών ,όπως αναθεωρεί ο Golden.

Heuristics έχουν αναπτυχθεί για το γενικό 0 -1 προγραμματισμό (Senju και Toyoda) και γενικά για τον ακέραιο προγραμματισμό (Glover, Kochenberger, Mccarls και Wyman), καθώς επίσης και πολυωνυμικά προβλήματα 0 - 1 (Granot). Οι Zanakis και Evans αναθεωρούν διάφορα heuristics, ενώ ο Wyman παρουσιάζει τα υπολογιστικά στοιχεία στην απόδοσή τους. Γενικά τα heuristics αποδίδουν καλά στους πρόσθετους τύπους προβλημάτων, βρίσκοντας αρκετά συχνά λάθη μικρότερα του δύο τοις εκατό. Οι Zanak, Evans και Wyman παρέχουν τις συζητήσεις των επιλογών heuristics έναντι των άλλων και μεθόδων βελτιστοποίησης. Τα heuristics, επίσης, δεν αποκαλύπτουν απαραιτήτως την αληθινή βέλτιστη λύση και σε οποιοδήποτε πρόβλημα είναι αβέβαιο ότι είναι η βέλτιστη λύση αν και η τεχνική Lagrangian relaxation μπορεί να κάνει την οριοθέτηση των δηλώσεων.

Δομική εκμετάλλευση

Χρόνια εμπειρίας και χιλιάδων ερευνών για τον ακέραιο προγραμματισμό έχουν δείξει ότι η γενικής χρήσης αλγόριθμοι ακέραιου προγραμματισμού δε λειτουργούν ικανοποιητικά για όλα τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Οι πιο ελπιδοφόρες εξελίξεις, τα τελευταία χρόνια, έχουν περιλάβει τη δομική εκμετάλλευση, όπου η ιδιαίτερη δομή ενός προβλήματος έχει χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη του αλγόριθμου λύσεων. Τέτοιες προσεγγίσεις είναι: το επίκεντρο της εξέλιξης αρκετών heuristics, οι προσεγγίσεις Benders decomposition,η Lagrangian χαλάρωση και αρκετές προσεγγίσεις αναδιατύπωσης προβλημάτων. Έχουν, επίσης, αναπτυχθεί εξειδικευμένοι αλγόριθμοι όπως ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης που προσαρμόζονται σε ιδιαίτερα προβλήματα (Fuller, Randolph και Klingmal|, Glover 1978). Η εφαρμογή τέτοιων αλγορίθμων οδήγησε σε θεαματικά αποτελέσματα κυρίως σε προβλήματα με χιλιάδες μεταβλητές που να επιλύονται σε σύντομο χρονικό διάστημα (π.χ. υπολογιστικές εκθέσεις των Geoffrion και Graves , Zanakis). Οι κύριοι μηχανισμοί για τη δομική εκμετάλλευση είναι να αναπτυχθεί ένας αλγόριθμος ειδικά συντονισμένος σε ένα ιδιαίτερο πρόβλημα ή γενικότερα, για να μετασχηματίσει ένα πρόβλημα σε ένα απλούστερο πρόβλημα που είναι έτοιμο να λυθεί.

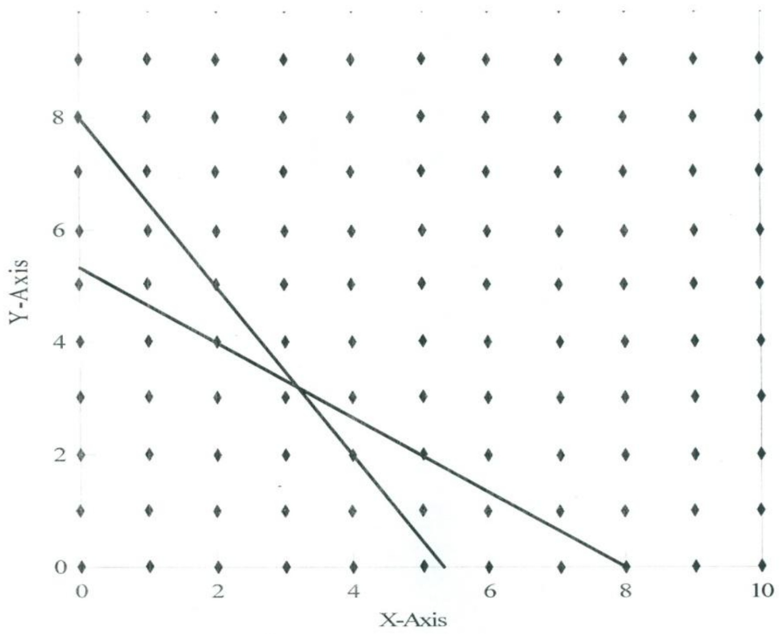
Τα εφικτά χαρακτηριστικά περιοχών και οι δυσκολίες λύσης

Τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού είναι εμφανώς δύσκολο να λυθούν. Αυτό το τμήμα παρέχει τη διορατικότητα ως προς γιατί αυτό είναι έτσι. Ονομαστικά, τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού φαίνονται ευκολότερο να λυθούν από τα προβλήματα LP. Τα LP προβλήματα έχουν ενδεχομένως άπειρο αριθμό λύσεων, οι οποίες μπορούν να εμφανιστούν οπουδήποτε στην εφικτή περιοχή είτε στο εσωτερικό κατά μήκος των περιορισμών, είτε στις διατομές περιορισμού. Εντούτοις έχει αποδειχθεί ότι τα προβλήματα LP έχουν τις λύσεις μόνο στις διατομές περιορισμού (Dantzig, 1963). Συνεπώς, κάποιος πρέπει να εξετάσει μόνο τις διατομές και αυτή με την υψηλότερη αντικειμενική αξία λειτουργίας θα είναι η βέλτιστη λύση LP. Περαιτέρω, σε ένα LP πρόβλημα οποιονδήποτε δύο εφικτών σημείων, όλα τα σημεία στο ενδιάμεσο θα είναι εφικτά. Άρα, μέσα στην εφικτή περιοχή δε χρειάζεται να ανησυχούμε για την εύρεση των ανέφικτων λύσεων. Επιπλέον, το μειωμένο κριτήριο δαπανών παρέχει έναν κανόνα απόφασης που εγγυάται ότι η αντικειμενική λειτουργία θα αυξηθεί αν κινηθούμε από ένα εφικτό σημείο προς ένα άλλο (ή τουλάχιστον δε θα μειωθεί). Αυτές οι ιδιότητες βοηθούν πολύ τη λύση. Εντούτοις, ο ακέραιος προγραμματισμός είναι διαφορετικός. Αυτό παρουσιάζεται καλύτερα μέσω ενός παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι καθορίζουμε ένα καθαρό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού με τις μη αρνητικές μεταβλητές ακέραιων αριθμών και τους ακόλουθους περιορισμούς.

2X + 3Y # 16

3X + 2Y # 16

Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται σε μια γραφική παράσταση που δίνεται στο σχήμα 2.



Εικόνα 2 γραφική παράσταση των εφικτών σημείων ακεραίων αριθμών για το LP πρόβλημα

Τα διαμάντια στη γραφική παράσταση αντιπροσωπεύουν τα σημεία ακέραιων αριθμών, τα οποία είναι οι πιθανές λύσεις ακέραιων αριθμών. Προφανώς τα εφικτά σημεία λύσης ακέραιων αριθμών πέφτουν κάτω ή πάνω στους περιορισμούς ενώ ταυτόχρονα είναι επάνω από ή στους άξονες X και Y. Για αυτό το παράδειγμα, η βέλτιστη λύση δεν είναι πιθανώς στα όρια περιορισμού (δηλ. X=Y μπορούν να είναι βέλτιστοι), αλλά ούτε στις διατομές περιορισμού. Αυτό εισάγει την κύρια δυσκολία στην επίλυση των προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Δεν υπάρχει καμία ιδιαίτερη θέση για τις πιθανές λύσεις. Συνεπώς, ενώ το ισοδύναμο πρόβλημα LP θα είχε τέσσερις πιθανές λύσεις (κάθε εφικτό ακραίο σημείο και η προέλευση), το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού έχει έναν άγνωστο αριθμό πιθανών λύσεων. Καμία γενική δήλωση δε μπορεί να γίνει για τη θέση των λύσεων.

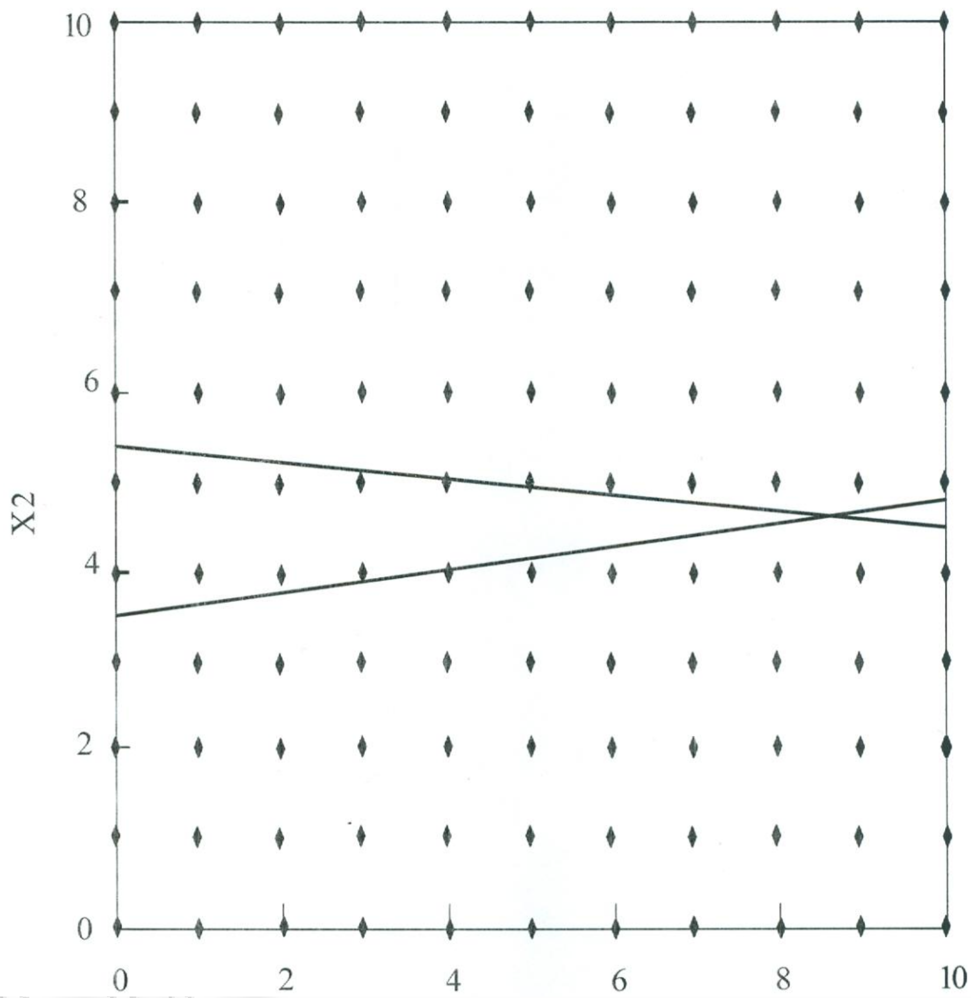
Μια δεύτερη δυσκολία είναι ότι δίνοντας οποιεσδήποτε δύο εφικτές λύσεις, όλα τα σημεία στο ενδιάμεσο δεν είναι εφικτά (δηλ. [3 3] και [2 4], όλα τα σημεία στο ενδιάμεσο είναι μη-ακέραιοι αριθμοί). Άρα, κάποιος δε μπορεί να κινηθεί ελεύθερα μέσα στην περιοχή ακέραιου προγραμματισμού που διατηρεί το εφικτό πρόβλημα, αλλά πρέπει να ανακαλύψει τα σημεία ακέραιου προγραμματισμού και να κινηθεί συνολικά μεταξύ τους.

Τρίτον είναι δύσκολο να κινηθεί μεταξύ εφικτών σημείων. Αυτό εμφανίζεται καλύτερα σε ένα ελαφρώς διαφορετικό παράδειγμα.

-X + 7

+ 10

Υποθέτουμε ότι έχουμε τους περιορισμούς, όπου και είναι μη αρνητικές μεταβλητές ακέραιων αριθμών. Μια γραφική παράσταση του διαστήματος λύσης εμφανίζεται στο σχήμα 3.



Εικόνα 3 Γραφική παράσταση των εφικτών σημείων ακεραίων αριθμών για πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού

Ας σημειώσουμε εδώ ότι η αλληλεξάρτηση των εφικτών λύσεων δεν εκθέτει οποιαδήποτε καθορισμένα σχέδια. Στην πρώτη γραφική παράσταση κάποια θα μπορούσε να κινηθεί μεταξύ των ακραίων εφικτών λύσεων με την κίνηση είτε από πάνω είτε από κάτω. Στο σχήμα 3, περιλαμβάνονται διαφορετικά σχέδια. Μια κατάσταση που παρακωλύει πολύ τους αλγορίθμους ακέραιου προγραμματισμού είναι ότι είναι δύσκολο να διατηρηθεί το εφικτό ψάχνοντας για το βέλτιστο. Περαιτέρω, στο σχήμα 3 που στρογγυλεύει τη συνεχή λύση (4.6, 8.3) οδηγεί σε μια ανέφικτη λύση ακέραιων αριθμών(στο 5,8).

Μια άλλη αιτία των δυσκολιών λύσης είναι η ασυνεχής εφικτή περιοχή. Η θεωρία βελτιστοποίησης έχει αναπτυχθεί παραδοσιακά ευθυγραμμίζοντας τις έννοιες υπολογισμού. Αυτό εμφανίζεται από τα μειωμένα LP κριτήρια δαπανών (-) και σύμφωνα με τη θεωρία Kuhn-Tucker για το μη γραμμικό προγραμματισμό. Εντούτοις, σε μια ρύθμιση ακέραιου προγραμματισμού, η ασυνεχής εφικτή περιοχή δεν επιτρέπει τη χρήση του υπολογισμού. Δεν υπάρχει καμία γειτονική περιοχή που να περιβάλλει ένα εφικτό σημείο, το οποίο κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει στην ανάπτυξη των πρώτων παραγώγων. Οι έννοιες οριακού εισοδήματος και οριακού κόστους δεν είναι εύκολα προς χρήση σε μια ρύθμιση ακέραιου προγραμματισμού. Δεν υπάρχουν κανόνες απόφασης που επιτρέπουν τη μετακίνηση στα υψηλότερα εκτιμημένα σημεία. Ούτε μπορεί να αναπτύξει ένα καθορισμένο σετ όρων (δηλ. Όροι kuhn-Tucker) οι όποιοι χαρακτηρίζουν τη βελτιστοποίηση.

Συνοπτικά , οι εφικτές περιοχές ακέραιου προγραμματισμού περιέχουν έναν πεπερασμένο αριθμό λύσεων, εντούτοις εναλλακτικά, δεν υπάρχει κανένας κανόνας είτε για τον αριθμό εφικτών εναλλακτικών λύσεων είτε για το που βρίσκονται. Τα σημεία λύσης μπορούν να είναι στο όριο των περιορισμών στα ακραία σημεία ή του εσωτερικού στην εφικτή περιοχή. Ακόμη, κάποιος δε μπορεί να κινηθεί εύκολα στα εφικτά σημεία. Κάποιος δε μπορεί να παράγει το ασήμαντο εισόδημα ή την πρόσθετη δαπάνη πληροφορίας για να βοηθήσει στην καθοδήγηση της διαδικασίας αναζήτησης λύσης και να απαριθμήσει γρηγορότερα τις λύσεις. Αυτό κάνει τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού δυσκολότερο να λυθούν. Υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός λύσεων, ο αριθμός των οποίων είναι άγνωστος. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι ακέραιου προγραμματισμού απαριθμούν (είτε σιωπηρά είτε ρητά) όλες τις πιθανές λύσεις ακέραιων αριθμών που απαιτούν την ουσιαστική προσπάθεια αναζήτησης. Οι δεσμευτικοί περιορισμοί δεν είναι δεσμευτικοί υπό τη γραμμική έννοια προγραμματισμού. Οι εσωτερικές λύσεις μπορούν να εμφανιστούν με τον περιορισμό στο επίπεδο των μεταβλητών απόφασης.

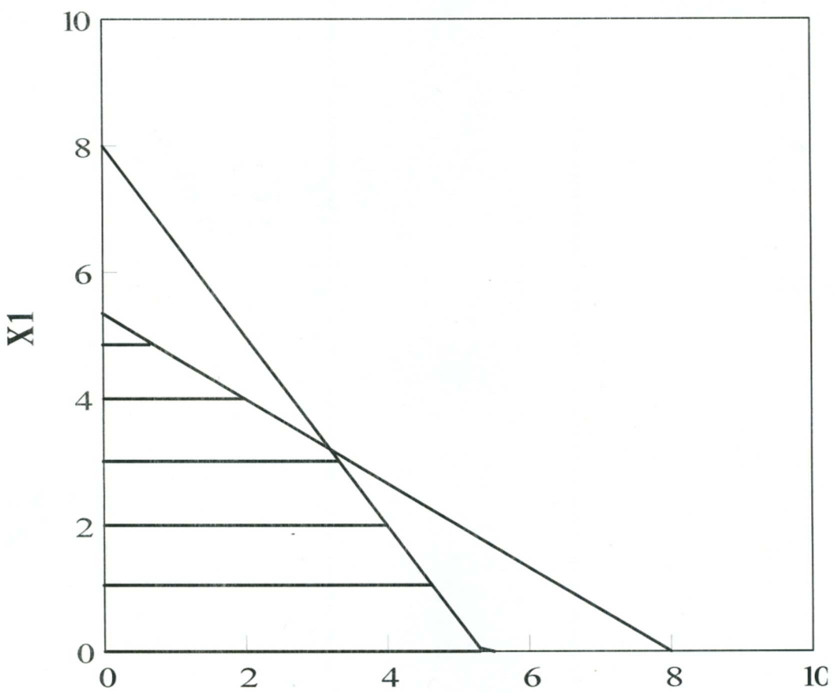
Παράταση στις μικτές εφικτές περιοχές ακέραιων αριθμών

Τα ανωτέρω σχόλια αναφέρονται σε ένα καθαρό ακέραιο προγραμματισμό. Πολλά από τα οποία, όμως, είναι σχετικά και με το μικτό ακέραιο προγραμματισμό. Ας εξετάσουμε μια γραφική παράσταση (σχήμα 4) της εφικτής περιοχής με περιορισμούς

2 + 2

3 + 2

+ ,ακέραιος



Εικόνα 4 Εφικτή περιοχή μικτών ακεραίων

Η εφικτή περιοχή είναι ένα σύνολο οριζόντιων γραμμών για το σε κάθε εφικτή αξία ακέραιων αριθμών . Αυτό παράγει μια ασυνεχή περιοχή στη κατεύθυνση αλλά μια συνεχή περιοχή στη κατεύθυνση. Άρα, τα μικτά προβλήματα ακέραιων αριθμών διατηρούν πολλά από τα περίπλοκα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των καθαρών προβλημάτων ακέραιων αριθμών σε συνδυασμό με μερικές από τις ακρίβειες των εφικτών περιοχών ενός προβλήματος LP.

Η αναζήτηση για σφαιρική βελτιστοποίηση: Χωρίς κυρτότητα

Οι περισσότερες λύσης υλικού ακέραιου προγραμματισμού, όπως παρουσιάζεται παραπάνω, παρουσιάζουν τους αλγορίθμους ακέραιου προγραμματισμού ως αναμείξεις κάποιου είδους μιας επαναληπτικής αναζήτησης πέρα από την εφικτή περιοχή λύσης. Όλες οι πιθανές λύσεις έπρεπε να είναι είτε ρητά είτε σιωπηρά απαριθμημένες. Η βασική ιδέα πίσω από τους περισσότερους αλγορίθμους ακέραιου προγραμματισμού είναι να αναζητηθούν έξω οι λύσεις. Η διαδικασία αναζήτησης περιλαμβάνει την υπονοούμενη ή ρητή απαρίθμηση κάθε πιθανής λύσης. Η υπονοούμενη απαρίθμηση γίνεται με τον περιορισμό της αναζήτησης βασισμένης στο κριτήριο βελτιστοποίησης (δηλ., ότι οι λύσεις δεν θα εξεταστούν με τις χειρότερες αντικειμενικές λειτουργίες από εκείνες που έχουν βρεθεί). Η έννοια της απαρίθμησης προκύπτει επειδή η μη κυρτή φύση του σετ περιορισμού, στην πραγματικότητα, στον ακέραιο προγραμματισμό είναι πιθανό να έχει ένα καθορισμένο σετ περιορισμού. Για παράδειγμα, κάποιος θα μπορούσε να εφαρμόσει ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού σε μια εφικτή περιοχή απαιτώντας το X να είναι είτε μεγαλύτερο από 4 είτε μικρότερο από 5. Συνεπώς, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι αλγόριθμοι ακέραιου προγραμματισμού μπορούν να εγγυηθούν σφαιρική βελτιστοποίηση μόνο μέσω μιας αριθμητικής αναζήτησης. Πολλοί από τους αλγορίθμους έχουν επίσης τις παροχές όπου σταματούν ανάλογα με τις ανοχές. Αυτοί οι ιδιαίτεροι αλγόριθμοι θα είναι ακριβείς μόνο μέσα στον παράγοντα ανοχής που διευκρινίζεται και μπορούν να μην αποκαλύψουν την αληθινή βέλτιστη λύση.

Τεχνάσματα διατύπωσης για τον προγραμματισμό ακέραιων αριθμών - Πρόσθεση περισσότερων περιορισμών

Τα προβλήματα IP, όπως υπαινίσσονται παραπάνω, περιλαμβάνουν τις αριθμητικές αναζητήσεις της εφικτής περιοχής σε μια προσπάθεια να βρεθούν οι βέλτιστες λύσεις ακέραιου προγραμματισμού. Η λήξη μιας κατεύθυνσης της αναζήτησης εμφανίζεται για έναν από τους τρεις λόγους:

1) η εύρεση μιας λύσης

2) η αντικειμενική λειτουργία να βρίσκεται κάτω από κάποια ορισμένη αξία, ή

3) η κατεύθυνση να μην κατέχει καμία εφικτή λύση ακέραιων αριθμών.

Αυτό το τμήμα υποστηρίζει ότι αυτή η διαδικασία επιταχύνεται όταν ο σχεδιαστής επιβάλλει όσο το δυνατόν περισσότερους λογικούς περιορισμούς για τον καθορισμό της εφικτής και βέλτιστης περιοχής. Λογικά σημαίνει ότι αυτοί οι περιορισμοί δεν είναι περιττοί, κάθε ένας βοηθά μεμονωμένα να καθορίσει και να μειώσει το μέγεθος του εφικτού διαστήματος λύσης.

Οι LP αλγόριθμοι είναι ευαίσθητοι στο χρονικό αριθμό περιορισμών. Οι σχεδιαστές παραλείπουν συχνά ή αποβάλλουν τους περιορισμούς όταν εμφανίζεται ότι οι οικονομικές ενέργειες μέσα στο πρότυπο θα καταστήσουν αυτούς τους περιορισμούς περιττούς. Εντούτοις, στον ακέραιο προγραμματισμό, είναι συχνά επιθυμητό να εισαχθούν οι περιορισμοί που μπορούν να μειώσουν πολύ το χρόνο λύσης. Προκειμένου να διευκρινιστεί αυτό το επιχείρημα, τρεις περιπτώσεις αναφέρονται από την εμπειρία μας με τη λύση των προτύπων ακέραιου προγραμματισμού.

Στο πρώτο παράδειγμα, που προέρχεται από την κύρια διατριβή του Danok (1976), ο Danok έλυνε ένα μικτό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού της επιλογής μηχανημάτων. Το πρόβλημα λύθηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Benders decomposition, στην οποία το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών για την επιλογή μηχανημάτων λύθηκε επαναληπτικά σε συνδυασμό με ένα πρόβλημα LP για τη χρήση μηχανημάτων. Ο Danok έλυσε δύο εκδοχές. Στην πρώτη, τα στοιχεία μηχανημάτων ήταν κατά ένα μεγάλο μέρος αβίαστα. Στη δεύτερη, ο Danok χρησιμοποίησε τα μηχανήματα που αγοράστηκαν στη LP λύση ως οδηγούς στην επιβολή των περιορισμών, στους μέγιστους και στους ελάχιστους τύπους απολογισμού μηχανημάτων. Ο Danok περιόρισε τη λύση έτσι ώστε να μην αγοραστούν παραπάνω από το 50% των μηχανημάτων που θα χρησιμοποιηθούν στη βέλτιστη λύση LP (δηλ., αγνοώντας τους περιορισμούς ακέραιων αριθμών).

Η χρονική μείωση λύσης μεταξύ των διατυπώσεων ήταν δραματική. Το πρότυπο με τους πρόσθετους περιορισμούς λύθηκε σε λιγότερο από το 10% του χρόνο υπολογισμού. Εντούτοις, οι λύσεις ήταν ίδιες και μακρινές από τους παραγόμενους LP περιορισμούς. Συνεπώς, αυτοί οι περιορισμοί μείωσαν πολύ το χρονικό αριθμό λύσεων που έπρεπε να αναζητηθούν, επιτρέποντας μεγάλες αποδοτικότητες στη διαδικασία λύσεων. Στην πραγματικότητα, στο μεγαλύτερο πρόβλημα του Danok, το ποσό του χρόνου υπολογισμού που περιλαμβάνεται ήταν ιδιαίτερο (πάνω από 1000 δευτερόλεπτα ανά τρέξιμο) και αυτοί οι περιορισμοί επέτρεψαν την ολοκλήρωση του ερευνητικού προγράμματος. Το δεύτερο παράδειγμα προέκυψε στη διατριβή του Polito. Ο Polito έλυνε ένα πρόβλημα τύπων θέσης αποθηκών εμπορευμάτων και έλυσε δύο εκδοχές του προβλήματος (πάλι με μέθοδο Benders decomposition). Στην πρώτη εκδοχή, οι περιορισμοί δεν επιβλήθηκαν μεταξύ της συνολικής χωρητικότητας των εργοστασίων που κατασκευάστηκαν και της απαίτησης. Στο δεύτερο πρόβλημα, η ικανότητα των τοποθετημένων εγκαταστάσεων έπρεπε να είναι μεγαλύτερη ή ίση με την υπάρχουσα απαίτηση. Στο πρώτο πρόβλημα, ο αλγόριθμος λύνεται σε περισσότερες από 350 επαναλήψεις ενώ στο δεύτερο πρόβλημα απαιτήθηκαν μόνο οκτώ επαναλήψεις.

Το τρίτο παράδειγμα προκύπτει από τον Williams όπου περιορισμοί όπως:

+ – Md # 0

συμπεριλαμβανομένου της μεταβλητής δείκτη d, αντικαθίσταται με :

- Md 0

– Md 0

όπου έχει περισσότερους περιορισμούς. Η επακόλουθη λύση πήρε μόνο το 10% του χρόνου λύσης.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η επιβολή προφανών περιορισμών οδηγεί σε μεγάλες αποδοτικότητες στο χρόνο λύσης. Κατά συνέπεια, ο προγραμματιστής ακέραιων αριθμών πρέπει να χρησιμοποιήσει τους περιορισμούς για να καθορίσει στενά την εφικτή περιοχή. Αυτό αποβάλλει τις πιθανές λύσεις από τη διαδικασία απαρίθμησης.

Λύσεις Ακέραιου Προγραμματισμού και GAMS

Η λύση των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών με GAMS επιτυγχάνεται βασικά με την εισαγωγή μιας νέας κατηγορίας μεταβλητών δηλώσεων που επικαλείται solver ακέραιου προγραμματισμού. Η δήλωση προσδιορίζει τις επιλεγμένες μεταβλητές για να είναι είτε δυαδικές (0, 1) είτε ακέραιες. Στη συνέχεια, το πρότυπο λύνεται με τη χρησιμοποίηση της δήλωσης που λέει ότι `using mip'. Η εικόνα 5 παρουσιάζει ένα παράδειγμα μιας διατύπωσης και η εικόνα 6 μια σειρά εισαγωγής GAMS. Αυτό θα αναγκάσει τα GAMS να χρησιμοποιήσουν τους επιλυτές διαθέσιμων ακέραιων αριθμών.

Maximize	$7X_1$	$-3X_2$	$-10X_3$	
	X_1	$-2X_2$		# 0
	X_1		$-20X_3$	# 0
	X_1 ∃ 0	X_2 ∃ 0 integer	X_3 func{epsilon} 0,1	

Εικόνα 5

```
POSITIVE VARIABLE       X1
INTEGER VARIABLE        X2
BINARY VARIABLE         X3
VARIABLE                OBJ

EQUATIONS               OBJF
                        X1X2
                        X1X3;

OBJF..      7*X1-3*X2-10*X3 =E= OBJ;
X1X2..      X1-2*X2 =L=0;
X1X3..      X1-20*X3 =L=0;

MODEL IPTEST /ALL/;
SOLVE IPTEST USING MIP MAXIMIZING OBJ;
```

Εικόνα 6 GAMPS input για παράδειγμα ακέραιου προγραμματισμού

Προσεγγίσεις λύσεων στα προβλήματα του ακέραιου προγραμματισμού

Τα πρότυπα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν γενικότερα συζητηθεί είναι συνεχή, υπό την έννοια, ότι οι μεταβλητές απόφασης επιτρέπονται να είναι κλασματικές. Συχνά αυτό είναι μια ρεαλιστική υπόθεση. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να παράγουμε 102– γαλόνια ενός διαιρετού αγαθού, όπως το κρασί. Επίσης είναι λογικό να γίνει αποδεκτή μια λύση που δίνει μια ωριαία παραγωγή των αυτοκινήτων σε 58– εάν το πρότυπο βασιστεί στη μέση ωριαία παραγωγή και η παραγωγή έχει την ερμηνεία των ποσοστών παραγωγής (production rates).

Άλλες φορές, όμως, οι κλασματικές λύσεις δεν είναι ρεαλιστικές και πρέπει να εξεταστεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

Μεγιστοποίηση

υπό τον όρο:

= (i = 1,2,……….,m)

(j = 1,2,…………,n)

ακέραιος (για μερικά ή όλα τα j = 1,2,…….,n).

Αυτό το πρόβλημα καλείται πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού (γραμμικό). Λέγεται ότι είναι ένα μικτό (mixed) πρόγραμμα ακέραιων αριθμών όταν μερικές, αν όχι όλες οι μεταβλητές περιορίζονται στο να είναι ακέραιες και καλείται καθαρό (pure) πρόγραμμα ακέραιων αριθμών όταν πρέπει να είναι όλες οι μεταβλητές απόφασης ακέραιοι αριθμοί. Δεδομένου ότι οι περιορισμοί είναι φύσης δικτύων, μια λύση ακέραιων αριθμών μπορεί να ληφθεί αγνοώντας τους ολοκληρωτικούς περιορισμούς και λύνοντας το προκύπτον γραμμικό (linear) πρόγραμμα. Γενικά οι μεταβλητές στη λύση του γραμμικού προγραμματισμού θα είναι κλασματικές και τα περαιτέρω μέτρα πρέπει να ληφθούν για να καθορίσουν τη λύση του ακέραιου προγραμματισμού.

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι διπλός. Κατ' αρχάς, θα συζητήσουμε τις διατυπώσεις του ακέραιου προγραμματισμού. Αυτό πρέπει να παρέχει διορατικότητα στο πεδίο των εφαρμογών του ακεραίου προγραμματισμού και να δώσει κάποια ένδειξη στο γιατί πολλοί επαγγελματίες θεωρούν ότι το πρότυπο του ακέραιου προγραμματισμού είναι ένα από τα σημαντικότερα πρότυπα στη διοικητική επιστήμη. Δεύτερον, θα εξετάσουμε τις βασικές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των προβλημάτων προγραμματισμού ακέραιων αριθμών και μικτών ακέραιων αριθμών.

Μερικά πρότυπα ακεραίου προγραμματισμού

Τα πρότυπα του ακεραίου προγραμματισμού προκύπτουν σχεδόν σε κάθε τομέα της εφαρμογής του μαθηματικού προγραμματισμού. Για να αναπτύξουμε μια προκαταρκτική εκτίμηση για τη σημασία αυτών των προτύπων εισάγουμε, σε αυτό το τμήμα, τρεις περιοχές όπου ο προγραμματισμός ακέραιων αριθμών έχει διαδραματίσει ένα σημαντικό ρόλο στην υποστήριξη των διευθυντικών αποφάσεων. Δεν παρέχουμε τις πιο περίπλοκες διαθέσιμες διατυπώσεις σε κάθε περίπτωση, αλλά μάλλον δίνουμε τα βασικά πρότυπα και προτείνουμε τις πιθανές επεκτάσεις.

Κύρια σύνταξη προϋπολογισμού

Σε ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα κύριας σύνταξης προϋπολογισμού, οι αποφάσεις περιλαμβάνουν την επιλογή διάφορων πιθανών επενδύσεων. Οι αποφάσεις επένδυσης μπορούν να επιλεχτούν μεταξύ των πιθανών θέσεων των εγκαταστάσεων, μιας διαμόρφωσης του κύριου εξοπλισμού, ή να εγκατασταθούν επάνω σε ένα σύνολο μελετών έρευνας και ανάπτυξης. Συχνά δεν έχει κανένα νόημα να εξεταστούν οι μερικές επενδύσεις σε αυτές τις δραστηριότητες και έτσι το πρόβλημα γίνεται ένα go-on-go πρόγραμμα ακέραιων αριθμών, όπου οι μεταβλητές απόφασης που λαμβάνονται είναι = 0 ή 1, δείχνοντας ότι η επένδυση απορρίπτεται ή γίνεται αποδεκτή. Υποθέτοντας ότι το είναι η συμβολική κατάληξη από τη επένδυση και ότι το είναι το ποσό του πόρου i, όπως μετρητά ή εργατικό δυναμικό, που χρησιμοποιείται στην επένδυση, μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα τυπικά ως εξής:

Μεγιστοποίηση

υπό τον όρο:

(i = 1,2,………..,m)

= 0 ή 1 (j = 1,2,…………,n)

Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η συνολική συμβολή από όλες τις επενδύσεις χωρίς την υπέρβαση της περιορισμένης διαθεσιμότητας οποιουδήποτε πόρου. Ένα σημαντικό πρόσθετο σενάριο για το πρόβλημα της κύριας σύνταξης προϋπολογισμού περιλαμβάνει τους περιορισμούς ταμειακών ροών. Σε αυτήν την περίπτωση, οι περιορισμοί

απεικονίζουν την αυξητική ισορροπία μετρητών σε κάθε περίοδο. Οι συντελεστές αντιπροσωπεύουν την καθαρή ταμειακή ροή από την επένδυση j στην περίοδο i. Εάν η επένδυση απαιτεί τα πρόσθετα μετρητά στην περίοδο i, τότε το > 0, ενώ εάν η επένδυση παράγει τα μετρητά στην περίοδο i, τότε το < 0. Οι συντελεστές της δεξιάς πλευράς του αντιπροσωπεύει τις επαυξητικές εξωγενείς ταμειακές ροές. Αν τα πρόσθετα κεφάλαια παρέχονται στην περίοδο i τότε > 0, ενώ εάν τα κεφάλαια αποσύρονται στην περίοδο i τότε < 0. Αυτοί οι περιορισμοί δηλώνουν ότι τα κεφάλαια που απαιτούνται για την επένδυση πρέπει να είναι λιγότερα ή ίσα προς τα κεφάλαια που παράγονται από τις προγενέστερες επενδύσεις συν τα εξωγενή κεφάλαια που παρέχονται (ή τα αρνητικά εξωγενή κεφάλαια που αποσύρονται).

Το πρότυπο κύριας σύνταξης προϋπολογισμού μπορεί να γίνει πολύ πλουσιότερο αν συμπεριλάβουμε και τις λογικές εκτιμήσεις. Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάριν, ότι η επένδυση σε μια νέα γραμμή παραγωγής εξαρτάται από την προηγούμενη επένδυση σε νέες εγκαταστάσεις. Αυτή η πιθανότητα διαμορφώνεται απλά από τον περιορισμό

,

όπου δηλώνει ότι εάν = 1 και το πρόγραμμα i (νέα ανάπτυξη προϊόντος) γίνονται αποδεκτά, τότε απαραιτήτως το = 1 και το πρόγραμμα j (κατασκευή νέων εγκαταστάσεων) πρέπει να γίνουν αποδεκτά. Ένα άλλο παράδειγμα αυτής της φύσης αφορά τα συγκρουόμενα προγράμματα. Ο περιορισμός

+ + + 1,

για παράδειγμα, δηλώνει ότι μόνο μια από τις πρώτες τέσσερις επενδύσεις μπορεί να γίνει αποδεκτή. Περιορισμοί όπως αυτοί, συνήθως, καλούνται περιορισμοί πολλαπλής επιλογής (multiple-choice constraints). Συνδυάζοντας αυτούς τους λογικούς περιορισμούς, το πρότυπο μπορεί να ενσωματώσει πολλές σύνθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των προγραμμάτων εκτός από τα ζητήματα της κατανομής των πόρων. Το απλούστερο από όλα τα πρότυπα κύριας σύνταξης προϋπολογισμού έχει μόνο έναν περιορισμό πόρων, αλλά έχει προσελκύσει πολλή προσοχή στην επιστημονική διαχείριση .

Δηλώνεται ως:

Μεγιστοποίηση

υπό τον όρο:

b,

= 0 ή 1 (j = 1,2,…………,n).

Συνήθως, αυτό το πρόβλημα καλείται πρόβλημα knapsack 0-1,(σε ελεύθερη μετάφραση πρόβλημα σακιδίων), δεδομένου ότι είναι ανάλογο με μια κατάσταση στην οποία ένας οδοιπόρος πρέπει να αποφασίσει ποια αγαθά θα περιλάβει στο ταξίδι του. Εδώ το είναι η αξία ή η χρησιμότητα του συμπεριλαμβανομένου αγαθού j, το οποίο ζυγίζει > 0 κιλά. Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η «ευχαρίστηση του ταξιδιού» υπό τον όρο του περιορισμού βάρους ότι, δηλαδή, ο οδοιπόρος δε μπορεί να κουβαλήσει παραπάνω από b κιλά. Το πρότυπο αλλάζει επιτρέποντας να ληφθεί παραπάνω από μία μονάδα του αγαθού, γράφοντας και ακέραιος αριθμός αντί των 0-1 περιορισμών στις μεταβλητές. Το πρότυπο σακιδίου είναι σημαντικό, επειδή ένας αριθμός από ακέραια προγράμματα είναι ισοδύναμος με αυτό και προάγει τις διαδικασίες λύσης για τα πρότυπα σακιδίων που έχουν παρακινήσει τις διαδικασίες για τα γενικά προγράμματα ακέραιων αριθμών.

Τοποθεσία των αποθηκών των εμπορευμάτων

Στη διαμόρφωση των συστημάτων διανομής, πρέπει να ληφθούν αποφάσεις για τις ανταλλαγές μεταξύ των δαπανών μεταφορών και των δαπανών για τα κέντρα διανομής που βρίσκονται σε λειτουργία. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας διευθυντής πρέπει να αποφασίσει ποιες από τις n αποθήκες εμπορευμάτων θα χρησιμοποιήσει για την ικανοποίηση των αιτημάτων των m πελατών για ένα αγαθό. Οι αποφάσεις που θα πρέπει να ληφθούν είναι ποιες αποθήκες εμπορευμάτων θα λειτουργήσουν και τι ποσότητα αγαθού θα σταλεί από κάθε αποθήκη εμπορευμάτων σε κάθε πελάτη. Έστω:

=

= Ποσό που στέλνεται από την αποθήκη εμπορευμάτων i στον πελάτη j.

Οι σχετικές δαπάνες είναι:

= η σταθερή λειτουργική δαπάνη για την αποθήκη εμπορευμάτων i, (π.χ, ένα κόστος για να μισθώσει την αποθήκη εμπορευμάτων),

= η ανά μονάδα λειτουργική δαπάνη στην αποθήκη εμπορευμάτων i συν το μεταφορικό κόστος από την αποθήκη εμπορευμάτων i στον πελάτη j.

Υπάρχουν δύο τύποι περιορισμών για το πρότυπο:

i. το αίτημα κάθε πελάτη που πρέπει να γεμίσει από τις αποθήκες
ii. τα αγαθά που μπορούν να σταλούν από μια αποθήκη εμπορευμάτων μόνο εάν είναι ανοιχτή.

Το πρότυπο είναι:

+ , (1)

υπό τον όρο:

= (j = 1,2,……….,n) (2)

- (i = 1,2,………..,m) (3)

0 (i = 1,2,………..,m ; j = 1,2,……….,n)

= 0 ή 1 (i = 1,2,………..,m)

Η αντικειμενική λειτουργία ενσωματώνει τη μεταφορά και τις μεταβλητές δαπάνες αποθήκευσης, εκτός από τις σταθερές δαπάνες για τις αποθήκες εμπορευμάτων που είναι σε λειτουργία. Ο περιορισμός (2) δείχνει ότι η απαίτηση κάθε πελάτη πρέπει να ικανοποιηθεί. Το άθροισμα πέρα από τις μεταβλητές αποστολών με τον περιορισμό (3) είναι το ποσό του αγαθού που στέλνεται από την αποθήκη i. Όταν η αποθήκη εμπορευμάτων είναι κλειστή, τότε = 0 και ο περιορισμός διευκρινίζει ότι κανένα από τα εμπορεύματα δεν μπορούν να σταλθούν από την αποθήκη εμπορευμάτων. Από την άλλη, όταν η αποθήκη εμπορευμάτων είναι ανοιχτή και = 1, ο περιορισμός απλά δηλώνει ότι το ποσό που μπορεί να σταλεί από την αποθήκη εμπορευμάτων δεν είναι μεγαλύτερο από τη συνολική απαίτηση, η οποία είναι πάντα αληθινή. Συνεπώς, ο περιορισμός (3) υπονοεί τον περιορισμό (ii) όπως αναφέρθηκε πιο πριν.

Αν και υπεραπλουστεύεται, αυτό το πρότυπο διατυπώνει τον πυρήνα για τα περίπλοκα και ρεαλιστικά πρότυπα διανομής που ενσωματώνουν τέτοια χαρακτηριστικά γνωρίσματα όπως:

1. συστήματα διανομής πολυ-κλιμάκιου από τις αποθήκες εμπορευμάτων στον πελάτη

2. περιορισμοί ικανότητας και στην παραγωγή εγκαταστάσεων και στο ρυθμό απόδοσης αποθηκών

3. οικονομίες κλίμακας στη μεταφορά και στις λειτουργικές δαπάνες

4. εκτιμήσεις υπηρεσιών, όπως ο μέγιστος χρόνος διανομής από τις αποθήκες εμπορευμάτων στους πελάτες

5. πολλαπλάσια προϊόντα ή

6. όροι που αποτρέπουν το διαχωρισμό των διαταγών (στο πρότυπο παραπάνω, η απαίτηση για οποιοδήποτε πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί από διάφορες αποθήκες εμπορευμάτων).

Αυτά τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα μπορούν να περιληφθούν στο πρότυπο αλλάζοντας το με διάφορους τρόπους. Παραδείγματος χάριν, η χωρητικότητα των αποθηκών των εμπορευμάτων ενσωματώνεται αντικαθιστώντας τον όρο περιλαμβάνεται στον περιορισμό (3) με το , όπου είναι η ικανότητα ρυθμού απόδοσης της αποθήκης εμπορευμάτων i, η διανομή πολυ-κλιμάκιου μπορεί να απαιτήσει τριπλές μεταβλητές δείχνοντας το ποσό που στέλνεται από τις εγκαταστάσεις i στον πελάτη k μέσω της αποθήκης εμπορευμάτων j.

Σχέδιο

Ολόκληρη η κατηγορία προβλημάτων καλούμενη ως αλληλουχία, σχεδιασμός και δρομολόγηση, είναι εγγενώς, προγράμματα ακέραιων αριθμών. Ας εξετάσουμε, παραδείγματος χάριν, το σχεδιασμό των σπουδαστών, της σχολής και των τάξεων με τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός σπουδαστών που δε μπορούν να πάρουν την πρώτη επιλογή των κατηγοριών, να ελαχιστοποιείται. Υπάρχουν περιορισμοί στον αριθμό και στο μέγεθος των διαθέσιμων τάξεων σε οποιοδήποτε χρόνο, στη διαθεσιμότητα των μελών της σχολής στους ιδιαίτερους χρόνους και στις προτιμήσεις των σπουδαστών για τα ιδιαίτερα προγράμματα. Δηλαδή ο σπουδαστής σχεδιάζεται για τη j τάξη κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος ή όχι, ως εκ τούτου μια τέτοια μεταβλητή είναι είτε μηδέν είτε ένα. Άλλα παραδείγματα αυτής της κατηγορίας προβλημάτων περιλαμβάνουν τη γραμμή εξισορρόπησης, την κρίσιμη πορεία σχεδιαζόμενη με τους περιορισμούς των πόρων και την αποστολή οχημάτων.

Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ας εξετάσουμε το σχεδιασμό του προσωπικού μιας πτήσης αερογραμμών. Η αερογραμμή έχει διάφορες δρομολογήσεις ´´ legs´´ να πραγματοποιήσει, όπως 10 π.μ από τη Νέα Υόρκη στο Σικάγο, ή 6 μ.μ από το Σικάγο στο Λος Άντζελες. Η αερογραμμή πρέπει να σχεδιάσει τα πληρώματα προσωπικού της στις διαδρομές με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύψει αυτές τις πτήσεις. Ένα πλήρωμα, παραδείγματος χάριν, μπορεί να σχεδιαστεί για να πετάξει σε μια διαδρομή που περιέχει τα δύο ´´ legs´´ , όπως προαναφέραμε. Οι μεταβλητές απόφασης είναι αυτές που διευκρινίζουν το σχεδιασμό των πληρωμάτων στις διαδρομές:

Έστω:

=

=

Και

= κόστος για το διορισμό ενός πληρώματος στη διαδρομή

Οι συντελεστές καθορίζουν τους αποδεκτούς συνδυασμούς legs και δρομολογητών λαμβάνοντας υπόψη τέτοια χαρακτηριστικά, όπως τοποθετώντας μία αλληλουχία legs για την παραγωγή των συνδέσεων μεταξύ των πτήσεων και για τη συντήρηση στον επίγειο χρόνο διαδρομών. Το πρότυπο γίνεται:

Ελαχιστοποίηση ,

υπό τον όρο:

(i = 1,2,………..,m) (4)

= 0 ή 1 (j = 1,2,…….…,n)

Ο περιορισμός απαιτεί ότι ένα πλήρωμα πρέπει να διοριστεί σε μια διαδρομή για να πετάξει με leg i. Μια εναλλακτική διατύπωση επιτρέπει σε ένα πλήρωμα να ταξιδέψουν ως επιβάτες σε ένα leg. Κατόπιν οι περιορισμοί (4) γίνονται:

1 (i = 1,2,………..,m) (5)

Αν για παράδειγμα,

= 3 ,

τότε δύο πληρώματα πετούν ως επιβάτες στο leg i πιθανότατα για να κάνουν τις συνδέσεις σε άλλα legs, στα οποία έχουν διοριστεί για υπηρεσία. Αυτά τα πρότυπα πληρώματος της αερογραμμής προκύπτουν και σε πολλές άλλες τοποθετήσεις, όπως στα προβλήματα παράδοσης οχημάτων, στις πολιτικές αποσπάσεις και στα στοιχεία επεξεργασίας υπολογιστών. Συχνά το πρότυπο (4) καλείται πρόβλημα χωρισμού (set-partitioning problem), δεδομένου ότι το σύνολο των legs θα διαιρεθεί ή θα χωριστεί μεταξύ των διάφορων πληρωμάτων. Με τον περιορισμό (5) καλείται πρόβλημα κάλυψης (set-covering problem), δεδομένου ότι τα πληρώματα έπειτα θα καλύψουν το σύνολο των legs. Ένα άλλο παράδειγμα, είναι το αποκαλούμενο διακινούμενο πρόβλημα πωλητών(traveling salesman problem). Ξεκινώντας από το σπίτι του, ένας πωλητής, επιθυμεί να επισκεφτεί κάθε μία από τις (n - 1) άλλες πόλεις και να επιστρέψει στο σπίτι του με ελάχιστο κόστος. Πρέπει να επισκεφτεί κάθε πόλη ακριβώς μία φορά και του κοστίζει για να ταξιδέψει από την πόλη i στην πόλη j. Ποια διαδρομή θα πρέπει να επιλέξει; Εάν εμείς

=

μπορούμε να μπούμε στον πειρασμό να διατυπώσουμε το πρόβλημα του ως πρόβλημα ανάθεσης:

Ελαχιστοποίηση

υπό τον όρο:

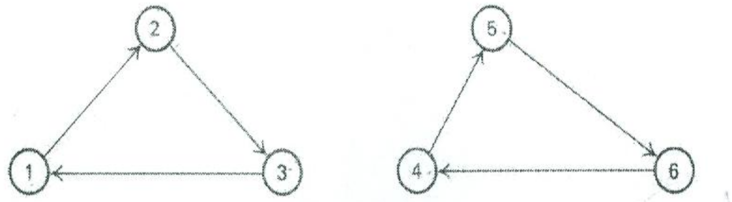
= 1 (j = 1,2,……….,n)

= 1 (i = 1,2,………..,n)

(i = 1,2,……….,n; j = 1,2,………..,n).

Οι περιορισμοί απαιτούν ότι ο πωλητής πρέπει να μπει και να βγει σε κάθε πόλη ακριβώς μία φορά. Δυστυχώς, το πρότυπο ανάθεσης μπορεί να οδηγήσει σε ανέφικτες λύσεις. Είναι δυνατό σε ένα πρόβλημα έξι πόλεων, παραδείγματος χάριν, η λύση ανάθεσης να καθοδηγήσει τον πωλητή μέσω δύο χωριστών διαδρομών των πόλεων αντί σε ένα ενιαίο ταξίδι ή έναν γύρο (εικόνα 7). Συνεπώς, οι πρόσθετοι περιορισμοί πρέπει να συμπεριληφθούν προκειμένου να αποβληθούν οι λεπτότερες λύσεις. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να ολοκληρωθεί αυτό. Σε αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να αποφύγουμε τη λεπτότερη λύση της εικόνας 7 συμπεριλαμβάνοντας τον περιορισμό:

\+ + + + + +



Εικόνα 7 χωριστές διαδρομές

Αυτή η ανισότητα εξασφαλίζει ότι τουλάχιστον ένα leg του γύρου συνδέει τις πόλεις 1, 2, και 3 με τις πόλεις 4, 5, και 6. Γενικά, εάν ένας περιορισμός αυτής της μορφής συμπεριλαμβάνεται για κάθε τρόπο με τον οποίο οι πόλεις μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ομάδες, τότε οι διαδρομές θα διαγραφούν. Το πρόβλημα με αυτό και τις σχετικές προσεγγίσεις είναι ότι με τις n πόλεις, πρέπει να προστεθούν οι (- 1) περιορισμοί αυτής της φύσης, έτσι ώστε να γίνει η διατύπωση ένα πολύ μεγάλο πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού. Για αυτόν τον λόγο, το διακινούμενο πρόβλημα πωλητών, γενικά, θεωρείται δύσκολο όταν υπάρχουν πολλές πόλεις.

Το διακινούμενο πρότυπο πωλητών χρησιμοποιείται ως κεντρικό συστατικό πολλών προτύπων δρομολόγησης οχημάτων και σχεδιασμού. Χρησιμοποιείται επίσης και στο σχεδιασμό παραγωγής. Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να τοποθετήσουμε διαδοχικά (n -1) εργασίες σε μια ενιαία μηχανή και ότι το είναι το κόστος της μηχανής για την εργασία j (δεδομένου ότι η εργασία j μόλις ολοκληρώθηκε). Ποια ακολουθία σχεδιασμού για τις εργασίες δίνει τις χαμηλότερες συνολικές δαπάνες οργάνωσης; Το πρόβλημα μπορεί να ερμηνευθεί ως διακινούμενο πρόβλημα πωλητών, στο οποίο ο κάθε πωλητής αντιστοιχεί στη μηχανή που εκτελεί κάθε μια από τις εργασίες. ‘‘Home’’ είναι η αρχική κατάσταση της μηχανής, και σε μερικές εφαρμογές, η μηχανή θα πρέπει να επιστρέψει στην αρχική της κατάσταση μετά από την ολοκλήρωση όλων των εργασιών. Αυτό είναι δηλαδή, ο πωλητής ‘‘salesman’’ πρέπει να επιστρέψει σπίτι ‘‘home’’ αφού επισκεφτεί τις πόλεις ‘‘cities’’.

Κατάρτιση των προγραμμάτων ακεραίων αριθμών

Οι απεικονίσεις στο προηγούμενο τμήμα όχι μόνο έχουν δείξει τις συγκεκριμένες εφαρμογές ακεραίου προγραμματισμού αλλά έχουν προτείνει πώς οι μεταβλητές ακέραιων αριθμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παρέχουν τις ευρείες ικανότητες διαμόρφωσης πέρα από εκείνες που είναι διαθέσιμες στο γραμμικό προγραμματισμό. Σε πολλές εφαρμογές, οι ολοκληρωτικοί περιορισμοί απεικονίζουν φυσικές αδιαιρετότητες του προβλήματος κάτω από τη μελέτη. Παραδείγματος χάριν, στην απόφαση πόσα πυρηνικά αεροπλανοφόρα θα πρέπει να έχει το αμερικανικό ναυτικό, οι κλασματικές λύσεις είναι σαφώς χωρίς νόημα, δεδομένου ότι ο βέλτιστος αριθμός είναι σε παραγγελία του ενός ή των δύο. Σε αυτές τις καταστάσεις, οι μεταβλητές απόφασης είναι εγγενώς ακέραιες από τη φύση του προβλήματος λήψης αποφάσεων.

Αυτό δεν είναι απαραιτήτως η λύση σε κάθε εφαρμογή ακεραίου προγραμματισμού, όπως εμφανίζεται στην κύρια σύνταξη προϋπολογισμού και στα πρότυπα αποθήκης εμπορευμάτων. Σε αυτά τα πρότυπα, οι μεταβλητές ακέραιων αριθμών προκύπτουν από

(i) τους λογικούς όρους, όπως εάν ένα νέο προϊόν αναπτύσσεται, τότε νέες εγκαταστάσεις πρέπει να κατασκευαστούν και από
(ii) τις μη γραμμικότητες, όπως οι σταθερές δαπάνες για μια αποθήκη εμπορευμάτων.

Οι εκτιμήσεις αυτής της φύσης είναι τόσο σημαντικές για τη διαμόρφωση καθώς αφιερώνουμε αυτό το τμήμα στην ανάλυση και την παγίωση των συγκεκριμένων τεχνικών διατύπωσης προγραμματισμού ακέραιων αριθμών, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία για μια ευρεία σειρά εφαρμογών.

Δυαδικές (0-1) μεταβλητές

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποφασίσουμε για το εάν πρέπει να συμμετέχουμε στις ακόλουθες δραστηριότητες:

(i) αν θα χτίσουμε νέες εγκαταστάσεις,
(ii) αν θα αναλάβουμε μια διαφημιστική καμπάνια, ή
(iii) αν θα αναπτύξουμε ένα νέο προϊόν.

Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να πάρουμε την απόφαση ‘ναι-όχι’ ή την αποκαλούμενη απόφαση go-no-go. Αυτές οι επιλογές διαμορφώνονται εύκολα θέτοντας = 1 εάν συμμετέχουμε στη δραστηριότητα και = 0 αντίθετα. Οι μεταβλητές που είναι περιορισμένες σε 0 ή 1 κατά αυτόν τον τρόπο, καλούνται δυαδικές, λογικές, ή 0 -1 μεταβλητές. Οι δυαδικές μεταβλητές είναι μεγάλου ενδιαφέροντος επειδή εμφανίζονται τακτικά σε πολλές πρότυπες διατυπώσεις, ιδιαίτερα στα προβλήματα μεγάλης ακτίνας και σε στρατηγικές αποφάσεις υψηλού κόστους που συνδέονται με τον προγραμματισμό κύριας επένδυσης. Εάν η διαχείριση (management) είχε αποφασίσει ότι μια από τις παραπάνω τρεις δραστηριότητες μπορεί να ασκηθεί, τότε είναι κατάλληλος ο ακόλουθος περιορισμός:

.

Όπως έχουμε δείξει στο παράδειγμα της κύριας σύνταξης προϋπολογισμού στο προηγούμενο τμήμα, αυτός ο περιορισμός συνήθως αναφέρεται ως πολλαπλής επιλογής περιορισμός (multiple choice constraint), δεδομένου ότι περιορίζει την επιλογή επενδύσεών μας να είναι μία από τις τρεις διαθέσιμες εναλλακτικές λύσεις.

Οι δυαδικές μεταβλητές είναι χρήσιμες όποτε οι μεταβλητές μπορούν να υποθέσουν μια από τις δύο τιμές, όπως στην επεξεργασία κατά δεσμίδες. Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι ένας κατασκευαστής φαρμάκων πρέπει να αποφασίσει εάν πρέπει να χρησιμοποιήσει μια δεξαμενή ζύμωσης. Εάν χρησιμοποιεί τη δεξαμενή, τότε η τεχνολογία επεξεργασίας απαιτεί να κάνει B μονάδες. Συνεπώς, η παραγωγή y πρέπει να είναι 0 ή B και το πρόβλημα μπορεί να διαμορφωθεί με τη δυαδική μεταβλητή = 0 ή 1 αντικαθιστώντας το για το y παντού στο πρότυπο.

Λογικοί περιορισμοί

Συχνά, οι τοποθετήσεις προβλήματος επιβάλλουν τους λογικούς περιορισμούς στις μεταβλητές απόφασης (όπως τους περιορισμούς συγχρονισμού, τα απρόβλεπτα έξοδα ή τις συγκρουόμενες εναλλακτικές λύσεις), οι οποίες παραχωρούνται στις διατυπώσεις του ακέραιου προγραμματισμού. Η ακόλουθη ανάλυση αναθεωρεί τις σημαντικότερες περιπτώσεις αυτών των λογικών σχέσεων.

Εφικτοί περιορισμοί

Ενδεχομένως η απλούστερη λογική ερώτηση που μπορεί να υποβληθεί στο μαθηματικό προγραμματισμό είναι εάν μια δεδομένη επιλογή των μεταβλητών απόφασης ικανοποιεί έναν περιορισμό. Ακριβέστερα, πότε είναι ικανοποιητικός ο ακόλουθος γενικός περιορισμός;

$$f(\quad , \quad , \ldots\ldots\ldots, \quad) \quad b \qquad (6)$$

Εισάγουμε μια δυαδική μεταβλητή y με την ερμηνεία:

y =

οπότε ο περιορισμός θα μετατραπεί σε:

$$f(\quad , \quad , \ldots\ldots\ldots, \quad) - \quad b \qquad (7)$$

όπου η σταθερά B επιλέγεται να είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε ο περιορισμός να ικανοποιείται πάντα αν y = 1 , δηλαδή

$$f(\quad , \quad , \ldots\ldots\ldots, \quad) \quad b + B$$

για κάθε πιθανή επιλογή των μεταβλητών απόφασης (, ..., που είναι στη διάθεση μας. Όποτε το y = 0 δίνει μια εφικτή λύση στον περιορισμό (7) και ξέρουμε ότι ο περιορισμός (6) πρέπει να ικανοποιηθεί. Στην πράξη, είναι συνήθως πολύ εύκολο να αποφασιστεί ένας μεγάλος αριθμός για να χρησιμεύσει ως B, αν και γενικότερα είναι καλύτερο να χρησιμοποιηθεί η μικρότερη πιθανή αξία του B προκειμένου να αποφευχθούν οι αριθμητικές δυσκολίες κατά τη διάρκεια των υπολογισμών.

Εναλλακτικοί περιορισμοί

Ας εξετάσουμε μια κατάσταση με τους εναλλακτικούς περιορισμούς:

(, , ………,)

(, , ………,) .

Πρέπει να ικανοποιηθεί τουλάχιστον ένας, αλλά όχι απαραιτήτως και οι δύο από αυτούς τους περιορισμούς. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να διαμορφωθεί με το συνδυασμό της τεχνικής που εισάγει ακριβώς έναν περιορισμό πολλαπλής επιλογής ως εξής:

(, , ………,) - ,

(, , ………,) – ,

\+ 1,

, ,δυαδικοί

Οι μεταβλητές , και οι σταθερές και επιλέγονται όπως παραπάνω, για να δείξουν πότε ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Ο πολλαπλής επιλογής περιορισμός + 1

υπονοεί ότι τουλάχιστον μία μεταβλητή είναι ίση με 0, έτσι ώστε, όπως απαιτείται, να ικανοποιηθεί τουλάχιστον ένας περιορισμός. Μπορούμε να σώσουμε μια μεταβλητή ακέραιων αριθμών σε αυτήν την διατύπωση με τη σημείωση ότι ο πολλαπλής επιλογής περιορισμός μπορεί να αντικατασταθεί από + 1, ή = 1 - , δεδομένου ότι αυτός ο περιορισμός υπονοεί ότι είτε το είναι ίσα με 0. Η προκύπτουσα διατύπωση δίνεται ως εξής:

(, , ………,) - ,

(, , ………,) – ,

= 0 ή 1,

Σαν απεικόνιση αυτής της τεχνικής μπορούμε να εξετάσουμε το παράδειγμα custom-molder το οποίο περιλαμβάνει τον περιορισμό

60, (8)

ο οποίος αντιπροσωπεύει την ικανότητα παραγωγής για εκατοντάδες περιπτώσεις γυαλιών έξι-ουγγιών και για εκατοντάδες περιπτώσεις γυαλιών δέκα-ουγγιών. Αν υποθέσουμε ότι υπήρχε μια εναλλακτική διαδικασία παραγωγής που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, θα είχε τον περιορισμό ικανότητας

50 (9)

Κατόπιν οι μεταβλητές απόφασης , πρέπει να ικανοποιούν είτε την εξίσωση (8) είτε την (9) ανάλογα με ποια διαδικασία παραγωγής επιλέγεται. Η διατύπωση του ακέραιου προγραμματισμού αντικαθιστά τις (8) και (9) με τους περιορισμούς:

60,

50,

y= 0 ή 1.

Σε αυτήν την περίπτωση, τα και τίθενται στο 100, το οποίο είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε ο περιορισμός να μην περιορίζει τη διαδικασία παραγωγής που δε χρησιμοποιείται.

Υπό όρους περιορισμοί

Αυτοί οι περιορισμοί έχουν τη μορφή:

(, , ……….,) ο οποίος υπονοεί ότι (, , ……….,) .

Δεδομένου ότι η επίπτωση δεν ικανοποιείται μόνο όταν και οι δύο (, , ……….,) και (, , ……….,) ,ο υπό όρους περιορισμός είναι λογικά ισοδύναμος με τους εναλλακτικούς περιορισμούς

(, , ……….,) και ή (, , ……….,) , όπου τουλάχιστον ένας περιορισμός πρέπει να ικανοποιηθεί. Ως εκ τούτου, αυτή η κατάσταση μπορεί να διαμορφωθεί από τους εναλλακτικούς περιορισμούς όπως υποδεικνύεται ανωτέρω.

Κ- Εναλλακτικές λύσεις πτυχών

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να ικανοποιήσουμε τουλάχιστον k από τους περιορισμούς:

(, , ……….,) , (j = 1,2,…..,p)

Παραδείγματος χάριν, αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να αντιστοιχούν στους περιορισμούς εργατικού δυναμικού για τα πιθανά συστήματα επιθεώρησης p για τον ποιοτικό έλεγχο σε μια διαδικασία παραγωγής. Εάν η διαχείριση έχει αποφασίσει να υιοθετήσει τουλάχιστον τα συστήματα επιθεώρησης k, τότε οι περιορισμοί k που διευκρινίζουν τους περιορισμούς εργατικού δυναμικού για αυτά τα συστήματα πρέπει να ικανοποιηθούν και οι υπόλοιποι περιορισμοί μπορούν να αγνοηθούν. Υποθέτοντας ότι το για j = 1,2,…,p επιλέγεται έτσι ώστε οι αγνοημένοι περιορισμοί να μην είναι δεσμευτικοί, το γενικό πρόβλημα μπορεί να είναι διατυπωμένο ως εξής:

(, , ……….,) - (1 -) , (j = 1,2,…..,p)

k ,

ή 1 (j = 1,2,…..,p).

Δηλαδή, το = 1 εάν ο περιορισμός πρόκειται να ικανοποιηθεί και τουλάχιστον k των περιορισμών πρέπει να ικανοποιηθούν. Εάν καθορίσουμε 1 - , και το υποκαθιστά το σε αυτούς τους περιορισμούς, η μορφή των περιορισμών που θα προκύψουν είναι ανάλογη με αυτό που δίνεται προηγουμένως για τη διαμόρφωση των εναλλακτικών περιορισμών.

Σύνθετες εναλλακτικές λύσεις

Η εφικτή περιοχή που παρουσιάζεται στην εικόνα 8 αποτελείται από τρεις χωριζόμενες περιοχές. Κάθε μία διευκρινίζεται από ένα σύστημα ανισοτήτων. Η εφικτή περιοχή είναι από τα εναλλακτικά σύνολα περιορισμών και μπορεί να διαμορφωθεί από το σύστημα:

– Περιορισμοί περιοχής 1

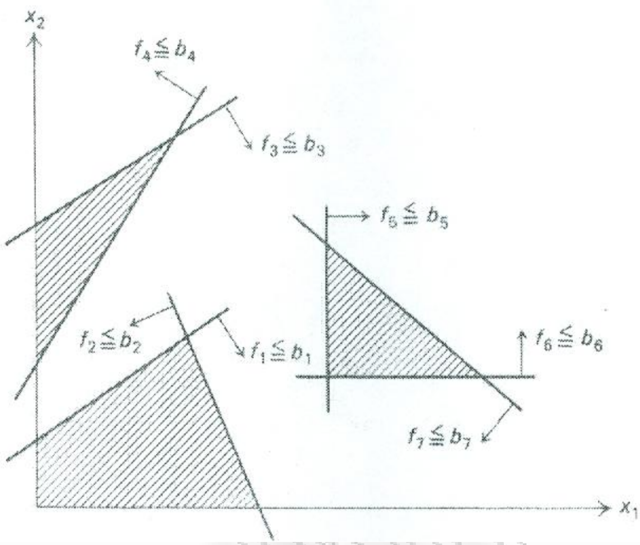
Περιορισμοί περιοχής 2

– Περιορισμοί περιοχής 3

+ + 2,

, 0,

, , δυαδικοί.



Εικόνα 8 παράδειγμα σύνθετων εναλλακτικών λύσεων

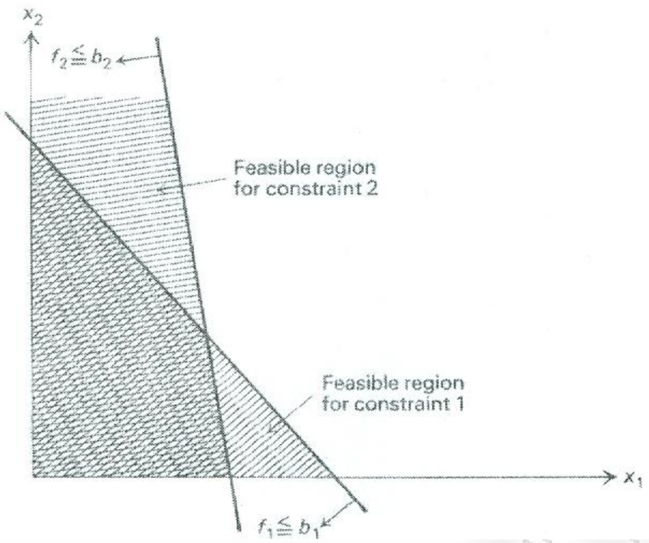
Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιούμε την ίδια δυαδική μεταβλητή για κάθε περιορισμό καθορίζοντας μια από τις περιοχές και ότι ο περιορισμός + + 2 υπονοεί ότι οι μεταβλητές απόφασης , υπάρχουν τουλάχιστον σε μια από τις απαραίτητες περιοχές. Άρα, παραδείγματος χάριν, εάν = 0 τότε κάθε ένας από τους παρακάτω περιορισμούς ικανοποιείται.

(,) , (,) και (,)

Οι περιοχές δεν είναι απαραίτητο να είναι χωρισμένες προτού να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε αυτήν την τεχνική. Ακόμη και ο απλός εναλλακτικός περιορισμός

(,) ή (,)

που παρουσιάζεται στην εικόνα 9 περιέχει τις επικαλυπτόμενες περιοχές.



Εικόνα 9 Γεωμετρία των εναλλακτικών περιορισμών

Αντιπροσώπευση των μη γραμμικών λειτουργιών

Οι μη γραμμικές λειτουργίες μπορούν να αντιπροσωπευθούν με τις διατυπώσεις του ακέραιου προγραμματισμού. Ας αναλύσουμε τις πιο χρήσιμες αντιπροσωπεύσεις αυτού του τύπου.

i. Σταθερό κόστος

Συχνά, η αντικειμενική λειτουργία για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης περιέχει τις σταθερές δαπάνες (προκαταρκτικές δαπάνες σχεδίου, δαπάνες σταθερής επένδυσης, καθορισμός συμβάσεων κτλ). Παραδείγματος χάριν, το κόστος παραγωγής 7 μονάδων ενός συγκεκριμένου προϊόντος μπορεί να αποτελείται από ένα σταθερό κόστος δαπανών του εξοπλισμού και ένα μεταβλητό κόστος ανά μονάδα που παράγεται από τον εξοπλισμό. Ένα παράδειγμα αυτού του τύπου κόστους δίνεται στην εικόνα 10.

Ας υποθέσουμε ότι ο εξοπλισμός έχει μια χωρητικότητα των B μονάδων. Καθορίζουμε το y να είναι μια δυαδική μεταβλητή που δείχνει πότε αναλαμβάνεται το σταθερό κόστος, έτσι ώστε

y = 1 όταν x > 0 και y = 0 όταν x = 0. Κατόπιν η συμβολή στο κόστος λόγω του x μπορεί να γραφτεί ως:

$$+ cx,$$

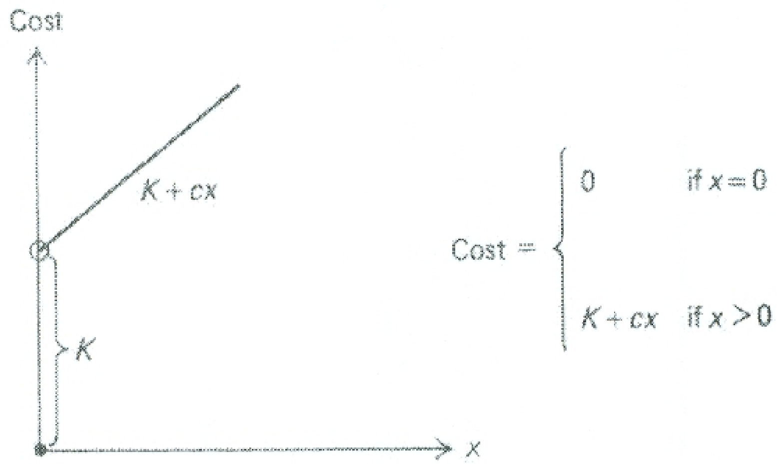
με τους περιορισμούς:

$$x \quad By,$$

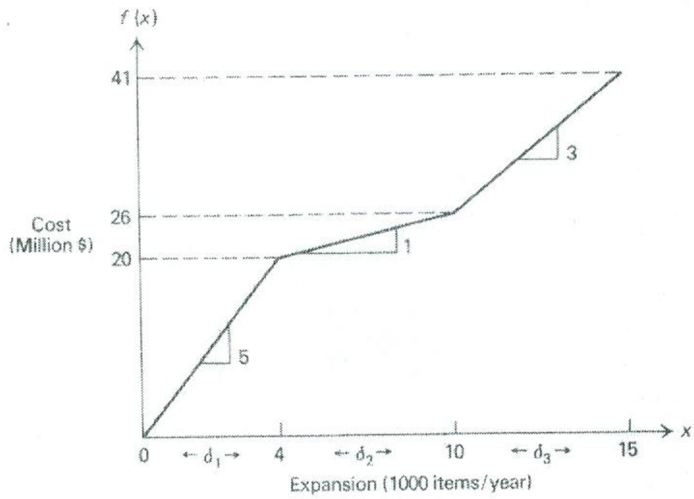
$$x \quad 0,$$

$$y = 0 \text{ ή } 1.$$

Όπως απαιτείται, αυτοί οι περιορισμοί υπονοούν ότι x = 0 όταν το σταθερό κόστος δε συμπεριλαμβάνεται, δηλ., όταν y = 0. Οι ίδιοι οι περιορισμοί δεν υπονοούν ότι το y = 0 εάν x = 0. Αλλά όταν x = 0, η ελαχιστοποίηση θα επιλέξει σαφώς το y = 0, έτσι ώστε το σταθερό κόστος να μη συμπεριλαμβάνεται. Τέλος, ότι εάν y = 1 τότε ο προστιθέμενος περιορισμός γίνεται x B ,το οποίο απορρίπτει το όριο ικανότητας στον εξοπλισμό παραγωγής.



Εικόνα 10 Σταθερός κόστος



Εικόνα 11 Διαμόρφωση μιας τμηματικής γραμμικής καμπύλης

ii. Τμηματικά γραμμική αντιπροσώπευση

Ένας άλλος τύπος μη γραμμικής λειτουργίας που μπορεί να αντιπροσωπευθεί από τις μεταβλητές ακέραιων αριθμών είναι μια τμηματικά γραμμική καμπύλη. Το σχήμα 11 επεξηγεί μια καμπύλη δαπανών για την επέκταση εγκαταστάσεων που περιέχει τρία γραμμικά τμήματα με τις μεταβλητές δαπάνες 5, 1 και 3 εκατομμύρια δολάρια ανά 1.000 στοιχεία της επέκτασης. Για να διαμορφώσουμε την καμπύλη δαπανών εκφράζουμε οποιαδήποτε αξία x ως το ποσό τριών μεταβλητών , , , έτσι ώστε το κόστος για κάθε μια από αυτές τις μεταβλητές να είναι γραμμικό. Ως εκ τούτου,

x = + + ,

όπου

$$4,$$

$$0 \quad 6, \qquad (10)$$

$$0 \quad 5$$

και το συνολικό μεταβλητό κόστος δίνεται:

Cost = + + .

Ας σημειώσουμε ότι έχουμε καθορίσει τις μεταβλητές έτσι ώστε :

1. το αντιστοιχεί στο ποσό με το οποίο το x υπερβαίνει το 0, αλλά είναι λιγότερο ή ίσο με 4.

2. το είναι το ποσό με το οποίο το x υπερβαίνει το 4, αλλά είναι λιγότερο ή ίσο με 10.

3. το είναι το ποσό με το οποίο το x υπερβαίνει το 10, αλλά είναι λιγότερο ή ίσο με 15.

Αν αυτή η ερμηνεία πρόκειται να ισχύσει, πρέπει επίσης να απαιτήσουμε ότι = 4 για κάθε > 0 και ότι το = 6 για κάθε > 0. Διαφορετικά, όταν x = 2 το κόστος θα ελαχιστοποιηθεί με την επιλογή = = 0 και = 2 καθώς η μεταβλητή έχει το μικρότερο μεταβλητό κόστος. Εντούτοις, αυτοί οι περιορισμοί στις μεταβλητές είναι απλά υπό όρους περιορισμοί και μπορούν να διατυπωθούν και με την εισαγωγή των δυαδικών μεταβλητών.

Εάν αφήσουμε

=

=

Τότε οι περιορισμοί (10) μπορούν να αντικατασταθούν από

$$4,$$

$$6 \quad ,$$

$$0 \quad 5 \quad , \qquad (11)$$

και δυαδικοί

για να εξασφαλίσουν ότι οι κατάλληλοι υπό όρους περιορισμοί κρατούν. Ας σημειωθεί ότι αν = 0 , τότε = 0 για να διατηρήσει το εφικτό για τον περιορισμό που επιβάλλεται στο και η (11) μειώνεται

4, = 0 και = 0.

Αν = 1 και = 0, τότε η (11) μειώνεται σε

= 4 , 6 και = 0.

Τελικά, αν = 1 και = 1, τότε η (11) μειώνεται σε

= 4 , = 6 και 5.

Ως εκ τούτου, παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρεις εφικτοί συνδυασμοί για τις τιμές των και :

= 0, = 0 για x 4 όταν = = 0,

= 1, = 0 για x 10 όταν =4 και = 0,

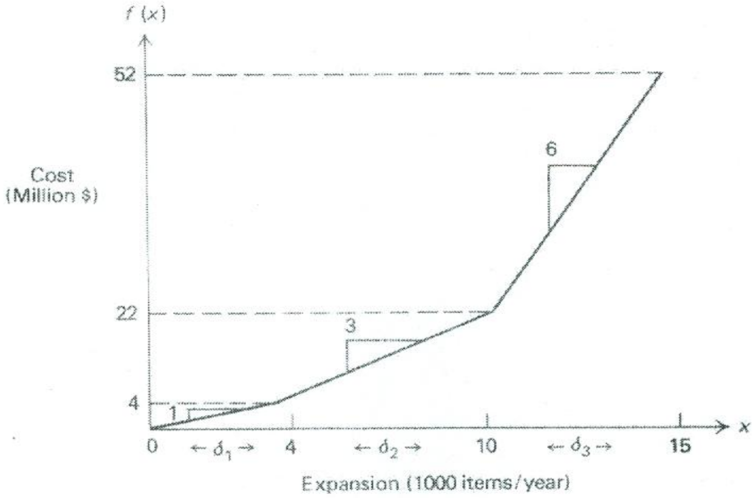
Και

= 1, = 1 για x 15 όταν =4 και = 6.

Η ίδια γενική τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί στις τμηματικά γραμμικές καμπύλες με οποιοδήποτε αριθμό τμημάτων. Ο γενικός περιορισμός που επιβάλλεται επάνω στη μεταβλητή για το τμήμα θα διαβάσει:

,

Όπου είναι το μήκος του τμήματος.



Εικόνα 12 οικονομίες κλίμακας

iii. Οικονομίες της κλίμακας

Μια σημαντική πρόσθετη περίπτωση για τις μη γραμμικές λειτουργίες προκύπτει όταν ισχύουν μόνο οι αδιαιρετότητες της κλίμακας, δηλαδή όταν αυξάνονται οι πρόσθετες δαπάνες σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή οριακά μειώνονται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Ας υποθέσουμε ότι το κόστος επέκτασης στο προηγούμενο παράδειγμα τώρα διευκρινίζεται από την εικόνα 12.

Σε αυτήν την περίπτωση, το κόστος αντιπροσωπεύεται από:

Cost = + + ,

και εκθέτεται μόνο στους γραμμικούς περιορισμούς χωρίς μεταβλητές ακέραιων αριθμών,

4,

6 ,

0 5.

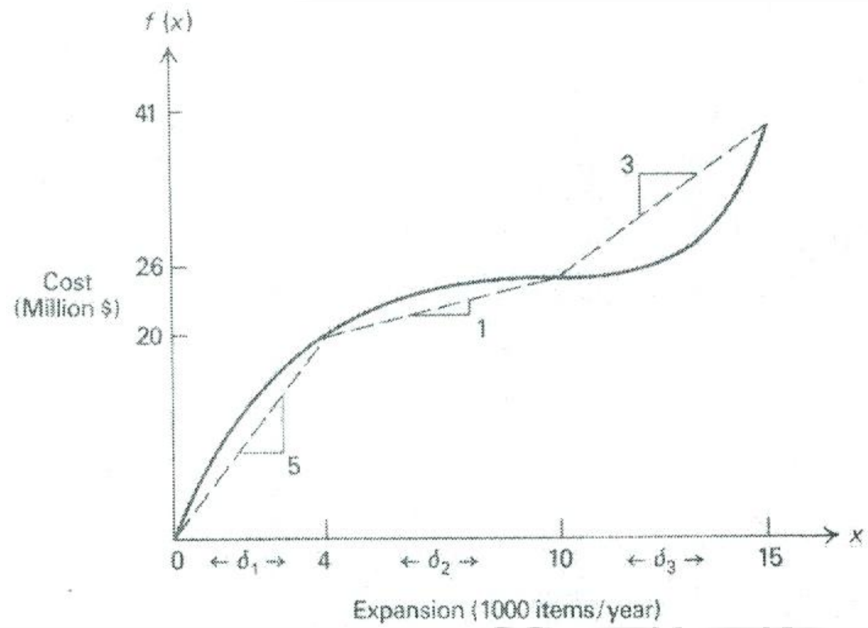
Οι υπό όρους περιορισμοί που περιλαμβάνουν τις δυαδικές μεταβλητές στην προηγούμενη διατύπωση μπορούν να αγνοηθούν, εάν η καμπύλη δαπανών εμφανίζεται σε μια αντικειμενική λειτουργία ελαχιστοποίησης, αφού οι συντελεστές , και , υπονοούν ότι είναι πάντα καλύτερο να θέτουμε = 4 πριν από το > 0 και = 6 πριν από το > 0. Συνεπώς, οι μεταβλητές ακέραιων αριθμών έχουν αποφευχθεί εντελώς.

Αυτή η αντιπροσώπευση χωρίς μεταβλητές ακέραιων αριθμών είναι άκυρη, εάν οι οικονομίες κλίμακας είναι παρούσες , παραδείγματος χάριν, εάν η λειτουργία που δίνεται στην εικόνα 12 εμφανίζεται σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, θα ήταν καλύτερο να επιλεχτεί το τρίτο τμήμα με τη μεταβλητή πριν πάρουμε τα πρώτα δύο τμήματα, δεδομένου ότι οι επιστροφές είναι υψηλότερες σε αυτό το τμήμα. Σε αυτές τις περιπτώσεις το πρότυπο απαιτεί τη δυαδική-μεταβλητή διατύπωση του προηγούμενου τμήματος.

iv. Προσέγγιση των μη γραμμικών λειτουργιών

Μια από τις πιο χρήσιμες εφαρμογές της τμηματικά γραμμικής αντιπροσώπευσης είναι η προσέγγιση των μη γραμμικών λειτουργιών. Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάριν, ότι το κόστος επέκτασης στην απεικόνισή μας δίνεται από τη βαριά καμπύλη στην εικόνα 13.

Αν επισύρουμε με προσοχή τα γραμμικά τμήματα ενώνοντας τα επιλεγμένα σημεία στην καμπύλη, λαμβάνουμε μια τμηματικά γραμμική προσέγγιση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της καμπύλης στο πρότυπο. Η τμηματική προσέγγιση, φυσικά, αντιπροσωπεύεται με την εισαγωγή των μεταβλητών ακέραιων αριθμών όπως υποδεικνύεται ανωτέρω. Με τη χρησιμοποίηση περισσότερων σημείων στην καμπύλη μπορούμε να καταστήσουμε την προσέγγιση τόσο κοντά όσο επιθυμούμε.



Εικόνα 13 προσέγγιση μίας μη γραμμικής καμπύλης

Μια διατύπωση δειγμάτων

Η κατάλληλη τοποθέτηση των υπηρεσιών εγκατάστασης, όπως τα σχολεία, τα νοσοκομεία και τις ψυχαγωγικές περιοχές, είναι ουσιαστική σε ένα αποδοτικό αστικό σχέδιο. Εδώ θα παρουσιάσουμε ένα απλοποιημένο πρότυπο για την τοποθεσία συστήματος ελέγχου πυρκαγιάς. Ο σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε συσκευές διατύπωσης του προηγούμενου τμήματος που προκύπτουν μαζί σε ένα σημαντικό πλαίσιο, παρά να δώσουμε ένα περιεκτικό πρότυπο για το πρόβλημα θέσης ανά δευτερόλεπτο. Συνεπώς, θα αγνοήσουμε πολλά σχετικά ζητήματα, συμπεριλαμβανομένης της αβεβαιότητας. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός συγκεντρώνεται στις περιοχές I μέσα στην πόλη και ότι η περιοχή i περιέχει τους ανθρώπους pi. Η προκαταρκτική ανάλυση (έρευνες εδάφους, πολιτική κτλ) έχει περιορίσει την πιθανή θέση των συστημάτων ελέγχου πυρκαγιάς στις περιοχές J. Έστω ότι 0 είναι η απόσταση από το κέντρο της περιοχής i στην περιοχή j. Πρόκειται να καθορίσουμε την καλύτερη επιλογή περιοχών και την ανάθεση των περιοχών που έχουν εγκατασταθεί τα συστήματα ελέγχου πυρκαγιάς. Έστω

=

Και

=

Οι βασικοί περιορισμοί είναι ότι κάθε περιοχή πρέπει να οριστεί σε ακριβώς ένα σύστημα ελέγχου πυρκαγιάς, δηλ.,

= 1 (i = 1,2,……I),

και ότι καμία περιοχή δεν πρέπει να οριστεί σε μια αχρησιμοποίητη περιοχή, δηλ., αν = 0 τότε = 0 (i = 1,2,……I). Ο τελευταίος περιορισμός μπορεί να διαμορφωθεί ως εναλλακτικός περιορισμός, ή απλούστερα ως:

I (i = 1,2,……J),

Εφόσον είναι δυαδικές μεταβλητές, το ποσό τους δεν υπερβαίνει ποτέ το I, έτσι ώστε εάν = 1, τότε ο περιορισμός j είναι μη δεσμευτικός.

Αν = 0 τότε = 0 για κάθε i.

Επόμενη σημείωση είναι ότι το αποτελεί την απόσταση από την περιοχή i στο ορισμένο firehouse και δίνεται από:

= ,

εφόσον είναι 1 και όλα τα άλλα είναι 0.

Επίσης, ο συνολικός πληθυσμός που συντηρείται από την περιοχή j είναι:

= .

Ας υποθέσουμε ότι μια κεντρική περιοχή είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην πυρκαγιά και ότι είτε οι περιοχές 1 και 2 είτε οι περιοχές 3 και 4 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προστατεύσουν αυτήν την περιοχή. Κατόπιν ένας από τους διάφορους παρόμοιους περιορισμούς είναι:

+ 2 ή + 2.

Έστω ότι το y είναι μια δυαδική μεταβλητή, τότε αυτοί οι εναλλακτικοί περιορισμοί γίνονται:

+ 2y

+ 2 (1 - y).

Έπειτα υποθέτουμε ότι κοστίζει ( ) για να χτίσουμε ένα σύστημα ελέγχου πυρκαγιάς επί της περιοχής j για να εξυπηρετεί ανθρώπους και ότι ένας συνολικός προϋπολογισμός των ευρώ B έχει διατεθεί για την κατασκευή ενός τέτοιου συστήματος. Κατόπιν

B.

Τελικά, μια πιθανή λειτουργία κοινωνικής ευημερίας μπορεί να ελαχιστοποιήσει την απόσταση που διανύθηκε από την περιοχή πάρα πολύ μακριά από το ορισμένο σύστημα, δηλ., σε:

Ελαχιστοποίηση D

Όπου

D = max ,

ή ισοδύναμα

Ελαχιστοποίηση D,

υπό τον όρο : D (i = 1,2,……I).

Συλλέγοντας τους περιορισμούς και αντικαθιστώντας παραπάνω για από την άποψη της σχέσης καθορισμού του

=

καθορίσαμε το πλήρες πρότυπο ως:

Ελαχιστοποίηση D,

υπό τον όρο:

D - 0 (i = 1,2,……I),

(i = 1,2,……I),

I (j = 1,2,……J),

- = 0 (j = 1,2,……J),

) B,

+ - 2y 0,

+ + 2y 2,

, , y δυαδικοί (i = 1,2,……I), (j = 1,2,……J).

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε λειτουργία από μια προσέγγιση ακέραιου προγραμματισμού για να ολοκληρωθεί το πρότυπο. Ας σημειωθεί ότι εάν το περιέχει ένα σταθερό κόστος, τότε οι νέες μεταβλητές σταθερού κόστους δεν χρειάζονται να εισαχθούν (η μεταβλητή εξυπηρετεί αυτόν τον σκοπό).

Το τελευταίο σχόλιο και ο τρόπος με τον οποίο ο υπό όρους περιορισμός = 0 υπονοεί ότι το = 0 (i = 1,2,……I) , δείχνουν ότι οι τεχνικές διατύπωσης της παραγράφου δεν πρέπει να εφαρμοστούν χωρίς σκέψη. Μάλλον, παρέχουν ένα κοινό πλαίσιο και πρέπει να χρησιμοποιηθούν από κοινού με την καλή διαμόρφωση της κοινής λογικής. Γενικά, είναι καλύτερο να εισάγουμε όσο το δυνατό λιγότερες μεταβλητές ακέραιων αριθμών.

Μερικά χαρακτηριστικά των προγραμμάτων ακεραίων αριθμών- Ένα πρόβλημα δειγμάτων

Εκτιμώντας ότι η μονο-κατευθυντική μέθοδος είναι αποτελεσματική για τα γραμμικά προγράμματα, δεν υπάρχει καμία τεχνική για τα προγράμματα ακέραιων αριθμών. Αντίθετα έχουν αναπτυχθεί διάφορες διαδικασίες και η απόδοση οποιασδήποτε ιδιαίτερης τεχνικής εμφανίζεται να είναι ιδιαίτερα εξαρτώμενη από ένα πρόβλημα. Οι μέθοδοι μπορούν μέχρι σήμερα να ταξινομηθούν ευρέως ως ακολουθίες μιας εκ των τριών προσεγγίσεων:

i. τεχνικές απαρίθμησης, συμπεριλαμβανομένης της συνδεδεμένης διαδικασίας
ii. τεχνικές cutting-planes
iii. ομαδικές θεωρητικές τεχνικές.

Επιπλέον, έχουν προταθεί διάφορες σύνθετες διαδικασίες, οι οποίες συνδυάζουν τις τεχνικές χρησιμοποιώντας αρκετές από αυτές τις προσεγγίσεις. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μια τάση στα συγκροτήματα ηλεκτρονικών υπολογιστών για τον προγραμματισμό ακέραιων αριθμών να περιλαμβάνονται διάφορες προσεγγίσεις και να χρησιμοποιούνται, ενδεχομένως, όλες κατά την ανάλυση ενός δεδομένου προβλήματος. Στα τμήματα που ακολουθούν, θα εξετάσουμε τις πρώτες δύο προσεγγίσεις με κάποιες λεπτομέρειες. Σε αυτό το σημείο, θα εισάγουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και θα δείξουμε μερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών. Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το παράδειγμα για να επεξηγήσουμε και να παρακινήσουμε τις διαδικασίες λύσης. Πολλά χαρακτηριστικά αυτού του παραδείγματος μοιράζονται από την έκδοση ακέραιων αριθμών του προβλήματος custom-molder.

Το πρόβλημα είναι να καθοριστεί το όπου:

$$= \max z = \quad + 8 \quad ,$$

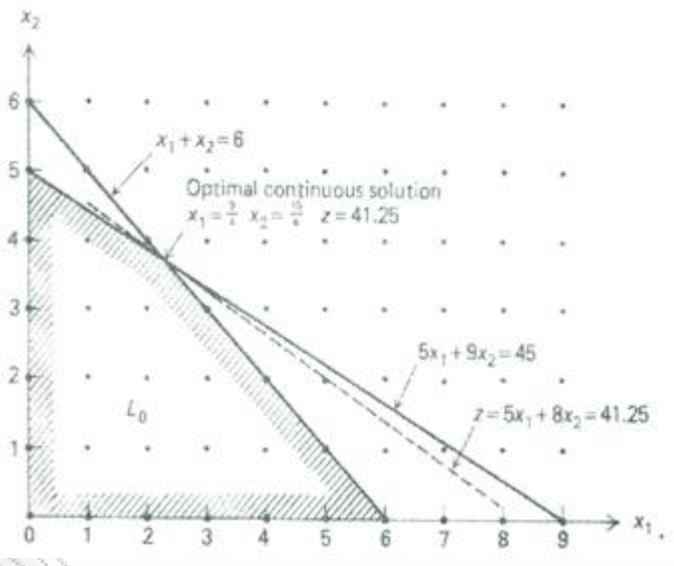
υπό τον όρο:

$$+ \quad 6,$$

$$+ 9 \quad 45,$$

$$, \quad 0$$ και ακέραιοι.

Η εφικτή περιοχή σκιαγραφείται στην εικόνα 14. Τα σημεία στη σκιασμένη περιοχή είναι εφικτά σημεία ακέραιων αριθμών.



Εικόνα 14 Παράδειγμα ακέραιου προγραμματισμού

Εάν οι ακέραιοι περιορισμοί στις μεταβλητές πέφτουν, το προκύπτον πρόβλημα είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα, θα το ονομάσουμε σχετικό γραμμικό πρόγραμμα (associated linear problem). Μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε γραφικά τη βέλτιστη λύση. Ο πίνακας 1 απεικονίζει μερικά από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του προβλήματος.

Πίνακας 1 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα προβλήματος

	Συνεχές Βέλτιστο (Continuous optimum)	Στρογγυλοποίηση	Κοντινότερο εφικτό σημείο	Βέλτιστο ακέραιων αριθμών
	– = 2,25	2	2	0
	— = 3,75	4	3	5
Z	41,25	ανέφικτος	34	40

Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση ακεραίου προγραμματισμού δε λαμβάνεται με τη στρογγυλοποίηση της λύσης του γραμμικού προγραμματισμού. Ακόμη και το πιο κοντινό εφικτό σημείο στη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγραμματισμού δεν είναι καν εφικτό. Επίσης, ας σημειωθεί ότι το κοντινότερο εφικτό σημείο ακέραιων αριθμών στη λύση γραμμικού προγραμματισμού είναι πολύ μακριά από το βέλτιστο σημείο ακέραιων αριθμών. Άρα, λοιπόν, δεν είναι ικανοποιητικό απλά να στρογγυλοποιηθούν οι λύσεις του γραμμικού προγραμματισμού. Στην πραγματικότητα, με το να κλιμακώσουμε κατάλληλα τους συντελεστές δαπανών της δεξιάς πλευράς αυτού του παραδείγματος, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα, για το οποίο η βέλτιστη λύση προγραμματισμού ακέραιων αριθμών να βρίσκεται όσο κοντά επιθυμούμε από τη στρογγυλοποιημένη λύση του γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή είτε στην αξία z είτε στην απόσταση στο αεροπλάνο.

Σε ένα παράδειγμα τόσο απλό όπως αυτό, σχεδόν οποιαδήποτε διαδικασία λύσης θα είναι αποτελεσματική. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε εύκολα να απαριθμήσουμε όλα τα σημεία ακέραιων αριθμών με το 9 , 6 και να επιλέξουμε το καλύτερο εφικτό σημείο. Στην πράξη, ο αριθμός σημείων που εξετάζονται είναι πιθανό να απαγορεύσει μια τέτοια εξαντλητική απαρίθμηση των ενδεχομένως εφικτών σημείων και γι'αυτό θα πρέπει να υιοθετηθεί μια περιπλοκότερη διαδικασία.

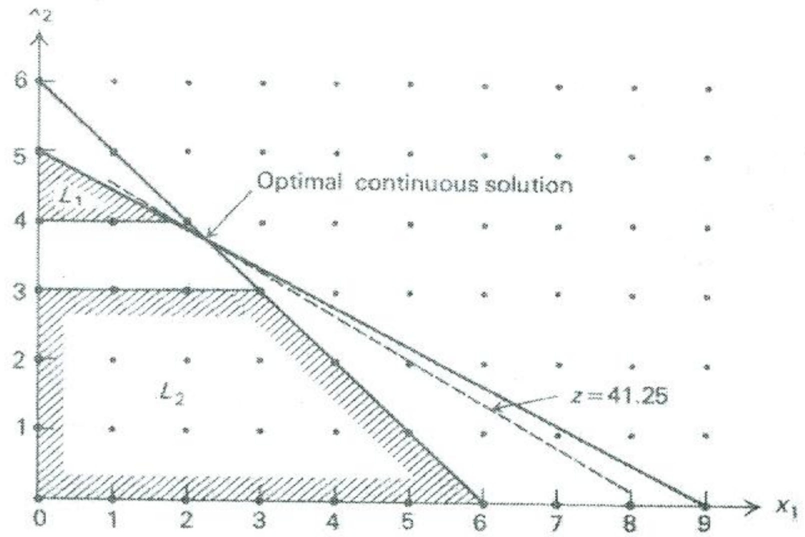
Αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης (Branch and Bound)-Εφαρμογές

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ουσιαστικά μια στρατηγική του ' διαίρει και βασίλευε ',όπως είχαμε αναφέρει και νωρίτερα. Η ιδέα είναι να χωριστεί η εφικτή περιοχή στις πιο εύχρηστες υποδιαιρέσεις και έπειτα, αν είναι απαραίτητο, να χωριστούν περαιτέρω οι υποδιαιρέσεις. Γενικά, υπάρχουν διάφοροι τρόποι να διαιρεθεί η εφικτή περιοχή και άρα υπάρχουν διάφοροι συνδεδεμένοι αλγόριθμοι. Θα εξετάσουμε μια τέτοια τεχνική, για τα προβλήματα μόνο με τις δυαδικές μεταβλητές παρακάτω. Για ιστορικούς λόγους, η τεχνική που θα περιγραφεί έπειτα συνήθως αναφέρεται ως συνδεδεμένη διαδικασία (branch and bound procedure).

Βασική διαδικασία

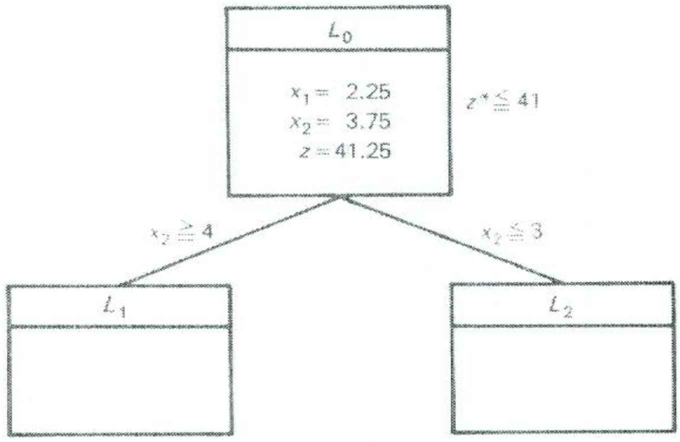
Ένα γραμμικό πρόγραμμα ακέραιων αριθμών είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα που περιορίζεται περαιτέρω από τους ολοκληρωτικούς περιορισμούς. Συνεπώς, σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης η αξία της αντικειμενικής λειτουργίας στο βέλτιστο γραμμικό πρόγραμμα θα είναι πάντα ένα ανώτερο όριο στο βέλτιστο στόχο του ακέραιου προγραμματισμού. Επιπλέον, οποιοδήποτε εφικτό σημείο ακέραιων αριθμών είναι πάντα ένα χαμηλότερο όριο που δεσμεύεται στη βέλτιστη αντικειμενική αξία του γραμμικού προγραμματισμού.

Η ιδέα του αλγορίθμου (Branch and Bound) είναι να χρησιμοποιηθούν αυτές οι παρατηρήσεις για να υποδιαιρεθεί συστηματικά η γραμμική εφικτή περιοχή προγραμματισμού και να αξιολογήσει το πρόβλημα του ακέραιου προγραμματισμού που βασίζεται σε αυτές τις υποδιαιρέσεις. Η μέθοδος μπορεί να περιγραφεί εύκολα με την εξέταση του παραδείγματος από το προηγούμενο τμήμα. Στην αρχή η περιοχή του γραμμικού προγραμματισμού δεν είναι υποδιαιρεμένη. Οι ολοκληρωτικοί περιορισμοί πέφτουν και το σχετικό γραμμικό πρόγραμμα λύνεται, δίνοντας μια βέλτιστη αξία . Από την παραπάνω παρατήρησή μας , αυτό δίνει το ανώτερο όριο του z*, z* 41 –. Δεδομένου ότι οι συντελεστές στην αντικειμενική λειτουργία είναι ακέραιοι, το z* πρέπει να είναι ακέραιος και αυτό υπονοεί ότι το z* 41. Η επόμενη σημείωση είναι ότι η λύση του γραμμικού προγραμματισμού έχει = 2– και = 3–. Και οι δύο μεταβλητές πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί στη βέλτιστη λύση. Ακόμη μπορούμε να διαιρέσουμε την εφικτή περιοχή σε μία προσπάθεια να καταστεί καθεμία ακέραια. Ξέρουμε ότι σε οποιαδήποτε λύση προγραμματισμού ακέραιων αριθμών, το πρέπει να είναι είτε ένας ακέραιος αριθμός 3 είτε ένας ακέραιος αριθμός 4. Άρα η πρώτη υποδιαίρεσή μας είναι στις περιοχές όπου 3 και 4, όπως επιδεικνύεται από τις σκιασμένες περιοχές και στην εικόνα 15. Παρατηρώντας την παραγωγή των υποδιαιρέσεων, έχουμε αποκλείσει την παλιά λύση του γραμμικού προγράμματος. (αν επιλέγαμε το , η περιοχή θα υποδιαιρούταν με 2 και 3).

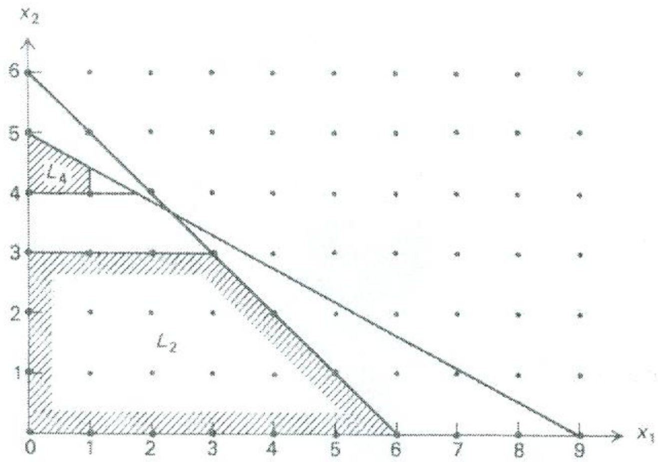


Εικόνα 15 Υποδιαίρεση της εφικτής περιοχής

Τα αποτελέσματα μέχρι αυτό το σημείο απεικονίζονται σε ένα δέντρο απαρίθμησης (εικόνα 16). Εδώ το αντιπροσωπεύει το σχετικό γραμμικό πρόγραμμα, του οποίου η βέλτιστη λύση έχει συμπεριληφθεί μέσα στο κιβώτιο και το ανώτερο όριο του z* απεικονίζεται στα δεξιά του κιβωτίου. Τα παρακάτω κιβώτια αντιστοιχούν στις νέες υποδιαιρέσεις, οι περιορισμοί που υποδιαιρούν το συμπεριλαμβάνονται δίπλα στα κιβώτια. Συνεπώς, οι περιορισμοί του είναι εκείνοι του μαζί με τον περιορισμό 4, ενώ οι περιορισμοί είναι εκείνοι του μαζί με τον περιορισμό 3.



Εικόνα 16 Δένδρο απαρίθμησης



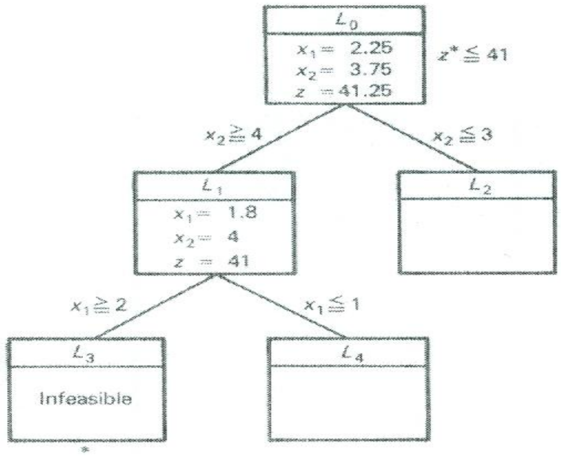
Εικόνα 17 Υποδιαιρώντας την περιοχή L1

Η στρατηγική που ακολουθείται τώρα μπορεί να είναι προφανής: Απλά μεταχειριζόμαστε κάθε υποδιαίρεση δεδομένου ότι κάναμε το αρχικό πρόβλημα. Ας εξετάσουμε το πρώτα. Γραφικά, από την εικόνα 15 βλέπουμε ότι η βέλτιστη λύση του γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στο δεύτερο περιορισμό με 4, δίνοντας = – (45 – 9(4)) = – και μια αντικειμενική αξία z = 5 (–) +8(4) = 41. Δεδομένου ότι το δεν είναι ακέραιος αριθμός, υποδιαιρούμε το περαιτέρω, στις περιοχές με 2 και με . Το είναι ένα ανέφικτο πρόβλημα και έτσι αυτός ο κλάδος του δέντρου απαρίθμησης δεν εξετάζεται πλέον. Το δέντρο απαρίθμησης γίνεται τώρα αυτό που παρουσιάζεται στην εικόνα 18. Ας σημειωθεί ότι οι περιορισμοί οποιασδήποτε υποδιαίρεσης λαμβάνονται με την επισήμανση του . Παραδείγματος χάριν, το περιέχει τους αρχικούς περιορισμούς μαζί με το 4 και 2. Ο αστερίσκος (*) κάτω από το κιβώτιο δείχνει ότι η περιοχή δεν χρειάζεται να υποδιαιρεθεί ή, ισοδύναμα, ότι το δέντρο δε θα επεκταθεί από αυτό το κιβώτιο.

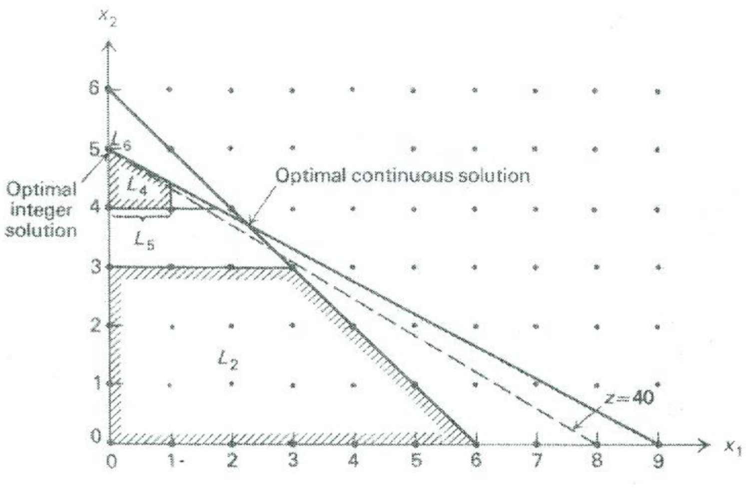
Σε αυτό το σημείο, πρέπει να εξεταστούν οι υποδιαιρέσεις και . Μπορούμε να επιλέξουμε το ένα αυθαίρετα, όμως στην πράξη διάφορα χρήσιμα heuristics εφαρμόζονται για αυτή την επιλογή. Για ευκολία ας επιλέξουμε την υποδιαίρεση που παράγεται πρόσφατα, εδώ το . Αναλύοντας την περιοχή, διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη λύση της έχει

= 1, = – (45-5) = —.

Αφού το δεν είναι ακέραιος αριθμός, το πρέπει να υποδιαιρεθεί περαιτέρω σε με 4 και με 5, αφήνοντας τα , και να εξεταστούν. Χρησιμοποιώντας πρώτα το (εικόνα 19), βλέπουμε ότι το βέλτιστό του έχει = 1, = 4, και z = 37. Δεδομένου ότι αυτή είναι η καλύτερη λύση του γραμμικού προγραμματισμού για το και το γραμμικό πρόγραμμα περιέχει κάθε λύση ακέραιων αριθμών στο , κανένα σημείο ακέραιων αριθμών σε αυτή την υποδιαίρεση δε μπορεί να δώσει μια μεγαλύτερη αντικειμενική αξία από αυτό το σημείο.



Εικόνα 18

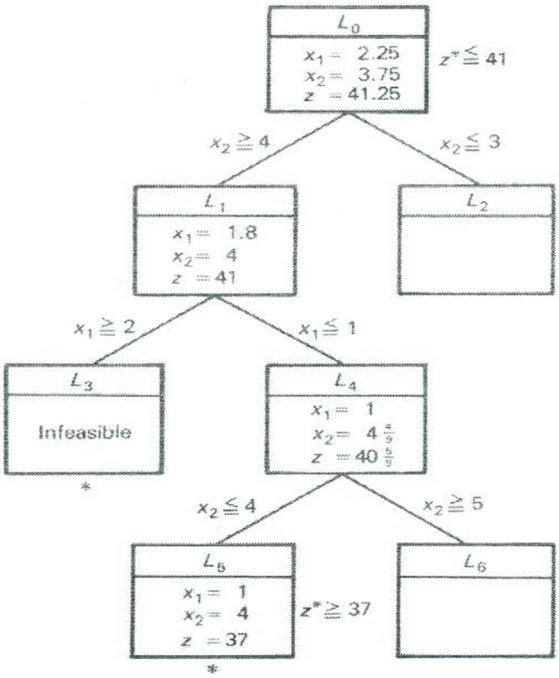


Εικόνα 19 Τελικές υποδιαιρέσεις του παραδείγματος

Συνεπώς, άλλα σημεία δε χρειάζονται να εξεταστούν ποτέ ούτε να υποδιαιρεθούν περαιτέρω στο . Στην πραγματικότητα, αφού = 1, = 4, z =37, είναι μια εφικτή λύση στο αρχικό πρόβλημα, z* 37 και έχουμε τώρα τα όρια 37 z* 41. Χωρίς περαιτέρω ανάλυση, θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε με τη ακέραια λύση = 1, = 4, γνωρίζοντας ότι η αντικειμενική αξία αυτού του σημείου είναι μέσα στο 10 % του αληθινού βέλτιστου. Για ευκολία, το χαμηλότερο όριο z* 37 που καθορίστηκε, έχει επισυναφθεί στα δεξιά του κιβωτίου στο δέντρο απαρίθμησης (εικόνα 20).

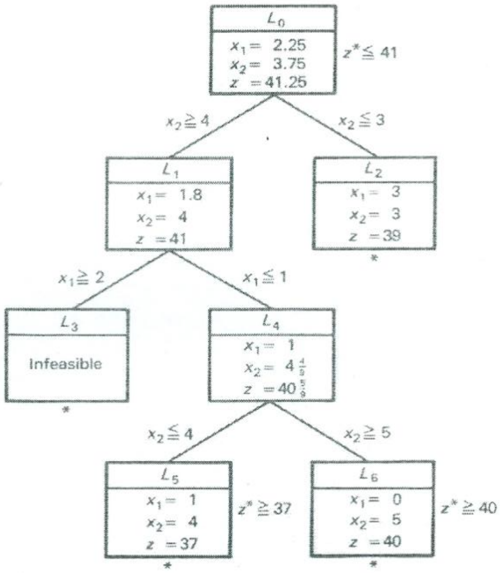
Αν και = 1, = 4, είναι το καλύτερο σημείο ακέραιων αριθμών στο , οι περιοχές και ίσως να περιέχουν τις καλύτερες εφικτές λύσεις και πρέπει να συνεχίσουμε τη διαδικασία με την ανάλυση αυτών των περιοχών. Στο το μόνο εφικτό σημείο είναι = 0, = 5, δίνοντας μια αντικειμενική αξία z= +40. Αυτό είναι καλύτερο από το προηγούμενο σημείο ακέραιων αριθμών και έτσι το χαμηλότερο όριο στο z* βελτιώνεται, έτσι ώστε 40 z* 41. Θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε με αυτήν την λύση ακέραιων αριθμών ξέροντας ότι είναι μέσα στο 2.5% του αληθινού βέλτιστου. Εντούτοις, το θα μπορούσε να περιέχει μια ακόμα καλύτερη λύση ακέραιων αριθμών.

Η λύση του γραμμικού προγραμματισμού στο έχει = = 3 και z = 39. Αυτό είναι το καλύτερο σημείο ακέραιων αριθμών στο αλλά δεν είναι τόσο καλό όσο το = 0, = 5, έτσι το πιο πρόσφατο σημείο (στο) πρέπει πράγματι να είναι βέλτιστο. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι, ακόμα κι αν η λύση στο δεν έδωσε , ακέραιους αλλά είχε το z < 40, τότε κανένα εφικτό (και ιδιαίτερα, κανένα σημείο ακέραιων αριθμών) στο δε θα μπορούσε να είναι τόσο καλό όπως = 0, = 5 με z = 40. Το = 0, = 5 θα είναι γνωστά ως βέλτιστα. Αυτή η παρατήρηση έχει σημαντικές υπολογιστικές επιπτώσεις,



Εικόνα 20

Επίσης δεν είναι απαραίτητο να οδηγηθεί κάθε κλάδος στο δέντρο απαρίθμησης σε έναν ακέραιο αριθμό ή σε μια ανέφικτη λύση, αλλά μόνο σε μια αντικειμενική αξία κάτω από την καλύτερη λύση ακέραιων αριθμών. Το πρόβλημα τώρα λύνεται και ολόκληρη η διαδικασία λύσης μπορεί να συνοψιστεί από το δέντρο απαρίθμησης στην εικόνα 21.



Εικόνα 21

Περαιτέρω εκτιμήσεις

Υπάρχουν τρία σημεία που πρέπει να εξεταστούν όσον αφορά τη συνδεδεμένη διαδικασία:

i. μπορούν τα γραμμικά προγράμματα που αντιστοιχούν στις υποδιαιρέσεις να λυθούν αποτελεσματικά;

ii. ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος για να υποδιαιρεθεί μια δεδομένη περιοχή και ποια υποδιαίρεση πρέπει να εξεταστεί μετά;

iii. μπορεί το ανώτερο όριο ($z = 41$, στο παράδειγμα) στη βέλτιστη αξία z^* του προγράμματος ακέραιων αριθμών να βελτιωθεί ενώ το πρόβλημα είναι προς επίλυση;

Η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι ένα επιφυλακτικό ναι. Όταν κινούμαστε από μια περιοχή προς μια από τις υποδιαιρέσεις της, προσθέτουμε έναν περιορισμό που δεν ικανοποιείται από τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγραμματισμού πέρα από τη μητρική περιοχή. Επιπλέον, αυτό ήταν ένα κίνητρο για το διπλό μονο-κατευθυντικό αλγόριθμο και είναι φυσικό να υιοθετηθεί εκείνος ο αλγόριθμος εδώ.

Η αναφορά στο πρόβλημα δειγμάτων θα επεξηγήσει τη μέθοδο. Οι πρώτες δύο υποδιαιρέσεις και σε εκείνο το παράδειγμα παρήχθησαν στο αρχικό πρόβλημα με την προσθήκη των ακόλουθων περιορισμών.

Για την υποδιαίρεση 1: 4 ή - = 4 (0),

Για την υποδιαίρεση 2: 3 ή + = 3 (0).

Σε καθεμία περίπτωση προσθέτουμε το νέο περιορισμό στη βέλτιστη εικόνα του γραμμικού προγραμματισμού. Για την υποδιαίρεση 1, αυτό δίνει:

_ _ _

_ — _

_ — —

\- + = - 4, προσθέτοντας τον περιορισμό

, , , , 0,

Όπου και είναι νωθρές μεταβλητές (slack variables) για τους δύο περιορισμούς στην αρχική διατύπωση προβλήματος. Ας σημειωθεί ότι ο νέος περιορισμός έχει πολλαπλασιαστεί με - 1, έτσι ώστε η νωθρή μεταβλητή να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βασική μεταβλητή. Δεδομένου ότι η βασική μεταβλητή εμφανίζεται με διαφορετικό από το μηδέν συντελεστή στο νέο περιορισμό, εν τούτοις, πρέπει να περιστραφούμε έτσι ώστε να απομονώσουμε αυτήν την μεταβλητή στο δεύτερο περιορισμό για να εκφράσουμε το σύστημα ως:

(-z) - – - – = - 41 –

\+ – - — = – ,

\- – + — = —,

\- – + — + = - –,

, , , , 0.

Αυτοί οι περιορισμοί εκφράζονται στην κατάλληλη μορφή για την εφαρμογή του διπλού μονο-κατευθυντικού αλγορίθμου, ο οποίος θα περιστραφεί ώστε να κάνει το βασική μεταβλητή στον τρίτο περιορισμό. Το προκύπτον σύστημα δίνεται από:

(-z) - - – = - 41

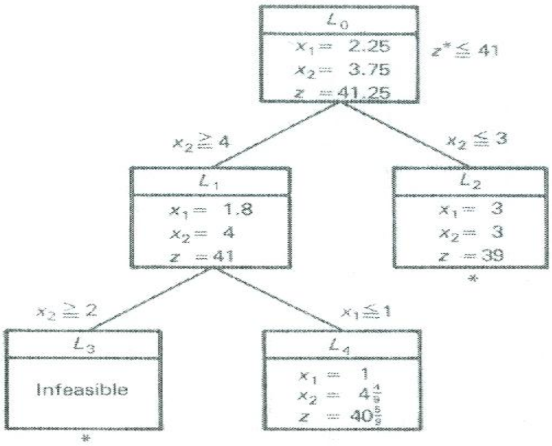
\+ – - — = – ,

= —,

\- - — - – = –,

, , , , 0.

Αυτή η εικόνα είναι βέλτιστη και δίνει τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγραμματισμού της περιοχής για =– , = 4 και z = 41. Η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η βέλτιστη λύση στο . Όταν το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού περιέχει πολλούς περιορισμούς, αυτή η προσέγγιση για την ανάκτηση μιας βέλτιστης λύσης είναι πολύ αποτελεσματική. Αφού προσθέσουμε ένα νέο περιορισμό και καταστήσουμε τη νωθρή μεταβλητή για εκείνο τον περιορισμό βασική, έχουμε πάντα μια αρχική λύση για το διπλό μονο-κατευθυντικό αλγόριθμο με μόνο μία αρνητική βασική μεταβλητή. Συνήθως, μόνο μερικές διπλό μονο-κατευθυντικές διαδικασίες περιστροφής απαιτούνται για να ληφθεί η βέλτιστη λύση. Η χρησιμοποίηση της πρωταρχικής σπουδαιότητας μονο-κατευθυντικού αλγορίθμου ,γενικά, θα απαιτούσε πολλούς περισσότερους υπολογισμούς.



Εικόνα 22

Το ζήτημα (ii) που προκύπτει παραπάνω είναι πολύ σημαντικό δεδομένου ότι εάν μπορούμε να κάνουμε την επιλογή υποδιαιρέσεών μας με τέτοιο τρόπο ώστε να ληφθεί γρήγορα μια καλή (όσο πιο κοντά στη βέλτιστη) ακέραια λύση , μετά μπορούμε αμέσως να αποβάλουμε πολλές πιθανές υποδιαιρέσεις. Πράγματι, εάν οποιαδήποτε περιοχή έχει τη γραμμική αξία προγραμματισμού z , τότε η αντικειμενική αξία κάθε μη ακέραιου σημείου σε εκείνη την περιοχή μπορεί να υπερβεί το και η περιοχή δε χρειάζεται να υποδιαιρεθεί. Δεν υπάρχει καμία καθολική μέθοδος για την απαραίτητη επιλογή, αν και διάφορες διαδικασίες heuristics έχουν προταθεί, όπως η επιλογή της υποδιαίρεσης με τους μεγαλύτερους βέλτιστους κανόνες γραμμικού προγραμματισμού. Υπάρχουν κανόνες που καθορίζουν ποιες κλασματικές μεταβλητές είναι λεπτότερες για να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή των υποδιαιρέσεων. Ας θυμηθούμε ότι οποιαδήποτε κλασματική μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί μια υποδιαίρεση. Μια διαδικασία που χρησιμοποιείται είναι να κοιτάξουμε ένα βήμα μπροστά στη διπλή μονο-κατευθυντική μέθοδο για κάθε πιθανή υποδιαίρεση που μπορεί να είναι πιο επιθυμητή. Για διευκρινιστικούς λόγους έχουμε επιλέξει την κλασματική μεταβλητή αυθαίρετα.

Τελικά, το ανώτερο όριο στην αξία z* του προγράμματος ακέραιων αριθμών μπορεί να βελτιωθεί δεδομένου ότι λύνουμε το πρόβλημα. Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάριν, ότι η υποδιαίρεση αναλύθηκε πριν από τις υποδιαιρέσεις ή στο πρόβλημα δειγμάτων μας. Το δέντρο απαρίθμησης θα ήταν όπως φαίνεται στην εικόνα 22.

Σε αυτό το σημείο, η βέλτιστη λύση πρέπει να βρεθεί είτε στο είτε στο . Δεδομένου ότι η μεγαλύτερη αξία για το εφικτό σημείο σε καθεμία εξ αυτών των περιοχών είναι 40– ,η βέλτιστη αξία για το πρόβλημα δεν μπορεί να υπερβεί το 40– . Καθώς το z* πρέπει να είναι ακέραιο, αυτό υπονοεί ότι z* 40 και το ανώτερο όριο έχει βελτιωθεί από την τιμή 41 που παρέχεται από τη λύση στο γραμμικό πρόγραμμα για . Γενικά, το ανώτερο όριο δίνεται κατά αυτόν τον τρόπο ως η μεγαλύτερη αξία οποιασδήποτε ένωσης κιβώτιου (ένα που δεν έχει διαιρεθεί) στο δέντρο απαρίθμησης.

Σύνοψη

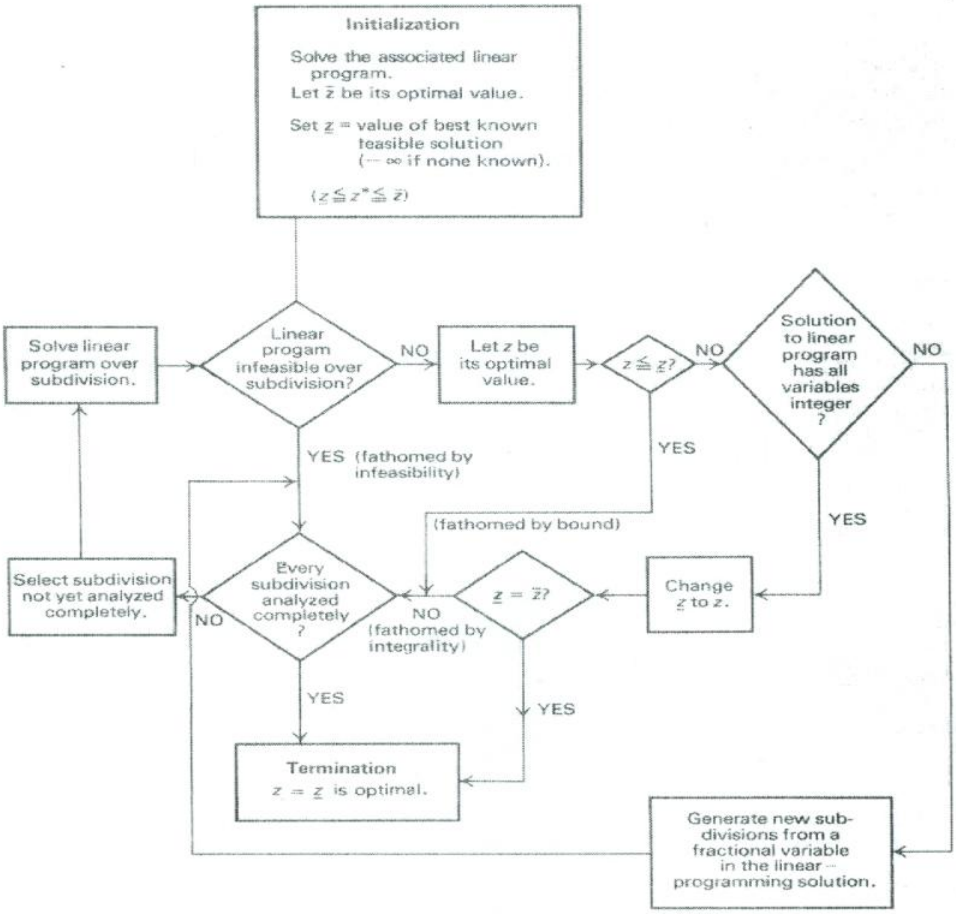
Η ουσιαστική ιδέα του αλγορίθμου Branch and Bound είναι να υποδιαιρεθεί η εφικτή περιοχή για να αναπτυχθούν τα όρια _ z* στο z*. Για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, το χαμηλότερο όριο _ είναι η υψηλότερη αξία οποιουδήποτε εφικτού σημείου ακέραιων αριθμών που μπορεί να αντιμετωπιστεί. Το ανώτερο όριο δίνεται από τη βέλτιστη αξία του σχετικού γραμμικού προγράμματος ή από τη μεγαλύτερη αξία για την αντικειμενική λειτουργία σε οποιαδήποτε ένωση κιβώτιου. Μετά από την εξέταση μιας υποδιαίρεσης, πρέπει να διακλαδιστούμε (branch) σε μια άλλη υποδιαίρεση και να την αναλύσουμε. Επίσης, εάν καθένα από τα:

i. το γραμμικό πρόγραμμα άνω του είναι ανέφικτο

ii. η βέλτιστη λύση γραμμικού προγραμματισμού άνω του είναι ακέραιος ή
iii. η αξία της λύσης του γραμμικού προγραμματισμού άνω του ικανοποιεί το _ (εάν μεγιστοποιηθεί),

τότε το δεν χρειάζεται να υποδιαιρεθεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ορολογία του ακέραιου προγραμματισμού λέει ότι το έχει κατανοηθεί εις βάθος. Στην περίπτωση (i) καλείται εμβάθυνση στο ανέφικτο, (ii) εμβάθυνση στην ακεραιότητα, και (iii) εμβάθυνση στα όρια.

Το διάγραμμα ροής στην εικόνα 23 συνοψίζει τη γενική διαδικασία.



Εικόνα 23 Αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης για τη μεγιστοποίηση ακέραιου προγραμματισμού

Ο αλγόριθμος περιορισμού και διακλάδωσης (Branch and Bound) για τα μικτά προγράμματα ακεραίων αριθμών

Η προσέγγιση Branch and Bound που μόλις περιγράφηκε επεκτείνεται εύκολα για να λύσει μερικά προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές περιορίζονται για να είναι ακέραιες. Οι υποδιαιρέσεις παράγονται μετά από τις ακέραιες μεταβλητές. Με κάθε άλλο τρόπο, η διαδικασία είναι η ίδια με αυτήν που διευκρινίζεται ανωτέρω. Ένα συνοπτικό παράδειγμα θα επεξηγήσει τη μέθοδο.

= max z= -3 -2 + 10,

υπό τον όρο:

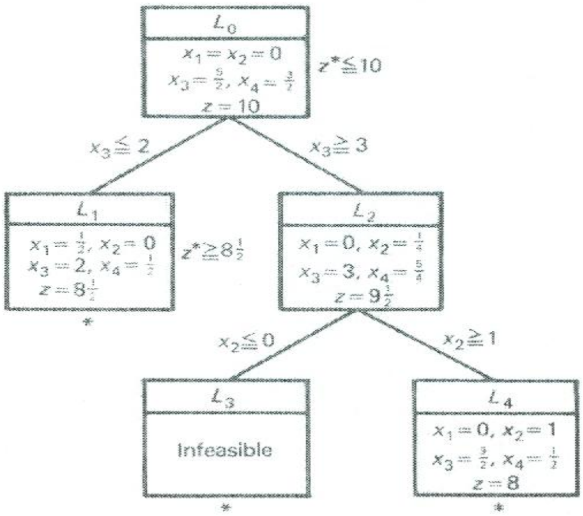
- 2 + = – ,

+ + = –,

0 (j = 1,2,3,4),

και ακέραιοι.

Το πρόβλημα, όπως δηλώνεται, είναι σε κανονική μορφή, με τα και ως βέλτιστες βασικές μεταβλητές για το σχετικό γραμμικό πρόγραμμα. Η συνεχής μεταβλητή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει τις υποδιαιρέσεις δεδομένου ότι οποιαδήποτε αξία 0, ενδεχομένως, μπορεί να είναι βέλτιστη. Συνεπώς, οι υποδιαιρέσεις πρέπει να καθοριστούν κοντά στα 2 και 3. Η πλήρης διαδικασία συνοψίζεται από το δέντρο απαρίθμησης στην εικόνα 24.



Εικόνα 24

Η λύση στο ικανοποιεί τους ακέραιους περιορισμούς, έτσι ώστε z* z = 8–. Η μόνη ακέραια μεταβλητή με μια κλασματική αξία στη βέλτιστη λύση του είναι η , έτσι οι υποδιαιρέσεις και παράγονται από αυτήν την μεταβλητή. Τέλος, η βέλτιστη αξία του γραμμικού προγραμματισμού είναι 8 και έτσι καμία εφικτή ακέραια λύση ακέραιων στην περιοχή δε μπορεί να είναι καλύτερη από την αξία 8– που έχει ήδη παραχθεί. Συνεπώς, εκείνη η περιοχή δεν χρειάζεται να υποδιαιρεθεί και η λύση στο δεν είναι βέλτιστη.

Οι διπλές μονο-κατευθυντικές επαναλήψεις που λύνουν τα γραμμικά προγράμματα σε , , , δίνεται παρακάτω στον πίνακα 2. Οι μεταβλητές στον πίνακα είναι οι νωθρές μεταβλητές για τους περιορισμούς που προστίθενται για να παράγουν τις υποδιαιρέσεις. Οι συντελεστές στους επισυναπτόμενους περιορισμούς είναι καθορισμένοι, όπως αναφέραμε, στα τελευταία τμήματα με την εξάλειψη των βασικών μεταβλητών από το νέο περιορισμό που εισάγεται. Για να ακολουθήσουμε τις επαναλήψεις, υπενθυμίζουμε ότι στη διπλή μονο-κατευθυντική μέθοδο, οι άξονες γίνονται στα αρνητικά στοιχεία της παραγωγικής σειράς. Εάν όλα τα στοιχεία σε αυτήν την σειρά είναι θετικά, όπως στην περιοχή , τότε το πρόβλημα είναι ανέφικτο.

Πίνακας 2

	Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές					
	(-z)	-10 – –	-3 1 2	-2 -2 1	1	1	
		- –	-1	2			1
			↑				

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές					
(-z)	-8– 2 –		-8 0 5	1	1	-3 1 2
	–	1	-2			-1

	Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές					
	(-z)	-10 – –	-3 1 2	-2 -2 1	1	1	
		—	1	-2			1
				↑			3

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές					
(-z)	-9– 3 –	-4 0 –		1	1	-1 -1 —
	—	-–	1			—

Υπονοούμενη απαρίθμηση

Μια πρόσθετη συνδεδεμένη διαδικασία (Branch and Bound) μπορεί να δοθεί για τα προγράμματα ακέραιων αριθμών μόνο με τις δυαδικές μεταβλητές. Ο αλγόριθμος έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί καμία μη γραμμική λύση προγραμματισμού. Αυτό εμφανίζεται στο ακόλουθο παράδειγμα:

= max z= -8 -2 -4 -7 -5 +10,

υπό τον όρο:

-3 -3 + +2 +3 -2,

-5 -3 - - + -4,

= 0 ή 1 (j= 1,2,,,,,,,,5).

Ένας τρόπος για να λυθούν τέτοια προβλήματα είναι η πλήρης απαρίθμηση. Ας απαριθμήσουμε όλους τους πιθανούς δυαδικούς συνδυασμούς των μεταβλητών και ας επιλέξουμε το καλύτερο σημείο που είναι εφικτό. Η προσέγγιση λειτουργεί πολύ καλά σε ένα μικρό πρόβλημα όπως αυτό, όπου υπάρχουν μόνο μερικοί πιθανοί 0-1 συνδυασμοί για τις μεταβλητές, εδώ 32. Γενικά, εν τούτοις, ένα πρόβλημα n-μεταβλητών περιέχει συνδυασμούς για τις μεγάλες τιμές του n· η εξαντλητική προσέγγιση είναι απαγορευτική. Αντί αυτού, μπορεί κάποιος σιωπηρά να εξετάσει κάθε δυαδικό συνδυασμό, ακριβώς όπως κάθε σημείο ακέραιων αριθμών εξετάστηκε σιωπηρά, αλλά αξιολογήθηκε όχι απαραιτήτως, για το γενικό πρόβλημα μέσω του Branch-and-Bound .

Ας υπενθυμισθεί ότι στη Branch-and-Bound διαδικασία, οι υποδιαιρέσεις αναλύθηκαν με τη διατήρηση των γραμμικών και ακέραιων περιορισμών.

Πίνακας 2α

	Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
	(-z)	-9– 3 – –	-4 0 – –	1	1	1	-1 -1 – –	
		–	–				–	1

0

	Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
	(-z)	-9– 3	-4 0		1		-1 -1	

		_ _	_ _	1		1	_ _	
		_	-–				_	1

↑ 1

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
(-z)	-8 _ _ 1	-3 1 _ 0	1	1	1		-2 -2 1 -–
	_	1				1	-2

Εδώ, υιοθετούμε την αντίθετη τακτική της διατήρησης των 0-1 περιορισμών, αλλά αγνοώντας τις γραμμικές ανισότητες. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθεί μια συνδεδεμένη διαδικασία (ή υποδιαίρεση) για να καθορίσει μερικές από τις μεταβλητές σε 0 ή 1. Οι μεταβλητές που παραμένουν να διευκρινιστούν καλούνται ελεύθερες μεταβλητές. Να σημειωθεί ότι εάν οι περιορισμοί ανισότητας αγνοούνται, η αντικειμενική λειτουργία μεγιστοποιείται με τον καθορισμό των ελεύθερων μεταβλητών σε μηδέν, δεδομένου ότι οι αντικειμενικοί συντελεστές λειτουργίας τους είναι αρνητικοί. Παραδείγματος χάριν, εάν και καθορίζονται στο 1 και είναι 0, τότε οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι και . Αγνοώντας τους περιορισμούς ανισότητας, το προκύπτον πρόβλημα είναι:

max = max ,

υπό τον όρο:

και δυαδικοί.

Δεδομένου ότι οι ελεύθερες μεταβλητές έχουν τους αρνητικούς συντελεστές αντικειμενικής λειτουργίας, η μεγιστοποίηση θέτει = = 0. Η απλότητα αυτής της τετριμμένης βελτιστοποίησης, σε σύγκριση με ένα πιο τρομερό γραμμικό πρόγραμμα, είναι αυτό που θα επιθυμούσαμε να εκμεταλλευτούμε.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα, αρχίζουμε με τις μη σταθερές μεταβλητές και συνεπώς, κάθε μεταβλητή είναι ελεύθερη και καθορισμένη στο μηδέν. Η λύση δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ανισότητας και πρέπει να υποδιαιρέσουμε για την αναζήτηση των εφικτών λύσεων. Μια επιλογή υποδιαίρεσης είναι:

Για την υποδιαίρεση 1: = 1,

Για την υποδιαίρεση 2: =0.

Τώρα η μεταβλητή καθορίζεται σε κάθε υποδιαίρεση. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις μας ,εάν οι ανισότητες αγνοηθούν, η βέλτιστη λύση πέρα από κάθε υποδιαίρεση έχει = = = = 0. Η προκύπτουσα λύση στην υποδιαίρεση 1 δίνει:

$$z = -8(1)-2(0)-4(0)-7(0)-5(0)+10 =2,$$

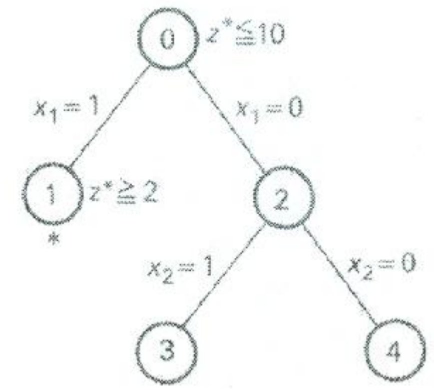
και τυχαίνει να ικανοποιεί τις ανισότητες, έτσι ώστε η βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα να είναι τουλάχιστον 2, z* 2. Επίσης, στην υποδιαίρεση 1 η παραπάνω λύση είναι καλύτερη και μεταξύ των 0-1 συνδυασμών με = 1 συνεπώς πρέπει να είναι καλύτερη μεταξύ εκείνων που ικανοποιούν τις ανισότητες. Κανένας άλλος εφικτός συνδυασμός 0-1 στην υποδιαίρεση 1 δεν πρέπει να αξιολογηθεί ρητά. Αυτοί οι συνδυασμοί έχουν εξεταστεί σιωπηρά.

Η λύση = = = = 0 στην υποδιαίρεση 2 είναι ίδια με την αρχική λύση με κάθε μεταβλητή σε μηδέν και είναι ανέφικτη. Συνεπώς η περιοχή πρέπει να υποδιαιρεθεί περαιτέρω, δηλαδή με =1 ή = 0 θέτοντας:

Για την υποδιαίρεση 3: =0, =1,

Για την υποδιαίρεση 4: =0, =0.

Το δέντρο απαρίθμησης σε αυτό το σημείο είναι όπως δίνεται στην εικόνα 25.



Εικόνα 25

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αυτό το δέντρο διαφέρει από τα δέντρα απαρίθμησης των προηγούμενων τμημάτων. Για τις προηγούμενες διαδικασίες η λύση του γραμμικού προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε για να αναλύσει κάθε υποδιαίρεση διευκρινίστηκε ρητά σε ένα κιβώτιο. Εδώ η λύση 0-1 (που αγνοεί τις ανισότητες), που χρησιμοποιείται για να αναλύσει τις υποδιαιρέσεις, δεν δηλώνεται ρητά, δεδομένου ότι είναι γνωστή απλά με τον καθορισμό των ελεύθερων μεταβλητών σε μηδέν. Στην υποδιαίρεση (3), παραδείγματος χάριν, = 0 και = 1 ενώ οι ελεύθερες μεταβλητές , , τίθενται μηδέν.

Συνεχίζοντας τον καθορισμό των μεταβλητών και την υποδιαίρεση με αυτό τον τρόπο παράγουμε το πλήρες δέντρο που παρουσιάζεται στην εικόνα 26. Το δέντρο δεν επεκτείνεται μετά από την ανάλυση των υποδιαιρέσεων 4, 5, 7, 9, και 10 για τους ακόλουθους λόγους:

i. Στο 5, η λύση =0 , = = 1, με ελεύθερες μεταβλητές = =0, είναι εφικτά, με z = 4, παρέχοντας ένα βελτιωμένο κατώτερο όριο στο z*.

ii. Στο 7, η λύση = = 0, = = 1 και ελεύθερη μεταβλητή = 0, έχει z= 1 < 4, έτσι ώστε καμία λύση σε εκείνη την υποδιαίρεση να μη μπορεί να είναι τόσο καλή όσο αυτή που παράγεται στο 5.
iii. Στο 9 και στο 10 κάθε ελεύθερη μεταβλητή καθορίζεται. Σε κάθε περίπτωση, οι υποδιαιρέσεις περιέχουν μόνο ένα ενιαίο σημείο, το οποίο είναι ανέφικτο, και η περαιτέρω υποδιαίρεση δεν είναι δυνατή.
iv. Στο 4, η δεύτερη ανισότητα (με τις σταθερές μεταβλητές = = 0) δίνουν:

-2 - + -4.

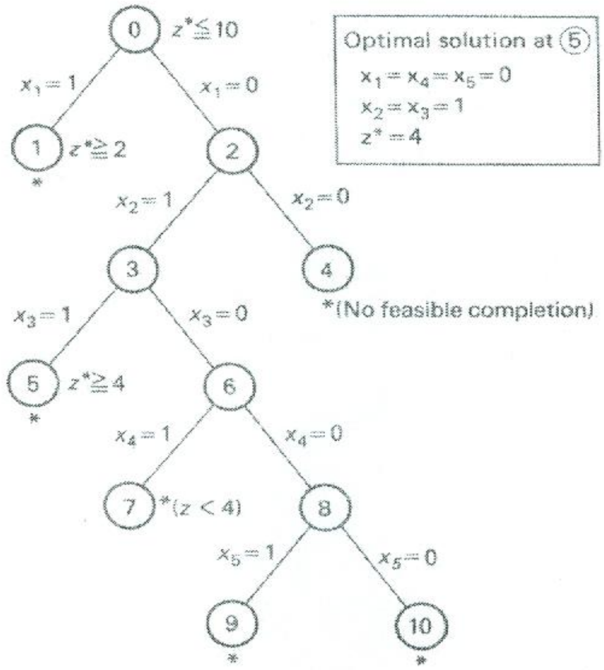
Καμία από τις τιμές 0 -1 των , δεν ολοκληρώνει τις σταθερές μεταβλητές = = 0 να ικανοποιήσουν αυτόν τον περιορισμό, δεδομένου ότι η χαμηλότερη αξία για την αριστερή πλευρά αυτής της εξίσωσης είναι το -3, όταν = = 1 και = 0. Η υποδιαίρεση δεν έχει τότε καμία εφικτή λύση και δε χρειάζεται να αναλυθεί περαιτέρω.

Η τελευταία παρατήρηση είναι απολύτως γενική. Αν σε οποιοδήποτε σημείο μετά από την αντικατάσταση των σταθερών μεταβλητών, το ποσό των υπόλοιπων αρνητικών συντελεστών σε οποιοδήποτε περιορισμό υπερβαίνει τη δεξιά πλευρά, τότε η περιοχή από αυτές τις σταθερές μεταβλητές δεν έχει καμία εφικτή λύση. Λόγω της πρόσθετης φύσης του προβλήματος 0-1, υπάρχουν διάφορες άλλες τέτοιες δοκιμές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μειώσουν τον αριθμό υποδιαιρέσεων που παράγονται. Η αποδοτικότητα αυτών των δοκιμών υπολογίζεται με το ζύγισμα του χρόνου που απαιτείται για να τις εκτελέσεις ενάντια στο χρόνο που κερδίζεται από τις λιγότερες υποδιαιρέσεις.

Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται εδώ ισχύουν για οποιοδήποτε πρόβλημα ακεραίου προγραμματισμού που περιλαμβάνει μόνο τις δυαδικές μεταβλητές, έτσι ώστε η υπονοούμενη απαρίθμηση να είναι μια εναλλακτική συνδεδεμένη διαδικασία για αυτήν την κατηγορία προβλημάτων. Σε αυτήν την περίπτωση, οι υποδιαιρέσεις αναλύονται εις βάθος εάν ισχύει οποιαδήποτε από τις τρεις προϋποθέσεις:

i. το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών είναι γνωστό ότι είναι ανέφικτο κατά την υποδιαίρεση,
ii. η λύση 0-1 που λαμβάνεται με τον καθορισμό των ελεύθερων μεταβλητών στο μηδέν ικανοποιεί τις γραμμικές ανισότητες ή
iii. η αντικειμενική αξία που λαμβάνεται με τον καθορισμό των ελεύθερων μεταβλητών στο μηδέν δεν είναι μεγαλύτερο από την καλύτερη εφικτή λύση 0-1 που παράγεται προηγουμένως.

Αυτοί οι όροι αντιστοιχούν στους τρεις που δηλώθηκαν νωρίτερα για την εμβάθυνση στη συνηθισμένη συνδεδεμένη διαδικασία. Εάν μια περιοχή δεν αναλύεται με βάση μία από αυτές τις δοκιμές, η υπονοούμενη απαρίθμηση υποδιαιρεί εκείνη την περιοχή με την επιλογή οποιασδήποτε ελεύθερης μεταβλητής και τον καθορισμό των τιμών της σε 0 ή 1.



Εικόνα 26

Τα επιχειρήματά μας που οδηγούν στον αλγόριθμο βασίστηκαν στον ορισμό του αρχικού προβλήματος 0-1 στην ακόλουθη τυποποιημένη μορφή:

1. ο στόχος είναι μία μεγιστοποίηση με όλους τους συντελεστές αρνητικούς
2. οι περιορισμοί διευκρινίζονται ως ανισότητες τύπου “ λιγότερο από ή ίσο με” .

Όπως συνήθως, τα προβλήματα ελαχιστοποίησης μετασχηματίζονται σε μεγιστοποίησης πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές δαπανών με -1. Αν το εμφανίζεται στη μορφή μεγιστοποίησης με ένα θετικό συντελεστή, τότε η μεταβλητή αντικατάστασης = 1 - οπουδήποτε στο μοντέλο αφήνει τη δυαδική μεταβλητή με έναν αρνητικό συντελεστή αντικειμενικής λειτουργίας. Τέλος, οι περιορισμοί “ μεγαλύτερο από ή ίσο με” μπορούν να πολλαπλασιαστούν με -1 για να γίνουν περιορισμοί “μικρότεροι από ή ίσοι με” και οι γενικοί περιορισμοί ισότητας μετατρέπονται σε ανισότητες.

Όπως στη συνδεδεμένη διαδικασία για τα γενικά προγράμματα ακέραιων αριθμών, ο τρόπος που επιλέγουμε να υποδιαιρέσουμε τις περιοχές μπορεί να έχει μια βαθιά επίδραση επάνω στους υπολογισμούς. Στην υπονοούμενη απαρίθμηση, αρχίζουμε με τη μηδενική λύση = =…..= =0 και παράγουμε άλλες λύσεις με τον καθορισμό των μεταβλητών στο 1. Μια φυσική προσέγγιση είναι να υποδιαιρέσουμε βασισμένοι στη μεταβλητή με την υψηλότερη αντικειμενική συμβολή. Για το πρόβλημα δειγμάτων, αυτό θα υπονοούσε υποδιαίρεση αρχικά με = 1 ή = 0.

Μια άλλη προσέγγιση που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη είναι να προσπαθήσουμε να οδηγηθούμε προς το εφικτό το συντομότερο δυνατόν. Για παράδειγμα, όταν καθορίζονται = 0, = 1 και = 3, θα μπορούσαμε να υποδιαιρέσουμε βασισμένοι στα ή . Ρυθμίζοντας τα ή στο 1 και αντικαθιστώντας τις σταθερές μεταβλητές, διαπιστώνουμε ότι οι περιορισμοί αλλάζουν ως εξής:

= 1, (free) = 0 : =1, (free) = 0 :

-3(0) -3(1) + (0) + 2(1) + 3(0) -2, -3(0) -3(1) + (0) + 2(0) + 3(1) -2,

-5(0) -3(1) -2(0) – 1(1) + (0) -4, -5(0) -3(1) -2(0) – 1(0) + (1) -4,

Για = 1, ο πρώτος περιορισμός είναι ανέφικτος κατά μία μονάδα και ο δεύτερος περιορισμός είναι εφικτός, δίνοντας 1 συνολική μονάδα της αδιαφορίας. Για =1, ο πρώτος περιορισμός είναι ανέφικτος κατά 2 μονάδες και ο δεύτερος κατά 2 μονάδες που δίνουν 4 συνολικές μονάδες της αδιαφορίας. Κατά συνέπεια το = 1 εμφανίζεται ευνοϊκότερο και θα υποδιαιρούσαμε βασισμένοι σε εκείνη την μεταβλητή. Γενικά η μεταβλητή που δίνει τις λιγότερες συνολικές αδιαφορίες από αυτήν την προσέγγιση θα επιλέγονταν μετά.

Εφαρμογές του αλγόριθμου Cutting planes

Ο αλγόριθμος cutting-planes λύνει τα προγράμματα ακέραιων αριθμών με την τροποποίηση των λύσεων του γραμμικού προγραμματισμού έως ότου λάβουμε τη λύση ακέραιων αριθμών. Δε χωρίζει την εφικτή περιοχή στις υποδιαιρέσεις, όπως στις Branch and Bound προσεγγίσεις, αλλά αντ' αυτού λειτουργεί με ένα ενιαίο γραμμικό πρόγραμμα, το οποίο εξευγενίζεται με την προσθήκη των νέων περιορισμών. Οι νέοι περιορισμοί μειώνουν διαδοχικά την εφικτή περιοχή έως ότου βρεθεί μια βέλτιστη λύση ακέραιων αριθμών.

Στην πράξη, οι διαδικασίες Branch and Bound σχεδόν πάντα ξεπερνούν τον αλγόριθμο cutting-planes. Εντούτοις, ο αλγόριθμος είναι σημαντικός στην εξέλιξη του προγραμματισμού ακέραιων αριθμών. Ιστορικά, ήταν ο πρώτος αλγόριθμος που αναπτύχθηκε για τον ακέραιο προγραμματισμό και θα μπορούσε να αποδειχθεί για να συγκλίνει ένα αριθμό βημάτων. Επιπλέον, ακόμα κι αν ο αλγόριθμος γενικά θεωρείται πολύ ανεπαρκής, έχει δώσει ιδέες στον ακέραιο προγραμματισμό που έχουν οδηγήσει σε άλλους, αποδοτικότερους αλγόριθμους.

Πάλι, θα αναφερθούμε στη μέθοδο με την εξέταση του προβλήματος δειγμάτων των προηγούμενων τμημάτων:

= max 5 +8 ,

υπό τον όρο:

+ + = 6

5 + + = 45

, , , 0.

, είναι, αντίστοιχα, οι νωθρές μεταβλητές για τους πρώτους και δεύτερους περιορισμούς. Η επίλυση του προβλήματος με τη μονο-κατευθυντική μέθοδο δημιουργεί τον ακόλουθο βέλτιστο πίνακα:

(-z) - – - - = - 41 –

+ – - – = – ,

- – - - = —,

, , , , 0.

Αν ξαναγράψουμε αυτές τις εξισώσεις με μία ισοδύναμη αλλά κάπως αλλαγμένη μορφή τότε:

(-z) -2 - + 42 = – - – –

+ 2 - -2 = – - – -—

-2 -3 = – - – –

, , , 0.

Αυτοί οι αλγεβρικοί χειρισμοί έχουν απομονώσει τους συντελεστές ακέραιων αριθμών στη μια πλευρά και τις ισότητες και τα κλάσματα στην άλλη, κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι σταθεροί όροι στη δεξιά πλευρά να είναι όλοι μη αρνητικοί και οι συντελεστές νωθρών μεταβλητών στη δεξιά πλευρά είναι όλοι μη θετικοί.

Σε οποιαδήποτε λύση ακέραιων αριθμών, η αριστερή πλευρά κάθε εξίσωσης στην τελευταία εικόνα πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Αφού τα και είναι μη αρνητικά και εμφανίζονται στη δεξιά πλευρά με τους αρνητικούς συντελεστές πρέπει απαραιτήτως να είναι λιγότερα ή ίσα με τον κλασματικό σταθερό όρο. Συνολικά, αυτές οι δύο παρατηρήσεις δείχνουν ότι και οι δύο πλευρές κάθε εξίσωσης πρέπει να είναι ένας ακέραιος αριθμός μικρότερος ή ίσος με 0 (εάν ένας ακέραιος αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος με το κλάσμα, πρέπει να είναι 0 ή αρνητικός). Έτσι από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

– - – - – 0 και ακέραιος,

ή αν εισάγουμε μια νωθρή μεταβλητή

– - – - – 0 και ακέραιος (C1)

Ομοίως, άλλοι όροι μπορούν να παραχθούν από τους υπόλοιπους περιορισμούς:

– - – - – = 0, 0 και ακέραιος (C2)

– - – - – = 0, 0 και ακέραιος (C3)

Ας σημειωθεί ότι, σε αυτήν την περίπτωση τα (C1), (C3) είναι ίδια.

Οι νέες εξισώσεις (C1), (C2) και (C3) που έχουν παραχθεί ονομάζονται περικοπές (cuts) για τους ακόλουθους λόγους: Η παραγωγή τους δεν απέκλεισε οποιεσδήποτε λύσεις ακέραιων αριθμών στο πρόβλημα, έτσι οποιοδήποτε εφικτό σημείο ακέραιων αριθμών στο αρχικό πρόβλημα πρέπει να ικανοποιήσει τους περιορισμούς περικοπών. Η λύση του γραμμικού προγραμματισμού είχε = = 0 , που προφανώς δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς περικοπών. Σε κάθε περίπτωση, η αντικατάσταση = = 0 δίνει , ή < 0. Συνεπώς, η καθαρή επίδραση μιας περικοπής είναι να απομακρύνει τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγραμματισμού από την εφικτή περιοχή χωρίς αποκλεισμό οποιωνδήποτε εφικτών σημείων ακέραιων αριθμών. Η γεωμετρία που κρύβεται κάτω από τις περικοπές μπορεί να καθιερωθεί αρκετά εύκολα. Από την (11) οι νωθρές μεταβλητές και καθορίζονται από:

= 6 - - ,

= 45 – 5 -9 .

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στους περιορισμούς περικοπών και ρυθμίζοντας τες εκ νέου, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις περικοπές ως εξής:

2 +3 15, (C1 ή C3)

4 +7 35. (C2)

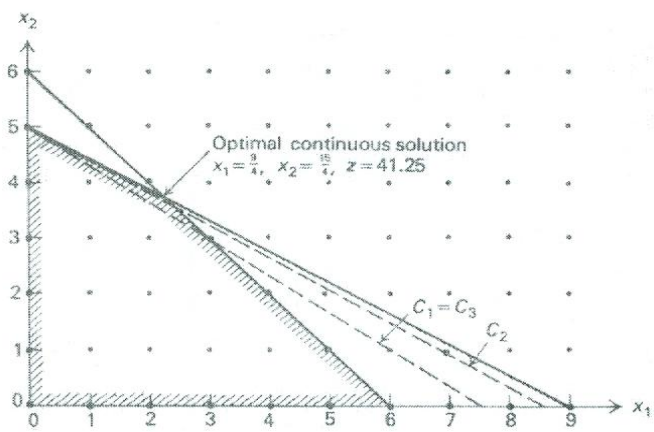
Με αυτήν την μορφή, οι περικοπές επιδεικνύονται στην εικόνα 27 και εκθέτουν τα ανωτέρω χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Σε κάθε περίπτωση η προστιθέμενη περικοπή αφαιρεί τη λύση του γραμμικού προγραμματισμού = – , =— από την εφικτή περιοχή, στον ίδιο χρόνο συμπεριλαμβανομένης κάθε εφικτής λύσης ακέραιων αριθμών.

Η βασική στρατηγική της τεχνικής cutting-planes είναι να προστεθούν οι περικοπές (συνήθως μόνο μια) στους περιορισμούς, καθορίζοντας τις εφικτές περιοχές και έπειτα να λύσουν το προκύπτον γραμμικό πρόγραμμα. Εάν οι βέλτιστες τιμές για τις μεταβλητές απόφασης στο γραμμικό πρόγραμμα είναι όλος ο ακέραιος αριθμός, είναι βέλτιστες· διαφορετικά μια νέα περικοπή δημιουργείται από τη νέα βέλτιστη εικόνα του γραμμικού προγραμματισμού και επισυνάπτεται στους περιορισμούς.

Στην εικόνα 27 που η περικοπή C1 = C3 οδηγεί άμεσα στην προαιρετική λύση. Η περικοπή (C2) δεν το κάνει και θα απαιτηθούν περαιτέρω επαναλήψεις εάν αυτή η περικοπή επισυνάπτεται στο πρόβλημα (χωρίς την περικοπή C1 = C3).Επίσης η περικοπή C1 εισχωρεί βαθύτερα στην εφικτή περιοχή από τη C2. Για προβλήματα με πολλές μεταβλητές, είναι γενικά αρκετά δύσκολο να καθοριστεί ποιες περικοπές θα είναι βαθιές από αυτή την άποψη. Συνεπώς, στις εφαρμογές ο αλγόριθμος παράγει συχνά τις περικοπές που ''ξυρίζουν'' πολύ λίγο από την εφικτή περιοχή, και ως εκ τούτου τη φτωχή επίδοση του αλγόριθμου.

Ένα τελικό σημείο που εξετάζεται εδώ είναι ο τρόπος με τον οποίο παράγονται οι περικοπές. Η εικόνα του γραμμικού προγραμματισμού για το ανωτέρω πρόβλημα περιείχε τον περιορισμό:

+– - - = –.



Εικόνα 27 Περικοπή της λύσης του γραμμικού προγραμματισμού

Ας υποθέσουμε ότι εμείς στρογγυλοποιούμε προς τα κάτω τους κλασματικούς συντελεστές σε ακέραιους αριθμούς, δηλαδή το – σε 2, το - – σε -1 και το – σε 2. Αν τοποθετήσουμε αυτούς του ακεραίους στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης και τα κλάσματα στη δεξιά θα λάβουμε όπως πριν από τον ισοδύναμο περιορισμό:

+ 2 - -2 = – -– -– .

Από τα προηγούμενα επιχειρήματά μας, η περικοπή είναι:

– - – - – 0 και ακέραιος.

Ένα άλλο παράδειγμα μπορεί να βοηθήσει να διευκρινιστούν και άλλα θέματα. Ας υποθέσουμε ότι η τελική εικόνα του γραμμικού προγραμματισμού σε ένα πρόβλημα έχει τον περιορισμό:

+– - – +3 = 4 –.

Τότε ο ισοδύναμος περιορισμός είναι:

- 2 +3 -4= – - – - – ,

και η περικοπή θα είναι:

– - – - – 0 και ακέραιος.

Ας παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο καθορίζονται τα κλάσματα από τους αρνητικούς συντελεστές. Το κλάσμα στον περιορισμό περικοπών που καθορίζεται στο συντελεστή είναι - – = - 1 – και όχι με – , αλλά το κλάσμα που παράγεται το στρογγυλοποιούμαι προς τα κάτω οπότε έχουμε την τιμή -2. (π.χ. το κλάσμα - 1– -(- 2) = –).

Ο πίνακας 3 παρουσιάζει πλήρη λύση του προβλήματος δειγμάτων από τη τεχνική cutting-planes. Καθώς η περικοπή C1 = C3 οδηγεί άμεσα στη βέλτιστη λύση, έχουμε επιλέξει να αρχίσουμε με την περικοπή C2. Αξίζει να σημειωθεί ότι εάν η νωθρή μεταβλητή για οποιαδήποτε πρόσφατα παραγμένη περικοπή λαμβάνεται ως βασική μεταβλητή σε εκείνο τον περιορισμό, τότε το πρόβλημα είναι στην κατάλληλη μορφή για το διπλό μονο-κατευθυντικό αλγόριθμο. Για παράδειγμα, η περικοπή στον πίνακα 3(b) που παράγεται από το περιορισμό

+ – - – = – ή + 2 - -2= – - – - –

δίνεται από:

– - – - – 0 και ακέραιος.

Θέτοντας ως μία νωθρή μεταβλητή στον περιορισμό, έχουμε:

- – - – + = - –.

Πίνακας 3

(α)

	Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές					
	(-z)	-41– – —	1	1	- – – -–	-– -– –	
←		–			-–	-–	1
						↑	

περικοπή που παράγεται από τον περιορισμό

(b)

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
(-z)	-41			-1		-1	
	–	1		–		-–	
	—		1	-–		–	
	–			–	1	–	
	–					–	1

←

↑

περικοπή που παράγεται από τον περιορισμό

(c)

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
(-z)	-40–			-–		-–	
	–	1		–		-–	
	–		1	-–		–	
	1			1			
	–			–	1	-–	
	–			- –		–	1

←

↑

περικοπή που παράγεται από τον περιορισμό

(d)

Βασικές Μεταβλητές	Τρέχουσες Τιμές						
(-z)	-40					-1	-1

	0	1				3	5
							-3
	5		1			2	
							2
	0				1		
							1
	0			1		-2	-2
	1					1	

Καθώς τα και είναι μη βασικές μεταβλητές, μπορούμε να πάρουμε το για να τεθεί ως βασική μεταβλητή που απομονώνεται σε αυτόν τον περιορισμό (δείτε στον πίνακα 3(b)). Με την παραγωγή των μικρών τροποποιήσεων στον αλγόριθμο cutting-planes που έχει περιγραφεί, μπορούμε να δείξουμε ότι θα ληφθεί μια βέλτιστη λύση στο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού, όπως σε αυτό το παράδειγμα, μετά από την προσθήκη ενός αριθμού περικοπών. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος σύμφωνα με τον R. Gomory το 1958 ήταν μια πολύ σημαντική θεωρητική ανακάλυψη, δεδομένου ότι έδειξε ότι τα προγράμματα ακέραιων αριθμών μπορούν να λυθούν από κάποιο γραμμικό πρόγραμμα (το σχετικό γραμμικό πρόγραμμα συν τους προστιθέμενους περιορισμούς). Δυστυχώς, ο αριθμός περικοπών που προστίθενται, είναι συνήθως αρκετά μεγάλος, έτσι ώστε αυτό το αποτέλεσμα να μην έχει σημαντικές πρακτικές διακλαδώσεις.

Συμπεράσματα- Ανάλυση και ακέραιος προγραμματισμός

Μπορούμε να αναρωτηθούμε, λαμβάνοντας υπόψη τη συγκέντρωση της εργασίας μας στη διατύπωση προβλήματος και την ερμηνεία λύσης, γιατί έχουν αναφερθεί τόσα λίγα ανωτέρω για τη δυαδικότητα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών και σχετικές πληροφορίες αξιολόγησης. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για αυτήν την έλλειψη επεξεργασίας. Η δυαδικότητα δεν είναι ένα καθορισμένο και με σαφήνεια θέμα στα πλαίσια του ακέραιου προγραμματισμού. Οι περισσότερες σχέσεις και ερμηνείες δυαδικότητας LP και NLP προέρχονται από τα κατασκευάσματα υπολογισμού που κρύβονται κάτω από τη θεωρία του kuhn-Tucker. Εντούτοις, ο υπολογισμός της εφικτής περιοχή λύσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί στον ασυνεχή ακέραιο προγραμματισμό. Γενικά, οι διπλές μεταβλητές δεν καθορίζονται για τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού, αν και το θέμα έχει ερευνηθεί (Gomoly και Baumol Williams 1980). Αυτό που γενικά μπορεί να δηλώσει κάποιος είναι ότι οι διπλές πληροφορίες δεν καθορίζονται καλά στα γενικά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Εντούτοις, υπάρχουν δύο πτυχές σε μια τέτοια δήλωση που πρέπει να συζητηθούν.

Κατ' αρχάς, οι συνηθέστεροι αλγόριθμοι τυπώνουν διπλές πληροφορίες. Ωστόσο οι διπλές πληροφορίες επηρεάζονται συχνά από τους περιορισμούς που προστίθενται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας λύσης. Οι περισσότερες προσεγγίσεις λύσης περιλαμβάνουν την προσθήκη των περιορισμών για να επαναπροσδιορίσουν την εφικτή περιοχή, έτσι ώστε οι λύσεις ακέραιων αριθμών να εμφανίζονται στα ακραία σημεία. Συνεπώς, πολλές από τις τιμές σκιών που αναφέρονται στους κώδικες ακέραιου προγραμματισμού δεν είναι σχετικοί με τα αρχικά προβλήματα αλλά μάλλον είναι σχετικοί με ένα μετασχηματισμένο πρόβλημα. Η κύρια δυσκολία με αυτές τις διπλές τιμές είναι ότι το σύνολο μετασχηματισμών δεν είναι μοναδικό, αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι νέες πληροφορίες να μην είναι μοναδικές ή πλήρεις (διάφορα έγγραφα δυαδικότητας σχετικά παραπέμπονται από τους Gomory και Baumol ή από τον Random). Άρα, σε πολλές περιπτώσεις, οι πληροφορίες για τις τιμές σκιών ακέραιου προγραμματισμού που εμφανίζονται στην παραγωγή πρέπει να αγνοηθούν.

Δεύτερον, υπάρχει μια σημαντική ελλείπουσα συζήτηση η οποία περιλαμβάνει τις διπλές μεταβλητές αξιοπιστίας κατά την ενασχόληση με μικτά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Θα εμφανιζόταν να προκύπτει άμεσα από το γραμμικό προγραμματισμό (LP) ότι οι τιμές σκιών του μικτού ακέραιου προγραμματισμού θα ήταν τόσο αξιόπιστες όσο οι τιμές σκιών LP, εάν οι περιορισμοί της δεξιάς πλευράς αλλάξουν σε μια σειρά που δεν υπονοεί μια αλλαγή στην αξία λύσης μιας μεταβλητής ακέραιων αριθμών. Οι διπλές μεταβλητές από τους περιορισμούς που περιλαμβάνουν μόνο τις συνεχείς μεταβλητές θα εμφανίζονταν να είναι οι ακριβέστερες. Οι διπλές μεταβλητές στους περιορισμούς που περιλαμβάνουν τους συνδέσμους μεταξύ συνεχούς και ακέραιου αριθμού και τα μεταβλητά επίπεδα λύσης είναι λιγότερο ακριβή και οι περιορισμοί που περιλαμβάνουν μόνο τις μεταβλητές ακέραιων αριθμών θα εξέθεταν τις ανακριβείς διπλές μεταβλητές.

Το τρίτο διπλό μεταβλητό σχόλιο είναι οι δεσμευτικοί περιορισμοί. Ας εξετάσουμε το σχήμα 25. Ας υποθέσουμε ότι η βέλτιστη λύση είναι όταν X= Y=3. Και ότι αυτό το σημείο είναι αυστηρά εσωτερικό στην εφικτή περιοχή. Συνεπώς, σύμφωνα με τις συμπληρωματικές προϋποθέσεις χαλαρότητας, οι περιορισμοί θα έχουν διπλές μεταβλητές με τιμή μηδέν. Αφ' ενός εάν ο πρώτος περιορισμός τροποποιήθηκε έτσι ώστε η δεξιά πλευρά να είναι μεγαλύτερο από 17, η αξία λύσης θα μπορούσε να κινηθεί προς το X=4 και Y=3. Συνεπώς, ο πρώτος περιορισμός δεν είναι αυστηρά δεσμευτικός αλλά μια χαλάρωση της δεξιάς πλευράς της, μπορεί να παράγει μια αντικειμενική αύξηση λειτουργίας. Επομένως, εννοιολογικά, έχει μια διπλή μεταβλητή. Επομένως, η δυσκολία με τις διπλές μεταβλητές στον ακέραιο προγραμματισμό είναι ότι μπορούν να είναι διαφορετικές από το μηδέν για δεσμευτικούς περιορισμούς.

Μελέτες περίπτωσης εφαρμογής του ακέραιου προγραμματισμού σε πραγματικές συνθήκες

Ένα δυαδικό δίκτυο είναι ένα από τα πρότυπα των βιολογικών δικτύων, όπως τα ρυθμιστικά δίκτυα γονιδίων, και έχει μελετηθεί εκτενώς. Συγκεκριμένα, ένα πιθανολογικό δίκτυο (PBN) είναι γνωστό ως επέκταση των δικτύων, αλλά στις υπάρχουσες μεθόδους για να λυθεί το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου PBNs, είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι μεταβάσεις στο διάγραμμα καταστάσεων με κόμβους για ένα δεδομένο PBN με n καταστάσεις. Για να αποφευχθεί αυτός ο υπολογισμός, Οι Koichi Kobayashi και Kunihiko Hiraishi προτείνουν μια προσέγγιση βασισμένη στον ακέραιο προγραμματισμό για ένα συμφραστικά εξαρτώμενο PBN (CS-PBN), το οποίο είναι μια γενική μορφή PBNs. Στην προτεινόμενη μέθοδο, ένα CS -PBN μετασχηματίζεται σε ένα γραμμικό σύστημα με τις δυαδικές μεταβλητές, και το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου περιορίζεται σε ένα γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών.

Τα τελευταία χρόνια, έχουν υπάρξει πολλές μελέτες στην ανάλυση και τον έλεγχο των βιολογικών δικτύων, όπως τα ρυθμιστικά δίκτυα γονιδίων. Ένας από τους τελικούς στόχους σε αυτές τις μελέτες είναι να βρεθεί μια μέθοδος για ένα κατάλληλο φάρμακο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη και τη θεραπεία του καρκίνου φαρμάκων (Kitano, 2004). Προκειμένου να εξεταστεί ένα τέτοιο σύστημα, είναι σημαντικό να εξεταστεί ένα απλό πρότυπο και τα διάφορα πρότυπα που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα. Συγκεκριμένα τα δυαδικά δίκτυα (Kauffman, 1969) είναι γνωστά ως ένα από τα πρότυπα καθώς έχουν μελετηθεί εκτενώς (Akutsu, Hayashida, Ching, & NG, 2007). Σε αυτό το πρότυπο, η δυναμική όπως οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των γονιδίων εκφράζεται από ένα σύνολο δυαδικών λειτουργιών. Έτσι αυτό το πρότυπο είναι απλό και μπορεί να εφαρμοστεί στα μεγάλης κλίμακας συστήματα. Επιπλέον, δεδομένου ότι η συμπεριφορά των βιολογικών δικτύων είναι πιθανολογική, είναι σκόπιμο να αποφασίζονται τυχαία κάθε φορά οι δυαδικές λειτουργίες. Από αυτήν την άποψη, ένα πιθανολογικό δυαδικό δίκτυο (PBN) έχει προταθεί από τους Shmulevich, Dougherty, Kim και Zhang (2002). Επιπλέον, ένα συμφραστικά εξαρτώμενο PBN (CS-PBN) στο οποίο ο χρόνος απόφασης επιλέγεται τυχαία έχει προταθεί ως γενική μορφή PBNs από τους (Faryabi, Vahedi, Chamberland, Datta, & Dougherty, 2009 PAL, Datta, Bittner, & Dougherty, 2005).

Με παρόμοιο τρόπο στα τυποποιημένα δυναμικά συστήματα, CS-PBNs συμπεριλαμβάνων PBNs έχουν την αρχική θέση και την εισαγωγή ελέγχου. Υποθέτουμε ότι η αξία (0 ή 1) της εισαγωγής ελέγχου μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα. Η εισαγωγή ελέγχου στα βιολογικά δίκτυα έχει συγκεκριμένη σημασία. Παραδείγματος χάριν, η αξία της εισαγωγής ελέγχου εκφράζει εάν ένα ερέθισμα δίνεται σε ένα κύτταρο. Κατόπιν η εισαγωγή ελέγχου έχει ως σκοπό να λάβει την τροχιά της κατάστασης που διέρχεται από το αρχικό στάδιο στο επιθυμητό. Έτσι η εισαγωγή ελέγχου μπορεί να αντιπροσωπεύσει την παρούσα κατάσταση των θεραπευτικών επεμβάσεων, οι οποίες πραγματοποιούνται από την ακτινοβολία, χημειοθεραπεία, και ούτω καθεξής. Συνεπώς, προκειμένου να αναπτυχθούν οι τεχνολογίες θεραπείας στο μέλλον είναι σημαντικό να εξεταστούν οι μέθοδοι ελέγχου CS-PBNs. Εντούτοις σε αυτές τις υπάρχουσες εργασίες, το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων με κόμβους πρέπει να υπολογιστεί για τα CS -PBN με n καταστάσεις. Αυτό είναι μια κρίσιμη αδυναμία. Σε αυτό το έγγραφο, για CS -PBNs, προτείνουμε μια νέα μέθοδο ελέγχου στην οποία το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων δεν υπολογίζεται. Στην προτεινόμενη μέθοδο μια γραμμική εξίσωση καταστάσεων και γραμμικές ανισότητες με τις δυαδικές μεταβλητές προέρχονται από τις δεδομένες λειτουργίες εκφράζοντας τη δυναμική. Μια τυχαία απόφαση των δυαδικών λειτουργιών εκφράζονται ως αλυσίδα διακριτού χρόνου του Markov. Αυτή η αλυσίδα εκφράζεται επίσης ως γραμμική μορφή με τη χρησιμοποίηση των δυαδικών μεταβλητών. Επομένως, ένα CS-PBN εκφράζεται ως περιορισμένο γραμμικό σύστημα με τις δυαδικές μεταβλητές. Κατόπιν το πρόβλημα εύρεσης μίας εισόδου ελέγχου ελαχιστοποιεί το χαμηλότερο όριο της συνάρτησης κόστους και μπορεί να επανεξεταστεί ως γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών. Με τη χρησιμοποίηση μιας προτεινόμενης μέθοδος CS -PBNs έτσι ώστε η υπάρχουσα μέθοδος να μη μπορεί να εφαρμοστεί, μπορούμε να παράγουμε τον έλεγχο που εισάγεται μέσα στον πρακτικό χρόνο υπολογισμού.

Context-sensitive probabilistic Boolean networks

Κατ' αρχάς, εισάγουμε ένα πιθανολογικό δυαδικό δίκτυο (PBN). Ας εξετάσουμε το ακόλουθο PBN:

$$x(k + 1) = f (x(k), u(k)) \qquad (1)$$

όπου το X ∈ είναι η κατάσταση, το u ∈ είναι η εισαγωγή ελέγχου και το K = 0, 1, 2,… είναι ο ιδιαίτερος χρόνος.

Το f: × → είναι μια δεδομένη δυαδική λειτουργία. Το στοιχείο του κατάστασης X και το στοιχείο της δυαδικής λειτουργίας f αναπαριστάται από τα και αντίστοιχα. Στα ντετερμινιστικά δυαδικά δίκτυα, η επόμενη κατάσταση X (K + 1) καθορίζεται μεμονωμένα για το δεδομένο X (K) και το u (K). Στα PBNs, δίνονται οι υποψήφιοι του και η επιλογή μιας δυαδικής λειτουργίας είναι πιθανότατα κάθε φορά ανεξάρτητη. Οι υποψήφιοι του j= 1,2,…..l(i) και η πιθανότητα να επιλεχθεί η φαίνεται από το j = Prob (=) ∈ [0, 1]. Κατόπιν πρέπει να ικανοποιηθεί η σχέση = 1.

Παράδειγμα 1. Για απλό παράδειγμα, εξετάζουμε το ακόλουθο ντετερμινιστικό δυαδικό δίκτυο ενός δικτύου απόπτωσης (Chaves, 2009):

$$(k + 1) = - \quad (k)\ u \wedge (k)$$

$$(k + 1) = - \quad (k) \wedge x3\ (k) \text{ και}$$

$$(k + 1) = \quad (k)\ u \vee (k)$$

όπου το επίπεδο συγκέντρωσης (υψηλό ή χαμηλό) του ανασταλτικού παράγοντα των πρωτεϊνών απόπτωσης (IAP) απεικονίζεται από το , το επίπεδο συγκέντρωσης του ενεργού caspase (C3a) απεικονίζεται από το και το επίπεδο συγκέντρωσης του ενεργού caspase 8 (C8a) απεικονίζεται από το . Το επίπεδο συγκέντρωσης του παράγοντα νέκρωσης όγκων (TNF, ένα ερέθισμα) απεικονίζεται από το u και θεωρείται ως εισαγωγή ελέγχου. Αν και η δυαδική δυναμική στο ανωτέρω σύστημα είναι σύγχρονη, θα περιληφθούν και οι δύο δυναμικές (σύγχρονες-ασύγχρονες). Από αυτήν την άποψη, εξετάζουμε το ακόλουθο PBN που προκαλείται από το παραπάνω σύστημα

= (2)

= (3)

= (4)

όπου = = = 2 και δίνουμε το έτσι ώστε να ικανοποιήσει την .
Επιπλέον, όλες οι τροχιές των καταστάσεων μπορούν να εκφραστούν ως διαγράμματα μεταβάσεων με κόμβους.

Αν και στα PBNs η επιλογή μίας δυαδικής λειτουργίας είναι πιθανότατα ανεξάρτητη κάθε φορά, θα είναι φυσικό να εξεταστεί ότι οι μετατροπές των δυαδικών λειτουργιών δεν εμφανίζονται συχνά και μπορούν να εξαρτηθούν από το περιστατικό ενός εξωτερικού ερεθίσματος. Στα CS-PBNs, ο χρόνος απόφασης των δυαδικών λειτουργιών επιλέγεται, επίσης, τυχαία. Παρακάτω, η πιθανότητα ότι οι δυαδικές λειτουργίες μεταστρέφονται στο χρόνο k δίνεται ως q (k) ∈ [0, 1] και ένα ζευγάρι του συστήματος (1) και της πιθανότητας q (k) καλείται CS -PBN.

Πρόβλημα διατύπωσης

Κατ' αρχάς, καθορίζουμε ότι το j(l,k) ∈ {1, 2,…, l (i)} και δίνεται για το σταθερό στοιχείο i-th. Επίσης, έχουμε τη δυαδική λειτουργία και χρόνο k και το q (k). Κατόπιν από το (1, k), το j (2, k),…, j (n, k) (k) ή (k) εν συντομία, δείχνουμε την πιθανότητα που ορίζεται ως:

σε επιλεγμένο χρόνο k. Επιπλέον (,):= (s) K).Το (,) καθορίζει την πιθανότητα ότι κάποια ακολουθία δυαδικών λειτουργιών είναι επιλεγμένη σε χρονικό διάστημα [,]. Έπειτα, ας εξετάσουμε το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου.

Πρόβλημα 2. Αν υποθέσουμε ότι για το CS-PBN δίνονται η αρχική θέση x(0) = , ρ ∈ [0, 1], ο χρόνος ελέγχου N και η επιθυμητή κατάσταση ∈ , τότε έχουμε τα δύο ακόλουθα προβλήματα.

Πρόβλημα A. Για όλους τους συνδυασμούς των δυαδικών λειτουργιών η ικανοποίηση του ακόλουθου περιορισμού

(0,N-1) ρ (5)

η εύρεση μίας ακολουθίας εισαγωγής ελέγχου u(0), u(1),…, u(N −1) που ελαχιστοποιεί το χαμηλότερο όριο της ακόλουθης συνάρτησης κόστους

J=

όπου (i) :=x(i) - , , , και p, δείχνει τον p-κανόνα ενός διανύσματος.

Πρόβλημα Β. Αν εφαρμόσουμε την ακολουθία εισαγωγής ελέγχου που λαμβάνεται στο πρόβλημα Α στο CS-PBN, τότε για όλους τους συνδυασμούς των δυαδικών λειτουργιών που ικανοποιούν τον περιορισμό (5), βρίσκουμε το ανώτερο όριο της παραπάνω συνάρτησης κόστους. Έστω ότι το δείχνει την ελάχιστη αξία του χαμηλότερου ορίου που προκύπτει με την επίλυση του προβλήματος Α. Στην υπάρχουσα μέθοδο για τον έλεγχο των CS-PBNs, η αναμενόμενη αξία μιας δεδομένης συνάρτησης κόστους ελαχιστοποιείται. Επίσης, στις τυποποιημένες μεθόδους ελέγχου πιθανολογικών συστημάτων, η αναμενόμενη αξία αξιολογείται. Εντούτοις, για τα CS-PBNs είναι δύσκολο να αξιολογηθεί η αναμενόμενη αξία, επειδή όλοι οι συνδυασμοί των δυαδικών λειτουργιών πρέπει να απαριθμηθούν. Έτσι η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στα μικρής κλίμακας συστήματα. Εδώ αντί της αναμενόμενης αξίας, το χαμηλότερο όριο μιας δεδομένης συνάρτησης κόστους ελαχιστοποιείται και η απόδοση ελέγχου αξιολογείται με τη χρησιμοποίηση των χαμηλότερων και ανώτερων ορίων. Έπειτα, εάν ο περιορισμός (5) δεν επιβάλλεται στο πρόβλημα 2, δηλ., ρ = 0 τότε οι συμπεριφορές των CS -PBNs θεωρούνται ως αβέβαιες και οι καλύτερες και χειρότερες αποδόσεις παράγονται στο πρόβλημα 2. Εντούτοις, δεδομένου ότι συμπεριλαμβάνονται οι συνδυασμοί των δυαδικών λειτουργιών που επιλέγονται με τη χαμηλή πιθανότητα, οι παραγόμενες αποδόσεις μπορούν να μην είναι κατάλληλες. Έτσι προκειμένου να αποκλειστούν τέτοιοι συνδυασμοί, επιβάλλουμε τον περιορισμό (5).

Παράδειγμα 3. Ως ένα απλό παράδειγμα, ας εξετάσουμε το πρόβλημα βέλτιστου έλεγχου για το PBN (2) - (4) εκφράζοντας ένα δίκτυο απόπτωσης. Ας υποθέσουμε ότι το q (k), ρ και η αρχική θέση δίνονται ως q (k) = 1, ρ = 0.05, και X (0) = = , αντίστοιχα. Για αυτό το σύστημα, βρίσκουμε μια στρατηγική ελέγχου στην οποία δεν εφαρμόζεται όσο το δυνατόν περισσότερο ένα ερέθισμα και επιτυγχάνεται η επιβίωση κυττάρων. Το u = 0 υπονοεί ότι ένα ερέθισμα δεν εφαρμόζεται στο σύστημα και = 1, το =0 εκφράζει σαφή επιβίωση των κυττάρων .Κατόπιν ως μια από τις πιο κατάλληλες συναρτήσεις κόστους, μπορούμε να εξετάσουμε την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

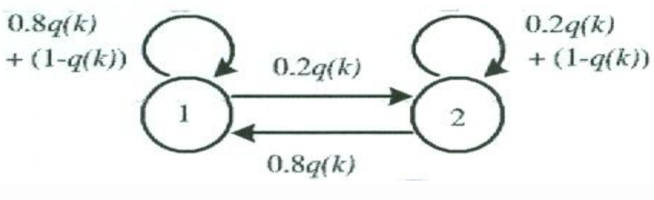
J =

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα 2 με αυτήν την συνάρτηση κόστους. Κατόπιν από τους απλούς υπολογισμούς, λαμβάνουμε ότι = 1 και = 21 για το u (0) = 0, u (1) = 0, u (2) = 1 ή u (0) = 0, u (1) = 1, u (2) = 0. Από αυτό το αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι ο δυναμικός έλεγχος είναι αποτελεσματικότερος από τον απλό έλεγχο έτσι ώστε η αξία της εισαγωγής ελέγχου είναι πάντα 0 ή 1. Τέλος, ας εξετάσουμε την περίπτωση ρ = 0. Σε αυτήν την περίπτωση, λαμβάνουμε = 0 και = 20 για u (0) = u (1) = u (2) = 0. Τότε η πιθανότητα ότι = 0 επιτυγχάνεται κατά 0.0403456 και είναι μικρή. Παρακάτω, υποθέτουμε ότι

= . Αν και μια τετραγωνική συνάρτηση κόστους (p = 2) μπορεί να εξεταστεί, εξετάζουμε την ακόλουθη μορφή l-κανόνων (γραμμικών) συναρτήσεων κόστους

J = (6)

όπου το Q, ∈ , R ∈ είναι διανύσματα των οποίων το στοιχείο είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.



Εικόνα 28 Διακριτού χρόνου αλυσίδα Markov στα CS-PBNs

Προτεινόμενη μέθοδος

Σε αυτό το τμήμα θα προτείνουμε μια μέθοδο για το πρόβλημα 2. Αφού εξηγήσουμε μια μέθοδο επίλυσης για το πρόβλημα Α από ένα πολύ απλό παράδειγμα, θα εξετάσουμε μια γενική περίπτωση.

Απλό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε μία ενιαία θέση και ένα σύστημα ενιαίας εισαγωγής . Οι δυαδικές λειτουργίες δίνονται ως:

= (7)

Έπειτα μια τυχαία απόφαση των δυαδικών λειτουργιών μπορεί να εκφραστεί ως η διακριτού χρόνου αλυσίδα του Markov (DT-MC) της εικόνας 28, όπου η ετικέτα κάθε κόμβου υπονοεί το δείκτη των υποψηφίων , των δυαδικών λειτουργιών και το βάρος (k) από τον κόμβο i στο j ορίζονται ως (k): = Prob (= στο k | = στο k − 1).

Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε μια μέθοδο διαμόρφωσης (7) και το DT-MC της εικόνας 28. Σύμφωνα με τον Williams (1999), οι δυαδικές λειτουργίες στην (7) μπορούν να μετασχηματιστούν σε πολυώνυμα στον τομέα των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια εξετάζουμε το ακόλουθο σύστημα

(k+1)= (k){ }+ (k){1- (k)} (8)

Όπου οι (k) , είναι δυαδικές μεταβλητές που ικανοποιούν την εξίσωση:

(k) + =1. (9)

Αν (k)=1, τότε επιλεγούμε το σε συνδυασμό με το . Με παρόμοιο τρόπο, εάν η =1 ικανοποιείται, τότε επιλέγουμε το 1 − (k) που αντιστοιχεί στο . Αυτή η τεχνική είναι συχνά χρησιμοποιημένη στον έλεγχο των υβριδικών συστημάτων (Bemporad & Morari, 1999). Επιπλέον, από την (8) λαμβάνουμε ότι

(k+1)= (k) + (k)- (k) (10)

Όπου = u και = .

Για να εκφράσουμε το DT-MC της εικόνας 28, μια δυαδική μεταβλητή ορίζεται σε κάθε τόξο. Στο DT-MC της εικόνας 28 χρησιμοποιούμε τις εξής τέσσερις δυαδικές μεταβλητές: (k), (k), (k), (k).

Στη συνέχεια με τον καθορισμό της σχέσης := (k-1) (k) έχουμε

(k)= (k)+ (k), (11)

(k)= (k)+ (k). (12)

Χρησιμοποιώντας τη δυαδική μεταβλητή (k) η δυναμική του DT-MC της εικόνας 28 μπορεί να εκφραστεί ως η ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου σε κάθε κόμβο:

(k+1)+ (k+1)= (k)+ (k), (13)

(k+1)+ (k+1)= (k)+ (k). (14)

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και την ανισότητα, βασισμένη στους (Bemporad & Morari, 1999). Εντούτοις, η χρήση της παραπάνω σχέσης εισόδου-εξόδου είναι επιθυμητή υπό την έννοια ότι ο χρόνος υπολογισμού για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μειώνεται. Επιπλέον, με τη χρησιμοποίηση (k) , μπορούμε να υπολογίσουμε το (k). Σημειώνοντας ότι (k)+ (k)+ (k)+ (k) = 1 και από (9), (11), (12), λαμβάνουμε ότι:

(k)= (k) (k),

(k):= ,

(k):= .

Έτσι με την χρήση του φυσικού λογαρίθμου, ο περιορισμός (5) στο πρόβλημα A μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη γραμμική ανισότητα:

= .

Συνεπώς το πρόβλημα A μπορεί να ξαναγραφεί ισοδύναμα ως το ακόλουθο πρόβλημα:

Εύρεση των u(k), , , (k) και , , k=0,,….,N-1

Ελαχιστοποίηση της συνάρτηση κόστους (6)

υπό τον όρο στο σύστημα (10), χ(0)= , περιορισμούς ισότητας (9) και (11)-(14) και

περιορισμούς ανισότητας , = (k)u(k), = (k).

Δεδομένου ότι = u και = μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικές ανισότητες, αυτό το πρόβλημα περιορίζεται σε ένα γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών (ILP).

Επίλυση της μεθόδου για το πρόβλημα A

Με βάση τα προαναφερθέντα, θα παράγουμε μια μέθοδο επίλυσης για το πρόβλημα A κάτω από μια γενική ρύθμιση. Κατ' αρχάς, με τη χρησιμοποίηση της στην (1) μπορεί ισοδύναμα να μετασχηματιστεί σε κάποιο πολυώνυμο. Το αποκτηθέν πολυώνυμο απεικονίζεται από (x(k),u(k)).Κατόπιν θα εξετάσουμε το ακόλουθο σύστημα

(k+1)= (15)

όπου i= 1, 2,…, n και (k) ∈ 1. Στη (15), οι πιθανολογικές συμπεριφορές δεν εξετάζονται, αλλά η (15) εκφράζει κάθε φορά τη μετατροπή της λειτουργίας . Έτσι πρέπει να επιβάλουμε τον ακόλουθο περιορισμό

=1, i=1,2,….,n. (16)

$$P_i(k) = \begin{bmatrix} c_1^{(i)}q(k) + (1-q(k)) & c_2^{(i)}q(k) & \cdots & c_{l(i)}^{(i)}q(k) \\ c_1^{(i)}q(k) & c_2^{(i)}q(k) + (1-q(k)) & \cdots & c_{l(i)}^{(i)}q(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{(i)}q(k) & c_2^{(i)}q(k) & \cdots & c_{l(i)}^{(i)}q(k) + (1-q(k)) \end{bmatrix}$$

Εικόνα 29

$$L_i(k) := \ln\left[P_i^{(1,1)}(k)\ \ P_i^{(1,2)}(k)\ \cdots\ P_i^{(1,l(i))}(k)\ \ P_i^{(2,1)}(k)\ \ P_i^{(2,2)}(k)\ \cdots\ P_i^{(2,l(i))}(k)\ \cdots\ P_i^{(l(i),1)}(k)\ \ P_i^{(l(i),2)}(k)\ \cdots\ P_i^{(l(i),l(i))}(k)\right]$$

Εικόνα 30

$$\delta_i^a := \left[\delta_{i,11}\ \ \delta_{i,12}\ \cdots\ \delta_{i,1l(i)}\ \ \delta_{i,21}\ \ \delta_{i,22}\ \cdots\ \delta_{i,2l(i)}\ \cdots\ \delta_{i,l(i)1}\ \ \delta_{i,l(i)2}\ \cdots\ \delta_{i,l(i)l(i)}\right]^T \in \{0,1\}^{l(i)^2}$$

Εικόνα 31

Από το (k) ∈ προκύπτει μία διανυσματική σύσταση για όλα τα , όπου : = .

Έπειτα, μια τυχαία απόφαση του εκφράζεται ως DT-MC για κάθε i. Κατόπιν χρησιμοποιώντας το ,i = 1, 2,…, n, j = 1, 2,…, l(i), μπορεί να παραχθεί μία μήτρα πιθανότητας μετάβασης που εκφράζει ένα DT-MC, δεδομένου ότι το pi (K) δίνεται στην εικόνα 29. Το (k) δείχνει το (p,q)-th στοιχείο στο (k). Κατόπιν καθορίζουμε το ακόλουθο διάνυσμα σειρών μεγέθους : Το (k) δίνεται στην εικόνα 30. Επιπλέον, ορίζουμε μία δυαδική μεταβλητή = σε κάθε τόξο του παραγόμενου DT-MC. Από τον ορισμό η σχέση μεταξύ και πρέπει να ικανοποιεί τον ακόλουθο περιορισμό ισότητας:

= (17)

όπου i=1,2,…,n και j=1,2,…..l(i). Σε αντίθεση χρησιμοποιώντας , η δυναμική του DT-MC εκφράζεται με την ακόλουθη σχέση εισόδου-εξόδου σε κάθε κόμβο:

(k+1)= (k) (18)

Όπου , και απεικονίζονται στην εικόνα31. Χρησιμοποιώντας τα (k) και k το (k) μετατρέπεται σε (k)= (k) (k)=L(k) (k),όπου L(k):= (k):= και := .

Επομένως ο περιορισμός (5) στο πρόβλημα A μπορεί να εκφραστεί σαν την επόμενη ανισότητα σε σχέση με το (i):

. (19)

Από τα παραπάνω, λαμβάνουμε τα ακόλουθα.

Το πρόβλημα A είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα.

Πρόβλημα Γ.

Η εύρεση των u(k), (k), (k), k=0,1,….,N-1

Ελαχιστοποίηση της συνάντηση κόστους (6)

Υπό τον όρο στο σύστημα(15),χ(0)= ,

Περιορισμός ισότητας (16)-(18)

Περιορισμός ανισότητας (19).

Για να εκφράσουμε τον περιορισμό ανισότητας (5) στο πρόβλημα A ως γραμμική μορφή, ο φυσικός λογάριθμος της πιθανότητας χρησιμοποιείται στο Πρόβλημα Γ. Το σύστημα (15) είναι ένα πολυωνυμικό μη γραμμικό σύστημα, αλλά με τη χρησιμοποίηση του αποτελέσματος που περιγράφει ο Cavalier (1990), το σύστημα (15) και οι περιορισμοί ισότητας/ανισότητας στο πρόβλημα Γ μπορεί να μετασχηματιστούν ισοδύναμα στο ακόλουθο περιορισμένο γραμμικό σύστημα:

(20)

όπου u(k)= και δ(k):= ,l:= + .

Επιπλέον, το z(k) ∈ είναι μία βοηθητική μεταβλητή και το p καθορίζεται από τον αριθμό του προϊόντος των δυαδικών μεταβλητών. Στην (20), το x(k) γίνεται δυαδική μεταβλητή χάρη στο χ(0) = ∈ ,u(k) ∈ {0, 1} . Έτσι θέτουμε το x(k) ∈ και k ≥ 1. Με τη χρησιμοποίηση της (20), λαμβάνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. Το πρόβλημα Γ είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ILP με (m + l +p) N δυαδικές μεταβλητές .

Το αποκτηθέν πρόβλημα ILP μπορεί να λυθεί με τη χρησιμοποίηση ενός κατάλληλου solver. Στην περίπτωση που χρησιμοποιεί τις τετραγωνικές συναρτήσεις κόστους, το πρόβλημα ILP αντικαθίσταται σε ένα τετραγωνικό πρόβλημα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών. Τέλος, ας θεωρήσουμε μια μέθοδο επίλυσης για το Πρόβλημα Β. Στο πρόβλημα Γ, ας υποθέσουμε ότι το u(k) δίνεται σαν εισαγωγή ελέγχου που λαμβάνεται ως επίλυση για το πρόβλημα Α και αντικαθιστά το 'min'' σε 'max'. Κατόπιν με την επίλυση του αντικατεστημένου προβλήματος ILP, το μπορεί να παραχθεί.

Αριθμητικό παράδειγμα

Ας εξετάσουμε ένα CS-PBN με 15 θέσεις και 3 εισαγωγές ελέγχου, τα οποία παράγονται βασισμένα στις τυχαίες γραφικές παραστάσεις. Από ένα δεδομένο CS-PBN, λαμβάνουμε το σύστημα (20) με n = 15, m = 3, l = 90 και p = 103. Ο αριθμός των ανισοτήτων μέσα στην(20) είναι 386. Από ό,τι ξέρουμε, CS -PBNs με τέτοιο μέγεθος δεν έχουν εξεταστεί μέχρι τώρα. Επιπλέον, τονίζουμε ότι για αυτό το CS -PBN η υπάρχουσα μέθοδος δε μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας το τυποποιημένο περιβάλλον (π.χ., MATLAB), επειδή είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι μήτρες με μέγεθος × .

Έπειτα, εξετάζουμε πώς να αποφασίσουμε το ρ στη (5). Στον έλεγχο πιθανολογικών συστημάτων η αναμενόμενη αξία μιας δεδομένης συνάρτησης κόστους είναι συχνά ελαχιστοποιημένη. Επίσης, είναι κυρίαρχη η πιθανότητα ότι το κόστος για τους συνδυασμούς των δυαδικών λειτουργιών είναι υψηλό. Με βάση αυτό το γεγονός, το ρ δίνεται ως μέση πιθανότητα ότι κάποιοι συνδυασμοί των δυαδικών λειτουργιών επιλέγονται σε [0, N − 1]. Σε αυτό το παράδειγμα, για N = 2, 3,…, 10, λαμβάνουμε ρ = 2.9 × , 1.8 × , 2.0 × , 9.4 × , 5.7 × , 8.1 × , 2.1 × , 1.3 × , 6.2 × , αντίστοιχα.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτέλεσμα του υπολογισμού.

Πίνακας 4 Κατώτερα και ανώτερα όρια του κόστους λειτουργίας

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\underline{J}_0$	22	22	22	27	30	32	34	35	36
$\bar{J}_0$	136	157	176	189	200	211	224	236	247
$\underline{J}^*$	21	20	22	23	23	24	25	26	27
$\bar{J}^*$	136	157	157	179	191	210	222	234	247

Πίνακας 5 Υπολογισμός του χρόνου (s) για την εξαγωγή των , και ,

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\underline{J}_0$	0.02	0.06	0.06	1.01	2.47	4.71	14.87	27.68	35.45
$\bar{J}_0$	0.06	0.08	0.81	1.91	3.07	4.13	9.08	19.78	34.97
$\underline{J}^*$	0.46	1.15	2.70	15.58	4.98	7.10	14.60	31.63	18.96
$\bar{J}^*$	0.07	0.09	1.95	7.72	16.43	12.95	21.29	254.19	98.60

Σε αυτήν την προσομοίωση, τα , δείχνουν τα χαμηλότερα και ανώτερα όρια της συνάρτησης κόστους που ικανοποιεί το u(k) = 0 και τον περιορισμό (5). Κατόπιν, ο πίνακας 4 παρουσιάζει τα , και . Ο πίνακας 5 παρουσιάζει τον υπολογισμό χρόνου. Εστιάζοντας στη διαφορά μεταξύ και σε και στη διαφορά μεταξύ και σε , η αποτελεσματικότητα της σύνθεσης ελέγχου είναι σαφής για N = 4, 5, 6. Από αυτό το αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι η ελαχιστοποίηση του χαμηλότερου ορίου της συνάρτησης κόστους είναι αποτελεσματική. Από την άλλη αν και για N = 7, 8, 9, 10 το χαμηλότερο όριο της συνάρτησης κόστους βελτιώνεται με το σχεδιασμό της εισαγωγής ελέγχου, το ανώτερο όριο δε βελτιώνεται. Αυτό είναι επειδή για ένα μεγάλο N ο αριθμός συνδυασμών των δυαδικών λειτουργιών είναι πολύ μεγάλος και διάφορες περιπτώσεις συμπεριλαμβάνονται. Για μια τέτοια περίπτωση η αποτελεσματικότητα της ελαχιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας της συνάρτησης κόστους είναι επίσης χαμηλή. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ≥ δεν είναι γενικά εγγυημένο από τα προβλήματα Α και Β. Τέλος, από τον πίνακα 5, βλέπουμε ότι το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί να λυθεί μέσα σε έναν πρακτικό χρόνο υπολογισμού.

Συμπεράσματα

Σε αυτήν την έρευνα έχει προταθεί μια νέα μέθοδος ελέγχου ενός συμφραστικά εξαρτώμενου πιθανολογικού δυαδικού δικτύου (CS-PBNs). Η προτεινόμενη μέθοδος είναι βασισμένη σε ένα πρόβλημα προγραμματισμού ακέραιων αριθμών όπου τα χαμηλότερα και ανώτερα όρια της συνάρτησης κόστους στρέφονται. Με τη χρησιμοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου για CS-PBNs έτσι ώστε η υπάρχουσα μέθοδος να μη μπορεί να εφαρμοστεί, το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί να λυθεί με τη χρησιμοποίηση ενός κατάλληλου solver ILP. Η σημαντικότερη μελλοντική εργασία είναι να εφαρμοστεί η προτεινόμενη μέθοδος σε διάφορα βιολογικά συστήματα. Επιπλέον, είναι σημαντικό να εξεταστεί πώς θα καθοριστεί η πιθανότητα μετατροπής q(k),όπως επίσης και η σχέση μεταξύ της αξίας της συνάρτησης κόστους και του q (k) = q .

Συνδυασμός του προγραμματισμού ακέραιων αριθμών και της μεθόδου τυχαιοποίησης για το σχεδιασμό υπαλλήλων

Η ανάγκη να σχεδιαστούν οι υπάλληλοι είναι πανταχού παρούσα στον υπηρεσιακό τομέα. Τα υποκαταστήματα τραπεζών, τα εστιατόρια, τα μαγαζιά λιανικής πώλησης και οι περιοχές εισόδου των αερογραμμών είναι μερικά παραδείγματα των οργανώσεων που χρειάζονται να σχεδιάσουν τους υπαλλήλους για να ταιριάξει η απαίτηση με την υπηρεσία-η οποία είναι τυχαία και ποικίλλει με το χρόνο στον ανεφοδιασμό των υπαλλήλων που παρέχουν τις υπηρεσίες. Τα τηλεφωνικά κέντρα είναι ίσως ο μεγαλύτερος τομέας που έχει ανάγκη από το σχεδιασμό υπαλλήλων. Τα σύγχρονα τηλεφωνικά κέντρα είναι σύνθετες οργανώσεις τόσο τεχνολογικά όσο και λειτουργικά. Δεδομένου ότι αυτός ο τομέας αυξάνεται και ωριμάζει όπως και οι πρόοδοι τεχνολογίας, υπάρχουν αυξανόμενες ευκαιρίες να χρησιμοποιηθούν τα πρότυπα για να βελτιώσουν τις διαδικασίες .Η εργασία είναι χαρακτηριστικά το μεγαλύτερο κόστος για ένα τηλεφωνικό κέντρο (60-70% του συνολικού κόστους) και επομένως ο αποδοτικός σχεδιασμός υπαλλήλων παρέχει ουσιαστικές ευκαιρίες για τη βελτίωση της παραγωγικότητας.

Τα πρότυπα για το σχεδιασμό των υπαλλήλων έχουν μια μεγάλη ιστορία. Σύμφωνα με την κλασσική μελέτη του Edie (1954) των καθυστερήσεων κυκλοφορίας στα tollbooths χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός εμπειρικής ανάλυσης και τύπων για τα στάσιμα συστήματα αναμονής για να παράγουν την επάνδρωση των απαιτήσεων των συστημάτων και να εξασφαλίσουν ένα διευκρινισμένο επίπεδο υπηρεσίας. Λαμβάνοντας υπόψη τη μελέτη του Edie,ο Dantzig έδειξε πως ένα γραμμικό πρόγραμμα ακέραιων αριθμών θα μπορούσε να βρει τα προγράμματα μετατόπισης που παρέχουν αρκετά τη στελέχωση για να καλύψουν τις συγκεκριμένες απαιτήσεις σε κάθε περίοδο προγραμματισμού, όπως αυτοί που αναπτύσσονται στο ελάχιστο κόστος. Μια χαρακτηριστική σειρά των βημάτων στο σχεδιασμό των υπαλλήλων είναι:

Βήμα 1: Απαίτηση πρόβλεψης

Βήμα 2: Μετατροπή των προβλέψεων των απαιτήσεων για τη στελέχωση τους

Βήμα 3: Σχεδιασμός βέλτιστων βαρδιών

Βήμα 4: Διορισμός των υπαλλήλων στις βάρδιες

Η τρέχουσα πρακτική και οι περισσότερες έρευνες για το σχεδιασμό υπαλλήλων έχουν ακολουθήσει αυτήν την προσέγγιση. Το έγγραφο του Edie κατέδειξε μονόδρομο την εκτέλεση του βήματος 2. Του Dantzig το πρότυπο βήμα 3. Τα βήματα 1 και 4 είναι εξίσου σημαντικά.

Και των δύο οι προσεγγίσεις είναι μεταξύ τους αλληλένδετες καθώς η μία σχετίζεται με το να θέσει τις ανάγκες στελέχωσης και άλλη στο πώς να σχεδιάσει βέλτιστα τους υπαλλήλους υποκείμενους στην επάνδρωση των απαιτήσεων.

Το βήμα 2 συχνά χρησιμοποιεί τους τύπους για τα στάσιμα συστήματα αναμονής M/M/s για να καθορίσουν το μικρότερο αριθμό κεντρικών υπολογιστών (υπάλληλοι) απαιτούμενων να παρέχουν ένα διευκρινισμένο επίπεδο υπηρεσίας (που εκφράζεται συχνά ως ποσοστό πελατών που έχουν υποστεί την καθυστέρηση σειρών αναμονής λιγότερο από κάποιο χρόνο κατώτατων ορίων). Η έρευνα στη θεωρία αναμονής έχει αναπτύξει τις καλύτερες μεθόδους για να καθορίσει τις απαιτήσεις .Η έρευνα για το σχεδιασμό μετατόπισης έχει αναπτύξει τους αποδοτικούς αλγορίθμους για πρόσθετες περιπτώσεις και αναδιατυπώσεις προκειμένου να επιτρέψει βέλτιστη επίλυση μεγαλύτερων προβλημάτων.

Θα αναφερθούμε στην εκτέλεση των βημάτων 2 και 3 όπως η ‘’κατά προσέγγιση’’ μέθοδος. Η κύρια απλοποιημένη υπόθεση στην ‘’κατά προσέγγιση’’ μέθοδο είναι ότι η ανάγκη στελέχωσης για μία περίοδο μπορεί να είναι καθορισμένη ανεξάρτητα από τη στελέχωση στις προγενέστερες περιόδους. Ο βαθμός στον οποίο αυτή η υπόθεση ισχύει καθορίζει στο γεγονός εάν είναι λογικό να αποσυνδέσουμε τα βήματα 2 και 3. Ο Kolesar (1975) κατέδειξε ότι αυτή η προσέγγιση δεν επιτρέπεται. Πιο πρόσφατα, ο Green (2001, 2003) πραγματοποιώντας εκτενή πειράματα για να ερευνήσει την αξιοπιστία της προσέγγισης SIPP, την οποία ορίζει ως τον αριθμό ημιώρων κατά τη διάρκεια της οποία τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης πέφτουν κάτω από το επιθυμητό ελάχιστο, έδειξε ότι η προσέγγιση SIPP είναι, δυστυχώς, αναξιόπιστη σε πολλές καταστάσεις. Ερεύνησε τους διάφορους τρόπους της προσέγγισης SIPP ενώ η διατήρηση της απλότητας των υπολογισμών με τους τύπους αναμονής M/M/s.

Το προσοδοφόρο από αυτά τα heuristics είναι η ανώτατη προσέγγιση καθυστερήσεων, η οποία αντικαθιστά το μέσο ποσοστό άφιξης πέρα από μία περίοδο προγραμματισμού με το μέγιστο ποσοστό της λειτουργίας άφιξης πέρα από μία περίοδο προγραμματισμού, που μετατοπίζεται προς τα εμπρός μέχρι ένα μέσο χρόνο υπηρεσιών. Η ανώτατη προσέγγιση καθυστερήσεων επεκτείνει τη σειρά των καταστάσεων όπου το SIPP παράγει αρκετά τις αξιόπιστες ανάγκες στελέχωσης. Όταν η ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδος δικαιολογείται, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί, επειδή είναι απλούστερη και γρηγορότερη από την προσέγγιση που θα περιγράψουμε. Η εστίασή μας είναι στις καταστάσεις όπου η ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδος (που χρησιμοποιεί είτε SIPP είτε την ανώτερη καθυστέρηση για να παράγει τις ανάγκες στελέχωσης) έχει αποδειχθεί αναξιόπιστη. Εντούτοις, η προσέγγισή μας μπορεί, επίσης, να οδηγήσει στην εξοικονόμηση κόστους στις καταστάσεις όπου η ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδος είναι αξιόπιστη.

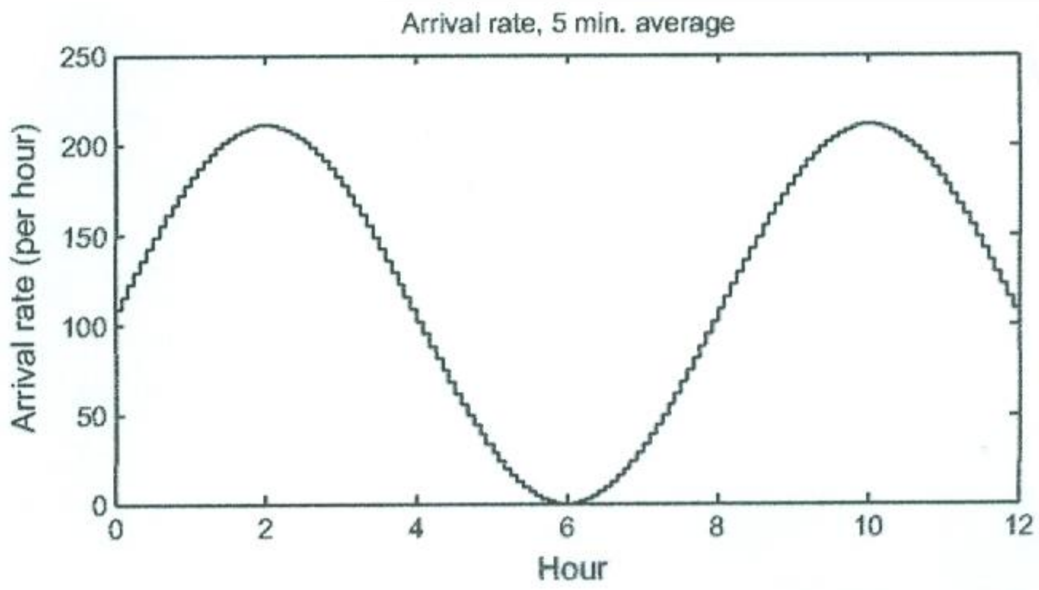
Ο Ingolfsson (2002) περιέγραψε μια προσέγγιση για την ενσωμάτωση των βημάτων 2 και 3. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια βελτιωμένη εφαρμογή, που περιλαμβάνει δύο αλγοριθμικά συστατικά: μια γεννήτρια προγράμματος και έναν εκτιμητή προγράμματος. Η γεννήτρια προγράμματος αναζητά καλά προγράμματα που χρησιμοποιούν heuristics για τη βελτιστοποίηση. Ο εκτιμητής προγράμματος υπολογίζει το κόστος και το επίπεδο εξυπηρέτησης ενός προγράμματος. Η γεννήτρια προγράμματος χρησιμοποιεί ένα γενετικό αλγόριθμο και ο εκτιμητής προγράμματος χρησιμοποιεί την αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων για ένα M(t)/M/s(t) σύστημα για να αξιολογηθεί το επίπεδο εξυπηρέτησης. Εδώ χρησιμοποιούμε προγραμματισμό ακέραιων αριθμών με τη χρήση heuristics για να παράγουμε τα προγράμματα και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο τυχαιοποίησης (Grassmann, 1977) για να υπολογίσουμε τα επίπεδα εξυπηρέτησης. Αυτές οι αλγοριθμικές βελτιώσεις οδηγούν σε μια ουσιαστική μείωση του χρόνου υπολογισμού, ο οποίος μας έχει επιτρέψει να εκτελέσουμε τα υπολογιστικά πειράματα για να παράγουν διορατικότητα κατά την αποσύνδεση των βημάτων 2 και 3 όταν δικαιολογούνται ή όχι .Ενώ η μέθοδος δεν εγγυάται βελτιστοποίηση, παρέχει μια καλή εφικτή λύση και ένα χαμηλότερο όριο στο ελάχιστο κόστος.

Καθορίζουμε το επίπεδο εξυπηρέτησης στο χρόνο t ως πιθανότητα ότι ο εικονικός χρόνος αναμονής είναι μικρότερη από ένα μέγιστο αποδεκτό χρόνο αναμονής τ. Επειδή λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε τα στιγμιαία επίπεδα εξυπηρέτησης για τόσα πολλά χρονικά σημεία, όπως επιδιώκονται και καθορίζουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησής μας στα στιγμιαία επίπεδα εξυπηρέτησης. Σε σχετική έρευνα που χρησιμοποιεί προσομοίωση, καθώς επίσης και στην πράξη, τα επίπεδα εξυπηρέτησης ορίζονται χαρακτηριστικά ως οι μέσοι όροι κατά τη διάρκεια κάποιου χρονικού διαστήματος, όπως μια ώρα.

Οι Thompson (1997) και Atlason (2004, 2008) περιέγραψαν και άλλες προσεγγίσεις σχετικά με την ενσωμάτωση των βημάτων 2 και 3. Παρήγαγαν τις ανάγκες στελέχωσης χρησιμοποιώντας τους στάσιμους τύπους M/M/s, με μία ρύθμιση heuristic για τα παροδικά αποτελέσματα. Αυτό το heuristic είναι παρόμοιο με την προσέγγιση μέγιστων καθυστερήσεων, επομένως έχουν κοινούς περιορισμούς. Ο Thompson χρησιμοποίει τις μεταβλητές απόφασης βραδυτήτων και πλεονάσματος για τις αποκλίσεις επάνω από ή κάτω από την απαίτηση για κάθε περίοδο προγραμματισμού, με τους συντελεστές που προέρχονται από τους τύπους M/M/s και δείχνουν το ποσοστό των αποκλίσεων στο επίπεδο εξυπηρέτησης. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα για να επεξηγήσουμε τα πρωτεύοντα θέματα.

Παράδειγμα

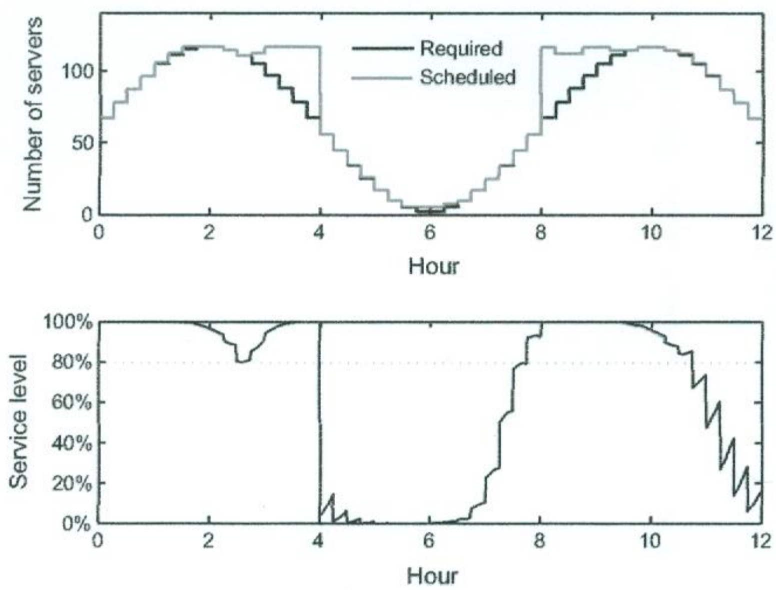
Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα για να επεξηγήσουμε τις πιθανές ανεπάρκειες εκτέλεσης των βημάτων 2 και 3 διαδοχικά και πώς αυτές οι ανεπάρκειες μπορούν να εξεταστούν. Ένα σύστημα υπηρεσιών είναι ανοικτό 12 ώρες την ημέρα και έχει ένα ημιτονοειδή και ποικίλο ποσοστό άφιξης με δύο καθημερινές αιχμές (εικόνα 32). Η περίοδος προγραμματισμού (το πιο σύντομο χρονικό διάστημα πέρα από το οποίο η στελέχωση είναι σταθερή) είναι 15 λεπτά. Για το βήμα 2, προσεγγίζουμε το ποσοστό χρόνου άφιξης από το μέσο όρο του διαστήματος κάθε πέντε λεπτών και χρησιμοποιούμε τους τύπους αναμονής M/M/s (με μια υπηρεσία το ποσοστό 2 πελατών ανά ώρα) για να καθοριστεί για κάθε περίοδο προγραμματισμού ο μικρότερος αριθμός κεντρικών υπολογιστών που πρέπει να εξασφαλιστεί, έτσι ώστε τουλάχιστον το 80% των πελατών να μην είναι απαραίτητο να περιμένει πριν αρχίζει την υπηρεσία (αυτό είναι η προσέγγιση SIPP).



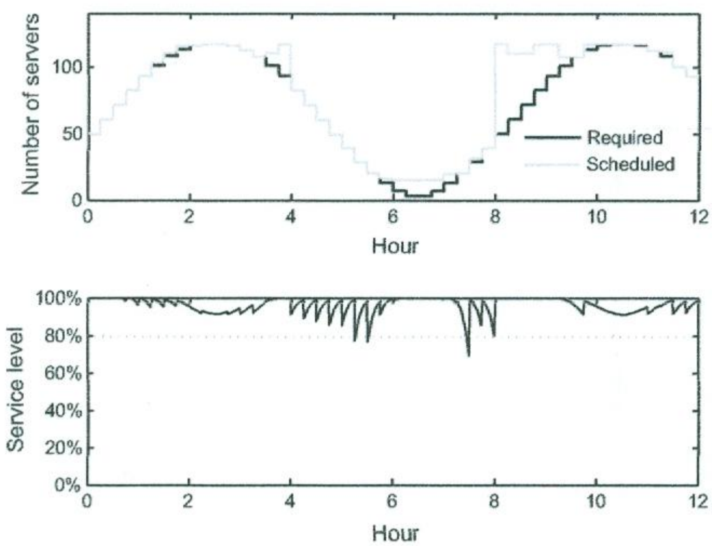
Εικόνα 32 Ρυθμός άφιξης

Οι βάρδιες είναι κάθε τέσσερις, έξι, ή οκτώ ώρες και μπορούν να αρχίσουν στην αρχή οποιασδήποτε περιόδου προγραμματισμού που επιτρέπει τη βάρδια να τελειώσει προτού να κλείσει η εγκατάσταση (περίπου 243 πιθανές βάρδιες). Η εικόνα 33 (επάνω γραφική παράσταση) παρουσιάζει τις ανάγκες στελέχωσης SIPP και τον αριθμό σχεδιασμένων κεντρικών υπολογιστών που ελαχιστοποιεί τον αριθμό υπολογιστικών ωρών (με την επίλυση ενός προγράμματος ακέραιων αριθμών), ικανοποιώντας τις ανάγκες στελέχωσης. Η χαμηλότερη επιτροπή παρουσιάζει παροδικό επίπεδο εξυπηρέτησης για αυτό το πρόγραμμα (που υπολογίζεται με τη μέθοδο τυχαιοποίησης). Ο στόχος επιπέδων εξυπηρέτησης δεν συναντιέται κατά τη διάρκεια ενός μεγάλου μέρους της ημέρας.

Η εικόνα 33 επεξηγεί πώς η προσέγγιση SIPP μπορεί να είναι αναξιόπιστη. Όπως προαναφέραμε, η προσέγγιση της μέγιστης καθυστέρησης συχνά βελτιώνει την αξιοπιστία. Η εικόνα 34 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της χρησιμοποίησης της προσέγγισης των μέγιστων καθυστερήσεων. Οι καμπύλες για τους απαιτούμενους και σχεδιασμένους αριθμούς κεντρικών υπολογιστών έχουν μετατοπιστεί προς τα εμπρός κατά 30 λεπτά (ένας μέσος χρόνος υπηρεσιών). Το προκύπτον επίπεδο εξυπηρέτησης βελτιώνεται πολύ και μένει επάνω από το στόχο του 80% κατά τη διάρκεια όλων(48) εκτός από 4 περιόδων προγραμματισμού. Όπως ήταν αναμενόμενο (επειδή χρησιμοποιείται το μέγιστο παρά ένας μέσος όρος άφιξης), το βελτιωμένο επίπεδο εξυπηρέτησης έρχεται εις βάρος του υψηλότερου κόστους εργασίας: ο αριθμός υπολογιστικών ωρών αυξήθηκε κατά 3.5%, από 954 (με τις ανάγκες στελέχωσης SIPP) σε 987 (με τις ανώτατες ανάγκες στελέχωσης καθυστερήσεων).



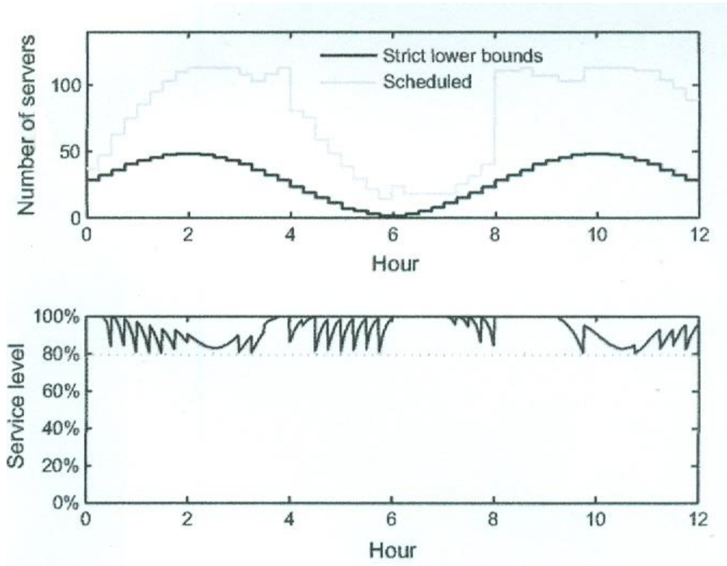
Εικόνα 33 Ανάγκες επάνδρωσης SIPP, σχεδιασμένος αριθμός κεντρικών υπολογιστών και προκύπτον επίπεδο εξυπηρέτησης.



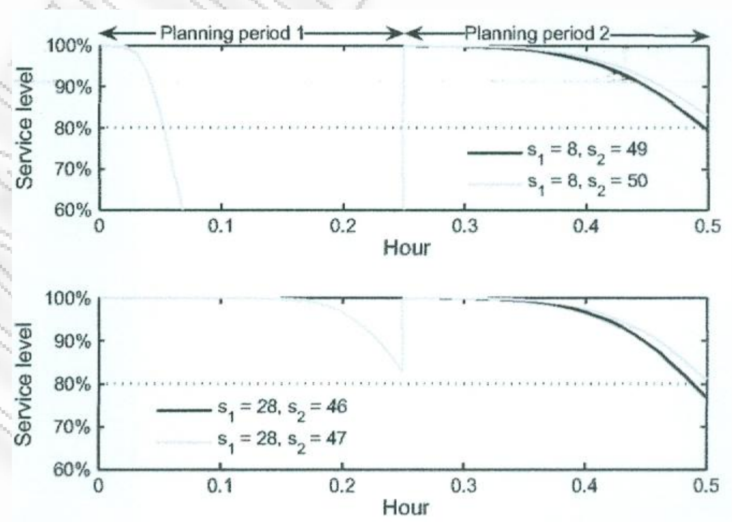
Εικόνα 34 Ανώτατες ανάγκες επάνδρωσης καθυστερήσεων, σχεδιασμένος αριθμός κεντρικών υπολογιστών και προκύπτον επίπεδο εξυπηρέτησης.

Βέβαια με τη λύση που διευκρινίζεται μέσα στην εικόνα 35, το επίπεδο εξυπηρέτησης παραμένει πάντα πάνω από το 80% και το εργατικό κόστος (947.5 υπολογιστικές ώρες) είναι 0.7% χαμηλότερο από ότι με τη στελέχωση των απαιτήσεων με τη SIPP και 4% χαμηλότερος από ότι με την προσέγγιση των μέγιστων καθυστερήσεων της στελέχωσης απαιτήσεων. Παρακάτω θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για να παράγει τη λύση που παρουσιάζεται στην εικόνα 35. Και με τις δύο προσεγγίσεις ο αλγόριθμος θέτει τα όρια στην στελέχωση σε κάθε περίοδο προγραμματισμού, στα οποία αναφερόμαστε ως στενά χαμηλότερα όρια. Σε αντίθεση με τις ανώτατες ανάγκες στελέχωσης SIPP και καθυστερήσεων, οι οποίες προορίζονται να παρέχουν ικανοποιητικούς όρους για τις απαιτήσεις των επιπέδων εξυπηρέτησης, τα στενά χαμηλότερα όρια παρέχουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις και είναι επομένως μικρότερα.

Για να καταλάβουμε γιατί οι ανώτατες προσεγγίσεις SIPP και καθυστερήσεων δεν παράγουν αξιόπιστες ανάγκες στελέχωσης, είναι διδακτικό να υπολογίσουμε εκ νέου το επίπεδο εξυπηρέτησης κάτω από ορισμένες αλλαγές στο σενάριο, για να επεξηγήσουμε πώς το επίπεδο εξυπηρέτησης σε μια περίοδο εξαρτάται από τη στελέχωση σε προηγούμενες περιόδους. Πιο απλά, εστιάζουμε στις πρώτες δύο περιόδους προγραμματισμού. Κατ' αρχάς, σχεδιάζουμε 8 κεντρικούς υπολογιστές για την πρώτη περίοδο (=8). Αυτή είναι μικρή ποσότητα για να συμβαδίσει με το φορτίο (η προσέγγιση SIPP συστήνει σχεδόν 70 κεντρικούς υπολογιστές για την πρώτη περίοδο) και η εικόνα 36 (πάνω πάνω μέρος) δείχνει πώς το παροδικό επίπεδο εξυπηρέτησης μειώνεται γρήγορα κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου. Στο τέλος της πρώτης περιόδου, μια αρκετά μεγάλη σειρά αναμονής θα έχει ενισχυθεί. Λαμβάνοντας υπόψη τη στελέχωση της πρώτης περιόδου, θα εξετάσουμε πόσοι κεντρικοί υπολογιστές πρέπει να σχεδιαστούν για τη δεύτερή περίοδο προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το επίπεδο εξυπηρέτησης παραμένει επάνω από το 80%.Με την ποικιλία το δεύτερο μέρος της στελέχωσης ( ) και ο υπολογισμός του επίπεδου εξυπηρέτησης, ανακαλύπτουν ότι η ελάχιστη απαραίτητη στελέχωση είναι 50 κεντρικοί υπολογιστές. Η εικόνα 36 (πάνω μέρος) παρουσιάζει καμπύλες για =49, που αναγκάζουν το επίπεδο εξυπηρέτησης να μειωθεί κάτω από το 80% στο τέλος της δεύτερης περιόδου και =50, το οποίο εξασφαλίζει ότι ο περιορισμός επιπέδων εξυπηρέτησης ικανοποιείται.



Εικόνα 35 Ακριβείς χαμηλότερες συνδεδεμένες ανάγκες στελέχωσης, σχεδιασμένος αριθμός κεντρικών υπολογιστών και προκύπτον επίπεδο εξυπηρέτησης για μια λύση που παράγεται με την προσέγγισή μας.



Εικόνα 36 Επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια πρώτων δύο περιόδων προγραμματισμού.

Δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι σχεδιάζουμε 28 κεντρικούς υπολογιστές για την πρώτη περίοδο. Αν και είμαστε ακόμα μακριά από την ανάγκη στελέχωσης SIPP, 28 κεντρικοί υπολογιστές είναι αρκετοί για να κρατήσουν το επίπεδο εξυπηρέτησης πάνω από το 80% μέχρι το τέλος της πρώτης περιόδου. Με αυτήν τη στελέχωση της πρώτης περιόδου, θα υπάρξει πολύ λιγότερη συμφόρηση στην αρχή της δεύτερης περιόδου από το =8. Συνεπώς, η μικρότερη στελέχωση του δεύτερου μέρους απαιτείται για να επιτύχει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης. Όπως η εικόνα 36 (κάτω μέρος) επεξηγεί, η ελάχιστη στελέχωση του δεύτερου μέρους ελαττώνεται από 50 σε 47 όταν η στελέχωση της πρώτης περιόδου αυξάνεται από 8 σε 28. Ο λόγος είναι σαφής: εάν δεν έχουμε επαρκή στελέχωση στην πρώτη περίοδο, τότε χρειαζόμαστε περισσότερους κεντρικούς υπολογιστές στο δεύτερο μέρος. Αντιθέτως, η πρόσληψη υπερβολικού αριθμού υπαλλήλων στην πρώτη περίοδο μπορεί να μειώσει την ελάχιστη στελέχωση του δεύτερου μέρους. Γενικά, δεν είναι δυνατό να καθοριστούν οι ανάγκες στελέχωσης ανεξάρτητου περιόδου στελέχωσης σε άλλες περιόδους, όπως με τις ανώτατες προσεγγίσεις SIPP και καθυστερήσεων.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να καθορίσουμε την ελάχιστη στελέχωση της πρώτης περιόδου =8 για να εξασφαλίσουμε ότι ο περιορισμός των επιπέδων εξυπηρέτησης συναντιέται χωρίς εξέταση σε οποιασδήποτε άλλη περιόδο, επειδή το σύστημα είναι κενό στην αρχή της πρώτης περιόδου. Μπορούμε να καθορίσουμε μια αισιόδοξη εκτίμηση της αναγκαίας στελέχωσης του δεύτερου μέρους με την προσποίηση ότι το σύστημα είναι κενό στην αρχή εκείνης της περιόδου. Αναφερόμαστε στην προκύπτουσα εκτίμηση στελέχωσης ως το στενό χαμηλότερο όριο, επειδή η στελέχωση κάτω από αυτό δεσμεύει την παραβίαση εγγυήσεων του περιορισμού επιπέδων εξυπηρέτησης. Η εικόνα 35 παρουσιάζει το στενό χαμηλότερο όριο για όλες τις περιόδους.

Περιγραφή προβλήματος

Διαμορφώνουμε το σύστημα ως σειρά αναμονής M(t)/M/=s(t), που διευκρινίζεται ως εξής. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία ανομοιογενή διαδικασία του Poisson με ποσοστό λ(t) σε χρόνο t και εξυπηρετείται από τον πρώτο διαθέσιμο κεντρικό υπολογιστή. Οι κεντρικοί υπολογιστές έχουν τις ίδιες ικανότητες και οι διάρκειες υπηρεσιών είναι ανεξάρτητες και διανεμημένες εκθετικά με μέσο 1/μ. Το μέτρο απόδοσης αρχικού ενδιαφέροντος είναι το επίπεδο εξυπηρέτησης SL(t), που καθορίζουμε για να είμαστε Pr {W(t) }, όπου W(t) είναι ο εικονικός χρόνος αναμονής στο χρόνο t και τ είναι ένα χαμηλό όριο αποδεκτού χρόνου αναμονής . Το τελικό μέρος της προδιαγραφής M(t)/M/ s(t) είναι να περιγράψει τι συμβαίνει όταν οι κεντρικοί υπολογιστές σχεδιάζονται να φύγουν. Ας υιοθετήσουμε μια προ-αγοραστική πειθαρχία υπηρεσιών για να διευκολύνουμε τη σύγκριση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων μας. Κάτω από αυτόν τον κανόνα, εάν ένας κεντρικός υπολογιστής είναι απασχολημένος με έναν πελάτη όταν σχεδιάζεται για να βγει εκτός υπηρεσίας, τότε ο πελάτης θα μεταφερθεί σε έναν άλλο κεντρικό υπολογιστή (εάν είναι διαθέσιμος) ή θα επιστρέψει στη σειρά αναμονής.

Εξετάζουμε τις εγκαταστάσεις που λειτουργούν για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα [0,T] (π.χ. μαγαζί λιανικής πώλησης που είναι ανοικτό για ένα διάστημα της ημέρας) και επίσης τις εγκαταστάσεις που λειτουργούν συνεχώς (π.χ. υπηρεσίες έκτακτης ανάγκης). Για συνεχή λειτουργικά συστήματα, υποθέτουμε ένα περιοδικό ποσοστό άφιξης λ(t) με περίοδος T (π.χ., 24 ώρες ή μια εβδομάδα). Έστω ότι οι περίοδοι προγραμματισμού έχουν μήκος δ (15 λεπτά, 30 λεπτά, ή 1 ώρα). Ο σχεδιασμένος αριθμός κεντρικών υπολογιστών s(t) είναι σταθερός κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου προγραμματισμού ((j-1)δ,jδ),j=1,2,…..,n και θεωρούμε ότι T= nδ.

Ας καθορίσουμε τη μεταβλητή κατάσταση N(t) να είναι ο αριθμός πελατών στο M(t)/M/ s(t) σύστημα στην εποχή t και αφήνουμε (t)=Pr{N(t)= k} και π(t)= (t), (t),….). Κάτω από την προ-αγοραστική πειθαρχία, το N(t) εξελίσσεται ως συνεχής χρόνος στη αλυσίδα του Markov, σύμφωνα με τις γνωστές εξισώσεις των Chapman–Kolmogorov για μια σειρά αναμονής M/M/s (με τα χρονικά επιχειρήματα που προστίθενται για το λ και το s). Για να υπολογίσουμε τα παροδικά επίπεδα εξυπηρέτησης, ας θεωρήσουμε αρχικά τις εποχές t που είναι περισσότερο χρονικές μονάδες του τ πριν από το τέλος της τρέχουσας περιόδου προγραμματισμού. Σε τέτοιες εποχές, εάν η σειρά αναμονής δεν είναι κενή, τότε το γεγονός W(t) τ ,με τον όρο N(t)=k s(t), είναι το ίδιο με το γεγονός k-s(t) ή λιγότερες ολοκληρώσεις υπηρεσιών κατά τη διάρκεια (t,t+τ).Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο τύπο για το επίπεδο εξυπηρέτησης: SL(t)=1- όπου α= μ .

Δεύτερον, για τις εποχές που είναι μικρότερες από το χρόνο τ πριν από το τέλος της τρέχουσας περιόδου προγραμματισμού, πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι μερικοί από τους πελάτες που είναι αυτήν την περίοδο στην υπηρεσία θα επιστρέψουν στη σειρά αναμονής κατά τη διάρκεια (t,t+τ) λόγω των φύλλων των κεντρικών υπολογιστών τους.

Ο σχεδιασμένος αριθμός κεντρικών υπολογιστών s(t) καθορίζεται από το πώς πολλοί κεντρικοί υπολογιστές ορίζονται στις επιτρεπτές μετατοπίσεις που καλύπτουν το χρόνο τ, αποκλείοντας τους κεντρικούς υπολογιστές που είναι σε διάλειμμα. Το σύνολο επιτρεπτών μετατοπίσεων είναι I και κάθε επιτρεπτή μετατόπιση i I αντιπροσωπεύεται από μία δυαδική διανυσματική σειρά = ,j=1,……,n μήκους n, με =1, εάν η μετατόπιση i περιλαμβάνει τη περίοδο προγραμματισμού j και μηδέν για =1,2,…..,n. Ένα πρόγραμμα X είναι μια στήλη διανυσματική (,I) με που δείχνει τον αριθμό κεντρικών υπολογιστών που σχεδιάζεται στη μετατόπιση εργασίας I. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ένα πρόγραμμα x, το s(t) θα είναι ίσο με (x)= για t ((j-1)δ,jδ).Το κόστος ενός πρόγραμμα είναι C(x)= , όπου το είναι το μεταβλητό κόστος εργασίας ανά κεντρικό υπολογιστή που ορίζεται στη μετατόπιση i.

Οι λειτουργίες λ(t) και s(t) και το ποσοστό υπηρεσιών μ καθορίζουν τις πιθανότητες παροδικού κράτους ((t),……, (t)) όπου η ικανότητα K συστημάτων επιλέγεται για να προσεγγίσει ένα άπειρο σύστημα ικανότητας. Για τα συνεχούς λειτουργίας συστήματα, υπολογίζουμε τις περιοδικές στάσιμες πιθανότητες καταστάσεων, οι οποίες ικανοποιούν (t)= (t+pT) για όλες τις καταστάσεις k, τις εποχές t και τους ακέραιους αριθμούς p.

Η μετατόπισή μας που σχεδιάζει το πρόβλημα είναι:

Ελαχιστοποίηση C(x)

Υπό τον όρο SL(t) S για t [0,T]

, (1)

0,ακέραιος, για i I.

Ο δεύτερος περιορισμός συμπεριλαμβάνεται για να εξασφαλίσει ότι οι συνολικές σχεδιασμένες ώρες κεντρικών υπολογιστών πέρα από τον ορίζοντα προγραμματισμού είναι επαρκείς για να χειριστούν το συνολικό ποσό της εργασίας. Το επίπεδο εξυπηρέτησης SL(t) εξαρτάται από το κατώτατο όριο τ και τον αριθμό κεντρικών υπολογιστών. Η παράμετρος S είναι το ελάχιστο επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης. Η διατύπωση (1) είναι σε αντίθεση με την ακόλουθη κατά προσέγγιση διατύπωση:

Ελαχιστοποίηση C(x)

Υπό τον όρο , j=1,2,…..,n (2)

0,ακέραιος ,για i I.

Εδώ, η απαίτηση κεντρικών υπολογιστών καθορίζεται χρησιμοποιώντας ένα στάσιμο πρότυπο αναμονής M/M/ με ποσοστό άφιξης = (μέσο ποσοστό άφιξης στην περίοδο προγραμματισμού j). Συγκεκριμένα, εάν W(λ,μ,s) είναι ο χρόνος αναμονής σταθερής κατάστασης ενώπιον της υπηρεσία σε ένα σύστημα αναμονής M/M/s, τότε =min . Οι περιορισμοί στελέχωσης στο πρόβλημα (2) προορίζονται να εγγυηθούν σε μια επαρκή προσέγγιση, ότι το επίπεδο εξυπηρέτησης θα παραμείνει σε ίσο ή ανώτερο από για t [0,T].Η τροποποίηση καθυστερήσεων της προσέγγισης SIPP αλλάζει το ποσοστό άφιξης που χρησιμοποιείται για να καθορίσει την απαίτηση κεντρικών υπολογιστών σε = max{λ(t): t [(j-1)δ-1/μ,jδ-1/μ]}δηλ., μετατοπίζει το ποσοστό άφιξης προς τα εμπρός από ένα μέσο χρόνο υπηρεσίας και παίρνει το μέγιστο παρά το μέσο όρο πέρα από την προγραμματισμένη περίοδο.

Το πρόβλημα (2), με ή χωρίς την ανώτατη τροποποίηση καθυστερήσεων είναι η προσέγγιση στο πρόβλημα (1) για δύο λόγους:

Το επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου j εξαρτάται όχι μόνο από την στελέχωση κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου αλλά και από τη στελέχωση στις προηγούμενες περιόδους. Εάν τ > 0, τότε το επίπεδο εξυπηρέτησης θα εξαρτηθεί επίσης από τη στελέχωση στις επόμενες περιόδους.

Το επίπεδο εξυπηρέτησης ποικίλλει κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Δεν μπορεί να προσεγγιστεί καλά από την περιοριστική αξία που λαμβάνεται υποθέτοντας ότι το ποσοστό άφιξης και ο αριθμός κεντρικών υπολογιστών είναι σταθερά και συνεχίζονται κατά τρόπο αόριστο. Για αυτούς τους λόγους, η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος, η οποία λύνει το πρόβλημα (2), οδηγεί συχνά είτε στις ανέφικτες είτε σε κατά προσέγγιση βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημα (1).

Μέθοδος τυχαιοποίησης

Επίσης γνωστή ως μέθοδο τυποποίησης, η μέθοδος της τυχαιοποίησης παρέχει μια υπολογιστικά σταθερή και αποδοτική μέθοδο για να υπολογίσει τις πιθανότητες παροδικής κατάστασης για μία ομοιογενή, συνεχούς χρόνου αλυσίδα του Markov. Το υπολογιστικό κόστος αυτής της μεθόδου είναι σημαντικά χαμηλότερο από της αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης των Runge-Kutta.

Η μέθοδος τυχαιοποίησης ισχύει μόνο για τις ομοιογενείς διαδικασίες, αλλά στο πρόβλημά μας, το ποσοστό άφιξης μπορεί να ποικίλει συνεχώς. Επομένως, προσεγγίζουμε τη λειτουργία ποσοστού άφιξης λ(t) = για t

,όπου είναι η περίοδος υπολογισμού. Εμείς θα χρησιμοποιούμε πάντα μια περίοδο υπολογισμού που είναι πιο σύντομη από την περίοδο προγραμματισμού) και που διαιρεί ομοιόμορφα σε μία περίοδο προγραμματισμό (δ mod =0). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο τυχαιοποίησης σε κάθε περίοδο υπολογισμού, κατά τη διάρκεια της οποίας οι παράμετροι στο σύστημα αναμονής M(t)/M/s(t)/K παραμένουν σταθεροί. Οι πιθανότητες των καταστάσεων στο τέλος μιας περιόδου υπολογισμού χρησιμοποιούνται ως πιθανότητες αρχικής κατάστασης στην αρχή της επόμενης. Αυτή η διαδικασία υπολογίζει τις παροδικές πιθανότητες σε κάθε υπολογιστική περίοδο.

Προσεγγίζουμε το άπειρο σύστημα χωρητικότητας με ένα πεπερασμένο σύστημα χωρητικότητας M(t)/M/s(t)/K, επιλέγοντας ένα σύστημα ποσότητας K αρκετά μεγάλο προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι για κάθε t, με .Για συστήματα συνεχούς λειτουργίας, υπολογίζουμε τις πιθανότητες καταστάσεων για τις p περιόδους, μέχρι το να είναι λιγότερο από μια διευκρινισμένη ανοχή = για όλα τα t [0,T] και για όλα τα k=0,1,…..,k. Αποδεδειγμένα η μέθοδος τυχαιοποίησης είναι πολύ πιο ακριβής από τη μέθοδο των Runge-Kutta όταν εφαρμόζεται σε συστήματα M(t)/M/s(t).

Διαδικασία εκτίμησης παραμέτρου

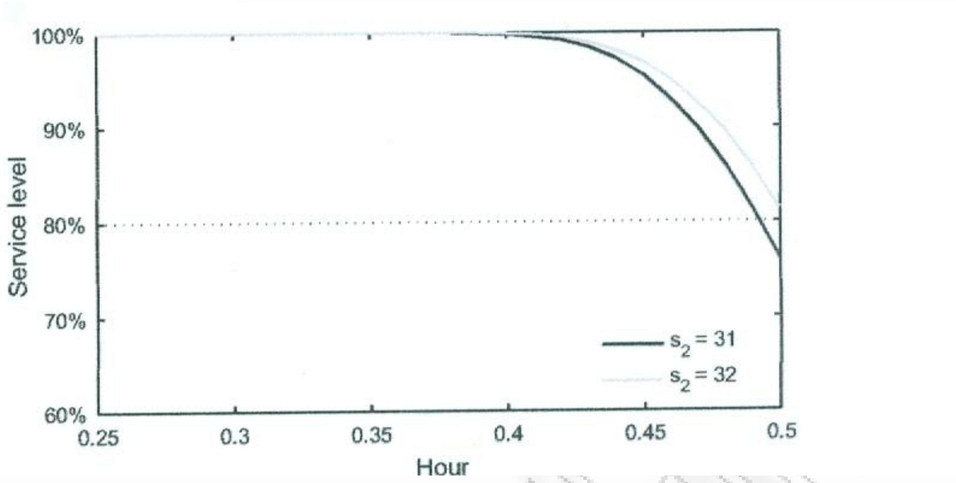
Το πρώτο βήμα στη διαδικασία μας χρησιμοποιεί τη μέθοδο τυχαιοποίησης για να υπολογίσουμε τα στενά χαμηλότερα όρια στα επίπεδα προσωπικού σε κάθε μία περίοδο και για να υπολογίσει πώς το επίπεδο εξυπηρέτησης σε κάθε περίοδο αυξάνεται ως λειτουργία της αυξανόμενης στελέχωσης.

Τα στενά χαμηλότερα όρια έχουν μια διαφορετική έννοια και υπολογίζονται διαφορετικά από τις ανώτατες ανάγκες στελέχωσης SIPP (ή καθυστέρησης χρησιμοποιημένες στο πρόβλημα (2). Το στενό χαμηλότερο όριο είναι ο ελάχιστος αριθμός κεντρικών υπολογιστών που απαιτούνται στην περίοδο j για να εξασφαλίσουν τον περιορισμό επιπέδων εξυπηρέτησης που ικανοποιείται κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου, υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι κενό στην αρχή της περιόδου j και ότι όλοι οι πελάτες που είναι σε αναμονή θα εισάγουν την υπηρεσία στην αρχή της περιόδου j + 1. Και οι δύο υποθέσεις είναι αισιόδοξες και επομένως το στενό χαμηλότερο όριο διευκρινίζει έναν απαραίτητο (αλλά μη ικανοποιητικό) όρο στον αριθμό κεντρικών υπολογιστών. Για να υπολογίσουμε τα στενά χαμηλότερα όρια για την περίοδο j, το ένα προσποιείται ότι το σύστημα είναι κενό στην αρχή της περιόδου(θέτοντας π((j-1)δ)=(1,0,…), επιλέγει ένα επίπεδο προσωπικού και υπολογίζει το προκύπτον παροδικό επίπεδο εξυπηρέτησης SL(t) για t [(j-1)δ,jδ]. Αν SL(t) πέσει κάτω από το S κατά τη διάρκεια της περιόδου, τότε το ένα αυξάνει το και επαναλαμβάνει τον υπολογισμό, έως ότου βρει κάποιο μικρότερο sj τέτοιο ώστε SL(t) S για t [(j-1)δ,jδ]. Στην εκτέλεση αυτών των υπολογισμών, πρέπει να θέσουμε = (στην πράξη, ένας πολύ μεγάλος αριθμός), για να αφαιρέσουμε την εξάρτηση του επιπέδου εξυπηρέτησης στην περίοδο j για τη στελέχωση στην περίοδο j + 1. Αναφερόμενοι στο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, το στενό χαμηλότερο όριο για την περίοδο προγραμματισμού 1 ήταν το 28. Όπως επεξηγεί η εικόνα 36, εάν το σύστημα αρχίζει άδειο, με 28 σχεδιασμένους κεντρικούς υπολογιστές στην περίοδο 1, τότε το επίπεδο εξυπηρέτησης μένει επάνω από το 80% καθ' όλη τη διάρκεια της πρώτης περιόδου. Με 27 κεντρικούς υπολογιστές στην πρώτη περίοδο (που δεν παρουσιάζεται), το επίπεδο εξυπηρέτησης πέφτει κάτω από το 80% πριν από το τέλος της περιόδου. Για να επεξηγήσουμε τον υπολογισμό από το χαμηλότερο όριο για το δεύτερο μέρος, η εικόνα 37 παρουσιάζει το παροδικό επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου, εάν το σύστημα είναι κενό στην αρχή της περιόδου και η επάνδρωση είναι 31 ή 32. Το χαμηλότερο επίπεδο προσωπικού που επιτυγχάνει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου είναι 32, άρα =32.

Εάν το είναι μικρότερο από το , τότε ο περιορισμός επιπέδων εξυπηρέτησης είναι σίγουρο ότι θα παραβιαστεί κατά τη διάρκεια της περιόδου j, ανεξάρτητα από τη στελέχωση σε άλλες περιόδους. Εάν το σύστημα δεν είναι κενό στην αρχή της περιόδου ή εάν ο αριθμός κεντρικών υπολογιστών μειώνεται στο τέλος της περιόδου, τότε το μπορεί να πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το για τον περιορισμό των επιπέδων εξυπηρέτησης που προβλέπεται να ικανοποιηθούν κατά τη διάρκεια της περιόδου j και ως εκ τούτου το ακριβές χαμηλότερο όριο.

Εάν οι απαιτήσεις των κεντρικών υπολογιστών SIPP αντιπροσώπευαν, αληθινά, ικανοποιητικούς όρους που εγγυώνται ότι το επίπεδο εξυπηρέτησης επετεύχθη, τότε αυτές οι απαιτήσεις κεντρικών υπολογιστών θα ήταν πάντα μεγαλύτερες ή ίσες από τα αντίστοιχα στενά χαμηλότερα όρια. Αυτό είναι συνήθης περίπτωση. Υπάρχουν εξαιρέσεις εντούτοις, ιδιαίτερα όταν το ποσοστό άφιξης αλλάζει αρκετά κατά τη διάρκεια μιας περιόδου προγραμματισμού. Τέτοιες εξαιρέσεις είναι πιο κοινές με την ανώτατη προσέγγιση καθυστερήσεων. Παραδείγματος χάριν, στις εικόνες 34 και 35, η ανώτατη ανάγκη στελέχωσης καθυστερήσεων για τη περίοδο 6:30-6:45 είναι 3 κεντρικοί υπολογιστές αλλά το χαμηλότερο όριο είναι 5 κεντρικοί υπολογιστές.

Η εκτίμηση για το πώς το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης σε μία περίοδο προγραμματισμού αυξάνεται με την αυξανόμενη στελέχωση σε εκείνη την περίοδο προγραμματισμού είναι βασισμένες σε μια προσέγγιση που θα περιγράψουμε παρακάτω. Για να παρακινήσουμε την προσέγγιση, θεωρούμε πώς το επίπεδο εξυπηρέτησης σε ένα στάσιμο σύστημα M/M/s αλλάζει όταν αυξάνεται το s. Για $s > \lambda/\mu$, το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι κοίλη αύξηση στο s και πλησιάζει 100% στο όριο. Επομένως, φαίνεται εύλογο να αναμένουμε ότι το min{SL(t): t ((j-1)δ,jδ)} έχει κοίλη αύξηση στο και προσεγγίζει 100% στο όριο, για πάνω από κάποιο σημείο κάμψης. Υποθέτουμε ότι για την προσέγγισή μας, αυτό το σημείο κάμψης είναι ίσο ή κάτω από το χαμηλότερο όριο .



Εικόνα 37 Απεικόνιση του ακριβούς χαμηλότερου συνδεδεμένου υπολογισμού για την περίοδο 2.

Προσεγγίζουμε min{SL(t): t ((j-1)δ,jδ)} με μία εκθετική συνάρτηση του , ως εξής. Ας δούμε το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου προγραμματισμού j όταν = και = = κατά τη S .Θέτουμε ότι = +1,θεωρώντας ότι = = και υπολογίζοντας το μικρότερο επίπεδο εξυπηρέτησης, το οποίο δηλώνουμε .Ας υποθέσουμε ότι με ένα ιδιαίτερο πρόγραμμα, η στελέχωση μέσα σε μία περίοδο προγραμματισμού j είναι και το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου προγραμματισμού j είναι S S . Αν η στελέχωση αυξηθεί κατά + k, τότε προσεγγίζουμε το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια της περιόδου προγραμματισμού j ως S + (1 S -)(1-exp(-)). Υπολογίζουμε την άγνωστη σταθερά λύνοντας την S +(1- S)(1- exp(-)= S με αποτέλεσμα το =-). Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το DJ για να υπολογίσει το μικρότερο αριθμό j των πρόσθετων κεντρικών υπολογιστών που απαιτούνται για να προκύψει το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης στην περίοδο προγραμματισμού j πάνω από S :

S + (1- S)(1- exp( )) S <=>
=> = (3)

Αυτές οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται στον προγραμματισμό ακέραιων αριθμών με χρήση heuristics για να παράγουν τους περιορισμούς. Στην αναγνώριση ότι η διαδικασία για την απαραίτητη αύξηση στελέχωσης περιλαμβάνει την προσέγγιση, εισάγουμε (στο επόμενο τμήμα) μια παράμετρο β αλγορίθμου για να μειώσει την απαραίτητη αύξηση, προκειμένου να μειωθεί ο κίνδυνος στους περιορισμούς που αποβάλλουν τη βέλτιστη λύση.

Προγραμματισμός ακέραιων αριθμών

Το heuristic αρχίζει με τη χρησιμοποίηση της ΄΄κατά προσέγγισης΄΄ μεθόδου με ανώτατες ανάγκες στελέχωσης SIPP και καθυστερήσεων, για να ληφθούν δύο λύσεις στελέχωσης. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο τυχαιοποίησης για να υπολογίσουμε το επιβατικό επίπεδο εξυπηρέτησης ως αποτέλεσμα αυτών των δύο λύσεων. Εάν μια από αυτές τις λύσεις ικανοποιεί τον περιορισμό επιπέδων εξυπηρέτησης σε όλο το διάστημα [0,T], τότε τον αποθηκεύουμε ως και χρησιμοποιούμε το κόστος της C ως ανώτερο όριο. (Εάν περισσότερες από μια κατά προσέγγιση λύσεις ικανοποιούν τον περιορισμό επιπέδων εξυπηρέτησης τότε επιλέγουμε τη λιγότερο δαπανηρή λύση.)

Έπειτα, λύνουμε το ακόλουθο πρόγραμμα ακέραιων αριθμών:

ελαχιστοποίηση C(x)

υπό τον όρο (x) για j=1,2,…,n (4)

,

,ακέραιος για i I.

Αυτό το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών είναι γραμμικό, επειδή το (x) είναι γραμμικό στο χ. Σημειώνουμε ότι, αντί να είναι το ο αριθμός κεντρικών υπολογιστών σχεδιασμένος για βάρδιες i, το διάνυσμα x θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε μεταβλητή απόφασης που χρησιμοποιείται (πλήρως ή μερικώς) για τη διευκρίνιση ενός προγράμματος, εφ' όσον το (x) είναι μια γραμμική λειτουργία του χ ώστε να εξασφαλιστεί ότι το ανωτέρω πρόγραμμα ακέραιων αριθμών είναι γραμμικό.

Ο καθορισμός των στενών χαμηλότερων ορίων υπονοεί ότι η (4) είναι μια χαλάρωση του προβλήματος (1) και επομένως, το βέλτιστο κόστος είναι ένα χαμηλότερο όριο στο βέλτιστο κόστος για το πρόβλημα (1). Μόλις έχουμε αυτήν την αρχική λύση, αρχίζουμε μεταξύ του υπολογισμού των επιπέδων εξυπηρέτησης για μια λύση και της λήψης των νέων λύσεων με το να λύσουμε το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών πάλι, με μερικούς περιορισμούς προστιθέμενους και μερικούς που διαγράφονται.

Μια επανάληψη αρχίζει με τον υπολογισμό του επιπέδου εξυπηρέτησης SL(t) για t για μια λύση (υπολογίζουμε το επίπεδο εξυπηρέτησης σε διαστήματα των 5 λεπτών). Κατόπιν απαριθμούμε όλες τις ανέφικτες περιόδους προγραμματισμού, ορίζοντας αυτές όπου το επίπεδο εξυπηρέτησης μειώνεται κάτω από . Έστω ότι (l,l+1,…,u) είναι ένα ανέφικτο διάστημα διαδοχικών ανέφικτων περιόδων. Υπολογίζουμε την πρόσθετη στελέχωση (που μετριέται ως περίοδος) απαιτώντας να φέρει το επίπεδο εξυπηρέτησης πάνω από το ως , που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση (3) για να υπολογίσει και να προσθέσει τον ακόλουθο περιορισμό στο πρόγραμμα ακέραιων αριθμών, για όλα τα ανέφικτα διαστήματα:

(5)

(το β είναι μια παράμετρος μεταξύ 0 και 1). Όταν ένας νέος περιορισμός x προστίθεται, αποβάλλουμε οποιουσδήποτε υπάρχοντες περιορισμούς x που ´´εξουσιάζονται´´ από το νέο περιορισμό (δηλαδή εάν). Κάθε πρόγραμμα ακέραιων αριθμών που λύνουμε μπορεί να αντιπροσωπευθεί ως εξής:

ελαχιστοποίηση C(x)

υπό τον όρο για j=1,2,….,n (6)

, για u V,

0,ακέραιος, για i I,

όπου το V είναι το σύνολο των περιορισμών της μορφής (5) που έχουν προστεθεί μέχρι τώρα. Η διατύπωση (6) περιλαμβάνει τους περιορισμούς στελέχωσης από περίοδο σε περίοδο, όπως στο πρόβλημα (2). Σημαντικά, ο δεύτερος περιορισμός έχει μια διαφορετική δομή. Αντί του περιορισμού της ελάχιστης στελέχωσης σε μια περίοδο, αυτοί οι περιορισμοί διευκρινίζουν ότι η στελέχωση σε ένα διάστημα πρέπει να αυξηθεί από ένα συγκεκριμένο ποσό. Η λύση του προγραμματισμού των ακέραιων αριθμών διανέμει την απαραίτητη αύξηση στελέχωσης πέρα από το διάστημα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος. Η δομή των περιορισμών στην (6) προτείνει ότι η προσέγγισή μας πρέπει να είναι ικανότερη να εκμεταλλευτεί το σχεδιασμό της ευελιξίας από την ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο.

Η παράμετρος β [0,1] στην ανίσωση (5) επηρεάζει εξίσου την ποιότητα και την ταχύτητα λύσης. Μια χαμηλή β καθιστά σχεδόν απίθανο, να προσθέσουμε έναν περιορισμό που

καταργεί τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα (1) και καθιστά τη διαδικασία μας πιο πιθανή να επιστέψει στη βέλτιστη λύση.
Ωστόσο, οι χαμηλές τιμές για το β θα οδηγήσουν σε περισσότερες επαναλήψεις. Έχουμε πειραματιστεί με τιμές του β μεταξύ 0,3 - 1,0 και αυτές οι υποθέσεις σε γενικές γραμμές επιβεβαιώθηκαν, αν και η λύση ποιότητας δεν φαίνεται να είναι ιδιαίτερα ευαίσθητή στο β.

Σε κάθε επανάληψη, πριν λύσουμε το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών, λύνουμε την LP relaxation του για να ληφθεί η λύση . Εάν οι δαπάνες είναι ακέραιος αριθμός (όπως στα υπολογιστικά πειράματά μας), τότε ´´σφίγγουμε´´ τη διατύπωση με την προσθήκη της έγκυρης ανισότητας C(x) . Χρησιμοποιούμε, επίσης, τη λύση LP για να κατασκευάσουμε τα μιας λύσης με τη στρογγυλοποίηση όλων των συστατικών του μέχρι τον κοντινότερο ακέραιο αριθμό. Αυτή η λύση είναι εφικτή για την (6), επειδή όλοι οι συντελεστές περιορισμού στην (6) είναι μη αρνητικοί και είναι ``μεγαλύτεροι ή ίσοι´´ του τύπου. Το προκύπτον ανώτερο όριο του C( ) στο κόστος του προγράμματος ακέραιων αριθμών βοηθάει κατά τη χρησιμοποίηση ενός branch-and-bound αλγορίθμου. Εάν μερικοί συντελεστές είναι αρνητικοί από τον περιορισμό, τότε απαιτείται η περιπλοκότερη στρογγυλοποίηση heuristic για να παράγει μία εφικτή λύση .

Μετά την πρόσθεση και τη διαγραφή των περιορισμών με αυτό τον τρόπο, λύνουμε το πρόγραμμα ακέραιων αριθμών πάλι. Επαναλαμβάνουμε μεταξύ του υπολογισμού των επιπέδων εξυπηρέτησης και την επίλυση των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών έως ότου είτε όλες οι περίοδοι προγραμματισμού να είναι εφικτές ή το κόστος του προγράμματος ακέραιων αριθμών να υπερβαίνει C . Η τελική λύση είναι εγγυημένη για να είναι εφικτή στο πρόβλημα (1) αλλά μπορεί να μην είναι βέλτιστη.

Άλλα heuristics είναι πιθανά για τη γεννήτρια προγράμματος. Για παράδειγμα, η πρόσθεση περιορισμών βασισμένων στις υπολογισμένες υπό-κλίσης της λειτουργίας επιπέδων εξυπηρέτησης αφορά τη στελέχωση σε κάθε περίοδο προγραμματισμού. Η αξιολόγηση των υπό-κλίσεων είναι υπολογιστικά αρκετά πιο ακριβά από το επίπεδο εξυπηρέτησης ως αποτέλεσμα του τρέχοντος προγράμματος, που απαιτεί όλη αυτή η διαδικασία . Η διαδικασία έχει το πλεονέκτημα να συγκλίνει στη βέλτιστη λύση, αλλά μόνο εάν η λειτουργία επιπέδων εξυπηρέτησης είναι κοίλη στο διάνυσμα στελέχωσης. Το επίπεδο εξυπηρέτησης για το πρόβλημα (1) δεν είναι μια κοίλη λειτουργία της στελέχωσης εάν εξεταστούν όλα τα πιθανά επίπεδα στελέχωσης ούτε οι αυξήσεις των επιπέδων εξυπηρέτησης από μηδέν σε ένα σύμφωνα με μια καμπύλη S-shaped καθώς η στελέχωση αυξάνεται.

Υπολογιστικά πειράματα

Έχουμε συγκρίνει την απόδοση της μεθόδου μας με την ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο και με την αναλυτική μέθοδο cutting planes (ACCPM) σε ποικίλα δοκιμαστικά προβλήματα. Το παράρτημα Γ περιγράφει πώς εφαρμόσαμε τη ACCPM στο πρότυπο μας. Κατά την επίλυση των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών, θέτουμε μέγιστο χάσμα δυαδικότητας το 0.5% και το μέγιστο αριθμό απλών επαναλήψεων σε 5000, εκτός εάν η επίλυση των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών για να υπολογίσουμε τα χαμηλότερα όρια είναι με ACCPM, όπου αφήνουμε το μέγιστο χάσμα δυαδικότητας στην προκαθορισμένη του αξία. Η παράμετρος β βασισμένη σε πειραματισμούς τέθηκε στο 0.7. Θέσαμε την περίοδο υπολογισμού σε 5 λεπτά σε όλα τα πειράματα.

Στην επιλογή των προβλημάτων δοκιμής, ο στόχος μας ήταν να προσδιορίσουμε τις καταστάσεις όπου η προσέγγισή μας είναι πλέον πιθανή να είναι ευεργετική. Ο Green (2001, 2003) έδειξε ότι η ανώτατη τροποποίηση καθυστερήσεων σε σχέση με τη προσέγγιση SIPP βελτιώνει αρκετά την αξιοπιστία σε πολλές καταστάσεις. Για την πρώτη δοκιμή πήραμε ένα σύνολο 27 προβλημάτων όπου εστιάσαμε στις καταστάσεις όπου η ανώτατη προσέγγιση καθυστερήσεων είναι ελάχιστα αξιόπιστη, δηλαδή, σε καταστάσεις όπου η δυνατότητα υπηρεσιών περιορίζει τις ώρες λειτουργίας , μεγάλες διακυμάνσεις στο ποσοστό άφιξης, μακροχρόνιους μέσους χρόνους υπηρεσιών και σύντομες περιόδους προγραμματισμό. Καθορίσαμε τις ώρες λειτουργίας σε 12 και χρησιμοποιήσαμε μια ημιτονοειδή λειτουργία ποσοστού άφιξης $\lambda(t)=\lambda\{1+\gamma\sin(\pi t/4)\}$ για τη διευκρίνιση της ανομοιογενούς διαδικασίας άφιξης Poisson. Η παράμετρος γ είναι το σχετικό εύρος και η παράμετρος λ καθορίζει (αλλά δεν είναι ίση) το μέσο ποσοστό άφιξης. Αυτή η λειτουργία ποσοστού άφιξης έχει δύο αιχμές, στο t=2 και 10, αντιστοιχώντας σε πρωινή και απογευματινή αιχμή. Το μέσο ποσοστό άφιξης κατά τη διάρκεια των 12 ωρών είναι =λ(1+2γ/(3π)).Καθορίσαμε στα 27 προβλήματα δοκιμής να κυμαίνονται το ποσοστό υπηρεσιών (μ =1, 2, ή 4 πελάτες ανά ώρα), το μέσο προσφερόμενο φορτίο r= /μ(16, 32, ή 64) και το μήκος μιας περιόδου προγραμματισμού δ (ώρες 0.25, 0.5, ή 1). Καθορίσαμε το σχετικό εύρος γ=1 . Το παράδειγμα που προαναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα είναι ένα από τα προβλήματα σε αυτό σύνολο, που αντιστοιχεί σε μ=2,r=64 και δ=0.25.

Για να διευκολύνουμε τη σύγκριση με τα αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε ένα κατώτατο όριο τ=0 (το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι ίσο σε αυτήν την περίπτωση), με την πιθανότητα μίας καθυστέρησης των σειρών αναμονής. Το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης τέθηκε = 80%. Εκτελέσαμε επίσης τα ίδια πειράματα με ένα κατώτατο όριο τ= 20 δευτερόλεπτα (ένας κοινός στόχος για τα τηλεφωνικά κέντρα) και επιτύχαμε παρόμοια αριθμητικά αποτελέσματα. Χρησιμοποιήσαμε ένα σύνολο μετατοπίσεων που πιστεύουμε ότι είναι ρεαλιστικές και οι οποίες θα διευκρινιστούν ως εξής. Οι βάρδιες μπορούν να είναι 4, 6, ή 8 ώρες σε διάρκεια, συμπεριλαμβανομένων των διαλειμμάτων. Ο αριθμός διαλειμμάτων ποικίλλει από 1 έως 3 ανάλογα με το μήκος της βάρδιας και το μήκος της περιόδου προγραμματισμού και ο συγχρονισμός των διαλειμμάτων είναι εύκαμπτος. Οι βάρδιες μπορούν να αρχίζουν σε οποιαδήποτε περίοδο προγραμματισμού, εφ' όσον τελειώνουν μέχρι το χρόνο T. Ο αριθμός των επιτρεπτών βαρδιών ποικίλει από 45 για δ=1 σε 243 για δ=0.25.Θέτουμε το κόστος κάθε βάρδιας ίσο με τον αριθμό των ωρών εργασίας (αποκλείοντας τα διαλείμματα) που περιλαμβάνονται σε αυτή. Συνεπώς, το κόστος ενός προγράμματος είναι ίσο με το συνολικό αριθμό των σχεδιασμένων εργατοωρών.

Συγκρίνουμε τη μέθοδό μας με την ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο και με την προσέγγιση ACCPM. Αρχίζουμε με την περιγραφή των συγκρίσεών μας στην ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο, όπου λύνουμε κάθε δοκιμαστικό πρόβλημα τρεις φορές: χρησιμοποιώντας τη ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο με SIPP και τις ανώτατες ανάγκες στελέχωσης καθυστερήσεων λαμβάνουμε τις λύσεις και και με τη δική μας τη . Εάν το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης S (που αξιολογείται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο τυχαιοποίησης) της ανώτατης λύσης καθυστερήσεων είναι μικρότερο από το επιθυμητό ελάχιστο , τότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδό μας με τον περιορισμό SL(t) για να λάβουμε την τέταρτη λύση .

Ο πίνακας 6 παρουσιάζει το κόστος και το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης των λύσεων που λαμβάνονται με το SIPP, τη μέγιστη καθυστέρηση και την προσέγγισή μας για κάθε ένα δοκιμαστικό πρόβλημα. Για τις κατά προσέγγιση ανώτατες προσεγγίσεις SIPP και καθυστερήσεων, παρουσιάζουμε επίσης τα διαλείμματα των πέντε λεπτών κατά τη διάρκεια των οποίων τα επίπεδα εξυπηρέτησης παρουσιάζουν πτώση κάτω από το 80%. Υπολογίσαμε το ποσοστό της μείωσης δαπανών που επιτεύχθηκε από την προσέγγισή μας έναντι της ανώτατης προσέγγισης καθυστερήσεων ως 1-C( )/C( ) (στήλη (7) στον πίνακα 6). Όταν η μέθοδος της ανώτατης προσέγγιση καθυστερήσεων οδήγησε σε μια ανέφικτη λύση, χρησιμοποιήσαμε 1- C( )/C( ) για να υπολογίσουμε ένα εναλλακτικό μέτρο της μείωσης του ποσοστού του κόστους (στήλη (10) στον πίνακα 6). Ο πίνακας 6 αποκαλύπτει τις ακόλουθες τάσεις:

- Η προσέγγιση SIPP είναι ιδιαίτερα αναξιόπιστη για τα δοκιμαστικά προβλήματα. Η ανώτατη τροποποίηση καθυστερήσεων είναι πιο αξιόπιστη, αλλά αποτυγχάνει να παράγει μια λύση που ικανοποιεί τον περιορισμό επιπέδων εξυπηρέτησης για τα 13 από τα 27 προβλήματα.
- Η προσέγγισή μας οδήγησε σε χαμηλότερο κόστος από την κατά προσέγγιση ανώτατη καθυστέρηση για όλα τα προβλήματα, ακόμη και για αυτά όπου η λύση της ανώτατης καθυστέρησης ήταν ανέφικτη. Η εξοικονόμηση κόστους που κυμαίνεται από 1.4% ως 10.4%, υπολογίζεται κατά μέσο όρο στο 5.5%.
- Η εξοικονόμηση κόστους είναι ακόμα μεγαλύτερη όταν ρυθμίζουμε τα ποσοστά αποταμίευσης για τα προβλήματα δοκιμής όπου η ανώτατη λύση καθυστερήσεων

ήταν ανέφικτη, με τις μειώσεις δαπανών που κυμαίνονται από 1.4% ως 30.2%, με μέσο όρο το 11.0%.

- Το κόστος της λύσης μειώνεται καθώς μικραίνει το μήκος της περιόδου προγραμματισμού όταν το μ και το r καθορίζονται και για τις δύο προσεγγίσεις .Αυτό συμβαίνει, επειδή το μειωμένο μήκος περιόδου προγραμματισμού υπονοεί την πρόσθετη ευελιξία σχεδιασμού, οπότε το κόστος λύσης πρέπει να μειωθεί.

Ο πίνακας 7 παρουσιάζει τους χρόνους υπολογισμού για την ´´κατά προσέγγιση´´ μέθοδο και την προσέγγισή μας. Ο χρόνος υπολογισμού για την προσέγγισή μας διαιρείται σε χρόνο για την αρχική διαδικασία εκτίμησης παραμέτρου και σε χρόνο για τις επαναλήψεις μεταξύ της επίλυσης των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών και του υπολογισμού των επιπέδων εξυπηρέτησης. Κατά μέσο όρο, 33% του χρόνου υπολογισμού ξοδεύτηκε στη διαδικασία εκτίμησης παραμέτρου. Ο συνολικός χρόνος υπολογισμού ανά πρόβλημα κυμάνθηκε από 0.26 έως 5.31 λεπτά.

Βρήκαμε τους χρόνους υπολογισμού της μεθόδου μας για τα δοκιμαστικά προβλήματα να είναι ιδιαίτερα προβλέψιμός ως λειτουργία των πειραματικών παραγόντων μ, r, και δ. Ο υπολογισμός εκτίμησης της παραμέτρου στον πίνακα 7 προσεγγίστηκαν κοντά στο = 0.97 από 0.00024 . Ένα πιο σύντομο μήκος περιόδου προγραμματισμού υπονοεί να υπολογίζονται περισσότερες περίοδοι προγραμματισμού και περισσότερες παράμετροι, έτσι ώστε η αντίστροφη σχέση με το δ να είναι αναμενόμενη. Ένα υψηλότερο προσφερόμενο φορτίο r υπονοεί ότι η μέθοδος τυχαιοποίησης θα πρέπει να λύσει τα μεγαλύτερα συστήματα και επομένως ο χρόνος εκτίμησης παραμέτρου για κάθε μία περίοδο προγραμματισμού αυξάνεται. Αναλύσαμε τον αριθμό επαναλήψεων και το μέσο χρόνο ανά επανάληψη χωριστά και βρήκαμε τον αριθμό επαναλήψεων να είναι σχεδόν ανεξάρτητος από το δ, ενώ ο μέσος χρόνος ανά επανάληψη ήταν σχεδόν ανεξάρτητος από το μ.

Πίνακας 6 Αποτελέσματα δαπανών και επιπέδων εξυπηρέτησης

μ	r	δ	Approximate SIPP approach			Approximate lag max approach			Our method			Our method, with $SL_{min} = \min(80\%, (3a))$		
			(1a) min SL(t) (%)	(1b) Fraction < 80 (%)	(2) $C(x_1)$	(3a) min SL(t) (%)	(3b) Fraction < 80 (%)	(4) $C(x_2)$	(5) min SL(t) (%)	(6) $C(x_3)$	(7) Cost savings (%)	(8) min SL(t) (%)	(9) $C(x_4)$	(10) Cost savings (%)
1	16	0.25	0.8	39.6	273	36.3	15.8	280.5	80.6	256	8.7	36.5	207	26.2
1	16	0.5	0.7	37.5	268	47.5	8.3	289.5	81.0	263	9.2	47.7	222	23.3
1	16	1	0.6	47.6	258	48.2	4.2	297	80.6	266	10.4	49.1	232	21.9
1	32	0.25	0.0	41.7	503	15.1	16.7	519	80.3	470	9.4	15.7	377.5	27.3
1	32	0.5	0.0	41.7	500	29.7	8.3	532.5	80.8	486.5	8.6	31.0	410.5	22.9
1	32	1	0.0	44.0	486	30.2	5.4	550	80.3	494	10.2	34.5	427	22.4
1	64	0.25	0.0	41.7	954	1.7	17.1	983.5	80.4	894.5	9.0	1.8	686.5	30.2
1	64	0.5	0.0	41.7	946	9.9	8.3	1012	81.2	924.5	8.6	10.6	749.5	25.9
1	64	1	0.0	41.7	916	10.2	5.4	1047	80.4	943	9.9	10.5	768	26.6
2	16	0.25	8.2	34.2	273	81.4	0.0	281.5	80.6	266	5.5			
2	16	0.5	6.0	37.5	268	83.4	0.0	289.5	81.2	273	5.7			
2	16	1	4.6	38.7	258	83.5	0.0	304	80.1	282	7.2			
2	32	0.25	0.6	38.8	503	77.9	0.4	519.5	81.9	506	2.6	78.0	496	4.5
2	32	0.5	0.4	44.4	500	78.4	1.4	534.5	80.2	511	4.4	78.5	505.5	5.4
2	32	1	0.1	38.1	486	78.5	0.6	559	80.6	536	4.1	79.2	528	5.5
2	64	0.25	0.0	42.5	954	76.6	1.7	987	80.0	947.5	4.0	77.0	940	4.8
2	64	0.5	0.0	44.4	946	80.4	0.0	1016	80.1	965	5.0			
2	64	1	0.0	43.5	916	80.5	0.0	1066	80.4	1016	4.7			
4	16	0.25	31.3	28.3	273	83.6	0.0	282	80.9	272.5	3.4			
4	16	0.5	22.1	29.2	268	84.0	0.0	289.5	80.4	278.5	3.8			
4	16	1	13.2	42.3	258	84.0	0.0	301	80.7	292	3.0			
4	32	0.25	9.5	35.4	503	83.1	0.0	518	80.7	510.5	1.4			
4	32	0.5	5.5	36.1	500	84.2	0.0	533	80.0	520.5	2.3			
4	32	1	2.1	42.3	486	84.2	0.0	559	80.1	545	2.5			
4	64	0.25	1.0	38.3	954	81.6	0.0	984	80.3	970	1.4			
4	64	0.5	0.2	38.9	946	82.2	0.0	1015.5	80.0	993.5	2.2			
4	64	1	0.0	52.4	916	85.0	0.0	1064	80.8	1049	1.4			

Πίνακας 7 Χρόνος υπολογισμού (πρακτικά)

μ	r	δ	Approximate approach	Lag max approach	Our method			
					Parameter estimation	Iterations	Total	Number of iterations
1	16	0.25	0.02	0.02	0.33	0.59	0.92	22
1	16	0.5	0.01	0.01	0.11	0.29	0.41	25
1	16	1	0.01	0.01	0.06	0.23	0.29	21
1	32	0.25	0.03	0.03	0.55	1.09	1.64	30
1	32	0.5	0.02	0.02	0.22	0.55	0.77	33
1	32	1	0.01	0.02	0.12	0.65	0.76	38
1	64	0.25	0.06	0.06	1.91	3.40	5.31	44
1	64	0.5	0.03	0.03	0.61	1.62	2.23	41
1	64	1	0.03	0.03	0.26	1.93	2.19	60
2	16	0.25	0.02	0.02	0.34	0.59	0.93	22
2	16	0.5	0.01	0.01	0.13	0.21	0.34	14
2	16	1	0.01	0.01	0.08	0.18	0.26	14
2	32	0.25	0.04	0.04	0.68	1.56	2.23	37
2	32	0.5	0.02	0.02	0.28	0.49	0.76	22
2	32	1	0.02	0.02	0.14	0.55	0.70	29
2	64	0.25	0.07	0.06	1.91	3.10	5.01	35
2	64	0.5	0.03	0.03	0.67	1.13	1.81	26
2	64	1	0.03	0.03	0.30	1.39	1.70	39
4	16	0.25	0.03	0.03	0.37	0.48	0.85	16
4	16	0.5	0.01	0.01	0.17	0.18	0.35	10
4	16	1	0.01	0.01	0.09	0.21	0.30	14
4	32	0.25	0.04	0.04	0.73	0.95	1.67	20
4	32	0.5	0.02	0.02	0.33	0.34	0.67	12
4	32	1	0.02	0.02	0.16	0.37	0.53	15
4	64	0.25	0.07	0.07	2.00	2.89	4.89	30
4	64	0.5	0.04	0.05	0.75	0.76	1.52	14
4	64	1	0.04	0.04	0.39	0.93	1.32	19

Συνδυασμός αυτών των δύο αναλύσεων οδήγησαν στην ακόλουθη προσέγγιση για το χρόνο υπολογισμού επαναλήψεων( ):0.0067 . Ο χρόνος υπολογισμού ανά επανάληψη πρέπει να μειωθεί με την αύξηση του μήκος της περιόδου προγραμματισμό, επειδή οι μικρότερες χρονικές περίοδοι προγραμματισμού υπονοούν ένα μεγαλύτερο αριθμό επιτρεπτών μετατοπίσεων και ως εκ τούτου ένα μεγαλύτερο πρόγραμμα ακέραιων αριθμών. Η προσέγγιση της εξίσωσης επιβεβαιώνει αυτήν την προσδοκία. Προειδοποιούμε ότι είναι μη ασφαλές να προεκτείνουμε τις εξισώσεις προσέγγισης στις καταστάσεις πέρα από τα προβλήματα δοκιμής που εξετάσαμε, ιδιαίτερα όταν αυτές ποικίλλουν και εμείς κρατήσαμε κάποιους παράγοντες σταθερούς (παραδείγματος χάριν, περιορισμένες ώρες λειτουργίας). Για να συγκρίνουμε τη μέθοδό μας με τη ACCPM, τρέξαμε τον αλγόριθμο δύο φορές για κάθε ένα από τα 27 προβλήματα. Κατ' αρχάς, δώσαμε στη ACCPM τον ίδιο υπολογιστικό προϋπολογισμό με τη μέθοδό μας και καταγράψαμε την καλύτερη λύση που βρέθηκε από τη ACCPM. Δεύτερον, τρέξαμε τη ACCPM έως ότου βρεθεί η λύση για την οποία τα χαμηλότερα και ανώτερα όρια διατηρούνται κοντά στο 1% ανάμεσα στις δύο μεθόδους. Ο πίνακας 8 παρουσιάζει το ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης, κόστος και χρόνο υπολογισμού που απαιτείται για να βρεθούν οι λύσεις (με τη μέθοδό μας), και . Παρουσιάζουμε επίσης χάσματα βελτιστοποίησης και για τις δύο μεθόδους, που υπολογίζονται ως C /LB-1 για τη μέθοδό μας και C /LB-1 για ACCPM, όπου LB είναι το καλύτερο χαμηλότερο όριο που βρέθηκε από τη ACCPM.

Συγκρίνοντας τη μέθοδό μας με τη ACCPM, παρατηρούμε τα εξής:

- Όταν δίνεται ο ίδιος υπολογιστικός προϋπολογισμός όπως στη μέθοδός μας, το ACCPM βρήκε λύσεις που ήταν 11-88% πιο δαπανηρές από εκείνες που βρίσκονται με τη μέθοδό μας.
- Το ACCPM εκτελείται έως ότου βρεθεί μια λύση που είναι μέσα στο 1% των βέλτιστων λύσεων που απαιτείται χαρακτηριστικά για 20 χρόνους, όπως στη μέθοδό μας.
- Συγκρίνοντας τις καλύτερες λύσεις που βρίσκονται με τις δύο μεθόδους, η ACCPM βρήκε μια καλύτερη λύση για τα 20προβλήματα δοκιμής, η μέθοδός μας βρήκε καλύτερη λύση για τα 3 προβλήματα και το κόστος ήταν ίδιο για 4 προβλήματα. Το μέσο χάσμα βελτιστοποίησης ήταν 0.76% (μέγιστο = 0.99%) για τη ACCPM και 1.19% (μέγιστο = 2.53%) για τη μέθοδό μας.

Η ACCPM έχει το σημαντικό πλεονέκτημα να βρίσκει τα χαμηλότερα όρια στο βέλτιστο κόστος του προβλήματος (1). Δυστυχώς, βασισμένοι στα πειράματά μας, φαίνεται ότι ο υπολογισμός της αξίας των χαμηλότερων ορίων είναι πολύ χρονοβόρος. Λόγω αυτού, για δύο περιπτώσεις του προβλήματος (που υποδεικνύονται στον πίνακα 8), είμαστε ανίκανοι να βρούμε τις λύσεις που είναι εγγυημένες να είναι μέσα στο 1% των βέλτιστων μέσα σε 5 ώρες από το χρόνο υπολογισμού. Ο υπολογισμός των χαμηλότερων ορίων περιλαμβάνει την επίλυση των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών. Το δοκιμάσαμε αυτό, αλλά φάνηκε ότι η μείωση του χρόνου που απαιτείται για να υπολογιστούν τα χαμηλότερα όρια ήρθαν εις βάρος ενός μεγαλύτερου αριθμού επαναλήψεων και ο συνολικός χρόνος υπολογισμού δεν ήταν μειωμένος. Αντ' αυτού, για τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις προβλήματος, λύσαμε τα χαμηλότερα όρια των προγραμμάτων ακέραιων αριθμών μέσα στο 0.5% των βέλτιστων. Αυτό μείωσε πολύ το χρόνο υπολογισμού, αλλά τα χαμηλότερα όρια για αυτές τις περιπτώσεις προβλήματος δεν είναι εγγυημένα για να ισχύσουν. Για το προηγούμενο σύνολο πειραμάτων, η εξοικονόμηση κόστους της προσέγγισής μας πέρα από την ανώτατη λύση καθυστερήσεων κυμάνθηκε από 0% (σε 9 περιπτώσεις) ως 8.6% και υπολογίστηκε κατά μέσο όρο στο 3.5%, και για το τελευταίο σύνολο, η εξοικονόμηση κόστους κυμάνθηκε από 0% (σε 9 περιπτώσεις) ως 3.0%, υπολογίζοντας κατά μέσο όρο το 1.0%.

Περίληψη και συμπεράσματα

Αναπτύξαμε μια προσέγγιση λύσης για το πρόβλημα που εμφανίζεται στο μεγαλύτερο μέρος της έρευνας για το σχεδιασμό γύρου και μετατόπισης (πρόβλημα (1)). Μια συνήθης χρησιμοποιημένη προσέγγιση οδηγεί συχνά σε ανέφικτες λύσεις στο πρόβλημα. Εμείς εξετάσαμε την προσέγγισή μας σε τρία συνολικά προβλημάτων. Το πρώτο σύνολο αντιστοιχεί στις καταστάσεις όπου η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος αποδείχτηκε η λιγότερο αξιόπιστη. Σε αυτήν την ρύθμιση, η ανώτατη παραλλαγή καθυστερήσεων της ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μεθόδου παρήγαγε εφικτές λύσεις σε 14 από τα 27 προβλήματα. Η προσέγγισή μας, η οποία είναι εγγυημένη για να παράγει μια εφικτή λύση, οδηγεί στην εξοικονόμηση κόστους έναντι της ανώτατης προσέγγισης καθυστερήσεων στα 27 δοκιμαστικά προβλήματα, που κυμαίνονται από 1.4% έως 10.4%. Για τα άλλα δύο σύνολα πειραμάτων, η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος διενεργείται σχετικά καλύτερα, αλλά εντούτοις η προσέγγισή οδηγεί στην ιδιαίτερη εξοικονόμηση κόστους σε πολλές περιπτώσεις. Για το πρώτο σύνολο πειραμάτων, συγκρίναμε επίσης την προσέγγισή μας με τη ACCPM, μια προσέγγιση που παρέχει τα χαμηλότερα όρια στο ελάχιστο κόστος και αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν συνολικά βέλτιστες λύσεις. Με βάση τα χαμηλότερα όρια στην ACCPM, οι λύσεις από την προσέγγισή μας ήταν γενικά μέσα στο 2% των βέλτιστων και λήφθηκαν σε λιγότερο χρόνο από τις λύσεις στη ACCPM.

Πίνακας 8 Σύγκριση της μεθόδου και ACCPM μας

μ	r	δ	Our method			ACCPM					Optimality gaps	
			$C(x_3)$	min $SL(t)$ (%)	Comp. time (min.)	$C(x_5)$	min $SL(t)$ (%)	$C(x_6)$	min $SL(t)$ (%)	Comp. time (min.)	ACCPM (%)	Our method (%)
1	16	0.25	256	80.6	0.92	480	99.87	252.5	80.12	43.92	0.60	1.99
1	16	0.5	263	81.0	0.41	332.5	87.62	259.5	80.94	5.33	0.58	1.94
1	16	1	266	80.6	0.29	329	88.84	264	80.02	1.04	0.00	0.76
1	32	0.25	470	80.3	1.64	864	99.95	470	80.55	42.69	0.97	0.97
1	32	0.5	486.5	80.8	0.77	590	81.26	482	80.89	6.61	0.94	1.88
1	32	1	494	80.3	0.76	577	80.02	493	80.61	1.77	0.61	0.82
1	64	0.25	894.5	80.4	5.31	1227.5	86.68	891	80.25	94.80	0.62	1.02
1	64	0.5	924.5	81.2	2.23	1060	81.56	914	80.01	16.51	0.66	1.82
1	64	1	943	80.4	2.19	1048	80.41	943	81.45	4.04	0.86	0.86
2	16	0.25	266	80.6	0.93	480	99.50	264.5	80.31	25.22	0.95	1.53
2	16	0.5	273	81.2	0.34	337	86.79	273	80.01	7.01	0.92	0.92
2	16	1	282	80.1	0.26	346	84.31	282	80.75	1.13	0.71	0.71
2	32	0.25	506	81.9	2.23	864	99.66	496	80.46	157.66	0.51	2.53
2	32	0.5	511	80.2	0.76	624.5	86.95	509.5	80.30	6.27	0.79	1.09
2	32	1	536	80.6	0.70	616	83.15	533	80.07	1.70	0.95	1.52
2	64	0.25	947.5	80.0	5.01	1632	99.92	946.5	80.14	59.74	0.91[a]	1.01[a]
2	64	0.5	965	80.1	1.81	1200	81.01	969	78.73	10.28	0.99	0.57
2	64	1	1016	80.4	1.70	1163	80.45	1018	80.46	4.04	0.99	0.79
4	16	0.25	272.5	80.9	0.85	480	99.24	271	80.16	29.87	0.93	1.49
4	16	0.5	278.5	80.4	0.35	353.5	82.30	277	80.57	4.69	0.91	1.46
4	16	1	292	80.7	0.30	367	82.67	290	80.07	1.20	0.35	1.04
4	32	0.25	510.5	80.7	1.67	864	99.39	508.5	80.25	193.21	0.59	0.99
4	32	0.5	520.5	80.0	0.67	621.5	83.16	519	80.85	79.72	0.78	1.07
4	32	1	545	80.1	0.53	692	82.89	548	81.43	2.56	0.92	0.37
4	64	0.25	970	80.3	4.89	1632	99.80	968.5	80.60	273.05	0.89	1.04
4	64	0.5	993.5	80.0	1.52	1197	84.25	990.5	80.52	8.16	0.56[a]	0.86[a]
4	64	1	1049	80.8	1.32	1319	81.59	1048	80.86	5.70	0.96	1.06

Η προφανέστερη χρήση για την προσέγγισή μας είναι στις καταστάσεις όπου η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος είναι γνωστή για να παράγει λύσεις, όπου οι περιορισμοί επιπέδων εξυπηρέτησης δεν ικανοποιούνται. Εντούτοις, η προσέγγισή μας μπορεί επίσης να οδηγήσει στη εξοικονόμηση κόστους σε άλλες καταστάσεις, όπου η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος είναι αξιόπιστη, αλλά μη βέλτιστη. Επιπλέον, η προσέγγισή μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επαλήθευση: Εάν η ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδος είναι αρκετά ακριβής, τότε η προσέγγισή μας θα ολοκληρωθεί μετά από μία επανάληψη, αποδεικνύοντας ότι η λύση από την ΄΄κατά προσέγγιση΄΄ μέθοδο είναι εφικτή και βέλτιστη λύση στο πρόβλημα (1).

Ένα σημαντικό ζήτημα είναι εάν οι περιορισμοί επιπέδων εξυπηρέτησης πρέπει να ισχύουν πάντα ή να αθροιστούν κατά τη διάρκεια ενός μακρύτερου χρονικού διαστήματος. Η διατύπωσή μας έχει τον περιορισμό ενός επιπέδου εξυπηρέτησης ανά περίοδο προγραμματισμού. Ο σκοπός τέτοιων περιορισμών θα μπορούσε να παράσχει ένα συνεπές επίπεδο υπηρεσίας με την πάροδο του χρόνου. Όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι χαμηλότερο από το επιθυμητό, οι πελάτες είναι πολύ πιθανό να φύγουν ή να μην επιστρέψουν στο μέλλον. Όταν το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι υψηλότερο από το επιθυμητό, οι προσδοκίες των πελατών μπορεί να αυξηθούν σε τέτοιο επίπεδο που η οργάνωση να μη μπορεί να τις στηρίξει. Αυτά τα επιχειρήματα προτείνουν ότι κάποιος πρέπει να ελαχιστοποιήσει τις παραλλαγές στο επίπεδο εξυπηρέτησης. Ένας περιορισμός στο ελάχιστο επίπεδο εξυπηρέτησης μαζί με την ελαχιστοποίηση δαπανών, όπως στο πρόβλημα (1), θα είναι μερικές φορές επαρκές για αυτό το στόχο. Εντούτοις, ένα αυστηρό όριο στο στιγμιαίο επίπεδο εξυπηρέτησης θα μπορούσε να είναι αντιπαραγωγικό και η προσέγγισή μας μπορεί να χειριστεί τέτοιες εναλλακτικές λύσεις επιτρέποντας στο επίπεδο εξυπηρέτησης να μειωθεί κάτω από το επιθυμητό ελάχιστο για σύντομα χρονικά διαστήματα ή περιορίζοντας το μέσο επίπεδο εξυπηρέτησης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου προγραμματισμού, παρά το ελάχιστο στιγμιαίο επίπεδο εξυπηρέτησης. Το ελάχιστο επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης θα μπορούσε επίσης να ποικίλει με το χρόνο, επειδή οι πελάτες μπόρεσαν να είναι πιο ανεκτικοί στην αναμονή, παραδείγματος χάριν, το βράδυ.

Η μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να βοηθήσει στην επίλυση διάφορων αλγορίθμων και σε προβλήματα που αφορούν χρονοπρογραμματισμό.

1.Πώς να παράγεις προγράμματα με τη χρησιμοποίηση μιας προσέγγισης heuristic ή μιας προσθήκης περιορισμού προγραμματισμού ακέραιων αριθμών (ή περικόπτωντας ένα εναλλακτικό heuristic) , το οποίο εξετάζει ένα σχετικό πρόβλημα πολλών διαστάσεων). Επίσης, προσθέτηκαν περικοπές βασισμένες σε υπολογιστικές υπό-κλίσεις του επιπέδου εξυπηρέτησης. Αυτή η προσέγγιση θα εγγυάται μια βέλτιστη λύση εάν το επίπεδο υπηρεσίας είναι μια κοίλη λειτουργία της στελέχωσης,(η οποία δεν είναι). Ένα πλεονέκτημα των περικοπών μας είναι ότι απαιτούν μόνο την αξιολόγηση ενός επιπέδου εξυπηρέτησης, ενώ η εκτίμηση των υπο-κλίσεων χρησιμοποιώντας μια πεπερασμένη προσέγγιση διαφοράς απαιτεί μια αξιολόγηση για κάθε περίοδο προγραμματισμού. Οι περικοπές μας θα μπορούσαν να γενικευτούν για να καθορίσουν μια εφικτή περίοδο όπου επιτυγχάνονται οι διευκρινισμένοι στόχοι σχετικά με το επίπεδο εξυπηρέτησης, η πιθανότητα της εγκατάλειψης και η πιθανότητα του φραξίματος. Εφ' όσον μπορεί να ταξινομηθεί κάθε περίοδος προγραμματισμού ως εφικτή ή ανέφικτη και εφ' όσον μπορεί οποιαδήποτε ανέφικτη περίοδος να γίνει εφικτή με την αύξηση του προσωπικού, ο προγραμματισμός ακέραιων αριθμών heuristic ισχύει.

2.Πώς να αξιολογήσεις ένα πρόγραμμα με τη χρησιμοποίηση της προσομοίωσης ή της αναλυτικής προσέγγισης. Η προσομοίωση έχει το πλεονέκτημα της γενικότητας, αλλά οι αναλυτικές προσεγγίσεις πρέπει να εξεταστούν σοβαρά. Σε σύγκριση προσομοίωσης, έχουν το πλεονέκτημα ότι ο θόρυβος στις εκτιμήσεις του επίπεδο εξυπηρέτησης δεν είναι ένα ζήτημα. Όπως έχουμε παρουσιάσει, τα χρονικά μεταβαλλόμενα δεδομένα και τα παροδικά αποτελέσματα μπορούν να αντιμετωπιστούν αναλυτικά, με τη χρησιμοποίηση μιας αριθμητικής προσέγγισης. Άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι η πειθαρχία που απαιτείται όταν τελειώνουν οι κεντρικοί υπολογιστές τις βάρδιες τους. Η προ-αγοραστική πειθαρχία που χρησιμοποιήσαμε θα είναι μερικές φορές μη ρεαλιστική. Μία πιθανή εναλλακτική λύση είναι η εξαντλητική πειθαρχία υπηρεσιών, όπου οι κεντρικοί υπολογιστές ολοκληρώνουν την τρέχουσα υπηρεσία πριν φύγουν.

3.Το όφελος της χρησιμοποίησης των στενών χαμηλότερων ορίων. Τέτοια όρια μπορούν να επιταχύνουν τη σύγκλιση οποιουδήποτε προγραμματισμού-βασισμένου στον ακέραιο αριθμό heuristic που επαναλαμβάνεται μεταξύ της στελέχωσης και του σχεδιασμού (βήματα 2 και 3 στην παράγραφο 1).

4.Συνδυασμός των μεθόδων. Οι υπολογισμοί με τη ACCPM προτείνει ότι ο συνδυασμός της με τη μέθοδό μας θα μπορούσε να είναι μια καρποφόρα στρατηγική. Η μέθοδός μας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να παράγει γρήγορα μια κοντινή, βέλτιστη και εφικτή λύση. Αυτή η λύση θα μπορούσε έπειτα να χρησιμοποιείται ως αρχική λύση από τη ACCPM, η οποία θα μπορούσε να βελτιώσει τη λύση περαιτέρω και να παρέχει τα χαμηλότερα όρια στο κόστος λύσης.

Πίνακας εικόνων

Βιβλιογραφία

(n.d.). *European journal of Operation Research* .

E.L., L. *Branch and Bounds Methods.*

Generalized Benders Decomposition Journal of Optimmization Theory and Application.

Greenberg. *Integer Programming. Academinc Press.*

Lagrangian Relaxation and its Uses in Integer Programming "Mathematical Programming Study".

M.L., B. *Integer Programming Methods, Uses, Computation "Managment Science".*

McCarl. *Benders Decomposition. Purdue Univercity Agricultural Experiment Station Bulletin.*

OR-Notes. (n.d.). *Integer programming*. Ανάκτηση από Integer programming: http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/ip.html

P.L., H. *Studies in Integer Programming.*

Perry Gray, W. H. (n.d.). *Mixed Integer Programming*. Ανάκτηση από Mixed Integer Programming: http://www.cs.sandia.gov/opt/survey/mip.html

Trick, M. A. (n.d.). *A Tutorial on Integer Programming*. Ανάκτηση από A Tutorial on Integer Programming: http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/integer/integer.html

Wiki. (n.d.). *Integer Programing*. Ανάκτηση από http://en.wikipedia.org/wiki/Integer_programming

Ακέραιος Προγραμματισμός. (n.d.). Ανάκτηση από Ακέραιος Προγραμματισμός: http://dsslab.cs.unipi.gr/attachments/071_%5Bsl7%5D-MP.pdf

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, Σ. Ε. (n.d.). *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ*. Ανάκτηση από ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ: http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/integer%20programming.pdf

Ζλατάνος. (n.d.). *Εναλλακτικές μέθοδοι μερικής απαρίθμησης σε προβλήματα ακεραίου προγραμματισμού*. Ανάκτηση από Εναλλακτικές μέθοδοι μερικής απαρίθμησης σε προβλήματα ακεραίου προγραμματισμού: http://vivliothmmy.ee.auth.gr/43/

Θρησκευμάτων, Υ. Ε. (n.d.). *Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός*. Ανάκτηση από Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός: http://cgi.di.uoa.gr/~vassilis/aee/L3-IntegerProgramming.pdf

Προγραμματισμός, Μ. (n.d.). *Μαθηματικός Προγραμματισμός* . Ανάκτηση από http://el.science.wikia.com/wiki/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%82_%CE%A0%CF%81%CE%BF%CE%B3%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ