

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ  
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ**

**Ορέστης Π. Ντόμης**

*Διπλωματική Εργασία*

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Απρίλιος 2011



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ  
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ**

**Ορέστης Π. Ντόμης**

*Διπλωματική Εργασία*

*που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική*

*Πειραιάς  
Απρίλιος 2011*

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κούτρας Μάρκος, Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μπούτσικας Μιχαήλ, Επίκουρος Καθηγητής
- Μαραβελάκης Πέτρος, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**TWO DIMENSIONAL  
RELIABILITY SYSTEMS**

By

**Orestis P. Ntomis**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics

Piraeus, Greece  
April 2011



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

*Στους γονείς μου  
Πάλο και Βενετία*

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για την στήριξη και συμπαράσταση που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κούτρα Μάρκο, για την συνεργασία που είχαμε αλλά και για τις σημαντικές του παρατηρήσεις, οι οποίες βοήθησαν πραγματικά στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας, όπως και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Μπούτσικα Μιχαήλ, Μαραβελάκη Πέτρο, για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας.



## Περίληψη

Τα δισδιάστατα συστήματα αξιοπιστίας βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές τόσο στη θεωρία αξιοπιστίας όσο και σε άλλες επιστήμες (επιτήρηση χώρων, παρακολούθηση εξάπλωσης ασθενειών, οικολογικές μελέτες κ.α.). Τέτοια συστήματα δημιουργούνται με την τοποθέτηση μονάδων σε κάποια ορθογώνια διάταξη και υποθέτοντας ότι η λειτουργία ή αποτυχία του συστήματος καθορίζεται από την κατάσταση των μονάδων σε υποπεριοχές του χώρου όπου έχουν τοποθετηθεί οι μονάδες. Η θεωρητική μελέτη τέτοιων συστημάτων δεν είναι εύκολη, γι' αυτό το ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί κυρίως στην ανάπτυξη προσεγγιστικών τύπων, φραγμάτων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μια συστηματική παρουσίαση των διάφορων παραλλαγών δισδιάστατων συστημάτων που έχουν εμφανισθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, θα παρουσιασθούν προγράμματα για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας τους με μεθόδους προσομοίωσης και θα εξετασθεί η αποτελεσματικότητα των προσεγγίσεων, φραγμάτων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων για εκείνα τα συστήματα που έχουν προταθεί τέτοια αποτελέσματα.

## **Abstract**

Two-dimensional reliability systems are used in interesting applications of reliability theory as well as other sciences such as space monitoring, disease propagation, ecological studies etc. Such systems are created by placing units in a rectangular arrangement and assuming that the operation of the system is determined by the status of the components in specific areas. The exact reliability formula of such systems is quite complicated, therefore our presentation will be focused mostly in the presentation of approximating formulas, bounds and asymptotic results.

This dissertation provides a systematic bibliographic review of several two-dimensional systems, offers algorithms for calculating the reliability for selected structures using simulation, and examines the effectiveness of the approximations, bounds and asymptotic results that have appeared in the literature for these systems.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	
<i>Abstract</i>	
Κατάλογος Πινάκων	xiii
Κατάλογος Σχημάτων	xiv
Κατάλογος Συντομογραφιών	xvii
Εισαγωγή	<b>1</b>
<b>1. Θεωρία Αξιοπιστίας</b>	<b>4</b>
<b>1.1</b> Συστήματα Αξιοπιστίας	5
<b>1.2</b> Συνάρτηση Δομής	6
<b>1.3</b> Παραδείγματα Συστημάτων Αξιοπιστίας	7
<b>1.4</b> Μονότονα Συστήματα Αξιοπιστίας	11
<b>1.5</b> Ελάχιστα Σύνολα Λειτουργίας και Διακοπής	12
<b>1.6</b> Εύρεση της Συνάρτησης Δομής με Χρήση των ε.σ.λ. και ε.σ.δ.	16
<b>1.7</b> Ανάλυση Συστημάτων σε Modules	20
<b>1.8</b> Το Δυϊκό Σύστημα	25
<b>1.9</b> Η Συνάρτηση Αξιοπιστίας και Υπολογισμός της Μέσω της Συνάρτησης Δομής	28
<b>1.10</b> Υπολογισμός Αξιοπιστίας Μέσω της Διάσπασης σε <i>Modules</i>	34
<b>1.11</b> Υπολογισμός Αξιοπιστίας με Χρήση της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού	35
<b>1.12</b> Υπολογισμός Αξιοπιστίας Μέσω Αναδρομικών Σχέσεων	38
<b>1.13</b> Η μέθοδος Αθροίσματος Ξένων Γινομένων	38
<b>1.14</b> Συστήματα Εμφυτευμένα σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες	44
<b>1.15</b> Μετασχηματισμοί Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα	50
<b>1.16</b> Φράγματα Αξιοπιστίας	59
<b>1.17</b> Μελέτη Συνεχόμενων Συστημάτων $k$ -από-τα- $n:F$	63
<b>2. Δισδιάστατα συστήματα αξιοπιστίας και παραλλαγές</b>	<b>69</b>
<b>2.1</b> Η γενική περίπτωση	69
<b>2.2</b> Το γραμμικό $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	71
<b>2.3</b> Το κυλινδρικό (ή κυκλικό) $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	73
<b>2.4</b> Το σύστημα $(r,s)$ -ή- $(s,r)$ -από-τα- $(m,n):F$	74
<b>2.5</b> Τα συστήματα $(r_1,s_1)$ -ή- $(r_2,s_2)$ -από-τα- $(m,n):F$ και $(r_1,s_1)$ -ή- $(r_2,s_2)$ - ή-...-ή- $(r_k,s_k)$ -από-τα- $(m,n):F$	75

2.6	Το $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων-δισδιάστατων- $r$ -από-τα- $n:F$ σύστημα	75
2.7	Το $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων-δισδιάστατων- $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	76
2.8	Το $m$ -συνεχόμενα- $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	76
2.9	Συνδυασμός συστημάτων $k$ -από-τα- $n:F$ , συνεχόμενο $k_C$ -από-τα- $n:F$ και γραμμικό συνεχόμενο $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$	77
2.10	Συστήματα αξιοπιστίας αυθαίρετων δομών	78
<b>3. Υπολογισμός αξιοπιστίας δισδιάστατων συστημάτων</b>		<b>81</b>
3.1	Παραδείγματα υπολογισμού αξιοπιστίας απλών δισδιάστατων συστημάτων	81
3.2	Ο αλγόριθμος <i>Yamamoto-Miyakawa</i>	89
3.3	Αλγόριθμοι για το κυκλικό συνεχόμενο $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	93
3.4	Οι αλγόριθμοι των <i>Zuo, Lin &amp; Wu</i>	109
3.5	Ο αλγόριθμος <i>Lin-Zuo</i> για το γραμμικό $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r,s)$ - από-τα- $(m,n): F$ σύστημα	114
3.6	Ο αλγόριθμος των <i>Akiba-Yamamoto</i> για το (γραμμικό ή κυκλικό) $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r,s)$ - από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	118
3.7	Ο αλγόριθμος του <i>Yamamoto</i> για το σύστημα $(r_1,s_1)$ -ή- $(r_2,s_2)$ - ή-...-ή- $(r_k,s_k)$ - από-τα- $(m,n):F$	125
3.8	Ένας αλγόριθμος για το σύστημα $(1,2)$ -από-τα- $(2,1):F$	135
3.9	Υπολογισμός αξιοπιστίας μέσω <i>Μαρκοβιανών Αλυσίδων</i>	143
3.10	Υπολογισμός αξιοπιστίας μέσω <i>Προσομοίωσης</i>	151
<b>4. Φράγματα αξιοπιστίας και οριακά θεωρήματα</b>		<b>155</b>
4.1	Φράγματα αξιοπιστίας δισδιάστατων συστημάτων	155
4.2	Σύγκριση φραγμάτων αξιοπιστίας	168
4.3	Οριακά θεωρήματα	176
<b>Παράρτημα</b>		<b>179</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>		<b>181</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.5.1	Δομή που περιγράφεται από καταστάσεις μονάδων	15
3.2.1	Κάτω φράγματα, δισδιάστατο 2-από-τα-5: $F$ σύστημα	170
3.2.2	Κάτω φράγματα, δισδιάστατο 3-από-τα-10: $F$ σύστημα	171
3.2.3	Κάτω φράγματα, δισδιάστατο 4-από-τα-50: $F$ σύστημα	172
3.2.4	Άνω φράγματα, δισδιάστατο 2-από-τα-5: $F$ σύστημα	173
3.2.5	Άνω φράγματα, δισδιάστατο 3-από-τα-10: $F$ σύστημα	174
3.2.6	Άνω φράγματα, δισδιάστατο 4-από-τα-50: $F$ σύστημα	175

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1.1	Σύστημα αξιοπιστίας	5
1.3.1	Σειριακό σύστημα	7
1.3.2	Παράλληλα συστήματα	7
1.3.3	Σύστημα γέφυρας	8
1.3.4	Σύστημα $k$ -από-τα- $n$ : $G$	8
1.3.5	Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $n$	9
1.3.6	Σύστημα κυκλικό συνεχόμενο $k$ -από-τα- $n$ : $F$	10
1.3.7	Σύστημα διπλής γέφυρας	10
1.3.8	Παραλλαγή συστήματος γέφυρας	11
1.3.9	Παραλλαγή συστήματος γέφυρας	11
1.5.1	Σύστημα αποτελούμενο από τρεις μονάδες	14
1.6.1	Αναπαράσταση συστήματος γέφυρας μέσω ε.σ.λ.	20
1.6.2	Αναπαράσταση συστήματος γέφυρας μέσω ε.σ.δ.	20
1.6.3	Αναπαράσταση συστήματος 2-από-τα-5: $G$ μέσω ε.σ.λ.	20
1.7.1	Σειριακό-Παράλληλο σύστημα	21
1.7.2	Παράλληλο-Σειριακό σύστημα	22
1.7.3	Σύστημα αξιοπιστίας αποτελούμενο από επτά μονάδες	22
1.7.4	Αναπαράσταση συστήματος αποτελούμενου από επτά μονάδες, μέσω modules	23
1.7.5	Σύστημα αποτελούμενο από τρεις μονάδες	23
1.7.6	Σύστημα αποτελούμενο από έξι μονάδες	25
1.7.7	Σύστημα αποτελούμενο από έξι μονάδες	25
1.8.1	Σύστημα αποτελούμενο από έξι μονάδες	26
1.8.2	Δυϊκό σύστημα του προηγούμενου	27
1.15.1	Δομές αστεριού και δέλτα	50
1.15.2	Σύστημα γέφυρας μετά τον μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι	53
1.15.3	Σύστημα αξιοπιστίας επτά μονάδων πριν τον μετασχηματισμό Αστέρι-Δέλτα	54

1.15.4	Σύστημα αξιοπιστίας επτά μονάδων μετά τον μετασχηματισμό Αστέρι-Δέλτα	55
1.15.5	Σύστημα αξιοπιστίας διπλής γέφυρας	56
1.15.6	Σύστημα διπλής γέφυρας μετά από μετασχηματισμούς Δέλτα-Αστέρι	57
1.15.7	Αναγωγή συστήματος διπλής γέφυρας σε παράλληλα συστήματα, μετά από μετασχηματισμούς Δέλτα-Αστέρι	58
2.1.1	Αυθαίρετη Δομή	70
2.1.2	Τετράγωνο σύστημα παρακολούθησης πλευράς $\sqrt{2}r$	70
2.1.3	Συνθήκες λειτουργίας τετράγωνου συστήματος παρακολούθησης πλευράς $\sqrt{2}r$	71
2.1.4	Συνθήκες αποτυχίας τετράγωνου συστήματος παρακολούθησης πλευράς $\sqrt{2}r$	71
2.2.1	Γραμμικό $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	72
2.2.2	Παράδειγμα λειτουργίας και αποτυχίας γραμμικού $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	73
2.3.1	Κυλινδρικό και κυκλικό $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	73
2.4.1	Σύστημα παρακολούθησης πλευράς $3r$	74
2.4.2	Παράδειγμα αποτυχίας γραμμικού $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	75
2.4.3	Παράδειγμα λειτουργίας γραμμικού $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	75
2.9.1	Ταξινόμηση σωλήνων σε κάθε καμίνι	77
2.10.1	Η δομή του διαμαντιού	79
2.10.2	Συνθήκη αποτυχίας δομής διαμαντιού για $m=n=5$	79
2.10.3	Η δομή του ρόμβου	79
2.10.4	Συνθήκη αποτυχίας δομής ρόμβου για $m=n=5$	80
3.1.1	Κυκλικό συνεχόμενο σύστημα 2-από-τα-4: $F$	86
3.1.2	Ενδεχόμενο αποτυχίας μονάδας $(2,1)$	87
3.1.3	Κυκλικό συνεχόμενο $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(3,2):F$ σύστημα	88
3.1.4	Κυκλικό συνεχόμενο $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(2,3):F$ σύστημα	88
3.1.5	Καταστάσεις λειτουργίας κυκλικού συνεχόμενου $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(2,3):F$ συστήματος με δύο μονάδες που έχουν αποτύχει	88
3.3.1	Καταστάσεις μονάδων του κυκλικού 2-από-τα-4: $F$ συστήματος	94

3.3.2	Παραδείγματα διανυσμάτων $\delta$	95
3.3.3	$R_C(i;3,1,3,2)$	96
3.3.4	Διάταξη των $\delta_i$	97
3.3.5	Παράδειγμα $H_0(s;t,u)$	98
3.3.6	Παράδειγμα $H_1(s;t,u)$	99
3.3.7	Αποτυχία κυκλικού $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	102
3.3.8	Ειδικό γραμμικό συνεχόμενο $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ σύστημα	103
3.3.9	Παράδειγμα $R(j;H;G)$	104
3.3.10	Υποχρεωτική λειτουργία μονάδας	108
3.6.1	Παράδειγμα $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r,s)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	119
3.6.2	Αριθμός των μονάδων που έχουν αποτύχει σε έναν $g \times s$ πίνακα	120
3.8.1	Αποτυχία γραμμικού συνεχόμενου $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m,n):F$ συστήματος	135
3.8.2	Ενδεχόμενα αποτυχίας με βάση γειτονικές μονάδες	136
3.8.3	Παράδειγμα $\Omega(i,y)$	137
3.8.4	Δενδρόγραμμα για $m=3$ και $y=(0,0,0)$	139
3.8.5	Δενδρόγραμμα για $m=3$ και $y=(0,1,0)$	139
3.8.6	Μη πραγματοποίηση δέντρου αναζήτησης	140



# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

$x_i$	Δείκτρια συνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση της μονάδας $i$
$\mathbf{x}$	Διάνυσμα κατάστασης
$\varphi(\mathbf{x})$	Συνάρτηση δομής που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{x}$
ε.σ.δ.(ε.σ.λ.)	Ελάχιστα σύνολα διακοπής (λειτουργίας)
ε.δ.δ.(ε.δ.λ.)	Ελάχιστα διανύσματα διακοπής (λειτουργίας)
<i>i.i.d.</i>	<i>identically, independently distributed</i>
$C_j$	Ελάχιστο σύνολο διακοπής $j$
$P_j$	Ελάχιστο σύνολο λειτουργίας $j$
$\mathcal{C}$	Σύνολο των ε.σ.δ. ενός συστήματος
$\mathcal{P}$	Σύνολο των ε.σ.λ. ενός συστήματος
$S(k,n: F/G)$	Σύστημα γραμμικό $k$ -από-τα- $n: F/G$
$C(k,n: F/G)$	Σύστημα γραμμικό συνεχόμενο- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$C_L(k,n: F/G)$	Σύστημα γραμμικό συνεχόμενο- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$C_C(k,n: F/G)$	Σύστημα κυκλικό συνεχόμενο- $k$ -από-τα- $n: F/G$
$\gamma_j$	Συνάρτηση δομής του $j$ ε.σ.λ.
$\delta_j$	Συνάρτηση δομής του $j$ ε.σ.δ.
$\mathbf{I}_n$	Σύνολο μονάδων ενός συστήματος
$\phi^D(\mathbf{x})$	Συνάρτηση δομής του δυϊκού συστήματος
$\mathbf{M}_i$	Υποσύνολο του $\mathbf{I}_n$
$\mathbf{x}^{M_i}$	Διάνυσμα με συντεταγμένες τις δείκτριες των μονάδων που ανήκουν στο $\mathbf{M}_i$
$\varphi_{SS}$	Συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος
$\varphi_{PS}$	Συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος
$R$	Αξιοπιστία ενός συστήματος
$X_i$	Η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τη κατάσταση της $i$ μονάδος
$\mathbf{X}$	Τυχαίο διάνυσμα καταστάσεων όλων των μονάδων

$p_i$	Αξιοπιστία της $i$ μονάδας
$q_i$	Αναξιοπιστία της $i$ μονάδος ( $1-p_i$ )
$p, q$	Διάνυσμα αξιοπιστίας (αναξιοπιστίας) των μονάδων
$p, q$	Αξιοπιστία (αναξιοπιστία) μονάδων, στην περίπτωση <i>i.i.d.</i>
$R(p)$	Αξιοπιστία ενός συστήματος, συναρτήσει του διανύσματος $p$
$R^D$	Αξιοπιστία δυϊκού συστήματος
$IE$	Μέθοδος εγκλεισμού-αποκλεισμού
$SDP$	<i>Sum of Disjoint Products</i>
$\bar{x}_i$	Συμπληρωματικό ενδεχόμενο του $x_i$
$T_i$	Το ενδεχόμενο όπως η μονάδα $i$ λειτουργεί είναι αληθές
$F_i$	Το ενδεχόμενο όπως η μονάδα $i$ λειτουργεί δεν είναι αληθές
$S(1,2,\dots,n)$	Το ενδεχόμενο όπως το σύστημα με μονάδες $(1,2,\dots,n)$ λειτουργεί
$\bar{S}(1,2,\dots,n)$	Το ενδεχόμενο όπως το σύστημα με μονάδες $(1,2,\dots,n)$ δεν λειτουργεί
$S_{SS}$	Λογική συνάρτηση του σειριακού συστήματος
$S_{PS}$	Λογική συνάρτηση του παράλληλου συστήματος
$MP_i$	Το ελάχιστο σύνολο λειτουργίας $i$
$MC_j$	Το ελάχιστο σύνολο διακοπής $j$
$S(k, n: G/F)$	Σύστημα $k$ -από-τα- $n$ : $G/F$
$MIS$	<i>Markov Chain Imbeddable System</i>
$A_t$	Πίνακας μετάβασης
$s_N$	Κατάσταση απορρόφησης
$R_n(F_n)$	Αξιοπιστία (αναξιοπιστία) $MIS$ συστήματος
$R(k,n; F/G)$	Αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου $k$ -από-τα- $n$ : $F/G$ συστήματος
$R(k,n)$	Αξιοπιστία του συνεχόμενου $k$ -από-τα- $n$ : $F$ συστήματος
$R(k,r,n)$	Αξιοπιστία του γραμμικού $k$ -από-τα- $r$ -από-τα- $n$ : $F$ συστήματος
$R_L(2,r,n)/R_C(2,r,n)$	Αξιοπιστία του γραμμικού/κυκλικού 2-από-τα- $r$ -από-τα- $n$ : $F$ συστήματος
$ A $	Πλήθος στοιχείων του συνόλου $A$
$[A]$	Ακέραιο μέρος του αριθμού $A$
$k^2/n^2:F$	Δισδιάστατο συνεχόμενο $k$ -από-τα- $n$ : $F$ σύστημα
$rs/mn:F, (r,s)/(m,n):F$	Γραμμικό $(r,s)$ -από-τα- $(m,n)$ : $F$ σύστημα
$R_L(k,n), R_C(k,n)$	Αξιοπιστία του γραμμικού, κυκλικού συνεχόμενου $k$ -από-τα- $n$ : $F$

$R_L(k,n;p), R_C(k,n;p)$	συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες με αξιοπιστία $p$
$P_L(k,n), P_C(k,n)$	Πιθανότητα αποτυχίας του γραμμικού, κυκλικού συνεχόμενου $k$ -από- $n$ : $F$ συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες
$R_L(k,n);[p_i],$ $R_C(k,n);[p_i]$	Αξιοπιστία του γραμμικού, κυκλικού συνεχόμενου $k$ -από- $n$ : $F$ συστήματος με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες
$R_L((r,s),(m,n)),$ $R_L((r,s),(m,n);[p]),$	Αξιοπιστία του γραμμικού $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,n$ ): $F$ συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες με αξιοπιστία $p$
$R_C((r,s),(m,n)),$ $R_C((r,s),(m,n);[p]),$	Αξιοπιστία του κυκλικού $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,n$ ): $F$ συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες με αξιοπιστία $p$
$R_L((r,s),(m,n);[p_{ij}],$ $R_C((r,s),(m,n);[p_{ij}])$	Αξιοπιστία του γραμμικού, κυκλικού $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,n$ ): $F$ συστήματος με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες
$R_L((1,2)\text{-}\acute{\eta}\text{-}(2,1),(m,n)),$ $R_L((1,2)\text{-}\acute{\eta}\text{-}(2,1),(m,n);[p]),$	Αξιοπιστία του γραμμικού $(1,2)\text{-}\acute{\eta}\text{-}(2,1)$ -από- $n$ -( $m,n$ ): $F$ συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες με αξιοπιστία $p$
$YM$	<i>Yamamoto-Miyakawa</i>
$R_L((r,s),(m,j);h_i;[p_{ij}])$	Αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,j$ ): $F$ συστήματος με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες, επαυξημένοι με τα πλέγματα αποτυχίας $r \times h_i$
$R_L((r,s),(m,j);h_i;[p])$	Αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,j$ ): $F$ συστήματος με <i>i.i.d.</i> μονάδες με αξιοπιστία $p$ , επαυξημένοι με τα πλέγματα αποτυχίας $r \times h_i$
$R_C(i;h_1,h_2,\dots,h_n),$ $R_C((r,s),(i,n);[p_{ij}])$	Αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου $(r,s)$ -από- $n$ -( $i,n$ ): $F$ συστήματος
$R(n,k;k_C), Q(n,k;k_C)$	Αξιοπιστία, αναξιοπιστία συνδυασμού συστημάτων $j$ -από- $n$ -( $i$ ): $F$ και συνεχόμενο $k_C$ -από- $n$ -( $i$ ): $F$
$R(m,j,u,r,s), R(m,j,u,r,s;s\mathbf{1})$	Αξιοπιστία συνδυασμού των υποσυστημάτων $u$ -από- $n$ -( $m,j$ ): $F$ και συνεχόμενο $(r,s)$ -από- $n$ -( $m,j$ ): $F$
$UB, LB$	Άνω, κάτω φράγμα



# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η θεωρία αξιοπιστίας ασχολείται με προβλήματα πιθανοτήτων και στατιστικής, τα οποία περιέχουν κατανομές χρόνων ζωής μονάδων ή συστημάτων. Αναπτύχθηκε ξεχωριστά από το ρεύμα των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Ήταν αρχικά ένα εργαλείο για να βοηθήσει τις εταιρίες ναυτιλιακών ασφαλίσεων και τις εταιρίες ασφαλίσεων ζωής να υπολογίσουν τέλη για να χρεώσουν τους πελάτες τους ώστε να έχουν κέρδος.

Η αποτυχία μηχανικών συσκευών όπως πλοία, τρένα και αυτοκίνητα, είναι παρόμοια με πολλούς τρόπους με τη ζωή και το θάνατο βιολογικών οργανισμών. Τα στατιστικά μοντέλα τα οποία είναι κατάλληλα για να περιγράψουν οποιονδήποτε από αυτούς τους τομείς ονομάζονται μοντέλα «χρόνου μέχρι εμφάνισης ενδεχομένου» (time to event). Η αποτυχία ή ο θάνατος καλούνται «ενδεχόμενο» και ο σκοπός αυτών των μοντέλων είναι να μελετήσουν ή να προβλέψουν την αναλογία των ενδεχομένων που εμφανίζονται σε έναν συγκεκριμένο πληθυσμό ή την πιθανότητα ενός ενδεχομένου για ένα συγκεκριμένο άτομο.

Από τη πλευρά του πελάτη μίας τεχνολογίας ή μιας υπηρεσίας, τα πραγματικά μέτρα αξιοπιστίας μπορεί να διαφέρουν δραματικά από την αξιοπιστία που παρατηρείται. Μία άσχημη εμπειρία μπορεί να μεγεθυνθεί στο μυαλό ενός πελάτη, αυξάνοντας την αναξιπιστία ενός προϊόντος. Μία συντριβή αεροπλάνου θα προσδώσει άμεσα φόβο σε μεγάλο ποσοστό πελατών των αεροπορικών εταιριών, ανεξάρτητα από τα πραγματικά δεδομένα αξιοπιστίας της ασφάλειας των εναέριων μεταφορών.

### Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η έννοια της αξιοπιστίας χρησιμοποιήθηκε συστηματικά για τεχνολογικά συστήματα μόλις τα τελευταία 60 χρόνια. Εμφανίστηκε μετά τον Πρώτο Παγκόσμιο Πόλεμο και χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση της ασφαλούς λειτουργίας μονοκινητήριων, δικινητήριων και τετρακινητήριων αεροπλάνων. Ως ορισμός της αξιοπιστίας χρησιμοποιήθηκε τότε ο αριθμός των ατυχημάτων ανά ώρα πτήσης.

Στις αρχές τις δεκαετίας του 1930, οι *Walter Shewhart*, *Harold F. Dodge* και *Harry G. Romig*, έθεσαν τη θεωρητική βάση για την αξιοποίηση των στατιστικών μεθόδων στον

ποιοτικό έλεγχο βιομηχανικών προϊόντων. Τέτοιες μέθοδοι, όμως, δε χρησιμοποιήθηκαν εκτεταμένα μέχρι την έναρξη του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου. Έτσι, δε μπορούσαν να ερμηνεύσουν πως προϊόντα τα οποία είχαν κατασκευασθεί με χρήση μεγάλου αριθμού «ποιοτικών» εξαρτημάτων, συχνά δε λειτουργούσαν, παρά το γεγονός ότι οι επί μέρους μονάδες ήταν υψηλής ποιότητας.

Κατά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, μια Γερμανική ομάδα, που εργαζόταν υπό τις εντολές του *Wernher Von Braun* εφηύρε τον πύραυλο V-1. Μετά τον πόλεμο, αναφέρθηκε ότι οι 10 πρώτοι πύραυλοι V-1 είχαν παταγώδη αποτυχία. Παρά τις προσπάθειες να παρέχουν υψηλής ποιότητας εξαρτήματα, και ιδιαίτερη προσοχή στις λεπτομέρειες, όλοι οι πρώτοι πύραυλοι, είτε ανατινάχθηκαν στην εξέδρα εκτόξευσης, είτε προσεδάφισθηκαν πολύ γρήγορα (στο Στενό της Μάγχης). Ένας μαθηματικός, ο *Robert Lusser*, προσκλήθηκε ως σύμβουλος με αποστολή να αναλύσει το σύστημα του πυραύλου, και σύντομα παρήγαγε τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο των Πιθανοτήτων σειριακών μονάδων.

Στις Ηνωμένες Πολιτείες, έγιναν προσπάθειες να αντισταθμίσουν τη χαμηλή αξιοπιστία ενός συστήματος βελτιώνοντας την ποιότητα των επιμέρους μονάδων. Απαιτήθηκαν καλύτερες πρώτες ύλες και καλύτερος σχεδιασμός προϊόντων. Επιτεύχθηκε υψηλότερη αξιοπιστία συστημάτων, αλλά πιθανότατα εκείνη την χρονική περίοδο, δεν έγινε περαιτέρω συστηματική ανάλυση του προβλήματος.

Μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, η ανάπτυξη συνεχίστηκε ανά τον κόσμο, αφού παράγονταν με αυξανόμενο ρυθμό πιο πολύπλοκα προϊόντα, με μεγάλο αριθμό μονάδων, (τηλεοράσεις, Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές κ.τ.λ.). Με τον αυτοματισμό, η ανάγκη για πολύπλοκο έλεγχο και συστήματα ασφάλειας γινόταν ολοένα και εντονότερη.

Προ το τέλος της δεκαετίας του 1950 και στην αρχή της δεκαετίας του 1960, το ενδιαφέρον στις Ηνωμένες Πολιτείες επικεντρώθηκε στους διηπειρωτικούς βαλλιστικούς πυραύλους και τη διαστημική έρευνα, ιδιαίτερα στα προγράμματα *Mercury* και *Gemini*. Στο συναγωνισμό με τους Ρώσους για το ποιο θα είναι το πρώτο έθνος που θα στείλει ανθρώπους στο διάστημα, ήταν πολύ σημαντική η επιτυχής προσεδάφιση των επανδρωμένων διαστημόπλοιων. Σύντομα ιδρύθηκε μια οργάνωση για μηχανικούς που ασχολούνται με θέματα αξιοπιστίας. Το πρώτο περιοδικό στο αντικείμενο (*IEEE Transactions on Reliability*) άρχισε να κυκλοφορεί το έτος 1963, και τη δεκαετία του 1960 εκδόθηκε ένας σημαντικός αριθμός εισαγωγικών βιβλίων στο αντικείμενο της αξιοπιστίας.

Τη δεκαετία του 1970 στις Ηνωμένες Πολιτείες όπως και σε άλλα μέρη του κόσμου, αυξήθηκε το ενδιαφέρον σε έννοιες κινδύνου και ασφάλειας σχετικές με την κατασκευή και τη λειτουργία σταθμών πυρηνικής ενέργειας. Στις Ηνωμένες Πολιτείες σχηματίστηκε μια μεγάλη ερευνητική επιτροπή καθοδηγούμενη από τον καθηγητή *Norman Rasmussen*, για να αναλύσει το πρόβλημα. Το πολλών εκατομμυρίων δολαρίων πρόγραμμα είχε ως αποτέλεσμα την αναφορά *Rasmussen Report, WASH-1400 (NUREG-75/014)* η οποία, παρά τις αδυναμίες της, παρουσιάζει την πρώτη «σοβαρή» ανάλυση ασφάλειας ενός τόσο πολύπλοκου συστήματος όπως ένας σταθμός πυρηνικής ενέργειας.

Σήμερα η Αξιοπιστία αποτελεί πλέον μια ανεξάρτητη ερευνητική περιοχή, με σημαντικές δημοσιεύσεις και συνεχείς αναζητήσεις των ασχολούμενων με το θέμα, με κύριο στόχο όχι μόνο τη μελέτη πολύπλοκων συστημάτων, αλλά και τη βελτίωση της ποιότητας τους με αποτελεσματική χρήση των διαθέσιμων μέσων (μονάδων και τρόπων σύνδεσης μεταξύ τους).

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



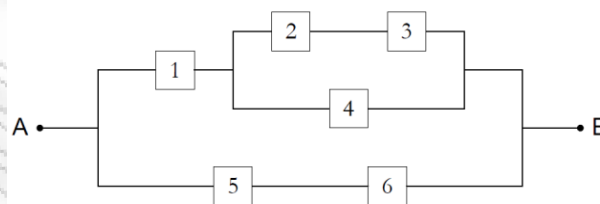
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε βασικές και απαραίτητες έννοιες της θεωρίας αξιοπιστίας. Θα ορίσουμε αρχικά τι εννοούμε ως σύστημα αξιοπιστίας και θα δούμε παραδείγματα των πιο διαδεδομένων συστημάτων, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη συνάρτηση δομής και τα μονότονα συστήματα αξιοπιστίας, τα οποία είναι αυτά που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία. Ο ορισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας θα μας δώσει τη δυνατότητα να μελετήσουμε μια πτυχή της στοχαστικής συμπεριφοράς των συστημάτων και θα παρουσιάσουμε τύπους και μεθόδους υπολογισμού της για διάφορα συστήματα. Στην περίπτωση που το πλήθος μονάδων είναι μεγάλο, ο ακριβής υπολογισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας είναι δύσκολος ή ακόμα και αδύνατος, και ως εκ τούτου θα ορίσουμε την έννοια των φραγμάτων αξιοπιστίας και θα δούμε τα πιο γνωστά από αυτά.

### 1.1. Συστήματα Αξιοπιστίας

Σύστημα αξιοπιστίας ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων, με κάποια δομή. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό σύστημα αξιοπιστίας (το σύστημα θεωρείται ότι αποτυγχάνει αν δεν υπάρχει μια διαδρομή με λειτουργούσες μονάδες από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ ).



Σχήμα 1.1.1

Στην συνέχεια θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα αξιοπιστίας θα αποτελείται από  $n$  το πλήθος μονάδες (*components*), κάθε μία από τις οποίες μπορεί να βρίσκεται στις εξής δύο καταστάσεις:

- Λειτουργία (*functioning, working, on*)
- Μη λειτουργία (*failed, not working, off*).

Το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, μπορεί και αυτό να βρίσκεται σε μία από τις δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία.

Σε γενικές γραμμές, ο όρος “Αξιοπιστία” ενός συστήματος σχετίζεται με την πιθανότητα να λειτουργεί ικανοποιητικά, τουλάχιστον για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

## 1.2. Συνάρτηση δομής

Εστω ένα σύστημα  $n$  μονάδων, συνδεδεμένων με κάποιο τρόπο. Η κατάσταση της  $i$ -μονάδας ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, περιγράφεται από την δείκτηρα συνάρτηση:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i \text{ - μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν η } i \text{ - μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , το οποίο έχει για συντεταγμένες τις καταστάσεις των  $n$  μονάδων, λέγεται **διάνυσμα κατάστασης** του συστήματος. Ομοια μπορούμε να ορίσουμε άλλη μία δείκτηρα συνάρτηση, η οποία θα ορίζει τη λειτουργία ή μη του συστήματος, έστω:

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Δεδομένου ότι η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται πλήρως από τις καταστάσεις των μονάδων του, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η  $\varphi$  θα είναι η συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης, δηλαδή  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ , όπου  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1.** Η συνάρτηση  $\varphi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  η οποία σε κάθε διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x}$  των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση  $\varphi(\mathbf{x})$  του συστήματος, λέγεται **συνάρτηση δομής** (*structure function*) του συστήματος. ■

### ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.1. Διάσπαση με στοιχείο οδηγό (*pivotal decomposition*)

Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση δομής ενός συστήματος  $n$  μονάδων, τότε για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$  ισχύει:

1.  $\varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \varphi(0_i, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$
2.  $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} (\prod_{i=1}^n x_i^{y_i} (1 - x_i)^{1-y_i}) \varphi(\mathbf{y}).$

όπου  $(1_i, \mathbf{x})$  είναι το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  με άσσο στη θέση  $i$  και  $(0_i, \mathbf{x})$  το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  με μηδέν στη θέση  $i$ . ■

Η πρόταση είναι πολύ χρήσιμη γιατί ανάγει τη μελέτη ενός συστήματος με  $n$  μονάδες στη μελέτη ενός συστήματος  $n - 1$  μονάδων. Ο υπολογισμός του δεύτερου σκέλους της πρότασης βέβαια είναι αρκετά δύσκολος, καθώς θα πρέπει να αθροίσουμε  $2^n$  όρους.

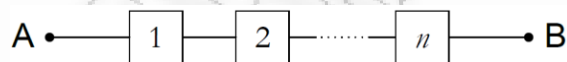
### 1.3. Παραδείγματα Συστημάτων Αξιοπιστίας

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα πιο γνωστά συστήματα αξιοπιστίας και θα βρούμε τη συνάρτηση δομής τους.

#### ➤ Σειριακό σύστημα (*Series system*)

Ένα σύστημα που λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες του, λέγεται σειριακό σύστημα. Ένα σειριακό σύστημα τάξης  $n$ , έχει συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i = \min_i x_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

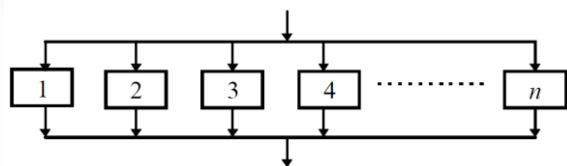


Σχήμα 1.3.1

#### ➤ Παράλληλο σύστημα (*Parallel system*)

Ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν μόνο μια μονάδα του λειτουργεί, ονομάζεται παράλληλο σύστημα. Ένα παράλληλο σύστημα τάξης  $n$ , έχει συνάρτηση δομής:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n x_i = \max_i x_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

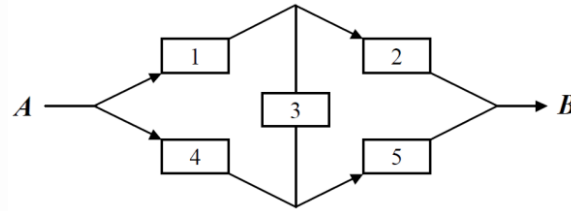


Σχήμα 1.3.2

➤ Γέφυρα (Bridge structure)

Είναι ένα από τα πλέον δημοφιλή συστήματα στην ηλεκτρολογία / ηλεκτροτεχνία. Αποτελείται από  $n = 5$  μονάδες και λειτουργεί όταν είναι δυνατή η διέλευση ρεύματος από τη θέση  $A$  στη θέση  $B$ , στη δομή του παρακάτω σχήματος. Έχει συνάρτηση δομής:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_3x_4).$$



Σχήμα 1.3.3.

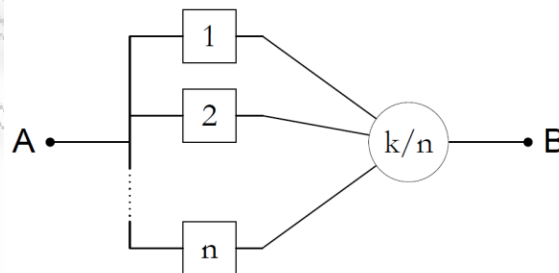
➤ Σύστημα  $k$ -από-τα- $n$ : $F(G)$  ( $k$ -out-of- $n$ : $F(G)$  system)

Ένα σύστημα το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον  $k$  από τις  $n$  μονάδες του, ονομάζεται σύστημα  $k$ -από-τα- $n$ : $F$ . Η συνάρτηση δομής του έχει τη μορφή:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^n x_i \geq n - k + 1 \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^n x_i < n - k + 1 \end{cases}$$

Ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν τουλάχιστον  $k$  από τις  $n$  μονάδες του, ονομάζεται σύστημα  $k$ -από-τα- $n$ : $G$ . Η συνάρτηση δομής του έχει τη μορφή:

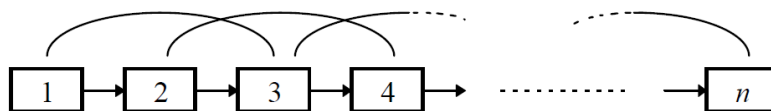
$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{cases}$$



Σχήμα 1.3.4

➤ Σύστημα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F(G)$  (Consecutive  $k$ -out-of- $n:F(G)$  system)

Ένα σύστημα το οποίο αποτυγχάνει (λειτουργεί) αν και μόνο αν αποτύχουν (λειτουργούν) τουλάχιστον  $k$  συνεχόμενες από τις  $n$  μονάδες του, ονομάζεται σύστημα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F(G)$ . Προτάθηκε για πρώτη φορά από τον *Kontoleon* (1980) και παρακάτω δίνουμε μία σχηματική απεικόνιση για  $k = 3$ :



Σχήμα 1.3.5

➤ Σύστημα σταθμισμένο  $k$ -από-τα- $n:F$  και συνεχόμενο σταθμισμένο  $k$ -από-τα- $n:F$  (Weighted  $k$ -out-of- $n:F$  system, consecutive weighted  $k$ -out-of- $n:F$  system)

Οι *Wu & Chen* (1994) επέκτειναν τα ήδη γνωστά  $k$ -από-τα- $n:F$  και συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματα αντιστοιχώντας βάρη  $w_i$  σε κάθε μία από τις  $n$  μονάδες του συστήματος, και υποθέτοντας ότι το σταθμισμένο  $k$ -από-τα- $n:F$  αποτυγχάνει αν το συνολικό βάρος των μονάδων που απέτυχαν είναι τουλάχιστον  $k$ . Αντίστοιχα το συνεχόμενο σταθμισμένο  $k$ -από-τα- $n:F$  αποτυγχάνει αν το συνολικό βάρος συνεχόμενων μονάδων που απέτυχαν είναι τουλάχιστον  $k$ .

➤ Σύστημα  $r$ -από- $k$ -συνεχόμενα-από-τα- $n:F$  ( $r$ -within-consecutive- $k$ -out-of- $n:F$  system)

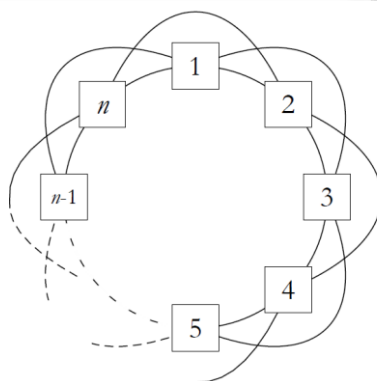
Η έννοια του  $r$ -από- $k$ -συνεχόμενα-από-τα- $n:F$  προτάθηκε από τον *Griffith* (1986), αν και η μελέτη ενός μαθηματικού μοντέλου που καθόριζε τη δομή του είχε γίνει νωρίτερα. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει αν υπάρχουν  $k$  συνεχόμενες μονάδες στις οποίες περιέχονται τουλάχιστον  $r$  μονάδες που έχουν αποτύχει.

➤ Σύστημα  $m$ -συνεχόμενων- $k$ -από-τα- $n:F$  ( $m$ -consecutive- $k$ -out-of- $n:F$  system)

Και αυτό το σύστημα παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον *Griffith* (1986). Αποτυγχάνει αν και μόνο αν εντός των  $n$  μονάδων του, υπάρχουν  $m$  μη επικαλυπτόμενες ροές  $k$  συνεχόμενων μονάδων που απέτυχαν.

➤ Σύστημα κυκλικό-συνεχόμενο-  $k$ -από-τα- $n$ : $F$  (Circular consecutive  $k$ -out-of- $n$ : $F$  system)

Ένα σύστημα  $n$  μονάδων διατεταγμένων σε ένα κύκλο (η πρώτη μονάδα ενώνεται με την τελευταία), το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον  $k$  συνεχόμενες μονάδες του, ονομάζεται σύστημα κυκλικό συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ : $F$ . Στο παρακάτω σχήμα διακρίνουμε το σύστημα για  $k = 2$ .

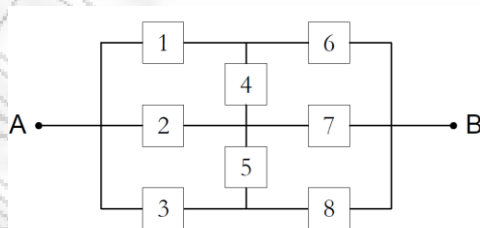


Σχήμα 1.3.6

➤ Σύστημα αξιοπιστίας διπλής γέφυρας.

Το σύστημα αυτό προτάθηκε από τους *Kuo & Zuo* (2003), λειτουργεί αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μία διαδρομή από το σημείο A στο σημείο B με λειτουργούσες μονάδες. Η μορφή του φαίνεται στο επόμενο σχήμα και η συνάρτηση δομής του δίνεται από τον τύπο:

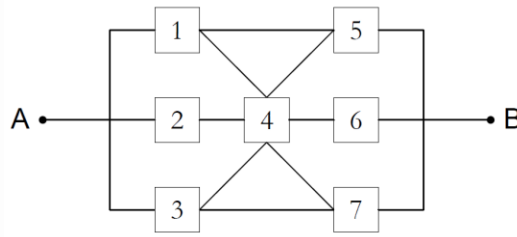
$$\varphi(x) = 1 - (1 - x_1x_6)(1 - x_1x_4x_7)(1 - x_1x_4x_5x_8)(1 - x_2x_7)(1 - x_2x_4x_6) \\ \times (1 - x_2x_5x_8)(1 - x_3x_8)(1 - x_3x_5x_7)(1 - x_3x_4x_5x_6).$$



Σχήμα 1.3.7

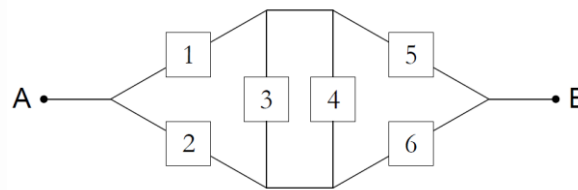
➤ Παραλλαγές συστήματος αξιοπιστίας γέφυρας

Τα δύο συστήματα που θα παρουσιάσουμε εδώ, προτάθηκαν από τους *Rausand & Hoyland* (2004) και αποτελούν παραλλαγές του συστήματος της γέφυρας.



Σχήμα 1.3.8

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_5)(1 - x_1x_4x_6)(1 - x_1x_4x_7)(1 - x_2x_4x_5)(1 - x_2x_4x_6) \\ \times (1 - x_3x_4x_5)(1 - x_3x_4x_6)(1 - x_3x_7)$$



Σχήμα 1.3.9

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_5)(1 - x_2x_6)(1 - x_1x_3x_6)(1 - x_1x_4x_6)(1 - x_2x_3x_5)(1 - x_2x_4x_5).$$

#### 1.4. Μονότονα Συστήματα Αξιοπιστίας

Έστω ένα αυθαίρετο σύστημα αξιοπιστίας που παρουσιάζει κάποιες μονάδες που έχουν αποτύχει. Αν αντικαταστήσουμε μία μονάδα που δεν λειτουργεί με μία που λειτουργεί, τότε αναμένουμε το σύστημα να λειτουργεί καλύτερα (η στην χειρότερη περίπτωση να μην χειροτερεύσει). Στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τέτοιου είδους συστήματα, τα οποία ονομάζονται **μονότονα**.

**Ορισμός 1.4.1.** Ένα σύστημα ονομάζεται **μονότονο** (ή μονότονης δομής, *coherent structure* ή *monotone structure*) αν ισχύουν τα εξής:

1. Η συνάρτηση δομής του  $\varphi(\mathbf{x})$  είναι αύξουσα με την εξής έννοια:  $x_i \leq y_i, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \varphi(\mathbf{y})$
2. Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η  $\varphi$  δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη. ■

Οι μονάδες που περιγράφονται στο δεύτερο σκέλος του παραπάνω ορισμού ονομάζονται **σχετικές** (*relevant*).

**Ορισμός 1.4.2.** Έστω ένα σύστημα αξιοπιστίας με συνάρτηση δομής  $\varphi(\mathbf{x})$ . Η μονάδα  $i$  θα ονομάζεται **μη σχετική** (*irrelevant*) για το σύστημα αν ισχύει:

$$\varphi(1_i, \mathbf{x}) = \varphi(0_i, \mathbf{x}), \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \{0,1\}^n.$$

Στην αντίθετη περίπτωση θα ονομάζεται **σχετική**. ■

Οι *Birnbaum et al* (1961) πρωτοεισήγαγαν την έννοια του μονότονου συστήματος, το όρισαν ως ένα σύστημα για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- $\mathbf{x} > \mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{y})$
- $\varphi(\mathbf{0}) = 0$  και  $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ .

Επίσης όρισαν ως *semi-coherent* το σύστημα για το οποίο ισχύει μόνο η πρώτη συνθήκη. Βέβαια σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, αποδεικνύεται ότι ένα μονότονο σύστημα ικανοποιεί και τη δεύτερη συνθήκη. Τα μόνα συστήματα που είναι semi-coherent και όχι coherent είναι τα τετριμμένα  $\varphi(\mathbf{x}) = 1$  και  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ . Ο μοναδικός τρόπος για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι μονότονο είναι να βρούμε τις τιμές της  $\varphi(\mathbf{x})$  για όλα τα διανύσματα κατάστασης και να εξακριβώσουμε την ισχύ των δύο προϋποθέσεων. Τέλος για κάθε συνάρτηση  $\varphi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 1.4.1, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονότονο σύστημα, με συνάρτηση δομής  $\varphi$ .

**Πρόταση 1.4.1.** Αν  $\varphi$  είναι μια μονότονη συνάρτηση δομής, τότε για κάθε  $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$  ισχύει:

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad \blacksquare$$

Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει ότι κάθε μονότονο σύστημα είναι καλύτερο από το αντίστοιχο σειριακό που χρησιμοποιεί τις ίδιες μονάδες, και χειρότερο από το αντίστοιχο παράλληλο.

## 1.5. Ελάχιστα Σύνολα Λειτουργίας και Διακοπής

Η μελέτη των μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας γίνεται πολύ απλούστερη με τη χρησιμοποίηση των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας και διακοπής από τους *Birnbaum et al* (1961) και ακολούθως δίνουμε τον ορισμό τους.



**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.1.** Έστω  $\varphi$  η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος αποτελούμενου από  $n$  μονάδες. Τότε:

- Ένα διάνυσμα  $x \in \{0,1\}^n$  θα καλείται **διάνυσμα λειτουργίας** (δ.λ., *path vector*) αν  $\varphi(x) = 1$ . Επιπλέον ένα διάνυσμα  $x \in \{0,1\}^n$  θα καλείται **ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας** (ε.δ.λ., *minimal path vector*) αν  $\varphi(x) = 1$  και  $\varphi(y) = 0$  για κάθε  $y < x$ .
- Ένα διάνυσμα  $x \in \{0,1\}^n$  θα καλείται **διάνυσμα διακοπής** (δ.δ., *cut vector*) αν  $\varphi(x) = 0$ . Επιπλέον ένα διάνυσμα  $x \in \{0,1\}^n$  θα καλείται **ελάχιστο διάνυσμα διακοπής** (ε.δ.δ., *minimal cut vector*) αν  $\varphi(x) = 0$  και  $\varphi(y) = 1$  για κάθε  $x < y$ .

■

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.2.** Έστω  $\varphi$  η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος αποτελούμενου από  $n$  μονάδες. Τότε:

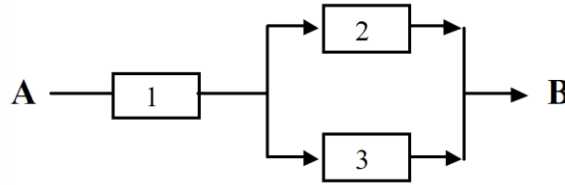
- Αν  $x$  είναι ένα διάνυσμα λειτουργίας, τότε το σύνολο  $P_x = \{i: x_i = 1\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$  καλείται **σύνολο λειτουργίας** (σ.λ., *path set*). Αντίστοιχα αν το  $x$  είναι ένα ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας, τότε το  $P_x = \{i: x_i = 1\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$  καλείται **ελάχιστο σύνολο λειτουργίας** (ε.σ.λ., *minimal path set*). Το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας θα συμβολίζεται με  $\mathbf{P}$ .
- Αν  $x$  είναι ένα διάνυσμα διακοπής, τότε το σύνολο  $C_x = \{i: x_i = 1\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$  καλείται **σύνολο διακοπής** (σ.δ., *path set*). Αντίστοιχα αν το  $x$  είναι ένα ελάχιστο διάνυσμα διακοπής τότε το  $C_x = \{i: x_i = 1\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$  καλείται **ελάχιστο σύνολο διακοπής** (ε.σ.δ., *minimal path set*). Το σύνολο όλων των ελάχιστων συνόλων διακοπής θα συμβολίζεται με  $\mathbf{C}$ .

■

#### Παρατηρήσεις

1. Αν  $x$  είναι ένα δ.λ. τότε κάθε  $y \geq x$  είναι επίσης δ.λ. Όμοια αν  $x$  είναι ένα δ.δ. τότε κάθε  $y \leq x$  είναι επίσης δ.δ.
2. Ένα μονότονο σύστημα λειτουργεί ( $\varphi(x) = 1$ ), αν και μόνο αν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.λ. λειτουργούν. ( $\exists P \in \mathbf{P}: x_i = 1, \forall i \in P$ ).
3. Ένα μονότονο σύστημα δεν λειτουργεί ( $\varphi(x) = 0$ ), αν και μόνο αν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ. έχουν χαλάσει. ( $\exists C \in \mathbf{C}: x_i = 0, \forall i \in C$ ).

**Παράδειγμα 1.5.1.** Το παρακάτω σύστημα που αποτελείται από τρεις μονάδες και λειτουργεί αν και μόνο αν είναι δυνατή η μετάβαση από το σημείο **A** στο **B** μέσω μονάδων που λειτουργούν.



Σχήμα 1.5.1

Παρατηρούμε ότι το σύστημα λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν οι μονάδες 1 και 2 ή οι μονάδες 1 και 3. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν δεν λειτουργεί η μονάδα 1 ή οι μονάδες 2 και 3 ταυτόχρονα. Έτσι:

- Τα  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,1)$  είναι διανύσματα λειτουργίας με αντίστοιχα σύνολα λειτουργίας τα  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$  και  $\{1,2,3\}$ .
- Τα διανύσματα  $(0,0,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,1)$  είναι διανύσματα διακοπής με αντίστοιχα σύνολα διακοπής τα  $\{1,2,3\}$ ,  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{2,3\}$  και  $\{1\}$ .
- Τα ελάχιστα διανύσματα λειτουργίας του συστήματος είναι τα  $(1,1,0)$  και  $(1,0,1)$  με αντίστοιχα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας τα  $\{1,2\}$  και  $\{1,3\}$ .
- Τα ελάχιστα διανύσματα διακοπής του συστήματος είναι τα  $(0,1,1)$  και  $(1,0,0)$  με ελάχιστα σύνολα διακοπής τα  $\{1\}$  και  $\{2,3\}$ . ■

**Παράδειγμα 1.5.2.**

1. Το σειριακό σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν. Άρα το μοναδικό του ε.σ.λ. είναι το  $\{1,2, \dots, n\}$ , ενώ όλα τα μονοσύνολα  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$  είναι ε.σ.δ.
2. Αντίθετα, το παράλληλο σύστημα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μία μονάδα του λειτουργεί. Άρα όλα τα μονοσύνολα  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$  είναι ε.σ.λ. ενώ το μοναδικό του ε.σ.δ. είναι το  $\{1,2, \dots, n\}$ .
3. Για το σύστημα της γέφυρας τα ε.σ.λ. είναι τα  $\{1,2\}, \{4,5\}, \{1,3,5\}, \{4,3,2\}$  ενώ τα ε.σ.δ. είναι τα  $\{1,4\}, \{2,5\}, \{1,3,5\}, \{4,3,2\}$ . Παρατηρούμε ότι τα  $\{1,3,5\}, \{4,3,2\}$  είναι ε.σ.λ. και ε.σ.δ. ταυτόχρονα.

4. Στο σύστημα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n : F$  τα ε.σ.δ. είναι όλα τα σύνολα που αποτελούνται από  $k$  συνεχόμενες μονάδες, δηλαδή τα σύνολα:

$$\{1, 2, \dots, k\}, \{2, 3, \dots, k + 1\}, \dots, \{n - k + 1, n - k + 2, \dots, n\}.$$

Τα ε.σ.λ. του συστήματος είναι αρκετά δύσκολο να περιγραφούν, στην γενική τουλάχιστον περίπτωση.

5. Στο σύστημα  $k$ -από-τα- $n : G$ , τα ε.σ.λ. είναι όλα τα υποσύνολα του  $\{1, 2, \dots, n\}$  που περιέχουν  $k$  στοιχεία, ενώ τα ε.σ.δ. είναι όλα τα υποσύνολα του  $\{1, 2, \dots, n\}$  που θα περιέχουν  $n - k + 1$  στοιχεία. ■

### Παρατήρηση

Αν  $P$  είναι ένα σ.λ., τότε κάθε  $P_1$  με  $P_1 \supseteq P$  είναι σ.λ. Επίσης αν  $C$  είναι ένα δ.δ., τότε κάθε  $C_1$  με  $C_1 \supseteq C$  είναι σ.δ. Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύουν τα προηγούμενα είναι η δομή του συστήματος να είναι μονότονη. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.5.3.** Στην δομή που περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:

- Το  $x = \{0, 1, 0\}$  είναι δ.λ. και το  $P = \{2\}$  είναι ε.σ.λ. Όμως το  $P_1 = \{2, 3\} \supseteq P$  δεν είναι σ.λ. αφού  $\varphi(0, 1, 1) = 0$ .
- Το  $x = \{1, 0, 1\}$  είναι δ.δ. και το  $C = \{2\}$  είναι ε.σ.δ. Όμως το  $C_1 = \{2, 3\} \supseteq C$  δεν είναι σ.δ. αφού  $\varphi(0, 0, 1) = 1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\varphi(\mathbf{x})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Πίνακας 1.5.1 ■

Επίσης σε μη μονότονες δομές δεν ισχύει ότι το σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.λ. λειτουργούν και ότι το σύστημα αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ. έχουν αποτύχει.

**Πρόταση 1.5.1.** Μια μονάδα είναι σχετική αν και μόνο αν περιέχεται σε τουλάχιστον ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας ή διακοπής. ■

### 1.6. Εύρεση της Συνάρτησης Δομής με Χρήση των ε.σ.λ. και ε.σ.δ.

Έστω ότι για κάποιο μονότονο σύστημα αξιοπιστίας έχει βρεθεί η οικογένεια των ε.σ.λ.  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  ή των ε.σ.δ.  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ . Οι επόμενες προτάσεις μας επιτρέπουν να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της συνάρτησης δομής του συστήματος.

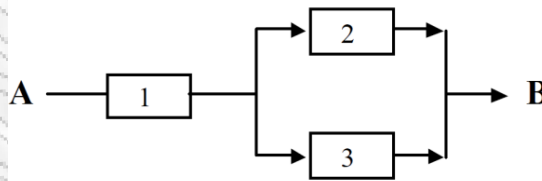
**Πρόταση 1.6.1.** Αν  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  είναι η οικογένεια των ε.σ.λ. μιας μονότονης δομής, τότε:

$$\varphi(x) = \max_{1 \leq j \leq M} \prod_{i \in P_j} x_i = \prod_{j=1}^M \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} x_i). \quad \blacksquare$$

**Πρόταση 1.6.2.** Αν  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$  είναι η οικογένεια των ε.σ.δ. μιας μονότονης δομής, τότε:

$$\varphi(x) = \min_{1 \leq j \leq N} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^N (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^N \prod_{i \in C_j} x_i. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.6.1.** Έστω το σύστημα που περιγράψαμε στο παράδειγμα 1.5.1.



Είδαμε ότι το σύνολο των ε.σ.λ. είναι το  $P = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$  και των ε.σ.δ. το  $C = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ . Σύμφωνα με όσα διατυπώσαμε στις παραπάνω προτάσεις θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 - \prod_{j=1}^2 (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) \\ &= x_1 x_3 + x_1 x_2 - x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 + x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^2 \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right) = (1 - (1 - x_1))(1 - (1 - x_2)(1 - x_3)) \\ &= x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### Παράδειγμα 1.6.2.

1. Στο σειριακό σύστημα είδαμε ότι  $\mathbf{P} = \{\{1,2, \dots, n\}\}$  και  $\mathbf{C} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ . Άρα η συνάρτηση δομής θα είναι η

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^1 \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right) = 1 - (1 - x_1x_2 \dots x_n) = x_1x_2 \dots x_n$$

ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ.:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right) \\ &= (1 - (1 - x_1))(1 - (1 - x_2)) \dots (1 - (1 - x_n)) = x_1x_2 \dots x_n.\end{aligned}$$

2. Στο παράλληλο σύστημα ισχύει ότι  $\mathbf{P} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$  και  $\mathbf{C} = \{\{1,2, \dots, n\}\}$ . Άρα η συνάρτηση δομής θα είναι η:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right) = \prod_{j=1}^1 \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right) \\ &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n).\end{aligned}$$

3. Για το σύστημα της γέφυρας βρήκαμε ότι  $\mathbf{P} = \{\{1,2\}, \{4,5\}, \{1,3,5\}, \{4,3,2\}\}$  και  $\mathbf{C} = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{1,3,5\}, \{4,3,2\}\}$ . Έτσι, η συνάρτηση δομής της θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{j=1}^4 \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right) = \\ &= 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_4x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_4x_3x_2) \\ &= x_1x_2 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5 + x_4x_5 \\ &\quad - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5\end{aligned}$$

ή αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ.:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^4 \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right) = (1 - (1 - x_1)(1 - x_4))(1 - (1 - x_2)(1 - x_5)) \\ &\quad \times (1 - (1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_5)) \times (1 - (1 - x_4)(1 - x_3)(1 - x_2)) \\ &= \dots \\ &= x_1x_2 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5 + x_4x_5 - \\ &\quad - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5.\end{aligned}$$

4. Στο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$  :  $F$  σύστημα, το σύνολο των ε.σ.δ. είναι το  $\mathbf{C} = \{j, j+1, \dots, j+k-1\}, j = 1, 2, \dots, n-k+1$  και επομένως:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1 - \prod_{i=j}^{j+k-1} (1 - x_i)\right).$$

Στην ειδική περίπτωση του  $C(3,2)$ :  $F$  έχουμε:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= (1 - (1 - x_1)(1 - x_2))(1 - (1 - x_2)(1 - x_3)) \\ &= (x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_2 + x_3 - x_2x_3) = x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

5. Στο σύστημα  $k$ -από-τα- $n$  :  $G$  είδαμε ότι  $\mathbf{P} = \{A : A \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ με } |A| = k\}$  και  $\mathbf{C} = \{A : A \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ με } |A| = n - k + 1\}$ . Άρα:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (1 - \prod_{i=1}^k x_{a_i}) = \prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - x_{a_i})).$$

Στην ειδική περίπτωση του  $S(3,2)$ :  $G$  έχουμε:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_1x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 2x_1x_2x_3. \quad \blacksquare$$

Τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση οποιουδήποτε μονότονου συστήματος. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, ένα σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.λ. λειτουργούν. Δηλαδή, εάν για κάθε ε.σ.λ.  $P_i$ , υπολογίσουμε τις ποσότητες  $\pi_i = \prod_{j \in P_i} p_j$ , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα ε.σ.λ. σαν απλές μονάδες (με αξιοπιστία  $\pi_i$ ), με το σύστημα να λειτουργεί αν μία από αυτές δουλεύει. Η μορφή του συστήματος έτσι, παρίσταται ισοδύναμα με ένα παράλληλο ιδεατό σύστημα με μονάδες τα ε.σ.λ. (ιδεατό γιατί

οι μονάδες που βρίσκονται σε παραπάνω από ένα ε.σ.λ. θεωρούνται ως διαφορετικές, που όμως βρίσκονται στην ίδια κατάσταση, πράγμα που είναι δύσκολο να συμβαίνει). Παρόμοια, χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ. λέμε ότι το σύστημα θα αποτύχει εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα ε.σ.δ. με όλες του τις μονάδες χαλασμένες. Εάν λοιπόν μεταχειριστούμε πάλι τα ε.σ.δ. σαν απλές μονάδες, ανάγουμε το σύστημα σε ένα ιδεατό σειριακό σύστημα.

Αναλυτικά, για ένα σύστημα με ε.σ.λ.  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  και ε.σ.δ.  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$  ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\gamma_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν όλες οι μονάδες του } P_j \text{ λειτουργούν} \\ 0, & \text{όταν τουλάχιστον μια μονάδα του } P_j \text{ έχει αποτύχει} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, M$$

$$\delta_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν τουλάχιστον μια μονάδα του } C_j \text{ λειτουργεί} \\ 0, & \text{όταν όλες οι μονάδες του } C_j \text{ έχουν αποτύχει} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, N$$

Η ισοδύναμη:

$$\gamma_j = \prod_{i \in P_j} x_i, \quad \delta_j = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i).$$

Τότε για τη συνάρτηση δομής του συστήματος έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Πρόταση 1.6.3.** Για ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ.  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  και ε.σ.δ.  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$  ισχύει:

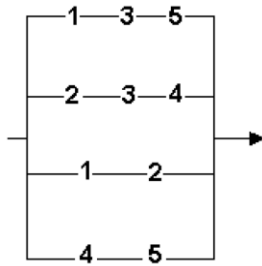
$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \gamma_j) = \prod_{j=1}^N (1 - \delta_j), \forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n$$

ή ισοδύναμη:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq M} \gamma_j = \max_{1 \leq j \leq M} \min_{i \in P_j} x_i \text{ και } \varphi(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq j \leq N} \delta_j = \min_{1 \leq j \leq N} \max_{i \in C_j} x_i. \quad \blacksquare$$

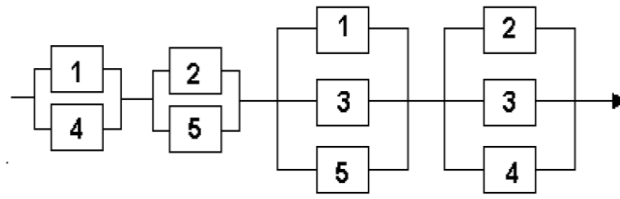
Ως εκ τούτου, κάθε σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί σαν παράλληλο ή σειριακό, γνωρίζοντας όλα τα ε.σ.λ. ή ε.σ.δ. αντίστοιχα.

**Παράδειγμα 1.6.3.** Στο σύστημα της γέφυρας είδαμε ότι τα ε.σ.λ. του συστήματος είναι τα  $P_1 = \{1,2\}, P_2 = \{4,5\}, P_3 = \{1,3,5\}, P_4 = \{4,3,2\}$  και τα ε.σ.δ. τα  $C_1 = \{1,4\}, C_2 = \{2,5\}, C_3 = \{1,3,5\}, C_4 = \{4,3,2\}$ . Άρα, οι ισοδύναμες αναπαραστάσεις της γέφυρας είναι:



Αναπαράσταση μέσω ε.σ.λ.

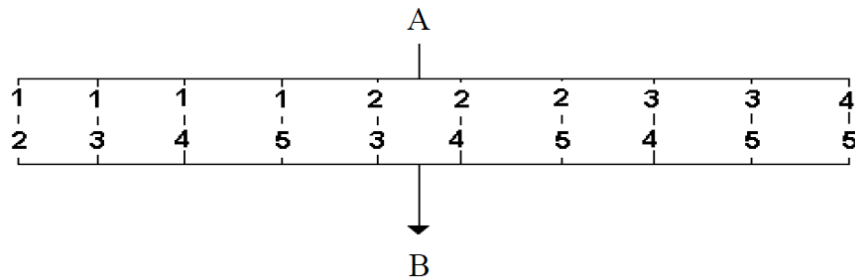
Σχήμα 1.6.1



Αναπαράσταση μέσω ε.σ.δ.

Σχήμα 1.6.2. ■

**Παράδειγμα 1.6.4.** Στο σύστημα  $k$ -από-τα- $n:G$ , τα ε.σ.λ. του είναι όλα τα υποσύνολα του  $\{1, 2, \dots, n\}$  που περιέχουν  $k$  το πλήθος στοιχεία. Ειδικά για το 2-από-τα-5: $G$ , η ισοδύναμη αναπαράσταση του είναι:



Σχήμα 1.6.3. ■

### 1.7. Ανάλυση Συστημάτων σε Modules

Οι *Birnbaum & Esary* (1965) παρέθεσαν μια νέα μέθοδο υπολογισμού της συνάρτησης δομής ενός συστήματος. Αυτή βασιζόταν στη διάσπαση ενός συστήματος, σε έναν αριθμό μικρότερων υποσυστημάτων, τα *modules*.

**Συμβολισμός:** Αν  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq I_n$ ,  $m \leq n$  τότε θα συμβολίζουμε με  $x^A$  το διάνυσμα  $x^A = \{x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_m}\}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1.** Έστω ένα μονότονο σύστημα με σύνολο μονάδων το  $\{1, 2, \dots, n\} \equiv I_n$  και συνάρτηση δομής  $\varphi$  (το ζεύγος θα συμβολίζεται με  $(I_n, \varphi)$ ). Έστω ακόμα  $M_i, i = 1, 2, \dots, r$  υποσύνολα του  $I_n$  τέτοια ώστε  $M_i \cap M_j = \emptyset$  για  $i \neq j$  και  $\cup_i M_i = I_n$  (το  $M_i, i = 1, 2, \dots, r$  είναι μια διαμέριση του  $I_n$ ). Τότε εάν οι μονάδες κάθε  $M_i$  ξεχωριστά είναι συνδεδεμένες έτσι

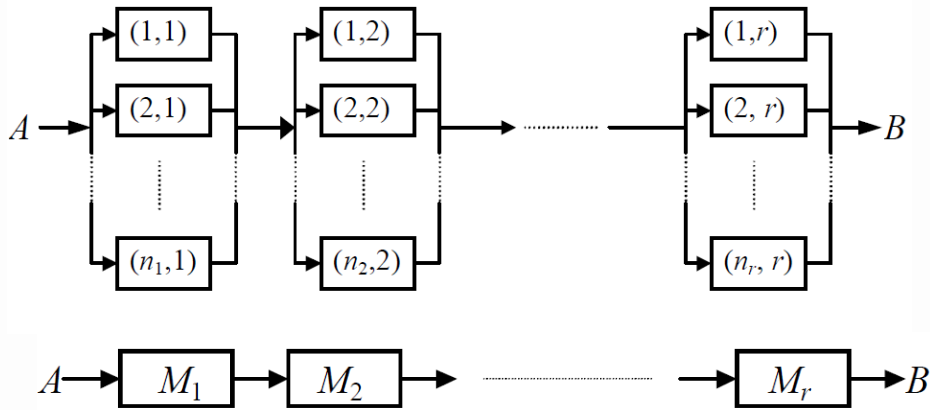


ώστε να αποτελούν ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής  $\psi_i(\mathbf{x}^{M_i})$  και επιπλέον η συνάρτηση δομής  $\varphi$  μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \zeta(\psi_1(\mathbf{x}^{M_1}), \psi_2(\mathbf{x}^{M_2}), \dots, \psi_r(\mathbf{x}^{M_r})),$$

όπου  $\zeta$  είναι μια συνάρτηση δομής με διάνυσμα καταστάσεων το  $\zeta(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}^{M_1}), \psi_2(\mathbf{x}^{M_2}), \dots, \psi_r(\mathbf{x}^{M_r})$ , θα λέμε ότι έχουμε μία **διάσπαση σε modules** (*modular decomposition*) του αρχικού συστήματος με **οργανωτική** (*organizing*) συνάρτηση την  $\zeta$ . ■

**Παράδειγμα 1.7.1.** (σειριακό-παράλληλο σύστημα). Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα το οποίο λειτουργεί αν είναι δυνατή η μετάβαση από το σημείο A στο B μέσω μονάδων που λειτουργούν.



Σχήμα 1.7.1

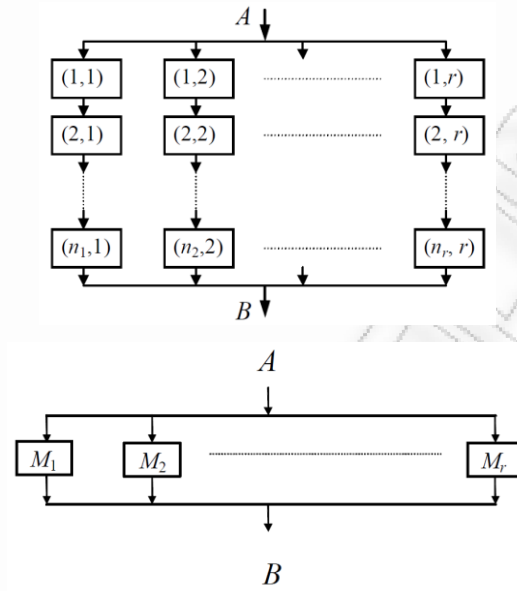
Υπάρχουν  $r$  υποσυστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα παράλληλο σύστημα που αποτελείται από  $n_i$  μονάδες. Για τη συνάρτηση δομής  $\psi_i$  του  $i$ -υποσυστήματος έχουμε:

$$\psi_i(\mathbf{x}^{M_i}) = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - x_{(j,i)}), \quad \mathbf{x}^{M_i} = (x_{(1,i)}, x_{(2,i)}, \dots, x_{(n_i,i)}),$$

ενώ η συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος θα είναι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^r \psi_i(\mathbf{x}^{M_i}) = \prod_{i=1}^r \left( 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - x_{(j,i)}) \right). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.7.2.** (παράλληλο-σειριακό σύστημα). Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα το οποίο λειτουργεί αν είναι δυνατή η μετάβαση από το σημείο A στο B μέσω μονάδων που λειτουργούν.



Σχήμα 1.7.2

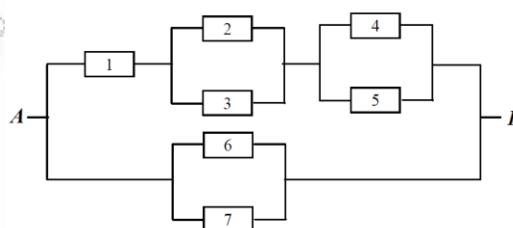
Υπάρχουν  $r$  υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα σειριακό σύστημα που αποτελείται από  $n_i$  μονάδες. Για τη συνάρτηση δομής  $\psi_i$  του  $i$ -υποσυστήματος έχουμε:

$$\psi_i(x^{M_i}) = \prod_{j=1}^{n_i} x_{(j,i)}, \quad x^{M_i} = (x_{(1,i)}, x_{(2,i)}, \dots, x_{(n_i,i)})$$

ενώ η συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος θα είναι:

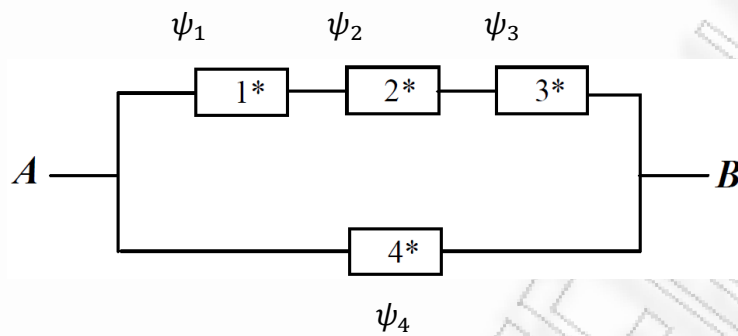
$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - \psi_i(x^{M_i})) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - \prod_{j=1}^{n_i} x_{(j,i)}). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.7.3.** Ας θεωρήσουμε το επόμενο σύστημα που αποτελείται από  $n = 7$  μονάδες.



Σχήμα 1.7.3

Ορίζουμε  $M_1 = \{1\}$ ,  $M_2 = \{2,3\}$ ,  $M_3 = \{4,5\}$ ,  $M_4 = \{6,7\}$  και έτσι το σύστημα αναλύεται σε τέσσερα *modules* με οργανωτική δομή που περιγράφεται ως εξής:



Σχήμα 1.7.4

$$\varphi(x) = \zeta(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2}), \dots, \psi_r(x^{M_r}))$$

όπου:

$$\psi_1(x^{M_1}) = \psi_1(x_1) = x_1$$

$$\psi_2(x^{M_2}) = \psi_2(x_2, x_3) = x_2 \sqcup x_3 = 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)$$

$$\psi_3(x^{M_3}) = \psi_3(x_4, x_5) = x_4 \sqcup x_5 = 1 - (1 - x_4)(1 - x_5)$$

$$\psi_4(x^{M_4}) = \psi_4(x_6, x_7) = x_6 \sqcup x_7 = 1 - (1 - x_6)(1 - x_7).$$

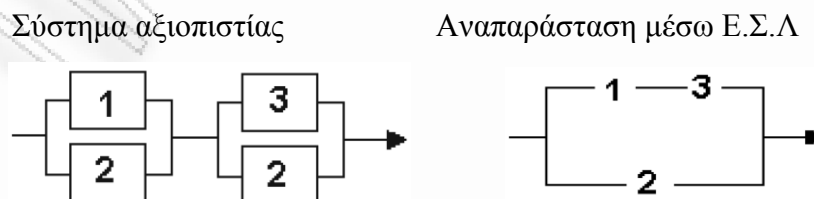
Για την οργανωτική συνάρτηση θα έχουμε:

$$\zeta(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \psi_1 \psi_2 \psi_3 \sqcup \psi_4 = 1 - (1 - \psi_1 \psi_2 \psi_3)(1 - \psi_4)$$

και άρα:

$$\varphi(x) = \zeta(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (1 - [1 - x_1(1 - (1 - x_2)(1 - x_3))] \times (1 - (1 - x_4)(1 - x_5)))[1 - 1 - (1 - x_6)(1 - x_7)].$$

**Παράδειγμα 1.7.4.** Έστω το σύστημα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 1.7.5

Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει η διάσπαση σε *modules* δεν είναι εμφανής εύκολα. Κάνοντας όμως χρήση των ε.σ.λ. του συστήματος και σχηματίζοντας το ισοδύναμο με αυτό σύστημα, παίρνουμε τη διαμέριση  $M_1 = \{1,3\}$ ,  $M_2 = \{2\}$ . Έτσι:

$$\psi_1(x^{M_1}) = x_1x_3, \psi_2(x^{M_2}) = x_2,$$

και άρα:

$$\varphi(x) = \zeta(\psi_1(x^{M_1}), \psi_2(x^{M_2})) = \prod_{i=1}^2 \psi_i(x^{M_i}) = 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_2). \quad \blacksquare$$

Είναι αναμενόμενο σε μερικά συστήματα να μην μπορεί να γίνει *modular decomposition*. Για παράδειγμα αναφέρουμε το σύστημα της γέφυρας και το  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  ή  $G$ . Γενικά, αν ένα σύστημα έχει ε.σ.δ. (ή ε.σ.λ.) ξένα ανά δύο, τότε μπορεί να διασπαστεί σε *modules*.

**Πρόταση 1.7.1.** Για ένα μονότονο σύστημα αξιοπιστίας με  $n$  μονάδες, ισχύουν τα παρακάτω:

- $\varphi(\mathbf{0}) = 0$  και  $\varphi(\mathbf{1}) = 1$
- $\varphi(x \sqcup y) \geq \prod \varphi(x) \varphi(y)$
- $\varphi(xy) \leq \varphi(x) \varphi(y)$

όπου  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $x \sqcup y = \prod x_1 y_1, \prod x_2 y_2, \dots, \prod x_n y_n$ ,  $xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$  και  $\prod x_1 y_1 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$ .  $\blacksquare$

Η δεύτερη σχέση του παραπάνω θεωρήματος μας λέει ότι, αν έχουμε στη διάθεσή μας  $2n$  μονάδες και θέλουμε να φτιάξουμε μονότονα συστήματα με συγκεκριμένη μορφή (ή συνάρτηση δομής), τότε είναι προτιμότερο να θεωρήσουμε ως μία μονάδα δύο παράλληλα συνδεδεμένες μονάδες (μία  $x_i$  και μία  $y_i$ ), παρά να συνδέσουμε παράλληλα δύο όμοια συστήματα με  $n$  μονάδες το καθένα.

**Παράδειγμα 1.7.1.** Έστω ότι έχουμε στη διάθεση μας 6 όμοιες μονάδες και θέλουμε να φτιάξουμε ένα σειριακό σύστημα με αυτές. Τότε αν συμβολίσουμε με  $x = (x_1, x_2, x_3)$  τις τρεις πρώτες μονάδες και με  $y = (y_1, y_2, y_3)$  τις υπόλοιπες, το σύστημα του σχήματος 1.7.6 με συνάρτηση δομής:

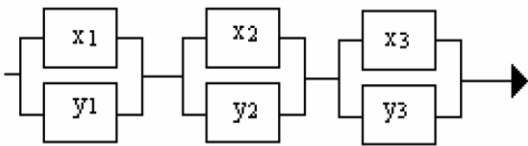
$$\varphi(x \sqcup y) = \prod_{i=1}^3 1 - (1 - x_i)(1 - y_i)$$

είναι καλύτερο από σύστημα του Σχήματος 1.7.7, του οποίου η συνάρτηση δομής είναι:

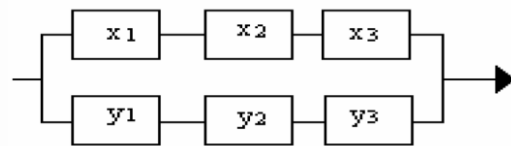
$$\varphi'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) = 1 - (1 - \varphi(\mathbf{x}))(1 - \varphi(\mathbf{y})).$$

Η  $\varphi$  στην περίπτωση μας δίνεται από την σχέση:

$$\varphi(\mathbf{w}) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - w_i).$$



Σχήμα 1.7.6



Σχήμα 1.7.7

Ασφαλώς και τα δύο συστήματα είναι χειρότερα ή το πολύ ίδια, με το «απλό» σειριακό σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.4.1. ■

### 1.8. Το Δυικό Σύστημα

Έστω  $\varphi$  η συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος που αποτελείται από  $n$  μονάδες ( $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ). Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$\varphi^D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}),$$

με  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $\mathbf{1} - \mathbf{x} = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n)$  είναι επίσης συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με τον ίδιο αριθμό μονάδων. Το σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί η  $\varphi^D(\mathbf{x})$  ονομάζεται **δυικό σύστημα** (*dual system*) του αρχικού (ή πρωτεύοντος) συστήματος. Εφόσον  $\varphi^D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x})$  θα έχουμε  $\varphi^D(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 - \varphi(\mathbf{x})$ , και μπορούμε να γράψουμε:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi^D(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 \text{ και } \varphi^D(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1.$$

Επομένως θα ισχύουν τα παρακάτω:

- Το  $\mathbf{x}$  είναι ε.δ.λ. (δ.λ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το  $\mathbf{1} - \mathbf{x}$  είναι ε.δ.δ. (δ.δ.) του δυικού.
- Το  $\mathbf{x}$  είναι ε.δ.δ. (δ.δ.) του πρωτεύοντος αν και μόνο αν το  $\mathbf{1} - \mathbf{x}$  είναι ε.δ.λ. (δ.λ.) του δυικού.

Επίσης:

- Κάθε ε.σ.λ. (σ.λ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.δ. (δ.δ.) του δυικού.
- Κάθε ε.σ.δ. (δ.δ.) του πρωτεύοντος είναι ε.σ.λ. (σ.λ.) του δυικού.

Επομένως, όταν γνωρίζουμε τα ε.σ.δ. ή ε.σ.λ. ενός συστήματος, τότε μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε το δυικό του. Ακόμα ισχύει ότι  $(\varphi^D)^D = \varphi$ , δηλαδή το δυικό του δυικού, είναι το πρωτεύον. Όπως θα δούμε και παρακάτω, ορισμένες φορές το δυικό μερικών συστημάτων μπορεί να συμπίπτει με το πρωτεύον.

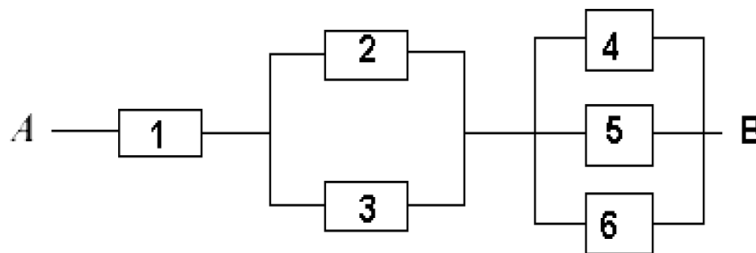
**Παράδειγμα 1.8.1.** Αν συμβολίζουμε με  $\varphi_{SS}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$  τη συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος (SS) και με  $\varphi_{PS}(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$  τη συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος (PS), είναι προφανές ότι:

$$\varphi_{PS}(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - \varphi_{SS}(\mathbf{1} - \mathbf{x})$$

$$1 - \varphi_{PS}(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [(1 - (1 - x_i))] \right\} = \prod_{i=1}^n x_i = \varphi_{SS}(\mathbf{x}).$$

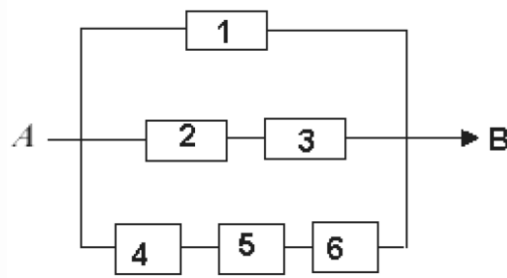
Δηλαδή το δυικό του σειριακού συστήματος είναι το παράλληλο και αντίστροφα. ■

**Παράδειγμα 1.8.2.** Ας θεωρήσουμε το σύστημα του παρακάτω σχήματος που αποτελείται από 6 μονάδες



Σχήμα 1.8.1

του οποίου τα ε.δ.δ. είναι τα  $C_1 = \{1\}$  και  $C_2 = \{2,3\}$  και  $C_3 = \{4,5,6\}$ . Το δυικό του μπορεί να βρεθεί να σχηματίσουμε ένα σύστημα με ε.σ.λ.  $P_1 = \{1\}$  και  $P_2 = \{2,3\}$  και  $P_3 = \{4,5,6\}$ , το οποίο δίνουμε γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.8.2

**Παράδειγμα 1.8.3.** Ας θεωρήσουμε το σύστημα  $k$ -από-τα- $n:F$ . Είδαμε ότι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \sum_{i=1}^n x_i \geq n - k + 1 \\ 0, & \alpha\nu \sum_{i=1}^n x_i < n - k + 1. \end{cases}$$

Για το δυικό του θα ισχύει :

$$\begin{aligned} \varphi^D(\mathbf{x}) = 1 &\Leftrightarrow 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \leq n - k \\ &\Leftrightarrow n - \sum_{i=1}^n x_i \leq n - k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq k \end{aligned}$$

ενώ:

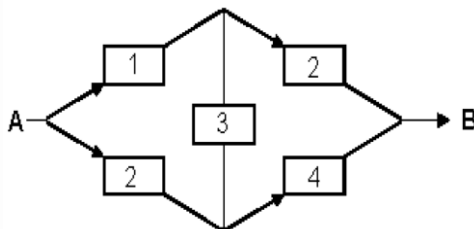
$$\begin{aligned} \varphi^D(\mathbf{x}) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (1 - x_i) > n - k \\ &\Leftrightarrow n - \sum_{i=1}^n x_i > n - k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\varphi^D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0, & \alpha\nu \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$$

Δηλαδή το δυικό σύστημα του  $k$ -από-τα- $n:F$  είναι το σύστημα  $k$ -από-τα- $n:G$ .

**Παράδειγμα 1.8.3.** Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με ε.σ.λ.  $P_1 = \{1,2\}$ ,  $P_2 = \{2,4\}$ ,  $P_3 = \{1,3,4\}$  και  $P_4 = \{2,3\}$ . Ένα τέτοιο σύστημα απεικονίζεται στο παρακάτω σύστημα, στο οποίο η μονάδα δύο εμφανίζεται δύο φορές. Παρατηρούμε ότι τα ε.σ.δ. αυτού του συστήματος είναι ίδια με τα ε.σ.λ., δηλαδή  $C_1 = \{1,2\}$ ,  $C_2 = \{2,4\}$ ,  $C_3 = \{1,3,4\}$  και  $C_4 = \{2,3\}$ .



$$\varphi^D(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \prod_{i \in P_j^D} x_i) = 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \prod_{i \in C_j} x_i) = 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - \prod_{i \in P_j} x_i)$$

και άρα  $\varphi^D(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ . ■

## 1.9. Η Συνάρτηση Αξιοπιστίας και Υπολογισμός της Μέσω της Συνάρτησης Δομής

Ως τώρα, περιγράψαμε τα συστήματα με βάση τη συνάρτηση δομής τους. Θεωρώντας ότι μπορούμε να εξασφαλίσουμε τη λειτουργία κάποιων μονάδων, εξετάζαμε τι γίνεται με την κατάσταση όλου του συστήματος. Όμως μια τέτοια ντετερμινιστική αντιμετώπιση του φαινομένου δεν είναι ρεαλιστική, καθώς η λειτουργία ενός συστήματος περιλαμβάνει κάποια στοχαστικότητα. Επομένως, θα είχαμε μια καλύτερη αξιολόγηση του συστήματος αν θεωρούσαμε την κατάσταση της κάθε μονάδας αλλά και ολόκληρου του συστήματος, ως τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) και εξετάζοντας την κατάσταση τους σε μια τυχαία χρονική στιγμή  $t$ .

Έτσι, για κάθε μονάδα ενός μονότονου συστήματος με  $I_n = \{1,2, \dots, n\}$ , ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{όταν η } i \text{ - μονάδα λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{όταν η } i \text{ - μονάδα δεν λειτουργεί την χρονική στιγμή } t. \end{cases}$$

Συμβολίζοντας με  $p_i$  την πιθανότητα λειτουργίας της  $i$ -μονάδας, θα έχουμε  $P(X_i) = 1 = p_i = E(X_i)$  και  $P(X_i) = 0 = 1 - p_i = q_i$ . Το διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, ενώ για τις τ.μ.  $X_i$  θα υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Η πιθανότητα  $p_i$  καλείται **αξιοπιστία της μονάδας  $i$** . Στην περίπτωση που ισχύει  $p_i = p$ , για κάθε  $i =$



1,2, ... n, δηλαδή όλες οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία, θα λέμε ότι θα έχουμε ένα σύστημα **i.i.d.** (*identically, independently distributed*).

Όμοια και για το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, την χρονική στιγμή  $t$ , θα βρίσκεται σε λειτουργία ή μη λειτουργία. Έτσι, η συνάρτηση δομής για την χρονική στιγμή  $t$  είναι μια τυχαία μεταβλητή και μάλιστα θα εξαρτάται από τις τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Δηλαδή:

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί την χρονική στιγμή } t \end{cases} = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Αν συμβολίσουμε με  $\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  την κατάσταση του συστήματος, η **αξιοπιστία  $R$  του συστήματος (Reliability)** την χρονική στιγμή  $t$ , θα δίνεται από τον τύπο:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = 1 \cdot P(\varphi(\mathbf{X}) = 1) + 0 \cdot P(\varphi(\mathbf{X}) = 0) = P(\varphi(\mathbf{X}) = 1).$$

Η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος την χρονική στιγμή  $t$ , θα συμβολίζεται με  $F$  και λέγεται **αναξιοπιστία** του συστήματος.

$$F = 1 - R = 1 - E(\varphi(\mathbf{X})) = E(1 - \varphi(\mathbf{X})) = P(\varphi(\mathbf{X}) = 0).$$

Η  $R$ , στην περίπτωση που δουλεύουμε μόνο με ανεξάρτητες μονάδες, αποδεικνύεται ότι γράφεται μόνο συναρτήσει των πιθανοτήτων  $p_i$ . Άρα  $R = R(\mathbf{p})$  με  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ .

Ας θεωρήσουμε ένα μονότονο σύστημα και ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. του συστήματος, έστω  $\mathbf{P}$  και  $\mathbf{C}$  αντίστοιχα. Είδαμε ότι η συνάρτηση δομής του δίνεται από τους τύπους:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{P \in \mathbf{P}} (1 - \prod_{i \in P} x_i) = \prod_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod_{i \in C} (1 - x_i)).$$

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές μπορούμε ένα γράψουμε:

$$\varphi(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{P \in \mathbf{P}} (1 - \prod_{i \in P} X_i) = \prod_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod_{i \in C} (1 - X_i))$$

και άρα η αξιοπιστία του συστήματος θα ισούται με:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left\{1 - \prod_{P \in \mathbf{P}} (1 - \prod_{i \in P} X_i)\right\} = E\left\{\prod_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod_{i \in C} (1 - X_i))\right\}.$$

**Παράδειγμα 1.9.1.** Υπολογισμός αξιοπιστίας για μερικά από τα γνωστά συστήματα.

- Σειριακό σύστημα.

Είδαμε ότι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^1 (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Άρα χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  μπορούμε να γράψουμε:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i) = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση θα έχουμε:

$$R = R(\mathbf{p}) = R_{SS} = p^n.$$

- Παράλληλο σύστημα

Είδαμε ότι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n).$$

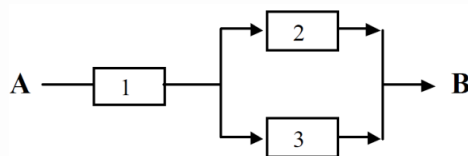
Άρα χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} R &= E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n E(1 - X_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - E(X_i)) \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n). \end{aligned}$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση θα έχουμε :

$$R = R(\mathbf{p}) = R_{PS} = 1 - (1 - p)^n.$$

- Σύστημα με τρεις μονάδες



Είδαμε ότι:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{j=1}^2 \left( 1 - \prod_{i \in P_j} x_i \right) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) \\ &= x_1 x_3 + x_1 x_2 - x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 + x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3.\end{aligned}$$

Αρα η αξιοπιστία του θα είναι ίση με:

$$\begin{aligned}R &= E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left(1 - \prod_{j=1}^2 \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right)\right) = E(X_1 X_3 + X_1 X_2 - X_1 X_2 X_3) \\ &= E(X_1)E(X_3) + E(X_1)E(X_2) - E(X_1)E(X_2)E(X_3) = \\ &= p_1 p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_3.\end{aligned}$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση θα έχουμε:

$$R = R(\mathbf{p}) = R_{PS} = 2p^2 - p^3.$$

- Σύστημα  $k$ -από-τα- $n$ : $G$

Είδαμε ότι:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left( 1 - \prod_{i=1}^k x_{a_i} \right) \\ &= \prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - x_{a_i}) \right).\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}R &= E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left(1 - \prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left(1 - \prod_{i=1}^k x_{a_i}\right)\right) \\ &= 1 - E\left(\prod_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left(1 - \prod_{i=1}^k x_{a_i}\right)\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η αξιοπιστία δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί, ιδιαίτερα για μεγάλα  $n, k$ , αφού στη γενική περίπτωση εμφανίζεται ένα γινόμενο  $\binom{n}{k}$  όρων. Στην *i.i.d.* περίπτωση ισχύει ο παρακάτω τύπος, εφόσον η τ.μ.  $Y = \sum_{j=1}^n X_j \sim B(n, p)$ ,

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Ειδικά για το 2-από-τα-4:G σύστημα:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_1 x_4)(1 - x_2 x_3)(1 - x_2 x_4)(1 - x_3 x_4) = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 - 2x_1 x_2 x_3 - 2x_1 x_2 x_4 - \\ &\quad - 2x_1 x_3 x_4 - 2x_2 x_3 x_4 + 3x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση ισχύει ότι  $R(\mathbf{p}) = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4$ . ■

Έστω  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  το σύνολο των ε.σ.λ. ενός μονότονου συστήματος. Τότε η συνάρτηση δομής θα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - \left\{ 1 + \sum_{r=1}^M (-1)^r \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{j=1}^r \prod_{i \in P_{a_j}} x_i \right\} \\ &= \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{a_j}} x_i, \end{aligned}$$

οπότε:

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E \left( \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{a_j}} X_i \right)$$

και η αξιοπιστία, λόγω της ανεξαρτησίας των  $X_i$ , θα είναι ίση με:

$$\begin{aligned} R &= E(\varphi(\mathbf{X})) = \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{a_j}} E(X_i) = \\ &= \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{a_j}} p_i. \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το σύνολο των ε.σ.δ.  $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$  αποδεικνύεται ότι:

$$R = 1 - \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \sum_{\{a_1 \dots a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r C_{a_j}} (1 - p_i).$$

### Παρατηρήσεις

- Η αξιοπιστία  $R(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, \dots, p_n) = E(\varphi(\mathbf{X}))$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς κάθε μία από τις  $n$  μεταβλητές  $p_1, p_2, \dots, p_n$  με  $R(\mathbf{0}) = 0$  και  $R(\mathbf{1}) = 1$ .
- Στην *i.i.d.* περίπτωση, η αξιοπιστία του συστήματος είναι πολυώνυμο ως προς  $p \in [0,1]$ , με βαθμό το πολύ  $n$ . Επιπλέον ισχύει  $R(0) = 0$  και  $R(1) = 1$
- Αν  $\varphi^D$  είναι η συνάρτηση δομής του δυικού συστήματος τότε:

$$\begin{aligned} R^D(p_1, p_2, \dots, p_n) &= E(\varphi^D(\mathbf{X})) = 1 - E(\varphi(\mathbf{1} - \mathbf{X})) = 1 - R(E(\mathbf{1} - \mathbf{X})) = \\ &= 1 - R(1 - p_1, 1 - p_2, \dots, 1 - p_n). \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.9.1.** Για κάθε μονότονο σύστημα με  $n$  μονάδες ισχύει:

$$R_{SS}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^n p_i \leq R \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = R_{PS}(\mathbf{p}). \quad \blacksquare$$

Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει πως η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος είναι μεγαλύτερη από την αξιοπιστία ενός σειριακού συστήματος με τις ίδιες μονάδες, και μικρότερη από την αξιοπιστία του αντίστοιχου παράλληλου.

**Πρόταση 1.9.2.** Για κάθε σύστημα με συνάρτηση δομής  $\varphi$  ισχύουν τα εξής:

- $R(\mathbf{p}) = p_i R(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) R(0_i, \mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, n.$
- $R(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} (\prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}) \varphi(\mathbf{y}). \quad \blacksquare$

### Πρόταση 1.9.3.

**α.** Η αξιοπιστία  $R(\mathbf{p})$  ενός μονότονου συστήματος με  $n > 1$  μονάδες είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε  $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Αν επιπλέον  $0 < \mathbf{p} < 1$ , τότε η  $R$  είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Η αξιοπιστία  $R(\mathbf{p}) = (p, p, \dots, p)$  ενός *i.i.d.* μονότονου συστήματος είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση του  $p$ , με:

$$R(0) = 0, \quad R(1) = 1, \quad p^n \leq R \leq 1 - (1 - p)^n. \quad \blacksquare$$

### 1.10. Υπολογισμός της αξιοπιστίας μέσω της διάσπασης σε *modules*

Έστω ένα μονότονο σύστημα το οποίο μπορεί να διασπαστεί σε *modules*. Η συνάρτηση δομής του θα γράφεται στη μορφή:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \zeta(\psi_1(\mathbf{x}^{M_1}), \psi_2(\mathbf{x}^{M_2}), \dots, \psi_r(\mathbf{x}^{M_r})).$$

Χρησιμοποιώντας τις τ.μ.  $Y = \psi_i(\mathbf{X}^{M_i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , η αξιοπιστία του συστήματος θα ισούται με:

$$\begin{aligned} R_\varphi &= E(\varphi(\mathbf{x})) = E(\zeta(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)) = R_\zeta(E(Y_1), E(Y_2), \dots, E(Y_r)) \\ &= R_\zeta(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r}), \end{aligned}$$

όπου  $R_\zeta$  είναι η αξιοπιστία του συστήματος με συνάρτηση δομής  $\zeta$  και μονάδες τα  $r$  υποσυστήματα (*modules*), ενώ  $R_{\psi_i}$  είναι η αξιοπιστία του συστήματος με συνάρτηση δομής την  $\psi_i$  και μονάδες τις  $M_i$ .

Επομένως, για να υπολογισθεί η αξιοπιστία του αρχικού συστήματος, αρκεί να υπολογισθεί η αξιοπιστία των *modules*, καθώς και η αξιοπιστία του συστήματος στο οποίο έχουμε θεωρήσει ως μονάδες τα *modules*.

#### Παράδειγμα 1.10.1. (Σειριακό-Παράλληλο σύστημα)

Είδαμε ότι αποτελείται από  $r$  υποσυστήματα (*modules*), κάθε ένα από τα οποία είναι ένα παράλληλο σύστημα με  $n_i$  μονάδες. Για τη συνάρτηση δομής του  $i$ -υποσυστήματος έχουμε:

$$\psi_i(\mathbf{x}^{M_i}) = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - x_{(j,i)}), \quad \mathbf{x}^{M_i} = (x_{(1,i)}, x_{(2,i)}, \dots, x_{(n_i,i)}),$$

ενώ η οργανωτική συνάρτηση είναι η:

$$\zeta = \zeta(y_1, y_2, \dots, y_r) = y_1 y_2 \dots y_r.$$

Για τις αντίστοιχες αξιοπιστίες έχουμε:

$$R_{\psi_i} = E(\psi_i(\mathbf{x}^{M_i})) = E\left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - x_{(j,i)})\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{(j,i)})$$

και  $R_{\zeta}(p_1, p_2, \dots, p_r) = p_1 p_2 \dots p_r$ , οπότε η αξιοπιστία του συστήματος θα ισούται με:

$$R_{\varphi}(\mathbf{p}) = R_{\zeta}(R_{\psi_1}, R_{\psi_2}, \dots, R_{\psi_r}) = R_{\psi_1} R_{\psi_2} \dots R_{\psi_r} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{(j,i)})\right).$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση έχουμε:

$$R_{\varphi}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^r (1 - (1 - p)^{n_i}). \quad \blacksquare$$

### Παράδειγμα 1.10.1. (Παράλληλο-σειριακό σύστημα)

Είδαμε ότι αποτελείται από  $r$  υποσυστήματα (*modules*), κάθε ένα από τα οποία είναι ένα παράλληλο σύστημα με  $n_i$  μονάδες και μπορεί να μελετηθεί με τον ίδιο τρόπο. Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει χρήση του γεγονότος ότι είναι το δίκιο σύστημα του σειριακού-παράλληλου συστήματος, οπότε:

$$R_{\varphi}(\mathbf{p}) = 1 - (1 - R_{\psi_1})(1 - R_{\psi_2}) \dots (1 - R_{\psi_r}) = 1 - \prod_{i=1}^r \left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} p_{(j,i)}\right).$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση έχουμε:

$$R_{\varphi}(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - p^{n_i}). \quad \blacksquare$$

### 1.11. Υπολογισμός Αξιοπιστίας με Χρήση της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Ένας αρκετά διαδεδομένος τρόπος υπολογισμού της αξιοπιστίας ενός μονότονου συστήματος είναι μέσω της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (*Inclusion-exclusion*), η οποία χρησιμοποιεί τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. ενός συστήματος. Συγκεκριμένα έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ.  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  και ε.σ.δ.  $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ . Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$A_j$  : λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.λ.  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

$B_j$  : λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.δ.  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Εφόσον το σύστημα λειτουργεί, εφόσον όλες οι μονάδες ενός ε.σ.λ. λειτουργούν, μπορούμε να γράψουμε:

$$R = P(\varphi(x)) = 1 = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_M).$$

Όμοια, αφού το σύστημα δεν λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες ενός ε.σ.δ. αποτύχουν, μπορούμε να γράψουμε:

$$F = 1 - R = P(\varphi(x)) = 0 = P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N).$$

Για τον υπολογισμό των ενώσεων, θα κάνουμε χρήση του τύπου του *Poincare*.

**Πρόταση 1.11.1** (Τύπος του *Poincare*). Αν  $E_1, E_2, \dots, E_n$  είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε ισχύει:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{r-1} S_r = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

όπου:

$$S_r = S_{n,r} = \sum_{\substack{\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \\ \subseteq \{1, 2, \dots, n\}}} P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_r}).$$

Για παράδειγμα, για δύο ενδεχόμενα έχουμε:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

και για τρία ενδεχόμενα:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 E_2) - P(E_1 E_3) - P(E_2 E_3) + P(E_1 E_2 E_3).$$

**Πρόταση 1.11.2.** Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ.  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  και ε.σ.δ.  $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ . Τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τους τύπους:

$$R = P\left(\bigcup_{i=1}^M A_i\right) = \sum_{r=1}^M (-1)^{r-1} S_r,$$

όπου:

$$S_r = \sum_{\substack{\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \\ \subseteq \{1, 2, \dots, M\}}} P\left(\bigcap_{j=1}^r A_{a_j}\right), \quad P\left(\bigcap_{j=1}^r A_{a_j}\right) = P(X_i = 1, i \in P_{a_j}) = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^r P_{a_j}} p_i$$



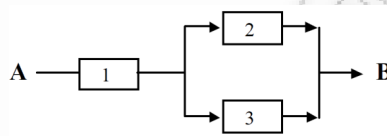
και:

$$R = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) = 1 - \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} S_r,$$

όπου:

$$S_r = \sum_{\substack{\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \\ \subseteq \{1, 2, \dots, N\}}} P\left(\bigcap_{j=1}^r B_{a_j}\right), \quad P\left(\bigcap_{j=1}^r B_{a_j}\right) = \prod_{i \in \bigcup_{j=1}^r C_{a_j}} (1 - p_i).$$

**Παράδειγμα 1.11.1.** Έστω το σύστημα με τρεις μονάδες:



Είδαμε ότι τα ε.σ.λ. του συστήματος είναι τα  $P_1 = \{1, 2\}$  και  $P_2 = \{1, 3\}$ . Ορίζοντας:

- $A_1$  : Να λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.λ.  $P_1$ , δηλαδή οι μονάδες 1 και 2
- $A_2$  : Να λειτουργούν όλες οι μονάδες του ε.σ.λ.  $P_2$ , δηλαδή οι μονάδες 1 και 3,

θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_3 = 1) \\ &\quad - P([X_1 = 1, X_2 = 1] \cap [X_1 = 1, X_3 = 1]) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) \\ &\quad - P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = p_1 p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_3. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.11.2.** Στο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  σύστημα, το σύνολο των ε.σ.δ. είναι το  $\mathcal{C} = \{j, j + 1, \dots, j + k - 1\}, j = 1, 2, \dots, n - k + 1$ , και επομένως η αξιοπιστία είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί στην περίπτωση που τα  $k$  και  $n$  είναι μεγάλα. Στην ειδική περίπτωση του συνεχόμενου 2-από-τα-4: $F$  συστήματος έχουμε  $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$  και άρα:

$$\begin{aligned} R &= 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \\ &= 1 - P(B_1) - P(B_2) - P(B_3) + P(B_1 B_2) + P(B_2 B_3) + P(B_1 B_3) - P(B_1 B_2 B_3) \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) - (1 - p_2)(1 - p_3) - (1 - p_3)(1 - p_4) \\ &\quad + (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) \\ &= p_1 p_3 + p_2 p_3 + p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 - p_2 p_3 p_4. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 1.12. Υπολογισμός Αξιοπιστίας Μέσω Αναδρομικών Σχέσεων

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος μπορεί εύκολα να υπολογισθεί μέσω ενός αναδρομικού τύπου. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  σύστημα και έστω  $R_n$  η αξιοπιστία του. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$D_i$ : Το συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $i:F$  σύστημα, που αποτελείται από τις μονάδες  $1, 2, \dots, i$ , δεν λειτουργεί.

Τότε για  $n > k$  ισχύει :

$$\begin{aligned} 1 - R_n &= P(D_n) = P(D_n \cap D_{n-1}) + P(D_n \cap D_{n-1}^c) = P(D_{n-1}) + P(D_n \cap D_{n-1}^c) = \\ &= 1 - R_{n-1} + P([X_{n-k+1} = \dots = X_n = 0, X_{n-k} = 1] \cap D_{n-k+1}^c) = \\ &= 1 - R_{n-1} + p_{n-k} \prod_{i=n-k+1}^n (1 - p_i) R_{n-k+1}. \end{aligned}$$

Άρα για την αξιοπιστία  $R_n$  του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος, θα ισχύει η αναδρομική σχέση :

$$R_n = R_{n-1} - p_{n-k} \prod_{i=n-k+1}^n (1 - p_i) R_{n-k+1},$$

με αρχικές συνθήκες :

- $R_n = 1$  για  $n < k$
- $R_k = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i)$ .

### 1.13. Η Μέθοδος Αθροίσματος Ξένων Γινομένων

Η μέθοδος αθροίσματος ξένων γινομένων (*Sum of disjoint products, SDP*) αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τους *Fratta and Montanari* το 1973. Ο *Abraham* το 1979 παρουσίασε μία βελτιωμένη εκδοχή της *SDP*, αλλά ο *Locks* ήταν αυτός που την ανέπτυξε ως μέθοδο υπολογισμού αξιοπιστίας με τα άρθρα του το 1980, 1982, 1984 και 1987. Η μέθοδος *SDP* χρησιμοποιεί τα ε.σ.λ. ή τα ε.σ.δ. του συστήματος για να υπολογίσει την πιθανότητα της ένωσης ορισμένων ενδεχομένων μέσω συναρτήσεων *Boole*. Ο στόχος της είναι να εκφράσει τη συνάρτηση δομής του συστήματος ως ένωση ξένων όρων. Κάθε ένας από αυτούς τους ξένους όρους, είναι ένα γινόμενο από ενδεχόμενα που δείχνουν αν μεμονωμένες μονάδες του συστήματος είτε λειτουργούν ή αποτυγχάνουν. Η μέθοδος *SDP*, διαφέρει από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού στα πρόσημα (συν ή πλην) των όρων στους όρους του τύπου της συνάρτησης αξιοπιστίας του συστήματος. Στην αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, τα πρόσημα

των όρων εναλλάσσονται από συν σε πλην, λόγω της διπλής προσμέτρησης στις προηγούμενες πράξεις εγκλεισμού. Με τη μέθοδο *SDP* όμως, όλοι οι όροι συμπεριλαμβάνονται, κανείς δεν μετριέται δύο φορές και όλοι οι όροι έχουν θετικό πρόσημο. Ένας *SDP* τύπος για οποιαδήποτε, αλλά μικρά συστήματα, είναι μικρότερος από τον τύπο που προκύπτει από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Η μέθοδος *SDP* βασίζεται στον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων. Θυμίζουμε ότι αν δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία, η πιθανότητα όπως ένα τουλάχιστον ενδεχόμενο πραγματοποιείται είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των μεμονωμένων ενδεχομένων. Αν δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  έχουν κοινά στοιχεία, τότε η ένωση τους  $A \cup B$  είναι ίση με την ένωση του ενδεχομένου  $A$  και του ενδεχομένου  $\bar{A}B$ , όπου  $\bar{A}$  είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του  $A$  και  $\bar{A}B = \bar{A} \cap B$ . Έτσι έχουμε την παρακάτω εξίσωση για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $A \cup B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Για τρία ενδεχόμενα έχουμε:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}C),$$

ενώ για  $n$  ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  έχουμε:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + \dots + P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1} A_n).$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει την πιθανότητα της ένωσης  $n$  ενδεχομένων ως άθροισμα  $n$  όρων πιθανότητας. Κάθε επιπλέον όρος εκφράζει τη συνεισφορά του επιπλέον ενδεχομένου στην πιθανότητα της ένωσης. Για παράδειγμα, ο όρος  $P(A_1)$  εκφράζει τη συνεισφορά του πρώτου ενδεχομένου,  $A_1$ , στην πιθανότητα της ένωσης. Ο δεύτερος όρος  $P(\bar{A}_1 A_2)$  εκφράζει την επιπλέον συνεισφορά του ενδεχομένου  $A_2$  που δεν έχει μετρηθεί, ως προς την πιθανότητα της ένωσης. Η έκφραση της πιθανότητας της ένωσης  $n$  ενδεχομένων, ως άθροισμα  $n$  όρων πιθανοτήτων, είναι άμεση. Όμως, η πραγματική πρόκληση είναι να εκτιμήσουμε την επιπλέον συνεισφορά ενός επιπλέον ενδεχομένου, που δεν έχει λογαριασθεί σε κανένα από τα προηγούμενα ενδεχόμενα.

Οι *Abraham* (1979), *Locks* (1987) και *Wilson* (1990) χώρισαν την εφαρμογή του προσθετικού νόμου σε δύο βρόχους (*loops*), τον εξωτερικό και τον εσωτερικό. Ειδικοί κανόνες περιλαμβάνονται στον εσωτερικό βρόχο για την αποδοτικότερη εκτίμηση της

επιπλέον συνεισφοράς στην ένωση, από ένα ενδεχόμενο το οποίο δεν έχει λογαριασθεί σε κανένα από τα προηγούμενα ενδεχόμενα. Τώρα θα περιγράψουμε τους δύο βρόχους.

**Εξωτερικός βρόχος (*outer loop*).** Ο εξωτερικός βρόχος της μεθόδου *SDP* βασίζεται στον τύπο του αθροίσματος  $n$  ενδεχομένων. Έστω ότι τα  $l$  ε.σ.λ. του συστήματος είναι τα  $MP_1, MP_2, \dots, MP_l$ . Έστω ότι  $S_k$  είναι η συνεισφορά του  $k$ -οστού ε.σ.λ. στην ένωση όλων των ε.σ.λ. για  $1 \leq k \leq l$ . Έτσι, έχουμε τις παρακάτω επαναληπτικές εξισώσεις για τον υπολογισμό του  $S_k$ :

$$S_1 = MP_1$$

$$S_k = \overline{MP_1} \overline{MP_2} \dots \overline{MP_{k-1}} MP_k, 1 \leq k \leq l.$$

Έστω  $U_k = P(S_k), 1 \leq k \leq l$ . Τότε το  $U_k$  είναι η πιθανότητα ότι το  $k$ -οστό ε.σ.λ. είναι το πρώτο ε.σ.λ. το οποίο κάνει το σύστημα να λειτουργεί. Με άλλα λόγια,  $U_k$  είναι η πιθανότητα ότι τα πρώτα  $k - 1$  ε.σ.λ. έχουν αποτύχει, και το  $k$ -οστό ε.σ.λ. λειτουργεί. Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$R_S = U_1 + U_2 + \dots + U_l.$$

Μέσα από τις επιτυχείς επαναλήψεις του εξωτερικού βρόχου, βρίσκουμε όλο και πιο στενά κάτω φράγματα στην αξιοπιστία του συστήματος. Όταν όλα τα ε.σ.λ. έχουν απαριθμηθεί, η ακριβής αξιοπιστία του συστήματος βρίσκεται ως εξής:

$$Lower_1 = U_1$$

$$Lower_2 = Lower_1 + U_2$$

$$Lower_3 = Lower_2 + U_3$$

$$\vdots$$

$$R_S = Lower_{l-1} + U_l.$$

Η σειρά με την οποία παίρνουμε τα ε.σ.λ. ή τα ε.σ.δ. παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Έτσι ο *Locks* (1987) και ο *Wilson* (1990) έδωσαν τις παρακάτω οδηγίες, με αριθμό προτεραιότητας:

1. Τα ε.σ.λ. (ή ε.σ.δ.) με τον μικρότερο αριθμό μονάδων θεωρούνται πρώτα. Για παράδειγμα, στο σύστημα της γέφυρας, έχουμε  $MP_1 = x_1 x_2$ ,  $MP_2 = x_4 x_5$ ,  $MP_3 = x_1 x_3 x_5$ ,  $MP_4 = x_2 x_3 x_4$ .

2. Ανάμεσα στα ε.σ.λ. ή ε.σ.δ. του ίδιου μεγέθους (δηλαδή με τον ίδιο αριθμό μονάδων), αυτό που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό κοινών μονάδων με το προηγούμενο ε.σ.λ. ή ε.σ.δ. είναι το επόμενο. Για παράδειγμα, ανάμεσα στα ε.σ.λ.  $bc$ ,  $cde$ ,  $adf$  και  $adg$ , η σωστή σειρά με βάση τους δύο πρώτους κανόνες είναι:  $MP_1 = bc$ ,  $MP_2 = cde$  και τα άλλα δύο μπορούν να ταξινομηθούν αυθαίρετα ως  $MP_3$  και  $MP_4$ .
3. Τα ε.σ.λ. ή ε.σ.δ. με τον ίδιο αριθμό μονάδων ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά (αν οι μονάδες είναι αριθμημένες) ή αλφαβητική σειρά (αν οι μονάδες έχουν ονομασθεί με γράμματα του αλφαβήτου). Για παράδειγμα στο σύστημα της γέφυρας έχουμε  $MP_1 = x_1x_2$ ,  $MP_2 = x_4x_5$ . Για τα δύο ε.σ.λ. του δεύτερου κανόνα, με βάση αυτόν τον κανόνα παίρνουμε  $MP_3 = adf$  και  $MP_4 = adg$ .
4. Οι μονάδες μέσα σε ένα ε.σ.λ. ή ένα ε.σ.δ. ταξινομούνται με αύξουσα ή αλφαβητική σειρά. Για παράδειγμα, αν οι μονάδες 1 και 2 σχηματίζουν ένα ε.σ.λ., τότε γράφουμε  $MP_1 = x_1x_2$ . Αν οι μονάδες a και c σχηματίζουν ένα ε.σ.λ., τότε γράφουμε  $MP_1 = ac$ .

**Εσωτερικός βρόχος (inner loop).** Ο εξωτερικός βρόχος λαμβάνει υπόψη ένα ή περισσότερα ε.σ.λ. σε κάθε επανάληψη. Στο  $k$ -στο βήμα του εξωτερικού βρόχου, όταν παίρνουμε το  $k$ -στό ε.σ.λ., ο εσωτερικός βρόχος είναι υπεύθυνος για την εύρεση της έκφρασης του ενδεχομένου που περιλαμβάνει το  $k$ -στό ε.σ.λ., αλλά κανένα από τα προηγούμενα  $k - 1$  ε.σ.λ. Τα επόμενα βήματα αντικατοπτρίζουν την εκτίμηση του  $k$ -στού όρου,  $S_k$ , όπου  $k > 1$ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση που είδαμε στον εξωτερικό βρόχο:

1. Αφαίρεσε τις μονάδες που βρίσκονται στο  $MP_k$  από κάθε ένα από τα προηγούμενα ε.σ.λ., δηλαδή τα  $MP_1, MP_2, \dots, MP_{k-1}$ . Βρες τη λογική έκφραση της ένωσης αυτών των τροποποιημένων  $k - 1$  ε.σ.λ. Χρησιμοποίησε την άλγεβρα Boole για να απλοποιήσεις την έκφραση της.
2. Αντέστρεψε την απλοποιημένη λογική έκφραση, δηλαδή βρες το συμπλήρωμα της.
3. Εξέφρασε την λογική έκφραση του προηγούμενου βήματος σαν ένα άθροισμα ξένων γινομένων.
4. Πολλαπλασίασε κάθε όρο της λογικής έκφρασης του προηγούμενου βήματος με τη λογική έκφραση του  $k$ -στού ε.σ.λ. Αυτό θα δώσει την έκφραση της  $S_k$  που αντιπροσωπεύει την επιπλέον συνεισφορά του  $MP_k$  και είναι ξένη με κάθε ένα από τα προηγούμενα ε.σ.λ.

Όταν βρούμε την  $S_k$ , η  $U_k$  υπολογίζεται απευθείας από αυτήν. Όταν βρεθεί η  $U_k$  για όλα τα  $k : 1 < k < l$ , μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε την  $R_S$  ως το άθροισμα όλων των  $U_k$ . Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα για να καταλάβουμε καλύτερα τη μέθοδο.

**Παράδειγμα 1.13.2.** Ας θεωρήσουμε το κλασικό σύστημα της γέφυρας. Είδαμε ότι τα ε.σ.λ. του συστήματος έχουν βρεθεί και ταξινομηθεί ως εξής :  $MP_1 = x_1x_2$ ,  $MP_2 = x_4x_5$ ,  $MP_3 = x_1x_3x_5$ ,  $MP_4 = x_2x_3x_4$ . Στον πρώτο εξωτερικό βρόχο, θεωρούμε το πρώτο ε.σ.λ.  $x_1x_2$ . Στον εσωτερικό βρόχο βρίσκουμε την  $S_1$ , από την οποία προκύπτει η  $U_1$  ως εξής:

$$S_1 = x_1x_2$$

$$U_1 = P(S_1) = p_1p_2.$$

Στον δεύτερο εξωτερικό βρόχο, θεωρούμε το δεύτερο ε.σ.λ.  $x_4x_5$ . Στον εσωτερικό βρόχο θα πρέπει να αφαιρέσουμε τα  $x_4$  και  $x_5$ , τα οποία είναι τμήματα του δεύτερου ε.σ.λ., από το προηγούμενο ε.σ.λ. Εφόσον δεν περιλαμβάνονται στο  $MP_1$ , προκύπτει ότι η λογική έκφραση είναι  $x_1x_2$ , η οποία δεν μπορεί να απλοποιηθεί παραπάνω. Αντιστρέφοντας την έκφραση αυτή παίρνουμε  $\bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ . Εκφράζοντας αυτή τη λογική έκφραση ως άθροισμα ξένων γινομένων παίρνουμε  $\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2$ . Πολλαπλασιάζοντας το  $MP_2$  με αυτή την έκφραση, παίρνουμε την  $S_2$  ως εξής:

$$S_2 = (\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2)x_4x_5 = \bar{x}_1x_4x_5 + x_1\bar{x}_2x_4x_5.$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το  $S_2$  είναι ένα άθροισμα δύο ξένων γινομένων, κάθε ένα από τα οποία είναι ξένο από κάθε ένα από τα προηγούμενα ε.σ.λ. Από την έκφραση της  $S_2$ , προκύπτει η  $U_2$  ως εξής:

$$U_2 = q_1p_4p_5 + p_1q_2p_4p_5.$$

Στον τρίτο εξωτερικό βρόχο, παίρνουμε το ε.σ.λ.  $x_1x_3x_5$ . Στον εσωτερικό βρόχο έχουμε τις παρακάτω λογικές εκφράσεις:

$$x_1x_2 + x_4x_5 \quad (\text{Αφαίρεσε τα } x_1, x_3, x_5 \text{ από αυτή την έκφραση, αν υπάρχουν})$$

$$x_2 + x_4 \quad (\text{Δεν χρειάζεται απλοποίηση, αντέστρεψε την έκφραση})$$

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \quad (\text{Πολλαπλασίασε την έκφραση με } x_1x_3x_5)$$

$$S_3 = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5$$

$$U_3 = p_1q_2p_3q_4p_5.$$

Στον τέταρτο εξωτερικό βρόχο, παίρνουμε το ε.σ.λ.  $x_2x_3x_4$ . Στον εσωτερικό βρόχο έχουμε τις παρακάτω λογικές εκφράσεις:

$$x_1x_2 + x_4x_5 + x_1x_3x_5 \quad (\text{Αφαίρεσε τα } x_2, x_3, x_4 \text{ από αυτή την έκφραση})$$

$$x_1 + x_5 + x_1x_5 \quad (\text{Απλοποίησε ώστε το } x_1x_5 \text{ να 'απορροφηθεί'})$$

$$x_1 + x_5 \quad (\text{Αντέστρεψε την έκφραση})$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_5 \quad (\text{Πολλαπλασίασε την έκφραση με } x_2x_3x_4)$$

$$S_4 = \bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5$$

$$U_4 = q_1p_2p_3p_4q_5.$$

Έτσι, θεωρήσαμε όλα τα ε.σ.λ. Η αξιοπιστία του συστήματος είναι:

$$R_s = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = p_1p_2 + q_1p_4p_5 + p_1q_2p_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4q_5.$$

Στην περίπτωση που έχουμε *i.i.d.* μονάδες τότε:

$$R_s = p^2 + qp^2 + qp^3 + 2q^2p^3. \quad \blacksquare$$

### Παράδειγμα 1.13.3.

Ας θεωρήσουμε πάλι το κλασικό σύστημα της γέφυρας. Θα υπολογίσουμε τώρα την αξιοπιστία του χρησιμοποιώντας τα ε.σ.δ. του συστήματος. Έχουμε ήδη βρει ότι τα ε.σ.δ. του συστήματος της γέφυρας είναι τα  $C_1 = \{1,4\}$ ,  $C_2 = \{2,5\}$ ,  $C_3 = \{1,3,5\}$ ,  $C_4 = \{2,3,4\}$ . Συμβολίζουμε με  $MC_i$  την συνάρτηση λογικής του *i*-οστού ε.σ.δ. Τότε:

$$MC_1 = \bar{x}_1\bar{x}_4, MC_2 = \bar{x}_2\bar{x}_5, MC_3 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5, MC_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4.$$

Έστω:

$$T_k = \overline{MC_1}, \overline{MC_2}, \dots, \overline{MC_{k-1}}, \overline{MC_k}$$

$$V_k = P(T_k).$$

Τότε για το πρώτο ε.σ.δ. έχουμε:

$$T_1 = \bar{x}_1\bar{x}_4$$

$$V_1 = P(T_1) = q_1q_4.$$

Για το δεύτερο ε.σ.δ. έχουμε:

$$\bar{x}_1\bar{x}_4 \quad (\text{Αντέστρεψε την έκφραση})$$

$$x_1 + x_4 = x_1 + \bar{x}_1x_4 \quad (\text{Πολλαπλασίασε ην έκφραση με } \bar{x}_2\bar{x}_5)$$

$$T_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_5$$

$$V_2 = p_1q_2q_5 + q_1q_2p_4q_5.$$

Για το τρίτο ε.σ.δ. έχουμε:

$$\bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_5 \quad (\text{Αφαίρεσε τα } \bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5 \text{ από την έκφραση})$$

$$\bar{x}_4 + \bar{x}_2 \quad (\text{Αντέστρεψε την έκφραση})$$

$$x_2x_4 \quad (\text{Πολλαπλασίασε την έκφραση με } \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5)$$

$$T_3 = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$$

$$V_3 = q_1p_2q_3p_4q_5.$$

Για το τέταρτο ε.σ.δ. έχουμε:

$$\bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5 \quad (\text{Αφαίρεσε τα } \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4 \text{ από την έκφραση})$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_5 \quad (\text{Απλοποίησε την έκφραση})$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_5 \quad (\text{Αντέστρεψε την έκφραση})$$

$$x_1x_5 \quad (\text{Πολλαπλασίασε την έκφραση με } \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4)$$

$$T_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$$

$$V_4 = p_1q_2q_3q_4p_5.$$

Η αναξιοπιστία και η αξιοπιστία του συστήματος βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$Q_s = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$R_s = 1 - Q_s = 1 - q_1q_4 - p_1q_2q_5 - q_1q_2p_4q_5 - q_1p_2q_3p_4q_5 - p_1q_2q_3q_4p_5.$$

Στην περίπτωση που έχουμε *i.i.d.* μονάδες τότε:

$$R_s = 1 - q^2 - pq^2 - pq^3 - 2p^2q^3. \quad \blacksquare$$

#### 1.14. Συστήματα Εμφυτεύσιμα σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες.

Έστω ένα σύστημα αξιοπιστίας που αποτελείται από  $n$  ανεξάρτητες μονάδες. Σε πολλές εφαρμογές μηχανικών συστημάτων, είναι δυνατόν να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά αξιοπιστίας τους αντικαθιστώντας τις  $2^n$  δυνατές καταστάσεις των μονάδων και τη συνάρτηση δομής, με  $N < 2^n$  καταστάσεις και μία κατάλληλη μαρκοβιανή αλυσίδα. Όταν το  $N$  είναι μικρό σε σύγκριση με το  $2^n$ , αυτή η προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο εργαλείο όχι μόνο για την εκτίμηση της αξιοπιστίας του συστήματος, αλλά και για την μελέτη άλλων χαρακτηριστικών της δομής, όπως η ασυμπτωτική της συμπεριφορά, η γεννήτρια συνάρτηση, η ανάπτυξη φραγμάτων αξιοπιστίας και προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού.

Μια πρόωπη δημοσίευση σε αυτή την κατεύθυνση έγινε από τον *Fu* το 1986, ενώ ακολούθησαν δημοσιεύσεις από τους *Chao and Fu* (1989, 1991), *Fu and Lou* (1991), οι



οποίοι χρησιμοποίησαν επιτυχημένα τη μέθοδο στα συστήματα  $k$ -από-τα- $n$  και συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ , τα οποία εμφύτευσαν σε μία μη ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα (ορισμένη σε ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων με κατάσταση απορρόφησης), και στη συνέχεια αναλύθηκαν με την εξέταση της εργοδικότητας (*ergodicity*) του γινομένου των πινάκων μετάβασης. Η πρώτη δημοσίευση που έκανε μία συστηματική παρουσίαση της τεχνικής, έγινε από τον Koutras (1996).

Έστω μια δομή αξιοπιστίας  $n$  μονάδων, οι οποίες είναι γραμμικά τοποθετημένες και αναφέρονται με αριθμούς  $1, 2, \dots, n$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι η αρχή λειτουργίας του συστήματος (*principle of operation*) έχει νόημα για κάθε υποσύστημα  $1, 2, \dots, t$  με  $t \leq n$ . Συνήθως η κατάρρευση μιας μονότονης δομής επιτυγχάνεται από προοδευτικές μεταβάσεις μέσα από διάφορα στάδια «χειροτέρευσης», έστω  $1, 2, \dots, m$ , όπου το  $0$  δηλώνει την τέλεια κατάσταση του συστήματος (καμία ελαττωματική μονάδα), και το  $m$  δηλώνει ότι το σύστημα βρίσκεται εκτός λειτουργίας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14.1.** Ένα σύστημα αξιοπιστίας θα λέγεται εμφυτεύσιμο σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα (*Markov Chain Imbeddable System, MIS*), αν:

1. Υπάρχει ένας πεπερασμένος χώρος καταστάσεων  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ , ο οποίος μπορεί να διασπαστεί ως  $S = \cup_{i=1}^m S_i$ , όπου  $S_i \cap S_j = \emptyset$  για κάθε  $i \neq j$  και
2. Υπάρχει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t = 0, 1, \dots\}$  ορισμένη στο  $S$  έτσι ώστε:
  - $Y_t \in S_i$  αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  έφτασε στο  $i$ -οστό επίπεδο χειροτέρευσης,  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ .
  - $Y_t \in S_m$  αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  σταμάτησε να λειτουργεί. ■

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να ταξινομήσουμε το χώρο καταστάσεων  $S$  έτσι ώστε  $S_i = \{s_{j_i}, s_{j_i+1}, \dots, s_{j_{i+1}-1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ , ( $j_0 = 0, j_m = N$ ) και  $S_m = \{s_N\}$ . Έστω  $p_{ij}(t) = P[Y_t = s_j | Y_{t-1} = s_i]$ ,  $t \geq 1$  οι πιθανότητες μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, και  $\Lambda_t = (p_{ij}(t))$  ο αντίστοιχος  $(N + 1) \times (N + 1)$  πίνακας μετάβασης. Από τη στιγμή που το σύνολο  $S_m = \{s_N\}$  περιγράφει την αποτυχία του συστήματος, το στάδιο  $s_N$  αντιστοιχεί σε μια κατάσταση απορρόφησης (*Absorbing state*), οπότε:

$$p_{N,i} = \begin{cases} 0, & i \neq N \\ 1, & i = N. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, η τελευταία σειρά του πίνακα μετάβασης  $\Lambda_t$  είναι ίση με  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ .

Έστω  $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)'$  τα μοναδιαία διανύσματα (στήλη) του χώρου  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{e}_j = (1, 1, \dots, 1)'$  και  $\mathbf{u} = \mathbf{1} - \mathbf{e}_{N+1} = (1, \dots, 1, 0)'$ . Συμβολίζουμε επίσης με  $\boldsymbol{\pi}_0 = (P(Y_0 = s_0), P(Y_0 = s_1), \dots, P(Y_0 = s_N))' \in \mathbb{R}^{N+1}$  το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων (*Vector of initial probabilities*) της Μαρκοβιανής αλυσίδας, και με  $R_t, F_t$  την αξιοπιστία και αναξιοπιστία αντίστοιχα, του υποσυστήματος  $1, 2, \dots, t$ , ( $1 \leq t \leq n$ ). Το επόμενο θεώρημα ακολουθεί άμεσα τον ορισμό του MIS συστήματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14.1.** Η αξιοπιστία και αναξιοπιστία ενός MIS συστήματος δίνεται από τους τύπους:

$$R_n = \boldsymbol{\pi}'_0 \left( \prod_{t=1}^n \Lambda_t \right) \mathbf{u}, \quad F_n = \boldsymbol{\pi}'_0 \left( \prod_{t=1}^n \Lambda_t \right) \mathbf{e}_{N+1}. \quad \blacksquare$$

Το παραπάνω θεώρημα δίνει έναν ακριβή τύπο υπολογισμού της αξιοπιστίας και αναξιοπιστίας ενός MIS συστήματος. Είναι πολύ σημαντικό, γιατί οι απλοί αυτοί τύποι είναι κατάλληλοι και για *i.i.d.* και για μη *i.i.d.* συστήματα. Το επόμενο θεώρημα παρέχει ένα αποτελεσματικό επαναληπτικό σχήμα για τον υπολογισμό των  $R_n$  και  $F_n$  ενός MIS συστήματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14.2.** Έστω  $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a_0(t), a_1(t), \dots, a_N(t))'$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , το διάνυσμα ακολουθίας το οποίο δημιουργήθηκε από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$a_j(t) = \sum_{i=0}^N a_i(t-1) p_{ij}(t), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

με αρχικές συνθήκες  $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$  (για παράδειγμα  $a_j(0) = \boldsymbol{\pi}'_0 \mathbf{e}_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ). Τότε:

$$R_n = \sum_{j=0}^{N-1} a_j(n), \quad F_n = a_N(n). \quad \blacksquare$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14.3.** Έστω  $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_N(t))'$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , το διάνυσμα ακολουθίας το οποίο δημιουργήθηκε από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\beta_j(t) = \sum_{i=0}^N \beta_i(t-1) p_{ji}(n-t+1), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

με αρχικές συνθήκες  $\boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$  (για παράδειγμα  $\beta_j(0) = \mathbf{u}' \mathbf{e}_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ).

Τότε:

$$R_n = \sum_{j=0}^{N-1} \pi_{0,j} \beta_j(n), \quad F_n = \sum_{j=0}^{N-1} \pi_{0,j} (1 - \beta_j(n)).$$

Στη συνήθη περίπτωση όπου  $\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{e}_1$ , θα έχουμε

$$R_n = \beta_0(n), \quad F_n = 1 - \beta_0(n). \quad \blacksquare$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14.4.** Για ένα MIS σύστημα με  $\Lambda_t = \Lambda, t = 1, 2, \dots$ , οι γεννήτριες συναρτήσεις:

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

της αξιοπιστίας και της αναξιοπιστίας αντίστοιχα, δίνονται από τους τύπους:

$$r(z) = \boldsymbol{\pi}'_0 (I - z\Lambda)^{-1} \mathbf{u}, \quad f(z) = \boldsymbol{\pi}'_0 (I - z\Lambda)^{-1} \mathbf{e}_{N+1}. \quad \blacksquare$$

Στη συνήθη περίπτωση όπου  $\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{e}_1$ , τότε ο υπολογισμός των  $r(z), f(z)$  επιτυγχάνεται εύκολα υπολογίζοντας την τελευταία είσοδο  $\alpha_{1,N+1}$  της πρώτης γραμμής του πίνακα  $(I - z\Lambda)^{-1}$ . Έτσι έχουμε:

$$f(z) = \alpha_{1,N+1}, \quad r(z) = \frac{1}{1-z} - \alpha_{1,N+1}.$$

**Παράδειγμα 1.14.1.** Θεωρούμε ένα σειριακό σύστημα  $n$  μονάδων, με αξιοπιστίες  $p_i (= 1 - q_i), i = 1, 2, \dots, n$ . Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα MIS σύστημα, αρκεί να θεωρήσουμε τον χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1\} = \{s_0, s_1\}$ , τη διαμέριση του  $S_0 = \{s_0\}$ ,  $S_1 = \{s_1\}$ , ( $N = m = 1$ ) και τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

- i.  $Y_t = 0$ , αν οι μονάδες  $1, 2, \dots, t$  λειτουργούν, ( $1 \leq t \leq n$ ).
- ii.  $Y_t = 1$ , αν τουλάχιστον μία από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  δεν λειτουργεί ( $1 \leq t \leq n$ ).

Προφανώς ο πίνακας μετάβασης είναι ο εξής:

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} p_t & q_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.14.2.** Θεωρούμε ένα παράλληλο σύστημα  $n$  μονάδων, με αξιοπιστίες  $p_i (= 1 - q_i), i = 1, 2, \dots, n$ . Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα MIS σύστημα, αρκεί να θεωρήσουμε τον χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, \dots, n\} = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ , τη διαμέριση του  $S_i = \{s_i\}$ , ( $N = m = n$ ) και τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , που ορίζεται από την

σχέση:  $Y_t = i$ , αν ακριβώς  $i$  από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  δεν λειτουργούν, ( $0 \leq i \leq n$ ). Ο πίνακας μετάβασης είναι ο εξής:

$$\Lambda_t = \left[ \begin{array}{cccc|c} p_t & q_t & & & \\ & p_t & q_t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p_t & q_t \\ \hline & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & 1 \end{array} \right]_{(n+1) \times (n+1)}$$

**Παράδειγμα 1.14.3.** Θεωρούμε ένα  $k$ -από-τα- $n$  σύστημα  $n$  μονάδων, με αξιοπιστίες  $p_i (= 1 - q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα MIS σύστημα, αρκεί να θεωρήσουμε τον χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, \dots, k\} = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ , τη διαμέριση του  $S_i = \{s_k\}$ , ( $N = m = k$ ) και τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

- i.  $Y_t = i$ , αν ακριβώς  $i$  από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  δεν λειτουργούν, ( $0 \leq i \leq k$ ).
- ii.  $Y_t = k$ , αν τουλάχιστον  $k$  από τις μονάδες  $1, 2, \dots, t$  δεν λειτουργούν.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda_t = \left[ \begin{array}{cccc|c} p_t & q_t & & & \\ & p_t & q_t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p_t & q_t \\ \hline & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & 1 \end{array} \right]_{(k+1) \times (k+1)}$$

Οι αναδρομικές σχέσεις δίνονται από τους τύπους:

$$a_0(t) = p_t a_0(t-1)$$

$$a_k(t) = q_t a_{k-1}(t-1) + a_k(t-1)$$

$$a_r(t) = q_t a_{r-1}(t-1) + p_t a_r(t-1), r = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\beta_k(t) = 0$$

$$\beta_r(t) = p_{n-t+1} \beta_r(t-1) + q_{n-t+1} \beta_{r+1}(t-1), r = 0, 1, \dots, k-1.$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση  $p_i = p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , η διακρίνουσα του πίνακα  $I - z\Lambda$  ισούται με  $(1-z)(1-pz)^k$ , κι έτσι:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{(qz)^k}{(1-z)(1-pz)^k}, \quad r(z) = \frac{1}{1-z} - f(z). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 1.14.4.** Θεωρούμε ένα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$  σύστημα  $n$  μονάδων, με αξιοπιστίες  $p_i (= 1 - q_i), i = 1, 2, \dots, n$ . Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα *MIS* σύστημα, αρκεί να θεωρήσουμε τον χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, \dots, k\} = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ , τη διαμέριση του  $S_i = \{s_i\}, i = 0, 1, \dots, k$  ( $N = m = k$ ) και τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

- i.  $Y_t = i$ , αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων μονάδων που δεν λειτουργούν είναι  $i$ , ( $0 \leq i \leq k$ ).
- ii.  $Y_t = n$ , αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων μονάδων που δεν λειτουργούν είναι μεγαλύτερο ή ίσο από  $k$ .

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda_t = \left[ \begin{array}{cccc|c} p_t & q_t & & & \\ p_t & & q_t & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ p_t & & & & q_t \\ \hline p_t & & & & q_t \\ \hline & & & & 1 \end{array} \right]_{(k+1) \times (k+1)}$$

Οι αναδρομικές σχέσεις δίνονται από τους τύπους:

$$a_0(t) = p_t \sum_{r=0}^{k-1} a_0(t-1) = p_t(1 - a_k(t-1))$$

$$a_k(t) = q_t a_{k-1}(t-1) + a_k(t-1)$$

$$a_r(t) = q_t a_{r-1}(t-1), \quad r = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\beta_k(t) = 0$$

$$\beta_r(t) = p_{n-t+1} \beta_0(t-1) + q_{n-t+1} \beta_{r+1}(t-1), \quad r = 0, 1, \dots, k-1.$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση  $p_i = p, i = 1, \dots, n$ , η διακρίνουσα του πίνακα  $I - z\Lambda$  ισούται με  $(1-z)(1-pz \sum_{j=0}^{k-1} (qz)^j)$ , κι έτσι:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{(qz)^k}{(1-z)(1-pz \sum_{j=0}^{k-1} (qz)^j)},$$

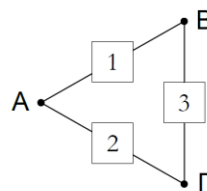
$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \frac{1 - (qz)^k}{1 - z + pq^k z^{k+1}}. \quad \blacksquare$$

### 1.15. Μετασχηματισμοί Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα.

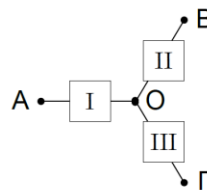
Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, όταν έχουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία πολύπλοκων συστημάτων, είναι δυνατόν να κάνουμε διάσπαση σε υποσυστήματα, κυρίως σειριακά και παράλληλα, ώστε το αρχικό σύστημα να απλοποιηθεί. Οι μετασχηματισμοί Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα (*Delta-Star and Star-Delta Transformations*) αποτελούν ένα εργαλείο το οποίο επιτρέπει την περαιτέρω απλοποίηση του αρχικού συστήματος σε σειριακά και παράλληλα υποσυστήματα.

Συγκεκριμένα, οι δομές οι οποίες μετασχηματίζονται αμοιβαία παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέτουμε ότι οι κόμβοι δεν αποτυγχάνουν ποτέ, ενώ είναι δυνατόν να αποτύχουν οι μονάδες που ενώνουν τους κόμβους. Οι μονάδες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

(i) Δομή Δέλτα



(ii) Δομή Αστεριού



Σχήμα 1.15.1

Σε ένα μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι αλλάζουμε τη δομή του συγκεκριμένου μέρους του συστήματος από τη μορφή τριγώνου στη μορφή ενός αστεριού, ενώ στο μετασχηματισμό Αστέρι-Δέλτα κάνουμε το αντίστροφο. Με τους μετασχηματισμούς που κάνουμε παράγουμε ένα καινούργιο σύστημα το οποίο είναι ισοδύναμο με το πρωτεύον. Χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- $A \sim B$  είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος  $A$  συνδέεται με τον κόμβο  $B$ .
- $A \sim \Gamma$  είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος  $A$  συνδέεται με τον κόμβο  $\Gamma$ .
- $B \sim \Gamma$  είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος  $B$  συνδέεται με τον κόμβο  $\Gamma$ .

Για να καθορίσουμε την ισοδυναμία μεταξύ των δύο συστημάτων αρκεί να υπολογίσουμε τις παρακάτω πιθανότητες:

$$P(A \sim B), \quad P(A \sim \Gamma), \quad P(B \sim \Gamma), \quad P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}).$$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν από αυτές. Εδώ, η κάθε πιθανότητα συμβολίζει την αξιοπιστία κάποιας ή κάποιων μονάδων. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες αυτές μετά τους μετασχηματισμούς, όταν έχουμε έναν κόμβο εισόδου (*Input Node*) και δύο κόμβους εξόδου (*Output Nodes*), όταν έχουμε δύο κόμβους εισόδου και έναν κόμβο εξόδου, καθώς και όταν όλοι οι κόμβοι είναι είτε εισόδου είτε εξόδου.

#### **Σύστημα Δέλτα ή Αστεριού με έναν κόμβο εισόδου και δύο κόμβους εξόδου.**

Αυτή είναι η πιο απλή εκδοχή του μετασχηματισμού Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα. Υποθέτουμε ότι ένας από τους τρεις κόμβους, ο οποίος πρέπει να είναι ο ίδιος και στις δύο δομές, λαμβάνει σήμα από έξω από τη δομή, ενώ οι άλλοι δύο κόμβοι στέλνουν το σήμα στο υπόλοιπο δίκτυο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο κόμβος  $A$  είναι ο κόμβος εισόδου, ενώ οι κόμβοι  $B$  και  $\Gamma$  είναι οι κόμβοι εξόδου. Έτσι το σήμα μπορεί να μεταφερθεί από τον κόμβο  $A$  στον κόμβο  $B$ , και από τον κόμβο  $A$  στον κόμβο  $\Gamma$ , ενώ μπορεί να μεταφέρεται με οποιαδήποτε κατεύθυνση από τον κόμβο  $B$  στον κόμβο  $\Gamma$ . Με βάση τα προηγούμενα, αρκεί να υπολογίσουμε τις πιθανότητες:

$$P(A \sim B), \quad P(A \sim \Gamma), \quad P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\})$$

Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$P(A \sim B) = p_1 + (1 - p_1)p_2p_3 = p_I p_{II}$$

$$P(A \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)p_1p_3 = p_I p_{III}$$

$$P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_I(1 - (1 - p_{II})(1 - p_{III})).$$

Θέτοντας:

$$\alpha = P(A \sim B)$$

$$\beta = P(A \sim \Gamma)$$

$$\gamma = P(A \sim B) + P(A \sim \Gamma) - P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}) = P(\{A \sim B\} \cap \{A \sim \Gamma\})$$

και εκφράζοντας  $p_I, p_{II}, p_{III}$  μέσω των  $p_1, p_2, p_3$  παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τον μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι:

$$p_I = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad p_{II} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad p_{III} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

όπου :

$$\alpha = P(A \sim B) = p_1 + (1 - p_1)p_2p_3 = p_1 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$$

$$\beta = P(A \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)p_1p_3 = p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3$$

$$\begin{aligned} \gamma &= P(A \sim B) + P(A \sim \Gamma) - P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}) = P(\{A \sim B\} \cap \{A \sim \Gamma\}) = \\ &= (p_1 + (1 - p_1)p_2p_3) + p_2 + (1 - p_2)p_1p_3 - (1 - (1 - p_1)(1 - p_2)) \\ &= p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3. \end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$a = p_I p_{II}, \quad b = p_I p_{III}, \quad c = p_I (1 - (1 - p_{II})(1 - p_{III}))$$

και λύνοντας ως προς  $p_1, p_2, p_3$  σε όρους των  $p_I, p_{II}, p_{III}$  παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τον Αστέρι-Δέλτα μετασχηματισμό:

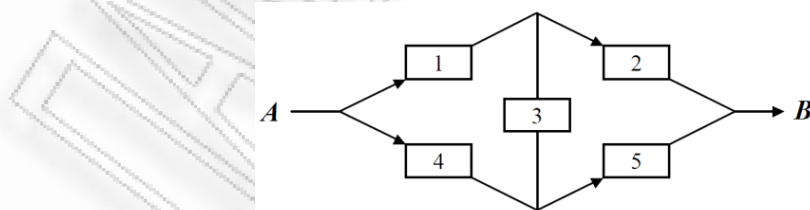
$$p_1 = \frac{a - cp_3}{1 - p_3}$$

$$p_2 = \frac{a - cp_3}{1 - p_3}$$

$$c(1 - c)p_3^2 - (a - b)(1 - c)p_3 + a + b - ab - c = 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$p_3 = \frac{(a + b)(1 - c) \pm \sqrt{(a + b)^2(1 - c)^2 - 4c(1 - c)(a + b - ab - c)}}{2c(1 - c)}.$$

**Παράδειγμα 1.15.1.** Θεωρούμε το κλασικό σύστημα της γέφυρας.



Οι μονάδες 1,3 και 4 σχηματίζουν μία δομή Δέλτα. Ο κόμβος A δέχεται το σήμα από έξω από τη δομή ενώ οι κόμβοι B και C στέλνουν το σήμα στους κόμβους 2 και 5. Οι συνθήκες για τη χρήση του μετασχηματισμού Δέλτα-Αστέρι ικανοποιούνται, κι έτσι παίρνουμε τις σχέσεις:



$$\alpha = p_1 + q_1 p_4 p_3$$

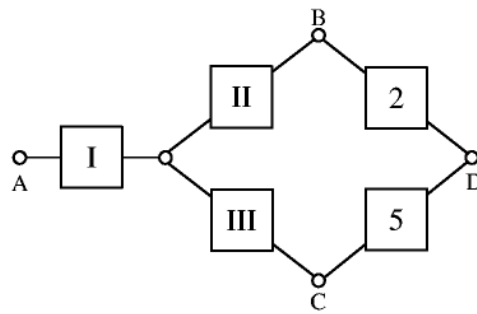
$$\beta = p_4 + q_4 p_1 p_3$$

$$\gamma = p_1 p_4 + q_1 p_4 p_3 + q_4 p_1 p_3$$

$$p_I = \frac{\alpha \beta}{\gamma} = \frac{(p_1 + q_1 p_4 p_3)(p_4 + q_4 p_1 p_3)}{p_1 p_4 + q_1 p_4 p_3 + q_4 p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3}$$

$$p_{II} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{p_1 p_4 + q_1 p_4 p_3 + q_4 p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3}{p_4 + q_4 p_1 p_3}$$

$$p_{III} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{p_1 p_4 + q_1 p_4 p_3 + q_4 p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3}{p_1 + q_1 p_4 p_3}$$



Σχήμα 1.15.2

Μετά από τον μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι, η συνάρτηση δομής φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Ανάγοντας την καινούργια αυτή δομή σε σειριακά και παράλληλα συστήματα, παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση της αξιοπιστίας:

$$\begin{aligned} R_s &= p_I [1 - (1 - p_{II} p_2)(1 - p_{III} p_5)] \\ &= p_I \left[ 1 - \left( 1 - \frac{p_2 \gamma}{\beta} \right) \left( 1 - \frac{p_5 \gamma}{\alpha} \right) \right] \\ &= p_I \left( 1 - \frac{(\beta - p_2 \gamma)(\alpha - p_5 \gamma)}{\alpha \beta} \right) \\ &= p_I \left( 1 - \frac{\alpha \beta - \alpha p_2 \gamma - \beta p_5 \gamma + p_2 p_5 \gamma^2}{\alpha \beta} \right) \\ &= \frac{\alpha \beta}{\gamma} \times \frac{\alpha p_2 \gamma + \beta p_5 \gamma - p_2 p_5 \gamma^2}{\alpha \beta} = \alpha p_2 + \beta p_5 - p_2 p_5 \gamma \\ &= p_2 (p_1 + q_1 p_4 p_3) + p_5 (p_4 + q_4 p_1 p_3) - p_2 p_5 (p_1 p_4 + q_1 p_4 p_3 + q_4 p_1 p_3) \end{aligned}$$

Όταν οι μονάδες της γέφυρας είναι *i.i.d.* τότε έχουμε:

$$p_I = \frac{(1 + p - p^2)^2}{3 - 2p}$$

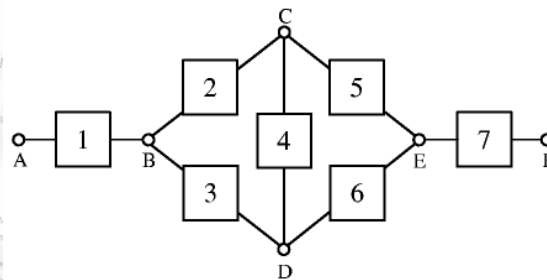
$$p_{II} = \frac{3p - 2p^2}{1 + p - p^2}$$

$$p_{III} = \frac{3p - 2p^2}{1 + p - p^2}$$

$$R_s = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5.$$

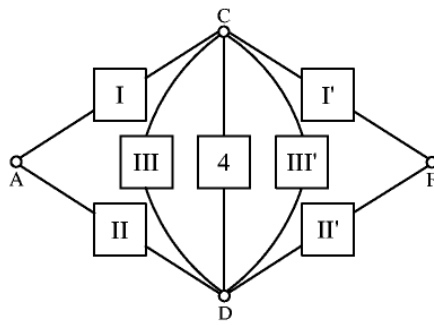
Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε στην ίδια έκφραση αξιοπιστίας που πήραμε και από τις άλλες μεθόδους. Επίσης να σημειώσουμε ότι ο μετασχηματισμός Δέλτα-Αστέρι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τις μονάδες 2,3 και 5, στις οποίες ο κόμβος  $D$  είναι ο κόμβος εξόδου και οι κόμβοι  $B$  και  $C$  είναι οι κόμβοι εισόδου. Όμως ο μετασχηματισμός Αστέρι-Δέλτα δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στο σύστημα της γέφυρας γιατί δεν υπάρχουν δομές αστεριού που να ικανοποιούν τις συνθήκες της εφαρμογής της μεθόδου. ■

**Παράδειγμα 1.15.2.** Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα αξιοπιστίας. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι στις δομές δέλτα που σχηματίζονται από τις μονάδες 2,3, και 4, και από τις μονάδες 4,5, και 6. Δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό και για τις δύο δέλτα δομές, καθώς μόνο με έναν μπορούμε να αναγάγουμε το σύστημα σε σειριακές και παράλληλες συνδέσεις και να βρούμε εύκολα την αξιοπιστία του.



Σχήμα 1.15.3

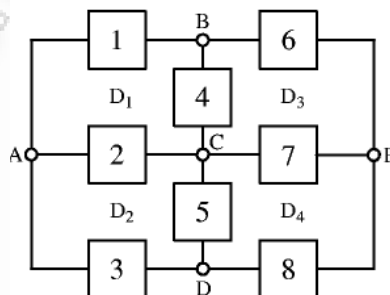
Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Αστέρι-Δέλτα για αυτό το σύστημα. Οι δομές αστεριού που σχηματίζονται από τις μονάδες 1,2,και 3, και 5,6,και 7 μπορούν να μετασχηματισθούν σε δομές δέλτα. Όταν εφαρμόσουμε και τους δύο μετασχηματισμούς, το σύστημα που προκύπτει είναι το παρακάτω:



Σχήμα 1.15.4

Αφού χρησιμοποιήσουμε αναγωγή σε παράλληλα συστήματα, θα καταλήξουμε στο κλασικό σύστημα της γέφυρας. Ένας ακόμα Δέλτα-Αστέρι μετασχηματισμός χρειάζεται, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για να βρούμε την αξιοπιστία του. Με άλλα λόγια, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο μετασχηματισμούς Αστέρι-Δέλτα κι έναν ακόμα Δέλτα-Αστέρι για να βρούμε την αξιοπιστία του. Αυτό μας δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Αστέρι-Δέλτα δεν είναι πολύ αποτελεσματικός, αφού με έναν μόνο μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι στο ίδιο σύστημα, θα μπορούσαμε να βρούμε την αξιοπιστία του. ■

**Παράδειγμα 1.15.3.** Το σύστημα της διπλής γέφυρας έχει τέσσερις δομές δέλτα, τις οποίες συμβολίζουμε με  $D_1, D_2, D_3, D_4$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ο κόμβος  $A$  είναι ο κόμβος εισόδου για τα δέλτα  $D_1$  και  $D_2$ . Όμως οι κόμβοι  $B$  και  $C$  δεν είναι απαραίτητα κόμβοι εξόδου για το δέλτα  $D_1$  και οι κόμβοι  $C$  και  $D$  δεν είναι απαραίτητα κόμβοι εξόδου για το δέλτα  $D_2$ . Μπορεί να είναι κόμβοι εισόδου ή εξόδου ανάλογα με την κατάσταση των μονάδων του συστήματος. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο κόμβος  $E$  είναι κόμβος εξόδου για τα δέλτα  $D_3$  και  $D_4$ . Όμως οι κόμβοι  $B$  και  $C$  δεν είναι απαραίτητα κόμβοι εισόδου για το δέλτα  $D_3$  και οι κόμβοι  $C$  και  $D$  δεν είναι απαραίτητα κόμβοι εισόδου για το δέλτα  $D_4$ . Έτσι οι μετασχηματισμοί Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα δεν μπορούν να εφαρμοσθούν στο σύστημα της διπλής γέφυρας.



Σχήμα 1.15.5

### Σύστημα Δέλτα ή Αστεριού με δύο κόμβους εισόδου και έναν κόμβο εξόδου.

Η δομή αυτή, είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την προηγούμενη, αφού δεν μας απασχολεί αν έχουμε δύο κόμβους εισόδου κι έναν εξόδο, ή αν έχουμε δύο κόμβους εξόδου και έναν εισόδο. Το μόνο που θα αλλάξει είναι να θεωρήσουμε ως κόμβους εισόδου τους Β και Γ και ως κόμβο εξόδου τον Α, οπότε ο μετασχηματισμός παραμένει ο ίδιος.

### Σύστημα Δέλτα όπου κάθε κόμβος μπορεί να είναι είτε εισόδο είτε εξόδο.

Σε μεγαλύτερα συστήματα αξιοπιστίας είναι πιο εύκολο να βρούμε υποσυστήματα με τη δομή δέλτα, είναι σπάνιο όμως να έχουν μόνο κόμβους εισόδου ή μόνο κόμβους εξόδου. Επομένως κρίνεται απαραίτητο να αναλύσουμε την περίπτωση όπου όλοι οι κόμβοι είναι είτε εισόδο είτε εξόδο. Σε αυτή την περίπτωση θα ορίσουμε την πιθανότητα  $p_o$ , η οποία θα είναι η πιθανότητα να λειτουργεί ο κόμβος  $O$ , ή αλλιώς η αξιοπιστία αυτού του κόμβου. Οι τέσσερις πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν παίρνουν τώρα τη μορφή:

$$P(A \sim B) = p_1 + (1 - p_1)p_2p_3 = p_I p_O p_{II}$$

$$P(A \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)p_1p_3 = p_I p_O p_{III}$$

$$P(B \sim \Gamma) = p_3 + (1 - p_3)p_1p_2 = p_{II} p_O p_{III}$$

$$P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_I p_O (1 - (1 - p_{II})(1 - p_{III})).$$

Από αυτές τις εξισώσεις παίρνουμε τις ακόλουθες πιθανότητες για τη δομή του αστεριού:

$$p_I = \frac{\alpha + \beta - \delta}{\gamma}, \quad p_{II} = \frac{\alpha + \beta - \delta}{\beta}, \quad p_{III} = \frac{\alpha + \beta - \delta}{\alpha}, \quad p_o = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta - \delta)^2},$$

όπου:

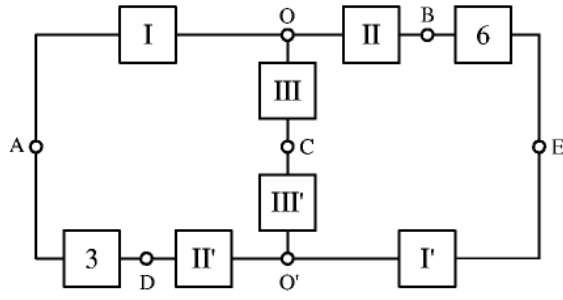
$$\alpha = P(A \sim B) = p_1 + (1 - p_1)p_2p_3$$

$$\beta = P(A \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)p_1p_3$$

$$\gamma = P(B \sim \Gamma) = p_3 + (1 - p_3)p_1p_2$$

$$\delta = P(\{A \sim B\} \cup \{A \sim \Gamma\}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

**Παράδειγμα 1.15.4.** Θεωρούμε το σύστημα της διπλής γέφυρας που φαίνεται στο σχήμα 1.15.3. Οι αξιοπιστίες των μονάδων καθώς και οι αναξιοπιστίες  $p_i$  και  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$  είναι γνωστές. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Δέλτα-Αστέρι στις δομές δέλτα  $D_1$  και  $D_4$ , παίρνουμε το παρακάτω σύστημα αξιοπιστίας:



Σχήμα 1.15.6

με πιθανότητες για τις καινούργιες μονάδες:

$$p_I = \frac{\alpha_I + \beta_I - \delta_I}{\gamma_I}, \quad p_{II} = \frac{\alpha_I + \beta_I - \delta_I}{\beta_I}, \quad p_{III} = \frac{\alpha_I + \beta_I - \delta_I}{\alpha_I},$$

$$p_O = \frac{\alpha_I \beta_I \gamma_I}{(\alpha_I + \beta_I - \delta_I)^2}$$

όπου:

$$\alpha_I = p_1 + (1 - p_1)p_2p_4$$

$$\beta_I = p_2 + (1 - p_2)p_1p_4$$

$$\gamma_I = p_4 + (1 - p_4)p_1p_2$$

$$\delta_I = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

και

$$p_{I'} = \frac{\alpha_{IV} + \beta_{IV} - \delta_{IV}}{\gamma_{IV}}, \quad p_{II'} = \frac{\alpha_{IV} + \beta_{IV} - \delta_{IV}}{\beta_{IV}}, \quad p_{III'} = \frac{\alpha_{IV} + \beta_{IV} - \delta_{IV}}{\alpha_{IV}},$$

$$p_{O'} = \frac{\alpha_{IV} \beta_{IV} \gamma_{IV}}{(\alpha_{IV} + \beta_{IV} - \delta_{IV})^2}$$

όπου:

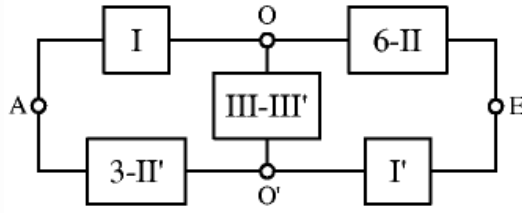
$$\alpha_{IV} = p_8 + (1 - p_8)p_7p_5$$

$$\beta_{IV} = p_7 + (1 - p_7)p_8p_5$$

$$\gamma_{IV} = p_5 + (1 - p_5)p_8p_7$$

$$\delta_{IV} = 1 - (1 - p_8)(1 - p_7)$$

Κάνοντας αναγωγή σε παράλληλα συστήματα καταλήγουμε στο επόμενο σχήμα και δίνουμε τις πιθανότητες των νέων μονάδων:



Σχήμα 1.15.7

$$p_{6-II} = p_6 p_{II}$$

$$p_{III-III'} = p_{III} p_{III'}$$

$$p_{3-II'} = p_3 p_{II'}$$

Το καινούργιο αυτό σύστημα μοιάζει αρκετά με το κλασικό σύστημα της γέφυρας, με την διαφορά ότι οι κόμβοι  $O$  και  $O'$  είναι επιρρεπείς στην αποτυχία (*failure prone*). Μπορούμε να διασπάσουμε το σύστημα πάνω σε αυτούς τους κόμβους για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ως εξής:

$$R_s = p_O p_{O'} R_b + p_O q_{O'} p_I p_{6-II} + q_O p_{O'} p_{I'} p_{3-II'}$$

όπου  $R_b$  είναι η αξιοπιστία του συστήματος της κλασικής γέφυρας, την οποία έχουμε υπολογίσει ήδη. Αφού μετονομάσουμε τις μονάδες, παίρνουμε:

$$R_s = p_{III-III'}(1 - q_1 q_{3-II'})(1 - q_{6-II} q_{I'}) + q_{III-III'}[(1 - (1 - p_I p_{6-II})(1 - p_{3-II'} p_{I'})]. \quad \blacksquare$$

### 1.16. Φράγματα Αξιοπιστίας

Ως τώρα είδαμε αρκετές μεθόδους υπολογισμού της αξιοπιστίας ενός συστήματος. Όμως όπως είναι λογικό, όσο μεγαλώνει ο αριθμός μονάδων ενός συστήματος, τόσο δυσκολεύει ο ακριβής προσδιορισμός της αξιοπιστίας του, και σε πολλές περιπτώσεις γίνεται ουσιαστικά ανέφικτος. Για αυτό το λόγο, η εύρεση φραγμάτων της αξιοπιστίας κρίνεται αναγκαία από πρακτικής πλευράς.

Θα εξετάσουμε τώρα τα βασικά φράγματα αξιοπιστίας που έχουν προταθεί, και θα επανέλθουμε σε ειδικές περιπτώσεις για τα δισδιάστατα συστήματα αξιοπιστίας σε επόμενο κεφάλαιο. Το πρώτο φράγμα αξιοπιστίας ήδη έχει αναφερθεί στην Πρόταση 1.9.1.

**Πρόταση 1.16.1.** Για κάθε μονότονο σύστημα αξιοπιστίας με  $n$  μονάδες, ισχύει:

$$LB_1(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^n p_i \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = UB_1(\mathbf{p}).$$

Ειδικά για *i.i.d.* συστήματα:

$$LB_1(\mathbf{p}) = p^n \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - (1 - p)^n = UB_1(\mathbf{p}). \quad \blacksquare$$

Τα παραπάνω φράγματα είναι ιδιαίτερα απλά και χρήσιμα μόνο στην περίπτωση που δεν είναι γνωστά τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. αφού η ποιότητα τους είναι πολύ κακή. Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι η αξιοπιστία ενός συστήματος είναι σίγουρα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του σειριακού με τις ίδιες μονάδες, και χειρότερη από του παράλληλου.

### Φράγματα *minimax*

Προτάθηκαν για πρώτη φορά από τους *Barlow and Proschan* (1975) και δημιουργούν άνω και κάτω φράγματα χρησιμοποιώντας τα ε.σ.λ. και ε.σ.δ. ενός συστήματος. Τα φράγματα αυτά είναι πάντα καλύτερα από τα φράγματα της Πρότασης 1.16.1.

**Πρόταση 1.16.2.** Έστω ένα μονότονο σύστημα με ε.σ.λ. τα  $\{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  και ε.σ.δ. τα  $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ . Τότε θα ισχύει:

$$LB_{mm}(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2,\dots,M} P[\min_{i \in P_j} X_i = 1] \leq R(\mathbf{p}) \leq \min_{j=1,2,\dots,N} P[\max_{i \in C_j} X_i = 1] = UB_{mm}(\mathbf{p}).$$

Αν οι μονάδες είναι ανεξάρτητες, καταλήγουμε στη σχέση:

$$LB_{mm}(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2,\dots,M} \prod_{i \in P_j} p_i \leq R(\mathbf{p}) \leq \min_{j=1,2,\dots,N} \left( 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) = UB_{mm}(\mathbf{p}).$$

Επιπλέον για *i.i.d.* συστήματα:

$$LB_{mm}(\mathbf{p}) = p^{\min |P_j|} \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - (1 - p_i)^{\min |C_j|} = UB_{mm}(\mathbf{p}),$$

όπου  $|P_j|$  είναι ο πληθάριθμος του  $P_j$  (αντίστοιχα του  $C_j$ ). ■

Σύμφωνα με αυτή την πρόταση, η αξιοπιστία  $R(\mathbf{p})$  φράσσεται από κάτω από την αξιοπιστία του καλύτερου σειριακού συστήματος με μονάδες τις μονάδες ενός ε.σ.λ.  $P_j$ , και από πάνω από την αξιοπιστία του χειρότερου παράλληλου συστήματος με μονάδες τις μονάδες ενός ε.σ.δ.  $C_j$ .

**Παράδειγμα 1.16.1.** Έστω το κλασικό σύστημα της γέφυρας. Θα έχουμε:

$$LB_{mm}(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2,\dots,M} \prod_{i \in P_j} p_i = \max(p_1 p_2, p_4 p_5, p_1 p_3 p_5, p_2 p_3 p_4)$$

$$UB_{mm}(\mathbf{p}) = \min_{j=1,2,\dots,N} \left( 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) \\ = \min\{1 - q_1 q_4, 1 - q_2 q_5, 1 - q_1 q_3 q_5, 1 - q_2 q_3 q_4\}.$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση:

$$LB_{mm}(\mathbf{p}) = p^{\min |P_j|} = p^2 \geq p^5 = LB_1$$

$$UB_{mm}(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p_i)^{\min |C_j|} = 1 - (1 - p)^2 = 1 - q^2 \leq 1 - q^5 = UB_1 \quad \blacksquare$$

### Φράγματα Esary & Proschan

Ίσως τα πιο διαδεδομένα πολλαπλασιαστικά φράγματα, προτάθηκαν το 1963.

**Πρόταση 1.16.3.** Για τη συνάρτηση αξιοπιστίας κάθε μονότονου συστήματος με ανεξάρτητες μονάδες, θα ισχύει:

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^N \left( 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{j=1}^M \left( 1 - \prod_{i \in P_j} p_i \right) = UB_{EP}(\mathbf{p}).$$

Επιπλέον για *i.i.d.* συστήματα:

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^N (1 - (1 - p)^{|C_j|}) \leq R(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{j=1}^M (1 - p^{|P_j|}) = UB_{EP}(\mathbf{p}). \quad \blacksquare$$

Τα κάτω φράγματα  $LB_{EP}(\mathbf{p})$  είναι συνήθως καλά (δίνουν τιμές κοντά στην πραγματική τιμή της αξιοπιστίας) όταν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι κοντά στο 1, οπότε και το αντίστοιχο σύστημα θα είναι αξιόπιστο. Αντίθετα, τα άνω φράγματα  $UB_{EP}(\mathbf{p})$  είναι συνήθως καλά, όταν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι κοντά στο 0

**Παράδειγμα 1.16.2.** Έστω το κλασικό σύστημα της γέφυρας. Θα έχουμε:

$$UB_{EP}(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{j=1}^4 \left( 1 - \prod_{i \in P_j} p_i \right) = \\ = 1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_4 p_5)(1 - p_1 p_3 p_5)(1 - p_2 p_3 p_4)$$



$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^N \left( 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right)$$

$$= (1 - q_1 q_4)(1 - q_2 q_5)(1 - q_1 q_3 q_5)(1 - q_2 q_3 q_4).$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση:

$$LB_{EP}(\mathbf{p}) = (1 - q^2)^2(1 - q^3)^2, \quad UB_{EP}(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p^2)^2(1 - p^3)^2. \quad \blacksquare$$

### Φράγματα Bonferroni

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$$(-1)^k \left\{ P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) - \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} S_r \right\} \geq 0,$$

όπου:

$$S_r = \sum_{\substack{\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \\ \subseteq \{1, 2, \dots, n\}}} P(E_{a_1} \cap E_{a_2} \cap \dots \cap E_{a_r}).$$

**Πρόταση 1.15.4.** Αν ορίσουμε

$$S_r = \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r P_{a_j}} p_i, \quad r = 1, 2, \dots, M$$

$$S'_r = \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_r\}} \prod_{i \in \cup_{j=1}^r C_{a_j}} (1 - p_i), \quad r = 1, 2, \dots, N$$

τότε για τη συνάρτηση αξιοπιστίας κάθε μονότονου συστήματος θα ισχύουν οι ανισότητες:

$$R \leq S_1$$

$$S_1 - S_2 \leq R$$

$$R \leq S_1 - S_2 + S_3$$

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \leq R$$

$$\vdots$$

και

$$1 - S'_1 \leq R$$

$$R \leq 1 - S'_1 + S'_2$$

$$1 - S'_1 + S'_2 - S'_3 \leq R$$

$$R \leq 1 - S'_1 + S'_2 - S'_3 + S'_4.$$

$$\vdots$$

Έτσι παίρνουμε μια ακολουθία άνω και κάτω φραγμάτων που βασίζονται μόνο στα ε.σ.λ. (φράγματα που χρησιμοποιούν τα  $S_j, j = 1, 2, \dots, M$ ) ή μόνο στα ε.σ.δ. (φράγματα που χρησιμοποιούν τα  $S'_j, j = 1, 2, \dots, N$ ). Όσο αυξάνεται το πλήθος των όρων που χρησιμοποιούμε, τόσο τα παραπάνω φράγματα βελτιώνονται, αλλά δυσκολεύει ο υπολογισμός τους. Όταν χρησιμοποιηθούν όλα τα  $S_j, j = 1, 2, \dots, M$  ή όλα τα  $S'_j, j = 1, 2, \dots, N$ , φθάνουμε σε ακριβή υπολογισμό της αξιοπιστίας. Σημειώνουμε ότι τα φράγματα μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές, καθώς και τιμές μεγαλύτερης της μονάδας.

**Παράδειγμα 1.16.3.** Έστω το κλασικό σύστημα της γέφυρας. Θα έχουμε:

$$S_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = p^2 + p^2 + p^3 + p^3 = 2p^2 + 2p^3$$

$$S_2 = P(A_1A_2) + P(A_2A_3) + P(A_1A_3) + \dots + P(A_3A_4) = p^4 + p^4 + \dots = 5p^4 + p^5$$

$$S_3 = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_2A_3A_4) + P(A_3A_4A_5) = 4p^5$$

$$S'_1 = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = q^2 + q^2 + q^3 + q^3 = 2q^2 + 2q^3$$

$$S'_2 = P(B_1B_2) + P(B_2B_3) + P(B_1B_3) + \dots + P(B_3B_4) = q^4 + q^4 + \dots = 5q^4 + q^5$$

$$S'_3 = P(B_1B_2B_3) + P(B_1B_2B_4) + P(B_2B_3B_4) + P(B_3B_4B_5) = 4q^5$$

και άρα:

$$\begin{aligned} 1 - (2q^2 + 2q^3) &\leq R \leq 2p^2 + 2p^3 \\ (2p^2 + 2p^3) - (5p^4 + p^5) &\leq R \leq 1 - (2q^2 + 2q^3) + (5q^4 + q^5) \\ (2q^2 + 2q^3) + (5q^4 + q^5) - 4q^5 &\leq R \leq (2p^2 + 2p^3) - (5p^4 + p^5) + 4p^5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 1.17. Μελέτη Συνεχόμενων Συστημάτων $k$ -από-τα- $n$ : $F$

Κλείνοντας το πρώτο κεφάλαιο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$  σύστημα, και στις παραλλαγές του, μιας και τα δισδιάστατα συστήματα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια είναι γενικεύσεις του. Είναι πολύ διαδεδομένα συστήματα και πολλοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με τις ιδιότητες του. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, τα συστήματα θα λειτουργούν ή θα αποτυγχάνουν μόνο αν υπάρχουν  $k$  συνεχόμενες μονάδες σε λειτουργία ή χαλασμένες. Να σημειώσουμε ότι το παράλληλο και σειριακό σύστημα είναι ειδικές περιπτώσεις του (για  $k = n$  και  $k = 1$  αντίστοιχα)

Το πρώτο σύστημα αυτής της μορφής που μελετήθηκε, ήταν το γραμμικό συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ : $F$  σύστημα ( $C_L(k, n; F)$ ), για το οποίο έχουν δημοσιευθεί και οι περισσότερες

εργασίες. Ο πρώτος που αναφέρεται συγκεκριμένα στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του, είναι ο *Kontoleon* (1980), ο οποίος όταν πρότεινε το σύστημα αυτό, έδωσε έναν αλγόριθμο για ανεξάρτητες μονάδες, αλλά όχι κατά ανάγκη ισόνομες. Έπειτα οι *Chiang & Niu* (1981) έδωσαν έναν κλειστό τύπο για την περίπτωση του συνεχόμενου 2-από-τα- $n:F$  σύστημα με *i.i.d.* μονάδες, τον

$$R(2, n; F) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-j+1}{j} (1-p)^j p^{n-j},$$

όπου  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού  $\frac{n+1}{2}$  και  $p$  η αξιοπιστία των μονάδων. Ο τύπος προέκυψε από την παρατήρηση ότι αν έχουμε  $j$  χαλασμένες μονάδες, τότε οι δυνατές  $n$ -άδες χωρίς δύο συνεχόμενες χαλασμένες, είναι  $\binom{n-j+1}{j}$ . Επίσης, ανέφεραν και έναν αναδρομικό τύπο για το γενικότερο γραμμικό συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  σύστημα.

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < k \\ 1 - (1-p)^n, & n = k \\ p^{n-k+1} + \sum_{r=1}^{n-k+1} \sum_{m=r+1}^{r+k-1} R(k, n-m) p^r (1-p)^{m-r}, & n > k, \end{cases}$$

όπου  $R(k, n-m)$  είναι η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου συστήματος που αποτελείται από τις πρώτες  $n-m$  μονάδες του αρχικού (θέτουμε  $R(k, n-m) = 0$  όταν  $n-m < 0$ ). Ο τύπος προέκυψε από τον ορισμό δύο τ.μ., των  $N$  και  $M$ , που εκφράζουν τη θέση του πρώτου μηδενικού και τη θέση του πρώτου άσσου, μετά την εμφάνιση του πρώτου μηδενικού (σε ένα διάνυσμα κατάστασης), αντίστοιχα. Το ζητούμενο προκύπτει γράφοντας την  $R$  ως:

$$R(k, n; F) = \sum_r \sum_m P(\text{το σύστημα λειτουργεί} | N=r, M=m) P(N=r, M=m).$$

Οι *Derman et al* (1982), εξέφρασαν την  $R$  με τη βοήθεια της συνδυαστικής και γενικεύοντας κατα κάποιο τρόπο τον τύπο των *Chiang & Niu*. Για την *i.i.d.* περίπτωση έδειξαν ότι ισχύει:

$$R(k, n; F) = \sum_{j=0}^n N(j, n-j+1, k-1) p^{n-j} (1-p)^j,$$

με το  $N(j, n - j + 1, k - 1)$  να εκφράζει τους τρόπους με τους οποίους μπορούν  $j$  χαλασμένες μονάδες, να τοποθετηθούν σε  $n - j + 1$  διαφορετικές θέσεις, έτσι ώστε να υπάρχουν το πολύ  $k - 1$  συνεχόμενες. Οι ποσότητες  $N(j, r, m)$  ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$N(j, r, m) = \sum_{i=0}^r N(j - mi, r - i, m - 1), \quad m \geq 2$$

με αρχικές συνθήκες:

$$N(j, r, 1) = \begin{cases} 0, & j > r \\ \binom{r}{j}, & 0 \leq j \leq r. \end{cases}$$

Επιπλέον, οι *Bollinger & Salvia* (1982), απέδειξαν τον παρόμοιο τύπο:

$$R(k, n; F) = 1 - \sum_{i=0}^{n-k} r_{i,k,n} p^{n-(k+i)} (1-p)^{k+i},$$

όπου  $r_{i,k,n} = \sum_{j=0}^i N(k+i, k+j, n)$  και  $N(k+i, k+j, n)$  είναι οι τρόποι με τους οποίους  $k+i$  αποτυχίες τοποθετούνται σε  $n$  θέσεις, ώστε να υπάρχουν  $k+j$  συνεχόμενες. Αργότερα, αυτή η μέθοδος αντικαθιστάται με μία καλύτερη από τον *Bollinger* (1982) (η οποία δίνει τα  $r$  σαν διαφορά ενός διωνυμικού συντελεστή και ενός στοιχείου, κάποιου πίνακα). Ο *Shanthikumar* (1982) κατάφερε να δώσει μια αναδρομική σχέση, για την περίπτωση που οι μονάδες δεν είναι *i.i.d.* (το σκεπτικό του ήταν ανάλογο με αυτό των *Chiang & Niu*). Αναλυτικά:

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), & n = k \\ R(k, n-1) - R(k, n-k-1)p_{n-k}Q(n-k+1, n), & n > k, \end{cases}$$

όπου  $Q(x, y) = \prod_{i=x}^y p_i$  και  $R(k, m)$  η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου συστήματος που αποτελείται από τις πρώτες  $m$  μονάδες του αρχικού. Για *i.i.d.* μονάδες ο τύπος γίνεται:

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - (1-p)^n, & n = k \\ R(k, n-1) - R(k, n-k-1)p(1-p)^k, & n > k \end{cases}$$

και

$$R(k, n; F) = 1 - (1-p)^k - (n-k)p(1-p)^k, \quad k \leq n \leq 2k.$$

Ο *Hwang* (1982) εξέφρασε την αξιοπιστία του συστήματος με έναν πιο αποτελεσματικό (από άποψη υπολογισμών) τύπο:

$$R(k, n; F) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), & n = k \\ \sum_{i=n-k+1}^n p_i \left( \prod_{j=i+1}^n q_j \right) R(k, i - 1), & n > k. \end{cases}$$

Οι *Chao & Lin* (1984) κινήθηκαν προς μια νέα κατεύθυνση, μελετώντας τα χαρακτηριστικά του γραμμικού συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος, με τεχνικές των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Συγκεκριμένα θεώρησαν τα διανύσματα καταστάσεως, που σχηματίζονται από τις συνεχόμενες  $k$ -άδες, σαν τ.μ., φτιάχνοντας μια στάσιμη Μαρκοβιανή Αλυσίδα, με χώρο καταστάσεων  $2^k$ . Έτσι, για *i.i.d.* μονάδες διαπίστωσαν ότι:

$$R(k, n; F) = \mathbf{a}_k \mathbf{Q}_k^{n-k} \mathbf{1}_k,$$

με τους πίνακες να ορίζονται κατάλληλα ( $\mathbf{Q}_k$  είναι ο πίνακας μετάβασης, με διεγραμμένη την τελευταία γραμμή και στήλη). Αργότερα όμως ο *Fu* (1986b), κατάφερε να μειώσει τη διάσταση του χώρου από  $2^k$  σε  $(k + 1)$  και ως επακόλουθο, οι *Fu & Hu* (1987) και *Chao & Fu* (1989,1991), δημιούργησαν τον απλό τύπο για τη γενική περίπτωση των μη ισόνομων μονάδων:

$$R(k, n; F) = \boldsymbol{\pi}_0 \left( \prod_{i=1}^n M_i \right) \mathbf{U}^T$$

και στην *i.i.d.*:

$$R(k, n; F) = \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{M}^n \mathbf{U}^T,$$

όπου:

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times (k+1)}, \quad \mathbf{U} = (1, 1, \dots, 1, 0)_{1 \times (k+1)}$$

$$M_i = \begin{pmatrix} p_i & q_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_i & 0 & q_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}$$

### Το κυκλικό συνεχόμενο k-από-τα-n σύστημα

Το κυκλικό συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$  σύστημα ( $C_C(k, n: F)$ ) διαφοροποιείται από το γραμμικό στο ότι έχει τις μονάδες συνδεδεμένες κυκλικά, έτσι ώστε η πρώτη μονάδα να ενώνεται με την τελευταία). Μελετήθηκε για πρώτη φορά από τους *Derman et al* (1982), οι οποίοι υπολόγισαν την αξιοπιστία του μέσω της αντίστοιχης του  $C_L(k, n: F)$  με *i.i.d.* μονάδες, από τον τύπο:

$$R_C(k, n: F) = p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)q^j R(k, n-j-2).$$

Ο *Hwang* (1986) κατάφερε να εκφράσει την  $R_C$  από έναν κλειστό τύπο ο οποίος χρειάζεται άθροιση μόνο  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$  όρων. Αναλυτικά:

$$R_C(k, n: F) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} (-pq^k)^i \binom{n-ki}{i} - q^2 + k \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} (-pq^k)^{i+1} \binom{n-k(i+1)-1}{i},$$

(για  $n \geq k$ ) ενώ για την περίπτωση  $R_C(2, n: F)$  έχουμε:

$$R_C(2, n: F) = np^n \frac{(1 + \sqrt{1 + 4q/p})^n + (1 - \sqrt{1 + 4q/p})^n}{2^n}.$$

Ο *Hwang* (1982) είχε δώσει επίσης έναν αλγόριθμο για την εύρεση της  $R$ , που δεν είναι τόσο γρήγορος όσο ο αντίστοιχος των *Antonopoulou & Papastavridis* (1987). Ο τελευταίος, για μη ισόνομες μονάδες, έχει ως εξής:

$$R_C(k, n: F) = \begin{cases} 1, & n < k \\ 1 - \prod_{i=1}^n q_i, & n = k \\ 1 - \prod_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i \left( \prod_{j=i+1}^{i-1} q_j \right), & n = k + 1 \\ p_n R_L(k, n-1) + q_n R_C(k, n-1) - \sum_{i=1}^n p_{n-k+i} \left( \prod_{j=n-k+i+1}^i q_j \right) p_{i+1} R'_L(i+2, n-k+i-1), & n > k + 1, \end{cases}$$

όπου  $R'_L(i+2, n-k+i-1)$  είναι η αξιοπιστία του  $C_L(k, n: F)$ , το οποίο απαρτίζεται από τις μονάδες  $i+2$  έως  $n-k+i-1$ . Τέλος, οι *Du & Hwang* (1988) απέδειξαν μια

αναδρομική σχέση, η οποία περιέχει μόνο αξιοπιστίες κυκλικών συστημάτων και ισχύει για μερικές επιλογές των  $n$  και  $k$ . Η σχέση αυτή είναι:

$$R_C(k, n; F) = \sum_{i=0}^{k-1} pq^i R_C(k, n - i - 1), \quad n \geq 2k$$

και

$$R_C(k, n; F) = R_C(k, n - 1) - pq^k R_C(k, n - k - 1).$$

### Το συνεχόμενο $k$ -από-τα- $r$ -από-τα- $n$ σύστημα

Ένα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $r$ -από-τα- $n$  σύστημα αποτελείται από  $n$  μονάδες συνδεδεμένες είτε σε σειρά είτε κυκλικά. Το σύστημα αποτυγχάνει αν σε  $r$  συνεχόμενες μονάδες, τουλάχιστον  $k$  δεν λειτουργούν. Ο *Tong* (1985) αναφέρθηκε για πρώτη φορά σε αυτό, ενώ μια προσπάθεια μελέτης της αξιοπιστίας του έγινε από τους *Sfakianakis, Kounias & Hillaris* (1992). Οι τελευταίοι κατάφεραν να δώσουν κλειστούς τύπους, μόνο για μερικές περιπτώσεις των  $k, r$  και  $n$ , με i.i.d. μονάδες. Έδωσαν τους παρακάτω τύπους:

$$R_L(2, r, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+r-1}{r} \rfloor} \binom{n - (j-1)(r-1)}{j} q^j p^{n-j}$$

και για το κυκλικό:

$$R_C(2, r, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \frac{n}{n - j(r-1)} \binom{n - j(r-1)}{j} q^j p^{n-j}.$$

Επίσης, απέδειξαν και μια αναδρομική σχέση, όταν  $n = r + \lambda$ , με  $\lambda \leq r$ , την:

$$R(k, r, n) = \sum_{x=1}^k R(x, \lambda, 2\lambda) \binom{r-\lambda}{k-x} p^{r-\lambda-k+x} q^{k-x},$$

με  $R(x, \lambda, 2\lambda) = 1$  για  $x > \lambda$ .

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

Τα δισδιάστατα συστήματα αξιοπιστίας αποτελούν γενίκευση του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε διάφορα συστήματα τέτοιου είδους που έχουν προταθεί και μελετηθεί στη βιβλιογραφία καθώς και ορισμένες εφαρμογές τους.

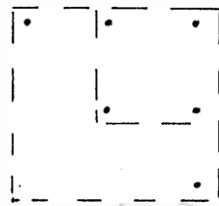
### 2.1. Η Γενική Περίπτωση

Το πρώτο σύστημα προτάθηκε από τους *Salvia & Lasher* (1990). Ονομάστηκε δισδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  σύστημα (*2-dimensional consecutive k-out-of-n : F*,  $k^2/n^2:F$ ), αποτελείται από ένα τετραγωνικό πλέγμα πλευράς  $n$  (περιέχει  $n^2$  στοιχεία) και αποτυγχάνει όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο πλευράς  $k$ , ( $2 \leq k \leq n - 1$ ) του οποίου οι μονάδες έχουν όλες αποτύχει ( $k^2$  μονάδες). Μερικές εφαρμογές του συστήματος είναι οι παρακάτω:

- Ένα σύνολο ρευματοληπτών (φικς, *connector pins*) σε μία ηλεκτρική συσκευή παρουσιάζει πλεονασμό στο σχεδιασμό της. Η σύνδεση είναι καλή εκτός αν ένα τετράγωνο πλευράς 2, που περιλαμβάνει 4 ρευματολήπτες, είναι ελαττωματικό.
- Η παρουσία μίας ασθένειας μπορεί να διαγνωσθεί διαβάζοντας μία ακτινογραφία. Έστω  $p$  η πιθανότητα ένα κύτταρο (η οποιοδήποτε άλλο μικρό μέρος της ακτινογραφίας) να είναι υγιές. Ο ιατρός δεν μπορεί να διαγνώσει την ασθένεια αν τα κύτταρα δεν είναι ομαδοποιημένα σε μία ικανοποιητικά μεγάλη δομή (π.χ. ένα τετράγωνο  $k \times k$ ). Η πιθανότητα επιτυχίας του συστήματος είναι η πιθανότητα διάγνωσης της ασθένειας.

Μία πιο προχωρημένη εφαρμογή του συστήματος είναι η ανίχνευση δομών. Γενικά, θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα να ανιχνεύσουμε δομές αυθαίρετου μεγέθους και σχήματος  $T$ . Για μια αυθαίρετη δομή  $T$ , έστω  $k_1$  και  $k_2$  τα μεγέθη του μεγαλύτερου εγγεγραμμένου και του μικρότερου περιγεγραμμένου τετραγώνου αντίστοιχα στη δομή  $T$ .

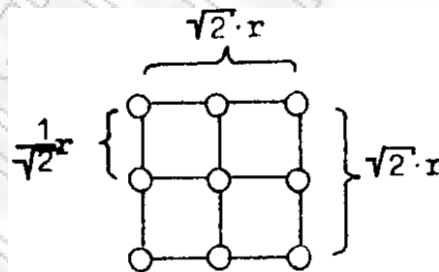
Έστω  $P_f(T)$  η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε τη δομή  $T$ . Τότε από στοιχειώδεις συλλογισμούς θα έχουμε  $P_f(k_2, n) \leq P_f(T) \leq P_f(k_1, n)$ , όπου  $P_f(k_1, n)$  και  $P_f(k_2, n)$  είναι οι πιθανότητες αποτυχίας των δισδιάστατων συστημάτων συνεχόμενο  $k_1$ -από-τα- $n:F$  και συνεχόμενο  $k_2$ -από-τα- $n:F$  αντίστοιχα. Πιο απλά, μπορούμε να πούμε ότι κάθε αυθαίρετη δομή  $T$  μπορεί να φραχθεί από ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο τετράγωνο, τα οποία μας βοηθάνε στο να εκτιμήσουμε την πιθανότητα ανίχνευσης της δομής. Τα φράγματα αξιοπιστίας θα μας απασχολήσουν σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 2.1.1

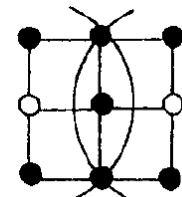
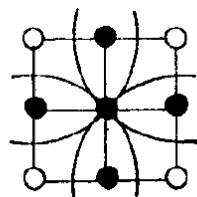
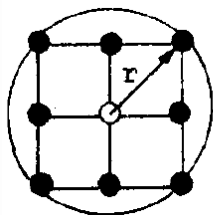
Στο παραπάνω σχήμα, αν οι κουκίδες συμβολίζουν την δομή  $T$ , τότε προφανώς ισχύει ότι  $P_f(2, n) \leq P_f(T) \leq P_f(3, n)$ .

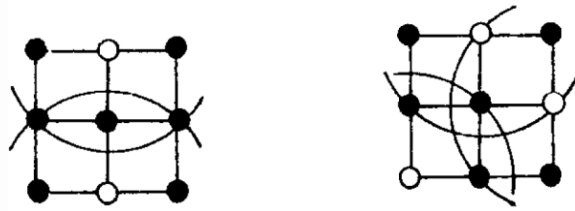
Τέλος, μια άλλη εφαρμογή που παρουσίασαν οι *Boehme, Kossow & Preuss* (1992) αφορά συστήματα παρακολούθησης με κάμερες. Έστω το σύστημα παρακολούθησης του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 2.1.2

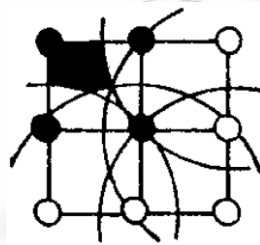
Το σχήμα αυτό θα μπορούσε να περιγράψει ένα τετράγωνο σύστημα παρακολούθησης πλευράς  $\sqrt{2} * r$ . Κάθε κάμερα παρακολούθησης καλύπτει ένα δίσκο ακτίνας  $r$ . Το σύστημα αποτυγχάνει αν μια περιοχή μέσα στο σύστημα παρακολούθησης δεν καλύπτεται πια. Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε καταστάσεις λειτουργίας του συστήματος, όπου οι μαύροι κόμβοι συμβολίζουν ότι η κάμερα έχει σταματήσει να λειτουργεί.





Σχήμα 2.1.3

Σε κάθε περίπτωση, το σύστημα αποτυγχάνει αν υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο πλευράς  $\frac{1}{\sqrt{2}}r$ , που αποτελείται από κάμερες εκτός λειτουργίας στις γωνίες του. Προφανώς στην περίπτωση μας έχουμε ένα δισδιάστατο συνεχόμενο 2-από-τα-3 σύστημα αξιοπιστίας και στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζουμε μια απλή περίπτωση κατά την οποία έχουμε αποτυχία του συστήματος.



Σχήμα 2.1.4

## 2.2. Το γραμμικό $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

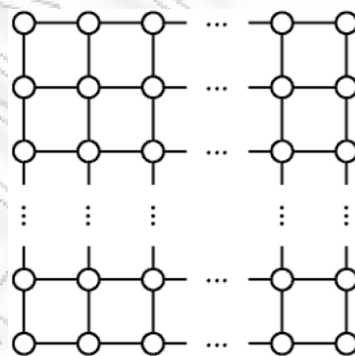
Οι *Boehme, Kossow & Preuss* (1992) παρουσίασαν διάφορες επεκτάσεις του δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος. Η πρώτη επέκταση, αφορά τα συστήματα που έχουν το σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου διάστασης  $m \times n$ . Συγκεκριμένα το σύστημα αποτελείται από  $m$  γραμμές μονάδων, κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από  $n$  μονάδες. Η μονάδα που βρίσκεται στη γραμμή  $i$  και στη στήλη  $j$  συμβολίζεται ως  $(i, j)$  μονάδα. Ένα ορθογώνιο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα (*Rectangular  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  system,  $rs/mn : F$* ), η πιο απλά γραμμικό (*linear*), αποτυγχάνει όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $r \times s$  στο οποίο έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες του ( $r \leq m, s \leq n$ ). Ισχύουν τα παρακάτω:

- Για  $r = s = 1$  είναι ένα σειριακό σύστημα
- Για  $r = m$  και  $s = n$  είναι ένα παράλληλο σύστημα
- Για  $r = 1$  και  $s > 1$  κάθε γραμμή του συστήματος είναι ένα γραμμικό συνεχόμενο  $s$ -από-τα- $n:F$  υποσύστημα. Υπάρχουν  $m$  υποσυστήματα συνδεδεμένα εν σειρά

γιατί αν ένα τουλάχιστον από αυτά αποτύχει αποτυγχάνει όλο το σύστημα. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η αξιοπιστία του συστήματος είναι το γινόμενο των αξιοπιστιών των  $m$  υποσυστημάτων.

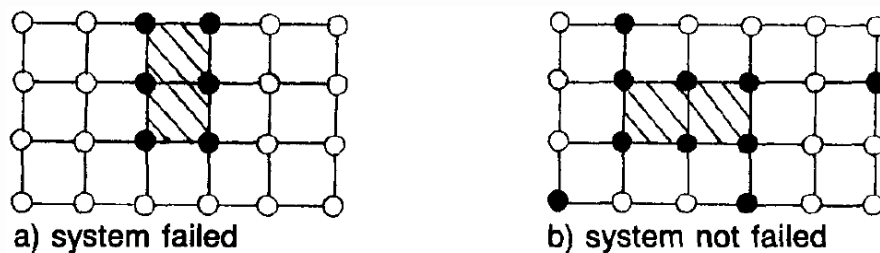
- Για  $s = 1$  και  $r > 1$  κάθε στήλη του συστήματος είναι ένα γραμμικό συνεχόμενο  $r$ -από-τα- $m$ :  $F$  υποσύστημα και επομένως, στην περίπτωση αυτή, η αξιοπιστία του συστήματος είναι το γινόμενο των αξιοπιστιών των  $n$  τέτοιων υποσυστημάτων.
- Για  $r = m$  και  $1 < s < n$  κάθε στήλη αποτελεί ένα παράλληλο υποσύστημα  $m$  στοιχείων. Αυτά τα  $n$  παράλληλα υποσυστήματα, αποτελούν ένα γραμμικό συνεχόμενο  $s$ -από-τα- $n$ :  $F$  σύστημα.
- Για  $s = n$  και  $1 < r < m$  κάθε γραμμή αποτελεί ένα παράλληλο υποσύστημα  $n$  στοιχείων. Αυτά τα  $m$  παράλληλα υποσυστήματα, αποτελούν ένα γραμμικό συνεχόμενο  $r$ -από-τα- $m$ :  $F$  σύστημα.
- Για  $r = s = k$ ,  $m = n$ , έχουμε το δισδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  σύστημα.

Παρόμοια ορίζεται και η παραλλαγή του, το ορθογώνιο (ή γραμμικό)  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $G$  σύστημα. Το συγκεκριμένο σύστημα λειτουργεί όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $r \times s$  του οποίου λειτουργούν όλες οι μονάδες του ( $r \leq m, s \leq n$ ).



Σχήμα 2.2.1

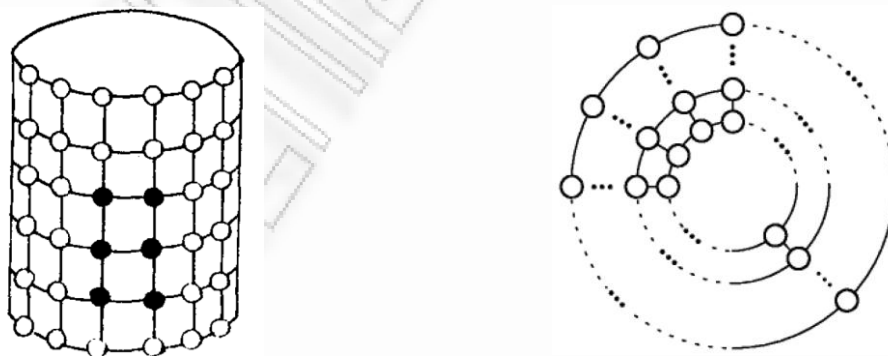
**Παράδειγμα 2.2.1.** Θα δούμε το ορθογώνιο  $(3,2)$ -από-τα- $(4,6)$ :  $F$  σύστημα. Σύμφωνα με τα όσα ορίσαμε παραπάνω, το σύστημα θα αποτύχει όταν υπάρξει τουλάχιστον ένα υποσύστημα του, διάστασης  $3 \times 2$ , που θα έχει όλες τις μονάδες του χαλασμένες. Να σημειώσουμε ότι το σύστημα θα λειτουργεί αν παρουσιαστεί ένα υποσύστημα διάστασης  $2 \times 3$  που να έχει όλες τις μονάδες του χαλασμένες, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2.2

### 2.3. Το κυλινδρικό (ή κυκλικό) $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

Έστω ότι μπορούσαμε να “τυλίξουμε” ένα παραλληλόγραμμο δικτυωτό  $(m, n)$  σύστημα έτσι ώστε η πρώτη στήλη του δικτυωτού να βρεθεί δίπλα στην τελευταία και να ενωθεί μαζί της. Έτσι οι μονάδες σχηματίζουν ένα σύστημα αξιοπιστίας πάνω στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου. Έστω ότι υπάρχουν  $m$  μονάδες διατεταγμένες οριζόντια στην επιφάνεια του κυλίνδρου, και  $n$  μονάδες διατεταγμένες κατακόρυφα. Το κυλινδρικό  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα (*Cylindrical  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$* , *Cylindrical  $rs/mn : F$  system*) αποτυγχάνει όταν υπάρξει τουλάχιστον ένα πλέγμα διάστασης  $r \times s$  πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, του οποίου όλες οι μονάδες έχουν αποτύχει, ( $r \leq m, s \leq n$ ). Σε πολλές περιπτώσεις στη βιβλιογραφία, το σύστημα το συναντάμε και με την ονομασία κυκλικό  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα (*Circular  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$* , *Circular  $rs/mn : F$  system*). Το σύστημα αποτελείται από  $m$  κύκλους και  $n$  ακτίνες, και στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η ομοιότητα των συστημάτων



Σχήμα 2.3.1

**Παράδειγμα 2.3.1.** Ένα κυλινδρικό αντικείμενο (για παράδειγμα ένας αντιδραστήρας), καλύπτεται με ένα σύστημα αισθητήρων για τη μέτρηση της θερμοκρασίας. Κάθε ένας από τους  $m$  κύκλους περιλαμβάνει  $n$  αισθητήρες και το σύστημα μετρήσεων αποτυγχάνει όποτε χαλάσουν όλοι οι αισθητήρες ενός  $3 \times 2$  πίνακα.

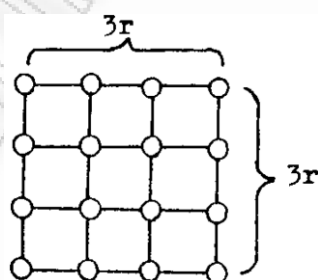
Όμοια μπορούμε να ορίσουμε και το κυλινδρικό (ή κυκλικό)  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): G$  σύστημα, με την ίδια διάταξη των μονάδων που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα το σύστημα λειτουργεί όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων  $r \times s$  πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, στο οποίο να λειτουργούν όλες οι μονάδες ( $r \leq m, s \leq n$ ).

Οι *Fu & Κούτρας* (1994), παρουσίασαν μία ακόμα παραλλαγή του κυλινδρικού δισδιάστατου συστήματος. Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία “τυλίγματος” ενός παραλληλόγραμμου δικτυωτού συστήματος πραγματοποιείται όπως στην κυλινδρική περίπτωση, με τη διαφορά ότι γίνεται και στις γραμμές και τις στήλες του παραλληλόγραμμου, τότε θα προέκυπτε ένα σύστημα αξιοπιστίας πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Πρόκειται ουσιαστικά για μια 3-διάστατη περίπτωση.

#### 2.4. Το σύστημα $(r, s)$ -ή- $(s, r)$ -από-τα- $(m, n): F$

Οι *Boehme, Kossow & Preuss* (1992) όρισαν ένα διαφορετικό σύστημα αξιοπιστίας. Ένα σύστημα  $(r, s)$ -ή- $(s, r)$ -από-τα- $(m, n): F$  αποτυγχάνει όταν υπάρξει τουλάχιστον ένα πλέγμα διαστάσεων  $r \times s$  ή  $s \times r$ , που να έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες του ( $r \leq m, s \leq n, r \leq n, s \leq m$ ). Μπορεί να είναι είτε γραμμικό είτε κυκλικό.

**Παράδειγμα 2.4.1.** Έστω το σύστημα παρακολούθησης του παρακάτω σχήματος, το οποίο αποτελείται από κάμερες οι οποίες καλύπτουν απόσταση ενός δίσκου ακτίνας  $r$ , και οι κάμερες σε κάθε γραμμή και στήλη απέχουν μεταξύ τους απόσταση επίσης  $r$ .



Σχήμα 2.4.1

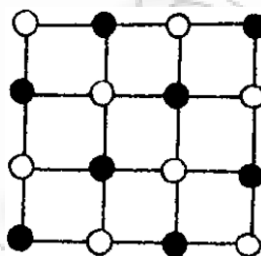
Το σύστημα αποτυγχάνει αν τουλάχιστον δύο διαδοχικές κάμερες σε μία γραμμή ή σε μία στήλη, είναι εκτός λειτουργίας. Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η αποτυχία του συστήματος αφού οι περιοχές ανάμεσα στις κάμερες (2,2) και (2,3) για το πρώτο και (2,2) και (3,2) για

το δεύτερο, βρίσκονται εκτός παρακολούθησης, το οποίο συμβολίζεται με τη μαύρη περιοχή στο γράφημα



Σχήμα 2.4.2

Είναι προφανές ότι το σύστημα του παραδείγματος είναι ένα γραμμικό  $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από- $(4,4): F$  σύστημα και στο επόμενο σχήμα το μέγιστο υποσύνολο ενωμένων μονάδων που αποτυγχάνουν αποτελείται από ένα στοιχείο (το σύστημα λειτουργεί).



Σχήμα 2.4.3

## 2.5. Τα συστήματα $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -από- $(m, n): F$ και $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -ή-...-ή- $(r_k, s_k)$ -από- $(m, n): F$

Προτάθηκαν από τον *Yamamoto* (1996) και αποτελούν γενίκευση του συστήματος  $(r, s)$ - $(s, r)$ -από- $(m, n): F$ . Ένα (γραμμικό ή κυκλικό)  $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -από- $(m, n): F$  αποτελείται  $mn$  μονάδες και αποτυγχάνει όταν ένα πλέγμα διάστασης  $r_1 \times s_1$  είτε ένα πλέγμα διάστασης  $r_2 \times s_2$  περιέχει μονάδες που έχουν όλες αποτύχει. Για  $r_1 = s_2 = r$  και  $r_2 = s_1 = s$  έχουμε το σύστημα  $(r, s)$ - $(s, r)$ -από- $(m, n): F$ .

Το (γραμμικό ή κυκλικό) σύστημα  $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -ή-...-ή- $(r_k, s_k)$ -από- $(m, n): F$  είναι γενίκευση του προηγούμενου, και αποτυγχάνει όταν οποιοδήποτε πλέγμα διάστασης  $r_i \times s_i, i = 1, 2, \dots, k$ , περιέχει μονάδες που έχουν όλες αποτύχει.

## 2.6. Το $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων-διασδιάστατων- $r$ -από- $n:F$ σύστημα

Το  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων διασδιάστατων  $r$ -από- $n:F$  σύστημα ( $k$ -within-2-dimensional consecutive- $r$ -out-of- $n:F$  system) αποτελείται από ένα τετραγωνικό πλέγμα πλευράς  $n$  (αποτελείται από  $n^2$  μονάδες) και αποτυγχάνει αν υπάρχει τουλάχιστον ένα

τετράγωνο πλευράς  $r$  (που θα αποτελείται από  $r^2$  μονάδες), το οποίο θα περιλαμβάνει τουλάχιστον  $k$  μονάδες που έχουν αποτύχει ( $1 \leq k \leq r^2, 1 < r \leq n$ ). Για  $k = r^2$  προκύπτει το κλασικό δισδιάστατο συνεχόμενο  $r$ -από-τα- $n:F$  σύστημα.

## 2.7. Το $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

Το γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα  $(k$ -within linear connected  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  system) είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλέγμα του οποίου οι μονάδες είναι ταξινομημένες σαν τα στοιχεία ενός  $(m, n)$  πίνακα. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας  $(r, s)$  υποπίνακας που περιέχει  $k$  ή περισσότερες μονάδες που έχουν αποτύχει.

Αν “τυλίξουμε” τις γραμμές του συστήματος ώστε η πρώτη γραμμή να βρεθεί δίπλα στην τελευταία, τότε παίρνουμε το κυκλικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα  $(k$ -within circular connected- $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  system). Το τελευταίο μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από τα σημεία τομής  $m$  ομόκεντρων κύκλων και  $n$  ακτίνες που ξεκινούν από το κέντρο των κύκλων και τους τέμνουν.

Τα δυϊκά των παραπάνω συστημάτων είναι τα συστήματα γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): G$  και κυκλικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): G$ . Λειτουργούν όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα  $r \times s$  πλέγμα του οποίου όλες οι μονάδες λειτουργούν.

## 2.8. Το $k$ -συνεχόμενα- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

Το  $k$ -συνεχόμενα- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα  $(m$ -consecutive- $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  system) προτάθηκε από τους Fu & Koutras (1994). Αποτυγχάνει όταν εμφανισθούν τουλάχιστον  $k$  μη επικαλυπτόμενα  $r \times s$  πλέγματα, τα οποία αποτελούνται αποκλειστικά από μονάδες που έχουν αποτύχει.

Εφαρμόζοντας την διαδικασία “τυλίγματος” που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, προκύπτει το κυκλικό  $k$ -συνεχόμενα- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Επίσης ορίζονται τα δυϊκά τους συστήματα, γραμμικό  $k$ -συνεχόμενα- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  και κυκλικό  $m$ -συνεχόμενα- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$ , τα οποία λειτουργούν όταν εμφανισθούν τουλάχιστον  $k$  μη επικαλυπτόμενα  $r \times s$  πλέγματα, των οποίων όλες οι μονάδες λειτουργούν.



## 2.9. Συνδυασμός συστημάτων $k$ -από-τα- $n:F$ , συνεχόμενο $k_c$ -από-τα- $n:F$ και γραμμικό συνεχόμενο- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$

Το σύστημα αυτό προτάθηκε από τους *Zuo, Lin & Wu* (2000) και βασίστηκε σε μια πραγματική βιομηχανική εφαρμογή. Μια πετροχημική εταιρία στον Καναδά παράγει αργό πετρέλαιο. Χρησιμοποιεί αρκετά καμίνια ανασχηματισμού μεθανίου για υδρο-εμποτισμό (*Hydro-treating*). Αυτά τα καμίνια έχουν εκατοντάδες σωλήνες γεμάτους με καταλύτες. Μεθάνιο και ατμός περνάνε μέσα από αυτούς τους σωλήνες σε πολύ μεγάλες τιμές θερμοκρασίας και πίεσης κι έτσι παράγεται υδρογόνο. Το να αλλάξεις όλους τους σωλήνες ενός καμινιού, θα κόστιζε ένα ποσό της τάξης των  $10^6$  δολαρίων. Οι σωλήνες σε κάθε καμίνι είναι τοποθετημένοι οριζόντια, έστω με τη διάταξη που φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

TABLE I  
TUBE ARRANGEMENT IN FURNACE 1

1	2	3	4	...	114
115	116	117	118	...	228
229	230	231	232	...	342
343	344	345	346	...	456

TABLE II  
TUBE ARRANGEMENT IN FURNACE 2

1	2	3	4	...	92
93	94	95	96	...	184
185	186	187	188	...	276
277	278	279	280	...	368

Σχήμα 2.9.1

Στο πρώτο καμίνι (πρώτος πίνακας) οι σωλήνες είναι χωρισμένοι σε δύο κελιά. Τα δύο κελιά μπορούν να θεωρηθούν ότι λειτουργούν ανεξάρτητα μεταξύ τους καθώς κάθε κελί έχει τις δικές του πηγές θερμότητας και εισόδους για ατμό και μεθάνιο. Στο δεύτερο καμίνι (δεύτερος πίνακας) όλοι οι σωλήνες βρίσκονται σε ένα κελί. Οι σωλήνες στους δύο πίνακες είναι αριθμημένοι συνεχόμενα από το 1 ως το  $n$ , όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός σωλήνων στο καμίνι.

Οι σωλήνες είναι σχεδιασμένοι να λειτουργούν σε υψηλές θερμοκρασίες (περίπου  $940^{\circ}C$ ) και υψηλή πίεση (περίπου 382 λίβρες ανά τετραγωνική ίντσα) για ένα ελάχιστο αναμενόμενο χρόνο ζωής 11 περίπου ετών. Κάτω από τέτοιες συνθήκες λειτουργίας οι μηχανισμοί αποτυχίας του συστήματος περιλαμβάνουν οξείδωση, φθορά, υποβάθμιση λόγω παραμόρφωσης από τάνυση και εξανθράκωση. Όποτε ένας σωλήνας βρεθεί χαλασμένος, για παράδειγμα λόγω ρήξης από τάνυση, η ροή του μεθανίου και του ατμού στο σωλήνα τερματίζεται. Αν χαλάσει ένας μόνο σωλήνας το καμίνι δεν παθαίνει καταστροφική ζημιά. Όταν όμως χαλάσουν πολλοί σωλήνες, τότε η αποτελεσματικότητα του καμινιού είναι

χαμηλή και το καμίνι θα πρέπει να αντικαταστήσει όλους τους σωλήνες του. Με βάση συζητήσεις με μηχανικούς της εταιρίας, αναγνωρίστηκαν τα παρακάτω σενάρια αποτυχίας:

1. Όταν ένα συγκεκριμένο ποσοστό των σωλήνων στο καμίνι έχουν αποτύχει. Για παράδειγμα όταν τουλάχιστον το 10% των σωλήνων (τουλάχιστον 46 σωλήνες) στους 456 σωλήνες του πρώτου καμινιού έχουν αποτύχει.
2. Όταν τουλάχιστον μία γραμμή σωλήνων έχει τουλάχιστον έναν συγκεκριμένο αριθμό συνεχόμενων σωλήνων που έχουν αποτύχει. Για παράδειγμα έστω ότι το δεύτερο καμίνι αποτυγχάνει όταν υπάρχουν τουλάχιστον πέντε συνεχόμενοι σωλήνες που έχουν αποτύχει.
3. Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα πλέγμα μεγέθους  $r \times s$ , που περιλαμβάνει σωλήνες που έχουν όλοι αποτύχει.

Το καμίνι αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον ένα από τα παραπάνω σενάρια πραγματοποιείται. Στη γενική περίπτωση λοιπόν, ο συνδυασμός συστημάτων  $k$ -από-τα- $n:F$ , συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  και γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$  αποτελείται από  $mn$  μονάδες ταξινομημένες σε διάταξη ορθογωνίου παραλληλογράμμου και αποτυγχάνει όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω σενάρια.

1. Υπάρχει τουλάχιστον ένα πλέγμα μεγέθους  $r \times s$ , που περιλαμβάνει σωλήνες που έχουν όλοι αποτύχει.
2. Υπάρχει τουλάχιστον μία γραμμή που να περιέχει τουλάχιστον  $k_c$  συνεχόμενες μονάδες που έχουν αποτύχει  $s < k_c \leq n$ .
3. Υπάρχουν τουλάχιστον  $k$  συνολικές αποτυχίες  $k > k_c$ ,  $rs < k_c < mn$ .

## 2.10. Συστήματα αξιοπιστίας αυθαίρετων δομών

Έστω ένας πίνακας διάστασης  $m \times n$ , τον οποίο θεωρούμε ως ένα σύστημα αξιοπιστίας το οποίο αποτελείται από  $mn$  μονάδες. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αξιοπιστίας αποτυγχάνει, όταν παρουσιαστεί μια δομή κάποιου σχήματος και μεγέθους μέσα στον πίνακα, την οποία προφανώς ορίζουμε εμείς, η οποία σχηματίζεται από μονάδες που έχουν όλες αποτύχει. Τέτοια συστήματα είναι πολύπλοκα και δεν θα μας απασχολήσουν στην παρούσα διπλωματική. Οι Aki & Hirano (2004) έδωσαν δύο παραδείγματα που μας βοηθούν να κατανοήσουμε τα παραπάνω.

**Παράδειγμα 2.10.1 (Η δομή του διαμαντιού)** Θεωρούμε την παρακάτω δομή για μονάδες που έχουν αποτύχει.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & . \\ & & & & & & & & & . \end{array}$$

Σχήμα 2.10.1

Ένα σύστημα αξιοπιστίας  $m \times n$  μονάδων, θα αποτυγχάνει όταν εμφανισθεί ένα σύνολο μονάδων με την παραπάνω μορφή, στο οποίο όλα τα στοιχεία (μονάδες) έχουν αποτύχει. Για  $m = n = 5$  υπάρχει, μόνο μία περίπτωση αποτυχίας, η παρακάτω:

$$\begin{array}{cccccc} * & * & 1 & * & * \\ * & 1 & 1 & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & 1 & 1 & 1 & * \\ * & * & 1 & * & * \end{array}$$

Σχήμα 2.10.2

Όπου με \* συμβολίζουμε τις μονάδες που δεν μας απασχολεί αν λειτουργούν ή αν έχουν αποτύχει. ■

**Παράδειγμα 2.10.2 (Η δομή του ρόμβου).** Θεωρούμε την παρακάτω δομή για μονάδες που έχουν αποτύχει.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{array}$$

Σχήμα 2.10.3

Ένα σύστημα αξιοπιστίας  $m \times n$  μονάδων, θα αποτυγχάνει όταν εμφανισθεί ένα σύνολο μονάδων με την παραπάνω μορφή, στο οποίο όλα τα στοιχεία (μονάδες) έχουν αποτύχει. Για  $m = n = 5$  υπάρχει, μόνο μία περίπτωση αποτυχίας, η παρακάτω:

\* \* 1 \* \*  
\* 1 \* 1 \*  
1 \* \* \* 1  
\* 1 \* 1 \*  
\* \* 1 \* \*

Σχήμα 2.10.4 ■

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

### ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της αξιοπιστίας για συστήματα που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτό όμως δεν είναι κάτι εύκολο να γίνει, καθώς δεν υπάρχουν απλοί τύποι για τον υπολογισμό της, και έτσι είναι σχεδόν αδύνατον να βρεθεί η ακριβής τιμή, ιδίως για συστήματα αξιοπιστίας με μεγάλο πλήθος μονάδων. Θα αναφέρουμε ειδικές περιπτώσεις δισδιάστατων συστημάτων που μπορεί να βρεθεί η ακριβής τιμή μέσω ήδη γνωστών μεθόδων ή αναγωγή σε πιο απλά συστήματα, θα παρουσιάσουμε τις μεθόδους που προτάθηκαν για τις γενικές περιπτώσεις δισδιάστατων συστημάτων και τέλος, μέσω προσομοίωσης, θα δώσουμε πίνακες με εκτιμήσεις της αξιοπιστίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων του εκάστοτε συστήματος.

#### 3.1. Παραδείγματα υπολογισμού αξιοπιστίας απλών δισδιάστατων συστημάτων

Οι *Boehme, Kossow & Preuss* (1992) παρουσίασαν παραδείγματα δισδιάστατων συνεχόμενων συστημάτων για τα οποία υπολόγισαν την ακριβή τιμή της αξιοπιστίας τους, στην περίπτωση *i.i.d.* Συμβολίζουμε με  $R_L(k, n)$  την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου συστήματος  $k$ -από-τα- $n:F$  και με  $R_C(k, n)$  αυτή του αντίστοιχου κυκλικού. Επίσης συμβολίζουμε με  $P_L(k, n)$  την πιθανότητα αποτυχίας του γραμμικού συνεχόμενου συστήματος  $k$ -από-τα- $n:F$ , και με  $P_C(k, n)$  αυτή του κυκλικού.

**Παράδειγμα 3.1.1.** Η αξιοπιστία ενός (γραμμικού ή κυκλικού) συνεχόμενου (1,1)-από-τα- $(m, n):F$  συστήματος είναι ίδια με την αξιοπιστία ενός σειριακού συστήματος που περιλαμβάνει  $mn$  μονάδες, επειδή αποτυγχάνει όποτε τουλάχιστον μία μόνο μονάδα αποτύχει. Έτσι:

$$R_L((1,1), (m, n)) = R_C((1,1), (m, n)) = p^{mn}. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.2.** Ένα (γραμμικό ή κυκλικό) συνεχόμενο  $(m, n)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν όλες οι μονάδες του. Έτσι η αξιοπιστία του είναι ίση με την αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος που αποτελείται από  $mn$  μονάδες. Έτσι:

$$R_L((m, n), (m, n)) = R_C((m, n), (m, n)) = 1 - q^{mn}. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.3.** Θα μελετήσουμε το γραμμικό συνεχόμενο  $(1, k)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα ( $k \leq n$ ). Σύμφωνα με τον ορισμό μας το σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μία γραμμή παρουσιάσει  $k$  συνεχόμενα στοιχεία που έχουν αποτύχει. Έτσι το σύστημα λειτουργεί όταν καμιά γραμμή δεν περιέχει  $k$  συνεχόμενα στοιχεία που έχουν αποτύχει ή με άλλα λόγια αν καμιά γραμμή (που θεωρείται ένα γραμμικό συνεχόμενο σύστημα  $k$ -από-τα- $n:F$ ) δεν αποτύχει. Επειδή οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η πιθανότητα να λειτουργεί το σύστημα είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων η κάθε γραμμή να μην αποτυγχάνει. Έτσι:

$$R_L((1, k), (m, n)) = (R_L(k, n))^m$$

$$R_L(k, n) = \sum_{j=0}^{n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor} g_k(n, j) p^{n-j} q^j$$

$$g_k(n, j) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{k} \rfloor} (-1)^i \binom{n-ik}{j-ik} \binom{n-j+1}{i}.$$

Για παράδειγμα:

$$R_L((1, 3), (m, 5)) = (R_L(3, 5))^m = (p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 7p^2q^3 + pq^4)^m$$

και επίσης επαληθεύεται και το Παράδειγμα 3.1.1, αφού:

$$R_L((1, 1), (m, n)) = (R_L(1, n))^m = (p^n)^m = p^{mn}. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.4.** Για ένα γραμμικό συνεχόμενο  $(k, 1)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα έχουμε:

$$R_L((k, 1), (m, n)) = (R_L(k, n))^n$$

όπου την  $R_L(k, n)$  την υπολογίζουμε από τον τύπο του προηγούμενου παραδείγματος.  $\blacksquare$

**Παράδειγμα 3.1.5.** Ένα κυκλικό συνεχόμενο  $(1, k)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν υπάρξει τουλάχιστον ένας κύκλος που εμφανίζει  $k$  συνεχόμενες μονάδες που έχουν αποτύχει. Το σύστημα λειτουργεί όταν όλοι οι κύκλοι (που θεωρούνται κυκλικά συνεχόμενα συστήματα  $k$ -από-τα- $n$ : $F$ ) λειτουργούν. Έτσι, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με το παράδειγμα 3.1.3, έχουμε:

$$R_C((1, k), (m, n)) = (R_C(k, n))^m$$

$$R_C(1, n) = p^n$$

$$R_C(n, n) = 1 - q^n$$

$$R_C(k, n) = p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)q^j R_L(k, n-j-2), \quad 1 < k < n$$

$$R_L(k, i) = 1 \text{ για } i < k$$

$$R_C(k, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor} (-1)^j \binom{n-jk}{j} (pq^k)^j - q^n - k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor} (-1)^j \binom{n-jk-k-1}{j} (pq^k)^{j+1}.$$

Για παράδειγμα:

$$R_C((1, 2), (m, 5)) = (R_C(2, 5))^m = (p^5 + 5p^4q + 5p^3q^2)^m,$$

όπου  $R_C((1, 1), (m, n)) = (R_C(1, n))^m = (p^n)^m = p^{mn}$ , επαληθεύοντας πάλι το Παράδειγμα 3.1.1. ■

**Παράδειγμα 3.1.6.** Ένα κυκλικό συνεχόμενο  $(k, 1)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν  $k$  συνεχόμενες μονάδες σε μία οποιαδήποτε ακτίνα. Έτσι, το σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι ακτίνες (που θεωρούνται γραμμικά συνεχόμενα συστήματα  $k$ -από-τα- $n$ : $F$ ) λειτουργούν.

$$R_C((k, 1), (m, n)) = (R_L(k, n))^n.$$

Για παράδειγμα:

$$R_C((3, 1), (5, n)) = (R_L(3, 5))^n = (p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 7p^2q^3 + pq^4)^n.$$

Επίσης  $R_C((1, 1), (m, n)) = (R_L(1, m))^n = (p^m)^n = p^{mn}$  επαληθεύοντας το Παράδειγμα 3.1.1. ■

**Παράδειγμα 3.1.7.** Θεωρούμε το γραμμικό συνεχόμενο  $(m, k)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει όταν  $k$  συνεχόμενες στήλες περιλαμβάνουν  $m$  μονάδες η κάθε μία που έχουν αποτύχει. Η πιθανότητα  $\tilde{q}$  όπως μία στήλη περιλαμβάνει  $m$  αποτυχημένες μονάδες είναι ίση με  $\tilde{q} = q^m$ . Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις στήλες ως καινούργιες “μονάδες” με πιθανότητα αποτυχίας  $\tilde{q} = q^m$  και αξιοπιστία  $\tilde{p} = 1 - \tilde{q}$  και έτσι το σύστημα μετατρέπεται σε ένα γραμμικό συνεχόμενο σύστημα  $k$ -από-τα- $n:F$  που έχει αξιοπιστία  $R_L(k, n; \tilde{p})$ .

$$R_L((m, k), (m, n); p) = R_L(k, n; \tilde{p}) = \sum_{j=0}^{n-\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} g_k(n, j)(1 - q^m)^{n-j} q^{mj},$$

όπου η  $g_k(n, j)$  υπολογίζεται όπως στο Παράδειγμα 3.1.3. Έτσι:

$$\begin{aligned} R_L((m, 3), (m, 5); p) &= R_L(3, 5; \tilde{p}) = \tilde{p}^5 + 5\tilde{p}^4\tilde{q} + 10\tilde{p}^3\tilde{q}^2 + 7\tilde{p}^2\tilde{q}^3 + \tilde{p}\tilde{q}^4 \\ &= (1 - q^m)^5 + 5(1 - q^m)^4 q^m + 10(1 - q^m)^3 q^{2m} + 7(1 - q^m)^2 q^{3m} \\ &\quad + (1 - q^m) q^{4m}. \end{aligned}$$

Όμοια, για ένα γραμμικό συνεχόμενο  $(k, n)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα,  $k \leq m$ , ισχύει:

$$R_L((k, n), (m, n); p) = R_L(k, m; \tilde{p}) = \sum_{j=0}^{m-\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} g_k(m, j)(1 - q^n)^{m-j} q^{nj}.$$

#### Παρατηρήσεις

1. Για  $k = 1$  η αξιοπιστία παίρνει τη μορφή  $R_L((m, 1), (m, n)) = (1 - q^m)^n$ , που συμφωνεί με το Παράδειγμα 3.1.4 για  $k = m$ , διότι  $R_L(p, m, m) = \sum_{j=0}^{m-1} g_m(m, j)p^{m-j} q^j = 1 - q^m$ .
2. Για  $k = n$  η αξιοπιστία επαληθεύει το παράδειγμα 3.1.3, αφού  $R_L((1, n), (m, n)) = (1 - q^n)^m$ .
3. Για  $k = n$  και  $k = m$ , έχουμε ότι  $R_L((m, n), (m, n)) = 1 - q^{mn}$ , που επαληθεύει το Παράδειγμα 3.1.2. ■

**Παράδειγμα 3.1.8.** Το κυκλικό συνεχόμενο  $(m, k)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν  $k$  συνεχόμενες ακτίνες περιλαμβάνουν  $m$  μονάδες η κάθε μία που έχουν αποτύχει. Η πιθανότητα  $\tilde{q}$  όπως μία ακτίνα περιλαμβάνει  $m$  αποτυχημένες μονάδες είναι ίση με  $\tilde{q} = q^m$ , και το σύστημα αποτυγχάνει όπως ένα κυκλικό συνεχόμενο σύστημα  $k$ -από-τα- $n:F$  που έχει σαν μονάδες τις ακτίνες. Π.χ. για  $k \leq n$  και  $\tilde{p} = 1 - \tilde{q} = 1 - q^m$ ,



$$R_C((m, k), (m, n); p) = R_C(k, n; \tilde{p}).$$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $k = 2$ , η  $R_C(k, n)$  μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$R_C(2, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} \frac{n}{n-j} p^{n-j} q^j,$$

για  $\tilde{p} = p$  και  $\tilde{q} = q$ . Για παράδειγμα:

$$R_C((m, 2), (m, n)) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} \frac{n}{n-j} (1 - q^m)^{n-j} q^{mj}.$$

Επίσης  $R_C((m, 1), (m, n); p) = R_C(1, n; \tilde{p}) = \tilde{p}^n = (1 - q^m)^n$ , η οποία επαληθεύει το Παράδειγμα 3.1.6 για  $k = m$ . ■

**Παράδειγμα 3.1.9.** Το κυκλικό συνεχόμενο  $(k, n)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν  $k$  ( $k \leq m$ ) κύκλοι περιλαμβάνουν  $n$  μονάδες ο καθένας που έχουν αποτύχει. Αν θεωρήσουμε τους κύκλους σαν μονάδες με πιθανότητα αποτυχίας  $\tilde{q} = q^n$  και αξιοπιστία  $\tilde{p} = 1 - \tilde{q} = 1 - q^n$ , τότε το σύστημα αποτυγχάνει όπως ένα γραμμικό συνεχόμενο σύστημα  $k$ -από-τα- $n: F$ . Έτσι η αξιοπιστία του είναι :

$$R_C((k, n), (m, n); p) = R_L(k, m; \tilde{p}) = R_L((k, n), (m, n); p),$$

δηλαδή η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(k, n)$ -από-τα- $(m, n): F$  συστήματος, την οποία υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 3.1.7.

- Για  $k = 1$ ,  $R_C((1, n), (m, n); p) = R_L(1, m; \tilde{p}) = \tilde{p}^m = (1 - q^n)^m$ , η οποία επαληθεύει το Παράδειγμα 3.1.5.
- Για  $k = m$ ,  $R_C((m, n), (m, n); p) = R_L(m, m; \tilde{p}) = \tilde{p}^m = 1 - \tilde{q}^m = 1 - q^{mn}$ , η οποία επαληθεύει το Παράδειγμα 3.1.2. ■

### Παρατηρήσεις

Έστω  $g_{(r,s)}((m, n), k)$  ο αριθμός όλων των  $m \times n$  πινάκων που περιλαμβάνουν ακριβώς  $k$  μονάδες που έχουν αποτύχει και  $mn - k$  μονάδες που λειτουργούν, και να μην περιλαμβάνουν ένα ενωμένο  $r \times s$  πίνακα με μονάδες που έχουν όλες αποτύχει. Τότε η αξιοπιστία ενός γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  συστήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$R_L((r, s), (m, n)) = \sum_{k=0}^{mn} g_{(r,s)}((m, n), k) p^{mn-k} q^k.$$

Το πρόβλημα είναι να βρούμε έναν ακριβή τύπο ή έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για την  $g_{(r,s)}((m, n), k)$ . Προφανώς:

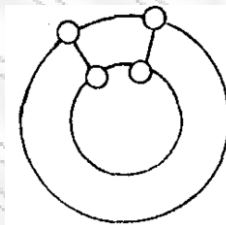
$$g_{(r,s)}((m, n), mn) = 0, \text{ αν } m \geq r \text{ και } n \geq s$$

$$g_{(r,s)}((m, n), k) = \binom{mn}{k}, \text{ αν } 0 \leq k < rs - 1.$$

Στην κυκλική περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αριθμούς  $h_{(r,s)}((m, n), k)$  όλων των δομών που περιλαμβάνουν ακριβώς  $k$  μονάδες που έχουν αποτύχει, αλλά κανένα  $r \times s$  πλέγμα με μονάδες που έχουν όλες αποτύχει, σε αντίθεση με τον  $g_{(r,s)}((m, n), k)$ . Γενικά είναι πολύ δύσκολο να βρούμε τον  $g_{(r,s)}$  και τον  $h_{(r,s)}$ .

**Παράδειγμα 3.1.10.** Ένα γραμμικό συνεχόμενο (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(2,2):  $F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν δύο ενωμένες μονάδες αποτύχουν. Λειτουργεί όπως ένα κυκλικό συνεχόμενο σύστημα 2-από-τα-4:  $F$ . Έτσι:

$$R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,2)) = R_C(2,4) = p^4 + 4p^3q + 2p^2q^2.$$



Σχήμα 3.1.1

Ζωγραφίζοντας το κυκλικό  $2 \times 2$  σύστημα που βλέπουμε στο Σχήμα 3.1.1, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ένα κυκλικό συνεχόμενο (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(2,2):  $F$  σύστημα συμπεριφέρεται και αυτό σαν ένα κυκλικό συνεχόμενο σύστημα 2-από-τα-4:  $F$  σύστημα. Έτσι:

$$R_C((1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,2)) = R_C(2,4). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.11.** Ένα γραμμικό συνεχόμενο (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(3,2):  $F$  σύστημα (ή ένα (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(2,3):  $F$  σύστημα) αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον δύο ενωμένες μονάδες αποτύχουν. Έστω  $A_s$  το ενδεχόμενο ότι το σύστημα αποτυγχάνει, έστω  $A_{ij}$  το

ενδεχόμενο ότι η μονάδα  $(i, j)$  έχει αποτύχει και έστω  $\bar{A}_s$  και  $\bar{A}_{ij}$  τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα. Τότε:

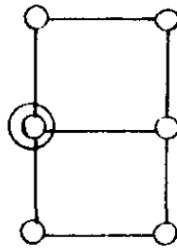
$$R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,2)) = \Pr\{\bar{A}_s\} = \Pr\{\bar{A}_{21} \cap \bar{A}_s\} + \Pr\{A_{21} \cap \bar{A}_s\}.$$

Το ενδεχόμενο  $\bar{A}_{21} \cap \bar{A}_s$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο ότι το στοιχείο  $(2,1)$  και το γραμμικό συνεχόμενο σύστημα 2-από-τα-5:  $F$  σύστημα (που αποτελείται από τις μονάδες  $(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3)$  λειτουργούν. Έτσι:

$$\Pr\{\bar{A}_{21} \cap \bar{A}_s\} = pR_L(p, 2, 5).$$

Το ενδεχόμενο  $\{A_{21} \cap \bar{A}_s\}$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο ότι το  $(2,1)$  λειτουργεί αλλά οι μονάδες  $(1,1), (2,2), (3,1)$  λειτουργούν και οι μονάδες  $(1,2), (3,3)$  μπορεί να λειτουργούν ή να μη λειτουργούν.

$$\Pr\{A_{21} \cap \bar{A}_s\} = pq^3(p^2 + q^2 + 2pq)$$



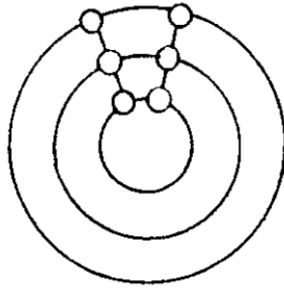
Σχήμα 3.1.2

$$\begin{aligned} R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,2)) &= R_L(p, (1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,3)) \\ &= \Pr\{\bar{A}_{21} \cap \bar{A}_s\} + \Pr\{A_{21} \cap \bar{A}_s\} \\ &= pR_L(p, 2, 5) + pq^3(p^2 + q^2 + 2pq) \\ &= p^6 + 5p^5q + 6p^4q^2 + p^3q^3 + p^3, q \end{aligned}$$

όπου η  $R_L(2,5)$  υπολογίζεται και από τον παρακάτω εναλλακτικό τύπο:

$$R_L(2, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-j+1}{j} p^{n-j} q^j. \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.12.** Ένα κυκλικό συνεχόμενο  $(1,2)$  -ή-  $(2,1)$  -από-τα-  $(3,2)$ :  $F$  σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον δύο ενωμένες μονάδες αποτύχουν.

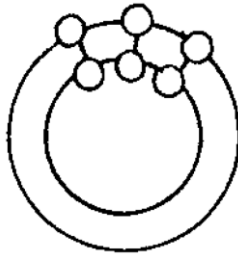


Σχήμα 3.1.3

Οι καταστάσεις αποτυχίας του είναι ίδιες με του προηγούμενου παραδείγματος. Έτσι:

$$R_C((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,2)) = R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,2)).$$

Έστω τώρα το κυκλικό συνεχόμενο  $(1,2)\text{-ή-}(2,1)\text{-από-τα-}(2,3)$ :  $F$  σύστημα.

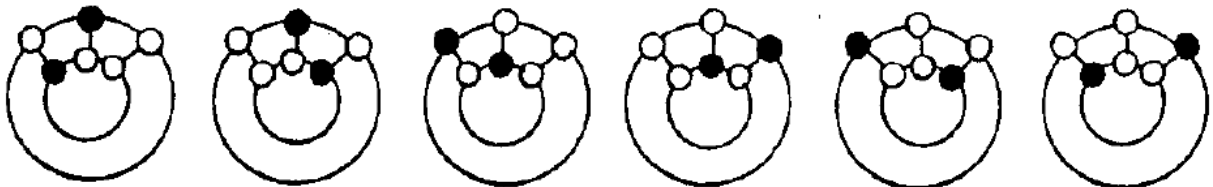


Σχήμα 3.1.4

Η πιθανότητα αποτυχίας του είναι:

$$P_C((1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,3)) = \sum_{j=2}^6 \bar{g}_2(6, j) p^{6-j} q^j,$$

όπου  $\bar{g}_2(6, j)$  είναι ο αριθμός όλων των καταστάσεων αποτυχίας που περιέχουν ακριβώς  $j$  μονάδες που έχουν αποτύχει. Προφανώς  $\bar{g}_2(6, 0) = \bar{g}_2(6, 1) = 0$ . Επίσης  $\bar{g}_2(6, 2) = \binom{6}{2} - 6$  επειδή υπάρχουν 6 καταστάσεις λειτουργίας που περιέχουν ακριβώς 2 μονάδες που έχουν αποτύχει.



Σχήμα 3.1.5

Για  $j = 3, 4, 5, 6$  υπάρχουν πάντα δύο ενωμένες μονάδες που έχουν αποτύχει, δηλαδή  $\bar{g}_2(6, j) = \binom{6}{j}$ . Έτσι η αξιοπιστία του συστήματος είναι:

$$R_C((1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,3)) = 1 - P_C((1,2)\text{-ή-}(2,1), (2,3)) \\ = 1 - (9p^4q^2 + 20p^3q^3 + 15p^2q^4 + 6pq^5 + q^6). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.1.13.** Για ένα γραμμικό συνεχόμενο (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(3,3):  $F$ , ισχύει:

$$R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,3)) = \Pr\{\bar{A}_s | \bar{A}_{2,2}\} p + \Pr\{A_s | A_{2,2}\} q.$$

Επειδή  $\Pr\{\bar{A}_s | \bar{A}_{2,2}\} = R_C(p, 2, 8)$  και  $\Pr\{A_s | A_{2,2}\} = \Pr\{\bar{A}_{1,2} \cap \bar{A}_{2,3} \cap \bar{A}_{3,2} \cap \bar{A}_{2,1}\} = p^4$  έχουμε:

$$R_L((1,2)\text{-ή-}(2,1), (3,3)) = pR_C(2, 8) + p^4q \\ = p \sum_{j=0}^4 \binom{8-j}{j} \frac{8}{8-j} p^{8-j} q^j + p^4q. \quad \blacksquare$$

### 3.2. Ο αλγόριθμος Yamamoto-Miyakawa

Οι Yamamoto & Miyakawa (1995) πρότειναν έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για το γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ : $F$  συστήματος. Ο Zuo (1993) πρότεινε ότι η μέθοδος  $SDP$ , την οποία παρουσιάσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, μπορεί να εφαρμοσθεί για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας της γενικής περίπτωσης του γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$  συστήματος, αλλά είναι πολύ πολύπλοκη. Συγκεκριμένα, κάθε παραλληλόγραμμο διάστασης  $r \times s$  αποτελεί ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής στην περίπτωση  $F$  και ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας στην περίπτωση  $G$ . Στην περίπτωση  $F$  υπάρχουν  $(m - r + 1)(n - s + 1)$  ε.σ.δ. ενώ στην περίπτωση  $G$  υπάρχουν  $(m - r + 1)(n - s + 1)$  ε.σ.λ. Σε ένα κυκλικό  $F$  σύστημα υπάρχουν  $(m - r + 1)n$  ε.σ.δ. ενώ στο κυκλικό  $G$  σύστημα υπάρχουν  $(m - r + 1)n$  ε.σ.λ.

Ο αλγόριθμος των Yamamoto-Miyakawa, τον οποίο στο εξής θα αποκαλούμε αλγόριθμο  $YM$ , είναι πιο αποτελεσματικός από την μέθοδο  $SDP$ , αλλά εξακολουθεί να παραμένει δύσχρηστος και χρονοβόρος. Ο χρόνος υπολογισμού της αξιοπιστίας είναι τάξης  $O(s^{m-r}m^2rn)$  ενώ οι απαιτήσεις σε μνήμη φθάνουν τα  $(m - r + 1)2^{m-r+2}$  bits και  $2s^{m-r+1}$  πραγματικούς αριθμούς.

Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συμβολίζουμε με  $R_j(r, m; [p_{ij}])$  την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $r$ -από-τα- $m$  υποσυστήματος, αποτελούμενου από τις μονάδες που σχηματίζουν το σύστημα-στήλη  $j$ . Στην *i.i.d.* περίπτωση

θα χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό  $R(r, m; p)$ . Επίσης έστω  $R((r, s), (m, j); [p_{ij}])$  η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(m, j):F$  υποσυστήματος αποτελούμενου από τις πρώτες  $j$  στήλες-μονάδες. Στην *i.i.d.* περίπτωση γράφουμε απλά  $R((r, s), (m, j); p)$ .

Έστω τώρα  $I(x)$  το σύνολο  $\{1, 2, \dots, x - r + 1\}$ . Συμβολίζουμε με  $\delta_{ij}$  μια τ.μ. που παίρνει την τιμή 1 αν όλες οι μονάδες  $(i, j), (i + 1, j), \dots, (i + r - 1, j)$  αποτύχουν, και 0 διαφορετικά, με  $\delta_j(v)$  το  $(v - r + 1)$ -διάστατο διάνυσμα  $(\delta_{ij}; i \in I(v))$ , που καθορίζεται από τις καταστάσεις των μονάδων  $(i, j), (2, j), \dots, (v, j)$ , και με  $\delta_j$  το  $(m - r + 1)$ -διάστατο διάνυσμα  $\delta_j(m)$ , το οποίο μας δείχνει τις καταστάσεις όλων των μονάδων σε μια στήλη.

Με βάση τα παραπάνω, έστω  $\Phi_j(r, v)$  το σύνολο των  $\delta_j(v)$  που περιλαμβάνουν τουλάχιστον ένα 1, για  $v = r, r + 1, \dots, m$ . Έστω επίσης  $M(\delta_j(v))$  το  $\max\{i: \delta_{ij} = 1\}$ , για  $\delta_j(v) \in \Phi_j(r, v)$ . Για παράδειγμα, για το διάνυσμα  $\delta_j(v) = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $M(\delta_j(v)) = 4$ . Ορίζουμε ως  $G_j(r, m; \delta_j)$  το ενδεχόμενο όπως το  $\delta_j$  πραγματοποιείται, για  $\delta_j \in \Phi_j(r, m)$  και ως  $F_j(r, m; \delta_j) = P(G_j(r, m; \delta_j))$ , για  $\delta_j \in \Phi_j(r, m)$  την πιθανότητα πραγματοποίησης του.

Ορίζουμε τέλος, με  $R((r, s), (m, j); h_i, i \in I(m); [p_{ij}])$  την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(m, j):F$  συστήματος, επαυξημένου με τα πλέγματα αποτυχίας (*failure grids*)  $r \times h_1, r \times h_2, \dots, r \times h_{m-r+1}$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Κάθε ένα από τα πλέγματα αποτυχίας είναι εξαρτημένο από τα γειτονικά του πλέγματα. Για παράδειγμα, το  $h_i$  συμβολίζει ότι η μονάδα  $(i, j + 1)$  βρίσκεται στην πάνω αριστερά γωνία του πλέγματος αποτυχίας διάστασης  $r \times h_i$ ,  $1 \leq i \leq m - r + 1$ . Τα  $h_i$  είναι ακέραιες μεταβλητές στον αλγόριθμο  $YM$ ,  $0 \leq h_i \leq s$ , για  $i \in I(m)$ , και έστω  $h = \min\{h_i, i \in I(m)\}$ . Στην *i.i.d.* περίπτωση γράφουμε απλά  $R((r, s), (m, j); h_i, i \in I(m); p)$ .

Σημειώνουμε ότι το  $\Phi_j(r, v)$  είναι ανεξάρτητο του  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , και άρα μπορούμε να το παραλείψουμε το  $j$  από τους συμβολισμούς  $\Phi_j(r, v), \delta_j(v), \delta_j$  και  $\delta_{ij}$ . Στη συνέχεια παραθέτουμε τον αλγόριθμο  $YM$ .

### Πρόταση 3.2.1.

1. Έστω  $(\delta(v), \delta_{v-r+2})$  ένα διάνυσμα  $(\delta_i, i \in I(v + 1))$ . Ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$\Phi(r, r) = \{(1)\}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, v+1) = & \{(\delta(v), 0) : \delta(v) \in \Phi(r, v)\} \cup \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \cup \\ & \cup \{(\delta(v), 1) : [M(\delta(v)) = v - r + 1] \text{ ή } [M(\delta(v)) \leq v - 2r + 1], \\ & \delta(v) \in \Phi(r, v)\}, \text{ για } (m-1 \geq v \geq r) \end{aligned}$$

2. Έστω  $\epsilon$  ένα διάνυσμα ( $\epsilon_i, i \in I(m)$ ). Ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} R((r, s), (m, j); h_i, i \in I(m); [p_{ij}]) = \\ = \begin{cases} R_j(r, m; [p_{ij}]) \cdot R((r, s), (m, j-1); s, s, \dots, s; [p_{ij}]) \\ + \sum_{\delta \in \Phi(r, m)} R((r, s), (m, j-1); \epsilon; [p_{ij}]) \cdot F_j(r, m; \delta), & \text{αν } j \geq h \geq 1 \\ 1, & \text{αν } h > j \geq 0 \\ 0, & \text{αν } h = 0 \end{cases} \\ \epsilon_i = \begin{cases} h_i - 1, & \text{αν } \delta_i = 1 \\ s & \text{αν } \delta_i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$  συστήματος είναι:

$$R((r, s), (m, j); [p_{ij}]) = R((r, s), (m, j); s, s, \dots, s; [p_{ij}])$$

με αρχική συνθήκη:

$$R((r, s), (m, j); h_i, i \in I(m); [p_{ij}]) = \begin{cases} 1, & \text{αν } j = 0 \text{ και } h = 0 \\ 0, & \text{αν } h = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ο αλγόριθμος YM έχει τα εξής τρία βήματα:

1. Βρες την  $\Phi(r, m)$  από την  $\Phi(r, v)$ , για  $v = r, \dots, m$ .
2. Υπολόγισε την  $F_j(r, m; \delta)$  για κάθε  $\delta \in \Phi(r, m)$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .
3. Υπολόγισε την  $R((r, s), (m, n); s, s, \dots, s; [p_{ij}])$ , η οποία είναι η αξιοπιστία του συστήματος.

Το σύνολο των στοιχείων του  $\Phi(r, m)$  δεν ξεπερνά το  $2^{m-r+1}$ . Επειδή η αξιοπιστία του συνεχόμενου  $r$ -από-τα- $m$ :  $F$  συστήματος υπολογίζεται σε χρόνο τάξης του  $O(mr)$ , ο χρόνος υπολογισμού κάθε  $F_j(r, m; \delta)$  είναι τάξης  $O(m^2r)$ . Ο αριθμός των  $R((r, s), (m, j); h_i, i \in$

$I(m); [p_{ij}]$  είναι  $(s+1)^{m-r+1}(n-1)$  και άρα η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να υπολογισθεί σε χρόνο τάξης  $O(s^{m-r}m^2rn)$ . Ο αλγόριθμος απαιτεί τουλάχιστον  $2x$  ( $x < 2^{m-r+1}$ ) δυαδικούς πίνακες στο πρώτο βήμα, και 2 πραγματικούς πίνακες διάστασης  $s^{m-r+1}$  στο τρίτο βήμα.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο  $SDP$  για τα γραμμικά συστήματα  $(2,2)/(4,4):F$ ,  $(2,2)/(4,5):F$ ,  $(2,2)/(5,5):F$ , ο αριθμός των ξένων όρων που υπολογίζονται είναι 101,767 και 6656 αντίστοιχα. Άρα είναι εμφανές ότι ο χρόνος υπολογισμού της αξιοπιστίας με την μέθοδο  $SDP$  αυξάνεται κατά πολύ, όσο αυξάνεται το  $m$  και το  $n$ . Η μέθοδος  $SDP$  απαιτεί τουλάχιστον  $2(m-r+1)(n-s+1)$  δυαδικούς πίνακες διάστασης  $m \times n$ , στα δύο πρώτα βήματα του εξωτερικού βρόχου, και  $2x$  ( $x < (sr)^{(m-r+1)(n-s+1)}$ ) δυαδικούς πίνακες διάστασης  $m \times n$ , στα δύο επόμενα βήματα. Εφόσον το  $x$  είναι ο αριθμός των όρων που έχουν απορροφηθεί, είναι δύσκολο να το υπολογίσουμε. Στην χειρότερη περίπτωση, η μέθοδος  $SDP$  απαιτεί μνήμη τάξης  $O((sr)^{(m-r)(n-s)})$  ενώ ο αλγόριθμος  $YM$  μνήμη τάξης  $O(s^{m-r})$ . Στην *i.i.d.* περίπτωση είναι δυνατόν να μειώσουμε τον χρόνο υπολογισμού και τη μνήμη που απαιτείται για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας.

**Πρόταση 3.2.2.** Έστω  $p_{ij} = p_{m+1-i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Τότε:

$$R\left((r, s), (m, j); h_i, i \in I(m); [p_{ij}]\right) = R\left((r, s), (m, j); h_{m-r+1}, h_{m-r}, \dots, h_1; [p_{ij}]\right). \quad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 3.2.1.** Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(2,2)$ -από-τα- $(4, n):F$  συστήματος, για την *i.i.d.* περίπτωση. Σύμφωνα με όσα είδαμε, ισχύουν:

$$\Phi(2,2) = \{(1)\}$$

$$\Phi(2,3) = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

$$\Phi(2,4) = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}.$$

Για  $j = 1, 2, \dots, n$  έχουμε:

$$F_j(2,4; (1,0,0)) = F_j(2,4; (0,0,1)) = pq^2$$

$$F_j(2,4; (1,1,0)) = F_j(2,4; (0,1,1)) = pq^3$$

$$F_j(2,4; (0,1,0)) = p^2q^2$$

$$F_j(2,4; (1,1,1)) = q^4$$

$$R_j(2,4; p) = 1 - q^2 - 2pq^2,$$



για  $j = 1, 2, 3$  και άρα ισχύουν οι ακόλουθοι αναδρομικοί τύποι:

$$R((2,2), (4, j); h_1, h_2, h_3; p) = \begin{cases} (1 - q^2 - 2pq^2) \cdot R((2,2), (4, j-1); 2, 2, 2; p), \\ + \sum_{\delta \in \Phi(2,4)} R((2,2), (4, j-1); \epsilon; p) \cdot F_j(2, 4; \delta) \text{ αν } n \geq j \geq h \geq 1 \\ 1, \text{ αν } 2 \geq h > j \geq 0 \\ 0, \text{ αν } h = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_i = \begin{cases} h_i - 1, & \text{αν } \delta_i = 1 \\ s & \text{αν } \delta_i = 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

Από την Πρόταση 3.2.2 και για  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  έχουμε:

$$R((2,2), (4, j); 1, 0, 0; p) = R((2,2), (4, j); 0, 0, 1; p)$$

$$R((2,2), (4, j); 1, 1, 0; p) = R((2,2), (4, j); 0, 1, 1; p).$$

Έτσι, η αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(2,2)$ -από-τα- $(4, n): F$  συστήματος, είναι:

$$R((2,2), (4, n); 2, 2, 2; p). \quad \blacksquare$$

### 3.3. Αλγόριθμοι για το κυκλικό συνεχόμενο $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τους δύο αλγόριθμους που έχουν προταθεί για το κυκλικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

- **Ο αλγόριθμος YM**

Ο πρώτος αλγόριθμος προτάθηκε από τους *Yamamoto & Miyakawa* (1996). Συμβολίζουμε τώρα με  $Z_{ij}$  μια τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα  $(i, j)$  λειτουργεί, και την τιμή 0 διαφορετικά για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ . Τότε η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως:

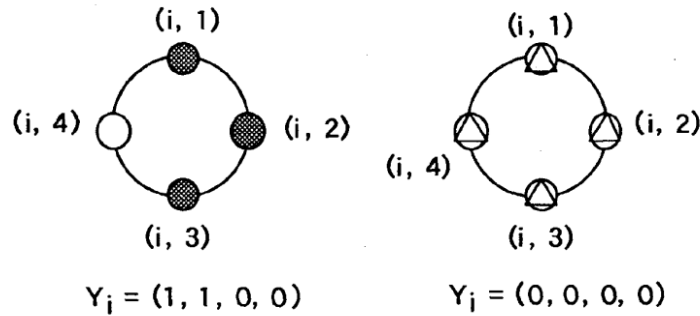
$$P \left\{ \prod_{a=1}^{m-r+1} \prod_{b=1}^n (Z_{ij} = 0, \quad a \leq i \leq a+r-1, \quad b \leq j \leq b+s-1)^c \right\}$$

Συμβολίζουμε με  $R_C(s, n; p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}) = P(\bigcap_{b=1}^n (\mathbf{Z}_{iv} = 0, b \leq v \leq b + s - 1)^c)$  την αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $s$ -από-τα- $n$ : $F$  συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες που σχηματίζουν τον κύκλο  $i$ . Στην περίπτωση *i.i.d.* γράφουμε απλά  $R_C(s, n; p)$ . Επίσης συμβολίζουμε με  $A(i)$  το ενδεχόμενο  $\bigcap_{a=1}^{m-r+1} \bigcap_{b=1}^n (\mathbf{Z}_{uv} = 0, a \leq u \leq a + r - 1, b \leq v \leq b + s - 1)^c$ . Επίσης ορίζουμε ως  $R_C((r, s), (i, n); [p_{ij}]) = P(A(i))$  την αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(i, n)$ : $F$  συστήματος που αποτελείται από τους  $i$  πρώτους κύκλους του αρχικού, για  $i = 1, 2, \dots, m$ . Στην περίπτωση *i.i.d.* γράφουμε απλά  $R_C((r, s), (i, n); p)$ .

Θεωρούμε τις καταστάσεις του κύκλου  $i, i = 1, 2, \dots, m$ . Για να εκφράσουμε τις καταστάσεις αυτές, ορίζουμε μία  $n$ -διάστατη δυαδική τ.μ.  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in})$  με:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο } \{(\mathbf{Z}_{iv} = 0, b \leq v \leq b + s - 1)\} \\ 0, & \text{αν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο } \{(\mathbf{Z}_{iv} = 0, b \leq v \leq b + s - 1)^c\} \end{cases}$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ . Για παράδειγμα, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, για  $s = 2$  και  $n = 4$ , το  $\mathbf{Y}_i = (1, 1, 0, 0)$  σημαίνει ότι οι μονάδες  $(i, 1), (i, 2)$  και  $(i, 3)$  δεν λειτουργούν, αλλά η μονάδα  $(i, 4)$  λειτουργεί και το  $\mathbf{Y}_i = (0, 0, 0, 0)$  σημαίνει ότι δεν υπάρχουν δύο συνεχόμενες μονάδες που δεν λειτουργούν στον κύκλο  $i$ .



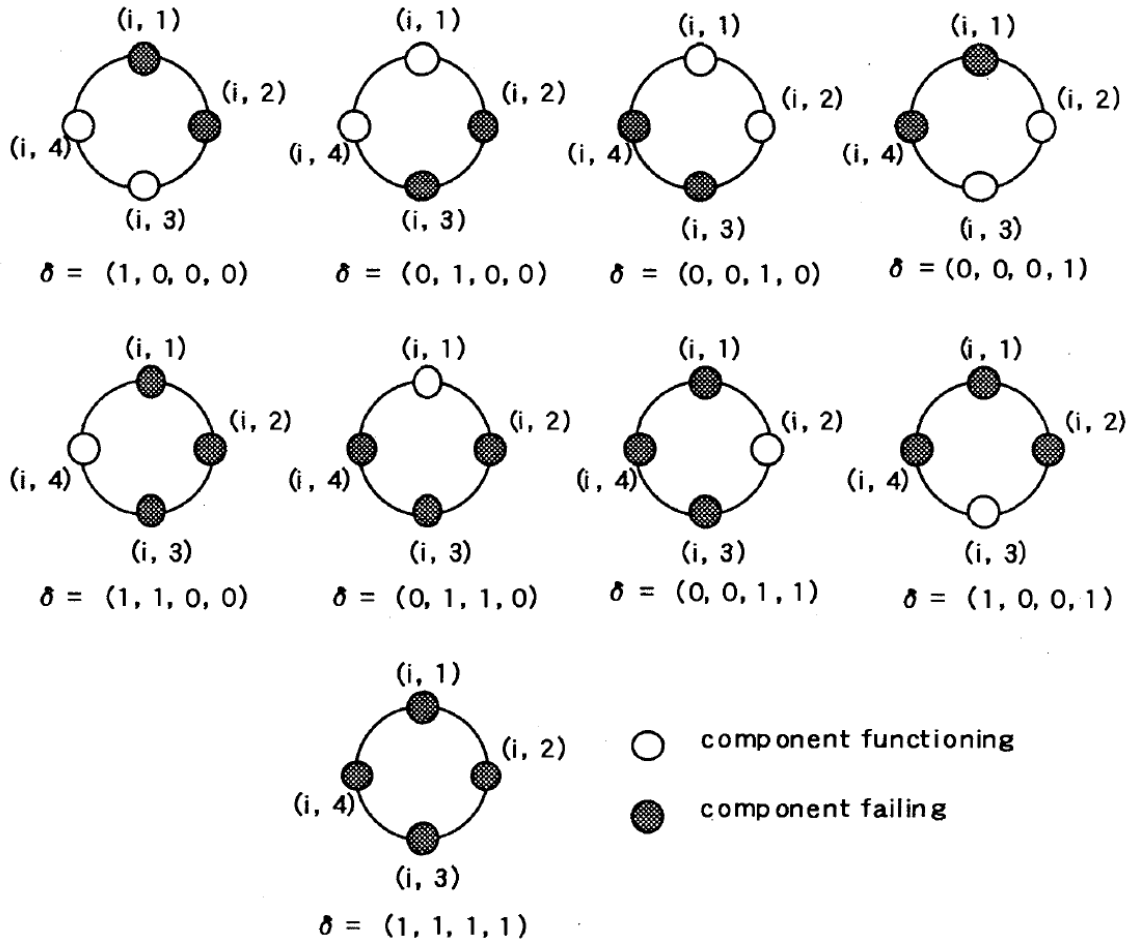
- component functioning    ⊗ none of  $s$  consecutive components failing on their components  
 ● component failing

Σχήμα 3.3.1

Έστω  $\delta$  το  $n$ -διάστατο διάνυσμα  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ . Ορίζουμε το σύνολο  $\Phi \equiv \{\delta | \{\mathbf{Y}_i = \delta\} \neq \emptyset\} - \{\mathbf{0}\}$ , όπου  $\mathbf{0}$  το  $n$ -διάστατο διάνυσμα  $(0, 0, \dots, 0)$ . Το  $\Phi$  εξαρτάται μόνο από τα  $n$  και  $s$ , και όχι από το  $i$ , αφού όλοι οι κύκλοι έχουν το ίδιο σχήμα. Στην περίπτωση που  $s = 2$  και  $n = 4$ , για παράδειγμα, το  $\mathbf{Y}_i = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = (1, 0, 1, 1)$  δεν είναι στοιχείο του  $\Phi$ , αφού  $\delta_1 = 1$  σημαίνει ότι η μονάδα  $(i, 2)$  δεν λειτουργεί αλλά τα

$\delta_2 = 0$  και  $\delta_3 = 1$  σημαίνουν ότι η μονάδα  $(i, 2)$  λειτουργεί. Έτσι, στην περίπτωση που  $s = 2$  και  $n = 4$ ,

$$\Phi = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,1,1,1)\}$$



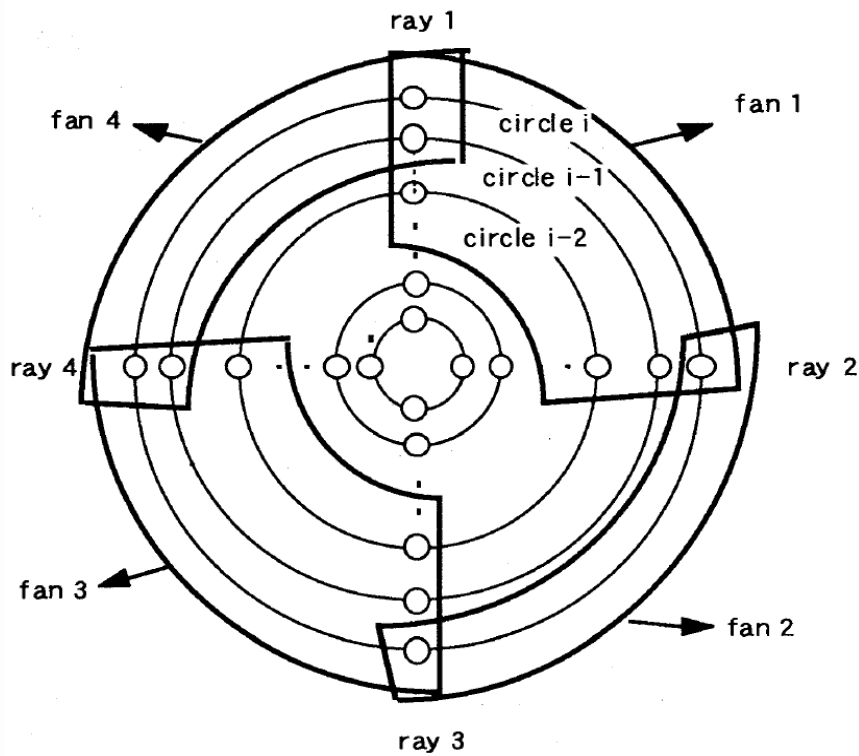
Σχήμα 3.3.2

Ορίζουμε ως  $F_i(s, n; \delta) \equiv P\{Y_i = \delta\} = P(\cap_{j=1}^n \{Y_{ij} = \delta_j\})$ , για  $\delta \in \Phi$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Τέλος ορίζουμε την αξιοπιστία  $R_C(i; h_1, h_2, \dots, h_n)$  ως εξής:

$$R_C(i; h_1, h_2, \dots, h_n) \equiv \begin{cases} P\{A(i) \cap \left\{ \prod_{j=1}^n \{Y_{uj} = 1, i - h_j + 1 \leq u \leq i\}^c \right\} \}, & \text{αν } i \geq 1, h \geq 1 \\ 1, & \text{αν } i = 0, h \geq 1 \\ 0, & \text{αν } h = 0, \end{cases}$$

όπου  $h = \min\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ , για  $h_v = 0, 1, 2, \dots, r$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ . Για παράδειγμα, όταν  $s = 2$  και  $n = 4$ , η  $R_C(i; 3, 1, 3, 2)$  φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



$$\Pr\{A(i) \cap \{\bigcap_{j=1}^4 \{\text{all components in fan } j\}^c\}\}$$

Σχήμα 3.3.3

**Πρόταση 3.1.3.**

1. Έστω  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα. Ισχύει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$R_C(i; h_1, h_2, \dots, h_n) \equiv \begin{cases} R_C(s, n; p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}) \cdot R_C(i-1; r, r, \dots, r) \\ + \sum_{\delta \in \Phi} R_C(i-1; \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot F_i(s, n; \delta), & \text{αν } i \geq 1, h \geq 1 \\ 1, & \text{αν } i = 0, h \geq 1 \\ 0, & \text{αν } h = 0, \end{cases}$$

όπου:

$$\varepsilon_j = \begin{cases} h_j - 1, & \delta_j = 1 \\ r, & \delta_j = 0, \end{cases}$$

για  $j = 1, 2, \dots, n, h_v = 0, 1, \dots, r, v = 1, 2, \dots, n$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ .

2. Η αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(i, n): F$  συστήματος,  $i = 1, 2, \dots, m$ , δίνεται από την σχέση:

$$R_C((r, s), (i, n): [p_{ij}]) = R_C(i; r, r, \dots, r). \quad \blacksquare$$

**Πρόταση 3.3.2.** Αν  $p_{ij} = p_i$  για  $j = 1, 2, \dots, n$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$R_C(i; h_1, h_2, \dots, h_n) = R_C(i; h_j, h_{j+1}, \dots, h_n, h_1, \dots, h_{j-1}),$$

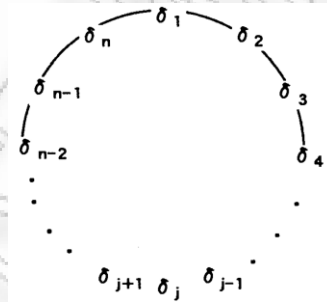
για  $j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m, h_v = 0, 1, \dots, r$  και  $v = 1, 2, \dots, n$ . ■

Ο αλγόριθμος έχει τα εξής τρία βήματα:

1. Βρες την  $\Phi$
2. Υπολόγισε τις  $F_i(s, n; \delta)$  για όλα τα  $\delta \in \Phi$
3. Υπολόγισε την  $R_C(m; r, r, \dots, r)$  αναδρομικά.

Ο χρόνος υπολογισμού της αξιοπιστίας είναι τάξης  $O(r^n n^2 sm)$ .

➤ **Εύρεση της  $\Phi$**



Σχήμα 3.3.4

Παρατηρούμε ότι για  $\delta \in \Phi$ , το  $\delta$  ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη. Αν  $\delta_j = \delta_{j+a+1} = 1$ , τότε  $\delta_{j+1} = \dots = \delta_{j+a} = 0$  για  $j = 1, 2, \dots, n$  και  $a = 1, 2, \dots, s - 1$ . Ορίζουμε ως  $L(s, k)$  ένα σύνολο των  $k$ -διάστατων δυαδικών διανυσμάτων  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$  ως εξής:

$$L(s, k) = \begin{cases} \{\eta | \text{αν } \eta_j = 1 \text{ και } \eta_{j+a+1} = 1, \text{ τότε } \eta_{j+1} = \dots = \eta_{j+a} = 0, \\ \text{για } j = 1, 2, \dots, k - a - 1 \text{ και } a = 1, 2, \dots, s - 1\}, & \text{αν } k = 1, 2, \dots, n - 2 \\ \emptyset, & \text{αν } k = 0 \end{cases}$$

Έστω ότι τα  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο με φορά αντίστοιχη με τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.4. Ορίζουμε τα δύο σύνολα, τα

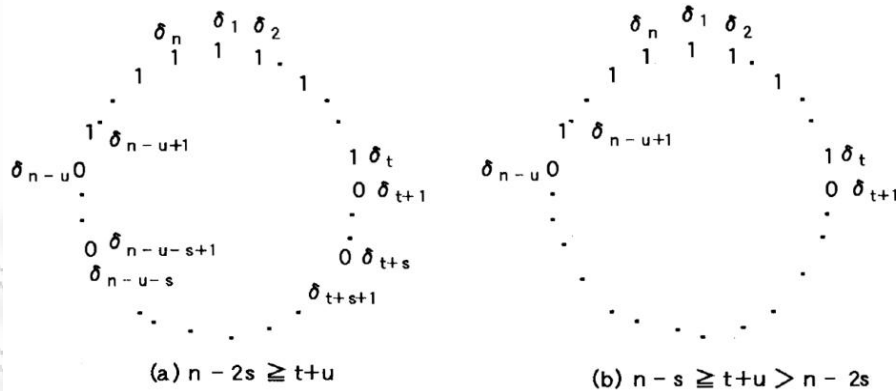
$H_1(s; t, u)$ , για  $n - s \geq t + u, t \geq 1$  και  $u \geq 0$ , και  $H_0(s; t, u)$  για  $n \geq u + \max(s, t), t \geq 1$  και  $u \geq 1$ , ως εξής:

$$H_1(s; t, u) = \begin{cases} \{\delta | \delta_1 = \dots = \delta_t = \delta_{n-u+1} = \dots = \delta_n = 1, \\ \delta_{t+1} = \dots = \delta_{t+s} = \delta_{n-u+1-s} = \dots = \delta_{n-u} = 0 \\ (\delta_{t+s+1}, \delta_{n-u-s}) \in L(s, n - (t + u) - 2s)\}, & n - 2s \geq t + u \\ \{\delta | \delta_1 = \dots = \delta_t = \delta_{n-u+1} = \dots = \delta_n = 1, \\ \delta_{t+1} = \delta_{n-u} = 0, & n - s \geq t + u \geq n - 2s \end{cases}$$

όπου  $\delta_{n+1} \equiv \delta_n$  για  $n - s \geq t + u, t \geq 1$  και  $u \geq 0$ .

$$H_0(s; t, u) = \begin{cases} \{\delta | \delta_1 = \dots = \delta_t = \delta_{n-\max(s-t,0)+1} = \dots = \delta_n = 0, \\ \delta_{t+1} = \dots = \delta_{t+u} = 1, \quad \delta_{t+u+1} = \dots = \delta_{t+u+s} = 0 \\ (\delta_{t+u+s+1}, \dots, \delta_{n-\max(s-t,0)}) \in L(s, n - s - u - \max(s, t))\}, & n - s \geq u + \max(s, t) \\ \{\delta | \delta_1 = \dots = \delta_t = \delta_{n-\max(s-t,0)+1} = \dots = \delta_n = 0, \\ \delta_{t+1} = \dots = \delta_{t+u} = 1, \delta_{t+u+1} = \dots = \delta_{n-\max(s-t,0)} = 0, & n - s \geq t + u \geq n - 2s \end{cases}$$

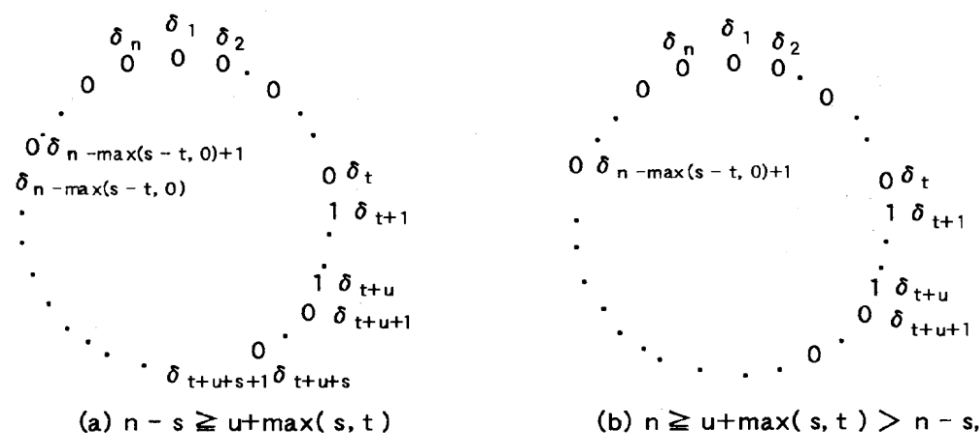
Στο επόμενο σχήμα, το  $H_1(s; t, u)$  υποδηλώνει ένα υποσύνολο του  $\{\delta | \delta_1 = 1, \delta \in \Phi - \{0, 0, \dots, 0\}\}$  και ένα σύνολο  $n$ -διάστατων δυαδικών διανυσμάτων, στον κύκλο των οποίων, τα  $t$  και  $u$  αντίστοιχα είναι ο αριθμός των 1 μέχρι το πρώτο 0, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και αντίστροφα από τη φορά του ρολογιού από το  $\delta_1$  και  $\delta_n$  αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3.5

Τέλος, στο σχήμα, 3.3.6, το  $H_0(s; t, u)$  υποδηλώνει ένα υποσύνολο του  $\{\delta | \delta_1 = 0, \delta \in \Phi - \{0, 0, \dots, 0\}\}$  και ένα σύνολο  $n$ -διάστατων δυαδικών διανυσμάτων, στον κύκλο των οποίων, το  $t$  είναι ο αριθμός των 0 μέχρι το πρώτο 1, με τη φορά των δεικτών του

ρολογιού από το  $\delta_1$ , και  $u$  ο αριθμός των 1 μέχρι το πρώτο 0, με τη φορά του ρολογιού από το  $\delta_{t+1}$ .



Σχήμα 3.3.6

Αφού τα  $H_1(s; t, u)$  και  $H_0(s; t, u)$  είναι ξένα μεταξύ τους, το  $\Phi$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi = \left( \bigcup_{t=1}^{n-s} \bigcup_{u=0}^{n-s-t} H_1(s; t, u) \right) \cup \left( \bigcup_{t=1}^{n-1} \bigcup_{n=1}^{n-(s,t)} H_0(s; t, u) \right) \cup \{(1, 1, \dots, 1)\}$$

➤ **Εύρεση του  $F_i(s, n; \delta)$**

Είναι εμφανές ότι αν  $\delta = (1, 1, \dots, 1)$  τότε  $F_i(s, n; \delta) = \prod_{j=1}^n q_{ij}$ . Αν  $\delta \neq (1, 1, \dots, 1)$ , τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η μονάδα  $(i, n)$  λειτουργεί και οι μονάδες  $(i, 1), (i, 2), \dots, (i, s)$  δεν λειτουργούν. Έστω  $k(\delta)$  το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\{j | \delta_j = 1\}$  για  $j = 1, 2, \dots, n$  και  $j(u; \delta)$  το  $u$ -οστό στοιχείο της ακολουθίας που παίρνουμε, ταξινομώντας τα στοιχεία του συνόλου  $\{j | \delta_j = 1\}$  με αύξουσα σειρά πάνω σε μια γραμμή, για  $u = 1, 2, \dots, k(\delta)$ . Έτσι, με βάση τα παραπάνω,  $j(1; \delta) = 1$ . Ορίζουμε ως  $i(u; \delta) \equiv n + 1$  αν  $u = k(\delta) + 1$ . Έστω επίσης  $P_i(u, \delta)$  η πιθανότητα όπως οι μονάδες  $(i, j(u; \delta)), (i, j(u; \delta) + 1), \dots, (i, j(u + 1; \delta) - 1)$  να είναι στις καταστάσεις που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $\{Y_i = \delta\}$ , για  $u = 1, 2, \dots, k(\delta)$ . Τότε, η  $F_i(s, n; \delta)$  δίνεται από τον τύπο:

$$F_i(s, n; \delta) = \prod_{u=1}^{k(\delta)} P_i(u, \delta),$$

όπου, για  $u = 1, 2, \dots, k(\delta)$ , η  $P_i(u, \delta)$  δίνεται από τον τύπο:

$$P_i(u, \delta) = \begin{cases} q_{i,j(u;\delta)} & j(u+1;\delta) - j(u;\delta) = 1 \\ \left( \prod_{j=j(u;\delta)}^{j(u+1;\delta)-2} q_{ij} \right) \cdot p_{i,j(u+1;\delta)-1}, & j(u+1;\delta) - j(u;\delta) = s+1 \\ \left( \prod_{j=j(u;\delta)}^{j(u+1;\delta)+s+1} q_{ij} \right) \cdot p_{i,j(u+1;\delta)+s} \cdot R_i(s; j(u, \delta) + s + 1, j(u+1; \delta) - 2; [p_{ij}]) \\ \quad \times p_{i,j(u+1;\delta)-1}, & j(u+1; \delta) - j(u; \delta) > s+1, \end{cases}$$

όπου  $R_i(s; u, v; [p_{ij}])$  είναι η αξιοπιστία ενός γραμμικού συνεχόμενου  $s$ -από-τα- $(v - u + 1): F$  συστήματος, που αποτελείται από τις μονάδες  $(i, u), (i, u + 1), \dots, (i, v)$ , για  $u \geq 1$  και  $v \leq n$ , όπου  $R_i(s; u, v; [p_{ij}]) \equiv 1$  αν  $u > v$ .

**Παράδειγμα 3.3.1.** Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου (2,2)-από-τα- $(m, 4): F$  συστήματος.

- ο **ΒΗΜΑ 1.** Βρες την  $\Phi$ .

$$\Phi = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), \\ (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,1,1,1)\}$$

- ο **ΒΗΜΑ 2.** Βρες την  $F_i(s, n; \delta)$  για κάθε  $\delta \in \Phi$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$F_i(2, 4; (1,0,0,0)) = F_i(2, 4; (0,1,0,0)) = F_i(2, 4; (0,0,1,0)) = \\ = F_i(2, 4; (0,0,0,1)) = p^2 q^2$$

$$F_i(2, 4; (1,1,0,0)) = F_i(2, 4; (0,1,1,0)) = F_i(2, 4; (0,0,1,1)) = \\ = F_i(2, 4; (1,0,0,1)) = p q^3$$

$$F_i(2, 4; (1,1,1,1)) = q^4$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$ .

- ο **ΒΗΜΑ 3.** Βρες την  $R_C(m; r, r, \dots, r)$ .

Επειδή  $R_C(2, 4; p) = p^2 + 2p^2q - p^2q^2$  για  $i = 1, 2, \dots, m$ , ισχύει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:



$$R_C(i; h_1, h_2, h_3, h_4) = \begin{cases} (p^2 + 2p^2q - p^2q^2) \cdot R_C(i-1; 2,2,2,2) \\ + \sum_{\delta \in \Phi} R_C(i-1; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \cdot F_i(2,4; \delta), & m \geq i \geq h \geq 1 \\ 1 & 2 \geq h \geq i \geq 0 \\ 0, & h = 0, \end{cases}$$

όπου

$$\varepsilon_j = \begin{cases} h_j - 1 & \delta_j = 1 \\ r, & \delta_j = 0 \end{cases}, \quad j = 1,2,3,4.$$

Από την Πρόταση 3.3.2 έχουμε:

$$R_C(i; 1,0,0,0) = R_C(i; 0,1,0,0) = R_C(i; 0,0,1,0) = R_C(i; 0,0,0,1)$$

$$R_C(i; 1,1,0,0) = R_C(i; 0,1,2,0) = R_C(i; 0,0,1,1) = R_C(i; 1,0,0,1),$$

και άρα η αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου (2,2)-από-τα-(m, 4): F συστήματος από την Πρόταση 3.2.1 μπορεί να γραφεί ως  $R_C(m; 2,2,2,2)$ . ■

- **Ο αλγόριθμος των Yamamoto-Akiba**

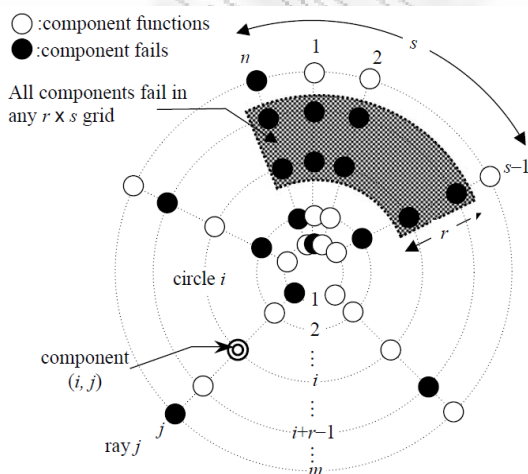
Οι Yamamoto & Akiba (2005a) παρουσίασαν έναν βελτιωμένο αλγόριθμο. Συμβολίζουμε τώρα με  $Z_{ij}$  μια τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει την τιμή 0 αν η μονάδα (i, j) λειτουργεί, και την τιμή 1 διαφορετικά. Τότε η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^{m-r+1} \bigcap_{j=1}^n \left( \prod_{u=i}^{i+r-1} \prod_{v=j}^{j+s-1} Z_{uv} = 1 \right)^c \right\},$$

όπου  $Z_{ij} = Z_{i,j-n}$  για κάθε i και  $j = n+1, n+2, \dots, n+s-1$ . Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν την περιγραφή που δώσαμε για το σύστημα στο δεύτερο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, κάνοντας μια τομή στο κυκλικό σύστημα ανάμεσα στις ακτίνες 1 και n, παίρνουμε ένα γραμμικό συνεχόμενο (r, s)-από-τα-(m, n): F σύστημα. Όμως αυτό διαφέρει από το κλασικό σύστημα το οποίο έχουμε παρουσιάσει, αφού εκτός από τις συνήθεις συνθήκες αποτυχίας, το σύστημα επίσης θα αποτύχει αν όλες οι μονάδες μέσα σε ένα πλέγμα διάστασης  $r \times s$  μέσα σε  $2(s-1)$  ακτίνες, που αποτελείται από τις ακτίνες  $n-s+2$  ως  $n$  και  $1$  ως  $s-1$ . Θα ονομάσουμε αυτό το σύστημα ειδικό γραμμικό

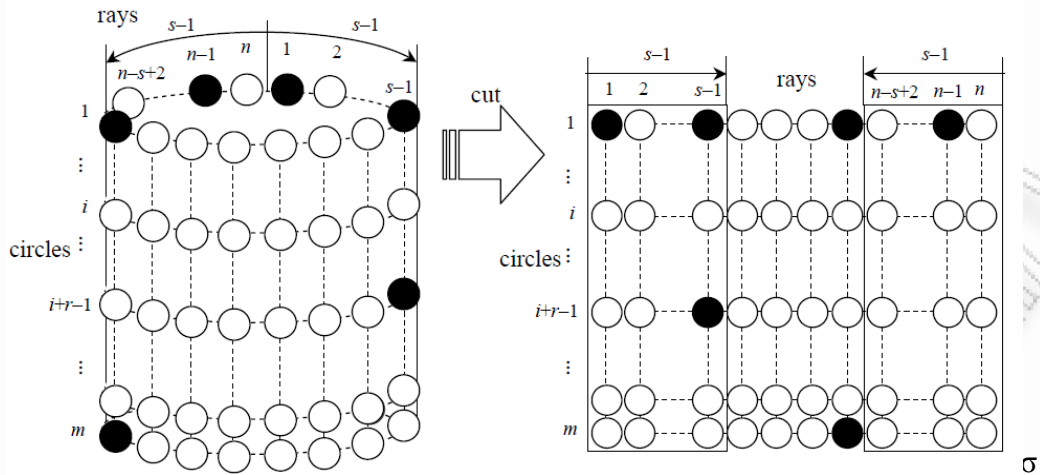
συνεχόμενο  $(r, s)$  -από-τα-  $(m, n): F$  (*special linear consecutive  $(r, s)$  -out-of-  $(m, n): F$  system*). Αρκεί να βρούμε την αξιοπιστία αυτού του συστήματος για να βρούμε την αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  συστήματος. Έτσι, σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία αυτού του ειδικού συστήματος που βασίζεται στις καταστάσεις των μονάδων στις  $2(s - 1)$  ακτίνες, που αποτελείται από τις “ακτίνες 1 ως  $s - 1$ ” και από τις “ακτίνες  $n - s + 2$  ως  $n$ ”. Εν συντομία, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γραμμικό  $(r, s)/(m, n): F$  σύστημα στο οποίο στην κάθε μονάδα στις παραπάνω  $2(s - 1)$  ακτίνες έχει δοθεί μία “ειδική κατάσταση” (*special condition*). Έτσι το σύστημα καταλήγει σε ένα “γραμμικό  $(r, s)/(m, n): F$  σύστημα με δοθείσες καταστάσεις μονάδων και στις δύο άκρες” (*linear consecutive  $(r, s)$ -out-of- $(m, n): F$  system with component states given on both ends*), το οποίο θα περιγράψουμε αναλυτικά παρακάτω. Υπολογίζοντας τώρα την αξιοπιστία αυτού του συστήματος, καθορίζεται η αξιοπιστία του ειδικού γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα-  $(m, n): F$  συστήματος, και κατά συνέπεια, αυτή του κυκλικού  $(r, s)/(m, n): F$  συστήματος.



Σχήμα 3.3.7

Πριν περιγράψουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο και τα θεωρήματα που μας οδηγούν σε αυτόν, θα εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς και θα ορίσουμε το γραμμικό  $(r, s)/(m, n): F$  σύστημα με δοθείσες καταστάσεις μονάδων και στις δύο άκρες.

Έστω  $R_C(r, s, m, j: [p_{uv}])$  η αξιοπιστία του κυκλικού  $(r, s)/(m, n): F$  συστήματος για  $j = 1, 2, \dots, n$ . Έστω επίσης  $Y_{ij} = \prod_{u=i}^{i+r-1} \prod_{v=j}^{j+l-1} Z_{uv}$  μια τ.μ. που παίρνει την τιμή 1 αν αποτύχουν όλες οι μονάδες σε ένα πίνακα (πλέγμα) διάστασης  $r \times l$ , που έχει στις γωνίες του τις μονάδες  $(i, j), (i + r - 1, j), (i + r - 1, j + l - 1), (i, j + l - 1)$ , και 0 διαφορετικά, για  $i = 1, 2, \dots, m - r + 1, j = 1, 2, \dots, n$  και  $l = 1, 2, \dots, s - 1$ .



Σχήμα 3.3.8

Έστω τώρα ένα πλέγμα που έχει στις γωνίες του τις μονάδες  $(i, 1), (i + r - 1, 1), (i + r - 1, j), (i, j)$ . Ορίζουμε με  $h_i$  τον αριθμό των συνεχόμενων ακτίνων των οποίων όλες οι μονάδες έχουν αποτύχει, και με  $g_i$  τον αριθμό των συνεχόμενων ακτίνων των οποίων όλες οι μονάδες έχουν αποτύχει, μετρώντας όμως αντίστροφα από την ακτίνα  $j$ . Επίσης :

$$A(i, j; h_i; g_i) \equiv \begin{cases} \{Y_{i1}(j) = 1\}, & \text{αν } g_i = j \text{ και } j \leq h_i \\ \{Y_{i1}(h_i) = 1\} \cap \{Y_{i, h_i+1}(1) = 0\}, & \text{αν } g_i = 0 \text{ και } j = h_i + 1 \\ \{Y_{i1}(h_i) = 1\} \cap \{Y_{i, h_i+1}(1) = 0\} \cap \{Y_{i, j-g_i}(1) = 0\} \\ \quad \cap \{Y_{i, j-g_i+1}(g_i) = 1\} \cap W(i, j), & \text{αν } j \geq h_i + 2 \\ \emptyset & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

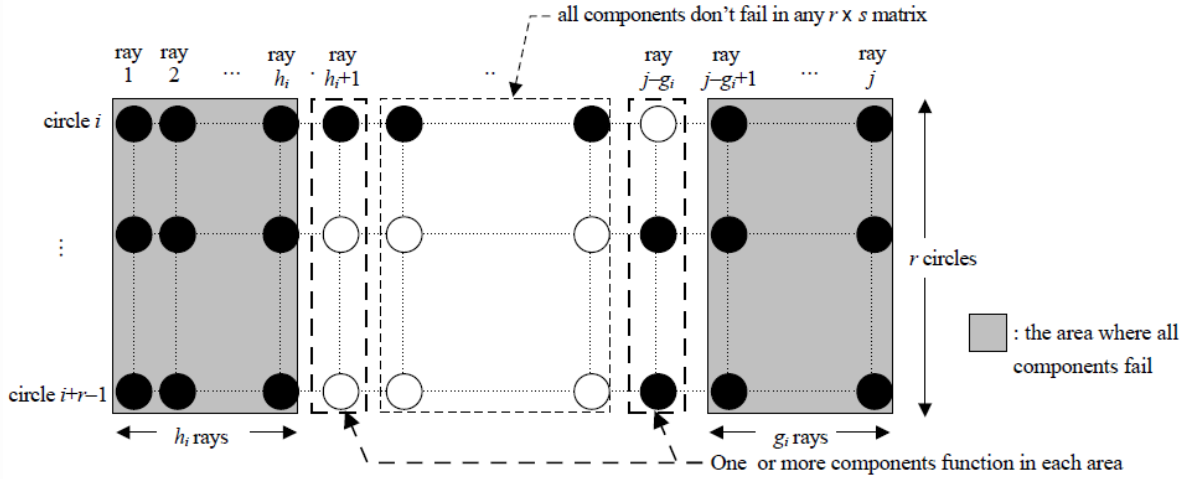
για  $i = 1, 2, \dots, m - r + 1, j = 1, 2, \dots, n$  όπου  $W(i, j)$  συμβολίζει ότι το ενδεχόμενο όπως ένα γραμμικό  $(r, s)/(r, j - h_i - g_i - 2): F$  σύστημα λειτουργεί, με γωνίες τις μονάδες  $(i, h_i + 2), (i + r - 1, h_i + 2), (i + r - 1, j - g_i - 1), (i, j - g_i - 1)$ . Ουσιαστικά με τον παραπάνω συμβολισμό εκφράσαμε την περίπτωση όπου όλες οι μονάδες ενός πλέγματος  $r \times j$  αποτυγχάνουν, ως περίπτωση του  $g_i = j$  και  $j \leq h_i$ , για τους αναδρομικούς τύπους της Πρότασης 3.3.3.

Τώρα, ορίζουμε ως  $\mathbf{H}$  ένα  $(m - r + 1)$ -διάστατο μη αρνητικό ακέραιο διάνυσμα  $(h_1, h_2, \dots, h_{m-r+1})$  για  $h_i = 0, 1, \dots, s - 1$  και ως  $\mathbf{G}$  ένα  $(m - r + 1)$ -διάστατο μη αρνητικό ακέραιο διάνυσμα  $(g_1, g_2, \dots, g_{m-r+1})$  για  $g_i = 0, 1, \dots, s - 1$ . Ορίζουμε την αξιοπιστία του γραμμικού  $(r, s)/(m, j): F$  σύστημα με δοθείσες καταστάσεις μονάδων και στις δύο άκρες ως:

$$R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}) = P \left\{ \prod_{i=1}^{m-r+1} A(i, j; h_i; g_i) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ειδικά, για  $j = 0$ :

$$R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}) = \begin{cases} 1, & g_1 = g_2 = \dots = g_{m-r+1} = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Σχήμα 3.3.9

Χρησιμοποιώντας την  $R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$ , μπορούμε να βρούμε την αξιοπιστία του κυκλικού  $(r, s)/(m, n): F$  συστήματος, προσδιορίζοντας τα  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{G}$  έτσι ώστε να μην υπάρχουν αποκλειστικά χαλασμένες μονάδες σε ένα  $r \times s$  πλέγμα πάνω σε  $2(s-1)$  ακτίνες, που αποτελείται από τις ακτίνες  $n-s+2$  ως  $n$  και  $1$  ως  $s-1$ , ως εξής:

$$R_C(r, s, m, j; [p_{uv}]) = \sum_{\mathbf{H} \in \Phi} \sum_{\mathbf{G} \in A(j; \mathbf{H})} R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}),$$

όπου:

$$\Phi = \left\{ \mathbf{H} \mid \prod_{u=1}^{m-r+1} \chi(h_u < s) = 1 \right\} \text{ και } A(j; \mathbf{H}) = \left\{ \mathbf{G} \mid \prod_{u=1}^{m-r+1} \chi(h_u + g_u < s) = 1 \right\} \text{ για } \mathbf{H} \in \Phi.$$

Σημειώνουμε ότι κάθε όρος του συνόλου  $A(j; \mathbf{H})$  σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα  $r \times s$  πλέγμα με όλες τις μονάδες του χαλασμένες πάνω σε  $2(s-1)$  ακτίνες, που αποτελείται από τις ακτίνες  $n-s+2$  ως  $n$  και  $1$  ως  $s-1$ .

Η  $R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά από το παρακάτω θεώρημα, όπου  $\mathbf{X}^{(i)}$  είναι ένα  $i$ -διάστατο δυαδικό διάνυσμα  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-r+1$  και  $F_j(\mathbf{X}^{(i)})$

είναι η πιθανότητα όπως το ενδεχόμενο  $\prod_{u=1}^i \mathbf{Y}_{uj}(1) = x_u$  πραγματοποιείται στην ακτίνα  $j$ , δηλαδή η πιθανότητα  $P\{\prod_{u=1}^i \mathbf{Y}_{uj}(1) = x_u\}$ . Τέλος με  $\mathbf{G}^{(1)}$  συμβολίζουμε το  $(m-r+1)$ -διάστατο μη αρνητικό ακέραιο διάνυσμα  $(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \dots, g_{m-r+1}^{(1)})$ .

### Πρόταση 3.3.3.

1. Για  $j = 1, 2, \dots, n$  ισχύει:

$$R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}) = \begin{cases} F_j(\mathbf{X}^{(m-r+1)}) \sum_{\mathbf{G}^{(1)} \in \Theta(\mathbf{H}; \mathbf{G})} R(j-1; \mathbf{H}; \mathbf{G}^{(1)}), & \text{αν } (g_i = j \text{ και } 1 \leq j \leq h_i) \\ & \text{ή } (g_i = 0 \text{ και } j = h_i + 1) \\ & \text{ή } h_i + 2 \leq j, \text{ για κάθε } i \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου:

$$\Theta(\mathbf{H}; \mathbf{G}) = \begin{cases} \{\mathbf{G}^{(1)} | g_i^{(1)} = g_i - 1, & \text{αν } (g_i = j \text{ και } 1 \leq j \leq h_i) \text{ ή } (g_i \geq 0 \text{ και } h_i + 2 \leq j), \\ g_i^{(1)} = j - 1, & \text{αν } (g_i = 0 \text{ και } j = h_i + 1) \\ g_i^{(1)} = 0, 1, \dots, s - 1, & \text{αν } (g_i = 0 \text{ και } h_i + 2 \leq j) \} \end{cases}$$

και

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } g_i > 0 \\ 0, & \text{αν } g_i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m-r+1$$

με αρχική συνθήκη για  $j = 0$ :

$$R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}) = \begin{cases} 1, & g_1 = g_2 = \dots = g_{m-r+1} = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2. Για  $j = s, s+1, \dots, n$  ισχύει:

$$R_C(r, s, m, j; [p_{uv}]) = \sum_{\mathbf{H} \in \Phi} \sum_{\mathbf{G} \in A(j; \mathbf{H})} R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}),$$

όπου:

$$\Phi = \left\{ \mathbf{H} \left| \prod_{u=1}^{m-r+1} \chi(h_u < s) = 1 \right. \right\} \text{ και } A(j; \mathbf{H}) = \left\{ \mathbf{G} \left| \prod_{u=1}^{m-r+1} \chi(h_u + g_u < s) = 1 \right. \right\} \text{ για } \mathbf{H} \in \Phi$$

Με  $\chi(\mathbf{A})$  συμβολίζουμε μία δείκτρια συνάρτηση που παίρνει την τιμή 1 όταν η συνθήκη  $\mathbf{A}$  είναι αληθής, και την τιμή 0 διαφορετικά. ■

Στον επαναληπτικό αλγόριθμο, πρώτα υπολογίζουμε τις  $R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  για ένα δεδομένο  $\mathbf{H}$  και για οποιοδήποτε  $\mathbf{G}$  για να πάρουμε το  $\sum_{\mathbf{G} \in A(j; \mathbf{H})} R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  για το δεδομένο  $\mathbf{H}$  στην εξίσωση (3.1.4). Ακολουθώντας, δίνουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για το  $F_j(\mathbf{X}^{(l)})$ . Εισάγουμε τον εξής συμβολισμό:

$$F_j(\mathbf{X}^{(i)}; l) = \begin{cases} P \left\{ \prod_{u=1}^i \{Y_{uj}(1) = x_u\} \cap \{Z_{i+r-1, j} = 0\} \right\} & \text{αν } l = 0 \\ P \left\{ \prod_{u=1}^i \{Y_{uj}(1) = x_u\} \cap \{Z_{i+r-l-1, j} = 0\} \prod_{u=i+r-l}^{i+r-1} \{Z_{uj} = 1\} \right\}, & \text{αν } r - 1 \geq l \geq 1 \\ P \left\{ \prod_{u=1}^i \{Y_{uj}(1) = x_u\} \prod_{u=i}^{i+r-1} \{Z_{uj} = 1\} \right\} & \text{αν } l = r. \end{cases}$$

Αν  $l < r$ , το  $l$  είναι ο αριθμός των συνεχόμενων μονάδων που έχουν αποτύχει μετρώντας αντίστροφα από την μονάδα  $(i + r - 1, j)$  στην ακτίνα  $j$ . Όταν  $l = r$ , ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος ή ίσος του  $r$ . Επίσης να σημειώσουμε ότι κάποια  $F_j(\mathbf{X}^{(i)}; l)$  είναι ίσα με μηδέν, για παράδειγμα  $F_j((\mathbf{X}^{(i-1)}, 0); r) = 0$  και  $F_j((\mathbf{X}^{(i-1)}, 1); l) = 0$  για  $l = 0, 1, \dots, r - 1$ , όπου  $(\mathbf{X}^{(i-1)}, 0)$  και  $(\mathbf{X}^{(i-1)}, 1)$  είναι τα  $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0)$  και  $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1)$  αντίστοιχα, και  $(\mathbf{X}^{(0)}, x_1) \equiv (x_1)$ .

**Πρόταση 3.3.4.** Ισχύουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις για το  $F_j(\mathbf{X}^{(m-r+1)})$ :

1. Για  $i = 2, 3, \dots, m - r + 1$  ισχύει:

$$F_j(\mathbf{X}^{(i)}; l) = \begin{cases} p_{i+r-1, j} \sum_{v=0}^{r-1} F_j(\mathbf{X}^{(i-1)}; v), & \text{αν } x_i = 0 \text{ και } l = 0 \\ (1 - p_{i+r-1, j}) F_j(\mathbf{X}^{(i-1)}; l - 1), & \text{αν } x_i = 0 \text{ και } r - 1 \geq l \geq 1 \\ (1 - p_{i+r-1, j}) F_j((\mathbf{X}^{(i-2)}, 0); r - 1), & \text{αν } x_{i-1} = 0, x_i = 1 \text{ και } l = r \\ (1 - p_{i+r-1, j}) F_j((\mathbf{X}^{(i-2)}, 1); r), & \text{αν } x_{i-1} = 1, x_i = 1 \text{ και } l = r \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

με αρχική συνθήκη:

$$F_j(x_1; l) = \begin{cases} p_{rj}, & \text{αν } x_i = 0 \text{ και } l = 0 \\ p_{r-1,j} \prod_{u=r-l+1}^r (1 - p_{uj}), & \text{αν } x_i = 0 \text{ και } r-1 \geq l \geq 1 \\ \prod_{u=1}^r (1 - p_{uj}), & \text{αν } x_{i-1} = 1 \text{ και } l = r \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2. Για  $i = m - r + 1$  και  $j = 1, 2, \dots, n$  ισχύει:

$$F_j(\mathbf{X}^{(m-r+1)}) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{r-1} F_j(\mathbf{X}^{(m-r)}, 0; l), & \text{αν } x_{m-r+1} = 0 \\ F_j(\mathbf{X}^{(m-r)}, 1; r), & \text{αν } x_{m-r+1} = 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Οι ιδέες πάνω στις οποίες βασίστηκε ο αλγόριθμος αυτής της παραγράφου βρίσκονται στα παραπάνω δύο θεωρήματα. Τα επόμενα θεωρήματα κάνουν τον αλγόριθμο πιο αποτελεσματικό.

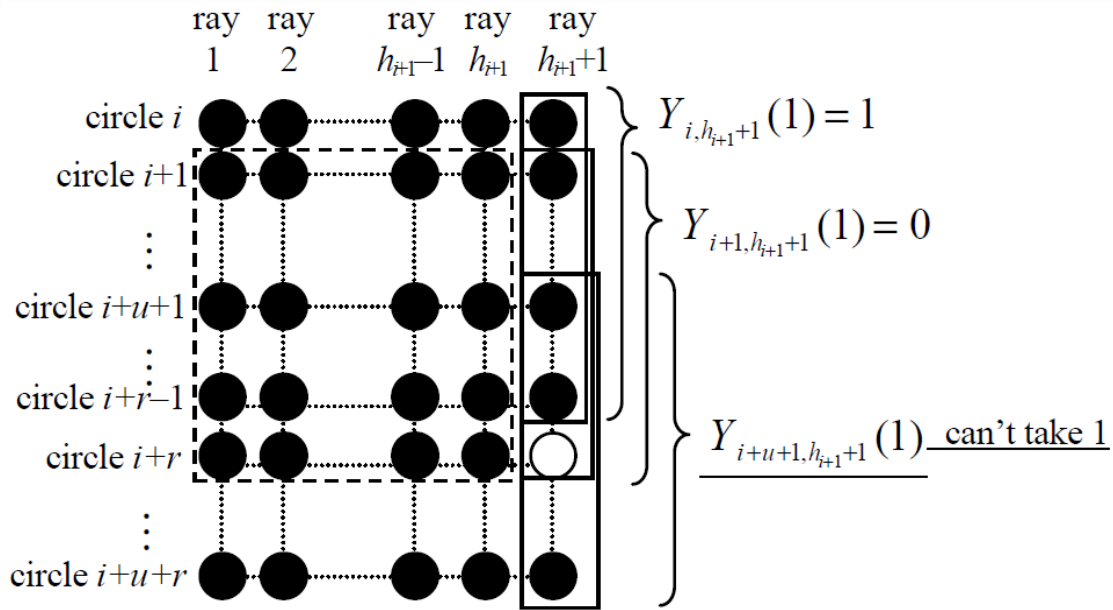
### Πρόταση 3.3.5.

Στην περίπτωση που  $h_{i+1} < h_{i+u}$ , όπως  $h_{i+1} < h_i$ , το ενδεχόμενο  $\{\mathbf{Y}_{i, h_{i+1}+1}(1) = 1\} \cap \{\mathbf{Y}_{i+1, h_{i+1}+1}(1) = 0\}$  πρέπει να πραγματοποιηθεί, δηλαδή στην ακτίνα  $h_{i+1} + 1$  όλες οι μονάδες αποτυγχάνουν στις μονάδες  $(i, h_{i+1} + 1), (i + 1, h_{i+1} + 1), \dots, (i + r - 1, h_{i+1} + 1)$  και η μονάδα  $(i + r, h_{i+1} + 1)$  λειτουργεί. Έτσι, μπορεί να αποδειχθεί ότι το ενδεχόμενο  $\{\mathbf{Y}_{i, h_{i+1}+1}(1) = 1\} \cap \{\mathbf{Y}_{i+1, h_{i+1}+1}(1) = 0\} \cap \{\mathbf{Y}_{i+u+1, h_{i+1}+1}(1) = 1\}$  είναι κενό.

Στην περίπτωση που  $h_{i+1} > h_{i+u}$ , θεωρώντας την ακτίνα  $h_{i+u+1}$ , μπορεί να αποδειχθεί ότι το ενδεχόμενο  $\{\mathbf{Y}_{i, h_{i+u}+1}(1) = 1\} \cap \{\mathbf{Y}_{i+u, h_{i+u}+1}(1) = 0\} \cap \{\mathbf{Y}_{i+u+1, h_{i+u}+1}(1) = 1\}$  είναι κενό, χρησιμοποιώντας το ίδιο σκεπτικό με την προηγούμενη περίπτωση.  $\blacksquare$

**Πρόταση 3.3.6.** Για  $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_{m-r+1})$  ορίζουμε ως  $\mathbf{H}' = (h_{m-r+1}, h_{m-r}, \dots, h_1)$ . Αν  $p_{iv} = p_{m+1-i, v}$  για οποιοδήποτε  $i$  και  $v = 1, 2, \dots, n$ , τότε:

$$\sum_{G \in A(j; \mathbf{H})} R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G}) = \sum_{G \in A(j; \mathbf{H}')} R(j; \mathbf{H}'; \mathbf{G}), \quad j = s, s + 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$



Σχήμα 3.3.10

Με βάση όλα τα παραπάνω, ο αλγόριθμος έχει τα εξής βήματα:

1. Διάλεξε το  $\mathbf{H}$  έτσι ώστε να μην ικανοποιείται η συνθήκη του πρώτου μέρους της Πρότασης 3.3.5.
2. Υπολόγισε το  $F_j(\mathbf{X}^{(m-r+1)})$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.4 και το  $\sum_{\mathbf{G} \in A(n, \mathbf{H})} R(n; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  για το καθορισμένο  $\mathbf{H}$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.3.
3. Πήγαινε στο βήμα 4 αν οι  $\sum_{\mathbf{G} \in A(n, \mathbf{H})} R(n; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  έχουν όλες υπολογισθεί για όλα τα  $\mathbf{H}$  που έχουν επιλεγθεί, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 1.
4. Υπολόγισε την  $R_C(r, s, m, n; [p_{uv}])$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.3.

Όταν ικανοποιηθούν οι συνθήκες της Πρότασης 3.3.4, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μειώσουμε τον αριθμό των  $\mathbf{H}$  που μπορούν να επιλεγθούν, γιατί μπορούμε να υπολογίσουμε είτε το  $\sum_{\mathbf{G} \in A(n, \mathbf{H})} R(n; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  ή το  $\sum_{\mathbf{G} \in A(n, \mathbf{H}')} R(n; \mathbf{H}'; \mathbf{G})$ .

Για κάθε  $j$ , ο μέγιστος αριθμός των  $R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  είναι ίσος με  $s^{2(m-r+1)}$  και για κάθε  $j$ , ο μέγιστος αριθμός των  $F_j(\mathbf{X}^{(i)}; l)$  είναι μικρότερος από  $(r+1)2^{m-r+2}$ . Έτσι, η αξιοπιστία του κυκλικού  $(r, s)/(m, n): F$  συστήματος μπορεί να υπολογισθεί σε χρόνο τάξης του  $O(n(s^{2(m-r)} + r2^{(m-r)}))$  από αυτό τον αλγόριθμο. Για ένα καθορισμένο  $\mathbf{H}$ , ο μέγιστος αριθμός των μηνύων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της  $R(j; \mathbf{H}; \mathbf{G})$  είναι  $2s^{(m-r+1)}$  γιατί πρέπει να προετοιμάσουμε  $s^{(m-r+1)}$  μήνυμα για ίδιο ή διαφορετικό  $j$  αντίστοιχα. Όμοια,



ο αριθμός των μνημών που απαιτούνται για τον υπολογισμό των  $F_j(\mathbf{X}^{(i)}; l)$  είναι μικρότερος από  $(r+1)2^{m-r+2}$ . Έτσι απαιτείται μνήμη τάξης του  $O(s^{(m-r)} + r2^{(m-r)})$ . Υπενθυμίζουμε ότι με τον αλγόριθμο *YM* χρειαζόμασταν χρόνο τάξης  $O(s^{m-r}m^2rn)$  και μνήμη τάξης  $O(r^n)$ . Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος αυτής της παραγράφου είναι πιο αποτελεσματικός από τον αλγόριθμο *YM* όσο το  $n$  μεγαλώνει, όσον αφορά το χρόνο και το μέγεθος της μνήμης που απαιτείται.

### 3.4. Οι αλγόριθμοι των *Zuo, Lin* και *Wu*

Οι *Zuo, Ling & Wu* (2000) παρουσίασαν τον συνδυασμό των συστημάτων  $k$ -από-τα- $n:F$ , συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n:F$  και γραμμικό συνεχόμενο- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$ , τον οποίο παρουσιάσαμε στην παράγραφο (2.8), και έδωσαν επαναληπτικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του, καθώς και άλλων δύο συνδυασμών συστημάτων, τους οποίους και θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι οι αξιοπιστίες των μονάδων δεν είναι απαραίτητα οι ίδιες.

- **Συνδυασμός συστημάτων  $k$ -από-τα- $n:F$  και συνεχόμενο  $k_c$ -από-τα- $n:F$**

Αν και προφανώς κανένα από τα δύο συστήματα δεν είναι δισδιάστατο, ο συνδυασμός αυτών των συστημάτων θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε τη λογική των επαναληπτικών αλγορίθμων που θα αναφερθούν σε αυτή την παράγραφο. Το σύστημα αυτό αποτελείται από  $n$  μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά και αποτυγχάνει όταν αποτύχουν  $k$  μονάδες ή τουλάχιστον  $k_c$  συνεχόμενες μονάδες. Αν  $k_c > k$ , τότε το σύστημα ταυτίζεται με το σύστημα  $k$ -από-τα- $n:F$ . Άρα υποθέτουμε ότι  $k > k_c$ . Όταν  $k > n$ , η αξιοπιστία αυτού του συστήματος είναι ίση με την αξιοπιστία του συνεχόμενου  $k_c$ -από-τα- $n:F$  συστήματος.

Έστω  $A(i, j, k_c)$  το ενδεχόμενο όπως ο συνδυασμός των υποσυστημάτων  $j$ -από-τα- $i:F$  και συνεχόμενο  $k_c$ -από-τα- $i:F$  αποτυγχάνει. Ο συνδυασμός αυτός αποτελείται από τις μονάδες  $1, 2, \dots, i$ ,  $i \geq j \geq 0$ ,  $i \geq k_c$ . Ορίζουμε ως  $Q(i, j, k_c) = P(A(i, j, k_c))$  την πιθανότητα πραγματοποίησης αυτού του ενδεχομένου και έστω  $B(i)$  το ενδεχόμενο να αποτύχει η μονάδα  $i$ .

Θα δώσουμε τώρα τον επαναληπτικό αλγόριθμο για την υπολογισμό της αξιοπιστίας του συνδυασμού των συστημάτων, δηλαδή της  $Q(n, k, k_c)$ , και στη συνέχεια μας είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε την αξιοπιστία ως  $R(n, k, k_c) = 1 - Q(n, k, k_c)$ . Μπορούμε να αναλύσουμε το ενδεχόμενο  $A(i, j, k_c)$  σε τρία ξένα ενδεχόμενα:

$$A(i, j, k_c) = \{A(i-1, j, k_c) \cap \bar{B}(i)\} \cup \{A(i-1, j-1, k_c) \cap B(i)\} \\ \cup \left\{ \bar{A}(i-k_c-1, j-k_c, k_c) \cap \bar{B}(i-k_c) \prod_{l=i-k_c-1}^i B(l) \right\}.$$

Τότε:

$$Q(i, j, k_c) = p_i Q(i-1, j, k_c) + q_i Q(i-1, j-1, k_c) \\ + [1 - Q(i-k_c-1, j-k_c, k_c)] p_{i-k_c} \prod_{l=i-k_c-1}^i q_l$$

$$Q(i, j, k_c) = \begin{cases} 1, & \text{αν } j = 0 \\ 0, & \text{αν } i < \min\{j, k_c\} \end{cases}$$

$$p_0 \equiv 1.$$

Η πολυπλοκότητα του υπολογισμού της  $Q(n, k, k_c)$  είναι τάξης  $O(nk)$ .

- **Συνδυασμός συστημάτων  $k$ -από-τα- $mn$ : $F$  και γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ : $F$**

Το σύστημα αυτό αποτελείται από  $mn$  μονάδες ταξινομημένες σε  $m$  γραμμές, κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από  $n$  μονάδες. Το σύστημα αποτυγχάνει όταν εμφανισθούν  $k$  χαλασμένες μονάδες ή όταν υπάρξει τουλάχιστον ένα πλέγμα διάστασης  $r \times s$ , του οποίου οι μονάδες έχουν αποτύχει όλες ( $1 \leq rs < k \leq mn$ ). Θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας αυτού του συστήματος.

➤  **$r = m$**

Έστω  $A(m, j, u, s)$  το ενδεχόμενο όπως ο συνδυασμός των υποσυστημάτων  $u$ -από-τα- $mj$ : $F$  και συνεχόμενο  $(m, s)$ -από-τα- $(m, j)$ : $F$  αποτυγχάνει. Ο συνδυασμός αυτός αποτελείται από τις μονάδες στις  $j$  πρώτες στήλες του συστήματος,  $0 \leq u \leq k, 0 \leq j \leq n$ . Με  $Q(m, j, u, s) = P(A(m, j, u, s))$  συμβολίζουμε την πιθανότητα πραγματοποίησής του. Έστω επίσης  $B_j(i, l)$  το ενδεχόμενο όπως υπάρχουν ακριβώς  $l$  αποτυχίες από την μονάδα  $(1, j)$  ως την μονάδα  $(i, j)$ , στην στήλη  $j$ , και  $Q_c(i, l; j) = P(B_j(i, l))$  η πιθανότητα πραγματοποίησής του.

Όμοια με το προηγούμενο σύστημα, θα αναλύσουμε το ενδεχόμενο  $A(m, j, u, s)$  σε τρία ξένα ενδεχόμενα και θα δώσουμε έναν απλό αναδρομικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της αναξιοπιστίας του:

$$A(m, j, u, s) = \left\{ \bigcup_{l=0}^{m-1} [\bar{A}(m, j-s-1, u-ms-l, s) \cap B_{j-s}(m, l)] \bigcap_{i=j-s-1}^j B_i(m, m) \right\} \\ \cup \{A(m, j-1, u-m, s) \cap B_j(m, m)\} \\ \cup \left\{ \bigcup_{l=0}^{m-1} [A(m, j-1, u-l, s) \cap B_j(m, l)] \right\}.$$

Έτσι παίρνουμε τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις:

$$Q(m, j, u, s) = \sum_{l=0}^{m-1} [1 - Q(m, j-s-1, u-ms-l, s) Q_c(m, l; j-s)] \prod_{t=j-s+1}^j \prod_{i=1}^m q_{i,t} \\ + \sum_{l=0}^m Q(m, j-1, u-l, s) Q_c(m, l; j)$$

$$Q_c(i, l; j) = p_{i,j} Q_c(i-1, l; j) + q_{i,j} Q_c(i-1, l-1; j),$$

με αρχικές συνθήκες:

$$Q(m, j, u, s) = \begin{cases} 1, & \text{αν } u = 0 \\ 0, & \text{αν } j < s \text{ και } mj < u \end{cases} \\ Q_c(i, l; j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 0 \text{ και } l = 0 \\ 0, & \text{αν } i < l \text{ ή } l < 0. \end{cases}$$

Η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου για τον υπολογισμό της  $Q(m, n, k, s)$  είναι τάξης  $O(nm^2 + nmk)$ . Για  $r = m = 1$  έχουμε τον συνδυασμό συστημάτων που περιγράψαμε πρώτο.

➤  **$r < m$**

Έστω  $A(m, j, u, r, s)$  το ενδεχόμενο όπως ο συνδυασμός των υποσυστημάτων  $u$ -από-τα- $mj:F$  και συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, j):F$  αποτυγχάνει. Ο συνδυασμός αυτός αποτελείται από τις μονάδες στις  $j$  πρώτες στήλες του συστήματος,  $0 \leq u \leq k$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Ορίζουμε με  $B(u, i, j)$  το ενδεχόμενο όπως το παραλληλόγραμμο μεγέθους  $r \times s$ , του οποίου η πάνω δεξιά

γωνία είναι η  $(i, j)$ , έχει όλες τις μονάδες του χαλασμένες, για  $u = 1, 2, \dots, s$ . Αν  $j < u$  είναι το κενό ενδεχόμενο.

Έστω τώρα ένα  $(m - r + 1)$ -διάστατο διάνυσμα  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-r+1})$ . Ορίζουμε ως  $X(m, j, u, r, s; \mathbf{g})$  το ενδεχόμενο  $\bar{A}(m, j, u, r, s) \cap \{\cap_{i=1}^{m-r+1} \bar{B}(g_i, i, j)\}$ . Συμβολίζουμε με  $R(m, j, u, r, s)$  την πιθανότητα  $P(\bar{A}(m, j, u, r, s))$  και με  $R(m, j, u, r, s; \mathbf{g})$  την πιθανότητα  $P(X(m, j, u, r, s; \mathbf{g}))$ .

Ορίζουμε ως  $x_{ij}$  μια δίτιμη τ.μ. που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα  $(i, j)$  αποτυγχάνει και 0 διαφορετικά, ως  $\mathbf{x}_j$  το διάνυσμα  $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  και ως  $E_j$  το ενδεχόμενο όπως ένα συγκεκριμένο  $\mathbf{x}_j$  πραγματοποιείται. Έστω  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{m-r+1})$ ,  $0 \leq g_i \leq s$  και  $\delta(\mathbf{x}_j) = (\delta_1(\mathbf{x}_j), \delta_2(\mathbf{x}_j), \dots, \delta_{m-r+1}(\mathbf{x}_j))$  δύο  $(m - r + 1)$ -διάστατα διανύσματα και  $\delta_i(\mathbf{x}_j) = \prod_{l=i}^{i+r-1} x_{lj}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m - r + 1$ . Τέλος ορίζουμε με  $\epsilon_i$  μια τ.μ. που παίρνει την τιμή  $g_i - 1$ , αν  $\delta_i(\mathbf{x}_j) = 1$ , και  $s$  διαφορετικά. Ισχύει:

$$X(m, j, u, r, s; \mathbf{g}) = \bigcup_{\mathbf{x}_j} \left\{ E_j \cap X\left(m, j - 1, u - \sum_{i=1}^m x_{i,j}, r, s; \epsilon\right) \right\}$$

και ο αναδρομικός τύπος είναι ο ακόλουθος:

$$R(m, j, u, r, s; \mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{x}_j} R\left(m, j - 1, u - \sum_{i=1}^m x_{i,j}, r, s; \epsilon\right) \prod_{i=1}^m p_{ij}^{1-x_{ij}} q_{ij}^{x_{ij}}$$

$$R(m, j, u, r, s; s\mathbf{1}) = 1, \quad \text{αν } j < s \text{ και } mj < u$$

$$R(m, j, u, r, s; \mathbf{g}) = 0, \quad \text{αν } g_i = 0 \text{ για κάποια } i, 1 \leq i \leq m - r + 1$$

Επειδή  $R(m, j, u, r, s) = R(m, j, u, r, s; s\mathbf{1})$ , όπου  $\mathbf{1}$  είναι ένα  $(m - r + 1)$ -διάστατο διάνυσμα του οποίου όλες οι μονάδες είναι ίσες με τη μονάδα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος. Η πολυπλοκότητα του υπολογισμού της είναι τάξης του  $O(kn2^m s^{m-r+1})$ . Ο αλγόριθμος *YM* είναι ειδική περίπτωση αυτού, με  $k > n$ .

- Συνδυασμός συστημάτων  $k$ -από-τα- $mn : F$ , συνεχόμενο  $k_c$ -από-τα- $n : F$  και γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n) : F$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 2.8, το σύστημα αποτυγχάνει όταν υπάρξει τουλάχιστον ένα πλέγμα μεγέθους  $r \times s$ , που περιλαμβάνει μονάδες που έχουν όλες αποτύχει, ή αν υπάρξει τουλάχιστον μία γραμμή που να περιέχει τουλάχιστον  $k_c$  συνεχόμενες μονάδες που έχουν αποτύχει  $s < k_c \leq n$ , ή αν υπάρξουν τουλάχιστον  $k$  συνολικές αποτυχίες  $k > k_c$ ,  $rs < k_c < mn$ .

Έστω  $A(m, j, u, k_c, r, s)$  το ενδεχόμενο όπως ο συνδυασμός των υποσυστημάτων  $u$ -από-τα- $mj : F$ , συνεχόμενο  $k_c$ -από-τα- $j : F$  και συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, j) : F$  αποτυγχάνει. Ο συνδυασμός αυτός αποτελείται από τις μονάδες στις  $j$  πρώτες στήλες του συστήματος,  $0 \leq u \leq k, 0 \leq j \leq n$ . Έστω επίσης  $C(u, i, j)$  το ενδεχόμενο όπως όλες οι μονάδες  $(i, j - u + 1), (i, j - u + 2), \dots, (i, j)$  αποτυγχάνουν,  $u = 1, 2, \dots, k_c$ . Αν  $j < u$  είναι το κενό ενδεχόμενο. Τέλος έστω  $X(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h})$  το ενδεχόμενο:

$$\bar{A}(m, j, u, k_c, r, s) \cap \left\{ \bigcap_{i=1}^{m-r+1} \bar{B}(g_i, i, j) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{i=1}^m \bar{C}(h_i, i, j) \right\}.$$

Έστω  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{m-r+1})$ ,  $0 \leq h_i \leq k_c$  και  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ , όπου το  $\theta_i$  είναι ίσο με  $h_i - 1$  αν  $x_{i,j} = 1$ , και  $k_c$  διαφορετικά. Έστω επίσης  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-r+1})$  όπως ακριβώς το ορίσαμε στο προηγούμενο σύστημα που μελετήσαμε. Ορίζουμε με  $R(m, j, u, k_c, r, s)$  την πιθανότητα  $P(\bar{A}(m, j, u, k_c, r, s))$  και με  $R(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h})$  την πιθανότητα  $P(X(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h}))$ . Τώρα μπορούμε να αναλύσουμε το  $X(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h})$  ως:

$$X(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h}) = \bigcup_{x_j} \left\{ E_j \cap X \left( m, j - 1, u - \sum_{i=1}^m x_{i,j}, k_c, r, s; \boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\theta} \right) \right\}$$

Ο αναδρομικός τύπος είναι ο ακόλουθος:

$$R(m, j, u, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h}) = \sum_{x_j} R \left( m, j - 1, u - \sum_{i=1}^m x_{i,j}, k_c, r, s; \boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\theta} \right) \prod_{i=1}^m p_{i,j}^{1-x_{i,j}} q_{i,j}^{x_{i,j}}$$

$$R(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{s}\mathbf{1}; k_c\mathbf{1}) = 1, \text{ αν } j < s \text{ και } mj < u$$

$$R(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h}) = 0, \text{ αν } g_i = 0 \text{ για κάποια } i, 1 \leq i \leq m - r + 1$$

$$\text{ή αν } h_i = 0 \text{ για κάποια } i, 1 \leq i \leq m$$

Επειδή  $R(m, j, u, k_c, r, s) = R(m, j, u, k_c, r, s; s\mathbf{1}_{m-r+1}; k_c\mathbf{1}_m), \mathbf{1}_t = \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^t$ , ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας  $R(m, n, k, k_c, r, s)$  του συστήματος. Η πολυπλοκότητα του είναι τάξης  $O(kn(2k_c)^m s^{m-r+1})$ . Όταν  $k > mn$ , τότε το τρίτο σενάριο αποτυχίας δεν πραγματοποιείται ποτέ, και το σύστημα μετατρέπεται στον συνδυασμό συστημάτων  $k$ -από-τα- $mn:F$  και γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$  και το τρίτο στοιχείο στην  $R(m, j, u, k_c, r, s; \mathbf{g}; \mathbf{h})$  μπορεί να αγνοηθεί.

### 3.5. Ο αλγόριθμος των *Lin-Zuo* για το γραμμικό $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n):F$ σύστημα

Οι *Lin & Zuo* (2000) παρουσίασαν τον πρώτο επαναληπτικό αλγόριθμο που αφορά γραμμικά συστήματα  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n):F$ ,  $1 \leq k < rs$ ,  $1 \leq r \leq m$ , και  $1 \leq s \leq n$ , σε συνέχεια του αλγόριθμου των *Zuo, Ling & Wu* (2000). Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι παρόμοια. Όπως και πριν, υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά όχι απαραίτητα όμοιες. Θα διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις, θεωρώντας το σύστημα γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n):F$  για  $r = m$  και για  $r < m$ .

- **$r = m$**

Το γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(m, s)$ - από-τα- $(m, n):F$  αποτυγχάνει όταν βρεθεί ένα πλέγμα διάστασης  $m \times s$  το οποίο να περιλαμβάνει τουλάχιστον  $k$  μονάδες οι οποίες έχουν αποτύχει. Ορίζουμε ως  $x_{ij}$  μια δίτιμη μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα  $(i, j)$  αποτυγχάνει και 0 διαφορετικά. Έστω  $A(m, j, s, k)$  το ενδεχόμενο να λειτουργεί το σύστημα γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(m, s)$ - από-τα- $(m, j)$ . Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις μονάδες που βρίσκονται στις  $j$  πρώτες στήλες του συστήματος. Έστω επίσης  $B(i, l, u)$  το ενδεχόμενο όπως υπάρχουν  $u$  αποτυχίες μονάδων, από την μονάδα  $(1, l)$  ως την μονάδα  $(i, l)$ , του υποσυστήματος. Ορίζουμε ως  $\mathbf{g}_j$  ένα  $s$ -διάστατο μη αρνητικό ακέραιο διάνυσμα  $(g_{j-s+1}, \dots, g_j)$ . Συμβολίζουμε με  $X(m, j, s, k, \mathbf{g}_j)$  το ενδεχόμενο  $A(m, j, s, k) | \{\bigcap_{l=j-s+1}^j B(m, l, \mathbf{g}_l)\}$ . Ορίζουμε τώρα τις πιθανότητες:

$$R(m, j, s, k) = P(A(m, j, s, k))$$

$$S(m, j, s, k, \mathbf{g}_j) = P(X(m, j, s, k, \mathbf{g}_j))$$

$$Q(i, l, u) = P(B(i, l, u)).$$

Τέλος συμβολίζουμε με  $\Phi_{mks}$  το σύνολο όλων των  $s$ -διάστατων μη αρνητικών ακέραιων διανυσμάτων, έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του κάθε διανύσματος να βρίσκονται μεταξύ του 0 και του  $m$ , και το άθροισμα όλων των στοιχείων του κάθε διανύσματος να είναι μικρότερο του  $k$ .

Για  $n = s$ , το σύστημα μετατρέπεται σε ένα σύστημα  $k$ - από-τα- $ms$ , του οποίου η αξιοπιστία μπορεί να υπολογισθεί εύκολα. Για  $n > s$  δίνουμε τους ακόλουθους αναδρομικούς τύπους:

$$R(m, n, s, k) = \sum_{\mathbf{g}_n \in \Phi_{mks}} S(m, n, s, k, \mathbf{g}_n) \prod_{l=n-s+1}^n Q(m, l, \mathbf{g}_l).$$

Η πιθανότητα  $S(m, n, s, k, \mathbf{g}_n)$  μπορεί να υπολογισθεί από τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

$$S(m, j, s, k, \mathbf{g}_j) = \sum_{\varepsilon_{j-s}=0}^m S(m, j-1, s, k, \varepsilon_{j-1}) Q(m, j-s, \varepsilon_{j-s}),$$

αν  $\mathbf{g}_j \in \Phi_{mks}$ , για  $j = s+1, \dots, n$ , όπου:

$$\varepsilon_{j-1} = (\varepsilon_{j-s}, \varepsilon_{j-s+1}, \dots, \varepsilon_{j-1}).$$

Η αρχική συνθήκη για τον παραπάνω επαναληπτικό αλγόριθμο είναι:

$$S(m, j, s, k, \mathbf{g}_j) = 0, \quad \text{αν } \mathbf{g}_j \notin \Phi_{mks}, \quad j = s, s+1, \dots, n$$

$$S(m, s, s, k, \mathbf{g}_s) = 1, \quad \text{αν } \mathbf{g}_s \in \Phi_{mks}.$$

Οι πιθανότητες  $Q(m, l, \mathbf{g}_l)$  και  $Q(m, j-s, \varepsilon_{j-s})$  μπορούν να υπολογισθούν από τον αναδρομικό τύπο:

$$Q(i, l, u) = p_{il}Q(i-1, l, u) + q_{il}Q(i-1, l, u-1), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad 1 \leq l \leq j,$$

με αρχική συνθήκη:

$$Q(i, l, u) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 0 \text{ και } u = 0 \\ 0, & \text{αν } i < u \text{ ή } u < 0. \end{cases}$$

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό της  $Q(i, l, u)$  είναι της τάξης  $O(m)$ . Το πλήθος των στοιχείων του  $\Phi_{mks}$  δεν ξεπερνά το  $(m + 1)^s$  και έτσι, ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό της  $R(m, n, s, k)$  είναι της τάξης  $O((n - s)m^{s+1} + m^{2s})$ , για σταθερό  $s$ .

- $r < m$

Το γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n)$ :  $F$  αποτυγχάνει όταν βρεθεί ένα πλέγμα διάστασης  $r \times s$  το οποίο να περιλαμβάνει τουλάχιστον  $k$  μονάδες οι οποίες έχουν αποτύχει. Ορίζουμε ως  $x_{ij}$  μια δίτιμη μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα  $(i, j)$  αποτυγχάνει και 0 διαφορετικά και ως  $\mathbf{x}_{ij}$  ένα  $r$ -διάστατο δυαδικό διάνυσμα  $(x_{i-r+1,j}, \dots, x_{ij})$ . Επίσης ορίζουμε ως  $\mathbf{g}_{ij}$  ένα  $(i - r + 1)$ -διάστατο μη αρνητικό ακέραιο διάνυσμα  $(g_{1j}, \dots, g_{i-r+1,j})$ ,  $0 \leq g_{i,j} \leq r$ ,  $i = r, r + 1, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  και ως  $\mathbf{G}_{mj}$  μια ακολουθία  $(m - r + 1)$ -διάστατων μη αρνητικών ακέραιων διανυσμάτων  $(\mathbf{g}_{m,j-s+1}, \dots, \mathbf{g}_{mj})$ .

Έστω  $A'(m, j, r, s, k)$  το ενδεχόμενο να λειτουργεί το σύστημα γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, j)$ . Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις μονάδες στις  $j$  πρώτες στήλες του συστήματος. Έστω επίσης  $B'(u, i, j)$  το ενδεχόμενο να υπάρχουν ακριβώς  $u$  αποτυχίες μονάδων, από την μονάδα  $(1, j)$  ως την μονάδα  $(i + r - 1, j)$ , στην  $j$  στήλη του υποσυστήματος, και  $C(\mathbf{x}_{ij})$  το ενδεχόμενο όπως ένα συγκεκριμένο  $\mathbf{x}_{ij} = (x_{i-r+1,j}, \dots, x_{ij})$  πραγματοποιείται.

Συμβολίζουμε με  $D(i, j, r, \mathbf{g}_{ij})$  το ενδεχόμενο  $\bigcap_{l=1}^{i-r+1} B'(\mathbf{g}_{lj}, l, j)$ , με  $E(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}, \mathbf{x}_{ij})$  το ενδεχόμενο  $D(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}) | C(\mathbf{x}_{ij})$  και με  $X'(m, j, r, s, k, \mathbf{G}_{mj})$  το ενδεχόμενο  $A(m, j, s, k) | \{ \bigcap_{l=j-s+1}^j B(m, l, \mathbf{g}_l) \}$ . Με βάση τα παραπάνω βοηθητικά ενδεχόμενα, ορίζουμε τώρα τις πιθανότητες:

$$R'(m, j, r, s, k) = P(A'(m, j, r, s, k))$$

$$Q'(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}) = P(D(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}))$$

$$Q''(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}, \mathbf{x}_{ij}) = P(E(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}, \mathbf{x}_{ij}))$$

$$S'(m, j, r, s, k, \mathbf{G}_{mj}) = P(X'(m, j, r, s, k, \mathbf{G}_{mj})).$$



Τέλος συμβολίζουμε με  $\Lambda_{ru}$  το Το σύνολο όλων των  $r$ -διάστατων δυαδικών διανυσμάτων έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων τους να είναι ίσο με  $u$ . Επίσης συμβολίζουμε με  $\Psi_{mr}$  Το σύνολο όλων των  $(m - r + 1)$ -διάστατων μη αρνητικών ακέραιων διανυσμάτων, των οποίων τα στοιχεία παίρνουν τιμές από 0 έως  $r$  και τέλος με  $\Phi_{mrsk}$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των  $s$   $(m - r + 1)$ -διάστατων μη αρνητικών ακέραιων διανυσμάτων, των οποίων τα στοιχεία παίρνουν τιμές από 0 έως  $r$ , και κάθε στοιχείο στο διάνυσμα του αθροίσματος των  $s$  διανυσμάτων παίρνει τιμές από 0 έως  $k - 1$ .

Αν  $n = s$ , η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά από τους τύπους που δώσαμε στην περίπτωση που  $r = m$ , παίρνοντας τον ανάστροφο  $m \times n$  πίνακα του αρχικού πίνακα καταστάσεων μονάδων. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα μετατρέπεται σε ένα γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, n)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Όταν  $n > s$ , ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

$$R'(m, n, r, s, k) = \sum_{\mathbf{G}_{mn} \in \Phi_{mrsk}} S'(m, n, r, s, k, \mathbf{G}_{mn}) \prod_{l=n-s+1}^n Q'(m, l, r, \mathbf{g}_{ml}).$$

Η πιθανότητα  $S'(m, n, r, s, k, \mathbf{G}_{mn})$  μπορεί να υπολογισθεί από τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

$$S'(m, j, r, s, k, \mathbf{G}_{mj}) = \sum_{\mathbf{g}_{m, j-s} \in \Psi_{mr}} S'(m, j-1, r, s, k, \mathbf{G}_{m, j-1}) Q'(m, j-s, r, \mathbf{g}_{m, j-s}),$$

αν  $\mathbf{G}_{mj} \in \Phi_{mrsk}$ , για  $j = s + 1, \dots, n$ , με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} S'(m, j, r, s, k, \mathbf{G}_{mj}) &= 0, & \text{αν } \mathbf{G}_{mj} \notin \Phi_{mrsk}, & \quad j = s, s + 1, \dots, n \\ S'(m, s, r, s, k, \mathbf{G}_{ms}) &= 1, & \text{αν } \mathbf{G}_{ms} \in \Phi_{mrsk}, & \end{aligned}$$

Οι πιθανότητες  $Q'(m, l, r, \mathbf{g}_{ml})$  και  $Q'(m, j-s, r, \mathbf{g}_{m, j-s})$  μπορούν να υπολογισθούν από τον αναδρομικό τύπο:

$$Q'(m, j, r, \mathbf{g}_{mj}) = \sum_{\mathbf{x}_{mj} \in \Lambda_{r, \mathbf{g}_{m-r+1, j}}} Q''(m, j, r, \mathbf{g}_{mj}, \mathbf{x}_{mj}) \prod_{i=m-r+1}^m [p_{ij}(1 - x_{ij}) + q_{ij}x_{ij}],$$

αν  $\mathbf{x}_{ij} \in \Lambda_{r, \mathbf{g}_{i-r+1, j}}$ , για  $i = r + 1, \dots, m$ ,  $i \leq j \leq n$ , με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} Q''(i, j, r, \mathbf{g}_{ij}, \mathbf{x}_{ij}) &= 0, & \text{αν } \mathbf{x}_{ij} \notin \Lambda_{r, \mathbf{g}_{i-r+1, j}}, & \quad j = s, s + 1, \dots, n \\ Q''(r, j, r, \mathbf{g}_{rj}, \mathbf{x}_{rj}) &= 1, & \text{αν } \mathbf{x}_{rj} \in \Lambda_{r, \mathbf{g}_{1j}}, & \end{aligned}$$

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό της  $Q'(m, j, r, \mathbf{g}_{mj})$  είναι τάξης  $O(2^r m)$ . Το πλήθος των στοιχείων του  $\Phi_{mrsk}$  δεν ξεπερνά το  $(r+1)^{s(m-r+1)}$  και έτσι, ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό της  $R'(m, n, r, s, k)$  είναι τάξης  $O((r+1)r^{s(m-r+1)}[(n-s)m + 2^{r(s-1)}m^s])$ , για σταθερά  $r$  και  $s$ .

### 3.6. Ο αλγόριθμος των Akiba-Yamamoto για το (γραμμικό ή κυκλικό) $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$ σύστημα

Οι Akiba & Yamamoto (2001) παρουσίασαν έναν αλγόριθμο για το (γραμμικό ή κυκλικό)  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Έστω  $X_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ ) μια τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει την τιμή 0 αν η μονάδα  $(i, j)$  λειτουργεί, και την τιμή 1 διαφορετικά, με  $X_{ij} = X_{i, j-n}$  για την κυκλική περίπτωση (για όλα τα  $i$  και για  $j = n+1, \dots, n+s-1$ ). Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $Y_{ij}$ :

$$Y_{ij} = \sum_{\alpha=i-r+1}^i \sum_{b=j}^{j+s-1} X_{\alpha b}, \quad i = r, r+1, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Η μεταβλητή  $Y_{ij}$  συμβολίζει τον αριθμό των ελαττωματικών μονάδων σε έναν  $r \times s$  πίνακα του οποίου η κάτω αριστερά μονάδα είναι η  $(i, j)$ . Τότε η αξιοπιστία του γραμμικού  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$R_L(k, r, s, m, n; [p_{ij}]) = P \left\{ \bigcap_{i=r}^m \bigcap_{j=1}^{n-s+1} \{Y_{ij} < k\} \right\},$$

ενώ του κυκλικού ως:

$$R_C(k, r, s, m, n; [p_{ij}]) = P \left\{ \bigcap_{i=r}^m \bigcap_{j=1}^n \{Y_{ij} < k\} \right\}.$$

Αν  $k = rs$  τότε το σύστημα μετατρέπεται σε ένα (γραμμικό ή κυκλικό) συνεχόμενο  $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα, για το οποίο ήδη έχουμε παρουσιάσει αλγόριθμους υπολογισμού της αξιοπιστίας του. Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

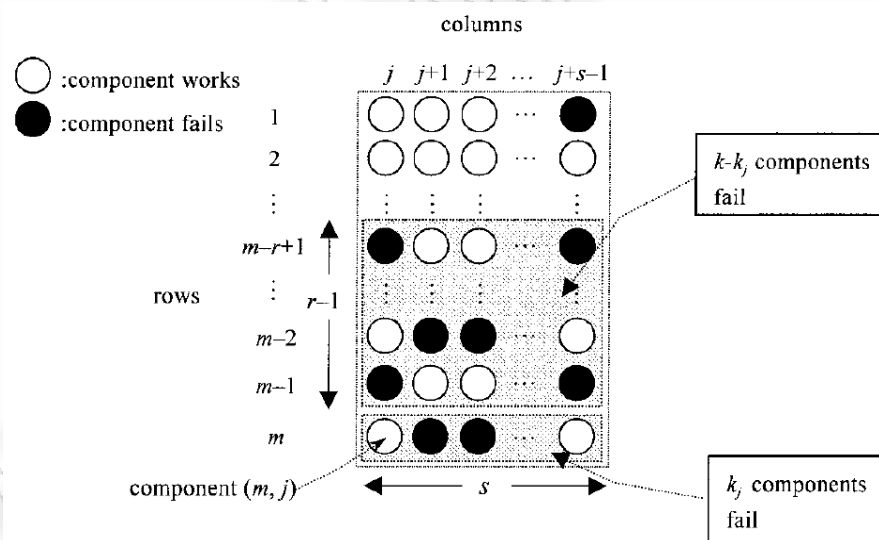
- **Ο αλγόριθμος για το γραμμικό σύστημα**

Θεωρούμε έναν  $m \times s$  πίνακα, που αποτελείται από  $s$  στήλες, από την στήλη  $j$  έως την στήλη  $j+s-1$ . Αν χαλάσουν  $k_j$  μονάδες στην γραμμή  $m$  (η τελευταία γραμμή αυτού του

πίνακα), τότε η εμφάνιση  $k - k_j$  μονάδων που έχουν αποτύχει στον  $(r - 1) \times s$  υποπίνακα, μέσα στον πίνακα  $(m - 1) \times s$ , σημαίνει ότι έχουν χαλάσει  $k$  μονάδες στον  $r \times s$  υποπίνακα του  $m \times s$  αρχικού πίνακα, και αυτό με τη σειρά του θα σημαίνει ότι το σύστημα θα έχει αποτύχει. Επιπρόσθετα, αν χαλάσουν  $l_j$  μονάδες στην γραμμή  $m - 1$ , η εμφάνιση  $(k - k_j - l_j)$  μονάδων που έχουν αποτύχει στον  $(r - 2) \times s$  υποπίνακα, μέσα στον πίνακα  $(m - 2) \times s$ , τότε το σύστημα πάλι θα αποτυγχάνει. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδέα, θα δώσουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο θεωρώντας ένα “ειδικό” σύστημα.

Πριν όμως προχωρήσουμε σε αυτό τον αλγόριθμο, θα πρέπει να εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς. Αρχικά, θεωρούμε τις καταστάσεις των μονάδων της γραμμής  $i$ . Έστω το  $n$ -διάστατο δυαδικό διάνυσμα  $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  και  $F(i, \Delta)$  η πιθανότητα όπως η κατάσταση της γραμμής  $i$  να είναι  $\Delta$ . Έτσι ορίζεται μία  $n$ -διάστατη τυχαία μεταβλητή  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$  έτσι ώστε για  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$F(i, \Delta) \equiv P(X_i = \Delta) = P\left\{\bigcap_{j=1}^n \{X_{ij} = \delta_j\}\right\}$$



Σχήμα 3.6.1

Όταν η κατάσταση της γραμμής  $i$  είναι  $\Delta$ , ορίζουμε ως  $k_j^{\Delta}$  το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει, ανάμεσα σε  $s$  μονάδες, από την μονάδα  $(i, j)$  έως την μονάδα  $(i, j + s - 1)$ . Δηλαδή  $k_j^{\Delta} = \sum_{a=j}^{j+s-1} \delta_a$ , για  $j = 1, 2, \dots, n - s + 1$ . Για παράδειγμα αν η κατάσταση της γραμμής  $i$  είναι  $\Delta = (1, 0, 0, 1, 1, 1)$ , τότε  $k_1^{\Delta} = 1, k_2^{\Delta} = 1, k_3^{\Delta} = 2, k_4^{\Delta} = 3$ , για  $n = 6$  και  $s = 3$ .

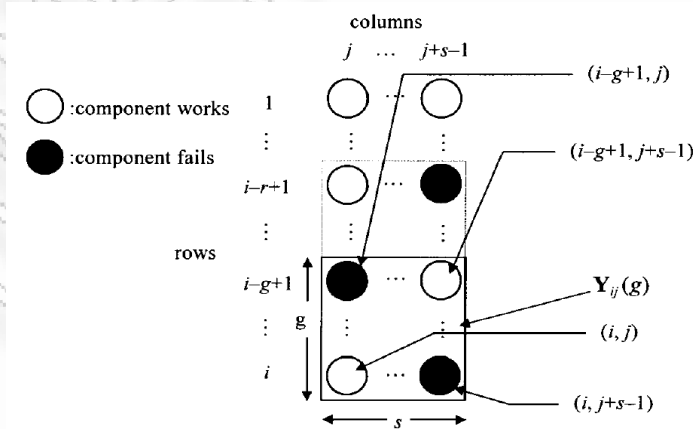
Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $Y_{ij}(g)$ , ως  $Y_{ij}(g) = \sum_{a=i-g+1}^i \sum_{b=j}^{j+s-1} X_{ab}$ , για  $g = 1, 2, \dots, r$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n - s + 1$ . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6.2, η τ.μ.  $Y_{ij}(g)$  μας δείχνει τον αριθμό των μονάδων που έχουν αποτύχει σε έναν  $g \times s$  πίνακα που έχει το  $(i, j)$  στοιχείο του στην κάτω αριστερά γωνία του.

Όπως περιγράψαμε πιο πάνω, οι αξιοπιστίες των “ειδικών συστημάτων” συμβολίζονται με  $R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}])$ , όπου  $\mathbf{H}_{ij} = (h_{1ij}, h_{2ij}, \dots, h_{rij})$  ένα  $r$ -διάστατο διάνυσμα και  $h_{gij}$  είναι ακέραιες μεταβλητές για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n - s + 1$ . Τότε η πιθανότητα:

$$R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}]) \equiv \begin{cases} P \left\{ \prod_{a=r}^{i-1} \prod_{j=1}^{n-s+1} \{Y_{aj}(r) < k\} \right\} \cap \left\{ \prod_{j=1}^{n-s+1} \prod_{g=1}^r \{Y_{ij}(g) < h_{gij}\} \right\}, & \text{αν } i > 0, \\ 1, & \text{αν } \min_{g,j} (h_{gij}) > 0 \text{ και αν } i = 0, \\ 0, & \text{αν } \min_{g,j} (h_{gij}) \leq 0 \text{ και αν } i = 0 \end{cases}$$

εκφράζει την πιθανότητα όπως:

1. Ο αριθμός των μονάδων που έχουν αποτύχει, σε έναν  $g \times s$  πίνακα με το στοιχείο  $(i, j)$  να βρίσκεται στην κάτω-αριστερά γωνία, είναι μικρότερος από  $h_{gij}$ , για  $g = 1, 2, \dots, r$
2. Ο αριθμός των μονάδων που έχουν αποτύχει, σε έναν  $r \times s$  πίνακα με το στοιχείο  $(a, j)$  να βρίσκεται στην κάτω-αριστερά γωνία, είναι μικρότερος από  $k$ , για  $a = r, r + 1, \dots, i - 1$



Σχήμα 3.6.2

Οι  $h_{gij}$  μονάδες που έχουν αποτύχει σε  $g \times s$  πίνακα με το στοιχείο  $(i, j)$  να βρίσκεται στην κάτω-αριστερά γωνία, είναι η συνθήκη αποτυχίας του ειδικού συστήματος. Σημειώνουμε ότι  $R_L(k, r, s, m, n; [p_{ij}]) = R_L(m; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}])$ , όπου  $\mathbf{K}$  είναι το  $r$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{K} = (k, k, \dots, k)$ . Δίνουμε τις παρακάτω προτάσεις, ορίζοντας την δίτιμη τυχαία μεταβλητή  $\chi(A)$  ως:

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } A \text{ είναι αληθής} \\ 0, & \text{αν η } A \text{ δεν είναι αληθής.} \end{cases}$$

**Πρόταση 3.6.1.**

1. Ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις. Για  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}]) \equiv \begin{cases} \sum_{\Delta \in \Phi} F(i, \Delta) \cdot R_L(i-1; \mathbf{H}_{i-1,1}, \mathbf{H}_{i-1,2}, \dots, \mathbf{H}_{i-1, n-s+1}; [p_{ij}]) \cdot \\ \prod_{j=1}^{n-s+1} \chi(\{k_j^A < h_{1ij}\}), & i \geq \min_j(h_{1ij})/s > 0, \\ 1, & \text{αν } \min_j(h_{1ij})/s > i \geq 0, \\ 0, & \text{αν } \min_j(h_{1ij}) \leq 0, \end{cases}$$

όπου:

$$h_{g, i-1, j} = \begin{cases} h_{g+1, i, j} - k_j^A, & \text{αν } g = 1, 2, \dots, r-1 \\ k, & \text{αν } g = r, \end{cases}$$

για  $g = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n-s+1$  και  $\Phi = \{\Delta | \delta_j = 1 \text{ ή } 0, \text{ για } j = 1, 2, \dots, n\}$ .

2. Η αξιοπιστία του δισδιάστατου γραμμικού  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(i, n): F$  συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$R_L(k, r, s, i, n; [p_{ij}]) = R_L(i; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}]),$$

όπου  $\mathbf{K}$  είναι το  $r$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{K} = (k, k, \dots, k)$ , για  $i = 1, 2, \dots, m$ . ■

**Πρόταση 3.6.2.** Αν  $p_{ij} = p_{i, n-j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ), τότε:

$$R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}]) = R_L(i; \mathbf{H}_{i, n-s+1}, \mathbf{H}_{i, n-s}, \dots, \mathbf{H}_{i1}; [p_{ij}]), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

■

Σε αυτή την περίπτωση, ορίζοντας τις αξιοπιστίες των “ειδικών συστημάτων” ως  $R_C(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{in}; [p_{ij}])$ , παρόμοια με το γραμμικό σύστημα, όπου  $\mathbf{H}_{ij} = (h_{1ij}, h_{2ij}, \dots, h_{rij})$  ένα  $r$ -διάστατο διάνυσμα και  $h_{gij}$ , για  $g = 1, 2, \dots, r$ , είναι ακέραιες μεταβλητές για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ .

$$R_C(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{in}; [p_{ij}]) \equiv \begin{cases} P \left\{ \prod_{a=r}^{i-1} \prod_{j=1}^n \{Y_{aj}(r) < k\} \right\} \cap \left\{ \prod_{j=1}^n \prod_{g=1}^r \{Y_{ij}(g) < h_{gij}\} \right\}, & \text{αν } i > 0, \\ 1, & \text{αν } \min_{g,j} (h_{gij}) > 0 \text{ και αν } i = 0, \\ 0, & \text{αν } \min_{g,j} (h_{gij}) \leq 0 \text{ και αν } i = 0 \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι  $R_C(k, r, s, m, n; [p_{ij}]) = R_C(m; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}])$ , όπου  $\mathbf{K}$  είναι το  $r$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{K} = (k, k, \dots, k)$ . Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει την αξιοπιστία του δισδιάστατου κυκλικού  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$  συστήματος

### Πρόταση 3.6.3.

1. Ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις. Για  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$R_C(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{in}; [p_{ij}]) \equiv \begin{cases} \sum_{\Delta \in \Phi} F(i, \Delta) \cdot R_C(i-1; \mathbf{H}_{i-1,1}, \mathbf{H}_{i-1,2}, \dots, \mathbf{H}_{i-1,n}; [p_{ij}]) \cdot \prod_{j=1}^n \chi(\{k_j^\Delta < h_{1ij}\}), & i \geq \min_j (h_{1ij})/s > 0, \\ 1, & \text{αν } \min_j (h_{1ij})/s > i \geq 0, \\ 0, & \text{αν } \min_j (h_{1ij}) \leq 0. \end{cases}$$

όπου:

$$h_{g,i-1,j} = \begin{cases} h_{g+1,i,j} - k_j^\Delta, & \text{αν } g = 1, 2, \dots, r-1 \\ k, & \text{αν } g = r \end{cases}$$

για  $g = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n-s+1$  και  $\Phi = \{\Delta | \delta_j = 1 \text{ ή } 0, \text{ για } j = 1, 2, \dots, n\}$

2. Η αξιοπιστία του δισδιάστατου κυκλικού  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ -από-τα- $(i, n)$ :  $F$  συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$R_C(k, r, s, i, n; [p_{ij}]) = R_C(i; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}])$$

όπου  $\mathbf{K}$  είναι το  $r$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{K} = (k, k, \dots, k)$ , για  $i = 1, 2, \dots, m$ . ■

**Πρόταση 3.6.4.** Αν  $p_{ij} = p_{i, n-j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ), τότε:

$$R_C(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{in}; [p_{ij}]) = R_C(i; \mathbf{H}_{ij}, \mathbf{H}_{i, j+1}, \dots, \mathbf{H}_{in}, \mathbf{H}_{i1}, \dots, \mathbf{H}_{i, j-1}; [p_{ij}]),$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ . ■

- **Τα βήματα του αλγορίθμου**

Ο αλγόριθμος που προτάθηκε αποτελείται από τα εξής βήματα:

1. Βρες την  $\Phi$  απευθείας.
2. Υπολόγισε τα  $F(i, \Delta)$  για όλα τα  $\Delta \in \Phi$  και για όλα τα  $i$ .
3. Υπολόγισε τις  $R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}])$ ,  $R_C(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{in}; [p_{ij}])$  αναδρομικά, χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 3.6.1 και 3.6.3.

Οι  $R_L(i; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}])$  και  $R_C(i; \mathbf{K}, \mathbf{K}, \dots, \mathbf{K}; [p_{ij}])$  γίνονται οι αξιοπιστίες  $R_L(k, r, s, m, n; [p_{ij}])$  και  $R_C(k, r, s, m, n; [p_{ij}])$  των δισδιάστατων γραμμικών και κυκλικών  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$  συστημάτων αντίστοιχα. Στην *i.i.d.* περίπτωση, από τις Προτάσεις 3.6.2 και 3.6.4, μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των αξιοπιστιών που πρέπει να υπολογισθούν. Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητός ο αλγόριθμος.

**Παράδειγμα 3.6.1.** Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία  $R_L(k, r, s, m, n; p)$  του δισδιάστατου γραμμικού  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$  συστήματος, στην *i.i.d.* περίπτωση ( $p_{ij} = p$ ), για  $n = 3, r = 2, s = 2$  και  $k = 3$ . Από την Πρόταση 3.6.1 έχουμε:

**ΒΗΜΑ 1.**

$$\Phi = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

**ΒΗΜΑ 2.**

Για  $i = 1, 2, \dots, m$  ισχύει:

$$F(i, (0,0,0)) = p^3$$

$$F(i, (1,0,0)) = F(i, (0,1,0)) = F(i, (0,0,1)) = p^2q$$

$$F(i, (1,1,0)) = F(i, (0,1,1)) = pq^2$$

$$F(i, (1,1,1)) = q^3$$

### ΒΗΜΑ 3.

Από την Πρόταση 3.6.1, για  $i = 1, 2, \dots, m$ , έχουμε:

$$R_L(i; (h_{1i1}, h_{2i1}), (h_{1i2}, h_{2i2}); [p]) = \begin{cases} p^3 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}, 3), (h_{1i2}, 3); [p]) + \\ + p^2q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}, 3); [p]) \cdot \chi(\{1 < h_{1ij}\}) + \\ + p^2q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) \cdot \chi(\{1 < h_{1ij}\}) \cdot \chi(\{1 < h_{1i2}\}) + \\ + p^2q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) \cdot \chi(\{1 < h_{1i2}\}) + \\ + pq^2 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-2, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) \cdot \chi(\{2 < h_{1ij}\}) \cdot \chi(\{1 < h_{1i2}\}) + \\ + pq^2 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}-2, 3); [p]) \cdot \chi(\{1 < h_{1ij}\}) \cdot \chi(\{1 < h_{1i2}\}) + \\ + q^3 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-2, 3), (h_{1i2}-2, 3); [p]) \cdot \chi(\{2 < h_{1ij}\}) \cdot \chi(\{2 < h_{1i2}\}), \\ \quad \text{αν } i \geq \min_j(h_{1ij})/2 > 0, \\ 1, \quad \text{αν } \min_j(h_{1ij})/2 > i \geq 0, \\ 0, \quad \text{αν } \min_j(h_{1ij}) \leq 0 \end{cases}$$

Η αξιοπιστία του δισδιάστατου γραμμικού 3-μεταξύ-συνεχόμενων-(2,2)- από-τα-( $i, 3$ ):  $F$  συστήματος, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$R_L(3, 2, 2, i, 3; [p]) = R_L(i; (3, 3), (3, 3); [p])$$

Από την Πρόταση 3.6.2 έχουμε:

$$R_L(i; (h_{1i1}, h_{2i1}), (h_{1i2}, h_{2i2}); [p]) = R_L(i; (h_{1i2}, h_{2i2}), (h_{1i1}, h_{2i1}); [p]),$$

για όλα τα  $h_{1i1}, h_{2i1}, h_{1i2}, h_{2i2}$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Τώρα, αν για παράδειγμα το  $\chi(\{1 < h_{1ij}\})$  είναι ίσο με 0, δηλαδή  $1 \geq h_{1ij}$ , στην παραπάνω εξίσωση η  $R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}, 3); [p])$  γίνεται ίση με 0 και έτσι, μπορούμε να γράψουμε πιο απλά την εξίσωση, για  $i = 1, 2, \dots, m$ , ως:



$$R_L(i; (h_{1i1}, h_{2i1}), (h_{1i2}, h_{2i2}); [p])$$

$$= \begin{cases} p^3 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}, 3), (h_{1i2}, 3); [p]) + \\ + p^2 q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}, 3); [p]) + \\ + p^2 q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) + \\ + p^2 q \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) + \\ + p q^2 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-2, 3), (h_{1i2}-1, 3); [p]) + \\ + p q^2 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-1, 3), (h_{1i2}-2, 3); [p]) + \\ + q^3 \cdot R_L(i-1; (h_{1i1}-2, 3), (h_{1i2}-2, 3); [p]), \\ \quad \text{αν } i \geq \min_j (h_{1ij})/2 > 0, \\ 1, \\ \quad \text{αν } \min_j (h_{1ij})/2 > i \geq 0, \\ 0, \\ \quad \text{αν } \min_j (h_{1ij}) \leq 0 \quad \blacksquare \end{cases}$$

Όσον αφορά το χρόνο υπολογισμού του αλγορίθμου, παρατηρούμε ότι το πλήθος των  $F(i, \Delta)$  είναι  $2^n$ , για κάθε  $i$ . Το πλήθος των  $R_L(i; \mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \dots, \mathbf{H}_{i, n-s+1}; [p_{ij}])$  είναι  $(m+1)k^{r(n-s+1)}$ . Άρα, για το γραμμικό σύστημα, η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να υπολογισθεί σε χρόνο τάξης  $\min \{O(mk^{r(n-s)}), O(nk^{s(m-r)})\}$ , μιας και ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοσθεί και να αντιστρέψουμε τις γραμμές σε στήλες. Αντίστοιχα, ο χρόνος υπολογισμού για το κυκλικό σύστημα, είναι της τάξης  $O(mk^{rn})$ .

### 3.7. Ο αλγόριθμος του Yamamoto για το σύστημα $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -ή-...-ή- $(r_k, s_k)$ -από-τα- $(m, n): F$

Ο Yamamoto (1996) πρότεινε έναν αναδρομικό αλγόριθμο υπολογισμού της αξιοπιστίας του συστήματος  $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -ή-...-ή- $(r_k, s_k)$ -από-τα- $(m, n): F$ . Για χάρη ευκολίας, συμβολίζουμε τα σύνολα  $(r_1, s_1)$ -ή- $(r_2, s_2)$ -ή-...-ή- $(r_k, s_k)$  με  $\cup_{v=1}^k (r_v, s_v)$ . Ο αλγόριθμος για το γραμμικό σύστημα απαιτεί χρόνο της τάξης  $O(mn^2 s_1 \prod_{v=1}^k r_v^{n-s_v})$  και για το κυκλικό χρόνο της τάξης  $O(mn^2 s_1 \prod_{v=1}^k r_v^n)$ . Έστω τώρα η τ.μ.

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν όλες οι μονάδες } (i, j), (i, j+1), \dots, (i, j+s_1-1) \text{ δεν λειτουργούν} \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

με  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n + s_1 - 1$  για το γραμμικό σύστημα, και με  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$  για το κυκλικό σύστημα. Η αξιοπιστία του γραμμικού  $\cup_{v=1}^k (r_v, s_v)$ -από-τα- $(m, n): F$  ορίζεται ως:

$$P \left( \prod_{v=1}^k \prod_{d=1}^{i-r_v+1} \prod_{j=1}^{n-s_v+1} \{Y_{ab} = 1, d \leq a \leq d + r_v + 1, j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C \right),$$

ενώ για το κυκλικό  $\cup_{v=1}^k(r_v, s_v)$ -από-τα- $(m, n): F$ , η αξιοπιστία του ορίζεται ως:

$$P \left( \prod_{v=1}^k \prod_{d=1}^{i-r_v+1} \prod_{j=1}^n \{Y_{ab} = 1, d \leq a \leq d + r_v + 1, j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C \right).$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συμβολίζουμε με  $R_{i_L} = (s_1, n; [p_{ij}]) = P \left( \prod_{j=1}^{n-s_1+1} \{Y_{ij} = 1\}^C \right)$  την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $s_1$ -από-τα- $n:F$  συστήματος που σχηματίζεται από τις μονάδες τις γραμμής  $i, i = 1, 2, \dots, m$ . Όμοια, ορίζουμε  $R_{i_C} = (s_1, n; [p_{ij}]) = P \left( \prod_{j=1}^n \{Y_{ij} = 1\}^C \right)$  την αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $s_1$ -από-τα- $n:F$  συστήματος που σχηματίζεται από τις μονάδες τις γραμμής  $i, i = 1, 2, \dots, m$ . Στην *i.i.d.* περίπτωση, γράφουμε απλά  $R_L(s_1, n; p)$  και  $R_C(s_1, n; p)$  για το γραμμικό και κυκλικό σύστημα αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$A_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right) \equiv \prod_{v=1}^k \prod_{d=1}^{i-r_v+1} \prod_{j=1}^{n-s_v+1} \{Y_{ab} = 1, d \leq a \leq d + r_v + 1, j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C$$

$$A_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right) \equiv \prod_{v=1}^k \prod_{d=1}^{i-r_v+1} \prod_{j=1}^n \{Y_{ab} = 1, d \leq a \leq d + r_v + 1, j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C,$$

δηλαδή τα ενδεχόμενα το γραμμικό (ή κυκλικό)  $\cup_{v=1}^k(r_v, s_v)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα που αποτελείται από τις  $i$  πρώτες γραμμές (αντίστοιχα κύκλους),  $i = 1, 2, \dots, m$ . Προφανώς η αξιοπιστία αυτών των συστημάτων είναι:

$$R_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); [p_{ij}] \right) = P \left\{ A_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right) \right\}$$

$$R_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); [p_{ij}] \right) = P \left\{ A_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right) \right\}$$

αντίστοιχα. Στην *i.i.d.* περίπτωση γράφουμε απλά  $R_L(\bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); p)$  και  $R_C(\bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); p)$  αντίστοιχα.

- **Ο αλγόριθμος για το γραμμικό σύστημα**

Για να εκφράσουμε την κατάσταση της γραμμής  $i$ , ορίζουμε ως  $\Phi_L$  ένα σύνολο  $(i - s_1 + 1)$ -διάστατων διανυσμάτων έτσι ώστε:

$$\Phi_L \equiv \{ \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-s_1+1}) \mid \{Y_{ij} = \delta_j\} \neq \emptyset, 1 \leq j \leq n - s_1 + 1 \} - \{0, 0, \dots, 0\}.$$

Αν  $\delta \in \Phi_L$ , αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον  $s_1$  συνεχόμενες μονάδες που δεν λειτουργούν στην γραμμή  $i$ . Επειδή τα  $\Phi_L$  είναι ίδια για όλα τα  $i$ , το  $i$  παραλείπεται από το συμβολισμό. Σημειώνουμε ότι το  $\Phi_L$  είναι το ίδιο με το  $\Phi_L(s_1, n)$  του αλγορίθμου *YM*.

Για  $\delta \in \Phi_L$  και  $i = 1, 2, \dots, m$  ορίζουμε ως  $F_{iL}(s_1, n; \delta)$  την πιθανότητα  $P(\bigcap_{j=1}^{n-s_1+1} \{Y_{ij} = \delta_j\})$ , με  $\sum_{\delta \in \Phi_L} F_{iL}(s_1, n; \delta)$  να είναι η πιθανότητα αποτυχίας του γραμμικού συνεχόμενου  $s_1$ -από-τα- $n$ : $F$  συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες της γραμμής  $i$ . Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα χρήσιμο ενδεχόμενο για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του ζητούμενου συστήματος. Ορίζουμε ως:

$$X_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k \right) \\ \equiv \bigcap_{v=1}^k \bigcap_{j=1}^{n-s_v+1} \{Y_{ab} = 1, i - h_{jv} + 1 \leq a \leq i, \\ j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C \cap A_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right),$$

όπου  $\mathbf{H}_v = (h_{1v}, h_{2v}, \dots, h_{n-s_v+1,v})$ , για  $h_{jv} = 1, 2, \dots, r_v, j = 1, 2, \dots, n - s_v + 1, v = 1, 2, \dots, k$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ . Μία σημαντική ιδιότητα αυτού του ενδεχομένου είναι:

$$X_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k \right) = A_L \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right),$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$ , όπου  $\mathbf{r}_\nu$  είναι ένα  $(n - s_\nu + 1)$ -διάστατο διάνυσμα  $(r_\nu, r_\nu, \dots, r_\nu)$  για  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Τέλος ορίζουμε την ακόλουθη αξιοπιστία:

$$R_L \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k; [p_{ij}] \right) \equiv \begin{cases} P \left( X_L \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k \right) \right), & i \geq 1 \text{ και } h_L \geq 1 \\ 1, & i = 1 \text{ και } h_L \geq 1 \\ 0, & h_L = 0, \end{cases}$$

όπου  $h_L = \min(h_{11}, h_{21}, \dots, h_{n-s_1+1,1}, h_{12}, h_{22}, \dots, h_{n-s_2+1,2}, \dots, h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{n-s_1+1,k})$  για  $h_{j\nu} = 0, 1, \dots, r_\nu, j = 1, 2, \dots, n - s_\nu + 1$  και  $i = 1, 2, \dots, m$ . Η επόμενη πρόταση μας δίνει την αξιοπιστία του γραμμικού  $\bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu)$ -από-τα- $(m, n): F$  συστήματος.

### Πρόταση 3.7.1.

1. Έστω  $\boldsymbol{\varepsilon}_\nu = (\varepsilon_{1\nu}, \varepsilon_{2\nu}, \dots, \varepsilon_{n-s_\nu+1,\nu})$  και  $\mathbf{r}_\nu = (r_\nu, r_\nu, \dots, r_\nu)$  δύο  $(n - s_\nu + 1)$ -διάστατα διανύσματα, για  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Ισχύει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$R_L \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k; [p_{ij}] \right) \equiv \begin{cases} R_{i_L}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_L \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i-1, n); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k; [p_{ij}] \right), \\ + \sum_{\delta \in \Phi_L} R_L \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i-1, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_k; [p_{ij}] \right) \cdot F_{i_L}(s_1, n; \delta), & i \geq h_L \geq 1 \\ 1, & i = 1 \text{ και } h_L \geq i \geq 1 \\ 0, & h_L = 0, \end{cases}$$

όπου:

$$\varepsilon_{j\nu} = \begin{cases} h_{j\nu} - 1 & \text{αν } \delta_j = \delta_{j+1} = \dots = \delta_{n-s_\nu+1} = 1 \\ r_\nu & \text{διαφορετικά} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n - s_\nu + 1, \nu = 1, 2, \dots, k.$$

2. Η αξιοπιστία του γραμμικού  $\cup_{v=1}^k(r_v, s_v)$ -από-τα- $(m, n): F$  συστήματος, για  $m \geq i \geq 1$ , βρίσκεται από τον τύπο:

$$R_L\left(\bigcup_{v=1}^k(r_v, s_v), (i, n); [p_{ij}]\right) = R_L\left(\bigcup_{v=1}^k(r_v, s_v), (i, n); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k; [p_{ij}]\right). \blacksquare$$

Ο τύπος για το  $F_{i_L}(s_1, n; \delta)$  και η αναδρομική σχέση για το  $\Phi_L$  είναι οι ίδιοι με του αλγόριθμου  $YM$  της Παραγράφου 3.2. Για  $k = 1$  η Πρόταση 3.7.1. ταυτίζεται με την Πρόταση 3.2.1. Για την περίπτωση *i.i.d.* ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 3.7.2.** Έστω  $p_{ij} = p_{i, n+1-j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Τότε:

$$\begin{aligned} & R_L(\cup_{v=1}^k(r_v, s_v), (i, n); (h_{11}, h_{21}, \dots, h_{n-s_1+1,1}), (h_{12}h_{22}, \dots, h_{n-s_2+1,2}), \dots, \\ & \quad (h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{n-s_k+1,k}); [p_{ij}]) \\ &= R_L(\cup_{v=1}^k(r_v, s_v), (i, n); (h_{n-s_1+1,1}, h_{n-s_1,1}, \dots, h_{11}), (h_{n-s_2+1,2}h_{n-s_2,2}, \dots, h_{22}), \dots, \\ & \quad (h_{n-s_k+1,k}, h_{n-s_k,k}, \dots, h_{1k}); [p_{ij}]). \blacksquare \end{aligned}$$

Όταν  $r_1 = 2$ , θεωρώντας το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -από-τα- $(m, n): F$  ή το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -ή- $(1, s_2)$ -από-τα- $(m, n): F$ , μπορούμε να μειώσουμε το χρόνο και τη απαιτούμενη μνήμη υπολογισμού. Θεωρούμε τις καταστάσεις της γραμμής  $t + 1$  όταν  $m = 2t + 1$ , και τις καταστάσεις των γραμμών  $t + 1$  και  $t + 2$  όταν  $m = 2t + 2$ . Η επόμενη πρόταση δίνεται για το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -ή- $(1, s_2)$ -από-τα- $(m, n): F$  αλλά μπορεί να εφαρμοσθεί και για το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -από-τα- $(m, n): F$ .

**Πρόταση 3.7.3.** Έστω το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -ή- $(1, s_2)$ -από-τα- $(m, n): F$ .

1. Όταν  $m = 2t + 1$ , αν  $p_{ij} = p_{2t+2-i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} & R_L\left((2, s_1) \text{ ή } (1, s_2), (m, n); [p_{ij}]\right) \\ &= R_{t+1_L}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_L\left((2, s_1) \text{ ή } (1, s_2), (t, n); [p_{ij}]\right)^2 \\ &+ \sum_{\delta \in \Phi_L} F_{t+1_L}(s_1, n; \delta) \cdot R_L\left((2, s_1) \text{ ή } (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; [p_{ij}]\right)^2, \end{aligned}$$

όπου  $\varepsilon_{j_1} = 1$  αν  $\delta_j = 1$  ή  $\varepsilon_{j_1} = 2$  αν  $\delta_j = 0$ , για  $j = 1, 2, \dots, n - s_1 + 1$  και  $\varepsilon_{j_2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n - s_2 + 1$ .

2. Έστω  $\Omega_L(\delta) \equiv \{\alpha \mid \alpha_j \delta_j = 0, j = 1, 2, \dots, n - s_1 + 1, \alpha \in \Phi_L\}$ ,

$\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-s_1+1}\}$ ,  $\eta \equiv \{\eta_{1\nu}, \eta_{2\nu}, \dots, \eta_{n-s_1+1,\nu}\}$ ,  $\nu = 1, 2$ ,

Όταν  $m = 2t + 2$ , αν  $p_{ij} = p_{2t+3-i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t + 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ισχύει:

$$\begin{aligned} & R_L\left((2, s_1), (m, n); [p_{ij}]\right) \\ &= R_{t+1L}(s_1, n; [p_{ij}])^2 \cdot R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}]\right)^2 \\ &+ 2R_{t+1L}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}]\right) \\ &\cdot \sum_{\delta \in \Phi_L} F_{t+1L}(s_1, n; \delta) \cdot R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); \varepsilon_1, \varepsilon_2; [p_{ij}]\right) \\ &+ \sum_{\delta \in \Phi_L} F_{t+1L}(s_1, n; \delta) \cdot R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); \varepsilon_1, \varepsilon_2; [p_{ij}]\right) \\ &\cdot \sum_{\alpha \in \Omega_L(\delta)} F_{t+1L}(s_1, n; \alpha) \cdot R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); \eta_1, \eta_2; [p_{ij}]\right), \end{aligned}$$

όπου  $\varepsilon_{j_1} = 1$  αν  $\delta_j = 1$  ή  $\varepsilon_{j_1} = 2$  αν  $\delta_j = 0$ , για  $j = 1, 2, \dots, n - s_1 + 1$  και  $\varepsilon_{j_2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n - s_2 + 1$  και  $\eta_{j_1} = 1$  αν  $\alpha_j = 1$  ή  $\eta_{j_1} = 2$  αν  $\alpha_j = 0$ , για  $j = 1, 2, \dots, n - s_1 + 1$  και  $\eta_{j_2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n - s_2 + 1$ .

Οι  $R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}]\right)$ ,  $R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); \varepsilon_1, \varepsilon_2; [p_{ij}]\right)$  και  $R_L\left((2, s_1) - \eta - (1, s_2), (t, n); \eta_1, \eta_2; [p_{ij}]\right)$  βρίσκονται χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.7.1. ■

Το επόμενο πόρισμα μας δίνει την αξιοπιστία του γραμμικού  $(2,1)$ -ή- $(1,2)$ -από-τα- $(m, 2): F$  συστήματος στην περίπτωση *i.i.d.*

**Πόρισμα 3.7.1.** Αν  $p_{i_1} = p_{i_2} = p$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  τότε για  $x = \sqrt{1 + 4pq}$  ισχύει:

$$\begin{aligned} & R_L((2,1) - \eta - (1,2), (m, 2); p) \\ &= (2q + 2pq + p + (1 + q)x)(1 + x)^{m-1} \\ &\quad - \left( \frac{(2q + 2pq + p - (1 + q)x)(1 + x)^{m-1} p^m}{2^m x} \right). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

- **Ο αλγόριθμος για το κυκλικό σύστημα**

Αρχικά θα προχωρήσουμε σε μερικούς συμβολισμούς όμοιους με αυτούς του γραμμικού συστήματος. Για να εκφράσουμε την κατάσταση της γραμμής  $i$ , ορίζουμε ως  $\Phi_C$  ένα σύνολο  $n$ -διάστατων διανυσμάτων έτσι ώστε:

$$\Phi_C \equiv \{\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) | \{Y_{ij} = \delta_j\} \neq \emptyset, 1 \leq j \leq n\} - \{0, 0, \dots, 0\}$$

Αν  $\delta \in \Phi_C$ , αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον  $s_1$  συνεχόμενες μονάδες που δεν λειτουργούν στον κύκλο  $i$ . Για  $\delta \in \Phi_C$  και  $i = 1, 2, \dots, m$  ορίζουμε ως  $F_{i_C}(s_1, n; \delta)$  την πιθανότητα  $P(\cap_{j=1}^n \{Y_{ij} = \delta_j\})$ , με  $\sum_{\delta \in \Phi_C} F_{i_C}(s_1, n; \delta)$  να είναι η πιθανότητα αποτυχίας του κυκλικού συνεχόμενου  $s_1$ -από-τα- $n$ : $F$  συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες του κύκλου  $i$ . Ορίζουμε ως:

$$X_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k \right) \equiv \\ \equiv \prod_{v=1}^k \prod_{j=1}^n \{Y_{ab} = 1, i - h_{jv} + 1 \leq a \leq i, j \leq b \leq j + s_v - s_1\}^C \cap A_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n) \right)$$

όπου  $\mathbf{H}_v = (h_{1v}, h_{2v}, \dots, h_{nv})$ , για  $h_{jv} = 1, 2, \dots, r_v, j = 1, 2, \dots, n$ , και  $v = 1, 2, \dots, k$ . Τέλος έστω  $h_C = \min\{h_{11}, h_{21}, \dots, h_{n1}, h_{12}, h_{22}, \dots, h_{n2}, \dots, h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{nk}\}$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ , και  $v = 1, 2, \dots, k$ . Ορίζεται η ακόλουθη αξιοπιστία:

$$R_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k; [p_{ij}] \right) \\ \equiv \begin{cases} P \left( X_C \left( \bigcup_{v=1}^k (r_v, s_v), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k \right) \right), & i \geq 1 \text{ και } h_C \geq 1 \\ 1, & i = 1 \text{ και } h_C \geq 1 \\ 0, & h_C = 0 \end{cases}$$

για  $h_{jv} = 0, 1, \dots, r_v, j = 1, 2, \dots, n$  και  $v = 1, 2, \dots, k$ . Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις, παρόμοια με το γραμμικό σύστημα.

**Πρόταση 3.7.4.**

1. Έστω  $\boldsymbol{\varepsilon}_\nu = (\varepsilon_{1\nu}, \varepsilon_{2\nu}, \dots, \varepsilon_{n\nu})$  και  $\mathbf{r}_\nu = (r_\nu, r_\nu, \dots, r_\nu)$  δύο  $n$ -διάστατα διανύσματα, για  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Ισχύει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$R_C \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_k; [p_{ij}] \right) \\ \equiv \begin{cases} R_{i_C}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_C \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i-1, n); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k; [p_{ij}] \right), \\ + \sum_{\delta \in \Phi_C} R_C \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i-1, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_k; [p_{ij}] \right) \cdot F_{i_C}(s_1, n; \delta), & i \geq h_C \geq 1 \\ 1, & i = 1 \text{ και } h_C \geq i \geq 1 \\ 0, & h_C = 0, \end{cases}$$

όπου:

$$\varepsilon_{j\nu} = \begin{cases} h_{j\nu} - 1 & \text{αν } \delta_j = \delta_{j+1} = \dots = \delta_{n-s_\nu+1} = 1 \\ r_\nu & \text{διαφορετικά} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n, \nu = 1, 2, \dots, k. \quad \blacksquare$$

2. Η αξιοπιστία του κυκλικού  $\bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu)$ -από-τα- $(m, n): F$  συστήματος, για  $m \geq i \geq 1$ , βρίσκεται από τον τύπο:

$$R_C \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); [p_{ij}] \right) = R_C \left( \bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k; [p_{ij}] \right). \quad \blacksquare$$

Ο τύπος για το  $F_{i_C}(s_1, n; \delta)$  και η αναδρομική σχέση για το  $\Phi_C$  είναι οι ίδιοι με του αλγόριθμου  $YM$  της Παραγράφου 3.3. Για την περίπτωση *i.i.d.* ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 3.7.5.** Έστω  $p_{ij} = p_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ . Τότε:

$$R_C(\bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); (h_{11}, h_{21}, \dots, h_{n,1}), (h_{12}, h_{22}, \dots, h_{n,2}) \dots (h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{n,k}); [p_{ij}]) \\ = R_C(\bigcup_{\nu=1}^k (r_\nu, s_\nu), (i, n); (h_{j1}, \dots, h_{n1}h_{11}, \dots, h_{j-1,1}), (h_{j2}, \dots, h_{n2}h_{12}, \dots, h_{j-1,2}), \dots, \\ (h_{jk}, \dots, h_{nk}h_{1k}, \dots, h_{j-1,k}); [p_{ij}]). \quad \blacksquare$$



**Πρόταση 3.7.6.** Έστω το γραμμικό σύστημα  $(2, s_1)$ -ή- $(1, s_2)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$ .

1. Όταν  $m = 2t + 1$ , αν  $p_{ij} = p_{2t+2-i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (m, n); [p_{ij}] \right) \\ = R_{t+1C}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}] \right)^2 \\ + \sum_{\delta \in \Phi_C} F_{t+1C}(s_1, n; \delta) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; [p_{ij}] \right)^2, \end{aligned}$$

όπου  $\varepsilon_{j1} = 1$  αν  $\delta_j = 1$  ή  $\varepsilon_{j1} = 2$  αν  $\delta_j = 0$  και  $\varepsilon_{j2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ .

2. Έστω  $\Omega_C(\delta) \equiv \{\alpha \mid \alpha_j \delta_j = 0, j = 1, 2, \dots, n, \alpha \in \Phi_C\}$ ,

$\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \eta \equiv \{\eta_{1\nu}, \eta_{2\nu}, \dots, \eta_{n\nu}\}, \nu = 1, 2$ .

Όταν  $m = 2t + 2$ , αν  $p_{ij} = p_{2t+3-i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t + 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ισχύει:

$$\begin{aligned} R_C \left( (2, s_1), (m, n); [p_{ij}] \right) \\ = R_{t+1C}(s_1, n; [p_{ij}])^2 \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}] \right)^2 \\ + 2R_{t+1C}(s_1, n; [p_{ij}]) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}] \right) \\ \cdot \sum_{\delta \in \Phi_C} F_{t+1C}(s_1, n; \delta) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; [p_{ij}] \right) \\ + \sum_{\delta \in \Phi_C} F_{t+1C}(s_1, n; \delta) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; [p_{ij}] \right) \\ \cdot \sum_{\alpha \in \Omega_C(\delta)} F_{t+1C}(s_1, n; \alpha) \cdot R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2; [p_{ij}] \right), \end{aligned}$$

όπου  $\varepsilon_{j1} = 1$  αν  $\delta_j = 1$  ή  $\varepsilon_{j1} = 2$  αν  $\delta_j = 0$  και  $\varepsilon_{j2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n$  και  $\eta_{j1} = 1$  αν  $\alpha_j = 1$  ή  $\eta_{j1} = 2$  αν  $\alpha_j = 0$  και  $\eta_{j2} = 1$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Οι  $R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); [p_{ij}] \right)$ ,  $R_C \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; [p_{ij}] \right)$  και  $R_L \left( (2, s_1) - \text{ή} - (1, s_2), (t, n); \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2; [p_{ij}] \right)$  βρίσκονται χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.7.4. ■

**Παράδειγμα 3.7.1.** Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του κυκλικού  $(3,2)$ -ή- $(2,3)$ -από-τα- $(m, 4): F$  συστήματος στην περίπτωση *i.i.d.*

- **ΒΗΜΑ 1.** Βρες την  $\Phi_C$ .

$$\Phi_C = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), \\ (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,1,1,1)\}.$$

- **ΒΗΜΑ 2.** Βρες την  $F_{i_C}(2, 4; \delta)$  για  $\delta \in \Phi_C$  και την  $R_C(2, 4; p)$ .

$$F_{i_C}(2, 4; (1,0,0,0)) = F_{i_C}(2, 4; (0,1,0,0)) = F_{i_C}(2, 4; (0,0,1,0)) = \\ = F_{i_C}(2, 4; (0,0,0,1)) = p^2 q^2$$

$$F_{i_C}(2, 4; (1,1,0,0)) = F_{i_C}(2, 4; (0,1,1,0)) = F_{i_C}(2, 4; (0,0,1,1)) = \\ = F_{i_C}(2, 4; (1,0,0,1)) = pq^3$$

$$F_{i_C}(2, 4; (1,1,1,1)) = q^4,$$

για  $i = 1, 2, \dots, m$ . Επίσης:

$$R_C(2, 4; p) = p^2 + 2p^2q - p^2q^2.$$

- **ΒΗΜΑ 3.** Εφάρμοσε τον αναδρομικό τύπο.

$$R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i, 4); (h_{11}, h_{21}, h_{31}, h_{41}), (h_{12}, h_{22}, h_{32}, h_{42}); p) \\ \equiv \begin{cases} (p^2 + 2p^2q - p^2q^2) \cdot R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i-1, 4); (3,3,3,3), (2,2,2,2); p), \\ + \sum_{\delta \in \Phi_C} R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i-1, 4); (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{41}), (\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{42}); p) \\ \cdot F_{i_C}(2, 4; \delta), & m \geq i \geq h_C \geq 1 \\ 1, & 2 \geq h_C > i \geq 0 \\ 0, & h_C = 0, \end{cases}$$

όπου  $\varepsilon_{j1} = h_{j1} - 1$  αν  $\delta_j = 1$ ,  $\varepsilon_{j1} = 3$  αν  $\delta_j = 0$ ,  $\varepsilon_{j2} = h_{j2} - 1$  αν  $\delta_j = \delta_{j+1} = 1$  και  $\varepsilon_{j2} = 2$  διαφορετικά, για  $j = 1, 2, 3, 4$  και  $h_C = \min\{h_{11}, h_{21}, h_{31}, h_{41}, h_{12}, h_{22}, h_{32}, h_{42}\}$

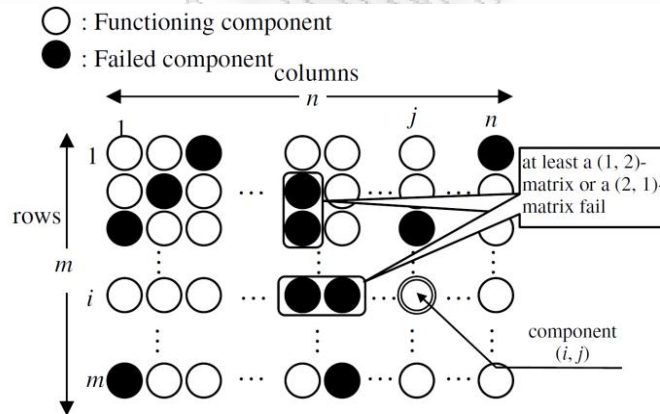
Επίσης, για  $i = 0, 1, 2, \dots, m$  ισχύει:

$$\begin{aligned}
& R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i, 4); (h_{11}, h_{21}, h_{31}, h_{41}), (h_{12}, h_{22}, h_{32}, h_{42}); p) \\
&= R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i, 4); (h_{21}, h_{31}, h_{41}h_{11}), (h_{22}, h_{32}, h_{42}, h_{12}); p) \\
&= R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i, 4); (h_{31}, h_{41}, h_{11}, h_{21}), (h_{32}, h_{42}, h_{12}, h_{22}); p) \\
&= R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (i, 4); (h_{41}, h_{11}, h_{21}, h_{31}), (h_{42}, h_{12}, h_{22}, h_{32}); p),
\end{aligned}$$

για  $h_{j1} = 0,1,2,3$  και  $h_{j2} = 0,1,2$  ( $j = 1,2,3,4$ ). Έτσι, η αξιοπιστία του κυκλικού (3,2)-ή-(2,3) -από-τα-  $(m, 4): F$  συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως  $R_C((3,2) - \text{ή} - (2,3), (m, 4); (3,3,3), (2,2); p)$ . ■

### 3.8. Ένας αλγόριθμος για το σύστημα (1, 2)-ή-(2, 1)-από-τα- $(m, n): F$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το σύστημα (1,2)-ή-(2,1)-από-τα- $(m, n): F$  αποτυγχάνει όταν υπάρξει ένας  $1 \times 2$  ή ένας  $2 \times 1$  υποπίνακας του αρχικού συστήματος, που να περιλαμβάνει αποκλειστικά μονάδες που έχουν αποτύχει. Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι δεν λειτουργεί όταν δύο συνεχόμενες μονάδες σε μια οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη δεν λειτουργούν.

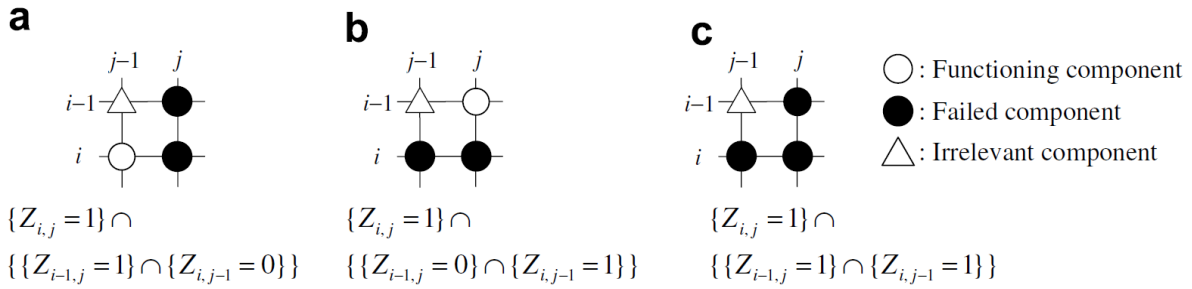


Σχήμα 3.8.1

Οι Yamamoto, Akiba, Nagatsuka & Moriyama (2008) πρότειναν έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας αυτού του συστήματος. Έστω  $Z_{ij}$  μια τ.μ. η οποία παίρνει την τιμή 0 αν η μονάδα  $(i, j)$  λειτουργεί, και 1 διαφορετικά. Για  $i = 1, 2, \dots, m$  και  $j = 1, 2, \dots, n$  ορίζουμε το ενδεχόμενο:

$$\begin{aligned}
A_{ij} \equiv & \{Z_{ij} = 1\} \cap \{Z_{i,j-1} = 1\} \cap \{Z_{i-1,j} = 1\} = \{Z_{ij} = 1\} \cap \left\{ \left\{ \{Z_{i,j-1} = 1\} \cap \{Z_{i,j-1} = \right. \right. \\
& \left. \left. 0\} \right\} \cup \left\{ \{Z_{i,j-1} = 0\} \cap \{Z_{i,j-1} = 1\} \right\} \cup \left\{ \{Z_{i,j-1} = 1\} \cap \{Z_{i,j-1} = 1\} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο  $A_{ij}$  σημαίνει ότι το σύστημα αποτυγχάνει με την μονάδα  $(i, j)$  να έχει αποτύχει, καθώς και τις γειονοτικές μονάδες να μην λειτουργούν (στην πάνω δεξιά πλευρά του συστήματος). Στο παρακάτω σχήμα, ο άσπρος κύκλος συμβολίζει μια μονάδα που λειτουργεί, ο μαύρος κύκλος μια μονάδα που έχει αποτύχει και το τρίγωνο μια μονάδα που δεν σχετίζεται με το ενδεχόμενο  $A_{ij}$ .



Σχήμα 3.8.2

Στο Σχήμα 3.8.2. *a* φαίνεται ότι η μονάδα  $(i, j)$  και η μονάδα  $(i, j - 1)$  αποτυγχάνουν, και άρα το σύστημα αποτυγχάνει. Όμοια στο Σχήμα 3.9.2. *b* φαίνεται ότι η μονάδα  $(i, j)$  και η μονάδα  $(i - 1, j)$  αποτυγχάνουν, ενώ στο Σχήμα 3.9.2. *c* οι μονάδες  $(i, j)$ ,  $(i, j - 1)$  και  $(i - 1, j - 1)$  και άρα το σύστημα αποτυγχάνει και στις δύο περιπτώσεις.

Με βάση τα παραπάνω, η αξιοπιστία του συστήματος  $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m, n): F$  μπορεί να γραφεί ως:

$$P \left( \prod_{u=1}^m \prod_{v=1}^n A_{uv}^c \right).$$

Υποθέτουμε πως όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για  $i = 1, 2, \dots, m$  ορίζουμε τα  $m$ -διάστατα διανύσματα  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  και  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  όπου κάθε  $x_i, y_i$  παίρνει την τιμή 0 ή 1. Συμβολίζουμε με  $\Theta$  το σύνολο

$$\Theta = \{(y_1, y_2, \dots, y_m) | y_i y_{i-1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m\}.$$

Έστω  $R(j)$  η αξιοπιστία του συστήματος  $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m, j): F$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , δηλαδή που υποσυστήματος του αρχικού που αποτελείται από τις  $j$  πρώτες στήλες. Έστω επίσης  $R(j; \mathbf{x})$  η αξιοπιστία του συστήματος  $(1,2)$ -ή- $(2,1)$ -από-τα- $(m, j): F$ , με δοθείσες καταστάσεις μονάδων από το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  στη στήλη  $j$ , δηλαδή η πιθανότητα:

$$P \left\{ \left\{ \prod_{u=1}^m \prod_{v=1}^n A_{uv}^c \right\} \cap \left\{ \prod_{u=1}^m \{Z_{uj} = x_u\} \right\} \right\}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Αν  $\mathbf{x} \notin \Theta$  τότε  $R(j; \mathbf{x}) = 0$ . Συμβολίζουμε με  $F_j(\mathbf{x})$  την πιθανότητα  $P\{\bigcap_{u=1}^m \{Z_{uj} = x_u\}\}$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ . Τέλος ως  $\Omega(\mathbf{y})$  συμβολίζουμε το σύνολο:

$$\Omega(\mathbf{y}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Theta \left| \bigcap_{u=1}^m \{A_{uj}^c\} \cap \left\{ \bigcap_{u=1}^m \{Z_{uj} = y_u\} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{u=1}^m \{Z_{u,j-1} = x_u\} \right\} \neq \emptyset \right. \right\}.$$

Αν  $\mathbf{y} \notin \Theta$  τότε  $\Omega(\mathbf{y}) = \emptyset$ . Για παράδειγμα, στην περίπτωση που  $m = 3$ , και οι καταστάσεις των μονάδων της στήλης  $j$  περιγράφονται από το  $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$ , τότε το  $\Omega(0, 1, 0)$  είναι ίσο με  $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$  και τα  $(0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \notin \Omega(0, 1, 0)$ . Το  $\Omega(\mathbf{y})$  δεν εξαρτάται από το  $j$ .

Με πιο απλά λόγια, αν  $\mathbf{y} \in \Theta$ , το  $\mathbf{y}$  μας δείχνει την κατάσταση μιας στήλης στην οποία οποιεσδήποτε δύο γειτονικές μονάδες δεν αποτυγχάνουν. Αν  $\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{y})$ , το  $\mathbf{x}$  μας δείχνει την κατάσταση της αριστερά στήλης από την  $j$  (δηλαδή της στήλης  $j - 1$ ) των δύο συνεχόμενων στηλών, στις οποίες οποιεσδήποτε γειτονικές μονάδες δεν αποτυγχάνουν, δεδομένου ότι το  $\mathbf{y}$  μας δείχνει την κατάσταση της δεξιά στήλης (δηλαδή της στήλης  $j$ ).

**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8.1.** Για  $j = 1, 2, \dots, n$  ισχύουν τα παρακάτω:

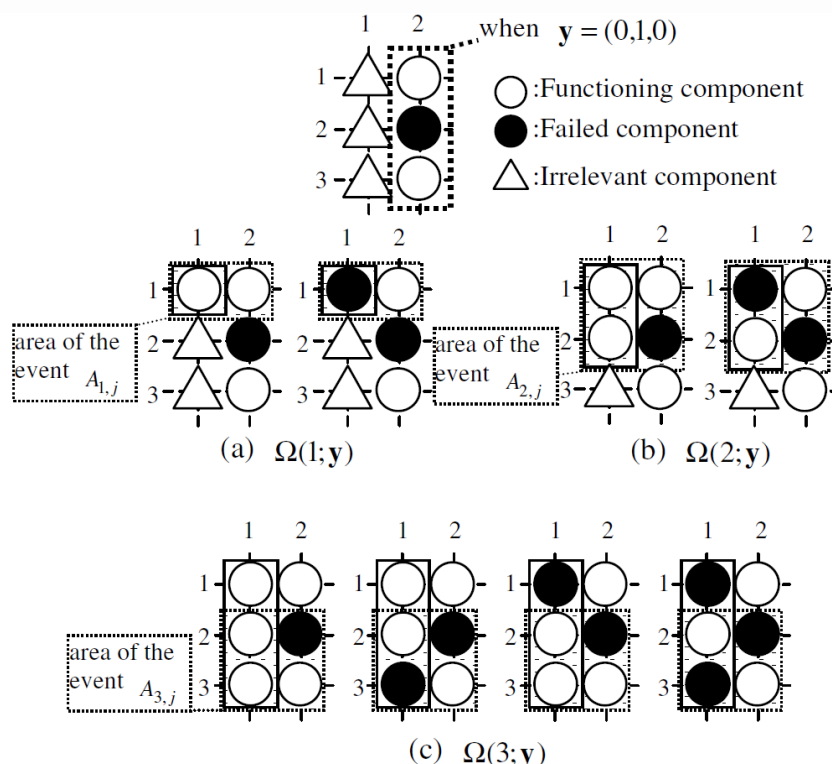
$$R(j; \mathbf{y}) = \begin{cases} F_j(\mathbf{y}) \sum_{\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{y})} R(j-1; \mathbf{x}) & j \geq 2, \mathbf{y} \in \Theta \\ F_j(\mathbf{y}) & j = 1, \mathbf{y} \in \Theta \\ 0, & \mathbf{y} \notin \Theta \end{cases}$$

$$R(j) = \sum_{\mathbf{y} \in \Theta} R(j; \mathbf{y}) \quad \blacksquare$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να βρούμε το σύνολο  $\Omega(\mathbf{y})$  με τη μέθοδο της απαρίθμησης. Όμως υπάρχει πιο αποτελεσματικός τρόπος, τον οποίο θα παρουσιάσουμε στο επόμενο θεώρημα. Για  $i = 1, 2, \dots, m$  ορίζουμε το σύνολο:

$$\Omega(i; \mathbf{y}) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_i) \in \Theta \left| \bigcap_{u=1}^i \{A_{uj}^c\} \cap \left\{ \bigcap_{u=1}^m \{Z_{uj} = y_u\} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{u=1}^i \{Z_{u,j-1} = x_u\} \right\} \neq \emptyset \right. \right\}$$

Αν  $\mathbf{y} \notin \Theta$  τότε  $\Omega(i; \mathbf{y}) = \emptyset$ . Για παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση που  $m = 3$  και  $j = 2$ . Το Σχήμα 3.8.3 παρουσιάζει τα  $\Omega(1; \mathbf{y}), \Omega(2; \mathbf{y}), \Omega(3; \mathbf{y})$  για  $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$ . Όπως και πριν, ο ασπρος κύκλος συμβολίζει μια μονάδα που λειτουργεί, ο μαύρος κύκλος μια μονάδα που δεν λειτουργεί, και το τρίγωνο μια μονάδα που δεν σχετίζεται με το  $\Omega(i; \mathbf{y})$ .



Σχήμα 3.8.3

Ισχύει ότι  $\Omega(1; \mathbf{y}) = \{(0), (1)\}$  γιατί το ενδεχόμενο  $A_{12} \cap \{Z_{12} = 0\}$  δεν πραγματοποιείται και στις δύο περιπτώσεις της μονάδας (1,1), είτε λειτουργεί είτε όχι ( $x_1 = 1$  ή  $x_1 = 0$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8.3.  $a$ .  $\Omega(1; \mathbf{y}) = \{(0,0), (1,0)\}$  γιατί το ενδεχόμενο  $A_{22} \cap \{Z_{12} = 0\} \cap \{Z_{22} = 1\}$  δεν πραγματοποιείται όταν η μονάδα (2,1) λειτουργεί ( $x_2 = 0$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8.3.  $b$ . Τέλος  $\Omega(3; \mathbf{y}) = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1)\}$  γιατί το ενδεχόμενο  $A_{32} \cap \{Z_{12} = 0\} \cap \{Z_{22} = 1\} \cap \{Z_{32} = 0\}$  δεν πραγματοποιείται και στις δύο περιπτώσεις μονάδας (3,1), είτε λειτουργεί είτε όχι ( $x_3 = 1$  ή  $x_3 = 0$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8.3.  $c$ . Σημειώνουμε ότι το  $\Omega(i; \mathbf{y})$  δεν εξαρτάται από το  $j$ .

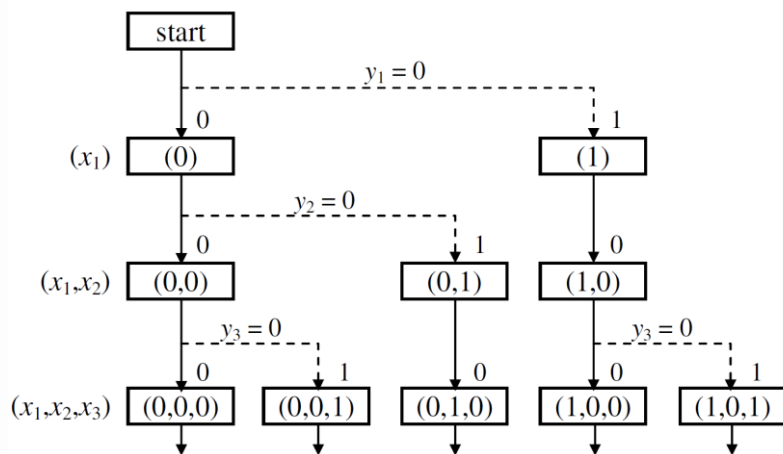
**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8.2.** Έστω  $\mathbf{x}^{(i)}$  ένα  $i$ -διάστατο δυαδικό διάνυσμα  $(x_1, x_2, \dots, x_i), i = 1, 2, \dots, m$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Όταν  $i = 2, 3, \dots, m$ , για οποιοδήποτε  $\mathbf{y} \in \theta$ ,

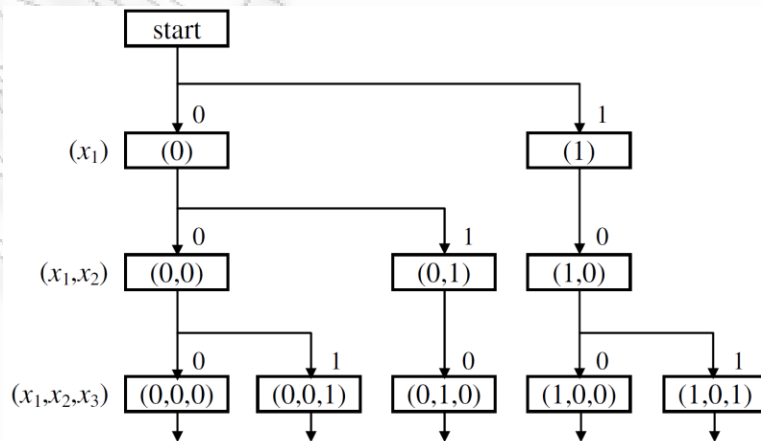
$$\Omega(i; \mathbf{y}) = \begin{cases} \{(\mathbf{x}^{(i-1)}, x_i) | x_i x_{i-1} = 0, \mathbf{x}^{(i-1)} \in \Omega(i-1; \mathbf{y})\} & y_i = 0 \\ \{(\mathbf{x}^{(i-1)}, x_i) | x_i = 0, \mathbf{x}^{(i-1)} \in \Omega(i-1; \mathbf{y})\} & y_i = 1. \end{cases}$$

2. Όταν  $i = 1$ , για οποιοδήποτε  $\mathbf{y}$ ,  $\Omega(\mathbf{y}) = \Omega(\mu; \mathbf{y})$ . ■

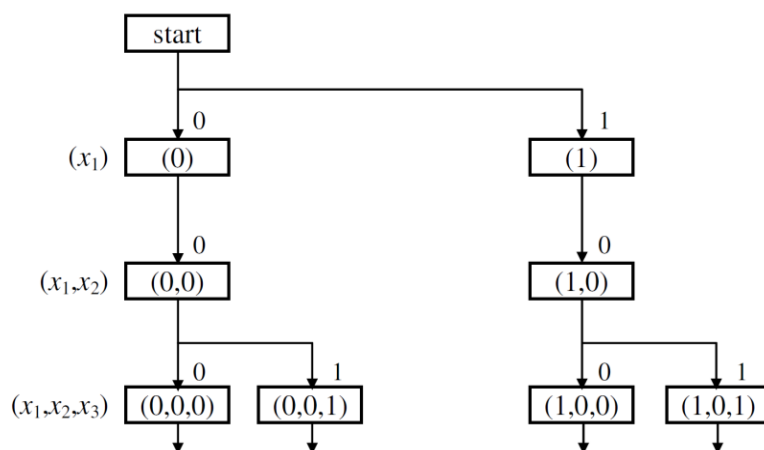
Αν  $\mathbf{y} = (0,0, \dots, 0)$  τότε  $\Omega(\mathbf{y}) = \theta$ . Θα χρησιμοποιήσουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης (*search tree*) για να εξηγήσουμε τη διαδικασία εύρεσης του  $\Omega(\mathbf{y})$ . Οι κόμβοι συμβολίζουν το  $m$ -διάστατο  $\mathbf{x}$  ή το  $i$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Ο κόμβος “start” είναι η ρίζα. Οι κόμβοι που αντιπροσωπεύουν το  $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1)$  βρίσκονται στην πρώτη μετάβαση (*first depth*). Οι κόμβοι που αντιπροσωπεύουν το  $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1, x_2)$  βρίσκονται στη δεύτερη μετάβαση. Οι κόμβοι που αντιπροσωπεύουν το  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  είναι τα φύλλα (*leaves*). Οι κόμβοι ενώνονται με μια συνεχόμενη ή διακεκομμένη γραμμή. Για  $i = 1,2,3$ , ο κόμβος κάτω από τη διακεκομμένη γραμμή αφαιρείται αν  $y_i \neq 0$ . Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.8.4 δείχνουμε ένα δενδρόγραμμα για  $m = 3$  και  $\mathbf{y} = (0,0,0)$ . Στο Σχήμα 3.8.5 δείχνουμε ένα δενδρόγραμμα για  $m = 3$  και  $\mathbf{y} = (0,1,0)$ . Για  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 1$ , το δένδρο αναζήτησης δεν πραγματοποιείται όταν  $\mathbf{y} = (0,1,0)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8.6.



Σχήμα 3.8.4



Σχήμα 3.8.5



Σχήμα 3.8.6

Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής βήματα:

**ΒΗΜΑ 0:** (Θέτοντας αρχική τιμή). Θέσε  $j = 0$  και αριθμήσε όλα τα στοιχεία του  $\theta$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.2.

**ΒΗΜΑ 1:** Θέσε  $j = j + 1$  και βρες την  $F_j(\mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$ .

**ΒΗΜΑ 2:** Διάλεξε ένα  $\mathbf{y} \in \theta$ .

**ΒΗΜΑ 3:** Αριθμήσε όλα τα στοιχεία του  $\Omega(\mathbf{y})$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.2.

**ΒΗΜΑ 4:** Βρες την  $R(j; \mathbf{y})$  χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.1.

**ΒΗΜΑ 5:** Πήγαινε στο ΒΗΜΑ 6 αν έχεις βρει την  $R(j; \mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$ . Διαφορετικά πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2.

**ΒΗΜΑ 6:** Όταν  $j = n$ , βρες την  $R(n)$  την Πρόταση 3.8.1. Όταν  $j < n$  πήγαινε στο ΒΗΜΑ 1

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Μπορούμε να αποθηκεύσουμε όλα τα στοιχεία του  $\Omega(\mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$  στο ΒΗΜΑ 0 και να αφαιρέσουμε το ΒΗΜΑ 3.

Τώρα θα εκτιμήσουμε τον χρόνο υπολογισμού και το μέγεθος της μνήμης αυτού του αλγόριθμου. Ο αριθμός όλων των στοιχείων του  $\theta$  είναι μικρότερος από  $2^m$ . Για κάθε  $j$ , ο αριθμός των  $F_j(\mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$  είναι επίσης μικρότερος από  $2^m$ . Ο αριθμός όλων των στοιχείων του  $\Omega(\mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$  είναι μικρότερος από  $2^{2m}$ . Για κάθε  $j$ , ο αριθμός των  $R(j; \mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$  είναι επίσης μικρότερος από  $2^m$ . Έτσι, η  $R(n)$  υπολογίζεται σε χρόνο τάξης  $O(n2^{2m})$ .

Επίσης, η μέγιστη μνήμη που απαιτείται για όλα τα στοιχεία του  $\theta$  είναι  $2^m$  και η μέγιστη μνήμη που απαιτείται για τον υπολογισμό της  $R(j; \mathbf{x})$  είναι  $2^{m+1}$ , επειδή χρειαζόμαστε  $2^m$



εισόδους για  $i - 1$  και  $i$  ταυτόχρονα. Έτσι, η μνήμη που απαιτείται είναι της τάξης  $O(2^m)$ . Λαμβάνοντας υπόψη την παρατήρηση, ο χρόνος υπολογισμού γίνεται  $O(2^{2m} + n2^m)$  καθώς βρίσκουμε τα  $\Omega(\mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \theta$  μόνο μια φορά. Όμως, ο μνήμη που απαιτείται γίνεται  $O(2^{2m})$  για τα  $\Omega(\mathbf{y})$ . Και με τους δύο αλγόριθμους, ο χρόνος υπολογισμού είναι εκθετικός ως προς  $m$  και πολυωνυμικός για  $n$ . Η μνήμη που απαιτείται είναι επίσης εκθετική ως προς  $m$  αλλά δεν εξαρτάται από το  $n$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.1.** Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος (1,2)-ή-(2,1)-από-τα-(3,2):  $F$  στην περίπτωση *i.i.d.*

**ΒΗΜΑ 0:** Θέτουμε  $j = 0$ . Τότε:

$$\theta = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\}.$$

**ΒΗΜΑ 1:** Θέτουμε  $j = 1$ . Τότε:

$$F_1((0,0,0)) = p^3$$

$$F_1((1,0,0)) = p^2q$$

$$F_1((0,1,0)) = p^2q$$

$$F_1((0,0,1)) = p^2q$$

$$F_1((1,0,1)) = pq^2.$$

**ΒΗΜΑ 2:** Διάλεξε ένα  $\mathbf{y} \in \theta$ . Θα αναλύσουμε μόνο την περίπτωση που  $\mathbf{y} = (0,0,0)$ .

**ΒΗΜΑ 3:** Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.2, τα στοιχεία του  $\Omega(\mathbf{y})$  είναι:

$$\Omega(1; (0,0,0)) = \{(x_1) | x_1 \in (0,1)\} = \{(0), (1)\}$$

$$\Omega(2; (0,0,0)) = \{(\mathbf{x}^{(1)}, x_2) | x_1 x_2 = 0, \mathbf{x}^{(1)} \in \Omega(1; (0,0,0))\} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

$$\begin{aligned} \Omega(3; (0,0,0)) &= \{(\mathbf{x}^{(2)}, x_3) | x_2 x_3 = 0, \mathbf{x}^{(2)} \in \Omega(2; (0,0,0))\} = \\ &= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Omega((0,0,0)) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1)\}.$$

**ΒΗΜΑ 4:** Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.1:

$$R(1; (0,0,0)) = F_1((0,0,0)) = p^3.$$

**ΒΗΜΑ 5:** Πηγαίνουμε στο ΒΗΜΑ 2 αφού δεν βρήκαμε την  $R(1; \mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \Theta$ . Επαναλαμβάνοντας τα βήματα 3 έως 5, παίρνουμε διαδοχικά από το ΒΗΜΑ 3:

$$\Omega((0,0,1)) = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0)\}$$

$$\Omega((1,0,0)) = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$$\Omega((0,1,0)) = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1), (1,0,1)\}$$

$$\Omega((1,0,1)) = \{(0,0,0), (0,1,0)\}.$$

Από το ΒΗΜΑ 4 παίρνουμε:

$$R(1; (0,0,1)) = F_1((0,0,1)) = pq^2$$

$$R(1; (0,1,0)) = F_1((0,1,0)) = pq^2$$

$$R(1; (1,0,0)) = F_1((1,0,0)) = pq^2$$

$$R(1; (1,0,1)) = F_1((1,0,1)) = p^2q.$$

Πηγαίνουμε στο ΒΗΜΑ 6 εφόσον βρήκαμε την  $R(1; \mathbf{y})$  για όλα τα  $\mathbf{y} \in \Theta$ .

**ΒΗΜΑ 6:** Εφόσον  $j < n$  πηγαίνουμε πάλι στο ΒΗΜΑ 1.

**ΒΗΜΑ 1:** Θέτουμε  $j = 2$ . Τότε:

$$F_2((0,0,0)) = p^3$$

$$F_2((1,0,0)) = p^2q$$

$$F_2((0,1,0)) = p^2q$$

$$F_2((0,0,1)) = p^2q$$

$$F_2((1,0,1)) = pq^2.$$

Με όμοια διαδικασία όπως για  $j = 1$ , οι  $R(j; \mathbf{y})$  για  $j = 2$  μπορούν να θπολογισθούν στο ΒΗΜΑ 3 ως εξής:

$$R(2; (0,0,0)) = F_2((0,0,0)) \sum_{x \in \Omega((0,0,0))} R(1; x) = p^3(p^3 + 3p^2q + pq^2)$$

$$R(2; (1,0,0)) = F_2((1,0,0)) \sum_{x \in \Omega((1,0,0))} R(1; x) = p^2q(p^3 + 2p^2q)$$

$$R(2; (0,1,0)) = F_2((0,1,0)) \sum_{x \in \Omega((0,1,0))} R(1; x) = p^2q(p^3 + 2p^2q + pq^2)$$

$$R(2; (1,0,1)) = F_2((1,0,1)) \sum_{x \in \Omega((1,0,1))} R(1; x) = pq^2(p^3 + p^2q)$$

Τέλος, υπολογίζουμε την  $R(2)$  ως εξής:

$$\begin{aligned}
R(2) &= R(2; (0,0,0)) + R(2; (1,0,0)) + R(2; (0,1,0)) + R(2; (1,0,1)) \\
&= p^3(p^3 + 3p^2q + pq^2) + p^2q(p^3 + 2p^2q) + p^2q(p^3 + 2p^2q + pq^2) \\
&\quad + pq^2(p^3 + p^2q).
\end{aligned}$$

### 3.9. Υπολογισμός αξιοπιστίας μέσω Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Οι *Boutsikas & Koutras* (2000) παρουσίασαν μία μέθοδο εκτίμησης της αξιοπιστίας συνεκτικών δομών, που περιγράφονται από πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες, δηλαδή τα συστήματα *MIS*, που ορίσαμε στην Παράγραφο 1.13. Η μέθοδος δεν απαιτεί αναλυτική έκφραση των ε.σ.λ. ή ε.σ.δ. της δομής, και παρόλο που οι τεχνικές που εφαρμόζονται βασίζονται στις γεννήτριες συναρτήσεις και τους μη αρνητικούς πίνακες, οι τελικοί τύποι υπολογισμού είναι πάρα πολύ απλοί και η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί ακόμα και σε πολύπλοκες δομές. Πριν προχωρήσουμε στην αναλυτική περιγραφή της μεθόδου, θα πρέπει να εισάγουμε τους κατάλληλους συμβολισμούς.

Έστω  $I$  το σύνολο μονάδων μιας μονότονης δομής αξιοπιστίας. Σε κάθε μονάδα  $\alpha$  αντιστοιχούμε μία δυαδική τυχαία μεταβλητή  $X_\alpha$  που δείχνει αν η μονάδα λειτουργεί ( $X_\alpha = 1$ ) ή αποτυγχάνει ( $X_\alpha = 0$ ). Η κατάσταση ενός συστήματος με σύνολο μονάδων  $J \subset I$  καθορίζεται πλήρως από την κατάσταση των μονάδων του, και αντανακλάται στην τιμή της συνάρτησης δομής  $\varphi = \varphi(X_\alpha, \alpha \in J)$ . Ένας εναλλακτικός τρόπος για να περιγράψουμε μια συνεκτική δομή αξιοπιστίας, είναι βρίσκοντας το σύνολο των ε.σ.δ. του συστήματος (έστω  $C \subset J$ ). Εισάγουμε την έννοια “συνεκτικό σύστημα  $(J, C)$ ” ή πιο απλά “σύστημα  $(J, C)$ ” για να περιγράψουμε ταυτόχρονα το σύνολο των μονάδων του συστήματος  $J$  καθώς και την οικογένεια όλων των συνόλων διακοπής του  $C$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9.1.** Μία ακολουθία δομών  $(J_n, C_n), n = 1, 2, \dots$  θα καλείται “Ακολουθία εμφυτεύσιμη σε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα” (*Markov chain imbeddable sequence*) αν:

1.  $J_n \subset J_{n+1} \subset I$  και  $C_n \subset C_{n+1}$ , για  $n = 1, 2, \dots$
2. Υπάρχει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$  ορισμένη στον πεπερασμένο χώρο καταστάσεων  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ , με την ακόλουθη ιδιότητα:  $Y_n = s_N$  αν και μόνο αν το  $n$ -οστό σύστημα της ακολουθίας αποτυγχάνει.

Τα μέλη μιας ακολουθίας εμφυτευμένης σε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα, είναι τα συστήματα *MIS*, σε αντιστοιχία με τον ορισμό που δώσαμε στην Παράγραφο 1.13, και προφανώς η

κατάσταση  $s_N$  είναι μια κατάσταση απορρόφησης της Μαρκοβιανής Αλυσίδας  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ . Στο εξής θα θεωρήσουμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας  $P[Y_n = s_j | Y_{n-1} = s_i], n \geq 1$  δεν εξαρτώνται από το  $n$ , δηλαδή  $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$  (ο πίνακας μετάβασης) για  $n = 0, 1, \dots$ , και τις ακολουθίες αυτές θα τις ονομάζουμε ομογενείς ακολουθίες εμφυτευμένες σε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα ή απλά ομογενείς *MIS*. Έτσι, η γεννήτρια συνάρτηση αξιοπιστίας μιας ομογενούς *MIS*  $(J_n, C_n), n = 1, 2, \dots$ , παίρνει την μορφή:

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \boldsymbol{\pi}'(\mathbf{I} - z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{u}, |z| < 1, \mathbf{u} = (1, \dots, 1, 0)',$$

$$\boldsymbol{\pi} = (P(Y_0 = s_0), P(Y_0 = s_1), \dots, P(Y_0 = s_N))' \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Επειδή η  $s_N$  είναι μια κατάσταση απορρόφησης, ο πίνακας μετάβασης  $\mathbf{A}$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix},$$

όπου  $\mathbf{A}_0$  είναι ένας  $N \times N$  πίνακας και  $\mathbf{b}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$  είναι διανύσματα στήλες. Έτσι καταλήγουμε στην έκφραση  $R_n = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{A}_0^n\mathbf{1}$ , όπου το  $\boldsymbol{\pi}_0 \in \mathbb{R}^N$  αποτελείται από τις  $N$  πρώτες εισόδους (*entries*) του  $\boldsymbol{\pi}$  και  $\mathbf{1}' = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$ . Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι η αξιοπιστία  $R_n$  δεν είναι σταθερή για  $n = 1, 2, \dots$

Παρόλο που οι τύποι που αναφέραμε μέχρι τώρα είναι πολύτιμοι για την ακριβή εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός ομογενούς *MIS*, δεν μπορούν ουσιαστικά να εφαρμοσθούν για μεγάλες τιμές του  $n$ , δηλαδή μεγάλες δομές αξιοπιστίας, καθώς για μεγάλους και πολύπλοκους πίνακες, ο χρόνος υπολογισμού που θα απαιτηθεί να κάνει τη μέθοδο αδύνατη προς εφαρμογή. Αυτό οδήγησε τους συγγραφείς στο να εφαρμόσουν την μέθοδο μερικής κλασματικής επέκτασης στην γεννήτρια συνάρτησης  $r(z)$ . Η μέθοδος αυτή μας λέει ότι αν η γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών  $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$  είναι κλασματική συνάρτηση (δηλαδή μπορεί να γραφεί ως λόγος δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων), τότε κάτω από κάποιες “ήπιες” προϋποθέσεις, η  $a_n$  μπορεί να εκτιμηθεί ικανοποιητικά (για μεγάλα  $n$ ) ως εξής:

$$a_n = c \binom{n+u-1}{n} \left(\frac{1}{s}\right)^n$$

όπου  $s$  είναι η μικρότερη σε απόλυτη τιμή ρίζα του πολυωνυμικού παρονομαστή της γεννήτριας συνάρτησης,  $u$  η πολλαπλότητά της και  $c$  μια σταθερά ανεξάρτητη του  $n$ .

Παρατηρώντας τον τύπο για τη γεννήτρια συνάρτηση  $r(z)$  της αξιοπιστίας, θέλουμε να βρούμε τη μικρότερη ρίζα του παρονομαστή  $\det(\mathbf{I} - z\mathbf{A})$ , που προφανώς συμπίπτει με την αντίστροφη τιμή της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του  $\mathbf{A}$ . Σημαντικό ρόλο στα συμπεράσματα αυτής της παραγράφου παίζει η θεωρία μη αρνητικών πινάκων και κυρίως το θεώρημα *Perron-Frobenius*.

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  θα λέγεται μη αρνητικός αν  $a_{ij} \geq 0$  για όλα τα  $i, j$ . Ένας τετραγωνικός μη αρνητικός πίνακας  $\mathbf{A}$  θα λέγεται πρωταρχικός (*primitive*) αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος  $k$  έτσι ώστε  $\mathbf{A}^k > 0$ .

**Πρόταση 3.9.1.** (*Perron-Frobenius*) Έστω  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  ένας  $k \times k$  μη αρνητικός πρωταρχικός πίνακας. Τότε υπάρχει μια ιδιοτιμή  $\lambda$  του  $\mathbf{A}$  έτσι ώστε:

1. Το  $\lambda$  είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.
2.  $\lambda > |\lambda_i|$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i \neq \lambda$ .
3. Το  $\lambda$  είναι μια απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\psi(x) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$  του  $\mathbf{A}$ .
4.  $\min_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \leq \lambda \leq \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij}$ . ■

Η θετική πραγματική ιδιοτιμή της Πρότασης 3.7.1 θα λέγεται ιδιοτιμή *Perron-Frobenius* του πίνακα  $\mathbf{A}$ .

Επειδή ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δεν είναι πρωταρχικός, για να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα θα πρέπει να βρούμε μια εναλλακτική έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση της αξιοπιστίας. Ο επόμενος τύπος εκφράζει την  $r(z)$  μέσω του  $\mathbf{A}_0$  αντί για του  $\mathbf{A}$ .

$$r(z) = \boldsymbol{\pi}_0' (\mathbf{I} - z\mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{1}, \quad |z| < 1, \quad \boldsymbol{\pi}_0 = (P(Y_0 = s_0), \dots, P(Y_0 = s_{N-1}))'.$$

Η παρακάτω πρόταση εκφράζει την αξιοπιστία ενός *MIS* με βάση τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}_0$ .

**Πρόταση 3.9.2.** Η αξιοπιστία ενός *MIS*, με πίνακα μετάβασης  $\mathbf{A}$ , μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$R_n = \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{u_i} \binom{v+n-1}{n} c_{iv} \lambda_i^n,$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}_0$  με αντίστοιχες πολλαπλότητες  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , ( $\sum_{i=1}^m u_i = N$ ) και  $c_{iv}$  είναι σταθερές ανεξάρτητες του  $n$ . ■

**Πρόταση 3.9.3.** Έστω  $R_n$  η αξιοπιστία ενός *MIS*, με πίνακα μετάβασης  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{bmatrix}$ . Υποθέτουμε ότι ο  $\mathbf{A}_0$  είναι πρωταρχικός και έστω  $\lambda_1$  η μεγαλύτερη σε μέτρο ιδιοτιμή του (ιδιοτιμή *Perron-Frobenius*) και  $\lambda_2$  η αμέσως μεγαλύτερη (σε απόλυτη τιμή) ιδιοτιμή. Τότε  $0 < \lambda_1 < 1$  και

$$R_n = c\lambda_1^n + O(n^{u_2-1}|\lambda_2|^n),$$

όπου  $c$  είναι μια θετική σταθερά, ανεξάρτητη από το  $n$ , και  $u_2$  είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_2$ . Αν υπάρχουν δύο η περισσότερες ιδιοτιμές με το ίδιο μέτρο  $|\lambda_2| < \lambda_1$ , επιλέγουμε την  $\lambda_2$  ανάμεσα σε αυτές με την μεγαλύτερη πολλαπλότητα. Η σταθερά  $c$  μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$c = \frac{\boldsymbol{\pi}_0' \text{Adj}(\mathbf{I}\lambda_1 - \mathbf{A}_0)\mathbf{1}}{\psi'(\lambda_1)}, \quad \psi'(z) = \frac{d}{dz} \det(\mathbf{I}z - \mathbf{A}_0). \quad \blacksquare$$

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε δεν απαιτεί τον ακριβή υπολογισμό του  $c$ , το οποίο είναι αρκετά πολύπλοκο, ιδιαίτερα για μεγάλης διάστασης πίνακα  $\mathbf{A}_0$ . Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι αν ο  $\mathbf{A}_0$  είναι πρωταρχικός, τότε  $R_n/c\lambda_1^n = 1 + O\left(n^{u_2-1} \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right) \rightarrow 1$  και έτσι η αξιοπιστία ενός ομογενούς *MIS* μπορεί να εκτιμηθεί, για μεγάλα  $n$ , από τον τύπο:

$$R_n \approx c\lambda_1^n.$$

Αυτή η μέθοδος εκτίμησης δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μικρές και μεσαίες τιμές του  $n$ . Όμως απαιτεί την εκ των προτέρων εκτίμηση της ιδιοτιμής  $\lambda_1$  του πίνακα  $\mathbf{A}_0$ , και τον υπολογισμό της  $c$ . Και οι δύο αυτοί υπολογισμοί είναι πολύ δύσκολοι στις περισσότερες περιπτώσεις, και μπορούν να γίνουν από αριθμητικούς αλγόριθμους με μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις. Το επόμενο πόρισμα μας δίνει το πλαίσιο για να βρούμε μια μέθοδο που να δίνει απλές εκτιμήσεις για ένα *MIS*.

**Πόρισμα 3.9.1.** Έστω  $R_n, \mathbf{A}_0, \lambda_1, \lambda_2, c$  οι ίδιες παράμετροι της Πρότασης 3.7.3. Εάν  $n, m_1, m_2 \rightarrow \infty$ , ( $m_1 < m_2 < n$ ) έτσι ώστε  $\frac{n-m_1}{m_2-m_1} m_1^{u_2-1} a^{m_1} \rightarrow 0$ , ( $a = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ ), τότε:

$$R_n \sim R_{m_1} \left( \frac{R_{m_2}}{R_{m_1}} \right)^{\frac{n-m_1}{m_2-m_1}} \Rightarrow \frac{R_n}{R_{m_1}} \left( \frac{R_{m_1}}{R_{m_2}} \right)^{\frac{n-m_1}{m_2-m_1}} = 1 + O \left( \frac{n-m_1}{m_2-m_1} m_1^{u_2-1} a^{m_1} \right). \quad \blacksquare$$

Με άλλα λόγια, το πόρισμα υποδεικνύει την ακόλουθη εκτίμηση, για μεγάλα  $m_1 < m_2 < n$ :

$$R_n \approx R_{m_1} \left( \frac{R_{m_2}}{R_{m_1}} \right)^{\frac{n-m_1}{m_2-m_1}} = R_{m_2} \left( \frac{R_{m_2}}{R_{m_1}} \right)^{\frac{n-m_2}{m_2-m_1}}.$$

Όπως και με την Πρόταση 3.7.3, το παραπάνω πόρισμα δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μικρές και μεσαίες τιμές των  $m_1, m_2, n$ . Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το πόρισμα, θα πρέπει προφανώς να υπολογίσουμε τις  $R_{m_1}$  και  $R_{m_2}$ . Πρέπει λοιπόν τα  $m_1$  και  $m_2$  να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι  $R_{m_1}$  και  $R_{m_2}$  να μπορούν να υπολογισθούν από απλούς τύπους ή απλά υπολογιστικά σχήματα, όπως αναδρομικές διαδικασίες με μικρό αριθμό επαναλήψεων. Αυτό συνήθως μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο για μικρές τιμές των  $m_1, m_2$ , και έτσι αντιμετωπίζουμε το δίλημμα του να επιλέξουμε μεταξύ ποιοτικών εκτιμήσεων (που απαιτούν μεγάλα  $m_1, m_2$ ) ή την ευκολία του υπολογισμού των  $R_{m_1}$  και  $R_{m_2}$ . Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στις περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου, είναι καλό να αποφύγουμε να γράψουμε αναλυτικά τον πίνακα μετάβασης που αντιστοιχεί στο MIS. Όμως πρέπει να ελέγξουμε αν ο πίνακας  $\mathbf{A}_0$  είναι πρωταρχικός. Μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό δυνάμεων του  $\mathbf{A}_0$ , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο  $\mathbf{A}_0$  είναι πρωταρχικός αν και μόνο αν οι καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$  που σχετίζονται με τον πίνακα  $\mathbf{A}_0$  (δηλαδή οι καταστάσεις  $s_0, s_1, \dots, s_{N-1}$ ) σχηματίζουν μια μη περιοδική κλάση που επικοινωνεί με τον εαυτό της (*aperiodic and self-communicating class*).

### Εφαρμογή στο σύστημα $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n)$ : $F$

Έστω μία ακολουθία *i.i.d.* δισδιάστατων  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(\mu, n)$ :  $F$  συστημάτων,  $\mu = 1, 2, \dots$ , με πιθανότητες λειτουργίας μονάδων  $p = 1 - q > 0$  και  $k, r, s, n$  σταθερά ( $k \leq rs, s \leq n$ ). Το  $\mu$ -οστό σύνολο μονάδων του συστήματος είναι το  $J_\mu = \{(i, j), i = 1, 2, \dots, \mu, j = 1, 2, \dots, n\}$ , ενώ η οικογένεια των ε.σ.δ. του μπορεί να περιγραφεί ως  $C_\mu = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\max\{1, \mu-r+1\}} \bigcup_{j=1}^{n-s+1} A_{ij} \right\}$ , όπου  $A_{ij} = \{C \subset \{i, i+1, \dots, \min\{i+r-1, \mu\}\} \times \{j, j+1, \dots, j+s-1\} : |C| = k\}$ . Αν  $C_\mu = \emptyset$  τότε  $R_\mu = 1$ . Για να βρούμε μια εμφύτευση του συστήματος σε Μαρκοβιανή αλυσίδα, ορίζουμε τον χώρο καταστάσεων:

$$S = \left\{ \mathbf{y} = (y_{ij})_{(r-1) \times n} : y_{ij} \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=a}^{a+n-1} (1 - y_{ij}) < k, \forall a = 1, 2, \dots, n - s + 1 \right\} \cup \{s_N\}$$

και μια ακολουθία πραγματικών διανυσμάτων  $\{Y_\mu, \mu = 1, 2, \dots\}$  έτσι ώστε:

- $Y_\mu = s_N$  αν και μόνο αν το σύστημα  $(J_\mu, C_\mu)$  δεν λειτουργεί.
- $Y_\mu = \mathbf{y} = (y_{ij})_{(r-1) \times n}$  αν και μόνο αν το σύστημα  $(J_\mu, C_\mu)$  λειτουργεί και οι καταστάσεις των μονάδων  $(\mu - i + 1, j), i = 1, 2, \dots, \min\{i + r - 1, \mu\}, j = 1, \dots, n$  περιγράφονται από την  $y_{ij}$ .

Για  $\mu = 0$  θέτουμε  $Y_0 = \mathbf{1}_{(r-1) \times n}$ . Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι η  $\{Y_\mu, \mu = 1, 2, \dots\}$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα πάνω στον  $S$  με την  $S \setminus \{s_N\}$  να σχηματίζει μια μη περιοδική κλάση που επικοινωνεί με τον εαυτό της (η κατάσταση  $\mathbf{1}$  επικοινωνεί με όλες τις καταστάσεις στην  $S \setminus \{s_N\}$  και είναι μη περιοδική αφού  $P(Y_\mu = \mathbf{1} | Y_{\mu-1} = \mathbf{1}) = p^n > 0$ ). Έτσι, ο πίνακας  $A_0$  που αντιστοιχεί στη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι πρωταρχικός και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.7.3 για τη συγκεκριμένη δομή. Συμβολίζοντας με  $R_{k,r,s}(m, n)$  την αξιοπιστία του δισδιάστατου  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  συστήματος, μπορούμε να γράψουμε τον παρακάτω τύπο εκτίμησης:

$$R_{k,r,s}(m, n) \approx \frac{\left(R_{k,r,s}(m_2, n)\right)^{\frac{m-m_1}{m_2-m_1}}}{\left(R_{k,r,s}(m_1, n)\right)^{\frac{m-m_2}{m_2-m_1}}}, \quad m_1 < m_2.$$

Εάν επιθυμούμε να μειώσουμε την υπολογιστική ισχύ αντικαθιστώντας την παράμετρο  $n$  με κάποιες καλύτερες επιλογές, μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής : Παρατηρώντας ότι  $R_{k,r,s}(m, n) = R_{k,s,r}(n, m)$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.7.3 άλλη μια φορά, για να πάρουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$R_{k,r,s}(m_2, n) \approx \frac{\left(R_{k,s,r}(h_2, m_2)\right)^{\frac{n-h_1}{h_2-h_1}}}{\left(R_{k,s,r}(h_1, m_2)\right)^{\frac{n-h_2}{h_2-h_1}}}, \quad R_{k,r,s}(m_1, n) \approx \frac{\left(R_{k,s,r}(l_2, m_1)\right)^{\frac{n-l_1}{l_2-l_1}}}{\left(R_{k,s,r}(l_1, m_1)\right)^{\frac{n-l_2}{l_2-l_1}}}.$$

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω τύπους, για  $m_1 < m_2, h_1 < h_2, l_1 < l_2$ , παίρνουμε:



$$R_{k,r,s}(m,n) \approx \frac{\left(R_{k,s,r}(m_1, l_1)\right)^{\frac{m-m_2}{m_2-m_1} \frac{n-l_2}{l_2-l_1}} \left(R_{k,s,r}(m_2, h_2)\right)^{\frac{m-m_1}{m_2-m_1} \frac{n-h_1}{h_2-h_1}}}{\left(R_{k,s,r}(m_1, l_2)\right)^{\frac{m-m_2}{m_2-m_1} \frac{n-l_1}{l_2-l_1}} \left(R_{k,s,r}(m_2, h_1)\right)^{\frac{m-m_1}{m_2-m_1} \frac{n-h_2}{h_2-h_1}}}.$$

Τσως η πιο απλή επιλογή των παραμέτρων  $m_1, m_2, h_1, h_2, l_1, l_2$  (όσον αφορά την ευκολία υπολογισμού) είναι  $m_1 = r, m_2 = r + 1, h_1 = s, h_2 = s + 1, l_1 = s, l_2 = s + 1$ . Σε αυτή την περίπτωση, ο παραπάνω τύπος παίρνει τη μορφή:

$$R_{k,r,s}(m,n) \approx \frac{\left(R_{k,r,s}(r, s)\right)^{(m-r-1)(n-s-1)} \left(R_{k,r,s}(r+1, s+1)\right)^{(m-r)(n-s)}}{\left(R_{k,r,s}(r, s+1)\right)^{(m-r-1)(n-s)} \left(R_{k,r,s}(r+1, s)\right)^{(m-r)(n-s-1)}}.$$

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί των ποσοτήτων στον παραπάνω τύπο, μπορούν να γίνουν παρατηρώντας ότι  $R_{k,r,s}(r, s) = F(rs, r)$  και χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\begin{aligned} R_{k,r,s}(r, s+1) &= \sum_{a=0}^{k-1} F^2(r, k-a) f(r(s-1), a) \\ R_{k,r,s}(r+1, s) &= \sum_{a=0}^{k-1} F^2(s, k-a) f(s(r-1), a) \\ R_{k,r,s}(r+1, s+1) &= \sum_{a_1, a_2}^{r-1} \sum_{b_1, b_2}^{s-1} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4}^1 f((r-1)a_1) f((r-1)a_2) f((s-1)b_1) \\ &\quad \times f((s-1)b_2) q^{\sum_{i=1}^4 i_i p^{4-\sum_{i=1}^4 i_i}} F((r-1)(s-1), \\ &\quad \min\{k-a_1-b_1-i_1, k-a_2-b_1-i_2, k-a_1-b_3-i_3, k-a_2-b_2-i_4\}), \end{aligned}$$

όπου  $f(w, i) = \binom{w}{i} q^i p^{w-i}$  και  $F(w, z) = \sum_{i=0}^{z-1} f(w, i), z > 0$  ( $F(w, z) = 0$  για  $z \leq 0$ ) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διωνυμικής κατανομής. Στην ειδική περίπτωση όπου  $k = rs$  παίρνουμε τον εξής απλό τύπο για το δισδιάστατο σύστημα  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$ :

$$\begin{aligned} R_{rs,r,s}(m,n) &\approx \frac{(1-q^{rs})^{(m-r-1)(n-s-1)}}{(1-q^{rs}(2-q^r))^{(m-r-1)(n-s)}} \\ &\quad \times \frac{(1-q^{rs}(4-2q^s-2q^r-2q^{r+s-1}+4q^{r+s}-q^{r+s+1}))^{(m-r)(n-s)}}{(1-q^{rs}(2-q^s))^{(m-r)(n-s-1)}}. \end{aligned}$$

Για το σύστημα  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  μπορούμε να πάρουμε ακόμα πιο ακριβείς εκτιμήσεις, εφαρμόζοντας μια πιο πολύπλοκη αλλά υπολογιστικά εφικτή προσέγγιση, εάν στον αρχικό τύπο επιλέξουμε  $m_1 = r, m_2 = s + 1$ . Σε αυτή την περίπτωση, γράφοντας  $R_{r,s}(m, n)$  αντί για  $R_{rs,r,s}(m, n)$ , παίρνουμε:

$$R_{r,s}(m, n) = \frac{\left(R_{r,s}(r+1, n)\right)^{m-r}}{\left(R_{r,s}(r, n)\right)^{m-r-1}}.$$

Η αξιοπιστία  $R_{r,s}(r, n)$  συμπίπτει με την αξιοπιστία ενός συνεχόμενου  $s$ -από-τα- $n: F$  *i.i.d.* συστήματος, με πιθανότητες λειτουργίας μονάδων  $1 - q^r$ , και άρα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με κάποιον από τους αναδρομικούς τύπους που έχουμε ήδη αναφέρει. Για τον υπολογισμό της  $R_{r,s}(r+1, n)$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα για αυτό το συγκεκριμένο σύστημα, η οποία χρησιμοποιεί έναν πολύ μικρότερο πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων από αυτόν που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την αρχική δομή.

Συγκεκριμένα, έστω μια ακολουθία δισδιάστατων *i.i.d.* συνεχόμενων συστημάτων  $(r, s)$ -από-τα- $(r+1, n): F, n = 1, 2, \dots$ , με σταθερά  $r$  και  $s$ . Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} J_n &= \{(i, j), i = 1, 2, \dots, r+1, j = 1, 2, \dots, n\} \\ C_n &= \{C_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, n-s+1\}, n \geq s, C_n = \emptyset \text{ για } n < s \\ C_{ij} &= \{i, i+1, i+r-1\} \times \{j, j+1, \dots, j+s-1\} \end{aligned}$$

Για να εμφυτεύσουμε το σύστημά μας σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, ορίζουμε τον χώρο καταστάσεων:

$$S = \{(i, j), i = 0, 1, \dots, s-1, j = 0, 1, \dots, s-1\} \cup \{s_N\}, \quad N = s^2 + 1$$

και ορίζουμε μια ακολουθία από πραγματικά τυχαία διανύσματα  $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$  ως εξής:

- $Z_n = s_N$  αν και μόνο αν το σύστημα  $(J_n, C_n)$  δεν λειτουργεί.
- $Z_n = (a_1, a_2)$  αν και μόνο αν το σύστημα  $(J_n, C_n)$  λειτουργεί και  $\prod_{s=1}^{a_j} \prod_{i=j}^{j+r-1} (1 - X_{i,n+s-1}) = 1, \prod_{i=j}^{j+r-1} (1 - X_{i,n-a_j}) = 0, j = 1, 2$ , όπου η  $X_{i,j}$  περιγράφει την κατάσταση της μονάδας  $(i, j)$ . Επίσης υποθέτουμε ότι  $X_{\alpha,b} = 1$  για  $\alpha < 1$  ή  $b < 1$  και ότι  $Z_0 = (0, 0), \prod_{s=a}^b t_s = 1$  για  $\alpha > \beta$ .

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η  $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$  είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με μη εξαφανιζόμενες (*non-vanishing*) πιθανότητες μετάβασης:

$$P(Z_n = (0,0)|Z_{n-1} = (a,b)) = 1 - q^{r+1} - 2pq^r, a = 0, \dots, s-1, b = 0, \dots, s-1$$

$$P(Z_n = (0, b+1)|Z_{n-1} = (a,b)) = pq^r, a = 0, \dots, s-1, b = 0, \dots, s-2$$

$$P(Z_n = (a+1,0)|Z_{n-1} = (a,b)) = pq^r, a = 0, \dots, s-2, b = 0, \dots, s-1$$

$$P(Z_n = (a+1, b+1)|Z_{n-1} = (a,b)) = q^{r+1}, a = 0, \dots, s-2, b = 0, \dots, s-2$$

$$P(Z_n = s_N|Z_{n-1} = (a,b)) = 1 - \sum_{ij} P(Z_n = (i,j)|Z_{n-1} = (a,b)), a = 0, \dots, s-1, \\ b = 0, \dots, s-1$$

$$P(Z_n = s_N|Z_{n-1} = s_N) = 1.$$

Αν  $\mathbf{A} = \left( P(Z_n = (i,j)|Z_{n-1} = (a,b)) \right)_{(s^2+1) \times (s^2+1)}$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων

μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$  και  $\mathbf{A}_0$  είναι ο σχετικός υποπίνακας του, τότε  $R_{r,s}(r+1, n) = \boldsymbol{\pi}'_0 \mathbf{A}_0^n \mathbf{1}$ . Αυτός ο τύπος προσφέρει έναν ακριβή και απλό (αν το  $s$  δεν είναι μεγάλο) τρόπο για την εκτίμηση της ζητούμενης ποσότητας.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα εφόσον τα  $m_1, m_2$  μπορούν να επιλεγούν, μπορούμε να πάρουμε αμέτρητες διαφορετικές εκτιμήσεις. Βέβαια, θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι όσο τα  $m_1, m_2$  αποκλίνουν από το  $r$ , ο ακριβής υπολογισμός του  $R_{k,r,s}(\cdot, n)$  μέσω της διαδικασίας εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα, γίνεται πολύπλοκος. Τις περισσότερες φορές δεν είναι ξεκάθαρο αν η μικρή αύξηση της ποιότητας της εκτίμησης, αυξάνοντας τα  $m_1, m_2$ , αξίζει την αύξηση της υπολογιστικής απλότητας. Ένας γενικός κανόνας που μπορούμε να εφαρμόσουμε, είναι να κρατήσουμε τα  $m_1, m_2$  όσο πιο κοντά στο  $r$  είναι δυνατόν, εκτός αν μια πολύ ακριβής εκτίμηση είναι απαραίτητη. Μερικές φορές, καλύτερη εκτίμηση χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, παίρνουμε αν αλλάξουμε τα  $r, s$  και  $m, n$  μεταξύ τους (δεν επηρεάζεται η αξιοπιστία του συστήματος).

### 3.10. Υπολογισμός αξιοπιστίας μέσω προσομοίωσης

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, όλες οι μέθοδοι που έχουν προταθεί για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των δισδιάστατων συστημάτων είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και χρονοβόρες. Με τη βοήθεια της προσομοίωσης και των ηλεκτρονικών υπολογιστών το πρόβλημα αυτό απλοποιείται αρκετά.

Χρησιμοποιώντας την προσομοίωση, θα παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή *Bernoulli* με παράμετρο  $p$ , και θα τους τοποθετούμε σε έναν δισδιάστατο πίνακα. Κάθε τιμή

αυτού του πίνακα, θεωρούμε ότι αντιστοιχεί στην κατάσταση μιας μονάδας ενός διδιάστατου συστήματος αξιοπιστίας, με διαστάσεις αντίστοιχες του πίνακα που παράγουμε. Αυτός ο πίνακας θα θεωρήσουμε ότι μπορεί να εκφράσει την κατάσταση του συστήματος (μέσω των καταστάσεων των μονάδων του) σε μια τυχαία χρονική στιγμή, και άρα θα μπορούμε να καταγράψουμε την λειτουργία και την αποτυχία του. Παράγοντας έναν μεγάλο αριθμό διδιάστατων συστημάτων, από με τον νόμο των μεγάλων αριθμών (σύμφωνα με τον οποίο ο δειγματικός μέσος συγκλίνει στον πληθυσμιακό μέσο), ο μέσος όρος του αριθμού των αποτυχιών τους θα εκφράζει την αναξιοπιστία του συστήματος. Όπως είναι λογικό, η ακρίβεια της εκτίμησης μας θα εξαρτάται από τον αριθμό των συστημάτων που παράγουμε. Όσο πιο πολλά συστήματα παράγουμε, τόσο ακριβέστερη θα είναι η εκτίμηση μας, αλλά ταυτόχρονα, θα αυξάνεται και ο χρόνος υπολογισμού της.

Αναλυτικά, τα βήματα του αλγορίθμου για το διδιάστατο γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα είναι τα εξής:

1. Δώσε τιμές στις παραμέτρους του συστήματος  $(k, r, s, m, n)$ , στην πιθανότητα λειτουργίας των μονάδων ( $p$ ) και όρισε τον αριθμό των επαναλήψεων (*iter*).
2. Δήλωσε μια μεταβλητή ( $f$ ) που παίρνει την αρχική τιμή 0 και θα εκφράζει το πλήθος συστήματα έχουν αποτύχει στο σύνολο των συστημάτων που έχουν παραχθεί. Κάθε φορά που ένα σύστημα αποτυγχάνει, η τιμή θα αυξάνεται κατά ένα.
3. Παρήγαγε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή *Bernoulli* με παράμετρο  $p$  και τοποθέτησε σε έναν πίνακα διάστασης  $m \times n$ .
4. Για όλους τους δυνατούς υποπίνακες του αρχικού, διάστασης  $r \times s$ , υπολόγισε το άθροισμα των στοιχείων τους και κατέγραψε το κάθε ένα από αυτά σε έναν καινούργιο πίνακα.
5. Υπολόγισε το ελάχιστο στοιχείο αυτού του πίνακα. Αν αυτό είναι ίσο με  $rs - k$ , τότε το αρχικό σύστημα θα έχει αποτύχει, καθώς θα έχει εμφανισθεί τουλάχιστον ένας υποπίνακας ο οποίος περιέχει τουλάχιστον  $k$  μονάδες που έχουν αποτύχει.
6. Αν το αρχικό σύστημα αποτύχει, αύξησε τον αριθμό  $f$  κατά 1.
7. Επανάλαβε τα βήματα 2-6 όσες φορές έχεις ορίσει στον αριθμό επαναλήψεων (*iter*).
8. Η αναξιοπιστία του συστήματος εκτιμάται με τον μέσο όρο των συστημάτων που έχουν αποτύχει στο σύνολο των επαναλήψεων, και άρα η αξιοπιστία θα είναι ίση με 1 μείον τον αριθμό αυτό.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Για  $k = rs$  ο παραπάνω αλγόριθμος υπολογίζει την αξιοπιστία του γραμμικού συνεχόμενου  $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  συστήματος.
- Για  $m = n, r = s$  και  $k = rs$  ο αλγόριθμος υπολογίζει την αξιοπιστία του γραμμικού διδιάστατου  $k$ -από-τα- $n: F$  συστήματος.
- Για  $m = r = 1$  ο αλγόριθμος υπολογίζει την αξιοπιστία του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n: F$  συστήματος

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο υπολογισμός της αξιοπιστίας των δισδιάστατων συστημάτων είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, που για συστήματα με μεγάλο πλήθος μονάδων γίνεται ιδιαίτερα χρονοβόρα και πολλές φορές και αδύνατη. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε διάφορα φράγματα αξιοπιστίας που έχουν προταθεί για τα δισδιάστατα συστήματα, θα δώσουμε πίνακες για διάφορες τιμές των παραμέτρων των συστημάτων, θα συγκρίνουμε τα φράγματα μεταξύ τους, και τέλος, θα παρουσιάσουμε τα οριακά θεωρήματα που έχουν αποδειχθεί για συστήματα με μεγάλο πλήθος μονάδων (όταν  $n \rightarrow \infty$ ).

### 4.1. Φράγματα αξιοπιστίας δισδιάστατων συστημάτων

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα πιο γνωστά φράγματα συστημάτων που έχουν προταθεί για απλά συστήματα. Αυτά όμως βασίζονται στην εύρεση των ε.σ.λ. και ε.σ.δ. ενός συστήματος, και όπως ήδη έχουμε αναφέρει, για συστήματα με μεγάλο πλήθος μονάδων δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός τους. Θα παρουσιάσουμε ορισμένα ειδικά φράγματα για τα δισδιάστατα συστήματα, τα οποία δεν βασίζονται στην παραπάνω μέθοδο

Τα πρώτα φράγματα προτάθηκαν από τους *Salvia & Lasher* (1990), για την αξιοπιστία του δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος, στην περίπτωση που οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν την ίδια αξιοπιστία  $p$ . Συγκεκριμένα:

$$LB_{SLsq} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (1 - R(k, n))^i (R(k, n))^{n-i}$$

$$UB_{SLsq} = (R(k^2, nk))^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$$

Για το κάτω φράγμα  $LB_{SL1}$ , οι συγγραφείς στηρίχθηκαν στο γεγονός ότι το σύστημα λειτουργεί αν οι γραμμές που έχουν  $k$  ή περισσότερες διαδοχικές μονάδες που δεν λειτουργούν, είναι το πολύ  $k - 1$  το πλήθος. Η πιθανότητα όπως μια γραμμή  $i$ , ( $1 \leq i \leq n$ )

έχει  $k$  ή περισσότερες συνεχόμενες μονάδες που δεν λειτουργούν είναι  $1 - R(k, n)$ . Κάθε γραμμή είναι ισοδύναμη με ένα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ : $F$  σύστημα. Έτσι το κάτω φράγμα είναι ίσο με την πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ  $k - 1$  τέτοιες γραμμές.

Επίσης πρότειναν ένα βελτιωμένο, σε σχέση με το προηγούμενο, κάτω φράγμα ( $LB_{SL2}$ ), το οποίο προκύπτει, αν γράψουμε την αξιοπιστία του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n$ : $F$  ως  $R(k, n; p)$ , για να δείξουμε την εξάρτηση της αξιοπιστίας από την πιθανότητα λειτουργίας  $p$ , αν αντικαταστήσουμε το άθροισμα του πρώτου μέλους της παραπάνω ανισότητας με  $R(k, n; R(k, n; p))$ . Αναλυτικά:

$$LB_{SL_{imp}} = R(k, n; R(k, n; p)).$$

Το άνω φράγμα όμως απεδείχθη λάθος (Ksir (1992)). Το σωστό, με τη μέθοδο των *Salvia & Lasher* (1990), δηλαδή, χρησιμοποιώντας την έννοια του  $k$ -fold mesh, είναι:

$$UB_{SL_{imp}} = (R(k^2 + k, nk; p))^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}.$$

Τα παραπάνω φράγματα μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα και να χρησιμοποιηθούν και για συνεχόμενα  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ : $F$  συστήματα. Έτσι παίρνουμε:

$$LB_{SL_{rect}} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{i} (1 - R(s, n))^i (R(s, n))^{m-i}$$

$$UB_{SL_{rect}} = (R((r, s)/(r, n)))^{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor}.$$

Το κάτω φράγμα είναι η πιθανότητα όπως το πολύ  $r - 1$  γραμμές, εμφανίζουν  $s$  ή περισσότερες συνεχόμενες μονάδες που δεν λειτουργούν, αφού τότε το σύστημα θα λειτουργεί. Το άνω φράγμα προκύπτει αν χωρίσουμε τις  $m$  γραμμές σε  $\lfloor \frac{m}{r} \rfloor + 1$  ομάδες. Η ομάδα  $i$  αποτελείται τις  $r$  συνεχόμενες γραμμές, με την πρώτη γραμμή να είναι η  $(i - 1)r + 1$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{r} \rfloor + 1$ . Κάθε μία από αυτές τις ομάδες αποτελεί ένα συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(r, n)$ : $F$  σύστημα. Εφόσον η τελευταία ομάδα έχει λιγότερες από  $m$  γραμμές, θα λειτουργεί. Κάθε ομάδα λειτουργεί, αν το αρχικό σύστημα λειτουργεί, κι έτσι παίρνουμε το άνω φράγμα. Σημειώνουμε ότι η αξιοπιστία του συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(r, n)$ : $F$  ισοδυναμεί με την αξιοπιστία ενός γραμμικού συνεχόμενου  $s$ -από-τα- $n$ : $F$  συστήματος με *i.i.d.* μονάδες που έχουν αξιοπιστία ίση με  $1 - q^r$ .



Οι Koutras, Papadopoulos & Papastavridis (1993), με εφαρμογή της μεθόδου Chen – Stein για προσεγγίσεις μέσω Poisson (*Poisson approximation*), έδωσαν φράγματα για την αξιοπιστία του δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος, με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες. Συγκεκριμένα:

$$LB_{KPP} = \text{expfc}(\varphi) - \text{expf}(\varphi)[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q(k)]$$

$$UB_{KPP} = \text{expfc}(\varphi) - \text{expf}(\varphi)[(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q(k)],$$

όπου:

$\text{expf}(\cdot)$ : η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής.

$\text{expfc}(\cdot)$ : η συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής.

$$\varphi = \sum_{A \in \mathcal{C}} q_A = \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} q_{A_{ij}}$$

$A_{ij}$ : ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής με τη μονάδα  $(i, j)$  να βρίσκεται πάνω δεξιά, δηλαδή

$$A_{ij} = \{(i+x-1, j+y-1) : x = 1, 2, \dots, k, y = 1, 2, \dots, k\}, 1 \leq i, j \leq n-k+1.$$

$A$ : ένα υποσύνολο μονάδων, δηλαδή  $A \subseteq \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n\}$ .

$q_A = \prod_{(i,j) \in A} q_{ij}$ , δηλαδή η πιθανότητα όπως όλες οι μονάδες του  $A$  αποτυγχάνουν.

$$Q(k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q^{k^2-ij} - 1.$$

Στην περίπτωση *i.i.d.* ισχύει ότι  $\varphi = (n-k+1)^2 q^{k^2}$  και  $q_A = q^{k^2}$ , και έτσι τα φράγματα απλοποιούνται αρκετά και παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$LB_{KPP} = e^{1-(n-k+1)^2 q^{k^2}} - \left(1 - e^{1-(n-k+1)^2 q^{k^2}}\right) [(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q(k)]$$

$$UB_{KPP} = e^{1-(n-k+1)^2 q^{k^2}} + \left(1 - e^{1-(n-k+1)^2 q^{k^2}}\right) [(2k-1)^2 q^{k^2} + 4Q(k)].$$

Ένα ακόμα κάτω φράγμα προκύπτει κάνοντας εφαρμογή ενός γενικού αποτελέσματος των Esary & Proschan (1970). Βασίζεται σε ε.σ.δ. και είναι το εξής:

$$LB_{EP_{mod}} = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^{n-k+1} \left(1 - \prod_{\mu=i}^{i+k-1} \prod_{\nu=j}^{j-k+1} q_{\mu\nu}\right).$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση το κάτω φράγμα  $LB_{EP}$  γίνεται:

$$LB_{EP_{mod}} = (1 - q^{k^2})^{(n-k+1)^2}.$$

Το φράγμα αυτό λειτουργεί καλύτερα από το  $LB_{KPP}$ . Τα φράγματα  $LB_{KPP}, UB_{KPP}$  δίνουν καλές εκτιμήσεις όταν η αξιοπιστία του συστήματος παίρνει τιμές κοντά στη μονάδα, δηλαδή τα συστήματα είναι υψηλής ποιότητας.

Οι *Fu & Koutras* (1994) παρουσίασαν καινούργια φράγματα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες της διωνυμικής κατανομής τάξης  $k$ . Συγκεκριμένα, αν  $X = (X_{ij})_{n \times n}$ , με  $X_{ij}$  να είναι ανεξάρτητες Bernoulli τ.μ., με πιθανότητα επιτυχίας  $p_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ , είναι ο πίνακας αξιοπιστίας ενός δισδιάστατου συστήματος, ορίζουμε ως υποπίνακα επιτυχιών μεγέθους  $k$  (*success block of size k*), έναν  $k \times k$  υποπίνακα του αρχικού, του οποίου όλες οι μονάδες λειτουργούν. Έστω  $N_{n,k}$  ο αριθμός πραγματοποιήσεων μη επικαλυπτόμενων υποπινάκων μεγέθους  $k$ . Με τον όρο μη επικαλυπτόμενοι εννοούμε ότι δύο διαφορετικοί υποπίνακες επιτυχίας, δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Η αξιοπιστία ενός δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n:F$  συστήματος είναι ίση με την πιθανότητα  $P(N_{n,k}) = 0$ . Τα φράγματα που προτάθηκαν είναι τα ακόλουθα:

$$LB_{FKsq} = \prod_{i=k}^n \prod_{j=k}^n (1 - \alpha_{ij}), \quad UB_{FKsq} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (1 - b_{ij}),$$

όπου:

$$\alpha_{ij} = \prod_{\mu=i-k+1}^i \prod_{\nu=j-k+1}^j q_{\mu\nu}, \quad b_{ij} = p_{i-k, j-k+1} p_{i, j-k} \alpha_{ij}.$$

Στην περίπτωση i.i.d. τα φράγματα γράφονται ως εξής:

$$LB_{FKsq} = (1 - q^{k^2})^{(n-k+1)^2}, \quad UB_{FKsq} = (1 - p^2 q^{k^2})^{(n-k+1)^2}.$$

Τα παραπάνω αποδίδουν καλά όταν η πιθανότητα αποτυχίας  $q_{ij}$  παίρνει τιμές κοντά στη μονάδα, δηλαδή οι επιτυχίες στη διπλή ακολουθία Bernoulli είναι σπάνιες. Παρατηρούμε ότι το κάτω φράγμα ταυτίζεται με το  $LB_{EP_{mod}}$ . Η παραπάνω θεωρία μπορεί να εφαρμοσθεί και στο δισδιάστατο συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n):F$  σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση τα φράγματα παίρνουν τη μορφή:

$$LB_{FK_{rect}} = \prod_{i=r}^m \prod_{j=s}^n (1 - \alpha_{ij}), \quad UB_{FK_{rect}} = \prod_{i=r}^m \prod_{j=s}^n (1 - b_{ij}),$$

όπου:

$$\alpha_{ij} = \prod_{\mu=i-r+1}^i \prod_{\nu=i-s+1}^j q_{\mu\nu}, \quad b_{ij} = p_{i-r,j-s+1} p_{i,j-s} \alpha_{ij}.$$

Στην περίπτωση *i.i.d.* τα φράγματα γράφονται ως εξής:

$$LB_{FKsq} = (1 - q^{k^2})^{(m-r+1)(n-s+1)}, \quad UB_{FKsq} = (1 - p^2 q^{k^2})^{(m-r+1)(n-s+1)}.$$

Οι *Yamamoto & Miyakawa* (1995), για το γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα με *i.i.d.* μονάδες, πρότειναν τα ακόλουθα φράγματα:

$$LB_{YML} = R(r, m; (1 - q^s))^{n-s+1}$$

$$UB_{YML} = R(r, m; (1 - q^s)) \cdot \{1 - (1 - R(r, m; (1 - q^s))) \cdot R(r, m; (1 - q))\}^{n-s}.$$

Οι *Yamamoto & Miyakawa* (1996), για το κυκλικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες, πρότειναν τα ακόλουθα φράγματα για  $k_1 = r, r + 1, \dots, m$  και  $k_2 = r, r + 1, \dots, m$ :

$$LB_{YMC} = LB(k_2), \quad UB_{YMC} = \min\{UB_1(k_1), UB_2\},$$

όπου, για  $k = r, r + 1, \dots, m$ ,  $R((r, s), (k, n); (i, n); [p_{ij}])$  είναι η αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $(r, s)$ -από-τα- $(k, n): F$  συστήματος, που αποτελείται από  $k$  κύκλους, από τον κύκλο  $i$  ως τον κύκλο  $i + k - 1$ , και:

$$UB_1(k) = \prod_{i=1}^{m-k+1} R((r, s), (k, n); ((k-1)i+1, n); [p_{ij}])$$

$$\cdot R((r, s), (m - \lfloor \frac{m}{k} \rfloor, n); (\lfloor \frac{m}{k} \rfloor k + 1, n); [p_{ij}])$$

$$UB_2 = R(s, n; w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}) \prod_{i=r}^{m+1} [1 - (1 - R(s, n; w_{(i-r+2),1}, w_{(i-r+2),2}, \dots, w_{(i-r+2),n}))$$

$$\cdot R(s, n; p_{(i-r+1),1}, p_{(i-r+1),2}, \dots, p_{(i-r+1),n})$$

$$LB(k) = \prod_{i=1}^{m-k+1} R((r, s), (k, n); (i, n); [p_{ij}])$$

$$w_{ij} = 1 - \prod_{k=i}^{i+r-1} q_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m - r + 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Αν πάρουμε μικρή τιμή του  $k$ , τα φράγματα υπολογίζονται γρήγορα, εφόσον η αξιοπιστία του κυκλικού συνεχόμενου  $s$ -από-τα- $n$ : $F$  συστήματος υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο για  $n$ . Για  $k_1 = k_2 = r$  τα φράγματα μπορούν να εκφραστούν ως αξιοπιστίες κάποιων κυκλικών συστημάτων. Στην i.i.d. περίπτωση τα φράγματα απλοποιούνται και παίρνουν τη μορφή:

$$LB_{YMC} \leq R \leq UB_{YMC} = \min\{UB_1, UB_2\}$$

$$UB_1 = R(s, n; 1 - q^r)^{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor}$$

$$UB_2 = R(s, n; 1 - q^r)[1 - (1 - R(s, n; 1 - q^r) \cdot R(s, n; 1 - q))]^{m-r+1}$$

$$LB_{YMC} = R(s, n; 1 - q^r)^{m-r+1}.$$

Οι *Malinowski and Preuss* (1996), πρότειναν φράγματα που βρίσκουν εφαρμογή και στα γραμμικά και στα κυκλικά συνεχόμενα  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ : $F$  συστήματα με ανεξάρτητες μονάδες. Συγκεκριμένα:

$$LB_{MPR} = \max \left\{ \prod_{i=1}^{m-r+1} P(A_\Lambda(i, r)), \prod_{i=1}^{n_\Lambda} P(B_\Lambda(j, s)) \right\}$$

$$UB_{MPR} = \min \left\{ \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor} P(A_\Lambda((i-1)r + 1, r)), \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} P(B_\Lambda((j-1)s + 1, s)) \right\}.$$

όπου το  $\Lambda$  είναι ένας δείκτης που συμβολίζει το γραμμικό σύστημα ( $\Lambda = L$ ) ή το κυκλικό σύστημα ( $\Lambda = C$ ), με  $n_L = n$ ,  $n_C = n - s - 1$  και:

$$P(A_\Lambda(w, r)) = R_\Lambda(s; n; \rho_{w1}, \rho_{w2}, \dots, \rho_{wn}), \quad \rho_{wj} = 1 - \prod_{k=w}^{w+r-1} (1 - p_{kj})$$

$$P(B_L(w, s)) = R_L(r; m; \sigma_{1w}, \sigma_{2w}, \dots, \sigma_{mw}), \quad \sigma_{iw} = 1 - \prod_{l=w}^{w+s-1} (1 - p_{il})$$

$$P(B_C(w, s)) = R_C(r; m; \tau_{1w}, \tau_{2w}, \dots, \tau_{mw}), \quad \tau_{wj} = 1 - \prod_{l=w}^{w \oplus (s-1)} (1 - p_{il})$$

$$j \oplus l = [(j + l - 1) \bmod n] + 1.$$

Στην i.i.d. περίπτωση τα φράγματα παίρνουν την παρακάτω απλούστερη μορφή:

$$LB_{MPr_L} = \max \left\{ (R_L(s, n; 1 - q^r))^{m-r+1}, (R_L(r, m; 1 - q^s))^{n-s+1} \right\}$$

$$UB_{MPr_L} = \min \left\{ (R_L(s, n; 1 - q^r))^{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor}, (R_L(r, m; 1 - q^s))^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \right\}$$

$$LB_{MPr_C} = \max \left\{ (R_C(s, n; 1 - q^r))^{m-r+1}, (R_L(r, m; 1 - q^s))^n \right\}$$

$$UB_{MPr_C} = \min \left\{ (R_C(s, n; 1 - q^r))^{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor}, (R_L(r, m; 1 - q^s))^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \right\}.$$

Οι *Barbour, Chryssaphinou & Roos* (1996), με εφαρμογή της μεθόδου *Chen-Stein* για προσέγγιση μέσω σύνθετης Poisson (*Compound Poisson approximation*) προσέγγισαν την αξιοπιστία του δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  συστήματος με έναν εκθετικό όρο και πρότειναν τα εξής φράγματα για συστήματα με *i.i.d.* μονάδες, όταν  $n \geq k + 6$  και  $q^k \leq \frac{1}{24}$ :

$$LB_{BCR} = e^{-\lambda + \lambda_2} - (1 + 2 \log^+ \lambda) \{ (4k^2 + 12k - 3)q^{k^2} + 4Q + 13q^{2k} \}$$

$$UB_{BCR} = e^{-\lambda + \lambda_2} + (1 + 2 \log^+ \lambda) \{ (4k^2 + 12k - 3)q^{k^2} + 4Q + 13q^{2k} \},$$

όπου:

$$Q = 4 \left( \sum_{i=i}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} q^{k^2-ij} + \sum_{j=1}^{k-2} q^{k^2-kj} \right)$$

$$\log^+ \lambda = \max\{0, \log \lambda\}, \lambda = (n - k + 1)^2 q^{k^2}$$

$$\lambda_2 = 2q^{k^2+k} (1 - q^k) \{ (n - k + 1)^2 (1 - q^k)^2 + 3(n - k + 1)(1 - q^k) + 2 \}.$$

Τα παραπάνω φράγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που οι πιθανότητες αποτυχίας δεν είναι ίσες, αν αντικαταστήσουμε το  $q$  με  $q_{max}$ , όπου  $q_{max}$  είναι η μέγιστη από τις πιθανότητες αποτυχίας. Πρέπει να σημειώσουμε όμως ότι τα  $\lambda$  και  $\lambda_2$  θα πρέπει να υπολογισθούν με βάση τις πιθανότητες αποτυχίας  $q_{ij}$ .

Οι *Koutras, Papadopoulos & Papastavridis* (1997), πρότειναν ακόμα ένα άνω φράγμα για την αξιοπιστία του δισδιάστατου συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  συστήματος με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες:

$$UB_{KPP_{mod}} = R(k, n; 1 - Q_{kj}) \prod_{i=k+1}^n \left( 1 - [1 - R(k, n; 1 - Q_{ij})] R(k, n; p_{i-k,j}) \right)$$

όπου:

$$Q_{ij} = \prod_{\mu=i-k+1}^i q_{\mu j}$$

Στην i.i.d. περίπτωση το φράγμα παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$UB_{KPP_{mod}} = R(k, n; 1 - q^k) \left( 1 - [1 - R(k, n; 1 - q^k)] R(k, n; p) \right)^{n-k}.$$

Οι *Makri & Psilakis* (1996) χρησιμοποιώντας τις ανισότητες *Bonferoni* πρότειναν φράγματα για το  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων διασδιάστατων  $r$ -από-τα- $n:F$  σύστημα με i.i.d. μονάδες, τα οποία είναι τα παρακάτω:

$$LB_{MP_{Ssq}} = 1 - S_1 + \frac{2S_2}{N^2}$$

$$UB_{MP_{Ssq}} = 1 - \frac{2 \left( S_1 - \frac{S_2}{t} \right)}{1 + t},$$

όπου:

$$N = n - r + 1$$

$$t = 1 + \left\lfloor \frac{2S_2}{S_1} \right\rfloor$$

$$S_1 = N^2 \cdot h$$

$$S_2 = S_{21} + S_{22}$$

$$S_{21} = 2 \sum_{u=1}^{r-1} \binom{N-r+u}{1} \sum_{w=w_1}^r (N-r+w) \cdot g(u, w), \quad w_1 = \max(1, r - N + 1)$$

$$S_{22} = M \cdot h^2$$

$$M = N(N+1) \binom{N-r+1}{2} + \zeta(1, N-r)(N-r+1) \sum_{u=1}^{r-1} \binom{N-u}{1}$$

$$\zeta(u, v) = \begin{cases} 1, & u \leq v \\ 0, & u > v \end{cases}$$

$$h = \sum_{x=k}^{r^2} \binom{r^2}{x} (1-p)^x p^{r^2-x}$$

$$g(u, w) = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \binom{m_1}{x_1} \sum_{x_2=t_2}^{m_2} \binom{m_2}{x_2} \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \binom{m_3}{x_3} (1-p)^x p^{2r^2-u \cdot w-x}$$

$$m_1 = u \cdot w, \quad m_2 = r^2 - u \cdot w, \quad m_3 = m_2$$

$$t_1 = \max(0, k - m_2), \quad t_2 = \max(0, k - x_1), \quad t_3 = t_2, \quad x = x_1 + x_2 + x_3.$$

Για  $k = r^2$  τα σύνολα  $S_1$  και  $S_2$  καθορίζουν τα φράγματα για το δισδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ : $F$  σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση  $g(u, w) = q^{2r^2-uw}$ ,  $h = q^{r^2}$  και όλες οι άλλες σχέσεις παραμένουν οι ίδιες. Τα φράγματα αποδίδουν καλύτερα για υψηλές τιμές αξιοπιστίας.

Την επόμενη χρονιά, οι ίδιοι συγγραφείς, χρησιμοποιώντας πάλι τις ανισότητες *Bonferoni*, επέκτειναν τα φράγματα στο (γραμμικό ή κυκλικό)  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n)$ : $F$  σύστημα με *i.i.d.* μονάδες. Ορίζουμε:

$$h = \sum_{x=k}^{r \cdot s} \binom{r \cdot s}{x} (1-p)^x p^{r \cdot s-x}$$

$$g(u, v) = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \binom{m_1}{x_1} \sum_{x_2=t_2}^{m_2} \binom{m_2}{x_2} \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \binom{m_3}{x_3} (1-p)^x p^{2r \cdot s-u \cdot v-x}$$

$$m_1 = u \cdot v, \quad m_2 = r \cdot s - m_1, \quad m_3 = m_2$$

$$t_1 = \max(0, k - m_2), \quad t_2 = \max(0, k - x_1), \quad t_3 = t_2, \quad x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\zeta(u, v) = \begin{cases} 1, & u \leq v \\ 0, & u > v. \end{cases}$$

Τα φράγματα που προτάθηκαν είναι τα:

$$LB_{MPS_{rect}} = 1 - S_1 + \frac{2S_2}{MN}$$

$$UB_{MPS_{rect}} = 1 - \frac{2 \left( S_1 - \frac{S_2}{t} \right)}{1 + t}$$

όπου:

$$t = 1 + \left\lceil \frac{2S_2}{S_1} \right\rceil$$

$$S_1 = M \cdot N \cdot h$$

$$S_2 = S_{21} + S_{22}$$

$$M = m - r + 1.$$

- Για το γραμμικό σύστημα:

$$N = n - r + 1$$

$$S_{21} = 2 \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-r+u}{1} \sum_{u=\max(1, s-N+1)}^{s-1} (N-s+u) \cdot g(u, s) + N \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-r+u}{1} g(u, s) \\ + M \sum_{u=1}^{r-1} \binom{N-r+u}{1} g(r, u)$$

$$S_{22} = f \cdot h^2$$

$$f = M \binom{N-s+1}{2} + N^2 \binom{M-r+1}{2} + \zeta(2 \cdot s, n) \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-u}{1} (N-s+1)(N-s).$$

- Για το κυκλικό σύστημα:

$$N = n$$

$$S_{21} = 2 \left\{ \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-r+u}{1} \left[ 2 \cdot \sum_{u=u_1}^{s-1} g(u, s) + \zeta(n, 2 \cdot s - 2)(2 \cdot s - n - 1)g(u, 2 \cdot s - n) \right] \right. \\ \left. + \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-r+u}{1} g(u, s) \right. \\ \left. + M \left[ \sum_{u=u_1}^{s-1} g(r, u) + \zeta(n, 2 \cdot s - 2) \frac{2 \cdot s - n - 1}{2} g(r, 2 \cdot s - n) \right] \right\}$$

$$u_1 = \begin{cases} 1, & n \geq 2 \cdot s - 1 \\ 2 \cdot s - n, & n < 2 \cdot s - 1 \end{cases}$$

$$S_{22} = f \cdot h^2$$

$$f = \zeta(2 \cdot s, n)n(n - 2 \cdot s + 1) \left\{ \frac{M}{2} + \sum_{u=1}^{r-1} \binom{M-u}{1} \right\} + n^2 \binom{M-r+1}{2}.$$



Τα παραπάνω φράγματα αποδίδουν καλύτερα για μεγάλες τιμές αξιοπιστίας και για μικρές τιμές των λόγων  $\frac{r \cdot s - k}{r \cdot s}$  και  $\frac{m \cdot n - r \cdot s}{m \cdot n}$ .

Οι *Godbole, Potter & Sklar* (1998), χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Janson, πρότειναν το ακόλουθο άνω φράγμα για το διδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  σύστημα με ανεξάρτητες αλλά όχι απαραίτητα όμοιες μονάδες:

$$UB_{GPS} = e^{\left(-\lambda + \frac{\Delta}{2(1-\epsilon)}\right)},$$

όπου:

$$\lambda = \sum_{a=1}^{n-k+1} \sum_{b=1}^{n-k+1} \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} q_{a+i,b+j}$$

$$\epsilon = \max_{a,b} \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} q_{a+i,b+j}$$

$$\Delta = \sum_{a=1}^{n-k+1} \sum_{b=1}^{n-k+1} \left[ \left( \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} q_{a+i,b+j} \right) \left\{ \left( \sum_{c=1}^{a-k+1} \sum_{d=1}^{b-k+1} Y_{a,b,c,d} \right) - Y'_{a,b} - Y''_{a,b} \right\} \right]$$

$$Y_{a,b,c,d} = \sum_{i=1}^4 y_{t,a,b,c,d}$$

$$Y'_{a,b} = 4y_{1,a,b,c,d} + \sum_{i=2}^3 (y_{t,a,b,a,b} + y_{t,a,b,a+k-1,b+k-1})$$

$$Y''_{a,b} = \sum_{d=b+1}^{b+k-2} (y_{3,a,b,a+k-1,d} + y_{4,a,b,a+k-1,d}) + \sum_{c=a+1}^{a+k-2} (y_{1,a,b,c,b} + y_{3,a,b,c,b}),$$

με

$$y_{1,a,b,c,d} = \begin{cases} \left( \frac{\prod_{l=c}^{c+k-1} \prod_{m=d+k-1}^d q_{lm}}{\prod_{r=c}^{a+k-1} \prod_{s=d}^{b+k-1} q_{rs}} \right), & c+k-1, d+k-1 \leq n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$y_{2,a,b,c,d} = \begin{cases} \left( \frac{\prod_{l=c}^{c+k-1} \prod_{m=d}^{d-k-1} q_{lm}}{\prod_{r=c}^{a+k-1} \prod_{s=b}^d q_{rs}} \right), & c+k-1 \leq n, d+k-1 \geq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$y_{3,a,b,c,d} = \begin{cases} \left( \frac{\prod_{l=c-k+1}^c \prod_{m=d}^{d+k-1} q_{lm}}{\prod_{r=a}^c \prod_{s=d}^{b+k-1} q_{rs}} \right), & c+k-1 \leq 1, d+k-1 \leq n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$y_{4,a,b,c,d} = \begin{cases} \left( \frac{\prod_{l=c+k-1}^c \prod_{m=d}^{d+k-1} q_{lm}}{\prod_{r=a}^c \prod_{s=b}^d q_{rs}} \right), & c+k-1, d+k-1 \leq n \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για  $a \leq c \leq a+k-1, b \leq d \leq b+k-1$ . Στην *i.i.d.* περίπτωση, το φράγμα απλοποιείται και παίρνει τη μορφή:

$$UB_{GPS} = (1 - q^{k^2})^{(n-k+1)^2} e^{\left( \frac{2(n-k+1)^2 q^{k^2+k} [(k^2-k-1)q^{k-1}+1]}{1-q^{k^2}} \right)}.$$

Οι *Boutsikas & Koutras* (2000b), πρότειναν καινούργια γενικευμένα φράγματα για μονότονες δομές, με βάση αυτά των *Esary & Proschan* (1970), *Fu & Koutras* (1994) και το φράγμα συνδιακύμανσης των *Boutsikas & Koutras* (2000a). Ουσιαστικά πρόκειται για βελτιώσεις των παραπάνω φραγμάτων, τα οποία βρίσκουν εφαρμογή και στο συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n)$ :  $F$ . Εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

Έστω  $\mathbf{I}$  το σύνολο των μονάδων ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας,  $\mathbb{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$  το σύνολο όλων των ε.σ.δ. και  $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  το σύνολο όλων των ε.σ.λ. Έστω  $\mathbb{A}$  μια συλλογή υποσυνόλων του  $\mathbf{I}$ . Ορίζουμε:

$$\delta_C(\mathbb{A}) = \prod_{A \in \mathbb{A}} \left( 1 - \prod_{i \in A} (1 - X_i) \right), \quad \delta_P(\mathbb{A}) = 1 - \prod_{A \in \mathbb{A}} \left( 1 - \prod_{i \in A} X_i \right)$$

και  $R_C(\mathbb{A}) = E[\delta_C(\mathbb{A})], R_P(\mathbb{A}) = E[\delta_P(\mathbb{A})]$ . Τότε η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί να γραφεί ως  $R = R(\mathbf{p}) = R_C(\mathbb{C}) = R_P(\mathbb{P})$ ,  $\mathbf{p} = (p_i, i \in \mathbf{I})$ . Τέλος, με  $\mathbb{C}_{(i,j)}$  συμβολίζουμε το σύνολο των ε.σ.δ. του συστήματος. Θεωρούμε τη διαμέριση  $\mathcal{C}: \mathcal{C} = \{\mathbb{C}_i, i = 1, 2, \dots, m-r+1\}$  όπου  $\mathbb{C}_i = \{C_{ij}, j = 1, 2, \dots, n-s+1\}$ .

Το φράγμα  $EP$  τροποποιείται ως εξής:

$$LB_{EP}^{(G)} = \prod_{i=1}^{m-r+1} R_C(\mathbb{C}_i) = \prod_{i=1}^{m-r+1} R_{C(s,n)} \left[ \left( 1 - \prod_{j=1}^{i+r-1} q_{j1} \right), \dots, \left( 1 - \prod_{j=1}^{i+r-1} q_{jn} \right) \right].$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση το φράγμα απλοποιείται:

$$LB_{EP}^{(G)} = R(s, n; 1 - q^r)^{m-r+1}.$$

Το φράγμα συνδιακύμανσης τροποποιείται ως εξής:

$$UB_{CB}^{(G)} \leq LB_{EP}^{(G)} + \sum_{z=2}^{m-r+1} \sum_{j=\max\{1, z-r+1\}}^{z-1} \sum_{a=1}^{n-s+1} \sum_{\substack{b=1 \\ |b-a|<s}}^{n-s+1} \left( \prod_{i \in C_{za} \cup C_{jb}} q_i - \prod_{i \in C_{za}} q_i \prod_{i \in C_{jb}} q_i \right).$$

Στην i.i.d. περίπτωση το φράγμα απλοποιείται:

$$UB_{CB}^{(G)} \leq LB_{EP}^{(G)} + (m-r)(n-s+1) \left( 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} q^{2rs-ij} + \sum_{i=1}^{r-1} q^{2rs-is} - (r-1)(2s-1)q^{2rs} \right).$$

Τέλος, θεωρώντας τη διαμέριση  $(\{C\}; C \in \mathbb{C})$  το άνω φράγμα *Fu & Koutras* τροποποιείται ως εξής:

$$UB_{FK}^{(G)} = \left( 1 - \prod_{i \in C_{(1,1)}} q_i \right) \prod_{j \in I_0 \setminus \{(1,1)\}} \left( 1 - E \left( \prod_{i \in C_j} (1 - X_i) \prod_{b \in B_j} \left( 1 - \prod_{i \in C_b} (1 - X_i) \right) \right) \right),$$

όπου  $B_j = \{b: C_b \cap C_j \neq \emptyset, b < i\} = \{b: C_b \in \mathbb{C}_j^*\}$ . Ο υπολογισμός του παραπάνω φράγματος είναι αρκετά πολύπλοκος αλλά σίγουρα πιο γρήγορος από τον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος. Ένα πιο απλό αλλά όχι εξίσου αποτελεσματικό φράγμα μπορεί να δοθεί, ορίζοντας ως  $\mathbb{C}_j^{**}$  το ελάχιστο από τα σύνολα  $\{C_i \setminus C_j: C_i \cap C_j \neq \emptyset, i < j\}$ . Έτσι:

$$UB_{FK}^{(G^*)} = \left( 1 - \prod_{i \in C_{(1,1)}} q_i \right) \prod_{j \in I_0 \setminus \{(1,1)\}} \left( 1 - \prod_{C \in \mathbb{C}_j^{**}} \left( 1 - \prod_{i \in C} q_i \right) \prod_{i \in C_j} q_i \right).$$

Στην i.i.d. περίπτωση το φράγμα απλοποιείται:

$$UB_{FK}^{(G^*)} = (1 - q^{rs})(1 - (1 - q^r)q^{rs})^{n-s}(1 - (1 - q^s)bq^{rs})^{m-r} \\ \times (1 - (1 - q^r)(1 - q^s)bq^{rs})^{m-r} \times (1 - (1 - q^r)(1 - q^s)bq^{rs})^{(m-r)(n-s-1)},$$

όπου:

$$b = \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=1}^{s-1} (1 - q^{rs-ij}).$$

## 4.2. Σύγκριση φραγμάτων αξιοπιστίας

Όπως είδαμε, υπάρχουν αρκετά φράγματα αξιοπιστίας για δισδιάστατα συστήματα. Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει λοιπόν, είναι πως αποδίδουν αυτά τα φράγματα για διάφορες τιμές της αξιοπιστίας  $p$  καθώς και πιο είναι το βέλτιστο από αυτά. Όλα τα παραπάνω φράγματα βρίσκουν εφαρμογή στο απλό δισδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  σύστημα και για αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε πίνακες με τιμές των φραγμάτων για τέτοια συστήματα (με *i.i.d.* μονάδες), και κατόπιν θα συγκρίνουμε τα φράγματα μεταξύ τους. Πολλά φράγματα παίρνουν τιμές πάνω από τη μονάδα και κάτω από το μηδέν, και προφανώς αυτές οι τιμές θα αντικατασταθούν με 1 και 0 αντίστοιχα. Με  $R_{sim}$  συμβολίζουμε την τιμή της αξιοπιστίας που προκύπτει από την προσομοίωση του συστήματος, με βάση τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.10, και με  $StdEr = \sqrt{\frac{R_{sim}(1-R_{sim})}{\nu}}$  το τυπικό σφάλμα αυτής της εκτίμησης, με το  $\nu$  να είναι ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου.

### • Κάτω φράγματα

Παρατηρώντας τα φράγματα της προηγούμενης παραγράφου, βλέπουμε ότι το κάτω φράγμα  $LB_{MP_r}$  είναι πάντοτε καλύτερο από τα αντίστοιχα φράγματα  $LB_{Y_{ML}}$  και  $LB_{EP}^{(G)}$ , και ως εκ τούτου, τα τελευταία παραλείπονται. Επίσης, το φράγμα  $LB_{FK_{sq}}$  ταυτίζεται με το  $LB_{EP_{mod}}$  και τέλος, το φράγμα  $LB_{SL_{imp}}$  είναι πάντοτε καλύτερο από το  $LB_{SL_{sq}}$ . Με βάση τους αριθμητικούς μας υπολογισμούς, καταλήγουμε στα παρακάτω:

1. Το φράγμα  $LB_{MP_r}$  είναι το μεγαλύτερο από όλα τα φράγματα και άρα δίνει τις καλύτερες προσεγγίσεις της αξιοπιστίας του συστήματος.
2. Τα φράγματα  $LB_{SL_{imp}}$ ,  $LB_{KPP}$ ,  $LB_{BCR}$  και  $LB_{MP_{sq}}$  αποδίδουν καλά για υψηλές τιμές της αξιοπιστίας των μονάδων. Για μικρές τιμές αξιοπιστίας, παίρνουμε πολλές φορές το τετριμμένο αποτέλεσμα ότι το κάτω φράγμα είναι ίσο με μηδέν.
3. Μεταξύ των παραπάνω φραγμάτων, το  $LB_{MP_{sq}}$  αποδίδει καλύτερα από τα υπόλοιπα για υψηλές τιμές αξιοπιστίας, ενώ το  $LB_{SL_{imp}}$  φαίνεται να αποδίδει καλύτερα από τα υπόλοιπα για μικρές τιμές αξιοπιστίας. Επίσης το  $LB_{KPP}$  φαίνεται να είναι μεγαλύτερο από το  $LB_{BCR}$ .
4. Το  $LB_{FK_{sq}}$  δίνει πολύ καλές προσεγγίσεις της αξιοπιστίας, κοντά στις τιμές του  $LB_{MP_r}$ , δεν είναι όμως πάντα καλύτερο από το  $LB_{MP_{sq}}$ .

5. Σε κάθε περίπτωση, είναι σκόπιμο να υπολογίζουμε όλα τα φράγματα αξιοπιστίας, και να διαλέγουμε ως βέλτιστο φράγμα, το μέγιστο από αυτά. Δηλαδή ορίζουμε ως  $LB_{opt} = \max\{LB_{SLimp}, LB_{KPP}, LB_{FKsq}, LB_{MPr}, LB_{BCR}, LB_{MPSsq}\}$  το βέλτιστο από τα κάτω φράγματα.

• **Άνω φράγματα**

Με βάση τους αριθμητικούς μας υπολογισμούς, καταλήγουμε στα παρακάτω:

1. Σε αντίθεση με τα κάτω φράγματα, εδώ δεν υπερέχει πάντα κάποιο φράγμα. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, το  $UB_{FK}^{(G*)}$  παίρνει μικρότερες τιμές από τα υπόλοιπα, ενώ δύο φορές βέλτιστο εμφανίζεται το  $UB_{CB}^{(G)}$  και άλλες δύο το  $UB_{MPr}$ .
2. Αντίθετα, στα συστήματα που εξετάσαμε, χειρότερο άνω φράγμα είναι το  $UB_{BCR}$ , το οποίο παίρνει πάντα τιμή ίση με τη μονάδα. Πολύ υψηλές τιμές παίρνει και το  $UB_{KPP}$ .
3. Από τα υπόλοιπα φράγματα, τα  $UB_{GPS}, UB_{MPSsq}, UB_{KPP_{mod}}$  φαίνονται να δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις από τα  $UB_{FKsq}, UB_{SLimp}$ . Όλα όμως τα φράγματα δίνουν καλές προσεγγίσεις της αξιοπιστίας για υψηλές τιμές του  $p$ .
4. Όπως και στα κάτω φράγματα, θα πρέπει να υπολογίσουμε όλα τα φράγματα που έχουν προταθεί και να επιλέξουμε το βέλτιστο άνω φράγμα, το οποίο θα ισούται με το ελάχιστο αυτών. Δηλαδή:

$$UB_{opt} = \min\{UB_{SLimp}, UB_{KPP}, UB_{FKsq}, UB_{MPr}, UB_{BCR}, UB_{KPP_{mod}}, UB_{MPSsq}, UB_{GPS}, UB_{CB}^{(G)}, UB_{FK}^{(G*)}\}.$$

Κλείνοντας, μία πολύ καλή προσέγγιση της αξιοπιστίας μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\hat{R}_{opt} = \frac{LB_{opt} + UB_{opt}}{2},$$

με τυπικό σφάλμα:

$$\frac{UB_{opt} - LB_{opt}}{2LB_{opt}}, \quad LB_{opt} \neq 0.$$

Πίνακας 3.2.1

Κάτω φράγματα, διαστάσιο 2-από-τα-5: F σύστημα								
<b>p</b>	<b><math>LB_{SLimp}</math></b>	<b><math>LB_{KPP}</math></b>	<b><math>LB_{FKsq}</math></b>	<b><math>LB_{MPr}</math></b>	<b><math>LB_{BCR}</math></b>	<b><math>LB_{MPsq}</math></b>	<b><math>R_{sim}</math></b>	<b><math>StdEr</math></b>
0.30	0.02678	0	0.012362	<b>0.031698</b>	0	0	0.06861	$6.39027 \times 10^{-7}$
0.35	0.05561	0	0.043020	<b>0.079282</b>	0	0	0.13383	$1.1592 \times 10^{-6}$
0.40	0.10309	0	0.108518	<b>0.159860</b>	0	0	0.22522	$1.74496 \times 10^{-6}$
0.45	0.17353	0	0.215353	<b>0.273030</b>	0	0	0.33948	$2.24233 \times 10^{-6}$
0.50	0.26829	0	0.356074	<b>0.409200</b>	0	0.102539	0.46860	$2.49014 \times 10^{-6}$
0.55	0.38441	0	0.511744	<b>0.552697</b>	0	0.393614	0.59418	$2.4113 \times 10^{-6}$
0.60	0.51411	0.285350	0.660384	<b>0.687072</b>	0	0.612764	0.71588	$2.03396 \times 10^{-6}$
0.65	0.64578	0.616523	0.785119	<b>0.799817</b>	0	0.769058	0.81510	$1.50712 \times 10^{-6}$
0.70	0.76648	0.812699	0.877983	<b>0.884733</b>	0.378092	0.873719	0.89171	$9.65633 \times 10^{-7}$
0.75	0.86504	0.918350	0.939298	<b>0.941802</b>	0.686404	0.938519	0.94402	$5.28462 \times 10^{-7}$
0.80	0.93502	0.969508	0.974705	<b>0.975408</b>	0.864097	0.974646	0.97729	$2.21943 \times 10^{-7}$
0.85	0.97629	0.991061	0.991931	<b>0.992061</b>	0.953378	0.991940	0.99219	$7.749 \times 10^{-8}$
0.90	0.99470	0.998329	0.998401	<b>0.998423</b>	0.989425	0.998400	0.99857	$1.42796 \times 10^{-8}$

Πίνακας 3.2.2

Κάτω φράγματα, διαδιάστατο 3-από-τα-10: F σύστημα								
<b>p</b>	<b><math>LB_{SL_{imp}}</math></b>	<b><math>LB_{KPP}</math></b>	<b><math>LB_{FK_{sq}}</math></b>	<b><math>LB_{MP_r}</math></b>	<b><math>LB_{BCR}</math></b>	<b><math>LB_{MP_{sq}}</math></b>	<b><math>R_{sim}</math></b>	<b><math>StdEr</math></b>
0.300	0.01520	0	0.071634	<b>0.140646</b>	0	0	0.2422	0.0000183539
0.325	0.02962	0	0.151173	<b>0.235609</b>	0	0	0.3486	0.0000227078
0.350	0.05331	0	0.261981	<b>0.349049</b>	0	0	0.4488	0.0000247379
0.375	0.08921	0	0.391345	<b>0.469508</b>	0	0.106885	0.5532	0.000024717
0.400	0.13965	0	0.522963	<b>0.585653</b>	0	0.375937	0.6565	0.0000225508
0.425	0.20560	0	0.64323	<b>0.689070</b>	0	0.571530	0.7323	0.0000196037
0.450	0.28608	0.426147	0.744216	<b>0.775250</b>	0	0.711221	0.812	0.0000152656
0.475	0.37802	0.645889	0.823485	<b>0.843162</b>	0.015598	0.809184	0.8681	0.0000114502
0.500	0.47657	0.786796	0.882389	<b>0.894170</b>	0.296233	0.876579	0.9038	$8.69456 \times 10^{-6}$
0.525	0.57588	0.874534	0.924197	<b>0.930892</b>	0.503552	0.922005	0.9385	$5.77178 \times 10^{-6}$
0.550	0.67012	0.927810	0.952709	<b>0.956330</b>	0.654681	0.951953	0.9605	$3.79397 \times 10^{-6}$
0.575	0.75442	0.959429	0.971457	<b>0.973324</b>	0.763388	0.971277	0.9740	$2.5324 \times 10^{-6}$
0.600	0.82553	0.977779	0.983361	<b>0.984277</b>	0.840512	0.983304	0.9864	$1.3415 \times 10^{-6}$
0.625	0.88213	0.988180	0.990658	<b>0.991084</b>	0.894440	0.990650	0.9893	$1.05855 \times 10^{-6}$
0.650	0.92457	0.993923	0.994968	<b>0.995156</b>	0.931559	0.994970	0.9959	$4.08319 \times 10^{-7}$
0.675	0.95450	0.996998	0.997414	<b>0.997497</b>	0.956666	0.997417	0.9978	$2.19516 \times 10^{-7}$
0.700	0.97430	0.998586	0.998741	<b>0.998771</b>	0.973313	0.998742	0.9993	$6.9951 \times 10^{-8}$

Πίνακας 3.2.3

Κάτω φράγματα, δισδιάστατο 4-από-τα-50: $F$ σύστημα								
$p$	$LB_{SL_{imp}}$	$LB_{KPP}$	$LB_{FK_{sq}}$	$LB_{MP_r}$	$LB_{BCR}$	$LB_{MP_{sq}}$	$R_{sim}$	$StdEr$
0.300	0	0	0.000640	<b>0.003421</b>	0	0	0.0148	$1.4581 \times 10^{-6}$
0.325	0	0	0.016467	<b>0.037259</b>	0	0	0.0823	$7.55267 \times 10^{-6}$
0.350	0	0	0.106030	<b>0.156030</b>	0	0	0.2291	0.0000176613
0.375	0	0	0.301850	<b>0.360350</b>	0	0	0.4300	0.00002451
0.400	0	0	0.536188	<b>0.580009</b>	0.083105	0.377240	0.6348	0.0000231829
0.425	0	0.559690	0.729470	<b>0.754407</b>	0.411067	0.684729	0.7771	0.0000173216
0.450	0	0.785352	0.856512	<b>0.868447</b>	0.631622	0.845168	0.8814	0.0000104534
0.475	0	0.901267	0.929063	<b>0.934152</b>	0.772158	0.926439	0.9398	$5.6576 \times 10^{-6}$
0.500	0.000004	0.956614	0.966855	<b>0.968849</b>	0.859488	0.966299	0.9715	$2.76877 \times 10^{-6}$
0.525	0.000132	0.981701	0.985274	<b>0.986002</b>	0.913385	0.985167	0.9871	$1.27336 \times 10^{-6}$
0.550	0.002232	0.992594	0.993774	<b>0.994023</b>	0.946713	0.993755	0.9952	$4.77696 \times 10^{-7}$
0.575	0.019285	0.997133	0.997500	<b>0.997580</b>	0.967414	0.997494	0.9985	$1.49775 \times 10^{-7}$
0.600	0.091671	0.998945	0.999052	<b>0.999075</b>	0.980302	0.999905	0.9990	$9.99 \times 10^{-8}$



Πίνακας 3.2.4

Ανω φράγματα, δισδιάστατο 2-από-τα-5: F σύστημα												
$\rho$	$UB_{SLimp}$	$UB_{KPP}$	$UB_{FKsq}$	$UB_{MPr}$	$UB_{BCR}$	$UB_{KPPmod}$	$UB_{MPsq}$	$UB_{GPS}$	$UB_{CB}^{(G)}$	$UB_{FK}^{(G^*)}$	$R_{sim}$	$StdEr$
0.30	0.549336	1	0.705016	<b>0.178040</b>	1	0.326937	0.306230	1	1	0.298886	0.06861	$6.39027 \times 10^{-7}$
0.35	0.670752	1	0.702047	<b>0.281572</b>	1	0.397028	0.375348	1	1	0.339742	0.13383	$1.1592 \times 10^{-6}$
0.40	0.772104	1	0.715149	0.397543	1	0.467849	0.422155	1	0.786917	<b>0.395802</b>	0.22522	$1.74496 \times 10^{-6}$
0.45	0.850996	1	0.741365	0.52252	1	0.541962	0.533200	0.976063	0.669140	<b>0.467732</b>	0.33948	$2.24233 \times 10^{-6}$
0.50	0.908447	1	0.777265	0.639688	1	0.620102	0.606771	0.792458	0.643575	<b>0.553411</b>	0.46860	$2.49014 \times 10^{-6}$
0.55	0.947562	1	0.818967	0.743436	1	0.700389	0.695170	0.700390	0.681488	<b>0.647407</b>	0.59418	$2.4113 \times 10^{-6}$
0.60	0.972341	1	0.862311	0.828898	1	0.778583	0.769323	0.797230	0.751953	<b>0.741549</b>	0.71588	$2.03396 \times 10^{-6}$
0.65	0.986808	0.956575	0.903242	0.894325	1	0.849257	0.833164	0.851039	0.829210	<b>0.826835</b>	0.81510	$1.50712 \times 10^{-6}$
0.70	0.994467	0.944195	0.938352	0.940603	1	0.907481	0.896950	0.905241	0.896368	<b>0.896024</b>	0.89171	$9.65633 \times 10^{-7}$
0.75	0.998048	0.960476	0.965417	0.970465	1	0.950370	0.945648	0.948552	<b>0.945647</b>	0.945695	0.94402	$5.28462 \times 10^{-7}$
0.80	0.999462	0.979942	0.983741	0.987627	1	0.977872	0.976366	0.977107	<b>0.976390</b>	0.976391	0.97729	$2.21943 \times 10^{-7}$
0.85	0.999900	0.992804	0.994164	0.996023	1	0.992533	0.992224	0.992347	0.992229	<b>0.992228</b>	0.99219	$7.749 \times 10^{-8}$
0.90	0.999991	0.998473	0.998705	0.999206	1	0.998457	0.998427	0.998436	0.998427	<b>0.998426</b>	0.99857	$1.42796 \times 10^{-8}$

Πίνακας 3.2.5

Άνο φράγματα, δισδιάστατο 3-από-τα-10: F σύστημα												
p	$UB_{SLimp}$	$UB_{KPP}$	$UB_{FKsq}$	$UB_{MPr}$	$UB_{BCR}$	$UB_{KPPmod}$	$UB_{MPsq}$	$UB_{GPS}$	$UB_{CB}^{(G)}$	$UB_{FK}^{(G*)}$	$R_{sim}$	StdEr
0.300	0.758599	1	0.792265	0.479234	1	0.628885	0.587965	1	1	<b>0.470532</b>	0.2422	0.0000183539
0.325	0.827937	1	0.821234	0.581530	1	0.679083	0.639909	1	1	<b>0.521587</b>	0.3486	0.0000227078
0.350	0.880884	1	0.849942	0.673897	1	0.727360	0.689887	1	1	<b>0.580927</b>	0.4488	0.0000247379
0.375	0.919809	1	0.877129	0.753123	1	0.773245	0.738115	1	0.913257	<b>0.645262</b>	0.5532	0.000024717
0.400	0.947467	1	0.901875	0.818211	1	0.815922	0.789036	0.896001	0.846929	<b>0.710479</b>	0.6565	0.0000225508
0.425	0.966511	1	0.9236	0.869659	1	0.854496	0.826996	0.871233	0.839236	<b>0.772464</b>	0.7323	0.0000196037
0.450	0.979238	1	0.942034	0.908951	1	0.888236	0.867135	0.880113	0.859040	<b>0.827887</b>	0.812	0.0000152656
0.475	0.987495	1	0.957177	0.938030	1	0.916720	0.903799	0.901711	0.889881	<b>0.874681</b>	0.8681	0.0000114502
0.500	0.992695	0.978198	0.969226	0.958920	1	0.939897	0.925529	0.925726	0.918523	<b>0.912136</b>	0.9038	$8.69456 \times 10^{-6}$
0.525	0.995870	0.973950	0.978516	0.973503	1	0.971747	0.958056	0.947278	0.943419	<b>0.940666</b>	0.9385	$5.77178 \times 10^{-6}$
0.550	0.997748	0.977643	0.985456	0.983395	1	0.974309	0.963763	0.964513	0.962563	<b>0.961411</b>	0.9605	$3.79397 \times 10^{-6}$
0.575	0.998818	0.992932	0.983497	0.989912	1	0.981670	0.976784	0.977248	0.976313	<b>0.975846</b>	0.9740	$2.5324 \times 10^{-6}$
0.600	0.999406	0.988947	0.997871	0.994074	1	0.988576	0.985830	0.986080	0.985654	<b>0.985472</b>	0.9864	$1.3415 \times 10^{-6}$
0.625	0.999716	0.993137	0.996340	0.996647	1	0.993184	0.991573	0.991875	0.991690	<b>0.991623</b>	0.9893	$1.05855 \times 10^{-6}$
0.650	0.999871	0.996014	0.997871	0.998181	1	0.996123	0.995430	0.995485	0.995409	<b>0.995385</b>	0.9959	$4.08319 \times 10^{-7}$
0.675	0.999945	0.997831	0.998821	0.999059	1	0.937909	0.997598	0.997621	0.997592	<b>0.997584</b>	0.9978	$2.19516 \times 10^{-7}$
0.700	0.999978	0.998896	0.999383	0.999539	1	0.998938	0.998809	0.998818	0.998808	<b>0.998805</b>	0.9993	$6.9951 \times 10^{-8}$

Πίνακας 3.2.6

Άνω φράγματα, δισδιάστατο 4-από-τα-50: F σύστημα												
<b>p</b>	<b><math>UB_{SLimp}</math></b>	<b><math>UB_{KPP}</math></b>	<b><math>UB_{FKsq}</math></b>	<b><math>UB_{MPr}</math></b>	<b><math>UB_{BCR}</math></b>	<b><math>UB_{KPP_{mod}}</math></b>	<b><math>UB_{MPsq}</math></b>	<b><math>UB_{GPS}</math></b>	<b><math>UB_{CB}^{(G)}</math></b>	<b><math>UB_{FK}^{(G*)}</math></b>	<b><math>R_{sim}</math></b>	<b>StdEr</b>
0.300	0.589141	1	0.516437	0.234643	1	0.876129	0.318802	1	1	<b>0.050837</b>	0.0148	$1.4581 \times 10^{-6}$
0.325	0.758805	1	0.648316	0.431725	1	0.918282	0.413407	0.422333	1	<b>0.134098</b>	0.0823	$7.55267 \times 10^{-6}$
0.350	0.869908	1	0.759745	0.622316	1	0.944228	0.518448	0.429350	0.992906	<b>0.280333</b>	0.2291	0.0000176613
0.375	0.934228	1	0.845012	0.770590	1	0.958732	0.633886	0.544912	0.714533	<b>0.466827</b>	0.4300	0.00002451
0.400	0.968471	0.905284	0.905098	0.870163	1	0.971360	0.740708	0.684166	0.724241	<b>0.647779</b>	0.6348	0.0000231829
0.425	0.985587	0.899283	0.94462	0.964628	1	0.979357	0.842305	0.804499	0.811449	<b>0.789557</b>	0.7771	0.0000173216
0.450	0.993706	0.927681	0.969123	0.956492	1	0.985571	0.898411	0.889816	0.890299	<b>0.884297</b>	0.8814	0.0000104534
0.475	0.997377	0.956861	0.983536	0.982759	1	0.990403	0.944409	0.942497	0.942235	<b>0.940624</b>	0.9398	$5.6576 \times 10^{-6}$
0.500	0.998959	0.977096	0.991609	0.991953	1	0.994001	0.972307	0.971890	0.971724	<b>0.971298</b>	0.9715	$2.76877 \times 10^{-6}$
0.525	0.999608	0.988478	0.995919	0.995211	1	0.996407	0.987135	0.987047	0.986981	<b>0.986870</b>	0.9871	$1.27336 \times 10^{-6}$
0.550	0.999986	0.994953	0.998112	0.998470	1	0.998110	0.994378	0.994361	0.994340	<b>0.994312</b>	0.9952	$4.77696 \times 10^{-7}$
0.575	0.999953	0.997867	0.999173	0.999381	1	0.999057	0.997686	0.997684	0.997677	<b>0.997670</b>	0.9985	$1.49775 \times 10^{-7}$
0.600	0.999986	0.999258	0.999159	0.999763	1	0.999568	0.999105	0.999105	0.999103	<b>0.999101</b>	0.9990	$9.99 \times 10^{-8}$

### 4.3. Οριακά θεωρήματα

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της αξιοπιστίας των δισδιάστατων συστημάτων στην περίπτωση που ο αριθμός των μονάδων τείνει στο άπειρο. Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με αυτή την περίπτωση ήταν οι *Fu & Koutras* (1994), για το δισδιάστατο συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $n$ :  $F$  σύστημα. Υποθέτουμε ότι η αξιοπιστία των μονάδων είναι συνάρτηση του  $n$  (και αντίστοιχα η αναξιοπιστία), δηλαδή της ισοδύναμη του αριθμού των μονάδων του συστήματος σε όρους αξιοπιστίας. Δηλαδή:  $p_{ij} = p_{ij}(n)$  και  $q_{ij} = q_{ij}(n)$ . Έτσι, και η αξιοπιστία του συστήματος εκφράζεται ως συνάρτηση του  $n$ , δηλαδή  $R = R_n$ . Ορίζουμε τώρα:

$$\alpha_{ij}(n) = \prod_{\mu=i-k+1}^i \prod_{\nu=i-k+1}^j p_{\mu\nu}(n), \quad b_{ij}(n) = q_{i-k,j-k+1}(n)q_{i,j-k}(n)\alpha_{ij}(n).$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.1.** Αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n |\alpha_{ij}(n)|^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n |b_{ij}(n)|^l = \lambda,$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = e^{-\lambda}. \quad \blacksquare$$

Στην *i.i.d.* περίπτωση με  $q_n = q_{ij}(n)$  και  $p_n = p_{ij}(n)$  ισχύει το παρακάτω πόρισμα:

**Πόρισμα 4.3.1.** Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 p_n^{k^2} = \lambda$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = e^{-\lambda}$ . ■

Παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε όταν το  $k$  εξαρτάται από το  $n$  ( $k = k_n$ ).

**Πόρισμα 4.3.2.** Αν η  $k_n$  δεν είναι φραγμένη, και ικανοποιούνται οι συνθήκες:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - k_n) = \infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - k_n)^2 p_n^{k_n^2} = \lambda$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$

τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = e^{-\lambda}$ . ■

**Πόρισμα 4.3.3** Αν η  $k_n$  είναι άνω φραγμένη και  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 p_n^{k_n^2} = \lambda$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = e^{-\lambda}$ . ■

Οι *Yamamoto & Miyakawa* (1995) απέδειξαν ένα θεώρημα για το γραμμικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα. Συγκεκριμένα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.2.** Έστω  $\mu, \lambda, \eta$  σταθερές. Έστω επίσης:

$$n = \mu \cdot m^{\eta-1}, \quad q_m = \lambda \cdot m^{-\frac{\eta}{r \cdot s}}.$$

Τότε για  $\mu > 0, \lambda > 0, \eta > s$  ή  $\frac{r}{r-1} > \eta > 1$  ισχύει:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (R_L(r, s), (m, n); 1 - q_m) = e^{-\mu \cdot \lambda^{r \cdot s}}. \quad \blacksquare$$

Οι ίδιοι συγγραφείς την επόμενη χρονιά (*Yamamoto & Miyakawa* (1996)) παρουσίασαν το αντίστοιχο (και σχεδόν όμοιο) θεώρημα για το κυκλικό συνεχόμενο  $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.3.** Έστω  $\mu, \lambda, \eta$  σταθερές. Έστω επίσης  $m = \mu \cdot n^{\eta-1}, q_n = \lambda \cdot n^{-\frac{\eta}{r \cdot s}}$ . Τότε για  $\mu > 0, \lambda > 0, \eta > r$  ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_C(r, s), (m, n); 1 - q_n) = e^{-\mu \cdot \lambda^{r \cdot s}}. \quad \blacksquare$$

Οι *Yamamoto & Akiba* (2005b) παρουσίασαν οριακά θεωρήματα για το γραμμικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ -από-τα- $(m, n): F$  σύστημα με *i.i.d.* μονάδες. Στο ακόλουθο θεώρημα εξετάζουμε την περίπτωση όπου και το  $m$  και το  $n$  τείνουν στο άπειρο, υποθέτοντας ότι το  $m$  είναι συνάρτηση του  $n$  ( $m = f(n)$ ) με την συνάρτηση  $f$  να είναι μονότονη και αύξουσα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.4.** Έστω  $\lambda > 0$  μία σταθερά. Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} m \cdot n(1 - p_n)^k = \lambda$  τότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_L(k, r, s, m, n); [p_n]) = e^{-N(k) \cdot \lambda},$$

όπου:

$$N(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{(r-1)s}{k} - \binom{r(s-1)}{k} + \binom{(r-1)(s-1)}{k}. \quad \blacksquare$$

Στο επόμενο πόρισμα υποθέτουμε ότι το  $n$  τείνει στο άπειρο και το  $m$  είναι σταθερό.

**Πόρισμα 4.3.4.** Έστω  $\lambda > 0$  μία σταθερά και  $m$  ένας σταθερός θετικός ακέραιος. Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - p_n)^k = \lambda$  τότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_L(k, r, s, m, n); [p_n]) = e^{-[N_r(k) + (m-r)(N(k))]\cdot \lambda},$$

όπου:

$$N(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{(r-1)s}{k} - \binom{r(s-1)}{k} + \binom{(r-1)(s-1)}{k}$$

$$N_r(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{r(s-1)}{k}. \quad \blacksquare$$

Τέλος, οι *Akiba, Yamamoto & Tsubone* (2002) παρουσίασαν παρόμοια αποτελέσματα για το κυκλικό  $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n): F$  σύστημα με *i.i.d.* μονάδες. Στο επόμενο θεώρημα εξετάζουμε την περίπτωση όπου και το  $m$  και το  $n$  τείνουν στο άπειρο, υποθέτοντας ότι το  $m$  είναι συνάρτηση του  $n$  ( $m = f(n)$ ) με την συνάρτηση  $f$  να είναι μονότονη και αύξουσα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.5.** Έστω  $\lambda > 0$  μία σταθερά. Αν  $\lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot n(1 - p_m)^k = \lambda$  τότε:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (R_C(k, r, s, m, n); [p_m]) = e^{-N(k)\cdot \lambda},$$

όπου:

$$N(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{(r-1)s}{k} - \binom{r(s-1)}{k} + \binom{(r-1)(s-1)}{k}. \quad \blacksquare$$

Στο επόμενο πόρισμα υποθέτουμε ότι το  $n$  τείνει στο άπειρο και το  $m$  είναι σταθερό.

**Πόρισμα 4.3.5.** Αν  $\lim_{m \rightarrow \infty} m(1 - p_m)^k = \lambda$  τότε:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (R_L(k, r, s, m, n); [p_n]) = e^{-[N_r(k) + (n-s)(N(k))]\cdot \lambda}$$

όπου:

$$N(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{(r-1)s}{k} - \binom{r(s-1)}{k} + \binom{(r-1)(s-1)}{k}$$

$$N_r(k) = \binom{r \cdot s}{k} - \binom{(r-1)s}{k}. \quad \blacksquare$$

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Παράρτημα 3.10.1 (Προσομοίωση $k$ -μεταξύ-συνεχόμενων- $(r, s)$ - από-τα- $(m, n)$ : $F$ συστήματος)

```
(*consecutive systems: one and two dimensional*)
m = 50; (*number of rows*)
n = 50; (*number of columns*)
r = 4;
s = 4;
k = 16;
(*fails if there are at least k failed components in one r*s submatrix*)
(*one dimensional: set m=r=1*)
p = 0.5; (*success/one probability*)

iter = 10000; (*number of iterations*)
f = 0; (*number of failed systems, among the simulated systems*)

Do[
  ls = {};
  l = RandomInteger[BernoulliDistribution[p], {m, n}];
  Do[ls = Append[ls, Sum[Sum[l[[i, j]], {i, x1, x1 + r - 1}], {j, x2, x2 + s - 1}], {x1, 1, m - r + 1},
    {x2, 1, n - s + 1}]; If[Min[ls] ≤ (r*s - k), f = f + 1, {iter}]
  "the reliability is"
  rel = 1 - f/iter // N
  "the standard error is"
  StdEr = Square[(rel * (1 - rel)) / iter] // N

  the reliability is

  0.9398

  the standard error is

  5.6576 × 10-6
```

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κούτρας Μ. (2008). Στατιστική θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής, σημειώσεις παραδόσεων για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.
- Abraham J. A. (1979). An improved method for network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, **28**, 58-61.
- Aki, S. and Hirano, K. (2004). Waiting time problems for a two-dimensional pattern, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **56**, 169-182.
- Akiba, T., & Yamamoto, H. (2001). Reliability of a 2-dimensional  $k$ -within-consecutive- $r \times s$ -out-of- $m \times n$ :F system, *Naval Research Logistics*, **48**, 625–637.
- Antonopoulou, I. and Papastavridis, S. (1987). Fast recursive algorithm to evaluate the reliability of a circular consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 83-84.
- Akiba, T., Yamamoto, H. and Tsubone H. (2002). Approximate values of reliability of the 2-dimensional cylindrical  $k$ -within-consecutive- $(r,s)$ -out-of- $(m,n)$ :F system, *Proceedings for the Fourth Asia-Pacific Conference on Industrial Engineering and Management Systems*, CD-ROM.
- Arratia, R., Goldstein, L. and Gordon, L. (1989). Two moments suffice for Poisson approximations: the Chen-Stein method, *Annals in Statistics*, **18**, 539-570.
- Barbour, A.D., Chryssaphinou, O. and Roos, M. (1995). Compound Poisson approximation in reliability theory, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 398-402.
- Barbour, A.D. Chryssaphinou, O. and Roos, M. (1996). Compound Poisson approximation in systems reliability, *Naval Research Logistics*, **43**, 251-264.
- Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing*, Holt Reinhart and Winston, Inc., New York.
- Birnbaum, Z.W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system, *Multivariate Analysis-II*, ed. P. R. Krinshnaiah, 581-592. New York Academic Press.

- Birnbaum, Z.W. and Esary, J.D. (1965). Modules of coherent binary systems, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **13**, 444-462.
- Birnbaum, Z.W., Esary, J.D. and Saunders, S.C. (1961). Multi-component systems and structures and their reliability, *Technometrics*, **3**, 55-77.
- Boehme, T. K., Kossow, A. and Preuss W. (1992). A generalization of consecutive- $k$ -out-of- $n$ :F system. *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 451-457.
- Bollinger, R.C. (1982). Direct computations for consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 444-446.
- Bollinger, R.C. and Salvia, A.A. (1982). Consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F networks, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 53-56.
- Boutsikas, M.V. and Koutras, M.V. (2000a). Generalized reliability bounds for coherent structures, *Journal of Applied Probability*, **37**, 778-794.
- Boutsikas, M.V. and Koutras, M.V. (2000b). Reliability Approximation for Markov Chain Imbeddable systems, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **2**, 393-411.
- Chao, M. T. and Lin, G. D. (1984). Economical design of large consecutive- $k$ -out-of- $n$ :F systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **33**, 411-413.
- Chao, M. T. and Fu, J. C. (1989). A limit theorem of certain repairable systems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **41**, 809-818.
- Chao, M. T. and Fu, J. C. (1991). The reliability of large series systems under Markov structure, *Advances in Applied Probability*, **23**, 894-908.
- Chiang, D.T. and Niu, S.C. (1981). Reliability of consecutive  $k$ -out-of- $n$ , *IEEE Transactions on Reliability*, **30**, 87-89.
- Derman, C., Lieberman, G.J. and Ross, S.M. (1982). On the consecutive  $k$ -out-of- $n$ : F System, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 57-63.
- Du, D.Z. and Hwang, F.K. (1988). A direct algorithm for computing reliability of a consecutive- $k$  cycle, *IEEE Transactions on Reliability*, **37**, 70-72.
- Esary, J.D. and Proschan, F. (1970). A reliability bound for systems of maintained, interdependent components, *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 329-338.
- Esary, J.D. and Proschan, F. (1963). Coherent structures of non-identical components, *Technometrics*, **5**, 191-209.
- Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W. (1967). Association of random variable, with applications, *The Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1466-1474.

- Fratta L. and Montanari U. G. (1973). A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, **20**, 203-211.
- Fu, J.C. (1986a). Bounds for reliability of large consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems with unequal component reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 316-319.
- Fu, J.C. (1986b). Reliability of consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems with  $(k-1)$  step Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 602-606.
- Fu, J.C. and Hu, B. (1987). Io reliability of large consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F system with  $(k-1)$  Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 75-77.
- Fu, J.C. and Koutras, M.V. (1994). Poisson approximation for 2-dimensional patterns, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **46**, 179-192.
- Godbole, A.P., Potter, L.K. and Sklar, J.K. (1998). Improved upper bounds for the reliability of  $d$  dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *Naval Research Logistics*, **45**, 219-230.
- Griffith W. S. (1986). On consecutive- $k$ -out-of- $n$  failure systems and their generalizations. In A. P. Basu (Ed.), *Reliability and Quality Control*, Elsevier Science, Amsterdam, 157-165.
- Hwang, F.K. (1986). Simplified reliabilities for consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *SIAM Alg. Disc Meth.*, **7**, 258-264
- Hwang, F.K. (1982). Fast solutions for consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 447-448.
- Kontoleon, J.M. (1980). Reliability determination of a  $r$ -successive-out-of- $n$  system, *IEEE Trans. Reliability*, **29**, 437.
- Koutras, M. V. (1996). On a Markov chain approach for the study of reliability structures. *Journal of Applied Probability*, **33**, 357-367.
- Koutras, M.V., Papadopoulos, G.K. and Papastavridis, S. (1993). Reliability of 2-dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 658-661.
- Koutras, M.V., Papadopoulos, G.K. and Papastavridis, S.G. (1997). A reliability bound for 2- dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *Nonlinear Anal. Theory Methods*, **30**, 3345-3348.
- Ksir, B. (1992). Comment on: 2-dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F models, *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 575.

- Kuo, W. and Zuo, M. (2003). *Optimal Reliability Modeling, Principles and Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Lin, D. and Zuo, M. (2000). Reliability evaluation a linear  $k$ -within- $(r,s)$ -out-of- $(m,n)$ :F lattice system, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **14**, 435-443.
- Locks, M. O. (1980). Recursive disjoint products, inclusion-exclusion, and min-cut Approximations, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**, 368-371.
- Locks, M. O. (1982). Recursive disjoint products: A review of three algorithms, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 33-35.
- Locks, M. O. (1984). Comments on: Improved method of inclusion-exclusion applied to  $k$ -out-of- $w$  systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **33**, 321-323.
- Locks, M. O. (1987). A minimizing algorithm for sum of disjoint products, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 445-453.
- Makri, F.S. and Psillakis, Z.M. (1996). Bounds for the reliability of  $k$ - within two-dimensional consecutive- $r$ -out-of- $n$ : failure systems, *Microelectronics and Reliability*, **36**, 341.
- Makri, F.S. and Psillakis, Z.M. (1997). Bounds for reliability of  $k$ - within- connected- $(r,s)$ -out-of- $(m,n)$ : failure systems, *Microelectronics and Reliability*, **37**, 1217-1224.
- Malinowski, J. and Preuss, W. (1996). Lower & upper bounds for the reliability of connected- $(r,s)$ -out-of- $(m,n)$ : F lattice systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 154-160.
- Rausand, M. and Høyland, A. (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical methods, and Applications* (2nd ed.), Wiley, Hoboken.
- Salvia, A.A. and Lasher, W.C. (1990). 2-dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F models, *IEEE Transactions on Reliability*, **39**, 382-385.
- Sfakianakis, M., Kounias, S. and Hillaris, A. (1992). Reliability of a consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 442-447.
- Shanthikumar, J.G. (1982). Recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive- $k$ -out-of- $n$ : F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 442-443.
- Tong, Y.L. (1985). A rearrangement inequality for the longest run, with an application to network reliability, *Journal of Applied Probability*, **22**, 286-293.
- Wilson J. M. (1990). An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products, *IEEE Transactions on Reliability*, **39**, 42-45.

- Wu, J. S. and Chen R. J. (1992). An  $O(kn)$  algorithm for a circular consecutive- $k$ -out-of- $n$ :F System, *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 303-305.
- Wu, J. S. and Chen R. J. (1994). An algorithm for computing the reliability of a weighted- $k$ -out-of- $n$  system. *IEEE Transactions on Reliability*, **43**, 327-328.
- Wu, J. S. and Chen R. J. (1994). Efficient algorithms for  $k$ -out-of- $n$  & consecutive-weighted- $k$ -out-of- $n$ :F system. *IEEE Transactions on Reliability*, **43**, 650-655.
- Yamamoto, H. (1996). Reliability of a connected- $(r_1, s_1)$ -or- $(r_2, s_2)$ -or-...-or- $(r_k, s_k)$ -out-of- $(m, n)$ :F lattice system, *Microelectronics and Reliability*, **36**, 151-168.
- Yamamoto, H. and Miyakawa, M. (1995). Reliability of a linear connected- $(r, s)$ -out-of- $(m, n)$ : F lattice system, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 333-336.
- Yamamoto, H. and Miyakawa, M. (1996). Reliability of a circular connected- $(r, s)$ -out-of- $(m, n)$ : F lattice system, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 333-336.
- Yamamoto, H. and Akiba, T. (2005a). A recursive algorithm for the reliability of a circular connected- $(r, s)$ -out-of- $(m, n)$ :F lattice system, *Computers & Industrial Engineering*, **49**, 21-34.
- Yamamoto, H. and Akiba, T. (2005b). Evaluating methods for the reliability of a large 2-dimensional rectangular  $k$ -within-consecutive- $(r, s)$ -out-of- $(m, n)$ :F system, *Naval Research Logistics*, **52**, 243-252.
- Yamamoto, H., Akiba, T., Nagatsuka, H. & Moriyama, Y. (2008). Recursive algorithm for the reliability of a connected- $(1, 2)$ -or- $(2, 1)$ -out-of- $(m, n)$ :F lattice system, *European Journal of Operational Research*, **188**, 854-864.
- Zuo, M. (1993). Reliability and design of 2-dimensional consecutive- $k$ -out-of- $n$  systems, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**, 389-406.
- Zuo, M., Lin, D. and Wu, Y. (2000). Reliability evaluation of combined  $k$ -out-of- $n$ :F, consecutive- $k_c$ -out-of- $n$ :F and linear connected- $(r, s)$ -out-of- $(m, n)$ :F system structures, *IEEE Transactions on Reliability*, **49**, 99-104.



