ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΕΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Ντίνος Ηλίας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Μάρτιος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΕΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Ντίνος Ηλίας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Μάρτιος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ....... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),
- Αρτίκης Θεόδωρος,
- Δημήτριος Στέγγος.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

MODELS OF RISK THEORY ON AN ECONOMIC ENVIROMENT

by
Ilias Ntinos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece
March 2011

Στον Σπύρο.

Στους γονείς μου,
Έλενη και Δημήτρη.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Θεόδωρο Αρτίκη και κύριο Δημήτριο Στέγγο για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλα τα μέλη Δ.Ε.Π. στο Π.Μ.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική του Πανεπιστημίου Πειραιώς, αλλά και στους συμφοιτητές μου για τη εποικοδομητική συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η επίδραση των μακροοικονομικών παραγόντων, όπως ο πληθωρισμός και το επιτόκιο στην κλασσική Θεωρία Κινδύνου. Στα πλαίσια αυτά εξετάζονται αρχικά το υπόδειγμα των Delbean και Haezendonck [37], όπου στο κλασσικό υπόδειγμα της Θεωρίας Κινδύνου εμπλέκεται και ένας οικονομικός παράγοντας που είναι συνάρτηση του πληθωρισμού και του επιτοκίου. Στη συνέχεια υπολογίζονται φράγματα της πιθανότητας χρεοκοπίας που βελτιώνουν τα αντίστοιχα φράγματα της κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου. Τέλος μελετάμε το υπόδειγμα του Harrison [30], όπου ένας εμπλεκόμενος οικονομικός παράγοντας είναι μια συνάρτηση του επιτοκίου. Σχετικά αποδεικνύεται ότι το κεφάλαιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας μπορεί να παρασταθεί ως ένα ολοκλήρωμα Riemann -Stieltjes και δίνεται ένας χαρακτηρισμός για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Πρόλογος

Η επιρροή του πληθωρισμού και των επιτοκίων στο πλεόνασμα των ασφαλιστικών επιχειρήσεων έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς. Πράγματι οι μελέτες των Harrison [22], Taylor [36] και Kahane [25] έχουν δώσει σημαντική ώθηση στην ερευνητική αυτή περιοχή. Σε αυτήν την εργασία θα δώσουμε μια γενική περιγραφή της κλασσικής στοχαστικής διαδικασίας κινδύνων όταν λαμβάνουμε υπ΄ όψιν μας μακροοικονομικούς παράγοντες. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επίδραση των παραγόντων αυτών στα πιθανοθεωρητικά φράγματα χρεοκοπίας.

Στα πλαίσια αυτά, αρχικά μελετούμε ένα υπόδειγμα θεωρίας κινδύνων που προτάθηκε από τους Delbean και Haezendonck [9]. Για να επεξηγήσουμε την προσέγγισή μας εξετάζουμε ένα μοντέλο στο οποίο η ένταση τόκου $\bar{i}$ και η ένταση πληθωρισμού δ δεν μεταβάλλονται. Σε αυτήν την περίπτωση η διαφορά $i = \bar{i} - \delta$ είναι ίση με την πραγματική ένταση τόκου. Στη συνέχεια επεκτείνουμε την μελέτη μας και σε πιο πολύπλοκα μοντέλα.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη στοχαστική διαδικασία $\langle N_t \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$ στην οποία κάθε N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ τη στοχαστική διαδικασία στην οποία κάθε X_n δηλώνει το μέγεθος της n-οστής απαίτησης και $\langle T_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ τη στοχαστική διαδικασία στην οποία κάθε T_n δηλώνει τη χρονική στιγμή εμφάνισης της n-οστής απαίτησης. Στην κλασσική θεωρία κινδύνου οι προσαυξήσεις $N_t - N_s$ είναι ανεξάρτητες και για μικρό Δt η πιθανότητα να υπάρξει απαίτηση σε χρονικό διάστημα μήκους Δt είναι ίση με $\lambda \Delta t$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Σε ένα μοντέλο αυτής της μορφής όπου λαμβάνονται υπ΄ όψιν μακροοικονομικοί παράγοντες, όπως παραπάνω, η n-οστή απαίτηση δεν είναι ίση με X_n (όπως συμβαίνει άλλωστε στην κλασσική περίπτωση) αλλά ίση με $e^{\delta T_n} X_n$. Αν $\langle \tilde{Z}_t \rangle_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ είναι η στοχαστική διαδικασία στην οποία κάθε $\tilde{Z}_t$ δηλώνει την εξέλιξη του πλεονάσματος της ασφαλιστικής επιχείρησης τη χρονική στιγμή t, τότε τη χρονική στιγμή t το πλεόνασμα αυτό θα αυξάνεται όχι μόνο από την είσπραξη ασφαλίστρων αλλά και από τη λήψη τόκων από αυτό το πλεόνασμα. Από την άλλη πλευρά το πλεόνασμα θα μειωθεί εάν η επιχείρηση έχει να πληρώσει απαιτήσεις οι οποίες εξαρτώνται από τον πληθωρισμό. Συνεπώς για ένα μικρό χρονικό διάστημα dt το εισόδημα μιας ασφαλιστικής επιχείρησης θα γίνει ίσο με

$$p(t)dt + \bar{i}\tilde{Z}_t dt$$

όπου $p(t)$ είναι η πυκνότητα ασφαλίστρου τη χρονική στιγμή $t \in [0, +\infty]$. Βέβαια αν το ασφάλιστρο ακολουθεί τον πληθωρισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $p(t) = p(0)e^{\delta t}, \forall t \in [0, +\infty]$. Προφανώς όμως η εξερχόμενη ροή δεν είναι δυνατόν να γραφεί τόσο απλά αφού οι απαιτήσεις δεν συμβαίνουν συνεχώς αλλά συνιστούν μια στοχαστική διαδικασία αλμάτων. Η ανάγκη αυτή μας οδήγησε στο να εισάγουμε το μέτρο $e^{\delta t} X_{N_t} dN_t$. Αυτό είναι ένα αυστηρά ασυνεχές μέτρο με βάρος ίσο με $e^{\delta T_n} X_n$ στην αντίστοιχη χρονική στιγμή $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Η προαναφερθείσα λογική διαδικασία μαθηματικά τυποποιείται αυστηρά από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\tilde{Z}_t = p(0)e^{\delta t}dt + \bar{i}\tilde{Z}_t dt - e^{\delta t} X_{N_t} dN_t. \qquad (1.1)$$

Ακολουθώντας την αναλογιστική παράδοση εισάγουμε την παρούσα αξία της στοχαστικής διαδικασίας $\langle \tilde{Z}_t \rangle_{t \in [0,+\infty]}$:

$$\bar{Z}_t = e^{-it}\tilde{Z}_t, \forall t \in [0, +\infty]. \qquad (1.2)$$

Τότε η άνω στοχαστική διαφορική εξίσωση παίρνει την τελική μορφή

$$d\bar{Z}_t = p(0)e^{-(\bar{i}-\delta)}dt - e^{-(\bar{i}-\delta)} X_{N_t} dN_t = p(0)e^{-it}dt - e^{-it} X_{N_t} dN_t.)$$

Άρα

$$d\bar{Z}_t = p(0)e^{-it}dt - e^{-it} X_{N_t} dN_t.) \quad (1.3)$$

Η απεικόνιση $f(t) = e^{-it}, \forall t \in [0, +\infty]$ θα καλείται οικονομικός παράγοντας. Επ΄ αυτού υποθέτουμε ότι ισχύει $i > 0$ (μια υπόθεση η οποία είναι ευρύτερα οικονομικά αποδεκτή παρ΄ όλο που στο παρελθόν υπήρξαν περίοδοι κατά τις οποίες η πραγματική ένταση τόκου έγινε στιγμιάια αρνητική). Σε καταστάσεις λοιπόν όπου η πραγματική ένταση τόκου είναι σταθερή και γνησίως θετική ο οικονομικός παράγοντας $f(t) \colon t \in [0, +\infty]$ φθίνει στο 0 καθώς ο χρόνος τείνει στο $+\infty$.

Η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1.3) είναι η

$$\bar{Z}_t = p(0)\int_0^t e^{-iu}du - \sum_{n=1}^{N_t} e^{-iT_n} X_n + \bar{Z}_0 \qquad (1.4)$$

όπου με $\bar{Z}_0$ συμβολίζουμε το αρχικό πλεόνασμα (ή αλλιώς αποθεματικό),

$$e^{-iT_n} X_n$$

είναι η παρούσα αξία της n-οστής απαίτησης (όταν μετριέται σε σταθερές τιμές) και

$$p(0)\int_0^t e^{-iu}du$$

είναι η παρούσα αξία των εισοδημάτων από τα ασφάλιστρα (όταν μετριούνται σε σταθερές τιμές). Ο δε στοχαστικός παράγοντας της (1.4)

$$\overline{S_t} = \sum_{n=1}^{N_t} e^{-iT_n} X_n, \qquad (1.5)$$

παριστάνει την παρούσα αξία του ποσού που πλήρωσε η ασφαλιστική επιχείρηση μέχρι τη χρονική στιγμή $t \in [0, +\infty]$. Αυτός είναι και ο λόγος που η αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία $\langle \bar{S}_t \rangle_{t \in [0,+\infty]}$ καλείται η στοχαστική διαδικασία της παρούσας αξίας της στοχαστικής διαδικασίας κινδύνου.

Όπως είναι γνωστό το βασικό πρόβλημα της θεωρίας χρεοκοπίας είναι να εκτιμηθεί το t_0 για το οποίο θα έχουμε $\overline{Z}_{t_0} < 0$ (ή ισοδύναμα $\tilde{Z}_{t_0} < 0$). Στην κλασσική περίπτωση (όπου $i = 0$ και οπότε το επιτόκιο αντισταθμίζεται από τον πληθωρισμό) η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια συνάρτηση του $p_{(0)}$, του αρχικού πλεονάσματος και της κατανομής των απαιτήσεων. Επομένως στο μοντέλο μας η πραγματική ένταση τόκου θα γίνει επιπρόσθετη παράμετρος στην πολύπλοκη κατάσταση στην οποία έχουμε ήδη οδηγηθεί.

Στο κεφάλαιο 3 αναλύεται και μελετάται το παραπάνω υπόδειγμα των Delbean και Haezendonck [11].

(i) Στη δεύτερη παράγραφο θα μελετήσουμε τις βασικές μαθηματικές ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίος $\langle \bar{S}_t \rangle_{t \in [0,+\infty]}$ για οποιονδήποτε οικονομικό παράγοντα f.

(ii) Στην τρίτη παράγραφο θα μελετήσουμε τις διάφορες τεχνικές υπολογισμού ασφαλίστρων και θα τις εφαρμόσουμε στο μοντέλο μας. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε διαφορετικές μορφές της πυκνότητας ασφαλίστρου $p(t)$ και θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι μόνο η αρχή της αναμενόμενης αξίας δίδει αποτελέσματα τα οποία επηρεάζονται από τον πληθωρισμό.

(iii) Στην τέταρτη παράγραφο θα μελετήσουμε την περίπτωση στην οποία ο πληθωρισμός επηρεάζει την απεικόνιση $p(t)$ και θα μελετήσουμε αντίστοιχα προβλήματα χρεοκοπίας. Σαφώς το κεφάλαιο αυτό είναι περισσότερο τεχνικό και μάλιστα αντιμετωπίζεται στο σύνολό του με τη χρήση των martingales. Πράγματι εργαλεία όπως η ανανεωτική θεωρία και άλλες μορφές στασιμότητας και συμμετρίας που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στο κλασσικό μοντέλο δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που εξετάζουμε εξαιτίας της ύπαρξης οικονομικού παράγοντα.

(iv) Στην παράγραφο 5 μελετούμε την σημαντικότατη περίπτωση κατά την οποία ι-σχύει ότι $f(t) = e^{-it}, \forall t \in [0, \infty]$, όπου και η πραγματική ένταση τόκου είναι σταθερή και θετική. Επίσης δίνονται αριθμητικά δεδομένα για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας μελετούμε το υπόδειγμα της Θεωρίας Κινδύνων όπως αυτό προτάθηκε από τον Harisson [22]. Περιγράφουμε εν συντομία την εργασία αυτή.

Θεωρουμε λοιπόν τη στοχαστική διαδικασία $Z = \langle Z_t \rangle_{t \geq 0}$ η οποία θα είναι μια στοχαστική διαδικασία με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις πεπερασμένη διακύμανση και $Z(0) = 0$. Αυτή θα ονομάζεται η στοχαστική διαδικασία των εισοδημάτων. Δοθέντος ενός θετικού επιπέδου αρχικών Κεφαλαίων y και ενός θετικού επιτοκίου i ορίζουμε την αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία Κεφαλαίων $\overline{Z}$ από την σχέση

$$\overline{Z}(t) = e^{it} y + \int_0^t e^{i(t-s)} dZ(s), \ t \geq 0. \qquad (4.1)$$

Όπως θα δείξουμε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes στο δεξί μέρος της (4.1) υπάρχει και είναι πεπερασμένο για κάθε $t \geq 0$ και για σχεδόν κάθε δειγματική διαδρομή της τυχαίας μεταβλητής Z.

Για να δώσουμε μια ερμηνεία στην $\overline{Z}$ αρχικά θεωρούμε μια σημαντική ειδική περίπτωση. Έστω $\langle N(t) \rangle_{t \geq 0}$ η στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής την F. Αν θεωρήσουμε c μια πεπερασμένη σταθερά τότε λαμβάνουμε

$$Z(t) = ct - (X_1 + \ldots + X_{N(t)}), \ t \geq 0. \qquad (4.2)$$

Τότε η Z είναι μια compound Poisson στοχαστική διαδικασία με drift c. Στοχαστικές διαδικασίες αυτής της μορφής με την F συγκεντρωμένη στο $(0, \infty)$ και το c θετική σταθερά παραδοσιακά έχουν χρησιμοποιηθεί σε αθροιστικές Θεωρίες Κινδύνων για να αναπαραστήσουν αλλαγές στο απόθεμα κινδύνου μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Μπορεί κανείς να ερμηνεύσει το c σαν την αναλογία με την οποία λαμβάνονται οι πληρωμές ασφαλίστρων από τους ασφαλισμένους και το $N(t)$ σαν το αθροιστικό πλήθος των απαιτήσεων οι οποίες επιβαρύνουν την επιχείριση μέχρι τη χρονική στιγμή t και X_k σαν το μέγεθος της k απαίτησης. Υποθέστε τώρα ότι το αποθεματικό κινδύνου της ασφαλιστικής επιχείρησης έχει επενδυθεί σε έναν λογαριασμό Τραπέζης με συνεχή ανατοκισμό και με ένταση τόκου i. Υποθέστε επίσης ότι οι πληρωμές αυτων των α-σφαλίστρων τοποθετούνται στον λογαριασμό καθώς αυτοί λαμβάνονται και τα χρήματα τους αποσύρονται από το λογαριασμό για να πληρώσουν απαιτήσεις καθώς αυτές συμβαίνουν. Επιπλέον ας υποθέσουμε οτι θα μπορούσε το μέγεθος του λογαριασμού αυτού να γίνει ακόμα και μηδέν. Επίσης μπορούν να δανεισθούν χρήματα με την ίδια ένταση τόκου i και ο τόκος αναμιγνύεται συνεχώς με το χρέος ακριβώς όπως γίνεται και με τις οικονομίες. Έστω y λοιπόν το αρχικό αποθεματικό κινδύνου και ας συμβολίσουμε με $t_1, t_2, \ldots$ τις στιγμές στις οποίες συμβαίνουν οι ζημιές. Τότε το περιεχόμενο του λογαριασμου την χρονική στιγμή t είναι ίσο με

$$\overline{Z}(t) = e^{it}y + \int_0^t ce^{i(t-s)}ds - \sum_{k=1}^{N(t)} e^{i(t-t_k)}X_k, \quad (4.3)$$

το οποίο συμπίπτει με τον ορισμό (4.1). Μια όμοια ερμηνεία εφαρμόζεται όταν η F είναι αυθαίρετη, γεγονός το οποίο επιτρέπει τις μίξεις των ετησίων εργασιών και των κοινών ασφαλιστικών εργασιών.

Γενικά ερμηνεύουμε το y σαν το αρχικό κεφάλαιο μιας επιχείρησης και το i σαν την στιγμιαία ένταση του τόκου η οποία λαμβάνεται μέσω ακίνδυνων επενδύσεων στα κεφάλαια μιας επιχείρησης και την $Z(t)$ σαν το καθαρό λειτουργικό κέρδος της εταιρείας στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Όπως και στην ειδική περίπτωση παραπάνω μπορεί κανείς να ερμηνεύσει το $\overline{Z}(t)$ σαν τα κεφάλαια μιας επιχείρησης τη χρονική στιγμή t. Το γενικό μοντέλο μας, μας επιτρέπει να έχουμε τη στοχαστική διαδικασία των εισοδημάτων πιο πολύπλοκη από την (4.2).

Έστω

$$T = \inf\{t \geq 0 : \overline{Z}(t) < 0\}.$$

Ο πρώτος μας σκοπός είναι να ορίσουμε την

$$\psi(y) = P\{T < \infty : \overline{Z}(0) = y\}.$$

Ορίζουμε με T τη στιγμή της χρεοκοπίας και με $\psi(.)$ την συνάρτηση χρεοκοπίας. Στην προσφώνηση αυτού του προβλήματός μας πρέπει κανείς να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στη χρονική περίοδο μεταξύ της οποίας η $\overline{Z}$ παραμένει θετική και έτσι η i μπορεί να ερμηνευθεί απλά σαν η ένταση του τόκου η οποία λαμβάνεται σε θετικά κεφάλαια.

Θα ξεκινήσουμε το δεύτερο μέρος εξετάζοντας χωρίς συγκεκριμένες υποθέσεις τη συμπεριφορά των στοχαστικών διαδικασιών κεφαλαίων. Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι ένας γενικός χαρακτηρισμός της συνάρτησης Κινδύνου. Ο χαρακτηρισμός χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την συνάρτηση $\psi(.)$ για τρείς συγκεκριμένες περιπτώσεις. Οι δυο πρώτες αντιστοιχούν στη στοχαστική διαδικασία εισοδήματος της compound Poisson του τύπου (4.2). Αρχικά θεωρούμε ότι το c είναι ένας θετικός αριθμός και ότι η F είναι η εκθετική κατανομή συγκεντρωμένη στο $(0, \infty)$. Από την άλλη πλευρά υποθέτουμε οτι το c είναι ένας αρνητικός αριθμός με την F να είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής στο $(-\infty, 0)$. Οι συναρτήσεις κατανομών για αυτές τις δυο περιπτώσεις ορίστηκαν από τον Segerdahl [33] στο περιεχόμενο των μοντέλων ασφάλισης με μεταβλητές τις αναλογίες των ασφαλίστρων αλλά λαμβάνονται εδώ από μια πολύ πιο απλή μέθοδο. Το τρίτο παράδειγμα το οποίο θα συζητηθεί λαμβάνει τη διαδικασία των εισοδημάτων να είναι μια Brownian motion με drift. Η αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία Κεφαλαίων είναι μια μονοδιάστατη διαδικασία διάχυσης η οποία ονομάστηκε compounding Brownian motion από τους Emanuel, Harrison και Taylor αλλά λαμβάνεται εδώ από έναν ευθύ και πιθανοθεωρητικό ισχυρισμό.

Το κλειδί για την ανάλυσή μας είναι η απλή ολοκληρωματική αναπαράσταση (4.1) για τη στοχαστική διαδικασία Κεφαλαίων. Αυτή είναι εικονοκά ισοδύναμη με την αναπαράσταση η οποία έχει δοθεί από τον Gerber [14, 15] για προξοφλούμενες ροές εισοδημάτων, οι ιδιότητες των οποίων μεταγενέστερα μελετήθηκαν από τον Whitt [23].

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί.

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$, $\mathbb{N}_n^*$ συμβολίζονται τα σύνολα $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, αντίστοιχα. Τέλος, με $\mathbb{C}$ συμβολίζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω) και με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ $(I \neq \varnothing)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

Μια **σ-άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω είναι ένα σύστημα Σ, υποσυνόλων του Ω, τέτοιο ώστε (i) $\Omega \in \Sigma$, (ii) για κάθε $E \in \Sigma$ ισχύει $E^c \in \Sigma$, (iii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Σ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Τα στοιχεία της Σ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με χ_A συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) A. Ας θεωρήσουμε επίσης $\mathcal{G}$ σύστημα υποσυνόλων του Ω. **Η ελάχιστη σ-άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και (α, β), αντίστοιχα.

Αν Θ είναι ένα σύνολο και T μια σ-άλγεβρα στο Θ, μία συνάρτηση $f : \Omega \to \Theta$ ονομάζεται **Σ-T-μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν και μόνο αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Ειδικά, αν $\Theta = \mathbb{R}$ και $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τότε η f ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, ενώ αν $\Theta = \mathbb{R}^n$ και $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η f ονομάζεται **(n-διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω αν και μόνο αν (i) $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ και (ii) $\bigcup_{j\in\ I} B_j = \Omega$. Οι τελευταίες δύο ιδιότητες συνοπτικά συμβολίζονται ως εξής: $\biguplus_{j\in I} B_j = \Omega$. Αν επί πλέον η $\{B_j\}_{j\in I}$ είναι μια οικογένεια στο Σ, τότε και μόνο τότε αυτή ονομάζεται μια Σ-**μετρήσιμη διαμέριση** του Ω.

Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **απλή ή κλιμακωτή** συνάρτηση αν και μόνο αν το σύνολο τιμών της $s(\Omega)$ είναι πεπερασμένο. Αν η s είναι απλή, τότε υπάρχει μοναδική, πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_n\}$ τέτοια ώστε $A_j \neq \varnothing$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και μοναδική ακολουθία $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\alpha_i \neq \alpha_j$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$ με $i \neq j$, ώστε $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$. Η παραπάνω παράσταση ονομάζεται η **κανονική μορφή** της s και προκύπτει, αν γράψουμε $s(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και θέσουμε $A_k := s^{-1}(\{\alpha_k\})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Το ζεύγος (Ω, Σ) ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ.) αν και μόνο αν (i) το Ω είναι ένα οποιοδήποτε (βασικό) σύνολο, (ii) η Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Επίσης αν θεωρήσουμε (Ω, Σ) έναν μ.χ., τότε η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ ονομάζεται **(σ-προσθετικό) μέτρο** αν και μόνο αν (i) $\mu(\varnothing) = 0$, (ii) για κάθε ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ τέτοια ώστε $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ ισχύει $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$. Τα μέτρα μ, ν ονομάζονται **κάθετα μεταξύ τους** και γράφουμε $\mu \perp \nu$ αν και μόνο υπάρχει $A \in \Sigma$ ώστε $\nu(A) = 0 = \mu(A^c)$. Ακόμη, το ν ονομάζεται **απόλυτα συνεχές ως προς το** μ και συμβολίζεται με $\nu \ll \mu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) = 0$ έπεται ότι $\nu(A) = 0$. Επί πλέον, τα ν και μ ονομάζονται **ισοδύναμα** (συμβολικά $\nu \sim \mu$) αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$ ή αλλιώς αν και μόνο αν το $\nu \ll \mu$ και το $\mu \ll \nu$.

Η τριάδα (Ω, Σ, μ) ονομάζεται **χώρος μέτρου** (χ.μ.) αν και μόνο αν (i) το Ω είναι ένα οποιοδήποτε (βασικό) σύνολο, (ii) η Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, (iii) η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ είναι ένα μέτρο. Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με P. Συνακόλουθα, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με (Ω, Σ, P). Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **πεπερασμένο μέτρο** και αν υπάρχει $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ με $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mu(\Omega_n) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **σ-πεπερασμένο μέτρο** και ο αντίστοιχος χ.μ. **χώρος πεπερασμένου ή σ-πεπερασμένου μέτρου**. Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. (Ω, Σ, μ).

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο μ-μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή **μ-μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν

$\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με Σ_0.

Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και $p(x)$ μια ιδιότητα εφαρμόσιμη σε στοιχεία $x \in \Omega$ (π.χ. ισότητα δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y). Θα λέμε ότι «η $p(x)$ ισχύει για σχεδόν κάθε $x \in \Omega$» ή ότι «η $p(x)$ ισχύει σχεδόν βέβαια ($\sigma.\beta.$)» ή αν κρίνεται αναγκαίο να αναφέρουμε το μέτρο πιθανότητας που θεωρούμε ότι «η $p(x)$ ισχύει για P-σχεδόν κάθε $x \in \Omega$» ή «η $p(x)$ ισχύει P-σχεδόν βέβαια ($\sigma.\beta.$)» αν και μόνο αν το σύνολο $N := \{x \in \Omega : p(x) \quad \text{δεν ισχύει}\}$ είναι ένα P-μηδενικό σύνολο.

Ιδιαιτέρως, αν δύο μετρήσιμες συναρτήσεις X, Y είναι $P - \sigma.\beta.$ ίσες, τότε γράφουμε $X = Y \quad P - \sigma.\beta.$ ή $X =_P Y$. Αντίστοιχοι συμβολισμοί μπορούν να γραφούν και για τις σχέσεις διάταξης $>, <, \geq, \leq$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε ένα βήμα παρακάτω, ορίζοντας την έννοια της ολοκληρωσιμότητας μιας τ.μ. και διακρίνοντας τα διάφορα είδη τ.μ.. Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. (Ω, Σ, P).

Μία μετρήσιμη συνάρτηση (τ.μ.) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο P) αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P - \sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^0(P)$ και $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των Σ-μετρήσιμων συναρτήσεων και όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των μετρήσιμων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ – συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** ($\sigma.\kappa.$) αν και μόνο αν είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Αν η F έχει επί πλέον την ιδιότητα $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, τότε αυτή ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** ($\sigma.\kappa.\pi.$).

Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. X. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (*degenerate (probability) distribution*). Η P_X (αντ. η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** ($\sigma.\kappa.\pi.$) **της τ.μ.** X (αντ. την $\sigma.\kappa.\pi.$) $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η F_X είναι πράγματι *σ.κ.π.*

Μια *σ.κ.π.* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με *σ.κ.π.* $F_X = F$) ονομάζεται: (i) **Διακριτή**, αν και μόνο αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* αυτής) είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\sum_{k \in K} f(k) = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (*σ.π.*) της F (αντ. της X). (ii) **Συνεχής**, αν και μόνο αν η F είναι συνεχής συνάρτηση (αντ. το σύνολο τιμών R_X της X έχει την πληθικότητα του συνεχούς και η $P_X(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in R_X$). (iii) **Απόλυτα Συνεχής**, αν και μόνο αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* αυτής) είναι της μορφής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*) της F (αντ. της X). Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας «συνεχής τ.μ.» θα εννοούμε «απόλυτα συνεχής τ.μ.».

Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπου f_X η αντίστοιχη *σ.(π.)π.*, και ν είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Έπειτα παραθέτουμε τις έννοιες του μετρήσιμου ορθογωνίου, της σ-άλγεβρας και του μέτρου γινομένου.

Έτσι θεωρούμε (Ω, Σ, μ) και (Θ, T, ν) χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του $\Omega \times \Theta$)** αν και μόνο αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$

και $B \in T$. Επί πλέον, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των μ και ν** και σημειώνεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$EX := E[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $EX \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.

Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\big(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\big) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ στοιχείων της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n^*$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της Σ** αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j \in I}$ τ.μ., όπου I σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j \in I}\big) = \sigma\bigg(\bigcup_{j \in I} \sigma(X_j)\bigg).$$

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη μιας** οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ ($m, n \in \mathbb{N}^*$), οι σ-(υπο)άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την **n-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ($j \in I$) ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **σ.δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **σ.δ. διακριτού χρόνου**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$: (i) Είναι μια σ.δ. **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ ($j \in \mathbb{N}_m^*$) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. (ii) Είναι μια σ.δ. **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m^*$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$.

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Θεωρίας Κινδύνων.

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μια χρήσιμη για την παρούσα εργασία επισκόπηση βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της Θεωρίας Κινδύνου. Δίνουμε λοιπόν τους βασικούς ορισμούς και τα βασικά αποτελέσματα (χωρίς αποδείξεις) που θα μας χρησιμεύσουν στην κατανόηση της παρούσας εργασίας.

Ορισμός 2.1 : Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. είναι μια **σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων** αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

(t_1) $T_0(\omega) = 0$, και

(t_2) $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επί πλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.2 : Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι η **σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων** (*claim interarrival process*).

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ότι η τ.μ. W_n είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k.$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους άνω ορισμούς σημειώνουμε τα εξής:

- Η T_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον *χρόνο εμφάνισης / πραγματοποίησης* της n-απαίτησης.

- Η W_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον *χρόνο αναμονής μεταξύ της $n-1$ και της n απαίτησης.*

- Με πιθανότητα ένα *καμία* απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως την αντίστοιχη – επαγόμενη από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε – και το υποθέτουμε – ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή θέτουμε το $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.

Πρόταση 2.3 : Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big)$.

(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \ldots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \ldots, T_n(\omega))'$$

και

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα, καθώς και για τον $n \times n$-πίνακα $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ με

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{cases}$$

έχουμε:

(ii1) Ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, και

(ii2) $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ καθώς και $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Πρόταση 2.4 : Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων της Πρότασης (2.3) ικανοποιούν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τα εξής:

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \text{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Ορισμός 2.5 : Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Πρόταση 2.6 : Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} ET_n < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Πρόταση 2.7 : Αν $\sum_{n=1}^{\infty} EW_n < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Ορισμός 2.8 : Για $n \in \mathbb{N}^*$ το γράφημα της T_n ορίζεται από την απεικόνιση $U_n : \Omega \to \Omega \times \mathbb{R}$ με τύπο $U_n(\omega) := (\omega, T_n(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Πρόταση 2.9 : Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η U_n είναι $\Sigma - \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.

Ορισμός 2.10 : Η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ με τύπο

$$\mu(C) := \sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}(C)$$

για κάθε $C \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου $P_{U_n}(C) := P\big(U_n^{-1}(C)\big)$ για κάθε $C \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ονομάζεται το **μέτρο απαίτησης** που επάγεται από την $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Πρόταση 2.11 : Ισχύουν τα εξής :

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η απεικόνιση U_n είναι $\Sigma - \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.

(ii) Η συνολοσυνάρτηση μ είναι ένα μέτρο.

Πρόταση 2.12 : Για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\mu(A \times B) = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \in B\}} \right) dP.$$

Ορισμός 2.13 : Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται **$\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων** αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχούν τα εξής:

(n_1) $N_0(\omega) = 0$,

(n_2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

(n_3) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(n_4) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

(n_5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_N ονομάζεται **το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Πρόταση 2.14 : Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega\in\Omega$ και $t\in\mathbb{R}_+$ θέσουμε

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}(\omega),$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\omega\in\Omega\backslash\Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}.$$

Πρόταση 2.15 : Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega\in\Omega$ και $n\in\mathbb{N}$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t\in\mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $\omega\in\Omega\backslash\Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{T_n\le t\}}(\omega)$.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που επάγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης (της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων ή της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή θέτουμε το $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.

Πρόταση 2.16 : Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

(ii) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Πρόταση 2.17 : Ισχύει $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Πρόταση 2.18 : Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*}\{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right).$$

Πρόταση 2.19 : Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.

Πρόταση 2.20 : Για κάθε $A \in \Sigma$ και $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ ισχύει

$$\mu(A \times (s,t]) = \int_A (N_t - N_s)dP.$$

Πρόταση 2.21 Νόμος 0-1 Έκρηξης : Έστω $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του $(0,\infty)$ κι ας υποθέσουμε ότι η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha_n)$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} = \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

(ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με την μονάδα.

Πρόταση 2.22 : Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $EW_n = 1/\alpha$ και $ET_n = n/\alpha$, και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Πρόταση 2.23 : Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $ET_n = n/\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $EN_t = \alpha t$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Πρόταση 2.24 : Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Ορισμός 2.25 : Θεωρούμε μια ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ θετικών τ.μ. και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε την τ.μ.

$$S_t := S_{N_t} := \sum_{k=0}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \left(\sum_{k=0}^{n} X_k \right),$$

όπου $X_0(\omega) := 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Η τ.μ. S_{N_t} είναι ένα **τυχαίο άθροισμα**, δηλαδή άθροισμα ή σειρά τυχαίου πλήθους τ.μ..

Δίδουμε λοιπόν τις ακόλουθες ερμηνείες :

- Η X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι η τ.μ. που δηλώνει το *μέγεθος* ή την *ένταση* ή το *ποσό* της n-απαίτησης.
- Η S_t ($t \in \mathbb{R}_+$) είναι η τ.μ. που δηλώνει το *συνολικό μέγεθος* ή *ύψος* ή *ποσό* των απαιτήσεων που εγείρονται/εμφανίζονται μέχρι τον χρόνο t.

Ορισμός 2.26 : Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται η **σ.δ. μεγέθους απαίτησης** (*claim size process*) και η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **σ.δ. συνολικών**

απαιτήσεων που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και την σ.δ. μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ορισμός 2.27 : Το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ για το οποίο ισχύει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης με ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες τ.μ., και οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες ονομάζεται **σ.δ. κινδύνου**.

Πρόταση 2.28 : Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$P(S_t \in B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) P\bigg(\sum_{k=0}^{n} X_k \in B\bigg).$$

Πρόταση 2.29 : Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Πρόταση 2.30 : Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Θεωρούμε την τ.μ. N για την οποία ισχύει ότι $P_N(\mathbb{N}) = 1$ και ορίζουμε την τ.μ. (τυχαίο άθροισμα) $S := S_N := \sum_{k=0}^{N} X_k$, με την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (σ.δ. μεγέθους απαίτησης) να είναι ισοκατανεμημένη και ανεξάρτητη της τ.μ. N. Τότε η κατανομή της τ.μ. S, έστω P_S, ονομάζεται **σύνθετη κατανομή** και σημειώνεται με $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ (ή $\mathbf{C}(F_N, F_X)$ σε όρους σ.κ.π.). Οι σύνθετες κατανομές ονομάζονται από την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ή αλλιώς της **απαριθμήτριας τ.μ.** N· π.χ., αν η P_N είναι μια κατανομή Poisson, τότε η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ λέμε ότι είναι μια **σύνθετη κατανομή Poisson**.

Οι τ.μ. N και S θα αναφέρονται ως **ο αριθμός των απαιτήσεων** και ως **το ύψος των συνολικών απαιτήσεων**, υποκαθιστώντας έτσι τις σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και των συνολικών απαιτήσεων, αντίστοιχα.

Πρόταση 2.31 : Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $P_S(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(\{n\}) P_X^{*n}(B)$.

Πρόταση 2.32 : Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi_S(u) = m_N(\varphi_X(u))$.

Πρόταση 2.33 : Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε $\varphi_S(u) = e^{\alpha[\varphi_X(u)-1]}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.34 : Έστω ότι $EN < \infty$ και $EX < \infty$. Τότε υπάρχει η μέση τιμή και η διακύμανση της τ.μ. S και ικανοποιούνται οι ισότητες:

(i) $ES = ENEX$.

(ii) $VS = ENVX + VNE^2X$.

Ορισμός 2.35 : Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται μια **(ομογενής) διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\alpha \in (0,\infty)$ αν και μόνο αν έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις κι επιπλέον για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$.

Πρόταση 2.36 : Έστω $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αύξουσα σ.δ. μη αρνητικών τ.μ., με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πεπερασμένες μέσες τιμές, και $Z_0 = 0$ $P-\sigma.\beta.$. Τότε η σ.δ. $\{Z_t - EZ_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale, όπου $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση για την $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι το κενό σύνολο (δηλαδή ότι $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$), καθώς και ότι η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με το μηδέν (δηλαδή ότι $P(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty) = 0$).

Επίπλέον, θεωρούμε την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης, την $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, καθώς και $\kappa \in (0,\infty)$. Για κάθε $u \in (0,\infty)$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ορίζουμε την τ.μ.

$$Z_t^u := u + \kappa t - S_t,$$

για την οποία έχουμε ότι $Z_0^u = 0$.

Δίνουμε λοιπόν την ακόλουθη ερμηνεία :

- Το κ παριστάνει την **ένταση ασφαλίστρου** (*premiun intensity*) έτσι ώστε με κt να δίνεται το **εισόδημα από ασφάλιστρα** (της ασφαλιστικής εταιρείας) μέχρι τον χρόνο t. Δηλαδή, η ένταση ασφαλίστρου είναι το ποσό των νομισματικών μονάδων (αναγόμενο) στη μονάδα του χρόνου που εισπράττει η ασφαλιστική εταιρεία από ασφάλιστρα (μέχρι τον t).

- Το u παριστάνει το **αρχικό αποθεματικό** (που διατηρεί η εταιρεία).

- Η τ.μ. Z_t^u παριστάνει το **αποθεματικό** στο χρόνο t όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.

Η οικογένεια $\{Z_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **σ.δ. του αποθεματικού** που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, την σ.δ. μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, την ένταση ασφαλίστρου κ και το αρχικό αποθεματικό u .

Ορίσμός 2.37 : Το ενδεχόμενο $\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} Z_t^u < 0\}$ ονομάζεται **χρεοκοπία** της σ.δ. του αποθεματικού και η πιθανότητα αυτού ονομάζεται **πιθανότητα χρεοκοπίας**.
Η πιθανότητα χρεοκοπίας σημειώνεται με $\Psi(u) := P\big(\inf_{t\in\mathbb{R}_+} Z_t^u < 0\big)$ για κάθε $u \in (0,\infty)$ για να τονίσουμε την εξάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας από το αρχικό αποθεματικό.

Ορίσμός 2.38 : Η πρώτη χρονική στιγμή για την οποία το αποθεματικό γίνεται αρνητικό ονομάζεται **χρόνος χρεοκοπίας** και συμβολίζεται με $\widetilde{T}$, δηλαδή για κάθε $u \in (0,\infty)$ ο $\widetilde{T} := \widetilde{T}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : Z_t^u < 0\}$.

Ορίσμός 2.39 : Μια σταθερά $\varrho \in (0,\infty)$ ονομάζεται:

(i) ένας **συντελεστής προσαρμογής** (*adjustment coefficient*) για την σ.δ. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ υπερβάλλοντος ποσού αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την $E\big[e^{-\varrho G_n}\big] = 1$.

(ii) ένας **συντελεστής υπερπροσαρμογής** (*superadjustment coefficient*) για την σ.δ. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ υπερβάλλοντος ποσού αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την $E\big[e^{-\varrho G_n}\big] \le 1$.

Πρόταση 2.40 Ανισότητα Lundberg :Αν $\varrho \in (0,\infty)$ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού, τότε για κάθε $u \in (0,\infty)$ ισχύει η ανισότητα $\Psi(u) = P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} Z_n^u < 0\big) \le e^{-\varrho u}$.

Ορίσμός 2.41 : Ας εισάγουμε λοιπόν τον συντελεστή προσαρμογής r_c για την στοχαστική διαδικασία $\langle Z_t \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$ που ορίζεται ως εξής

$$r_c = \inf\{r > 0 : E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] \geq 0\}.$$

Πρόταση 2.4.2 : Αν θεωρήσουμε ότι το σχετικό αποθεματικό ασφαλείας Θ είναι αυστηρώς θετικό γνωρίζουμε ότι $r_c > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $E[e^{rX_1}] < \infty$. Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε τον συντελεστή αυτόν ως **κλασσικό συντελεστή προσαρμογής**.

Κεφάλαιο 3

Η κλασσική θεωρία κινδύνων σε οικονομικό περιβάλλον.

3.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται και μελετάται το υπόδειγμα των Delbean και Haezendonck [9].

Πιο συγκεκριμένα

(i) Στη δεύτερη παράγραφο θα μελετήσουμε τις βασικές μαθηματικές ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίος $\langle \bar{S}_t \rangle_{t\in[0,+\infty]}$ για οποιονδήποτε οικονομικό παράγοντα f.

(ii) Στην τρίτη παράγραφο θα μελετήσουμε τις διάφορες τεχνικές υπολογισμού ασφαλίστρων και θα τις εφαρμόσουμε στο μοντέλο μας. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε διαφορετικές μορφές της πυκνότητας ασφαλίστρου $p(t)$ και θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι μόνο η αρχή της αναμενόμενης αξίας δίδει αποτελέσματα τα οποία επηρεάζονται από τον πληθωρισμό.

(iii) Στην τέταρτη παράγραφο θα μελετήσουμε την περίπτωση στην οποία ο πληθωρισμός επηρεάζει την απεικόνιση $p(t)$ και θα μελετήσουμε αντίστοιχα προβλήματα χρεοκοπίας. Σαφώς το κεφάλαιο αυτό είναι περισσότερο τεχνικό και μάλιστα αντιμετωπίζεται στο σύνολό του με τη χρήση των martingales. Πράγματι εργαλεία όπως η ανανεωτική θεωρία και άλλες μορφές στασιμότητας και συμμετρίας που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στο κλασσικό μοντέλο δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που εξετάζουμε εξαιτίας της ύπαρξης οικονομικού παράγοντα.

(iv) Στην παράγραφο 5 μελετούμε την σημαντικότατη περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $f(t) = e^{-it}, \forall t \in [0, \infty]$, όπου και η πραγματική ένταση τόκου είναι σταθερή και θετική. Επίσης δίνονται αριθμητικά δεδομένα για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις.

3.2 Η τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία κινδύνων.

Ας θεωρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\langle N_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Η $\langle T_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ παριστάνει τις διαδοχικές στιγμές εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων και οι απαιτήσεις παριστάνονται από τις ισόνομες και στοχαστικά ανεξάρτητες γνησίως θετικές τυχαίες μεταβλητές $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Ως συνήθως οι απαιτήσεις και οι αντίστοιχοι χρόνοι εμφάνισης θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Επίσης θεωρούμε ότι $T_0 = 0$.

Όλες οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται σε έναν βασικό χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) και η κοινή κατανομή πιθανότητας των απαιτήσεων συμβολίζεται με Q. Σε αυτό το τμήμα ο οικονομικός παράγοντας f είναι μια μη αρνητική και $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - μετρήσιμη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}_+$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $f(0) = 1$.

Η στοχαστική διαδικασία

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n \ , \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad (3.1)$$

καλείται η κλασσική στοχαστική διαδικασία συνολικών απαιτήσεων και συμβολίζεται ως C.R.. Η στοχαστική διαδικασία

$$\overline{S_t} = \sum_{n=1}^{N_t} f(T_n) X_n \ , \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad (3.2)$$

θα καλείται από εδώ και στο εξής ως η στοχαστική διαδικασία της παρούσας αξίας του κινδύνου και θα συμβολίζεται ως P.V.R.. Άς θεωρήσουμε λοιπόν τις ακόλουθες σ-άλγεβρες υποσυνόλων του Ω,

$$\mathcal{N}_t = \sigma\{N_u \colon u \le t\}, \qquad (3.3)$$

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{S_u \colon u \le t\}, \qquad (3.4)$$

$$\overline{\mathcal{H}_t} = \sigma\{\overline{S}_u \colon u \le t\} \qquad (3.5)$$

όπου οι

$$\mathcal{H}_t, N_t \text{ και } \overline{\mathcal{H}_t}$$

είναι οι πληροφορίες οι οποίες λαμβάνονται μέχρι και τη χρονική στιγμή t από τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες.

Λήμμα 3.2.1 : $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathcal{N}_t \subseteq \mathcal{H}_t$ και $\overline{\mathcal{H}_t} \subseteq \mathcal{H}_t$. Επιπλέον αν ο οικονομικός παράγοντας παίρνει μόνο γνησίως θετικές τιμές τότε

$$\overline{\mathcal{H}_t} = \mathcal{H}_t \text{ και } \mathcal{N}_t \subseteq \overline{\mathcal{H}}_t.$$

Απόδειξη : Αφού οι τυχαίες μεταβλητές $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως θετικές, το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t μπορεί να ληφθεί από τη σχέση

$$N_t = \sup\{n \geq 0 | 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t : 0 < S_{t_1} < \cdots < S_{t_n}\}. \tag{3.6}$$

$\forall t > 0, \exists_1 n \in \mathbb{N}, \exists_1 (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in (0, \infty)^n : t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq t$ και τα $t_1, t_2, \ldots, t_n$ να είναι σημεία ασυνέχειας της N_t. Τότε $\forall t \geq 0$ είναι $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : 0 < S_{t_1} < \ldots < S_{t_n}\}$ και επομένως είναι

$$\{N_t \geq n\} = \cap_{k=2}^{n} \{0 < S_{t_{k-1}} < S_{t_k}\}.$$

Συνεπώς $\mathcal{N}_t \subseteq \mathcal{H}_t$.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη σχέση παρατηρούμε ότι:

$$S_{T_k}^{-1}(A) \cap \{T_k \leq s\} \cap \{N_t = n\} =$$

$$S_{T_k}^{-1}(A) \cap \{T_k \leq s \wedge t\} \cap \{N_t = n\} \in \mathcal{H}_t, \forall k \leq n, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+). \tag{3.7}$$

Συνεπώς οι τυχαίες μεταβλητές S_{T_k} και T_k περιορισμένες στο σύνολο $\{N_t = n\}$ είναι $\mathcal{H}_t$ - μετρήσιμες απεικονίσεις. Επιπρόσθετα ισχύει ότι

$$\overline{S_t}^{-1}(A) \cap \{N_t = n\} = \{\sum_{k=1}^{n} f(T_k)(S_{T_k} - S_{T_{k-1}}) \in A\} \cap \{N_t = n\} \in \mathcal{H}_t. \tag{3.8}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\overline{S_t}^{-1}(A) \cap \{N_t = n\} \in \mathcal{H}_t$$

και συνεπώς

$$\overline{S_t}^{-1}(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} (\overline{S_t}^{-1}(A) \cap \{N_t = n\}) \in \mathcal{H}_t \tag{3.9}$$

αφού η $\{N_t = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια διαμέριση του Ω. Επομένως $\overline{\mathcal{H}_t} \subseteq \mathcal{H}_t$.

Αν $f > 0$ το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t μπορεί να ληφθεί από τη σχέση

$$N_t = \sup\{n \geq 0 | 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t : 0 < \overline{S}_{t_1} < \cdots < \overline{S}_{t_n}\}.$$

$\forall t > 0, \exists_1 n \in \mathbb{N}, \exists_1 (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in (0,\infty)^n : t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le t$ και τα $t_1, t_2, \ldots, t_n$ να είναι σημεία ασυνέχειας της N_t. Τότε $\forall t \geq 0$ είναι $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : 0 < \overline{S}_{t_1} < \ldots < \overline{S}_{t_n}\}$ και επομένως είναι

$$\{N_t \geq n\} = \cap_{k=2}^{n} \{0 < \overline{S}_{t_{k-1}} < \overline{S}_{t_k}\}.$$

Συνεπώς $\mathcal{N}_t \subseteq \overline{\mathcal{H}}_t$.

Είναι $X_1 = S_1 = \frac{\overline{S}_1}{f(T_1)} \in \overline{\mathcal{H}}_t$ διότι $\overline{S}_1 \in \overline{\mathcal{H}}_t$ και $f(T_1) \in \mathcal{N}_{t_1} \subseteq \overline{\mathcal{H}}_{t_1} \subseteq \overline{\mathcal{H}}_t, \forall t \geq t_1$. Είναι $\overline{S}_2 = \sum_{n=1}^{2} f(T_n) X_n$. Επομένως $X_2 = \frac{\overline{S}_2 - f(T_1)X_1}{f(T_2)} \in \overline{\mathcal{H}}_{t_2} \subseteq \overline{\mathcal{H}}_t, \forall t \geq t_2$. Αφού $X_1, X_2 \in \overline{\mathcal{H}}_t$ τότε $S_2 \in \overline{\mathcal{H}}_t$. Επαγωγικά προκύπτει ότι $S_n \in \overline{\mathcal{H}}_{t_n} \subseteq \overline{\mathcal{H}}_t, \forall t \geq t_n$. Συνεπώς $\mathcal{H}_t \subseteq \overline{\mathcal{H}_t}$. □

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

$$W_1 = T_1 - T_0, \ldots, W_n = T_n - T_{n-1}, \ldots$$

οι οποίες δηλώνουν τους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων των ζημιογόνων ενδεχομένων. Επίσης θεωρούμε τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

$$W_t{}^{(1)} = T_{N_t+1} - t, \qquad (3.10)$$

και για $k \geq 2$,

$$W_t{}^{(k)} = W_{N_t+k}. \qquad (3.11)$$

Μια θεμελιώδης και γνωστή ιδιότητα της ομογενούς διαδικασίας Poisson είναι η από κοινού ανεξαρτησία της σ-άλγεβρας $\mathcal{N}_t$ με τις τυχαίες μεταβλητές $W_t{}^{(1)}, W_t{}^{(2)}, \ldots, W_t{}^{(k)}$. Επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές αυτές κατανέμονται εκθετικά και με την ίδια παράμετρο $\lambda > 0$.

Πρόταση 3.2.2 :
(i) Η στοχαστική διαδικασία $\langle \overline{S}_t \rangle_{t \in [0,\infty]}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

$$(ii) \quad E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s} - \overline{S}_t)}] = e^{-\lambda s + \lambda \int_0^s E[exp(-\alpha f(u+t) X_1)] du}), \quad \forall 0 \leq s, t, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Απόδειξη : Για $\alpha \geq 0$, θα δείξουμε ότι

$$E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s} - \overline{S}_t)} \mid \mathcal{H}_t] = E[e^{-\alpha \sum_{k=1}^{N_s} f(T_k + t) X_k}] \quad \sigma.\beta.. \qquad (3.13)$$

Έστω $G \in \mathcal{H}_t$. Τότε έχουμε

$$E[1_G e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)}] = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} E[1_{G\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=m+n\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}]. \quad (3.14)$$

Αν $0 \leq u \leq t$ και $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ τότε έχουμε

$$\{S_u \in A\} \cap \{N_t = n\} = \bigcup_{k\leq n}\{\sum_{m=0}^{k} X_m \in A\} \cap \{N_u = k\} \cap \{N_t = n\},$$

το οποίο μας δείχνει ότι

$$\mathcal{H}_t \cap \{N_t = n\} \subseteq \sigma(X_1, \ldots, X_n; N_u \colon u \leq t).$$

Για $C \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ και για $D \in \mathcal{N}_t$ λαμβάνουμε τα ακόλουθα

$$E[1_{C\cap D\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}] =$$

$$\int 1_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) E[1_{D\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}] dQ^{\bigotimes(n+m)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) \quad (3.15)$$

και για $m \geq 1$ έχουμε

$$E[1_{D\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}]$$

$$= E[1_{D\cap\{N_t=n\}\cap\{W_t^{(1)}+\cdots+W_t^{(m)}\leq W_t^{(1)}+\cdots+W_t^{(m+1)}\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(W_t^{(1)}+\cdots+W_t^{(k)}+t)X_{n+k}}]$$

$$= E[1_{D\cap\{N_t=n\}}] E[1_{\{N_s=m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_{n+k}}]. \quad (3.16)$$

Για $m = 0$ η σχέση (3.16) είναι προφανής.

Από τις σχέσεις (3.15) και (3.16) έχουμε ότι

$$E[1_{C\cap D\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}]$$

$$= \int 1_C(x_1, \ldots, x_n) E[1_{D\cap\{N_t=n\}}] E[1_{\{N_s=m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_{n+k}}] dQ^{\bigotimes(n+m)}(x_1, \ldots, x_{n+m})$$

$$= E[1_{C\cap D\cap\{N_t=n\}}] E[1_{\{N_s=m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_k}]. \quad (3.17)$$

Άρα

$$E[1_{C\cap D\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}] = E[1_{C\cap D\cap\{N_t=n\}}] E[1_{\{N_s=m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_k}].$$

Εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα της μονότονης κλάσης στην σχέση (3.17) (Παράρτημα Α) έχουμε

$$E[1_{G\cap\{N_t=n\}\cap\{N_{t+s}=n+m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_{n+k})X_{n+k}}] = E[1_{G\cap\{N_t=n\}}] E[1_{\{N_s=m\}} e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_k}]. \quad (3.18)$$

και η άθροιση για n και m συνεπάγεται την εξίσωση

$$E[1_G e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)}] = P(G)E[e^{-\alpha\sum_{k=1}^{N_s} f(T_k+t)X_k}].$$

Για $G=\Omega$ έχουμε $E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)}] = E[e^{-\alpha\sum_{k=1}^{N_s} f(T_k+t)X_k}]$. (3.19)

Τέλος από το Λήμμα 3.2.1 συνεπάγεται ότι

$$E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)} \mid \overline{\mathcal{H}}_t] = E[E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)} \mid \mathcal{H}_t] \mid \overline{\mathcal{H}}_t]$$

$$= E[e^{-\alpha\sum_{k=1}^{N_s} f(T_k+t)X_k}] \ \sigma.\beta.. \qquad (3.20)$$

Από τις σχέσεις (3.19) και (3.20) έπεται η (i). Για να αποδείξουμε την σχέση (3.12) για $\alpha \geq 0$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι το τυχαίο διάνυσμα $(T_1, T_2, \ldots, T_m)$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{N_s = m\}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας ίση με

$$m!(1/s)^m \text{ στο } \Delta_m = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m : 0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_m < s\}$$

και ίση με 0 στο Δ_m^c.

Από τη σχέση (3.20) συνεπάγεται ότι

$$E[e^{-\alpha(\overline{S}_{t+s}-\overline{S}_t)}]$$

$$= \sum_{m\geq 0} \frac{s^m}{m!} \int E[e^{-\alpha\sum_{k=1}^{m} f(T_k+t)X_k} / N_s = m] \lambda^m e^{-\lambda s} dQ^{\bigotimes m}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m)$$

$$= \sum_{m\geq 0} \int \chi_{[0,s]}(u_m)\chi_{[u_1,s]}(u_2)\ldots\chi_{[u_{m-1},s]}(u_m)\lambda^m e^{-\lambda s}.$$

$$\prod_{k=1}^{m} e^{-\alpha f(u_k+t)\chi_k} du_1 \ldots du_m dQ^{\bigotimes m}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m)$$

$$= \sum_{m\geq 0} \int \chi_{[0,s]}(u_1)\chi_{[u_1,s]}(u_2)\ldots\chi_{[u_{m-1},s]}(u_m)\lambda^m e^{-\lambda s} \prod_{k=1}^{m} E[e^{-\alpha f(u_k+t)X_1}] du_1 \ldots du_m$$

$$= e^{-\lambda s} \sum_{m\geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} (\int_0^s E[e^{-\alpha f(u+t)X_1}] du)^m =$$

$$= e^{-\lambda s + \lambda \int_0^s E[exp(-\alpha f(u+t)X_1)]du}. \qquad (3.21)$$

Παρατήρηση : Η εξίσωση (3.21) δηλώνει ότι η στοχαστική διαδικασία $\langle \overline{S}_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν δεν υπάρχει οικονομικός παράγοντας (ο πληθωρισμός είναι δηλαδή αντισταθμισμένος από τον τόκο). Αυτό σημαίνει ότι τα εργαλεία της ανανεωτικής θεωρίας δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας P.V.R.. Ευτυχώς όμως από την δημοσίευση του σημαντικού paper του Gerber έχει δειχθεί ότι τα εργαλεία της ανανεωτικής θεωρίας μπορούν να αντικαταστηθούν από τα martingales [Gerber (1979), Delbean - Haezendonck (1985-1986), Moriconi (1983,1985,1987), Dassios -Embrechts(1987)].

3.3 Υπολογισμός ασφαλίστρων.

Στο δεύτερο μέρος ορίσαμε τη στοχαστική διαδικασία C.R. ($\langle S_t\rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$) και τη στοχαστική διαδικασία P.V.R ($\langle \overline{S}_t\rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$).

Αν $\langle p(t)\rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η πυκνότητα του ασφαλίστρου τη χρονική στιγμή $t\in\mathbb{R}_+$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία του παρόντος πλεονάσματος P.V.S.

$$\overline{Z}_t = \int_0^t p(u)e^{-\int_0^u i(s)ds}du - \overline{S}_t + \overline{Z}_0. \qquad (3.22)$$

Η αξία του κινδύνου και του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή $t\in\mathbb{R}_+$ δίνεται από τη στοχαστική διαδικασία κινδύνου (R.)

$$\tilde{S}_t = e^{\int_0^t i(s)ds}\overline{S}_t \qquad (3.23)$$

και τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος (S.)

$$\tilde{Z}_t = e^{\int_0^t i(s)ds}\overline{Z}_t, \qquad (3.24)$$

αντίστοιχα $i(s)$ είναι η ένταση του τόκου τη χρονική στιγμή $s\in\mathbb{R}_+$, $I(s)$ είναι ο δείκτης πληθωρισμού την χρονική στιγμή $s\in\mathbb{R}_+$ και

$$f(s) = I(s)e^{-\int_0^s i(u)du}, \forall s\in\mathbb{R}_+ \qquad (3.25)$$

είναι ο οικονομικός παράγοντας. Φυσικά έχουμε $f(0)=I(0)=1$.

Σε αυτό το μέρος θα ορίσουμε την πυκνότητα ασφαλίστρου p. Η πυκνότητα ασφαλίστρου θα εξαρτάται από το είδος της αρχής που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο. Σε περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου αναφέρεται ο Goovaerts (1984).

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ως $\Pi(\Upsilon)$ το ασφάλιστρο του κινδύνου Υ. Το Pi είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει μια τυχαία μεταβλητή Υ σε έναν πραγματικό αριθμο. Τότε το p θα υπολογίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα: αν $\Delta t>0$ τότε

$$p(t)\Delta t = \Pi(e^{-\int_t^{t+\Delta t} i(s)ds}\tilde{S}_{t+\Delta t} - \tilde{S}_t) + o(\Delta t). \qquad (3.26)$$

Πράγματι $p(t)\Delta t$ είναι η ποσότητα του ασφαλίστρου τη χρονική στιγμή t η οποία λαμβάνεται μεταξύ των χρονικών στιγμών t και Δt και

$$e^{-\int_t^{t+\Delta t} i(s)ds}\tilde{S}_{t+\Delta t} - \tilde{S}_t$$

είναι η αύξηση του κινδύνου (τη χρονική στιγμή t) που πραγματοποιείται μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + \Delta t$. Είναι σαφές λοιπόν ότι η χρήση της σχέσης (3.26) δηλώνει ότι η πυκνότητα ασφαλίστρου $p(t)$ τη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}_+$ υπολογίζεται χωρίς να λάβουμε υπόψιν μας το άμεσο παρελθόν.

Από την εξίσωση (3.26) προκύπτει ότι η πυκνότητα ασφαλίστρου υπολογίζεται με τη χρήση του ακόλουθου τύπου

$$p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \Pi(e^{-\int_t^{t+\Delta t} i(s)ds} \tilde{S}_{t+\Delta t} - \tilde{S}_t). \qquad (3.27)$$

Παρατηρήστε ότι

$$e^{-\int_t^{t+\Delta t} i(s)ds} \tilde{S}_{t+\Delta t} - \tilde{S}_t = e^{\int_0^t i(s)ds}(\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t). \qquad (3.28)$$

Επομένως αν η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι ομογενής τότε

$$p(t) = e^{\int_0^t i(s)ds} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \Pi(\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t). \qquad (3.29)$$

Πριν συνεχίσουμε με τον υπολογισμό της πυκνότητας ασφαλίστρου για ορισμένες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν $\mu = E[X_1] < \infty$ και $\sigma^2 = V[X_1] < \infty$ τότε

$$E[\overline{S}_{t+s} - \overline{S}_t] = \lambda\mu \int_t^{t+s} f(u)du, \qquad (3.30)$$

$$V[\overline{S}_{t+s} - \overline{S}_t] = \lambda(\mu^2 + \sigma^2) \int_t^{t+s} f^2(u)du. \qquad (3.31)$$

Αυτοί οι τύποι μπορούν πολύ εύκολα να εξαχθούν από την σχέση (3.12).

3.3.1 Η αρχή της αναμενόμενης αξίας.

Αν $\Theta \geq 0$ είναι το σχετικό αποθεματικό ασφαλείας και Υ είναι ο κίνδυνος, τότε το ασφάλιστρο $\Pi(\Upsilon)$ δίνεται από τη σχέση

$$\Pi(\Upsilon) = (1 + \Theta)E[\Upsilon]. \qquad (3.32)$$

Από τις σχέσεις (3.29) και (3.30) έχουμε ότι

$$p(t) = (1 + \Theta)e^{\int_0^t i(s)ds} \lambda\mu \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(u)du. \qquad (3.33)$$

Επομένως $p(t) = (1 + \Theta)\lambda\mu I(t)$ υπό τις συνθήκες κανονικότητας της f.

3.3.2 Η αρχή της διακύμανσης.

Αν $\beta > 0$ ένας θετικός πραγματικός αριθμός και Υ είναι ο κίνδυνος τότε το $\Pi(\Upsilon)$ υπολογίζεται από την σχέση

$$\Pi(\Upsilon) = E[\Upsilon] + \beta V[\Upsilon]. \qquad (3.34)$$

Ομοίως από τις σχέσεις (3.29), (3.30), (3.31)έχουμε ότι

$$p(t) = e^{\int_0^t i(s)ds} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} E[\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t] + \beta e^{2\int_0^t i(s)ds} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} V[\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t] \qquad (3.35)$$

και επομένως

$$p(t) = \lambda \mu I(t) + \beta \lambda (\mu^2 + \sigma^2) I^2(t). \qquad (3.36)$$

3.3.3 Η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας.

Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και Υ ένας κίνδυνος έτσι ώστε $E[e^{\alpha\Upsilon}] < \infty$ τότε το ασφάλιστρο $\Pi(\Upsilon)$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$E[1 - e^{-\alpha(\Pi(\Upsilon) - \Upsilon)}] = 0, \qquad (3.37)$$

οπότε και της

$$\Pi(\Upsilon) = \frac{1}{a} \log E[e^{\alpha\Upsilon}]. \qquad (3.38)$$

Τότε η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου είναι ίση με

$$p(t) = \frac{\lambda}{\alpha} E[e^{\alpha I(t) X_1} - 1]. \qquad (3.39)$$

3.3.4 Η αρχή του Esscher.

Αν $\beta > 0$ και αν Υ είναι ένας κίνδυνος τότε το ασφάλιστρο είναι ίσο με

$$\Pi(\Upsilon) = \frac{E[\Upsilon e^{\beta\Upsilon}]}{E[e^{\beta\Upsilon}]}. \qquad (3.40)$$

Έτσι

$$p(t) = e^{\int_0^t i(s)ds} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{E[(\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t) e^{\beta exp(\int_0^t i(s)ds)} (\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t)]}{E[e^{\beta exp(\int_0^t i(s)ds)} (\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t)]}.$$

Τότε η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου είναι ίση με $p(t) = \lambda E[I(t)X_1 e^{\beta I(t)X_1}]$. (3.41)

Παρατηρήσεις :

(1) Για τις τέσσερις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου που έχουμε θεωρήσει εδώ η πυκνότητα του ασφαλίστρου εξαρτάται μόνο από τον πληθωρισμό αλλά είναι και ανεξάρτητη του τόκου.

(2) Αν δεν υπάρχει καθόλου πληθωρισμός τότε οι πυκνότητες του ασφαλίστρου είναι σταθερές και ανεξάρτητες του χρόνου.

(3) Ο κανόνας (3.26) δεν μπορεί να εφαρμοστεί με την αρχή της διακύμανσης αφού

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} V[\overline{S}_{t+\Delta t} - \overline{S}_t]^{1/2} = \infty.$$

Η αρχή της αναμενόμενης μέσης τιμής είναι η μοναδική αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου στην οποία ισχύει η επιθυμητή σχέση $p(t) = I(t)p(0), \forall t \in \mathbb{R}_+$. Για τον λόγο αυτόν είναι λογικό να αφήσουμε τους συντελεστές β, α και b που εμφανίζονται στην αρχή της διακύμανσης, στην αρχή της μηδενικής χρησιμότητας και στην αρχή του Esscher να εξαρτώνται από τον χρόνο. Πράγματι αν $\beta(t) = \beta(0)I(t)^{-1}$, $\alpha(t) = \alpha(0)I(t)^{-1}$ και $b(t) = b(0)I(t)^{-1}$, λαμβάνουμε $p(t) = (\lambda\mu + \beta(0)\lambda(\mu^2 + \sigma^2))I(t)$ για την αρχή της διακύμανσης,

$$p(t) = \frac{\lambda}{\alpha(0)} E[e^{\alpha(0)X_1} - 1]I(t)$$

για την αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας και

$$p(t) = \lambda E[X_1 e^{b(0)X_1}]I(t)$$

για την αρχή του Essher .

3.4. Φράγματα πιθανοτήτων χρεοκοπίας.

Κατά τη διάρκεια αυτής της παραγράφου θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα ασφαλίστρου ορίζεται σύμφωνα με την αρχή της ανεμενόμενης αξίας με σχετικό αποθεματικό ασφαλείας $\Theta \geq 0$:

$$p(t) = (1+\Theta)\lambda\mu I(t). \quad (4.1)$$

Τα $I(s)$,$i(s)$ και $f(s)$ ($s \in \mathbb{R}_+$) είναι τα ίδια με την προηγούμενη ενότητα.

Έστω k το αρχικό αποθεματικό και ας συμβολίσουμε το $(1+\Theta)\lambda\mu$ με $p \; : \; p = p(0)$. Αντίστοιχα με τις στοχαστικές διαδικασίες $\langle S_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\langle \overline{S_t} \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ και τη στοχαστική διαδικασία $\langle \tilde{S}_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ ορίζουμε τις ακόλουθες στοχαστικές διαδικασίες :

(i) την κλασσική στοχαστική διαδικασία (C.S)

$$Z_t = pt - S_t + k \;\; (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.2)$$

(ii) τη στοχαστική διαδικασία του τωρινού πλεονάσματος (P.V.S)

$$\overline{Z_t} = p\int_0^t f(u)du - \overline{S_t} + k \;\; (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.3)$$

(iii) και τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος (S.)

$$\tilde{Z}_t = e^{\int_0^t i(s)ds}\overline{Z_t} \;\; (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.4)$$

Παρατηρήστε ότι

$$\overline{S_t} = \int_0^t f(u)dS_u. \qquad (4.5)$$

Συνεπώς

$$\overline{Z_t} = \int_0^t f(u)d(pu - S_u) + k = \int_0^t f(u)dZ_u + k. \qquad (4.6)$$

Από την (4.6) φαίνεται ότι

$$\overline{Z_t} = \int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u) + \Theta\lambda\mu\int_0^t f(u)du + k. \qquad (4.7)$$

Αφού το $\langle \lambda\mu t - S_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale, η στοχαστική διαδικασία

$$\langle \int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u) \rangle_{t\in\mathbb{R}_+} \qquad (4.8)$$

είναι επίσης martingale.

Αυτό μας δείχνει ότι η (4.7) είναι η Doob-Meyer διαμέριση της στοχαστικής διαδικασίας $\langle \overline{Z_t} \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ότι το $\Theta\lambda\mu \int_0^t f(u)du + k$ είναι ο προβλέψιμος όρος της άνω διαμέρισης.

Η ισότητα (4.6) μπορεί να γενικευτεί. Άς θεωρήσουμε λοιπόν δυο οικονομικούς παράγοντες f_1, f_2 και έστω$\overline{S_t}^{(1)}, \overline{Z_t}^{(1)}, \overline{S_t}^{(2)}, \overline{Z_t}^{(2)}$, $(t \in \mathbb{R}_+)$ οι αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες (P.V.R.) και (P.V.S.).

Αν θεωρήσουμε ότι η f_2 είναι αυστηρά θετική, τότε

$$\overline{S_t}^{(1)} = \int_0^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} d\overline{S_u}^{(2)} \qquad (4.9)$$

αφού σύμφωνα με την (4.5)

$$\int_0^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} d\overline{S_u}^{(2)} = \int_0^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} f_2(u) dS_u = \int_0^t f_1(u) dS_u = \overline{S}_t^{(1)}$$

και

$$\overline{Z_t}^{(1)} = \int_0^t \frac{f_1(u)}{f_2(u)} d\overline{Z_u}^{(2)} + k. \qquad (4.10)$$

Λήμμα 3.4.1: Αν η $\frac{f_1}{f_2}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης και δεξιά συνεχής, τότε

$$\overline{Z_t}^{(1)} = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \overline{Z_t}^{(2)} - \int_{[0,t]} \overline{Z_s}^{(2)} d(\frac{f_1}{f_2})(s). \qquad (4.11)$$

Απόδειξη : Από την υπόθεση επάγεται ότι

$$\frac{f_1(s)}{f_2(s)} - 1 = \int_{[0,s]} d(\frac{f_1}{f_2}).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Fubini καθώς και την προηγούμενη ενότητα στην σχέση (4.10) προκύπτει η (4.11). $\Box$

Ας εισάγουμε τους χρόνους χρεοκοπίας: αν $\omega \in \Omega$ τότε

$$R(\omega) = \inf\{t \geq 0 \ : \ Z_t(\omega) < 0\},$$

$$= \infty \Leftrightarrow Z_t(\omega) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{R}(\omega) = \inf\{t \geq 0 \ : \ \overline{Z_t}(\omega) < 0\},$$

$$= \infty \Leftrightarrow \overline{Z_t}(\omega) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

όπου R είναι η χρονική στιγμή χρεοκοπίας της στοχαστικής διαδικασίας C.S. και $\overline{R}$ είναι η χρονική στιγμή χρεοκοπίας των στοχαστικών διαδικασιών (P.V.S.) και (S.).

Στην περίπτωση που ο οικονομικός παράγοντας f μειώνεται τότε αναμένεται ότι θα ισχύει $R \leq \overline{R}$. Το πρόβλημα αυτό λύνεται από την ακόλουθη πρόταση :

Πρόταση 3.4.2 : Έστω f_i $(i = 1, 2)$ δυο οικονομικοί παράγοντες, $\overline{R}^{(i)}$ οι χρόνοι χρεοκοπίας των αντιστοίχων στοχαστικών διαδικασιών P.V.S. $\langle \overline{Z}_t^{(i)} \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$. Αν το πηλίκο $\frac{f_1}{f_2}$ μειώνεται και είναι δεξιά συνεχές τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε

$$\overline{R}^{(2)}(\omega) \leq \overline{R}^{(1)}(\omega). \qquad (4.12)$$

Απόδειξη : Συνεπάγεται από τη σχέση (4.10) ότι εάν $\overline{Z_s}^{(2)}(\omega) \geq 0$ για κάθε $s \leq t$ τότε είναι $\overline{Z_s}^{(1)}(\omega) \geq 0$ για κάθε $s \leq t$. Έτσι δείξαμε την σχέση (4.12). $\square$

Από την Πρόταση 3.4.2 εύκολα κανείς συμπεραίνει ότι εάν ο οικονομικός παράγοντας f είναι φθίνουσα συνάρτηση και είναι δεξιά συνεχής τότε

$$R \leq \overline{R}. \qquad (4.13)$$

Επομένως τα άνω όρια των πιθανοτήτων χρεοκοπίας της στοχαστικής διαδικασίας C.S. είναι και άνω όρια της στοχαστικής διαδικασίας P.V.S. .

Ας επαναλάβουμε μερικά γνωστά φράγματα πιθανοτήτων χρεοκοπίας. Ο συντελεστής προσαρμογής για τη στοχαστική διαδικασία $\langle Z_t \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$ ορίζεται ως εξής :

$$r_c := \inf\{r > 0 \ : \ E[e^{rX_1} - 1 - (1 + \Theta) r X_1] \geq 0\}. \quad (4.14)$$

Αν το σχετικό αποθεματικό ασφαλείας Θ είναι γνησίως θετικό, τότε γνωρίζουμε ότι $r_c > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $E[e^{rX_1}] < \infty$. Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε τον συντελεστή r_c **κλασσικό συντελεστή προσαρμογής**.

Παρατήρηση : Φυσικά στις περισσότερες περιπτώσεις το r_c είναι η αυστηρά θετική λύση της εξίσωσης

$$E[e^{rX_1} - 1 - (1 + \Theta) r X_1] = 0. \qquad (4.15)$$

Όμως μπορεί να συμβεί $r_c > 0$ και η εξίσωση (4.15) να μην έχει θετική λύση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός οτι ο μετασχηματισμός Laplace $E[e^{rX_1}]$ ενδέχεται να μεταπηδήσει από μια πεπερασμένη τιμή στο άπειρο, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X_1}(x) = K\frac{e^{-\gamma x}}{1+x^2} \ \Leftrightarrow x \geq 0,$$

$$f_{X_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

όπου το γ είναι ένας θετικός αριθμός και το K είναι μια κατάλληλη σταθερά. Τότε λαμβάνουμε

$$E[e^{rX_1}] \leq \frac{k\pi}{2} \ , \forall 0 \leq r \leq \gamma,$$

$$E[e^{rX_1}] = \infty \ , \forall \gamma < r.$$

Αν το Θ είναι επαρκώς μεγάλο τότε η εξίσωση (4.15) δεν έχει θετική λύση.

Αν ο οικονομικός παράγοντας f είναι φθίνουσα συνάρτηση και είναι δεξιά συνεχής τότε προκύπτει από την (4.12) ότι έχούμε τα ακόλουθα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας $P(\overline{R} \leq t)$:

Αν το αρχικό αποθεματικό k είναι γνησίως θετικό τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq e^{-kr_c} \text{ (το φράγμα του Lundberg)} \qquad (4.16)$$

και

$$P(\overline{R} \leq t) \leq 1 - E[(1-\frac{S_t}{k+pt})^+] - \int_0^t \frac{k}{(k+pu)^2} E[1_{(S_t \leq k+pu)}\frac{S_t}{t}]du \qquad (4.17)$$

(βλέπε Delbean και Haezendonck [24].

Αν το αρχικό αποθεμάτικό k είναι 0 τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq 1 - E[(1-\frac{S_t}{pt})^+] \qquad (4.18)$$

και

$$P(\overline{R} < \infty) \leq \frac{1}{1+\Theta}). \qquad (4.19)$$

Προφανώς τα άνω φράγματα έχουν πολύπλοκη μορφή. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν καλύτερα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας της στοχαστικής διαδικασίας P.V.S. .

Λήμμα 3.4.3 : Αν $V[X_1] = \sigma^2 < \infty$, αν η f είναι φθίνουσα και $\int_0^\infty f(t)dt < \infty$, τότε υπάρχει μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή $\overline{Z}_\infty$ τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to\infty} \overline{Z}_t = \overline{Z}_\infty \ \ \sigma.\beta. \text{ και κατά } L^2 - \text{ norm.}$$

Επιπλέον το

$$\langle \overline{Z}_t - \Theta\lambda\mu \int_0^t f(u)du \rangle_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \qquad (4.20)$$

είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale και η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $\overline{Z}_\infty$ δίνεται από την σχέση

$$E[e^{ix\overline{Z}_\infty}] = \exp\{ix(k + \Theta\lambda\mu \int_0^\infty f(u)du) - \frac{1}{2}x^2\lambda(\mu^2+\sigma^2)\int_0^\infty f^2(u)du$$

$$+\lambda \int_0^\infty \int_0^{xf(u)} (xf(u) - s)E[{X_1}^2(1-e^{-rsX_1})]dsdu\}. \qquad (4.21)$$

Αν $\Theta = 0$, τότε η υπόθεση $\int_0^\infty f(t)dt < \infty$ μπορεί να αντικατασταθεί από την πιο ασθενή υπόθεση ότι $\int_0^\infty f^2(t)dt < \infty$.

Απόδειξη : Από την σχέση (4.7) και (4.8) γνωρίζουμε ότι το

$$\overline{Z}_t - \Theta\lambda\mu \int_0^t f(u)du - k = \int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u) \;\; (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.22)$$

είναι martingale. Αφού $V[\int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u) = \lambda(\mu^2+\sigma^2)\int_0^t f^2(u)du$ από την σχέση (3.31) παίρνουμε ότι

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E[(\int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u))^2] < \infty.$$

Αυτό δηλώνει ότι το martingale (4.22) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο (Neveu (1964). Επομένως υπάρχει μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή $\overline{Z}_\infty$ έτσι ώστε

$$\lim_{t\to\infty} \overline{Z}_t = \overline{Z}_\infty \;\; \sigma.\beta. \text{ και κατά } L^2 - \text{ norm}$$

και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ είναι

$$E[\overline{Z}_\infty - \Theta\lambda\mu \int_0^\infty f(u)du|\overline{\mathcal{H}}_t] = \overline{Z}_t - \Theta\lambda\mu \int_0^t f(u)du. \qquad (4.23)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\overline{Z}_\infty$ προκύπτει από ευθύ υπολογισμό. □

Είναι γνωστό επίσης ότι για $\Theta = 0$ έχουμε $P_r(R < \infty) = 1$.

Πρόταση 3.4.4 : Αν $\Theta = 0, V[X_1] < \infty$, η f είναι φθίνουσα και $\int_0^\infty f^2(u)du < \infty$, τότε

$$P_r(\overline{R} < \infty) < 1. \qquad (4.24)$$

Απόδειξη : Από το optional sampling theorem (βλέπε Παράρτημα) το οποίο θα εφαρμόσουμε στο martingale (4.22) έχουμε ότι

$$\int_{(\overline{R}<\infty)} \overline{Z}_{\overline{R}} dP_r = \int_{(\overline{R}<\infty)} \overline{Z}_{\infty} dP_r = k - \int_{(\overline{R}=\infty)} \overline{Z}_{\infty} dP_r. \quad (4.25)$$

Ας θεωρήσουμε ότι $\overline{R} < \infty$ σ.β.. Τότε $\int_{(\overline{R}<\infty)} \overline{Z}_{\overline{R}} dP_r < 0$ και $k - \int_{(\overline{R}=\infty)} \overline{Z}_{\infty} dP_r = k \geq 0$. Αυτό αντιφάσκει με την σχέση (4.25). $\square$

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι ο οικονομικός παράγοντας είναι φθίνουσα απεικόνιση (όχι απαραίτητα γνησίως φθίνουσα) και συνεχής.

Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα διαστήματα του $\mathbb{R}_+$:

$$D = \{r > 0 : E[e^{rX_1}] < \infty\}, \ \overline{D} = \{r > 0 : \int_0^t E[e^{rf(u)X_1}] du < \infty\}.$$

Είναι φανερό ότι $D \subseteq \overline{D}$. Η αντίστροφη όμως σχέση δεν ισχύει γενικά.

Λήμμα 3.4.5 : Αν $\overline{D} \neq \emptyset$ και $r \in \overline{D}$ τότε το

$$\overline{M}_t = e^{r\overline{S}_t + \lambda t - \lambda \int_0^t E[exp(rf(u)X_1)]du} \quad (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.26)$$

είναι martingale ως πρός το $\langle \overline{\mathcal{H}}_t \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Απόδειξη : Αν $0 \leq s < t$ τότε από την πρόταση 3.2.2 λαμβάνουμε

$$E[\overline{M}_t | \overline{\mathcal{H}}_s] = \overline{M}_s E[e^{r(\overline{S}_t - \overline{S}_s)}] e^{\lambda(t-s) - \lambda \int_s^t E[exp(rf(u)X_1)]du},$$

$$= \overline{M}_s \qquad (4.27)$$

από την ισότητα (2.12). $\square$

Πρόταση 3.4.6 : Αν υποθέσουμε ότι $\Theta > 0$ και $t > 0$ τότε έχουμε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq \inf_{r \geq r_c} \sup_{0 \leq s \leq t} \exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta) rf(u) X_1] du - kr\}. \qquad (4.28)$$

Απόδειξη : Η απόδειξη οφείλεται στην γενική μέθοδο του Gerber (1973). Αν είναι $D = \emptyset$, τότε η πρόταση είναι τετριμμένη αφού $r_c = 0$ και το δεξί μέρος της (4.28) είναι ίσο με τη μονάδα.

Έστω ότι $D \neq \emptyset$. Έστω επίσης ότι $r \in \overline{D}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το optional sampling theorem στο martingale (4.26) και να έχουμε

$$1 = E[\overline{M}_0] = E[\overline{M}_{\overline{R}\wedge t}] \geq E[\overline{M}_{\overline{R}} 1_{(\overline{R}\leq t)}] \geq E[exp(\{r\overline{S}_{\overline{R}} + \lambda\overline{R} - \lambda \int_0^{\overline{R}} E[e^{rf(u)X_1}]du\} 1_{(\overline{R}\leq t)}]$$

$$\geq E[exp\{rk - \lambda \int_0^{\overline{R}} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\theta)rf(u)X_1]du\} 1_{(\overline{R}\leq t)}]$$

$$\text{αφού } \overline{S}_{\overline{R}} > k + (1+\Theta)\lambda\mu \int_0^{\overline{R}} f(u)du \text{ αν } \overline{R} \leq t$$

$$\geq exp\{rk - \sup_{0\leq s\leq t} \lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du\} P_r(\overline{R} \leq t). \quad (4.29)$$

Συνεπώς αν $r \in \overline{D}$ τότε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq \sup_{0\leq s\leq t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - rk\}. \quad (4.30)$$

Φυσικά η σχέση (4.30) παραμένει αληθής αν $r \geq 0$ και $r \notin \overline{D}$. Για αυτό το λόγο ισχύει η ακόλουθη ανισότητα :

$$P(\overline{R} \leq t) \leq \inf_{r\geq 0} \sup_{0\leq s\leq t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - rk\}. \quad (4.31) \square$$

Αν το αρχικό αποθεματικό είναι γνησίως θετικό τότε για $0 \leq r \leq r_c$ έχουμε

$$0 \leq rf(u) \leq r_c, \forall u \in \mathbb{R}_+$$

(το οποίο ισχύει αν η f είναι φθίνουσα) και επομένως

$$\lambda E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] < 0. \quad (4.32)$$

Άρα λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας τη σχέση (4.31) παίρνουμε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq \inf_{0<r\leq r_c} \sup_{0\leq s\leq t} \exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\} \leq e^{-kr}.$$

Έτσι προκύπτει η σχέση (4.28). $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα σύμφωνα με τον Gerber (1973) είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης πρότασης.

Πρόταση 3.4.7 (Gerber)[14] : Αν $\Theta > 0, t > 0$ και $f = 1$ (οπότε και $R = \overline{R}$), έχουμε τα ακόλουθα φράγματα

-αν r_c είναι σημείο ασυνέχειας της $E[e^{rX_1}]$ τότε

$$P(R \leq t) \leq e^{-kr_c} \text{ και}$$

-αν το r_c είναι σημείο συνέχειας του $E[e^{rX_1}]$ τότε

$$P(R \leq t) \leq \inf_{r \geq r_c} exp\{\lambda t E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] - kr\}. \qquad (4.34)$$

Από εδώ και στο εξής θα καλούμε το δεξί μέρος της σχέσης (4.34) ως **φράγμα Gerber την χρονική στιγμή** t.

Απόδειξη : Έστω r_c σημείο ασυνέχειας της $E[e^{rX_1}]$. Τότε για κάθε $r > r_c$ έχουμε

$$E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX - 1] = \infty$$

και συνεπώς

$$\sup_{0 \leq s \leq t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rX-1} - 1 - (1+\Theta)rX_1]du - kr\} = \infty.$$

Αν $r = r_c$ τότε

$$E[e^{r_c X_1} - 1 - (1+\Theta)r_c X_1] < 0$$

και επομένως

$$P(\overline{R} \leq t) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)r_c X_1]du - kr_c\} < e^{-kr_c}$$

και από την Πρόταση (4.3.6) προκύπτει ότι $P\{R \leq t\} \leq e^{-kr_c}$.

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε ότι το r_c είναι σημείο συνέχειας της $E[e^{rX_1}]$. Αν $r \geq r_c$ τότε

$$E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] \geq 0$$

και συνεπώς λαμβάνοντας υπ' όψιν την ανισότητα

$$1 \geq \exp\{rk - \sup_{0 \leq s \leq t}\{\lambda \int_o^s E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1]du\}P\{R \leq t\}$$

της απόδειξης της Πρότασης 3.4.6 έχουμε

$$1 \geq \exp\{rk - \sup_{0\leq s\leq t}\{\lambda \int_o^s E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1]du\}P\{R \leq t\} \geq$$

$$\exp\{rk - \lambda \int_0^t E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1]du]P\{R \leq t\}$$

$$= \exp\{rk - \lambda t E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1\}P\{R \leq t$$

$$'Ara$$

Π (P $\leq t) \leq \inf_{r\geq r_c} exp\{\lambda t E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] - kr\}$. □

Ας θεωρήσουμε δυο απεικονίσεις $\underline{s}$ και $\overline{s}$ στο $[r_c, \infty)$:

$$\underline{s}(r) = inf\{u \geq 0 : f(u) \leq \frac{r_c}{r}\},$$

$$\underline{s}(r) = \infty \Leftrightarrow f(u) > \frac{r_c}{r}, \forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad (4.35)$$

$$\overline{s}(r) = inf\{u \geq 0 : f(u) < \frac{r_c}{r}\}.$$

$$\overline{s}(r) = \infty \Leftrightarrow f(u) \geq \frac{r_c}{r}, \forall u \in \mathbb{R}_+. \qquad (4.36)$$

Στο επόμενο Λήμμα επιλέγουμε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των $\underline{s}$ και $\overline{s}$.

Λήμμα 3.4.8 : Έστω ότι η f είναι φθίνουσα και συνεχής. Τότε ισχύουν τα εξής
(1) αν οι απεικονίσεις $\underline{s}$ και $\overline{s}$ είναι αύξουσες $\forall r \geq r_c$ τότε έχουμε $\underline{s}(r) \leq \overline{s}(r)$,
(2) $\underline{s}(r_c) = 0$,
(3) $\overline{s}(r_c) = 0$ αν και μόνο άν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο 0,
(4) αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε $\underline{s} = \overline{s}(= s)$,
(5) αν $\underline{s}(r) < \infty$ για κάποιο $r > r_c$ τότε $f(\underline{s}(r)) = \frac{r_c}{r}$,
(6) αν $\overline{s}(r) < \infty$ για κάποιο $r \geq r_c$ τότε $f(\overline{s}(r)) = \frac{r_c}{r}$,
(7) αν $\underline{s}(r) \leq u < \overline{s}(r)$ τότε $f(u) = \frac{r_c}{r}$,
(8) η $\underline{s}$ είναι αριστερά συνεχής σε κάθε $r > r_c$,
(9) η $\overline{s}$ είναι δεξιά συνεχής σε κάθε $r \geq r_c$.

Απόδειξη : Τα $(1) - (7)$ είναι άμεσες συνέπειες των ιδιοτήτων της f όπου η f είναι συνεχής, φθίνουσα και ισχύει $f(0) = 1$. Για να δείξουμε την ισότητα (8) θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία $\langle r_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[r_c, \infty)$ τέτοια ώστε να είναι $\lim_{n\to\infty} \uparrow r_n = r$. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $f(\underline{s}(r) - \epsilon) > \frac{r_c}{r}$, από τη σχέση (5) υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\underline{s}(r) - \epsilon) > \frac{r_c}{r-\delta}$. Πράγματι

$$(r-\delta)f(\underline{s}(r)-\epsilon) > r_c \Leftrightarrow$$

$$rf(\underline{s}(r)-\epsilon) - r_c > \delta f(s(r)-\epsilon) \Leftrightarrow$$

$$\delta < \frac{rf(\underline{s}(r)-\epsilon)(r-r_c)}{f(\underline{s}(r)-\epsilon)} < \frac{r-r_c}{f(\underline{s}(r)-\epsilon}.$$

Άρα αρκεί να πάρουμε

$$0 < \delta < \frac{r-r_c}{f(\underline{s}(r)) - \epsilon}.$$

Έστω ότι $\forall \delta > 0$ ώστε $\mid r - r_n \mid = r - r_n < \delta$, $\exists \epsilon > 0$: $\underline{s}(r) - \underline{S}(r_n) \geq \epsilon$. Τότε $\epsilon \leq \underline{s}(r) - \underline{s}(r_n) \geq \underline{s}(r) - \underline{s}(r-\delta) < \epsilon$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\lim_{n\to\infty} \underline{s}(r_n) = \underline{s}(r)$ και η $\underline{s}$ είναι αριστερά συνεχής.

Η απόδειξη της δεξιάς συνέχειας του $\overline{s}$ είναι όμοια. □

Ας παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που το r_c είναι σημείο συνέχειας της $E[e^{rX_1}]$ τότε έχουμε

$$E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] > 0 \Leftrightarrow f(u) > \frac{r_c}{r},$$
$$E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] = 0 \Leftrightarrow f(u) = \frac{r_c}{r},$$
$$E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] < 0 \Leftrightarrow f(u) < \frac{r_c}{r}. \qquad (4.39)$$

Πράγματι η πρώτη ανισότητα ισχύει αφού η μέση τιμή είναι γνησίως αύξουσα απεικόνιση. Τώρα μπορούμε να εμφανίσουμε την Πρόταση 3.4.6 στην ακόλουθη μορφή

Πρόταση 3.4.9 : Ας θεωρήσουμε ότι $\Theta > 0, t > 0$ και ότι η απεικόνιση f είναι φθίνουσα και δεξιά συνεχής

- αν το r_c είναι σημείο ασυνέχειας της $E[e^{rX_1}]$ τότε

$$P(\overline{R} \leq t) \leq e^{-kr_c},$$

-αν το r_c είναι σημείο συνέχειας της $E[e^{rX_1}]$ τότε

$$exp\{\lambda \int_0^{t\wedge\underline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\}$$

$$= exp\{\lambda \int_0^{t\wedge\overline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\} \text{ και } \qquad (4.40)$$

και αν $\Phi_t(r)$ παριστάνει την κοινή έκφραση της (4.40) τότε

$$P_r(\overline{R} \le t) \le \inf_{r\ge r_c} \Phi_t(r). \qquad (4.41)$$

Απόδειξη : Αρχικά υποθέτουμε ότι η $E[e^{rX_1}]$ είναι ασυνεχής στο σημείο r_c. Αν $r > r_c$ τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $rf(u) > r_c$ αν $0 \le u \le \epsilon$. Πράγματι αφού η f είναι συνεχής $(0,\infty)$ και είναι $f(0) = 1$ τότε $\forall \overline{\epsilon} > 0, \exists \delta > 0 \ : \ (\mid u \mid < \delta \Rightarrow \mid f(u) - 1 \mid < \overline{\epsilon}$. Άρα $\forall \overline{\epsilon} > 0, \exists \delta > 0, (\mid u \mid < \delta \Rightarrow 1 - \overline{\epsilon} < f(u) < 1 + \overline{\epsilon})$. Έστω $\overline{\epsilon} := \frac{1}{2}(1 - \frac{r_c}{r}) < 1 - \frac{r}{r_c}$. Τότε $\exists \delta > 0 \ : \frac{r_c}{r} < 1 - \overline{\epsilon} < f(u)$ $(\overline{\epsilon} < 1 - \frac{r_c}{r} \Leftrightarrow -\epsilon > \frac{r_c}{r})$, $\forall u \in (-\delta, \delta)$. Επομένως $\exists \epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$ ώστε $\forall u \in [0, \epsilon]$ να είναι $f(u) > \frac{r_c}{r}$. Έτσι

$$\sup_{0\le s\le t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\} = \infty.$$

Αν $r = r_c$ τότε

$$\sup_{0\le s\le t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{r_c f(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr_c\} \le e^{-kr_c}$$

αφού $E[e^{r_c f(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r_c f(u)X_1] \le 0, \forall u \ge 0$.

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι η $E[e^{rX_1}]$ είναι συνεχής στο r_c. Από την σχέση (4.39) και την ιδιότητα 7 του Λήμματος (3.4.8) έχουμε ότι

$$\int_{t\wedge\underline{s}(r)}^{t\wedge\overline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du = 0. \qquad (4.42)$$

Έτσι δείξαμε την σχέση (4.40). Επιπλέον αν $\overline{s}(r) < sn(\Leftrightarrow rf(u) < r_c)$ τότε σύμφωνα με τη σχέση (4.39) είναι

$$\int_{\overline{s}(r)}^{s} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du < 0.$$

Έτσι εάν $r \ge r_c$ τότε

$$\sup_{0\le s\le t} exp\{\lambda \int_0^s E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\}$$

$$exp\{\int_0^{t\wedge\underline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\}$$

$$exp\{\int_0^{t\wedge\overline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du - kr\}.$$

Συνεπάγεται λοιπόν από Πρόταση (3.4.6) ότι είναι

$$P\{\overline{R} \leq t\} \leq \inf_{r \geq r_c} \Phi_t(r).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Από την Πρόταση (3.4.9) συνεπάγεται ότι στην περίπτωση που η $E[e^{rX_1}]$ είναι ασυνεχής στο σημείο r_c η μέθοδος μας δεν οδηγεί σε καλύτερο φράγμα από αυτό του Lundberg . Ευτυχώς αυτή η περίπτωση είναι μάλλον παθολογική. Για το λόγο αυτό από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι η $E[e^{rX_1}]$ είναι συνεχής το σημείο r_c.

Ας συγκεντρωθούμε στην απεικόνιση $\Phi(t)$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}_+$. Ας θεωρήσουμε ότι

$$A_t = \{r \geq r_c : \Phi_t(r) < \infty\}. \qquad (4.43)$$

Μπορεί κανείς να δεί ότι το A_t είναι μή κενό για $\Theta > 0$ και αν η $E[e^{rX_1}]$ είναι συνεχής στο r_c. Είναι φανερό ότι το σύνολο

$$C = \{r \geq r_c \ : \ \underline{s}(r) < \overline{s}(r)\} \quad (4.44)$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο. Για λόγους ευκολίας θα θεωρούμε ότι το σύνολο C δεν έχει σημεία συσσωρεύσεως.

Λήμμα 3.4.10 : Ας θεωρήσουμε ότι $t > 0$ και ότι η f είναι φθίνουσα και συνεχής απεικόνιση. Τότε η $\Phi(t)$ είναι συνεχής στο A_t. Επίσης $\forall r \in A_t$ η αριστερή παράγωγος και η δεξιά παράγωγος υπάρχουν και μάλιστα είναι

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^{t \wedge \underline{s}(r)} E[f(u)X_1(e^{rfg(u)X_1} - 1 - \Theta)]du - k). \qquad (4.45)$$

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^{t \wedge \overline{s}(r)} E[f(u)X_1(e^{rfg(u)X_1} - 1 - \Theta)]du - k). \qquad (4.46)$$

Επιπλέον έχουμε $\frac{d^-\Phi_t(r)}{dr} \leq \frac{d^+\Phi_t(r)}{dr}$ και επιπλέον αυτή η ανισότητα είναι γνήσια ακριβώς σε εκείνα τα σημεία r για τα οποία έχουμε $t \wedge \underline{s}(r) < t \wedge \overline{s}(r)$. Επιπρόσθετα η Φ_t είναι κυρτή απεικόνιση.

Απόδειξη : α Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι η απεικόνιση

$$log\Phi_t(r) + kr = \lambda \int_0^{t \wedge \underline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1 + \Theta)rf(u)X_1]du \qquad (4.47)$$

είναι αύξουσα στο $r \in A_t$. Πράγματι αν $r \in A_t$ και $u \leq \underline{s}(r)$ τότε $rf(u) \geq r_c$ και επομένως

$$\frac{d}{dr}E[e^{rf(u)X_!} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] = f(u)E[X_1(e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)] \geq 0.$$

Επομένως αν $r, r^{'} \in A_t$ με $r < r'$ και $u \leq \underline{s}(r)$ τότε

$$E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1] \leq E[e^{r'f(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r'f(u)X_1]$$

και συνεπώς

$$\int_0^{t\wedge\underline{s}(r)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_!]du \leq \int_0^{t\wedge\underline{s}(r)} E[e^{r^{'}f(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r^{'}f(u)X_1]du$$

$$\leq \int_0^{t\wedge\underline{s}(r^{'})} E[e^{r^{'}f(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r^{'}f(u)X_1]du$$

αφού $\underline{s}(r) \leq \underline{s}(r^{'})$ από την ιδιότητα (1) του Λήμματος (3.4.8).

β Αν $\langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο A_t η οποία φθίνει στο $r \in A_t$ τότε $lim_{n\to\infty}\downarrow \overline{s}(r_n) = \overline{s}(r)$ από την ιδιότητα (9) του Λήμματος (3.4.8). Επομένως από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty}\downarrow (log\Phi_t(r_n) + kr_n) = \lim_{n\to\infty}\downarrow \lambda\int_0^{t\wedge\overline{s}(r_n)} E[e^{r_nf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r_nf(u)X_1]du$$

$$= \lambda\int_0^{t\wedge\overline{s}(r_n)} E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf(u)X_1]du = log\Phi_t(r) + kr.$$

Ομοίως αν $\langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο A_t η οποία αυξάνεται στο $r \in A_t$ τότε $\lim_{n\to\infty}\uparrow \underline{s}(r_n) = \underline{s}(r)$ από την ιδιότητα (8) του Λήμματος (3.4.8) και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\downarrow (log\Phi_t(r_n) + kr_n) = \lim_{n\to\infty}\uparrow \lambda\int_0^{t\wedge\underline{s}(r_n)} E[e^{r_nf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)r_nf(u)X_1]du$$

$$= log\Phi_t(r) + kr.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση Φ_t είναι συνεχής στο A_t.

γ Ας υπολογίσουμε τώρα την αριστερή παράγωγο $\frac{d^-\Phi_t(r)}{dr}$. Έστω $r \in A_t$ με $r > r_c$ και έστω $\Delta r > 0$ οσοδήποτε μικρό. Αν $\underline{s}(r) \leq t$ τότε $\underline{s}(r - \Delta r) \leq t$ και

$$\frac{1}{\Delta r}(log\Phi_t(r) - log\Phi_t(r - \Delta r))$$

$$= \frac{1}{\Delta r}(\lambda \int_0^{\underline{s}(r)} E[e^r f(u)X_1 - 1 - (1+\Theta) r f(u) X_1] du$$

$$-\lambda \int_0^{\underline{s}(r-\Delta r)} E[e^{(r-\Delta r) f(u) X_1} - 1 - (1+\Theta)(r-\Delta r) f(u) X_1] du) - k$$

$$= \frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta(r))}^{\underline{s}(r)} \lambda E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta) r f(u) X_1] du + \frac{1}{\Delta r} \int_0^{\underline{s}(r-\Delta r)} \lambda E[e^{rf(u)X_1} - e^{(r-\Delta r) f(u) X_1}] du$$

$$-(1+\Theta)\lambda E[X_1] \int_0^{\underline{s}(r-\Delta r)} f(u) du - k. \qquad (4.48)$$

Όσον αφορά τον πρώτο όρο της δεξιάς πλευράς της σχέσης (4.48) λαμβάνουμε

$$|\frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} \lambda E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta) r f(u) X_1] du|$$

$$= \frac{1}{\Delta r} | \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} \lambda (E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta) r f(u) X_1] - E[e^{r_c X_1} - 1 - (1+\Theta) r_c X_1]) du|$$

αφού $E[e^{r_c X_1} - 1 - (1+\Theta) r_c X_1 = 0$

$$\leq \frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} \lambda E[|e^{rf(u)X_1} - e^{r_c X_1}|] du + (1+\Theta)\lambda E[X_1] \frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} |r f(u) - r_c| du$$

όμως αν $\underline{s}(r-\Delta r) \leq u \leq \underline{s}(r)$ τότε $r_c \leq r f(u) \leq r_c + \Delta r f(u) \leq r_c + \Delta r$

$$\leq \frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} \lambda E[e^{(r_c+\Delta r) X_1} - e^{r_c X_1}] du + (1+\Theta)\lambda E[X_1] \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} du.$$

$$\leq \frac{1}{\Delta r} \lambda E[e^{(r_c+\Delta r)} X_1 - e^{r_c X_1}](\underline{s}(r) - \underline{s}(r-\Delta r)) + (1+\Theta)\lambda E[X_1](\underline{s}(r) - \underline{s}(r-\Delta r)). \qquad (4.49)$$

και από την ανισότητα (4.49) έχουμε ότι

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} |\frac{1}{\Delta r} \int_{\underline{s}(r-\Delta r)}^{\underline{s}(r)} \lambda E[e^{rf(u)X_1} - 1 - (1+\Theta) r f(u) X_1] du| = 0. \qquad (4.50)$$

Για τον δεύτερο και τρίτο όρο της δεξιάς πλευράς της σχέσης (4.48) λαμβάνουμε

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \int_0^{\underline{s}(r-\Delta r)} \lambda E[e^{rf(u)X_1} - e^{(r-\Delta r) f(u) X_1}] du - (1+\Theta)\lambda E[X_1] \int_0^{\underline{s}(r-\Delta r)} f(u) du$$

$$= \int_0^{\underline{s}(r)} \lambda E[f(u) X_1 (e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)] du. \qquad (4.51)$$

Έτσι για $\underline{s}(r) \leq t$ έχουμε

$$\frac{d^-}{dr} \Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^{\underline{s}(r)} E[f(u) X_1 (e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)] du - k). \qquad (4.52)$$

Αν $t < \underline{s}(r)$ έχουμε τα ακόλουθα

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^t E[f(u)X_1(e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)]du - k). \qquad (4.53)$$

Επομένως οδηγούμαστε στον ακόλουθο τύπο για την αριστερή παράγωγο

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^{t\wedge \underline{s}(r)} E[f(u)X_1(e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)]du - k). \qquad (4.54)$$

Όμοιοι υπολογισμοί οδηγούν στην δεξιά παράγωγο

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\lambda \int_0^{t\wedge \overline{s}(r)} E[f(u)X_1(e^{rf(u)X_1} - 1 - \Theta)]du - k). \qquad (4.55)$$

Τώρα για $r = r_c$ έχουμε

$$\frac{d}{dr}E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] = E[X_1(e^{rX_1} - 1 - \Theta)] > 0$$

και αν $\underline{s}(r) \le u \le \overline{s}(r)$ τότε $rf(u) = r_c$ από την ιδιότητα (7) του Λήμματος (3.4.8).

δ. Συνεπώς για κάθε $r \in A_t$ είναι

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) \le \frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) \qquad (4.56)$$

και έχουμε ισότητα αν και μόνο αν $t \wedge \underline{s}(r) = t \wedge \overline{s}(r)$. Επομένως προκύπτει άμεσα ότι η απεικόνιση Φ_t είναι κυρτή στα σημεία $r \in A_t$ στα οποία $t \wedge \underline{s}(r) < t \wedge \overline{s}(r)$.

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι $t\wedge\underline{s}(r) = t\wedge\overline{s}(r)$. Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Αν $t \le \underline{s}(r)$ τότε εύκολα λαμβάνουμε

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi_t(r)$$

$$= \Phi_t(r)\{(\lambda \int_0^t E[f(u)X_1(e^{rfu)X_1} - 1 - \Theta)]du - k)^2 + \lambda \int_0^t E[f^2(u)X_1^2 e^{rf(u)X_1}]du > 0 \quad (4.57)$$

Επομένως η Φ_t είναι κυρτή αφού

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi_t(r) \ge 0\ ,\ \forall t < \underline{s}(r).$$

Αν $\underline{s}(r) < t$ τότε $\underline{s}(r) = \overline{s}(r)$ και υπάρχει μια περιοχή B του $r \in A_t$ τέτοια ώστε $\overline{s}(r^{'}) = \underline{s}(r^{'}) < t$ για $r^{'} \in B$.

Μπορεί κανεις εύκολα να δείξει ότι η $\frac{d\Phi_t(r)}{dr}$ είναι συνεχής στο B και ότι για το $r - \Delta r$ και για το $r \in B$ με $\Delta r > 0$ έχουμε

$$\lim_{\Delta r \downarrow 0} \inf \frac{1}{\Delta r}(\frac{d}{dr}\Phi_t(r)(r - \Delta r) - \frac{d}{dr}\Phi_t(r)) < 0. \qquad (4.58)$$

Έστω ότι υπάρχουν $r^{'}$, $r^{''} \in B$: $r^{'} \leq r^{''}$ και $\frac{d\Phi_t(r^{'})}{dr} > \frac{d\Phi_t(r^{''})}{dr}$. Τότε υπάρχει $r \in B$ έτσι ώστε να ισχύει $r^{'} < r < r^{''}$ και

$$\frac{d}{dr}\Phi_t(r - \Delta r) - \frac{d}{dr}\Phi_t(r) > 0$$

όταν $r^{'} < r - \Delta r < r < r^{''}$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την (4.58). Επομένως η $\frac{d\Phi_t}{dr}$ είναι αύξουσα στο B. Αυτά μαζί με την σχέση (4.57) δείχνουν ότι ή $\frac{d\Phi t(r)}{dr}$ είναι άυξουσα στο $\{r \in A_t : t \wedge \underline{s}(r) = t \wedge \overline{s}(r)\}$. Για το λόγο αυτό η απεικόνιση Φ_t είναι κυρτή. $\square$

Το άνω Λήμμα οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.4.11 : Αν ο οικονομικός παράγοντας f είναι συνεχής και φθίνουσα απεικόνιση, αν το σχετικό αποθεματικό κινδύνου Θ είναι μεγαλύτερο του 0 και η $E[e^{rX_1}]$ είναι συνεχής στον κλασσικό συντελεστή προσδιορισμού r_c τότε υπάρχει $r_t \geq r_c$ έτσι ώστε

$$P_r(\overline{R} \leq t) \leq \Phi_t(r_t) = \inf_{r \geq r_c} \Phi_t(r), \forall t > 0. \qquad (4.59)$$

όπου ο r_t θα καλείται ο τροποποιημένος συντελεστής την χρονική στιγμή t ο οποίος είναι αντίστοιχος στον οικονομικό παράγοντα f.

Αποδειξη : Από την Πρόταση (3.4.9) προκύπτει ότι

$$P[\overline{R} \leq t] \leq \inf_{r \geq r_c} \Phi_t(r), \forall t > 0,$$

ενώ από το Λήμμα 3.4.10 αφού η Φ_t είναι συνεχής και κυρτή στο A_t θα υπάρχει $r_t \geq r_c$ ώστε αν ισχύει $\inf_{r \geq r_c} \Phi_t(r) = \min_{r \geq r_c} \Phi_t(r) = \Phi_t(r_t)$.

Παρατήρηση : Φυσικά στις περισσότερες περιπτώσεις το r_t θα είναι μοναδικό, αλλά η ύπαρξη περισσοτέρων του ενός r_t δεν επηρεάζουν το άνω όριο της $(4, 59)$.

Αν $f = 1$ τότε $\overline{s}(r) = \infty$ για κάθε $r \geq r_c$ και το r_t ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi_t(r_t) = \inf_{r \geq r_c} \exp\{\lambda t E[e^{rX_1} - 1 - (1 + \Theta)rX_1] - kr\}. \qquad (4.60)$$

Αυτό οδηγείται να γίνει το φράγμα του Gerber της Πρότασης 3.4.7.

Για να συγκρίνουμε τα διαφορετικά φράγματα των πιθανοτήτων $P(\overline{R} \leq t)$ αποδεικνύουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.4.12 : Έστω f_1 και f_2 δυο οικονομικοί παράγοντες οι οποίοι επαληθεύουν τις συνήθεις συνθήκες κανονικότητας. Ας συμβολίσουμε με $\Phi_t^{(i)}$ όπου $i \in \{1, 2\}$ είναι οι απεικονίσεις οι οποίες ορίζονται στην πρόταση (3.4.9) και οι οποίες είναι οι αντίστοιχες των $\langle f_i \rangle_{i\in\{1,2\}}$. Αν $f_1 \leq f_2$ τότε για κάθε $r \geq r_c$ έχουμε

(i)

$$\Phi_t^{(1)} \leq \Phi_t^{(2)}, \qquad (4.61)$$

(ii)

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t^{(1)}(r) \leq \frac{d^-}{dr}\Phi_t^{(2)}(r), \qquad (4.62)$$

(iii)

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t^{(1)}(r) \leq \frac{d^+}{dr}\Phi_t^{(2)}(r). \qquad (4.63)$$

Απόδειξη : Αν $f_1 \leq f_2$ τότε φυσικά είναι $\underline{s}^{(1)} \leq \underline{s}^{(2)}$ και $\overline{s}^{(1)} \leq \overline{s}^{(2)}$. Εμείς γνωρίζουμε ότι

$$E[e^{rX_1} - 1 - (1+\Theta)rX_1] \geq 0 \ , \ \forall r \geq r_c$$

και ότι είναι αύξουσα για $r \geq r_c$. Έτσι

$$\Phi_t^{(1)}(r) \leq \exp\{\lambda \int_0^{t\wedge \underline{s}^{(1)}(r)} E[e^{rf_2(u)X_1} - 1 - (1+\Theta)rf_2(u)X_1]du - kr\}$$

αφού $u \leq \underline{s}^{(1)}(r)$ και έτσι $rf_2(u) \geq rf_1(u) \geq r_c$. Επομένως

$$\Phi_t^{(1)} \leq \Phi_t^{(2)}.$$

Επίσης έχουμε

$$\int_0^{t\wedge \underline{s}^{(1)}(r)} E[f_1(u)X_1 e^{rf_1(u)X_1} - 1 - \Theta]du \leq \int_0^{t\wedge \underline{s}^{(2)}(r)} E[f_2(u)X_1(e^{rf_2X_1} - 1 - \Theta)]du. \qquad (4.64)$$

Αυτό αποδεικνύει τις σχέσεις (4.62) και (4.63). □

Παρατήρηση

Από την προηγούμενη παρατήρηση λαμβάνουμε την ακόλουθη ανισότητα :

$$\textbf{Φράγμα του Lundberg} \geq \textbf{Φράγμα του Gerber} \geq \mathbf{\Phi_t(r_t)}, \qquad (4.65)$$

κατά τη χρονική στιγμή t.

Φυσικά είναι σημαντικό να βρούμε συνθήκες οι οποίες θα οδηγούν σε γνήσιες ανισότητες στη σχέση (4.65). Ας παρατηρήσουμε ότι αν $\Theta > 0$ και αν η $E[e^{rX_1}]$ είναι συνεχής στον κλασσικό συντελεστή προσδιορισμού τότε

Φράγμα Lundberg > Φράγμα Gerber την χρονική στιγμή t

αν και μόνο αν

$$\frac{k}{\lambda t} > E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)]. \qquad (4.66)$$

Έτσι για μεγάλες τιμές του t τα άνω φράγματα γίνονται ίσα.

Η ιδιότητα (4.66) είναι συνέπεια της (4.60).

Πρόταση 3.4.13 : Έστω ότι $\Theta > 0$ ότι $E[e^{r_c X_1}]$ είναι συνεχής στον κλασσικό συντελεστή προσδιορισμού r_c και ότι ο οικονομικός παράγοντας f είναι συνεχής και φθίνουσα απεικόνιση. Έστω t_0 ο πρώτος χρόνος για τον οποίο η f φθίνει, δηλαδή $(t_0 = \overline{s}(r_c))$. Αν

$$\lambda t_0 E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)] < k, \qquad (4.67)$$

τότε έχουμε για κάθε $t > t_0$ ότι

$$\Phi_t(r_t) < \text{από το φράγμα του Gerber την χρονική στιγμή } t. \qquad (4.68)$$

Απόδειξη : Ας συμβολίσουμε με $\Phi_t(r)$ και με $\Phi_t^g(r)$ την απεικόνιση η οποία ορίζεται στην Πρόταση 3.4.9 από τον τύπο (4.40) και αντίστοιχα με τον οικονομικό παράγοντα f και τον οικονομικό παράγοντα ο οποίος είναι ίσος με 1. Από το Λήμμα 3.4.12 γνωρίζουμε ότι για κάθε $r \geq r_c$ έχουμε

$$\Phi_t(r) \leq \Phi_t^{(g)}(r)\ ,\ \frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) \leq \frac{d}{dr}\Phi_t^{(g)}(r)\ ,\ \frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) \leq \frac{d^-}{dr}\Phi_t^{(g)}(r).$$

Για να αποδείξουμε την γνήσια ανισότητα (4.68) αποδεικνύουμε ότι

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t(r_c) < 0\ ,\ \frac{d^+}{dr}\Phi_t(r_c) < \frac{d^+}{dr}\Phi_t^{(g)}(r_c). \qquad (4.69)$$

Αφού από το Λήμμα 3.4.10 έχουμε

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t(r_c) = \Phi_t(r_c)(\lambda \int_0^{t\wedge\overline{s}(r_c)} E[f(u)X_1 e^{r_c f(u) X_1} - 1 - \Theta)]du - k)$$

$$= \Phi_t(r_c)(\lambda(t\wedge t_0)E[X_1(e^{r_c X-1} - 1 - \Theta)] - k)$$

και

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t^{(g)}(r_c) = \Phi_t^{(g)}(r_c)(\lambda t E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)] - k),$$

οι ανισότητες (4.69) ισχύουν αν

$$\lambda(t\wedge t_0)E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)] < k \qquad (4.70)$$

και

$$\lambda(t\wedge t_0)E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)] < \lambda t E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)]. \qquad (4.71)$$

Αν $t > t_0$ τότε η ανισότητα (4.71) προκύπτει πολύ εύκολα αφού $E[X_1(e^{r_c X_1} - 1 - \Theta)] > 0$ και η ανισότητα (4.70) είναι αποτέλεσμα της ανισότητας (4.67). □

Βέβαια μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι η συνθήκη (4.67) εξαρτάται από τα k και λ και το πηλίκο $\frac{k}{\lambda}$.

Πόρισμα 3.4.14 : Αν
(1) $\Theta > 0$ και $k > 0$,
(2) $E[e^{rQ_1}]$ είναι συνεχής στο r_c και
(3) ο οικονομικός παράγοντας f είναι συνεχής και αυστηρά φθίνων στην αρχή τότε
Φράγμα του Gerber $> \Phi_t(r_t)$, $\forall t > 0$.

Απόδειξη : Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο 0 έχουμε $\overline{s}(r_c) = 0$. Έτσι η υπόθεση (4.67) ικανοποιείται.

Ας αναλύσουμε τώρα το πάνω φράγμα $\Phi_t(r_t)$ σαν μια συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού k και του χρόνου t.

Είναι σαφές ότι ότι όσο μεγαλώνει το k τόσο μεγαλώνει το άνω φράγμα $\Phi_t(r_t)$. Από την άλλη πλευρά αν $0 < t < t'$ τότε μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι

$$\Phi_t(r) \leq \Phi_{t'}(r),$$

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) \leq \frac{d^-}{dr}\Phi_{t'}(r),$$

$$\frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) \le \frac{d^+}{dr}\Phi_{t'}(r).$$

Αυτό σημαίνει ότι $r_{t'} \le r_t$ και ότι η αντίστοιχη ανισότητα ισχύει για τα άνω φράγματα

$$\Phi_t(r_t) \le \Phi_{t'}(r_{t'}). \qquad (4.72)$$

Έτσι λαμβάνουμε

$$P(\overline{R} < \infty) \le \lim_{t\to\infty} \uparrow \Phi_t(r_t). \qquad (4.73)$$

Παρατηρήστε ότι οταν $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ τότε το άνω φράγμα της $\Phi_t(r_t)$ σταθεροποιείται και επομένως για t επαρκώς μεγάλο έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \uparrow \Phi_t(r_t) = \Phi_{t'}(r_{t'}). \ \square$$

Σημείωση : Στην απόδειξη του Λήμματος 3.4.3 χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι το martingale

$$\int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u) \quad (t \in \mathbb{R}_+) \qquad (4.74)$$

είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο εάν $\int_0^\infty f^2(t)dt < \infty$. Αν θεωρήσουμε

$$Z^* = \sup_{t\ge 0} |\int_0^t f(u)d(\lambda\mu u - S_u)|,$$

τότε το martingale (4.27) είναι ισοδυνάμως ολοκληρώσιμο αφού $E[Z^*] < \infty$. Το αντίστροφο δεν χρειάζεται να είναι αληθές.

Χωρίς περισσότερες λεπτομέρειες δίνουμε ορισμένα επιπλέον αποτελέσματα που αφορούν την p-norm του Z^*:

$$\|Z^*\|_p = (E[Z^{*p}])^{1/p} \ , \ 1 \le p \le \infty.$$

Οι αποδείξεις των επόμενων αποτελεσμάτων οφείλονται σε γνωστές ανισότητες των martingales και δεν θα δοθούν εδώ.

(a) Αν $2 \le p < \infty$ τότε

$$\sup_{t\ge 0} t^{p/2-1} \int_0^t f^p(u)du < \infty \text{ και } \|X_1\|_p = E[Q_1^p]^{1/p} < \infty$$

συνεπάγεται ότι $\|Z^*\|_p < \infty$.

(b) Αν $1 \leq p \leq 2$ τότε

$$\int_0^\infty f^p(u)du < \infty \quad \text{και} \quad \|X_1\|_p < \infty$$

συνεπάγεται ότι $\|Z*\|_p < \infty$.

(c) Αν $1 \leq p \leq 2$ τότε $\|Z^*\|_p < \infty$ συνεπάγεται ότι

$$\sup_{t \geq 0} t^{p/2-1} \int_0^t f^p(u)du < \infty.$$

3.5. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στην περίπτωση της σταθερής έντασης πραγματικού τόκου.

Κατά τη διάρκεια αυτού του κεφαλαίου θα υποθέτουμε ότι

$$f(t) = e^{-it} \qquad (5.1)$$

όπου i είναι η σταθερή ένταση πραγματικού τόκου (η ένταση τόκου μείον την ένταση του πληθωρισμού).

Η αντιστοιχη στοχαστική διαδικασία P.V.S. είναι η

$$\overline{Z}_t = \frac{p}{i}(1 - e^{-it}) - \overline{S}_t + x \ \ (t \in \mathbb{R}_+), \qquad (5.2)$$

όπου το x παριστάνει το αρχικό αποθεματικό, $p = (1+\Theta)\lambda\mu$ με $\mu = E[X_1]$ και $\overline{S}_t = \sum_{n\geq 1} e^{-iT_n} X_n$. (5.3)

Υποθέτουμε ότι η $E[e^{rX_t}]$ είναι συνεχής στο σημείο r_c και ότι $\Theta > 0$. Σε αυτό το σημείο θα παραστήσουμε τον χρόνο καταστροφής ως $\overline{R}_x$ και σύμφωνα με τον κλασσικό συμβολισμό του Gerber [10] θα γράφουμε

$$\overline{\Psi}(x) = P(\overline{R}_x < \infty). \qquad (5.4)$$

Στην παρούσα περίπτωση η απεικόνιση $\Phi_r(t)$ η οποία έχει πρωτοεισαχθεί στην Πρόταση 3.4.9 θα έχει τη μορφή

$$\Phi_t(r) = \exp\{\frac{\lambda}{i}\int_0^{(it)\wedge(logr-logr_t)} E[e^{r\exp(-s)X_1} - 1 - (1+\Theta)r\exp(-s)X_1]ds - xr\}. \quad (5.5)$$

Επιπρόσθετα

$$\frac{d^-}{dr}\Phi_t(r) = \frac{d^+}{dr}\Phi_t(r) = \Phi_t(r)(\frac{\lambda}{i}\int_0^{(it)\wedge(logr-logr_c)} E[\exp(-s)X_1(e^{r\exp(-s)X_1} - 1 - \Theta)]ds - x). \ (5.6)$$

Ο συντελεστής προσαρμογής r_t την χρονική στιγμή t αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$\frac{\lambda}{i}\int_0^{(it)\wedge(logr-logr_t)} E[\exp(-s)X_1 e^{r\exp(-sX_1} - 1 - \Theta)]ds = x. \qquad (5.7)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.4.11 λαμβάνουμε το ακόλουθο πάνω όριο για την πιθανότητα καταστροφής

$$P(\overline{R}_x \leq t) \leq \Phi_t(r_t) = \exp\{\frac{\lambda}{i}\int_0^{(it)\wedge(logr_t-logr_c)} E[e^{r_t\exp(-s)X_1} - 1 - (1+\Theta)r_t\exp(-s)X_1]ds - xr_t\}, \ (5.8)$$

και από την Πρόταση 3.4.14 έχουμε ότι για κάθε $\chi > 0$ και για κάθε $t > 0$ είναι

$$\Phi_t(r_t) < \text{το φράγμα του Gerber τη χρονική στιγμή τ.} \qquad (5.9)$$

Παρατήρηση : Ας υποθέσουμε ότι η ένταση του τόκου εξαρτάται από την χρονική στιγμή t και ότι

$$I(t) = exp(\int_0^t \delta(s)ds),$$

όπου το $\delta(s) \geq 0$ είναι η ένταση του πληθωρισμού τη χρονική στιγμή s. Αν $i(s) - \delta(s) \geq i > 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ τότε το άνω φράγμα στη σχέση (5.8) εξακολουθεί να είναι σωστό. Αυτό συνεπάγεται από την Πρόταση 3.4.2 αφού η

$$e^{-\int_0^t (i(s)-\delta(s))} ds / e^{-it}$$

μειώνεται στο t.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την πιθανότητα της απόλυτης καταστροφής. Στο ακόλουθο Λήμμα και στις ακόλουθες Προτάσεις το σχετικό αποθεματικό ασφαλείας Θ μπορεί να είναι ίσο με το 0.

Λήμμα 3.5.1 : Για $\chi \geq 0$ και για $\Theta \geq 0$ έχουμε

$$\overline{\Psi}(x) = e^{(\lambda/i)log(1+ix/p)} \int_{(1/i)log(1+ix/p)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} E[\overline{\Psi}(\frac{p(e^{it}-1)}{i} - X_1)]dt. \qquad (5.10)$$

Απόδειξη :

$$\overline{\Psi}(x) = P_r(\inf_{s>T_1} \{\frac{p}{i}(1-e^{-ts}) - \overline{S}_s = x\} < 0)$$

$$= P_r(\inf_{s>T_1} \{\frac{p}{i}(1-e^{-i(s-T_1)}) - \sum_{n\geq 2}^{N_s} e^{-i(T_n-T_1)} X_n + xe^{iT_1} + \frac{p}{i}(e^{iT_1}-1) - X_1\} < 0)$$

και από την υπόθεση της ανεξαρτησίας μπορεί κανείς να λάβει

$$\overline{\Psi}(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}$$

$$P(\inf_{s>t} \{\frac{p}{i}(1-e^{-i(s-t)}) - \overline{S}_{s-t} + xe^{it} + \frac{p}{i}(e^{it}-1) - X_1\} < 0)dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} E[\overline{\Psi}(xe^{it} + \frac{p}{i}(e^{it} - 1) - X_1)]dt. \qquad (5.11)$$

Τελικά από την σχέση (5.11) λαμβάνουμε την σχέση (5.10) εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$t \to t + \frac{1}{i} log(1 + \frac{ix}{p}). \ \square$$

Αν παραγωγίσουμε την σχέση (5.10 λαμβάνουμε

$$\overline{\Psi}'(x) = \frac{\lambda}{p + ix}\overline{\Psi}(x) - \frac{\lambda}{p + ix}E[\overline{\Psi}(x - X_1)]. \qquad (5.12)$$

Ας παραστήσουμε με K το μέτρο $\delta_{(0)} - P_{X_1}$ όπου το μέτρο $\delta_{(0)}$ είναι η συναρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που παίρνει μόνο την τιμή 0. Ο συμβολισμός αυτός οδηγεί την (5.12) στην ακόλουθη μορφή

$$\overline{\Psi}'(x) = \frac{\lambda}{p + ix} \int_{[0,\infty]} \overline{\Psi}(x - y)dK(y). \qquad (5.13)$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\overline{\Psi}(k) - \overline{\Psi}(x) = \int_{[x,k]} (\frac{\lambda}{p + iz} \int_{[0,\infty[} \overline{\Psi}(z - y)dK(y))dz$$

$$= \lambda \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} 1_{[y-k+x,y]}(u) \frac{\overline{\Psi}(x - u)}{p + i(x - u + y)} du)dK(y)$$

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi}(x - u)(\int_{\mathbb{R}} 1_{[u,u+k-x]}(y) \frac{1}{p + i(x - u + y)} dK(y))du. \qquad (5.14)$$

Τα άνω οδηγούν στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.5.2 : Αν το αρχικό αποθεματικό x και το αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλελιας Θ δεν είναι αρνητικά τότε η πιθανότητα της απόλυτης χρεοκοπίας είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\overline{\Psi}(q) = -\lambda \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi}(q - u)(\int_{\mathbb{R}} 1_{[u,\infty[}(y) \frac{1}{p + i(q - u + y)} dK(y))du. \qquad (5.15)$$

Απόδειξη : Αν το R_k συμβολίζει τον χρόνο χρεοκοπίας της στοχαστικής διαδικασίας C.S. με αρχικό αποθεματικό k τότε είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} P(R_k < \infty) = 0.$$

Από την Πρόταση 3.4.2 συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} P(\overline{R}_k < \infty) = 0.$$

Αν αφήσουμε το k να συγκλίνει στο άπειρο τότε η εξίσωση (5.14) οδηγεί στην εξίσωση (5.15). □

Πρόταση 3.5.3 : Αν το αρχικό αποθεματικό x και το αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας Θ δεν είναι αρνητικά τότε έχουμε

$$\overline{\Psi}(q) = \lambda \int_{[0,\infty[} \overline{\Psi}(q-u)(\int_{[u,\infty[} \frac{1}{p+i(q-u+y)} dP_{X_1}(y))du$$

$$-\lambda \int_{]-\infty,0]} \overline{\Psi}(q-u)(\int_{[0,\infty[} \frac{iy}{(p+i(q-u+y))(p+i(q-u))} dP_{X_1}(y))du. \qquad (5.16)$$

Απόδειξη : Η εξίσωση (5.16) εύκολα επάγεται από την (5.15). □

Σημειώστε ότι αντίθετα με την κλασσική περίπτωση όπου και έχουμε ότι $i = 0$ οι τιμές $\overline{\Psi}(y)$ για $y > x$ εμφανίζονται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.16). Για το λόγο αυτό η (5.16) δεν είναι ανανεωτική εξίσωση με την συνήθη έννοια. Αν $x = 0$ και $t = 0$ τότε η (5.16) οδηγεί στην γνωστή εξίσωση

$$P(R_0 < \infty) = \frac{\lambda E[X_1]}{p}. \qquad (5.17)$$

Από την άλλη πλευρά αφού

$$\int_{]-\infty,0]} \overline{\Psi}(\psi-u)(\int_{[0,\infty[} \frac{iy}{(p+i(x-u+y))(p+i(x-u))} dP_{X_1}(y))du \geq 0$$

και $0 \leq \overline{\Psi}(x-u) \leq 1$ συνεπάγεται από την σχέση (5.16) ότι

$$P(\overline{R}_x < \infty) \leq \lambda \int_{[0,\infty[} (\int_{[u,\infty[} \frac{1}{p+i(x-u+y)} dP_{X_1}(y))du. \qquad (5.18)$$

Αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$P(\overline{R}_\chi < \infty) \leq \frac{1}{1+\Theta}\frac{E[log(1+iX_1/(p+i\chi))]}{E[iX_1/p]}. \qquad (5.19)$$

Επομένως αν $i > 0$ και αν $X_1 > 0$ σχεδόν βέβαια τότε έχουμε

$$P(\overline{R}_\chi < \infty) < 1, \qquad (5.20)$$

ακόμα και για $\Theta = 0$. Αυτό είναι όμοιο με το αποτέλεσμα το οποίο λαμβάνουμε από την Πρόταση 3.4.4.

Σημειώστε ότι ακόμα και για μεγάλες τιμές της παράμετρου κινδύνου λ ο δεύτερος όρος του δεξιού τμήματος της εξίσωσης (5.16) μπορεί να συγκριθεί με τον πρώτο όρο. Έτσι αν το λ είναι μεγάλο τότε

$$\overline{\Psi}(x) \sim \lambda \int_{[0,\infty[} \overline{\Psi}(x-u)(\int_{[u,\infty[} \frac{1}{p+i(x-u+y)} dP_{X_1}(y))du \qquad (5.21)$$

και αν $x = 0$ τότε

$$P(\overline{R}_0 < \infty) \sim \lambda \int_{[0,\infty[} (\int_{[u,\infty[} \frac{1}{p+i(x-u+y)} dP_{X_1}(y))du \qquad (5.22)$$

ή ισοδύναμα

$$P(\overline{R}_0 < \infty) \sim \frac{1}{1+\Theta}\frac{E[log(1+iX_1/p)]}{E[iX_1/p]} \sim \frac{1}{1+\Theta}. \qquad (5.23)$$

Αυτό δείχνει ότι ο τύπος (5.17) λαμβάνεται σαν οριακή περίπτωση όταν το λ τείνει στο άπειρο.

3.5.4 Παράδειγμα : Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο $1/\mu$ ($\mu > 0$) :

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}1_{[0,\infty[}(x). \qquad (5.24)$$

Έστω

$$t' = -\frac{1}{i}log(\frac{\Theta(1+\Theta)\lambda\mu + i\Theta x}{\Theta(1+\Theta)\lambda\mu + i(1+\Theta)x}).$$

Έτσι λαμβάνουμε τα ακόλουθα άνω όρια των πιθανοτήτων καταστροφής σε διακριτό χρόνο :

(1) αν $t \leq t'$ τότε

$$P(\overline{R}_x \leq t) \leq \Phi_t(r_t) = (\frac{1 - r_t \mu e^{-it}}{1 - r_t \mu})^{\lambda/i} exp\{\frac{r_t}{i}(\lambda\mu(1+\Theta)(e^{-it}-1) - ix)\}, \qquad (5.25)$$

όπου

$$r_t = \frac{e^{it}+1}{2\mu} - \frac{i\sqrt{D}}{2e^{-it}(\lambda\mu(1+\Theta)(1-e^{-it}) + ix)}$$

και

$$D = (1+e^{-it})^2 (\frac{\lambda\mu(1+\Theta)(1-e^{-it}) + ix}{i\mu})^2$$

$$-\frac{4e^{-it}}{i^2\mu^2}(\lambda\mu(1+\Theta)(1-e^{-it}) + ix)(\lambda\mu\Theta(1-e^{-it}) + ix)$$

(2) αν $t > t'$ τότε $r_t = r_{t'}$ και

$$P(\overline{R}_x \leq t) \leq \Phi_t(r_t) = (1 + \frac{ix}{\lambda\mu(1+\Theta)})^{\lambda/i} exp\{-\frac{x}{\mu}\}. \qquad (5.26)$$

Για τα πάνω όρια της πιθανότητας της απόλυτης χρεοκοπίας που λάβαμε στη σχέση (5.19) έχουμε

$$P(\overline{R}_q < \infty) \leq \frac{\lambda}{i} e^{(\lambda/i)(1+\Theta)+q/\mu} \int_{(\lambda/i)(1+\Theta)+q/\mu}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \qquad (5.27)$$

Πίνακες

Οι ακόλουθοι πίνακες δείχνουν τις διαφορετικές τιμές του x (αρχικό αποθεματικό), i (πραγματική ένταση τόκου), Θ (αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας), μ (μέση απαίτηση) και λ (η παράμετρος του κινδύνου) και τα ακόλουθα άνω φράγματα : το φράγμα τού Lundberg το φράγμα του Gerber το άνω φράγμα $\Phi_t(r_t)$ το οποίο καλείται νέο φράγμα και το άνω φράγμα το οποίο ορίστηκε στη σχέση (5.27) και το οπόιο καλείται η εκτίμηση από λογάριθμο.

Πίνακας 1

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100 Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 1.000

Φράγμα του Lundberg = $0.112685581D - 03$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1.	$0.158185704D - 35$	$0.246640716D - 35$
2.	$0.627499290D - 33$	$0.146084301D - 32$
3.	$0.393995041D - 31$	$0.133387939D - 30$
4.	$0.974731605D - 30$	$0.470843316D - 29$
5.	$0.135806158D - 28$	$0.911301862D - 28$
6.	$0.123387647D - 27$	$0.116232954D - 26$
7.	$0.852178207D - 27$	$0.108512087D - 25$
8.	$0.462607674D - 26$	$0.794304692D - 25$
9.	$0.208602424D - 25$	$0.478051286D - 24$
10.	$0.807928465D - 25$	$0.478051286D - 24$
20.	$0.511429996D - 21$	$0.171914839D - 18$
30.	$0.514488359D - 19$	$0.119035915D - 15$
40.	$0.874206357D - 18$	$0.102584739D - 13$
50.	$0.568544414D - 17$	$0.272311059D - 12$
60.	$0.206518334D - 16$	$0.342335243D - 11$
70.	$0.513494340D - 16$	$0.258361549D - 10$
80.	$0.985990971D - 16$	$0.135148856D - 09$
90.	$0.157825997D - 15$	$0.537816484D - 09$
100.	$0.221594947D - 15$	$0.173464149D - 08$
175.13	$0.450000263D - 15$	$0.305483333D - 06$

Από το χρόνο $175,13$ και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.450000263D - 15$.

Από το χρόνο 909.09 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.450000264D-15$ τη χρονική στιγμή 175.13 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με

0,546.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.481138046D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 1.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.914706899D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 1.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.505078188D + 00$.

Πίνακας 2

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 10.000

Φράγμα του Lundberg = $0.112685581D-03$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1.	$0.172670053D-23$	$0.244823468D-23$
2.	$0.948875467D-19$	$0.171914839D-18$
3.	$0.541534064D-16$	$0.119035915D-15$
4.	$0.397749746D-14$	$0.102584739D-13$
5.	$0.921273108D-13$	$0.272311059D-12$
6.	$0.102831903D-11$	$0.342335243D-11$
7.	$0.698306181D-11$	$0.258361549D-10$
8.	$0.332142197D-10$	$0.135148826D-09$
9.	$0.121997817D-09$	$0.537816484D-09$
10.	$0.360915187D-09$	$0.173464149D-08$
20.	$0.925724050D-07$	$0.802467587D-06$
30.	$0.546743726D-05$	$0.855837556D-05$
40.	$0.148096927D-05$	$0.279806625D-04$
50.	$0.208538699D-05$	$0.541054899D-04$
60.	$0.228561197D-05$	$0.791189051D-04$
60.61	$0.228619199D-05$	$0.8048445838D-04$

Από το χρόνο 60.61 και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.228619199D-05$.

Από το χρόνο 90.91 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.228619199-05$ τη χρονική στιγμή 60.61 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.149.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.845228924D+00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας $= 0.100$

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου $= 10.000$

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.921999293D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας $= 0.000$

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου $= 10.000$

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.921999293D + 00$.

Πίνακας 3

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Φράγμα του Lundberg = $0.112685581D-03$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1.	$0.148529769D-08$	$0.173464149D-08$
2.	$0.650371399D-06$	$0.802467587D-06$
3.	$0.667619861D-05$	$0.855837556D-05$
4.	$0.211373225D-04$	$0.102584739D-13$
5.	$0.396976432D-04$	$0.279806625D-04$
6.	$0.564755963D-04$	$0.541054899D-04$
7.	$0.680998442D-04$	$0.979592688D-04$
8.	$0.738276877D-04$	$0.108962115D-03$
8.63	$0.747288147D-04$	$0.112067344D-03$

Από το χρόνο 8.63 και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.747288147D-04$.

Από το χρόνο 9.09 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.747288147D-04$ τη χρονική στιγμή 8.63 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.0105.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.914429281D+00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 1

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.922741530D+00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.010

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας $= 0.000$

Μέση απαίτηση$= 1$

Παράμετρος κινδύνου $= 100.000$

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με 1.

Πίνακας 4.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 1.000

Φράγμα του Lundberg = $0.402890322D + 00$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1.	$0.392288069D - 02$	$0.435396872D - 02$
2.	$0.111264717D - 01$	$0.132901945D - 01$
3.	$0.201867329D - 01$	$0.255604092D - 01$
4.	$0.300247591D - 01$	$0.399124397D - 01$
5.	$0.399659972D - 01$	$0.553995871D - 01$
6.	$0.496148161D - 01$	$0.713584094D - 01$
7.	$0.587532810D - 01$	$0.873419307D - 01$
8.	$0.672731999D - 01$	$0.103057886D + 00$
9.	$0.751329301D - 01$	$0.118321430D + 00$
10.	$0.823304281D - 01$	$0.133021234D + 00$
20.	$0.125344923D + 00$	$0.245721269D + 00$
30.	$0.138645578D + 00$	$0.311344020D + 00$
38.17	$0.140680380D + 00$	$0.344713417D + 00$

Από το χρόνο $38,17$ και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.140680380D+00$.

Από το χρόνο $90,91$ και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα 0.140680380 τη χρονική στιγμή $38,17$ είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.244.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.710388747D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 1.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.899285843D + 00$

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.000

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.763868948D + 00$.

Πίνακας 5.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 10.000

Φράγμα του Lundberg = $0.402890322D + 00$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1.	$0.126954054D + 00$	$0.133021234D + 00$
2.	$0.230611687D + 00$	$0.245721269D + 00$
3.	$0.288777250D + 00$	$0.311343020D + 00$
4.	$0.321882483D + 00$	$0.374389908D + 00$
5.	$0.340739760D + 00$	$0.374389908D + 00$
6.	$0.35095724D + 00$	$0.388891120D + 00$
7.	$0.355651764D + 00$	$0.397287182D + 00$
7.85	$0.356703981D + 00$	$0.401106465D + 00$

Από το χρόνο 7.85 και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.356703981D+ 00$.

Από το χρόνο 9.09 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.356703981D + 00$ τη χρονική στιγμή 7.85 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.115.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.895987588D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 10.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.920358497D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.000

Μέση απαίτηση$= 10$

Παράμετρος κινδύνου $= 10.000$

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.982729207D + 00$.

Πίνακας 6.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Φράγμα του Lundberg = $0.402890322D + 00$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
0.89	$0.397935594D + 00$	$0.402868569D + 00$

Από το χρόνο 0.89 και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.397935594D+00$.

Από το χρόνο 0.91 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.397935594D + 00$ τη χρονική στιγμή 7.85 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.101.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.920067777D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.922576379D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.000

Μέση απαίτηση= 10

Παράμετρος κινδύνου = 100.000

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με 1.

Πίνακας 7.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 100

Παράμετρος κινδύνου = 0.100

Φράγμα του Lundberg = $0.913100716D + 00$

Χρόνος	Νέο Φράγμα	Φράγμα του Gerber
1	$0.574593237d + 00$	$0.580615473d + 00$
2	$0.637728383d + 00$	$0.649162066d + 00$
3	$0.676872085d + 00$	$0.693037572d + 00$
4	$0.704284212d + 00$	$0.724620852d + 00$
5	$0.724718029d + 00$	$0.748773822d + 00$
6	$0.740561514d + 00$	$0.767970462d + 00$
7	$0.753187688d + 00$	$0.783650254d + 00$
8	$0.763456345d + 00$	$0.796724409d + 00$
9	$0.771939088d + 00$	$0.807804646d + 00$
10	$0.779033327d + 00$	$0.817319945d + 00$
20	$0.812476250d + 00$	$0.869049022d + 00$
30	$0.820705086d + 00$	$0.889864565d + 00$
38.17	$0.821908275d + 00$	$0.898971283d + 00$

Από το χρόνο 38.17 και άνω το νέο φράγμα παραμένει σταθερό και ίσο με $0.8219082750D + 00$.

Από το χρόνο 90.91 και άνω το φράγμα τού Gerber ταυτίζεται με το φράγμα του Lundberg.

Το νέο φράγμα $0.821908275d + 00$ τη χρονική στιγμή 38.17 είναι ίσο με το φράγμα του Lundberg το οποίο υπολογίζεται για αντίστοιχο αποθεματικό ασφαλείας ίσο με 0.244.

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.613797482dD + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=0

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.100

Μέση απαίτηση= 100

Παράμετρος κινδύνου = 0.100

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.753849698D + 00$.

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.000

Μέση απαίτηση= 100

Παράμετρος κινδύνου = 0.100

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.654206181D + 00$

Αρχικό αποθεματικό=100

Πραγματική ένταση τόκου=0.030

Σχετικό αποθεματικό ασφαλείας = 0.000

Μέση απαίτηση= 100

Παράμετρος κινδύνου = 0.100

Η λογαριθμική εκτίμηση είναι ίση με $0.816325728D + 00$.

Κεφάλαιο 4

Προβλήματα Χρεοκοπίας με Σύνθετα Κεφάλαια.

4.1 Η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία Z ορίζεται στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις με $E[Z(t)] = \mu t$ και $Var[Z(t)] = \sigma^2 t$ όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $0 < \sigma^2 < \infty$. Υποθέτουμε ότι η Z είναι συνεχής κατά πιθανότητα και ότι οι δειγματικές της τροχιές είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερά όρια. Για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $Z(t)$ έχουμε :

$$E[e^{iut}] = e^{\nu(u)t} \ , \forall t \geq 0 \ , \forall u \in \mathbb{R},$$

όπου η συνάρτηση που εμφανίζεται στον εκθέτη είναι η συνάρτηση $\nu(.)$ η οποία δίνεται στην αναπαράσταση των Levy-Khintchine (Gikhman and Skorohod) [18] . Στην περίπτωση της πεπερασμένης διακύμανσης η αναπαράσταση μπορεί να απλοποιηθεί μοναδικά στη μορφή

$$\nu(u) = i\mu u + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} x^{-2}(e^{iux} - 1 - iux) G(dx),$$

όπου η G είναι η κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ (Gnedenko [19, $323 - 327$]). Τελικά η Z είναι strong Markov (Hunt [23]). Θα ξαναγράψουμε την (4.1) ως :

$$\overline{Z}(t) = e^{\beta t}[y + Z^*(t)], \ t \geq 0, \qquad (4.4)$$

όπου

$$Z^*(t) = \int_0^t e^{-\beta s} dZ(s), \ t \geq 0. \qquad (4.5)$$

Η τυχαία μεταβλητή $Z^*(t)$ αναπαριστά την παρούσα αξία όπως αυτή φαίνεται από την χρονική στιγμή 0 του εισοδήματος το οποίο αποκτήθηκε στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Ας συμβολίσουμε με $D[0, \infty)$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται στο σύνολο $[0, \infty)$, οι οποίες είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερά όρια και ας συμβολίσουμε με $D[0, t]$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων στο $[0, t]$ οι οποίες είναι αριστερά συνεχείς και έχουν αριστερά όρια για κάθε $t > 0$.

Πρόταση 4.1.1 : Τα ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes στην (4.5) υπάρχουν σχεδόν βέβαια, είναι πεπερασμένα και ικανοποιούν την

$$Z^*(t) = e^{it} X(t) + i \int_0^t e^{-is} Z(s) ds, \ t \geq 0.$$

Επιπλέον η Z^* είναι σχεδόν βέβαια στο $D[0,\infty)$.

Απόδειξη : Ας ορίσουμε $g(t) = exp(-it)$. Από το Λήμμα το οποίο έχει αποδειχθεί στη σελίδα 110 του Billingsley [3] και από το κριτήριο του Cauchy για την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann-Stieltjes $[1, 279]$ προκύπτει εύκολα ότι κάθε συνάρτηση $\chi(,)$ στο $D[0,\infty)$ είναι ολοκληρώσιμη όσον αφορά την μονότονη συνάρτηση g πάνω στο $[0,t]$. Αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη [1], 282 τότε η g είναι ολοκληρώσιμη όσον αφορά οποιαδήποτε τέτοια $\chi()$ στο $[0,t]$ και

$$\int_0^t g(s)d\chi(s) = g(t)\chi(t) - g(0)\chi(0) - \int_0^t \chi(s)dg(s). \qquad (4.6)$$

Αφού $-dg(s) = iexp(-is)ds$ το ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά της (4.6) είναι μια συνεχής συνάρτηση του t. Έτσι ολόκληρη η δεξιά πλευρά είναι συνεχής συνάρτηση του t. Επομένως ολόκληρη η δεξιά πλευρά αν την δούμε σαν συνάρτηση του t είναι στο $D[0,\infty)$. Η ολοκλήρωση της Πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι η $Z(.)$ είναι σχεδόν βέβαια στο $D[0,\infty)$ με $Z(0) = 0$. □

Για να συσχετίσουμε τον ορισμό μας με την παρούσα αξία της στοχαστικής διαδικασίας Z σε μια γενικότερη Θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης είναι χρήσιμο να ορίσουμε $M(t) = Z(t) - \mu t$ για $t \geq 0$ και μετά να ξαναγράψουμε την (4.5) ως εξής

$$Z^*(t) = \int_0^t e^{-is}dM(s) + (\mu/i)(1-e^{-it}),\ t \geq 0. \qquad (4.7)$$

Το M είναι martingale, και έτσι η (4.7) μπορεί να ερμηνευθεί μέσα σε γενικότερα πλαίσια από αυτά της γενικότερης θεωρίας στοχαστικής ολοκλήρωσης όπως έχει αυτή διαμορφωθεί για παράδειγμα από τον Skorohod $([35], 29-34)$.

Πρόταση 4.1.2 : Η διαδικασία $Z^* = \langle Z^*(t)\rangle_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις με

$$E[Z^*(t)] = (\mu/i)(1-e^{-it}) \text{ και } Var[Z^*(t)] = (\sigma^2/2i)(1-e^{-2it})$$

για $t \geq 0$. Επιπλέον το $Z^*(\infty) = \lim_{t\to\infty} Z^*(t)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο σχεδον βέβαια. Η κατανομή της $Z^*(\infty)$ είναι συνεχής και

$$E[e^{iuZ^*(t)}] = e^{\psi^*(u)},\ \text{όπου } \psi^*(u) = \int_0^t \nu(ue^{-\beta t})dt. \qquad (4.8)$$

Απόδειξη : Είναι φανερό ότι η Z^* έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ότι οι ροπές της $Z^*(t)$ προκύπτουν άμεσα από την (4.7) και από τους τύπους (3.8) και (3.9) του Skorohod [35]. Αυτό δείχνει ότι η $Z^*(t)$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια. Έτσι υποθέτουμε ότι $\mu = 0$ αφού η γενική περίπτωση απαιτεί μόνο μια μηδαμινή επέκταση αυτού του ισχυρισμού. Από την ανεξαρτησία των προσαυξήσεών της, βλέπουμε ότι η $\langle Z^*(t)\rangle$ μαζί με την προφανή οικογένεια των σ-αλγεβρών έιναι ένα martingale όταν $\mu = 0$. Επιπλέον

$$\sup_{t\geq 0} E\{[Z^*(t)]^2\} = \sigma^2/2\beta < \infty,$$

γεγονός που οδηγεί στη σχέση $\sup E\{|Z^*(t)|\} < \infty$. Επομένως από το Θεώρημα σύγκλισης των martingale ([22]) η $Z^*(\infty)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού. Γράφοντας τα προσεγγιστικά αθροίσματα των Riemann-Stieltjes για το ολοκλήρωμα (4.5) και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα συνέχειας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορεί εύκολα να πιστοποιηθεί ότι είναι

$$E[e^{iuZ^*(t)}] = \exp \int_0^t \nu(ue^{-\beta s})ds, \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Για να δείξουμε ότι η $Z^*(\infty)$ έχει συνεχή κατανομή υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο και συμβολίζουμε με p τη μεγαλύτερη πιθανότητα που έχει σχέση με οποιαδήποτε τιμή της τυχαίας μεταβλητής. Έστω $C_1, C_2, \ldots, C_k$ οι τιμές οι οποίες έχουν διακριτή πιθανότητα p. Έστω $t > 0$ και ας ορίσουμε

$$V(t) = \int_t^\infty e^{-i(s-t)} dZ(s) = e^{it}[Z^*(\infty) - Z^*(t)].$$

Είναι $Z^*(\infty) = Z^*(t) + e^{-it}V(t)$, η $V(t)$ έχει την ίδια κατανομή με την $Z^*(\infty)$ και είναι ανεξάρτητη της $Z^*(t)$. Αν $H_t(.)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $Z^*(t)$ τότε έχουμε

$$p = P\{Z^*(\infty) = C_1\} = e^{it}(C_1 - z)\}H_t(dz).$$

Αλλά για να ισχύει αυτό η $H(t)$ θα πρέπει να συγκεντρώνει όλη τη μάζα της στα σημεία $z_k = C_t - C_k \exp(-it), \forall k \in \{1, 2, \ldots, K\}$. Έτσι συνεπάγεται ότι $Z^*(t) \to C_1 = Z^*(\infty)$ σχεδόν βέβαια καθώς $t \to \infty$. Αλλά έχουμε υποθέσει ότι η $Z(t)$ δεν εκφυλίζεται για κάθε t. Επομένως η $Z^*(\infty)$ δεν είναι εκφυλισμένη. Έχουμε οδηγηθεί συνεπώς σε άτοπο. Συνεπώς η $Z(\infty)$ έχει συνεχή κατανομή. □

Παρατήρηση : Από την Πρόταση 4.1.2 και τη σχέση (4.4) συνεπάγεται ότι $|\ \overline{Z}(t)\ | \to \infty$ σχεδόν βέβαια με

$$P\{y + Z^*(\infty) > 0\} = P\{\bar{(}t) \to \infty\} = 1 - P\{\overline{Z}(t) \to -\infty\}.$$

Πρόταση 4.1.3 : Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση κινδύνου έχουμε

$$\psi(y) = H(-y)/E[H(-\overline{Z}(T))|T < \infty],$$

όπου η H είναι η συνάρτηση κατανομής της $Z^*(\infty)$.

Απόδειξη : Από την (4.5) βλέπουμε ότι $T = \inf\{t \geq 0 : y + Z^*(t) < 0\}$ και επομένως το ενδεχόμενο $\{T < \infty\}$ περιλαμβάνει το ενδεχόμενο $\{y + Z^*(\infty) < 0\}$. Τώρα ας θεωρήσουμε τη στοχαστική διαδικασία $\langle V(t)\rangle_{t\geq 0}$ η οποία ορίζεται όπως στην Πρόταση (4.1.2). Υποθέτοντας ότι $T < \infty$ έχουμε ότι

$$y + Z^*(\infty) = y + Z^*(t) + e^{-iT}V(T) =$$

$$= e^{-iT}[e^{iT}(y + Z^*(T)) + V(T)] = e^{-iT}[\overline{Z}(T) + V(T)].$$

Επομένως έχουμε

$$P\{y + Z^*(\infty) < 0\} = P\{T < \infty, \overline{Z}(T) + V(T) < 0\} =$$

$$\int_{\{T<\infty\}} P\{\overline{Z}(T) + V(T) < 0|Z(s)\ :\ 0 \leq s \leq T\}dP. \qquad (4.9)$$

Παρατηρήστε ότι η $\overline{Z}(T)$ εξαρτάται μόνο από την $\langle Z(s)\rangle_{0\leq s\leq T}$ ενώ η $V(T)$ εξαρτάται μόνο από την $\langle Z(s) - Z(T)\rangle_{s>T}$ και έχει συνάρτηση κατανομής $H(.)$. Αφού η $H(.)$ είναι συνεχής από την Πρόταση 4.2.1 έπεται ότι η T είναι ένας χρόνος Markov για την Z. Οι ανεξάρτητες προσαυξήσεις και η ισχυρή ιδιότητα του Markov μας δίνουν

$$P\{\overline{Z}(T) + V(T) < 0|Z(s), 0 \leq s \leq T\} = H(-\overline{Z}(T)) \qquad (4.10)$$

στο $\{T < \infty\}$. Συνδυάζοντας την (4.9) και την (4.10) και χρησιμοποιώντας ξανά την συνέχεια της H έχουμε ότι

$$H(-y) = Pr\{y + Z^*(\infty) < 0\} = \int_{\{T<\infty\}} H(-\overline{Z}(T))dP,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με αυτό που δηλώνει η πρόταση. □

Πόρισμα 4.1.4 : Έχουμε $\psi(y) \leq H(-y)/H(0)$ με ισότητα αν η Z δεν έχει αρνητικά άλματα.

Απόδειξη : Αφού $\overline{Z}(T) \leq 0$ στο $\{T < \infty\}$ και η H είναι μη φθίνουσα, έχουμε $H(-\overline{Z}(T)) \geq H(0)$ στο $\{T < \infty\}$. Έτσι πιστοποιείται η ανισότητα. Αν η Z δεν έχει αρνητικά άλματα η ισότητα είναι αληθής και για την $\overline{Z}$ και έτσι έχουμε $\overline{Z}(T) = 0$ στο $\{T < \infty\}$.

Ορίζουμε

$$U(t) = \inf\{Z^*(s) : 0 \leq s \leq t\},\ t \geq 0.$$

Αφού η $Z(\infty)$ είναι πεπερασμένη και το όριο $U(\infty)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο σχεδόν βέβαια έχουμε καθαρά ότι

$$\psi(y) = P\{U(\infty) < 0 | Z^*(0) = y\}.\ \square$$

4.2. Παραδείγματα.

Αν η στοχαστική διαδικασία εισοδημάτων είναι compound Poisson της μορφής (4.2) τότε η εκθετική συνάρτηση της είναι η

$$\nu(u) = icu - \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-iux}) F(dx), \ \forall u \in \mathbb{R}. \qquad (4.11)$$

Παράδειγμα 4.2.1 : Στη σχέση (4.11) υποθέστε οτι η σταθερά c είναι θετική και ότι

$$F(x) = 1 - e^{-x/m}, \forall x > 0 \ : \ m > 0,$$

με $F(x) = 0$ για $x \leq 0$. Η εκθετική απεικόνιση είναι ίση με

$$\nu(u) = icu - \lambda imu/(1 + imu)$$

και μπορεί πολύ εύκολα να πιστοποιηθεί ότι

$$\psi(u) = \int_0^t \nu(ue^{-is}) ds = icu/i - (\lambda/i) \ln(1 + imu).$$

Η συνάρτηση κατανομής της H είναι η

$$e^{\psi^*(u) = e^{icu/i}(1+imu)^{-\lambda/i}}. \qquad (4.12)$$

Συγκρίνοντας αυτήν την συνάρτηση κατανομής με την συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα μπορούμε πολύ εύκολα να την αντιστρέψουμε για να λάβουμε

$$H(z) = [\int_{c/i}^{\infty} x^{\lambda/i - 1} e^{-x/m} dx]/m^{\lambda/i} \Gamma(\lambda/\beta), \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (4.13)$$

Τώρα παρατηρήστε ότι τα άλματα της $\overline{Z}$ είναι ακριβώς τα ίδια με τα άλματα της Z και επομένως η αμνήμων ιδιότητα της εκθετικής κατανομής μας οδηγεί στο ακόλουθο : η ποσότητα κάτω από το μηδεν στην οποία πέφτει ο κίνδυνος του κεφαλαίου δεδομένου οτι συμβαίνει η χρεοκοπία έχει την ίδια εκθετική κατανομή με το γενικό άλμα της στοχαστικής διαδικασίας εισοδήματος. Έτσι

$$E[e^{iu\overline{Z}(T)} | T < \infty] = (1 + imu)^{-1}. \qquad (4.14)$$

Συνδυάζοντας την (4.12) και την (4.14) είναι

$$E[H(-\overline{Z}(T)) | T < \infty] = [\int_{ci}^{\infty} x^{\lambda/i} e^{-/m} dx]/m^{\lambda/i + 1} \Gamma(\lambda/i + 1). \qquad (4.15)$$

Από την Πρόταση 4.1.3 έχουμε ότι

$$\psi(y) = H(-y)/E[H(-\overline{Z}(T))|T < \infty]. \qquad (4.16)$$

Παράδειγμα 4.2.2 : Τώρα υποθέστε στην (4.11) ότι το c είναι αρνητικό και ότι

$$F(x) = e^{x/m}, \forall x < 0 \ : \ m > 0,$$

με $F(x) = 1$ για $x \geq 0$. Τότε λαμβάνουμε

$$\nu(u) = \lambda imu/(1 - imu) - i|c|u,$$

$$e^{\psi^*(u) = e^{-1|c|u|i}(1-imu)^{-\lambda/i}}.$$

Με αντιστροφή έχουμε

$$H(z) = 0 \Leftrightarrow z \leq -c/i$$

$$H(z) = [\int_0^{|c|/i+z} x^{\lambda/i} e^{-x} dx]/m^{\lambda/i}\Gamma(\lambda/i) \Leftrightarrow z > -c/\beta.$$

Αφού η στοχαστική διαδικασία εισοδήματος δεν έχει αρνητικά άλματα το Πόρισμα 4.1.4 μας δίνει ότι $\psi(y) = H(-y)/H(0)$.

Παράδειγμα 4.2.3 : Ας υποθέσούμε τώρα ότι $Z(t) = \sigma W^*(t) + \mu t$, όπου το W^* δηλώνει την τυπική κίνηση Brown (με drift 0 και μοναδιαία διακύμανση). Η βασική μας αναπαράσταση για την στοχαστική διαδικασία εισοδημάτων συνεπάγεται την

$$\overline{Z}(t) = e^{it}[y + \sigma \int_0^t e^{-is} dW^*(s) + (\mu/i)(1 - e^{-it})]$$

$$= e^{it} + \sigma W^*(t) + \sigma I \int_0^t e^{I(t-s)} W^*(s) ds + (\mu I)(e^{It} - 1). \qquad (4.17)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να πιστοποιήσει ότι η στοχαστική διαδικασία της παρούσας αξίας $Z^*(.)$ είναι Gauss, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ότι οι δύο πρώτες ροπές της $Z(t)$ δίνονται από την Πρόταση 4.2.1. Έτσι μπορεί κανείς άμεσα να λάβει ότι

$$Z^*(t) = (\sigma^2/2i)^{1/2} W^*(1 - e^{-2it}) + (\mu/i)(1 - e^{-it}), \ t \geq 0. \qquad (4.18)$$

Συνδυάζοντας την (4.4) και την (4.18) παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία κεφαλαίων έχει την ίδια κατανομή με την

$$\overline{Z}(t) = (\sigma^2/2i)^{1/2} W^*(e^{2it} - 1) + ye^{it} + (\mu/i)(e^{it} - 1), \ t \geq 0. \qquad (4.19)$$

Για τον λόγο αυτό η $\overline{Z}$ είναι στοχαστική διαδικασία του Gauss και έχει συνεχείς δειγματικές τροχιές. Επιπρόσθετα συνεπάγεται από την (4.19) ότι η $\overline{Z}$ είναι μια ισχυρή στοχαστική διαδικασία Markov με στάσιμες πιθανότητες μετάβασης και επομένως είναι

$$\mu(y) = \mu + iy, \quad \sigma^2(y) = \sigma^2, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Μονότονες Κλάσεις και Κλάσεις Dynkin.

Θα δώσουμε εν συντομία ορισμένα αποτελέσματα και ορισμούς απο τη Θεωρία Μέτρου που αφορούν στο Θεώρημα Μονότονης Κλάσης και τις κλάσεις Dynkin.

Α1 Πρόταση : Έστω X σύνολο, $\mathcal{A}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) $X \in \mathcal{A}, B \setminus A \in \mathcal{A}, \forall A, B \in \mathcal{A} : A \subseteq B$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $\forall \langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{A}$,

(ii) $\emptyset \in \mathcal{A}, X \setminus A \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathcal{A}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, $\forall \langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{A} : A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m$.

Α2 Ορισμός : Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε να ικανοποιείται το (i) ή το (ii) της προηγούμενης πρότασης καλείται μια κλάση Dynkin υποσυνόλων του X.

Α3 Θεώρημα Μονότονης Κλάσης : Έστω X σύνολο, $\mathcal{A}$ κλάση Dynkin υποσυνόλων του X, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{A} : I \cap J \in \mathcal{Z}$, $\forall I, J \in \mathcal{Z}$. Τότε $\sigma(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{A}$.

Α4 Πρόταση : Έστω X σύνολο, $\mathcal{E}$ άλγεβρα στο X έτσι ώστε

(i) $\cup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}, \forall \langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{P}(X)$,

(ii) $\cap_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}, \forall \langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία στο $\mathcal{P}(X)$,

(iii) $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$.

Τότε $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Ομοιόμορφη Ολοκληρωσιμότητα

Το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue μας δίνει ικανές συνθήκες που μας επιτρέπουν να εναλλάσουμε όρια και ολοκληρώματα. Μια κρίσιμη υπόθεση είναι ότι $\mid X_n \mid \leq X$ $\sigma.\beta.$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και για κάποια τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{L}^1(P)$. Αυτή η υπόθεση δεν είναι αναγκαία. Όμως μια ελαφρώς ασθενέστερη συνθήκη είναι αναγκαία και ικανή για την εναλλαγη ορίων και ολοκληρωμάτων. Αυτή η συνθήκη δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Β1 Ορισμός : Έστω (Ω, Σ, P) χώρος πιθανότητας. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\langle X_t \rangle_{t \in I}$ έτσι ώστε $X_t \in \mathcal{L}^1(P)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη (uniformly integrable) αν και μόνο αν

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_{t \in I} \int_{|X_t| > \alpha} {}_t \mid dP = 0.$$

Β2 Πρόταση : Κάθε οικογένεια $\langle X_t \rangle_{t \in I}$ τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα να υπάρχει $X \in \mathcal{L}^1(P)$ ώστε να ισχύει $\mid X_t \mid \leq X$, $\forall t \in I$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Β3 Πρόταση : Μια οικογένεια $\langle X_t \rangle_{t \in I}$ τυχαίων μεταβλητών στον $X \in \mathcal{L}^1(P)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω δυο συνθήκες :

(i) $\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $A \in \Sigma$ να είναι $\sup_{t \in I} \int_A \mid X_t \mid dP \leq \epsilon$ όταν $P(A) \leq u_\epsilon$,

(ii) $\sup_{t \in I} \int \mid X_t \mid dP < \infty$.

Β4 Πρόταση : Μια ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$ τυχαίων μεταβλητών στον $\mathcal{L}^1(P)$ συγκλίνει κατά μέσον στην τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{L}^1(P)$, αν

$$\lim_{n \to \infty} E[\mid X_n - X \mid] = 0.$$

Β5 Ορισμός : Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$

(i) συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην τυχαία μεταβλητή X, αν υπάρχει ένα σύνολο N μηδενικής πιθανότητας ώστε να είναι $\lim_{\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \forall\omega$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο N. Συμβολισμός : $(X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X)$.

(ii) συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X αν για κάθε ϵ ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P[\mid X_n - X \mid \geq \epsilon] = 0$$

Συμβολισμός : $(X_n \xrightarrow{P} X)$.

B6 Πρόταση : Κάθε ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ σχεδόν βέβαια φραγμένων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνουσα σχεδόν βέβαια σε μια σχεδόν φραγμένη τυχαία μεταβλητή, συγκλίνει κατά πιθανότητα στο ίδιο όριο. Αντιστρόφως για κάθε ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ σχεδόν βέβαια φραγμένων τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνουν κατά πιθανότητα υπάρχει μια υποακολουθία που συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο ίδιο όριο.

B7 Πρόταση : Για κάθε ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ τυχαίων μεταβλητών στον $\mathcal{L}^1(P)$ και για κάθε τυχαία μεταβλητή X οι παρακάτω δυο συνθήκες είναι ισοδύναμες :

(i) η $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και $X_n \xrightarrow{P} X$,

(ii) $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} X$.

B8 Πρόταση Vitali : Έστω $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον $\mathcal{L}^p(P)$, $p \in [1, \infty)$ ώστε να είναι $X_n \xrightarrow{P} X$ όπου η X είναι τυχαία μεταβλητή. Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες

(i) η $\langle \mid X_n \mid^p \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int \mid X_n \mid^p dP = \int \mid X \mid^p dP$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Επισκόπηση Της Θεωρίας Των Martingales.

Θα δώσουμε εν συντομία βασικούς ορισμούς και βασικά αποτελέσματα (χωρίς αποδείξεις) σε θέματα που αφορόυν τα martingale και που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία.

Γ1 Ορισμός : Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τ.μ. X ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$E_B[X] := E[X|B] := \int_B X dP_B$$

και (εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται **η δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθέντος του (ενδεχομένου) B.**

Γ2 Θεώρημα : Έστω $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ μια (Σ-μετρήσιμη) διαμέριση του Ω, τέτοια ώστε $P(B_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$.

(ii) Αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε $EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) E[X|B_n]$.

(iii) $E[\chi_A|B] = P(A|B)$ για κάθε $A \in \Sigma$.

(iv) $P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) P(A|B_n)$ για κάθε $A \in \Sigma$ (*Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας*).

Γ3 Ορισμός : Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και διακριτή τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $R_Y := \{y_n \in \mathbb{R} : n \in I, I \subseteq \mathbb{N}\}$.
Η **δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.)** X **δοθείσης της (τ.μ.)** Y είναι μια τ.μ. $E[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ με τύπο $(E[X|Y])(\omega) := E[X|Y = y_n]$ αν $y_n = Y(\omega)$ για $y_n \in R_Y$.

Γ4 Ορισμός : Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και μια *οποιαδήποτε* τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε μια δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθείσης της (τ.μ.) Y ορίζεται να είναι μια τ.μ. $E[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) η $E[X|Y]$ είναι μια $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|Y]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in \sigma(Y)$.

Γ5 Ορισμός : Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και T σ-υποάλγεβρα της Σ. Τότε μια δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθείσης της σ-υποάλγεβρας T ορίζεται να είναι μια τ.μ. $E[X|T] : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) η $E[X|T]$ να είναι μια T-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|T]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in T$.

Γ6 Πρόταση : Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^1(P)$, T σ-υποάλγεβρα της Σ και ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{L}^1(P)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad E[aX + bY|T] = aE[X|T] + bE[Y|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*γραμμικότητα*),

(ii) $E[E[X|T]] = EX$,

(iii) αν η X είναι T-μετρήσιμη, τότε $E[XY|T] = XE[Y|T] \quad P|T-\sigma.\beta.$ (*«παίρνοντας έξω από την δέσμευση ότι είναι γνωστό» - "taking out what's known"*),

(iv) αν η X ανεξάρτητη της T, τότε $E[X|T] = EX \quad P|T - \sigma.\beta.$,
(*ανεξαρτησία*)

(v) αν $H \subseteq T$ σ-υποάλγεβρα της Σ, τότε $E\big[E[X|T]\,\big|\,H\big] = E[X|H] \quad P|H - \sigma.\beta.$, χωρίς κατ'ανάγκη η X να είναι T-μετρήσιμη (*Ιδιότητα του Πύργου*),

(vi) αν $X \geq 0 \quad P - \sigma.\beta.$, τότε και $E[X|T] \geq 0 \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*θετικότητα*),

(vii) αν $Y \geq X \quad P - \sigma.\beta.$, τότε και $E[Y|T] \geq E[X|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$
(*μονοτονία δεσμευμένων μέσων τιμών*),

(viii) αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $P - \sigma.\beta.$ και $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, τότε και η $\{E[X_n|T]\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $P|T-\sigma.\beta.$ κι επί πλέον ισχύει $E[X|T] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T-\sigma.\beta.$
(*Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(ix) αν $X = \lim_{n\to\infty} X_n \quad P - \sigma.\beta.$ και υπάρχει $Z \in \mathcal{L}^1(P)$ ώστε $|X_n| \leq Z \ P - \sigma.\beta.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $E[X|T] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(x) αν $\liminf_{n\to\infty} EX_n < \infty$, τότε $E\Big[\liminf_{n\to\infty} X_n|T\Big] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*Λήμμα Fatou για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(xi) αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\varphi \circ X \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε

$$\varphi(E[X|T]) \leq E[\varphi(X)|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$$

(*Δεσμευμένη Ανισότητα Jensen*).

Στο εξής – κι εφόσον δεν αναφέρεται διαφορετικά – με I θα συμβολίζουμε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Γ7 Ορισμός : Μία οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** αν και μόνο αν για κάθε $j,k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Γ8 Ορισμός : Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j-μετρήσιμη.

Γ9 Ορισμός : Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma\big(\{X_k : k \leq j\}\big)$ για κάθε $j \in I$ ονομάζεται **η κανονική διύλιση για την** $\{X_j\}_{j\in I}$.

Γ10 Πρόταση : Κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση.

Γ11 Ορισμός : Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-martingale** (ή η οικογένεια $\{(X_j,\Sigma_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$.

(ii) Για κάθε $j \in I$ η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$.

(iii) Για κάθε $j,k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $E[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P|\Sigma_j - \sigma.\beta.$.

Γ12 Ορισμός : Μια $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα υπερ - martingale** (αντ. **υπο - martingale**) **ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή αλλιώς **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-υπερ-martingale** (αντ. **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-υπο-martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα (i) και (ii) του Ορισμού **;;** και επί πλέον για κάθε $j,k\in I$ με $j\leq k$ ισχύει $E[X_k|\Sigma_j]\leq X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$ (αντ. $E[X_k|\Sigma_j]\geq X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$).

Γ13 Πρόταση : Έστω η $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j\in I}$ και η διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$. Τότε για κάθε $j,k\in I$ με $j\leq k$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $E[X_k|\Sigma_j]=X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$.

(ii) $\int_A X_j dP=\int_A X_k dP$ για κάθε $A\in\Sigma_j$.

Γ14 Πρόταση : Αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-υπερ-martingale (αντ. υπο-martingale), τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$E[X_n|\Sigma_1]\leq X_1 \quad (\text{αντ.}\quad E[X_n|\Sigma_1]\geq X_1)\quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta..$$

Ιδιαιτέρως, αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, τότε η $E[X_n|\Sigma_1]=X_1 \quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta.$.

Παρακάτω και για την παρούσα ενότητα, θεωρούμε μια ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{L}^1(P)$ με κανονική διύλιση $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Γ15 Ορισμός : Η συνάρτηση $\tau:\Omega\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ είναι ένας **χρόνος διακοπής** για την $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν $\{\tau=n\}\in\Sigma_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επί πλέον, ο χρόνος διακοπής ονομάζεται **φραγμένος** αν και μόνο αν $\sup_{\omega\in\Omega}\tau(\omega)<\infty$. Το σύνολο όλων των φραγμένων χρόνων διακοπής συμβολίζεται με $\mathscr{T}$.

Γ16 Πρόταση : Για την συνάρτηση $\tau:\Omega\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\{\tau\leq n\}\in\Sigma_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

(ii) $\{\tau=n\}\in\Sigma_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Γ17 Πρόταση : Κάθε χρόνος διακοπής τ ως προς μια διύλιση $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Σ_n-μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, συνεπώς είναι Σ-μετρήσιμη συνάρτηση, δηλαδή τ.μ..

Γ18 Πρόταση : Για $\tau \in \mathscr{T}$ θέτουμε $Z_\tau := \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} Z_n$. Ισχύουν τα εξής:

(i) $|Z_\tau| = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} |Z_n|$.

(ii) $EZ_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP$.

Γ19 Πρόταση : Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E|Z_\tau|.$$

Γ20 Ορισμός : Η ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. είναι

(i) **θετική** αν και μόνο αν ισχύει ότι η Z_n είναι θετική τ.μ. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $Z_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) **ένα θετικό υπερ-martingale** αν και μόνο αν είναι θετική και υπερ-martingale.

Γ21 Πρόταση : Αν $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα θετικό υπερ - martingale, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} EZ_0.$$

Γ22 Πρόταση : Αν $\langle X_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών στο $\mathcal{L}^1(P)$ με ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε η στοχαστική διαδικασία $\langle Y_t - E_P[Y_t] \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.

Γ23 Πρόταση (Σύγκλιση του Doob για Martingales) : Αν $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ ένα $\langle \Sigma_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^*}$ – martingale, ώστε $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} E(\mid X_n \mid) < \infty$. τότε υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $X \in \mathcal{L}^1(P)$, ώστε

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \; P \; - \; \sigma.\beta..$$

Γ24 Παρατήρηση : Παρά το ότι όλες οι τυχαίες μεταβλητές X_n όπως επίσης και η τυχαία μεταβλητή X του προηγούμενου Θεωρήματος είναι ολοκληρώσιμες, το συμπέρασμα είναι μόνο ότι $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P $\sigma.\beta.$.

Γ25 Πρόταση : Κάθε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο ύπερ - martingale (ή υπο - martingale) συγκλίνει στον $\mathcal{L}^1(P)$.

Γ26 Ορισμός : Η προβλέψιμη (predictable) σ-άλγεβρα είναι η σ-άλγεβρα στο $\Omega \times \mathbb{R}_+$ που παράγεται από όλες τις αριστερά συνεχείς προσαρμοσμένες στην κανονική διύλιση (θεωρημένες ως απεικονίσεις επάνω στο $\Omega \times \mathbb{R}_+$).

Μια στοχαστική διαδικασία που είναι P -μετρήσιμη ονομάζεται προβλέψιμη.

Γ27 Ορισμός : Η προβλέψιμη σ-άλγεβρα παράγεται επίσης και από την οικογένεια $A \setminus \{0\}$ όπου $A \in \Sigma_0$ και $A \times (s,t]$ όπου $s < t$ με $A \in \Sigma_s$.

Γ28 Ορισμός : Μια στοχαστική διαδικασία X είναι κλάσης (D) αν η οικογένεια $\{X_T \ : \ T : \Omega \mapsto \mathbb{R}^*$ χρόνος διακοπής$\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Η παρακάτω Πρόταση οφείλεται στον Meyer και είναι γνωστή με το όνομα Διαμέριση υπο - martingales κατά Doob - Meyer (Doob Meyer Decomposition Of Submartingales).

Γ29 Πρόταση :(*Doob Meyer Decomposition of Sub-Martingales*) : Αν η X είναι έαν υπο - martingale της τάξης (D), τότε υπάρχει μια σχεδόν βέβαια μοναδική, αύξουσα, ολοκληρώσιμη, προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία A με $A_0 = 0$, έτσι ώστε το $X \setminus A$ να είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale.

Ένα υποσύνολο A του $\Omega \times \mathbb{R}^*$ ονομάζεται τμηματικά μηδενικό (section-null) αν το σύνολο $\{\omega \ : \ \exists t \in \mathbb{R}^*$ με$(\omega, t)\}$ είναι P - μηδενικό.

Δυο στοχαστικές διαδικασίες X και Y ονομάζονται indistinguishable αν το σύνολο

$$\{X \neq Y\} := \{(\omega, t) \ : \ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

είναι τμηματικά μηδενικό, δηλαδή αν P - σχεδόν όλες οι τροχιές των X και Y είναι ίδιες.

Γ30 Πρόταση (*Σύγκλιση Ομοιόμορφα Ολοκληρώσιμων Υπο - martingales*) : Έστω $X = \langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ένα υπο - martingale επάνω στον φιλτραρισμένο χώρο $(\Omega, \Sigma, P, \langle \Sigma_n \rangle_{n\in\mathbb{N}})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ υπάρχει σχεδόν βέβαια, $X_\infty \in \mathcal{L}^1(P)$, $\lim_{n\to\infty} \int X_n dP = \int X_\infty dP$ και η ακολουθία $X = \langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}\cup\infty}$ είναι ένα υπο - martingale.

(ii) η $X = \langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(iii) η $X = \langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^1(P)$.

Γ30 Πρόταση (*Optional Sampling Theorem*) : Έστω $M = \langle M_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ martingale και σ, τ φραγμένοι χρόνοι διακοπής με $\sigma \leq \tau$. Τοτε οι συναρτήσεις M_σ, M_τ είναι P - ολοκληρώσιμες και ισχύει

$$E[M_\tau \mid \Sigma_\sigma] = M_\sigma \quad \sigma.\beta..$$

Βιβλιογραφία

[1] R.G.Bartle. Elements Of Real Analysis. (Wiley. New York. 1964).

[2] J.A.Beekman. Two Stochastic Processes. (Halsted Press. New York. 1974).

[3] Billingsley. Convergence Of Probability Measures.(Wiley. New York. 1968).

[4] Bohman. Risk Theory And Wiener Processes. Astin Bulletin 7. (1972) 96-99.

[5] Breiman. Probability (Addison-Wesley. Reading. MA. 1968).

[6] H.Cramer. Collective Risk Theory : A Survey Of The Theory From The Point Of View Of The Theory Of Stochastic Processes. Forsakringsaktiebolaget Skandia. 1985-1955. Esselta. Centraltryckeriet. Stockholm (1955).

[7] Dassios. A And P.Embrechts (1987). Martingales And Insurance Risk. Forthcoming.

[8] A.Davidson. On The Ruin Problem In The Collective Theory Of Risk Under The Assumption Of Variable Safety Loading. Skand. Aktuar. Tidskrf. Suppl. (1969) 70-83.

[9] Delbean F. And J.Haezendonck (1985). Inversed Martingales In Risk Theory. Insurance. Mathematics And Economics 4. 201-206.

[10] Delbean F. And J.Haezendonck (1986). Martingales In Markov Processes Applied To Risk Theory. Insurance Mathematics And Economics 5. 201-216.

[11] Delbean F. And J.Haezendonck (1987). Classical Risk Theory In An Economic Environment. Insurance, Matheamtics and Economics 8 (1987).

[12] D.C.Emanuel. J.M.Harrison and A.J.Taylor. A Diffusion Approximation For The Ruin Function Of A Risk Process With Compounding Assets. Scand. Aktuarial J. 58 (1975) 240 - 247.

[13] W.Feller. An Introduction To Probability Theory And Its Applications. Volume II (Second Edition) (Wiley. New York. 1966).

[14] H.Gerber. The Discounted Central Limit Theorem And Its Berry-Esseen Analogue. Ann. Math. Stat. 42 (1971) 389-392.

[15] H.Gerber. Games Of Economic Survival With Discrete And Continuous-Income Processes. Ops Rsch. 20 (1972) 37-45.

[16] Gerber H.U. (1973). Martingales In Risk Theory. Mitleinungen Der Vereinigung Schweizerischer Versicherung Mathematiker 73. 205 - 216.

[17] H.U. Gerber. (1979). An Introduction To Mathematical Risk Theory. Huebner Foundation Monograph. Distributed By Irwin Hornerwood I.L..

[18] I.I.Gikhman and A.V.Skorohod. Introduction To The Theory Of Random Processes (Saunders. Philadelphia. 1969).

[19] B.V.Gnedenko. Theory Of Probability (Fourth Edition) (Chelsea. New York. 1962).

[20] Goovaerts M.J.F. De Vylder And J.Haezendonck (1984). Insurance Premiums. Theory And Applications. North-Holland. Amsterdam.

[21] J.Grandel. A Remark On Wiener Process Approximation On Risk Processes. Astin Bulletin. 7 (1972) 100-101.

[22] Harrison J.M.. (1977) Ruin Problems With Compounding Assets. Stochastic Processes And Its Applications. 65-79.

[23] G.A.Hunt. Some Theorems Concerning Brownian Motion. Trans. Amer. Math. Soc. 81. (1956) 294-319.

[24] D.L.Iglehart. Diffusion Approximations In Collective Risk Theory. J.Appl.Prob. 6 (1969) 285-292.

[25] Kahane Y.. (1979). The Theory Of Insurance Risk Premiums. A Reexamination In The Light Of Recent Developments In Capital Markets Theory. The Astin Bulletin 10. 223-239.

[26] J.Jung. A Note In A Classical Result In The Collective Risk Theory. Scand. Aktuar. Tidskr. 61 (1973) 000-000.

[27] P.A.Meyer. Probability And Potentials (Blaisdell. Waltham. MA. 1966).

[28] Morriconi F.. (1983). Martingales Applicate Alla Theorie Del Rischio : Processi Di Guadango A Submartingale A Aggiustabilita. Rev. Mat. Appl. Sc. Econ. Soc 6. 57-65.

[29] Morriconi F.. (1985). Ruin Theorie Under The Submartingale Assumption. Proceedings Of The 2nd NATO A.S.I. On Insurance And Risk Theorie. Reidel. Dordrecht. 177-188.

[30] Morriconi F.. (1986). The Submartingale Assumption In Risk Theory. Insurance Mathematics And Economics 5 No 4. 295 - 304.

[31] Neveau J.. (1964). Bases Mathematiques Du Calcul Des Probabilites. Masson Et Cie. Paris.

[32] C.Philipson. A Review Of The Collective Theory Risk. Paris I and II. Skand. Aktuar. Tidsk. 51 (1968) 45-68. 117-133.

[33] C.P.Segerdahl. Uber Einige Risikotheoretische Fragenstellungen. Scand. Actuar. Tidskr. 25 (1942) 43-83.

[34] C.P.Segerdahl. A Survey Of Results In The Collective Theory Of Risk In Probability And Statistics Edited By U.Grenader (Wiley. New York. 1959 pp 276-299.

[35] A.V.Skorohod. Studies In The Theory Of Random Processes (Addison - Wesley. Reading M.A. 1965).

[36] Taylor G.C.. (1979) Probability Of Ruin Under Inflationary Conditions Or Under Experience Rating. The Astin Bulletin 16. 149-162.

[37] W.Whitt. Stochastic Abelian And Tauberian Theorems. Z.Wahr. Verw. Geb. 22 (1972) 251-267.