

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής  
ΠΜΣ με Ειδίκευση στη " Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική "

Διπλωματική Εργασία με Θέμα

**Αποτίμηση Δικαιωμάτων Επιλογής με το Μοντέλο GARCH**

Έξαρχος Αχιλλέας

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Λέκτορας Εγγλέζος Νικόλαος (Επιβλέπων)

Αναπληρωτής Καθηγητής Τσιριτάκης Εμμανουήλ

Επίκουρος Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Πειραιάς

Φεβρουάριος 2012

## Ευχαριστίες

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους καθηγητές του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών με ειδίκευση στη Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική του Πανεπιστημίου Πειραιώς και ειδικότερα στο Λέκτορα του τμήματος κ. Ν.Εγγλέζο, καθώς οι χρήσιμες παρατηρήσεις και η βοήθεια που μου παρείχε ως επιβλέπων, κατέστησαν δυνατή την εκπόνηση της παρούσας διατριβής. Ειδικής μνείας χρήζει η άνευ όρων υποστήριξη της οικογένειάς μου, χάρη στην οποία κατάφερα να εκπληρώσω τους στόχους μου. Τέλος, ευχαριστίες οφείλω σε όλους τους φίλους μου που αποτελούν το καλύτερο “αγχολυτικό”.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής στα πλαίσια του γενικευμένου αυτοπαλίνδρομου υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικού μοντέλου (*GARCH* model) όπως αναπτύχθηκε από τον Duan (1995). Βασικές έννοιες που παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεμελίωση αυτού του μοντέλου όπως η στασιμότητα, η θεωρητική θεμελίωση μιας *GARCH* διαδικασίας καθώς και η σχέση αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου (locally risk-neutral valuation relationship-*LRNVR*) αναλύονται διεξοδικά. Θεμελιώδες χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι η αποτύπωση των αλλαγών της δεσμευμένης μεταβλητότητας ενός περιουσιακού στοιχείου, με τρόπο ώστε η σύγκριση με το μοντέλο Black-Scholes να διαφωτίζει κάποιες συστηματικές αποκλίσεις του τελευταίου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα μέσω της χρήσης της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo επιβεβαιώνουν τον ανωτέρω ισχυρισμό για δικαιώματα επιλογής ευρωπαϊκού τύπου. Η αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής αμερικάνικου τύπου στα πλαίσια του *GARCH* μοντέλου γίνεται με τη βοήθεια του Edgeworth δέντρου όπως αναπτύχθηκε από τον Rubinstein (1998) σε συνάρτηση με τους αναλυτικούς τύπους των ροπών της αθροιστικής απόδοσης ενός υποκείμενου τίτλου. Αποτέλεσμα του παραπάνω συνδυασμού είναι ένα μονομετάβλητο διωνυμικό δέντρο το οποίο προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό το αποτέλεσμα της αποτίμησης ενός δικαιώματος επιλογής με μεθόδους που διατηρούν τη διμετάβλητη φύση του *GARCH* μοντέλου. Αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού παρουσιάζονται προς επίρρωσιν αυτού.

Λέξεις κλειδιά : *GARCH* διαδικασία, ετεροσκεδαστικότητα, προσομοίωση Monte Carlo, Black-Scholes μοντέλο, αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής, τοπικά ουδέτερος κίνδυνος, *LRNVR*, στασιμότητα, Edgeworth δέντρο, δεσμευμένη διακύμανση

# Περιεχόμενα

<b>1.Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή.....	3
1.2 Βασικές Έννοιες .....	4
1.2.1 Ορισμός Στασιμότητας .....	4
1.2.2 Ορισμός Εργοδικότητας .....	6
1.3 Χρηματοοικονομικές Χρονοσειρές .....	6
1.3.1 Εμπειρικά Αποτελέσματα Χρονοσειρών με Χρήση Χρηματοοικονομικών Δεδομένων.....	6
<b>2.Θεωρητική Θεμελίωση <i>GARCH</i> Χρονοσειρών</b>	<b>12</b>
2.1 Το Υπόδειγμα <i>ARCH</i> .....	12
2.2 Μονομετάβλητα Υποδείγματα <i>GARCH</i> .....	17
2.2.1 Μελέτη Στασιμότητας.....	19
2.2.1.1 Η Περίπτωση <i>GARCH</i> (1,1).....	19
2.2.1.2 Η Γενική Περίπτωση.....	21
2.2.2 Κύρτωση.....	23
2.2.3 Εκτίμηση του <i>GARCH</i> Μοντέλου Παλινδρόμησης .....	24
2.2.4 Θεωρητικές Προβλέψεις .....	26
2.2.5 <i>IGARCH</i> .....	29
2.2.6 <i>GARCH – in – Mean</i> .....	30
2.2.7 Ασύμμετρα Υποδείγματα <i>GARCH</i> .....	31
2.2.7.1 <i>EGARCH</i> .....	31
2.2.7.2 <i>GJR – GARCH</i> .....	33
2.2.7.3 <i>APARCH</i> .....	33
2.2.7.4 <i>NGARCH</i> .....	34
<b>3.Το <i>GARCH</i> Μοντέλο Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής</b>	<b>35</b>
3.1 Εισαγωγή.....	35
3.2 Απόδοση Τιμών Μετοχής με το <i>GARCH</i> Μοντέλο .....	36
3.3 Βασικές Έννοιες Ωφέλειας Καταναλωτή .....	37

3.3.1 Συνάρτηση Ωφέλειας .....	37
3.3.2 Αποστροφή Κινδύνου (Risk Aversion).....	37
3.4 Γενική Στρατηγική Κατανάλωσης-Επένδυσης.....	38
3.5 Η Σχέση Αποτίμησης Τοπικά Ουδέτερου Κινδύνου (The Local Risk-Neutral Valuation Relationship- <i>LRNVR</i> ).....	39
3.6 Το Μέτρο Πιθανότητας υπό Τοπικά Ουδέτερο Κίνδυνο .....	40
3.7 Η Διαδικασία Απόδοσης Τιμών Μετοχής υπό <i>LRNVR</i> .....	46
3.8 Αποτίμηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου Δικαιωμάτων Επιλογής στα Πλαίσια του Υποδείγματος <i>GARCH</i> .....	51
3.8.1 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Επιλογής στα Πλαίσια της Δομής <i>LRNVR</i> .....	51
<b>4.Σύγκριση Υποδειγμάτων Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής με <i>GARCH(1,1)</i> και Black-Scholes</b>	<b>55</b>
<b>5.Εφαρμογή του <i>GARCH</i> Υποδείγματος Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής</b>	<b>60</b>
5.1 Εισαγωγή.....	60
5.2 Βελτιστοποίηση της <i>GARCH</i> Διαδικασίας με Χρήση Εμπειρικών Δεδομένων.....	60
5.3 Προσομοίωση Monte Carlo .....	62
5.3.1 Δικαιώματα Επιλογής Ευρωπαϊκού Τύπου με Σταθερή Μεταβλητότητα .....	62
5.3.2 Δικαιώματα Επιλογής Ευρωπαϊκού Τύπου με Διακύμανση <i>GARCH</i> .....	63
5.4 Τεχνικές Μείωσης Διακύμανσης .....	63
5.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Συμπεράσματα .....	64
<b>6.Προσέγγιση Τιμών <i>GARCH</i> Δικαιωμάτων Επιλογής Αμερικάνικου Τύπου Μέσω Edgeworth Διωνυμικού Δέντρου</b>	<b>75</b>
6.1 Εισαγωγή.....	75
6.2 Το Edgeworth Διωνυμικό Δέντρο στα Πλαίσια του <i>GARCH</i> Μοντέλου ..	76
6.2.1 Δομή Edgeworth Διωνυμικού Δέντρου .....	76
6.2.2 Κατασκευή Edgeworth Δέντρου.....	78
6.2.3 Ροπές σε Αναλυτική Μορφή στο <i>GARCH</i> Μοντέλο .....	79

6.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Συμπεράσματα .....	80
<b>7.Επίλογος</b>	<b>84</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>86</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>112</b>

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Εισαγωγή

Η ιδέα της αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής (options) στα πλαίσια ενός υποδείγματος με αυτοπαλίνδρομη υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα για τη δεσμευμένη διακύμανση-*GARCH* (generalized autoregressive conditional heteroskedastic), το οποίο ακολουθούν οι αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων (asset returns) παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Bollerslev (1986) σε άρθρο του στο *Journal of Econometrics*. Προάγγελος αυτού του μοντέλου ήταν το *ARCH* model, μια ειδική περίπτωση του *GARCH*, το οποίο ανέλυσε σε προγενέστερη εργασία του ο Engle (1982) και η οποία μαζί με άλλες που αφορούσαν τη μελέτη χρονοσειρών με μη σταθερή μεταβλητότητα (volatility) του απέφερε το βραβείο Νομπέλ Οικονομικών το 2003.

Η ειδοποιός διαφορά των *ARCH* μοντέλων με αυτό των Black, Scholes και Merton (1973) έγκειται στην υπόθεση που θέτουμε για την συμπεριφορά των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Έτσι για την μεν πρώτη περίπτωση, θεωρούμε πως οι αποδόσεις κυριαρχούνται από ετεροσκεδαστικότητα ή με άλλα λόγια η υπό συνθήκη διακύμανση  $\sigma_t^2$  αλλάζει στο χρόνο σαν συνάρτηση των παρελθουσών διαταραχών (disturbances) υποθέτοντας με αυτόν τον τρόπο τη μη δεσμευμένη διακύμανση σταθερή. Στη δε δεύτερα περίπτωση, θεωρείται ως δεδομένη η ομοσκεδαστικότητα σύμφωνα με την οποία η διακύμανση παραμένει σταθερή καθ'όλον το χρονικό διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η τιμή ενός δικαιώματος επιλογής. Όσον αφορά τη γενικευμένη περίπτωση και το *GARCH* μοντέλο η

δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma_t^2$  μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με το τετράγωνο των παρελθουσών διαταραχών και τις παρελθούσες δεσμευμένες διακυμάνσεις.

Αυτό που κάνει το *GARCH* μοντέλο να διαφέρει από προγενέστερα είναι καταρχήν το γεγονός ότι η τιμή του δικαιώματος επιλογής προκύπτει ως συνάρτηση του πριμ κινδύνου (risk premium) το οποίο είναι ενσωματωμένο στην τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή  $T$ . Κατά δεύτερον, το υπό μελέτη μοντέλο δεν είναι Μαρκοβιανό. Με άλλα λόγια ο υποκείμενος τίτλος δεν ακολουθεί διαδικασία Markov κι έτσι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι παρελθούσες τιμές είναι ανεξάρτητες των παρουσών. Η μοναδική *GARCH* Markov διαδικασία είναι η *GARCH(0,1)* ή η *ARCH(1)*. Τρίτον, έχουμε τη δυνατότητα να κατανοήσουμε το λόγο εμφάνισης κάποιων συστηματικών μεροληψιών-αποκλίσεων (systematic bias) που είναι άμεσα συσχετισμένα με τη κατασκευή του μοντέλου των Black-Scholes.

Εξαιτίας της περίπλοκης δομής της *GARCH* διαδικασίας, μια πιο γενική εκδοχή της έννοιας του ουδέτερου κινδύνου έπρεπε να αναπτυχθεί. Έτσι, ο Duan(1995) εισήγαγε την έννοια της αποτίμησης με τοπικά ουδέτερο κίνδυνο (*LRNVR*-locally risk-neutralized valuation relationship), όπου η υπό συνθήκη διακύμανση την ακριβώς επόμενη χρονική περίοδο παραμένει αμετάβλητη μετά την αλλαγή μέτρου πιθανότητας από τη μετάβαση στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Έτσι, στα πλαίσια του *GARCH* μοντέλου αποτίμησης, η μη-δεσμευμένη διακύμανση ή οποιαδήποτε δεσμευμένη διακύμανση πέραν της μιας χρονικής περιόδου μεταβάλλεται κατά την αλλαγή του μέτρου πιθανότητας από τη μετάβαση στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Από τα παραπάνω γίνεται προφανές ότι μια διαδικασία *GARCH* εκτυλίσσεται σε διακριτό χρόνο.

Η θεωρητική θεμελίωση μιας *GARCH* διαδικασίας καθώς και οι βασικές ιδιότητες που τη διέπουν, όπως η στασιμότητα, η μελέτη της κύρτωσης και η εκτίμηση των παραμέτρων αναλύονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Η αποτίμηση των δικαιωμάτων επιλογής με το *GARCH* μοντέλο με χρήση της σχέσης αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου, *LRNVR*, παρουσιάζεται στο κεφάλαιο τρία. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα από τη σύγκριση του *GARCH* μοντέλου με το αντίστοιχο των Black-Scholes για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής. Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην εφαρμογή του μοντέλου στην αποτίμηση δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου μέσω προσομοίωσης Monte Carlo, ενώ το έκτο στην εφαρμογή σε δικαιώματα πώλησης αμερικάνικου τύπου των οποίων οι τιμές παρήχθησαν μέσω της επέκτασης Edgeworth. Η σύνοψη των κυριότερων σημείων γίνεται στο κεφάλαιο επτά.



## 1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Μοντέλα που διέπονται από υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα (conditionally heteroskedastic) και αφορούν χρονοσειρές, παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαχείριση του χρηματοπιστωτικού κινδύνου, σύμφωνα με την οποία κατά κανόνα οι χρηματοπιστωτικές αποφάσεις λαμβάνονται από παρατηρούμενες τιμές  $X_t$  του υποκείμενου τίτλου διακριτού χρόνου. Αυτές οι τιμές θεωρούνται μη-στάσιμες (nonstationary) και για αυτό θεωρούμε τις αποδόσεις αυτών που είναι της μορφής :  $R_t = \log X_t - \log X_{t-1}$ . Αυτή η μορφή αποδόσεων είναι

περίπου ίση με την εξής μορφή :  $P_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$  και γενικότερα η χρήση των αποδόσεων συμφωνεί με την υπόθεση της στασιμότητας, τουλάχιστον όχι για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Μέχρι και τη δεκαετία του εξήντα υπήρχε η πεποίθηση ότι η  $(R_t)$  αποτελεί ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (*iid*) τυχαίων μεταβλητών ή με άλλα λόγια οι τιμές  $\log X_t$  εξελίσσονται σύμφωνα με τον τυχαίο περίπατο (random walk). Πατέρας αυτής της θεωρίας ήταν ο Samuelson ο οποίος θεώρησε για τις τιμές  $X_t$  ότι ακολουθούν τη γεωμετρική κίνηση Brown (geometric Brownian motion) σε διακριτό χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο, άνοιξε τον δρόμο και σε άλλες θεωρίες που έκαναν χρήση αυτού του αποτελέσματος όπως η θεωρία του χαρτοφυλακίου Markowitz καθώς και η αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής με τη μέθοδο Black-Scholes.

Παρόλα αυτά, με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών η υπόθεση της γεωμετρικής κίνησης Brown απορρίφθηκε μέσω εμπειρικών μελετών π.χ. Mandelbrot(1963) και Fama (1965). Σύμφωνα με αυτές οι αποδόσεις των Αμερικάνικων μετοχών παρουσιάζουν εξάρτηση, η διακύμανση δεν είναι σταθερή στο χρόνο και η περιθώρια συνάρτηση κατανομής (marginal distribution) των δεδομένων είναι μη Γκαουσιανή-κανονική. Σύμφωνα με αυτά τα συμπεράσματα πλέον καθίσταται εν αμφιβόλω το μοντέλο που θεωρήσαμε για τις αποδόσεις οι οποίες ακολουθούν τυχαίο περίπατο με κανονικές αυξομειώσεις (Gaussian increments) (δηλ. για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε  $\Delta t$  του χρόνου, η διαφορά  $R_{t+\Delta t} - R_t$  κατανέμεται κανονικά).

Παίρνοντας ως αφετηρία τα αποτελέσματα των εργασιών των Black και Scholes (1973) και Merton (1973), παρατηρούμε την ραγδαία ανάπτυξη της βιβλιογραφίας που αφορά την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής. Ιδιαίτερης προσοχής τυγχάνει η έννοια της ετεροσκεδαστικότητας των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Παραδείγματα υποδειγμάτων τα οποία λαμβάνουν υπόψη την έννοια της ετεροσκεδαστικότητας είναι του Cox (1975) όπου θεωρεί σταθερή την ελαστικότητα της διακύμανσης, του Geske (1979) και του Rubinstein (1983). Σημαντική θεωρείται η συνεισφορά του Duan (1995) στην

αποτίμηση δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου, καθώς και των Garcia και Renault (1998) στην αντιστάθμιση κινδύνου στα πλαίσια της αποτίμησης με το μοντέλο *GARCH*, και Ritchken και Trevor (1999) στην κατασκευή τριωνυμικού δέντρου για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής αμερικάνικου τύπου. Η συμπεριφορά παραλλαγών του μοντέλου στην αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής εξετάστηκε με εμπειρικό τρόπο από τους Amin και Ng (1993), Engle και Mustafa (1992), Duan (1996), Hardle και Hafner (2000) και Heston και Nandi (2000). Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου αποτίμησης δικαιωμάτων υπό το *GARCH* υπόδειγμα γίνεται με εμπειρικό τρόπο στην υπάρχουσα βιβλιογραφία κάνοντας χρήση τόσο των τιμών των δικαιωμάτων, όσο και των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Ενδεικτικά, οι Amin και Ng (1993) και Hardle και Hafner (2000) κάνουν εκτίμηση των παραμέτρων με χρήση τιμών απόδοσης μετοχής υπό το μέτρο πιθανότητας στον κανονικό κόσμο, και κατά συνέπεια αυτές οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση των δικαιωμάτων. Οι Heston και Nandi (2000) επιλέγουν τη διαδικασία εκτίμησης με τη χρήση δεδομένων από τιμές δικαιωμάτων επιλογής.

## 1.2 Βασικές Έννοιες

Η στασιμότητα σαν έννοια παίζει κυρίαρχο ρόλο στην ανάλυση χρονοσειρών, κυρίως εξαιτίας του γεγονότος ότι αντικαθιστά κατά κάποιο τρόπο την υπόθεση των ανεξάρτητων και ισόνομων παρατηρήσεων που συναντάμε στην κλασική θεωρία της στατιστικής.

### 1.2.1 Ορισμός Στασιμότητας

Ως χρονολογική σειρά ορίζουμε ένα δείγμα  $y_1, y_2, \dots, y_T$ , όπου ο δείκτης  $T$  παριστάνει ισαπέχοντα χρονικά σημεία ή χρονικά διαστήματα. Οι παρατηρήσεις  $y_1, y_2, \dots, y_T$  είναι συγκεκριμένες τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  και επιπλέον αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι μέρος μόνο μιας άπειρης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών. Αυτή η άπειρη ακολουθία παριστάνεται ως  $\{Y_T\}$  και ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Οι παρατηρήσεις  $y_1, y_2, \dots, y_T$  αναφέρονται στην έννοια του δείγματος, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  αναφέρονται στην έννοια του πληθυσμού.

Κάτωθι δίνεται ο ορισμός της στασιμότητας :

**Ορισμός 1.1:** Μια στοχαστική διαδικασία είναι αυστηρώς στάσιμη (strictly stationary) όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μέτρησης του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι η από κοινού συνάρτηση

πιθανότητας με αρχή το χρονικό σημείο  $t$ , δηλαδή η  $f(x) = (y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+T})$  είναι ακριβώς η ίδια με την από κοινού (συνδυασμένη) συνάρτηση πιθανότητας με αρχή το χρονικό σημείο  $t + s$ , την  $f(x) = (y_{t+s}, y_{t+1+s}, \dots, y_{t+T+s})$ .

Το  $s$  παριστάνει μια αυθαίρετη μετακίνηση κατά μήκος του άξονα του χρόνου είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω, δηλαδή μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Οπότε, από τη στιγμή που δεν μεταβάλλεται η συνάρτηση πιθανότητας με το χρόνο, δεν θα μεταβάλλεται ούτε η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας και το ίδιο θα ισχύει και για όλες τις διμετάβλητες συναρτήσεις πιθανότητας. Όλα αυτά συνεπάγονται ότι ο μέσος και η διακύμανση του  $Y_t$  δεν μεταβάλλονται με μια αλλαγή του χρόνου, ενώ οι συνδιακυμάνσεις θα είναι συναρτήσεις μόνο της υστέρησης  $s$ .

Οπότε θα δίνονται από τους τύπους :

- $E(Y_1) = E(Y_2) = \dots = E(Y_T) = E(Y_t) = \mu$
- $Var(Y_1) = Var(Y_2) = \dots = Var(Y_T) = Var(Y_t) = \sigma^2$
- $Cov(Y_1, Y_{1+s}) = Cov(Y_2, Y_{2+s}) = \dots = Cov(Y_T, Y_{T+s}) = Cov(Y_t, Y_{t+s}) = \gamma_s$

Ο αυστηρός ορισμός της στασιμότητας αναφέρεται σε όλες τις ιδιότητες μιας στοχαστικής διαδικασίας, γι' αυτό όταν ικανοποιούνται μόνο οι παραπάνω συνθήκες, η στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται ασθενώς στάσιμη (weakly stationary).

Γενικότερα πάντως ο σκοπός των χρονοσειρών είναι η κατασκευή μοντέλων που αφορούν στοχαστικές διαδικασίες που μας ενδιαφέρουν. Ένα από τα πρώτα μοντέλα προς αυτή την κατεύθυνση είναι και τα *ARMA* μοντέλα (autoregressive moving average models) ή αυτοπαλίνδρομο μοντέλο κινητού μέσου, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν κυρίως για την πρόβλεψη διαδικασιών με στασιμότητα δευτέρου βαθμού (second-order stationarity).

Η γενική μορφή ενός υποδείγματος *ARMA*( $p, q$ ) είναι :

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Το υπόδειγμα *ARMA*( $p, q$ ) είναι συνδυασμός  $p$  αυτοπαλίνδρομων όρων και  $q$  όρων κινητού μέσου. Η απλούστερη μορφή μιας *ARMA*( $p, q$ ) διαδικασίας είναι το υπόδειγμα *ARMA*(1,1). Η μορφή αυτού του υποδείγματος προφανώς, θα είναι:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} .$$

### 1.2.2 Ορισμός Εργοδικότητας

Χρήσιμη στη μελέτη των *GARCH* μοντέλων θα είναι και η έννοια της εργοδικότητας. Έτσι, μια στάσιμη ακολουθία ονομάζεται εργοδική (ergodic) εάν ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

**Ορισμός 1.2:** (Εργοδική στάσιμη διαδικασία)

Μια αυστηρώς στάσιμη διαδικασία  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , ονομάζεται εργοδική εάν και μόνο εάν, για κάθε σύνολο Borel  $B$  και κάθε ακέραιο  $k$ ,

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n I_B(Z_t, Z_{t+1}, \dots, Z_{t+k}) \rightarrow \mathbb{P}\{(Z_1, \dots, Z_{1+k}) \in B\} \quad (1.1)$$

με πιθανότητα ένα.

Οι γενικοί μετασχηματισμοί εργοδικών διαδικασιών δεν αλλοιώνουν τη δομή τους (παραμένουν εργοδικές).

**Θεώρημα 1.1 :** Εάν  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  είναι μια εργοδική αυστηρώς στάσιμη ακολουθία και αν  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ορίζεται ως  $Y_t = f(\dots, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \dots)$  όπου  $f$  είναι μια μετρίσιμη συνάρτηση από τον χώρο  $\mathbb{R}^\infty$  στον  $\mathbb{R}$ , τότε  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  είναι επίσης μια εργοδική αυστηρώς στάσιμη ακολουθία.

**Θεώρημα 1.2 :** (Το εργοδικό θεώρημα για στάσιμες διαδικασίες)

Εάν  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  είναι αυστηρώς στάσιμη, και εργοδική, εάν η  $f$  είναι μετρίσιμη, και εάν  $E(|f(\dots, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \dots)|) < \infty$  τότε :

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n f(\dots, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \dots) \rightarrow E|f(\dots, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \dots)| \quad (1.2)$$

με μεγάλη βεβαιότητα.

## 1.3 Χρηματοοικονομικές Χρονοσειρές

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή οι τιμές των λογαριθμικών αποδόσεων συγκλίνουν με αυτές των σχετικών αποδόσεων κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor. Παρακάτω παρατίθενται κάποια εμπειρικά αποτελέσματα που αφορούν χρονοσειρές χρηματοοικονομικών δεδομένων.

### 1.3.1 Εμπειρικά Αποτελέσματα Χρονοσειρών με Χρήση Χρηματοοικονομικών Δεδομένων

1) *Μη στασιμότητα των χρονοσειρών των τιμών του υποκείμενου τίτλου :*

Η τροχιά των τιμών του δείγματος ενός υποκείμενου τίτλου θεωρείται γενικά ότι ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Σε αντίθεση με την παραπάνω θεώρηση, η τροχιά του δείγματος των αποδόσεων είναι γενικά συμβατή με την υπόθεση της στασιμότητας δευτέρας τάξης.

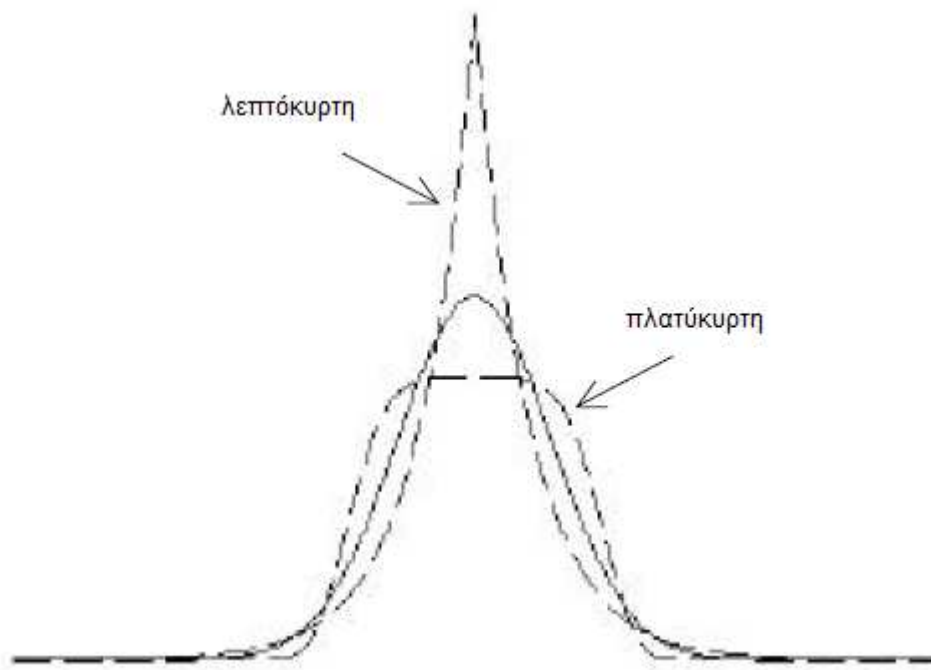
**2) Απουσία αυτοσυσχέτισης για τις αποδόσεις ενός υποκείμενου τίτλου :**  
Οι διακυμάνσεις των τιμών μπορούν να θεωρηθούν και ως λευκός θόρυβος (white noise).

**3) Αυτοσυσχέτιση των τετραγωνικών τιμών των αποδόσεων :**  
Οι τετραγωνικές τιμές των αποδόσεων ή οι απόλυτες τιμές αυτών, γενικά παρουσιάζουν ισχυρή αυτοσυσχέτιση. Αυτή η ιδιότητα δεν αντιτίθεται με την υπόθεση (2) παραπάνω που αφορά το λευκό θόρυβο.

**4) Συσταδοποίηση μεταβλητότητας (volatility clustering) :**  
Όπως ειπώθηκε και από τον Mandelbrot, “ μεγάλες αλλαγές των αποδόσεων τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές, ανεξαρτήτου πρόσημου, και μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές”. Το παραπάνω θα μπορούσε να παρασταθεί με ποσοτικό τρόπο λέγοντας ότι ενώ οι αποδόσεις από μόνες τους είναι ασυσχέτιστες, η απόλυτη τιμή των αποδόσεων  $|R_t|$  ή τα τετράγωνα αυτών παρουσιάζουν μια σημαντική, θετική και φθίνουσα με αργό ρυθμό συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της μορφής  $corr = (|R_t|, |R_{t+\tau}|) > 0$  με  $\tau$  να μπορεί να πάρει τιμές από λεπτά έως εβδομάδες.

**5) Κύρτωση (kurtosis) :**

Το γράφημα που δημιουργείται από τις παρατηρήσεις  $R_t$  πολλές φορές υποθέτουμε πως είναι κανονικής κατανομής. Αυτό όμως παρατηρούμε πως δεν ισχύει πάντα στην πραγματικότητα. Έτσι, η έννοια της κύρτωσης μας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε την κανονικότητα της κατανομής των παρατηρήσεων  $R_t$ . Η κύρτωση με άλλα λόγια είναι ένα μέτρο για να δούμε αν η κατανομή των παρατηρήσεών μας ταυτίζεται με αυτή της κανονικής. Έτσι έχουμε την πλατύκυρτη (platykurtic) κατανομή η οποία έχει τιμή κύρτωσης μικρότερη από αυτήν της τυπικής κανονικής κατανομής καθώς και χαμηλή κορυφή. Η λεπτόκυρτη (leptokurtic) κατανομή από την άλλη έχει τιμή κύρτωσης μεγαλύτερη από αυτήν της τυπικής κανονικής κατανομής με αποτέλεσμα την υψηλότερη κορυφή σε σχέση με την κατανομή Gauss καθώς και πιο παχιές ουρές (heavy tails).



**Διάγραμμα 1.1:** Παράδειγμα λεπτόκυρτης και πλατύκυρτης κατανομής σε σχέση με την κανονική.

Το τελευταίο χαρακτηριστικό είναι σύνηθες γνώρισμα ανάμεσα στις παρατηρήσεις των τιμών ενός υποκείμενου τίτλου και αποδόσεων αυτού και έτσι φαίνεται το γεγονός πως οι χρηματοοικονομικές χρονοσειρές έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα για ακραίες τιμές σε σχέση με παρατηρήσεις που ακολουθούν κανονική κατανομή.

Η μελέτη της κύρτωσης που αφορά χρονοσειρές πολλές φορές κάνει χρήση του ορισμού της κύρτωσης κατά Fisher που ορίζεται (για χρονοσειρά  $\{R_t\}, t = 1, 2, \dots, n$ ) ως :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^2} - 3$$

Όπου  $\mu_k = E[(R - \mu)^k]$  ,  $\mu = E[R]$

είναι η κεντρική ροπή  $k$  τάξης.

Το παραπάνω μέτρο κύρτωσης έχει νόημα μόνο στην περίπτωση ύπαρξης της ροπής τέταρτης τάξης και να είναι πεπερασμένη. Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα παραπάνω, η κανονική κατανομή έχει κύρτωση κατά Fisher ίση με μηδέν από τη στιγμή που :

$$\mu_4 = E[(R - \mu)^4] = E[R^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 3$$

$$\mu_2 = E[(R - \mu)^2] = \text{Var}(R) = 1, \quad \mu \varepsilon R_t \sim N(0,1).$$

Επίσης καλό είναι να επισημανθεί ότι η εκτίμηση μιας κεντρικής ροπής  $k$  τάξης δίνεται από τον τύπο :

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^k .$$

Έτσι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

- Πλατύκυρτη κατανομή για  $\gamma_2 < 0$
- Λεπτόκυρτη κατανομή για  $\gamma_2 > 0$
- Μεσόκυρτη κατανομή για  $\gamma_2 = 0$  .

#### 6) Λοξότητα (skewness) :

Οι παρατηρήσεις που προέρχονται από τη  $\{R_t\}$  διαδικασία παρουσιάζουν συχνά λεπτόκυρτη κατανομή. Έτσι, το μέτρο της λοξότητας ορίζεται από το βαθμό της ασυμμετρίας μιας κατανομής.

Υπάρχουν διαφορετικά είδη λοξότητας που μπορούν να οριστούν. Η λοξότητα ή ασυμμετρία κατά Fisher είναι η πιο διαδεδομένη και ορίζεται ως :

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

όπου  $\mu_3$  είναι η κεντρική ροπή τρίτης τάξης και  $\mu_2^{1/2}$  είναι η τυπική απόκλιση.

Μία αρνητική τιμή λοξότητας είναι ένδειξη ότι οι παρατηρήσεις ακολουθούν κατανομή με ασυμμετρία προς τα αριστερά. Με άλλα λόγια η αριστερή ουρά είναι πιο “βαριά” σε σχέση με τη δεξιά. Αντίστοιχα μια θετική τιμή λοξότητας δεικνύει την ύπαρξη ασυμμετρίας από τη δεξιά πλευρά.

#### 7) Εποχικότητα (seasonality) :

Κατά τη διάρκεια των αργιών και του σαββατοκύριακου οι πληροφορίες στην αγορά που αφορούν περιουσιακά στοιχεία συσσωρεύονται. Αυτό το γεγονός θα μπορούσε να επηρεάσει τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων κατά τη στιγμή που η αγορά θα επανερχόταν σε λειτουργία. Κάνοντας την υπόθεση ότι η ροή των πληροφοριών είναι σταθερή, η διακύμανση των αποδόσεων κατά την περίοδο της Παρασκευής μέχρι τη Δευτέρα (τιμές κλεισίματος) θα πρέπει να είναι τριπλάσια από αυτή της Δευτέρας έως και την Πέμπτη (τιμές κλεισίματος). Όμως η παραπάνω υπόθεση απέχει από αυτό το οποίο ισχύει στην πραγματικότητα. Η ροή πληροφοριών κατά τις περιόδους όπου η αγορά είναι κλειστή, είναι πιο χαμηλή σε σχέση με τις ημέρες λειτουργίας της κι έτσι περιορίζεται το παραπάνω περιγραφέν φαινόμενο (holiday effect).

Οι παραπάνω ιδιότητες υποδηλώνουν τη δυσκολία μοντελοποίησης των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών και κάθε στατιστικό μοντέλο που περιγράφει αποδόσεις θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τα παραπάνω περιγραφέντα χαρακτηριστικά. Τα πιο σημαντικά είναι η λεπτόκυρτη μορφή

της κατανομής των παρατηρήσεων της  $R_t$ , η μη προβλεπτικότητα των αποδόσεων και η ύπαρξη θετικής αυτοσυσχέτισης στα τετράγωνα και τις απόλυτες τιμές των αποδόσεων. Κλασικές μοντελοποιήσεις (όπως αυτή των *ARMA* models) αποδεικνύονται ακατάλληλες για να συμπεριλάβουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

Το γεγονός ότι μεγάλες τιμές αποδόσεων (σε απόλυτη τιμή) τείνουν να ακολουθούνται από υψηλές τιμές αποδόσεων, ανεξαρτήτου πρόσημου, δεν είναι απολύτως συμβατό με την υπόθεση της σταθερής δεσμευμένης μεταβλητότητας. Το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα (conditional heteroscedasticity) και συμβολικά :

$$\text{Var}(R_t | R_{t-1}, R_{t-2}, \dots) \neq \text{σταθερή}$$

Η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα βρίσκεται σε συμφωνία με την έννοια της στασιμότητας (αυστηρώς και δευτέρας τάξης στασιμότητα), με τρόπο παρόμοιο όπως η μη σταθερή δεσμευμένη μέση τιμή με τη στασιμότητα. Το παραπάνω θα γίνει κατανοητό μέσω της ενδελεχούς μελέτης του *GARCH* μοντέλου στη συνέχεια.

Γενικά, τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε για τις αποδόσεις κάνουν χρήση του παρακάτω τύπου :

$$R_t = \sigma_t \eta_t \quad (1.3)$$

Όπου για τα  $\sigma_t$  και  $\eta_t$  έχω :

- $\sigma_t$  είναι μετρήσιμη στην ιστορία  $\mathcal{F}_{t-1}$  και  $\sigma_t > 0$
- $(\eta_t)$  είναι ανεξάρτητη και ισόνομη διαδικασία με μοναδιαία διακύμανση και ανεξάρτητη της ιστορίας  $\mathcal{F}_{t-1}$  και της  $\sigma_t$ .

Ο παραπάνω ορισμός στην ουσία υποδηλώνει το πρόσημο της  $R_t$ , που είναι αυτό της διαδικασίας  $(\eta_t)$ , καθώς και την ανεξαρτησία της  $R_t$  χρονοσειράς από τις παρελθούσες τιμές της. Επίσης, έχουμε και τους τύπους :

$$E(R_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad , \quad E(R_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$$

εάν βέβαια υπάρχουν. Η τυχαία μεταβλητή  $\sigma_t$  συμβολίζει τη μεταβλητότητα (volatility) της  $R_t$ .

Η κύρτωση της  $R_t$ , εάν υπάρχει, σχετίζεται με αυτήν της  $\eta_t$ , που συμβολίζεται με  $\kappa_n$ , με τον τύπο :



$$\frac{E(R_t^4)}{\{E(R_t^2)\}^2} = \kappa_n \left[ 1 + \frac{Var(\sigma_t^2)}{\{E(\sigma_t^2)\}^2} \right]$$

Ο παραπάνω τύπος δείχνει ότι η λεπτόκυρτη ιδιότητα μιας χρονοσειράς έχει σχέση με την αντίστοιχη ιδιότητα μιας ανεξάρτητης και ισόνομης διαδικασίας ( $\eta_t$ ) καθώς και με την διαδικασία ( $\sigma_t^2$ ).

Έτσι, διαφορετικών ειδών μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με τη θεώρηση που έχουμε κάνει για τη μεταβλητότητα  $\sigma_t$ . Μια κατηγορία μοντέλων είναι αυτή που ακολουθεί διαδικασίες δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (*GARCH* type models) όπου η μεταβλητότητα είναι αιτιοκρατική (ντετερμινιστική) συνάρτηση των παρελθουσών τιμών της  $R_t$ . Η ειδοποιός διαφορά στις διαδικασίες αυτής της κατηγορίας είναι η διαφορετική μορφή αυτής της συνάρτησης. Τα κλασικά *GARCH* μοντέλα χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι η μεταβλητότητα είναι γραμμική συνάρτηση των παρελθουσών τιμών  $R_t^2$ .

Μια δεύτερη κατηγορία μοντέλων είναι αυτή που χρησιμοποιεί διαδικασίες στοχαστικής μεταβλητότητας, όπου η μεταβλητότητα είναι μια άδηλη διαδικασία (latent process). Το πιο γνωστό μοντέλο αυτής της κατηγορίας βασίζεται στην υπόθεση ότι η διαδικασία  $\log \sigma_t$  ακολουθεί τον τύπο της μορφής :

$$\log \sigma_t = \omega + \varphi \log \sigma_{t-1} + u_t$$

όπου ο λευκός θόρυβος ( $u_t$ ) και η ( $\eta_t$ ) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και  $\omega$  και  $\varphi$  είναι μία σταθερά και η παράμετρος του μοντέλου αντίστοιχα.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας η πρώτη κατηγορία είναι αυτή που αναλύεται ενδελεχώς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Θεωρητική Θεμελίωση *GARCH* Χρονοσειρών

#### 2.1 Το Υπόδειγμα *ARCH*

Το πιο σημαντικό βήμα στο πεδίο της πρόβλεψης της χρηματοοικονομικής μεταβλητότητας έγινε με την ανάπτυξη μοντέλων με αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα (Autoregressive conditionally heteroskedastic class of models) από τον Engle (1982). Αυτό που συνεισέφεραν αυτού του είδους τα μοντέλα στη μέχρι εκείνη την περίοδο γνώση, ήταν η αυστηρή “μαθηματικοποίηση” της έννοιας της μεταβλητότητας (volatility), διευκολύνοντας με αυτόν τον τρόπο τη σε βάθος ανάλυση των διάφορων ιδιοτήτων των οικονομικών και χρηματοοικονομικών χρονοσειρών. Έτσι τα μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία των *ARCH* διαδικασιών, κατάφεραν να λάβουν υπόψη τους, όσον αφορά τη θεμελίωση τους, τα πιο συνήθη χαρακτηριστικά των παρατηρούμενων χρηματοοικονομικών χρονοσειρών, όπως η μεγαλύτερη κύρτωση των αποδόσεων, η μη σταθερή μεταβλητότητα και η συσταδοποίηση της μεταβλητότητας (volatility clustering). Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα της θεωρίας *ARCH* χρησιμοποιούνται για να υποδηλώσουν την παρουσία αυτοσυσχέτισης στη διαδικασία της ροπής δευτέρας τάξης των αποδόσεων. Αυτό που διασαφηνίζει την προβλεπτικότητα της παραπάνω ποσότητας είναι ακριβώς αυτή η ύπαρξη της γραμμικής συσχέτισης της μεταβλητότητας.

Σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναφερθεί ότι τα αποτελέσματα από τη χρήση ενός *ARCH* μοντέλου δεν έρχονται σε σύγκρουση με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς (efficient market hypothesis) σύμφωνα με την οποία οι παρελθούσες αποδόσεις ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να επιτύχουμε συστηματικά μεγαλύτερες από το κανονικό αποδόσεις στο μέλλον. Η απουσία αυτοσυσχέτισης στις

αποδόσεις δε συνεπάγεται απαραίτητα ότι τα σφάλματα πρόβλεψης είναι ανεξάρτητα. Αυτό με τη σειρά του μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι πιθανή η ύπαρξη μιας μη γραμμικής σχέσης κυρίαρχης της στοχαστικής διαδικασίας των καταλοίπων (residuals), η οποία ταυτόχρονα να είναι σύμφωνη και με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς. Η μη γραμμικότητα της παραπάνω διαδικασίας μπορεί να υπονοήσει την παρουσία μιας γραμμικής σχέσης που αφορά τη διαδικασία της δεσμευμένης μεταβλητότητας των σφαλμάτων (conditional variance process of the errors). Μια πιθανή πηγή αυτού του φαινομένου της συσταδοποίησης της μεταβλητότητας είναι η αυτοπαλίνδρομη σχέση που διέπει τη διαδικασία της άφιξης των “νέων” στην αγορά εννοώντας ότι οι πληροφορίες μεταφέρονται στην αγορά συσταδοποιημένα (ομαδοποιημένα) και όχι σε ομοιόμορφα κατανομημένες χρονικές περιόδους. Με άλλα λόγια η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τη ροή των πληροφοριών στην αγορά χαρακτηρίζεται από γραμμική εξάρτηση, με την ποσότητα των πληροφοριών που καταφτάνουν στην αγορά να είναι συνάρτηση του χρόνου.

Τα *ARCH* μοντέλα χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές εμπειρικές εφαρμογές όπως στα *CAPM* και *APT* μοντέλα, στη μελέτη της ροής πληροφοριών ανάμεσα σε χώρες και αγορές, στο σχεδιασμό αποτελεσματικών στρατηγικών αντιστάθμισης κινδύνου, στη μοντελοποίηση της σχέσης μεταξύ μεταβλητότητας που αλλάζει στο χρόνο και ασφαλιστρών κινδύνου, στην ανάλυση των επιπτώσεων στην οικονομία της νομισματικής πολιτικής μιας χώρας κ.α. Επιστρέφοντας τώρα στη θεωρητική θεμελίωση του μοντέλου μας, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτού είναι το γεγονός ότι η μεταβλητότητα των σφαλμάτων πρόβλεψης είναι συνάρτηση του μεγέθους των παρελθόντων σφαλμάτων. Εφαρμόζοντας μια παλινδρόμηση, ένα σφάλμα είναι γενικά μια απόκλιση ανάμεσα στις πραγματικές τιμές μιας εξαρτημένης μεταβλητής και τις υπολογισμένες τιμές από τη γραμμή παλινδρομήσεως του δείγματος. Σε ένα μοντέλο *GARCH* η δεσμευμένη διακύμανση των σφαλμάτων πρόβλεψης είναι μια συνάρτηση του μεγέθους των παρελθουσών τιμών της. Αυτό σημαίνει ότι μεγάλα σφάλματα (ανεξαρτήτου πρόσημου) θα τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλα σφάλματα και αντίστροφα. Προφανώς ένα πλεονέκτημα αυτού του είδους των μοντέλων είναι ότι θεωρούν τη δεσμευμένη διακύμανση να μεταβάλλεται στο χρόνο αντί να είναι σταθερή. Η παραδοσιακή υπόθεση της σταθερής διακύμανσης θεωρείται απλουστευμένη και μη ρεαλιστική. Παρόλα αυτά, η μη δεσμευμένη διακύμανση σε ένα *ARCH* μοντέλο θα θεωρείται σταθερή. Παρακάτω γίνονται περισσότερο κατανοητά τα ανωτέρω.

Από τη σκοπιά της οικονομετρίας γνωρίζουμε ότι η καλύτερη πρόβλεψη για τη μελλοντική τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής  $y_t$ , δεδομένου του πληροφοριακού συνόλου των πραγματοποιημένων τιμών αυτής της τυχαίας μεταβλητής, δίνεται από τη δεσμευμένη μέση τιμή  $E(Y_t | Y_{t-1})$ . Η δεσμευμένη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση είτε της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας (για διακριτές τυχαίες μεταβλητές) ή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η παραπάνω αναφερθείσα πρόβλεψη είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή κι έτσι ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανοτήτων και έχει διακύμανση ίση με

$Var(Y_t | Y_{t-1})$  . Κατά αναλογία, η παραπάνω δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να θεωρηθεί τυχαία μεταβλητή αφού εξαρτάται από παρελθούσες τιμές .

Ας θεωρήσουμε το κλασικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο χρονοσειρών πρώτης τάξης της μορφής :

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου το σφάλμα  $\{\varepsilon_t\}$  συνιστά διαδικασία λευκού θορύβου με διακύμανση  $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$  . Η δεσμευμένη μέση τιμή της  $y_t$  είναι ίση με  $\gamma y_{t-1}$  ενώ η μη δεσμευμένη είναι ίση με μηδέν. Η χρήση της ιδέας της δεσμευμένης μέσης τιμής συνέβαλε αποφασιστικά στην ανάπτυξη των μοντέλων χρονοσειρών. Η δεσμευμένη διακύμανση της  $y_t$  ισούται με  $\sigma^2$  ενώ η μη δεσμευμένη με  $\frac{\sigma^2}{1-\gamma^2}$

. Προφανώς, με τη χρήση ενός πληροφοριακού συνόλου που περιέχει παρελθούσες τιμές  $y_t$  , υπάρχει μείωση της αβεβαιότητας όσον αφορά την πρόβλεψη μελλοντικών τιμών. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα μπορούμε να έχουμε πιο ακριβείς προβλέψεις διακύμανσης αν ενσωματώσουμε στο μοντέλο μας τις πληροφορίες που μας παρέχουν οι παρελθούσες τιμές των διακυμάνσεων.

Η πιο διαδεδομένη προσέγγιση στην έννοια της ετεροσκεδαστικότητας είναι η ενσωμάτωση σε ένα μοντέλο παλινδρόμησης ενός επιπλέον όρου, την εξωγενή μεταβλητή  $x_t$  . Στο πεδίο όμως της χρηματοοικονομικής οικονομετρίας, εφαρμόζεται ένας άλλος τρόπος προσέγγισης του παραπάνω ζητήματος. Αυτό γίνεται εξαιτίας της ανάγκης που δημιουργείται για να περιγραφούν επαρκώς οι λόγοι για τους οποίους η δεσμευμένη διακύμανση έχει αυτή τη συμπεριφορά σε σχέση με το χρόνο. Μια πρώτη απόπειρα έγινε από τους Granger και Anderson (1978) αλλά η μη δεσμευμένη διακύμανση έπαιρνε μόνο τις τιμές του μηδενός ή του απείρου με αποτέλεσμα να μη γίνει ευρεία χρήση αυτού του μοντέλου.

Ένα πιο αποτελεσματικό στη χρήση του μοντέλο είναι το εξής :

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2$$

$$Var(\varepsilon_t) = 1$$

Το παραπάνω μοντέλο ονομάζεται *ARCH*. Αν κάνουμε περαιτέρω χρήση της κανονικής κατανομής και του πληροφοριακού συνόλου  $\Psi_t$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  μπορούμε να εξαγάγουμε τους εξής τύπους :

$$y_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2$$

Η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να γραφεί και στη μορφή :

$$\sigma_t^2 = h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}, \alpha)$$

όπου  $p$  δηλώνει την τάξη της στοχαστικής διαδικασίας *ARCH* και  $\alpha$  είναι ένα διάνυσμα  $\mu$  άγνωστες παραμέτρους.

Τα *ARCH* μοντέλα με παλινδρόμηση (regression *ARCH* models) από την άλλη κατασκευάζονται θεωρώντας ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της  $y_t$  ισούται με  $x_t\beta$  η οποία ποσότητα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των παρελθόντων ενδογενών και εξωγενών μεταβλητών οι οποίες περιλαμβάνονται στο θεωρηθέν πληροφοριακό σύνολο. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχω :

$$y_t | \psi_{t-1} \sim N(x_t\beta, \sigma_t^2)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$

$$\sigma_t^2 = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \alpha)$$

ή

$$\sigma_t^2 = h(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, \alpha)$$

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, όπου η δεσμευμένη διακύμανση μεταβάλλεται στο χρόνο, η μελέτη ενός χαρακτηριστικού που αφορά σε διαδικασίες πρόβλεψης γίνεται πιο εύκολη μέσω του γεγονότος ότι ο βαθμός αβεβαιότητας είναι συνάρτηση του χρονικού ορίζοντα τον οποίο χρησιμοποιούμε για να παράγουμε προβλέψεις. Το παραπάνω είναι η μαθηματοποίηση της παρατήρησης ότι τα σφάλματα πρόβλεψης τείνουν να ομαδοποιούνται στο χρόνο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μοντέλο *ARCH* σαν ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο παλινδρόμησης στο οποίο ο διαταρακτικός όρος δεν είναι λευκός θόρυβος αλλά και αυτός ακολουθεί διαδικασία *ARCH*. Με αυτόν τον τρόπο αντιμετωπίζονται κάποια από τα προβλήματα που ενυπάρχουν στα κλασικά μοντέλα παλινδρόμησης.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο μηχανισμός παραγωγής τιμών της  $y_t$  είναι μια διαδικασία *ARCH* με μέση τιμή και συνδιακυμάνσεις ίσες με μηδέν. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραπάνω διαδικασίας είναι ίση με το γινόμενο των μονομετάβλητων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας και λογαριθμίζοντας το γινόμενο θα έχω τη συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας :

$$l_t = -\frac{1}{2} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \frac{y_t^2}{\sigma_t^2}$$

με  $\sigma_t^2 = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \alpha)$

Για να εκτιμήσουμε τώρα το άγνωστο διάνυσμα  $\alpha$  πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφαιίας. Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος δίνονται παρακάτω :

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha} \left( \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{2(\sigma_t^2)^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha'} \left( \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} \right) + \left( \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left( \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha} \right)$$

Ο πίνακας πληροφοριών είμαι ίσος με την αρνητική τιμή της αναμενόμενης τιμής από τον πίνακα δευτέρων παραγώγων (Hessian matrix) και δίνεται :

$$\mathcal{I}_{\alpha\alpha} = \sum_t \frac{1}{2T} E \left[ \frac{1}{(\sigma_t^2)^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha'} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha'} \right]$$

με συνεπή εκτιμητή :  $\widehat{\mathcal{I}}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{T} \sum_t \left[ \frac{1}{2(\sigma_t^2)^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha'} \right]$

Η πιο αποτελεσματική μέθοδος εκτίμησης για τις άγνωστες παραμέτρους είναι αυτή της μέγιστης πιθανοφαιίας ( η οποία και χρησιμοποιήθηκε παραπάνω) αλλά και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων ( μία εναλλακτική μέθοδος αλλά λιγότερο αποτελεσματική). Η  $\sigma_t^2$  τάξης  $p$  μπορεί στην παρακάτω μορφή :

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 + y_{t-1}^2 + \dots + a_p y_{t-p}^2$$

Το *ARCH* μοντέλο πρώτης τάξης παρόλο απλοϊκό είναι πολύ χρήσιμο σε εφαρμογές. Σύμφωνα με αυτό μια μεγάλη τιμή της  $y_t$  τη χρονική στιγμή  $t$  θα οδηγήσει σε μια πρόβλεψη μεγάλης τιμής της διακύμανσης την επόμενη χρονική περίοδο. Όμως, στην χρονική περίοδο  $t + 2$  (γενικά σε μεγαλύτερες χρονικές περιόδους από  $t + 1$ ) η διαδικασία δε θα “θυμάται” αυτή τη μεγάλη τιμή της  $y_t$ . Το γράφημα μιας *ARCH* διαδικασίας έχει πιο παχιές ουρές σε σχέση με αυτό της κανονικής κατανομής. Οι προϋποθέσεις για να έχει μια *ARCH* διαδικασία πεπερασμένη διακύμανση (ή να είναι στάσιμη δευτέρου βαθμού ) είναι όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο, δεδομένων των παραμέτρων

$a_0 > 0, a_1, \dots, a_p \geq 0$ . Αυτή η μη δεσμευμένη διακύμανση (για μεγάλο χρονικό διάστημα) είναι ίση με :

$$E(y_t^2) = \frac{a_0}{(1 - \sum_{j=1}^p a_j)}.$$

## 2.2 Μονομετάβλητα Υποδείγματα *GARCH*

Ξεκινάμε με τον ορισμό της διαδικασίας *GARCH* κάνοντας χρήση των ροπών πρώτης και δευτέρας τάξης της  $(\varepsilon_t)$ .

**Ορισμός 2.1 :** (*GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία)

Μια διαδικασία  $(\varepsilon_t)$  ονομάζεται *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία εάν οι ροπές πρώτης και δευτέρας τάξης υπάρχουν και ισχύει:

$$(α) E(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) = 0 \quad (2.1)$$

(β) Υπάρχουν σταθεροί αριθμοί  $\omega, \alpha_i, i = 1 \dots, q$  και  $\beta_j, j = 1 \dots, p$

τέτοιοι ώστε :  $\sigma_t^2 = Var(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$

$$(2.2)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής για ευκολία :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, t \in \mathbb{Z},$$

όπου το  $B$  θεωρείται ως τελεστής υστέρησης ( $B^i \varepsilon_t^2 = \varepsilon_{t-i}^2$  και  $B^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$  για κάθε ακέραιο  $i$ ) και  $\alpha$  και  $\beta$  είναι πολυώνυμα βαθμού  $q$  και  $p$  αντίστοιχα:

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j.$$

Τώρα αν θεωρήσουμε  $\beta(z) = 0$  θα έχουμε :  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$  και η διαδικασία πλέον είναι μια *ARCH*. Αυτή όμως η θεώρηση στην πράξη αποδείχθηκε πολύ περιοριστική . Αυτό φάνηκε από το γεγονός ότι προκειμένου να πετύχουμε καλό αποτέλεσμα με αυτό το μοντέλο θα έπρεπε να κάνουμε χρήση πολλών παρελθουσών μεταβλητών οι οποίες θα λαμβάνονταν υπόψη στον υπολογισμό της δεσμευμένης διακύμανσης. Έτσι, έχοντας έναν μεγάλο αριθμό για το  $q$  δε θα καταλήγαμε σε καλό αποτέλεσμα από τη στιγμή που αυτό το γεγονός θα απαιτούσε την εκτίμηση μεγάλου αριθμού συντελεστών. Παρόλα αυτά για τη διαδικασία  $\varepsilon_t^2$  θα μπορούσαμε να

γράψουμε ότι ισχύει :  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  (αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία  $(v_t)$  δεν είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη διαδικασία). Έτσι, αντικαθιστώντας στον τύπο (2) για τη μεταβλητή  $\sigma_{t-j}^2$  την ποσότητα  $\varepsilon_{t-j}^2 - v_{t-j}$  θα έχω την έκφραση :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (a_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j}, t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

όπου  $r = \max(p, q)$  με δεδομένο ότι  $a_i = 0$  ( $\beta_i = 0$ ) αν  $i > q$  ( $j > p$ ). Η εξίσωση (2.3) έχει τη δομή (γραμμική) ενός μοντέλου *ARMA*. Έτσι υποθέτοντας ότι η  $(\varepsilon_t^2)$  διαδικασία είναι στάσιμη δευτέρου βαθμού, μπορούμε να πούμε ότι αν η  $(\varepsilon_t)$  είναι *GARCH*( $p, q$ ) τότε  $(\varepsilon_t^2)$  είναι μια διαδικασία *ARMA*( $r, p$ ). Η παραπάνω παρουσίαση της  $(\varepsilon_t^2)$  ως διαδικασίας *ARMA* θα φανεί χρήσιμη στην εκτίμηση μιας *GARCH* διαδικασίας που θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα.

Μέσω του ορισμού που δώσαμε στην αρχή της ενότητας δεν έγινε απολύτως φανερό ποια θα είναι αυτή η στοχαστική διαδικασία η οποία θα επιβεβαιώνει τις συνθήκες (α),(β). Παρακάτω δίδεται ο ορισμός :

**Ορισμός 2.2 :** (ισχυρά *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία)

Θεωρούμε τη διαδικασία  $(\eta_t)$  η οποία είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη ακολουθώντας την τυπική κανονική κατανομή ( $\eta_t \sim N(0,1)$ ). Η διαδικασία  $(\varepsilon_t)$  ονομάζεται ισχυρά *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία εάν :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου  $a_i$  και  $\beta_j$  θετικές σταθερές και  $\omega$  είναι θετικός σταθερός αριθμός.

Οι *GARCH* διαδικασίες όπως ορίστηκαν στον πρώτο ορισμό θα ονομάζονται ημι-ισχυρές ακολουθώντας τον ορισμό των Drost και Nijman (1993). Αντικαθιστώντας το  $\varepsilon_{t-i}$  με την ποσότητα  $\sigma_{t-i} \eta_{t-i}$  στη σχέση (2.2) θα έχω :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q a_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a_i (\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2 \quad (2.5)$$

όπου  $a_i(z) = a_i z^2 + \beta_i, i = 1, \dots, r$ . Αυτή η παράσταση μας δείχνει ότι η διαδικασία της διακύμανσης μιας ισχυρής *GARCH* διαδικασίας, είναι η λύση μιας αυτοπαλίνδρομης ισότητας με τυχαίους συντελεστές, όπως γίνεται φανερό από τη σχέση (2.5).



Σε αντίθεση με μοντέλα χρονοσειρών όπως το *ARMA*, η δομή *GARCH* επιτρέπει την ποσότητα  $\varepsilon_t$  να είναι συνάρτηση των παρελθόντων τιμών της. Έτσι περίοδοι με μεγάλη μεταβλητότητα (που αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές  $\varepsilon_{t-i}^2$ ) θα ακολουθούνται από περιόδους όπου οι διακυμάνσεις θα έχουν μικρότερο εύρος. Με άλλα λόγια η μεταβλητότητα παρουσιάζει τάσεις συσταδοποίησης. Επίσης, το ίδιο ισχύει και για τις μεγάλες απόλυτες τιμές της ( $\varepsilon_t$ ), παρόλο που δεν κατανέμεται ομοιόμορφα. Αποδεικνύεται ότι όλες αυτές οι τροχιές αντιστοιχούν σε αυστηρώς στάσιμες διαδικασίες οι οποίες είναι και στάσιμες δευτέρας τάξης. Με οδηγό τη σχέση (2.3) και για μεγάλες τιμές της  $\alpha$  (θεωρητικά για  $\alpha > 3.56$ ) καταλήγουμε μέσω προσομοίωσης σε “εκρηκτικά” μονοπάτια (δηλαδή πιο συχνές οι έντονες διακυμάνσεις).

## 2.2.1 Μελέτη Στασιμότητας

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την ύπαρξη στάσιμων λύσεων (αυστηρώς ή δευτέρας τάξης) που αφορά το μοντέλο του τύπου της σχέσης (2.4). Θα μελετήσουμε κυρίως αιτιατές λύσεις (nonanticipative solutions) της μορφής ( $\varepsilon_t$ ) διαδικασίας, τέτοιες ώστε η  $\varepsilon_t$  να είναι μετρήσιμη συνάρτηση της μεταβλητής  $\eta_{t-s}$ ,  $s \geq 0$ . Για τέτοιας μορφής διαδικασία, η  $\sigma_t$  είναι ανεξάρτητη της  $\sigma$ -άλγεβρας που παράγεται από την  $\{\eta_{t+h}, h \geq 0\}$  και η  $\varepsilon_t$  είναι ανεξάρτητη από τη  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $\{\eta_{t+h}, h > 0\}$ . Θα αποδειχθεί ότι αυτού του είδους οι λύσεις είναι εργοδικές. Για να γίνει πιο εύκολη η μελέτη του μοντέλου θα μελετηθεί η περίπτωση του *GARCH*(1,1) στην παρούσα φάση.

### 2.2.1.1 Η Περίπτωση *GARCH*(1, 1)

Αν θέσουμε  $p = q = 1$  στον τύπο (2.4) θα έχω :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & (\eta_t) iid(0,1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Με  $\omega \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ . Ας θεωρήσουμε  $\alpha(z) = \alpha z^2 + \beta$ .

**Θεώρημα 2.1** : (Αυστηρή στασιμότητα της ισχυρής *GARCH* (1,1) διαδικασίας)

$$\text{Εάν } -\infty \leq \gamma := E \log \{ \alpha \eta_t^2 + \beta \} < 0, \quad (2.7)$$

τότε το άπειρο άθροισμα:

$$h_t = \{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(\eta_{t-1}) \dots \alpha(\eta_{t-i}) \} \omega \quad (2.8)$$

συγκλίνει με μεγάλη βεβαιότητα και η διαδικασία  $(\varepsilon_t)$  που ορίζεται ως  $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$  είναι η μοναδική αυστηρώς στάσιμη λύση του μοντέλου (2.6). Αυτή η λύση είναι εργοδική και αιτιατή (nonanticipative). Εάν  $\gamma \geq 0$  και  $\omega > 0$ , δεν υπάρχει αυστηρώς στάσιμη λύση.

Παρατηρήσεις σχετικά με τη συνθήκη (2.7) :

**A)** Όταν  $\omega = 0$  και  $\gamma < 0$ , είναι φανερό μέσω της (2.8) ότι η μοναδική αυστηρώς στάσιμη λύση είναι  $\varepsilon_t = 0$ . Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε  $\omega > 0$ .

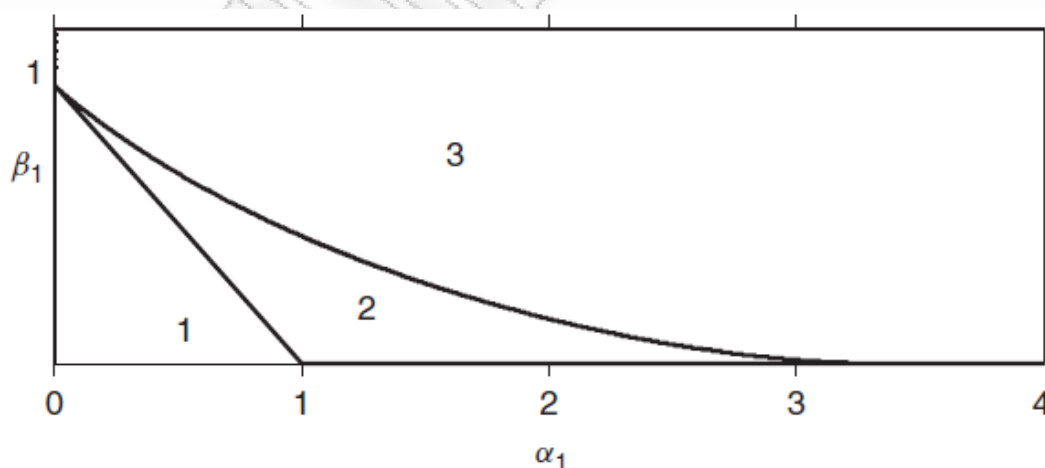
**B)** Μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (2.7) εξαρτάται από τη διακύμανση της  $\eta_t$ .

**Γ)** Μέσω της (2.7) έχω  $\beta < 1$ . Εάν υποθέσω ότι  $\alpha + \beta < 1$ , τότε η (2.7) ικανοποιείται αφού ισχύει :

$$E[\log\{a(\eta_t)\}] \leq \log E\{a(\eta_t)\} = \log(a + \beta) < 0.$$

**Δ)** Εάν ικανοποιείται η (2.7) σχέση, τότε ικανοποιείται για κάθε ζευγάρι  $(\alpha_1, \beta_1)$  τέτοιο ώστε  $\alpha_1 \leq \alpha$  και  $\beta_1 \leq \beta$ . Συγκεκριμένα η αυστηρή στασιμότητα ενός  $GARCH(1,1)$  μοντέλου αφήνει να εννοηθεί ότι το  $ARCH(1)$  μοντέλο είναι επίσης στάσιμο (αφού  $\beta = 0$ ).

**Θεώρημα 2.2** : (στασιμότητα δευτέρας τάξης της  $GARCH(1,1)$  διαδικασίας)  
Θεωρώ  $\omega > 0$ . Εάν  $\alpha + \beta \geq 1$ , μία αιτιατή και δευτέρας τάξης στάσιμη λύση στο  $GARCH(1,1)$  μοντέλο δεν υπάρχει. Εάν  $\alpha + \beta < 1$ , η διαδικασία  $(\varepsilon_t)$ , όπου  $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ , είναι στάσιμη δευτέρας τάξης. Περαιτέρω, δεν υπάρχει άλλη στάσιμη δευτέρας τάξης και αιτιατή λύση.



**Διάγραμμα 2.2** : Περιοχές στασιμότητας για το  $GARCH(1,1)$  μοντέλο όταν  $\eta_t \sim N(0,1)$  : περιοχή 1,στασιμότητα δευτέρας τάξης- 1 και 2, αυστηρή στασιμότητα – 3, όχι στάσιμη.

Το παραπάνω σχήμα δείχνει τις περιοχές αυστηρής και δευτέρας τάξης στασιμότητας για το ισχυρό  $GARCH(1,1)$  μοντέλο για  $\eta_t \sim N(0,1)$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατανομή της  $\eta_t$  έχει νόημα μόνο στην περίπτωση της αυστηρής στασιμότητας.

### 2.2.1.2 Η Γενική Περίπτωση

Στη γενική περίπτωση της ισχυρής  $GARCH(p, q)$  διαδικασίας, θα κάνω χρήση του εξής τύπου :

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + A_t \underline{z}_{t-1} \quad (2.9)$$

$$\text{όπου } \underline{b}_t = \underline{b}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega \eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad \underline{z}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}$$

και :

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \dots & \alpha_q \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 & \dots & \beta_p \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_q & \beta_1 & \dots & \beta_p \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

είναι ένας  $(p+q) \times (p+q)$  πίνακας. Στην περίπτωση του  $ARCH(p)$  μοντέλου, το  $\underline{z}_t$  διάνυσμα γίνεται  $\varepsilon_t^2$  και οι  $q-1$  πρώτες παρελθούσες τιμές του, και ο  $A_t$  πίνακας έχει στοιχεία μόνο τα πάνω αριστερά. Η ισότητα (2.9) ορίζει ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο με θετικούς, ανεξάρτητους και ισόνομους συντελεστές πίνακα. Η κατανομή της  $\underline{z}_t$  δεδομένης της ιστορίας συμφωνεί με την κατανομή δεδομένης της τιμής  $z_{t-1}$ , κάτι που σημαίνει ότι η  $(\underline{z}_t)$  είναι

διαδικασία Markov. Έτσι, η σχέση (2.9) λέγεται και αναπαράσταση Markov του μοντέλου  $GARCH(p, q)$ . Ο τύπος (2.9) μπορεί να γραφεί και ως :

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k},$$

### ΑΥΣΗΡΗ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Το κύριο εργαλείο για τη μελέτη της αυστηρής στασιμότητας είναι η έννοια του εκθέτη Lyapunov. Θεωρώ  $A$  έναν  $(p+q) \times (p+q)$  πίνακα όπου η φασματική ακτίνα του  $A$ , που συμβολίζεται με  $\rho(A)$ , ορίζεται ως το μεγαλύτερο μέτρο των ιδιοδιανυσμάτων του. Ορίζουμε ως  $\|\cdot\|$  κάθε νόρμα στο χώρο που ορίζεται από πίνακες  $(p+q) \times (p+q)$  διαστάσεων. Έτσι θα έχω :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A_t\| = \log \rho(A)$$

Αυτή η ιδιότητα μπορεί να γενικευθεί και για κάθε πίνακα ως εξής :

**Θεώρημα 2.3:** Έστω  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$  μια αυστηρώς στάσιμη και εργοδική ακολουθία από τυχαίους πίνακες, τέτοιοι ώστε  $E[\max(\log \|A_t\|, 0)]$  είναι πεπερασμένη. Έτσι, θα έχουμε :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|] = \gamma = \inf_{t \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{t} E[\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|]$$

με  $\gamma$  να ονομάζω τον άνω εκθέτη Lyapunov και  $\exp(\gamma)$  ονομάζεται η φασματική ακτίνα της ακολουθίας για πίνακες  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Επιπλέον,

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|]. \quad (2.11)$$

Επανερχόμαστε τώρα στην έννοια της στασιμότητας με το ακόλουθο θεώρημα :

**Θεώρημα 2.4:** (Αυστηρή στασιμότητα του  $GARCH(p, q)$  μοντέλου)  
 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας αυστηρώς στάσιμης λύσης στο  $GARCH(p, q)$  μοντέλο (όπως ορίζεται από τη σχέση (2.4)) είναι να ισχύει  $\gamma < 0$ , όπου  $\gamma$  είναι ο άνω εκθέτης Lyapunov της ακολουθίας  $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$  όπως ορίζεται στη σχέση (2.10). Εάν υπάρχει η αυστηρώς στάσιμη λύση τότε είναι μοναδική, αιτιατή και εργοδική.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω θεωρώ την περίπτωση του  $GARCH(1,1)$  μοντέλου όπου ο πίνακας  $A_t$  όπως θεωρήθηκε στη σχέση (2.10) γράφεται ως εξής :

$$A_t = (\eta_t^2, 1)'(\alpha_1, \beta_1).$$

Έτσι, θα έχω:  $A_t A_{t-1} \dots A_1 = \prod_{k=1}^{t-1} (\alpha_1 \eta_{t-k}^2 + \beta_1) A_t$ .

Από τα παραπάνω θα έχω :  $\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\| = \sum_{k=1}^{t-1} (\alpha_1 \eta_{t-k}^2 + \beta_1) + \log \|A_t\|$

και μέσω της σχέσης (2.11) και του νόμου των μεγάλων αριθμών θα έχω

$\gamma = E[\log(\alpha_1 \eta_t^2 + \beta_1)]$ . Η ικανή και η αναγκαία συνθήκη για την αυστηρή στασιμότητα είναι λοιπόν  $E[\log(\alpha_1 \eta_t^2 + \beta_1)] < 0$ , όπως δείχθηκε παραπάνω.

**Θεώρημα 2.5:** (Στασιμότητα δευτέρας τάξης)

Εάν υπάρχει μια  $GARCH(p, q)$  διαδικασία, η οποία είναι στάσιμη δευτέρας τάξης και αιτιατή (nonanticipative), και αν  $\omega > 0$ , τότε :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \quad (2.12)$$

Αντίστροφα εάν ισχύει η (2.12), η μοναδική αυστηρώς στάσιμη λύση του μοντέλου (2.4) είναι ένας ασθενής λευκός θόρυβος (weak white noise) και κατά συνέπεια και στάσιμη δευτέρου βαθμού. Επιπλέον δεν υπάρχει άλλη λύση που να είναι στάσιμη δευτέρου βαθμού.

Κάτω από τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος, η μοναδική στάσιμη λύση του μοντέλου όπως ορίστηκε στη σχέση (2.4) είναι :

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

### 2.2.2 Κύρτωση

Ένας εύκολος τρόπος για να μετρήσουμε ο μέγεθος των ουρών μιας κατανομής είναι μέσω της χρήσης του συντελεστή κύρτωσης. Αυτός ο συντελεστής ορίζεται, για κατανομή με μέση τιμή μηδέν, ως το πηλίκο της ροπής τετάρτης τάξης, με την προϋπόθεση να υπάρχει, προς τη ροπή δευτέρας τάξης. Αυτός ο συντελεστής ισούται με τρία για κανονικές

κατανομές, και χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης για άλλες κατανομές. Στην περίπτωση τώρα των *GARCH* διαδικασιών, είναι καλό να διαχωρίσουμε τη μελέτη μας στις ουρές που αφορούν περιθώριες και δεσμευμένες κατανομές. Για μια αυστηρώς στάσιμη λύση ( $\varepsilon_t$ ) του *GARCH*( $p, q$ ) μοντέλου όπως ορίστηκε από την (2.4), οι δεσμευμένες ροπές τάξης  $k$  είναι ανάλογες της ποσότητας  $\sigma_t^{2k}$  :

$$E(\varepsilon_t^{2k} | \varepsilon_u, u < t) = \sigma_t^{2k} E(\eta_t^{2k}).$$

Έτσι, ο συντελεστής κύρτωσης της παραπάνω δεσμευμένης κατανομής είναι σταθερός και ίδιος με το συντελεστή κύρτωσης της ( $\eta_t$ ). Για μια διαδικασία (με μέσο μηδέν) της μορφής που μελετάμε ( $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ , όπου  $\sigma_t$  είναι μετρίσιμη συνάρτηση του παρελθόντος της ( $\varepsilon_t$ ) και  $\eta_t$  είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος της ( $\varepsilon_t$ ), ανεξάρτητη και ταυτόνομη διαδικασία με μέσο μηδέν), ο συντελεστής κύρτωσης της στάσιμης περιθώριας κατανομής της θα είναι :

$$\kappa_\varepsilon := \frac{E(\varepsilon_t^4)}{\{E(\varepsilon_t^2)\}^2} = \frac{E\{E(\varepsilon_t^4 | \varepsilon_u, u < t)\}}{[E\{E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_u, u < t)\}]^2} = \frac{E(\sigma_t^4)}{\{E(\sigma_t^2)\}^2} \kappa_\eta$$

όπου  $\kappa_\eta = E(\eta_t^4)$  είναι ο συντελεστής κύρτωσης της ( $\eta_t$ ). Έτσι γίνεται φανερό ότι οι ουρές της περιθώριας κατανομής της ( $\varepsilon_t$ ) είναι πιο παχιές όταν η διακύμανση της  $\sigma_t^2$  είναι μεγάλη σε σχέση με το τετράγωνο της αναμενόμενης τιμής της παραπάνω ποσότητας. Επίσης, είναι προφανής και η εξής ανισότητα :  $\kappa_\varepsilon \geq \kappa_\eta$ , με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνον εάν  $\sigma_t^2$  είναι σταθερός αριθμός με μεγάλη βεβαιότητα.

Για την περίπτωση του μοντέλου *GARCH*(1,1) θα έχουμε :

$$\kappa_\varepsilon = \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2(\kappa_\eta - 1)} \kappa_\eta .$$

### 2.2.3 Εκτίμηση του *GARCH* Μοντέλου Παλινδρόμησης

Σε αυτή τη υποενότητα θα ασχοληθούμε με την έννοια της εκτίμησης μέσω του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimation MLE) του *GARCH* μοντέλου παλινδρόμησης, με παρόμοιο τρόπο σκέψης με τον οποίο καταλήξαμε σε αντίστοιχο συμπέρασμα για το μοντέλο *ARCH* στην

ενότητα 2.1. Το *GARCH* μοντέλο της σχέσης (2.4) μπορεί να γραφεί και ως ένα μη-γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης της μορφής :

$$\varepsilon_t = y_t - x_t b$$

όπου  $\varepsilon_t | F_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$  με  $\sigma_t^2 = z_t' \omega$  να είναι η *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία. Επίσης, έχω το διάνυσμα

$$z_t' = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-p}^2)$$

και το διάνυσμα παραμέτρων  $\omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ .

Ορίζουμε ως  $\theta$  ένα συμπαγή υπόχωρο του Ευκλείδειου χώρου, με  $\theta = (b', \omega') \in \theta$ . Ορίζω επίσης τις αληθινές παραμετρικές τιμές με  $\theta_0$ , όπου  $\theta_0' \in \text{int}\theta$ .

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της  $\varepsilon_t$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της διαδικασίας των διαταρακτικών όρων  $\varepsilon_t$ , σε συνάρτηση με τις παραμέτρους:

$$f^*(0, \sigma_t^2) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-[\varepsilon_t/\sigma_t]^2/2}$$

από τη στιγμή που η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μηδέν και η διαδικασία ακολουθεί *GARCH* διακύμανση. Έχουμε  $T$  παρατηρήσεις.

Για να διευκολυνθούμε στις πράξεις θα πάρουμε το λογάριθμο της παραπάνω σχέσης. Έτσι, η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα γίνει:

$$f(0, \sigma_t^2) = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} + \text{σταθεροί όροι}$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι οι σταθεροί όροι της παραπάνω σχέσης δεν επηρεάζουν τα μελλοντικά αποτελέσματα από τη διαδικασία που έπεται, μπορούν να παραληφθούν. Έτσι, θα έχω :

$$f(0, \sigma_t^2) = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} = \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$$

με  $l_t(\theta)$  συμβολίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας για την παρατήρηση  $t$ .

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση  $l_t(\theta)$  ως προς τις παραμέτρους της διακύμανσης θα έχω :

$$\frac{\partial l_t}{\partial \omega} = -\frac{1}{2} \sigma_t^{-2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 (\sigma_t^2)^{-2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} = \frac{1}{2 \sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος θα είναι

$$\frac{\partial l_t}{\partial \omega \partial \omega'} = \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{2 \sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} \right] - \frac{1}{2 (\sigma_t^2)^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega'} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}$$

$$\text{με } \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} = z_t + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial \sigma_{t-i}^2}{\partial \omega}.$$

Παραγωγίζοντας τώρα την  $l_t(\theta)$  ως προς τις παραμέτρους του διανύσματος  $b$  θα καταλήξω στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial b} &= \frac{\varepsilon_t x_t}{\sigma_t^2} - \frac{1}{2 (\sigma_t^2)^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial b} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) - 2 \frac{1}{(\sigma_t^2)^2} \varepsilon_t x_t \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial b} \\ &\quad + \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{1}{2 \sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial b} \right] \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^q a_j x_{t-j} \varepsilon_{t-j} \sum_{j=1}^q \beta_j \frac{\partial \sigma_{t-j}^2}{\partial b}.$$

#### 2.2.4 Θεωρητικές Προβλέψεις

Ο ορισμός των *GARCH* διαδικασιών σε όρους δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών μας επιτρέπει να κάνουμε βέλτιστες προβλέψεις που αφορούν αυτή τη διαδικασία, αλλά και το τετράγωνό της, δεδομένης της παρελθούσης πληροφορίας. Θεωρώ  $(\varepsilon_t)$  μια στάσιμη *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασία. Η βέλτιστη πρόβλεψη της  $\varepsilon_t$  δεδομένης της παρελθούσης πληροφορίας είναι μηδέν εξορισμού. Γενικότερα, για  $h \geq 0$ ,

$$E(\varepsilon_{t+h} | \varepsilon_u, u < t) = E \left\{ E(\varepsilon_{t+h} | \underline{\varepsilon_{t+h-1}}) | \varepsilon_u, u < t \right\} = 0, \quad t \in \mathbb{Z}$$

η οποία σχέση δείχνει ότι η βέλτιστη πρόβλεψη οποιασδήποτε μελλοντικής μεταβλητής δεδομένης της ιστορίας είναι μηδέν. Πάντως η δύναμη των *GARCH* μοντέλων δε κρύβεται στην προβλεπτική ικανότητά τους όσον αφορά τη *GARCH* διαδικασία  $(\varepsilon_t)$ , αλλά το τετράγωνο αυτής. Έτσι, η βέλτιστη πρόβλεψη της  $(\varepsilon_t^2)$  δεδομένης της πληροφορίας από την  $(\varepsilon_t)$  είναι  $\sigma_t^2$ . Γενικά για  $h \geq 0$  θα έχω :



$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_{t+h}^2 | \varepsilon_u, u < t) &= E(\sigma_{t+h}^2 | \varepsilon_u, u < t) \\
&= \omega + \sum_{i=1}^q a_i E(\varepsilon_{t+h-i}^2 | \varepsilon_u, u < t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^p \beta_j E(\sigma_{t+h-j}^2 | \varepsilon_u, u < t),
\end{aligned}$$

έχοντας τις περιπτώσεις :

- για  $i \leq h$  έχω:  $E(\varepsilon_{t+h-i}^2 | \varepsilon_u, u < t) = E(\sigma_{t+h-i}^2 | \varepsilon_u, u < t)$ ,
- για  $i > h$ ,  $E(\varepsilon_{t+h-i}^2 | \varepsilon_u, u < t) = \varepsilon_{t+h-i}^2$ ,
- ενώ για  $i \geq h$ ,  $E(\sigma_{t+h-i}^2 | \varepsilon_u, u < t) = \sigma_{t+h-i}^2$ .

Αυτές οι προβλέψεις είναι ευθυγραμμισμένες με τις αντίστοιχες βέλτιστες γραμμικές προβλέψεις των μελλοντικών τιμών της  $\varepsilon_t^2$  δεδομένης της ιστορίας. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις, όπως του ασθενούς μοντέλου *GARCH*, όπου τα δύο είδη προβλέψεων, δε ταυτίζονται κατ'ανάγκην.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε σε αυτό το σημείο ότι :

$E(\varepsilon_{t+h}^2 | \varepsilon_u, u < t) = \text{Var}(\varepsilon_{t+h} | \varepsilon_u, u < t)$  είναι η δεσμευμένη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης του  $\varepsilon_{t+h}$ . Έτσι, η ακρίβεια των προβλέψεων εξαρτάται από το παρελθόν : είναι χαμηλή μετά από μια ταραχώδη περίοδο, δηλαδή όταν οι παρελθούσες τιμές είναι μεγάλες σε απόλυτες τιμές, θεωρώντας τους συντελεστές  $a_i$  και  $\beta_j$  θετικούς.

Στην περίπτωση τώρα όπου η διαδικασία *GARCH* είναι λευκός θόρυβος μιας *ARMA* διαδικασίας, η ακρίβεια της πρόβλεψης για μια χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται από τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα σ'αυτή τη χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια *AR(1)* στάσιμη διαδικασία, της οποίας ο λευκός θόρυβος είναι μια *GARCH(1,1)* διαδικασία :

$$\begin{cases} Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases}, \quad (2.13)$$

όπου  $\omega > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta \leq 1$  και  $|\alpha| < 1$ . Για  $h \geq 0$  θα έχουμε :

$$Y_{t+h} = \varepsilon_{t+h} + \varepsilon_{t+h-1} + \dots + \varphi^h \varepsilon_t + \varphi^{h+1} Y_{t-1}.$$

Έτσι,  $E(Y_{t+h} | Y_u, u < t) = \varphi^{h+1} Y_{t-1}$  από τη στιγμή που η ιστορία της  $Y_t$  συμπίπτει με αυτήν της  $(\varepsilon_t)$ . Έτσι, θα έχω :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) &= \text{Var}\left(\sum_{i=0}^h \varphi^{h-i} \varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t\right) \\ &= \sum_{i=0}^h \varphi^{2(h-i)} \text{Var}(\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t). \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που  $\text{Var}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) = \sigma_t^2$  και για  $i \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t) &= \text{Var}(\sigma_{t+i}^2 | \varepsilon_u, u < t) \\ &= \omega + (\alpha + \beta) E(\sigma_{t+i-1}^2 | \varepsilon_u, u < t) \\ &= \omega \{1 + \dots + (\alpha + \beta)^{i-1}\} + (\alpha + \beta)^i \sigma_t^2, \end{aligned}$$

θα έχουμε :  $\text{Var}(\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t) = \omega \frac{1 - (\alpha + \beta)^i}{1 - (\alpha + \beta)} + (\alpha + \beta)^i \sigma_t^2$ , για κάθε  $i \geq 0$ .

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) &= \\ &= \left(\sum_{i=0}^h \varphi^{2(h-i)}\right) \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} + \sum_{i=0}^h (\alpha + \beta)^i \varphi^{2(h-i)} \left\{ \sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \right\} = \\ &= \frac{\omega (1 - \varphi^{2(h+1)})}{\{1 - (\alpha + \beta)\}(1 - \varphi^2)} + \left\{ \sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \right\} \frac{\varphi^{2(h+1)} - (\alpha + \beta)^{h+1}}{\varphi^2 - (\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Εάν  $\varphi^2 \neq \alpha + \beta$  και :

$$\text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) = \frac{\omega (1 - \varphi^{2(h+1)})}{(1 - \varphi^2)^2} + \left\{ \sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \right\} (h + 1) \varphi^{2h}, \text{ για}$$

$\varphi^2 = \alpha + \beta$ . Από τη στιγμή που ο συντελεστής της ποσότητας  $\sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$  είναι πάντα θετικός, μπορεί να δειχθεί ότι η διακύμανση της

πρόβλεψης σε ορίζοντα  $h$ , αυξάνει γραμμικά ανάλογα με τη διαφορά της δεσμευμένης διακύμανσης τη χρονική στιγμή  $t$  και τη μη δεσμευμένη διακύμανση της  $(\varepsilon_t)$ . Μια μεγάλη αρνητική διαφορά (που αντιστοιχεί σε περίοδο χαμηλής μεταβλητότητας) έχει ως αποτέλεσμα πιο ακριβείς

προβλέψεις. Αντίστροφα η ακρίβεια συρρικνώνεται όταν  $\sigma_t^2$  είναι μεγάλο. Όταν ο ορίζοντας  $h$  αυξάνει, η σημαντικότητα αυτού του παράγοντα μειώνεται. Εάν  $h$  τείνει στο άπειρο, αποκτούμε τη μη δεσμευμένη διακύμανση του  $Y_t$ :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) = \text{Var}(Y_t) = \frac{\text{Var}(\varepsilon_t)}{1 - \varphi^2}.$$

Τώρα ας θεωρήσουμε δύο μη στάσιμες καταστάσεις. Εάν  $|\varphi| = 1$  και επειδή οι ιστορίες των  $Y_t$  και  $\varepsilon_t$  δε συμπίπτουν θα έχω και αρνητικές χρονικές στιγμές για τις μεταβλητές μου κι έτσι θα έχω για την προηγούμενη σχέση :

$$\text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) = \frac{\omega h}{\{1 - (\alpha + \beta)\}} + \left\{ \sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \right\} \frac{1 - (\alpha + \beta)^{(h+1)}}{1 - (\alpha + \beta)}.$$

Έτσι, η επίδραση των παρατηρήσεων πριν τη χρονική στιγμή  $t$  δεν εξαφανίζεται καθώς το  $h$  μεγαλώνει. Παρόλα αυτά η επίδραση των παρατηρήσεων γίνεται ασήμαντη σε σχέση με το ντετερμινιστικό κομμάτι το οποίο είναι ανάλογο του  $h$ . Στην περίπτωση όπου  $|\varphi| < 1$  και  $\alpha + \beta = 1$  θα έχω :  $\text{Var}(\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t) = \omega i + \sigma_t^2$ , για κάθε  $i \geq 0$  και μπορεί να φανεί ότι η επίδραση των παρελθουσών μεταβλητών στη διακύμανση των προβλέψεων παραμένει σταθερή καθώς ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται επιμονή των διαταραχών (persistence of shocks) στη μεταβλητότητα. Αξίζει πάντως να αναφερθεί πως όπως στην προηγούμενη περίπτωση, το ντετερμινιστικό κομμάτι της αποσύνθεσης της σχέσης  $\text{Var}(\varepsilon_{t+i} | \varepsilon_u, u < t)$  παραμένει ισχυρό καθώς ο χρονικός ορίζοντας τείνει στο άπειρο. Η ασυμπτωτική ακρίβεια των προβλέψεων της ( $\varepsilon_t$ ) είναι ασήμαντη, καθώς επίσης το αυτό ισχύει και για την  $Y_t$  αφού ισχύει :  $\text{Var}(Y_{t+h} | Y_u, u < t) \geq \text{Var}(\varepsilon_{t+h} | \varepsilon_u, u < t)$ .

### 2.2.5 IGARCH

Ένα άλλου είδους συμμετρικό μοντέλο της οικογένειας *GARCH* είναι τα *IGARCH*. Κατά την εκτίμηση των παραμέτρων του *GARCH* μοντέλου γίνεται συχνά φανερό ότι το άθροισμα αυτών των παραμέτρων είναι κοντά στη μονάδα. Στην περίπτωση που έχουμε :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad (2.14)$$

οι Engle και Bollerslev έδωσαν το όνομα Integrated (ολοκληρωμένο) *GARCH* (*IGARCH*). Εδώ ο όρος ολοκληρωμένο αναφέρεται στο γεγονός ότι υπάρχει πιθανότητα να έχουμε μοναδιαία ρίζα (unit root) η οποία ύπαρξη συνεπάγεται τη μη ύπαρξη στασιμότητας της  $(\varepsilon_t)$  (θα έχει άπειρη διακύμανση). Όμως κάτι τέτοιο δε συμβαίνει για το *IGARCH* μοντέλο, κάτω από τις προϋποθέσεις που θέτονται και από το θεώρημα (2.4). Έτσι, το *IGARCH* μοντέλο έχει μία αυστηρώς στάσιμη λύση, αλλά με άπειρη διακύμανση. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό αυτό, παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή της διακύμανσης και παρατηρούμε ότι :  $E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)$  σύμφωνα με το οποίο θα έχω :

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \alpha(B)E(\varepsilon_t^2) + \beta(B)E(\sigma_t^2) = \\ &\alpha_0 + (\alpha(1) + \beta(1))E(\sigma_t^2). \end{aligned}$$

Όπως μπορεί να φανεί από την παραπάνω σχέση, αυτή είναι αληθής μόνο εάν η αναμενόμενη τιμή είναι άπειρη ( $\alpha_0 > 0$  είναι η απαραίτητη συνθήκη για τη στασιμότητα), κατά συνέπεια η διαδικασία *IGARCH* έχει άπειρη διακύμανση. Αυτή η ιδιότητα παρόλα αυτά δεν παρατηρείται στην πραγματικότητα μέσω των λογαριθμικών αποδόσεων.

Έχει αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εκτιμημένων παραμέτρων στο *GARCH* μοντέλο αυξάνει και τείνει στη μονάδα, όσο αυξάνει το δείγμα. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την υπόθεση ότι τα αποτελέσματα του *IGARCH* μοντέλου είναι συνέπεια των ιδιοτήτων του *GARCH* μοντέλου, όπως η μη στασιμότητα η οποία είναι πιο πιθανή σε μεγάλα διαστήματα.

### 2.2.6 *GARCH – in – Mean*

Η διαδικασία *GARCH – in – Mean* (*GARCH – M*) παρουσιάστηκε από τους Engle, Lillen και Robins (1987). Σε αυτή τη διαδικασία παρατίθεται η σχέση μεταξύ των αποδόσεων και του κινδύνου μέσω των *AR* και *GARCH* διαδικασιών αντίστοιχα. Επενδυτές που αποφεύγουν τον κίνδυνο, αναμένεται να απαιτήσουν υψηλότερες αποδόσεις για πιο επισφαλή περιουσιακά στοιχεία σε σχέση με κάποια λιγότερο επικίνδυνα. Το ασφάλιστρο κινδύνου σε αυτό το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί σαν τη θετική συσχέτιση ανάμεσα στην παρούσα απόδοση και τη δεσμευμένη διακύμανση.

Ένα παράδειγμα μιας διαδικασίας *GARCH – M* είναι το εξής :

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + g(\sigma_t, \lambda) + \varepsilon_t$$

όπου οι  $\varphi$ -παράμετροι ανήκουν στη διαδικασία  $AR$  και η  $g$  είναι συνάρτηση της  $GARCH$  διαδικασίας  $\sigma_t$  και του ασφάλιστρου κινδύνου  $\lambda$ .

Η  $GARCH - M$  διαδικασία όπως παρουσιάζεται από τον Duan (1995) και θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο είναι της μορφής :

$$X_t = X_{t-1} \exp \left( r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t \right)$$

ή στη μορφή

$$\ln(X_t/X_{t-1}) = r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t$$

όπου, για ετήσιο επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου  $r$  και ημερήσια μεταβλητότητα στο χρόνο  $t$ , θα έχω  $\Delta t = 1/365$ , θεωρώντας 365 ημέρες διαπραγματεύσεων. Το μοντέλο  $GARCH - M$  μπορεί να επεκταθεί από οποιοδήποτε άλλο μοντέλο  $GARCH$ .

### 2.2.7 Ασύμμετρα Υποδείγματα $GARCH$

Για να είμαστε συνεπείς με την ασυμμετρία η οποία υπάρχει στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, πολλά ασύμμετρα  $GARCH$  μοντέλα έχουν αναπτυχθεί. Πολλά από αυτά μοιάζουν μεταξύ τους και τα κυριότερα είναι :

- $EGARCH$  (Exponential  $GARCH$ )
- $GJR - GARCH$  (Glosten, Jagannathan και Runkle  $GARCH$ )
- $APARCH$  (Asymmetric Power  $ARCH$ )
- $NGARCH$  ή  $NAGARCH$  (Nonlinear Asymmetric  $GARCH$ )

Το πιο διαδεδομένο από τα παραπάνω είναι το  $EGARCH$ .

#### 2.2.7.1 $EGARCH$

Παρόλο το γεγονός ότι τα  $GARCH$  μοντέλα λαμβάνουν υπόψη τους φαινόμενα όπως οι λεπτές ουρές των αποδόσεων και τη συσταδοποίηση της μεταβλητότητας, δε μπορούν να “συλλάβουν” το φαινόμενο της μόχλευσης από τη στιγμή που η δεσμευμένη διακύμανση είναι συνάρτηση μόνον του μεγέθους των παρελθουσών τιμών και όχι του πρόσημου αυτών. Η

δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma_t^2$  της  $R_t$  δεδομένης της ιστορίας τη χρονική στιγμή  $t$ , προφανώς πρέπει να είναι θετική με πιθανότητα ένα. Στα *GARCH* μοντέλα αυτή η ιδιότητα καθίσταται πιο “σίγουρη” θεωρώντας τη  $\sigma_t^2$  ως γραμμικό συνδυασμό (με θετικά βάρη) θετικών τυχαίων μεταβλητών (όπως στο *GARCH(p, q)* μοντέλο). Ένας άλλος τρόπος για να διασφαλίσουμε τη θετική τιμή της  $\sigma_t^2$  είναι κάνοντας τη διαδικασία  $\ln(\sigma_t^2)$  γραμμική σε σχέση με τις παρελθούσες τιμές της  $(\eta_t)$ . Η τελευταία πληροφορία οδηγεί σε ένα ασύμμετρο *GARCH* μοντέλο, το εκθετικό (exponential) *GARCH* μοντέλο, του Nelson (1991) με τύπο :

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2).$$

Η τιμή της  $g(\eta_t)$  εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Ο Nelson σχολιάζει σχετικά : «για να συμβιβαστεί η ασύμμετρη σχέση μεταξύ των αποδόσεων και των αλλαγών στη διακύμανση, η τιμή της  $g(\eta_t)$  πρέπει να είναι συνάρτηση τόσο του μεγέθους όσο και του πρόσημου της  $\eta_t$  ». Έτσι οδηγούμαστε στην ακόλουθη παράσταση :

$$g(\eta_t) = \theta_1 \eta_t + \theta_2 \{|\eta_t| - E[|\eta_t|]\}$$

όπου η επίδραση του πρόσημου φαίνεται στον πρώτο όρο του αθροίσματος ενώ το μέγεθος στον δεύτερο.

Με αυτόν τον τρόπο θα έχω  $\{g(\eta_t)\}_{t=-\infty, \infty}$  ως μία ακολουθία τυχαίων όρων, ανεξάρτητων και ταυτόνομων με μέση τιμή μηδέν. Στο διάστημα  $0 < \eta_t < \infty$ , η  $g(\eta_t)$  είναι γραμμική με κλίση  $\theta_1 + \theta_2$ , ενώ στο διάστημα  $-\infty < \eta_t \leq 0$ , η  $g(\eta_t)$  είναι γραμμική με κλίση  $\theta_1 - \theta_2$ . Κατά συνέπεια η  $g(\eta_t)$  επιτρέπει στη δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma_t^2$  να συμπεριφέρεται ασυμμετρικά στις αυξομειώσεις των τιμών.

Για να φανεί ότι ο όρος  $\theta_2 \{|\eta_t| - E[|\eta_t|]\}$  αντιπροσωπεύει το μέγεθος, μπορούμε στην αρχή να θεωρήσουμε ότι ισχύει  $\theta_1 = 0$  και  $\theta_2 > 0$ . Αυτό κάνει τη συνάρτηση  $g(\eta_t)$  που βρίσκεται στη σχέση  $\ln(\sigma_t^2)$  θετική (αρνητική) όταν το μέγεθος της  $\eta_t$  είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) από την αναμενόμενη τιμή της. Το αντίθετο θα ισχύει αν θεωρήσουμε  $\theta_1 < 0$  και  $\theta_2 = 0$ .

Σε αντίθεση με τα *GARCH* μοντέλα, τα *EGARCH* δεν έχουν περιορισμούς όσον αφορά τις παραμέτρους στο μοντέλο. Το *EGARCH* μοντέλο πάντα παράγει θετική δεσμευμένη διακύμανση ανεξάρτητα του πρόσημου των εκτιμώμενων παραμέτρων στο μοντέλο και δε χρειάζονται περεταίρω περιορισμοί. Αυτό είναι προτιμότερο τις φορές όπου οι περιορισμοί στο *GARCH* μοντέλο πολλές φορές δημιουργούν προβλήματα όταν οι εκτιμημένες παράμετροι παραβιάζουν τους περιορισμούς που έχουν τεθεί.

### 2.2.7.2 GJR – GARCH

Όσον αφορά αυτό το μοντέλο, ισχύουν οι εξής σχέσεις :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \omega_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\text{με } S_t^- = \begin{cases} 1 & \text{όταν } \varepsilon_t < 0 \\ 0 & \text{όταν } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases} .$$

Σε αυτό το μοντέλο θεωρείται ότι η επίδραση της  $\varepsilon_t^2$  διαδικασίας στη δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma_t^2$ , με την εισαγωγή της  $S_t^-$  συνάρτησης, γίνεται στα πλαίσια της εισαγωγής της έννοιας της μόχλευσης.

### 2.2.7.3 APARCH

Αυτό το μοντέλο περιγράφεται από τον τύπο :

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

με  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta \geq 0$

$$\alpha_i \geq 0 \text{ για } i = 1, \dots, p$$

$$\beta_i \geq 0 \text{ για } j = 1, \dots, q$$

και  $-1 < \gamma_i < 1$  για  $i = 1, \dots, p$ .

Τα περισσότερα *GARCH* μοντέλα δε μπορούν να γραφούν σε μια κλειστή μορφή μιας γενικής διαδικασίας, αλλά το *APARCH* μοντέλο περιλαμβάνει άλλες επτά ειδικές περιπτώσεις, επιγραμματικά οι οποίες είναι :

- *ARCH* όταν  $\delta = 2$ ,  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ) και  $\beta_j = 0$  ( $j = 1, \dots, q$ ).
- *GARCH* όταν  $\delta = 2$  και  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ).
- Taylor (1986) / Schwert (1990) *GARCH* όταν  $\delta = 1$  και  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ).
- *GJR - GARCH* όταν  $\delta = 2$ .
- *TARCH* όταν  $\delta = 1$ .
- *NARCH* όταν  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ) και  $\beta_j = 0$  ( $j = 1, \dots, q$ ).
- *Log - ARCH* από τους Geweke (1986) και Pentula (1986), όταν  $\delta \rightarrow 0$ .

#### 2.2.7.4 *NGARCH*

Το μη γραμμικό *GARCH* (*NGARCH*) επίσης γνωστό και ως μη-γραμμικό ασύμμετρο *GARCH*(1,1) (*NAGARCH*) οφείλεται στους Engle και Ng Που το παρουσίασαν το 1993. Για αυτό το μοντέλο ισχύει ο τύπος υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 (\xi_{t-1} - \gamma)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Όπου  $\alpha, \beta \geq 0$  και  $\omega > 0$ .

Συνήθως για τις αποδόσεις μετοχών η παράμετρος  $\gamma$  εκτιμάται να είναι με θετική τιμή. Σε αυτή την περίπτωση αποτυπώνει το φαινόμενο της μόχλευσης, κάνοντας φανερό παράλληλα ότι αρνητικές αποδόσεις αυξάνουν τη μελλοντική μεταβλητότητα, σε μεγαλύτερο ποσοστό από ότι οι θετικές αποδόσεις του ίδιου μεγέθους. Πολλές φορές παρατηρείται σύγχυση με το *NARCH* μοντέλο των Higgins και Bera (1992) αλλά διαφέρουν.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Το *GARCH* Μοντέλο Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής

#### 3.1 Εισαγωγή

Μία από τις ιδιότητες της κίνησης Brown είναι ότι τα ισαπέχοντα σημεία είναι στάσιμα, ή με άλλα λόγια μπορεί να ειπωθεί ότι είναι ανεξάρτητα και ταυτόνομα κατανομημένα. Όμως οι εμπειρικές μελέτες που έχουν διεξαχθεί δε δείχνουν να επιβεβαιώνουν το παραπάνω. Η στοχαστική μεταβλητότητα στις τιμές των μετοχών περιπλέκει την αποτίμηση των παραγώγων προϊόντων, και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η υπόθεση της πλήρους αγοράς (και κατά συνέπεια του μέτρου πιθανότητας χωρίς κίνδυνο) να μην ισχύει. Αυτό συμβαίνει επειδή δε μπορούμε να αντισταθμίσουμε πλήρως τον κίνδυνο που προκύπτει από τη στοχαστική φύση της μεταβλητότητας.

Παρόλα αυτά ο Jin-Chuan Duan (1995) όρισε ένα καινούργιο μέτρο, το μέτρο πιθανότητας τοπικά ουδέτερου κινδύνου, σύμφωνα με το οποίο ένας οικονομικός παράγοντας μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλειά του κάνοντας χρήση αυτού του μέτρου. Σε αυτή τη μη πλήρη αγορά, επιπλέον υποθέσεις χρειάζονται να γίνουν τόσο για τη συνάρτηση ωφέλειας όσο και για το ασφάλιστρο κινδύνου που απαιτείται για τον επιπλέον κίνδυνο. Ο Duan ονόμασε τις ιδιότητες αυτού του μέτρου ως σχέση αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου (locally risk-neutral valuation relationship -*LRNVR*).

### 3.2 Απόδοση Τιμών Μετοχής με το *GARCH* Μοντέλο

Ας θεωρήσουμε ότι η εξέλιξη της οικονομίας γίνεται σε διακριτό χρόνο και  $X_t$  να είναι τη χρονική στιγμή  $t$  η τιμή μια μετοχής. Η κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι η λογαριθμοκανονική (δεδομένης της ιστορίας μέχρι τη χρονική στιγμή  $t - 1$ ) κάτω από το μέτρο πιθανότητας  $P$ . Έτσι, θα έχω

$$X_t = X_{t-1} \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t \right) \quad (3.1)$$

και η απόδοση θα είναι

$$\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t \sim N \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t, \sigma_t^2 \right)$$

όπου  $\varepsilon_t$  έχει μέσο μηδέν και δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma_t^2$  κάτω από το μέτρο  $P$ . Επίσης,  $r$  είναι το σταθερό επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου μιας περιόδου (συνεχώς επανατοκιζόμενο) και  $\lambda$  είναι το σταθερό ασφάλιστρο κινδύνου. Επίσης, υποθέτουμε ότι η  $(\varepsilon_t)$  ακολουθεί τη *GARCH* διαδικασία κάτω από μέτρο πιθανότητας  $P$  και ισχύει :

$$\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.3)$$

με  $\mathcal{F}_t$  να ορίζω το  $\sigma$ -πεδίο πληροφοριών ( $\sigma$ -field) όλης της δεδομένης πληροφορίας μέχρι και τη στιγμή  $t$ , καθώς και τις παραμέτρους  $p \geq 0, q \geq 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$  για  $i = 1, \dots, q$  και  $\beta_i \geq 0$  για  $i = 1, \dots, p$ .

Περιγραφικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι μία γραμμική συνάρτηση των τετραγώνων των παρελθόντων διαταρακτικών όρων (από τη διαδικασία  $(\varepsilon_t^2)$ ) και των παρελθόντων δεσμευμένων διακυμάνσεων. Βασική υπόθεση στην αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής κάτω από το πλαίσιο *GARCH* είναι η υπό συνθήκη κανονικότητα όπως υπάρχει στη σχέση (3.2).

Για να πετύχουμε τη στασιμότητα της διακύμανσης της *GARCH*( $p, q$ ) διαδικασίας, θεωρούμε ότι  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$  όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης, το υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής *GARCH*, όπως ορίστηκε παραπάνω, αποτιμά αυτά τα δικαιώματα επιλογής κάτω από την υπόθεση της υπό συνθήκης ετεροσκεδαστικότητας. Αυτό σημαίνει ότι η δεσμευμένη διακύμανση επιτρέπεται να αλλάζει στο χρόνο ενώ διατηρούμε τη μη δεσμευμένη διακύμανση σταθερή. Η διαδικασία

$GARCH(p, q)$  όπως αυτή ορίστηκε από τις (3.1),(3.2), εκπίπτει στην κλασική ομοσκεδαστική λογαριθμοκανονική διαδικασία του υποδείγματος Black-Scholes εάν  $p = 0$  και  $q = 0$ . Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι το μοντέλο Black-Scholes είναι μια ειδική περίπτωση  $GARCH(p, q)$ .

### 3.3 Βασικές Έννοιες Ωφέλειας Καταναλωτή

#### 3.3.1 Συνάρτηση Ωφέλειας

Η ωφέλεια την οποία απολαμβάνει ένας οικονομικός παράγοντας θα αναπαρασταθεί μέσω μιας συνάρτησης, η οποία θα περιγράψει την ευημερία του μέσω της κατανάλωσης. Σε αυτή την εργασία θα θεωρήσουμε την ωφέλεια να είναι μετρίσιμο μέγεθος και να μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια μεταβλητή σε μια συνάρτηση. Αυτή η συνάρτηση θα ονομάζεται συνάρτηση ωφέλειας (utility function) και θα ορίζεται ως

$$u(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

και με λόγια,  $u(\text{κόστος σε χρηματικές μονάδες της κατανάλωσης}) = \text{ευημερία από αυτή τη δαπάνη}$ . Γενικά, η συνάρτηση ωφέλειας έχει τις παρακάτω τρεις ιδιότητες :

- α)  $u(x)$  είναι διπλά διαφορίσιμη.
- β)  $u(x)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του  $x$ ,  $u'(x) > 0$ .
- γ)  $u(x)$  είναι κοίλη συνάρτηση του  $x$ ,  $u''(x) < 0$ .

Η ιδιότητα (β) οφείλεται στο γεγονός ότι ένας οικονομικός παράγοντας προτιμά να καταναλώνει όσο το δυνατόν περισσότερο. Η ιδιότητα (γ) μπορεί να ερμηνευθεί στα πλαίσια της έννοιας της επιπλέον κατανάλωσης. Η ωφέλεια την οποία κερδίζει ένας οικονομικός παράγοντας από την επιπλέον κατανάλωση  $g$ , προσθετικά στην ήδη υπάρχουσα κατανάλωση  $x$ , είναι  $u(x + g) - u(x) < u(g)$ . Κάθε οικονομικός παράγοντας έχει προφανώς τις δικές του προτιμήσεις κι έτσι ξεχωριστή συνάρτηση ωφέλειας.

#### 3.3.2 Αποστροφή Κινδύνου (Risk Aversion)

Απόλυτη αποστροφή κινδύνου : Για δεδομένη συνάρτηση ωφέλειας  $u(x)$ , σε συνεχή χρόνο, μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση απόλυτης αποστροφής κινδύνου (absolute risk aversion function) οριζόμενης ως εξής

$$R(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{d}{dx} \ln u'(x) \quad (3.4)$$

Οι ιδιότητες (β) και (γ) της προηγούμενης ενότητας διασφαλίζουν την ισχύ της συνθήκης  $R(x) > 0 \forall x$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της  $R(x)$ , τόσο λιγότερο κίνδυνος είναι διατεθειμένος να αναλάβει ένας οικονομικός παράγοντας για επιπλέον κατανάλωση. Ο παραπάνω τύπος γράφεται σε διακριτό χρόνο ως εξής

$$\tilde{R}(x) = -\frac{\ln(u'(x_t)) - \ln(u'(x_{t-1}))}{x_t - x_{t-1}} = -\frac{\ln \frac{u'(x_t)}{u'(x_{t-1})}}{x_t - x_{t-1}}$$

Σχετική αποστροφή κινδύνου : Έτσι ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση

$$r(x) = x\tilde{R}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}x = -\frac{\frac{d}{dx} \ln(u'(x))}{\frac{d}{dx} \ln x}$$

Και σε διακριτό χρόνο θα έχω :

$$\tilde{r}(x) = -\frac{\frac{\ln(u'(x_t)) - \ln(u'(x_{t-1}))}{x_t - x_{t-1}}}{\frac{\ln x_t - \ln x_{t-1}}{x_t - x_{t-1}}} = -\frac{\ln(u'(x_t)) - \ln(u'(x_{t-1}))}{\ln x_t - \ln x_{t-1}} = -\frac{\ln \frac{u'(x_t)}{u'(x_{t-1})}}{\ln \frac{x_t}{x_{t-1}}}$$

### 3.4 Γενική Στρατηγική Κατανάλωσης-Επένδυσης

Ας θεωρήσουμε ένα επενδυτή με την ακόλουθη στρατηγική κατανάλωσης-επένδυσης σε διακριτό χρόνο : Ένας επενδυτής μεγιστοποιεί τη διαφορίσιμη συνάρτηση ωφέλειας του  $u(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , σε κάθε χρονική στιγμή  $t - 1$ , είτε μέσω κατανάλωσης,  $C_{t-1} \in \mathbb{R}^+$ , ή επενδύοντας,  $H_{t-1} \in \mathbb{R}$ , σε ένα χαρτοφυλάκιο με τυχαία απόδοση  $S_t \in \mathbb{R}^+$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Τη χρονική στιγμή  $t$  ο επενδυτής έχει ξανά την ίδια επιλογή μεταξύ κατανάλωσης και επένδυσης από την απόδοση-έσοδα που είχε τη χρονική στιγμή  $t - 1$ . Όπως συμβαίνει συνήθως, ένας επενδυτής είναι περισσότερο ικανοποιημένος εάν καταναλώσει άμεσα από το να αποταμιεύσει, κι έτσι ορίζουμε τον παράγοντα αδημονίας (impatience factor) ως  $\rho \in \mathbb{R}$ . Τη στιγμή  $t - 1$  αυτό το σχέδιο του επενδυτή μπορεί να γραφεί ως :

$$\max E^P [u(C_{t-1}) + \exp(-\rho)u(C_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \quad (3.5)$$

με δεδομένες τις συνθήκες :

$$v = C_{t-1} + H_{t-1}S_{t-1} \quad (3.6)$$

$$H_{t-1}S_t = C_t + H_tS_t \quad (3.7)$$

με  $v$  να είναι η απόδοση της επένδυσης τη στιγμή  $t - 2$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι τη στιγμή  $t - 1$  οι μόνες επιλογές που έχει ένας επενδυτής είναι είτε να καταναλώσει τώρα ή να επενδύσει για μια περίοδο κι έτσι η αναμενόμενη ωφέλεια από την κατανάλωση στις περιόδους μετά τη χρονική στιγμή  $t$  δε θα λαμβάνεται πλέον υπόψη. Από τη στιγμή που  $C_{t-1}$  είναι προβλέψιμη ποσότητα στη χρονική στιγμή  $t - 1$ , η σχέση (3.5) μπορεί να γραφεί και ως :

$$\max [u(C_{t-1})] + \exp(-\rho) E^P [u(C_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \quad (3.8)$$

Ο σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ωφέλεια ως συνάρτηση της κατανάλωσης και της επένδυσης. Από τις σχέσεις (3.6),(3.7) η (3.8) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\begin{aligned} \max [u(v - H_{t-1}S_{t-1})] + \exp(-\rho) E^P [u(H_{t-1}S_t - H_tS_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \\ = -S_{t-1}u'(v - H_{t-1}S_{t-1}) \\ + \exp(-\rho) E^P [S_t u'(H_{t-1}S_t - H_tS_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

η οποία τελευταία σχέση και με τη βοήθεια των (3.6),(3.7) γίνεται :

$$X_{t-1} = E^P \left[ \exp(-\rho) \frac{u'(C_t)}{u'(C_{t-1})} X_t | \mathcal{F}_{t-1} \right]. \quad (3.10)$$

Έτσι, η τιμή του χαρτοφυλακίου τη στιγμή  $t - 1$  γράφεται σαν συνάρτηση της αναμενόμενης τιμής της ωφέλειας του οικονομικού παράγοντα, της “αδημονίας” του και της αναμενόμενης μελλοντικής τιμής αυτού του χαρτοφυλακίου.

### 3.5 Η Σχέση Αποτίμησης Τοπικά Ουδέτερου Κινδύνου (The Local Risk-Neutral Valuation Relationship-LRNVR)

Ο κλασικός τρόπος αποτίμησης μέσω της έννοιας του ουδέτερου κινδύνου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν υποθέσουμε ετεροσκεδαστικότητα στις αποδόσεις των μετοχών. Απεναντίας, η σχέση αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου (LRNVR) είναι ένας τρόπος για να γενικεύσουμε την αποτίμηση μέσω ουδέτερου κινδύνου εισάγοντας και την έννοια της ετεροσκεδαστικότητας.

**Ορισμός 3.1 :**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  ονομάζεται μέτρο πιθανότητας τοπικά ουδέτερου κινδύνου εάν :

1.  $Q$  είναι ισοδύναμο μέτρο με το  $P$ .
2.  $\frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1}$  κατανέμεται λογαριθμοκανονικά υπό το μέτρο  $Q$ .
3.  $E^Q \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = r \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$
4.  $Var^Q \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = Var^P \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]$ ,  $P$  με μεγάλη βεβαιότητα.

Στον παραπάνω ορισμό της σχέσης  $LRNVR$ , οι δεσμευμένες διακυμάνσεις κάτω από τα προαναφερθέντα μέτρα είναι ίσες, κάτι που είναι επιθυμητό καθώς με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να παρατηρήσουμε κι έτσι να εκτιμήσουμε την δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο το  $P$ . Αυτό το γεγονός καθώς και το ότι η δεσμευμένη μέση τιμή μπορεί να αντικατασταθεί από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το δημιουργηθέν μοντέλο μας δεν εξαρτάται τοπικά από τις προτιμήσεις. Παρόλα αυτά η έννοια της τοπικά ουδετεροποίησης του κινδύνου, είναι ανεπαρκής για να απαλλαγούμε πλήρως από παραμέτρους προτίμησης. Με τον τρόπο που δημιουργήσαμε το μοντέλο είναι παρόλα αυτά αρκετά ικανοποιητικό να ενσωματώσουμε όλες τις προτιμήσεις στο ασφάλιστρο κινδύνου  $\lambda$ . Στον παραπάνω ορισμό και στο (4) συμπέρασμα η ισότητα ισχύει με μεγάλη βεβαιότητα. Από τη στιγμή που το μέτρο  $Q$  είναι ισοδύναμο με το μέτρο  $P$ , η σχέση μεγάλης βεβαιότητας υπό το μέτρο  $P$  ισχύει και για το  $Q$ . Στην περίπτωση της ομοσκεδαστικής λογαριθμοκανονικής διαδικασίας (δηλ. για  $p = 0$  και  $q = 0$ ) οι δεσμευμένες διακυμάνσεις μετατρέπονται στον ίδιο σταθερό αριθμό και η  $LRNVR$  εκπίπτει στην τυπική σχέση αποτίμησης ουδέτερου κινδύνου.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αφορά τα πιθανά χαρακτηριστικά τα οποία έχει ένας οικονομικός παράγοντας καθώς και τις κατανομές των αποδόσεων για τις οποίες η σχέση  $LRNVR$  ισχύει.

### 3.6 Το Μέτρο Πιθανότητας υπό Τοπικά Ουδέτερο Κίνδυνο

**Θεώρημα 3.1:** Έστω διαδικασία  $Y_t$  τέτοια ώστε η  $Y_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim$  κατανέμεται κανονικά με σταθερό μέσο και διακύμανση υπό το μέτρο πιθανότητας  $P$ .

Ορίζουμε  $Q$  ως :  $dQ = \exp((r - p)T + \sum_{s=1}^T Y_s) dP$

κι έτσι το  $Q$  είναι μέτρο και ισοδύναμο του  $P$ .

Το μέτρο  $Q$  δεν είναι γενικά και μέτρο πιθανότητας. Στο επόμενο θεώρημα υποθέσεις κάτω από τις οποίες το μέτρο  $Q$  είναι μέτρο πιθανότητας και μια επιθυμητή ιδιότητα αυτού θα παραχθεί.

**Θεώρημα 3.2:** Εάν  $X_{t-1} = E^P [X_t \exp(-\rho + Y_t) | \mathcal{F}_{t-1}]$  (3.11)

τότε :

1. Το  $Q$  είναι μέτρο πιθανότητας.
2. Εάν  $W_t$  (όπου  $W_t$  είναι κίνηση Brown) είναι μετρίσιμη ως προς  $\mathcal{F}_t$  τότε :  $E^Q [W_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E^P [W_t \exp((r - \rho) + Y_t) | \mathcal{F}_{t-1}]$

**Απόδειξη :** Από τον ορισμό του  $Q$

$$dQ = \exp\left((r - \rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s\right) dP$$

ολοκληρώνοντας θα έχω:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dQ &= \int_{\Omega} \exp\left((r - \rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s\right) dP \\ &= E^P \left[ \exp\left((r - \rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s\right) \right] \\ &= E^P \left[ \exp\left((r - \rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s\right) | \mathcal{F}_0 \right] \\ &= E^P \left[ \exp\left((r - \rho)(T - 1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s\right) \exp(r - \rho) \right. \\ &\quad \left. + Y_T | \mathcal{F}_0 \right] \\ &= E^P \left\{ e^{((r - \rho)(T - 1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s)} e^r E^P [e^{\rho + Y_T} | \mathcal{F}_{t-1}] | \mathcal{F}_0 \right\} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση (3.11) όπου :

$$X_{t-1} = E^P [X_t \exp(-\rho + Y_t) \mid \mathcal{F}_{t-1}]$$

ή διαφορετικά  $\exp(-r) = E^P [\exp(-\rho + Y_t) \mid \mathcal{F}_{t-1}]$  (3.12)

για υποκείμενο τίτλο χωρίς κίνδυνο. Το αποτέλεσμα θα είναι :

$$\begin{aligned} \int dQ &= E^P \left\{ \exp \left( (r-p)(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s \right) \exp(r) \exp(-r) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ &= E^P \left\{ \exp \left( (r-p)(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s \right) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με τον νόμο των επαναλαμβανόμενων προσδοκιών θα έχω ένα αποτέλεσμα παρόμοιο με αυτό της σχέσης (3.12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dQ &= E^P \left\{ e^{(r-p)(T-2) + \sum_{s=1}^{T-2} Y_s} e^r E^P [e^{\rho + Y_{T-1}} \mid \mathcal{F}_{T-2}] \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ &= E^P \left\{ \exp \left( (r-p)(T-2) + \sum_{s=1}^{T-2} Y_s \right) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \end{aligned}$$

Αυτό μπορεί να επαναλαμβάνεται έως ότου θα έχω :

$$\int_{\Omega} dQ = E^P \{ \exp((r-p) + Y_1) \mid \mathcal{F}_0 \} = 1$$

κι έτσι,  $Q(\Omega) = 1$ . Με αυτή την ιδιότητα το μέτρο  $Q$  είναι μέτρο πιθανότητας.

Επίσης, έχω :  $Q(\Omega) = E^P [\exp((r-p) + Y_1)] = 1$

κι έτσι γίνεται φανερό ότι :  $\exp((r-p)T + \sum_{s=1}^T Y_s) \geq 0$

και σύμφωνα με το θεώρημα (3.1) το  $Q$  είναι ισοδύναμο με το μέτρο  $P$ .

Τέλος, σύμφωνα με το θεώρημα των Radon-Nikodym η ποσότητα  $\exp((r-p)T + \sum_{s=1}^T Y_s)$  είναι μέτρου  $P$  με μεγάλη βεβαιότητα, μοναδική και για κάθε  $W_t$  ( $\mathcal{F}_t$ -μετρίσιμη) θα έχω:

$$E^Q [W_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = E^P [W_t \exp((r-p) + Y_t) \mid \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (3.13)$$

■



**Θεώρημα 3.3:** Εάν  $X_{t-1} = E^P[\exp(-\rho + Y_t) X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$  τότε :

$$1. \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) | \mathcal{F}_{t-1} \sim \text{κανονική με μέτρο } Q.$$

$$2. E^Q\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = e^r \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$$3. \text{Var}^Q\left[\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \text{Var}^P\left[\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) | \mathcal{F}_{t-1}\right], P \text{ με μεγάλη βεβαιότητα.}$$

**Θεώρημα 3.4 :** Ένας οικονομικός παράγοντας ο οποίος λειτουργεί για τη μεγιστοποίηση της ωφέλειάς του και η συνάρτηση ωφέλειάς του είναι διαχωρίσιμη και προσθετική, είναι ένας *LRNVR* επενδυτής κάτω από τις ακόλουθες συνθήκες :

1. Η συνάρτηση ωφέλειας είναι σταθερής σχετικής αποστροφής κινδύνου και οι μεταβολές στο λογάριθμο της συνολικής κατανάλωσης ακολουθούν τη δεσμευμένη κανονική κατανομή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση υπό το μέτρο  $P$ .

2. Η συνάρτηση ωφέλειας είναι σταθερής απόλυτης αποστροφής κινδύνου και οι μεταβολές στο λογάριθμο της συνολικής κατανάλωσης ακολουθούν τη δεσμευμένη κανονική κατανομή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση υπό το μέτρο  $P$ .

3. Η συνάρτηση ωφέλειας είναι γραμμική.

Το μέτρο τοπικά ουδετέρου κινδύνου είναι :

$$dQ = e^{-(r-p)T} \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} dP$$

Το επιτόκιο υποθέτουμε ότι είναι σταθερό.

**Απόδειξη:**

1. Με τη βοήθεια των προηγούμενων ενοτήτων που πραγματεύτηκαν τις έννοιες της συνάρτησης ωφέλειας και της αποστροφής κινδύνου θα εξάγουμε τις εξής τρεις συνθήκες :

(α) Συνθήκη 1 : Μια συνάρτηση ωφελείας σταθερής σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο ορίζεται ως :

$$\lambda_1 = -\frac{d \ln U'(C)}{dC} \div \frac{d \ln C}{dC} = -\frac{\ln U'(C_t) - \ln U'(C_{t-1})}{\ln(C_t) - \ln(C_{t-1})}$$

$$\text{άρα } \ln U'(C_t) - \ln U'(C_{t-1}) = (-\lambda_1) \ln(C_t) - \ln(C_{t-1})$$

$$\text{άρα } \ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right) = (-\lambda_1) \ln \left( \frac{C_t}{C_{t-1}} \right) \quad (3.14)$$

Από τη στιγμή που υποθέτουμε ότι  $\ln \left( \frac{C_t}{C_{t-1}} \right)$  κατανέμεται κανονικά με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση υπό το  $P$ ,  $\ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right)$  κατανέμεται επίσης κανονικά αυτή η ποσότητα με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση.

(β) Συνθήκη 2: Μία συνάρτηση ωφελείας σταθερής αποστροφής κινδύνου ορίζεται ως:  $\lambda_2 = -\frac{d \ln U'(C)}{dC} = -\frac{\ln U'(C_t) - \ln U'(C_{t-1})}{C_t - C_{t-1}}$

$$\text{άρα } \ln U'(C_t) - \ln U'(C_{t-1}) = (-\lambda_2)(C_t - C_{t-1})$$

$$\text{άρα } \ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right) = (-\lambda_2)(C_t - C_{t-1})$$

Με την υπόθεση ότι  $C_t - C_{t-1}$  κατανέμεται κανονικά με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση υπό το  $P$ ,  $\ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right)$  κατανέμεται επίσης κανονικά αυτή η ποσότητα με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση.

(γ) Συνθήκη 3 : Μια γραμμική συνάρτηση ωφελείας ορίζεται ως :

$$U(C_t) = \alpha C_t + c$$

$$\text{άρα } U'(C_t) = \alpha \text{ και } \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} = 1.$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι θα ισχύει :  $\ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right) = 0 \sim N(0,0)$  υπό το μέτρο  $P$ .

Από όλες τις παραπάνω τρεις συνθήκες είναι πλέον φανερό ότι η ποσότητα  $\ln \left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right)$  κατανέμεται κανονικά με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση.

2. Σε προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι κάτω από το μέτρο  $P$

$$X_{t-1} = E^P \left[ e^{-\rho} \frac{u'(C_t)}{u'(C_{t-1})} X_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = E^P \left[ e^{-\rho + \ln\left(\frac{u'(C_t)}{u'(C_{t-1})}\right)} X_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = E^P [e^{-\rho + Y_t} X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \quad (3.15)$$

όπου  $Y_t = \ln\left(\frac{u'(C_t)}{u'(C_{t-1})}\right)$ .  $Y_t$  όπως αναφέρθηκε κατανέμεται κανονικά σύμφωνα με τις συνθήκες 1 έως 3. Εάν ορίσουμε το  $Q$  ως :

$$dQ = \exp((r - \rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s) dP$$

τότε από το θεώρημα (3.1),  $Q$  είναι ένα μέτρο ισοδύναμο με το  $P$ . Από το θεώρημα (3.2) βλέπουμε ότι το  $Q$  είναι μέτρο πιθανότητας και

$$E^Q [W_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = E^P [W_t \exp((r - \rho)T + Y_t) \mid \mathcal{F}_{t-1}]$$

για κάθε  $W_t$  που είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη. Ένα άλλο αποτέλεσμα από την ισότητα (3.15) που αναφέρθηκε στο θεώρημα (3.3) είναι :

(a).  $\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim$  κανονική με μέτρο  $Q$ .

(b).  $E^Q \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^r \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

(c).  $Var^Q = \left[ \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = Var^P = \left[ \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]$ ,  $P$  με μεγάλη βεβαιότητα.

3. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για έναν οικονομικό παράγοντα ο οποίος αναμένεται να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του, η συνάρτηση ωφέλειάς του είναι διαχωρίσιμη, προσθετική και πληροί μία από τις τρεις προαναφερθείσες συνθήκες, η σχέση αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου ( $LRNVR$ ) ισχύει.

■

Η υπόθεση της σταθερής μέσης τιμής και διακύμανσης για τη συνολική διακύμανση στα συμπεράσματα (1), (2) του παραπάνω θεωρήματος, βεβαιώνει τη σταθερότητα του επιτοκίου. Έτσι, το παραπάνω έρχεται σε συμφωνία με την αρχική μας υπόθεση περί σταθερού επιτοκίου στο υπό εξέταση μοντέλο μας. Παρόλα αυτά είναι δυνατόν να παράγουμε ένα μοντέλο με το επιτόκιο να είναι στοχαστική διαδικασία αλλά αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα ένα πολύ πιο πολύπλοκο μοντέλο. Αξίζει να αναφερθεί ότι

σύμφωνα με το συμπέρασμα (2) του παραπάνω θεωρήματος, η συνολική κατανάλωση μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές.

### 3.7 Η Διαδικασία Απόδοσης Τιμών Μετοχής υπό $LRNVR$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η διαδικασία απόδοσης τιμών μετοχής υπό τη σχέση  $LRNVR$ .

**Θεώρημα 3.5:** Υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ , προκύπτουν από τη σχέση  $LRNVR$ , θα έχω

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$$

όπου  $\xi_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$

$$\text{και } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (3.16)$$

**Απόδειξη :** Όπως γνωρίζουμε από το θεώρημα (3.3) η ποσότητα  $\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) | \mathcal{F}_{t-1}$  κατανέμεται κανονικά υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ . Έτσι μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας ντετερμινιστικής και τυχαίας μεταβλητής ως εξής :

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = v_t + \xi_t \quad (3.17)$$

υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ . Η  $v_t$  είναι η δεσμευμένη μέση τιμή ενώ η τυχαία μεταβλητή  $\xi_t$  κατανέμεται προφανώς κανονικά με δεσμευμένη μέση τιμή μηδέν και δεσμευμένη διακύμανση την ίδια με αυτή της απόδοσης  $\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$  κάτω από το μέτρο  $\mathcal{Q}$ . Θα αποδειχθεί ότι :

$$1. v_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2$$

$$2. \text{ και } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2.$$

Απόδειξη (1) : από τη εξίσωση (3.17) έχω ότι  $\frac{X_t}{X_{t-1}} = e^{v_t + \xi_t}$

$$E^{\mathcal{Q}}\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = E^{\mathcal{Q}}[e^{v_t + \xi_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^{v_t} E^{\mathcal{Q}}[e^{\xi_t} | \mathcal{F}_{t-1}]$$

και από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση μίας κανονικά καταμεμημένης τυχαίας μεταβλητής θα έχω :

$$E^Q \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^{v_t + \frac{1}{2} \text{Var}^Q \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]} E^Q [1 \mid \mathcal{F}_{t-1}]$$

αφού  $\text{Var}^Q \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \text{Var}^P \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sigma_t^2$  υπό το μέτρο  $P$  με μεγάλη βεβαιότητα.

Από το θεώρημα (3.3) μπορούμε να γράψουμε

$$E^Q \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^{v_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2}$$

Επίσης αποδείχθηκε στο θεώρημα (3.3) ότι

$$E^Q \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^r$$

άρα

$$v_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 = r$$

$$v_t = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2$$

Απόδειξη (2) : Υπενθυμίζουμε την αρχική διαδικασία αποδόσεων τιμών μετοχής με  $GARCH$  διαδικασία μεταβλητότητας κάτω από το μέτρο  $P$  (σχέση 3.2),

$$\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t$$

και τη διαδικασία που διαφάνηκε μέσω της απόδειξης (1) παραπάνω κάτω από το μέτρο  $Q$  :

$$\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t.$$

Πάλι κάνοντας χρήση του αποτελέσματος:

$$\text{Var}^Q \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \text{Var}^P \left[ \ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sigma_t^2$$

υπό το μέτρο  $P$  με μεγάλη βεβαιότητα, από το θεώρημα (3.3) μπορούμε να γράψουμε :  $r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t$

και κατά συνέπεια  $\varepsilon_t = \xi_t - \lambda \sigma_t$ . Αντικαθιστώντας το παραπάνω στη σχέση

$\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$  θα έχουμε  $\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$  και στη δεσμευμένη μεταβλητότητα θα έχω :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda\sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.18)$$

υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ .

Το παραπάνω θεώρημα στην ουσία μας δείχνει ότι η δομή της  $GARCH(p, q)$  διαδικασίας παραμένει ανεπηρέαστη σε σχέση με την τοπικά ουδετεροποίηση του κινδύνου. Η διαδικασία της δεσμευμένης διακύμανσης κάτω από το μέτρο  $\mathcal{Q}$  δεν είναι διαδικασία  $GARCH$ . Η κατανομή της διαδικασίας των διαταρακτικών όρων κυριαρχείται από  $q$ -μη κεντρικές  $\chi^2$  τυχαίες μεταβλητές με ένα βαθμό ελευθερίας, ενώ η διαδικασία  $GARCH$  υπό το μέτρο  $P$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία που κατανέμεται από  $q$ -κεντρικές  $\chi^2$  τυχαίες μεταβλητές. Δίνεται το παρακάτω θεώρημα για την περίπτωση του  $GARCH(1,1)$  υποδείγματος.

**Θεώρημα 3.6:** Υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ , η διαδικασία των διαταρακτικών όρων κυριαρχείται από τη  $\chi^2(1)$  κατανομή με μη-κεντρική παράμετρο το  $\lambda$ .

**Απόδειξη :** Από το θεώρημα (3.5) έχουμε

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

όπου  $\xi_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$

άρα  $\frac{\xi_t}{\sigma_t} | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0,1)$ .

Ο τύπος της δεσμευμένης διακύμανσης υπό τη σχέση  $LRNVR$  είναι

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha\sigma_{t-1}^2 \left(\frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda\right)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Άρα  $\frac{1}{\alpha} \frac{\sigma_t^2 - \alpha_0}{\sigma_{t-1}^2} - \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \lambda\right)^2$

όπου  $\frac{\xi_{t-1}}{\sigma_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-2} \sim N(0,1)$ .

Ο κοινός μη-κεντρικός παράγοντας για τη διαδικασία της δεσμευμένης διακύμανσης υπό το μέτρο  $Q$  είναι το ασφάλιστρο κινδύνου  $\lambda$ . Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι η ποσότητα  $\frac{\xi_{t-i}}{\sigma_{t-i}}$  από τον τύπο (3.18) είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη τυπική κανονική κατανομή κάτω από το μέτρο  $Q$ . Σύμφωνα με το θεώρημα (3.5) το ασφάλιστρο κινδύνου  $\lambda$  επηρεάζει τη διαδικασία δεσμευμένης διακύμανσης καθολικά παρόλο το γεγονός ότι μέσω του μέτρου  $Q$  ο κίνδυνος τοπικά έχει εξαλειφθεί. Με άλλα λόγια, η ουδετεροποίηση του κινδύνου τοπικά δεν ταυτίζεται με την αντίστοιχη διαδικασία καθολικά. Η ανάγκη διαχωρισμού μεταξύ των δύο ειδών εξάλειψης κινδύνου δεν υφίσταται, όταν οι συντελεστές της σχέσης (3.18) είναι ίσοι με το μηδέν.

Εάν επιλεχθεί ένα διαφορετικού είδους *GARCH* μοντέλου για τις αποδόσεις, μπορούμε να έχουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά του θεωρήματος (3.5). Όπου παρουσιάζεται η μεταβλητή  $\varepsilon_t$  στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης, θα πρέπει να αντικαθίσταται από την ποσότητα  $\xi_t - \lambda\sigma_t$  με όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές. Για παράδειγμα για το *GJR - GARCH* μοντέλο θα έχω υπό το μέτρο  $Q$  :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \gamma\max(-\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1}, 0)^2 \quad \text{όπου } \gamma > 0.$$

Για το *EGARCH* υπόδειγμα θα έχω υπό το μέτρο  $Q$  :

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1\ln\sigma_{t-1}^2 + \beta_2(|\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1}| - \gamma(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1}))$$

όπου  $\beta_2, \gamma > 0$ .

Η αποτίμηση τυχαίων απολαβών (payoff) απαιτεί οι προσωρινά συνολικές αποδόσεις ενός υποκείμενου τίτλου να καταλήγουν σε μία τυχαία τελική τιμή, σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η τελική τιμή ενός υποκείμενου τίτλου προκύπτει από το παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 3.1** : Από το θεώρημα (3.5) και κάτω από το μέτρο  $Q$  έχουμε τον παρακάτω τύπο :

$$X_T = X_t \exp \left[ (T - t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right].$$

(3.19)

**Απόδειξη** : Από το θεώρημα (3.5) έχουμε ότι :

$$\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) = r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ υπό το μέτρο } \mathcal{Q}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{X_T}{X_t} \right) &= \sum_{s=t+1}^T \ln \left( \frac{X_s}{X_{s-1}} \right) = \sum_{s=t+1}^T r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \xi_s = \\ &= r(T-t) - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \end{aligned} \quad (3.20)$$

το οποίο συνεπάγεται

$$X_T = X_t \exp \left[ (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right].$$

■

**Πόρισμα 3.2 :** Η προεξοφλημένη διαδικασία τιμών  $e^{-rt} X_t$  είναι martingale υπό το μέτρο  $\mathcal{Q}$ .

**Απόδειξη :** Το πόρισμα (3.1) γράφεται ισοδύναμα

$$X_t = X_{t-1} \exp \left[ r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t \right]$$

από το παραπάνω παίρνοντας τη δεσμευμένη μέση τιμή θα έχω

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{Q}}[\exp(-rt)X_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= E^{\mathcal{Q}} \left[ X_{t-1} \exp(-rt) \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t \right) | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= X_{t-1} \exp(-r(t-1)) E^{\mathcal{Q}} \left[ \exp \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \xi_t \right) | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= X_{t-1} \exp(-r(t-1)) \end{aligned}$$

διότι  $\xi_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$  και από τη ροπογεννήτρια

$$E^{\mathcal{Q}}[\exp(\xi_t) | \mathcal{F}_{t-1}] = \exp \frac{1}{2} \sigma_t^2.$$

■



### 3.8 Αποτίμηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου Δικαιωμάτων Επιλογής στα Πλαίσια του Υπόδειγματος *GARCH*

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει χρήση των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από το προηγούμενο κεφάλαιο. Θα αποτιμηθούν ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα επιλογής σε μετοχές κάνοντας χρήση της δομής *LRNVR*. Επίσης, θα εξαχθεί και ο τύπος της δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου. Σκοπός αυτής της στρατηγικής είναι να αφήσει ανεπηρέαστη την τιμή ενός χαρτοφυλακίου παραγώγων όταν συντελούνται αλλαγές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου.

#### 3.8.1 Αποτίμηση Δικαιωμάτων Επιλογής στα Πλαίσια της Δομής *LRNVR*

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ποια είναι η διαδικασία που ακολουθούν οι αποδόσεις τιμών μιας μετοχής. Η αποτίμηση ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος επιλογής στα πλαίσια του *GARCH* μοντέλου γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

**Θεώρημα 3.7:** Η τιμή ενός ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματος αγοράς πάνω σε μία μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα,  $X_t$ , με λήξη τη στιγμή  $T$ , κάτω από τη σχέση *LRNVR* τη χρονική στιγμή  $t$  θα είναι :

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q [\max (X_T - K)_+ | \mathcal{F}_t]$$

όπου  $\max (x)_+$  είναι η μεγαλύτερη ποσότητα μεταξύ  $x$  και μηδέν. Επίσης,  $\mathcal{F}_t$  είναι το  $\sigma$ -πεδίο που παράγεται από το σύνολο  $\{X_t, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q+1}, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-p+1}^2\}$ .

Στην περίπτωση τώρα που η μελέτη μας αφορά το *GARCH*(1,1) υπόδειγμα, αυτή η διαδικασία δε θα είναι Markov μιας μεταβλητής, αλλά θα μετατρέπεται σε διαδικασία Markov δύο μεταβλητών. Έτσι, το υπόδειγμα *GARCH*(1,1) αποτίμησης δικαιωμάτων αντανακλά με σαφή τρόπο την κατάσταση της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου μέσω του αρχικού επιπέδου τιμών και της δεσμευμένης διακύμανσης κατά δεύτερον. Η τελευταία μας δίνει με αυτόν τον τρόπο τη δυνατότητα να προβάσουμε στο μοντέλο αποτίμησή μας, τις διαφορετικές καταστάσεις (υψηλές ή χαμηλές τιμές) της διακύμανσης του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια μεταβολών της οικονομίας.

**Θεώρημα 3.8 :** Η τιμή της δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και μιας μετοχής υπό τη σχέση *LRNVR* είναι

$$\Delta_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q \left[ \frac{X_T}{X_t} 1_{\{X_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t \right]$$

όπου  $1_{\{X_T \geq K\}}$  είναι δείκτρια συνάρτηση και  $K$  η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

**Απόδειξη :** Από το πόρισμα (3.1) έχω:

$$X_T = X_t \exp \left[ (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right]$$

ορίζω  $Y_{t,T} \equiv (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s$

κι έτσι θα έχω :

$$E^Q[X_T] = E^Q[X_t \exp(Y_{t,T})]$$

Με τον παραπάνω μετασχηματισμό και με τη βοήθεια του θεωρήματος (3.7), η τιμή του ευρωπαϊκού *GARCH* δικαιώματος θα είναι

$$C_t^{GH}(X_t) = e^{-(T-t)r} E^Q[\max[X_t \exp(Y_{t,T}) - K]_+ | \mathcal{F}_t]$$

Η δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου είναι η πρώτη μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για ένα τυχαίο  $h > 0$  θα έχω

$$\begin{aligned} C_t^{GH}(X_t + h) - C_t^{GH}(X_t) &= \\ e^{-(T-t)r} E^Q[\max((X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K)_+ - \max[X_t \exp(Y_{t,T}) - K]_+ | \mathcal{F}_t] &= \\ e^{-(T-t)r} \int_{-\infty}^{\infty} \max((X_t + h)e^y - K)_+ - \max(X_t e^y - K)_+ dF(y | \mathcal{F}_t) & \end{aligned} \quad (3.20)$$

όπου  $F(y | \mathcal{F}_t)$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) της  $Y_{t,T}$  κάτω από το μέτρο  $Q$ . Θεωρώντας μια δείκτρια συνάρτηση θα έχω την εξής σχέση  $\max((X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K)_+ = ((X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K)1_{[(X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K > 0]}$

Στην περίπτωση  $h > 0$  θα έχω  $(X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K > 0$  ή

$$e^{Y_{t,T}} > \frac{K}{(X_t + h)} \quad \text{ή} \quad Y_{t,T} = \ln e^{Y_{t,T}} > \ln \frac{K}{(X_t + h)} .$$

Παρομοίως  $X_t e^{Y_{t,T}} - K > 0$  και μπορεί να γραφτεί ως

$$Y_{t,T} = \ln e^{Y_{t,T}} > \ln \frac{K}{X_t}.$$

Η εξίσωση (3.20) τότε γίνεται :

$$\begin{aligned} & e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t+h}}^{\infty} [(X_t+h)e^y - K] dF(y | \mathcal{F}_t) \\ & - e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t}}^{\infty} [X_t e^y - K] dF(y | \mathcal{F}_t) \\ & = e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t+h}}^{\ln \frac{K}{X_t}} (X_t e^y - K) dF(y | \mathcal{F}_t) \\ & - e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t+h}}^{\infty} h e^y dF(y | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Αφού  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t+h}}^{\ln \frac{K}{X_t}} (X_t e^y - K) dF(y | \mathcal{F}_t) = 0$

$$\begin{aligned} \text{θα έχω} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_t^{GH}(X_t+h) - C_t^{GH}(X_t)}{h} &= e^{-(T-t)r} \int_{\ln \frac{K}{X_t+h}}^{\infty} e^y dF(y | \mathcal{F}_t) = \\ & e^{-(T-t)r} E^Q [e^y 1_{(X_T > K)}]. \end{aligned}$$

Το αυτό ισχύει και για την περίπτωση  $h < 0$ . Έτσι, θα έχω

$$\begin{aligned} \frac{dC_t}{dX_t} &= \Delta_t \\ &= e^{-(T-t)r} E^Q [e^y 1_{(X_T > K)}]. \end{aligned}$$

■

Η δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου μιας μετοχής και ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (put option) δίνεται από τον τύπο :

$$\Delta_t^{GH} = e^{-(T-t)r} E^Q \left[ \frac{X_T}{X_t} 1_{\{K \geq X_T\}} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε δουλεύοντας όπως παραπάνω ή μέσω της σχέσης ισοτιμίας δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης (put-call parity relationship).

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι η τιμή του δικαιώματος επιλογής και της δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου υπό *GARCH* δεσμευμένη διακύμανση, είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες τιμές του μοντέλου Black-Scholes υπό καθεστώς ομοσκεδαστικότητας. Η αναλυτική λύση των τιμών του δικαιώματος επιλογής και της δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου υπό *GARCH* δεσμευμένη διακύμανση δεν μπορεί να παρασταθεί εξαιτίας της αδυναμίας μας να παράγουμε αναλυτικά για πάνω από μια περίοδο τη δεσμευμένη κατανομή του υποκείμενου τίτλου. Αυτό το πρόβλημα ξεπερνιέται μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo και ταυτόχρονη χρήση μεταβλητών ελέγχου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Σύγκριση Υποδειγμάτων Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής με $GARCH(1,1)$ και Black-Scholes

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει η σύγκριση των υποδειγμάτων αποτίμησης δικαιωμάτων  $GARCH$  και Black-Scholes. Στη μελέτη μας θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο  $GARCH(1,1)$  το οποίο είναι το πιο διαδεδομένο της οικογένειας  $GARCH$ .

Παρόλο το γεγονός ότι η ομοσκεδαστική διαδικασία που υιοθετείται από το μοντέλο Black-Scholes είναι μία ειδική περίπτωση της διαδικασίας  $GARCH$ , η ερμηνεία του πρώτου μοντέλου στα πλαίσια του  $GARCH$  είναι πιο περίπλοκη. Κάτω από τη λανθασμένη υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας, όταν η πραγματική διαδικασία που ακολουθεί το μοντέλο  $GARCH$  είναι η ετεροσκεδαστική, η απαλοιφή του κινδύνου πρέπει να γίνει καθολικά (κι όχι τοπικά για μια περίοδο) για να είμαστε συνεπείς με τις αρχές του μοντέλου μας. Με άλλα λόγια με την παραπάνω υπόθεση θεωρούμε ότι η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Τα παραπάνω θα μπορούσαμε να τα συνοψίσουμε λέγοντας ότι κάνοντας χρήση του Black-Scholes μοντέλου στα πλαίσια του  $GARCH$  (δηλ, ετεροσκεδαστική φύση της δεσμευμένης διακύμανσης) είναι ισοδύναμο με τη χρήση της στάσιμης διακύμανσης της  $GARCH$  διαδικασίας αποδόσεων τιμών ενός υποκείμενου τίτλου στον τύπο των Black-Scholes.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το παρακάτω θεώρημα όπου παραθέτονται κάποιες ιδιότητες της *GARCH* διαδικασίας μετά την εφαρμογή της συνθήκης τοπικά ουδέτερου κινδύνου.

**Θεώρημα 4.1 :** Κάτω από το μέτρο  $Q$ , εάν  $|\lambda| < \sqrt{(1 - \alpha_1 - \beta_1)/\alpha_1}$ , τότε

i) η στάσιμη διακύμανση της  $\xi_t$  ισούται με  $\alpha_0[1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}$ .

ii) η  $\xi_t$  είναι λεπτόκυρτη.

iii)  $Cov^Q\left(\frac{\xi_t}{\sigma_t}, \sigma_{t+1}^2\right) = -2\lambda\alpha_0\alpha_1[1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}$ .

Η στάσιμη διακύμανση της *GARCH* διαδικασίας αποδόσεων υπό το μέτρο  $P$ , είναι  $\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$ . Επίσης, η δεσμευμένη διακύμανση είναι ασυσχέτιστη με την απόδοση με χρονική υστέρηση υπό το μέτρο  $P$ . Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η εφαρμογή της σχέσης τοπικά ουδέτερου κινδύνου προκαλεί κατά πρώτον αύξηση στη στάσιμη διακύμανση  $\alpha_0[1 - (1 + \lambda^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}$ . Κατά δεύτερον, έχει ως αποτέλεσμα η δεσμευμένη διακύμανση να είναι αρνητικά (θετικά) συσχετισμένη με την απόδοση του υποκείμενου τίτλου με χρονική υστέρηση, εάν το ασφάλιστρο κινδύνου  $\lambda$  είναι θετικό (αρνητικό).

Για το μοντέλο Black-Scholes έχουμε τους παρακάτω γνωστούς τύπους

$$C_t^{BS} = X_t N(d_t) - e^{-(T-t)r} KN(d_t - \sigma\sqrt{T-t}), \quad (4.1)$$

$$\Delta_t^{BS} = N(d_t)$$

όπου

$$d_t = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{και} \quad \sigma^2 = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}.$$

Εάν η διακύμανση του μοντέλου Black-Scholes ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική διαδικασία διάχυσης (lognormal diffusion process) όπως έχει παρουσιαστεί από τους Hull και White (1987), η τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή δεδομένης της ιστορίας της διακύμανσης. Εάν τώρα η τιμή ενός τίτλου είναι στιγμιαία ασυσχέτιστη με τη διακύμανση, αυτή η δεσμευμένη λογαριθμοκανονική κατανομή εξαρτάται μόνο από τον μέσο όρο της διακύμανσης και όχι από οποιαδήποτε άλλο μονοπάτι που ακολουθεί η διακύμανση. Έτσι, όταν έχουμε τον υπό συνθήκη μέσο όρο της διακύμανσης, η τιμή του δικαιώματος είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes με τη βοήθεια της κατανομής του μέσου όρου της διακύμανσης. Παρόλα αυτά η κατανομή του

μέσου όρου της διακύμανσης δεν είναι η λογαριθμοκανονική και οι Hull και White πρότειναν αντί αυτής μια προσέγγιση μέσω σειρών Taylor που περιλαμβάνει τις ροπές της κατανομής.

Στην περίπτωση όπου η τιμή του τίτλου και η διακύμανση στο Black-Scholes μοντέλο συσχετίζονται, η μέση τιμή της υπό συνθήκη λογαριθμοκανονικής κατανομής της τιμής του τίτλου εξαρτάται από το συγκεκριμένο μονοπάτι που ακολουθήθηκε από τη διακύμανση και όχι από το μέσο όρο της διακύμανσης πάνω σε αυτό το μονοπάτι. Η τιμή του δικαιώματος επιλογής δεδομένης της διαδρομής της διακύμανσης, δεν είναι πια η τιμή που προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes (ενσωματώνοντας το μέσο όρο της διακύμανσης). Σε αυτή την περίπτωση οι Hull και White κάνουν χρήση μεθόδων προσομοίωσης για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος επιλογής.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω που αφορούν το μοντέλο των Black-Scholes, στο *GARCH* υπόδειγμα η διακύμανση των αποδόσεων την επόμενη χρονική στιγμή είναι εκ των προτέρων γνωστή με βεβαιότητα δεδομένου του πληροφοριακού συνόλου μέχρι τη τρέχουσα χρονική στιγμή, και έτσι η υπό συνθήκη κατανομή της απόδοσης ενός υποκείμενου τίτλου κατά την επόμενη χρονική στιγμή είναι λογαριθμοκανονική με γνωστή δεσμευμένη διακύμανση. Πέρα όμως από την πρώτη επόμενη χρονική στιγμή, η δεσμευμένη διακύμανση εξελίσσεται στοχαστικά μέσα στο πλαίσιο της *GARCH* διαδικασίας. Η κατανομή μιας μελλοντικής χρονικής στιγμής της δεσμευμένης διακύμανσης σίγουρα δεν είναι λογαριθμοκανονική. Έτσι, σε αντίθεση με τα διμετάβλητα μοντέλα διάχυσης, η από κοινού συνάρτηση κατανομής για τις λογαριθμικές τιμές του υποκείμενου τίτλου και της λογαριθμικής (δεσμευμένης) διακύμανσης δεν είναι κανονική δύο μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο η κατανομή της τελικής τιμής του υποκείμενου τίτλου είναι απίθανο να ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική, δεδομένης της πληροφορίας του μονοπατιού μιας περιόδου από τη δεσμευμένη διακύμανση.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαφορά μεταξύ του *GARCH*(1,1) μοντέλου και του Black-Scholes, ας θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής :

**(α)** κάθε συσχέτιση μεταξύ της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου και της δεσμευμένης διακύμανσης μπορεί να αγνοηθεί (υποθέτουμε  $\lambda$  μικρό)

**(β)** ο χρόνος λήξης του δικαιώματος επιλογής είναι αρκετά μεγάλος

**(γ)** η υπό συνθήκη κατανομή της τελικής τιμής του υποκείμενου τίτλου κάτω από το μέτρο  $Q$  μπορεί να προσεγγιστεί από τη λογαριθμοκανονική κατανομή (υποθέτουμε τις παραμέτρους του *GARCH* με μικρές τιμές)

Σύμφωνα με τις υποθέσεις (α) και (γ), και ακολουθώντας τη λογική των Hull και White (1987), η τιμή του *GARCH* δικαιώματος επιλογής είναι περίπου η αναμενόμενη τιμή που προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes, με τη μέση τιμή να εφαρμόζεται στην κατανομή που προκύπτει από το μέσο όρο των δεσμευμένων κατανομών υπό το μέτρο  $Q$ . Κάνοντας χρήση της προσέγγισης μέσω σειρών, σύμφωνα με τους Hull και White, η *GARCH* τιμή δικαιώματος επιλογής μπορεί να υπολογιστεί ως συνάρτηση των ροπών του μέσου όρου της δεσμευμένης διακύμανσης. Εξαιτίας τώρα της (β) συνθήκης, η αναμενόμενη τιμή του μέσου όρου της δεσμευμένης διακύμανσης θα είναι αρκετά κοντά σε αυτήν της μη-δεσμευμένης διακύμανσης κάτω από το μέτρο  $Q$  και οι ροπές δεύτερης και ανώτερης τάξης του μέσου όρου της δεσμευμένης διακύμανσης θα είναι αμελητέες. Δεδομένου ενός πολύ μικρού ασφάλιστρου κινδύνου στην υπόθεση (α), η μη-δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο  $Q$  θα είναι περίπου ίση με αυτήν κάτω από το μέτρο  $P$ . Έτσι, η τιμή Black-Scholes θα είναι πολύ κοντά σε αυτήν του μοντέλου *GARCH*.

Εάν η συνθήκη (α) δεν εφαρμοστεί, τότε οι δύο τιμές θα αποκλίνουν για δύο λόγους. Πρώτον, για την τιμή Black-Scholes έχει υποθεθεί ότι βασίζεται σε λανθασμένη μη-δεσμευμένη διακύμανση, δηλ. τη μη-δεσμευμένη διακύμανση κάτω από το μέτρο  $P$ . Από τη στιγμή που η μη-δεσμευμένη διακύμανση κάτω από το μέτρο  $Q$  έχει υψηλότερη τιμή για μη μηδενικό ασφάλιστρο κινδύνου, αυτό από μόνο του αρκεί για να έχει ως αποτέλεσμα τη χαμηλότερη τιμή του Black-Scholes δικαιώματος επιλογής από το αντίστοιχο *GARCH* για οποιαδήποτε αρχική τιμή δεσμευμένης διακύμανσης και της καθαρής αξίας δικαιωμάτων επιλογής (moneyness). Αυτή τη συμπεριφορά θα την ονομάσουμε απόκλιση της μη-δεσμευμένης διακύμανσης. Δεύτερον, η τιμή *GARCH* θα διαφέρει από την αναμενόμενη Black-Scholes τιμή, ως συνάρτηση του μέσου όρου της δεσμευμένης διακύμανσης. Αυτό το αποτέλεσμα, δηλαδή της απόκλισης που οφείλεται στην εξάρτηση της διαδρομής, στην *GARCH* αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής θα συνέβαινε και στην περίπτωση όπου η συνθήκη (γ) παραβιαζόταν.

Εάν λοιπόν η συνθήκη (γ) δεν ισχύει, το δικαίωμα επιλογής έχει μικρό χρόνο μέχρι τη λήξη του, κι έτσι η αρχική δεσμευμένη διακύμανση επηρεάζει περισσότερο το αποτέλεσμα. Εάν η αρχική δεσμευμένη διακύμανση είναι μικρότερη από την μη-δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο  $Q$ , οι δεσμευμένες διακυμάνσεις μέχρι τη λήξη θα τείνουν να βρίσκονται κάτω από την τιμή της μη-δεσμευμένης διακύμανσης υπό το μέτρο  $Q$ . Ένα ξεκάθαρο συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι η αναμενόμενη τιμή του μέσου όρου των δεσμευμένων διακυμάνσεων θα είναι πιο χαμηλή σε σχέση με την τιμή της μη-δεσμευμένης διακύμανσης υπό το μέτρο  $Q$ . Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε όταν η αρχική δεσμευμένη διακύμανση είναι υψηλή. Έτσι, ακόμη κι αν



χρησιμοποιούσαμε τη μη-δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο  $Q$  στο μοντέλο των Black-Scholes, διαφορά στην τιμή αποτίμησης θα υπήρχε πάλι, σε σχέση με το  $GARCH$  μοντέλο, εξαιτίας της λανθασμένης επιλογής της αρχικής συνθήκης για τη διακύμανση.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι τρεις αποκλίσεις που αναφέρθηκαν δεν ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι η αρχική δεσμευμένη διακύμανση έχει χαμηλότερη τιμή συγκριτικά με τη μη-δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο  $Q$  (αλλά και υπό το μέτρο  $P$ ). Η απόκλιση που οφείλεται στη μη-δεσμευμένη διακύμανση θα οδηγήσει την τιμή Black-Scholes να είναι χαμηλότερη. Αντίθετα, η απόκλιση που οφείλεται στη δεσμευμένη διακύμανση θα οδηγήσει την τιμή Black-Scholes να είναι υψηλή. Όσον αφορά την απόκλιση που οφείλεται στην εξάρτηση του μονοπατιού, εξαρτάται από παραμέτρους όπως η καθαρή αξία των δικαιωμάτων επιλογής και χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος επιλογής.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω θα λέγαμε ότι οι διαφορές στο μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής των Black-Scholes σε σύγκριση με το αντίστοιχο  $GARCH(1,1)$  είναι :

**(A)** Στο  $GARCH(1,1)$  μοντέλο η αρχική δεσμευμένη διακύμανση είναι απίθανο να είναι ίση με τη μη-δεσμευμένη διακύμανση  $\sigma^2$ . Ακόμα και αν η αρχική διακύμανση τεθεί ίση με τη μη-δεσμευμένη διακύμανση της αρχικής διαδικασίας αποδόσεων (υπό το μέτρο  $P$ ), η διαδικασία της τοπικά ουδετεροποίησης κινδύνου θα έχει ως αποτέλεσμα η δεσμευμένη διακύμανση υπό το μέτρο  $Q$  να μετατραπεί σε μη-δεσμευμένη διακύμανση μεγαλύτερης τιμής σε σχέση με το  $\sigma^2$  (συμπέρασμα (i) θεωρήματος (4.1)).

**(B)** Από το (ii) συμπέρασμα του θεωρήματος (4.1) η  $\xi_t$  διαδικασία παραμένει λεπτόκυρη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα δικαίωμα με αρνητική εσωτερική αξία (out-of-the-money) να έχει περισσότερες πιθανότητες να καταλήξει με θετική εσωτερική αξία (in-the-money). Αυτό συνεπάγεται τη μεγαλύτερη τιμή του  $GARCH$  δικαιώματος επιλογής σε σχέση με αυτό των Black-Scholes. Χάρη σε αυτήν την ιδιότητα της  $\xi_t$  διαδικασίας, ένα δικαίωμα επιλογής με θετική εσωτερική αξία έχει περισσότερες πιθανότητες να καταλήξει με αρνητική εσωτερική αξία. Το τελευταίο όμως δε συνεπάγεται χαμηλότερη τιμή του  $GARCH$  δικαιώματος επιλογής για δικαιώματα επιλογής με θετική εσωτερική αξία σε σχέση με το αντίστοιχο προκύπτον από το μοντέλο των Black-Scholes. Αυτό είναι αλήθεια διότι η μεγαλύτερη πιθανότητα εξάσκησης στις υψηλότερες τιμές της λεπτόκυρης καμπύλης (πιο πάνω από την κανονική), έχει ως αποτέλεσμα να πιέζει τις τιμές των δικαιωμάτων επιλογής με θετική εσωτερική αξία προς τα πάνω.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Εφαρμογή του *GARCH* Υποδείγματος Αποτίμησης Δικαιωμάτων Επιλογής

#### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε μεθόδους με τις οποίες θα εφαρμόσουμε το μοντέλο *GARCH* στην αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής. Δύο διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες απαιτούνται για την εφαρμογή αυτού του υποδείγματος. Η πρώτη είναι η βελτιστοποίηση (calibration) των παραμέτρων με τα δεδομένα και η δεύτερη είναι η πρόβλεψη της τιμής του δικαιώματος επιλογής.

#### 5.2 Βελτιστοποίηση της *GARCH* Διαδικασίας με Χρήση Εμπειρικών Δεδομένων

Στη διαδικασία αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής όπως παρουσιάστηκε από τον Duan, η διαδικασία *GARCH* “προσαρμόζεται” στη διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη του υποκείμενου τίτλου. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι της *GARCH* –  $M$  διαδικασίας υπό το μέτρο  $P$  εκτιμώνται με τη βοήθεια των σειρών των αποδόσεων του χρηματοοικονομικού προϊόντος, μέσω της μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας της  $\sigma_t^2$ .

Για την απλή περίπτωση της *GARCH*(1,1) –  $M$  διαδικασίας υπό το μέτρο  $P$  θα έχω :

$$X_t = X_{t-1} \exp \left( r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t \right)$$

καθώς και  $\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{a}_0 + \widehat{a}\varepsilon_{t-1}^2 + \widehat{\beta}\widehat{\sigma}_{t-1}^2$  για την περίπτωση του  $GARCH(1,1)$  μοντέλου και τις εκτιμήσεις των παραμέτρων.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, κατά αντιστοιχία θα έχω για τη διακύμανση μέχρι τη στιγμή  $t$  :

$$f(0, \widehat{\sigma}_t^2) = \sum_{i=1}^t -\frac{1}{2} \ln \widehat{\sigma}_i^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2}{\widehat{\sigma}_i^2} = \sum_{i=1}^t l_i(a_0, a, \beta, \sigma_0^2).$$

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης (optimization) της διακύμανσης έτσι μετατρέπεται στην ουσία στην παρακάτω μορφή

$$\max_{\widehat{a}_0, \widehat{a}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}_0^2} f(0, \widehat{\sigma}_t^2)$$

όπου η συνάρτηση πιθανοφάνειας  $f(0, \widehat{\sigma}_t^2)$  μεγιστοποιείται ως προς τις παραμέτρους  $\widehat{a}_0$ ,  $\widehat{a}$  και  $\widehat{\beta}$ . Από τη στιγμή που η τιμή της  $\widehat{\sigma}_{t-1}^2$  είναι άγνωστη, αποτελεί και αυτή μέρος του προβλήματος της βελτιστοποίησης.

Η τιμή της παραμέτρου  $\widehat{\lambda}$ , μετά την εύρεση των παραπάνω εκτιμήσεων, εκτιμάται ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων ανάμεσα στις πραγματικές και τις εκτιμώμενες τιμές του υποκείμενου τίτλου μέχρι τη στιγμή  $t$  :

$$\min_{\widehat{\lambda}} \sum_{i=1}^t (X_i - \widehat{X}_i)^2 = \min_{\widehat{\lambda}} \sum_{i=1}^t (X_i - \widehat{X}_{i-1} \exp \left( r\Delta t - \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_i^2 + \widehat{\lambda} \widehat{\sigma}_i + \varepsilon_i \right))^2$$

με  $\widehat{X}_i$  να είναι μια εκτίμηση της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου τη στιγμή  $i$  και  $X_i$  η πραγματική τιμή αυτού.

Και τα δύο ανωτέρω περιγραφέντα προβλήματα βελτιστοποίησης παρουσιάζουν ομοιότητα ως προς το γεγονός ότι έχουμε περισσότερες εξισώσεις από μεταβλητές. Ένας τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων είδους προβλημάτων προτείνει τη χρήση του αλγόριθμου των Berndt, Hall και Hausman.

Πολλά στατιστικά πακέτα έχουν έτοιμους αλγόριθμους για την εκτίμηση των παραπάνω παραμέτρων. Το πρόβλημα όμως είναι ότι τα περισσότερα από αυτά είναι σχεδιασμένα με τρόπο ώστε να εξυπηρετούν μόνο συγκεκριμένους τύπους μοντέλων  $GARCH$ . Στην παρούσα εργασία η εντολή `fminsearch` σε Matlab γλώσσα προγραμματισμού είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί για

την επίλυση του προβλήματος της εκτίμησης των παραμέτρων, με βάση τη χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας που παρουσιάστηκε παραπάνω.

### 5.3 Προσομοίωση Monte Carlo

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo επιλύει αριθμητικά στοχαστικά ολοκληρώματα. Αυτό επιτυγχάνεται παράγοντας  $N$  δειγματικά μονοπάτια μιας στοχαστικής διαδικασίας, ως τη συμβολίσουμε με  $f$ , μέσω της παραγωγής τυχαίων αριθμών από τη υποκείμενη κατανομή πιθανοτήτων. Όλες οι τελικές τιμές κάθε δειγματικού μονοπατιού αθροίζονται και μετά διαιρούνται με τον αριθμό των επαναλήψεων. Σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών θα έχω

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) q(x) dx$$

όπου  $(X_n)$  παράγονται ανεξάρτητα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $q$ . Στην παρούσα εργασία η pdf που θα μας απασχολήσει θα είναι η τυπική κανονική κατανομή.

#### 5.3.1 Δικαιώματα Επιλογής Ευρωπαϊκού Τύπου με Σταθερή Μεταβλητότητα

Η αποτίμηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού στα πλαίσια του Black-Scholes μοντέλου θα γίνεται μέσω της παρακάτω διαδικασίας

$$V_t = e^{-t(T-t)} E^Q[V_T | \mathcal{F}_t] = e^{-t(T-t)} E^Q[f_T | \mathcal{F}_t] = e^{-t(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f_T(x) q(x) dx$$

Για ένα δικαίωμα αγοράς, θα ισχύει  $f_T = \max(X_T - K)$ , όπου  $X_T$  και  $K$  είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή  $T$  και η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος επιλογής αντίστοιχα. Η  $X_T$  και κατά συνέπεια και η  $f_T$  είναι συνάρτηση μιας κίνησης Brown. Έτσι,

$$X_T = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_t\right)$$

και σε διακριτό χρόνο μπορεί να εκτιμηθεί από

$$\widehat{X}_T = \widehat{X}_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma \xi_t \sqrt{\Delta t}\right)$$

με  $\xi_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0,1)$  υπό το μέτρο  $Q$ .

### 5.3.2 Δικαιώματα Επιλογής Ευρωπαϊκού Τύπου με Διακύμανση GARCH

Ο σκοπός και εδώ είναι να εκτιμήσουμε την τιμή  $f_T$  τη χρονική στιγμή. Θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι η διαδικασία GARCH – M, όπως ορίστηκε στην παρούσα εργασία, εξελίσσεται σε διακριτό χρόνο. Έτσι, δεν θα έρθουμε στην ανάγκη επίλυσης ολοκληρωμάτων. Όπως έχει αναφερθεί νωρίτερα, η διαδικασία της τιμής της μετοχής υπό τη συνθήκη LRNVR και με GARCH δεσμευμένη μεταβλητότητα θα είναι

$$X_T = X_t \exp \left( (T - t)r - \sum_{i=t}^T \left( \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \xi_i \sigma_i \right) \right)$$

όπου  $\xi_i | \mathcal{F}_{i-1} \sim N(0,1)$  υπό το μέτρο  $Q$  και

$$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\xi_{i-j} - \lambda \sigma_{i-j})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{i-j}^2.$$

Αξίζει να αναφέρουμε πως για κάθε πιθανό μονοπάτι της μετοχής, ένας τυχαίος αριθμός  $\xi_t$  παράγεται για κάθε διάστημα έτσι ώστε  $t \in \mathbb{N} \cap [1, T]$ . Κάθε διαστήματα είναι μεγέθους  $\Delta t$ . Εάν υποθέσουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο να είναι σε ετήσια βάση τότε το  $\Delta t$  θα είναι  $1/365$  καθώς υποθέτουμε πως οι μέρες που γίνονται διαπραγματεύσεις στον χρόνο είναι 365. Τέλος, η μέθοδος της προσομοίωσης επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Ο ακριβής αριθμός εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια.

### 5.4 Τεχνικές Μείωσης Διακύμανσης

Για να επιτύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo καθώς και για να αυξήσουμε την ταχύτητα υπολογισμού των ζητούμενων τιμών, συνήθως κάνουμε χρήση τεχνικών μείωσης διακύμανσης.

Μερικές από αυτές είναι η μέθοδος της αντιθετικής δειγματοληψίας καθώς και η μείωση της διακύμανσης μέσω δέσμευσης. Στην παρούσα εργασία θα γίνει η χρήση των μεταβλητών ελέγχου ως μεθόδου μείωσης της διακύμανσης. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική η χρήση μιας επιπρόσθετης πληροφορίας για μια τυχαία μεταβλητή οδηγεί στη μείωση της διακύμανσής της. Συνήθως εφαρμόζεται όταν έχουμε δύο παρόμοια δικαιώματα επιλογής, έστω  $A$  και  $B$ . Το δικαίωμα επιλογής  $A$  είναι αυτό το οποίο πρόκειται να αποτιμηθεί. Το δικαίωμα επιλογής  $B$  έχει λύση σε αναλυτική μορφή και είναι παρόμοιο με το  $A$ . Δύο διαδικασίες προσομοίωσης εφαρμόζονται παράλληλα κάνοντας χρήση της ίδιας ακολουθίας τυχαίων αριθμών καθώς και το ίδιο  $\Delta t$ . Η πρώτη

προσομοίωση διεξάγεται για την παραγωγή της τιμής  $f_A^*$  που είναι η εκτίμηση για την τιμή του δικαιώματος επιλογής  $A$ . Η δεύτερη αντίστοιχα διεξάγεται για την απόκτηση της  $f_B^*$  που εκτιμά την τιμή  $B$ . Κατά συνέπεια μια καλύτερη εκτίμηση της τιμής  $f_A$  του δικαιώματος επιλογής  $A$  επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B$$

όπου  $f_B$  είναι η πραγματική τιμή του δικαιώματος επιλογής  $B$  που προκύπτει από αναλυτική τύπο. Στην παρούσα εργασία το δικαίωμα επιλογής  $A$  θα είναι το δικαίωμα επιλογής ευρωπαϊκού τύπου με  $GARCH$  διακύμανση, ενώ το ρόλο του δικαιώματος επιλογής  $B$  (ως μεταβλητή ελέγχου) θα έχει το δικαίωμα επιλογής ευρωπαϊκού τύπου με σταθερή διακύμανση υπολογισμένο με τους αναλυτικούς τύπους που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα. Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και για τον υπολογισμό των τιμών των δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου.

## 5.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των τιμών δικαιωμάτων πώλησης ευρωπαϊκού τύπου και των τιμών αντιστάθμισης κινδύνου δέλτα. Αυτή η μέθοδος για τον υπολογισμό δικαιωμάτων επιλογής όπως περιγράφηκε στην ενότητα 5.3 είναι γνωστή από τον Boyle (1977) και επιλέχθηκε καθώς η κατανομή των συνολικών αποδόσεων σε μια χρονική στιγμή  $t$  δεν μπορεί να εξαχθεί σε αναλυτική μορφή. Διεξήχθησαν 50.000 επαναλήψεις για τις προκύπτουσες τιμές.

Η περιγραφείσα στην ενότητα 5.4 μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου θα χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας στους υπολογισμούς μας. Ως μεταβλητές ελέγχου λογίζονται η θεωρητική τιμή Black-Scholes (με ονομασία `prixTheor` στον κώδικα της Matlab) καθώς και η θεωρητική τιμή της δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου (με ονομασία `deltaTheor` στον κώδικα της Matlab) για τον υπολογισμό των αντίστοιχων τιμών υπό  $GARCH$  μοντέλο. Ο πλήρης κώδικας βρίσκεται στο παράρτημα Β. Η μέθοδος εφαρμόζεται για τιμή της σταθεράς  $c$  από τον τύπο  $f_A = f_A^* + c(f_B - f_B^*)$  τόσο για  $c = 1$  όσο και για την τιμή μετά από την εκτίμησή της, η οποία προέκυψε μετά από 10.000 επαναλήψεις. Οι πίνακες για την πρώτη περίπτωση παρατίθενται στο παράρτημα Ε.

Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων έγινε εκτίμηση των παραμέτρων που παρουσιάζονται στους τύπους (3.1) και (3.3) για  $p = 1$  και  $q = 1$  στο  $GARCH(1,1) - M$  μοντέλο. Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε αφορά τις

προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος του *S&P 100* δείκτη μετοχών, για κάθε ημέρα, για την περίοδο από 3/1/2000 έως 19/12/2006. Η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιήθηκε, όπως περιγράφηκε στις ενότητες 2.2.3 και 5.2, και οι εκτιμώμενες τιμές είναι :

- $a_0 = 5.32310861 \times 10^{-7}$
- $a_1 = 7.06889136 \times 10^{-2}$
- $\beta_1 = 9.25585842 \times 10^{-1}$
- $\lambda = 4.335574478 \times 10^{-2}$  .

Τρία επίπεδα αρχικών υπό δέσμευση τυπικών αποκλίσεων θα μελετηθούν. Το πρώτο θα είναι  $\sigma_1 = \sigma^*$ , όπου η αρχική τιμή της υπό συνθήκη τυπικής απόκλισης θα είναι ίση με την τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$ ,  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ , η οποία τιμή είναι και η μεταβλητότητα στο μοντέλο Black-Scholes, ή με άλλα λόγια της μη-δέσμευμένης τυπικής απόκλισης για το μοντέλο *GARCH*. Τα άλλα δυο επίπεδα θα είναι 20% πάνω και 20% κάτω από το προαναφερθέν επίπεδο στασιμότητας. Με την παραπάνω ανάλυση της αρχικής υπό δέσμευση διακύμανσης για τρία ξεχωριστά επίπεδα, προσδιορίζουμε τον βαθμό επίδρασής της στις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς

Στην ανάλυσή μας θα θεωρήσουμε το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ίσο με μηδέν,  $r = 0$ , για να γίνει ευκολότερη η σύγκριση των δικαιωμάτων αγοράς με θετική ή αρνητική εσωτερική αξία. Επίσης η τιμή εξάσκησης ορίζεται ίση με τη μονάδα,  $K = 1$ , και θεωρούμε το εύρος των αναλογιών,  $S/K$ , από 0.75 έως 1.25 για τις αρχικές τιμές του υποκείμενου τίτλου προς την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς. Τέλος, οι τρεις ακόλουθοι πίνακες αφορούν ημερομηνίες λήξης  $T = 30, 90$  και 180 ημερών αντίστοιχα.

Ημερομηνία Λήξης T=30 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
$\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8$					
	0.75	0.0007	0.0008	0.1627	0.0000
	0.80	0.0491	0.0957	0.9480	0.8338
	0.90	14.1204	5.9798	-0.5765	0.0101
	0.95	78.9534	45.0087	-0.4299	0.0032
$S_0/K$	1.00	261.1551	207.2288	-0.2065	0.0011
	1.05	588.7069	553.0079	-0.0606	0.0006
	1.10	1022.2375	1010.4611	-0.0115	0.0004
	1.20	2000.5744	2000.5156	-0.0000	0.0002
	1.25	2500.0614	2499.7198	-0.0001	0.0002
$\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0$					
	0.75	0.0007	0.0658	99.0561	38.0426
	0.80	0.0491	0.3551	6.2255	1.1284
	0.90	14.1204	15.9115	0.1268	0.0157
	0.95	78.9534	76.3677	-0.0328	0.0039
$S_0/K$	1.00	261.1551	254.9518	-0.0238	0.0014
	1.05	588.7069	587.9094	-0.0014	0.0007
	1.10	1022.2375	1024.6802	0.0024	0.0005
	1.20	2000.5744	2001.7826	0.0006	0.0003
	1.25	2500.0614	2499.6137	-0.0002	0.0003
$\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2$					
	0.75	0.0007	0.2698	409.0209	95.3778
	0.80	0.0491	1.4003	27.4944	2.8055
	0.90	14.1204	31.0806	1.2011	0.0215
	0.95	78.9534	112.6439	0.4267	0.0050
$S_0/K$	1.00	261.1551	303.0503	0.1604	0.0017
	1.05	588.7069	625.7786	0.0630	0.0009
	1.10	1022.2375	1046.0965	0.0233	0.0006
	1.20	2000.5744	2006.3507	0.0029	0.0004
	1.25	2500.0614	2502.9004	0.0011	0.0003

**Πίνακας 5.1 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα για  $T = 30$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας\*.

\* Οι τιμές είναι κατά 10.000 φορές μεγαλύτερες. Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .



Ημερομηνία Λήξης T=90 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
$\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8$ $S_0/K$	0.75	1.7528	1.7939	0.0235	0.1147
	0.80	9.3751	5.5462	-0.4084	0.0349
	0.90	102.3082	58.3572	-0.4296	0.0060
	0.95	235.1519	159.1404	-0.3232	0.0032
	1.00	452.1723	363.4157	-0.1963	0.0019
	1.05	755.6666	679.1405	-0.1013	0.0013
	1.10	1132.9306	1082.8383	-0.0442	0.0010
	1.20	2028.3175	2017.6330	-0.0053	0.0006
	1.25	2511.7188	2508.9895	-0.0011	0.0006
$\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0$ $S_0/K$	0.75	1.7528	5.1254	1.9242	0.1925
	0.80	9.3751	13.8847	0.4810	0.0496
	0.90	102.3082	97.5970	-0.0460	0.0080
	0.95	235.1519	221.0184	-0.0601	0.0041
	1.00	452.1723	434.7833	-0.0385	0.0024
	1.05	755.6666	743.2760	-0.0164	0.0016
	1.10	1132.9306	1130.2002	-0.0024	0.0011
	1.20	2028.3175	2039.0726	0.0053	0.0008
	1.25	2511.7188	2523.6325	0.0047	0.0007
$\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2$ $S_0/K$	0.75	1.7528	11.0806	5.3217	0.2954
	0.80	9.3751	28.8124	2.0733	0.0728
	0.90	102.3082	146.0412	0.4275	0.0104
	0.95	235.1519	287.0256	0.2206	0.0052
	1.00	452.1723	510.9076	0.1299	0.0030
	1.05	755.6666	812.3744	0.0750	0.0019
	1.10	1132.9306	1187.2568	0.0480	0.0015
	1.20	2028.3175	2067.6528	0.0194	0.0009
	1.25	2511.7188	2540.5432	0.0115	0.0008

**Πίνακας 5.2 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα για  $T = 90$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας\*.

\* Οι τιμές είναι κατά 10.000 φορές μεγαλύτερες. Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Ημερομηνία Λήξης T=180 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	20.0902	13.4138	-0.3323	0.0317
	0.80	53.4848	34.3131	-0.3585	0.0170
	0.90	233.2614	155.2948	-0.3342	0.0056
	0.95	404.6737	298.9558	-0.2612	0.0036
$S_0/K$	1.00	639.1259	524.0682	-0.1800	0.0026
	1.05	935.1158	824.8355	-0.1179	0.0019
	1.10	1285.8651	1199.8751	-0.0669	0.0015
	1.20	2111.7927	2074.2222	-0.0178	0.0011
	1.25	2566.8561	2544.0557	-0.0089	0.0010
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	20.0902	28.6426	0.4257	0.0503
	0.80	53.4848	59.5636	0.1137	0.0233
	0.90	233.2614	213.6398	-0.0841	0.0069
	0.95	404.6737	373.9514	-0.0759	0.0046
$S_0/K$	1.00	639.1259	606.6435	-0.0508	0.0032
	1.05	935.1158	907.4730	-0.0296	0.0024
	1.10	1285.8651	1269.2023	-0.0130	0.0019
	1.20	2111.7927	2118.6536	0.0032	0.0013
	1.25	2566.8561	2579.6995	0.0050	0.0011
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	20.0902	51.7007	1.5734	0.0867
	0.80	53.4848	89.7924	0.6788	0.0293
	0.90	233.2614	283.0538	0.2135	0.0093
	0.95	404.6737	453.6675	0.1211	0.0055
$S_0/K$	1.00	639.1259	690.2939	0.0801	0.0039
	1.05	935.1158	992.5257	0.0614	0.0030
	1.10	1285.8651	1351.5135	0.0511	0.0023
	1.20	2111.7927	2171.4537	0.0283	0.0015
	1.25	2566.8561	2625.0778	0.0227	0.0014

**Πίνακας 5.3 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα για  $T = 180$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας \*.

\* Οι τιμές είναι κατά 10.000 φορές μεγαλύτερες. Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Ημερομηνία Λήξης T=30 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0000	-0.0054	0.0000
	0.80	0.0004	0.0003	-0.0704	0.2343
	0.90	0.0575	0.0267	-0.5346	0.0101
	0.95	0.2264	0.1612	-0.2880	0.0044
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5137	0.0013	0.0015
	1.05	0.7817	0.8389	0.0732	0.0012
	1.10	0.9317	0.9636	0.0343	0.0006
	1.20	0.9976	0.9986	0.0010	0.0001
	1.25	0.9997	0.9997	0.0000	0.0001
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0003	40.0685	13.0503
	0.80	0.0004	0.0014	2.7307	0.4313
	0.90	0.0575	0.0549	-0.0449	0.0109
	0.95	0.2264	0.2130	-0.0591	0.0036
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5153	0.0044	0.0015
	1.05	0.7817	0.7945	0.0164	0.0010
	1.10	0.9317	0.9356	0.0042	0.0006
	1.20	0.9976	0.9950	-0.0026	0.0002
	1.25	0.9997	0.9984	-0.0013	0.0002
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0008	126.6453	23.3615
	0.80	0.0004	0.0046	11.4293	0.8907
	0.90	0.0575	0.0895	0.5576	0.0148
	0.95	0.2264	0.2564	0.1325	0.0039
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5179	0.0094	0.0015
	1.05	0.7817	0.7598	-0.0280	0.0011
	1.10	0.9317	0.9041	-0.0296	0.0008
	1.20	0.9976	0.9881	-0.0095	0.0004
	1.25	0.9997	0.9960	-0.0037	0.0003

**Πίνακας 5.4 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 30$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας \*.

\* Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Ημερομηνία Λήξης T=90 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0066	0.0040	-0.3841	0.0455
	0.80	0.0280	0.0138	-0.5058	0.0185
	0.90	0.1915	0.1266	0.3390	0.0056
	0.95	0.3462	0.2921	-0.1562	0.0031
$S_0/K$	1.00	0.5226	.5218	-0.0016	0.0018
	1.05	0.6868	0.7316	0.0652	0.0016
	1.10	0.8152	0.8694	0.0666	0.0012
	1.20	0.9520	0.9736	0.0227	0.0006
	1.25	0.9785	0.9884	0.0100	0.0004
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	1.7528	0.0110	0.6721	0.0732
	0.80	0.0280	0.0294	0.0504	0.0234
	0.90	0.1915	0.1706	-0.1089	0.0054
	0.95	0.3462	0.3321	-0.0407	0.0030
$S_0/K$	1.00	0.5226	0.5249	0.0044	0.0019
	1.05	0.6868	0.7043	0.0254	0.0014
	1.10	0.8152	0.8347	0.0239	0.0011
	1.20	0.9520	0.9542	0.0023	0.0007
	1.25	0.9785	0.9759	-0.0027	0.0006
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0066	0.0212	2.2326	0.1032
	0.80	0.0280	0.0513	0.8336	0.0314
	0.90	0.1915	.2127	0.1106	0.0056
	0.95	0.3462	0.3589	0.0367	0.0030
$S_0/K$	1.00	0.5226	0.5306	0.0153	0.0020
	1.05	0.6868	0.6846	-0.0032	0.0014
	1.10	0.8152	0.8035	-0.0144	0.0012
	1.20	0.9520	0.9319	-0.0211	0.0008
	1.25	0.9785	0.9607	-0.0183	0.0007

**Πίνακας 5.5 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 90$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας \*.

\* Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Ημερομηνία Λήξης T=180 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0433	0.0236	-0.4559	0.0163
	0.80	0.0949	0.0553	-0.4173	0.0098
	0.90	0.2820	0.2192	-0.2228	0.0043
	0.95	0.4053	0.3654	-0.0985	0.0029
$S_0/K$	1.00	0.5320	0.5298	-0.0041	0.0021
	1.05	0.6497	0.6831	0.0515	0.0018
	1.10	0.7500	0.8001	0.0668	0.0015
	1.20	0.8882	0.9280	0.0448	0.0010
	1.25	0.9294	0.9569	0.0295	0.0008
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	0.0433	0.0421	-0.0267	0.0201
	0.80	0.0949	0.0840	-0.1152	0.0110
	0.90	0.2820	0.2547	-0.0969	0.0042
	0.95	0.4053	0.3894	-0.0392	0.0029
$S_0/K$	1.00	0.5320	0.5355	0.0067	0.0021
	1.05	0.6497	0.6688	0.0294	0.0017
	1.10	0.7500	0.7744	-0.0130	0.0015
	1.20	0.8882	0.9059	0.0032	0.0010
	1.25	0.9294	0.9387	0.0100	0.0009
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0433	0.0625	0.4443	0.0243
	0.80	0.0949	0.1114	0.1744	0.0124
	0.90	0.2820	0.2884	0.0224	0.0044
	0.95	0.4053	0.4094	0.0100	0.0030
$S_0/K$	1.00	0.5320	0.5393	0.0138	0.0022
	1.05	0.6497	0.6568	0.0110	0.0018
	1.10	0.7500	0.7558	0.0078	0.0015
	1.20	0.8882	0.8824	-0.0066	0.0011
	1.25	0.9294	0.9198	-0.0103	0.0010

**Πίνακας 5.6 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 180$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας \*.

\* Οι αποκλίσεις(biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων(biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Από την παραπάνω ανάλυση γίνονται φανερά τα παρακάτω :

**1)** Η σύγκριση των τιμών δικαιωμάτων αγοράς με αρνητική εσωτερική αξία (out-of-the-money), όπως προέκυψαν και για τα δυο μοντέλα, δεν οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα όσον αφορά την υπέρ ή υποτιμολόγησή τους από το μοντέλο Black-Scholes. Η αρχική υπό συνθήκη δεσμευμένη διακύμανση παίζει ρυθμιστικό ρόλο για το τελικό συμπέρασμα. Για παράδειγμα, για αρχική υπό συνθήκη δεσμευμένη διακύμανση 20% πάνω από την αντίστοιχη στάσιμη, η τιμή από το Black-Scholes υπόδειγμα υποτιμολογεί τα δικαιώματα αγοράς με αρνητική εσωτερική αξία. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των ερευνών των Black (1975) και Gultekin et al.(1982) οι οποίοι υποστήριξαν ότι τα δικαιώματα αγοράς με αρνητική εσωτερική αξία υποτιμολογούνται πάντα.

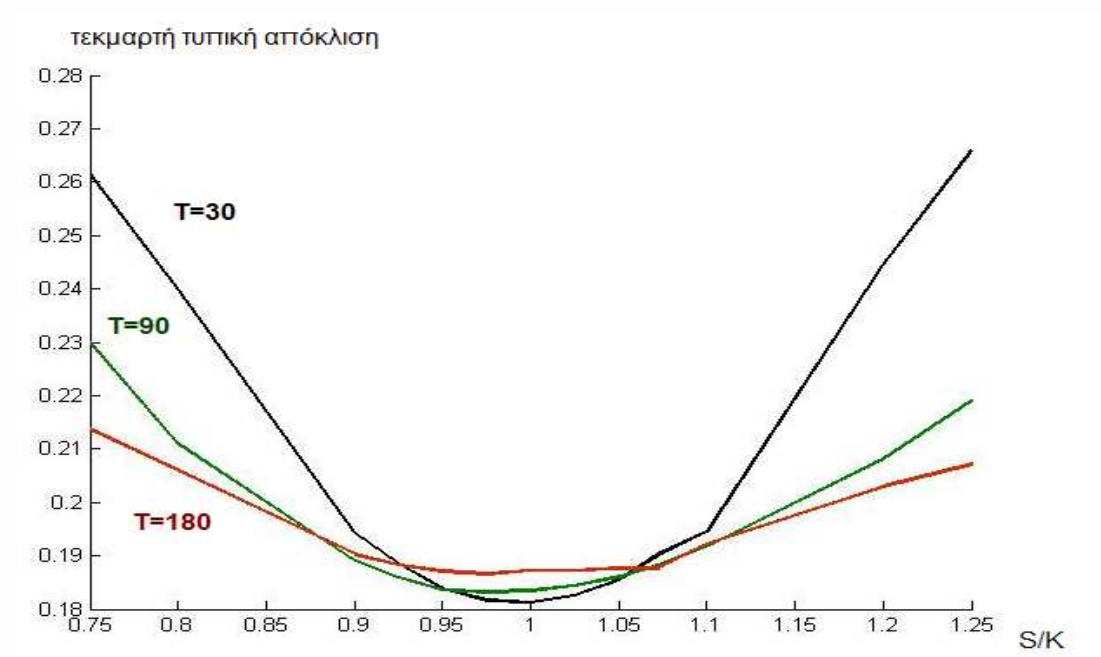
**2)** Οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς που προκύπτουν από το Black-Scholes υπόδειγμα με μεγάλη αρνητική εσωτερική αξία (deep out-of-the-money), συγκρινόμενα με τις αντίστοιχες τιμές από το *GARCH* υπόδειγμα, υποτιμολογούνται ανεξαρτήτως της αρχικής υπό δέσμευσης τυπικής απόκλισης. Αυτό γίνεται φανερό από τη σειρά  $S/K = 0.75$  για όλες τις χρονικές περιόδους.

**3)** Οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς που προκύπτουν από το μοντέλο Black-Scholes με αρνητική εσωτερική αξία είναι φανερό ότι τείνουν να υποτιμολογούνται, συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες του μοντέλου *GARCH*, όσο η ημερομηνία λήξης μικραίνει. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των ερευνών των Black (1975) και Whaley (1982).

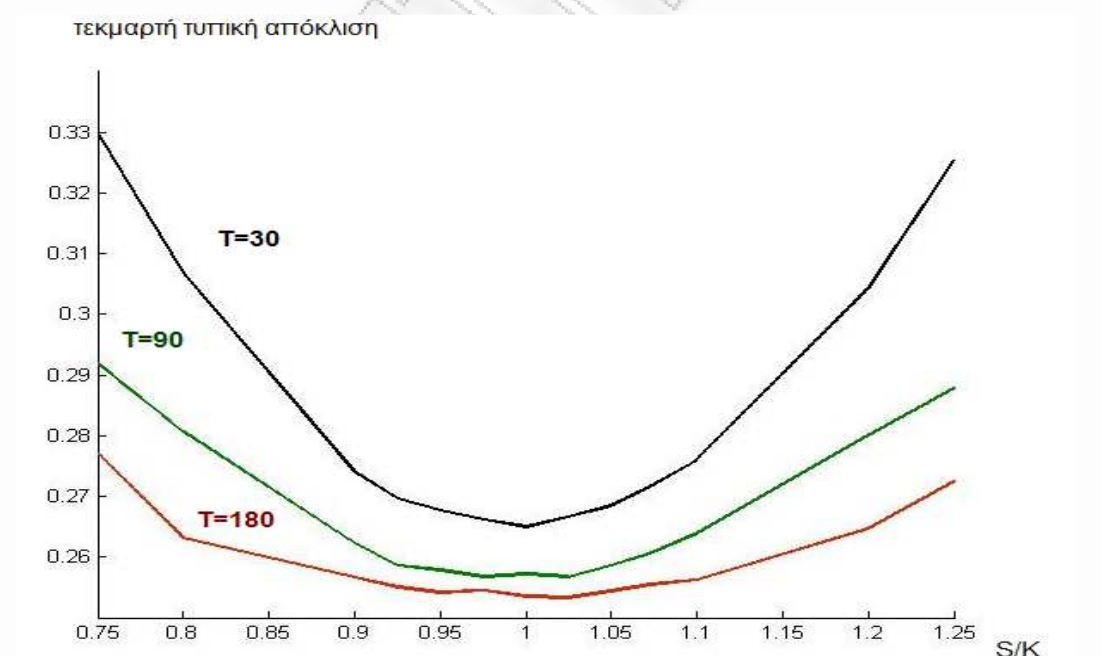
**4)** Η υποτιμολόγηση των τιμών με το Black-Scholes μοντέλο αποτελεί γενικά τον κανόνα, συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες του μοντέλου *GARCH*, ανεξάρτητα της ημερομηνίας λήξης του δικαιώματος και της αρχικής υπό δέσμευσης τυπικής απόκλισης για το μοντέλο *GARCH*.

**5)** Στα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε το γράφημα το οποίο προκύπτει από την τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility), θεωρώντας ως τρέχουσες τιμές δικαιωμάτων αγοράς αυτές που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση με το μοντέλο *GARCH*. Έτσι, κάνοντας χρήση των τύπων Black-Scholes και αντιστρέφοντας ως προς τη μεταβλητότητα, αντικαθιστώντας παράλληλα τις τιμές από το μοντέλο *GARCH*, προκύπτει η τιμή της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η αντιστροφή του τύπου (4.1) δεν είναι εφικτή, έγινε χρήση της εντολής `blsimpv` σε Matlab γλώσσα προγραμματισμού.

Κοινό στοιχείο των παρακάτω σχημάτων με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την αντικατάσταση στον τύπο (4.1) των τρεχουσών τιμών ενός δικαιώματος αγοράς για την εύρεση της τεκμαρτής μεταβλητότητας, είναι το γεγονός ότι στρέφουν τα κοίλα άνω, θυμίζοντας το γράμμα U. Έτσι, η εμπειρική έρευνα των Rubinstein (1985) και Sheikh (1991) με τη χρήση τρεχουσών τιμών έρχεται σε συμφωνία με την αντίστοιχη χρήση τιμών από το *GARCH* μοντέλο.



**Διάγραμμα 5.1:** Τεκμαρτή μεταβλητότητα (σε ετήσια βάση) των τιμών δικαιωμάτων αγοράς *GARCH* με δεδομένο  $\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8$ .



**Διάγραμμα 5.2:** Τεκμαρτή μεταβλητότητα (σε ετήσια βάση) των τιμών δικαιωμάτων αγοράς *GARCH* με δεδομένο  $\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2$ .

Τα παραπάνω γραφήματα παρήχθησαν για διαφορετικές τιμές ημερομηνιών λήξης  $T$  και τιμών εξάσκησης  $K$ . Ο κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab παρέχεται στο παράρτημα Γ. Έτσι, παρατηρούμε ότι :

**α)** για υπό συνθήκη τυπική απόκλιση 20% κάτω από το στάσιμο επίπεδο, τα δικαιώματα αγοράς με μηδενική εσωτερική αξία (at-the-money) έχουν μεγαλύτερη τιμή για τη μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης. Έτσι, όσο μεγαλύτερη η ημερομηνία λήξης, τόσο μεγαλύτερη και η τεκμαρτή μεταβλητότητα.

**β)** για υπό συνθήκη τυπική απόκλιση 20% πάνω από το στάσιμο επίπεδο, τα δικαιώματα αγοράς με μηδενική εσωτερική αξία έχουν μεγαλύτερη τιμή για τη μικρότερη ημερομηνία λήξης. Έτσι, όσο μικρότερη η ημερομηνία λήξης, τόσο μεγαλύτερη και η τεκμαρτή μεταβλητότητα, εδώ  $T = 30$ . Έτσι, ερχόμαστε σε αντίθεση με το παραπάνω αποτέλεσμα. Η αρχική επιλογή της υπό συνθήκης τυπικής απόκλισης παίζει κυρίαρχο ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα των ερευνών των Rubinstein (1985) και Sheikh (1991) με χρήση των τρεχουσών τιμών (market prices) δικαιωμάτων αγοράς, συμφωνούν με τα αποτελέσματα της (α) ανωτέρω περίπτωσης. Η τελευταία φαίνεται να αποτελεί τον κανόνα παρά την εξαίρεση. Αυτό δικαιολογείται, καταρχήν, από το γεγονός ότι οι εκτιμώμενες παράμετροι, με  $\alpha_1 = 7.06889136 \times 10^{-2}$  και  $\beta_1 = 9.25585842 \times 10^{-1}$  και με δεδομένη την σχέση  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$  (2.14) από την ενότητα 2.2.5,

μας οδηγούν στη σύγκλιση σε ένα *IGARCH* μοντέλο για τη διαδικασία των αποδόσεων των μετοχών με αποτέλεσμα η υπό συνθήκη διακύμανση να παρουσιάζει έντονες τάσεις ομαδοποίησης. Κατά δεύτερον, η διαδικασία της υπό συνθήκη διακύμανσης στο μοντέλο *GARCH*,  $\sigma^2$ , είναι ασύμμετρη και παρουσιάζει λοξότητα ως προς το κάτω άκρο της, κι έτσι μαζί με το πρώτο αποτέλεσμα η πιθανότητα να έχουμε καταστάσεις με χαμηλή διακύμανση είναι μεγαλύτερη.

Η μελέτη για τη σύγκριση των τιμών ανάμεσα στα δύο μοντέλα όσον αφορά τη δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου, καταλήγει σε συμπεράσματα παρόμοια με την παραπάνω ανάλυση.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Προσέγγιση Τιμών *GARCH* Δικαιωμάτων Επιλογής Αμερικάνικου Τύπου Μέσω Edgeworth Διωνυμικού Δέντρου

#### 6.1 Εισαγωγή

Διάφορες μέθοδοι αναπτύχθηκαν για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής αμερικάνικου τύπου, στα οποία η διακύμανση των αποδόσεων θεωρείται ότι περιγράφεται από μία διαδικασία *GARCH*. Η αρχή έγινε τους Duan (1995) και Kallsen και Taqqu (1998) οι οποίοι ανέπτυξαν αριθμητικές μεθόδους για αυτό το σκοπό. Στη συνέχεια, οι Ritchken και Trevor (1999) δημοσίευσαν μια μέθοδο προσέγγισης μέσω ενός τροποποιημένου πλέγματος ενώ οι Duan και Simonato (2001) παρουσίασαν μια μέθοδο με χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι απαιτούν τη χρήση δύο μεταβλητών κάτω από το πλαίσιο του *GARCH* μοντέλου. Κάνοντας τη σύγκριση όμως των παραπάνω μεθόδων με αυτή του διωνυμικού δέντρου, η οποία χρησιμοποιείται για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής με μία στοχαστική μεταβλητή, θα παρατηρήσουμε ότι είναι πιο απαιτητικές τόσο σε υπολογιστικό χρόνο όσο και σε απαιτήσεις μνήμης του υπολογιστή. Έτσι, η ταχύτητα υπολογισμού των τιμών δικαιωμάτων επιλογής αποκτά πολλές φορές σημασία όταν αυτός ο χρόνος είναι πολύ μεγάλος. Έτσι, με την μέθοδο αποτίμησης που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, θα θυσιάσουμε κατά ένα ποσοστό την ακρίβεια στον υπολογισμό των τιμών των δικαιωμάτων επιλογής για να κερδίσουμε αντίστοιχα σε υπολογιστικό χρόνο και να μειώσουμε τις ανάγκες μνήμης του υπολογιστή.

Ο Rubinstein το 1998 ανέπτυξε ένα διωνυμικό μοντέλο μιας στοχαστικής μεταβλητής για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής ευρωπαϊκού και αμερικανικού τύπου υπό μία γενική συνάρτηση κατανομής. Η θεωρία του βασίστηκε στην ιδέα της επέκτασης Edgeworth με σκοπό την απόκτηση διακριτών πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου, για μία κατανομή με γνωστές τις τέσσερις πρώτες ροπές της. Έτσι, ενώ η απόδοση της μεθόδου για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής ευρωπαϊκού τύπου εξαρτάται μόνο από την ποιότητα της επέκτασης Edgeworth, η μέθοδος παρουσιάζει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα όσον αφορά τα αμερικανικού τύπου δικαιώματα επιλογής. Εάν μια μονοδιάστατη στοχαστική μεταβλητή (π.χ. τιμή μετοχής) δεν επαρκεί για την περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος των τιμών της μετοχής, τότε θα έχουμε χάσει πληροφορία από την κατασκευή ενός Edgeworth, δέντρου μίας μόνο μεταβλητής. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το *GARCH* μοντέλο. Η εξέλιξη των τιμών ενός περιουσιακού στοιχείου υπό το μοντέλο *GARCH*, κυριαρχείται από το ζεύγος τιμής-μεταβλητότητας, το οποίο και μπορεί να θεωρηθεί και ως διμετάβλητο Μαρκοβιανό σύστημα. Έτσι, το Edgeworth πλέγμα το οποίο κατασκευάζεται με βάση την τελική κατανομή των τιμών του περιουσιακού στοιχείου θα έχει σε κάποιο βαθμό απώλεια πληροφορίας σε σχέση με το αρχικό *GARCH* μοντέλο. Παρόλα αυτά, η προσέγγιση που επιτυγχάνεται μέσω αυτής της μεθόδου κρίνεται ικανοποιητική.

Η τεχνική του Rubinstein μέσω του Edgeworth δένδρου έχει νόημα υπό την προϋπόθεση ότι οι τέσσερις πρώτες ροπές της αθροιστικής απόδοσης υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου είναι γνωστές, ακόμα κι αν η κατανομή ουδέτερου κινδύνου είναι άγνωστη. Όσον αφορά το μοντέλο *GARCH*, οι τέσσερις πρώτες ροπές της αθροιστικής απόδοσης υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου μπορούν να βρεθούν με αναλυτικό τρόπο, καθώς το αυτό ισχύει και για παραλλαγές του *GARCH* μοντέλου όπως *LGARCH*, *NGARCH*, *GJR – GARCH* και *EGARCH*.

## 6.2 Το Edgeworth Διωνυμικό Δέντρο στα Πλαίσια του *GARCH* Μοντέλου

### 6.2.1 Δομή Edgeworth Διωνυμικού Δέντρου

Η επέκταση Edgeworth, η οποία χρησιμοποιεί τις τέσσερις πρώτες ροπές της κατανομής του περιουσιακού στοιχείου στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής ευρωπαϊκού τύπου εξαιτίας του γεγονότος ότι αυτού του είδους τα δικαιώματα επιλογής εξαρτώνται μόνο από την κατανομή των τιμών του περιουσιακού στοιχείου σε μια χρονική στιγμή. Εν αντιθέσει με το παραπάνω, για την αποτίμηση δικαιωμάτων επιλογής αμερικανικού τύπου χρειάζεται να έχουμε γνώση όλης της διαδρομής των τιμών του περιουσιακού στοιχείου, από τη

στιγμή της αποτίμησης έως την ημερομηνία λήξης. Έτσι, ο Rubinstein χρησιμοποίησε την επέκταση Edgeworth για να προσεγγίσει την κατανομή των τιμών ουδέτερου κινδύνου στην ημερομηνία λήξης, και εν συνεχεία από αυτήν να εξαχθεί ένα διωνυμικό δέντρο από το οποίο θα περιγραφεται η εξέλιξη της τιμής του περιουσιακού στοιχείου καθ'όλη τη διάρκεια του συμβολαίου.

Έτσι, η μέθοδος του Rubinstein αρχικά κατασκευάζει ένα δέντρο το οποίο αποτελείται από  $n + 1$  κόμβους μετά από  $n$  χρονικά βήματα. Στο τελευταίο χρονικό βήμα, η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον  $j$  κόμβο με  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $X_j$ , θα είναι :

$$X_j = x_0 e^{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\eta_j} \quad (6.1)$$

με

$$\mu = r - \frac{1}{\tau} \ln \sum_{j=0}^n P_j e^{\sigma\sqrt{\tau}\eta_j} \quad (6.2)$$

όπου:

- $x_0$  η αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου
- $r$  το ετήσιο συνεχώς ανατοκίζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο
- $\tau$  ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος επιλογής (σε χρόνια)
- $\sigma = \sqrt{Var(\rho_\tau)/\tau}$  ο ετησιοποιημένος ρυθμός μεταβλητότητας για την αθροιστική απόδοση του υποκείμενου τίτλου  $\rho_\tau \equiv \ln(x_\tau/x_0)$
- $\eta_j$  τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα που ακολουθεί την κατανομή  $P_j$ .

Η κατανομή πιθανοτήτων  $P_j$  προέκυψε από την τροποποίηση της διωνυμικής κατανομής κάνοντας χρήση της Edgeworth επέκτασης μέχρι τη ροπή τέταρτης τάξης της  $\rho_\tau$ . Σε αντίθεση με το κλασσικό διωνυμικό πλέγμα, το Edgeworth διωνυμικό δέντρο δε χρειάζεται να έχει σταθερή πιθανότητα στους κόμβους. Πράγματι, όλες οι τιμές του υποκείμενου τίτλου και οι πιθανότητες πριν την ημερομηνία λήξης προκύπτουν από αρχή της μη-αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας (arbitrage-free principle). Τέλος, το  $\mu$  χρησιμοποιείται για να εξασφαλίσουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση χωρίς κίνδυνο είναι ίση με  $r$ , μια συνθήκη ουδετεροποίησης κινδύνου. Με την κατασκευή του Edgeworth διωνυμικού πλέγματος και μέσω οπισθοδρομικής αναδρομικής διαδικασίας γίνεται εν συνεχεία ο υπολογισμός των τιμών των δικαιωμάτων επιλογής αμερικάνικου τύπου μέσω αριθμητικών μεθόδων.

Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάστηκε η  $\eta_j$  τυχαία μεταβλητή καθώς και πώς η λοξότητα και η κύρτωση της  $\rho_\tau$  βοήθησαν στην παραγωγή της  $P_j$  κατανομής, παρουσιάζεται παρακάτω.

### 6.2.2 Κατασκευή Edgeworth Δέντρου

Ξεκινάμε την κατασκευή του δέντρου θεωρώντας μια διωνυμική κατανομή  $n$  βημάτων, με  $n + 1$  πιθανές τιμές συμβολίζοντάς τες με  $y_j = \frac{[(2j)-n]}{\sqrt{n}}$  για  $j = 0, \dots, n$  και τη συσχετιζόμενη πιθανότητα  $b_j = \left[ \frac{n!}{j!(n-j)!} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Με δεδομένες τη λοξότητα και την κύρτωση, η διωνυμική κατανομή τροποποιείται μέσω της Edgeworth επέκτασης μέχρι τη ροπή τέταρτης τάξης και έχει ως αποτέλεσμα:

$$f_j = \left[ 1 + \left(\frac{1}{6}\right) \xi (y_j^3 - 3y_j) + (1/24)(\kappa - 3)(y_j^4 - 6y_j^2 + 3) \right] b_j$$

όπου  $\xi = E^Q[z_\tau^3]$  είναι η λοξότητα και  $\kappa = E^Q[z_\tau^4]$  είναι η κύρτωση της αθροιστικής απόδοσης για δεδομένη ημερομηνία λήξης του δικαιώματος επιλογής, κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου με  $z_\tau = \frac{\rho_\tau - E^Q[\rho_\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}}$ . Εξαιτίας του γεγονότος ότι η Edgeworth επέκταση προσεγγίζει και δεν ταυτίζεται με μια κατανομή, θα πρέπει να φροντίσουμε οι πιθανότητες να αθροίζονται στη μονάδα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης :

$$P_j = \frac{f_j}{\sum_j f_j}.$$

Η μεταβλητή  $y_j$  που βασίζεται στην πιθανότητα  $P_j$  δεν είναι πλέον μια τυχαία μεταβλητή διωνυμικής κατανομής, κι έτσι μπορούμε να την τυποποιήσουμε για να έχουμε μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα μέσω του τύπου :

$$\eta_j = \frac{y_j - M}{V}$$

με  $M = \sum_j P_j y_j$  και  $V^2 = \sum_j P_j (y_j - M)^2$ . Η μεταβλητή  $\eta_j$  χρησιμοποιείται στην εξίσωση (6.1) για τη δημιουργία της τελικής τιμής του υποκείμενου τίτλου καθώς και στην αντίστοιχη πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου ενός μονοπατιού στον κόμβο  $j$  :

$$p_j = \frac{P_j}{n!/j!(n-j)!}.$$

Δουλεύοντας οπισθοδρομικά μπορούμε να κατασκευάσουμε και το υπόλοιπο δένδρο. Θεωρούμε με  $(p_j, X_j)$  και  $(p_{j+1}, X_{j+1})$  τις πιθανότητες και τις τιμές του υποκείμενου τίτλου σε δύο διαδοχικούς κόμβους όπου οι δείκτες  $j$  και  $j+1$  υποδηλώνουν την πάνω και κάτω διακλάδωση αντίστοιχα. Η οπισθοδρομική αναδρομή βασιζόμενη στην αρχή της μη-αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας (arbitrage-free principle) θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των τιμών της πιθανότητας και του τίτλου για τον προηγούμενο κόμβο, δηλαδή :

$$p = p_j + p_{j+1},$$

$$X = \left[ \frac{p_{j+1}}{p} X_{j+1} + \frac{p_j}{p} X_j \right] \exp\left(\frac{-r\tau}{n}\right)$$

όπου  $\tau$  είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος επιλογής σε χρόνια.

### 6.2.3 Ροπές σε Αναλυτική Μορφή στο GARCH Μοντέλο

Επαναφέρουμε στη μνήμη μας το μοντέλο GARCH που αφορά αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου με τύπο :

$$\ln\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right) = r_p - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}\varepsilon_{t+1} \quad \text{για } t = 1, 2, \dots$$

όπου  $\varepsilon_{t+1} | \Phi_t \sim N(0,1)$  υπό το μέτρο  $Q$ ,  $\sigma_t^2$  η δεσμευμένη διακύμανση,  $\Phi_t$  το σύνολο πληροφόρησης τη στιγμή  $t$  και  $r_p$  το συνεχώς επανατοκιζόμενο επιτόκιο μιας περιόδου. Εάν η μια περίοδος είναι μια ημερολογιακή ημέρα τότε  $r_p = r/365$ . Οι διαφορετικές παραλλαγές του μοντέλου GARCH έχουν και ξεχωριστούς τύπους που περιγράφουν την εξέλιξη της ποσότητας  $\sigma_t^2$  στο χρόνο. Έτσι, για το NGARCH μοντέλο θα έχω :

$$\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + \sigma_t^2 [\beta_1 + \beta_2(\varepsilon_t - \theta - \lambda)^2] \quad (6.3)$$

το οποίο μοντέλο θα είναι και αυτό το οποίο θα μελετηθεί στη συνέχεια. Αξίζει μόνο να επισημανθεί σε αυτό το σημείο ότι η παράμετρος  $\lambda$  που συμβολίζει το ασφάλιστρο κινδύνου, εμφανίζεται τόσο στη δεσμευμένη μέση τιμή των αποδόσεων υπό το πραγματικό μέτρο πιθανότητας όσο και στον τύπο της δεσμευμένης διακύμανσης υπό το μέτρο πιθανότητας στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Οι τύποι των ροπών της αθροιστικής απόδοσης στα πλαίσια του GARCH μοντέλου σε αναλυτική μορφή, υπολογίζονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$E_0^Q[\rho_t^k] = E_0^Q\left[\left(T r_p - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^T \sigma_i \varepsilon_i\right)^k\right], \quad (6.4)$$

για  $T \in \{1, 2, \dots\}$  και  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

όπου  $T$  ο χρόνος μέχρι τη λήξη εκπεφρασμένος σε διακριτές χρονικές περιόδους. Πλέον οι ζητούμενες ροπές μπορούν να υπολογιστούν επεκτείνοντας την παρένθεση στη σχέση (6.4) και εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμής στους προκύπτοντες από τις πράξεις όρους.

### 6.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Το αποτέλεσμα της αποτίμησης δικαιωμάτων πώλησης αμερικάνικου τύπου μέσω Edgeworth διωνυμικού δέντρου στα πλαίσια του *NGARCH* μοντέλου παρουσιάζεται στους παρακάτω πίνακες. Η επιλογή των παραμέτρων έγινε με τρόπο ώστε να φανεί η συμπεριφορά της καινούργιας μεθόδου τόσο σε περιβάλλον με υψηλή τιμή στάσιμης μεταβλητότητας υπό το μέτρο  $P$ , που αντιστοιχεί σε τιμές  $\beta_0 = 0.00001$ ,  $\beta_1 = 0.80$  και  $\beta_2 = 0.10$ , όσο και σε χαμηλή, που αντιστοιχεί σε  $\beta_0 = 0.00001$ ,  $\beta_1 = 0.70$  και  $\beta_2 = 0.10$ .

Για κάθε μια από αυτές τις συλλογές παραμέτρων αντιστοιχούν τρία επίπεδα αρχικής υπό συνθήκη διακύμανσης. Το πρώτο είναι ίσο με το επίπεδο στασιμότητας, ενώ τα άλλα δύο είναι 20% πάνω και κάτω από το επίπεδο που ορίζει η στάσιμη διακύμανση η οποία ισούται με  $\sigma^2 = \beta_0 / (1 - \beta_2 - \beta_1)$ .

Η τιμή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο θεωρήθηκε ίσο με 5% σε ετήσια βάση και η αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου ορίστηκε ίση με 50. Για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά σε σχέση με το χρόνο θεωρούμε τέσσερις χρονικές περιόδους: 10, 30, 90 και 180. Τέλος, θεωρούμε τρία επίπεδα εσωτερικής αξίας, θετική αρνητική και μηδενική, ορίζοντας το λόγο της τιμής εξάσκησης προς την αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου να είναι 1.1, 0.8 και 1.0 αντίστοιχα.

Οι τιμές που προκύπτουν με τη μέθοδο του Edgeworth διωνυμικού δέντρου για το *NGARCH* μοντέλο συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές για δικαιώματα πώλησης αμερικάνικου τύπου μέσω της μεθόδου του διωνυμικού δέντρου, με τη χρήση της εντολής `binprice` στη Matlab γλώσσα προγραμματισμού. Για την τελευταία μέθοδο ισχύει ως γνωστών  $\sigma^2 = \beta_0 / (1 - \beta_2 - \beta_1)$ . Προτιμήθηκαν αυτές οι τιμές για τη σύγκριση καθώς οι τιμές που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης Monte Carlo στα πλαίσια του *NGARCH* μοντέλου, με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.5 για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου, έχει δείχθει εμπειρικά ότι αποκλίνουν προς τα κάτω κατά άγνωστο μέχρι στιγμής ποσοστό. Ο κώδικας σε Matlab γλώσσα προγραμματισμού βρίσκεται στο παράρτημα Δ.

$\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70$ και $\beta_2 = 0.10$				
Τιμές	Τιμές μέσω Δ.Δ.	Edgeworth Αμερ. δικαίωμα πώλησης		
Διακύμανση	$\sigma^2$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 0.8$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 1.0$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 1.2$
<u>T=10 ημέρες</u>				
1.10	4.99999	5.00000	5.00000	5.00000
K/S <sub>0</sub> 1.00	0.41701	0.39850	0.41826	0.43710
0.90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
<u>T=30 ημέρες</u>				
1.10	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000
K/S <sub>0</sub> 1.00	0.68894	0.71019	0.72355	0.73662
0.90	0.00128	0.00501	0.00569	0.00638
<u>T=90 ημέρες</u>				
1.10	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000
K/S <sub>0</sub> 1.00	1.10151	1.17642	1.18423	1.19197
0.90	0.05188	0.08949	0.09178	0.09409
<u>T=270 ημέρες</u>				
1.10	5.04074	5.07564	5.07742	5.07920
K/S <sub>0</sub> 1.00	1.66794	1.81266	1.81700	1.82134
0.90	0.31071	0.40893	0.41139	0.41386

**Πίνακας 6.1** : Τιμές δικαιωμάτων πώλησης αμερικανικού τύπου που παρήχθησαν μέσω διωνυμικού δέντρου (Δ.Δ.) και με τη μέθοδο του Edgeworth διωνυμικού δέντρου υπό το *NGARCH* μοντέλο, για διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης, ημερομηνιών λήξης και τάσης αρχικής υπό συνθήκη διακύμανσης\*.

\* Οι τιμές των παραμέτρων  $\beta_0, \beta_1$  και  $\beta_2$  υποδεικνύουν μικρή τιμή στάσιμης διακύμανσης υπό το μέτρο  $P$  για το μοντέλο *NGARCH*. Η τελευταία ισούται με  $\sigma^2 = \beta_0 / (1 - \beta_2 - \beta_1)$  και επηρεάζει την αρχική τιμή της υπό συνθήκη διακύμανσης,  $\sigma_1^2$ , για τα τρία διαφορετικά θεωρηθέντα αρχικά επίπεδα.

$\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.80$ και $\beta_2 = 0.10$				
Τιμές	Τιμές μέσω Δ.Δ.	Edgeworth Αμερ. δικαίωμα πώλησης		
Διακύμανση	$\sigma^2$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 0.8$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 1.0$	$\sigma_1^2 = \sigma^2 \times 1.2$
<u>T=10 ημέρες</u>				
1.10	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000
K/S <sub>0</sub> 1.00	0.60103	0.55825	0.59951	0.63810
0.90	0.00014	0.00000	0.00024	0.00143
<u>T=30 ημέρες</u>				
1.10	4.99999	5.00000	5.00000	5.00000
K/S <sub>0</sub> 1.00	1.00583	1.02869	1.06496	1.09983
0.90	0.02221	0.06813	0.08215	0.09602
<u>T=90 ημέρες</u>				
1.10	5.11562	5.14570	5.15875	5.17171
K/S <sub>0</sub> 1.00	1.64250	1.82154	1.84485	1.86772
0.90	0.23521	0.42017	0.43469	0.44913
<u>T=270</u> <u>ημέρες</u>				
1.10	5.62496	5.90461	5.91659	5.92849
K/S <sub>0</sub> 1.00	2.57193	3.00132	3.01496	3.02850
0.90	0.86099	1.25125	1.26127	1.27127

**Πίνακας 6.2** : Τιμές δικαιωμάτων πώλησης αμερικανικού τύπου που παρήχθησαν μέσω διωνυμικού δέντρου (Δ.Δ.) και με τη μέθοδο του Edgeworth διωνυμικού δέντρου υπό το *NGARCH* μοντέλο, για διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης, ημερομηνιών λήξης και τάσης αρχικής υπό συνθήκη διακύμανσης\*.

\* Οι τιμές των παραμέτρων  $\beta_0, \beta_1$  και  $\beta_2$  υποδεικνύουν μεγάλη τιμή στάσιμης διακύμανσης υπό το μέτρο  $P$  για το μοντέλο *NGARCH*. Η τελευταία ισούται με  $\sigma^2 = \beta_0 / (1 - \beta_2 - \beta_1)$  και επηρεάζει την αρχική τιμή της υπό συνθήκη διακύμανσης,  $\sigma_1^2$ , για τα τρία διαφορετικά θεωρηθέντα αρχικά επίπεδα.



Παρατηρούμε πως οι τιμές στον πίνακα 6.1 παρουσιάζουν μεγαλύτερη σύγκλιση από τις τιμές του δεύτερου πίνακα. Αυτό εξηγείται από το γεγονός πως η πρώτη συλλογή παραμέτρων,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  και  $\beta_2$ , αντιστοιχεί σε μικρότερη τιμή τάσης μεταβλητότητας (volatility persistence). Επίσης, η σύγκλιση των τιμών φθίνει καθώς μεταφερόμαστε σε μεγαλύτερες ημερομηνίες λήξης. Τέλος, είναι φανερό ότι οι τιμές δικαιωμάτων με θετική εσωτερική αξία συγκλίνουν σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από τις αντίστοιχες με αρνητική εσωτερική αξία, συγκρινόμενες με τις δύο μεθόδους, ανεξαρτήτως της ημερομηνίας λήξης των δικαιωμάτων. Θα πρέπει να επισημανθεί στο σημείο αυτό όμως πως οι τιμές που προκύπτουν από τη μέθοδο Edgeworth στα πλαίσια του *NGARCH* μοντέλου έχουν έμφυτο ένα προσεγγιστικό λάθος το οποίο προέρχεται από τη χρήση μιας μόνο στοχαστικής μεταβλητής αντί για δύο, όπως υπάρχουν στο περιβάλλον του *GARCH* μοντέλου το οποίο παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Έτσι, το λάθος αυτό δεν μπορεί να “διορθωθεί” με την αύξηση των βημάτων στο πλέγμα.

Παρόλα αυτά, η απώλεια σε ακρίβεια αντισταθμίζεται από το κέρδος που έχουμε στην ταχύτητα υπολογισμού των τιμών. Στην ενότητα 5.5 ο υπολογισμός των τιμών με το *GARCH* μοντέλο έγινε σε πολλαπλάσιο χρόνο από αυτόν που παρουσιάζεται σε αυτήν την ενότητα. Έτσι, με δεδομένη την απόκλιση των τιμών προς τα κάτω με τη χρήση προσομοίωσης Monte Carlo για την αποτίμηση δικαιωμάτων πώλησης αμερικανικού τύπου, η μέθοδος που παρουσιάσαμε σε αυτήν την ενότητα αποτελεί μια αξιόπιστη εναλλακτική λύση, όταν τίθενται ζητήματα υπολογιστικού χρόνου και χωρητικότητας υπολογιστικής μνήμης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### Επίλογος

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε μια διαφορετική μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων επιλογής ευρωπαϊκού αλλά και αμερικάνικου τύπου, σε σχέση με τη μέθοδο των Black-Scholes.

Εν αντιθέσει με τη θεώρηση της σταθερής μεταβλητότητας όπως ορίστηκε στα πλαίσια της κίνησης Brown, η μεταβλητότητα στην πραγματικότητα είναι στοχαστικής φύσης. Έτσι, θεωρώντας στοχαστική μεταβλητότητα οι αγορές όπου διαπραγματεύονται τα διάφορα περιουσιακά στοιχεία δεν είναι πλέον πλήρεις, όπως θεωρήθηκε με το μοντέλο Black-Scholes. Τα δικαιώματα επιλογής σε αγορές που δεν είναι πλήρεις παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία αποτίμησης, ακριβώς λόγω του γεγονότος ότι οι επενδυτές απαιτούν υψηλότερες αποδόσεις για επιπλέον κίνδυνο.

Η εισαγωγή της σχέσης αποτίμησης τοπικά ουδέτερου κινδύνου,  $LRNVR$ , από τον Duan (1995) υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου  $Q$ , πέτυχε το στόχο να ξεπεραστεί ο σκόπελος που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Η εφαρμογή αυτής της σχέσης γίνεται στα πλαίσια της θεώρησης της υπό συνθήκη διακύμανσης των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου ως μιας μορφής γενικευμένης αυτοπαλίνδρομης υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικής ( $GARCH$ ) διαδικασίας. Βασικές ιδιότητες χρονοσειρών, καθώς και η θεωρητική θεμελίωση μιας  $GARCH$  διαδικασίας και των χαρακτηριστικών αυτής παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία για την κατανόηση των σχετικών εννοιών.

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo χρησιμοποιείται για την παραγωγή τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου καθώς και δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου με το  $GARCH(1,1)$  μοντέλο, αφού προηγήθηκε η εκτίμηση των παραμέτρων μέσω της συνάρτησης μεγίστης πιθανοφάνειας

από δεδομένα χρηματιστηριακού δείκτη αποδόσεων μετοχών. Τα αποτελέσματα επεξηγούν κάποιες αποκλίσεις που παρουσιάζονται με συστηματικό τρόπο από το μοντέλο Black-Scholes.

Για την αποτίμηση των δικαιωμάτων πώλησης αμερικάνικου τύπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του Edgeworth διωνυμικού δέντρου, που προτάθηκε από τον Rubinstein(1998), στα πλαίσια του *NGARCH* μοντέλου. Αυτή η μέθοδος με τη χρήση των αναλυτικών τύπων των ροπών της αθροιστικής απόδοσης όπως παρουσιάστηκαν από τους Duan *et al.*(1999,2002) καταλήγει σε ένα μονομετάβλητο διωνυμικό δέντρο, από τη διμετάβλητη φύση του *GARCH* μοντέλου. Αυτή η μετάβαση παρουσιάζεται μέσω αριθμητικών αποτελεσμάτων και αποδεικνύεται ότι η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική σε σχέση με τις θεωρητικές τιμές παρόλη την απώλεια πληροφορίας.

Η μελέτη που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία αφορά *GARCH* διαδικασίες σε διακριτό χρόνο. Σε συνεχή χρόνο παρουσιάστηκε από τους Klüppelberg, Linder και Maller(2004) για πρώτη φορά το ανάλογο μοντέλο, με την ονομασία *COGARCH*( $p, q$ ), κάνοντας χρήση της έννοιας της Lévy διαδικασίας.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### A

Κώδικας σε Matlab γλώσσα προγραμματισμού για την εκτίμηση των παραμέτρων  $a_0, a_1, \beta_1$  και  $\lambda$  για το  $GARCH(1,1)$  μοντέλο μέσω της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας. Έτσι στο command window θα έχω :

```
%Βρίσκω από αρχείο excel τις ημερομηνίες και τις τιμές που με
ενδιαφέρουν για την εκτίμηση.
[P dates] = xlsread('όνομα.xls', 'φυλ.εργασίας', 'π.χ.A2:C1753');
Prices = P(:,2);

% Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου
rf = 0;

% Θέτω αρχικές τιμές
% Χρησιμοποιώ ως τέτοιες αυτές που αναγράφονται στο άρθρο του
Duan(1995).
start = [0.000015 0.19 0.72 0.007];
params = fminsearch(@(b) findGARCH_LL(b,Prices,rf), start)
alpha0 = params(1);
alpha1 = params(2);
beta1 = params(3);
lambda = params(4);
```

Με τη βοήθεια του m-file :

```
function y = findGARCH_LL(params,S,rf);

% Βρίσκω τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για τα δικαιώματα
επιλογής με το GARCH μοντέλο.
alpha0 = params(1);
alpha1 = params(2);
beta1 = params(3);
lambda = params(4);
```

```

N = length(S);

% Ορίζω τις αποδόσεις.
r = log(S(2:N)./S(1:N-1));
r = [0; r];

% Για τη χρονική στιγμή t=1 δίνω αρχικές τιμές.
h(1) = var(r);
e(1) = 0;
LL(1) = -0.5*e(1)^2/h(1) - 0.5*log(2*pi*h(1));

% Βρίσκω τις υπόλοιπες τιμές για τη λογαριθμική συνάρτηση
πιθανοφάνειας.
for t=2:N
    h(t) = alpha0 + alpha1*(e(t-1))^2 + beta1*h(t-1);
    e(t) = log(S(t)/S(t-1)) - rf + 0.5*h(t)-lambda*sqrt(h(t));
    LL(t) = -0.5*e(t)^2/h(t) - 0.5*log(2*pi*h(t));
end

gamma = -sum(LL);

```

## B

Κώδικας σε Matlab γλώσσα προγραμματισμού για την εύρεση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το *GARCH*(1,1) μοντέλο , μέσω προσομοίωσης Monte Carlo και χρήσης της τεχνικής μεταβλητών ελέγχου για μείωση της διακύμανσης.

```

function GarchPrice( )

T = [30 90 180];
ratio = [0.8 0.9 0.95 1.00 1.05 1.10 1.20];
nivVol = [0.8 1 1.2];
n=10000;%αριθμός διαδρομών για την εκτίμηση του c
m=50000;%αριθμός επαναλήψεων προσομοίωσης Monte Carlo

for j=1:size(T,2)
    for k=1:size(nivVol,2)
        for l=1:size(ratio,2)
            %παράμετροι της προσομοίωσης
            r=0;
            a0=0.000000532310861;
            a1= 0.070688913688703 ;
            lamda=0.043355744788065;

```

```

b1=0.925585842448234 ;
cT = T(j);

sigma = sqrt(a0/(1-a1-b1 ));%αρχική μεταβλητότητα-στάσιμη
τυπική απόκλιση υπό το μέτρο P
K = 1;
S = ratio(1)*K;%τιμή του περιουσιακού στοιχείου το χρόνο 0

h1 =(nivVol(k)^2)*a0/(1 - a1 - b1);

prixGarch = [];
prixBS = [];
deltaGarch= [];
deltaBlackS = [];
%εκτίμηση των c για τις μεταβλητές ελέγχου
prixTheor = callBS( S,K,r,sigma,cT );
deltaTheor = deltaBS(S,K,r,sigma,cT);

for i=1:n
[ garch blacksc ] = engendrerXt(a0,a1,lamda,b1, h1, S,r,sigma,cT );
    prixGarch(i) = callMonteCarlo(K,r,cT,garch);
    prixBS(i) = callMonteCarlo(K,r,cT,blacksc);
    deltaGarch(i) = deltaMonteCarlo(S,K,r,cT , garch );
    deltaBlackS(i) = deltaMonteCarlo(S,K,r,cT , blacksc );
end

c=estimerB(prixGarch,prixBS);
c1=estimerB(deltaGarch,deltaBlackS);

prixGarch=[];
prixBS=[];
control1=[];
control2=[];
deltaGarch= [];
deltaBlackS=[];
control1S=[];
control2S= [];

for i=1:m
[ garch blacksc ] = engendrerXt(a0,a1,lamda,c1, h1, S,r,sigma,cT );
    prixGarch(i) = callMonteCarlo(K,r,cT,garch);
    prixBS(i) = callMonteCarlo(K,r,cT,blacksc);
    deltaGarch(i) = deltaMonteCarlo(S,K,r,cT , garch );
    deltaBlackS(i) = deltaMonteCarlo(S,K,r,cT , blacksc );

    control1S(i) = prixGarch(i)+1*(prixTheor-prixBS(i));
    control2S(i)=deltaGarch(i)+1*(deltaTheor-deltaBlackS(i));
    control1(i)=prixGarch(i)+c*(prixTheor-prixBS(i));
    control2(i)=deltaGarch(i)+c1*(deltaTheor-deltaBlackS(i));

end

fprintf(1, '\nParametres:\n');
fprintf(1, 'S/K:%1.2f\n',S/K);
fprintf(1, 'T:%f\n',cT);
fprintf(1, 'root(h1)/sigma:%1.1f\n',sqrt(h1)/sigma);
fprintf(1, '\nCalculs utilisant beta optimal\n');
afficheRapport(control1,prixGarch,prixTheor);
afficheRapport2(control2,deltaGarch,deltaTheor);

```

```

    fprintf(1, '\nCalculs utilisant beta=1\n');
    afficheRapport(controllS,prixGarch,prixTheor);
    afficheRapport2(control2S,deltaGarch,deltaTheor);

    end
end
end

end

function afficheRapport(prixControl,prix,prixBS)
    prixControlM=mean(prixControl);
    varpix= sqrt(var(prixControl));
    bias=(prixControlM-prixBS)/prixBS;
    fprintf(1, 'PrixC.V\tPrix\tB-S\tBias\tSTD\n');

    fprintf(1, '%.4f\t%.4f\t%.4f\t%.4f\t%.4f\n', 10000*prixControlM, 10000*mean(prix), 10000*prixBS, bias, varpix/prixBS/sqrt(50000));
end

function afficheRapport2(deltaControl,delta,deltaBS)
    deltaControlM=mean(deltaControl);
    bias=(deltaControlM -deltaBS)/deltaBS;
    vardetla=sqrt(var(deltaControl));
    fprintf(1, 'PrixC.V\tPrix\tB-S\tBias\tSTD\n');

    fprintf(1, '%.4f\t%.4f\t%.4f\t%.4f\t%.4f\n', deltaControlM, mean(delta), deltaBS, bias, vardetla/deltaBS/sqrt(50000));

end

```

Ο παραπάνω κώδικας κάνει χρήση των εξής m-files :

(i)

```

function [ pricec ] = call( K,r,T , Xt )

pricec = 0 ;
if Xt - K > 0
    pricec = exp(-T*r)*(Xt- K) ;
end
end

```

(ii)

```

function [ bs ] = callBS( S,K,r,Sigma,T )

d = (log(S/K) + (r +(Sigma*Sigma)*0.5)*T)/(Sigma*sqrt(T));
z = normcdf(d,0,1);
z2=normcdf(d-Sigma*sqrt(T),0,1);
bs = S*z-exp(-T*r)*K*z2;

end

```

**(iii)**

```
function [ deltabS ] = deltaBS( S,K,r,Sigma,T )
```

```
d = (log(S/K) + (r +(Sigma*Sigma)*0.5)*T)/(Sigma*sqrt(T));
deltabS = normcdf(d,0,1);
```

```
end
```

**(iv)**

```
function [ garch blacksc ] = engendrert(a0,a1,lamda,b1, h1,
S,r,Sigma,T )
```

```
u = rand();
z = norminv(u,0,1);
```

```
Hs = h1;
Es= sqrt(Hs)*z;
garch = S;
blacksc = S;
```

```
for i=1:T
    garch = garch*exp(r-0.5*Hs+Es);
    blacksc = blacksc*exp(-0.5* (Sigma^2) + Sigma*z);
    Hs = a0+a1*( (Es-lamda*sqrt(Hs))^2) + b1 * Hs ;
    u = rand();
    z = norminv(u,0,1);
    Es= sqrt(Hs)*z;
```

```
end
```

```
end
```

**(v)**

```
function [ b ] = estimerB( X, Y )
```

```
c = cov(X,Y);
v = var(Y);
b = c(1,2)/v;
```

```
end
```

**(vi)**

```
function [ garchd ] = deltaMonteCarlo(S,K,r,T ,Xt )
```

```
garchd = 0 ;
if Xt >= K
    garchd = exp(-T*r)*Xt/S ;
```

```
end
```

```
end
```



## Γ

Γραφική απεικόνιση με τη βοήθεια της Matlab γλώσσας προγραμματισμού της τεκμαρτής μεταβλητότητας με χρήση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου που παρήχθησαν από το *GARCH(1,1)* μοντέλο, για διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και ημερομηνιών λήξης.

```
function impliedvolatility( )

values = [ ];%πίνακας με τις παραχθείσες τιμές για δικαιώματα αγοράς
από το GARCH(1,1) μοντέλο.
%Κάθε σειρά αντιπροσωπεύει αυτές τις τιμές για μια τιμή του S/K

s = [ ];% πίνακας-γραμμή. Αντιπροσωπεύει τον άξονα των x για
διαφορετικές τιμές του λόγου S/K
T= [30 90 180];

volatilities = [];

for i=1:size(values,2)
    for j=1:size(values,1)
        volatilities(j,i) = blsimpv( s(i), 1, 0, T(j)/365,
values(j,i)/10000);
    end
end

for j=1:size(values,1)
    hold on;
    plot(s,volatilities(j,:));
end

end
```

## Δ

Παράδειγμα αποτίμησης NGARCH δικαιωμάτων πώλησης αμερικανικού τύπου με τη βοήθεια της επέκτασης Edgeworth. Τα m-files *american\_option\_garch* και *third\_m.m* είναι απαραίτητα για τη λειτουργία του προγράμματος.

```

%Παράμετροι δικαιώματος
dt=1/365;           %χρονικό διάστημα μιας ημέρας
s0=50;             %αρχική τιμή μετοχής
ks= [1.1; 1.0; 0.9;]; %τιμή εξάσκησης προς τιμή μετοχής
r=0.05*dt;         %επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ανά περίοδο
k=ks.*s0;          %μετατροπή λόγου σε τιμές εξάσκησης

%παράμετροι GARCH διαδικασίας

b0=1e-5; b1=0.7; b2=0.1; lath=0.5;

%αρχική διακύμανση
h1=(b0/(1-b2-b1))*1.0; %στάσιμη διακύμανση υπό το μέτρο P

%υπολογισμός 10,30,90 και 270 ημερών δικαιωμάτων
TT=[10, 30, 90, 270];

for j=1:4

    T=TT(1,j);

    [S,P1(j)]=American_Option_Garch(b0,b1,b2,lath,h1,T,r,s0,k(1,1),dt);

    [S,P2(j)]=American_Option_Garch(b0,b1,b2,lath,h1,T,r,s0,k(2,1),dt);

    [S,P3(j)]=American_Option_Garch(b0,b1,b2,lath,h1,T,r,s0,k(3,1),dt);

end

% αποτελέσματα
fprintf(' \n\n');
fprintf('Analytical approximation for American Put prices k=1.1:
\n');
fprintf('\tT=10\t\t T=30\t\t T=90\t\tT=270 \n');
fprintf('   %8.5f',P1');
fprintf(' \n\n');

fprintf('Analytical approximation for American Put prices k=1.0:
\n');
fprintf('\tT=10\t\t T=30\t\t T=90\t\tT=270 \n');
fprintf('   %8.5f',P2');
fprintf(' \n\n');
fprintf('Analytical approximation for American Put prices k=0.9:
\n');
fprintf('\tT=10\t\t T=30\t\t T=90\t\tT=270 \n');
fprintf('   %8.5f',P3');

fprintf(' \n\n');

```

Με τη βοήθεια των εξής δύο m-files :

(i)

```

% Συνάρτηση αποτίμησης δικαιωμάτων πώλησης αμερικανικού τύπου
% με τη βοήθεια της επέκτασης Edgeworth
%
function [Sn,Cn]=American_Option_Garch(b0,b1,b2,la,h1,mat,r,s0,k,dt)
%
% Υπολογίζει την προσέγγιση για το GARCH μοντέλο αποτίμησης
% δικαιωμάτων επιλογής με αναλυτικό τρόπο
% -----
%
% input    :  b0,b1,b2,la,h1  -- παράμετροι της διαδικασίας GARCH (b0
%                               ανά περίοδο)
%
%          mat                -- ημερομηνία λήξης σε αριθμό περιόδων
%          r                  -- επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ανά περίοδο
%          s0                 -- αρχική τιμή μετοχής
%          k                  -- διάνυσμα τιμών εξάσκησης
%
n=mat; % αριθμός περιόδων

%υπολογισμός των συνθηκών των ροπών
la2=la^2; la4=la^4;
m1=b2*(1+la2)+b1;
m2=(b2^2)*(3+6*la2+la4)+2*b2*b1*(1+la2)+(b1^2);
m3=(b2^3)*(15+45*la2+15*la4+(la^6))+3*b1*(b2^2)*(3+6*la2+la4)...
    +3*(b1^2)*b2*(1+la2)+(b1^3);

if m1>1 | m2>1 | m3>1
    error('GARCH parameter values are outside the admissible
region');
end

if m1>0.98 | m2>0.98 | m3>0.98
    warning('GARCH parameter values are at the limit of the
admissible region');
    warning('Results may be unreliable');
end

%υπολογισμός των αναλυτικών τύπων των ροπών της h
[veh1]=cveh1(b0,b1,b2,la,h1,mat);
[veh2]=cveh2(b0,b1,b2,la,h1,mat);
[veh3]=cveh3(b0,b1,b2,la,h1,mat);

%υπολογισμός των αναλυτικών τύπων που προσεγγίζουν τις ροπές των
%αθροιστικών αποδόσεων
[er1]=fm(b0,b1,b2,la,h1,mat,r,veh1);
[er2]=sm(b0,b1,b2,la,h1,mat,r,veh1,veh2);
[er3,vs1m,vs2m,vs3m]=third_m(b0,b1,b2,la,h1,mat,r,veh1,veh2,veh3);
[er4]=fom1(mat,r,vs1m,vs2m,vs3m);

% τυπική απόκλιση και διακύμανση αθροιστικών αποδόσεων
var=er2-(er1^2); stdv=sqrt(var);

```

```

%αναλυτικός τύπος ροής τρίτης τάξης τυποποιημένης απόδοσης
s3=1/(stdv^3); mu3 = s3*er3 - 3*s3*er2*er1 + 3*s3*er1*(er1^2) -
s3*(er1^3);

%αναλυτικός τύπος ροής τετάρτης τάξης τυποποιημένης απόδοσης
s4=1/(stdv^4); mu4 = s4*er4 - 4*s4*er3*er1 + 6*s4*er2*(er1^2) -
4*s4*(er1^3)*er1 + (s4*er1^4);

%Αναλυτική προσέγγιση μέσω της επέκτασης Edgeworth. Γίνεται χρήση των
ροπών
%τρίτης και τετάρτης τάξης. Η κατασκευή του διωνυμικού δέντρου
αρχίζει με
%τη θεώρηση μιας διωνυμικής κατανομής n-βημάτων με το συμβολισμό Yj.

r=r/dt;
T=mat/365;

j=0:1:n;
j1=j;
j1(1)=1;

%Κατασκευή των μεταβλητών της κατανομής μας
y=((2*j)-n)/n^.5;

%b=(.5^n)*(factorial(n)./(cumprod(j1).*fliplr(cumprod(j1)))); τρόπος
%αντιμετώπισης παραγοντικών
b=(.5^n)*(factor(n)); %τρόπος αντιμετώπισης παραγοντικών
%επέκταση Edgeworth
f=(1+(1/6)*mu3*(y.^3-3*y)+(1/24)*(mu4-3)*(y.^4-6*y.^2+3)).*b;
%f=(1+(1/6)*mu3*(y.^3-3*y)+(1/24)*(mu4-3)*(y.^4-
6*y.^2+3)+(1/72)*mu3^2*(y.^6-15*y.^4+45*y.^2-15)).*b; %επέκταση
Edgeworth

%αναπροσαρμογή πιθανοτήτων για να έχω άθροισμα μονάδα
P=f./sum(f);

%μέση τιμή και διακύμανση
M=sum(P.*y);
V=sum(P.*(y-M).^2)^.5;

%τροποποιημένο x με νέες πιθανότητες
x=(y-M)/V;

% υπολογισμός των πιθανοτήτων ουδετέρου κινδύνου
p=P./factor(n);

%υπολογισμός της διαδικασίας των τιμών μετοχών
stdv=stdv/T^.5;

mu=r-1/T*log(sum(P.*exp(stdv.*x.*T^.5)));

S=s0.*exp(mu*T+stdv.*x.*T^.5);

%Οπισθοδρομική αναδρομή για τις τιμές της μετοχής και του δικαιώματος
%πώλησης. Από τη στιγμή που είναι αμερικάνικου τύπου σε κάθε βήμα θα
πρέπει
%να λάβω υπόψη εάν εξασκείται ή όχι.

```

```

C=max(k-S,0);
[Sn,Cn]=BinRec(p,S,C,k,r,T,n);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [S,C]=BinRec(P,S,C,K,r,T,n);
%Μέσω της παραπάνω συνάρτησης θα έχω έναν Nxk πίνακα.

if size(P',1) ~= 1
    p=P(2:size(P',1))+P(1:size(P',1)-1);
    STemp = P.*S.*exp(-r*T/n);
    Snew=(STemp(2:size(STemp',1))+STemp(1:size(STemp',1)-1))./p;

    CStock=max(K-Snew,0);

    CTemp = P.*C.*exp(-r*T/n);
    Cnew=(CTemp(2:size(CTemp',1))+CTemp(1:size(CTemp',1)-1))./p;

    Cnew=max(Cnew,CStock);

    [S,C]=BinRec(p,Snew,Cnew,K,r,T,n);

end

function [p]=factor(x);
% Υπολογισμός ενός διανύσματος μέσω της σχέσης
% (factorial(n)./(cumprod(j1).*fliplr(cumprod(j1))))
temp=0:1:x;
p(1)=1;
p(x+1)=1;
for i=2:ceil((x+1)/2)

    % p(i)=prod(temp(1,x-i+3:x+1))/factorial(i-1);
    p(i)=nchoosek(x,i-1);
    p(x-i+2)=p(i);

end

function [eh]=cveh1(b0,b1,b2,lath,h1,mat);
%
%Υπολογισμός της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής της h(t) για t=1 έως
mat μέσω του τύπου που προκύπτει από την
% προσεγγιστική μέθοδο της αλυσίδας Markov για δικαιώματα πώλησης
% αμερικάνικου τύπου στα πλαίσια του GARCH μοντέλου
%
%
% input : b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
ανά περίοδο)

% mat -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
περιόδων

%
```

```

% output : eh          -- ένα διάνυσμα της υπό συνθήκη
                        αναμενόμενης τιμής της h(t) για t=1 έως T
%
%υπολογισμός των δυνάμεων με τη βοήθεια ενός διανύσματος
lath2=(lath)^2;
index1=[0:(mat-1)]';
v=b1+b2*(1+lath2);
vt=v.^index1;

%υπολογισμός της υπό συνθήκη αμενόμενης τιμής του διανύσματος
eh = h1.*vt + b0*((1-vt)./(1-v));

function [veh2]=cveh2(b0,b1,b2,lath,h1,mat);
%Υπολογισμός της ροπής δευτέρας τάξης της h(t) για t=1 έως t=T
% -----
%
% Η διακύμανση υπολογίζεται μέσω του τύπου που προκύπτει από την
% προσεγγιστική μέθοδο της αλυσίδας Markov για δικαιώματα πώλησης
% αμερικάνικου τύπου στα πλαίσια του GARCH μοντέλου
%
% input   : b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
                        ανά περίοδο)
%
%          mat                --ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
                        περιόδων
%
%τιμές για τη διευκόλυνση των υπολογισμών
lath2=lath^2; b2_2=b2^2; b0_2=b0^2;
vv=b2*(1+lath2)+b1;
uu=(vv^2) + 2*(1+2*lath2)*b2_2;

%κατατασκευή διανύσματος και υπολογισμός δυνάμεων των vv και uu
index1=[0:(mat-1)]';

ut=uu.^index1;
vt=vv.^index1;

ra1=(vv.*(ut-vt)) ./ (uu-vv);
ra2=(1-ut) ./ (1-uu);
ra3=vv / (uu-vv);
ra4=(1-ut) ./ (1-uu);
ra5=(1-vt) ./ (1-vv);

part1 = (h1^2).*ut;
part2 = 2*b0*h1 .* ra1;
part3 = b0_2 .* (ra2 + 2*ra3 .* (ra4-ra5));

veh2 = part1 + part2 + part3;

```

```

function [veh3]=cveh3(b0,b1,b2,lath,h1,mat);
%
% Υπολογισμός της ροπής τρίτης τάξης της h(t) για t=1 έως t=T
% -----
%
% Η διακύμανση υπολογίζεται μέσω του τύπου που προκύπτει από την
% προσεγγιστική μέθοδο της αλυσίδας Markov για δικαιώματα πώλησης
% αμερικάνικου τύπου στα πλαίσια του GARCH μοντέλου
%
% input : b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
%                                       ανά περίοδο)
%
% mat --ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                                       περιόδων
%
%
%υπολογισμός τιμών για mu1, mu2 and mu3
lath2=lath^2; lath4=lath^4; lath6=lath^6;
m1=b2*(1+lath2)+b1;
m2=(b2^2)*(3+6*lath2+lath4)+2*b2*b1*(1+lath2)+(b1^2);
m3=(b2^3)*(15+45*lath2+15*lath4+lath6)+3*b1*(b2^2)*(3+6*lath2+lath4).
..
+3*(b1^2)*b2*(1+lath2)+(b1^3);

%κατασκευή διανύσματος και υπολογισμός δυνάμεων για το mu
index=[0:(mat-1)]';
m1t=m1.^index; m2t=m2.^index; m3t=m3.^index;

%υπολογισμός λόγων απαραίτητων για υπολογισμό
r1=(1-m3t)./(1-m3);
r2=m2./(1-m2);
r3=(m2t-m3t)./(m2-m3);
r4=m1./(1-m1);
r5=(m1t-m3t)./(m1-m3);
r6=m2./(m1-m2);

%κατασκευή της εξίσωσης
p1=r1;
p2=3.*(r2.*r1-r2.*r3);
p3=3.*(r4.*r1-r4.*r5);
p4=6.*(r4.*r2.*r1-r4.*r2.*r3-r4.*r6.*r5+r4.*r6.*r3);
part1=(b0^3).*(p1+p2+p3+p4);

p1=r5;
p2=2.*(r6.*r5-r6.*r3);
part2=3.*(b0^2).*m1.*(p1+p2).*h1;

part3=3.*b0.*m2.*r3.*(h1^2) + m3t.*(h1^3);

veh3 = part1 + part2 + part3;

function [er1]=fm(b0,b1,b2,la,h1,mat,r,veh1);
%
% υπολογισμός της ροπής πρώτης τάξης της απόδοσης
% -----
%

```

```

% input    :  b0,b1,b2,la,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας
%            mat              -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                                     περιόδων
%            r                -- επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ανά
%                                     περίοδο
%            veh1             -- αναμενόμενες τιμές της h(t) για t=1
%                                     έως mat
%
%υπολογισμός αναμενόμενης τιμής
sveh1 = sum(veh1);
er1 = -0.5*sveh1 + mat*r;

function [er2]=sm(b0,b1,b2,lath,h1,t,r,veh1,veh2);
%
% υπολογισμός της ροπής δευτέρας τάξης της απόδοσης
% -----
%
% input    :  b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
%                                     ανά περίοδο)
%            t                -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                                     περιόδων
%            r                -- επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ανά
%                                     περίοδο
%            veh1             -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                                     h(t)^1 για t=1 έως mat
%            veh2             -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                                     h(t)^2 για t=1 έως mat
%
%υπολογισμός αθροισμάτων

%απαραίτητες τιμές για υπολογισμούς
lath2=lath^2; y=b2*(1+lath2)+b1;
index=[1:t]'; tmi=t-index; yt=y.^tmi; omy=1-y; omyt=1-yt;

%υπολογισμός πρώτου κομματιού
part1=(t^2)*(r^2);

%δευτέρου κομματιού
part2=t*r*sum(veh1);

%τρίτου κομματιού
r1=tmi./(omy); r2=y./omy; r3=omyt./omy;
p1=b0*sum( (r1-r2.*r3).*veh1 );
p2=sum( y.*r3.*veh2 );
p3=sum(veh2);

sd1=2*(p1+p2)+p3;

part3=0.25*sd1;

%τέταρτου κομματιού
part4=sum(veh1);

```



```

%πέμπτου κομματιού
[veh32]=nim(b0,b1,b2,lath,h1,t,veh1,veh2,3);
part5=-2*lath*b2*sum( r3 .* veh32 );

%υπολογισμός ροπής δευτέρας τάξης
er2=part1 - part2 + part3 + part4 - part5;

function [ehni]=nim(b0,b1,b2,lath,h1,mat,eh1,eh2,n);
%
% Υπολογισμός μη ακέραιων ροπών της h(t) μέσω μίας προσέγγισης
% βασισμένης
% σε μια σειρά Taylor με περικοπτόμενους όρους μετά το δεύτερο
%
% input : b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
%                               ανά περίοδο)
%               mat         -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                               περιόδων
%               eh1         -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της h^1
%               eh2         -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της h^2
%               n           -- η ακέραια τιμή στο n/2 ( μη-ακέραια
%                               δύναμη)
%
% output : ehni            -- μη ακέραιες ροπές της h(t) για t=1
%                               έως T

%υπολογισμός προσέγγισης για τη μη-ακέραια ροπή
po=n/2; pou=po-1; pod=pou-1;
ehni = (eh1 .^po) + (.5)*po*pou*(eh1 .^pod) .*(eh2-(eh1 .^2));

function [er4]=fom1(t,r,vs1m,vs2m,vs3m);
%
% υπολογισμός της ροπής τετάρτης τάξης της απόδοσης (με αποκοπή
%                               μερικών όρων)
% -----
%
% input : t                -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                               περιόδων
%               r          -- επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ανά
%                               περίοδο
%               vs1m,vs2m,vs3m -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                               third_m
%
% output : er4            -- τέταρτης τάξη ροπή της απόδοσης
%                               μετοχής
%
%
%τιμές που προέρχονται από τον υπολογισμό της ροπής τρίτης τάξης
sum1=vs1m(1,1); sum2=vs1m(2,1); sum3=vs1m(3,1); sum4=vs1m(4,1);
sum5=vs1m(5,1);

```

```

sum6=vs1m(6,1); sum7=vs1m(7,1); sum8=vs1m(8,1); sum9=vs1m(9,1);
sm10=vs1m(10,1);
sm11=vs1m(11,1); sm12=vs1m(12,1); q5_8=vs1m(13,1);

sa=vs2m(1,1); sb=vs2m(2,1); sc=vs2m(3,1); sd=vs2m(4,1);
se=vs2m(5,1); sf=vs2m(6,1); sg=vs2m(7,1);

sumh=vs3m(1,1); sumh2=vs3m(2,1); sumh32=vs3m(3,1); sumh3=vs3m(4,1);

%υπολογισμός ποσοτήτων απαραίτητων για την ροπή τέταρτης τάξης
soee=12*sum8+6*sum6+3*sumh2;
sq4 = 2*sm11 + 2*sum9;
sq5 = 3*sum7 + 3*sm12 + 3*sum3 + 3*sm10 + q5_8;

%υπολογισμός των διαφόρων κομματιών της ροπής τέταρτης τάξης
p1 = (t^4)*(r^4);
p5 = -2*(t^3)*(r^3)*sumh;
p6 = ((3/2))*(t^2)*(r^2)*sc;
p9 = 6*(t^2)*(r^2)*se;
p10 = 4*t*r*sb;
p12 = -6*(t^2)*(r^2)*sg;
p13 = 3*t*r*sd;
p14 = -6*t*r*sf;
p15 = soee;
p16 = -t*r*sa;

% υπολογισμός της ροπής τέταρτης τάξης
er4 = p1+p5+p6+p9+p10+p12+p14+p15+p16 + (3/2)*sq4 - 2*sq5;

```

(ii)

```

function
[er3,vs1m,vs2m,vs3m]=third_m(b0,b1,b2,la,h1,T,r,veh1,veh2,veh3);
%
% υπολογισμός ροπής τρίτης τάξης και τα αποτελέσματα αυτής
% χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης της τέταρτης
% ροπής
%
% inputs : b0,b1,b2,la,h1 -- παράμετροι της διαδικασίας GARCH
%                               (b0 ανά περίοδο)
% T -- ημερομηνία λήξης σε αριθμό
%                               περιόδων
% r -- επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ανά περίοδο
% veh1 -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                                $h(t)^1$  για  $t=1$  έως  $T$ 
% veh2 -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                                $h(t)^2$  για  $t=1$  έως  $T$ 
% veh3 -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της
%                                $h(t)^3$  για  $t=1$  έως  $T$ 
%
% outputs : er3 -- ροπή τρίτης τάξης της απόδοσης
%
% vs1m -- 13x1 διάνυσμα. Στοιχεία αυτού του

```

```

        διανύσματος είναι      sum1 έως sum12 και SQ5_8 (δες πιο κάτω)
%
%           vs2m                -- 7x1 διάνυσμα με τιμές απαραίτητες
για τον υπολογισμό της ροπής τέταρτης τάξης. Αυτές οι τιμές
υπολογίζονται μέσω των στοιχείων του vs1m. Αυτά τα στοιχεία είναι :
%           ST1, ST2, SD1, ST3, SD2, ST4, SD3.
%
%           vs3m                -- 4x1 διάνυσμα.
%           vs3m(1) άθροισμα ως προς την τ από
                                την E[h(t)]
%           vs3m(2) άθροισμα ως προς την τ από
                                την E[h(t)^2]
%           vs3m(3) άθροισμα ως προς την τ από
                                την E[h(t)^(3/2)]
%           vs4m(4) άθροισμα ως προς την τ από
                                την E[h(t)^3]
%
%
%απαραίτητες ποσότητες για τον υπολογισμό του απλού και του διπλού
αθροίσματος
    la2=la^2; la4=la^4;

    mu1=b2*(1+la2)+b1;
%εξίσωση (41)
    mu2=(b2^2)*(3+6*la2+la4)+2*b2*b1*(1+la2)+(b1^2);
%εξίσωση (42)

mu3=(b2^3)*(15+45*la2+15*la4+(la^6))+3*b1*(b2^2)*(3+6*la2+la4)+3*(b1^
2)*b2*(1+la2)+(b1^3); %εξίσωση (43)

    v1=-2*b2*la;
%εξίσωση(44)
    v2=-4*b2*la*(b1+3*b2+b2*la2);
%εξίσωση (45)
    v3=-6*b2*b2*b2*la*(15+10*la2+la4) - 12*b1*b2*b2*la*(3+la2)-
6*b1*b1*b2*la; %εξίσωση (46)
    k1=b1+b2*la2+3*b2;
%εξίσωση (47)
    k2=b1*b1+2*b1*b2*(3+la2)+b2*b2*(15+18*la2+la4);
%εξίσωση (48)
    e1=-6*b2*la;
%εξίσωση(49)

% fprintf(' mu1                : %12.6f \n',mu1);
% fprintf(' mu2                : %12.6f \n',mu2);
% fprintf(' mu3                : %12.6f \n',mu3);
% fprintf(' nu1                : %12.6f \n',v1);
% fprintf(' nu2                : %12.6f \n',v2);
% fprintf(' nu3                : %12.6f \n',v3);
% fprintf(' zeta1              : %12.6f \n',k1);
% fprintf(' zeta2              : %12.6f \n',k2);
% fprintf(' xil                : %12.6f \n',e1);

```

```

%υπολογισμός των απλών αθροισμάτων
%=====

```

%Σημείωση: πολλά από τα διπλά αθροίσματα μετατράπηκαν σε απλά, δες και άρθρο Further Details on the implementation of the formulas in An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing model

```

%
%διάνυσμα για τον υπολογισμό των απλών αθροισμάτων
i=(1:T)'; Tmip1=T-i+1; Tmi=T-i;

%σταθεροί αριθμοί για τον υπολογισμό των αθροισμάτων
%c1=-(-T+i+mu1.*T-i.*mu1+mu1-mu1.^Tmip1)./((-1+mu1).^2);
c1=(Tmi/(1-mu1))-(mu1/(1-mu1))*((1-mu1.^Tmi)/(1-mu1));
c2=mu1.*((1-mu1.^Tmi)./(1-mu1));
c3=(1-mu1.^Tmi)./(1-mu1);
c4=(1./(1-mu2)).*(1./(1-mu1))+((mu2.^Tmip1)./((mu1-mu2)*(1-mu2)))-
((mu1.^Tmip1)./((mu1-mu2)*(1-mu1)));
c5=(1-mu2.^Tmi)./(1-mu2);
c6=((1+mu1)/(1-mu1)).*(Tmi./(1-mu2))-2.*((mu1^2)./(1-
mu1)).*(1./(mu1-mu2)).*(1-mu1.^Tmi)./(1-mu1);
c7=((2*mu1)/(1-mu1)).*(mu2./(mu1-mu2))-((1+mu1)/(1-
mu1)).*(mu2./(1-mu2)).*(1-mu2.^Tmi)./(1-mu2);

%sum1 : Διπλό άθροισμα της h(i)h(i+j)
sum1_1=sum(veh1.*c1); sum1_2=sum(veh2.*c2); sum1=b0.*sum1_1 +
sum1_2;

%sum2 : Διπλό άθροισμα της h(i)e(i)h(i+j)
sum2=v1.*sum(veh2.*c3);

%sum3 : Διπλό άθροισμα της h(i)^(3/2)e(i)h(i+j)
[veh52]=nim(b0,b1,b2,la,h1,T,veh1,veh2,5); sum3=v1.*sum(veh52.*c3);

%sum4 : Διπλό άθροισμα της h(i)^(1/2)e(i)h(i+j)
[veh32]=nim(b0,b1,b2,la,h1,T,veh1,veh2,3); sum4=v1.*sum(veh32.*c3);

%sum5 : Διπλό άθροισμα της h(i)^(1/2)h(i+j)^2
sum5_1=sum(veh2.*c1); sum5_2=sum(veh3.*c2); sum5=b0.*sum5_1+sum5_2;

%sum6 : Διπλό άθροισμα της h(i)e(i)^2 h(i+j)
sum6_1=sum(veh1.*c1); sum6_2=sum(veh2.*c3);
sum6=b0.*sum6_1+k1.*sum6_2;

%sum9 : Διπλό άθροισμα της h(i)h(i+j)^2
sum9_1=sum(veh1.*(c6+c7)); sum9_2=sum(veh2.*c4);
sum9_3=sum(veh3.*mu2.*c5); sum9=b0^2*sum9_1+2*b0*mu1*sum9_2+sum9_3;

%sum10 : Διπλό άθροισμα της h(i)^(1/2)e(i)h(i+j)^2
sum10_1=sum(veh32.*c4); sum10_2=sum(veh52.*c5);
sum10=2*b0.*v1.*sum10_1+v2.*sum10_2;

%τελευταίος όρος της S(Q5)
sq5_8=sum(veh52.*e1.*c3);

%υπολογισμός των διπλών αθροισμάτων
%-----

%Σημείωση: πολλά από τα τριπλά αθροίσματα μετατράπηκαν σε διπλά, δεξ
και άρθρο Further Details on the implementation of the formulas in An
Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing model
%
```

%απαραίτητες αρχικές τιμές για τον υπολογισμό των διπλών αθροισμάτων

%sum7 είναι το τριπλό άθροισμα της  $h(i)h(i+j)^{1/2}e(i+j)h(i+j+k)$   
`sum7_1=0; sum7_2=0; sum7_3=0;` %sum7\_1 είναι το  
 πρώτο κομμάτι του sum7, sum7\_2 είναι το δεύτερο κ.ο.κ.

%sum8 είναι το τριπλό άθροισμα της  $h(i)^{1/2}e(i)h(i+j)^{1/2}e(i+j)h(i+j+k)$   
`sum8_1=0; sum8_2=0; sum8_3=0;` %sum8\_1 είναι το  
 πρώτο κομμάτι του sum8, sum8\_2 είναι το δεύτερο κ.ο.κ.

%sum11 είναι το τριπλό άθροισμα της  $h(i)h(i+j)h(i+j+k)$   
`sum11_1=0; sum11_2=0; sum11_3=0; sum11_4=0; sum11_5=0;` %sum11\_1  
 είναι το πρώτο κομμάτι του sum11, sum11\_2 είναι το δεύτερο κ.ο.κ.

%sum12 είναι το τριπλό άθροισμα της  $h(i)^{1/2}e(i)h(i+j)h(i+j+k)$   
`sum12_1=0; sum12_2=0; sum12_3=0;`

%υπολογισμός των διπλών αθροισμάτων

`for i=1:T`

%διάνυσμα για τα διπλά αθροίσματα  
`j=(1:T-i)'; Tmimj=T-i-j; ipj=i+j;`

%σταθεροί αριθμοί για τον υπολογισμό των αθροισμάτων

`c1=(mu1.^(Tmimj)-1)./(mu1-1);`  
`c2=(1-mu1.^j)./(1-mu1);`  
`c3=((1+mu1)/(1-mu1)) .* ((1-mu2.^j)./(1-mu2)) - 2.*(mu1./(1-`  
`mu1)).*(mu1.^j-mu2.^j)./(mu1-mu2);`  
`c4=(mu1.^j-mu2.^j)./(mu1-mu2);`  
`c5=(Tmimj./(1-mu1))-(mu1./(1-mu1)).*((1-mu1.^Tmimj)./(1-mu1));`  
`c6=(1-mu1.^Tmimj)./(1-mu1);`

%sum7

`sum7_1=sum7_1+sum( (1/8) .* c6 .* veh1(ipj).^(3/2) .* veh1(i)`  
`);`

`sum7_2=sum7_2+sum( (3/4) .* b0 .* c2 .* c6 .* veh1(ipj).^(1/2)`  
`.* veh1(i) + ...`  
`(3/4) .* (mu1.^j) .* c6 .* veh1(ipj).^(1/2)`  
`.* veh2(i) );`

`sum7_3=sum7_3+sum( (3/8) .* c3 .* c6 .* veh1(ipj).^(-1/2) .*`  
`veh1(i) .* (b0^2) + ...`  
`(3/8) .* mu1 .* c4 .* c6 .* veh1(ipj).^(-`  
`1/2) .* 2 .* b0 .* veh2(i) + ...`  
`(3/8) .* mu2.^j .* c6 .* veh1(ipj).^(-1/2)`  
`.* veh3(i) );`

%sum8

`sum8_1=sum8_1+sum( (3/4) .* c6 .* c4 .* veh1(ipj).^(-1/2) .*`  
`veh32(i) );`  
`sum8_2=sum8_2+sum( (3/8) .* mu2.^(j-1) .* c6 .* veh1(ipj).^(-`  
`1/2) .* veh52(i) );`

```

sum8_3=sum8_3+sum( (3/4) .* mul.^(j-1) .* c6 .*
veh1(ipj).^(1/2) .* veh32(i) );

```

```

%sum11

```

```

sum11_1=sum11_1+sum( veh1(i).*b0.*c2.*c5 );
sum11_2=sum11_2+sum( veh2(i).*mul.^j.*c5 );
sum11_3=sum11_3+sum( veh1(i).*b0^2.*c3.*mul.*c6 );
sum11_4=sum11_4+sum( veh2(i).*2.*b0.*mul.*c4.*mul.*c6 );
sum11_5=sum11_5+sum( veh3(i).*mu2.^j.*mul.*c6 );

```

```

%sum12

```

```

sum12_1=sum12_1+sum( veh32(i).*mul.^(j-1).*c5 );
sum12_2=sum12_2+sum( veh32(i).*c4.*mul.*c6 );
sum12_3=sum12_3+sum( veh52(i) .*mu2.^(j-1).*mul.*c6 );

```

```

end

```

```

sum7=v1.*(-sum7_1+sum7_2+sum7_3);
sum8=b0*(v1^2)*sum8_1+v1*v2*sum8_2+v1^2*sum8_3;
sum11=b0.*sum11_1+b0.*sum11_2+sum11_3+sum11_4+sum11_5;
sum12=b0.*v1.*sum12_1+b0.*v1.*2.*sum12_2+v2.*sum12_3;

```

*%υπολογισμός των μεταβλητών εισόδου που εμφανίζονται στην εξίσωση της ροπής τρίτης τάξης*

```

ST1 = sum(veh3)+3*sum5+3*sum9+6*sum11;
ST2 = 3*sum4;
SD1 = sum(veh2)+2*sum1;
ST3 = sum10+2*sum3+2*(sum12+sum7);
SD2 = sum(veh1);
ST4 = sum(veh2) + sum1 + sum6 + 2*sum8;
SD3 = sum4;

```

*%υπολογισμός της ροπής τρίτης τάξης*

```

part1 = (T^3) * (r^3);
part2 = -(3/2)*(T^2)*(r^2)*sum(veh1);
part3 = 3*T*r*(0.25*SD1+SD2-SD3);
part4 = -(1/8)*ST1 + ST2 + 0.75*ST3 - (3/2)*ST4;

```

```

er3=part1+part2+part3+part4;

```

*%αποτελέσματα σε διανύσματα*

```

vs1m=zeros(13,1);
vs1m(1)=sum1; vs1m(2)=sum2; vs1m(3)=sum3; vs1m(4)=sum4;
vs1m(5)=sum5; vs1m(6)=sum6;
vs1m(7)=sum7; vs1m(8)=sum8; vs1m(9)=sum9; vs1m(10)=sum10;
vs1m(11)=sum11; vs1m(12)=sum12;
vs1m(13)=sq5_8;

```

```

vs2m=zeros(7,1);
vs2m(1)=ST1; vs2m(2)=ST2; vs2m(3)=SD1; vs2m(4)=ST3; vs2m(5)=SD2;
vs2m(6)=ST4; vs2m(7)=SD3;

```

```

vs3m=zeros(4,1);
vs3m(1)=sum(veh1); vs3m(2)=sum(veh2); vs3m(3)=sum(veh32);
vs3m(4)=sum(veh3);

```

```

function [ehni]=nim(b0,b1,b2,lath,h1,mat,eh1,eh2,n);
%
% Υπολογισμός μη ακέραιων ροπών της h(t) μέσω μίας προσέγγισης
% βασισμένης
% σε μια σειρά Taylor με περικοπτόμενους όρους μετά τον δεύτερο
%
% input   : b0,b1,b2,lath,h1 -- παράμετροι GARCH διαδικασίας (b0
%                               ανά περίοδο)
%                               mat -- ημερομηνία λήξης σε αριθμούς
%                               περιόδων
%                               eh1 -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της h^1
%                               eh2 -- διάνυσμα αναμενόμενων τιμών της h^2
%                               n -- η ακέραια τιμή στη n/2 (μη-ακέραια
%                                   δύναμη)
%
% output  : ehni -- μη ακέραιες ροπές της h(t) για t=1
%                               έως T

%υπολογισμός προσέγγισης για τη μη-ακέραια ροπή
po=n/2; pou=po-1; pod=pou-1;
ehni = (eh1 .^po) + (.5)*po*pou*(eh1 .^pod) .*(eh2-(eh1 .^2));

```

## E

Πίνακες για τιμή σταθεράς  $c = 1$  του τύπου  $f_A = f_A^* + c(f_B - f_B^*)$  που προκύπτει από τη μέθοδο μεταβλητών ελέγχου, για τη σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου και δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα. Η σύγκριση γίνεται για διαφορετικές τιμές ημερομηνιών λήξης, τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας.

Σημείωση : Οι τιμές είναι κατά 10.000 φορές μεγαλύτερες. Οι αποκλίσεις (biases) υπολογίζονται ως προς τις τιμές Black-Scholes. Ως τ.α. ορίζουμε την τυπική απόκλιση των αποκλίσεων (biases) για τις εκάστοτε προκύπτουσες τιμές. Οι τιμές προέκυψαν μετά από 50.000 επαναλήψεις με τη μέθοδο Monte Carlo. Η τιμή της στάσιμης τυπικής απόκλισης υπό το μέτρο  $P$  είναι  $\sigma^* = \sqrt{\alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}}$ .

Ημερομηνία Λήξης T=30 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0007	0.0010	0.5004	4.4325
	0.80	0.0491	0.0872	0.7741	0.5764
	0.90	14.1204	6.0732	-0.5699	0.0158
	0.95	78.9534	45.1757	-0.4278	0.0052
$S_0/K$	1.00	261.1551	207.2627	-0.2064	0.0018
	1.05	588.7069	553.0581	-0.0606	0.0010
	1.10	1022.2375	1011.1670	-0.0108	0.0007
	1.20	2000.5744	1999.6440	-0.0005	0.0004
	1.25	2500.0614	2499.5703	-0.0002	0.0004
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	0.0007	0.0642	96.6046	38.0426
	0.80	0.0491	0.3563	6.2511	1.2480
	0.90	14.1204	15.9679	0.1308	0.0159
	0.95	78.9534	76.3714	-0.0327	0.0039
$S_0/K$	1.00	261.1551	254.9376	-0.0238	0.0014
	1.05	588.7069	587.8790	-0.0014	0.0007
	1.10	1022.2375	1024.6066	0.0023	0.0005
	1.20	2000.5744	2001.8048	0.0006	0.0003
	1.25	2500.0614	2499.6321	-0.0002	0.0003
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0007	0.2675	405.5603	95.3778
	0.80	0.0491	1.4239	27.9748	3.0120
	0.90	14.1204	31.3444	1.2198	0.0278
	0.95	78.9534	112.5601	0.4257	0.0065
$S_0/K$	1.00	261.1551	303.0846	0.1606	0.0021
	1.05	588.7069	625.3370	0.0622	0.0010
	1.10	1022.2375	1046.0097	0.0233	0.0007
	1.20	2000.5744	2005.6877	0.0026	0.0005
	1.25	2500.0614	2502.8180	0.0011	0.0004

**Πίνακας E1 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα για  $T = 30$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$  .



Ημερομηνία Λήξης T=90 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	1.7528	1.7878	0.0199	0.1123
	0.80	9.3751	5.4027	-0.4237	0.0396
	0.90	102.3082	58.1149	-0.4320	0.0079
	0.95	235.1519	158.5895	-0.3256	0.0042
$S_0/K$	1.00	452.1723	364.1157	-0.1947	0.0024
	1.05	755.6666	680.0665	-0.1000	0.0016
	1.10	1132.9306	1082.7094	-0.0443	0.0012
	1.20	2028.3175	2019.7926	-0.0042	0.0009
	1.25	2511.7188	2508.1440	-0.0014	0.0007
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	1.7528	5.1521	1.9393	0.1945
	0.80	9.3751	13.9209	0.4849	0.0491
	0.90	102.3082	97.6240	-0.0458	0.0080
	0.95	235.1519	221.1052	-0.0597	0.0041
$S_0/K$	1.00	452.1723	434.7227	-0.0386	0.0024
	1.05	755.6666	743.1683	-0.0165	0.0016
	1.10	1132.9306	1130.7001	-0.0020	0.0012
	1.20	2028.3175	2039.2961	0.0054	0.0008
	1.25	2511.7188	2523.9979	0.0049	0.0007
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	1.7528	10.9259	5.2334	0.3236
	0.80	9.3751	29.0034	2.0937	0.0787
	0.90	102.3082	146.2835	0.4298	0.0111
	0.95	235.1519	287.4779	0.2225	0.0055
$S_0/K$	1.00	452.1723	510.6929	0.1294	0.0032
	1.05	755.6666	811.9603	0.0745	0.0019
	1.10	1132.9306	1187.2522	0.0479	0.0015
	1.20	2028.3175	2066.9836	0.0191	0.0010
	1.25	2511.7188	2540.5235	0.0115	0.0008

**Πίνακας E2 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και GARCH υπόδειγμα για  $T = 90$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$ .

Ημερομηνία Λήξης T=180 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Τιμές	Τιμές	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	20.0902	13.4122	-0.3324	0.0350
	0.80	53.4848	34.3245	-0.3582	0.0192
	0.90	233.2614	155.0813	-0.3352	0.0066
	0.95	404.6737	299.2414	-0.2605	0.0043
$S_0/K$	1.00	639.1259	523.3230	-0.1812	0.0030
	1.05	935.1158	825.1066	-0.1176	0.0022
	1.10	1285.8651	1200.9509	-0.0660	0.0018
	1.20	2111.7927	2074.7311	-0.0175	0.0013
	1.25	2566.8561	2543.5339	-0.0091	0.0011
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	20.0902	28.6438	0.4258	0.0503
	0.80	53.4848	59.5297	0.1130	0.0234
	0.90	233.2614	213.7991	-0.0834	0.0070
	0.95	404.6737	373.8279	-0.0762	0.0047
$S_0/K$	1.00	639.1259	607.0889	-0.0501	0.0032
	1.05	935.1158	906.7808	-0.0303	0.0024
	1.10	1285.8651	1268.9784	-0.0131	0.0019
	1.20	2111.7927	2118.2224	0.0030	0.0014
	1.25	2566.8561	2579.3199	0.0049	0.0012
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	20.0902	52.2360	1.6001	0.0889
	0.80	53.4848	89.9027	0.6809	0.0300
	0.90	233.2614	283.1724	0.2140	0.0094
	0.95	404.6737	453.1065	0.1197	0.0056
$S_0/K$	1.00	639.1259	690.6136	0.0806	0.0039
	1.05	935.1158	992.5691	0.0614	0.0030
	1.10	1285.8651	1351.3877	0.0510	0.0024
	1.20	2111.7927	2171.3529	0.0282	0.0016
	1.25	2566.8561	2625.0617	0.0227	0.0014

**Πίνακας Ε3 :** Σύγκριση τιμών δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και GARCH υπόδειγμα για  $T = 180$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$  .

Ημερομηνία Λήξης T=30 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0000	-0.0004	0.0000
	0.80	0.0004	0.0003	-0.0719	0.2329
	0.90	0.0575	0.0267	-0.5355	0.0147
	0.95	0.2264	0.1612	-0.2880	0.0051
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5137	0.0013	0.0015
	1.05	0.7817	0.8387	0.0730	0.0014
	1.10	0.9317	0.9636	0.0343	0.0009
	1.20	0.9976	0.9984	0.0008	0.0002
	1.25	0.9997	0.9997	0.0000	0.0001
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0003	39.9520	13.0503
	0.80	0.0004	0.0014	2.7329	0.4315
	0.90	0.0575	0.0546	-0.0496	0.0116
	0.95	0.2264	0.2129	-0.0597	0.0037
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5153	0.0044	0.0015
	1.05	0.7817	0.7944	0.0162	0.0010
	1.10	0.9317	0.9356	0.0042	0.0007
	1.20	0.9976	0.9950	-0.0026	0.0002
	1.25	0.9997	0.9984	-0.0013	0.0002
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0000	0.0008	126.5779	23.3615
	0.80	0.0004	0.0046	11.4475	0.8909
	0.90	0.0575	0.0895	0.5576	0.0148
	0.95	0.2264	0.2565	0.1329	0.0039
$S_0/K$	1.00	0.5131	0.5179	0.0095	0.0015
	1.05	0.7817	0.7599	-0.0279	0.0011
	1.10	0.9317	0.9041	-0.0296	0.0008
	1.20	0.9976	0.9880	-0.0096	0.0004
	1.25	0.9997	0.9960	-0.0037	0.0003

**Πίνακας Ε4 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 30$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$ .

Ημερομηνία Λήξης T=90 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
	0.75	0.0066	0.0043	-0.3520	0.0608
	0.80	0.0280	0.0132	-0.5294	0.0266
	0.90	0.1915	0.1256	-0.3440	0.0067
	0.95	0.3462	0.2920	-0.1564	0.0034
$S_0/K$	1.00	0.5226	0.5219	-0.0014	0.0019
	1.05	0.6868	0.7324	0.0664	0.0017
	1.10	0.8152	0.8691	0.0662	0.0014
	1.20	0.9520	0.9744	0.0235	0.0008
	1.25	0.9785	0.9881	0.0098	0.0006
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
	0.75	1.7528	0.0110	0.6705	0.0762
	0.80	0.0280	0.0297	0.0594	0.0252
	0.90	0.1915	0.1705	-0.1097	0.0058
	0.95	0.3462	0.3322	-0.0406	0.0031
$S_0/K$	1.00	0.5226	0.5249	0.0043	0.0019
	1.05	0.6868	0.7041	0.0251	0.0015
	1.10	0.8152	0.8351	0.0244	0.0012
	1.20	0.9520	0.9541	0.0023	0.0007
	1.25	0.9785	0.9759	-0.0026	0.0006
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
	0.75	0.0066	0.0213	2.2368	0.1034
	0.80	0.0280	0.0513	0.8314	0.0316
	0.90	0.1915	0.2124	0.1093	0.0057
	0.95	0.3462	0.3587	0.0360	0.0031
$S_0/K$	1.00	0.5226	0.5306	0.0154	0.0020
	1.05	0.6868	0.6848	-0.0029	0.0015
	1.10	0.8152	0.8035	-0.0144	0.0012
	1.20	0.9520	0.9320	-0.0210	0.0008
	1.25	0.9785	0.9607	-0.0183	0.0007

**Πίνακας E5 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 90$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$ .

Ημερομηνία Λήξης T=180 ημέρες					
	Black-Scholes	GARCH			
	Δέλτα	Δέλτα	Απόκλιση(bias)	τ.α.	
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 0.8</math></u>					
$S_0/K$	0.75	0.0433	0.0232	-0.4632	0.0224
	0.80	0.0949	0.0548	-0.4225	0.0127
	0.90	0.2820	0.2196	-0.2216	0.0048
	0.95	0.4053	0.3657	-0.0978	0.0030
	1.00	0.5320	0.5297	-0.0042	0.0021
	1.05	0.6497	0.6831	0.0514	0.0019
	1.10	0.7500	0.8011	0.0681	0.0017
	1.20	0.8882	0.9282	0.0451	0.0012
	1.25	0.9294	0.9570	0.0297	0.0010
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.0</math></u>					
$S_0/K$	0.75	0.0433	0.0424	-0.0210	0.0222
	0.80	0.0949	0.0838	-0.1165	0.0122
	0.90	0.2820	0.2550	-0.0961	0.0045
	0.95	0.4053	0.3895	-0.0390	0.0030
	1.00	0.5320	0.5357	0.0071	0.0022
	1.05	0.6497	0.6685	0.0289	0.0018
	1.10	0.7500	0.7745	0.0326	0.0016
	1.20	0.8882	0.9057	0.0326	0.0011
	1.25	0.9294	0.9383	0.0096	0.0009
<u><math>\sigma_1 = \sigma^* \times 1.2</math></u>					
$S_0/K$	0.75	0.0433	0.0621	0.4338	0.0248
	0.80	0.0949	0.1114	0.1736	0.0128
	0.90	0.2820	0.2884	0.0225	0.0046
	0.95	0.4053	0.4097	0.0109	0.0031
	1.00	0.5320	0.5391	0.0135	0.0023
	1.05	0.6497	0.6568	0.0111	0.0019
	1.10	0.7500	0.7560	0.0079	0.0016
	1.20	0.8882	0.8825	-0.0065	0.0012
	1.25	0.9294	0.9198	-0.0104	0.0010

**Πίνακας E6 :** Σύγκριση τιμών δέλτα αντιστάθμισης κινδύνου για δικαιώματα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με το Black-Scholes και *GARCH* υπόδειγμα, για  $T = 180$  ημέρες και διαφορετικές τιμές τιμών εξάσκησης και αρχικής υπό συνθήκη μεταβλητότητας με  $c = 1$ .

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Black F. and Scholes M. (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities. *J. Political Econ.* , 81, pp. 637-659.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *J. Economet.* , 31, pp. 307-327.
- Brandimarte, P. (2006). *Numerical Methods in Finance and Economics: A Matlab Based Introduction*. New York: Second Edition, John Wiley and Sons.
- Broadie M. and Detemple J., B. (1996). American option valuation: new bounds, approximations and a comparison of existing methods. *Reviex of financial studies* , 9, pp. 1211-1250.
- Chaudhary M. and Wei J.Z. (1996). *A Comperative Study of GARCH(1,1) and Black-Scholes Option Prices*. McGill University, Canada.
- Duan J.C. - Gauthier G.- Sasseville C. and Simonato J.G. (2003). Approximating American Option Prices in the GARCH Framework. *Journal of Futures Markets* .
- Duan J.C. and Simonato J.G. (2001). American option pricing under GARCH by a Markovchain approximation. *Journal of Economic Dynamics & Control* , 25, pp. 1689-1718.
- Duan J.C.-Gauthier G. and Simonato J.G. (1999). An analytical approximation for the Garch option pricing model. *Journal of Computational Finance* , 2, pp. 75-116.
- Duan, J. (1995, January). The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance* , 5, pp. 13-32.
- Engle R. and Mustafa M. (1992). Implied ARCH Models from Option Prices. *J. Economet.* , 52, pp. 289-311.
- Engle, R. a. (1993). Measuring and Testing of the impact of news on volatility. *Journal of Finance* , 48, pp. 1749-1778.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. inflation. *Econometrica* , 50, pp. 987-1008.

- Engle, R. D. (1987). Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica* , 55, pp. 391-407.
- Fouque J.P - Papanikolaou G. and Sicar K.R. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press.
- Franco C. and Zakoian J.M. (2010). *GARCH Models: structure, statistical inference and financial applications*. First Edition, John Wiley and Sons.
- Gerber H.U. and Pafumi G. (1998). Utility function: from Risk Theory to Finance. *North American Actuarial Journal* .
- Geweke, J. (1986). Comment. *Econometric Reviews* , 5, pp. 57-61.
- Granger C.W.J. and Anderson A.A. (1978). An Introduction to Bilinear Time Series Models. *Vandenheur and Ruprecht :Gottingen* .
- Heston S. L. and Nandi S. (1997). A Closed-Form GARCH Option Pricing Model. *Working Paper 97-9*. Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Higgins M. L. and Bera A.K. (1992). A Class of Nonlinear ARCH Models. *International Economic Review* , 33, pp. 137-158.
- Hull J. and White A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *J. Finance* , 42, pp. 281-300.
- Hull, J. (2008). *Options, Futures, and other Derivatives*. Seventh Edition, Pearson-Prentice Hall.
- Jarrow R. and Rudd A. (1982). Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* , 10, pp. 347-369.
- Kallsen R. and Taqqu M. (1998). Optio pricing in ARCH type models. *Mathematical Finance* , 8, pp. 13-26.
- Merton, R. (1973). The Theory of Rational Option Pricing. *Bell J. Econ. Management Sci.* , 4, pp. 141-183.
- Nelson, D. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A new Approach. *Econometrica* , 59, pp. 347-370.
- Nelson, D. (1990). Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Economet. Theory* , 6, pp. 318-334.
- Pandula, S. G. (1986). Comment. *Econometric Reviews* , 5, pp. 71-73.
- Ritchken P. and Trevor R. (1999). Pricing options under generalized GARCH and stochastic volatility processes. *Journal of Finance* , 54, pp. 377-402.

Rubinstein, M. (1983). Displaced Diffusion Option Pricing. *J. Finance* , pp. 213-217.

Rubinstein, M. (1998, Spring). Edgeworth binomial trees. *Journal of Derivatives* , pp. 20-27.

Rubinstein, M. (1985). Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and the Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *J. Finance* , pp. 455-480.

Rubinstein, M. (1976). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Bell J. Econ. Management Sci.* , pp. 407-425.

Schwert, G. (1989, December). Why Does Stock Market Volatility Change over Time? *Journal of Finance, American Finance Association* , 44(5), pp. 1115-53.

Sheikh, A. (1991). Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing. *J. Financial Quant. Anal.* , 26, pp. 459-475.

Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley.