ΤΜΗΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κατεύθυνσης δικτύων και ψηφιακών συστημάτων

Επιβλέπων : Δρ.Ξενάκης Χρήστος, Επίκουρος Καθηγητής

Θεωρία της Πληροφορίας ή Θεωρία Πληροφοριών

Κανάλι –Σύστημα

Διπλωματική Εργασία

Καραμάνου Ευαγ. Δήμητρα , Α.Μ. ΜΕ/08052

Πειραιάς , Ιούνιος 2011

ΤΜΗΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Κατεύθυνσης δικτύων και ψηφιακών συστημάτων

Επιβλέπων : Δρ.Ξενάκης Χρήστος, Επίκουρος Καθηγητής

Θεωρία της Πληροφορίας ή Θεωρία Πληροφοριών

Κανάλι –Σύστημα

Διπλωματική Εργασία

Καραμάνου Ευαγ. Δήμητρα , Α.Μ. ΜΕ/08052

Διπλωματική εργασία η οποία υποβλήθηκε τον Ιούνιο 2011 για την απόκτηση του πτυχίου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του τμήματος Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων.

Η διπλωματική αυτή εργασία αφιερώνεται στους γονείς μου, Ευάγγελο και Μαρία. Τους ευχαριστώ γιατί η παρουσία τους μου θυμίζει συνεχώς πως το πιο σημαντικό αγαθό στον κόσμο είναι η αγάπη.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ξενάκη Χρήστο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου αυτή την εργασία καθώς και για την βοήθεια και καθοδήγησή του που ήταν πολύ σημαντική για την πορεία μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Περίληψη

Στην εργασία που παρουσιάζεται παρατίθεται το θεώρημα του Shannon ο οποίος απέδειξε ότι είναι δυνατόν να μείνει σταθερός (μικρότερος της χωρητικότητας του διαύλου) ο ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας και παρόλα αυτά η πιθανότητα σφάλματος να παραμείνει εξαιρετικά μικρή. Η χωρητικότητα του διαύλου μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα χαρακτηριστικά θορύβου του διαύλου. Ένα σύστημα επικοινωνίας στα πλαίσια της θεωρίας της πληροφορίας αντιστοιχεί στο κλασικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα πομπού, διαύλου και δέκτη.

Θα αναπτυχθούν μαθηματικά υποδείγματα για τα διακριτά κανάλια επικοινωνίας και θα οριστεί η έννοια της χωρητικότητας ενός διακριτού καναλιού επικοινωνίας. Επίσης, στη μελέτη θα ληφθεί υπόψην ο θόρυβος ως παράγοντας που επηρεάζει τη μετάδοση δεδομένων και οριστεί το θεώρημα κωδικοποίησης διακριτών καναλιών.

Η ανάλυση της χωρητικότητας των συνεχών καναλιών χωρίς μνήμη και με μνήμη θα γίνει λαμβάνοντας υπόψην το θόρυβο ως παράγοντα που επηρεάζει τη μετάδοση δεδομένων.

Τα συνεχή κανάλια στα οποία επενεργεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος χωρίς όμως επίπεδη φασματική πυκνότητα ισχύος, τα δείγματα δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητα, δηλαδή έχουμε κανάλι με μνήμη. Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας συνεχούς καναλιού με μνήμη θα ληφθούν υπόψην οι φασματικές πυκνότητες ισχύος του στοχαστικού σήματος εισόδου και του θορύβου.

Πειραιάς Ιούνιος , 2011

Abstract

In this project is presented the theorem of Shannon who proved that it is possible to remain that the rate of transmission of information can be stable (lower capacity of the channel) and that the probability of error remains can be very small. The capacity of the channel can be calculated based on the noise characteristics of the channel. A communication system in the context of information theory corresponds to the classical communication system transmitter and receiver channel.

We developed mathematical models for discrete communication channels and define the concept of capacity a discrete communication channel. Also, the study will be taken into consideration of the noise as a factor of influencing the transmission of data and define the discrete channel of coding theorem.

Analysing the capacity of continuous channel and or without memory will be taking into consideration the noise, as a factor in data transmission.

The continuous channels that acting white Gaussian noise but flat power spectral density, samples are not statistically independent, so we have channel with memory .

Piraeus June, 2011

Λέξεις κλειδιά: Επικοινωνία, Πηγή πληροφορίας , Αλφάβητο ,Λέξη, Πληροφορία, Μήνυμα Πληροφορίας, Κωδικοποίηση, Κώδικας, Δίαυλος Πληροφορίας ή κανάλι, Χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας, Θόρυβος, Αποκωδικοποιητής , Διακριτό κανάλι επικοινωνίας, Συνεχές κανάλι επικοινωνίας.

Key words: Communication, information source, Alphabet, Word, Information, Message Information, Coding, Code, Channel, Information channel capacity, Noise, Decoder , discrete channel, continuous channel of communication **.**

Πρόλογος

Στις μέρες μας υπάρχει ραγδαία ανάπτυξη των μέσων καταγραφής, αποθήκευσης, επεξεργασίας και μετάδοσης των δεδομένων, καθώς επίσης και των συναφών τεχνολογιών επικοινωνίας, όπως το τηλέφωνο, η τηλεόραση και τα δίκτυα υπολογιστών. Κοινός τόπος όλων αυτών των τεχνολογικών επιτευγμάτων είναι η ακριβής, ταχεία, ασφαλής και οικονομική αποθήκευση και μετάδοση της πληροφορίας.

Όλη αυτή η ανάπτυξη έδωσε περισσότερους καρπούς μετά τη μαθηματική θεμελίωση της έννοιας της πληροφορίας. Πριν τα μέσα του εικοστού αιώνα, η έννοια της πληροφορίας ήταν κατά βάση αφηρημένη και ποιοτική. Επομένως, οποιαδήποτε προσπάθεια εξαγωγής νόμων που διέπουν την πληροφορία και την επικοινωνία ήταν αρχικά αδύνατη. Αυτή η αδυναμία ποσοτικοποίησης της έννοιας της πληροφορίας αντιμετωπίστηκε αρχικά από τον **Hartley** και στη συνέχεια από το **Shannon**.

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγικά

Πρώτος ο Hartley το 1928 όρισε την «**ποσότητα πληροφορίας**». Είπε πως η «πληροφορία» προκύπτει από τη διαδοχική επιλογή συμβόλων ή λέξεων από ένα δοσμένο «αλφάβητο» ή λεξιλόγιο, προκειμένου να οικοδομηθεί ένα μήνυμα (κείμενο) με κάποιο νόημα (τάξη, λογική). Ένα χρόνο αργότερα, το 1929, ο **Szilard** συνέδεσε την πληροφορία και τη θερμοδυναμική εντροπία.

Το 1948, με την δημοσίευση της εργασίας του C. E. Shannon με τίτλο «A Mathematical Theory of Communication», γεννήθηκε μια νέα επιστημονική περιοχή, η **Θεωρία της Πληροφορίας ή Θεωρία Πληροφοριών**. Στόχος της είναι η θεμελίωση εννοιών και θεωρημάτων που επιτρέπουν τη μαθηματική περιγραφή της διαδικασίας της επικοινωνίας. Με αυτό το τρόπο, η μετάδοση πληροφοριών μπορεί να αναλυθεί με μαθηματική αυστηρότητα και ακρίβεια, ενώ σε ένα επόμενο βήμα είναι δυνατόν να σχεδιαστούν καλύτερα συστήματα επικοινωνιών. Η νέα θεωρία βασισμένη στη στατιστική, τη θεωρία πιθανοτήτων και την άλγεβρα μπορεί να απαντήσει με μαθηματική ακρίβεια σε ερωτήματα που σχετίζονται με τη βέλτιστη συμπίεση των δεδομένων, την περιγραφή των διαύλων επικοινωνίας, την κωδικοποίηση των μηνυμάτων πληροφορίας, το ρυθμό μετάδοσης των πληροφοριών σε περιβάλλον θορύβου, την κρυπτογράφηση κ.α..

Αν και αρχικά η θεωρία της πληροφορίας αποτέλεσε τμήμα της επιστήμης των επικοινωνιών, σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα αναπτύχθηκε σε ανεξάρτητη επιστήμη με συμβολή σε επιστήμες και θέματα πέρα από τις παραδοσιακές περιοχές των τηλεπικοινωνιών και των μαθηματικών. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τη Στατιστική Φυσική (Θερμοδυναμική), την Επιστήμη υπολογιστών (αλγοριθμική πολυπλοκότητα), τη Στατιστική, τη Βιολογία (Γενετική τεχνολογία), τη γλωσσολογία, τη σχεδίαση υπολογιστικών συστημάτων κ.α.. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι στις μέρες μας, η θεωρία της πληροφορίας, λόγω της μαθηματικής της ακρίβειας και των γενικευμένων συμπερασμάτων της, αποτελεί χωριστό κλάδο των μαθηματικών.

Μέχρι το 1948 κάθε τηλεπικοινωνιακός μηχανικός θα υποστήριζε σθεναρά την άποψη ότι για να βελτιστοποιηθεί η αξιοπιστία της επικοινωνίας είναι απαραίτητο να ελαττωθεί ο ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας ή αντίστροφα, ότι το πλήθος των σφαλμάτων αυξάνει το ρυθμό μετάδοσης του μηνύματος. Ο Shannon απέδειξε ότι είναι δυνατόν να μείνει σταθερός (μικρότερος της χωρητικότητας του διαύλου) ο ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας και παρόλα αυτά η πιθανότητα σφάλματος να παραμείνει εξαιρετικά μικρή. Η χωρητικότητα του διαύλου μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα χαρακτηριστικά θορύβου του διαύλου. Οι ιδέες του Shannon αξιοποιήθηκαν από πλήθος ερευνητών, τόσο τηλεπικοινωνιακών μηχανικών όσο και μαθηματικών, με αποτέλεσμα να αναπτύξουν σε σχετικά λίγα χρόνια τη νέα επιστήμη της θεωρίας της πληροφορίας.

Ένα σύστημα επικοινωνίας στα πλαίσια της θεωρίας της πληροφορίας αντιστοιχεί στο κλασικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα πομπού, διαύλου και δέκτη, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 1).

Εικόνα 1. Γενικό διάγραμμα συστήματος τηλεπικοινωνίας

Ο πομπός αποτελείται από την πηγή πληροφορίας και τον κωδικοποιητή. Η πληροφορία παράγεται στην πηγή (πληροφορίας) και οργανώνεται σε μηνύματα πληροφορίας, τα οποία στη συνέχεια μετατρέπονται σε κωδικά μηνύματα. Ο δίαυλος πληροφορίας, ο οποίος είναι στην ουσία το μέσο που παρεμβάλλεται μεταξύ του πομπού και του δέκτη, διοχετεύει την κωδικοποιημένη πληροφορία στο σημείο προορισμού. Όταν η πληροφορία διαπερνά το δίαυλο, είναι δυνατόν να αλλοιωθεί λόγω της παρουσίας θορύβου. Η πληροφορία λαμβάνεται από το δέκτη, όπου αρχικά αποκωδικοποιείται και στη συνέχεια παρουσιάζεται στον προορισμό της.

Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι έννοιες του συστήματος επικοινωνίας από την άποψη των τηλεπικοινωνιών.

Επικοινωνία είναι κάθε διαδικασία μεταφοράς πληροφορίας μεταξύ δύο σημείων του χώρου – χρόνου (π.χ. τηλεφωνική συνδιάλεξη).

Πηγή πληροφορίας είναι το τμήμα του συστήματος επικοινωνίας που παράγει πληροφορία με τη μορφή συμβόλων (π.χ. δελτίο καιρού). Η πληροφορία προσαρτάται στα σύμβολα με κριτήριο τη πιθανότητα εμφάνισης τους στην έξοδο της πηγής πληροφορίας.

Αλφάβητο είναι το σύνολο των συμβόλων που χρησιμοποιεί η πηγή πληροφορίας (π.χ. αριθμοί, γράμματα, διαγράμματα, χάρτες).

Λέξη Πληροφορίας είναι η βραχεία διάταξη συμβόλων πληροφορίας (π.χ. λέξη αποτελούμενη απο γράμματα, όπως σταθμός).

Μήνυμα Πληροφορίας είναι η διάταξη των λέξεων πληροφορίας (π.χ. μια πρόταση αποτελούμενη από λέξεις, όπως ο σιδηροδρομικός σταθμός είναι συνέχεια ανοικτός).

Κωδικοποίηση είναι η αντικατάσταση των συμβόλων πληροφορίας από άλλα (κωδικά) σύμβολα με αντικειμενικό σκοπό τη βελτιστοποίηση της επικοινωνίας (π.χ. αντικατάσταση γραμμάτων από τελείες και παύλες κατά τον κώδικα Morse). Η κωδικοποιημένη πληροφορία οργανώνεται επίσης σε επιμέρους κωδικές λέξεις και κωδικά μηνύματα.

Κώδικας είναι κάθε τεχνική κωδικοποίηση. Το σύνολο των κωδικών συμβόλων είναι το αλφάβητο του κώδικα. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση συμβόλων, λέξεων και μηνυμάτων πληροφορίας σε κωδικά σύμβολα, κωδικές λέξεις και κωδικά μηνύματα είναι το κλειδί του κώδικα. Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε το κωδικό αλφάβητο $\Gamma=\{0,1\}$. Η δυαδική κωδικοποίηση είναι η συνηθέστερη επιλογή στα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας. Με βάση αυτό το κωδικό αλφάβητο, ας υποθέσουμε ότι για την πηγή πληροφορίας με αλφάβητο $\mathrm{A}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ υπάρχουν οι τρείς παρακάτω δυαδικοί κώδικες:

I	II	III
$\alpha_1 \to 0$	$\alpha_1 \to 00$	$\alpha_1 \to 0$
$\alpha_2 \to 1$	$\alpha_2 \to 01$	$\alpha_2 \to 11$
$\alpha_3 \to 1$	$\alpha_3 \to 10$	$\alpha_3 \to 10$

Ο κώδικας Ι είναι απεικόνιση του Α στο Γ, ο κώδικας ΙΙ είναι απεικόνιση του Α στο Γ^2 ενώ ο κώδικας ΙΙΙ είναι απεικόνιση του Α στο $\Gamma\cup\Gamma^2$. Οι δύο πρώτοι κώδικες έχουν σταθερό αριθμό δυαδικών συμβόλων (ισομήκεις) ενώ ο τρίτος μεταβλητό (δεν είναι ισομήκης)

Απαραίτητο στοιχείο του πομπού είναι **ο μεταλλάκτης** που μετατρέπει το κωδικοποιημένο μήνυμα σε σήμα, δηλαδή μορφή κατάλληλη για μετάδοση (π.χ. σειρά ηλεκτρικών παλμών). Το σήμα αποτελεί τον υλικό φορέα της πληροφορίας.

Δίαυλος Πληροφορίας ή κανάλι είναι αλυσίδα μέσων και συσκευών (π.χ. καλώδια, κυματοδηγοί, οπτικές ίνες) που μεταδίδουν το σήμα με την αποτυπωμένη σε αυτό πληροφορία.

Χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας (π.χ. το τηλέτυπο μεταδίδει 10 λέξεις / sec). Καθορίζει το χρόνο και το κόστος που απαιτούνται για τη μετάδοση μηνύματος ή το πλήθος των μηνυμάτων που είναι δυνατό να διοχετεύει ταυτόχρονα ο δίαυλος πληροφορίας.

Θόρυβος είναι κάθε ανεξέλεγκτη παρεμβολή του περιβάλλοντος του διαύλου που προκαλεί αλλοίωση του σήματος και συνεπώς σφάλματα μετάδοσης (απώλεια πληροφορίας). Συνήθως στα κανάλια επικοινωνίας υπάρχουν διαφόρων ειδών θόρυβοι όπως ο θερμικός θόρυβος, ο κρουστικός θόρυβος, ο θόρυβος περιβάλλοντος ή η παρεμβολή ομιλίας από άλλες γραμμές (κανάλια). Μέχρι το 1948 ο τηλεπικοινωνιακός μηχανικός επιδίωκε την προστασία του σήματος απο τον θόρυβο, δηλαδή την πιστή αναπαραγωγή του σήματος στο δέκτη. Με την ωρίμανση της θεωρίας της πληροφορίας, το ενδιαφέρον μετατοπίσθηκε στην πιστή αναπαραγωγή του μηνύματος πληροφορίας που είναι αποτυπωμένο το σήμα. Σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά συστήματα εξασφαλίζουν αξιόπιστη ροή πληροφορίας με σήμα βαθιά θαμμένο σε θόρυβο.

Αποκωδικοποιητής αντιπροσωπεύει την επεξεργασία που γίνεται στο σήμα που προκύπτει στην έξοδο του καναλιού προκειμένου να αναπαραχθεί ένα όσο το δυνατόν πιστότερο αντίγραφο του σήματος στην έξοδο της πηγής πληροφορίας

Κεφάλαιο 2. Θόρυβος

2.1 Είδη Θορύβου

Ο θόρυβος είναι μια ανεπιθύμητη ενέργεια συνήθως τυχαίου χαρακτήρα που παρουσιάζεται στο σύστημα μεταφοράς και μπορεί να προκαλείται με οποιοδήποτε τρόπο. Όταν ο θόρυβος είναι έντονος, μπορεί να υπερκαλύψει το σήμα τόσο πολύ που το σήμα να αποδυναμωθεί τόσο ώστε να γίνει πλέον άχρηστο. Τα είδη του θορύβου διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, στον εξωτερικό θόρυβο και τον εσωτερικό θόρυβο.

Ο εξωτερικός θόρυβος δημιουργείται από αιτίες που βρίσκονται εκτός του συστήματος επικοινωνίας, δηλαδή είτε από τον ανθρώπινο είτε γενικότερα από κάποιον εξωγενή παράγοντα. Όπως για παράδειγμα τα λεγόμενα βιομηχανικά παράσιτα, τα οποία δημιουργούνται εξαιτίας διάφορων ηλεκτρομηχανικών συσκευών, που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση από το σύστημα. Ακόμη ένα είδος παρασίτων είναι τα ατμοσφαιρικά παράσιτα που μπορεί να προκληθούν από τις ατμοσφαιρικές εκκενώσεις, δηλαδή από τις ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές που εμφανίζονται στην ατμόσφαιρα κατά την διάρκεια καταιγίδων.

Ο εσωτερικός θόρυβος προκαλείται από το ίδιο το μέσο. Η τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα καλείται θερμικός θόρυβος. Ακόμη ένα είδος εσωτερικού θορύβου αποτελεί ο θόρυβος βολής, που δημιουργείται στο διάστημα μεταξύ της εισόδου δύο διαδοχικών ηλεκτρονίων ή οπών σε ένα ενεργό στοιχείο του συστήματος, το χρονικό όμως αυτό διάστημα δεν παραμένει σταθερό, αλλά βρίσκεται σε μια τυχαία στατιστική διακύμανση.

Ο θόρυβος μπορεί να αναμιγνύεται με το σήμα μας σε κάθε σημείο του επικοινωνιακού μας συστήματος, όμως η επίδραση του θορύβου γίνεται μεγαλύτερη όσο το σήμα είναι ασθενέστερο. Αυτό σημαίνει ότι ο θόρυβος είναι ακόμα πιο αισθητός στο κανάλι ή στην είσοδο του δέκτη όπου το σήμα είναι αδύναμο. Ο θόρυβος που προστίθεται στο αρχικό σήμα ονομάζεται προσθετικός θόρυβος.

Η κλασική μέθοδος για την αντιμετώπιση του θορύβου είναι η μείωση του εύρους ζώνης του σήματος μέχρι κάποιο όριο ανοχής, παρά το ότι μειώνει το ρυθμό μετάδοσης. Μια άλλη σύγχρονη μέθοδος είναι η ψηφιακή επεξεργασία σήματος (DSP: Digital Signal Process). Αφορά τεχνικές βελτίωσης ακρίβειας και αξιοπιστίας ψηφιακών σημάτων. Υπάρχει η ικανότητα διάκρισης θορύβου ανάμεσα σε δύο ψηφιακά σήματα κι η απομάκρυνσή του από αυτά. Στην περίπτωση που το σήμα είναι αναλογικό το μετατρέπει σε ψηφιακό, το απαλλάσσει από το θόρυβο και το επαναφέρει αναλογικό. Ακόμη ένας τρόπος για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η χρήση οπτικών ινών, ένα ενσύρματο μέσο μετάδοσης ανθεκτικό στο θόρυβο.

2.2 Περιγραφή Θορύβου

2.2.1 Θεώρημα Shannon – Hartley

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης δεδομένων ενός καναλιού με θόρυβο, του οποίου το εύρος ζώνης είναι B Hz και ο σηματοθορυβικός λόγος είναι $\frac{S}{N}$, δίνεται από τη σχέση:

$$R \le C = B\log_2\left(\frac{S}{N}+1\right) \qquad (2.1)$$

όπου

R: αυτό που μπορούμε να στείλουμε στο κανάλι,

C: χωρητικότητα καναλιού (bps),

B: Εύρος Ζώνης (Hz),

S: σήμα (Signal),

N: Θόρυβος (Noise).

2.2.2 Απόδοση ισχύος και εύρους ζώνης

Σε ένα σύστημα επικοινωνίας η μέση ισχύς σήματος είναι

$\mathrm{S} = \mathrm{E_b} \cdot \mathrm{C}$ (2.2)

όπου

$\mathrm{E_b}$ είναι η μέση λαμβανόμενη ενέργεια ανά bit πληροφορίας $\left(\frac{Watts}{bit}\right)$.

Επίσης, η μέση ισχύς θορύβου είναι

$\mathrm{N} = \mathrm{N_0 B}$ (2.3)

όπου N_0 είναι η πυκνότητα ισχύος του θορύβου $\left(\frac{Watts}{Hz}\right)$.

Έτσι, το θεώρημα Shannon-Hartley μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(\frac{E_b \cdot C}{N_0 \cdot B} + 1\right) \Rightarrow BE = \log_2\left(\frac{E_b}{N_0} BE + 1\right) bits/s/Hz \quad (2.4)$$

όπου BE είναι η φασματική απόδοση και ο λόγος $\frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_0}}$ εκφράζει τον ανηγμένο ανά bit πληροφορίας και μονάδα εύρους ζώνης λόγο σήματος προς θόρυβο εκφράζοντας ταυτόχρονα κι ένα μέτρο της απόδοσης ισχύος του συστήματος. Το θεώρημα Shannon-Hartley δείχνει καθαρά ότι η φασματική απόδοση μπορεί να ανταλλαγεί με την απόδοση ισχύος και αντίστροφα.

2.2.3 Σηματοθορυβικός λόγος

Σε ένα συγκεκριμένο σημείο ενός δέκτη η ισχύς του ωφελίμου σήματος είναι P_S και αυτή του θορύβου P_N, τότε ορίζεται ο λόγος σήματος προς θόρυβο ως εξής:

$$10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_N}\right)=\frac{S}{N}=SNR\ \ dB \qquad (2.5)$$

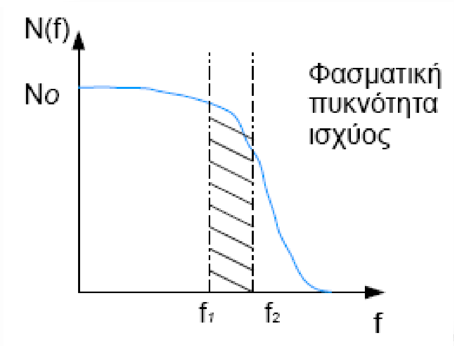
Για κάθε μέσο μετάδοσης δίνεται από τον κατασκευαστή ο σηματοθορυβικός λόγος $\frac{S}{N}$ ή SNR (Signal-to-Noise Ratio), ο οποίος δίνεται από τη σχέση (2.6).

$$SNR=10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) \qquad (2.6)$$

όπου S είναι η ισχύς του σήματος και N είναι η ισχύς του θορύβου. Ο λόγος SNR μετριέται σε decibel.

2.2.4 Φάσμα θορύβου

Όπως κάθε σήμα στο πεδίο της συχνότητας, έτσι και ο θόρυβος μπορεί να χαρακτηριστεί από μια φασματική πυκνότητα ισχύος $N\ f$, όπως για παράδειγμα στην Εικόνα 2.



Εικόνα 2. Η φασματική πυκνότητα ισχύος

Αν η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου είναι σταθερή και ανεξάρτητη της συχνότητας, τότε $\mathrm{N}(f) = \mathrm{N}_0 \left(\frac{Watts}{Hz}\right)$ και ο θόρυβος ονομάζεται λευκός. Ο θόρυβος ο οποίος χρησιμοποιείται στην ανάλυση των περισσότερων επικοινωνιακών συστημάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή και είναι λευκός, ονομάζεται δε λευκός προσθετικός γκαουσιανός θόρυβος (Additive White Gaussian Noise – AWGN). Η μέση τιμή και η ισχύς του AWGN θορύβου μετρημένη σε μοναδιαία ωμική αντίσταση εντός εύρους ζώνης BW είναι $\overline{x} = 0$ και $P = N_0 \cdot BW = \sigma^2$ αντίστοιχα.

2.3 Λευκός Θόρυβος

Ο λευκός θόρυβος έχει τα χαρακτηριστικά τυχαίας διαδικασίας της οποίας η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι σταθερή για όλες τις συχνότητες. Η ονομασία «λευκός θόρυβος» προέρχεται από το φυσικό λευκό φως , το οποίο περιέχει σε ίσες ποσότητες όλες τις συχνότητες του ορατού φάσματος.

Ο λευκός θόρυβος έχει άπειρη ισχύ, με αποτέλεσμα να μην είναι πραγματοποιήσιμος. Όσο όμως το εύρος ζώνης μιας στοχαστικής ανέλιξης θορύβου στην είσοδο ενός συστήματος είναι αισθητά μεγαλύτερο από αυτό του ίδιου του συστήματος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το λευκό θόρυβο ως μοντέλο της ανέλιξης θορύβου στην είσοδο.

Η μέση ισχύς του λευκού θορύβου δίνεται από την σχέση (2.7):

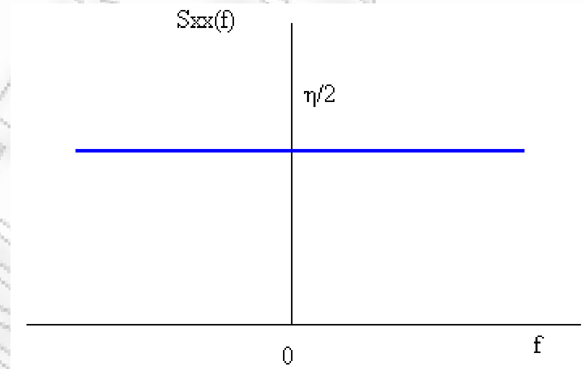
$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_{xx}}(f)df \quad (2.7)$$

όπου αποδεικνύεται ότι η μέση ισχύς είναι άπειρη.

Ένα σήμα λοιπόν λέγεται λευκός θόρυβος όταν η πυκνότητα της φασματικής ισχύος του $S_{xx}(f)$, παραμένει σταθερή για κάθε συχνότητα και ορίζεται ως εξής:

$$S_{xx} = \frac{\eta}{2} \ , \forall f \quad (2.8)$$

Όπου ο παράγοντας ½ δηλώνει ότι η ισχύς διαμοιράζεται στο αρνητικό και θετικό φάσμα συχνοτήτων. Στην Εικόνα 3 παρουσιάζεται η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου:



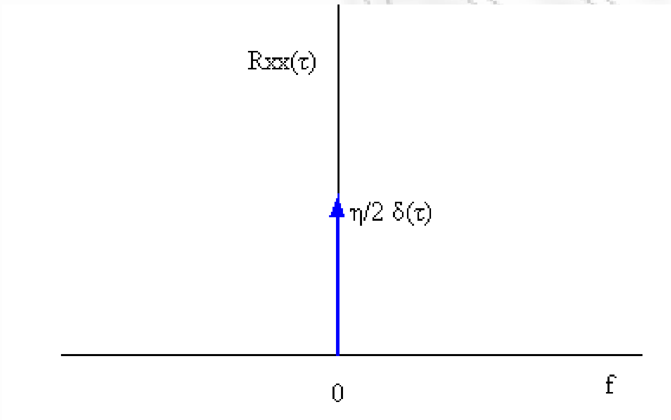
Εικόνα 3. Η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του Fourier στη σχέση $S_{xx} = \frac{\eta}{2}$, έχουμε:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau) \qquad (2.9)$$

Όπου η Rxx(τ) αποτελεί την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λευκού θορύβου και η δ(τ) είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (ή αλλιώς συνάρτηση Δέλτα).

Συμπερασματικά, δύο τυχαία δείγματα ενός λευκού θορύβου που λαμβάνονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα είναι ασυσχέτιστα. Στην Εικόνα 4 απεικονίζεται το διάγραμμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.



Εικόνα 4. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λευκού θορύβου.

Ο λευκός θόρυβος, σαν ένα στοχαστικό σήμα, έχει κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή. Ακόμη, θεωρείται ότι εισέρχεται στο σήμα από την είσοδό του στον δέκτη (προσθετική μορφή). Στην πράξη λοιπόν θεωρούμε ότι η πυκνότητα φασματικής ισχύος του λευκού θορύβου παραμένει ίδια για ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων και μηδενίζεται μετά από κάποια συχνότητα. Κατά συνέπεια, έμπρακτα η ισχύς του λευκού θορύβου δεν είναι άπειρη, όπως θεωρητικά είχαμε προαναφέρει στην αρχή του κεφαλαίου.

2.3.1 Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (Additive White Gaussian Noise – AWGN)

Ο προσθετικός λευκός Gaussian θόρυβος αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται ευρύτερα στις μελέτες και στις προσομοιώσεις των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον λευκό θόρυβο. Έτσι, τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητα και προστίθενται σε κάθε δείγμα του σήματος που λαμβάνει ο δέκτης. Σε αυτό το δίαυλο, τα μεταδιδόμενα σύμβολα λαμβάνονται από ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών και τα σφάλματα ακολουθούν τη στατική κατανομή Gauss (κανονική κατανομή).

Πηγή του AWGN αποτελεί η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ασύρματες μεταδόσεις (ατμοσφαιρικά παράσιτα) και ο θερμικός θόρυβος που οφείλεται στο υλικό (hardware), συγκεκριμένα στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων στις τηλεπικοινωνιακές διατάξεις.

Οι επιπτώσεις του AWGN εκτιμώνται και υπολογίζονται με τη βοήθεια στατιστικής ανάλυσης. Τα AWGN σήματα είναι καθαρά τυχαία και είναι αδύνατη η πρόβλεψη της στιγμιαίας τιμής τους σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Εφόσον το σήμα του θορύβου έχει πλάτη που μεταβάλλονται τυχαία στη διάρκεια του χρόνου, αριθμητική αναφορά σε αυτόν μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μόνο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (probability density function). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σχετίζει την τιμή του σήματος με την πιθανότητα να εμφανιστεί το συγκεκριμένο σήμα. Έτσι, η συνάρτηση που μας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας των τιμών των δειγμάτων του έχει την μορφή κατανομής Gauss με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση σ είναι:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad (2.10)$$

Ασκήσεις

1. Δώστε τον ορισμό των dBW,dBm,dBμV. Υπολογίστε την τιμή του σήματος στην έξοδο αθροιστή, όταν στην είσοδο έχουμε:

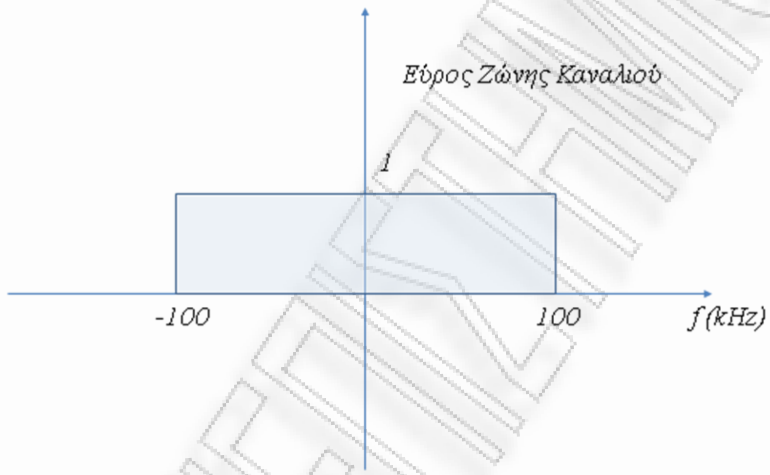
Α) 10W + 10W

Β) 10dBW + 10W

Γ) 10dBW + 10dbW

Δ) 10dBW + 10dBm

2.



Δίνεται το σήμα βασικής ζώνης $x(t)$ με φάσμα πλάτους $X(f) = 10^{-1} \cdot tri\left(\frac{f}{3\times10^{4}}\right)$. Το σήμα αυτό υπόκειται σε παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM) οπότε προκύπτει το προς μετάδοση ψηφιακό σήμα $x_{PCM}(n)$, όπου *n* ακέραιος. Για τη μετάδοση του $x_{PCM}(n)$ απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 30dB. Να θεωρήσετε και ένα κανάλι μετάδοσης βασικής ζώνης με διαθέσιμο εύρος ζώνης 100kHz.το οποίο απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα:

(α) Να διερευνήσετε αν είναι δυνατή η μετάδοση μέσα από το ανωτέρω κανάλι

(i) του αναλογικού σήματος $x(t)$.

(ii) του ψηφιακού σήματος $x_{PCM}(n)$.

αιτιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(β) Αν το x(t) περάσει από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο και μετά υποστεί διαμόρφωση PCM, ώστε να είναι δυνατή η ψηφιακή μετάδοσή του $x_{PCM}(n)$ μέσα από το ανωτέρω κανάλι, να υπολογίσετε την κατάλληλη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου.

(γ) Να υπολογίσετε πόσο θα πρέπει να μειωθεί το επιθυμητό SNR ώστε να είναι εφικτή η ψηφιακή μετάδοση του $x_{PCM}(n)$ χωρίς φιλτράρισμα του x(t).

(Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση του σήματος x(t) με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (σε μονάδες decibel) ισούται με $SNR = 10 \cdot \log_{10} L^2$)

3. Στο πλαίσιο της παραγωγής ενός αναλογικού σήματος από μία γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων και της διέλευσης του συγκεκριμένου σήματος από ένα κανάλι, να διερευνήσετε το παρακάτω πρόβλημα:

Ένα αναλογικό σήμα έχει εύρος ζώνης 4 KHz. Στο σήμα έχει γίνει δειγματοληψία 2.5 φορές του Ρυθμού Nyquist και κάθε δείγμα κβαντίζεται ισοπίθανα σε 256 βήματα (steps ή διαφορετικές τιμές). Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές δειγματοληψίες είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Να υπολογισθούν:

α. Ο Ρυθμός Πληροφορίας της Πηγής

β. Είναι δυνατόν η πληροφορία της πηγής να μεταδοθεί χωρίς σφάλματα σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης 50KHz και Λόγο Σήματος προς Θόρυβο (S/N) να είναι ίσος με 23 dB?

4. Η οθόνη μιας ασπρόμαυρης τηλεόρασης αποτελείται από 3×10^5 στοιχεία, καθένα των οποίων, λαμβάνει 10 διαφορετικές αποχρώσεις, ισοπίθανα. Υποθέτουμε ότι:

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι 30 Πλαίσια εικόνας σε χρόνο 1 sec.

Ο Λόγος Σήματος προς Θόρυβο (S/N) είναι 30 dB

Να υπολογισθεί το εύρος ζώνης συχνοτήτων που απαιτείται για να υποστηριχθεί η μετάδοση του τηλεοπτικού (video) σήματος.

(Υπόδειξη: ισχύει $C = W \times \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$, όπου *C* η χωρητικότητα του καναλιού, *W* το εύρος ζώνης και (S/N) ο λόγος σήματος προς θόρυβο.)

5. Έστω ένας δορυφόρος που εκπέμπει με μιά κεραία απολαβής 6 dB και οι ολικές απώλειες ισχύος του σήματος λόγω της διάδοσής του μέχρι έναν επίγειο σταθμό λήψης είναι 190 dB. Ο επίγειος σταθμός έχει κεραία με απολαβή 40 dB και θερμοκρασία θορύβου T_{ant} =60^o K. Η κεραία τροφοδοτεί έναν προενισχυτή με ενεργό θερμοκρασία θορύβου 125^o K και απολαβή 20 dB. Μετά τον προενισχυτή υπάρχει ένας ενισχυτής με εικόνα θορύβου 10 dB και απολαβή 80 dB. Το εύρος ζώνης διαβίβασης της πληροφορίας είναι 1 MHz. Υπολογίστε:

α) την μέση ισχύ θερμικού θορύβου στην έξοδο του δέκτη του επίγειου σταθμού

β) την ισχύ εκπομπής του δορυφόρου ώστε στην έξοδο του δέκτη να έχουμε λόγο σήματος προς θόρυβο 20 dB.

6. Δεδομένα μεταδίδονται με ένα κανάλι RF διέλευσης ζώνης με ρυθμό $5\cdot10^6$ bit/sec. Το πλάτος του φέροντος στην κεραία του δέκτη είναι A=1 mV και η φασματική πυκνότητα του θορύβου στην είσοδο του δέκτη είναι $N_o/2= 5\cdot10^{-15}$ Watt/Hz.

Βρείτε την πιθανότητα σφάλματος ενός σύμφωνου δέκτη για Δυαδική ASK

$$s(t)=\begin{cases} A\cos(\omega_c t), & 0 \le t \le T_b \quad binary1 \\ 0, & 0 \le t \le T_b \quad binary0 \end{cases}$$

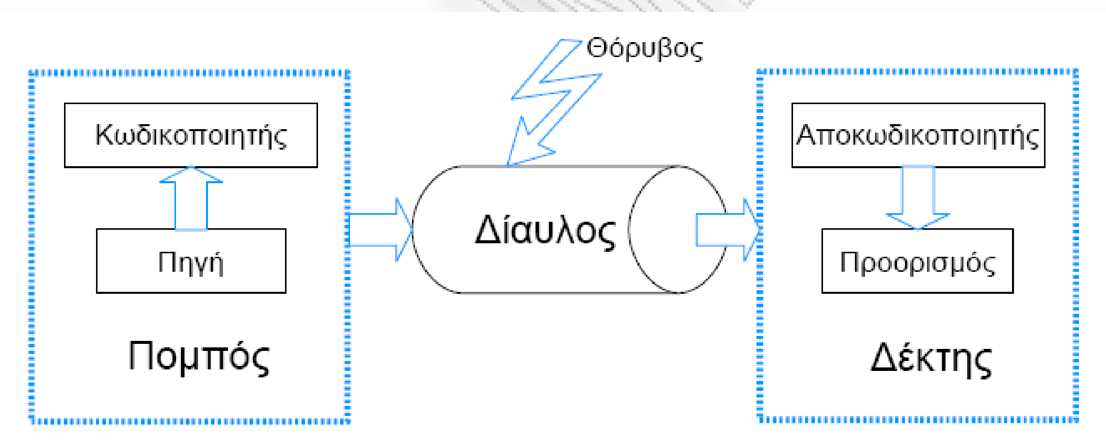
Δυαδική ASK:

7. Σε κανάλι μετάδοσης χωρίς θόρυβο θέλουμε να έχουμε μέγιστο ρυθμό μετάδοσης 9.600 bps. Ποιο είναι το απαραίτητο εύρος ζώνης αν μεταδίδονται σύμβολα των 4 bits;

Κεφάλαιο 3. Κανάλι-Σύστημα

Εισαγωγικά

Ο δίαυλος επικοινωνίας ή κανάλι είναι υπεύθυνο για την μεταφορά της πληροφορίας από την είσοδο στην έξοδο του. Η πηγή πληροφορίας Α, P(A) που προσαρμόζεται στην είσοδο του εμφανίζεται στην έξοδο του σαν πηγή πληροφορίας Β, P(B). Η μεταφορά πληροφορίας είναι μια φυσική διαδικασία η οποία επηρεάζεται από τον περιβάλλοντα θόρυβο και άλλες ατέλειες της ίδιας της διαδικασίας. Συνεπώς γενικά οι δύο πηγές πληροφορίας Α και Β θα είναι διαφορετικές. Η επικοινωνία θεωρείται επιτυχημένη όταν ο πομπός συμφωνεί με τον δέκτη σχετικά με το περιεχόμενο του μηνύματος που στάλθηκε. Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 5) φαίνεται ένα σύστημα επικοινωνίας.



Εικόνα 5. Σύστημα επικοινωνίας.

Η κάθε πιθανή ακολουθία συμβόλων στην είσοδο συνεπάγεται μια κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων στην έξοδο. Δύο διαφορετικές ακολουθίες εισόδου μπορεί να δημιουργήσουν την ίδια ακολουθία στην έξοδο και άρα δεν θα είναι ξεκάθαρο ποια ακολουθία ήταν στην είσοδο. Ένα από τα προβλήματα που αφορούν τη σχεδίαση ενός συστήματος επικοινωνίας είναι η επιλογή ενός υποσυνόλου των πιθανών ακολουθιών συμβόλων στην είσοδο με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε μεταξύ τους, να υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα ανακατασκευής της ακολουθίας εισόδου με βάση την παρατήρηση στην έξοδο με αμελητέα πιθανότητα σφάλματος. Ο μέγιστος ρυθμός στον οποίο μπορούμε να το πετύχουμε αυτό ονομάζεται χωρητικότητα του καναλιού.

Αναλύοντας την παραπάνω απεικόνιση του τηλεπικοινωνιακού συστήματος προκύπτουν τα εξής μέρη:

- Η πηγή πληροφορίας

- Ο κωδικοποιητής πηγής

- Ο κωδικοποιητής διαύλου

- Ο διαμορφωτής

- Ο δίαυλος

Εμείς στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τον δίαυλο επικοινωνίας.

Δίαυλος επικοινωνίας

Πολύ σημαντική είναι η σχέση της θεωρίας κωδίκων με το δίαυλο που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση της πληροφορίας. Η θεωρία κωδίκων και οι λύσεις που προσφέρει χαρακτηρίζονται από άμεση εξάρτηση από το είδος του καναλιού διαμέσου του οποίου πραγματοποιείται η διάδοση της πληροφορίας. Αν ανατρέξουμε στο μοντέλο του τυπικού τηλεπικοινωνιακού συστήματος, παρατηρούμε ότι μεταξύ του κωδικοποιητή και του αποκωδικοποιητή παρεμβάλλονται τρεις επιπλέον δομές, ο διαμορφωτής, ο δίαυλος και ο αποδιαμορφωτής. Οι δομές αυτές αποτελούν το Διακριτό Δίαυλο. Η είσοδος και η έξοδος του διακριτού διαύλου είναι δυαδικές ακολουθίες με ρυθμό δεδομένων r_c bps. Αν η έξοδος του αποκωδικοποιητή εξαρτάται αποκλειστικά από την ακολουθία δυαδικών ψηφίων που μεταδίδεται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και όχι από μπλοκ δεδομένων που προηγήθηκαν, ο εν λόγω δίαυλος δεν έχει μνήμη.

Δεδομένου ότι ο θόρυβος ασκεί την ίδια επίδραση σε όλα τα μεταδιδόμενα δυαδικά ψηφία, διαδίδεται δηλαδή με την ίδια πιθανότητα σε όλα τα bits, χωρίς να υπάρχει μνήμη της επίδρασης, αναφερόμαστε στον Διακριτό Δίαυλο Χωρίς Μνήμη (Discrete Memoryless Channel, DSC).

Η πιθανότητα λήψης ενός εσφαλμένου δυαδικού ψηφίου εξαιτίας της επίδρασης του θορύβου, είναι ίση για όλα τα μεταδιδόμενα ψηφία, ανεξάρτητα από τη θέση που κατέχουν μέσα στο μεταδιδόμενο μπλοκ. Η πιθανότητα ορθής λήψης ενός συμβόλου αναπαρίσταται με το σύμβολο p, και επειδή η πιθανότητα αυτή είναι ίδια για όλα τα σύμβολα ο δίαυλος ονομάζεται συμμετρικός. Αν θεωρήσουμε ότι το πλήθος των δυνατών τιμών που μπορούν να πάρουν τα ψηφία που μεταδίδονται, είναι m, το κανάλι αποκαλείται m-συμμετρικό (m-symmetric channel). Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η μετάδοση δυαδικών ψηφίων, δηλαδή μόνο των ψηφίων 0 και 1 και το κανάλι ονομάζεται Δυαδικό Συμμετρικό (Binary Symmetric Channel, BSC). Στην απλή θεωρία της κωδικοποίησης όλα τα κανάλια θεωρούνται δυαδικά συμμετρικά. Η αξιοπιστία του διαύλου επικοινωνίας, εκφράζεται με την πιθανότητα ορθής λήψης p, δηλαδή με το κατά πόσο το ψηφίο που στέλνει η πηγή είναι ίσιο με αυτό που έφτασε στην πλευρά του δέκτη. Ένα κανάλι με πιθανότητα p=1 είναι το πλέον αξιόπιστο, καθώς δεν εισάγει καθόλου θόρυβο, ενώ αντίθετα το κανάλι με πιθανότητα p = 0 δεν έχει κανένα νόημα, καθώς οδηγεί στη εσφαλμένη μετάδοση όλων των ψηφίων που αποστέλλονται. Στην πράξη, όλοι οι τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι έχουν πιθανότητα με τιμές που κυμαίνονται από ½ ως 1 ($½ < p < 1$).

3.1 Χωρητικότητα Καναλιού

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια της χωρητικότητας. Η χωρητικότητα είναι η πιο σημαντική παράμετρος ενός καναλιού επικοινωνίας, αφού υποδηλώνει το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορούν να μεταδοθούν δεδομένα μέσω αυτού. Επίσης, στη μελέτη μας θα λάβουμε υπόψη το θόρυβο ως παράμετρο που συμβάλλει στον περιορισμό της χωρητικότητας.

3.1.1 Η Χωρητικότητα Του Καναλιού-Θεώρημα Shannon

Στις τηλεπικοινωνίες κανάλι ορίζεται ο χώρος μετάδοσης της πληροφορίας ανάμεσα στον πομπό και στο δέκτη και χωρητικότητα καναλιού ονομάζεται η οριακή τιμή του ρυθμού μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι. Ο λόγος του ορισμού της χωρητικότητας καναλιού απορρέει από το παρακάτω θεώρημα (Θεώρημα Shannon), το οποίο είναι θεμελιώδες στη θεωρία των τηλεπικοινωνιών.

Θεώρημα Shannon

Αν ο ρυθμός πληροφορίας R είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με τη χωρητικότητα C του καναλιού, δηλαδή $R \leq C$ (Η εξίσωση αυτή ισχύει ακόμη και όταν υπάρχει θόρυβος στο κανάλι), τότε υπάρχει πάντα μια τεχνική κωδικοποίησης, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας μέσα από το κανάλι με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αντίθετα, αν $R > C$, τότε δεν είναι δυνατή η μετάδοση μηνυμάτων χωρίς λάθη.

3.1.2 Περιορισμός Της Χωρητικότητας Καναλιού Λόγω Θορύβου

Ένα σήμα που στέλνεται σε έναν δέκτη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια τυχαία μεταβλητή, έστω X. Το X λοιπόν εκφράζεται απόλυτα μέσω της πιθανότητας να στείλει ο αποστολέας στον παραλήπτη την αλληλουχία γραμμάτων x. Αν το κανάλι έχει θόρυβο η τελευταία θα αλλάξει, εξαιτίας των σφαλμάτων που κάνουν το $0 \rightarrow 1$ και αντιστρόφως. Το σήμα λοιπόν που θα λάβει ο δέκτης μπορεί να θεωρηθεί σα μια άλλη τυχαία μεταβλητή Y. Το πόσο συσχετίζονται τα X και Y είναι ουσιαστικά η χωρητικότητα του καναλιού, μιας και η χωρητικότητα εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό bits της αρχικής πληροφορίας που μπορεί να σταλθεί στον δέκτη. Με άλλα λόγια η χωρητικότητα του καναλιού είναι ίση με την κοινή εντροπία των X και Y. Αν ο πομπός στείλει στον δέκτη ένα bit και αυτό που θα παραληφθεί, είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε η χωρητικότητα είναι ίση με 1 bit, ομοίως και η συσχέτιση τους. Αν το bit αυτό έχει πιθανότητα 1/2 να αλλάξει, τότε ο παραλήπτης δεν είναι σε θέση να γνωρίζει το αρχικό bit της πληροφορίας και συνεπώς η χωρητικότητα είναι 0.

Καθώς όμως ο αριθμός των συμβολικών καταστάσεων αυξάνει, η ικανότητα του δέκτη να διαχωρίσει μεταξύ αυτών ελαττώνεται με την εμφάνιση θορύβου ή/και παρεμβολών. Επομένως, ο λόγος σήματος προς θόρυβο παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του αριθμού των συμβολικών καταστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να επιτευχθεί επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα. Η συνδυασμένη επίδραση του θορύβου και του εύρους ζώνης στο ρυθμό μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι επικοινωνίας συνοψίζεται στην διάσημη πια σχέση των Shannon και Hartley:

$$C = B \cdot \log_2\left(\frac{S}{N} + 1\right), bits/s \qquad (3.1)$$

Το θεώρημα των Shannon-Hartley δηλώνει ότι αν ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης B και για δεδομένο λόγο σήματος προς θόρυβο S/N είναι μικρότερος από το προβλεπόμενο όριο χωρητικότητας C, τότε η επικοινωνία είναι απαλλαγμένη από σφάλματα. Η σχέση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε την εφικτότητα κάθε ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας, διότι επιτρέπει άμεσα τον καθορισμό του θεωρητικού άνω ορίου της χωρητικότητας, καθώς υποθέτει ότι η επικοινωνιακή ζεύξη είναι πλήρως απαλλαγμένη από αλλοιώσεις και παρεμβολές και υφίσταται μόνο τη επίδραση AWGN θορύβου.

Θεώρημα Shannon για κανάλια με θόρυβο

Αν R είναι ο ρυθμός παραγωγής πληροφορίας, τότε δεδομένου ότι $\mathrm{R} < \mathrm{C} = \mathrm{I}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$, η πληροφορία μπορεί να μεταδοθεί με αυθαίρετη αξιοπιστία.

Μια πηγή X με εντροπία H θα παράγει περίπου $2^{\mathrm{nH(X)}}$ τυπικές ακολουθίες σε n βήματα (το περίπου μπαίνει διότι η παραπάνω πρόταση ισχύει ακριβώς στο όριο των πολύ μεγάλων n). Τώρα, κάθε μια από τις τυπικές ακολουθίες θα διαβαστεί και κάθε έξοδος θα μπορεί να παραχθεί από περίπου $2^{nH(X|Y)}$ εισόδους, μιας και το H(X|Y) αναπαριστά την εντροπία του X ενώ το Y έχει μετρηθεί. Γι΄αυτό λοιπόν ο ολικός αριθμός των χρήσιμων μηνυμάτων είναι :

$$N = 2^{n(H(X) - H(X|Y))} \qquad (3.2)$$

και γι’ αυτό για τη χωρητικότητα διαλέγουμε μια πηγή με εντροπία που μεγιστοποιεί την ποσότητα H(X)-H(X|Y), δηλαδή την κοινή εντροπία I(X|Y). Αν διαλέξουμε πηγή που παράγει περισσότερη εντροπία απ’ τη χωρητικότητα του καναλιού, τότε το κανάλι δε θα μπορέσει να διαχειριστεί σωστά αυτό το μεγάλο ποσό πληροφορίας με αποτέλεσμα να γίνουν λάθη. Η αμοιβαία-κοινή λοιπόν εντροπία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα μιας και μέσω αυτής εκφράζεται ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσω του καναλιού.

Παράδειγμα 3.1

Υποτίθεται μια γραμμή PSTN στην οποία το εύρος ζώνης είναι 3000Hz και ο λόγος σήματος προς θόρυβος είναι S/N = 20 dB. Ζητείται η χωρητικότητα της γραμμής.

Λύση:

Ο θόρυβος θα πρέπει να μετατραπεί σε καθαρό αριθμό από dB. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$\frac{S}{N}\ \mathrm{dB} = 10\ \log 10\left(\frac{S}{N}\right)$$

Από την εξίσωση προκύπτει τελικά: $\frac{S}{N} = 100$.

Επομένως, από τον τύπο του Shannon προκύπτει ότι η χωρητικότητα είναι: $\mathrm{C}{=}3000 \cdot \log_2\ 100 + 1 = 19963\ \mathrm{bps}$.

3.2 Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τα χαρακτηριστικά ενός Gaussian καναλιού επικοινωνίας, καθώς και με τον ορισμό της χωρητικότητας του.

Το Gaussian κανάλι αποτελεί ένα χρόνο-διακριτό κανάλι με έξοδο Yi σε χρόνο i, όπου Yi είναι το άθροισμα των συμβόλων εισόδου Xi και του θορύβου Zi. Ο θόρυβος Zi προέρχεται από μια Gaussian κατανομή με διακύμανση N.

$$\mathrm{Yi} = \mathrm{Xi} + \mathrm{Zi}, \quad \mathrm{Zi} \sim \mathrm{N}\;\; 0,\, \mathrm{N} \qquad (3.3)$$

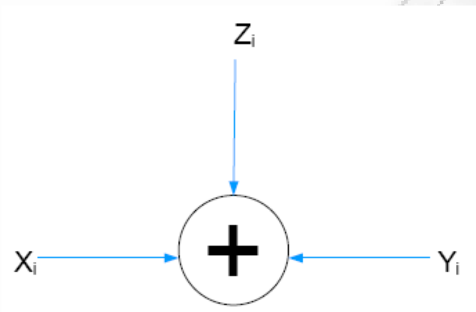
Ο θόρυβος Zi υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητος από το σήμα X_i. Το συγκεκριμένο κανάλι αποτελεί ένα πρότυπο για ορισμένα κοινά κανάλια επικοινωνίας, όπως τα ενσύρματα και ασύρματα τηλεφωνικά κανάλια και οι δορυφορικές συνδέσεις. Χωρίς περαιτέρω προϋποθέσεις, η χωρητικότητα αυτού του καναλιού μπορεί να είναι άπειρη. Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδέν, ο δέκτης λαμβάνει τα σύμβολα μεταφοράς χωρίς σφάλματα. Από τη στιγμή που τα σύμβολα X μπορούν να πάρουν κάθε πραγματική τιμή, το κανάλι μπορεί να μεταδώσει ένα αυθαίρετο πραγματικό αριθμό χωρίς λάθη.

Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδενική και δεν υπάρχει περιορισμός στην είσοδο, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα άπειρο υποσύνολο συμβόλων στην είσοδο, με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, έτσι ώστε να είναι διακριτά στην έξοδο, με μικρή πιθανότητα λάθους, με αποτέλεσμα ένα τέτοιο σύστημα να έχει άπειρη χωρητικότητα. Έτσι, αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδέν ή η είσοδος είναι χωρίς περιορισμούς, η χωρητικότητα του καναλιού είναι άπειρη.

Ο πιο συνηθισμένος περιορισμός της εισόδου είναι ο περιορισμός της ισχύος. Υποθέτουμε μέση ισχύ που πληροί τους περιορισμούς. Για οποιοδήποτε κωδικοποιημένο σύμβολο (x_1, x_2,..., x_n) που μεταδίδεται μέσω του καναλιού, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P \qquad (3.4)$$

Πάνω στο συγκεκριμένο κανάλι επικοινωνίας μοντελοποιούνται αρκετά κανάλια, συμπεριλαμβανομένου του ραδιοφώνου και των δορυφορικών συνδέσεων. Ο προσθετικός θόρυβος στα κανάλια μπορεί να οφείλεται σε διάφορες αιτίες.



Εικόνα 6. Αναπαράσταση προσθετικού θορύβου.

Ωστόσο, από το κεντρικό θεώρημα, η σωρευτική επίδραση ενός μεγάλου αριθμού μικρών τυχαίων αποτελεσμάτων πλησιάζει αρκετά στα πραγματικά μεγέθη, οπότε η Γκαουσιανή υπόθεση ισχύει σε ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων.

Αναλύοντας ένα πιο απλοποιημένο τρόπο χρησιμοποίησης αυτού του καναλιού, αρχικά στέλνεται 1 bit πληροφορίας με μια χρήση του καναλιού. Δεδομένου του περιορισμού της ισχύος, το καλύτερο που μπορεί να γίνει είναι να σταλθεί ένα από τα δύο μεγέθη, + √ P ή - √ P. Ο δέκτης εξετάζει τα αντίστοιχα Y που έλαβε και προσπαθεί να αποφασίσει ποιο από τα δύο μεγέθη έχει ληφθεί. Υποθέτοντας ότι και τα δύο αυτά μεγέθη έχουν εξίσου πιθανότητες να σταλθούν (αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που σταλθεί ακριβώς 1 bit πληροφορίας), η βέλτιστη σχέση αποκωδικοποίησης είναι να αποφασιστεί ότι το + √ P εστάλη στην περίπτωση που Y> 0 και το - √ P εστάλη αν ισχύει Y <0. Η πιθανότητα σφάλματος με ένα τέτοιο σύστημα αποκωδικοποίησης είναι:

$$P_e = \frac{1}{2}\Pr(Y < 0 \mid X = +\sqrt{P}) + \frac{1}{2}\Pr(Y > 0 \mid X = -\sqrt{P})$$

$$=\frac{1}{2}\Pr(Z<-\sqrt{P}\mid X=+\sqrt{P})+\frac{1}{2}\Pr(Z>\sqrt{P}\mid X=-\sqrt{P})$$

$$=\Pr(Z>\sqrt{P})$$

$$=1-\Phi(\sqrt{P/\mathrm{N}})$$

όπου Φ(x) είναι η αθροιστική κανονική συνθήκη:

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)}dt \qquad (3.5)$$

Χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο σύστημα, έχουμε μετατρέψει το Gaussian κανάλι σε ένα διακριτό δυαδικό συμμετρικό κανάλι με ‘crossover’ πιθανότητα Pe. Ομοίως, με τη χρήση τεσσάρων-τιμών στο σήμα εισόδου, μπορούμε να μετατρέψουμε το Gaussian κανάλι σε ένα διακριτό κανάλι τεσσάρων-εισόδων. Σε ορισμένα πρακτικά συστήματα διαμόρφωσης, χρησιμοποιούνται παρόμοιες ιδέες για τη μετατροπή του συνεχούς καναλιού σε ένα διακριτό κανάλι. Το βασικό πλεονέκτημα ενός διακριτού καναλιού είναι η εύκολη επεξεργασία του σήματος εξόδου για διόρθωση λαθών, αλλά ορισμένες πληροφορίες χάνονται κατά την μεταφορά.

Ορισμοί

Ορίζοντας την (πληροφορία) χωρητικότητας του καναλιού ως το μέγιστο της κοινής πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ικανοποιώντας τον περιορισμό της ισχύς στην είσοδο:

Η χωρητικότητα πληροφορίας στο Gaussian κανάλι με τους περιορισμούς τις ισχύος P είναι:

$$C=\max_{f(x):E\cdot X^2\le P} I(Y;Y) \qquad (3.6)$$

Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε την χωρητικότητα της πληροφορίας αναπτύσσοντας την I(X; Y):

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Y \mid X)$$

$$= h(Y) - h(X + Z \mid X)$$

$$= h(Y) - h(Z \mid X)$$

$$= h(Y) - h(Z) \quad (3.7)$$

Όπου το Z εξαρτάται από το X. Με $h(Z) = \frac{1}{2}\log 2\pi eN$ και

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N \qquad (3.8)$$

Όπου το X και το Z είναι εξαρτώμενα και EZ = 0. Από την σχέση $EY^2 = P + N$, η εντροπία του Y ορίζεται από την

$$\frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) \qquad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στον ορισμό της κοινής πληροφορίας, έχουμε επιτύχει:

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Z)$$

$$\leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi eN$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad (3.10)$$

Άρα η χωρητικότητα της πληροφορίας ενός Gaussian καναλιού είναι:

$$C = \max_{E\cdot X^2 \leq P} I(X;Y) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad (3.11)$$

Η μεγιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν X ~ N (0, P).

Η χωρητικότητα C ενός καναλιού με εύρους ζώνης B με προσθετικό θόρυβο και με κατανομή Gauss περιορισμένου εύρους ζώνης είναι:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right), bits/\sec ond, bps \quad (3.12)$$

όπου S είναι η μέση ισχύς του σήματος και *N* η μέση ισχύς του θορύβου, στην έξοδο του καναλιού. Το θεώρημα αυτό αν και περιορίζεται για την περίπτωση Gaussian θορύβου, η συνέπειά του είναι γενική, αφού στα περισσότερα συστήματα τηλεπικοινωνιών το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα Gaussian κανάλι. Επίσης, το θεώρημα εφαρμόζεται και σε διακριτά και σε συνεχή κανάλια.

Το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σπουδαίες συνέπειες. Πρώτον, δίνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του ρυθμού μετάδοσης αξιόπιστων δεδομένων μέσα από ένα Gaussian κανάλι. Έτσι, κάθε σχεδιασμός συστήματος πρέπει να γίνεται, έτσι ώστε η χωρητικότητα C να πλησιάζει την τιμή της παραπάνω εξίσωσης με έναν αποδεκτό ρυθμό σφαλμάτων. Η δεύτερη συνέπεια του θεωρήματος αυτού έχει να κάνει με την ανταλλαγή σήματος-προς-θόρυβο με το εύρος ζώνης.

Παράδειγμα 3.2

Να βρεθεί η απαιτούμενη χωρητικότητα καναλιού εύρους ζώνης B = 3 kHz για την ασφαλή μεταφορά δεδομένων με ρυθμό 10 kbps. Επίσης, να υπολογίσετε τη μεταβολή του SNR, όταν το B = 10 kHz.

Λύση:

Επειδή R = 10000 bps ⇒ C ≥ 10000 bps.

Όταν B = 3 kHz ⇒ SNR = 2(C/B) - 1 = 9

ενώ όταν B = 10 kHz ⇒ SNR = 1. Δηλαδή, μια αύξηση του εύρους ζώνης από 3 kHz σε 10 kHz, οδηγεί σε μείωση του SNR από 9 σε 1.

Στο παραπάνω παράδειγμα δόθηκε η κλειστή σχέση, που συνδέει την ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας, του εύρους ζώνης του καναλιού και του λόγου σήματος-προς-θόρυβο. Συγκεκριμένα, αύξηση του εύρους ζώνης μπορεί να εκμεταλλευθεί με ελάττωση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο και αντίστροφα ελάττωση του εύρους ζώνης πρέπει να πληρωθεί με αύξηση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο, για δεδομένη ποσότητα μεταφερόμενης πληροφορίας.

Παράδειγμα 3.3

Υπολογίστε τη χωρητικότητα ενός καναλιού χαμηλών συχνοτήτων με διαθέσιμο εύρος ζώνης 3000 Hz και λόγο σήματος-προς-θόρυβο SNR = 103 στην έξοδό του. Υποτίθεται ότι ο θόρυβος του καναλιού είναι Gaussian.

Λύση:

Η χωρητικότητα του καναλιού C δίνεται από την εξίσωση:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 3000\times\log_2(1+1000) \cong 29902\ bps$$

3.3 Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των διακριτών καναλιών επικοινωνίας. Θα αναπτύξουμε μαθηματικά υποδείγματα για τα διακριτά κανάλια επικοινωνίας και θα ορίσουμε την έννοια της χωρητικότητας ενός διακριτού καναλιού επικοινωνίας. Επίσης, στη μελέτη μας θα λάβουμε υπόψη το θόρυβο ως παράγοντα που επηρεάζει τη μετάδοση δεδομένων και θα διατυπώσουμε το θεώρημα κωδικοποίησης διακριτών καναλιών.

Το διακριτό κανάλι είναι ένα σύστημα που αποτελείται από ένα αλφάβητο εισόδου A, ένα αλφάβητο εξόδου B και ένα πίνακα (μητρώο) μεταβάσεων P(B|A) με στοιχεία τις υπό συνθήκη πιθανότητες $p_{ij} = p(b_j \mid a_i)$ που συνδέουν το σύμβολο εξόδου με το σύμβολο εισόδου α_i .

Διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη: Έχουμε όταν η κατανομή των πιθανοτήτων της εξόδου εξαρτάται από την είσοδο μόνο την συγκεκριμένη χρονική στιγμή και είναι ανεξάρτητη από τα σύμβολα εισόδου ή εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Χωρητικότητα πληροφοριακού καναλιού ενός διακριτού και χωρίς μνήμη καναλιού ως:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται πάνω σε όλες τις πιθανές κατανομές εισόδου p(x).

3.3.1 Το Αθόρυβο Διακριτό Κανάλι Επικοινωνίας

Σε ένα αθόρυβο κανάλι διακριτών σημάτων επιτυγχάνεται ο μέγιστος ρυθμός ροής της πληροφορίας κι αυτό διότι επιτρέπεται η χρήση όλων των δυνατών συνδυασμών των συμβόλων S_n με διάρκεια t_n.

Ο τηλέτυπος και η τηλεγραφία αποτελούν δύο απλά παραδείγματα ενός διακριτού καναλιού μετάδοσης πληροφοριών. Σε γενικές γραμμές, ένα διακριτό κανάλι αποτελεί ένα σύστημα στο οποίο μια σειρά επιλογών από ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων $S_1, \ldots S_n$ μπορεί να μεταδοθεί από το ένα σημείο στο άλλο. Κάθε ένα από τα σύμβολα S_i είναι πιθανόν να έχει μια ορισμένη χρονική διάρκεια t_i δευτερόλεπτων (δεν είναι απαραίτητα όμως ίδια για διαφορετικά S_i, για παράδειγμα, τις τελείες και παύλες στη τηλεγραφία). Δεν είναι ωστόσο απαραίτητο ότι όλες οι δυνατές ακολουθίες S_i θα καταφέρουν να μεταδοθούν μέσω του συστήματος, ορισμένες μόνο μπορούν να γίνουν αποδεκτές. Αυτές θα είναι και τα πιθανά λαμβανόμενα σήματα για το κανάλι. Έτσι, στην τηλεγραφία κάποια υποτιθέμενα σύμβολα μπορεί να είναι τα ακόλουθα: (1) Μια τελεία, που αποτελείται από το κλείσιμο γραμμής για μια μονάδα του χρόνου και στη συνέχεια από μια γραμμή ανοιχτή για μια μονάδα του χρόνου (2) Η παύλα, που αποτελείται από τρεις μονάδες χρόνου κλεισίματος και μία μονάδα ανοικτής (3) Ένα γράμμα που αποτελείται από τρεις μονάδες χρόνου ανοικτού κυκλώματος (4) Μια λέξη διαστήματος έξι μονάδων με τη γραμμή ανοιχτή. Θα μπορούσαμε να θέσουμε ως περιορισμό των ακολουθιών όπου τα διαστήματά τους δεν διαδέχονται το ένα το άλλο (για την περίπτωση που δύο γράμματα είναι γειτονικά, να είναι πανομοιότυπα με ένα διάστημα μιας λέξης). Το ερώτημα τώρα είναι πώς μπορεί κανείς να υπολογίσει τη χωρητικότητα του εν λόγω καναλιού για την μετάδοση της πληροφορίας.

Στην περίπτωση του τηλέτυπου όπου όλα τα σύμβολα είναι της ίδιας διάρκειας, με την κάθε ακολουθία να αποτελείτε από 32 σύμβολα, κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε 5 bits πληροφορίας. Αν το σύστημα μεταδίδει n σύμβολα ανά δευτερόλεπτο, είναι φυσικό να πούμε ότι το κανάλι έχει χωρητικότητα 5n bits ανά δευτερόλεπτο. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι το κανάλι ενός τηλέτυπου θα μεταδίδει πάντα πληροφορία με αυτό το ρυθμό - αυτό είναι το μέγιστο δυνατό ποσοστό και το αν ο πραγματικός ρυθμός μετάδοσης θα φθάνει το μέγιστο ποσοστό εξαρτάται από την πηγή της πληροφορίας που τροφοδοτεί το κανάλι.

Έχοντας λοιπόν σύμβολα με διαφορετικά μήκη και τους περιορισμούς σχετικά με τις επιτρεπτές ακολουθίες, προκύπτει ο εξής ορισμός:

Ορισμός

Η χωρητικότητα C ενός διακριτού καναλιού χωρίς την επίδραση του θορύβου δίνεται από:

$$C = \underset{T \to \infty}{Lim} \frac{\log N(T)}{T} \qquad (3.13)$$

όπου N (T) είναι ο αριθμός των επιτρεπτών σημάτων με διάρκεια T.

3.3.2 Το Διακριτό Κανάλι Επικοινωνίας Με Θόρυβο

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το σήμα είναι διαταραγμένο από θόρυβο κατά τη διάρκεια της μετάδοσης. Αυτό σημαίνει ότι το λαμβανόμενο σήμα δεν είναι απαραίτητα το ίδιο με αυτό που στάλθηκε από τον πομπό. Μπορούμε λοιπόν να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν ένα εκπεμπόμενο σήμα παράγει πάντα το ίδιο σήμα που ελήφθη, δηλαδή, το λαμβανόμενο σήμα είναι μια σαφή συνάρτηση του εκπεμπόμενου σήματος, τότε το αποτέλεσμα ονομάζεται παραμόρφωση. Αν αυτή η συνάρτηση έχει μια αντίστροφη, η παραμόρφωση μπορεί να διορθωθεί, τουλάχιστον αρχικά, απλώς εκτελείται αντίστροφα η συνάρτηση του λαμβανόμενου σήματος.

Η περίπτωση που ενδιαφέρει εν προκειμένω είναι όταν το σήμα δεν υφίσταται την ίδια αλλαγή κατά την μετάδοση. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε το λαμβανόμενο σήμα E ως συνάρτηση του εκπεμπόμενου σήματος S και μια δεύτερη μεταβλητή, τον θόρυβο N.

$$\mathrm{E} = \mathrm{f} \quad \mathrm{S}, \mathrm{N} \qquad (3.14)$$

Υποθέτουμε έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων και μια σειρά από πιθανότητες

$$\mathrm{p}_{\alpha,\mathrm{i}} \quad \beta, \mathrm{j} \qquad (3.15)$$

Αυτή είναι η πιθανότητα, αν το κανάλι είναι σε κατάσταση α όταν το σύμβολο i μεταδίδεται και όταν το σύμβολο j θα ληφθεί το κανάλι θα μείνει σε κατάσταση β. Έτσι, όταν κάποια διαδοχικά σύμβολα αλλοιωθούν από το θόρυβο που υπάρχει μόνο στην μία κατάσταση, το κανάλι θα περιγράφεται από το σύνολο των πιθανοτήτων των συμβόλων που θα μεταδίδονται $p_i(j)$, η πιθανότητα μετάδοσης σύμβολων i και παραληφθέντων συμβόλων j.

Το θεώρημα του Shannon αναφέρει ότι η τροποποίηση που πρέπει να κάνουμε στην ποσότητα του αρχικού ρυθμού πληροφορίας θα πρέπει βέβαια να είναι ίση με το ποσό της πληροφορίας που λείπει από το σήμα που δεχτήκαμε στο τέρμα του καναλιού. Το έλλειμμα αυτό θα πρέπει να μετρηθεί από την αβεβαιότητα που έχουμε κατά την λήψη ως προς το τι είχε πραγματικά εκπεμφθεί την είσοδο. Ξέρουμε όμως ότι ένα καλό μέτρο αβεβαιότητας είναι εντροπία που θα υπολογιζόταν από τις πιθανότητες να συμβεί λάθος. Έτσι, προσαρμόζοντας την έννοια της εντροπίας ώστε να περιλαμβάνει την περίπτωση του καναλιού με θόρυβο, θα έχουμε εντροπίες που θα αντιπροσωπεύουν την ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων στην είσοδό του, στην έξοδό του, καθώς και στις μέσες κατά σύμβολο απώλειες πληροφορίας λόγω θορύβου.

Έτσι, υπάρχουν μια σειρά από εντροπίες που μπορούν να υπολογιστούν. Πρώτον, υπάρχει η εντροπία Η(x) που είναι η μέση κατά σύμβολο ποσότητα πληροφορίας στην είσοδο του καναλιού (Με $P(\chi_i)$ τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων συμβόλων του συνόλου S' στην είσοδο). Η Η(χ) μπορεί να είναι ίδια με την εντροπία της πηγής, αν ο πομπός δεν είναι ο μοναδικός. Η εντροπία της πληροφορίας στην έξοδο του καναλιού, δηλαδή, το λαμβανόμενο σήμα, δηλώνεται με Η(y) (Με $P(y_i)$ οι πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων συμβόλων του συνόλου S' εξόδου.) Στην περίπτωση που το κανάλι είναι αθόρυβο ισχύει: Η (y) = Η (x). Η κοινή εντροπία των εισροών και εκροών θα είναι η (xy). Η εντροπία Η(y/χ) που ορίζεται και σαν «Υπό συνθήκη εντροπία» δίνει το μέτρο των απωλειών πληροφορίας λόγω σφαλμάτων του καναλιού. Η Η(x/y) όπου η συγκεκριμένη «Υπό συνθήκη εντροπία» εκφράζει την αμφιβολία της αντιστοιχίας των συμβόλων όπως τα θεωρούμε κατά την αντίστροφη φορά από την έξοδο.

Από τις παραπάνω εντροπίες, μπορεί να υπολογιστεί η «Συνδυασμένη Εντροπία» Η(χ,y), η οποία σχετίζεται με την πιθανότητα εμφάνισης των ζευγών εισόδου-εξόδου(χ_i,y_j). Οπότε από την σχέση:

$$P(\chi_i, y_j) = P(\chi_i)\,P(y_j/\chi_i) = P(y_j)\,P(\chi_i/y_j) \quad (3.16)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$H(x, y) = H(x) + H(y/x) = H(y) + H(x/y) \quad (3.17)$$

Με $H(y/\chi) = H(\chi/y) = 0$, όταν το κανάλι είναι αθόρυβο.

3.3.3 Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

Η αβεβαιότητα συμβόλου ή μηνύματος που έχει εισέλθει στο κανάλι, αλλά δεν έχει ληφθεί ακόμα στην έξοδο είναι ίση με H(X). Από την άλλη πλευρά, μετά τη λήψη στην έξοδο, η αβεβαιότητα (πληροφορικό περιεχόμενο) ενός συμβόλου ή μηνύματος που μεταδόθηκε είναι ίση H(X|Y). Επομένως, το πληροφορικό περιεχόμενο που μεταδόθηκε μέσω του καναλιού είναι ίσο με τη διαφορά των πληροφορικών περιεχομένων που αναφέραμε, H(X) – H(X|Y). Η χωρητικότητα του ενθόρυβου καναλιού ορίζεται ως το μέγιστο πληροφορικό περιεχόμενο που μπορεί να μεταδοθεί από το κανάλι. Υπάρχουν, ωστόσο, τρόποι διαβίβασης των πληροφοριών οι οποίοι μπορούν να καταπολεμήσουν τον θόρυβο.

Παράδειγμα 3.4

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο πιθανά σύμβολα 0 και 1 και μεταδίδονται με ρυθμό 1000 σύμβολα ανά δευτερόλεπτο με πιθανότητες $p_0 = p_1 = 1/2$. Έτσι, η πηγή παράγει πληροφορίες με ρυθμό 1000 bits ανά δευτερόλεπτο. Κατά τη διάρκεια της μετάδοσης ο θόρυβος εισάγει λάθη, έτσι ώστε κατά μέσο όρο 1 στα 100 να λαμβάνονται με λάθη (το 0 ως 1, ή 1 ως 0). Ποιος λοιπόν είναι ο ρυθμός της μετάδοσης των πληροφοριών;

Λύση :

Σίγουρα λιγότερο από 1000 bits ανά δευτερόλεπτο, καθώς περίπου το 1% των ληφθέντων συμβόλων είναι λανθασμένα. Μια πρώτη εκτίμηση θα μπορούσε να είναι ότι ο ρυθμός είναι 990 bits ανά δευτερόλεπτο, αφαιρώντας τον αναμενόμενο αριθμό των λαθών. Αυτό όμως δεν είναι αποδεκτό, δεδομένου ότι δεν γίνεται γνωστό ποια αιτία προκάλεσε τα σφάλματα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο θόρυβος είναι τόσο μεγάλος που τα ληφθέντα σύμβολα είναι εντελώς ανεξάρτητα από τα μεταδιδόμενα σύμβολα. Η πιθανότητα λήψης 1 είναι 1/2 όποια σύμβολα και να στάλθηκαν, ομοίως για 0. Έτσι, το ήμισυ περίπου των ληφθέντων συμβόλων είναι σωστά, αυτό βεβαίως αποτελεί ένα τυχαίο γεγονός.

Προφανώς η κατάλληλη διόρθωση που εφαρμόζεται στο ποσό των πληροφοριών που μεταδίδονται είναι η ποσότητα των πληροφοριών που λείπει από το λαμβανόμενο σήμα ή εναλλακτικά η αβεβαιότητα, όταν λάβαμε ένα μήνυμα από αυτό που όντως εστάλη. Η εντροπία ως μέτρο της αβεβαιότητας είναι λογικό να χρησιμοποιεί την υπό συνθήκη εντροπία του μηνύματος, όντας γνωστό το λαμβανόμενο σήμα, ως το μέτρο των στοιχείων που υπολείπονται. Οπότε ο ρυθμός της πραγματικής μεταφοράς, R, θα μπορούσε να υπολογιστεί με την αφαίρεση του ρυθμού της παραγωγής (δηλαδή, την εντροπία της πηγής) από τον μέσο ρυθμό της υπό συνθήκης εντροπίας.

$R = H(x) - H(x|y)$ (3.18)

Η υπό συνθήκη εντροπία $H(x|y)$ υπολογίζει τη μέση αβεβαιότητα του λαμβανόμενου σήματος.

Στο παράδειγμα που εξετάστηκε προηγουμένως, αν το 0 παραληφθεί η «εκ τον υστέρων» πιθανότητα θα είναι ότι το 0 διαβιβάστηκε 0,99 και ότι το 1 διαβιβάστηκε 0,01. Τα στοιχεία αυτά αντιστρέφονται αν φτάσει στο δέκτη το 1. Ως εκ τούτου:

$$H_y(x) = -\ 0.99\log 0.99 + 0.01\log 0.01\ = 0.81 \text{ bits/symbol}$$

ή 81 bits ανά δευτερόλεπτο. Μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα εκπέμπει με ρυθμό 1.000 - 81 = 919 bits ανά δευτερόλεπτο. Στην περίπτωση, όπου το 0 είναι εξίσου πιθανό να ληφθεί ως ένα 0 ή 1 και ομοίως το 1, οι «εκ των υστέρων» πιθανότητες είναι 1/2, 1/2 και

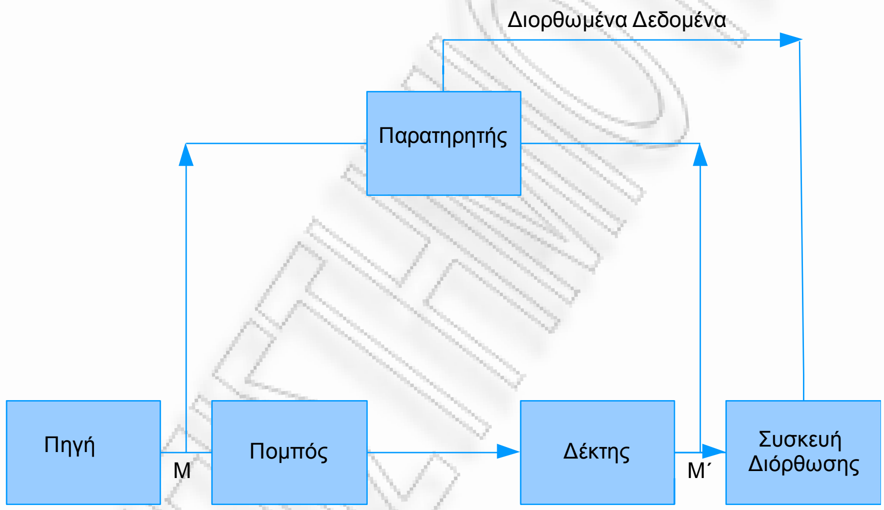
$$H_y(x) = -\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right] = 1 \text{ bit per symbol}$$

ή 1000 bits ανά δευτερόλεπτο. Ο ρυθμός μετάδοσης τότε είναι 0.

Ο επόμενος ορισμός δίνει μια άμεση ερμηνεία της υπό συνθήκης εντροπίας. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα επικοινωνιών και έναν παρατηρητή, ο οποίος μπορεί να δει το τι έχει αποσταλεί και τι έχει ανακτηθεί (με τα σφάλματα που οφείλονται στο θόρυβο). Ο παρατηρητής επισημαίνει τα λάθη κατά την ανάκτηση των μηνυμάτων και μεταδίδει τα δεδομένα μέχρι το σημείο που θα παραλειφθούν από το «κανάλι διόρθωσης» έτσι ώστε ο δέκτης να διορθώσει τα λάθη. Η κατάσταση αυτή αναφέρεται σχηματικά παρακάτω.

Ορισμός

Αν το κανάλι διόρθωσης έχει χωρητικότητα ίση με $H_y(x)$ είναι δυνατόν τόσο να κωδικοποιηθούν τα δεδομένα διόρθωσης όσο και να σταλθούν στο κανάλι, έχοντας διορθωθεί, αλλά με ένα αυθαίρετα μικρό κλάσμα ε σφάλματος. Αυτό βέβαια δεν είναι δυνατό αν η χωρητικότητα του καναλιού είναι μικρότερη από $H_y(x)$.



Εικόνα 7. Σχηματική αναπαράσταση ενός συστήματος που έχει υποστεί διόρθωση.

Παράδειγμα 3.5

Αν η πιθανότητα σφάλματος κατά τη μετάδοση δυαδικών συμβόλων είναι e = 0.1 να υπολογιστεί η χωρητικότητα του συμμετρικού διαύλου και του δυαδικού διαύλου εξάλειψης.

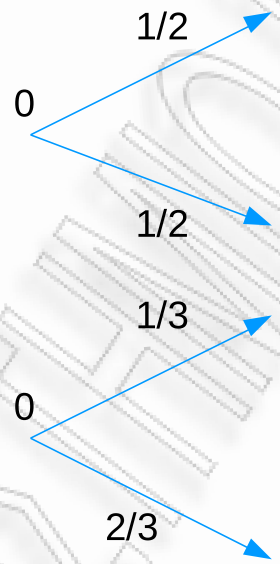
Λύση:

Η πιθανότητα ορθής μετάδοσης των δυαδικών συμβόλων είναι p = 1-0.1=0.9.

Για το συμμετρικό δυαδικό δίαυλο η χωρητικότητα είναι:

$$C = 1 - H_b(p) = 1 + p\log(p) + (1-p)\log(1-p) =$$
$$1 + 0.9\log(0.9) + 0.1\log(0.1) \approx 0.531, bits/symbol$$

Για το δυαδικό δίαυλο εξάλειψης η χωρητικότητα είναι: C= p = 0.9 bits/symbol



Εικόνα 8. Ενθόρυβο κανάλι χωρίς επικαλυπτόμενες εξόδους.

Παράδειγμα 3.6

Θεωρούμε ένα κανάλι επικοινωνίας του οποίου καθεμία από τις δύο δυνατές εισόδους μπορεί να ληφθεί στην έξοδο ως μία από δύο διαφορετικές τιμές (Εικόνα 8). Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

Λύση:

Αν και το κανάλι αυτό εμφανίζεται να είναι ενθόρυβο, στην πραγματικότητα δεν είναι, αφού από το σύμβολο της εξόδου μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα το σύμβολο της εισόδου. Επομένως, η χωρητικότητα αυτού του καναλιού είναι επίσης ίση με 1 bit/μετάδοση. Η χωρητικότητα είναι ίση με τη μέγιστη τιμή του H(X), αφού η ποσότητα πληροφορίας H(X/Y) ισούται με το 0. Η μέγιστη τιμή H(X) λαμβάνεται για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου, δηλαδή για $p(x_1 = 0) = 1/2$ και $p(x_2 = 1) = 1/2$.

Ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη Q χαρακτηρίζεται από ένα αλφάβητο εισόδου Αχ, και ένα αλφάβητο εξόδου Αy, καθώς και από μια σειρά συνδυασμένων πιθανοτήτων P (y | x), ένα για κάθε x ε Αχ.

Αυτές οι πιθανότητες μεταφοράς εισάγονται σε μια μήτρα μεταφοράς:

$$Q_{j|i} = P \quad y = b_j \mid x = a_i \qquad (3.18)$$

Γεμίζουμε συνήθως την μήτρα με τις μεταβλητές εξόδου j που εισάγονται στις γραμμές και τις μεταβλητές εισόδου i που ταξινομούνται στις στήλες, έτσι ώστε κάθε στήλη της Q να είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων. Έτσι, μπορούμε να επιτύχουμε την πιθανότητα των στοιχείων της εξόδου p_y από την πιθανότητα κατανομής των εισροών, p_x :

$$P_y = Qp_x \quad (3.19)$$

Παράδειγμα 3.7

Θεωρούμε ομοιόμορφο δίαυλο πληροφορίας του οποίου ο πίνακας είναι ίσος με:

$$p(y \mid x) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του διαύλου.

Λύση:

Η χωρητικότητα του διαύλου είναι:

$$C = \log(M) + \sum_{j=1} p(y_i / x_i)\log(p(y_i / x_i)) =$$

$$= \log(3) + 0.2\log(0.2) + 0.3\log(0.3) + 0.5\log(0.5) \approx 0.099, bits / symbol$$

Άσκηση

Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο αποτελείται από 4 κωδικά σύμβολα, τα 0, 1, 2 και 3. Οι πιθανότητες εμφάνισης στην είσοδο του καναλιού των κωδικών συμβόλων 0 και 1 είναι *p*/2, ενώ των συμβόλων 2 και 3 είναι *q*/2. Ακόμη, οι πιθανότητες ορθής μετάδοσης των κωδικών συμβόλων 0 και 1 από το κανάλι είναι ίση με 1, ενώ των κωδικών συμβόλων 2 και 3 είναι ίση με *p*. Τέλος, η πιθανότητα να εισέλθει στην είσοδο του καναλιού το σύμβολο 2 και να εξέλθει το σύμβολο 3 είναι ίση με 1 – *p* και το 3 στην είσοδο να εξέλθει ως 2 είναι επίσης 1 – *p*. Οι πιθανότητες αυτές μετάβασης $pij = p(yj / xi) = p(xi / yj)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί μια σχέση που πρέπει να πληροί η πιθανότητα *q* (ή η *p*) για την οποία η αμοιβαία πιθανότητα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού παίρνει τη μέγιστη τιμή.

3.3.4 Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για τα διακριτά κανάλια

Ορισμός

Έστω ένα διακριτό κανάλι με χωρητικότητα C και διακριτή πηγή με εντροπία H ανά δευτερόλεπτο. Αν H ≤ C, υπάρχει σύστημα κωδικοποίησης τέτοιο ώστε η ποσότητα της πληροφορίας να μεταδίδεται με μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αν H > C είναι δυνατόν να μεταδοθεί η πληροφορία με ρυθμό μεγαλύτερο της χωρητικότητας, ανεξαρτήτως της κωδικοποίησης που χρησιμοποιείται και χωρίς να αυξάνεται ανεξέλεγκτα ο αριθμός των σφαλμάτων.

Στο πρώτο μέρος του θεωρήματος έχουμε την περίπτωση μιας διακριτής πηγής με εντροπία *H*(*X*) και με τέτοια κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου ώστε να ισχύει :

$$C = H(X) - H(X|Y) \quad (3.20)$$

Το πλήθος των πιο πιθανών μηνυμάτων εισόδου που οδηγούν στη λήψη του ίδιου μηνύματος εξόδου θα είναι ίσο με

$$M_{x/y} = 2^{lH\ X|Y}. \quad (3.21)$$

Με την απόδειξη του θεωρήματος και αφού ισχύει ότι R < C, έχουμε R = C – ε = H(X) – H_Y(X) – є, όπου є είναι ένας θετικός σταθερός αριθμός. Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$p_{error} \leq \ 2^{lH(X|Y)} - 1\ \ 2^{l(-H(X|Y)-\varepsilon)} \leq 2^{-l\varepsilon} \quad (3.22)$$

Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος είναι μια απλή συνέπεια του ορισμού της χωρητικότητας. Ας υποθέσουμε ότι κωδικοποιούμε μια πηγή με εντροπία H (x) = C + a με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύσει H_y (x) = a - є με є θετικό. Στη συνέχεια, R = H (x) = C + α και

$$H(x) - H_y(x) = C + \epsilon \quad (3.23)$$

Από το θεώρημα βλέπουμε ότι είναι δυνατή η μετάδοση χωρίς σφάλματα. Βέβαια, επειδή δεν μπορούμε να έχουμε πολύ μεγάλα μήκη μηνυμάτων (και κωδικών λέξεων) για να πετύχουμε μετάδοση χωρίς σφάλματα, θα πρέπει να υπολογίζουμε με κάποιες πιθανότητες σφαλμάτων, που κυμαίνονται ανάλογα με την εφαρμογή από περίπου 10^{-14} έως 10^{-3}. Στην πράξη χρησιμοποιούνται κώδικες ελέγχου σφάλματος (κωδικοποίηση καναλιού) για τη μείωση των σφαλμάτων που εμφανίζονται κατά τη μετάδοση στα κανάλια επικοινωνίας.

3.3.5 Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Με Μνήμη

Τα κανάλια χωρίς μνήμη, δηλαδή κανάλια στα οποία η εμφάνιση ενός σφάλματος κατά τη μετάδοση ενός συμβόλου δεν επηρεάζει τη μετάδοση των επόμενων συμβόλων. Οι περισσότεροι από τους κώδικες ελέγχου σφάλματος που εφαρμόζονται βασίζονται στην παραδοχή ότι τα σφάλματα εμφανίζονται ως ανεξάρτητα τυχαία γεγονότα. Ωστόσο, σε πολλά κανάλια τα σφάλματα εκδηλώνονται μάλλον συσχετισμένα. Αυτό οφείλεται και στο ότι χρησιμοποιούνται πολύ υψηλοί ρυθμοί μετάδοσης, που έχουν ως αποτέλεσμα υφιστάμενες ατέλειες των επικοινωνιακών συστημάτων να προκαλούν σειρές διαδοχικών σφαλμάτων.

Στα κανάλια με μνήμη εκδηλώνονται, ορισμένες φορές, ξαφνικοί θόρυβοι, που επικρατούν του θορύβου Gauss και προκαλούν καταιγισμούς σφαλμάτων. Τα φαινόμενα των θορύβων είναι πολύπλοκα και γι' αυτό κάνουν δύσκολο το λεπτομερή χαρακτηρισμό των καναλιών με μνήμη.

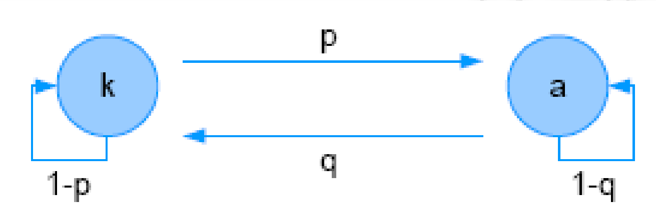
Ορισμός

Ορίζουμε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού με μνήμη υποθέτοντας ακολουθίες κωδικών συμβόλων στην είσοδο και στην έξοδο μήκους L, ως ακολούθως:

$$C = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \max_{p(x_1..x_L)} I(X_1....X_L;Y_1....Y_L) \quad (3.24)$$

Η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας προκύπτει από τη σύγκριση των κατανομών πιθανοτήτων όλων των κωδικών ακολουθιών εισόδου μήκους L.

Η εμφάνιση μιας ακολουθίας συσχετισμένων σφαλμάτων ονομάζεται «καταιγισμός». Ως μήκος του καταιγισμού εννοούμε το μήκος από το πρώτο μέχρι και το τελευταίο σφάλμα. Για τη μελέτη των καναλιών με μνήμη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στατιστικές μεθόδους ή υποδείγματα (μοντέλα) που δημιουργούν ακολουθίες σφαλμάτων παρόμοιες με αυτές των καναλιών. Τέτοια είναι τα υποδείγματα τα οποία αποτελούνται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης. Αυτά ονομάζονται, και «υποδείγματα Gilbert». Το πιο απλό μοντέλο αυτού του τύπου βλέπουμε στην Εικόνα 9.



Εικόνα 9. Μαθηματικό υπόδειγμα για κανάλια με μνήμη.

Το μοντέλο της Εικόνας 9 έχει δύο καταστάσεις, την κατάσταση **k** και την κατάσταση **a**. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης των δυαδικών ψηφίων είναι ίσος με 1 symbol/sec. Αν είμαστε στην κατάσταση **k** στην αρχή του χρονικού διαστήματος συμβόλου t = n, τότε το δυαδικό ψηφίο που μεταδίδεται λαμβάνεται χωρίς λάθος στην έξοδο. Αμέσως μετά, στην αρχή του επόμενου χρονικού διαστήματος συμβόλου t = n + 1, αποφασίζεται αν θα παραμείνει στην κατάσταση **k** με πιθανότητα 1 – p ή θα μεταπέσει στην κατάσταση a με πιθανότητα p. Αν παραμείνει στην κατάσταση **k**, έχουμε και πάλι ορθή μετάδοση ενός δυαδικού ψηφίου. Αντίθετα, αν μεταπέσει στην κατάσταση **k**, τότε η μετάδοση του δυαδικού ψηφίου είναι ορθή με πιθανότητα 1 – λ και εσφαλμένη με πιθανότητα λ. Μετά τη μετάδοση, στην αρχή του χρονικού διαστήματος συμβόλου t = n + 2 αποφασίζεται αν θα παραμείνει στην κατάσταση **a** με πιθανότητα 1 – q ή θα μεταπέσει στην κατάσταση **k** με πιθανότητα q. Παρατηρούμε ότι το μοντέλο προβλέπει πάντα ορθή μετάδοση στην κατάσταση **k** και ορθή ή εσφαλμένη μετάδοση στην κατάσταση **a**.

3.4 Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

Στις παρακάτω παραγράφους θα εξετάσουμε θέματα σχετικά με τη χωρητικότητα συνεχών καναλιών χωρίς μνήμη και με μνήμη. Επίσης, στη μελέτη μας θα λάβουμε υπόψη το θόρυβο ως παράγοντα που επηρεάζει τη μετάδοση δεδομένων και θα διατυπώσουμε το θεώρημα κωδικοποίησης συνεχών καναλιών.

Ένα συνεχές κανάλι χαρακτηρίζεται από συνεχή μηνύματα, παράγοντας έτσι μια συνεχή κυματομορφή σα συνάρτηση του χρόνου. Όπως στην περίπτωση του διακριτού καναλιού, κατά τη μετάδοση του σήματος στο συνεχές κανάλι επενεργεί προσθετικός ή και πολλαπλασιαστικός θόρυβος. Για το λόγο αυτό το μεταδιδόμενο σήμα θα πρέπει να ανακατασκευαστεί στην έξοδο από το διαστρεβλωμένο σήμα που λαμβάνεται.

3.4.1 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού

Σε ένα συνεχές κανάλι η εισροή ή η μετάδοση σημάτων θα είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου f (t) ενός συγκεκριμένου συνόλου, ενώ οι εκροές ή το λαμβανόμενο σήμα θα είναι οι διαταραγμένες εκδόσεις του. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία και η μετάδοση και η λήψη των σημάτων περιορίζονται σε ορισμένο εύρος ζώνης W. Στη συνέχεια θα οριστεί για χρόνο T και με 2TW αριθμούς η στατιστική δομή της μετάδοσης και του λαμβανόμενου σήματος. Έτσι, οι στατιστικές του εκπεμπόμενου σήματος θα καθοριστούν από την

$$P\ \ \chi_1,\ldots\ldots,\chi_n\ \ = P\ \ \chi\ . \quad (3.25)$$

κι εκείνων του θορύβου από την υπό συνθήκη κατανομή των πιθανοτήτων

$$P_{\chi 1}\ ,\ldots..,\ _{\chi 1}\ \ y_1,\ldots\ldots,Y_n\ = P_\chi\ \ y \qquad (3.26)$$

Ο ρυθμός μετάδοσης των πληροφοριών για συνεχή κανάλια ορίζεται κατά ανάλογο τρόπο με αυτό του διακριτού καναλιού, δηλαδή

$R = H \;\; x \;\; - H_y \;\; x$, (3.27)

όπου H (x) είναι η εντροπία της εισόδου και η H_y (x) εκφράζει την αμφιβολία της αντιστοιχίας των συμβόλων όπως θεωρούνται κατά την αντίστροφη φορά από την έξοδο. Η χωρητικότητα του καναλιού C ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ή του ρυθμού μετάδοσης κι επιτυγχάνεται με τη σύνδεση όλων των πηγών της πληροφορίας στο κανάλι έχοντας λάβει υπόψη τους υφιστάμενους περιορισμούς.

$$-\int P(x)\log P(x)dx + \iint P(x,y)\log\frac{P(x,y)}{P(y)}dxdy \quad (3.28)$$

Η σχέση αυτή γράφεται και ως εξής:

$$\iint P(x,y)\log\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}dxdy \qquad (3.29)$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\iint P(x,y)\log P(x)dxdy = \int P(x)\log P(x)dx \quad (3.30)$$

Οπότε η χωρητικότητα εκφράζεται ως εξής:

$$C = \underset{T\to\infty}{L\mathrm{im}}\,\underset{P(x)}{Max}\frac{1}{T}\iint P(x,y)\log\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}dxdy \quad (3.31)$$

3.4.2 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Χωρίς Μνήμη

Είναι προφανές ότι στον προηγούμενο τύπο, η R και C είναι ανεξάρτητες από το σύστημα συντεταγμένων από την στιγμή που ο αριθμητής και ο παρονομαστής του $\log\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}$ θα πολλαπλασιαστεί με τους ίδιους παράγοντες, όταν τα x και y μετατραπούν ένα-προς-ένα. Η συγκεκριμένη έκφραση της χωρητικότητας C είναι πιο γενική από την $\mathrm{H} \;\; \mathrm{x} \;\; - \mathrm{H} \;\; \mathrm{x|y}$.

Αν η λογαριθμική βάση που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της H (x) και της H(x|y) έχει δυο αποτελέσματα, τότε η C είναι ο μέγιστος αριθμός των δυαδικών ψηφίων που μπορούν να σταλούν ανά δευτερόλεπτο μέσω του καναλιού με μικρή πιθανότητα εμφάνισης λάθους της αντιστοιχίας κατά την αμφίδρομη διαδικασία.

Από μαθηματικής πλευράς μπορεί να αποδειχτεί ότι, αν u είναι το μήνυμα, x είναι το σήμα, y είναι το λαμβανόμενο σήμα (με την παρουσία θορύβου) και v είναι το ανακτημένο μήνυμα τότε

$$H \;\; \mathrm{x} \;\; - H \;\; \mathrm{x|y} \;\; \geq H(u) - H(u \mid v) \quad (3.32)$$

ανεξάρτητα από το τι εργασίες πραγματοποιούνται σε u για την απόκτηση του x ή στο y για την ανάκτηση του v. Δεν έχει σημασία το πώς θα κωδικοποιηθούν τα δυαδικά ψηφία για την απόκτηση του σήματος, ή το πώς θα αποκωδικοποιηθεί το λαμβανόμενο σήμα για την ανάκτηση του μηνύματος, η διακριτή τιμή για τα δυαδικά ψηφία δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα καναλιού που έχουμε ορίσει. Από την άλλη πλευρά, είναι δυνατόν κάτω από πολύ ορισμένες συνθήκες να βρεθεί ένα σύστημα κωδικοποίησης για τη διαβίβαση δυαδικών ψηφίων με ρυθμό C με ελάχιστη συχνότητα σφαλμάτων. Αυτό ισχύει σε ένα κατά προσέγγιση πεπερασμένο χώρο διαστάσεων για την συνάρτηση του σήματος, P (x,y), τόσο το x και το y είναι συνεχείς εκτός από το σύνολο των σημείων της μηδενικής πιθανότητας.

Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι όταν ο θόρυβος που προστίθεται στο σήμα είναι ανεξάρτητος από αυτό (με την έννοια της πιθανότητας). Τότε, P (y,x) είναι η συνάρτηση της διαφοράς $\mathrm{n} = \;\; \mathrm{y} - \mathrm{x}$,

$$P_x(y) = Q(y - x) \quad (3.33)$$

Έτσι μπορεί να οριστεί μια εντροπία για τον θόρυβο (ανεξάρτητα από τα στατιστικά στοιχεία του σήματος), δηλαδή η εντροπία της κατανομής Q (n). Αυτή η εντροπία θα συμβολίζεται με H (n).

Ορισμός

Αν το σήμα και ο θόρυβος είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το λαμβανόμενο σήμα είναι το άθροισμα του εκπεμπόμενου σήματος και του θορύβου, ο ρυθμός μετάδοσης είναι

$$R = H(y) - H(n) \quad (3.34)$$

δηλαδή, η εντροπία του ληφθέντος σήματος μείον την εντροπία του θορύβου. Η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι:

$$C = \underset{P(x)}{Max}\, H(y) - H(n) \quad (3.35)$$

Οπότε από $y = x + n$, έχουμε:

$$H(x, y) = H(x, n) \quad (3.36)$$

Επεκτείνοντας την αριστερή πλευρά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα x και n είναι ανεξάρτητα, προκύπτει:

$$H(y) + H_y(x) = H(x) + H(n) \quad (3.37)$$

Οπότε:

$$R = H(x) - H_y(x) = H(y) - H(n) \quad (3.38)$$

Δεδομένου ότι Η (n) είναι ανεξάρτητη από P(x), μεγιστοποιώντας το R απαιτείται η μέγιστη δυνατή Η (y), η εντροπία του λαμβανόμενου σήματος. Αν υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί όσον αφορά το σύνολο των μεταδιδόμενων σημάτων, η εντροπία του ληφθέντος σήματος πρέπει να μεγιστοποιηθεί ως αποτέλεσμα αυτών των περιορισμών.

Η περίπτωση Γκαουσιανού Λευκού Θορύβου

Στη περίπτωση που ο θόρυβος είναι λευκός θερμικός τα διαβιβασμένα σήματα περιορίζονται σε μια συγκεκριμένη μέση ισχύ P. Τότε τα λαμβανόμενα σήματα έχουν μέση ισχύ P + N, όπου N είναι η μέση ισχύς του θορύβου. Η μέγιστη εντροπία για τα ληφθέντα σήματα εμφανίζεται όταν στα σήματα εμπεριέχεται ένα σύνολο λευκού θορύβου, έτσι αποτελεί τη μεγαλύτερη δυνατή εντροπία για την ισχύ P + N και μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη επιλογή των μεταδιδόμενων σημάτων. Η εντροπία (ανά δευτερόλεπτο) των λαμβανόμενων στοιχείων είναι:

$$H(y) = W \log 2\pi e(P+N) \quad (3.39)$$

Και η εντροπία του θορύβου είναι:

$$H(n) = W \log 2\pi eN \quad (3.40)$$

Η χωρητικότητα του καναλιού είναι:

$$C = H(y) - H(n) = W \log \frac{P+N}{N} \quad (3.41)$$

Ορισμός

Η χωρητικότητα του καναλιού με εύρος ζώνης W που επηρεάζεται από λευκό θόρυβο ισχύος N, όταν η μέση ισχύς του πομπού περιορίζεται σε P δίνεται από τον τύπο :

$$C = W \log \frac{P+N}{N} \quad (3.42)$$

Αυτό σημαίνει ότι με την χρήση συστημάτων κωδικοποίησης μπορούν να μεταδοθούν δυαδικά ψηφία με ρυθμό $W \log_2 \frac{P+N}{N}$ bits ανά δευτερόλεπτο, με μικρή συχνότητα λαθών. Δεν είναι δυνατή η μετάδοση ενός υψηλότερου ποσοστού από οποιοδήποτε σύστημα κωδικοποίησης, χωρίς μια σαφή θετική συχνότητα σφαλμάτων. Ένα σύστημα που προσεγγίζει το ιδανικό ρυθμό μετάδοσης περιγράφεται ως εξής:

Έστω M = 2^s δείγματα λευκού θορύβου διάρκειας T το κάθε ένα. Πρόκειται για δυαδικούς αριθμούς από το 0 έως M - 1. Στον πομπό οι ακολουθίες των μηνυμάτων διασπώνται σε ομάδες s και μεταδίδονται με τον προσθετικό θόρυβο. Στο δέκτη τα μηνύματα M είναι γνωστά και το πραγματικό λαμβανόμενο σήμα, που περιέχει θόρυβο, συγκρίνεται με κάθε ένα από αυτά. Το δείγμα που έχει τη λιγότερη απόκλιση από το λαμβανόμενο σήμα επιλέγεται ως το εκπεμπόμενο σήμα και ο αντίστοιχος δυαδικός αριθμός ανακατασκευάζεται. Ο αριθμός M των δειγμάτων του θορύβου θα εξαρτηθεί από μια ανεκτή συχνότητα ε σφαλμάτων, αλλά για όλες σχεδόν τις επιλογές των δειγμάτων που έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{\log M(\varepsilon, T)}{T} = W \log \frac{P+N}{N} \quad (3.43)$$

Έτσι, δεν έχει σημασία πόσο μικρή είναι η συχνότητα ε που θα επιλεγεί, γιατί θέτοντας ένα αρκετά μεγάλο T, μεταφέρονται αναλόγως $TW \log \frac{P+N}{N}$ δυαδικά ψηφία, σε χρόνο T.

Η χωρητικότητα ενός καναλιού εύρους W που διαταράσσεται από τυχαίο θόρυβο, οριοθετείται από τις ανισότητες:

$$W \log \frac{P+N_1}{N_1} \le C \le W \log \frac{P+N}{N_1} \quad (3.44)$$

Όπου P = η μέση ισχύς πομπού, N = μέση ισχύς του θορύβου, N_1 = η εντροπία της ισχύς του θορύβου.

Εδώ η μέση ισχύς των διαταραγμένων μηνυμάτων θα είναι P + N. Η μέγιστη εντροπία για την ισχύ που θα προκύψει, αν το λαμβανόμενο σήμα συνοδεύεται από λευκό θόρυβο θα είναι W log2πe (P + N). Στην περίπτωση όμως που δεν υπάρξει κανένα σύνολο μεταδιδόμενων σημάτων με διαταραχές θορύβου, θα έχουμε παραγωγή λευκού θερμικού θορύβου στο δέκτη, κατά συνέπεια αυτό θέτει ένα άνω όριο για την H (y) . Οπότε:

$$C = MaxH(y) - H(n) \leq W \log 2\pi e(P+N) - W \log 2\pi e N_1 \quad (3.45)$$

Αυτό είναι το ανώτατο όριο που αναφέρεται στο θεώρημα. Το κατώτερο όριο μπορεί να βρεθεί από την εξέταση του ρυθμού με την δημιουργία μεταδιδόμενων σημάτων με λευκό θόρυβο, ισχύς P. Στην περίπτωση αυτή, η εντροπία της ισχύος του ληφθέντος σήματος πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο αυτή του λευκού θορύβου της ισχύος $P + N_1$, αφού ισχύει ότι η εντροπία της ισχύος του αθροίσματος των δύο συνόλων είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το άθροισμα των ξεχωριστών εντροπιών της ισχύος. Ως εκ τούτου:

$$MaxH(y) \geq W \log 2\pi e(P+N_1) \quad (3.46)$$

και

$$C \geq W \log 2\pi e(P+N_1) - W \log 2\pi e N_1 = W \log \frac{P+N_1}{N_1} \quad (3.47)$$

Όσο το P αυξάνεται, στο άνω και κάτω όριο κατά προσέγγιση έχουμε:

$$W \log \frac{P+N}{N_1} \quad (3.48)$$

Αν ο θόρυβος είναι λευκός, τότε $N = N_1$. Έτσι:

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \quad (3.49)$$

Αν ο θόρυβος είναι Gaussian, αλλά με ένα φάσμα που δεν είναι απαραίτητα επίπεδο, N_1 είναι η γεωμετρική μέση ισχύς του θορύβου κατά τις διάφορες συχνότητες του εύρους W. Έτσι:

$$N_1 = \exp \frac{1}{W} \int_W \log N(f)\, df \quad (3.50)$$

όπου N (f) είναι η ισχύς θορύβου στην συχνότητα f.

3.4.3 Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για Τα Συνεχή Κανάλια

Όπως στην περίπτωση των διακριτών καναλιών, έτσι και στην περίπτωση των συνεχών καναλιών είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος.

Ορισμός

Είναι δυνατή η μεταφορά ποσότητας πληροφορίας H(X) (bits/sec) μέσω συνεχούς καναλιού χωρητικότητας C, στο οποίο επενεργεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος, με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος επιθυμούμε, αν ισχύει H(X) < C.

3.4.4 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Με Μνήμη

Στη συνέχεια, θα εξεταστούν συνεχή κανάλια στα οποία επενεργεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος χωρίς όμως επίπεδη φασματική πυκνότητα ισχύος. Τα δείγματα, λοιπόν, δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητα, δηλαδή έχουμε κανάλι με μνήμη. Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας συνεχούς καναλιού με μνήμη θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τις φασματικές πυκνότητες ισχύος του στοχαστικού σήματος εισόδου και του θορύβου.

Σε μερικές εφαρμογές ο πομπός δεν περιορίζεται από τη μέση ισχύ της εξόδου, αλλά από την ανώτατη στιγμιαία ισχύ. Το πρόβλημα του υπολογισμού της χωρητικότητας του καναλιού είναι σε αυτή την περίπτωση η μεγιστοποίηση της (με την διακύμανση του συνόλου των μεταδιδόμενων συμβόλων).

$$H(y) - H(n) \quad (3.51)$$

υπό τον περιορισμό ότι όλες οι συναρτήσεις f (t) στο σύνολο είναι μικρότερες ή ίσες με το √S για όλα τα t. Ένας περιορισμός αυτού του τύπου δεν λειτουργεί τόσο καλά μαθηματικά όσο ο μέσος όρος του περιορισμού της ισχύος. Επιπλέον, για την περίπτωση αυτή έχουμε κατώτερο όριο που ισχύει για όλα τα S/N, ένα "ασυμπτωτικό" άνω όριο (ισχύει για τα μεγάλα S/N) και μια ασυμπτωτική τιμή της C για μικρό S/N.

Ορισμός

H C χωρητικότητα του καναλιού για εύρος W που συνταράχθηκε από λευκό θερμικό θόρυβο ισχύος N περιορίζεται από:

$$C \geq W \log \frac{2}{\pi e^3} \frac{S}{N} \quad (3.52)$$

όπου S είναι η μέγιστη επιτρεπτή ισχύς του πομπού.

Για αρκετά μεγάλο S / N, έχουμε:

$$C \leq W \log \frac{\frac{2}{\pi e} S + N}{N} (1+\varepsilon) \quad (3.53)$$

Όταν ο S / N → 0 (και εφόσον το εύρος W ξεκινά από το 0), τότε:

$$C / W \log\left(1+\frac{S}{N}\right) \rightarrow 1 \quad (3.54)$$

Η εντροπία των εκροών μπορεί να υπολογιστεί από αυτή του συνόλου των εισροών. Η εντροπία των εκροών ισούται με την εντροπία των εισροών συν το κέρδος του γεωμετρικού μέσου:

$$\int_0^W \log G^2 df = \int_0^W \log\left(\frac{W-f}{W}\right)^2 df = -2W \quad (3.55)$$

Οπότε η εντροπία της εξόδου είναι:

$$W\log 4S - 2W = W\log\frac{4S}{e^2} \quad (3.56)$$

Με την χωρητικότητα να είναι μεγαλύτερη από:

$$W\log\frac{2}{\pi e^3}\frac{S}{N} \quad (3.57)$$

Αποδεικνύεται ότι, για μικρό S/ N (Με μέγιστη ισχύ σήματος και τη μέση ισχύ του λευκού θορύβου), η χωρητικότητα του καναλιού είναι περίπου:

$$C = W\log\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad (3.58)$$

Περισσότερο η $C/W\log\left(1+\frac{S}{N}\right)\to 1$ με $\frac{S}{N}\to$ 0. Όταν η μέση ισχύς του σήματος P είναι μικρότερη ή ίση με την ανώτερη, ισχύει (για όλες τις περιπτώσεις S / N):

$$C \le W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \le W\log\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad (3.59)$$

Συμπερασματικά, η χωρητικότητα εξαρτάται από το φάσμα του σήματος εισόδου, καθώς και από το φάσμα του θορύβου. Τα ερωτήματα που συνήθως γεννιούνται αναφέρονται από τη μια πλευρά, στη μέγιστη τιμή της χωρητικότητας όταν δίνονται τα φάσματα εισόδου και θορύβου και από την άλλη πλευρά, στο φάσμα του σήματος εισόδου που οδηγεί σε μεγιστοποίηση της χωρητικότητας όταν δίνεται μόνο το φάσμα του θορύβου.

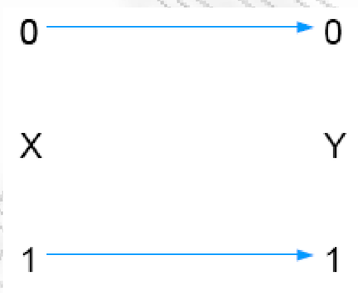
Η χωρητικότητα του καναλιού λαμβάνει τη μέγιστη τιμή αν το άθροισμα των φασμάτων του σήματος εισόδου και του θορύβου είναι ίσο με το λόγο του αθροίσματος των ισχύων τους προς το διπλάσιο του εύρους ζώνης και σταθερό.

3.5 Παραδείγματα Χωρητικότητας Καναλιού

Στην παράγραφο που ακολουθεί παραθέτονται κάποια παραδείγματα καναλιών με διαφορετικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες υπολογίζοντας σε κάθε ένα από αυτά την χωρητικότητα τους.

3.5.1 Αθόρυβο Δυαδικό Κανάλι

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κανάλι του οποίου η δυαδική είσοδος επαναλαμβάνεται ακριβώς στην έξοδο. Στην περίπτωση αυτή, κάθε bit έχει μεταδοθεί χωρίς λάθος. Ως εκ τούτου, ένα bit που δεν εμφανίζει σφάλμα μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού, με την χωρητικότητα του να είναι 1 bit.



Εικόνα 10. Αθόρυβο Δυαδικό Κανάλι.

Η χωρητικότητα C μπορεί να υπολογιστεί, με τη χρήση του p (x) = (1/2, 1/2), ως εξής :

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(Y) = \log 2 = 1bit$$

Εφόσον θα ισχύει:

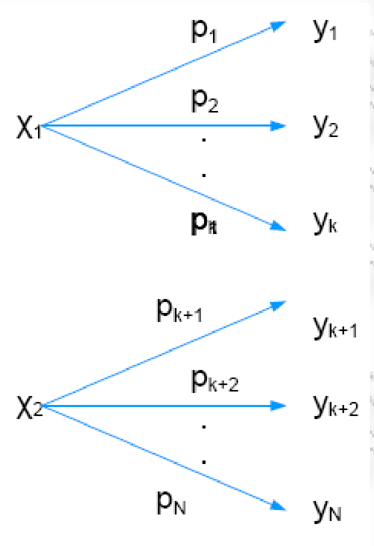
I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X) και H(X|Y)=H(Y|X)=0 με $p(x_i|y_j)$=0 ή 1.

3.5.2 Θορυβώδες Κανάλι Με Μη-Επικαλυπτόμενες Εξόδους

Το συγκεκριμένο κανάλι έχει δύο πιθανά αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις δύο εισόδους. Το κανάλι φαίνεται να είναι θορυβώδες, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Ακόμα και αν η παραγωγή του καναλιού είναι μια τυχαία συνέπεια της εισαγωγής, η είσοδος μπορεί να καθοριστεί από το αποτέλεσμα και επομένως κάθε κομμάτι που διαβιβάζεται μπορεί να ανακτηθεί χωρίς σφάλμα. Η χωρητικότητα του καναλιού είναι 1 bit ανά μετάδοση. Μπορεί επίσης να υπολογιστεί η χωρητικότητα , C = max I (X : Y) = 1 bit, με τη χρήση του p (x) = (1/2, 1/2).

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) \quad (3.60)$$

Με C=1bit channel/use (for uniform X).



$$\sum_{\iota=1}^{K} \rho_\iota = 1 \quad (3.61)$$

$$\sum_{\iota=\kappa+1}^{N} \rho_\iota = 1 \quad (3.62)$$

Εικόνα 11.Θορυβώδες Κανάλι Με Μη-Επικαλυπτόμενες Εξόδους.

3.5.3 Θορυβώδης Γραφομηχανή

Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τα χ_1, χ_3, χ_5,….χ_{N-1}, τότε έχουμε ένα κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους, άρα

$$C' = \max_{Px} \; I(x;y) \; = \max_{Px} \; H(x) - H(x)y \; = \max_{Px} \; H(x) \; = \log_2 \frac{N}{2} = \log_2 N - 1$$

Επομένως έχουμε , $C' = \log_2 N - 1$ και $C \geq C' \Rightarrow C \geq \log_2 N - 1$, (3.63)

Για το αρχικό κανάλι ισχύει:

$$C' = \max_{Px} \; I(x;y) \; = \max_{Px} \; H(y) - H(y)x \; =$$

$$= \max_{Px} \left\{ H(y) - H\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \left. \begin{array}{l} \max\limits_{Px} \; H(Y) \quad - H\left(\frac{1}{2}\right) \\ \max\limits_{Px} \; H(Y) \quad \leq \log_2 N \end{array} \right\} \Rightarrow C \leq \log_2 N - 1 \text{ , (3.64)}$$

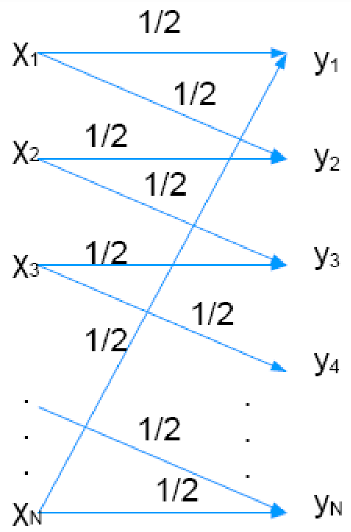
Από τις σχέσεις (3.63) και (3.64) ,για N=|χ| ,παίρνουμε:

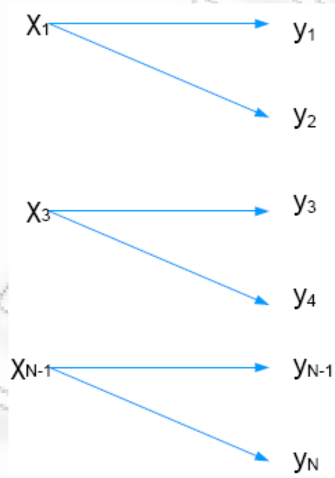
$$C = \log_2 |x| - 1 \text{ bits/channel use (3.65)}$$

για $P_x(k) = \begin{cases} \dfrac{2}{N}, k = 1, 3, ..., N-1 \\ 0, k = 2, 4, ..., N-1 \end{cases}$

Στην περίπτωση αυτή το σύμβολο εισόδου είτε μεταφέρεται στην έξοδο με πιθανότητα 1/2 είτε μετασχηματίζεται σε ένα επόμενο γράμμα με πιθανότητα 1/2. Αν η είσοδος έχει 26 σύμβολα χρησιμοποιώντας ένα παρά ένα τα σύμβολα στην είσοδο, τότε μπορούν να μεταδοθούν 13 σύμβολα χωρίς σφάλμα σε κάθε μετάδοση. Οπότε η χωρητικότητα του εν λόγω καναλιού είναι log 13 bit ανά μετάδοση. Συγκεκριμένα από τον τύπο της χωρητικότητας έχουμε:

C = max I (X: Y) = max (H (Y) - H (Y | X)) = max H(Y) - 1 = log 26 - 1 = log 13, θεωρώντας τις πιθανότητες στα σύμβολα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένες.

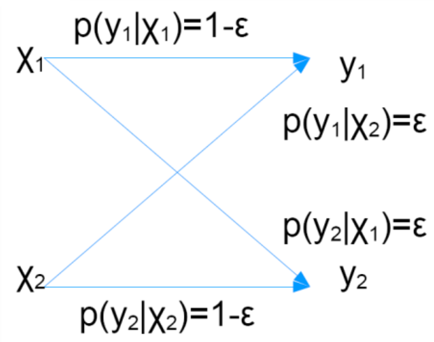




Εικόνα12. Θορυβώδης Γραφομηχανή.

3.5.4 Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC), το οποίο εμφανίζεται στην Εικόνα 58, αποτελεί το πιο απλό μοντέλο ενός καναλιού με σφάλμα, εμφανίζοντας όμως το μεγαλύτερο μέρος της πολυπλοκότητας του γενικότερου προβλήματος, αυτού της μετάδοσης με θόρυβο. Εξαιτίας της εμφάνισης σφάλματος, τα bits που λαμβάνονται δεν μπορούν να αποκαλύψουν που σημειώθηκαν τα λάθη. Κατά συνέπεια, όλα τα σύμβολα της πληροφορίας είναι αναξιόπιστα.



Εικόνα 13. Ενα δυαδικό συμμετρικό κανάλι.

Ωστόσο, υπάρχει η δυνατότητα σε ένα δυαδικό κανάλι να στείλουμε πληροφορία με μη μηδενικό ρυθμό μετάδοσης και απείρως μικρή πιθανότητα σφάλματος. Συνεπώς, στο συγκεκριμένο κανάλι θα ισχύει:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y\,|\,X) = H(Y) - \sum_x p_x(x)\cdot H(Y\,|\,X = x)$$

$$= H(Y) - \sum_x p_x(x)\cdot H(\varepsilon) = H(Y) - H(\varepsilon)$$

$$C = \max_{P_x}\ I(X;Y) \ = \max_{P_x}\ H(Y)\ - H(\varepsilon)$$

$$H(Y) \le \log|\,y\,| = 1$$

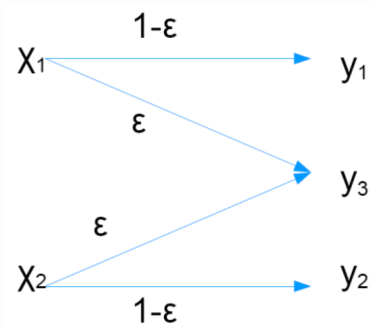
Προκύπτει ανισότητα επειδή η τυχαία μεταβλητή Υ είναι δυαδική. Ισότητα θα έχουμε, όταν η κατανομή εισόδου είναι ομοιόμορφη.

Άρα C=1-H(ε) dits /channel use .

Παρατήρηση: Αν ε=1/2 τότε η χωρητικότητα του καναλιού είναι C=0 , κατά συνέπεια το κανάλι είναι άχρηστο.

3.5.5 Δυαδικό Κανάλι Διαγραφής

Αν σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι χαθούν κάποια bits, χωρίς όμως να καταστραφούν, τότε έχουμε το δυαδικό κανάλι διαγραφής. Σε αυτό το κανάλι, το ε μέρος των bits διαγράφονται. Ο δέκτης γνωρίζει ποια κομμάτια έχουν σβηστεί. Το δυαδικό κανάλι διαγραφής έχει δύο εισόδους και τρεις εξόδους (Εικόνα 59).



Εικόνα14. Ενα δυαδικό κανάλι διαγραφής.

Υπολογίζουμε τη χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού διαγραφής ως εξής:

$1^{ος}$ Τρόπος

$$C = \max_{Px} I(X;Y) = \max_{Px} H(Y) - H(X \mid Y) = \max_{Px} H(Y) - H(\varepsilon) = \max_{Px} H(Y) \quad - H(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow C < \log_2 3 - H(\varepsilon) \qquad (10.66)$$

$2^{ος}$ Τρόπος

Εισάγουμε μια νέα Τ.Μ. : $E = \begin{cases} 1, \alpha\nu \ Y = y_3 \\ \varnothing, \alpha\nu \ Y = y_3 \end{cases}, \mu\varepsilon \ \ p_\varepsilon(1) = \varepsilon, p_\varepsilon(\varnothing) = 1 - \varepsilon$

Έχουμε ,

$$H(Y,\varepsilon) = H(Y) + H(\varepsilon \mid Y) = H(\varepsilon) + H(Y \mid \varepsilon) \Rightarrow$$

$H(Y) = H(\varepsilon) + p_\varepsilon(\varnothing) \cdot H(Y \mid \varepsilon) + p_\varepsilon(1) \cdot H(Y \mid \varepsilon) \Rightarrow$ με το ε=∅ και ε=1

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cdot H(Y \mid Y \neq y_3) + \varepsilon \cdot H(Y \mid Y \neq y_3) \Rightarrow$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cdot H(X \mid Y \neq y_3) \Rightarrow$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cdot H(X) \qquad (10.67)$$

Άρα, από τις σχέσεις (10.66) και (10.67)

$$\Rightarrow C = \max_{Px} \quad H(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cdot H(X) \quad - H(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\max_{Px} \; H(X) \;\Rightarrow$$

$C = 1-\varepsilon$ bits/channel use, for uniform x

Παρατηρήσεις:

Η πρώτη υπόθεση για τη μέγιστη του Η(Υ) θα μπορούσε να είναι log 3. Όμως, όποια κατανομή εισόδου και να χρησιμοποιήσουμε, δεν μπορούμε να την πετύχουμε.

Δεδομένου ότι ένα ε μέρος των bits χάνονται στο κανάλι, μπορεί να ανακτηθεί το πολύ, ένα ποσοστό 1 – ε των bits. Γι' αυτό και η χωρητικότητα είναι το πολύ 1 - ε. Δεν είναι αμέσως προφανές ότι είναι δυνατόν η επίτευξη αυτού του ποσοστού.

Σε πολλά κανάλια πρακτικά, ο αποστολέας λαμβάνει κάποια ανατροφοδότηση από το δέκτη. Οπότε αν ένα κομμάτι της πληροφορίας χαθεί κατά την αποστολή, τότε διαβιβάζονται εκ νέου μέχρι να ολοκληρωθεί η λήψη τους. Με ανατροφοδότηση λοιπόν είναι εφικτό να επιτευχτεί χωρητικότητα ίση με 1 – ε.

3.5.6 Γενικευμένο Συμμετρικό Κανάλι

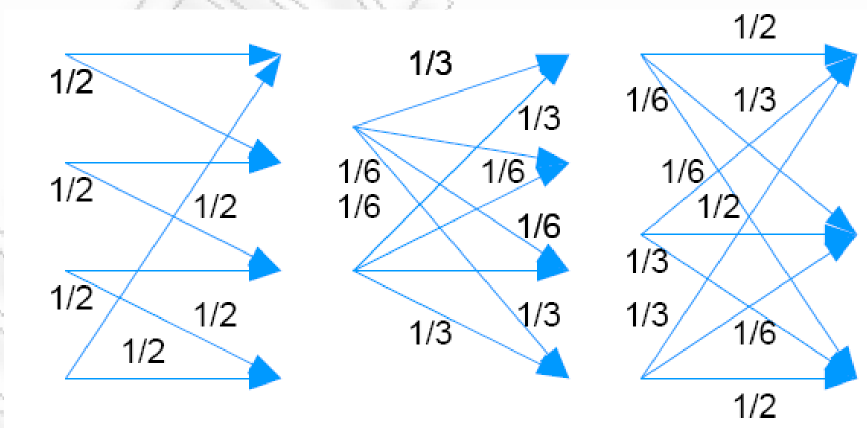
Υποθέτουμε ότι το πλήθος Μ των συμβόλων σε μια είσοδο , μπορεί να είναι διαφορετικό από το πλήθος Ν των συμβόλων στην έξοδο ενός καναλιού. Τότε, η μήτρα μεταφοράς γράφεται ως εξής:

$$P = \begin{bmatrix} P(y_1 \mid x_1) P(y_2 \mid x_1) \ldots P(y_N \mid x_1) \\ P(y_1 \mid x_2) P(y_2 \mid x_2) \ldots P(y_N \mid x_2) \\ \vdots \qquad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ P(y_1 \mid x_M) P(y_2 \mid x_M) \ldots P(y_N \mid x_M) \end{bmatrix}, \text{ για } \begin{matrix} X \in x, |x| = M \\ Y \in y, |y| = N \end{matrix}. \qquad (3.68)$$

Για την περίπτωση που το κανάλι είναι αθόρυβο, θα ισχύει M=N και η μήτρα μεταφοράς θα έχει διαγώνιο μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} P(y_1 \mid x_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P(y_2 \mid x_2) \ldots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ldots P(y_M \mid x_M) \end{bmatrix} \qquad (3.69)$$

Οι συγκεκριμένες συνθήκες μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια διαγραμμάτων, όπως το παράδειγμα της Εικόνας 60.



Εικόνα15. Συμμετρικά κανάλια με θόρυβο.

Προφανώς, ισχύει $\sum_{j=1}^{N} p(y_j \mid x_i) = 1, \quad \forall i = 1,\ldots,M.$ (3.70)

Συγκεκριμένα, η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού είναι C = 1 - H (p) bits ανά μετάδοση και η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού διαγραφής είναι C = 1 - α bits ανά μετάδοση. Εξετάζοντας το κανάλι με τη μήτρα μεταφοράς:

$$p(y \mid x) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

το περιεχόμενο στην x-οστη γραμμή και την y-στη στήλη δηλώνει την υπό συνθήκη πιθανότητα p (y | x) ότι δηλαδή η y λαμβάνεται όταν το x έχει αποσταλεί. Σε αυτό το κανάλι, όλες οι σειρές της μήτρας μεταφοράς είναι ίδιες αλλά με διαφορετική μεταξύ τους διάταξη ισχύοντας έτσι το ίδιο και για τις στήλες. Ένα τέτοιο κανάλι λέγεται ότι είναι συμμετρικό. Ένα άλλο παράδειγμα ενός συμμετρικού καναλιού είναι με την μορφή:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \mathrm{Z} \pmod{\mathrm{c}} \quad (3.72)$$

όπου το Z κατανέμεται στους ακέραιους αριθμούς {0, 1, 2,. . . , c – 1}, το X έχει το ίδιο αλφάβητο όπως το Z, και το Z είναι ανεξάρτητο του X.

Από τις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε εύκολα να βρούμε μια ρητή έκφραση για τη χωρητικότητα του καναλιού. Έστω ότι το r αποτελεί μια γραμμή της μήτρας μεταφοράς, τότε έχουμε:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(Y) - H(r)$$

$$\leq \log |y| - H(r) \quad (3.73)$$

Η ισότητα ισχύει αν η κατανομή της εξόδου είναι ομοιόμορφη. Αλλά για p(x) = 1/ |X| επιτυγχάνεται μια ομοιόμορφη κατανομή του Y, όπως φαίνεται από:

$$p(y)=\sum_{x\varepsilon X} p(y\,|\,x)p(x)=\frac{1}{|\,X\,|}\sum p(y\,|\,x)=c\frac{1}{|\,X\,|}=\frac{1}{|Y\,|} \quad (3.74)$$

όπου c είναι το άθροισμα των συμβόλων που εισήρθαν σε μια στήλη της μήτρας μεταφοράς.

Έτσι, η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι (3.71) :

$$C = \max_{p\ x} I \quad X; Y \quad = \log 3 - H \quad 0.5,\ 0.3\ ,\ 0.2$$

Η χωρητικότητα C χαρακτηρίζεται από μια ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων εισόδου.

Κατά τον υπολογισμό της χωρητικότητας, ισχύει ότι οι σειρές έχουν υποστεί μια διαφορετική διάταξη μεταξύ τους και ότι το άθροισμα των στηλών είναι όμοιο. Λαμβάνοντας υπόψη όλες αυτά τα χαρακτηριστικά, ισχύει:

Ορισμός

Αν όλες οι γραμμές έχουν τα ίδια στοιχεία με διαφορετική διάταξη και όλες οι στήλες έχουν επίσης τα ίδια στοιχεία με διαφορετική διάταξη , τότε το κανάλι ονομάζεται συμμετρικό.

Αν όλες οι γραμμές έχουν τα ίδια στοιχεία με διαφορετική όμως διάταξη και

$$\sum_{i=1}^{N} p(y_j\,|\,x_i)=\sum_{j=1}^{M} p(y_k\,|\,x_i), \quad \forall j,k=1,2,...,N \ , \quad (3.75)$$

τότε το κανάλι ονομάζεται ασθενώς συμμετρικό.

Για παράδειγμα, ένα κανάλι με αυτή τη μήτρα μεταφοράς είναι ασθενώς συμμετρικό, αλλά όχι συμμετρικό.

$$p(y|x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Οπότε για ένα ασθενή συμμετρικό κανάλι, ισχύει: C = log |y| - H (η γραμμή της μήτρας μεταφοράς) και αυτό επιτυγχάνεται από μια ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων στην είσοδο τους.

Και στις δύο όμως περιπτώσεις, αποδεικνύεται ότι:

$C = \log_2 |y| - H(p(y_1|x_i),..., p(y_M|x_i))$ bits/channel use

Ασκήσεις

1. Σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι εισέρχονται σύμβολα με ρυθμό r_s = 1000 σύμβολα/δευτερόλεπτο. Αν γνωρίζουμε πως τα σύμβολα 0 και 1είναι ισοπίθανα, να υπολογιστεί ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι αυτό για κάθε μια από τις περιπτώσεις p = 0.9, p = 0.8 και p = 0.6, όπου p η πιθανότητα σωστής μετάδοσης.

2. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C ενός διακριτού συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη (Binary Symetric Channel, BSC).

3. Ένα τερματικό CRT χρησιμοποιείται για την αποστολή αλφαριθμητικών δεδομένων σε έναν υπολογιστή. Το CRT είναι συνδεδεμένο με τον υπολογιστή με μια τηλεφωνική γραμμή που έχει εύρος ζώνης 3000Hz και SNR εξόδου 10 dB. Δεχόμαστε πως το τερματικό έχει 128 χαρακτήρες και ότι η αποστολή δεδομένων από τον τερματικό αποτελείται από ακολουθίες ανεξάρτητων ισοπίθανων χαρακτήρων.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

(β) Βρείτε το μέγιστο (θεωρητικό) ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δεδομένα από τον τερματικό στον υπολογιστή χωρίς σφάλματα.

4. Τηλεοπτικό σήμα με εύρος ζώνης 10 MHz οδηγείται σε κύκλωμα δειγματοληψίας που λειτουργεί με ρυθμό ίσο με 1.2 φορές το ρυθμό Nyquist. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη ν δειγματοληψία (υποθέτουμε πως είναι στατιστικά ανεξάρτητα) κβαντίζονται με την χρήση ενός κβαντιστή 8 bits. Η δυαδική ακολουθία που προκύπτει, μεταδίδεται δια μέσου ιδανικού χαμηλοπερατού διαύλου με εύρος ζώνης 30MHz και προσθετικό λευκό θόρυβο με κατανομή Gauss και ισχύς τέτοια ώστε να είναι SNR=20dB. Είναι δυνατή η χωρίς σφάλματα μετάδοση της δυαδικής ακολουθίας μέσα από το συγκεκριμένο δίαυλο;

5. Ένας φίλος σου διατείνεται ότι μπορεί να σχεδιάσει ένα σύστημα για τη διαβίβαση της εξόδου ενός μίνι υπολογιστή σε έναν εκτυπωτή γραμμών που λειτουργεί με την ταχύτητα 30 γραμμών ανά λεπτό μέσω μιας κοινής τηλεφωνικής γραμμής εύρους ζώνης 3.5 KHz με λόγο σήματος προς θόρυβο SNR=30 dB. Ας δεχθείτε ότι ο εκτυπωτής αυτός χρειάζεται δεδομένα των 8 bits ανά χαρακτήρα και τυπώνει γραμμές των 80 χαρακτήρων. Τον πιστεύεις;

6. Η έξοδος μιας ψηφιακής κάμερας διοχετεύεται σε τηλεπικοινωνιακό κανάλι με θόρυβο τέτοιας ισχύος ώστε να έχουμε SNR=20dB και το μέσο ρυθμό πληροφορίας να είναι $R = I \cdot r = 374.8 \cdot 10^5 bits / \sec$. Να υπολογιστεί το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης ώστε να μεταδοθεί η πληροφορία χωρίς σφάλματα.

7. Ένας τεχνικός επικοινωνίας σχεδίασε ένα σύστημα διασύνδεσης της εξόδου ενός μικροεπεξεργαστή με έναν εκτυπωτή που βρίσκεται σε άλλη θέση και έχει ταχύτητα εκτύπωσης 50 γραμμές/min με 400 χαρακτήρες/γραμμή. Επιτυγχάνει τη διασύνδεση αυτή μέσω τηλεφωνικής γραμμής με εύρος ζώνης B=3.4 kHz, με τέτοια ισχύ που το σήμα να φτάνει στον εκτυπωτή με ποιότητα $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 3dB$. Ο κώδικας που χρησιμοποιεί είναι ascii, δηλαδή 8bits/χαρακτήρα. Ποιά η γνώμη σας για την αποτελεσματικότητα της σύνδεσης αυτής;

8. Δίδεται το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη (κανάλι προσθετικού θορύβου), του οποίου η τυχαία μεταβλητή των τιμών εξόδου Y δίνεται από τη σχέση Y=X+Z. Η τ.μ. X παίρνει τις τιμές {0,1} με την ίδια πιθανότητα, ενώ η Z παίρνει τις τιμές {0, α}, με πιθανότητες P(Z=0)=P(Z=α)=1/2, όπου το α ανήκει στο σύνολο των ακεραίων {0, ±1, ±2, …}

Να σχεδιάσετε τα διαφορετικά κανάλια που είναι δυνατόν να προκύψουν για τις διαφορετικές τιμές του α, και να βρείτε τη χωρητικότητά τους.

(**Υπόδειξη**: Να παρατηρήσετε ότι σημαντικές για την απάντησή σας είναι οι τιμές του α, $0, \pm 1, \neq \pm 1$.)

9. Από την μία άκρη ενός επιταχυντή σωματιδίων εκπέμπονται στην αρχή πρωτόνια και νετρόνια, με πιθανότητες 3/4, και 1/4 αντίστοιχα, τα οποία παραλαμβάνονται στην έξοδο του επιταχυντή. Στη συνέχεια διεξάγεται πείραμα στη διάρκεια του οποίου εκπέμπονται όχι μόνο τα πρωτόνια και νετρόνια με τις ανωτέρω πιθανότητες, αλλά και συνεχής δέσμη ηλεκτρονίων με την αντίθετη όμως κατεύθυνση από αυτή των σωματιδίων. Έχει παρατηρηθεί ότι με πιθανότητα f=1/4 τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα δύο αυτά σωματίδια με αποτέλεσμα την καταστροφή των σωματιδίων πριν αυτά προλάβουν και φτάσουν στον προορισμό τους (έξοδο επιταχυντή). Να βρείτε ποιο είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι (επιταχυντή) καθώς και την χωρητικότητα του καναλιού (για κατάλληλες πιθανότητες εκπομπής πρωτονίων και νετρονίων), στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

α) Πριν από τη διεξαγωγή του πειράματος, όταν δηλαδή δεν εκπέμπονται ηλεκτρόνια από την αντίθετη κατεύθυνση, και,

β) Κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του πειράματος, όταν δηλαδή έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων από την αντίθετη κατεύθυνση. Με ποιο είδος καναλιού θα μοντελοποιούσατε τον επιταχυντή; Φτιάξτε το κατάλληλο σχήμα.

(Υπόδειξη: Δίδεται ότι H(Y/X)=H(f)=0,811 bits και ότι $\log_2 3=1,585$)

10. Υποθέστε ότι μεταφέρεται ψηφιοποιημένη τηλεοπτική εικόνα από μία πηγή η οποία χρησιμοποιεί ανάλυση 480 x 500 pixels και για κάθε pixel η χρωματική πληροφορία μπορεί να πάρει 32 διαφορετικές τιμές έντασης. Στη διάρκεια του δευτερολέπτου μεταδίδονται 30 πλαίσια.

Βρείτε το ρυθμό, R, μετάδοσης της πηγής.

Αν η τηλεοπτική εικόνα μεταδοθεί σε κανάλι εύρους ζώνης 4.5 MHz με signal-to-noise ratio 35 dB, να βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού σε bps.

11. Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα x_i, $i=1, 2,$ με πιθανότητα εμφάνισης του x_1, $p(x_1)=a$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα y_j, $j=1, 2, 3, 4$ όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P=\begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, $H(Y)$.

Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(Y/X)*.

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

12. Θεωρούμε ένα ενθόρυβο κανάλι, την ενθόρυβη γραφομηχανή, της οποίας τα σύμβολα – γράμματα εισόδου και εξόδου είναι τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφάβητου.

Ποια η χωρητικότητα του καναλιού αν κάθε γράμμα που πληκτρολογείται εκτυπώνεται αναλλοίωτο;

Ποια η χωρητικότητα του καναλιού αν η πληκτρολόγηση ενός γράμματος οδηγεί με πιθανότητα ½ στην εκτύπωση του ιδίου γράμματος και με πιθανότητα ½ στην εκτύπωση του επόμενου στο αλφάβητο γράμματος; Για παράδειγμα, η πληκτρολόγηση του Z οδηγεί με πιθανότητα ½ στην εκτύπωση του Z και με πιθανότητα ½ στην εκτύπωση του A.

13. Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα $x_i=\{0,1,2\}$, $i=0,\ 1,\ 2$, με πιθανότητες εμφάνισης $p(x_0)=α$, $p(x_1)=(2/3)-α$ *και* $p(x_2)=1/3$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα $y_j=\{0,1,2\}$, $j=0,\ 1,\ 2$. *Ισχύει* $Y=X+Z\ (mod3)$, όπου η Z είναι ανεξάρτητη της X και λαμβάνει τις τιμές $z_i=\{0,1,2\}$ $i=0,\ 1,\ 2$ με τις ακόλουθες πιθανότητες: $P(z_0)=1/2$, $P(z_1)=1/4$, $P(z_2)=1/4$.

Ζητείται

Α) Να καταρτιστεί ο πίνακας μετάβασης του καναλιού.

Β) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, *H(Y)*.

Γ) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(Y/X)*.

Δ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

(Υπόδειξη: η πράξη *u (mod p)* δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του *u* δια του *p*. Για παράδειγμα, *7mod7=0, 8mod7=1, 9mod7=2, 10mod7=3, 11mod7=4,* κ.ο.κ.)

14. Έστω ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή X={0,1} με πιθανότητες εμφάνισης P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/2, ενώ η τυχαία μεταβλητή Y={0,1} συμβολίζει τις τιμές εξόδου. Ο πίνακας μετάβασης του καναλιού είναι

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

Α) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της Χ δεδομένου ότι γνωρίζουμε την Υ.

Β) Να υπολογιστεί η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού.

Γ) Για ποια τιμή του ‘ε’, η Η(Χ/Υ) παίρνει τη μέγιστη τιμή της;

Δ) Για ποια τιμή του ‘ε’, η Ι(Χ;Υ) παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

Το *δυαδικό κανάλι διαγραφής* είναι ένα κανάλι που έχει δύο εισόδους, τις Χ1=0 και Χ2=1 και τρεις εξόδους, τις Υ1=0, Υ2=ε και Υ3=1, εκ των οποίων η Υ2=ε είναι αμφίβολη και επομένως πρέπει να διαγραφεί. Εάν ένα τέτοιο κανάλι έχει τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης καναλιού:

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

Ε) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα καναλιού.

ΣΤ) Αν η πηγή έχει ισοπίθανες εισόδους, να υπολογιστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου του καναλιού για *p*=0.8.

15. Έστω ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή X={0,1,2,3} με πιθανότητες εμφάνισης P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/4, P(X=2)=3/16, P(X=3)=1/16. Το κανάλι είναι ενθόρυβο με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων Y={0,1,2,3} στην έξοδο του καναλιού.

β) Εάν το σύμβολο που λαμβάνουμε κατά την έξοδο του καναλιού είναι το Y=0, υπολογίστε τις πιθανότητες το σύμβολο που μεταδόθηκε να ήταν είτε το X=0, είτε το X=1, είτε το X=2, είτε το X=3. Υπολογίστε την H(X/Y=0).

γ) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι.

δ) Εάν θεωρήσουμε ότι το κανάλι είναι **χωρίς θόρυβο** ποια είναι η ροή πληροφορίας στο κανάλι και ποια μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού;

ε) Ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα του **ενθόρυβου** καναλιού καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού;

(Υπόδειξη: Για να απαντήσετε το υποερώτημα (ε), να κάνετε χρήση της σχέσης

$$H(Y/X) = \sum_i P(X=i)\,H(Y/X=i) =$$

$$-\sum_i P(X=i) \sum_j P(Y=j/X=i) \log P(Y=j/X=i) = -\sum_i P(X=i) \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

στην οποία παρατηρείτε ότι η H(Y/X) είναι ανεξάρτητη από τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού όταν οι $\sum_j p_{ij} \log p_{ij}$ έχουν πάντα το ίδιο άθροισμα για κάθε i πράγμα που συμβαίνει στην περίπτωση του πίνακα μετάβασης της άσκησης.)

16. Θεωρούμε το *δυαδικό κανάλι διαγραφής* που είναι ένα κανάλι με δύο εισόδους, τις X1 και X2, με πιθανότητες p(X1)=α και p(X2)=1-α, αντίστοιχα, και τρεις εξόδους, τις Y1, Y2 και Y3. Ακολούθως δίνεται ο πίνακας μετάβασης του καναλιού:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & P(y_3/x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α. Να υπολογιστεί

(ι). η H(Y),

(ιι). η υπό συνθήκη πληροφορία H(Y/X).

β. Να υπολογιστεί η εντροπία H(X) και να βρεθεί το μέγιστό της, καθώς και οι συνθήκες που αυτό συμβαίνει.

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα ε του πίνακα μετάβασης δεδομένου ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι C=0.531.

17. Θεωρούμε κανάλι επικοινωνίας με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = p_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

όπου X, Y $\in$ {0,1}

Ζητείται να

Α) Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού καθώς και την κατανομή πιθανοτήτων εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη χωρητικότητα.

B) Δίδεται ένα Ζ κανάλι με πίνακα μετάβασης $P = p_{ij}$. Βρείτε την περιοχή των πιθανοτήτων εισόδου και πίνακα μετάβασης για τις οποίες είναι δυνατόν να επιτευχθεί η μέγιστη χωρητικότητα. Τι παρατηρείτε;

{Υπόδειξη: δημιουργήστε έναν πίνακα ο οποίος στη μία στήλη θα έχει τις τιμές του p στο διάστημα [0.01,0.99] στη δεύτερη στήλη τις τιμές του α και στην τρίτη στήλη τις τιμές της μέγιστης χωρητικότητας. Για τη δημιουργία του πίνακα χρησιμοποιείστε βηματισμό 0.05, δηλαδή κάνετε χρήση των τιμών p=0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, …, 0.95, 0.99}

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Για το ερώτημα 1, ανατρέξτε στον ορισμό της χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού, εκφράστε την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού και προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της. Για το ερώτημα 2, ακολουθείστε την υπόδειξη.

18. Δίνεται το δυαδικό (erasure) κανάλι χωρίς μνήμη, με αλφάβητο εισόδου {0, 1}, δηλαδή x_1=0 και x_2=1 και πιθανότητα εμφάνισης καθενός από αυτά στην είσοδο του καναλιού ίση με ½. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα *0, 1 και* ***,** δηλαδή $y_1=0$, $y_2=1$ και y_3=*, όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle 0 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle * \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \end{array}.$$

Στην περίπτωση του καναλιού αυτού ισχύει ακόμα: $p(x_1/y_1)=p(x_2/y_2)=1$, $p(x_1/y_2)=p(x_2/y_1)=0$ και $p(x_1/y_3)= p(x_2/y_3)=1/2$.

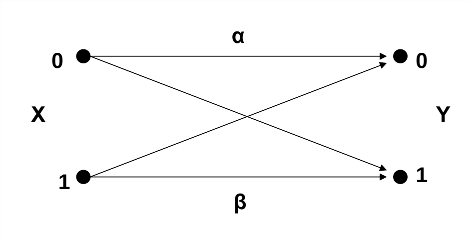
A) Να υπολογιστεί η *H(X)*.

B) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(X/Y)*.

Γ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

19. Δίδεται ένα δυαδικό κανάλι Ζ, το οποίο χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ (στον πίνακα μετάβασης έχουμε P_{ij}= P(έξοδος=j/είσοδος=i)). Ζητείται η χωρητικότητα του καναλιού θεωρώντας ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων ‘0’ και ‘1’ στην είσοδο του καναλιού είναι ίσες.

20. Ο πομπός (X) ενός επικοινωνιακού συστήματος παράγει πληροφορία με βάση τις καταστάσεις 0 και 1. Ο δέκτης (Y) του συγκεκριμένου επικοινωνιακού συστήματος λαμβάνει την πληροφορία μέσω ενός καναλιού του οποίου το διάγραμμα μετάβασης παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογισθούν:

(i) $P(Y=0)$ και $P(Y=1)$, όταν $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{3}{4}$, $a=0.75$ και $\beta=0.9$

(ii) $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$ και $H(Y/X)$

(iii) Ο ρυθμός της μεταδιδόμενης πληροφορίας στο κανάλι, όταν ο ρυθμός της παραγόμενης πληροφορίας της πηγής, είναι $r_s = 1000..symbol/\sec$

21. Έστω ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή X={0,1,2,3} με πιθανότητες εμφάνισης P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/4, P(X=2)=3/16, P(X=3)=1/16. Το κανάλι είναι ενθόρυβο με πίνακα μετάβασης τον ακόλουθο:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(Α) Να βρεθούν οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων Y={0,1,2,3} στην έξοδο του καναλιού καθώς και η H(Y).

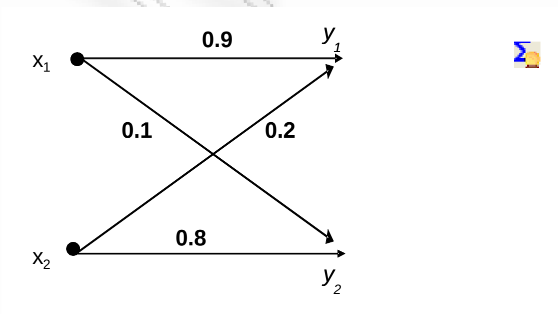
(Β) Εάν το σύμβολο που λαμβάνουμε στην έξοδο του καναλιού είναι το Y=0, υπολογίστε τις 4 παρακάτω πιθανότητες: το σύμβολο που μεταδόθηκε να ήταν το X=0, το X=1, το X=2, και το X=3. Υπολογίστε επίσης την $H\left(X/Y=0\right)$.

(Γ) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται μέσα από το κανάλι.

(Δ) Να βρεθεί η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού παρουσία θορύβου βάσει του παραπάνω πίνακα μετάβασης, καθώς επίσης η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού απουσία θορύβου στο κανάλι.

22. Έστω ένα διακριτό κανάλι C_1 χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{x_1,x_2\}$ με πιθανότητες εμφάνισης

$P(X=x_1)=P(X=x_2)=0.5$, ενώ ο πίνακας μετάβασης του καναλιού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



(α) Ζητούνται τα εξής:

i) Οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y= \{y_1,y_2\}$ στην έξοδο του καναλιού καθώς και η $H(Y)$.

ii) Να βρεθεί η $H(Y/X=x_1)$ και στη συνέχεια υπολογίστε την $H(Y/X)$ αν γνωρίζετε ότι η $H(Y/X=x_2)=0{,}722$ *bits*.

iii) Η χωρητικότητα του καναλιού C_1.

(β) Στο προηγούμενο κανάλι C_1 συνδέουμε σε σειρά ένα δεύτερο <u>όμοιο</u> κανάλι C_2, έτσι ώστε οι έξοδοι $Y=\{y_1,y_2\}$του πρώτου να αποτελούν τις εισόδους του δευτέρου. Οι έξοδοι του καναλιού C_2 είναι οι $Z=\{ z_1,z_2\}$. Ζητούνται τα εξής:

i) Θεωρώντας τη σύνδεση των καναλιών C_1 και C_2 ως το σύνθετο κανάλι C_{1+2}, το οποίο επομένως έχει εισόδους τις $X=\{x_1,x_2\}$. και εξόδους τις $Z=\{ z_1,z_2\}$, να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης του C_{1+2}.

ii) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου $p(z_1)$ και $p(z_2)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγγλική Βιβλιογραφία

Wiley.Interscience.Elements.of.Information.Theory.Jul.2006

Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, David J.C. MacKay, University Press 2003

INFORMATION SCIENCE, DAVID G. LUENBERGER, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, Princeton and Oxford

A Mathematical Theory of Communication, By C. E. SHANNON

Information Theory, INFORMATION THEORY AND THE DIGITAL AGE

AFTAB, CHEUNG, KIM, THAKKAR, YEDDANAPUDI, Institute of Technology

http://charon.phys.uoa.gr/moag/admin/pdf_files/Telecom_Chapter_5.pdf

Ελληνική Βιβλιογραφία

Θεωρία Πληροφοριών – Κώδικες, Βούκαλης Δημήτρης, ΙΩΝ 1994

Contemporary Communication Systems using MATLAB, John J. Proakis – Masoud Salehi, BookWare Companion Series

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα, Taub/Schilling, Εκδόσεις Α. Τζιόλα Ε.

Θεωρία Πληροφοριών και Κωδίκων, Χρυσουλίδης

Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης, ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΖΟΡΚΑΔΗΣ, ΠΑΤΡΑ 2002

Ψηφιακές Επικοινωνίες, Γιώργος Φούσκας, Πάτρα 2002

Τόμος Β'-Μέρος Β Ψηφιακές Επικοινωνίες Ι Ι, Σήματα-Διαμόρφωση-Θόρυβος , Δρ. Νικόλαος Δ .Δημητρίου, Πάτρα 2008

Θεωρία πληροφορίας και κωδίκων. Δρ. Βασίλης Διακολουκάς, http://www.telecom.tuc.gr/courses/infotheory.htm

Αθανάσιος Χρ. Τζέμος :Τομέας Θεωρητικής Φυσικής, Εντροπία Shannon

TEL412_lecture_09_10_11_12

anamorfosi.teiser.gr/ekp_yliko/e-notes/Data/comm2/main.htm

http://www.physics4u.gr/articles/shannon.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Shannon.html

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%BF%CF%80%CE%AF%CE%B1_%CF%80%CE%BB%CE%B7%CF%81%CE%BF%CF%86%CE%BF%CF%81%CE%B9%CF%8E%CE%BD

http://en.wikipedia.org/wiki/White_noise

http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/el/Shannon%E2%80%93Hartley_theorem

http://www.e-yliko.gr/default.aspx

http://web.teipir.gr/WWW/ECS/PeLAB/doc/THLE_2.pdf http://charon.phys.uoa.gr/moag/admin/pdf_files/Telecom_Chapter_5.pdf

http://thalis.cs.unipi.gr/unipi.csd/csd-014/html/index_files/course_material/Chapter2.pdf

http://arxiv.org/

http://books.google.gr/books?q=related:ISBN0486665216&id=ngZhvUfF0UIC&source=gbs_similarbooks_s&cad=1