



UNIVERSITY OF PIRAEUS  
DEPARTMENT OF BANKING AND FINANCIAL MANAGEMENT

# “Long Memory in Economic and Financial Time Series”

---

Christos I. Kakavas

Committee :

Dr. Christina Christou (Supervisor)  
Professor George Diakogiannis  
Dr. Staikouras Panagiotis

Piraeus , February 2011

## Περίληψη

Η εργασία αυτή αποτελεί μια έρευνα της κύριας οικονομετρικής εργασίας των long memory διαδικασιών, της fractional integration, καθώς και της εφαρμογής τους σε οικονομικές και χρηματοοικονομικές σειρές. Αναπτύσσει τα χαρακτηριστικά των long memory διαδικασιών στον μέσο, μοντελοποιώντας με ARFIMA διαδικασία και των long memory διαδικασιών στη μεταβλητότητα των σειρών, μοντελοποιώντας με FIGARCH διαδικασία. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε διάφορους εκτιμητές της long memory fractional integration παραμέτρου “d” και εφαρμόζεται ο wols εκτιμητής του Jensen (1999) σε διάφορες οικονομικές και χρηματοοικονομικές σειρές, καταλήγοντας σε χρήσιμα συμπεράσματα.

## Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του Πανεπιστημίου Πειραιώς, αλλά ιδιαίτερα την Dr. Χρίστου Χριστίνα για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση κατά την εκπόνηση αυτής της διατριβής.

## Περιεχόμενα

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	3
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ</b> .....	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - FRACTIONAL INTEGRATION ΚΑΙ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ</b> .....	27
Ενότητα 2.1 - Χρησιμότητα της <i>fractional integration</i> παραμέτρου .....	27
Ενότητα 2.2 - Στασιμότητα και μη στασιμότητα τύπου “Unit Root” .....	29
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – LONG MEMORY IN MEAN</b> .....	33
Ενότητα 3.1 - ARFIMA διαδικασία.....	33
Ενότητα 3.2 - Τρόποι εκτίμηση του <i>long memory in mean</i> .....	39
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – LONG MEMORY IN VOLATILITY</b> .....	44
Ενότητα 4.1 - FIGARCH διαδικασία .....	44
Ενότητα 4.2 - Τρόποι εκτίμησης του <i>long memory in volatility</i> .....	48
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ</b> .....	49
Ενότητα 5.1 - Μέθοδος εκτίμησης της <i>fractional integration</i> παραμέτρου.....	49
Ενότητα 5.2 - Αποτελέσματα εκτίμησης .....	54
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b> .....	57
<b>ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ</b> .....	59

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διαδικασία long memory έχει μεγάλη πρακτική εφαρμογή σε πολλές επιστήμες, όπως υδρολογία (“Hurst effect”), γεωφυσική και μετεωρολογία. Επίσης δεδομένου ότι οι περισσότερες οικονομικές και χρηματοοικονομικές σειρές χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα έχει εφαρμογή και σε τέτοιου είδους μεταβλητές. Η long memory διαδικασία (long memory dependence) φαίνεται να είναι τόσο διαδεδομένη στις οικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές, όπως στη φύση. Η ύπαρξη long memory σε τέτοιες σειρές μπορούμε απλοϊκά να πούμε ότι οι χρηματοοικονομικές αγορές δεν αντιδρούν αμέσως στην πληροφορία που διαχέεται σχετικά με αυτές, αλλά σταδιακά μετά την πάροδο κάποιας χρονικής περιόδου. Επίσης η ύπαρξη long memory σε οικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές είναι κρίσιμης σημασίας στην αποτίμηση παραγώγων προϊόντων, στη διαχείριση χαρτοφυλακίων και στην αντιστάθμιση κινδύνων δεδομένου ότι πολλές τεχνικές αντιστάθμισης κινδύνου βασίζονται στη μεταβλητότητα των σειρών.

Στην έννοια “Fractional Integration”, όταν το  $d$  δεν είναι ακέραιος αριθμός, πρώτοι αναφέρθηκαν οι Hurst (1951) και Mandelbrot & Wallis (1968) αλλά όχι στην οικονομική ή χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Η οικονομική και χρηματοοικονομική βιβλιογραφία στη “Fractional Integration” βασίζεται στην ιδέα ότι πολλές οικονομικές και χρηματοοικονομικές σειρές δεν είναι ούτε  $I(0)$  ούτε  $I(1)$ , ολοκλήρωση (Integration). Συχνά συμβολίζεται με “ $d$ ” ο οποίος μπορεί να μην είναι ακέραιος 0 ή 1 και ενίοτε 2, αλλά κλασματικός. Όταν το  $d$  δεν είναι ακέραιο, έστω  $X_t$  μία σειρά, λέγεται ότι είναι κλασματικά ολοκληρωμένη “fractionally integrated” και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε τέτοιες περιπτώσεις είναι τα fractionally integrated μοντέλα όπως είναι το ARFIMA (AR Fractionally IMA) και FIGARCH (Fractionally IGARCH). Αυτή η έννοια της κλασματικής ολοκλήρωσης στη χρηματοοικονομική και οικονομική βιβλιογραφία φαίνεται ότι προτάθηκε ανεξάρτητα από τους Hosking(1981) και Granger and Joyeux (1980), ενώ ο Beran (1992),

Baillie (1996) και Robinson (1994) ανέπτυξαν λεπτομερές έρευνες για τέτοια μοντέλα.

Η χρησιμότητα των “fractionally integrated” μοντέλων έγκειται στην ευελιξία τους όσον αφορά την εφαρμογή τους σε σειρές οι οποίες επιστρέφουν σε ισορροπία πάρα πολύ αργά και σε άλλες περιπτώσεις όπου ένα ακέραιο  $d$  είναι αρκετά περιοριστικό. Επίσης, παίρνοντας πρώτες διαφορές για να κάνω στάσιμη τη σειρά, ίσως η σειρά αυτή χάσει τη “δύναμη” με την αρχική πετώντας έξω πολλές πληροφορίες, το οποίο δε θα συνέβαινε με ένα μη ακέραιο  $d$ . Σε αυτό το θέμα έχουν αναφερθεί με τις μελέτες τους οι Sowell (1990), Diebold and Rudebusch (1991) και Hassler and Wolteus (1994).

Στη συνέχεια θα κάνουμε μία ανασκόπηση στη βιβλιογραφία του Long Memory, θα αναφέρουμε το ARFIMA και FIGARCH μοντέλα που χρησιμοποιούνται κατά κυριότητα στην μοντελοποίηση της Long Memory σε χρονολογικές σειρές, τις μεταβλητές που έχουν ελεγχθεί, σε ποια κράτη, με ποια μοντέλα και τέλος θα ακολουθήσει το εμπειρικό κομμάτι της εργασίας με την επιλογή συγκεκριμένων χρονολογικών σειρών και εκτιμητή.

Υπάρχουν πολλοί ορισμοί του Long memory. Έστω  $X_t$  μια διαδικασία διακριτής χρονολογικής σειράς, με συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $\rho_j$  στο  $j$  lag, τότε σύμφωνα με τον McLeod και Hipel (1978), μια διαδικασία έχει long memory αν η ποσότητα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^n |\rho_j| \text{ είναι άπειρη,} \quad (1)$$

ή  $f(w)$  είναι άπειρη σε χαμηλές συχνότητες.

Μια στάσιμη και αντιστρέψιμη ARMA διαδικασία έχει αυτοσυσχετίσεις οι οποίες είναι γεωμετρικά απεριόριστες, για παράδειγμα  $|\rho_K| \leq C m^{-K}$ , για μεγάλα  $K$ , όπου  $0 < m < 1$  και είναι ισοδύναμη με μια short memory process.

Οι fractional integrated διαδικασίες είναι long memory διαδικασίες δίνοντας τον παραπάνω ορισμό (1).

Γενικά, μια διαδικασία  $X_t$  λέγεται ότι είναι integrated of order  $d$ , or  $I(d)$  αν:

$$(I - L)^d Y_t = U_t, \quad (2)$$

όπου  $L$  ο lag operator,  $-0.5 < d < 0.5$  και όπου  $U_t$  είναι μια στάσιμη διαδικασία με περιορισμένη και θετική τιμή φάσματος. Μια σημαντική κλάση διαδικασιών είναι όταν η  $U_t$  είναι  $I(0)$  και είναι στάσιμης συνδιακύμανσης.

Για  $0 < d < 0.5$  η διαδικασία είναι long memory όσον αφορά την παραπάνω σχέση (1), οι αυτοσυσχετίσεις είναι όλες θετικές και φθίνει σε υπερβολικό βαθμό.

Για  $-0.5 < d < 0$ , το άθροισμα των απόλυτων τιμών των αυτοσυσχετίσεων της διαδικασίας τείνει να είναι σταθερό, έτσι έχει short memory σύμφωνα με τη σχέση (1). Σε αυτή την περίπτωση μία ARFIMA  $(0, d, 0)$  διαδικασία έχει "intermediate memory" και όλες οι αυτοσυσχετίσεις της, εκτός από το μηδενικό lag, είναι αρνητικές και μειώνονται υπερβολικά στο μηδέν.

Εναλλακτικά, η memory μιας διαδικασίας  $y_t$  μπορεί να αποδοθεί απ' τη συμπεριφορά του αθροίσματος:

$$\sum_{t=1}^T Y_t \quad , \quad (3)$$

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ**

### **Lo (1991)**

Ο Lo το 1991 αμφισβήτησε τις εργασίες των Mandelbort(1971) και Greene και Fielitz( (1977) οι οποίοι μελέτησαν τις αποδόσεις των αμερικανικών μετοχών και βρήκαν ότι υπάρχει long memory. Για την μελέτη τους αυτή χρησιμοποίησαν το R/S test ή Normalized Rescaled range test:

$$Q_t = R_{T/\sigma_{T(q)}}$$

$$\sigma^2_{T(q)} = C_0 + 2 \sum_{j=1}^q W_j(q) G_j ,$$

όπου  $G_j = j^{\text{th}}$  –τάξης αυτοσυσχέτιση του  $Y_t$  ,  $W_j(q)$  είναι το Barlett window weight of  $W_j(q) = 1[j/(q + 1)]$  , for  $q < 1$ .

Ο Lo μελέτησε πάλι τις αποδόσεις των μετοχών όσον αφορά το long memory και έδειξε ότι το παραπάνω στατιστικό R/S test που χρησιμοποίησαν οι Mandelbort και Greene και Fielitz είναι αδύναμο να ξεχωρίσει τη short με τη long memory. Αντί για αυτό το R/S ο Lo χρησιμοποίησε ένα εξελιγμένο R/S με το οποίο έλεγξε το long memory των αποδόσεων των αμερικανικών μετοχών. Το δείγμα της έρευνάς του αποτελούνταν από μηνιαίες και ημερήσιες παρατηρήσεις του CRSP και ισότιμους με αυτόν δείκτες. Τα ημερήσια δεδομένα ήταν διαθέσιμα από τον Ιούλιο του 1962 έως τον Δεκέμβριο του 1987(6409 παρατηρήσεις) και τα μηνιαία στοιχεία από τον Ιανουάριο του 1926 έως τον Δεκέμβριο του 1987(744 παρατηρήσεις). Ο Lo έδειξε ότι δεν υπάρχει μεγάλη ένδειξη για ύπαρξη long memory στις αποδόσεις των μετοχών του Αμερικάνικου χρηματιστηρίου και υποστηρίζει ότι το long memory είναι ένα χαρακτηριστικό που παρατηρείται πιο συχνά μακροοικονομικές μεταβλητές. Στη συνέχεια οι Willinger , Taqqu και Teverovsky(1999) κριτίκαραν τον Lo για την παραπάνω εργασία του και έδειξαν με αριθμητικές προσημειώσεις ότι το τροποποιημένο R/S του Lo και οι αποδόσεις των μετοχών που μελέτησε ο Lo δεν παρουσιάζουν long memory. Βλέπουμε , λοιπόν , τις «μάχες» που γίνονται με τις μελέτες σχετικά με το αν οι αποδόσεις των μετοχών χαρακτηρίζονται από long memory. Αν και για τις αποδόσεις των μετοχών οι απόψεις δίστανται στη βιβλιογραφία είναι ευρέως αποδεκτό ότι η μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών είναι long memory διαδικασία.

### **Cheung (1993)**

Ο Cheung εξετάζει τις συναλλαγματικές ισοτιμίες αν χαρακτηρίζονται από long memory. Χρησιμοποιεί το Geweke-Porter-Hufak (GPH) test για να ανιχνεύσει την ύπαρξη long memory στις συναλλαγματικές ισοτιμίες και χρησιμοποιεί το (autoregressive fractionally integrated moving average (ARFIMA) μοντέλο, τονίζοντας βέβαια την αδυναμία του μοντέλου αυτού να μοντελοποιήσει τη μεταβλητότητα του χρόνου στις σειρές. Μελετά την ισοτιμία του Δολαρίου Αμερικής USD με την Στερλίνα του Ηνωμένου Βασιλείου, το Μάρκο της Γερμανίας, το φράγκο της Ελβετίας, το φράγκο της Γαλλίας και το Γιεν της Ιαπωνίας. Οι παρατηρήσεις που χρησιμοποιεί είναι εβδομαδιαίες από τον Ιανουάριο του 1974 έως τον Δεκέμβριο του 1989. Τα αποτελέσματα της έρευνάς του συνεπάγονται την ύπαρξη long memory στις συναλλαγματικές ισοτιμίες, το οποίο οφείλεται (κατ' εκτίμηση του συγγραφέα) στην εξάρτησή τους με τις τιμές του κάθε κράτους και στο ότι οι μακροοικονομικοί παράγοντες (εξαγωγές, οικονομία γενικότερα κ.α.) ίσως είναι fractionally integrated.

### **Baillie Bollers & Mikkelsen (1996)**

Ανέπτυξαν μια νέα κλάση μοντέλων, τις fractionally integrated generalized autoregressive condition heteroscedasticity διαδικασίες (FIGARCH). Το μοντέλο αυτό θα το αναφέρουμε αναλυτικά παρακάτω. Οι Baillie Bollers & Mikkelsen(1996) εφάρμοσαν το μοντέλο αυτό για να εκτιμήσουν το χαρακτηριστικό του long memory στην μεταβλητότητα της ισοτιμίας Γερμανικού Μάρκου – Δολαρίου Αμερικής. Το δείγμα τους αποτελούνταν από ημερήσιες παρατηρήσεις από τον Μάρτιο του 1979 έως τον Δεκέμβριο του 1992 (3454 παρατηρήσεις). Καταλήγουν ότι η μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας χαρακτηρίζεται από long memory, η οποία μοντελοποιείται καλύτερα με το μοντέλο αυτό σε σχέση με το IGARCH και ARFIMA εκτιμώντας την επιρροή ενός σοκ στην πρόβλεψη της υπό όρους διακύμανση. Αυτή η παραμετροποίηση επιβάλλει μια ρεαλιστική μικρή μείωση έτσι ώστε το αποτέλεσμα ενός σοκ στη μεταβλητότητα τελικά να εξαφανίζεται. Τελικά προτείνουν ότι ένας



πιθανός λόγος που κρύβεται πίσω από τα long memory χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών, είναι ότι εξαρτώνται από πολλές ξεχωριστές αυτοσυσχετούμενες μεταβλητές.

### **Richard Baillie (1996)**

Προτείνει μια διαφορετική οπτική γωνία των long memory διαδικασιών, η οποία βασίζεται σε μια σειρά εμπειρικών ευρημάτων αρκετών ερευνητών. Σύμφωνα με τον Baillie κάποιος ερευνητής μπορεί να αναγνωρίσει την ύπαρξη long memory από την ύπαρξη των παρατηρούμενων αυτοσυσχετίσεων. Το μέγεθος των αυτοσυσχετίσεων είναι ανάλογο με αυτό των στάσιμων διαδικασιών αλλά οι αυτοσυσχετίσεις αυτές μειώνονται με πιο αργό ρυθμό σε σχέση με μια ARMA διαδικασία. Όσον αφορά τους εκτιμητές, στη συγκεκριμένη έρευνα, έχουν την ευελιξία να επικεντρωθούν στην παράμετρο που μας ενδιαφέρει και να αγνοήσουμε τα short memory αποτελέσματα. Πολλές όμως πρόσφατες έρευνες έχουν κριτικάρει έντονα αυτούς τους εκτιμητές. Ο συγγραφέας τονίζει ότι πρόσφατα το περισσότερο ενδιαφέρον των ερευνητών έχει περιοριστεί σε μονοπαραγοντικές διαδικασίες, το πραγματικό πλεονέκτημα των fractional μοντέλων ίσως θα έχουν να κάνουν με την παρουσίαση των σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και των τεστ των μορφών της fractional cointegration. Το πόσο σημαντικό είναι αυτό μπορεί να προσδιοριστεί από το κατά πόσο τέτοια συμπεριφορά έχει βρεθεί σε πραγματικά δεδομένα. Μερικές εφαρμογές στο asset pricing πρόσφατα πρότειναν αυτή την πιθανότητα, αλλά έχει γίνει ελάχιστη εμπειρική εργασία πάνω σ' αυτό το θέμα. Τέλος ο συγγραφέας αναφέρει ότι πρόσφατα αρκετοί ερευνητές έχουν τονίσει την ύπαρξη long memory στις απόλυτες τιμές των αποδόσεων και στη μεταβλητότητα των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων τα οποία έχουν υψηλή συχνότητα. Αυτό οδήγησε στη δημιουργία των FIGARCH διαδικασιών. Η τελευταία εφαρμοσμένη εργασία από αυτή τη σκοπιά είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντική με τη long memory volatility process να εμφανίζεται σαφώς ανώτερη από οποιαδήποτε άλλη παραμετροποίηση. Το μέλλον του long memory στην υπό όρους διακύμανση σχεδόν ταυτίζεται με τη long

memory στο μέσο των επιτοκίων , στα forward premia και ίσως έχουν σημαντική συνεισφορά στο “pricing of risk “.

### **Tim Bollerslev , Hans Ole Mikkelsen (1966)**

Συζητούνται νέας κλάσης Fractionally Integrated GARCH και EGARCH μοντέλα για τον χαρακτηρισμό της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών αγορών. Χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo για να εξηγηθεί η αξιοπιστία των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας , της επιλογής κατάλληλων κριτηρίων του μοντέλου , και των διαγνωστικών τεστ για τα κατάλοιπα. Νέα εμπειρικά ευρήματα προτείνουν ότι η εμφανής long-run εξάρτηση στη μεταβλητότητα των US stock market περιγράφεται καλύτερα από μια mean-reverting fractionally integrated διαδικασία , έτσι ώστε ένα σοκ στην εκτίμηση της υπό όρους διακύμανσης να εξαφανίζεται με υπερβολικά αργό ρυθμό.

### **Andersen and Bollerslev (1997)**

Μελέτησαν την ύπαρξη long memory στη συναλλαγματική ισοτιμία και πιο συγκεκριμένα στη μεταβλητότητα της spot συναλλαγματικής ισοτιμίας Μάρκου Γερμανίας - Δολαρίου Αμερικής χρησιμοποιώντας δυο συχνότητες εκτιμητές. Χρησιμοποίησαν δείγμα το οποίο αποτελούνταν από αποδόσεις ανά πέντε λεπτά για ένα χρόνο ( περίπου 74.880 παρατηρήσεις). Αναλύοντας το φάσμα της συχνότητας , βρέθηκε ότι στα μικρού μεγέθους ημερήσιες συχνότητες , υπάρχει το χαρακτηριστικό του long memory στη μεταβλητότητα εκτίμησαν την παράμετρο  $d$  χρησιμοποιώντας δυο εκτιμητές του GPH εκτιμητή και αυτού του Robinson ( 1994). Επίσης δείξαν ότι το ενδιάμεσο  $d^*$  που φτιάχτηκε απ' το εκτιμώμενο  $d$  , είναι ικανό να φιλτράρει τις long-run εξαρτήσεις. Επομένως ένα ειδικά κατασκευασμένο φίλτρο στη συχνότητα σχεδόν εξαφανίζει την ισχυρή επίδραση της μεταβλητής σε ημερήσιες παρατηρήσεις και μπορούμε να μειώνουμε αρκετά τις αυτοσυσχετίσεις και να αποδείξουμε την ύπαρξη long memory στην μεταβλητότητα των

συναλλαγματικών ισοτιμιών. Στην κατάληξη της έρευνας τους αναφέρουν ότι τα χαρακτηριστικά του long memory σε μια χρονολογική σειρά αποτελούν ένα χαρακτηριστικό διαδικασιών οι οποίες παράγουν αποδόσεις παρά ένα χαρακτηριστικό περιστασιακής διαθρωτικής αλλαγής.

### **Teyssiere (1998)**

Χρησιμοποιεί εναλλακτικά πολυπαραγοντικά long memory μοντέλα και εξετάζει τη long term εξάρτηση και τη δυναμική της μεταβλητότητας στις συναλλαγματικές ισοτιμίες ο Teyssere χρησιμοποιεί το FIGARCH με σταθερή αυτοσυσχέτιση και το ARCH μοντέλο, ως ένα χωρίς περιορισμούς πολυπαραγοντικό long memory μοντέλο. Ο λόγος της διαφοροποίησης του ARCH μοντέλου έγκειται, κατά τον συγγραφέα, σε ένα πολυπαραγοντικό μοντέλο, δηλαδή ότι πολλές χρονολογικές σειρές φαίνεται να μοιράζονται ένα συνηθισμένο βαθμό long memory στις υπό όρους διακυμάνσεις τους. Η παραμετροποίηση του FIGARCH έγινε με τη λογική ότι οι υπό όρους συσχετίσεις είναι ανάλογες με τις ενδιάμεσες υπό όρους τοπικές αποκλίσεις. Τα δεδομένα του αποτελούσαν από τρεις σειρές – συναλλαγματικές ισοτιμίες USD/DM, USD/GBP και USD/JPY για κάθε 30 λεπτά. Συνολικός αριθμός παρατηρήσεων 12528. Πρώτα χρησιμοποίησε μονοπαραγοντικά long memory μοντέλα για να εξετάσει την ύπαρξη long memory σε κάθε σειρά χωριστά. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε ένα FIGARCH μοντέλο με τρεις παράγοντες για να εξετάσει τον κοινό βαθμό long memory στην υπό όρους διακύμανση. Επίσης τόνισε ότι για να είναι σωστή η μοντελοποίηση θα πρέπει να ληφθεί υπόψη, με κάποιον τρόπο, στο μοντέλο, η εποχικότητα των σειρών και μετά η εκτίμηση του long memory. Απ' την εκτίμηση των δυο παραπάνω εναλλακτικών πολυπαραγοντικών μοντέλων φαίνεται να υπερτερεί το χωρίς περιορισμούς FIGARCH. Οι τρεις σειρές εμφανίζουν τον ίδιο βαθμό long memory. Τέλος ο συγγραφέας αναφέρει ότι το FIGARCH μοντέλο είναι ανεπαρκές να εκτιμήσει τον εποχικό παράγοντα της μεταβλητότητας και αυτό φαίνεται απ' τη σημαντικότητα των συσχετίσεων στα τετραγωνικά σφάλματα και των δυο FIGARCH

μοντέλων. Πιθανότατα, μία λύση σ' αυτό το πρόβλημα είναι η χρήση διαφορετικών κλιμάκων χρόνου.

### **Bollerlev & Mikkelsen (1999)**

Μελετούν τη δυναμική της μεταβλητότητας της αγοράς μετοχών. Η μελέτη αυτή συμπληρώνει την βιβλιογραφία σχετικά με την ύπαρξη long-term εξάρτησης στη μεταβλητότητα των αγορών μετοχών και έμμεσα αναφέρει το βαθμό το  $d$  (fractional integration) στη συνολική αγορά. Χρησιμοποιεί ένα πάνελ δεδομένων με τιμές χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων (options) με υποκείμενο τίτλο τη τιμή του δείκτη S&P 500. Τα δεδομένα αποτελούνται από τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος για όλα τα CBOE (Chicago Board of Options Exchange) που διαπραγματεύονται τα S&P 500 long term συμβόλαια (leaps) για 141 εβδομάδες, από τον Ιανουάριο 1991 έως τον Σεπτέμβριο του 1993. Ξεκίνησαν τη μελέτη τους με μια ανασκόπηση των θεωρητικών τιμών των δικαιωμάτων αναφέροντας τον αντίκτυπο της μεταβλητότητας των προβλέψεων στη δημιουργική φόρμουλα για τη θεωρητική τιμή των δικαιωμάτων. Επίσης χρησιμοποιούν ως Benchmark μοντέλο το Black and Scholes (1973) για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων, το οποίο υποθέτει σταθερή διακύμανση και συνεχούς χρόνου διαδικασία τυχαίου περιπάτου (random walk) για την τιμή του υποκειμένου τίτλου. Για την εκτίμηση των θεωρητικών τιμών των leaps χρησιμοποιούν προσομοίωση Monte Carlo. Υπολογίζουν τις τιμές των leaps με δύο συχνότητων δεδομένα, ημερήσια και εβδομαδιαία και τα συγκρίνουν με τα εμπειρικά τους ευρήματα. Επίσης συγκρίνουν τις παρατηρούμενες τιμές των leaps με τις θεωρητικές τις οποίες υπολογίζουν με EGARCH, IEGARCH, FIGARCH και FIEGARCH μοντέλα. Υπολογίζουν το Bias, τα Μέσα Απόλυτα Σφάλματα (Mean Absolute Errors) και τα μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα από διάφορα μοντέλα συγκρίνοντας τις πραγματικές τιμές των leaps με τη θεωρητική τιμή ουδέτερου κινδύνου ενός ARCH. Εν κατακλείδι, η αποτίμηση των leaps δείχνει ότι το FIEGARCH μοντέλο δημιουργεί τις πιο ακριβείς τιμές και για τις δύο συχνότητες δεδομένων (ημερήσια και εβδομαδιαία). Όλα τα αποτελέσματα συγκλίνουν στην ύπαρξη long

memory στη μεταβλητότητα της αγοράς μετοχών στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής.

### **Baillie Cece and Han (2000)**

Μελετούν με FIGARCH μοντέλο τη long memory στη μεταβλητότητα των spot αποδόσεων της συναλλαγματικής ισοτιμίας Deutschemark/ US dollar με δύο διαφορετικές συχνότητες δεδομένων. Το πρώτο σετ παρατηρήσεων αποτελείται από ημερήσιες παρατηρήσεις από το Μάρτιο του 1979 έως το Δεκέμβριο του 1998 (4.989 παρατηρήσεις) και αποτελεί τη χαμηλή συχνότητα. Το δεύτερο σετ αποτελείται από παρατηρήσεις με υψηλότερη συχνότητα, παρατηρήσεις 30 λεπτών από 1η Ιανουαρίου 1996 έως την 1η Ιανουαρίου 1997 (12.576 παρατηρήσεις). Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν σχεδόν την ίδια εκτιμηθείσα long memory στη μεταβλητότητα των αποδόσεων και για τις δύο διαφορετικές συχνότητες παρατηρήσεων. Αυτό αποδεικνύει ότι τα αποτελέσματα προέρχονται από μία συνηθισμένη διαδικασία παραγωγής αποδόσεων και υποστηρίζει το γεγονός ότι το long memory είναι ένας εσωτερικός παράγοντας του συστήματος και δεν προκαλείται από εξωγενή σοκ ή άλλες αλλαγές. Επίσης συγκρίνεται το FIGARCH μοντέλο με το GARCH μέσω του κλασικού Wald τεστ. Το Wald τεστ και άλλα παρόμοιά του επιβεβαιώνουν την υπεροχή και δύναμη των long memory για τη μεταβλητότητα μοντέλων. Συχνά όμως η ενδοημερήσια περιοδικότητα επηρεάζει κατά πολύ τις αυτοσυσχετίσεις στις τετραγωνικές και απόλυτες αποδόσεις. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται συχνά στο άνοιγμα των ευρωπαϊκών αγορών, της Ασίας και της Βόρειας Αμερικής, όπου υπάρχει μεγάλος βαθμός επίδρασης και αλληλεξάρτησης μεταξύ αυτών. Αυτή η εποχικότητα των σειρών φιλτράρεται χρησιμοποιώντας τη Flexible Fournier Form μέθοδο, όπου εκτιμάται η ενδοημερήσια εποχικότητα και στη συνέχεια χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν οι φιλτραρισμένες αποδόσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται δύο τεστ για να δούμε αν υπάρχουν ακόμη μη γραμμικές εξαρτήσεις στα κατάλοιπα των FIGARCH MA (1) μοντέλων. Το πρώτο βασίζεται στα ολοκληρώματα συσχέτισης και στο μέγεθος της συσχέτισης και παρατηρούνται συνήθως στη φυσική,

αλλά απαιτούν ένα αρκετά μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων για να είναι αξιόπιστα. Το άλλο καλείται BDS τεστ που χρησιμεύει στην εύρεση και διάκριση σειρών οι οποίες είναι integrated και σειρές οι οποίες είναι στοχαστικές ή ντετερμινιστικές. Και με τα δύο τεστ δε φαίνεται να παραμένει η μη γραμμικότητα στα κατάλοιπα των μοντέλων. Η κατάληξη της έρευνας είναι ότι το FIGARCH μοντέλο φαίνεται ότι είναι επιτυχημένο στον υπολογισμό της δυναμικής των αποδόσεων των σειρών οι οποίες μελετούνται ανεξάρτητα απ' την συχνότητα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται στις εκτιμήσεις.

### **Brunetti & Gilbert (2000)**

Εκτιμούν ένα διδιάστατο FIGARCH μοντέλο και κάνουν τεστ για fractional cointegration. Παρουσιάζουν αναλυτικά τη μεθοδολογία για τη δημιουργία ενός cointegration τεστ σε πολυδιάστατο FIGARCH μοντέλο και παρουσιάζουν λεπτομερώς την cointegration θεωρία. Αρχικά εκτιμούν τα fractional  $d_1$ ,  $d_2$  με τη βοήθεια μονοπαραγοντικών μοντέλων, όπως ARFIMA μοντέλα στις τετραγωνικές αποδόσεις, είτε FIGARCH μοντέλα. Αν οι δύο διαδικασίες είναι fractional, τότε κάνουν τεστ στη μηδενική υπόθεση  $H_0: d_1 = d_2$ , με FIGARCH μοντέλο (restricted diagonal, unrestricted diagonal).

Αν  $d_1 = d_2$ , κάνουν τεστ για fractional cointegration χρησιμοποιώντας το ARFIMA με τις τετραγωνικές και απόλυτες αποδόσεις.

Αν υπάρχει fractional cointegration, εκτιμούμε τον μηχανισμό διόρθωσης σφάλματος (error correction term) του διδιάστατου FIGARCH μοντέλου (μοναδικός cointegrating vector).

Στο εμπειρικό κομμάτι οι μελετητές χρησιμοποιούν δεδομένα από τις αγορές NYMEX και IPE αργού πετρελαίου, οι οποίες είναι στενά συνδεδεμένες. Τα δεδομένα αποτελούνται από μηνιαίες παρατηρήσεις από τον Ιούνιο του 1988 έως το Μάρτιο του 1999. Ερευνάται αν η μεταβλητότητα των δύο αγορών είναι fractionally integrated και αν υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας fractional cointegration. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχει long memory στις μεταβλητότητες

των διαδικασιών (volatility processes). Επίσης χρησιμοποιείται το Causality in Variance τεστ στα τετράγωνα των σφαλμάτων τα οποία προκύπτουν από την εκτίμηση μονοπαραγοντικών FIGARCH μοντέλων. Δε φαίνεται να υπάρχει volatility spillovers ανάμεσα στις δύο σειρές.

Τα αποτελέσματα των άλλων τεστ δείχνουν το μεγάλο βαθμό της μεταβλητότητας και την ύπαρξη ενός κοινού βαθμού fractional cointegration ( $d_1 = d_2$ ). Αυτό σημαίνει ότι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο διαδικασιών ίσως είναι λιγότερο «επίμονος» απ' τις μεταβλητότητες ακόμη και αν παραμένει fractional.

Τέλος οι δύο σειρές με διαφορετική μεταβλητότητα είναι fractionally cointegrated με τον NYMEX, η οποία φαίνεται να είναι η κύρια αγορά, όπως απ' την σημαντικότητα των παραμέτρων που εκτιμήθηκαν με το διδιάστατο FIGARCH μοντέλο. Από την εκτίμηση των μονοδιάστατων ARFIMA FIGARCH μοντέλων δεν υπάρχουν σημάδια διπλού long memory στις σειρές.

### **Szilard and Laszlo (2001)**

Αναπτύσσουν ένα πολυδιάστατο διαγώνιο FIGARCH μοντέλο στο οποίο υποθέτουν ότι υπάρχει κοινός παράγοντας fractional integration, υποστηρίζοντας ότι αυτή η παραμετροποίηση είναι η πιο λογική απ' τις άλλες προεκτάσεις των πολυδιάστατων μοντέλων και είναι η πιο ταιριαστή παραλλαγή των πολυδιάστατων μοντέλων για τον έλεγχο της ύπαρξης long memory και fractional διαφοροποίησης σε τέτοιου είδους εργασίες. Για να αποφύγουν ορισμένες δυσκολίες εφάρμοσαν σαν κλίμακα τον παράγοντα κλασματικής διαφοροποίησης  $(1 - L)^d$ , επιβάλλοντας έναν κοινό τρόπο κατασκευής στους long memory παράγοντες. Επίσης τεστάρουν τον QMLE εκτιμητή αυτής της παραμετροποίησης με προσομοίωση Monte Carlo και τα αποτελέσματα είναι αρκετά ικανοποιητικά για τον εκτιμητή αυτόν.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούν είναι ημερήσιες spot συναλλαγματικές ισοτιμίες German Mark, British pound και Japanese yen έναντι του Us dollar από τον Ιούλιο του 1981 έως τον Ιανουάριο του 2001

για να μοντελοποιήσουν την ημερήσια μεταβλητότητα των συναλλαγματικών ισοτιμιών.

Αρχικά εκτιμώνται οι χωρίς περιορισμούς προδιαγραφές του τρισδιάστατου διαγώνιου FIGARCH και υπάρχουν έξι long memory εκτιμητές. Στη συνέχεια εκτιμώνται οι προδιαγραφές με περιορισμούς και συγκρίνονται με τις άλλες.

Τελικά η εκτίμηση της κλιμακωτής long memory παραμέτρου είναι πολύ κοντά στις εκτιμήσεις προηγούμενων εμπειρικών μελετών. Τα μειονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν είναι λογικό να υποθέσουμε ένα κοινό long memory παράγοντα και υπάρχει περιορισμός στη διαγώνιο, ο οποίος δεν μας επιτρέπει τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας όταν έχω volatility spillovers σε δύο σειρές. Παρόλα αυτά έχει μεγάλη θεωρητική και εμπειρική σημασία και μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για περαιτέρω έρευνα στην πολυδιάστατη μοντελοποίηση του long memory in volatility.

### **Vilasuso (2002)**

Μελετά την ακρίβεια των προβλέψεων εναλλακτικών conditional volatility μοντέλων. Χρησιμοποιεί GARCH, IEGARCH και FIGARCH μοντέλα. Το δείγμα αποτελείται από ημερήσια στοιχεία συναλλαγματικών ισοτιμιών: French franc, German mark, Italian lira, Japanese yen, British pound, με το US dollar, από το Μάρτιο του 1979 έως το Δεκέμβριο του 1997. Απ' την αρχική εκτίμηση των μοντέλων διακυμάνσεων φαίνεται ότι το FIGARCH υπερέχει, αντανακλώντας καλύτερα τη δυναμική της μεταβλητότητας των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Στη συνέχεια, ο μελετητής, χρησιμοποιεί τις προηγούμενες εκτιμήσεις και αξιολογεί τις out- of- sample προβλέψεις των μοντέλων για την περίοδο από 1η Ιανουαρίου 1998 έως 31 Δεκεμβρίου 1999. Η μεταβλητότητα των προβλέψεων συγκρίνονται με τα τετράγωνα των ημερήσιων αποδόσεων των συναλλαγματικών ισοτιμιών, με την ακρίβεια των προβλέψεων να προσδιορίζεται με τη βοήθεια του mean square error (MSE) και mean absolute error (MAE). Χρησιμοποιούνται τρεις ορίζοντες προβλέψεων, 1- ημέρας, 5- ημερών και 10- ημερών ορίζοντες. Για όλα τα κριτήρια το



FIGARCH μοντέλο δημιουργεί καλύτερες out- of- sample προβλέψεις, υπερτερώντας με αυτά τα αποτελέσματα τα οποία προέρχονται από μακρά περίοδο προβλέψεων (10 ημέρες).

### **Caporin (2003)**

Αυτή η εργασία προχωράει ένα βήμα πιο πέρα την ανάλυση του Baillie, Bollerslev και Mikkelsen (1996) και Bollerslev και Mikkelsen(1996) στην εκτίμηση και στην αναγνώριση προβλημάτων των Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (FIGARCH) μοντέλων. Εκτιμά τη δύναμη των διάφορων κριτηρίων και τεστ για να αναγνωρίσει την ύπαρξη long memory στις υπό όρους διακυμάνσεις. Η ανάλυση ξεκινά με προσομοίωση Monte Carlo και επικεντρώνεται στο Akaike Hannan-Quinn, Shibata και Schwarz κριτήρια, καθώς και στο Jarque-Ber τεστ κανονικότητας και στο Box-Pierce τεστ για τα κατάλοιπα συσχέτισης. Αυτή η μελέτη επαληθεύει ότι τα κριτήρια ξεχωρίζουν την ύπαρξη long memory ενώ τα τεστ που εφαρμόστηκαν δεν έδειξαν κάποια διαφορά ανάμεσα στα long και short memory μοντέλα.

Στο εμπειρικό κομμάτι τα δεδομένα που χρησιμοποιεί είναι υψηλής συχνότητας και αποτελούνται από παρατηρήσεις στις αποδόσεις του FIB30, του future MIB30 και τον δείκτη των εταιρειών υψηλής κεφαλαιοποίησης της Ιταλικής αγοράς μετοχών.

### **Banerjee& Urga (2005)**

Αναπτύσσουν μια σημαντική εξέλιξη στον τομέα της μοντελοποίησης του Long Memory in Financial Time Series. Ακόμη αναφέρονται στον σύνδεσμο που υπάρχει ανάμεσα στο Long Memory και σε Structural Breaks, παρουσιάζεται ταυτόχρονα μία διάκριση ανάμεσα σε μεθόδους εκτίμησης, οι οποίες προτείνονται για τεστ σχετικά με τη long-range εξάρτηση. Το τεστ αποτελείται από δύο κομμάτια, οι “ημι-παραμετρικοί” και οι “παραμετρικοί” μέθοδοι εκτίμησης και τους ενδιαφέρει η εκτίμηση της παραμέτρου  $d$ . Σε αντίθεση με αυτή την προσέγγιση, οι παραμετρικές τεχνικές εμπεριέχουν την πλήρη εκτίμηση των μοντέλων, όπως είναι το

FIGARCH ή το ARFIMA .Το μειονέκτημα με την παραμετρική περίπτωση είναι ότι χρειάζεται υπολογισμό και είναι επιρρεπής σε έλλειψη προδιαγραφών .Το άρθρο καταλήγει ότι η εκτίμηση της long memory παραμέτρου εξαρτάται απ ' τον αριθμό των απότομων αλλαγών και που αυτές οι αλλαγές βρίσκονται χρονικά μέσα στο δείγμα. Διαδικασίες με σπάνιες αλλαγές ίσως έχουν long memory στις αυτοσυσχετίσεις. Έτσι τα fractional μοντέλα ίσως παρασύρουν τους μελετητές σε ψεύτικα αποτελέσματα.

### **Caylayan and Jiang (2006)**

Αναφέρουν μία παραμετροποίηση για να ερευνήσουν, σε πολυδιάστατο πλαίσιο, τις ιδιότητες της διπλής long memory του πληθωρισμού και του ρυθμού ανάπτυξης καθώς και τη σχέση υπαιτιότητας μεταξύ τους. Χρησιμοποιούν μία νέα κλάση μοντέλων, τα διδιάστατα Constant Conditional Correlation ARFIMA- FIGARCH μοντέλα. Κάτω από αυτή την υπόθεση είναι πιθανόν η long memory στον πληθωρισμό να εξαρτάται απ' τη διαδικασία του ρυθμού ανάπτυξης.

Τα δεδομένα τους αποτελούνται από μηνιαία στοιχεία του Consumer Price Index (CPI) και του Industrial production Index (IPI) για την περίοδο από το Φεβρουάριο του 1957 έως το Μάιο του 2005. Αρχικά με Monte Carlo προσομοιώσεις, υπολογίζουν τα biases, τη ρίζα των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων (root mean square errors) και τα τυπικά σφάλματα των παραμέτρων των μοντέλων. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά ,γιατί οι εκτιμητές QMLE των νέων μοντέλων είναι κοντά στην πραγματική αξία .Για να δουν εκ πρώτης όψεως την ύπαρξη διπλής long memory στις σειρές εκτιμούν μονοδιάστατα μοντέλα. Στη συνέχεια εκτιμούν με διδιάστατα ARFIMA –CCC FIGARCH μοντέλο υποθέτοντας σταθερή συσχέτιση στους συντελεστές. Οι fractional παράμετροι στο μέσο και στη διακύμανση των σειρών που βρέθηκαν απ' το διδιάστατο μοντέλο είναι πολύ κοντά σε αυτές που βρέθηκαν απ' την εκτίμηση των μονοδιάστατων μοντέλων, το οποίο σημαίνει ότι ο πληθωρισμός και η αύξηση της παραγωγής έχουν long memory στο μέσο και στις διακυμάνσεις. Τέλος εξέτασαν την αμφίδρομη σχέση μεταξύ μέσου και

διακυμάνσεων του πληθωρισμού και της αύξησης της παραγωγής. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά τους ο πληθωρισμός προκαλεί μεγαλύτερη μεταβλητότητα στον πληθωρισμό και μείωση του ρυθμού αύξησης της παραγωγής, ενώ η αύξηση της παραγωγής προκαλεί αύξηση στον πληθωρισμό και στη μεταβλητότητά του. Όσον αφορά την μεταβλητότητα της αύξησης της παραγωγής προκαλεί αύξηση του πληθωρισμού και της μεταβλητότητας του πληθωρισμού και της αύξησης της παραγωγής.

### **MORANA (2006)**

Αναλύει τη δυναμική της μεταβλητότητας της συναλλαγματικής ισοτιμίας Deutsche mark-US dollar. Τα δεδομένα του αποτελούνται από ημερήσιες και υψηλής συχνότητας παρατηρήσεις για τη DM/US συναλλαγματική ισοτιμία. Οι χαμηλής συχνότητας παρατηρήσεις είναι από τον Ιανουάριο του 1972 έως τον Δεκέμβριο του 1997, ενώ χρησιμοποιείται και ένα δείγμα από το 1992 έως το 1997. Αυτό το υψηλής συχνότητας δείγμα περιέχει 30 λεπτών παρατηρήσεις για την περίοδο 1992 έως 1997 και ως υπόδειγμα χρησιμοποιείται το έτος 1996. Μελετούν την σημαντικότητα υπολογισμού για structural breaks και για στοχαστικές ενδο-ημερήσιες παρατηρήσεις στη διαδικασία μεταβλητότητας. Πρώτα εκτιμούν το FIGARCH μοντέλο με μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων, για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα της υψηλής συχνότητας δεδομένων με αυτά των ημερήσιων δεδομένων και τελικά να δουν την ποιότητα της οικονομετρικής εκτίμησης διάφορων μοντέλων στην ενδο-ημερήσια μεταβλητότητα. Επίσης γίνεται λόγος και για την εποχικότητα στις FIGARCH εκτιμήσεις. Συμπερασματικά, στις ημερήσιας συχνότητας παρατηρήσεις οι εκτιμήσεις για την long memory παράμετρο είναι μικρότερου μεγέθους όταν το μικρής συχνότητας δείγμα χρησιμοποιείται παρά όταν χρησιμοποιείται το δείγμα μεγαλύτερης συχνότητας. Αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι οι διαρθρωτικές αλλαγές ίσως επηρεάζουν τη long memory στη διαδικασία μεταβλητότητας. Όταν το δείγμα είναι από υψηλής συχνότητας δεδομένα η εκτίμηση για τη long memory παράμετρο είναι μικρότερη για το «υπο-

δείγμα» από την ενδιάμεση εκτίμηση για το μεγαλύτερης συχνότητας δείγμα. Παρ' όλα αυτά, αν εφαρμοστεί ένα φίλτρο για τις ενδο-ημερήσιες παρατηρήσεις στα αρχικά δεδομένα, μία αύξηση στις fractional differencing παραμέτρους παρατηρείται και για το μικρό και για το μεγάλο δείγμα της υψηλής συχνότητας δεδομένων. Αυτό υποδεικνύει τη σπουδαιότητα υπολογισμού των ενδο-ημερήσιων τιμών στις χρονολογικές σειρές. Τέλος αναφέρει ότι τα FIGARCH μοντέλα είναι ευαίσθητα και στο μέγεθος των δεδομένων και στις ενδο-ημερήσιες επαναληπτικές τιμές.

### **Baillie και Morana (2007)**

Εισάγουν μια νέα long memory διαδικασία μεταβλητότητας, την Adaptive FIGARCH η οποία μπορεί να εκτιμήσει και τη long memory και τις διαρθρωτικές αλλαγές στις υπό όρους διαδικασίες διακυμάνσεις. Ουσιαστικά είναι μια προσαρμογή του FIGARCH μοντέλου με δυο παράγοντες, τη long memory διαδικασία μεταβλητότητας και τη ντετερμινιστική διακοπή η οποία ποικίλει στο χρόνο που επιτρέπουν για διακοπή, κύκλους και αλλαγή τάσης. Οι διαρθρωτικές αλλαγές μοντελοποιούνται με τη βοήθεια μιας ευέλικτης συνάρτησης που επιτρέπει στη διακοπή να ποικίλει στο χρόνο. Η εκτίμηση αυτού του μοντέλου μπορεί να γίνει με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας. Χρησιμοποιούν Monte Carlo προσομοίωση για να ερευνήσουν τον αντίκτυπο της εκτίμησης A- FIGARCH μοντέλων με χρήση διαδικασιών με διαφορετικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα ακόλουθα: Σε περιβάλλον χωρίς structural breaks η με A- FIGARCH εκτίμηση έχει κατά προσέγγιση το ίδιο bias (με μικρό δείγμα) με την εκτίμηση του FIGARCH μοντέλου. Σε συνθήκες structural breaks, ο βαθμός του bias στις εκτιμήσεις των long memory παραμέτρων είναι μικρότερος στο A- FIGARCH συγκριτικά με το FIGARCH και για τις τρεις διαφορετικές τιμές της long memory παραμέτρου. Στην εμπειρική έρευνα χρησιμοποιούνται οι αποδόσεις του S&P 500. Το δείγμα αποτελείται από 20863 παρατηρήσεις από τον Ιανουάριο του 1928 έως τον Φεβρουάριο του 2007. Απ' την εκτίμησή τους βρέθηκε ότι αγνοώντας την ύπαρξη

structural breaks, τα αποτελέσματα των bias στην εκτιμώμενη υπό όρους διαδικασία μεταβλητότητας υποδηλώνει την μη χρησιμότητα του μοντέλου διακύμανσης σε αυτό το επίπεδο.

### **Kang and Yoon (2007)**

Εξετάζουν την ύπαρξης διπλής long memory στις αποδόσεις και στη μεταβλητότητα στο Κορεάτικο Χρηματιστήριο. Σύμφωνα με την έρευνα long memory συχνά παρατηρείται ταυτόχρονα και στο μέσο και στη διακύμανση των αποδόσεων. Τονίζουν επίσης ότι οι αποδόσεις των μετοχών ίσως επιδεικνύουν στατιστικά σημαντική ασύμμετρη λεπτοκύρτωση. Χρησιμοποίησαν την Gaussian υπόθεση και τη student's t κατανομή για να βρουν πιθανές ασυμμετρίες και “παχιές ουρές” στις αποδόσεις των αγορών μετοχών. Επικεντρώνονται στην εργασία τους στον έλεγχο αν κάποια συνδυαστική παραμετροποίηση, όπως το ARFIMA - FIGARCH μοντέλο, μπορεί επαρκώς να περιγράψει τη δυναμική της Κορεάτικης αγοράς μετοχών, συγκρίνοντάς τη με τα απλά ARFIMA ή FIGARCH μοντέλα.

Τα δεδομένα του αποτελούνται από ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη KOSPI για μια περίοδο από τον Ιανουάριο του 1980 έως το Δεκέμβριο του 2005 (7.290 παρατηρήσεις) και του KOSDAQ δείκτη από τον Ιούλιο του 1996 έως τον Αύγουστο του 2006 (2.539 παρατηρήσεις). Η εκτίμηση των μοντέλων μεταβλητότητας γίνεται χρησιμοποιώντας μη γραμμική διαδικασία βελτιστοποίησης κάτω από τις υποθέσεις που προαναφέραμε (Gaussian και student's t distribution).

Αρχικά εκτιμούν ARFIMA μοντέλα, στη συνέχεια FIGARCH και ακολούθως ARFIMA - FIGARCH μοντέλα. Τα πρώτα αποτυγχάνουν να υπολογίσουν τη σοβαρή κύρτωση και τα Volatility Clustering effects που χαρακτηρίζουν τα κατάλοιπα, γι' αυτό απορρίπτεται. Η δεύτερη μέθοδος απορρίπτεται καθώς τα FIGARCH μοντέλα απέτυχαν να εντοπίσουν τη χρονική εξάρτηση στις αποδόσεις. Παρόλα αυτά και με τις δύο μεθόδους βρέθηκε long memory στο μέσο και στη μεταβλητότητα των αποδόσεων. Αυτό το φαινόμενο είναι πιο ήπιο στην αποτελεσματική αγορά KOSDAQ

το οποίο ίσως αναδεικνύει την σχέση του long memory με την αποτελεσματικότητα των αγορών.

Τέλος το ARFIMA - FIGARCH μοντέλο φαίνεται ότι ταιριάζει περισσότερο στον έλεγχο της διπλής long memory και για τους δύο προαναφερθέντες Κορεάτικους δείκτες, επιβεβαιώνοντας τους δύο συγγραφείς.

### **Chitkusher and Wang (2008)**

Συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των αποδόσεων του S&P 500 δείκτη σε χρονικά διαστήματα με αυτές που παρήχθησαν με τα μοντέλα “Fractional Brownian Motion” και “ARFIMA - FIGARCH”. Η απόδοση σε ένα χρονικό διάστημα ορίζεται ως ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μεταβλητοτήτων οι οποίες υπερβαίνουν ένα ορισμένο κατώτατο όριο. Για να μελετήσουν τον memory παράγοντα αναλύουν την πυκνότητα πιθανότητας των χρονικών διαστημάτων σε σχέση με το προηγούμενο χρονικό διάστημα.

Τα δεδομένα τους επεκτείνονται από τον Ιανουάριο του 1984 έως το Δεκέμβριο του 1996 με συχνότητα 10 λεπτών (132.000 παρατηρήσεις). Στην ανάλυση τους φιλτράρουν τα ενδο-ημερήσια αρχικά δεδομένα για να αποφύγουν λανθασμένα συμπεράσματα. Φαίνεται ότι και στα δύο δεδομένα η σύντομη (αργή) χρονική επιστροφή ακολουθείται από σύντομη (αργή) χρονική επιστροφή. Αυτό είναι ένα σημάδι ομαδοποίησης της μεταβλητότητας των αποδόσεων σε χρονικά διαστήματα και εκλείπει όταν τα δεδομένα ανακατεύονται τυχαία. Μελετούν επίσης και τις πιθανότητες του μεγέθους ομαδοποίησης για να ελέγξουν την ύπαρξη long memory στις αποδόσεις των χρονικών διαστημάτων. Γι' αυτό χρησιμοποιούν δεδομένα short memory για να ελέγξουν αν αυτού του είδους η μνήμη μπορεί να εξηγήσει την κατανομή της ομαδοποίησης σε μεγέθη. Αναδεικνύεται ότι οι πιθανότητες της ομαδοποίησης με το μέγεθος και των χαμηλών και υψηλών αποδόσεων χρονικών διαστημάτων του S&P 500 έχουν διαφορετική συμπεριφορά από τα δεδομένα με short memory.

Αυτό υποδεικνύει την ύπαρξη long memory στη μεταβλητότητα. Ακόμη μελέτησαν αν το FBM μοντέλο μπορεί επαρκώς να προβλέψει την

κλιμάκωση των δεδομένων απ' ότι ένα GARCH. Τελικά χρησιμοποιούν Student's t τεστ για να εκτιμήσουν την κατανομή ανάμεσα στα εμπειρικά δεδομένα και στα ανακατεμένα δεδομένα, και ανάμεσα στα ARMA – FIGARCH και στα FBM δημιουργημένα δεδομένα. Παρατηρείται ότι κανένα μοντέλο δεν μπορεί να εξηγήσει το σύνολο του συστήματος των κατώτατων τιμών και αυτό φαίνεται ότι οφείλεται στην πολύπλοκη φύση της μεταβλητότητας παρά στο ότι απλά εμφανίζουν καθαρές μακροχρόνιες συσχετίσεις.

### **Gabjin, Seunghwan & Cheoljun (2008)**

Μελετούν ανά υπάρχει long memory σε υψηλής συχνότητας δεδομένα συγκρίνοντας ποικίλους χρηματιστηριακούς δείκτες και συναλλαγματικές ισοτιμίες. Θέλοντας να μελετήσουν την ύπαρξη long memory στη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών χρησιμοποιούν ενός-λεπτού δεδομένα από κορεάτικους δείκτες από 1995 μέχρι 2002 και από 1997 έως 2004 αντίστοιχα .Ακόμα χρησιμοποιούν 5-λεπτών παρατηρήσεις σε συναλλαγματικές ισοτιμίες για το ευρώ, λίρα Αγγλίας, Γιεν Ιαπωνίας και άλλα συναλλάγματα. Για όλα τα δεδομένα των αγορών που μελετήθηκαν δε βρέθηκε δυνατό long memory στις αποδόσεις των σειρών καθώς εκτίθεται σε γρήγορη φθορά των αυτοσυσχετίσεων και οι τιμές των Hurst Exponents διακυμαίνεται γύρω από το 0.5. Σε αντίθεση με αυτό βρέθηκε long memory στη διαδικασία μεταβλητότητας. Επίσης γίνεται προσπάθεια να βρεθούν οι πιθανές αιτίες που προκαλούν το long memory χρησιμοποιώντας δεδομένα, από Fractional Brownian Motion διαδικασία, τα οποία φιλτράρονται με AR (1) μοντέλα για την απομάκρυνση του short term memory παράγοντα, με GARCH μοντέλα για τον Volatility Clustering παράγοντα και με FIGARCH μοντέλα αντικατοπτρίζοντας τη long memory της μεταβλητότητας. Τονίζουν ότι δεν απομένει καθόλου long term memory όταν εξαφανίζεται με τη χρήση FIGARCH μοντέλων.

Τέλος, το κύριο συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι το long memory στις διαδικασίες μεταβλητότητας όταν υπάρχει μπορεί κυρίως να αποδοθεί στο Volatility Clustering που παρατηρείται στις

χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές. Οι τιμές του Hurst Exponents μειώνονται (αν και όχι στο βαθμό που μειώνονται με FIGARCH) όταν τα long memory δεδομένα φιλτράρονται με GARCH μοντέλα.

### **Bentes, Menezes & Mendes (2008)**

Στο άρθρο αυτό μελετάται η μεταβλητότητα των χρηματιστηριακών αγορών και οι λόγοι που βρίσκονται πίσω από τις μεταβολές των τιμών, το οποίο έχει παίξει κεντρικό ρόλο στη χρηματοοικονομική θεωρία. Παραδοσιακά η long memory έχει μελετηθεί χρησιμοποιώντας IGARCH και FIGARCH μοντέλα. Στη μελέτη αυτή μία νέα μέθοδος για την εύρεση της long memory εισάγεται. Η νέα αυτή μέθοδος βασίζεται στην έννοια της εντροπίας. Παρουσιάζονται οι Shannon entropy, Renyi entropy και Tsallis entropy οι οποίες χρησιμοποιούνται για πάνω από έναν αιώνα στον τομέα της φυσικής. Αυτές οι έννοιες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξηγηθεί η τάση τα φυσικά φαινόμενα να εμφανίζονται απότομα και σταδιακά να εξαφανίζονται με την πάροδο του χρόνου. Φαίνεται ότι η έννοια της εντροπίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε επιστήμη όπου μπορούν να εφαρμοστούν οι πιθανότητες.

Χρησιμοποιούν ημερήσια δεδομένα του S&P 500, Nasdaq 100 και Stoxx 50 δείκτες, από τον Ιούνιο του 2002 έως τον Ιανουάριο του 2007. Συγκρίνουν τα εμπειρικά ευρήματα τα οποία προέρχονται από τη μέθοδο της εντροπίας. Επίσης, συγκρίνοντας τη χρήση GARCH μοντέλων, το γεγονός ότι το άθροισμα των συντελεστών ήταν σχεδόν ίσο με τη μονάδα θα μπορούσε να συνεπάγεται την ύπαρξη δυνατής μη γραμμικής εξάρτησης στις αποδόσεις των χρηματιστηριακών δεικτών. Στη συνέχεια εκτιμήθηκαν IGARCH και FIGARCH μοντέλα με τα πρώτα να έχουν τους περισσότερους από τους συντελεστές σχεδόν μηδέν, αλλά με τα δεύτερα (FIGARCH) να επιδεικνύουν την ύπαρξη long memory. Την ίδια κατάληξη για την ύπαρξη long term στη διαδικασία μεταβλητότητας επετεύχθη με τη μέθοδο της εντροπίας.



### **Baillie και Morana (2009)**

Οι συγγραφείς εισάγουν ένα νέο μοντέλο, μία προέκταση του ARFIMA, το Adaptive ARFIMA μοντέλο το οποίο φαίνεται να ταιριάζει απόλυτα στη περιγραφή του πληθωρισμού καθώς και σε άλλες οικονομικές χρονολογικές σειρές. Το νέο μοντέλο A-ARFIMA εμπεριέχει έναν εξαρτημένο ως προς τον χρόνο καινοτόμο όρο, ο οποίος ακολουθεί το γνωστό Flexible Fourier Form (FFF). Το A-ARFIMA φαίνεται να είναι ικανό στην ενασχόληση με των διαφόρων μορφών διακοπών (breaks) και με την ασυνέχεια των μέσων των χρονολογικών σειρών. Επίσης, το Adaptive ARFIMA μοντέλο όταν συμπληρώνεται με Conditional Variety μοντέλα φαίνεται να αντιπροσωπεύει καλά τις G7 μηνιαίες CPI σειρές πληθωρισμού.

Τα δεδομένα τους αποτελούνται από σειρές του πληθωρισμού των G7 από τον Φεβρουάριο του 1948 έως τον Φεβρουάριο του 2006, τεσσάρων περιόδων δείγματα με 174 παρατηρήσεις το καθένα. Ο Local Whittle εκτιμητής δείχνει την ύπαρξη στατιστικά σημαντικού  $d$  για τις περισσότερες από τις επτά χώρες και τις περισσότερες από τις τέσσερις περιόδους. Η μόνη εξαίρεση είναι για τον Καναδά και τη Γαλλία στην τέταρτη περίοδο η οποία χρονολογείται από το 1991 έως το 2006, όπου βρέθηκε μία  $I(0)$  διαδικασία πληθωρισμού.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν την ύπαρξη long memory και διαρθρωτικών αλλαγών όχι μόνο στη δυναμική του υπό συνθήκη μέσου (Conditional Mean) αλλά και στη δυναμική της υπό συνθήκη διακύμανσης του πληθωρισμού των G7. Τέλος ερευνώντας για structural breaks και ετεροσκεδαστικότητα, δεν έμεινε κανένα ίχνος μη γραμμικότητας στις σειρές των πληθωρισμών. Ο μέσος του πληθωρισμού βρέθηκε αρκετά μικρότερος από αυτούς που βρίσκονταν νωρίτερα στη βιβλιογραφία, με το  $d$  να παίρνει τιμές χαμηλότερες από 0.20 για τις περισσότερες σειρές.

### **Caporale and Alana (2010)**

Εξετάζουν την ύπαρξη long memory στα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας των Harvey (1998) και Breidt (1998) χρησιμοποιώντας

τον Gaussian ημι-παραμετρικό ή τον Whittle εκτιμητή της παραμέτρου  $d$  (Robinson 1995) ενώ κάνουν και μία ιστορική αναδρομή στη βιβλιογραφία και παρουσίαση του ARFIMA μοντέλου. Σε πρόσφατη έρευνά του ο Arteche (2004) δείχνει ότι ο εκτιμητής είναι συνεπής και ασυμπτωτικά κανονικός στο πλαίσιο τέτοιων μοντέλων.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούν είναι ημερήσιες παρατηρήσεις για τον δείκτη NASDAQ-100 για χρονική περίοδο από τον Ιανουάριο του 2001 έως τον Φεβρουάριο του 2004 και η ανάλυση προσαρμόζεται στις μεταμορφωμένες σειρές  $y_t = \log x_t^2$ . Ο NASDAQ-100 περιλαμβάνει τις εκατό μεγαλύτερες μη χρηματοοικονομικές εγχώριες και διεθνείς εταιρείες των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διαδικασία μεταβλητότητας χαρακτηρίζεται από long memory, με την παράμετρο  $d$  να εκτιμάται μεταξύ των τιμών 0.3 και 0.5 (αρκετά μικρότερη της μονάδας), γεγονός που υποδεικνύει την επιστροφή στο μέσο της σειράς (mean reverting), με την επίδραση ενός σοκ να εξαφανίζεται πολύ αργά.

Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, σύμφωνα με τον συγγραφέα, ίσως είναι η χρήση ημιπαραμετρικής μεθόδου χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι short-run δυναμικές των σειρών. Αναφέρουν όμως ότι η χρήση παραμετρικών διαδικασιών είναι δύσκολο να εφαρμοστούν εξαιτίας της ύπαρξης διαφορετικών τιμών στα σφάλματα των εξισώσεων του μέσου και της λογαριθμικής μεταβλητότητας.

### **Εφαρμοσμένη Βιβλιογραφία**

Τέλος, στην ανασκόπηση αυτή θα ήθελα να αναφέρω και μερικές εφαρμοσμένες μελέτες καταξιωμένων ερευνητών δίνοντας βαρύτητα στις σειρές που μελέτησαν και στην ύπαρξη long memory σε αυτές παρά στη μέθοδο, στα μοντέλα που χρησιμοποίησαν και σε ποια κράτη αναφέρονταν οι σειρές αυτές.

Οι Shea (1991) και Backos και Zin (1977) βρίσκουν long memory σε σειρές επιτοκίων. Το 1993 οι Ding, Granger, Engle και οι Breidt, Crato και Lima βρίσκουν long memory στη στοχαστική μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών, ενώ ο Harvey (1993) στις συναλλαγματικές

ισοτιμίες. Οι Baillie, Chung και Tieslau (1995) παίρνοντας ως δεδομένα τους μηνιαίους δείκτες CPI (Consumer Price Index) των G7 χωρών βρίσκουν, με ARFIMA, ότι οι μεταβολές του, που είναι ο πληθωρισμός, χαρακτηρίζονται από long memory. Επίσης, τον πληθωρισμό μελέτησαν και οι Hassler και Wolters (1995) βρίσκοντας και αυτοί long memory. Ο Wright (1996) ερευνά τις αποδόσεις των μετοχών δεκαεπτά αναδυόμενων αγορών και βρίσκει ότι οι επτά από αυτές είχαν αποτελέσματα που συμφωνούσαν με το μοντέλο long memory που χρησιμοποίησε, τονίζοντας ότι η ύπαρξη long memory έχει σχέση με τη αποτελεσματικότητα της αγοράς η οποία μελετάται. Σε συνέχεια, οι Barkoulas, Baum και Travlos (2000) βρίσκουν long memory στον γενικό δείκτη του ελληνικού χρηματιστηρίου, υποστηρίζοντας ότι αυτό οφείλεται στο χαρακτηριστικό της αναδυόμενης αγοράς και ίσως να μη συνέβαινε σε μία ανταγωνιστική οικονομία. Επίσης, ο Olan Henry (2002) χρησιμοποιεί ARFIMA διαδικασία στις αποδόσεις των μετοχών και δείχνει ότι δεν υπάρχει long memory στις αγορές των UK, USA, Hong Kong, Singapore, Australia ενώ βρίσκει στοιχεία long memory στις αποδόσεις των μετοχών στις αγορές των Japan, Germany, South Korea και Taiwan. Τέλος, ο Shu Quan Lu (2008) εξετάζει την SSE's αποτελεσματικότητα της αγοράς στην Κίνα και βρίσκει σημαντικά στοιχεία long memory στις αποδόσεις των μετοχών του SSE Component Index, τονίζοντας ότι οι αποδόσεις των μετοχών επηρεάζονται από το παρελθόν το οποίο δείχνει, σύμφωνα με τον Lu, ότι δεν πρόκειται για μία αποτελεσματική αγορά.

Βλέπουμε λοιπόν τη σημαντικότητα της ύπαρξης long memory όχι μόνο στη χρησιμότητα του χαρακτηριστικού αυτού στην αποτίμηση παραγώγων προϊόντων (στη διαχείριση χαρτοφυλακίου) και στην αντιστάθμιση κινδύνου, αλλά σε μία γενικότερη θεωρητική προσέγγιση των αγορών η οποία χρησιμεύει στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων σε θέματα επενδύσεων και στην άσκηση οικονομικής και νομισματικής πολιτικής.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - FRACTIONAL INTEGRATION ΚΑΙ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

### Ενότητα 2.1 - Χρησιμότητα της fractional integration παραμέτρου

Πολλές οικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές εμπεριέχουν σημαντικά στοιχεία μη στασιμότητας και πολλές έρευνες έχουν γίνει σχετικά με την καταλληλότητα των  $I(1)$  ή των unit root μοντέλων για την περιγραφή των παραπάνω γνήσιων σειρών με τα γνωστά στάσιμης τάξης μοντέλα, όπου οι αρχικές σειρές περιγράφονται σαν  $I(0)$  διαδικασίες συν ένα ντετερμινιστικό κομμάτι.

Στη μοντελοποίηση της long memory είναι χρήσιμο και σημαντικό να γνωρίζουμε το βαθμό διαφοροποίησης  $d$  (order of integration  $d$ ). Αυτή την άποψη, της χρησιμότητας του βαθμού του  $d$  έρχονται να θεμελιώσουν οι γνωστές Spurious ή Nonsense regressions.

Έστω  $X_t$ ,  $Y_t$  δύο χρονολογικές σειρές έστω με  $X_t \sim I(1)$  και  $Y_t \sim I(1)$  οι οποίες είναι ανεξάρτητες τότε  $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + U_t$ , με το εκτιμώμενο coefficient  $\alpha_1$  να είναι στατιστικά σημαντικό και  $U_t \sim I(0)$ .

Αν τρέξουμε μια παλινδρόμηση ανάμεσα σε δυο ανεξάρτητες μη στάσιμες χρονικές σειρές θα βρούμε αποκλίνουσες τιμές t-ratios μαζί με υψηλές τιμές του συντελεστή πολλαπλής συσχέτισης  $R^2$ , έναν διορθωμένο συντελεστή  $JP$  και εξαιρετικά χαμηλή τιμή για το στατιστικό Durbin-Watson (DW). Αυτό είναι το γνωστό spurious regressions πρόβλημα. Οι Granger και Newbold (1974, 1986) μέσω προσομοιώσεων και Phillips (1986, 1998) αναλυτικότερα, ερεύνησαν πως αυτά τα ευρήματα ισχύουν στην περίπτωση όπου μια τέτοια spurious ή nonsense παλινδρόμηση αποτελείται από  $I(1)$  διαδικασίες.

Πρόσφατα, είναι ευρέως γνωστό ότι αυτές οι χαλκευμένες χαρακτηριστικές τάσεις δεν ισχύουν μόνο για ανεξάρτητες  $I(1)$  διαδικασίες αλλά και για υψηλότερης τάσης ( $d$ ) integrated διαδικασίες (Haldrup, 1994 Marmol, 1995), μη στάσιμες fractional integrated διαδικασίες (Tsay and Chung, 1995 Carrucio και Lubian, 1997 Marmol, 1998) ή στοχαστικές unit root διαδικασίες (Granger και Swanson, 1997).

Συνήθως αναφέρονται δυο τύποι σφαλμάτων σε spurious regressions. Ο πρώτος τύπος I (Type I) σφάλματος αναφέρεται στην απόρριψη της αληθινής υπόθεσης και ο τύπος II (Type II) αναφέρεται στην αποδοχή της λανθασμένης υπόθεσης ή ο τύπος I spurious regression στην απόρριψη της αληθινής σχέσης των χρονικών σειρών ενώ ο τύπος II στην αποδοχή της ψευδούς σχέσης.

Όσον αφορά αυτή την οπτική γωνία είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε την τάξη του integration διαφοροποιώντας τις χρονικές σειρές, για να τις κάνω στάσιμες ίσως χαθεί η long-term πληροφορία που εμπεριέχεται σε αυτές και η οποία είναι πολύ σημαντική βγάζοντας χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των χρονικών σειρών. Χαρακτηριστικά ο Sargan (1964) εισήγαγε τον μηχανισμό διόρθωσης σφάλματος (error correction mechanism) για να διατηρήσει τη long-term πληροφορία η οποία εμπεριέχεται στα επίπεδα των μεταβλητών και την ίδια στιγμή να αποφύγει τις spurious regressions. Αυτή η μελέτη εξελίχθηκε και από άλλους Βρετανούς οικονομέτρους, όπως ο Hendry (2000).

Επίσης σύμφωνα με την έρευνα των Tsay και Chung(2000) όταν παλινδρομούν μια long memory fractional integrated διαδικασία σε μια άλλη μη συσχετισμένη long memory fractional integrated διαδικασία, χωρίς να έχει σημασία αν οι διαδικασίες είναι στάσιμες ή όχι, όσο οι τάξεις του integration συγκεντρώνονται σε μια τιμή μεγαλύτερη του 0.5, τα αντίστοιχα t-ratios γίνονται αποκλίνοντα και πλαστά (spurious). Τα ευρήματά τους υποδεικνύουν ότι αυτό είναι long memory, παρά μη στασιμότητα ή έλλειψη εργοδικότητας, που προκαλεί ψεύτικα (spurious) αποτελέσματα. Ως αποτέλεσμα, πλαστά αποτελέσματα μπορεί να υπάρχουν πιο συχνά από ότι πιστεύαμε προηγουμένως όπως μπορεί να προκύψει ακόμα και μεταξύ στάσιμων χρονικών σειρών, ενώ η συνηθισμένη διαδικασία πρώτων διαφορών ίσως να μην μπορεί να εξαλείψει εντελώς τα spurious αποτελέσματα όταν τα δεδομένα διαθέτουν ισχυρή μακρά μνήμη.

Τέλος, δεδομένου ότι οι περισσότερες χρηματοοικονομικές χρονικές σειρές είναι μη στάσιμες, χρησιμοποιώντας πρώτες διαφορές ίσως να μην

μπορέσουμε να εξαλείψουμε πλήρως τα spurious effects αν τα δεδομένα μας δεν είναι μόνο μη στάσιμα αλλά με δυνατή long memory.

Επιπροσθέτως, μια προειδοποίηση στα nonsense regressions είναι ότι η ύπαρξη σημαντικών συσχετισμένων σφαλμάτων ακυρώνουν τις συμβατικές διαδικασίες των συμπερασμάτων στις παλινδρομήσεις.

## **Ενότητα 2.2 – Στασιμότητα και μη στασιμότητα τύπου Unit Root**

Όσον αφορά τη στασιμότητα έστω μία χρονολογική σειρά η οποία είναι ένα σύνολο παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_t$  μιας τυχαίας μεταβλητής  $Y$ , κάθε μία από τις οποίες λαμβάνεται τη χρονική στιγμή  $t$  και μπορεί να θεωρηθεί ως στοχαστική διαδικασία πεπερασμένου πλήθους παρατηρήσεων.

Η ύπαρξη στασιμότητας στις χρονολογικές σειρές έχει πρόσφατα προσελκύσει ένα αξιοσημείωτο όγκο εργασιών στην οικονομική και στατιστική επιστήμη λόγω της κρίσιμότητάς της στη μοντελοποίηση, στη δημιουργία προβλέψεων αλλά και γενικότερα στη στατιστική ανάλυση των σειρών αυτών. Επίσης έχει επικρατήσει η άποψη ότι οι περισσότερες οικονομικές χρονολογικές σειρές χαρακτηρίζονται από στοχαστική παρά από ντετερμινιστική μη στασιμότητα.

Η κρίσιμότητα στην ύπαρξη στασιμότητας σε μια χρονολογική σειρά έγκειται στο ότι σε μια στάσιμη σειρά είναι ευκολότερο να κάνουμε προβλέψεις. Απλά προβλέπουμε ότι οι στατιστικές ιδιότητες (μέση τιμή, διακύμανση, αυτοσυσχέτιση κ.τ.λ) θα είναι σχεδόν ίδιες στο μέλλον, όπως ήταν στο παρελθόν. Οι προβλέψεις για τις στάσιμες σειρές μπορεί στη συνέχεια να είναι «μη αναστρέψιμες», αντιστρέφοντας οποιονδήποτε μαθηματικό σχηματισμό είχε χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για να επιτύχει προβλέψεις για τη αρχική σειρά. Έτσι βρίσκοντας την ακολουθία των μετασχηματισμών που χρειάζονται για να μετατρέψουμε την σειρά σε στάσιμη συχνά προσφέρει σημαντικά στοιχεία στην έρευνα για την επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου πρόβλεψης.

Ένας άλλος λόγος για να προσπαθήσουμε να κάνουμε στάσιμη μια χρονολογική σειρά είναι για να είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε χρήσιμα στατιστικά στοιχεία, όπως η μέση τιμή, η διακύμανση, συσχέτιση με άλλες

μεταβλητές κ.α. Οι περιγραφές αυτές είναι πολύ χρήσιμες ως περιγραφή της μελλοντικής συμπεριφοράς μόνο αν η σειρά μου είναι στάσιμη.

Στάσιμη χρονολογική σειρά, έστω  $Y_t$ , είναι εκείνη της οποίας οι στατιστικές ιδιότητες, όπως μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυσχέτιση κ.τ.λ είναι σταθερές στη διάρκεια του χρόνου ή δεν εξαρτώνται από τον χρόνο  $t$

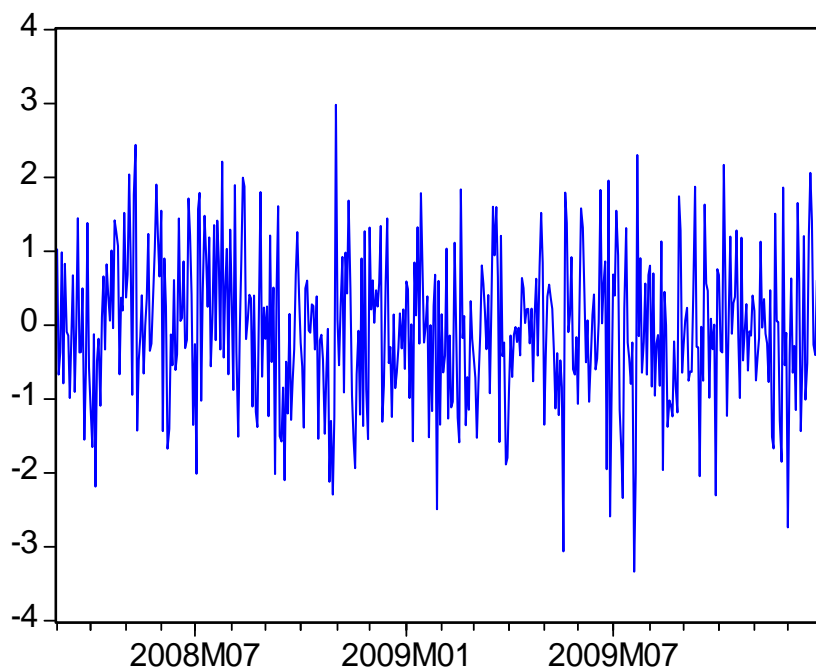
$$E(Y_t) = \mu \text{ (σταθερή)}$$

η οποία καλείται και στάσιμη πρώτης τάξης.

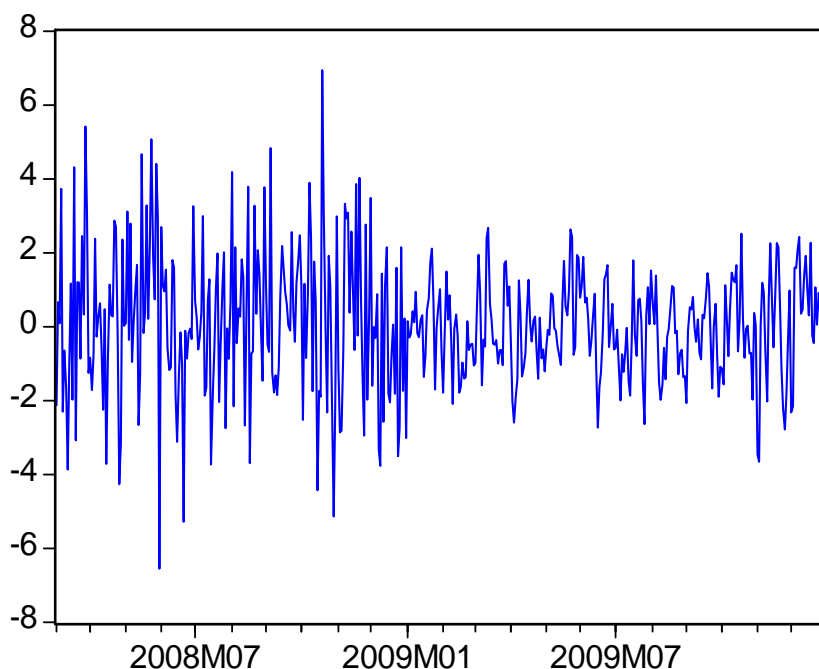
Επίσης στάσιμη δεύτερης τάξης ή ασθενής στασιμότητα καλείται όταν ισχύουν:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu && \text{(σταθερή μέση τιμή)} \\ \text{Var}(Y_t) &= \sigma^2 && \text{(σταθερή διακύμανση)} \\ \text{Cov}(Y_t, X_{t+s}) &= f(S) && \text{(είναι συνάρτηση της απόστασης } S) \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι όταν μια χρονολογική σειρά είναι στάσιμη δεύτερης τάξης θα είναι και στάσιμη πρώτης τάξης, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει. Παράδειγμα γραφήματος δεύτερης τάξης (σχεδόν ίδια διακύμανση) :



Ενώ το παρακάτω διάγραμμα είναι ένα παράδειγμα στασιμότητας πρώτης τάξης(η διακύμανση αλλάζει μετά από μία χρονική στιγμή) :



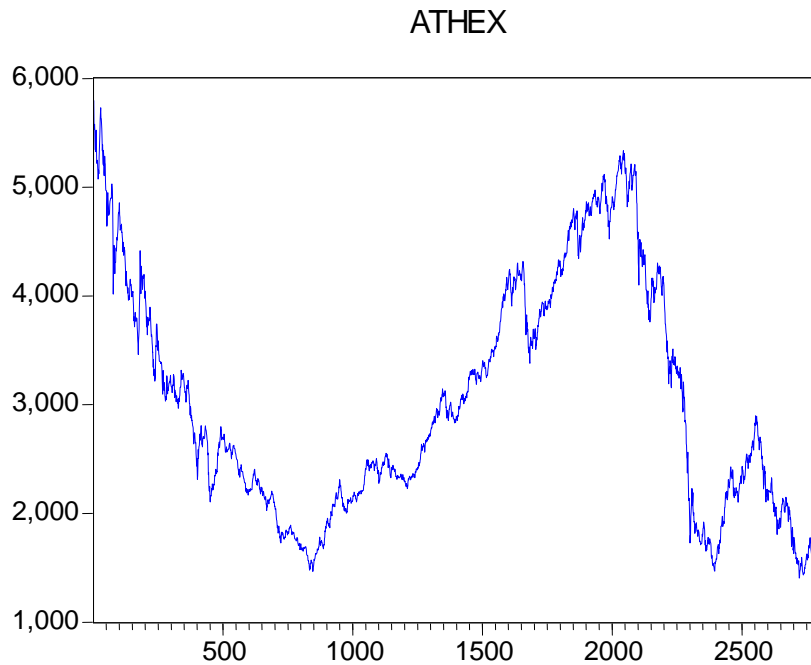
Διαισθητικά η γραφική παράσταση της  $Y_t$  διακυμαίνεται γύρω από μια ευθεία γραμμή παράλληλη στον οριζόντιο άξονα. Επίσης οι παρατηρήσεις επιστρέφουν γρήγορα στη μέση τιμή (mean reverting) που μας δείχνει τον βαθμό εξάρτησής τους (γρήγορη επιστροφή στο μέσο σημαίνει ότι έχουμε ανεξαρτησία σε σχέση με την προηγούμενη τιμή της μεταβλητής).

Στις μη στάσιμες χρονολογικές σειρές η οικονομετρική ανάλυση πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή γιατί πολλές από τις υποθέσεις που τηρούνται στις στάσιμες χρονοσειρές παραβιάζονται. Στη μακροοικονομία αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί οι περισσότερες από τις περισσότερο παρατηρήσιμες χρονοσειρές δεν φαίνονται να χαρακτηρίζονται ως στάσιμες διαδικασίες. Η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας (unit root) θεμελιωδώς αλλάζει τις ιδιότητες των χρονοσειρών και τα συνήθη εργαλεία δεν είναι πλέον εφαρμόσιμα.

Υπάρχουν πολλά είδη μη στασιμότητας αλλά εμείς θα επικεντρώσουμε στη μη στασιμότητα τύπου unit root το πιο απλό παράδειγμα μιας



διαδικασίας με μοναδιαία ρίζα είναι ο τυχαίος περίπατος, δηλαδή  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  κάθε παρατήρηση εξαρτάται από το χρόνο  $t$ .



Γράφημα γενικού δείκτη χρηματιστηρίου Αθηνών (GRAGENL) ημερησίων δεδομένων από 03.01.2000 έως 29.09.2010 (Μη στάσιμη τύπου Unit Root).

Σημειώστε από το σχεδιάγραμμα, ότι ο τυχαίος περίπατος «περιπλανάται» αυθαίρετα πάνω και κάτω χωρίς καμία προσέγκυση. Μια unit root διαδικασία φαίνεται να είναι μια καλή περιγραφή της συμπεριφοράς των πραγματικών χρονοσειρών σε πολλές περιπτώσεις και η πιο σημαντική πολυπλοκότητα σε μια unit root διαδικασία είναι ότι δεν εφαρμόζονται τα LLT(Law of Large Number) και GIT(κεντρικό οριακό θεώρημα). Συνήθως οι τιμές των μετοχών είναι μη στάσιμες, ενώ οι αποδόσεις τους κατά κανόνα είναι στάσιμες. Μια διαδικασία που έχει μοναδιαία ρίζα καλείται integrated of order one και συμβολίζεται με  $I(1)$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – LONG MEMORY IN MEAN

### Ενότητα 3.1 - ARFIMA διαδικασία

Αφού παρουσιάσαμε αναλυτικά την έννοια της στασιμότητας σε μία χρονολογική σειρά θα αναπτύξουμε το ARFIMA μοντέλο, με το οποίο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τη long memory in mean παράμετρο. Οι ARFIMA (Auto Regressive Fractional Integration Moving Average) διαδικασίες έγιναν δημοφιλής εξαιτίας της χρησιμότητας για μη ακέραιο  $d$  και έχουν χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στη μοντελοποίηση της long memory in mean παραμέτρου. Επίσης έχουν την ικανότητα να αποτυπώνουν τα καλά χαρακτηριστικά των long-term ιδιοτήτων σε πολλές οικονομικές και χρηματοοικονομικές σειρές. Είναι ακόμα πολύ χρήσιμα στη μοντελοποίηση πολυμεταβλητών χρονολογικών σειρών, διότι μπορούν να συλλάβουν μεγάλο αριθμό long-term σχέσεων ισορροπίας μεταξύ οικονομικών μεταβλητών σε σχέση με τα παραδοσιακά ARIMA ( $p,d,q$ ) μοντέλα, τάξης  $p,q$  και  $d$  η τάξη της “Fractional Integration” παραμέτρου. Μία ARFIMA ( $p,d,q$ ) διαδικασία αποτελείται από δύο όρους:

AR( $p$ ) : Autoregressive of order  $p$  και

MV ( $q$ ) : Moving average of order  $q$ ,

όπως ένα ARIMA ( $p,d,q$ ), αλλά όχι με ακέραιο  $d$ , για αυτό και ο όρος FI: Fractional Integrated.

Φαίνεται ότι οι πρώτοι που εισήγαγαν διαδικασίες τέτοιου τύπου είναι οι Granger and Joyeux (1980), Granger(1980,1981) και Hosking (1981) .

Θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε αναλυτικά το ARFIMA μοντέλο ξεκινώντας από τον κάθε όρο του χωριστά (AR,ARIMA) και μετά να το αναφέρουμε αναλυτικά.

Έστω  $X_t$ ,  $t \in Z$  είναι μια zero mean στοχαστική διαδικασία. Μια “σχεδόν” γραμμική σχέση μεταξύ διαδοχικών παρατηρήσεων μπορεί να περιγραφεί από ένα autoregressive model του τύπου :

$$X_t = \varphi X_{t-1} + U_t, \quad (4)$$

όπου  $U_t$ ,  $t \in Z$ , είναι zero mean white noise.

Μια στάσιμη διαδικασία  $(X_t)$ ,  $t \in Z$  που ικανοποιεί αυτή την πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση καλείται: first order autoregressive process (AR(1) process).

Αντικαθιστώντας  $\varphi X_{t-2} + U_{t-1}$  για  $X_{t-1}$ ,  $\varphi X_{t-3} + U_{t-2}$

Για  $X_{t-2}, \dots$  μας δίνει :

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi X_{t-1} + U_t = \varphi(\varphi X_{t-2} + u_{t-1}) + U_t \\ &= \varphi^2 X_{t-2} + \varphi U_{t-1} + U_t \\ &= \varphi^2 (\varphi X_{t-3} + U_{t-2}) + \varphi u_{t-1} + U_t \\ &= \varphi^3 X_{t-3} + \varphi^2 U_{t-2} + \varphi u_{t-1} + U_t \\ &= \varphi^K X_{t-K} + \sum_{j=0}^{K-1} \varphi^j U_{t-j} \end{aligned} \quad (5)$$

Αν το  $K$  είναι μεγάλο και  $|\varphi| < 1$ , τότε το πρώτο μέρος αυτής της έκφρασης είναι αμελητέο, ισοδύναμα

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j U_{t-j} \quad (6)$$

Όσον αφορά την αυτοσυσχέτιση μιας AR(1) διαδικασίας :

Υποθέτουμε ότι  $|\varphi| < 1$ , τότε η λύση

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j U_{t-j}$$

της διαφορικής εξίσωσης  $X_t = \varphi X_{t-1} + U_t$  είναι στάσιμη επειδή

$$E(X_t) = E \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j U_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j E(u_{t-j}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j 0 = 0,$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^j)^2 \text{Var}(U_{t-j}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^2)^j \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi^2)^j = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2}\end{aligned}\quad (7)$$

και  $\text{Cor}(X_t, X_{t-k}) = \dots = \frac{\varphi^k \sigma^2}{1 - \varphi^2}$  δεν εξαρτώνται απ' τον χρόνο  $t$ .

Χρησιμοποιώντας το lag operator:  $L$  μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση:

$$X_t = \varphi X_{t-1} + U_t \text{ σαν } L^0(X_t) = \varphi L(X_t) + U_t \text{ ή } L^0(X_t) - \varphi L(X_t) = U_t.$$

Η τελευταία μπορεί να γραφτεί σαν:  $(L^0 - \varphi L)(X_t) = U_t$ , ή

$$(1 - \varphi L)X_t = U_t \quad (8)$$

και η εξίσωση:

$$\begin{aligned}X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j U_{t-j} \\ \text{σαν } X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j L^j(U_t) \text{ ή } X_t = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \right) (U_t) \\ \text{ή } X_t &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi L)^j \right) (U_t)\end{aligned}\quad (9)$$

Συγκρίνοντας τις (5) και (6) έχω ότι ο όρος  $\sum (\varphi L)^j$  είναι ο αντίστροφος όρος του  $1 - \varphi L$  και γενικότερα, ο lag operator ακολουθεί τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες. Έτσι έχουμε:

$$(1 - \varphi L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi L)^j \text{ ή } \frac{1}{1 - \varphi L} = \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi L)^j \quad (10)$$

Η κλάση των ARMA μοντέλων βασίζεται στην υπόθεση ότι η υποκείμενη προς μελέτη διαδικασία είναι ασθενώς στάσιμη, το οποίο συνεπάγεται ότι η μέση τιμή, η διακύμανση και οι αυτοσυσχετίσεις δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Το γεγονός αυτό είναι αρκετά περιοριστικό ως προς αυτές τις παραμέτρους των χρονολογικών σειρών. Οι περισσότερες

,όμως, χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές δεν είναι στάσιμες αλλά έχουν τη τάση να εμφανίζουν μεταβαλλόμενη μέση τιμή και/ή διακύμανση σε σχέση με το χρόνο.

Μια στάσιμη διαδικασία  $X_t, \in Z$ , ικανοποιεί την  $p$  'τη τάξης διαφορική εξίσωση:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + U_t \quad (11)$$

Όπου  $U$  είναι zero-mean white noise και  $\varphi_p \neq 0$ , καλείται μια autoregressive process of order  $p$  (AR( $p$ ))process).

Μια στάσιμη διαδικασία  $X_t$  ικανοποιεί την

$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + U_t + \theta_1 U_{t-1} + \dots + \theta_q U_{t-q}$ , όπου  $U$  είναι μια zero-mean white noise,  $\varphi_p \neq 0$  και  $\theta_q \neq 0$ , καλείται ένα autoregressive moving average process τάξης  $(p,q)$  (ARMA ( $p,q$ ))process).

Η εξίσωση

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + U_t + \theta_1 U_{t-1} + \dots + \theta_q U_{t-q},$$

μπορεί να γραφτεί και ως

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \dots - \varphi_p X_{t-p} = u_t \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad (12)$$

$$\text{ή ως } (1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p)(X_t) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)(u_t), \quad (13)$$

Μια ARMA ( $p,0$ ) διαδικασία είναι μία AR( $p$ ) διαδικασία. Μία ARMA ( $0,q$ ) καλείται moving average  $q$  (MA( $q$ ))διαδικασία).

Μια στοχαστική διαδικασία  $X$  καλείται autoregressive integrated moving average process of order  $(p,d,q)$  αν οι  $d$ 'th διαφορές της είναι μια ARMA ( $p,q$ ) διαδικασία:

$$(1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p) (\Delta^d X_t) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)(u_t), \quad (14)$$

Για να ερευνηθούν την ύπαρξη ισχυρής μνήμης (long memory) στον μέσο οι Granger και Joyeux (1980) και ο Hosking (1981) δημιούργησαν χωριστά την ARFIMA διαδικασία ενώ αιτιολογήθηκε θεωρητικά στο

σύνολό της από τον Robinson (1978) ,Granger (1980) και μελετήθηκε από την οπτική γωνία της διάρκειας των σοκ από τον Parke (1999).

Μία ARIMA (p,d,q) διαδικασία μπορεί να γενικευθεί επιτρέποντας το βαθμό των διαφορών d, να είναι μη ακέραιος αριθμός. Κλασματικές ή μη ακέραιες διαφορές μπορούν να καθοριστούν απ' την επέκταση της

$\theta_1(2) = (1 - 2)^d$  γύρω απ' το 0:

$$\begin{aligned} h_{(2)} &= h_{(0)} + h'_{(0)}2 + h''_{(0)}\frac{2^2}{2} + h'''_{(0)}\frac{2^3}{3} + \dots \\ &= 1 - d_2 + d(d-1)\frac{2^2}{2} - (d-1)(d-2)\frac{2^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Ο fractional differencing operator  $\Delta^d = (1 - L)^d$  μπορεί να εκφραστεί:

$$(1 - L)^d = 1 - dL + \frac{d(d-1)L^2}{2} - \frac{d(d-1)(d-2)L^3}{3} + \dots \quad (15)$$

Η στοχαστική διαδικασία X καλείται μια autoregressive fractionally integrated moving average διαδικασία ARFIMA (p,d,q) διαδικασία αν η κλασματική διαφορική εξίσωση είναι μία ARMA διαδικασία:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(\Delta^d X_t) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)(\varepsilon_t),$$

$$\Phi(L)(1 - L)^d X_t = \Theta(L) \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (16)$$

με  $\Phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j$ ,  $\Theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$  white noise.

Όσον αφορά την εκτίμηση του long memory parameter όταν μοντελοποιούμε μία I(0) διαδικασία με ARFIMA , παρουσιάζουμε τις εκτιμώμενες τιμές της παραμέτρου d ,όταν  $y_t$  δίνεται από τη σχέση (2) και η  $u_t$  ,η οποία δίνεται από την ίδια σχέση, ακολουθεί ARFIMA διαδικασία. Σύμφωνα με τους Sowell(1992), Hurvich and Ray(1995),Hong και Mayoral (2006) αν  $-0.5 < d < 0.5$  τότε η διαδικασία είναι mean reverting,δηλαδή η σειρά είναι στάσιμη και αντιστρέψιμη ARMA διαδικασία με γεωμετρικά οριοθετημένες αυτοσυσχετίσεις, Hosking (1981,1996) και Mills(2006),

ενώ αν  $0,5 \leq d < 1$  , τότε έχω μη στάσιμη διαδικασία. Για  $d = 1$  έχω τυχαίο περίπατο (random walk). Δεδομένου όμως ότι έχω long memory όταν  $d > 0$  έστω:

$$y_t = (1 - L)^d \varepsilon_t \quad (17)$$

$\varepsilon_{(t)} = 0$	: $d = 0 \rightarrow$ No serial correlation στις σειρές
$\varepsilon_{(t^2)} = \sigma^2$	: $d > 0 \rightarrow$ Long Memory
$\varepsilon_{(t+s)} = 0, \forall t \neq s$	: $d < 1/2 \rightarrow$ Στασιμότητα $d > -0.5 \rightarrow$ Αντιστρεψιμότητα $d \rightarrow$ long memory παράμετρος

Συνοψίζοντας λοιπόν, μπορώ να μοντελοποιήσω τη long memory in mean με ARFIMA μοντέλο και σύμφωνα με τη τιμή της εκτιμώμενης long memory παραμέτρου μπορώ να βγάλω συμπεράσματα για την ύπαρξη long memory στις σειρές.

Όταν το εκτιμώμενο  $d \in [0, 0.5)$  τότε η σειρά είναι mean reverting (μορφή στασιμότητας), είναι πεπερασμένης διακύμανσης και χαρακτηρίζεται από long memory. Αν  $d \in [0.5, 1)$  τότε η σειρά είναι non mean reverting (μη στάσιμη), απεριόριστης διακύμανσης και χαρακτηρίζεται από long memory δεδομένου ότι κάποιο σοκ «ζει» για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για  $d=1$  πρόκειται για τυχαίο περίπατο (random walk) ή μη στάσιμη διαδικασία, με απεριόριστη διακύμανση και κάποιο σοκ «ζει» για απεριόριστο χρονικό διάστημα. Το ίδιο συμβαίνει και για  $d > 1$ . Για  $d=0$  λέμε ότι η διαδικασία έχει short memory (κάποιο σοκ «ζει» για σύντομο χρονικό διάστημα), είναι στάσιμη με πεπερασμένη διακύμανση.

Επομένως όταν η τιμή του εκτιμώμενου  $d$  τείνει στη μονάδα έχω μεγάλη ένδειξη για long memory, ενώ αν τείνει στο μηδέν έχω short memory.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω στον Πίνακα 1 που ακολουθεί από τη σχέση (17) έχω

## Πίνακας 1

Περίληψη των τιμών του «d»

	Διακύμανση	Διάρκεια σοκ	Στασιμότητα
d=0	Πεπερασμένη	Βραχύβια	Στάσιμη
0<d<0.5	Πεπερασμένη	Μακρινή	Στάσιμη
0.5≤d<1	Άπειρη	Μακρινή	Μη Στάσιμη
d=1	Άπειρη	Άπειρη	Μη Στάσιμη
d>1	Άπειρη	Άπειρη	Μη Στάσιμη

### Ενότητα 3.2 - Τρόποι εκτίμηση του long memory in mean

Σχετικά με την εκτίμηση της long-memory παραμέτρου (“d”) πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί. Ανάμεσα στις πιο φημισμένες είναι η μέθοδος των Geweke-Porter-Hudak (1983) ή απλά GPH. Η μέθοδος αυτή, όπως και αρκετές άλλες μέθοδοι, έχει αρκετά μειονεκτήματα. Ένα από τα πιο σημαντικά είναι ότι δεν ικανοποιεί τις ασυμπτωτικές ιδιότητες.

Ο Sowell (1990) αναπτύσσει μία μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση του “d” και των από κοινού ARMA(p,q) παραμέτρων, αλλά μαζί με όλους τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας, εμφανίζεται ανεπαρκής αν το μοντέλο δεν είναι καλά προσδιορισμένο από υποθέσεις. Οι Backus και Zin (1993) χρησιμοποιούν τον εκτιμητή του Sowell στην εμπειρική τους έρευνα, αλλά οι αποκλίνοσες εκτιμήσεις του d που βρίσκουν για την κάθε ARFIMA διαδικασία μειώνουν τη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων.

Ο WOLS εκτιμητής του Jensen (wavelet ordinary least squares), τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε εμείς στην εμπειρική μας ανάλυση προέρχεται από μία ομαλή μείωση των long-memory διαδικασιών. Ο Jensen προτείνει έναν νέο εκτιμητή του d ο οποίος χρησιμοποιεί κυματίδια (wavelets). Τα κυματίδια αυτά μπορούν απλά να περιγραφούν ως λειτουργικές μετατροπές, όπως οι Fourier μετατροπές, αλλά με ιδιότητες που τους επιτρέπουν να αναγνωρίζουν πιο δραστικά τη λογαριθμική συμπεριφορά και τα short-run φαινόμενα. Από την έρευνα



του Jensen, σε σειρές που θα μελετήσουμε και εμείς (επιτόκια), προκύπτει ότι τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα (MSEs) των εκτιμήσεων του  $d$  με WOLS εκτιμητή είναι αρκετά μικρότερα σε σχέση με τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα των εκτιμήσεων του  $d$  με εκτιμητή GPH.

Στα μαθηματικά, είναι συχνά πιθανό να προσεγγίσουμε μία περίπλοκη συνάρτηση ως γραμμικό συνδυασμό ξεχωριστών απλών σχέσεων. Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα είναι στη φασματική, ή Fourier, ανάλυση από τη παρουσίαση του θεωρήματος ότι οποιαδήποτε στάσιμης συνδιακύμανσης διαδικασία  $X_t$  μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων ημιτόνου και συνημίτονου στο πεδίο της συχνότητας. Για παράδειγμα, οι Fourier σειρές μίας συνάρτησης  $f(x)$  με τιμές στο  $[0,1]$  εκφράζεται ως

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos 2\pi k_x + a_k \sin 2\pi k_x] \quad (18)$$

Όπου οι παράμετροι  $a_k, b_0, b_k$  για κάθε  $k$ , μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας ελάχιστα τετράγωνα.

Οι περισσότερες όμως οικονομικές σειρές ακολουθούν ομαλούς κυκλικούς ρυθμούς, οι οποίοι προτείνονται από συναρτήσεις ημιτόνου και συνημίτονου, κάνοντας τις Fourier αναλύσεις λιγότερο ελκυστικές στους οικονομολόγους.

Μία πρόσφατα ανεπτυγμένη εναλλακτική των Fourier μετατροπών είναι οι wavelet μετατροπές, στις οποίες η ίδια η συνάρτηση  $f(x)$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(x) = C_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{jk} \Psi(2^j x - k) \quad (19)$$

όπου  $\Psi(x)$  είναι το γνωστό mother wavelet, το οποίο είναι «μητέρα» όλων των διαστολών και μεταφράσεων του  $\Psi$  στη σχέση (19).

Μία απλή παρουσίαση των mother wavelet είναι

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x < 0.5 \\ -1, & \text{αν } 0.5 \leq x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (20)$$

η ομάδα των συναρτήσεων για να είναι ορθογώνια. Το  $j$  είναι η διαστολή (ή το εύρος) η οποία συμπιέζει τη συνάρτηση  $\Psi(x)$ , ενώ ο δείκτης  $k$  είναι ο δείκτης μετατόπισης, ο οποίος μετατοπίζει τη συνάρτηση  $\Psi(x)$ . Γενικά η σχέση (20) είναι γνωστή και ως Haar wavelet.

Όσον αφορά τους τύπους των wavelets, πολλοί έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, ο Daubechies (1988) προτείνει ένα σύστημα από συμπαγή υποστηριζόμενα wavelets, στο οποίο το κάθε wavelet παρουσιάζει διαφορετικό βαθμό εξομάλυνσης στη σχέση (20), ενώ άλλα εναλλακτικά wavelets είναι το "Coiflet", το "Beykin", "Ojanen", το "Vaidyanathan" και το "Symmetric biorthogonal".

Σε αυτή την έρευνα χρησιμοποιούμε την wavelet οικογένεια του Haar, του Coiflet με έξι και coefficients, του "Daubechies-10", του "Ojanen-20" και του Beykin με 10 coefficients. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των coefficients μπορεί να είναι διαφορετικός από αυτούς που επιλέξαμε εμείς, συνήθως συμβολίζεται με "n" στη βιβλιογραφία και χρησιμοποιείται, συνοδευόμενο τον τύπο του wavelet, στις μεταβλητές εισόδου (input) του κώδικα (m-file) που χρησιμοποιείται στη Matlab.

Σύμφωνα με τον Jensen, η δύναμη των wavelets έγκειται στην ικανότητά τους να εντοπίζουν ταυτόχρονα μία διαδικασία στον χρόνο και σε κλίμακα. Μπορούν να επικεντρώσουν στη συμπεριφορά μιας διαδικασίας στο χρόνο και εναλλακτικά μπορούν να ερευνήσουν οποιοδήποτε long χαρακτηριστικό στις σειρές.

Σύμφωνα με τον Tewfic και Kim (1992), McCoy και Walden (1996), Jensen (1999) για μία  $I(d)$  διαδικασία  $X(t)$  με την απόλυτη τιμή του  $d$  να είναι μικρότερη του 0.5, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ACF) συμπεραίνουν ότι οι wavelet συντελεστές  $C_{jk}$  στη σχέση (19) κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση  $\sigma^2 2^{-2jd}$ . Αν  $R(j)$  υποδηλώνει τη διακύμανση του wavelet συντελεστή στην κλίμακα  $j$ , τότε αφού πάρουμε λογάριθμους, μία εκτίμηση του  $d$  μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας τα συνήθη ελάχιστα τετράγωνα.

Έστω  $X(t)$  είναι μια  $I(d)$  διαδικασία με μέσο μηδέν και  $|d| < 1/2$ . Με τη βοήθεια της ACF της  $I(d)$  διαδικασίας ο Jensen αποδεικνύει ότι καθώς το  $j \rightarrow 0$ , οι wavelet συντελεστές,  $w_{jk}$ , συναφείς με μια  $I(d)$  διαδικασία με

μεσο 0 και  $|d| < 1/2$  κατανέμεται ως  $N(0, \sigma^2 2^{-2jd})$ , όπου  $\sigma^2$  είναι σταθερό.

Από το θεώρημα αυτό, οι wavelet συντελεστές της  $I(d)$  διαδικασίας έχει διακύμανση η οποία είναι συνάρτηση της παραμέτρου  $j$ , αλλά είναι ανεξάρτητη από την ερμηνευτική παράμετρο  $k$ . Ισοδύναμα, ορίζοντας το  $R(j)$  να είναι η διακύμανση των wavelet συντελεστών,  $R(j) = \sigma^2 2^{-2j}$ . Πέρνοντας τη λογαριθμική μετατροπή του  $R(j)$  έχουμε

$$\ln R(j) = \ln \sigma^2 - d \ln 2^{2j} \quad (21)$$

όπου  $\ln R(j)$  είναι γραμμικά συσχετισμένο με το  $\ln 2^{-2j}$  με τη fractional differencing παράμετρο  $d$ . Έτσι, το άγνωστο  $d$  μπορεί να εκτιμηθεί απ' τον συνηθισμένο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων  $d$ .

Για να παρουσιάσουμε την OLS παλινδρόμηση δημιουργούμε μια εκτίμηση της διακύμανσης των wavelet συντελεστών,  $R(j)$ . Στη κλίμακα  $j$ , ορίζουμε τη διακύμανση του δείγματος των wavelet συντελεστών ως

$$\tilde{R}(j) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} w_{j,k}^2 \quad (22)$$

Καθώς ένας μεγάλος αριθμός των wavelet συντελεστών είναι διαθέσιμος για την κλίμακα  $j$ , η διακύμανση του δείγματος των συντελεστών αυτών αποτελούν μια καλή εκτίμηση της αληθινής διακύμανσης,  $R(j)$ .

Καθορίζοντας τις στατιστικές ιδιότητες του  $d$ , επεκτείνει το  $\ln \bar{R}(a)$  γύρω απ' το  $\ln R(a)$  με σειρές του Taylor

$$\ln \bar{R}(a) = \ln R(a) + \frac{\bar{R}(a) - R(a)}{R(a)} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\bar{R}(a) - R(a)}{R(a)} \right)^2 \right] \quad (23)$$

Επίσης ο Jensen, αναφέρει ένα θεώρημα παρουσιάζοντας και την απόδειξη του, δείχνοντας ότι τα  $w_{j,k}$  είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητα. Από αυτό το θεώρημα, η συσχέτιση των wavelet συντελεστών μιας  $I(d)$  διαδικασίας μειώνονται εκθετικά στο χρόνο κάτω από ορισμένες υποθέσεις.

Απ' τα δυο αυτά θεωρήματα του Jensen ,  $R(j)^{-1/2}w_{j,k} \sim N(0,1)$  και είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητο καθώς  $j \rightarrow \infty$ . Επιπρόσθετα τα  $R(j)^{-1} \sum_k w_{j,k}^2 \sim \chi_{2^j}^2$ , όπου  $2^j$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας. Ισοδύναμα :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{R}(j)] &= \frac{1}{2^{2j}} \text{Var} \left[ \sum_{k \in K(j)} w_{j,k}^2 \right] \\ &= \frac{2}{2^{2j}} (\sigma^2 2^{-j(2d-1/2)})^2 \\ &= 2(\sigma^2 2^{-2j(d+1/4)})^2 \\ &\rightarrow 0 \text{ καθώς } j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Όταν  $d > -1/4$ . Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών του Markov , το  $\bar{R}(j)$  τείνει στο  $R(j)$  καθώς  $j \rightarrow \infty$ . Η σχέση (23) μπορεί να γραφθεί ως :

$$\ln \bar{R}(j) = \ln R(j) + 2^{1/2} \Psi(2^j t - k) \quad (24)$$

όπου ο δεύτερος όρος είναι το  $\Psi_{j,k}(\epsilon)$  απ' τη wavelet θεωρία.

Αντικαθιστώντας για  $R(j)$  το  $\sigma^2 2^{-2jd}$  έχω:

$$\ln \bar{R}(j) = \ln \sigma^2 - d \ln 2^{2j} + 2^{1/2} \Psi(2^j t - k) \quad (25)$$

Επομένως , καθώς  $j \rightarrow \infty$  , ο OLS εκτιμητής της παραπάνω λογαριθμικής διαφορά, αποτελεί έναν συνεπή εκτιμητή της fractional διαφοροποιημένης παραμέτρου ,  $d$ .

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – LONG MEMORY IN VOLATILITY**

### **Ενότητα 4.1 - FIGARCH διαδικασία**

Πρόσφατα, μεγάλο ενδιαφέρον στην οικονομετρία και στα εμπειρικά χρηματοοικονομικά προσελκύει η μοντελοποίηση της πρόσκαιρης διακύμανσης στην μεταβλητότητα των οικονομικών και χρηματοοικονομικών σειρών. Ιδιαίτερα, σε αυτό συντέλεσε η ανάπτυξη των Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) μοντέλων τα οποία αναπτύχθηκαν από τον Engle (1982). Στη πιο γενική τους μορφή, τα μοντέλα αυτά απλά αξιώνουν ότι η υπό συνθήκη διακύμανση (conditional variance) είναι μία μη τετριμμένη εξίσωση του τρέχοντος σετ πληροφοριών. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί παραμετρικές φόρμουλες για να εκτιμηθεί ποιες μεταβλητές θα ήταν σημαντικές στον προσδιορισμό της παρατηρούμενης διακύμανσης στο χρόνο. Τέτοια παραμετροποίηση, για τον χαρακτηρισμό της μεταβλητότητας σε χρηματοοικονομικές σειρές, είναι και το Generalized ARCH (GARCH) μοντέλο το οποίο αναπτύχθηκε από τον Bollerslev (1986). Επίσης, τα πασίγνωστα Integrated GARCH (IGARCH) μοντέλα αναπτύχθηκαν από τους Engle και Bollerslev (1986) για να εκτιμήσουν τη φαινομενική τάση των conditional variance διαδικασιών. Στα IGARCH μοντέλα ένα σοκ στη διακύμανση παραμένει σημαντικό για την βέλτιστη πρόβλεψη των μελλοντικών διακυμάνσεων. Ο περιορισμός όμως ανάμεσα σε  $I(0)$  και  $I(1)$  χρονολογικές σειρές ίσως σε ορισμένες περιπτώσεις να είναι αρκετά περιοριστικός και έτσι οι Granger (1980), Granger και Joyeux (1980), Hosking (1981) και Mandelbrot και Van Ness (1968) ανέπτυξαν μία νέα κλάση μοντέλων, πιο ευέλικτα, τα οποία επιτρέπουν το order of integration “ $d$ ” να μην είναι ακέραιο αλλά οποιοσδήποτε αριθμός. Σε αντίθεση με τις  $I(0)$  χρονολογικές σειρές στις οποίες τα σοκ φθίνουν με εκθετικό ρυθμό ή τις  $I(1)$  χρονολογικές σειρές στις οποίες δεν υπάρχουν

mean-reversions, τα σοκ σε μία I(d) χρονολογική σειρά με  $0 < d < 1$  εξασθενούν με υπερβολικά αργό ρυθμό.

Η σημαντικότητα αυτής της γενίκευσης στη μοντελοποίηση των long-run οικονομικών φαινομένων αναπτύχθηκε από μελέτες των Baillie και Bollerslev (1994), Baillie, Chung και Tieslau (1996), Cheung και Lai (1993), Diebold, Husted και Rush (1991), Lo (1991) και Sowell (1992).

Οι Baillie, Bollerslev και Mikkelsen (1996) εισήγαγαν το fractionally integrated GARCH (FIGARCH) μοντέλο, γενικεύοντας το GARCH και IGARCH μοντέλο, το οποίο παρουσιάζει μεγαλύτερη ευελιξία (μη ακέραιο d) στην έρευνα της long run εξάρτησης στην υπό συνθήκη διακύμανση ή αλλιώς στην έρευνα της ισχυρή μνήμης στην υπό συνθήκη μεταβλητότητα (conditional volatility). Ένα σοκ στη διακύμανση (conditional variance) στα μοντέλα αυτά είναι παροδικό και η επίδραση στην εκτίμηση της μελλοντικής διακύμανσης εξασθενεί με ένα υπερβολικά αργό ρυθμό.

Τα FIGARCH μοντέλα συνδυάζουν πολλά από τα χαρακτηριστικά των fractionally integrated (FI) διαδικασιών με την υπό όρους ετεροσκεδαστικότητα (conditional heteroscedasticity - CH) των GARCH μοντέλων.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των FIGARCH σχετικά με τα ARFIMA είναι η ασύμπτωτη συνοχή του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας.

Ο Baillie όρισε την υπό συνθήκη διακύμανση :

$$h_t = \text{Var}(\varepsilon_t / \Omega_{t-1})$$

όπου  $\Omega_{t-1}$  είναι η πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή  $t - 1$ . Το GARCH μοντέλο μπορεί να γραφτεί :

$$[1 - \beta(L)]h_t = w + \alpha(L)\varepsilon_t^2, \quad (26)$$

Όπου  $\alpha_{(L)}$  και  $\beta_{(L)}$  είναι τα πολυώνυμα βαθμού υστέρησης  $L$  (Lag:  $Ly_t = y_{t-1}$ ) τάξης  $q$  και  $p$  αντίστοιχα.

Ορίζοντας τη σκεδαστική καινοτομία ως  $u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$  μπορεί να γραφτεί ως μια ARMA (m,p) διαδικασία του  $\varepsilon_t^2$  :

$$[1 - \beta(L) - \alpha(L)]\varepsilon_t^2 = w + [1 - \beta(L)]u_t$$

,όπου  $m = \max(q,p)$ .

Μία ενδιάμεση FIGARCH (p,d,q)παρουσίαση δίνεται απ' την

$$\Phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = w + [1 - \beta(L)]u_t, \quad (27)$$

όπου  $\Phi(L) = [1 - \beta(L) - \alpha(L)](1-L)^{-d}$ .

Σημειώνουμε ότι για  $d > 0$ ,  $\Phi(L)$  είναι άπειρης τάξης με τις ρίζες του  $\Phi(z)=0$  να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου (unit circle). Όταν  $d=0$  ένα FIGARCH μοντέλο μειώνεται σε ένα GARCH μοντέλο αφού  $(1-L)^0 = 1$  από τη σχέση (19), ενώ όταν  $d=1$  σε ένα Integrated GARCH (IGARCH) μοντέλο αφού  $(1-L)^1 = (1-L)$  από την ίδια σχέση. Για  $0 < d < 1$  σύμφωνα με Baillie (1996), Bollerslev και Engle(1993) ένα FIGARCH μοντέλο συνεπάγεται μία long memory συμπεριφορά και μία μικρού ρυθμού μείωση του αντίκτυπου ενός σοκ στη μεταβλητότητα.

Η υπό συνθήκη διακύμανση μίας FIGARCH διαδικασίας μπορεί να γραφτεί ως :

$$h_t = \frac{w}{1-\beta_1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2, \quad (28)$$

όπου  $\lambda(L) = 1 - \{[(\Phi(L)(1-L)^d)/[1 - \beta(L)]]\}$

Σύμφωνα με τον Baillie(1996) μία FIGARCH (p,d,q) διαδικασία είναι αυστηρώς και όχι ασθενώς στάσιμη για  $0 \leq d \leq 1$ .

Μία FIGARCH διαδικασία με  $0 < d < 1$  έχει long memory ,έτσι ώστε τα σοκ στην υπό συνθήκη διακύμανση τελικά να εξαφανίζονται. Σε αντίθεση με την περίπτωση όπου  $d=0$ , το  $\sum_j^{\theta_j}$  μειώνεται τελικά σε υπερβολικό παρά σε εκθετικό βαθμό έτσι ώστε η fractional διαφοροποιημένη παράμετρος  $d$  περιέχει σημαντική πληροφορία σχετικά με τα πρότυπα και την ταχύτητα με την οποία πολλαπλασιάζονται τα σοκ στη μεταβλητότητα. Για  $d > 1$  το  $\Theta_1$  είναι απροσδιόριστο και η υπό συνθήκη διακύμανση είναι εκρηκτική. Οι συνθήκες που εξασφαλίζουν θετική διακύμανση για μία FIGARCH(I,d,I) διαδικασία είναι

$\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 + d \geq 0$  και  $1 - 2(\alpha_1 + \beta_1) \geq d \geq 0$ .

Η FIGARCH διαδικασία έχει ένα υπερβολικά αργό ρυθμό μείωσης των αυτοσυσχετίσεων των  $u_t^2$ , που είναι ένα χαρακτηριστικό των long memory διαδικασιών.

Ο Baillie δείχνει ότι μια FIGARCH  $(p,d,q)$  διαδικασία για  $0 \leq d \leq 1$  είναι αυστηρώς και όχι ασθενώς στάσιμη.

Μια FIGARCH διαδικασία με  $0 < d < 1$  έχει  $\theta_1 = 0$  έτσι ώστε η conditional variance τελικά εξαφανίζεται ενώ για  $d=0$ ,  $\sum_j^{\theta_j}$  διασπάται τελικά σε μία υπερβολική, παρά σε μια εκθετική τιμή, έτσι το  $d$  περιέχει σημαντική πληροφορία για την πρότυπη μεταβλητή και την ταχύτητα της με τα οποία τα σοκ στη μεταβλητότητα είναι πολλαπλάσια. Για  $d > 1$ ,  $\theta(1)$  είναι απροσδιόριστο και η conditional variance είναι εκρηκτική.

Επομένως, μπορώ να μοντελοποιήσω τη long memory in volatility με τη χρήση του FIGARCH μοντέλου. Όσον αφορά την εκτίμηση της long memory παραμέτρου “d” ο Kilic (2007) με αναφορά στον Davidson (2004) δείχνει ότι το μήκος της μνήμης μίας υπό συνθήκη μεταβλητότητας διαδικασίας είναι συνάρτηση των παραμέτρων των GARCH και FIGARCH μοντέλων και ανατρέπονται όλα τα προηγούμενα που είδαμε στην περίπτωση της ARFIMA διαδικασίας σχετικά με τον όρο d και την Long Memory. Σε ένα short memory GARCH (1,1) μοντέλο, όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος  $\beta_1$  (σχέση (19) και (21)) τόσο περισσότερο ισχυρή (long) είναι η μνήμη. Η μνήμη όμως μίας FIGARCH  $(p,d,q)$  διαδικασίας συμπεριφέρεται με διαφορετικό τρόπο, γίνεται πιο ισχυρή όσο το d πλησιάζει στο μηδέν. Όσο το d μεγαλώνει και πλησιάζει στη μονάδα τότε η μνήμη της διαδικασίας πλησιάζει τη short memory. Όταν το  $d=0$  τότε η διαδικασία γίνεται short memory GARCH model, για  $d=1$  τότε είναι IGARCH διαδικασία. Γι’ αυτό μία FIGARCH διαδικασία έχει περισσότερη μνήμη απ’ ότι μία GARCH διαδικασία και IGARCH διαδικασία. Επιπλέον το μέγεθος της εκτίμησης του d σε ένα FIGARCH μοντέλο παρέχει χρήσιμη πληροφορία για το μέγεθος της μνήμης σε μία υπό συνθήκη μεταβλητότητας διαδικασία.

Συνοψίζοντας σύμφωνα με Killic και Davidson θα εκτιμήσουμε την παράμετρο “d” και ανάλογα την τιμή της θα αποφανθούμε σύμφωνα με τα



παρακάτω αν η προς εξέταση χρονολογική σειρά χαρακτηρίζεται από long memory :

- $d \rightarrow 0^+$  : Long Memory,
- $d \rightarrow 1^-$  : Short Memory,
- $d = 0$  : είναι GARCH διαδικασία και αν
- $d = 1$  : είναι IGARCH διαδικασία.

#### **Ενότητα 4.2 - Τρόποι εκτίμησης του long memory in volatility**

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι το long-memory χαρακτηριστικό στη μεταβλητότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία FIGARCH διαδικασία. Όσον αφορά τον τρόπο εκτίμησης της fractional integration παραμέτρου  $d$  πολλοί εκτιμητές έχουν αναπτυχθεί. Ένας από αυτούς είναι ο Quasi Maximum Likelihood (QML) εκτιμητής, τον οποίο χρησιμοποιούν σε εμπειρική τους έρευνα οι Harvey (1998) και Breidt (1998), και ο Gaussian ημι-παραμετρικός εκτιμητής (GSE) που προτάθηκε από τον Kunsch (1987) .

Επίσης, ευρέως γνωστοί εκτιμητές στην εκτίμηση του  $d$  (στη μεταβλητότητα) είναι δύο ημι-παραμετρικοί εκτιμητές, οι Log Periodogram (LP) και ο Whittle εκτιμητής. Ο πρώτος είναι ιδιαίτερα δημοφιλής εξαιτίας της απλότητας στη κατασκευή του ως ένας γραμμικός εκτιμητής παλινδρόμησης. Ο Whittle εκτιμητής περιέχει αριθμητικές μεθόδους, άρα είναι περισσότερο σύνθετος, αλλά είναι πιο αποτελεσματικός στις εκτιμήσεις σε σχέση με τον LP εκτιμητή. Ο εκτιμητής αυτός προτάθηκε από τους Kunsch (1987) και Robinson (1995) , οι οποίοι έδειξαν τη συνοχή και την ασυμπτωτική του κανονικότητα για  $-0.5 < d < 0.5$ . Ο Velasco (1999) προχώρησε την έρευνα του Robinson, δείχνοντας ότι ο Whittle εκτιμητής είναι συνεπής για  $-0.5 < d < 1$  και ασυμπτωτικά κανονικός ως προς την κατανομή του για  $-0.5 < d < 3/4$ .

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

### **Ενότητα 5.1 - Μέθοδος εκτίμησης της fractional integration παραμέτρου**

Στην εργασία αυτή θα ερευνήσουμε την ύπαρξη long-memory στο μέσο των χρονολογικών σειρών, που όπως προαναφέραμε μπορεί να μοντελοποιηθεί με ARFIMA(p,d,q) διαδικασία και να εκτιμηθεί με πλήθος εκτιμητών. Εμείς βασιζόμενοι στην έρευνα του Jensen, όπως και άλλων ερευνητών, ο οποίος βρίσκει σε εμπειρική του ανάλυση ότι ο wols εκτιμητής έχει αρκετά μικρότερα MSEs (mean square errors) σε σχέση με τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα του πασιγνώστου GPH εκτιμητή, θα χρησιμοποιήσουμε τον wols εκτιμητή του Jensen (1999) για την εκτίμηση της long-memory παραμέτρου.

Στο εμπειρικό κομμάτι χρησιμοποιούμε ημερήσιες παρατηρήσεις, από 31.12.1999 έως 31.01.2011 από την Datastream. Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι 2982. Οι σειρές τις οποίες θα μελετήσουμε, σχετικά με την ύπαρξη long memory, είναι οι spot συναλλαγματικές ισοτιμίες GBP/EUR, EUR/GBP, USD/EUR και USD/JPY, τα διατραπεζικά επιτόκια ενός, τριών και δώδεκα μηνών για την Ελλάδα, Γερμανία και Αμερική καθώς και ο γενικός δείκτης του χρηματιστηρίου Αθηνών (ATHEX COMPOSITE PRICE INDEX), ο «εικοσάρης» (FTSE/ATHEX 20\_PRICE INDEX) και ο S&P 500 COMPOSITE-PRICE INDEX. Ενδεικτικά πήραμε τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων από την ίδια πηγή δεδομένων και για την ίδια διάρκεια για δύο ομόλογα, το Dow Jones Corporate 10 Year Bond και το REX Bond Sub Index 10 Years και για την περίοδο 15.01.2000 έως 15.12.2011.

Η ανάλυσή μας και ο έλεγχος για την ύπαρξη long memory in mean στις σειρές μας θα γίνει με τη βοήθεια του WOLS εκτιμητή του Jensen (1999) μαζί με ένα συμπληρωματικό m-file το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω, τα οποία μας εκτιμούν τη fractional integration παράμετρο (d). Τονίζουμε ότι για να τρέξουν στη Matlab τα παρακάτω m-files είναι απαραίτητο το Wavekit toolbox του Ojanen (1998) που είναι διαθέσιμο ελεύθερα στο διαδίκτυο.

Τα παρακάτω m-file της Matlab μας εκτιμούν το  $d$  χρησιμοποιώντας τον wols εκτιμητή του Jensen και έχουν ως μεταβλητές εισόδου την προς μελέτη σειρά, τον τύπο του wavelet και το πλήθος των qmf φίλτρων που χρησιμοποιείται στο κάθε wavelet..

### **A m-file (Matlab)**

% Εκτιμάει τη fractional παράμετρο  $d$  χρησιμοποιώντας τον wols εκτιμητή του Jensen

clear all;

data = xlsread('USEUR');

[delta\_Haar6, sig] = wols(data, 'Haar',6);

delta\_Haar6

[delta\_Coiflet6, sig] = wols(data, 'Coiflet',6);

delta\_Coiflet6

[delta\_Beylkin10, sig] = wols(data, 'Beylkin',10);

delta\_Beylkin10

[delta\_Ojanen20, sig] = wols(data, 'Ojanen',20);

delta\_Ojanen20

[delta\_Daubechies2, sig] = wols(data, 'Daubechies',2);

delta\_Daubechies2

Τονίζω ότι επιλέξαμε ενδεικτικά τις παραπάνω τιμές για τα qmf φίλτρα του κάθε wavelet. Δοκιμάσαμε στη Matlab όλες τις τιμές των φίλτρων αυτών για κάθε wavelet.

Το παρακάτω m-file της Matlab είναι του Jensen το οποίο εκτιμά (με wols εκτιμητή) τη long memory παράμετρο και τη διακύμανση της εκάστοτε σειράς.

### **B m-file (Matlab)**

function [d, sigma2] = wols(f,type,n);

% wols --returns wavelet consistent ordinary least squares estimate (WOLS) of the long memory parameter and of the variance of the signal

%

% Usage [d,sigma2] = wols(f,type,n)

```

%
% Inputs
% f - input signal, length must be a power of two.
% n - the number of the qmf filters (See type for proper choice)
% type - the name of the wavelet family, one of the following:
%
% 'Haar' Haar's wavelet
% 'Beylkin' Only one wavelet, with 18 coefficients (n = 1, 2, ..., 18)
% 'Coiflet' Coiflets (n = 6, 12, 18, 24, or 30)
% 'Daubechies' Her compactly supported of length n (n=2,4,...,20)
% 'Ojanen' Most Sobolev-regular (see the documentation), lengths
% n=8:2:40
%
% Global
% iprint - If equal iprint = 1 wols.m prints out the regressions analysis
% of variance, and the covariance matrix of the regression
%
% Outputs
% d - WOLS estimate of the long memory parameter
% sigma2- WOLS estimate of the variance of the signal
%
% Disclaimer
% You need wavekit to run this program. Wavekit is a free
% MATLAB wavelet toolbox, which can be downloaded from the
INTERNET
% at http://www.math.rutgers.edu/~ojanen/wavekit/.
% We are not responsible for any errors related to wavekit.
%
global iprint

if rem(length(f),2) ~= 0
    error('Length of input signal must be a power of 2');
end

```

```

[h,g] = wavecoef(type,n);

w = fwt1(f,h,g);

%%%%%
%Additional lines
%showmsa(w)
%g = ifwt1(w,h,g);
%norm(f-g)
%%%%%

max = log(length(f))/ log(2) ;
counter = 2;
R = zeros(max,1);
x = zeros(max,1);
J = ones(max,1);

for j = 0 : max - 1
    R(j+1) = mean(w(counter:counter + (2 ^ j) - 1).^2);
    x(j+1) = - 2 * (j + 1) ;
    counter = counter + 2 ^ j;
end

X = [ J, x];

b = inv(X' * X) * X' * log2(R);

sigma2 = 2 ^ (b(1));
d = b(2);

if iprint == 1

    SSE = log2(R)' * (eye(max) - X * inv(X' * X) * X' ) * log2(R);
    SST = sum(log2(R).^2) - max * mean(log2(R))^2;

```

```

SSR = SST - SSE;
MSE = SSE /(max - 2);
F = SSR / MSE;
Cov = MSE .* inv(X' * X);
T2 = b(2) / (Cov(2,2) ^ .5);
T1 = b(1) / (Cov(1,1) ^ .5);

disp(['=====']);
disp(['Dependent Variable: LOG2(R)          ']);
disp(['NOTE: R is the wavelet variance.    ']);
disp(['      Analysis of Variance          ']);
disp(['      Sum of Mean                    ']);
disp(['Source  DF  Squares  Square  F Value']);
disp(['Model   1  ', sprintf(' %8.4f  %8.4f  %8.4f',SSR,SSR,F)]);
disp(['Error  ',  sprintf('%5d  %8.4f  %8.4f',max-2, SSE,MSE)]);
disp(['C Total',sprintf('%5d  %8.4f\n', max-1,SST)]);
disp(['      R-square : ', sprintf('%8.4f\n\n', SSR/SST)]);

disp(['Variable  Estimates  Std Error  T-test']);
disp(['LOG2(Sigma2) ',sprintf(' %8.4f  %8.4f  %8.4f',b(1),Cov(1,1) ^
.5,T1)]);
disp(['d          ',sprintf(' %8.4f  %8.4f  %8.4f\n', d,Cov(2,2) ^ .5,T2)]);
disp(['Covariance Matrix: ']);
disp(['      LOG2(Sigma2)  d']);
disp(['LOG2(Sigma2)',sprintf('%8.4f  %8.4f', Cov(1,1),Cov(1,2))]);
disp(['d          ',sprintf('%8.4f  %8.4f', Cov(2,1),Cov(2,2))]);
disp(['=====']);

end

%
% Copyright (c) Mark J. Jensen, 1999
%
%
```

## Ενότητα 5.2 - Αποτελέσματα εκτίμησης

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζουμε τις εκτιμήσεις της fractional integration παραμέτρου  $d$  με τον wols εκτιμητή του Jensen (1999) για όλες τις σειρές που αναφέραμε παραπάνω. Τονίζουμε ότι με όλους τους τύπους wavelet που προαναφέραμε στο A m-file (matlab) τα εκτιμώμενα  $d$  στην συντριπτική τους πλειοψηφία είναι μεταξύ του 0.5 και του 1. Παρακάτω παραθέτουμε, για λόγους εξοικονόμησης χώρου, ενδεικτικές εκτιμήσεις των  $d$  με επιλογή συγκεκριμένων wavelets και coefficient.

### Πίνακας 2

Εκτιμώμενα  $d$ , 31.12.99 έως 31.01.11 (2982 παρατηρήσεις), εκτός από πληθωρισμό που αναφέρονται σε 132 παρατηρήσεις από 15.01.00 έως 15.12.10

	WAVELET				
	Haar- 6	Coiflet- 6	Daubechies- 10	Ojanen- 20	Beylkin- 10
<b>Indexes</b>					
<b>ATHEXC.IN.</b>	0.9407	0.8653	0.7519	0.8271	0.8855
<b>FTSE AT. 20</b>	0.9347	0.8735	0.7859	0.8247	0.8904
<b>S&amp;P 500</b>	0.8604	0.8627	0.7413	0.8841	0.9177
<b>Exch. Rates</b>					
<b>EUR / GBP</b>	0.9347	0.8735	0.9496	0.8762	0.8904
<b>GBP / USD</b>	0.8738	0.9194	0.8959	0.9120	0.9496
<b>USD / EUR</b>	0.9597	0.9399	0.8727	0.9661	0.9194

<b>USD / JPY</b>	0.8008	0.5457	0.9200	0.8748	0.8806
<b>Int. Rates</b>					
<b>GREECE</b>					
<b>1-Month</b>	1.1093	0.7574	0.6788	0.5953	0.7168
<b>3-Month</b>	1.1209	0.7177	0.7300	0.7384	0.6868
<b>12-Month</b>	0.8885	0.7976	0.8205	0.7958	0.8768
<b>GERMANY</b>					
<b>1-Month</b>	1.0067	0.9147	0.9494	0.9237	0.9416
<b>3-Month</b>	1.0293	0.9689	0.8486	0.9822	0.9640
<b>12-Month</b>	1.0012	0.9529	0.8880	0.9808	0.9542
<b>USA</b>					
<b>1-Month</b>	0.9534	0.8784	0.9061	0.8525	0.9244
<b>3-Month</b>	0.9891	0.8844	0.8941	0.8688	0.9196
<b>12-Month</b>	0.9635	0.8528	0.8665	0.8427	0.8969
<b>Bonds</b>					
<b>DJC 10-Y B</b>	1.0165	0.8703	0.8827	0.8914	0.7377
<b>REX 10-Y B</b>	0.8507	0.8165	0.8299	0.8510	0.8038



Από τον Πίνακα 2 πολλά ενδιαφέροντα ευρήματα παρουσιάζονται. Όλα τα εκτιμώμενα  $d$ , εκτός από αυτά του πληθωρισμού, είναι μεγαλύτερα του 0.5 φανερώνοντας ότι οι σειρές έχουν άπειρη διακύμανση και είναι μη στάσιμες (σύμφωνα με Πίνακα1). Επίσης η πλειοψηφία των εκτιμήσεων του “ $d$ ” είναι μικρότερη της μονάδας με όλους τους τύπους wavelet και coefficients που αναφέρονται στο A m-file (Matlab) τα οποία τρέξαμε στη Matlab, συμπεραίνοντας ότι οι σειρές δεν είναι αυστηρά μοναδιαίας ρίζας (unit root) διαδικασίες. Παρατηρούμε ότι ο επιλεγμένος αριθμός coefficient και τα εκτιμώμενα  $d$  είναι αντιστρόφως ανάλογα, δηλαδή όσο αυξάνουμε τα coefficient το εκάστοτε εκτιμώμενο  $d$  φθίνει. Η επίπτωση των παραπάνω συμπερασμάτων είναι ότι οι σειρές έχουν την τάση να επιστρέφουν στο μέσο τους σε μακρύ χρονικό διάστημα ή τα σοκ σε αυτές να διαρκούν για μεγάλο χρονικό διάστημα, υποδεικνύοντας την ύπαρξη long memory στο μέσο τους. Τονίζουμε ότι αρκετές εκτιμήσεις του “ $d$ ”, με τον Haar-6 τύπο wavelet, είναι μεγαλύτερες της μονάδας για τα διατραπεζικά επιτόκια ενός και τριών μηνών της Ελλάδας και ενός, τριών και δώδεκα μηνών της Γερμανίας, καθώς και για τον Down Jones Corporate 10-Y Bond που πήραμε ενδεικτικά, αλλά αυτό δεν είναι αντιπροσωπευτικό αν κάποιος κοιτάξει όλες τις εκτιμήσεις του  $d$  με όλα τα wavelet και τα διαφορετικών τιμών coefficient στα input του κώδικα. Ένα εκτιμώμενο “ $d$ ” μεγαλύτερο από τη μονάδα σημαίνει ότι η διάρκεια των σοκ στις σειρές είναι άπειρη, όμως από τα παραπάνω αποτελέσματα δεν μπορούμε να βγάλουμε αυτό το συμπέρασμα διότι όλες οι άλλες εκτιμήσεις του “ $d$ ”, με τους άλλους τύπους wavelet, είναι μικρότερες της μονάδας. Άλλωστε, παίρνοντας ένα απλό μέσο όρο των εκτιμήσεων του “ $d$ ” για κάθε σειρά, αυτός είναι πάλι μικρότερος της μονάδας. Παρατηρώντας προσεκτικότερα τον Πίνακα 2, διαπιστώνουμε ότι τα εκτιμώμενα “ $d$ ” για τις συναλλαγματικές ισοτιμίες είναι μικρότερα για τις ισοτιμίες EUR/GBP και USD/JPY και μεγαλύτερα για τις GBP/USD και USD/EUR, υποδεικνύοντας ότι η GBP/USD και USD/EUR συναλλαγματικές ισοτιμίες είναι πιο κοντά αλλά όχι αυστηρώς unit root διαδικασίες.

Σχετικά με τα διατραπεζικά επιτόκια, τα εκτιμώμενα “d” φαίνονται μικρότερα για την Ελλάδα και την Αμερική, σε αντίθεση με τη Γερμανία όπου όλες οι εκτιμήσεις είναι κοντά στη μονάδα, υποδεικνύοντας ότι αυτή η σειρά είναι πιο κοντά σε μία unit root διαδικασία.

Τα δύο ομόλογα που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση έχουν εκτιμήσεις μικρότερες της μονάδας, με μεγαλύτερη αυτή του Dow Jones Corporate 10-Y Bond. Σε κάθε περίπτωση, υφίστανται long memory σε όλες τις σειρές, ακόμη και στους δείκτες χρηματιστηρίων που χρησιμοποιήσαμε (ATHEX, FTSE/ATHEX 20 και S&P 500) όπου σύμφωνα με αρκετές έρευνες οι απόψεις δίστανται (Lo – 1991).

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στις φυσικές επιστήμες το long memory χαρακτηριστικό των σειρών έχει τεκμηριωθεί αρκετά. Εμπνευσμένοι από την εργασία των Granger και Hosking (1980) στις I(d) διαδικασίες όταν το “d” δεν είναι ακέραιος αριθμός, πολλοί οικονομολόγοι επέδειξαν αυξημένο ενδιαφέρον για το χαρακτηριστικό αυτό της long memory. Ο περιοριστικός χαρακτήρας ενός ακέραιου d στις σειρές άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη fractional integration μοντέλων, όπως το ARFIMA για τη μοντελοποίηση της long memory παραμέτρου στο μέσο και το FIGARCH στη μοντελοποίηση της παραμέτρου αυτής στη μεταβλητότητα. Ακόμα, η επιθυμία για ημι-παραμετρικές εκτιμήσεις του “d” οδήγησε στη δημιουργία από πολλούς ερευνητές, πλήθους εκτιμητών (σε επίπεδο χρόνου και συχνότητας) της long memory παραμέτρου στο μέσο και στη μεταβλητότητα. Ένας τέτοιος εκτιμητής είναι ο wavelet ordinary least squares (wols) εκτιμητής του Jensen (1999), ο οποίος εκτιμάει τη fractional integration παράμετρο στο μέσο και είναι πολύ εύχρηστος λόγω της απλότητας και των ελκυστικών ιδιοτήτων του.

Τα ευρήματα της εφαρμογής μας υποδεικνύουν την ύπαρξη long memory σε σειρές, όπως επιτόκια, συναλλαγματικές ισοτιμίες, δείκτες χρηματιστηρίων και ομολόγων που χρησιμοποιήσαμε, με τη πλειοψηφία των εκτιμήσεων του “d” να είναι μεταξύ του 0.5 και του 1, συμπεραίνοντας

ότι οι παραπάνω σειρές είναι μη στάσιμες, με άπειρη διακύμανση και η διάρκεια των σοκ «ζει» για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Τα συμπεράσματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα για οικονομικές και μακροοικονομικές αναλύσεις. Τέτοιες σειρές στη μακροοικονομία, όπως τα επιτόκια και οι συναλλαγματικές ισοτιμίες, είναι κρίσιμης σημασίας για τη χάραξη οικονομικής και νομισματικής πολιτικής, καθώς η πολιτική αυτή υλοποιείται πρωτίστως με τον καθορισμό των βραχύβιων (short term) επιτοκίων στις περισσότερες εκβιομηχανισμένες χώρες. Επιπροσθέτως, οι κινήσεις των επιτοκίων και των συναλλαγματικών ισοτιμιών επηρεάζουν τις αποφάσεις σε μακροοικονομικό επίπεδο, σχετικά με τις επενδύσεις, τη κατανάλωση, τις αποταμιεύσεις, τις εξαγωγές και τις εισαγωγές, ενώ αποτελούν έναυσμα αποφάσεων στη διαχείριση χαρτοφυλακίων και στις τεχνικές αντιστάθμισης κινδύνων.

## ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

ALANA G. (2000) *"MEAN REVERSION IN THE REAL EXCHANGE RATES"*, 69 , 285-288, Economics Letters.

ALANA G. (2001) *"TESTING OF SEASONAL FRACTIONAL INTEGRATION IN UK AND JAPANESE CONSUMPTION AND INCOME"* 16 , 95-114, Journal of Applied Econometrics.

ANDERSEN T.B. and BOLLERSLEV T. *"HETEROGENOUS INFORMATION ARRIVALS AND RETURN VOLATILITY DYNAMICS: UNCOVERING THE LONG RUN IN HIGH FREQUENCY RETURNS"*, 52, 975-1005, Journal of Finance.

BAILLIE R.T., CECEN A.A. and HAN Y.W. (2000) *"HIGH FREQUENCY DEUTSCHE MARK-US DOLLAR RETURNS : FIGARCH REPRESENTATIONS AND NON LINEARITIES"* , 4 , 247-267, Multinational Finance Journal.

BAILLIE R.T , BOLLERSLEV T. and MIKKELSEN H.O. (1996) *"FRACTIONALLY INTEGRATED GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKE DASTICITY"*, 74 , 3-30, Journal of Economics.

BAILLIE R.T. (1996) *"LONG MEMORY PROCESSES AND FRACTIONAL INTEGRATION IN ECONOMETRICS"*, 73 , 5-59, Journal of Econometrics.

BAILLIE R.T. and MORANA C. (2007) *"MODELING LONG MEMORY AND STRUCTURAL BREAKS IN CONDITIONAL VARIANCES: AN ADAPTIVE FIGARCH APPROACH"*, Working paper, Department Economics, Queen Mary University of London.

BANERJEE A. and URGA G. (2005) *"MODELLING STRUCTUAL BREAKS , LONG MEMORY AND STOCK MARKET VOLATILITY : AN OVERVIEW"*, 129, 1-2, Journal of Econometrics.

BENTES S. , MENZES R. AND MENDES D. (2008) *"LONG MEMORY AND VOLATILITY CLUSTERING : IS THE EMPIRICAL EVIDENCE CONSISTENT ACROSS STOCK MARKETS"*, 15 , 3826-3830, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications.

BEYKLIN G. (1993) *"WAVELETS AND FAST NUMERICAL ALGORITHMS"*, in Proceedings of Symposia in Applied Mathematics , EOS I. DAUBECHIES , American Mathematical Society : Rhode Island.

BEYLKIN G. , COIFMAN R. AND ROKHLIN V. (1991) *"FAST WAVELET TRANSFORMS and NUMERICAL ALGORITHMS"*, 44 , 141-183. Communications on Pure and Applied Mathematics.

BOLLERSLEV T. and MIKKELSEN H.O. (1996) *"MODELING AND PRICING LONG MEMORY IN STOCK MARKET VOLATILITY"*, 73 , 151-184, Journal of Economics.

BOLLERSLEV T. and MIKKELSEN H.O. (1999) " *LONG TERM EQUITY ANTICIPATION SECURITIES AND STOCK MARKET VOLATILITY DYNAMICS* ", 92, 75-99, Journal of Econometrics.

BRUNETI G. and GILBERT G. (2000) " *BIVARIATE FIGARCH AND FRACTIONAL COINTEGRATION* ", 7 , 509-530, Journal of Empirical Finance.

BRUNETTI G. and GILBERT E. (2000) " *BIVARIATE FIGARCH AND FRACTIONAL COINTEGRATION* ", 7 , 509-530, Journal of Empirical finance.

CAGLAYAN M. and JIANG F. (2006) " *REEXAMING THE LINKAGES BETWEEN INFLATION OUTPUT GROWTH : A BIVARIATE ARFIMA-FIGARCH APPROACH* ", Working Paper, Department of Economics, University of Glasgow.

CAPORALE G and ALANA L. (2010) " *ESTIMATING PERSISTENCE IN THE VOLATILITY OF ASSET RETURNS WITH SIGNAL PLUS NOISE MODELS* ", DIW Berlin Discussion Paper, 1006.

CAPORIN M. (2003) " *IDENTIFICATION OF LONG MEMORY IN GARCH MODELS* ", 12 , 133-51., Statisticals Methods and Applications.

CECCHETTI S. , LAM P.S and MARK N.G. (1990) " *MEAN REVERSION IN EQUILIBRIUM ASSET PRICES* ", 80 , 398-418, The American Economic Review.

CHEUNG Y.W. (1993) " *LONG MEMORY IN FOREIGN-EXCHANGE RATES* ", 11 , 93-101, Journal of Business & Economic Statistics.

CHITKUSHEV V. , WANG F. , WEBER P. , YAMASAKI K. , HAVLIN S. and STANLEY H. (2008) " *COMPARISON BETWEEN VOLATILITY RETURN INTERVALS OF THE S&P 500 INDEX AND TWO COMMON MODELS* ", 61, 217-223, The European Physical Journal.

CHRISTOFFERSEN P. , HESTON S. and JACOBS K. (2006) " *OPTION VALUATION WITH CONDITIONAL SKEWNESS* ", 131, 253-284, Journal of Econometrics.

ENGLE R. (1982) " *AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTICITY WITH ESTIMATES OF THE VARIANCE OF UNITED KINGDOM INFLATION* ", 50, 987-1007, Econometrica.

GABJIN O. , SEUNGHWAN K. and CHEOIJUN E. (2008) " *LONG-TERM MEMORY AND VOLATILITY CLUSTERING IN HIGH-FREQUENCY PRICE CHANGES* ", 387, 1247-1254, Physica A.

GONZALO J. and GRANGER C. (1995) " *ESTIMATION OF COMMON LONG MEMORY COMPONENTS IN COINTEGRATED SYSTEMS* ", 13, 1, Journal of Business & Economic Statistics.

GRANGER C.W.J. and JOYEUX R. (1980) " *AN INTRODUCTION TO LONG MEMORY TIME SERIES MODELS AND FRACTIONAL DIFFERENCING* ", 1, 15-39, Journal of Time Series Analysis.

HOSKING J.R.M. (1981) *"FRACTIONAL DIFFERENCING"*, 68, 165-176, Biometrika.

JENSEN M. (2000) *"AN ALTERNATIVE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR OF LONG MEMORY PROCESSES USING COMPACTLY SUPPORTED WAVELETS"*, 24, 361-387, Journal of Economic Dynamics.

JENSEN M. (1999) *"USING WAVELETS TO OBTAIN A CONSISTENT ORDINARY LEAST SQUARES ESTIMATOR OF THE LONG MEMORY PARAMETER"*, 18, 17-32, Journal of Forecasting.

KANG S.H. and YOON S.M. (2007) *"LONG MEMORY PROPERTIES IN RETURN AND VOLATILITY: EVIDENCE FROM THE KOREAN STOCK MARKET"*, 385, 591-600, Physica.

KANG S.H. and YOON S.M. (2009) *"MODELING AND FORECASTING THE VOLATILITY OF EASTERN EUROPEAN EMERGING MARKETS"*, 13, 1598-2769, Journal of international Economic Studies.

KILIC R. (2007) *"CONDITIONAL VOLATILITY AND DISTRIBUTION OF EXCHANGE RATES : GARCH AND FIGARCH MODELS WITH NIG DISTRIBUTION"*, 11, 1-31, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics.

KILIC R. (2010) *"LONG MEMORY AND NONLINEARITY IN CONDITIONAL VARIANCES : A SMOOTH TRANSITION FIGARCH MODEL"*, Journal of Empirical finance.

KIM M. , NELSON C. and STARTZ R. (1991) *"MEAN REVERSION IN STOCK PRICES ? ARE APPRAISAL OF THE EMPIRICAL EVIDENCE"*, 58, 515-528, The review of Economic Studies.

KIRMAN A. and TEYSSIERE G. (2002) *"MICROECONOMIC MODELS FOR LONG MEMORY IN THE VOLATILITY OF FINANCIAL TIME SERIES"*, 5, 3, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics.

KORKMAZ T. , CEVIK E. and OZATAC N. (2009) *"TESTING FOR LONG MEMORY IN ISE USING AOFIMA-FIGARCH MODEL AND STRUCTURAL BREAK TEST"*, 26 , 1450-2887, International Research Journal of Finance Economics.

LIU M. (2000) *"MODELING LONG MEMORY IN STOCK MARKET VOLATILITY"*, 99, 139-171, Journal of Econometrics.

LO. A. (1991) *"LONG TERM MEMORY IN STOCK MARKET PRICES"* , 5, 1279-1313, Journal of Econometrics Society.

LOBATO I.N. (1999) *"A SEMIPARAMETRIC TWO-STEP ESTIMATOR IN A MULTIVARIATE LONG MEMORY MODEL"*, 90 , 129-153, Journal of Econometrics.

MORANA G. (2009) *"MODELLING LONG MEMORY AND STRUCTURAL BREAKS IN CONDITIONAL VARIANCES : AN ADAPTIVE FIGARCH"*, 33, 1577-1592., Journal of Economic Dynamics and Control.

MORANA C. (2006) *"ESTIMATING LONG MEMORY IN THE MARK - DOLLAR EXCHANGE RATE WITH HIGH FREQUENCY DATA"*, 2, 361-364 Applied Financial Economics Letters.

MORANA G. (2007) *"MULTIVARIATE MODELLING OF LONG MEMORY PROCESSES WITH COMMON COMPONENTS"*, 52, 919-934, Computational Statistics and Data Analysis.

NELSON C. (1982) *"TRENDS AND RANDOM WALKS IN MACROECONOMIC TIME SERIES : SOME EVIDENCE AND IMPLICATIONS"*, 10, 139-162, Journal of Monetary Economics.

ROBINSON P.M. (1994) *"SEMIPARAMETRIC ANALYSIS OF LONG MEMORY TIME SERIES"*, 22, 515-539, Annals of Statistics.

SAID S. and DICKEY D. (1984) *"TESTING FOR UNIT ROOT IN AUTOAGGRESSIVE-MOVING AVERAGE MODELS OF UNKNOWN ORDER"*, 71, 599-607, Biometrika.

SZILARD P. and LASZLO M. (2001) *"MULTIVARIATE DIAGONAL FIGARCH : SPECIFICATION, ESTIMATION AND APPLICATION TO MODELING EXCHANGE RATES VOLATILITY"* Working Paper.

TEYSSIERE G. (1998) *"MULTIVARIATE LONG-MEMORY ARCH MODELLING FOR HIGH FREQUENCY FOREIGN EXCHANGE RATES"*, Working Paper, GREQAM and University of London.

VILASUSO J. (2002) *"FORECASTING EXCHANGE RATE VOLATILITY"*, 76, 59-64, Economics Letters.

VLAAR P. and PALM F. (1993) *"THE MESSAGE IN WEEKLY EXCHANGE RATES IN THE EUROPEAN MONETARY SYSTEM : MEAN REVERSION CONDITIONAL HETEROCEDASTICITY, AND JUMPS"*, 11, 3, Journal of business & Economic Statistics.

WALTER K. and BAUDOIN T.A. (2007) *"STRUCTURAL CHANGE AND ESTIMATED PERSISTENCE IN THE GARCH(1,1) MODEL"*, 97, 17-23, Economics Letters.