

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

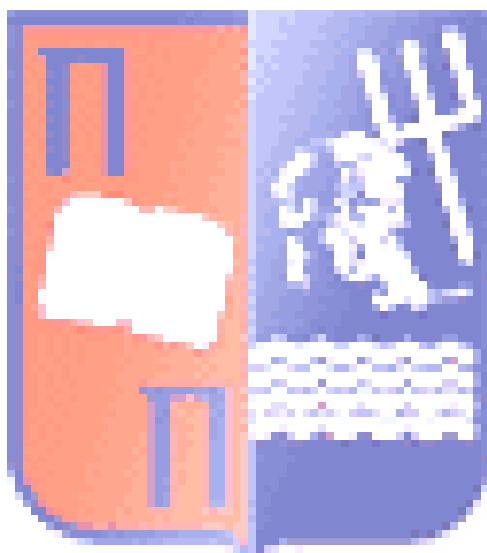
**ΠΜΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΜΕ ΘΕΜΑ**

**«ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ (M-GARCH) & Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ»**

**ΠΡΙΝΙΩΤΑΚΗ ΣΤΥΛΙΑΝΗ (ΜΑΕ 08034)**



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

**κ. ΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚ.**

**κ. ΓΚΛΕΖΑΚΟΣ ΜΙΧ.**

**κ. ΑΓΓΕΛΙΔΗΣ ΤΙΜ.**

**Πειραιάς, Ιούνιος 2011**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται κάποια μονομεταβλητά μοντέλα διακύμανσης, τα οποία επιτρέπουν στη μεταβλητότητα να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου και στη συνέχεια αναλύονται τα πολυμεταβλητά μοντέλα, τα οποία αποτελούν γενικεύσεις των μονομεταβλητών και επιτρέπουν την μεταβολή τόσο της διακύμανσης, όσο και της συνδιακύμανσης ανάμεσα στις αποδόσεις δύο ή περισσότερων περιουσιακών στοιχείων. Τυπικά, η θεωρία διαχείρισης χαρτοφυλακίου προτείνει την κατασκευή αποδοτικών χαρτοφυλακίων μέσα από το διάνυσμα των αποδόσεων, το οποίο αποτελείται από περιουσιακά στοιχεία συγκεκριμένου πλήθους και από τον πίνακα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεών τους.

Αρχικά γίνεται μία επισκόπηση των παραπάνω μοντέλων και στη συνέχεια ακολουθεί η εφαρμογή τους σε τρία χαρτοφυλάκια τα οποία έχουμε δημιουργήσει και αποτελούνται από έξι μετοχές του Ελληνικού Χρηματιστηρίου. Έπειτα υπολογίζεται η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk – VaR) των μεμονωμένων μετοχών και του συνόλου των χαρτοφυλακίων κάνοντας χρήση των μοντέλων και τελικά μέσω του επανελέγχου (Back testing) που διενεργείται συγκρίνονται τα μονομεταβλητα και τα πολυμεταβλητά μοντέλα, τα οποία δείχνουμε ότι υπερέχουν απέναντι στα μονομεταβλητά, αλλά και τα επιμέρους μοντέλα της κάθε κατηγορίας μεταξύ τους.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	<b>6</b>
Εισαγωγή.....	6
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	<b>9</b>
<b>2.1 Μονομεταβλητά Μοντέλα</b> .....	<b>10</b>
2.1.1 Το μοντέλο ARCH.....	10
2.1.1β Μειονεκτήματα μοντέλου ARCH.....	12
2.1.2 Το μοντέλο GARCH.....	13
2.1.2β Μειονεκτήματα μοντέλου GARCH.....	14
2.1.3 Το μοντέλο EGARCH .....	15
2.1.4 Το μοντέλο APARCH.....	17
2.1.5 Κατανομές που εφαρμόζονται.....	18
2.1.5α Κανονική κατανομή.....	18
2.1.5β t-Student κατανομή.....	20
<b>2.2 Πολυμεταβλητά Μοντέλα</b> .....	<b>22</b>
2.2.1 Διανυσματικό GARCH μοντέλο.....	23
2.2.2 Διαγώνιο Διανυσματικό μοντέλο.....	24
2.2.3 Το μοντέλο BEKK.....	25
2.2.4 Διαγώνιο BEKK μοντέλο .....	27
2.2.5 Το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (CCC).....	28
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b> .....	<b>31</b>
<b>3.1 Αξία σε Κίνδυνο (VaR)</b> .....	<b>31</b>
3.1.1 Ιστορική Εξέλιξη VaR.....	33
<i>Μέθοδοι υπολογισμού του VaR</i> .....	35
3.1.2 Ιστορική Προσομοίωση.....	35
3.1.3 Σταθμισμένη Ιστορική Προσομοίωση.....	37

3.1.4 Φιλτραρισμένη Ιστορική Προσομοίωση.....	38
3.1.5 Μέθοδος Συνδιακύμανσης.....	39
3.1.6 Monte Carlo Προσέγγιση.....	40
3.1.7 Σύγκριση Μεθόδων.....	41
3.1.8 Μοντέλο Εκθετικού Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου.....	43
3.1.9 Θεωρία Ακραίων Τιμών.....	45
<b>3.2 Volatility και παραμετρικά μοντέλα.....</b>	<b>47</b>
3.2.1 Μεταβλητότητα (volatility) .....	<b>47</b>
3.2.2 Χαρακτηριστικά volatility .....	48
3.2.3 Προβλεψη μεταβλητότητας (forecasting volatility) .....	50
3.2.3α Forecasting volatility με μοντέλο ARCH .....	50
3.2.3β Forecasting volatility με μοντέλο GARCH .....	51
3.2.4 Υπολογισμός VaR.....	53
3.2.4α VaR και Κανονική κατανομή .....	53
3.2.4β VaR και t-Student κατανομή .....	54
3.2.5 VaR χαρτοφυλακίου .....	56
3.2.5α Με περιουσιακά στοιχεία ίσης αξίας.....	56
3.2.5β Με περιουσιακά στοιχεία διαφορετικής αξίας.....	57
<b>3.3 Back Testing .....</b>	<b>60</b>
3.3.1 Μηδενική Υπόθεση (The Null Hypothesis).....	61
3.3.2 Αδέσμευτος Έλεγχος Κάλυψης (Unconditional Coverage Testing) .....	62
3.3.3 Έλεγχος Ανεξαρτησίας (Independence Testing) .....	66
3.3.4 Δεσμευμένος Έλεγχος Κάλυψης (Conditional Coverage Testing).....	70
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....</b>	<b>72</b>
<b>4.1 Δεδομένα &amp; Βασικά χαρακτηριστικά τους.....</b>	<b>72</b>
<b>4.2 Κατασκευή Χαρτοφυλακίων.....</b>	<b>79</b>
4.2.1 1 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (ETE – Alpha Bank) .....	79
4.2.2 2 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Coca cola – ΔΕΗ).....	81
4.2.3 3 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ).....	82
<b>4.3 Μονομεταβλητή εκτίμηση VaR (1η μέθοδος) .....</b>	<b>85</b>
4.3.1 1 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (ETE – Alpha Bank) .....	86

4.3.2 2 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Coca cola – ΔΕΗ).....	96
4.3.3 3 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ).....	100
<b>4.4 Πολυμεταβλητή εκτίμηση VaR (2η μέθοδος).....</b>	<b>105</b>
4.3.1 1 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (ΕΤΕ – Alpha Bank).....	105
4.3.2 2 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Coca cola – ΔΕΗ).....	108
4.3.3 3 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ).....	110
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....</b>	<b>113</b>
<b>5.1 Back Testing και 1η μέθοδος.....</b>	<b>113</b>
5.1.1 1 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (ΕΤΕ – Alpha Bank).....	113
5.1.2 2 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Coca cola – ΔΕΗ).....	116
5.1.3 3 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ).....	117
<b>5.2 Back Testing και 2η μέθοδος.....</b>	<b>118</b>
5.2.1 1 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (ΕΤΕ – Alpha Bank).....	118
5.2.2 2 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Coca cola – ΔΕΗ).....	119
5.2.3 3 <sup>ο</sup> Χαρτοφυλάκιο (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ).....	120
<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>121</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>126</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk ή VaR) είναι ένα από τα δημοφιλέστερα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της έκθεσης στους κινδύνους της αγοράς, και αποτελεί μια τεχνική, που χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει την πιθανότητα των απωλειών χαρτοφυλακίων, βασισμένη στη στατιστική ανάλυση των ιστορικών τάσεων τιμών και της μεταβλητότητάς τους (volatilities).

Η Αξία σε Κίνδυνο χρησιμοποιείται συνήθως από τις τράπεζες, τις ασφαλιστικές εταιρίες και τις επιχειρήσεις που εμπλέκονται στην εμπορία ενέργειας και άλλων προϊόντων, και είναι σε θέση να μετρήσει τον κίνδυνο την στιγμή που συμβαίνει, με συνέπεια να αποτελεί μια σημαντική παράμετρο που μελετούν οι εταιρίες κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων. Ενώ ο όρος «Αξία σε Κίνδυνο» δεν χρησιμοποιήθηκε

ευρέως πριν από τα μέσα της δεκαετίας του '90, η προέλευση του μέτρου αυτού βρίσκεται αρκετά προγενέστερα.

Η οικονομική παγκοσμιοποίηση καθώς και η επικοινωνία μέσω του Διαδικτύου, έχουν επιταχύνει τα τελευταία χρόνια την ολοκλήρωση των χρηματοοικονομικών αγορών. Οι μετακινήσεις των τιμών σε μία αγορά, μπορούν να διαδοθούν άμεσα σε μία άλλη, με αποτέλεσμα οι χρηματοοικονομικές αγορές να εξαρτώνται τώρα μεταξύ τους περισσότερο από ποτέ. Για το λόγο αυτό, απαιτείται η από κοινού μελέτη των αγορών προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την δυναμική δομή της παγκόσμιας οικονομίας. Τα μονομεταβλητά και πολυμεταβλητά μοντέλα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για την αξιολόγηση της Αξίας σε Κίνδυνο και για το λόγο αυτό μπαίνουμε στη διαδικασία να τα αναλύσουμε και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αρχικά τα μονομεταβλητά μοντέλα και κάποια από τα μειονεκτήματά τους, τα οποία μας οδήγησαν στην δημιουργία επιπλέον μοντέλων, καθώς και οι κατανομές που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή τους. Στη συνέχεια αναλύεται η πολυμεταβλητή μοντελοποίηση, η οποία είναι παρόμοια με την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας ενός μόνο περιουσιακού στοιχείου, αλλά και περισσότερο πολύπλοκη από μαθηματικής απόψεως.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται η σημασία χρήσης της Αξίας σε Κίνδυνο και παρουσιάζονται οι διάφορες μέθοδοι υπολογισμού της, οι οποίες στη συνέχεια συγκρίνονται μεταξύ τους, αφού πρώτα έχει προηγηθεί μία αναφορά στην ιστορική εξέλιξη του VaR κατά την πάροδο των ετών, μέχρι να φτάσει στη σημερινή της μορφή. Επίσης, γίνεται μία εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητότητας (volatility), η οποία αναφέρεται στο ύψος της αβεβαιότητας ή του κινδύνου που σχετίζεται με το μέγεθος των συναλλαγών σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης και παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της. Στη συνέχεια δείχνουμε τον τρόπο πρόβλεψης της μεταβλητότητας (forecasting volatility) με τη βοήθεια διάφορων μοντέλων, καθώς και

τις ποικίλες μεθόδους υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο μέσω διαφορετικών στατιστικών κατανομών και διαφορετικών χαρτοφυλακίων. Τέλος, παρουσιάζεται η διαδικασία του επανελέγχου (back testing), ο οποίος αξιολογεί κατά πόσο μία μέθοδος θα μπορούσε να υπολογίσει και κατ' επέκταση να προβλέψει σημαντικές μεταβολές, καθώς και ελέγχει εάν τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ανταποκρίνονται στα πραγματικά δεδομένα.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή στο πρακτικό μέρος της παρούσας εργασίας και παρουσιάζει τα δεδομένα μετοχών που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και τη σύνθεση των τριών διαφορετικών χαρτοφυλακίων που έχουμε δημιουργήσει. Επίσης γίνεται η πρακτική προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο για τα χαρτοφυλάκια μέσω της μονομεταβλητής εκτίμησης (1<sup>η</sup> μέθοδος) και της πολυμεταβλητής (2<sup>η</sup> μέθοδος).

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η επαλήθευση των μοντέλων που θεωρήθηκαν κατάλληλα για την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο, μέσω του Back testing συγκρίνοντας κάθε χαρτοφυλάκιο με τις δύο μεθόδους που αναφέραμε παραπάνω. Στη συνέχεια ακολουθούν τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε ως προς την καταλληλότητα των μοντέλων, όπου φαίνεται η υπεροχή των πολυμεταβλητών απέναντι στα μονομεταβλητά.



## Κεφάλαιο 2

Στόχος μας είναι η μελέτη ορισμένων διαθέσιμων στην βιβλιογραφία μεθόδων και οικονομετρικών μοντέλων με σκοπό την εκτίμηση της μεταβλητότητας (volatility) ενός χαρτοφυλακίου. Η μεταβλητότητα αποτελεί έναν ιδιαίτερα σημαντικό παράγοντα στις εμπορικές συναλλαγές επιλογών (options), καθώς εκφράζει την αστάθεια που ελλοχεύει στην δεσμευμένη τυπική απόκλιση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Τα δεσμευμένα ετεροσκεδαστικά μοντέλα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο γενικές κατηγορίες. Σε εκείνα που χρησιμοποιούν μία συγκεκριμένη συνάρτηση προκειμένου να καθορίσουν την εξέλιξη του  $\sigma_t^2$  και σε εκείνα που κάνουν χρήση μίας στοχαστικής εξίσωσης για τον ίδιο λόγο.

Η οικοδόμηση ενός μοντέλου μεταβλητότητας για την απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου, αποτελείται από συγκεκριμένα βήματα. Αρχικά, καθορίζεται μία εξίσωση μέσου ελέγχοντας για τυχόν σειριακή εξάρτηση των δεδομένων, και όπου αυτή εντοπίζεται, εφαρμόζεται ένα οικονομετρικό μοντέλο για την ακολουθία των αποδόσεων, ούτως ώστε να εξαλειφθεί οποιαδήποτε γραμμική εξάρτηση.

Στη συνέχεια πραγματοποιείται έλεγχος ύπαρξης ετεροσκεδαστικών καταλοίπων (ARCH effect) στην εξίσωση του μέσου που έχουμε καθορίσει και εάν τα αποτελέσματα του ελέγχου αυτού είναι στατιστικά σημαντικά, ορίζεται ένα

συγκεκριμένο μοντέλο μεταβλητότητας και εκτελείται η από κοινού εκτίμηση της εξίσωσης του μέσου και της εξίσωσης της μεταβλητότητας. Τέλος, διενεργείται λεπτομερής έλεγχος για το μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί και γίνονται οι απαραίτητες βελτιστοποιήσεις, όπου αυτό χρειάζεται.

Για τις περισσότερες ακολουθίες απόδοσης περιουσιακών στοιχείων, οι διαδοχικές συσχετίσεις είναι αδύναμες, εάν όχι ανύπαρκτες. Για το λόγο αυτό, ο καθορισμός της εξίσωσης του μέσου επιτυγχάνεται με την άρση της μέσης τιμής του δείγματος, εάν η μέση τιμή αυτή διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. Για κάποιες ακολουθίες ημερήσιων αποδόσεων ενδέχεται να χρειαστεί ένα απλό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις η εξίσωση του μέσου μπορεί να υιοθετήσει κάποιες επεξηγηματικές μεταβλητές, όπως για παράδειγμα μία δείκτρια μεταβλητή για τα φαινόμενα του σαββατοκύριακου (weekend effect) ή του Ιανουαρίου (January effect).

## **2.1 Μονομεταβλητά Μοντέλα**

### **2.1.1 Το μοντέλο ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model)**

Το πρώτο μοντέλο που παρέχει ένα συστημικό πλαίσιο για την εκτίμηση της μεταβλητότητας είναι το μοντέλο ARCH (Engle, 1982). Η βασική ιδέα των μοντέλων ARCH, βασίζεται στις υποθέσεις ότι ο κλονισμός (shock)  $a_t$ , της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου, είναι σειριακά ασυσχέτιστος, εν τούτοις όμως εξαρτώμενος, και ότι η εξάρτηση αυτή μπορεί να περιγραφεί από μία απλή τετραγωνική συνάρτηση των προηγούμενων τιμών (lagged values). Πιο συγκεκριμένα, ένα ARCH(m) μοντέλο υποθέτει ότι:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \dots + a_m a_{t-m}^2 \quad (2.1.1-I)$$

όπου,  $\{\varepsilon_t\}$  είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που έχουν ως μέση τιμή το μηδέν και διακύμανση τη μονάδα,  $a_0 > 0$  και  $a_i \geq 0$  για  $i > 0$

ή εναλλακτικά

$$a_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + a_m a_{t-m}^2 + \eta_t \quad (2.1.1-II)$$

όπου,  $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$  και  $\{\eta_t\}$  είναι μία ασυσχέτιστη σειρά με μέσο μηδέν.

Οι συντελεστές  $a_i$  πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες, ώστε να εξασφαλιστεί ότι η διακύμανση είναι πεπερασμένη. Για τον λόγο αυτό, στην πράξη συχνά υποθέτουμε ότι η  $\varepsilon_t$  ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, ή την τυποποιημένη Student  $-t$ , είτε την Γενικευμένη κατανομή σφάλματος (Generalized Error Distribution-GED).

Από την δομή του μοντέλου ARCH παρατηρούμε ότι τα τετράγωνα μεγάλων shock του παρελθόντος  $\{a_{t-i}^2\}_{i=1}^m$ , υποδηλώνουν μία μεγάλη διακύμανση  $\sigma_t^2$ , για το shock  $a_t$  και συνεπώς τείνουμε στην υπόθεση ότι, στα πλαίσια του μοντέλου ARCH, τα μεγάλα shocks τείνουν να ακολουθούνται από επίσης μεγάλο shock. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι η πιθανότητα λήψης μεγάλης διακύμανσης, είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα λήψης μίας μικρότερης, το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των συγκεντρώσεων μεταβλητότητας (volatility clusterings) που παρατηρούνται στις αποδόσεις διαφόρων αξιογράφων (περιουσιακών στοιχείων).

Για ένα δεδομένο δείγμα, το  $a_t^2$  αποτελεί έναν αμερόληπτο εκτιμητή του  $\sigma_t^2$  και για το λόγο αυτό περιμένουμε το  $a_t^2$  να σχετίζεται γραμμικά με τα  $a_{t-1}^2, \dots, a_{t-m}^2$

με τρόπο παρόμοιο με εκείνον ενός αυτοπαλίνδρομου μοντέλου τάξης  $m$ . Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι το  $a_i^2$  δεν είναι γενικά αποδοτική εκτίμηση (efficient) του  $\sigma_i^2$ , αλλά μπορεί να χρησιμεύσει ως μία προσέγγιση, η οποία θα μπορούσε να μας δώσει πληροφορίες για τον προσδιορισμό της τάξης  $m$ .

### **2.1.1β Μειονεκτήματα μοντέλων ARCH**

Τα ARCH μοντέλα, εκτός του ότι είναι κατανοητά και απλά στον αρχικό υπολογισμό τους, έχουν και μερικά μειονεκτήματα, αφού υποθέτουν ότι τα αρνητικά και θετικά shock έχουν τα ίδια αποτελέσματα, ως προς τη μεταβλητότητα, λόγω του ότι εξαρτώνται από τα τετράγωνα των κλονισμών που παρατηρήθηκαν στο παρελθόν. Αντίθετα, στην πράξη είναι γνωστό ότι η τιμή των αξιογράφων ανταποκρίνεται διαφορετικά σε αρνητικούς και θετικούς κλονισμούς.

Επίσης, τα συγκεκριμένα μοντέλα μας περιορίζουν εν μέρει, αφού για παράδειγμα, το  $a_i^2$  ενός ARCH(1) μοντέλου, πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  στην περίπτωση που η σειρά έχει μία πεπερασμένη τέταρτη ροπή και ο περιορισμός αυτός γίνεται ακόμα πιο περίπλοκος για μοντέλα μεγαλύτερα του ARCH(1). Ουσιαστικά, περιορίζεται η δυνατότητα ορισμένων ARCH μοντέλων να εντοπίσουν την υπερβολική κύρτωση, όπου αυτή υπάρχει.

Επιπλέον, τα μοντέλα ARCH δεν μας παρέχουν κάποιο εφόδιο ώστε να κατανοήσουμε την πηγή των διαφοροποιήσεων μιας οικονομικής χρονοσειράς, αλλά περιορίζονται στην χρήση ενός μηχανικού τρόπου ο οποίος περιγράφει την συμπεριφορά της διακύμανσης, χωρίς να δίνει κάποια ένδειξη για τις αιτίες εμφάνισης της συμπεριφοράς αυτής. Τέλος, δεν θεωρείται απίθανο, τα εν λόγω

μοντέλα να υπερεκτιμούν (overpredict) τη μεταβλητότητα, επειδή ανταποκρίνονται αργά σε τυχόν μεγάλους απομονωμένους κλονισμούς της σειράς των αποδόσεων.

### 2.1.2 Το μοντέλο GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model)

Είδαμε παραπάνω ότι, αν και απλό, το μοντέλο ARCH απαιτεί συχνά πολλές παραμέτρους, ώστε να περιγράψει επαρκώς τη διαδικασία μεταβλητότητας για τις αποδόσεις των αξιογράφων. Αν για παράδειγμα, για να εκτιμήσουμε την αστάθεια, διαπιστώσουμε ότι απαιτείται η χρήση ενός ARCH(9) μοντέλου, καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να επιδιωχθεί κάποιο εναλλακτικό πρότυπο.

Ο Bollerslev (1986) πρότεινε μία ιδιαίτερα χρήσιμη επέκταση του μοντέλου ARCH, γνωστή ως Γενικευμένο ARCH μοντέλο (GARCH). Έστω ότι για την λογαριθμική σειρά των αποδόσεων  $r_t$ , ο κλονισμός την στιγμή  $t$  δίνεται από:  $a_t = r_t - \mu_t$ . Τότε το  $a_t$  ακολουθεί ένα GARCH(m,s) μοντέλο εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.1.2-1)$$

όπου και πάλι  $\{\varepsilon_t\}$  είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που έχουν ως μέση τιμή το μηδέν και διακύμανση τη μονάδα,  $a_0 > 0$ ,

$$a_i \geq 0, \beta_j \geq 0 \text{ και } \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (a_i + \beta_i) < 1.$$

Από εδώ προκύπτει άμεσα ότι  $a_i = 0$  για  $i > m$  και  $\beta_j = 0$  για  $j > s$ .

Εάν  $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$ , τότε  $\sigma_t^2 = a_t^2 - \eta_t$  και συσσωρεύοντας προκύπτει ότι  $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}^2$  ( $i = 0, \dots, s$ ).

Με τον τρόπο αυτό το GARCH μοντέλο μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή:

$$a_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (a_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j} \quad (2.1.2-\text{II})$$

### 2.1.2β Μειονεκτήματα μοντέλων GARCH

Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μοντέλων GARCH μπορούν εύκολα να εντοπισθούν εάν επικεντρωθούμε στο απλούστερο GARCH μοντέλο, δηλαδή το GARCH(1,1) που είναι της μορφής:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \text{ όπου } a_1 \geq 0, \beta_1 \leq 1 \text{ και } (a_1 + \beta_1) < 1.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι ένα μεγάλο  $a_{t-1}^2$ , δίνει ένα επίσης μεγάλο  $\sigma_t^2$ . Αυτό σημαίνει ότι ένα μεγάλο  $a_{t-1}^2$  τείνει να ακολουθείται από μεγάλο  $a_t^2$ , γεγονός που επιβεβαιώνει και πάλι την γνωστή συμπεριφορά της συσσώρευσης μεταβλητότητας στις οικονομικές χρονοσειρές.

Επίσης, μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι  $1 - 2a_1^2 - (a_1 + \beta_1)^2 > 0$ , το οποίο μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3[1 - (a_1 + \beta_1)^2]}{1 - (a_1 + \beta_1)^2 - 2a_1^2} > 3 \quad (2.1.2-\text{III})$$

Συνεπώς, όπως συμβαίνει και στα μοντέλα ARCH, η ουρά μιας διαδικασίας GARCH(1,1) είναι βαρύτερη από εκείνη της κανονικής κατανομής. Επιπλέον, το

μοντέλο παρέχει μία απλή παραμετρική συνάρτηση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περιγραφή της εξέλιξης της μεταβλητότητας.

Η διαδικασία δόμησης που χρησιμοποιείται για την κατασκευή ενός ARCH μοντέλου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή ενός μοντέλου GARCH. Παρόλα αυτά, η διευκρίνιση της τάξεως ενός GARCH δεν είναι ιδιαίτερα εύκολη υπόθεση. Στην πράξη χρησιμοποιούνται κυρίως μοντέλα GARCH(1,1),(2,1) και (1,2).

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας συνεχίζει να ισχύει, υπό τον όρο ότι είναι γνωστές οι αρχικές τιμές της αστάθειας  $\{\sigma_t^2\}$  δηλαδή, αν θεωρήσουμε για παράδειγμα σε ένα GARCH(1,1) μοντέλο, το  $\sigma_1^2$  ως καθορισμένο, τότε το  $\sigma_t^2$  θα μπορεί να υπολογίζεται κατ' επανάληψη για το μοντέλο αυτό.

Σε ορισμένες εφαρμογές, η διακύμανση του δείγματος των  $a_t$ , χρησιμεύει ως μία καλή αρχική τιμή για το  $\sigma_1^2$ . Φτάνοντας στο τέλος, το μοντέλο μπορεί να ελεγχθεί, χρησιμοποιώντας το τυποποιημένο κατάλοιπο  $\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$  και την διαδικασία των τετραγώνων του.

### **2.1.3 Το μοντέλο EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model)**

Για να υπερνικήσει ορισμένες αδυναμίες του προτύπου GARCH που αφορούσαν τον χειρισμό των οικονομικών χρονοσειρών, ο Nelson (1991) πρότεινε το εκθετικό GARCH μοντέλο (EGARCH). Συγκεκριμένα, για να επιτρέψει τα συμμετρικά αποτελέσματα μεταξύ των θετικών και αρνητικών αποδόσεων, θεώρησε τον σταθμισμένο κλονισμό

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)] \quad (2.1.3-I)$$

όπου  $\theta$  και  $\gamma$  είναι πραγματικές σταθερές και οι  $\varepsilon_t$  και  $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν. Επομένως,  $E[g(\varepsilon_t)] = 0$ . Η ασυμμετρία του  $g(\varepsilon_t)$  μπορεί εύκολα να φανεί αν γράψουμε ξανά την παραπάνω σχέση με τον ακόλουθο τρόπο:

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \varepsilon_t > 0 \\ \theta\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \varepsilon_t < 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad (2.1.3 - \text{II})$$

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \varepsilon_t > 0 \\ \theta\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

Έτσι ένα EGARCH(m,s) μοντέλο επαληθεύει τις σχέσεις:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\varepsilon_{t-1}) \quad (2.1.3 - \text{III})$$

όπου,  $a_0$  είναι σταθερά,  $B$  είναι ο χειριστής μετατόπισης προς τα πίσω (back-shift) ή καθυστερήσεων, τέτοιος ώστε  $Bg(\varepsilon_t) = g(\varepsilon_{t-1})$  και οι όροι του κλάσματος είναι πολυώνυμα με μη κοινούς παράγοντες.

Μερικές ιδιότητες του μοντέλου EGARCH είναι παρόμοιες με εκείνες του GARCH όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι ο μέσος του  $\ln(\sigma_t^2)$  είναι το  $a_0$ . Εν τούτοις, τα μοντέλα διαφέρουν σε αρκετά σημεία, αφού στα GARCH χρησιμοποιείται ο λογάριθμος της δεσμευμένης διακύμανσης (logged conditional variance) για να χαλαρώσει ο περιορισμός της θετικότητας (positiveness) των συντελεστών του μοντέλου. Επίσης, η χρήση του  $g(\varepsilon_t)$  επιτρέπει στο μοντέλο να ανταποκριθεί μη συμμετρικά στις θετικές και αρνητικές εκ των υστέρων τιμές του  $a_t$ .

Μία εναλλακτική μορφή για το EGARCH(m,s) μοντέλο δίνεται από τη σχέση:



$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^s a_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (2.1.3 - IV)$$

όπου το  $\gamma_i$  περιλαμβάνει την επίδραση λόγω του παράγοντα της μόχλευσης (leverage).

### **2.1.4 Το μοντέλο APARCH (Asymmetric Power ARCH Model)**

Το μοντέλο APARCH που εισήγαγαν οι Ding, Engle και Granger (1993) επεκτείνει τα ARCH και GARCH μοντέλα παραμετροποιώντας απευθείας τη μη-γραμμικότητα στην περίπτωση της δεσμευμένης διακύμανσης. Η παραμετροποίηση αυτή επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μία παράμετρο  $\delta$  και με τον τρόπο αυτό προκύπτει μία μέθοδος που παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία στη διαμόρφωση της μνήμης της μεταβλητότητας (memory of volatility), διατηρώντας παράλληλα μία ιδιαίτερα φειδωλή μορφή.

Το μοντέλο PARCH(P,O,Q) περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^\delta = a_0 + \sum_{i=1}^{\max(P,O)} a_i (|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^Q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (2.1.4 - I)$$

όπου  $a_0 > 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $-1 < \gamma_i < 1$  ώστε να διασφαλίζεται ότι οι δεσμευμένες διακυμάνσεις είναι μη-αρνητικές και  $\beta_j > 0$ ,  $\delta > 0$ .

Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο πρέπει να ισχύει ότι  $P \geq 0$  και πως όταν  $P > 0$ , τότε  $\gamma_i = 0$  εάν  $i > 0$ .

Έστω ότι μελετάμε ένα PARCH(1,1,1) μοντέλο. Η σχέση που προκύπτει τότε είναι:

$$\sigma_t^\delta = a_0 + a_1(|a_{t-1}| + \gamma_1 a_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta \quad (2.1.4 - \text{II})$$

εάν υποθέσουμε ότι  $\delta = 2$ , τότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= a_0 + a_1(|a_{t-1}| + \gamma_1 a_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= a_0 + a_1|a_{t-1}|^2 + 2a_1\gamma_1 a_{t-1}|a_{t-1}| + a_1\gamma_1^2 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + a_1\gamma_1^2 a_{t-1}^2 + 2a_1\gamma_1 a_{t-1}^2 \text{sign}(a_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.4 - \text{III})$$

όπου  $\text{sign}(\cdot)$  είναι μία συνάρτηση που δίνει την τιμή 1, εάν το όρισμα είναι θετικό και την τιμή -1, εάν το όρισμα είναι αρνητικό.

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\begin{aligned} \text{συντελεστής } \eta \text{ς } shock &= a_1 + a_1\gamma_1^2 + 2a_1\gamma_1, \text{ όταν } a_t > 0 \\ &\text{ή} \end{aligned} \quad (2.1.4 - \text{IV})$$

$$\text{συντελεστής } \eta \text{ς } shock = a_1 + a_1\gamma_1^2 - 2a_1\gamma_1, \text{ όταν } a_t < 0$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου  $\delta = 2$  και  $\gamma_i = 0$ , το μοντέλο APARCH ταυτίζεται με το GARCH μοντέλο.

## 2.1.5. Κατανομές που εφαρμόζονται

### 2.1.5α Κανονική κατανομή

Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο, είναι συχνά απαραίτητο να κάνουμε κάποιες υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Η πιο διαδεδομένη επιλογή, είναι η υπόθεση ότι οι αποδόσεις αποτελούν ανεξάρτητες και

ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την Κανονική κατανομή (Normal distribution).

Μέσω της υπόθεσης της κανονικότητας, υποδηλώνεται ότι η κατανομή των αποδόσεων μπορεί να περιγραφεί πλήρως με μόνο δύο παραμέτρους: τη μέση τιμή  $\mu$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Σύμφωνα με αυτό προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{μέση τιμή} = \mu$$

$$\text{διακύμανση} = \sigma^2$$

$$\text{ασυμμετρία} = 0$$

$$\text{κυρτότητα} = 3$$

Για μεγαλύτερη ευελιξία στους υπολογισμούς, αλλά και λόγω της εύκολης αναζήτησης μέσω των στατιστικών πινάκων, χρησιμοποιείται η Τυποποιημένη Κανονική κατανομή (Standard Normal distribution) με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Από την άλλη μεριά, ορισμένοι οικονομικοί αναλυτές είναι δύσπιστοι απέναντι στην υπόθεση της κανονικότητας, αφού σε αυτήν την περίπτωση η ασυμμετρία και η κύρτωση πρέπει να είναι μηδενικές, γεγονός που δεν παρατηρείται συχνά. Επίσης, στην περίπτωση που παρατηρηθεί αρνητική ασυμμετρία και θετική υπερβάλλουσα κύρτωση, η πραγματική πιθανότητα μίας μεγάλης αρνητικής απόδοσης (δηλ. απώλειας), είναι μεγαλύτερη από εκείνη που προκύπτει μέσω της κανονικής κατανομής.

Κάτι τέτοιο ενδεχομένως προκαλεί σοβαρές συνέπειες στον καθορισμό του κινδύνου που αναλαμβάνουμε σε υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης, αφού εάν υπολογιστεί κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, τα δεδομένα έχουν λιγότερο βαριές ουρές και

κατ' επέκταση ο πραγματικός κίνδυνος μίας καταστρεπτικής έκβασης, μειώνεται αισθητά. Επομένως, υπάρχουν σαφείς επιφυλάξεις για το εάν θα καταστεί δυνατή η αποστροφή ενός καταστρεπτικού ενδεχομένου στο επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης.

### 2.1.5β t-Student κατανομή

Η *t-Student* κατανομή χρησιμοποιείται συχνά ως εναλλακτικός τρόπος για την περιγραφή των αποδόσεων περιουσιακών στοιχείων, εξαιτίας των ουρών που διαθέτει οι οποίες είναι πιο βαριές σε σχέση με την Κανονική κατανομή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση υποθέτουμε ότι η απόδοση της κάθε ημέρας είναι ανεξάρτητη από τις αποδόσεις των προηγούμενων ημερών, αν και γνωρίζουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι συνηθισμένο λόγω του φαινομένου μετάδοσης μεταβλητότητας (heat wave effect).

Ως αποτέλεσμα του παραπάνω, η κατανομή *t-Student* έχει την τάση να υποτιμά τον κίνδυνο σε περιόδους που παρατηρείται κρίση στις αγορές, διάστημα στο οποίο η αποτίμηση του κινδύνου αποτελεί κομβικό θέμα, και να υπερεκτιμά τον κίνδυνο σε περιόδους που οι αγορές είναι ήρεμες. Παρόλα αυτά, η κατανομή *t-Student* παραμένει ιδιαίτερα δημοφιλής ανάμεσα στους διαχειριστές κινδύνου για τον υπολογισμό των απωλειών, αφού υπάρχει η δυνατότητα επανελέγχου (back testing) στα σημεία που μειονεκτεί η κατανομή.

Η *t-Student* κατανομή βασίζεται σε μία μόνο παράμετρο, την  $\nu$ , η οποία εκφράζει τους βαθμούς ελευθερίας και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)\sigma^2}} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{(\nu-2)\sigma^2}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \quad (2.1.5-I)$$

όπου  $\nu > 2$  και  $\Gamma(\cdot)$  είναι η συνάρτηση Γάμμα. Παρατηρούμε ότι όσο το  $\nu$  προσεγγίζει το άπειρο, τόσο η  $t$ -Student ταυτίζεται με την Κανονική κατανομή. Στην  $t$ -Student η διαφορά εντοπίζεται στο γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή υψώνεται σε δύναμη και δεν είναι εκθετική, όπως στην Κανονική, με αποτέλεσμα την ύπαρξη πιο βαριών ουρών.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{μέση τιμή}=0$$

$$\text{διακύμανση}=\frac{\nu}{\nu-2}$$

$$\text{ασυμμετρία}=0$$

$$\text{κυρτότητα}=\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$$

,όπου πρέπει να ισχύει  $\nu > 4$  προκειμένου να ορίζεται η κύρτωση.

Η κατανομή  $t$ -Student σχεδιάστηκε αρχικά για να χρησιμοποιείται σε μικρά δείγματα, όπου οι βαθμοί ελευθερίας ήταν ίσοι με το μέγεθος του δείγματος μείον ένα. Στις εφαρμογές όμως κατά τις οποίες αξιολογούμε διάφορους κινδύνους, εργαζόμαστε με μεγάλα σύνολα δεδομένων και για το λόγο αυτό προσπαθούμε τεχνητά να επιλέξουμε την κατάλληλη παράμετρο  $\nu$ , ώστε να ταιριάζει με το σχήμα των ουρών, δηλαδή με την κύρτωση των δειγμάτων.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας προκειμένου να προσδιορίσουμε το  $\nu$ . Ο Dowd (2002) εξηγεί λεπτομερώς πώς προσαρμόζουμε μία τυποποιημένη  $t$ -Student (standard  $t$ -Student) κατανομή ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης, επιλέγοντας ένα κατάλληλο σημείο της  $t$  κατανομής.

## 2.2 Πολυμεταβλητά Μοντέλα (Multivariate Models)

Η οικονομική παγκοσμιοποίηση καθώς και η επικοινωνία μέσω του Διαδικτύου, έχουν επιταχύνει τα τελευταία χρόνια την ολοκλήρωση των χρηματοοικονομικών αγορών. Οι μετακινήσεις των τιμών σε μία αγορά, μπορούν να διαδοθούν άμεσα σε μία άλλη, με αποτέλεσμα οι χρηματοοικονομικές αγορές να εξαρτώνται τώρα μεταξύ τους περισσότερο από ποτέ. Για το λόγο αυτό, απαιτείται η από κοινού μελέτη των αγορών προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την δυναμική δομή της παγκόσμιας οικονομίας.

Συνεπώς, με το ίδιο σκεπτικό που μας οδηγεί στην ανάγκη αξιολόγησης του συνόλου της οικονομίας, έτσι και για έναν επενδυτή ή ένα χρηματοπιστωτικό οργανισμό που διαθέτει ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, οι αποδόσεις των επιμέρους περιουσιακών στοιχείων μπορούν να θεωρηθούν και στο εξής να μελετώνται, ως αλληλένδετες. Είναι λοιπόν λογικό, ένας τέτοιος τρόπος προσέγγισης να μας οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα και κατ' επέκταση στη λήψη διαφορετικών αποφάσεων.

Στην ενότητα που ακολουθεί εισάγουμε κάποια οικονομετρικά μοντέλα και μεθόδους που βρίσκουν εφαρμογή στην πολυμεταβλητή ανάλυση των αποδόσεων, τα οποία στην στατιστική βιβλιογραφία ανήκουν στον τομέα της διανυσματικής ανάλυσης ή της ανάλυσης πολυμεταβλητών χρονοσειρών (βλ. Johnson και Wichern, 1998).

Η πολυμεταβλητή μοντελοποίηση είναι παρόμοια με την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας ενός μόνο περιουσιακού στοιχείου. Οι υποθέσεις που αρχικά πρέπει να διασφαλιστούν στα πολυμεταβλητά μοντέλα, είναι η θετικά ορισμένη πρόβλεψη της συνδιακύμανσης καθώς και ο περιορισμός των παραμέτρων, οι οποίες πρέπει να εκτιμηθούν όσο το πλήθος των περιουσιακών στοιχείων αυξάνεται.

### **2.2.1 Διανυσματικό GARCH μοντέλο (vector GARCH model)**

Το Διανυσματικό GARCH μοντέλο ήταν ο πρώτος πολυμεταβλητός προσδιορισμός ενός ARCH μοντέλου από τους Bollerslev, Engle και Wooldridge (1988) και η προφανής επέκταση του τυποποιημένου μοντέλου GARCH. Το μοντέλο αυτό καθορίζεται χρησιμοποιώντας το διάνυσμα της δεσμευμένης συνδιακύμανσης.

Έτσι, η συνδιακύμανση σε ένα Διανυσματικό GARCH μοντέλο εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$vec(\Sigma_t) = vec(C) + A vec(a_{t-1}a'_{t-1}) + B vec(\Sigma_{t-1}) \quad (2.2.1 - I)$$

όπου  $C$  είναι ένα  $k$  από μία θετικά ορισμένη  $k - \mu\eta\ \tau\rho\alpha$  και τα  $A$  και  $B$  είναι  $k^2$  από τις παραμετρικές  $k^2 - \mu\eta\ \tau\rho\epsilon\varsigma$ .

Μέσω του διανύσματος έχουμε τη δυνατότητα κάθε διαγώνιος που προκύπτει, να επηρεάζει κάθε όρο της συνδιακύμανσης. Για να κατανοήσουμε την σπουδαιότητα του παραπάνω μπορούμε να μελετήσουμε της εξέλιξη της δεσμευμένης συνδιακύμανσης σε ένα διμεταβλητό μοντέλο:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{1,t-1}a_{2,t-1} \\ a_{1,t-1}a_{2,t-1} \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.1 - II)$$

Παρατηρούμε ότι το αρχικό διάνυσμα συγκεντρώνει τα στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης, καθώς και τα εξωτερικά γινόμενα των αποδόσεων. Με τον τρόπο αυτό, η εξέλιξη της δεσμευμένης διακύμανσης του πρώτου περιουσιακού στοιχείου που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{11,t} = c_{11} + a_{11} a_{1,t-1}^2 + 2a_{12} a_{1,t-1} a_{2,t-1} + a_{13} a_{2,t-1}^2 + b_{11} \sigma_{11,t-1} + 2b_{12} \sigma_{12,t-1} + b_{13} \sigma_{22,t-1} \quad (2.2.1 - \text{III})$$

εξαρτάται από όλα τα τετράγωνα των αποδόσεων του παρελθόντος και από κάθε διαγώνιο που προκύπτει.

Παρά το σχετικά απλό της παραπάνω διαδικασίας, στην πράξη είναι ιδιαίτερα δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε το Διανυσματικό GARCH μοντέλο, δεδομένου ότι είναι σχεδόν αδύνατο να αντλήσουμε τους γενικούς όρους  $A$  και  $B$  που να εξασφαλίζουν ότι το  $\Sigma_t$  είναι θετικά ορισμένο.

### **2.2.2 Διαγώνιο Διανυσματικό μοντέλο (Diagonal vector model)**

Το διαγώνιο Διανυσματικό μοντέλο θεωρείται περισσότερο επιτυχημένο, αφού καταφέρνει με σχετικά εύκολο τρόπο, την εύρεση των όρων που θα εξασφαλίζουν ότι η δεσμευμένη συνδιακύμανση είναι κατά ένα μέρος θετικά ορισμένη.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι επιλογές για τα  $A$  και  $B$  περιορίζονται λόγω το ότι μπορούν να είναι μόνο διαγώνιες μήτρες. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι τα στοιχεία του  $\Sigma_t$  εξελίσσονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Sigma_t = C + \tilde{A} \otimes a_{t-1} a'_{t-1} + \tilde{B} \otimes \Sigma_{t-1} \quad (2.2.2 - \text{I})$$



όπου  $\tilde{A}$  και  $\tilde{B}$  είναι συμμετρικοί παραμετρικοί πίνακες και  $\otimes$  είναι ο πίνακας  $\alpha_{ij}\beta_{ij}$  με  $ij$ -στοιχεία (ή αλλιώς γινόμενο Hadamard) που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό πινάκων ίδιου μεγέθους.

Με τον τρόπο αυτό, όλα τα στοιχεία του  $\Sigma_t$  εξελίσσονται σύμφωνα με ένα GARCH(1,1) μοντέλο ως εξής:

$$\sigma_{ij,t} = c_{ij} + \tilde{a}_{ij} a_{i,t-1} a_{j,t-1} + \tilde{b}_{ij} \sigma_{ij,t-1} \quad (2.2.2 - \text{II})$$

Το διαγώνιο διάνυσμα εξακολουθεί σε κάποιες περιπτώσεις να απαιτεί περιορισμούς που να διασφαλίζουν ότι η δεσμευμένη συνδιακύμανση είναι θετικά ορισμένη. Ορισμένες ακόμα μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί από τους Ding and Engle (2001) στα πλαίσια της μήτρας GARCH.

### **2.2.3 Το μοντέλο BEKK (BEKK model)**

Το μοντέλο BEKK, το οποίο πήρε την ονομασία του από τα αρχικά των Baba, Engle, Kraft και Kroner που το χρησιμοποίησαν πρώτοι, αντιμετωπίζει άμεσα τις δυσκολίες που αφορούν στην εύρεση των περιορισμών για τις παραμέτρους προσδιορισμού του διανύσματος (Engle και Kroner, 1995).

Το βασικό σκεπτικό του μοντέλου BEKK στηρίζεται στο ότι οι τετραγωνικές μορφές είναι κατά ένα μέρος θετικά ορισμένες, καθώς και στο ότι το άθροισμα μίας θετικά εν μέρει ορισμένης μήτρας και μίας θετικά ορισμένης μήτρας, είναι θετικά ορισμένο.

Έτσι, η συνδιακύμανση σε ένα BEKK GARCH(1,1) μοντέλο εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Sigma_t = CC' + A a_{t-1} a_{t-1}' A' + B \Sigma_{t-1} B' \quad (2.2.3 - \text{I})$$

όπου  $C$  είναι ένας  $k \times k$  κάτω τριγωνικός πίνακας και  $A$  και  $B$  είναι  $k \times k$  πίνακες παραμέτρων.

Χρησιμοποιώντας το αρχικό διάνυσμα, το BEKK μπορεί να θεωρηθεί ως μία περιορισμένη εκδοχή διανυσματικού GARCH όπου  $A \otimes A$  και  $B \otimes B$  ελέγχουν αντίστοιχα την απόκριση στις τελευταίες μεταβολές και την ομαλοποίηση (smoothing). Δηλαδή,

$$vec(\Sigma_t) = vec(CC') + A \otimes A vec(a_{t-1}a'_{t-1}) + B \otimes B vec(\Sigma_{t-1}) \quad (2.2.3 - II)$$

Τα στοιχεία του  $\Sigma_t$  γενικά εξαρτώνται από όλες τις διαγώνιους που προκύπτουν. Αν εξετάσουμε το διμεταβλητό BEKK όπου:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}' \\ &+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 & a_{1,t-1}a_{2,t-1} \\ a_{1,t-1}a_{2,t-1} & a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{12,t-1} & \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}' \quad (2.2.3 - III) \end{aligned}$$

η δεσμευμένη διακύμανση του πρώτου περιουσιακού στοιχείου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{11,t} = c_{11}^2 + a_{11}^2 a_{1,t-1}^2 + 2a_{11} a_{12} a_{1,t-1} a_{2,t-1} + a_{12}^2 a_{2,t-1}^2 + b_{11}^2 \sigma_{11,t-1} + 2b_{11} b_{12} \sigma_{12,t-1} + b_{12}^2 \sigma_{22,t-1} \quad (2.2.3 - IV)$$

Οι υπόλοιπες δεσμευμένες διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις δίνονται από σχέσεις παρόμοιας μορφής και εξαρτώνται τόσο από τα τετράγωνα των αποδόσεων, όσο και από τις διαγώνιους των αποδόσεων που προκύπτουν.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι το συγκεκριμένο μοντέλο είναι εφικτό, όταν το πλήθος των περιουσιακών στοιχείων είναι μικρό, ενώ αντίθετα γίνεται γρήγορα ανυπόφορο όσο το πλήθος των περιουσιακών στοιχείων μεγαλώνει. Δεδομένου ότι το πλήθος των παραμέτρων στο μοντέλο BEKK δίνεται από τη σχέση:

$$\# \text{ παραμετρων} = \frac{5k^2 + k}{2} \quad (2.2.3 - V)$$

όπου  $k$  είναι το πλήθος των περιουσιακών στοιχείων, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις βελτιώσεις που έχουν διατυπωθεί ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε χαρτοφυλάκια με πολλά διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία.

#### **2.2.4 Διαγώνιο BEKK μοντέλο (Diagonal BEKK model)**

Το διαγώνιο BEKK μοντέλο αντιμετωπίζει εν μέρει το πρόβλημα που προκύπτει λόγω του πλήθους των παραμέτρων, θέτοντας τον περιορισμό ότι τα  $A$  και  $B$  είναι διαγώνιες μήτρες.

Η συνδιακύμανση σε ένα διαγώνιο BEKK GARCH (1,1) μοντέλο εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Sigma_t = CC' + \tilde{A} a_{t-1} a'_{t-1} \tilde{A}' + \tilde{B} \Sigma_{t-1} \tilde{B}' \quad (2.2.4 - I)$$

όπου  $C$  είναι ένας  $k \times k$  κάτω τριγωνικός πίνακας και τα  $\tilde{A}$  και  $\tilde{B}$  είναι διαγώνιες παραμετρικές μήτρες. Έτσι, η δεσμευμένη συνδιακύμανση σε ένα διαγώνιο BEKK μοντέλο δίνεται από:

$$\sigma_{ij,t} = \tilde{c}_{ij} + a_i a_j a_{i,t-1} a_{j,t-1} + b_i b_j \sigma_{ij,t-1} \quad (2.2.4 - II)$$

όπου  $\tilde{c}_{ij}$  είναι το  $ij$ -στοιχείο του  $CC'$ .

Αυτή η εξέλιξη του μοντέλου BEKK είναι παρόμοια με την εξέλιξη του Διανυσματικού μοντέλου σε διαγώνιο, με τη διαφορά ότι οι παράμετροι στο μοντέλο BEKK μοιράζονται μεταξύ διαφορετικών σειρών.

### 2.2.5 Το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (Constant Conditional Correlation model - CCC)

Το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (Bollerslev, 1990) χρησιμοποιεί μία διαφορετική προσέγγιση σε σχέση με το BEKK ή το Διανυσματικό GARCH μοντέλο. Το μοντέλο CCC GARCH διαχωρίζει τη δεσμευμένη συνδιακύμανση, σε  $k$  δεσμευμένες διακυμάνσεις και στη δεσμευμένη συσχέτιση, η οποία υποθέτουμε ότι παραμένει σταθερή. Δηλαδή,

$$\Sigma_t = D_t R D_t \quad (2.2.5 - I)$$

όπου  $D_t$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας, που αποτελείται από τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση του  $i$ -οστού περιουσιακού στοιχείου στην  $i$ -οστή διαγώνια τοποθέτησή του. Θα είναι επομένως της μορφής:

$$D_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{k,t} \end{bmatrix} \quad (2.2.5 - II)$$

όπου  $\sigma_{i,t} = \sqrt{\sigma_{ii,t}}$ .

Οι δεσμευμένες διακυμάνσεις σε αυτή την περίπτωση, ουσιαστικά διαμορφώνονται χρησιμοποιώντας συνήθως ένα τυποποιημένο GARCH(1,1) μοντέλο, έτσι ώστε

$$\sigma_{ii,t} = \omega_i + a_i r_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{ii,t-1} \quad (2.2.5 - III)$$

Επίσης, εναλλακτικά είναι εφικτή η μοντελοποίηση των δεσμευμένων διακυμάνσεων χρησιμοποιώντας διαφορετικά μεταξύ τους μοντέλα, ανάλογα με την δυναμική που παρουσιάζει η μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, η δεσμευμένη συσχέτιση είναι η σταθερά:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \cdots & \rho_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1k} & \rho_{2k} & \rho_{3k} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5 - IV)$$

Ο πίνακας δεσμευμένης συνδιακύμανσης υπολογίζεται από τις δεσμευμένες τυπικές αποκλίσεις, καθώς και από τη δεσμευμένη συσχέτιση. Με τον τρόπο αυτό, όλες οι δυναμικές της δεσμευμένης συνδιακύμανσης οφείλονται στις μεταβολές των δεσμευμένων διακυμάνσεων. Δηλαδή,

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \rho_{12} \sigma_{1,t} \sigma_{2,t} & \rho_{13} \sigma_{1,t} \sigma_{3,t} & \cdots & \rho_{1k} \sigma_{1,t} \sigma_{k,t} \\ \rho_{12} \sigma_{1,t} \sigma_{2,t} & \sigma_{22,t} & \rho_{23} \sigma_{2,t} \sigma_{3,t} & \cdots & \rho_{2k} \sigma_{2,t} \sigma_{k,t} \\ \rho_{13} \sigma_{1,t} \sigma_{3,t} & \rho_{23} \sigma_{2,t} \sigma_{3,t} & \sigma_{33,t} & \cdots & \rho_{3k} \sigma_{3,t} \sigma_{k,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1k} \sigma_{1,t} \sigma_{k,t} & \rho_{2k} \sigma_{2,t} \sigma_{k,t} & \rho_{3k} \sigma_{2,t} \sigma_{k,t} & \cdots & \sigma_{kk,t} \end{bmatrix} \quad (2.2.5 - V)$$

Ο Bollerslev (1990) δείχνει ότι το μοντέλο CCC GARCH μπορεί να εκτιμηθεί σε δύο στάδια. Αρχικά, εφαρμόζει  $k$  μοντέλα δεσμευμένης διακύμανσης (όπως για παράδειγμα το GARCH) και από αυτά παράγει το διάνυσμα των τυποποιημένων καταλοίπων (standardized residuals)  $u_t$ , όπου

$$u_{i,t} = \frac{a_{i,t}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii,t}}} \quad (2.2.5 - VI)$$

Στην συνέχεια εκτιμά την σταθερή δεσμευμένη συσχέτιση, χρησιμοποιώντας τον τυποποιημένο εκτιμητή συσχέτισης στα τυποποιημένα κατάλοιπα. Συγκεκριμένα για το μοντέλο GARCH, η συνδιακύμανση με μία σταθερή δεσμευμένη συσχέτιση εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \rho_{12} \sigma_{1,t} \sigma_{2,t} & \rho_{13} \sigma_{1,t} \sigma_{3,t} & \cdots & \rho_{1k} \sigma_{1,t} \sigma_{k,t} \\ \rho_{12} \sigma_{1,t} \sigma_{2,t} & \sigma_{22,t} & \rho_{23} \sigma_{2,t} \sigma_{3,t} & \cdots & \rho_{2k} \sigma_{2,t} \sigma_{k,t} \\ \rho_{13} \sigma_{1,t} \sigma_{3,t} & \rho_{23} \sigma_{2,t} \sigma_{3,t} & \sigma_{33,t} & \cdots & \rho_{3k} \sigma_{3,t} \sigma_{k,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1k} \sigma_{1,t} \sigma_{k,t} & \rho_{2k} \sigma_{2,t} \sigma_{k,t} & \rho_{3k} \sigma_{3,t} \sigma_{k,t} & \cdots & \sigma_{kk,t} \end{bmatrix} \quad (2.2.5 - \text{VII})$$

όπου το  $\sigma_{i,t}^2$  για  $i = 1, 2, \dots, k$  μεταβάλλεται σύμφωνα με μία μονομεταβλητή διαδικασία GARCH του  $i$  περιουσιακού στοιχείου (συνήθως GARCH(1,1)).

## Κεφάλαιο 3

### 3.1 Αξία σε Κίνδυνο (VaR)

Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk ή VaR) είναι ένα από τα δημοφιλέστερα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της έκθεσης στους κινδύνους της αγοράς, και μετρά τη χειρότερη αναμενόμενη απώλεια σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Αποτελεί μια τεχνική, που χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει την πιθανότητα των απωλειών χαρτοφυλακίων, βασισμένη στη στατιστική ανάλυση των ιστορικών τάσεων τιμών και της μεταβλητότητάς τους (volatilities).

Η Αξία σε Κίνδυνο χρησιμοποιείται συνήθως από τις τράπεζες, τις ασφαλιστικές εταιρίες και τις επιχειρήσεις που εμπλέκονται στην εμπορία ενέργειας και άλλων προϊόντων, και είναι σε θέση να μετρήσει τον κίνδυνο την στιγμή που συμβαίνει, με συνέπεια να αποτελεί μια σημαντική παράμετρο που μελετούν οι εταιρίες κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Ένας άλλος τρόπος για την περιγραφή του VaR είναι ότι αποτελεί το χαμηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης των πιθανών απωλειών που μπορούν να εμφανιστούν μέσα σε ένα δεδομένο χαρτοφυλάκιο, κατά τη διάρκεια ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος. Το βασικό χρονικό διάστημα  $T$  και το επίπεδο εμπιστοσύνης (quantile)

q είναι οι δύο σημαντικές παράμετροι που πρέπει να είναι επιλεγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κατάλληλες στο γενικό στόχο της μέτρησης κινδύνου. Ο χρονικός ορίζοντας μπορεί να διαφέρει από μερικές ώρες, για ένα ενεργό γραφείο εμπορικών συναλλαγών, μέχρι ένα έτος για ένα συνταξιοδοτικό ταμείο.

Όταν ο αρχικός στόχος είναι η ικανοποίηση των εξωτερικών ρυθμιστικών απαιτήσεων, όπως οι κύριες απαιτήσεις τραπεζών, το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι χαρακτηριστικά πολύ μικρό (παραδείγματος χάριν, 1% των χειρότερων εκβάσεων). Εντούτοις, ως εσωτερικό πρότυπο διαχείρισης κινδύνων, που χρησιμοποιείται από μια επιχείρηση, το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι περίπου 5% .

Παραδείγματος χάριν, εάν ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών ύψους 1 εκατομμυρίου Ευρώ έχει ημερήσιο VaR 12% με επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει πιθανότητα 5% το χαρτοφυλάκιο να πέσει στην αξία του περισσότερο από το 12% του 1 εκατομμυρίου Ευρώ κατά τη διάρκεια περιόδου μιας ημέρας, υποθέτοντας ότι οι αγορές είναι κανονικές και δεν παρατηρείται καμία εμπορική συναλλαγή. Ανεπίσημα, μια τέτοιου ύψους απώλεια σε αυτό το χαρτοφυλάκιο, αναμένεται να συμβεί 1 ημέρα σε σύνολο 20 ημερών.

Ο λόγος που υποθέτουμε ότι οι αγορές είναι κανονικές και δεν παρατηρείται καμία εμπορική συναλλαγή κατά την διάρκεια μιας ημέρας, είναι για να καταστεί αισθητή η απώλεια. Σε μερικά ακραία οικονομικά γεγονότα, μπορεί να είναι αδύνατο να καθοριστούν οι απώλειες, είτε επειδή οι τιμές αγοράς είναι μη διαθέσιμες, είτε επειδή η αιτία της απώλειας επιμερίζεται σε μικρότερες.

Μερικές λιγότερο άμεσες συνέπειες των καταστροφών, όπως οι ένδικες διαδικασίες, η απώλεια εμπιστοσύνης από την πλευρά της αγοράς και οι επιπτώσεις στο ηθικό των υπαλλήλων μπορούν να διαδραματίσουν έναν πιο μακροπρόθεσμο ρόλο, με αποτέλεσμα να είναι δύσκολο να αξιολογηθούν οι προγενέστερες αποφάσεις της επιχείρησης που οδήγησαν στα καταστροφικά αυτά αποτελέσματα. Το VaR



χαρακτηρίζει το όριο μεταξύ των κανονικών ημερών και των ημερών όπου παρατηρούνται τα ακραία γεγονότα.

### **3.1.1 Ιστορική Εξέλιξη VaR**

Ενώ ο όρος «Αξία σε Κίνδυνο» δεν χρησιμοποιήθηκε ευρέως πριν από τα μέσα της δεκαετίας του '90, η προέλευση του μέτρου αυτού βρίσκεται αρκετά προγενέστερα. Τα μαθηματικά πάνω στα οποία βασίζεται ο υπολογισμός του VaR, αναπτύχθηκαν κατά ένα μεγάλο μέρος στα πλαίσια της θεωρίας χαρτοφυλακίων από τον Harry Markowitz, αν και άλλοι μελετητές, που επίσης ασχολήθηκαν με το αντικείμενο, κατευθύνθηκαν προς διαφορετικές προσεγγίσεις, επινοώντας τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια για τους επενδυτές μετοχικού κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, η εστίαση στους κινδύνους αγοράς και τα αποτελέσματα των συμμεταβολών (comovements) στους κινδύνους αυτούς αποτελούν τα θεμέλια του υπολογισμού του VaR.

Η ώθηση για τη χρήση των μέτρων VaR, εν τούτοις, προήλθε από τις κρίσεις που περιέβαλαν τις οικονομικές εταιρείες παροχής υπηρεσιών καθώς και τα ρυθμιστικά μέτρα στις κρίσεις αυτές. Οι πρώτες ρυθμιστικές κύριες απαιτήσεις για τις τράπεζες θεσπίστηκαν ως συνέπεια του Great Depression και της αποτυχίας των τραπεζών της εποχής, όταν η Επιτροπή Ανταλλαγής Τίτλων (Securities Exchange Commission - SEC) καθιέρωσε το νόμο ανταλλαγής τίτλων (Securities Exchange Act) και απαίτησε από τις τράπεζες να κρατήσουν τις παροχές δανείων κάτω από το 2000% του κεφαλαίου τους. Για το λόγο αυτό, στις μετέπειτα δεκαετίες, οι τράπεζες επινόησαν τα μέτρα κινδύνου και τις συσκευές ελέγχου, ώστε να εξασφαλίσουν ότι κάλυψαν αυτές τις κύριες απαιτήσεις.

Με τον αυξανόμενο κίνδυνο που δημιουργήθηκε από την εμφάνιση της αγοράς παράγωγων προϊόντων και των κυμαινόμενων συναλλαγματικών ισοτιμιών στις

αρχές της δεκαετίας του '70, οι κύριες απαιτήσεις για τις τράπεζες προσδιορίστηκαν και επεκτάθηκαν στον ομοιόμορφο κύριο κανόνα δικτύου (Uniform Net Capital Rule) του SEC που διαδόθηκε το 1975, το οποίο ταξινομούσε τα αξιόγραφα που κρατούσε η κάθε τράπεζα σε δώδεκα κατηγορίες. Κάθε μία από αυτές βασιζόταν στον κίνδυνο που περιείχε το κάθε αξιόγραφο, και παράλληλα θεσμοθετήθηκαν διαφορετικές κύριες απαιτήσεις για την κάθε κατηγορία, οι οποίες κυμαίνονταν από 0% για τις βραχυπρόθεσμες ταμειακές ροές, έως 30% για τις μετοχές. Επίσης οι τράπεζες όφειλαν να υποβάλουν κάθε τρίμηνο εκθέσεις σχετικά με τους κύριους υπολογισμούς τους.

Παρόλα αυτά, τα πρώτα ρυθμιστικά μέτρα που οδήγησαν στο Value at Risk άρχισαν το 1980, όταν η SEC συνέδεσε τις κύριες απαιτήσεις των οικονομικών εταιρειών παροχής υπηρεσιών, με τις απώλειες που θα υφίσταντο, μέσα σε ένα διάστημα 30 ημερών κάτω από διαφορετικά επίπεδα ασφαλείας και με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Οι ιστορικές αποδόσεις χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν αυτές οι πιθανές απώλειες και παρόλο που τα μέτρα αυτά περιγράφηκαν αρχικά ως “haircuts” και όχι ως Αξία ή Κεφάλαιο σε Κίνδυνο, ήταν σαφές ότι η SEC απαιτούσε από τις οικονομικές εταιρείες παροχής υπηρεσιών να αρχίσουν τις διαδικασίες για τον υπολογισμό μηνιαίων 95% VaRs και να παρακρατήσουν το επαρκές κεφάλαιο ώστε να καλύψουν τις πιθανές μελλοντικές απώλειες.

Περίπου το ίδιο χρονικό διάστημα, τα χαρτοφυλάκια επενδυτικών και εμπορικών συναλλαγών των τραπεζών, γίνονταν μεγαλύτερα και πιο μεταβλητά (volatile), δημιουργώντας μια ανάγκη για περιπλοκότερα και περισσότερο έγκυρα μέτρα ελέγχου κινδύνου. Ο Ken Garbade το 1986 στο Banker's Trust, παρουσίαζε περίπλοκα μέτρα της Αξίας σε Κίνδυνο για τα σταθερής απόδοσης χαρτοφυλάκια μίας εταιρίας, που βασίζονται στη συνδιακύμανση αποδόσεων διαφορετικής διάρκειας κρατικών ομολόγων. Από τις αρχές της δεκαετίας του '90, πολλές

οικονομικές εταιρείες παροχής υπηρεσιών είχαν αναπτύξει τα στοιχειώδη μέτρα της Αξίας σε Κίνδυνο, με ευρείες παραλλαγές στον τρόπο με τον οποίο μετρήθηκε.

Ως συνέπεια πολυάριθμων καταστρεπτικών απωλειών που συνδέονται με τη χρήση των παράγωγων προϊόντων, καθώς και της μόχλευσης (leverage) μεταξύ του 1993 και 1995, η Βρετανική Τράπεζα Επενδύσεων ήταν έτοιμη για περιεκτικότερα μέτρα κινδύνου. Το 1995 η J.P. Morgan παρείχε δημόσια πρόσβαση στα στοιχεία που αφορούσαν τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις στις διάφορες κατηγορίες επιπέδου ασφάλειας και περιουσιακών στοιχείων, που είχε χρησιμοποιήσει για σχεδόν μία δεκαετία για να διαχειριστεί τους κινδύνους, και επέτρεψε στους κατασκευαστές λογισμικού να αναπτύξουν τα προγράμματα για τη μέτρησή τους.

Η υπηρεσία αυτή με τίτλο «RiskMetrics» χρησιμοποίησε τον όρο Αξία σε Κίνδυνο για να περιγράψει το μέτρο κινδύνου που προέκυψε από τα δεδομένα της J.P.Morgan. Το καινούριο μέτρο βρήκε ένα έτοιμο ακροατήριο που αποτελούταν από εμπορικές και επενδυτικές τράπεζες καθώς και από τις ρυθμιστικές αρχές που τις επιτηρούν. Την τελευταία δεκαετία, το VaR έχει γίνει το καθοριστικό μέτρο της έκθεσης σε κίνδυνο στις οικονομικές εταιρείες παροχής υπηρεσιών και βρίσκει πλέον αποδοχή και σε εταιρίες μη οικονομικών υπηρεσιών.

## **Μέθοδοι υπολογισμού του VaR**

### **3.1.2 Ιστορική Προσομοίωση (Historical Simulation)**

Η πρώτη μέθοδος που παρουσιάζεται είναι η Ιστορική Προσομοίωση, όπου απλοποιεί δραστικά την διαδικασία υπολογισμού του VaR και στην οποία υποθέτουμε ότι οι αλλαγές στην αγορά από την σημερινή ημέρα στην αυριανή, είναι οι ίδιες με τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν κάποια στιγμή στο παρελθόν.

Γενικά, η απόδοση  $R_{PF,t+1}$  ενός χαρτοφυλακίου την ημέρα  $t+1$  ορίζεται ως

$$R_{PF,t+1} = \sum_{i=1}^n w_i R_{i,t+1} \quad (3.1.2-I)$$

όπου το  $n$  συμβολίζει το πλήθος των περιουσιακών στοιχείων (assets) που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο και το  $w_i$  δηλώνει το βάρος του περιουσιακού στοιχείου  $i$ , στο τέλος της ημέρας  $t$ .

Τότε, η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{PF,t+1}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij,t+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,t+1} \sigma_{j,t+1} + \rho_{ij,t+1} \end{aligned} \quad (3.1.2-II)$$

όπου  $\sigma_{ij,t+1}$  και  $\rho_{ij,t+1}$  είναι η διακύμανση και συσχέτιση (correlation) αντίστοιχα, μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων  $i$  και  $j$  την ημέρα  $t+1$  και η Αξία σε Κίνδυνο ορίζεται ως:

$$VaR_{t+1}^P = -\sigma_{PF,t+1} * F_P^{-1} \quad (3.1.2-III)$$

όπου  $F_P^{-1}$  είναι το  $p$ -ποσοστημόριο (quintile) απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Στην περίπτωση της Ιστορικής Προσομοίωσης, υποθέτουμε ότι η κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων  $R_{PF,t+i}$  προσεγγίζονται αποτελεσματικά από την εμπειρική κατανομή των περασμένων  $m$  αποδόσεων, δηλαδή του  $\{R_{PF,t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m$ .

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$VaR_{t+1}^P = -\text{Percentile} \left\{ \{R_{PF,t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m, 100-p \right\} \quad (3.1.2-IV)$$

δηλαδή, η Αξία σε Κίνδυνο ισούται με το αντίστοιχο ποσοστημόριο των  $\tau$  παρελθοντικών αποδόσεων.

### **3.1.3 Σταθμισμένη Ιστορική Προσομοίωση (Weighted Historical Simulation)**

Η μέθοδος της Σταθμισμένης Ιστορικής Προσομοίωσης αποτελεί μία τροποποίηση της Ιστορικής Προσομοίωσης, η οποία παρέχει μεγαλύτερο βάρος στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις και αφαιρεί σταδιακά το βάρος των αρχικών δεδομένων. Το γεγονός αυτό επιτυγχάνεται, θεωρώντας βάρη που μειώνονται εκθετικά όσο πλησιάζουμε προς το παρελθόν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$w_{\tau} = \left\{ w^{\tau-1} \frac{1-w}{1-w^m} \right\}_{\tau=1}^m \quad (3.1.3-I)$$

Για παράδειγμα, η σημερινή απόδοση θα έχει βάρος  $w_1 = \frac{1-w}{1-w^m}$ .

Παρατηρούμε ότι το  $w_{\tau}$  τείνει στο μηδέν όσο το  $\tau$  μεγαλώνει και ότι τα βάρη των  $\tau = 1, 2, \dots, m$  αθροίζουν στη μονάδα. Πρακτικά το  $w$  θεωρείται ως ένας αριθμός ανάμεσα στο 0.95 και 0.99. Έπειτα οι παρατηρήσεις ταξινομούνται με βάση το βάρος τους κατά αύξουσα σειρά και στη συνέχεια το επί τοις εκατό ποσοστημόριο του VaR υπολογίζεται συσσωρεύοντας τις παρατηρήσεις με το μεγαλύτερο βάρος έως ότου φτάσουμε στο 100%.

Στην περίπτωση αυτή (όπως και στην απλή Ιστορική Προσομοίωση) μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) προκειμένου να προσδιοριστεί επακριβώς το VaR.

### 3.1.4 Φιλτραρισμένη Ιστορική Προσομοίωση (Filtered Historical Simulation)

Μία δεύτερη ενδιαφέρουσα παραλλαγή της Ιστορικής Προσομοίωσης είναι η Φιλτραρισμένη Ιστορική Προσομοίωση η οποία αποτελεί συνδυασμό μίας μη παραμετρικής μεθόδου και ενός παραμετρικού μοντέλου.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μία ακολουθία προηγούμενων αποδόσεων  $\{R_{t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m$  μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα GARCH μοντέλο και να υπολογίσουμε τις παρελθοντικές τυποποιημένες αποδόσεις από τα παρατηρηθέντα δεδομένα και από τις εκτιμημένες τυπικές αποκλίσεις ως εξής:

$$\hat{Z}_{t+1-\tau} = \frac{R_{t+1-\tau}}{\sigma_{t+1-\tau}} \quad \text{για } \tau = 1, 2, \dots, m \quad (3.1.4-I)$$

Αν το σύνολο των τυποποιημένων αποδόσεων εκφράζεται ως  $\{\hat{Z}_{t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m$ , τότε η Αξία σε Κίνδυνο δίνεται από:

$$VaR_{t+1}^p = -\sigma_{t+1} \text{Percentile} \left\{ \{\hat{Z}_{t+1-\tau}\}_{\tau=1}^m, 100-p \right\} \quad (3.1.4-II)$$

Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει τα κύρια χαρακτηριστικά της εμπειρικής κατανομής, όπως η μη μηδενική ασυμμετρία, οι μεταβολές στην μεταβλητότητα και οι παχιές ουρές και για τον λόγο αυτό είναι σε θέση να προσδιορίσει βελτιωμένες εκτιμήσεις για το VaR.

### **3.1.5 Μέθοδος Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance Method)**

Η μέθοδος της Συνδιακύμανσης βασίζεται στην υπόθεση ότι οι βραχυχρόνιες μεταβολές στις παραμέτρους της αγοράς και στην αξία του χαρτοφυλακίου είναι κανονικές, ενώ παράλληλα απεικονίζει το γεγονός ότι οι παράγοντες της αγοράς δεν είναι μεν ανεξάρτητοι, αλλά έχουν περιορισμένο βαθμό συσχέτισης.

Αρχικά, μέσω της δημιουργίας ενός διανύσματος μέσω ημερήσιων αποδόσεων βασισμένων σε ιστορικά δεδομένα και μίας μήτρας συνδιακύμανσης των αποδόσεων αυτών, υπολογίζεται μία γραμμική προσέγγιση (delta approximation) του χαρτοφυλακίου μας για μικρές μεταβολές της αγοράς. Στην συνέχεια εκτιμάται η διακύμανση του χαρτοφυλακίου, υποθέτοντας κανονικά κατανομημένες αποδόσεις και υπολογίζεται το χαμηλότερο ποσοστό κέρδους ή απώλειας (profit & loss quantile) για το απαιτούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Σημαντικό ρόλο στην μέθοδο αυτή παίζει ο προσδιορισμός της περιόδου διακράτησης (holding period) που συνήθως αφορά μία ημέρα, αλλά υπάρχουν απόψεις που ισχυρίζονται ότι η διάρκειά της θα πρέπει να είναι ίση με τη μέγιστη δυνατή περίοδο ρευστοποίησης του αξιογράφου, είτε ίση με την περίοδο που το χαρτοφυλάκιο μένει σταθερό.

Με δεδομένη την περίοδο διακράτησης, είναι εφικτός ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων και κατ' επέκταση ο προσδιορισμός του VaR:

$$VaR = \sigma * Z_{\alpha} * \text{Αξία Θέσης} \quad (3.1.5 - I)$$

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων η διακύμανση αντικαθίσταται από μία μήτρα συνδιακυμάνσεων και με τον τρόπο αυτό, το VaR δεν εξαρτάται μόνο από την μεταβολή στην τιμή και την περίοδο διακράτησης, αλλά και από τη συσχέτιση μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων.

### **3.1.6 Monte Carlo Προσέγγιση (Monte Carlo Approach)**

Η προσέγγιση Monte Carlo είναι βασισμένη στην υπόθεση ύπαρξης πληροφοριών για την από κοινού κατανομή των αποδόσεων, η οποία μας δίνει την δυνατότητα δημιουργίας ενός πλήθους σεναρίων για την αξιολόγηση του χαρτοφυλακίου. Το χαμηλότερο ποσοστημόριο που προκύπτει από την κατανομή, ως αποτέλεσμα των σεναρίων αυτών, αποτελεί μία καλή προσέγγιση του VaR. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή επιτρέπει περαιτέρω βελτιώσεις, αφού είναι δυνατή η διενέργεια επιμέρους προσομοιώσεων, όπου αυτό είναι απαραίτητο.

Αν ορίσουμε τις μελλοντικές  $t+1$  αποδόσεις, που προκύπτουν από τα διάφορα σενάρια ως  $\tilde{R}_{i,t+1} = \sigma_{t+1} \tilde{Z}_{i,1}$

μπορούμε να πάρουμε ένα σύνολο μελλοντικών  $t+2$  διακυμάνσεων ως ακολούθως:

$$\sigma_{i,t+2}^2 = w + aR_{i,t+1}^2 + \beta\sigma_{i,t+1}^2 \quad (3.1.6-I)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ένα νέο σύνολο τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από την τυπική κανονική κατανομή, μπορούμε διαδοχικά να υπολογίσουμε την μελλοντική  $t+2$  απόδοση και την μελλοντική  $t+3$  διακύμανση ως:

$$R_{i,t+2} = \sigma_{i,t+2} Z_{i,2}$$

$$\sigma_{i,t+3}^2 = w + aR_{i,t+2}^2 + \beta\sigma_{i,t+2}^2 \quad (3.1.6-II)$$

αντίστοιχα, όπου  $Z_i \sim N(0,1)$ . Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία επαγωγικά μέχρι  $t+K$  προκύπτει:

$$R_{i,t+1:t+K} = \sum_{k=1}^K R_{i,t+k} \quad , \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, MC \text{ δοκιμ } \acute{\epsilon}\varsigma \quad (3.1.6-III)$$



και κατ' επέκταση η Αξία σε Κίνδυνο δίνεται από:

$$VaR_{t+1:t+K}^p = - \text{Percentile} \left\{ \{R_{i,t+1:t+K}\}_{i=1}^{MC \text{ δοκιμ. ές } ,100 - p} \right\} \quad (3.1.6 - IV)$$

### **3.1.7 Σύγκριση Μεθόδων**

Η Ιστορική Προσομοίωση χρησιμοποιείται ευρέως στην πράξη, λόγω της ευκολίας με την οποία εφαρμόζεται, αφού καμία παράμετρος δεν χρειάζεται να εκτιμηθεί με κάποια μέθοδο, με αποτέλεσμα να μην απαιτείται καμία περαιτέρω αριθμητική βελτιστοποίηση. Επίσης, η απουσία μοντέλων για τον υπολογισμό του VaR αποτελεί χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής, αφού δεν στηρίζεται πάνω σε οποιοδήποτε ιδιαίτερο παραμετρικό πρότυπο, όπως ένα GARCH μοντέλο, και χωρίς την επιβολή περαιτέρω υποθέσεων σχετικά με την κατανομή των αποδόσεων, βασίζεται σε προγενέστερα δεδομένα με σκοπό να προσδιορίσει τις μελλοντικές τιμές των αποδόσεων.

Από την άλλη μεριά, η “ελεύθερη” φύση της Ιστορικής Προσομοίωσης είναι λογικό να έχει και μειονεκτήματα, αφού το πλήθος των προγενέστερων δεδομένων που θα επιλεγεί για την εκτίμηση του VaR, παίζει κύριο ρόλο. Στην περίπτωση που το πλήθος αυτό είναι πολύ μεγάλο, οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, που πιθανώς να είναι πιο σχετικές για την μελλοντική πορεία, θα φέρουν πολύ λίγο βάρος, και το VaR θα τείνει να φαίνεται ιδιαίτερα ομαλό κατά την πάροδο του χρόνου, ενώ εάν το πλήθος που επιλέγεται είναι πολύ μικρό, το δείγμα μπορεί να μην περιλαμβάνει αρκετές μεγάλες απώλειες, που να επιτρέπουν στον διαχειριστή κινδύνου να υπολογίσει, ένα VaR με οποιαδήποτε ακρίβεια (για παράδειγμα 1%).

Επομένως, η επιλογή των προγενέστερων δεδομένων αποτελεί ιδιαίτερη παράμετρο, δεδομένου ότι επηρεάζει ιδιαίτερα το μέγεθος και τη δυναμική του VaR μέσω αυτής

της μεθόδου. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι στην πράξη επιλέγονται δεδομένα μεταξύ 250 και 1000 ημερών που αντιστοιχούν σε περίπου 1 έως 4 έτη. Επιπλέον, η Ιστορική Προσομοίωση αποτελεί μία αρκετά χρονοβόρα μέθοδο με κύριο πλεονέκτημά της το γεγονός ότι συμπεριλαμβάνει όλες τις πρόσφατες διακυμάνσεις της αγοράς, γνώρισμα το οποίο θεωρείται πολύ σημαντικό για τον υπολογισμό και την διαχείριση του κινδύνου. Για τον λόγο αυτό, η χρήση της είναι προτιμότερη όταν το VaR αξιολογείται στην περίπτωση που ο κίνδυνος είναι σταθερός και υπάρχουν ουσιαστικά ιστορικά δεδομένα, όπως οι τιμές των βασικών περιουσιακών στοιχείων.

Η Variance-Covariance προσέγγιση απαιτεί την ύπαρξη ισχυρών υποθέσεων για την κατανομή των αποδόσεων των τυποποιημένων περιουσιακών στοιχείων (standardized assets) και για την γραμμική προσέγγιση του χαρτοφυλακίου, αλλά είναι γρήγορη στον υπολογισμό της και απλή από την στιγμή που θα πραγματοποιηθούν οι υποθέσεις αυτές. Αποτελεί πιθανώς την καλύτερη μέθοδο για γρήγορες εκτιμήσεις των μεταβλητών στην περίπτωση που μελετάμε δικαιώματα αγοράς (options) σύντομων χρονικών περιόδων (ημέρας, εβδομάδας), εν τούτοις πρέπει να γίνεται πολύ προσεκτικά η χρήση της, για ένα μη γραμμικό χαρτοφυλάκιο, ειδικά όταν παρατηρείται υψηλή κυρτότητα σε δικαιώματα αγοράς και ομόλογα.

Η προσέγγιση Variance-Covariance έχει ως αποτέλεσμα την ίδια Αξία σε Κίνδυνο με την μέθοδο Ιστορικής Προσομοίωσης, στην περίπτωση που οι ιστορικές αποδόσεις είναι κανονικά κατανομημένες και χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των μέτρων διασποράς, και συγκλίνει με την Αξία σε Κίνδυνο που προκύπτει μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo στην περίπτωση που τα δεδομένα είναι κανονικά κατανομημένα με συνεπείς εκτιμητές την μέση τιμή και την διακύμανση.

Η προσέγγιση Monte Carlo επιτρέπει περισσότερη ευελιξία, από την άποψη της επιλογής των κατανομών που ακολουθούν οι αποδόσεις, ενώ παράλληλα παρέχει και την δυνατότητα εφαρμογής υποκειμενικών κρίσεων και άλλων εξωτερικών δεδομένων. Από την άλλη μεριά, είναι ιδιαίτερα αργή και απαιτητική από

υπολογιστικής σκοπιάς. Επομένως, στην περίπτωση που για τον υπολογισμό της Αξίας σε Κίνδυνο εξετάζονται χαρτοφυλάκια μη γραμμικά τα οποία περιλαμβάνουν options μεγάλων χρονικών περιόδων, όπου τα ιστορικά δεδομένα είναι μεταβλητά (volatile) και οι υποθέσεις κανονικότητας αμφισβητήσιμες, η προσέγγιση Monte Carlo ανταποκρίνεται αποτελεσματικότερα.

Τέλος σημειώνεται ότι οι προσεγγίσεις Monte Carlo συγκλίνουν με αυτές της Ιστορικής Προσομοίωσης, όταν οι κατανομές που χρησιμοποιούνται βασίζονται εξ ολοκλήρου σε ιστορικά στοιχεία.

### **3.1.8 Μοντέλο Εκθετικού Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponential Weighted Moving Average Model)**

Το μοντέλο Εκθετικού Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (EWMA) διαδόθηκε από την ομάδα Risk Metrics και σύμφωνα με αυτή, η εκτίμηση της διακύμανσης για την σημερινή ημέρα δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda)R_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad (3.1.8 - I)$$

όπου  $\lambda$  είναι μία σταθερά εξομάλυνσης (smoothing constant) και  $R_{t-1}$  είναι η απόδοση της προηγούμενης ημέρας.

Με τον τρόπο αυτό, το VaR προέρχεται από το q-ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής ως εξής:

$$VaR_{t+1} = -\sigma_{t+1} \Phi^{-1}(q) \quad (3.1.8 - II)$$

όπου  $\Phi^{-1}(\cdot)$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής.

Παρατηρούμε ότι, εφόσον το  $\lambda$  είναι θετικό, η διακύμανση της σημερινής ημέρας είναι θετικά συσχετισμένη με εκείνη της προηγούμενης και με τον τρόπο αυτό γίνεται σαφές ότι τα μοντέλα EWMA εμπεριέχουν την ιδέα της συσσώρευσης της αστάθειας. Η παράμετρος  $\lambda$  αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου, αφού όσο μεγαλύτερη τιμή έχει, τόσο μεγαλύτερη τείνει να είναι και η τιμή της διακύμανσης μετά από έναν κλονισμό της αγοράς (shock).

Επίσης, η διακύμανση που προκύπτει μέσω του EWMA αντιδρά άμεσα σε οποιαδήποτε μεταβολή της αγοράς, είτε αυτή είναι αρνητική, είτε θετική, αφού εάν η απόδοση της προηγούμενης ημέρας είναι μεγάλη, η διακύμανση θα αυξηθεί και όσο μεγαλύτερο είναι το  $1 - \lambda$ , τόσο πιο έντονη θα είναι η αντίδραση σε οποιοδήποτε shock.

Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αυτό το είδος αντίδρασης και επιρροής στην μελλοντική διακύμανση, αποτελεί χαρακτηριστικό ενός GARCH μοντέλου. Θεωρητικά το μοντέλο EWMA μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα πολύ απλό GARCH μοντέλο, το οποίο όμως δεν διαθέτει σταθερά στατιστικά θεμέλια για τα πρότυπα μεταβλητότητας, αφού δεν υπάρχει καμία κατάλληλη στατιστική διαδικασία για την εκτίμηση του  $\lambda$  και απλά υποθέτουμε οι ίδιοι μία τιμή για αυτό. Παρατηρούμε επίσης ότι το VaR ακολουθεί μία τυχαία διαδρομή, αφού  $\lambda + (1 - \lambda) = 1$ . Σύμφωνα με τη Risk Metrics η τιμή του  $\lambda$  όταν αναλύουμε ημερήσια δεδομένα εντοπίζεται γύρω από το 0,94 ενώ για μηνιαία δεδομένα είναι περίπου 0,97.

Επιπλέον, όταν μελετάμε ένα χαρτοφυλάκιο όπου η διακύμανση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μία μήτρα συνδιακύμανσης, συμβαίνει σε κάποιες περιπτώσεις να παίρνουμε ως αποτέλεσμα αρνητική διακύμανση. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο EWMA αφού κανονικά θα έπρεπε να πάρουμε διαφορετικές τιμές του  $\lambda$  για κάθε περιουσιακό στοιχείο, ενώ εμείς αντίθετα, παίρνουμε το ίδιο  $\lambda$  για την διακύμανση του κάθε στοιχείου που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο μας.

Για τους λόγους αυτούς, αλλά και για το γεγονός ότι δεν μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να ενσωματώνεται και ο παράγοντας της μόχλευσης, το μοντέλο EWMA δεν είναι πραγματικά κατάλληλο για να μελετήσει την εξέλιξη της αγοράς σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα, αλλά περιορίζεται σε ορίζοντα μερικών ημερών.

### **3.1.9 Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory)**

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (EVT) αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο εκτίμησης του VaR και είναι ένα κλασικό κομμάτι της Θεωρίας Πιθανοτήτων, αφού ουσιαστικά μπορεί να θεωρηθεί ως συμπλήρωμα του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (ΚΟΘ). Ενώ το ΚΟΘ εξετάζει διακυμάνσεις συσσωρευτικών ποσών, η EVT εξετάζει τις διακυμάνσεις των μέγιστων δειγμάτων (sample maxima). Η κύρια σύνδεση αυτών των δύο οφείλεται στους Fisher και Tippett (1928) οι οποίοι διευκρίνισαν τη μορφή του ορίου της κατανομής για κατάλληλα κανονικοποιημένα δείγματα. Στην περίπτωση που οι κατανομές έχουν παχιές ουρές, το VaR δίνεται από τη σχέση:

$$VaR_t(a) = \sigma_t u \left( \frac{a}{T_u / T} \right)^{-\tau} \quad (3.1.9-I)$$

όπου  $u$  είναι ένα συγκεκριμένο όριο που έχουμε επιλέξει (για παράδειγμα ίσο με 5%),  $T_u$  είναι το πλήθος των παρατηρήσεων που υπερέβησαν το όριο αυτό,  $T$  είναι το μέγεθος του δείγματος και  $\tau$  είναι η εκτιμήτρια Hill της ουράς που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\tau = \frac{1}{T_u} \sum_{i=1}^{T_u} \lambda \nu \left( \frac{y_i}{u} \right) \quad (3.1.9-II)$$

Ο προσδιορισμός του  $u$  αποτελεί ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής, καθώς αν το  $u$  είναι πολύ μεγάλο, το  $T_u$  θα είναι ιδιαίτερα μικρό, με αποτέλεσμα να

προκύπτει ένας εκτιμητής μεγάλης διακύμανσης. Από την άλλη μεριά, εάν το  $u$  είναι μικρό, ο εκτιμητής που θα προκύψει θα είναι μη αμερόληπτος, επειδή η ασυμπτωτική προσέγγιση θα δώσει ένα φτωχό αποτέλεσμα. Δυστυχώς μέχρι σήμερα δεν υπάρχει κάποια στατιστική μέθοδος που να προσδιορίζει επακριβώς το  $u$  και για το λόγο αυτό βασιζόμαστε κυρίως σε προσομοιώσεις και γραφικές απεικονίσεις.

Πρόσφατα έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες εφαρμογές της Θεωρίας Ακραίων Τιμών από τους Danielson-deVries (1998) και από τους Gourioux-Jasak (1998), καθώς και εφαρμογές της τεχνικής παλινδρόμησης από τους Chernozhukov-Umantsev (2000) και Engle-Manganelli (1999).

Άλλες προσεγγίσεις που μπορούμε να αναφέρουμε για τον υπολογισμό του VaR, είναι εκείνες που βασίζονται στην σχεδόν-μέγιστη πιθανοφάνεια (quasi-maximum likelihood) των Bollerslev-Woolridge (1992), όπως αυτή των McNeil-Frey (2000) καθώς και των Hull-White (1998), αν και το μοντέλο των τελευταίων δεν είναι τόσο δυνατό, αφού η διακύμανση δεν εκτιμάται χρησιμοποιώντας μοντέλα GARCH.

## **3.2 Volatility και παραμετρικά μοντέλα**

### **3.2.1 Μεταβλητότητα (Volatility)**

Η μεταβλητότητα είναι ένα στατιστικό μέτρο της διασποράς των αποδόσεων για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης ή ένα δεδομένο επίπεδο αγοράς και μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τις διακυμάνσεις, είτε τις τυπικές αποκλίσεις των αποδόσεων για το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης ή αγοράς. Αποτελεί μία μεταβλητή στους τύπους τιμολόγησης των δικαιωμάτων αγοράς ή πώλησης, η οποία δηλώνει το βαθμό κατά τον οποίο η απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου θα κυμανθεί, μέχρι την λήξη του δικαιώματος αγοράς-πώλησης.

Η μεταβλητότητα όταν εκφράζεται ως ένας ποσοστιαίος συντελεστής στους τύπους τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης, προκύπτει από τις ημερήσιες εμπορικές δραστηριότητες συναλλαγών και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται έχει επιπτώσεις την τιμή του συντελεστή που χρησιμοποιείται.

Με άλλα λόγια, η μεταβλητότητα αναφέρεται στο ύψος της αβεβαιότητας ή του κινδύνου που σχετίζεται με το μέγεθος των συναλλαγών σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης. Μία υψηλή μεταβλητότητα δηλώνει ότι η αξία ενός δικαιώματος μπορεί ενδεχομένως να εξαπλωθεί σε ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών, γεγονός που συνεπάγεται ότι η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου μπορεί να μεταβληθεί

εντυπωσιακά κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αντίστοιχα, μία χαμηλή μεταβλητότητα σημαίνει ότι η αξία ενός δικαιώματος δεν παρουσιάζει σημαντικές διακυμάνσεις και μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου.

### **3.2.2 Χαρακτηριστικά volatility**

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της αστάθειας των μετοχών είναι ότι το volatility δεν αποτελεί μία παράμετρο που μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα. Αν για παράδειγμα εξετάσουμε τις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις μιας μετοχής, παρατηρούμε ότι η καθημερινή αστάθεια δεν είναι άμεσα αισθητή από τα δεδομένα των αποδόσεων, αφού υπάρχει μόνο μία παρατήρηση για κάθε ημέρα εμπορικών συναλλαγών. Επομένως χρειάζεται να έχουμε διαθέσιμα δεδομένα που προκύπτουν κατά την διάρκεια μιας ημέρας, όπως για παράδειγμα τις αποδόσεις μίας μετοχής κάθε 10 λεπτά (10-minute returns), προκειμένου να εκτιμήσουμε το ημερήσιο volatility.

Εν τούτοις, η ακρίβεια μίας τέτοιας εκτίμησης απαιτεί μία ιδιαίτερα προσεκτική μελέτη, για το λόγο ότι το ημερήσιο volatility αποτελείται από τα επιμέρους volatility κατά την διάρκεια της ημέρας και το ολονύκτιο volatility, με το τελευταίο να υποδηλώνει την μεταβολή μεταξύ των ημερών εμπορικών συναλλαγών.

Από την άλλη μεριά, οι υψηλής συχνότητας αποδόσεις κατά τη διάρκεια της ημέρας περιέχουν πολύ περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με το ολονύκτιο volatility και αυτή η μη-παρατηρησιμότητα του volatility καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την αξιολόγηση προβλέψεων των αποδόσεων μέσω των δεσμευμένων ετεροσκεδαστικών μοντέλων.

Στην περίπτωση των αγορών δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης, εάν αποδεχτούμε την ιδέα ότι οι τιμές ικανοποιούν ένα οποιοδήποτε οικονομετρικό μοντέλο, όπως για



παράδειγμα τον τύπο Black-Scholes, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές αυτές για να πάρουμε το volatility που κρύβουν. Ακόμα όμως και η προσέγγιση αυτή συχνά επικρίνεται εξαιτίας της χρήσης ενός συγκεκριμένου προτύπου το οποίο με τη σειρά του στηρίζεται σε βασικές υποθέσεις που ενδεχομένως δεν ισχύουν πάντα στην πράξη.

Η εμπειρία δείχνει ότι το volatility της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου που προκύπτει μέσω ενός οικονομετρικού μοντέλου, τείνει να είναι μεγαλύτερο από εκείνο που παρατηρείται με τη χρησιμοποίηση ενός GARCH μοντέλου. Αυτό ίσως οφείλεται στο ασφάλιστρο κινδύνου (risk premium) για το volatility είτε στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται οι ημερήσιες αποδόσεις.

Αν και όπως αναφέραμε το volatility δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμο, έχει ορισμένα χαρακτηριστικά που συναντάμε συνήθως στις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων και τα οποία διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μοντέλων. Αρχικά, παρατηρούνται συστάδες (clusters) από volatilities, δηλαδή η αστάθεια μπορεί να είναι υψηλή για ορισμένες χρονικές περιόδους και χαμηλότερη για κάποιες άλλες.

Επίσης, εξελίσσεται με έναν συνεχή τρόπο κατά την πάροδο του χρόνου και επομένως σπάνια παρατηρούνται οποιαδήποτε άλματα. Ακόμα, το volatility δεν αποκλίνει στο άπειρο, γεγονός που αν αξιολογηθεί από μία στατιστική σκοπιά, προκύπτει ότι παραμένει συχνά στάσιμο. Τέλος, φαίνεται να αντιδρά διαφορετικά σε μία μεγάλη αύξηση ή μείωση των τιμών το οποίο είναι γνωστό ως επίδραση μόχλευσης (leverage effect).

### **3.2.3 Πρόβλεψη μεταβλητότητας (Forecasting volatility)**

Από τη στιγμή που όπως αναφέραμε το volatility ενός περιουσιακού στοιχείου δεν είναι άμεσα αισθητό, η σύγκριση των προβλέψεων απόδοσης διαφορετικών μοντέλων πτητικότητας, αποτελεί πρόκληση στους αναλυτές δεδομένων. Στη βιβλιογραφία μερικοί ερευνητές χρησιμοποιούν προβλέψεις εκτός του δείγματος (out-of-sample forecasts) και συγκρίνουν τις προβλέψεις του volatility  $\sigma_h^2(l)$  με τον κλονισμό (shock)  $a_{h+l}^2$  στο δείγμα πρόβλεψης, ώστε να αξιολογήσουν την εγκυρότητα της πρόβλεψης ενός μοντέλου πτητικότητας. Μέσω της προσέγγισης αυτής όμως προκύπτει συνήθως χαμηλός συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του  $a_{h+l}^2$  και του  $\sigma_h^2(l)$ , αν και κάτι τέτοιο δεν μας εκπλήσσει, αφού το  $a_{h+l}^2$  από μόνο του δεν αποτελεί επαρκές μέτρο volatility στον χρονικό δείκτη  $h+l$ . Από στατιστική σκοπιά, στην περίπτωση πρόβλεψης με 1 βήμα μπροστά, το  $a_{h+1}^2$  αποτελεί συνεπή εκτιμητή του  $\sigma_{h+1}^2$  επειδή μία μοναδική παρατήρηση μιας τυχαίας μεταβλητής με γνωστό μέσο, δεν μπορεί να παρέχει ακριβή εκτίμηση για τη διακύμανσή της. Επομένως μία τέτοια προσέγγιση δεν είναι κατάλληλη για την αξιολόγηση προβλέψεων του volatility.

#### **3.2.3α Forecasting Volatility με μοντέλο ARCH**

Υποθέτουμε ότι έχουμε την απλούστερη μορφή ενός ARCH(m) μοντέλου, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.1.1, δηλαδή έχουμε το μοντέλο ARCH(1) όπου:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid \ N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 \quad (3.2.3 - I)$$

Επαναλαμβάνοντας προς τα εμπρός έχουμε:

$$\sigma_{t+1}^2 = a_0 + a_1 a_t^2 \quad (3.2.3 - \text{II})$$

και παίρνοντας τις δεσμευμένες μέσες τιμές προκύπτει:

$$E_t[\sigma_{t+1}^2] = E_t[a_0 + a_1 a_t^2] = a_0 + a_1 a_t^2 \quad (3.2.3 - \text{III})$$

αφού όλες οι τιμές είναι γνωστές για τη χρονική στιγμή  $t$ , ιδιότητα που ισχύει για όλα τα μοντέλα τα οποία ανήκουν στην οικογένεια ARCH.

Στην πρόβλεψη με 2 βήματα μπροστά έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+2}^2] &= E_t[a_0 + a_1 a_{t+1}^2] = a_0 + a_1 E_t[a_{t+1}^2] \\ &= a_0 + a_1 (a_0 + a_1 a_t^2) = a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_t^2 \end{aligned} \quad (3.2.3 - \text{IV})$$

επομένως γενικεύοντας, η πρόβλεψη με  $h$ -βήματα μπροστά για ένα ARCH(1) μοντέλο είναι της μορφής:

$$E_t[\sigma_{t+h}^2] = \sum_{i=0}^{h-1} a_1^i a_0 + a_1^h a_t^2 \quad (3.2.3 - \text{V})$$

### 3.2.3β Forecasting Volatility με μοντέλο GARCH

Στην ενότητα 2.1.2 παρουσιάσαμε το GARCH(m,s) μοντέλο και βάσει αυτού ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως για την πρόβλεψη του volatility, επιλέγουμε το απλούστερο μοντέλο GARCH(1,1) το οποίο είναι της μορφής:

$$a_t = \sigma_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.2.3 - \text{VI})$$

Έτσι για την πρόβλεψη της επόμενης ημέρας έχουμε:

$$E_t[\sigma_{t+1}^2] = E_t[a_0 + a_1 a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2] = a_0 + a_1 a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \quad (3.2.3 - VII)$$

και για την πρόβλεψη με 2 βήματα μπροστά:

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+2}^2] &= E_t[a_0 + a_1 a_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2] = a_0 + a_1 E_t[a_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] \\ &= a_0 + a_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2 \sigma_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] \\ &= a_0 + a_1 E_t[\varepsilon_{t+1}^2] E_t[\sigma_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] \\ &= a_0 + a_1 \cdot 1 \cdot E_t[\sigma_{t+1}^2] + \beta_1 E_t[\sigma_{t+1}^2] = a_0 + (a_1 + \beta_1) E_t[\sigma_{t+1}^2] \end{aligned} \quad (3.2.3 - VIII)$$

όπου αντικαθιστώντας το  $E_t[\sigma_{t+1}^2]$  έχουμε:

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+2}^2] &= a_0 + (a_1 + \beta_1)(a_0 + a_1 a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2) \\ &= a_0 + (a_1 + \beta_1)a_0 + (a_1 + \beta_1)a_1 a_t^2 + (a_1 + \beta_1)\beta_1 \sigma_t^2 \end{aligned} \quad (3.2.3 - IX)$$

Τέλος, η πρόβλεψη με  $h$ -βήματα μπροστά για ένα GARCH(1,1) μοντέλο είναι της μορφής:

$$E_t[\sigma_{t+h}^2] = \sum_{i=0}^{h-1} (a_1 + \beta_1)^i a_0 + (a_1 + \beta_1)^{h-1} (a_1 a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2) \quad (3.2.3 - X)$$

Με την ίδια μεθοδολογία, αλλά αρκετά πιο πολύπλοκα μαθηματικά, επιτυγχάνεται η πρόβλεψη του volatility και για τα υπόλοιπα μοντέλα που έχουμε παρουσιάσει στην εργασία.

### 3.2.4 Υπολογισμός VaR

#### 3.2.4α VaR και Κανονική κατανομή

Κάτω από την υπόθεση της Κανονικής κατανομής εάν  $R$  είναι οι αποδόσεις της  $h$ -ημ έρας με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  και έστω  $S$  η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου μας, το VaR κατά την  $h$ -ημ έρα σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $100(1-a)\%$  δίνεται από:

$$VaR_{h,a} = -\chi_a S \quad (3.2.4-I)$$

όπου  $\chi_a$  είναι το ελάχιστο  $a$ -ποσοστημόριο της κατανομής  $N(\mu, \sigma^2)$  το οποίο ικανοποιεί τη σχέση  $\Pr(R < \chi_a) = a$ . Δεδομένου ότι απαιτούμε έναν υψηλό βαθμό εμπιστοσύνης, το  $a$  είναι σχετικά μικρό (παίρνει τιμές από 0 μέχρι 0,1) και το  $\chi_a$  είναι αρνητικό.

Χρησιμοποιώντας τον τυπικό κανονικό μετασχηματισμό μπορούμε να γράψουμε ότι

$$Z_a = \frac{\chi_a - \mu}{\sigma} \text{ ή με άλλα λόγια:}$$

$$\chi_a = Z_a \sigma + \mu \quad (3.2.4-II)$$

όπου  $Z_a$  είναι το ελάχιστο  $a$ -ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής  $N(0,1)$  που μπορούμε να πάρουμε από τους τυποποιημένους στατιστικούς πίνακες. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ισότητες, καταλήγουμε στην σχέση:

$$VaR_{h,a} = -(Z_a \sigma + \mu) S \quad (3.2.4-III)$$

Ο υπολογισμός του VaR, από τη στιγμή που έχουμε εκτιμήσει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, είναι μια αρκετά εύκολη διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το VaR με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης, για χρονική

περίοδο διακράτησης μίας ημέρας και έχουμε εκτιμήσει τα  $\mu$  και  $\sigma$  να έχουν τιμές 0,005 και 0,02 αντίστοιχα, όταν η αξία του χαρτοφυλακίου μας είναι 1 εκατομμύριο Ευρώ. Τότε το VaR που προκύπτει είναι:

$$VaR_{1,0.05} = -(0,005 - 1,64 \times 0,02) \times 1 \text{ εκατομμύριο } \text{€} = 27.897\text{€}$$

το οποίο αυξάνεται αισθητά για υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης, για παράδειγμα 99%, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$VaR_{1,0.1} = -(0,005 - 2,32 \times 0,02) \times 1 \text{ εκατομμύριο } \text{€} = 41.527\text{€}$$

Σε περίπτωση που μας ενδιαφέρει το VaR για χρονικό διάστημα 10 ημερών, αυτό υπολογίζεται ως εξής:

$$VaR_{10,0.05} = \sqrt{10} VaR_{1,0.05} \approx 3,1623 \times 27.897 \text{ €} = 88.218 \text{ €}$$

$$VaR_{10,0.01} = \sqrt{10} VaR_{1,0.01} \approx 3,1623 \times 41.527 \text{ €} = 131.320 \text{ €}$$

### 3.2.4β VaR και t-Student κατανομή

Αντίστοιχα, κάτω από την υπόθεση της  $t - Student$  κατανομής η σχέση που μας δίνει το VaR κατά την  $h - \eta\mu\acute{\epsilon}\rho\alpha$  σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $100(1 - a)\%$  και παρούσα αξία χαρτοφυλακίου  $S$ , είναι της μορφής:

$$VaR_{h,a} = - \left( \frac{tu * a}{\sqrt{\frac{u}{u-2}}} \sigma + \mu \right) S \quad (3.2.4 - IV)$$

όπου  $tu * a$  είναι το  $a - \text{ποσοστημ}\acute{\alpha}$  όριο της  $t - Student$  κατανομής και  $u$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας.

Έστω ότι σε διάστημα εμπιστοσύνης 99% με 5 βαθμούς ελευθερίας, ημερήσιο volatility ίσο με 0,005547 και αξία χαρτοφυλακίου ύψους 1 εκατομμυρίου Ευρώ, θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του VaR με ορίζοντα 10 ημερών.

Η τιμή της *t - Student* κατανομής για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% με 5 βαθμούς ελευθερίας είναι 3,36. Έτσι, το VaR που προκύπτει κάτω από αυτές τις συνθήκες θα είναι:

$$\text{Student's VaR} = 3,36 \times \sqrt{10} \times 0,005547 \times 1 \text{ εκατομμύριο } \text{€} = 58.938 \text{ €}$$

Με τα ίδια δεδομένα, αλλά κάτω από την κανονική υπόθεση, η αντίστοιχη τιμή της Κανονικής κατανομής είναι 2,33 με ημερήσιο volatility 0,00718. Επομένως, η τιμή του VaR σε πρόβλεψη 10 ημερών ισούται με:

$$\text{Normal VaR} = 2,33 \times \sqrt{10} \times 0,00718 \times 1 \text{ εκατομμύριο } \text{€} = 52.903 \text{ €}$$

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση του VaR με την κατανομή *t - Student* είναι κατά 11% μεγαλύτερη από εκείνη της Κανονικής κατανομής, το οποίο οφείλεται στις πιο βαριές ουρές που διαθέτει η *t - Student*. Επομένως, η εφαρμογή της κατανομής *t - Student* έχει ως αποτέλεσμα την απαίτηση μεγαλύτερου κεφαλαίου κατά την πάροδο του χρόνου ή την μείωση του κινδύνου που αναλαμβάνουμε.

Ενδεχομένως μία μεγαλύτερη εκτίμηση του VaR συμβάλλει στην ευκολότερη αντιμετώπιση τυχόν ακραίων μεταβολών από τους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς, αφού τους οδηγεί στην λήψη αυστηρότερων μέτρων προστασίας, λαμβάνοντας όμως υπόψη την συγκέντρωση του volatility, ακόμα και ένα VaR αυξημένο κατά 11% δεν είναι ικανό να μας θωρακίσει σε περιόδους κρίσης των αγορών.

Στην περίπτωση που μελετάμε την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο μέσω μονομεταβλητών μοντέλων, τα οποία ανήκουν στην οικογένεια GARCH, το volatility  $\sigma$  αντικαθίσταται από την πρόβλεψη με 1-βήμα μπροστά  $E_t[\sigma_{t+1}^2]$ .

Αντίστοιχα, εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε το VaR στην περίπτωση πολυμεταβλητών μοντέλων, είτε είναι BEKK είτε CCC, παίρνουμε τις προβλέψεις για  $\sigma_{11,t+1}$ ,  $\sigma_{22,t+1}$  και  $\sigma_{12,t+1}$ .

### **3.2.5 VaR χαρτοφυλακίου**

#### **3.2.5a Με περιουσιακά στοιχεία ίσης αξίας**

Στην περίπτωση που δεν ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για την Αξία σε Κίνδυνο ενός περιουσιακού στοιχείου, αλλά για ένα χαρτοφυλάκιο στο σύνολό του, η ομάδα Risk Metrics υιοθετεί μια διαδικασία αρκετά απλή από υπολογιστική άποψη. Κάτω από την υπόθεση ότι οι ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις καθενός περιουσιακού στοιχείου, ακολουθούν έναν τυχαίο ολοκληρωμένο (integrated) περίπατο GARCH(1,1) χρειαζόμαστε μόνο τον υπολογισμό των συντελεστών συσχέτισης που προκύπτουν μεταξύ των αποδόσεων.

Εάν το χαρτοφυλάκιο που έχουμε στην διάθεσή μας αποτελείται μόνο από 2 επιμέρους περιουσιακά στοιχεία και  $\rho_{12}$  είναι ο συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεών τους, δηλαδή

$$\rho_{12} = \frac{Cov(r_{1t}, r_{2t})}{\sqrt{Var(r_{1t}) Var(r_{2t})}} \quad (3.2.5 - I)$$

όπου  $r_{it}$  η απόδοση του  $i$ -περιουσιακού στοιχείου, τότε το συνολικό VaR του χαρτοφυλακίου είναι:



$$VaR_{total} = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12} VaR_1 VaR_2} \quad (3.2.5 - II)$$

Με τον ίδιο τρόπο, η γενική μορφή υπολογισμού του VaR ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από  $m$  περιουσιακά στοιχεία δίνεται από τον τύπο:

$$VaR_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^m VaR_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} VaR_i VaR_j} \quad (3.2.5 - III)$$

όπου  $\rho_{ij}$  είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των  $i$  και  $j$  περιουσιακών στοιχείων και  $VaR_i$  είναι το VaR του  $i$ -περιουσιακού στοιχείου. Ο παραπάνω τύπος λαμβάνεται χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η από κοινού κατανομή των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων είναι μία πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και μήτρα συνδιακύμανσης  $\Sigma_{t+1}$ . Κάτω από αυτή την υπόθεση, οι λογαριθμικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου είναι κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και πεπερασμένη διακύμανση.

### 3.2.5β Με περιουσιακά στοιχεία διαφορετικής αξίας

Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από το περιουσιακό στοιχείο Α αξίας 1 εκατομμυρίου Ευρώ και από το περιουσιακό στοιχείο Β αξίας 2 εκατομμυρίων Ευρώ. Θεωρούμε επίσης ότι σύμφωνα με το μοντέλο Εκθετικού Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (EWMA) για τις ημερήσιες αποδόσεις, εκτιμάται η διακύμανση του περιουσιακού στοιχείου Α ίση με 0.01, η διακύμανση του περιουσιακού στοιχείου Β ίση με 0.005 και η συνδιακύμανση με τιμή 0.002.

Εδώ ισχύει ότι:

$$Volatility = \sqrt{p'V p} \quad (3.2.5 - IV)$$

όπου  $p$  είναι το διάνυσμα των αξιών των περιουσιακών στοιχείων, δηλαδή  $p = (1,2)'$  και  $V$  είναι η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των δύο στοιχείων, δηλαδή

$$V = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,002 \\ 0,002 & 0,005 \end{bmatrix}$$

Επομένως,  $Volatility = \sqrt{p'Vp} = \sqrt{0,038} = 0,195$  εκατομμύρια €

Σε διάστημα εμπιστοσύνης  $\alpha=5\%$  η Αξία σε Κίνδυνο θα είναι:

$$VaR_{\alpha} = Z_{\alpha} \times volatility = 1,645 \times 0,195 = 0,3207 \text{ εκατομμύρια €}$$

και η προβλεπόμενη Αξία σε Κίνδυνο με 10 βήματα μπροστά υπολογίζεται ως:

$$VaR_{forecast, 10} = 0,3207 \times \sqrt{10} = 1,014 \text{ εκατομμύρια €}$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι πολύ μεγάλο, επειδή τα περιουσιακά στοιχεία που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο έχουν μεγάλες διακυμάνσεις και υψηλή συνδιακύμανση. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι μία ημερήσια διακύμανση ύψους 0.01 αντιστοιχεί σε ετήσιο volatility ίσο με  $\sqrt{2,5} = 158\%$ . Ακόμα, επιλέγοντας ως διάστημα εμπιστοσύνης  $\alpha=1\%$  και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως, προκύπτει VaR με 10 βήματα μπροστά ίσο με:

$$VaR_{forecast, 10} = 2,33 \times 0,195 \times \sqrt{10} = 1,43 \text{ εκατομμύρια €}$$

οπότε ουσιαστικά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι απαιτείται το μισό σχεδόν κεφάλαιο από εκείνο που αρχικά επενδύσαμε για να θεωρούμαστε καλυμμένοι απέναντι στον κίνδυνο.

Η πρακτική αυτή εφαρμογή φανερώνει μία σημαντική αδυναμία της αναλυτικής μεθόδου υπολογισμού του VaR για θέσεις αγοράς (long-only positions), αφού όταν

στηρίζομαστε στην υπόθεση της Κανονικής κατανομής, υπάρχει πάντα μία πιθανότητα, όσο μικρή κι αν είναι, η εκτιμώμενη Αξία σε Κίνδυνο να είναι μεγαλύτερη από την συνολική μας επένδυση. Για μία long-only position αυτό είναι προφανώς ένα παράλογο αποτέλεσμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

### 3.3 Back Testing

Ο επανέλεγχος (back testing) ορίζεται ως η διαδικασία αξιολόγησης μιας στρατηγικής, θεωρίας ή ενός μοντέλου μέσω της εφαρμογής του σε ιστορικά δεδομένα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε σε περιπτώσεις όπου εξετάζεται κατά πόσο μία μέθοδος θα μπορούσε να αξιολογήσει, και κατ' επέκταση να προβλέψει, σημαντικές μεταβολές της αγοράς στο παρελθόν, είτε όταν ελέγχουμε εάν τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ανταποκρίνονται στα πραγματικά δεδομένα.

Το back testing μπορεί να θεωρηθεί ως το τελικό στάδιο στην διαδικασία δόμησης ενός μοντέλου και αφορά ένα στατιστικό πλαίσιο, το οποίο βασίζεται στην επαλήθευση των πραγματικών μεταβολών σε σχέση με εκείνες που είχαν εκτιμηθεί. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει σύγκριση των προβλέψεων του VaR με τις αντίστοιχες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, ώστε ο διαχειριστής κινδύνου να είναι σε θέση να γνωρίζει κατά πόσο οι υποθέσεις ή οι παράμετροι των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν, είναι σωστές.

Γνωρίζουμε ότι το μέγεθος  $VaR_{t+1}^p$  δείχνει πως η πραγματική απόδοση, θα είναι χειρότερη από την πρόβλεψη του  $VaR_{t+1}^p$  μόνο κατά ένα ποσοστημόριο  $p * 100 \%$  των δοκιμών. Εάν θεωρήσουμε μία χρονοσειρά παρελθοντικών εκ των προτέρων προβλέψεων του VaR και των αντίστοιχων εκ των υστέρων πραγματικών αποδόσεων,

έχουμε την δυνατότητα δημιουργίας μίας νέας ακολουθίας παραβιάσεων του VaR ως εξής:

$$I_{t+1} = 1, R_{PF,t+1} < -VaR_{t+1}^p$$

ή

$$I_{t+1} = 0, R_{PF,t+1} > -VaR_{t+1}^p \quad (3.3-I)$$

ούτως ώστε, εάν η πραγματική απώλεια την ημέρα  $t+1$  είναι μεγαλύτερη του VaR που είχε αρχικά προβλεφθεί για την ημέρα αυτή, να μας δίνει ως αποτέλεσμα την μονάδα, ενώ εάν η απώλεια δεν ξεπεράσει το VaR, να μας δίνει το μηδέν.

Στην περίπτωση που κάνουμε back testing πάνω σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο κινδύνου, κατασκευάζουμε μία ακολουθία  $\{I_{t+1}\}_{t=1}^T$  T ημερών, που δείχνει πότε προέκυψαν στο παρελθόν οι παραβιάσεις των παρατηρηθεισών αποδόσεων σε σχέση με το VaR.

### **3.3.1 Μηδενική Υπόθεση (The Null Hypothesis)**

Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε στην διάθεσή μας το ιδανικό μοντέλο εκτίμησης VaR, καθώς και όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που απαιτούνται, δεν θα πρέπει να έχουμε την δυνατότητα να προβλέψουμε εάν το VaR παραβιάζεται ή όχι, αφού οι προβλέψεις μας για κάθε παραβίαση του VaR, θα ήταν το  $100 * p\%$  ποσοστό κάθε ημέρα και επομένως δεν πρόκειται για πρόβλεψη, αλλά για βεβαιότητα. Ακόμα όμως και σε αυτήν την περίπτωση, δηλαδή εάν μπορούσαμε να προβλέψουμε τις παραβιάσεις του VaR, θα μπορούσαμε να συγκεντρώσουμε τις πληροφορίες που αποκομίσαμε δημιουργώντας στην συνέχεια ένα ακόμα πιο αποδοτικό μοντέλο

εκτίμησης, άρα το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε δεν ήταν τόσο ιδανικό, όσο αρχικά θεωρήσαμε.

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία των παραβιάσεων, θα πρέπει να είναι εντελώς απρόβλεπτη και κατ' επέκταση να κατανέμεται ανεξάρτητα στο χρόνο, όπως μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Bernoulli κατανομή. Βασισμένοι σε αυτό παίρνουμε την υπόθεση:

$$H_0 : I_{t+1} \sim iid \text{ Bernoulli } (p) \quad (3.3.1 - I)$$

Εάν η πιθανότητα  $p$  ισούται με  $\frac{1}{2}$ , τότε η κατανομή Bernoulli εκφράζει τα ισοπίθανα ενδεχόμενα εμφάνισης που προκύπτουν από την ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος και η συνάρτηση κατανομής δίνεται από:

$$f(I_{t+1}; p) = (1 - p)^{1 - I_{t+1}} p^{I_{t+1}} \quad (3.3.1 - II)$$

Στην περίπτωση του κάνουμε back testing πάνω σε ένα συγκεκριμένο μοντέλου κινδύνου, η πιθανότητα  $p$  δεν είναι  $\frac{1}{2}$  αλλά 0,01 είτε 0,05, ανάλογα με το ρυθμό κάλυψης (coverage rate) του VaR, έτσι ώστε η ακολουθία επιτυχιών ενός σωστά ορισμένου μοντέλου κινδύνου, να μοιάζει με την ακολουθία τυχαίων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος, που δίνει την ίδια ένδειξη στο 1% ή 5% των δοκιμών.

### **3.3.2 Αδέσμευτος Έλεγχος Κάλυψης ή Έλεγχος Kupiec (Unconditional Coverage Testing)**

Μέσω του ελέγχου αυτού, θέλουμε αρχικά να εξετάσουμε εάν το ποσοστό των παραβιάσεων, έστω  $\pi$ , που παρατηρούνται για ένα συγκεκριμένο μοντέλο κινδύνου, είναι σημαντικά διαφορετικό από το εκείνο που αναμένουμε, έστω  $p$ .

Για να κάνουμε τον έλεγχο αυτό, γράφουμε την πιθανοφάνεια μίας ακολουθίας *iid Bernoulli* ( $\pi$ ), η οποία είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} L(\pi) &= \prod_{t=1}^T (1 - \pi)^{1 - I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} \\ &= (1 - \pi)^{T_0} \pi^{T_1} \end{aligned} \quad (3.3.2-I)$$

όπου  $T_0$  και  $T_1$  το πλήθος των μηδέν και των μονάδων αντίστοιχα στο δείγμα.

Μπορούμε πλέον εύκολα να εκτιμήσουμε το  $\pi$  από τη σχέση  $\hat{\pi} = \frac{T_1}{T}$ , η οποία δείχνει το ποσοστό των παραβιάσεων στην ακολουθία και μεταφέροντας στην συνέχεια τις εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας στην προηγούμενη συνάρτηση, να καταλήξουμε στην βελτιστοποιημένη πιθανοφάνεια (optimized likelihood):

$$L(\hat{\pi}) = \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1} \quad (3.3.2-II)$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση αδέσμευτης κάλυψης ότι  $\pi = p$ , όπου το  $p$  είναι ένας δεδομένος ρυθμός κάλυψης του VaR, παίρνουμε την πιθανοφάνεια:

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{t=1}^T (1 - p)^{1 - I_{t+1}} p^{I_{t+1}} \\ &= (1 - p)^{T_0} p^{T_1} \end{aligned} \quad (3.3.2-III)$$

και στη συνέχεια μπορούμε να ελέγξουμε την υπόθεση αδέσμευτης κάλυψης χρησιμοποιώντας τον λόγο ελέγχου πιθανοφάνειας:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right] \quad (3.3.2-IV)$$

Ασυμπτωτικά, όσο το πλήθος των παρατηρήσεων  $T$  τείνει προς το άπειρο, ο έλεγχος θα ακολουθεί μία  $\chi^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας. Αντικαθιστώντας στις συναρτήσεις πιθανοφάνειας παίρνουμε:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ \frac{(1-p)^{T_0} p^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \right] \sim \chi_1^2 \quad (3.3.2-V)$$

Για παράδειγμα, εάν επιλέξουμε για επίπεδο εμπιστοσύνης το 10%, από τους πίνακες της  $\chi_1^2$  κατανομής παίρνουμε την τιμή 2,7055. Στην περίπτωση που η τιμή του  $LR_{uc}$  ελέγχου είναι μεγαλύτερη από 2,7055, τότε απορρίπτουμε το μοντέλο εκτίμησης VaR για επίπεδο εμπιστοσύνης 10%.

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία  $p - value$ , η οποία ορίζεται ως η πιθανότητα του να πάρουμε ένα δείγμα που θα προσαρμόζεται ακόμα λιγότερο στην μηδενική υπόθεση, από αυτό που ήδη έχουμε δεδομένου ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση. Στην περίπτωση αυτή, το  $p - value$  υπολογίζεται ως:

$$p - value = 1 - F_{\chi_1^2}(LR_{uc}) \quad (3.3.2-VI)$$

όπου,  $F_{\chi_1^2}(\cdot)$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μίας μεταβλητής που ακολουθεί την  $\chi^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας. Εάν η  $p - value$  είναι χαμηλότερη του επιθυμητού επιπέδου εμπιστοσύνης, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Για παράδειγμα, εάν από τον έλεγχο προκύψει η τιμή 3,5, τότε η αντίστοιχη  $p - value$  θα είναι:

$$p - value = 1 - F_{\chi_1^2}(3,5) = 1 - 0,09386 = 0,0614$$



Παρατηρούμε ότι με επίπεδο εμπιστοσύνης 10%, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, ενώ με επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, δεν απορρίπτεται η υπόθεση ότι το μοντέλο κινδύνου είναι αντιπροσωπευτικό κατά μέσο όρο. Η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης αξιολογείται βάσει του κόστους που θα προκύψει εάν απορρίψουμε ένα σωστό μοντέλο (σφάλμα Τύπου I) είτε εάν δεν απορρίψουμε, δηλαδή αποδεχτούμε, ένας λάθος μοντέλο (σφάλμα Τύπου II), αφού όσο αυξάνεται το επίπεδο εμπιστοσύνης, αυξάνονται και τα σφάλματα Τύπου I, αλλά παράλληλα ελαττώνονται τα σφάλματα Τύπου II και το αντίστροφο. Σε ακαδημαϊκό επίπεδο χρησιμοποιούνται τα διαστήματα εμπιστοσύνης 1%, 5% και 10%, όμως στο πρακτικό μέρος της διαχείρισης κινδύνου, επειδή τα σφάλματα Τύπου II αποβαίνουν ιδιαίτερα δαπανηρά, συνιστάται επίπεδο εμπιστοσύνης 10%.

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι προτιμότερο να βασιστούμε σε προσομοιωμένες  $p - value$  οι οποίες προκύπτουν από την προσέγγιση Monte Carlo, αντί σε εκείνες που προκύπτουν από την  $\chi^2$  κατανομή, λόγω του ότι συχνά δεν έχουμε στην διάθεσή μας μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων για back testing και κατ' επέκταση μεγάλο πλήθος  $T_1$  παραβιάσεων του VaR. Οι προσομοιωμένες  $p - value$  για τον έλεγχο μίας συγκεκριμένης τιμής, μπορούν αρχικά να υπολογιστούν παράγοντας 999 δείγματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία *Bernoulli* ( $p$ ) κατανομή, όπου το μέγεθος του δείγματος ισούται με το πραγματικό δείγμα. Στην συνέχεια, με τα τεχνητά αυτά δείγματα, μπορούμε να υπολογίσουμε 999 προσομοιωμένους ελέγχους  $\{\tilde{L}\tilde{R}_{uc}(i)\}_{i=1}^{999}$ , ώστε οι προσομοιωμένες  $p - value$  να υπολογίζονται ως μέρος των προσομοιωμένων  $LR_{uc}$  που είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές τιμές των  $LR_{uc}$  ελέγχων. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε:

$$p - value = \frac{1}{1000} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{1000} \mathbf{1}(\tilde{L}\tilde{R}_{uc}(i) > LR_{uc}) \right\} \quad (3.3.2 - VII)$$

,όπου το  $1()$  παίρνει την τιμή της μονάδας όταν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το μηδέν, όταν δεν είναι. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι για να μπορούμε να πάρουμε αποτελέσματα από τους ελέγχους αυτούς, πρέπει αρχικά να έχουμε δείγματα στα οποία θα παρατηρηθούν πραγματικές παραβιάσεις του VaR , δηλαδή χρειαζόμαστε ακολουθίες που θα έχουν κάποιες μονάδες. Αν για παράδειγμα, απορρίψουμε προσομοιωμένα δείγματα στα οποία παρατηρούνται μία ή καμία παραβίαση του VaR πριν κάνουμε τον έλεγχο, τότε μπορεί να καταστήσουμε τον έλεγχο αυτό υπό την δέσμευση ότι παρατηρούμε τουλάχιστον δύο παραβιάσεις του VaR.

### **3.3.3 Έλεγχος Ανεξαρτησίας (Independence Testing)**

Στόχος του Ελέγχου Ανεξαρτησίας είναι να μπορέσουμε να αναπτύξουμε μία μέθοδο που θα μας δίνει τη δυνατότητα να απορρίψουμε μοντέλα εκτίμησης του VaR, τα οποία παρουσιάζουν παραβιάσεις σε σχετικά κοντινά χρονικά διαστήματα.

Αν φανταστούμε ότι όλες οι παραβιάσεις του VaR που παρατηρούνται σε ένα δείγμα, συνέβησαν χρονικά περίπου την ίδια περίοδο, τότε δεν θα ήμασταν ιδιαίτερα ικανοποιημένοι, καθώς ο κίνδυνος χρεωκοπίας θα ήταν μεγαλύτερος από εκείνον που θα προέκυπτε αν οι παραβιάσεις αυτές είχαν μία τυχαία κατανομή κατά την πάροδο του χρόνου. Επομένως, θα επιθυμούσαμε να απορρίψουμε μοντέλα εκτίμησης του VaR τα οποία περιέχουν παραβιάσεις που σχετίζονται μέσα στο χρόνο, γεγονός που παρατηρείται συχνά σε αποτελέσματα VaR τα οποία προέκυψαν μέσω της μεθόδου της Ιστορικής Προσομοίωσης.

Στην περίπτωση που οι παραβιάσεις του VaR είναι χρονικά συγκεντρωμένες, τότε ο διαχειριστής κινδύνου μπορεί ακόμα και διαισθητικά να συμπεράνει ότι αφού μία ημέρα παρατηρήθηκε παραβίαση, είναι κάτι παραπάνω από  $p * 100$  % πιθανό, να παρατηρηθεί παραβίαση και την επόμενη ημέρα. Επειδή αυτό δεν είναι καθόλου

ικανοποιητικό, ο διαχειριστής κινδύνου πρέπει να αυξήσει το VaR, ώστε να μειωθεί η υπό συνθήκη πιθανότητα μίας παραβίασης, στο  $p$  που είχε αρχικά υπολογίσει.

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία επιτυχιών είναι χρονικά εξαρτημένη και ότι μπορεί να περιγραφεί από μία πρώτης τάξεως ακολουθία Markov (first-order Markov sequence), μέσω του πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (3.3.3 - I)$$

τότε, δεδομένου ότι για μία ημέρα δεν υπάρχει παραβίαση του VaR, δηλαδή  $I_t = 0$ , παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να συμβεί την επόμενη ημέρα μία παραβίαση, δηλαδή  $I_{t+1} = 1$ , είναι ίση με  $\pi_{01}$ . Επίσης, δεδομένου ότι την μία ημέρα υπάρχει παραβίαση, η πιθανότητα να υπάρξει παραβίαση και την επόμενη ημέρα είναι ίση με

$$\pi_{11} = \Pr [(I_t = 1) \cap (I_{t+1} = 1)] \quad (3.3.3 - II)$$

Η πρώτης τάξεως ακολουθία Markov βασίζεται στην υπόθεση ότι για να βρούμε το αυριανό αποτέλεσμα, χρειαζόμαστε μόνο το αποτέλεσμα της σημερινής ημέρας και για αυτόν ακριβώς το λόγο δεν μας απασχολούν τα αποτελέσματα που ήδη έχουν προκύψει στο παρελθόν. Από την στιγμή που μόνο δύο ενδεχόμενα είναι πιθανά (0 ή 1), οι πιθανότητες  $\pi_{01}$  και  $\pi_{11}$  αρκούν για να περιγράψουν όλη την διαδικασία. Έτσι, η πιθανότητα μία μη-παραβίαση να έπεται μίας μη-παραβίασης, είναι ίση με  $1 - \pi_{01}$  και η πιθανότητα μία μη-παραβίαση να έπεται μίας παραβίασης ισούται με  $1 - \pi_{11}$ .

Εάν θεωρήσουμε ένα δείγμα  $T$  παρατηρήσεων, μπορούμε να εκφράσουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας της ακολουθίας πρώτης τάξεως Markov ως:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} (\pi_{01})^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} (\pi_{11})^{T_{11}} \quad (3.3.3 - III)$$

όπου  $T_{i,j}$  ( $i, j = 0 \text{ ή } 1$ ) είναι το πλήθος των παρατηρήσεων όπου ένα  $j$  έπεται ενός  $i$ . Στην συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε τους εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας, αφού πρώτα παραγωγίσουμε τα  $\pi_{01}$  και  $\pi_{11}$  και θέσουμε τις παραγώγους αυτές ίσες με το μηδέν.

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \quad (3.3.3 - IV)$$

Δεδομένου ότι τα  $\pi_{01}$  και  $\pi_{11}$  είναι τα μόνα πιθανά ενδεχόμενα, άρα θα αθροίζουν στην μονάδα, προκύπτει ότι:

$$\hat{\pi}_{00} = 1 - \hat{\pi}_{01}$$

$$\hat{\pi}_{10} = 1 - \hat{\pi}_{11} \quad (3.3.3 - V)$$

και μέσω αυτών των σχέσεων παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα εκτιμημένων πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1 - \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00} + T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10} + T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \end{bmatrix} \quad (3.3.3 - VI)$$

Επιτρέποντας την εξάρτηση στην ακολουθία των επιτυχιών, ουσιαστικά συνεπάγεται ότι επιτρέπεται το  $\pi_{01}$  να είναι διαφορετικό από το  $\pi_{11}$ . Τυπικά, ανησυχούμε κυρίως για την θετική εξάρτηση, η οποία εκφράζεται ως η πιθανότητα μία παραβίαση του VaR να έπεται μίας παραβίασης (δηλαδή το  $\pi_{11}$ ), να είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα μία παραβίαση του VaR να έπεται μίας μη-παραβίασης (δηλαδή το  $\pi_{01}$ ).

Από την άλλη μεριά, εάν οι παραβιάσεις είναι ανεξάρτητες κατά την πάροδο του χρόνου, η πιθανότητα να παρατηρηθεί μία μελλοντική παραβίαση, δεν εξαρτάται από το αν συμβαίνει ή όχι παραβίαση στο παρόν, και έτσι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$ . Κάτω από την υπόθεση λοιπόν της ανεξαρτησίας, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μετάβασης:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.3.3 - VII)$$

Στη συνέχεια, έχουμε την δυνατότητα να ελέγξουμε την υπόθεση ανεξαρτησίας ότι  $\pi_{01} = \pi_{11}$  χρησιμοποιώντας το λόγο ελέγχου πιθανοφάνειας:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi_1^2 \quad (3.3.3 - VIII)$$

όπου  $L(\hat{\pi})$  είναι η εναλλακτική υπόθεση από τον έλεγχο  $LR_{uc}$ . Στις περιπτώσεις όπου εξετάζουμε μεγάλα δείγματα, η κατανομή του ελέγχου  $LR_{ind}$ , είναι η  $\chi^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας, όμως μπορούμε, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, να υπολογίσουμε προσομοιωμένες  $p$ -value. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, παράγουμε 999 δείγματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία *Bernoulli* ( $p$ ) κατανομή, στη συνέχεια, με τα τεχνητά αυτά δείγματα, υπολογίζουμε 999 προσομοιωμένους ελέγχους και τέλος υπολογίζουμε το μέρος των τιμών προσομοιωμένων ελέγχων που είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές τιμές του ελέγχου.

Πρακτικά, ενδέχεται όταν διενεργούμε  $LR_{ind}$  ελέγχους, να προκύψουν δείγματα στα οποία  $T_{11} = 0$ . Στην περίπτωση αυτή απλά υπολογίζουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας από τη σχέση:

$$L(\hat{\Pi}_1) = (1 - \hat{\pi}_{01})^{T_{00}} (\hat{\pi}_{01})^{T_{01}} \quad (3.3.3 - IX)$$

### **3.3.4 Δεσμευμένος Έλεγχος Κάλυψης (Conditional Coverage Testing)**

Μέσω του Δεσμευμένου Ελέγχου Κάλυψης, ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε ταυτόχρονα εάν οι παραβιάσεις του VaR είναι ανεξάρτητες και εάν το μέσο πλήθος των παραβιάσεων αυτών είναι σωστό. Η δυνατότητα παράλληλου ελέγχου, που αφορά την ύπαρξη ανεξαρτησίας καθώς και τη σωστή κάλυψη, μας δίνεται από τον ακόλουθο έλεγχο:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \sim \chi_2^2 \quad (3.3.4-I)$$

ο οποίος αντιστοιχεί στον έλεγχο της σχέσης  $\pi_{01} = \pi_{11} = p$ . Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος  $LR_{cc}$  λαμβάνει την πιθανοφάνεια από την μηδενική υπόθεση του ελέγχου  $LR_{uc}$  και την συνδυάζει με την πιθανοφάνεια της εναλλακτικής υπόθεσης από τον έλεγχο  $LR_{ind}$ . Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} LR_{cc} &= -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] = -2 \ln \left[ \left( \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right) \left( \frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) \right] \\ &= -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right] - 2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right] \\ &= LR_{uc} + LR_{ind} \end{aligned} \quad (3.3.4-II)$$

Με τον τρόπο αυτό, ο από κοινού δεσμευμένος έλεγχος κάλυψης, μπορεί απλά να υπολογιστεί αθροίζοντας τους δύο μεμονωμένους ελέγχους της αδέσμευτης κάλυψης και της ανεξαρτησίας. Στις περιπτώσεις όπου εξετάζουμε μεγάλα δείγματα, έχουμε την δυνατότητα, όπως και στους υπόλοιπους ελέγχους, να χρησιμοποιήσουμε προσομοιωμένες  $p$ -value.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι όλοι οι έλεγχοι με τους οποίους ασχοληθήκαμε, είχαν ως κύριο σημείο αναφοράς την συχνότητα των παραβιάσεων του VaR, χωρίς να μας απασχολεί το μέγεθος των παραβιάσεων αυτών. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί επιπλέον μεθοδολογίες οι οποίες στηρίζονται στην ισότητα των κατανομών (distribution equality). Ενδεικτικά, αναφέρουμε τους μετασχηματισμούς Rosenblatt και Berkowitz, οι οποίοι δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, και λεπτομερέστερη ανάλυσή τους υπάρχει στο βιβλίο “Measuring Market Risk” του Kevin Dowd (2005).

## Κεφάλαιο 4

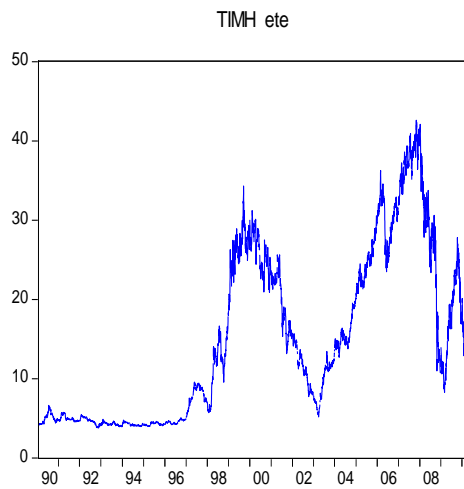
Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η πρακτική εφαρμογή των όσων θεωρητικά αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επεξεργασία των δεδομένων μας, τα οποία προήλθαν από την ηλεκτρονική σελίδα του Χρηματιστηρίου Αθηνών. Για την περαιτέρω επεξεργασία τους χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα E-views 6, χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι δεν είναι δυνατή η προσέγγιση των ίδιων αποτελεσμάτων μέσω διαφορετικών οικονομετρικών προγραμμάτων ή σε κάποιες περιπτώσεις ακόμα και του Excel Office.

### 4.1 Δεδομένα & Βασικά χαρακτηριστικά τους

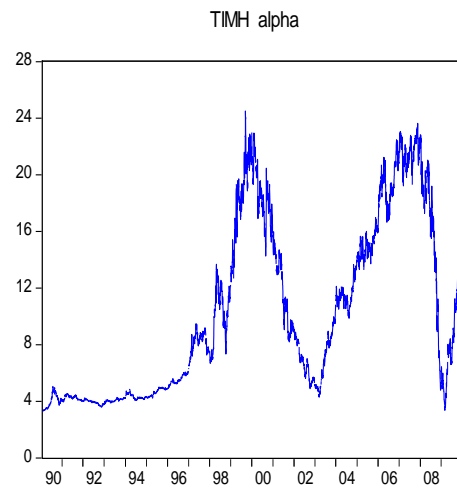
Τα δεδομένα μας αποτελούνται από τις τιμές έξι μετοχών εταιριών εισηγμένων στο Χρηματιστήριο Αθηνών, οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους. Το πρώτο ζεύγος μετοχών με το οποίο ασχοληθήκαμε (βλ. 4.2 Κατασκευή Χαρτοφυλακίων) αποτελείται από την Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος και την Alpha Bank, οι οποίες ανήκουν στον τραπεζικό κλάδο, για το χρονικό διάστημα 2/1/1990 έως 19/3/2010. Η εξέλιξη των τιμών των μετοχών αυτών για το διάστημα που αναφέραμε παρουσιάζονται στα Γραφήματα 4.1.1 και 4.1.2.



Γράφημα 4.1.1

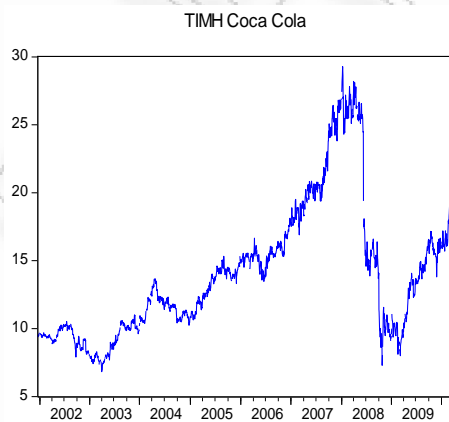


Γράφημα 4.1.2.



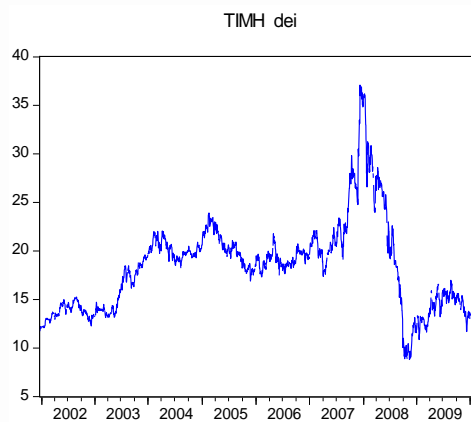
Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τις μετοχές της the Coca Cola company και της Δημόσιας Επιχείρησης Ηλεκτρισμού (ΔΕΗ) από τον κλάδο των αναψυκτικών και τον συμβατικό ηλεκτρικό κλάδο αντίστοιχα, για το χρονικό διάστημα από 13/12/2001 έως 19/3/2010. Τέλος, τα δεδομένα μας συμπληρώνουν οι τιμές των μετοχών της Τράπεζας Πειραιώς από τον τραπεζικό κλάδο και του Οργανισμού Προγνωστικών Αγώνων Ποδοσφαίρου (ΟΠΑΠ) του κλάδου τυχερών παιχνιδιών για το διάστημα από 26/4/2001 έως 19/3/2010. Στα ακόλουθα Γραφήματα διαφαίνεται η πορεία των παραπάνω μετοχών και επίσης ο Πίνακας 4.4.1 μας δίνει τα βασικά περιγραφικά στοιχεία τους.

Γράφημα 4.1.3

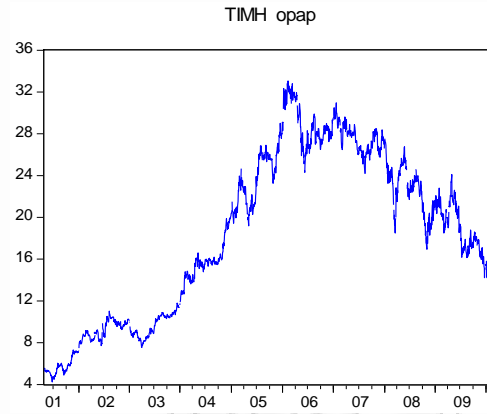
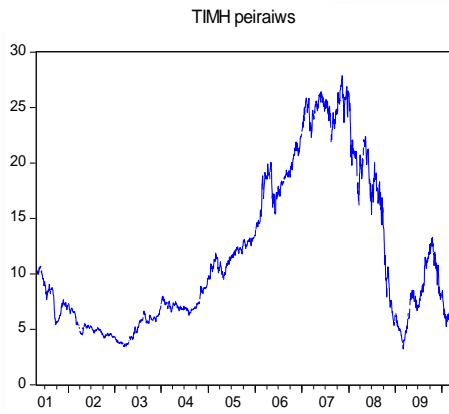


Γράφημα 4.1.5

Γράφημα 4.1.4



Γράφημα 4.1.6



Πίνακας 4.1.1

	ETE	ALPHA	Coca-Cola	ΔΕΗ	ΠΕΙΡΑΙΩΣ	ΟΠΑΠ
<i>Mean</i>	14.885	10.129	14.057	18.279	11.703	18.401
<i>Median</i>	12.07	8.27	13.39	18.68	8.86	19.17
<i>St. Deviation</i>	10.619	6.053	4.954	4.716	6.896	7.854
<i>Min</i>	3.79	3.31	6.83	8.82	3.23	4.24
<i>Max</i>	42.59	24.51	29.28	37.1	27.88	33.06
<i>Skewness</i>	0.665	0.659	1.051	0.925	0.783	-0.097
<i>Kyrtosis</i>	2.212	2.042	3.523	4.729	2.264	1.717

Επειδή στην παρούσα εργασία μας αφορούν κυρίως οι αποδόσεις των μετοχών και όχι τόσο οι τιμές τους, για να υπολογίσουμε την Αξία σε Κίνδυνο ακολουθούμε μία συγκεκριμένη διαδικασία:

Αρχικά υπολογίζονται οι λογαριθμικές ημερήσιες αποδόσεις των μετοχών με βάση το ακόλουθο μοντέλο:

$$R_t = 100 * \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (4.1-I)$$

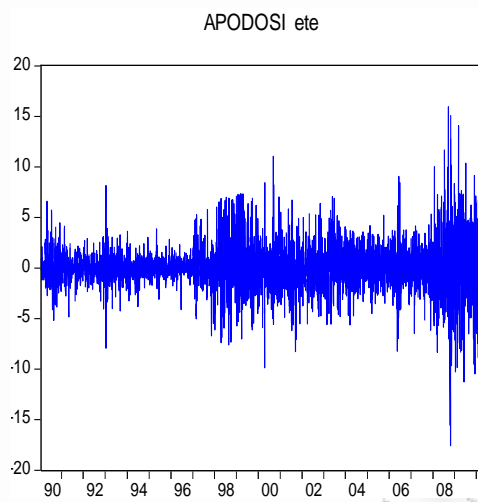
όπου,  $R_t$  : ημερήσια απόδοση την ημέρα  $t$

$P_t$  : τιμή κλεισίματος την ημέρα  $t$

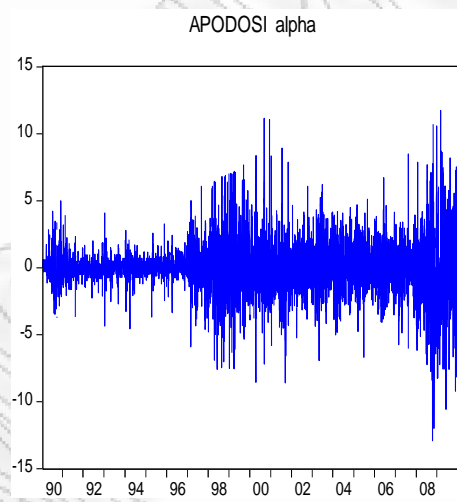
$P_{t-1}$  : τιμή κλεισίματος την ημέρα  $t - 1$

Η εξέλιξη των αποδόσεων των μετοχών που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο μας δίνεται από τα ακόλουθα Διαγράμματα.

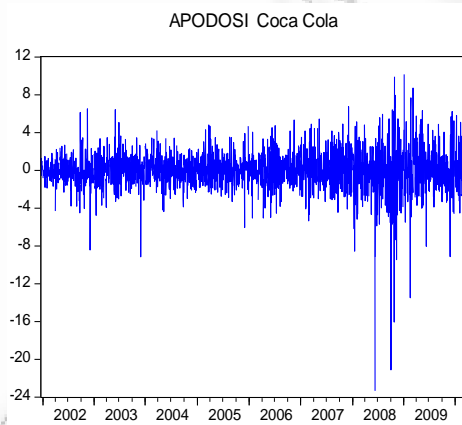
Γράφημα 4.1.7



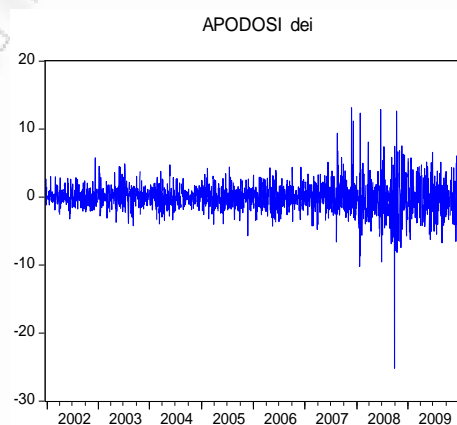
Γράφημα 4.1.8



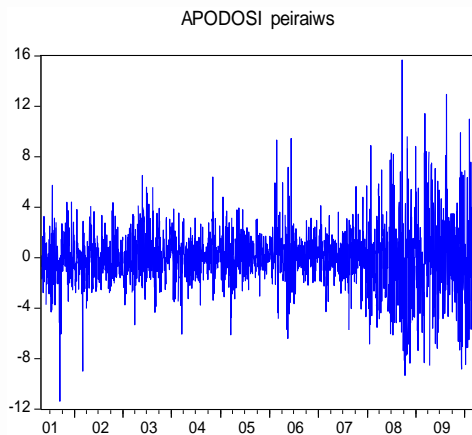
Γράφημα 4.1.9



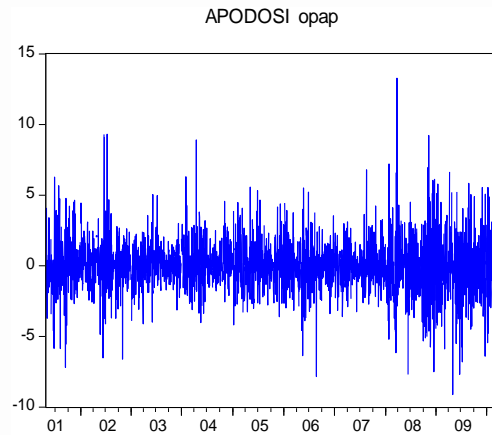
Γράφημα 4.1.10



Γράφημα 4.1.11



Γράφημα 4.1.12



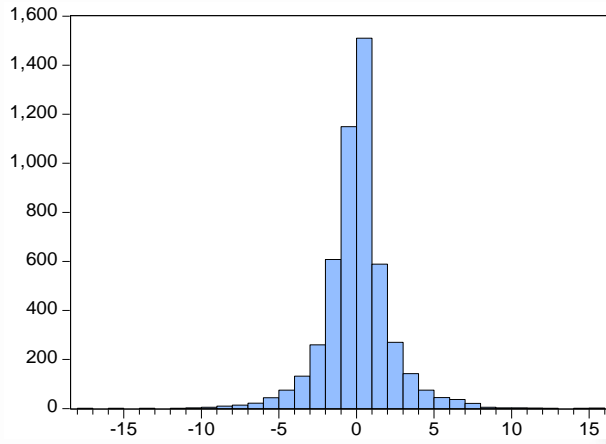
Το συγκεκριμένο μοντέλο υπερτερεί του απλού μοντέλου υπολογισμού αποδόσεων, καθώς στην περίπτωση που παρατηρούνται μεγάλες και απότομες διακυμάνσεις, εξομαλύνεται η επίδρασή τους, ενώ σε περίπτωση μικρών διακυμάνσεων, τα μοντέλα δεν διαφέρουν σημαντικά.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα μέτρα κεντρικής τάσεως και διασποράς, δηλαδή τη μέση απόδοση, τη διάμεσο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, την τυπική απόκλιση, τη διακύμανση, τους συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης καθώς και το Jarque-Bera τεστ, το οποίο είναι ένας έλεγχος που εξετάζει την κανονικότητα των δεδομένων.

Ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι ένα μέτρο που περιγράφει τη συμμετρία της κατανομής των δεδομένων, όπου εάν η κατανομή είναι συμμετρική, ο συντελεστής ασυμμετρίας μηδενίζεται, ενώ αν η κατανομή δεν είναι συμμετρική και επομένως έχει ουρά, ο συντελεστής παίρνει αρνητικές τιμές στην περίπτωση που η ουρά είναι προς τα αριστερά και θετικές τιμές στην περίπτωση που έχει ουρά προς τα δεξιά.

Ο συντελεστής κύρτωσης είναι ένα μέτρο που μας δείχνει το σχήμα (κύρτωση) της κατανομής των δεδομένων και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής ισούται με τρία. Επίσης παρουσιάζεται το Ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων των έξι μετοχών.

Γράφημα 4.1.13

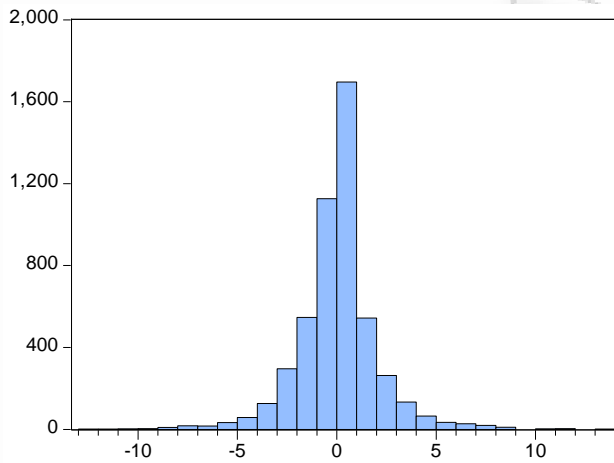


Series: APODOSI ete  
 Sample 1/02/1990 3/19/2010  
 Observations 5032

Mean 0.025785  
 Median 0.000000  
 Maximum 15.95841  
 Minimum -17.57731  
 Std. Dev. 2.191729  
 Skewness 0.046828  
 Kurtosis 9.011705

Jarque-Bera 7579.316  
 Probability 0.000000

Γράφημα 4.1.14

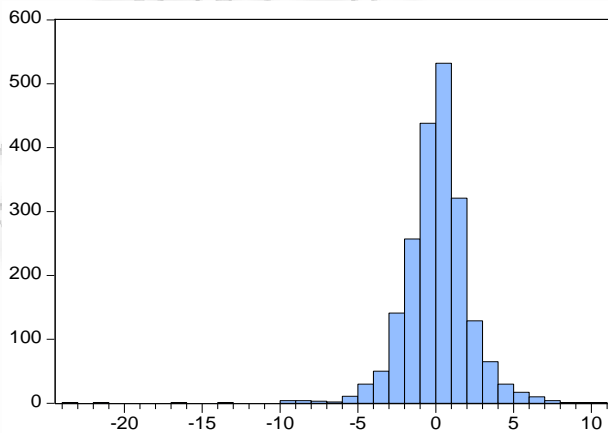


Series: APODOSI alpha  
 Sample 1/02/1990 3/19/2010  
 Observations 5032

Mean 0.014161  
 Median 0.000000  
 Maximum 13.91782  
 Minimum -12.90735  
 Std. Dev. 2.027459  
 Skewness 0.101978  
 Kurtosis 7.769942

Jarque-Bera 4779.130  
 Probability 0.000000

Γράφημα 4.1.15

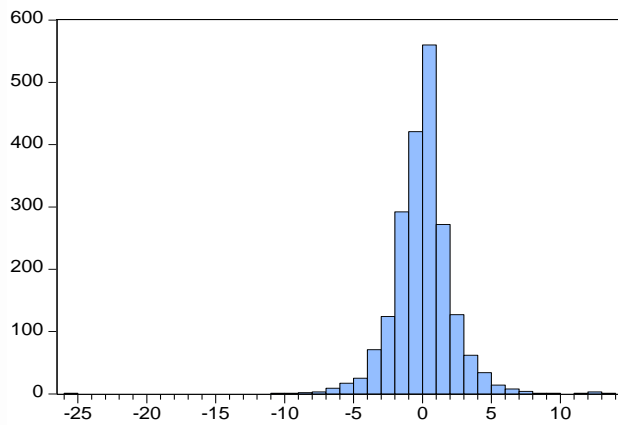


Series: APODOSI Coca Cola  
 Sample 12/13/2001 3/19/2010  
 Observations 2055

Mean 0.037356  
 Median 0.000000  
 Maximum 10.16537  
 Minimum -23.34001  
 Std. Dev. 2.176463  
 Skewness -1.350679  
 Kurtosis 17.25820

Jarque-Bera 18032.08  
 Probability 0.000000

Γράφημα 4.1.16

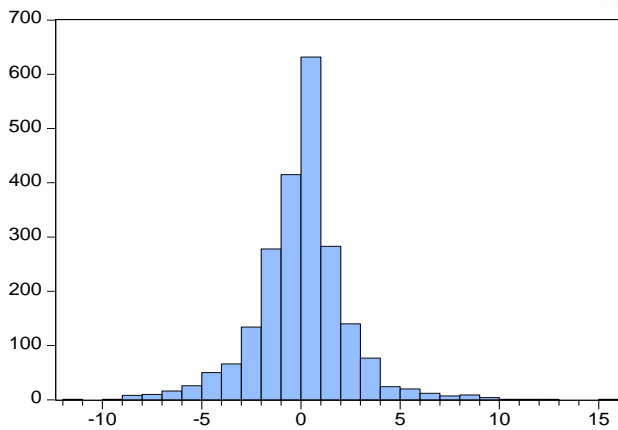


Series: APODOSI dei  
Sample 12/13/2001 3/19/2010  
Observations 2055

Mean 0.008567  
Median 0.000000  
Maximum 13.14105  
Minimum -25.17561  
Std. Dev. 2.167932  
Skewness -0.374967  
Kurtosis 15.43544

Jarque-Bera 13289.23  
Probability 0.000000

Γράφημα 4.1.17

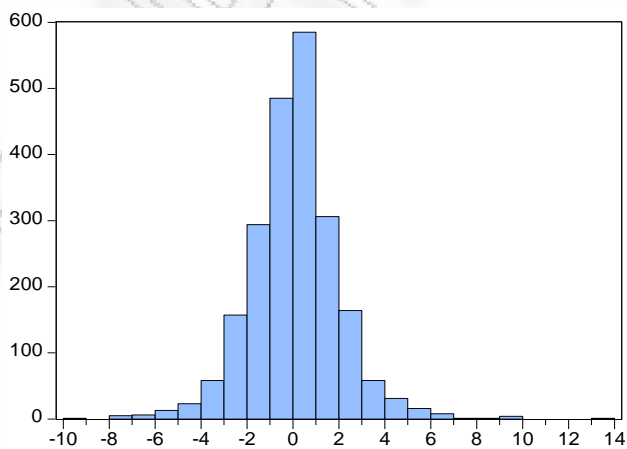


Series: APODOSI peiraiws  
Sample 4/26/2001 3/19/2010  
Observations 2217

Mean -0.022872  
Median 0.000000  
Maximum 15.68201  
Minimum -11.37589  
Std. Dev. 2.362381  
Skewness 0.233472  
Kurtosis 6.900337

Jarque-Bera 1425.408  
Probability 0.000000

Γράφημα 4.1.18



Series: APODOSI opap  
Sample 4/26/2001 3/19/2010  
Observations 2217

Mean 0.048994  
Median 0.000000  
Maximum 13.27811  
Minimum -9.116939  
Std. Dev. 1.948279  
Skewness 0.262391  
Kurtosis 6.121982

Jarque-Bera 925.7977  
Probability 0.000000

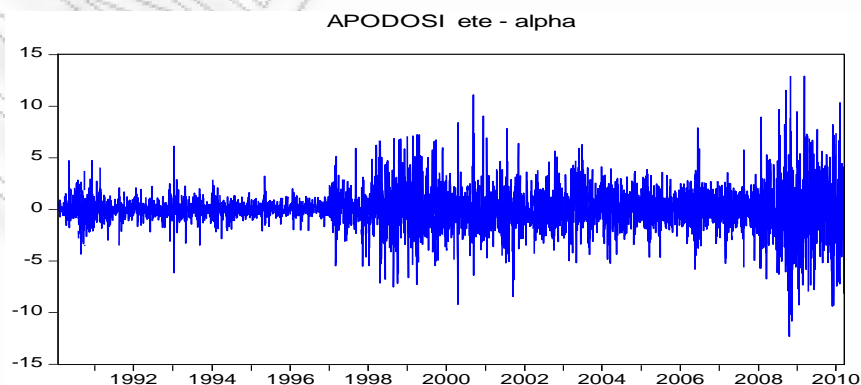
## 4.2 Κατασκευή Χαρτοφυλακίων

Η κάθε μετοχή που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, πλέον αποτελεί μέρος ενός χαρτοφυλακίου που έχουμε δημιουργήσει και μελετάται από κοινού με κάποια άλλη μετοχή. Ενδεικτικά έχουμε κατασκευάσει τρία διαφορετικά χαρτοφυλάκια τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια.

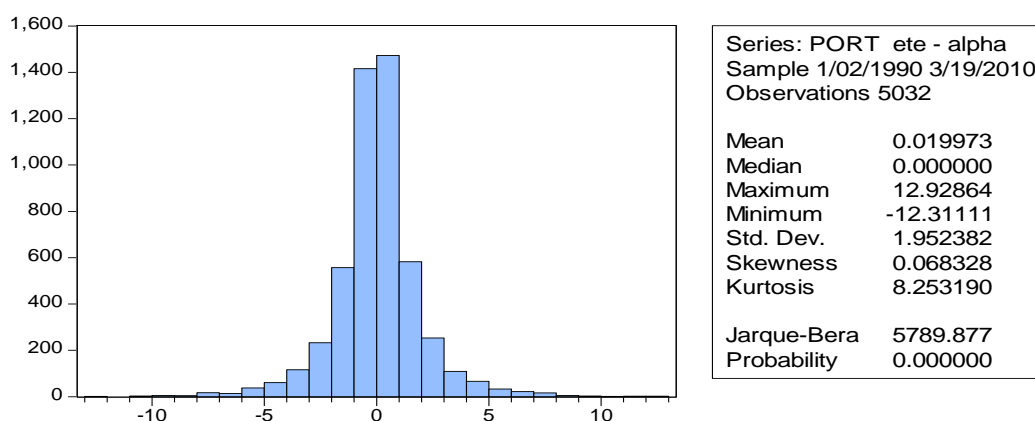
### 4.2.1 ΕΤΕ - Alpha Bank (1<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

Το πρώτο χαρτοφυλάκιο που έχουμε χρησιμοποιήσει συνθέτουν οι μετοχές της ΕΤΕ και της Alpha Bank και αποτελείται από 5.032 παρατηρήσεις για κάθε μία από τις μετοχές. Οι δύο μετοχές συμμετέχουν εξίσου στο χαρτοφυλάκιο που μελετάμε, δηλαδή έχουν και οι δύο βάρος 50 %. Από το Γράφημα 4.2.1 βλέπουμε την πορεία των αποδόσεων στο χαρτοφυλάκιο και από το Ιστόγραμμα συχνοτήτων που ακολουθεί παίρνουμε πληροφορίες για τα περιγραφικά στοιχεία του χαρτοφυλακίου.

Γράφημα 4.2.1



Γράφημα 4.2.2



Παρατηρούμε ότι η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι 0,01997%, η μέγιστη απόδοση είναι 12,9286% και η ελάχιστη -12,3111%. Επίσης, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων είναι 1,952382%, η ασυμμετρία  $\hat{s}(x)$  είναι 0,068328, η κύρτωση  $\hat{k}(x)$  είναι 8,25319 και το Jarque Bera test μας δίνει 5789,877 .

Γενικά ισχύει ότι ο τυποποιημένος συντελεστής ασυμμετρίας  $s^*$  και ο τυποποιημένος συντελεστής κύρτωσης  $k^*$  στην περίπτωση που ισχύει η κανονικότητα των δεδομένων, δίνεται από τις σχέσεις:

$$s^* = \frac{\hat{s}(x)}{\sqrt{6/T}} \sim N(0,1) \quad (4.2-I)$$

$$k^* = \frac{\hat{k}(x) - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0,1) \quad (4.2-II)$$

αντίστοιχα, όπου  $T$  είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Ακόμα, το test Jarque Bera προκύπτει από τη σχέση:

$$JB = (s^*)^2 + (k^*)^2 \sim \chi_2^2 \quad (4.2-III)$$



και δηλώνει μία  $\chi^2$  κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο όπου οι παρατηρήσεις είναι 5.032 και το  $p - value$  είναι μηδέν, οι τιμές των τυποποιημένων συντελεστών που προκύπτουν είναι:

$$S^* = 1,978761 \quad \text{και} \quad K^* = 76,065514$$

και από αυτά συμπεραίνουμε ότι τόσο σε επίπεδο σημαντικότητας 10%, όσο και σε επίπεδο σημαντικότητας 5% έχουμε ότι:

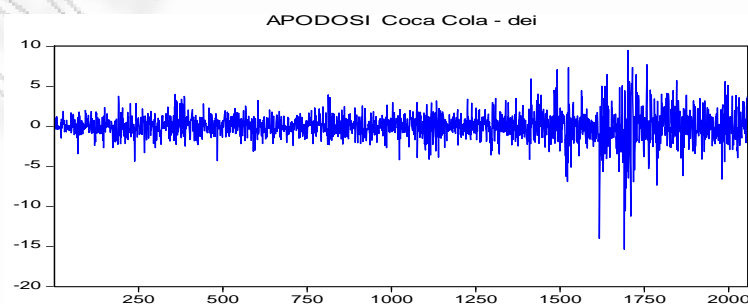
$$|S^*| > Z_{\alpha/2}, \quad |K^*| > Z_{\alpha/2}, \quad JB > \chi^2_2(\alpha) \quad \text{και} \quad p - value < \alpha$$

Άρα στα παραπάνω επίπεδα σημαντικότητας απορρίπτονται οι υποθέσεις των συμμετρικά κατανομημένων δεδομένων, της ύπαρξης κανονικών ουρών, καθώς και της κανονικότητας των δεδομένων.

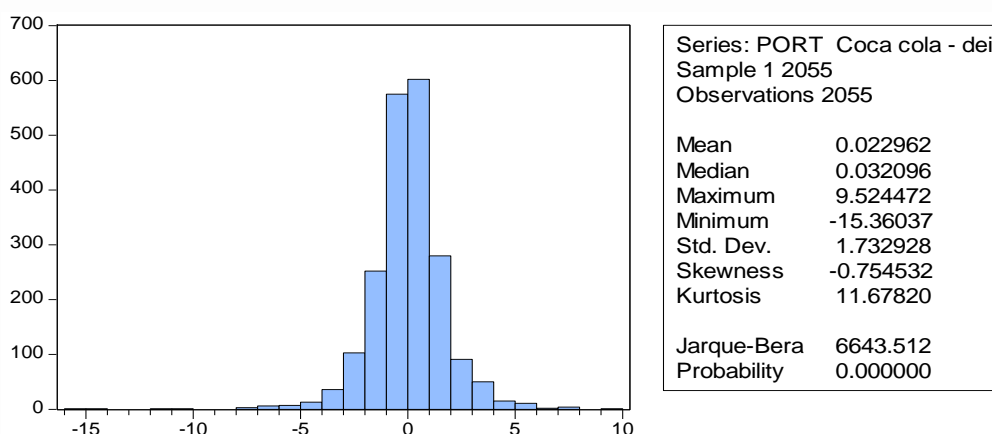
#### **4.2.2 Coca cola – ΔΕΗ (2<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Στη συνέχεια δημιουργήσαμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο απαρτίζεται ισοβαρώς από 2.055 παρατηρήσεις για κάθε μία από τις μετοχές της Coca cola και της ΔΕΗ. Το δείγμα αυτό είναι σαφώς μικρότερο από το προηγούμενο καθώς η μετοχή της Coca cola εισήλθε στο ελληνικό Χρηματιστήριο από τις 13/12/2001. Στα Διαγράμματα που ακολουθούν διαφαίνεται η πορεία των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου καθώς και τα βασικά περιγραφικά στοιχεία του.

Γράφημα 4.2.3



Γράφημα 4.2.4



Εδώ παρατηρούμε ότι η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι 0,02296%, η μέγιστη απόδοση είναι 9,524472% και η ελάχιστη -15,36037%. Επίσης, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων είναι 1,732928%, η ασυμμετρία  $\hat{s}(x)$  είναι -0,754532, η κύρτωση  $\hat{k}(x)$  είναι 11,6782 και το Jarque Bera test μας δίνει 6643,512 .

Με αυτά τα δεδομένα και σύμφωνα με τις σχέσεις που αναφέραμε παραπάνω έχουμε ότι οι τυποποιημένοι συντελεστές παίρνουν τις τιμές:

$$S^* = -13,96394 \quad \text{και} \quad K^* = 80,30266$$

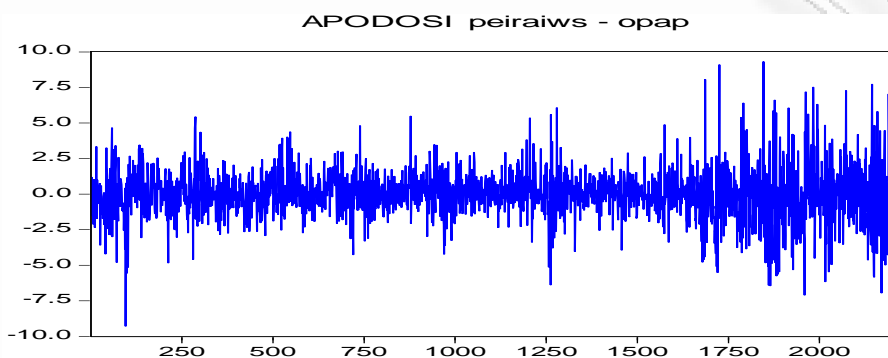
Και σε αυτή την περίπτωση διενεργώντας τους κατάλληλους ελέγχους που αναπτύξαμε παραπάνω, απορρίπτονται οι υποθέσεις των συμμετρικά κατανεμημένων δεδομένων, της ύπαρξης κανονικών ουρών, καθώς και της κανονικότητας των δεδομένων για τα επίπεδα σημαντικότητας 5% και 10%.

### **4.2.3 Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ (3<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

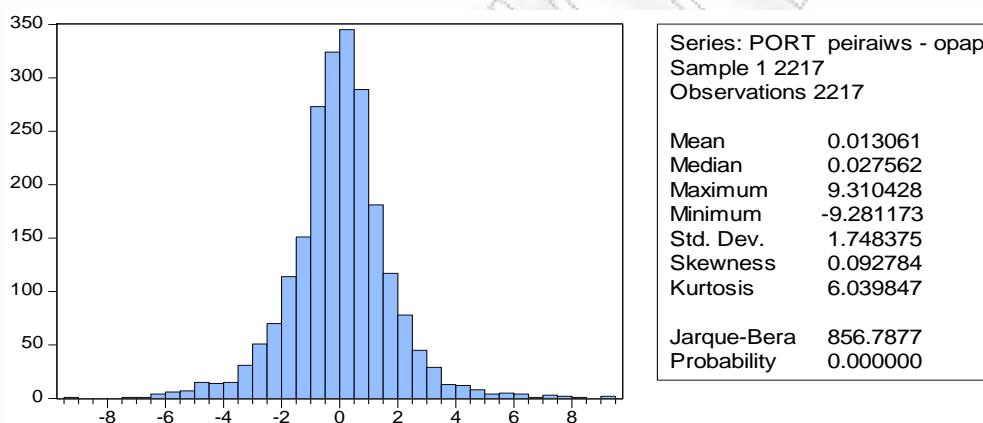
Το τελευταίο χαρτοφυλάκιο μετοχών με το οποίο ασχοληθήκαμε αποτελείται από 2.217 παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από τις τιμές της Τράπεζας Πειραιώς και του ΟΠΑΠ. Και σε αυτή την περίπτωση οι μετοχές συμμετέχουν εξίσου στο

χαρτοφυλάκιο που δημιουργήσαμε. Τα επόμενα Διαγράμματα δείχνουν την εξέλιξη της τιμής του χαρτοφυλακίου, καθώς και τα βασικά περιγραφικά χαρακτηριστικά του.

Γράφημα 4.2.5



Γράφημα 4.2.6



Βλέπουμε ότι η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι 0,013061%, η μέγιστη απόδοση είναι 9,310428% και η ελάχιστη -9,281173%. Επίσης, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων είναι 1,748375%, η ασυμμετρία  $\hat{s}(x)$  είναι 0,092784, η κύρτωση  $\hat{k}(x)$  είναι 6,039847 και το Jarque Bera test μας δίνει 856,7877 .

Επομένως, οι τυποποιημένοι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης παίρνουν τις τιμές:

$$S^* = 1,78353 \quad \text{και} \quad K^* = 29,21655$$

Αν για ακόμα μία φορά διενεργήσουμε τους κατάλληλους ελέγχους, η υπόθεση των συμμετρικά κατανομημένων δεδομένων δεν απορρίπτεται, όμως απορρίπτεται η υπόθεση της ύπαρξης κανονικών ουρών, επομένως και της κανονικότητας των δεδομένων, για τα επίπεδα σημαντικότητας 5% και 10%.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

### 4.3 Μονομεταβλητή Εκτίμηση VaR (1<sup>η</sup> μέθοδος)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την Αξία σε Κίνδυνο χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μεθόδους προσέγγισης σε συνδυασμό με τα μοντέλα που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2. Τα χαρτοφυλάκια τα οποία χρησιμοποιήθηκαν είναι τα ίδια με εκείνα της προηγούμενης παραγράφου, όμως για λόγους αποφυγής άσκοπων επαναλήψεων θα αναλύονται πιο διεξοδικά οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από τη μελέτη του πρώτου χαρτοφυλακίου.

Η εκτίμηση του VaR γίνεται αρχικά σε δείγμα  $P$  παρατηρήσεων ίσο με τα  $\frac{2}{3}$  του συνολικού δείγματος. Με τον τρόπο αυτό κρατάμε το τελευταίο  $\frac{1}{3}$  διάστημα του δείγματος το οποίο χρησιμοποιούμε για τον έλεγχο Back testing.

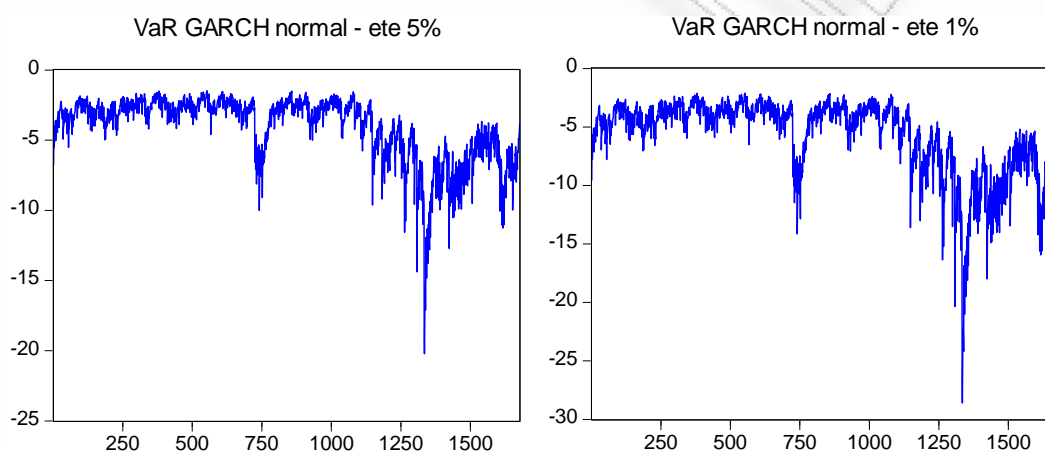
#### 1η Μέθοδος

Με βάση την πρώτη μέθοδο υπολογίζεται ξεχωριστά η Αξία σε Κίνδυνο για την κάθε μετοχή που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα και στη συνέχεια βρίσκουμε το VaR του χαρτοφυλακίου σύμφωνα με τον τύπο 3.2.5-II. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι κυλιόμενος (rolling) και μεταβάλλεται διαρκώς με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλεται το δείγμα λόγω της προσθήκης νέων παρατηρήσεων.

### **4.3.1 ETE - Alpha Bank (1<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το πρώτο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τις μετοχές του τραπεζικού κλάδου ETE και Alpha Bank. Αντιμετωπίζοντας κάθε μετοχή μεμονωμένα, προκύπτει το Γράφημα 4.3.1 όπου εξετάζουμε αρχικά την Αξία σε Κίνδυνο της ETE η οποία εκτιμάται εφαρμόζοντας το μοντέλο GARCH σε συνδυασμό με την Κανονική κατανομή.

Γράφημα 4.3.1



Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μέσο VaR ισούται με  $-4,12\%$  βλέποντας ωστόσο ότι για τις πρώτες 1.100 περίπου παρατηρήσεις, δηλαδή μέχρι τα μέσα Νοεμβρίου του 2007, ο μέσος βρίσκεται αρκετά ψηλότερα ( $-2,89\%$ ) και στη συνέχεια πέφτει ιδιαίτερα χαμηλά ( $-6,47\%$ ). Η μέγιστη διακράτηση παρατηρήθηκε στις 31/10/2008 και έχει τιμή  $-20,213\%$ , δηλαδή μας δείχνει ότι πρέπει να κρατήσουμε περισσότερο από το  $\frac{1}{5}$  της αξίας της μετοχής.

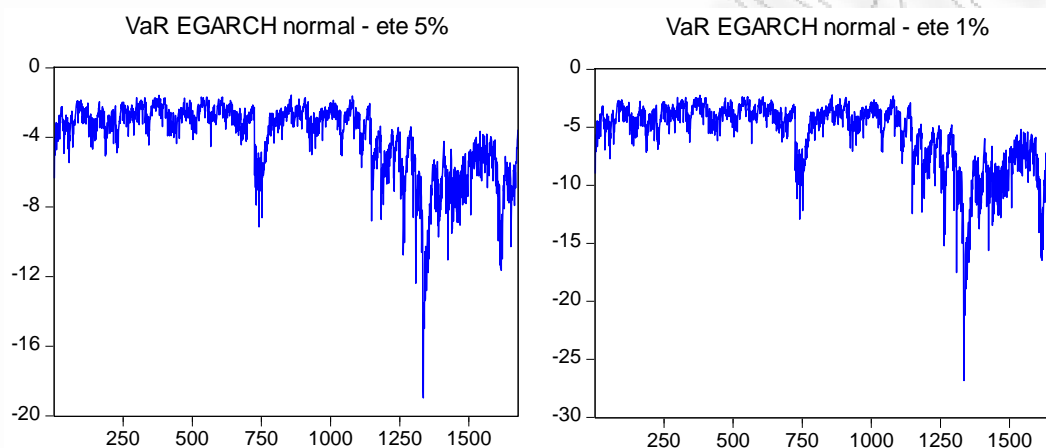
Αντίστοιχα, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι ίση με  $-5,83\%$ , όπου και πάλι είναι εμφανής ο διαχωρισμός του VaR σε δύο περιόδους, με

τη μεγαλύτερη διακράτηση να παρατηρείται την ίδια ημερομηνία και να ισούται με

- 28,587 % .

Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν για τη μετοχή της ΕΤΕ, όπως φαίνεται και στο Γράφημα 4.3.2, κάνοντας χρήση του μοντέλου EGARCH με Κανονική κατανομή.

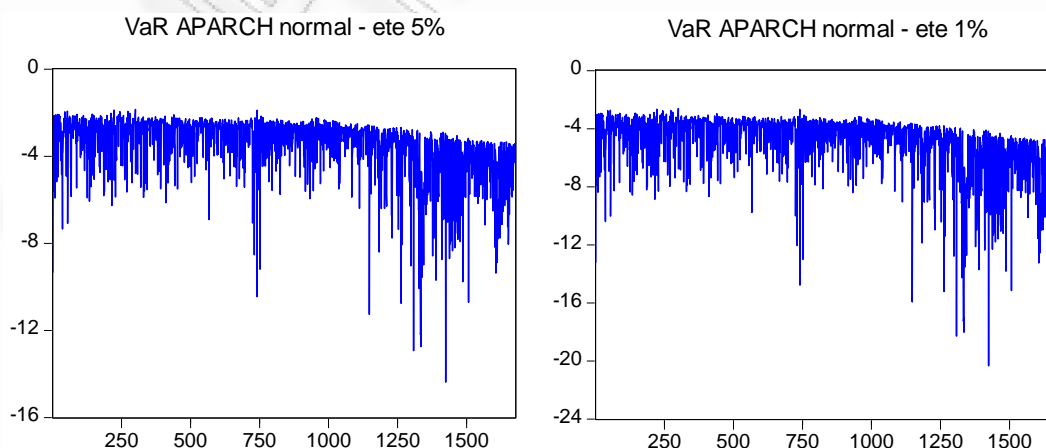
Γράφημα 4.3.2



Εδώ το μέσο VaR είναι - 4,026 % και - 5,694 % για τα επίπεδα εμπιστοσύνης 5% και 1% αντίστοιχα και η μέγιστη διακράτηση είναι - 18,977 % και - 26,84 % .

Το τελευταίο μοντέλο που έχουμε συνδυάσει με την Κανονική κατανομή είναι το APARCH μοντέλο (βλ. Γράφημα 4.3.3)

Γράφημα 4.3.3

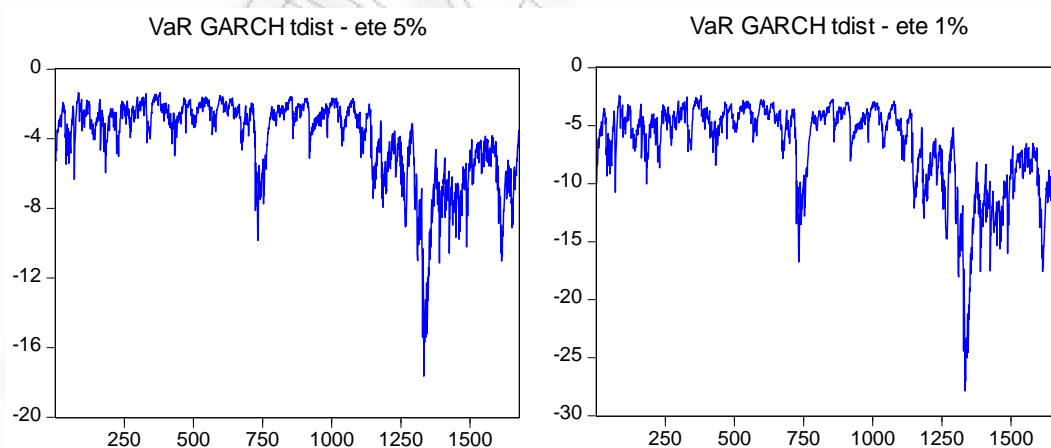


Σε αυτή την περίπτωση, η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι  $-3,52\%$  για επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$  και  $-4,98\%$  για  $1\%$  και οι μέγιστες διακρατήσεις έχουν τιμές  $-14,37\%$  και  $-20,32\%$ . Παρατηρούμε ότι το VaR παρουσιάζει μία καθοδική τάση (downward trend) κατά την πάροδο του χρόνου, δηλαδή μας δείχνει ότι μέσα στην περίοδο που μελετάμε πρέπει η διακράτηση να είναι ολοένα και μεγαλύτερη. Επίσης, δεν παρατηρείται το φαινόμενο της μίας ακραίας τιμής σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όπως στα προηγούμενα μοντέλα, αλλά είναι φανερή η συγκέντρωση πολλών ακραίων τιμών από το Νοέμβριο του 2008 και έπειτα.

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας την Κανονική κατανομή το μοντέλο που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως περισσότερο συντηρητικό είναι το GARCH μοντέλο αφού παρουσιάζει τις μεγαλύτερες μέσες, αλλά και ακραίες, διακρατήσεις.

Εκτός από την Κανονική κατανομή, για την αξιολόγηση του VaR της ETE, έχουμε μελετήσει τα μοντέλα GARCH και EGARCH και μέσω της κατανομής  $t - Student$  (βλ. Γράφημα 4.3.4 και Γράφημα 4.3.5).

Γράφημα 4.3.4

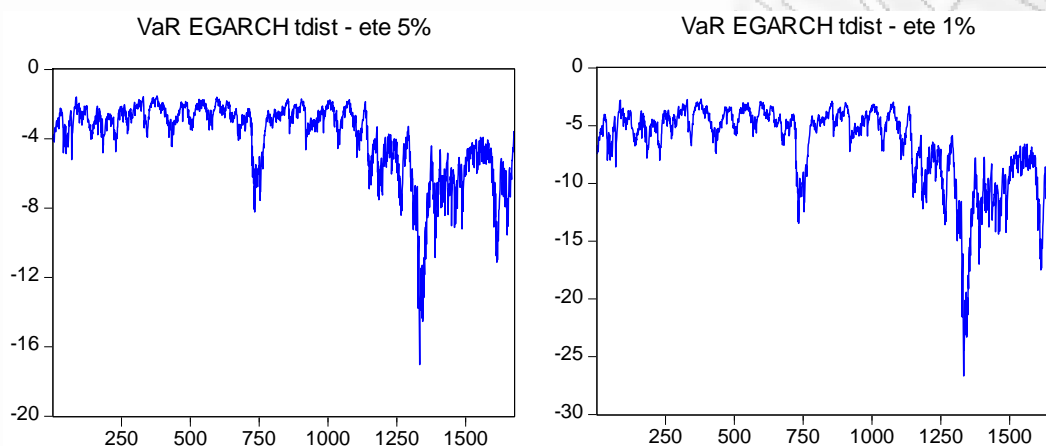


Η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι  $-3,982\%$  για επίπεδο σημαντικότητας  $5\%$  και  $-6,8095\%$  για  $1\%$  στο μοντέλο GARCH, ενώ στο EGARCH μοντέλο το μέσο VaR είναι  $-3,916\%$  και  $-6,624\%$  για τα αντίστοιχα επίπεδα σημαντικότητας. Η μέγιστη



διακράτηση που παρατηρείται προκύπτει μέσω του GARCH μοντέλου με τιμές  $-17,64\%$  και  $-27,86\%$ . Και σε αυτή την περίπτωση διακρίνουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών περιόδων, αφού τόσο η μέση Αξία σε Κίνδυνο, όσο και οι ακραίες παρατηρήσεις διαφέρουν αισθητά.

Γράφημα 4.3.5

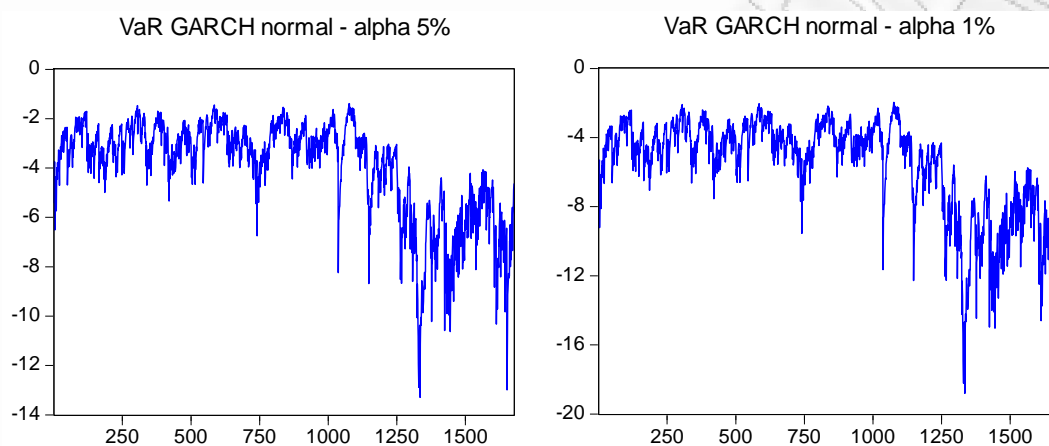


Ως εκ τούτου, πιο συντηρητικό μπορεί να θεωρηθεί το GARCH μοντέλο, χωρίς όμως να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν ιδιαίτερες αποκλίσεις το ένα με το άλλο. Συνολικά, συγκρίνοντας όλα τα μοντέλα και για τις δύο κατανομές, το πιο αυστηρό για την μετοχή της ETE σε επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής, ενώ σε επίπεδο σημαντικότητας 1% είναι το GARCH μοντέλο της  $t$ -Student εξαιτίας των πιο βαριών ουρών που διαθέτει, χωρίς όμως να μας δίνει και τη μέγιστη ακραία διακράτηση.

Επόμενο βήμα με βάση την πρώτη μέθοδο, είναι η επανάληψη της ίδιας διαδικασίας που ακολουθήσαμε για την μετοχή της ETE, για εκείνη της Alpha Bank. Με τον τρόπο αυτό το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής (βλ. Γράφημα 4.3.6) μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,949\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-13,295\%$  για επίπεδο σημαντικότητας 5%, ενώ για επίπεδο σημαντικότητας 1% το μέσο VaR είναι  $-5,585\%$  και η μέγιστη διακράτηση έχει τιμή  $-18,803\%$  η οποία παρατηρείται

(όπως συνέβη και στην μετοχή της ΕΤΕ) στις 31/10/2008. Ωστόσο, στην περίπτωση της μετοχής της Alpha είναι φανερή η ύπαρξη περισσότερων από μία ακραίων παρατηρήσεων, οι οποίες βρίσκονται κοντά στην μέγιστη διακράτηση και συνέβησαν στις 23/10/2008 και στις 11/2/2010.

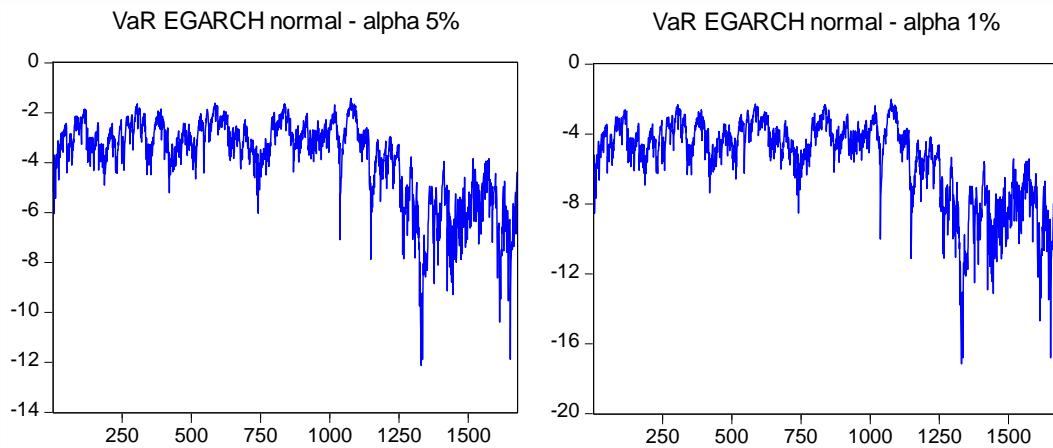
Γράφημα 4.3.6



Για ακόμα μία φορά είναι εμφανής η ύπαρξη δύο διαφορετικών χρονικών περιόδων, καθώς η μέση Αξία σε Κίνδυνο και οι ακραίες παρατηρήσεις διαφέρουν από τον Δεκέμβριο του 2007 και μετά.

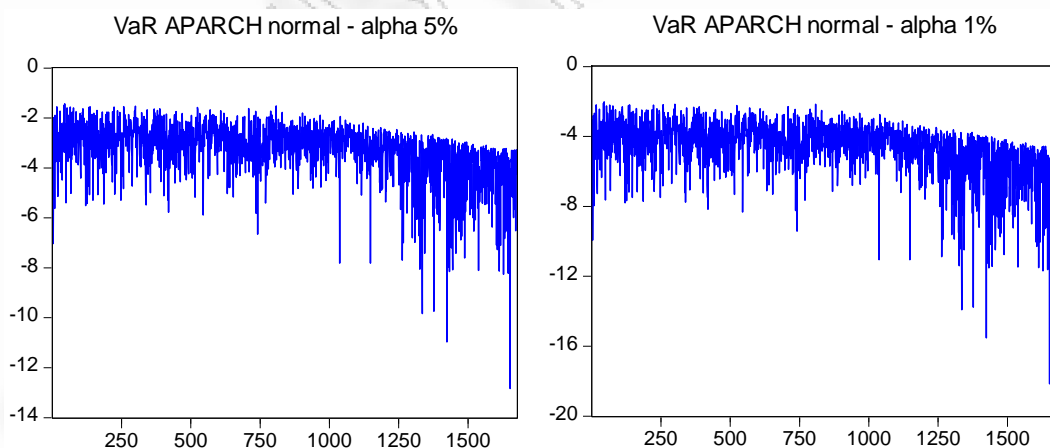
Συνεχίζοντας με την Κανονική κατανομή το EGARCH μοντέλο (βλ. Γράφημα 4.3.7) για τη μετοχή της Alpha, μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,836\%$  και  $-5,425\%$  για επίπεδα σημαντικότητας  $5\%$  και  $1\%$ , ενώ οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις έχουν τιμή  $-12,123\%$  και  $-17,145\%$ .

Γράφημα 4.3.7



Το μοντέλο APARCH (Γράφημα 4.3.8) εμφανίζει και εδώ μία καθοδική τάση κατά την πάροδο του χρόνου, δηλαδή κατά μέσο όρο πρέπει να κρατάμε όλο και περισσότερο, χωρίς όμως να προκύτουν ως αποτέλεσμα υψηλότερες τιμές, αφού για επίπεδο σημαντικότητας 5% το μέσο VaR είναι  $-3,32\%$  και η μέγιστη διακράτηση είναι  $-12,833\%$ , ενώ για 1% επίπεδο σημαντικότητας έχουμε μέσο  $-4,696\%$  και ελάχιστο  $-18,149\%$ .

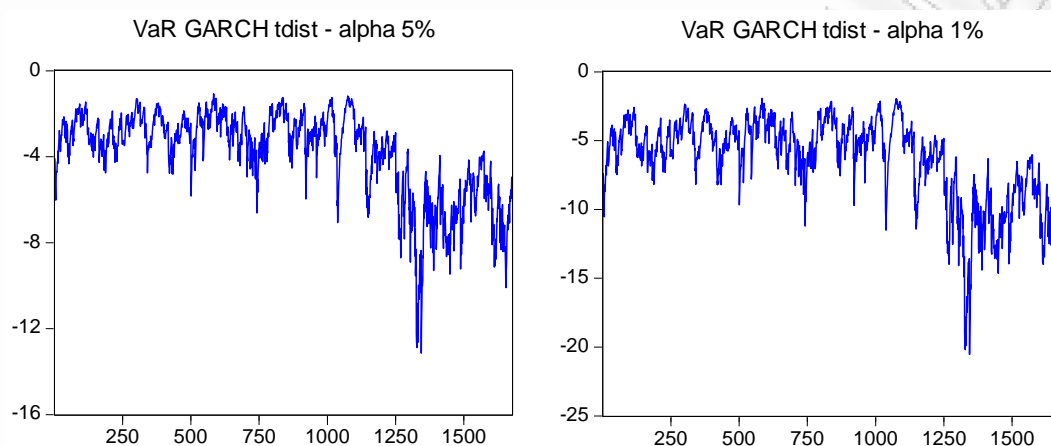
Γράφημα 4.3.8



Χρησιμοποιώντας τώρα την  $t$ -Student κατανομή το μοντέλο GARCH (Γράφημα 4.3.9) μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,8296\%$  και  $-6,381\%$  και μέγιστες

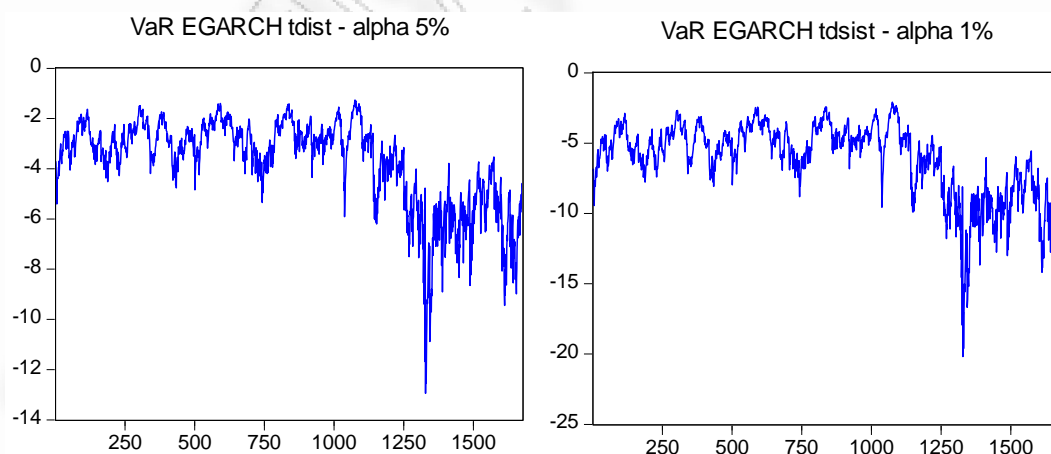
διακρατήσεις  $-13,1413\%$  και  $-20,5374\%$  για τα επίπεδα εμπιστοσύνης 5% και 1% αντίστοιχα.

Γράφημα 4.3.9



Το EGARCH μοντέλο μέσω της  $t$ -Student (Γράφημα 4.3.10) είναι λιγότερο ασταθές, αφού σε επίπεδο 5% το μέσο VaR που προκύπτει είναι  $-3,704\%$  και η μέγιστη διακράτηση είναι  $-12,946\%$ , ενώ σε επίπεδο 1% έχουμε μέσο  $-6,129\%$  και ελάχιστη τιμή  $-20,183\%$ .

Γράφημα 4.3.10

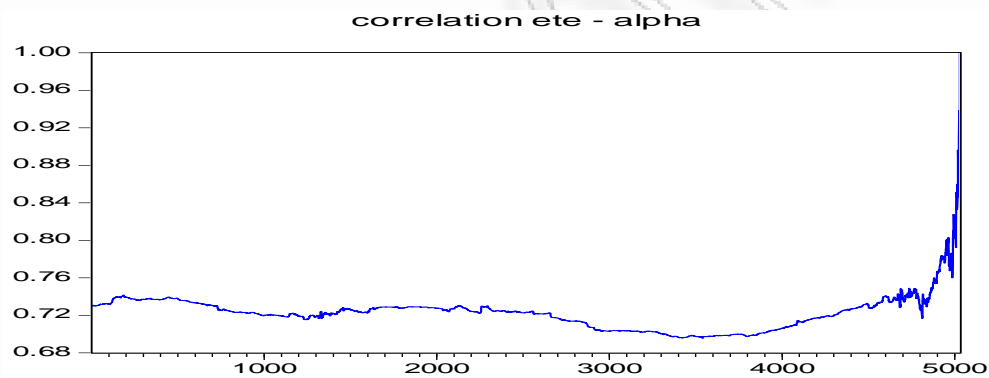


Όπως στην μετοχή της ΕΤΕ, έτσι και στην Alpha, συγκρίνοντας όλα τα μοντέλα μεταξύ τους, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για επίπεδο σημαντικότητας 5% ως πιο συντηρητικό μπορεί να θεωρηθεί το μοντέλο GARCH μέσω της Κανονικής

κατανομής, ενώ για επίπεδο 1% το πιο αυστηρό μοντέλο που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το μοντέλο GARCH της  $t - Student$  .

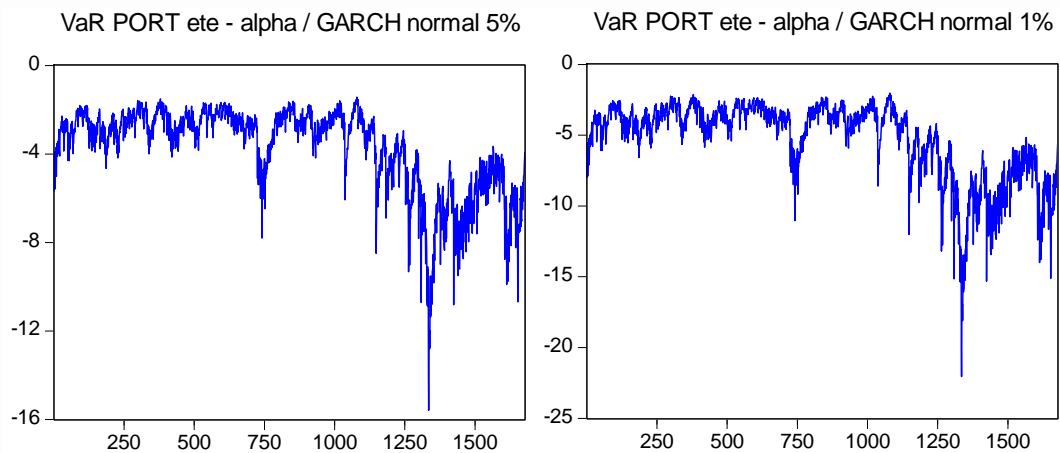
Τελευταίο βήμα της πρώτης μεθόδου αποτελεί η σύνθεση των δύο μετοχών σε ένα ενιαίο χαρτοφυλάκιο και η εφαρμογή των ίδιων μοντέλων που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{12}$  των αποδόσεων των μετοχών, ο οποίος όπως φαίνεται και από τον τύπο 3.2.5-I μεταβάλλεται διαρκώς (βλ. Γράφημα 4.3.11).

Γράφημα 4.3.11



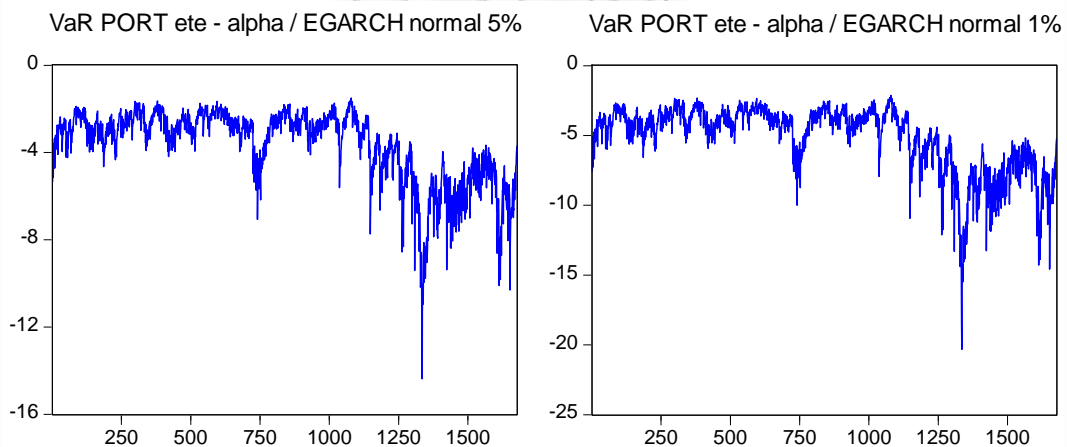
Εφαρμόζοντας για το χαρτοφυλάκιο το μοντέλο GARCH με Κανονική κατανομή, η εξέλιξη της Αξίας σε Κίνδυνο δίνεται από το Γράφημα 4.3.12. Το μέσο VaR έχει τιμή  $- 3,753 \%$  σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% και μέγιστη διακράτηση  $- 15,587 \%$  , ενώ σε επίπεδο 1% το μέσο VaR ισούται με  $- 5,307 \%$  και η μέγιστη διακράτηση με  $- 22,045 \%$  .

Γράφημα 4.3.12



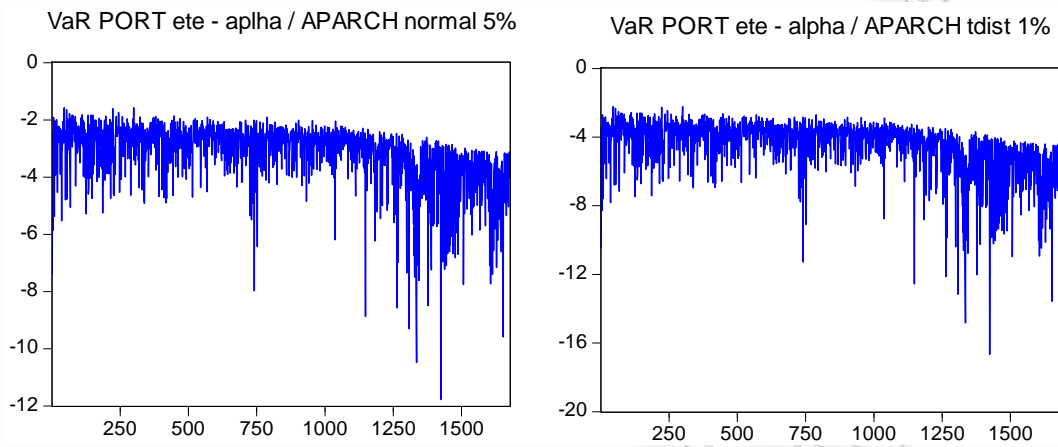
Στην περίπτωση του EGARCH μοντέλου με την Κανονική κατανομή (Γράφημα 4.3.13) το χαρτοφυλάκιό μας παρουσιάζει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,656\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-14,369\%$  για επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$ , ενώ οι αντίστοιχες τιμές σε επίπεδο  $1\%$  είναι  $-5,171\%$  και  $-20,323\%$ .

Γράφημα 4.3.13



Ολοκληρώνουμε τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε μέσω της Κανονικής κατανομής, με το μοντέλο APARCH για το χαρτοφυλάκιο (Γράφημα 4.3.14) το οποίο μας δίνει ως αποτελέσματα για επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$  μέσο VaR  $-3,185\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-11,781\%$ , ενώ για επίπεδο  $1\%$  έχουμε μέση Αξία σε Κίνδυνο ίση με  $-4,504\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-16,662\%$ .

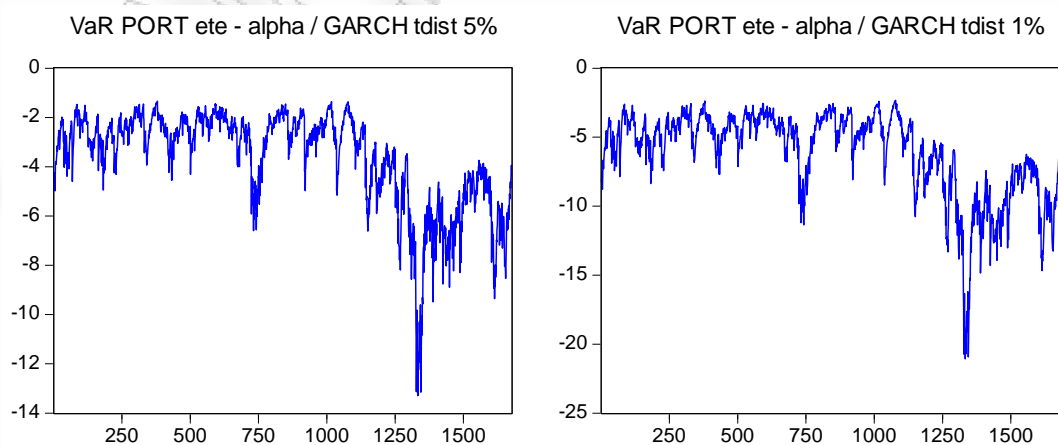
Γράφημα 4.3.14



Συμπεραίνουμε επομένως ότι χρησιμοποιώντας την Κανονική κατανομή, πιο αυστηρό μοντέλο είναι το μοντέλο GARCH, αφού μας δίνει μεγαλύτερο μέσο VaR και μεγαλύτερη μέγιστη διακράτηση.

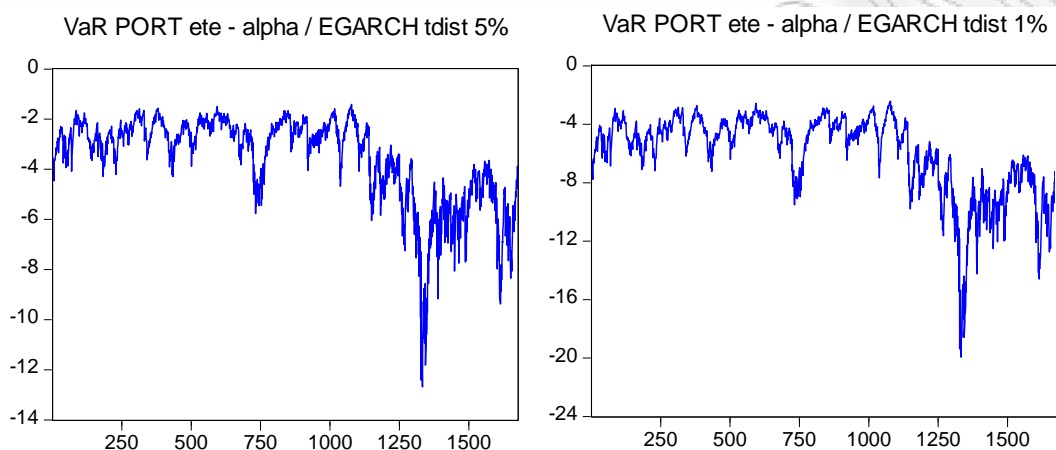
Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και για την  $t$ -Student κατανομή και βλέπουμε ότι για το μοντέλο GARCH (Γράφημα 4.3.15) προκύπτει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,634\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-13,293\%$  σε επίπεδο 5%, ενώ σε επίπεδο 1% έχουμε μέσο  $-6,137\%$  και ελάχιστο  $-21,07\%$ .

Γράφημα 4.3.15



Αντίστοιχα, για το μοντέλο EGARCH με  $t - Student$  κατανομή (Γράφημα 4.3.16) το χαρτοφυλάκιο παρουσιάζει μέσο VaR  $-3,543\%$  και  $-5,932\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-12,681\%$  και  $-19,943\%$  για τα επίπεδα 5% και 1%.

Γράφημα 4.3.16



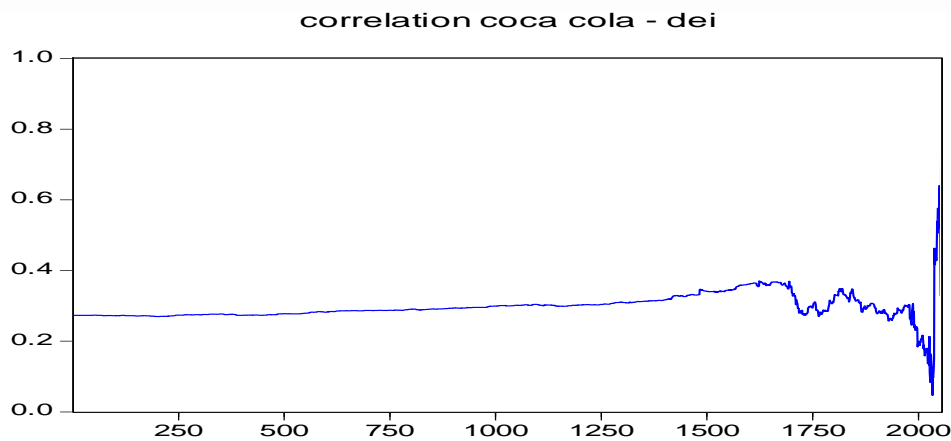
Αξιολογώντας όλα τα μοντέλα συνολικά, παρατηρούμε ότι σε επίπεδο 5% πιο συντηρητικό είναι το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής, ενώ σε επίπεδο 1% πιο αυστηρό μπορεί να θεωρηθεί το GARCH με  $t - Student$ , χωρίς όμως να δίνει τη μεγαλύτερη από τις μέγιστες διακρατήσεις, την οποία και σε αυτή την περίπτωση δίνει το GARCH της Κανονικής κατανομής.

### **4.3.2 Coca cola – ΔΕΗ (2<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Το επόμενο χαρτοφυλάκιο που έχουμε μελετήσει με την πρώτη μέθοδο συνθέτουν οι μετοχές της Coca cola και της ΔΕΗ. Η πορεία του συντελεστή συσχέτισης είναι απαραίτητο να ελεγχθεί και παρουσιάζεται σχηματικά από το Γράφημα 4.3.17, όποιο από τα μοντέλα και αν εφαρμόσουμε.

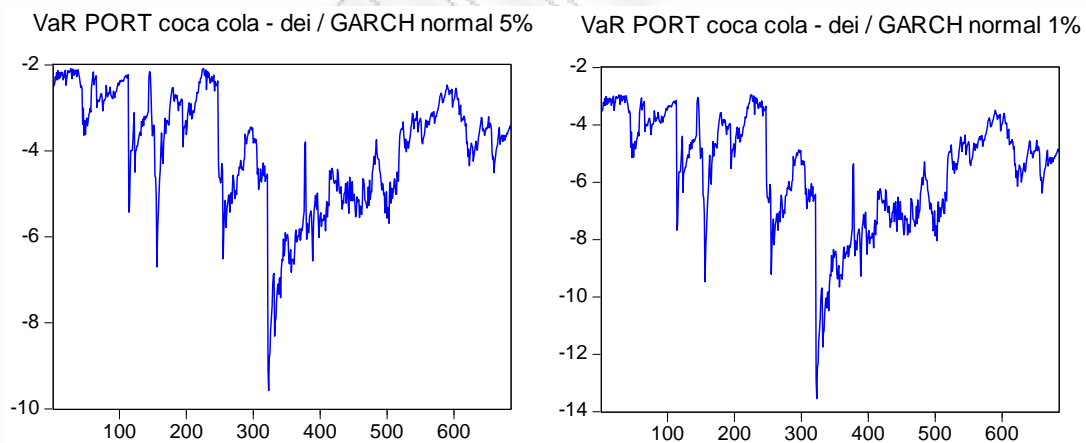


Γράφημα 4.3.17



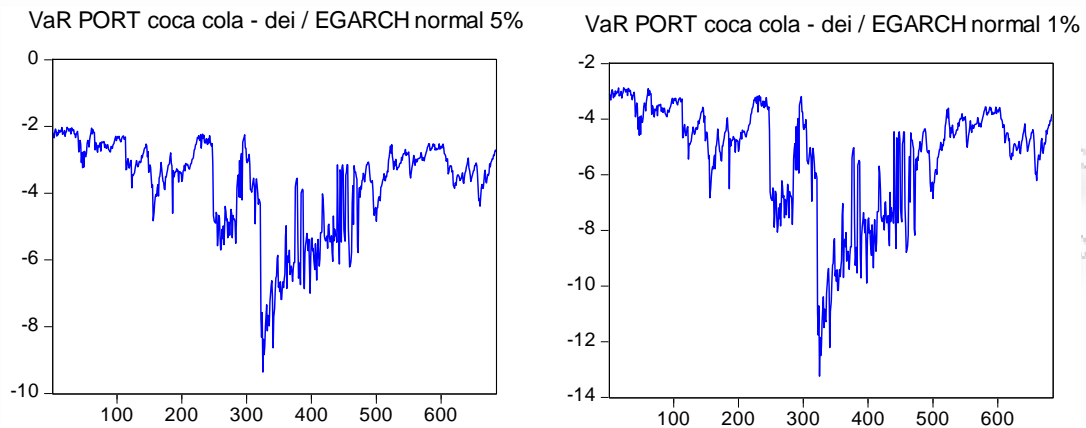
Εφαρμόζοντας και πάλι το GARCH μοντέλο μέσω της Κανονικής κατανομής (Γράφημα 4.3.18) παρατηρούμε ότι για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο η μέση Αξία σε Κίνδυνο που προκύπτει είναι  $-3,945\%$  σε επίπεδο 5% και  $-5,579\%$  σε επίπεδο 1%. Οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις για το μοντέλο αυτό είναι  $-9,577\%$  και  $-13,545\%$  στα επίπεδα που μελετάμε.

Γράφημα 4.3.18



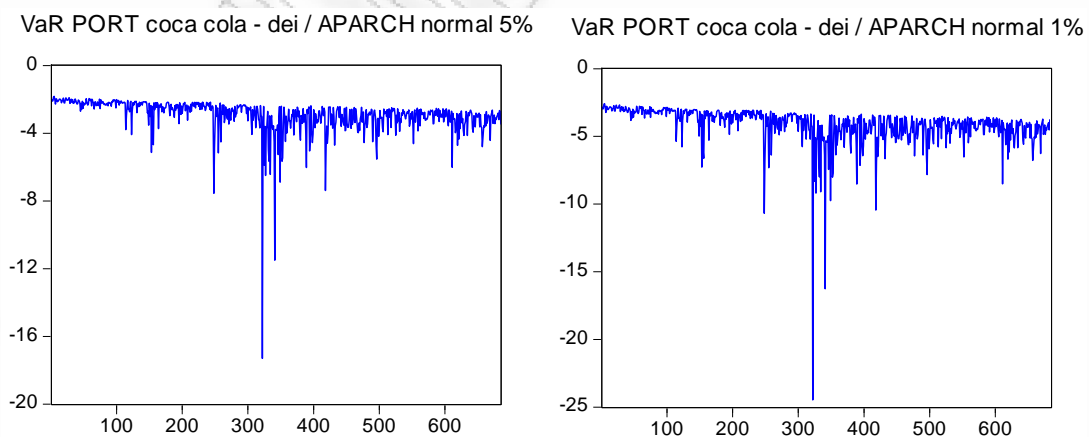
Στην περίπτωση του EGARCH μοντέλου με Κανονική κατανομή (Γράφημα 4.3.19) το χαρτοφυλάκιο έχει μέσο VaR  $-3,74\%$  και  $-5,29\%$  για τα επίπεδα 5% και 1%, ενώ οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις που προκύπτουν είναι  $-9,361\%$  και  $-13,545\%$ .

Γράφημα 4.3.19



Το APARCH μοντέλο μέσω της Κανονικής κατανομής (Γράφημα 4.3.20) παρατηρούμε ότι παρουσιάζει ασθενή καθοδική τάση με μικρή διακύμανση και λίγες ακραίες τιμές, με μία από αυτές να ξεχωρίζει κατά πολύ, ενώ στο πρώτο χαρτοφυλάκιο είχαμε δει ότι για το ίδιο μοντέλο, η διακύμανση ήταν αρκετά μεγαλύτερη, όπως μεγαλύτερο ήταν και το πλήθος των ακραίων παρατηρήσεων. Εδώ, σε επίπεδο 5% η μέση Αξία σε Κίνδυνο και η μέγιστη διακράτηση έχουν τιμή  $-2,922\%$  και  $-17,302\%$  αντίστοιχα. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% το ίδια μεγέθη μας δίνουν  $-4,132\%$  και  $-24,471\%$ .

Γράφημα 4.3.20

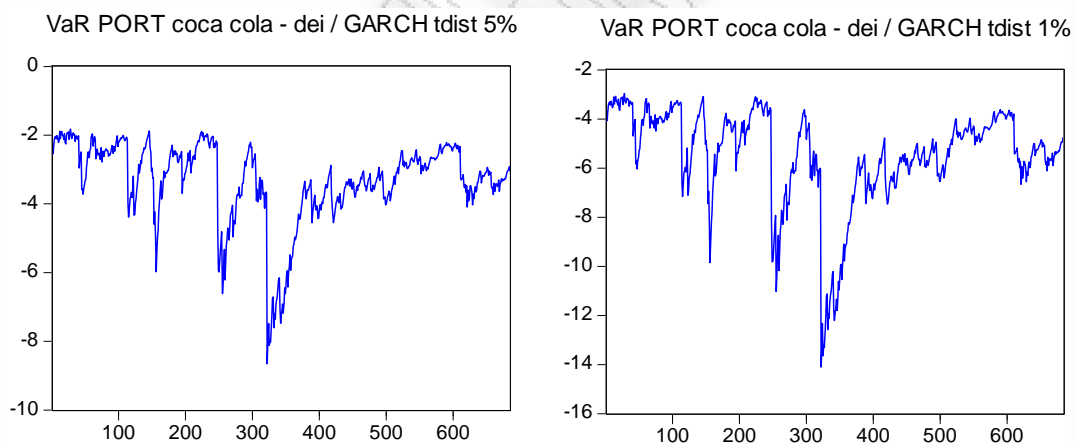


Παρατηρούμε ότι μεταξύ των μοντέλων που χρησιμοποιήσαμε Κανονική κατανομή, εκείνο που μπορεί να θεωρηθεί γενικά πιο αυστηρό είναι το μοντέλο GARCH, το

οποίο μας δίνει τη μεγαλύτερη μέση Αξία σε Κίνδυνο. Παρόλα αυτά, το συγκεκριμένο μοντέλο δεν μας δίνει ως αποτέλεσμα και τη μεγαλύτερη μέγιστη διακράτηση, την οποία εντοπίζουμε στο APARCH μοντέλο που παραδόξως έχει το μικρότερο μέσο VaR. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι μέχρι στιγμής η αξιολόγηση των διάφορων μοντέλων με κριτήριο την αυστηρότητά τους, έδινε διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με το επίπεδο εμπιστοσύνης που εξετάζαμε. Σε αυτή την περίπτωση όμως έχουμε τα ίδια συντηρητικά ή όχι αποτελέσματα ανεξαρτήτως επιπέδου εμπιστοσύνης.

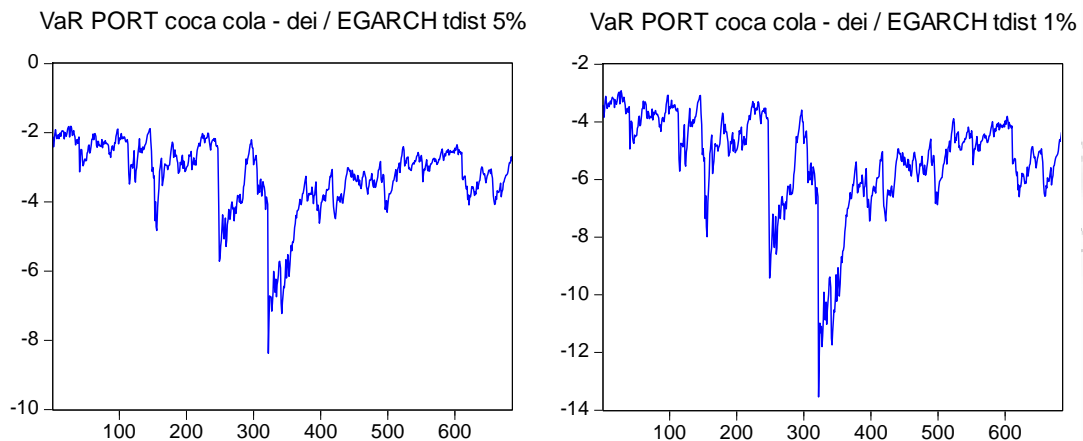
Στη συνέχεια εξετάζουμε για το ίδιο χαρτοφυλάκιο τα μοντέλα μέσω της  $t - Student$  κατανομής. Το GARCH μοντέλο (Γράφημα 4.3.21) είναι περισσότερο αυστηρό, αφού μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $- 3,339 \%$  και μέγιστη διακράτηση  $- 8,655 \%$  σε επίπεδο 5% και μέσο  $- 5,469 \%$  και ελάχιστο  $- 14,101 \%$  σε επίπεδο 1%.

Γράφημα 4.3.21



Αντίστοιχα, το EGARCH μοντέλο με  $t - Student$  για το χαρτοφυλάκιο, παρατηρούμε ότι δεν διαφέρει ιδιαίτερα από το προηγούμενο (βλ.Γράφημα 4.3.22) και παρουσιάζει ελαφρώς χαμηλότερη μέση Αξία σε Κίνδυνο ( $- 3,256 \%$  σε επίπεδο 5% και  $- 5,302 \%$  σε επίπεδο 1%) και χαμηλότερες μέγιστες διακρατησεις ( $- 8,377 \%$  και  $- 13,543 \%$  αντίστοιχα).

Γράφημα 4.3.22

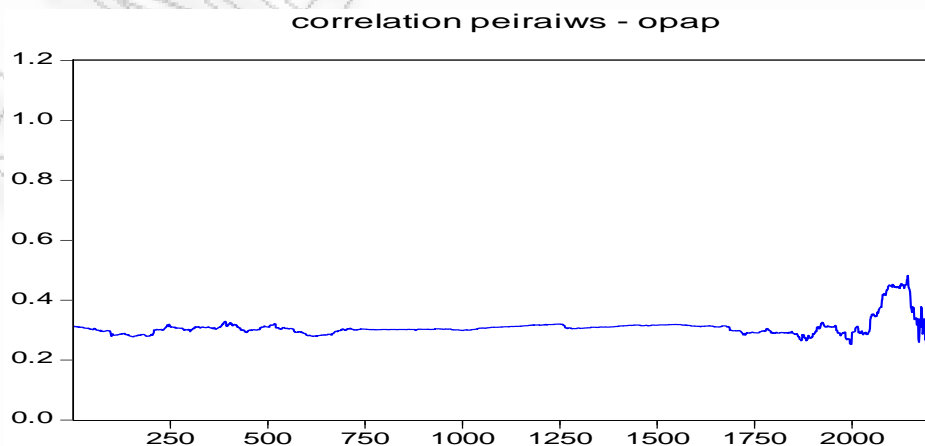


Συνολικά, παρατηρούμε ότι τα μοντέλα της Κανονικής κατανομής αποτελούσαν για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο πιο συντηρητικό κριτήριο σε σχέση με εκείνα της  $t - Student$ .

### **4.3.3 Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ (3<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

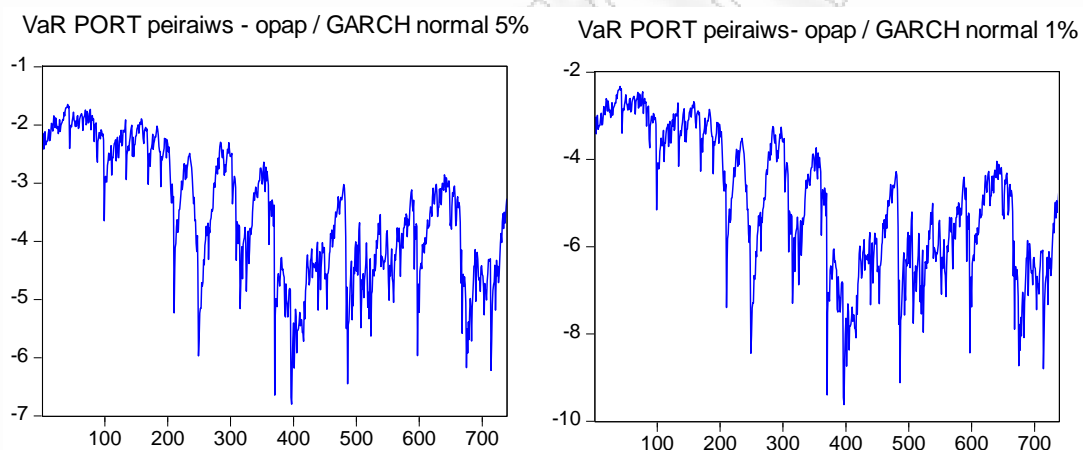
Το τελευταίο από τα χαρτοφυλάκια που δημιουργήσαμε αποτελείται ισομερώς από τις μετοχές της Τράπεζας Πειραιώς και του ΟΠΑΠ. Η εξέλιξη του συντελεστή συσχέτισης των δύο αυτών μετοχών, που είναι απαραίτητος για την αξιολόγηση των διαφόρων μοντέλων δίνεται από το Γράφημα 4.3.23.

Γράφημα 4.3.23



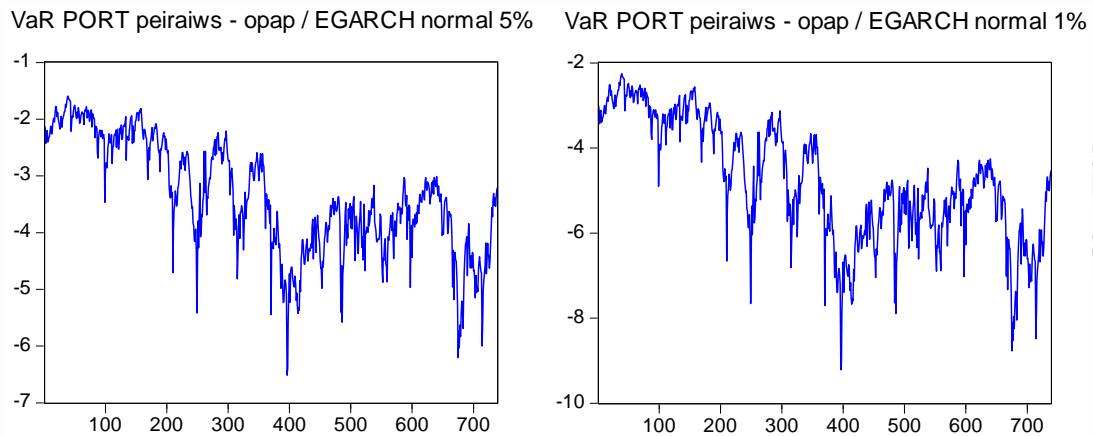
Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ξεκινάμε με την εφαρμογή των μοντέλων μέσω της Κανονικής κατανομής και πιο συγκεκριμένα με το μοντέλο GARCH (Γράφημα 4.3.24). Βλέπουμε ότι για πρώτη φορά στο εν λόγω μοντέλο παρατηρείται καθοδική τάση (download trend) της Αξίας σε Κίνδυνο, γεγονός που μέχρι στιγμής είχαμε συναντήσει μόνο στο μοντέλο APARCH. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει το μεγαλύτερο, όπως θα δούμε παρακάτω, μέσο VaR το οποίο έχει τιμή  $-3,53\%$  σε επίπεδο  $5\%$  και  $-4,99\%$  σε επίπεδο  $1\%$ . Τα αντίστοιχα ελάχιστα, τα οποία υποδηλώνουν τις μέγιστες διακρατήσεις, είναι  $-6,7996\%$  και  $-9,617\%$  για τα ίδια επίπεδα εμπιστοσύνης.

Γράφημα 4.3.24



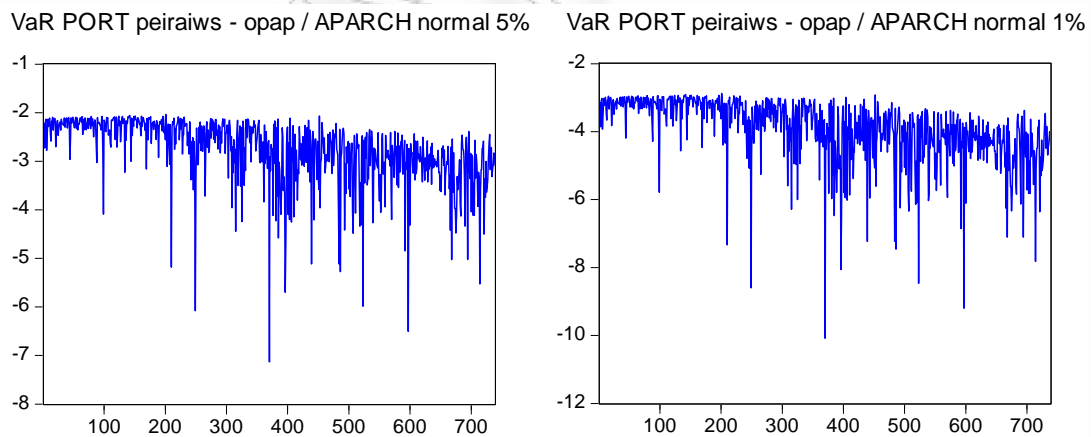
Το EGARCH μοντέλο με Κανονική κατανομή για το χαροφυλάκιο έχει περίπου την ίδια μορφή με το προηγούμενο (Γράφημα 4.3.25) αλλά είναι λιγότερο αυστηρό, αφού παρουσιάζει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,373\%$  και  $-4,77\%$  για τα επίπεδα  $5\%$  και  $1\%$ , όταν οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις είναι  $-6,516\%$  και  $-9,215\%$ .

Γράφημα 4.3.25



Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε με την Κανονική κατανομή με το μοντέλο APARCH για το χαρτοφυλάκιο (Γράφημα 4.3.26), το οποίο παρατηρούμε ότι παρουσιάζει και πάλι καθοδική τάση και πληθώρα ακραίων τιμών. Σε επίπεδο 5% το μέσο VaR στην περίπτωση αυτή έχει τιμή  $-2,776\%$  και η μέγιστη διακράτηση είναι  $-7,129\%$ . Σε επίπεδο 1% έχουμε μέση Αξία σε Κίνδυνο ίση με  $-3,926\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-10,083\%$ .

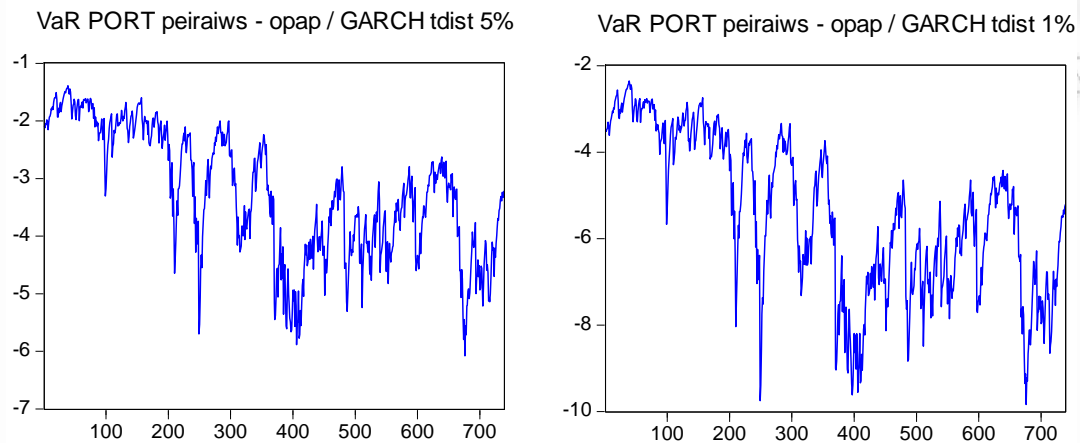
Γράφημα 4.3.26



Η εφαρμογή των μοντέλων με την κατανομή  $t - Student$  μας δίνει την εικόνα του χαρτοφυλακίου μέσω των Γραφημάτων 4.3.27 και 4.3.28, από τα οποία βλέπουμε ότι το μοντέλο GARCH σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% έχει μέση Αξία σε Κίνδυνο ίση με

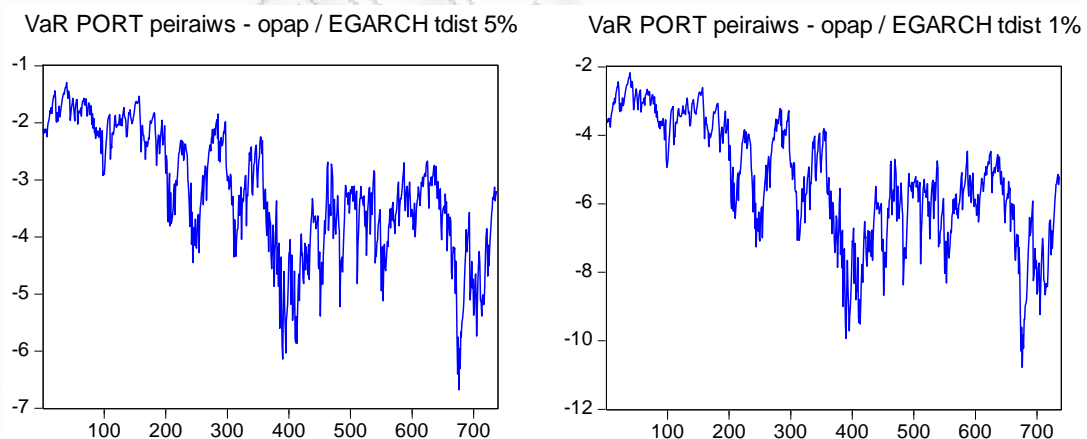
- 3,259 % και μέγιστη διακράτηση - 6,079 % , ενώ σε επίπεδο 1% το μέσο VaR είναι - 5,247 % και η μέγιστη διακράτηση ισούται με - 9,841 % .

Γράφημα 4.3.27



Το EGARCH μοντέλο με τη σειρά του, χρησιμοποιώντας την  $t$  - Student κατανομή, μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο - 3,221 % και μέγιστη διακράτηση - 6,68 % σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, ενώ σε επίπεδο 1% το μέσο VaR ισούται με - 5,331 % και έχει ελάχιστο - 10,777 % .

Γράφημα 4.3.28



Συγκρίνοντας όλα τα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιήσαμε για την εκτίμηση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου, παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% ως πιο αυστηρό μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο GARCH της Κανονικής

κατανομής, το οποίο μας δίνει την μεγαλύτερη μέση Αξία σε Κίνδυνο, χωρίς όμως να παρουσιάζει και την μεγαλύτερη διακράτηση, την οποία εντοπίζουμε στο APARCH μοντέλο (- 7,129 %). Αντίθετα, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% τα μοντέλα της  $t - Student$  αποδεικνύονται περισσότερο συντηρητικά, αφού η μέγιστη μέση Αξία σε Κίνδυνο προκύπτει από το μοντέλο GARCH της  $t - Student$  (- 5,427 %) και η μέγιστη διακράτηση παρατηρείται στο EGARCH μοντέλο της  $t - Student$  (- 10,777 %), εξαιτίας των πιο βαριών ουρών της εν λόγω κατανομής.



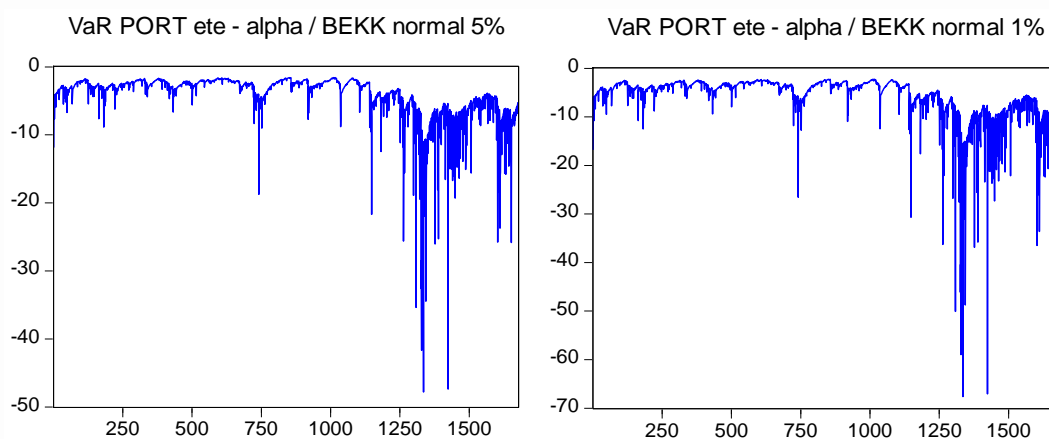
## 4.4 Πολυμεταβλητή Εκτίμηση VaR (2<sup>η</sup> μέθοδος)

Η εκτίμηση των χαρτοφυλακίων που έχουμε δημιουργήσει με βάση την δεύτερη μέθοδο, επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το πολυμεταβλητό μοντέλο BEKK, το οποίο παρουσιάσαμε στην Ενότητα 2.2.3 και το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (CCC) που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.2.5. Και σε αυτή την περίπτωση τα πολυμεταβλητά μοντέλα εφαρμόζονται με Κανονική κατανομή και κατανομή  $t - Student$ .

### 4.4.1 ΕΤΕ - Alpha Bank (1<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

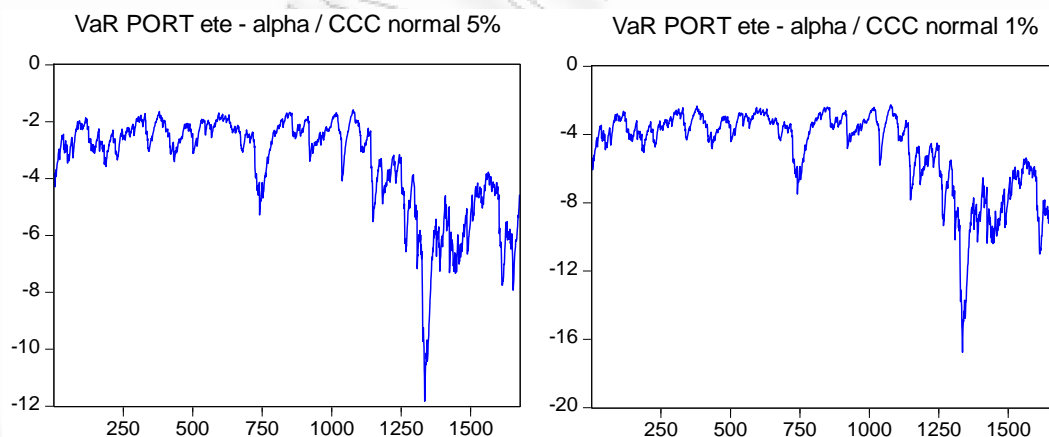
Στο πρώτο χαρτοφυλάκιο, το οποίο αποτελείται από τις μετοχές των τραπεζών ΕΤΕ και Alpha Bank, εφαρμόζουμε το μοντέλο BEKK με Κανονική κατανομή και η εξέλιξη της Αξίας σε Κίνδυνο δίνεται από το Γράφημα 4.4.1. Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μέσο VaR είναι  $-4,424\%$  και η μέγιστη διακράτηση έχει τιμή  $-47,794\%$ . Επίσης, σε επίπεδο 1% η μέση Αξία σε Κίνδυνο ισούται με  $-6,016\%$  και η μέγιστη διακράτηση με  $-67,625\%$ .

Γράφημα 4.4.1



Στη συνέχεια κάνουμε χρήση του μοντέλου της Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης και πάλι μέσω της Κανονικής κατανομής (Γράφημα 4.4.2). Με το συγκεκριμένο μοντέλο βλέπουμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας 5% η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι ίση με  $-3,459\%$  και η μέγιστη διακράτηση είναι  $-11,83\%$ , ενώ σε επίπεδο σημαντικότητας 1% το μέσο VaR ισούται με  $-4,912\%$  και το ελάχιστο είναι  $-16,763\%$ .

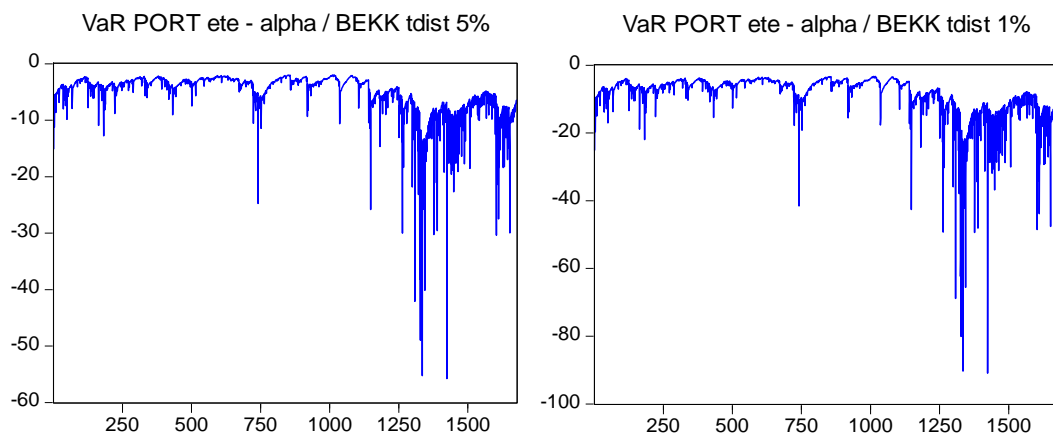
Γράφημα 4.4.2



Επομένως, αν συγκρίνουμε τα δύο πολυμεταβλητά μοντέλα στα οποία χρησιμοποιήσαμε την Κανονική κατανομή, βλέπουμε ότι το μοντέλο BEKK είναι αρκετά πιο αυστηρό σε σχέση με το CCC, αφού παρουσιάζει μεγαλύτερη μέση Αξία σε Κίνδυνο, αλλά και πολύ μεγαλύτερη μέγιστη διακράτηση.

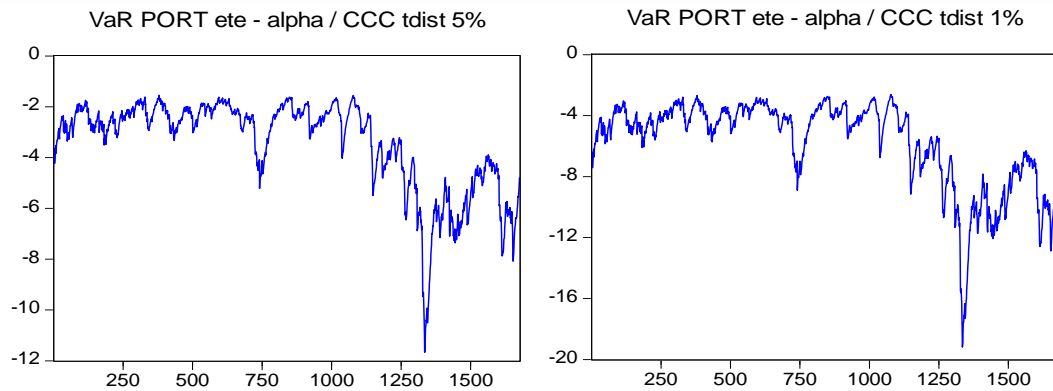
Στη συνέχεια εφαρμόζουμε στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο τα ίδια πολυμεταβλητά μοντέλα μέσω της κατανομής  $t - Student$ . Το μοντέλο BEKK μέσω της  $t - Student$  (Γράφημα 4.4.3) μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $- 5,335 \%$  για επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$  και  $- 8,855 \%$  για επίπεδο  $1\%$ . Οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις για τα ίδια επίπεδα εμπιστοσύνης είναι  $- 55,779 \%$  και  $- 90,899 \%$  ! Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο BEKK με  $t - Student$  είναι ένα άκρως συντηρητικό μοντέλο και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης που εξετάζουμε.

Γράφημα 4.4.3



Αντίθετα το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης με  $t - Student$  κατανομή (Γράφημα 4.4.4), αποτελεί ένα πολύ πιο ελαστικό μοντέλο για το χαρτοφυλάκιο που μελετάμε, αφού σε επίπεδο  $5\%$  η μέση Αξία σε Κίνδυνο που προκύπτει είναι  $- 3,442 \%$  και η μέγιστη διακράτηση ισούται με  $- 11,664 \%$ , ενώ σε επίπεδο  $1\%$  το μέσο VaR είναι ίσο με  $- 5,757 \%$  και το ελάχιστο εντοπίζεται στο  $- 19,183 \%$ .

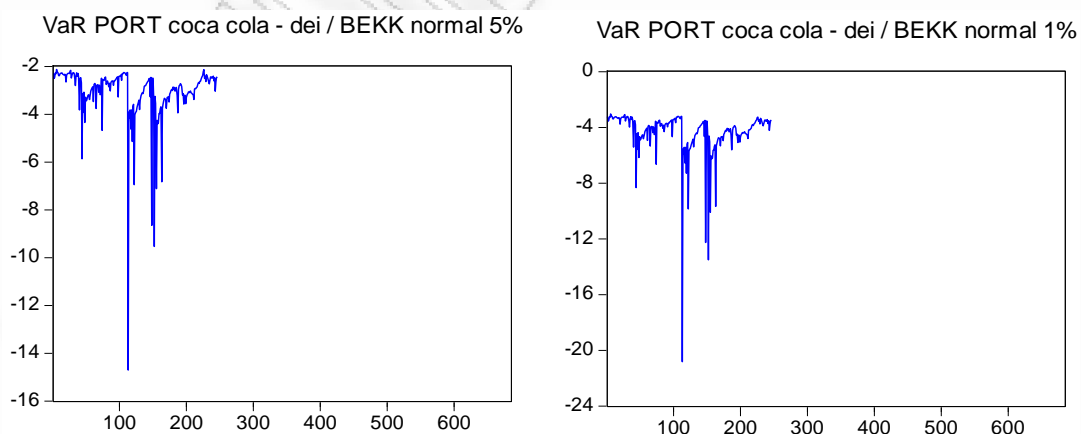
Γράφημα 4.4.4



#### **4.4.2 Coca cola – ΔΕΗ (2<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο που έχουμε δημιουργήσει, η πολυμεταβλητή εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο μέσω του μοντέλου BEKK δεν ήταν δυνατή, λόγω προβλήματος σύγκλισης του αλγορίθμου που έχουμε χρησιμοποιήσει, τόσο στην Κανονική κατανομή (Γράφημα 4.4.5), από το οποίο φαίνεται ότι ο αλγόριθμος σταμάτησε να τρέχει περίπου στις 250 παρατηρήσεις, όσο και στην κατανομή  $t - Student$ , όπου δεν έτρεξε καθόλου.

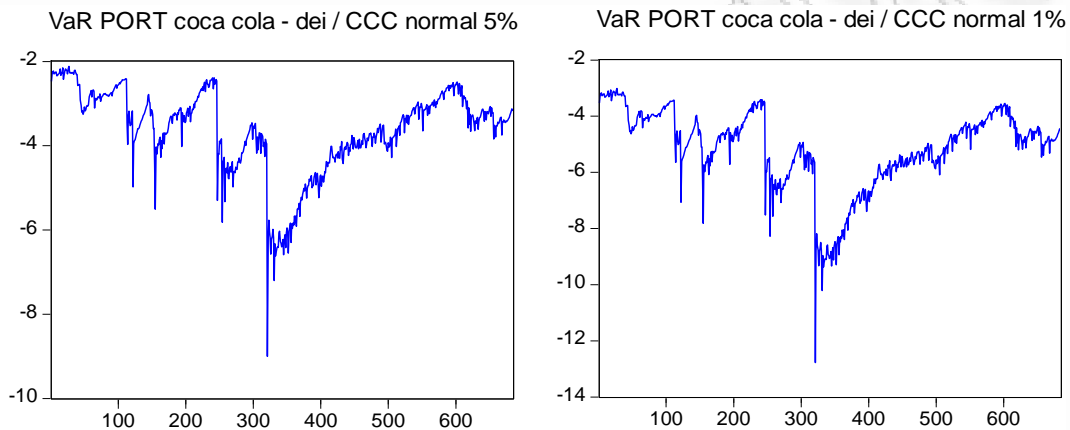
Γράφημα 4.4.5



Για το λόγο αυτό, το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης θα αποτελέσει το κριτήριο εκτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο με την πολυμεταβλητή μέθοδο. Το CCC

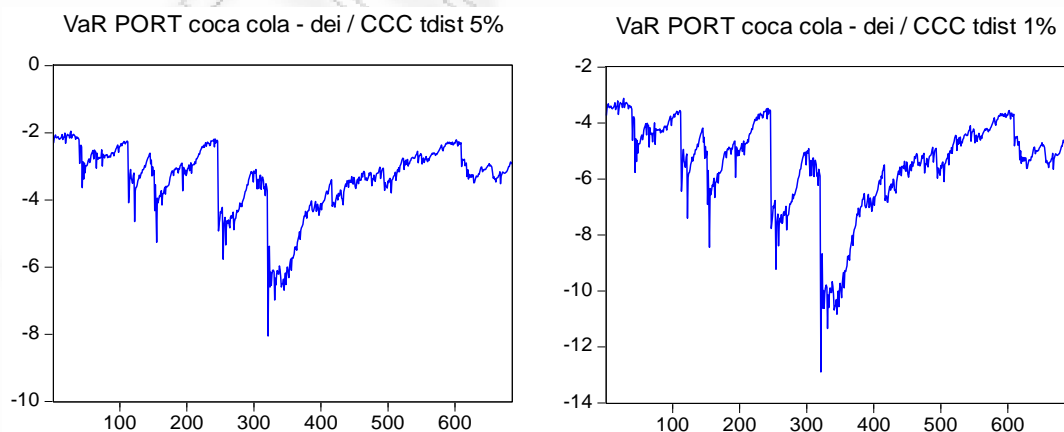
μοντέλο με την Κανονική κατανομή (Γράφημα 4.4.6) μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,629\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-8,999\%$  σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$ , ενώ σε επίπεδο  $1\%$  το μέσο VaR ισούται με  $-5,159\%$  και η μέγιστη διακράτηση με  $-12,771\%$ .

Γράφημα 4.4.6



Το ίδιο μοντέλο με την κατανομή  $t - Student$  (Γράφημα 4.4.7) έχει ως αποτέλεσμα μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,373\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-8,053\%$  σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$ , ενώ σε επίπεδο  $1\%$  οι αντίστοιχες τιμές είναι  $-5,418\%$  και  $-12,896\%$ .

Γράφημα 4.4.7

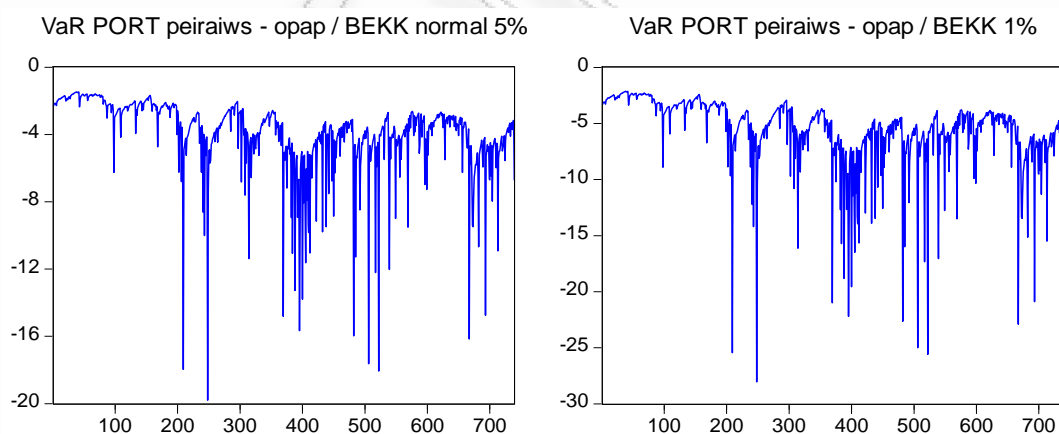


Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το CCC μοντέλο της Κανονικής κατανομής είναι περισσότερο αυστηρό σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, αφού μας δίνει μεγαλύτερο μέσο VaR και μεγαλύτερη μέγιστη διακράτηση, ενώ σε επίπεδο 1% ως πιο συντηρητικό χαρακτηρίζεται το CCC μοντέλο της κατανομής  $t - Student$  λόγω της ύπαρξης περισσότερο βαριών ουρών.

#### **4.4.3 Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ (3<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

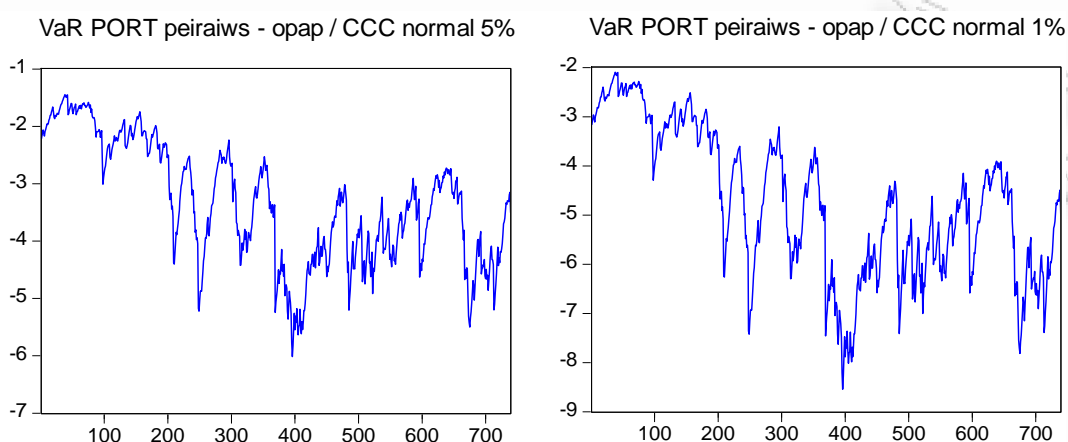
Η πολυμεταβλητή εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο με το οποίο έχουμε ασχοληθεί, ακολουθεί και εδώ την ίδια διαδικασία. Από το μοντέλο BEKK μέσω της Κανονικής κατανομής (Γράφημα 4.4.8) και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% προκύπτει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,949\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-19,798\%$ . Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% οι αντίστοιχες τιμές είναι σαφώς μεγαλύτερες και ίσες με  $-5,632\%$  και  $-28,041\%$ .

Γράφημα 4.4.8



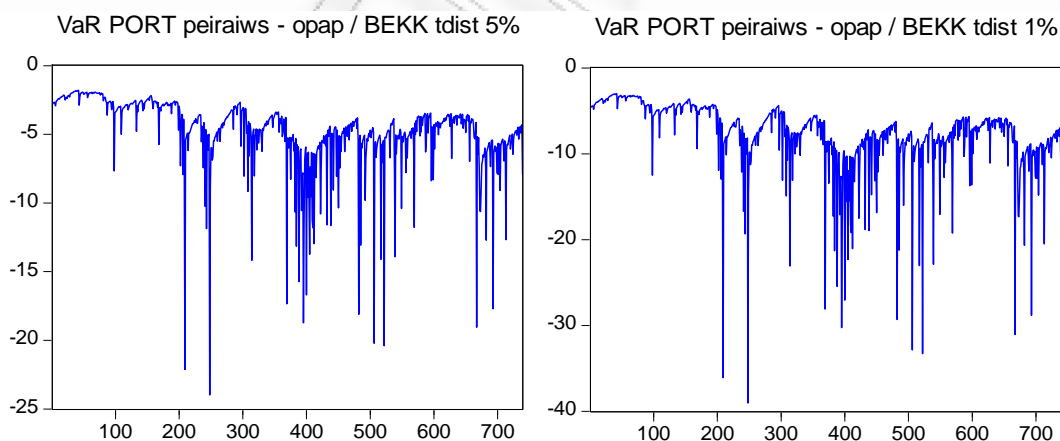
Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης και πάλι με την Κανονική κατανομή (Γράφημα 4.4.9) και από αυτό προκύπτει μέσο VaR  $-3,345\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-6,012\%$  σε επίπεδο 5%, ενώ σε επίπεδο 1% η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι  $-4,774\%$  και το ελάχιστο εντοπίζεται στο  $-8,544\%$ .

Γράφημα 4.4.9



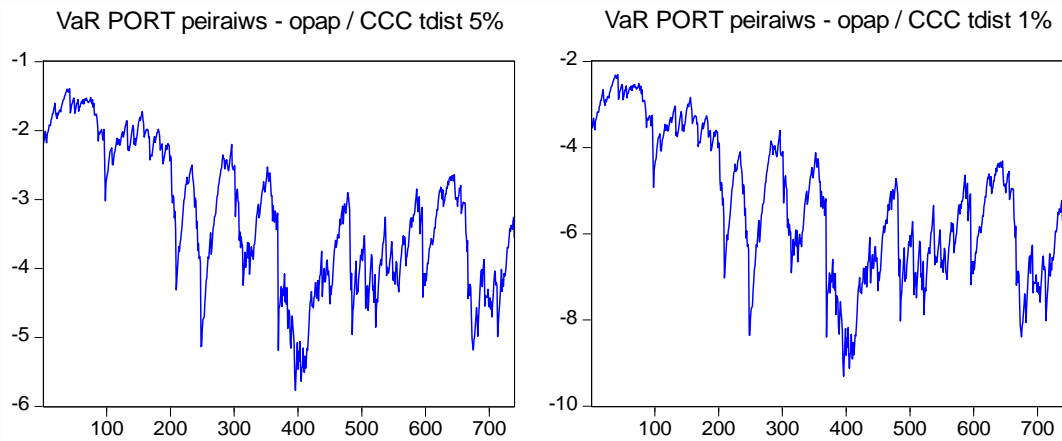
Ακολούθως, το μοντέλο BEKK για το χαρτοφυλάκιο με την κατανομή  $t - Student$  (Γράφημα 4.4.10) μας δίνει μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-4,787\%$  και μέγιστη διακράτηση  $-23,983\%$  για επίπεδο εμπιστοσύνης  $5\%$ , ενώ σε επίπεδο  $1\%$  η μέση Αξία σε Κίνδυνο είναι  $-7,83\%$  και η μέγιστη διακράτηση ισούται με  $-39,038\%$ .

Γράφημα 4.4.10



Τέλος, το CCC μοντέλο με τη βοήθεια της κατανομής  $t - Student$  (Γράφημα 4.4.11) έχει ως αποτέλεσμα μέση Αξία σε Κίνδυνο  $-3,258\%$  σε επίπεδο  $5\%$  και  $-5,305\%$  σε επίπεδο  $1\%$ . Οι αντίστοιχες μέγιστες διακρατήσεις για τα συγκεκριμένα επίπεδα εμπιστοσύνης είναι  $-5,768\%$  και  $-9,308\%$ .

Γράφημα 4.4.11



Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι προφανές ότι τόσο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, όσο και σε 1% το πιο αυστηρό μοντέλο για το χαρτοφυλάκιο των μετοχών της Τράπεζας Πειραιώς και του ΟΠΑΠ, είναι το μοντέλο BEKK της κατανομής  $t - Student$ , το οποίο μας δίνει την μεγαλύτερη μέση Αξία σε Κίνδυνο και την μεγαλύτερη από τις μέγιστες διακρατήσεις.



## Κεφάλαιο 5

Το back testing όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αποτελεί το τελικό στάδιο στην διαδικασία δόμησης ενός μοντέλου και βασίζεται στην επαλήθευση των πραγματικών μεταβολών σε σχέση με εκείνες που είχαν εκτιμηθεί. Επομένως, αυτό συνεπάγεται σύγκριση των προβλέψεων του VaR με τις αντίστοιχες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, ώστε να είμαστε σε θέση να αξιολογήσουμε κατά πόσο οι υποθέσεις ή τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν, είναι τα σωστά.

### 5.1 Back Testing & 1η Μέθοδος

#### 5.1.1 ETE - Alpha Bank (1<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το πρώτο χαρτοφυλάκιο αποτελείται ισομερώς από τις μετοχές του τραπεζικού κλάδου ETE και Alpha Bank. Εφαρμόζοντας τον επανέλεγχο (back testing), μέσω των επιμέρους ελέγχων, δηλαδή του ελέγχου αδέσμευτης κάλυψης (σχέση 3.3.2 – IV), του ελέγχου ανεξαρτησίας (σχέση 3.3.3 – VIII) και του δεσμευμένου έλεγχου κάλυψης (σχέση 3.3.4 – II) για το μοντέλο GARCH σε συνδυασμό με την Κανονική κατανομή, προκύπτει ο Πίνακας 5.1.1 ο οποίος μας δίνει τα πρώτα αριθμητικά στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την απόρριψη ή όχι του μοντέλου.

Πίνακας 5.1.1

<b>GARCH Normal ETE - Alpha Bank</b>		
	<b>5%</b>	<b>1%</b>
<b>T<sub>0</sub></b>	1591	1649
<b>T<sub>1</sub></b>	85	27
<b>T<sub>00</sub></b>	1518	1625
<b>T<sub>01</sub></b>	73	24
<b>T<sub>10</sub></b>	73	24
<b>T<sub>11</sub></b>	12	3
<b>π</b>	0,05071599	0,016109785
<b>π<sub>01</sub></b>	0,045883092	0,014554275
<b>π<sub>11</sub></b>	0,141176471	0,111111111
<b>LR<sub>uc</sub></b>	0,018006967	5,332782201
<b>LR<sub>ind</sub></b>	10,74561527	6,972708349
<b>LR<sub>cc</sub></b>	10,76362223	12,30549055

Έπειτα ακολουθεί ο έλεγχος *Chi - test* σε διάστημα εμπιστοσύνης 10% με βάση τον οποίο, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.1.2, απορρίπτουμε ή αποδεχόμαστε τους επιμέρους ελέγχους για τα επίπεδα εμπιστοσύνης 5% και 1%. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε είναι το **×** που απορρίπτει το μοντέλο και το **✓** που δεν το απορρίπτει και επομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το εν λόγω μοντέλο είναι κατάλληλο για την εκτίμηση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου.

Πίνακας 5.1.2

<b>Chi - test ETE - Alpha Bank</b>		
<b>Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%</b>		
	<b>5%</b>	<b>1%</b>
<b>LR<sub>uc</sub></b>	<b>✓</b>	<b>×</b>
<b>LR<sub>ind</sub></b>	<b>×</b>	<b>×</b>
<b>LR<sub>cc</sub></b>	<b>×</b>	<b>×</b>

Από τον παραπάνω Πίνακα βλέπουμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής περνάει τον έλεγχο *Kurşies* ή αλλιώς τον αδέσμευτο έλεγχο κάλυψης που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 3.3.2, αλλά στη

συνέχεια απορρίπτεται από τον έλεγχο της ανεξαρτησίας (παράγραφος 3.3.3) και από το δεσμευμένο έλεγχο κάλυψης (παράγραφος 3.3.4), ο οποίος αποτελεί και το τελικό κριτήριο καταλληλότητας ενός μοντέλου. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% το μοντέλο απορρίπτεται σε όλους τους ελέγχους που διενεργούνται και επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το GARCH μοντέλο μέσω της Κανονικής κατανομής δεν είναι ικανοποιητικό για την εκτίμηση του χαρτοφυλακίου μετοχών της ETE και της Alpha Bank.

Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τα υπόλοιπα μοντέλα που έχουμε παρουσιάσει στην παρούσα εργασία και τα αποτελέσματα για κάθε μοντέλο δίνονται παρακάτω από τον συγκεντρωτικό Πίνακα 5.1.3.

Πίνακας 5.1.3

Chi-test ETE – Alpha Bank								
	Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%							
	GARCH t-dist		EGARCH normal		EGARCH t-dist		APARCH normal	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
LRuc	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✗
LRind	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✓
LRcc	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗

Από τον παραπάνω Πίνακα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% τα μοντέλα που θεωρούνται κατάλληλα για την εκτίμηση του χαρτοφυλακίου είναι τα μοντέλα GARCH και EGARCH της κατανομής  $t - Student$  , ενώ σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% μόνο το EGARCH μοντέλο της  $t - Student$  μπορεί να χαρακτηριστεί κατάλληλο για το χαρτοφυλάκιο.

### 5.1.2 Coca cola – ΔΕΗ (2<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

Ο συγκεντρωτικός Πίνακας 5.1.4 που ακολουθεί, δημιουργήθηκε με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και μας δείχνει ποια από τα μοντέλα που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι κατάλληλα για την εκτίμηση του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από τις μετοχές της Coca cola και της ΔΕΗ.

Πίνακας 5.1.4

Chi-test Coca cola – ΔΕΗ										
Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%										
	GARCH normal		GARCH t-dist		EGARCH normal		EGARCH t-dist		APARCH normal	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
LRuc	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
LRind	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
LRcc	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗

Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% κατάλληλα είναι τα μοντέλα GARCH και EGARCH της Κανονικής κατανομής, ενώ όλα τα υπόλοιπα απορρίπτονται, και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% το μοναδικό κατάλληλο μοντέλο με βάση τον επανέλεγχο που διενεργήθηκε, είναι το GARCH μοντέλο μέσω της *t - Student* κατανομής.

Χαρακτηριστικό στο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ότι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας ο οποίος μας δίνει τη δυνατότητα να απορρίψουμε μοντέλα εκτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο που παρουσιάζουν παραβιάσεις σε σχετικά κοντινά χρονικά διαστήματα, επαληθεύεται σε όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης που μελετάμε, με μοναδική εξαίρεση το GARCH μοντέλο της *t - Student* σε επίπεδο 5%.

### 5.1.3 Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ (3<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

Για το τελευταίο χαρτοφυλάκιο που μελετήσαμε, η καταλληλότητα των μοντέλων που έχουμε χρησιμοποιήσει φαίνεται από τον συγκεντρωτικό Πίνακα 5.1.5 παρακάτω.

Πίνακας 5.1.5

<b>Chi-test Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ</b>										
<b>Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%</b>										
	<b>GARCH normal</b>		<b>GARCH t-dist</b>		<b>EGARCH normal</b>		<b>EGARCH t-dist</b>		<b>APARCH normal</b>	
	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>
<b>LRuc</b>	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗
<b>LRind</b>	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<b>LRcc</b>	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗

Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μοναδικό μοντέλο που δεν απορρίπτεται, είναι το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής, ενώ σε επίπεδο 1% όλα τα μοντέλα που έχουμε χρησιμοποιήσει, τόσο με Κανονική κατανομή, όσο και με κατανομή  $t - Student$ , μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλα για την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, με μόνη εξαίρεση το APARCH μοντέλο το οποίο απορρίφθηκε και στα δύο προηγούμενα χαρτοφυλάκια.

## 5.2 Back Testing & 2η Μέθοδος

### 5.2.1 ΕΤΕ - Alpha Bank (1<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)

Ο επανέλεγχος των πολυμεταβλητών μοντέλων με τη δεύτερη μέθοδο στο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τις μετοχές της ΕΤΕ και της Alpha Bank επιτυγχάνεται με τον ίδιο τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω και τα αποτελέσματά του δίνονται από τον Πίνακα 5.2.1 που ακολουθεί.

Πίνακας 5.2.1

Chi-test ΕΤΕ – Alpha Bank								
Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%								
	BEKK normal		BEKK t-dist		CCC normal		CCC t-dist	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
LRuc	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✓
LRind	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓
LRcc	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✓

Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μόνο πολυμεταβλητό μοντέλο της δεύτερης μεθόδου που περνάει τον έλεγχο του back testing είναι το μοντέλο BEKK στο οποίο έχει χρησιμοποιηθεί η Κανονική κατανομή. Αντίθετα, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% απορρίπτεται μόνο το μοντέλο BEKK της *t – Student*, αφού τόσο το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης με τη χρήση και των δύο κατανομών,

όσο και το BEKK της Κανονικής θεωρούνται κατάλληλα για την αξιολόγηση της Αξίας σε Κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο.

### **5.2.2 Coca cola – ΔΕΗ (2<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Στο χαρτοφυλάκιο μετοχών της Coca cola και της ΔΕΗ, όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δεν επετεύχθη η πολυμεταβλητή εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο μέσω του μοντέλου BEKK λόγω προβλήματος που προέκυψε στη διαδικασία σύγκλισης του αλγορίθμου που χρησιμοποιήσαμε. Παρόλα αυτά, ο Πίνακας 5.2.2 μας δείχνει ότι το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης αποδεικνύεται κατάλληλο για το χαρτοφυλάκιο.

Πίνακας 5.2.2

<b>Chi-test Coca cola – ΔΕΗ</b>								
<b>Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%</b>								
	<b>BEKK normal</b>		<b>BEKK t-dist</b>		<b>CCC normal</b>		<b>CCC t-dist</b>	
	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>
<b>LRuc</b>	–	–	–	–	✓	✗	✓	✓
<b>LRind</b>	–	–	–	–	✓	✓	✓	✓
<b>LRcc</b>	–	–	–	–	✓	✓	✓	✓

Εδώ βλέπουμε ότι και στα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης που μελετάμε, το CCC μοντέλο περνάει τον έλεγχο του back testing είτε το χρησιμοποιήσουμε με την Κανονική κατανομή, είτε με την κατανομή  $t - Student$ , αφού ο μοναδικός έλεγχος που το απορρίπτει είναι ο έλεγχος της Ανεξαρτησίας σε επίπεδο 1% και σε συνδυασμό με την Κανονική κατανομή, ο οποίος όμως, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, δεν είναι ικανός να απορρίψει συνολικά το μοντέλο.

### **5.2.3 Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ (3<sup>ο</sup> χαρτοφυλάκιο)**

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, προκειμένου να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα των πολυμεταβλητών μοντέλων μέσω της δεύτερης μεθόδου και στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο που έχουμε δημιουργήσει, το οποίο αποτελείται από τις μετοχές της Τράπεζας Πειραιώς και του ΟΠΑΠ. Ο συγκεντρωτικός Πίνακας 5.2.3 παρακάτω μας δίνει μία σαφή εικόνα για την καταλληλότητα των μοντέλων που έχουμε χρησιμοποιήσει.

Πίνακας 5.2.3

<b>Chi-test Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ</b>								
<b>Επίπεδο εμπιστοσύνης 10%</b>								
	<b>BEKK normal</b>		<b>BEKK t-dist</b>		<b>CCC normal</b>		<b>CCC t-dist</b>	
	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>
<b>LRuc</b>	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✓
<b>LRind</b>	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<b>LRcc</b>	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✓

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το μοναδικό μοντέλο που μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο, είναι το μοντέλο BEKK σε συνδυασμό με την Κανονική κατανομή, ενώ σε επίπεδο 1% τόσο το μοντέλο BEKK της Κανονικής, όσο και οι δύο διαφορετικές εκδοχές του μοντέλου Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης αποτελούν κατάλληλους τρόπους εκτίμησης του VaR με βάση τη δεύτερη μέθοδο.



## Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρκετές διαφορές, τόσο ανάμεσα στα χαρτοφυλάκια, όσο και στα επίπεδα εμπιστοσύνης του κάθε χαρτοφυλακίου, σχετικά με το ποιο μοντέλο από εκείνα που παρουσιάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν είναι το καλύτερο για την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο. Ακόμα και μετά το Back testing, τα μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν και επομένως μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλα, είναι διαφορετικά για το κάθε ένα από τα χαρτοφυλάκια που έχουμε δημιουργήσει.

Έτσι βλέπουμε ότι για το πρώτο χαρτοφυλάκιο (ETE – Alpha Bank) και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% (Πίνακας 1) τα μοντέλα που πέρασαν τον έλεγχο Back testing είναι τα GARCH και EGARCH της  $t - Student$  κατανομής, καθώς και το μοντέλο BEKK της Κανονικής κατανομής. Στον Πίνακα 1, όπως και στους υπόλοιπους πίνακες που παρουσιάζονται στη συνέχεια, τα μοντέλα είναι τοποθετημένα κατά αύξουσα σειρά με βάση τη μέση Αξία σε Κίνδυνο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση βλέπουμε ότι το πιο αυστηρό από τα μοντέλα που πέρασαν τον έλεγχο και μάλιστα με αρκετή διαφορά από τα υπόλοιπα είναι το πολυμεταβλητό μοντέλο BEKK της Κανονικής κατανομής.

Πίνακας 1

**Χαρτοφυλάκιο ΕΤΕ - Alpha Bank**

<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>5% ε.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
EGARCH t-dist	-3.543%	-12.681%
GARCH t-dist	-3.634%	-13.293%
BEKK normal	-4.424%	-47.794%

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εξετάζοντας το ίδιο χαρτοφυλάκιο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% (Πίνακας 2), όπου πέρασε μόνο το EGARCH της  $t - Student$  κατανομής από τα μονομεταβλητά μοντέλα, ενώ αντίθετα πέρασαν σχεδόν όλα τα πολυμεταβλητά με το BEKK της Κανονικής κατανομής να είναι με μεγάλη διαφορά το πιο συντηρητικό. Επομένως, ένας υποτιθέμενος διαχειριστής κινδύνου αν εξέταζε το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, ήταν πιο σωστό να χρησιμοποιήσει το EGARCH μοντέλο της  $t - Student$ , αφού είναι κοινά αποδεκτό και από τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης, ενώ παράλληλα δεν είναι τόσο ακραίο όσο το BEKK της Κανονικής το οποίο μας δίνει εξαιρετικά μεγάλες μέγιστες διακρατήσεις.

Πίνακας 2

**Χαρτοφυλάκιο ΕΤΕ - Alpha Bank**

<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>1% ε.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
CCC normal	-4.912%	-16.763%
CCC t-dist	-5.757%	-19.183%
EGARCH t-dist	-5.932%	-19.943%
BEKK normal	-6.016%	-67.625%

Για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο μετοχών (Coca cola – ΔΕΗ) και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% (Πίνακας 3) βλέπουμε ότι περνάνε τα μοντέλα GARCH και EGARCH της Κανονικής κατανομής, καθώς και το πολυμεταβλητό μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης (CCC) και στις δύο του μορφές. Χωρίς να έχουν ιδιαίτερες αποκλίσεις μεταξύ τους πιο ελαστικό αποδεικνύεται το μοντέλο CCC.

Πίνακας 3

<b>Χαρτοφυλάκιο Coca cola -ΔΕΗ</b>		
<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>5% ε.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
CCC t-dist	-3.373%	-8.053%
CCC normal	-3.629%	-8.999%
EGARCH normal	-3.740%	-9.361%
GARCH normal	-3.945%	-9.577%

Σε επίπεδο 1% (Πίνακας 4) και πάλι το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Συσχέτισης θεωρείται κατάλληλο για το χαρτοφυλάκιο, ενώ ως πιο αυστηρό μοντέλο από εκείνα που αποδεχόμαστε προκύπτει το GARCH της  $t - Student$  κατανομής.

Πίνακας 4

<b>Χαρτοφυλάκιο Coca cola -ΔΕΗ</b>		
<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>1% ε.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
CCC normal	-5.159%	-12.771%
CCC t-dist	-5.418%	-12.896%
GARCH t-dist	-5.469%	-14.101%

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω πίνακες, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο καταλληλότερο είναι το μοντέλο CCC σε οποιαδήποτε μορφή του.

Στο τελευταίο χαρτοφυλάκιο μετοχών που έχουμε δημιουργήσει (Τράπεζα Πειραιώς – ΟΠΑΠ) βλέπουμε με τη βοήθεια του Πίνακα 5 ότι μόνο ένα από τα μονομεταβλητά μοντέλα και ένα από τα πολυμεταβλητά πέρασε τον έλεγχο, με το μοντέλο BEKK της Κανονικής κατανομής να είναι πιο συντηρητικό, όχι τόσο εξαιτίας της μέσης Αξίας σε Κίνδυνο, αφού η διαφορά τους δεν είναι τόσο έντονη, αλλά εξαιτίας της μέγιστης διακράτησης που εμφανίζει.

**Πίνακας 5**

<b>Χαρτοφυλάκιο Τράπεζα Πειραιώς - ΟΠΑΠ</b>		
<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>5% ε.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
GARCH normal	-3.530%	-6.7996%
BEKK normal	-3.949%	-19.798%

Αντίθετα, για το ίδιο χαρτοφυλάκιο και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% (Πίνακας 6) παρατηρούμε ότι τα περισσότερα από τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε, πέρασαν τον έλεγχο Back testing με πιο αυστηρό και πάλι το μοντέλο BEKK της Κανονικής κατανομής το οποίο παρουσιάζει την μεγαλύτερη μέση Αξία σε Κίνδυνο και σχεδόν τριπλάσια μέγιστη διακράτηση από τα υπόλοιπα.

Σε αυτή την περίπτωση, συνδυάζοντας τους Πίνακες 5 και 6, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το μοντέλο GARCH της Κανονικής κατανομής είναι ένα καλό μοντέλο για την εκτίμηση του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου ιδιαίτερα για χρονικές περιόδους που δεν παρουσιάζουν απότομες μεταβολές οι αγορές των μετοχών, ενώ σε περιόδους έντονων χρηματιστηριακών διακυμάνσεων, το μοντέλο BEKK της Κανονικής είναι ένα πιο ασφαλές μοντέλο.

Πίνακας 6

**Χαρτοφυλάκιο Τράπεζα Πειραιώς - ΟΠΑΠ**

<b>Μοντέλα που δεν απορρίφθηκαν</b>		
<b>1% δ.ε.</b>	μέσο VaR	μέγιστη διακράτηση
EGARCH normal	-4.770%	-9.215%
CCC normal	-4.774%	-8.544%
GARCH normal	-4.993%	-9.6170%
CCC t-dist	-5.305%	-9.308%
EGARCH t-dist	-5.331%	-10.777%
GARCH t-dist	-5.427%	-9.841%
BEKK normal	-5.632%	-28.041%

Γενικά, παρατηρούμε ότι το πολυμεταβλητό μοντέλο BEKK της Κανονικής κατανομής πέρασε τους περισσότερους από τους ελέγχους, επομένως μπορεί να θεωρηθεί καλύτερο από τα υπόλοιπα, εκτός από την περίπτωση του δεύτερου χαρτοφυλακίου, όπου πρέπει να αναφέρουμε για άλλη μία φορά ότι στην περίπτωση αυτή παρουσιάστηκε πρόβλημα κατά την σύγκλιση του αλγορίθμου και για το λόγο αυτό δεν είμαστε σε θέση να το αξιολογήσουμε.

Ακόμα όμως και τότε, ένα άλλο πολυμεταβλητό μοντέλο, το μοντέλο Σταθερής Δεσμευμένης Διακύμανσης, κρίθηκε καταλληλότερο, γεγονός που επιβεβαιώνει την υπεροχή των πολυμεταβλητών μοντέλων απέναντι στα μονομεταβλητά. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι το μοντέλο APARCH αποδείχτηκε ακατάλληλο για την εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο σε όλες τις περιπτώσεις, αφού δεν πέρασε τον έλεγχο Back testing σε κανένα από τα χαρτοφυλάκια.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alexander C., Sheedy E., 2004, The Professional Risk Manager's Handbook: A Comprehensive Guide to Current Theory and Best Practices, The Professional Risk Manager's International Association
- Andersen T., Bollerslev T., 1998, Answering the skeptics: yes, standard Volatility Models do provide accurate forecasts, International Economic Review 39:885-905
- Angelidis T., Benos A. and Degiannakis S., 2004, The Use of GARCH Models in VaR Estimation, Statistical Methology, 1(2), 105-128
- Basel Committee on Banking Supervision, 1996, Amendment to Capital accord to Incorporate Market Risks, Bank of International Settlements
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts JVK., 2003, Multivariate GARCH models: a survey, CORE DP2003/31
- Bollerslev T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31: 307-327
- Bollerslev T., Chou RY., Kroner KF., 1992, ARCH Modelling in Finance: a review of the theory and empirical evidence, Journal of Econometrics 52: 5-59
- Brooks C. and Persand G., 2003, Journal of Forecasting, J.Forecast 22, 1-22, DOI:10.1002/for 841

- Christodoulakis GA, Satchell SE, 2002, Correlated ARCH: Modeling the time-varying correlation between financial asset returns, European Journal of Operations Research 139:351-370
- Christoffersen PF., 2002, Elements of Financial Risk Management, McGill University and CIRANO
- Dowd K., 2002, Measuring Market Risk, Wiley Finance
- Engle R., Kroner FK., 1995, Multivariate simultaneous generalized ARCH, Economic Theory 11:122-150
- Engle R. and Manganelli S., 2004, A Comparison of Value-at-Risk Models In Finance, Risk Measures for the 21<sup>st</sup> Century, John Wiley & Sons, West Sussex
- Engle R., Mezrich J., 1996, GARCH for groups, RISK 9:36-40
- Irina N. and Svetlozar TR, 2000, Value at Risk: Recent Advances, Chapman & Hall
- Jorion P., 2007, Value at Risk: The new Benchmark for managing Financial Risk, McGraw-Hill
- Heynen RC., Kat HM., 1994, Volatility prediction: a comparison of the stochastic volatility, GARCH (1,1) and EGARCH (1,1) models, Journal of Derivatives 2: 50-65
- Holton GA., 2002, History of Value-at-Risk, Working Paper, Contingency Analysis, United States
- Kupiec P., 1995, Techniques for verifying the accuracy of risk measurement Models, Journal of Derivatives 2: 73-84

- Linsmeier J.Thomas and Pearson D.Neil, 1996, Risk Management: An Introduction to Value at Risk
- Morgan JP., 1996, Riskmetrics Technical Document 4 edn
- Sheppard K., 2010, Financial Econometrics Notes, Version 13:48, University of Oxford.
- Tsay RS., 2010, Analysis of Financial Time Series, 3<sup>rd</sup> Edition, The University of Chicago, Booth School of Business
- Wiener Zvi, 1997, Introduction to VaR (Value-at-Risk)
- Τσαρδούνης Κων., 2006, Εκτίμηση Κινδύνου Αγοράς με μέτρα Value at Risk, Πτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, τμήμα Οικονομικών Επιστημών.
- [www.ase.gr](http://www.ase.gr)