ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΜΣ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μέθοδοι Βελτιστοποίησης Αποθεματικού στην Από Κοινού Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων Συνταξιοδοτικών Ταμείων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γ. Θ. Σόρογκας

Τρίτη, 6 Δεκεμβρίου 2011

Περίληψη

Στη διατριβή αυτή αναλύουμε τρία μοντέλα βέλτιστης πολιτικής επενδύσεων και εισφορών που καταβάλλονται από τους ασφαλισμένους για Συνταξιοδοτικά Ταμεία τύπου καθορισμένης παροχής. Τα παραπάνω μοντέλα γράφονται ως προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντικειμενικών συναρτήσεων και εκφράζονται με τη χρήση Hamilton Jacobi Bellman εξισώσεων. Τα προβλήματα αυτά έχουν αναλυτική λύση η οποία και παρατίθεται. Ο διαχειριστής έχει να επιλέξει μεταξύ τριών σεναρίων για να πετύχει τη βέλτιστη στρατηγική, ενώ οι παροχές καθορ΄ίζονται εκ των προτέρων από το διαχειριστή του ταμείου, με τη χρήση συγκεκριμένων μέτρων. Οι επενδυτικές αποφάσεις που καλείται να πάρει ο διαχειριστής του ταμείου μπορούν να ληφθούν με διάφορους τρόπους και αναλύονται στα παρακάτω κεφάλαια.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου Σ. Βρόντο για την σημαντική συμβολή και βοήθεια στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου διατριβής. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς τους γονείς μου για την στήριξη και την ηθική συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Διαχείριση Περιουσιακων Στοιχείων και Υποχρεώσεων

Η Διαχείριση Περιουσιακων Στοιχείων και Υποχρεώσεων είναι ένα αντικείμενο το οποίο έχει αναπτυχθεί και χρησιμοποιείται από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, ειδικότερα την τελευταία δεκαετία. Είναι ευρέως γνωστό ως Asset Liability Management και έχει επεκταθεί σε πολλαπλούς τομείς.

Τα τελευταία χρόνια, οι σημαντικές θεσμικές και διαρθρωτικές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν τόσο στον τραπεζικό χώρο αλλά και στον ασφαλιστικό κλάδο, η αλματώδης πρόοδος της τεχνολογίας και η απελευθέρωση των αγορών χρήματος και κεφαλαίου, αναγκάζουν τα ασφαλιστικά ιδρύματα και τα ταμεία να αποκτήσουν μεγαλύτερο βαθμό τεχνογνωσίας, να εστιάσουν την προσοχή τους σε πιο εξειδικευμένες αγορές και γενικά να αποκτήσουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα στις απελευθερωμένες και ενοποιημένες σε παγκόσμιο επίπεδο χρηματοοικονομικές αγορές.
Πριν αναφερθούμε εκτενέστερα στην Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων θα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή τόσο στην διαμόρφωση του, αλλά και στον τρόπο που αναδύθηκε μέσα απο μια σειρά γεγονότων και εξελίξεων.

Σύμφωνα με τη μελέτη του Blake,(2006), Pension Finance παραδοσιακά τόσο τράπεζες, μεγάλοι επενδυτικοί όμιλοι αλλά και ασφαλιστικές εταιρείες χρησιμοποιούσαν την λογιστική αποτίμηση για τον έλεγχο των απαιτήσεων και υποχρεώσεών τους. Τα πράγματα άρχισαν να αλλάζουν κατά τη δεκαετία του 1970, κατά την οποία τα επιτόκια της αγοράς εμφάνισαν μεγάλη πτητικότητα ή μεταβλητότητα. Η πτητικότητα αυτή συνεχίστηκε και στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Οι διευθυντές πολλών επιχειρήσεων, οι οποίοι είχαν συνηθίσει να σκέφτονται με κανόνες της παραδοσιακής λογιστικής , ήταν αδύνατο να αναγνωρίσουν το διαφαινόμενο κίνδυνο. Ορισμένες επιχειρήσεις υπέστησαν μεγάλες ζημίες κλίμακας. Οι περισσότερες εταιρείες που εως τότε χρησιμοποιούσαν ως μοναδικό μέσο αποτίμησης την λογιστική σε δεδουλευμένη βάση, είχαν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ανομοιογενών ισολογισμών. Ολοένα και περισσότερ-

α διευθυντικά στελέχη των χρηματοοικονομικών εταιρειών επικεντρώθηκαν στον κίνδυνο που προκαλείται από το χάσμα μεταξύ περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού και υποχρεώσεων. Στις μέρες μας, εξαιτίας της αβεβαιότητας και του κινδύνου που υπάρχει λόγω της ενοποιημένης χρηματοοικονομικής αγοράς και των τεχνολογικών βελτιώσεων, οι επενδυτές συχνά αναρωτιούνται με ποιον τρόπο να επενδύσουν τα περιουσιακά τους στοιχεία προκειμένου να πετύχουν ικανοποιητικές αποδόσεις υποκείμενες σε αβεβαιότητες, διάφορους περιορισμούς και υποχρεώσεις. Επίσης, προβληματίζονται με ποιον τρόπο να αναπτύξουν μακροπρόθεσμες στρατηγικές που αντισταθμίζουν τις αβεβαιότητες και τέλος πως να συνδυάσουν αποφάσεις επενδύσεων ενεργητικού και επιλογές παθητικού, ώστε να μεγιστοποιήσουν την περιουσία τους.
Η Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων είναι ένας από τους τομείς, ο οποίος προσπαθεί να δώσει απάντηση και καταπροσέγγιση λύσεις σε όλες αυτές τις ερωτήσεις και τους προβληματισμούς. Τετοιου είδους εφαρμογές παρουσιάζονται σε ασφαλιστικές εταιρείες, σε τράπεζες, σε συνταξιοδοτικά ταμεία, σε εταιρείες επενδύσεων χαρτοφυλακίου ή και αμοιβαίων κεφαλαίων, σε προσωπικά χρηματοοικονομικά θέματα κλπ.

Ο ορισμός για το το αντικείμενο του Asset Liability Management όπως δόθηκε από την Society of Actuaries (2003) είναι: «Το ALM(Asset Liability Management) είναι μια συνεχώς εξελισόμενη διαδικασία διατύπωσης, εφαρμογής, επιτήρησης και αναθεώρησης στρατηγικών που σχετίζονται με τα Περιουσιακά στοιχεία και τις Υποχρεώσεις που σαν στόχο έχει την επίτευξη χρηματοοικονομικών στόχων σε ένα δεδομένο σύνολο από περιθώρια και περιορισμούς.»

1.2 Συνταξιοδοτικά Συστήματα

Όπως γνωρίζουμε ένα ασφαλιστικό ταμείο έχει απαιτήσεις και υποχρεώσεις που πρέπει να καλύψει. Ένα συνταξιοδοτικό σύστημα επομένως θεωρείται επιτυχημένο όταν είναι σε θέση να ανταπεξέλθει επαρκώς τόσο στις άμεσες υποχρεώσεις του (παροχές συνταξιούχων) όσο και στην δυνατότητα του ταμείου να καλύψει τις μελλοντικές παροχές προς τους ασφαλισμένους σε βάθος χρόνου όσον αφορά τη μελλοντική γενιά των συνταξιούχων.

Γίνεται προφανές οτι το κόστος που δημιουργείται για ένα συνταξιοδοτικό σύστημα το οποίο καλείται να καλύψει το τάμειο έχει δύο σκέλη: το άμεσο και το μακροπρόθεσμο.
Το άμεσο κόστος αφορά στην καταβολή συντάξεων στους μη ενεργούς ασφαλισμένους που βρίσκονται ήδη στη σύνταξη.Ο φορέας όμως εκτός απο το άμεσο κόστος πρέπει να είναι σε θέση να καλύπτει σε συνεχή βάση και το μελλοντικό κόστος των παροχών τόσο των συνταξιούχων αλλά και των ενεργών μελών του ταμείου.
Με βάση τα παραπάνω λοιπόν διακρίνουμε δύο είδη μεθόδων χρηματοδοτήσεων:

- Διανεμητικό Σύστημα
- Κεφαλαιοποιητικό Σύστημα.

Το Διανεμητικό Σύστημα αναγνωρίζει σαν κόστος μόνο το άμεσο κόστος.Έτσι οι εισφορές του ταμείου διαμορφώνονται σε τέτοιο επίπεδο ώστε το σύνολο των εισφορών που εισπράττονται να είναι επαρκείς για να καλύψουν τις άμεσες παροχές προς τους συνταξιούχους. Η αρχή δηλαδή που διακρίνει ένα Διανεμητικο Σύστημα είναι ότι από τις εισφορές της παρούσας γεννιάς των ασφαλισμένων χρηματοδοτούνται οι παροχές της παρούσας γεννιας των συνταξιούχων. Στην ουσία το κεφάλαιο που διατηρείται είναι πρακτικά πολύ μικρό και δεσμεύεται για να καλύψει τυχόν διακυμάνσεις χρηματοροοών.

Το Κεφαλαιοποιητικό Σύστημα από την άλλη μεριά αναγνωρίζει το μακροπρόθεσμο κόστος. Έτσι το μέγεθος των εισφορών του ταμείου διαμορφώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η κεφαλαιοποίηση αυτών (συνολικά ή μερικώς) ώστε να καλύπτονται οι μελλοντικές υποχρεώσεις του φορέα. Αρχή λειτουργίας αυτου του Συστήματος είναι η ισότητα μεταξύ της παρούσας αξίας των υποχρεώσεων και της παρούσας αξίας των περιουσιακών στοιχείων. Στα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου συμπεριλαμβάνονται οι μελλοντικές εισφορές του ταμείου καθώς και το τρέχον απόθεμα που έχει δημιουργηθεί και τα έσοδα που προκύπτουν από την επένδυση αυτού του αποθέματος. Εκτενέστερη ανάλυση για τον τρόπο και τους χρηματοοικονομικούς τίτλους που επενδύονται τα αποθέματα του ταμείου θα γίνουν στα παρακάτω κεφάλαια.

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον στην χρήση του Asset Liability Management σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο και συγκεκριμένα στην βελτιστοποίηση των αποθεματικών ενός ταμείου με βάση την από κοινού διαχείριση των Περιουσιακών Στοιχείων και των Υποχρεώσεων ενός υποθετικού ταμείου.
Θα εξετάσουμε αναλυτικά τις εργασίες (paper) των Ricardo Josa-Fombellida, Juan Pablo Rincon-Zapatero:

- Minimazation of risks in pension funding by means of contributions and portfolio selection (2001)
- Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds (2004)
- Optimal Investment decisions with a liability: The case of defined benefit pension plans (2006)

Κεφάλαιο 2

Περιουσιακά Στοιχεία του Ταμείου

2.1 Εισαγωγή

Όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα τα περιουσιακά στοιχεία ενός ταμείου απαρτ΄-ιζονται κυρίως από το τρέχον απόθεμα που έχει δημιουργηθεί αλλά και από τα αναμενόμενα έσοδα που προκύπτουν από την επένδυση αυτών των κεφαλαίων.
Στην ουσία αν θα μπορούσαμε να φανταστούμε τις παροχές ενός ασφαλισμένου που καταβάλλει κατά τη διαρκεια του εργασιακού του βίου, ως ένα τρόπο αποταμίευσης, όπου το ταμείο του εγγυάται μια δεδομένη απόδοση επί των καταθέσεων. Γεννάται εύλογα λοιπόν το ερώτημα ποιός θα ήταν ο πιο ορθός τρόπος επένδυσης αυτών του κεφαλαίων. Μια απλή λύση θα ήταν οι τραπεζικές καταθέσεις. Ωστόσο δύναται η δυνατότητα μεγαλύτερων αποδόσεων μέσα από επενδύσεις σε χρηματοοικονομικα προϊόντα οπως τα ομόλογα, μετοχες, παράγωγα ΣΜΕ κλπ.εμπεριέχοντας πάντα μεγαλύτερο κίνδυνο σε σχέση με μια απλή τραπεζική κατάθεση. Στην επόμενη παράγραφο θα περιγράψουμε κάποιους απο αυτούς τους χρηματοοικονομικούς τίτλους.

2.2 Βασικά χαρακτηριστικά Ομολόγων και Μετοχών

2.2.1 Ομολόγα

Τα ομόλογα θεωρούνται χρηματοοικονομικοί τίτλοι σταθερού εισοδήματος (fixed income securuties), των οποίων εκδότης μπορεί να είναι ένα κράτος ή μια επιχείρηση.
Η χρήση των ομολόγων έχει σαν σκοπό ο εκδότης αυτού να αντλήσει κεφάλαια από τον εκάστοτε επενδυτή (έστω ενα συνταξιοδοτικό ταμείο), με την συμφωνία να πληρώνει περιοδικά προσυμφωνημένο τόκο (κουπόνι) καθόλη τη διάρκεια της ζωής του ομολόγου και να πληρώσει την προσυμφωνημένη τιμή στη λήξη του.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των ομολόγων (βλέπε Φράγκος Γιαννακόπουλος (2009) και David Blake-Pension Finance(2006)) είναι τα εξής:

- **Εκδότης:** Μπορεί να πρόκειται για ένα ιδιωτικό ή δημόσιο φορέα ο οποίος αντλεί κεφάλαια μέσω της έκδοσης ενός ομόλογου. Εκδότης μπορεί επίσης να είναι ένα κράτος ή μια ιδιωτική εταιρία. Συνεπώς λοιπόν μια βασική διάκριση των ομολόγων είναι σε κρατικά και σε εταιρικά ομόλογα. Τόσο η οικονομική ευρωστία καθώς και η αξιοπιστία που κατέχει ένας εκδότης ομολόγου στην αγορά διασφάλιζει και την αποπληρωμή του ομολόγου στη λήξη του.

- **Ονομαστική Αξία:** Στις πιο συχνές περιπτώσεις ομολόγων η ονομαστική αξία είναι η τιμή που θα έχει το ομόλογο στη λήξη του. Με βάση αυτή την αξία ουσιαστικά καθορίζεται και ο τόκος του ομολόγου.

- **Τοκομερίδιο(κουπόνι):** Είναι οι περιοδικές πληρωμές του εκδότη του ομολόγου προς τον εκάστοτε επενδυτή (στην περίπτωσή μας έστω ένα συνταξιοδοτικό ταμείο) ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Υπάρχουν ομόλογα με σταθερό τοκομερίδιο , όπου οι περιοδικές πληρωμές είναι συγκεκριμένες και ομόλογα με κυμαινόμενο τοκομερίδιο το οποίο εξαρτάται από ένα σύνηθες επιτόκιο αναφοράς που διαμορφώνεται στην αγορά (πχ Euribor) σε συνδυασμό με ένα προκαθορισμένο περιθώριο (spread).

- **Τιμή Διαπραγμάτευσης:** Γενικά στις διαπραγματεύσεις χρηματοοικονομικών τίτλων όπως και στην περίπτωση των ομολόγων διακρίνεται δύο αγορές. Η Πρωτογενής και η Δευτερογενής αγορά. Στην πρωτογενή αγορά διαπραγματεύονται νεοεκδιδόμενοι τίτλοι με προκαθορισμένη ονομαστική αξία. Στην δευτερογενή αγορά διαπραγματεύονται τίτλοι που εκδόθηκαν στο παρελθόν. Ένα βασικό πλεονέκτημα της διαπραγμάτευσης ενός ομολόγου στην δευτερογενή αγορά είναι η δυνατότητα που δίνεται στον εκάστοτε επενδυτή να πουλήσει το όμολογο που αγόρασε από την πρωτογενή αγορά και να αντλήσει άμεσα ρευστότητα.

- **Ωρίμανση(Maturity):** Με την έννοια ωρίμανση (Maturity) ενός ομολόγου εννοούμε τον εναπομείναντα χρόνο που μένει μέχρι την στιγμή εξόφλησης του ομολόγου, δηλαδή την καταβολή της ονομαστικής αξίας καθώς και των υπολειπόμενων τόκων.

2.2.2 Μετοχές

Η βασική διάκριση των μετοχών είναι οι κοινές και οι προνομιούχες μετοχές.

- **Η κοινή μετοχή:** Είναι ο πιο συνηθισμένος τύπος μετοχής και περιλαμβάνει βασικά δικαιώματα του μετόχου, όπως για παράδειγμα το δικαίωμα συμμετοχής στα κέρδη της εταιρίας, την συμμετοχή του μετόχου στην έκδοση νέων μετοχών, όπως επίσης και το δικαίωμα ψήφου στη Γενική Συνέλευση της εταιρείας που έχει εκδώσει τις μετοχές.

- **Η προνομιούχος μετοχή** προσφέρει απλά ένα προβάδισμα έναντι των κατόχων κοινών μετοχών. Οι προνομιούχες μετοχές συμφωνα με τον David Blake-Pension Finance(2006) έχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά με αυτά των ομολόγων. Οι μετοχές αυτές προσφέρουν ένα σταθερό μέρισμα σε αντίθεση με την περίπτωση των κοινών μετοχών.

Τα περίσσοτερα συνταξιοδοτικά ταμεία ανά τον κόσμο επενδύουν συνήθως σε μετοχές που διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές όπως για παράδειγμα NYSE Euronext, NASDAQ OMX, Tokyo Stock Exchange κλπ.
Ωστόσο έχει παρατηρηθεί το φαινόμενο πολλά ταμεία να επενδύουν ακόμη και σε μετοχές που δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές δινοντάς τους έτσι το δικαίωμα να προσδοκούν μεγαλύτερες αποδόσεις αλλά και να αναλαμβάνουν πολύ μεγαλύτερο κίνδυνο.

2.3 Ομολογιακοί- Μετοχικοί Δείκτες

Ένας ομολογιακός δείκτης είναι στην ουσία ένας σύνθετος συνδυασμός από μία πληθώρα ομολόγων όπου αντανακλά στατιστικά την μικτή αξία των ομολόγων ή άλλων χρεογράφων που τον αποτελούν. Χρησιμοποιείται κυρίως σαν εργαλείο στην διαδικασία διαχείρισης χαρτοφυλακίων και αντιπροσωπεύει τα συνολικά χαρακτηριστικά των υποκείμενων τίτλων. Εαν υποθέσουμε ότι επιτρέπεται σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο να επενδύσει σε τέτοιου είδους Ομολογιακούς Δείκτες τότε οι κυριότεροι αυτών θα προέρχοντα από δείκτες που έχουν δημιουργήσει ανά τον κόσμο μεγάλες επενδυτικές Τράπεζες όπως η JP Morgan, Morgan Stanley, και η Salomon Smith Barney.Η Salomon Smith Barney για παράδειγμα έχει δημιουργήσει τον ομολογιακό δείκτη Salomon Smith Barney World Govt, Salomon Smith Barney US κλπ. Οι κυριότεροι από τους Μετοχικούς Δείκτες στους οποίους επενδύουν τα ταμεία θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τον Cac 40 κύριος δείκτης αναφοράς για το Paris Bourse, τον S&P 500(Standard and Poors Composite Index of 500 Stocks). Αυτό που αξίζει να επισημάνουμε χωρίς να αναφερθούμε εκτενεστερα στα παραπάνω είναι ότι οι μετοχικοί δείκτες παρουσιάζουν από τη φύση τους πολύ μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τους ομολογιακούς δείκτες.

2.4 Παράγωγα Προϊόντα

Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο προϊόν). Ουσιαστικά, δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπράγματευση σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπράγματευση σε οργανωμένες αγορές. Σε γενικές γραμμές, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα (π.χ. σιτάρι) και μέταλλα (π.χ. χρυσός).

- Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι:

– Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια
– Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης
– Τα Δικαιώματα Προαίρεσης

2.4.1 Δικαιώματα προαίρεσης και παραστατικά δικαιώματος αγοράς μετοχών

Το αποτέλεσμα ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης είναι να καθορίσει σήμερα τη μελλοντική τιμή ορισμένων τίτλων. Με άλλα λόγια, η τιμή στην οποία ένας τίτλος αποτελεί αντικείμενο συναλλαγής στο μέλλον είναι κλειδωμένο στο σήμερα. Για πολλούς λόγους αυτό μπορεί να είναι ακριβώς ό, τι απαιτείται, αλλά για άλλους είναι υπερβολικά περιοριστικό. Ένας επενδυτής μπορεί να είναι σίγουρος περισσότερο για τις αυξήσεις των τιμών από ό, τι για τις μειώσεις, αλλά, ωστόσο, αυτό δεν είναι αρκετό για την προστασία από την πτώση των τιμών. Η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι να αγοραστεί ένα δικαίωμα προαίρεσης, στην περίπτωση αυτή ένα δικαίωμα προαίρεσης πώλησης.
Μια επιλογή που δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πωλήσει έναν υποκείμενο τίτλο σε καθορισμένη τιμή κατά τη διάρκεια ή πριν από μια συγκεκριμένη ημερομηνία. Αυτό το δικαίωμα παρέχεται από τον εκδότη ή συγγραφέα του δικαιώματος προαίρεσης. Ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς παρέχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσουν τον τίτλο, ενώ το δικαίωμα πώλησης δίνει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πουλήσουν τον τίτλο. Για να να τεθεί σε ισχύ το δικαίωμα να αγοράς ή να πώλησης, το δικαίωμα προαίρεσης πρέπει να ασκειθεί. Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να ασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης, ενώ ένα Αμερικανικό δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να ασκηθεί σε οποιαδήποτε στιγμή πριν από την ημερομηνία λήξης. Σε αντάλλαγμα για την ασφάλεια η οποία προσφέρεται από το δικαίωμα προαίρεσης, μια τιμή πρέπει να καταβληθεί.
Εάν, στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης, η τιμή εκτέλεσης ενός δικαιώματος αγοράς ξεπερνά την τιμή του υποκείμενου τίτλου ή η τιμή εκτέλεσης ενός δικαιώματος πώλησης είναι μικρότερο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου τότε το δικαίωμα προαίρεσης θα λήξει χωρίς αξία. Εάν όμως στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης συμβεί το αντίθετο το δικαίωμα προαίρεσης θα λήξει και με αξία ίση με τη διαφορά μεταξύ της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της τιμής άσκησης.
Ένα ένταλμα μετοχικού κεφαλαίου είναι ένα δικαίωμα προαίρεσης που εκδίδεται από μια επιχείρηση να αγοράσει ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών της εν λόγω επιχείρησης σε μια δεδομένη τιμή άσκησης, ανά πάσα στιγμή πριν το ένταλμα εκπνεύσει. Αν το ένταλμα ασκηθεί, η επιχείρηση εκδίδει νέες μετοχές στην τιμή άσκησης, ανεβάζοντας έτσι την επιπλέον χρηματοδότηση. Ένα ένταλμα ομολόγου είναι ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς για περισσότερες ομολογίες της εταιρείας. Ένα ένταλμα έχει γενικά μεγαλύτερη διάρκεια από μια συμβατική επιλογή.
Τα εντάλματα συνήθως συναρτώνται σε χρεόγραφα, όπως τα ομόλογα. Μερικές φορές είναι αναπόσπαστα από αυτά τα μέσα και έτσι μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο συναλ-

λαγής χωριστά, μερικές φορές είναι μη- αποσπώμενα. Τα δικαιώματα αγοράς μετοχών γενικά δεν φέρουν κανένα από τα δικαιώματα των μετόχων μέχρι να ασκηθούν, για παράδειγμα, δεν πληρώνουν κανένα μέρισμα και δε δίνουν δικαίωμα ψήφου. Ωστόσο, οι κάτοχοι εντάλματος προστατεύονται από τις αλλαγές της υπάρχουσας τιμής της μετοχής όπως αυτές προκύπτουν από την έκδοση νέων μετοχών ή τις διασπάσεις μετοχών σε μερίσματα, μέσω αντίστοιχης προσαρμογής της τιμής άσκησης του εντάλματος, το ίδιο ισχύει και για τα συνήθη δικαιώματα προαίρεσης.

2.5 Εναλλακτικές Επενδύσεις

Οι εναλλακτικές επενδύσεις και οι εναλλακτικές επενδυτικές στρατηγικές βλέπε David Blake-Pension Finance (2006) είναι μια νέα κατηγορία των επενδύσεων και στρατηγικών που αναδύθηκε στις αρχές του 1990.

Οι εναλλακτικές επενδύσεις οι οποίες αποτελούν μια από τις πέντε κύριες μορφές διαχείρισης αξιογράφων είναι:

- ενεργητικό ισοζύγιο
- απόλυτη απόδοση
- διαχείριση ενεργητικού - παθητικού
- ενεργές ειδικές χρηματιστηριακές συναλλαγές
- παθητική

2.5.1 Στρατηγικές δημόσιας αγοράς

- Συστηματική διαπραγμάτευση. Ο διαχειριστής του ταμείου παίρνει μια κατευθυντήρια άποψη των αγορών που βασίζονται σε μοντέλα των υπολογιστών που ενσωματώνουν τις τάσεις της αγοράς και της συμπεριφορικής ψυχολογίας.
- Τακτική συναλλαγών. Ο διαχειριστής του ταμείου επιχειρεί να προσδιορίσει τους κύριους παράγοντες (π.χ. επιτόκια και συναλλαγματικές ισοτιμίες) που καθορίζουν τις αυξομειώσεις τιμών των αξιογράφων.
- Τομέας βιομηχανικών επενδύσεων. Τα κεφάλαια αυτά επενδύονται σε κινητές αξίες βιομηχανιών που παρουσιάζουν μεγάλη ανάπτυξη ως αποτέλεσμα των τεχνολογικών εξελίξεων.
- Μετατρέψιμη κερδοσκοπία. Αυτό περιλαμβάνει την αγορά ενός μετατρέψιμου ομολόγου και της σύντομης πώλησης των υποκειμένων μετοχών. Το ταμείο λαμβάνει τόσο το κουπόνι για το ομόλογο και τη διαφορά μεταξύ της τιμής του το μετατρέψιμου και

της ανοικτής πώλησης. Αυτή είναι μια στρατηγική αγορά που χρησιμοποιείται όταν η αγορά έχει πτωτική τάση και προκύπτει κέρδος επειδή το κέρδος από την ανοικτή πώληση είναι συνήθως μεγαλύτερο.

Ο όρος κερδοσκοπία σημαίνει η αγορά ενός τίτλου και η άμεση μεταπώλησή του σε υψηλότερη τιμή.

– Συναλλαγή χαρτοφυλακίου. Ο στόχος είναι να αγοραστεί το καλάθι των υποκείμενων μετοχών που περιλαμβάνει ένα δείκτη ιδίων κεφαλαίων της αγοράς και να πωλείται ταυτόχρονα το συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης σύμφωνα με το δείκτη αυτό, αν η διαφορά μεταξύ των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και των των τιμών τοις μετρητοίς υπερβαίνει το κόστος δανεισμού των κεφαλαίων για να αγοραστεί το καλάθι των μετοχών, μετά την αφαίρεση των μερισμάτων που λαμβάνονται από τις μετοχές κατά τη διάρκεια της εκμετάλλευσης περίοδο κατά την οποία συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης ωριμάζει. Αυτή η διαφορά μεταξύ του αντιπροσωπεύει το κέρδος από τη συναλλαγή στη λήξη.

2.6 Ακίνητη Περιουσία

Εως τώρα αναλύσαμε τα Περιουσιακά Στοιχεία χρηματοικονομικής φύσεως στα οποία μπορεί να επενδύσει ένα Ταμείο.Ένα ταμείο δύναται όμως να επενδύσει και σε Περιουσιακά Στοιχεία Ακίνητης Περιουσίας (Real Assets). Τα πιο βασικά εκ των οποίων είναι:

– **Ακίνητα-Σπίτια**

Τα πιο βασικά είδη ακινήτων στα οποία επενδύουν τα ταμεία είναι κυρίως εμπορικά ακίνητα καθώς και επαγγελματικά ακίνητα πχ ένα γραφείο.Σε καμμία περίπτωση όμως δεν επενδύονται κεφάλαια σε κατοικίσιμα ακίνητα.Στόχος του ταμείου από μία τέτοια επένδυση είναι η παραγωγή σταθερού εισοδήματος από την ενοικίαση των παραπάνω καθώς και το όφελος που αποκομίζουν από μία ενδεχόμενη αύξηση της εμπορικής αξίας μια τέτοιας αγοράς που επιτυγχάνεται με την πάροδο του χρόνου.

– **Γή-Οικόπεδα**

Κατά τη δεκαετία 1970 τα περισσότερα ταμεία ήταν θερμοί επενδυτές σε αγροτικές εκτάσεις προσβλέποντας αποδόσεις απο την ενοικίαση αυτών. Πρακτικά τετοιου είδους επενδύσεις λειτουργούν ως μία έμμεση αντιστάθμιση στις διακυμάνσεις του πληθωρισμού. Έτσι λοιπόν όταν ο πληθωρισμός βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα τέτοιου είδους επενδύσεις για τα ταμεία θεωρούνται ιδιαίτερα κερδοφόρες. Στις περιπτώσεις όμως που ο πληθωρισμός βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα συννεπώς δεν έχουμε διακυμάνσεις σε επιτόκια και σε χρηματοικονομικές αποδόσεις τα περισουσιακά στοιχεία χρηματοοικονομικής φύσεως φαντάζουν ως μία πιο εκλκυτική και κερδοφόρα λύση. Το παραπάνω ποιοτικό συμπέρασμα ήταν ίσως αυτό που έπαιξε σημαντικό ρόλο και έτσι πολλά ταμεία σε περιόδους χαμηλού πληθωρισμού πωλούσαν την γη χαμηλής εμπορικής αξίας.

2.7 Μοντελοποίηση των Περιουσιακών Στοιχείων του Ταμείου με βάση την Κίνηση Brown

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε ένα μέρος περιουσιακών στοιχείων διαφόρων μορφών στα οποία ένα ταμείο μπορεί να επενδύσει. Στην παράγραφο αυτη θα ασχοληθούμε με εκείνα τα περιουσιακά στοιχεία χρηματοοικονομικής φύσεως και θα προσπαθήσουμε να τα μοντελοποιήσουμε με βάση την Κίνηση Brown. Παραδείγματα τέτοιων περιουσιακών στοιχείων είναι τα ομόλογα,, οι μετοχές, ένας ομολογιακός ή μετοχικός δείκτης κλπ. Κρίνεται σκόπιμο επομένως να κάνουμε μία εισαγωγή στις έννοιες στο συγκεκριμένο μοντέλο, οι οποίες θα μας βοηθήσουν και στην κατανόηση των παρακάτω κεφαλαίων.

2.7.1 Ιστορική Αναδρομή

Το μοντέλο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown έχει προέλθει από το έργο του Γάλλου μαθηματικού Luis Bachelier ο οποίος και το είχε πρωτοδιατυπώσει στις αρχές του 20ου αιώνα και η πρωταρχική του χρήση αφορούσε την κατανόηση της τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων. Το μοντέλο αυτό επανήλθε στην δεκαετία του ΄60 από τον αμερικανό οικονομολόγο και Νομπελίστα Paul Samuelson και αποτέλεσε την βάση για την μελέτη τιμολόγησης παραγώγων συμβολαίων από τους Fisher Black, Myron Scholes, Robert Merton την δεκαετία του ΄70 η οποία και χάρισε το βραβείο Nobel στους δύο τελευταίους. Στην ουσία η Κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία (δηλ. μία συλλογή τυχαίων μεταβλητών) τον ορισμό και τις ιδιότητες της οποίας θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους.

2.7.2 Ορισμός της μονοδιάστατης κίνησης Brown

Η στοχαστική διαδικασία B(t) ονομάζεται κίνηση Brown εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές B(t), για $t \in R$ ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η μεταβολή της B(t) για μικρές μεταβολές της παραμέτρου t είναι συνεχής, δηλαδή η συνάρτηση B(t) είναι συνεχής συνάρτηση του t.

2. Οι μεταβολές της B(t) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $B(t_4) - B(t_3)$ και $B(t_2) - B(t_1)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.
3. Οι μεταβολές της Κίνησης Brown είναι κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $B(t+s) - B(t) \sim N(0, s)$

Συνδυάζοντας γραμμικούς σχεδιασμούς με σταθερούς όρους και της κίνησης Brown θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε στοχαστικές διαδικασίες γενικότερης μορφής όπως:

$$X(t) = bt + \sigma B(t) \sim N(bt, \sigma t)$$

Υπάρχουν επίσης και μη γραμμικά μοντέλα της κίνησης Brown τα οποία παρουσιάζουν εξίσου μεγάλο ενδιαφέρον στο τομέα της συγχρονης χρηματοοικονομικής.
Στην παρακάτω παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για μία μετοχή έστω περιουσιακό στοιχείο ενός υποθετικού ταμείου το οποίο έχει επενδύσει στη μετοχή και θα αναλύσουμε την μελλοντική απόδοση καθώς και τα αποτελέσματα που θα προκύψουν.

2.7.3 Μοντελοποίηση ενός περιουσιακού στοιχείου

Το μοντέλο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown για την τιμή μίας μετοχής προϋποθέτει την υπόθεση ότι η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται συνεχώς στο χρόνο και παρουσιάζει συνεχείς αυξομειώσεις οι οποίες οφείλονται στις συνεχείς μεταβαλλόμενες συνθήκες της Αγοράς δηλαδή στη μεταβολή της προσφοράς και ζήτησης του συγκεκριμένου χρεογράφου.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι S(t) είναι η τιμή της εν λόγω μετοχής την χρονική στιγμή t και θέλουμε να προβλέψουμε την τιμή της μετοχής αυτής για την χρονική μεταβολή από t εως $t + \Delta t$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω η ποσοστιαία απόδοση θα ακολουθεί τον παρακάτω πιθανοθεωρητικό νόμο:

$$S(t+\Delta t) - S(t)/S(t) \sim \mu\Delta t + \sigma(B(t+\Delta t) - B(t))$$

ή αλλιώς εκφρασμένο ως:

$$S(t+\Delta t) - S(t)/S(t) \sim \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi$$

όπου με ξ συμβολίζουμε μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε να ισχύει $\xi \sim N(0, 1)$
Εαν υποθέσουμε τώρα ότι $\Delta t \to 0$ δηλαδή θέλουμε να μελετήσουμε τη στιγμιαία μεταβολή της απόδοσης του παραπάνω χρεογράφου που επενδύθηκε σε ένα υποθετικό ταμείο τότε εύκολα αποδεικνύεται η απλοποίηση των παραπάνω και προκύπτει ότι:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(t_0)}\right) \sim N\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0), \sigma(t-t_0)\right) \tag{2.1}$$

Ένα σημαντικό χαρακτιριστικό που συμπεραίνουμε από τα παραπάνω είναι ότι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, ακολουθεί την λογαριθμικοκανονική (Lognormal) κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας που εκφράζεται ως:

$$f(x;\mu^{'},\sigma^{'2}) = \frac{1}{x\sigma^{'}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu^{'})^2}{2\sigma^{'2}}\right) \quad (2.2)$$

Συμβολίζοντας με U μια νέα τυχαία μεταβλητή όπου θα ισχύει $U = \ln(X)$ συμπεραίνουμε ότι θα είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο $\mu^{'}$ και διασπορά $\sigma^{'2}$. Οι μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$E[X] = \exp\left(\mu^{'} + \frac{\sigma^{'2}}{2}\right),$$

$$Var(X) = \exp\left(2\mu^{'} + \sigma^{'2}\right)\left[\exp(\sigma^{'2}) - 1\right]$$

Επιλέγοντας το μοντέλο της σχέσης $(2,1)$ και εφόσον διευκρινίσαμε ότι στο συγκεκριμένο επιλεγμένο μοντέλο έχουμε λογαριθμοκανονική κατανομή θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής παραμέτρους:

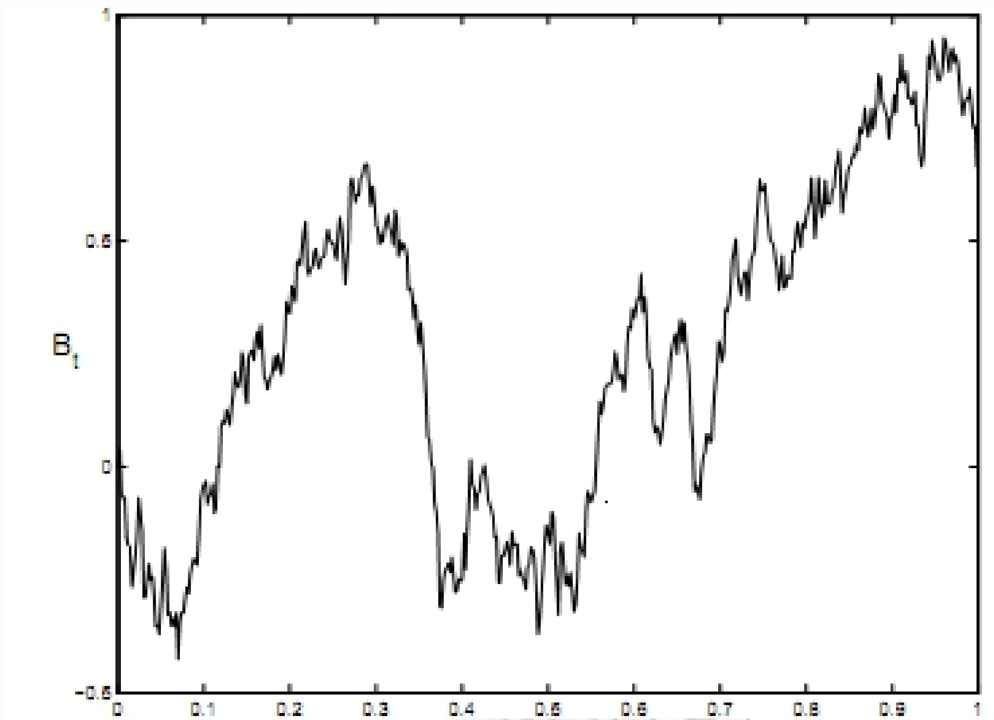
$$\mu_1 = \mu(t-t_0) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)$$

και

$$\sigma_1 = \sigma(t-t_0)$$

Η επιλογή του συγκεκριμένου μοντέλου για την περιγραφή των τιμών της μετοχής μας δίνει την πολύ σημαντική ιδιότητα οι τιμές να παραμένουν πάντα θετικές σε αντίθεση με το απλοποιημένο μοντέλο της κίνησης Brown στο οποίο πιθανώς οι τιμές να μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές, πράγμα που πρακτικά δεν υφίσταται. Σε πολλές περιπτώσεις όμως π.χ για μικρά χρονικά διαστήματα ή σε πολύ μικρές μεταβολές των τιμών η κανονική κατανομή όπως παραπάνω είχαμε υποθέσει μπορεί να είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της λογαριθμοκανονικής κατανομής και δύναται να χρησιμοποιηθεί για διευκόλυνση.
Είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε επίσης μια άκρως ενδιαφέρουσα ιδιότητα του μοντέλου δηλαδή ότι σύμφωνα με το μοντέλο η πιθανότητα να βρεθεί η μετοχή την χρονική στιγμή t στην τιμή $S(t) = x$ υποθέτοντας ότι μελετάμε την πορεία των τιμών του χρεόγραφου στην αγορά σε χρονικό δάστημα $[0,u]$, για $u < t$ μπορεί να χαρακτηριστεί μόνο από την τελική τιμή $S(u)$ που πήρε η μετοχή την χρονική στιγμή u. Αυτό που πρακτικά μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι η συμπεριφορά που καθορίζει την τιμή της συγκεκριμένης μετοχής χάνεται για το χρονικό διάστημα $[0,u]$ και το τρόπο πλέον που θα συμπεριφέρεται η τιμή της μετοχής καθορίζεται μόνο από την τελική τιμή $S(u)$.
Η παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται ιδιότητα Markov είναι πολύ σημαντική και βοηθά ιδιαίτερα στην απλοποίηση του μοντέλου αλλά δε θα χρειαστεί να δώσουμε περαιτέρω έμφαση στα παραπάνω.

Δύο σημαντικά αποτελέσματα της κίνησης Brown είναι τα παρακάτω:
Αποτέλεσμα 1: Αν η B(t) είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = 0$ τότε:



Σχήμα 2.1: Μία τυχαία τροχιά της Κίνησης Brown

$$E\left[f\left(B_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t} dx\right) \tag{2.3}$$

Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγεται από την κίνηση Brown και ξεκινάει στο 0.

Αποτέλεσμα 2: Αν η B(t) είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = x$ τότε:

$$E[f\left(B_t\right)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dx \tag{2.4}$$

Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγεται από την κίνηση Brown και ξεκινάει στο x.

Εύκολα από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

$$E[B_t] = x$$

και αντίστοιχα,

$$E[(B_t - x)^2] = t$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$E[f\left(B_t\right)] = E[f\left(x + B_t\right)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + y\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

Έτσι λοιπόν ένα απλοποιημένο μοντέλο για την τιμή της μετοχής που περιγράφουμε παραπάνω είναι ότι η τιμή S_t της μετοχής την χρονική στιγμή t θα είναι της μορφής :

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right) \tag{2.5}$$

όπου r και σ είναι θετικές πραγματικές σταθερές, η S_0 μία ντετερμινιστική αρχική συνθήκη για την τιμή της μετοχής και B_t μια μονοδιάστατη κίνηση Brown. Έτσι λοιπόν κάτω από το μέτρο ότι η B_t είναι μία κίνηση Brown, τότε για την μέση τιμή της S_t ισχύει γενικευμένα ότι:

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}) + \sigma x\right) dx \\ &= S_0 \exp(rt) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Από τον παραπάνω τύπο συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία S_t δεν είναι μία Martingale εφόσον για μία Martingale θα έπρεπε να ισχύει ότι $E[S_t] = E[S_0]$ το οποίο φυσικά δεν ισχύει εφόσον $\exp(rt) \neq 1$

2.7.4 Η χαρακτηριστική Συνάρτηση της Κίνησης Brown

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της Κίνησης Brown μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτησή της καθώς και την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της. Θα υπολογίσουμε πρώτα την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της Κίνησης Brown.

$$\phi_{B_t - B_s}(\lambda) = E[\exp(i\lambda(B_t - B_s))] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) \exp(i\lambda x) dx$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος αρκεί να γράψουμε την ποσότητα που είναι μέσα σαν ένα τέλειο τετράγωνο δηλαδή:

$$i\lambda x - \frac{x^2}{2(t-s)} = -\frac{(x - i\lambda(t-s))^2}{2(t-s)} - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}$$

αντικαθιστώντας υπολογίζουμε τελικά ότι:

$$\phi_{B_t - B_s}(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$$

Ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι πολυ σημαντικός καθώς μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τις πολυωνιμικές ροπές. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί παίρνοντας τις παραγώγους της $\phi_{B_t-B_s}(\lambda)$ ως προς λ και θέτουμε $\lambda=0$ Έτσι λοιπόν μπορούμε εύκολα για παράδειγμα να υπολογίσουμε ότι:

$$E[(B_t-B_s)^4]=3(t-s)^2$$

Για την χαρακτηριστική συνάρτηση της Κίνησης Brown θέτοντας $s=0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι:

$$\phi_{B_t-B_s}(\lambda)=\exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$$

2.7.5 Υπό Συνθήκη Μέση τιμή των τιμών της Μετοχής

Από την σχέση (2,5) είχαμε θεωρήσει ότι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$S_t=S_0\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t\right)$$

όπου r και σ θετικές πραγματικές σταθερές και B_t είναι μια μονοδιάστατη Κίνηση Brown. Η υπό συνθήκη μέση τιμή λοιπόν τη συμβολίζουμε ως $E[S_{t+T}\,|F_t]$.
Εναλλακτικά ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$S_{t+T}=S_t\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma(B_{t+T}-B_t)\right)$$

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μέσης τιμής καταλήγουμε ότι :

$$E[S_{t+T}\,|F_t]=S_t\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})\right)E[\exp(\sigma(B_{t+T}-B_t))\,|F_t]$$

Από τις ιδιότητες της Κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι η μεταβολή $B_{t+T}-B_t$ είναι ανεξάρτητη από την F_t συνεπώς:

$$\begin{aligned}E[\exp(\sigma(B_{t+T}-B_t))\,|F_t] &= E[\exp(\sigma(B_{t+T}-B_t))\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\sigma x)\exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right)dx=\exp\left(\frac{\sigma^2\tau}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω δύο σχέσεων καταλήγουμε ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή για την τιμή της μετοχής θα δίνεται και από την πολύ σημαντική σχέση:

$$E\left[S_{t+T}\,|F_t\right]\,=S_t\exp(r\tau) \tag{2.8}$$

2.7.6 Μοντελοποίση n Περιουσιακών Στοιχείων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την κατασκευή ενός μοντέλου βάση της Κ-ινησης Brown όχι για την τιμή μίας μετοχής αλλά για το σύνολο των τιμών πολλών μετοχών.
Είναι λογικό οι τιμές των διαφορετικών αυτών χρεόχαρτων να μην επηρεάζονται μόνο από ένα στοχαστικό παράγοντα όπως υποθέσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αλλά από πολυάριθμους και ποικίλους διαφορετικούς παράγοντες. Έτσι λοιπόν για να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνθετο μοντέλο το οποίο φυσικά θα έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά σε σχέση με το μόντέλο της μονοδιάστατης κίνησης Brown είναι σημαντικό να ορίσουμε την έννοια μίας πολυδιάστατης Κίνησης Brown.
Ορισμός πολυδιάστατης Κίνησης Brown: Θεωρούμε d ανεξάρτητες κινήσεις Brown τέτοιες ώστε $B_1(t), \ldots, B_d(t)$.
Η στοχαστική διαδικασία $B_t = (B_1(t), \ldots, B_d(t)) \in R^d$ ονομάζεται μία $d-$διάστατη Κίνηση Brown.Έτσι λοιπόν για n αριθμό περιουσιακών στοιχείων που επενδύονται θεωρητικά σε ένα υποθετικό ταμείο θα ισχύει ότι:$S_1(t), \ldots, S_n(t)$ θα είναι μια σειρά από ένα σύνολο μονοδιάστατων Κινήσεων Brown και θα ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
2. Αν $s, t \geq 0$ τότε:
$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$
Οι αυξήσεις της Κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή σε $d-$ διαστάσεις.
3. Οι τροχιές της Κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η συνάρτηση $t \to B_t$ είναι συνεχής.

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν στην ουσία μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Η πολυδιάστατη κίνηση Brown έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με την μονοδιάστατη Κίνηση Brown που περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν γενικά μία X_t είναι μία Κίνηση Brown και $G_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή τότε θα ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1. $X_0 = 0$
2. Οι τροχίες της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.
3. Η X_t θα είναι μία Matingale ως προς τη διήθηση (Filtration) $G_t = \sigma(X_s, s \leq t)$
4. Οι $X_{i,t}X_{j,t} - \delta_{i,j}t$, $i, j = 1, \ldots d$ είναι Martingale ως προς τη διήθηση $G_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ και όπου $\delta_{i,j}$ ορίζουμε το δέλτα του Kronecker.

Από τις παραπάνω διαδικασίες μπορούμε να φτιάξουμε πιο περίπλοκα μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών μοντελοποίησης όπως για παράδειγμα:

$$X_j(t) = \sum_{\kappa=1}^{d} \rho_{jk} B_\kappa(t), j = 1, \ldots, m$$

Και για το παραπάνω μοντέλο εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$E[X_j(t)] = 0$$

και αντίστοιχα ότι:

$$E[X_i(t)X_j(t)] = \sum_{\kappa=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \rho_{i\kappa}\rho_{jl} E[B_i(t)B_j(t)] = t \sum_{\kappa=1}^{d} \rho_{i\kappa}\rho_{jk}$$

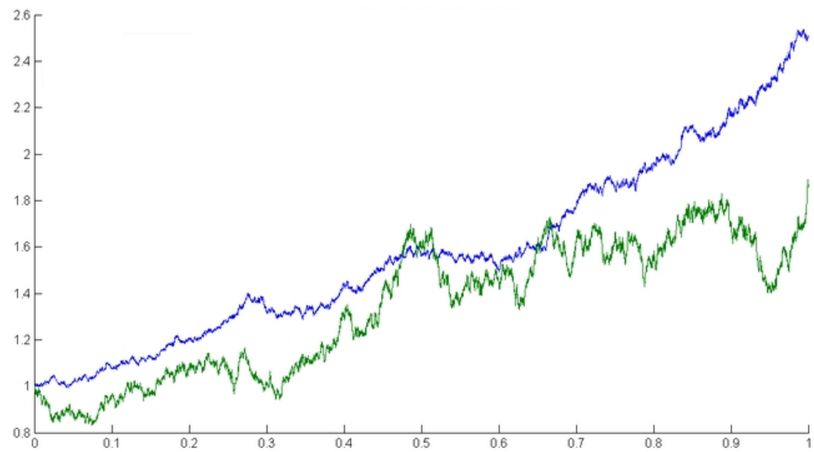
Ο πίνακας $\Sigma = (\Sigma_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, m$ τα στοιχεία του οποίου ορίζονται ως $\Sigma ij = \sum_{\kappa=1}^{d} \rho_{i\kappa}\rho_{jk}$, είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των παραπάνω περιγραφομένων διαδικασιών δηλ: $X_j(t)$ με $j = 1, \ldots, t$.
Έτσι λοιπόν μπορούμε και σε αυτό το πολυδιάστατο μοντέλο να δημουργήσουμε μη γραμμικές συναρτήσεις των διαδικασιών, που στην ουσία θα αποτελούν μοντέλα για παραπάνω από μία μετοχή έστω n για παράδειγμα περιουσιακά στοιχεία που επενδύει πλέον ένα ταμείο.
Σε αυτήν τη περίπτωση θα χρειαστούμε τόσο αριθμό στοχαστικών διαδικασιών όσος θα είναι και αριθμός των περιουσιακών στοιχείων που επενδύονται, στην περίπτωση που θέσαμε παραπάνω δηλ n. Θα έχουμε λοιπόν n στοχαστικές διαδικασίες $\{S_i(t)\}$ με $i = 1, \ldots, t$ όπου με $S_i(t)$ συμβολίζουμε την τιμή του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή t. Η τιμή των περιουσιακών στοιχείων θα θεωρήσουμε ότι επηρεάζεται από m παράγοντες της οικονομίας X_j.

Έτσι λοιπόν οι γενικευμένη μορφή της γεωμετρικής κίνησης Brown θα είναι της μορφής:

$$S_i(t) = \exp\left(v_i t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j X_j(t)\right) \tag{2.9}$$

οι συντελεστές σ_j προσδιορίζουν το πως οι διαφορετικοί παράγοντες της οικονομίας επηρεάζουν την εξέλιξη των τιμών ενός περιουσιακού στοχείου i επενδεδυμένου στο ταμείο.
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να γράψουμε την παραπάνω γενικευμένη μορφή της γεωμετρικής κίνησης Brown ως:

$$S_i(t) = \exp\left(v_i t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} B_j(t)\right) \tag{2.10}$$



Σχήμα 2.2: Δύο τυχαίες τροχιές της Κίνησης Brown με διαφορετικές παραμέτρους

όπου οι συντελεστές v_i μπορούν να εκφραστούν ως:

$$v_i = \mu_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}\sigma_{ji}$$

Ένα ενδιαφέρον βελτιστοποιημένο μοντέλο βάση του οποίου θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι είναι ικανοποιητικό για τις τιμές μετοχικών και ομολογιακών δεικτών θεωρείται το μοντέλο των $Cox - Ingersol$ και Ross. Έστω λοιπόν ότι έχουμε επενδύσει σε έναν μετοχικό δείκτη για παράδειγμα τον Cac 40. Η τιμή του δείκτη τη χρονική στιγμή t, X_t θα περιγράφεται πια από ένα διαφοροποιημένο στοχαστικό μοντέλο το οποίο θα είναι της μορφής:

$$\Delta X(t) = \lambda(X(t) - \kappa)\Delta t + \mu\sqrt{X(t)}\Delta B(t)$$

όπου λ, κ, μ είναι σταθερές.

Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει αρκετές ομοιότητες με το μοντέλο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown με διοφορετική όμως μεταβλητότητα και με την διαφορά ότι ο όρος που καθορίζει στην ουσία την μέση τιμή των X_t θα είναι μειωμένος κατά τη σταθερά $\lambda\kappa$. Οι αποδόσεις του δείκτη Cac 40 μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + \delta t$ θα ορίζονται από την απλή σχέση απόδοσης ως:

$$R(t) = \frac{X(t + \delta t) - X(t)}{X(t)}$$

Η τεράστια διευκόλυνση γενικά που προσφέρουν τέτοιου είδους μοντέλα στις προβλέψεις για τις τίμες των επενδυόμενων περιουσιακών στοιχείων σε συνταξιοδοτικά ταμεία γενικά είναι ότι μέσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή μπορούμε να τρέξουμε πολυάριθμα τέτοια σενάρια ανάλογα με τις διάφορες καταστάσεις που επικρατούν σε μία οικονομία. Είναι αυτονόητο ότι ένα απο όλα αυτά τα σενάρια θα πραγματοποιηθεί στην πραγματικότητα αλλά αυτό που κάνει τη συγκεκριμένη διαδικασία τόσο πρακτική και χρήσιμη είναι ότι είμαστε εκ των προτέρων ενήμεροι σχετικά με όλα τα πιθανά και υποψήφια σενάρια που μπορούν να πραγματοποιηθούν και έτσι μπορούμε πρακτικά να τα σταθμίσουμε καθώς και να εκτιμήσουμε κινδύνους ανάλογα με την κατανομή πιθανοτήτων που θα προκύψει απο το εκάστοτε στοχαστικό μοντέλο που θα επιλέξουμε.

Κεφάλαιο 3

Υποχρεώσεις του Ταμείου

3.1 Μέθοδοι Αποτίμησης

3.1.1 Μέθοδος της πιστωτικής μονάδας (Unit Credit)

Ως σημείο αναφοράς λαμβάνουμε υπόψην μας την ημερομηνία αποτίμησης. Έτσι λοιπόν θεωρούμε οτι η αναλογιστική υποχρέωση την ημερομηνία αυτή θα είναι ίση με την συσσωρευμένη υποχρέωση από την ημερομηνία εισαγωγής (entry age) έως την ημερομηνία αποτίμησης. Στην Unit Credit δεν χρησιμοποιούμε μισθολογική κλίμακα.

Έτσι λοιπόν η αναλογιστική υποχρέωση (Actuarial Liability) για έναν ασφαλισμένο ηλικίας x θα είναι:

$$AL_x = B_x \frac{D_r}{D_x} \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

ή εναλλακτικά

$$AL_x = B_x \cdot u^{r-x} \cdot {}_{r-x}p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

Ουσιαστικά αυτό που μας δείχνει η αναλογιστική υποχρέωση είναι οτι το κανονικό κόστος (Normal Cost) θα είναι ίσο με

$$NC_x = b_x \cdot \frac{D_r}{D_x} \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

ή εναλλακτικά

$$NC_x = b_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

Για ευκολία έχουμε χρησιμοποιήσει την συνάρτηση μετατροπής

$$D_x = l_x \cdot u^x$$

όπου u είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας και ισούται με $\frac{1}{1+i}$.
Στην ουσία όπως μας δείχνει η συνάρτηση του Κανονικού Κόστους, παρατηρούμε ότι το κανονικό κόστος λειτουργεί σαν απόσβεση για την παρούσα αξία των μελλοντικών παροχών $PVFB_a$ από την ηλικία α έως την ηλικία συνταξιοδότησης r.
Ενδεικτικά η σχέση αυτή θα είναι ίση με

$$PVFB_a = \sum_{t=\alpha}^{r-1} NC_t \cdot u^{t-a} \cdot_{t-\alpha} p_\alpha^T$$

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται ότι

$$B_r \cdot u^{r-\alpha} \cdot_{r-\alpha} p_\alpha^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)} = \sum_{t=\alpha}^{r-1} (b_t \cdot u^{r-t} \cdot_{r-t} p_t^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}) \cdot u^{t-\alpha} \cdot_{t-\alpha} p_\alpha^T$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$_{r-t}p_t^T \cdot_{t-a} p_a^T =_{r-a} p_a^T$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$B_r = \sum_{t=\alpha}^{r-1} b_t$$

Έτσι λοιπόν η συνολική αναλογιστική υποχρέωση όλων των ασφαλισμένων θα είναι ίση με

$$TAL = \sum B_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για όλους τους ασφαλισμένους ενός ταμείου που βρίσκονται στην ηλικία x.
Το αντίστοιχο συνολικό Κανονικό Κόστος (Normal Cost) θα είναι ίσο με

$$TNC = \sum NC_x = \sum B_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

Η σχέση που συνδέει την αναλογιστική υποχρέωση με το κανονικό κόστος είναι

$$\frac{AL_x}{NC_x} = \frac{B_x \dfrac{D_r^\tau}{D_x} \ddot{\alpha}_r^{(12)}}{b_x \dfrac{D_r^\tau}{D_x} \ddot{\alpha}_r^{(12)}} = \frac{B_x}{b_x}$$

3.1.2 Μέθοδος της Προβεβλημένης Πιστωτικής Μονάδας (Projected Unit Credit)

Στην Μέθοδο της Προβεβλημένης Πιστωτικής Μονάδας (Projected Unit Credit) χρησιμοποιούμε καποια συγκεκριμένη υπόθεση για την μισθολογική κλίμακα του ασφαλισμένου.Αν υποθέσουμε ότι η παροχή ειναι σταθερή καθόλη τη διαρκεια του εργασιακού βίου του ασφαλισμένου, τότε η προβεβλημένη παροχή κατανέμεται ομοιόμορφα κατά τη διαρκεια της υπηρεσίας του ασφαλισμένου.Έτσι λοιπόν θεωρούμε την παροχή ως ποσοστιαία συνάρτηση του μισθού (ξ).

Έτσι λοιπόν ισχύει ότι

$$B_x = \xi \cdot S_{r-1} \cdot (x-a)$$

Η αναλογιστική υποχρέωση θα είναι ίση με

$$AL_x = B_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

ενώ το Κανονικό Κόστος (Normal Cost) θα είναι ίσο με

$$NC_x = b_x \cdot \frac{D_r}{D_x} \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

Έτσι λοιπόν η συνολική αναλογιστική υποχρέωση για μια ομάδα ασφαλισμένων που βρίσκονται στην ηλικία χ θα ειναι

$$TAL = \sum B_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

και το αντίστοιχο συνολικό Κανονικό Κόστος για αυτή την ομάδα ασφαλισμένων που βρίσκονται στην ηλικία x θα είναι

$$TNC = \sum NC_x = \sum B_x \cdot u^{r-x} \cdot_{r-x} p_x^T \cdot \ddot{\alpha}_r^{(12)}$$

3.2 Ελαχιστοποίηση των κινδύνων των συνταξιοδοτικών ταμείων, μέσω των εισφορών και της επιλογής χαρτοφυλακίου

3.2.1 Εισαγωγή

Με βάση την μελέτη των Fombellida and Zapatero(2001), σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων παροχών ενός συστήματος συνταξιοδότησης είναι συνηθισμένο να εφαρμόζονται οι γνωστές Αναλογιστικές Μέθοδοι Κόστους, οι οποίες επιτρέπουν να προσδιοριστεί ένα ιδανικό ποσοστό εισφοράς ή ένα κανονικό κόστος και το ιδανικό επίπεδο του ενεργητικού του ταμείου, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις που έχει απέναντι στους ασφαλισμένους κάθε χρονική στιγμή. Η παρουσία απροσδόκητων καταστάσεων μπορούν να προκαλέσουν διαταραχές στο πλάνο του Ταμείου. Επιπλέον, το ποσοστό εισφοράς πρέπει να είναι το κανονικό κόστος με επιπλέον μια θετική ή αρνητική αύξηση, το λεγόμενο συμπληρωματικό κόστος. Το ενεργητικό του ταμείου χτίζεται μέσω των εισφορών και των προσόδων από τις επενδύσεις. Ο ρόλος επομένως του διαχειριστή του ταμείου είναι να ελέγχει τόσο τις εισφορές όσο και το ποσό που επενδύεται σε ένα χαρτοφυλάκιο από n περιουσιακά στοιχεία που εμπεριέχουν κίνδυνο και ένα ακίνδυνο χρεόγραφο.

Οι δύο βασικοί τύποι κινδύνων που αντιμετωπίζει το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα είναι ο κίνδυνος του ποσοστού εισφοράς (contribution rate risk) και ο κίνδυνος φερεγγυότητας (solvency risk). Ο πρώτος μετριέται στο μέγεθος των αποκλίσεων των εισφορών από το κανονικό κόστος και έχει σχέση με τη σταθερότητα του σχεδίου. Ο δεύτερος κίνδυνος μετριέται μέσω της ακάλυπτης αναλογιστικής υποχρέωσης και μπορεί να χρησιμεύσει ως δείκτης της ασφάλειας του σχεδίου.
Στόχος είναι να ελέγχεται η σταθερότητα και η ασφάλεια του συνταξιοδοτικού προγράμματος ελαχιστοποιώντας κάποιο κυρτό συνδυασμό των δύο κινδύνων. Με αυτόν τον τρόπο, η βαρύτητα στον κυρτό συνδυασμό μετράει τη σχετική σημαντικότητα του κινδύνου. Η επίτευξη της λύσης είναι μία Pareto βελτιστοποίηση ενός πολλαπλών στόχων προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να μειώνεται ο ένας κίνδυνος, χωρίς να

αυξάνεται ο άλλος. Επισημαίνουμε επίσης ότι δεν επιτρέπεται στο ταμείο δεν επιτρέπεται να προβαίνει σε ανοικτές πωλήσεις χρεογράφων.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι η παρουσία ενός μη πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Επίσης, τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου μπορούν να επενδυθούν σε $n+1$ τίτλους, n από τους οποίους ακολουθούν συσχετισμένες γεωμετρικές κινήσεις Brown. Ο τίτλος που δεν περιέχει κίνδυνο είναι σταθερός στο χρόνο. Επομένως τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου υπακούουν σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, στενά συνδεδεμένη με εκείνη που πρότεινε ο Merton (1971) για την επιλογή χαρτοφυλακίου.

Οι Haberman και Sung (1994) θεωρούν την ελαχιστοποίηση ενός γραμμικού συνδυασμού των προαναφερόμενων κινδύνων σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, τόσο σε ντετερμινιστικά όσο και σε στοχαστικά πλαίσια. Οι συγγραφείς δεν εξετάζουν την επένδυση ως μια συντελεστική μεταβλητή, αλλά όλα τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου επενδύονται με απόδοση μη σταθερή, αλλά που μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή. Σαν συνέπεια το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι ένα τετραγωνικό γραμμικό, το οποίο μπορεί να λυθεί. Παρόλο που στο πρόβλημα η αντικειμενική συνάρτηση είναι τετραγωνική, η δυναμική είναι μη-γραμμική, έτσι το πρόβλημα ελέγχου είναι μη γραμμικό τετραγωνικό. Ωστόσο είναι εφικτό να βρεθεί μια λύση κλειστού τύπου για το πρόβλημα βέλτιστης διαχείρισης των συνταξιοδοτικών ταμείων.

Ο Brien (1987) αναλύει ένα στοχαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης ελέγχου, το οποίο δείχνει δύο πηγές αβεβαιότητας, τις αποδόσεις της επένδυσης και το αποτέλεσμα των καταβαλλόμενων ποσών στους ασφαλισμένους. Ο συγγραφέας κάνει μια γραμμική προσέγγιση του εκθετικού μοντέλου του ταμείου. Όμως καμία επενδυτική απόφαση δεν είναι διαθέσιμη για το διαχειριστή, ο οποίος θέλει να διατηρείται ένας σταθερός λόγος χρηματοδότησης στο ταμείο και επιζητεί μικρή διακύμανση του ποσοστού εισφοράς από το μηδέν.

Ο Cairns (2000) επιτυγχάνει παρόμοια αποτελέσματα για ένα πιο γενικό πρόβλημα, όπου η συνάρτηση ζημιών είναι της ίδιας μορφής με αυτό που πρότειναν οι Haberman kai Sung (1994). Ο Cairns παρέχει ένα πιο γενικό πλαίσιο για τη μοντελοποίηση και τον έλεγχο των συνταξιοδοτικών ταμείων. Θεωρεί n περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο και ένα χωρίς κίνδυνο, καθώς καιτην ύπαρξη τυχαιότητας στις παροχές των ασφαλισμένων. Δεν υπάρχει ρητή αναφορά ούτε στην αναλογιστική υποχρέωση, ούτε στο κανονικό κόστος. Εκτός από την περίπτωση της αντικειμενικής τετραγωνικής συνάρτησης, διερευνάται η περίπτωση της δυναμικής και εκθετικής συνάρτησης. Επιπλέον επιτρέπονται οι περιορισμοί στην περίπτωση των περιορισμών ως προς τις εισφορές και τη στρατηγική διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού. Όμως δεν παρέχεται απόδειξη για τη βελτιστοποίηση στην περίπτωση της ύπαρξης των περιορισμών.

3.2.2 Μαθηματικό Μοντέλο

Στην παράγραφο αυτή οι Fombellida and Zapatero(2001)υποθέτουν ότι όλες οι μεταβλητές που απαριθμούνται στο μοντέλο έχουν σχέση με τους συμμετέχοντες στο συνταξιοδοτικό ταμείο. Υποθέτουν επίσης ότι η αναλογιστική αποτίμηση για την εκτιμηση των κύριων στοιχείων του σχεδίου γίνονται κάθε στιγμή.
Συμβολίζουμε με $F(t)$ την αξία των στοιχείων του ενεργητικού του ταμείου τη χρονική στιγμή t, με $C(t)$ το ποσοστό εισφοράς, ώστε να παρέχονται τα συμφωνηθέντα την περίοδο της συνταξιοδότησης, με P τις καθορισμένες παροχές για όλους τους συμμετέχοντες, με NC το κανονικό κόστος, με AL τις αναλογιστικές υποχρεώσεις, με UAL τις ακάλυπτες αναλογιστικές υποχρεώσεις , δηλαδή τη διαφορά μεταξύ των AL και $F(t)$, με SC το συμπληρωματικό κόστος ήτοι η διαφορά μεταξύ των $C(t)$ και NC.
Έστω ότι οι τιμές των P, NC και AL, είναι σταθερές. Αυτό δικαιολογείται από τους Haberman και Sung (1994), αν ο πληθυσμός θεωρηθεί στάσιμος από την αρχή και δεν σημειώνεται καμία αύξηση των μισθών (ή υπάρχει καθορισμένο ποσοστό μισθολογικού πληθωρισμού).
Οι Fombellida and Zapatero(2001) υποθέτουν ότι η αποτίμηση του σχεδίου γίνεται με σταθερό επιτόκιο δ. Οπότε τα κύρια στοιχεία του σχεδίου συνδέονται με την ισότητα

$$\delta AL + NC - P = 0$$

όπως αποδείχτηκε από τον Bowers (1976)
Ο διαχειριστής κατά τη διαδικασία χρηματοδότησης επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο n περιουσιακών στοιχείων υψηλού κινδύνου

$$S_1(t), ..., S_n(t)$$

και ένα ομόλογο

$$S_0(t), 0 \leq t < \infty$$

με τη δυναμική να δίνεται από την ισότητα

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1$$

$$dS^i(t) = S^i(b_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_j(t)), S^i(0) = s_i, 1 \leq i \leq n$$

Θεωρούμε θετικές σταθερές τα $b_i, \sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. Το διάνυσμα $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))^T$ είναι μια n-διάστατη κίνηση Brown που ορίζεται σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P), όπου F_t συμβολίζει την διήθηση που παράγεται.
Υποθέτουμε ότι οι υποχρεώσεις είναι ντετερμινιστικές. Στην περίπτωση που οι υποχρεώσεις ήταν αβέβαιες, θα ήταν πιθανό να χρησιμοποιούσαμε ένα ομόλογο του οποίου οι χρηματικές ροές θα αντιστοιχούσαν σε αυτές των υποχρεώσεων. Η έννοια της αντιστοίχισης προϋποθέτει ισορροπία μεταξύ του διαθέσιμου του ταμείου και των υποχρεωσεών του, η οποία διατηρείται στις μεταβολές των επιτοκίων.

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο r είναι αυστηρά μικρότερο από το μέση τιμή των αποδόσεων $b_i, 1 \leq i \leq n$.
Στη συνέχεια εισάγουμε

- τη μήτρα $\sigma = (\sigma_{ij})$
- το διάνυσμα-στήλη $b = (b_1, ..., b_n)^T$
- και το διάνυσμα-στήλη $\mathbf{\Lambda}(t) = (\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T$

Μια διαδικασία χαρτοφυλακίου ή μια στρατηγική διαπραγμάτευσης $\mathbf{\Lambda}(t)$ είναι μια μετρήσιμη διαδικασία προσαρμοσμένη στο F_t, R^n, έτσι ώστε

$$\int_0^\infty \|\mathbf{\Lambda}(s)\|^2 \, ds < \infty$$

για κάθε $t < \infty$.
Το $\lambda_i(t) \geq 0$ συμβολίζει το ποσοστό του ενεργητικού του ταμείου που επενδύεται από το διαχειριστή στο περιουσιακό στοιχείο i και με τη μη αρνητικότητα της σταθεράς αποφεύγεται η ανοικτή πώληση.
Η διαδικασία του ποσού εισφορών $C(t)$ είναι μια μετρήσιμη προσαρμοσμένη διαδικασία στο F_t

$$\int_0^t |C(s)|^2 \, ds < \infty$$

για κάθε $t < \infty$

$$E_{F_0} \int_0^\infty exp(-pt)(\beta \cdot SC^2(t) + (1-\beta)UAL^2(t))dt < \infty$$

Όπου με E_{F_0} συμβολίζουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή με βάση την F_0
Η ποσότητα $\lambda_i(t)F(t)$ αντιπροσωπεύει το συνολικό ποσό που επενδύθηκε στο περιουσιακό στοιχείο i, και ως εκ τούτου

$$(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t))F(t)$$

είναι το ποσό που επενδύθηκε στο ομόλογο. Οι συνολικές εισφορές στο χρόνο t δίνονται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^t C(s)ds$$

Κατά το πρότυπο του Merton (1971), υποθέτουμε ότι οι αλλαγές στην αξία του ταμείου προέρχονται από τις αλλαγές στις τιμές του ενεργητικού, στο επιτόκιο του ομολόγου και των εισφορών. Επομένως:

$$dF(t) = F(t)(\sum_{i=1}^n \mathbf{\Lambda}_i(t) \frac{dS^i(t)}{S^i(t)}) + F(t)(1 - \sum \lambda_i(t)) \frac{dS^0(t)}{S^0(t)} + (C(t) - P)dt$$

Επομένως το ποσό του ταμείου θα ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dF(t) = (rF(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(b_i - r)F(t) + C(t) - P)dt + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i(t)\sigma_{ij}F(t)dW_j(t)$$

με αρχική συνθήκη

$$F(0) = F_0 > 0$$

Ο συμμετρικός πίνακας $\Sigma = \sigma\sigma^T$ είναι θετικά ορισμένος. Συμβολίζουμε με

$$\theta = \sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})$$

την τιμή αγοράς του κινδύνου, όπου $\mathbf{1}$ δηλώνει ένα διάνυσμα με μονάδες.

3.2.3 Βελτιστοποίηση Προβλήματος Ελέγχου του Συνταξιοδοτικού Ταμείου

Η συνάρτηση αξίας του προβλήματος ελέγχου είναι μια γενικευμένη λύση της εξίσωσης Hamilton- Jacobi- Bellman. Η συνάρτηση αξίας ορίζεται ως

$$\widehat{V}(F) = inf_{(C,\mathbf{\Lambda})\in A_{F_0}} J(F, C, \mathbf{\Lambda})$$

υπό τον περιορισμό

$$dF(t) = (rF(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(b_i - r)F(t) + C(t) - P)dt + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i(t)\sigma_{ij}F(t)dW_j(t)$$

Η ελάχιστη τιμή των αποκλίσεων από τους στόχους, όταν ο αρχικός πλούτος του ταμείου είναι F ορίζεται από την συνάρτηση $\widehat{V}(F)$. Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι αυτόνομο και ο χρονικός ορίζοντας απεριόριστος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι χρονικά ανεξάρτητο το $\widehat{V}$. Είναι ξεκάθαρο ότι η συνάρτηση αξίας είναι μη αρνητική, αυστηρά κυρτή και $\widehat{V}(AL) = 0$. Η σύνδεση μεταξύ των συναρτήσεων αξίας στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου και των ελέγχων βέλτιστων ανατροφοδοτήσεων επιτυγχάνεται από την HJB εξίσωση. Για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των συνταξιοδοτικών ταμείων, η HJB εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} pV(F) = min_{C,\mathbf{\Lambda}\geq 0} \{&\beta(C - NC)^2 + (1-\beta)(AL - F)^2 \\ &+ (rF + \mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{b} - r\mathbf{1})F + C - P)V'(F) \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}^T\Sigma\mathbf{\Lambda}F^2V''(F) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Κάθε φορά που μια λύση V της παραπάνω εξίσωσης είναι αρκετά ομαλή, η ελαχιστοποίηση δίνεται από:

$$\widetilde{C}(V^{'}(F)) = NC - \frac{1}{2\beta}V^{'}(F)$$

$$\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(V^{'}(F), V^{''}(F)) = \left(-\frac{V^{'}(F)}{FV^{''}(F)}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})\right)_{+}$$

Δεδομένου το $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n, \boldsymbol{\alpha}_+$ δηλώνει ότι το διάνυσμα για το οποίο το σημείο i είναι το $max(\alpha_i, 0)$. Οι δυο παραπάνω εξισώσεις είναι ο σύνδεσμος μεταξύ της εξίσωσης HJB και του βέλτιστου ελέγχου του προβλήματος. Στοχεύοντας να υπολογίσουμε το V κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις

- Οι αποκλίσεις του πλούτου του ταμείου από την αναλογιστική υποχρέωση τιμωρούνται έτσι ώστε να είναι μηδέν αν $F > AL$, επειδή οι μέσοι των αποδόσεων τους είναι υψηλότεροι του ομολόγου.
- Η συνάρτηση αξίας $\widehat{V}$ είναι λύση μόνο αν είναι αρκετά ομαλή.

Βασισμένοι στα παραπάνω , υποθέτουμε:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}(F) = \begin{cases} -\frac{V^{'}(F)}{FV^{''}(F)}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1}) & \text{αν} \quad F < AL \\ 0 & \text{αν} \quad F > AL \end{cases}$$

όπου $\mathbf{0}$ είναι διάνυσμα-στήλη από μηδενικά, και

$$V(F) = \begin{cases} a(AL - F)^2 & \text{αν} \quad F < AL \\ \xi(AL - F)^2 & \text{αν} \quad F > AL \end{cases}$$

ως μια ομαλή λύση στις περιοχές $F < AL$ και $F > AL$ με εξαίρεση το σημείο $F = AL$. Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην τελική μορφή της HJB εξίσωσης προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες που πρέπει να ικανοποιούν οι θετικές σταθερές α, ξ

$$a^2 + \beta(p - 2r + \theta\theta)a - \beta(1 - \beta) = 0$$

$$\xi^2 + \beta(p - 2r)\xi - \beta(1 - \beta) = 0$$

Επίσης, το V ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$V^{'}(AL^{-}) = V^{'}(AL^{+}) = 0$$

$$V^{''}(AL^{+}) = 2a > 2\xi = V^{''}(AL^{-})$$

Για να επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα της υπόθεσης ότι το V συμπίπτει με την συνάρτηση αξίας $\widehat{V}$. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε ένα γενικευμένο κανόνα του $It\widehat{o}$.

Θεώρημα 3.2.1. *Το βέλτιστο ποσό εισφοράς στην ανατροφοδοτική μορφή δίνεται από:*

$$C^*(F) = \begin{cases} NC + \frac{a}{\beta}(AL - F) & \text{αν} \quad F < AL, \\ NC + \frac{\xi}{\beta}(AL - F) & \text{αν} \quad F > AL \end{cases}$$

Η βέλτιστη πολιτική επενδύσεων είναι

$$^*(F) = \begin{cases} \frac{AL-F}{F}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{b} - r) & \text{αν} \quad 0 < F < AL, \\ 0 & \text{αν} \quad F > AL \end{cases}$$

Το a είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$$a^2 + \beta(p - 2r + \theta^T\theta)a - \beta(\beta - 1) = 0$$

που επαληθεύει την

$$a > \beta(r - \theta^T\theta)$$

και ξ είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$$\xi^2 + \beta(p - 2r)\xi - \beta(\beta - 1) = 0$$

έτσι ώστε

$$\xi > \beta r$$

Σημειώνεται ότι η εξίσωση HJB δεν είναι ανομοιόμορφα ελλειπτική επειδή ο δεύτερος όρος

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^T\Sigma\boldsymbol{\Lambda}F^2V''(F)$$

γίνεται μηδέν όταν $\boldsymbol{\Lambda} = 0$, έτσι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ύπαρξη μιας ομαλής λύσης της εξίσωσης. Πράγματι η βέλτιστη λύση $\boldsymbol{\Lambda}^*$ τείνει στο μηδέν, όταν F τείνει στο AL. Οι εκφράσεις για το βέλτιστο ποσό των εισφορών και του βέλτιστου διανύσματος των επενδύσεων δεδομένου του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί εκ νέου :

$$SC = \begin{cases} \frac{a}{\beta}UAL & \text{αν} \quad UAL > 0 \\ \frac{i}{\beta}UAL & \text{αν} \quad UAL < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^*(F)F = \begin{cases} UAL\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1}) & \text{αν} \quad UAL > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad UAL < 0 \end{cases}$$

Το διάνυσμα των συνολικών επενδύσεων $\boldsymbol{\Lambda}^*F$ είναι ένα σταθερό ποσοστό ασφαλιστικών συμβολαίων στην περιοχή $UAL > 0$, επειδή ανεξάρτητα από το χάσμα μεταξύ του πλούτου του ταμείου και το στόχο, το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται στις επικίνδυνες μετοχές είναι σταθερό. Έτσι, ο διαχειριστής του σχεδίου γίνεται όλο και πιο επιφυλακτικός καθώς ο πλούτος του ταμείου προσεγγίζει την αξία των αναλογιστικών υποχρεώσεων. Αυτό σημαίνει ότι επενδύονται λιγότερα σε κάθε χρονική στιγμή, φτάνοντας μέχρι και σε μηδενικές επενδύσεις στο όριο. Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν και για το βέλτιστο

ποσοστό εισφοράς στις περιοχές $UAL > 0$ και $UAL < 0$. Ας παρατηρήσουμε ότι το συμπληρωματικό κόστος εξαρτάται από το β, αλλά όχι και η επενδυτική στρατηγική.
Η βέλτιστη διαδικασία χρηματοδότησης μπορεί να συνοψιστεί στους εξής δύο κανόνες: (1) να διατηρείται το συμπληρωματικό κόστος ανάλογο με την ακάλυπτη αναλογιστική υποχρέωση, με διαφορετικές σταθερές της αναλογικότητας α/β ή ξ/β , όσο ο πλούτος του ταμείου είναι κάτω ή πάνω από την αναλογιστική υποχρέωση, αντίστοιχα, (2) να γίνει μια επένδυση στα επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία ανάλογα με την ακάλυπτη αναλογιστική υποχρέωση κάθε φορά που ο πλούτος του ταμείου είναι κάτω από το στόχο. Δεν γίνονται επενδύσεις σε κάθε άλλη περίπτωση.
Αν και η συμπεριφορά των επενδύσεων φαίνεται να είναι παράδοξη, θυμίζουμε ότι ο πρότερος στόχος του διαχειριστή είναι να μειωθούν οι κίνδυνοι που είναι συνυφασμένοι με τη χρηματοδότηση της διαδικασίας, και όχι η μεγιστοποίηση του πλούτου του ταμείου. Είναι πολύ ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι το βέλτιστο συμπληρωματικό κόστος για το πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί σε μια μέθοδο ανοίγματος της εισφοράς, δηλαδή, είναι ανάλογη με την ακάλυπτη αναλογιστική υποχρέωση. Αυτή η μέθοδος χρηματοδότησης είναι πολύ συνηθισμένη στη βιβλιογραφία και έχει αποδειχθεί ότι έχει καλές ιδιότητες για τη σταθεροποίηση του συνταξιοδοτικού προγράμματος.
Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου με βάση τον Haberman, εκτός από την περίπτωση της αντικειμενικής τετραγωνικής συνάρτησης, υφίσταται και η περίπτωση της δυναμικής μορφής και μορφής δυναμοσυνάρτησης και επιπλέον επιτρέπονται οι περιορισμοί ως προς την στρατηγική εισφορών και τη στρατηγική διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου.
Από το θεώρημα 3.2.1 προκύπτει ότι η σταθερά της αναλογικότητας είναι διαφορετική στις περιοχές $F < AL$ και $F > AL$, και γίνεται υψηλότερη στην τελευταία περιοχή όπου $\xi > a$. Το γεγονός αυτό έχει μια εύκολη εξήγηση, ότι η συνθήκη της μη χρήσης ανοικτής πώλησης για τα ποσά που επενδύονται στα επισφαλή περιουσιακά στοιχεία τεκμαίρει μεγαλύτερη μείωση στο ποσοστό της εισφοράς για την περιοχή όπου $F > AL$ σε σχέση με εκείνη την περιοχή όπου υπάρχει το πρόβλημα ελέγχου χωρίς περιορισμούς. Αν η ανοικτή πώληση είναι πιθανή τότε η μορφή του $C(t)$ είναι ίδια και στις δυο περιοχές. Σε αυτή την περίπτωση η μείωση του επιπέδου των διαθεσίμων όταν $F > AL$ γίνεται ακολουθώντας μια επενδυτική στρατηγική που να λαμβάνει υψηλό κίνδυνο και χαμηλές αναμενόμενες αποδόσεις. Με τον περιορισμό της ανοικτής πώλησης, το ποσό εισφοράς αλλάζει προκειμένου να αποκτήσει το ταμείο την ιδανική αξία. Με τον τρόπο αυτό η στρατηγική επένδυση στην περιοχή $F > AL$ είναι χωρίς κίνδυνο και με χαμηλή αναμενόμενη απόδοση. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα υποστήριξαν οι Boulier (1995) και Cairns (2000). Η σταθεροποίηση της διαδικασίας χρηματοδότησης γύρω από ένα στόχο δεν αποτελεί πρωταρχικό στόχο της διαχείρισης και το γεγονός ότι το ιδανικό επίπεδο εισφορών είναι μηδέν είναι τα στοιχεία που αιτιολογούν την αντίθεση που προαναφέραμε. Το πρόβλημα προκύπτει από το γεγονός της παρουσίας των περιορισμών της συνάρτησης αξίας, οι οποίες δεν είναι πλέον του τετραγωνικού τύπου.
Ας σημειωθεί ότι ο δανεισμός με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r είναι ο βέλτιστος όταν επενδυθεί σε περιουσιακό στοιχείο $i(\lambda_i > 1)$, όποτε το επίπεδο του ταμείου είναι κάτω

από την κρίσιμη τιμή

$$\frac{e_i \Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})}{e_i(\mathbf{1} + \Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1}))}$$

όπου $e_i = (0, ..., 1^{(i)}, 0, ..., 0)$.
Το βασικό ενδιαφέρον του διαχειριστή είναι να διατηρήσει τα ποσό των εισφορών και το επίπεδο των διαθεσίμων όσο το δυνατό πιο κοντά στις ιδανικές τιμές.

Αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\xi^2 + \beta(p - 2r)\xi - \beta(\beta - 1) = 0$$

$$\xi > \beta r$$

τότε

1. Τα διαθέσιμα, το ποσό της εισφοράς και η συνολική επένδυση όπως και οι υπό συνθήκη μέσες τιμές τους συγκλινου σχεδόν βέβαια στην αναλογιστική υποχρέωση, στο κανονικό κόστος και στο μηδέν, αντίστοιχα,δηλαδή:

$$lim_{t\to\infty} E_{F_0} F^*(t) = AL$$

$$lim_{t\to\infty} E_{F_0} C^*(t) = NC$$

$$lim_{t\to\infty} E_{F_0} \mathbf{\Lambda}^* F^*(t) = 0$$

2. Αν οι παράμετροι του προβλήματος επαληθεύουν την ανισότητα

$$\alpha > \beta(r - \frac{1}{2}\theta^T\theta),$$

τότε η διακύμανση των διαθέσιμων,του ποσοστού εισφοράς και των συνολικών επενδύσεων συγκλίνουν στο μηδέν, δηλαδή

$$lim_{t\to\infty} Var_{F_0} F^*(t) = 0$$

$$lim_{t\to\infty} Var_{F_0} C^*(t) = 0$$

$$lim_{t\to\infty} Var_{F_0} \mathbf{\Lambda}^* F^*(t) = 0$$

Είδαμε ότι η διαδικασία της χρηματοδότησης δεν φτάνει ποτέ στην κάλυψη των αναλογιστικών υποχρεώσεων με θετική πιθανότητα σε πεπερασμένο χρόνο, παρόλο που αυτή η τιμή είναι ένα ελκυστικό φράγμα. Δηλαδή η υπό συνθήκη πιθανότητα το F^*να λάβει την τιμή AL πριν από οποιαδήποτε άλλη τιμή τείνει στο 1 καθώς το χάσμα μεταξύ των AL και F^* συρρικνώνεται.Αυτό σημαίνει ότι αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2 + \beta(p - 2r)\alpha - \beta(\beta - 1) = 0$$

$$\alpha > \beta r$$

τότε το AL είναι ένα ανέφικτο και ελκυστικό φράγμα για το F^*.

3.3 Αριθμητική Έφαρμογή

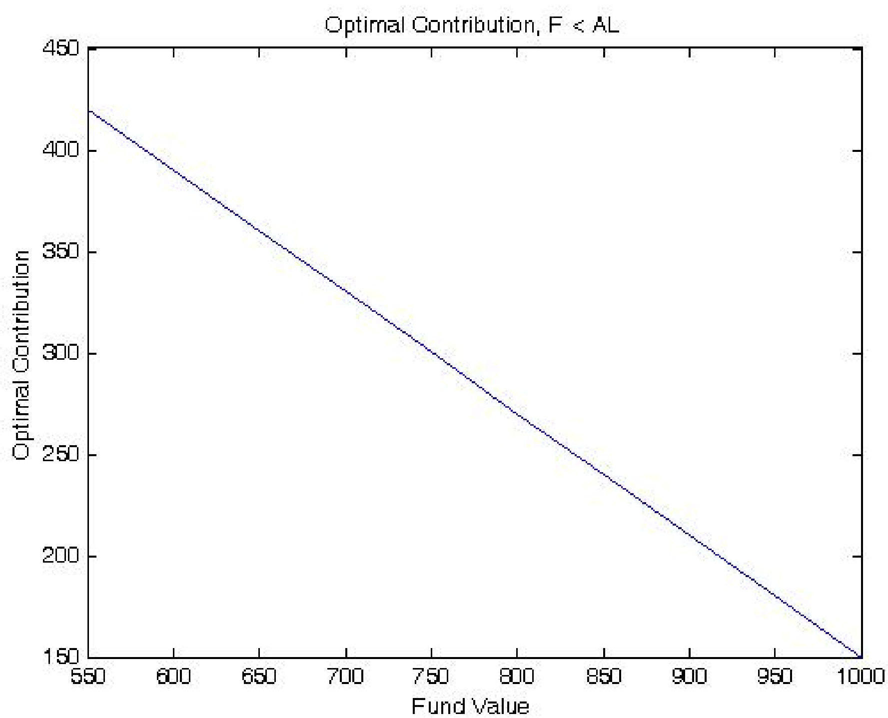
Πίνακας 1. Πίνακας Διασπορών - Συνδιασπορών

	Χρεόγραφο 1	Χρεόγραφο 2	Χρεόγραφο 3
Χρεόγραφο 1	0.2000	0.1500	0.0500
Χρεόγραφο 2	0.1500	0.3000	0.1000
Χρεόγραφο 3	0.0500	0.1000	0.4000

Έστω ότι το Ταμείο επενδύει σε τρία χρεόγραφα τα οποία ακολουθούν την γεωμετρική κίνηση Brown. Θεωρούμε ότι τα χρεόγραφα αυτά έχουνε μέση απόδοση $b = 7\%, 10\%, 15\%$. Αντίστοιχα ο πίνακας διασπορών-συνδιασπορών παρατίθεται στον Πίνακα 1. Θεωρούμε επιτόκιο χωρίς κίνδυνο $r = 2\%$.
Το $\lambda_i(t)$ συμβολίζει το ποσοστό που επενδύεται σε κάθε ένα απο τα τρία χρεόγραφα. Στη συνέχεια λύνουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης στην εξίσωση HJB. και συγκεκριμένα βρίσκουμε τη λύση του προβλήματος για την περίπτωση όπου $F < AL$ και συγκεκριμένα για κανονικό κόστος $NC = 100$, αναλογιστική υποχρέωση $AL = 1000$ και με την περιουσία του ταμείου $F = 800$. Το βέλτιστο ποσό εισφοράς είναι $C = 800$ και η βέλτιστη πολιτική επενδύσεων $\mathbf{\Lambda}$ είναι $\mathbf{\Lambda} = 2\%, 3, 3\%, 7\%$. Το υπόλοιπο ποσό επενδύεται σε ένα ομόλογο S_o

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1$$

Από το παραπάνω σχήμα επιβεβαιώνονται τα προαναφερθέντα στην περίπτωση που ισχύει ότι $F < AL$, που πρακτικά σημαίνει ότι το ταμείο διαθέτει μειωμένο πλούτο σε σχέση με την αναλογιστική υποχρέωση η βέλτιστη εισφορά αυξάνεται, ενώ στην περίπτωση όπου θα ίσχυε ότι $F > AL$ η βέλτιστη εισφορά εμφανίζεται μειωμένη.



Σχήμα 3.1: Βέλτιστη εισφορά για $F < AL$

Κεφάλαιο 4

Βέλτιστη Διαχείριση Κινδύνου ενός Συνταξιοδοτικού Ταμείου Καθορισμένων Παροχών σε Στοχαστικό Περιβάλλον

4.1 Εισαγωγή

Η επιλογή της βέλτιστης χρηματοδότησης του ταμείου παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον. Υπάρχουν τρία εναλλακτικά σχέδια για τα διαθέσιμα του ταμείου:

1. τα διαθέσιμα του ταμείου επενδύονται με σταθερό επιτόκιο,
2. τα διαθέσιμα του ταμείου επενδύονται σε ένα χαρτοφυλάκιο με n επισφαλή χρεόγραφα και ένα χρεόγραφο που δεν περιέχει κίνδυνο,
3. υποθέτουμε ότι το επιτόκιο των αποδόσεων του Ταμείου είναι στοχαστικό.

Το πρόβλημα επιλύεται κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, που εξαρτώνται από το σενάριο που επιλέγεται, οι οποίες αφορούν το τεχνικό επιτόκιο και την εξέλιξη των υποχρεώσεων.

4.2 Μοντελοποίηση του Συνταξιοδοτικού Ταμείου

Στην παράγραφο αυτή ακολουθώντας τους Fombellida and Zapatero(2004)θα αναπτύξουμε την βέλτιση διαχείριση κινδύνων σε στοχαστικό περιβάλλον.
Το υπό εξέταση μοντέλο σύνταξης αναφέρεται σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο, τύπου καθορισμένης παροχής. Σε ένα ταμείο καθορισμένης παροχής, οι παροχές καθορίζονται

εκ των προτέρων από το διαχειριστή του ταμείου, με τη χρήση συγκεκριμένου τύπου και με βάση ένα ντετερμινιστικό πλαίσιο. Αν υπάρχει αβεβαιότητα σε κάποια στοιχεία του σχεδίου, όπως για παράδειγμα στον πληθυσμό, στο ρυθμό αύξησης του μισθού ή στην εκτίμηση του αριθμού συνταξιοδοτήσεων, τότε το καλύτερο που έχει να κάνει ο διαχειριστής είναι να μοντελοποιήσει την υπάρχουσα αβεβαιότητα. Οι εισφορές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσα για τη διατήρηση των διαθεσίμων του ταμείου σε ικανοποιητικά επίπεδα.
Το βασικό χαρακτηριστικό του σχεδίου είναι η αναλογιστική αποτίμηση των κύριων στοιχείων του κάθε στιγμή. Η αποτίμηση του σχεδίου γίνεται με σταθερό επιτόκιο δ, το οποίο ονομάζεται τεχνικό επιτόκιο.
Συμβολίζουμε με:

- $F(t)$ την αξία των στοιχείων του ενεργητικού του ταμείου τη χρονική στιγμή t,
- με $C(t)$ το ποσοστό εισφοράς, ώστε να παρέχονται τα συμφωνηθέντα την περίοδο της συνταξιοδότησης,
- με $P(t)$ τις καθορισμένες παροχές για όλους τους συμμετέχοντες,
- με $NC(t)$ το κανονικό κόστος,
- με $AL(t)$ τις αναλογιστικές υποχρεώσεις,
- με $UAL(t)$ τις ακάλυπτες αναλογιστικές υποχρεώσεις, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ των $AL(t)$ και $F(t)$
- και με με $SC(t)$ το συμπληρωματικό κόστος, ήτοι η διαφορά μεταξύ των $C(t)$ και $NC(t)$.

Οι Josa - Fombellida και Rincon - Zapatero (2004) θεώρησαν ότι οι τιμές των $P(t)$, $NC(t)$ και $AL(t)$ ήταν σταθερές στο χρόνο και ίσες με P, NC και AL.Μια πιο ρεαλιστική υπόθεση είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη διαταραχών που επηρεάζουν την εξέλιξη των παροχών, και επομένως την εξέλιξη του κανονικού κόστους και των αναλογιστικών υποχρεώσεων.
Για να μοντελοποιήσουμε την πιθανότητα αυτή, θεωρούμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, όπου $\mathcal{F}^s = \{\mathcal{F}_t\}, t \geq 0$ είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μία μονοδιάστατη κίνηση Brown $B(t)$ για $t \geq 0$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στο Ω. Μία από τις πιο γενικές υποθέσεις οσον αφορά το $\mathbb{P}$ είναι να υποθέσουμε ότι είναι μια διαδικασία *Itô* συνεχής και ορισμένη στο

$$(\Omega, F, \mathbb{P})$$

δηλαδή:

$$P(t) = P_0 + \int_0^t \mu(P(s), s)ds + \int_0^t \eta(P(s), s)dB(s)$$

όπου ισχύει $t \geq 0$ και με P_0 συμβολίζουμε τις αρχικές υποχρεώσεις.
Αυτή η διατύπωση μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι ο πληθυσμός του σχεδίου υπόκειται

σε διαταραχές.
Οι παροχές που συσσωρεύει ο ασφαλισμένος κατά τη διάρκεια του εργασιακού του βίου κατανέμονται σύμφωνα με τη συνάρτηση κατανομής M με συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας m. Για την ηλικία x, η τιμή $M(x)$ αντιπροσωπεύει το ποσοστό της αναλογιστικής αξίας των μελλοντικών παροχών, που έχουν συγκεντρωθεί ως την ηλικία x. Η συνάρτηση m είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, d]$, με $m(x) = 0$, αν $x \leq a$ ή $x \geq d$. Θεωρούμε ότι όλα τα μέλη του ταμείου εισέρχονται στο πρόγραμμα σε ηλικία a, ενώ η κοινή ηλικία συνταξιοδότησης είναι d.
Κατά την ντετερμινιστική προσέγγιση, οι στοχαστικές αναλογιστικές υποχρεώσεις και το στοχαστικό κανονικό κόστος ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$AL(t) = \int_{\alpha}^{d} e^{-\delta(d-x)} M(x) E(P(t+d-x)|\mathcal{F}_t) dx$$

και

$$NC(t) = \int_{\alpha}^{d} e^{-\delta(d-x)} m(x) E(P(t+d-x)|\mathcal{F}_t) dx$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε $t \geq 0$, όπου $E(.|\mathcal{F}_t)$ συμβολίζει την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή σύμφωνα με τη διήθηση που παράγεται από την τυποποιημένη κίνηση Brown$\{B(t)\}_{t\geq 0}$ Έτσι για να υπολογιστούν οι αναλογιστικές συναρτήσεις στο χρόνο t, ο διαχειριστής χρησιμοποιεί την πληροφορία, η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι τη στιγμή t,χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Η P ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα (Oksendal, 1998), οπότε η ύπό συνθήκη μέση τιμή ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$ είναι ίση με την τιμή της P τη χρονική στιγμή t.
Ένα τυπικό μοντέλο το οποίο παρουσιάζεται στην υπόθεση Α είναι το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown για τις τιμές των παροχών P.

Υπόθεση Α. Θεωρούμε ότι οι παροχές P ακολουθούν μία γεωμετρική κίνηση Brown, συνεπώς ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \eta P(t)dB(t),$$

με $t \geq 0$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{R}_+$. Η αρχική συνθήκη $P(0) = P_0$, είναι μια τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τις αρχικές υποχρεώσεις. Συνεπώς οι παροχές αυξάνονται ή μειώνονται κατά μέσο όρο με σταθερό εκθετικό ρυθμό.
Καταλήγουμε λοιπόν ότι η συμπεριφορά των αναλογιστικών συναρτήσεων AL και NC δίνονται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.1. *Σύμφωνα με την Υπόθεση Α, υπάρχουν σταθερές ψ_{AL} και ψ_{NC}, έτσι ώστε $AL = \psi_{AL} P$ και $NC = \psi_{NC} P$. Επιπλέον, $\psi_{NC} = 1 + (\mu - \delta)\psi_{AL}$ και η ταυτότητα $(\delta - \mu)AL(t) + NC(t) - P(t) = 0$ ισχύει για κάθε $t \geq 0$.*

Από την παραπάνω πρόταση, καταλήγουμε ότι:

$$dAL(t) = \mu AL(t)dt + nAL(t)dB(t),\ AL(0) = \psi_{AL}P_0 \tag{4.1}$$

Επίσης,

$$dAL(t) = (\delta AL(t)dt + NC(t) - P(t))\, dt + nAL(t)dB(t).$$

Η εξίσωση αυτή είναι ανάλογη με αυτή που εμφανίζεται στην ντετερμινιστική περίπτωση, βλέπε για παράδειγμα (Bowers et al., 1986).

4.3 Βέλτιστη χρηματοδότηση στην περίπτωση ασφαλούς επένδυσης

Μια πρώτη προσέγγιση για τη διαχείριση ενός προγράμματος καθορισμένων παροχών είναι να θεωρήσουμε ότι το σύνολο της περιουσίας του ταμείου επενδύεται σε μια σταθερή και ασφαλή επένδυση με απόδοση r. Σε αυτή την περίπτωση η μοναδική πηγή αβεβαιότητας προέρχεται από τα συνολικά έξοδα για τις παροχές.
Θεωρούμε ένα ομόλογο S^0, το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt,\ S^0(0) = 1$$

όπου $r > 0$ είναι το σταθερό επιτόκιο.

Η εξέλιξη της αξίας του ταμείου δίνεται από τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$dF(t) = (rF(t) + C(t) - P(t))dt,\ t \geq 0 \tag{4.2}$$

με αρχική συνθήκη $F(0) = F_0 > 0$.

Στο πρόβλημα ελέγχου η μόνη μεταβλητή απόφασης του διαχειριστή είναι των ποσοστό εισφορών C, για το οποίο υποθέτουμε ότι είναι μια προσαρμοσμένη μετρήσιμη διαδικασία ως προς την $\mathcal{F}_t$, η οποία ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα :

$$\int_0^\infty |C(s)|\, ds < \infty \tag{4.3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.2.1 και τον ορισμό των συμπληρωματικών δαπανών για να απομακρύνουμε τις διαδικασίες P και NC από το πρόβλημα ελέγχου. Από την ισότητα :

$$(\delta - \mu)AL + NC - P = 0$$

η ισότητα (4.2) γίνεται:

$$dF(t) = (rF(t) + SC(t) + NC(t) - P(t))\,dt = (rF(t) + SC(t) + (\mu - \delta)AL(t))\,dt \tag{4.4}$$

Υποθέτουμε ότι ο διαχειριστής του ταμείου επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει τον κυρτό συνδυασμό του κινδύνου να προκύψει ζημιά και του κινδύνου αφερεγγυότητας. Έτσι ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$J((F_0, AL_0); SC) = E_{F_0,L_0} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\kappa SC^2(t) + (1-\kappa)(AL(t) - F(t))^2\right) dt \tag{4.5}$$

Επιλέγοντας ως μεταβλητή ελέγχου την SC αντί της μεταβλητής C, προκύπτει ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελέγχου. Τα A_{F_0},AL_0 είναι το σύνολο των μετρήσιμων διαδικασιών $SC = C - NC$, όπου το C ικανοποιεί την ισότητα (4.3), και τα F και AL ικανοποιούν τις ισότητες (4.4) και (4.1), αντίστοιχα. Η παράμετρος κ, όπου $0 \leq \kappa \leq 1$, είναι ένας συντελεστής στάθμισης που αντικατοπτρίζει τη σχετική σημασία των δύο κινδύνων.
Επισημαίνουμε επίσης ότι σύμφωνα με την εξίσωση (4.5) ο διαχειριστής του ταμείου δίνει την ίδια σημασία στην περίπτωση της θετικής και της αρνητικής απόκλισης των διαθεσίμων και των εισφορών του ταμείου από τους αντίστοιχους στόχους που έχουν τεθεί.
Διαφορετική είναι η προσέγγιση που δίνεται από τους Chavy et al (2003) όπου η υποχρηματοδότηση και η καταβολή μεγαλύτερων εισφορών, τιμωρείται στην ουσία περισσότερο από την υπερχρηματοδότηση και την καταβολή μικρότερων των απαραίτητων εισφορών.
Ένα βασικό ζήτημα είναι το πως θα επιλεγεί το τεχνικό επιτόκιο δ. Δεδομένου ότι υπάρχει ένα επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r στην αγορά, μια μάλλον λογική επιλογή είναι $\delta = r$. Για να γίνει πιο κατανοητό θεωρούμε ότι ο διαχειριστής δανείζεται χρήματα για να ικανοποιήσει τις υποχρεώσεις του ταμείου. Το επιτόκιο δανεισμού είναι r, έτσι ώστε η σωστή αποτίμηση του χρέους γίνεται με $\delta = r$. Έτσι θεωρούμε την ακόλουθη υπόθεση.

Υπόθεση Β. Το τεχνικό επιτόκιο είναι ίσο με το επιτόκιο της απόδοσης χωρίς κίνδυνο, $\delta = r$.
Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι η λύση του προβλήματος δίνεται από την λύση της Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωσης και δίνεται από την ελαχιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης:

$$\widehat{V}(F, AL) = min_{SC \in A_{F,AL}} \{J((F, AL); SC) \colon s.t.(4.4), (4.1)\}$$

Θεώρημα 4.3.1. *Υποθέτουμε ότι οι Υποθέσεις Α και Β ισχύουν. Αν η ανισότητα*

$$2\mu + \eta^2 < r \tag{4.6}$$

ικανοποιείται, τότε το βέλτιστο ποσοστό εισφοράς δίνεται από τον τύπο

$$C^* = NC + \frac{\alpha_{FF}}{\kappa} UAL \tag{4.7}$$

όπου α_{FF} *είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης*

$$\alpha_{FF}^2 + \kappa(p - 2r)\alpha_{FF} - \kappa(1 - \kappa) = 0 \tag{4.8}$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι:

$$E_{F_0,AL_0} F(t)^* - E_{F_0,AL_0} AL(t) = (F_0 - AL_0)e^{(r - \alpha_{FF}/\kappa)t}$$

και εαν ισχύει ότι:

$$\alpha_{FF} > \kappa r \tag{4.9}$$

τότε η διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης τιμής των περιουσιακών στοιχείων και της αναλογιστικής υποχρέωσης τείνει στο μηδέν όπως αντίστοιχα η διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης τιμής του κανονικού κόστους και των ποσοστών εισφοράς επίσης τείνει στο μηδέν. Αν $r \geq p$ η σχέση (4.9) ισχύει. Αν $r < p$ από την σχέση (4.9) συνεπάγεται ότι:

$$\kappa < \frac{1}{1 + r(p - r)}, \tag{4.10}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι αν αυξάνεται το ρ, ο διαχειριστής ενδιαφέρεται περισσότερο για το άμεσο μέλλον, τότε το βάρος του κινδύνου αφερεγγυότητας πρέπει να μειώνεται για την σταθεροποίηση του σχεδίου. Συνεπώς το ποσοστό εισφοράς αυξάνεται καθώς αυξάνεται το ρ.

4.4 Βέλτιστη χρηματοδότηση με επιλογή χαρτοφυλακίου

Στο μοντέλο αυτό εξετάζεται η διαχείριση με επενδύσεις σε n επισφαλή περιουσιακά στοιχεία. Κατασκευάζεται ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από n επισφαλή περιουσιακά στοιχεία $S^1(t), ..., S^n(t)$ και ένα ομόλογο $S^0(t), 0 \leq t \leq \infty$, με δυναμική που δίνεται από τις εξισώσεις :

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt, S^0(0) = 1 \tag{4.11}$$

$$dS^i(t) = S^i(t)\left(b_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_j(t)\right), S^i(0) = s_i, 1 \leq i \leq n \tag{4.12}$$

Τα b_i και $\sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ είναι θετικές σταθερές. Το διάνυσμα $(W_0(t), W_1(t), ..., W_n(t))^T$ είναι μία $n + 1$ διαστάσεων κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο πιθανοτήτων (Ω, Υ, P), όπου $\{\Upsilon_t\}$ συμβολίζει την συμπλήρωση της διήθησης $\sigma\left\{(W_0(s), ..., W_n(s))^T : 0 \leq s \leq t\right\}$.

Υποθέτουμε ότι $b_i > r$, για κάθε $i = 1, ..., n$. Υποθέτουμε την ύπαρξη συντελεστών συσχέτισης $q_i \in [-1, 1]$ οι οποίοι μπορούν να εκφράσουν τις επιδράσεις του μισθού στον πληθωρισμό και τις επιδράσεις του πληθωρισμού στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων.
Ο πίνακας (σ_{ij}) συμβολίζεται με σ και η αγοραία τιμή των κινδύνων με $\sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1})$ με $\overline{\theta}$, όπου $\overline{b} = (b_1, ..., b_n)^T$ και$\overline{1}$ είναι ένα διάνυσμα-στήλη από μονάδες. Υποθέτουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας $\Sigma = \sigma\sigma^T$ είναι θετικά ορισμένος, $\lambda_i(t)$ συμβολίζει την ποσότητα του διαθέσιμου του ταμείου που επενδύθηκε από το διαχειριστή στο περιουσιακό στοιχείο i για $0 \leq i \leq n$. Η ποσότητα $F - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ επενδύεται στο ομόλογο, το οποίο δεν έχει κίνδυνο. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στις μεταβλητές αυτές. Η αρνητική τιμή του λ_i σημαίνει ότι ο διαχειριστής προβαίνει σε ανοικτή πώληση της αντίστοιχης μετοχής. Αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ είναι μεγαλύτερο από την τιμή του διαθέσιμου του ταμείου, τότε ο διαχειριστής δανείζεται με επιτόκιο r και επενδύει στις μετοχές. Το $\overline{\lambda}(t)$ συμβολίζει το $(\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T$.

Μια διαδικασία χαρτοφυλακίου ή στρατηγική διαπραγμάτευσης $\overline{\lambda}(t)$ είναι μια R^n- μετρήσιμη διαδικασία προσαρμοσμένη στην $\{\Upsilon_t\}$ έτσι ώστε

$$\int_0^{\infty} \overline{\lambda}^T(s)\overline{\lambda}(s)ds < \infty \tag{4.13}$$

Υποθέτουμε ότι οι αλλαγές στο επίπεδο του διαθέσιμου του ταμείου προέρχονται μόνο από τις αλλαγές στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων, το επιτόκιο του ομολόγου, το επιτόκιο των εισφορών και τις παροχές. Επομένως :

$$dF(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} + \left(F(t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \right) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + (C(t) - P(t))\, dt \tag{4.14}$$

Από τις σχέσεις (4.11), (4.12) και (4.14), παρατηρούμε ότι τα του διαθέσιμα του ταμείου ικανοποιούν την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dF(t) = \left(rF(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(b_i - r) + C(t) - P(t) \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i(t)\sigma_{ij} dW_j(t)$$

με αρχική συνθήκη $F(0) = F_0$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.1 η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} dF(t) = &\left(rF(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(b_i - r) + SC(t) - (\mu - \delta)AL(t) \right) dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i(t)\sigma_{ij} dW_j(t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Το μοντέλο περιγράφει μια αγορά μη πλήρης, επειδή δεν μπορούν οι στοχαστικές παροχέςP να διαπραγματεύονται στην αγορά χρεογράφων και επομένως ο διαχειριστής δεν μπορεί να αντισταθμίσει τον κίνδυνο αυτών των παροχών.
Με το μοντέλο αυτό προστίθεται μια νέα μεταβλητή ελέγχου, η οποία δίνεται από το διάνυσμα των επενδυτικών αποφάσεων, στο συμπληρωματικό κόστος.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, ακολουθούμε τα βήματα που χρησιμοποιήσαμε και στο μοντέλο όπου γίνονται επενδύσεις με σταθερή και χωρίς κινδυνο απόδοση. Το πρόβλημα λύνεται από την ελαχιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης:

$$\widehat{V}(F, AL) = min_{(SC,\overline{\lambda})\in A_F,AL}\left\{J((F, AL); (SC, \overline{\lambda}))\right\} : s.t.(4.15), (4.1).$$

Η ακόλουθη υπόθεση πρέπει να ισχύει για το επιτόκιο.

Υπόθεση Β΄ Το τεχνικό επιτόκιο ικανοποιεί τη σχέση

$$\delta = r + \eta\overline{q}^T\overline{\theta}.$$

Η υπόσχεση να πληρώσει το ταμείο στον ασφαλισμλενο παροχή $P(t)$ την στιγμή της συνταξιοδότησης $x = d$ αποτιμάται σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1

$$e^{-\delta(d-x_0)}E(P(t + d - x_0)|\mathcal{F}_t) = e^{(\mu-\delta)(d-x_0)}P(t)$$

Προκειμένου να αποτιμήσουμε τις υποχρεώσεις σύμφωνα με τη μέθοδο την ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο θα πρέπει:

$$\mu - \delta = -(r - \alpha^*) \tag{4.16}$$

όπου $\alpha^* = \mu - \eta\overline{q}^T\overline{\theta}$ είναι γνωστό ως το ποσοστό αύξησης του P. Από την σχέση (4.16) καταλήγουμε στην Υπόθεση Β΄ δηλαδή

$$\delta = r + n\overline{q}^T\overline{\vartheta}$$

Θεώρημα 4.4.1. *Υποθέτουμε ότι οι Υποθέσεις Α και Β΄ ισχύουν.*

$$2\mu + \eta^2 < r \tag{4.17}$$

Αν η ανισότητα ικανοποιείται, τότε το βέλτιστο ποσοστό εισφορών και οι βέλτιστες επενδύσεις σε επισφαλή περιουσιακά στοιχεία δίνονται από τους τύπους:

$$C^* = NC + \frac{\beta_{FF}}{\kappa}UAL \tag{4.18}$$

$$\overline{\lambda}^* = \Sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1})UAL + \eta\sigma^{-T}\overline{q}AL(19) \tag{4.19}$$

αντίστοιχα, όπου β_{FF} είναι η μοναδική θετική λύση στην ισότητα

$$\beta_{FF}^2 + \kappa(\rho - 2r + \overline{\theta}^T\overline{\theta})\beta_{FF} - \kappa(1 - \kappa) = 0 \tag{4.20}$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{F_0,AL_0}F^*(t) - \mathbb{E}_{F_0,AL_0}AL(t) = (F_0 - AL_0)e^{(r-\overline{\theta}^T\overline{\theta}-\beta_{FF}/\kappa)t}$$

Συνεπώς εαν ισχύει η ανισότητα:

$$\beta_{FF} > \kappa(r - \overline{\theta}^T\overline{\theta})$$

τότε η διαφορά της αναμενόμενης τιμής της βέλτιστης επένδυσης και της αναμενόμενης αναλογιστικής υποχρέωσης συγκλίνει στο μηδέν. Ένα αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει για την εισφορά και το Κανονικό Κόστος. Η παραπάνω ανισότητα εκπληρώνεται εφόσον ισχύει ότι $r \geq \rho + \theta^T\overline{\theta}$. Παρολαυτά εφόσον $r < \rho + \theta^T\overline{\theta}$ τότε:

$$\kappa < \frac{1}{1 + r(\rho + \theta^T\overline{\theta} - r)}$$

Στη βέλτιστη λύση που δίνεται από την(4.19), ο διαχειριστής δανείζεται χρήματα με επιτόκιο r για να επενδύσει στο επισφαλές περιουσιακό στοιχείο i, γεγονός που σημαίνει $\lambda_i > F^*$, όταν το επίπεδο των διαθεσίμων είναι κάτω από $\kappa_i AL$ όπου η σταθερά κ_i ορίζεται ως

$$\kappa_i = \frac{\overline{e}_i\Sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1}) + \eta\overline{e}_i\sigma^{-T}\overline{q}}{1 + \overline{e}_i\Sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1})}$$

όπου $\overline{e}_i = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$ Ο διαχειριστής λαμβάνει μια θέση ανοικτής πώλησης στο περιουσιακό στοιχείο i , που σημαίνει ότι $\lambda_i^* < 0$, όταν το διαθέσιμο είναι πάνω από $\kappa_i^{'}AL$, όπου

$$\kappa_i^{'} = \frac{\overline{e}_i\Sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1}) + \eta\overline{e}_i\sigma^{-T}\overline{q}}{\overline{e}_i\Sigma^{-1}(\overline{b} - r\overline{1})} > \kappa_i$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στις ακόλουθες συμπεριφορές για τις βέλτιστες επενδύσεις

$$\overline{\lambda}^* \leq \overline{0} \Leftrightarrow F^* \geq k_i^{'}AL$$

$$\overline{\lambda}_i^* \geq F \Leftrightarrow 0 < F^* \leq k_i AL$$

$$0 < \overline{\lambda}_i^* < F \Leftrightarrow k_i AL < F^* < k_i^{'}AL$$

Δηλαδή όταν το διαθέσιμο του ταμείου είναι πάνω από $k_i^{'}AL$, ο διαχειριστής προβαίνει σε ανοικτή πώληση του περιουσιακού στοιχείου i. Όταν τα διαθέσιμα του ταμείου είναι κάτω από $k_i AL$, ο διαχειριστής δανείζεται με επιτόκιο r. Ακόμη και στην περίπτωση της υπερχρηματοδότησης, $F^* > AL$, η βέλτιστη απόφαση ενδέχεται να είναι ο δανεισμός χρημάτων και η επένδυση σε μετοχές. Για αυτήν την περίπτωση είναι αναγκαία η ύπαρξη θετικής συσχέτισης.

4.5 Βέλτιση χρηματοδότηση στην περίπτωση στοχαστικού επιτοκίου

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε ποια θα μπορούσε να είναι η βέλτιστη επιλογή του διαχειριστή ενός ταμείου όταν δεν υπάρχει η επιλογή της επένδυσης σε ένα περιουσιακό στοιχείο κινδυνουδέτερης απόδοσης.
Σύμφωνα με τον Cairns(2000) ορισμένα ταμεία χρησιμοποιούν τα διαθέσιμά τους μόνο για παροχή βραχυπρόθεσμης ρευστότητας, ενώ δεν λαμβάνουν υπόψη τη δυνατότητα επένδυσης σε μακροπρόθεσμη βάση. Γενικά τα ταμεία θεωρούν τα κρατικά ομόλογα ως μια επένδυση χαμηλής απόδοσης, αλλά κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει, καθώς δεν είναι πάντα χωρίς κίνδυνο.
Για να απλοποιήσουμε το μοντέλο που θα περιγράψουμε ας θεωρήσουμε ότι ο συνολικός πλούτος του ταμείου επενδύεται σε ένα συγκεκριμένο τίτλο, έστω ένα ομόλογο που εμπεριέχει κίνδυνο. Σε αυτή τη περίπτωση θεωρούμε ότι η τιμή του ομολόγου είναι συσχετισμένη με μία γεωμετρική κίνηση Brown δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_1(t)$$

όπου $b > 0$ και $\sigma > 0$. Η W_1 συμβολίζει μια τυποποιημένη κίνηση Brown. Επισημαίνουμε ωστόσο ότι η B είναι μια τυποποιημένη Κίνηση Brown που σχετίζεται με τις παροχές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η W_1 και η B είναι συσχετισμένες όπως αναλύσαμε και στην προηγούμενη παράγραφο. Συνεπώς $\mathbb{E}(B_t W_1(s)) = q \cdot min(t,s)$ με $-1 \leq q \leq 1$. Έτσι έχουμε ότι $B = \sqrt{1-q^2} \cdot W_0 + q \cdot W_1$, όπου (W_0, W_1) μια τυποποιημένη Κίνηση Brown ορισμένη στον αντίστοιχο χώρο πιθανοτήτων.
Η συμπεριφορά του πλούτου του ταμείου δίνεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dF(t) = F(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + (C(t) - P(t))dt$$

ή αλλιώς

$$dF(t) = (bF(t) + C(t) - P(t))dt + \sigma F(t) dW_1(t), \ F(0) = F_0 \geq 0$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε από την Υπόθεση A που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο παραλείποντας P και NC έχουμε:

$$dF(t) = (bF(t) + SC(t) + (\mu - \delta)AL(t)dt + \sigma F(t)dW_1(t) \tag{4.21}$$

Επισημαίνουμε επίσης ότι εφόσον έχουμε επενδύσει μόνο σε ένα τίτλο που εμπεριέχει κίνδυνο, η μοναδική μεταβλητή ελέγχου είναι το συμπληρωματιό κόστος.
Η στοχαστική εξίσωση του προβλήματος αξίας τώρα γίνεται:

$$\widehat{V}(F, AL) = min_{SC \in A_{F,AL}} \{J((F, AL); SC) \colon s.t.(4.1), (4.21)\}$$

όπου η τάξη των επιτρεπόμενων μεταβλητών ελέγχου $A_{F,AL}$ ορίζεται όπως και προηγουμένως. Εφόσον λοιπόν στόχος μας είναι να δείξουμε ότι μία κατάλληλη επιλογή του δ οδηγεί σε μια

ευρεία επενδυτική στρατηγική κανουμε την παρακάτω υπόθεση:
Υπόθεση B'' Το τεχνικό επιτόκιο αποδόσεων ικανοποιεί τη σχέση $\delta = b + \sigma^2 - \eta q\sigma > 0$.

Θεώρημα 4.5.1. *Υποθέτουμε ότι οι Υποθέσεις A και B′ ισχύουν. Αν ικανοποιείται η ανισότητα $2\mu + \eta^2 < \rho$, τότε το βέλτιστο ποσοστό της εισφοράς δίνεται από:*

$$C^*(F, AL) = NC + \frac{\gamma_{FF}}{\kappa} \cdot UAL$$

όπου γ_{FF} είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$${\gamma_{FF}}^2 + \kappa(\rho - 2b - \sigma^2)\gamma_{FF} - \kappa(1 - \kappa) = 0$$

Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους μπορούμε να εκφράσουμε:

$$\mathbb{E}_{F_0,AL_0}F(t) - \alpha_3\mathbb{E}_{F_0,AL_0}AL(t) = (F_0 - \alpha_3 AL_0)e^{(b-\gamma_{FF}/\kappa)t}$$

με $\alpha_3 = (\gamma_{FF} + \kappa(\mu - \delta))/(\gamma_{FF} + \kappa(\mu - b))$ και έτσι εφόσον ισχύει ότι $\gamma_{FF} > \kappa b$ συνεπάγεται ότι,

$$lim_{t\to\infty} (\mathbb{E}_{F_0,AL_0}F(t) - \alpha_3\mathbb{E}_{F_0,AL_0}AL(t)) = 0$$

4.6 Συμπεράσματα

- Είδαμε το πρόβλημα της χρηματοδότησης των συντάξεων σε ένα πρόγραμμα συνταξιοδότησης καθορισμένων παροχών από την οπτική γωνία του διαχειριστή, που επιθυμεί τα περιουσιακά στοιχεία να είναι σε θέση να καλύψουν τις υποχρεώσεις ελαχιστοποιώντας τον κίνδυνο αφερεγγυηότητας και τον κίνδυνο του ποσοστού των εισφορών.
- Ο διαχειριστής έχει να επιλέξει μεταξύ τριών σεναρίων για να πετύχει τη βέλτιστη στρατηγική. Οι επενδυτικές αποφάσεις μπορεί να ληφθούν με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Στον πρώτο τρόπο, το κεφάλαιο του ταμείου επενδύεται με σταθερό επιτόκιο. Στον δεύτερο τρόπο ο διαχειριστής επενδύει σε ένα χαρτοφυλάκιο με n επισφαλή αξιόγραφα και σε ένα ομόλογο. Σύμφωνα με τον τελευταίο τρόπο το επιτόκιο των αποδόσεων είναι στοχαστικό. Και στις τρεις περιπτώσεις επιλέγεται το τεχνικό επιτόκιο αποδόσεων, έτσι ώστε το συμπληρωματικό κόστος να είναι ανάλογο προς την ακάλυπτη αναλογιστική υποχρέωση.
- Η αναμενόμενη τιμή των διαθεσίμων του ταμείου συγκλίνει γρηγορότερα σε μακροπρόθεσμη βάση προς την αναμενόμενη τιμή της αναλογιστικής υποχρέωσης,όταν υπάρχει διαφοροποίηση στις επενδύσεις.
- Όταν το επίπεδο των διαθεσίμων του ταμείου είναι χαμηλό, τότε πρέπει να γίνονται επενδύσεις σε επισφαλή χρεόγραφα, ενώ όταν τα διαθέσιμα είναι υψηλά και συνεπώς υπάρχει υψηλό πλεόνασμα τότε προτρέπει στην ανοικτή πώληση χρεογράφων που εμπεριέχουν κίνδυνο.

Κεφάλαιο 5

Βέλτιστες Επενδυτικές αποφάσεις υπό την ύπαρξη υποχρεώσεων: Η περίπτωση των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης παροχής

5.1 Εισαγωγή

Τα συνταξιοδοτικά ταμεία αντιπροσωπεύουν σήμερα έναν από τους πιο σημαντικούς φορείς στις χρηματοπιστωτικές αγορές, λόγω της υψηλής επενδυτικής ικανότητας και επειδή δρούν συμπληρωματικά στο ρόλο της κυβέρνησης, που επιτρέπει στους εργαζόμενους που έχουν φτάσει σε ηλικία συνταξιοδότησης να διατηρήσουν το βιοτικό τους επίπεδο. Οι δύο αυτοί λόγοι δικαιολογούν το ενδιαφέρον που συγκεντρώνεται κατά τα τελευταία χρόνια στη μελέτη της βέλτιστης διαχείρισης των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων. Υπάρχουν δύο κύριες εναλλακτικές λύσεις στο σχεδιασμό των συνταξιοδοτικών συστημάτων με την κατανομή των κινδύνων. Σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών, ο κίνδυνος που προέρχεται από τη διαχείριση κεφαλαίων βαρύνει το δικαιούχο. Ωστόσο, σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων παροχών, όπου οι παροχές συνήθως συνδέονται με τον τελικό μισθό, ο οικονομικός κίνδυνος αναλαμβάνεται από το διαχειριστή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί το μοντέλο ενός προγράμματος καθορισμένων παροχών, όπως περιγράφεται από τους Haberman και Sung (1994), Boulier et al. (1995), Cairns (2000), Josa-Fombellida και Rincon Zapatero(2001, 2004). Σε όλα αυτά τα άρθρα ο στόχος του διαχειριστή είναι τα περιουσιακά στοιχεία των ταμείων να τιμολογούνται και να βρίσκονται όσο το δυνατόν πλησιέστερα προς την αναλογιστική υποχρέωση. Πιο συγκεκριμένα θα αναπτύξουμε τη μελέτη των Ricardo Josa- Fombelida και Rincon Zapatero (2006).

5.2 Το σχέδιο της συνταξιοδότησης

Το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα που θα ληφθεί υπόψη είναι συγκεντρωτικού τύπου, οπότε οι μεταβλητές που παρατίθενται παρακάτω αναφέρονται στο σύνολο των μελών του ταμείου. Για να καλύψει τις υποσχόμενες υποχρεώσεις στους εργαζόμενους στην ηλικία συνταξιοδότησης, ο διαχειριστής του ταμείου ενίοτε αναγκάζεται να κρατά ή να ρευστοποιεί μέρος από τα επενδυόμενα κεφάλαια. Τα κύρια στοιχεία που καθορίζουν τη διαδικασία της χρηματοδότησης και οι βασικές υποθέσεις που επιτρέπουν την προσωρινή της εξέλιξη προσδιορίζονται ως εξής:

F(t): Η αξία των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου τη χρονική στιγμή t.

$P(t)$: Οι παροχές που έχει υποσχεθεί το ταμείο στα μέλη στο χρόνο t, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι ντετερμινιστικές. Αυτές οι παροχές συνδέονται με τον μισθό τη στιγμή της συνταξιοδότησης.

$C(t)$: Ποσοστό εισφοράς του διαχειριστή στη διαδικασία χρηματοδότησης στο χρόνο t.

$AL(t)$: Αναλογιστικές υποχρεώσεις τη χρονική στιγμή t.

$NC(t)$: Το κανονικό κόστος στο χρόνο t, αν τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου ταιριάζουν στις αναλογιστικές υποχρεώσεις και δεν υπάρχουν αβέβαια στοιχεία στο σχέδιο, το κανονικό κόστος είναι η αξία των εισφορών που επιτρέπουν την ισότητα μεταξύ του ενεργητικού του ταμείου και των υποχρεώσεων.

$SC(t)$: Το συμπληρωματικό κόστος τη χρονική στιγμή, το οποίο είναι ίσο με $C(t) - NC(t)$

$M(s)$: Το ποσοστό της αξίας των μελλοντικών παροχών που έχουν συγκεντρωθεί μέχρι το έτος ηλικίας $s \in [a, d]$, όπου είναι η κοινή ηλικία της εισόδου στο ταμείο και d είναι η κοινή ηλικία της συνταξιοδότησης που ορίζεται για όλα τα μέλη.

δ: Το σταθερό επιτόκιο αποτίμησης των υποχρεώσεων, το οποίο καθορίζεται από τις ρυθμιστικές αρχές.

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P και M είναι διαφορίσιμες.

Θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω μέθοδος διασποράς της απόσβεσης. Υποθέτουμε ότι το συμπληρωματικό ποσοστό εισφοράς είναι ανάλογο της ακάλυπτης αναλογιστικής υποχρέωσης,δηλαδή:

$$SC(t) = k(AL(t) - F(t))$$

και

$$C(t) = NC(t) + k(AL(t) - F(t)) \tag{5.1}$$

όπου k μια σταθερά, η οποία επιλέγεται από τον διαχειριστή και αντιπροσωπεύει το ποσοστό κατά το οποίο το πλεόνασμα ή το έλλειμμα αποσβένεται. Μια αρνητική τιμή του k, όταν το ταμείο χρηματοδοτείται ανεπαρκώς σημαίνει ότι η εισφορά είναι μικρότερη από το κανονικό κόστος. Η αναλογιστική πρακτική θεωρεί το $1/k$ να είναι ίσο με μια συνεχή ράντα όπου η απόσβεση γίνεται για περισσότερα από m έτη. Ειδική περίπτωση αποτελεί μια αέναη ραντα με $m = \infty$. Όμως κάποιες θεωρητικές μελέτες όπως αυτές των O'Brein (1987), Haberman και Sung (1994) ή Josa-Fombelida και Rincon- Zapatero (2001, 2004), έδειξαν ότι η αναλογική χρηματοδότηση, $SC = k(AL - F)$, είναι βέλτιστη με $1/k$ που δεν χρειάζεται να δίδεται από μία συγκεριμένη ράντα. Αντί αυτού κάποιες παράμετροι που ορίζουν τις προτιμήσεις του διαχειριστή και μερικά χαρακτηριστικά της χρηματιστηριακής αγοράς καθορίζουν το k. Θεωρούμε λοιπόν ένα εναλλακτικό εύρος για το k από αυτό που προτείνει η αναλογιστική πρακτική.

Οι αναλογιστικές συναρτήσεις AL και NC γράφονται ως:

$$AL(t) = \int_{\alpha}^{d} e^{-\delta(d-s)} P(t+d-s) M(s) ds,$$

$$NC(t) = \int_{\alpha}^{d} e^{-\delta(d-s)} P(t+d-s) M'(s) ds,$$

αντίστοιχα και αυτές συνδέονται από τη συνήθη διαφορική εξίσωση (Bowers et al, 1979)

$$AL'(t) = \delta AL(t) + NC(t) - P(t), t \geq 0 \tag{5.2}$$

Η συνάρτηση M ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq M(s) \leq 1$ για όλα τα $s, M(s) = 0$, για $s \leq a$ και $M(s) = 1$, για $s \geq d$. Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν ο αριθμός των υπαλλήλων συνολικά συσσωρεύεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha, d]$, και είναι $M(s) = (s-a)(d-a)^{-1}, a < s < d$. Εκτός από την περίπτωση των σταθερών παροχών, συνήθως χρησιμοποιείται το εκθετικό μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο οι παροχές και ο μισθός αυξάνονται με εκθετικό ρυθμό. Σε αυτή την περίπτωση τα AL και NC είναι επίσης εκθετικές συναρτήσεις.
Ο διαχειριστής χρησιμοποιεί ένα χαρτοφυλάκιο με n επισφαλή αξιόγραφα για να διαχειριστεί το κεφάλαιο του ταμείου $\{S^i\}_{i=1}^n$. Τα αξιόγραφα μοντελοποιούνται από συσχετισμένες γεωμετρικές κινήσεις Brown και ένα ομόλογο που δεν περιέχει κίνδυνο S_0 όπως προτάθηκε από τον (Merton, 1971) και η δυναμική των τιμών των $n+1$ χρεογράφων δίδεται από τις εξισώσεις:

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt, r > 0, \tag{5.3}$$

και

$$dS^i(t) = S^i(t)(b_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dw_j(t)), i = 1, 2, ..., n \tag{5.4}$$

Υποθέτουμε ότι $b_i > r$ για όλα τα i, έτσι ώστε ο διαχειριστής να έχει κίνητρα να προχωρήσει σε επενδύσεις με κίνδυνο. Το ποσό του κεφαλαίου που επενδύεται το χρόνο t στο επισφαλές αξιόγραφο S^i συμβολίζεται με $\lambda_i(t), i = 1, 2, ..., n$. Το υπόλοιπο, $F(t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$, επενδύεται στο ομόλογο. Ο δανεισμός και οι βραχυπρόθεσμη ανοικτή πώληση επιτρέπονται. Η αρνητική τιμή του $\lambda_i(t)$ σημαίνει ότι ο διαχειριστής προβαίνει σε ανοικτή πώληση ενός μέρους των επισφαλών αξιογράφων S^i, ενώ αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$ είναι μεγαλύτερο από το F, τότε ο διαχειριστής χρεώνεται για την αγορά των μετοχών, δανειζόμενος με επιτόκιο r. Υποθέτουμε ότι $\{\mathbf{\Lambda}(t) : t \geq 0\}$, με $\mathbf{\Lambda}(t) = (\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T$, μια διαδικασία ελέγχου προσαρμοσμένη στη διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathcal{F}_t-$ μετρήσιμη, Μαρκοβιανή και στάσιμη ενώ ικανοποιεί τη σχέση:

$$E \int_0^s \mathbf{\Lambda}(t)^T \mathbf{\Lambda}(t) dt < \infty$$

Επομένως, η δυναμική εξέλιξη των διαθέσιμων του ταμείου στο πλαίσιο της επενδυτικής πολιτικής Λ είναι:

$$dF(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{dS^i(t)}{S^i(t)} + \left(F_t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \right) + (C(t) - P(t))dt. \tag{5.5}$$

Αντικαθιστώντας στην (5,5), τις (5,3) και (5,4), έχουμε :

$$dF(t) = \left(rF(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(b_i - r) + C(t) - P(t) \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i(t) \sigma_{ij} dw_j(t) \tag{5.6}$$

με αρχική συνθήκη $F(0) > 0$.
Υποθέτουμε ότι $\sigma = (\sigma_{ij}), \mathbf{b} = (b_1, ..., bn)^T, \mathbf{1} = (1, ..., 1)^T$, και $\Sigma = \sigma\sigma^T$. Παίρνουμε ως δεδομένο την ύπαρξη του αντίστροφου πίνακα Σ^{-1}. Τελικά το διάνυσμα του λόγου Sharpe του χαρτοφυλακίου συμβολίζεται με $\theta = \sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})$.

Έτσι η εξίσωση (5,6) της $dF(t)$ γίνεται :

$$dF(t) = (rF(t) + \mathbf{\Lambda}^T(t)(\mathbf{b} - r\mathbf{1}) + C(t) - P(t))dt + \mathbf{\Lambda}^T(t)\sigma dw(t), \tag{5.7}$$

η οποία με την αρχική συνθήκη $F(0)$ προσδιορίζει την εξέλιξη του διαθέσιμου του κεφαλαίου. Αντικαθιστώντας την (5,1) στην εξίσωση (5,7), αυτή παίρνει τη μορφή :

$$dF(t) = (rF(t) + \mathbf{\Lambda}^T(t)(\mathbf{b} - r\mathbf{1}) + NC(t) + k(AL(t) - F(t)) - P(t))dt + \mathbf{\Lambda}^T(t)\sigma dw(t) \quad (5.8)$$

Υποθέτουμε ότι το τεχνικό επιτόκιο συμπίπτει με την απόδοση του ομολόγου, δηλαδή δ=r, αν και τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να επεκταθούν και στην περίπτωση όπου $\delta \neq r$
Έτσι, από τη (5,2) σε όρους $X = F - AL$ η εξίσωση (5,8) γράφεται ως:

$$dX(t) = ((r - k)X(t) + \mathbf{\Lambda}^T(t)(\mathbf{b} - r\mathbf{1})dt + \mathbf{\Lambda}^T(t)\sigma dw(t), \quad (5.9)$$

με αρχική υπόθεση $X(0) = x$. Όταν $X < 0, k > 0$ τότε έχουμε ως αποτέλεσμα τη μείωση του επιτοκίου που επιφορτίζονται οι ακάλυπτες υποχρεώσεις. Η κατάσταση αντιστρέφεται όταν $X > 0$.
Για να τονιστεί η επίδραση του διανύσματος επενδυτικής στρατηγικής, θα γράφουμε $X^{\Lambda}(t)$ αντί του $X(t)$. Επίσης καθώς πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό, θα λύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης για κάθε αρχική συνθήκη $X(0)$, την οποία συμβολίζουμε με x. Συνεπώς $X^{\Lambda}(t) = F(t) - AL(t)$ με αρχική τιμή $x = F - AL$.
Είναι σημαντικό να δώσουμε έμφαση στο ότι οι εισφορές καθορίζονται από την (5,1) και η εξέλιξή της είναι αβέβαιη και εξαρτάται από τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου.

5.3 Μεγιστοποίηση της πιθανότητας προσέγγισης ενός στόχου

Ο στόχος του διαχειριστή είναι να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα το X να προσεγγίσει την τιμή 0, πριν από μια άλλη ανεπιθύμητη τιμή η οποία συμβολίζεται με $l = \overline{F} - AL$. Η τιμή του $\overline{F} < AL$ θα μπορούσε να επιβληθεί από τις αρχές, ως ένα ελάχιστο κατώτατο όριο κάτω από το οποίο τα διαθέσιμα του ταμείου δεν μπορούν να μειωθούν, επειδή θεωρείται σημείο χρεωκοπίας. Δυστυχώς το πρόβλημα όπως διατυπώθηκε με αυτό τον τρόπο δεν έχει λύση. Με αποτέλεσμα, την επαναδιατύπωση του προβλήματος ως ακολούθως: μεγιστοποίηση της πιθανότητας το X να προσεγγίσει την τιμή u πριν την τιμή χρεωκοπίας l, με $l \leq u \leq 0$ και με το u όσο κοντά στο 0 επιθυμείται. Θεωρούμε την περίπτωση που το κεφάλαιο του ταμείου είναι μικρότερο από AL. Στην περιοχή που το κεφάλαιο του ταμείου είναι μεγαλύτερο από το AL, ο στόχος είναι να αυξηθεί το X όσο είναι δυνατόν, έτσι έχουμε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της πιθανότητας το X να προσεγγίσει το u πριν το l με $0 < l < u$.
Αν συμβολίσουμε με $U(x)$ τη μέγιστη τιμή της πιθανότητας για την επίτευξη της τιμής u πριν την τιμή l, όταν $l < x < u$:

$$U(x) = sup_{\{\mathbf{\Lambda}\in A_x\}}\mathbb{P}_x(\tau_l{}^{\mathbf{\Lambda}} > \tau_u^{\mathbf{\Lambda}}) = sup_{\{\mathbf{\Lambda}\in A_x\}}\mathbb{P}_x(\tau_{lu}^{\mathbf{\Lambda}} > \tau_u^{\mathbf{\Lambda}})$$

όπου το $\tau_l^{\mathbf{\Lambda}}$ για πρώτη φορά έχει τη τιμή l, όταν η επενδυτική πολιτική είναι $\mathbf{\Lambda}$.

5.3.1 Υποχρηματοδοτούμενη περιοχή, $u < 0$

Σε αυτή την περίπτωση περιορίζουμε την προσοχή μας στο $k < r$. Όταν η ένταση των εισφορών είναι μικρότερη από την ένταση ανατοκισμού, η δυναμική του ταμείου ίσως παύει να είναι επανερχόμενη στο μέσο, διότι το ποσοστό απόσβεσης δεν είναι αρκετά ισχυρό για να ξεπεραστεί η επίδραση του επιτοκίου στο κεφάλαιο του ταμείου, συνεπώς υπάρχει θετική πιθανότητα χρεωκοπίας. Αντιθέτως, όπως προκύπτει από την σχέση(5,9), όταν $k \geq r$ το πρόβλημα δεν είναι ένα πραγματικό πρόβλημα χρεωκοπίας, δεδομένου ότι η πλήρης επένδυση στο ομόλογο διασφαλίζει ότι το X είναι αυστηρά αυξανόμενο ή σταθερό. Ωστόσο, όταν $k < r$ επενδύσεις εξολοκλήρου σε μετρητά οδηγούν το ταμείο στο σημείο χρεωκοπίας.
Πρόταση
Υποθέτουμε ότι $k < r$ και $l < x < u < 0$. Η βέλτιστη στρατηγική επενδύσεων δίνεται από:

$$\mathbf{\Lambda}_U(X) = -\frac{2(r-k)}{\theta^T\theta}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})X = \frac{2(r-X)}{\theta^T\theta}\Sigma^{-1}(b - r\mathbf{1})(AL - F) \tag{5.10}$$

και η συνάρτηση αξίας δίνεται από τον τύπο

$$U(x) = \frac{|x|^\alpha - |l|^\alpha}{|u|^\alpha - |l|^\alpha} = \frac{(AL-F)^\alpha - |l|^\alpha}{|u|^\alpha - |l|^\alpha} \tag{5.11}$$

όπου $\alpha = 1 + \theta^T\theta/(2(r-k))$.

Η πολιτική που δίνεται από την σχέση (5,10) είναι μια σταθερού τύπου αναλογία. Αυτές οι στρατηγικές είναι ευρέως χρησιμοποιούμενες στην πράξη, εξαιτίας της απλότητάς τους και επειδή εμφανίζονται ως βέλτιστες στρατηγικές σε πολλά σχετικά προβλήματα (βλέπε Pestien and Sudderth(1985), Browne (1998)).
Η βέλτιστη συμπεριφορά του διαχειριστή είναι να κατανέμει συγκεκριμένες αναλογίες της διαφοράς των υποχρεώσεων και των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, λαμβάνοντας μεγαλύτερο κίνδυνο όταν η διαφορά αυτή είναι μεγάλη. Οι επισφαλείς επενδύσεις παρουσιάζουν το μέγιστο κοντά στο σημείο καταστροφής, όταν $F = \overline{F}$, ενώ μειώνονται όταν τα διαθέσιμα είναι κοντά στο AL. Αφού οι βέλτιστες λύσεις δεν εξαρτώνται από τις τιμές l, u, είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η ασφαλιστική στρατηγική ελαχιστοποιεί και την πιθανότητα χρεωκοπίας.
Ο ρόλος του k είναι ο εξής: αύξηση του k δηλαδή μια αύξηση των εισφορών επιτρέπει τη μείωση του επενδυόμενου ποσού του χαρτοφυλακίου. Στη συνέχεια αν ο διαχειριστής ή οι εργαζόμενοι επιθυμούν να μειώσουν τις εισφορές, πρέπει να ληφθεί μεγαλύτερος κίνδυνος στο επενδυόμενο χαρτοφυλάκιο.

Συνεπώς βρήκαμε μια επενδυτική πολιτική που μεγιστοποιεί την πιθανότητα προσέγγισης του u πριν το $l < u$ για κάθε $u < 0$.

Παρατήρηση 1: Παρόλο που στις επενδυτικές στρατηγικές δεν επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις, ο δανεισμός πολλές φορές καθίσταται αναγκαίος. Έστω λοιπόν ότι το ταμείο δανείζεται χρήματα με επιτόκιο r για να επενδύσει σε ένα περιουσιακό στοιχείο i με $\lambda_{i,U} \geq F$ αν και μόνο αν $0 \leq F \leq v_i AL$ όπου $v_i = \mathbf{e}_i\Sigma^{-1}(\mathbf{b}-r\mathbf{1})/(a-1+\mathbf{e}_i\Sigma^{-1}(\mathbf{b}-r\mathbf{1}))$ όπου το $\mathbf{e}_i$ ορίζεται ως $\mathbf{e}_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$. Ο διαχειριστής λοιπόν θα πρέπει να δανειστεί για να επενδύσει έστω σε κάποια μετοχή και συνεπώς ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,U} \geq F$ αν και μόνο αν $0 \leq F \leq v_0 AL$ και $v_0 = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mathbf{b}-r\mathbf{1})/(a-1+\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mathbf{b}-r\mathbf{1}))$

Παρατήρηση 2: Σύμφωνα με την επενδυτική στρατηγική $\mathbf{\Lambda}_U$ η σχέση (5,9) γίνεται:

$$dX^{\mathbf{\Lambda}_U}(t) = -(r-k)X^{\mathbf{\Lambda}_U}(t)dt - \frac{2(r-k)}{\theta^T\theta}X^{\mathbf{\Lambda}_U}(t)\theta^T dw(t), \quad 0 \leq t \leq \tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_{lu}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο $-(r-k)X$ και συντελεστή διάχυσης $4(r-k)^2X^2$
Επίσης ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}_x(\tau_l > \tau_u) = \frac{\psi(x)-\psi(l)}{\psi(u)-\psi(l)} = U(x)$$

Παρατήρηση 3: Καταλήξανε επίσης ότι υπάρχει μια τέτοια επενδυτική στρατηγική που μεγιστοποιεί την πιθανότητα να έρθει κόντα στο u πριν από το $l < u$ για κάθε $u < 0$. Συνεπώς με βάση αυτή την επενδυτική στρατηγική είναι σχεδόν απίθανο το u να πάρει τη τιμή 0 σε βάθος χρόνου. Αυτό ερμηνεύτηκε από το γεγονός ότι το 0 είναι ένα ανέφικτο φράγμα για μια γεωμετρική κίνηση Brown βλέπε Karlin and Taylor (1981).

Απεικόνιση των αποτελεσμάτων: Σύμφωνα με τους Josa-Fombellida και Rincon-Zapatero (2006) συγκρίθηκε το συνολικό μέγεθος των αναμενόμενων εισφορών όταν $k < r$ και $k^{'} > r$ αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση, η καλύτερη στρατηγική δίνεται από τη σχέση (5,10), ενώ για τη δεύτερη, γίνεται εξολοκλήρου επένδυση στο ομόλογο. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η ενεργητική διαχείριση του ταμείου μπορεί να μειώσει τις συνολικές προεξοφλημένες εισφορές, όμως αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα χρεωκοπίας να λάβει ελαφρώς μεγαλύτερες τιμές. Μετά από κάποια θεωρητικά αποτελέσματα που παρέχονται, όσον αφορά την αναλυτική έκφραση για τον προσδοκώμενο χρόνο της εξόδου από το διάστημα (l,u) και την αναμενόμενη τιμή των εισφορών, συνεχίζουμε με αριθμητική απεικόνιση του γεγονότος αυτού. Δεδομένου ότι το πρόβλημα έχει λύση κλειστής μορφής, ο διαχειριστής πρέπει να αποφασίσει εκ των προτέρων ποια τιμή θα επιλέξει για το k, αφού είναι γνωστή η ακριβής εξάρτηση του αποτελέσματος από το k. Για ένα συγκεκριμένο περιβάλλον, η επιλογή του k προσδιορίζει πλήρως την πιθανότητα της επιτυχίας και το μέγεθος των συνολικών αναμενόμενων εισφορών. Διακρίνονται δυο διαφορετικές στάσεις του διαχειριστή : η μια ονομάζεται λογική διαχείριση και αντιστοιχεί στην επιλογή του $k < r$, υποδεικνύοντας ότι ο διαχειριστής επιθυμεί να υποστεί κάποιο κίνδυνο, αν είναι δυνατόν να μειωθεί σημαντικά το σύνολο των προβλεπόμενων αποσβέσεων και η άλλη ονομάζεται ασφαλής διαχείριση όπου $k^{'} > r$, και $\mathbf{\Lambda} \equiv 0$, όπου ο διαχειριστής προτιμάει να οδηγήσει το κεφάλαιο του ταμείου σε υψηλότερη αξία, και έτσι απαιτούνται υψηλότερες αποσβέσεις και μεγαλύτερες χρονικές περιόδοι μέχρι την επίτευξη του στόχου. Εξαιτίας της ποικιλίας των χρονικών παραμέτρων, δεν είναι εύκολο να αποδειχθούν οι γενικές ιδιότητες των διαθέσιμων του ταμείου, για την επίτευξη του μεγέθους των αναμενόμενων συνολικών εισφορών κάτω από τη λογική ή την ασφαλή διαχείριση. Για αυτό το λόγο επικεντρώθηκαν σε μερικά αριθμητικά παραδείγματα.

Αναμενόμενη αξία των συνολικών εισφορών - Λογική διαχείριση, $k < r$

Θεωρούμε ότι $T(x) = \mathbb{E}_x \tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_{lu}$ και $\mathbb{E}_x \int_0^{\tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_{lu}} e^{-rt} C^k(t)dt$, ο αναμενόμενος χρόνος της εξόδου του διαστήματος (l,u) του $X^{\mathbf{\Lambda}_U}$, και η συσσωρευμένη αναμενόμενη αξία των προεξοφλημένων εισφορών μέχρι την έξοδο του διαστήματος (l,u), αντίστοιχα, με $l < x = X^{\mathbf{\Lambda}_U}(0) < u < 0$. Από τον ορισμό της (5,1)

$$\mathbb{E}_x \int_0^{\tau_{lu}^{\mathbf{\Lambda}}} e^{-rt} C^k(t)dt = \mathbb{E}_x \int_0^{\tau_{lu}^{\mathbf{\Lambda}}} e^{-rt} NC(t)dt - k\mathbb{E}_x \int_0^{\tau_{lu}^{\mathbf{\Lambda}}} e^{-rt} e^{-rt} X^{\mathbf{\Lambda}_U}(t)dt \equiv \frac{NC}{r}(1-R(x)) - kS(x)$$

με $R(x)$ συμβολιζεται το $\mathbb{E}_x(e^{r\tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_{lu}})$ και είχαν υποθέσει ότι οι καλύψεις R είναι σταθερές. Επομένως τα AL και NC είναι επίσης σταθερά. Ακριβείς εκφράσεις θα μπορούσαν επίσης να παρατηρηθούν και στην περίπτωση του εκθετικού μοντέλου, όπου το κόστος εισαγωγής μιας νέας παραμέτρου είναι μικρό. Σύμφωνα με τους Karlin και Taylor (1981, p.192-204) ή Harrison (1985), είναι πιθανό να χαρακτηρίσουμε τις συναρτήσεις R, S και T ως λύσεις κάποιων δευτέρου βαθμού διαφορικών εξισώσεων, όταν X^{Λ_U} είναι μια γενική διαδικασία διάχυσης. Σε ένα τέτοιο μοντέλο με μια γεωμετρική κίνηση Brown ασχολήθηκαν οι Josa-Fombellida και Rincon Zapatero (2006) , επιτρέποντας να βρεθούν συναρτήσεις κλειστού τύπου, εφόσον αυτές οι διαφορικές εξισώσεις μετασχηματίζονται εύκολα σε γραμμικές εξισώσεις.

$$R(x) = \frac{1}{\Delta}((|u|^{m_2} - |l|^{m_2})\,|x|^{m_1} + (|l|^{m_1} - |u|^{m_1})\,|x|^{m_2}),$$

$$S(x) = \frac{1}{2r-k}\left(|x| + \frac{1}{\Delta}((|u|\,|l|^{m_2} - |l|\,|u|^{m_2})\,|x|^{m_1} + (|l|\,|u|^{m_1} - |u|\,|l|^{m_1})\,|x|^{m_2})\right),$$

$$T(x) = \frac{\alpha - 1}{(r-k)\alpha}\left(ln\left(\frac{x}{l}\right) - U(x)ln\left(\frac{u}{l}\right)\right),$$

με $m_{1,2}$ οι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{2(r-k)^2}{\theta^T\theta}y^2 - \left((r-k) + \frac{2(r-k)^2}{\theta^T\theta}\right)y - r = 0$$

Υποτίθεται ότι $m_{1,2} \neq 1$ και ότι $\Delta = |l|^{m_1}|u|^{m_2} - |l|^{m_2}|u|^{m_1}$ με σκοπό να συντομευτούν οι περιπτώσεις που μελετούνται.

Συνολική αξία των εισφορών στην ασφαλή διαχείριση $k^{'} > r$ και $\mathbf{\Lambda} = 0$

Συμβολίζουμε το k με $k^{'}$, για να διακρίνουμε από την παραπάνω περίπτωση. Ο χρόνος της απώλειας του u από το x για τη διαδικασία X^0 είναι:

$$\bar{t}(x) = ln(u/x)/(r - k^{'})$$

και το συσσωρευμένο ποσό του X^0 μέχρι το χρόνο $\bar{t}(x)$ είναι

$$\overline{x} = (u - x)/(r - k^{'})$$

Συμβολίζουμε με $C^{k^{'}}$ τη συνολική προεξοφληθείσα εισφορά σε αυτή την περίπτωση και υποθέτουμε ότι το NC είναι σταθερό.

$$C^{k^{'}}(x) = \frac{NC}{r}\left(1 - \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{r}{k^{'}-r}}\right) - x\left(1 - \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{k^{'}}{k^{'}-r}}\right)$$

Υποθέτουμε ότι l, u και x είναι ανάλογα του AL, με συντελεστές μεταξύ των -1 και 0. Προκύπτει το ερώτημα αν με επιλεγμένες παραμέτρους είναι δυνατόν να χρησιμοποιείται η λογική διαχείριση των διαθέσιμων του ταμείου, επιλέγοντας ένα επισφαλές χαρτοφυλάκιο, έτσι ώστε η συνολική αναμενόμενη προεξοφλημένη εισφορά να είναι μικρότερη από αυτή που προκύπτει με την χρήση της ασφαλούς διαχείρισης, και ταυτόχρονα τη μείωση της πιθανότητας χρεωκοπίας.

5.3.2 Υπερχρηματοδοτούμενη περιοχή, $u > 0$

Σύμφωνα με τους Josa-Fombellida και Rincon Zapatero (2006) σε αυτή την περίπτωση στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα προσέγγισης του u πριν από το l , με $0 < l < u$. Σε αντιδιαστολή με την περίπτωση της ανεπαρκούς χρηματοδότησης, για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος κατά το βέλτιστο τρόπο, η παράμετρος k πρέπει να επιλεγεί, ώστε να είναι μικρότερη από την παράμετρο r. Πράγματι όταν, $k \leq r$ το πρόβλημα δεν είναι ένα πραγματικό στοχαστικό πρόβλημα, επειδή δε συμβαίνει καμία επένδυση στα επισφαλή αξιόγραφα και τότε το κεφάλαιο του ταμείου αυξάνεται σε $u(k < r)$, ή παραμένει σταθερό $(k = r)$.

Πρόταση: Υποθέτουν ότι $k > r$ και $0 < l < x < u$. Η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική $\mathbf{\Lambda}_U(x)$ και η συνάρτηση αξίας δίνονται από τις σχέσεις (5,10) και (5,11), αντίστοιχα, με την παράμετρο a, όπως ορίζεται παραπάνω στην περίπτωση όπου $u < 0$, με $a \neq 0$. Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{\Lambda}_U(x) = \Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})X = \Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})(AL - F)$$

και

$$U(x) = \frac{lnx - lnl}{lnu - lnl} = \frac{ln(AL - F) - lnl}{lnu - lnl}$$

όταν $\alpha = 0$.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν και για το αποτέλεσμα της προηγούμενης πρότασης στην περίπτωση όπου $u < 0$. Μερικές από τις διαφορές σε αυτή την περίπτωση είναι ότι $a < 0$ όταν $r < k < r + \theta^T\theta/2$, $a = 0$ όταν $k = r + \theta^T\theta/2$, και $0 < a < 1$, όταν $k > r + \theta^T\theta/2$. Στην περίπτωση της υποχρηματοδότησης, το σύνολο των προεξοφλημένων αναμενόμενων εισφορών με βάση τη βέλτιστη λύση (το οποίο συνεπάγεται λογική διαχείριση) και κάτω από ασφαλή διαχείριση θα μπορούσε να συγκριθεί. Τα συμπεράσματα θα ήταν παρόμοια σε αυτή την κατάσταση, το πιο σημαντικό είναι ότι η αναμενόμενη εισφορά είναι μικρότερη στην προηγούμενη περίπτωση σε σχέση με την τελευταία. Αυτό σημαίνει την λήψη περισσότερων κινδύνων από το διαχειριστή του ταμείου, δηλαδή, μια θετική, αλλά μικρή πιθανότητα χρεωκοπίας.

5.4 Ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης προεξοφλημένης τιμωρίας/ανταμοιβής

Το σημείο καταστροφής είναι το επίπεδο του πλούτου στο ταμείο που θεωρείται από το διαχειριστή, το ελάχιστο αποδεκτό σημείο για τη συνέχιση των χρηματοοικονομικών πράξεων με κάποια εγγύηση συμμετοχής σε σημερινές και μελλοντικές υποχρεώσεις. Όπως αναφέρθηκε, η πιθανότητα χρεωκοπίας μπορεί να περιορίζεται στο ελάχιστο και ταυτόχρονα το σύνολο των αναμενόμενων προεξοφλημένων εισφορών μειώνεται. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας την σταθερά k στο σύστημα απόσβεσης με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r. Το ερώτημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί εδώ είναι το πώς αυτό το σημείο χρεωκοπίας μπορεί να γίνει πιο απτό, με την έννοια ότι, όταν το ταμείο έχει πέσει σε αυτή την ανεπιθύμητη τιμή, έχει πραγματικά τιμωρηθεί,ίσως εξαιτίας του γεγονότος ότι μια μεγάλη εισφορά κεφαλαίου απαιτείται από το νόμο, προκειμένου να αυξηθούν τα μετρητά στο λογαριασμό ταμείου. Ως εκ τούτου, οι Josa-Fombellida και Rincon Zapatero θεώρησαν την ύπαρξη μιας σταθερής ποινής, μετρούμενη σε νομισματικές μονάδες, οι οποίες βαρύνουν το ταμείο, εάν τα περιουσιακά στοιχεία του ταμείου τείνουν στην αξία χρεωκοπίας l(όπως ορίστηκε παραπάνω).Υποθέτουν, ότι η ποινή είναι μια μονάδα. Η αξία της ποινής σήμερα είναι $e^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_l}$, όπου $\mu > 0$ είναι ο υποκειμενικός παράγοντας προεξόφλησης, που χρησιμοποιεί ο διαχειριστής όταν εκτιμά την τιμωρία. Στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $\mathbb{E}\left(e^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_l}\right)$ η αναμενόμενη προεξοφλημένη αντιχρησιμότητα όταν η απώλεια είναι l. Ορίζεται $G_l(x) = inf_{\Lambda\in A_x}\mathbb{E}\left(e^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}{}_l}\right)$, με $l < x$, με σχετική βέλτιστη στρατηγική Λ_{G_l}, δηλαδή

$$\mathbf{\Lambda}_{G_u}(x) = arginf_{\mathbf{\Lambda}\in A_x}\mathbb{E}\left(e_l^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}}\right)$$

Ένα αντίστοιχο πρόβλημα με αυτό που μόλις αναφέρθηκε είναι αυτό που αφορά τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων αξιών για την επίτευξη προκαθορισμένης υψηλής αξίας για το κεφάλαιο του ταμείου. Προτάθηκε το ενδεχόμενο ο διαχειριστής να μπορεί να ανταμειφθεί λόγω της καλής διαχείρισης,που οδηγεί το ταμείο σε ένα ανώτερο επίπεδο, u. Το πρόβλημα τώρα είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης αξίας της ανταμοιβής στο παρόν. Έτσι όρισαν:

$$G_u(x) = sup_{\mathbf{\Lambda}\in A_x}\mathbb{E}\left(e_l^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}}\right), x < u$$

με σχετική βέλτιστη στρατηγική $\mathbf{\Lambda}_{G_u}$ δηλαδή

$$\mathbf{\Lambda}_{G_u}(x) = argsup_{\mathbf{\Lambda}\in A_x}\mathbb{E}\left(e_l^{-\mu\tau^{\mathbf{\Lambda}}}\right)$$

Όταν το ταμείο θα χρηματοδοτείται επαρκώς και θέλουμε να αποφευχθεί η τιμωρία, μόνο η επιλογή $k < r$ καθιστά ενδιαφέρον το ζήτημα για το πώς πρέπει να γίνει η διαχείριση του ταμείου, επειδή οι εγγυήσεις $k \geq r$ δηλαδή όταν η επένδυση γίνεται πλήρως στο ομόλογο απομακρύνει το σημείο χρεωκοπίας. Έτσι στην περίπτωση υπερχρηματοδότησης θεωρείται $k < r$. Στην πραγματικότητα, όταν $k > r$, ο τόκος για το πλεόνασμα X είναι αρνητικός.

Όπως παρατηρείται στην παρακάτω πρόταση, το σχέδιο επενδύσεων που συνδέονται με την ελαχιστοποίηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής και τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων ανταμοιβών έχει την ίδια δομή με τα παραπάνω, δηλαδή, είναι πάντα σταθερός ο τύπος αναλογίας σε σχέση με τις υποχρεώσεις.

Πρόταση: Οι βέλτιστες στρατηγικές επένδυσης και οι βέλτιστες συναρτήσεις αξίας είναι:

(Υποχρηματοδοτούμενη περιοχή)
Υποτίθεται ότι $l < x < 0$ και $k < r$. Τότε η βέλτιστη πολιτική δίνεται από

$$\mathbf{\Lambda}_{G_l}(x) = -\frac{1}{q^+ - 1}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})X = \frac{1}{q^+ - 1}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})(AL - F), \tag{5.12}$$

και τότε η ελάχιστη ποινή είναι

$$G_l(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{q^+} = \left(\frac{F - AL}{l}\right)^{q^+}, \tag{5.13}$$

όπου

$$q^+ = \frac{1}{2(r-k)}(r - k + \frac{1}{2}\theta^T\theta + \mu + \sqrt{\Phi}), \tag{5.14}$$

με

$$\Phi = (r - k + \frac{1}{2}\theta^T\theta + \mu)^2 - 4(r-k)\mu.$$

(Υπερχρηματοδοτούμενη περιοχή)

Υποτίθεται ότι $0 < x < u$ και $k < r$. Τότε η βέλτιστη στρατηγική επενδύσεων μεγιστοποίησης του ασφαλίστρου δίνεται από

$$\mathbf{\Lambda}_{G_u}(x) = -\frac{1}{1 - q^-}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})X = \frac{1}{1 - q^-}\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})(F - AL), \tag{5.15}$$

και τότε το μέγιστο ασφάλιστρο δίνεται από:

$$G_u(x) = \left(\frac{x}{u}\right)^{q^-} = \left(\frac{F - AL}{u}\right)^{q^-}, \tag{5.16}$$

όπου:

$$q^- = \frac{1}{2(r-k)}(r - k + \frac{1}{2}\theta^T\theta + \mu - \sqrt{\Phi}),$$

5.5 Συμπεράσματα

Έχουμε αναλύσει τη διαχείριση της διαδικασίας συνταξιοδότησης για το συγκεντρωτικό πρόγραμμα συνταξιοδότησης σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις, με διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων υπερχρηματοδότησης και υποχρηματοδότησης. Πρώτον, υποτίθεται ότι ο στόχος του εργοδότη είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να αποφευχθεί το σημείο καταστροφής. Δεύτερον, έχουμε μελετήσει τα προβλήματα της ελαχιστοποίησης του κόστους να χτυπηθεί το χαμηλότερο εμπόδιο και να μεγιστοποιηθεί το βραβείο της επίτευξης του άνω φράγματος, και τέλος έχει εξεταστεί η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας σε άπειρο ορίζοντα, αν ληφθεί υπόψη το ενδεχόμενο εξωγενών παραγόντων που οδηγούν το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα σε αιφνίδιο τερματισμό.

Ένα βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η βέλτιστη επενδυτική πολιτική σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν είναι αναλογικού τύπου όσον αφορά το χάσμα μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού του ταμείου και των αναλογιστικών υποχρέωσεων. Αυτή είναι μια άμεση συνέπεια των επιλογών των αντικειμενικών συναρτήσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η συμπεριφορά των επενδύσεων είναι επίσης βέλτιστη στο μοντέλο του Merton της κατανάλωσης και της επιλογής χαρτοφυλακίου με ομοιόμορφα κατανεμημένες επιστροφές. Το διάνυσμα $\Sigma^{-1}(\mathbf{b} - r\mathbf{1})$ εμφανίζεται ως μια από τις συνιστώσες του διανύσματος της αναλογικότητας στις λύσεις, το οποίο καλείται από τον Merton βέλτιστη στρατηγική ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου. Έχει την ιδιότητα της μεγιστοποίησης του αναμενόμενου λογάριθμου της χρησιμότητας του τερματικού πλούτου και της αναμενόμενης συνεχώς ανατοκιζόμενης επιστροφής. Δεδομένου ότι οι στόχοι του διαχειριστή που σχετίζονται με την ανάπτυξη των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, - όπου αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμοι με την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας καταστροφή - δεν είναι έκπληξη το γεγονός ότι η βέλτιστη στρατηγική ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου εμφανίζεται ως αναπόσπαστο μέρος της αναλογικής επενδυτικής στρατηγικής.

Ανάλογες στρατηγικές επενδύσεων, ανεξάρτητες από το επίπεδο του ελλείμματος, οδηγεί στην παράδοξη συμπεριφορά λήψης περισσότερων κινδύνων καθώς αυξάνεται το έλλειμμα. Η αιτιολόγηση είναι ότι η απόδοση που παρατηρείται σε ασφαλή επένδυση συν τα αποτελέσματα των αποσβέσεων δεν επαρκούν για να καλύψουν τα χρέη. Ως εκ τούτου, είναι απαραίτητο να επενδυθούν σε επισφαλή περιουσιακά στοιχεία στην υποχρηματοδοτούμενη περιοχή προκειμένου να ληφθούν υψηλότερες μέσες αποδόσεις, έτσι ώστε τα αβέβαια αποτελέσματα είναι πάντα παρόντα. Όταν το ταμείο είναι κοντά στο σημείο καταστροφής, γίνεται βελτιστοποίηση για να αυξηθεί η μέση απόδοση των των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου, αναλαμβάνοντας τον κίνδυνο μιας υψηλότερης μεταβλητότητας. Η κατάσταση είναι παρόμοια με την Πρόταση 5.4.1, εξαιτίας της αναλογικής τάσης στην επενδυτική συμπεριφορά, οι επενδύσεις σε μετοχές αυξάνονται καθώς αυξάνεται το έλλειμμα ή το πλεόνασμα.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα είναι ότι η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική δεν εξαρτάται από το σημείο καταστροφής l και το επιθυμητό επίπεδο u . Για την τάξη των κονδυλίων που περιγράφηκαν και με τους στόχους που προτάθηκαν, δεν υπάρχει διαφορά στη βέλτιστη διαχείριση τους, εφόσον διαφέρουν μόνο στο σημείο καταστροφής. Ωστόσο, η προσπάθεια απόσβεσης k έχει μείζονα αντίκτυπο, όχι μόνο στις βέλτιστες αποφάσεις για επενδύσεις, αλλά και στην πιθανότητα της καταστροφής, στον αναμενόμενο χρόνο για την επίτευξη των στόχων, καθώς και στο συνολικό ποσό των αναμενόμενων εισφορών προς το ταμείο.

Περαιτέρω έρευνα πρέπει να κατευθυνθεί προς στις στοχαστικές παροχές όπως στην έρευνα των Josa-Fombellida και Rincon-Zapatero (2004). Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν δύο πηγές αβεβαιότητας: οι αποδόσεις των αξιογράφων του ταμείου και την εξέλιξη των παροχών. Αυτό οδηγεί σε ένα πιο δύσκολο πρόβλημα, όπου δεν είναι δυνατόν να εξασφαλιστούν ρητές λύσεις, παρά μόνο σε πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις. Έτσι, η ανάλυση πρέπει να βασίζεται στην απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης για την εξίσωση HBJ από μια πιο θεωρητική άποψη.

Βιβλιογραφία

[1] Βρόντος Σ. 2009, Ειδικά θέματα Ασφαλίσεων Ζωής, Σημειώσεις για το Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Γιαννακόπουλος Α.Ν. 2003, Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος 1: Εισαγωγή στη στοχαστική ανάλυση

[3] Ζυμπίδης, 2008, Συνταξιοδοτικά ταμεία και αναλογιστικές μελέτες, Εκδόσεις Οικ. Πανεπιστήμιου Αθηνών

[4] Κουτσόπουλος, 2007 Οικονομικά και Χρηματοοικονομικά μαθηματικά, σημειώσεις για το Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[5] Ν. Φράγκος, Α. Γιαννακόπουλος, Σ. Βρόντος Τα οικονομικά μαθηματικά της Συνταξης

[6] Arnold, L., 1974. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. Wiley, New York.

[7] Bellman, R., 1957. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[8] Blake, D. and Orszag, J. M. (1996) A closedform formula for calculating bond convexity. Journal of Fixed Income

[9] Boulier, J.F., Michel, S., Wisnia, V., 1996. Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund. In: Proceedings of the Sixth AFIR International Colloquium,

[10] Boulier, J.F., Trussant, E., Florens, D., 1995. A dynamic model for pension fund management. In: Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium

[11] Boulier, J.F., Trussant, E., Florens, D., 1995. A dynamic model for pension funds management. In: Proceedings of the Fifth AFIR International Colloquium

[12] Bowers, N.L., Hickman, J.C., Nesbitt, C.J., 1979. The dynamics of pension funding: contribution theory. Transactions of the Society of Actua

[13] Browne, S., 1999. Beating a moving target: Optimal portfolio strategies for outperforming a stochastic benchmark. Finance and Stochastics

[14] Cairns, A.J.G., 1995. Pension funding in a stochastic environment: the role of objectives in selecting an asset-allocation strategy. In: Proceedings of the Fifth AFIR International Colloquium,

[15] Cairns, A.J.G., 1996. Continuous-time stochastic pension fund modelling. In: Proceedings of the Sixth AFIR International Colloquium, Vol. 1, of the Fifth AFIR International Colloquium,

[16] Cairns, A.J.G., 2000. Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. Astin Bulletin

[17] Cairns, A.J.G., Parker, G., 1997. Stochastic pension fund modelling. Insurance: Mathematics and Economics

[18] Chua, J. (1984) A closedform formula for calculating bond duration. Financial Analysts Journal

[19] Haberman, S. and J.H. Sung. (1994). "Dynamic Approaches to Pension Funding." Insurance Mathematics and Economics

[20] Haberman, S., 1993. Stochastic investment returns and the present value of future contributions in defined benefit pension schemes.

[21] Haberman, S., Sung, J.H., 1994. Dynamics approaches to pension funding. Insurance: Mathematics and Economics

[22] Josa-Fombellida, R., Rincon-Zapatero, J.P., 2001. Minimization of risks in pension funding by means of contribution and portfolio selection. Insurance: Mathematics and Economics

[23] Josa-Fombellida, R. and J.P. Rincon-Zapatero. (2001). "Minimization of Risks in Pension Funding by Means of Contributions and Portfolio Selection." Insurance: Mathematics and Economics

[24] Josa-Fombellida, R., Rincon-Zapatero, J.P., 2004. Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds. Insurance: Mathematics and Economics

[25] Merton, R.C. (1990). Continuous-Time Finance. Cambridge, Mass: Blackwell.

[26] O"Brien, 1987. A two parameter family of pension contribution functions and stochastic optimization. Insurance: Mathematics and Economics

[27] Owadally, M.I., Haberman, S., 1999. Pension fund dynamics and gains/losses due to random rates of investment return. North American Actuarial Journal

[28] Pestien, V.C., Sudderth, W.D., 1985. Continuous-time red and black: How to control a diffusion to a goal. Mathematics of Operations Research

[29] Siegmann, A.H., Lucas, A., 1999. Continuous-time dynamic programming for ALM with risk averse loss functions. In: Proceedings of the 9th AFIR International Colloquium

[30]Young, V.R. and T. Zariphopoulou. (2002b). "Pricing Insurance Via Stochastic Control: Optimal Consumption and Terminal Wealth." Working paper, School of Business, University of Wisconsin-Madison.