ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία

Κωνσταντίνος Ε. Φλουρής

Τριμελής επιτροπή:
Κ. Πολίτης
Ν. Μαχαιράς
Σ. Βρόντος

Αθήνα,
Δεκέμβριος 2010

Στους γονείς μου

Περίληψη

Μία ιδιαίτερη ποσότητα στη θεωρία των κινδύνων είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, που προκύπτει από τον αριθμό των αποζημιώσεων σε συνδυασμό με το χρόνο χρεοκοπίας. Στην παρούσα εργασία μελετάμε σε θεωρητική βάση την έκφραση της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία για εκθετικές αποζημιώσεις και εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους, βασιζόμενοι σε ένα άρθρο των $Frostig\ et\ al(2010)$. Επίσης δίνουμε αριθμητικά παραδείγματα για την ελλειμματική κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία και για την κανονική κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Στην περίπτωση που η κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων ανήκει στην κλάση κατανομών $(a, b, 0)$ και $(a, b, 1)$, δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις τόσο για τη μέση τιμή, όσο και για τη διακύμανση. Ακόμη, λαμβάνουμε την ακριβή έκφραση και δίνουμε ένα θεώρημα για το συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Ακόμα, δίνουμε αριθμητικά παραδείγματα για δύο προσεγγίσεις της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία από μία γεωμετρική κατανομή.

Abstract

A quantity of central interest in risk theory is the number of claims until ruin in a risk process. This is a defective random variable, which is closely related to the time of ruin. The present thesis studies the explicit expression of the probability function of the number of claims until ruin, on a theoretical basis, assuming that both claim-sizes and interarrival times are exponential. The main result is inspired by a recent paper in Frostig et al (2010). We give numerical examples for the defective distribution of the number of claims until ruin, as well as for the proper distribution of this random variable, given that ruin occurs. For the case that the distribution of the number of claims is a member of the (a,b,0) or the (a,b,1) class of distributions, we give explicit expressions for the mean and the variance. We also obtain an explicit expression for the coefficient of skewness of the proper distribution of number of claims until ruin, given that ruin occurs, and therefore, we give a theorem for the skewness of this proper distribution. Moreover, we present two approximations for the distribution of number of claims until ruin, given that ruin occurs with a geometric distribution.

Πρόλογος

Ο βασικότερος λόγος ύπαρξης των ασφαλιστικών επιχειρήσεων είναι η αποκόμιση κέρδους, μέσω της ανάληψης κινδύνων έναντι ορισμένου χρηματικού ποσού, γνωστό ως ασφάλιστρο. Έτσι λοιπόν, η ασφαλιστική εταιρεία από τη διαδικασία αυτή εισπράττει τα ασφάλιστρα, τα οποία είναι η κύρια πηγή εσόδων της εταιρείας, και καταβάλει τις αποζημιώσεις που προέρχονται από την πραγματοποίηση κάποιων ζημιογόνων ενδεχομένων, οι οποίες αποτελούν κατά βάση τα έξοδα μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Προκειμένου να διασφαλιστεί η βιωσιμότητα της ασφαλιστικής εταιρείας, θα πρέπει να υπάρχει πλεόνασμα, δηλαδή τα έσοδα να είναι διαχρονικά μεγαλύτερα από τα έξοδα, έτσι ώστε να μην συμβεί το απευκταίο ενδεχόμενο της χρεοκοπίας. Ωστόσο, η αβεβαιότητα που κατακλύζει όλη την επιχειρηματική δραστηριότητα εξαιτίας των δυσμενών οικονομικών συγκυριών, επιφορτίζει την κάθε ασφαλιστική εταιρεία να αντιμετωπίζει το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας. Ο όρος της χρεοκοπίας δεν ισοδυναμεί με την παύση λειτουργιών της ασφαλιστικής εταιρείας, αλλά με την προσωρινή υπέρβαση των εξόδων από τα έσοδα σε ένα ή περισσότερα χαρτοφυλάκια της επιχείρησης. Το έλλειμμα που προκύπτει, μπορεί να καλυφθεί με διάφορες χρηματοοικονομικές τεχνικές όπως η δανειοδότηση. Επιπλέον, η ενδεχόμενη χρεοκοπία ενός χαρτοφυλακίου επηρεάζεται από δύο κυρίως μεγέθη. Το πρώτο είναι ο χρόνος που θα επέλθει το ενδεχόμενο, και το δεύτερο είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων που θα συντελέσουν στη χρεοκοπία. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία, δηλαδή τη συχνότητα των αποζημιώσεων έως ότου παρουσιαστεί για πρώτη φορά έλλειμμα.

Η θεωρία των κινδύνων αποτελεί ένα ξεχωριστό κλάδο της αναλογιστικής επιστήμης, και αποτελείται κυρίως από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της θεωρίας των κινδύνων, και όσον αφορά το συλλογικό μοντέλο, μελετάται η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων μιας ασφαλιστικής εταιρείας, ενώ ο αριθμός των συνολικών αποζημιώσεων αναφέρεται σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Στο δεύτερο μέρος της θεωρίας των κινδύνων, ή αλλιώς στη θεωρία χρεοκοπίας μελετάται η διαχρονική εξέλιξη του πλεονάσματος που παρουσιάζει η ασφαλιστική εταιρεία, καθώς και το ενδεχόμενο να επέλθει η χρεοκοπία. Ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία είναι μία καινούρια ως προς εξέταση έννοια, η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την πορεία του συνόλου των χαρτοφυλακίων, διότι συνδέει δύο ιδιαίτερες έννοιες της θεωρίας των κινδύνων, δηλαδή την πιθανότητα της χρεοκοπίας και τον αριθμό των αποζημιώσεων που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρεία.

Όπως είναι γνωστό, το ενδεχόμενο να συμβεί η χρεοκοπία της ασφαλιστικής εταιρείας δεν είναι σίγουρο, καθώς αν ήταν δεν θα υπήρχε ουσιαστικός λόγος ύπαρξής τους. Αυτή είναι η αιτία που δυσχεραίνει ως ένα μικρό βαθμό η μελέτη της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, με συνέπεια να μην έχει μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό μέχρι σήμερα η εν λόγω ποσότητα. Ενδεικτικό της ελλιπούς μελέτης για το συγκεκριμένο αντικείμενο, είναι η περιορισμένη βιβλιογραφία που υπάρχει διαθέσιμη.

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα είναι η εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει μία εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας, και κατόπιν θα αναπτυχθούν τα δύο κυριότερα μοντέλα της τα οποία είναι το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο ή *Sparre Andersen model*. Αυτό που θα μας απασχολήσει περισσότερο είναι το κλασικό μοντέλο, και η πρώτη έννοια που θα παρουσιάσουμε είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων, καθώς αυτές φτάνουν στην εταιρεία με την πάροδο του χρόνου. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες που θα μας χρειαστούν, όπως είναι η διαδικασία του πλεονάσματος, η πιθανότητα χρεοκοπίας και το περιθώριο ασφάλειας. Έπειτα, παραθέτουμε μία αρχική αναφορά για τον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία σε άκρως θεωρητική βάση, η οποία έχει δοθεί από τον *Alfredo dos Reis*. Επιπλέον, γίνεται μία σύντομη αναφορά όλων των προαναφερθέντων ποσοτήτων όπως αυτές ισχύουν στο ανανεωτικό μοντέλο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο που ακολουθεί, αρχικά θα παρουσιάσουμε στις κυριότερες διακριτές κατανομές και μερικά βασικά αποτελέσματα αυτών. Ακόμα, γίνεται ιδιαίτερη μνεία στις κλάσεις κατανομών του *Panjer*(1981). Οι προκείμενες κλάσεις κατανομών αφορούν την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων. Για την κάθε κλάση κατανομών παραθέτουμε μία πρόταση που περιέχει ορισμένα καινούρια αποτελέσματα που αφορούν τα κυριότερα μέτρα κεντρικής τάσης και διασποράς για την κάθε κλάση κατανομών. Έπειτα, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την κατανομή *ETNB*, η οποία εμπεριέχεται στη δεύτερη κλάση κατανομών. Η συγκεκριμένη κατανομή εισήχθηκε για πρώτη φορά από τον *Engen*(1974) για να μελετήσει τον πληθυσμό ζώων. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας, που έχουν εφαρμογή στην αναλογιστική επιστήμη, της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Τα δύο προαναφερθέντα μεγέθη παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της μονοτονίας τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, εφόσον υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Έτσι λοιπόν, θεωρώντας, τόσο τη δεσμευμένη όσο και την αδέσμευτη, πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, θα εξάγουμε τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Ακόμα, θα παρουσιάσουμε την κανονική (*proper*) τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Για τις δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές θα δοθεί μία σειρά από αριθμητικά παραδείγματα, και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πιθανότητας. Ακόμη, θα μελετηθεί η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας για τα αντίστοιχα παραδείγματα της συνάρτησης πιθανότητας μέσω τής γραφικής απεικόνισής τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, θα παρουσιάσουμε τα μέτρα ασυμμετρίας που αφορούν την κατανομή $ETNB$. Θα γίνει μία αρχική αναφορά για τη λοξότητα μιας κατανομής και την έννοια του συντελεστή ασυμμετρίας. Προκειμένου να βρούμε το συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη διασπορά και τις ροπές της. Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στο συντελεστή ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, με τις τιμές των παραμέτρων να έχουν παρθεί από τα αριθμητικά παραδείγματα του τρίτου κεφαλαίου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αναμένεται να παρουσιάσει το πρόσημο του συντελεστή ασυμμετρίας. Στην τελευταία ενότητα γίνεται μία απόπειρα προσέγγισης της κατανομής $ETNB$ από δύο γεωμετρικές κατανομές με διαφορετικές παραμέτρους. Η αποτελεσματικότητα της προσέγγισης αυτής θα αναπαρασταθεί γραφικά και αριθμητικά μέσω του ποσοστιαίου σφάλματος μεταξύ των συναρτήσεων πιθανότητας.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου για την αμέριστη στήριξή τους, όχι μόνο για την παρούσα διπλωματική εργασία, αλλά, και για την απεριόριστη προσφορά τους σε όλη τη διάρκεια και σε όλα τα στάδια των σπουδών μου με ποικίλους τρόπους. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν να ολοκληρώσω τούτο το πόνημα, και μου συμπαραστέκονταν σε όποια δυσκολία κι αν προέκυπτε. Τέλος, θα ήταν άδικο να μην ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ. Κ. Πολίτη, επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, για τις εύστοχες υποδείξεις που μου έκανε και την καθοδήγηση για να έχω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο 1 που ακολουθεί θα γίνει μία εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας, τόσο για το κλασικό μοντέλο όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο (*Sparre Andersen model*) της θεωρίας των κινδύνων. Και για τα δύο μοντέλα που αναφέρθηκαν, θα παρουσιαστούν ορισμένες βασικές έννοιες για τη θεωρία χρεοκοπίας όπως η διαδικασία του πλεονάσματος, το περιθώριο ασφάλειας, ο συντελεστής προσαρμογής, η μέγιστη σωρευτική απώλεια, ενώ θα γίνει και μία αρχική αναφορά σε θεωρητική βάση στην τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία.

1.1 Η ανέλιξη του αριθμού των αποζημιώσεων

Η θεωρία χρεοκοπίας εξετάζει τη σχετική μεταβλητότητα ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρείας, καθώς και την εξέλιξη του στο χρόνο. Η εν λόγω μεταβλητότητα περιγράφεται μαθηματικά από τη διαδικασία του πλεονάσματος, και έγκειται στην απαίτηση ότι διαχρονικά το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας πρέπει να υπερβαίνει τις συνολικές της υποχρεώσεις.

Ο αριθμός των αποζημιώσεων εκφράζεται από μία στοχαστική ανέλιξη, συγκεκριμένα μία απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$, που μετρά τον αριθμό των απαιτήσεων στην εξέλιξη του χρόνου. Αντίστοιχα, οι συνολικές αποζημιώσεις εκφράζονται από μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$, κι όχι από μία τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, σ' ένα διάστημα $[0, t]$, οι συνολικές αποζημιώσεις θα περιγράφονται ως εξής:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου, X_i είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της i-αποζημίωσης, και οι X_i θεωρούνται να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, όπως έχουν οριστεί στο συλλογικό μοντέλο της θεωρίας των κινδύνων.

Το κυριότερο παράδειγμα απαριθμήτριας ανέλιξης για τον αριθμό των αποζημιώσεων $\{N(t) : t \geq 0\}$, είναι η ανέλιξη Poisson. Κατόπιν τούτου, η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, $\{S(t) : t \geq 0\}$, θα ακολουθεί μία σύνθετη ανέλιξη Poisson.

Ένα βασικό αποτέλεσμα στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ακολουθώντας την εκθετική κατανομή, με παράμετρο την ένταση της ανέλιξης $Poisson$, λ.

Έστω T_i η χρονική στιγμή που εμφανίζεται η i-απαίτηση. Τότε (βλέπε Πολίτης(2009)), για τους χρόνους άφιξης $T_1, T_2, T_3, ...$ ισχύει

$$\begin{aligned}
T_1 &= \min\{t : N(t) = 1\} \\
T_2 &= \min\{t : N(t) = 2\} \\
T_3 &= \min\{t : N(t) = 3\} \\
&\cdots \\
T_i &= \min\{t : N(t) = i\}
\end{aligned}$$

Ακόμη, αν W_i ο ενδιάμεσος χρόνος που μεσολαβεί από την $(i-1)$-απαίτηση έως την εμφάνιση της i-απαίτησης. Τότε,

$$\begin{aligned}
W_1 &= T_1 \\
W_2 &= T_2 - T_1 \\
&\cdots \\
W_i &= T_i - T_{i-1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού ο αριθμός των αποζημιώσεων εκφράζεται από μία ανέλιξη $Poisson$, με αντίστοιχη ένταση $\lambda > 0$, τότε, οι ενδιάμεσοι χρόνοι θα ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, όντας ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Δηλαδή, $W_i \sim Exp(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής να δίνονται αντίστοιχα από τους παρακάτω τύπους

$$f_{W_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ , \ t \geq 0 \quad \text{και} \quad F_{W_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \ , \ t \geq 0$$

1.2 Το κλασικό μοντέλο

1.2.1 Η διαδικασία του πλεονάσματος

Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος, $\{U(t) : t \geq 0\}$, ορίζεται γενικά από τη σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \tag{1.2.1}$$

όπου, $S(t)$ είναι η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, ενώ u είναι το αρχικό αποθεματικό που έχει στο ενεργητικό της η εταιρεία. Προφανώς, ισχύει $U(0) = u$, και $P(t)$ είναι το σύνολο των ασφαλίστρων που εισρέουν συνεχώς στην εταιρεία κατά το χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Για τη στοχαστική ανέλιξη $P(t)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αποτελείται από μία κοινή συνάρτηση, έστω $p(t)$, και τη στοχαστική διαδικασία (βλέπε Κουτσόπουλος(1999)), $Q(t)$, που απεικονίζει τις τυχαίες διακυμάνσεις στη διαχρονική είσπραξη του ασφαλίστρου. Λόγω αυτής της μετατροπής, η διαδικασία του πλεονάσματος γίνεται:

$$U(t) = u + [p(t) + Q(t)] - S(t) = u + p(t) - S^*(t)$$

όπου η $S^*(t)$, είναι η «βελτιωμένη» στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων, υπό την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη τις τυχαίες διακυμάνσεις του ασφαλίστρου.

Ωστόσο, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας η συνάρτηση $P(t)$ θεωρείται «αιτιοκρατική» (deterministic), δηλαδή είναι μία γραμμική συνάρτηση της μορφής:

$$P(t) = ct \ \ , \ t \geq 0$$

όπου $c > 0$ μία σταθερά που εκφράζει το σταθερό ρυθμό είσπραξης του ασφαλίστρου, και ονομάζεται ένταση του ασφαλίστρου. Δηλαδή,

$$c = \frac{P(t)}{t} \ \ , \ t \geq 0$$

$\square$

Ορισμός 1.2.1. *Η διαδικασία του πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:*

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \ , \quad t \geq 0 \tag{1.2.2}$$

όπου $U(0) = u$ το αρχικό αποθεματικό, ενώ ισχύουν οι εξής παραδοχές:

1. *Ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός και ίσος με* $P(t) = ct$, $c > 0$.

2. *Οι τ.μ.* X_i *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, ενώ είναι και ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων,* $N(t)$.

3. *Η στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των αποζημιώσεων και των συνολικών αποζημιώσεων ακολουθούν μία ανέλιξη Poisson και μία σύνθετη ανέλιξη Poisson αντίστοιχα. Δηλαδή,*

$$N(t) \sim P(\lambda t) \Rightarrow S(t) \sim CP(\lambda t)$$

□

Η διαδικασία του πλεονάσματος, όπως ορίστηκε, αναφερόταν σε συνεχή χρόνο. Δηλαδή, το αποθεματικό της εταιρείας μεταβάλλεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου. Αυτό δε συμβαίνει στην πραγματικότητα, διότι η εκάστοτε μεταβολή του πλεονασμός, είτε θετική, είτε αρνητική, συμβαίνει σε ακέραιες χρονικές στιγμές, π.χ. h=μία μέρα, ένας μήνας κλπ. Για το λόγο αυτό, η διαδικασία του πλεονάσματος είναι ουσιαστικά διακριτή και οι ακέραιες χρονικές στιγμές είναι ανάλογες της μονάδας h. Η διακριτή διαδικασία του πλεονάσματος δίδεται από τη σχέση:

$$U(kh) = u + ckh - S(kh) \ , \ u \geq 0$$

όπου, u το αρχικό αποθεματικό, και c το ασφάλιστρο που εισπράττεται για $t = 0, h, 2h, \ldots, kh$. Ακόμη, ο αριθμός των αποζημιώσεων στο διάστημα $[0, kh]$, εκφράζεται από μία ανέλιξη διακριτού χρόνου, $\{N(kh) : k = 1, 2, \ldots\}$.

1.2.2 Το περιθώριο ασφάλειας

Μία υπόθεση που πρέπει να ισχύει σε κάθε ασφαλιστική εταιρεία, και εν γένει κάθε επιχείρηση, είναι ότι διαχρονικά τα έσοδα πρέπει να υπερβαίνουν τα έξοδα, έτσι ώστε να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία της επιχείρησης. Για το λόγο αυτό, απαιτείται:

$$ct \geq E[S(t)] \tag{1.2.3}$$

Δηλαδή, τα ασφάλιστρα που εισπράττονται πρέπει να είναι περισσότερα ή τουλάχιστον ίσα με τις αναμενόμενες αποζημιώσεις σ' ένα διάστημα $[0, t]$. Όμως, για τις αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E[N(t)]E(X) \\ &= \lambda t E(X) \end{aligned}$$

Με βάση αυτή την παραδοχή, η ανισότητα που περιγράφεται από τη σχέση (1.2.3) γίνεται

$$\begin{aligned} ct &\geq \lambda t E(X) \\ \Leftrightarrow c &\geq \lambda E(X) \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Η ανισότητα (1.2.4) μας δίνει, στο αριστερό μέλος, τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας στη μονάδα του χρόνου ενώ, στο δεξιό μέλος, τις αναμενόμενες αποζημιώσεις στη μονάδα του χρόνου. Μία εύλογη παρατήρηση που πρέπει να σημειωθεί, είναι ότι τα έσοδα πρέπει να υπερβαίνουν τα έξοδα στη μονάδα του χρόνου. Διαφορετικά, μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό ότι η χρεοκοπία είναι βέβαιη όσο μεγάλο κι αν είναι το αρχικό αποθεματικό u, δηλαδή τα έξοδα θα υπερβούν τα έσοδα, και αναπόφευκτα, η τιμή του πλεονάσματος θα πέσει κάτω από το μηδέν.

Από την (1.2.4) παίρνουμε

$$c = (1+\theta)\lambda E(X) \tag{1.2.5}$$

όπου $\theta > 0$, ορίζεται να είναι το περιθώριο ασφάλειας (*premium security loading*) του ασφαλιστή[1], και εκφράζει το κέρδος που θα έχει ο ασφαλιστής. Από τη σχέση (1.2.5) έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.2.2. *Το περιθώριο ασφάλειας ή συντελεστής ασφάλειας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από την ακόλουθη σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1 \tag{1.2.6}$$

Όπως ορίστηκε από την (1.2.5) , σύμφωνα με τη σχέση (1.2.4), ο συντελεστής ασφάλειας θ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, ενώ οι επιτρεπτές τιμές είναι μεταξύ 0 και 1 ή από 0 έως 100%, αν προτιμάται σε ποσοστό. Αν η τιμή του είναι μικρότερη του μηδενός τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη, ενώ αν είναι μεγαλύτερη της μονάδας το χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί να είναι ανταγωνιστικό, λόγω του υψηλού κέρδους του ασφαλιστή. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από τη σχέση (1.2.6). Για να είναι τιμή του περιθώριου ασφάλειας θ, μεγαλύτερη της μονάδας, τότε ο ρυθμός είσπραξης του ασφαλίστρου θα πρέπει να είναι υπερδιπλάσιο των αναμενόμενων αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου.

Το περιθώριο ασφάλειας μπορεί να καθοριστεί ακριβώς από τον ασφαλιστή, διότι πέρα από τα c, λ που θεωρούνται δεδομένα, η μέση τιμή των αποζημιώσεων μπορεί να εκτιμηθεί είτε εμπειρικά από παλαιότερες χρήσεις, είτε με στατιστικές μεθόδους.

[1] Η λέξη ασφαλιστής σημαίνει την ασφαλιστική επιχείρηση, κι όχι το φυσικό πρόσωπο που ασκεί έναντι αμοιβής δραστηριότητες ασφαλιστικής διαμεσολάβησης

1.2.3 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Μία ποσότητα με αξιοσημείωτο ενδιαφέρον στη θεωρία των κινδύνων είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα για κάποια χρονική στιγμή, έστω να συμβολίζεται με T η στιγμή αυτή, το πλεόνασμα $U(t)$ να γίνει αρνητικό.

Ως γνωστόν, η διαδικασία του πλεονάσματος υφίσταται 'πτώσεις' της τάξης X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, στις χρονικές στιγμές T_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, όπου συμβαίνουν τα ζημιογόνα γεγονότα. Το ενδιαφέρον εστιάζεται, τόσο στο χρόνο χρεοκοπίας Τ, όσο και στο μέγεθος της απαίτησης, X_{N_T}, που προκαλεί τη χρεοκοπία.

Συνεπώς, έστω $U(T-)$ και $U(T^+)$, οι τιμές του πλεονάσματος πριν και μετά την απαίτηση X_{N_T} αντίστοιχα. Για τις προαναφερθείσες τιμές του πλεονάσματος, ισχύει

$$U(T^+) = U(T-) - X_{N_T} < 0$$

Τυπικά χρεοκοπία έχουμε όταν για πρώτη φορά ισχύσει $U(t) < 0$. Πριν δοθεί ο ορισμός, αξίζει να σημειωθεί πως η πιθανότητα χρεοκοπίας εκφράζεται συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού $U(0) = u$.

Ορισμός 1.2.3. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας μϵ αρχικό αποθϵτικό $U(0) = u$ ορίζϵται ως:*

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u) \tag{1.2.7}$$

όπου η τ.μ. του χρόνου της χρεοκοπίας,T ,ορίζεται από την επόμενη σχέση

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty, \text{ αν } \ U(t) > 0 \ \forall t \end{cases}$$

Ένας άλλος, ισοδύναμος ορισμός για την πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει της διαδικασίας του πλεονάσματος είναι ο εξής:

$$\psi(u) = \Pr(U(t) < 0 \mid U(0) = u) \tag{1.2.8}$$

Πολλές φορές, η δέσμευση του αρχικού αποθεματικού παραλείπεται, αλλά εξυπακούεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας εκφράζεται συναρτήσει του u.

Ο ορισμός που δόθηκε για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι συμβολικός. Η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί κάτω από ορισμένες παραδοχές για την κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων, ενώ σε αρκετές περιπτώσεις η έκφραση της πιθανότητας της χρεοκοπίας είναι δύσχρηστη.

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας συμβολίζεται με $\delta(u)$. Προφανώς, για τη $\delta(u)$ ισχύει:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

και

$$\delta(u) = \Pr(T = \infty \mid U(0) = u) \tag{1.2.9}$$

□

Παρατηρήσεις

Μερικά βασικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορούν να παρθούν απο το βιβλίο των Bowers et al(1997). Τα τρία βασικότερα σημεία είναι:

1. Αν δεν ισχύει η σχέση (1.2.4), για την οποία ισχύει

   $$c \geq \lambda E(X)$$

   τότε

   $$\psi(u) = 1 \ , \ \forall u \geq 0$$

   δηλαδή, αν τα έξοδα είναι μεγαλύτερα από τα έσοδα στη μονάδα του χρόνου, τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη με πιθανότητα 1.

2. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού. Ισχύει ότι

   $$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

   και

   $$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \ , \ \theta > 0 \tag{1.2.10}$$

   Από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι για $u = 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαρτάται αποκλειστικά από το περιθώριο ασφάλειας. Έτσι, είναι ανέφικτη η εξασφάλιση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πολύ χαμηλά επίπεδα. Συνεπώς, τόσο το αρχικό αποθεματικό, όσο και το περιθώριο ασφάλειας παίζουν ουσιώδη ρόλο στην αποδεκτή πιθανότητα χρεοκοπίας.

3. Η αναφορά στον όρο «χρεοκοπία» δεν αντιπροσωπεύει την πραγματική χρεοκοπία της ασφαλιστικής εταιρείας. Δηλαδή, αν το αποθεματικό $U(t)$ πέσει κάτω από το μηδέν, τότε η εταιρεία δεν χρεοκοπεί, αλλά μπορεί είτε με δανειοδότηση, είτε με αύξηση του μετοχικού της κεφαλαίου να αντισταθμίσει τις απώλειες του χαρτοφυλακίου. □

Μία περισσότερο ρεαλιστική υπόθεση για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι να οριστεί σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Άμεση απόρροια αυτού είναι να δυσχεραίνει ακόμη περισσότερο ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αυτός είναι ο λόγος που η μελέτη της εν λόγω ποσότητας πραγματοποιείται στο διηνεκές παραμένοντας σταθερές οι ποσότητες c και λ.

Ορισμός 1.2.4. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας σ'ενα πεπερασμένο χρονικό διάστημα* $[0, t]$ *ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$\psi(u,t) = \Pr(T < t \mid U(0) = u) \tag{1.2.11}$$

ή εναλλακτικά,

$$\psi(u,t) = \Pr(U(\tau) < 0 \mid 0 < \tau \leq t) \tag{1.2.12}$$

□

Παρατηρήσεις

- Ισχύει $\psi(u,t) \leq \psi(u)$, $\forall t$
  και

$$\lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u) \ , \ \forall u \geq 0$$

- Η $\psi(u,t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς t, ενώ είναι φθίνουσα ως προς u.

$$u_1 \leq u_2 \Rightarrow \psi(u_1,t) \geq \psi(u_2,t)$$

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \psi(u,t_1) \leq \psi(u,t_2)$$

Ακόμη, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να οριστεί σε διακριτό χρόνο, είτε αυτός θεωρείται άπειρος είτε πεπερασμένος.

- Για άπειρο χρόνο

$$\psi_h(u) = \Pr\left[U(kh) < 0 \text{ για κάποιο } k = 0, 1, 2, ...\right]$$

και

$$\lim_{h \to 0} \psi_h(u) = \psi(u)$$

- Στο πεπερασμένο διάστημα $[0, th]$

$$\psi_h(u, t) = \Pr\left[U(\tau) < 0 \text{ για κάποιο } \tau = 0, h, 2h, ..., t\right]$$

με

$$\lim_{h \to 0} \psi_h(u, t) = \psi(u, t)$$

1.2.4 Ο αριθμός των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, έχουν μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό αρκετές ποσότητες που αφορούν τη χρεοκοπία, όπως ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία, και η μέγιστη σωρευτική απώλεια, καθώς παρουσιάζουν αξιοσημείωτο ενδιαφέρον. Η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία παρουσιάζεται ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς πέρα από το «χρόνο επιβίωσης» του χαρτοφυλακίου προτού επέλθει η χρεοκοπία, μας ενδιαφέρει και το πλήθος των απαιτήσεων που προκάλεσαν τη χρεοκοπία. Τα αποτελέσματα που θα δοθούν στη συνέχεια έχουν αντληθεί από ένα άρθρο του Alfredo D.Egidio dos Reis(2002). Η εν λόγω τυχαία μεταβλητή θα συμβολίζεται με N_T , υποδηλώνοντας ότι η n-οστη απαίτηση προκαλεί τη χρεοκοπία τη χρονική στιγμή $t = T$.

Έστω με $P(u; n)$ να συμβολίζεται η πιθανότητα ότι η χρεοκοπία θα συμβεί πριν τη n-οστή απαίτηση$(n = 1, 2, ...)$ με αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$, και με $p(u; n)$ η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας. Τότε, για για τις δύο νέες ποσότητες ισχύει

$$p(u; 1) = P(u; 1) \tag{1.2.13}$$

$$p(u; n+1) = P(u; n+1) - P(u; n) \tag{1.2.14}$$

και

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} P(u;n).$$

Ακόμα, με F και f συμβολίζονται η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους των αποζημιώσεων, και με $\overline{F} = 1 - F$ η συνάρτηση επιβίωσης.

Θεωρώντας την πρώτη απαίτηση σαν σημείο αναφοράς, έχουμε

$$P(u;1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} [\overline{F}(u+ct)]dt.$$

Ακόμα,

$$P(u;n+1) = P(u;1) + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)P(u+ct-x;n)dxdt \ , \ n \geq 1$$

Για τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων έχουμε

$$\begin{aligned}
p(u;n+1) &= P(u;n+1) - P(u;n) \\
p(u;n+1) &= P(u;1) + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)P(u+ct-x;n)dxdt \\
&- \left(P(u;1) + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)P(u+ct-x;n-1)dxdt \right) \\
p(u;n+1) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) \left[P(u+ct-x;n) - P(u+ct-x;n-1) \right] dxdt.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$p(u;n+1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)p(u+ct-x;n)dxdt \ , \ n \geq 1 \tag{1.2.15}$$

Θέτοντας $u + ct = r$ έχουμε

$$t = \frac{r-u}{c} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{c}dr \quad \text{και} \quad 0 \leq t < \infty \quad \Rightarrow \quad u \leq r < \infty$$

Τότε η (1.2.15) γίνεται

$$p(u;n+1) = \frac{1}{c} \int_{r=u}^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{r-u}{c}} \int_{x=0}^r f(x)p(r-x;n)dxdr = a \int_u^\infty e^{a(r-u)} f * p(r;n)dr \tag{1.2.16}$$

όπου $a = \lambda/c$, και η συνέλιξη των συναρτήσεων $f, p(\cdot\ ; n)$ εκφράζεται ως εξής

$$(f * p(r;n))\,(x) = \int_0^r f(x)p(r-x;n)dx.$$

$\square$

Ομοίως, για $x = u + ct$ έχουμε

$$\begin{aligned} p(u;1) &= P(u;1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[\overline{F}(u+ct)]dt \\ p(u;1) &= ae^{au}\int_u^\infty e^{-ax}\overline{F}(x)dx. \end{aligned}$$

1.2.5 Ο συντελεστής προσαρμογής

Μία ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας με αρκετό ενδιαφέρον είναι ο συντελεστής προσαρμογής (*adjustment coefficient*). Ο συντελεστής προσαρμογής ορίζεται να είναι η μικρότερη θετική ρίζα της ακόλουθης σχέσης

$$1 + (1+\theta)E(X)R = M_X(R). \tag{1.2.17}$$

όπου $M_X(R)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής του μεγέθους των αποζημιώσεων στο σημείο R. Η σχέση (1.2.17) ονομάζεται εξίσωση του *Lundberg*.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη θετικής ρίζας είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση, $M_X(R)$, δηλαδή να συγκλίνει ή να μην απειρίζεται η ροπογεννήτρια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων κατανομών με βαριά δεξιά ουρά, των οποίων η ροπογεννήτρια απειρίζεται, είναι η οικογένεια κατανομών *Burr*, η λογαριθμοκανονική κατανομή και η *Weibull* για $\gamma < 1$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μίας κατανομής εκφράζεται ως εξής:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}f(x)dx.$$

Ένας εναλλακτικός τύπος για την εξίσωση του *Lundberg* δύναται να εκφραστεί μέσω της σχέση (1.2.5). Επομένως, ισχύει

$$c = (1+\theta)\,\lambda E(X) \Leftrightarrow (1+\theta)E(X) = \frac{c}{\lambda}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (1.2.17), λαμβάνουμε

$$1 + \frac{c}{\lambda}r = M_X(r) \Leftrightarrow \lambda + cr = \lambda M_X(r).$$

Η εξίσωση του *Lundberg* έχει μία τετριμμένη λύση, την $r = 0$. Πράγματι, το δεξιό μέλος της σχέσης (1.2.17) για $r = 0$ μας δίνει

$$M_X(0) = E(e^{0 \cdot X}) = 1$$

ενώ, και από το αριστερό μέλος παίρνουμε

$$1 + (1+\theta)E(X) \cdot 0 = 1$$

Αν η εξίσωση του *Lundberg* έχει παραπάνω από μία ρίζες r_i, τότε ο συντελεστής προσαρμογής θα είναι η μικρότερη ρίζα. Δηλαδή, $R = \min r_i$. □

Από τον ορισμό της εξίσωσης του *Lundberg*, μπορεί να εξαχθεί ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής, όταν η ακριβής λύση του είναι ιδιαιτέρως δυσχερής.

Γνωρίζουμε ότι εν γένει ισχύει

$$\begin{aligned} E(e^{rX}) &= E\left[\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(rX)^n}{n!}\right] \\ &= E\left(1 + \frac{rX}{1!} + \frac{(rX)^2}{2!} + \cdots\right) \\ &> E\left(1 + \frac{rX}{1!} + \frac{(rX)^2}{2!}\right) \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Ακόμη, για το δεξιό μέλος της σχέσης (1.2.18), προφανώς ισχύει

$$E\left(1 + \frac{rX}{1!} + \frac{(rX)^2}{2!}\right) = 1 + rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2)$$

Συνεπώς, για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής του ύψους των αποζημιώσεων καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$M_X(R) = E(e^{RX}) > 1 + RE(X) + \frac{R^2}{2}E(X^2) \tag{1.2.19}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1.2.17) και (1.2.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 + (1+\theta)E(X)R &> 1 + rE(X) + \frac{R^2}{2}E(X^2) \\ \Leftrightarrow \theta E(X) &> \frac{R}{2}E(X^2). \end{aligned}$$

Τελικώς, ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής, εκφρασμένο από την πρώτη και δεύτερη ροπή της τ.μ. του ύψους των αποζημιώσεων είναι

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

$\square$

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι μία ιδιαίτερα σημαντική ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας, καθώς απαιτείται η ύπαρξη του (βλέπε *Rolski et al*(1999)) τόσο στην ανισότητα του *Lundberg* (θεώρημα 1), όσο και στον ασυμπτωτικό τύπο των *Cramer – Lundberg* (θεώρημα 2).

Θεώρημα 1.2.1. *Η ανισότητα του Lundberg περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση, για κάθε* $u \geq 0$.

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad , \quad \forall u \geq 0$$

Αυτός ο τύπος επιτρέπει την εύρεση ενός προκαθορισμένου ανώτατου ποσοστού για την πιθανότητα χρεοκοπίας, έστω α έτσι ώστε $\psi(u) \leq \alpha$. Τότε,

$$\alpha = e^{-Ru} \;\Leftrightarrow\; \ln\alpha = -Ru \;\Leftrightarrow\; R = -\frac{\ln\alpha}{u}.$$

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής* $R > 0$, *και μία θετική σταθερά, έστω* $C > 0$. *Τότε, για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύει:*

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \quad , \quad \textit{καθώς} \;\; u \to \infty$$

ή αλλιώς

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)e^{Ru}}{C} = 1.$$

όπου

$$C = \frac{\theta E(X)}{E[Xe^{RX}] - (1+\theta)E(X)}.$$

1.2.6 Η μέγιστη σωρευτική απώλεια

Εκτός από το χρόνο χρεοκοπίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς το συμβάν της χρεοκοπίας, παρουσιάζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με $U(T)$. Ωστόσο η ποσότητα αυτή, καθότι είναι αρνητική εξετάζεται κατ΄ απόλυτη τιμή, και γι΄ αυτό ο εκ νέου συμβολισμός της θα είναι $|U(T)|$. Συνεπώς, η τ.μ. $|U(T)|$ υποδηλώνει τη σφοδρότητα της χρεοκοπίας, και είναι σημαντικό καθώς ο ασφαλιστής επιθυμεί να γνωρίζει την ενδεχόμενη ανάκαμψη μετά τη χρεοκοπία.

Πέρα από το έλλειμμα, ο ασφαλιστής επιθυμεί να γνωρίζει και το πλεόνασμα ακριβώς πριν επέλθει η χρεοκοπία, το οποίο ορίζεται ως:

$$U(T-) = \lim_{t \to T^-} U(t)$$

Μία ακόμη σημαντική μεταβλητή είναι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, και συμβολίζεται ως L_1. Η μεταβλητή αυτή παίρνει θετικές τιμές, και αυτό συμβαίνει όταν στην εμφάνιση της απαίτησης, η τιμή του πλεονάσματος γίνεται μικρότερη από την προηγούμενη ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος. Δηλαδή, δεν χρειάζεται κατ΄ ανάγκη κάθε πτώση της τιμής του πλεονάσματος να λαμβάνεται ως «καταγεγραμμένη» πτώση (*record low*), το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $\delta(0)$, και τότε θέτουμε $L_1 = 0$.

Εναλλακτικά, η πρώτη καταγεγραμμένη πτώση συμβαίνει όταν για πρώτη φορά η διαφορά $u - U(t)$ γίνει θετική για κάποια χρονική στιγμή t, ή ισοδύναμα, όταν ισχύσει $S(t) > ct$. Συνεπώς, για την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό ισχύει

$$L_1 = \min\{t : u - U(t) > 0\} = \min\{t : S(t) > ct\}$$

Συνεπώς, για τη διαδικασία του πλεονάσματος, εμφανίζεται μία καταγεγραμμένη πτώση τη χρονική στιγμή t, αν και μόνο αν

$$U(t) < U(s) \quad , \quad \forall s < t$$

Ο αριθμός των καταγεγραμμένων πτώσεων εκφράζεται από μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω K, η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\delta(0)$, για την οποία ισχύει

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

□

Ακόμα οι τ.μ. $L_1, L_2, \ldots, L_K$ απεικονίζουν την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την προηγούμενη ελάχιστη τιμή του. Έτσι η τ.μ. L_1 υποδηλώνει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Κατ΄ επέκταση η τ.μ. L_K μας δείχνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το 0, δηλαδή τη στιγμή που επέρχεται η χρεοκοπία. Οι τ.μ. $L_1, L_2, \ldots, L_K$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας (*equilibrium function*) που αντιστοιχεί στην κατανομή των αποζημιώσεων.

Ορισμός 1.2.5. *Έστω μία τ.μ., X_e, που ακολουθεί την κατανομή ισορροπίας μιας κατανομής F, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση επιβίωσης είναι:*

- *Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(X)}$$

- *Η συνάρτηση κατανομής*

$$F_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{F}(t)dt$$

- *Η συνάρτηση επιβίωσης*

$$\bar{F}_e(x) = \frac{1}{E(X)} \int_x^\infty \bar{F}(t)dt$$

όπου X είναι η τ.μ. του μεγέθους των αποζημιώσεων που ακολουθεί την κατανομή F.

□

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή K όπως αναφέρθηκε, ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο $\delta(0)$, κι αυτό είναι απολύτως λογικό αφού αν κάθε καταγεγραμμένη πτώση δεν συντελεί σε χρεοκοπία,τότε θεωρείται 'αποτυχία' με πιθανότητα $\delta(0)$, ενώ όταν επέλθει η χρεοκοπία μετά από n αποτυχίες, έχουμε την 'επιτυχία' με πιθανότητα $\psi(0)$.

$$K \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

Για τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. K ισχύει

$$\begin{aligned} \Pr(K = k) &= \delta(0) \cdot [\psi(0)]^k \,,\; k = 0, 1, 2, \ldots \\ &= \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,. \end{aligned}$$

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια (*maximal aggregate loss*), L, ορίζεται να είναι το τυχαίο άθροισμα όλων των καταγεγραμμένων πτώσεων, και παριστάνει τη συνολική πτώση κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Επομένως, ισχύει:

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + ... + L_K, & K \geq 1 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

Η κατανομή της L είναι μικτού τύπου, καθώς παίρνει την τιμή μηδέν με θετική πιθανότητα, ενώ κατανέμεται συνεχώς στο διάστημα $(0, \infty)$. Η μάζα πιθανότητας στο μηδέν ισούται με

$$\Pr(L = 0) = \Pr(K = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Η κατανομή της τ.μ. L θα είναι μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή, εφόσον η κατανομή της απαριθμήτριας τ.μ. K ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Ακόμη, για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια ισχύει

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + ... + L_K \\ &= [u - U(t_1)] + [U(t_1) - U(t_2)] + ... + [U(t_{K-1}) - U(t_K)] \\ &= u - U(t_K) \\ \Rightarrow L &= u - U(t_K) = S(t_K) - ct_K. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η μέγιστη σωρευτική απώλεια απεικονίζει τη διαφορά μεταξύ των συνολικών αποζημιώσεων και των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχθεί έως τη στιγμή της χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό, η μέγιστη σωρευτική απώλεια ορίζεται να είναι η μέγιστη διαφορά που θα προκύψει σε κάποια χρονική στιγμή $t > 0$, μεταξύ των συνολικών αποζημιώσεων και των συνολικών εισπραχθέντων ασφαλίστρων.

$$L := \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\} \ , \ L \geq 0$$

Η χρεοκοπία δεν συμβαίνει όταν τις χρονικές στιγμές t, ισχύει

$$\begin{aligned} U(t) \geq 0 \ &\Leftrightarrow \ u + ct - S(t) \geq 0 \ , \ \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ u \geq \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\} \, . \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\delta(u) = \Pr(L \leq u)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\psi(u) = \Pr(L > u) \tag{1.2.20}$$

Η εξίσωση (1.2.20), στην οποία βλέπουμε την δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, δύναται να εκφραστεί ως ένα άπειρο ανάπτυγμα συνελίξεων, με τη βοήθεια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας. Επομένως,

$$\begin{aligned} \Pr(L > u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(K = k) \Pr(L > u \mid K = k) \\ \Leftrightarrow \Pr(L > u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(0) \cdot [\psi(0)]^k \Pr(L > u \mid K = k). \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \Pr(L > u \mid K = k) &= \Pr(L_1 + L_2 + ... + L_K > u \mid K = k) \\ &= \Pr(L_1 + L_2 + ... + L_k > u \mid K = k) \\ &= \Pr(L_1 + L_2 + ... + L_k > u) \\ \Rightarrow \Pr(L > u \mid K = k) &= \overline{F}_e^{*k}(u). \end{aligned}$$

όπου $\overline{F}_e^{*k}(u)$ είναι η k-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής ισορροπίας. Τελικώς, για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(0) \cdot [\psi(0)]^k \, \overline{F}_e^{*k}(u). \tag{1.2.21}$$

1.3 Το ανανεωτικό μοντέλο

Το ανανεωτικό μοντέλο αποτελεί μία γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας, και μελετήθηκε για πρώτη φορά το 1958 από τον *E. Sparre Andersen* στο διεθνές ινστιτούτο των αναλογιστών στη Νέα Υόρκη. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό και ως μοντέλο *Sparre Andersen* καθώς φέρει την ονομασία του εισηγητή του. Η κυριότερη καινοτομία του μοντέλου είναι, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ δύο απαιτήσεων δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή, αλλά κάποια άλλη κατανομή. Κατ' επέκταση, η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των αποζημιώσεων δεν είναι μια ανέλιξη *Poisson*, αλλά μία ανανεωτική ανέλιξη.

Ορισμός 1.3.1. *Η διαδικασία του πλεονάσματος στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας των κινδύνων ορίζεται ως εξής:*

$$U(t) = u + ct - S(t) \ \ , \ t \geq 0 \tag{1.3.1}$$

όπου, $U(0) = u$ το αρχικό αποθεματικό, ενώ $c > 0$ είναι ο ρυθμός είσπραξης του ασφαλίστρου στη μονάδα του χρόνου, και

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \ \ , \text{ ενώ } \ \ S(t) = 0 \ \ \text{ αν } \ T_1 > t$$

Ακόμα, οι ενδιάμεσοι χρόνοι $W_1, W_2, W_3, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή F_W με μέσο (βλέπε $Grandell(1991)$)

$$E(W_1) = E(W_2) = ... = E(W) = \frac{1}{a}$$

Επίσης, η διαδικασία του πλεονάσματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής (βλέπε $Thorin(1974)$):

$$U(t) = u + \sum_{k=1}^{n} (cW_k - X_k) + c(t - \sum_{k=1}^{n} W_k) \ \ , \ t \geq 0 \tag{1.3.2}$$

Κατόπιν, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή, έστω Z_k, που προκύπτει από τον δεύτερο όρο της σχέσης (1.3.2).

$$Z_k := X_k - cW_k \quad \text{με} \ \ Z_0 = 0 \tag{1.3.3}$$

κι ακόμα για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Z ισχύει

$$E(Z) = E(X) - cE(W)$$

Η τ.μ. Z_i, $i = 1, 2, \dots$, υποδηλώνει τη ζημία που προκαλεί η i-απαίτηση, εφόσον έχουν εισπραχθεί απαιτούμενα ασφάλιστρα. Προκειμένου να αποτραπεί η χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να ισχύει

$$E(Z) < 0$$

Με βάση την παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στο εξής:

$$\begin{aligned} E(Z) < 0 &\Leftrightarrow E(X) - cE(W) < 0 \\ &\Leftrightarrow c > \frac{E(X)}{E(W)}. \end{aligned}$$

Ακόμη, για ένα θετικό συντελεστή επιβάρυνσης, $\theta > 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} \Rightarrow c &= (1+\theta)\frac{E(X)}{E(W)} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{c}{E(X)}E(W) - 1. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Η σχέση (1.3.4) μας δίνει το μαθηματικό τύπο για το περιθώριο ασφάλειας θ στο ανανεωτικό μοντέλο. Αξίζει να σημειωθεί πως συγκρίνοντας το περιθώριο ασφάλειας του κλασικού μοντέλου με το αντίστοιχο ανανεωτικό, παρατηρείται, όπως είναι απολύτως λογικό, ότι είναι ταυτόσημα. □

Έστω, ότι συμβολίζεται με J η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Z_k, έτσι ώστε $J(x) = \Pr(Z_k \leq x)$, και η ροπογεννήτρια συνάρτησή της με $M_Z(t)$, τότε για το συντελεστή προσαρμογής (βλέπε *Grandell*(1991)) έχουμε:

Ορισμός 1.3.2. *Ο συντελεστής προσαρμογής R, στο ανανεωτικό μοντέλο είναι η θετική λύση της εξίσωσης*

$$M_Z(r) = 1. \tag{1.3.5}$$

□

Όμως, για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Z ισχύει

$$M_Z(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rZ} dJ(z) = E\left(e^{r(X-cW)}\right) = E\left(e^{rX}\right) E\left(e^{-rcW}\right)$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. X_i του μεγέθους των αποζημιώσεων είναι

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rX} f(x)dx$$

όπου f είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X_i , $i = 1, 2, \ldots$.

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. W_i , $i = 1, 2, \ldots$ των ενδιάμεσων χρόνων είναι

$$M_W(r) = E(e^{rW}) = \int_0^\infty e^{rW} f_W(x)dx$$

όπου f_W είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. W_i , $i = 1, 2, \ldots$.

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις η εξίσωση (1.3.5) για την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής απλοποιείται ως εξής:

$$M_Z(R) = 1 \Leftrightarrow M_X(R)M_W(-cR) = 1.$$

Παρατηρήσεις

1. Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, εξυπακούεται ότι οι τ.μ. X_i και W_i πρέπει είναι ανεξάρτητες.

2. Στο ανανεωτικό μοντέλο **δεν** ισχύουν οι σχέσεις για τα μεγέθη $\psi(0)$ και $\delta(0)$ όπως στο κλασικό μοντέλο. Δηλαδή,

$$\psi(0) \neq \frac{1}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \delta(0) \neq \frac{\theta}{1+\theta}.$$

□

Στο ανανεωτικό μοντέλο, οι τ.μ. L_i , $i = 1, 2, \ldots, K$ που υποδηλώνουν τις καταγεγραμμένες πτώσεις, δεν ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας του μεγέθους των αποζημιώσεων, αλλά μία άλλη κατανομή, έστω H. Η μέγιστη σωρευτική απώλεια, L, ακολουθεί μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή, αφού η διακριτή τυχαία μεταβλητή K ακολουθεί μία γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\delta(0)$. Δηλαδή,

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_K$$

με

$$\Pr(K = k) = \delta(0) \left[\psi(0)\right]^k .$$

□

Η ακόλουθη πρόταση (βλέπε Πολίτης(2009)) μας δίνει ένα αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο.

Πρόταση 1.3.1. *Έστω $D(x) = \Pr(L_1 \leq x)$. Τότε, στο ανανεωτικό μοντέλο η πιθανότητα χρεοκοπίας, $\psi(u)$, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$\psi(u) = \phi\overline{D}(u) + \phi\int_0^u \psi(u-t)dD(t) \tag{1.3.6}$$

όπου φ=ψ(0), ενώ η (1.3.6) είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση καθώς $\phi < 1$, ενώ με D συμβολίζουμε την συνάρτηση κατανομής της τ.μ. L_i.

Κεφάλαιο 2

Οι κλάσεις κατανομών *Panjer* (a, b, r) και κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας

Στο προσεχές κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά ορισμένα βασικά μεγέθη των γνωστότερων διακριτών κατανομών, και στη συνέχεια θα μιλήσουμε για τις κλάσεις κατανομών του *Panjer* (a, b, r), και ειδικότερα για τις περιπτώσεις όπου $r = 0, 1$. Ακόμη, θα εισαγάγουμε μία ιδιαίτερη κατανομή, η οποία θα μπορούσε να αποδοθεί στην ελληνική γλώσσα ως επεκταθείσα περικομμένη αρνητική διωνυμική (**Extended Truncated Negative Binomial**(ETNB)), και τελικώς θα γίνει μια εισαγωγή των εννοιών της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, καθώς και τη σχέση που έχουν μεταξύ τους.

2.1 Η τ.μ. N και οι κλάσεις κατανομών του *Panjer*

Το συλλογικό μοντέλο της θεωρίας των κινδύνων αναφέρει ότι $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, όπου οι τ.μ. X_i , $i = 1, 2, \ldots, N$ και N είναι ανεξάρτητες. Η τυχαία μεταβλητή X υποδηλώνει το μέγεθος της αποζημίωσης, ενώ η διακριτή τ.μ. N απεικονίζει τον αριθμό των απαιτήσεων για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Επιπλέον, η κατανομή της τ.μ. N λέγεται απαριθμήτρια, καθώς 'απαριθμεί' ενδεχόμενα, ενώ παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Οι κυριότερες διακριτές κατανομές είναι η *Poisson*, η αρνητική διωνυμική, η ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής για $r = 1$, δηλαδή η γεωμετρική, και η διωνυμική.

Μερικές βασικές ποσότητες για διακριτές τυχαίες μεταβλητές είναι η συνάρτηση πιθανότητας, η ροπογεννήτρια συνάρτηση, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, καθώς η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθούν δύο χρήσιμα αποτελέσματα για την $k-$οστή ροπή και την παραγοντική ροπή k τάξεως μίας κατανομής, με k διαδοχικές παραγωγίσεις επί της ροπογεννήτριας συνάρτησης, $M(t)$, και της πιθανογεννήτριας συνάρτησης, $P(t)$, αντιστοίχως.

$$E[N^k] = \frac{d^k}{dt^k}\left[M_N(t)\right]|_{t=0} \tag{2.1.1}$$

$$E[(N)(N-1)\cdots(N-k+1)] = \frac{d^k}{dt^k}\left[P_N(t)\right]|_{t=1} \tag{2.1.2}$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές ποσότητες των κυριότερων διακριτών κατανομών (βλέπε Κούτρας(2004)), οι οποίες θα μας χρειαστούν στα προσεχή κεφάλαια.

<u>1.Poisson</u>

Η κατανομή *Poisson* είναι από τις κυριότερες εκ των διακριτών κατανομών, λόγω των πολλών ιδιοτήτων της, που απλουστεύουν τους υπολογισμούς και συμβολίζεται με $P(\lambda)$. Πιο συγκεκριμένα, για την κατανομή *Poisson* με παράμετρο $\lambda > 0$, ισχύει:

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,.$$

- Μέση τιμή και Διακύμανση

$$E(N) = \lambda \;\text{ και }\; Var(N) = \lambda$$

- Ροπογεννήτρια και Πιθανογεννήτρια

$$\begin{aligned} M_N(t) &= E\left(e^{tN}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\Pr(N=n) \\ \Rightarrow M_N(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} P_N(t) &= E\left(t^N\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Pr(N=n) \\ &= \sum_{n=o}^{\infty} t^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{t\lambda} \\ \Rightarrow P_N(t) &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

2.Αρνητική διωνυμική

Η αρνητική διωνυμική μελετά τον απαιτούμενο αριθμό αποτυχιών σε μία ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών *Bernoulli*, έως ότου εμφανιστεί η r επιτυχία, με πιθανότητα επιτυχίας p, και συμβολίζεται με $NB(r,p)$. Τα βασικά μεγέθη της είναι:

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N=n) = \binom{n+r-1}{n} p^r q^n \ \ , \ n=0,1,2,\dots \ , p>0 \ , \ q=1-p$$

- Μέση τιμή και Διακύμανση

$$E(N) = r\frac{q}{p} \ \text{ και } \ Var(N) = r\frac{q}{p^2}$$

- Ροπογεννήτρια και Πιθανογεννήτρια

$$M_N(t) = E\left(e^{tN}\right) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

και

$$P_N(t) = E\left(t^N\right) = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^r$$

□

Συχνά, στη διεθνή βιβλιογραφία η παράμετρος p διαφέρει και εκφράζεται ως $\frac{1}{1+\beta}$, $\beta>0$. Επομένως, τα αποτελέσματα που περιγράφτηκαν έχουν ως εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N=n) = \binom{n+r-1}{n} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n \ , \text{ για } n=0,1,2,\dots \ .$$

- Μέση τιμή και Διακύμανση

$$E(N) = r\beta \ \text{ και } \ Var(N) = r\beta\,(1+\beta)$$

- Ροπογεννήτρια και Πιθανογεννήτρια

$$M_N(t) = \left(\frac{\frac{1}{1+\beta}}{1-\frac{\beta}{1+\beta}e^t}\right)^r = \left(\frac{1}{(1+\beta)-\beta e^t}\right)^r$$

και

$$P_N(t) = \left(\frac{1}{(1+\beta) - \beta t}\right)^r$$

3.Γεωμετρική

Η ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής, για $r = 1$, θεωρείται ο απαιτούμενος αριθμός αποτυχιών σε μία ακολουθία *Bernoulli*, έως ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία, με πιθανότητα επιτυχίας p, και συμβολίζεται με $G(p)$. Ειδικότερα, έχουμε

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N = n) = p \cdot q^n \ , \ n = 0, 1, 2, ... \ , \ p > 0 \ , \ q = 1 - p$$

- Μέση τιμή και Διακύμανση

$$E(N) = \frac{q}{p} \ \text{ και } \ Var(N) = \frac{q}{p^2}$$

- Ροπογεννήτρια και Πιθανογεννήτρια

$$M_N(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

και

$$P_N(t) = \frac{p}{1 - qt}$$

4.Διωνυμική

Η διωνυμική κατανομή μας δίνει τον αριθμό επιτυχιών σε μία ακολουθία m ανεξάρτητων δοκιμών *Bernoulli*, με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p, και συμβολίζεται με $B(m, p)$.

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N = n) = \binom{m}{n} p^n q^{m-n} \ , \ n = 0, 1, ..., m \ , \ p > 0 \ , \ q = 1 - p$$

- Μέση τιμή και Διακύμανση

$$E(N) = mp \ \text{ και } \ Var(N) = mpq$$

- Ροπογεννήτρια και Πιθανογεννήτρια

$$M_N(t) = \left(q + pe^t\right)^m$$

και

$$P_N(t) = (q + pt)^m \,.$$

□

Εν συνεχεία, θα γίνει μια εισαγωγή στις κλάσεις κατανομών (a, b, r), από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά όλες τις διαδοχικές πιθανότητες, με μία δεδομένη αρχική τιμή. Ουσιαστικά πρόκειται για μία κλάση κατανομών με δύο παραμέτρους, τις a και b, ενώ η τιμή του r καθορίζει ποια θα είναι η πρώτη τιμή που θα λαμβάνει η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής (βλέπε $Klugman\ et\ al$(2004)).

2.1.1 Η κλάση $(a, b, 0)$

Ορισμός 2.1.1. *Η κλάση $(a, b, 0)$ είναι μία διπαραμετρική οικογένεια απαριθμητριών κατανομών, όπου η συνάρτηση πιθανότητας υπολογίζεται αναδρομικά, σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο*

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}\ , \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.1.3}$$

όπου a, b δύο σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Ξεκινώντας από μία αρχική τιμή p_0, είναι εύκολο να υπολογιστούν οι διαδοχικές πιθανότητες. Σε αυτή την κλάση ανήκουν οι κυριότερες διακριτές κατανομές που περιγράφτηκαν.

<u>Poisson</u>

Για την κατανομή $Poisson$ με παράμετρο λ, είναι

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{(k-1)!\lambda^k}{k(k-1)!\lambda^k\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{k}.$$

Συνεπώς, για την $Poisson$ ισχύει

$$a = 0 \quad \text{και} \quad b = \lambda, \quad \text{με} \quad p_0 = e^{-\lambda}.$$

Αρνητική διωνυμική

Για την αρνητική διωνυμική ισχύει,

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\binom{r+k-1}{k} p^r q^k}{\binom{r+(k-1)-1}{k-1} p^r q^{k-1}} = \frac{\frac{(r+k-1)!}{k!(r-1)!}q}{\frac{(r+k-2)!}{(k-1)!(r-1)!}} = \frac{(k-1)!(r+k-1)!}{k!(r+k-2)!}q \\ &= \frac{r+k-1}{k}q = q + \frac{r-1}{k}q.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για την αρνητική διωνυμική ισχύει

$$a = q \quad \text{και} \quad b = (r-1)q, \quad \text{με} \quad p_0 = p^r.$$

Γεωμετρική

Στην περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, παίρνουμε

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{pq^k}{pq^{k-1}} = q.$$

Οπότε, για τη γεωμετρική κατανομή, ισχύει

$$a = q \quad \text{και} \quad b = 0, \quad \text{με} \quad p_0 = p.$$

Διωνυμική

Ο λόγος δύο διαδοχικών πιθανοτήτων για τη διωνυμική κατανομή είναι,

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{p}{q} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{p}{q} + \frac{n+1}{k} \cdot \frac{p}{q}\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για τη διωνυμική κατανομή λαμβάνουμε,

$$a = -\frac{p}{q} \quad \text{και} \quad b = (n+1)\frac{p}{q}, \quad \text{με} \quad p_0 = p^n.$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα για τις ροπές της κλάσης κατανομών $(a, b, 0)$, όπως η πρώτη ροπή (βλέπε Κούτρας(2004) σελίδα 327,άσκηση 13), η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως και η διακύμανση.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή N, η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $(a, b, 0)$ με σύνολο τιμών $R_N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, και συνάρτηση πιθανότητας $p_n = \Pr(N = n)$ η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (2.1.3) για την οποία ισχύει*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\ , \quad n = 1, 2, \ldots\ ,$$

όπου a, b δύο σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
Τότε η μέση τιμή, η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως και η διασπορά για την κατανομή αυτή, μπορούν να εκφραστούν από τους ακόλουθους τύπους:

1. *Η μέση τιμή της κατανομής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*
$$E(N) = \frac{a+b}{1-a}. \tag{2.1.4}$$

2. *Για την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως ισχύει:*
$$E\left[N\left(N-1\right)\right] = \frac{(2a+b)(a+b)}{(1-a)^2}. \tag{2.1.5}$$

3. *Η διακύμανση εκφράζεται ως:*
$$Var(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}. \tag{2.1.6}$$

□

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.1.3) με k, λαμβάνουμε

$$kp_k = akp_{k-1} + bp_{k-1}$$

Αν προσθαφαιρέσουμε στην τελευταία σχέση τον όρο ap_{k-1}, τότε για $k = 1, 2, \ldots$, προκύπτει

$$kp_k = akp_{k-1} + bp_{k-1} + ap_{k-1} - ap_{k-1} \;\Rightarrow\; kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}. \tag{2.1.7}$$

1. Αθροίζοντας τη σχέση (2.1.7) για $k = 1, 2, \ldots$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} a(k-1)p_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(a+b)p_{k-1} \\ \Rightarrow E(N) &= aE(N) + (a+b)\cdot 1 \end{aligned}$$

εφόσον για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω X, με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = \Pr(X = x)$, $x = 0, 1, \ldots$, ισχύουν τα εξής:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x-1) = 1$$

και

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\ f(x)$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι για τη μέση τιμή της κλάσης κατανομών $(a, b, 0)$ ισχύει

$$\begin{aligned} (1-a)\,E(N) &= a+b \\ \Rightarrow E(N) &= \frac{a+b}{1-a}. \end{aligned}$$

2. Αν προσθαφαιρέσουμε τον όρο ap_{k-1} και πολλαπλασιάσουμε με $(k-1)$ και τα δύο μέλη διαδοχικά στη σχέση (2.1.7), τότε προκύπτει η εξής ισότητα:

$$k(k-1)p_k = a(k-1)(k-2)p_{k-1} + (2a+b)(k-1)p_{k-1}. \tag{2.1.8}$$

Αθροίζοντας τα δύο μέλη της (2.1.8) για $k = 2, 3, \ldots$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k &= \sum_{k=2}^{\infty} a(k-1)(k-2)p_{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(2a+b)(k-1)p_{k-1} \\ \Rightarrow E\left[N\left(N-1\right)\right] &= aE\left[N\left(N-1\right)\right] + (2a+b)E(N) \\ \Rightarrow (1-a)E\left[N\left(N-1\right)\right] &= (2a+b)E(N). \end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, για την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως της προαναφερθείσας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, ισχύει

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)f(x)$$

Ακόμη, πρέπει να σημειωθεί ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)(k-2)p_{k-1}=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p_{k-1}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_{k}$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (2.1.4) για τη μέση τιμή, η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως μίας κατανομής που ανήκει στην κλάση $(a,b,0)$ θα είναι

$$\begin{aligned}E\left[N\left(N-1\right)\right] &= \frac{2a+b}{(1-a)}E(N)=\frac{2a+b}{1-a}\cdot\frac{a+b}{1-a}\\ \Rightarrow E\left[N\left(N-1\right)\right] &= \frac{(2a+b)(a+b)}{(1-a)^{2}}.\end{aligned}$$

3. Για τη διακύμανση μίας τυχαίας μεταβλητής, έστω X, ισχύει

$$Var(X)=E\left(X^{2}\right)-E^{2}\left(X\right)$$

Αρχικά, θα βρούμε τη δεύτερη ροπή μιας κατανομής που ανήκει στην κλάση $(a,b,0)$ μέσω της παραγοντικής ροπής δεύτερης τάξεως. Από τη σχέση (2.1.5) ισχύει

$$E\left[N^{2}-N\right]=E\left(N^{2}\right)-E(N)=\frac{(2a+b)(a+b)}{(1-a)^{2}}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (2.1.4) για τη μέση τιμή, παίρνουμε

$$E\left(N^{2}\right)=\frac{(2a+b)(a+b)}{(1-a)^{2}}+\frac{a+b}{1-a}=\frac{(2a+b)(a+b)+(a+b)(1-a)}{(1-a)^{2}}$$

Επομένως, η δεύτερη ροπή για την κλάση κατανομών $(a,b,0)$ είναι

$$\begin{aligned}E\left(N^{2}\right) &= \frac{(a+b)\left[2a+b+1-a\right]}{(1-a)^{2}}\\ \Rightarrow E\left(N^{2}\right) &= \frac{(a+b)\left[a+b+1\right]}{(1-a)^{2}}. \qquad (2.1.9)\end{aligned}$$

Τελικώς, για τη διακύμανση έχουμε

$$Var(N) = E\left(N^2\right) - E^2(N)$$

Από τις σχέσεις (2.1.4) και (2.1.9), παίρνουμε

$$\begin{aligned} Var(N) &= \frac{(a+b)[a+b+1]}{(1-a)^2} - \left[\frac{a+b}{1-a}\right]^2 \\ \Rightarrow Var(N) &= \frac{(a+b)[a+b+1]-(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{(a+b)[a+b+1-(a+b)]}{(1-a)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η διακύμανση μιας κατανομής που ανήκει στην κλάση κατανομών $(a, b, 0)$ μπορεί να εκφραστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$Var(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

□

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί ότι στην κλάση κατανομών $(a, b, 0)$ δεν συγκαταλέγονται άλλες κατανομές, κι αυτές που αναφέρθηκαν είναι οι μόνες που απαρτίζουν τη συγκεκριμένη κλάση (βλέπε *Sundt* & *Jewell* (1981)).

2.1.2 Η κλάση $(a, b, 1)$

Ορισμένες φορές, οι κατανομές που απαρτίζουν την κλάση $(a, b, 0)$ δεν μπορούν να δώσουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, λόγω της κακής εφαρμογής τους στα δεδομένα, τόσο στο σημείο μηδέν, όσο και στις μεγάλες τιμές επειδή έχουν ελαφριά δεξιά ουρά.

Ορισμός 2.1.2. *Η κλάση $(a, b, 1)$ είναι μία διπαραμετρική οικογένεια κατανομών, όπου η συνάρτηση πιθανότητας υπολογίζεται αναδρομικά μέσω της ακόλουθης σχέσης*

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 2, 3, \ldots \ . \tag{2.1.10}$$

Η κλάση κατανομών $(a, b, 1)$ είναι μία ευρύτερη οικογένεια κατανομών, η οποία αποτελεί μία γενίκευση της κλάσης κατανομών $(a, b, 0)$. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο κλάσεων κατανομών, είναι ότι για την κλάση $(a, b, 1)$ η αναδρομική σχέση ξεκινάει από τη συνάρτηση πιθανότητας στο σημείο $k = 1$. Για το λόγο αυτό, υπάρχουν κάποιες τροποποιήσεις των πιθανοτήτων στο σημείο $k = 0$ για τις κατανομές που περιγράφηκαν στην κλάση $(a, b, 0)$.

1. Η πρώτη κατηγορία τροποποιήσεων κατανομών είναι η **zero-truncated**. Σε αυτή την περίπτωση, κόβουμε την πιθανότητα στο σημείο μηδέν και την μετατοπίζουμε στο υπόλοιπο κομμάτι του στηρίγματος της κατανομής. Δηλαδή, για την νέα τυχαία μεταβλητή N^T(συμβολισμός), ισχύει

$$N^T = N \mid N > 0$$

2. Η δεύτερη κατηγορία τροποποιήσεων κατανομών είναι η **zero-modified**. Σε αυτή την περίπτωση, μεταφέρουμε την πιθανότητα στο σημείο μηδέν, και τη συμβολίζουμε με N^{ZM}, ή απλώς με N^M.

Και οι δύο κατηγορίες τροποποιήσεων κατανομών ασχολούνται με τις κατανομές της κλάσης $(a, b, 0)$(βλέπε Χατζηκωνσταντινίδης (2008),*Klugman et al*(2004)).

Βασικά αποτελέσματα

Έστω, με p_k^T να συμβολίζεται η συνάρτηση πιθανότητας της $zero-truncated$ κατανομής, και, με p_k^M η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας της $zero-modified$ κατανομής, για τις οποίες ισχύει

$$p_k^T = \Pr\left(N^T = k\right) \quad \text{και} \quad p_k^M = \Pr\left(N^M = k\right)$$

Για τη συνάρτηση πιθανότητας της $zero-truncated$ κατανομής, έχουμε

$$p_k^T = \Pr\left(N^T = k\right) = \Pr\left(N = k \mid N > 0\right) = \frac{\Pr\left(N = k\right)}{\Pr\left(N > 0\right)} = \frac{p_k}{1 - p_0} \text{ , για } k \geq 1$$

Επομένως,

$$p_k^T = \begin{cases} \frac{p_k}{1-p_0}, & \text{για } k \geq 1 \\ 0, & \text{για } k = 0 \end{cases}$$

Ακόμη, για $k - 1 \geq 1$ ισχύει

$$p_{k-1}^T = \frac{p_{k-1}}{1 - p_0}$$

Άρα, για $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{p_k^T}{p_{k-1}^T} &= \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \\ \Rightarrow p_k^T &= \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}^T \quad , \quad k \geq 2 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Επομένως, δεδομένου ότι η τ.μ. N ανήκει στην κλάση $(a, b, 0)$, τότε η τ.μ. N^T ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$. $\square$

Στη συνέχεια αναφέρεται ο ορισμός της εκφυλισμένης κατανομής, καθώς θα μας χρειαστεί στον καθορισμό των πιθανογεννητριών συναρτήσεων της $zero - truncated$ και $zero - modified$ κατανομής.

Ορισμός 2.1.3. *Μία κατανομή ονομάζεται εκφυλισμένη, όταν συγκεντρώνει όλη τη μάζα πιθανότητας σε ένα μοναδικό σημείο με πιθανότητα 1, ή το στήριγμά της περιλαμβάνει μία μόνο τιμή. Δηλαδή, για την συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. X ισχύει*

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ x = x_0 \\ 0, & \text{αν } \ x \neq x_0 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$M_X(t) = \sum_{x \in R_X} \Pr(X = x) e^{tx} = 1 \cdot e^{tx_0} = e^{tx_0}$$

και

$$P_X(t) = \sum_{x \in R_X} \Pr(X = x) t^x = 1 \cdot t^{x_0} = t^{x_0}$$

Όταν $x_0 = 0$, τότε

$$P_X(t) = 1 \ \ , \ \ \forall t \geq 0.$$

$\square$

Θεωρούμε ότι $p_k^M = \Pr\left(N^M = k\right)$, και έστω p_0^M ένας οποιοσδήποτε αριθμός στο $[0, 1)$. Επίσης, θέτουμε $p_k^M = cp_k \ \ , \ \ k \geq 1$.

Τότε, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $zero - modified$ έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} P^M(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + c \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ &= p_0^M + c \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k - p_0 \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P^M(z) &= p_0^M + c \left[P(z) - p_0 \right] \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

όπου $P(z)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της αρχικής τ.μ. N. Δηλαδή,

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr\left(N=n\right)z^k$$

Από την (2.1.12) για $z=1$, παίρνουμε

$$1=p_0^M+c(1-p_0)\Rightarrow c=\frac{1-p_0^M}{1-p_0} \tag{2.1.13}$$

Μέσω του αποτελέσματος που βρέθηκε στη σχέση (2.1.13), η (2.1.12) γίνεται

$$\begin{aligned}
P^M(z) &= p_0^M+\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\left[P(z)-p_0\right]=p_0^M+\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot P(z)-\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot p_0\\
&= \frac{p_0^M-p_0}{1-p_0}+\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot P(z)\\
\Rightarrow P^M(z) &= \left(1-\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right)+\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot P(z) \qquad (2.1.14)
\end{aligned}$$

Από την σχέση (2.1.14), διαπιστώνουμε ό,τι η $zero-modified$ κατανομή είναι μικτού τύπου, αφού η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της είναι ένας σταθμισμένος μέσος των πιθανογεννητριών συναρτήσεων της εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο μηδέν, και της αρχικής κατανομής N με βάρη $1-\frac{1-p_0^M}{1-p_0}$ και $\frac{1-p_0^M}{1-p_0}$ αντίστοιχα. Ακόμη, για τη συνάρτηση πιθανότητας της $zero-modified$ κατανομής, έχουμε

$$p_k^M=c\cdot p_k\ ,\quad k\geq 1\Rightarrow p_k^M=\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot p_k\quad ,\ \forall k\geq 1$$

Τότε, για $k\geq 2$ ισχύει

$$p_{k-1}^M=\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\cdot p_{k-1}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{p_k^M}{p_{k-1}^M} &= \frac{p_k}{p_{k-1}}\quad ,\ \text{για}\ \ k\geq 2\\
\Rightarrow p_k^M &= \left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}^M\quad ,\quad k\geq 2
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι, και, η $zero-modified$ κατανομή ανήκει στην κλάση $(a,b,1)$, εφόσον η αρχική κατανομή N ανήκει στην κλάση $(a,b,0)$. □

Ας συμβολίζεται με $P^T(z)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $zero-truncated$ κατανομής, τότε

$$\begin{aligned}
P^T(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k^T z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{1-p_0} z^k \\
\Rightarrow P^T(z) &= \frac{1}{1-p_0}\left[P(z)-p_0\right] = \frac{P(z)-p_0}{1-p_0} \\
\Rightarrow P^T(z) &= \frac{1-p_0-1}{1-p_0} + \frac{1}{1-p_0}P(z) = \left(1-\frac{1}{1-p_0}\right) + \frac{1}{1-p_0}P(z). \quad (2.1.15)
\end{aligned}$$

Από την σχέση (2.1.15), διαπιστώνουμε ότι η $zero - truncated$ κατανομή είναι μικτού τύπου, αφού η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της είναι ένας σταθμισμένος μέσος των πιθανογεννητριών συναρτήσεων της εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο μηδέν, και της αρχικής κατανομής N με βάρη $1-\frac{1}{1-p_0}$ και $\frac{1}{1-p_0}$ αντίστοιχα. □

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πώς οι δύο κατηγορίες τροποποιήσεων κατανομών συνδέονται μεταξύ τους. Ξέρουμε ότι

$$p_k^T = \frac{p_k}{1-p_0} \quad , \quad k \geq 1$$

και

$$p_k^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} \cdot p_k \quad , \quad k \geq 1$$

Διαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{p_k^T}{p_k^M} &= \frac{1}{1-p_0^M} \quad , \quad k \geq 1 \\
\Rightarrow p_k^M &= \left(1-p_0^M\right) p_k^T \quad , \quad \forall k \geq 1 \qquad (2.1.16)
\end{aligned}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
P^T(z) &= \frac{P(z)-p_0}{1-p_0} \\
P^M(z) &= p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0} \cdot (P(z)-p_0)
\end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$P^M(z) = p_0^M + \left(1-p_0^M\right) P^T(z)$$

το οποίο μπορεί να προκύψει και από τον ορισμό της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της $zero-modified$ κατανομής, και με τη βοήθεια της σχέσης (2.1.16). Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} P^M(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\sum_{k=1}^{\infty} p_k^T z^k \\ \Rightarrow P^M(z) &= p_0^M + \left(1-p_0^M\right) P^T(z) \end{aligned}$$

Με αυτό το αποτέλεσμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $zero-modified$ κατανομής είναι ένας σταθμισμένος μέσος των πιθανογεννητριών συναρτήσεων της εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο μηδέν και της $zero-truncated$ κατανομής με βάρη p_0^M και $1-p_0^M$ αντίστοιχα. □

Κατόπιν, παραθέτουμε μία πρόταση με τα βασικά αποτελέσματα για την κλάση κατανομών $(a,b,1)$ για τη μέση τιμή, την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως και τη διακύμανση, κατά αντίστοιχο τρόπο όπως έγινε στην ενότητα 2.1.1 για την κλάση κατανομών $(a,b,0)$.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή N, η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $(a,b,1)$ με σύνολο τιμών $R_N = \{1,2,3,\ldots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας $p_n = \Pr(N=n)$ η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (2.1.10) για την οποία ισχύει*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\ , \quad n = 2,3,\ldots\ ,$$

όπου a,b δύο σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
Τότε για τη μέση τιμή, την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως και τη διακύμανση της κατανομής αυτής ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

1. *Η μέση τιμή της κατανομής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$E(N) = \frac{a+b+p_1}{1-a} \tag{2.1.17}$$

2. *Για την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως ισχύει:*

$$E\left[N\left(N-1\right)\right] = \frac{(2a+b)(a+b+p_1)}{(1-a)^2}. \tag{2.1.18}$$

3. *Η διακύμανση εκφράζεται ως:*

$$Var(N) = \frac{(a+b+p_1)\left[1-p_1\right]}{(1-a)^2}. \tag{2.1.19}$$

όπου $p_1 = \Pr(N=1)$.

$\square$

Απόδειξη

Ομοίως με την κλάση $(a,b,0)$, αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (2.1.10) με k, λαμβάνουμε

$$kp_k = akp_{k-1} + bp_{k-1} \quad , \quad k = 2,3,\ldots \ .$$

Ακόμη, αν προσθαφαιρέσουμε στην τελευταία σχέση τον όρο ap_{k-1}, τότε για $k = 2,3,\ldots$, προκύπτει

$$kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1} \ , \ k = 2,3,\ldots \ . \tag{2.1.20}$$

1. Για να βρούμε τη μέση τιμή για την κλάση κατανομών $(a,b,1)$, αρκεί να αθροίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2.1.20) για $k = 2,3,\ldots$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} kp_k &= \sum_{k=2}^{\infty} a(k-1)p_{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(a+b)p_{k-1} \\
\sum_{k=1}^{\infty} kp_k - p_1 &= a\sum_{k=1}^{\infty} kp_k + (a+b)\sum_{k=1}^{\infty} p_k \\
E(N) - p_1 &= aE(N) + (a+b)\cdot 1 \\
(1-a)E(N) &= a + b + p_1.
\end{aligned}$$

Επομένως, η μέση τιμή μιας κατανομής που ανήκει στην κλάση $(a,b,1)$ είναι

$$E(N) = \frac{a+b+p_1}{1-a}.$$

2. Για την εύρεση της παραγοντικής ροπής δεύτερης τάξεως, αρκεί να αθροίσουμε τα δύο μέλη της σχέσης (2.1.8). Επομένως, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k &= \sum_{k=2}^{\infty} a(k-1)(k-2)p_{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(2a+b)(k-1)p_{k-1} \\
\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k &= a\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p_{k-1} + (2a+b)\sum_{k=1}^{\infty} kp_k
\end{aligned}$$

εφόσον, ισχύει ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)(k-2)p_{k-1} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p_{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k.$$

Με βάση την τελευταία ισότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\left[N\left(N-1\right)\right] &= aE\left[N\left(N-1\right)\right] + (2a+b)E(N) \\ \Rightarrow (1-a)E\left[N\left(N-1\right)\right] &= (2a+b)E(N) \\ \Rightarrow E\left[N\left(N-1\right)\right] &= \frac{2a+b}{1-a}\cdot E(N). \end{aligned}$$

Μέσω της σχέσης (2.1.17), η τελευταία σχέση μας δίνει τη μαθηματική έκφραση για την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξεως.

$$\begin{aligned} E\left[N\left(N-1\right)\right] &= \frac{2a+b}{1-a}\cdot\frac{a+b+p_1}{1-a} \\ \Rightarrow E\left[N\left(N-1\right)\right] &= \frac{(2a+b)(a+b+p_1)}{(1-a)^2}. \end{aligned}$$

3. Για να βρούμε τη διακύμανση μίας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί μία κατανομή η οποία ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$, θα πρέπει πρωτίστως να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για τη δεύτερη ροπή. Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (2.1.18), παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\left[N\left(N-1\right)\right] &= E\left[N^2-N\right] = \frac{(2a+b)(a+b+p_1)}{(1-a)^2} \\ \Rightarrow E(N^2) &= \frac{(2a+b)(a+b+p_1)}{(1-a)^2} + E(N). \end{aligned}$$

Ακόμη, μέσω της σχέσης (2.1.17) για τη μέση τιμή της κλάσης κατανομών $(a, b, 1)$ στην τελευταία σχέση, έχουμε

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \frac{(2a+b)(a+b+p_1)}{(1-a)^2} + \frac{a+b+p_1}{1-a} \\ \Rightarrow E(N^2) &= \frac{(2a+b)(a+b+p_1)+(a+b+p_1)\left(1-a\right)}{(1-a)^2} = \frac{(a+b+p_1)(2a+b+1-a)}{1-a)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η δεύτερη ροπή για την κλάση κατανομών $(a, b, 1)$ είναι

$$E\left(N^2\right) = \frac{(a+b+p_1)(a+b+1)}{(1-a)^2}. \tag{2.1.21}$$

Τελικώς, για τη διακύμανση της κλάσης κατανομών $(a, b, 1)$ μέσω των σχέσεων (2.1.17) και (2.1.21), παίρνουμε

$$\begin{aligned} Var(N) &= E\left(N^2\right) - E^2(N) = \frac{(a+b+p_1)(a+b+1)}{1-a)^2} - \left[\frac{a+b+p_1}{1-a}\right]^2 \\ \Rightarrow Var(N) &= \frac{(a+b+p_1)(a+b+1) - (a+b+p_1)^2}{(1-a)^2} \\ &= \frac{(a+b+p_1)\left[a+b+1-(a+b+p_1)\right]}{(1-a)^2}. \end{aligned}$$

Επομένως, η διακύμανση των κατανομών που απαρτίζουν την κλάση $(a, b, 1)$ εκφράζεται από την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$Var(N) = \frac{(a+b+p_1)\left[1-p_1\right]}{(1-a)^2}.$$

□

Μία βασική έννοια η οποία θα μας χρειαστεί για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων είναι η συνέλιξη δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, η οποία ορίζεται τόσο στη συνεχή περίπτωση (βλέπε Πολίτης(2009)) όσο και στη διακριτή περίπτωση (βλέπε Χατζηκωνσταντινίδης(2008)).

Ορισμός 2.1.4. *Διακριτή περίπτωση. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, τότε η συνάρτηση $f * g$ λέγεται συνέλιξη των f, g και, για $x \geq 0$ ορίζεται από την ακόλουθη σχέση*

$$(f * g)(x) = \sum_{t=0}^{x} f(x-t)g(t) = \sum_{t=0}^{x} g(x-t)f(t).$$

Ακόμα,

$$(f * f)(x) = f^{*2}(x) = \sum_{t=0}^{x} f(x-t)f(t).$$

□

Στην αντίστοιχη συνεχή περίπτωση το άθροισμα αντικαθίσταται από ολοκλήρωμα. Ενδεικτικά, αν F, G είναι δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής $F * G$ θα ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-t)dG(t) = \int_0^x G(x-t)dF(t)$$

όπου, με $dG(t)$ και $dF(t)$ συμβολίζονται τα διαφορικά των συναρτήσεων F, G.

Μία ιδιάζουσα ποσότητα στη θεωρία των κινδύνων, είναι η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, καθώς και ο υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, εφόσον θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή των αποζημιώσεων να είναι συνεχής. Αν η τ.μ. $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ παριστάνει τις συνολικές αποζημιώσεις, και, η πυκνότητα της S να συμβολίζεται με g, τότε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \Pr(S \in (x, x+dx)) = \sum_{n=o}^{\infty} \Pr(N=n) \Pr(S \in (x, x+dx) \mid N=n) \\ &= \sum_{n=o}^{\infty} \Pr(N=n) \Pr(X_1 + X_2 + ... + X_N \in (x, x+dx) \mid N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(X_1 + X_2 + ... + X_n \in (x, x+dx)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x) \end{aligned}$$

όπου $p_n = \Pr(N = n)$ και f^{*n} η n-οστή συνέλιξη της κατανομής του μεγέθους των αποζημιώσεων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μηδενική συνέλιξη της f, δηλαδή η f^{*0}, είναι η συνάρτηση πιθανότητας της εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο 0.

Για τις περιπτώσεις όπου η διακριτή τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων ανήκει στις κλάσεις κατανομών $(a, b, 0)$ και $(a, b, 1)$, υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για κάθε μία περίπτωση, που υπολογίζουν αναδρομικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων. Τα αποτελέσματα έχουν δοθεί από ένα άρθρο του $Panjer$(1981) για την περίπτωση όπου το ύψος των αποζημιώσεων είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή , και διευκολύνουν σημαντικά στον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων. Στην περισσότερο «ρεαλιστική» περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή του ύψους των αποζημιώσεων είναι συνεχής, τότε ο αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων δίνεται από ένα άρθρο των $Sundt$ & $Jewell$(1981).

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω* $S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_N$, *όπου* $N \in (a,b,1)$ *με* $p_n = \Pr(N = n)$, *και* f *η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* X, *που παριστάνει το ύψος των αποζημιώσεων.*

Επίσης, έστω g *η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων, τότε*

$$g(x) = p_1 f(x) + \int_0^x \left(\alpha + \beta \frac{t}{x}\right) f(t) g(x-t) dt \quad , \quad x > 0$$

με $g(0) = P_N\left(f(0)\right)$. □

Η προαναφερθείσα σχέση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων ισχύει και για την κλάση $(a, b, 0)$, αφού είναι υποσύνολο της ευρύτερης κλάσης $(a, b, 1)$.

Η αρχική τιμή $g(0)$ προκύπτει ως εξής:

$$g(0) = \Pr(S = 0)$$

Όμως,

$$P_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(S = k) t^k = \Pr(S = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} g(x) t^k$$

ενώ για $t = 0$, έχουμε

$$P_S(0) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} g(x) \cdot 0^k = g(0)$$

Όμως,

$$P_S(t) = P_N\left[P_X(t)\right] \ \Rightarrow \ P_S(0) = P_N\left[P_X(0)\right]$$

και, αντιστοίχως για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X, ισχύει

$$P_X(0) = f(0)$$

Τελικώς, προκύπτει ότι

$$g(0) = P_N\left[f(0)\right].$$

2.1.3 Η επεκταθείσα περικομμένη αρνητική διωνυμική

Ως γνωστόν η αρνητική διωνυμική ορίζεται αυστηρώς για θετικές τιμές των παραμέτρων r, p. Μία γενίκευση της αρνητικής διωνυμικής είναι η **Extended Truncated Negative Binomial**(ETNB), της οποίας η ελληνική απόδοση θα μπορούσε να είναι η **Επεκταθείσα Περικομμένη Αρνητική Διωνυμική(ΕΠΑΔ)**, και κατόπιν θα αναφέρεται ως $ETNB$. Η εν λόγω κατανομή ορίζεται αυστηρώς για $-1 < r < 0$, κι ακόμα ανήκει στην κλάση κατανομών $(a, b, 1)$. Η αναλυτική μορφή της συνάρτησης πιθανότητας της $ETNB$ οφείλεται σε ένα άρθρο του $Willmot$(1988) και έχει ως εξής:

$$p_n = \Pr(N = n) = \frac{-r\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(1+r)} \cdot \frac{p^n}{1-(1-p)^{-r}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \; . \tag{2.1.22}$$

όπου, $-1 < r < 0$ και $0 < p < 1$.

Ακόμα, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής $ETNB$ (βλέπε $Willmot$(1988)), $P_N(t)$, θα είναι

$$\begin{aligned}
P_N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \; p_n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot \frac{-r\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(1+r)} \cdot \frac{p^n}{1-(1-p)^{-r}} \\
&= -\frac{r}{1-(1-p)^{-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n \Gamma(n+r)}{n!\Gamma(1+r)} = -\frac{r}{1-(1-p)^{-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n (n+r-1)!}{n! r!} \\
&= -\frac{r}{1-(1-p)^{-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n (n+r-1)!}{n!(r-1)! r} \\
\Rightarrow P_N(t) &= -\frac{1}{1-(1-p)^{-r}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} (pt)^n
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} (pt)^n \; (1-pt)^r &= 1 \quad , \quad \forall r \quad , \quad |pt| < 1 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} (pt)^n \; (1-pt)^r &= 1 - (1-pt)^r \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} (pt)^n &= \frac{1-(1-pt)^r}{(1-pt)^r}.
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Από τις σχέσεις (2.1.23) και (2.1.24), προκύπτει το εξής:

$$P_N(t) = -\frac{1}{1-(1-p)^{-r}} \cdot \frac{1-(1-pt)^r}{(1-pt)^r}. \tag{2.1.25}$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τη σχέση (2.1.25) με τον όρο $(1-pt)^{-r}$, παίρνουμε το αποτέλεσμα για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής $ETNB$:

$$P_N(t) = \frac{1-(1-pt)^{-r}}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{2.1.26}$$

□

Δεδομένου ότι η $ETNB$ ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$, οι τιμές των παραμέτρων a, b προκύπτουν από το λόγο δύο διαδοχικών πιθανοτήτων ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{p_{n-1}} &= \frac{\frac{-r\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(1+r)}\frac{p^n}{1-(1-p)^{-r}}}{\frac{-r\Gamma(n-1+r)}{(n-1)!\Gamma(1+r)}\frac{p^{n-1}}{1-(1-p)^{-r}}} \quad , \quad n=2,3,4,\ldots \\
&= \frac{p^n(n-1)!\Gamma(n+r)}{p^{n-1}n!\Gamma(n-1+r)} \\
&= \frac{p}{n}\frac{(n+r-1)\Gamma(n-1+r)}{\Gamma(n-1+r)} = \frac{pn+(r-1)p}{n} \\
\Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} &= p + \frac{(r-1)p}{n} \quad , \quad n=2,3,4,\ldots\ .
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2.1.27), παρατηρούμε ότι $a = p$ και $b = (r-1)p$, με $-1 < r < 0$ και $0 < p < 1$.

Ένα σημαντικό στοιχείο για την κατανομή $ETNB$ είναι ότι παρουσιάζει πάντα μέγιστο στο σημείο $k = 1$ (βλέπε $Frostig\ et\ al$(2010)). Από τη σχέση (2.1.27), έχουμε

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = p\left(1 + \frac{r-1}{n}\right) < 1 \quad , \quad n = 2,3,4,\ldots\ .$$

Επιπροσθέτως, με τη βοήθεια της σχέσης (2.1.26), μπορούμε να βρούμε τις δύο πρώτες ροπές της κατανομής $ETNB$, εφόσον γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής. Επομένως, για να βρούμε την πρώτη ροπή της κατανομής, αρκεί να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της κατανομής.

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = \frac{d}{dt}\frac{1-(1-pt)^{-r}}{1-(1-p)^{-r}}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς k την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής $ETNB$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_N(t) &= \frac{1}{1-(1-p)^{-r}}\frac{d}{dt}\left[1-(1-pt)^{-r}\right] \\
&= \frac{1}{1-(1-p)^{-r}}\left[r(1-pt)^{-r-1}(-p)\right] \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}P_N(t) &= \frac{-pr(1-pt)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για $t = 1$ λαμβάνουμε την παραγοντική ροπή πρώτη τάξεως ή πρώτη κεντρική ροπή, η οποία αντιστοιχεί στη μέση τιμή της κατανομής.

$$E(N) = \frac{d}{dt}P_N(t)|_{t=1} = -\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{2.1.28}$$

□

Για να επαληθεύσουμε την ορθότητα του αποτελέσματος για τη μέση τιμή της κατανομής $ETNB$, μπορούμε να τη βρούμε με διαφορετικό τρόπο μέσω της σχέσης (2.1.17). Η μέση τιμή για μία κατανομή που ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$ δίνεται από τη σχέση

$$E(N) = \frac{a+b+p_1}{1-a}$$

Από τη σχέση (2.1.22) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας στο σημείο $k = 1$ της κατανομής $ETNB$ με παραμέτρους r και p είναι

$$p_1 = -\frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{2.1.29}$$

Με βάση τις σχέσεις (2.1.17), (2.1.27) στην οποία διακρίνουμε τις τιμές των παραμέτρων a και b, και της (2.1.29) μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
E(N) &= \frac{a+b+p_1}{1-a} = \frac{p+(r-1)p-\frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}}{1-p} \\
&= \frac{\frac{pr\left[1-(1-p)^{-r}\right]-pr}{1-(1-p)^{-r}}}{1-p} \\
&= \frac{pr\left[-(1-p)^{-r}\right]}{(1-p)\left[1-(1-p)^{-r}\right]}.
\end{aligned}$$

Τελικώς, βασιζόμενοι και στο τελευταίο αποτέλεσμα, συμπεραίνουμε ότι η μέση τιμή της κατανομής $ETNB$ είναι

$$E(N) = -\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}.$$

□

Ακόμη μπορούμε να βρούμε τη δεύτερη κεντρική ροπή της κατανομής $ETNB$, μέσω της παραγοντικής ροπής δεύτερης τάξεως σε συνδυασμό με την ήδη υπάρχουσα πρώτη ροπή. Ομοίως, με το προηγούμενο αποτέλεσμα, ισχύει

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}P_N(t) &= \frac{1}{1-(1-p)^{-r}}\frac{d}{dt}\left[-pr(1-pt)^{-r-1}\right] \\
&= \frac{1}{1-(1-p)^{-r}}\left[pr(r+1)(1-pt)^{-r-2}(-p)\right] \\
\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}P_N(t) &= -\frac{p^2r(r+1)(1-pt)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}}. \qquad (2.1.30)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για $t=1$ λαμβάνουμε την παραγοντικής ροπής δεύτερης τάξεως. Είναι

$$\begin{aligned}
E\left[N(N-1)\right] &= \frac{d^2}{dt^2}P_N(t)|_{t=1} = -\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}} \\
\Leftrightarrow E\left(N^2-N\right) &= -\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}} \\
\Leftrightarrow E(N^2) &= -\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}} + E(N) \\
&= -\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}} - \frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}} \\
\Rightarrow E(N^2) &= \frac{-p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2} - pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}. \qquad (2.1.31)
\end{aligned}$$

<u>Σημείωση</u>

Στην ειδική περίπτωση όπου $r \to 0$, τότε η προκύπτουσα κατανομή είναι η λογαριθμική με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \Pr(N=n) = \frac{p^n}{-n\log(1-p)} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \ .$$

$$\text{με} \quad a = p \quad \text{και} \quad b = -p, \quad \text{όπου} \quad 0 < p < 1.$$

Τα a και b προκύπτουν αν στη σχέση (2.1.27) θέσουμε $r=1$.

Ακόμη, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της λογαριθμικής κατανομής, έστω $P(t)$, προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} P(t) &= E\left(t^N\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{p^n}{-n\log(1-p)} = -\frac{1}{\log(1-p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n}{n} \\ \Rightarrow P(t) &= -\frac{1}{\log(1-p)} \cdot [-\log(1-pt)] \\ \Rightarrow P(t) &= \frac{\log(1-pt)}{\log(1-p)}. \end{aligned}$$

□

Τελικώς, αξίζει να σημειωθεί ότι οι κατανομές που απαρτίζουν την κλάση $(a, b, 1)$ είναι εκείνες που ανήκουν στην κλάση $(a, b, 0)$ συμπεριλαμβανομένων των κατανομών $ETNB$ και λογαριθμικής καθώς και των τροποποιήσεων επί των κατανομών αυτών (βλέπε $Willmot$(1988)).

2.2 Οι κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας

Οι κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας είναι έννοιες συνυφασμένες με τη θεωρία αξιοπιστίας, οι οποίες μελετούν ορισμένες ποσότητες αναφορικά με το χρόνο ζωής των συσκευών ή κάποιων συστημάτων. Ωστόσο, η ευρεία χρησιμότητα των κατανομών αξιοπιστίας εκτείνεται και στην αναλογιστική επιστήμη, έτσι ώστε να επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις ιδιότητες των κατανομών που χρησιμοποιούνται στη θεωρία χρεοκοπίας. Δύο βασικά μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι η βαθμίδα αποτυχίας ($failure\ rate$) και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ($mean\ residual\ lifetime$). Αξίζει να σημειωθεί πώς οι προκείμενες ποσότητες που θα μας απασχολήσουν, θα εκφραστούν στη διακριτή περίπτωση, ενώ αρκετά βασικά αποτελέσματα πάρθηκαν από τους $Willmot$ & Lin(2001) και $Barlow$ & $Proschan$(1975).

2.2.1 Η βαθμίδα αποτυχίας

Η βαθμίδα αποτυχίας ορίζεται να είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, και θα συμβολίζεται με h_k.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω μία θετική διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F, και συνάρτηση πιθανότητας f. Τότε, η βαθμίδα αποτυχίας h_k θα είναι*

$$\begin{aligned} h_k &= \Pr(X = k | X \geq k) = \frac{\Pr(X = k)}{\Pr(X \geq k)} \\ \Rightarrow h_k &= \frac{f(k)}{1 - F(k-1)} \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \ . \end{aligned}$$

□

Πιο συγκεκριμένα, όταν η τυχαία μεταβλητή N αναπαριστά τον αριθμό των αποζημιώσεων ενός χαρτοφυλακίου, τότε θα ισχύουν ορισμένες τροποποιήσεις. Έστω η συνάρτηση πιθανότητας να είναι

$$p_n = \Pr(N = n) \ \ , \ n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Κι ακόμα, για τη δεξιά ουρά της κατανομής ή συνάρτηση επιβίωσης θα ισχύει

$$a_n = \Pr(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \ \ , \ n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Τελικώς, απ΄ όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η διακριτή βαθμίδα αποτυχίας θα ισούται με:

$$\begin{aligned} h_n &= \Pr(N = n | N \geq n) = \frac{\Pr(N = n)}{\Pr(N > n) + \Pr(N = n)} \\ \Rightarrow h_n &= \frac{p_n}{a_n + p_n}. \end{aligned}$$

Ακόμα, για $a_n > 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\Pr(N > n+1)}{\Pr(N > n)} = \frac{\Pr(N > n+1)}{\Pr(N > n+1) + \Pr(N = n+1)} \\ &= \frac{a_{n+1}}{p_{n+1} + a_{n+1}} = \frac{p_{n+1} + a_{n+1} - p_{n+1}}{p_{n+1} + a_{n+1}} \\ &= \frac{p_{n+1} + a_{n+1}}{p_{n+1} + a_{n+1}} - \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} + a_{n+1}} \\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1 - h_{n+1} \ \ , \ n = 0, 1, 2, \dots \ . \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2.2.1), μπορούμε να συμπεράνουμε τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας. Επομένως, η ακολουθία $\{a_{n+1}/a_n \ , n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι φθίνουσα(αύξουσα) αν και μόνο αν η ακολουθία $\{h_{n+1} \ , n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι αύξουσα(φθίνουσα). Διαφορετικά, αν η κατανομή F είναι τέτοια ώστε η βαθμίδα αποτυχίας να είναι αύξουσα, τότε η κατανομή F λέγεται $discrete - Increasing\ Failure\ Rate(D - IFR)$, αλλιώς αν είναι φθίνουσα ονομάζεται $discrete - Decreasing\ Failure\ Rate(D - DFR)$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας παρουσιάζουν τα μέλη της κλάσης κατανομών $(a, b, 0)$. Από τις τέσσερις συνολικά κατανομές, θα δοθούν ακριβείς τύποι μόνο για την $Poisson$ και τη γεωμετρική, καθώς η δύσχρηστη έκφραση των συναρτήσεων επιβίωσης της αρνητικής διωνυμικής και της διωνυμικής κατανομής δυσχεραίνει την εύρεση της αντίστοιχης βαθμίδας αποτυχίας τους.

1.Poisson

Για την κατανομή *Poisson* ισχύει

$$p_n = \Pr(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ \ , \ n \geq 0.$$

Ακόμα, για τη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής *Poisson* ισχύει

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \Pr(N \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \\ \Rightarrow a_{n-1} &= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - \frac{e^{\lambda}\Gamma(n,\lambda)}{\Gamma(n)}\right) \ \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots \ . \end{aligned}$$

Τελικώς, για τη βαθμίδα αποτυχίας h_n ισχύει

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\Pr(N = n)}{\Pr(N \geq n)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}{e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - \frac{e^{\lambda}\Gamma(n,\lambda)}{\Gamma(n)}\right)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{e^{\lambda} - \frac{e^{\lambda}\Gamma(n,\lambda)}{\Gamma(n)}} = \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\frac{e^{\lambda}(n-1)! - e^{\lambda}\Gamma(n,\lambda)}{(n-1)!}} \\ \Rightarrow h_n &= \frac{\lambda^n}{e^{\lambda}n! - e^{\lambda}\cdot n\cdot\Gamma(n,\lambda)} \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση γάμμα, $\Gamma(k)$, ορίζεται από τον τύπο

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-t}dt$$

ενώ, ειδικότερα όταν το k είναι ακέραιος, ισχύει

$$\Gamma(k) = (k-1)! \ , \ \forall k \in Z$$

ενώ η μη-πλήρης συνάρτηση γάμμα(*incomplete gamma function*), $\Gamma(k, \lambda)$, ορίζεται ως

$$\Gamma(k, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

2.Γεωμετρική

Για την γεωμετρική κατανομή ισχύει

$$p_n = \Pr(N = n) = p(1-p)^n \ , \ n = 0, 1, 2, \dots \ , \ p > 0.$$

Ακόμα, για τη συνάρτηση επιβίωσης της γεωμετρικής κατανομής ισχύει

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \Pr(N \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = p\frac{(1-p)^n - 0}{1-(1-p)} \\ &= \frac{p(1-p)^n}{p} \\ \Rightarrow a_{n-1} &= (1-p)^n = q^n \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \ . \end{aligned}$$

Τελικώς, για τη βαθμίδα αποτυχίας h_n ισχύει

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{\Pr(N = n)}{\Pr(N \geq n)} = \frac{p(1-p)^n}{(1-p)^n} \\ \Rightarrow h_n &= p. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Από τη σχέση (2.2.2) παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας της γεωμετρικής κατανομής είναι σταθερή και ίση με $p > 0$, δηλαδή δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και κατ΄ επέκταση συμπεραίνουμε ότι η γεωμετρική κατανομή δεν ανήκει ούτε στην κλάση $D - IFR$ ούτε και στην $D - DFR$.

2.2.2 Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής εκτιμά τον υπολειπόμενο «χρόνο ζωής» του υπό μελέτη μεγέθους που ακολουθεί μία συγκεκριμένη κατανομή. Ας θεωρήσουμε μία θετική τυχαία μεταβλητή, έστω X, και την τ.μ του υπολειπόμενου χρόνου ζωής που θα συμβολίζεται με T_x. Τότε, θα ισχύει

$$T_x = X - x | X > x \ \ , \ \ \text{για } x > 0$$

Τότε, η συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα είναι

$$\begin{aligned} F_{T_x}(t) &= \Pr(T_x \le t) = \Pr(X - x \le t | X > x) = \Pr(X \le x + t | X > x) \\ &= \frac{\Pr(x < X \le x + t)}{\Pr(X > x)} \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)} = 1 - \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)}. \end{aligned}$$

όπου, $F(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.
Ακόμα, για τη συνάρτηση επιβίωσης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ισχύει

$$\begin{aligned} \overline{F}_{T_x}(t) &= 1 - F_{T_x}(t) \\ \Rightarrow \overline{F}_{T_x}(t) &= \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής ισχύει

$$E(T_x) = \int_0^\infty \overline{F}_{T_x}(t) dt = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_0^\infty \overline{F}(x+t) dt$$

Θέτοντας $x + t = y$ έχουμε

$$\begin{aligned} E(T_x) &= \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_x^\infty \overline{F}(y) dy = \frac{1}{\overline{F}(x)} \overline{F}_e(x) E(X) \\ \Rightarrow E(T_x) &= \frac{\overline{F}_e(x) E(X)}{\overline{F}(x)}. \end{aligned}$$

όπου $\overline{F}_e(\cdot)$, η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής ισορροπίας της τ.μ. X όπως έχει οριστεί στην ενότητα 1.2.6. □
Στην διακριτή περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα συμβολίζεται με r_n και θα είναι:

$$r_n = E\left(N - n | N > n\right). \tag{2.2.3}$$

Από τη σχέση (2.2.3) λαμβάνουμε,

$$r_n = E\left(N - n | N > n\right) = \frac{\sum_{k=n+1}^\infty (k-n) p_k}{\Pr(N > n)}. \tag{2.2.4}$$

Ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος ισούται με:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)p_k &= \sum_{k=n+1}^{\infty} k\cdot p_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot p_k \\
&= [(n+1)p_{n+1}+(n+2)p_{n+2}+(n+3)p_{n+3}+\ldots] - na_n \\
&= p_{n+1}+2p_{n+2}+3p_{n+3}+\ldots \\
&= [p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots]+[p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots]+\ldots \\
&= a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} a_k. \qquad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.2.4) και (2.2.5) ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής εκφράζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$r_n = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n}. \qquad (2.2.6)$$

Με βάση την τελευταία σχέση, θα λέμε ότι αν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι μία μη-φθίνουσα συνάρτηση τότε η κατανομή F της τ.μ. N θα ονομάζεται $discrete - Increasing\ Mean\ Residual\ Lifetime(D-IMRL)$, αλλιώς αν η ακολουθία του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι μία μη-αύξουσα συνάρτηση, τότε η κατανομή F θα λέγεται $discrete - Decreasing\ Mean\ Residual\ Lifetime(D-DMRL)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κλάση κατανομών που είναι $D-DFR$(αντίστοιχα $D-IFR$) είναι υποσύνολο του συνόλου των κατανομών που είναι $D-IMRL$(αντίστοιχα $D-DMRL$).

Κεφάλαιο 3

Η κατανομή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί ενδελεχώς η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Θεωρώντας το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, δύο βασικές παραδοχές που θα γίνουν είναι ότι τόσο η τ.μ. των ενδιάμεσων χρόνων, όσο και η τ.μ. του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με διαφορετικές παραμέτρους, προϋποθέτοντας ότι το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις θα γίνει μία εκτίμηση για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Έπειτα, θα δοθεί μία σειρά αριθμητικών εφαρμογών για τη συνάρτηση πιθανότητας και τη βαθμίδα αποτυχίας καθώς μεταβάλλονται όλες οι εμπλεκόμενες παράμετροι.

3.1 Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία

Η εύρεση της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, διότι η εν λόγω τυχαία μεταβλητή αποτελεί μία ιδιάζουσα έννοια της θεωρίας χρεοκοπίας. Η σημαντικότερη μεταξύ αυτών των δυσκολιών είναι ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία είναι μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, διότι το ενδεχόμενο να μην υπάρξει χρεοκοπία είναι εφικτό. Ισχύει, δηλαδή, ο ακόλουθος μαθηματικός τύπος:

$$\Pr\left(N_T = \infty\right) > 0$$

Η πρωτότυπη ιδέα για την εύρεση της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία προέρχεται από το άρθρο των *Frostig et al*(2010). Αξίζει να σημειωθεί για ακόμη μία φορά ότι ο υποδείκτης T αναπαριστά ότι η $n-$οστή απαίτηση, για κάποιο $n \geq 1$, προκαλεί τη χρεοκοπία τη χρονική στιγμή $t = T$.

Μια δεσπόζουσα ποσότητα στη θεωρία χρεοκοπίας, που σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας, μέσω του οποίου μπορούμε να οδηγηθούμε στην εύρεση της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό ο χρόνος της χρεοκοπίας είναι και αυτή μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή. Η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, T, εξαρτάται σημαντικά από τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, και συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$T = \sum_{i=1}^{N_T} W_i$$

όπου η τ.μ. W_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ υποδηλώνει τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων.

Ας συμβολίζουμε με f_t και F_T την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, αντιστοίχως, του χρόνου χρεοκοπίας. Τότε, για αρχικό αποθεματικό $U(0) = u$ θα ισχύει:

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t | U(0) = u)$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, και δεσμεύοντας ως προς τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, λαμβάνουμε:

$$F_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\left[T \leq t \mid N_T = k, U(0) = u\right] \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = u\right]. \tag{3.1.1}$$

<u>Σημείωση</u>

Το άθροισμα στη σχέση (3.1.1) ξεκινάει από την τιμή $k = 1$, διότι η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί με τουλάχιστον μία απαίτηση, ενώ δεν υφίσταται χρεοκοπία με μηδενικό πλήθος απαιτήσεων. □

Ακόμη, μπορούμε να θεωρήσουμε τη δεσμευμένη κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας. Έστω η συνάρτηση $H_k(t)$, για την οποία ισχύει

$$H_k(t) = \Pr\left[T \leq t \mid N_T = k, U(0) = u\right]$$

Συνεπώς, η (3.1.1) γίνεται

$$F_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = u\right]$$

Επιπροσθέτως, ορίζουμε την πυκνότητα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής $H_k(t)$:

$$h_k(t) = \frac{d}{dt} H_k(t) \tag{3.1.2}$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό, λαμβάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] \\ \Rightarrow f_T(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right]. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα βασικό αποτέλεσμα των *Borovkov* & *Dickson*(2008), για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, βάσει του οποίου και της σχέσης (3.1.3), μπορούμε να εξάγουμε μία σχέση για την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία.

Θεώρημα 3.1.1. *(βλέπε Borovkov & Dickson(2008)). Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta > 0$. Δηλαδή, ισχύει*

$$\Pr(X_i > x) = e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

Ακόμη, οι τυχαίες μεταβλητές των ενδιάμεσων χρόνων, W_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_W(t)$.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου χρεοκοπίας, $f_T(t)$, δίδεται από τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο:

$$f_T(t) = e^{-\beta(u+ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (u+ct)^{n-1}}{n!} \left(u + \frac{ct}{n+1}\right) f_W^{*(n+1)}(t). \tag{3.1.4}$$

□

Χάριν ευκολίας, αν στην σχέση (3.1.4) θέσουμε $u = 0$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= e^{-\beta ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (ct)^{n-1}}{n!} \left(\frac{ct}{n+1} \right) f_W^{*(n+1)}(t) \\ \Rightarrow f_T(t) &= e^{-\beta ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta ct)^n}{(n+1)!} \cdot f_W^{*(n+1)}(t). \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Κατόπιν, αν θέσουμε για $n + 1 = k$, στη σχέση (3.1.5), παίρνουμε:

$$f_T(t) = e^{-\beta ct} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta ct)^{k-1}}{k!} f_W^{*k}(t) \tag{3.1.6}$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (3.1.3) και (3.1.6) μας δίνουν την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, οπότε αν τις εξισώσουμε θα πάρουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta ct} \frac{(\beta ct)^{k-1}}{k!} f_W^{*k}(t)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση οδηγούμαστε διαισθητικά στο συμπέρασμα ότι

$$h_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] = e^{-\beta ct} \frac{(\beta ct)^{k-1}}{k!} f_W^{*k}(t). \tag{3.1.7}$$

Η αυστηρή απόδειξη του αποτελέσματος παραλείπεται. □

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε, ότι η $h_k(t)$ είναι μία μη-ελλειμματική πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, καθώς έχουμε δεσμεύσει ως προς το ενδεχόμενο ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων θα λάβει μία θετική πεπερασμένη τιμή ίση με k. Επομένως, ολοκληρώνοντας ως προς t τη σχέση (3.1.7), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h_k(t) \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] dt &= \int_0^{\infty} e^{-\beta ct} \frac{(\beta ct)^{k-1}}{k!} f_W^{*k}(t) dt \\ \Leftrightarrow \Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] &= \int_0^{\infty} e^{-\beta ct} \frac{(\beta ct)^{k-1}}{k!} f_W^{*k}(t) dt. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Η σχέση (3.1.8) μας δίνει τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, χωρίς να έχει γίνει όμως κάποια υπόθεση για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων, ενώ το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν$(U(0) = 0)$.

Υπόθεση

Υποθέτουμε ότι οι τ.μ. των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Προφανώς θα ισχύει:

Έστω $W_i \sim Exp\left(\lambda\right),\ \lambda > 0$, τότε,

$$\Pr(W_i > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

και

$$f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι η συνέλιξη m εκθετικών κατανομών, μας δίνει μία Γάμμα κατανομή με παραμέτρους m και την παράμετρο της εκθετικής κατανομής. Στην προκειμένη περίπτωση για τη συνέλιξη k εκθετικών κατανομών με παράμετρο β, έχουμε:

$$f_W^{*k}(t) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{3.1.9}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (3.1.8) και (3.1.9), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[N_T = k \mid U(0) = 0\right] &= \int_0^\infty e^{-\beta c t} \frac{(\beta c t)^{k-1}}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{\lambda^k (\beta c)^{k-1}}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k)} \int_0^\infty (t^2)^{k-1}\ e^{-(\beta c+\lambda)t} dt \\
&= \frac{\lambda^k\ (\beta c)^{k-1}\ \Gamma(2k-1)}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k)\ (\beta c+\lambda)^{2k-1}} \int_0^\infty \frac{(\beta c+\lambda)^{2k-1}\ t^{2k-1-1}\ e^{-(\beta c+\lambda)t}}{\Gamma(2k-1)} dt.
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στην τελευταία ισότητα αναπαριστά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $2k-1$ και $\beta c+\lambda$, κι οπότε ισούται με τη μονάδα.

Τελικώς, για τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία λαμβάνουμε:

$$\Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) = \frac{\lambda^k\ (\beta c)^{k-1}\ \Gamma(2k-1)}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k)\ (\beta c+\lambda)^{2k-1}} \tag{3.1.10}$$

ή

$$\Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) = \frac{\Gamma(2k-1)}{k!\Gamma(k)} \cdot \frac{\lambda^k\ (\beta c)^{k-1}}{(\beta c + \lambda)^{2k-1}}. \tag{3.1.11}$$

Όμως, ισχύει η ακόλουθη σχέση, η οποία θα μας χρειαστεί στη συνέχεια και παρατίθεται κατόπιν υποδείξεως του επιβλέποντος καθηγητή.

Λήμμα 3.1.1. *Έστω ότι για τη συνάρτηση Γάμμα ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\Gamma(k) = (k-1)!\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{\Gamma(k)} = \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\ 2^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{3.1.12}$$

□

Απόδειξη

Ορίζουμε μία παράσταση, έστω A, το δεξιό μέλος της σχέσης (3.1.12). Τότε, έχουμε

$$A = \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\ 2^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.1.13}$$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ιδιότητα του λήμματος στον πρώτο όρο του αριθμητή της μαθηματικής παράστασης A, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{3}{2}\right) \times \Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(k-\frac{3}{2}\right) \times \left(k-\frac{5}{2}\right) \times \Gamma\left(k-\frac{5}{2}\right) \\
&\cdots \\
&= \left(k-\frac{3}{2}\right) \times \left(k-\frac{5}{2}\right) \ldots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Με βάση την τελευταία ιδιότητα, η σχέση (3.1.13) γίνεται:

$$A = \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\ 2^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} A &= 2^{2k-2}\cdot\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)\dots\frac{1}{2} \\ &= 2^{k-1}\cdot(2k-3)(2k-5)\dots 1 \end{aligned}$$

Αν στην τελευταία σχέση πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με το γινόμενο $(2k-2)(2k-4)(2k-6)\dots 2$, τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{k-1}(2k-2)(2k-3)(2k-4)\dots 1}{(2k-2)(2k-4)(2k-6)\dots 2} \\ &= \frac{(2k-2)!}{\frac{2k-2}{2}\cdot\frac{2k-4}{2}\cdot\frac{2k-6}{2}\dots 1} \\ &= \frac{(2k-2)!}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Τελικώς, σύμφωνα με την ιδιότητα της συνάρτησης Γάμμα λαμβάνουμε το ζητούμενο.

$$A = \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\ 2^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2k-1)}{\Gamma(k)}.$$

□

Ακόμα ξέρουμε ότι αν $N \sim ETNB(r,p)$, τότε

$$p_n = \Pr(N=n) = \frac{-r\cdot\Gamma(n+r)}{n!\Gamma(1+r)}\cdot\frac{p^n}{1-(1-p)^{-r}} \quad , \quad n=1,2,3,\dots\ . \tag{3.1.14}$$

Γνωρίζουμε ότι η παράμετρος r της προκείμενης κατανομής λαμβάνει τιμές μεταξύ του -1 και του 0. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε μία αρχική τιμή αναφοράς. Έστω,

$$r = -\frac{1}{2}$$

Συνεπώς, με δεδομένη τιμή της παραμέτρου r, έχουμε

$$\Gamma(1+r) = \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

και

$$\Gamma(n+r) = \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (3.1.11) η οποία μας δίνει την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία θα είναι

$$\begin{aligned}
\Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) &= \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{2k-2}}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\lambda^k\,(\beta c)^{k-1}}{(\lambda+\beta c)^{2k-1}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{4^k\lambda^k(\beta c)^k}{[(\lambda+\beta c)^2]^k}\cdot\frac{2^{-1}(\beta c)^{-1}}{(\lambda+\beta c)^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2}\right]^k\cdot\left(\frac{\lambda+\beta c}{2\beta c}\right). \qquad (3.1.15)
\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την τιμή της παραμέτρου p, η οποία ορίζεται να είναι

$$p := \frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2},$$

ισχύει $0 < p < 1$.

Ακόμα, με βάση την τιμή του p, ισχύει

$$\begin{aligned}
1-p &= \frac{(\lambda+\beta c)^2 - 4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2} = \frac{(\beta c)^2+\lambda^2+2\lambda c\beta-4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2} \\
\Rightarrow 1-p &= \frac{(\beta c)^2+\lambda^2-2\lambda c\beta}{(\lambda+\beta c)^2} = \frac{(\lambda-\beta c)^2}{(\lambda+\beta c)^2}.
\end{aligned}$$

Με βάση την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι για την τιμή της παραμέτρου p ισχύει,

$$p = 1-\frac{(\lambda-\beta c)^2}{(\lambda+\beta c)^2} = \frac{(\lambda+\beta c)^2-(\lambda-\beta c)^2}{(\lambda+\beta c)^2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$0 < \frac{(\lambda+\beta c)^2-(\lambda-\beta c)^2}{(\lambda+\beta c)^2} < 1.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$(1-p)^{-r} = (1-p)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(\lambda-\beta c)^2}{(\lambda+\beta c)^2}} = \frac{|\lambda-\beta c|}{\lambda+\beta c}. \qquad (3.1.16)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπάρχει ένα κριτήριο για την επιλογή του προσήμου της παράστασης που βρίσκεται σε απόλυτη τιμή. Η υπόθεση που έχει γίνει και πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να διασφαλίζεται η εύρυθμη λειτουργία μίας ασφαλιστικής επιχείρησης είναι ότι σε κάθε μονάδα του χρόνου τα έσοδα πρέπει να υπερβαίνουν τα έξοδα της επιχείρησης. Όπως έχει επισημανθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εξασφαλίζεται η προαναφερθείσα υπόθεση είναι η ύπαρξη ενός θετικού συντελεστή επιβάρυνσης ή περιθωρίου ασφάλειας. Υπενθυμίζουμε ότι για το περιθώριο ασφάλειας ισχύει η μαθηματική σχέση (1.2.5), για την οποία ισχύει:

$$c = (1+\theta)\lambda E(X)$$

Έχοντας υποθέσει ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο β, και λύνοντας ως προς το περιθώριο ασφάλειας, με βάση τη σχέση (1.2.6) λαμβάνουμε:

$$\theta = \frac{\beta c}{\lambda} - 1. \tag{3.1.17}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι για να είναι θετικό το περιθώριο ασφάλειας θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{\beta c}{\lambda} > 1 \Leftrightarrow \beta c > \lambda \Leftrightarrow \beta c - \lambda > 0$$

Συνεπώς βασιζόμενοι στο περιθώριο ασφάλειας η σχέση (3.1.16) γίνεται

$$(1-p)^{-r} = \frac{\beta c - \lambda}{\lambda + \beta c}.$$

Εν κατακλείδι, λαμβάνουμε

$$1-(1-p)^{-r} = 1-(1-p)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda + \beta c - \beta c + \lambda}{\lambda + \beta c} = \frac{2\lambda}{\lambda + \beta c}.$$

Αξίζει να σημειωθεί για ακόμη μία φορά ότι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία είναι ελλειμματική, διότι δεν είναι δεδομένο ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Η παραδοχή αυτή εκφράζεται με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N_T = k) \;=\; \Pr(N_T < \infty) \;=\; \psi(0).$$

Όμως, από την ενότητα 1.2.3 είναι γνωστό ότι στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας για την πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αποθεματικό ισχύει

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Ορίζουμε μία νέα τυχαία μεταβλητή, η οποία θα εκφράζει τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Αυτή θα είναι μία μη-ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, και για το λόγο το άθροισμα όλων των δυνατών πιθανοτήτων της θα ισούται με τη μονάδα. Έστω ότι η νέα μεταβλητή θα συμβολίζεται με $\widetilde{N_T}$. Επομένως, έχουμε

$$\widetilde{N_T} = N_T \mid N_T < \infty.$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι η μη-ελλειμματική τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με τιμές παραμέτρων r και p να ισούνται με

$$r = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad p = \frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2}.$$

Για τη συνάρτηση πιθανότητας της δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής για τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία θα ισχύει

$$\begin{aligned} \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \Pr(N_T = k \mid N_T < \infty) = \frac{\Pr(N_T = k)}{\Pr(N_T < \infty)} \\ \Rightarrow \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \frac{\Pr(N_T = k)}{\psi(0)}. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Επιπροσθέτως, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pr(N_T = k)}{\psi(0)} = \frac{1}{\psi(0)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N_T = k) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \frac{1}{\psi(0)} \cdot \psi(0) = 1. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (3.1.15) και (3.1.18), για τη συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία ισχύει

$$\Pr(\widetilde{N_T} = k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\beta c}\right) \cdot \frac{1}{\psi(0)} \tag{3.1.19}$$

Ακόμη, από τη σχέση (3.1.17) γνωρίζουμε ότι

$$c = (1 + \theta)\frac{\lambda}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\lambda}{\beta c}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\beta c}\right) \cdot \frac{\beta c}{\lambda} \\ \Rightarrow \Pr(\widetilde{N_T} = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\lambda}\right). \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Συμπερασματικά αν λάβουμε υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\Pr(\widetilde{N_T} = k) = \frac{-r\Gamma(k + r)}{k!\Gamma(1 + k)} \cdot \frac{p^k}{1 - (1 - p)^{-r}} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Συνοπτικά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\widetilde{N_T} \sim ETNB\left(-\frac{1}{2}, \frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right)$$

3.2 Αριθμητικές εφαρμογές για τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία μεταβάλλεται από έναν αριθμό παραμέτρων, οι οποίοι είναι δεδομένοι. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το πώς μεταβάλλεται η συνάρτηση πιθανότητας στην εκάστοτε μεταβολή των παραμέτρων, κι εν τέλει ποιες παράμετροι μεταβάλλουν σε σημαντικό βαθμό τη συνάρτηση πιθανότητας. Διαισθητικά, μπορούμε να εικάσουμε ότι το περιθώριο ασφάλειας, ϑ, το οποίο προσδιορίζει το κέρδος της ασφαλιστικής εταιρείας και κατ΄ επέκταση το ενδεχόμενο χρεοκοπίας, είναι μία ποσότητα που επηρεάζει τον αριθμό των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία.

Θεωρώντας ότι ισχύει το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, οι τ.μ. των ενδιάμεσων χρόνων θα είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ακολουθώντας την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Ακόμη, έχουμε υποθέσει ότι η τ.μ. του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta > 0$ και ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι $c > 0$. Μία τελευταία υπόθεση είναι ότι το αρχικό αποθεματικό ισούται με το μηδέν, δηλαδή $u = 0$. Κάτω από αυτές τις παραδοχές θα παρουσιαστούν ορισμένα παραδείγματα για δεδομένες τιμές κάποιων παραμέτρων και θα υπολογίζουμε την εναπομείνουσα σύμφωνα με τη σχέση:

$$c = (1+\theta)\lambda E(X)$$

Όμως $E(X) = 1/\beta$. Συνεπώς,

$$c = (1+\theta)\frac{\lambda}{\beta}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία θα συμβολίζεται με p_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, υποδηλώνοντας ότι η συνάρτηση πιθανότητας για την πρώτη ομάδα παραμέτρων θα συμβολίζεται με p_1. Υπενθυμίζουμε ότι η κατανομή της κανονικής τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία ακολουθεί την κατανομή $ETNB$, ενώ, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. N_T είναι:

$$p_i(k) = \Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\beta c}\right).$$

3.2.1 Η τυχαία μεταβλητή N_T

Πρώτη υπόθεση: ϑ=1/2

Στην πρώτη υπόθεση θα μελετηθούν τρία παραδείγματα, όπου το περιθώριο ασφάλειας θα είναι σταθερό και ίσο με 0.5. Στην πρώτη περίπτωση οι τιμές των παραμέτρων c και β θα είναι ίσες με τη μονάδα, ενώ θα υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου λ. Στη συνέχεια οι τιμές των παραμέτρων c και β θα αυξάνονται κατά δύο και μία μονάδες αντιστοίχως, και θα υπολογίζεται κάθε φορά η τιμή της παραμέτρου λ.

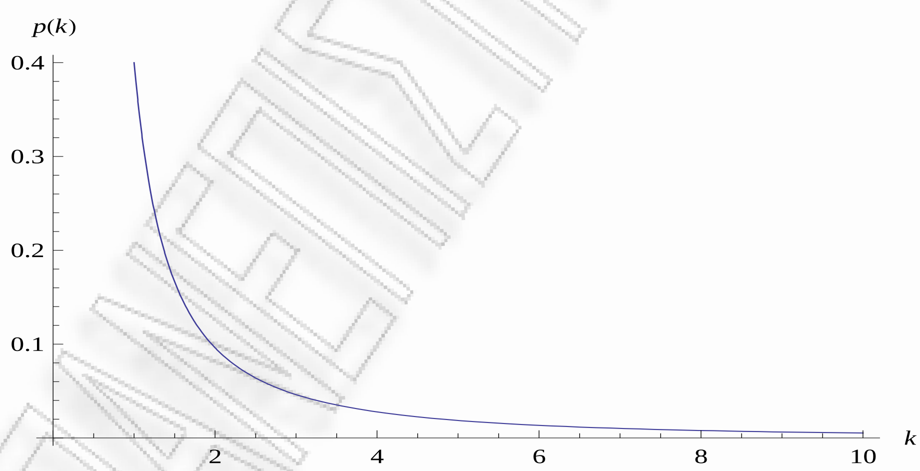
1. $\theta = 1/2$, $c = 1$, $\beta = 1$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{1 \cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_1 θα είναι:

$$p_1(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1}{\left(\frac{2}{3}+1\cdot 1\right)^2}\right]^k \left(\frac{\frac{2}{3}+1\cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_1 θα είναι:



Σχήμα 3.1: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_1 με ϑ=1/2, $c = 1$, β=1, λ=2/3

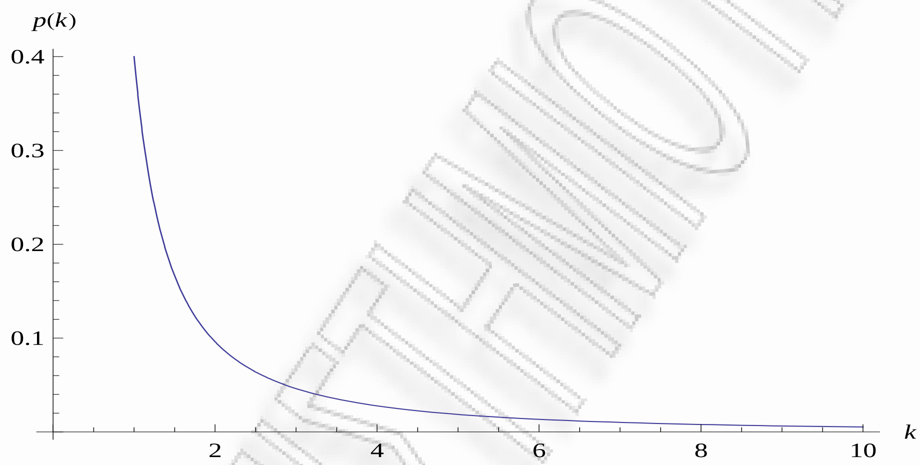
2. $\theta = 1/2$, $c = 3$, $\beta = 2$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{2\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = 4$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_2 θα είναι:

$$p_2(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 4\cdot 2\cdot 3}{(4+2\cdot 3)^2}\right]^k\left(\frac{4+2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_2 θα είναι:



Σχήμα 3.2: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_2 με ϑ=1/2, $c = 3$, β=2, λ=4

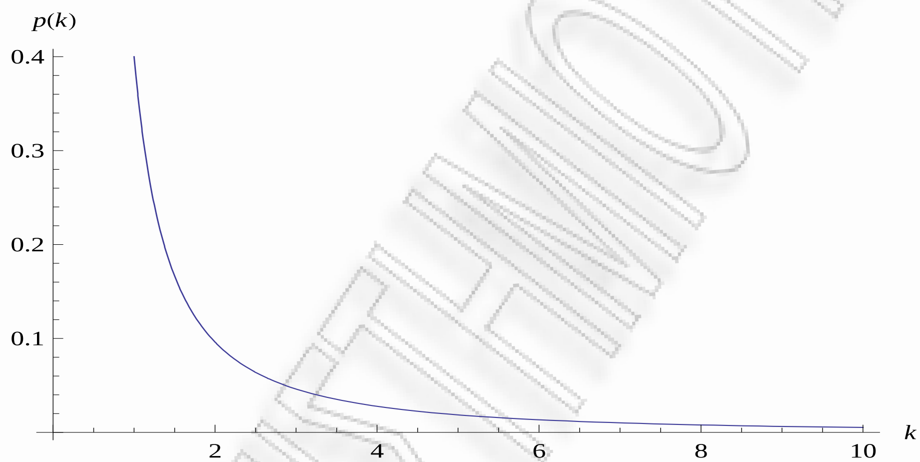
3. $\theta = 1/2$, $c = 5$, $\beta = 3$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{3 \cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = 10$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_3 θα είναι:

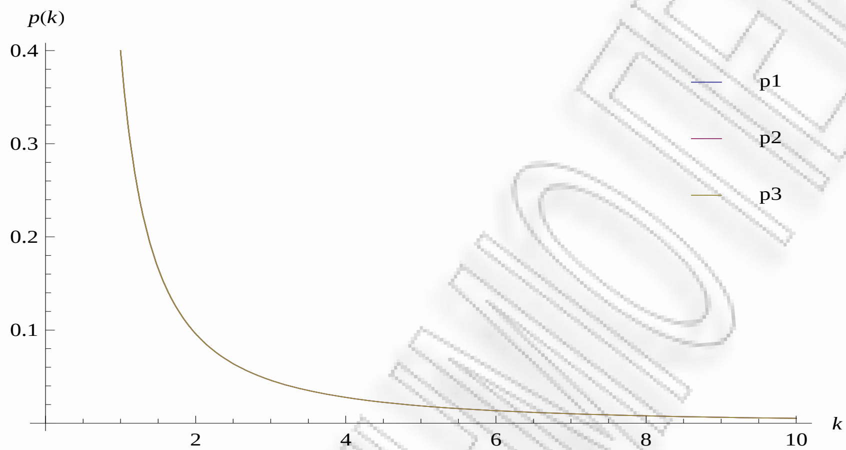
$$p_3(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5}{(10+3\cdot 5)^2}\right]^k \left(\frac{10+3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_3 θα είναι:



Σχήμα 3.3: Γραφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_3 με ϑ=1/2, $c = 5$, β=3, λ=10

Παρατηρώντας τα τρία γραφήματα, μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δεν μεταβάλλεται όταν μεταβάλλονται οι τιμές των παραμέτρων c, β και λ. Το επόμενο γράφημα, στο οποίο εμφανίζονται και οι τρεις προαναφερθείσες συναρτήσεις πιθανότητας για κάθε ομάδα παραμέτρων, αποδεικνύει τον ισχυρισμό αυτό καθώς ταυτίζονται πλήρως οι συναρτήσεις πιθανότητας p_1, p_2 και p_3.



Σχήμα 3.4: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας p_1, p_2 και p_3.

Δεύτερη υπόθεση: θ=1/4

Στη δεύτερη υπόθεση θα μελετηθούν τρία ακόμα παραδείγματα, όπου το περιθώριο ασφάλειας θα είναι σταθερό και ίσο με 0.25. Στην πρώτη περίπτωση οι τιμές των παραμέτρων c και β θα είναι ίσες με τη μονάδα, ενώ θα υπολογίζεται η τιμή της παραμέτρου λ, όπως έγινε και για την πρώτη υπόθεση. Στη συνέχεια οι τιμές των παραμέτρων c και β θα αυξάνονται κατά δυο και μία μονάδες αντιστοίχως, και θα υπολογίζεται κάθε φορά η τιμή της παραμέτρου λ.

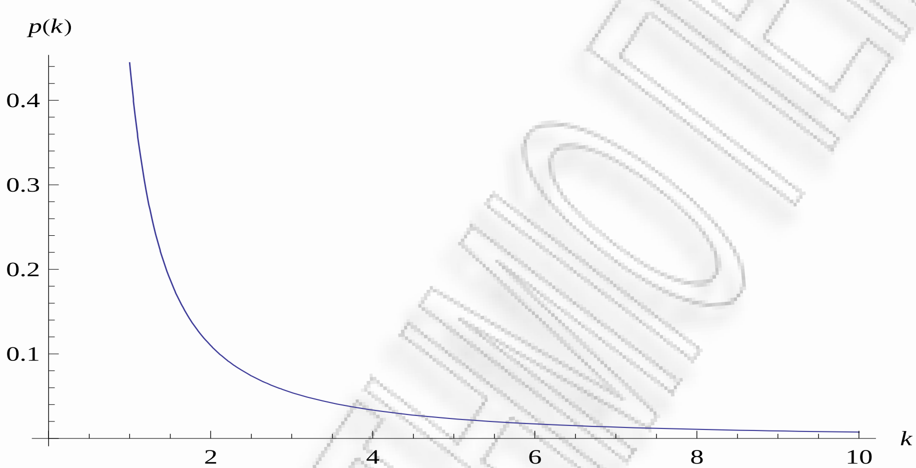
4. $\theta = 1/4$, $c = 1$, $\beta = 1$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{1 \cdot 1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_4 θα είναι:

$$p_4(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot\frac{4}{5}\cdot 1\cdot 1}{\left(\frac{4}{5}+1\cdot 1\right)^2}\right]^k\left(\frac{\frac{4}{5}+1\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_4 θα είναι:



Σχήμα 3.5: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_4 με ϑ=1/4, $c = 1$, β=1, λ=4/5

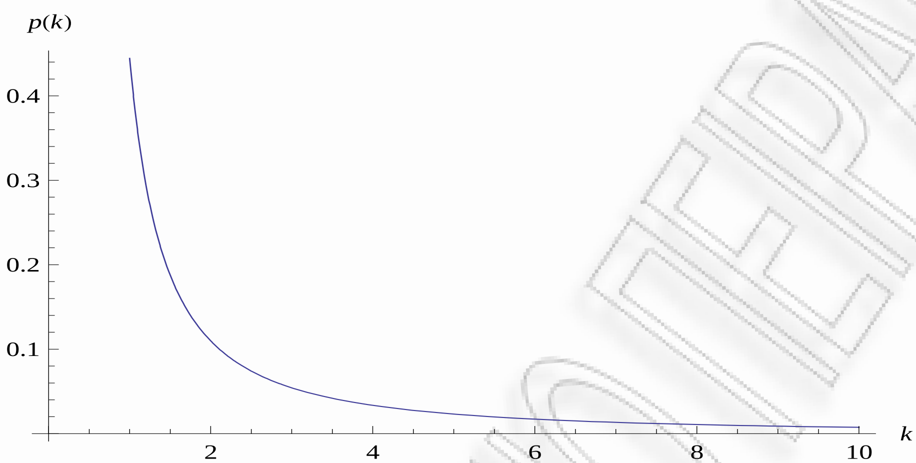
5. $\theta = 1/4$, $c = 3$, $\beta = 2$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{2\cdot 3}{1+\frac{1}{4}} = \frac{24}{5}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_5 θα είναι:

$$p_5(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot\frac{24}{5}\cdot 2\cdot 3}{\left(\frac{24}{5}+2\cdot 3\right)^2}\right]^k\left(\frac{\frac{24}{5}+2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_5 θα είναι:



Σχήμα 3.6: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_5 με ϑ=1/4, $c = 3$, β=2, λ=24/5

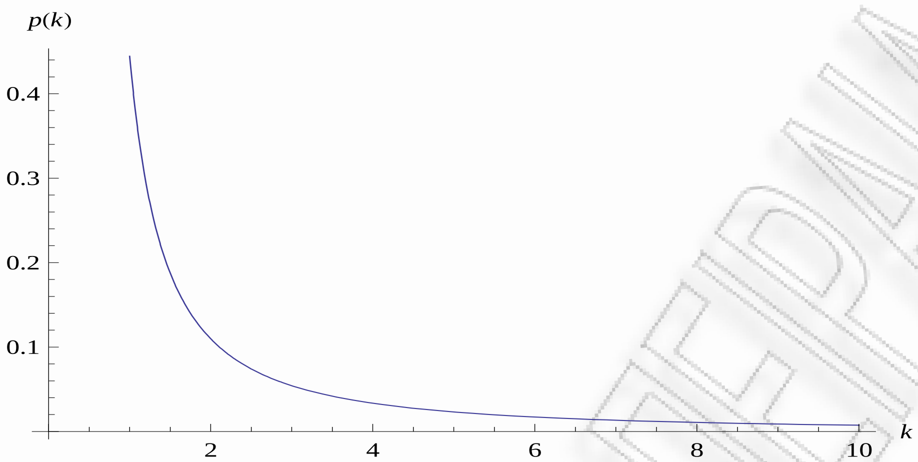
6. $\theta = 1/4$, $c = 5$, $\beta = 3$.

$$\lambda = \frac{\beta c}{1+\theta} = \frac{3 \cdot 5}{1+\frac{1}{4}} = 15$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας p_6 θα είναι:

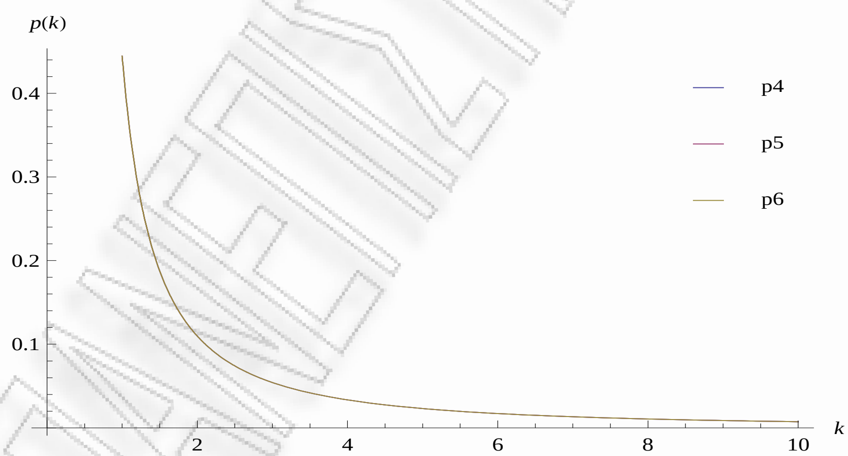
$$p_6(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 5}{(12+3 \cdot 5)^2}\right]^k \left(\frac{12+3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας p_6 θα είναι:



Σχήμα 3.7: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας p_6 με ϑ=1/4, $c = 5$, β=3, λ=12

Παρατηρώντας τα τρία τελευταία γραφήματα των συναρτήσεων πιθανότητας p_4, p_5 και p_6 τα οποία έχουν κοινό περιθώριο ασφάλειας ίσο με 1/4, διαπιστώνουμε ότι η μορφή της συνάρτησης πιθανότητας δεν μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι c, β και λ, ομοίως με την πρώτη υπόθεση. Τη διαπίστωση αυτή επαληθεύει και το παρακάτω κοινό γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας p_4, p_5 και p_6.



Σχήμα 3.8: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας p_4, p_5 και p_6.

Στη συνέχεια θα ξεχωρίσουμε τρεις ακραίες περιπτώσεις για την τιμή του περιθωρίου ασφάλειας ϑ, υποθέτοντας κάποιες δεδομένες τιμές για τις παραμέτρους λ και β, και, κατόπιν θα υπολογιστεί η τιμή του σταθερού ρυθμού του ασφαλίστρου c. Έπειτα σε ένα κοινό διάγραμμα θα αποτυπωθεί η μεταβολή της συνάρτησης πιθανότητας καθώς μεταβάλλεται δραματικά η τιμή του θ.

- $\theta = 9/10$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$.

  Η τιμή του σταθερού ρυθμού του ασφαλίστρου, c, θα υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} c &= (1+\theta)\frac{\lambda}{\beta} \\ c &= \left(1+\frac{9}{10}\right)\frac{2}{1} = \frac{19}{5} \end{aligned}$$

  Η συνάρτηση πιθανότητας, έστω p_7, με τις προαναφερθείσες τιμές παραμέτρων θα είναι:

$$p_7(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{19}{5}}{\left(2+1\cdot\frac{19}{5}\right)^2}\right]^k\left(\frac{2+1\cdot\frac{19}{5}}{2\cdot 1\cdot\frac{19}{5}}\right).$$

- $\theta = 1/20$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$.

  Η τιμή του σταθερού ρυθμού του ασφαλίστρου, c, θα υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} c &= (1+\theta)\frac{\lambda}{\beta} \\ c &= \left(1+\frac{1}{20}\right)\frac{2}{1} = \frac{21}{10} \end{aligned}$$

  Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας, έστω p_8, θα είναι:

$$p_8(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{21}{10}}{\left(2+1\cdot\frac{21}{10}\right)^2}\right]^k\left(\frac{2+1\cdot\frac{21}{10}}{2\cdot 1\cdot\frac{21}{10}}\right).$$

- $\theta = 2$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$.

  Η τιμή του σταθερού ρυθμού του ασφαλίστρου, c, θα υπολογιστεί ως εξής:

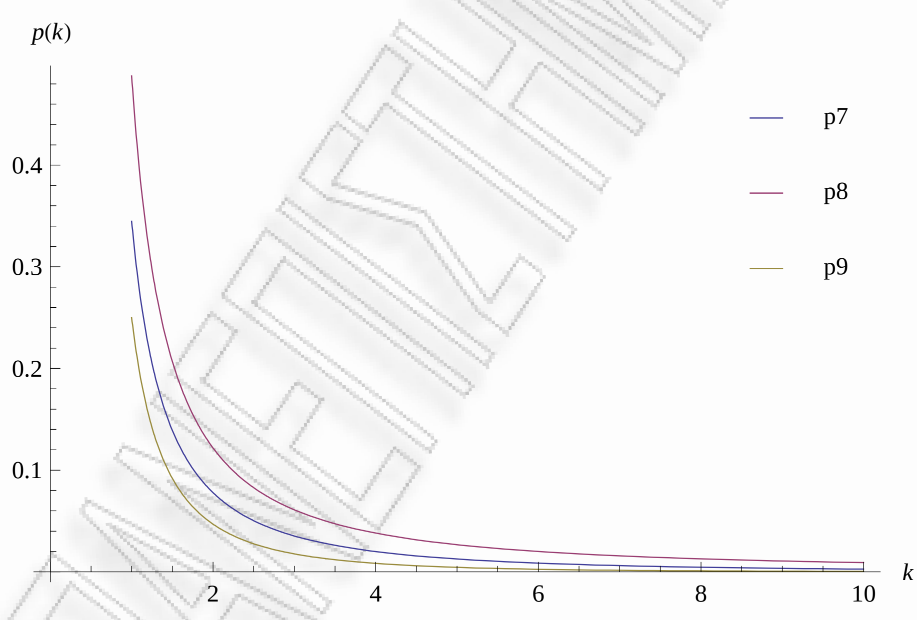
$$
\begin{aligned}
c &= (1+\theta)\frac{\lambda}{\beta} \\
c &= (1+2)\,\frac{2}{1} = 6
\end{aligned}
$$

  Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας, έστω p_9, θα είναι:

$$p_9(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 2\cdot 1\cdot 6}{(2+1\cdot 6)^2}\right]^k\left(\frac{2+1\cdot 6}{2\cdot 1\cdot 6}\right).$$

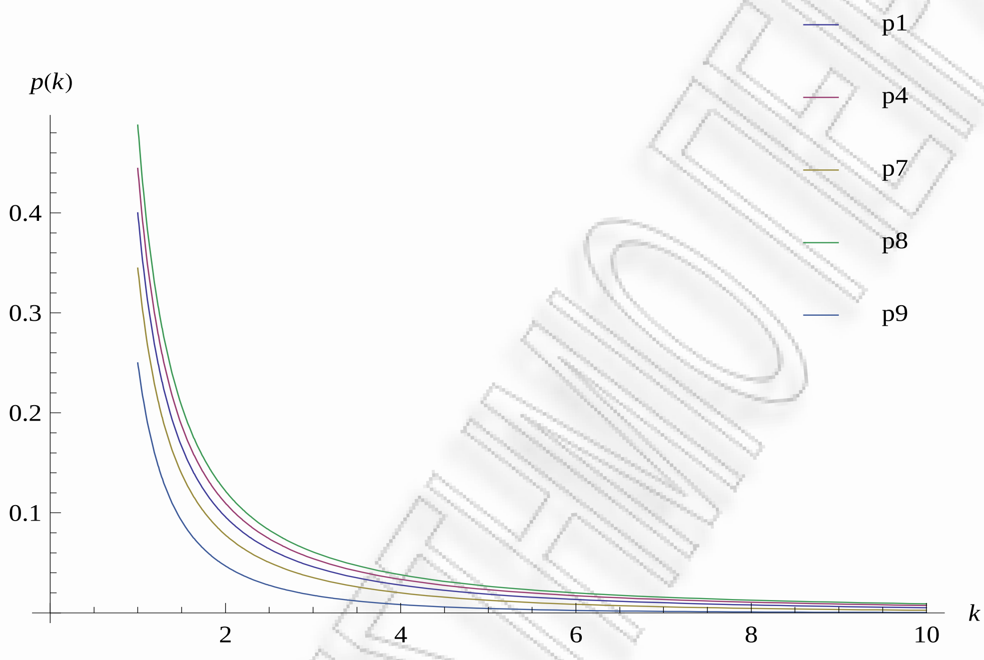
$\square$

Η από κοινού γραφική παράσταση των συναρτήσεων πιθανότητας μας δείχνει τη σχετική απόκλιση τους, καθώς μεταβάλλεται το περιθώριο ασφάλειας.



Σχήμα 3.9: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας p_7, p_8 και p_9.

Τελικώς, θα παρουσιάσουμε ένα γράφημα που θα περιλαμβάνει τις συναρτήσεις πιθανότητας για κάθε μία ξεχωριστή τιμή του συντελεστή ασφάλειας ϑ. Από τις δύο πρώτες υποθέσεις που έγιναν θα επιλεχτεί η πρώτη συνάρτηση πιθανότητας για κάθε μία υπόθεση, διότι μέσα στην 'κλάση' των συναρτήσεων πιθανότητας με τον ίδιο συντελεστή ασφάλειας ϑ, η συνάρτηση πιθανότητας δεν μεταβάλλεται.



Σχήμα 3.10: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $p_1,\ p_4,\ p_7,\ p_8$ και p_9.

Στο παραπάνω γράφημα διαφαίνεται ότι η δραματική μεταβολή του περιθωρίου ασφάλειας επηρεάζει σημαντικά τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό καθώς αυξάνεται το περιθώριο ασφάλειας, η πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία για ένα δεδομένο αριθμό αποζημιώσεων μειώνεται ραγδαία. Ειδικότερα στο γράφημα, η πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία με πέντε αποζημιώσεις για $\theta = 2$ και $\theta = 1/20$ είναι αντιστοίχως

$$p_9(5) = 0.0043 \quad \text{και} \quad p_8(5) = 0.0266$$

Με βάση τα παραπάνω γραφήματα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία εξαρτάται μόνο από το περιθώριο ασφάλειας, το οποίο είναι διαισθητικά λογικό, αφού το περιθώριο ασφάλειας ϑ καθορίζει ως ένα μεγάλο βαθμό την αποτροπή της χρεοκοπίας.

Γνωρίζουμε ότι για την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία ισχύει:

$$\Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\beta c}\right). \tag{3.2.1}$$

Ακόμη από τη σχέση (3.1.17), γνωρίζουμε ότι για το ρυθμό είσπραξης του ασφαλίστρου ισχύει:

$$c = (1 + \theta)\frac{\lambda}{\beta} \Leftrightarrow \beta c = (1 + \theta)\lambda$$

Συνεπώς από τις σχέσεις (3.2.1) και (3.1.17), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda(1+\theta)\lambda}{(\lambda + (1+\theta)\lambda)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + (1+\theta)\lambda}{2(1+\theta)\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda^2(1+\theta)}{(1+1+\theta)^2\lambda^2}\right]^k \cdot \left(\frac{(1+1+\theta)\lambda}{2(1+\theta)\lambda}\right). \end{aligned}$$

Τελικώς, προκύπτει ότι

$$\Pr\left(N_T = k \mid U(0) = 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{2+\theta}{2(1+\theta)}\right). \tag{3.2.2}$$

Από τη σχέση (3.2.2) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, N_T, μπορεί να εκφραστεί μόνο συναρτήσει του περιθωρίου ασφάλειας.

3.2.2 Η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{N_T}$

Στην προηγούμενη υπό-ενότητα δόθηκαν ορισμένα παραδείγματα για την ελλειμματική τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της μη-ελλειμματικής τ.μ. $\widetilde{N_T}$, δηλαδή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία δοθέντος ότι η χρεοκοπία θα συμβεί.

Στην παρούσα φάση θα διακρίνουμε μόνο τις περιπτώσεις 4 και 9, έτσι ώστε να διαμορφώσουμε ένα αρχικό συμπέρασμα για μία «φυσιολογική» και μία ακραία τιμή του περιθωρίου ασφάλειας. Ας συμβολίζεται με $\widetilde{p_i}(k)$, $i = 4, 9$ η συνάρτηση πιθανότητας.

Επομένως, από τη σχέση (3.1.20) γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία ισχύει

$$\widetilde{p}(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\lambda}\right).$$

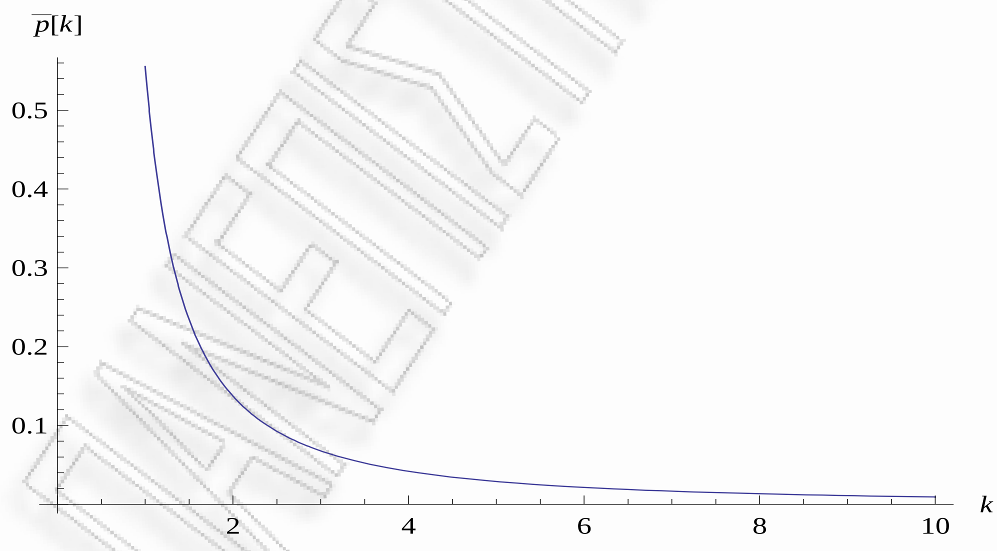
- 4. $\theta = 1/4$, $c = 1$, $\beta = 1$.

  Ακόμη, γνωρίζουμε ότι η τιμή της παραμέτρου λ ισούται με 4/5.

  Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ θα είναι:

$$\widetilde{p_4}(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4 \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 \cdot 1}{\left(\frac{4}{5} + 1 \cdot 1\right)^2}\right]^k \left(\frac{\frac{4}{5} + 1 \cdot 1}{2 \cdot \frac{4}{5}}\right).$$

  Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ θα είναι:



Σχήμα 3.11: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ με ϑ=1/4, $c = 1$, β=1, λ=4/5

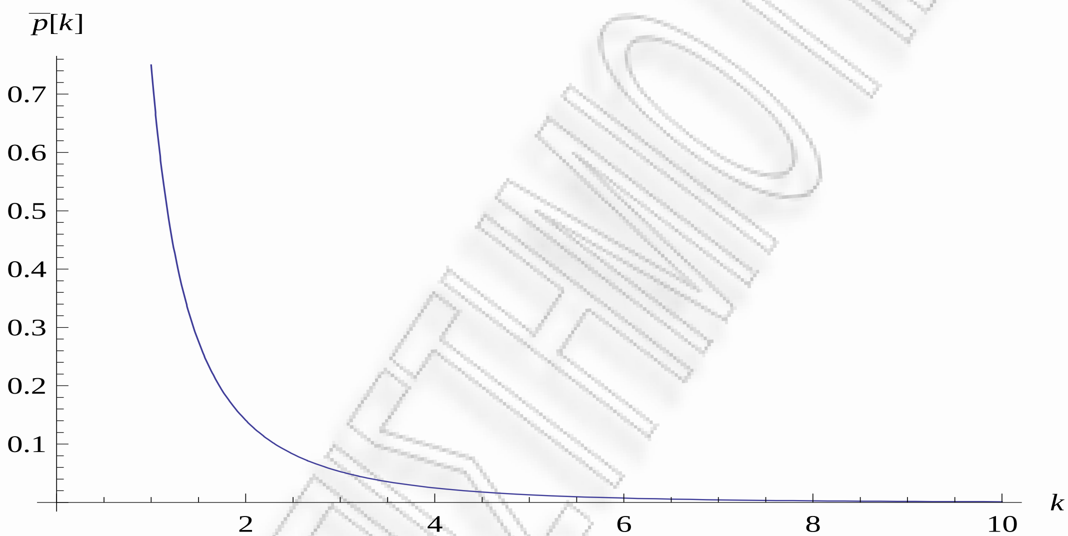
- 9. $\theta = 2$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$.

Η τιμή του σταθερού ρυθμού του ασφαλίστρου, c, έχει υπολογιστεί και ισούται με 6.

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p_9}$, θα είναι:

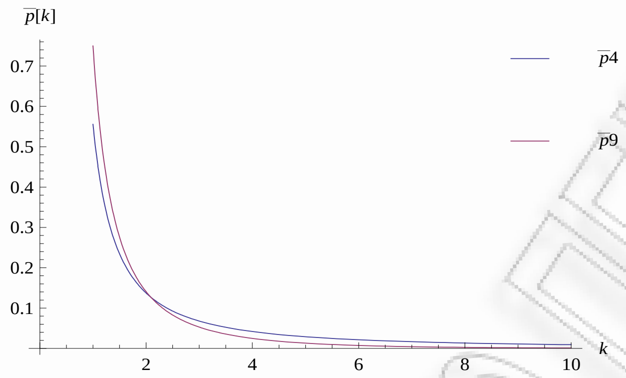
$$\widetilde{p_9}(k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 2\cdot 1\cdot 6}{(2+1\cdot 6)^2}\right]^k\left(\frac{2+1\cdot 6}{2\cdot 2}\right).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας $\widetilde{p_9}$ θα είναι:



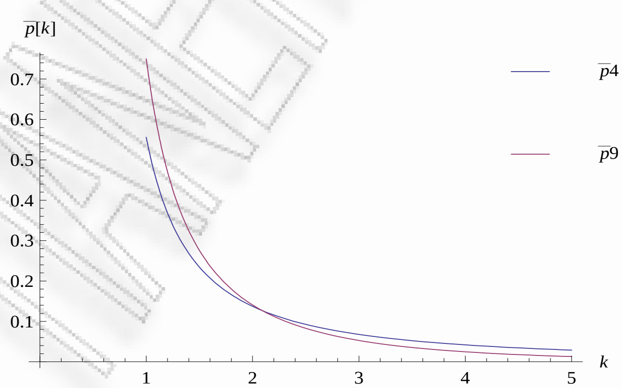
Σχήμα 3.12: Γράφημα της συνάρτησης πιθανότητας $\widetilde{p_9}$ με ϑ=2, $c = 6$, β=1, λ=2

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα κοινό γράφημα για τις συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$.



Σχήμα 3.13: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$.

Στο παραπάνω γράφημα 3.13 παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$ πιθανώς να τέμνονται για κάποια τιμή του $k < 3$. Για το λόγο αυτό παραθέτουμε ένα όμοιο γράφημα στο οποίο θα περιορίσουμε τον άξονα των τετμημένων ως το σημείο 5.



Σχήμα 3.14: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$ για $k < 5$.

Είναι φανερό ότι για κάποιο k_1, οι δυο συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$ είναι ίσες. Αυτό είναι απολύτως λογικό αφού αντιστοιχούν στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$, η οποία είναι μη-ελλειμματική, και θα πρέπει το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων τους να ισούται με τη μονάδα. Αν δεν τέμνονται, τότε το άθροισμα των πιθανοτήτων για μία από τις δύο περιπτώσεις δεν θα ισούται με τη μονάδα, και κατ' επέκταση δεν θα ήταν κανονική η προκείμενη τυχαία μεταβλητή. Για να βρούμε τη ζητούμενη τιμή του k_1 αρκεί να εξισώσουμε τις δύο συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$.

Για το λόγο αυτό, για κάποιο $k_1 \geq 1$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\widetilde{p_4}(k_1) &= \widetilde{p_9}(k_1) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k_1-\frac{1}{2}\right)}{k_1!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot\frac{4}{5}\cdot 1\cdot 1}{\left(\frac{4}{5}+1\cdot 1\right)^2}\right]^{k_1}\left(\frac{\frac{4}{5}+1\cdot 1}{2\cdot\frac{4}{5}}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(k_1-\frac{1}{2}\right)}{k_1!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4\cdot 2\cdot 1\cdot 6}{(2+1\cdot 6)^2}\right]^{k_1}\left(\frac{2+1\cdot 6}{2\cdot 2}\right) \\
\Leftrightarrow \left[\frac{\frac{16}{5}}{\left(\frac{9}{5}\right)^2}\right]^{k_1}\left(\frac{\frac{9}{5}}{\frac{8}{5}}\right) &= \left[\frac{48}{(8)^2}\right]^{k_1}\left(\frac{8}{4}\right) \\
\Leftrightarrow \left[\frac{80}{81}\right]^{k_1}\cdot\frac{9}{8} = \left[\frac{3}{4}\right]^{k_1}\cdot 2 \ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{320}{243}\right]^{k_1} = \frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας το φυσικό λογάριθμο της τελευταίας σχέσης, λαμβάνουμε:

$$
\begin{aligned}
k_1\cdot\ln\left[\frac{320}{243}\right] &= \ln\left[\frac{16}{9}\right] \\
\Leftrightarrow k_1 &= \frac{\ln(16/9)}{\ln(320/243)}
\end{aligned}
$$

Τελικώς προκύπτει ότι

$$k_1 = 2.09026041$$

Συνεπώς, από το γράφημα 3.14 παρατηρούμε ότι μέχρι την τιμή k_1 η συνάρτηση πιθανότητας $\widetilde{p_9}$ βρίσκεται πάνω από τη συνάρτηση πιθανότητας $\widetilde{p_4}$, ενώ, μετά την τιμή k_1 αντιστρέφονται οι συσχετισμοί. Διαισθητικά, όσο αυξάνεται το πλήθος των αποζημιώσεων που αποφέρει τη χρεοκοπία, η πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία για δεδομένη τιμή του k διαφέρει σημαντικά για τις δύο συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_4}$ και $\widetilde{p_9}$, δίχως αυτό να σημαίνει ότι και για μεγάλες τιμές του k ισχύει το ίδιο. Προφανώς, για αρκετά μεγάλες τιμές του k οι αντίστοιχες πιθανότητες θα τείνουν να συγκλίνουν.

3.3 Αριθμητικές εφαρμογές για τη βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία

Μία σημαντική ποσότητα που εισήχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι η βαθμίδα αποτυχίας. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται κυρίως στη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας και πώς αλλάζει στη μεταβολή των παραμέτρων. Η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας είναι διαφορετική αναλόγως με την κατανομή. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι η εκθετική κατανομή της οποίας η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή, δηλαδή δεν παρουσιάζει κάποια ανοδική ή καθοδική πορεία, λόγω της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης (βλέπε Κούτρας(2004)). Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή, κι ακόμα, ότι η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας της είναι γνησίως φθίνουσα, καθώς έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι για την εν λόγω κατανομή ισχύει

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} < 1 \ \ \forall n \geq 2$$

Επιπλέον σύμφωνα με τους $Willmot$ & Lin(2001)),για την κατανομή $ETNB$ ισχύει

$$p_{n+1}^2 \leq p_n p_{n+2} \ \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Με βάση αυτή τη σχέση μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας της $ETNB$ κατανομής είναι φθίνουσα (βλέπε $Willmot$ & Lin(2001)), και συνεπώς η $ETNB$ κατανομή λέγεται $discrete - Decreasing\ Failure\ Rate(D - DFR)$.

Ένα στοιχείο για τη βαθμίδα αποτυχίας είναι ότι εφαρμόζεται μόνο για μη-ελλειμματικές τυχαίες μεταβλητές. Δεδομένου ότι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία είναι ελλειμματική, τα παραδείγματα που έπονται θα αναφέρονται στην τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, δηλαδή στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$.

Για το λόγο αυτό η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}(k)$, που αντιστοιχεί στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$ εκφράζεται από τη σχέση (3.1.20). Επομένως,

$$\widetilde{p}(k) = \Pr(\widetilde{N_T} = k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{4\lambda\beta c}{(\lambda + \beta c)^2}\right]^k \cdot \left(\frac{\lambda + \beta c}{2\lambda}\right)$$

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι η διακριτή βαθμίδα αποτυχίας, h_k, ορίζεται ως εξής:

$$h(k) = \Pr\left(\widetilde{N_T} = k \mid \widetilde{N_T} \geq k\right) = \frac{\widetilde{p}(k)}{a(k) + \widetilde{p}(k)} \tag{3.3.1}$$

όπου $\widetilde{p}(k)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας, και, $a(k)$ είναι η δεξιά ουρά της κατανομής για την οποία ισχύει

$$a(k) = \Pr(\widetilde{N_T} > k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p}(n)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής παρουσιάζει ορισμένες μαθηματικές δυσκολίες, και για το λόγο αυτό, ο αναλυτικός τύπος της δεξιάς ουράς της κατανομής είναι ιδιαίτερα δύσχρηστος, και κατ΄ επέκταση το ίδιο ισχύει και για τη βαθμίδα αποτυχίας. Οι μαθηματικές εκφράσεις των δυο προαναφερθέντων ποσοτήτων παραθέτονται στο παράρτημα.

Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες αριθμητικές εφαρμογές για τη βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής $ETNB$, με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων όπως με τα παραδείγματα που δόθηκαν για τη συνάρτηση πιθανότητας, για να διαπιστωθεί η μεταβολή της βαθμίδας αποτυχίας καθώς αλλάζουν οι τιμές των παραμέτρων. Επειδή, και η βαθμίδα αποτυχίας είναι συνάρτηση του περιθωρίου ασφάλειας, αναμένουμε ότι θα μεταβάλλεται μόνο όταν αλλάζει και η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας. Αντιστοίχως με τη συνάρτηση πιθανότητας, η βαθμίδα αποτυχίας θα συμβολίζεται με $h_i(k)\ , i = 1, 2, 3, \ldots$ για κάθε ομάδα παραμέτρων.

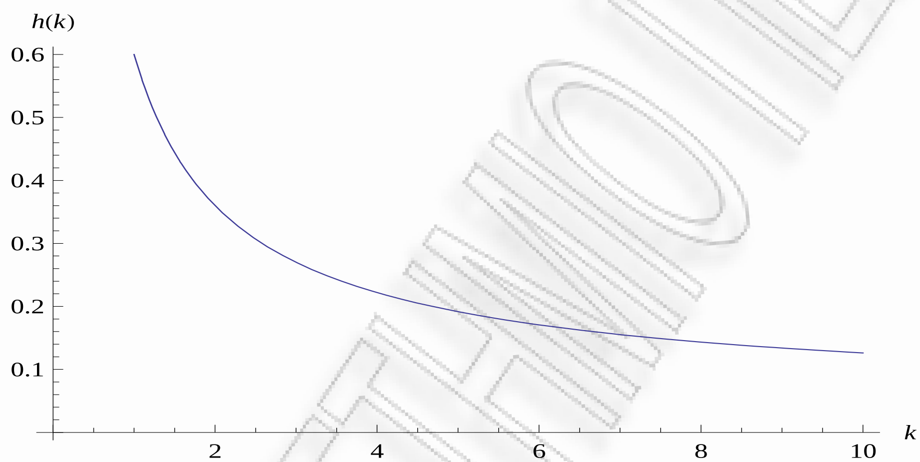
- 1. $\theta = 1/2$, $c = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 2/3$.

  Η βαθμίδα αποτυχίας, h_1, θα είναι:

$$h_1(k) = \frac{\widetilde{p_1}(k)}{a_1(k) + \widetilde{p_1}(k)}$$

  όπου $a_1(k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p_1}(n)$

  Η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας h_1 θα είναι:



Σχήμα 3.15: Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας h_1 με ϑ=1/2, $c = 1$, β=1, λ=2/3

Στην προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις πιθανότητας p_1, p_2 και p_3 είναι ίσες, αφού το περιθώριο ασφάλειας είναι ίδιο.

Ακόμη η σχέση (3.1.18) μας υπενθυμίζει ότι

$$\widetilde{p}(k) = \frac{p(k)}{\psi(0)} \tag{3.3.2}$$

Συμπερασματικά, από τις σχέσεις (3.3.2) και (3.2.2) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}\right]^k \left(\frac{2+\theta}{2(1+\theta)}\right) \cdot (1+\theta) \\
\Rightarrow \widetilde{p}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}\right]^k \frac{2+\theta}{2}. \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Επιπλέον, και οι συναρτήσεις πιθανότητας $\widetilde{p_1}(k)$, $\widetilde{p_2}(k)$ και $\widetilde{p_3}(k)$ που αντιστοιχούν στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$ θα είναι ίσες, καθώς έχουν το ίδιο περιθώριο ασφάλειας. Η πρακτική ερμηνεία αυτού είναι ότι θα έχουν και την ίδια βαθμίδα αποτυχίας.

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \widetilde{p_1}(k) &= \widetilde{p_2}(k) \ , \ \forall k \geq 1 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{p_1}(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{p_1}(k) \end{aligned}$$

Συνεπώς, και οι αντίστοιχες δεξιές ουρές $a_1(k)$ και $a_2(k)$ θα είναι ίσες.

Τελικώς, βάσει της σχέσης (3.3.1) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και οι βαθμίδες αποτυχίας είναι ίσες. Δηλαδή,

$$h_1(k) = h_2(k)$$

□

Για το λόγο αυτό οι βαθμίδες αποτυχίας $h_2(k)$ και $h_3(k)$ παραλείπονται.

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε μόνο τις περιπτώσεις 4,7,8 και 9 ακολουθώντας την αρίθμηση όπως προέκυψε για τις αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανότητας, αφού οι περιπτώσεις 5 και 6 μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με την περίπτωση 4 για τη βαθμίδα αποτυχίας.

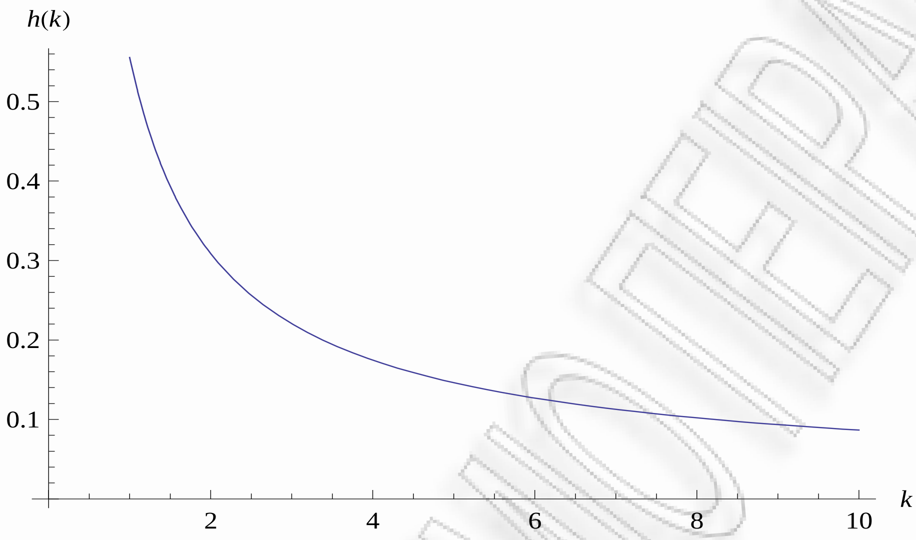
- 4. $\theta = 1/4$, $c = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 4/5$.

Η βαθμίδα αποτυχίας, h_4, θα είναι:

$$h_4(k) = \frac{\widetilde{p_4}(k)}{a_4(k) + \widetilde{p_4}(k)}$$

όπου $a_4(k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p_4}(n)$

Η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας h_4 θα είναι:



Σχήμα 3.16: Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας h_4 με ϑ=1/4, $c = 1$, β=1, λ=4/5

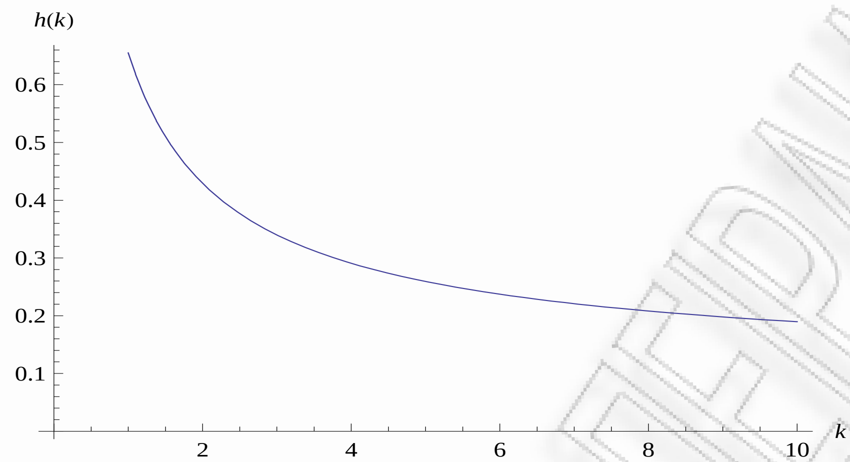
- 7. $\theta = 9/10$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$, $c = 19/5$.

  Η βαθμίδα αποτυχίας, h_7, θα είναι:

$$h_7(k) = \frac{\widetilde{p_7}(k)}{a_7(k) + \widetilde{p_7}(k)}$$

όπου $a_7(k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p_7}(n)$

Η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας h_7 θα είναι:



Σχήμα 3.17: Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας h_7 με ϑ=9/10, $c = 19/5$, β=1, λ=2

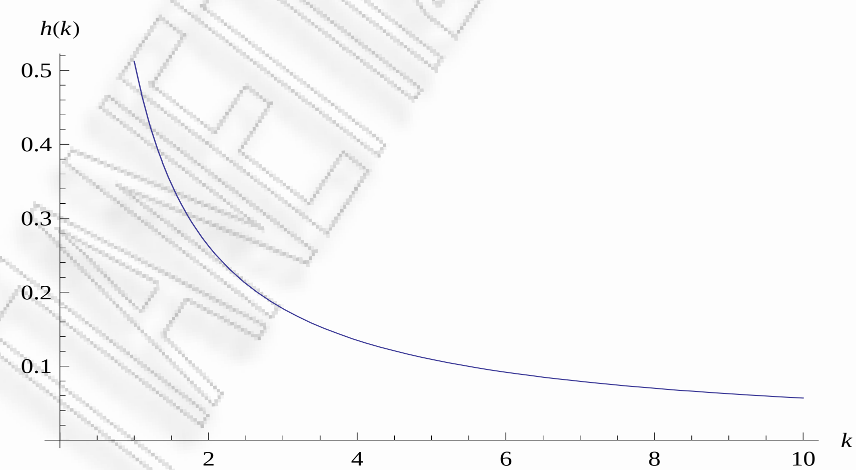
- 8. $\theta = 1/20$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$, $c = 21/10$.

  Η βαθμίδα αποτυχίας, h_8, θα είναι:

$$h_8(k) = \frac{\widetilde{p_8}(k)}{a_8(k) + \widetilde{p_8}(k)}$$

  όπου $a_8(k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p_8}(n)$

  Η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας h_8 θα είναι:



Σχήμα 3.18: Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας h_8 με ϑ=1/20, $c = 21/10$, β=1, λ=2

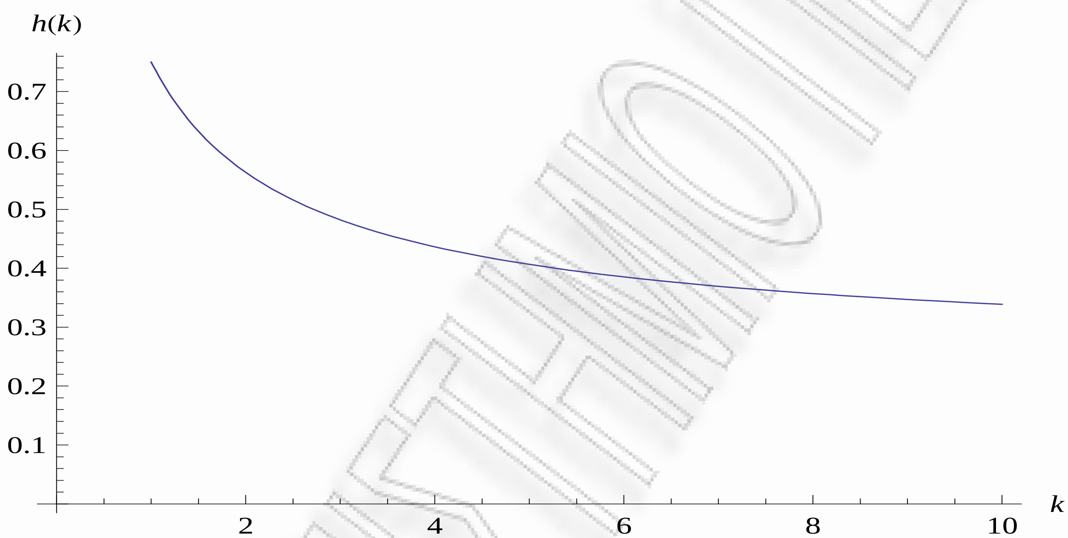
- 9. $\theta = 2$, $\lambda = 2$, $\beta = 1$, $c = 6$.

  Η βαθμίδα αποτυχίας, h_9, θα είναι:

$$h_9(k) = \frac{\widetilde{p_9}(k)}{a_9(k) + \widetilde{p_9}(k)}$$

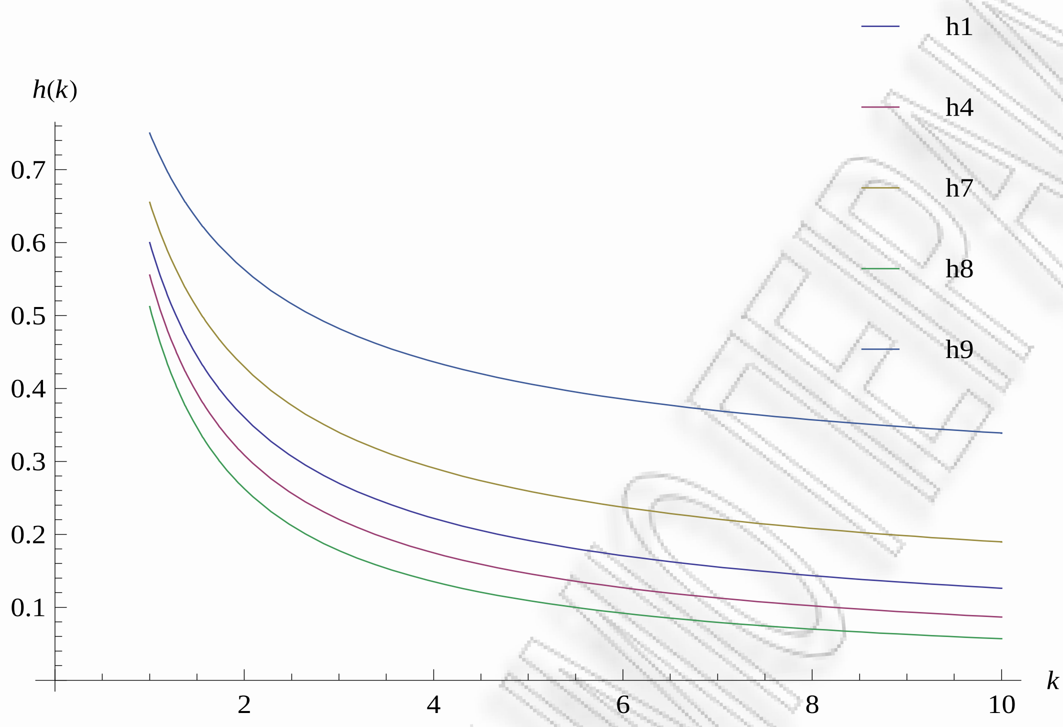
  όπου $a_9(k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \widetilde{p_9}(n)$

  Η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας h_9 θα είναι:



Σχήμα 3.19: Γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας h_9 με ϑ=2, $c = 6$, β=1, λ=2

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το παρακάτω γράφημα, στο οποίο διακρίνονται οι βαθμίδες αποτυχίας h_1, h_4, h_7, h_8 και h_9, όπου φαίνεται η μεταξύ τους 'διαγραμματική' απόσταση καθώς μεταβάλλεται η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας θ.



Σχήμα 3.20: Γράφημα των βαθμίδων αποτυχίας h_1, h_4, h_7, h_8 και h_9

Στο παραπάνω συγκεντρωτικό γράφημα των βαθμίδων αποτυχίας για όλες τις περιπτώσεις, διακρίνουμε μία ομοιότητα και μία διαφορά με το αντίστοιχο συγκεντρωτικό γράφημα για τις συναρτήσεις πιθανότητας. Η ομοιότητα είναι ότι καθώς αυξάνεται το περιθώριο ασφάλειας, η βαθμίδα αποτυχίας μετατοπίζεται «προς τα πάνω» στο κανονικό σύστημα των αξόνων. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας μένει ανεπηρέαστη στη μεταβολή του περιθωρίου ασφάλειας, κάτι που δεν συνέβαινε με τη συνάρτηση πιθανότητας.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που προκύπτει από το γράφημα 3.20, είναι ότι η βαθμίδα αποτυχίας για κάθε μία περίπτωση είναι φθίνουσα. Δηλαδή, κρατώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου $r = -1/2$ και για τις διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφάλειας θ η κατανομή $ETNB$ είναι $D - DFR$, όπως είχαμε αναφέρει και στην αρχή της παρούσας ενότητας.

Κεφάλαιο 4

Μέτρα ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα εξετάσουμε ορισμένα βασικά μεγέθη της $ETNB$ κατανομής όπως οι κεντρικές ροπές της, ενώ θα δοθεί ο αναλυτικός τύπος για τη διασπορά της κατανομής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αναμένεται να παρουσιάσει η λοξότητα της κατανομής $ETNB$, καθώς και το πώς εκφράζεται η λοξότητα μέσω του συντελεστή ασυμμετρίας. Όλες οι προαναφερθείσες ποσότητες θα εξεταστούν για την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Επιπλέον, θα γίνουν δύο προσεγγίσεις της $ETNB$ κατανομής με μία γεωμετρική κατανομή σε κάθε περίπτωση με διαφορετικές παραμέτρους.

4.1 Η λοξότητα ως μέτρο ασυμμετρίας

Στη θεωρία των πιθανοτήτων αλλά και στην στατιστική επιστήμη, πέραν των μέτρων κεντρικής τάσης και διασποράς, σημαντικά είναι και τα μέτρα που αφορούν τη μορφή και το σχήμα μιας κατανομής. Η λοξότητα είναι ένα μέτρο ασυμμετρίας το οποίο χρησιμεύει για να διαπιστωθεί αν μία κατανομή είναι συμμετρική ή ασύμμετρη, και κατ΄ επέκταση αν είναι θετικώς ασύμμετρη ή αρνητικώς ασύμμετρη. Ποσοτικά, το πρόσημο της λοξότητας καθορίζει το είδος της συμμετρίας, υπό την έννοια ότι αν είναι θετικό, τότε η κατανομή παρουσιάζει μία θετική ασυμμετρία, ενώ, στην αντίθετη περίπτωση η κατανομή είναι αρνητικώς ασύμμετρη. Στην περίπτωση κατά την οποία η λοξότητα είναι μηδέν, τότε η κατανομή είναι συμμετρική.

Ποιοτικά, η αρνητική (θετική) λοξότητα καταδεικνύει ότι η αριστερή (δεξιά) ουρά της κατανομής είναι μακρύτερη από τη δεξιά (αριστερή) ουρά και ότι ο κύριος όγκος των δεδομένων βρίσκεται εκ δεξιών (αριστερών) της μέσης τιμής της κατανομής. Στην περίπτωση όπου η λοξότητα είναι μηδέν, τότε το πλήθος των δεδομένων ισοκατανέμεται εκατέρωθεν της μέσης τιμής της κατανομής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συμμετρικής κατανομής είναι η κανονική κατανομή.

Η λοξότητα της κατανομής μαθηματικά εκφράζεται από το συντελεστή ασυμμετρίας γ_1, του οποίου ο συμβολισμός οφείλεται στον *Karl Pearson*, και διατυπώνεται ως εξής:

Ορισμός 4.1.1. *Έστω για μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κατανομή F για την οποία ισχύει ότι οι δύο πρώτες κεντρικές ροπές υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, δηλαδή*

$$E\left(X^k\right) < \infty \quad , \quad k = 1, 2.$$

Τότε, ο συντελεστής ασυμμετρίας γ_1, ορίζεται να είναι η τρίτη τυποποιημένη ροπή, και εκφράζεται από την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)^3\right] \tag{4.1.1}$$

όπου, $E(X)$ είναι η πρώτη κεντρική ροπή ή μέση τιμή της κατανομής F, και με $Var(X)$ συμβολίζεται η διασπορά της κατανομής, για την οποία ισχύει:

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X),$$

όπου με $E\left(X^2\right)$ συμβολίζεται η δεύτερη κεντρική ροπή της κατανομής F. □

Ακόμα, για το συντελεστή ασυμμετρίας μπορούμε να δώσουμε μία περισσότερο εύχρηστη έκφραση, η οποία προκύπτει από τη σχέση (4.1.1).

$$\gamma_1 = \frac{E\left\{[X - E(X)]^3\right\}}{\left(\sqrt{Var(X)}\right)^3}. \tag{4.1.2}$$

Όσον αφορά για τον παρονομαστή του συντελεστή ασυμμετρίας είναι εμφανές ότι εξαρτάται από τη διασπορά της εκάστοτε κατανομής. Όμως για τον αριθμητή χρειάζονται οι τρεις πρώτες ροπές της κατανομής όπως μπορούμε να διακρίνουμε παρακάτω.

$$\begin{aligned}
[X - E(X)]^3 &= [X - E(X)]\left[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)\right] \\
&= X^3 - 2X^2E(X) + XE^2(X) - X^2E(X) + 2XE^2(X) - E^3(X).
\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$[X - E(X)]^3 = X^3 - 3X^2E(X) + 3XE^2(X) - E^3(X). \tag{4.1.3}$$

Επιπροσθέτως, αν πάρουμε τη μέση τιμή της σχέσης (4.1.3) λαμβάνουμε

$$E\left\{[X-E(X)]^3\right\} = E\left(X^3\right) - 3E\left(X^2\right)E(X) + 3E(X)E^2(X) - E^3(X)$$

κι εφόσον ισχύει $E(X)\cdot E^2(X) = E^3(X)$, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$E\left\{[X-E(X)]^3\right\} = E\left(X^3\right) - 3E\left(X^2\right)E(X) + 2E^3(X). \tag{4.1.4}$$

4.2 Υπολογισμός της τρίτης ροπής της $ETNB$ κατανομής

Προκειμένου να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για το συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής, θα πρέπει να προηγηθεί ο υπολογισμός της τρίτης κεντρικής ροπής της, όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 4.1. Ακόμη, απαιτείται και η εύρεση της διασποράς της $ETNB$ κατανομής που προϋποθέτει την ύπαρξη των ήδη γνωστών δύο πρώτων κεντρικών ροπών από την ενότητα 2.1.3.

Γνωρίζουμε ότι αν μία τυχαία μεταβλητή, έστω N, ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή με παραμέτρους r και p, τότε, από τη σχέση (2.1.28) η μέση τιμή της θα είναι

$$E(N) = -\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}$$

Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι η δεύτερη κεντρική ροπή της κατανομής $ETNB$, η οποία δίνεται από τη σχέση (2.1.31), εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση

$$E\left(N^2\right) = -\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}$$

Για να βρούμε την τρίτη ροπή, αρκεί να βρούμε την τρίτη παραγοντική ροπή από την ήδη γνωστή σχέση

$$E\left[N(N-1)(N-2)\right] = \frac{d^3}{dt^3}P_N(t)\mid_{t=1}. \tag{4.2.1}$$

Όμως, από τη σχέση (2.1.30), γνωρίζουμε ότι για τη δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της $ETNB$ κατανομής ισχύει

$$\frac{d^2}{dt^2}P_N(t) = -\frac{p^2r(r+1)(1-pt)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}}$$

Επομένως, η τρίτη παράγωγος της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της $ETNB$ κατανομής θα είναι

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}P_N(t) &= -\frac{1}{1-(1-p)^{-r}} \cdot \frac{d}{dt}\left[p^2 r(r+1)(1-pt)^{-r-2}\right] \\ &= -\frac{1}{1-(1-p)^{-r}}\left[-p^2 r(r+1)(r+2)(1-pt)^{-r-3} \cdot (-p)\right].\end{aligned}$$

Τελικώς, προκύπτει ότι

$$\frac{d^3}{dt^3}P_N(t) = -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-pt)^{-r-3}}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{4.2.2}$$

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να δώσουμε ένα γενικό μαθηματικό τύπο για τη $n-$οστή παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης της $ETNB$ κατανομής, ο οποίος αποδεικνύεται επαγωγικά.

$$\frac{d^n}{dt^n}P_N(t) = -\frac{p^n r(r+1)\cdots(r+n-1)(1-pt)^{-r-n}}{1-(1-p)^{-r}}.$$

Από τις σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2) για $t=1$, λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$E\left[N(N-1)(N-2)\right] = -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{4.2.3}$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της σχέσης (4.2.3), έχουμε

$$\begin{aligned}E\left[N(N-1)(N-2)\right] &= E\left[(N^2-N)(N-2)\right] = E\left[N^3-2N^2-N^2+2N\right] \\ &= E\left[N^3-3N^2+2N\right] \\ \Rightarrow E\left[N^3-3N^2+2N\right] &= -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}}{1-(1-p)^{-r}}.\end{aligned}$$

Τελικώς προκύπτει ότι,

$$E\left(N^3\right) - 3E\left(N^2\right) + 2E(N) = -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}}{1-(1-p)^{-r}}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (2.1.28) και (2.1.31) για τις δύο πρώτες κεντρικές ροπές της $ETNB$ κατανομής, προκύπτει

$$\begin{aligned} E\left(N^3\right) &= -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}}{1-(1-p)^{-r}} + 3 \cdot \left(-\frac{p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right) - \\ &- 2 \cdot \left(-\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right). \end{aligned}$$

Επομένως, η ακόλουθη σχέση μας δίνει την τρίτη κεντρική ροπή της $ETNB$ κατανομής.

$$E\left(N^3\right) = -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3} + 3p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}. \tag{4.2.4}$$

Υπολογισμός της διασποράς της $ETNB$ κατανομής

Η διασπορά μια τυχαίας μεταβλητής, έστω N, ορίζεται ως:

$$Var(N) = E\left(N^2\right) - E^2(N).$$

Γνωρίζοντας τις δύο πρώτες ροπές της $ETNB$ κατανομής μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά της. Από τις σχέσεις (2.1.28) και (2.1.31), έχουμε

$$\begin{aligned} Var(N) &= -\frac{p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}} - \left[-\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right]^2 \\ &= -\frac{p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}} - \frac{p^2 r^2 \left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} \\ \Rightarrow Var(N) &= -\frac{\left\{p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}\right\}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} - \\ &- \frac{p^2 r^2 \left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Σε αυτό το σημείο επιβάλλεται να αναφέρουμε, ότι, η διασπορά μίας κατανομής είναι πάντοτε μη αρνητική. Δεδομένου ότι ο παρονομαστής του κλάσματος της διασποράς της $ETNB$ κατανομής είναι θετικός, θα πρέπει η παράσταση στον αριθμητή, έστω A, να είναι αυστηρώς αρνητική. Επομένως, μία ικανή συνθήκη για να υφίσταται η διασπορά της $ETNB$ κατανομής, είναι η μαθηματική παράσταση A να είναι αρνητική. Δεν μπορεί να είναι μηδέν, διότι η μηδενική διασπορά συνεπάγεται ότι η κατανομή είναι εκφυλισμένη, το οποίο δεν ισχύει για την $ETNB$ κατανομή. Θεωρούμε την παράσταση A,

$$A = \left\{p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}\right\}\left[1-(1-p)^{-r}\right] + p^2r^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2$$

Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$A < 0$$

Επιπροσθέτως, από την ενότητα 2.1.2 γνωρίζουμε ότι η διασπορά μίας κατανομής που ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$ δίνεται από τη σχέση (2.1.19). Ακόμη, γνωρίζουμε από την ενότητα 2.1.3 ότι η κατανομή $ETNB$ ανήκει στην κλάση κατανομών $(a, b, 1)$ με $a = p$ και $b = (r-1)p$. Για τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής $ETNB$ στο σημείο $k = 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} \Pr(N=1) &= \frac{-r\Gamma(1+r)}{1!\Gamma(1+r)} \cdot \frac{p^1}{1-(1-p)^{-r}} \\ \Rightarrow \Pr(N=1) &= -\frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.1.19) και (4.2.6), μπορούμε να βρούμε τη διασπορά της κατανομής $ETNB$ με διαφορετικό τρόπο. Έχουμε,

$$\begin{aligned} Var(N) &= \frac{\left[p + (r-1)p - \frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}\right]\left[1 + \frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}\right]}{(1-p)^2} \\ &= \frac{\left[pr - \frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}\right]\left[1 + \frac{pr}{1-(1-p)^{-r}}\right]}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} Var(N) &= \frac{pr\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2 + (pr)^2\left[1-(1-p)^{-r}\right] - pr\left[1-(1-p)^{-r}\right] - (pr)^2}{(1-p)^2\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} \\ &= \frac{(pr)^2\left[-(1-p)^{-r}\right] + pr\left[1-(1-p)^{-r}\right]\left\{-(1-p)^{-r}\right\}}{(1-p)^2\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}. \end{aligned}$$

Τελικώς, μία πιο εύχρηστη έκφραση για τη διασπορά της κατανομής $ETNB$ θα δίνεται από τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο:

$$Var(N) = -\frac{pr(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}+pr\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} \tag{4.2.7}$$

Ακόμη, για τον παρονομαστή του συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ ισχύει

$$Var(N)^{\frac{3}{2}} = \left\{-\frac{pr(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}+pr\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

ή

$$Var(N)^{\frac{3}{2}} = \left\{\frac{\sqrt{pr(1-p)^{-r-2}\left[(1-p)^{-r}-1-pr\right]}}{1-(1-p)^{-r}}\right\}^3 \tag{4.2.8}$$

4.3 Ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$

Έχοντας υπολογίσει την τρίτη ροπή και τη διασπορά της $ETNB$ κατανομής, μπορούμε να βρούμε το συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής για να μελετήσουμε τη λοξότητα της.

Για τον αριθμητή του κλάσματος του συντελεστή ασυμμετρίας ισχύει η σχέση (4.1.4):

$$E\left\{[N-E(N)]^3\right\} = E\left(N^3\right) - 3E\left(N^2\right)E(N) + 2E^3(N)$$

Υπολογίζοντας τους επιμέρους όρους διαδοχικά, παίρνουμε

$$E^3(N) = \left[-\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right]^3 = -\frac{p^3r^3\left[(1-p)^{-r-1}\right]^3}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3} \tag{4.3.1}$$

και

$$\begin{aligned} E\left(N^2\right)E(N) &= \left(-\frac{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}+pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right)\cdot\left(-\frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}}\right) \\ \Rightarrow E\left(N^2\right)E(N) &= \frac{p^3r^2(r+1)(1-p)^{-r-2}(1-p)^{-r-1}+p^2r^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.4), (4.3.1) και (4.3.2), λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
E\left\{[N-E(N)]^3\right\} &= -\frac{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}+3p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2}}{1-(1-p)^{-r}} - \\
&- \frac{pr(1-p)^{-r-1}}{1-(1-p)^{-r}} - \\
&- 3\left(\frac{p^3 r^2 (r+1)(1-p)^{-r-2}(1-p)^{-r-1}+p^2 r^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}\right) + \\
&+ 2\left(-\frac{p^3 r^3\left[(1-p)^{-r-1}\right]^3}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3}\right).
\end{aligned}
$$

Αν θέσουμε $B=E\left\{[N-E(N)]^3\right\}$, τότε

$$
\begin{aligned}
B &= -\frac{\{p^3 r(r+1)(r+2)(1-p)^{-r-3}+3p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2}\}\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3} - \\
&- \frac{pr(1-p)^{-r-1}\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3} - \\
&- \frac{\left\{3p^3 r^2 (r+1)(1-p)^{-r-2}(1-p)^{-r-1}+3p^2 r^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2\right\}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3} - \\
&- \frac{2p^3 r^3\left[(1-p)^{-r-1}\right]^3}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^3}.
\end{aligned} \tag{4.3.3}
$$

Χάριν ευκολίας αν θέσουμε

$$
a(p)=1-(1-p)^{-r} \quad \text{και} \quad b(p)=(1-p)^{-r-1},
$$

τότε η σχέση (4.3.3) απλουστεύεται σημαντικά κι εκφράζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{pr\cdot b(p)\left\{-p^2(r+1)(r+2)(1-p)^{-2}\left[a(p)\right]^2\right\}}{\left[a(p)\right]^3} + \\
&+ \frac{pr\cdot b(p)\left\{-3p(r+1)(1-p)^{-1}\left[a(p)\right]^2-\left[a(p)\right]^2\right\}}{\left[a(p)\right]^3} + \\
&+ \frac{pr\cdot b(p)\left\{-3p^2 r(r+1)(1-p)^{-r-2}a(p)-3prb(p)a(p)-2p^2r^2\left[b(p)\right]^2\right\}}{\left[a(p)\right]^3}
\end{aligned} \tag{4.3.4}
$$

Επιπροσθέτως, ο παρονομαστής του συντελεστή ασυμμετρίας απλουστεύεται σημαντικά αν λάβουμε υπόψιν τις τιμές των $a(p)$ και $b(p)$. Επομένως η σχέση (4.2.8) γίνεται:

$$Var(N)^{\frac{3}{2}} = \left\{ \frac{\sqrt{pr(1-p)^{-1}b(p)\left[-b(p)-pr\right]}}{a(p)} \right\}^3. \tag{4.3.5}$$

Τελικώς, το πηλίκο των δύο ποσοτήτων στις σχέσεις (4.3.4) και (4.3.5) συνθέτουν το συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής, παράγοντας μία αρκετά δύσχρηστη έκφραση του. Τετριμμένα, αξίζει να σημειώσουμε ότι για το συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής ισχύει:

$$\gamma_1 = \frac{B}{Var(N)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.3.6}$$

4.4 Ο συντελεστής ασυμμετρίας της τ.μ. $\widetilde{N_T}$

Έχοντας βρει έως τώρα ορισμένα βασικά μέτρα για την $ETNB$ κατανομή, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει να μελετήσουμε τη λοξότητα της κατανομής που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία. Επειδή όμως, ο αριθμός των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία, δηλαδή η N_T, είναι μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, δεν ακολουθεί μία συγκεκριμένη κατανομή. Συνεπώς, δεν μπορούμε να αναφερόμαστε στον συντελεστή ασυμμετρίας για κάποια κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής. Επομένως, οποιαδήποτε αναφορά στο συντελεστή ασυμμετρίας θα αφορά την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, δηλαδή στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$.

Γνωρίζουμε από την ενότητα 3.1 ότι η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή με παραμέτρους r και p, οι οποίοι ισούνται με

$$r = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad p = \frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2}.$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, μπορούμε να σχηματίσουμε μία άποψη για τη λοξότητα της κατανομής $ETNB$ που ακολουθεί η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ μέσω του συντελεστή ασυμμετρίας γ_1, για δεδομένες τιμές των παραμέτρων r και p. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αναλυτικός τύπος (4.3.6) για το συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$, όπως υπολογίστηκε στην ενότητα 4.3, εκφράζεται δύσκολα σε μία μόνο γραμμή. Για το λόγο αυτό, θα παραθέσουμε τις τιμές του συντελεστή λοξότητας όπως αυτές υπολογίστηκαν από το μαθηματικό πρόγραμμα $Mathematica$.

Επιπλέον, για την εύρεση του συντελεστή ασυμμετρίας της τ.μ. $\widetilde{N_T}$ απαιτείται ο καθορισμός της τιμής της παραμέτρου p, η οποία εκφράζεται συναρτήσει των παραμέτρων λ, β και c. Εναλλακτικά, η παράμετρος p δύναται να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του περιθωρίου ασφάλειας. Επομένως, από τη σχέση (3.1.17) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} p &= \frac{4\lambda\beta c}{(\lambda+\beta c)^2} \\ &= \frac{4\lambda(1+\theta)\lambda}{[\lambda+(1+\theta)\,\lambda]^2} \\ \Rightarrow p &= \frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Με βάση τη σχέση (4.4.1), μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ για δεδομένες τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.3.4), (4.3.5) και (4.3.6) όπως ορίστηκαν στην ενότητα 4.3. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τις τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας για κάθε δυνατή τιμή της παραμέτρου p, υπολογισμένη για όλες τις δυνατές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας που έχουν αναφερθεί στην ενότητα 3.2. Επιπροσθέτως, έχει εξεταστεί και η περίπτωση όπου η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας είναι παραδόξως μεγάλη, όπως $\theta = 3$.

θ	p	γ_1
0.05	0.999405	19.2113
0.25	0.987654	9.01881
0.5	0.96	6.75524
0.9	0.903686	5.483
2	0.75	4.49073
3	0.64	4.26028

Πίνακας 4.4.1: Τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας για την τ.μ. $\widetilde{N_T}$

Ο πίνακας 4.4.1 παρουσιάζει ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Κατ΄ αρχάς, παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ του περιθωρίου ασφάλειας και της παραμέτρου p είναι αντιστρόφως ανάλογη. Ακόμη, όσο περισσότερο αυξάνεται η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας τόσο λιγότερο μειώνεται ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής.

Μία αξιοσημείωτη παρατήρηση που πρέπει να γίνει, είναι ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ που ακολουθεί η τ.μ $\widetilde{N_T}$ είναι θετικός, για όλες τις θετικές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας που εξετάσαμε. Συνεπώς, η κατανομή $ETNB$ με δεδομένη τιμή $r = -1/2$ και για τις διάφορες τιμές του περιθωρίου ασφάλειας του πίνακα 4.4.1 παρουσιάζει μία θετική ασυμμετρία.

Με βάση το παραπάνω συμπέρασμα, μπορούμε να εικάσουμε ότι η κατανομή $ETNB$ με δεδομένη τιμή $r = -1/2$ παρουσιάζει μία θετική ασυμμετρία για κάποιο εύρος τιμών του περιθωρίου ασφάλειας θ. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει ο συντελεστής ασυμμετρίας να είναι θετικός, προϋποθέτοντας ότι το περιθώριο ασφάλειας θ λαμβάνει θετικές τιμές. Ο συντελεστής ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής δίνεται από τη σχέση (4.3.6) και ισούται με

$$\gamma_1 = \frac{B}{Var(N)^{\frac{3}{2}}}.$$

Στην επόμενη πρόταση διαπιστώνεται ότι με δεδομένη τιμή $r = -1/2$, ο συντελεστής ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ είναι πάντοτε θετικός για κάθε τιμή της παραμέτρου p.

Πρόταση 4.4.1. *Έστω μία τυχαία μεταβλητή N, η οποία ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με δεδομένη τιμή της παραμέτρου $r = -1/2$ και $0 < p < 1$. Τότε, ο συντελεστής ασυμμετρίας γ_1 της κατανομής $ETNB$ είναι θετικός για κάθε τιμή της παραμέτρου p, και κατ΄ επέκταση η κατανομή να παρουσιάζει μία θετική ασυμμετρία. Δηλαδή, ισχύει*

$$\gamma_1 > 0 \quad , \quad \forall p$$

όπου $0 < p < 1$. □

Απόδειξη

Ο παρονομαστής του κλάσματος του συντελεστή ασυμμετρίας είναι εξ΄ ορισμού θετικός αφού η διασπορά της κατανομής είναι πάντοτε θετική. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε για ποιές τιμές του θ η μαθηματική παράσταση B γίνεται θετική. Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμητής του συντελεστή ασυμμετρίας, ο οποίος δίνεται από τη σχέση (4.3.4), ισούται με την τρίτη ροπή γύρω από το μέσο της κατανομής και είναι:

$$B = E\left\{[N - E(N)]^3\right\}.$$

Επιπλέον, η παράσταση B εκφράζεται συναρτήσει μόνο της παραμέτρου p, εφόσον η παράμετρος r έχει μία δεδομένη τιμή ίση με $-1/2$. Όμως, από τη σχέση (4.4.1) είδαμε ότι η παράμετρος p εξαρτάται μόνο από το θ. Σε θεωρητική βάση οι τιμές του περιθωρίου ασφάλειας κυμαίνονται στο διάστημα $(0, \infty)$. Ακόμη, η τιμή της παραμέτρου p κυμαίνεται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας. Πράγματι, από τη σχέση (4.4.1) για μηδενικό περιθώριο κέρδους παίρνουμε

$$\lim_{\theta \to 0} p = 1.$$

Για θεωρητικά άπειρο περιθώριο ασφάλειας, χρησιμοποιώντας τον κανόνα *de l' Hospital* έχουμε

$$\lim_{\theta \to \infty} p = 0.$$

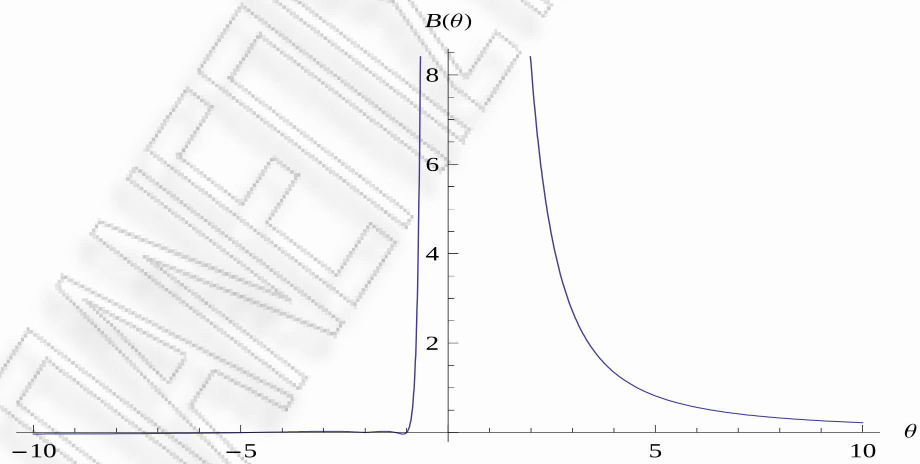
Συνεπώς, η μαθηματική παράσταση B δύναται να εκφραστεί συναρτήσει του περιθωρίου ασφάλειας. Επομένως, ορίζουμε εκ νέου τη μαθηματική παράσταση B ως εξής:

$$B := B(\theta) \quad , \quad \theta > 0.$$

Ο αναλυτικός τύπος της $B(\theta)$ εξακολουθεί να είναι ιδιαιτέρως δύσχρηστος για οποιονδήποτε υπολογισμό, έτσι ώστε να αποφανθούμε για το πρόσημο της παράστασης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται μία ιδιότητα υπεραπλούστευσης από το μαθηματικό πρόγραμμα *Mathematica* για την $B(\theta)$, και το αποτέλεσμα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$B(\theta) = \frac{(1+\theta)\left(6+6\theta+\theta^2\right)}{\theta^4 \sqrt{\frac{\theta^2}{(2+\theta)^2}}} = \frac{(1+\theta)(2+\theta)\left(6+6\theta+\theta^2\right)}{\theta^5} > 0 \quad , \quad \forall \theta > 0. \qquad (4.4.2)$$

Προφανώς, η μαθηματική σχέση (4.4.2) είναι αυστηρώς θετική, για θετικές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας όπως άλλωστε φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα της συνάρτησης $B(\theta)$.



Σχήμα 4.1: Γράφημα της συνάρτησης $B(\theta)$.

4.5 Προσέγγιση της $ETNB$ κατανομής με δύο γεωμετρικές κατανομές

Η κατανομή $ETNB$ είναι γενικώς μία πολύπλοκη κατανομή καθώς τόσο η συνάρτηση πιθανότητας όσο και οι ροπές της έχουν δύσχρηστες εκφράσεις. Ακόμα, η τ.μ. $\widetilde{N_T}$, δηλαδή ο αριθμός των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή, όπως έχει επισημανθεί στην ενότητα 3.1.

Η ιδέα της προσέγγισης της $ETNB$ κατανομής από μία γεωμετρική προήλθε από ένα άρθρο των $Drekic$ & $Willmot$(2003), στο οποίο διαπιστώθηκε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου χρεοκοπίας για δεδομένες τιμές των παραμέτρων λ, β, c και θ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\beta = 6$. Όπως γνωρίζουμε, η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (βλέπε Κούτρας(2004)).

Η γεωμετρική κατανομή είναι η αντίστοιχη διακριτή κατανομή που έχει την αμνήμονα ιδιότητα (βλέπε Κούτρας(2004)), και για το λόγο αυτό θα προσεγγιστεί η $ETNB$ κατανομή από δύο γεωμετρικές κατανομές. Η επιλογή των παραμέτρων των γεωμετρικών κατανομών θα γίνει με τους ακόλουθους τρόπους. Η παράμετρος της πρώτης γεωμετρικής κατανομής θα είναι εκείνη για την οποία η μέση τιμή της κατανομής θα ισούται με την αντίστοιχη μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής. Έπειτα, όσον αφορά για την επιλογή της παραμέτρου της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, θα γίνει έτσι ώστε οι δύο συντελεστές ασυμμετρίας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής και της $ETNB$ κατανομής να είναι ίσοι. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος θα επαναληφθεί για τις περισσότερες τιμές του περιθωρίου ασφάλειας θ, όπως αυτές επιλέχτηκαν στο κεφάλαιο 3, καθώς και για ορισμένες ακραίες τιμές του περιθωρίου ασφάλειας θ.

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας $\widetilde{p}(k)$ της τ.μ. του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, $\widetilde{N_T}$, εκφρασμένη μόνο συναρτήσει του περιθωρίου ασφάλειας δίνεται από τη σχέση (3.3.3) και είναι

$$\widetilde{p}(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}\right]^k \frac{2+\theta}{2} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \ldots \ .$$

Ακόμη, η μέση τιμή και ο συντελεστής ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής δίνονται από τις σχέσεις (2.1.28) και (4.3.6). □

Μία ακόμη ιδιαιτερότητα της γεωμετρικής κατανομής είναι ότι ορίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι βασικότερες ποσότητες της γεωμετρικής κατανομής έχουν οριστεί στην ενότητα 2.1 υπό την προϋπόθεση ότι θεωρείται ο απαιτούμενος αριθμός αποτυχιών έως ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία. Επειδή, η συνάρτηση πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής δεν έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, θα δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό της γεωμετρικής κατανομής, στην οποία σημείο αναφοράς είναι ο αριθμός των δοκιμών (βλέπε Κούτρας(2004)).

Ορισμός 4.5.1. *Θεωρούμε μία ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και συμβολίζεται με $G(p)$.*

Η συνάρτηση πιθανότητας, έστω f, της γεωμετρικής κατανομής $G(p)$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \Pr\left(X = x\right) = pq^{x-1} \quad , \quad x = 1, 2, \dots \ . \tag{4.5.1}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της προκείμενης γεωμετρικής κατανομής ισούνται με

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p}, \qquad Var\left(X\right) = \frac{q}{p^2}$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας γ_1 της γεωμετρικής κατανομής[1] ισούται με

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}.$$

□

Για κάθε μία ξεχωριστή τιμή του περιθωρίου ασφάλειας θ, θα υπολογίζεται η συνάρτηση πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής, καθώς και δύο ακόμη συναρτήσεις πιθανότητας για την αντίστοιχη γεωμετρική κατανομή. Η ακανόνιστη αρίθμηση του θ ταυτίζεται με την αντίστοιχη του κεφαλαίου 3, και οφείλεται στο γεγονός ότι ορισμένες περιπτώσεις δεν θα αναφερθούν.

Ενδεικτικά, για ορισμένες περιπτώσεις θα εξετάζεται το ποσοστιαίο σφάλμα μεταξύ της συνάρτησης πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής και της αντίστοιχης γεωμετρικής κατανομής. Το ποσοστιαίο σφάλμα εκφράζει την απόκλιση επί τοις εκατό(%) των συναρτήσεων πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής με κάθε γεωμετρική κατανομή για κάθε σημείο. Η πρακτική αυτή μας βοηθάει να διαπιστώσουμε αν η $ETNB$ κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μία γεωμετρική κατανομή. Το ποσοστιαίο σφάλμα, ας συμβολίζεται με $SE(k)$, εκφράζεται μαθηματικά από την ακόλουθη σχέση:

$$SE(k) = \frac{f(k) - \widetilde{p}(k)}{\widetilde{p}(k)} \times 100 \quad , \quad k = 1, 2, \dots \ . \tag{4.5.2}$$

[1] βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_distribution*

όπου f είναι η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής, και, $\widetilde{p}$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της $ETNB$ κατανομής.

Για το διαχωρισμό των συναρτήσεων πιθανότητας των γεωμετρικών κατανομών, θα χρησιμοποιείται η αρίθμηση που ακολουθεί το περιθώριο ασφάλειας θ, ενώ μεταξύ τους θα διαφέρουν αναλόγως με ένα σύμβολο. Έστω με "a" να συμβολίζεται εκείνη η γεωμετρική κατανομή της οποίας η μέση τιμή ισούται με την μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής. Ακόμη, με "b" θα συμβολίζεται εκείνη η γεωμετρική κατανομή της οποίας ο συντελεστής ασυμμετρίας ισούται με τον αντίστοιχο της $ETNB$ κατανομής.

1. $\theta = 1/2$

Ως γνωστόν η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας, $\widetilde{p}_1(k)$, της τ.μ. $\widetilde{N_T}$ με $\theta = 1/2$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_1(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\frac{1}{2})}{(2+\frac{1}{2})^2}\right]^k \frac{2+\frac{1}{2}}{2} \\
\Rightarrow \widetilde{p}_1(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{24}{25}\right]^k \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Ακολούθως, η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής ισούται με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

Από την τελευταία σχέση και την (4.4.1) για $\theta = 1/2$ λαμβάνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 3$$

Ακόμη, από τον πίνακα 4.4.1 ο συντελεστής ασυμμετρίας της προκείμενης κατανομής είναι

$$\gamma_1 = 6.75524$$

Συνεπώς, η παράμετρος της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{1a}, θα προκύψει από την ακόλουθη ισότητα:

$$E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{1a}} \;\Rightarrow\; 3 = \frac{1}{p_{1a}}$$

$$\Rightarrow\; p_{1a} = 0.33.$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{1a} θα είναι

$$f_{1a}(k) = 0.33(1-0.33)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

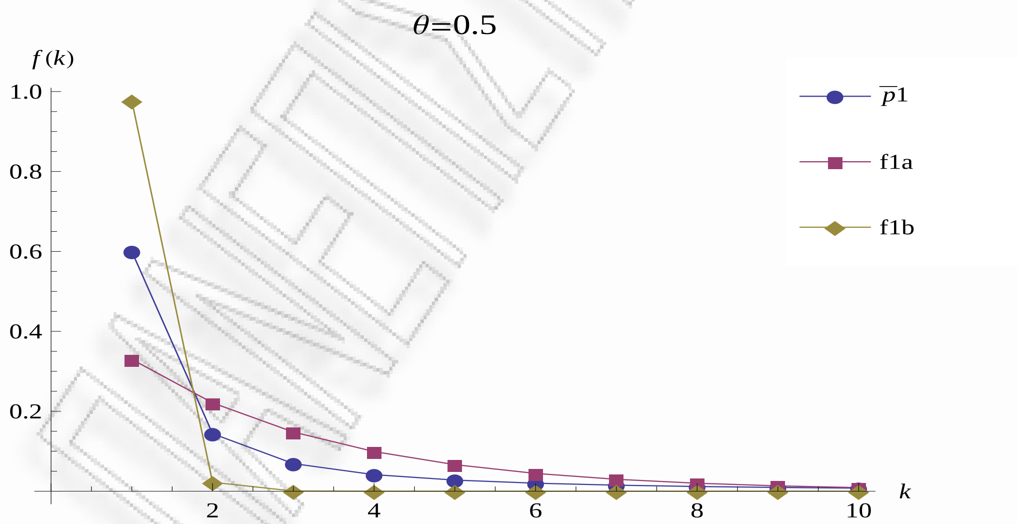
Έπειτα, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{1b}, θα πρέπει να ισχύει

$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2-p_{1b}}{\sqrt{1-p_{1b}}} \quad \Rightarrow \quad 6.75524 = \frac{2-p_{1b}}{\sqrt{1-p_{1b}}}$$
$$\Rightarrow \quad p_{1b} = 0.97707.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής, έστω f_{1b} θα είναι

$$f_{1b}(k) = 0.97707(1-0.97707)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Τελικώς, το κοινό γράφημα των τριών προαναφερθέντων συναρτήσεων πιθανότητας θα είναι



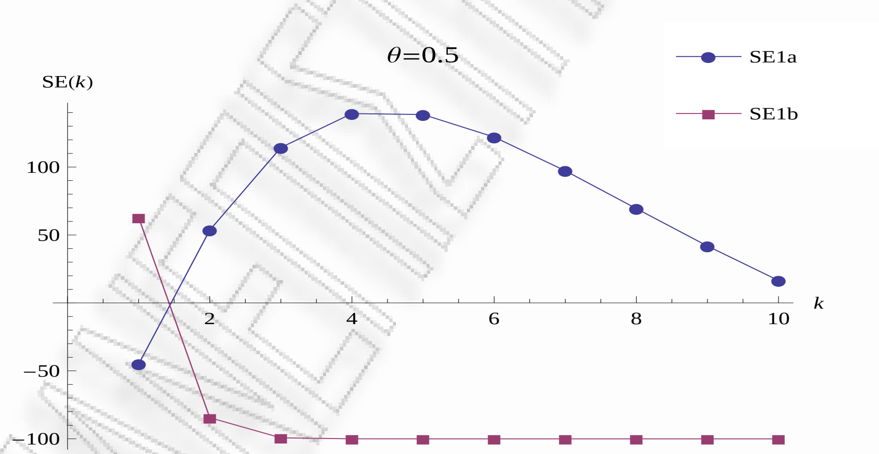
Σχήμα 4.2: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_1(k)$, f_{1a} και f_{1b}.

Από το παραπάνω γράφημα, παρατηρούμε ότι και οι δύο γεωμετρικές κατανομές αποκλίνουν αισθητά από την κατανομή $ETNB$. Ο ακόλουθος πίνακας μας δίνει, για ορισμένες ενδεικτικές τιμές, την ποσοστιαία απόκλιση της κάθε γεωμετρικής κατανομής από την κατανομή $ETNB$. Αξίζει να σημειωθεί ότι με $SE_{1a}(k)$ συμβολίζεται το ποσοστιαίο σφάλμα της πρώτης γεωμετρικής κατανομής από την κατανομή $ETNB$.

k	$SE_{1a}(k)$	$SE_{1b}(k)$
1	-45	62.84
2	53.54	-84.44
5	138.61	-99.99
10	16.49	-100

Πίνακας 4.5.1: Ποσοστιαίο σφάλμα(%) για $\theta = 0.5$

Από τον πίνακα 4.5.1 παρατηρούμε ότι πράγματι οι αποκλίσεις είναι αρκετά μεγάλες, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να προσεγγιστεί μία κατανομή $ETNB$ από καμία γεωμετρική κατανομή σε ικανοποιητικό βαθμό για τη δεδομένη τιμή του περιθωρίου ασφαλείας. Η απόκλιση μεταξύ τους φαίνεται ξεκάθαρα στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 4.3: Γράφημα των ποσοστιαίων σφαλμάτων της κατανομής $ETNB$ για $\theta = 1/2$.

4. $\underline{\theta = 1/4}$

Η συνάρτηση πιθανότητας, $\widetilde{p}_4(k)$, που αντιστοιχεί στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$ με $\theta = 1/4$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_4(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\frac{1}{4})}{(2+\frac{1}{4})^2}\right]^k \frac{2+\frac{1}{4}}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_4(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{80}{81}\right]^k \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της προκείμενης κατανομής $ETNB$ θα είναι ίση με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

όπου από τη σχέση (4.4.1) για $\theta = 1/4$ σε συνδυασμό με την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 5$$

Ακόμη, από τον πίνακα 4.4.1 η τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της συγκεκριμένης κατανομής είναι

$$\gamma_1 = 9.01881$$

Συνεπώς, για την παράμετρο της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{4a}, θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{4a}} \quad &\Rightarrow \quad 5 = \frac{1}{p_{4a}} \\ &\Rightarrow \quad p_{4a} = 0.2. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{4a}, θα εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση

$$f_{4a}(k) = 0.2(1-0.2)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Έπειτα, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{4b}, θα πρέπει να ισχύει

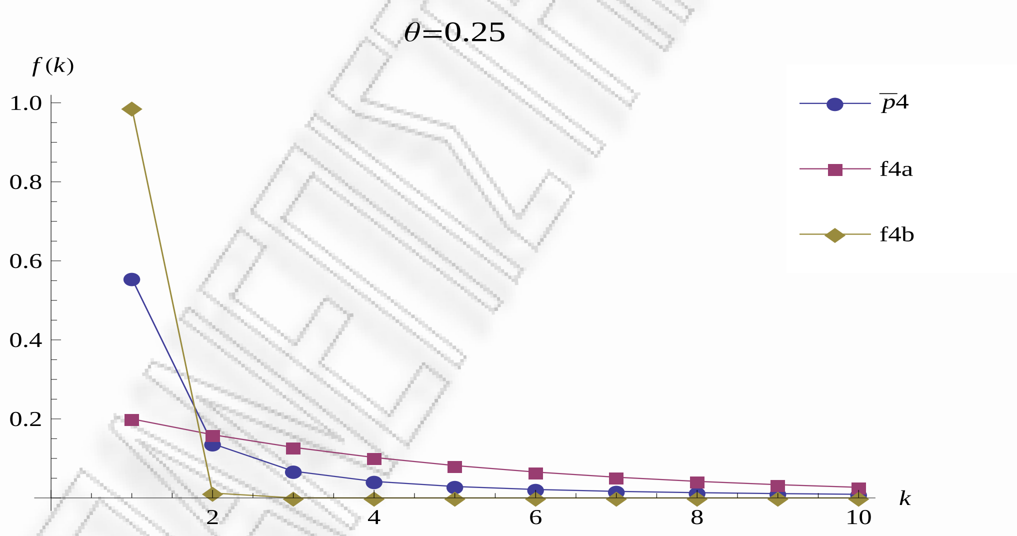
$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2-p_{4b}}{\sqrt{1-p_{4b}}} \;\Rightarrow\; 9.01881 = \frac{2-p_{4b}}{\sqrt{1-p_{4b}}}$$
$$\Rightarrow\; p_{4b} = 0.987394.$$

Παρατηρούμε ότι η παράμετρος της δεύτερης γεωμετρικής είναι ανέλπιστα μεγάλη, σε αντίθεση με την παράμετρο της πρώτης γεωμετρικής κατανομής. Αυτή η μεγάλη διαφορά, επηρεάζει σημαντικά την τιμή της συνάρτησης πιθανότητας για $k = 1$, και κατ' επέκταση τις υπόλοιπες πιθανότητες.

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{4b} θα είναι

$$f_{4b}(k) = 0.987394(1-0.987394)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \; .$$

Συνεπώς, το κοινό γράφημα των τριών συναρτήσεων πιθανότητας θα είναι



Σχήμα 4.4: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_4(k)$, f_{4a} και f_{4b}.

Το παραπάνω γράφημα μας δείχνει ότι και οι δύο γεωμετρικές κατανομές απέχουν σημαντικά από την κατανομή $ETNB$, αλλά σε αντίθετες κατευθύνσεις, λόγω της μεγάλης διαφοράς στην τιμή της παραμέτρου μεταξύ των δύο γεωμετρικών κατανομών.

7. $\underline{\theta = 9/10}$

Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, $\widetilde{N_T}$, ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με $\theta = 9/10$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}_7(k)$, θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_7(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\frac{9}{10})}{(2+\frac{9}{10})^2}\right]^k \frac{2+\frac{9}{10}}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_7(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{760}{841}\right]^k \frac{29}{20}. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής με $\theta = 9/10$ θα είναι ίση με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

Μέσω της τελευταίας σχέσης και της (4.4.1) για $\theta = 9/10$, λαμβάνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 2.1$$

Ακόμη, από τον πίνακα 4.4.1 η τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της συγκεκριμένης κατανομής είναι

$$\gamma_1 = 5.483$$

Επομένως, η παράμετρος της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{7a}, θα προκύπτει από την ακόλουθη μαθηματική σχέση

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{7a}} \quad &\Rightarrow \quad 2.1 = \frac{1}{p_{7a}} \\ &\Rightarrow \quad p_{7a} = 0.47619. \end{aligned}$$

Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{7a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής, έστω f_{7a} θα είναι

$$f_{7a}(k) = 0.47619(1-0.47619)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

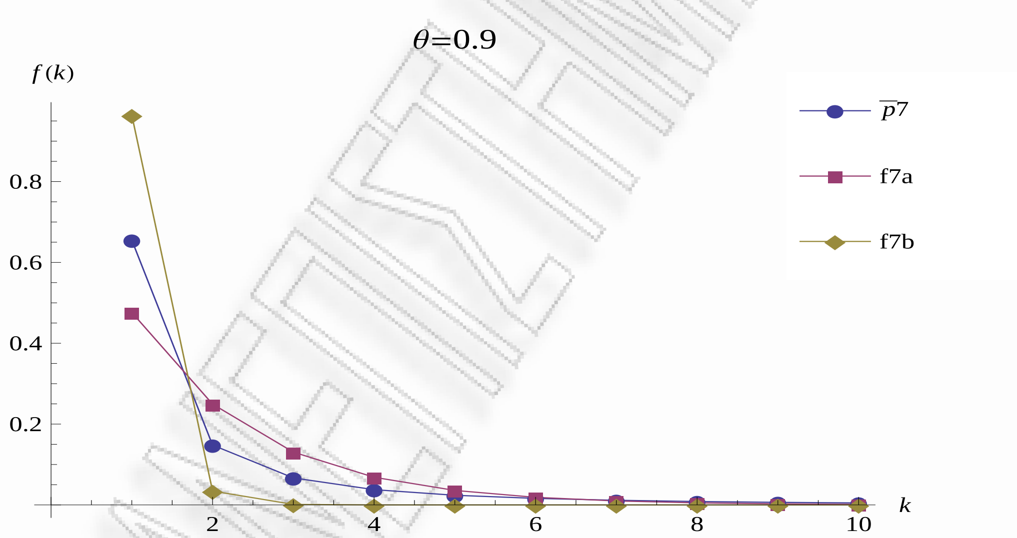
Ακόμη, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{7b}, θα πρέπει να ισχύει η εξής σχέση:

$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2-p_{7b}}{\sqrt{1-p_{7b}}} \quad \Rightarrow \quad 5.483 = \frac{2-p_{7b}}{\sqrt{1-p_{7b}}}$$
$$\Rightarrow \quad p_{7b} = 0.964321.$$

Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{7b} η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{7b} θα είναι

$$f_{7b}(k) = 0.964321(1-0.964321)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \; .$$

Επομένως, το κοινό γράφημα των τριών προαναφερθέντων συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 9/10$ θα είναι



Σχήμα 4.5: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_7(k)$, f_{7a} και f_{7b} για $\theta = 9/10$.

Από το γράφημα 4.5, διακρίνουμε ότι οι δύο γεωμετρικές κατανομές απέχουν αισθητά από την κατανομή $ETNB$. Ωστόσο, αυτή η απόκλιση δεν είναι τόσο μεγάλη όσο στις προηγούμενες περιπτώσεις, κι αυτό οφείλεται στην αύξηση του περιθωρίου ασφάλειας. Ακόμη, λόγω της μεγάλης τιμής του περιθωρίου ασφάλειας, η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων των γεωμετρικών κατανομών ελαττώνεται.

8. $\theta = 1/20$

Για την τ.μ. $\widetilde{N_T}$ με $\theta = 1/20$ που ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή, η συνάρτηση πιθανότητας της, $\widetilde{p}_8(k)$, εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_8(k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4(1+\frac{1}{20})}{(2+\frac{1}{20})^2}\right]^k\frac{2+\frac{1}{20}}{2}\\ \Rightarrow \widetilde{p}_8(k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{1680}{1681}\right]^k\frac{21}{40}.\end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής εν γένει ισούται με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

όπου μέσω της σχέσης (4.4.1) για $\theta = 1/20$ και της τελευταίας ισότητας για τη μέση τιμή συμπεραίνουμε ότι

$$E(\widetilde{N_T}) = 21$$

Ακόμη, από τον πίνακα 4.4.1 η τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ για $\theta = 1/20$ είναι

$$\gamma_1 = 19.2113$$

Επομένως, η παράμετρος της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{8a}, θα προκύψει από την ισότητα των μέσων τιμών της προκείμενης κατανομής $ETNB$ και της αντίστοιχης γεωμετρικής κατανομής.

$$\begin{aligned}E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{8a}} \quad &\Rightarrow \quad 21 = \frac{1}{p_{8a}}\\ &\Rightarrow \quad p_{8a} = 0.047619.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της παραμέτρου είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{8a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής, έστω f_{8a} θα είναι

$$f_{8a}(k) = 0.047619(1-0.047619)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \; .$$

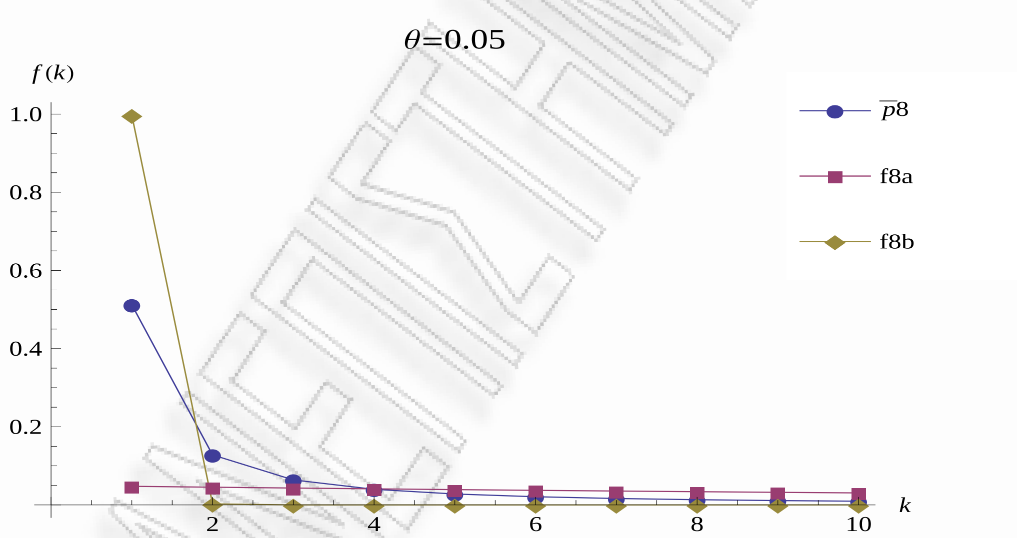
Επιπροσθέτως, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{8b}, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2 - p_{8b}}{\sqrt{1 - p_{8b}}} \quad \Rightarrow \quad 19.2113 = \frac{2 - p_{8b}}{\sqrt{1 - p_{8b}}}$$
$$\Rightarrow \quad p_{8b} = 0.997276.$$

Έπειτα με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{8b} η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{8b} θα είναι

$$f_{8b}(k) = 0.997276(1 - 0.997276)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Συνεπώς, η κοινή γραφική παράσταση των τριών προαναφερθέντων συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 1/20$ θα είναι



Σχήμα 4.6: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_8(k)$, f_{8a} και f_{8b} για $\theta = 1/20$.

Όπως φαίνεται από το γράφημα 4.6, η προσέγγιση της κατανομής $ETNB$ από δύο γεωμετρικές κατανομές με διαφορετικές παραμέτρους είναι σχεδόν αδύνατη για τη συγκεκριμένη επιλογή του περιθωρίου ασφάλειας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δύο παράμετροι των γεωμετρικών κατανομών βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $(0, 1)$, δηλαδή στο επιτρεπτό πεδίο τιμών της παραμέτρου.

9. $\theta = 2$

Για την περίπτωση όπου η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με $\theta = 2$ η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}_9(k)$, θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_9(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+2)}{(2+2)^2}\right]^k \frac{2+2}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_9(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{3}{4}\right]^k 2. \end{aligned}$$

Ακόμη, για τη μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής, γνωρίζουμε ότι δίνεται από τη μαθηματική έκφραση

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

Από τη σχέση (4.4.1) για $\theta = 2$ λαμβάνουμε την τιμή της παραμέτρου p της κατανομής $ETNB$. Επομένως, για $r = -1/2$ με βάση την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 1.5$$

Επιπλέον, από τον πίνακα 4.4.1 η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής είναι

$$\gamma_1 = 4.49073$$

Η παράμετρος της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{9a}, θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{9a}} \quad &\Rightarrow \quad 1.5 = \frac{1}{p_{9a}} \\ &\Rightarrow \quad p_{9a} = 0.67. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας, αυξάνεται και η τιμή της παραμέτρου της πρώτης γεωμετρικής κατανομής. Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{9a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{9a} θα είναι

$$f_{9a}(k) = 0.67(1-0.67)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Ακόμη, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{9b}, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση

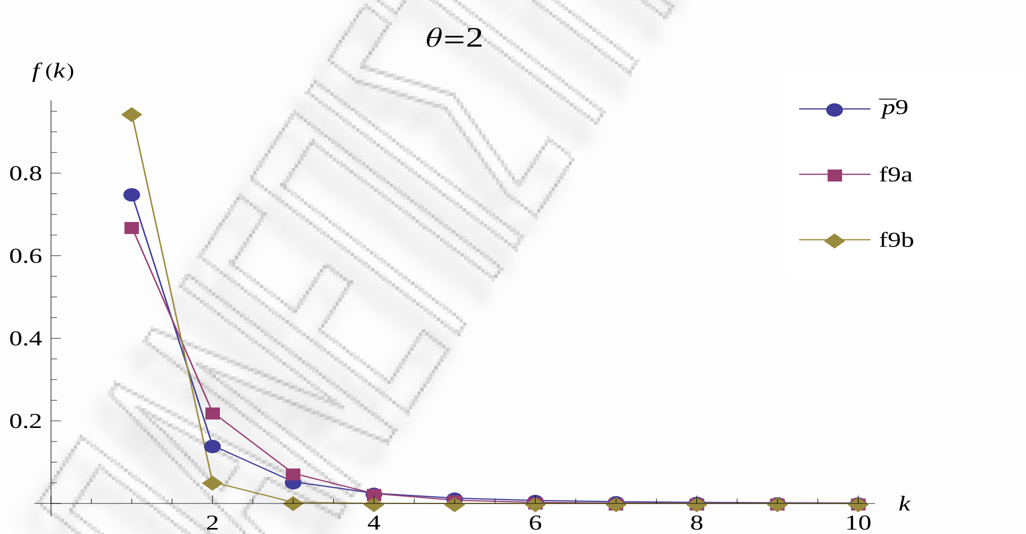
$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2 - p_{9b}}{\sqrt{1 - p_{9b}}} \;\; \Rightarrow \;\; 4.49073 = \frac{2 - p_{9b}}{\sqrt{1 - p_{9b}}}$$

$$\Rightarrow \;\; p_{9b} = 0.944786.$$

Παρατηρείται ότι η τιμή της παραμέτρου p_{9b}, που προκύπτει από την ισότητα των συντελεστών ασυμμετρίας της κατανομής $ETNB$ και της αντίστοιχης γεωμετρικής κατανομής, είναι αρκετά μεγάλη ακόμα κι όταν η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας είναι πρακτικά μη εφαρμόσιμη. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται η τιμή του θ, η τιμή της παραμέτρου p_{9b} ελαττώνεται ανεπαίσθητα. Έπειτα με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{9b} η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{9b}, θα είναι

$$f_{9b}(k) = 0.944786(1 - 0.944786)^{k-1} \;\; , \;\; k = 1, 2, \ldots \; .$$

Τελικώς, το κοινό γράφημα των τριών συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 2$ θα είναι



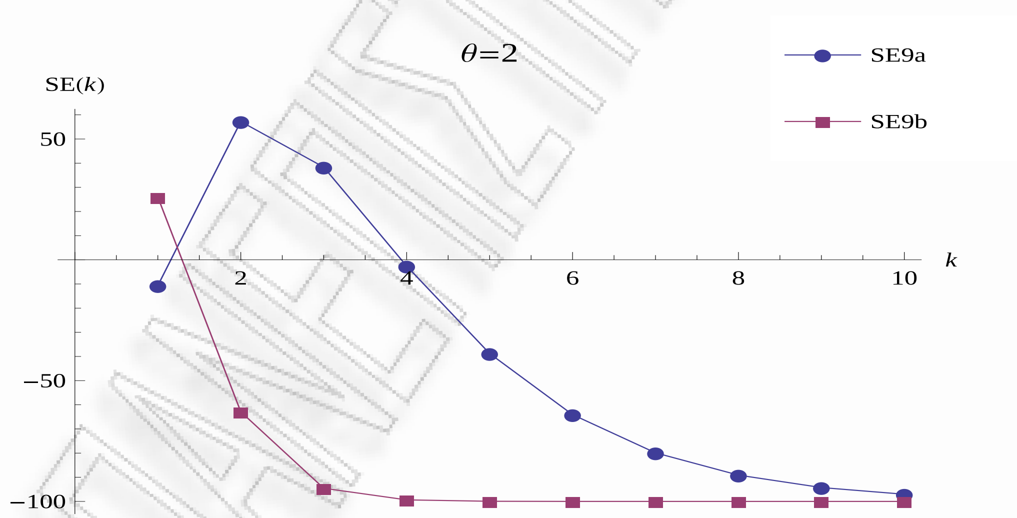
Σχήμα 4.7: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_9(k)$, f_{9a} και f_{9b} για $\theta = 2$.

Από το γράφημα 4.7 παρατηρούμε ότι η απόκλιση της $ETNB$ κατανομής από τις γεωμετρικές κατανομές δεν είναι τόσο εμφανής. Φαίνεται να προσεγγίζονται από το σημείο $k = 4$ κι ύστερα. Χωρίς καμία αμφιβολία το γράφημα δεν ενδείκνυται για ασφαλή συμπεράσματα. Για το λόγο αυτό παραθέτουμε τον πίνακα των ποσοστιαίων σφαλμάτων και για τις δύο γεωμετρικές κατανομές.

k	$SE_{9a}(k)$	$SE_{9b}(k)$
1	-10.66	25.97
2	57.22	-62.90
5	-38.77	-99.93
7	-79.88	-99.99
10	-97.02	-100

Πίνακας 4.5.2: Ποσοστιαίο σφάλμα(%) για $\theta = 2$

Από τον πίνακα 4.5.2 παρατηρούμε ότι η απόκλιση των γεωμετρικών κατανομών από την $ETNB$ κατανομή είναι αρκετά μεγάλη, και ειδικότερα για τα σημεία $k > 4$. Άλλωστε η απόκλιση είναι εμφανής και από το ακόλουθο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζονται τα ποσοστιαία σφάλματα.



Σχήμα 4.8: Γράφημα των ποσοστιαίων σφαλμάτων της κατανομής $ETNB$ για $\theta = 2$.

10. $\theta = 4$

Η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ για $\theta = 4$ ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή, της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}_{10}(k)$, θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{10}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+4)}{(2+4)^2}\right]^k \frac{2+4}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_{10}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{5}{9}\right]^k 3. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής για $\theta = 4$ θα είναι ίση με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

όπου αν θέσουμε $\theta = 4$ στη σχέση (4.4.1)και σε συνδυασμό με την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 1.25$$

Επιπλέον, με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος $Mathematica$ η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής για $\theta = 4$ είναι

$$\gamma_1 = 4.19921$$

Η τιμή της παραμέτρου της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{10a}, προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{10a}} \quad &\Rightarrow \quad 1.25 = \frac{1}{p_{10a}} \\ &\Rightarrow \quad p_{10a} = 0.8. \end{aligned}$$

Η ραγδαία αύξηση του περιθωρίου ασφάλειας συντελεί στη δραματική αύξηση της προκείμενης παραμέτρου. Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{10a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{10a} θα είναι

$$f_{10a}(k) = 0.8(1-0.8)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Έπειτα, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{10b}, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση

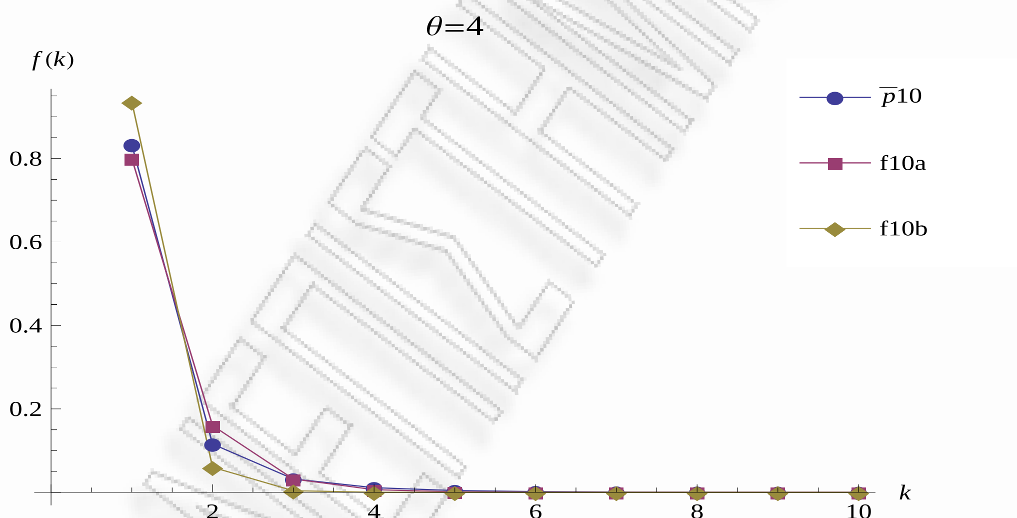
$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2 - p_{10b}}{\sqrt{1 - p_{10b}}} \;\;\Rightarrow\;\; 4.19921 = \frac{2 - p_{10b}}{\sqrt{1 - p_{10b}}}$$

$$\Rightarrow \;\; p_{10b} = 0.93577.$$

Η τιμή της παραμέτρου p_{10b} μειώνεται με μικρούς ρυθμούς, καθώς μεγαλώνει αρκετά η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας. Κατόπιν με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{10b}, η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{10b}, θα είναι

$$f_{10b}(k) = 0.93577(1 - 0.93577)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \; .$$

Τελικώς, το κοινό γράφημα των τριών συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 4$ θα είναι



Σχήμα 4.9: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_{10}(k)$, f_{10a} και f_{10b} για $\theta = 4$.

Από το γράφημα 4.9 παρατηρούμε ότι η κατανομή $ETNB$ προσεγγίζεται καλύτερα από τις δύο γεωμετρικές κατανομές σχετικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις, χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει ότι η εφαρμογή είναι καλή. Στο σημείο $k = 1$, η σύγκλιση των τριών κατανομών είναι εμφανώς καλύτερη, δεν παύει όμως να υπάρχει σημαντική απόκλιση των γεωμετρικών κατανομών από την κατανομή $ETNB$. Το ίδιο συμβαίνει και στο σημείο $k = 2$.

11. $\theta = 5$

Στην περίπτωση κατά την οποία η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{N_T}$, ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με $\theta = 5$, η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}_{11}(k)$, θα εκφράζεται από τη μαθηματική σχέση:

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{11}(k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{4(1+5)}{(2+5)^2}\right]^k\frac{2+5}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_{11}(k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{24}{49}\right]^k\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής που αντιστοιχεί στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$ για $\theta = 5$ είναι ίση με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

Από την τελευταία σχέση και μέσω της σχέσης (4.4.1) για $\theta = 5$, δοθέντος ότι $r = -1/2$, λαμβάνουμε την τιμή για τη μέση τιμή της προκείμενης κατανομής $ETNB$.

$$E(\widetilde{N_T}) = 1.2$$

Επιπλέον, με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος *Mathematica* η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής για $\theta = 5$ είναι

$$\gamma_1 = 4.2094$$

Η τιμή της παραμέτρου της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{11a}, προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{11a}} \quad &\Rightarrow \quad 1.2 = \frac{1}{p_{11a}} \\ &\Rightarrow \quad p_{11a} = 0.83. \end{aligned}$$

Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{11a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{11a} θα είναι

$$f_{11a}(k) = 0.83(1-0.83)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \; .$$

Ακόμη, η παράμετρος της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{11b}, προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

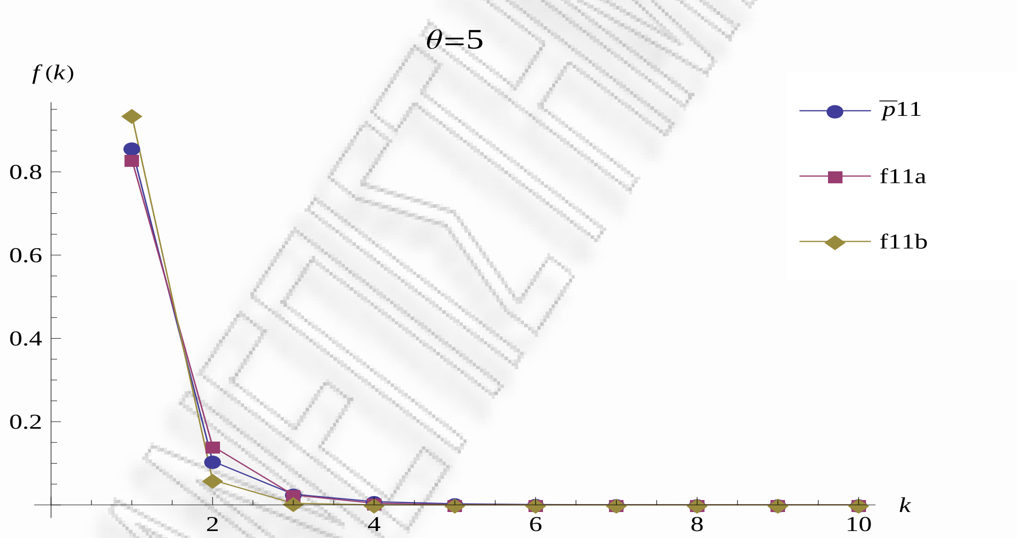
$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2-p_{11b}}{\sqrt{1-p_{11b}}} \quad \Rightarrow \quad 4.2094 = \frac{2-p_{11b}}{\sqrt{1-p_{11b}}}$$

$$\Rightarrow \quad p_{11b} = 0.936123.$$

Στη συνέχεια με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{11b}, θα προκύψει η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{11b}, η οποία εκφράζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f_{11b}(k) = 0.936123(1-0.936123)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \ .$$

Τελικώς, το κοινό γράφημα των τριών συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 5$ θα είναι



Σχήμα 4.10: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_{11}(k)$, f_{11a} και f_{11b} για $\theta = 5$.

Με βάση το γράφημα 4.10, η εκτίμηση για την προσέγγιση της κατανομής $ETNB$ από δύο γεωμετρικές κατανομές παρουσιάζει τις ίδιες δυσκολίες με την περίπτωση 10, στην οποία η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας θ ισούται με 4. Γραφικά, φαίνεται να υπάρχει εικονική σύγκλιση μεταξύ των τριών κατανομών από το σημείο $k = 3$ κι ύστερα, παρ' ότι στα σημεία $k = 1$ και $k = 2$ οι αντίστοιχες πιθανότητες παρουσιάζουν σημαντική διαφορά.

12. $\theta = 10$

Για την τ.μ. $\widetilde{N_T}$, η οποία ακολουθεί την $ETNB$ κατανομή με $\theta = 10$ η συνάρτηση πιθανότητας, έστω $\widetilde{p}_{12}(k)$, θα είναι

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{12}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+10)}{(2+10)^2}\right]^k \frac{2+10}{2} \\ \Rightarrow \widetilde{p}_{12}(k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{11}{36}\right]^k 6. \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της $ETNB$ κατανομής που αντιστοιχεί στην τ.μ. $\widetilde{N_T}$ για $\theta = 10$ είναι ίση με

$$E(\widetilde{N_T}) = -\frac{pr(1-p)^{-1/2-1}}{1-(1-p)^{-1/2}}.$$

όπου αν θέσουμε στη σχέση (4.4.1) για $\theta = 10$, και από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$E(\widetilde{N_T}) = 1.1$$

Ακόμη, με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος $Mathematica$ η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας της $ETNB$ κατανομής για $\theta = 10$ είναι

$$\gamma_1 = 4.5689$$

Η τιμή της παραμέτρου της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{12a}, προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$E(\widetilde{N_T}) = \frac{1}{p_{12a}} \quad \Rightarrow \quad 1.1 = \frac{1}{p_{12a}}$$

$$\Rightarrow \quad p_{12a} = 0.909091.$$

Όπως έχει αναφερθεί, αναμέναμε ότι η παράμετρος p_{12a} θα λαμβάνει τόσο μεγάλη τιμή, εξαιτίας της αφύσικα μεγάλης τιμής του περιθωρίου ασφάλειας. Με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{12a}, η συνάρτηση πιθανότητας της πρώτης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{12a}, θα είναι

$$f_{12a}(k) = 0.909091(1-0.909091)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \; .$$

Επιπροσθέτως, για την παράμετρο της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω p_{12b}, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση

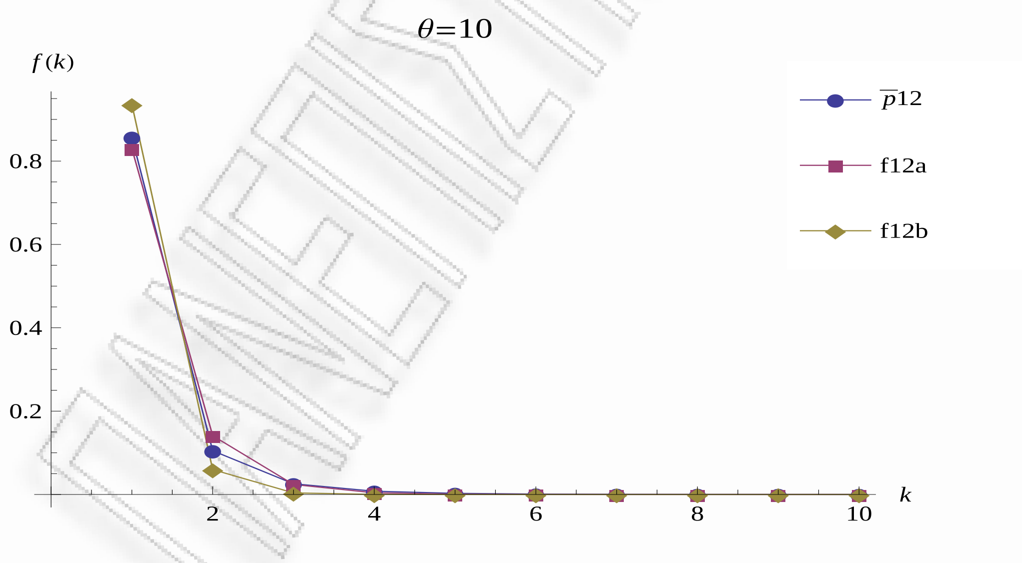
$$\gamma_1^{\widetilde{N_T}} = \frac{2-p_{12b}}{\sqrt{1-p_{12b}}} \quad \Rightarrow \quad 4.5689 = \frac{2-p_{12b}}{\sqrt{1-p_{12b}}}$$
$$\Rightarrow \quad p_{12b} = 0.94687.$$

Παρατηρούμε ότι για τη συγκεκριμένη τιμή του περιθωρίου ασφάλειας θ, οι τιμές των παραμέτρων των γεωμετρικών κατανομών δεν έχουν μεγάλη διαφορά μεταξύ τους, όπως συνέβαινε στις περιπτώσεις όπου η τιμή του θ κυμαινόταν στο διάστημα $(0,1)$.

Έπειτα με βάση την τιμή της παραμέτρου p_{12b}, θα προκύψει η συνάρτηση πιθανότητας της δεύτερης γεωμετρικής κατανομής, έστω f_{12b}, η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$f_{12b}(k) = 0.94687(1-0.94687)^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Τελικώς, το κοινό γράφημα των τριών προαναφερθέντων συναρτήσεων πιθανότητας για $\theta = 10$ θα είναι



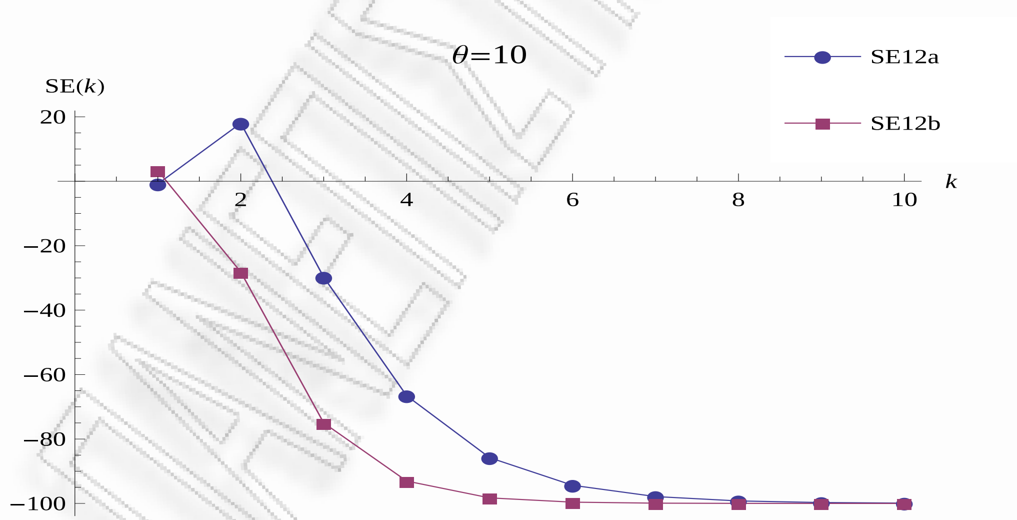
Σχήμα 4.11: Γράφημα των συναρτήσεων πιθανότητας $\widetilde{p}_{12}(k)$, f_{12a} και f_{12b} για $\theta = 10$.

Στο παραπάνω γράφημα φαίνεται ότι η $ETNB$ κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά και από τις δύο γεωμετρικές κατανομές. Ωστόσο, δεν μπορεί να γίνει μία ασφαλή εκτίμηση μόνο από τη γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων πιθανότητας. Για το λόγο αυτό, στον ακόλουθο πίνακα με τα ποσοστιαία σφάλματα και των δύο γεωμετρικών κατανομών αντικατοπτρίζεται η πραγματική απόκλιση της $ETNB$ κατανομής από την αντίστοιχη γεωμετρική κατανομή.

k	$SE_{12a}(k)$	$SE_{12b}(k)$
1	-0.82	3.29
2	18.02	-28.15
5	-85.79	-98.27
7	-97.86	-99.91
10	-99.90	-99.99

Πίνακας 4.5.3: Ποσοστιαίο σφάλμα(%) για $\theta = 10$

Από τον πίνακα 4.5.3 συμπεραίνουμε ότι μόνο στο σημείο $k = 1$ προσεγγίζονται σε ικανοποιητικό βαθμό και οι δύο γεωμετρικές κατανομές. Πέραν αυτού του σημείου, η απόκλιση μεταξύ της $ETNB$ κατανομής και της αντίστοιχης γεωμετρικής κατανομής αυξάνεται πολύ γρήγορα. Η προκείμενη απόκλιση απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 4.12: Γράφημα των ποσοστιαίων σφαλμάτων της κατανομής $ETNB$ για $\theta = 10$.

Παρατηρήσεις

1. Αναλύοντας προσεκτικά κάθε μία περίπτωση, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της κατανομής $ETNB$ από μία κατάλληλη γεωμετρική κατανομή δεν ήταν επιτυχής παρά το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{N_T}$ 'φαίνεται' να ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Η τ.μ. $\widetilde{N_T}$ μετρά των αριθμών των αποζημιώσεων μέχρι τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία. Ακόμη, από τον ορισμό 4.5.1 της γεωμετρικής κατανομής της παρούσας ενότητας, αν μία τ.μ. έστω X μετρά τον αριθμό των δοκιμών έως ότου φτάσει η πρώτη επιτυχία τότε η κατανομή της τ.μ. X είναι η γεωμετρική κατανομή. Έτσι, αν ορίσουμε ως επιτυχία τη χρεοκοπία, τότε διαισθητικά η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{N_T}$ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Αυτό όμως δεν συμβαίνει όπως διαπιστώσαμε από τα προηγούμενα αριθμητικά παραδείγματα. Επιπροσθέτως, τόσο η κατανομή $ETNB$ (βλέπε $Frostig\ et\ al(2010)$) όσο και η γεωμετρική κατανομή[2] παρουσιάζουν μέγιστο στο σημείο $k = 1$.

2. Παρατηρώντας προσεκτικά τα γραφήματα των συναρτήσεων πιθανότητας, διακρίνουμε ένα σημαντικό στοιχείο. Καθώς αυξάνεται η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας, και με δεδομένο ότι με πεπερασμένο αριθμό αποζημιώσεων θα συμβεί η χρεοκοπία, η πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση αυξάνεται σημαντικά. Αυτό άλλωστε είναι απολύτως λογικό, διότι αν το περιθώριο ασφάλειας είναι υπερβολικά μεγάλο, τότε αν δεν συμβεί η χρεοκοπία μετά την έλευση της πρώτης αποζημίωσης, τότε είναι λιγότερο πιθανό να συμβεί η χρεοκοπία με περισσότερες αποζημιώσεις. Αν χαρακτηριστικά θεωρήσουμε την τελευταία περίπτωση όπου η τιμή του περιθωρίου ισούται με 10, τότε θα πρέπει είτε ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων στη μονάδα του χρόνου να είναι πολύ μεγάλος με αποτέλεσμα την κατακόρυφη αύξηση των εσόδων, είτε η μέση ενδιάμεση χρονική διάρκεια που μεσολαβεί μεταξύ δύο απαιτήσεων να είναι μεγάλη. Όπως φαίνεται και από τη σχέση (1.2.6), για να είναι η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας ίση με 10, θα πρέπει η τιμή του c να είναι έντεκα φορές μεγαλύτερη από το γινόμενο $\lambda E(X)$.

[2] βλέπε $http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric\_distribution$

Παράρτημα Α΄

Οι αναλυτικοί τύποι για τη συνάρτηση επιβίωσης και τη βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής $ETNB$

Όπως γνωρίζουμε η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποζημιώσεων έως τη χρεοκοπία δοθέντος ότι θα συμβεί η χρεοκοπία, $\widetilde{N_T}$, ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ με παραμέτρους $r = -1/2$ και $p = \frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}$ όπως αποδεικνύεται στην ενότητα 4.4, της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τη σχέση (3.3.3) και ισούται με

$$\Pr\left(\widetilde{N_T} = k\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{4(1+\theta)}{(2+\theta)^2}\right]^k \frac{2+\theta}{2}\ ,\ k = 1, 2, \dots\ .$$

Η συνάρτηση επιβίωσης ή δεξιά ουρά, $a(k)$, της κατανομής $ETNB$ είναι

$$a(k) = \Pr(\widetilde{N_T} > k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \Pr\left(\widetilde{N_T} = n\right)\ ,\ k = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Η μαθηματική έκφραση της δεξιάς ουράς της κατανομής $ETNB$ είναι δύσχρηστη, και για το λόγο αυτό με τη βοήθεια του αλγεβρικού υπολογιστικού προγράμματος $Mathematica$, για τη συνάρτηση επιβίωσης παίρνουμε

$$a(k) = \frac{p^k(1+\theta)\Gamma\left(1/2+k\right)}{\sqrt{\pi}(2+\theta)\Gamma(2+k)} \times Hypergeometric2F1\left(1/2+k, 1, 2+k, p\right).$$

όπου η συνάρτηση $Hypergeometric2F1\left(a, b; c; z\right)$ είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_2F_1(a, b; c; z)$ της οποίας η μαθηματική έκφραση δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$${}_2F_1\left(a, b; c; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

όπου ο όρος $(a)_k$ παριστάνει το πλήθος των διατάξεων των a στοιχείων ανά k, και δίνεται από τον τύπο

$$(a)_k = a(a-1)\cdots(a-k+1)\ , \quad 1 \leq k \leq a.$$

Ακόμη για τη βαθμίδα αποτυχίας, $h(k)$, της τυχαίας μεταβλητής $\widetilde{N_T}$ που ακολουθεί την κατανομή $ETNB$ ισχύει

$$h(k) = \Pr(\widetilde{N_T} = k | \widetilde{N_T} \geq k) = \frac{\Pr(\widetilde{N_T} = k)}{\Pr(\widetilde{N_T} > k) + \Pr(\widetilde{N_T} = k)}.$$

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η εύρεση της μαθηματικής έκφρασης για τη βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής $ETNB$ παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, και για το λόγο αυτό, με χρήση του προγράμματος $Mathematica$ η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$h(k) = \frac{2 \cdot \Gamma(2+k)}{2 + p(2k-1) \cdot \Gamma(1+k) Hypergeometric2F1\,(1/2+k, 1, 2+k, p)}.$$

Παράρτημα Β΄

Απόδειξη της ισότητας των δύο εκφράσεων για τη διασπορά της κατανομής $ETNB$

Στην ενότητα 4.2 βρήκαμε τον αναλυτικό τύπο για τη διασπορά της κατανομής $ETNB$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος ο οποίος δίνεται από τη σχέση (4.2.5) βρέθηκε από τον ορισμό της διακύμανσης της κατανομής $ETNB$, ενώ ο δεύτερος τύπος του οποίου η έκφραση δίνεται από τη μαθηματική σχέση (4.2.7). Οι δύο εκφράσεις για τη διασπορά είναι ισοδύναμοι, χωρίς όμως να είναι προφανή η ισοδυναμία αυτή. Έτσι, αν θέσουμε με $Var_1(N)$ και $Var_2(N)$ τις αντίστοιχες εκφράσεις τις διασποράς, τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$Var_1(N) = Var_2(N)$$

Όμως, από τις προαναφερθείσες σχέσεις (4.2.5) και (4.2.7) για τις δύο εκφράσεις αντίστοιχα, ισχύει

$$\begin{aligned} Var_1(N) &= -\frac{\{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2} + pr(1-p)^{-r-1}\}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} - \\ &- \frac{(pr)^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}. \end{aligned}$$

και

$$Var_2(N) = -\frac{pr(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}+pr\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}.$$

Αναλύοντας τον πρώτο τύπο της διασποράς, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
Var_1(N) &= -\frac{\{p^2r(r+1)(1-p)^{-r-2}+pr(1-p)^{-r-1}\}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} - \\
&- \frac{(pr)^2\left[(1-p)^{-r-1}\right]^2}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} \\
&= -\frac{(pr)^2(1-p)^{-r-2}+p^2r(1-p)^{-r-2}+pr(1-p)^{-r-1}-(pr)^2(1-p)^{-2r-2}}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} + \\
&+ \frac{p^2r(1-p)^{-2r-2}+pr(1-p)^{-2r-1}-(pr)^2(1-p)^{-2r-2}}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}.
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποιώντας τους όμοιους όρους που περιέχουν τις ποσότητες p^2r και pr καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$
\begin{aligned}
Var_1(N) &= -\frac{(pr)^2(1-p)^{-r-2}+pr(1-p)^{-r-1}\left[1-(1-p)^{-r}\right]+p^2r(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2} \\
&= -\frac{(pr)^2(1-p)^{-r-2}+pr(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}.
\end{aligned}
$$

Τελικώς, παίρνουμε

$$
Var_1(N) = -\frac{pr(1-p)^{-r-2}\left[1-(1-p)^{-r}+pr\right]}{\left[1-(1-p)^{-r}\right]^2}.
$$

Οπότε, οι δύο εκφράσεις για τη διακύμανση της κατανομής $ETNB$ είναι ισοδύναμες.

Βιβλιογραφία

Α. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

[1] Κούτρας Μ.Β. (2004) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες -Θεωρία και Εφαρμογές, μέρος I*, Β′ Έκδοση, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

[2] Κούτρας Μ.Β. (2004) *Εισαγωγή στις Πιθανότητες -Θεωρία και Εφαρμογές, μέρος II*, Εκδόσεις Αθ.Σταμούλης.

[3] Κουτσόπουλος Κ.Ι. (1999) *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος 1, Θεωρία των Κινδύνων*, Εκδόσεις Συμμετρία.

[4] Πολίτης Κ. (2009) *Σημειώσεις στη Θεωρία Χρεοκοπίας*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

[5] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2008) *Σημειώσεις στο μάθημα θεωρία κινδύνου I*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Π.Μ.Σ 'Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου'.

[6] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2009) *Σημειώσεις στο μάθημα θεωρία κινδύνου II*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Π.Μ.Σ 'Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου'.

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ

[7] Barlow R.E., Proschan F. (1975) *Statistical theory of reliability and life testing*, Holt, Rinehart and Winston.

[8] Borovkov K.A., Dickson D.C.M. (2008) *On the ruin distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes*, Insurance: Mathematics and Economics, **42**, 1104-1108.

[9] Bowers N.L, Gerber H.U, Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1997) *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries , Ithaca Illinois (2^{nd} *edition*).

[10] Egidio dos Reis A.D. (2002) *How many times does it take to get ruined and recovered*, Insurance: Mathematics and Economics, **31**, 235-248.

[11] Feller W. (1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol I, 3rd ed., J. Willey, New York.

[12] Frostig E., Pitts S.M., Politis K. (2010) *The time to ruin and the number of claims until ruin for phase-type claims*, submitted.

[13] Grandell J. (1991) *Aspects of Risk theory*, Spinger, Berlin.

[14] Grimmet G. and Stirzaker D. (2001) *Probability and random processes*, 3rd ed. Oxford University Press.

[15] Klugman S.A., Panjer H., Willmot G.E. (2004) *Loss Models: From data to decisions*, Wiley.

[16] Panjer H. (1981) *Recursive evaluation of a family of compound distributions*, ASTIN Bulletin, **12**, 22-26.

[17] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. and Teugels J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley.

[18] Sundt B., Jewell W.S. (1981) *Further results on recursive evaluation of compound distributions*, ASTIN Bulletin, **12**, 27-39.

[19] Thorin O. (1974) *Some comments on the Sparre Andersen model in the risk theory*, ASTIN Bulletin, **8**, 104-125.

[20] Willmot G.E. (1988) *Sundt and Jewell's family of discrete distributions*, ASTIN Bulletin, **18**, 17-29.

[21] Willmot G.E., Lin X.S. (2001) *Lundberg Approximations for compound distributions with Insurance Applications*, Springer, New York.