



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου”

**Μέτρηση και Διαχείριση Κινδύνου με
τη Χρήση Μοντέλων Στοχαστικής
Μεταβλητότητας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δούναβη Βασιλική

Επιβλέπων καθηγητής: Σ. Βρόντος

Αθήνα, 2011

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Βρόντο για την πολύτιμη καθοδήγησή του, χωρίς την οποία δε θα ήταν δυνατή η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την αδερφή μου Κατερίνα για τη στήριξή της.

Περίληψη

Στην τρέχουσα οικονομική συγκυρία, η κεφαλαιακή επάρκεια αποτελεί ένα από τα σημαντικά ζητήματα για ένα χρηματοπιστωτικό οργανισμό ή μια ασφαλιστική επιχείρηση, όσο αναφορά την επιβίωσή τους και τη συμμόρφωση με το κανονιστικό πλαίσιο. Για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας, πρέπει να υπολογιστούν οι επιμέρους κίνδυνοι που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση με κατάλληλες μεθόδους.

Ο κίνδυνος αγοράς αφορά τον κίνδυνο απομείωσης της αξίας ενός χαρτοφυλακίου, εξαιτίας αλλαγών στην αξία οικονομικών παραγόντων, όπως η ισοτιμία, τα επιτόκια, οι τιμές των εμπορευμάτων και οι τιμές των μετοχών.

Η ποσοτικοποίηση του κινδύνου αγοράς γίνεται με χρήση μέτρων κινδύνου όπως η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk) ή η αναμενόμενη απώλεια (Expected Shortfall).

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη μέτρηση της αξίας σε κίνδυνο χρησιμοποιώντας για τη μοντελοποίηση της μεταβλητότητας των αποδόσεων, μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και γίνεται σύγκριση με τα αυτοπαλίνδρομα μοντέλα τύπου ARCH, GARCH,.

Γίνεται εφαρμογή σε χρονοσειρές αποδόσεων για τους δείκτες FTSE100, DAX , CAC40, Dow Jones Industrial Average, S&P 500.

Η καταλληλότητα των μοντέλων ελέγχεται με backtesting σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen.

Η εφαρμογή γίνεται στα πρόγραμματα R και e-views.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1.....	7
1.1 Ανάγκη για διαχείριση κινδύνου.....	7
1.2 Μέτρα κινδύνου.....	9
1.2.1 Αξία σε κίνδυνο (Value at risk).....	9
1.2.1.1 Μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης.....	10
1.2.1.2 Μέθοδος διακύμανσης συνδιακύμανσης (Variance Covariance).....	10
1.2.1.3 Προσομοίωση Monte Carlo.....	11
1.2.1.4 Extreme value theory.....	11
1.2.1.5 RiskMetrics.....	12
1.2.2 Συνεπή μέτρα κινδύνου.....	13
1.2.2.1 Αναμενόμενη απώλεια (Expected Shortfall).....	13
1.3 Εκ των υστέρων έλεγχος (Backtesting).....	14
1.4 Ορισμός μεταβλητότητας.....	16
1.5 Ιδιότητες μεταβλητότητας.....	18
1.5.1 Βαριές ουρές (Heavy Tails).....	18
1.5.2 Συσσώρευση της μεταβλητότητας (volatility clustering).....	18
1.5.3 Επιστροφή στο μέσο (mean reversion).....	19
1.5.4 Μόγλευση (leverage effect).....	19
1.5.5 Ροή πληροφοριών και μεταβλητότητα.....	19
1.6 Ιστορική αναδρομή.....	20
Κεφάλαιο 2.....	23

2.1 Μοντέλο ARCH.....	23
2.2 Μοντέλο GARCH.....	25
2.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα μοντέλων ARCH, GARCH.....	27
2.4 Μοντέλο Integrated GARCH (I-GARCH).....	28
2.5 Μοντέλο Exponential GARCH (E-GARCH).....	29
2.6 Μοντέλο GJR GARCH.....	30
2.7 Μοντέλο GARCH in mean (GARCH-M).....	30
Κεφάλαιο 3.....	31
3.1. Στοχαστικές διαδικασίες.....	31
3.1.1 Κίνηση Brown.....	31
3.1.2 Μοντέλο τιμών μετοχών.....	33
3.1.3 Διαδικασία Itô.....	35
3.1.4 Λύση στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης SDE.....	40
3.2 Στοχαστική μεταβλητότητα.....	40
3.2.1 Γεωμετρική κίνηση Brown.....	41
3.2.2 Επανερχόμενη στο μέσο Gaussian διαδικασία.....	42
3.2.3 Επανερχόμενη στο μέσο τετραγωνική διαδικασία.....	44
3.2.4 Επανερχόμενη στο μέσο λογαριθμική διαδικασία.....	45
3.3. Μοντέλο Heston.....	47
3.4 Μοντέλο Taylor.....	49
Κεφάλαιο 4.....	51
4.1 Εφαρμογή.....	51
4.2 Δείκτης Dow Jones Industrial Average (DJI).....	52

<i>4.3 Δείκτης DAX</i>	63
<i>4.4 Δείκτης CAC40 (FCHI)</i>	73
<i>4.5 Δείκτης FTSE100 (FTSE)</i>	82
<i>4.6 Δείκτης S&P 500 (GSPC)</i>	92
<i>4.7 Συμπεράσματα</i>	102
<i>Βιβλιογραφία</i>	103

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΠΑΣ

Κεφάλαιο 1

1.1 Ανάγκη για διαχείριση κινδύνου

Ως διαχείριση κινδύνου μπορεί να οριστεί η επιλογή του τύπου και επιπέδου κινδύνου που μια επιχείρηση είναι διατεθειμένη να αναλάβει στα πλαίσια του αντικειμένου δραστηριότητάς της και του εποπτικού πλαισίου.

Το εποπτικό πλαίσιο για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ενσωματώνεται στο κείμενο της Βασιλείας II ενώ για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις στο Solvency I. Σκοπός τους είναι να θεσπίσουν ενιαίους κανόνες ώστε να υπάρχει η απαραίτητη κεφαλαιακή επάρκεια για την διασφάλιση των καταθετών και των ασφαλισμένων σε περιόδους κρίσης.

Η Βασιλεία II στηρίζεται σε τρεις πυλώνες (Basel Committee on Banking Supervision [2006]). Ο πρώτος πυλώνας αναφέρεται στη διατήρηση των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων που υπολογίζονται για τον πιστωτικό κίνδυνο, τον κίνδυνο αγοράς και τον λειτουργικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Προτείνονται συγκεκριμένες μέθοδοι για τη μέτρηση κάθε κατηγορίας κινδύνου. Για τον κίνδυνο αγοράς προτείνεται η μέθοδος Value at Risk που περιγράφεται παρακάτω. Ο δεύτερος πυλώνας αποτελεί το κανονιστικό πλαίσιο του πρώτου πυλώνα και δίνει ένα πλαίσιο διαχείρισης των υπολειπόμενων κινδύνων.

Ο τρίτος πυλώνας έχει να κάνει με την αναφορά στην εποπτική αρχή και τη δημοσιοποίηση στο ευρύ κοινό των πληροφοριών ώστε να μπορεί να αξιολογηθεί το επίπεδο ανάληψης κινδύνου κάθε χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Στο Solvency I ο πρώτος πυλώνας αναφέρεται στις ποσοτικές απαιτήσεις. Ο δεύτερος πυλώνας στις ποιοτικές απαιτήσεις και στη διαδικασία εποπτικής αξιολόγησης και ο τρίτος πυλώνας στην αναφορά στην εποπτική αρχή και δημοσιοποίηση των πληροφοριών όπως στη Βασιλεία II (European Commission, Insurance and Pensions [2005]).

Η ανάγκη για διαχείριση κινδύνου προέκυψε από την αυξημένη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών από τη δεκαετία του '70. Το 1971, το σύστημα σταθερής συναλλαγματικής ισοτιμίας κατέρρευσε και οδήγησε σε μεταβλητές ισοτιμίες. Άλλο ενδεικτικό παράδειγμα είναι η κατάρρευση του χρηματιστηρίου των ΗΠΑ το 1987.

Ο κίνδυνος πηγάζει από την αβεβαιότητα σχετικά με μελλοντικά έσοδα, ισοτιμίες, επιτόκια, τιμές χρηματοοικονομικών μέσων και εμπορευμάτων, μακροοικονομικές μεταβλητές, πιστωτικά, λειτουργικά και συστημικά γεγονότα κ.α. Η διαχείριση κινδύνου μειώνει τη μεταβλητότητα της αξίας της επιχείρησης ή των ταμειακών ροών. Στην ουσία η επιχείρηση θυσιάζει ορισμένα κεφάλαια στο παρόν ώστε να μειώσει την αβεβαιότητα των μελλοντικών ροών. Με σκοπό την αντιστάθμιση κινδύνου έχουν αναπτυχθεί σύνθετα προϊόντα όπως πιστωτικά και χρηματοοικονομικά παράγωγα .

Το πρώτο βήμα για μια επιχείρηση είναι η αναγνώριση των κινδύνων που αντιμετωπίζει. Στη συνέχεια πρέπει να μετρηθεί ο κίνδυνος και να εκτιμηθούν οι συνέπειές του με κατάλληλα χρηματοοικονομικά εργαλεία. Ανάλογα με τις μετρήσεις πρέπει να διαμορφωθεί μια στρατηγική διαχείρισης κινδύνου, με αποφυγή , μεταφορά (ασφάλιση), διακράτηση ή περιορισμό του κάθε κινδύνου. Τέλος πρέπει να μετρηθεί η αποτελεσματικότητα των παραπάνω στρατηγικών.

Οι επιχειρήσεις είναι εκτεθειμένες σε διάφορα είδη κινδύνων που μπορούν συνοπτικά να ταξινομηθούν σε επιχειρηματικούς, σε μη επιχειρηματικούς κινδύνους και σε χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Οι επιχειρηματικοί κίνδυνοι έχουν να κάνουν με τη λειτουργία της επιχείρησης και περιλαμβάνουν την τεχνολογική καινοτομία, το σχεδιασμό και προβολή του προϊόντος, τη μόχλευση, την έκθεση σε μακροοικονομικούς κινδύνους που προκύπτουν από τους οικονομικούς κύκλους. Οι μη επιχειρηματικοί κίνδυνοι είναι δύσκολο να ελεγχθούν από τις επιχειρήσεις και περιλαμβάνουν τους κινδύνους που προκαλούνται από αλλαγές στην οικονομία ή στο πολιτικό περιβάλλον.

Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι προέρχονται από τη μεταβλητότητα των αγορών και είναι αυτοί που κυρίως πρέπει να διαχειριστούν οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί. Οι βασικότερες κατηγορίες χρηματοοικονομικών κινδύνων είναι οι εξής : κίνδυνος αγοράς, πιστωτικός κίνδυνος, λειτουργικός κίνδυνος, κίνδυνος ρευστότητας, πολιτικός κίνδυνος, κίνδυνος χώρας, κίνδυνος φήμης. Μεταξύ των διαφορετικών κατηγοριών συχνά υπάρχει συσχέτιση γι' αυτό οι επιχειρήσεις προσανατολίζονται πλέον σε ευρεία για την επιχείρηση διαχείριση κινδύνου (enterprise wide risk management).

Ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος και κυρίως ο κίνδυνος αγοράς μπορεί να διαχειριστεί με σύγχρονες μεθόδους που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και

περιγράφονται παρακάτω ούτως ώστε η αβεβαιότητα να οδηγήσει σε λήψη σωστών επενδυτικών αποφάσεων παρά σε μη αναμενόμενες απώλειες.

Για περισσότερα μπορεί κανείς να δει Crouhy et al. [2006], Jorion [2007].

1.2 Μέτρα κινδύνου

1.2.1 Αξία σε κίνδυνο (Value at risk)

Σύμφωνα με τους Tsay [2005] και Jorion [2007], το Value at risk σαν μέτρο κινδύνου εφαρμόζεται ευρέως λόγω της απλότητας του για τη μέτρηση κυρίως του κινδύνου αγοράς, ενώ μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες κατηγορίες κινδύνων.

Πλεονεκτεί σαν μέτρο κινδύνου σε σύγκριση με τη μεταβλητότητα επειδή λαμβάνει υπόψη μόνο τις αρνητικές και όχι τις θετικές αποκλίσεις.

Άρχισε να χρησιμοποιείται στα πλαίσια της ανάγκης για εποπτικό έλεγχο και για διαχείριση των χρηματοοικονομικών κινδύνων εξαιτίας της χρεοκοπίας στις αρχές του '90 εταιρειών όπως η Barings, Metallgesellschaft, Orange Country κ.ά.

Η χρήση του θεσμοθετήθηκε στο κείμενο της Βασιλείας και του Solvency για τη μέτρηση του κινδύνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και των ασφαλιστικών εταιρειών.

Η αξία σε κίνδυνο ορίζεται ως η μέγιστη δυνητική ζημία από μία χρηματοοικονομική θέση κατά τη διάρκεια συγκεκριμένης περιόδου και για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης.

Για μία θέση αγοράς αποτυπώνεται ως εξής:

$$p = \Pr [\Delta V(k) \leq \text{VaR}] = F_k(\text{VaR})$$

,όπου θα συμβολίσουμε με p δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας (0.01 βάσει της Βασιλείας II), k δεδομένη χρονική περίοδος, (10 ημέρες διαπραγμάτευσης βάσει της Βασιλείας II), $\Delta V(k)$ τη μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου σε χρονικό διάστημα $[t, t+k]$ και $F_k(x)$ την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $\Delta V(k)$

Η αξία σε κίνδυνο σε αυτήν την περίπτωση έχει αρνητικό πρόσημο.

Για παράδειγμα έστω ότι για χαρτοφυλάκιο αξίας 100.000€ το VaR είναι -2.000€.

Τότε για θέση αγοράς, η πιθανότητα να έχουμε ζημία μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή από -2.000€ είναι p .

Αντίστοιχα για θέση πώλησης:

$$p = \Pr [\Delta V(k) \geq \text{VaR}] = 1 - F_k(\text{VaR})$$

Σε αυτή την περίπτωση το VaR έχει θετικό πρόσημο για να δείχνει ζημία.

Για παράδειγμα έστω ότι για χαρτοφυλάκιο αξίας 100.000€ το VaR είναι 2.000€. Τότε για θέση πώλησης, η πιθανότητα να έχουμε ζημία μεγαλύτερη από 2.000€ είναι p .

Παρακάτω περιγράφονται συνοπτικά διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού του VaR, ακολουθώντας τους Linsmeier and Pearson [1996], Jorion [2007] και Tsay [2005].

1.2.1.1 Μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης

Είναι μια μη παραμετρική μέθοδος που δεν προϋποθέτει συγκεκριμένη κατανομή αποδόσεων παρά μόνο σταθερή κατανομή για την υπό εξέταση περίοδο.

Βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα. Η κατανομή κερδών ζημιών δημιουργείται εφαρμόζοντας στο τρέχον χαρτοφυλάκιο τις ιστορικές αλλαγές στις τιμές κατά τη διάρκεια των προηγούμενων n περιόδων. Τα βάρη των περιουσιακών στοιχείων που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο είναι τα τρέχοντα. Υπολογίζουμε τις ποσοστιαίες αλλαγές στις ιστορικές τιμές ούτως ώστε να δημιουργήσουμε ένα υποθετικό χαρτοφυλάκιο σαν να συνέβαιναν αντίστοιχες αλλαγές στο σημερινό χαρτοφυλάκιο που αποτιμάται σε τιμές αγοράς. Χρησιμοποιείται το εμπειρικό ποσοστημόριο για να εκτιμηθεί το θεωρητικό ποσοστημόριο των αποδόσεων.

Εάν n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων των αποδόσεων του δείγματος σε αύξουσα σειρά, και p το διάστημα εμπιστοσύνης, τότε το εμπειρικό ποσοστημόριο ισούται με $r_{(np)}$. Σε περίπτωση που np δεν είναι ακέραιος γίνεται παρεμβολή. Η αξία σε κίνδυνο ισούται με $r_{(np)}$ επί τη σημερινή μας θέση.

Η παραπάνω μέθοδος είναι απλή στη χρήση όμως το αποτέλεσμα εξαρτάται άμεσα από τα δεδομένα που αποτελούν το δείγμα. Σε περίπτωση που λάβουμε υπόψη πιο μικρό διάστημα, μπορεί κάποιο σημαντικό γεγονός να παραλείπεται. Για πιο μεγάλα διαστήματα, κάποια γεγονότα ίσως δεν έχουν πλέον σημασία. Ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι όλες οι παρατηρήσεις, όσο μακρινές και να είναι έχουν την ίδια βαρύτητα. Επίσης εάν εισερχόμαστε σε περίοδο μεγαλύτερης διακύμανσης, η αξία σε κίνδυνο υποεκτιμάται.

1.2.1.2 Μέθοδος διακύμανσης συνδιακύμανσης (Variance Covariance)

Είναι παραμετρική μέθοδος υπολογισμού του VaR και υποθέτει κανονική κατανομή για τις αποδόσεις. Αρχικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση βάσει των ιστορικών αποδόσεων για συγκεκριμένο δείγμα. Η συνολική τυπική απόκλιση του

χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την τυπική απόκλιση των επιμέρους περιουσιακών στοιχείων, τη συσχέτισή τους και τα βάρη τους στο χαρτοφυλάκιο.

Το VaR υπολογίζεται ως συνάρτηση της τυπικής απόκλισης βάσει των ιδιοτήτων της κανονικής κατανομής.

$$\text{VaR} = -\text{Value of portfolio} * \sigma_{\text{port}} * \alpha * \sqrt{T}$$

Όπου σ_{port} η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου, T η περίοδος υπολογισμού του VaR σε ημέρες (συνήθως 1 ημέρα), α σταθερά (ποσοστημόριο κανονικής κατανομής), με $\alpha=2.326$ για διάστημα εμπιστοσύνης 99% και $\alpha=1.645$ για διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

1.2.1.3 Προσομοίωση Monte Carlo

Η μέθοδος αυτή μοιάζει με την ιστορική προσομοίωση. Η βασική διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται μια στατιστική κατανομή που θεωρείται ότι προσεγγίζει τις πιθανές αποδόσεις. Η στατιστική κατανομή που θα επιλεγεί συνήθως βασίζεται στις ιστορικές αποδόσεις. Στη συνέχεια βάσει αυτής της κατανομής γίνεται προσομοίωση από χιλιάδες υποθετικές αλλαγές στις τιμές και υπολογίζονται οι υποθετικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Το VaR προσδιορίζεται εν συνεχεία όπως στη μέθοδο ιστορικής προσομοίωσης.

Η μέθοδος αυτή είναι πιο δύσκολη υπολογιστικά, όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαχείριση περισσότερων ειδών κινδύνων καθώς ενσωματώνει και το «πέρασμα του χρόνου».

1.2.1.4 Extreme value theory

Η μέθοδος αυτή μελετά τη συμπεριφορά της κατανομής στις ουρές και εφαρμόζεται ευρέως στην αξιολόγηση καταστροφικών γεγονότων.

Υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και έχουν συνάρτηση κατανομής F . Χωρίζουμε το δείγμα σε g υποσύνολα με n παρατηρήσεις το καθένα. Μελετάμε την ελάχιστη αποδόση $r_{n,i}$ κάθε υποσυνόλου, δηλαδή την αριστερή ουρά της κατανομής, διότι σχετίζεται με τον υπολογισμό του VaR.

Η μέθοδος βασίζεται στην επέκταση του Κ.Ο.Θ. για το δειγματικό ελάχιστο (θεώρημα Fisher-Tippett). Αν υπάρχουν ακολουθίες $\alpha_n > 0, \beta_n \in \mathbb{R}$, και μια μη εκφυλισμένη κατανομή G ώστε η κατανομή του κανονικοποιημένου ελαχίστου

$$r_{(n,i^*)} = \frac{(r_{(n,i)} - \beta_n)}{\alpha_n}, \text{ να συγκλίνει για μεγάλο δείγμα σε κάποια κατανομή } G, \text{ τότε η } G$$

ανήκει σε συγκεκριμένη παραμετρική οικογένεια κατανομών GEV (Generalised Extreme Value Distribution), η οποία περιλαμβάνει τις Frechet, Weibull ή Gumbel.

Η κατανομή G θα είναι της μορφής

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(1+k_n x)^{1/k_n}} & \text{εάν } k_n \neq 0 \\ 1 - e^{-e^x} & \text{εάν } k_n = 0 \end{cases}$$

Για $x < -1/k_n$ εάν $k_n < 0$ και $x > -1/k_n$ εάν $k_n > 0$

Η παράμετρος k_n αναφέρεται ως η παράμετρος σχήματος που καθορίζει το μέγεθος της ουράς της κατανομής. Η παράμετρος β_n είναι η παράμετρος θέσης και η a_n η παράμετρος κλίμακας. Οι παράμετροι στη συνέχεια εκτιμώνται με παραμετρικές ή μη παραμετρικές μεθόδους.

Αντικαθιστώντας $x = (r - \beta_n)/a_n$ υπολογίζουμε το ποσοστημόριο της GEV κατανομής για δεδομένη πιθανότητα p και βρίσκουμε την αξία σε κίνδυνο VaR.

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \frac{a_n}{k_n} \{1 - [-n \ln(1-p)]^{k_n}\} & \text{εάν } k_n \neq 0 \\ \beta_n + a_n \ln[-n \ln(1-p)] & \text{εάν } k_n = 0 \end{cases}$$

Η EVT υπερτερεί έναντι των άλλων μεθόδων οι οποίες υποεκτιμούν την αξία σε κίνδυνο για μεγάλα διαστήματα εμπιστοσύνης.

1.2.1.5 RiskMetrics

Η J.P. Morgan ανέπτυξε τη RiskMetrics μέθοδο για τον υπολογισμό του VaR. Υποθέτει ότι οι αποδόσεις δεδομένης της πληροφορίας τη χρονική στιγμή $t-1$ ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. $r_t | F_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

όπου μ_t ο υπό συνθήκη μέσος και σ_t^2 η υπό συνθήκη διακύμανση των αποδόσεων. Η υπό συνθήκη διακύμανση ακολουθεί το IGARCH(1,1) μοντέλο που περιγράφεται στο 2^ο κεφάλαιο. Η αξία σε κίνδυνο VaR υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Για επίπεδο εμπιστοσύνης 0.01, $VaR = -2.33 * \sigma_t$ θέση

Η αξία σε κίνδυνο για ορίζοντα k περιόδων, υπολογίζεται ως εξής :

$$VaR(k) = \sqrt{k} VaR$$

Η μέθοδος είναι απλή στη χρήση, όμως το μοντέλο που χρησιμοποιείται μπορεί να μην ταιριάζει στα δεδομένα. Η Αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τα μοντέλα τύπου Garch ή SV που περιγράφονται στα επόμενα κεφάλαια.

1.2.2 Συνεπή μέτρα κινδύνου

Σύμφωνα με τους Artzner et al. [1999] ένα συνεπές μέτρο κινδύνου πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις:

Θεωρούμε ένα σύνολο V από πραγματικές τυχαίες μεταβλητές. Μια συνάρτηση $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται συνεπές μέτρο κινδύνου εάν είναι :

A) μονότονη (monotonous) : $X \in V, X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$,

B) υποπροσθετική (sub-additive) : $X, Y, X+Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,

Γ) θετικά ομογενής (positively homogenous) : $X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$

Δ) μεταφραστικά αναλλοίωτη (translation invariant) : $X \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X+\alpha) = \rho(X)-\alpha$

Το VaR δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου επειδή ικανοποιεί την δεύτερη ιδιότητα μόνο για την κανονική ή ελλειπτική κατανομή. Για ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, ο συνολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου θα είναι μικρότερος από το μερικό άθροισμα των υποσυνόλων που το αποτελούν, χάρη στη διαφοροποίηση. Το VaR δεν απεικονίζει εάν το χαρτοφυλάκιο είναι καλά διαφοροποιημένο ενώ μπορεί ακόμα και να αυξάνεται η αξία σε κίνδυνο λόγω της διαφοροποίησης. Αντίστοιχα, για τον πιστωτικό κίνδυνο, δεν απεικονίζει τον κίνδυνο συγκέντρωσης. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα για τη συνολική έκθεση της επιχείρησης.

1.2.2.1 Αναμενόμενη απώλεια (Expected Shortfall)

Το VaR μας πληροφορεί για την αξία σε κίνδυνο στο $\alpha\%$ των περιπτώσεων, αλλά όχι για την αναμενόμενη απώλεια στην περίπτωση που η αξία υπερβεί το VaR. Επίσης δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου όπως είδαμε παραπάνω.

Με σκοπό να καλύψει αυτές τις αδυναμίες προτάθηκε στη βιβλιογραφία το μέτρο κινδύνου Expected shortfall. Εναλλακτικά ονομάζεται υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο Conditional Value at Risk (CVAR)

Αναφέρεται στο εμβαδό της ουράς της κατανομής, δηλαδή μας πληροφορεί για το πόσο μεγάλη θα είναι η απώλεια δεδομένου ότι έχει ξεπεράσει την τιμή του VaR.

Σύμφωνα με τους Acerbi and Tasche [2002] για διακριτές κατανομές ορίζεται ως εξής :

Έστω X είναι μια τυχαία μεταβλητή που δείχνει το κέρδος και τη ζημιά ενός χαρτοφυλακίου σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα T , και a είναι ένα προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας. Η αναμενόμενη απώλεια του χαρτοφυλακίου τότε ορίζεται ως

$$ES^{(a)}(X) = -\frac{1}{a}(E[X 1_{\{X \leq x^{(a)}\}}] - x^{(a)}(P[X \leq x^{(a)}] - a))$$

και για συνεχείς κατανομές

$$\begin{aligned} ES^{(a)}(X) &= E[-X \mid -X \geq VaR_a(X)] = \frac{E[-X \mid -X \geq VaR_a(X)]}{P[-X \geq VaR_a(X)]} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{q(a)} (-x)f(x)dx \end{aligned}$$

Όπου $q(a)$ είναι το a ποσοστημόριο της τ.μ. X . (Yamai and Yoshida [2002])

1.3 Εκ των υστέρων έλεγχος (Backtesting)

Ο εκ των υστέρων των υποδειγμάτων που χρησιμοποιήσαμε για την εκτίμηση του VaR ή του ES είναι απαραίτητος ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα ότι το υπόδειγμά μας μετράει σωστά τον κίνδυνο.

Στο backtesting συγκρίνουμε τις εκ των προτέρων προβλέψεις μας με τις πραγματοποιηθείσες ζημιές ή κέρδη του χαρτοφυλακίου. Εάν υπάρχει απόκλιση πρέπει να επανεξεταστούν οι υποθέσεις, οι παράμετροι και τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν.

Για το VaR όταν το υπόδειγμά μας είναι επαρκές, οι παρατηρήσεις που είναι εκτός της αξίας σε κίνδυνο, καθορίζονται από το διάστημα εμπιστοσύνης. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες παρατηρήσεις από τις αναμενόμενες, υποεκτιμάται ο κίνδυνος, ενώ στην αντίθετη περίπτωση δεσμεύονται περισσότερα κεφάλαια από ότι πρέπει .

Για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης p , ορίζουμε ως ποσοστό αποτυχίας $\frac{X}{T}$ το ηλικό του αριθμού των παρατηρήσεων X που η πραγματική ζημιά υπερέβη το VaR της προηγούμενης ημέρας, προς τον αριθμό των συνολικών παρατηρήσεων T . Όσο αυξάνεται το δείγμα, το ποσοστό αποτυχίας πρέπει να προσεγγίζει το p . Η μέθοδος

είναι μη παραμετρική γιατί δεν υποθέτουμε συγκεκριμένη κατανομή για τις αποδόσεις. Ο αριθμός των παραβιάσεων δεν είναι προβλέψιμος άρα κατανέμεται στο χρόνο σαν μια μεταβλητή Bernoulli(p).

$$f(x) = \binom{T}{x} = p^x (1-p)^{T-x}$$

Η αναμενόμενη τιμή του x είναι $E(X) = pT$ και η διακύμανση $V(X) = p(1-p)T$. Ο Kupiec [1995] χρησιμοποίησε έναν έλεγχο λόγου πιθανοφάνειας (LR_{uc} -likelihood ratio unconditional coverage) για να ελέγξει εάν ο αριθμός των παραβιάσεων είναι αποδεκτός. Το διάστημα εμπιστοσύνης για το τεστ καθορίζεται από την επιλογή μεταξύ δύο τύπου σφαλμάτων, να απορρίψουμε ένα σωστό μοντέλο (σφάλμα τύπου I) ή να μην απορρίψουμε ένα λάθος μοντέλο (σφάλμα τύπου II) και μπορεί να είναι διαφορετικό από το επίπεδο εμπιστοσύνης που ορίσαμε για τον υπολογισμό του VaR. Εξετάζουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0: \frac{x}{T} = p$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: \frac{x}{T} \neq p$.

$$LR_{uc} = -2 \ln[(1-p)^{T-x} p^x] + 2 \ln \left\{ \left[1 - \left(\frac{X}{T} \right) \right]^{T-x} \left(\frac{X}{T} \right)^x \right\}$$

Το τεστ ακολουθεί ασυμπτωτικά τη χ^2 κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας. Για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση εάν η τιμή LR_{uc} είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή που προκύπτει από τη χ^2 κατανομή. Ένα σύστημα επικύρωσης μοντέλων πρέπει να λαμβάνει υπόψη εάν ο αριθμός των παραβιάσεων αυξάνεται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Το τεστ του Christoffersen [1998] επεκτείνει τη LR_{uc} στατιστική, προσδιορίζοντας ότι οι παραβιάσεις πρέπει να είναι σειριακά ανεξάρτητες.

Ορίζουμε ως T_{ij} τον αριθμό των ημερών με το ενδεχόμενο j να ακολουθεί το i , όπου $i, j=0$ αν συμβαίνει παραβίαση και $i, j=1$ αλλιώς. Ορίζουμε ως π_i την πιθανότητα παρατήρησης μιας παραβίασης.

$$LR_{ind} = -2 \ln[(1-\pi)^{(T_{00}+T_{10})} \pi^{(T_{01}+T_{11})}] + 2 \ln [(1-\pi_0)^{T_{00}} \pi_0^{T_{01}} (1-\pi_1)^{T_{10}} \pi_1^{T_{11}}]$$

Ο πρώτος όρος δείχνει τη μεγιστοποίηση της πιθανότητας κάτω από την υπόθεση ότι οι παραβιάσεις είναι ανεξάρτητες στις ημέρες, $\pi = \pi_0 = \pi_1 = (T_{01} + T_{11})/T$. Ο δεύτερος όρος είναι η μεγιστοποίηση της πιθανότητας για τα παρατηρούμενα δεδομένα.

Το συνδυασμένο στατιστικό τεστ για την υπό συνθήκη κάλυψη (conditional coverage) ακολουθεί ασυμπτωτικά τη χ^2 κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

Σύμφωνα με τη Βασιλεία (Basel Committee on Banking Supervision [1996]), το backtesting είναι κριτήριο για να επικυρωθεί ένα εσωτερικό μοντέλο. Ο χρονικός ορίζοντας πρέπει να είναι μικρός ώστε να είναι επαρκής ο αριθμός των παρατηρήσεων στις ουρές για μελέτη, και για να μετριάζεται η επιρροή από τις αλλαγές στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Επίσης το διάστημα εμπιστοσύνης δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλο για να μην μειώνεται η ισχύς του ελέγχου. Η Επιτροπή της Βασιλείας, έχει καταλήξει σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% και χρονικό ορίζοντα 1 ημέρας . Επίσης με σκοπό να αξιολογήσει τα μοντέλα κάθε τράπεζας έχει ορίσει 3 ζώνες (πράσινη, κίτρινη, κόκκινη) ανάλογα με το πόσες τιμές υπερέβησαν το VaR. Για δείγμα 250 παρατηρήσεων, εάν ο αριθμός των παραβιάσεων είναι 0-4, το μοντέλο ανήκει στην πράσινη ζώνη, 5-9 στην κίτρινη ζώνη και περισσότερες ή ίσες με 10, στην κόκκινη ζώνη. Εάν τα μοντέλα ανήκουν στην κίτρινη ή κόκκινη ζώνη αυξάνει τον πολλαπλασιαστική κεφαλαιακής επάρκειας που εφαρμόζεται στα εσωτερικά μοντέλα.

Για το μέτρο Expected shortfall , όταν παραβιάζεται το VaR , η αναμενόμενη τιμή της απόκλισης θα είναι ίση με ES_{t+1}^p . Άρα μπορούμε να κάνουμε backtesting, ελέγχοντας εάν το διάνυσμα X_t εξηγεί την απόκλιση της πραγματοποιηθείσας ζημιάς , $-R_{PF,t+1}$ από την αναμενόμενη ζημιά τις ημέρες που έχει υπερβεί την αξία σε κίνδυνο,

$$-R_{PF,t+1} - ES_{t+1}^p = b_0 + b_1' X_t + e_{t+1}, \text{ για } t+1 \text{ όταν } R_{PF,t+1} < -VaR_{t+1}^p$$

με την υπόθεση ότι ο όρος σφάλματος e_{t+1} είναι ανεξάρτητος του X_t .

Οι παρατηρήσεις που το VaR δεν έχει παραβιαστεί εξαιρούνται από το δείγμα.

Για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι δηλαδή το μοντέλο κινδύνου από το οποίο έγιναν οι προβλέψεις της αναμενόμενης ζημιάς (ES) χρησιμοποιεί βέλτιστα όλες τις πληροφορίες ($b_1=0$) και ότι δεν παραβιάζεται ($b_0=0$), ελέγχουμε από κοινού ότι $b_0=b_1=0$.

Για περισσότερα μπορεί κανείς να δει Jorion [2007], Christoffersen [2003].

1.4 Ορισμός μεταβλητότητας

Η μεταβλητότητα είναι το απλούστερο μέσο μέτρησης του κινδύνου ή της αβεβαιότητας ενός χρηματοοικονομικού μέσου.

Ανήκει στα απόλυτα μέτρα κινδύνου.

Ορίζεται ως η ετησιοποιημένη τυπική απόκλιση ή διακύμανση των συνεχώς ανατοκίζόμενων αποδόσεων ενός χρηματοοικονομικού μέσου.

Η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από ένα τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων ως εξής :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (R_t - \bar{R})^2}$$

Όπου \bar{R} είναι η μέση απόδοση.

Ακολουθώντας τον Alexander [1998], η ετησιοποιημένη μεταβλητότητα σε ποσοστό μπορεί να υπολογιστεί από τον παρακάτω τύπο :

$$v_t = (100\sigma_t\sqrt{n})\%$$

Όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων ανά έτος και σ_t η τυπική απόκλιση των αποδόσεων για ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.

Η χρήση της μεταβλητότητας σαν ένα από τα απλά μέτρα κινδύνου μας δίνει μια πρώτη εικόνα της διακύμανσης των αποδόσεων.

Ένα από τα μειονεκτήματα είναι ότι λαμβάνει υπόψη και τις θετικές αποκλίσεις και όχι μόνο τις αρνητικές τιμές που μας ενδιαφέρουν διότι αυτές είναι που επιφέρουν ζημιές.

Ένα μοντέλο μεταβλητότητας πρέπει να είναι ικανό να προβλέψει τη μεταβλητότητα. Μια καλή μελλοντική εκτίμηση της μεταβλητότητας βοηθάει στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων και στη δημιουργία βέλτιστου χαρτοφυλακίου σε όρους απόδοσης κινδύνου, ανάλογα με το επενδυτικό προφίλ κάθε επενδυτή ή με τον κίνδυνο που μπορεί να αναλάβει ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου. Τέτοιες προβλέψεις σύμφωνα με τους Poon and Granger [2003], βρίσκουν επίσης εφαρμογή στην τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων, στη διαχείριση κινδύνου (VaR), στην κατανομή των περιουσιακών στοιχείων, στη χάραξη νομισματικής πολιτικής. Η μεταβλητότητα είναι το βασικό στοιχείο στην τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων. Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο χρειάζεται να γνωρίζουμε τη μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου μέχρι την ημερομηνία εξάσκησης.

Χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και ασφαλιστικές εταιρείες σύμφωνα με το θεσμικό πλαίσιο της Βασιλείας και του Solvency αντίστοιχα πρέπει να υπολογίσουν τα αποθεματικά τους κεφάλαια σύμφωνα με τη μέθοδο αξίας σε κίνδυνο (VaR). Για την εκτίμηση αυτή χρειάζεται πρόβλεψη της μεταβλητότητας της υπό εξέταση αξίας.

Επιπλέον η μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών έχει αντίκτυπο στην οικονομία ως σύνολο, καθώς συνδέεται με την ψυχολογία του επενδυτή. Σαν

αποτέλεσμα η Κεντρική Τράπεζα της Αμερικής λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα μετοχών, ομολόγων, συναλλάγματος και εμπορευμάτων κατά τη χάραξη νομισματικής πολιτικής.

1.5 Ιδιότητες μεταβλητότητας

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της μεταβλητότητας των μετοχών (Tsay [2005]), είναι ότι δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη. Η μεταβλητότητα των μετοχών μπορεί να διαχωριστεί σε ενδοσυνεδριακή και ημερήσια. Για παράδειγμα, η ενδοσυνεδριακή μεταβλητότητα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη από τα ημερήσια δεδομένα των αποδόσεων, επειδή υπάρχει μόνο μια παρατήρηση για κάθε διαπραγμάτευση. Εάν είναι διαθέσιμα δεδομένα υψηλής συχνότητας, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε την ενδοσυνεδριακή μεταβλητότητα. Η μεταβλητότητα έχει τις παρακάτω ιδιότητες που είναι εμφανείς στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές όπως περιγράφονται από τους Engle and Patton [2001], Psychoyios et al. [2003].

1.5.1 Βαριές ουρές (Heavy Tails)

Από τις αρχές της δεκαετίας του 60 πολλές εμπειρικές μελέτες Mandelbrot [1963], Fama [1965], Blattberg- Gonedes [1974], Kon [1984] έχουν δείξει ότι η πιθανότητα ότι ακραία γεγονότα θα συμβούν είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα που υπολογίζεται με την κανονική κατανομή. Οι αποδόσεις των διαφόρων χρεογράφων ακολουθούν λεπτόκυρτες κατανομές, όπου υπάρχει μεγαλύτερη κύρτωση από την κανονική κατανομή και μεγαλύτερη μάζα πιθανότητας στις ουρές (παχιές ουρές).

1.5.2 Συσσώρευση της μεταβλητότητας (volatility clustering)

Η μεταβλητότητα μπορεί να είναι παρατεταμένα υψηλή σε κάποιες περιόδους ενώ παρατεταμένα χαμηλή σε άλλες. Αποδείχθηκε εμπειρικά από τους Mandelbrot [1963] και Fama [1965] ότι περίοδοι από υψηλή (χαμηλή) μεταβλητότητα ακολουθούνται από περιόδους με υψηλή (χαμηλή) μεταβλητότητα. Σε κάθε περίπτωση η μετάβαση από τη μία περίοδο στην άλλη είναι απρόβλεπτη. Η συσσώρευση μεταβλητότητας υπονοεί την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης στις αλλαγές του επιπέδου μεταβλητότητας. Επίσης είναι ένα δείγμα ετεροσκεδαστικότητας. Τα μοντέλα ARGH, GARCH και

στοχαστικής μεταβλητότητας εμφανίστηκαν για να ενσωματώσουν αυτήν την ιδιότητα.

1.5.3 Επιστροφή στο μέσο (mean reversion)

Η μεταβλητότητα δεν είναι άπειρη, έχει ένα συγκεκριμένο εύρος. Επίσης εξελίσσεται στο χρόνο με ένα συνεχή τρόπο- τα άλματα είναι σπάνια.

Εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει ότι αμφιταλαντεύεται γύρω από μια σταθερή τιμή, ένα μακροχρόνιο μέσο. Μακροπρόθεσμες προβλέψεις της μεταβλητότητας θα συγκλίνουν σε αυτό το «κανονικό» επίπεδο μεταβλητότητας ανεξαρτήτως πότε έγιναν. Διαφωνίες υπάρχουν τόσο ως προς ποιο είναι αυτό το κανονικό επίπεδο, όσο και ως το αν αυτό παραμένει σταθερό στο πέρασμα του χρόνου, ή μεταβάλλεται καθώς οι συνθήκες της αγοράς αλλάζουν.

1.5.4 Μόχλευση (leverage effect)

Η μεταβλητότητα φαίνεται να αντιδρά διαφορετικά σε μεγάλη άνοδο από ότι σε μεγάλη πτώση τιμών, φαινόμενο γνωστό ως μόχλευση. Υπάρχει αρνητική σχέση μεταξύ μεταβλητότητας και αποδόσεων. Η θεωρία του Sharpe [1964], το Capital Asset Pricing Model (CAPM), υποστηρίζει ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις πέφτουν όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα. Η ασυμμετρία αυτή μπορεί να οριστεί και σαν ασφάλιστρο κινδύνου.

Μια μείωση στις τιμές των μετοχών μιας εταιρείας αυξάνει το δείκτη δανειακής επιβάρυνσης της εταιρείας άρα αυξάνει τον κίνδυνο όπως μετριέται από τη μεταβλητότητα (Christie [1982]). Αύξηση της μεταβλητότητας οδηγεί στη μείωση της ζήτησης για μετοχές λόγω της αποστροφής στον κίνδυνο.

Η ασυμμετρία της μεταβλητότητας (Volatility smile) αναφέρεται ως η συνάρτηση της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης ενός δικαιώματος προαίρεσης .

Τα δικαιώματα προαίρεσης εντός του χρηματικού ισοδύναμου (in the money) ή εκτός αυτού (out of the money) τείνουν να έχουν μεγαλύτερη τεκμαρτή μεταβλητότητα από ότι τα δικαιώματα στο χρηματικό ισοδύναμο (at the money) ειδικά στις αγορές συναλλάγματος. Η αρνητική ασυμμετρία της μεταβλητότητας οφείλεται στο γεγονός ότι οι επενδυτές αποστρέφονται στον κίνδυνο.

1.5.5 Ροή πληροφοριών και μεταβλητότητα

Η ροή των πληροφοριών δεν είναι σταθερή στο χρόνο. Ο Clark [1973] ανέπτυξε ένα πρώιμο μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας όπου συνέδεσε τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών μέσων με τη γνωστοποίηση νέων πληροφοριών. Η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη στις περιόδους διαπραγμάτευσης παρά στις περιόδους μη διαπραγμάτευσης. Επιπλέον είναι μεγαλύτερη μετά από αργίες και Σαββατοκύριακα. Αυτό οδήγησε στη χρήση ημερών διαπραγμάτευσης παρά ημερολογιακών ημερών στην ανάλυση των δεδομένων.

Μελέτες έδειξαν ότι η μεταβλητότητα αυξάνεται τις ημερομηνίες ανακοίνωσης μερισματικών αποδόσεων και μακροοικονομικών δεδομένων (Cornell [1978], Harvey and Huang [1991, 1992]).

Επίσης στην περίπτωση των μετοχών, αυξάνεται ανάλογα με τον όγκο συναλλαγών, σχηματίζοντας ένα σχήμα V κατά τη διάρκεια μιας ημέρας διαπραγμάτευσης, λόγω του αυξημένου όγκου συναλλαγών κατά το άνοιγμα και το κλείσιμο της συνεδρίασης (Harris [1986]).

Λόγω της παγκοσμιοποίησης των αγορών υπάρχει χρονική υστέρηση της αύξησης της μεταβλητότητας μεταξύ των αγορών διαφορετικών χωρών.

Η μεταβλητότητα των χρεογράφων διαφέρει σημαντικά. Μια εξήγηση γι' αυτό, σύμφωνα με τον Engle [2004], συνδέεται με τη βαρύτητα και τη ροή των νέων πληροφοριών σχετικά με διαφορετικά χρηματοοικονομικά μέσα. Ανάλογα με το μέγεθος μιας εταιρείας και τον κλάδο στον οποίο ανήκει, υπάρχει διαφορετική επίδραση μιας πληροφορίας στην απόδοση της μετοχής της. Για παράδειγμα στην πρόσφατη εγχώρια δημοσιονομική κρίση, πληροφορίες που δημοσιεύονται σε σχέση με το κρατικό χρέος αυξάνουν περισσότερο τη μεταβλητότητα των μετοχών του τραπεζικού κλάδου. Εταιρίες μικρής κεφαλαιοποίησης και μεγέθους επηρεάζονται περισσότερο από ένα εταιρικό γεγονός καθώς μπορεί να καθορίσει την πορεία της εταιρείας και τα μελλοντικά της κέρδη.

Αυτές οι ιδιότητες της μεταβλητότητας παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη μοντέλων μεταβλητότητας καθώς πρέπει να ενσωματώνονται σε αυτά.

1.6 Ιστορική αναδρομή

Οι Markowitz [1952] και Tobin [1958] ήταν οι πρώτοι οι οποίοι συνέδεσαν τον κίνδυνο με τη διακύμανση της αξίας ενός χαρτοφυλακίου και ανέπτυξαν τη θεωρία για μεγιστοποίηση της απόδοσης με την ανάληψη του μικρότερου δυνατού κινδύνου.

Ο Sharpe [1964] ανέπτυξε το Capital Asset Pricing Model (CAPM), το οποίο δείχνει τη φυσική σχέση μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και διακύμανσης σε μια αποτελεσματική αγορά με επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο. Το CAPM βασίζεται στη μη ρεαλιστική υπόθεση ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Όμως εμπειρικές κατανομές αποδόσεων εμφάνιζαν παχιές ουρές που θα μπορούσαν καλύτερα να εξηγηθούν από τη στοχαστική φύση της μεταβλητότητας.

Για τη μέτρηση της μεταβλητότητας αναπτύχθηκαν μοντέλα που χρησιμοποιούν ιστορικά δεδομένα. Το μοντέλο τυχαίου περιπάτου (random walk model) χρησιμοποιεί την τυπική απόκλιση τη χρονική στιγμή $t-1$, σ_{t-1} ως πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης τη χρονική στιγμή t , σ_t . Εν συνεχεία αναπτύχθηκαν μέθοδοι όπως ιστορικού μέσου όρου (Historical Average), και εκθετικής εξομάλυνσης (Exponential Smoothing), οι οποίες χρησιμοποιούν όλες τις ιστορικές τυπικές αποκλίσεις. Επίσης αναπτύχθηκαν οι μέθοδοι του κινητού μέσου όρου (Moving Average) και εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου (Exponentially Weighted Moving Average-EWMA), όπου χρησιμοποιούνται μόνο οι τελευταίες παρατηρήσεις. Οι δύο εκθετικές μέθοδοι δίνουν μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Το μοντέλο ARMA λαμβάνει υπόψη και τα σφάλματα από της προηγούμενες προβλέψεις, (Poon and Granger [2003]).

Ο Engle [1982] εισήγαγε το αυτοπαλίνδρομο ετεροσκεδαστικό μοντέλο υπό όρους ARCH και πήρε το νόμπελ στα Οικονομικά. Εν συνεχεία ο Bollerslev [1986] γενίκευσε το αυστηρά αυτοπαλίνδρομο μοντέλο ARCH σε ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο κινητού μέσου όρου GARCH.

Τα EGARCH (Exponential GARCH) (Nelson [1991]) και TGARCH (Threshold GARCH) μοντέλα επεκτείνουν το GARCH μοντέλο ενσωματώνοντας την ιδιότητα μόχλευσης της μεταβλητότητας και το M-GARCH εισάγει ένα ασφάλιστρο κινδύνου στη συνάρτηση των αποδόσεων.

Το 1973 αναπτύχθηκε το μοντέλο των Black and Scholes. Στην αγορά παραγώγων εάν κάποιος θεωρήσει ότι οι τιμές καθορίζονται από αυτό το μοντέλο, θα χρησιμοποιούσε την αγοραία τιμή για να εξάγει την τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility). Το μοντέλο αυτό έχει επικριθεί στη βιβλιογραφία επειδή βασίζεται σε υποθέσεις που δεν ισχύουν στην πράξη. Συγκεκριμένα η τεκμαρτή μεταβλητότητα εξάγεται βασιζόμενη στην υπόθεση ότι το υποκείμενο περιουσιακό

στοιχείο ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα θα μπορούσε να είναι διαφορετική από την πραγματική μεταβλητότητα.

Εμπειρικά δεδομένα έχουν δείξει ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου τείνει να είναι μεγαλύτερη από ότι αν χρησιμοποιούσαμε ένα μοντέλο μεταβλητότητας τύπου GARCH. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ασφάλιστρο κινδύνου για τη μεταβλητότητα ή στον τρόπο που υπολογίζονται οι ημερήσιες αποδόσεις.

Εμπειρικές έρευνες, βλέπε Bollerslev et al. [1994] έδειξαν ότι η μεταβλητότητα τείνει να αλλάζει στοχαστικά στο χρόνο, αντίθετα με το μοντέλο των Black and Scholes που βασίζεται στην υπόθεση σταθερής μεταβλητότητας.

Οι Hull and White [1987], ο Wiggins [1987] και ο Scott [1987] επέκτειναν το μοντέλο των Black and Scholes εισάγοντας την έννοια της στοχαστικής μεταβλητότητας. Ο Heston [1993] προτείνει ένα στοχαστικό υπόδειγμα μεταβλητότητας, που δεν βασίζεται στο υπόδειγμα των Black and Scholes, και το οποίο παρέχει μια λύση κλειστής μορφής για την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, όταν η υποκείμενη αξία συσχετίζεται με τη μεταβλητότητα, ενώ, επιπλέον προσαρμόζει το υπόδειγμά του για να λαμβάνει υπόψη του στοχαστικά επιτόκια.

Η βασική ιδέα πίσω από τη μελέτη της μεταβλητότητας είναι ότι η σειρά $\{r_t\}$ των λογαριθμικών αποδόσεων είναι είτε σειριακά ασυσχέτιστη ή με μικρής τάξης σειριακή συσχέτιση, αλλά είναι μία εξαρτώμενη σειρά.

Ο τρόπος με τον οποίο η μεταβλητότητα σ_t^2 εξελίσσεται στο χρόνο διαχωρίζει τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται. Τα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικά μοντέλα (Conditional heteroscedastic models) κατατάσσονται σε δύο γενικές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία χρησιμοποιείται μια συγκεκριμένη συνάρτηση για να περιγράψει την εξέλιξη της μεταβλητότητας σ_t^2 στο χρόνο ενώ στη δεύτερη κατηγορία χρησιμοποιείται μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Τα μοντέλα τύπου GARCH, ARCH που θα αναπτύξουμε στο δεύτερο κεφάλαιο ανήκουν στην πρώτη κατηγορία, ενώ τα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας που θα αναπτύξουμε στο τρίτο κεφάλαιο ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία.

Κεφάλαιο 2

2.1 Μοντέλο ARCH

Αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό (autoregressive conditionally heteroscedastic)

Το πρώτο μοντέλο που συστηματικά μελετάει τη μεταβλητότητα είναι το ARCH του Engle [1982]. Η ιδέα στην οποία βασίζεται είναι ότι ο διαταρακτικός όρος a_t της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου είναι σειριακά ασυσχέτιστος αλλά εξαρτώμενος . Η εξάρτηση αυτή μπορεί να περιγραφεί από μια τετραγωνική συνάρτηση των προηγούμενων τιμών του (ετεροσκεδαστικότητα) .

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \dots + \beta_m a_{t-m}^2, \quad \beta_0 > 0, \beta_i \geq 0$$

όπου ορίζουμε ως διαταρακτικό όρο a_t τη νέα πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο χρόνο t της χρονοσειράς και ως ε_t μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (IID) μεταβλητών με μέσο μηδέν και διακύμανση 1. Συνήθως υποθέτουμε ότι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, την τυποποιημένη Student-t κατανομή ή την generalized error distribution.

Ορίζουμε ως σ_t^2 την υπό συνθήκη διακύμανση (conditional variance) του διαταρακτικού όρου.

Το πιο απλό ARCH μοντέλο, το ARCH (1) περιγράφεται ως εξής :

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2, \quad \beta_0 > 0, \beta_1 \geq 0$$

Ιδιότητες

Σε ένα ARCH (1) μοντέλο οι μονές ροπές είναι μηδέν λόγω συμμετρίας και οι ζυγές ροπές υπολογίζονται από το παρακάτω θεώρημα:

Για έναν ακέραιο αριθμό r , η $2r$ ροπή σε ένα ARCH (1) μοντέλο με $\beta_0 > 0, \beta_1 \geq 0$, υπάρχει αν και μόνο αν

$$\beta_1^r \prod_{j=1}^r (2j - 1) < 1$$

Το θεώρημα μπορεί να γενικευτεί για ένα ARCH p τάξεως ως εξής :

Μια γραμμική ARCH (p) διαδικασία, με $\beta_0 > 0, \beta_i \geq 0$, είναι στάσιμη ως προς τον πίνακα διασπορών συνδιασπορών αν και μόνο αν η συνδεδεμένη χαρακτηριστική εξίσωση έχει όλες τις ρίζες έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Η στάσιμη διακύμανση δίνεται τότε από τον τύπο

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\beta_0}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i}$$

Η μέση τιμή του διαταρακτικού όρου είναι μηδέν

$$E(a_t) = E[E(a_t | F_{t-1})] = E[\sigma_t E(\varepsilon_t)] = 0$$

Λόγω στασιμότητας του διαταρακτικού όρου ο μέσος ισούται με μηδέν $E(a_t) = 0$ και η διακύμανση είναι σταθερή στο χρόνο

$$\text{Var}(a_t) = \text{Var}(a_{t-1}) = E(\alpha_{t-1}^2)$$

$$\text{Var}(a_t) = E(\alpha_t^2) = E[E(\alpha_t^2 | F_{t-1})] = E(\beta_0 + \beta_1 \alpha_{t-1}^2) = \beta_0 + \beta_1 \text{Var}(a_t)$$

Άρα η διακύμανση του διαταρακτικού όρου ισούται με

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}$$

Για να είναι θετική η διακύμανση πρέπει $0 \leq \beta_1 < 1$

Εάν θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του στις ουρές πρέπει να είναι πεπερασμένη η τέταρτη ροπή και να ισχύει στασιμότητα τέταρτης τάξεως. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε κάποιους επιπλέον περιορισμούς για το β_1 .

$$m_4 = \frac{3\beta_0^2(1 + \beta_1)}{(1 - \beta_1)(1 - 3\beta_1^2)}, \quad \beta_1^2 < \frac{1}{3}$$

$$\frac{E(\alpha_t^4)}{[\text{Var}(a_t)]^2} = 3 \frac{1 - \beta_1^2}{1 - 3\beta_1^2} > 3$$

Η κύρτωση του α_t είναι μεγαλύτερη του 3 άρα υπάρχει ένδειξη για δεδομένα με πιο βαριές ουρές από ότι η κανονική κατανομή.

Εκτίμηση

Για την εκτίμηση των υποδειγμάτων ARCH χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE). Η εκτίμηση είναι μη γραμμική, αλλά οι εκτιμήσεις που προκύπτουν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικές.

Προβλέψεις

Οι προβλέψεις σε ένα ARCH μοντέλο προκύπτουν αναδρομικά ως εξής (Tsay [2005]):

$$\sigma_h^2(1) = \beta_0 + \beta_1 a_h^2 + \dots + \beta_m a_{h+1-m}^2$$

Για 2 περιόδους μετά

$$\sigma_h^2(2) = \beta_0 + \beta_1 \sigma_h^2(1) + \beta_2 a_h^2 + \dots + \beta_m a_{h+2-m}^2$$

Για k περιόδους μετά

$$\sigma_h^2(k) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \sigma_h^2(k-i), \quad \text{όπου } \sigma_h^2(k-i) = a_{h+k-i}^2 \text{ εάν } k-i \leq 0$$

2.2 Μοντέλο GARCH

Γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό (generalized autoregressive conditionally heteroscedastic)

Ο Bollerslev [1986] επέκτεινε το μοντέλο του Engle εισάγοντας επιπλέον εξάρτηση από υστερήσεις παλαιότερων διακυμάνσεων σ_{t-j}^2 , με αποτέλεσμα να μη χρειάζεται μοντέλο ARCH υψηλής τάξης για να περιγράψει τη χρονοσειρά.

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \gamma_j \sigma_{t-j}^2 \quad \beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \gamma_j \geq 0,$$

Ορίζουμε ως ε_t μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (IID) μεταβλητών με μέσο μηδέν και διακύμανση 1. Όπως και στο μοντέλο ARCH υποθέτουμε ότι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, την τυποποιημένη Student-t κατανομή ή την generalized error distribution.

Στην περίπτωση που $s = 0$ βλέπουμε ότι το μοντέλο GARCH υπάγεται σε ARCH.

Το πρώτης τάξεως GARCH (1,1) περιγράφεται ως εξής :

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \beta_0 > 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$$

Ιδιότητες

Το GARCH (p,q) μοντέλο είναι ασθενώς στάσιμο με

$$E(a_t) = 0$$

$$Var(a_t) = \frac{\beta_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\beta_i + \gamma_i)}$$

και $cov(\alpha_t, \alpha_s) = 0$, για $t \neq s$ εάν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\beta_i + \gamma_i) < 1$

Η διακύμανση του α_t είναι πεπερασμένη ενώ η υπό συνθήκη διακύμανση σ_t εξελίσσεται στο χρόνο.

Εάν θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του GARCH (1,1) στις ουρές πρέπει να είναι πεπερασμένη η τέταρτη ροπή και να ισχύει στασιμότητα τέταρτης τάξεως.

Στην περίπτωση αυτή εάν $1 - 2\beta_1^2 - (\beta_1 + \gamma_1)^2 > 0$ τότε

$$\frac{E(\alpha_t^4)}{[Var(\alpha_t)]^2} = 3 \frac{[1 - (\beta_1 + \gamma_1)^2]}{1 - 2\beta_1^2 - (\beta_1 + \gamma_1)^2} > 3$$

Άρα η GARCH(1,1) διαδικασία είναι λεπτόκυρτη όπως και η ARCH (1) προηγουμένως.

Εκτίμηση

Για την εκτίμηση των υποδειγμάτων GARCH χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE).

Προβλέψεις

Οι προβλέψεις σε ένα GARCH (1,1) , μοντέλο προκύπτουν αναδρομικά ως εξής (Tsay [2005]):

$$\sigma_{h+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 a_h^2 + \gamma_1 \sigma_h^2$$

$$\sigma_h^2(1) = \beta_0 + \beta_1 a_h^2 + \gamma_1 \sigma_h^2$$

Όπου ο βέλτιστος εκτιμητής της υπό συνθήκης διακύμανσης $\widehat{\sigma_{h+k}^2} = \sigma_h^2(k)$ για ορίζοντα πρόβλεψης k είναι η υπό συνθήκη μέση τιμή , $E_i(\sigma_{h+k}^2)$

Για 2 περιόδους μετά , αντικαθιστώντας στην εξίσωση του GARCH (1,1) $\alpha_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ έχουμε :

$$\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + (\beta_1 + \gamma_1)\sigma_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)$$

Για $t = h+1$

$$\sigma_{h+2}^2 = \beta_0 + (\beta_1 + \gamma_1)\sigma_{h+1}^2 + \beta_1 \sigma_{h+1}^2 (\varepsilon_{h+1}^2 - 1)$$

Αφού $\sigma_h^2(k) = E_t(\sigma_{h+k}^2)$ και $E(\varepsilon_{h+1}^2 - 1 | F_h) = 0$ η πρόβλεψη για 2 περιόδους μετά θα είναι

$$\sigma_h^2(2) = \beta_0 + (\beta_1 + \gamma_1)\sigma_h^2(1)$$

Για k περιόδους μετά

$$\sigma_h^2(k) = \beta_0 + (\beta_1 + \gamma_1)\sigma_h^2(k-1), k > 1$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\sigma_h^2(k) = \beta_0 \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_1 + \gamma_1)^{i-1} + (\beta_1 + \gamma_1)^{k-1} \sigma_h^2(1)$$

Όπου $\sigma_h^2(1)$ είναι γνωστό στο χρόνο h.

Αντικαθιστώντας

$$\sigma^2 = Var(a_t) = \frac{\beta_0}{1 - (\beta_1 + \gamma_1)}, \quad \beta_1 + \gamma_1 < 1,$$

Έχουμε

$$\sigma_h^2(k) = \sigma^2 + (\beta_1 + \gamma_1)^{k-1} (\sigma_h^2(1) - \sigma^2)$$

Βλέπουμε ότι όταν η περίοδος πρόβλεψης $k \rightarrow \infty$, η πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης τείνει στη διακύμανση σ^2 .

2.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα μοντέλων ARCH, GARCH

Ακολουθώντας τον Tsay [2005], το GARCH όπως και το ARCH μοντέλο ενσωματώνουν την ιδιότητα της συσσώρευσης της μεταβλητότητας. Στο απλό GARCH (1,1) μοντέλο παρατηρούμε ότι υψηλό α_{t-1}^2 ή σ_{t-1}^2 προκαλούν υψηλό σ_t^2 άρα πιθανώς και το επόμενο α_t^2 να είναι υψηλό.

Επίσης λόγω κύρτωσης μεγαλύτερης της κανονικής κατανομής προσαρμόζονται στις βαριές ουρές που συνήθως παρατηρούνται στις χρονοσειρές των χρηματοοικονομικών αποδόσεων.

Περιγράφουν τη συμπεριφορά της υπό συνθήκης διακύμανσης αλλά δεν εξηγούν περαιτέρω τον λόγο που κινείται με αυτόν τον τρόπο στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές.

Σε ένα ARCH (1) μοντέλο στην περίπτωση που είναι πεπερασμένη η τέταρτη ροπή της χρονοσειράς ο όρος β_1^2 περιορίζεται μεταξύ [0,1/3]. Ο περιορισμός γίνεται πιο περίπλοκος για μεγαλύτερης τάξης μοντέλα, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ικανότητα ARCH μοντέλων να συλλάβουν την υπερβάλλουσα κύρτωση.

Επίσης εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει ότι η συμπεριφορά στις ουρές ενός GARCH μοντέλου είναι περιορισμένη, ακόμα και εάν η ακολουθία ε_t ακολουθεί τυποποιημένη student-t κατανομή.

Επιπλέον περιορισμοί που τίθενται στα παραπάνω μοντέλα για τη θετικότητα των παραμέτρων, περιορίζουν τη συμπεριφορά της υπό συνθήκη διακύμανσης.

Στα παραπάνω μοντέλα λόγω των τετραγωνικών τιμών στη συνάρτηση, δεν λαμβάνεται υπόψη η ιδιότητα της μόχλευσης όπου αρνητικές αποδόσεις επηρεάζουν περισσότερο τη μεταβλητότητα από ότι θετικές. Δηλαδή λαμβάνεται υπόψη μόνο το μέγεθος και όχι το πρόσημο από μη αναμενόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις (καλές – άσχημες νέες πληροφορίες.) Επίσης ερευνητές με πρώτο τον Black [1976] έχουν βρει ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της μεταβλητότητας τρεχουσών και μελλοντικών αποδόσεων, χαρακτηριστικό το οποίο εξ ορισμού δεν περιλαμβάνεται στα παραπάνω μοντέλα.

Επίσης είναι δύσκολο να προσδιοριστεί εάν οι παρελθοντικές πληροφορίες επιδρούν για πάντα και σε ποιο βαθμό στην υπό συνθήκη διακύμανση, χαρακτηριστικό το οποίο είναι σημαντικό γιατί θα προσέδιδε ένα επιπλέον ασφάλιστρο κινδύνου λόγω μεταβλητότητας σε μακροχρόνιες επενδύσεις. (Nelson [1991])

Για να αντιπαρέλθουν τα παραπάνω μειονεκτήματα και να περιγράψουν καλύτερα τις χρονοσειρές των χρηματοοικονομικών αποδόσεων προτάθηκαν στη βιβλιογραφία επεκτάσεις των μοντέλων, κάποιες από τις οποίες περιγράφονται παρακάτω.

Για περισσότερες επεκτάσεις δες Bollerslev [2007].

2.4 Μοντέλο Integrated GARCH (I-GARCH)

Οι Engle and Bollerslev [1986] εισήγαγαν μια ειδική περίπτωση GARCH μοντέλου όπου η επίδραση των νέων πληροφοριών στη διακύμανση είναι διαρκής.

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i \sigma_{t-i}^2 \quad \beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0,$$

και πολυώνυμο $\sum_{i=1}^q \beta_i + \sum_{i=1}^p \gamma_i = 1$, το οποίο έχει $d > 0$ μοναδιαίες ρίζες και $\max(p, q) - d$ ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Το IGARCH μοντέλο έχει την ιδιότητα ότι προβλέψεις της υπό συνθήκης διακύμανσης πολλών περιόδων μετά, δεν συγκλίνουν στη μη δεσμευμένη διακύμανση.

Στην περίπτωση του IGARCH (1,1)

$$\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + \beta \alpha_t^2 + (1 - \beta) \sigma_t^2$$

Εάν δεν υπάρχει σταθερός όρος ($\beta_0 = 0$), βλέπουμε ότι $E(\sigma_{t+k}^2) = \sigma_{t+1}^2$

Η υπό συνθήκη διακύμανση k περιόδους στο μέλλον είναι ίδια με την υπό συνθήκη διακύμανση μία περίοδο μετά.

Εάν υπάρχει σταθερός όρος β_0 , $E(\sigma_{t+k}^2) = k\beta_0 + \sigma_{t+1}^2$

Παρόλο που η επίδραση της υπό συνθήκης διακύμανσης μία περίοδο μετά μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, η επίδρασή της είναι διαρκής.

Το IGARCH (1,1) χωρίς σταθερό όρο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο VaR από τα πρότυπα RiskMetrics.

2.5 Μοντέλο Exponential GARCH (E-GARCH)

Ο Nelson [1991] πρότεινε το E-GARCH μοντέλο, το οποίο επιτρέπει να επιδρούν ασύμμετρα στη μεταβλητότητα αρνητικές και θετικές αποδόσεις και δεν θέτει περιορισμό να είναι θετικές οι παράμετροι του μοντέλου.

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \beta_0 + \frac{1 + \gamma_1 B + \dots + \gamma_q B^q}{1 - \beta_1 B - \dots - \beta_p B^p} g(\varepsilon_{t-1})$$

Όπου β_0 μια σταθερά, B τελεστής υστερήσεων έτσι ώστε $Bg(\varepsilon_t) = g(\varepsilon_{t-1})$,

$1 - \sum_{i=1}^p \beta_i B^i$, $1 + \sum_{i=1}^q \gamma_i B^i$ πολυώνυμα που δεν έχουν κοινές ρίζες και όλες οι ρίζες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \lambda [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$$

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \lambda) \varepsilon_t - \lambda E(|\varepsilon_t|) & \text{εάν } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \lambda) \varepsilon_t - \lambda E(|\varepsilon_t|) & \text{εάν } \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

Η $g(\varepsilon_t)$ και $[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$ είναι iid τυχαίες ακολουθίες με μέσο μηδέν.

Στην πρώτη περίπτωση η $g(\varepsilon_t)$ είναι γραμμική με κλίση $\theta + \lambda$ και στη δεύτερη είναι γραμμική με κλίση $\theta - \lambda$. Η σταθερά θ είναι η παράμετρος της μόχλευσης.

Επομένως η $g(\varepsilon_t)$ επιτρέπει στην υπό συνθήκη διακύμανση σ_t^2 να αντιδρά μη συμμετρικά σε αύξηση και μείωση της τιμής του χρηματοοικονομικού αγαθού.

Η σταθερά λ δείχνει το μέγεθος της επίδρασης της μη αναμενόμενης πληροφορίας $[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$.

2.6 Μοντέλο GJR GARCH

Ένα άλλο μοντέλο που επιτρέπει ασυμμετρία της επίδρασης των αποδόσεων στη μεταβλητότητα, είναι το GJR των Glosten et al. [1993]. Παρόμοια συνάρτηση χρησιμοποιείται στο T-GARCH του Zakoian [1994] και στο A-GARCH του Engle [1990].

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^m (\beta_i I(\alpha_{t-i} < 0)) \alpha_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \gamma_j \sigma_{t-j}^2 \quad \beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \gamma_j \geq 0,$$

Από το μοντέλο βλέπουμε ότι θετικές τιμές του όρου α_{t-i} επιδρούν κατά α_{t-i}^2 στη συνάρτηση σ_t^2 , ενώ αρνητικές τιμές έχουν μεγαλύτερη επίδραση $\beta_i \alpha_{t-i}^2$.

2.7 Μοντέλο GARCH in mean (GARCH-M)

Οι Bollerslev et al. [1988] πρότειναν το GARCH-M ως στατιστική εφαρμογή του διαχρονικού CAPM. Εισάγουν την εξάρτηση από την υπό συνθήκη διακύμανση και στην εξίσωση της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου.

$$r_t = \mu + c \sigma_t^2 + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j \sigma_{t-j}^2 \quad \beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0,$$

Η σταθερά μ θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει τη διαφορετική φορολογική μεταχείριση ή διάρκεια ενός περιουσιακού στοιχείου.

Η σταθερά c , είναι το ασφάλιστρο κινδύνου για την επένδυση σε ένα αγαθό. Για ένα θετικό ασφάλιστρο κινδύνου, η απόδοση του αγαθού σχετίζεται θετικά με τη μεταβλητότητά του.

Κεφάλαιο 3

3.1. Στοχαστικές διαδικασίες

Μια μεταβλητή της οποίας η αξία αλλάζει στο χρόνο με αβέβαιο τρόπο ακολουθεί στοχαστική διαδικασία. Μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτή. Σε μια συνεχή στοχαστική διαδικασία η υποκείμενη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα συγκεκριμένο εύρος.

Μια στοχαστική διαδικασία σύμφωνα με τον Γιαννακόπουλο [2003], ορίζεται ως μια παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{ X_t \}_{t \in T}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, \mathcal{F}, P) και παίρνουν τιμές στο \mathbb{R}^d . Μια στοχαστική διαδικασία εξαρτάται από δύο μεταβλητές την t και την ω .

Αν θεωρήσουμε σταθερό το $t \in T$, έχουμε μια τυχαία μεταβλητή $\omega \rightarrow X_t(\omega)$; $\omega \in \Omega$

Αν θεωρήσουμε σταθερό το $\omega \in \Omega$ θεωρούμε τη συνάρτηση $t \rightarrow X_t(\omega)$; $t \in T$, η οποία ονομάζεται τροχιά της X_t .

3.1.1 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown (ή Wiener) είναι μια από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες. Σύμφωνα με το θεώρημα του Levy κάθε διαδικασία Wiener W_t που σχετίζεται με ένα σετ πληροφοριών I_t είναι μια κίνηση Brown. Είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία και χρησιμοποιείται όταν συμβαίνουν συνηθισμένα γεγονότα, ενώ ακραία γεγονότα συμβαίνουν σπάνια, ανάλογα με τις πιθανότητες στις ουρές μιας κανονικής κατανομής. Συνηθισμένα γεγονότα συμβαίνουν όταν υπάρχει συνέχεια στις τιμές για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα $h \rightarrow 0$, ενώ όταν συμβαίνουν ακραία γεγονότα υπάρχουν άλματα και τότε χρησιμοποιούνται άλλες διαδικασίες όπως η Poisson διαδικασία που δεν είναι συνεχής.

Η κίνηση Brown ορίζεται ως εξής (Neftci [2000]):

Μια τυχαία διαδικασία $B_t, t \in [0, T]$, είναι κίνηση Brown εάν:

- a) Η B_t έχει στάσιμες, ανεξάρτητες προσαυξήσεις: Αν $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ τότε $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ ανεξάρτητες.
- b) Η B_t είναι συνεχής στο t
- c) Οι μεταβολές $B_t - B_s$ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση $|t - s|$ δηλαδή $(B_t - B_s) \sim N(0, |t - s|)$
- d) $B_0 = s$. Στην περίπτωση που η διαδικασία ξεκινάει από το μηδέν, $B_0 = 0$, τότε έχουμε την τυπική κίνηση Brown.

Η αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης της κίνησης Brown $B_0 = s$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E_s[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(y-s)^2}{2t}} dy$$

Η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Αυτή η ιδιότητα διευκολύνει τον υπολογισμό της τιμής ορισμένων παραγώγων όπως των εξωτικών παραγώγων.

Η ιδιότητα Markov σημαίνει ότι για $s \geq 0$, η $B_{t+s} - B_s$ είναι μια κίνηση Brown η οποία επηρεάζεται μόνο από την αρχική τιμή B_s και όχι από τις πληροφορίες πριν τη χρονική στιγμή s , δηλαδή ξεχνάει το παρελθόν.

$$E_x[f(B_t) | F_s] = E_{B_s}[f(B_{t-s})], s \leq t$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t , με δέσμευση F_s (τη σ -άλγεβρα που ενσωματώνει την πληροφορία για το πώς κινήθηκε η κίνηση Brown μέχρι τη χρονική στιγμή s), ισούται με την αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης της κίνησης Brown που ξεκινάει τη χρονική στιγμή s και έχει διάρκεια $t - s$.

Η ισχυρή ιδιότητα Markov συνεπάγεται ότι η ιδιότητα Markov ισχύει και για μια ειδική κατηγορία των τυχαίων χρόνων, τους χρόνους στάσης.

Η κίνηση Brown έχει επίσης την ιδιότητα ότι η τετραγωνική της μεταβολή στο διάστημα $[0, t]$ είναι ίση με t και η μεταβολή της είναι άπειρη. Η παράγωγός της για $t \geq 0$ δεν ορίζεται.

Για την κίνηση Brown ισχύει η παρακάτω σχέση γνωστή ως νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1$$

Για περισσότερα μπορεί κανείς να δει Γιαννακόπουλος [2003].

3.1.2 Μοντέλο τιμών μετοχών

Έστω η τιμή της μετοχής S και t ο χρόνος. (βλέπε HULL [2002]). Αν η S ακολουθεί ανέλιξη Wiener τότε η μεταβολή ΔS σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt θα είναι $\Delta S = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$ και στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$, $dS = \varepsilon \sqrt{dt}$

Οι μεταβολές ΔS μεταξύ δύο διαστημάτων Δt είναι ανεξάρτητες λόγω της ιδιότητας a της κίνησης Brown. Συνεπάγεται ότι η μεταβολή ΔS ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μηδέν, τυπική απόκλιση $\sqrt{\Delta t}$ και διακύμανση Δt . Άρα η S ακολουθεί διαδικασία Markov.

Θεωρούμε μεταβολή $\Delta S = S_T - S_0$ για χρονικό διάστημα T . Όπου T είναι το άθροισμα της μεταβολής της τιμής για N μικρά χρονικά διαστήματα μήκους Δt .

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

$$S_T - S_0 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Από τις ιδιότητες της ανέλιξης Wiener, ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους άρα η μεταβολή $S_T - S_0$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0, διακύμανση $N\Delta t = T$, και τυπική απόκλιση \sqrt{T} .

Η βασική ανέλιξη Wiener που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω έχει ποσοστό μετατόπισης ίσο με μηδέν και ποσοστό διακύμανσης ίσο με 1. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής για κάθε μελλοντική στιγμή ισούται με την παρούσα τιμή. Το ποσοστό διακύμανσης ίσο με ένα, σημαίνει ότι η διακύμανση της μεταβολής της τιμής σε ένα διάστημα T , ισούται με T .

Για τις τιμές των μετοχών τα παραπάνω δεν ισχύουν στην πράξη. Συγκεκριμένα οι επενδυτές προσδοκούν αναμενόμενη απόδοση μεγαλύτερη του μηδενός σαν αντάλλαγμα για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν. Επιπλέον η διακύμανση κάθε μετοχής είναι διαφορετική ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της και όχι ίση με τη μονάδα.

Η γενικευμένη ανέλιξη Wiener έχει αναμενόμενο ποσοστό μετατόπισης ίσο με a και ποσοστό διακύμανσης ίσο με b , όπου a και b είναι σταθερές.

$$dS = a dt + b dW_t \quad (3.1)$$

Εάν παραλείψουμε το δεύτερο όρο τότε

$$dS = a dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = a$$

Ολοκληρώνοντας $S = S_0 + at$, όπου S_0 η αρχική τιμή της μετοχής και at το ποσοστό μετατόπισης στο χρόνο T .

Ο δεύτερος όρος $b dW_t$ προσδίδει μεταβλητότητα στην τιμή της μετοχής και ισούται b φορές μια διαδικασία Wiener, που έχει τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα.

Εάν διακριτοποιήσουμε την εξίσωση (3.1),

$$S_T - S_0 = aT + b\varepsilon\sqrt{T} \quad \text{όπου } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Η αναμενόμενη μεταβολή της τιμής $E(S_T - S_0)$ ισούται με μηδέν και η διακύμανση $Var(S_T - S_0)$ ισούται με $b^2 T$.

Στο παραπάνω μοντέλο της γενικευμένης ανέλιξης Wiener, υποθέσαμε σταθερό ποσοστό μετατόπισης a . Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής όμως είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μετοχής. Υποθέτουμε αναμενόμενο ποσοστό μετατόπισης ίσο με μS . Εάν η μεταβλητότητα της μετοχής είναι ίση με μηδέν,

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

Και στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$

$$dS = \mu S dt \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ μηδέν και T έχουμε $S_T = S_0 e^{\mu T}$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι στην περίπτωση που η διακύμανση είναι μηδέν, η τιμή της μετοχής αυξάνει με συνεχώς ανατοκίζόμενο ποσοστό μ ανά μονάδα χρόνου.

Το ποσοστό διακύμανσης σ επίσης πρέπει να είναι ανεξάρτητο από την τιμή της μετοχής. Αυτό σημαίνει ότι η τυπική απόκλιση της αλλαγής της τιμής σε ένα χρονικό διάστημα Δt είναι ανάλογη με την τιμή της μετοχής.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (3.2)$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Όπου μ είναι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής και σ η τυπική απόκλιση της μετοχής.

Σε διακριτό χρόνο

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\varepsilon \sim N(0,1), \quad \frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

Το παραπάνω μοντέλο (3.2) είναι η γεωμετρική κίνηση Brown και χρησιμοποιήθηκε από τους Black and Scholes για να περιγράψει τη συμπεριφορά των τιμών των μετοχών .

3.1.3 Διαδικασία Itô

Εάν επεκταθεί το μοντέλο της γενικευμένης διαδικασίας Wiener, και μ, σ είναι συνάρτηση της στοχαστικής διαδικασίας X_t τότε έχουμε μια διαδικασία Itô.

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t \quad (3.3)$$

όπου W_t είναι διαδικασία Wiener.

Η ακριβής μορφή της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης ,ο όρος σφάλματος dW_t , οι παράμετροι μετατόπισης και διάχυσης εξαρτώνται από τις πληροφορίες τη χρονική στιγμή $t \in \{ I_t, t \in [0, T] \}$.

Ολοκληρώνοντας την (3.3) από 0 έως t έχουμε :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s, s) ds + \int_0^t \sigma(x_s, s) dW_s$$

Το x_0 είναι η αρχική τιμή της διαδικασίας τη χρονική στιγμή $t=0$ και ο όρος

$\int_0^t \sigma(x_s, s) dW_s$ είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô.

Θεωρούμε την προσέγγιση σε διακριτό χρόνο της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$x_t - x_{t-1} = \mu(x_{t-1}, t)h + \sigma(x_{t-1}, t)[W_t - W_{t-1}], \quad t = 1, 2, \dots, n \quad t = nh$$

όπου $[W_t - W_{t-1}]$ είναι μια τυπική διαδικασία Wiener με μέσο μηδέν και διακύμανση h .

Ορίζουμε το χώρο M^2 που αποτελείται από τις στοχαστικές διαδικασίες $f(t)$ τέτοιες ώστε να μπορούν να προσεγγιστούν από ακολουθίες διαδικασιών βήματος και για τις οποίες ισχύει $E[\int_0^T |f(t)|^2 dt] < \infty$, και το χώρο L^2 των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών k για τις οποίες ισχύει $E[k^2] < \infty$. Θεωρούμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σαν μια απεικόνιση από το χώρο M^2 στο χώρο L^2 .

Εάν η συνάρτηση $\sigma(x_t, t)$ ανήκει στο χώρο M^2 έτσι ώστε

$$E[\int_0^T \sigma(x_t, t)^2 dt] < \infty$$

Και εάν η τιμή της συνάρτησης $\sigma(x_t, t)$ τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές του W_s για $s \leq t$ αλλά όχι για $s \geq t$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από το μέλλον

Τότε το ολοκλήρωμα Itô $\int_0^T \sigma(x_t, s) dW_t$ είναι το μέσο τετραγωνικό όριο

$$\sum_{t=1}^n \sigma(x_{t-1}, t)[W_t - W_{t-1}] \rightarrow \int_0^T \sigma(x_t, s) dW_t, \quad \text{για } n \rightarrow \infty$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό όσο ο αριθμός των επιμέρους χρονικών διαστημάτων n τείνει στο άπειρο και το μήκος τους h τείνει στο μηδέν, το πεπερασμένο άθροισμα θα προσεγγίζει την τυχαία μεταβλητή που παριστάνεται από το ολοκλήρωμα Itô. Οι ιδιότητες της κίνησης Brown και συγκεκριμένα η μη ύπαρξη παραγώγου δεν επιτρέπουν τον ορισμό ολοκληρώματος κατά Riemman, αλλά τον ορισμό ενός στοχαστικού ολοκληρώματος το οποίο έχει διαφορετικές ιδιότητες από το απλό ολοκλήρωμα.

Ιδιότητες ολοκληρώματος Itô (Γιαννακόπουλος [2003])

1) Γραμμικότητα: για δύο στοχαστικές διαδικασίες f_1, f_2 , ισχύει

$$I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2), \quad \text{με } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

2) $E[\int_a^b f dW_t] = 0$

3) Ισομετρία : $E \left[\left| \int_a^b f(t, \omega) dW_t \right|^2 \right] = E[\int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt]$

4) Το ολοκλήρωμα Itô είναι martingale

$$E_s[\int_0^t f dW_t] = \int_0^s f dW_t, \quad 0 < s < t$$

Προϋπόθεση η συνάρτηση f να ανήκει στο χώρο M^2 όπως ορίσαμε παραπάνω.

Λήμμα Itô

Το 1951 ο Ιάπωνας μαθηματικός Kiyosi Itô εισήγαγε ένα τρόπο υπολογισμού του διαφορικού της συνάρτησης μια συγκεκριμένου τύπου στοχαστικής διαδικασίας, γνωστό ως λήμμα Itô.

Έστω $F(S_t, t)$ είναι μια διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t και ως προς την τυχαία μεταβλητή S_t που ακολουθεί διαδικασία Itô

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

όπου μ, σ είναι συναρτήσεις των S_t και t και dW_t διαδικασία Wiener

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 dt$$

αντικαθιστώντας την (3.4) έχουμε :

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} \mu + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma dW_t$$

Οι συναρτήσεις F, S επηρεάζονται από την ίδια πηγή αβεβαιότητας dW_t .

Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία είναι η γεωμετρική κίνηση Brown όπως δείξαμε παραπάνω, έχουμε :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma S dW_t$$

Μια σημαντική εφαρμογή του λήμματος Itô είναι στο μοντέλο Black- Scholes για τον υπολογισμό των τιμών παραγώγων. Η τιμή ενός παράγωγου προϊόντος είναι συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου μέσου και του χρόνου, $F(S_t, t)$, και η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί μπορεί να υπολογιστεί από το λήμμα του Itô, εάν γνωρίζουμε τη στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου μέσου.

Εφαρμογή 1 Tsay [2005]

Εάν η τιμή μιας μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown θα δείξουμε ότι ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής ακολουθεί γενικευμένη διαδικασία Wiener με ποσοστό μετατόπισης $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και ποσοστό διακύμανσης σ^2 .

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$F(S_t, t) = \ln(S_t)$ ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô έχουμε:

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma S dW_t$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} = \frac{1}{2} \frac{(-1)}{S_t^2}$$

$$d \ln(S_t) = \left(\frac{1}{S_t} \mu S_t - \frac{1}{2 S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Η λογαριθμική απόδοση, η αλλαγή δηλαδή της τιμής στο διάστημα T-t ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $\mu - \frac{\sigma^2}{2} (T - t)$ και διακύμανση $\sigma^2 (T - t)$.

Εφαρμογή 2 Γιαννακόπουλος [2003]

Θεωρούμε το παρακάτω μοντέλο για τις τιμές μετοχών όπου η τιμή S_t μιας μετοχής δίνεται από τον τύπο $S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$, με r, σ θετικές σταθερές $\in \mathbb{R}$, S_0 η αρχική

παρατήρηση για την τιμή της μετοχής και B_t κίνηση Brown. Θέλουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t .

$$\begin{aligned} E[f(B_t)] &= E[S_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t} + \sigma x} dx = S_0 e^{rt} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η διαδικασία S_t δεν είναι martingale καθώς για μια martingale διαδικασία ισχύει ότι $E_t[S_T] = E[S_T | I_t] = S_t$ για κάθε $t < T$. Μια martingale διαδικασία για την τιμή των μετοχών υπονοεί ότι όλες οι προηγούμενες πληροφορίες είναι ήδη ενσωματωμένες στην τιμή, όπως υποστηρίζει η θεωρία της ασθενούς αποτελεσματικότητας των αγορών, άρα η μελλοντική τιμή είναι απρόβλεπτη. Η ασθενής μορφή της αποτελεσματικότητας υποστηρίζει ότι κάποιος επενδυτής δεν μπορεί να βγάλει κέρδος γνωρίζοντας απλά τις ιστορικές τιμές, δηλαδή με την τεχνική ανάλυση.

Συνήθως οι τιμές των μετοχών έχουν μια θετική τάση λόγω του κινδύνου που ενσωματώνουν και του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, είναι δηλαδή submartingales.

Κάτω από ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας \tilde{P} η στοχαστική διαδικασία των τιμών προεξοφλημένων με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, μπορεί να μετατραπεί σε martingale.

Στην περίπτωση αυτή, που υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale, δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage στη συγκεκριμένη αγορά.

Η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_{t+\tau} | F_t]$ για το παραπάνω μοντέλο τιμών μετοχών υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} S_{t+\tau} &= S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma(B_{t+\tau} - B_t)} \\ E[S_{t+\tau} | F_t] &= S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau} E[e^{\sigma(B_{t+\tau} - B_t)} | F_t] \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της κίνησης Brown οι μεταβολές $B_{t+\tau} - B_t$ είναι ανεξάρτητες από την F_t . Άρα $E[S_{t+\tau} | F_t] = S_t e^{r\tau}$

3.1.4 Λύση στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης SDE

Εάν μια συνεχής στοχαστική διαδικασία x_t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_0^t dx_s = \int_0^t \mu(x_s, s) ds + \int_0^t \sigma(x_s, s) dW_s$$

Για κάθε $t > 0$ τότε η x_t είναι η λύση της

$$dx_t = \mu(x_t, t) dt + \sigma(x_t, t) dW_t$$
$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s, s) ds + \int_0^t \sigma(x_s, s) dW_s$$

Με δεδομένα τις παραμέτρους μετατόπισης και διάχυσης μ, σ και την τ.μ. W_s , προσδιορίζεται η x_t . Εάν η W_t προσδιορίζεται εξωγενώς, δηλαδή χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή, έχουμε μια ισχυρή λύση.

Στην περίπτωση που η διαδικασία W_t προσδιορίζεται ταυτόχρονα με την x_t , χρησιμοποιώντας άρα διαφορετική οικογένεια πληροφοριών, έχουμε μια ασθενή λύση της εξίσωσης (Neftci [2000]).

3.2 Στοχαστική μεταβλητότητα

Μέχρι στιγμής θεωρήσαμε ότι η παράμετρος διάχυσης σ_t σε μια στοχαστική διαδικασία θα είναι σταθερή ή θα εξαρτάται από το χρόνο. Σε περίπτωση που είναι τυχαία μεταβλητή θα ακολουθεί μια άλλη στοχαστική διαδικασία αντίστοιχη με αυτές για την τιμή της μετοχής. Στην περίπτωση αυτή οι δύο ανεξίτηλοι Wiener, πιθανόν να είναι εξαρτώμενες.

Για παράδειγμα :

$$dS_t = \mu dt + \sigma_t dW_{1t}$$

$$d\sigma_t = \kappa \sigma_t dt + \alpha \sigma_t dW_{2t}$$

Παρακάτω περιγράφονται στοχαστικές διαδικασίες για τη μεταβλητότητα σύμφωνα με τους Psychogios et al. [2003].

3.2.1 Γεωμετρική κίνηση Brown

Η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιήθηκε από τους Hull and White [1987] για να μοντελοποιήσει τις αλλαγές στη μεταβλητότητα.

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.5)$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη απόδοση της μεταβλητότητας και σ η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας. Η παράμετρος θέσης και διάχυσης είναι εξαρτώμενες από το επίπεδο της μεταβλητότητας V_t . Αυτό σημαίνει ότι εάν η μεταβλητότητα είναι υψηλή, στο επόμενο χρονικό διάστημα dt είναι πιθανόν να παραμείνει υψηλή όπως περιγράψαμε στην ιδιότητα συσσώρευσης στο 1^ο κεφάλαιο.

Από την (3.5) ολοκληρώνοντας έχουμε :

$$\int_0^t \frac{dV_t}{V_t} = \int_0^t \mu dt + \sigma dW_t = \mu t + \sigma W_t \quad (3.6)$$

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Itô στην $Z_t = \ln(V_t)$

$$dZ_t = \frac{dV_t}{V_t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{V_t^2} \right) (dV_t)^2 = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{1}{2V_t^2} \sigma^2 V_t^2 dt = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$\int_0^t \frac{dV_t}{V_t} = Z_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t = \ln(V_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 t$$

Αντικαθιστώντας στη (3.6) έχουμε μια ισχυρή λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \quad (3.7) \quad t \in [0, \infty)$$

Η V_t ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με

$$E(V_t) = V_0 e^{\mu t} \quad \text{και}$$

$$\text{Var}(V_t) = V_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Για $V_0 > 0$, η μεταβλητότητα δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές.

Λόγω της ιδιότητας του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου της κίνησης Brown και από την εξίσωση (3.7), έχουμε :

A) Αν $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = +\infty$

B) Αν $\mu < \frac{1}{2}\sigma^2$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = 0$

C) Αν $\mu = \frac{1}{2}\sigma^2$ τότε V_t θα κυμαίνεται μεταξύ μεγάλων και μικρών τιμών arbitrage όσο $t \rightarrow \infty$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του μ , η μεταβλητότητα τείνει στο μηδέν, ενώ για μεγάλες τιμές του μ , είναι άπειρη. Επίσης η μεταβλητότητα αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο. Λόγω της ιδιότητας της μεταβλητότητας για επιστροφή στο μακροχρόνιο μέσο, γύρω δηλαδή από ένα σταθερό επίπεδο, το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown δεν είναι κατάλληλο για να περιγράψει τον τρόπο που μεταβάλλεται η μεταβλητότητα.

3.2.2 Επανερχόμενη στο μέσο Gaussian διαδικασία

Η επανερχόμενη στο μέσο Gaussian διαδικασία ή αλλιώς Ornstein-Uhlenbeck χρησιμοποιήθηκε από τους Hull and White [1987], Scott [1987] κ.α. με σκοπό να ενσωματώσει την ιδιότητα επιστροφής στο μέσο της μεταβλητότητας.

$$dV_t = \theta(\mu - V_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.8)$$

όπου μ είναι ο μακροχρόνιος μέσος της μεταβλητότητας, θ ο βαθμός επιστροφής στο μέσο και σ η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας.

Η αλλαγή της μεταβλητότητας εξαρτάται από το V_t , δηλαδή από τις διαθέσιμες πληροφορίες τη στιγμή t .

Η αναμενόμενη μεταβολή της μεταβλητότητας $E[dV_t]$ ισούται με :

$$E[dV_t] = \theta(\mu - V_t)dt + \sigma E[dW_t] = \theta(\mu - V_t)dt$$

Εάν η μεταβλητότητα V_t είναι μεγαλύτερη από το μέσο μ , τότε στην επόμενη χρονική στιγμή dt η αναμενόμενη μεταβολή της μεταβλητότητας είναι αρνητική άρα η

μεταβλητότητα θα μειωθεί και αντιστρόφως. Αυτό σημαίνει ότι κινείται γύρω από το μακροχρόνιο μέσο μ (mean reversion).

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Itô στη συνάρτηση $Z_t = V_t e^{\theta t}$

$$dZ_t = e^{\theta t} dV_t + \theta V_t e^{\theta t} dt$$

Αντικαθιστούμε την dV_t από την (3.8)

$$dZ_t = e^{\theta t} \theta \mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$$

Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι t έχουμε :

$$V_t e^{\theta t} = V_0 + \int_0^t e^{\theta s} \theta \mu ds + \int_0^t \sigma e^{\theta s} dW_s$$

$$V_t = V_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta s} dW_s$$

Από τη λύση της εξίσωσης βλέπουμε ότι μειονέκτημα της παραπάνω διαδικασίας είναι ότι επιτρέπει αρνητικές τιμές της μεταβλητότητας.

Η V_t ακολουθεί κανονική κατανομή με αναμενόμενη τιμή και διακύμανση :

$$E[V_t] = \mu + (V_0 - \mu)e^{-\theta t}$$

$$Var(V_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})$$

Το όρια όταν ο χρόνος ή ο βαθμός επιστροφής στο μέσο τείνουν στο άπειρο είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V_t] = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[V_t] = \frac{\sigma^2}{2\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} V_t = \mu$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} E[V_t] = \mu$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι μακροχρόνια ($t \rightarrow \infty$) η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητότητας είναι ο μακροχρόνιος μέσος. Όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός επιστροφής στο μέσο θ , τόσο πιο γρήγορα η μεταβλητότητα τείνει στο μακροχρόνιο μέσο. Για μικρές τιμές του θ , υπάρχει μεγάλη αυτοσυσχέτιση στη μεταβλητότητα και άρα συσσώρευση της μεταβλητότητας (clustering). Έχει αποδειχθεί εμπειρικά ότι όσο το θ αυξάνεται, η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητότητας μειώνεται και η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας αυξάνεται.

3.2.3 Επανερχόμενη στο μέσο τετραγωνική διαδικασία

Η επανερχόμενη στο μέσο τετραγωνική διαδικασία χρησιμοποιήθηκε εναλλακτικά από τους Hull and White [1988], Heston [1993], διότι δεν επιτρέπει στη μεταβλητότητα να πάρει αρνητικές τιμές.

$$dV_t = \theta(\mu - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.9)$$

Οι παράμετροι θ , μ , σ ορίζονται όπως παραπάνω, στην επανερχόμενη στο μέσο διαδικασία. Η μεταβλητότητα δεν παίρνει αρνητικές τιμές και εάν $2\theta\mu > \sigma^2$ τότε είναι διάφορη του μηδενός.

Η λύση της εξίσωσης (3.9) είναι :

$$V_t = V_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} \sqrt{V_s} dW_s$$

Η V_t ακολουθεί τη μη κεντρική χ^2 κατανομή ($2cV_t; 2q + 2, 2u$) με $2q + 2$ βαθμούς ελευθερίας και με παράμετρο μη κεντρικότητας $2u$. (Cox et al. [1985]).

Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της μεταβλητότητας υπολογίζονται ως εξής :

$$E[V_t] = V_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$$

$$Var(V_t) = V_0 \frac{\sigma^2}{\theta} (e^{-\theta t} - e^{-2\theta t}) + \frac{\sigma^2}{\theta} (1 - e^{-\theta t})^2$$

Το όριο όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V_t] = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[V_t] = \mu \frac{\sigma^2}{\theta}$$

Μακροχρόνια η μεταβλητότητα και η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητότητας τείνουν στο μέσο. Η διακύμανση της μεταβλητότητας τείνει σε ένα σταθερό αριθμό, ο οποίος μηδενίζεται όσο $\theta \rightarrow \infty$. Όσο το θ αυξάνεται, η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητότητας μειώνεται και η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας αυξάνεται.

3.2.4 Επανερχόμενη στο μέσο λογαριθμική διαδικασία

Ο Wiggings [1987] χρησιμοποίησε την επανερχόμενη στο μέσο λογαριθμική διαδικασία για να περιγράψει τη μεταβλητότητα των δικαιωμάτων όπως και οι Detemple and Osakwe [2000] για την αποτίμηση των δικαιωμάτων μεταβλητότητας.

$$d \ln V_t = \theta(\mu - V_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.10)$$

ή ισοδύναμα

$$dV_t = \theta\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2\theta} - \ln V_t\right)V_t dt + \sigma V_t dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.11)$$

Οι παράμετροι ορίζονται όπως στις παραπάνω επανερχόμενες στο μέσο διαδικασίες.

Η σχέση (3.10) δείχνει ότι ο λογάριθμος της μεταβλητότητας $\ln V_t$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο και διακύμανση:

$$E[\ln V_t] = e^{-\theta t} \ln V_0 + (1 - e^{-\theta t})\mu$$

$$Var[\ln V_t] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})$$

Επομένως η μεταβλητότητα V_t ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή, άρα δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Ο μέσος και η διακύμανση είναι:

$$E[V_t] = e^{e^{-\theta t} \ln V_0 + (1 - e^{-\theta t})\mu + \frac{\sigma^2}{4\theta}(1 - e^{-2\theta t})}$$

$$Var[V_t] = e^{2e^{-\theta t} \ln V_0 + 2(1 - e^{-\theta t})\mu + \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})} \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) - 1$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι όσο το θ αυξάνεται, η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητότητας μειώνεται και η μεταβλητότητα της μεταβλητότητας αυξάνεται.

Στην περίπτωση της λογαριθμικής διαδικασίας η μεταβλητότητα συγκλίνει στο μέσο πιο γρήγορα από ότι στις προηγούμενες διαδικασίες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μετατόπιση εξαρτάται ταυτόχρονα από το V_t και το $\ln V_t$ όπως βλέπουμε από τις σχέσεις (3.10) και (3.11). Στην περίπτωση της επανερχόμενης στο μέσο (τετραγωνικής) διαδικασίας όσο η μεταβλητότητα V_t τείνει στο άπειρο, η μετατόπιση $\theta(\frac{\mu}{V_t} - 1)V_t$ ισούται με τη σταθερά θ .

Για τη λογαριθμική επανερχόμενη στο μέσο διαδικασία, όσο η μεταβλητότητα τείνει στο άπειρο, η ποσότητα $\theta(\mu + \frac{\sigma^2}{2\theta} - \ln V_t)$ τείνει στο $-\infty$ βαίνοντας μειούμενη λογαριθμικά. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα επιστρέφει γρηγορότερα στο μέσο.

Η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$V_t = V_0 e^{-\theta t} e^{\mu(1-e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s}, \quad t \in [0, \infty)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η μελλοντική μεταβλητότητα είναι συνάρτηση της τρέχουσας μεταβλητότητας και κοίλη συνάρτηση σε σχέση με το χρόνο, αφού $e^{-\theta t} \leq 1$. Η δομή της μεταβλητότητας είναι παρόμοια με τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Το όρια όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = e^\mu$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V_t] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{4\theta}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[V_t] = e^{2\mu + \frac{\sigma^2}{2\theta}} (e^{\frac{\sigma^2}{2\theta}} - 1)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι στο άπειρο η μεταβλητότητα τείνει στο μακροχρόνιο μέσο e^μ . Ο μακροχρόνιος μέσος και η μακροχρόνια διακύμανση είναι σταθεροί αριθμοί.

3.3. Μοντέλο Heston

Ο Heston [1993] πρότεινε ένα μοντέλο σαν επέκταση του μοντέλου των Black and Scholes [1973]. Το μοντέλο Black and Scholes υποθέτει ότι οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή με γνωστό μέσο και διακύμανση. Το μοντέλο του Heston λαμβάνει υπόψη την μη κανονικότητα των αποδόσεων των μετοχών, την ιδιότητα της μόχλευσης και της επιστροφής στο μέσο της μεταβλητότητας. Η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή, αλλά ακολουθεί στοχαστική διαδικασία όπως και η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Ο Heston δίνει μια λύση κλειστού τύπου για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς όταν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της μεταβλητότητας. Η συσχέτιση εξηγεί την επίδραση ασυμμετρίας στις αποδόσεις (volatility smiles). Η επίδραση της ασυμμετρίας έχει σαν αποτέλεσμα το μοντέλο των Black and Scholes που υποθέτει σταθερή διακύμανση, να μην μπορεί να τιμολογήσει με ακρίβεια δικαιώματα σημαντικά εντός του χρηματικού ισοδύναμου (deep in-the-money) ή πολύ εκτός του χρηματικού ισοδύναμου (deep out-of-the money).

Το μοντέλο του Heston προσδιορίζεται ως εξής:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_{1t} \quad (3.12)$$

$$dV_t = \theta(\alpha - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{2t} \quad (3.13)$$

Όπου S_t η τιμή του υποκείμενου τίτλου, μ η μέση τιμή, V_t η διακύμανση, $W_{1,2t}$ τυπικές κινήσεις Brown, θ ο βαθμός επιστροφής στο μέσο, α η μακροχρόνια διακύμανση, σ η μεταβλητότητα της διακύμανσης.

Για να λάβουμε υπόψη την ιδιότητα της μόχλευσης, οι διαδικασίες Wiener έχουν συσχέτιση $dW_{1t} dW_{2t} = \rho dt$. Η παράμετρος ρ επηρεάζει θετικά τη λοξότητα των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου. Η θετική συσχέτιση έχει σαν αποτέλεσμα υψηλή διακύμανση όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται και δημιουργεί βαριά δεξιά ουρά και λεπτή αριστερή ουρά στην κατανομή των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου. Αυξάνει την τιμή των δικαιωμάτων εκτός χρηματικού ισοδύναμου και μειώνει την τιμή των δικαιωμάτων εντός χρηματικού ισοδύναμου. Το αντίθετο συμβαίνει με αρνητικό συντελεστή συσχέτισης ρ

Η στοχαστική διαδικασία για τη διακύμανση είναι η επανερχόμενη στο μέσο τετραγωνική διαδικασία που περιγράψαμε στην υποενότητα 3.2.3. Όσο αυξάνεται η μακροχρόνια διακύμανση α , τόσο αυξάνεται η τιμή των δικαιωμάτων.

Όταν η παράμετρος σ είναι μηδέν, η μεταβλητότητα είναι ντετερμινιστική και οι αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου ακολουθούν κανονική κατανομή. Σε αντίθετη περίπτωση, η παράμετρος σ αυξάνει την κύρτωση των αποδόσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αυξάνεται η τιμή των δικαιωμάτων σημαντικά εντός ή εκτός του χρηματικού ισοδύναμου, και να μειώνεται η τιμή των δικαιωμάτων κοντά στο χρηματικό ισοδύναμο.

Σε συνθήκες που δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage (Black and Scholes [1973]), η αξία κάθε περιουσιακού στοιχείου $C(S,V,t)$ (π.χ. C η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς), πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 V}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial C}{\partial S} - (r - q)C + [\theta(\alpha - V) - \lambda V] \frac{\partial C}{\partial V} + \frac{\sigma^2 V}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + \rho \sigma S V \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} = 0 \quad (3.14)$$

Όπου r το επιτόκιο, q η μερισματική απόδοση. Το $\lambda(S,V,t)$ αντιπροσωπεύει την αγοραία τιμή του κινδύνου μεταβλητότητας, και πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το συγκεκριμένο αγαθό.

Ο Heston χρησιμοποιεί την μέθοδο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων για τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (3.14). Σε αναλογία με το μοντέλο Black and Scholes υποθέτει μια λύση της μορφής :

$$C(S_0, K, V_0, t, T) = S P_1 - K e^{-(r-q)(T-t)} P_2$$

,όπου P_1 είναι το δέλτα ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, και P_2 η δεσμευμένη ουδέτερη στον κίνδυνο πιθανότητα ότι η τιμή S θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K στη λήξη. Οι πιθανότητες P_1, P_2 ικανοποιούν την μερική διαφορική εξίσωση (3.14). Δεδομένου ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις φ_1, φ_2 είναι γνωστές, οι όροι P_1, P_2 προσδιορίζονται μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln K} \varphi_j(S_0, V_0, t, T, u)}{iu} \right] du, \quad j = 1, 2$$

Ο Heston υποθέτει ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις φ_1, φ_2 έχουν τη μορφή

$$\varphi_j(S_0, V_0, \tau; \varphi) = e^{C_j(\tau; \varphi) + D_j(\tau; \varphi)V_0 + i\varphi S_0}, \quad \tau = T - t$$

Αν αντικαταστήσουμε τις φ_1, φ_2 στην εξίσωση (3.14), έχουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση για άγνωστες συναρτήσεις $C_j(\tau; \varphi)$ και $D_j(\tau; \varphi)$:

$$\frac{dC_j(\tau; \varphi)}{d\tau} - \theta\alpha D_j(\tau; \varphi) - (r - q)\varphi i = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{dD_j(\tau; \varphi)}{d\tau} - \frac{\sigma^2 D_j^2(\tau; \varphi)}{2} + (b_j - \rho\sigma\varphi i)D_j(\tau; \varphi) - u_j\varphi i + \frac{\varphi^2}{2} = 0$$

$$\text{Με αρχικές τιμές } C_j(0, \varphi) = D_j(0, \varphi) = 0 \quad (3.16)$$

Η λύση του συστήματος (3.15), (3.16), δίνει :

$$C(\tau; \varphi) = (r - q)\varphi i\tau + \frac{\theta\alpha}{\sigma^2} \{b_j - \rho\sigma\varphi i + d\}\tau - 2\ln \left[\frac{1 - ge^{dx}}{1 - g} \right],$$

$$D(\tau; \varphi) = \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{dx}}{1 - ge^{dx}} \right],$$

$$\text{Με } g = \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{b_j - \rho\sigma\varphi i - d}, \quad d = \sqrt{(\rho\sigma\varphi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\varphi i - \varphi^2)}$$

$$\text{Για } j = 1, 2 \quad u_1 = 0.5, \quad u_2 = -0.5, \quad b_1 = \theta + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \theta + \lambda$$

Για περισσότερα μπορεί κανείς να δει Mikhailov and Nogel [1993].

3.4 Μοντέλο Taylor

Το λογαριθμικό στοχαστικό μοντέλο μεταβλητότητας που προτάθηκε από τον Taylor [1982] προσθέτει στοχαστικό θόρυβο στην εξίσωση για τη μεταβλητότητα σ_t . Έστω y_t οι λογαριθμικές ημερήσιες αποδόσεις $y_t = \ln p_t - \ln p_{t-1}$, και

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

όπου ε_t διαταρακτικός όρος $\sim \text{NID}(0,1)$.

Το μοντέλο υποθέτει ότι

$$y_t = \varepsilon_t e^{h_t/2} \text{ ή } h_t = \log \sigma_t^2$$

και ότι η διαδικασία της μεταβλητότητας ακολουθεί μία αυτοσυσχέτιση,

$$h_{t+1} = \mu + \varphi(h_t - \mu) + \omega_t$$

όπου ω_t διαταρακτικός όρος $\sim \text{NID}(0, \sigma_t^2)$ και ανεξάρτητος του ε_t , μ ο μακροχρόνιος μέσος της λογαριθμικής μεταβλητότητας, φ η παράμετρος επιμονής στη μεταβλητότητα, που πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας $|\varphi| < 1$, με

$$h_1 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}\right).$$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό υπολογίζοντας το λογάριθμο των τετραγώνων των παρατηρήσεων.

$$\log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2$$

Όπου $\log \varepsilon_t^2$ κατανέμεται σαν το λογάριθμο μίας χ^2 τυχαίας μεταβλητής με ένα βαθμό ελευθερίας, με $E(\log \varepsilon_t^2) = -1,2704$, $\text{Var}(\log \varepsilon_t^2) = 4,93$, και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\{-\frac{1}{2}(e^x - x)\}}, -\infty < x < \infty .$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να γίνει μέσω Μπεϋζιανών (Markov Chain Monte Carlo) και μη Μπεϋζιανών μεθόδων (quasi likelihood method). Για περισσότερα μπορεί κανείς να δει Kim, Shephard and Chib [1998].

Κεφάλαιο 4

4.1 Εφαρμογή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο (VaR) χρονοσειρών, χρησιμοποιώντας ημερήσια δεδομένα από 2/1/2007 έως 4/8/2011 των παρακάτω δεικτών:

Dow Jones Industrial Average (DJI), DAX, CAC 40 (FCHI), FTSE 100 (FTSE), S&P 500 (GSPC).

Οι αποδόσεις για τον κάθε δείκτη είναι ημερήσιες λογαριθμικές και υπολογίζονται από τον τύπο $r_t = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}}$, όπου p_t η τιμή του δείκτη τη χρονική στιγμή t .

Ο δεσμευμένος μέσος των αποδόσεων θα μοντελοποιηθεί με αυτοπαλίνδρομα (AR), κινητού μέσου όρου (MA) ή αυτοπαλίνδρομα κινητού μέσου όρου (ARMA) υποδείγματα, εάν τα δεδομένα δείχνουν αυτοσυσχέτιση.

Ένα AR(p) μοντέλο p τάξεως είναι της μορφής $r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_p r_{t-p} + a_t$

Ένα MA(q) μοντέλο q τάξεως είναι της μορφής $r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$

Ένα ARMA(p, q) μοντέλο είναι της μορφής $r_t = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$

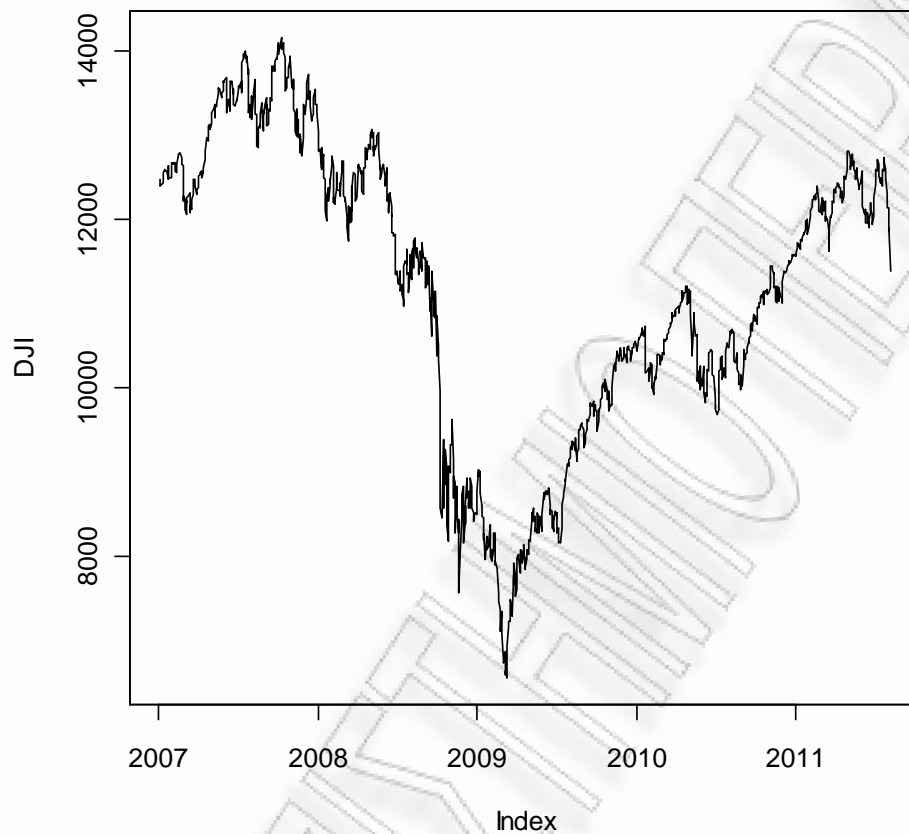
,όπου $p, q > 0$.

Η δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων θα μοντελοποιηθεί με χρήση των ARCH, GARCH, EGARCH, IGARCH όπου η ακολουθία ε_t , ακολουθεί gaussian, student-t και generalized error κατανομή. Επίσης θα γίνει εφαρμογή στο μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του Taylor.

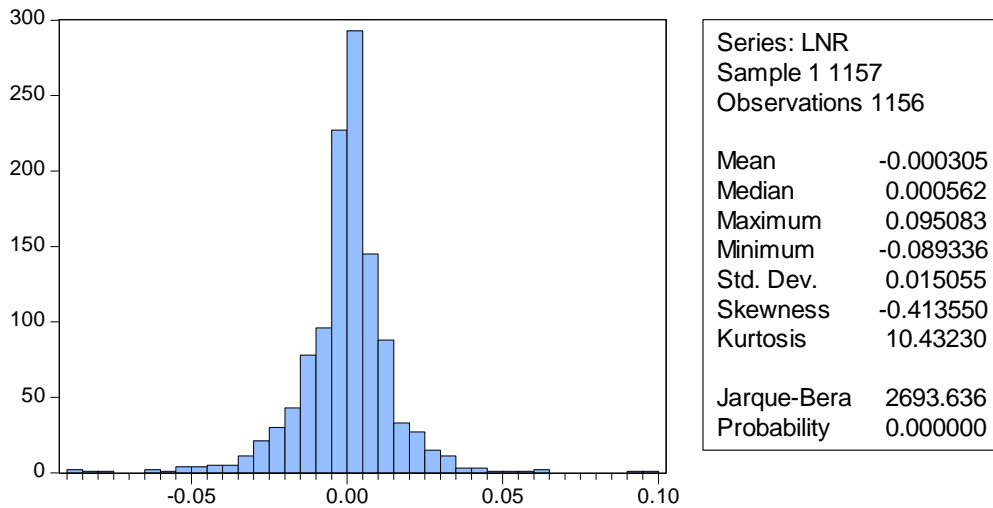
Στη συνέχεια υπολογίζεται η αξία σε κίνδυνο VaR χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μοντέλα. Η καταλληλότητα των μοντέλων ελέγχεται με backtesting.

Η εφαρμογή θα γίνει στο πρόγραμμα R, χρησιμοποιώντας το πακέτο rgarch (Ghalanos [2011]) και στο e-views.

4.2 Δείκτης Dow Jones Industrial Average (DJI)



Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ορισμένα βασικά στατιστικά στοιχεία των λογαριθμικών αποδόσεων για τον δείκτη Dow Jones. Η μέση απόδοση είναι κοντά στο 0, ενώ κυμαίνεται από -8.9% ελάχιστο έως 9.5% μέγιστο με τυπική απόκλιση 1.5%. Όπως φαίνεται και από το ιστόγραμμα υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή τάση προς αρνητικές αποδόσεις. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στην κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο Jarque Bera που απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για κανονικότητα της κατανομής με $p\text{-value}=0$.



Για να δούμε αν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στη σειρά, βλέπουμε το correlogram για τις πρώτες 12 περιόδους.

Sample: 1 1157
Included observations: 1156

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	-0.119	-0.119	16.331	0.000
*	*	2	-0.082	-0.098	24.215	0.000
*	*	3	0.101	0.080	35.958	0.000
		4	-0.016	-0.002	36.266	0.000
		5	-0.030	-0.018	37.338	0.000
		6	0.021	0.006	37.853	0.000
		7	-0.024	-0.024	38.537	0.000
		8	0.036	0.037	40.013	0.000
		9	0.001	0.003	40.014	0.000
		10	0.044	0.056	42.249	0.000
		11	-0.029	-0.024	43.212	0.000
		12	0.061	0.063	47.509	0.000

Τις πρώτες δύο περιόδους φαίνεται να υπάρχει αυτοσυσχέτιση αφού p-value=0.

Δοκιμάζουμε ένα AR(2) μοντέλο

Dependent Variable: LNR
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 4 1157
Included observations: 1154 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000361	0.000439	-0.823130	0.4106
LNR(-1)	-0.131415	0.029449	-4.462530	0.0000
LNR(-2)	-0.098770	0.029449	-3.353956	0.0008

R-squared	0.023743	Mean dependent var	-0.000300
Adjusted R-squared	0.022047	S.D. dependent var	0.015067
S.E. of regression	0.014900	Akaike info criterion	-5.572321
Sum squared resid	0.255532	Schwarz criterion	-5.559190
Log likelihood	3218.229	Hannan-Quinn criter.	-5.567365
F-statistic	13.99667	Durbin-Watson stat	1.975334
Prob(F-statistic)	0.000001		

Οι δύο υστερήσεις είναι στατιστικά σημαντικές αφού $p\text{-value} < \alpha$. Η σταθερά δεν είναι στατιστικά σημαντική αλλά την αφήνουμε στο μοντέλο για τη διαμόρφωση του μακροχρόνιου μέσου της σειράς. Ελέγχουμε τα κατάλοιπα που δεν είναι στατιστικά σημαντικά με $p\text{-value} > \alpha$ άρα το μοντέλο είναι επαρκές.

Sample: 4 1157
Included observations: 1154

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.008	0.008	0.0720	0.788
		2	0.009	0.009	0.1710	0.918
*	*	3	0.076	0.076	6.8067	0.078
		4	-0.013	-0.015	7.0110	0.135
		5	-0.024	-0.025	7.6628	0.176
		6	0.016	0.011	7.9499	0.242
		7	-0.021	-0.018	8.4453	0.295
		8	0.040	0.044	10.311	0.244
		9	0.007	0.004	10.370	0.321
		10	0.051	0.054	13.445	0.200
		11	-0.013	-0.021	13.655	0.253
		12	0.062	0.061	18.073	0.113

Δοκιμάζουμε ένα MA(1) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2 1157
Included observations: 1156 after adjustments
Convergence achieved after 6 iterations
MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.138944	0.029263	-4.748038	0.0000

R-squared	0.016286	Mean dependent var	-0.000305
Adjusted R-squared	0.016286	S.D. dependent var	0.015055
S.E. of regression	0.014932	Akaike info criterion	-5.569754
Sum squared resid	0.257524	Schwarz criterion	-5.565383
Log likelihood	3220.318	Hannan-Quinn criter.	-5.568105
Durbin-Watson stat	1.976078		

Η μεταβλητή είναι στατιστικά σημαντική. Ελέγχουμε τα κατάλοιπα και βλέπουμε ότι υπάρχουν μεταβλητές που δεν έχουμε συμπεριλάβει στο μοντέλο.

Sample: 2 1157
 Included observations: 1156
 Q-statistic
 probabilities adjusted
 for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.007	0.007	0.0625	
*	*	2	-0.069	-0.069	5.5887	0.018
*	*	3	0.089	0.091	14.846	0.001
		4	-0.008	-0.015	14.923	0.002
		5	-0.030	-0.017	15.944	0.003
		6	0.014	0.005	16.185	0.006
		7	-0.018	-0.020	16.559	0.011
		8	0.034	0.041	17.941	0.012
		9	-0.011	0.005	18.094	0.021
		10	0.043	0.052	20.272	0.016
		11	-0.014	-0.022	20.510	0.025
		12	0.060	0.067	24.717	0.010

Δοκιμάζουμε ένα ARMA(1,1) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3 1157
 Included observations: 1155 after adjustments
 Convergence achieved after 295 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000242	0.000305	-0.791082	0.4291
LNR(-1)	0.185533	0.203301	0.912604	0.3616
MA(1)	-0.320056	0.196076	-1.632303	0.1029
R-squared	0.018251	Mean dependent var		-0.000305
Adjusted R-squared	0.016546	S.D. dependent var		0.015062
S.E. of regression	0.014936	Akaike info criterion		-5.567425
Sum squared resid	0.257010	Schwarz criterion		-5.554304
Log likelihood	3218.188	Hannan-Quinn criter.		-5.562473
F-statistic	10.70775	Durbin-Watson stat		1.980956
Prob(F-statistic)	0.000025			
Inverted MA Roots	.32			

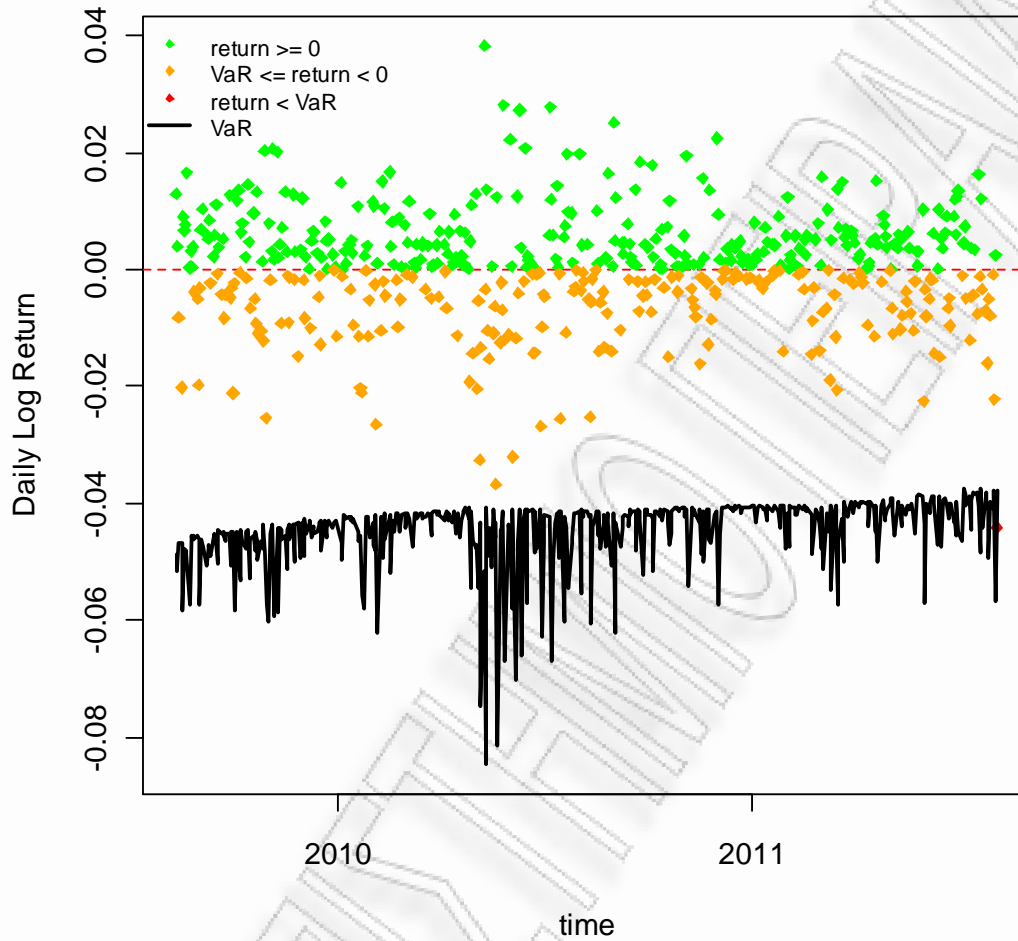
Οι μεταβλητές που εισάγαμε δεν είναι στατιστικά σημαντικές αφού $p\text{-value} > \alpha$ άρα απορρίπτουμε αυτό το μοντέλο.

Για την μοντελοποίηση του μέσου επιλέγουμε το AR(2) μοντέλο, επειδή έχει κατάλοιπα που δεν είναι στατιστικά σημαντικά και μεγαλύτερο συντελεστή προσαρμογής R^2 .

Για τη μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης χρησιμοποιούμε τα μοντέλα ARCH(1), GARCH(1,1), EGARCH(1,1), IGARCH(1,1) με την ακολουθία ε_t να ακολουθεί gaussian, student-t ή generalized error κατανομή. Στη συνέχεια γίνεται πρόβλεψη για το VaR της επόμενης μέρας για διάστημα εμπιστοσύνης 0.99 και 0.975. Οι προβλέψεις για δείγμα 500 παρατηρήσεων με αναδρομική προσαρμογή κάθε 25 παρατηρήσεις συγκρίνονται με τις πραγματοποιηθείσες αποδόσεις. Επίσης μοντελοποιούμε τη μεταβλητότητα με χρήση του υποδείγματος στοχαστικής μεταβλητότητας του Taylor, χρησιμοποιώντας Gaussian ή student-t κατανομή. Οι προβλέψεις για όλο το δείγμα συγκρίνονται με τις πραγματοποιηθείσες αποδόσεις, δεδομένου ότι εμφανίζεται πολύ μικρός αριθμός παραβιάσεων. Επιλέγεται η κατανομή που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen. Στο διάγραμμα φαίνονται οι ημερήσιες αποδόσεις και οι υπερβάσεις του VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 0.99.

ARCH-student-t

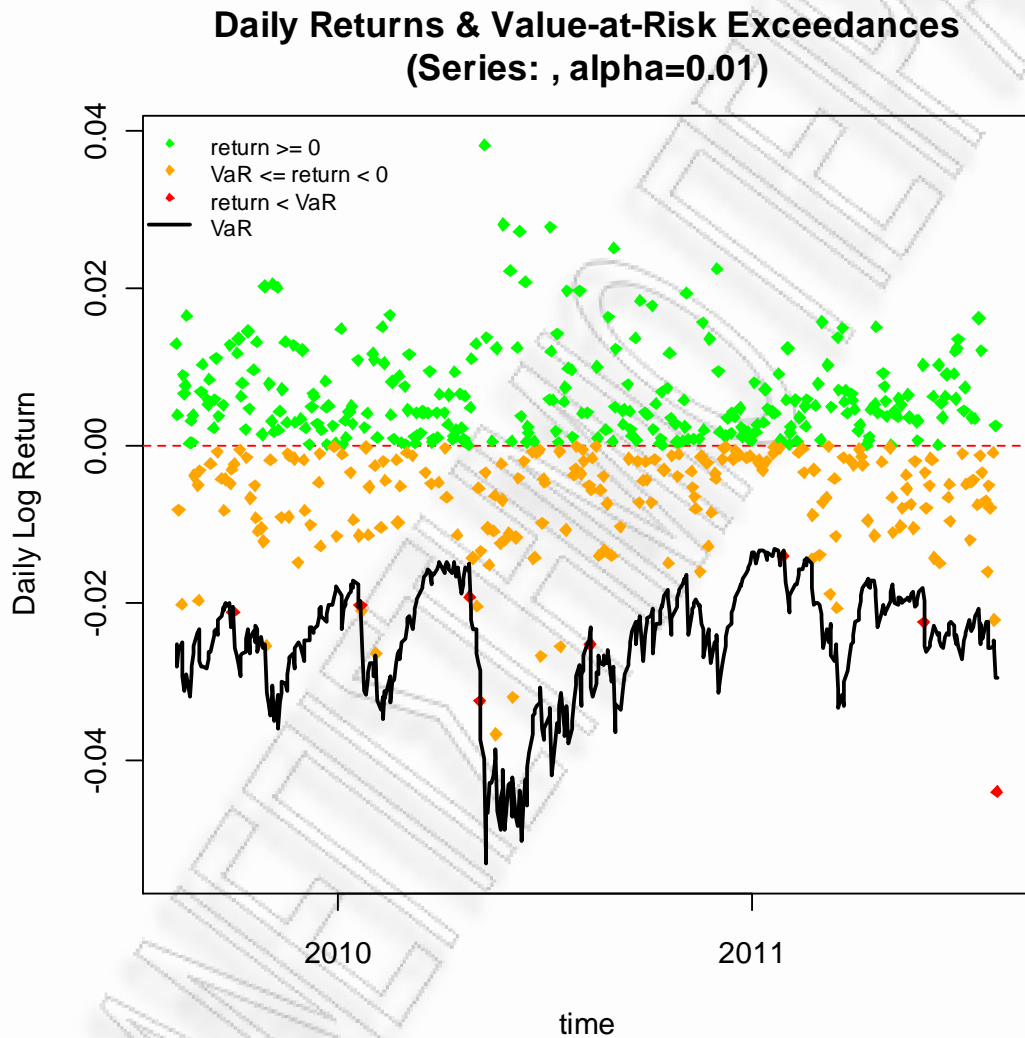
Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)



Model ARCH-std				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	1	12,5	4
Percentage % VaR exceedances	1%	0,2%	2,5%	0,8%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	4,813	3,841	8,032
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	4,813	5,991	8,08

Το μοντέλο απορρίπτεται για διάστημα εμπιστοσύνης υπολογισμού του VaR 99% και 97,5% .Βλέπουμε από το διάγραμμα και από τα τεστ ότι υπερεκτιμάται ο κίνδυνος και αυτό συνεπάγεται κόστος για μια επιχείρηση, από τη δέσμευση περισσότερων κεφαλαίων από αυτά που χρειάζονται.

GARCH-generalized error distribution

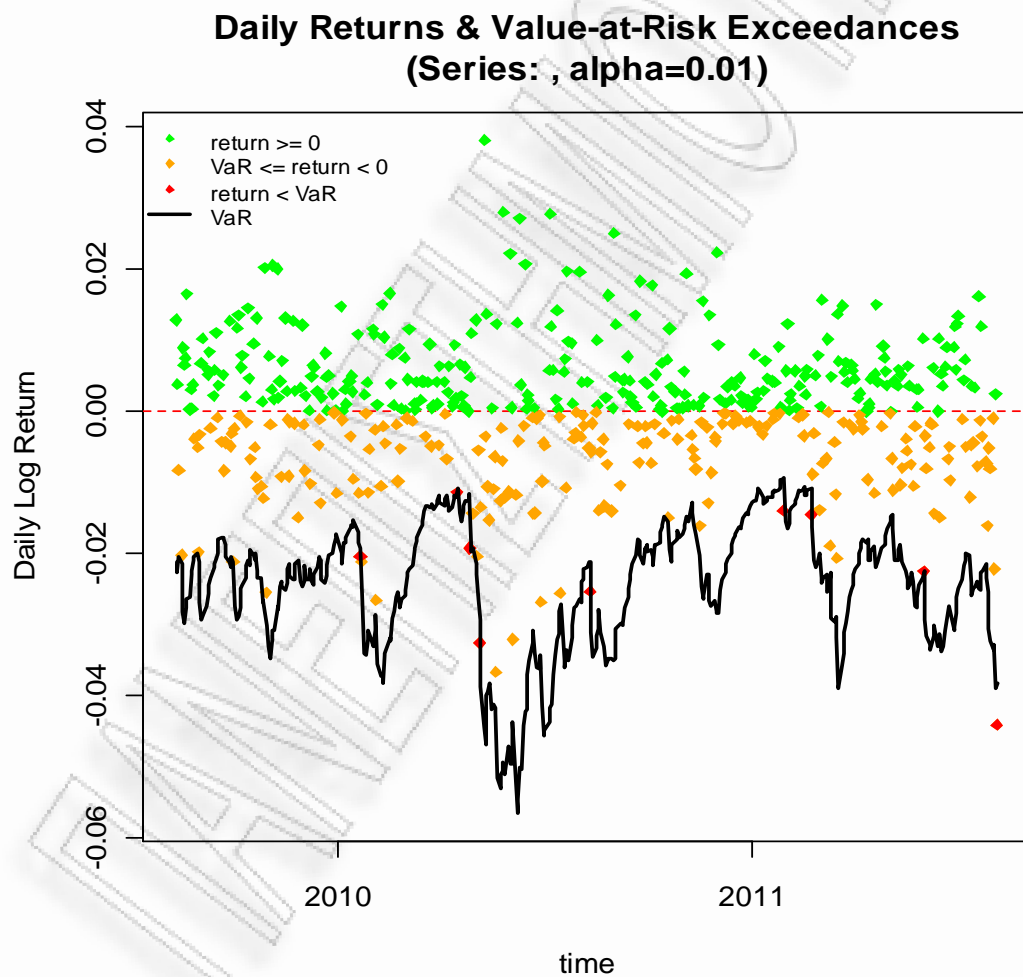


Model GARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	8	12,5	21
Percentage % VaR exceedances	1%	1,6%	2,5%	4,2%

LR_{uc} Kupiec)	(test	3,841	1,538	3,841	4,938
LR_{cc} Christoffersen)	(test	5,991	1,766	5,991	4,969

Για επίπεδο σημαντικότητας 2,5%, σύμφωνα με το τεστ του Kupiec, απορρίπτεται το μοντέλο, ενώ σύμφωνα με το τεστ του Christoffersen δεν μπορεί να απορριφθεί.

EGARCH-generalized error distribution

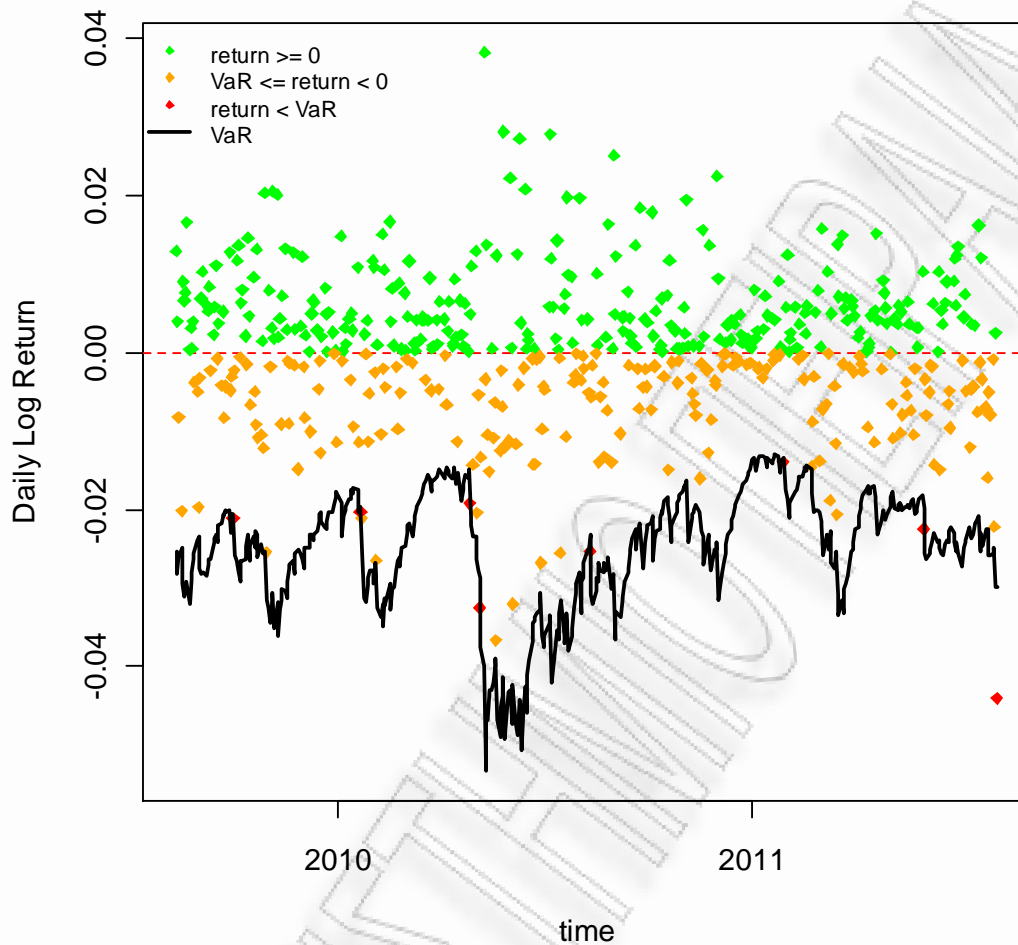


Model EGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	9	12,5	21
Percentage % VaR exceedances	1%	1,8%	2,5%	4,2%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	2,613	3,841	4,938
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	2,906	5,991	4,969

Το μοντέλο απορρίπτεται για διάστημα εμπιστοσύνης υπολογισμού του VaR 97,5% σύμφωνα με το τεστ του Kupiec, καθώς η στατιστική LR_{uc} είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή της. Σύμφωνα με το τεστ του Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί.

IGARCH-generalized error distribution

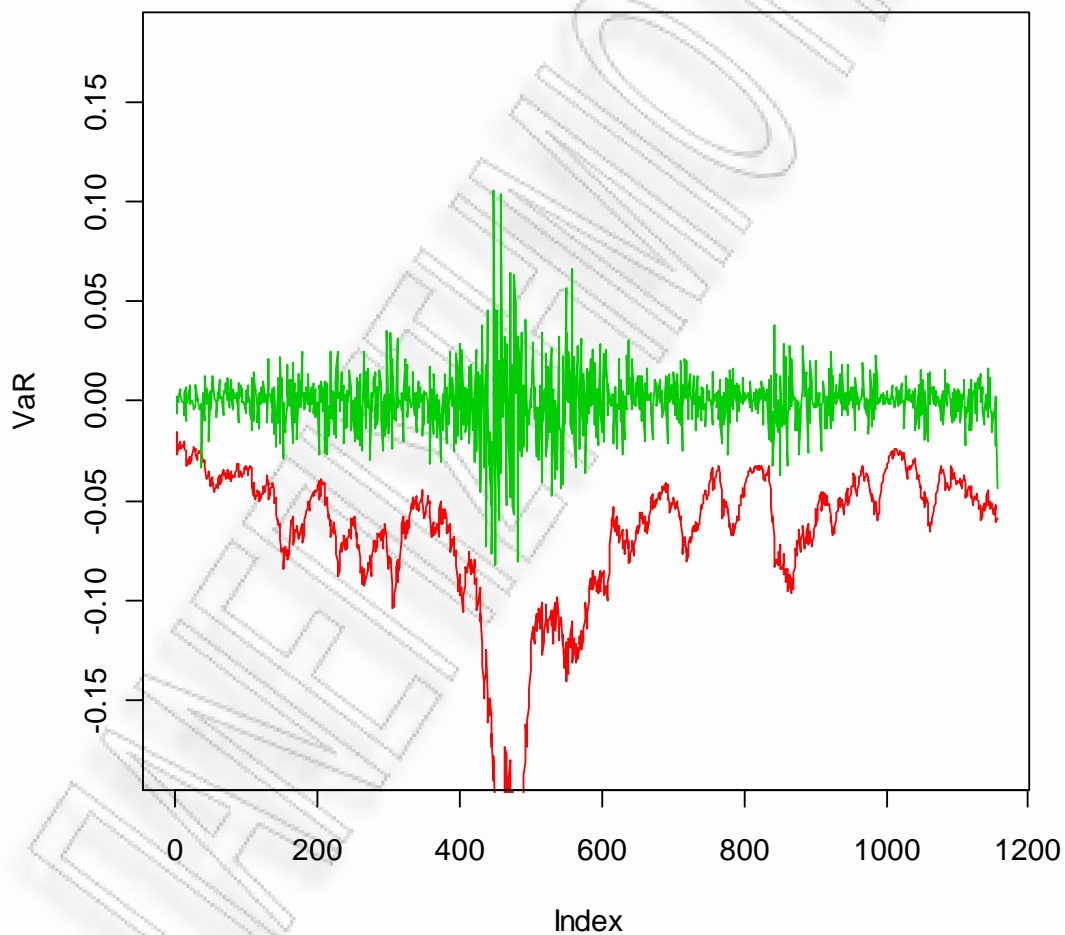
Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances (Series: , alpha=0.01)



Model IGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	8	12,5	21
Percentage % VaR exceedances	1%	1,6%	2,5%	4,2%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	1,538	3,841	4,938
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	1,766	5,991	4,969

Βλέπουμε ότι για διάστημα εμπιστοσύνης 99%, το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί, ενώ για διάστημα εμπιστοσύνης 97,5%, το μοντέλο απορρίπτεται σύμφωνα με το τεστ του Kupiec. Σύμφωνα με το τεστ του Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί.

SV- normal

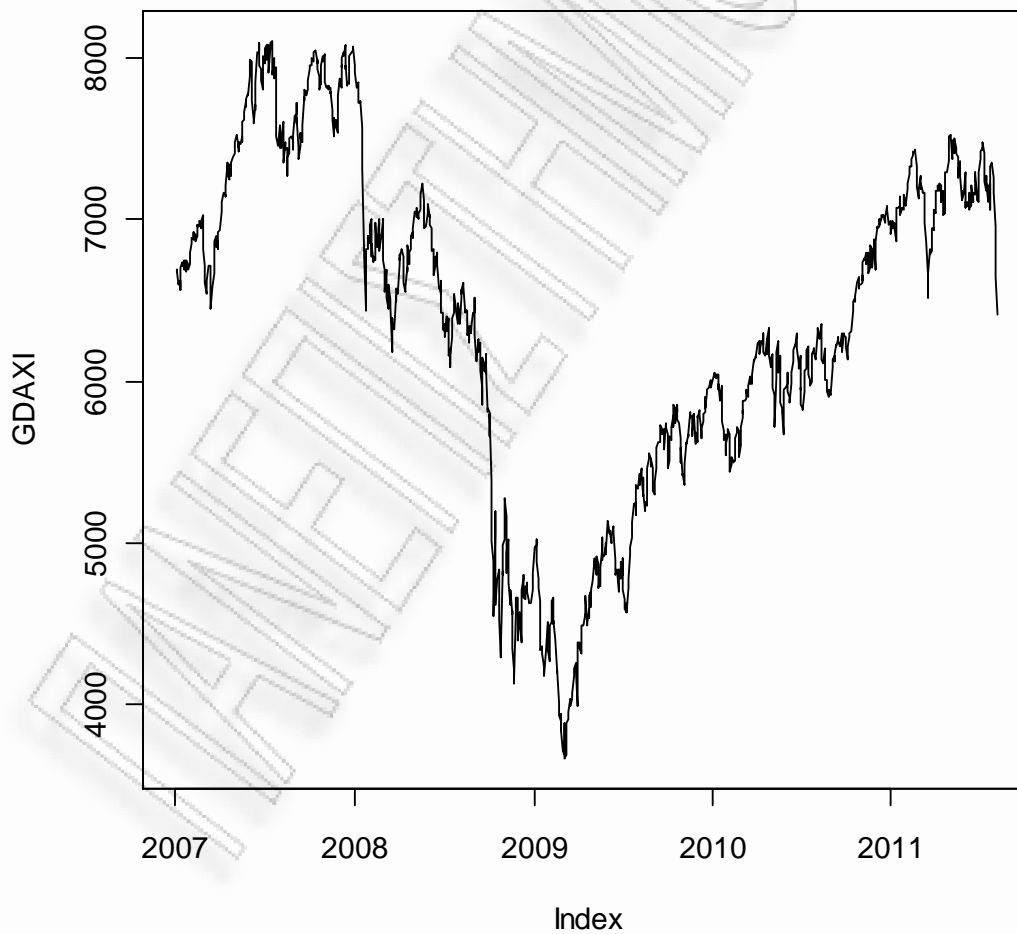


Model SV-normal				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	11,55	1	28,875	1

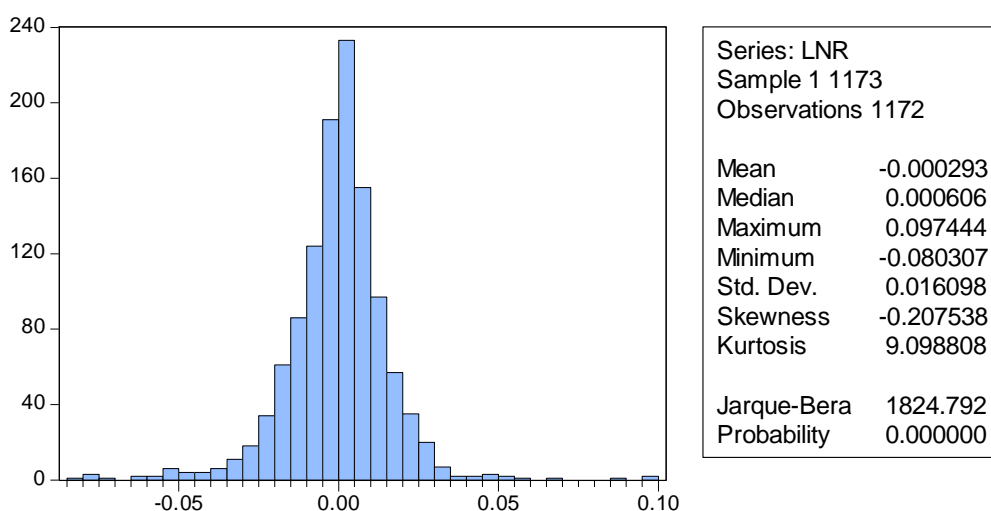
Percentage	%	1%	0,086%	2,5%	0,086%
VaR exceedances					
LR_{uc}	(test	3,841	16,3036	3,841	49,70
Kupiec)					
LR_{cc}	(test	5,991	N/A	5,991	N/A
Christoffersen)					

Το μοντέλο απορρίπτεται διότι εμφανίζει πολύ λιγότερες παραβιάσεις από τις αναμενόμενες. Ίδια ακριβώς αποτελέσματα έχουμε και για την student-t κατανομή.

4.3 Δείκτης DAX



Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ορισμένα βασικά στατιστικά στοιχεία των λογαριθμικών αποδόσεων για τον δείκτη DAX. Η μέση απόδοση είναι κοντά στο 0, ενώ κυμαίνεται από -8% ελάχιστο έως 9.7% μέγιστο με τυπική απόκλιση 1.6%. Όπως φαίνεται και από το ιστόγραμμα υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή τάση προς αρνητικές αποδόσεις. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στην κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο Jarque Bera που απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για κανονικότητα της κατανομής με p-value=0.



Για να δούμε αν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στη σειρά, βλέπουμε το correlogram για τις πρώτες 12 περιόδους.

Sample: 1 1173

Included observations: 1172

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.018	-0.018	0.3775	0.539
		2	-0.031	-0.032	1.5356	0.464
		3	-0.021	-0.022	2.0365	0.565
*	*	4	0.084	0.082	10.366	0.035
		5	-0.040	-0.039	12.288	0.031
		6	0.019	0.023	12.725	0.048
		7	-0.019	-0.018	13.150	0.069
		8	0.006	-0.002	13.193	0.105
		9	-0.051	-0.045	16.239	0.062
		10	0.064	0.058	21.136	0.020
		11	-0.002	0.001	21.141	0.032
		12	-0.001	-0.001	21.142	0.048

Φαίνεται να υπάρχει αυτοσυσχέτιση στην τέταρτη υστέρηση αφού $p\text{-value} < 0.05$ για επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Δοκιμάζουμε ένα AR(4) μοντέλο

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 6 1173
 Included observations: 1168 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000268	0.000470	-0.569675	0.5690
LNR(-4)	0.084989	0.029330	2.897713	0.0038
R-squared	0.007150	Mean dependent var		-0.000285
Adjusted R-squared	0.006298	S.D. dependent var		0.016121
S.E. of regression	0.016070	Akaike info criterion		-5.421965
Sum squared resid	0.301128	Schwarz criterion		-5.413295
Log likelihood	3168.427	Hannan-Quinn criter.		-5.418695
F-statistic	8.396741	Durbin-Watson stat		2.021301
Prob(F-statistic)	0.003829			

Η τέταρτη υστέρηση είναι στατιστικά σημαντική αφού $p\text{-value} < \alpha$. Η σταθερά c δεν είναι στατιστικά σημαντική αλλά την αφήνουμε στο μοντέλο για τη διαμόρφωση του μακροχρόνιου μέσου της σειράς. Τα κατάλοιπα δεν είναι στατιστικά σημαντικά αφού $p\text{-value} > \alpha$ άρα το μοντέλο είναι επαρκές.

Sample: 6 1173
 Included observations: 1168

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.013	-0.013	0.1892	0.664
		2	-0.030	-0.030	1.2606	0.532
		3	-0.018	-0.018	1.6272	0.653
		4	0.001	-0.001	1.6279	0.804
		5	-0.034	-0.035	3.0055	0.699
		6	0.017	0.016	3.3594	0.763
		7	-0.017	-0.019	3.6931	0.814
		8	-0.001	-0.002	3.6943	0.884
		9	-0.047	-0.048	6.3274	0.707
		10	0.066	0.063	11.445	0.324
		11	0.001	0.001	11.447	0.407
		12	-0.004	-0.003	11.466	0.489

Δοκιμάζουμε ένα MA(1) μοντέλο για να δούμε εάν ταιριάζει στα δεδομένα.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2 1173
 Included observations: 1172 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.018904	0.029283	-0.645569	0.5187
R-squared	0.000001	Mean dependent var		-0.000293
Adjusted R-squared	0.000001	S.D. dependent var		0.016098
S.E. of regression	0.016098	Akaike info criterion		-5.419395
Sum squared resid	0.303458	Schwarz criterion		-5.415072
Log likelihood	3176.765	Hannan-Quinn criter.		-5.417765
Durbin-Watson stat	1.994446			
Inverted MA Roots	.02			

Η μεταβλητή δεν είναι στατιστικά σημαντική επειδή $p\text{-value} > \alpha$ άρα απορρίπτουμε το MA(1) μοντέλο.

Τέλος δοκιμάζουμε ένα ARMA(1,1) μοντέλο.

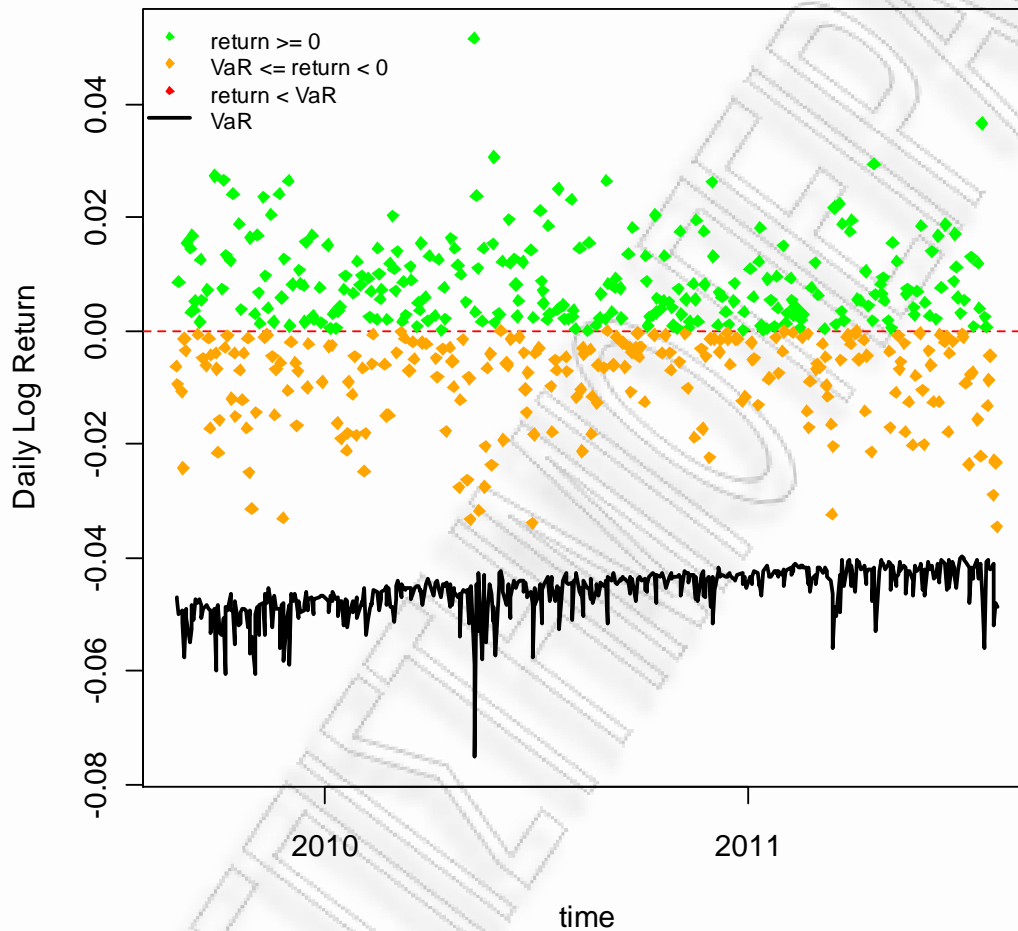
Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3 1173
 Included observations: 1171 after adjustments
 Convergence achieved after 10 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000165	0.000355	-0.463195	0.6433
LNR(-1)	0.429739	0.834277	0.515104	0.6066
MA(1)	-0.454538	0.823193	-0.552165	0.5809
R-squared	0.000768	Mean dependent var		-0.000295
Adjusted R-squared	-0.000943	S.D. dependent var		0.016105
S.E. of regression	0.016112	Akaike info criterion		-5.415903
Sum squared resid	0.303222	Schwarz criterion		-5.402925
Log likelihood	3174.011	Hannan-Quinn criter.		-5.411008
F-statistic	0.449104	Durbin-Watson stat		1.983529
Prob(F-statistic)	0.638310			
Inverted MA Roots	.45			

Απορρίπτουμε το μοντέλο επειδή οι μεταβλητές δεν είναι στατιστικά σημαντικές ($p\text{-value} > 0.05$).

Για τη μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου για το δείκτη DAX χρησιμοποιούμε το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τέταρτου βαθμού AR(4).

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)



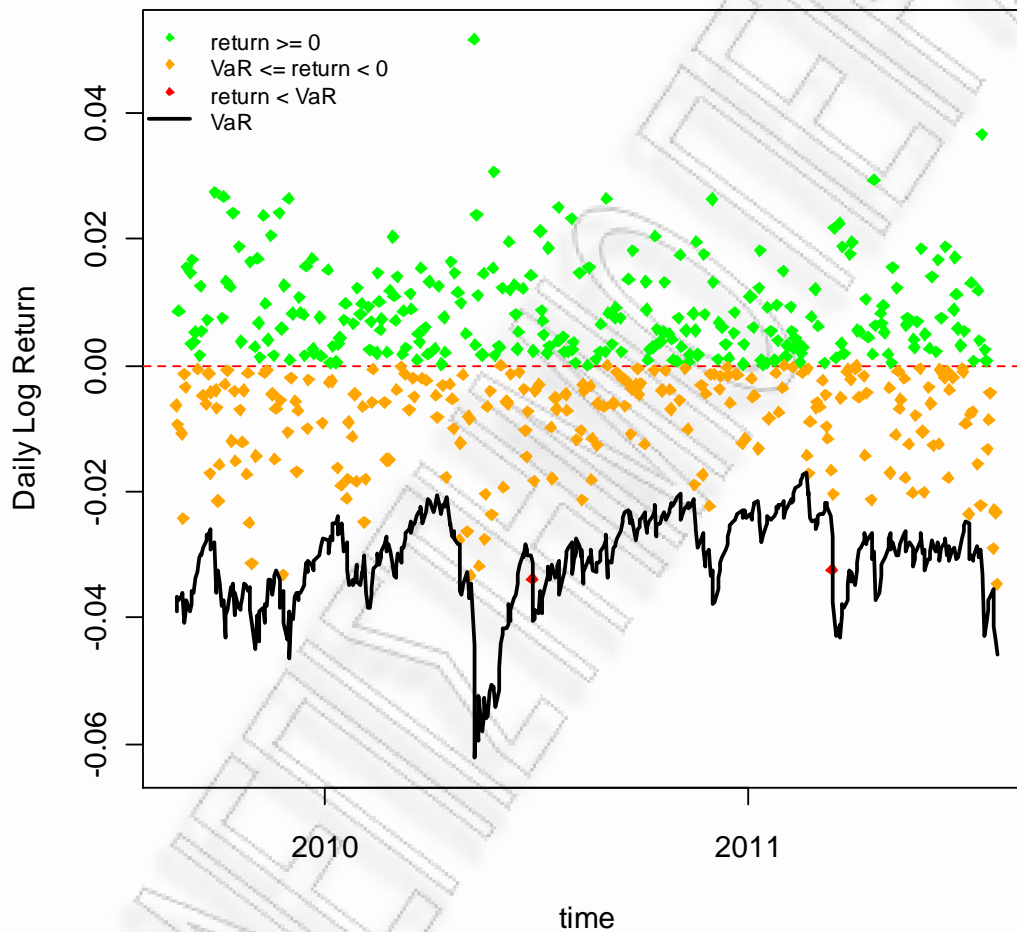
Model ARCH-std				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	0	12,5	2
Percentage % VaR exceedances	1%	0%	2,5%	0,4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	10,05	3,841	13,894
LR_{cc} (test)	5,991	10,05	5,991	13,91

Christoffersen)				
-----------------	--	--	--	--

Το μοντέλο απορρίπτεται για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%, καθώς υπερεκτιμά τον κίνδυνο.

GARCH-generalized error distribution

**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**



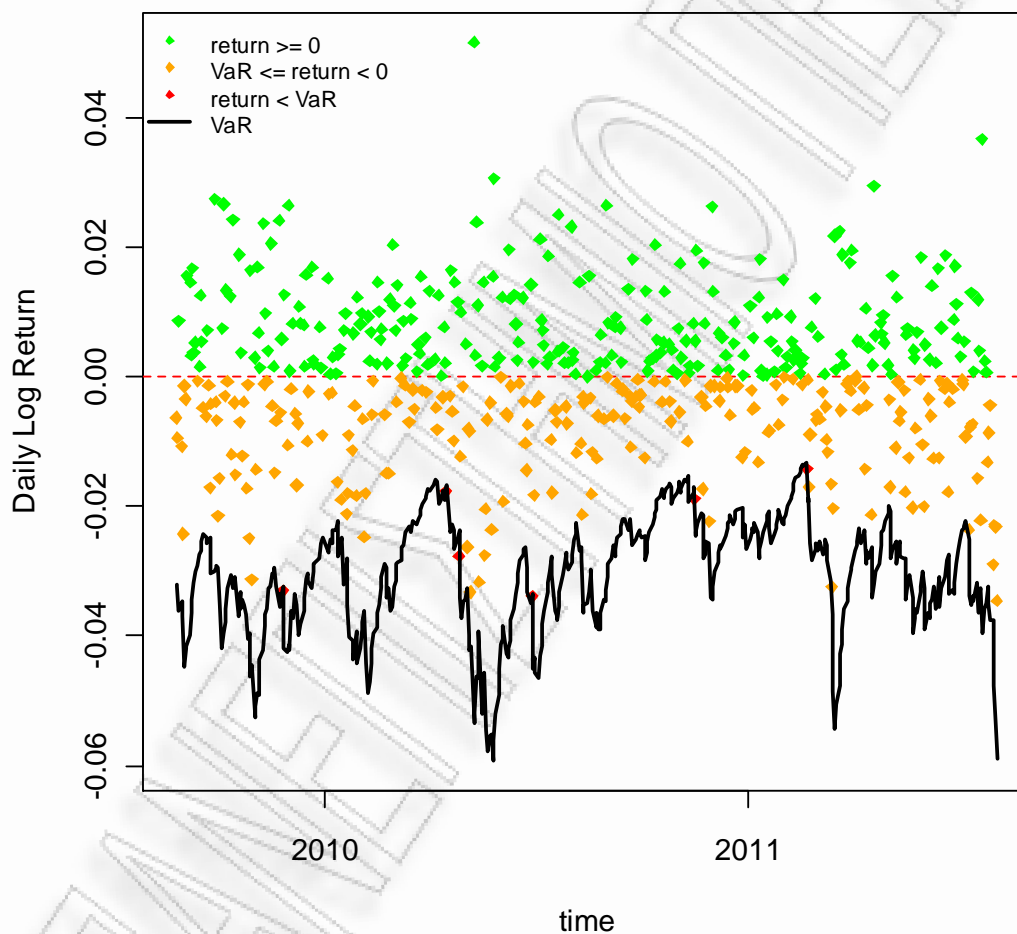
Model GARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	2	12,5	14
Percentage %	1%	0,4%	2,5%	2,8%
VaR exceedances				
LR_{uc} (test)	3,841	2,353	3,841	0,178

Kupiec)				
LR_{cc} (test)	5,991	2,369	5,991	0,986
Christoffersen)				

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5% σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen.

EGARCH-generalized error distribution

**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**



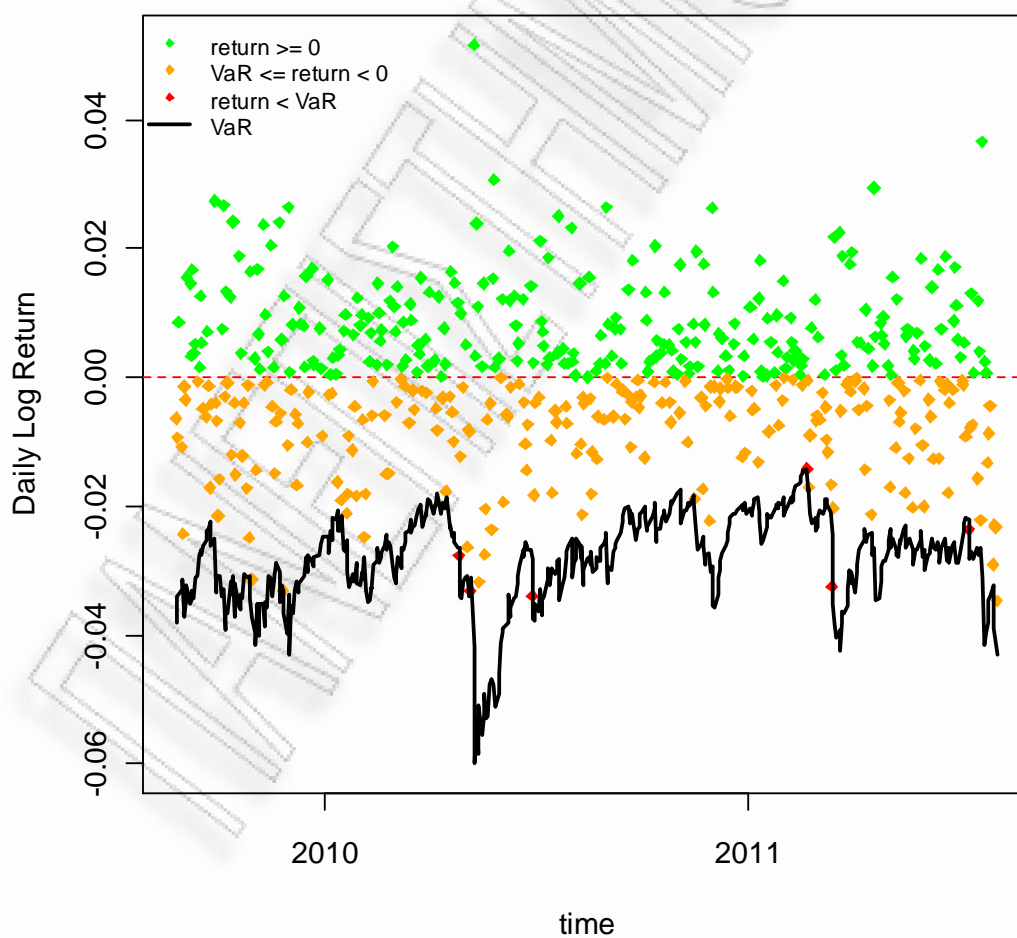
Model EGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	6	12,5	14
Percentage %	1%	1,2%	2,5%	2,8%

VaR exceedances				
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,19	3,841	0,178
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,336	5,991	0,986

Σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%.

IGARCH-normal

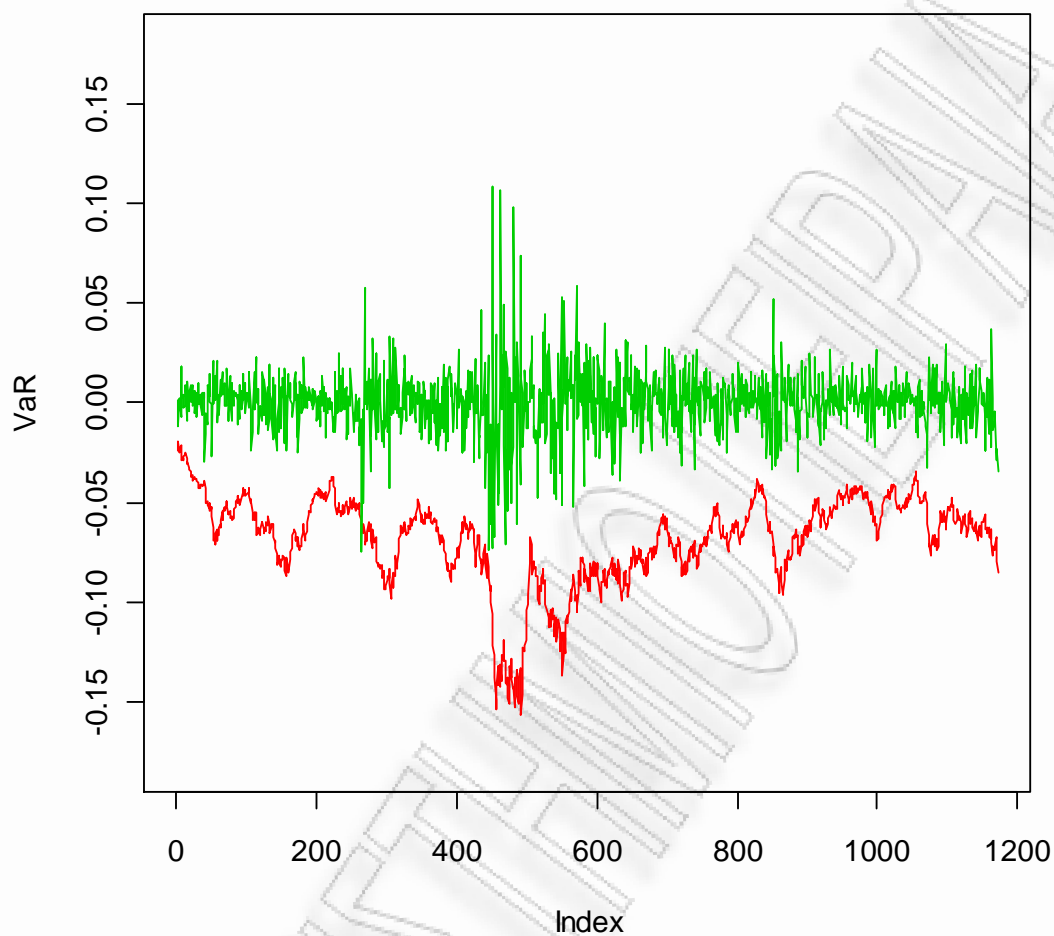
Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)



Model IGARCH-norm				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	6	12,5	17
Percentage % VaR exceedances	1%	1,2%	2,5%	3,4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,19	3,841	1,496
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,336	5,991	2,696

Σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%.

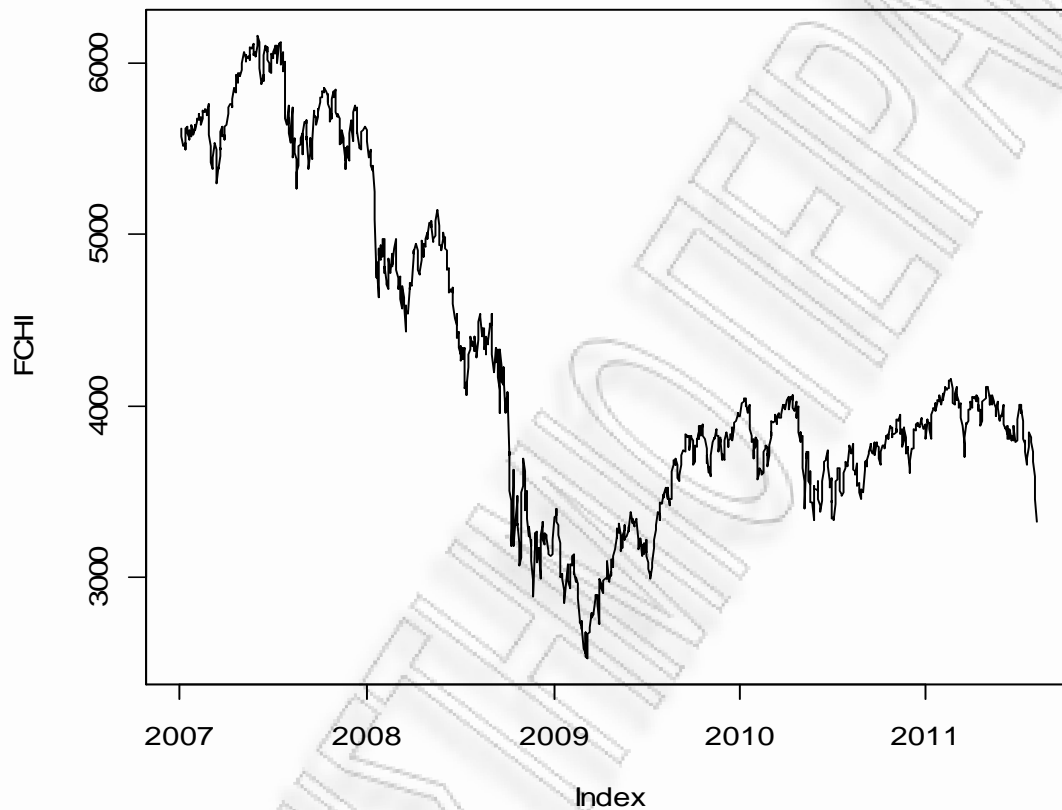
SV-normal



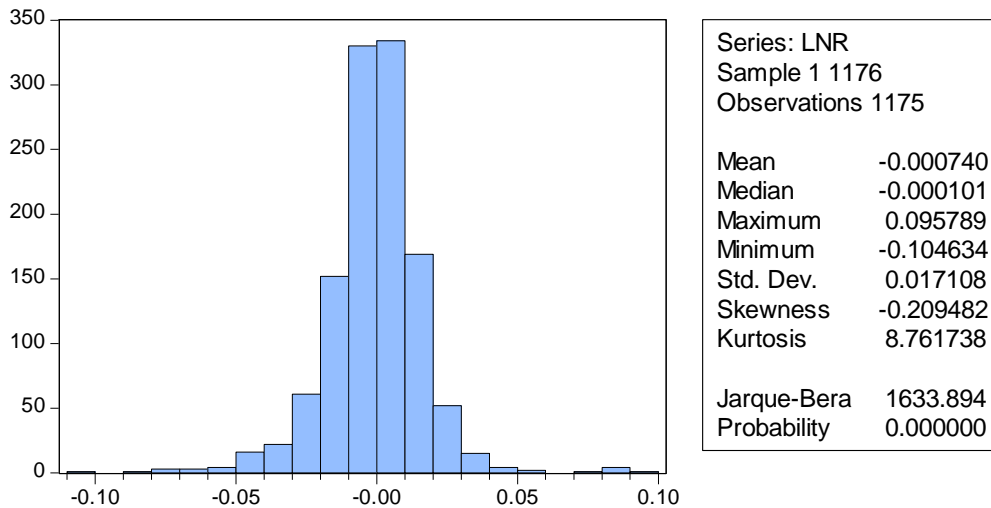
Model SV-normal				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	11,71	1	29,275	1
Percentage % VaR exceedances	1%	0,085%	2,5%	0,085%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	16,597	3,841	50,49
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	N/A	5,991	N/A

Το παραπάνω μοντέλο απορρίπτεται καθώς η στατιστική LR υπερβαίνει κατά πολύ την κριτική τιμή της.

4.4 Δείκτης CAC40 (FCHI)



Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ορισμένα βασικά στατιστικά στοιχεία των λογαριθμικών αποδόσεων για τον δείκτη CAC40. Η μέση απόδοση είναι κοντά στο 0, ενώ κυμαίνεται από -10.5% ελάχιστο έως 9.6% μέγιστο με τυπική απόκλιση 1.7%. Όπως φαίνεται και από το ιστόγραμμα υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή τάση προς αρνητικές αποδόσεις. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στην κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο Jarque Bera που απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για κανονικότητα της κατανομής με $p\text{-value}=0$.



Από το correlogram για τις πρώτες 12 περιόδους, βλέπουμε εάν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στη σειρά.

Sample: 1 1176
Included observations: 1175

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.056	-0.056	3.7590	0.053
		2	-0.042	-0.045	5.8400	0.054
		3	-0.052	-0.057	8.9883	0.029
*	*	4	0.096	0.089	19.978	0.001
		5	-0.064	-0.059	24.793	0.000
		6	-0.015	-0.017	25.067	0.000
		7	0.033	0.036	26.374	0.000
		8	0.051	0.039	29.422	0.000
*	*	9	-0.081	-0.066	37.250	0.000
		10	-0.001	-0.002	37.251	0.000
		11	-0.014	-0.024	37.482	0.000
		12	0.054	0.041	40.940	0.000

Για τις πρώτες τρεις περιόδους δεν φαίνεται να υπάρχει αυτοσυσχέτιση αφού $p\text{-value} > \alpha$. Δοκιμάζουμε ένα AR(4) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 6 1176
Included observations: 1171 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000663	0.000499	-1.329371	0.1840
LNR(-4)	0.097274	0.029228	3.328159	0.0009

R-squared	0.009386	Mean dependent var	-0.000727
Adjusted R-squared	0.008539	S.D. dependent var	0.017134
S.E. of regression	0.017061	Akaike info criterion	-5.302317
Sum squared resid	0.340276	Schwarz criterion	-5.293666
Log likelihood	3106.507	Hannan-Quinn criter.	-5.299054
F-statistic	11.07664	Durbin-Watson stat	2.087700
Prob(F-statistic)	0.000901		

Η τέταρτη υστέρηση είναι στατιστικά σημαντική αφού $p\text{-value} < \alpha$. Η σταθερά δεν είναι στατιστικά σημαντική αλλά την αφήνουμε στο μοντέλο για τη διαμόρφωση του μακροχρόνιου μέσου της σειράς. Ελέγχουμε τα κατάλοιπα τα οποία δεν είναι στατιστικά σημαντικά για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=1\%$. Για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$ υπάρχουν πληροφορίες που δεν έχουμε συμπεριλάβει στο μοντέλο μετά την ένατη περίοδο.

Sample: 6 1176
Included observations: 1171

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.046	-0.046	2.5034	0.114
		2	-0.037	-0.039	4.0947	0.129
		3	-0.050	-0.054	7.0463	0.070
		4	-0.004	-0.010	7.0613	0.133
		5	-0.051	-0.056	10.084	0.073
		6	-0.011	-0.020	10.220	0.116
		7	0.041	0.034	12.171	0.095
		8	0.037	0.034	13.781	0.088
		9	-0.075	-0.072	20.504	0.015
		10	0.001	-0.003	20.505	0.025
		11	-0.015	-0.018	20.774	0.036
		12	0.046	0.041	23.228	0.026

Δοκιμάζουμε ένα MA(1) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2 1176
Included observations: 1175 after adjustments
Convergence achieved after 6 iterations
MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000737	0.000467	-1.578468	0.1147
MA(1)	-0.062846	0.029220	-2.150760	0.0317

R-squared	0.003539	Mean dependent var	-0.000740
Adjusted R-squared	0.002690	S.D. dependent var	0.017108
S.E. of regression	0.017085	Akaike info criterion	-5.299479
Sum squared resid	0.342413	Schwarz criterion	-5.290851

Log likelihood	3115.444	Hannan-Quinn criter.	-5.296226
F-statistic	4.166473	Durbin-Watson stat	1.988863
Prob(F-statistic)	0.041455		
<hr/>			
Inverted MA Roots	.06		

Η μεταβλητή είναι στατιστικά σημαντική για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$, αλλά όχι για $\alpha=1\%$. Ελέγχουμε τα κατάλοιπα και βλέπουμε ότι το μοντέλο δεν είναι επαρκές αφού $p\text{-value} < \alpha$.

Sample: 2 1176
 Included observations: 1175
 Q-statistic
 probabilities adjusted
 for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.003	0.003	0.0106	
		2	-0.045	-0.045	2.4004	0.121
		3	-0.049	-0.049	5.2323	0.073
*	*	4	0.089	0.088	14.685	0.002
		5	-0.059	-0.065	18.846	0.001
		6	-0.017	-0.011	19.179	0.002
		7	0.035	0.039	20.634	0.002
		8	0.048	0.032	23.355	0.001
*	*	9	-0.079	-0.068	30.693	0.000
		10	-0.006	0.001	30.740	0.000
		11	-0.011	-0.021	30.881	0.001
		12	0.053	0.043	34.209	0.000

Δοκιμάζουμε ένα ARMA(1,1) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3 1176
 Included observations: 1174 after adjustments
 Convergence achieved after 19 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000384	0.000314	-1.220959	0.2223
LNR(-1)	0.470200	0.289256	1.625552	0.1043
MA(1)	-0.536852	0.276765	-1.939742	0.0527

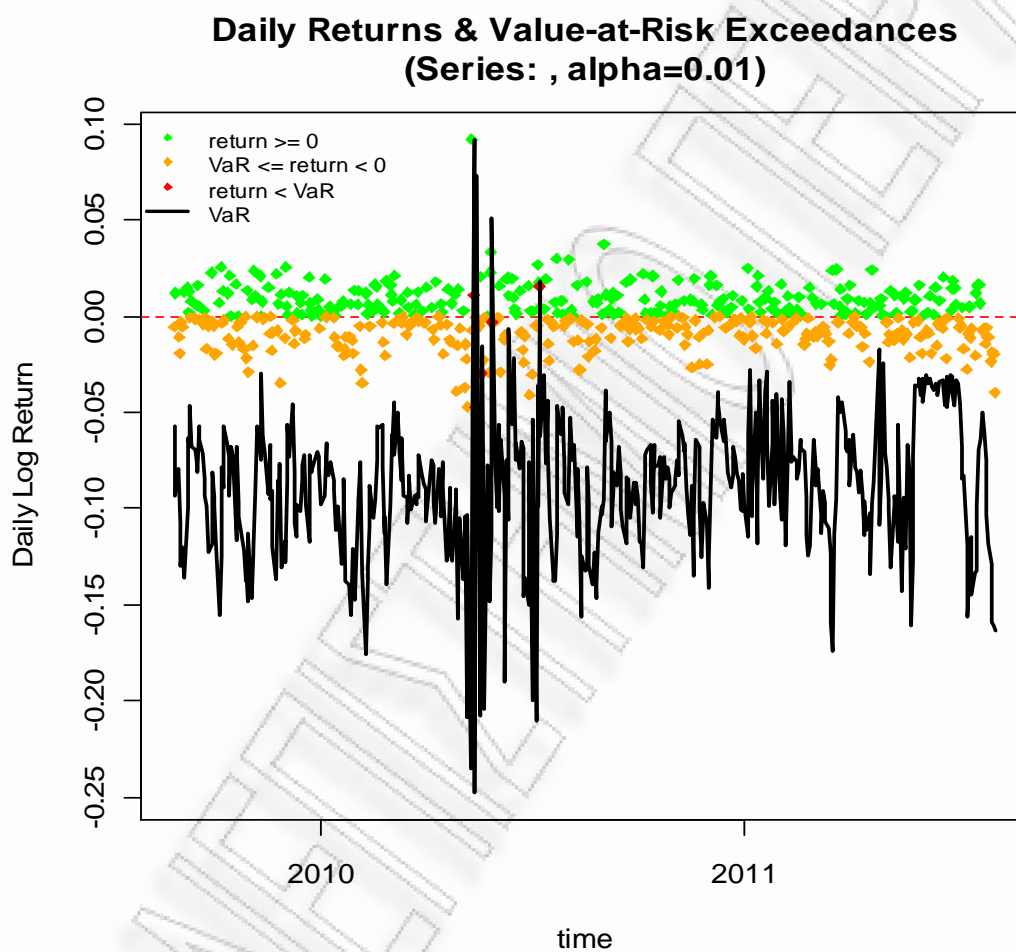
R-squared	0.005713	Mean dependent var	-0.000739
Adjusted R-squared	0.004015	S.D. dependent var	0.017116
S.E. of regression	0.017081	Akaike info criterion	-5.299106
Sum squared resid	0.341666	Schwarz criterion	-5.286155
Log likelihood	3113.575	Hannan-Quinn criter.	-5.294222
F-statistic	3.364200	Durbin-Watson stat	1.982903
Prob(F-statistic)	0.034924		

Inverted MA Roots .54

Το μοντέλο απορρίπτεται επειδή οι μεταβλητές δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

Από τα παραπάνω μοντέλα επιλέγουμε το AR(4) για τη μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου για το δείκτη CAC40.

ARCH-normal

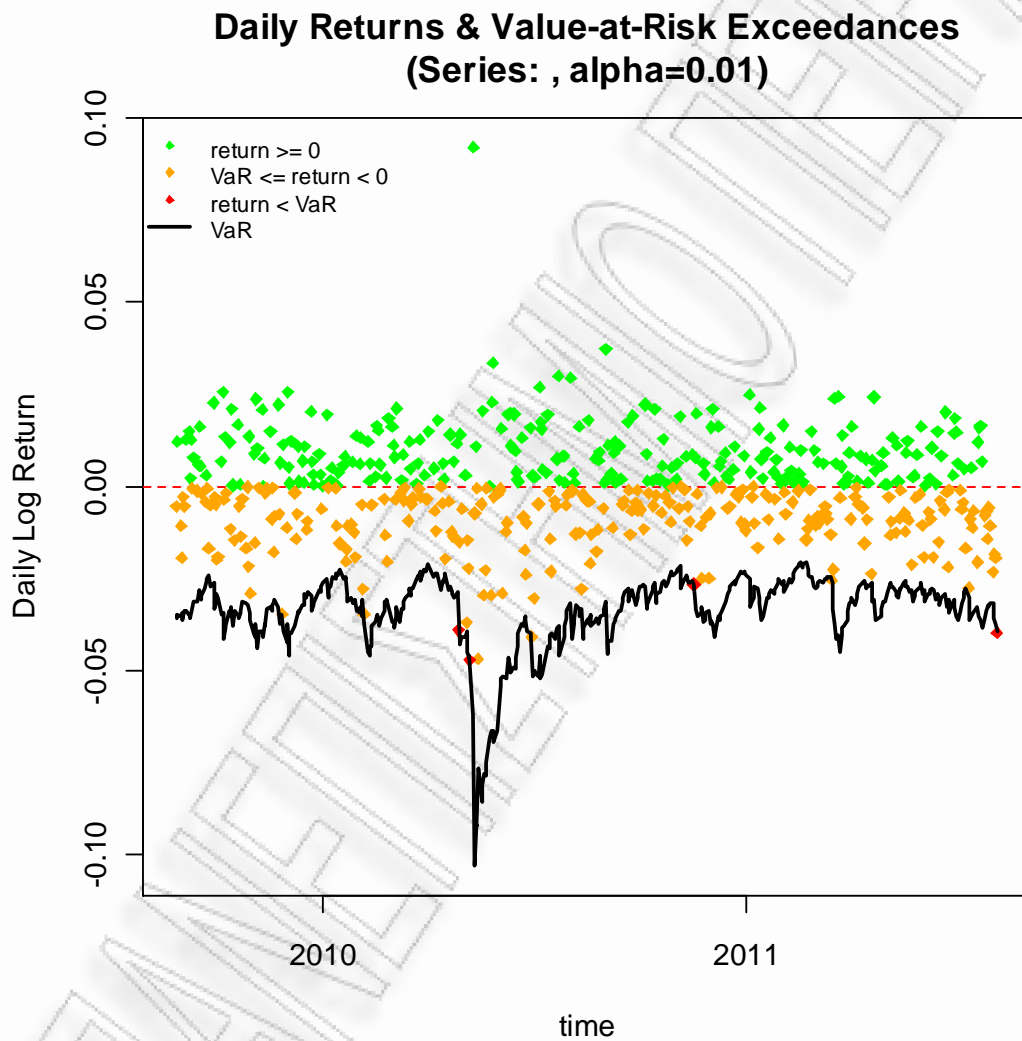


Model ARCH-norm				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	5	12,5	5
Percentage % VaR exceedances	1%	1%	2,5%	1%
LR_{uc} (test)	3,841	0	3,841	5,952

Kupiec)				
LR_{cc} (test	5,991	0,101	5,991	6,053
Christoffersen)				

Το μοντέλο απορρίπτεται για διάστημα εμπιστοσύνης 97,5% ενώ δεν μπορεί να απορριφθεί για διάστημα εμπιστοσύνης 99%.

GARCH-generalized error distribution



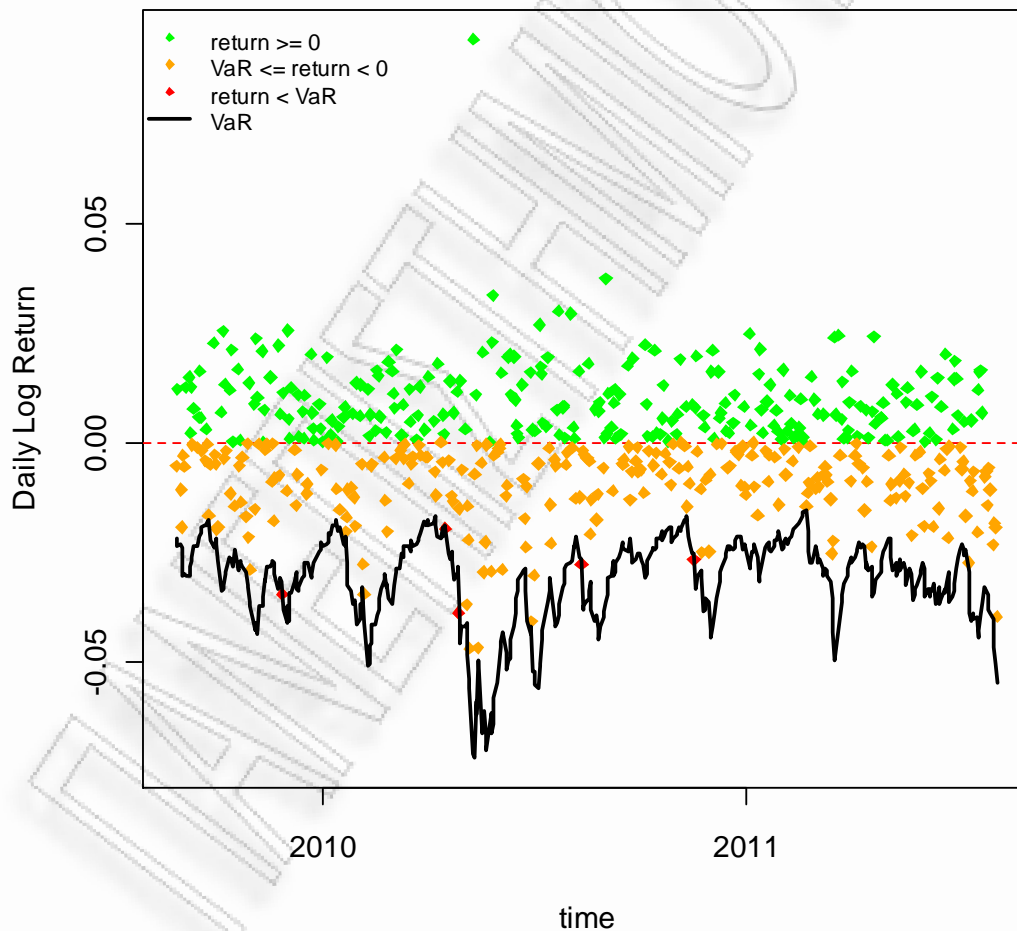
Model GARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	4	12,5	15
Percentage %	1%	0,8%	2,5%	3%

VaR exceedances				
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,217	3,841	0,482
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,265	5,991	1,104

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για διάστημα εμπιστοσύνης υπολογισμού του VaR 99% και 97,5% σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen, καθώς η στατιστική LR είναι μικρότερη από την κριτική τιμή της.

EGARCH-normal

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances (Series: , alpha=0.01)



Model EGARCH-norm

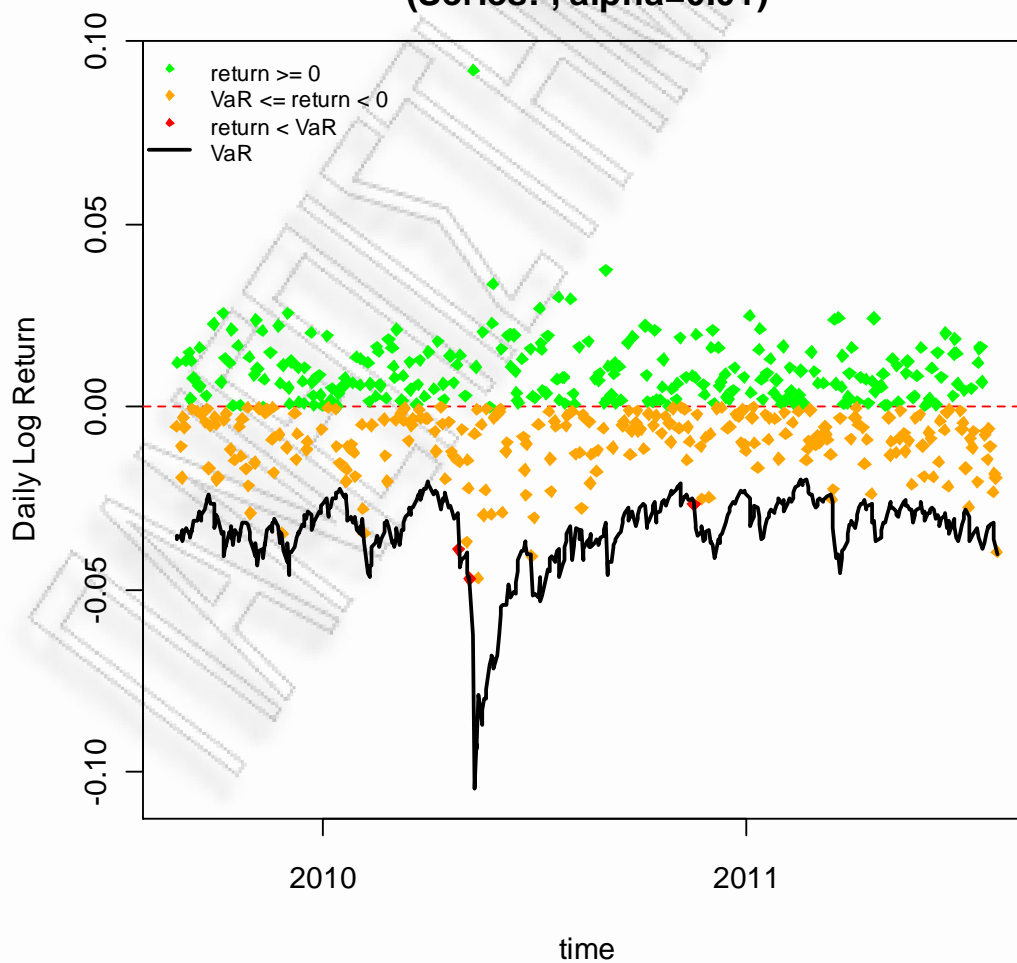
Backtest Length 500

	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	5	12,5	17
Percentage % VaR exceedances	1%	1%	2,5%	3,4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0	3,841	1,496
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,101	5,991	1,769

Σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%.

IGARCH-student-t

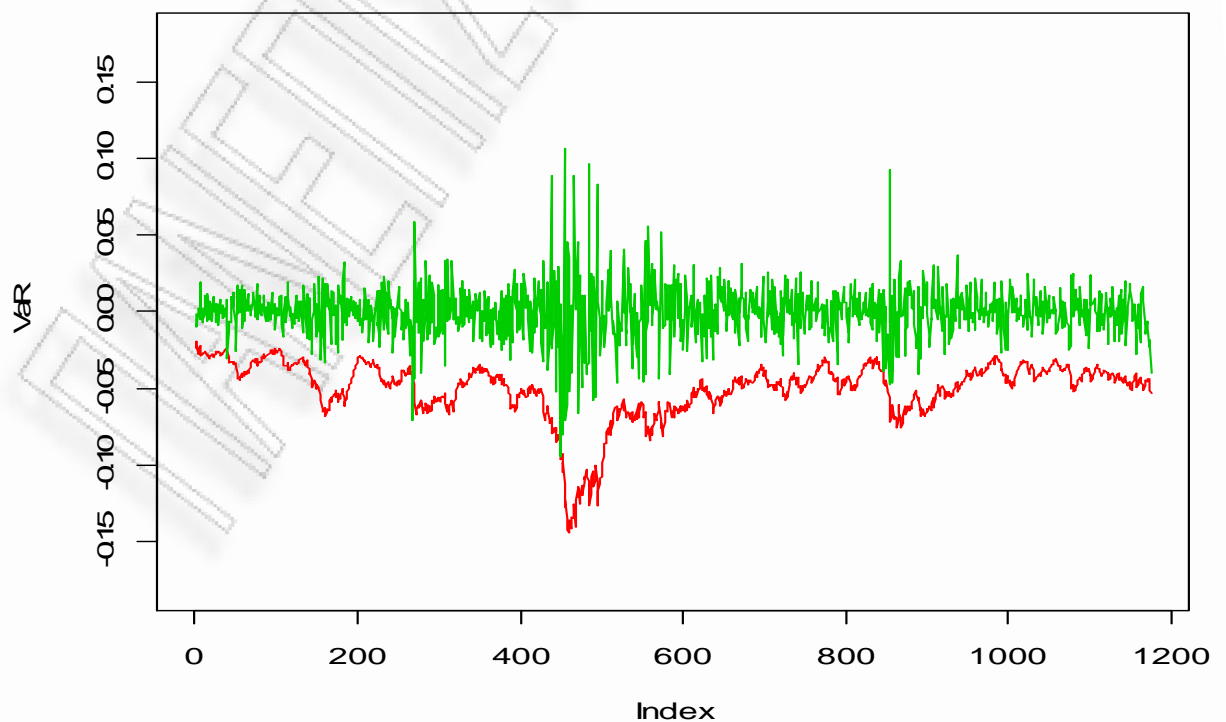
Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)



Model IGARCH-std				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	3	12,5	15
Percentage % VaR exceedances	1%	0,6%	2,5%	3%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,943	3,841	0,482
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,979	5,991	1,104

Σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί. Για επίπεδο σημαντικότητας 1% οι πραγματοποιηθείσες παραβιάσεις του VaR είναι περισσότερες από τις αναμενόμενες, δηλαδή υπερεκτιμάται ο κίνδυνος.

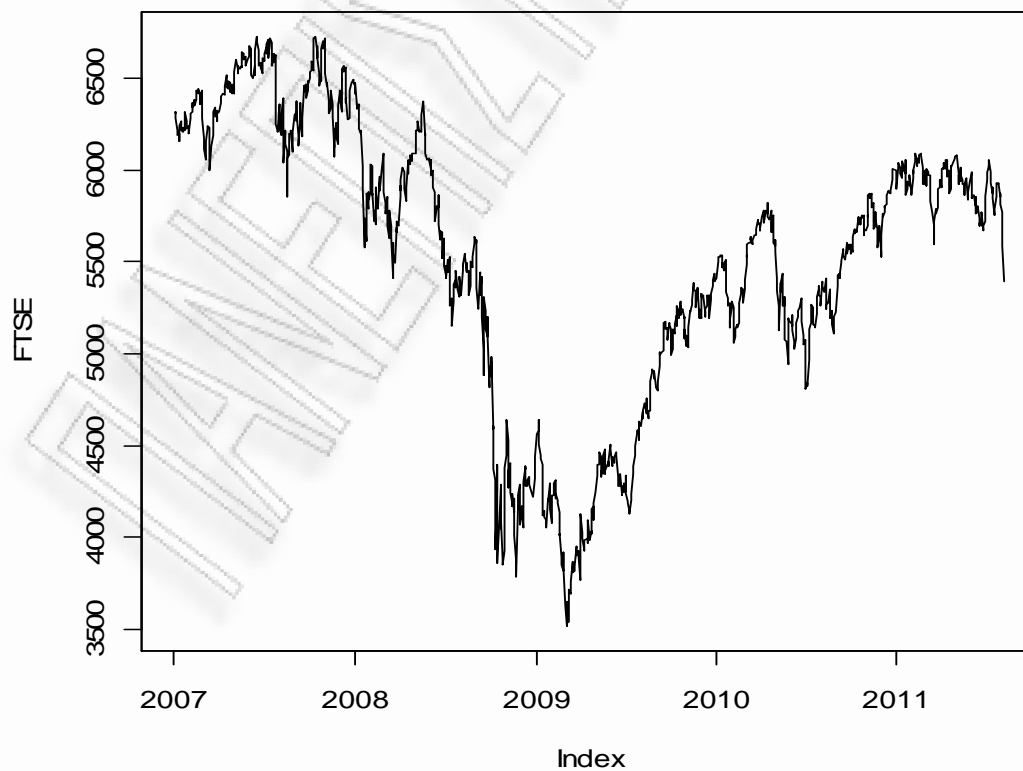
SV- normal



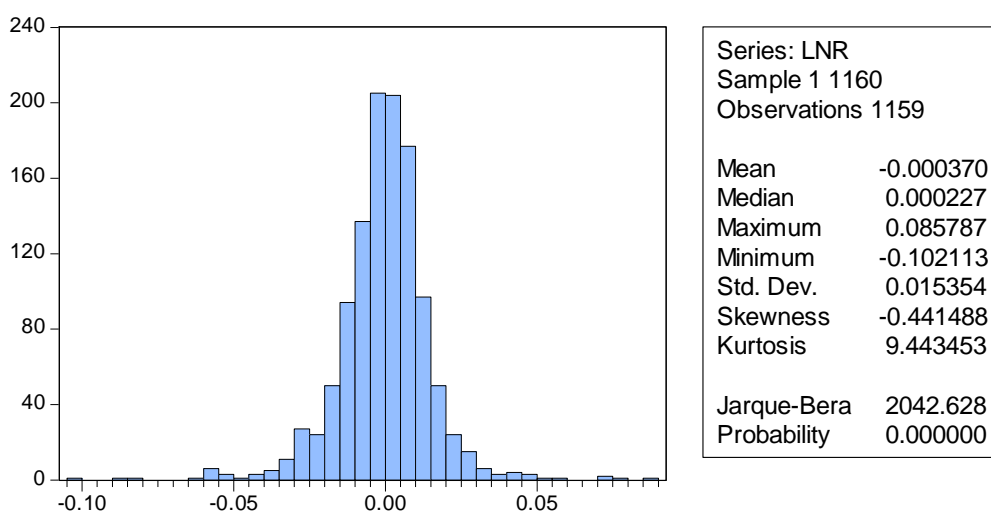
Model SV-normal				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	11,74	3	29,35	5
Percentage % VaR exceedances	1%	0,255%	2,5%	0,425%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	9,36	3,841	31,51
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	N/A	5,991	N/A

Το μοντέλο απορρίπτεται επειδή ο αριθμός των παραβιάσεων που πραγματοποιήθηκαν υπολείπεται σημαντικά των αναμενόμενων παραβιάσεων.

4.5 Δείκτης FTSE100 (FTSE)



Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ορισμένα βασικά στατιστικά στοιχεία των λογαριθμικών αποδόσεων για τον δείκτη FTSE100. Η μέση απόδοση είναι κοντά στο 0, ενώ κυμαίνεται από -10.2% ελάχιστο έως 8.6% μέγιστο με τυπική απόκλιση 1.5%. Όπως φαίνεται και από το ιστόγραμμα υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή τάση προς αρνητικές αποδόσεις. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στην κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο Jarque Bera που απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για κανονικότητα της κατανομής με p-value=0.



Από το correlogram για τις πρώτες 12 περιόδους, βλέπουμε ότι για τις πρώτες δύο περιόδους δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση.

Sample: 1 1160
Included observations: 1159

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.058	-0.058	3.8728	0.049
		2	-0.054	-0.058	7.2724	0.026
*	*	3	-0.068	-0.076	12.731	0.005
*	*	4	0.141	0.130	35.891	0.000
*	*	5	-0.080	-0.074	43.340	0.000
		6	-0.044	-0.043	45.615	0.000
		7	0.040	0.048	47.511	0.000
		8	0.068	0.040	52.898	0.000
		9	-0.035	-0.012	54.362	0.000
		10	0.020	0.037	54.849	0.000
		11	-0.022	-0.033	55.433	0.000
		12	0.019	0.007	55.857	0.000

Δοκιμάζουμε ένα AR(4) μοντέλο.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 6 1160
 Included observations: 1155 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000332	0.000448	-0.740956	0.4589
LNR(-3)	-0.060329	0.029266	-2.061424	0.0395
LNR(-4)	0.138261	0.029268	4.723909	0.0000
R-squared	0.023637	Mean dependent var		-0.000355
Adjusted R-squared	0.021941	S.D. dependent var		0.015377
S.E. of regression	0.015207	Akaike info criterion		-5.531543
Sum squared resid	0.266399	Schwarz criterion		-5.518422
Log likelihood	3197.466	Hannan-Quinn criter.		-5.526591
F-statistic	13.94422	Durbin-Watson stat		2.080375
Prob(F-statistic)	0.000001			

Για επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι και οι δύο υστερήσεις στατιστικά σημαντικές. Όμως από την έκτη περίοδο και μετά βλέπουμε ότι τα κατάλοιπα είναι στατιστικά σημαντικά.

Sample: 6 1160
 Included observations: 1155

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.042	-0.042	2.0883	0.148
		2	-0.050	-0.052	5.0133	0.082
		3	-0.011	-0.015	5.1492	0.161
		4	-0.002	-0.006	5.1545	0.272
*		5	-0.070	-0.072	10.791	0.056
		6	-0.047	-0.055	13.404	0.037
		7	0.065	0.053	18.298	0.011
		8	0.042	0.041	20.358	0.009
		9	-0.025	-0.018	21.094	0.012
		10	0.032	0.030	22.267	0.014
		11	-0.022	-0.027	22.850	0.019
		12	0.001	0.008	22.851	0.029

Κάνοντας το παρακάτω τεστ βλέπουμε ότι η σειρά δεν έχει μοναδιαία ρίζα.

Null Hypothesis: LNR has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=22)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-16.23755	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.435797	
5% level	-2.863833	
10% level	-2.568041	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Δοκιμάζουμε ένα MA(1) μοντέλο.

Η μεταβλητή είναι στατιστικά σημαντική για επίπεδο σημαντικότητας 5%, όμως απορρίπτουμε το μοντέλο διότι τα κατάλοιπα είναι στατιστικώς σημαντικά.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2 1160
 Included observations: 1159 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000368	0.000421	-0.874893	0.3818
MA(1)	-0.066248	0.029417	-2.252006	0.0245
R-squared	0.003809	Mean dependent var		-0.000370
Adjusted R-squared	0.002948	S.D. dependent var		0.015354
S.E. of regression	0.015331	Akaike info criterion		-5.516094
Sum squared resid	0.271958	Schwarz criterion		-5.507370
Log likelihood	3198.576	Hannan-Quinn criter.		-5.512802
F-statistic	4.423565	Durbin-Watson stat		1.986653
Prob(F-statistic)	0.035661			
Inverted MA Roots	.07			

Sample: 2 1160
 Included observations: 1159
 Q-statistic
 probabilities adjusted
 for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.004	0.004	0.0195
		2	-0.058	-0.058	3.9565
		3	-0.064	-0.063	8.6765
		4	0.132	0.130	28.899
*	*	5	-0.074	-0.085	35.341
*	*	6	-0.046	-0.035	37.839
		7	0.042	0.053	39.863
		8	0.069	0.036	45.371
		9	-0.030	-0.012	46.403
		10	0.017	0.035	46.748
		11	-0.020	-0.035	47.218
		12	0.016	0.009	47.536

Για ένα ARMA(1,1) μοντέλο, βλέπουμε ότι οι μεταβλητές δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

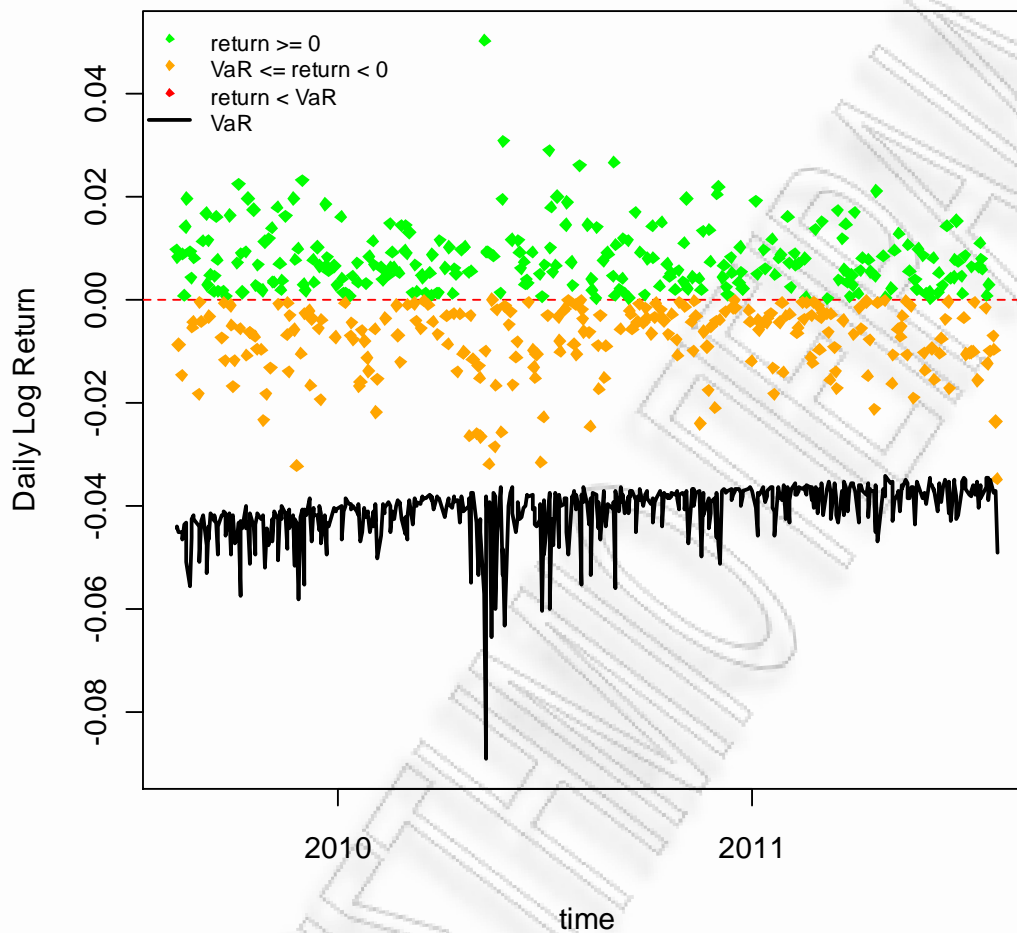
Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3 1160
 Included observations: 1158 after adjustments
 Convergence achieved after 50 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000187	0.000226	-0.829591	0.4069
LNR(-1)	0.474363	0.260845	1.818562	0.0692
MA(1)	-0.547155	0.248163	-2.204826	0.0277
R-squared	0.006849	Mean dependent var		-0.000371
Adjusted R-squared	0.005129	S.D. dependent var		0.015361
S.E. of regression	0.015321	Akaike info criterion		-5.516567
Sum squared resid	0.271125	Schwarz criterion		-5.503472
Log likelihood	3197.092	Hannan-Quinn criter.		-5.511625
F-statistic	3.982437	Durbin-Watson stat		1.975781
Prob(F-statistic)	0.018897			
Inverted MA Roots	.55			

Από τα παραπάνω μοντέλα επιλέγουμε το AR(4) για τη μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου για το δείκτη FTSE100.

ARCH-student-t

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances (Series: , alpha=0.01)

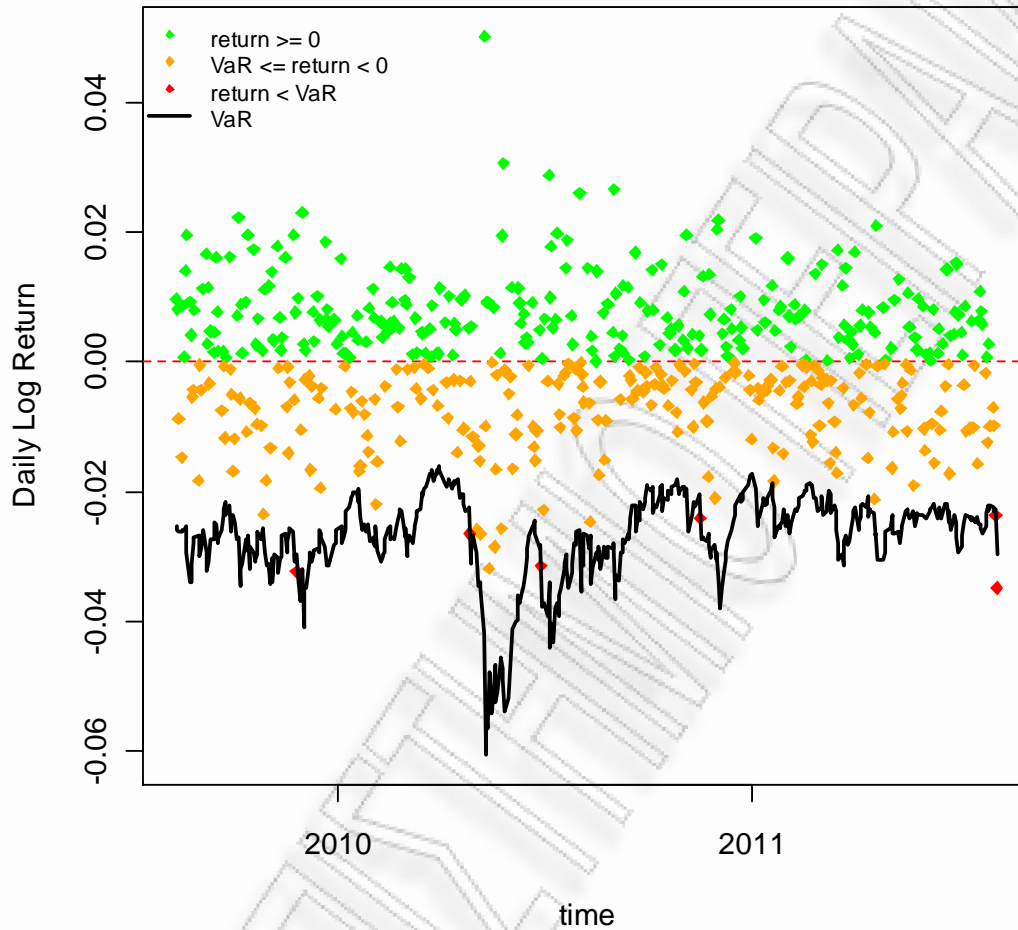


Model ARCH-std				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	0	12,5	4
Percentage % VaR exceedances	1%	0%	2,5%	0,8%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	10,05	3,841	8,032
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	10,05	5,991	8,097

Το μοντέλο απορρίπτεται για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%, καθώς υπερεκτιμά τον κίνδυνο.

GARCH-generalized error distribution

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)

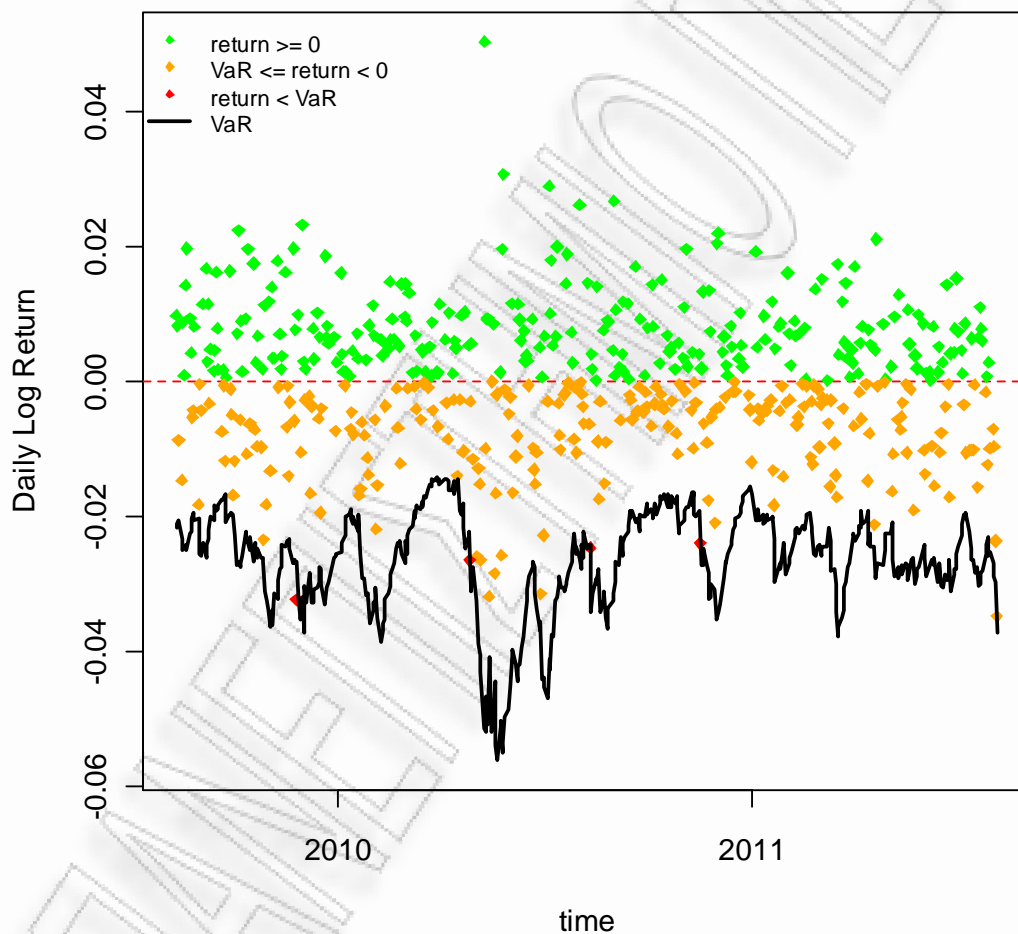


Model GARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	6	12,5	14
Percentage %	1%	1,2%	2,5%	2,8%
VaR exceedances				
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,19	3,841	0,178
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	4,283	5,991	0,988

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για διάστημα εμπιστοσύνης υπολογισμού του VaR 99% και 97,5% σύμφωνα με τα τεστ των Kupiec και Christoffersen, καθώς η στατιστική LR είναι μικρότερη από την κριτική τιμή της. Τα δεδομένα εμφανίζουν τα ίδια αποτελέσματα στα τεστ για την κατανομή student-t.

EGARCH-generalized error distribution

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)



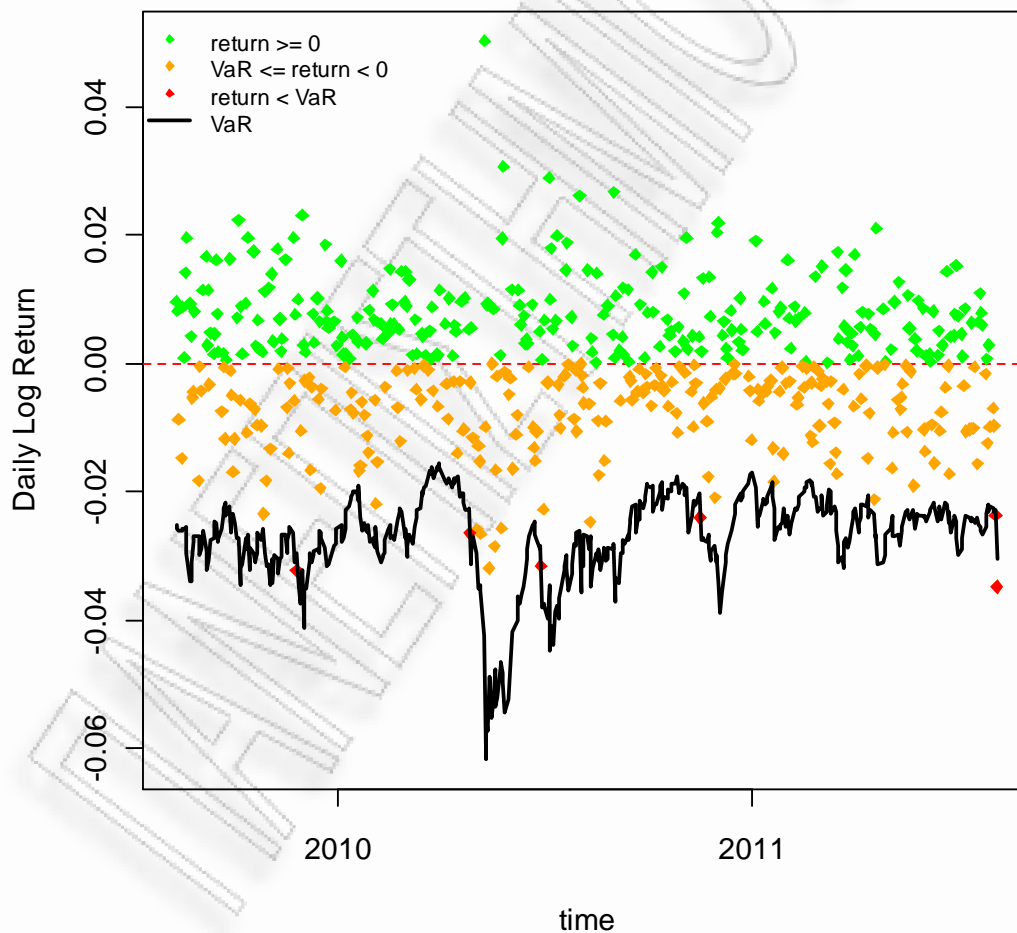
Model EGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	4	12,5	15
Percentage %	1%	0,8%	2,5%	3%

VaR exceedances				
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,217	3,841	0,021
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,282	5,991	0,562

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5% και εμφανίζει τα ίδια αποτελέσματα στα τεστ για student και ged κατανομή.

IGARCH-generalized error distribution

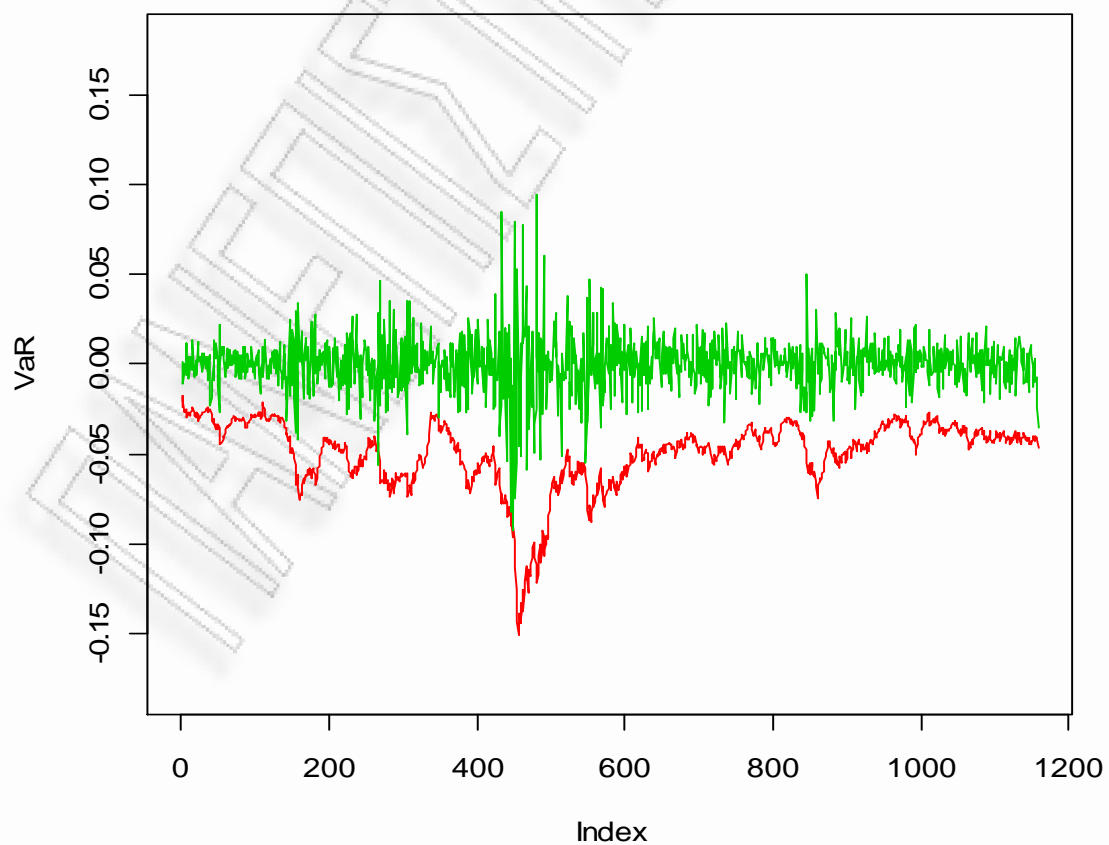
**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**



Model IGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	6	12,5	14
Percentage % VaR exceedances	1%	1,2%	2,5%	2,8%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,19	3,841	0,178
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	4,283	5,991	0,988

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5% και εμφανίζει τα ίδια αποτελέσματα στα τεστ για student και ged κατανομή.

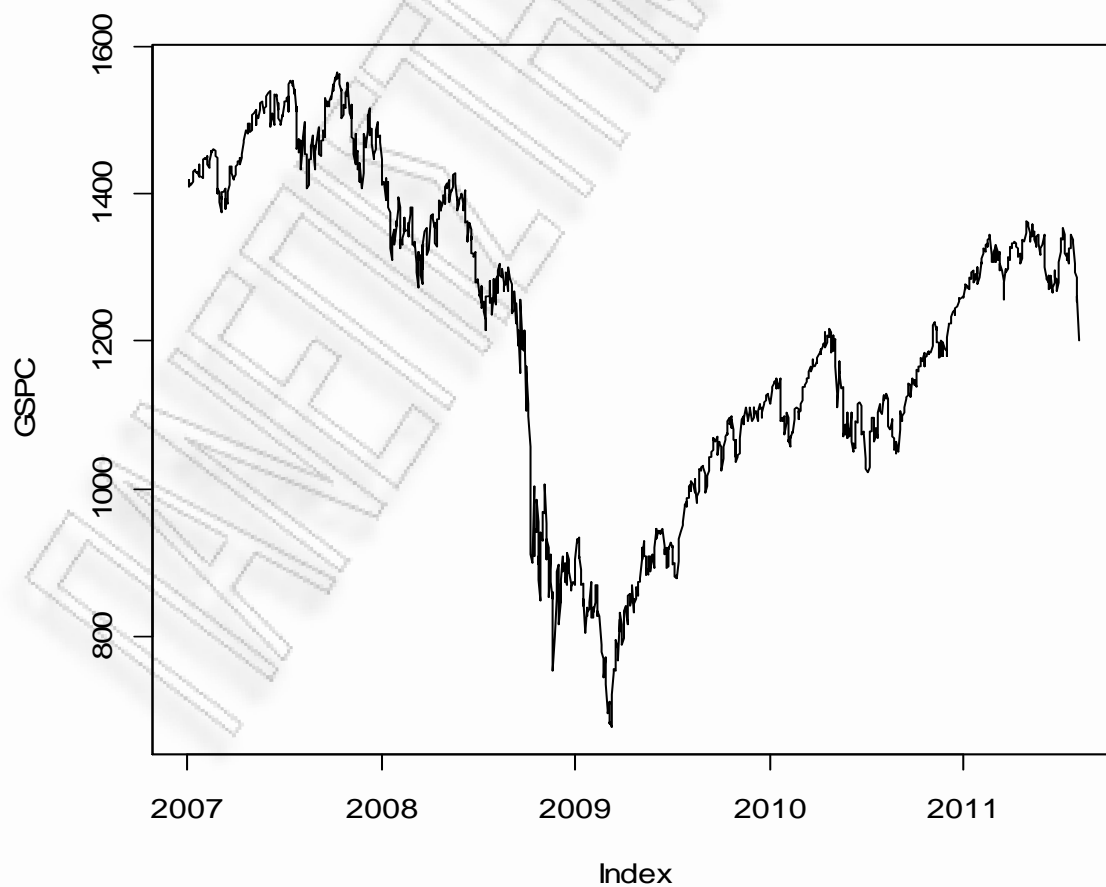
SV-normal



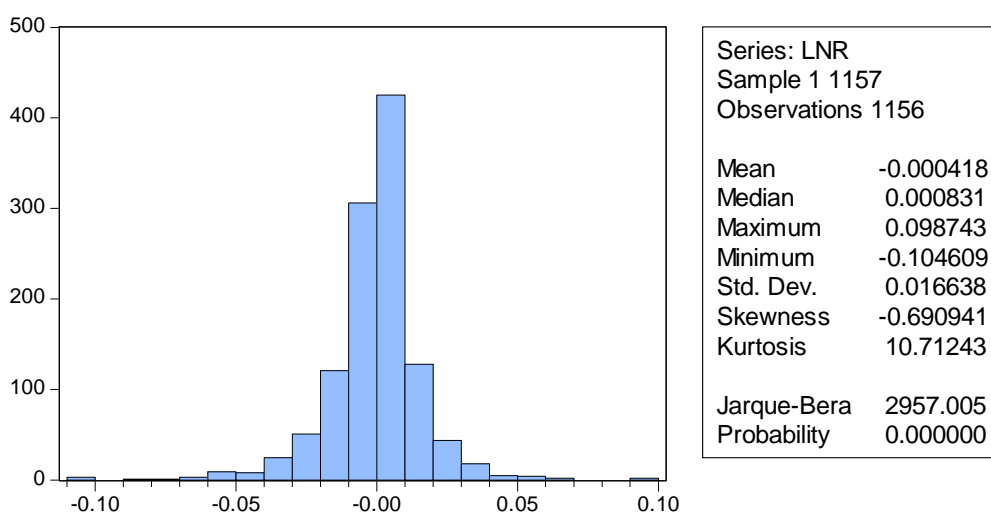
Model SV-normal				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	11,74	2	29,35	7
Percentage % VaR exceedances	1%	0,17%	2,5%	0,596%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	12,48	3,841	25,066
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	N/A	5,991	N/A

Το παραπάνω μοντέλο απορρίπτεται και από τα δύο τεστ καθώς εμφανίζει πολύ λιγότερες παραβιάσεις από τις αναμενόμενες.

4.6 Δείκτης S&P 500 (GSPC)



Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ορισμένα βασικά στατιστικά στοιχεία των λογαριθμικών αποδόσεων για τον δείκτη S&P500. Η μέση απόδοση είναι κοντά στο 0, ενώ κυμαίνεται από -10.5% ελάχιστο έως 9.9% μέγιστο με τυπική απόκλιση 1.7%. Όπως φαίνεται και από το ιστόγραμμα υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή τάση προς αρνητικές αποδόσεις. Η κύρτωση είναι μεγαλύτερη από ότι στην κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον έλεγχο Jarque Bera που απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για κανονικότητα της κατανομής με $p\text{-value}=0$.



Από το correlogram για τις πρώτες 12 περιόδους, βλέπουμε ότι υπάρχει αυτοσυσχέτιση αφού $p\text{-value} < \alpha$.

Date: 09/29/11 Time: 16:16
 Sample: 1 1157
 Included observations: 1156

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	-0.120	-0.120	16.667	0.000
*	*	2	-0.086	-0.102	25.204	0.000
*		3	0.089	0.067	34.347	0.000
		4	-0.017	-0.006	34.680	0.000
		5	-0.020	-0.009	35.152	0.000
		6	0.028	0.017	36.077	0.000
		7	-0.019	-0.015	36.516	0.000
		8	0.032	0.035	37.706	0.000
		9	-0.001	0.000	37.708	0.000
		10	0.045	0.055	40.047	0.000
		11	-0.043	-0.037	42.212	0.000
		12	0.059	0.060	46.341	0.000

Για ένα AR(2) μοντέλο βλέπουμε ότι οι δύο πρώτες υστερήσεις είναι στατιστικά

σημαντικές αφού $p\text{-value} < \alpha$. Η σταθερά δεν είναι στατιστικά σημαντική αλλά την αφήνουμε στο μοντέλο για τη διαμόρφωση του μακροχρόνιου μέσου της σειράς.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 4 1157
 Included observations: 1154 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000503	0.000485	-1.037006	0.3000
LNR(-1)	-0.133184	0.029440	-4.523987	0.0000
LNR(-2)	-0.102489	0.029441	-3.481184	0.0005
R-squared	0.024762	Mean dependent var		-0.000414
Adjusted R-squared	0.023068	S.D. dependent var		0.016652
S.E. of regression	0.016458	Akaike info criterion		-5.373365
Sum squared resid	0.311782	Schwarz criterion		-5.360235
Log likelihood	3103.432	Hannan-Quinn criter.		-5.368410
F-statistic	14.61248	Durbin-Watson stat		1.977297
Prob(F-statistic)	0.000001			

Ελέγχουμε τα κατάλοιπα τα οποία με $p\text{-value} > \alpha$, δεν είναι στατιστικά σημαντικά. Το μοντέλο είναι επαρκές.

Sample: 4 1157
 Included observations: 1154

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.007	0.007	0.0539	0.816
		2	0.007	0.007	0.1155	0.944
		3	0.063	0.063	4.7025	0.195
		4	-0.014	-0.015	4.9306	0.294
		5	-0.012	-0.013	5.1104	0.403
		6	0.025	0.022	5.8424	0.441
		7	-0.014	-0.013	6.0767	0.531
		8	0.038	0.039	7.7358	0.460
		9	0.004	-0.000	7.7511	0.559
		10	0.050	0.052	10.669	0.384
		11	-0.028	-0.034	11.615	0.393
		12	0.058	0.059	15.610	0.210

Δοκιμάζουμε ένα μοντέλο MA(1).

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2 1157
 Included observations: 1156 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000411	0.000416	-0.988960	0.3229
MA(1)	-0.142878	0.029258	-4.883394	0.0000
R-squared	0.017375	Mean dependent var		-0.000418
Adjusted R-squared	0.016523	S.D. dependent var		0.016638
S.E. of regression	0.016500	Akaike info criterion		-5.369179
Sum squared resid	0.314178	Schwarz criterion		-5.360437
Log likelihood	3105.385	Hannan-Quinn criter.		-5.365880
F-statistic	20.40509	Durbin-Watson stat		1.973804
Prob(F-statistic)	0.000007			
Inverted MA Roots	.14			

Η μεταβλητή είναι στατιστικά σημαντική όμως απορρίπτεται το μοντέλο γιατί υπάρχουν κατάλοιπα με $p\text{-value} < \alpha$.

Sample: 2 1157
 Included observations: 1156
 Q-statistic
 probabilities adjusted
 for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.009	0.009	0.0933	
*	*	2	-0.073	-0.074	6.3566	0.012
*	*	3	0.076	0.078	13.131	0.001
		4	-0.009	-0.016	13.221	0.004
		5	-0.018	-0.006	13.604	0.009
		6	0.024	0.017	14.264	0.014
		7	-0.012	-0.013	14.435	0.025
		8	0.031	0.037	15.579	0.029
		9	0.009	0.003	15.672	0.047
		10	0.042	0.050	17.721	0.039
		11	-0.029	-0.035	18.691	0.044
		12	0.057	0.065	22.455	0.021

Τέλος, για ένα ARMA(1,1) βλέπουμε ότι η πρώτη υστέρηση δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Dependent Variable: LNR
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3 1157
 Included observations: 1155 after adjustments
 Convergence achieved after 39 iterations
 MA Backcast: 2

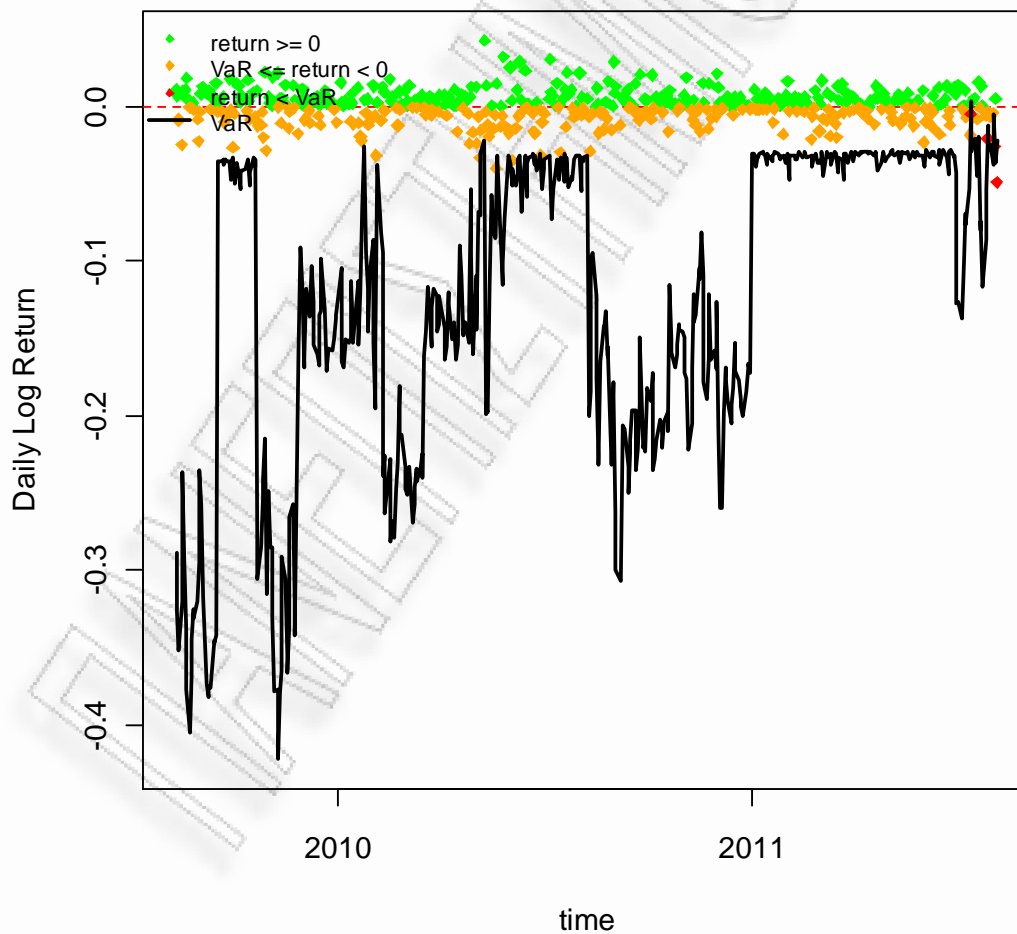
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000323	0.000326	-0.988453	0.3231
LNR(-1)	0.211600	0.194858	1.085920	0.2777
MA(1)	-0.349116	0.186900	-1.867932	0.0620

R-squared	0.019244	Mean dependent var	-0.000419
Adjusted R-squared	0.017541	S.D. dependent var	0.016645
S.E. of regression	0.016499	Akaike info criterion	-5.368491
Sum squared resid	0.313578	Schwarz criterion	-5.355369
Log likelihood	3103.303	Hannan-Quinn criter.	-5.363539
F-statistic	11.30178	Durbin-Watson stat	1.979293
Prob(F-statistic)	0.000014		
<hr/>			
Inverted MA Roots	.35		
<hr/>			

Από τα παραπάνω μοντέλα επιλέγουμε το AR(2) για τη μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου για το δείκτη S&P 500.

ARCH-normal

**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**

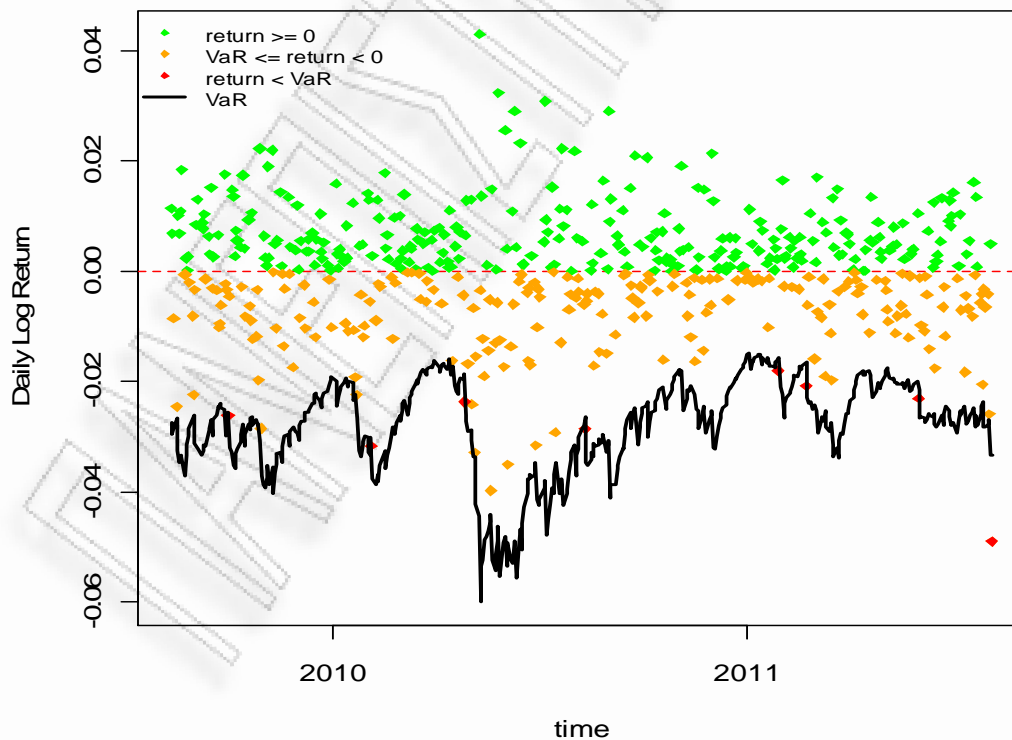


Model ARCH-norm				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	4	12,5	7
Percentage % VaR exceedances	1%	0,8%	2,5%	1,4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	0,217	3,841	2,944
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	0,265	5,991	3,115

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί και από τα δύο τεστ για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%

GARCH-generalized error distribution

**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**



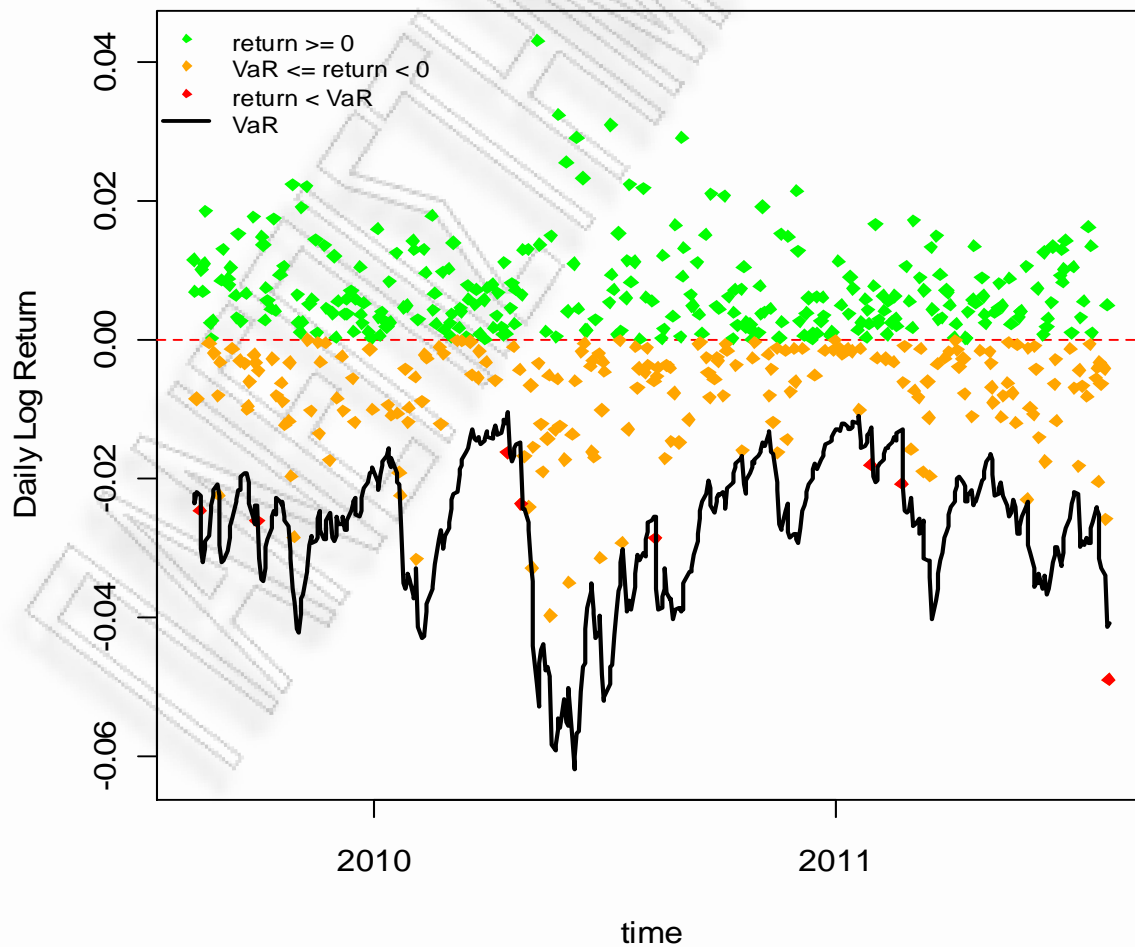
Model GARCH-ged

Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	8	12,5	20
Percentage % VaR exceedances	1%	1,6%	2,5%	4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	1,538	3,841	3,916
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	1,766	5,991	3,99

Για επίπεδο σημαντικότητας 2,5%, σύμφωνα με το τεστ του Kupiec, απορρίπτεται το μοντέλο, ενώ σύμφωνα με το τεστ του Christoffersen δεν μπορεί να απορριφθεί.

EGARCH-generalized error distribution

Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances (Series: , alpha=0.01)

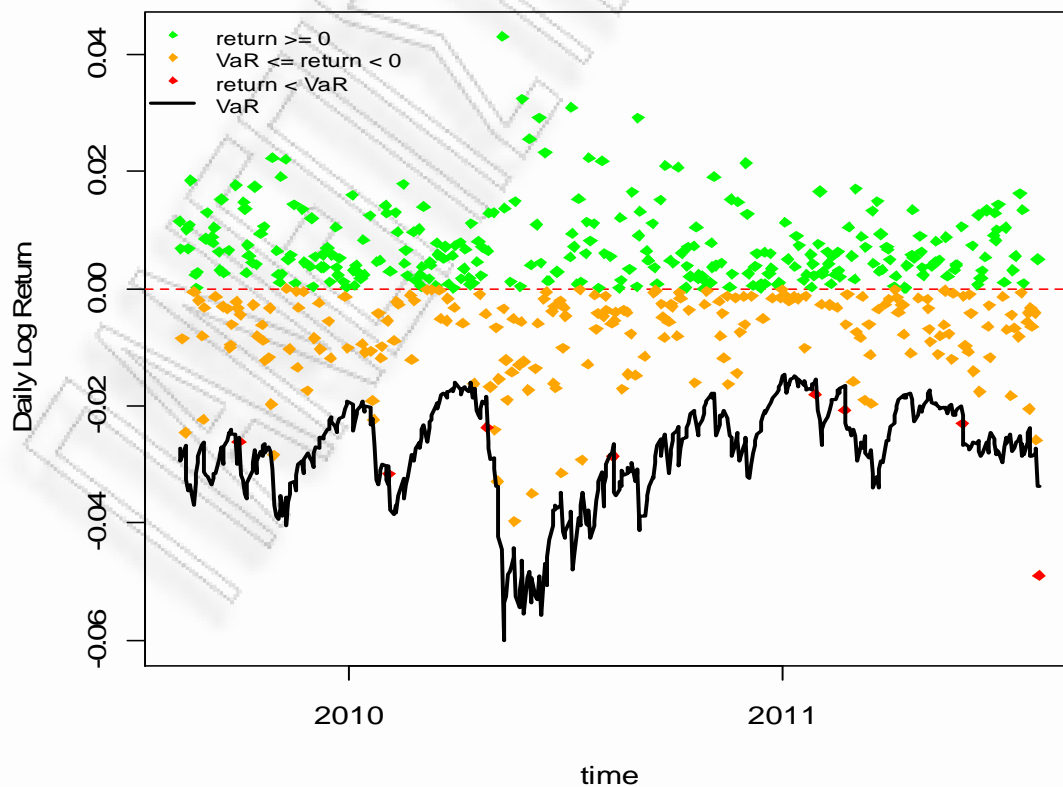


Model EGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	8	12,5	22
Percentage % VaR exceedances	1%	1,6%	2,5%	4,4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	1,538	3,841	6,06
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	1,766	5,991	6,066

Το μοντέλο απορρίπτεται για διάστημα εμπιστοσύνης υπολογισμού του VaR 97,5%. Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί για διάστημα εμπιστοσύνης 99%, καθώς η στατιστική LR είναι μικρότερη από την κριτική τιμή της.

IGARCH-generalized error distribution

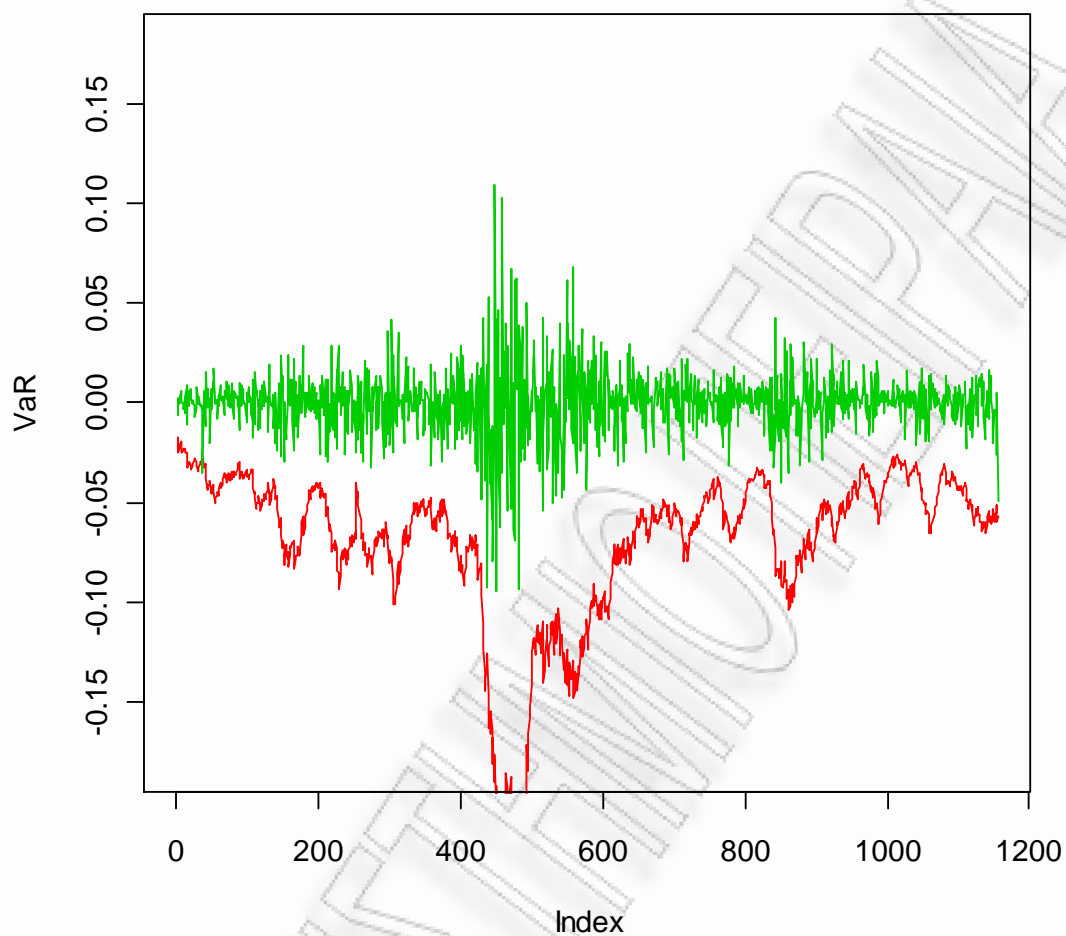
**Daily Returns & Value-at-Risk Exceedances
(Series: , alpha=0.01)**



Model IGARCH-ged				
Backtest Length 500				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	5	8	12,5	20
Percentage % VaR exceedances	1%	1,6%	2,5%	4%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	1,538	3,841	3,916
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	1,766	5,991	3,99

Το μοντέλο δεν μπορεί να απορριφθεί και από τα δύο τεστ για επίπεδο σημαντικότητας 1%. Σύμφωνα με το τεστ του Kupiec, το μοντέλο απορρίπτεται για επίπεδο σημαντικότητας 2,5%, ενώ σύμφωνα με τον Christoffersen δεν μπορεί να απορριφθεί. Αυτό σημαίνει ότι παρόλο που οι πραγματοποιηθείσες παραβιάσεις υπερβαίνουν τις αναμενόμενες, δεν παρουσιάζουν μεγάλο βαθμό εξάρτησης.

SV-normal



Model SV-normal				
	EXPECTED	ACTUAL	EXPECTED	ACTUAL
VaR exceedances	11,74	1	29,35	2
Percentage % VaR exceedances	1%	0,085%	2,5%	0,17%
LR_{uc} (test Kupiec)	3,841	16,653	3,841	44,603
LR_{cc} (test Christoffersen)	5,991	N/A	5,991	N/A

Το μοντέλο απορρίπτεται και από τα δύο τεστ για επίπεδο σημαντικότητας 1% και 2,5%.

4.7 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω εφαρμογή βλέπουμε ότι για τη μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου για τους πέντε δείκτες που εξετάζουμε, πιο κατάλληλο είναι το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο (AR), έναντι του μοντέλου κινητού μέσου όρου (MA) ή του αυτοπαλίνδρομου μοντέλου κινητού μέσου όρου (ARMA). Συγκεκριμένα στην περίπτωση των Dow Jones Industrial Average και S&P 500, η απόδοση r_t εξαρτάται από τις δύο προηγούμενες αποδόσεις [AR(2)], ενώ για τους δείκτες CAC40, DAX, FTSE 100 η απόδοση r_t εξαρτάται από τις τέσσερις προηγούμενες αποδόσεις [AR(4)].

Για τη μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης τα μοντέλα τύπου GARCH υπερέχουν έναντι του ARCH, με εξαίρεση τον δείκτη S&P 500, όπου προτιμάται το μοντέλο ARCH-normal. Τα μοντέλα GARCH, EGARCH και IGARCH εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά σύμφωνα με τα test των Kupiec και Christoffersen κατά τη διαδικασία του backtesting. Συγκεκριμένα, για το δείκτη DJI, καλύτερες στατιστικές εμφανίζουν τα μοντέλα GARCH-GED και IGARCH-GED. Για το δείκτη DAX, προτιμάται το EGARCH-GED. Για το δείκτη CAC40 το GARCH-GED ή GARCH-normal. Για το δείκτη FTSE100 τα μοντέλα τύπου GARCH εμφανίζουν παρόμοιες στατιστικές.

Το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του Taylor απορρίπτεται και για τους πέντε δείκτες σύμφωνα με τα test των Kupiec και Christoffersen κατά τη διαδικασία του backtesting, καθώς εμφανίζει πολύ λιγότερες παραβιάσεις από τις αναμενόμενες. Αυτό σημαίνει ότι είναι συντηρητικό και υπερεκτιμά τον κίνδυνο, άρα η επιχείρηση θα δεσμεύσει περισσότερα κεφάλαια για τον κίνδυνο αγοράς από το αναμενόμενο, με το αντίστοιχο κόστος.

Βιβλιογραφία

- Acerbi C., Tasche D. “Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk”, *Economic Notes*, 31, 2002, pp. 379-388.
- Alexander C., “Volatility and Correlation: Measurement, Models and Applications.” In C. Alexander, ed., *Risk Management and Analysis, Measuring and Modelling Financial Risk*, Vol.1, John Wiley and Sons, 1998, pp.125-172.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J., Heath D. “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance*, 9 (3), 1999, pp.203-228.
- Basel Committee on Banking Supervision. “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework-Comprehensive Version”, Bank for International Settlements, June 2006.
- Basel Committee on Banking Supervision. “Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements”, January 1996.
- Black F. “Studies in Stock Price Volatility Changes”, *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*, 1976, pp.177-181.
- Black F., Scholes M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp.637-654.
- Blattberg R., Gonedes N. “A Comparison of the Stable and Student Distribution as Statistical Models for Stock Prices”, *Journal of Business*, 47, 1974, pp.244-280.
- Bollerslev T. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, 1986, pp.307-327.
- Bollerslev T. “Glossary to ARCH (GARCH)”, Oxford University Press, October 2007.
- Bollerslev T., Engle R., Nelson D. “ARCH Models”, In *Handbook of Econometrics IV*. Amsterdam: Elsevier Science, 1994, pp.2959-3038.

- Bollerslev T., Engle R., Wooldridge J. "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances", *Journal of Political Economy*, 96, 1988, pp.116-131.
- Christie A. "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, pp.407-432.
- Christoffersen P. "Elements of Financial Risk Management", Elsevier Science, 2003.
- Christoffersen P. "Evaluating Interval Forecasts", *International Economic Review*, 39, 1998, pp.841-862.
- Clark P. "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, 41, 1973, pp.135-156.
- Cornell B. "Using the Options Pricing Model to Measure the Uncertainty Producing Effect of Major Announcements", *Financial Management*, 7, 1978, pp.54-59.
- Cox J., Ingersoll J., Ross S. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 1985, pp.385-408.
- Crouhy M., Galai D., Mark R. "The Essentials of Risk Management", The McGraw-Hill Companies, 2006.
- Detemple J., Osakwe C. "The Valuation of Volatility Options", *European Finance Review*, 4, 2000, pp.21-50.
- Engle R. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 1982, pp.987-1006.
- Engle R. "Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87", *Review of Financial Studies*, 3, 1990, pp.103-106.
- Engle R., "Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice", *American Economic Review*, 2004, 94, pp.405-420.
- Engle R., Bollerslev T. "Modelling the persistence of conditional variances", *Econometric Reviews*, 5, 1986, pp.1-50.
- Engle R., Patton A. "What Good is a Volatility Model", Working Paper FIN-01-028, New York University, 2001.

- European Commission, Financial Institutions, Insurance and Pensions. "Amended Framework for Consultation on Solvency II", July 2005.
- Fama E. "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, 1965, pp.34-105.
- Ghalanos A. "A package for flexible GARCH modeling in R.", 2011.
- Glosten L., Jagannathan R., Runkle D. "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks", *Journal of Finance*, 48, 1993, pp.1779-1801.
- Harris L. "A Transaction Data Study of Weekly and Intraday Patterns in Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, 16, 1986, pp.99-117.
- Harvey C., Huang R. "Information Trading and Fixed Income Volatility", *The Journal of Portfolio Management*, 6, 1992, pp.14-22.
- Harvey C., Huang R. "Volatility in the Foreign Currency Futures Market", *Review of Financial Studies*, 4, 1991, pp.543-569.
- Heston S. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6, 1993, pp.327-343.
- Hull J. "Options, Futures and Other Derivatives", Prentice Hall, 5th ed., 2002.
- Hull J., White A. "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by Stochastic Volatility", *Advances in Futures and Options Research*, 3, 1988, pp.29-61.
- Hull J., White A. "The Pricing of Options with Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 42, 1987, pp.281-300.
- Jorion P. "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", The McGraw-Hill Companies, 3rd ed., 2007.
- Kim S., Shephard N., Chib S. "Stochastic Volatility : Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models", *Review of Economic Studies* 65, 1998, pp.361-393.

- Kon S. "Models of Stock Returns, A Comparison", *Journal of Finance*, 39, 1984, pp.147-165
- Kupiec P. "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, 3, 1995, pp.73-84.
- Linsmeier T., Pearson N. "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk", Working paper, University of Illinois, 1996.
- Mandelbrot B. "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, 1963, pp.394-416
- Markowitz H. "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, 7, 1952, pp.77-91.
- Mikhailov S., Nogel U. "Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions", *Wilmott magazine*, 1993, pp.74-79
- Neftci S. "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives", Academic Press *Advanced Finance*, 2nd ed., 2000.
- Nelson D. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59, 1991, pp.347-370.
- Poon S., Granger C., "Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review", *Journal of Economic Literature* Vol.XLI, June 2003, pp.478-539.
- Psychoyios D., Skiadopoulos G., Alexakis P. "A Review of Stochastic Volatility Processes: Properties and Implications", *The Journal of Risk Finance*, 2003.
- Scott L. "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application" *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 1987, pp.419-438.
- Sharpe W. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, 1964, pp.425-442.
- Taylor S. "Financial returns modelled by the product of two stochastic processes, a study of daily sugar prices, 1961-79, in *Time Series Analysis : Theory and Practice 1* , O.D. Anderson editor, North Holland, Amsterdam, 1982, pp.203-226.

Tobin J. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *The Review of Economic Studies*, 25, 1958, pp.65-86.

Tsay R. "Analysis of Financial Time Series", John Wiley & Sons., 2nd ed., 2005.

Wiggings J. "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates", *Journal of Financial Economics*, 19, 1987, pp.351-372.

Yamai Y., Yoshihara T. "Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value at Risk (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk", *Journal of Monetary and Economic Studies*, Bank of Japan, 20 (2), 2002, pp.95-115.

Zakoian J. "Threshold Heteroskedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 1994, pp.931-955.

Γιαννακόπουλος Α. «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση, Φεβρουάριος 2003.