ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΥΣ ΦΟΙΤΗΣΗΣ

ΤΕΚΜΑΡΤΑ ΔΙΩΝΥΜΙΚΑ ΔΕΝΤΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΡΟΚΙΔΑ ΣΤΥΛΙΑΝΗ ΙΡΙΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ***ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ***

ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ***ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ***

ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΑΛΛΙΑΡΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΤΕΦΑΝΑΔΗΣ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2011

ΤΕΚΜΑΡΤΑ ΔΙΩΝΥΜΙΚΑ ΔΕΝΤΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεωρία τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί να σχετιστεί σχεδόν με οποιονδήποτε τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης, για αυτό αποτελεί ένα χρήσιμο αντικείμενο μελέτης. Σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής είναι η μελέτη του Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσεται η μέθοδος εξαγωγής ουδέτερου κινδύνου πιθανοτήτων από τις τρέχουσες τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Με την προσέγγιση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τεκμαρτές ουδέτερου κινδύνου, τελικές κατανομές πιθανότητας για τον υποκείμενο τίτλο. Στη συνέχεια θεμελιώνονται οι βασικές υποθέσεις του μοντέλου και οι τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ενός μοναδικού ανασυνδυαζόμενου τεκμαρτού διωνυμικού δέντρου. Η διαδικασία που χρησιμοποιείται ως μέθοδος επίλυσης είναι οπισθοδρομική. Τέλος το τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Λέξεις κλειδιά: *υποκείμενος τίτλος, δικαίωμα προαίρεσης, διωνυμικό δέντρο, πιθανότητες κίνησης, πιθανότητες μονοπατιού, τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο, τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες.*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ 1
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΥΣ ΦΟΙΤΗΣΗΣ 1
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 4
1.1 Ιστορική αναδρομή 4
1.2 Διωνυμικό δέντρο 5
1.3 Ανεπάρκεια του Διωνυμικού Μοντέλου 12
1.4 Περίγραμμα Εργασίας 13
2. ΤΕΚΜΑΡΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΟΥΔΕΤΕΡΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 14
2.1 Η μέθοδος του Longstaff 14
2.2 Η Μέθοδος του Rubinstein 20
3. ΤΕΚΜΑΡΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ 28
3.1 Κατασκευή Τεκμαρτής Στοχαστικής Διαδικασίας 28
3.2 Μέθοδος Επίλυσης 34
3.3 Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης 39
3.4 Περαιτέρω Γενικεύσεις 44
4. ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ 48
4.1 Αποτίμηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης 48
4.2 Αποτίμηση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων Προαίρεσης 53
5. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 57
6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 58

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορική αναδρομή

Δικαιώματα προαίρεσης

Δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο επιτρέπει στον κάτοχο του να πραγματοποιήσει μια συγκεκριμένη συναλλαγή (αγοράς ή πώλησης) με προκαθορισμένη τιμή, σε ένα προκαθορισμένο αριθμό μεριδίων ενός προσδιορισμένου τίτλου, σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία ή πριν από αυτή. Η πράξη συναλλαγής ονομάζεται «εξάσκηση του δικαιώματος». Η προκαθορισμένη τιμή στην οποία πραγματοποιείται η εξάσκηση του δικαιώματος ονομάζεται «τιμή εξάσκησης». Η συγκεκριμένη ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος αποκαλείται «ημερομηνία λήξης».

Παρόλο που συναλλαγές στα δικαιώματα προαίρεσης πραγματοποιούνταν εδώ και αιώνες, παρέμεναν σχετικά άγνωστα ως χρηματοοικονομικά προϊόντα. Το 1973 με τη δημιουργία του πρώτου χρηματιστηρίου δικαιωμάτων προαίρεσης (Chicago Board Options Exchange) οι συναλλαγές πάνω σε αυτά τα προϊόντα γνώρισαν πρωτοφανή άνθηση στα Αμερικάνικα χρηματιστήρια.

Διωνυμικό δέντρο

Η θεωρία τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης σχετίζεται σχεδόν με οποιοδήποτε τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης. Για παράδειγμα, όλα τα εταιρικά χρεόγραφα μπορούν να θεωρηθούν ως χαρτοφυλάκια που περιέχουν δικαιώματα αγοράς και πώλησης των περιουσιακών στοιχείων της εταιρίας.

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης έχει μια μακρά ιστορία στην οποία επίσης σημαντικός σταθμός υπήρξε το 1973. Την περίοδο εκείνη, ο *Fischer Black* και ο *Myron Scholes* παρουσίασαν το πρώτο ικανοποιητικό μοντέλο για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Το αρχικό υπόδειγμα των Black και Scholes (1973) εξακολουθεί να είναι το κυρίαρχο υπόδειγμα για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Το συγκεκριμένο υπόδειγμα ήταν ιδιαίτερα πρωτοποριακό για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων γιατί καθόριζε την τιμή του δικαιώματος αποκλειστικά με βάση γνωστές παραμέτρους.

Στη συνέχεια, το 1979 οι *Cox, Ross* και *Rubinstein* παρουσίασαν το *διωνυμικό μοντέλο*. Πρόκειται για μια μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και επιτρέπει την τιμολόγηση όλων των τύπων δικαιωμάτων, τόσο απλών ή εξωτικών, όσο και αμερικανικού ή και ευρωπαϊκού τύπου. Αφορά την κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου το οποίο κάνει διακριτή την γεωμετρική κίνηση Brown (δηλαδή υποθέτει πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τυχαίο περίπατο). Η μέθοδος είναι απλουστευμένη και βασισμένη στην αρχή της μη ύπαρξης κερδοσκοπίας. Το διωνυμικό δέντρο είναι αρκετά ευέλικτο ώστε να περιλαμβάνει και μερίσματα. Σε αντίθεση με το υπόδειγμα Black-Scholes που είναι συνεχούς χρόνου το διωνυμικό δέντρο είναι υπόδειγμα διακριτού χρόνου. Βεβαίως, στο όριο, ένα διωνυμικό δέντρο με μεγάλο αριθμό βημάτων είναι προσεγγίζει το συνεχές υπόδειγμα των Black-Scholes. Το διωνυμικό δέντρο αποδεικνύει επίσης ότι η τιμή του δικαιώματος μπορεί να θεωρηθεί ως η προεξοφλημένη αξία των αναμενόμενων μελλοντικών ροών σε έναν κόσμο όπου οι επενδυτές είναι ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο (risk-neutral world).

Το 1994 ο *Rubinstein* παρουσίασε το *τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο*. Η βασική ιδέα της προσέγγισης του *Rubinstein (1994)* είναι η κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου που μπορεί να προσαρμοστεί στις τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης τα οποία συναλλάσσονται σε τρέχοντα χρόνο με την κατασκευή του δέντρου. Το δέντρο στη συνέχεια μπορεί χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση οποιουδήποτε παραγώγου προϊόντος με τον ίδιο υποκείμενο τίτλο, το οποίο λήγει λίγο πριν ή ταυτόχρονα με τα δικαιώματα προαίρεσης που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του δέντρου.

1.2 Διωνυμικό δέντρο

Μια πολύ χρήσιμη τεχνική για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου. Πρόκειται για ένα διάγραμμα που αντιπροσωπεύει διαφορετικά *μονοπάτια* που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης. Η βασική υπόθεση είναι πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί *τυχαίο περίπατο*. Το δέντρο αναπτύσσεται σε διακριτές περιόδους στον χρόνο οι οποίες αποκαλούνται και *βήματα. Κόμβοι* του δέντρου, ονομάζονται οι σταθμοί που σηματοδοτούν το ξεκίνημα της κάθε περιόδου. Εφόσον είναι διωνυμικό αυτό σημαίνει πως σε κάθε κόμβο θα λαμβάνουμε δυο πιθανά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε κόμβο η μετοχή θα έχει είτε ανοδική είτε καθοδική πορεία. Το περιβάλλον στο οποίο αρχικά παρουσιάζεται η μέθοδος είναι *ουδέτερου κινδύνου* και αυτή είναι μια γενική προσέγγιση η οποία υιοθετήθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979).

Ακολουθεί μια σύντομη ανασκόπηση του διωνυμικού μοντέλου η οποία είναι χρήσιμη για την πληρέστερη κατανόηση του τεκμαρτού διωνυμικού δέντρου.

Ο κόσμος Ουδέτερου Κινδύνου

Το περιβάλλον του ουδέτερου κινδύνου διέπεται από κάποιες αρχές στις οποίες είναι σημαντικό να αναφερθούμε σε αυτό το σημείο.

- $1^{η}$ αρχή: Όλοι οι επενδυτές είναι αδιάφοροι προς τον κίνδυνο.
- $2^{η}$ αρχή: Οι επενδυτές δεν απαιτούν αποζημίωση για τον κίνδυνο.
- $3^{η}$ αρχή: Οι αναμενόμενες αποδόσεις όλων των τίτλων είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο.
- $4^{η}$ αρχή: Θέτοντας την πιθανότητα ανοδικής κίνησης της μετοχής ίση με p (βλέπε (1.1) παρακάτω) θεωρούμε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου

- Είναι έγκυρο να θεωρήσουμε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου όταν αποτιμούμε δικαιώματα προαίρεσης.
- Οι προκύπτουσες τιμές των δικαιωμάτων συμπίπτουν με αυτές του πραγματικού κόσμου.

Σύμφωνα λοιπόν με το υπόδειγμα των Cox, Ross και Rubinstein (1979), ο ρυθμός απόδοσης του υποκείμενου τίτλου σε κάθε διωνυμική περίοδο μπορεί έχει δυο τιμές: να είναι είτε u με πιθανότητα p, είτε d με πιθανότητα $1-p$. Έτσι αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τώρα είναι S στο τέλος της περιόδου (αν έχουμε μια περίοδο) θα είναι uS ή dS. Η πιθανότητα p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της μετοχής στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου και δίνεται από τον τύπο: $p=(r^{n}-d)/(u-d)$ (1.1), όπου $r\equiv 1+r'$ (r' ο ρυθμός του ουδέτερου κινδύνου επιτοκίου) και n ο αριθμός των βημάτων.

Διωνυμικό δέντρο ενός βήματος

Έστω μια μετοχή έχει αρχική τιμή S και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε αυτή την μετοχή που έχει παρούσα αξία c. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι K. Ο χρόνος έως την λήξη του δικαιώματος c είναι T. Υπάρχουν δυο ενδεχόμενα για την τιμή της μετοχής:

$$S \begin{array}{l} \nearrow \; S(T)=uS \\ \searrow \; S(T)=dS \end{array} \quad ,$$

όπου $d<r<u$. Αντίστοιχα υπάρχουν δυο ενδεχόμενα και για την τιμή του δικαιώματος:

$$c \begin{array}{l} \nearrow \; c_u = \max\left[uS-K,0\right] \\ \searrow \; c_d = \max\left[dS-K,0\right] \end{array} \quad ,$$

Η βασική ιδέα είναι να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από Δ μετοχές και ένα ποσό χρημάτων B που επενδύεται στο ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο, έτσι ώστε το έσοδο που θα προκύψει από το χαρτοφυλάκιο να είναι ίσο με το έσοδο που θα προκύψει από το δικαίωμα αγοράς.

$$\Delta S+\mathrm{B} \begin{array}{l} \nearrow \; \Delta uS + r\mathrm{B} \\ \searrow \; \Delta dS + r\mathrm{B} \end{array}$$

Συνεπώς θα πρέπει να επιλέξουμε το Δ και το B έτσι ώστε:

$$\Delta uS + r\mathrm{B} = c_u$$

$$\Delta dS + r\mathrm{B} = c_d .$$

Αν υποθέσουμε ότι: $uS>K$ και $dS<K$, τότε:

$\Delta uS + r\mathrm{B} = uS - K$,

$\Delta dS + r\mathrm{B} = 0$.

Λύνοντας ως προς Δ και B καταλήγουμε:

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)r}.$$

Υπό την υπόθεση ότι δεν πρέπει να υπάρχει κερδοσκοπία, το κόστος του χαρτοφυλακίου $\Delta S + \mathrm{B}$ πρέπει να είναι ίσο με την τιμή του δικαιώματος:

$$c = \frac{\dfrac{c_u r - c_u d + c_d u - c_d r}{u-d}}{r}.$$

Το c είναι η μοναδική τιμή στην οποία δεν μπορούν να υπάρξουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας. Εάν η τιμή ενός δικαιώματος είναι διαφορετική από αυτή τη μοναδική τιμή, κάποιος μπορεί να κερδοσκοπήσει αντιγράφοντας το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο.

Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου

Η τιμή του δικαιώματος μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$c = \frac{c_u\left(\dfrac{r-d}{u-d}\right) + c_d\left(\dfrac{u-r}{u-d}\right)}{r},$$ παρατηρούμε ότι:

$$\left(\frac{r-d}{u-d}\right), \left(\frac{u-r}{u-d}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{r-d}{u-d}\right) + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) = 1,$$

και έτσι προκύπτει ο τύπος (1.1) για παραπάνω από ένα βήματα.

Άρα, $c = \dfrac{pc_u + (1-p)c_d}{r} = \dfrac{\mathrm{E}_p\left[C(T)\right]}{r}$, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος μπορεί να θεωρηθεί ως η προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή του εσόδου που θα προκύψει από αυτό.

Ερμηνεία της πιθανότητας p

Αν η πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης της τιμής του υποκείμενου τίτλου είναι p και η πιθανότητα μιας καθοδικής κίνησης είναι $1-p$ τότε η αναμενόμενη τιμή της μετοχής είναι:

$$\mathrm{E}_p\left[S(T)\right] = pSu + (1-p)Sd = \left(\frac{r-d}{u-d}\right)uS + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)dS = rS.$$

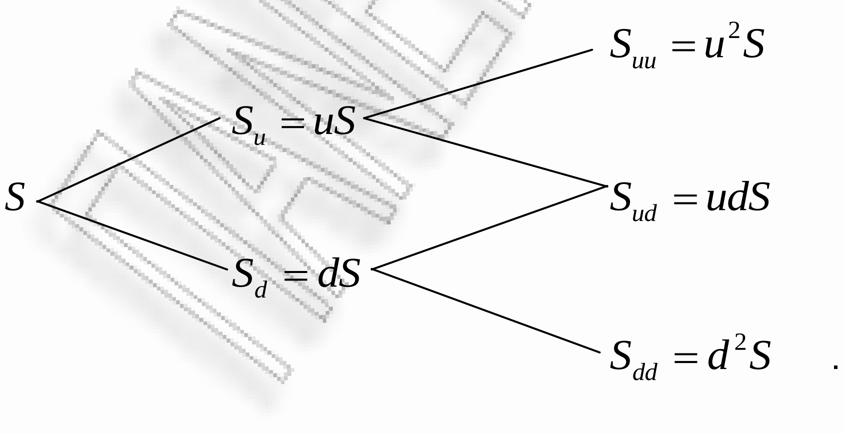
Αυτό σημαίνει ότι, σύμφωνα με την πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου p η αναμενόμενη απόδοση του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο. Ο λόγος για τον οποίο η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με την προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή των εσόδων του σύμφωνα με την ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα, είναι ότι η επένδυση στο δικαίωμα είναι ουδέτερου κινδύνου και έτσι θα πρέπει να έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με την ουδέτερου κινδύνου επένδυση.

Συνοπτικά:

- Αν η τέλεια αντιγραφή του εσόδου που θα προκύψει από ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι δυνατή, δεν υπάρχει κίνδυνος από τη στιγμή που η τιμή του δικαιώματος είναι η μοναδική τιμή που δεν επιτρέπει την κερδοσκοπία.
- Μη έκθεση στον κίνδυνο σημαίνει ότι η αναμενόμενη απόδοση του δικαιώματος είναι ίση με το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο.

<u>Διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων</u>

Τώρα μπορούμε να προσθέσουμε ακόμη μια χρονική περίοδο και να εξετάσουμε αυτή την περίπτωση. Σε κάθε χρονική στιγμή, υποθέτουμε πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται με ρυθμό u και μειώνεται με ρυθμό d :



Το αντίστοιχο δέντρο για ένα δικαίωμα αγοράς στον υποκείμενο αυτό τίτλο είναι:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & c_{uu} = \max\left[u^2S - K, 0\right] \\
 & c_u \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
c \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & c_{ud} = \max\left[udS - K, 0\right] \\
 & c_d \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & & c_{dd} = \max\left[d^2S - K, 0\right]
\end{tikzcd}
.
$$

Μέθοδος επίλυσης

Για να βρούμε την τιμή του δικαιώματος σε κάθε κόμβο του δέντρου εργαζόμαστε οπισθοδρομικά. Για παράδειγμα, αν εστιάσουμε στα δυο πάνω δεξιά κλαδιά:

$$
\begin{tikzcd}
 & S_{uu} = u^2S \\
S_u = uS \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & S_{ud} = udS
\end{tikzcd}
\quad \text{και} \quad
\begin{tikzcd}
 & c_{uu} = \max\left[u^2S - K, 0\right] \\
c_u \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & c_{ud} = \max\left[udS - K, 0\right]
\end{tikzcd}
.
$$

Στους κόμβους c_{uu} και c_{ud} τα χαρτοφυλάκια αντιγραφής με Δ μετοχές και B μετρητά είναι:

$\Delta u^2S + r\mathrm{B} = c_{uu}$.

$\Delta udS + r\mathrm{B} = c_{ud}$.

Οι λύσεις είναι: $\Delta = \dfrac{c_{uu} - c_{ud}}{(u-d)S}$ και $\mathrm{B} = \dfrac{uc_{ud} - dc_{uu}}{(u-d)r}$. Η τιμή του χαρτοφυλακίου στον κόμβο c_u είναι $\Delta uS + \mathrm{B} = \dfrac{c_{uu}\left(\dfrac{r-d}{u-d}\right) + c_{ud}\left(\dfrac{u-r}{u-d}\right)}{r}$.

Όπως και στο παράδειγμα ενός βήματος έτσι και εδώ η αξία του δικαιώματος στον κόμβο του c_u θα είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή των εσόδων του σύμφωνα με την ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα p, δηλαδή:

$c_u = \dfrac{\mathrm{E}_p\left[C\middle|S_{(\bullet)} = S_u\right]}{r}$. Αντίστοιχα μπορούμε να βρούμε και την τιμή c_d του δικαιώματος στον κάτω κόμβο,

$$c_d = \Delta dS + B = \frac{c_{ud}\left(\dfrac{r-d}{u-d}\right) + c_{dd}\left(\dfrac{u-r}{u-d}\right)}{r} = \frac{\mathrm{E}_p\left[C\middle|S_{(\bullet)} = S_d\right]}{r}.$$

Αφού πλέον γνωρίζουμε τα c_u και c_d μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος,

$$c = \frac{\mathrm{E}_p\left[C\middle|S_{(\bullet)} = S_d\right]}{r} = \frac{pc_u + (1-p)c_d}{r}$$

$$= \frac{\left[p\left(pc_{uu} + (1-p)c_{ud}\right) + (1-p)\left(pc_{ud} + (1-p)c_{dd}\right)\right]}{r^2}$$

$$= \frac{p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}}{r^2}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν με έναν τύπο σύμφωνα με τον οποίο μπορούμε να βρούμε την αξία του δικαιώματος εργαζόμενοι οπισθοδρομικά για δυο περιόδους. Τέλος μπορούμε να γενικεύσουμε τη μέθοδο ακόμη περισσότερο με έναν τύπο που θα μας επιτρέψει να αποτιμήσουμε οπισθοδρομικά τα δικαιώματα για όσο μεγάλο αριθμό βημάτων επιθυμούμε. Ο συγκεκριμένος τύπος παρουσιάζεται ακολούθως:

$$C = \frac{\left[\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\max\left[0, u^j d^{n-j}S - K\right]\right]}{r^n}$$

Η κατασκευή του δέντρου

Ξεκινώντας την κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις εξής παραμέτρους:

- το μέγεθος της ανοδικής και καθοδικής κίνησης δηλαδή τα u και d

- τον αριθμό των περιόδων n που κατανέμουν τον χρόνο έως την λήξη (όσο μεγαλύτερο αριθμό περιόδων έχουμε τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια μπορούμε να πετύχουμε).

Οι παράμετροι u και d αντιστοιχούν στη μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Εφόσον μένουν σταθερές κατά μήκος του δέντρου αυτό σημαίνει πως και η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου παραμένει σταθερή. Η σταθερότητα της μεταβλητότητας χαρακτηρίζει και το μοντέλο των Black και Scholes.

1.3 Ανεπάρκεια του Διωνυμικού Μοντέλου

Στο κλασικό παράδειγμα η μέθοδος Black και Scholes για τα δικαιώματα προαίρεσης χρειάζεται τα εξής για την εξαγωγή της τεκμαρτής μεταβλητότητας:

- την τιμή του υποκείμενου τίτλου,
- το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος,
- το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο,
- την τιμή του συνδεδεμένου δικαιώματος προαίρεσης,
- την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος και τέλος
- τον χρόνο έως την λήξη.

Η εφαρμογή της μεθόδου είναι πολύ απλή και οι εισροές μπορούν εύκολα να μετρηθούν. Η μέθοδος αυτή θεωρείται ως μια από τις πιο επιτυχημένες στην ιστορία των κοινωνικών επιστημών.

Όμως, αποδείχτηκε μη αξιόπιστη στο πέρασμα του χρόνου. Η σταθερή μεταβλητότητα του μοντέλου Black και Scholes και του διωνυμικού δέντρου θα αποτύχει κάτω από τις εξής 4 παραβιάσεις των υποθέσεών της:

1. Η τοπική μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο ή το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος είναι μια συνάρτηση της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου.
2. Η τοπική μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο ή το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος είναι μια συνάρτηση του προηγούμενου μονοπατιού της τιμής του υποκείμενου τίτλου.
3. Η τοπική μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο ή το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής

κατάστασης η οποία δεν είναι μόνο η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου, ή το προηγούμενο μονοπάτι του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα ο ίδιος ο υποκείμενος τίτλος, το επιτόκιο ή το μέρισμα μπορούν να υποστούν άλματα στο επίπεδο μεταξύ διαδοχικών ευκαιριών για αγοραπωλησία.

4. Η αγορά χαρακτηρίζεται από ατέλειες όπως σημαντικά κόστη συναλλαγών, περιορισμούς στη δυνατότητα ανοιχτών πωλήσεων (short selling), φόρους, μη ανταγωνιστική τιμολόγηση κτλ.

Οι παραβιάσεις των υποθέσεων αποκτούν μεγαλύτερη βαρύτητα και είναι δύσκολο να διορθωθούν καθώς κινούμαστε από το 1 προς το 4.

1.4 Περίγραμμα Εργασίας

Ως τώρα αναφερθήκαμε στην ιστορική εξέλιξη του διωνυμικού δέντρου, πραγματοποιήσαμε μια σύντομη ανασκόπηση του διωνυμικού μοντέλου και αναφερθήκαμε στους λόγους για τους οποίους αυτό δεν είναι επαρκές. Ακολούθως θα ξεκινήσουμε την ανάλυση του τεκμαρτού διωνυμικού δέντρου. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 θα αναφερθούμε στις μεθόδους εξαγωγής τεκμαρτών πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου από Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης. Στην συνέχεια (Κεφάλαιο 3) θα μας απασχολήσει η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί το τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο και, ειδικότερα, η μέθοδος επίλυσης του δέντρου και κάποιες επεκτάσεις. Στο 4^{ο} κεφάλαιο θα παραθέσουμε τη διαδικασία αποτίμησης των Ευρωπαϊκών και Αμερικάνικων δικαιωμάτων καθώς επίσης και εμπειρικές εφαρμογές της.

2. ΤΕΚΜΑΡΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΟΥΔΕΤΕΡΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για να τιμολογήσουμε τα δικαιώματα προαίρεσης περιλαμβάνει τρία βήματα.

1. Πρέπει με κάποιο τρόπο να εκτιμήσουμε τις τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου. Η προσέγγιση στην οποία δίνεται έμφαση εδώ είναι να συμπεράνουμε αυτές από (α) το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, (β) τις σύγχρονες τιμές του υποκείμενου τίτλου και (γ) τα συνδεδεμένα κατά τα άλλα ταυτόσημα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης.
2. Εξάγουμε μια μοναδική πλήρως προσδιορισμένη στοχαστική διαδικασία της τιμής του υποκείμενου τίτλου από αυτές τις ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες.
3. Έχοντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή και τις παραμέτρους αντιστάθμισης κινδύνου οποιουδήποτε παραγώγου που λήγει πριν ή μαζί με τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης.

2.1 Η μέθοδος του Longstaff

Είναι δυνατό να συμπεράνουμε τις τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες, από τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης. Εδώ θα περιγραφεί η μέθοδος του Longstaff (1990).

$S \equiv$ τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου

$C_1, C_2, C_3, C_4 \equiv$ τρέχουσες τιμές των συνδεδεμένων δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς με τιμές εξάσκησης $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$, όλα με τον ίδιο χρόνο έως την λήξη.

$S^* \equiv$ η τιμή του υποκείμενου τίτλου την ημερομηνία λήξης

$r^n \equiv (1+r')^n,$

$\delta^n \equiv (1+\delta')^n,$

όπου r' είναι ο ρυθμός του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου και δ' ο ρυθμός του μερίσματος του υποκείμενου τίτλου.

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \equiv$ συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, όπου για κάθε μια από τις οποίες ισχύει:

$$P_1 = P\left(0 \le S^* \le K_1\right),$$
$$P_2 = P\left(K_1 < S^* \le K_2\right),$$
$$P_3 = P\left(K_2 < S^* \le K_3\right),$$
$$P_4 = P\left(K_3 < S^* \le K_4\right),$$
$$P_5 = P\left(K_4 < S^* \le K_5\right).$$

Υποθέτουμε:

- Δοθέντος ότι η S^* βρίσκεται μεταξύ γειτονικών τιμών εξάσκησης (συμπεριλαμβανομένου του 0), όλες οι τιμές της S^* έχουν την ίδια ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα.
- Υπάρχει αριθμός $K_5 > K_4$ τέτοιος ώστε η πιθανότητα $S^* > K_5$ να είναι 0 και δοθέντος ότι η $S^* \in [K_4, K_5]$, όλες οι τιμές της S^* έχουν την ίδια ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα.
- Οι τιμές $S, C_1, C_2, C_3, C_4, r^n$ λαμβάνονται εξωγενώς.

Αρχίζουμε από το $\underline{C_4}$.

Για το C_4, καθώς η S^* κινείται από το K_4 στο K_5, η απόδοση του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς κινείται από το 0 στο $K_5 - K_4$. Έτσι η μέση απόδοση στο διάστημα $[K_4, K_5]$ είναι: $\frac{1}{2}(K_5 - K_4)$. Έτσι: $r^n C_4 = \frac{1}{2}(K_5 - K_4)P_5$.

$\underline{C_3}$

Για το C_3, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $S^* \in (0, K_3]$ το δικαίωμα δεν εξασκείται. Η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_3$ είναι 0.
- Αν $S^* \in (K_3, K_4]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_3$ στο διάστημα αυτό είναι $\frac{1}{2}(K_4 - K_3)P_4$.

- Αν $S^* \in \left(K_4, K_5\right]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_3$ στο διάστημα αυτό είναι $\left(K_4 - K_3\right) P_5 + r^n C_4$.

Προσθέτοντας τις επιμέρους συνεισφορές έχουμε:

$$\begin{aligned} r^n C_3 &= \frac{1}{2}\left(K_4 - K_3\right) P_4 + \left(K_4 - K_3\right) P_5 + r^n C_4 \\ &= \left(K_4 - K_3\right)\left[\frac{1}{2} P_4 + P_5\right] + r^n C_4. \end{aligned}$$

<u>C_2</u>

Για το C_2 επίσης διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- Αν $S^* \in (0, K_2]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_2$ στο διάστημα αυτό είναι 0.
- Αν $S^* \in (K_2, K_3]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_2$ στο διάστημα αυτό είναι: $\frac{1}{2}\left(K_3 - K_2\right) P_3$.
- Αν $S^* \in \left(K_3, K_5\right]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_2$ στο διάστημα αυτό είναι: $\left(K_3 - K_2\right)\left(P_4 + P_5\right) + r^n C_3$.

Προσθέτοντας τις επιμέρους συνεισφορές έχουμε:

$$\begin{aligned} r^n C_2 &= \frac{1}{2}\left(K_3 - K_2\right) P_3 + \left(K_3 - K_2\right)\left(P_4 + P_5\right) + r^n C_3 \\ &= \left(K_3 - K_2\right)\left[\frac{1}{2} P_3 + P_4 + P_5\right] + r^n C_3. \end{aligned}$$

<u>C_1</u>

Όμοια για το C_1 διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- Αν $S^* \in (0, K_1]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_1$ στο διάστημα αυτό είναι 0.
- Αν $S^* \in (K_1, K_2]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_1$ στο διάστημα αυτό είναι: $\frac{1}{2}\left(K_2 - K_1\right) P_2$.

- Αν $S^* \in \left(K_2, K_5\right]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n C_1$ στο διάστημα αυτό είναι $\left(K_2 - K_1\right)\left(P_3 + P_4 + P_5\right) + r^n C_2$.

Προσθέτοντας τις επιμέρους συνεισφορές έχουμε:

$$r^n C_1 = \frac{1}{2}\left(K_2 - K_1\right) P_2 + \left(K_2 - K_1\right)\left(P_3 + P_4 + P_5\right) + r^n C_2$$
$$= \left(K_2 - K_1\right)\left[\frac{1}{2} P_2 + P_3 + P_4 + P_5\right] + r^n C_2.$$

Τώρα θεωρούμε τον υποκείμενο τίτλο ως ένα προστατευόμενο δικαίωμα προαίρεσης με τιμή εξάσκησης $K_0 = 0$. Διακρίνουμε 3 πιθανές περιπτώσεις για το S^*:

- Αν $S^* \in (-\infty, 0]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n S \delta^{-n}$ στο διάστημα αυτό είναι 0.
- Αν $S^* \in (0, K_1]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n S \delta^{-n}$ στο διάστημα αυτό είναι: $\frac{1}{2}\left(K_1 - 0\right) P_1$.
- Αν $S^* \in \left(K_1, K_5\right]$ η ουδέτερου κινδύνου συνεισφορά στο $r^n S \delta^{-n}$ στο διάστημα αυτό είναι: $\left(K_1 - 0\right)\left(P_2 + P_3 + P_4 + P_5\right) + r^n C_1$.

Προσθέτοντας τις επιμέρους συνεισφορές έχουμε:

$$r^n S \delta^{-n} = \frac{1}{2}\left(K_1 - 0\right) P_1 + \left(K_1 - 0\right)\left(P_2 + P_3 + P_4 + P_5\right) + r^n C_1$$
$$= K_1\left[\frac{1}{2} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5\right] + r^n C_1. \quad (2.1)$$

Για να εξηγήσουμε το ότι τα συνδεδεμένα δικαιώματα προαίρεσης δεν είναι προστατευμένα απέναντι στα μερίσματα, χρησιμοποιούμε την παρούσα αξία της συνεισφοράς του μερίσματος του υποκείμενου τίτλου $S\delta^{-n}$.

Αφού έχουμε κατανομή πιθανότητας ισχύει:

$$1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \quad (2.2)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (2.1) και την (2.2) και να λύσουμε ως προς P_1:

$$\begin{aligned} r^n S\delta^{-n} &= K_1\left[\frac{1}{2}P_1+\left(1-P_1\right)\right]+r^nC_1 \\ &= K_1\left[1-\frac{1}{2}P_1\right]+r^nC_1 \\ &\Rightarrow r^n\left(S\delta^{-n}-C_1\right)K_1^{-1}=1-\frac{1}{2}P_1 \\ &\Rightarrow P_1=2\left[1-r^n\left(S\delta^{-n}-C_1\right)K_1^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ομοίως,

$$P_2=2\left[1-P_1-r^n\left(C_1-C_2\right)\left(K_2-K_1\right)^{-1}\right],$$

$$P_3=2\left[1-P_1-P_2-r^n\left(C_2-C_3\right)\left(K_3-K_2\right)^{-1}\right],$$

$$P_4=2\left[1-P_1-P_2-P_3-r^n\left(C_3-C_4\right)\left(K_4-K_3\right)^{-1}\right],$$

$$P_5=1-P_1-P_2-P_3-P_4.$$

Έτσι, οι τεκμαρτές τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας την εξίσωση (2.3) ως προς P_1, και έπειτα χρησιμοποιώντας την τιμή της P_1 για να λύσουμε ως προς P_2. Στη συνέχεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των P_1 και P_2 και να λύσουμε ως προς P_3. Δουλεύοντας όπως περιγράφεται παραπάνω καταλήγουμε να βρούμε τις τιμές και των πέντε πιθανοτήτων.

Τέλος χρησιμοποιώντας: $r^nC_4=\frac{1}{2}\left(K_5-K_4\right)P_5$, και έχοντας πλέον υπολογίσει την P_5, μπορούμε να λύσουμε ως προς K_5 ως εξής: $K_5=K_4+\left(2r^nC_4/P_5\right)$.

Ο κώδικας για την εφαρμογή της μεθόδου στην MATLAB παρουσιάζεται ακολούθως.

```
function P=sLongstaff(S,r,deltan,K,C,T,n)
deltaT=T/n;
rn=exp(r*deltaT);
[M,N]=size(C);
Q=zeros(1,N+1);
P=zeros(1,N+1);
P(1)=2*(1-Q(1)-rn*(S/deltan-C(1))/K(1));
Q(2)=Q(1)+P(1);
for i=2:N
    P(i)=2*(1-Q(i)-rn*(C(i-1)-C(i))/(K(i)-K(i-1)));
    Q(i+1)=Q(i)+P(i);
end
P(N+1)=1-Q(N+1);
```

Παρακάτω ακολουθούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του κώδικα: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, η τιμή του δικαιώματος σύμφωνα με την μέθοδο Black και Scholes και τέλος, οι πιθανότητες που προέκυψαν με την μέθοδο του Longstaff.

Η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι: $S = 100$, το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο: $r^n = 1.1$ (χρησιμοποιείται συνεχής ανατοκισμός), το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος: $\delta^n = 1.05$, η μεταβλητότητα: $\sigma = 0.2$ και ο χρόνος έως την λήξη: $T = 1$. Ο πίνακας που ακολουθεί συγκεντρώνει τα αποτελέσματα:

Τιμή εξάσκησης (K)	Τιμή Black&Scholes	Πιθανότητες Longstaff
10,00	86,07	0,17
75,00	27,56	-0,13
80,00	23,39	0,27
85,00	19,47	-0,16
90,00	15,89	0,30
95,00	12,70	-0,14
100,00	9,94	0,31
105,00	7,63	-0,13
110,00	5,75	0,31
115,00	4,25	0,15
120,00	3,09	0,28
125,00	2,21	-0,17
∞		0,26

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

Τα μειονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι:

1) Μπορούν να προκύψουν αρνητικές πιθανότητες.
2) Οι πιθανότητες κυμαίνονται από πολύ υψηλές έως πολύ χαμηλές τιμές σε παρακείμενα διαστήματα.

2.2 Η Μέθοδος του Rubinstein

Πρώτα θα θεμελιώσουμε μια αρχική εικασία για τις τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες. Η αρχική εικασία, λοιπόν, είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει από την κατασκευή ενός τυπικού διωνυμικού δέντρου χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο της τεκμαρτής μεταβλητότητας των δυο, κοντά στο χρηματικό τους ισοδύναμο (at the money) Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς.

$j = 0, ..., n$ είναι ο εκάστοτε κόμβος. Η αρίθμηση των κόμβων ξεκινάει από τον χαμηλότερο και προχωράει διαδοχικά μέχρι να φτάσουμε στον υψηλότερο κόμβο.

n είναι ο αριθμός των βημάτων.

S_j είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε κάθε κόμβο στη λήξη του διωνυμικού δέντρου.

P_j' είναι η τιμή της τελικής ουδέτερου κινδύνου πιθανότητας που έχει προκύψει από το τυπικό διωνυμικό δέντρο σε κάθε τελικό κόμβο. Υπολογίζεται ως εξής: $P_j' = \left[\frac{n!}{j!(n-j)!} \right] p'^{j} \left(1 - p'\right)^{n-j}$. Για ικανοποιητικά μεγάλο αριθμό βημάτων n αυτή η κατανομή πιθανότητας θα προσεγγίζει την λογαριθμοκανονική. Ισχύει: $\Sigma_j P_j' = 1$.

p' είναι η ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης στο διωνυμικό μοντέλο.

P_j είναι οι τελικές τεκμαρτές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες.

$r \equiv \left(1 + r'\right)$, όπου r' είναι ο ρυθμός του ουδέτερου κινδύνου επιτοκίου.

$\delta \equiv \left(1 + \delta'\right)$, όπου δ' είναι ο ρυθμός μερίσματος του υποκείμενου τίτλου σε κάθε διωνυμική περίοδο.

S^b η μέγιστη τιμή αγοράς (Bid) του υποκείμενου τίτλου.

S^a η ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask) του υποκείμενου τίτλου.

C_i^b η μέγιστη τιμή αγοράς (Bid) που παρατηρείται ταυτόχρονα σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, το οποίο λήγει στο τέλος του διωνυμικού δέντρου. Υποθέτουμε ότι δεν είναι προστατευμένο σε σχέση με το μέρισμα, $i = 1, 2, ..., m.$

C_i^a η ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask) που παρατηρείται ταυτόχρονα σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, το οποίο λήγει στο τέλος του διωνυμικού δέντρου. Υποθέτουμε ότι δεν είναι προστατευμένο σε σχέση με το μέρισμα, $i = 1, ..., m$.

Επιλέγουμε $n \gg m$. Οι τεκμαρτές τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες P_j, είναι η λύση στο εξής πρόγραμμα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{P_j} \sum_j \left(P_j - P_j'\right)^2$$

με περιορισμούς:

$$\Sigma_j P_j = 1 \text{ και } P_j \geq 0 \text{ για } j = 0, ..., n,$$

$$S^b \leq S \leq S^a, \text{ όπου } S = \left(\delta^n \Sigma_j P_j S_j\right) / r^n,$$

$$C_i^b \leq C_i \leq C_i^a, \text{ όπου } C_i = \left(\delta^n \Sigma_j P_j \max\left[0, S_j - K_i\right]\right) / r^n \text{ για } i = 1, ..., m.$$

- Τα $P_j, j = 0, 1, ..., n$ λοιπόν είναι η τελική ουδέτερου κινδύνου κατανομή πιθανότητας, η οποία υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων είναι πιο κοντά στην λογαριθμοκανονική. Οι παρούσες αξίες των υποκείμενων τίτλων και των δικαιωμάτων αγοράς που είναι υπολογισμένες με αυτές τις πιθανότητες, θα βρίσκονται μεταξύ της αντίστοιχης μέγιστης τιμής αγοράς και ελάχιστης τιμής πώλησης. Θα ικανοποιούνται δηλαδή οι περιορισμοί $S^b \leq S \leq S^a$ και $C_i^b \leq C_i \leq C_i^a$ για $i = 1, ..., m$.
- Επίσης, αν όλα τα δικαιώματα αγοράς είναι τιμολογημένα με μέγιστη τιμή αγοράς και ελάχιστη τιμή πώλησης εκατέρωθεν των τυπικών διωνυμικών τιμών τους τότε: $P_j = P_j'$ για κάθε j.
- Επιπρόσθετα, αν η λύση υπάρχει τότε όσο πιο πυκνό είναι το δείγμα των δικαιωμάτων αγοράς, τόσο το λιγότερο ευαίσθητη θα είναι η P_j στην αρχική εκτίμηση P_j'. Στο όριο, καθώς ο αριθμός των δικαιωμάτων αγοράς γίνεται αρκετά πυκνός, η P_j γίνεται ανεξάρτητη της P_j'.

<u>Περιγραφή δεδομένων για την κατασκευή της καμπύλης πιθανοτήτων:</u>

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν αφορούν πραγματικές τιμές της αγοράς που έχουν εξαχθεί από την βάση δεδομένων Bloomberg. Για την κατασκευή της κατανομής πιθανοτήτων χρησιμοποιήθηκαν:

1. • η μέγιστη τιμή αγοράς (Bid) ,
   • η ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask) και
   • η τιμή της τελευταίας συναλλαγής 14 Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς στον δείκτη S&P 500, με λήξη 16/06/2012 (τα δεδομένα λήφθηκαν 7/02/2012, ώρα 20:48),
2. η τεκμαρτή μεταβλητότητα των δυο κοντά στο χρηματικό τους ισοδύναμο (at the money) δικαιωμάτων,
3. το επιτόκιο 129 ημερών (έχει υπολογιστεί με βάση (γραμμική παρεμβολή) τα επιτόκια τρίμηνων και εξάμηνων χρεογράφων της Ομοσπονδιακής Τράπεζας των Η.Π.Α.),
4. • η μέγιστη τιμή αγοράς (Bid) ,
   • η ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask) και
   • η τρέχουσα με τα δεδομένα του δείκτη S&P 500 (7/02/2012, ώρα 20:48).

Τιμή εξάσκησης (K)	Μέγιστη τιμή αγοράς (Bid)	Ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask)	Τιμή τελευταίας συναλλαγής	Τεκμαρτή μεταβλητότητα
SPX US 06/16/12 C1200 Index	156,8	162,2	159,3	
SPX US 06/16/12 C1230 Index	131,9	135,8	131,9	
SPX US 06/16/12 C1250 Index	116,1	120,7	116,2	
SPX US 06/16/12 C1275 Index	97,1	101,1	98	
SPX US 06/16/12 C1325 Index	62,8	66,1	64,6	18,31626
SPX US 06/16/12 C1350 Index	48,1	51,8	50,2	17,51718
SPX US 06/16/12 C1365 Index	39,9	43,8	35,7	
SPX US 06/16/12 C1425 Index	15,8	19	17,5	
SPX US 06/16/12 C1450 Index	9,7	11,5	10,4	
SPX US 06/16/12 C1475 Index	5,6	7,5	5,8	
SPX US 06/16/12 C1500 Index	3	4,2	3,6	
SPX US 06/16/12 C1550 Index	0,9	1,4	0,9	
SPX US 06/16/12 C1600 Index	0,3	0,7	0,35	
SPX US 06/16/12 C1650 Index	0,15	0,55	0,2	

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2: Τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης που χρησιμοποιήθηκαν

Τιμή τελευταίας συναλλαγής	Μέγιστη τιμή αγοράς (Bid)	Ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask)
1346,21	1346,67	1346,43

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3 Οι τιμές του δείκτη S&P 500 που χρησιμοποιήθηκαν

Οι κώδικες για την εφαρμογή της μεθόδου στο λογισμικό MATLAB δίνονται ακολούθως:

```
function[P]=EndnodeP(n,sigma,T,r)
deltaT=T/n;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
P=zeros(n+1,1);
for j=0:n
P(j+1)=(factorial(n)/(factorial(j)*factorial(n-j)))*p^j*(1-p)^(n-j);
end
end
```

Ο ανωτέρω κώδικας αφορά την εξαγωγή ουδέτερου κινδύνου πιθανοτήτων (P_j') των τελικών κόμβων από το διωνυμικό δέντρο. Οι πιθανότητες αυτές αποτελούν την πρώτη εικασία για την εξαγωγή των τελικών τεκμαρτών πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Στη συνέχεια δίνεται το τετραγωνικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε μορφή κώδικα. Από την εφαρμογή του προκύπτουν οι τεκμαρτές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες (P_j) των τελικών κόμβων σύμφωνα με την μέθοδο του Rubinstein (1994).

```
function[Pimpl]=sRubinstein(n,r,S,Sa,Sb,K,Ca,Cb,P,T)
deltaT=T/n;
f=-P;
H=eye(n+1);
Aeq=ones(1,n+1);
beq=1;
lb=zeros(n+1,1);
ub=[];
m=length(K);
A=zeros(2*m+2,n+1);
A(1,:)=S';
A(2,:)=-S';
for j=1:n+1
    A(3:m+2,j)=max(0,S(j)*ones(m,1)-K);
    A(m+3:2*m+2,j)=min(0,K-S(j)*ones(m,1));
end
rn=exp(r*deltaT);
b=zeros(2*m+2,1);
b(1)=rn*Sa;
b(2)=-rn*Sb;
b(3:m+2,1)=rn*Ca;
b(m+3:2*m+2)=-rn*Cb;
options=optimset('LargeScale','off');
Pimpl=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
en
```

Επεξήγηση του κώδικα:

Ξεκινώντας από το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min_{P_j} \sum_{j=0}^{n} \left(P_j - P_j^{'} \right)^2$, εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα τετραγώνων και έχουμε,

$$\min_{P_j} \sum_{j=0}^{n} \left(P_j - P_j^{'} \right)^2 = \min_{P_j} \sum_{j=0}^{n} \left(P_j^2 - 2P_j P_j^{'} + P_j^{'2} \right) =$$

$$= \min_{P_0, P_1, \ldots, P_n} \left(\sum_{j=0}^{n} P_j^2 - 2\sum_{j=0}^{n} P_j P_j^{'} \right) + \sum_{j=0}^{n} P_j^{'2} =$$

$$= 2 \min_{P_0, P_1, \ldots, P_n} \left[\frac{1}{2} \left(P_0^2 + P_1^2 + \ldots + P_n^2 \right) - \left(P_0 P_0^{'} + P_1 P_1^{'} + \ldots + P_n P_n^{'} \right) \right] + \sum_{j=0}^{n} P_j^{'2} =$$

$$= 2 \min_{P_0, P_1, \ldots, P_n} \left[\frac{1}{2} P^T H P + f^T P \right] + \left(P^{'} \right)^T P^{'},$$

όπου P^T ο ανάστροφος του P, $f = -P'$

και $P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ . \\ . \\ . \\ P_n \end{bmatrix}$, $P' = \begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ . \\ . \\ . \\ P_n' \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & . & & \varnothing \\ & & . & \\ & \varnothing & & . \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης για $S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ . \\ . \\ . \\ S_n \end{bmatrix}$ οι ανισωτικοί περιορισμοί γράφονται ισοδύναμα:

- $S^b \le S \le S^a$, όπου $S = \left(\delta^n \sum_j P_j S_j \right) / r^n$

$$\Leftrightarrow S^b \le \left(\delta^n \sum_j P_j S_j\right) \le S^a$$

$$\Leftrightarrow \left(r^n S^b\right)/\delta^n \le \sum_j P_j S_j \le \left(r^n S^a\right)/\delta^n$$

$$\Leftrightarrow \left(r^n S^b\right)/\delta^n \le S^T P \le \left(r^n S^a\right)/\delta^n$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow S^T P \le \left(r^n S^a\right)/\delta^n \\ \quad -S^T P \le -\left(r^n S^b\right)/\delta^n \end{array}\right\}$$

- $C_i^b \le C_i \le C_i^a$, όπου $C_i = \left(\delta^n \sum_j P_j \max\left[0, S_j - K_i\right]\right)/r^n$ για $i = 1, 2, ..., m$

$$\Leftrightarrow C_i^b \le \left(\delta^n \sum_j P_j \max\left[0, S_j - K_i\right]\right)/r^n \le C_i^a$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \max\left[0, S^T - K_i\right] P \le \left(r^n C_i^a\right)/\delta^n \\ \quad \min\left[0, K_i - S^T\right] P \le -\left(r^n C_i^b\right)/\delta^n \end{array}\right\} \text{για } i = 1, 2, ..., m.$$

Επομένως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του Rubinstein είναι ισοδύναμο με το παρακάτω:

$$\min_{P_0, P_1, ..., P_n} \left[\frac{1}{2} P^T H P + f^T P\right]$$

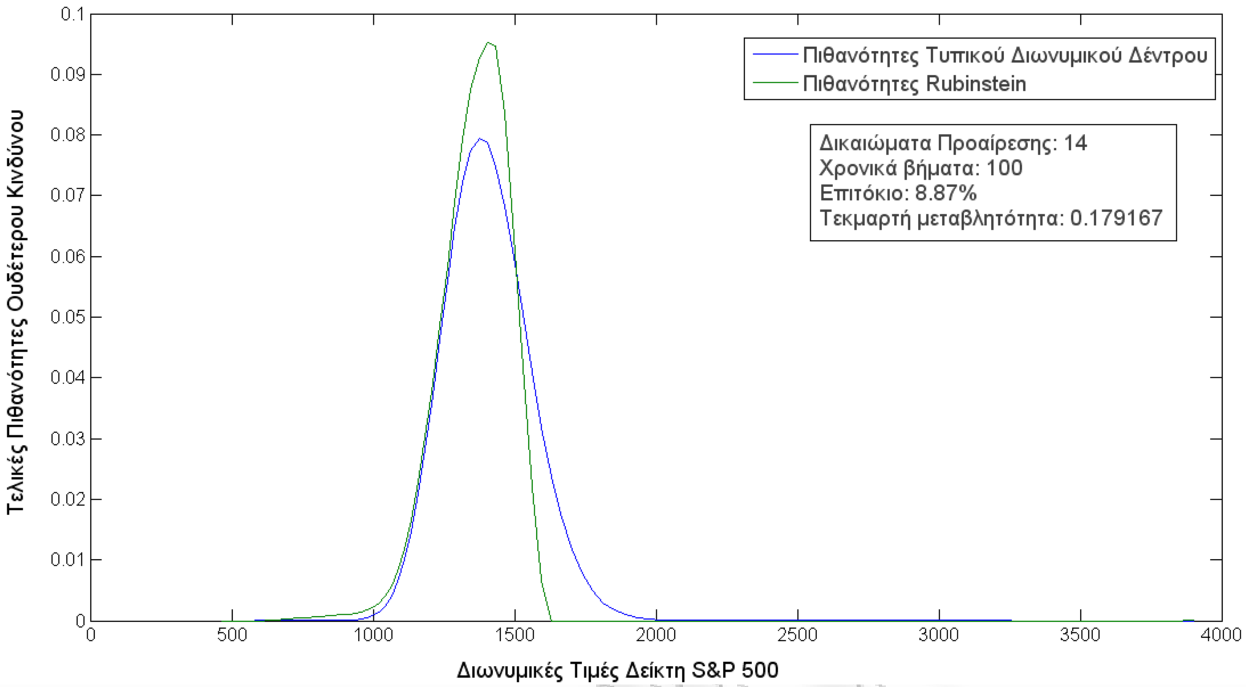
κάτω από τους περιορισμούς:
$$\begin{array}{l} AP \le b, \\ AeqP = beq, \\ lb \le P \le ub, \end{array}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon, \quad A = \begin{bmatrix} S^T \\ -S^T \\ \max\left[0, S^T - K_1\right] \\ . \\ . \\ . \\ \max\left[0, S^T - K_m\right] \\ \min\left[0, K_1 - S^T\right] \\ . \\ . \\ . \\ \min\left[0, K_m - S^T\right] \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} S^a \\ -S^b \\ C^a \\ . \\ . \\ . \\ C_m \\ -C_i^b \\ . \\ . \\ . \\ -C_m^b \end{bmatrix}$$

$$Aeq = [1, \quad 1, \quad . \quad . \quad . \quad ,1], \qquad beq = 1, \text{ και } lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ub = \infty$$

Τότε το ισοδύναμο (και άρα το αρχικό) πρόβλημα ελαχιστοποίησης λύνεται από την εντολή: **`quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options)`**.

Και τέλος παρουσιάζεται ο πίνακας των κατανομών πιθανοτήτων:



Πίνακας 2.4

Με μπλε χρώμα απεικονίζονται οι τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες (P_j') και με πράσινο χρώμα οι τεκμαρτές τελικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες (P_j). Οι πιθανότητες P_j είναι και αυτές που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια. Με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου θα μπορούμε να εξάγουμε ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες τις οποίες θα επισυνάπτουμε στους τελικούς κόμβους του δέντρου και θα αφορούν τις αντίστοιχες αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου $R_j = \dfrac{S_j}{S}$.

3. ΤΕΚΜΑΡΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

3.1 Κατασκευή Τεκμαρτής Στοχαστικής Διαδικασίας

Ορισμός μεταβλητών

Θεωρούμε ως εξωγενή τη διακριτοποιημένη ουδέτερου κινδύνου κατανομή των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου σε κάποια προσδιορισμένη μελλοντική στιγμή. Έστω ότι έχουμε 3 πιθανά αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει πως πρόκειται για ένα διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων ($n = 2$). Οι τρεις διακριτές τελικές αποδόσεις είναι: R_0, R_1, R_2 για τις οποίες ισχύει $0 < R_0 < R_1 < R_2$. Σε κάθε τελική απόδοση αντιστοιχεί μια τεκμαρτή ουδέτερου κινδύνου τελική πιθανότητα P_0, P_1, P_2. Για τις τελικές πιθανότητες ισχύει: $P_0 + P_1 + P_2 = 1$.

u, d : πρόκειται για τις δυο πιθανές τιμές των αποδόσεων κατά την πρώτη περίοδο του δέντρου (δηλαδή στο πρώτο βήμα $n = 1$).

$u[u], d[u], u[d], d[d]$: εδώ ο συμβολισμός σημαίνει ότι η απόδοση της κίνησης σε κάθε περίοδο εξαρτάται από τον κόμβο. Συνεπώς, $u[u]$ είναι η απόδοση της πάνω κίνησης η οποία προήλθε μετά από μια πάνω κίνηση, $d[u]$ είναι η απόδοση της κάτω κίνησης η οποία προήλθε μετά από μια κάτω κίνηση, $u[d]$ είναι η απόδοση της πάνω κίνησης η οποία προήλθε μετά από μια κάτω κίνηση και τέλος, $d[d]$ είναι η απόδοση της κάτω κίνησης η οποία προήλθε μετά από μια κάτω κίνηση.

p: είναι η πιθανότητα κίνησης κατά την πρώτη περίοδο. Πιο συγκεκριμένα, p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης και $1 - p$ είναι η πιθανότητα καθοδικής κίνησης.

$p[\bullet]$: είναι η πιθανότητα κίνησης μεταγενέστερης περιόδου. Στην παρένθεση σημειώνεται το είδος της κίνησης ή των κινήσεων από τις οποίες προήλθε. Για παράδειγμα, $p[d]$ είναι η πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης η οποία προήλθε μετά από μια καθοδική κίνηση. Η πιθανότητα καθοδικής κίνησης είναι όπως προηγουμένως $1-p[\bullet]$.

r: είναι η απόδοση του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου στην πρώτη περίοδο. Αναλυτικότερα, $r \equiv (1+r')$ όπου r' είναι το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο.

$r[\bullet]$: είναι η απόδοση του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου σε κάθε διωνυμική περίοδο. Δηλαδή, $r[\bullet]=(1+r'[\bullet])$. Στην παρένθεση σημειώνεται η προηγούμενη ή οι προηγούμενες κινήσεις. Επίσης, επειδή οι πιθανότητες κίνησης είναι ουδέτερου κινδύνου ισχύει: $r[\bullet]=(p[\bullet]\times u[\bullet])+((1-p[\bullet])\times d[\bullet])$. Συνεπώς, λύνοντας ως προς την πιθανότητα κίνησης $p[\bullet]$, καταλήγουμε στο εξής: $p[\bullet]=(r[\bullet]-d[\bullet])/(u[\bullet]-d[\bullet])$. Άρα, κάθε πιθανότητα κίνησης μπορεί να συνδέεται με τις συσχετισμένες αποδόσεις των πάνω και κάτω κινήσεων. Για παράδειγμα, $p=(r-d)/(u-d)$,

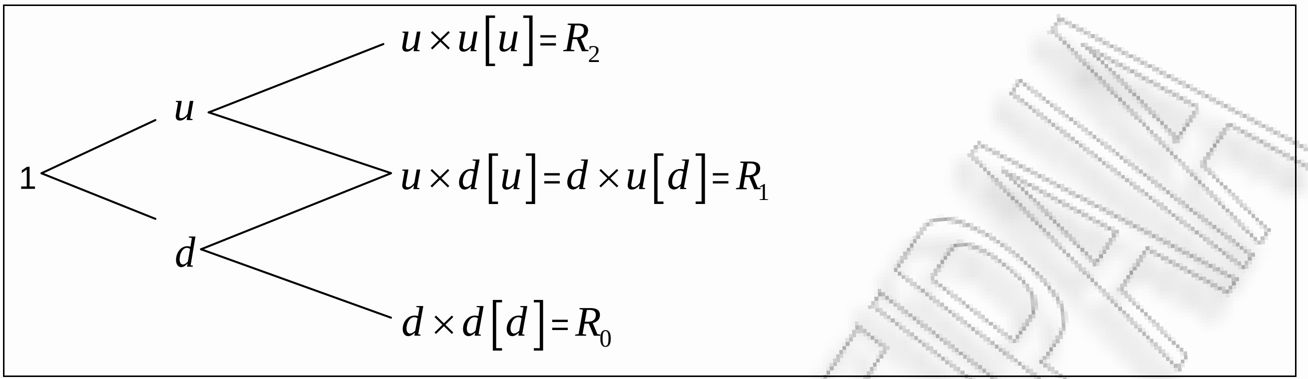
$p[d]=(r[d]-d[d])/(u[d]-d[d])$ και

$p[u]=(r[u]-d[u])/(u[u]-d[u])$.

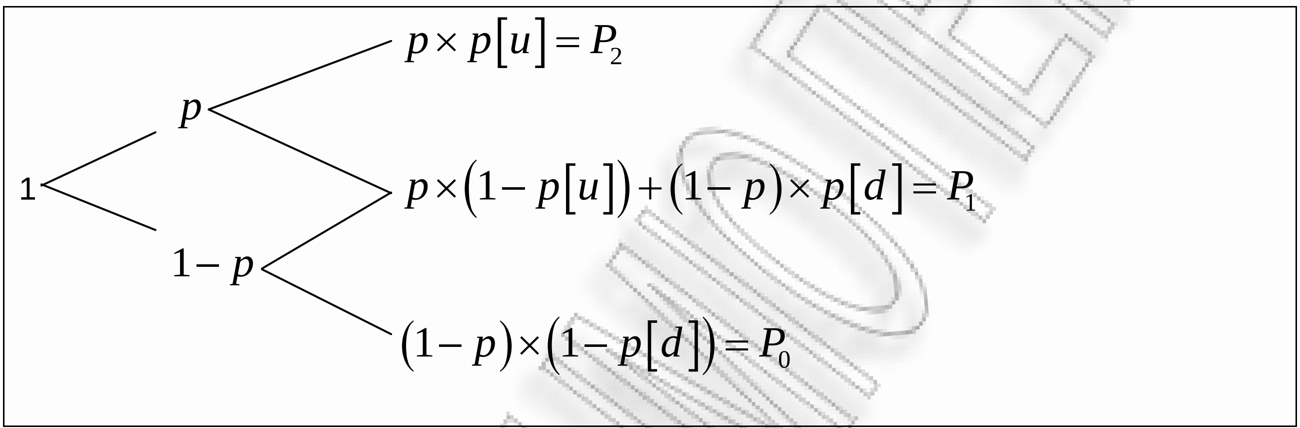
Μερίσματα

Σε περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος αποδίδει μερίσματα τα οποία δεν συγκεντρώνονται από τον κάτοχο του παραγώγου, τότε μπορεί να θέλουμε να μετρήσουμε τις αποδόσεις R_0, R_1, R_2 μόνο ως μερισματικές αποδόσεις. Επίσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση αντί για την μεταβλητή $r[\bullet]$ έχουμε $\dfrac{r[\bullet]}{\delta[\bullet]} \equiv \dfrac{1+r'[\bullet]}{1+\delta'[\bullet]}$, όπου $r'[\bullet]$ το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο σε κάθε διωνυμική κίνηση και $\delta'[\bullet]$ το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος σε κάθε περίοδο.

Το δέντρο το οποίο θα μας απασχολήσει ως παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση των υποθέσεων αποδίδεται σχηματικά ως ακολούθως:



ΣΧΗΜΑ 3.1



ΣΧΗΜΑ 3.2

Στο Σχήμα 3.1 φαίνονται οι αποδόσεις, ενώ στο Σχήμα 3.2 απεικονίζονται οι τεκμαρτές πιθανότητες.

Ο σκοπός μας είναι να εξάγουμε μοναδικά ολόκληρο το δέντρο από:

1. τις αποδόσεις των τελικών κόμβων: R_0, R_1, R_2
2. τις τεκμαρτές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες των τελικών κόμβων P_0, P_1, P_2

Αξιολογώντας τη διαδικασία, θα πρέπει να υπολογίσουμε τους εξής 12 αγνώστους:

$$d,u,r,p,d[d],u[d],r[d],p[d],d[u],u[u],r[u],p[u],$$

από τις εξής 10 εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} u\times u[u]&=R_2\\ u\times d[u]&=R_1\\ d\times u[d]&=R_1\\ d\times d[d]&=R_0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(A)}$$

$p \times p[u] = P_2$ $p \times (1 - p[u]) + (1 - p) \times p[d] = P_1$ $(1 - p) \times (1 - p[d]) = P_0$	(B)
$p = \dfrac{r - d}{u - d}$ $p[d] = (r[d] - d[d]) / (u[d] - d[d])$ $p[u] = (r[u] - d[u]) / (u[u] - d[u])$	(Γ)

<u>Υποθέσεις</u>

Θα θέσουμε τώρα τις υποθέσεις της διαδικασίας, που δικαιολογούν τα παραπάνω.

Υπόθεση 1: Ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί μια διωνυμική διαδικασία.

Ανάλυση Υπόθεσης 1: Η υπόθεση μιας διωνυμικής διαδικασίας τοποθετεί το μοντέλο στο όριο ως συνεχούς χρόνου. Στο πλαίσιο αυτό ο ρυθμός τάσης και η μεταβλητότητα μπορούν να είναι γενικές συναρτήσεις της μεταβλητής κατάστασης, του προηγούμενου μονοπατιού της μεταβλητής κατάστασης και του χρόνου.

Υπόθεση 2: Το διωνυμικό δέντρο είναι ανασυνδυαζόμενο.

Ανάλυση Υπόθεσης 2: Η έννοια του ανασυνδυαζόμενου δέντρου δηλώνει ανεξαρτησία της διαδρομής στα μονοπάτια των αποδόσεων. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι διαδρομές που περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό πάνω κινήσεων και τον ίδιο αριθμό κάτω κινήσεων οδηγούν στην ίδια κομβική απόδοση, ανεξάρτητα από τη <u>σειρά</u> των κινήσεων κατά μήκος των διαδρομών. Έτσι η κατάληξη δεν εξαρτάται από την προηγούμενη διαδρομή της μεταβλητής κατάστασης. Εφόσον υποθέσαμε πως το δέντρο είναι ανασυνδυαζόμενο, ισχύει: $u \times d[u] = d \times u[d]$.

Υπόθεση 3: Οι τελικές τιμές διατάσσονται από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.

Ανάλυση Υπόθεσης 3: Η υπόθεση της συγκεκριμένης διάταξης ισοδυναμεί με την εξής απαίτηση: Ύστερα από την πραγματοποίηση μιας ανοδικής κίνησης αποκλείεται η κατάληξη στον κατώτατο κόμβο. Αντίστοιχα, μετά την πραγματοποίηση μιας καθοδικής κίνησης αποκλείεται η κατάληξη στον ανώτατο κόμβο. Ενώ αυτή η υπόθεση δε θα μεταβάλει την τρέχουσα τιμή των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που λήγουν στο τέλος του δέντρου, θα επηρεάσει την εσωτερική δομή του δέντρου και έτσι τις υπόλοιπες ιδιότητες του δέντρου, όπως η κινητή μεταβλητότητα, το δέλτα και η αξία των Αμερικάνικων δικαιωμάτων.

Υπόθεση 4: Το επιτόκιο είναι σταθερό ανά μονάδα χρόνου.

Ανάλυση Υπόθεσης 4: Η υπόθεση αυτή σημαίνει στο παράδειγμά μας ότι $r = r[d] = r[u]$. Έτσι από εδώ και στο εξής μπορούμε να αναφερόμαστε στην απόδοση του επιτοκίου απλώς ως r. Η υπόθεση αυτή απλοποιεί το πρόβλημα καθώς τώρα πια έχουμε 10 αγνώστους και 10 εξισώσεις.

Γενίκευση:

Αυτή η υπόθεση δεν μας είναι χρήσιμη αν τα διαφορετικά επιτόκια για κάθε περίοδο είναι εξωγενώς προσδιορισμένα. Αυτά μπορούμε να τα εξάγουμε από:

- τις τρέχουσες τιμές των ομολόγων που λήγουν σε διαφορετικές ημερομηνίες,
- από τα επιτόκια των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης με διαφορετικές ημερομηνίες έως τη λήξη,
- από Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης είτε αγοράς είτε πώλησης τα οποία είναι καθ' όλα ίδια, διαφέροντας μόνο στην ημερομηνία λήξης.

Αν η πληροφορία για το επιτόκιο μας παρέχεται εξωγενώς τότε μπορούμε να έχουμε: $r \neq r[d] \neq r[u]$.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθούμε στο χρόνο κάθε κίνησης. Ενώ ο συνολικός χρόνος όλων των κινήσεων πρέπει να είναι ίσος με τον προκαθορισμένο χρόνο, μπορούμε να κατανείμουμε το χρόνο αυτό όπως επιθυμούμε στην κάθε κίνηση. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την ευχέρεια να θεωρήσουμε ότι η δεύτερη κίνηση έχει διπλάσια διάρκεια από την πρώτη. Αυτή η ευελιξία μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε κάποιες περιπτώσεις. Ειδικότερα, μεγαλώνοντας διαδοχικά το χρόνο κάθε κίνησης μπορεί να οδηγηθούμε σε ταχύτερη σύγκλιση στη διαδικασία του συνεχούς χρόνου, γιατί ένα ευρύτερο διάστημα τελικών αποδόσεων μπορεί να εξαχθεί με λιγότερα βήματα.

Υπόθεση 5: Όλα τα μονοπάτια που οδηγούν στον ίδιο τερματικό κόμβο έχουν την ίδια ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα.

Ανάλυση Υπόθεσης 5: Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες εξισώσεις (Β'):

$p \times p[u] = P_2 \equiv P_{uu}$,

$(1-p) \times p[d] = P_{du}$,

$p \times (1-p[u]) = P_{ud}$,

$(1-p) \times (1-p[d]) = P_0 \equiv P_{dd}$.

Οι μεταβλητές $P_{dd}, P_{du} = P_{ud}, P_{uu}$ είναι πιθανότητες συνδεδεμένες με μοναδικά μονοπάτια κατά μήκος του δέντρου. Για αυτό τον λόγο τις αποκαλούμε «πιθανότητες μονοπατιού».

Αν παρατηρήσουμε τις εξισώσεις (Β') μόνες τους, θα διακρίνουμε πως τώρα πια έχουμε 3 αγνώστους και 4 εξισώσεις. Επομένως, τα $p, p[u], p[d]$ είναι υπερ-προσδιορισμένα. Επίσης, από τις ιδιότητες των πιθανοτήτων προκύπτει ότι: $P_{dd} + P_{du} + P_{ud} + P_{uu} = 1$, άρα με ευκολία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιεσδήποτε από τις τρεις πιθανότητες για να εξάγουμε την τέταρτη.

Γενίκευση:

Αυτή η υπόθεση δε χρειάζεται αν (όπως και στην περίπτωση του επιτοκίου), οι <u>διαφορετικές</u> πιθανότητες μονοπατιού $(1-p) \times p[d] = P_{du}$ και $p \times (1-p[u]) = P_{ud}$ είναι εξωγενώς προσδιορισμένες. Αυτές μπορούμε να τις εξάγουμε από:

- τις τρέχουσες τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης που λήγουν πριν την καταληκτική ημερομηνία του δέντρου,
- τις τιμές των Αμερικάνικων δικαιωμάτων προαίρεσης,
- δικαιώματα προαίρεσης με εσωτερική αξία εξαρτημένη από τη διαδρομή.

Σε κάθε περίπτωση εξακολουθούμε να απαιτούμε: $P_{du} + P_{ud} = P_1$.

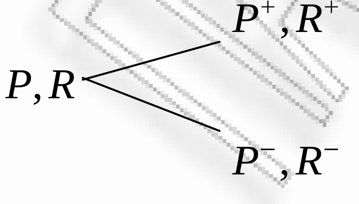
Εδώ τελειώνει ο προσδιορισμός του μοντέλου. Ο αρχικός σκοπός μας είναι πλέον εφικτός. Εφόσον έχουμε κατασκευάσει τις απαραίτητες εξισώσεις και υποθέσεις, δοθέντων των αποδόσεων R_0, R_1, R_2 και των τεκμαρτών πιθανοτήτων P_0, P_1, P_2 των τελικών κόμβων, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοναδικό τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο: $d,u,r,d[d],u[d],d[u],u[u]$. Επίσης, από τις εξισώσεις (Γ) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες κίνησης $p, p[u], p[d]$. Τέλος, δείξαμε πως η λύση είναι συνεπής με τη μη ύπαρξη κερδοσκοπίας καθώς δουλεύουμε οπισθοδρομικά στο δέντρο, γιατί μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες οι οποίες μας εισάγουν στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Πριν προχωρήσουμε, πρέπει να επισημάνουμε πως το απλό διωνυμικό μοντέλο είναι μια ειδική περίπτωση. Οι πέντε υποθέσεις ισχύουν και για αυτό το μοντέλο όμως οι αποδόσεις d,u είναι σταθερές κατά μήκος του δέντρου. Οι σταθερές αποδόσεις έχουν ως αποτέλεσμα $p^2 = P_2$, $2p(1-p) = P_1$, $(1-p)^2 = P_0$. Σε αντίθεση με το απλό διωνυμικό μοντέλο, το τεκμαρτό διωνυμικό, επιτρέπει σε αυτές τις τελικές πιθανότητες να λάβουν αυθαίρετες τιμές και για αυτό θεωρείται μια σημαντική γενίκευση.

3.2 Μέθοδος Επίλυσης

Το τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο τώρα μπορεί να λυθεί δουλεύοντας οπισθοδρομικά, ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου. Η μέθοδος βασίζεται σε τρία βήματα.

Έστω P,P^+,P^- είναι οι πιθανότητες μονοπατιών, R,R^+,R^-, είναι οι αντίστοιχες κομβικές αποδόσεις και p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης. Ας υποθέσουμε ότι εργαζόμαστε οπισθοδρομικά και πως έχουμε ήδη βρει τις P^+,P^- και τις R^+,R^- και θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα P και την απόδοση R του προηγούμενου κόμβου, καθώς επίσης και την πιθανότητα ανοδικής κίνησης p.



Βήμα 1: $P = P^{+} + P^{-}$. (3.1)

Βήμα 2: $p = P^{+} / P$. (3.2)

Βήμα 3: $R = \dfrac{\left[(1-p)R^{-} + pR^{+}\right]}{r}$. (3.3)

Επεξήγηση βήματος 1: Το πρώτο βήμα δηλώνει ότι μια εσωτερική πιθανότητα μονοπατιού είναι ίση με το άθροισμα των επακόλουθων πιθανοτήτων μονοπατιού που προέρχονται από αυτό.

Επεξήγηση βήματος 2: Το δεύτερο βήμα κατανέμει τη συνολική πιθανότητα σε πάνω και κάτω κίνηση, αφού έτσι προκύπτουν οι πιθανότητες κίνησης

$p = P^{+} / P$ και $(1-p) = P^{-} / P$.

Επεξήγηση βήματος 3: Το τρίτο βήμα χρησιμοποιεί την ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα κίνησης για να προσδιορίσει την εσωτερική κομβική απόδοση R. Αυτή είναι ίση με την προεξοφλημένη αναμενόμενη ουδέτερου κινδύνου απόδοση στο επόμενο βήμα.

Για να ξεκινήσουμε μπορούμε να πάμε στους τελικούς κόμβους του δέντρου και να επισυνάψουμε σε κάθε κόμβο την αντίστοιχη τελική κομβική απόδοση R_j και την αντίστοιχη τελική <u>κομβική πιθανότητα</u> P_j. Για να βρούμε την <u>πιθανότητα του κάθε μονοπατιού</u> μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $P_{\square\square\square} = \dfrac{P_j}{\left[\dfrac{n!}{j!(n-j)!}\right]}$ (3.4), όπου «□□□» σημειώνουμε το μονοπάτι που έχει ακολουθηθεί. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε το επιτόκιο r ως την n-οστή ρίζα του αθροίσματος των $P_j R_j$, ($r = \sqrt[n]{\left(\Sigma_j P_j R_j\right)}$), έτσι ώστε:

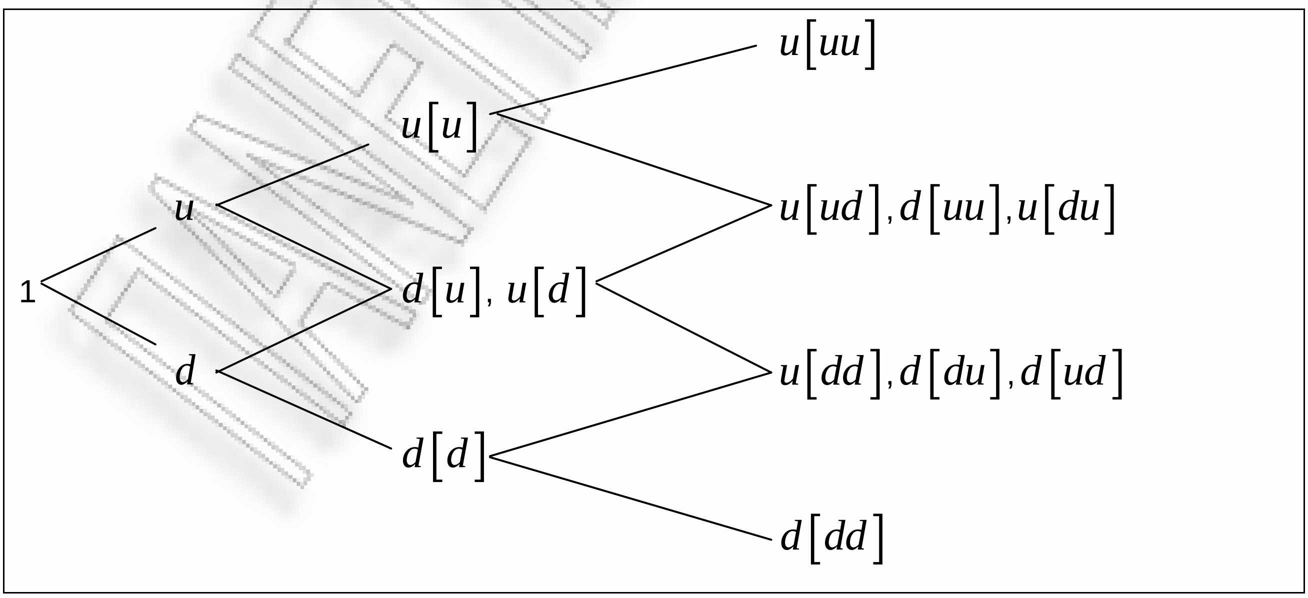
$r^{n} = \Sigma_j P_j R_j$ και με μερίσματα, $\dfrac{r^{n}}{\delta^{n}} = \Sigma_j P_j R_j$.

Εσωτερική κερδοσκοπία

Το πρώτο βήμα μας εξασφαλίζει πως όλες οι εσωτερικές πιθανότητες είναι θετικές. Αυτό συμβαίνει επειδή οι πιθανότητες των τελικών κόμβων είναι θετικές και κατ' επέκταση το άθροισμα δυο θετικών αριθμών θα είναι θετικό ($P = P^{+} + P$). Από το βήμα 2 μπορούμε να συμπεράνουμε πως όλες οι πιθανότητες κίνησης $p[\bullet]$ θα είναι επίσης θετικοί αριθμοί , αφού είναι το πηλίκο θετικών αριθμών ($p = P^{+} / P$), καθώς επίσης πως πρόκειται για αριθμούς μικρότερους της μονάδας εφόσον $P^{+} < P$. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μην υπάρχει ακίνδυνο κέρδος μεταξύ του ουδέτερου κινδύνου τίτλου και του υποκείμενου τίτλου σε οποιοδήποτε σημείο του δέντρου είναι, το $r[\bullet]$ (ή το $\dfrac{r[\bullet]}{\delta[\bullet]}$ σε περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος δίνει μέρισμα) να βρίσκεται πάντα μεταξύ των αντίστοιχων $u[\bullet]$, $d[\bullet]$ σε κάθε κόμβο του δέντρου. Πράγματι, από τις εξισώσεις (Γ) το γεγονός ότι τα αντίστοιχα $p[\bullet]$ ορίζονται ως πιθανότητες εγγυάται ότι αυτό θα συμβεί.

Κάποιες ιδιότητες

Για να εξηγήσουμε τις ιδιότητες θα χρησιμοποιήσουμε ένα δέντρο τριών βημάτων. Η απεικόνιση του για καλύτερη κατανόηση δίνεται παρακάτω.



Σύμφωνα με την **Υπόθεση 2** αφού το δέντρο είναι ανασυνδυαζόμενο υπάρχει ανεξαρτησία στα μονοπάτια των αποδόσεων. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε κόμβο του δέντρου το μέγεθος της επόμενης κίνησης εξαρτάται από τον αριθμό των πάνω και κάτω κινήσεων που οδήγησαν σε αυτό τον κόμβο, όχι όμως και από την σειρά που πραγματοποιήθηκαν αυτές οι κινήσεις. Δηλαδή θα ισχύει: $u[du]=u[ud]=d[uu]$ και $d[ud]=d[du]=u[dd]$.

Α) *Δοθείσας μόνο της* **Υπόθεσης 1** (ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί μια διωνυμική διαδικασία): Αν όλα τα <u>τελικά</u> μονοπάτια που περιέχουν τον <u>ίδιο αριθμό</u> πάνω και κάτω κινήσεων έχουν την ίδια <u>τελική</u> ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα, τότε όλα τα <u>εσωτερικά</u> μονοπάτια που περιέχουν τον ίδιο αριθμό πάνω και κάτω κινήσεων επίσης έχουν την ίδια <u>εσωτερική</u> ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα.

Στο τριών βημάτων δέντρο οι εξισώσεις θα είναι:

$$p\times p[u]\times p[uu]=P_3\equiv P_{uuu},$$

$$p\times p[u]\times(1-p[uu])=P_2/3\equiv P_{uud},$$

$$p\times(1-p[u])\times p[ud]=P_2/3\equiv P_{udu},$$

$$(1-p)\times p[d]\times p[du]=P_2/3\equiv P_{duu},$$

$$(1-p)\times p[d]\times(1-p[du])=P_1/3\equiv P_{dud},$$

$$(1-p)\times p[d]\times p[dd]=P_1/3\equiv P_{ddu},$$

$$(1-p)\times(1-p[d])\times(1-p[dd])=P_0\equiv P_{ddd}.$$

Εδώ υπάρχει μόνο ένας εσωτερικός κόμβος ο οποίος προσεγγίζεται με πάνω από ένα μονοπάτια, ο μεσαίος κόμβος στο τέλος του δεύτερου βήματος. Ο κόμβος αυτός προσεγγίζεται με δυο μονοπάτια. Χρειάζεται λοιπόν να δείξουμε ότι αυτές οι πιθανότητες μονοπατιού είναι ίσες. Δηλαδή: $p\times(1-p[u])=(1-p)\times p[d]$.

Μπορούμε να καταλήξουμε στην παραπάνω ισότητα ως εξής: διαιρούμε κατά μέλη την 5^{η} και 3^{η} εξίσωση από παραπάνω και έχουμε:

$$\frac{p\times\left(1-p[u]\right)\times\left(1-p[ud]\right)}{p\times\left(1-p[u]\right)\times p[ud]}=\frac{\frac{P_1}{3}}{\frac{P_2}{3}}\Rightarrow$$

$$\frac{\left(1-p[ud]\right)}{p[ud]}=\frac{P_1}{P_2}\Rightarrow$$

$$p[ud]=\frac{P_2}{P_1+P_2}.$$

Διαιρώντας την 6η και 4η εξίσωση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\left(1-p\right)\times p[d]\times\left(1-p[du]\right)}{\left(1-p\right)\times p[d]\times p[du]}=\frac{P_1}{P_2}\Rightarrow$$

$$p[du]=\frac{P_2}{P_1+P_2}.$$

Άρα $p[du]=p[ud]$.

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 3 και 4 ή 5 και 6 έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ενδεικτικά (με αντικατάσταση στις εξισώσεις 3 και 4):

$$\left.\begin{array}{l} p\times\left(1-p[u]\right)\times p[ud]=P_2/3 \\ \\ \left(1-p\right)\times p[d]\times p[ud]=P_2/3 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$p\times\left(1-p[u]\right)=\left(1-p\right)\times p[d]$$

(Β) *Δοθέντων μόνο των* **Υποθέσεων 1** (ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί μια διωνυμική διαδικασία) και **2** (το διωνυμικό δέντρο είναι ανασυνδυαζόμενο)**:** Οι ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες θα είναι ανεξάρτητες του μονοπατιού αν και μόνο αν το ουδέτερου κινδύνου επιτόκιο είναι ανεξάρτητο μονοπατιού. Αυτό ακολουθεί από τις εξισώσεις (Γ) για $p[du]$ και $p[ud]$:

$$p[du]=(r[du]-d[du])/(u[du]-d[du]),$$
$$p[ud]=(r[ud]-d[ud])/(u[ud]-d[ud]).$$

Από τη στιγμή που οι Υποθέσεις 1 και 2 δηλώνουν ότι $u[du]=u[ud]$ και $d[ud]=d[du]$, θα πρέπει να έχουμε $p[du]=p[ud]$ αν και μόνο αν $r[du]=r[ud]$. Από την στιγμή που έχουμε δείξει ότι οι Υποθέσεις 1,2 και 5 δηλώνουν ότι $p[du]=p[ud]$, αυτές θα πρέπει επίσης να δηλώνουν ότι $r[du]=r[ud]$.

Ως αποτέλεσμα αυτών των ιδιοτήτων τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του δέντρου που έχουμε επισημάνει για τους τελικούς κόμβους επαναλαμβάνονται καθώς εργαζόμαστε οπισθοδρομικά στο δέντρο.

3.3 Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης

Έστω τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο τριών βημάτων: $n=3$. Θεωρούμε ως δεδομένα:

- τις αποδόσεις των τελικών κόμβων: R_0, R_1, R_2, R_3,
- τις πιθανότητες των τελικών κόμβων: P_0, P_1, P_2, P_3
- το επιτόκιο r,
- το μέρισμα που αποδίδει ο υποκείμενος τίτλος δ.

Έχουμε:

$R_0=0.7827$, $R_1=0.9216$, $R_2=1.0851$, $R_3=1.2276$,

$P_0=0.1$, $P_1=0.4$, $P_2=0.3$, $P_3=0.2$,

$r=1.017$, $\delta=1.008$.

1. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες κάθε μονοπατιού. Για τους τελικούς κόμβους ανακαλούμε τον τύπο (3.4) και με βάση αυτόν υπολογίζουμε τις πιθανότητες που εμφανίζονται ακολούθως.

$$P_{uuu} = \frac{P_3}{1} = 0.2,$$

$$P_{uud} = P_{udu} = P_{duu} = \frac{P_2}{3} = \frac{0.3}{3} = 0.1,$$

$$P_{udd} = P_{dud} = P_{ddu} = \frac{P_1}{3} = \frac{0.4}{3} = 0.133,$$

$$P_{ddd} = \frac{P_0}{1} = 0.1.$$

Για τους εσωτερικούς κόμβους ανατρέχουμε στον τύπο (3.1) και βρίσκουμε τα ακόλουθα:

$$P_{uu} = P_{uud} + P_{uuu} = 0.1 + 0.2 = 0.3,$$

$$P_{dd} = P_{ddd} + P_{ddu} = 0.1 + 0.133 = 0.233,$$

$$P_{ud} = P_{du} = P_{udd} + P_{udu} = P_{dud} + P_{duu} = 0.133 + 0.1 = 0.233,$$

$$P_u = P_{ud} + P_{uu} = 0.233 + 0.3 = 0.533,$$

$$P_d = P_{dd} + P_{du} = 0.233 + 0.233 = 0.467,$$

$$P = P_d + P_u = 0.467 + 0.533 = 1.$$

2. Τώρα έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των εσωτερικών κόμβων. Προσθέτοντας όλες τις πιθανότητες των μονοπατιών που αντιστοιχούν στον ίδιο κόμβο βρίσκουμε τα ακόλουθα:

$$P[uu] = P_{uu} = 0.3,$$

$$P[ud] = P[du] = P_{ud} + P_{du} = 0.233 + 0.233 = 0.467,$$

$$P[dd] = P_{dd} = 0.233,$$

$$P[u] = P_u = 0.533,$$

$$P[d] = P_d = 0.467.$$

3. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες κίνησης. Ανακαλούμε τον τύπο (3.2) και έχουμε ακολούθως:

$$p[uu] = \frac{P_{uuu}}{P_{uu}} = \frac{0.2}{0.3} = 0.667,$$

$$p[ud] = p[du] = \frac{P_{udu}}{P_{ud}} = \frac{P_{duu}}{P_{du}} = \frac{0.1}{0.233} = 0.429,$$

$$p[dd] = \frac{P_{ddu}}{P_{dd}} = \frac{0.133}{0.233} = 0.571,$$

$$p[u] = \frac{P_{uu}}{P_{u}} = \frac{0.3}{0.533} = 0.563,$$

$$p[d] = \frac{P_{du}}{P_{d}} = \frac{0.233}{0.467} = 0.5,$$

$$p = \frac{P_{u}}{P} = \frac{0.533}{1} = 0.533.$$

4. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των αποδόσεων των εσωτερικών κόμβων. Χρειάζεται αρχικά να γνωρίζουμε το λόγο του επιτοκίου προς το μέρισμα:

$$\frac{r}{\delta} = \left[P_0R_0 + P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[0.1(0.7827) + 0.4(0.9216) + 0.3(1.0851) + 0.2\left(1.2776\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 1.0089.$$

Έπειτα ανατρέχουμε στον τύπο (3.3), όπου αντί για r χρησιμοποιούμε το $\frac{r}{\delta}$ που έχουμε υπολογίσει καθώς ο υποκείμενος τίτλος αποδίδει μέρισμα. Έτσι βρίσκουμε τις αποδόσεις των εσωτερικών κόμβων:

$$R[uu] = \left[\frac{(1-p[uu])R_2 + p[uu]R_3}{\frac{r}{\delta}} \right],$$

$$= \frac{(1-0.667)\times 1.0851 + 0.667\times 1.2776}{1.0089} = 1.2023$$

$$R[ud] = \left[\frac{(1-p[ud])R_1 + p[ud]R_2}{\frac{r}{\delta}} \right] = 0.9826,$$

$$R[du] = \left[\frac{(1-p[du])R_1 + p[du]R_2}{\frac{r}{\delta}} \right] = 0.9826,$$

$$R[dd] = \left[\frac{(1-p[dd])R_0 + p[dd]R_1}{\frac{r}{\delta}} \right] = 0.8542,$$

,

$$R[d] = \left[\frac{(1-p[d])R[dd] + p[d]R[du]}{\frac{r}{\delta}} \right] = 0.91,$$

$$R = \left[\frac{(1-p)R[d] + pR[u]}{\frac{r}{\delta}} \right] = 1.$$

5. Η απόδοση της κάθε κίνησης μπορεί να βρεθεί ως ακολούθως:

$$u[uu] = \frac{R_3}{R[uu]} = \frac{1.2776}{1.2023} = 1.0626,$$

$$u[ud] = u[du] = \frac{R_2}{R[ud]} = \frac{R_2}{R[du]} = \frac{1.0851}{0.9826} = 1.1043,$$

$$d[uu] = \frac{R_2}{R[uu]} = \frac{1.0851}{1.2023} = 0.9025,$$

$$u[dd] = \frac{R_1}{R[dd]} = \frac{0.9216}{0.8542} = 1.0879,$$

$$d[dd] = \frac{R_0}{R[dd]} = \frac{0.7827}{0.8542} = 0.9163,$$

$$u[u] = \frac{R[uu]}{R[u]} = \frac{1.2023}{1.0961} = 1.0969,$$

$$u[d] = \frac{R[du]}{R[d]} = \frac{0.9826}{0.91} = 1.0798,$$

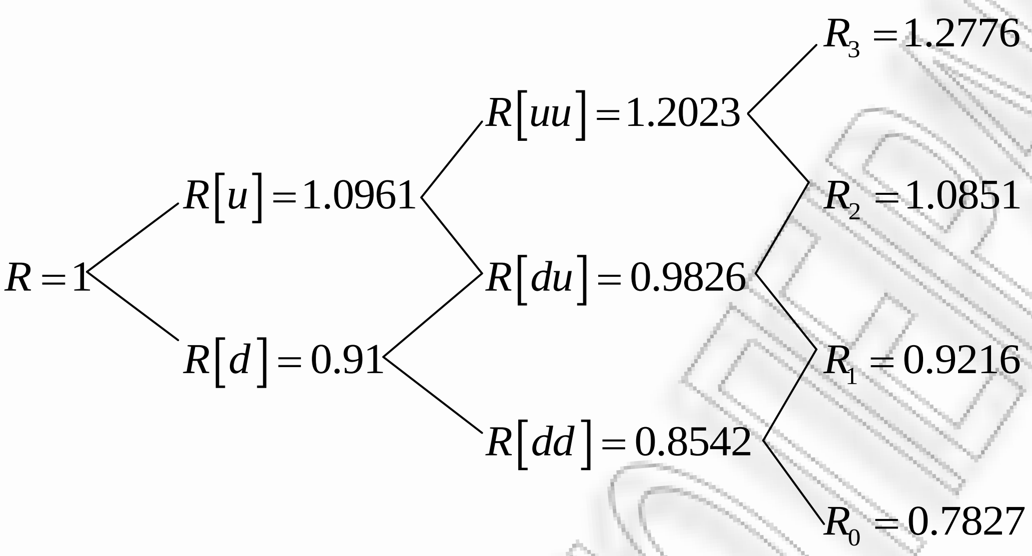
$$d[u] = \frac{R[ud]}{R[u]} = \frac{0.9826}{1.0961} = 0.8965,$$

$$d[d] = \frac{R[dd]}{R[d]} = \frac{0.8542}{0.91} = 0.9387,$$

$$u = \frac{R[u]}{R} = \frac{1.0961}{1} = 1.0961,$$

$$d = \frac{R[d]}{R} = \frac{0.91}{1} = 0.91.$$

Παρακάτω παρουσιάζεται το δέντρο των κομβικών αποδόσεων:



3.4 Περαιτέρω Γενικεύσεις

Οι **Υποθέσεις 4** (το επιτόκιο είναι σταθερό) και **5** (όλα τα μονοπάτια που οδηγούν στον ίδιο τελικό κόμβο έχουν την ίδια ουδέτερου κινδύνου πιθανότητα) μπορούν να εγκαταλειφθούν αν γνωρίζουμε κατά κάποιο τρόπο εξωγενώς πώς το επιτόκιο κυμαίνεται ανάλογα με την απόδοση του υποκείμενου τίτλου και τον χρόνο και πώς οι ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες των τελικών κόμβων κατανέμονται μεταξύ των διαφορετικών μονοπατιών που οδηγούν στον ίδιο τελικό κόμβο.

Εξαρτημένα από τον κόμβο επιτόκια

Σε κάποιες περιπτώσεις θα μπορούσαμε να εξάγουμε τη χρονική εξάρτηση του επιτοκίου από τα προδρομικά επιτόκια που εφαρμόζονται στις σύγχρονες τιμές των ουδέτερου κινδύνου ομολόγων με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης. Για παράδειγμα αν B_1 και B_2 είναι οι σύγχρονες τιμές μηδενικού κουπονιού ομολόγων που αποδίδουν 1€ στο τέλος των βημάτων 1 και 2, αντίστοιχα, τότε μπορούμε να καθορίσουμε τα εξής: $r = \dfrac{1}{B_1}$, $r[d] = r[u] = \dfrac{B_1}{B_2}$. Είναι πολύ δυσκολότερο να δούμε από πού θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε αξιόπιστες πληροφορίες για την εξάρτηση του $r[\bullet]$ στο συνδυασμό των προηγούμενων κινήσεων, δηλαδή να δικαιολογήσουμε μέσα από τιμές χρεογράφων ότι $r[d] \neq r[u]$.

Έστω τώρα πως αντί για $r[\bullet]$ έχουμε: $\frac{r[\bullet]}{\delta[\bullet]} \equiv \frac{1+r'[\bullet]}{1+\delta'[\bullet]}$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να ενσωματώσουμε στο δέντρο ένα ρυθμό κέρδους που μπορεί να είναι μια πολύ γενική συνάρτηση της τρέχουσας απόδοσης του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου, δεδομένου ότι αυτή η συνάρτηση μπορεί να προσδιοριστεί εξωγενώς.

Εισάγοντας μερίσματα στο διωνυμικό δέντρο το να αναπροσαρμόζουμε τις ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες κίνησης μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα όταν τα μερίσματα είναι εξαρτημένα από την κατάσταση και την ημερομηνία. Για παράδειγμα για κάποιες κοινές μετοχές με τριμηνιαία μερίσματα κάποιος θα μπορούσε να συμπεριλάβει την επίδραση των μερισμάτων μετρώντας την πιθανότητα κίνησης ως εξής: $p[\bullet] = \frac{\frac{r}{\delta[\bullet]} - d}{u-d}$. Παρόλαυτα για ακριβή δέντρα με μεγάλο αριθμό βημάτων με αρκετά μεγάλο $\delta[\bullet]$ μπορεί να συμβεί $\frac{r}{\delta[\bullet]} < d$ σε κάποιες κινήσεις και έτσι να παραχθούν αρνητικές πιθανότητες. Ευτυχώς αυτό δεν είναι ένα πρόβλημα του δέντρου που κατασκευάζεται εδώ, γιατί το μέγεθος των κινήσεων $d[\bullet]$ και $u[\bullet]$ θα προσαρμοστεί αυτόματα στην αναδρομική διαδικασία για να βεβαιώσει ότι $d[\bullet] < \frac{r}{\delta[\bullet]} < u[\bullet]$ σε κάθε κίνηση του δέντρου.

Έτσι αν ξέρουμε πώς το $r[\bullet]$ και το $\delta[\bullet]$ εξαρτώνται από τον υποκείμενο τίτλο και τον χρόνο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους ρυθμούς για να κατασκευάσουμε το δέντρο μας παρόλαυτα δεν είμαστε τελείως ελεύθεροι να τα διαλέξουμε από τη στιγμή που για να αποφύγουμε κερδοσκοπικές ευκαιρίες το r θα πρέπει να είναι θετικό και για παράδειγμα σε ένα 2-βημάτων δέντρο να ικανοποιεί:

$$1 = P_{dd}\left(\frac{R_0}{(r \times r[d])}\right) + P_{du}\left(\frac{R_1}{(r \times r[d])}\right) + P_{ud}\left(\frac{R_1}{(r \times r[u])}\right) + P_{uu}\left(\frac{R_2}{(r \times r[u])}\right).$$

Μια προφανής γενίκευση της παραπάνω λύσης για σταθερά επιτόκια δίνεται παρακάτω:

$$1 = P_{dd}\left(\frac{R_0}{r^2}\right) + P_{du}\left(\frac{R_1}{r^2}\right) + P_{ud}\left(\frac{R_1}{r^2}\right) + P_{uu}\left(\frac{R_2}{r^2}\right).$$

Γενικά κάθε τελική απόδοση πρέπει να προεξοφληθεί με το συσχετισμένο μονοπάτι επιτοκίων της πριν πάρουμε τις ουδέτερου κινδύνου προσδοκίες. Ενώ αυτή η γενίκευση επεκτείνεται εύκολα σε ένα n-βημάτων δέντρο, για να διατηρήσουμε τα οφέλη ενός ανασυνδυαζόμενου δέντρου δεν μπορούμε να αφήσουμε τη δομή των επιτοκίων να εξαρτάται από το μονοπάτι. Καθώς απουσιάζουν οι **Υποθέσεις 4** και **5** δεν μπορούμε πια να έχουμε ένα τρόπο να επιβεβαιώσουμε ότι το επιτόκιο θα είναι ανεξάρτητο μονοπατιού. Έτσι για παράδειγμα σε ένα 2-βημάτων δέντρο θα πρέπει απαιτήσουμε: $r[du] = r[ud]$.

Διαφορετικές ουδέτερου κινδύνου πιθανότητες μονοπατιού στον ίδιο εσωτερικό ή τελικό κόμβο

Ένας φυσικός τρόπος να εξάγουμε αυτές τις πιθανότητες είναι από τα δικαιώματα προαίρεσης με ημερομηνίες λήξης πριν την ημερομηνία λήξης του δέντρου. Για παράδειγμα στο 2-βημάτων δέντρο, έχουμε τη δυνατότητα μέσα από δικαιώματα που λήγουν στο τέλος του 1ου βήματος να εξάγουμε τις ουδέτερου κινδύνου κομβικές πιθανότητες P_d και P_u (οι οποίες σε αυτή την ειδική περίπτωση είναι επίσης πιθανότητες μονοπατιών) και ισχύει: $P_d + P_u = 1$. Αυτό μας δίνει αρκετές πληροφορίες ώστε να εξάγουμε τις μεμονωμένες πιθανότητες μονοπατιών P_{du} και P_{ud}, οι οποίες αφού πλέον έχουμε εγκαταλείψει την **Υπόθεση 5** δεν είναι πλέον ίσες.

Για παράδειγμα σε ένα 2-βημάτων δέντρο, στο πρώτο βήμα, πρέπει να έχουμε $p = P_u$.

Τώρα μπορούμε να ξαναπάμε στις εξισώσεις (B), οι οποίες πριν δεν προσδιόριζαν τις πιθανότητες κίνησης. Με αυτό τον επιπρόσθετο προσδιορισμό, μπορούν να λυθούν ως εξής:

$$p[u] = \frac{P_2}{P_u} \quad \text{και} \quad p[d] = 1 - \frac{P_0}{P_d}.$$

Σε αυτή την περίπτωση οι δυο πιθανότητες μονοπατιών που οδηγούν στο μεσαίο τελικό κόμβο του 2ου βήματος δεν είναι γενικά ίσες, δηλαδή:

$P_{du} = (1-p)\, p[d] = P_d - P_0$ και $P_{ud} = p(1-p[u]) = P_u - P_2$.

Συνδυαστικά εξακολουθούν να ικανοποιούν την απαίτηση:

$$P_{du} + P_{ud} = (P_d - P_0) + (P_u - P_2) = 1 - P_0 - P_2 = P_1.$$

Επεκτείνοντας αυτό το παράδειγμα σε n-βήματα, θα πρέπει να διατηρήσουμε και εδώ τα πλεονεκτήματα του ανασυνδυαζόμενου δέντρου εφόσον απουσιάζουν οι **Υποθέσεις 4** και **5.** Πιο συγκεκριμένα, ενώ έχει πάψει να ισχύει η παραδοχή ότι όλα τα μονοπάτια που οδηγούν στον ίδιο εσωτερικό ή τελικό κόμβο έχουν την ίδια πιθανότητα, οι πιθανότητες κίνησης πρέπει να παραμένουν ανεξάρτητες του προηγούμενου μονοπατιού. Για παράδειγμα σε ένα 3-βημάτων δέντρο παραμένει η παραδοχή ότι $p[du] = p[ud]$. Ένα δέντρο είναι ανασυνδυαζόμενο όταν $d[du] = d[ud]$ και $u[du] = u[ud]$. Έτσι, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις **Υποθέσεις 4** και **5** με την παραδοχή:

$r[du] = r[ud]$ έτσι ώστε $p[du] = p[ud]$.

Για να εξάγουμε όλες τις πιθανότητες μονοπατιών σε ένα n-βημάτων δέντρο χρειάζεται να γνωρίζουμε εξωγενώς όλες τις κομβικές εσωτερικές και τελικές πιθανότητες του δέντρου. Οι κομβικές πιθανότητες μπορούν να εξαχθούν από Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης των οποίων οι ημερομηνίες λήξης καλύπτουν όλες τις κομβικές ημερομηνίες του δέντρου. Δηλαδή χρειαζόμαστε δικαιώματα τα οποία είναι διαθέσιμα τη στιγμή που ξεκινά το δέντρο και λήγουν στο 1^{ο} , στο 2^{ο} και στο 3^{ο} βήμα αν πρόκειται για 3-βημάτων δέντρο. Δεδομένης όμως της φύσης των διαπραγματευόμενων δικαιωμάτων αυτή είναι μια μη ρεαλιστική προσδοκία, για αυτό εξακολουθούμε να διατηρούμε την **Υπόθεση 5**.

4. ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

4.1 Αποτίμηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Η τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης στο τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο μπορεί να γίνει όπως και στο διωνυμικό δέντρο. Για παράδειγμα η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να εξαχθεί από τον τύπο:

$$C = \frac{\left(\Sigma_j P_j \max\left[0, SR_j - K\right]\right)}{r^n}.$$

Εσωτερικές τιμές του δικαιώματος

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του δικαιώματος σε οποιοδήποτε εσωτερικό κόμβο του δέντρου. Αυτή, η διαδικασία είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει με τη σειρά της να καθορίσουμε τις παραμέτρους αντιστάθμισης κινδύνου Δέλτα, Γάμμα και Θήτα.

Ακολουθεί η εξήγηση της διαδικασίας.

1. Αρχίζουμε με τον καθορισμό κλειστού τύπου εκφράσεων που αφορούν τις πιθανότητες των <u>εσωτερικών</u> κόμβων, κατά αναλογία με αυτές των <u>τελικών</u> κόμβων.
2. Από αυτές μπορούμε ακολούθως να καθορίσουμε κλειστού τύπου εκφράσεις για τις τιμές του υποκείμενου τίτλου και του δικαιώματος προαίρεσης σε κάθε εσωτερικό κόμβο.
3. Τέλος οι τιμές που μας παρέχουν οι παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των παραμέτρων αντιστάθμισης κινδύνου.

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές των εσωτερικών κομβικών πιθανοτήτων για να καθορίσουμε τις εσωτερικές τιμές του υποκείμενου τίτλου και του δικαιώματος προαίρεσης.

1. Πιθανότητες:

$$p = \sum_j \left(\frac{j}{n}\right) P_j \qquad \text{και} \qquad 1 - p = \sum_j \left(\frac{n-j}{n}\right) P_j \, ,$$

$$P_j[u] = \frac{\left(\frac{j}{n}\right)P_j}{p} \quad , \quad P_j[d] = \frac{\left(\frac{n-j}{n}\right)P_j}{1-p},$$

$$p[u] = \sum_j \left(\frac{j-1}{n-1}\right) P_j[u] \quad , \quad p[d] = \sum_j \left(\frac{j}{n-1}\right) P_j[d],$$

$$P_j[uu] = \frac{\frac{\left(\frac{j}{n}\right)(j-1)}{(n-1)} P_j}{p \times p[u]} \quad ,$$

$$P_j[ud] = P_j[du] = \frac{\frac{\left(\frac{n-j}{n}\right)(n-j-1)}{(n-1)} P_j}{(1-p)\times p[d]} \quad ,$$

και τέλος $P_j[dd] = \dfrac{\frac{\left(\frac{n-j}{n}\right)(n-j-1)}{(n-1)} P_j}{(1-p)\times p[d]}$.

2. Τιμές υποκείμενου τίτλου και δικαιωμάτων:

$$S_u = \frac{S\sum_j P_j R_j}{\left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-1}} \quad , \quad S_d = \frac{S\sum_j P_j R_j}{\left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-1}},$$

$$C_u = \frac{\sum_j P_j \max\left[0, SR_j - K\right]}{r^{n-1}}, \quad C_d = \frac{\sum_j P_j \max\left[0, SR_j - K\right]}{r^{n-1}},$$

$$S_{uu} = \frac{S\sum_j P_j R_j}{\left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-2}} \quad , \quad S_{ud} = S_{du} = \frac{S\sum_j P_j R_j}{\left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-2}},$$

και $$S_{dd} = \frac{S\sum_j P_j R_j}{\left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-2}},$$

$$C_{uu} = \frac{\sum_j P_j [uu] \max\left[0, SR_j - K\right]}{r^{n-2}},$$

$$C_{ud} = C_{du} = \frac{\sum_j P_j [ud] \max\left[0, SR_j - K\right]}{r^{n-2}},$$

$$C_{dd} = \frac{\sum_j P_j [dd] \max\left[0, SR_j - K\right]}{r^{n-2}}.$$

3. Παράμετροι αντιστάθμισης κινδύνου Δέλτα, Γάμμα, Θήτα. Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στις εξισώσεις για τα Δέλτα, Γάμμα και Θήτα, τα οποία δίνονται ακολούθως, λαμβάνουμε τις παραμέτρους αντιστάθμισης κινδύνου.

$$\Delta \equiv \frac{C_u - C_d}{\delta\left(S_u - S_d\right)},$$

$$\Delta[d] \equiv \frac{C_{du} - C_{dd}}{\delta[d]\left(S_{du} - S_{dd}\right)} \quad \text{και} \quad \Delta[u] \equiv \frac{C_{uu} - C_{ud}}{\delta[u]\left(S_{uu} - S_{ud}\right)},$$

$$\Gamma \equiv \frac{\Delta[u] - \Delta[d]}{\delta\left(S_u - S_d\right)} \quad \text{και} \quad \Theta \equiv \frac{C_{ud} - C}{2h}.$$

<u>Παραδείγματα αποτίμησης Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης:</u>

Ο κώδικας για την αποτίμηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς στο λογισμικό MATLAB παρουσιάζεται παρακάτω:

```
function[C]=sValueC(n,PimplS,K,S,r,T)
deltaT=T/n;
rn=exp(r*deltaT);
A=zeros(1,n+1);
for j=0:n
A(1,j+1)=PimplS(j+1)*(max(0,S(j+1)-K));
end
C=sum(A)/rn;
```

Για την τιμολόγηση χρησιμοποιήθηκαν δέντρα 100 βημάτων, το επιτόκιο είναι 8,87%, ο χρόνος έως την λήξη 129 ημέρες (T=0.3534), η τεκμαρτή μεταβλητότητα 0,179167. Ακολουθούν τα αποτελέσματα από την τιμολόγηση δεκατεσσάρων Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς:

Τιμή εξάσκησης K	Μέγιστη τιμή αγοράς (Bid)	Ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask)	Τιμή Τελευταίας Συναλλαγής	Τιμή Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου
SPX US 06/16/12 C1200 Index	156,8	162,2	159,3	158,1065
SPX US 06/16/12 C1230 Index	131,9	135,8	131,9	132,4328
SPX US 06/16/12 C1250 Index	116,1	120,7	116,2	116,2463
SPX US 06/16/12 C1275 Index	97,1	101,1	98	97,1
SPX US 06/16/12 C1325 Index	62,8	66,1	64,6	63,272
SPX US 06/16/12 C1350 Index	48,1	51,8	50,2	48,9012
SPX US 06/16/12 C1365 Index	39,9	43,8	35,7	41,4026
SPX US 06/16/12 C1425 Index	15,8	19	17,5	17,9084
SPX US 06/16/12 C1450 Index	9,7	11,5	10,4	11,5
SPX US 06/16/12 C1475 Index	5,6	7,5	5,8	6,8002
SPX US 06/16/12 C1500 Index	3	4,2	3,6	3,5949
SPX US 06/16/12 C1550 Index	0,9	1,4	0,9	0,9
SPX US 06/16/12 C1600 Index	0,3	0,7	0,35	0,3
SPX US 06/16/12 C1650 Index	0,15	0,55	0,2	0,2935

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

Τιμή εξάσκησης Κ	Τιμή Τελευταίας Συναλλαγής	Τιμή Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου	Τιμή Τυπικού Διωνυμικού Δέντρου	Τιμή Black και Scholes
SPX US 06/16/12 C1200 Index	159,3	158,1065	188,6491	188,5022
SPX US 06/16/12 C1230 Index	131,9	132,4328	162,89	162,716
SPX US 06/16/12 C1250 Index	116,2	116,2463	146,575	146,3174
SPX US 06/16/12 C1275 Index	98	97,1	127,1911	126,8807
SPX US 06/16/12 C1325 Index	64,6	63,272	92,5111	92,173
SPX US 06/16/12 C1350 Index	50,2	48,9012	77,4251	77,1506
SPX US 06/16/12 C1365 Index	35,7	41,4026	69,3369	68,9256
SPX US 06/16/12 C1425 Index	17,5	17,9084	42,3279	41,942
SPX US 06/16/12 C1450 Index	10,4	11,5	33,7464	33,3637
SPX US 06/16/12 C1475 Index	5,8	6,8002	31,5522	26,2012
SPX US 06/16/12 C1500 Index	3,6	3,5949	20,4412	20,3153
SPX US 06/16/12 C1550 Index	0,9	0,9	11,9599	11,7615
SPX US 06/16/12 C1600 Index	0,35	0,3	6,5231	6,4845
SPX US 06/16/12 C1650 Index	0,2	0,2935	3,4767	3,4118

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

Τιμή ΤΣ-Τιμή Τεκμαρτού ΔΔ	Τιμή ΤΣ-Τιμή ΤΔΔ	Τιμή ΤΣ-Τιμή B&S
1,1935	-29,3491	-29,2
-0,5328	-30,99	-30,82
-0,0463	-30,375	-30,12
0,9	-29,1911	-28,88
1,328	-27,9111	-27,57
1,2988	-27,2251	-26,95
-5,7026	-33,6369	-33,23
-0,4084	-24,8279	-24,44
-1,1	-23,3464	-22,96
-1,0002	-25,7522	-20,4
0,0051	-16,8412	-16,72
0	-11,0599	-10,86
0,05	-6,1731	-6,135
-0,0935	-3,2767	-3,212

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3

Ο Πίνακας 4.3 εμφανίζει την διαφορά μεταξύ της Τιμής Τελευταίας Συναλλαγής και της τιμής που προκύπτει από το Τεκμαρτό Διωνυμικό Δέντρο, της Τιμής Τελευταίας

Συναλλαγής και της τιμής που προκύπτει από το Τυπικό Διωνυμικό Δέντρο και της Τιμής Τελευταίας Συναλλαγής και της τιμής που προκύπτει από το μοντέλο Black και Scholes.

4.2 Αποτίμηση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Και εδώ η τιμολόγηση γίνεται όπως στο διωνυμικό δέντρο. Πιο συγκεκριμένα, για τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς εργαζόμαστε οπισθοδρομικά ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου όπου εφαρμόζουμε τη σχέση:

$$C[\bullet] = \max\left[0, S[\bullet] - K\right],$$

και στη συνέχεια περνώντας στους εσωτερικούς κόμβους όπου εφαρμόζουμε την σχέση:

$$C[\bullet] = \max\left[S[\bullet] - K, \frac{\left(1 - p[\bullet]\right)C_d[\bullet] + p[\bullet]C_u[\bullet]}{r}\right].$$

Εδώ K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς, $S[\bullet] \equiv SR[\bullet]$ είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου με την ακολουθία των προηγούμενων κινήσεων να σημειώνεται στην παρένθεση και $C[\bullet]$ είναι η αξία του δικαιώματος αγοράς με την ακολουθία των προηγούμενων κινήσεων να σημειώνεται επίσης στην παρένθεση. $C_u[\bullet]$ είναι η αξία ενός δικαιώματος που έχει πραγματοποιήσει ανοδική κίνηση έπειτα από την ακολουθία των προηγούμενων κινήσεων που σημειώνεται στην παρένθεση και $C_d[\bullet]$ είναι η αξία ενός δικαιώματος που έχει πραγματοποιήσει καθοδική κίνηση έπειτα από την ακολουθία των προηγούμενων κινήσεων που σημειώνεται στην παρένθεση. Οι παράμετροι αντιστάθμισης ορίζονται όπως και στα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης.

Ο κώδικας για την αποτίμηση των Αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης δίνεται ακολούθως:

```
function[price,Apath,Bp,CR,DS]=AmPrice(PimplS,S0,S,n,K)
matC=zeros(n+1,n+1);
matC(:,n+1)=max(0,S-K);
Ppath=zeros(n+1,n+1);
for j=0:n
    Ppath(j+1,n+1)=PimplS(j+1)/(factorial(n)/(factorial(j)*factorial(n-j)));
end
R=S/S0;
rn=dot(PimplS,R);
matR=zeros(n+1,n+1);
matR(:,n+1)=R;
matS=zeros(n+1,n+1);
matS(:,n+1)=S;
p=zeros(n,n);
for i=n-1:-1:0
   for j=0:i;
        Ppath(j+1,i+1)=Ppath(j+2,i+2)+Ppath(j+1,i+2);
        p(j+1,i+1)=Ppath(j+2,i+2)/Ppath(j+1,i+1);
matR(j+1,i+1)=
=((1-p(j+1,i+1))*matR(j+2,i+2)+p(j+1,i+1)*matR(j+2,i+2))/nthroot(rn,n);
matS(j+1,i+1)=
=((1-p(j+1,i+1))*matS(j+2,i+2)+p(j+1,i+1)*matS(j+2,i+2))/nthroot(rn,n);
matC(j+1,i+1)=max(matS(j+1,i+1)-K,(p(j+1,i+1)*matC(j+2,i+2)+
+(1-p(j+1,i+1))*matC(j+1,i+2)))/nthroot(rn,n);
matC(j+1,i+1)=(p(j+1,i+1)*matC(j+2,i+2)+
+(1-p(j+1,i+1))*matC(j+1,i+2))/nthroot(rn,n);
   end
end
price=matC(1,1);
Apath=Ppath;
Bp=p;
CR=matR;
DS=matS;
```

Για την τιμολόγηση χρησιμοποιήθηκαν δέντρα 100 βημάτων, το επιτόκιο είναι 8,87%, ο χρόνος έως την λήξη 128 ημέρες (T=0.3534), η τεκμαρτή μεταβλητότητα 0,179167.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη χρήση του κώδικα.

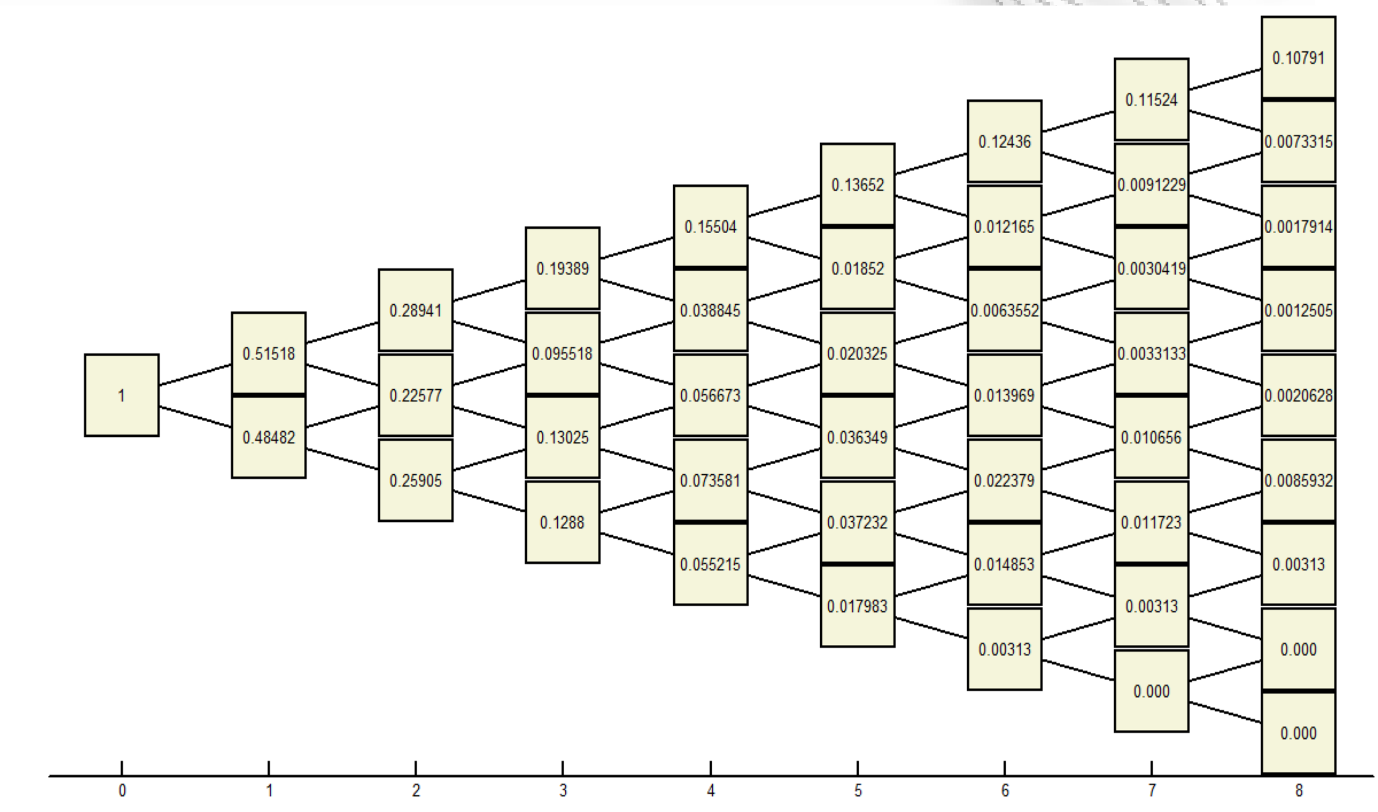
Τα δεδομένα αφορούν 25 Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς στον δείκτη S&P 500, με λήξη 15/06/2012 . Από τη βάση δεδομένων Bloomberg λήφθηκαν (7/02/2012, ώρα 20:48):

- η μέγιστη τιμή αγοράς (Bid) ,
- η ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask),
- η τιμή της τελευταίας συναλλαγής και
- η τιμή εξάσκησης K.

Τιμή εξάσκησης Κ	Μέγιστη τιμή αγοράς (Bid)	Ελάχιστη τιμή πώλησης (Ask)	Τιμή τελευταίας συναλλαγής	Τιμή Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου	Τιμή τελευταίας συναλλαγής - Τιμή Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου
ESM2C 1280 Index	95	96,5	95,75	93,4384	2,3116
ESM2C 1285 Index	91,5	92,5	92	89,7608	2,2392
ESM2C 1290 Index	87,75	89	88,5	86,0833	2,4167
ESM2C 1295 Index	84,5	85,5	85	82,7314	2,2686
ESM2C 1300 Index	81	82	81,5	79,3981	2,1019
ESM2C 1305 Index	77,5	78,75	78	76,0648	1,9352
ESM2C 1310 Index	74,25	75,25	74,75	72,7315	2,0185
ESM2C 1315 Index	71	72	71,5	69,3983	2,1017
ESM2C 1320 Index	67,75	68,75	68,25	66,2194	2,0306
ESM2C 1325 Index	64,5	65,25	65	63,2823	1,7177
ESM2C 1330 Index	61,5	62,5	61,75	60,3453	1,4047
ESM2C 1335 Index	58,5	59,25	59	57,4082	1,5918
ESM2C 1340 Index	55,5	56	56	54,4712	1,5288
ESM2C 1345 Index	52,5	53,25	53	51,5341	1,4659
ESM2C 1350 Index	49,75	50,5	50,25	48,9092	1,3408
ESM2C 1355 Index	47	47,75	47,25	46,4092	0,8408
ESM2C 1360 Index	44,25	45	44,5	43,9093	0,5907
ESM2C 1365 Index	41,75	42,5	42	41,4093	0,5907
ESM2C 1370 Index	39,25	40	39,5	38,9094	0,5906
ESM2C 1375 Index	36,75	37,5	37	36,4094	0,5906
ESM2C 1380 Index	34,25	35	34,75	34,3346	0,4154
ESM2C 1385 Index	32	32,75	32,5	32,2987	0,2013
ESM2C 1390 Index	30	30,75	30,25	30,2628	-0,013
ESM2C 1395 Index	27,75	28,5	28	28,2269	-0,227
ESM2C 1400 Index	25,75	26,5	26	26,191	-0,191

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4

Υπάρχει μικρό σφάλμα στις τιμές των Αμερικάνικων Δικαιωμάτων Αγοράς γιατί δεν έχουμε μεγάλο μέγεθος δείγματος για την εξαγωγή των τεκμαρτών τελικών πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου (βλ. Πίνακα 2.2). Για τιμές εξάσκησης Κ=1280 έως Κ=1325 βγαίνουν πιο μικρές από τις πραγματικές γιατί λόγω του μικρού μεγέθους δείγματος γίνεται υποτιμολόγηση.



Σχήμα 4.1 Δέντρο Πιθανοτήτων Μονοπατιού

Το Σχήμα 4.1 απεικονίζει το 8-βημάτων δέντρο των πιθανοτήτων μονοπατιού ενός Αμερικάνικου Δικαιώματος Αγοράς με:

- Τιμή Εξάσκησης: 1990
- Τρέχουσα τιμή δείκτη S&P 500: 1205,35
- Αξία: 94,5
- Τιμή Τεκμαρτού Διωνυμικού Δέντρου: 94,09
- Χρόνος έως τη λήξη: 124 ημέρες
  (λήψη δεδομένων 19/12/2011, ώρα 19:18)

5. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η εργασία αυτή ξεκίνησε με μια ιστορική αναδρομή στην ως τώρα πορεία των δικαιωμάτων προαίρεσης και του διωνυμικού δέντρου. Στα κεφάλαια που ακολούθησαν έγινε ανάλυση του τεκμαρτού διωνυμικού δέντρου. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκαν δυο δυνατοί τρόποι για την εξαγωγή τεκμαρτών πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου, οι οποίες στην συνέχεια επισυνάπτονται στους τελικούς κόμβους του δέντρου. Οι μέθοδοι που εξετάστηκαν ήταν η μέθοδος του Longstaff (1990), η οποία όμως απορρίφθηκε καθώς προέκυπταν αρνητικές πιθανότητες, και η μέθοδος του Rubinstein (1994). Έπειτα (Κεφάλαιο 3), προχωρήσαμε στην κατασκευή της τεκμαρτής στοχαστικής διαδικασίας θεμελιώνοντας τις υποθέσεις που διέπουν το μοντέλο. Ακολούθησε η παρουσίαση της οπισθοδρομικής μεθόδου επίλυσης του μοντέλου και δόθηκε ένα σχετικό αριθμητικό παράδειγμα. Ύστερα έγινε αναφορά σε ορισμένες γενικεύσεις που αφορούν εξωγενώς προσδιορισμένα επιτόκια και πιθανότητες. Στο 4^{o} κεφάλαιο αναλύθηκε η διαδικασία αποτίμησης και αντιστάθμισης τόσο των Ευρωπαϊκών όσο και των Αμερικάνικων δικαιωμάτων.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΡΘΡΑ

Fischer Black and Myron Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, 637-659

John Cox and Stephen Ross, 1976, The valuation of options for alternative stochastic processes, Journal of Financial Economics, 3, 145-166

John Cox, Stephen Ross and Mark Rubinstein, 1979, Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics 7, 229-263

Kian Guan Lin, Da Zhi, Pricing Options using Implied Trees: Evidence form FTSE 100 OPTIONS

Francis Longstaff, 1990, Martingale restriction tests of option pricing models, version1, Working paper, University of California, Los Angeles.

Mark Rubinstein, 1994, Implied Binomial Trees, The Journal of Finance, Vol. 49 No.3, 771-817

Jens Carsten Jackwerth and Mark Rubinstein, Recovering Probability Distributions from Option Prices, Vol. 51, No. 5 1611-1631

Emanuel Derman and Iraj Kani, January 1994, The Volatility Smile and Its Implied Tree Quantitative Strategies and Research Notes, Goldman Sachs

ΒΙΒΛΙΑ

Hull, Options Futures and Other Derivatives, Pearson International Edition, Seventh Edition

Χρήστος Ν. Αγιακλόγλου, Θεοφάνης Ε. Μπένος Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση, Τόμος Α, Εκδόσεις Μπένου, Β' Έκδοση

Richard J. Larsen & Morris L. Marx (2006). An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications, Prentice Hall, 4th Edition

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΩΝ</u>

Ανθρωπέλος Μιχάλης, Quantitative Methods (October 2010)

Ανθρωπέλος Μιχάλης, Financial Derivatives (March-May 2011)

Εγγλέζος Νικόλαος, Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στην Χρηματοοικονομική, Νοέμβριος 2011

Εγγλέζος Νικόλαος, Χρηματοοικονομικά Παράγωγα (Σημειώσεις προπτυχιακού μαθήματος)

Σκιαδόπουλος Γεώργιος, Χρηματοοικονομικά Παράγωγα (Σημειώσεις Παραδόσεων Μεταπτυχιακού Προγράμματος)