

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΙ
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ : ΑΝΘΕΚΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ**

Γεώργιος Μ. Ζιώγας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς

Ιανουάριος 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- κ. Χ. Ευαγγελάρας (Λέκτορας) (Επιβλέπων)
- κ. Μ. Κούτρας (Καθηγητής)
- κ. Σ. Μπερσίμης (Λέκτορας)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**STATISTICAL QUALITY CONTROL AND PARAMETER
DESIGNS: ROBUST PARAMETER DESIGNS**

George M. Ziogas

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science
of the University of Piraeus in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science in Applied
Statistics

Piraeus, Greece

January 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Στην οικογένεια μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ποιότητα, παίζει καθοριστικό ρόλο στο κατά πόσο θα ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της αγοράς ένα προϊόν. Οι ολοένα και αυξανόμενες απαιτήσεις των πελατών, οδήγησαν τις βιομηχανίες σε συνεχή αναζήτηση μεθόδων, που στόχο έχουν την βελτιστοποίηση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Ο ανταγωνισμός που αναπτύχθηκε στους κόλπους των βιομηχανιών έγινε εντονότερος με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν μέθοδοι για την επίτευξη όσο το δυνατόν βέλτιστης ποιότητας για το παραγόμενο προϊόν. Τέτοιες μεθόδους, πραγματεύεται ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.

Ο έλεγχος ποιότητας, εφαρμόζεται κυρίως σε τρία στάδια :

1. πριν την παραγωγική διεργασία (*off-line quality control*)
2. κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διεργασίας (*on-line quality control*)
3. στο τέλος της παραγωγικής διεργασίας.

Έχει κριθεί απαραίτητη, από τους ερευνητές, η ύπαρξη ενός αποτελεσματικού συστήματος διασφάλισης της ποιότητας σε όλες τις φάσεις της σχεδίασης και παραγωγής ενός προϊόντος και κυρίως στο στάδιο του σχεδιασμού πριν την έναρξη της μαζικής παραγωγής.

Οι ανθεκτικοί σχεδιασμοί (*robust designs*), είναι μια εκτός σειράς (*off-line*) παραγωγική διαδικασία που έχει στόχο τη μείωση της μεταβλητότητας και τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, με χρήση πειραματικών σχεδιασμών. Αυτοί οι πειραματικοί σχεδιασμοί αποσκοπούν στην ανάλυση των επιδράσεων μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών (παραγόντων) στη μέση τιμή και την μεταβλητότητα μιας εξαρτημένης μεταβλητής (απόκριση).

Σκοπός της εργασίας αυτής, είναι η μελέτη και ανάπτυξη της μεθοδολογίας που αρχικά προτάθηκε από τον Taguchi (*crossed arrays*) και στη συνέχεια από άλλους ερευνητές (*combined arrays*) και η εφαρμογή των μεθόδων αυτών με πραγματικά δεδομένα.

Στο Πρώτο Κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στον έλεγχο και την έννοια της ποιότητας. Στο Δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικοί παραγοντικοί (παραμετρικοί) σχεδιασμοί. Στο Τρίτο Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ανθεκτικοί παραμετρικοί σχεδιασμοί και τέλος, στο Τέταρτο Κεφάλαιο, παρουσιάζεται μια πρακτική εφαρμογή των μεθόδων αυτών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, τον καθηγητή μου κ. Χ. Ευαγγελάρα, Λέκτορα στο Πανεπιστήμιο Πειραιά, για τις συμβουλές και τη βοήθεια στην περάτωση της Διπλωματικής αυτής εργασίας, καθώς και τα άλλα δυο μέλη της τριμελούς επιτροπής, για το χρόνο που αφιέρωσαν για την μελέτη της εργασίας. Ευχαριστώ επίσης την ΧΑΛΥΒΟΥΡΓΙΚΗ Α.Ε και συγκεκριμένα τους κυρίους Β. Σκαράκη και Πανναγιωτούλια που μου παραχώρησαν βιομηχανικά δεδομένα για το υπολογιστικό μέρος της εργασίας.

Αθήνα, Ιανουάριος 2012

Γεώργιος Ζιώγας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι ανθεκτικοί παραμετρικοί σχεδιασμοί, οι οποίοι αρχικά προτάθηκαν από τον G. Taguchi (1987), έχουν μελετηθεί και χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε βιομηχανικά πειράματα τα τελευταία 20 χρόνια. Στόχος τους είναι η βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων και η κατασκευή παραγωγικών σχεδιασμών που είναι ανθεκτικοί στη μεταβλητότητα που προκαλείται από παράγοντες που είναι δύσκολο να ελεγχθούν από τον πειραματιστή. Ο Taguchi προτείνει τη χρήση των διασταυρωμένων σχεδιασμών, οι οποίοι μπορούν να εκτιμήσουν τις αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξης μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου (control×noise, C×N) που είναι και οι σημαντικότερες στους ανθεκτικούς σχεδιασμούς. Ωστόσο το κόστος για την περάτωση ενός τέτοιου σχεδιασμού αρκετές φορές είναι απαγορευτικό λόγω του μεγάλου μεγέθους του. Για να ξεπεραστούν τα εμπόδια αυτά, οι Welch, Yu, Kang και Sacks (1990), πρότειναν τους συνδυασμένους σχεδιασμούς, οι οποίοι προσφέρουν ευελιξία τόσο από οικονομικής άποψης, όσο και από υπολογιστικής, αφού οι σχεδιασμοί αυτοί μπορούν εύκολα να υπολογίσουν όχι μόνο αλληλεπιδράσεις (C×N), αλλά και αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων του ίδιου τύπου (C×C και N×N).

ABSTRACT

Robust parametric designs, which were originally proposed by G. Taguchi (1987), have been studied and extensively used in industrial experiments in the last 20 years. Their aim is to improve product quality and manufacturing production plans that are robust to the volatility caused by factors that are difficult to control by the experimenter. Taguchi proposes the use of cross designs, which can estimate the interactions between control and noise factors (control×noise, C×N), which are the most significant in the robust design. However the cost of running such a design sometimes is prohibitive due to the large size of runs. Welch, Yu, Kang and Sacks (1990), suggested the use of combined designs, which are more flexible and economic. These designs can easily calculate not only C×N interactions, but also interactions between factors of the same type (C×C and N×N).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Βασικές έννοιες Ποιότητας και Βελτίωσης της Ποιότητας.....	4
1.2 Η Στρατηγική του Πειραματισμού.....	6
1.3 Εφαρμογές των Πειραματικών Σχεδιασμών.....	8
1.4 Σχεδιασμοί Πειραμάτων – Βασικές Αρχές.....	9
1.5 Ιστορική Αναδρομή των Πειραματικών Σχεδιασμών.....	11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

2.1 Βασικοί Ορισμοί.....	13
2.2 Ο 2^2 Παραγοντικός Σχεδιασμός.....	14
2.3 Ο 2^3 Παραγοντικός Σχεδιασμός.....	20
2.4 Ο 2^k Παραγοντικός Σχεδιασμός.....	24
2.5 Μια επανάληψη του 2^k παραγοντικού σχεδιασμού.....	26
2.6 Οι Κλασματικοί Παραγοντικοί Σχεδιασμοί.....	27
2.7 Κατασκευή του $\frac{1}{2}$ Κλασματικού Σχεδιασμού.....	31
2.8 Το $\frac{1}{4}$ Κλάσμα του 2^k Παραγοντικού Σχεδιασμού.....	32
2.9 Το Γενικό $1/p$ Κλάσμα του 2^k Παραγοντικού Σχεδιασμού.....	33
2.10 Διακριτική Ικανότητα και Ελάχιστη Απόκλιση Κλασματικού Σχεδιασμού.....	33
2.11 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί.....	39
2.12 Σχεδιασμοί Plackett-Burman.....	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΘΕΚΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ (ROBUST PARAMETER DESIGNS)

3.1 Εισαγωγή.....	45
3.2 Συνάρτηση απώλειας.....	46
3.3 Μεθοδολογία Taguchi : Παραμετρικοί Σχεδιασμοί.....	48
3.4 Τα βασικά σημεία της φιλοσοφίας του Taguchi.....	51
3.5 Τα προτεινόμενα βήματα κατά τον Taguchi για την διεξαγωγή πειραμάτων.....	52
3.6 Ο Διασταυρωμένος Σχεδιασμός (Crossed Array Design).....	53
3.7 Μέτρα απόδοσης του Taguchi.....	54
3.8 Εισαγωγή στη θεωρία των Αποκριτικών Επιφανειών.....	61
3.9 Οι Συνδυασμένοι Σχηματισμοί (Combined Arrays) και η χρήση τους στους Ανθεκτικούς Παραμετρικούς Σχεδιασμούς.....	65
3.10 Σύγκριση μεταξύ Διασταυρωμένων (Crossed Arrays) και Συνδυασμένων Σχηματισμών (Combined Arrays).....	68
3.11 Βέλτιστη επιλογή συνδυασμένου Σχηματισμού και Εκτιμητική ισχύς των Μοντέλων.....	74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΜΕ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

4.1 Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες.....	79
4.2 Υπολογιστικό Μέρος.....	84
4.2.1 Εφαρμογή της μεθοδολογίας Taguchi.....	85
4.2.2 Εφαρμογή της μεθόδου των αποκριτικών επιφανειών στο διασταυρωμένο σχεδιασμό.....	90

4.2.3 Χρήση οικονομικών ορθογώνιων σχηματισμών και εφαρμογή της μεθόδου των αποκριτικών επιφανειών.....	97
4.2.3.1 Πειραματικός Σχεδιασμός 24 δοκιμών.....	98
4.2.3.2 Πειραματικός Σχεδιασμός 20 δοκιμών.....	102
4.2.3.3 Πειραματικός Σχεδιασμός 16 δοκιμών.....	106
4.2.3.4 Πειραματικός Σχεδιασμός 12 δοκιμών.....	110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	113
--------------------------	------------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Βασικές έννοιες Ποιότητας και Βελτίωσης της Ποιότητας.

Η ποιότητα σήμερα αποτελεί ίσως το βασικότερο παράγοντα για την επιλογή ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας. Η ποιότητα είναι μια πολυσύνθετη έννοια στην οποία έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί όπως :

- Ποιότητα είναι η καταλληλότητα (ή η προσαρμογή) για χρήση ενός προϊόντος (*Juran 1974*). Δηλαδή οι πελάτες είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν για κάποιο ποιοτικό αγαθό, μόνο εάν αυτό τους είναι χρήσιμο και τους προσφέρει κάποια αξία.
- Ποιότητα είναι η συμμόρφωση προς τις προδιαγραφές ενός προϊόντος (*Crosby 1979*), οι οποίες καθορίζονται αποκλειστικά από τις απαιτήσεις των πελατών.
- Η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της διασποράς των τιμών του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει.

Θα μπορούσαμε να διαχωρίσουμε την ποιότητα σε δυο βασικές κατηγορίες που έχουν σχέση με την παραγωγή προϊόντων.

1. Ποιότητα Σχεδιασμού (*quality of design*), η οποία αναφέρεται στα κύρια χαρακτηριστικά του προϊόντος και αποτελεί σημαντική στρατηγική απόφαση και μέσο ανταγωνισμού, καθώς προσδιορίζει το τμήμα της αγοράς στο οποίο απευθύνεται το προϊόν.
2. Ποιότητα Κατασκευής (*manufactured quality*), η οποία αποτελεί το βαθμό συμμόρφωσης προς τις προδιαγραφές που προβλέπει ο σχεδιασμός του προϊόντος.

Η βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων με ταυτόχρονη ελάττωση του παραγωγικού κόστους, ήταν ανέκαθεν ο βασικός στόχος των βιομηχανιών, προκειμένου να ανταπεξέλθουν στον ολοένα αυξανόμενο ανταγωνισμό της διεθνούς αγοράς και του

παγκόσμιου εμπορίου. Η βελτίωση αυτή, επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων σχεδιασμών και εκτέλεσης πειραμάτων, που έχουν σκοπό τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των παραγόντων που εξετάζονται στο σύστημα.

Όλες οι ενέργειες που γίνονται για τη βελτίωση της ποιότητας, πρέπει να εφαρμόζονται σε ολόκληρο τον κύκλο ανάπτυξης και παραγωγής του προϊόντος με ιδιαίτερη έμφαση στα αρχικά στάδια, δηλαδή το στάδιο πριν την έναρξη της μαζικής παραγωγής (*off-line quality control*). Στο στάδιο αυτό, αναγνωρίζονται οι παράγοντες που πιθανόν επηρεάζουν την παραγωγική διαδικασία και εξετάζεται η επίδρασή τους στο υπό μελέτη χαρακτηριστικό με χρήση πειραματικών σχεδιασμών. Κάποιοι παράγοντες είναι εύκολο να ελεγχθούν τόσο κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, όσο και κατά το στάδιο της παραγωγής, ενώ κάποιοι άλλοι αν και είναι σχετικά εύκολο να ελεγχθούν κατά τη διάρκεια του πειραματισμού, είναι δύσκολο να ελεγχθούν κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας. Η βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων λοιπόν, επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλου σχεδιασμού και εκτέλεσης πειραμάτων που έχουν σκοπό τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των παραγόντων που εξετάζονται στο σύστημα. Οι ενέργειες αυτές, αποσκοπούν στη βέλτιστη επιλογή των επιπέδων των εύκολα ελεγχόμενων παραγόντων, έτσι ώστε τα χαρακτηριστικά ποιότητας να προσεγγίζουν όσο το δυνατό τις επιθυμητές τιμές και ταυτόχρονα να επιτυγχάνεται η ελάχιστη επίδραση των τυχαίων παραγόντων είτε κατά την παραγωγή, είτε κατά τη λειτουργία στα χαρακτηριστικά ποιότητας που μελετώνται.

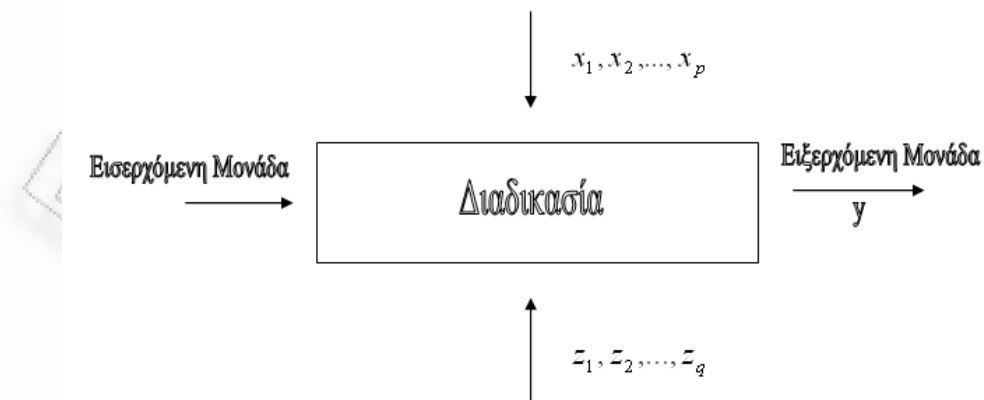
Οι σχετικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται, είναι γνωστές με την ορολογία *σχεδιασμός πειραμάτων* (*Design Of Experiments – DOE*) και αποσκοπούν στη μελέτη των επιδράσεων μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών στη μέση τιμή ή και τη διασπορά της μεταβλητής απόκρισης. Ο σχεδιασμός πειραμάτων, χρονολογείται από τη δεκαετία του 1920 και τον Sir Ronald Fisher. Ο μηχανικός Genichi Taguchi τη δεκαετία του 1950 έθεσε τα θεμέλια στη βελτίωση ποιότητας με χρήση σχεδιασμού πειραμάτων στη μελέτη των επιδράσεων μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων τιμών στη μεταβλητότητα ενός χαρακτηριστικού ποιότητας. Η μεθοδολογία που ανέπτυξε έγινε γνωστή με τον όρο “Ανθεκτικός Παραμετρικός Σχεδιασμός” (*Robust Parameter Design*).

1.2 Η Στρατηγική Του Πειραματισμού

Τα πειράματα γενικά είναι ερευνητικές διεργασίες που εκτελούνται από επιστήμονες όλων των τομέων των επιστημών και της έρευνας, για την ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας κάποιων διαδικασιών ή συστημάτων. Με την κυριολεκτική έννοια, κάθε πείραμα είναι ένας έλεγχος. Ωστόσο ένας πιο επίσημος ορισμός του πειράματος είναι μια ακολουθία κάποιων ενεργειών κατά την οποία υφίστανται σημαντικές αλλαγές στις εισερχόμενες μεταβλητές μιας διαδικασίας ή ενός συστήματος, έτσι ώστε να μπορούμε να παρατηρήσουμε και να αναγνωρίσουμε τους λόγους των αλλαγών οι οποίοι πιθανότατα έχουν παρατηρηθεί στην εξερχόμενη απόκριση.

Το πείραμα παίζει σημαντικό ρόλο τόσο στην παραγωγική διαδικασία και ανάπτυξη νέων βιομηχανικών προϊόντων όσο και σε διαδικασίες βελτιστοποίησης. Ο βασικότερος σκοπός του πειράματος στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι να συμβάλει στην ανάπτυξη μιας ανθεκτικής (*robust*) διαδικασίας, δηλαδή μιας διαδικασίας η οποία να επηρεάζεται όσο το δυνατόν λιγότερο από εξωτερικούς παράγοντες διασποράς.

Σε γενικές γραμμές, τα πειράματα χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της ερμηνείας διαδικασιών και συστημάτων. Μπορούμε να φανταστούμε τη διαδικασία ενός πειράματος σαν ένα συνδυασμό από μηχανές, μεθόδους, ανθρώπους και άλλες πηγές, ο οποίος μετατρέπει μια εισερχόμενη μονάδα (συνήα κάποιο υλικό), μετά από μια διεργασία, σε εξερχόμενη, η οποία έχει μια ή περισσότερες παρατηρούμενες αποκρίσεις. Σχηματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα πείραμα έχει την παρακάτω μορφή



Κάποιοι από τους παράγοντες της διαδικασίας x_1, x_2, \dots, x_p είναι εύκολα ελεγχόμενοι, ενώ κάποιοι άλλοι z_1, z_2, \dots, z_q είναι μη ελεγχόμενοι. Στους στόχους του πειράματος, θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε τα εξής

- Προσδιορισμός των παραγόντων οι οποίοι έχουν την μεγαλύτερη επίδραση στην απόκριση y
- Προσδιορισμός του επιπέδου επιρροής των x , έτσι ώστε η y να είναι σχεδόν πάντα στην επιθυμητή τιμή
- Προσδιορισμός του επιπέδου επιρροής των x , έτσι ώστε η y να έχει την μικρότερη διασπορά
- Προσδιορισμός του επιπέδου επιρροής των x , έτσι ώστε η επίδραση των μη ελεγχόμενων παραγόντων z_1, z_2, \dots, z_q να ελαχιστοποιείται.

Συνήθως, ο σκοπός του πειραματιστή είναι να προσδιορίσει την επίδραση που θα έχουν αυτοί οι παράγοντες στην εξερχόμενη απόκριση του συστήματος. Η γενική προσέγγιση του σχεδιασμού και κατασκευής του πειράματος, καλείται **στρατηγική του πειραματισμού** (*strategy of experimentation*).

Μια στρατηγική πειραματισμού που χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην πράξη και οφείλεται στον Sir Francis Bacon είναι αυτή του **ενός παράγοντα την φορά** (*one factor at a time*). Η μέθοδος αυτή εξετάζει την επίδραση ενός μόνο παράγοντα στην απόκριση κατά την οποία ο πειραματιστής παρατηρεί μεταβολή σε αυτήν έχοντας αλλάξει το επίπεδο του παράγοντα αυτού, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί τα επίπεδα των υπόλοιπων παραγόντων σταθερά.

Το κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι ότι δεν θεωρεί καμία πιθανή αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων. Η αλληλεπίδραση είναι η "αποτυχία" ενός παράγοντα να προξενήσει την ίδια επίδραση στην απόκριση όταν τα επίπεδα των άλλων παραγόντων αλλάζουν. Η αλληλεπίδραση μεταξύ παραγόντων είναι ένα σύνθετο φαινόμενο στους πειραματικούς σχεδιασμούς και εάν αυτές υπάρχουν, τότε τα αποτελέσματα στα πειράματα του ενός παράγοντα την φορά θα είναι σίγουρα αναξιόπιστα και λανθασμένα.

Η καταλληλότερη προσέγγιση για σχεδιασμούς που έχουν πολλούς παράγοντες, είναι η κατασκευή ενός *παραγοντικού πειράματος* (*factorial experiment*), το οποίο μελετάει την ταυτόχρονη εναλλαγή των επιπέδων πολλών παραγόντων και όχι ενός παράγοντα την φορά. Η σημαντικότερη περίπτωση παραγοντικού σχεδιασμού είναι όταν έχουμε k παράγοντες με δυο επίπεδα ο καθένας, όπου μια πλήρης επανάληψη ενός τέτοιου πειράματος απαιτεί 2^k δοκιμές. Ο σχεδιασμός αυτός καλείται **2^k παραγοντικός σχεδιασμός**.

Για $k=2$ έχουμε τον 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό, ο οποίος γεωμετρικά παριστάνεται με ένα τετράγωνο, όπου κάθε γωνία του είναι και μια από τις 4 δοκιμές (*runs*) του πειράματος.

Για $k=3$ έχουμε τον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό, ο οποίος γεωμετρικά παριστάνεται με έναν κύβο, όπου κάθε γωνία του είναι και μια από τις 8 δοκιμές του πειράματος.

Για $k>2$ έχουμε τον 2^k παραγοντικό σχεδιασμό, ο οποίος γεωμετρικά παριστάνεται με έναν υπερκύβο για τον οποίο δεν έχουμε εποπτεία.

Εάν έχουμε τέσσερις με πέντε παράγοντες ή και περισσότερους, συνήθως δεν είναι απαραίτητο να εκτελεστούν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων. Ένας *κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός* (*fractional factorial design*) είναι μια παραλλαγή του βασικού παραγοντικού σχεδιασμού, στον οποίο μόνο ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των δοκιμών εκτελείται. Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται ευρέως στην βιομηχανική έρευνα και ανάπτυξη, όπως επίσης και σε διαδικασίες βελτιστοποίησης.

1.3 Εφαρμογές των Πειραματικών Σχεδιασμών

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί έχουν απήχηση σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών τομέων. Αποτελούν κομμάτι μιας επιστημονικής διαδικασίας και έναν αποτελεσματικό τρόπο εκμάθησης του τρόπου λειτουργίας συστημάτων. Η χρήση τους στα αρχικά στάδια της ανάπτυξης μιας διαδικασίας συμβάλλει στη βελτίωση αυτής και στη μείωση της μεταβλητότητας της τιμής του ποιοτικού χαρακτηριστικού με ταυτόχρονη προσέγγιση των τιμών στόχων στα επιθυμητά αποτελέσματα που καθιστούν τα προϊόντα

καταλληλότερα και ελκυστικότερα για τους καταναλωτές. Επίσης, συμβάλει στη μείωση του χρόνου παραγωγής των προϊόντων, κάτι το οποίο είναι σημαντικό τόσο από βιομηχανικής πλευράς, λόγω συνεχούς ανταγωνισμού, όσο και από τις ολοένα και αυξανόμενες απαιτήσεις των καταναλωτών.

Συνοψίζοντας, η χρήση των πειραματικών σχεδιασμών αποσκοπεί στην παραγωγή προϊόντων που είναι ευκολότερα στην κατασκευή, έχουν ενισχυμένα πεδία χρήσης και αξιοπιστίας, χαμηλό παραγωγικό κόστος και τέλος μικρότερο παραγωγικό σχεδιασμό και χρόνο ανάπτυξης.

1.4 Σχεδιασμοί Πειραμάτων – Βασικές Αρχές

Ο σχεδιασμός ενός πειράματος, αναφέρεται στην διαδικασία της οργάνωσης του πειράματος, έτσι ώστε να συλλεχθούν κατάλληλα δεδομένα τα οποία έπειτα μπορούν να αναλυθούν με κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να δώσουν έγκυρα και αντικειμενικά αποτελέσματα. Η στατιστική προσέγγιση του πειραματικού σχεδιασμού είναι απαραίτητη εάν επιθυμούμε να πάρουμε σωστά συμπεράσματα από τα δεδομένα.

Υπάρχουν τρεις βασικές αρχές του πειραματικού σχεδιασμού οι οποίες είναι αναπόσπαστο κομμάτι κάθε πειράματος και είναι οι

- **Τυχαιότητα** (*randomization*)

Η τυχαιότητα είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της χρήσης στατιστικών μεθόδων στους πειραματικούς σχεδιασμούς. Με τον όρο τυχαιότητα, εννοούμε ότι η κατανομή του πειραματικού υλικού και η σειρά με την οποία εκτελούνται οι μεμονωμένες δοκιμές του πειράματος είναι προσδιορισμένες τυχαία. Οι στατιστικές μέθοδοι απαιτούν οι παρατηρήσεις (ή τα σφάλματα) να είναι τυχαίες μεταβλητές που κατανέμονται ανεξάρτητα. Η τυχαιότητα συνήθως κάνει τα συμπεράσματα ενός πειραματικού σχεδιασμού εγκυρότερα, αφού προσφέρει προστασία από την επίδραση αγνώστων και μη μετρήσιμων παραγόντων οι οποίοι μπορούν ωστόσο να επηρεάσουν την τιμή της απόκρισης.

- **Επανάληψη** (*replication*)

Η επανάληψη έχει δυο βασικές ιδιότητες

1. Επιτρέπει στον πειραματιστή να πάρει μια εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος και
2. Εάν ο μέσος του δείγματος χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της επίδρασης ενός παράγοντα στο πείραμα, η επανάληψη επιτρέπει στον πειραματιστή να πάρει μια ακριβέστερη εκτίμηση της επίδρασης.

- **Ομαδοποίηση** (*blocking*)

Η ομαδοποίηση είναι μια τεχνική σχεδιασμού που χρησιμοποιείται συνήθως για την βελτίωση της ακρίβειας των συγκρίσεων που γίνονται μεταξύ των παραγόντων που μας ενδιαφέρουν. Συχνά, χρησιμοποιείται για την μείωση ή την εξάλειψη της μεταβλητότητας που δημιουργείται από "προβληματικούς" παράγοντες, δηλαδή από παράγοντες οι οποίοι μπορεί να έχουν επίδραση στην απόκριση αλλά δεν μας ενδιαφέρουν άμεσα.

Γενικά για τη σωστή εκτέλεση ενός πειραματικού σχεδιασμού θα πρέπει να ακολουθηθούν κάποια βήματα.

Αυτά είναι

1. Αναγνώριση της φύσης του προβλήματος.
2. Επιλογή των παραγόντων, των επιπέδων τους και του εύρους τιμών τους
3. Επιλογή της μεταβλητής απόκρισης.
4. Επιλογή πειραματικού σχεδιασμού.
5. Εκτέλεση του πειράματος.
6. Στατιστική ανάλυση των δεδομένων.
7. Συμπεράσματα και συστάσεις.

1.5 Ιστορική Αναδρομή Των Πειραματικών Σχεδιασμών

Υπάρχουν τέσσερις εποχές στην σύγχρονη ανάπτυξη των στατιστικών πειραματικών σχεδιασμών. Η πρώτη εποχή σηματοδοτείται από την πρωτοποριακή εργασία του Sir Ronald Fisher στο Λονδίνο (*The design of experiments* (1935)). Ο Fisher εισήγαγε σταδιακά την στατιστική σκέψη και τις στατιστικές αρχές στις έρευνες των πειραματικών σχεδιασμών, συμπεριλαμβάνοντας την ιδέα του παραγοντικού σχεδιασμού και της ανάλυσης διακύμανσης.

Παρόλο που υπήρχαν εφαρμογές των στατιστικών σχεδιασμών στην βιομηχανία ήδη από τις αρχές του 1930, η δεύτερη εποχή (βιομηχανική εποχή) σηματοδοτήθηκε από την ανάπτυξη της μεθοδολογίας των αποκριτικών επιφανειών (*response surface methodology* – RSM) των Box και Wilson (1951). Η μέθοδος αυτή ερευνά τις σχέσεις μεταξύ επεξηγηματικών μεταβλητών και μιας ή περισσότερων μεταβλητών απόκρισης. Βασική ιδέα είναι η χρησιμοποίηση μιας ακολουθιακής πειραματικής διαδικασίας για την λήψη μιας βέλτιστης απόκρισης. Στα επόμενα 30 χρόνια, η μέθοδος RSM αλλά και άλλες τεχνικές σχεδιασμού διαδόθηκαν στις περισσότερες βιομηχανίες κυρίως για έρευνα και ανάπτυξη.

Το αυξανόμενο ενδιαφέρον της δυτικής βιομηχανίας για την βελτίωση ποιότητας που ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 1970, οδήγησε στην τρίτη εποχή του στατιστικού σχεδιασμού. Η εργασία του Genichi Taguchi (1987) είχε σημαντική επίδραση στην επέκταση του ενδιαφέροντος για τη χρήση πειραματικών σχεδιασμών.

Ο Taguchi εισήγαγε την έννοια του **ανθεκτικού παραμετρικού σχεδιασμού** (*robust parameter design*) και με την επιπλέον βοήθεια των πειραματικών σχεδιασμών επεδίωξε αρχικά την κατασκευή μιας διαδικασίας ανθεκτικής σε περιβαλλοντικούς παράγοντες ή άλλους παράγοντες που είναι δύσκολο να ελεγχθούν, την παραγωγή προϊόντων που είναι ανθεκτικά στην μεταβλητότητα που προέρχεται από άλλα στοιχεία και τέλος την εύρεση επιπέδων των μεταβλητών της διαδικασίας τα οποία θα "πιέσουν" την μέση τιμή σε ένα επιθυμητό επίπεδο, ενώ ταυτόχρονα θα μειώνεται η μεταβλητότητα γύρω από την τιμή αυτή.

Ο Taguchi πρότεινε τη χρήση κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών υψηλής διακριτικής ικανότητας και ορθογώνιων σχηματισμών γενικότερα για την προσέγγιση

των παραπάνω θεμάτων. Στα τέλη της δεκαετίας του '80, παρόλο που οι ιδέες του Taguchi είχαν εδραιωθεί, υπήρχαν επιστήμονες που θεώρησαν πως υπήρχαν σημαντικά προβλήματα που αφορούσαν την πειραματική του στρατηγική και τις μεθόδους της ανάλυσης δεδομένων.

Οι αντιπαραθέσεις αυτές, οδήγησαν στα εξής

- Οι πειραματικοί σχεδιασμοί άρχισαν να χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορους τομείς της βιομηχανίας και της βαριάς βιομηχανίας όπως αυτοκινητοβιομηχανίες, αεροναυπηγική και ηλεκτρονικά.
- Άρχισε η τέταρτη εποχή των πειραματικών σχεδιασμών, η οποία περιλαμβάνει το κοινό ενδιαφέρον ερευνητών και επιστημόνων για τους σχεδιασμούς αυτούς και την ανάπτυξη νέων και χρήσιμων προσεγγίσεων συμπεριλαμβάνοντας εναλλακτικές μεθόδους από αυτές του Taguchi που δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

2.1 Βασικοί Ορισμοί

Πολλά πειράματα πραγματοποιούνται την μελέτη των επιδράσεων δυο ή περισσότερων παραγόντων. Γενικά οι παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι οι πιο αποτελεσματικοί για τέτοιου τύπου πειράματα. Με τον όρο παραγοντικό σχεδιασμό εννοούμε ότι με κάθε πλήρης δοκιμή ή επανάληψη του πειράματος εξετάζονται όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων. Για παράδειγμα, εάν ένα πείραμα έχει δυο παράγοντες, έστω τους A και B και υπάρχουν a επίπεδα για τον παράγοντα A και b επίπεδα για τον παράγοντα B, τότε κάθε επανάληψη θα περιέχει όλους τους ab δυνατούς συνδυασμούς επιπέδων.

Τα περισσότερα πειράματα που αφορούν στο σχεδιασμό και στη βελτιστοποίηση μιας διαδικασίας, περιλαμβάνουν συνήθως αρκετούς παράγοντες οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζουν την απόκριση που μελετάται. Από τη στιγμή που αναδειχθούν οι σημαντικοί παράγοντες, αρχίζει η έρευνα για την εύρεση του καλύτερου συνδυασμού των επιπέδων των παραγόντων αυτών, ώστε να βελτιστοποιηθεί η διαδικασία.

Γενικά οι προτεραιότητες του πειραματιστή είναι

- Η εύρεση εκείνων των παραγόντων που επηρεάζουν την απόκριση (*screening procedure*).
- Ο εντοπισμός του βέλτιστου συνδυασμού των επιπέδων των σημαντικών παραγόντων προκειμένου να φέρουμε την απόκριση πιο κοντά στην τιμή στόχο καθώς και να μειώσουμε την μεταβλητότητα της.

Ως επίδραση ενός παράγοντα, ορίζεται η μεταβολή που γίνεται στην απόκριση (*response*) από την αλλαγή στο επίπεδο του παράγοντα. Αυτή συχνά ονομάζεται και **κύρια επίδραση** (*main effect*) διότι αναφέρεται στους θεμελιώδεις παράγοντες του πειράματος. Σε κάποια πειράματα, ίσως παρατηρήσουμε ότι οι διαφορές στην απόκριση μεταξύ των επιπέδων του ενός παράγοντα, δεν είναι ίδια για όλα τα επίπεδα των άλλων παραγόντων. Όταν αυτό συμβαίνει λέμε ότι υπάρχει **αλληλεπίδραση** (*interaction*) μεταξύ των παραγόντων.

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται ευρέως σε πειράματα που περιέχουν πολλούς παράγοντες και είναι απαραίτητη η μελέτη της κοινής επίδρασης των παραγόντων στην απόκριση. Η σημαντικότερη περίπτωση παραγοντικού σχεδιασμού είναι αυτή που έχει k παράγοντες με δυο επίπεδα ο καθένας. Οι τιμές αυτών των επιπέδων μπορεί να είναι είτε ποσοτικές (τιμές θερμοκρασίας, βάρους κλπ), είτε ποιοτικές (π.χ δυο μηχανές, οι ενδείξεις χαμηλό και υψηλό κλπ). Μια πλήρης επανάληψη ενός τέτοιου σχεδιασμού απαιτεί $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ παρατηρήσεις και καλείται **2^k παραγοντικός σχεδιασμός** (*2^k factorial design*).

Επειδή υπάρχουν μόνο δυο επίπεδα για κάθε παράγοντα, θεωρούμε ότι η απόκριση είναι κατά προσέγγιση γραμμική πάνω στο εύρος των επιπέδων των παραγόντων που έχουν επιλεγεί.

2.2 Ο 2^2 Παραγοντικός Σχεδιασμός

Η πιο απλή μορφή ενός 2^k σχεδιασμού, είναι ο σχεδιασμός που περιέχει μόνο δυο παράγοντες ($k=2$), έστω τους A και B , με δυο επίπεδα ο καθένας. Ο σχεδιασμός αυτός καλείται **2^2 παραγοντικός σχεδιασμός**. Τα επίπεδα των παραγόντων μπορούν τυχαία να ονομαστούν «χαμηλό» και «υψηλό» και να συμβολιστούν με «-» και «+» ή με «1» και «2» αντίστοιχα.

Οι τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί των επιπέδων του σχεδιασμού που καλούνται και «αγωγές», συνήθως παριστάνονται με μικρά γράμματα, δηλαδή η υψηλή στάθμη οποιουδήποτε παράγοντα στην αγωγή συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό γράμμα, ενώ

η χαμηλή στάθμη ενός παράγοντα συμβολίζεται με την απουσία του αντίστοιχου γράμματος.

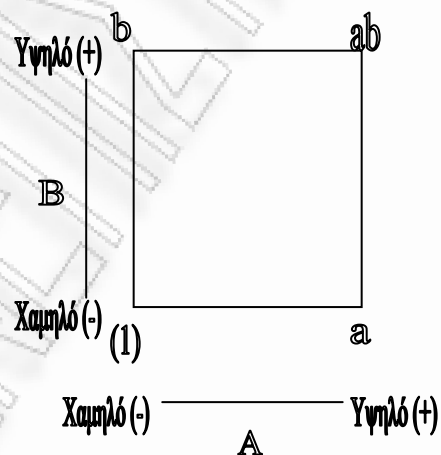
Άρα

- το «a» παριστάνει την αγωγή κατά την οποία ο παράγοντας A είναι στην υψηλή στάθμη και ο παράγοντας B στην χαμηλή
- το «b» παριστάνει την αγωγή κατά την οποία ο παράγοντας B είναι στην υψηλή στάθμη και ο παράγοντας A στην χαμηλή
- το «ab» παριστάνει την αγωγή κατά την οποία και οι δυο παράγοντες είναι στην υψηλή στάθμη
- το (1) παριστάνει την αγωγή κατά την οποία και οι δυο παράγοντες είναι στην χαμηλή στάθμη

Αυτός ο συμβολισμός χρησιμοποιείται σε όλους τους 2^k σχεδιασμούς.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού, είναι ένα τετράγωνο του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων (αγωγές).

Συγκεκριμένα είναι



Σχήμα 2.1 Ο 2^2 Παραγοντικός Σχεδιασμός

Είναι συχνά εύχρηστο να γραφούμε τις αγωγές με τη σειρά

$$(1), a, b, ab$$

η οποία αναφέρεται και σαν η τυπική διάταξη των αγωγών του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού.

Η εκτίμηση των παραγοντικών επιδράσεων μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση του πίνακα προσήμων του παραγοντικού σχεδιασμού, ο οποίος παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Πίνακας Προσήμων για τον 2^2 Παραγοντικό Σχεδιασμό

		ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ			
Run	ΑΓΩΓΕΣ	A	B	AB	I
1	(1)	-	-	+	+
2	a	+	-	-	+
3	b	-	+	-	+
4	ab	+	+	+	+

Η στήλη AB δηλώνει την αλληλεπίδραση των δυο παραγόντων και προκύπτει από το γινόμενο των στηλών A και B. Όταν πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε στήλη με τον εαυτό της, προκύπτει η μοναδιαία στήλη I, η οποία έχει μόνο θετικά πρόσημα. Το I συμβολίζει τον μέσο όλων των παρατηρήσεων που υπάρχουν στο πείραμα.

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της κύριας επίδρασης του παράγοντα A χρησιμοποιείται η σχέση

$$A = \frac{l_A}{2n} = \frac{-(1) + a - b + ab}{2n}$$

όπου (1), a, b και ab είναι τα αθροίσματα των παρατηρήσεων κάθε αγωγής στις n επαναλήψεις του σχεδιασμού. Η ποσότητα l_A προκύπτει από τον πίνακα προσήμων του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού (Πίνακας 2.1) και καλείται "αντίθεση" του παράγοντα A. Για τον υπολογισμό της κύριας επίδρασης B καθώς και της αλληλεπίδρασης AB χρησιμοποιούνται οι αντιθέσεις $l_B = -(1) - a + b + ab$ και $l_{AB} = (1) - a - b + ab$ όπως προκύπτουν από τον πίνακα προσήμων.

Στον 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό, για να εντοπίσουμε ποιες επιδράσεις είναι σημαντικές, χρησιμοποιούμε την ανάλυση διακύμανσης, όπου η συνολική μεταβλητότητα SST διασπάται σε μεταβλητότητα που ερμηνεύεται από τις A, B και AB και σε μεταβλητότητα που παραμένει ανερμήνευτη από τους παράγοντες που εξετάζουμε, SSE. Τα αθροίσματα τετραγώνων για τις επιδράσεις υπολογίζονται με βάση τις εκάστοτε αντιθέσεις, με χρήση των τύπων

$$SSA = \frac{(l_A)^2}{4n}, \quad SSB = \frac{(l_B)^2}{4n}, \quad SSAB = \frac{(l_{AB})^2}{4n}$$

όπου n ο αριθμός επαναλήψεων του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού και

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB.$$

Η ανάλυση διακύμανσης για τον 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό μπορεί να παρουσιασθεί ως εξής:

Πίνακας 2.2 Πίνακας ANOVA για έναν 2^2 παραγοντικό Σχεδιασμό

Πηγή Μεταβλητότητας	SS Αθροίσματα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	MS	F
A	SSA	1	SSA / 1	MSA / MSE
B	SSB	1	SSB / 1	MSB / MSE
AB	SSAB	1	SSAB / 1	MSAB / MSE
Residual	SSE	4(n-1)	SSE / 4(n-1)	
Total	SST	4n-1		

Σε κάθε άθροισμα τετραγώνων αντιστοιχούν ορισμένοι βαθμοί ελευθερίας, που ισοδυναμούν με το πλήθος των ανεξαρτήτων παρατηρήσεων (Y_i), οι οποίοι απαιτούνται για τον υπολογισμό του εν λόγω αθροίσματος (όπου n ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος).

Για μια κύρια επίδραση, έστω του παράγοντα A, το πλήθος των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν σε αυτή δίνεται από τη σχέση

$$df_A = \text{πλήθος επιπέδων του παράγοντα} - 1$$

Εδώ έχουμε παράγοντες δυο επιπέδων, άρα στον καθένα θα αντιστοιχεί από ένας βαθμός ελευθερίας. Ένας βαθμός ελευθερίας, αντιστοιχεί επίσης και στην αλληλεπίδραση των παραγόντων. Τέλος, οι βαθμοί ελευθερίας ολοκλήρου του σχεδιασμού δίνονται από τη σχέση

$$df_{DOE} = \text{πλήθος δοκιμών} - 1$$

Δηλαδή, για μια επανάληψη ($n=1$) του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού, οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας είναι 3.

Το MS προκύπτει από τα αθροίσματα τετραγώνων (SS) διαιρεμένα με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας.

Η συνάρτηση F μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να ελέγξουμε την ισχύ της υπόθεσης, ότι τα δεδομένα μας περιγράφονται ικανοποιητικά από το γραμμικό μοντέλο.

Εκτός από την εκτίμηση και την αξιολόγηση των επιδράσεων σε ένα 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό, πολλές φορές θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα μοντέλο με βάση το οποίο μπορούμε να προβλέψουμε την απόκριση ή να εκτιμήσουμε την μέση απόκριση για οποιεσδήποτε τιμές των παραγόντων ανάμεσα στα επίπεδα τα οποία εξετάσαμε.

Για το 2^2 παραγοντικό με παράγοντες τους A και B, το μοντέλο

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon$$

κατασκευάζεται με την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων και τη διαδικασία της πολλαπλής παλινδρόμησης όπου

Y : η μεταβλητή απόκρισης, δηλαδή εκείνο το χαρακτηριστικό ποιότητας, του οποίου οι τιμές ενδιαφέρουν τον πειραματιστή.

X_1 : είναι μια κωδικοποιημένη μεταβλητή με τιμές 1 και -1 (δισταθμική) ανάλογα με την επιλογή του επιπέδου, για τον παράγοντα A

X_2 : είναι μια κωδικοποιημένη μεταβλητή με τιμές 1 και -1 (δισταθμική) ανάλογα με την επιλογή του επιπέδου, για τον παράγοντα B.

X_1X_2 : είναι μια κωδικοποιημένη μεταβλητή με τιμές 1 και -1 (δισταθμική) για την αλληλεπίδραση AB (προκύπτει από το γινόμενο των τιμών της X_1 και της X_2).

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$: οι συντελεστές παλινδρόμησης (*regression coefficients*)

ε : είναι ο όρος για το τυχαίο σφάλμα που είναι όμοιος με τον όρο του σφάλματος στο μοντέλο της ανάλυσης διακύμανσης. Για το σφάλμα θεωρούμε ότι η μέση του τιμή είναι μηδενική, έχει σταθερή διασπορά σ^2 και ότι τα $\{\varepsilon_i\}$ είναι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, iid).

Με τη χρήση των κωδικοποιημένων μεταβλητών αποφεύγουμε τη συσχέτιση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών του μοντέλου, καθώς οι μεταβλητές X_1 , X_2 , και X_1X_2 έχουν μηδενικές συσχετίσεις.

Το προσαρμοσμένο μοντέλο παλινδρόμησης (δηλαδή αυτό που χρησιμοποιείται για τη εκτίμηση των παραμέτρων) θα έχει τη μορφή

$$\hat{Y} = \bar{Y} + \frac{A}{2} X_1 + \frac{B}{2} X_2 + \frac{AB}{2} X_1 X_2$$

όπου A, B και AB είναι οι παραγοντικές επιδράσεις.

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της β_0 είναι ο μέσος των παρατηρήσεων (\bar{Y}) και οι εκτιμήσεις των υπόλοιπων συντελεστών είναι οι τιμές των επιδράσεων του μοντέλου απόκρισης στην μισή τους τιμή. Αυτό συμβαίνει διότι ο συντελεστής παλινδρόμησης μετράει την επίδραση που έχει στην Y η μοναδιαία μεταβολή της X_i και η εκτίμηση της επίδρασης βασίζεται στην μεταβολή κατά δυο μονάδες (από -1 στο +1).

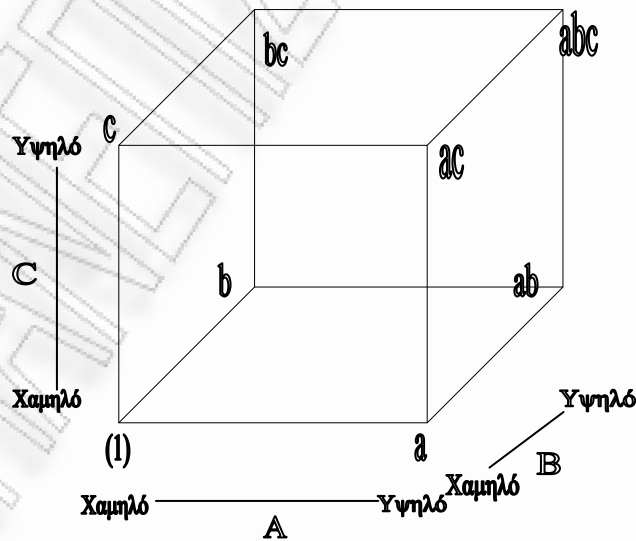
Δηλαδή

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}, \hat{\beta}_1 = \frac{A}{2}, \hat{\beta}_2 = \frac{B}{2} \text{ και } \hat{\beta}_3 = \frac{AB}{2}$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε το μοντέλο χωρίς να κάνουμε την ανάλυση παλινδρόμησης.

2.3 Ο 2^3 Παραγοντικός Σχεδιασμός

Έστω ότι έχουμε τρεις παράγοντες, τους A, B, και C με δυο επίπεδα ο καθένας. Τότε ο σχεδιασμός καλείται 2^3 παραγοντικός σχεδιασμός και οι οχτώ δυνατοί συνδυασμοί των επιπέδων των τριών αυτών παραγόντων, μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά σαν ένας κύβος, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2 Ο 2^3 Παραγοντικός Σχεδιασμός

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς «+» και «-» μπορούμε να φτιάξουμε μια λίστα των οχτώ δοκιμών του 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού, και με βάση αυτή, να κατασκευάσουμε τον πίνακα προσήμων του 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού, με τη βοήθεια του οποίου θα υπολογιστούν οι αντιθέσεις και εν συνεχεία οι επιδράσεις (κύριες και αλληλεπιδράσεις) των παραγόντων, καθώς και τα αθροίσματα τετραγώνων που αντιστοιχούν σε αυτά.

Πίνακας 2.2 Πίνακας Προσήμων για τον 2^3 Παραγοντικό Σχεδιασμό

Run	ΑΓΩΓΕΣ	ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ							
		A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
1	(1)	-	-	-	+	+	+	-	+
2	a	+	-	-	-	-	+	+	+
3	b	-	+	-	-	+	-	+	+
4	ab	+	+	-	+	-	-	-	+
5	c	-	-	+	+	-	-	+	+
6	ac	+	-	+	-	+	-	-	+
7	bc	-	+	+	-	-	+	-	+
8	abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Η στήλη AB δηλώνει την αλληλεπίδραση των δυο παραγόντων και προκύπτει από το γινόμενο των στηλών A και B. Όμοια για τις στήλες AC, BC και ABC.

Ο Πίνακας 2.2 έχει κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

1. Με εξαίρεση την στήλη I, το πλήθος των «-» και «+» σε κάθε στήλη είναι το ίδιο (ιδιότητα της ισορροπίας – *balanced*).
2. Το άθροισμα των προσήμων που προκύπτει από το γινόμενο οποιονδήποτε δυο στηλών είναι μηδέν.
3. Η στήλη I εάν πολλαπλασιαστεί με οποιαδήποτε άλλη στήλη, αφήνει την στήλη αυτή απaráλλαχτη. Δηλαδή, η I είναι μοναδιαίο στοιχείο (*identify element*).
4. Ανά δυο στήλες τα ζεύγη (-,-), (+,-), (-,+) και (+,+) εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα (οι δυο στήλες είναι μεταξύ τους ορθογώνιες - *orthogonal*).
5. Το γινόμενο οποιονδήποτε δυο στηλών του πίνακα, δίνει μια στήλη η οποία υπάρχει ήδη στον πίνακα.

Για παράδειγμα $A \times C = AC$ και $AC \times C = A \times C^2 = A \times I = A$.

Στον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό, για τον υπολογισμό της κύριας επίδρασης του παράγοντα A χρησιμοποιείται η σχέση

$$A = \frac{l_A}{4n} = \frac{a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc}{4n}$$

Οι υπόλοιπες αντιθέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των υπόλοιπων επιδράσεων είναι οι

$$l_B = b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ab$$

$$l_C = c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab$$

$$l_{AB} = ab - a - b + (1) + abc - bc - ac + c$$

$$l_{AC} = (1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc$$

$$l_{BC} = (1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc$$

$$l_{ABC} = abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)$$

Για να εντοπίσουμε ποιες επιδράσεις είναι σημαντικές, χρησιμοποιούμε την ανάλυση διακύμανσης, όπου η συνολική μεταβλητότητα SST διασπάται σε μεταβλητότητα που ερμηνεύεται από τις A, B, C, AB, AC, BC και ABC και σε μεταβλητότητα που παραμένει ανεξήγητη από τους παράγοντες που εξετάζουμε, SSE. Τα αθροίσματα τετραγώνων για τις επιδράσεις υπολογίζονται με βάση τις εκάστοτε αντιθέσεις, με χρήση των τύπων

$$SSA = \frac{(l_A)^2}{8n}, \quad SSB = \frac{(l_B)^2}{8n}, \quad SSC = \frac{(l_C)^2}{8n},$$

$$SSAB = \frac{(l_{AB})^2}{8n}, \quad SSAC = \frac{(l_{AC})^2}{8n}, \quad SSBC = \frac{(l_{BC})^2}{8n} \quad \text{και} \quad SSABC = \frac{(l_{ABC})^2}{8n}$$

όπου n ο αριθμός επαναλήψεων του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού και

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSC - SSAB - SSAC - SSBC - SSABC.$$

Ο πίνακας ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) για τον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό φαίνεται παρακάτω

Πίνακας 2.3 Πίνακας ANOVA για έναν 2^3 παραγοντικό Σχεδιασμό

Πηγή Μεταβλητότητας	SS Αθροίσματα Τετραγώνων	Df Βαθμοί Ελευθερίας	MS	F
A	SSA	1	SSA / 1	MSA / MSE
B	SSB	1	SSB / 1	MSB / MSE
C	SSC	1	SSC / 1	MSC / MSE
AB	SSAB	1	SSAB / 1	MSAB / MSE
AC	SSAC	1	SSAC / 1	MSAC / MSE
BC	SSBC	1	SSBC / 1	MSBC / MSE
ABC	SSABC	1	SSABC / 1	MSABC / MSE
Residual	SSE	8(n-1)	SSE / 8(n-1)	
Total	SST	8n-1		

Για τον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό, το αντίστοιχο παλινδρομικό μοντέλο θα είναι το

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_1 X_2 + \beta_5 X_1 X_3 + \beta_6 X_2 X_3 + \beta_7 X_1 X_2 X_3 + \varepsilon$$

το οποίο κατασκευάζεται με την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων και τη διαδικασία της πολλαπλής παλινδρόμησης και για τα β_i , X_i και ε_i ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με το 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό.

2.4 Ο 2^k Παραγοντικός Σχεδιασμός

Η μέθοδος ανάλυσης που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα, μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση των 2^k παραγοντικών σχεδιασμών, δηλαδή ενός σχεδιασμού που έχει k παράγοντες με δυο επίπεδα ο καθένας.

Συγκεκριμένα σε ένα πείραμα με k παράγοντες των δυο επιπέδων θα υπάρχουν

$$\binom{k}{1} = k \text{ κύριες επιδράσεις}$$

$$\binom{k}{2} \text{ αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων}$$

...

$$\binom{k}{k} = 1 \text{ αλληλεπίδραση } k \text{ παραγόντων}$$

$$\text{Δηλαδή συνολικά } \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k - 1 \text{ επιδράσεις.}$$

Στο 2^k παραγοντικό σχεδιασμό, όταν το k παίρνει μεγάλες τιμές η κατασκευή του πίνακα προσήμων είναι μια διαδικασία χρονοβόρα και δύσκολη. Στην περίπτωση αυτή, προσδιορίζουμε την αντίθεση για την αλληλεπίδραση $ABC\dots k$ αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος της

$$I_{ABC\dots k} = (a \pm 1)(b \pm 1)\dots(k \pm 1)$$

χρησιμοποιώντας άλγεβρα, όπου στην τελική έκφραση αντικαθιστούμε το "1" με το (1). Το πρόσημο σε κάθε σύνολο παρενθέσεων είναι αρνητικό εάν ο παράγοντας συμπεριλαμβάνεται στην αλληλεπίδραση και θετικό εάν ο παράγοντας δεν συμπεριλαμβάνεται.

Όταν υπολογισθούν όλες οι αντιθέσεις, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις επιδράσεις και να υπολογίσουμε τα αθροίσματα τετραγώνων αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$ABC\dots k = \frac{2}{n2^k} l_{ABC\dots k} \text{ και } SSABC\dots k = \frac{1}{n2^k} l_{ABC\dots k}^2$$

όπου n ο αριθμός των επαναλήψεων.

Γενικεύοντας, ο πίνακας ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) για έναν 2^k παραγοντικό σχεδιασμό με όλες τις κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις, φαίνεται παρακάτω

Πίνακας 2.4 Πίνακας ANOVA για έναν 2^k παραγοντικό Σχεδιασμό

Πηγή Μεταβλητότητας	SS	Df Βαθμοί Ελευθερίας	MS	F
A	SSA	1	SSA / 1	MSA / MSE
...
k	SSK	1	SSK / 1	MSK / MSE
AB	SSAB	1	SSAB / 1	MSAB / MSE
...
ABk	SSABK	1	SSABK / 1	MSABK / MSE
...
ABC...k	SSABC...K	1	SSABC...K/1	MSABC...K/MSE
Residual	SSE	$2^k(n-1)$	$SSE / 2^k(n-1)$	
Total	SST	$n2^k-1$		

όπου n είναι το πλήθος των επαναλήψεων του 2^k παραγοντικού σχεδιασμού.

2.5 Μια επανάληψη του 2^k παραγοντικού σχεδιασμού

Ακόμα και για έναν μέτριο αριθμό παραγόντων, ο συνολικός αριθμός των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων σε έναν 2^k παραγοντικό σχεδιασμό είναι μεγάλος. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $k = 5$ παράγοντες, οι δυνατοί συνδυασμοί είναι $2^5 = 32$, για $k = 6$ είναι $2^6 = 64$ κ.ο.κ. Επειδή συνήθως οι οικονομικοί πόροι για πειραματισμό είναι περιορισμένοι, ο αριθμός (n) των επαναλήψεων του πειράματος, συχνά ελαχιστοποιείται. Έτσι, οι πόροι που διαθέτουν οι πειραματιστές επιτρέπουν την εκτέλεση μιας μόνο επανάληψης του σχεδιασμού δηλαδή έναν **μη-επαναλαμβανόμενο παραγοντικό σχεδιασμό** (*unreplicated factorial*).

Οι μη-επαναλαμβανόμενοι παραγοντικοί σχεδιασμοί έχουν μεγάλη εφαρμογή στη βιομηχανική παραγωγή και μειώνουν σημαντικά το κόστος και τη σπατάλη πόρων προσφέροντας έτσι οφέλη στη βιομηχανία. Μολαταύτα, με μια μόνο επανάληψη ($n = 1$), όπως φαίνεται και από τον πίνακα ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) του Πίνακα 2.4 δεν περισεύουν βαθμοί ελευθερίας για το σφάλμα (*residual*), οπότε δεν μπορούμε να το εκτιμήσουμε, άρα δεν μπορούμε να κάνουμε ελέγχους για τη σημαντικότητα των παραγοντικών επιδράσεων.

Μια προσέγγιση στην ανάλυση των μη επαναλαμβανόμενων παραγοντικών σχεδιασμών, είναι να θεωρήσουμε ότι οι υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις είναι ασήμαντες και να συνδυάσουμε τα μέσα τετράγωνα αυτών για να εκτιμήσουμε το σφάλμα. Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι όταν γίνεται ανάλυση δεδομένων από έναν μη επαναλαμβανόμενο παραγοντικό σχεδιασμό, περιστασιακά προκύπτουν υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις που μπορεί να είναι στατιστικά σημαντικές.

Ο Daniel (1959) για να ξεπεράσει το πρόβλημα που δημιουργείται από σημαντικές αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης, πρότεινε την χρήση του **κανονικού διαγράμματος πιθανότητας** των επιδράσεων (*Normal Probability Plot*). Σύμφωνα με αυτό, οι μη σημαντικές επιδράσεις κατανέμονται κανονικά με μέσο μηδέν και διασπορά σ^2 και τείνουν να σχηματίσουν μια ευθεία γραμμή στο διάγραμμα, ενώ οι σημαντικές επιδράσεις έχουν μη μηδενικούς μέσους και εμφανίζονται σαν μεμονωμένα σημεία στο διάγραμμα.

Άρα το προκαταρκτικό μοντέλο θα είναι καθορισμένο να περιέχει μόνο τους παράγοντες εκείνους που οι επιδράσεις τους απέχουν σημαντικά από την κεντρική γραμμή (δηλαδή αυτούς που είναι στατιστικά σημαντικοί). Οι επιδράσεις που δεν θεωρούνται σημαντικές, χρησιμοποιούνται προκειμένου να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου Daniel, είναι ότι η ερμηνεία του γραφήματος είναι καθαρά υποκειμενική και μπορεί να οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα.

Στην περίπτωση που σε έναν μη επαναλαμβανόμενο 2^k σχεδιασμό βρούμε ότι κάποιος παράγοντας δεν έχει σημαντικές επιδράσεις (κύριες και αλληλεπιδράσεις), μπορούμε να τον αγνοήσουμε από την ανάλυση. Το πείραμα τότε γίνεται 2^{k-1} με δυο επαναλήψεις σε κάθε συνδυασμό επίπεδων των υπολοίπων $k-1$ παραγόντων και η ανάλυση αποκτά περισσότερη ισχύ. Η διαδικασία αυτή λέγεται **προβολή** ενός μη-επαναλαμβανόμενου παραγοντικού σχεδιασμού σε έναν επαναλαμβανόμενο παραγοντικό σχεδιασμό με λιγότερους παράγοντες. Γενικά, εάν έχουμε ένα 2^k σχεδιασμό με μια επανάληψη και h ($h < k$) μη σημαντικούς παράγοντες, τότε εάν προβάσουμε το σχεδιασμό από στους σημαντικούς παράγοντες, θα πάρουμε πείραμα 2^{k-h} με 2^h επαναλήψεις.

2.6 Οι Κλασματικοί Παραγοντικοί Σχεδιασμοί.

Καθώς ο αριθμός των παραγόντων σε έναν 2^k παραγοντικό σχεδιασμό αυξάνει, ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του πειράματος αυξάνεται ραγδαίως σε βάρος των πόρων που διαθέτουν οι πειραματιστές. Για παράδειγμα, μια πλήρης επανάληψη του 2^6 σχεδιασμού απαιτεί 64 δοκιμές. Ο σχεδιασμός αυτός θα αποτελείται από συνολικά $2^6 - 1 = 63$ επιδράσεις. Στον σχεδιασμό αυτό, μόνο 6 από τους 63 βαθμούς ελευθερίας θα αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις, 15 βαθμοί ελευθερίας θα αντιστοιχούν για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δυο παραγόντων και οι υπόλοιποι 42 βαθμοί ελευθερίας θα αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τριών ή και παραπάνω παραγόντων. Εάν ο πειραματιστής μπορεί να υποθέσει ότι κάποιες αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης είναι μη σημαντικές, τότε η πληροφορία για τις κύριες επιδράσεις και τις επιδράσεις χαμηλότερης τάξης μπορεί να αντληθεί από την εκτέλεση ενός κλάσματος (υποσύνολο) του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού.

Αυτοί οι **κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί** (*fractional factorial designs*) βρίσκονται ανάμεσα στους πιο διαδεδομένους σχεδιασμούς που χρησιμοποιεί ο σύγχρονος βιομηχανικός κόσμος για ανάπτυξη και βελτιστοποίηση των προϊόντων τους.

Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται ευρέως στα **πειράματα κρησαρίσματος** (*screening experiments*), στα οποία υπάρχουν πολλοί παράγοντες και σκοπός είναι να αναγνωρίσουν οι πειραματιστές τους παράγοντες εκείνους (εάν υπάρχουν) που έχουν την μεγαλύτερη επίδραση στην εξεταζόμενη απόκριση. Τα πειράματα αυτά εκτελούνται κατά τα αρχικά στάδια μιας έρευνας, όταν είναι πολύ πιθανό πολλοί από τους παράγοντες που θεωρήσαμε αρχικά να έχουν μικρή ή μηδενική επίδραση στην απόκριση. Οι παράγοντες που αναγνωρίζονται ως σημαντικοί στη συνέχεια εξετάζονται πιο συστηματικά σε επόμενα πειράματα.

Η επιτυχής χρήση των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών βασίζεται σε τρεις βασικές αρχές που αφορούν τις επιδράσεις. Οι αρχές αυτές είναι :

1. **Σποραδικότητα** (*Effect sparsity principle*)

Ο αριθμός των σημαντικών επιδράσεων σε ένα παραγοντικό πείραμα αναμένεται να είναι μικρός.

2. **Ιεραρχία** (*Hierarchical ordering principle*)

Επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές από αυτές υψηλής τάξης.

3. **Κληρονομικότητα** (*Effect Heredity principle*)

Με τον όρο κληρονομικότητα, εννοούμε ότι η ιδιότητα της σημαντικότητας μεταβιβάζεται από τις κύριες επιδράσεις στις αλληλεπιδράσεις. Συγκεκριμένα, έχουμε την ισχυρή κληρονομικότητα (*strong heredity*) κατά την οποία μια αλληλεπίδραση αναμένεται να είναι σημαντική αν όλες οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων που τη σχηματίζουν είναι σημαντικές και την ασθενή κληρονομικότητα (*weak heredity*) όταν κάποιες από τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων που τη σχηματίζουν είναι σημαντικές.

Η επιλογή του υποσυνόλου των εκτελέσεων του πλήρους 2^k παραγοντικού πειράματος γίνεται όχι τυχαία, αλλά με βάση κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε έναν 2^3 σχεδιασμό για τη μελέτη τριών παραγόντων A, B και C καθένας από τους οποίους έχει δυο επίπεδα και ας θεωρήσουμε επίσης ότι οι πειραματιστές δεν έχουν την δυνατότητα, λόγω περιορισμένων πόρων, για την εκτέλεση και των $2^3 = 8$ αγωγών, αλλά μπορούν να πραγματοποιήσουν μόνο τέσσερις, δηλαδή τις μισές. Ο σχεδιασμός που ζητάμε θα περιλαμβάνει $2^{3-1} = 4$ αγωγές και καλείται $\frac{1}{2}$ κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός (one half fraction) του 2^3 σχεδιασμού ή ένας 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός. Η επιλογή των τεσσάρων αγωγών βασίζεται στον πίνακα προσήμων του 2^3 σχεδιασμού (Πίνακας 2.2). Έστω ότι επιλέγουμε τους τέσσερις συνδυασμούς αγωγών a, b, c, και abc ως τον $\frac{1}{2}$ κλασματικό σχεδιασμό. Οι δοκιμές αυτές φαίνονται στο πάνω μισό (Μέρος 1) του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.5 : Πίνακας προσήμων για τον 2^3 κλασματικό σχεδιασμό

		ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ									
		Run	ΑΓΩΓΕΣ	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	I
ΜΕΡΟΣ 1	2	a	+	-	-	-	-	-	+	+	+
	3	b	-	+	-	-	-	+	-	+	+
	5	c	-	-	+	+	-	-	-	+	+
	8	abc	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ΜΕΡΟΣ 2	1	-1	-	-	-	+	+	+	-	-	+
	4	ab	+	+	-	+	-	-	-	-	+
	6	ac	+	-	+	-	+	-	-	-	+
	7	bc	-	+	+	-	-	+	-	-	+

Παρατηρούμε ότι ο σχεδιασμός που επιλέξαμε αποτελείται από αυτές τις αγωγές που έχουν την ένδειξη «+» στην στήλη της αλληλεπίδρασης ABC. Μπορούμε επιπλέον να πούμε ότι η επίδραση ABC «γεννά» τον σχεδιασμό αυτό και για το λόγο αυτό ονομάζεται και *γεννήτορας* (generator) του συγκεκριμένου κλάσματος. Συχνά θα αναφερόμαστε σε ένα γεννήτορα, όπως ο ABC, σαν μια «λέξη».

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η μοναδιαία στήλη I ουσιαστικά ταυτίζεται με τη στήλη ABC (το γεννήτορα δηλαδή), οπότε μπορούμε να γράψουμε $I = ABC$. Η τελευταία σχέση λέγεται **ορίζουσα σχέση** (*defining relation*) του σχεδιασμού.

Παρατηρώντας την επιλογή που κάναμε από το πρώτο μέρος του Πίνακα 2.5, διαπιστώνουμε ότι η στήλη A είναι ίδια με την στήλη BC, η στήλη B είναι ίδια με την AC και τέλος η στήλη C είναι ίδια με την AB. Συνεπώς, όταν θα εκτιμήσουμε τις κύριες επιδράσεις A, B και C μέσω των κατάλληλων αντιθέσεων, ταυτόχρονα θα εκτιμήσουμε και τις αλληλεπιδράσεις BC, AC και AB αντίστοιχα. Δυο ή περισσότερες επιδράσεις που έχουν την ιδιότητα αυτή να συγχέονται σε ένα κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, καλούνται **ταυτόσημες** (*aliased*).

Κλασματικοί σχεδιασμοί, στους οποίους σχηματίζονται ομάδες ταυτόσημων επιδράσεων ονομάζονται **απλοί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί** (*regular fractional factorial design*) και ορίζονται πλήρως από τις ορίζουσες σχέσεις των (μπορεί να είναι και μόνο μια).

Στο παράδειγμα μας

- οι επιδράσεις A και BC είναι ταυτόσημες ($A=BC$)
- οι επιδράσεις B και AC είναι ταυτόσημες ($B=AC$)
- οι επιδράσεις C και AB είναι ταυτόσημες ($C=AB$)

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί από την ορίζουσα σχέση $I = ABC$. Πολλαπλασιάζοντας κάθε επίδραση με την ορίζουσα σχέση, προκύπτουν οι ομάδες ταυτόσημων επιδράσεων.

Πράγματι, στο παράδειγμα μας είναι

- $A = A \times I = A \times ABC = A^2BC = BC$
- $B = B \times I = B \times ABC = AB^2C = AC$
- $C = C \times I = C \times ABC = ABC^2 = AB$

(επειδή το τετράγωνο κάθε στήλης ισούται με την μοναδιαία στήλη I).

Ο $\frac{1}{2}$ κλασματικός συνδυασμός με $I = +ABC$ που κατασκευάσαμε, συνήθως καλείται και **πρωταρχικό κλάσμα** (*principal fraction*).

Εάν είχαμε επιλέξει τις αγωγές αυτές για τις οποίες η στήλη ABC είχε πρόσημο «-», θα κατασκευάζαμε τον εναλλακτικό $\frac{1}{2}$ κλασματικό σχεδιασμό που φαίνεται στο Μέρος 2 του Πίνακα 2.5. Η ορίζουσα σχέση για τον σχηματισμό αυτό είναι $I = -ABC$. Ακολουθώντας την διαδικασία που εφαρμόστηκε προηγουμένως, θα προκύψουν οι ταυτόσημες επιδράσεις $A = -BC$, $B = -AC$ και $C = -AB$.

Στην πράξη δεν έχει σημασία ποιον κλασματικό σχεδιασμό από τους δυο προηγούμενους θα επιλέξουμε. Και τα δυο κλάσματα ανήκουν στην ίδια **οικογένεια** (*family*) που είναι αυτή του $\frac{1}{2}$ κλασματικού σχεδιασμού του πλήρους 2^3 παραγοντικού σχεδιασμού, με ορίζουσα σχέση την $I = ABC$.

2.7 Κατασκευή του $\frac{1}{2}$ Κλασματικού Σχεδιασμού

Ένας $\frac{1}{2}$ κλασματικός σχεδιασμός 2^k , μπορεί να κατασκευαστεί γράφοντας αρχικά έναν πίνακα πρόσημων, που να περιλαμβάνει όλες τις αγωγές ενός πλήρους 2^{k-1} παραγοντικού σχεδιασμού και στη συνέχεια προσθέτοντας τον k-οστό παράγοντα ως κάποια αλληλεπίδραση των k-1 παραγόντων. Η αλληλεπίδραση αυτή αποτελεί και το γεννήτορα του κλάσματος. Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας κάθε επίδραση με την ορίζουσα σχέση του σχεδιασμού.

Για παράδειγμα, ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός προκύπτει γράφοντας αρχικά τον πίνακα πρόσημων του 2^2 πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού και στη συνέχεια θεωρώντας ως παράγοντα C την αλληλεπίδραση +AB. Ο συμπληρωματικός κλασματικός σχεδιασμός θα προέκυπτε εάν εξισώναμε τον παράγοντα C με την αλληλεπίδραση -AB (Πίνακας 2.6).

Πίνακας 2.6

Run	ΠΛΗΡΗΣ		I = ABC			I = - ABC		
	A	B	A	B	C = AB	A	B	C = - AB
1	-	-	-	-	+	-	-	-
2	+	-	+	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-	-	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	-

2.8 Το 1/4 Κλάσμα του 2^k Παραγοντικού Σχεδιασμού

Όταν πλήθος των παραγόντων αυξηθεί σημαντικά, οι πειραματιστές καταφεύγουν συχνά στη χρήση μικρότερων κλασμάτων των 2^k σχεδιασμών. Μια περίπτωση αποτελεί το 1/4 κλάσμα του 2^k σχεδιασμού. Ο σχεδιασμός αυτός περιλαμβάνει 2^{k-2} δοκιμές και συνήθως καλείται **2^{k-2} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός**.

Ο 2^{k-2} σχεδιασμός κατασκευάζεται γράφοντας αρχικά έναν πίνακα πρόσημων, που να περιλαμβάνει όλες τις δοκιμές ενός πλήρους 2^{k-2} παραγοντικού σχεδιασμού και στη συνέχεια προσθέτοντας τις δυο εναπομείναντες στήλες με παράγοντες που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις των προηγούμενων k-2 παραγόντων.

Άρα ο 1/4 κλασματικός σχεδιασμός ενός 2^k σχεδιασμού περιέχει δυο γεννήτορες, που διαιρεί το πλήθος των αγωγών στα τέσσερα. Έστω ότι αυτοί οι γεννήτορες είναι οι P και Q, (όπου P και Q δυο οποιεσδήποτε αλληλεπιδράσεις). Τότε το πλήθος των ορίζουσών σχέσεων με βάση τους γεννήτορες είναι δυο, δηλαδή οι

$$I = \pm P \text{ και } I = \pm Q$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$I = I \times I = (\pm P) \times (\pm Q) = \pm PQ.$$

Δημιουργείται δηλαδή μια ακόμα ορίζουσα σχέση με βάση το γινόμενο των δυο αρχικών. Έτσι ο 2^{k-2} κλασματικός σχεδιασμός έχει 3 (δηλαδή 2² - 1) ορίζουσες σχέσεις. Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων, υπολογίζεται όπως και στην περίπτωση του 1/2 κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού.

2.9 Το Γενικό 1/p Κλάσμα του 2^k Παραγοντικού Σχεδιασμού

Συνοψίζοντας, ένας 2^k κλασματικός σχεδιασμός που περιλαμβάνει 2^{k-p} δοκιμές καλείται 2^{k-p} **κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός**. Οι σχεδιασμοί αυτού του τύπου απαιτούν την επιλογή p ανεξαρτήτων γεννητόρων. Οι ορίζουσες σχέσεις του σχεδιασμού αποτελούνται από τους p γεννήτορες που αρχικά επιλεχθήκαν και τις 2^p - p - 1 αλληλεπιδράσεις αυτών ανά δυο, τρεις κλπ.

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων μπορεί να βρεθεί, πολλαπλασιάζοντας τη στήλη κάθε επίδρασης με τις ορίζουσες σχέσεις. Η επιλογή των γεννητόρων, θα πρέπει να γίνεται με προσοχή, έτσι ώστε πιθανές σημαντικές επιδράσεις να μην είναι ταυτόσημες μεταξύ τους. Κάθε επίδραση θα έχει 2^{p-1} ταυτόσημες επιδράσεις. Για μεγάλες τιμές του k, συνήθως θεωρούμε τις αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης μη σημαντικές, με αποτέλεσμα να απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων στο σχεδιασμό.

2.10 Διακριτική Ικανότητα και Ελάχιστη Απόκλιση Κλασματικού Σχεδιασμού

Δύο από τα βασικότερα κριτήρια για την επιλογή του καταλληλότερου κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού που σχετίζονται άμεσα με τις ορίζουσες σχέσεις είναι

- Το κριτήριο της **διακριτικής ικανότητας** (ή ευκρίνεια-*resolution*) που εισήχθη από τους Box και Hunter (1961) και
- Το κριτήριο της ελάχιστης **απόκλισης** (*minimum aberration*) που προτάθηκε από τους Fries και Hunter (1980).

Ένας σχεδιασμός έχει διακριτική ικανότητα R (συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό της λατινικής αριθμησης), εάν καμία επίδραση p-παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από R-p παράγοντες.

Για παράδειγμα, λέμε ότι ο κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός 2^{3-1} έχει διακριτική ικανότητα $R=III$, εάν καμία επίδραση ενός παράγοντα ($p=1$) δεν είναι ταυτόσημη με άλλη επίδραση που περιέχει λιγότερους από $R - p = 3 - 1 = 2$ παράγοντες. Ο σχεδιασμός αυτός, με ορίζουσα σχέση $I=ABC$ (ή $I = -ABC$) γράφεται ως 2_{III}^{3-1} κλασματικός σχεδιασμός.

Η διακριτική ικανότητα ουσιαστικά είναι το μήκος r της μικρότερης "λέξης" που χρησιμοποιείται σε ορίζουσα σχέση σαν γεννήτορας. Επίσης περιγράφει το μέγεθος της σύγχυσης (*aliasing*) μεταξύ των επιδράσεων. Ένας σχεδιασμός με μικρή διακριτική ικανότητα, έχει ορίζουσες σχέσεις που είναι μικρές σαν μήκος λέξεων, κάτι το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξη ταυτόσημων επιδράσεων χαμηλής τάξης. Σύμφωνα με την αρχή της ιεραρχίας, επιδράσεις χαμηλής τάξης είναι πιθανότερο να είναι σημαντικές, άρα δεν ενδείκνυται η επιλογή ενός σχεδιασμού στον οποίο επιδράσεις χαμηλής τάξης συγχέονται μεταξύ τους. Συνήθως θέλουμε να χρησιμοποιούμε κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς που έχουν την υψηλότερη δυνατή διακριτική ικανότητα διότι έτσι έχουμε λιγότερους περιορισμούς στις υποθέσεις που απαιτούνται όσον αφορά ποιες αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες με σκοπό να πάρουμε μια μοναδική ερμηνεία για τα δεδομένα.

Για τους σχεδιασμούς διακριτικής ικανότητας III, IV, και V που συνήθως χρησιμοποιούνται στην πράξη λόγω της οικονομίας που προσφέρουν ως προς το πλήθος των δοκιμών παρατηρούμε τα εξής

- Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III

Είναι σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων.

Παράδειγμα ο 2^{3-1} σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση $I = ABC$ (ή $I = -ABC$) είναι διακριτικής ικανότητας III και γράφουμε 2_{III}^{3-1} .

- Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας IV

Είναι σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση δυο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων είναι ταυτόσημες με άλλες αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων.

Παράδειγμα ο 2^{4-1} σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση $I=ABCD$ (ή $I=-ABCD$) είναι διακριτικής ικανότητας IV και γραφούμε 2_{IV}^{4-1} .

- Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας V

Είναι σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δυο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων είναι ταυτόσημες με άλλες αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων.

Παράδειγμα ο 2^{5-1} σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση $I=ABCDE$ (ή $I=-ABCDE$) είναι διακριτικής ικανότητας V και γραφούμε 2_V^{5-1} .

Αναφορικά με τη σύγκριση των επιδράσεων στους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς οι Wu (1992) και Hamada (2000) ορίζουν

- Μια αλληλεπίδραση δυο παραγόντων **επιθυμητή ή εκλέξιμη** (*eligible*) εάν καμία από τις ταυτόσημες επιδράσεις τους δεν είναι κύρια επίδραση,
- **Καθαρή** (*clean*) εάν καμία από τις ταυτόσημες επιδράσεις της δεν είναι κύρια επίδραση ούτε αλληλεπίδραση δυο παραγόντων και
- **Ισχυρά καθαρή** (*strongly clear*) εάν καμία από τις ταυτόσημες επιδράσεις της δεν είναι κύρια επίδραση ούτε αλληλεπίδραση δυο ή και τριών παραγόντων.

Για τους σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα III, IV και V ισχύουν τα ακόλουθα

- Ένας σχεδιασμός που έχει διακριτική ικανότητα τουλάχιστον III, έχει όλες τις κύριες επιδράσεις εκλέξιμες (*eligible*).
- Σε κάθε σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας IV, οι κύριες επιδράσεις είναι καθαρές.
- Σε κάθε σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας V, οι κύριες επιδράσεις είναι ισχυρά καθαρές και οι αλληλεπιδράσεις δυο παραγόντων είναι καθαρές.
- Ανάμεσα στους σχεδιασμούς με διακριτική ικανότητα IV, προτιμότεροι είναι εκείνοι που έχουν τον μεγαλύτερο αριθμό καθαρών αλληλεπιδράσεων δυο παραγόντων.

Το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης, προτάθηκε από τους Fries και Hunter (1980) με σκοπό την ταξινόμηση των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών. Το κριτήριο αυτό βασίζεται στη διάταξη του μήκους λέξεων των οριζουσών σχέσεων του σχεδιασμού (*word length pattern*).

Συγκεκριμένα για κάθε σχεδιασμό σχηματίζουμε το διάνυσμα

$$W = (A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_k)$$

όπου k είναι ο συνολικός αριθμός των παραγόντων του σχεδιασμού. Το W είναι ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία απαριθμούν τον συνολικό αριθμό των οριζουσών σχέσεων που έχουν ένα συγκεκριμένο μήκος. Η συντεταγμένη A_1 μετρά τον αριθμό των λέξεων-γεννητόρων μήκους 1, η A_2 μετρά τον αριθμό των λέξεων-γεννητόρων μήκους 2 κ.ο.κ. Είναι εύκολο να εξακριβωθεί ότι στους σχεδιασμούς διακριτικής ικανότητας III, τα δυο πρώτα στοιχεία A_1 και A_2 του διανύσματος W είναι μηδέν. Διαπιστώνεται επίσης, ότι η διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού είναι ίση με το δείκτη της πρώτης μη μηδενικής συντεταγμένης.

Το κριτήριο ελάχιστης απόκλισης, αναφέρει ότι για δυο 2^{k-p} σχεδιασμούς d_1 και d_2 για τους οποίους η q -οστή κατ' αύξουσα σειρά συντεταγμένη της διάταξης του μήκους λέξεων διαφέρει, δηλαδή

$$A_q(d_1) \neq A_q(d_2)$$

τότε ο d_1 θα λέγεται ότι έχει την ελάχιστη απόκλιση από τον d_2 , εάν

$$A_q(d_1) < A_q(d_2)$$

Εάν δεν υπάρχει σχεδιασμός με μικρότερη απόκλιση από τον d_1 , τότε ο d_1 έχει την ελάχιστη απόκλιση. Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για δοσμένα k και p , ορίζεται πάντοτε σχεδιασμός ελάχιστης απόκλισης.

Συμφώνα με τους Fries και Hunter μεταξύ των σχεδιασμών με διακριτική ικανότητα R , προτιμότεροι είναι εκείνοι των οποίων οι ορίζουσες σχέσεις έχουν λιγότερες λέξεις μήκους R , δηλαδή προτιμότεροι είναι αυτοί που το διάνυσμα W έχει τις μικρότερες πρώτες συντεταγμένες συγκριτικά με άλλους, διότι έτσι λιγότερες κύριες επιδράσεις και χαμηλότερης τάξης αλληλεπιδράσεις είναι πιθανό να είναι αναμεμειγμένες.

Για παράδειγμα θεωρούμε τους δυο 2_{III}^{6-2} σχεδιασμούς

$$d_1 : I = ABCDE = BCDF = AEF \text{ με } W(d_1) = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

και

$$d_2 : I = ABE = BCF = ACEF \text{ με } W(d_2) = (0, 0, 2, 1, 0, 0)$$

Ο d_1 είναι προτιμότερος από τον d_2 , αφού $A_3(d_1) = 1 < 2 = A_3(d_2)$, δηλαδή η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του διανύσματος $W(d_1)$ είναι μικρότερη από αυτήν του $W(d_2)$.

Για δεδομένο αριθμό παραγόντων και παρατηρήσεων οι Fries και Hunter συστήνουν τη χρήση σχεδιασμού ελάχιστης απόκλισης και μέγιστης διακριτικής ικανότητας, ο οποίος έχει τον ελάχιστο αριθμό λέξεων μήκους R ανάμεσα σε όλους τους σχεδιασμούς μέγιστης διακριτικής ικανότητας R . Η ελάχιστη απόκλιση, αυτομάτως υποδεικνύει μέγιστη διακριτική ικανότητα.

Ωστόσο, τα κριτήρια της μέγιστης διακριτικής ικανότητας και ελάχιστης απόκλισης, δεν αρκούν πάντα για την επιλογή του καταλληλότερου κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού. Οι Chun, Sun και Wu (1993), πρότειναν ένα επιπλέον κριτήριο για την επιλογή σχεδιασμού. Το κριτήριο αυτό, έχει να κάνει με τον αριθμό των καθαρών επιδράσεων (*clear effects*) ενός σχεδιασμού και την άποψη ότι οι εκτίμηση των επιδράσεων αυτών έχει μεγαλύτερο ερμηνευτικό νόημα από το "λεκτικό" μήκος των οριζουσών σχέσεων.

Για παράδειγμα θεωρούμε τους δυο 2^{6-2} σχεδιασμούς

$$d_1 : I = ABCE = ABDF = CDEF$$

με διακριτική ικανότητα IV, έξι καθαρές κύριες επιδράσεις

$$A = BCE, B = ADF, C = ABE, D = ABF, E = ABC \text{ και } F = ABD$$

αλλά καμία καθαρή αλληλεπίδραση δεύτερης τάξης και $W(d_1) = (0, 0, 0, 3, 0, 0)$ και

$$d_2 : I = ABE = ACDF = BCDEF$$

με διακριτική ικανότητα III, μόλις τρεις καθαρές κύριες επιδράσεις

$$C = ADF, D = ACF \text{ και } F = ACD$$

αλλά έξι καθαρές αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξης

$$BC = DEF, BD = CEF, BF = CDE, CE = BDF, DE = BCF \text{ και } EF = BCD$$

με $W(d_2) = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ελάχιστης απόκλισης, ο d_1 είναι προτιμότερος από τον d_2 , αφού $A_3(d_1) = 0 < 1 = A_3(d_2)$. Επειδή ο d_2 έχει μόνο τρεις καθαρές κύριες επιδράσεις και επειδή οι κύριες επιδράσεις είναι σημαντικότερες των αλληλεπιδράσεων δεύτερης τάξης, κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι ο d_2 είναι κατώτερος του d_1 που έχει 6. Ωστόσο, ο d_2 έχει συνολικά 9 καθαρές επιδράσεις, ενώ ο d_1 έχει μόλις 6. Άρα, εάν υποθέσουμε εξ αρχής ότι μόνο τρεις παράγοντες (από τους 6) και κάποιες αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξης θεωρούνται σημαντικές, τότε ο d_2 σχεδιασμός θα μπορούσε να επιλεγεί σαν καταλληλότερος σχεδιασμός.

2.11 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί

Οι πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί καθώς και τα κλάσματα αυτών, ανήκουν σε μια ευρύτερη κατηγορία σχηματισμών, τους Ορθογώνιους Σχηματισμούς (*orthogonal arrays*).

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί χρησιμοποιήθηκαν αρχικά από τον Rao (1947), ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί για τον υπολογισμό των κύριων επιδράσεων και των αλληλεπιδράσεων χαμηλής τάξης. Ένας **ορθογώνιος σχεδιασμός** $OA(n,q,s,t)$ είναι ένας $n \times q$ πίνακας, όπου κάθε σειρά του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό επιπέδων των παραγόντων (δοκιμή-*run*) ενώ κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα. Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τα επίπεδα τιμών των παραγόντων των αντίστοιχων στηλών.

Συγκεκριμένα για τον $OA(n,q,s,t)$ έχουμε

n : το πλήθος των δοκιμών του ορθογώνιου σχεδιασμού

q : το πλήθος των παραγόντων

s : το πλήθος των επιπέδων του κάθε παράγοντα

t : η δύναμη (*strength*) του σχεδιασμού

Ο σχεδιασμός λέγεται "δύναμης t ", εάν οι γραμμές σε κάθε πιθανό σύνολο t στηλών περιέχουν κάθε πιθανό συνδυασμό επιπέδων τον ίδιο αριθμό φορών. Η έννοια της δύναμης ενός ορθογώνιου σχεδιασμού, έχει άμεση σχέση με την έννοια της διακριτικής ικανότητας ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, ένας ορθογώνιος σχεδιασμός δύναμης t , προσδιορίζει έναν κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας $R = t + 1$. Άρα, ορθογώνιοι σχεδιασμοί δύναμης $t = 1$, ανταποκρίνονται σε κλασματικούς σχεδιασμούς διακριτικής ικανότητας $R = t + 1 = 2$ ($R=II$) κ.ο.κ.

Για παράδειγμα ένας ορθογώνιος σχεδιασμός δύναμης $t = 1$ είναι ο ακόλουθος

Πίνακας 2.7

A	B	C
1	1	1
1	1	-1
-1	-1	-1
-1	-1	1

ο οποίος ανταποκρίνεται σε έναν κλασματικό σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας II.

Άλλο παράδειγμα είναι ο ακόλουθος σχεδιασμός δύναμης $t = 2$

Πίνακας 2.8

A	B	C	D	E	F	G
-	-	-	+	+	+	-
+	-	-	-	-	+	+
-	+	-	-	+	-	+
+	+	-	+	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+
+	-	+	-	+	-	-
-	+	+	-	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+

Πράγματι, για κάθε επιλογή οποιονδήποτε δυο στηλών του σχεδιασμού σχηματίζονται 2 επαναλήψεις του πλήρους 2^2 σχεδιασμού. Δεν είναι όμως δύναμης $t = 3$ καθώς η επιλογή για παράδειγμα της 4^{15} , 5^{15} και 6^{15} στήλης δεν περιέχει όλους τους 2^3 δυνατούς συνδυασμούς των συμβόλων.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $OA(n,q,s,t)$, εννοούμε έναν κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό n -δοκιμών, αποτελούμενο από q -παράγοντες με s επίπεδα ο καθένας. Ορθογώνιοι σχεδιασμοί αυτού του τύπου καλούνται **συμμετρικοί ορθογώνιοι σχεδιασμοί**, από τη στιγμή που κάθε στήλη έχει τον ίδιο αριθμό συμβόλων s .

Επίσης, χάριν συντομίας μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους ορθογώνιους σχεδιασμούς με

$$OA_n(s^q).$$

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί, ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους ταξινομούνται σε δυο κατηγορίες.

1. Σε **απλούς** (*regulars*) σχεδιασμούς, οι οποίοι υπάρχουν όταν το πλήθος των δοκιμών είναι δύναμη του δυο και έχουν απλή δομή ταυτόσημων επιδράσεων. Οι σχεδιασμοί αυτοί χαρακτηρίζονται από την ορίζουσα σχέση, η οποία δείχνει ξεκάθαρα πως σχετίζονται οι επιδράσεις των παραγόντων και ουσιαστικά είναι οι κλασματικοί σχεδιασμοί που περιγράφηκαν στην αρχή του κεφαλαίου.
2. **Σύνθετος** (*non regular*) σχεδιασμούς, οι οποίοι υπάρχουν όταν το πλήθος των δοκιμών είναι πολλαπλάσιο του τέσσερα και συνήθως έχουν σύνθετη δομή ταυτόσημων επιδράσεων. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για τη χρήση των σύνθετων σχεδιασμών στα βιομηχανικά πειράματα.

Δυο ορθογώνιοι σχηματισμοί με τις ίδιες παραμέτρους, λέμε ότι είναι **ισόμορφοι**, εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο είτε με εναλλαγή γραμμών, είτε στηλών είτε με εναλλαγή των στοιχείων μιας ή περισσότερων στηλών του πίνακα. Σε διαφορετική περίπτωση, καλούνται **μη-ισόμορφοι**. Οι μη-ισόμορφοι σχηματισμοί αποτελούν μια ειδική κατηγορία των παραγοντικών σχεδιασμών και χρησιμοποιούνται κυρίως σε σχεδιασμούς, το πλήθος δοκιμών των οποίων δεν είναι δύναμη του δυο, αλλά πολλαπλάσιο του 4. Το πλήθος των μη-ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών με n δοκιμές και q στήλες δίνεται στους παρακάτω πίνακες

Πίνακας 2.9 Πλήθος μη-ισόμορφων
δισταθμικών ορθογώνιων σχηματισμών με n δοκιμές και q παράγοντες.

n πολλαπλάσιο του 4						n πολλαπλάσιο του 8					
n\q	3	4	5	6	7	n\q	3	4	5	6	7
12	2	1	2	2	1	16	3	5	11	27	55
20	3	3	11	75	474	24	4	10	63	1350	57389
28	4	7	127	17826		32	5	19	491	266632	
36	5	15	1242			40	6	32	3919		
44	6	28				48	7	54			
52	7	48				56	8	84			
60	8	79				64	9	128			

2.12 Σχεδιασμοί Plackett-Burman

Μια ειδική κατηγορία ορθογώνιων σχηματισμών είναι οι Plackett-Burman σχεδιασμοί.

Οι σχεδιασμοί αυτοί είναι κατάλληλοι για την μελέτη έως και $k = \frac{n-1}{s-1}$ παραγόντων, τον

καθένα με s επίπεδα (εδώ $s = 2$ άρα $k = n-1$, εφόσον έχουμε δισταθμικούς παράγοντες), πραγματοποιώντας n δοκιμές (το n είναι πολλαπλάσιο του 4, αλλά όχι δύναμη του 2), δηλαδή ορθογώνιοι σχεδιασμοί του τύπου

$$OA_n(2^k)$$

Οι σχεδιασμοί αυτοί προταθήκαν από τους Plackett και Burman (1946) και έχουν μεγάλη εφαρμογή σε πειράματα όπου η πειραματική δυνατότητα είναι περιορισμένη και απαιτούνται σχεδιασμοί που να μπορούν να μελετήσουν μόνο τις κύριες επιδράσεις.

Διαμορφώνονται με τη βοήθεια ενός διανύσματος γεννήτορα (τα διανύσματα αυτά βρίσκονται σε συγκεκριμένα παραρτήματα βιβλίων) το οποίο καταγράφεται πρώτα ως στήλη. Η δεύτερη στήλη προκύπτει εάν μετακινήσουμε τα στοιχεία της προηγούμενης στήλης μια φορά προς τα κάτω και τοποθετήσουμε το τελευταίο στοιχείο στην πρώτη θέση. Η διαδικασία αυτή (*cyclic generation*) επαναλαμβάνεται μέχρι να σχηματιστούν $n-1$ στήλες στο σχεδιασμό. Τέλος για να ολοκληρωθεί ο σχηματισμός προστίθεται μια σειρά στοιχείων, που όλα αντιπροσωπεύουν το πρώτο επίπεδο παραγόντων.

Η διαδικασία αυτή δεν ισχύει για τις περιπτώσεις που έχουμε $n = 28, 52, 76$ και 100 . Στις περιπτώσεις αυτές δεν έχουμε εναλλαγή ενός μόνο διανύσματος, αλλά ολόκληρου συγκεκριμένου *block*.

Οι μικρότεροι σε μέγεθος σχεδιασμοί Plackett-Burmann έχουν πλήθος δοκιμών 8, 12, 16, 20 και 24.

Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε τον Plackett-Burmann σχεδιασμό με 8 δοκιμές, δηλαδή $s=2, n=8$ οπότε $k=7$ και με χρήση του διανύσματος γεννήτορα $(1,1,1,-1,1,-1,-1)$ που παίρνουμε από αντίστοιχο παράρτημα προκύπτει η διάταξη

Πίνακας 2.10 : Σχεδιασμός Plackett-Burman ισοδύναμος με $OA_8(2^7)$

1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Παρατηρούμε ότι με μια απλή αναπροσαρμογή στις γραμμές ή τις στήλες του παραπάνω σχεδιασμού παίρνουμε το σχεδιασμό του Πίνακα 2.8.

РАНЕЕЗНАКО ПЕРПАА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΘΕΚΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ (ROBUST PARAMETER DESIGNS)

3.1 Εισαγωγή

Οι σύγχρονες βιομηχανίες, έχοντας διαπιστώσει ότι ο έλεγχος της ενυπάρχουσας μεταβλητότητας στο ενδιάμεσο κατασκευαστικό στάδιο (*on line quality control*) είναι μια πολυδάπανη διαδικασία, χρησιμοποιούν τον στατιστικό πειραματικό σχεδιασμό ως το βασικό εργαλείο για τον *εκτός σειράς έλεγχο ποιότητας* (*off line quality control*), δηλαδή για τον πειραματισμό και την ανάλυση πριν από την παραγωγή ή ανεξάρτητα από αυτήν, στο προϊόν της διεργασίας.

Η ιδέα για τον εκτός σειράς έλεγχο ποιότητας εισήχθη αρχικά από τον Αμερικανό Edward Deming, ο οποίος θεωρούσε ότι οι βιομηχανίες πρέπει να παραμερίσουν την ανάγκη για μαζική επιθεώρηση και να δώσουν έμφαση κυρίως στην ποιότητα και διεργασία του προϊόντος κατά το στάδιο του αρχικού σχεδιασμού.

Την ιδέα αυτή στήριξε και μετέπειτα αξιοποίησε ένας πρώην μηχανικός της Ιαπωνικής βιομηχανίας τηλεπικοινωνιών ο Genichi Taguchi (1987) και διευθυντής της Ιαπωνικής Ακαδημίας Ποιότητας. Ο Taguchi επινόησε μια τεχνική βελτίωσης η οποία βασίζεται στους πειραματικούς σχεδιασμούς για τον αποτελεσματικό χαρακτηρισμό ενός προϊόντος ή μιας παραγωγικής διαδικασίας, με βασικό στόχο την ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας με το χαμηλότερο κόστος.

Σημαντική είναι επίσης και η συνεισφορά των Box και Wilson στη στατιστική ανάλυση των ανθεκτικών παραμετρικών σχεδιασμών με την ανάπτυξη της μεθοδολογίας των αποκριτικών επιφανειών (*Response Surface Methodology - RSM*) η οποία διερευνά τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων παραγόντων και μίας μεταβλητής απόκρισης. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 20 ετών η RSM έχει βρει εκτεταμένη απήχηση σε ένα ευρύ φάσμα βιομηχανικών εφαρμογών.

3.2 Συνάρτηση απώλειας

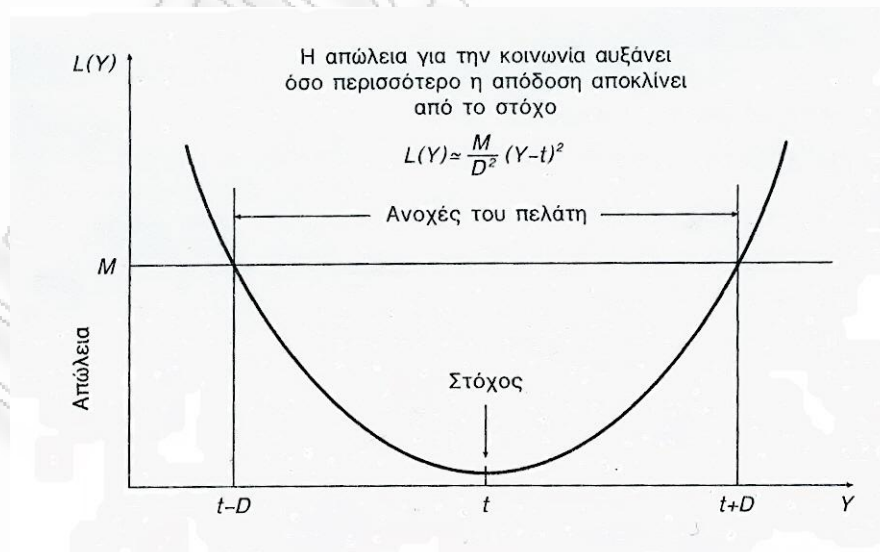
Ο Taguchi ορίζει την ποιότητα με αρνητικό τρόπο ως "την απώλεια που μεταβιβάζεται στην κοινωνία από τη στιγμή που της αποστέλλεται το προϊόν".

Με τον όρο απώλεια εννοούμε το κόστος που θα έχει η βιομηχανία τόσο από την καταβολή εγγυήσεων και συντήρησης για το προϊόν, όσο και από την απογοήτευση του πελάτη η οποία μπορεί να οδηγήσει στην δημιουργία αρνητικού κλίματος και δυσφήμισης για την παραγωγική μονάδα.

Σύμφωνα με τον Taguchi, ένα προϊόν προξενεί απώλεια όχι μόνο όταν είναι εκτός προδιαγραφών, αλλά και όποτε παρεκκλίνει του στόχου του. Όσο μικρότερη είναι η διασπορά της απόδοσης του προϊόντος, τόσο καλύτερη είναι η ποιότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση από την τιμή στόχο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η απώλεια της κοινωνίας (του παραγωγού και του καταναλωτή). Η απώλεια αυτή, μπορεί να μετρηθεί κατά προσέγγιση από τη **συνάρτηση απώλειας** (*loss function*) η οποία ενοποιεί την οικονομική απώλεια με τις προδιαγραφές της λειτουργίας μέσω μιας τετραγωνικής σχέσης. Η απώλεια αυτή είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόκλισης από το στόχο.

Η συνάρτηση απώλειας $L(Y)$ δίνεται από τον τύπο

$$L(Y) = k(Y - t)^2$$



Σχήμα 3.1 Η συνάρτηση απώλειας του Taguchi (Πηγή Ν. Λογοθέτης)

Όπου

$L(Y)$: η συνάρτηση απώλειας

Y : η απόδοση του προϊόντος

t : επιθυμητός στόχος και

$k = \frac{M}{D^2}$ όπου

M : η απώλεια του παραγωγού (με οικονομικούς όρους)

D : η ανοχή (προδιαγραφές) του πελάτη

Η τετραγωνική μορφή της συνάρτησης κόστους ποιότητας $L(Y)$ δεν είναι αυθαίρετη. Προκύπτει από την ανάπτυξη της $L(Y)$ σε σειρά Taylor γύρω από την τιμή t και παράλειψη των όρων τρίτης και υψηλότερης τάξης

$$L(Y) = L(t + Y - t) = L(t) + \frac{L'(t)}{1!}(Y - t) + \frac{L''(t)}{2!}(Y - t)^2 + \dots$$

όπου $L(t) = 0$ και $L'(t) = 0$.

Το χαρακτηριστικό ποιότητας Y είναι γενικά τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $E(Y) = \mu$ και μεταβλητότητα $V(Y) = \sigma^2$. Το μέσο κόστος ποιότητας ανά μονάδα προϊόντος, σύμφωνα με την τετραγωνική μορφή $L(Y) = k(Y - t)^2$ είναι

$$L = E[L(Y)] = kE(Y - t)^2 = kE[(Y - \mu) + (\mu - t)]^2 = k[\sigma^2 + (\mu - t)^2]$$

Από τεχνική άποψη, η ρύθμιση της μέσης τιμής ενός χαρακτηριστικού ποιότητας είναι συνήθως πολύ ευκολότερη από τη μείωση της μεταβλητότητας του. Άρα, εάν με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, επιτυγχάνουμε $E(Y) = t$, τότε ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους L ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας σ^2 . Αυτό εξηγεί την μεγάλη σημασία που προσδίδει ο Taguchi στην μεγαλύτερη δυνατή μείωση της μεταβλητότητας.

Σκοπός του Taguchi είναι η βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας, μέσα από τον προσδιορισμό ελεγχόμενων παραγόντων, οι οποίοι ελαχιστοποιούν τη διασπορά της απόκρισης και διατηρούν σε επιθυμητά επίπεδα την μέση τιμή $E(Y) = t$. Με κατάλληλη ρύθμιση των παραγόντων αυτών σε βέλτιστα επίπεδα, έχουμε την παραγωγή ενός προϊόντος, ανθεκτικού τόσο στις περιβαλλοντικές συνθήκες, όσο και στις μεταβολές παραγωγικών διαδικασιών.

Στο στάδιο του παραμετρικού σχεδιασμού του Taguchi, με κατάλληλες διεργασίες μπορούμε να πετύχουμε υψηλότερης ποιότητας προϊόντα με την απομάκρυνση της κακής επιρροής του αιτίου και όχι με την απομάκρυνση του αιτίου της κακής επιρροής. Ο παραμετρικός σχεδιασμός εφαρμόζεται στο στάδιο πριν την παραγωγή των προϊόντων (*off line*) με αποτέλεσμα οι βιομηχανίες να είναι απαλλαγμένες από το κόστος και τις χρονοβόρες δοκιμές της μαζικής επιθεώρησης στα ενδιάμεσα στάδια παραγωγής.

3.3 Μεθοδολογία Taguchi : Παραμετρικοί Σχεδιασμοί

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, οι επιστήμονες είχαν αντιληφθεί τα οφέλη από την χρησιμοποίηση των πειραματικών σχεδιασμών με αποτέλεσμα την δημιουργία νέων τομέων εφαρμογών.

Ένας από τους σημαντικότερους τομείς των πειραματικών σχεδιασμών είναι ο ανθεκτικός παραμετρικός σχεδιασμός ο οποίος επικεντρώνεται στις παρακάτω περιπτώσεις πειραμάτων

- Σχεδιασμοί συστημάτων που είναι ευαίσθητοι σε περιβαλλοντικούς παράγοντες οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν την πορεία του συστήματος κατά την ανάπτυξη του.
- Σχεδιασμοί παραγωγής που είναι ευαίσθητοι στην μεταβλητότητα που προκαλείται από τα στοιχεία του συστήματος.

- Σχεδιασμοί διαδικασιών με τέτοιο τρόπο ώστε το υπό κατασκευή προϊόν να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις επιθυμητές προδιαγραφές, παρά την παρουσία κάποιων μεταβλητών που μετέχουν στη διαδικασία (όπως η θερμοκρασία ή οι πρώτες ύλες) οι οποίες είναι δύσκολο να ελεγχθούν επακριβώς.
- Προσδιορισμός των συνθηκών λειτουργίας μιας διαδικασίας, έτσι ώστε τα χαρακτηριστικά του τελικού προϊόντος, να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή στόχο και ταυτόχρονα η μεταβλητότητα γύρω από τον στόχο να ελαχιστοποιείται.

Ένα προϊόν υψηλής ποιότητας, είναι ένα προϊόν που επιτυγχάνει έναν στόχο μέσης απόδοσης (*target mean performance*) και επιδεικνύει αντοχή (ευρωστία) που σημαίνει μικρή μεταβλητότητα στην παρουσία μη ελεγχόμενης περιβαλλοντικής μεταβλητότητας. Ήδη από τις αρχές του 1980, ο Taguchi, εισήγαγε μια προσέγγιση για την επίλυση αυτού του τύπου προβλημάτων, η οποία αναφέρεται ως **ανθεκτικός παραμετρικός συνδυασμός ή σχεδιασμός ευρωστίας (Robust Parameter Design–RPD)**.

Η προσέγγιση αυτή βασίστηκε στην ταξινόμηση των παραγόντων που λαμβάνουν μέρος σε μια διεργασία σε παράγοντες ελέγχου και παράγοντες θορύβου και στη συνέχεια τους συνδυασμούς των επιπέδων των ελεγχόμενων παραγόντων που ελαχιστοποιούν την μεταβλητότητα που προκαλείται στην απόκριση από τις μεταβλητές θορύβου. Ο Taguchi εισήγαγε κάποιες καινοτόμες στατιστικές μεθόδους και παραλλαγές στις ήδη υπάρχουσες τεχνικές ως βασικό σκέλος στη διεργασία του ανθεκτικού σχεδιασμού που εφήρμοσε. Έκανε χρήση κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών υψηλής διακριτικής ικανότητας και άλλων μορφών κλασματικών σχεδιασμών που άντλησε από ορθογώνιους σχεδιασμούς.

Κατά τον Taguchi η συμπεριφορά ενός προϊόντος ή των μέσων παραγωγής χαρακτηρίζεται από παράγοντες οι οποίοι χωρίζονται σε δυο κατηγορίες.

(1) **Ελεγχόμενοι παράγοντες** (ή παράγοντες σχεδιασμού-*control factors*) οι τιμές των οποίων ρυθμίζονται εύκολα από τον πειραματιστή.

Αυτοί διακρίνονται στους

Παράγοντες ελέγχου του στόχου (*location factors*), οι οποίοι επηρεάζουν τα μέσα επίπεδα της εξεταζόμενης απόδοσης και αρκετές φορές αναφέρονται και ως παράγοντες σήματος (*Signal Factors*).

Παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας ή του θορύβου (*dispersion factors*), οι οποίοι επηρεάζουν την μεταβλητότητα της απόδοσης.

Παράγοντες κόστους, οι οποίοι δεν επηρεάζουν ούτε την μέση απόδοση ούτε την μεταβλητότητα, οπότε και μπορούν να ρυθμιστούν ανάλογα με τις οικονομικές απαιτήσεις του πειράματος.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο διαχωρισμός των παραγόντων ελέγχου του στόχου και ελέγχου μεταβλητότητας, δεν είναι πάντοτε ξεκάθαρος και συχνά θα πρέπει να γίνονται συμβιβασμοί.

(2) **Μη-ελεγχόμενοι παράγοντες** (ή παράγοντες θορύβου-*noise factors*) οι οποίοι είναι πηγές μεταβλητότητας, έχουν άμεση σχέση με το περιβάλλον παραγωγής και οι τιμές τους είναι πολύ δύσκολο να ρυθμιστούν σε συγκεκριμένα επίπεδα από τον πειραματιστή. Εδώ έχουμε τον διαχωρισμό σε

Εσωτερικό θόρυβο (*internal noise*) που προκαλείται όταν ένα προϊόν φθείρεται κατά την αποθήκευση του, ή φθείρεται από τη χρήση.

Εξωτερικό θόρυβο (*external noise*) που αφορά συνθήκες περιβάλλοντος όπως υγρασία κλπ. και

Μονάδα προς Μονάδα θόρυβο (unit to unit noise) που αφορά διαφορές μεταξύ δυο προϊόντων του ίδιου τύπου που οφείλονται σε διαδικαστικές ατέλειες όπως κακός χειρισμός της μηχανής παραγωγής κ.λ.π.

Κατά τον Taguchi, κύριος στόχος είναι η μείωση της μεταβλητότητας με την κατάλληλη ρύθμιση των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) με ταυτόχρονη διατήρηση της απαιτούμενης μέσης απόκρισης στον επιθυμητό στόχο μέσω της ρύθμισης των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου του στόχου (*location factors*). Επιπλέον το προϊόν και η διεργασία θα πρέπει να είναι ανθεκτικά έναντι των παραγόντων θορύβου. Άρα στο στάδιο του παραμετρικού σχεδιασμού, ο πειραματιστής θα πρέπει να προσδιορίσει τις τιμές των ελεγχόμενων παραγόντων που μειώνουν την διασπορά των τιμών της απόκρισης που οφείλεται στους παράγοντες θορύβου, με ταυτόχρονη διατήρηση της μέσης τιμής της απόκρισης σε επιθυμητά επίπεδα. Επομένως προσπαθεί να μειώσει την επιρροή των παραγόντων θορύβου (με εναλλαγές των παραγόντων θορύβου σε κάθε έναν από τους διάφορους συνδυασμούς των ελεγχόμενων παραγόντων) και όχι τους ίδιους τους παράγοντες θορύβου.

Τέλος οι παράγοντες κόστους μπορούν να τεθούν στα πιο φθηνά ή πιο βολικά επίπεδα ανάλογα με την κρίση του πειραματιστή. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως ανθεκτικός (εύρωστος) σχεδιασμός.

3.4 Τα βασικά σημεία της φιλοσοφίας του Taguchi

Κατά τον Taguchi, υπάρχουν τέσσερις βασικές αλλαγές που πρέπει να γίνουν από τις βιομηχανίες για την παραγωγή ποιοτικών προϊόντων.

Η πρώτη αλλαγή, αφορά τον χρόνο εφαρμογής του ποιοτικού ελέγχου και συγκεκριμένα την αλλαγή από τον έλεγχο επί της παραγωγής (*on-line*) στον έλεγχο πριν την παραγωγή (*off-line*). Έτσι μειώνεται η ανάγκη της μαζικής επιθεώρησης, και οικοδομείται από την αρχή η ποιότητα του προϊόντος.

Η δεύτερη αλλαγή σχετίζεται με τη διαδικασία πειραματισμού από την μέθοδο της μεταβολής του ενός παράγοντα κάθε φορά σε αυτή της μεταβολής πολλών παραγόντων

ταυτόχρονα, με τη χρήση στατιστικών πειραματικών σχεδιασμών. Η στατιστική ανάλυση, των αποτελεσμάτων των πειραμάτων αυτών, μπορεί να αποκαλύψει το βέλτιστο συνδυασμό των τιμών των παραγόντων αξιόπιστα και με το μικρότερο δυνατό κόστος (κλασματικοί σχεδιασμοί).

Η τρίτη αλλαγή σχετίζεται με τη νοοτροπία περί των προκαθορισμένων ορίων των τιμών του χαρακτηριστικού ποιότητας. Δηλαδή, αλλαγή του σκοπού του πειράματος από «επίτευξη συμμόρφωσης ως προς τις προδιαγραφές» σε «επίτευξη του στόχου και ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας». Με άλλα λόγια θα πρέπει να γίνεται προσπάθεια για την επίτευξη του ιδανικού στόχου με τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από αυτόν.

Τέλος, η τέταρτη αλλαγή σχετίζεται με τη συμπεριφορά των πειραματιστών έναντι των μη ελεγχόμενων παραγόντων. Συγκεκριμένα θα πρέπει να γίνει προσπάθεια εξάλειψης της επιρροής της μεταβλητότητας που προκαλείται από τους παράγοντες θορύβου με κατάλληλο συντονισμό των ελεγχόμενων παραγόντων και όχι της αιτίας (που είναι καθαυτό οι παράγοντες θορύβου).

3.5 Τα προτεινόμενα βήματα κατά τον Taguchi για την διεξαγωγή πειραμάτων

Τα βήματα που προτείνει ο Taguchi για τη βελτίωση της ποιότητας ενός προϊόντος είναι τα ακόλουθα

1. Ορισμός του προβλήματος, δηλαδή ξεκάθαρη περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση.
2. Καθορισμός του στόχου, δηλαδή προσδιορισμός μετρήσιμων χαρακτηριστικών και μεθόδων μέτρησης
3. "Θύελλα Ιδεών" (*Brainstorming*), δηλαδή ομαδοποίηση παραγόντων σε παράγοντες ελέγχου και παράγοντες θορύβου, καθώς και καθορισμός των παραγοντικών τιμών που θα μελετηθούν.
4. Σχεδιασμός του πειράματος, δηλαδή επιλογή κατάλληλων ορθογώνιων σχηματισμών για την μελέτη των παραγόντων ελέγχου και θορύβου.
5. Διεξαγωγή του πειράματος και συλλογή των αποτελεσμάτων.

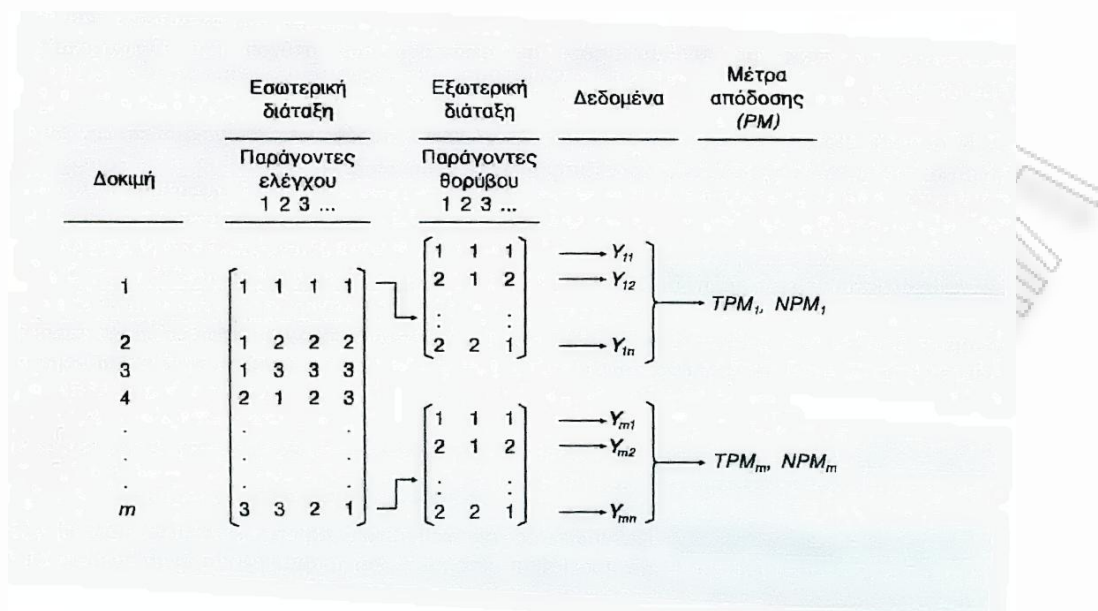
6. Ανάλυση αποτελεσμάτων, δηλαδή ανάλυση του Μέτρου Διασποράς (με προσδιορισμό των παραγόντων ελέγχου διασποράς) και Μέτρου Στόχου (με προσδιορισμό των παραγόντων ελέγχου στόχου).
7. Ερμηνεία αναλυθέντων αποτελεσμάτων, δηλαδή διαλογή των "άριστων" τιμών για τους παράγοντες ελέγχου και πρόβλεψη μελλοντικών αποτελεσμάτων στις "άριστες" συνθήκες.
8. Επιβεβαιωτικό πείραμα για επαλήθευση των προβλέψεων. Στην περίπτωση που οι προβλέψεις δεν επαληθευτούν ή τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά επιστρέφουμε στο βήμα 3 (*brainstorming*).

3.6 Ο Διασταυρωμένος Σχεδιασμός (Crossed Array Design)

Ο Taguchi εισήγαγε τη χρήση των *διασταυρωμένων σχεδιασμών* (*crossed array design*) για πειράματα ευρωστίας (ανθεκτικού σχεδιασμού) όπου οι παράγοντες ελέγχου και οι παράγοντες θορύβου μπορούν να ελεγχθούν ταυτόχρονα κατά τη διάρκεια του πειράματος.

Οι συνδυασμοί τιμών των ελεγχόμενων παραγόντων, βρίσκονται σε σειρές ενός πειραματικού σχεδιασμού (*εσωτερική διάταξη* – *inner array*), συνήθως ενός ορθογώνιου σχηματισμού. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται μια κλασματική ορθογώνια διάταξη για τον καθορισμό των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων θορύβου (*εξωτερική διάταξη* – *outer array*).

Συγκεκριμένα, για κάθε μια από τις m σειρές της εσωτερικής διάταξης, οι n σειρές της εξωτερικής διάταξης θα δώσουν τουλάχιστον n παρατηρήσεις της εξεταζόμενης επίδοσης. Δηλαδή για ολόκληρο το πείραμα θα πάρουμε τουλάχιστον mn τιμές δεδομένων. Αυτές οι παρατηρήσεις θα χρησιμοποιηθούν αργότερα για τον υπολογισμό ορισμένων μέτρων απόδοσης για κάθε μια από τις m εσωτερικές σειρές.



Σχήμα 3.2 Πειραματική Διάταξη (Πηγή Ν. Λογοθέτης)

3.7 Μέτρα απόδοσης του Taguchi

Όταν οι παράγοντες θορύβου είναι άγνωστοι θεωρούμε ότι ποικίλουν τυχαία στη συλλογή δεδομένων και θεωρούμε ότι οι επιδράσεις τους συνήθως είναι μέρος του τυχαίου σφάλματος που θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Σε αυτή την περίπτωση, εφόσον οι παράγοντες θορύβου δεν μπορούν να ρυθμιστούν σε συγκεκριμένα επίπεδα του πειράματος, πρέπει να γίνονται πολλαπλές παρατηρήσεις σε κάθε συνδυασμό των παραγόντων ελέγχου. Τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την μέση απόκριση και τη διακύμανση της απόκρισης σε κάθε αγωγή συνδυασμών των παραγόντων ελέγχου. Ο Taguchi πρότεινε την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε κάθε εξωτερικό σχεδιασμό με την βοήθεια κάποιων *μέτρων απόδοσης* (*performance measures*), τα οποία περιέχουν πληροφορία για τον μέσο και τη διασπορά.

Τα μέτρα αυτά είναι :

Μέτρο απόδοσης θορύβου (*Noise Performance Measure* – NPM ή **MΘ**) που φανερόνει τη διασπορά της επίδοσης σε κάθε συνδυασμό παραγόντων και η ανάλυση του θα προσδιορίσει τους ελεγχόμενους παράγοντες οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν τη διασπορά αυτή (δηλαδή τους παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας – *dispersion factors*), καθώς και τον βέλτιστο συνδυασμό αυτών των παραγόντων για την ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας.

Μέτρο της απόδοσης του στόχου (*Target Performance Measure* – TPM ή **MΣ**) που φανερόνει τον μέσο όρο της απόδοσης της διεργασίας σε κάθε συνδυασμό παραγόντων και από την ανάλυση του θα προκύψουν εκείνοι οι ελεγχόμενοι παράγοντες που δεν επηρεάζουν την μεταβλητότητα, αλλά την μέση επίδοση (δηλαδή τους παράγοντες ελέγχου του στόχου – *location factors*), οπότε με κατάλληλη ρύθμιση τους, αυτή μπορεί να έρθει στον επιθυμητό στόχο. Ως MΣ μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το μέσο του δείγματος των παρατηρήσεων κάθε δοκιμής.

Έχουν προταθεί πολλά μέτρα για το Μέτρο Απόδοσης Θορύβου (MΘ). Όταν θα πρέπει η επίδοση να επιτύχει κάποιο στόχο (*nominal the best*), ο Taguchi συνιστά τη χρήση του **λόγου σήματος προς θόρυβο** (*Signal to Noise Ratio* – **SNR_T** ή **SNR** ή **SN**) που σχετίζεται άμεσα με την τετραγωνική συνάρτηση κόστους ποιότητας και αποτελεί κριτήριο επιλογής των τιμών των παραμέτρων σχεδίασης.

Έχουμε

$$M\Theta = SNR_T = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{y}}{s} \right)^2$$

όπου \bar{y} και s είναι ο μέσος και η τυπική απόκλιση του δείγματος των (n) παρατηρήσεων κάθε δοκιμής αντίστοιχα.

Όταν επιθυμούμε ελαχιστοποίηση της τιμής του χαρακτηριστικού της απόκρισης (*the smaller the better*), ο Taguchi συνιστά τη χρήση του

$$SNR_S = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum y^2 \right)$$

όπου το άθροισμα υπονοεί την άθροιση των τιμών της απόκρισης των συνδυασμών των αγωγών του εξωτερικού σχεδιασμού (n το πλήθος), άρα μια τιμή του n σε κάθε συνδυασμό αγωγών του εσωτερικού σχεδιασμού. Λόγω του αρνητικού πρόσημου, προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε το SNR_S .

Όταν επιθυμούμε μεγιστοποίηση της τιμής του χαρακτηριστικού της απόκρισης (*the larger the better*) ο Taguchi συνιστά τη χρήση του

$$SNR_L = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum y^{-2} \right)$$

Λόγω του αρνητικού πρόσημου, προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε το SNR_L .

Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι δυαδικό, δηλαδή επιτυχία (p το ποσοστό επιτυχίας στις n δοκιμές) ή αποτυχία ($1-p$ το ποσοστό αποτυχίας στις n δοκιμές), τότε χρησιμοποιείται το μέτρο

$$SNR_P = 10 \log_{10} \left(\frac{p}{1-p} \right)$$

Οι λόγοι σήματος προς θόρυβο ορίζονται έτσι ώστε ο σκοπός του πειράματος να είναι πάντοτε η μεγιστοποίηση του αντίστοιχου λόγου SN.

Η ανάλυση κατά τον Taguchi, πραγματοποιείται σε δυο στάδια

1. Αρχικά αναλύουμε το μέτρο θορύβου (ΜΘ) και εντοπίζουμε τους (σημαντικούς) παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) με τους οποίους, με κατάλληλη επιλογή των επιπέδων τους, μεγιστοποιούμε την SNR (άρα ελαχιστοποιούμε τη διασπορά).
2. Στη συνέχεια αναλύουμε το μέτρο στόχου (ΜΣ) και εντοπίζουμε τους (σημαντικούς) παράγοντες ελέγχου του στόχου (*location factors* - που δεν είναι ελέγχου μεταβλητότητας) με τους οποίους, με κατάλληλη επιλογή των επιπέδων τους, θα προσεγγίσουμε στις επιθυμητές τιμές την μέση τιμή.

Σε αρκετές περιπτώσεις, η μέση τιμή (μ) και η διασπορά (σ^2) που παίρνουμε από τις τιμές της απόκρισης για κάθε συνδυασμό επιπέδων των παραγόντων ελέγχου, συνδέονται με μια συναρτησιακή σχέση. Το γεγονός αυτό αρκετές φορές καταλήγει στη σύγχυση μεταξύ των παραγόντων ελέγχου μεταβλητότητας και ελέγχου του στόχου.

Έτσι, εάν υπάρχει μια σχέση της μορφής

$$\sigma = k\mu^\beta$$

μεταξύ του μέσου και της διασποράς μιας πειραματικής δοκιμής, τότε είναι βολικότερο να αναλύσουμε την ποσότητα

$$M\Theta = \theta = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{y}^b}{s} \right)^2$$

προκειμένου να προσδιορίσουμε τους παράγοντες διασποράς (*dispersion factors*), όπου b είναι μια εκτίμηση του β η οποία προκύπτει από την εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου

$$\log_{10}(s_i) = \alpha + \beta \log_{10}(\bar{y}_i) + \varepsilon_i$$

όπου \bar{y}_i και s_i είναι ο μέσος και η τυπική απόκλιση των αποκρίσεων του εσωτερικού σχεδιασμού.

Με αυτή την μέθοδο εργασίας, αποφεύγεται ο κίνδυνος σύγχυσης μεταξύ παραγόντων διασποράς και θέσης.

Για $\beta = 1$ το παραπάνω μέτρο θορύβου, ταυτίζεται με το SNR_T , ενώ για $\beta = 0$ έχουμε $M\Theta = -20 \log_{10}(s)$, δηλαδή όταν δεν σχετίζονται ο μέσος με την τυπική απόκλιση, είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε την ποσότητα $-20 \log_{10}(s)$ για τον προσδιορισμό παραγόντων διασποράς (*dispersion factors*) και τον μέσο \bar{y} για τον προσδιορισμό των παραγόντων θέσης (*location factors*).

Για τα μέτρα

$$SNR_L = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum y^{-2} \right) \text{ και } SNR_S = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum y^2 \right)$$

είναι εύκολο να επαληθευθεί ότι

$$\frac{1}{n} \sum y^2 = \bar{y}^2 + \frac{n-1}{n} s^2 \text{ και } \frac{1}{n} \sum y^{-2} \approx 3 \frac{s^2}{\bar{y}^4} + \frac{1}{\bar{y}^2}$$

Είναι δηλαδή προφανές, πώς η μέση τιμή \bar{y} επηρεάζει τα μετρά SNR_L και SNR_S . Άρα, η χρήση των μέτρων αυτών ως αποκρίσεις στην ανάλυση, θα προκαλούσε σύγχυση των παραγόντων ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) και ελέγχου του στόχου (*location factors*).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τον παρακάτω διασταυρωμένο σχεδιασμό που αποτελείται από μια εσωτερική διάταξη που είναι ο κλασματικός 2_{IV}^{4-1} παραγοντικός σχεδιασμός με 4 παράγοντες ελέγχου A, B, C, D και μια εξωτερική διάταξη που είναι ο κλασματικός 2_{III}^{3-1} παραγοντικός σχεδιασμός με τρεις παράγοντες θορύβου E, F και G.

				<i>E</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>2</i>				
				<i>F</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>I</i>	<i>2</i>				
				<i>G</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>I</i>				
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>y1</i>	<i>y2</i>	<i>y3</i>	<i>y4</i>	SNRT	MEAN	S	theta	
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	0.92	0.97	1.9	2	7.913472	1.4475	0.582029	3.220965	
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	0.79	0.82	0.81	0.83	33.5476	0.8125	0.017078	24.99216	
<i>I</i>	<i>2</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	0.36	0.33	0.3	0.33	22.58877	0.33	0.024495	3.773009	
<i>I</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>I</i>	1.14	1.93	1.1	1.91	10.3395	1.52	0.462241	5.063003	
<i>2</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	0.51	0.66	0.61	0.57	19.3325	0.5875	0.063443	5.176275	
<i>2</i>	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>I</i>	1.94	1.81	1.45	1.72	18.42624	1.73	0.207364	13.83026	
<i>2</i>	<i>2</i>	<i>I</i>	<i>I</i>	0.72	0.71	1.6	1.62	7.041256	1.1625	0.516809	1.781121	
<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	0.79	0.78	0.81	0.77	33.27614	0.7875	0.017078	24.11173	

Αναζητούμε τον ιδανικό συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου, προκειμένου να μειώσουμε την μεταβλητότητα και να φέρουμε την απόκριση όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) και στόχου (*location factors*), θα πρέπει να προχωρήσουμε και στον υπολογισμό της μέσης τιμής και του μέτρου απόδοσης SNR_T . Οι συγκεκριμένες ποσότητες δίνονται στις στήλες με τίτλο SNRT και MEAN του παραπάνω πίνακα.

Από ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) έχουμε τα ακόλουθα

Analysis of Variance for SNRT, using Adjusted SS for Tests						
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	1.70	1.70	1.70	0.11	0.765
B	1	4.46	4.46	4.46	0.28	0.633
C	1	187.34	187.34	187.34	11.80	0.041
D	1	528.52	528.52	528.52	33.29	0.010
Error	3	47.63	47.63	15.88		
Total	7	769.66				

S = 3.98471 R-Sq = 93.81% R-Sq(adj) = 85.56%

Παρατηρούμε ότι για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ οι παράγοντες C και D είναι στατιστικά σημαντικοί, άρα μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*).

Όμοια για τον μέσο, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα ANOVA

Analysis of Variance for MEAN, using Adjusted SS for Tests						
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	0.00310	0.00310	0.00310	0.53	0.521
B	1	0.07556	0.07556	0.07556	12.81	0.037
C	1	0.21863	0.21863	0.21863	37.08	0.009
D	1	1.39654	1.39654	1.39654	236.84	0.001
Error	3	0.01769	0.01769	0.00590		
Total	7	1.71152				

S = 0.0767894 R-Sq = 98.97% R-Sq(adj) = 97.59%

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, οι παράγοντες B, C και D είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, άρα μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως παράγοντες ελέγχου του στόχου (*location factors*).

Ωστόσο οι παράγοντες C και D είδαμε προηγουμένως ότι είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) οπότε δεν γίνεται να τους θεωρήσουμε και παράγοντες στόχου ταυτόχρονα. Αυτή η σύγχυση στην ερμηνεία των δεδομένων θα μπορούσε να αποφευχθεί αν εντοπιζόταν μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ του μέσου και της διασποράς των δοκιμών.

Προσαρμόζουμε ένα γραμμικό μοντέλο της μορφής

$$\log_{10}(s_i) = \alpha + \beta \log_{10}(\bar{y}_i) + \varepsilon_i$$

έχουμε

Regression Analysis: LOGS versus LOGMEAN				
The regression equation is				
LOGS = - 0.918 + 2.07 LGMEAN				
Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-0.9182	0.1757	-5.23	0.002
LGMEAN	2.0660	0.7633	2.71	0.035
S = 0.491947 R-Sq = 55.0% R-Sq (adj) = 47.5%				

Έχουμε

$$\log_{10}(s_i) = -0.918 + 2.07 \log_{10}(\bar{y}_i)$$

Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ ο παράγοντας $\log_{10}(\bar{y}_i)$ είναι στατιστικά σημαντικός (ο συντελεστής β είναι διάφορος του μηδενός), άρα υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ του μέσου και της διασποράς. Άρα το κατάλληλο μέτρο απόδοσης θορύβου, σύμφωνα με τα όσα είδαμε προηγουμένως είναι το

$$M\Theta = \theta = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{y}^{2.07}}{s} \right)^2$$

το οποίο είναι ικανό για τον προσδιορισμό των παραγόντων ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*).

Από ανάλυση διακύμανσης, έχουμε

Analysis of Variance for THETA, using Adjusted SS for Tests						
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	7.70	7.70	7.70	0.23	0.663
B	1	19.50	19.50	19.50	0.59	0.510
C	1	365.12	365.12	365.12	10.97	0.045
D	1	145.84	145.84	145.84	4.38	0.127
Error	3	99.86	99.86	33.29		
Total	7	638.03				

S = 5.76935 R-Sq = 84.35% R-Sq(adj) = 63.48%

Είναι φανερό, ότι ο στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ παράγοντας C μπορεί να θεωρηθεί ως ένας παράγοντας ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factor*).

Άρα, από όλα τα παραπάνω δεδομένα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο παράγοντας C είναι παράγοντας ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factor*), οι παράγοντες B και D είναι παράγοντες ελέγχου του στόχου (*location factors*) και τέλος ο παράγοντας A που απομένει, ο οποίος δεν έχει σημαντική επίδραση ούτε στην μεταβλητότητα ούτε στην μέση απόκριση των δοκιμών, μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας ελέγχου του κόστους.

3.8 Εισαγωγή στη θεωρία των Αποκριτικών Επιφανειών

Η *μεθοδολογία των αποκριτικών επιφανειών*, είναι μια συλλογή από μαθηματικές και στατιστικές τεχνικές που είναι χρήσιμες για την ανάλυση προβλημάτων στα οποία η απόκριση που μας ενδιαφέρει επηρεάζεται από πολλές μεταβλητές και σκοπός είναι η βελτιστοποίηση της.

Για παράδειγμα θεωρούμε ότι ένας χημικός μηχανικός επιθυμεί να βρει τα επίπεδα της θερμοκρασίας (x_1) και της πίεσης (x_2) που μεγιστοποιούν την παραγωγή (y) μιας διαδικασίας. Η διαδικασία παραγωγής είναι μια συνάρτηση των επιπέδων της θερμοκρασίας και της πίεσης η οποία θα μπορούσε να έχει την παρακάτω μορφή

$$y = f(x_1, x_2) + \varepsilon$$

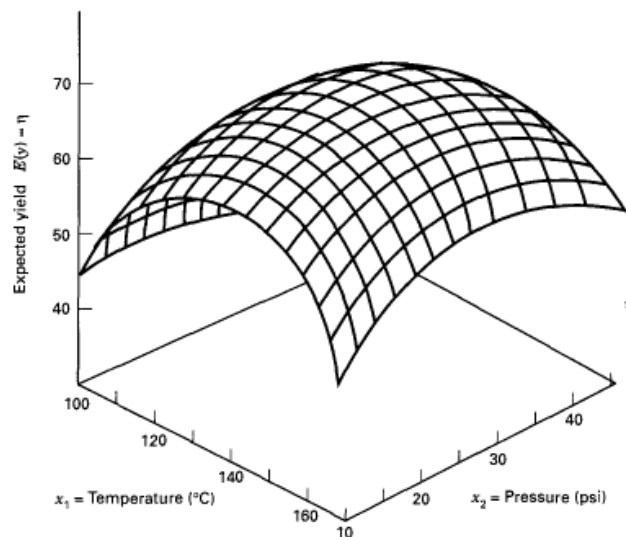
όπου ε είναι ένας όρος που αντιπροσωπεύει άλλες τιμές μεταβλητότητας που δεν εξηγούνται από την f και το θεωρούμε ως ένα στατιστικό τυχαίο σφάλμα που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και σταθερή διασπορά σ^2 .

Άρα για την μέση τιμή της μεταβλητής απόκρισης θα ισχύει

$$E(Y) = f(x_1, x_2) = \eta$$

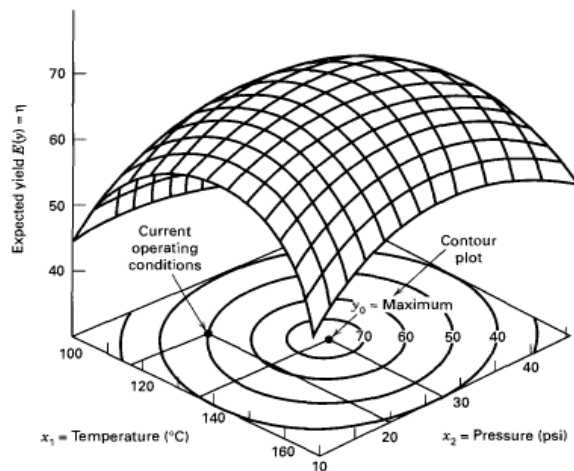
Ο γεωμετρικός τόπος των $E(Y)$ καλείται **επιφάνεια απόκρισης**.

Συνήθως, η αναπαράσταση μιας επιφάνειας απόκρισης γραφικά έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 3.3 Μια επιφάνεια απόκρισης τριών διαστάσεων που δείχνει την αναμενόμενη παραγωγή y ως συνάρτηση της θερμοκρασίας x_1 και της πίεσης x_2 . (Πηγή Montgomery D.C (1997))

Για την καλύτερη εποπτεία του σχήματος της επιφάνειας απόκρισης, συνήθως χρησιμοποιείται το γράφημα των ισοϋψών καμπύλων (*contour plot*).



Σχήμα 3.4 Γράφημα των ισοϋψών καμπύλων (contour plot) (Πηγή Montgomery D.C (1997))

Στο γράφημα των ισοϋψών καμπύλων, γραμμές σταθερής απόκρισης προβάλλονται στο επίπεδο (x_1, x_2) . Κάθε γραμμή, ανταποκρίνεται σε ένα συγκεκριμένο ύψος της επιφάνειας απόκρισης.

Στα περισσότερα προβλήματα των αποκριτικών επιφανειών, η μορφή της σχέσης μεταξύ της απόκρισης y και των ανεξάρτητων μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_k είναι άγνωστη οπότε ο πειραματιστής θα πρέπει να βρει μέσω της μεθοδολογίας των αποκριτικών επιφανειών μια κατάλληλη προσέγγιση για την συναρτησιακή σχέση. Τις περισσότερες φορές, η τεχνική που χρησιμοποιείται είναι η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου με τη μέθοδο της πολλαπλής παλινδρόμησης (*multiple linear regression*).

Η πιο απλή μορφή της παραπάνω πολλαπλής παλινδρόμησης είναι όταν η μεταβλητή απόκρισης εκφράζεται ως γραμμική συνάρτηση μεταβλητών, δηλαδή έχουμε το μοντέλο

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Το παραπάνω μοντέλο λέγεται **πρώτης τάξης** (*first order model*) και οι παράμετροι α και $\beta_i, i=1,2,\dots,k$ καλούνται συντελεστές παλινδρόμησης (*regression coefficients*).

Με την προσθήκη της αλληλεπίδρασης το μοντέλο μετατρέπεται σε δεύτερης τάξης.
Πράγματι για $k=2$ έχουμε

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

ή

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

όπου $x_3 = x_1 x_2$ και $\beta_3 = \beta_{12}$.

Ένας εύκολος τρόπος για την εκτίμηση του πολυωνυμικού μοντέλου πρώτου βαθμού είναι η χρήση ενός παραγοντικού πειράματος ή ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε ποιες από τις μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_k έχουν επίδραση στην απόκριση.

Η γενική μορφή του μοντέλου *δεύτερης τάξης* είναι

$$y = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j=2}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

Στην περίπτωση που η εξάρτηση της μεταβλητής απόκρισης y από τις υπόλοιπες μεταβλητές x_i είναι μη γραμμική ως προς τους συντελεστές παλινδρόμησης, τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό (π.χ. $x_1^2 = x_{k+1}$) μπορούμε να μετατρέψουμε ένα μοντέλο δεύτερης ή και υψηλότερης τάξης σε πρώτης.

Η μεθοδολογία των αποκριτικών επιφανειών έχει δεχθεί σημαντικές κριτικές που αφορούν στο γεγονός ότι η βελτιστοποίηση γίνεται σχεδόν πάντα με ένα μοντέλο του οποίου οι συντελεστές είναι άγνωστοι, οπότε και εκτιμώνται. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή που βρήκαμε μπορεί να είναι πλασματική εξαιτίας της μεταβλητότητας των συντελεστών.

3.9 Οι Συνδυασμένοι Σχηματισμοί (Combined Arrays) και η χρήση τους στο πρόβλημα των Ανθεκτικών Παραμετρικών Σχεδιασμών.

Ένας διασταυρωμένος σχηματισμός (*crossed array*), περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανάμεσα σε αυτούς του εσωτερικού σχεδιασμού (έστω n_1 το πλήθος) και εκείνους του εξωτερικού σχεδιασμού (έστω n_2 το πλήθος) μιας πειραματικής διαδικασίας. Άρα συνολικά ο σχεδιασμός θα έχει $N = n_1 n_2$ δοκιμές, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν προκειμένου να μοντελοποιήσουν την μεταβλητή απόκρισης.

Τις περισσότερες φορές, ο διασταυρωμένος σχηματισμός καταλήγει με έναν αρκετά μεγάλο αριθμό δοκιμών, ακόμα και εάν επιλέξουμε κλασματικούς παραγοντικούς υψηλής διακριτικής ικανότητας για την εσωτερική και εξωτερική διάταξη. Αυτό είναι ένα σημαντικό μειονέκτημα της στρατηγικής του σχεδιασμού του Taguchi, διότι η εκτέλεση ενός τέτοιου πειράματος θα απαιτήσει ένα μεγάλο κόστος.

Ωστόσο, παρά το μεγάλο πλήθος των δοκιμών, συνήθως δεν μπορούμε να αντλήσουμε κάποια πληροφορία για την αλληλεπίδραση μεταξύ ελεγχόμενων παραγόντων ($C \times C$) που μπορεί να έχουν σημαντική επίδραση και η μη αξιοποίηση τους να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, ιδιαίτερα όταν για εσωτερική διάταξη χρησιμοποιήσουμε έναν κλασματικό σχεδιασμό χαμηλής διακριτικής ικανότητας. Από την άλλη βέβαια, ο διασταυρωμένος σχηματισμός όντως μας δίνει πληροφορία για τις εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων ((C) και (N)) καθώς και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και παραγόντων θορύβου ($C \times N$). Αυτού του είδους αλληλεπιδράσεις είναι κρίσιμες για την επίλυση προβλημάτων ανθεκτικών πειραματικών σχεδιασμών.

Η σημαντικότητα των επιδράσεων σε ένα πρόβλημα ανθεκτικού πειραματικού σχεδιασμού, δηλαδή οι επιδράσεις αυτές που πρέπει να μελετηθούν ώστε να προκύψουν τα προσδοκώμενα συμπεράσματα, ταξινομείται κατά φθίνουσα σειρά ως εξής

1. $C \times N$ αλληλεπιδράσεις, κύριες επιδράσεις C , κύριες επιδράσεις N .
2. $C \times C$ αλληλεπιδράσεις, $C \times C \times N$ αλληλεπιδράσεις.
3. $N \times N$ αλληλεπιδράσεις.
4. αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης.

Άρα, είναι εύλογο να αξιοποιηθεί ένα μοντέλο για την απόκριση, το οποίο να περιλαμβάνει ταυτόχρονα παράγοντες ελέγχου, θορύβου και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι έχουμε δυο παράγοντες ελέγχου, τους x_1, x_2 και έναν παράγοντα θορύβου, τον z_1 . Εάν επιθυμούμε να θεωρήσουμε ένα μοντέλο πρώτης τάξης που να συμπεριλαμβάνει τους παράγοντες ελέγχου, τότε ένα λογικό μοντέλο είναι της μορφής

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \gamma_1 z_1 + \delta_{11} x_1 z_1 + \delta_{21} x_2 z_1 + \varepsilon$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι το παραπάνω μοντέλο περιέχει τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων ελέγχου και θορύβου, καθώς και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

Ο τύπος αυτού του μοντέλου που περιλαμβάνει ταυτόχρονα παράγοντες ελέγχου και θορύβου, καλείται **αποκριτικό μοντέλο** (*response model*).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου ($C \times N$) είναι κρίσιμες για την επίλυση προβλημάτων ανθεκτικών πειραματικών σχεδιασμών. Άρα, στο παραπάνω αποκριτικό μοντέλο, προκειμένου να γίνει μια τέτοια ανάλυση θα πρέπει τουλάχιστον ένας από τους δυο συντελεστές δ_{11} και δ_{21} να είναι διάφορος του μηδενός.

Ένας τέτοιος σχηματισμός που εξετάζει ταυτόχρονα παράγοντες ελέγχου και θορύβου, καλείται **συνδυασμένος σχηματισμός** (*combined array*) και είναι μια εναλλακτική προσέγγιση η οποία προτάθηκε αρχικά από τους Welch, Yu, Kang, Sacks (1990) και αναπτύχθηκε προκειμένου να δώσει διεξόδους στα μειονεκτήματα των διασταυρωμένων σχηματισμών. Οι επιστήμονες αυτοί συνδύασαν ταυτόχρονα παράγοντες ελέγχου και θορύβου σε έναν απλό σχεδιασμό κάτι το οποίο επιτρέπει μεγάλη ελαστικότητα στην επιλογή των επιδράσεων που πρέπει να εκτιμηθούν είτε αυτοί είναι $C \times N$ είτε $C \times C$ είτε $N \times N$. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι ο συνδυασμένος σχηματισμός είναι μια ειδική περίπτωση του διασταυρωμένου σχηματισμού, ο οποίος εκτός από ευελιξία στις εκτιμήσεις των επιδράσεων είναι και οικονομικός λόγω του σχετικά μικρού πλήθους δοκιμών σε σχέση με τους διασταυρωμένους.

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρούμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση σ_z^2 και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις είναι εύκολο να βρούμε ένα μοντέλο για την μέση απόκριση, παίρνοντας απλά την μέση τιμή για την απόκριση y στον τύπο

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \gamma_1 z_1 + \delta_{11} x_1 z_1 + \delta_{21} x_2 z_1 + \varepsilon$$

άρα

$$E_z(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2$$

Είναι προφανές, ότι η μεταβλητότητα που οφείλεται στους παράγοντες θορύβου μεταβιβάζεται στην y , κάτι που σημαίνει ότι μειώνοντας την διασπορά των παραγόντων θορύβου, μειώνουμε την μεταβλητότητα στην y .

Για την εύρεση ενός μοντέλου για τη διασπορά της απόκρισης y , γράφουμε την σχέση

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \gamma_1 z_1 + \delta_{11} x_1 z_1 + \delta_{21} x_2 z_1 + \varepsilon$$

ως εξής

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + (\gamma_1 + \delta_{11} x_1 + \delta_{21} x_2) z_1 + \varepsilon$$

άρα θα έχουμε

$$V_z(y) = \sigma_z^2 (\gamma_1 + \delta_{11} x_1 + \delta_{21} x_2)^2 + \sigma^2$$

Παρατηρούμε, ότι εάν οι παράγοντες ελέγχου και θορύβου αλληλεπιδρούν από κοινού στην απόκριση y , τότε η μεταβλητότητα της y μπορεί επίσης να μειωθεί αλλάζοντας τις τιμές (μεταβολή των επιπέδων) των παραγόντων ελέγχου, καθώς διαφορετικές τιμές αυτών, μπορεί να έχουν διαφορετικές αλληλεπιδράσεις στην σχέση μεταξύ y και παραγόντων θορύβου. Αυτό εξηγεί, γιατί οι ανθεκτικοί παραμετρικοί σχεδιασμοί είναι αποτελεσματικοί στην μείωση της διασποράς της y .

Από τους παραπάνω τύπους παρατηρούμε τα εξής

- Τόσο το μοντέλο της μέσης τιμής, όσο και αυτό της διασποράς περιέχουν μόνο παράγοντες ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε τη δυνατότητα να τροποποιήσουμε αυτούς τους παράγοντες προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή για τον μέσο και ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά που οφείλεται στους παράγοντες θορύβου.
- Παρόλο που το μοντέλο της διασποράς περιλαμβάνει μόνο παράγοντες ελέγχου, επίσης περιλαμβάνει τους συντελεστές παλινδρόμησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των παραγόντων ελέγχου και θορύβου. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο οι παράγοντες θορύβου επηρεάζουν την απόκριση.

Τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται για περισσότερους παράγοντες ελέγχου και θορύβου.

3.10 Σύγκριση μεταξύ Διασταυρωμένων (Crossed Arrays) και Συνδυασμένων Σχηματισμών (Combined Arrays).

Crossed Array

Θεωρούμε ότι η εσωτερική διάταξη για τους δισταθμικούς παράγοντες ελέγχου A, B, και C (=AB) είναι ένας 2^{3-1}_{III} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με 4 δοκιμές και ορίζουσα σχέση

$$I = ABC$$

Επίσης η εξωτερική διάταξη για τους δισταθμικούς παράγοντες θορύβου r, s, t (=rst) είναι ένας 2^{3-1}_{III} παρόμοιος κλασματικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση

$$I = rst$$

Ο διασταυρωμένος σχηματισμός (*crossed array*) $2_{III}^{3-1} \times 2_{III}^{3-1}$ που σχηματίζεται από τους παραπάνω σχεδιασμούς θα αποτελείται από 16 δοκιμές, 6 παράγοντες (A, B, C, r, s, t) και τις ακόλουθες ορίζουσες σχέσεις

$$I = ABC = rst = ABCrst$$

Ο διασταυρωμένος σχηματισμός είναι ένας $\frac{1}{4}$ κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός του 2^6 πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού.

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων με βάση τις ορίζουσες σχέσεις είναι

$$A = BC = Arst = BCrst$$

$$B = AC = Brst = ACrst$$

$$C = AB = Crst = ABrst$$

$$r = ABCr = st = ABCst$$

$$s = ABCs = rt = ABCrt$$

$$t = ABCt = rs = ABCrs$$

Παρατηρούμε ότι, εάν όλες οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ δυο παραγόντων του τύπου $C \times C$ ή $N \times N$ ή και μεγαλύτερης τάξης θεωρηθούν αμελητέες τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τις 6 κύριες επιδράσεις.

Επίσης έχουμε

$$Ar = BCr = Ast = BCst$$

$$Br = ACr = Bst = ACst$$

$$Cr = ABr = Cst = ABst$$

$$As = BCs = Art = BCrt$$

$$Bs = ACs = Brt = ACrt$$

$$Cs = ABs = Crt = ABrt$$

$$At = BCt = Ars = BCrs$$

$$Bt = ACt = Brs = ACrs$$

$$Ct = ABt = Crs = ABrs$$

Δηλαδή, μπορούμε να εκτιμήσουμε και τις 9 $C \times N$ αλληλεπιδράσεις, υποθέτοντας ότι οι αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης μεταξύ ελεγχόμενων παραγόντων και θορύβου είναι αμελητέες. Άρα 9 από τους συνολικά 15 βαθμούς ελευθερίας στον διασταυρωμένο σχεδιασμό χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουμε τις αλληλεπιδράσεις $C \times N$.

Επειδή στην πράξη μόνο ένα μικρό ποσοστό από τις αλληλεπιδράσεις $C \times N$ είναι στατιστικά σημαντικό, φαίνεται πολύ δαπανηρό να κρατήσουμε έναν μεγάλο αριθμό δοκιμών απλά και μονό για να διαβεβαιώσουμε ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις $C \times N$ μπορούν να εκτιμηθούν, εκτός και εάν το κόστος δεν αποτελεί εμπόδιο για τον πειραματιστή. Επιπλέον δεν υπάρχει ευελιξία για ανακατανομή των βαθμών ελευθερίας για την εκτίμηση των $C \times C$ αλληλεπιδράσεων που ίσως είναι στατιστικά σημαντικές.

Combined Array

Τα προβλήματα κόστους και μη-ευελιξίας των διασταυρωμένων σχεδιασμών, μπορούμε να τα αποφύγουμε με το να συνδυάσουμε παράγοντες ελέγχου και θορύβου ταυτόχρονα σε έναν συνδυασμένο σχηματισμό (*combined array*). Ο πειραματιστής θα μπορεί τότε να ταξινομήσει με βάση την τάξη όλες τις πιθανές αλληλεπιδράσεις.

Η επιλογή των σχηματισμών αυτών, θα πρέπει να γίνεται με βάση τα κριτήρια ελάχιστης απόκλισης και μέγιστης διακριτικής ικανότητας. Ωστόσο, παρά την ευελιξία που προσφέρουν οι σχηματισμοί αυτοί, μπορεί να οδηγήσουν σε σύγχυση και αδυναμία στην εκτίμηση σημαντικών αλληλεπιδράσεων.

Για τα ίδια δεδομένα όσον αφορά τους παράγοντες αλλά με οριζουσες σχέσεις

$$I = ABrs = ACst = BCrt$$

θεωρούμε λοιπόν έναν συνδυασμένο σχηματισμό με 16 δοκιμές και πιο συγκεκριμένα τον 2_{IV}^{6-2} κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα IV.

Η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων με βάση τις οριζουσες σχέσεις είναι

$$\begin{array}{ll} A = Brs = Cst = ABCrt & r = ABs = ACrst = BCt \\ B = Ars = ABCst = Crt & s = ABr = ACt = BCrst \\ C = ABCrs = Ast = Brt & t = ABrt = ACs = BCr \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι, εάν όλες οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τριών παραγόντων ή και μεγαλύτερης τάξης θεωρηθούν αμελητέες τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τις 6 κύριες επιδράσεις.

Επίσης έχουμε

$$AB = rs = BCst = ACrt$$

$$AC = BCrs = st = ABrt$$

$$BC = Ars = ABst = rt$$

και

$$Ar = Bs = Crst = ABCt$$

$$Br = As = ABCrst = Ct$$

$$Cr = ABCs = Arst = Bt$$

$$As = Br = Ct = ABCrst$$

$$Bs = Ar = ACBt = Crst$$

$$Cs = ABCr = At = ABrt$$

$$At = Brst = Cs = ABCr$$

$$Bt = Arst = ABCs = Cr$$

$$Ct = ABCrst = As = Br$$

Εδώ παρατηρούμε ότι αλληλεπιδράσεις $C \times N$ είναι ταυτόσημες μεταξύ τους, δηλαδή για την εκτίμηση τους θα πρέπει να υποθέσουμε ότι κάποιες άλλες αλληλεπιδράσεις $C \times N$ ή και αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης είναι αμελητέες. Ένας τέτοιος σχεδιασμός δεν ενδείκνυται αφού δεν μπορεί να εκτιμήσει όλες τις αλληλεπιδράσεις $C \times N$ που είναι και οι σημαντικότερες (σύμφωνα με την ταξινόμηση των επιδράσεων) σε προβλήματα ανθεκτικών παραμετρικών σχεδιασμών.

Εάν πάρουμε τώρα ορίζουσες σχέσεις

$$I = ABCrst = BCst = ACr$$

και θεωρήσουμε έναν συνδυασμένο σχηματισμό 16 δοκιμών και πιο συγκεκριμένα τον 2_{III}^{6-2} κλασματικό παραγοντικό σχηματισμό με διακριτική ικανότητα $R = III$ (μικρότερη σε σχέση με πριν), τότε για τη δομή των ταυτόσημων επιδράσεων θα έχουμε

$$\begin{array}{ll}
A = Brst = ABCr = Cr & AB = rst = ACst = BCr \\
B = Arst = Cst = ABCr & AC = BCrst = ABst = r \\
C = ABCrst = Bst = Ar & BC = ACrst = st = ABr \\
r = ABst = BCrst = AC & \\
s = ABrt = BCt = ACrs & \\
t = ABrs = BCs = ACrt &
\end{array}$$

και

$$\begin{array}{lll}
Ar = Bst = ABCrst = C & Br = Ast = Brst = ABC & Cr = ABCst = Brst = A \\
As = Brt = ABCt = Crs & Bs = Art = Ct = ABCrs & Cs = ABCrt = Bt = Ars \\
At = Brs = ABCs = Cr & Bt = Ars = Cs = ABCrt & Ct = ABCrs = Bs = Art
\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι δυο κύριες επιδράσεις (οι A και C) είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις $C \times N$ και επιπλέον αλληλεπιδράσεις $C \times N$ είναι και ταυτόσημες μεταξύ τους ($Bs = Ct$). Άρα για την εκτίμηση των παραπάνω θα πρέπει να υποθέσουμε ότι κάποιες από τις κύριες επιδράσεις ή αλληλεπιδράσεις $C \times N$ ή και αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης είναι μη σημαντικές. Άρα ούτε ο σχεδιασμός αυτός φαίνεται να είναι καλή επιλογή για εφαρμογή σε πειράματα ανθεκτικών παραμετρικών σχεδιασμών.

Θεωρούμε ξανά ένα 2_{III}^{6-2} σχεδιασμό (ίδιας διακριτικής ικανότητας $R = III$) με ορίζουσες σχέσεις

$$I = ABCr = rst = ABCst$$

τότε για τη δομή των ταυτόσημων επιδράσεων θα έχουμε

$$\begin{array}{ll}
A = BCr = Arst = BCst & r = ABC = st = ABCrst \\
B = ACr = Brst = ACst & s = ABCrs = rt = ABCt \\
C = ABr = Crst = ABst & t = ABCrt = rs = ABCs
\end{array}$$

$$AB = Cr = ABrst = Cst$$

$$AC = Br = ACrst = Bst$$

$$BC = Ar = BCrst = Ast$$

και

$$Ar = BC = Ast = BCrst$$

$$Br = AC = Bst = ACrst$$

$$Cr = AB = Cst = ABrst$$

$$As = BCrs = Art = BCt$$

$$Bs = ACrs = Brt = Act$$

$$Cs = ABrs = Crt = ABt$$

$$At = BCrt = Ars = BCs$$

$$Bt = ACrt = Brs = ACs$$

$$Ct = ABrt = Crs = ABs$$

Οι τρεις $C \times N$ αλληλεπιδράσεις Ar, Br, Cr , μπορούν να εκτιμηθούν εάν οι $C \times C$ είναι μη σημαντικές. Αυτό είναι το ιδανικό, αφού οι αλληλεπιδράσεις $C \times C$ θεωρούνται λιγότερο σημαντικές (σύμφωνα με την ταξινόμηση των επιδράσεων) σε σχέση με τις $C \times N$.

Όπως και στον διασταυρωμένο σχηματισμό, έτσι και στον συνδυασμένο οι υπόλοιπες έξι $C \times N$ αλληλεπιδράσεις μπορούν να εκτιμηθούν.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, πως ανάλογα με τον τύπο των επιδράσεων που θέλουμε να εκτιμήσουμε, επιλέγουμε τον αντίστοιχο σχεδιασμό.

Είναι προφανές, ότι ο συνδυασμένος σχηματισμός είναι καλύτερος από τον διασταυρωμένο, διότι μας επιτρέπει την εκτίμηση περισσότερων επιδράσεων (τις $C \times C$) κάτω από ασθενείς υποθέσεις και ισχυρισμούς.

Αυτό φαίνεται συγκεντρωτικά από τον ακόλουθο πίνακα

Σχηματισμός	Πλήθος Εκτιμώμενων Επιδράσεων				
	C	CxC	CxN	N	NxN
Διασταυρωμένος	3	0	9	3	0
Συνδυασμένος (R=III 2 ^η περίπτωση)	3	3-2-1-0	6-7-8-9	3	0

Ένα άλλο συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι το κριτήριο της μέγιστης διακριτικής ικανότητας δεν είναι πάντοτε αρκετό για την επιλογή του "βέλτιστου" σχηματισμού. Πράγματι, ο σχεδιασμός 2_{IV}^{6-2} παρά το γεγονός ότι έχει μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα από τον 2_{III}^{6-2} , δεν είναι κατάλληλος για την εκτίμηση των επιδράσεων, αφού συγχέει αλληλεπιδράσεις $C \times N$. Ωστόσο, ακόμα και η επιλογή του καταλληλότερου σχεδιασμού με διακριτική ικανότητα $R=III$ δεν είναι πάντοτε εύκολη υπόθεση αφού, όπως είδαμε στην πρώτη περίπτωση, δεν οδηγεί πάντοτε σε βέλτιστες εκτιμήσεις.

3.11 Βέλτιστη επιλογή συνδυασμένου Σχηματισμού και Εκτιμητική ισχύς των Μοντέλων.

Στους παραγοντικούς σχεδιασμούς, το πρόβλημα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι ερευνητές, είναι ο τρόπος που γίνεται η ανάθεση των παραγόντων (ελέγχου και θορύβου) στις στήλες του πίνακα σχεδιασμού. Μετά την τοποθέτηση των παραγόντων στις στήλες, θα πρέπει να ελέγξουμε εάν όλες οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραγόντων ελέγχου και θορύβου ($C \times N$), μπορούν να εκτιμηθούν.

Για παράδειγμα, εάν πολλαπλασιάσουμε μια στήλη που αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα ελέγχου C_1 με μια στήλη που αντιστοιχεί σε παράγοντα θορύβου N_1 και παρατηρήσουμε η στήλη $C_1 \times N_1$ ταυτίζεται με τη στήλη που αντιστοιχεί σε έναν άλλο παράγοντα ελέγχου C_2 , τότε το μοντέλο που περιέχει ταυτόχρονα τους παράγοντες $C_1 \times N_1$ και C_2 ως παλινδρομητές, δεν είναι εκτιμήσιμο, αφού ο πίνακας σχεδιασμού έχει μηδενική ορίζουσα. Είναι δηλαδή προφανές, ότι η ανάθεση των παραγόντων ελέγχου και θορύβου στις στήλες του πίνακα σχεδιασμού δεν είναι ικανοποιητική από τη στιγμή που το μοντέλο που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε δεν είναι εκτιμήσιμο.

Βασικός στόχος σε έναν πειραματικό σχεδιασμό είναι η εύρεση ενός μοντέλου (που να περιέχει όλες τις κύριες επιδράσεις αλλά και όλες τις αλληλεπιδράσεις παραγόντων ελέγχου-θορύβου) που να εκτιμάει όσο το δυνατόν καλύτερα την επιθυμητή απόκριση. Προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η εκτιμητική αυτή ικανότητα, προτιμώνται συνήθως κατάλληλοι απλοί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, συνήθως υψηλής διακριτικής ικανότητας (λόγω καθαρών επιδράσεων (*clear effects*)) οι οποίοι έπειτα

χρησιμοποιούνται ως συνδυασμένοι σχεδιασμοί. Ωστόσο, τέτοιοι σχεδιασμοί υπάρχουν μόνο για πειράματα που το πλήθος των δοκιμών τους είναι δύναμη του δυο (4, 8, 16, 32 δοκιμές κλπ). Σαν εναλλακτική προσέγγιση, κάποιος θα μπορούσε να καταφύγει σε σύνθετους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς (υποσύνολα των σχεδιασμών *Plackett-Burman*), οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν το πλήθος δοκιμών είναι πολλαπλάσιο του 4 (4, 8, 12, 16 δοκιμές κλπ).

Το ιδανικότερο, από άποψη κόστους, θα ήταν η χρησιμοποίηση ενός σχηματισμού, του οποίου το πλήθος των δοκιμών θα είναι ίδιο με το πλήθος των παραμέτρων στο μοντέλο που θεωρούμε. Τέτοιοι σχηματισμοί καλούνται **κορεσμένοι** (*saturated*) και το χαρακτηριστικό τους είναι ότι κάθε βαθμός ελευθερίας χρησιμοποιείται για την εκτίμηση μιας επίδρασης. Ωστόσο, σχεδόν κορεσμένοι σχηματισμοί θα μπορούσαν να εξασφαλίσουν κάποιους επιπλέον βαθμούς ελευθερίας για την εκτίμηση της διασποράς του σφάλματος.

Προκειμένου να εξακριβώσουμε, εάν ένα μοντέλο που μας ενδιαφέρει μπορεί να εκτιμηθεί, χρησιμοποιούμε το κριτήριο απόδοσης *D-efficiency*.

Το κριτήριο *D-efficiency* το οποίο μετράει τη συνολική απόδοση για την εκτίμηση μιας συλλογής επιδράσεων ορίζεται ως εξής

$$D_{eff} = |W^T W|^{-\frac{1}{p+1}}$$

όπου

$$W = [w_0, w_1, \dots, w_p] = [\mathbf{1} / \|\mathbf{1}\|, \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|, \dots, \mathbf{x}_p / \|\mathbf{x}_p\|]$$

και

$\mathbf{1}$ είναι το διάνυσμα στήλη που αντιστοιχεί στον συνολικό μέσο (έχει για στοιχεία μονάδες), \mathbf{x}_i είναι το διάνυσμα στήλη που αντιστοιχεί στην *i*-οστή επίδραση του πίνακα σχεδιασμού που ανταποκρίνεται στο μοντέλο

$$X = [\mathbf{1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p]$$

$p+1$ το πλήθος των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων (στήλες του πίνακα σχεδιασμού) και τέλος $\| \|$ είναι η συνήθης Ευκλείδεια νόρμα.

Από τη στιγμή που τυποποιηθούν οι στήλες του \mathbf{W} , το D_{eff} μεγιστοποιείται στην τιμή 1, εάν και μόνο εάν όλες οι στήλες του \mathbf{W} είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Ένα μοντέλο, θα λέμε ότι είναι εκτιμήσιμο εάν η τιμή του D_{eff} είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Ωστόσο μικρές τιμές του D_{eff} μπορεί να υποδεικνύουν σημαντικά προβλήματα πολυσυγγραμικότητας και θα πρέπει να χρίζουν μεγάλης προσοχής. Όταν ο αριθμός των παραμέτρων στο εκτιμώμενο μοντέλο είναι ίσος με τον αριθμό των δοκιμών του ορθογώνιου σχηματισμού, δηλαδή $p + 1 = n$, τότε έχουμε ένα κορεσμένο εκτιμώμενο μοντέλο. Η χρήση των ορθογώνιων σχηματισμών για συνδυασμένους σχηματισμούς (*combined arrays*) έχει το πλεονέκτημα ότι οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων (ελέγχου και θορύβου) είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, υπό το μοντέλο

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^C \beta_i x_i + \sum_{j=1}^N \beta_j z_j + \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^N \beta_{ij} x_i z_j$$

όπου x_i υποδηλώνει τους παράγοντες ελέγχου, z_j τους παράγοντες θορύβου και $x_i x_j$ τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους.

Η επιλογή του κατάλληλου συνδυασμένου σχεδιασμού, σίγουρα δεν είναι εύκολη υπόθεση.

Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να μελετήσουμε πρόβλημα με 3 παράγοντες ελέγχου και 2 παράγοντες θορύβου (όλοι σε δυο επίπεδα), τότε το επιθυμητό μοντέλο θα πρέπει να αποτελείται από 12 παραμέτρους (3 για τους παράγοντες ελέγχου, 2 για τους θορύβου, 6 για τις αλληλεπιδράσεις ελέγχου-θορύβου και 1 για τον μέσο). Άρα η επιλογή ενός ορθογώνιου σχηματισμού με $n = 12$ δοκιμές και $q = 5$ στήλες, θα ήταν μια καλή επιλογή για συνδυασμένο σχηματισμό. Επίσης, η επιλογή ενός ορθογώνιου σχηματισμού με $n = 16$ δοκιμές θα μας παρείχε επιπλέον βαθμούς ελευθερίας για την εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.9 (Κεφάλαιο 2), όπου παρουσιάζονται όλοι οι διαθέσιμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί ανάλογα με το πλήθος δοκιμών και παραμέτρων που επιθυμούμε, υπάρχουν 2 μη-ισόμορφοι δισταθμικοί ορθογώνιοι σχηματισμοί με $n = 12$

δοκιμές και $q = 5$ στήλες και 11 μη-ισόμορφοι δισταθμικοί ορθογώνιοι σχεδιασμοί με $n = 16$ δοκιμές και $q = 5$ στήλες. Θα πρέπει να ελεγχθούν όλες οι δυνατές αναθέσεις των παραγόντων ελέγχου και θορύβου στις στήλες του πίνακα σχεδιασμού, προκειμένου να εξακριβωθεί η βέλτιστη επιλογή για την εφαρμογή του πειράματος.

Το κριτήριο D_{eff} θα μας οδηγήσει τόσο στην επιλογή του ορθογώνιου σχηματισμού $OA(n,q,s,t)$, όσο και στην βέλτιστη τοποθέτηση των 3 παραγόντων ελέγχου και των 2 παραγόντων θορύβου στις $q = 5$ στήλες του.

Θα πρέπει να αναφέρουμε εδώ, ότι δυο ισόμορφοι σχηματισμοί έχουν τις ίδιες ιδιότητες όσον αφορά την εκτιμητική ισχύ του επιθυμητού μοντέλου, από τη στιγμή που ο πίνακας πληροφορίας του μοντέλου δεν επηρεάζεται από αλλαγές στις στήλες, στις γραμμές ή αλλαγές μεμονωμένων στοιχείων σε μια ή περισσότερες στήλες. Για το λόγο αυτό, μόνο μη-ισόμορφοι ορθογώνιοι σχηματισμοί θα πρέπει να ελέγχονται για την αποτελεσματική εκτίμηση των παραμέτρων του επιθυμητού μοντέλου.

РАНЕЕЗНАКО ПЕРПАА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΜΕ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

4.1 Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες

Τα κράματα σιδήρου - άνθρακα (Fe – C) με περιεκτικότητα σε άνθρακα από 0,025% έως 2.1%, ονομάζονται **χάλυβες**. Για περιεκτικότητες μικρότερες από 0,025% τα κράματα αυτά ονομάζονται **σίδηροι**, ενώ για περιεκτικότητες άνω του 2,1% μιλάμε για **λευκούς χυτοσίδηρους**.

Οι χάλυβες οπλισμού σκυροδέματος, είναι μια ειδική κατηγορία χαλύβων που περιέχουν επιπλέον και κάποια άλλα στοιχεία σε μικρές ποσότητες.

Η ποιότητα του χάλυβα, κρίνεται από τις ιδιότητες του και ιδιαίτερα από αυτές που έχουν να κάνουν με την συμπεριφορά του όταν ασκηθεί σε αυτόν κάποιου είδους πίεση. Γενικά, μέτρο της ποιότητας ενός χάλυβα, αλλά και κάθε μεταλλικού υλικού, είναι η ικανότητα του να λειτουργεί με συγκεκριμένο τρόπο, κάτω από διάφορα είδη επιβαλλομένων πιέσεων.

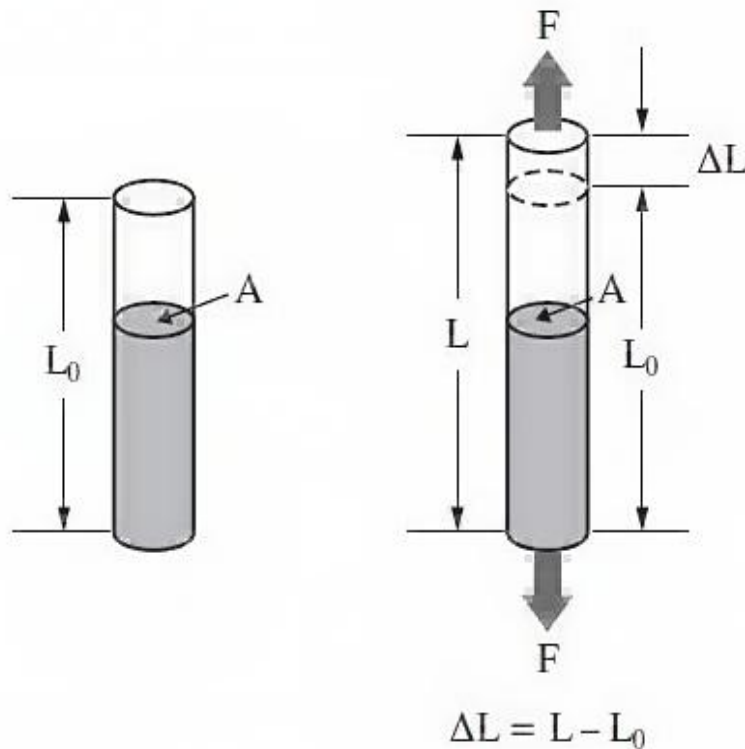
Στην πράξη, οι χάλυβες υποβάλλονται σε διάφορες μορφές καταπονήσεων, όπως Θλίψη, Εφελκυσμός, Διάτμηση κλπ. (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Κυριότερα είδη μηχανικών καταπονήσεων (Πηγή Μαυροειδής, Π. (2005))

Η δοκιμή του μονο-αξονικού εφελκυσμού, μας δίνει τη δυνατότητα για τον υπολογισμό των βασικών μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών. Στη δοκιμή αυτή, τα δοκίμια, συνήθως ειδικά διαμορφωμένα με βάση απαιτήσεις Διεθνών Προδιαγραφών, τοποθετούνται σε μηχανές εφελκυσμού και καταπονούνται με αξονικό φορτίο μέχρι το διαχωρισμό τους σε δύο μέρη (Σχήμα 4.2).

Τα δοκίμια έχουν συνήθως κυλινδρική διατομή, και οι άκρες τους (κεφαλές) κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε η σύνθετη καταπόνηση που ασκείται στις περιοχές εκείνες, κατά τη διάρκεια της επιβολής φορτίων στη μηχανή εφελκυσμού, να μετατρέπεται σε απλή εφελκυστική καταπόνηση στην κεντρική περιοχή του δοκιμίου.



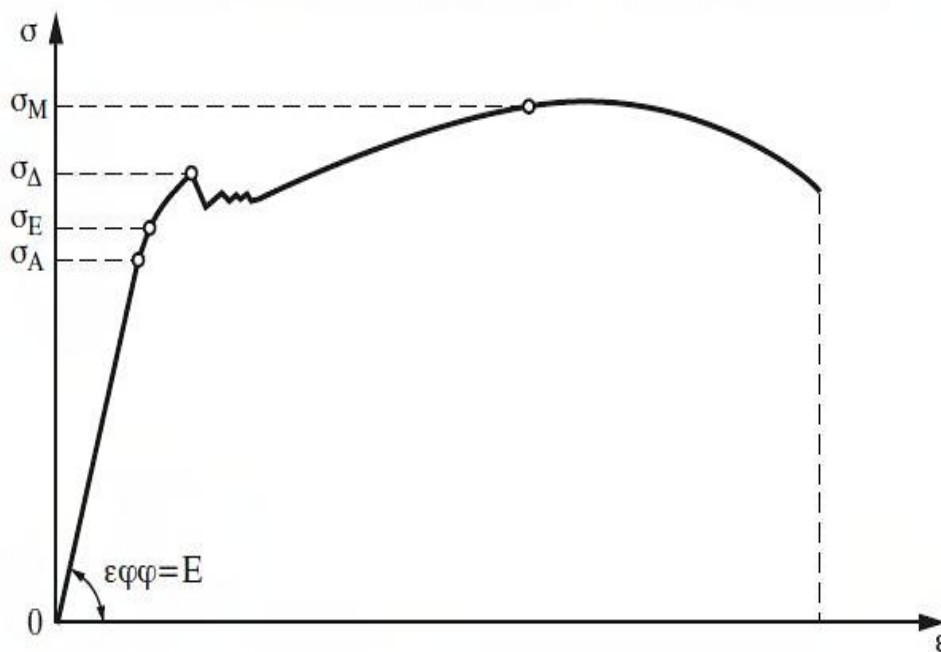
Σχήμα 4.2: Δοκίμιο σε εφελκυσμό (Πηγή Μαυροειδής, Π. (2005))

Η Επιμήκυνση $\Delta L=L-L_0$ (*elongation*), είναι η αύξηση του μήκους μέτρησης L_0 σε ένα δοκίμιο που καταπονείται σε εφελκυσμό.

Στην πιο απλή περίπτωση, υπάρχει καταγραφή του επιβαλλόμενου φορτίου και της αντίστοιχης επιμήκυνσης που προκαλείται στο δοκίμιο.

Συνήθως γίνεται αναγωγή του επιβαλλόμενου φορτίου σε τάση ($\sigma = \frac{F}{A}$), ενώ ταυτόχρονα στον οριζόντιο άξονα σημειώνονται οι ανηγμένες παραμορφώσεις ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$).

Επιβάλλεται, όλες οι μετρήσεις και παρατηρήσεις να πραγματοποιούνται σε αυτήν την περιοχή, μακριά από τις κεφαλές (που έχουν πιαστεί στις αρπάγες της μηχανής).



Σχήμα 4.3: Τυπικό διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων (Πηγή Μαυροειδής, Π. (2005))

Με τη δοκιμή εφελκυσμού (*tensile test*), μέσω του διαγράμματος τάσεων-παραμορφώσεων που προκύπτει (Σχήμα 4.3), προσδιορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

- **Όριο αναλογίας σ_A (*proportional limit*)**. Είναι η μέγιστη τάση για την οποία ισχύει ο νόμος της αναλογίας τάσεων-παραμορφώσεων (Νόμος του Hooke)
- **Όριο Ελαστικότητας σ_E (*elastic limit*)**. Είναι η μέγιστη τάση στην οποία μπορεί να φτάσει το υλικό, χωρίς να υπάρξει μετά την αποφόρτιση του παραμένουσα παραμόρφωση (ελαστική παραμόρφωση).
- **Όριο διαρροής σ_A (*yield strength - Re*)**. Είναι η τάση μετά την οποία κατά την αποφόρτιση παρατηρείται στο δοκίμιο παραμένουσα παραμόρφωση. Στην περίπτωση όλκιμων υλικών στο διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων, το όριο διαρροής εμφανίζεται σαν μια χαρακτηριστική ασυνέχεια.
- **Εφελκυστική αντοχή σ_M (*tensile strength - Rm*)**. Είναι το πηλίκο του μέγιστου φορτίου P_{max} , το οποίο δύναται να φέρει το δοκίμιο, πριν αρχίσει να δημιουργείται "λαιμός", που θα καταλήξει σε θραύση προς την αρχική εγκάρσια διατομή του A.

Συνήθως, στους βιομηχανικούς πειραματικούς σχεδιασμούς γίνεται χρήση του λόγου της εφελκυστικής αντοχής (R_m) προς το όριο διαρροής (R_e) και σκοπός του πειραματιστή που κατασκευάζει χάλυβες είναι η όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή του λόγου αυτού, εφόσον είναι επιθυμητή η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή του ορίου διαρροής συναρτήσει μικρών τιμών για την εφελκυστική αντοχή.

Με τον όρο **αντοχή** (*strength*), αναφερόμαστε, είτε στην αντοχή στη διαρροή (*yield strength - Re*), μέχρι το σημείο που αρχίζει η πλαστική παραμόρφωση, είτε στην εφελκυστική αντοχή (*tensile strength - Rm*).

Στις κατασκευές, ο σχεδιασμός γίνεται παίρνοντας πρωτίστως υπόψη το όριο διαρροής.

Το **ποσοστό του άνθρακα** στο χάλυβα καθορίζει τη σκληρότητα του και επηρεάζει καθοριστικά τη συγκολλησιμότητα του. Αυξημένη περιεκτικότητα σε άνθρακα αυξάνει την αντοχή του χάλυβα αλλά μειώνει την ολκιμότητα και δυσκολεύει τη συγκόλληση.

Η παρουσίαση άλλων κραματικών στοιχείων έχει, επίσης, σημαντική επίδραση.

- Το **Πυρίτιο (Si)**, το οποίο σε μεγάλες ποσότητες αυξάνει την αντοχή του χάλυβα, αλλά με επίσης υψηλή περιεκτικότητα του άνθρακα, αυξάνει η πιθανότητα ρηγματώσεων στο υλικό κατά τη χρήση του.
- Το **Μαγγανίου (Mn)** αυξάνει την αντοχή και τη σκληρότητα του χάλυβα, ωστόσο αυξάνει την πιθανότητα για ρηγματώσεις στις συγκολλήσεις. Οι μαγγανιούχοι χάλυβες έχουν καλή αντοχή στην τριβή.
- Η προσθήκη του **Χρωμίου (Cr)** οδηγεί σε αύξηση της αντοχής, της σκληρότητας και της αντίστασης του χάλυβα στη διάβρωση, ωστόσο μειώνεται η ολκιμότητα, τόσο σε υψηλές όσο και σε χαμηλές θερμοκρασίες.
- Η προσθήκη του **Νικελίου (Ni)** αυξάνει την αντοχή, τη δυσθραυστότητα και την αντίσταση του χάλυβα σε διάβρωση.

4.2 Υπολογιστικό Μέρος

Τα δεδομένα της παρακάτω εφαρμογής προέρχονται από την ΧΑΛΥΒΟΥΡΓΙΚΗ Α.Ε και πραγματεύονται την ανθεκτικότητα του χάλυβα κατά την παραγωγική του διαδικασία.

Συγκεκριμένα κατά την κατασκευή του χάλυβα θα χρησιμοποιηθούν οι τιμές (της περιεκτικότητας) τριών στοιχείων (Άνθρακα, Μαγγανίου και Πυριτίου) οι οποίες θα θεωρηθούν ως παράγοντες ελέγχου, διότι οι τιμές αυτές μπορούν να τροποποιηθούν από τον πειραματιστή, προκειμένου να κατασκευάσει όσο το δυνατόν ανθεκτικότερους χάλυβες.

Επιπλέον θα χρησιμοποιηθούν και δυο στοιχεία (Νικέλιο και Χρώμιο) ως παράγοντες θορύβου οι τιμές (της περιεκτικότητας) των οποίων δεν μπορούν να τροποποιηθούν εύκολα, αφού υπάρχουν στο κράμα του σιδήρου έμφυτες και δεν μπορεί ο πειραματιστής να τις αλλάξει.

Ως μεταβλητή απόκρισης Y θεωρείται ο λόγος της εφελκυστικής αντοχής (Rm) προς το όριο διαρροής (Re), δηλαδή $Y = Rm / Re$.

Όλοι οι παράγοντες είναι σε δυο στάθμες και συγκεκριμένα

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ	ΕΠΙΠΕΔΟ	
	-1	+1
C = c1	0.08	0.09
Mn = c2	0.42	0.43
Si = c3	0.08	0.09
Ni = n1	0.08 - 0.10	0.11 - 0.13
Cr = n2	0.03 - 0.05	0.06 - 0.08

Οι αριθμοί είναι οι επί τοις εκατό περιεκτικότητες των στοιχείων σε μια συγκεκριμένη ποσότητα κράματος χάλυβα. Για τους παράγοντες θορύβου σε κάθε επίπεδο τιμών αντιστοιχεί ένα εύρος τιμών περιεκτικότητας και όχι μια μεμονωμένη τιμή. Αυτό γίνεται

για μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις λόγω δυσκολίας καθορισμού των τιμών από τον πειραματιστή.

4.2.1 Εφαρμογή της μεθοδολογίας Taguchi

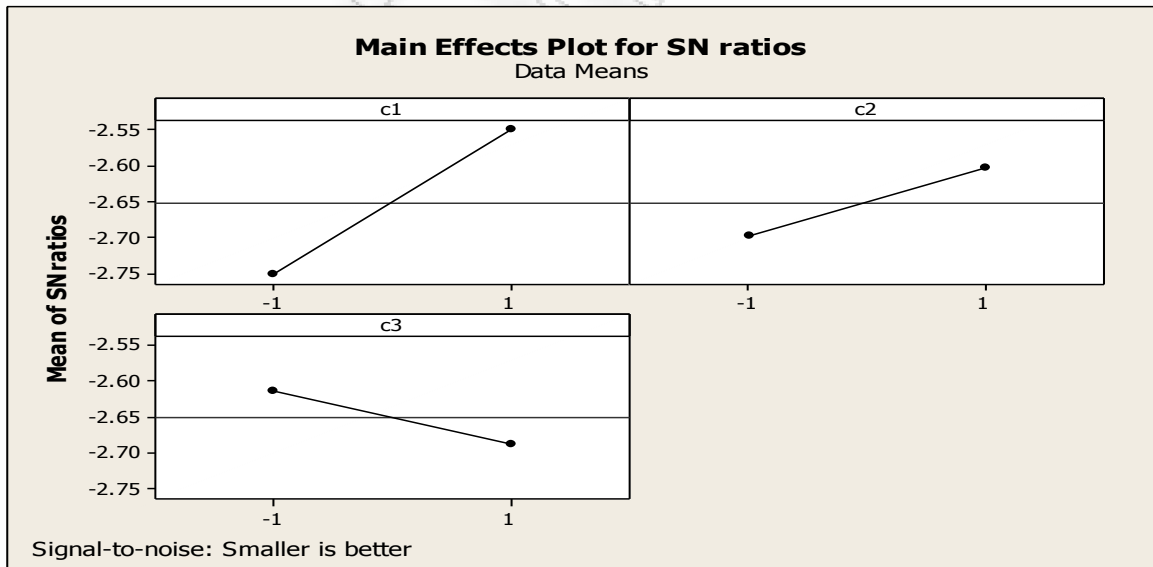
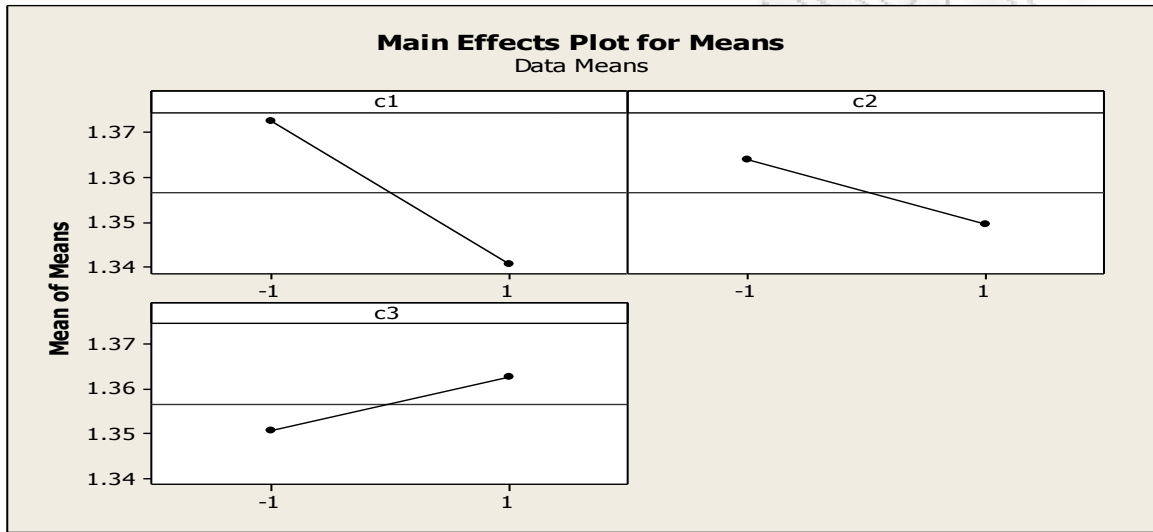
Θεωρούμε τον παρακάτω διαστρωμένο σχεδιασμό που αποτελείται από έναν πλήρη 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό για εσωτερική διάταξη και έναν 2^2 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό για εξωτερική διάταξη.

				Outer Array								
				n1 = Ni	-1	-1	1	1				
				n2 = Cr	-1	1	-1	1				
				Inner Array								
Run s	c1 = C	c2 = Mn	c3 = Si	y1	y2	y3	y4	SNRs	s	mean		
1	-1	-1	-1	1.2 8	1.4 9	1.3 2	1.4 2	- 2.75709	0.06291 5	1.372 5		
2	-1	-1	1	1.3 8	1.4 1	1.3 7	1.3 9	- 2.84515	0.01707 8	1.387 5		
3	-1	1	-1	1.3 8	1.3 2	1.3 7	1.3 8	- 2.68818	0.02872 3	1.362 5		
4	-1	1	1	1.3 5	1.3 5	1.4 7	1.3 7	- 2.71952	0.02362 9	1.367 5		
5	1	-1	-1	1.3 5	1.3 7	1.2 6	1.3 6	- 2.51431	0.05066 2	1.335		
6	1	-1	1	1.3 8	1.4 3	1.2 7	1.3 6	- 2.67864	0.06683 3	1.36		
7	1	1	-1	1.2 8	1.3 8	1.3 5	1.3 2	- 2.49669	0.04272 5	1.332		
8	1	1	1	1.3 1	1.3 3	1.3 4	1.3 6	- 2.51042	0.02081 7	1.335		

Αναζητούμε τον ιδανικό συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων ελέγχου, προκειμένου να μειώσουμε την μεταβλητότητα και να φέρουμε την απόκριση όσο το δυνατόν σε χαμηλές τιμές που θεωρούνται και οι βέλτιστες. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) και

στόχου (*location factors*), θα πρέπει να προχωρήσουμε και στον υπολογισμό της μέσης τιμής και του μέτρου απόδοσης SNR_s.

Τα γραφήματα κύριων επιδράσεων για το μέτρο απόδοσης και για τον μέσο, απ' όπου προκύπτει μια πρώτη ένδειξη για τη σημαντικότητα των παραγόντων ελέγχου του στόχου και ελέγχου μεταβλητότητας αντίστοιχα, είναι



Συγκεκριμένα, από το πρώτο γράφημα, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ ο παράγοντας c1 φαίνεται να είναι σημαντικός, αφού η ευθεία της επίδρασης αποκλίνει σημαντικά από την ευθεία του μέσου. Άρα ο c1 μπορεί να θεωρηθεί σημαντικός παράγοντας ελέγχου του στόχου (*location factor*).

Το ίδιο ισχύει και από το δεύτερο γράφημα, με αποτέλεσμα ο c1 να μπορεί να θεωρηθεί σημαντικός παράγοντας ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factor*). Τα αποτελέσματα αυτά, μπορούν να επαληθευθούν από την ανάλυση διακύμανσης.

Από την ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) του μέτρου θορύβου έχουμε

Analysis of Variance for SNRs, using Adjusted SS for Tests						
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
c1	1	0.081988	0.081988	0.081988	47.44	0.002
c2	1	0.018087	0.018087	0.018087	10.46	0.032
c3	1	0.011060	0.011060	0.011060	6.40	0.065
Error	4	0.006914	0.006914	0.001728		
Total	7	0.118048				

S = 0.0415741 R-Sq = 94.14% R-Sq(adj) = 89.75%

Παρατηρούμε ότι για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ όλοι οι παράγοντες είναι στατιστικά σημαντικοί ($p\text{-values} < 0.1$), άρα μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*).

Επιπλέον από την ανάλυση του μέτρου στόχου, έχουμε

Analysis of Variance for mean, using Adjusted SS for Tests						
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
c1	1	0.0020320	0.0020320	0.0020320	51.00	0.002
c2	1	0.0004133	0.0004133	0.0004133	10.37	0.032
c3	1	0.0002820	0.0002820	0.0002820	7.08	0.056
Error	4	0.0001594	0.0001594	0.0000398		
Total	7	0.0028867				

S = 0.00631219 R-Sq = 94.48% R-Sq(adj) = 90.34%

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, όλοι οι παράγοντες είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$, άρα μπορούμε να τους

θεωρήσουμε ως παράγοντες ελέγχου του στόχου (*location factors*). Ωστόσο οι ίδιοι παράγοντες είδαμε προηγουμένως ότι είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) οπότε δεν γίνεται να θεωρηθούν είναι και παράγοντες στόχου ταυτόχρονα.

Αυτή η σύγχυση στην ερμηνεία των δεδομένων οφείλεται πιθανότατα σε μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ του μέσου και της διασποράς των δοκιμών.

Για να ελέγξουμε πιθανή σχέση της μέσης τιμής με τη διασπορά των παρατηρήσεων κάθε δοκιμής, προσαρμόζουμε ένα γραμμικό μοντέλο της μορφής

$$\log_{10}(s_i) = \alpha + \beta \log_{10}(\bar{y}_i) + \varepsilon_i$$

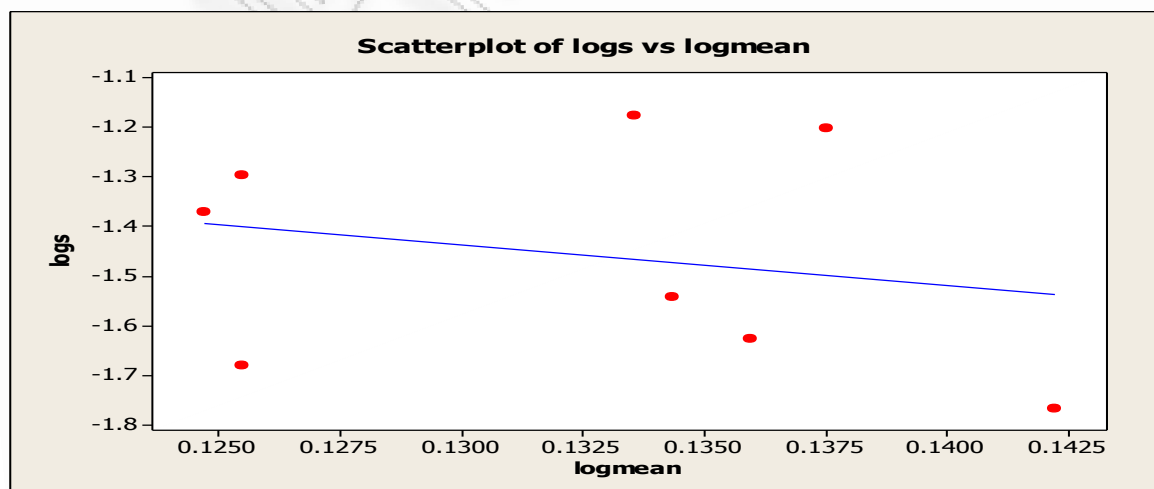
έχουμε

Regression Analysis: logs versus logmean

The regression equation is
logs = - 0,37 - 8,2 logmean

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-0,370	1,839	-0,20	0,847
logmean	-8,21	13,87	-0,59	0,575

S = 0,238613 R-Sq = 5,5% R-Sq(adj) = 0,0%



Έχουμε

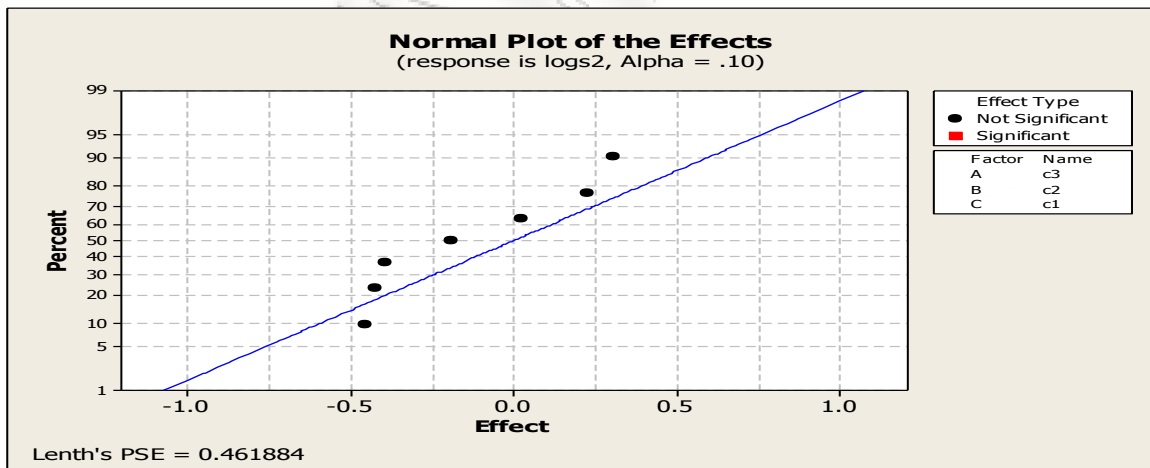
$$\log_{10}(s_i) = -0.37 - 8.2\log_{10}(\bar{y}_i)$$

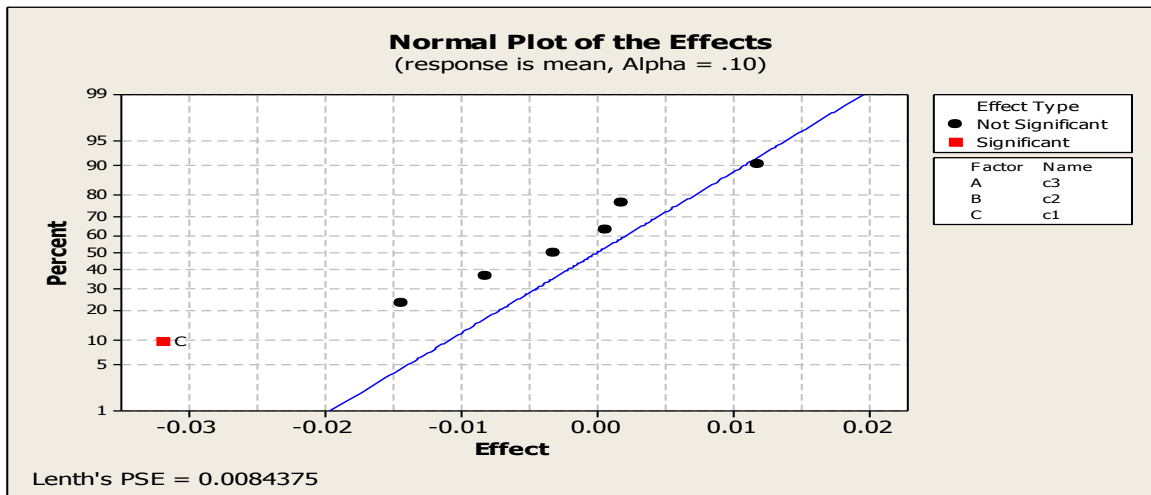
Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ ο παράγοντας $\log_{10}(\bar{y}_i)$ δεν είναι στατιστικά σημαντικός, άρα δεν υπάρχει συναρτησιακή σχέση μεταξύ του μέσου και της διασποράς, Αυτό φαίνεται και από το διάγραμμα διασποράς (*scatter plot*).

Η σύγκριση αυτή για το διαχωρισμό των παραγόντων σε έλεγχο μεταβλητότητας και έλεγχο του μέσου, θα μπορούσε να προσεγγιστεί εναλλακτικά με μια επιπλέον μέθοδο, που πραγματεύεται τα κανονικά διαγράμματα του Daniel.

Συγκεκριμένα η προσέγγιση της μεθόδου αυτής κατασκευάζει μοντέλα που "μετρώνε" ξεχωριστά τον μέσο και την μεταβλητότητα και στηρίζεται αποκλειστικά στους ελεγχόμενους παράγοντες (*control factors*) και τις αλληλεπιδράσεις τους. Για κάθε ελεγχόμενο παράγοντα, υπολογίζεται η δειγματική μέση τιμή \bar{y}_i και η ποσότητα $\ln s_i^2$ που χρησιμοποιούνται ως μέτρα για τον έλεγχο του μέσου και τον έλεγχο μεταβλητότητας αντίστοιχα.

Έχουμε





Από τα παραπάνω κανονικά διαγράμματα, συμπεραίνουμε ότι ο παράγοντας c1 (ο άνθρακας (C)), σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ είναι παράγοντας ελέγχου του μέσου, ενώ για τους υπόλοιπους παράγοντες, δεν είναι ξεκάθαρο εάν είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας.

4.2.2 Εφαρμογή της μεθόδου των αποκριτικών επιφανειών στο διασταυρωμένο σχεδιασμό

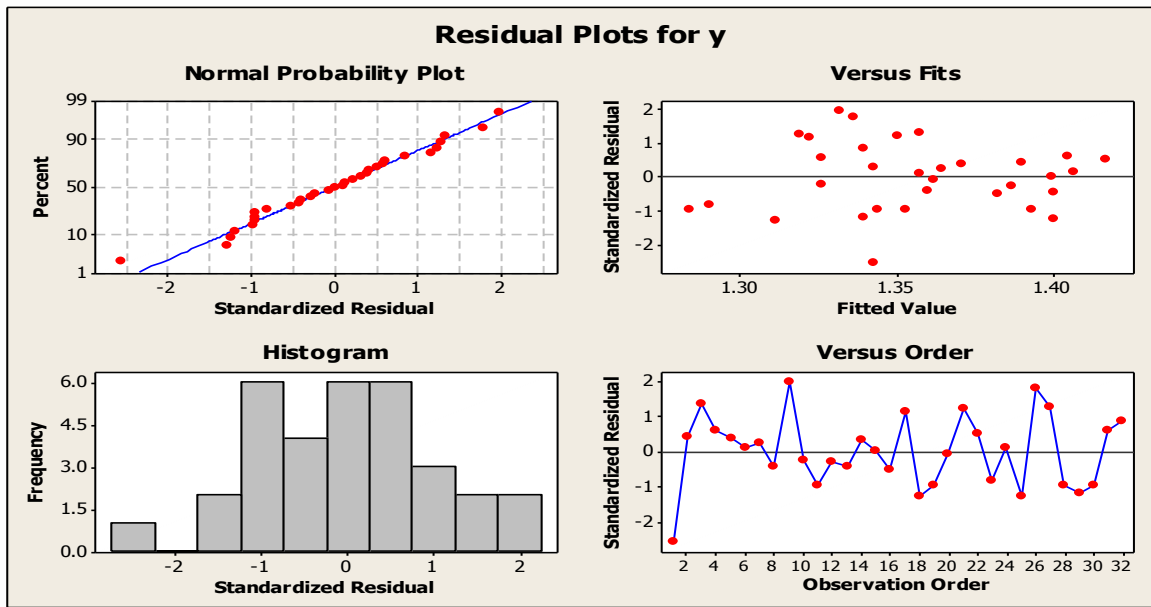
Στη συνέχεια γίνεται η ανάλυση των δεδομένων θεωρώντας το διασταυρωμένο σχεδιασμό του Taguchi ως συνδυασμένο σχηματισμό (*combined array*) και εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία των αποκριτικών επιφανειών. Ο σχηματισμός είναι ο πλήρης 2^5 παραγοντικός σχεδιασμός.

Η χρήση του συνδυασμένου σχηματισμού, μας δίνει το πλεονέκτημα έναντι του διασταυρωμένου σχηματισμού, της μελέτης των αλληλεπιδράσεων των παραγόντων ελέγχου με τους παράγοντες θορύβου ($C \times N$), όπως φαίνεται και από τον ακόλουθο πίνακα.

Run	c1	c2	c3	n1	n2	y	c1n1	c1n2	c2n1	c2n2	c3n1	c3n2
1	-1	-1	-1	-1	-1	1.28	1	1	1	1	1	1
2	-1	-1	-1	-1	1	1.4	1	-1	1	-1	1	-1

3	-1	-1	-1	1	-1	1.39	-1	1	-1	1	-1	1
4	-1	-1	-1	1	1	1.42	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	-1	-1	1	-1	-1	1.38	1	1	1	1	-1	-1
6	-1	-1	1	-1	1	1.41	1	-1	1	-1	-1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1.37	-1	1	-1	1	1	-1
8	-1	-1	1	1	1	1.39	-1	-1	-1	-1	1	1
9	-1	1	-1	-1	-1	1.38	1	1	-1	-1	1	1
10	-1	1	-1	-1	1	1.32	1	-1	-1	1	1	-1
11	-1	1	-1	1	-1	1.37	-1	1	1	-1	-1	1
12	-1	1	-1	1	1	1.38	-1	-1	1	1	-1	-1
13	-1	1	1	-1	-1	1.35	1	1	-1	-1	-1	-1
14	-1	1	1	-1	1	1.35	1	-1	-1	1	-1	1
15	-1	1	1	1	-1	1.4	-1	1	1	-1	1	-1
16	-1	1	1	1	1	1.37	-1	-1	1	1	1	1
17	1	-1	-1	-1	-1	1.35	-1	-1	1	1	1	1
18	1	-1	-1	-1	1	1.37	-1	1	1	-1	1	-1
19	1	-1	-1	1	-1	1.26	1	-1	-1	1	-1	1
20	1	-1	-1	1	1	1.36	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	1.38	-1	-1	1	1	-1	-1
22	1	-1	1	-1	1	1.43	-1	1	1	-1	-1	1
23	1	-1	1	1	-1	1.27	1	-1	-1	1	1	-1
24	1	-1	1	1	1	1.36	1	1	-1	-1	1	1
25	1	1	-1	-1	-1	1.28	-1	-1	-1	-1	1	1
26	1	1	-1	-1	1	1.38	-1	1	-1	1	1	-1
27	1	1	-1	1	-1	1.35	1	-1	1	-1	-1	1
28	1	1	-1	1	1	1.32	1	1	1	1	-1	-1
29	1	1	1	-1	-1	1.31	-1	-1	-1	-1	-1	-1
30	1	1	1	-1	1	1.33	-1	1	-1	1	-1	1
31	1	1	1	1	-1	1.34	1	-1	1	-1	1	-1
32	1	1	1	1	1	1.36	1	1	1	1	1	1

Από την ανάλυση των καταλοίπων έχουμε



Από το πρώτο και το τρίτο γράφημα συμπεραίνουμε την κανονικότητα των καταλοίπων (οπότε και μπορούμε να συνεχίσουμε στην ανάλυση διακύμανσης), από το δεύτερο γράφημα παρατηρούμε εάν τα κατάλοιπα έχουν σταθερή διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα), ενώ από το τέταρτο παρατηρούμε εάν υπάρχει εξάρτηση των καταλοίπων από το χρόνο λήψης των παρατηρήσεων.

Έχουμε

Response Surface Regression: y versus c1, c2, c3, n1, n2

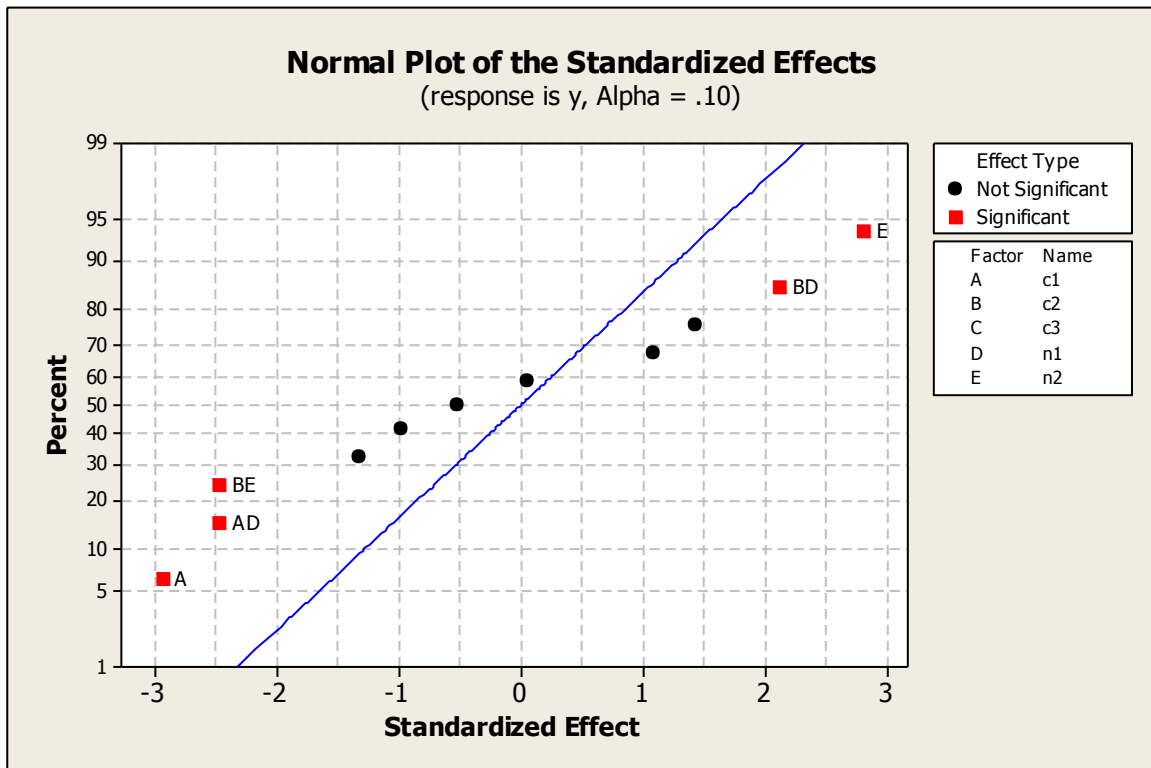
The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	1.35656	0.005443	249.219	0.000
c1	-0.01594	0.005443	-2.928	0.008
c2	-0.00719	0.005443	-1.320	0.202
c3	0.00594	0.005443	1.091	0.288
n1	0.00031	0.005443	0.057	0.955
n2	0.01531	0.005443	2.813	0.011
c1*n1	-0.01344	0.005443	-2.469	0.023
c1*n2	0.00781	0.005443	1.435	0.167
c2*n1	0.01156	0.005443	2.124	0.046
c2*n2	-0.01344	0.005443	-2.469	0.023
c3*n1	-0.00531	0.005443	-0.976	0.341
c3*n2	-0.00281	0.005443	-0.517	0.611

S = 0.0307916 PRESS = 0.048544

R-Sq = 66.33% R-Sq(pred) = 13.81% R-Sq(adj) = 47.81%



Δηλαδή, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ οι παράγοντες και οι αλληλεπιδράσεις αυτών, που είναι στατιστικά σημαντικοί είναι οι

$c1, n2, c1 \times n1, c2 \times n1, \text{ και } c2 \times n2$

Άρα το αποκριτικό μοντέλο θα είναι το

$$y(c, n) = 1.35656 - 0.01594c1 + 0.01531n2 - 0.01344c1n1 + 0.01156c2n1 - 0.01344c2n2$$

Η μέση τιμή της απόκρισης θα είναι

$$E_n [y(c, n)] = 1.35656 - 0.01594c1 = 1.34062$$

και η διασπορά

$$V_n[y(c, n)] = \sigma_{n1}^2 (-0.01344c_1 + 0.01156c_2)^2 + \sigma_{n2}^2 (0.01531 - 0.01344c_2)^2 + \sigma^2$$

$$= \sigma_{n1}^2 (-0.00188)^2 + \sigma_{n2}^2 (0.00187)^2 + \sigma^2$$

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρήσαμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

Για τους παράγοντες c_1 και c_2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) από τη στιγμή που αλληλεπιδρούν με τους παράγοντες θορύβου n_1 και n_2 και θα πρέπει να προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξαιτίας του θορύβου (άρα επιλογή στο επίπεδο +1 και για τους δυο παράγοντες).

Ο παράγοντας c_1 είναι επίσης και παράγοντας ελέγχου του μέσου (*location factor*) και θα πρέπει να προσαρμοστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρει την απόκριση στην επιθυμητή χαμηλότερη τιμή (άρα επιλογή στο επίπεδο +1).

Τέλος ο παράγοντας c_3 που απομένει, ο οποίος δεν έχει σημαντική επίδραση ούτε στην μεταβλητότητα ούτε στην μέση απόκριση των δοκιμών, μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας ελέγχου του κόστους.

Στον ίδιο συνδυασμένο σχεδιασμό, μπορούμε να εκτιμήσουμε επιπλέον και τις αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξης μεταξύ παραγόντων ελέγχου ($C \times C$), οι οποίες ιεραρχικά είναι οι σημαντικότερες αμέσως μετά τις αλληλεπιδράσεις $C \times N$.

Response Surface Regression: y versus c1, c2, c3, n1, n2

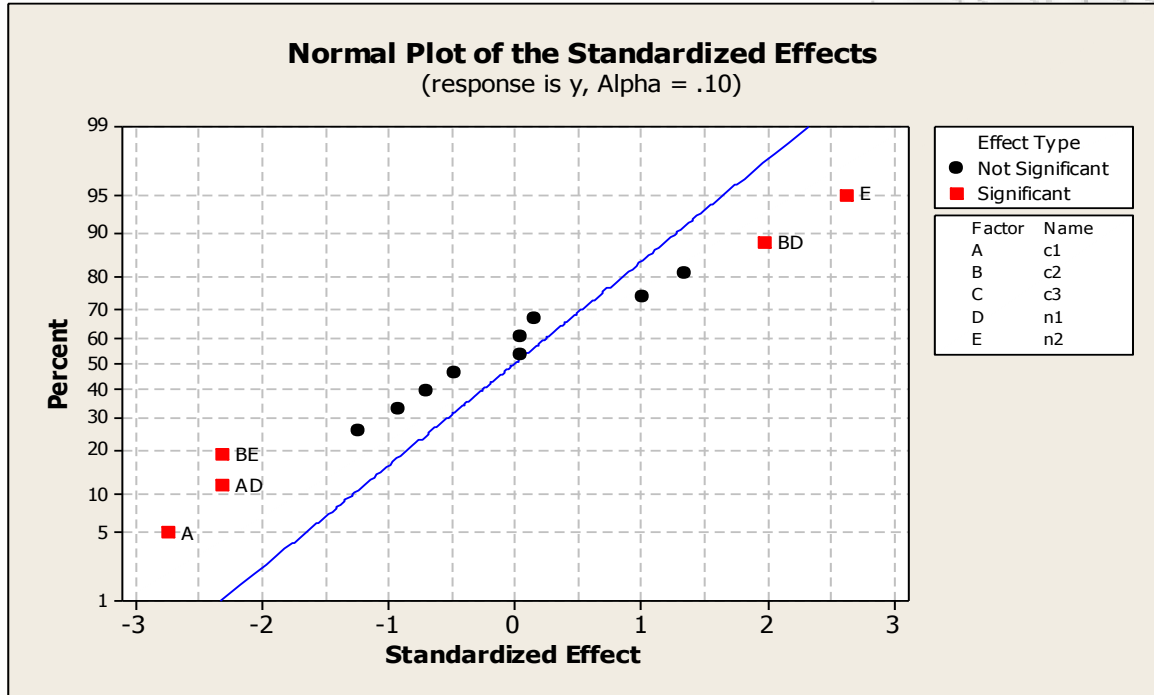
The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	1.35656	0.005816	233.235	0.000
c1	-0.01594	0.005816	-2.740	0.014
c2	-0.00719	0.005816	-1.236	0.233
c3	0.00594	0.005816	1.021	0.322
n1	0.00031	0.005816	0.054	0.958
n2	0.01531	0.005816	2.633	0.017
c1*c2	0.00031	0.005816	0.054	0.958
c1*c3	0.00094	0.005816	0.161	0.874
c1*n1	-0.01344	0.005816	-2.310	0.034
c1*n2	0.00781	0.005816	1.343	0.197
c2*c3	-0.00406	0.005816	-0.698	0.494
c2*n1	0.01156	0.005816	1.988	0.063
c2*n2	-0.01344	0.005816	-2.310	0.034
c3*n1	-0.00531	0.005816	-0.913	0.374

c3*n2 -0.00281 0.005816 -0.484 0.635

S = 0.0329019 PRESS = 0.0652069
 R-Sq = 67.33% R-Sq(pred) = 0.00% R-Sq(adj) = 40.42%



Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι εάν στο αποκριτικό μοντέλο προσθέσουμε επιπλέον τις αλληλεπιδράσεις $C \times C$, δεν επηρεάζεται η σημαντικότητα των αρχικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων. Στο μοντέλο που μελετάμε παραμένουν στατιστικά σημαντικές κάποιες κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις $C \times N$. Αυτό επιβεβαιώνει και την ιεραρχία της σημαντικότητας των επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων στους ανθεκτικούς σχεδιασμούς όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως.

Στην περίπτωση που στο αποκριτικό μοντέλο εισάγουμε και τις αλληλεπιδράσεις $C \times C \times N$ έχουμε τα εξής

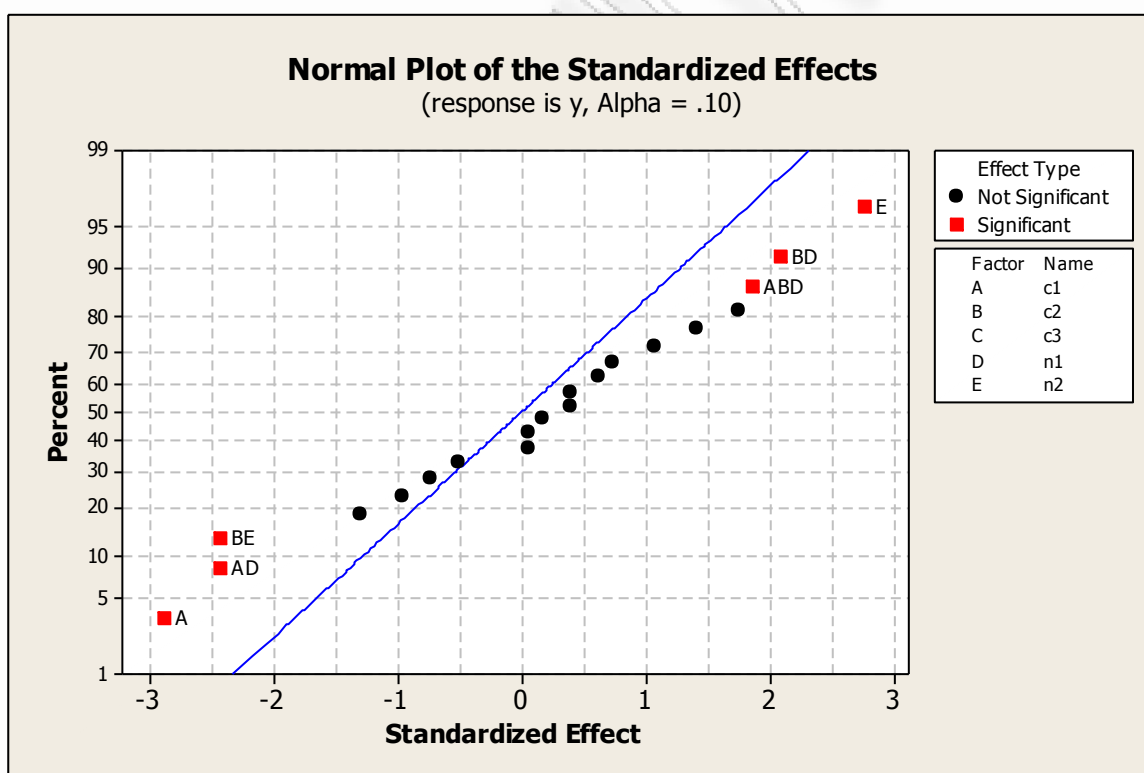
Factorial Fit: y versus c1, c2, c3, n1, n2

Estimated Effects and Coefficients for y (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		1.35656	0.005535	245.08	0.000
c1	-0.03187	-0.01594	0.005535	-2.88	0.015
c2	-0.01437	-0.00719	0.005535	-1.30	0.221

c3	0.01187	0.00594	0.005535	1.07	0.306
n1	0.00063	0.00031	0.005535	0.06	0.956
n2	0.03063	0.01531	0.005535	2.77	0.018
c1*c2	0.00062	0.00031	0.005535	0.06	0.956
c1*c3	0.00187	0.00094	0.005535	0.17	0.869
c1*n1	-0.02688	-0.01344	0.005535	-2.43	0.034
c1*n2	0.01563	0.00781	0.005535	1.41	0.186
c2*c3	-0.00812	-0.00406	0.005535	-0.73	0.478
c2*n1	0.02313	0.01156	0.005535	2.09	0.061
c2*n2	-0.02687	-0.01344	0.005535	-2.43	0.034
c3*n1	-0.01062	-0.00531	0.005535	-0.96	0.358
c3*n2	-0.00563	-0.00281	0.005535	-0.51	0.621
c1*c2*n1	0.02062	0.01031	0.005535	1.86	0.089
c1*c2*n2	0.00812	0.00406	0.005535	0.73	0.478
c1*c3*n1	0.00688	0.00344	0.005535	0.62	0.547
c1*c3*n2	0.00437	0.00219	0.005535	0.40	0.700
c2*c3*n1	0.01937	0.00969	0.005535	1.75	0.108
c2*c3*n2	0.00438	0.00219	0.005535	0.40	0.700

S = 0.0313113 PRESS = 0.0912661
R-Sq = 80.85% R-Sq(pred) = 0.00% R-Sq(adj) = 46.04%



Δηλαδή, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ οι παράγοντες και οι αλληλεπιδράσεις, που είναι στατιστικά σημαντικοί είναι οι

$c1, n2, c1 \times n1, c2 \times n1, c2 \times n2$ και $c1 \times c2 \times n1$

Άρα το αποκριτικό μοντέλο θα είναι το

$$y(c, n) = 1.35656 - 0.01594c_1 + 0.01531n_2 - 0.01344c_1n_1 + 0.01156c_2n_1 - 0.01344c_2n_2 + 0.01031c_1c_2n_1$$

Η μέση τιμή της απόκρισης θα είναι

$$E_n [y(c, n)] = 1.35656 - 0.01594c_1 = 1.34062$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned} V_n[y(c, n)] &= \sigma_{n_1}^2 (-0.01344c_1 + 0.01156c_2 + 0.01031c_1c_2)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.01531 - 0.01344c_2)^2 + \sigma^2 \\ &= \sigma_{n_1}^2 (0.00843)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.00187)^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρήσαμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

Για τους παράγοντες c_1 και c_2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) από τη στιγμή που αλληλεπιδρούν με τους παράγοντες θορύβου n_1 και n_2 και θα πρέπει να προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξαιτίας του θορύβου (άρα επιλογή στο επίπεδο +1 και για τους δυο παράγοντες).

Ο παράγοντας c_1 είναι επίσης και παράγοντας ελέγχου του μέσου (*location factor*) και θα πρέπει να προσαρμοστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρει την απόκριση στην επιθυμητή χαμηλότερη τιμή (άρα επιλογή στο επίπεδο +1).

Τέλος ο παράγοντας c_3 που απομένει, ο οποίος δεν έχει σημαντική επίδραση ούτε στην μεταβλητότητα ούτε στην μέση απόκριση των δοκιμών, μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας ελέγχου του κόστους.

4.2.3 Χρήση οικονομικών ορθογώνιων σχηματισμών και εφαρμογή της μεθόδου των αποκριτικών επιφανειών

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι για την εκτέλεση των 32 δοκιμών του πλήρη 2^5 παραγοντικού σχεδιασμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ευελιξία που προσφέρουν οι συνδυασμένοι σχηματισμοί και κατ' επέκταση οι ορθογώνιοι σχηματισμοί που κατά κόρον χρησιμοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις για να σχεδιάσουμε το πείραμα με λιγότερες δοκιμές.

Παρακάτω, χρησιμοποιούμε σαν συνδυασμένους σχηματισμούς, ορθογώνιους σχεδιασμούς με $n = 24, 20, 16$ και 12 δοκιμές.

4.2.3.1 Πειραματικός Σχεδιασμός 24 δοκιμών

Εξετάζουμε την περίπτωση των 24 δοκιμών. Οι δυνατοί μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί για πέντε παράγοντες, όπως φαίνονται και στον Πίνακα 2.9, είναι 63.

Σύμφωνα με τη συζήτηση που προηγήθηκε στην περιγραφή της εκτιμητικής ισχύος, ο σχεδιασμός αυτός που εκτιμά με τη μεγαλύτερη ισχύ ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τις 5 κύριες επιδράσεις και της 10 αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ο

Run	A	B	C	D	E
1	1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	-1	-1	-1
3	1	1	1	-1	-1
4	1	1	1	1	-1
5	1	1	1	1	1
6	-1	1	1	1	1
7	1	-1	1	1	1
8	-1	1	-1	1	1
9	1	-1	1	-1	1
10	1	1	-1	1	-1
11	-1	1	1	-1	1
12	-1	-1	1	1	-1
13	1	-1	-1	1	1
14	1	1	-1	-1	1

15	-1	1	1	-1	-1
16	-1	-1	1	1	-1
17	1	-1	-1	1	1
18	-1	1	-1	-1	1
19	1	-1	1	-1	-1
20	-1	1	-1	1	-1
21	-1	-1	1	-1	1
22	-1	-1	-1	1	-1
23	-1	-1	-1	-1	1
24	-1	-1	-1	-1	-1

Θέλουμε να εξετάσουμε, για ποια επιλογή στηλών για τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου έχουμε μεγαλύτερη εκτιμητική ισχύ.

Έχουμε συνολικά 5 παράγοντες (3 ελέγχου και 2 θορύβου), άρα θα υπάρχουν $\binom{5}{2}=10$

δυνατές επιλογές στηλών του σχεδιασμού στις οποίες αναθέτουμε τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	c1	c1	c1	c1	c1	n1	n1	n1	c1	n1
B	c2	n1	n1	c2	c2	c1	c1	n2	n1	c1
C	c3	c2	n2	n1	n1	c2	n2	c1	c2	c2
D	n1	c3	c2	c3	n2	c3	c2	c2	n2	n2
E	n2	n2	c3	n2	c3	n2	c3	c3	c3	c3
AB		c1n1	c1n1			c1n1	c1n1	c2n1	c1n1	c1n1
AC			c1n2	c1n1	c1n1	c2n1		c1n1		c2n1
AD	c1n1				c1n2	c3n1	c2n1		c1n2	
AE	c1n2	c1n2		c1n2			c3n1	c3n1		c3n1
BC		c2n1		c2n1	c2n1		c1n2	c1n2	c2n1	
BD	c2n1	c3n1	c2n1		c2n2			c2n2		c1n2
BE	c2n2		c3n1	c2n2		c1n2		c3n2	c3n1	
CD	c3n1		c2n2	c3n1			c2n2		c2n2	c2n2
CE	c3n2	c2n2	c3n2		c3n1	c2n2	c3n2			
DE		c3n2		c3n2	c3n2	c3n2			c3n2	c3n2
Def	0.913	0.913	0.937	0.937	0.937	0.933	0.937	0.913	0.921	0.913
f	2	2	4	4	4	6	4	2	1	2

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι τον καλύτερο δείκτη εκτίμησης D_{eff} τον έχουν οι επιλογές στηλών 3, 4, 5 και 7. Εφόσον και στις τρεις περιπτώσεις ο δείκτης παίρνει την ίδια τιμή (0.9374), μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα έναν οποιονδήποτε από αυτούς τους τρεις. Έστω, ότι επιλέγουμε την 3^η ανάθεση, δηλαδή οι παράγοντες ελέγχου ανατίθενται στις στήλες A, D και E, ενώ οι παράγοντες θορύβου στις υπολειπόμενες στήλες.

Συγκεκριμένα θα έχουμε το σχεδιασμό

Run	c1	n1	n2	c2	c3	y	c1n1	c1n2	c2n1	c2n2	c3n1	c3n2
1	1	-1	-1	-1	-1	1.35	-1	-1	1	1	1	1
2	1	1	-1	-1	-1	1.26	1	-1	-1	1	-1	1
3	1	1	1	-1	-1	1.36	1	1	-1	-1	-1	-1
4	1	1	1	1	-1	1.32	1	1	1	1	-1	-1
5	1	1	1	1	1	1.36	1	1	1	1	1	1
6	-1	1	1	1	1	1.37	-1	-1	1	1	1	1
7	1	-1	1	1	1	1.33	-1	1	-1	1	-1	1
8	-1	1	-1	1	1	1.4	-1	1	1	-1	1	-1
9	1	-1	1	-1	1	1.43	-1	1	1	-1	-1	1
10	1	1	-1	1	-1	1.35	1	-1	1	-1	-1	1
11	-1	1	1	-1	1	1.39	-1	-1	-1	-1	1	1
12	-1	-1	1	1	-1	1.32	1	-1	-1	1	1	-1
13	1	-1	-1	1	1	1.31	-1	-1	-1	-1	-1	-1
14	1	1	-1	-1	1	1.27	1	-1	-1	1	1	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1.42	-1	-1	-1	-1	-1	-1
16	-1	-1	1	1	-1	1.32	1	-1	-1	1	1	-1
17	1	-1	-1	1	1	1.31	-1	-1	-1	-1	-1	-1
18	-1	1	-1	-1	1	1.37	-1	1	-1	1	1	-1
19	1	-1	1	-1	-1	1.37	-1	1	1	-1	1	-1
20	-1	1	-1	1	-1	1.37	-1	1	1	-1	-1	1
21	-1	-1	1	-1	1	1.41	1	-1	1	-1	-1	1
22	-1	-1	-1	1	-1	1.38	1	1	-1	-1	1	1
23	-1	-1	-1	-1	1	1.38	1	1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	1.28	1	1	1	1	1	1

Για το αποκριτικό μοντέλο έχουμε την ακόλουθη ανάλυση

Response Surface Regression: y versus c1, n1, n2, c2, c3

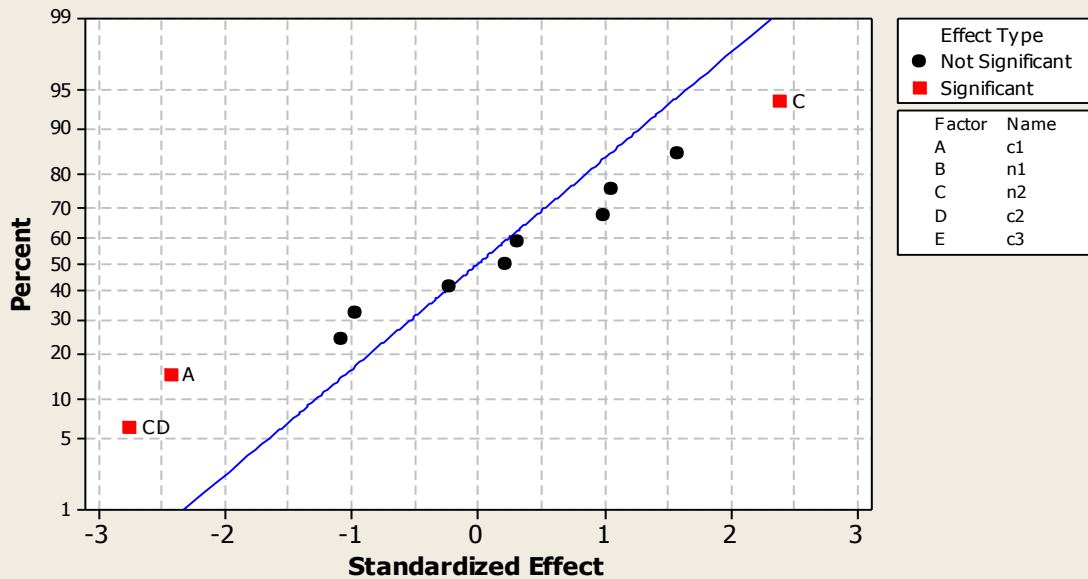
The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	1.35125	0.006463	209.077	0.000
c1	-0.01681	0.006918	-2.429	0.032
n1	0.00208	0.006463	0.322	0.753
n2	0.01542	0.006463	2.385	0.034
c2	-0.00625	0.006463	-0.967	0.353
c3	0.00694	0.006918	1.004	0.335
c1*n1	-0.00792	0.007404	-1.069	0.306
c1*n2	0.00738	0.006909	1.068	0.306
n1*c2	0.01161	0.007328	1.584	0.139
n1*c3	-0.00167	0.007404	-0.225	0.826
n2*c2	-0.02056	0.007463	-2.754	0.017
n2*c3	0.00155	0.006909	0.224	0.827

S = 0.0316617 PRESS = 0.0544280
R-Sq = 75.07% R-Sq(pred) = 0.00% R-Sq(adj) = 52.23%

Normal Plot of the Standardized Effects
(response is y, Alpha = .10)



Άρα, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ οι παράγοντες και οι αλληλεπιδράσεις, που είναι στατιστικά σημαντικοί είναι οι

c1, n2 και c2×n2

Άρα το αποκριτικό μοντέλο θα είναι το

$$y(c, n) = 1.35125 - 0.01681c_1 + 0.01542n_2 - 0.02056c_2n_2$$

Η μέση τιμή της απόκρισης θα είναι

$$E_n [y(c, n)] = 1.35125 - 0.01681c_1 = 1.33444$$

και η διασπορά

$$V_n [y(c, n)] = \sigma_{n_2}^2 (0.01542 - 0.02056c_2)^2 + \sigma^2 = \sigma_{n_2}^2 (-0.00514)^2 + \sigma^2$$

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρήσαμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

Για τον παράγοντα c_2 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παράγοντας ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factor*) από τη στιγμή που αλληλεπιδρά με τον παράγοντα θορύβου n_2 και θα πρέπει να προσαρμοστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξαιτίας του θορύβου (επιλογή στο επίπεδο +1).

Ο παράγοντας c_1 είναι παράγοντας ελέγχου του μέσου (*location factor*) και θα πρέπει να προσαρμοστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρει την απόκριση στην επιθυμητή χαμηλή τιμή (άρα επιλογή στο επίπεδο +1).

Τέλος ο παράγοντας c_3 που απομένει, ο οποίος δεν έχει σημαντική επίδραση ούτε στην μεταβλητότητα ούτε στην μέση απόκριση των δοκιμών, μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας ελέγχου του κόστους.

4.2.3.2 Πειραματικός Σχεδιασμός 20 δοκιμών

Εξετάζουμε την περίπτωση των 20 δοκιμών. Οι δυνατοί μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί, όπως φαίνονται και στον Πίνακα 2.9, που έχουμε είναι 11. Ο σχεδιασμός

αυτός που εκτιμά με τη μεγαλύτερη ισχύ ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τις 5 κύριες επιδράσεις και της 10 αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ο

Run	A	B	C	D	E
1	1	-1	1	1	-1
2	1	1	-1	1	1
3	-1	1	1	-1	1
4	-1	-1	1	1	-1
5	1	-1	-1	1	1
6	1	1	-1	-1	1
7	1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	-1
9	-1	1	1	1	1
10	1	-1	1	1	1
11	-1	1	-1	1	1
12	1	-1	1	-1	1
13	-1	1	-1	1	-1
14	-1	-1	1	-1	1
15	-1	-1	-1	1	-1
16	-1	-1	-1	-1	1
17	1	-1	-1	-1	-1
18	1	1	-1	-1	-1
19	-1	1	1	-1	-1
20	-1	-1	-1	-1	-1

Θέλουμε ξανά να εξετάσουμε, για ποια επιλογή στηλών για τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου έχουμε μεγαλύτερη εκτιμητική ισχύ. Έχουμε συνολικά 5 παράγοντες (3 ελέγχου και 2 θορύβου) άρα, όπως και προηγουμένως, θα υπάρχουν $\binom{5}{2}=10$ δυνατές επιλογές στηλών του σχεδιασμού στις οποίες αναθέτουμε τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	c1	c1	c1	c1	c1	n1	n1	n1	c1	n1
B	c2	n1	n1	c2	c2	c1	c1	n2	n1	c1
C	c3	c2	n2	n1	n1	c2	n2	c1	c2	c2
D	n1	c3	c2	c3	n2	c3	c2	c2	n2	n2
E	n2	n2	c3	n2	c3	n2	c3	c3	c3	c3

AB		c1n1	c1n1			c1n1	c1n1	c2n1	c1n1	c1n1	
AC			c1n2	c1n1	c1n1	c2n1		c1n1			c2n1
AD	c1n1				c1n2	c3n1	c2n1		c1n2		
AE	c1n2	c1n2		c1n2			c3n1	c3n1			c3n1
BC		c2n1		c2n1	c2n1		c1n2	c1n2	c2n1		
BD	c2n1	c3n1	c2n1		c2n2			c2n2			c1n2
BE	c2n2		c3n1	c2n2		c1n2		c3n2	c3n1		
CD	c3n1		c2n2	c3n1			c2n2		c2n2	c2n2	
CE	c3n2	c2n2	c3n2		c3n1	c2n2	c3n2				
DE		c3n2		c3n2	c3n2	c3n2			c3n2	c3n2	
Deff	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907	0.907

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, ο δείκτης *D-efficiency* ο οποίος μετράει την εκτιμητική ικανότητα των μοντέλων, είναι ίδιος, άρα μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα οποιαδήποτε περίπτωση. Έστω, ότι επιλέγουμε την 1^η ανάθεση, δηλαδή οι παράγοντες ελέγχου ανατίθενται στις στήλες A, B και C, ενώ οι παράγοντες θορύβου στις υπολειπόμενες στήλες.

Συγκεκριμένα θα έχουμε το σχεδιασμό

Run	c1	c2	c3	n1	n2	y	c1n1	c1n2	c2n1	c2n2	c3n1	c3n2
1	1	-1	1	1	-1	1.27	1	-1	-1	1	1	-1
2	1	1	-1	1	1	1.32	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	1	-1	1	1.35	1	-1	-1	1	-1	1
4	-1	-1	1	1	-1	1.41	-1	1	-1	1	1	-1
5	1	-1	-1	1	1	1.36	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	1	-1	-1	1	1.38	-1	1	-1	1	1	-1
7	1	1	1	-1	-1	1.31	-1	-1	-1	-1	-1	-1
8	1	1	1	1	-1	1.34	1	-1	1	-1	1	-1
9	-1	1	1	1	1	1.37	-1	-1	1	1	1	1
10	1	-1	1	1	1	1.36	1	1	-1	-1	1	1
11	-1	1	-1	1	1	1.38	-1	-1	1	1	-1	-1
12	1	-1	1	-1	1	1.43	-1	1	1	-1	-1	1
13	-1	1	-1	1	-1	1.37	-1	1	1	-1	-1	1
14	-1	-1	1	-1	1	1.41	1	-1	1	-1	-1	1
15	-1	-1	-1	1	-1	1.39	-1	1	-1	1	-1	1
16	-1	-1	-1	-1	1	1.4	1	-1	1	-1	1	-1

17	1	-1	-1	-1	-1	1.35	-1	-1	1	1	1	1
18	1	1	-1	-1	-1	1.28	-1	-1	-1	-1	1	1
19	-1	1	1	-1	-1	1.35	1	1	-1	-1	-1	-1
20	-1	-1	-1	-1	-1	1.28	1	1	1	1	1	1

Για το αποκριτικό μοντέλο έχουμε την ακόλουθη ανάλυση

Response Surface Regression: y versus c1, c2, c3, n1, n2					
The analysis was done using coded units.					
Estimated Regression Coefficients for y					
Term	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	1.35550	0.007404	183.070	0.000	
c1	-0.01798	0.008238	-2.182	0.061	
c2	-0.01625	0.008278	-1.963	0.085	
c3	0.01066	0.008238	1.294	0.232	
n1	-0.00003	0.007986	-0.003	0.997	
n2	0.02384	0.007986	2.985	0.017	
c1*n1	-0.02599	0.008371	-3.105	0.015	
c1*n2	0.00938	0.008516	1.102	0.303	
c2*n1	0.00714	0.008434	0.847	0.422	
c2*n2	-0.01172	0.008434	-1.390	0.202	
c3*n1	-0.00217	0.008516	-0.254	0.806	
c3*n2	-0.00998	0.008371	-1.192	0.267	
S = 0.0331129 PRESS = 0.0536715					
R-Sq = 77.33% R-Sq(pred) = 0.00% R-Sq(adj) = 46.16%					

Άρα, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ οι παράγοντες και οι αλληλεπιδράσεις αυτών, που είναι στατιστικά σημαντικοί είναι οι

c1, c2, n2 και c1 × n1

Άρα το αποκριτικό μοντέλο θα είναι το

$$y(c, n) = 1.35550 - 0.0179c_1 - 0.01625c_2 + 0.02384n_2 - 0.02599c_1n_1$$

Η μέση τιμή της απόκρισης θα είναι

$$E_n [y(c, n)] = 1.35550 - 0.0179c_1 - 0.01625c_2 = 1.32127$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned} V_n [y(c, n)] &= \sigma_{n_1}^2 (-0.02599c_1)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.02384)^2 + \sigma^2 \\ &= \sigma_{n_1}^2 (-0.02599)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.02384)^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρήσαμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

Για τον παράγοντα c_1 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παράγοντας ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factor*) από τη στιγμή που αλληλεπιδρά με τον παράγοντα θορύβου n_1 και θα πρέπει να προσαρμοστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξαιτίας του θορύβου (επιλογή στο επίπεδο +1).

Οι παράγοντες c_1 και c_2 είναι παράγοντες ελέγχου του μέσου (*location factors*) και θα πρέπει να προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρουν την απόκριση στην επιθυμητή χαμηλή τιμή (άρα επιλογή στο επίπεδο +1 και για τους δυο παράγοντες).

Τέλος ο παράγοντας c_3 που απομένει, ο οποίος δεν έχει σημαντική επίδραση ούτε στην μεταβλητότητα ούτε στην μέση απόκριση των δοκιμών, μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας ελέγχου του κόστους.

4.2.3.3 Πειραματικός Σχεδιασμός 16 δοκιμών

Ένα από τα πλεονεκτήματα των συνδυασμένων σχηματισμών, όπως έχει αναφερθεί, είναι η μείωση του πειραματικού κόστους, που επιτυγχάνεται με την ελάττωση του πλήθους των δοκιμών. Ο αρχικός συνδυασμένος σχηματισμός των 32 δοκιμών μπορεί να μειωθεί στο μισό (16 δοκιμές), άρα και να μειωθεί το κόστος στο μισό, χωρίς να χαθεί η ικανότητα εκτίμησης οποιασδήποτε αλληλεπίδρασης μεταξύ δυο παραγόντων.

Η επιλογή των 16 δοκιμών από τις αρχικές 32, γίνεται με βάση τα κριτήρια μέγιστης διακριτικής ικανότητας και ελάχιστης απόκλισης. Ο σχεδιασμός που προκύπτει, είναι ένας 2_{V}^{5-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός.

Έχουμε

Run	c1	c2	c3	n1	n2	y	c1n1	c1n2	c2n1	c2n2	c3n1	c3n2
1	-1	-1	-1	-1	1	1.4	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	-1	-1	-1	-1	1.35	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	-1	-1	-1	1.38	1	1	-1	-1	1	1
4	1	1	-1	-1	1	1.38	-1	1	-1	1	1	-1
5	-1	-1	1	-1	-1	1.38	1	1	1	1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	1	1.43	-1	1	1	-1	-1	1
7	-1	1	1	-1	1	1.35	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	-1	-1	1.31	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	-1	-1	1	-1	1.4	-1	1	-1	1	-1	1
10	1	-1	-1	1	1	1.36	1	1	-1	-1	-1	-1
11	-1	1	-1	1	1	1.38	-1	-1	1	1	-1	-1
12	1	1	-1	1	-1	1.35	1	-1	1	-1	-1	1
13	-1	-1	1	1	1	1.39	-1	-1	-1	-1	1	1
14	1	-1	1	1	-1	1.27	1	-1	-1	1	1	-1
15	-1	1	1	1	-1	1.4	-1	1	1	-1	1	-1
16	1	1	1	1	1	1.36	1	1	1	1	1	1

Από την ανάλυση του αποκριτικού μοντέλου έχουμε τα παρακάτω

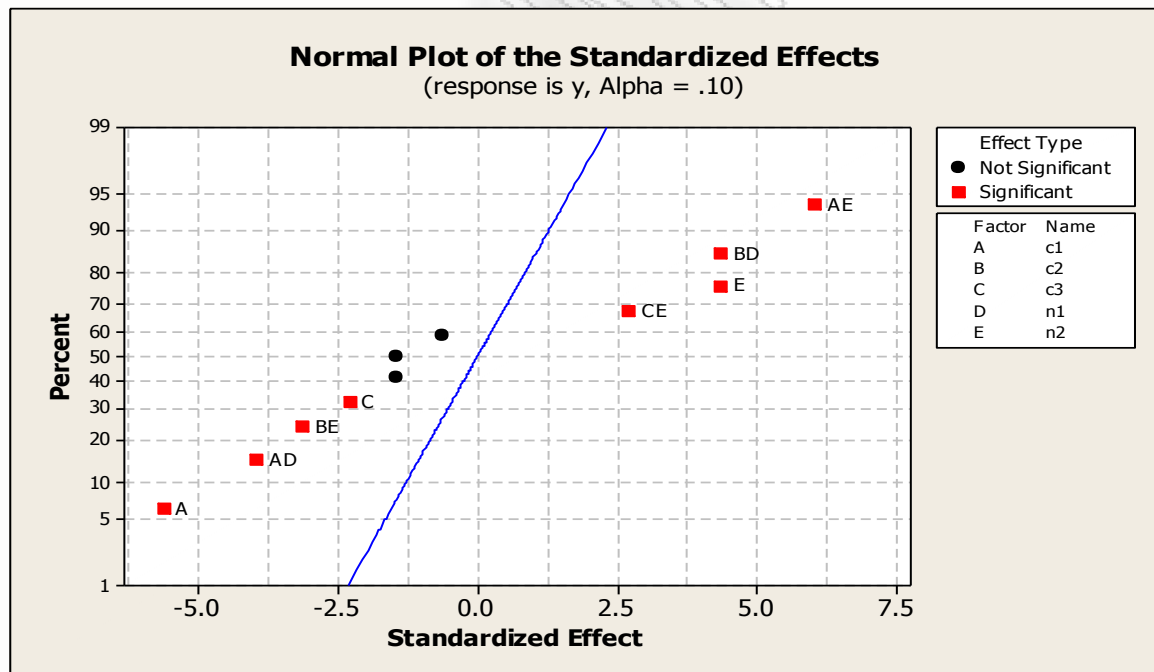
Response Surface Regression: y versus c1, c2, c3, n1, n2

The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	1.36813	0.002997	456.438	0.000
c1	-0.01688	0.002997	-5.630	0.005
c2	-0.00437	0.002997	-1.460	0.218
c3	-0.00688	0.002997	-2.294	0.084
n1	-0.00437	0.002997	-1.460	0.218
n2	0.01312	0.002997	4.379	0.012
c1*n1	-0.01188	0.002997	-3.962	0.017
c1*n2	0.01812	0.002997	6.047	0.004
c2*n1	0.01313	0.002997	4.379	0.012
c2*n2	-0.00937	0.002997	-3.128	0.035
c3*n1	-0.00187	0.002997	-0.626	0.566
c3*n2	0.00812	0.002997	2.711	0.053

S = 0.0119896 PRESS = 0.0092
R-Sq = 97.39% R-Sq(pred) = 58.26% R-Sq(adj) = 90.22%



Δηλαδή, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ οι παράγοντες και οι αλληλεπιδράσεις αυτών, που είναι στατιστικά σημαντικοί είναι οι

c1, c3, n2, c1×n1, c1×n2, c2×n1, c2×n2 και c3×n2

Άρα το αποκριτικό μοντέλο θα είναι το

$$y(\mathbf{c}, \mathbf{n}) = 1.36813 - 0.01687c_1 - 0.00687c_3 + 0.01312n_2 - 0.01187c_1n_1 + 0.01812c_1n_2 + 0.01313c_2n_1 - 0.00937c_2n_2 + 0.00813c_3n_2$$

Η μέση τιμή της απόκρισης θα είναι

$$E_n [y(c, n)] = 1.36813 - 0.01687c_1 - 0.00687c_3 = 1.34439$$

και η διασπορά

$$V_n [y(c, n)] = \sigma_{n_1}^2 (-0.01187c_1 + 0.01313c_2)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.01312 + 0.01812c_1 - 0.00937c_2 + 0.00813c_3)^2 + \sigma^2 = \sigma_{n_1}^2 (0.00126)^2 + \sigma_{n_2}^2 (0.03)^2 + \sigma^2$$

Για τους παράγοντες θορύβου, θεωρήσαμε ότι έχουν μηδενική μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και εάν υπάρχουν αρκετοί παράγοντες θορύβου, έχουν μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

Για τους παράγοντες c_1 , c_2 και c_3 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι παράγοντες ελέγχου μεταβλητότητας (*dispersion factors*) από τη στιγμή που αλληλεπιδρούν με τους παράγοντες θορύβου n_1 και n_2 και θα πρέπει να προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξαιτίας του θορύβου (επιλογή στο επίπεδο +1 και για τους τρεις παράγοντες).

Οι παράγοντες c_1 και c_3 είναι και παράγοντες ελέγχου του μέσου (*location factor*) και θα πρέπει να προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να φέρουν την απόκριση στην επιθυμητή χαμηλή τιμή (άρα επιλογή στο επίπεδο +1 και για τους δυο παράγοντες).

Το αποκριτικό μοντέλο, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δυο ελεγχόμενων παραγόντων ($C \times C$).

Πράγματι

Response Surface Regression: y versus c1, c2, c3, n1, n2

The analysis was done using coded units.

Estimated Regression Coefficients for y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	1.36813	0.004375	312.714	0.002
c1	-0.01687	0.004375	-3.857	0.161
c2	-0.00437	0.004375	-1.000	0.500
c3	-0.00687	0.004375	-1.571	0.361
n1	-0.00437	0.004375	-1.000	0.500
n2	0.01312	0.004375	3.000	0.205
c1*c2	0.00312	0.004375	0.714	0.605
c1*c3	-0.00188	0.004375	-0.429	0.742
c1*n1	-0.01187	0.004375	-2.714	0.225
c1*n2	0.01812	0.004375	4.143	0.151
c2*c3	-0.00187	0.004375	-0.429	0.742
c2*n1	0.01313	0.004375	3.000	0.205
c2*n2	-0.00937	0.004375	-2.143	0.278
c3*n1	-0.00188	0.004375	-0.429	0.742
c3*n2	0.00813	0.004375	1.857	0.314

S = 0.0175 PRESS = 0.0784
R-Sq = 98.61% R-Sq(pred) = 0.00% R-Sq(adj) = 79.16%

Από τους παραπάνω πίνακες, παρατηρούμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$, καμία από τις κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις $C \times C$ και $C \times N$ δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

4.2.3.4 Πειραματικός Σχεδιασμός 12 δοκιμών

Εξετάζουμε την περίπτωση των 12 δοκιμών. Οι δυνατοί μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχεδιασμοί, όπως φαίνονται και στον Πίνακα 2.9 (Κεφάλαιο 2), που έχουμε είναι 2. Ο σχεδιασμός αυτός που εκτιμά με τη μεγαλύτερη ισχύ ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τις 5 κύριες επιδράσεις και της 10 αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ο

Run	A	B	C	D	E
1	1	-1	1	-1	-1
2	1	1	-1	1	-1
3	-1	1	1	-1	1
4	1	-1	1	1	-1
5	1	1	-1	1	1
6	1	1	1	-1	1
7	-1	1	1	1	-1
8	-1	-1	1	1	1
9	-1	-1	-1	1	1
10	1	-1	-1	-1	1
11	-1	1	-1	-1	-1

12	-1	-1	-1	-1	-1
----	----	----	----	----	----

Θέλουμε ξανά να εξετάσουμε, για ποια επιλογή στηλών για τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου έχουμε μεγαλύτερη εκτιμητική ισχύ. Και εδώ, θα υπάρχουν $\binom{5}{2}=10$ δυνατές επιλογές στηλών του σχεδιασμού στις οποίες αναθέτουμε τους παράγοντες ελέγχου και θορύβου.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	c1	c1	c1	c1	c1	n1	n1	n1	c1	n1
B	c2	n1	n1	c2	c2	c1	c1	n2	n1	c1
C	c3	c2	n2	n1	n1	c2	n2	c1	c2	c2
D	n1	c3	c2	c3	n2	c3	c2	c2	n2	n2
E	n2	n2	c3	n2	c3	n2	c3	c3	c3	c3
AB		c1n1	c1n1			c1n1	c1n1	c2n1	c1n1	c1n1
AC			c1n2	c1n1	c1n1	c2n1		c1n1		c2n1
AD	c1n1				c1n2	c3n1	c2n1		c1n2	
AE	c1n2	c1n2		c1n2			c3n1	c3n1		c3n1
BC		c2n1		c2n1	c2n1		c1n2	c1n2	c2n1	
BD	c2n1	c3n1	c2n1		c2n2			c2n2		c1n2
BE	c2n2		c3n1	c2n2		c1n2		c3n2	c3n1	
CD	c3n1		c2n2	c3n1			c2n2		c2n2	c2n2
CE	c3n2	c2n2	c3n2		c3n1	c2n2	c3n2			
DE		c3n2		c3n2	c3n2	c3n2			c3n2	c3n2
Deff	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ένα μοντέλο, θα λέμε ότι είναι εκτιμήσιμο εάν η τιμή του D_{eff} είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Στην περίπτωση μας, το D_{eff} είναι μηδέν, με συνέπεια κανένας από όλους τους δυνατούς σχεδιασμούς να μπορεί να εκτιμηθεί, άρα θα ήταν ανώφελο να συνεχίσουμε περαιτέρω το πείραμα.

КОНСТИТУЦИОННО ПРАВО

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δαμιανού, Χ., Κούτρας, Μ. (2003). *Εισαγωγή στη Στατιστική*, τόμοι Ι, ΙΙ. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Λογοθέτης, Ν. (2005). *Μάνατζμεντ Ολικής Ποιότητας, Από τον Deming στον Taguchi και το SPC*, 2^η Έκδοση, Αθήνα.

Μαυροειδής, Π. (2005). *Χάλυβες Οπλισμού Σκυροδέματος*, Εκδόσεις Παπασωτηριου.

Πανάρετος, Ι., Ξεκαλάκη, Ε. (2000), *Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη*, τόμος Ι, Αθήνα.

Ταγαράς Γ.Ν. (2001). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Εκδόσεις Ζήτη.

Bruce E. Ankenman and Angela M. Dean. *Quality Improvement and Robustness via Design of Experiments*. Handbook of Statist.

Box, G.E.P., & Hunter, J.S. 1961, “The 2^{k-p} fractional factorial designs, Part I”, *Technometrics*, Vol. 3, No. 3 (Aug., 1961), pp. 311-351.

Box G.E.P., Wilson K.B. (1951), “On the experimental attainment of optimum conditions.” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 13, 1–45.

Byrne, D.M. and S. Taguchi (1987). *The Taguchi Approach to Parameter Design, Quality Progress*, Vol. 20, No. 12 (December), 19-26.

Crosby, P.B. (1979). *Quality is Free*, McGraw-Hill.

Dean, A.M. and D.T. Voss (1999). *Design and Analysis of Experiments*. Springer-Verlag. New York.

Evangelas, H., Koukouvinos, C. and Koutras M. (2011), *Advances in Robust Parameter Design: From Taguchi's inner – outer arrays to combined arrays*, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 1-30.

Fries, A., & Hunter, W.G. 1980, “Minimum aberration 2^{k-p} designs“, *Technometrics*, vol. 22, no. 4, pp. 601-608.

Feigenbaum, A.V. (1991). *Total Quality Control*, McGraw-Hill.

Grant, E.L. and R.S. Leavenworth (1980). *Statistical Quality Control*, McGraw-Hill.

Ishikawa, K. (1982). *Guide to Quality Control*, Asian Productivity Organization.

Juran, J.M. (1974). *Quality Control Handbook*, McGraw-Hill.

Montgomery, D.C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edition., John Wiley & Sons.

Montgomery, D.C. (1997). *Designs and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons.

Myers, R.H. and D.C. Montgomery (1995). *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons.

Phadke, M.S. (1989). *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice-Hall.

Plackett, R.L., & Burman, J.P. (1946), "The design of multifactorial experiments", *Biometrika*, vol. 33, pp. 305-325.

Ryan, T.P (2000). *Statistical Methods For Quality Improvement*, 2nd Edition, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Shoemaker, C., Tsui, K.L. and Wu, C.F.J., (1991) Economical experimentation methods for robust designs, *Technometrics*, **33**, 415-427.

Taguchi, G. (1987). *System of Experimental Design*, Vol. I and II, UNIPUB, New York.

Taguchi, G. and Y. Wu (1985). *Introduction to Off-Line Quality Control*. Romulus, MI, Central Japan Quality Control Assosiation, ASI Inc.

Welch, W.J., Yu, T.K., Kang, S.M., and Sacks, J. (1990), "Computer experiments for quality control by parameter design," *Journal of Quality Technology*, 22, 15-22.

Wu, C.F.J., and Hamada M. (2000). *Experiments: Planning, Analysis and Parameter Design Optimization*. John Wiley and Sons, New York.