

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ**

Χαράλαμπος Γ. Παπαμιχαλάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,
Μάιος 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ**

Χαράλαμπος Γ. Παπαμιχαλάκης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,
Μάιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Κατέρη Μαρία, (Επιβλέπων Καθηγητής)
- Πολίτης Κώστας
- Ευαγγελάρας Χαράλαμπος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**EVALUATION AND PREFERENCE COMPARISON
MODELS**

By

Charalampos G. Papamichalakis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements
for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece

April 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ

*Στη σύζυγό μου Γεωργία
και στην αγέννητη κόρη μας*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς την Επιβλέπουσα Καθηγήτριά μου κα Κατέρη Μαρία Επίκουρη Καθηγήτρια του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την πολύτιμη βοήθειά της, την εξαιρετική καθοδήγηση και την καθοριστική συμβολή της στην αποπεράτωση της παρούσας εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες για τις γνώσεις που μου πρόσφεραν και ιδιαίτερα τον Καθηγητή και Διευθυντή του ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική» κο Κούτρα Μάρκο, ο οποίος ήταν συνεχώς δίπλα στους φοιτητές και η παρουσία του οποίου αποτελεί κόσμημα για το Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους υπαλλήλους της Γραμματείας του Τμήματος και ιδιαίτερα στην κα Δημητροπούλου Βαρβάρα για την άπογη εκπλήρωση των καθηκόντων της και την ακούραστη εξυπηρέτησή της.

Περίληψη

Εδώ και δεκαετίες η μέθοδος των συγκρίσεων κατά ζεύγη έχει προσελκύσει την προσοχή σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών διαφορετικών πεδίων: στατιστική, ψυχομετρία, έρευνα αγοράς, μέτρηση προτιμήσεων, πολυδιάστατη κλιμακοποίηση, αθλητικοί διαγωνισμοί και πολλά άλλα. Η μέθοδος των συγκρίσεων κατά ζεύγη είναι πολύ απλή από πρακτικής άποψης. Έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε πειραματικές καταστάσεις όπου οι υποκειμενικές κρίσεις ή οι αξιολογήσεις των ατόμων οδηγούν σε παρεμφερείς ποσοτικές αποκρίσεις, περιπτώσεις όπου η ποσοτικοποίηση είναι δύσκολη ή ακατόρθωτη. Η μέθοδος έχει οδηγήσει σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό μοντέλων που έχουν κατασκευαστεί ώστε να παρέχουν μία στοχαστική απεικόνιση της πειραματικής διαδικασίας και ταυτόχρονα μία απλή περιγραφή του ρόλου της στατιστικής στην επιστήμη. Ψάχνοντας κανείς στη βιβλιογραφία μπορεί εύκολα να εντοπίσει έναν αξιόλογο όγκο πηγών που περιλαμβάνουν σχετικές μελέτες. Το εξαιρετικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν οι συγκρίσεις κατά ζεύγη είχε και εξακολουθεί μέχρι σήμερα να έχει ως αποτέλεσμα την πραγματοποίηση ενός σημαντικού έργου αναφορικά με το συγκεκριμένο πεδίο. Η ενδελεχής και λεπτομερειακή διερεύνηση της μεθόδου οδήγησε τους ερευνητές: α) στη στοχαστική μοντελοποίηση καταστάσεων στις οποίες εμπλέκονται συγκρίσεις κατά ζεύγη, β) στο σχεδιασμό πειραμάτων για συγκρίσεις κατά ζεύγη και γ) στην ανάλυση δεδομένων που προέρχονται από τέτοιου είδους συγκρίσεις.

Το κύριο μέρος αυτής της εργασίας αποτελεί μία ερμηνευτική παρουσίαση του βασικού μοντέλου Bradley-Terry για συγκρίσεις κατά ζεύγη. Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου, της εξέλιξής του μέχρι σήμερα, μια σύντομη ιστορική αναδρομή και τα πεδία εφαρμογών του. Στα πλαίσια του δευτέρου κεφαλαίου η μελέτη μας εστιάζει στις πολυάριθμες γενικεύσεις του μοντέλου, ενώ το αντικείμενο του τρίτου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση κάποιων εναλλακτικών μοντέλων και η περιγραφή του τρόπου με τον οποίο συνδέονται με το μοντέλο Bradley-Terry. Το τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη διερεύνηση και το σχολιασμό της δυνατότητας προσαρμογής του μοντέλου μέσω της ανάλυσης χαρακτηριστικών εφαρμογών κάνοντας χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS, S-Plus και της γλώσσας προγραμματισμού R.

Abstract

During the past decades the method of paired comparisons has attracted the attention in a wide spectrum of different fields applications: statistics, psychometrics, marketing research, preference measurement, multidimensional scaling, sports competition and many others. The method of paired comparisons has great practical simplicity. It has been used extensively in experimental situations where the subjective judgements or appraisals of individuals lead to qualitative comparative responses, situations where quantification through measurement is difficult or illusory. The method has led to a surprising amount of model building to provide stochastic representation of the experimental process and simultaneously a simple illustration of the role of statistics in science. Searching in bibliography is an easy way to find a considerable number of sources which include relevant studies. The great interest paired comparisons present, has had and nowadays still has resulted in the accomplishment of a substantial work concerning this particular field. Sedulous and detailed examination of the method led the researchers to: a) the stochastic modeling of situations involving paired comparisons, b) the experimental design for paired comparisons and c) the analysis of data deriving from such comparisons.

The main part of this project is an interpretative representation of the basic Bradley-Terry model for paired comparisons. The first chapter includes the analytical representation of the model, its evolution until now, a short flashback and its application fields. In the context of the second chapter our study focuses on the model's numerous generalizations, while the third chapter deals with the representation of some alternative models and the description of the connection method between them and the Bradley-Terry model. The fourth and last chapter encompasses the examination and comment of the model's fitting capability through the analysis of characteristic applications using statistical packages SPSS, S-Plus and programming language R.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ix
Abstract	xi
1. Το μοντέλο Bradley-Terry	
1.1. Εισαγωγή	1
1.2. Μορφή δεδομένων	1
1.3. Το βασικό μοντέλο Bradley-Terry	2
1.3.1. Το μοντέλο με ομοιογένεια επαναλήψεων	2
1.3.2. Το μοντέλο χωρίς ομοιογένεια επαναλήψεων	4
1.3.3. Υπόδειγμα μορφής δεδομένων	4
1.4. Ιστορική αναδρομή	5
1.5. Η εξέλιξη του μοντέλου	7
1.6. Η logit εκδοχή του μοντέλου	9
1.7. Η loglinear μορφή του μοντέλου	10
1.8. Πεδία εφαρμογών	12
2. Γενικεύσεις του μοντέλου Bradley-Terry	
2.1. Εισαγωγή	15
2.2. Επίδραση διάταξης	15
2.2.1. Κοινή επίδραση διάταξης	16
2.2.2. Ξεχωριστή επίδραση διάταξης (ανά αντικείμενο)	16
2.2.3. Ξεχωριστή επίδραση διάταξης (ανά ζεύγος)	17
2.3. Ύπαρξη δεσμών και αξιολόγηση κλιμάκων	18
2.3.1. Δεσμοί και το μοντέλο Bradley-Terry	19
2.3.2. Το μοντέλο δεσμών των Rao-Kupper με πολλαπλασιαστική επίδραση διάταξης	21
2.3.3. Το μοντέλο δεσμών του Davidson με πολλαπλασιαστική επίδραση διάταξης	21
2.3.4. Ξεχωριστή επίδραση δεσμών	22
2.3.5. Γενικεύσεις για διατάξιμες αξιολογήσεις	23
2.4. Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry	23
2.4.1. Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry με δεσμούς	23
2.4.2. Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry: συμμεταβλητές υποκειμένων	25
2.4.3. Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry: συμμεταβλητές υποκειμένων και συμμεταβλητές αντικειμένων	28
2.5. Τριπλές - Πολλαπλές συγκρίσεις	30

2.6. Μία διδιάστατη γενίκευση του μοντέλου	31
2.6.1. Παράδειγμα	34
3. Εναλλακτικά Μοντέλα	
3.1. Εισαγωγή	39
3.2. Μοντέλο Συμμετρίας (S)	39
3.3. Μοντέλο Quasi-Συμμετρίας (QS)	40
3.4. Μοντέλο Quasi-ανεξαρτησίας (QI)	40
3.5. Το μοντέλο Bradley-Terry και η quasi-συμμετρία	41
3.6. Το μοντέλο Bradley-Terry και η quasi-ανεξαρτησία	42
4. Ανάλυση χαρακτηριστικών εφαρμογών	
4.1. Εισαγωγή	45
4.2. Παράδειγμα	45
4.2.1. Περιγραφή του μοντέλου	46
4.2.2. Δεδομένα και μέθοδοι ανάλυσης	50
4.2.3. Αποτελέσματα	51
4.3. Παραδείγματα με τη χρήση των SPSS, S-Plus και της γλώσσας R	56
4.3.1. Παράδειγμα 1 – Το βασικό μοντέλο Bradley-Terry	56
4.3.1.1. Εφαρμογή στο SPSS – 1ος τρόπος	57
4.3.1.2. Εφαρμογή στο SPSS – 2ος τρόπος	59
4.3.1.3. Εφαρμογή στην R	62
4.3.1.4. Εφαρμογή στο S-Plus	70
4.3.2. Παράδειγμα 2 – Το μοντέλο Bradley-Terry με επίδραση διάταξης	73
4.3.2.1. Εφαρμογή στην R	73
4.3.2.2. Εφαρμογή στο S-Plus	77
Παράρτημα	78
Βιβλιογραφία	98

РАНЕЕЗНАМО ТЕРРА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το μοντέλο Bradley-Terry

1.1 Εισαγωγή

Μία από τις πιο χαρακτηριστικές εφαρμογές συγκρίσεων κατά ζεύγη είναι η επιλογή μεταξύ δύο αντικειμένων. Οι άνθρωποι κάνουν συχνά και με ευκολία τέτοιες επιλογές ακόμα κι αν δεν μπορούν να δικαιολογήσουν τις προτιμήσεις τους. Σε όλα τα δεδομένα που προέρχονται από συγκρίσεις κατά ζεύγη η μονάδα ανάλυσης είναι η επιλογή. Το σετ των δεδομένων αποτελείται από πολλές επιλογές που γίνονται από κριτές (βαθμολογητές, αξιολογητές, υποκείμενα κ.α.) από τους οποίους έχει ζητηθεί να κάνουν υποκειμενικές αξιολογήσεις πάνω σε ζεύγη αντικειμένων (αγωγών, ομάδων, ατόμων, ανταγωνιστικών προϊόντων κ.α.). Η δομή των δεδομένων και η ακόλουθη ανάλυσή τους είναι πιθανό να είναι περίπλοκη εξαιτίας: α) της μεθόδου κατανομής των ζευγών στους κριτές, β) της παρουσίας ξεχωριστών κρίσεων που αντιστοιχούν σε πολλαπλά κριτήρια σύγκρισης και γ) της ετερογένειας των κριτών.

1.2 Μορφή δεδομένων

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την εισαγωγή μεθόδων σχετικών με τη σύγκριση κατηγορικών αποκρίσεων για δύο δείγματα όταν κάθε παρατήρηση στο ένα δείγμα δημιουργεί ένα ζεύγος με μία παρατήρηση του άλλου δείγματος. Τέτοια δεδομένα, τα οποία προέρχονται από σύμμετρες μεταβλητές ταξινόμησης, εμφανίζονται συνήθως σε μελέτες επαναλαμβανόμενων μετρήσεων των αντικειμένων, όπως είναι οι longitudinal μελέτες στις οποίες τα αντικείμενα παρατηρούνται διαχρονικά. Όπως γίνεται κατανοητό, οι αποκρίσεις των δύο δειγμάτων δεν θα μπορούσαν παρά να είναι στατιστικά εξαρτημένες και για το λόγο αυτό μέθοδοι που διαχειρίζονται τα δύο σετ παρατηρήσεων ως ανεξάρτητα δείγματα είναι ακατάλληλες.

Οι υπό μελέτη πίνακες αποτελούν μία συγκεκριμένη κατηγορία τετραγωνικών $I \times I$ πινάκων συνάφειας. Οι μεταβλητές γραμμής και στήλης έχουν τις ίδιες κατηγορίες ταξινόμησης, καθώς η αξιολόγηση των παρατηρητών δεν θα είχε κανένα νόημα για περαιτέρω ανάλυση αν δεν γινόταν στην ίδια κλίμακα. Τα διαγώνια κελιά του πίνακα αντιστοιχούν σε περιπτώσεις με ταυτόσημες αποκρίσεις στις δύο μεταβλητές ταξινόμησης ή σε κάποιες περιπτώσεις είναι κενά (δομικά μηδενικά). Όπως είναι προφανές, αυτό που προσελκύει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η μελέτη των μη διαγώνιων στοιχείων του πίνακα, δηλαδή αυτών που αντιπροσωπεύουν έκφραση προτίμησης.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μία εφαρμογή για σύμμετρες μεταβλητές ταξινόμησης, για τις οποίες μοντέλα για τετραγωνικούς πίνακες είναι χρήσιμα, τη μελέτη προτιμήσεων μεταξύ αγωγών η οποία βασίζεται στην κατά ζεύγη αξιολόγησή τους. Δημοφιλές σχετικό μοντέλο είναι το Bradley-Terry στην ανάλυση του οποίου και θα εστιάσουμε (Bradley and Terry, 1952a).

1.3 Το βασικό μοντέλο Bradley-Terry

1.3.1 Το μοντέλο με ομοιογένεια επαναλήψεων

Σ' ένα πείραμα συγκρίσεων κατά ζεύγη μία επανάληψη μπορεί να οριστεί ως ένα σετ από μη πλήρη block μεγέθους δύο, στα οποία κάθε ζεύγος από t αντικείμενα συγκρίνονται μία μόνο φορά. Ένα πείραμα αποτελείται από n τέτοιες επαναλήψεις. Για την ανάλυση των συγκρίσεων είναι διαθέσιμες αρκετές διαδικασίες. Η μέθοδος της ανάλυσης που χρησιμοποιείται εξαρτάται από τη μορφή καταγραφής των δεδομένων: μετρήσεις ή σκορ μπορεί να είναι διαθέσιμα για κάθε δείγμα ή για τη διαφορά μεταξύ των αντικειμένων κάθε ζεύγους. Μπορεί, επίσης, να καταγράφεται από κάθε ζεύγος μόνο το αντικείμενο που προτιμάται, συγκροτώντας μ' αυτό τον τρόπο μία διαδικασία αξιολόγησης. Για περαιτέρω ανάπτυξη του πειραματικού ελέγχου είναι εφικτή η ομαδοποίηση των επαναλήψεων του πειράματος ανάλογα είτε με τους κριτές, είτε με το χρόνο, είτε με κάποιο σχετικό χαρακτηριστικό.

Οι Bradley and Terry (1952a) παρουσίασαν ένα μοντέλο για αξιολόγηση κατά ζεύγη. Ας υποθέσουμε, αρχικά, ότι έχουμε ένα πείραμα που αποτελείται από n επαναλήψεις για t αγωγές και ότι οι επαναλήψεις είναι ένα ομοιογενές σετ. Αυτές οι αγωγές παρουσιάζουν

πιθανότητες προτίμησης π_1, \dots, π_t τέτοιες ώστε $\pi_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^t \pi_i = 1$. Ο τελευταίος περιορισμός επιβάλλεται για να εξασφαλιστεί η προσδιοριστικότητα. Με r_{ijk} τώρα ονομάζουμε την τάξη της αγωγής i στο block, στο οποίο η αγωγή i συγκρίνεται με την αγωγή j , στην k -οστή επανάληψη του πειράματος $1 \leq k \leq n$. Είναι προφανές ότι $r_{jik} + r_{ijk} = 3$, δεδομένου ότι η αγωγή που λαμβάνει την ανώτατη αξιολόγηση θα έχει τάξη 1 με την άλλη αγωγή να λαμβάνει την τάξη 2. Η πιθανότητα του παρατηρούμενου αποτελέσματος στην k -οστή επανάληψη της σύγκρισης μεταξύ του ζεύγους των αγωγών i, j είναι,

$$\left(\frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \right)^{2-r_{ijk}} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right)^{2-r_{jik}} = \frac{\pi_i^{2-r_{ijk}} \pi_j^{2-r_{jik}}}{\pi_i + \pi_j} \quad (1.1)$$

Δοθέντος ότι η αγωγή i λαμβάνει την ανώτατη αξιολόγηση, $r_{ijk} = 1$ (οπότε και $r_{jik} = 2$), η παραπάνω έκφραση γίνεται,

$$\Pi_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \quad (1.2)$$

Εναλλακτικά, όταν $r_{ijk} = 2$ και $r_{jik} = 1$ η πιθανότητα είναι,

$$\Pi_{ji} = \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \quad (1.3)$$

Αυτή είναι η μορφή του βασικού μοντέλου Bradley-Terry, όπου με Π_{ij} δηλώνεται η υπό συνθήκη πιθανότητα ότι η αγωγή i προτιμάται της αγωγής j , ενώ ισχύει η υπόθεση $\Pi_{ij} + \Pi_{ji} = 1$. Το μοντέλο υποθέτει, εξάλλου, την ανεξαρτησία των αξιολογήσεων, του ίδιου ζεύγους από διαφορετικούς βαθμολογητές και διαφορετικών ζευγών από τον ίδιο βαθμολογητή.

Πολλαπλασιάζοντας τις κατάλληλες εκφράσεις για όλες τις συγκρίσεις μέσα σε μία επανάληψη καθώς και για όλες τις n επαναλήψεις, η συνάρτηση πιθανοφάνειας έχει τη γενική μορφή,

$$L = \prod_i \pi_i^{2n-1} \prod_{\substack{j \neq i \\ k}} \pi_i + \pi_j^{-n} \quad (1.4)$$

1.3.2 Το μοντέλο χωρίς ομοιογένεια επαναλήψεων

Σε κάποιες περιπτώσεις η υπόθεση της ομοιογένειας των επαναλήψεων δεν είναι ρεαλιστική. Αυτό ισχύει ειδικότερα στις έρευνες γευστικών δοκιμών όπου ένας αριθμός κριτών πραγματοποιεί επαναλήψεις του πειράματος με κύριο σκοπό τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των προϊόντων ως προς συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Έτσι είναι λογικό να θεωρήσουμε την ύπαρξη των παραμέτρων $\pi_{1u}, \dots, \pi_{gu}$, $\pi_{iu} \geq 0$, $\sum_{i=1}^g \pi_{iu} = 1$ για τη u -οστή από g ομάδες επαναλήψεων στο πείραμα. Αυτό απλά σημαίνει ότι το πείραμα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει g ομάδες επαναλήψεων με n_u επαναλήψεις στη u -οστή ομάδα, όπου $\sum_{u=1}^g n_u = n$. Θεωρούμε ότι οι επαναλήψεις εντός των ομάδων είναι ομοιογενείς, αλλά επιτρέπεται η διαφοροποίηση των ομάδων αναφορικά με τις παραμέτρους των αντικειμένων. Η μόνη διαφορά με την απλή μορφή του μοντέλου 1.2, 1.3 είναι η ομαδοποίηση των επαναλήψεων. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας σ' αυτή την περίπτωση είναι το γινόμενο g συναρτήσεων της μορφής 1.4 .

1.3.3 Υπόδειγμα μορφής δεδομένων

Για να γίνει πιο κατανοητή η μορφή του πίνακα των δεδομένων παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα που παρουσιάζεται από τους Bradley and Terry (1952a)¹. Στα πλαίσια ενός πειράματος γευστικής δοκιμής πραγματοποιήθηκε σύγκριση με ταξινόμηση στα δυνατά ζεύγη μεταξύ ορισμένων ειδών ψητού χοιρινού κρέατος. Τα είδη προέρχονταν από τρεις ομάδες γουρουνιών που είχαν εκτραφεί με τρεις διαφορετικές τροφές: καλαμπόκι (C), καλαμπόκι με συμπλήρωμα φιστικιού (Cp) και καλαμπόκι με μεγάλη ποσότητα συμπληρώματος φιστικιού (CP). Ο σκοπός ήταν να καθοριστεί αν η προσθήκη φιστικιών στη διατροφή των γουρουνιών μπορούσε να εντοπιστεί ή όχι μέσω της δοκιμής του ψητού χοιρινού κρέατος. Επιλέχθηκαν δύο κριτές από τους οποίους ζητήθηκε να ταξινομήσουν τα ζεύγη με βάση τις προτιμήσεις τους. Κάθε κριτής πραγματοποίησε πέντε επαναλήψεις του πειράματος $t = 3$, $n = 5$. Για κάθε ζεύγος τροφών ο κριτής δοκίμαζε καθένα δείγμα και κατέγραφε την τιμή 1 για το δείγμα

¹ Το παράδειγμα έχει παρθεί από προκαταρκτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας που πραγματοποιήθηκε από τους L. L. Davis, C. M. Kincaid και H. R. Thomas στο Σταθμό Αγροτικών Πειραμάτων της Virginia

που προτιμούσε και την τιμή 2 για το άλλο δείγμα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1

Ταξινομήσεις δύο κριτών στο πείραμα για το ψητό χοιρινό κρέας

Επανάληψη...	1	2	3	4	5
	C Cp CP	C Cp CP	C Cp CP	C Cp CP	C Cp CP
Ζεύγος	Κριτής 1				
C, Cp	2 1 -	2 1 -	2 1 -	2 1 -	2 1 -
C, CP	2 - 1	1 - 2	2 - 1	2 - 1	2 - 1
Cp, CP	- 2 1	- 1 2	- 2 1	- 1 2	- 2 1
	Κριτής 2				
C, Cp	2 1 -	2 1 -	1 2 -	1 2 -	1 2 -
C, CP	1 - 2	1 - 2	1 - 2	1 - 2	2 - 1
Cp, CP	- 1 2	- 1 2	- 2 1	- 2 1	- 1 2

1.4 Ιστορική αναδρομή

Ο Zermelo (1929) είχε προτείνει ένα μοντέλο ισοδύναμο με αυτό των Bradley και Terry και ο Luce (1959) εισήγαγε το αξίωμα επιλογής (choice axiom) γι' αυτό το μοντέλο.

Οι Thurstone (1927) και Mosteller (1951) είχαν παρουσιάσει ένα ανάλογο μοντέλο με συνάρτηση σύνδεσης όμως την probit.

Οι Bradley (1953), David (1963), Cox (1970), Haberman (1974) και Maxwell (1974) θεώρησαν ότι μοντέλο Bradley-Terry αντιστοιχεί σ' ένα γραμμικό μοντέλο προτιμήσεων σε logit κλίμακα.

Περαιτέρω γενικεύσεις του μοντέλου δόθηκαν από τον Bradley (1976) και αφορούσαν:

1. Στην ύπαρξη «δεσμών». Με το συγκεκριμένο θέμα ασχολήθηκαν και οι Glenn and David (1960), David (1963), Rao and Kupper (1967), Davidson (1970), Beaver and Rao (1972), Beaver (1974), Kousgaard (1976)
2. Στις τριπλές συγκρίσεις. Σχετικές μελέτες πραγματοποιήθηκαν από τους Bradley and Terry (1952b), Mallows (1957), Pendergrass and Bradley (1960), Park (1961), Rai (1971b), Beaver and Rao (1972)

3. Στις συγκρίσεις κατά ζεύγη σε παραγοντικούς σχεδιασμούς, με τις οποίες ασχολήθηκαν οι Abelson and Bradley (1954), Quenoville and John (1971), Springall (1973), El-Helbawy (1974), Bradley and El-Helbawy (1976)
4. Στις πολυμεταβλητές συγκρίσεις κατά ζεύγη. Οι Sen and David (1968), Davidson and Bradley (1969, 1970), Imrey et al. (1976), Fienberg and Larntz (1976) πρότειναν διάφορα μοντέλα

Οι Fienberg and Larntz (1976) και Fienberg (1979) επανεξέτασαν το μοντέλο ως ένα loglinear μοντέλο και έδειξαν ότι, δοθείσης της μορφής που επιλέγεται να παρουσιαστούν τα δεδομένα των κατά ζεύγη συγκρίσεων, αντιστοιχεί είτε στο μοντέλο της quasi-ανεξαρτησίας (QI), είτε σε αυτό της quasi-συμμετρίας (QS). Μία εναλλακτική προσέγγιση του μοντέλου σε loglinear μορφή έδωσε ο Sinclair (1982).

Οι Imrey et al. (1976) θεώρησαν ότι το μοντέλο είναι ισοδύναμο με αυτό της quasi-ανεξαρτησίας (πλήρους ή υπό συνθήκη), μέσα από κατάλληλα προσδιορισμένους μη πλήρεις πίνακες συνάφειας και κάτω από τις συνήθεις πολυωνυμικές υποθέσεις.

Οι Davidson and Beaver (1977) πρότειναν μία γενίκευση του μοντέλου με την προσθήκη του όρου «επίδραση διάταξης» ή «πλεονέκτημα έδρας», θεωρώντας ότι ένα προϊόν που δοκιμάζεται πρώτο στα πλαίσια μίας γευστικής δοκιμής ή μία ομάδα που παίζει στην έδρα της έχει τυπικά μεγαλύτερη πιθανότητα προτίμησης («νίκης»).

Οι De Soete and Carroll (1983) και Ditttrich et al. (1998) πρότειναν μία επέκταση του μοντέλου με την προσθήκη συμμεταβλητών. Ειδικότερα, το μοντέλο αυτό επιτρέπει την ταυτόχρονη εκτίμηση των παραμέτρων των συμμεταβλητών και των αλληλεπιδράσεών τους. Στόχος του είναι η εξαγωγή συνολικών αξιολογήσεων των αντικειμένων, όπου κάθε υποκείμενο (ή βαθμολογητής) πραγματοποιεί μία οι περισσότερες συγκρίσεις ανάμεσα στα ζεύγη των αντικειμένων.

Οι Lancaster and Quade (1983) μελέτησαν το πρόβλημα των επαναλαμβανόμενων συγκρίσεων που γίνονται από τους κριτές. Προχώρησαν στην εισαγωγή μιας μορφής μοντέλου τυχαίων επιδράσεων υποθέτοντας ότι: α) οι κριτές επιλέγονται τυχαία από έναν πληθυσμό κριτών και β) όταν δύο αγωγές συγκρίνονται μεταξύ τους, η πιθανότητα ένας κριτής να προτιμήσει μία από τις δύο ακολουθεί την κατανομή Βήτα.

Οι Matthews and Morris (1995) ανέλυσαν τις συγκρίσεις κατά ζεύγη χρησιμοποιώντας μία εκδοχή του μοντέλου, η οποία περιείχε δεσμούς και επιδράσεις διάταξης. Ανέπτυξαν,

εξάλλου, ορισμένες γενικεύσεις στη μέθοδο, οι οποίες επέτρεπαν τον παραγοντικό σχεδιασμό και την ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ των βαθμολογητών.

Οι Böckenholt and Dillon (1997) μοντελοποίησαν την εξάρτηση όταν οι προτιμήσεις είναι διατάξιμης μορφής.

Οι David (1988) και Imrey (1998) παρείχαν μία λεπτομερή ανάλυση αναφορικά με μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε συγκρίσεις κατά ζεύγη.

Οι Cox (1970), Atkinson (1972), McCullagh (2000) και Agresti (2002) θεώρησαν το μοντέλο ως μία ειδική περίπτωση ενός μοντέλου λογιστικής ανάλυσης διακύμανσης για διωνυμικά δεδομένα.

Οι Rao and Kupper (1967) και Davidson (1970) πρότειναν μη γραμμικά Bradley-Terry μοντέλα για την εξήγηση των δεσμών. Ο Hunter (2000) έδειξε ότι τα περισσότερα από αυτά ανήκουν σε μία ομάδα μοντέλων για διωνυμικά δεδομένα, για τα οποία υπάρχουν αλγόριθμοι (οι Minorization-Maximization ή MM αλγόριθμοι) με επιθυμητές ιδιότητες.

Οι Causeur and Husson (2004) εισήγαγαν μία διδιάστατη γενίκευση με τη μορφή ενός μη γραμμικού λογιστικού μοντέλου. Στόχος τους ήταν να μπορέσουν να εξηγήσουν πιθανές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα συγκρινόμενα αντικείμενα, οι οποίες είναι σε θέση να επηρεάσουν τη γραμμική παρουσίαση της προτίμησης.

Οι Su and Zhou (2006) σύνδεσαν το Bradley-Terry μοντέλο με το μοντέλο του Cox (1972) για αναλογικούς κινδύνους. Πιο συγκεκριμένα, έδειξαν ότι η μερική πιθανοφάνεια τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες ικανοποιούν την υπόθεση των στρωματοποιημένων κινδύνων του Cox, συμπίπτει με την πιθανοφάνεια του Bradley-Terry μοντέλου για ενδεχόμενα διατεταγμένης βαθμίδας (rank order events).

1.5 Η εξέλιξη του μοντέλου

Οι Bradley and Terry (1952a) και οι Terry, Bradley and Davis (1952) παρουσίασαν ένα βασικό μοντέλο για συγκρίσεις κατά ζεύγη. Η βασική προσέγγιση ήταν εμπειρική γενικεύοντας την ιδέα ότι π και $1-\pi$ μετρώνε κατά κάποιο τρόπο τις σχετικές πιθανότητες δύο αντικειμένων που συγκρίνονται σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, όπου π η πιθανότητα επιλογής ενός αντικειμένου του υπό σύγκριση ζεύγους.

Το στοχαστικό μοντέλο 1.2 επιβάλλει τη δομή κατά την οποία $\binom{I}{2}$ ανεξάρτητες παράμετροι Π_{ij} για $i < j$, δίνονται τώρα από $I-1$ ανεξάρτητες παραμέτρους με τους β.ε. να είναι ίσοι με $\binom{I}{2} - I - 1 = \frac{I-1}{2} \cdot \frac{I-2}{2}$. Για $i < j$, ο συνολικός αριθμός αξιολογήσεων μεταξύ των i και j δηλώνεται ως N_{ij} , με την αγωγή i να προτιμάται n_{ij} φορές και τη j να προτιμάται $n_{ji} = N_{ij} - n_{ij}$ φορές. Όταν οι N_{ij} συγκρίσεις είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα Π_{ij} για καθεμιά, τότε $n_{ij} \sim \text{Bin}(N_{ij}, \Pi_{ij})$.

Η διωνυμική συνιστώσα της συνάρτησης πιθανοφάνειας για τις N_{ij} συγκρίσεις των i, j είναι,

$$\left(\frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \right)^{n_{ij}} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right)^{n_{ji}} = \frac{\pi_i^{n_{ij}} \pi_j^{n_{ji}}}{(\pi_i + \pi_j)^{N_{ij}}} \quad (1.5)$$

Όπως είναι φανερό η 1.5 προκύπτει από την 1.1 αν αντικαταστήσουμε όπου $2 - r_{ijk} = n_{ij}$ και $2 - r_{jik} = n_{ji}$. Η πλήρης συνάρτηση πιθανοφάνειας, κατ' αντιστοιχία, έχει τη μορφή,

$$L = \prod_i \pi_i^{n_i} \prod_{i < j} (\pi_i + \pi_j)^{-N_{ij}} \quad (1.6)$$

όπου

$$n_i = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} n_{ij} \quad (1.7)$$

ο συνολικός αριθμός φορών που επιλέχθηκε η i . Έπειτα από απλοποιήσεις, η μεγιστοποίηση του $\log L$ δοθέντος ότι $\sum_{i=1}^t \pi_i = 1$ δίνει τις εξισώσεις πιθανοφάνειας,

$$\frac{\pi_i}{\hat{\pi}_i} - \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{n_{ij}}{\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j} = 0, \quad i = 1, \dots, t$$

και

$$\sum_{i=1}^t \hat{\pi}_i = 1 \quad (1.8)$$

² Σύμφωνα με το γενικότερο τύπο: $\sum_k \sum_j r_{ijk} = 2n - t - 1 - \sum_j n_{ij}$

όπου $\hat{\pi}_i$ είναι ο εκτιμητής των π_i .

Η λύση των εξισώσεων 1.8 γίνεται επαναληπτικά. Εάν $\hat{\pi}_i^k$ είναι η k -οστή προσέγγιση του $\hat{\pi}_i$,

$$\hat{\pi}_i^k = \hat{\pi}_i^{*k} / \sum_i \hat{\pi}_i^{*k} \quad (1.9)$$

όπου

$$\hat{\pi}_i^{*k} = \frac{a_i}{\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \left[n_{ij} / \hat{\pi}_i^{k-1} + \hat{\pi}_j^{k-1} \right]}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Η επανάληψη αρχίζει με τον αρχικό καθορισμό του $\hat{\pi}_i^0$, ενδεχομένως $\hat{\pi}_i^0 = 1/t$, $i = 1, \dots, t$. Οι Bradley and Terry (1952a) και Bradley (1954a) παρείχαν πίνακες για $t = 3, 4, 5$. Ο Dykstra (1956) πρότεινε τρόπους απόκτησης καλών αρχικών τιμών $\hat{\pi}_i^0$. Η λύση των 1.9 μπορεί να ήταν δύσκολη το 1952, όμως σήμερα λόγω της εξέλιξης των υπολογιστών είναι επουσιώδης.

Ο Fienberg (1979), τέλος, έδειξε ότι οι εξισώσεις πιθανοφάνειας προϋποθέτουν ισότητα μεταξύ του παρατηρούμενου και του αναμενόμενου αριθμού προτιμήσεων για κάθε αγωγή (όπου ο αναμενόμενος αριθμός προτιμήσεων είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων προτίμησης στο σύνολο των αξιολογήσεων που υπόκειται η αγωγή).

1.6 Η logit εκδοχή του μοντέλου

Αποκλείοντας την περίπτωση δεσμού (μη προτίμησης), η logit εκδοχή του μοντέλου, σύμφωνα με τον Agresti (2002), είναι,

$$\log \frac{\prod_{ij}}{\prod_{ji}} = \log \pi_i - \log \pi_j = \beta_i - \beta_j \quad (1.11)$$

Οι εκτιμήσεις $\hat{\pi}_i$ των π_i μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συγκρίσεις των αγωγών κατά ζεύγη καθώς ο λόγος $\frac{\prod_{ij}}{\prod_{ji}} = \frac{\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_j}$ μετράει τη σχετική συχνότητα προτίμησης της αγωγής i συγκρινόμενη με την αγωγή j στα πλαίσια της μεταξύ τους σύγκρισης. Με άλλα λόγια, ο

λόγος $\frac{\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_j}$ ³ απεικονίζει το odds η αγωγή i να προτιμάται της αγωγής j και γι' αυτό το λόγο το

Bradley-Terry είναι ένα “proportional-odds” μοντέλο. Παίρνοντας τους λογάριθμους των εκτιμήσεων, οι τιμές $\log \hat{\pi}_i$ εμφανίζονται σε μία γραμμική κλίμακα και επιτρέπουν τις συνολικές συγκρίσεις των υπό εξέταση αγωγών. Οποιαδήποτε μελέτη των διαφορών μεταξύ των αγωγών πρέπει να βασίζεται στις τιμές των $\log \hat{\pi}_i$. Το μοντέλο, επίσης, υποθέτει ότι οι αγωγές μπορούν να διαταχθούν σε μία διάσταση, για παράδειγμα κάθε αγωγή i χαρακτηρίζεται από μία παράμετρο β_i και ότι η Π_{ij} εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά $\beta_i - \beta_j$. Εναλλακτικά,

$$\Pi_{ij} = \frac{\exp \beta_i}{\exp \beta_i + \exp \beta_j} \quad (1.12)$$

Έτσι, $\Pi_{ij} = 1/2$ όταν $\beta_i = \beta_j$ και $\Pi_{ij} > 1/2$ όταν $\beta_i > \beta_j$.

Λόγοι προσδιορισιμότητας απαιτούν έναν περιορισμό τέτοιο ώστε $\beta_i = 0$ ή $\sum_i \exp \beta_i = 1$. Είναι φανερό ότι οι κλασικές μέθοδοι των logit μοντέλων μπορούν να εφαρμοστούν για την προσαρμογή του μοντέλου.

1.7 Η loglinear μορφή του μοντέλου

Το μοντέλο Bradley-Terry μπορεί να προσαρμοστεί και ως ένα loglinear μοντέλο. Αυτό αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα καθώς η loglinear μορφή μπορεί εύκολα να γενικευτεί για την αντιμετώπιση διαφόρων πολυμεταβλητών γενικεύσεων του μοντέλου Bradley-Terry. Οι Fienberg and Larntz (1976) και Fienberg (1979) ασχολήθηκαν πρώτοι με το συγκεκριμένο ζήτημα και στήριξαν την ανάλυσή τους σ' έναν $\binom{J}{2} \times J$ (ζεύγη αγωγών \times προτιμήσεις για τις αγωγές) μη πλήρη διδιάστατο πίνακα συνάφειας. Σ' αυτή την ενότητα, ωστόσο, θα ασχοληθούμε με μία εναλλακτική προσέγγιση που εισήγαγε ο Sinclair (1982) και

³ Αποτελεί το αξίωμα επιλογής που εισήγαγε ο Luce (1959): εάν $\pi_l | i, j$ δηλώνει την πιθανότητα ότι η αγωγή l προτιμάται όταν συγκρίνεται το ζεύγος i, j , $l = i, j$, και εάν π_i δηλώνει τη συνολική πιθανότητα (worth) προτίμησης της αγωγής i μεταξύ των t αγωγών, $i = 1, \dots, t$, τότε κάτω από το αξίωμα ισχύει ότι: $\Pi_{ij} / \Pi_{ji} = \pi_i / \pi_j$ για όλα τα i, j δοθέντος ότι $\Pi_{ij} \neq 0, 1$ (σύμφωνα με την ορολογία του Luce αυτή είναι η υπόθεση ότι όλες οι επιλογές είναι ατελείς).

φιλοξενείται στην εργασία των Ditttrich et al. (1998). Η συγκεκριμένη εργασία πραγματεύεται μία έρευνα που εκπονήθηκε με τη συμμετοχή φοιτητών του Οικονομικού Πανεπιστημίου της Βιέννης, σκοπός της οποίας ήταν η διερεύνηση της επιλογής των φοιτητών αναφορικά με τα ξένα πανεπιστήμια. Οι συμμετέχοντες φοιτητές κλήθηκαν να δηλώσουν την προτίμησή τους για καθένα από τα $\binom{6}{2} = 15$ δυνατά ζεύγη σύγκρισης ανάμεσα στα έξι πανεπιστήμια.

Έστω ότι συγκρίνονται το πανεπιστήμιο j με το πανεπιστήμιο k , όπου X_{jk} ο αριθμός των προτιμήσεων για το j και X_{kj} ο αριθμός των προτιμήσεων για το k (από ένα σύνολο έξι πανεπιστημίων). Οι προτιμήσεις αυτές διαμορφώνουν έναν $\binom{J}{2} \times 2 = \binom{6}{2} \times 2$ (ζεύγη πανεπιστημίων \times προτιμήσεις για τα πανεπιστήμια) πλήρη διδιάστατο πίνακα συνάφειας, όπου μία απόφαση σημαίνει επιλογή του πρώτου j ή του δεύτερου πανεπιστημίου k δοθείσης της σύγκρισης jk . Οι τυχαίες μεταβλητές X_{jk}, X_{kj} υποθέτουμε ότι ακολουθούν την κατανομή Poisson. Με σταθερό το άθροισμα $X_{jk} + X_{kj} = n_{jk}$, τα X_{jk}, X_{kj} ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή και οι αναμενόμενες τιμές τους μπορούν να διατυπωθούν ως ένα πολλαπλασιαστικό μοντέλο. Έτσι έχουμε,

$$\Pi_{jk} = \frac{\pi_j}{\pi_j + \pi_k} = \frac{\sqrt{\pi_j/\pi_k}}{\sqrt{\pi_j/\pi_k} + \sqrt{\pi_k/\pi_j}} \quad (1.13)$$

$$\Pi_{kj} = \frac{\pi_k}{\pi_j + \pi_k} = \frac{\sqrt{\pi_k/\pi_j}}{\sqrt{\pi_j/\pi_k} + \sqrt{\pi_k/\pi_j}}$$

Δηλώνοντας με μ_{jk} τον αναμενόμενο αριθμό συγκρίσεων στις οποίες το πανεπιστήμιο j προτιμάται του k , τότε $\mu_{jk} = n_{jk} \Pi_{jk}$ έχει τη loglinear μορφή,

$$\log \mu_{jk} = a_{jk} + \lambda_j^0 - \lambda_k^0 \quad (1.14)$$

$$\log \mu_{kj} = a_{kj} + \lambda_k^0 - \lambda_j^0$$

όπου οι «ενοχλητικές» (nuisance) παράμετροι a ορίζονται ως,

$$a_{jk} = a_{kj} = \log n_{jk} - \log \sqrt{\pi_j / \pi_k} + \sqrt{\pi_k / \pi_j} \quad (1.15)$$

Οι παράμετροι αυτές μπορούν να ερμηνευτούν ως παράμετροι αλληλεπίδρασης αντιπροσωπεύοντας τα πανεπιστήμια που εμπλέκονται στις αντίστοιχες συγκρίσεις, κρατώντας έτσι σταθερές τις αντίστοιχες n_{jk} περιθώριες κατανομές. Ακόμα, $\lambda_j^o = \frac{1}{2} \log \pi_j$, $\lambda_k^o = \frac{1}{2} \log \pi_k$. Ακολουθώντας το συμβολισμό του Agresti (1990) των loglinear μοντέλων για πίνακες συνάφειας, οι όροι που σχετίζονται με τα πανεπιστήμια δηλώνονται με λ_j^o , λ_k^o , όπου το σύμβολο O αναφέρεται στις παραμέτρους αντικειμένου (εδώ αντικείμενο θεωρείται το πανεπιστήμιο) (object-specific parameters).

1.8 Πεδία εφαρμογών

Η μελέτη προτιμήσεων είναι ένα πεδίο στην ανάλυση κατηγορικών δεδομένων με ενδιαφέρουσες εφαρμογές στον αθλητισμό, στην έρευνα αγοράς, στην εκπαίδευση, στις κοινωνικές επιστήμες καθώς και σε αρκετούς άλλους τομείς.

Αρκετές φορές τα κατηγορικά δεδομένα προέρχονται από αξιολογήσεις κατά ζεύγη οι οποίες καταλήγουν στην έκφραση προτίμησης μιας κατηγορίας εις βάρος κάποιας άλλης. Ένα συνηθισμένο παράδειγμα είναι οι αθλητικές συναντήσεις, όπου το αποτέλεσμα για μια ομάδα ή έναν παίκτη μπορεί να αποτελείται από δύο κατηγορίες: νίκη ή ήττα. Ο Πίνακας 1.2, που παραθέτει ο Agresti (2007), περιέχει τα αποτελέσματα των αναμετρήσεων μεταξύ πέντε τενιστριών κατά τη διάρκεια της περιόδου 1989-1990. Για παράδειγμα, η Steffi Graf και η Monica Seles ήρθαν αντιμέτωπες πέντε φορές από τις οποίες η Graf αναδείχτηκε νικήτρια στις τρεις.

Πίνακας 1.2

Αποτελέσματα παιχνιδιών περιόδου 1989-1990, Τένις Γυναικών

Winner	Loser				
	Seles	Graf	Sabatini	Navratilova	Sanchez
Seles	-	2	1	3	2
Graf	3	-	6	3	7
Sabatini	0	3	-	1	3
Navratilova	3	0	2	-	3
Sanchez	0	1	2	1	-

Στα πλαίσια, εξάλλου, της έρευνας αγοράς γίνονται συγκρίσεις κατά ζεύγη μέσω γευστικής δοκιμής ανάμεσα σε διάφορα προϊόντα, όπως είναι τα προϊόντα διατροφής, ή ανάμεσα σε διάφορες μάρκες ενός συγκεκριμένου προϊόντος, όπως για παράδειγμα ενός τύπου κρασιού. Ας υποθέσουμε ότι ο δοκιμαστής καλείται να αξιολογήσει I μάρκες ενός προϊόντος. Στην προκειμένη περίπτωση είναι αντιμετώπος με την αντικειμενική δυσκολία να καταλήξει σε μια σωστή κατάταξη, ειδικότερα αν το I είναι μεγάλο. Ωστόσο, δοθέντος ενός οποιουδήποτε ζεύγους, ο δοκιμαστής θα μπορούσε πιθανότατα να δείξει μία προτίμηση κατόπιν δοκιμής κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα σχετικό παράδειγμα φιλοξενείται από τους Davidson and Beaver (1977). Τα δεδομένα του παραδείγματος έχουν παρθεί από ένα πείραμα γευστικής δοκιμής για τέσσερα είδη ανάμεικτων τροφών. Οι ερωτώμενοι κλήθηκαν να σημειώσουν αν προτιμούν την πρώτη ή τη δεύτερη μάρκα του υπό σύγκριση ζεύγους, αλλά ταυτόχρονα είχαν τη δυνατότητα της έκφρασης μη προτίμησης. Οι συχνότητες σύγκρισης, προτίμησης και μη προτίμησης συνοψίζονται στον Πίνακα 1.3.

Πίνακας 1.3

Σύνοψη αποκρίσεων για το πείραμα της γευστικής δοκιμής

Ζεύγη	Αρ. Συγκρίσεων	Αριθμός Προτιμήσεων 1 ^{ης} μάρκας	Αριθμός Προτιμήσεων 2 ^{ης} μάρκας	Αρ. Δεσμών
(1,2)	42	23	11	8
(2,1)	43	29	6	8
(1,3)	43	27	11	5
(3,1)	42	22	14	6
(2,3)	41	34	6	1
(3,2)	42	23	16	3
(1,4)	42	35	6	1
(4,1)	42	27	11	4
(2,4)	40	29	9	2
(4,2)	42	22	15	5
(3,4)	42	26	11	5
(4,3)	43	24	14	5

Στην ανάλυση για τις παραθέσεις περιοδικών που εξετάστηκε από τον Stigler (1994), η σχέση ανάμεσα σε περιοδικά ερευνήθηκε με βάση έναν τετραγωνικό πίνακα ο οποίος περιλάμβανε τον αριθμό των παραθέσεων ενός περιοδικού από ένα άλλο.

Η χρήση του μοντέλου, σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις, αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του εκάστοτε ερευνητή από τη στιγμή που του παρέχει τη δυνατότητα λήψης εκτιμήσεων για τις παραμέτρους των αντικειμένων β_i . Έτσι, με βάση τις κατά ζεύγη προτιμήσεις μπορεί να καταλήξει σε μία συνολική κατάταξη των αντικειμένων π.χ. από την καλύτερη ως τη χειρότερη τενίστρια ή από το δημοφιλέστερο πανεπιστήμιο ως το λιγότερο δημοφιλές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γενικεύσεις του μοντέλου Bradley-Terry

2.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο Bradley-Terry για συγκρίσεις κατά ζεύγη είναι ένα απλό και ευρέως διαδεδομένο μέσο για την περιγραφή των πιθανοτήτων των δυνατών αποτελεσμάτων όταν ζεύγη αντικειμένων τίθενται υπό «κρίση». Ανάμεσα στις πολλές μελέτες που αφορούν το μοντέλο τα τελευταία 80 χρόνια, ένας μεγάλος αριθμός συγγραφέων το έχει γενικεύσει προς διάφορες κατευθύνσεις. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση ορισμένων χαρακτηριστικών γενικεύσεων που συναντώνται στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, η επίδραση διάταξης, η οποία οφείλεται στη σειρά που παρουσιάζονται τα αντικείμενα σ' έναν κριτή, μπορεί να επηρεάσει την προτίμησή του. Μία άλλη γενίκευση σχετίζεται με την παρουσία δεσμών, οι οποίοι εμφανίζονται όταν σε κάθε κριτή επιτρέπεται μία τρίτη επιλογή, αυτή της μη προτίμησης ή ισοπαλίας. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση της loglinear μορφής του μοντέλου με την προσθήκη της περίπτωσης δεσμών και την εισαγωγή συμμεταβλητών υποκειμένων και αντικειμένων (subject-object specific covariates). Στα πλαίσια των πολλαπλών συγκρίσεων θα επικεντρωθούμε στις τριπλές συγκρίσεις, που αφορούν στην ταυτόχρονη σύγκριση και πλήρη αξιολόγηση τριών αντικειμένων και τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας διδιάστατης μη γραμμικής γενίκευσης.

2.2 Επίδραση διάταξης

Στις γευστικές δοκιμές ένα προϊόν μπορεί να εμφανίζει μεγαλύτερη πιθανότητα προτίμησης απλά και μόνο επειδή δοκιμάζεται πρώτο. Κατ' αντιστοιχία στον αθλητισμό μία ομάδα έχει τυπικά μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει μία άλλη όταν παίζει στην έδρα της. Αυτό το πλεονέκτημα συναντάται στην πλειοψηφία των ομαδικών αθλημάτων, ενώ αντίθετα στα ατομικά αθλήματα ισχύει σπάνια. Το μοντέλο των Bradley-Terry δεν αναγνωρίζει ποιο προϊόν δοκιμάζεται πρώτο ή ποια ομάδα παίζει στην έδρα της. Ωστόσο, αυτή η επίδραση

διάταξης ή αλλιώς το πλεονέκτημα έδρας όπως συνήθως αποκαλείται, μπορεί να συμπεριληφθεί στο μοντέλο.

2.2.1 Κοινή επίδραση διάταξης

Ο Agresti (1990) υπέθεσε ότι τα αντικείμενα που εμπλέκονται σε μια σύγκριση κατά ζεύγη είναι διατεταγμένα και υποστήριξε ότι η πιθανότητα το i να κερδίσει το j εξαρτάται από το ποιο αντικείμενο είναι πρώτο. Με βάση αυτή την υπόθεση, στην περίπτωση που τα αντικείμενα είναι ομάδες η πιθανότητα η ομάδα i να κερδίσει την j είναι,

$$\Pi_{ij}^* = \begin{cases} a\pi_i / (a\pi_i + \pi_j) , & \text{με γηπεδούχο την } i \\ \pi_i / (\pi_i + a\pi_j) , & \text{με γηπεδούχο την } j \end{cases}, i, j = 1, \dots, t \quad (2.1)$$

όπου t το πλήθος των αγωνιζόμενων ομάδων.

Για όλα τα $i \neq j$, θεωρούμε το logit μοντέλο,

$$\log \frac{\Pi_{ij}^*}{1 - \Pi_{ij}^*} = \begin{cases} a^* + \beta_i - \beta_j , & \text{με γηπεδούχο την } i \\ -a^* + \beta_i - \beta_j , & \text{με γηπεδούχο την } j \end{cases} \quad (2.2)$$

που αποτελεί μία πολύ χρήσιμη γενίκευση όποτε υπάρχει επίδραση διάταξης. Η επιπρόσθετη παράμετρος $a^* = \log a > 0$ μετράει τη δύναμη του πλεονεκτήματος έδρας ή 1^{ns} δοκιμής με την υπόθεση ότι είναι ίδια για όλες τις ομάδες ή όλα τα προϊόντα (Η υπόθεση αυτή, αν και όχι τόσο ρεαλιστική ειδικά σε αρκετά ομαδικά αθλήματα όπως το ποδόσφαιρο, το μπάσκετ κ.α., είναι ιδιαίτερος χρήσιμη, καθώς βοηθάει στην πολύ σημαντική μείωση των παραμέτρων που θα είχαμε αν για κάθε ομάδα υποθέταμε ότι υπήρχε μία ξεχωριστή παράμετρος a_i). Η γηπεδούχος ομάδα (ή το προϊόν που δοκιμάζεται πρώτο), όταν συγκρίνεται με ισοδύναμη ομάδα ή προϊόν, έχει πιθανότητα νίκης $\exp a^* / [1 + \exp a^*]$.

2.2.2 Ξεχωριστή επίδραση διάταξης (ανά αντικείμενο)

Πολλές φορές θεωρούμε ότι το πλεονέκτημα έδρας είναι ίδιο για όλες τις ομάδες, αν και αυτό οφείλεται συχνά στο γεγονός ότι έχουμε ανεπαρκή δεδομένα για να αποδείξουμε ότι είναι απαραίτητο κάθε ομάδα να έχει ένα ξεχωριστό πλεονέκτημα έδρας. Ωστόσο,

γενικεύοντας τη 2.1 μπορούμε να επιτρέψουμε κάτι τέτοιο. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει αν αντιμετωπίσουμε την ομάδα i ως «γηπεδούχο» και ως «φιλοξενούμενη» σαν δύο ξεχωριστές περιπτώσεις (Butler and Whelan, 2000). Έστω ότι $\pi_{iH} > 0$ δηλώνει τη δύναμη μιας ομάδας στην έδρα της και $\pi_{iV} > 0$ τη δύναμή της εκτός έδρας. Η πιθανότητα η ομάδα i να κερδίσει την j είναι,

$$\Pi_{ij}^* = \begin{cases} \pi_{iH} / (\pi_{iH} + \pi_{jV}) & , \text{ με γηπεδούχο την } i \\ \pi_{iV} / (\pi_{iV} + \pi_{jH}) & , \text{ με γηπεδούχο την } j \end{cases}, i, j = 1, \dots, t \quad (2.3)$$

Για όλα τα $i \neq j$, θεωρούμε το logit μοντέλο,

$$\log \frac{\Pi_{ij}^*}{1 - \Pi_{ij}^*} = \begin{cases} \beta_{iH} - \beta_{jV} & , \text{ με γηπεδούχο την } i \\ \beta_{iV} - \beta_{jH} & , \text{ με γηπεδούχο την } j \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου $\beta_{iH} = \log \pi_{iH}$ κ.ο.κ.. Οι εξισώσεις πιθανοφάνειας τώρα εξισώνουν τις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες εντός και εκτός έδρας νίκες για κάθε ομάδα (ένα σύνολο $2t$ εξισώσεων για τις $2t$ παραμέτρους).

2.2.3 Ξεχωριστή επίδραση διάταξης (ανά ζεύγος)

Γενικεύοντας το μοντέλο Bradley-Terry στην προσπάθεια να εξηγήσουμε την επίδραση διάταξης στα ζεύγη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία από τις ακόλουθες προσεγγίσεις. Η πρώτη θα ήταν να τροποποιήσουμε τις υποκείμενες αξιολογήσεις, π_1, \dots, π_t , εισάγοντας μία παράμετρο αθροιστικής αύξησης (μείωσης) a_{ij} , η οποία σχετίζεται με το ζεύγος i, j μέσω του οποίου οι πιθανότητες προτίμησης για το διατάξιμο ζεύγος i, j γίνονται,

$$\Pi_{ij}^* = \frac{\pi_i + a_{ij}}{\pi_i + \pi_j}, \quad \Pi_{ji}^* = \frac{\pi_j - a_{ij}}{\pi_i + \pi_j}, \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.5)$$

με $|a_{ij}| \leq \min(\pi_i, \pi_j)$. Αυτό το μοντέλο και η ανάλυσή του παρουσιάζεται από τους Beaver and Gokhale (1975).

Εάν εισάγουμε την επίδραση διάταξης ως μία πολλαπλασιαστική αντί για αθροιστική αύξηση (μείωση), μία εναλλακτική προσέγγιση σύμφωνα με τους Davidson and Beaver

(1977) θα ήταν να συνδέσουμε μία παράμετρο γ_{ij} με το ζεύγος i, j έτσι ώστε οι πιθανότητες προτίμησης για το διατάξιμο ζεύγος i, j να είναι,

$$\Pi_{ij}^* = \frac{\pi_i}{\pi_i + \gamma_{ij}\pi_j}, \Pi_{ji}^* = \frac{\gamma_{ij}\pi_j}{\pi_i + \gamma_{ij}\pi_j}, i, j = 1, \dots, t \quad (2.6)$$

με $\gamma_{ij} > 0$. Όταν $\gamma_{ij} = 1$ δεν υπάρχει επίδραση διάταξης, όταν $\gamma_{ij} > 1$ η πιθανότητα του αντικειμένου που παρουσιάζεται δεύτερο μεγαλώνει, ενώ όταν $0 < \gamma_{ij} < 1$ το αντικείμενο που παρουσιάζεται πρώτο αποκτά πλεονέκτημα. Ενδιαφέρον και εδώ παρουσιάζει η περίπτωση $\gamma_{ij} = \gamma$ για όλα τα ζεύγη i, j λόγω της εξαιρετικά μεγάλης μείωσης του αριθμού των παραμέτρων που απαιτούνται για τον ορισμό του μοντέλου.

Τα δύο παραπάνω μοντέλα καταλήγουν στο μοντέλο των Bradley-Terry όταν $a_{ij} = 0$ ή $\gamma_{ij} = 1$ για όλα τα ζεύγη i, j . Καθένα απ' αυτά μπορεί να γραφτεί στη μορφή του μοντέλου Bradley-Terry στο οποίο,

$$\Pi_{ij}^* = \frac{\pi_i^*}{\pi_i^* + \pi_j^*} \quad (2.7)$$

όπου για το πρώτο μοντέλο ισχύει $\pi_i^* = \pi_i + a_{ij}$, $\pi_j^* = \pi_j - a_{ij}$, ενώ για το δεύτερο $\pi_i^* = \gamma_{ij}\pi_i$, $\pi_j^* = \pi_j$. Το δεύτερο μοντέλο είναι και το πιο προσιτό και επιτρέπει την εφαρμογή μεθόδων εκτίμησης και ελέγχου των loglinear μοντέλων καθώς,

$$\log \frac{\Pi_{ij}^*}{\Pi_{ji}^*} = \log \pi_i - \log \pi_j + \log \gamma_{ij} = a^* + \beta_i - \beta_j \quad (2.8)$$

2.3 Ύπαρξη δεσμών και αξιολόγηση κλιμάκων

Σ' ένα πείραμα που αποτελείται από συγκρίσεις κατά ζεύγη, στο οποίο μία ομάδα κριτών καλείται να ταξινομήσει ζεύγη αγωγών με βάση κάποιο χαρακτηριστικό, ένας κριτής είναι πιθανό να μην μπορεί να εκφράσει μία πραγματική προτίμηση για έναν αριθμό ζευγών που αξιολογεί. Αυτό μπορεί να συμβεί εξαιτίας ενός ή και των δύο ακόλουθων λόγων:

1. η παρατηρητικότητα του δεν είναι αρκετά οξυμένη ώστε να εντοπίσει την υπάρχουσα διαφορά μεταξύ των αγωγών

2. οι αγωγές δεν διαφέρουν στο υπό εξέταση χαρακτηριστικό

Σε τέτοιου είδους πειράματα το ενδιαφέρον εστιάζεται στις διαφορές ανάμεσα στις αξιολογήσεις των αγωγών και όχι στην ικανότητα των κριτών να εντοπίσουν αυτές τις διαφορές. Είναι σημαντικό, λοιπόν, το υποκείμενο μαθηματικό μοντέλο να λαμβάνει υπόψη τη διαφορά ανάμεσα στους προαναφερθέντες λόγους.

Στα πλαίσια των συγκρίσεων κατά ζεύγη έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα τα περισσότερα εκ των οποίων δεν επιτρέπουν στον κριτή την επιλογή του δεσμού. Σε μια τέτοια περίπτωση η συνηθισμένη πρακτική είναι, είτε να υποχρεώσουμε τον κριτή να εκφράσει μία προτίμηση είτε, αν αυτό δεν γίνεται, να αντιμετωπίσουμε τους δεσμούς με κάποιον από τους παρακάτω τρόπους:

- i. να αγνοηθούν πλήρως
- ii. να διαμοιραστούν ισάξια ανάμεσα στις «ισόπαλες» αγωγές
- iii. να διαμοιραστούν τυχαία ανάμεσα στις «ισόπαλες» αγωγές

Ανεξάρτητα πάντως από τα μειονεκτήματα ή τα πλεονεκτήματα των παραπάνω διαδικασιών, είναι ξεκάθαρο ότι οποιοδήποτε μοντέλο αποκλείει την πιθανότητα ύπαρξης δεσμών δεν κάνει πλήρη χρήση της πληροφορίας που περιέχεται σ' αυτή την ομάδα.

2.3.1 Δεσμοί και το μοντέλο Bradley-Terry

Ακολουθώντας την προηγούμενη συλλογιστική, όταν ένα από τα πιθανά αποτελέσματα μιας σύγκρισης είναι μη προτίμηση (δεσμός, ισοπαλία), τότε αυτό πρέπει να ενσωματωθεί στο μοντέλο. Μια προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε την ισοπαλία ως μισή νίκη και μισή ήττα. Παρά το γεγονός ότι έτσι παραβιάζεται η διωνυμική υπόθεση που διέπει το μοντέλο Bradley-Terry, στην πράξη λειτουργεί καλά εάν στόχος μας είναι απλώς να εκτιμήσουμε τη δύναμη των ομάδων (από το να εκτιμήσουμε πιθανότητες).

Οι Rao and Kupper (1967) θεώρησαν ότι στη σύγκριση μεταξύ δύο αγωγών, η έκφραση προτίμησης υπέρ κάποιας από τις δύο χωρίς την περίπτωση τρίτης επιλογής αποτελεί ένα μη ρεαλιστικό περιορισμό. Υποστήριξαν, μάλιστα, ότι όταν δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των αγωγών, οποιαδήποτε χρήση μεθόδου με σκοπό να εκφραστεί προτίμηση υπέρ της μίας ή της άλλης είναι κατά κάποιο τρόπο αυθαίρετη. Έτσι, πρότειναν μία γενίκευση του μοντέλου που επιτρέπει την ισοπαλία σαν ένα τρίτο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα υπέθεσαν ότι,

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} &= \pi_i / (\pi_i + \theta\pi_j) \\ \Pi_{ji} &= \pi_j / (\theta\pi_i + \pi_j) \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.9) \\ \Pi_{i \approx j} &= \theta^2 - 1 \pi_i \pi_j / \left[\pi_i + \theta\pi_j \quad \theta\pi_i + \pi_j \right]\end{aligned}$$

όπου η $\theta > 1$ καλείται και παράμετρος «κατώφλι» (threshold). Δικαιολόγησαν, μάλιστα, το όνομα δείχνοντας ότι το μοντέλο μπορεί να εμφανιστεί αν κάθε σύγκριση αποφασίζεται από έναν κριτή, ο οποίος εκτιμά τη διαφορά $\ln \pi_i - \ln \pi_j$ με το σφάλμα της και δηλώνει την ύπαρξη δεσμού αν η τιμή είναι μικρότερη από $|\ln \theta|$. Πρέπει, επίσης, να σημειωθεί ότι υπάρχει η πιθανότητα ύπαρξης περισσότερων από μία τέτοιων παραμέτρων σ' ένα πείραμα. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που εμπλέκονται περισσότεροι από ένας κριτές ή το πείραμα πραγματοποιείται σε μία μεγάλη χρονική περίοδο.

Ο Davidson (1970) έδωσε μία διαφορετική προσαρμογή στο μοντέλο Bradley-Terry όσον αφορά την εξήγηση των δεσμών. Έστω ότι Π_{ijk} δηλώνει την πιθανότητα αποτελέσματος τύπου k ($k=1$ για νίκη της ομάδας i , $k=2$ για νίκη της ομάδας j , $k=0$ για ισοπαλία), η γενίκευση τότε είναι,

$$\begin{aligned}\Pi_{ij1} &= \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j + a\sqrt{\pi_i \pi_j}} \\ \Pi_{ij2} &= \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j + a\sqrt{\pi_i \pi_j}} \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.10) \\ \Pi_{ij0} &= \frac{a\sqrt{\pi_i \pi_j}}{\pi_i + \pi_j + a\sqrt{\pi_i \pi_j}}\end{aligned}$$

όπου $\Pi_{ij1} + \Pi_{ij2} + \Pi_{ij0} = 1$ και $a \geq 0$.

Η τρίτη εξίσωση δείχνει ότι η πιθανότητα μη προτίμησης είναι ανάλογη του γεωμετρικού μέσου των πιθανοτήτων προτίμησης των αγωγών που συγκρίνονται. Η πρόσθετη παράμετρος a , η πιο κατάλληλα $1/a$, είναι μία σταθερά αναλογικότητας, η οποία δεν εξαρτάται από τα i και j και μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δείκτης διάκρισης ξεχωριστός για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα. Όπως γίνεται αντιληπτό, η πιθανότητα μη προτίμησης εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο το ζεύγος των συγκρινόμενων αγωγών ξεχωρίζουν. Η χρήση του γεωμετρικού μέσου προτείνεται από το γεγονός ότι, κάτω από το μοντέλο Bradley-Terry, οι συνολικές

πιθανότητες προτίμησης (merits) των t αγωγών μπορούν να αντιπροσωπευτούν από τις τιμές $\log \pi_1, \dots, \log \pi_t$ σε μία γραμμική κλίμακα.

Το παραπάνω μοντέλο έχει δύο επιθυμητές ιδιότητες:

1. η υπό συνθήκη πιθανότητα η ομάδα i να κερδίσει την j , χωρίς την περίπτωση της ισοπαλίας αντιστοιχεί στις 1.2 , 1.3
2. η πιθανότητα ισοπαλίας για καθορισμένο a μεγιστοποιείται όταν $\pi_i = \pi_j$

Η εξίσωση πιθανοφάνειας για το a εξισώνει τις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες ισοπαλίες για όλα τα παιχνίδια. Οι υπόλοιπες εξισώσεις εξισώσουν τους παρατηρούμενους και τους αναμενόμενους πόντους για κάθε ομάδα, όπου ένας πόντος δίνεται για τη νίκη και μισός για την ισοπαλία (ή ισοδύναμα δύο πόντοι για τη νίκη και ένας για την ισοπαλία).

2.3.2 Το μοντέλο δεσμών των Rao-Kupper με πολλαπλασιαστική επίδραση διάταξης

Οι Davidson and Beaver (1977), επεκτείνοντας το μοντέλο των Rao and Kupper (1967), έδειξαν πώς δεσμοί και επιδράσεις διάταξης μπορούν να υπάρξουν ταυτόχρονα σ' ένα μοντέλο. Για το διατεταγμένο ζεύγος i, j οι πιθανότητες προτίμησης είναι,

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \pi_i / (\pi_i + \gamma\theta\pi_j) \\ \Pi_{ji} &= \gamma\pi_j / (\theta\pi_i + \gamma\pi_j) \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.11) \end{aligned}$$

και η πιθανότητα μη προτίμησης που δηλώνεται με $i \approx j$ είναι,

$$\Pi_{i \approx j} = \theta^2 - 1 \gamma\pi_i \pi_j / \left[\pi_i + \gamma\theta\pi_j \quad \gamma\pi_j + \theta\pi_i \right]$$

όπου η παράμετρος δεσμού $\theta \geq 1$. Αυτό το μοντέλο έχει τη μορφή του βασικού πολλαπλασιαστικού μοντέλου 2.6 όταν $\theta = 1$.

2.3.3 Το μοντέλο δεσμών του Davidson με πολλαπλασιαστική επίδραση διάταξης

Για το διατεταγμένο ζεύγος i, j οι πιθανότητες προτίμησης είναι,

$$\Pi_{ij} = \pi_i / \left(\pi_i + \gamma\pi_j + \nu \pi_i \pi_j \right)^{1/2}$$

$$\Pi_{ji} = \gamma \pi_j / (\pi_i + \gamma \pi_j + \nu \pi_i \pi_j)^{1/2} \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.12)$$

και η πιθανότητα μη προτίμησης είναι,

$$\Pi_{i \approx j} = \nu \pi_i \pi_j^{1/2} / (\pi_i + \gamma \pi_j + \nu \pi_i \pi_j)^{1/2}$$

όπου η παράμετρος $\nu \geq 0$. Αυτό το μοντέλο έχει τη μορφή του βασικού πολλαπλασιαστικού μοντέλου 2.6 όταν $\nu = 0$. Η πιθανότητα μη προτίμησης κάτω από το μοντέλο είναι ανάλογη του γεωμετρικού μέσου των δύο πιθανοτήτων προτίμησης, με παράμετρο αναλογίας $k = \nu / \sqrt{\gamma}$.

Πιο γενικές εκδοχές καθενός από τα δύο παραπάνω μοντέλα επιτρέπουν στην παράμετρο δεσμού θ, k και/ή στην παράμετρο γ του πολλαπλασιαστικού μοντέλου των Davidson and Beaver (1977) να εξαρτώνται από το i, j .

2.3.4 Ξεχωριστή επίδραση δεσμών

Το μοντέλο 2.10 υποθέτει ότι όλες οι ομάδες έχουν την ίδια τάση να φέρνουν ισοπαλίες αν και κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει συνήθως στην πράξη. Για παράδειγμα, ο Joe (1990) εντόπισε ότι κάποιοι παίκτες του σκάκι έχουν την τάση να φέρνουν περισσότερες ισοπαλίες σε σχέση με άλλους. Σ' αυτή την περίπτωση η παράμετρος a μπορεί να αντικατασταθεί από μία ξεχωριστή παράμετρο για κάθε ομάδα ως εξής:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij1} &= \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j + \sqrt{a_i a_j \pi_i \pi_j}} \\ \Pi_{ij2} &= \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j + \sqrt{a_i a_j \pi_i \pi_j}} \\ \Pi_{ij0} &= \frac{\sqrt{a_i a_j \pi_i \pi_j}}{\pi_i + \pi_j + \sqrt{a_i a_j \pi_i \pi_j}} \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, t \quad (2.13)$$

Οι εξισώσεις πιθανοφάνειας τώρα εξισώνουν τους παρατηρούμενους και τους αναμενόμενους πόντους, ισοπαλίες και νίκες για κάθε ομάδα. Αυτό το μοντέλο μπορεί να

συνδυαστεί με κάποιο από τα παραπάνω ώστε να γενικευτεί και να παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της επίδρασης διάταξης.

2.3.5 Γενικεύσεις για διατάξιμες αξιολογήσεις

Το μοντέλο Bradley-Terry ορίστηκε για δίτιμες μεταβλητές, όμως γενικεύεται και για συγκρίσεις με διατάξιμες μεταβλητές ταξινόμησης, όπως η κλίμακα αξιολόγησης (πολύ καλύτερο, λίγο καλύτερο, το ίδιο, λίγο χειρότερο, πολύ χειρότερο) στη σύγκριση δύο προϊόντων. Ο Agresti (2002) πρότεινε τη χρήση των αθροιστικών logits. Με μία κλίμακα αξιολόγησης αποτελούμενη από I κατηγορίες, έστω ότι Y_{ij} δηλώνει την απόκριση της σύγκρισης των i, j . Το μοντέλο είναι,

$$\text{logit} \left[P \ Y_{ij} \leq k \right] = a_k + \beta_i - \beta_j, \quad k = 1, \dots, I \quad (2.14)$$

Καθώς $P \ Y_{ij} \leq k = P \ Y_{ji} > I - k = 1 - P \ Y_{ji} \leq I - k$ έχουμε ότι:

$$\text{logit} \left[P \ Y_{ij} \leq k \right] = -\text{logit} \left[P \ Y_{ji} \leq I - k \right] \text{ και έτσι τελικά } a_k = -a_{I-k}.$$

Η πιο κοινή διατάξιμη κλίμακα προτίμησης είναι (νίκη, ισοπαλία, ήττα) και σ' αυτή την περίπτωση $a_1 = -a_2$ ή $a_2 = -a_1$.

2.4 Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry

2.4.1 Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry με δεσμούς

Ακολουθώντας τον Sinclair (1982) και σε συνέχεια της παραγράφου 1.7, εισάγουμε μία καινούρια παράμετρο δ για την περίπτωση των δεσμών, ούτως ώστε να προσαρμόσουμε στο μοντέλο τις αποκρίσεις των μη προτιμήσεων. Η μορφή του loglinear μοντέλου, προσθέτοντας μία τρίτη εξίσωση για τους δεσμούς, είναι:

$$\begin{aligned} \log \mu_{jk} &= a_{jk} + \lambda_j^o - \lambda_k^o \\ \log \mu_{kj} &= a_{jk} + \lambda_k^o - \lambda_j^o \\ \log \mu_{j \approx k} &= a_{jk} + \delta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Στηριζόμενοι στην έρευνα των Dittrich et al. (1998), το μοντέλο μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα loglinear μοντέλο. Συγκεκριμένα για μία $\binom{6}{2} \times 3 = 15 \times 3$ εφαρμογή (ζεύγη πανεπιστημίων \times προτιμήσεις για τα πανεπιστήμια) οι πιθανές αποκρίσεις είναι τρεις. Με $\mu_{j \approx k}$ δηλώνεται ο αναμενόμενος αριθμός μη προτιμήσεων στη σύγκριση των j, k , ενώ με δ δηλώνεται η παράμετρος της επίδρασης της μη προτίμησης. Ο πίνακας σχεδιασμού απαρτίζεται από διανύσματα στηλών με κατάλληλες καταχωρίσεις για τις παραμέτρους α, λ και δ . Για παράδειγμα, ο Πίνακας 2.1 είναι ο πίνακας σχεδιασμού για την περίπτωση τριών πανεπιστημίων.

Πίνακας 2.1
Πίνακας Σχεδιασμού

Σύγκριση	Προτίμηση	Αριθμός προτιμήσεων	α	λ_1^o	λ_2^o	λ_3^o	δ
(12)	O_1	X_{12}	1	1	-1	0	0
(12)	O_2	X_{21}	1	-1	1	0	0
(12)	Όχι	$X_{1 \approx 2}$	1	0	0	0	1
.
.
.
(23)	O_2	X_{23}	3	0	1	-1	0
(23)	O_3	X_{32}	3	0	-1	1	0
(23)	Όχι	$X_{2 \approx 3}$	3	0	0	0	1

Η παράμετρος δ μπορεί να ερμηνευτεί ως μία σταθερά επιλογής. Για παράδειγμα, για δύο ισόπαλα ως προς τις προτιμήσεις πανεπιστήμια j, k , που σημαίνει $\lambda_j^o = \lambda_k^o$, τότε το log-odds υπέρ της έκφρασης προτίμησης για κάποιο από τα δύο είναι,

$$\log \left(\frac{\Pi_{jk}}{\Pi_{j \approx k}} \right) = \log \left(\frac{\Pi_{kj}}{\Pi_{j \approx k}} \right) = -\delta$$

Αν $\delta < 0$ υπάρχει πλεονέκτημα υπέρ της έκφρασης κάποιας προτίμησης.

Για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους συνολικής προτίμησης π (worth parameters) πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι το βασικό μοντέλο Bradley-Terry είναι αμετάβλητο κάτω από μία αλλαγή κλίμακας και ότι λόγοι προσδιορισιμότητας απαιτούν $\sum_i \pi_i = 1$. Η σχέση ανάμεσα στα λ και στις παραμέτρους π δίνεται από,

$$\pi_j = \exp 2\lambda_j^o / \sum_j \exp 2\lambda_j^o, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

2.4.2 Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry: συμμεταβλητές υποκειμένων

Πέρα από την περίπτωση των δεσμών είναι συχνά χρήσιμο να μελετήσουμε την επίδραση συμμεταβλητών υποκειμένων, όπως είναι το φύλο και η γνώση ξένων γλωσσών, πάνω στις προτιμήσεις των υποκειμένων. Η loglinear μορφή του βασικού μοντέλου Bradley-Terry μπορεί εύκολα να γενικευτεί συμπεριλαμβάνοντας κατηγορικές συμμεταβλητές. Συνεχείς συμμεταβλητές θα μπορούσαν θεωρητικά να μελετηθούν με την ίδια μέθοδο φτιάχνοντας έναν ξεχωριστό πίνακα συνάφειας για καθεμιά διαφορετική παρατήρηση της συμμεταβλητής.

Ας υποθέσουμε ότι οι φοιτητές ταξινομούνται βάσει μιας πρόσθετης κατηγορικής συμμεταβλητής. Έστω ότι $\mu_{jk l}$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός προτιμήσεων για το πανεπιστήμιο j στη σύγκριση με το πανεπιστήμιο k , ανάμεσα στους φοιτητές που έχουν ταξινομηθεί στην ομάδα, βάσει συμμεταβλητής, l όπου $l = 1, 2, \dots, L$. Η loglinear μορφή του γενικευμένου μοντέλου Bradley-Terry συμπεριλαμβανομένης μίας κατηγορικής συμμεταβλητής υποκειμένων (S) δίνεται από τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned} \log \mu_{jk l} &= a_{jk l} + \lambda_j^o - \lambda_k^o + \lambda_l^s + \lambda_{jl}^{os} - \lambda_{kl}^{os} \\ \log \mu_{kj l} &= a_{kj l} - \lambda_j^o + \lambda_k^o + \lambda_l^s - \lambda_{jl}^{os} + \lambda_{kl}^{os} \\ \log \mu_{j \approx k l} &= a_{jk l} + \lambda_l^s + \delta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Η παράμετρος λ_l^s αποτελεί την κύρια επίδραση της συμμεταβλητής υποκειμένων υπολογισμένη στο l επίπεδο. Οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν λ_{jl}^{os} και λ_{kl}^{os} αποτελούν τις παραμέτρους αλληλεπίδρασης υποκειμένων-αντικειμένων. Οι συγκεκριμένες παράμετροι περιγράφουν την παρατηρούμενη επίδραση της l κατηγορίας της συμμεταβλητής υποκειμένων πάνω στην προτίμηση για το αντικείμενο j και k αντίστοιχα. Οι «ενοχλητικές»

παράμετροι a μπορούν να ερμηνευτούν ως όροι αλληλεπίδρασης κρατώντας σταθερή την περιθώρια κατανομή «ζεύγη πανεπιστημίων \times κατηγορία υποκειμένου» στον αντίστοιχο πίνακα συνάφειας «ζεύγη πανεπιστημίων \times προτίμηση \times κατηγορία υποκειμένου». Έτσι, καθώς στο παράδειγμά μας $l=8$, χρειαζόμαστε έναν $\binom{J}{2} \times 3 \times 2^l = \binom{6}{2} \times 3 \times 2^8$ πίνακα συνάφειας.

Οι παράμετροι λ_{jl}^{OS} και λ_{kl}^{OS} ερμηνεύονται με όρους των log-odds και ως ένα log-odds ratio. Για παράδειγμα,

$$\log \left(\frac{\prod_{jk\ l}}{\prod_{kj\ l}} \right) = 2 \lambda_j^O + \lambda_{jl}^{OS} - 2 \lambda_k^O + \lambda_{kl}^{OS}$$

Στην περίπτωση που η συμμεταβλητή S δεν έχει επίδραση στις προτιμήσεις των φοιτητών, δηλαδή $\lambda_{jl}^{OS} = \lambda_{kl}^{OS} = 0$ για όλα τα $l=1,2,\dots,L$ και $j=1,2,\dots,J$, τότε:

$$\log \left(\frac{\prod_{jk}}{\prod_{kj}} \right) = 2 \lambda_j^O - 2 \lambda_k^O$$

και καταλήγουμε στο βασικό μοντέλο Bradley-Terry. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μόνο ένα log-odds για τη σύγκριση δύο συγκεκριμένων πανεπιστημίων j και k . Ωστόσο, όταν υφίσταται η επίδραση της συμμεταβλητής, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία παράμετρος αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα πανεπιστήμια και τη συμμεταβλητή υποκειμένων σημαντικά διαφορετική από το 0, πρέπει να διακρίνουμε τα διαφορετικά log-odds για κάθε σύγκριση και για κάθε σημαντική παράμετρο αλληλεπίδρασης υποκειμένων-αντικειμένων. Οι λ_j^O , γι' αυτό το λόγο, μπορούν να θεωρηθούν ως παράμετροι που περιγράφουν τα πανεπιστήμια για την ομάδα αναφοράς, δηλαδή για τους φοιτητές που έχουν ενταχθεί στην κατηγορία $l=1$, καθώς για τις αντίστοιχες παραμέτρους έχουμε εξ ορισμού ότι $\lambda_{j1}^{OS} = 0$ για όλα τα $j=1,2,\dots,J$. Χρησιμοποιώντας την ομάδα $l=1$ της συμμεταβλητής ως ομάδα αναφοράς, οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν, λ_{jl}^{OS} και λ_{kl}^{OS} , ερμηνεύονται ως ένα log-odds ratio,

$$\log \left(\frac{\prod_{jk\ l} / \prod_{kj\ l}}{\prod_{jk\ 1} / \prod_{kj\ 1}} \right) = 2 \lambda_{jl}^{OS} - \lambda_{kl}^{OS}$$

Εάν η διαφορά $\lambda_{jl}^{OS} - \lambda_{kl}^{OS}$ είναι θετική, η συµµεταβλητή S έχει θετική επίδραση υπό την έννοια ότι το odds της προτίµησης για το πανεπιστήµιο j στην οµάδα l της συµµεταβλητής είναι µεγαλύτερο από το αντίστοιχο odds στην οµάδα αναφοράς $l=1$. Επιπροσθέτως, η διαφορά ανάµεσα σε δύο συνεχόμενες παραµέτρους αλληλεπίδρασης ερµηνεύεται ως ένα log-odds ratio συνεχόμενων κατηγοριών,

$$\log \left(\frac{\prod_{jk\ l+1} / \prod_{kj\ l+1}}{\prod_{jk\ l} / \prod_{kj\ l}} \right) = 2 \lambda_{j,l+1}^{OS} - \lambda_{jl}^{OS} - 2 \lambda_{k,l+1}^{OS} + \lambda_{kl}^{OS}$$

Η loglinear µορφή 2.16 έχει κάποια προφανή πλεονεκτήµατα. Η γενίκευση µε πολλαπλές συµµεταβλητές υποκειµένων είναι ξεκάθαρη. Ας θεωρήσουµε για παράδειγµα την επίδραση δύο κατηγορικών συµµεταβλητών υποκειµένων S και T , ορισµένες σε L και R επίπεδα αντίστοιχα. Η πρώτη εξίσωση της 2.16 γίνεται,

$$\log \mu_{jk\ lr} = a_{jk\ lr} + \lambda_j^O - \lambda_k^O + \lambda_l^S + \lambda_r^T + \lambda_{jl}^{OS} - \lambda_{kl}^{OS} + \lambda_{jr}^{OT} - \lambda_{kr}^{OT}$$

όπου $\mu_{jk\ lr}$ δηλώνει τον αναµενόµενο αριθµό προτιµήσεων για το πανεπιστήµιο j στη σύγκριση των πανεπιστηµίων j και k και οι φοιτητές ταξινοµούνται στο lr -οστό κελί σύµφωνα µε τις δύο συµµεταβλητές. Οι λ_l^S και λ_r^T αντιπροσωπεύουν τις κύριες επιδράσεις των συµµεταβλητών. Οι αλληλεπιδράσεις υποκειµένων-αντικειµένων λ_{jl}^{OS} , λ_{jr}^{OT} κ.τ.λ. είναι οι παράµετροι που µας ενδιαφέρουν και ερµηνεύονται ως log-odds ratios,

$$\log \left(\frac{\prod_{jk\ lr} / \prod_{kj\ lr}}{\prod_{jk\ ll} / \prod_{kj\ ll}} \right) = 2 \lambda_{jl}^{OS} - \lambda_{kl}^{OS} + 2 \lambda_{jr}^{OT} - \lambda_{kr}^{OT}$$

Το µοντέλο µε συµµεταβλητές υποκειµένων δεν περιορίζεται µόνο στις κύριες επιδράσεις και στις αλληλεπιδράσεις 2^{ης} τάξης, αλλά µπορεί να γενικευτεί και για αλληλεπιδράσεις µεγαλύτερης τάξης ανάµεσα στις συµµεταβλητές υποκειµένων και τα αντικείµενα, οι οποίες µπορούν εύκολα να µελετηθούν.

2.4.3 Το loglinear μοντέλο Bradley-Terry: συμμεταβλητές υποκειμένων και συμμεταβλητές αντικειμένων

Ένας συνηθισμένος τρόπος για την αξιολόγηση των επιδράσεων των συμμεταβλητών αντικειμένων στις προτιμήσεις των κριτών είναι ο επαναπροσδιορισμός των παραμέτρων των αντικειμένων ως ένας γραμμικός συνδυασμός $P < J$ συμμεταβλητών X_1, \dots, X_p , οι οποίες αντιπροσωπεύουν P ιδιότητες των αντικειμένων. Οι συμμεταβλητές μπορεί να είναι είτε συνεχείς, είτε κατηγορικές, αντιπροσωπεύοντας σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, μία παραγοντική δομή (Springall 1973, Bradley and El-Helbawy 1976, Critchlow and Fligner 1991). Αυτή η τεχνική μπορεί να βοηθήσει τον ερευνητή να κατανοήσει καλύτερα εκείνους τους παράγοντες που ευθύνονται για τις διαφορές μεταξύ των αντικειμένων.

Η ενσωμάτωση των συμμεταβλητών αντικειμένων μπορεί να γίνει αντικαθιστώντας τις σχετικές με τα αντικείμενα παραμέτρους λ_j^o με τη γραμμική έκφραση,

$$\lambda_j^o = \sum_{v=1}^p x_{jv} \beta_v^X$$

Τα x_{jv} δηλώνουν τις παρατηρήσεις των συμμεταβλητών περιγράφοντας το v -οστό χαρακτηριστικό του αντικειμένου j και τα β^X είναι άγνωστες παράμετροι παλινδρόμησης. Η loglinear μορφή του μοντέλου Bradley-Terry με δεσμούς και P συμμεταβλητές αντικειμένων δίνεται από τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned} \log \mu_{jk} &= a_{jk} + \sum_v x_{jv} - x_{kv} \beta_v^X \\ \log \mu_{kj} &= a_{jk} - \sum_v x_{jv} - x_{kv} \beta_v^X \\ \log \mu_{j \approx k} &= a_{jk} + \delta \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου οι παράμετροι a και δ ορίζονται όπως στις δύο προηγούμενες ενότητες.

Οι παράμετροι β^X που μας ενδιαφέρουν μπορούν ξανά να ερμηνευτούν με όρους των log-odds:

$$\log \left(\frac{\Pi_{jk}}{\Pi_{kj}} \right) = 2 \sum_v x_{jv} - x_{kv} \beta_v^X$$

Έτσι, για συμμεταβλητές των οποίων οι παρατηρήσεις απέχουν μία μονάδα, π.χ. $x_{jv} - x_{kv} = 1$, $2\beta_v^X$ αντιπροσωπεύει την επίδραση (της διαφοράς) της v -οστής μεταβλητής αντικειμένου μεταξύ των αντικειμένων j και k στο log-odds.

Για να αξιολογήσουμε την επίδραση των συμμεταβλητών υποκειμένων, προσαρμόζουμε όρους αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις συμμεταβλητές υποκειμένων και αντικειμένων με ουσιαστικά την ίδια μέθοδο που περιγράψαμε και στην ενότητα 2.4.2. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση μίας κατηγορικής συμμεταβλητής υποκειμένων και δύο συμμεταβλητών αντικειμένων ξεκινώντας από την εξίσωση του γενικευμένου μοντέλου Bradley-Terry, που περιλαμβάνει μία συμμεταβλητή υποκειμένων ορισμένη σε L επίπεδα:

$$\log \mu_{jk l} = a_{jk l} + \lambda_j^O + \lambda_{jl}^{OS} - \lambda_k^O + \lambda_{kl}^{OS} + \lambda_l^S$$

Η κύρια ιδέα είναι η επαναπαραμετροποίηση όλων των όρων του μοντέλου συμπεριλαμβανομένων των αντικειμένων j και k με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\lambda_j^O + \lambda_{jl}^{OS} = x_{j1}\beta_1^X + x_{j2}\beta_2^X + \beta_{1l}^{XS} x_{j1} + \beta_{2l}^{XS} x_{j2}$$

$$\lambda_k^O + \lambda_{kl}^{OS} = x_{k1}\beta_1^X + x_{k2}\beta_2^X + \beta_{1l}^{XS} x_{k1} + \beta_{2l}^{XS} x_{k2}$$

όπου x_{j1} δηλώνει την τιμή της μεταβλητής αντικειμένων X_1 αναφορικά με το αντικείμενο j , ο β_1^X είναι ένας συντελεστής παλινδρόμησης και ο β_{1l}^{XS} αντιπροσωπεύει έναν όρο αλληλεπίδρασης ανάμεσα στη μεταβλητή αντικειμένων X_1 και στην κατηγορική συμμεταβλητή S για τα αντικείμενα που έχουν ενταχθεί στην ομάδα l . Οι υπόλοιπες παράμετροι ορίζονται ανάλογα. Εισάγοντας όλους τους όρους στην παραπάνω εξίσωση, αποκτούμε αυτομάτως τη loglinear μορφή του γενικευμένου μοντέλου Bradley-Terry με όλες τις προαναφερθείσες επιδράσεις: δεσμούς, (μία) συμμεταβλητή υποκειμένων και (δύο) συμμεταβλητών αντικειμένων:

$$\log \mu_{jk l} = a_{jk l} + \lambda_l^S + \beta_1^X x_{j1} - x_{k1} + \beta_2^X x_{j2} - x_{k2} + \beta_{1l}^{XS} x_{j1} - x_{k1} + \beta_{2l}^{XS} x_{j2} - x_{k2}$$

Οι υπόλοιπες εξισώσεις ορίζονται ανάλογα. Η γενίκευση για παραπάνω από μία συμμεταβλητή υποκειμένων και για παραπάνω από δύο συμμεταβλητές αντικειμένων είναι προφανής. Αυτό που στην ουσία πρέπει να έχουμε είναι ένα σετ κυρίων επιδράσεων για μία ομάδα αντικειμένων μαζί μ' ένα σετ αλληλεπιδράσεων μεταξύ αντικειμένων και υποκειμένων. Οι κύριες επιδράσεις των αντικειμένων παρέχουν το μοντέλο αναφοράς. Αυτό,

όμως, που κάνει τα αντικείμενα να διαφοροποιούνται στην κλίμακα προτίμησης είναι η επίδραση των συγκεκριμένων χαρακτηριστικών των υποκειμένων.

Χρησιμοποιώντας την ομάδα $l=1$ ως ομάδα αναφοράς, το log-odds ratio είναι,

$$\log\left(\frac{\prod_{jk\ l}/\prod_{kj\ l}}{\prod_{jk\ 1}/\prod_{kj\ 1}}\right) = 2\beta_{1l}^{XS} x_{j1} - x_{k1} + 2\beta_{2l}^{XS} x_{j2} - x_{k2}$$

Οι παράμετροι που ενδιαφέρουν, β_{1l}^{XS} και β_{2l}^{XS} , μπορούν εύκολα να ερμηνευτούν για συμμεταβλητές των οποίων οι παρατηρήσεις απέχουν μία μονάδα, π.χ. $x_{j1} - x_{k1} = 1$ και $x_{j2} - x_{k2} = 1$. Το log-odds ratio δίνεται στη συνέχεια από το $2\beta_{1l}^{XS} + \beta_{2l}^{XS}$. Για παράδειγμα, αν β_{1l}^{XS} είναι θετικό και $\beta_{2l}^{XS} = 0$, το προβάδισμα, ως προς την αξιολόγηση, που αποκτά το αντικείμενο j έναντι του k οφείλεται στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στη συμμεταβλητή X_1 και στην ταξινόμηση των κριτών στην ομάδα l της συμμεταβλητής.

Ο πίνακας σχεδιασμού αποτελείται από διανύσματα στηλών με κατάλληλες τιμές για τα α , δ και λ^S και από διανύσματα στηλών που περιέχουν τις τιμές $x_{jv} - x_{kv}$ των συμμεταβλητών αντικειμένων. Όσον αφορά τα διανύσματα στηλών που αντιπροσωπεύουν τους όρους αλληλεπίδρασης β_{1l}^{XS} , β_{2l}^{XS} κ.ο.κ. μπορούν να προκύψουν από τον πολλαπλασιασμό των στηλών $x_{jv} - x_{kv}$ και λ_l^S .

2.5 Τριπλές - Πολλαπλές συγκρίσεις

Το βασικό μοντέλο για τις συγκρίσεις κατά ζεύγη μπορεί να επεκταθεί και σε τριπλές συγκρίσεις αν, για παράδειγμα, τα αντικείμενα συγκρίνονται σε ομάδες των τριών, όπου το αποτέλεσμα κάθε σύγκρισης είναι μια κατάταξη από το χειρότερο προς το καλύτερο. Οι Bradley and Terry (1952b) πρότειναν το μοντέλο,

$$P\ i > j > k = P\ i > j, k \cdot P\ j > k = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j + \pi_k} \cdot \frac{\pi_j}{\pi_j + \pi_k} \quad (2.17)$$

για σύγκριση των i , j και k σε μία τριάδα όπου $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, \dots, t$. Η γενίκευση του μοντέλου για πολλαπλές συγκρίσεις είναι τώρα εύκολη. Για $K > 2$ αντικείμενα οι πιθανότητες ακολουθούν τον παρακάτω κανόνα:

$$P\ 1 > \dots > K = \prod_{i=1}^K \frac{\pi_i}{\sum_{r=i}^K \pi_r} \quad (2.18)$$

Οι Pendergrass and Bradley (1960) μελετώντας λεπτομερέστερα τις επιλογές για μια γενίκευση από τις συγκρίσεις κατά ζεύγη στις τριπλές συγκρίσεις πρότειναν το μοντέλο,

$$P\ i > j > k = \frac{\pi_i^2 \pi_j}{\left[\pi_i^2 \pi_j + \pi_k + \pi_j^2 \pi_i + \pi_k + \pi_k^2 \pi_i + \pi_j \right]} \quad (2.19)$$

Και τα δύο αυτά μοντέλα έχουν επιθυμητά χαρακτηριστικά. Για το μοντέλο 2.17 έχουμε,

$$P\ i > j = P\ i > j | k > i, j = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} = \Pi_{ij}$$

και για το 2.19 ,

$$P\ i > j | i, j > k = P\ i > j | k > i, j = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} = \Pi_{ij}$$

2.6 Μία διδιάστατη γενίκευση του μοντέλου

Το μοντέλο Bradley-Terry έχει μία ευρεία και ουσιαστική χρήση στην ταξινόμηση αντικειμένων στις συγκρίσεις κατά ζεύγη. Η υπόθεση που κάνει δυνατή την ταξινόμηση είναι η ύπαρξη μιας γραμμικής κλίμακας της αξίας (merit)⁴ ή ισοδύναμα ενός είδους μεταβατικότητας (transitiveness) της προτίμησης. Σε κάποιες περιπτώσεις, ωστόσο, όπως είναι οι γευστικές δοκιμές προϊόντων, αυτή η υπόθεση μπορεί να μην είναι ρεαλιστική. Σ' αυτά τα πλαίσια, αν και το μοντέλο Bradley-Terry φαίνεται να είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον, η γραμμική ταξινόμηση δεν βγάζει νόημα. Για παράδειγμα, έστω ότι το προϊόν *A* προτιμάται του *B*, το *B* προτιμάται του *C* και το *C* προτιμάται του *A*. Στην προκειμένη περίπτωση είναι προφανές ότι καμία γραμμική κλίμακα της αξίας δεν αντικατοπτρίζει σωστά την προτίμηση. Οι Causeur and Husson (2004) πρότειναν μία διδιάστατη γενίκευση του μοντέλου που εξηγεί τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα συγκρινόμενα αντικείμενα. Αυτή η πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση πολυδιάστατης κλιμακοποίησης στο πλαίσιο ενός λογιστικού μοντέλου για διωνυμικά δεδομένα.

⁴ Στο μοντέλο Bradley-Terry το σκορ β_i αντιπροσωπεύει την αξία του αντικειμένου *i*

Τα δεδομένα του Πίνακα 2.2 προέρχονται από εκατό συγκρίσεις κατά ζεύγη μεταξύ πέντε αντικειμένων. Το κελί i, j του πίνακα δίνει το ποσοστό των συγκρίσεων στις οποίες το i έχει κερδίσει το j . Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα, υπάρχει αναμφίβολα μία γραμμική κλίμακα της αξίας με την ακόλουθη ταξινόμηση: $1 < 2, 3, 4 < 5$. Ταυτόχρονα, όμως, παρατηρείται και μία κατάσταση μη μεταβατικότητας ανάμεσα στα αντικείμενα 2, 3 και 4 καθώς το 4 χάνει από το 2, το 2 χάνει από το 3 και το 3 χάνει από το 4.

Τα Bradley-Terry σκορ δίνονται επίσης στον Πίνακα 2.2 μαζί με τα κατάλοιπα απόκλισης. Τα μεγαλύτερα κατάλοιπα δείχνουν τα ζεύγη για τα οποία το μοντέλο αποτυγχάνει να απεικονίσει τις παρατηρούμενες διαφορές αναφορικά με τις προτιμήσεις. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι οι κατά ζεύγη αξιολογήσεις των αντικειμένων 2, 3, 4 δείχνουν μία σημαντική διαφορά ανάμεσα σ' αυτά τα αντικείμενα, η οποία δεν εντοπίζεται από το μοντέλο. Γι' αυτό το λόγο αν και το μοντέλο Bradley-Terry παρέχει μία αξιόλογη ταξινόμηση των αντικειμένων, προβλήματα έλλειψης προσαρμογής είναι πιθανό να εμφανιστούν σε ορισμένες περιπτώσεις.

Πίνακας 2.2

Δεδομένα και κατάλοιπα απόκλισης του μοντέλου Bradley-Terry

Δεδομένα					Κατάλοιπα απόκλισης				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	0.25	0.25	0.27	0.12	-0.68	0.16	0.26	0.38	
2		0.27	0.62	0.25		-3.77	2.94	0.16	
3			0.38	0.25			-2.94	-0.68	
4				0.27					0.26
Bradley-Terry σκορ									
	-1.06	-0.10	0.10	0.00	1.06				

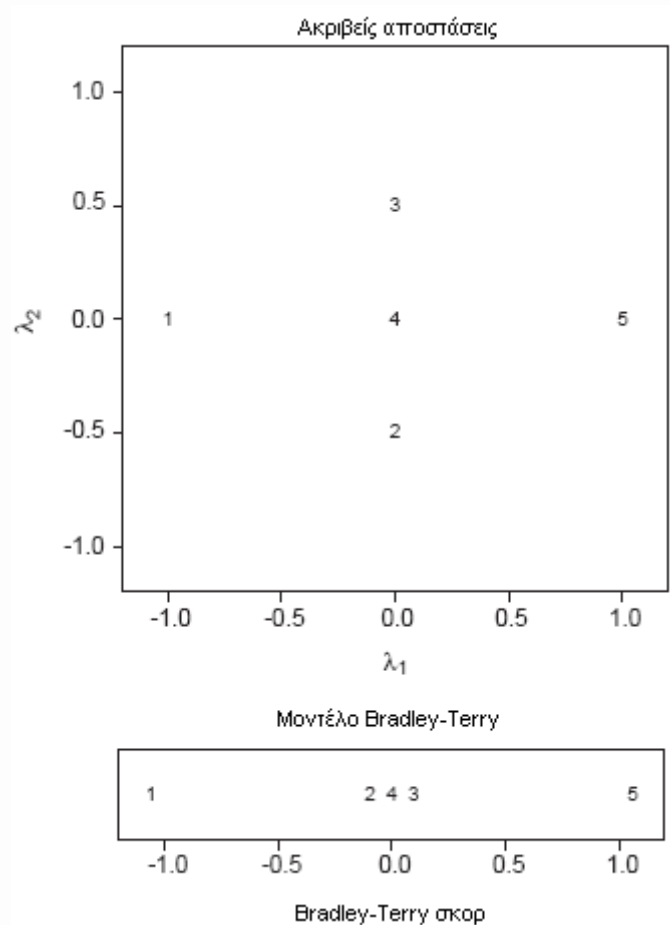
Για την επίλυση του προβλήματος προτείνεται το παρακάτω μη γραμμικό λογιστικό μοντέλο:

$$\text{logit } \Pi_{ij} = \sigma_{ij} \sqrt{\lambda_{i,1} - \lambda_{j,1}^2 + \lambda_{i,2} - \lambda_{j,2}^2} \quad (2.20)$$

όπου $\sigma_{ij} = \pm 1$ είναι μία παράμετρος προσήμου (sign parameter), με $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$, η οποία απεικονίζει την προτίμηση ανάμεσα στα αντικείμενα i και j , $\lambda_1 = \lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{n,1}$ και $\lambda_2 = \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2}, \dots, \lambda_{n,2}$ είναι διανύσματα των σκορ που ικανοποιούν τους ακόλουθους περιορισμούς προσδιορισιμότητας: $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,1} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,2} = 0$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,1} \lambda_{i,2} = 0$ (παρακάτω το πλήρες διάνυσμα των παραμέτρων θα δηλώνεται με $\lambda = (\lambda_1', \lambda_2')$).

Με άλλα λόγια, το $\text{logit } \Pi_{ij}$ θεωρείται ως μία Ευκλείδεια απόσταση (με πρόσημο) στο \mathbb{R}^2 . Η εκτίμηση των λ_1 και λ_2 και η απεικόνισή τους σ' ένα διάγραμμα παρέχει ένα είδος αποτύπωσης της προτίμησης, με την έννοια ότι οι αποστάσεις ανάμεσα στα σημεία στο διάγραμμα ερμηνεύονται ως διαφορές στην προτίμηση ανάμεσα στα αντικείμενα. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι αν στην πραγματικότητα υπάρχει μία γραμμική κλίμακα προτίμησης, δηλαδή εάν $\lambda_2 = 0$ και η ταξινόμηση είναι συνεπής με την παρατηρούμενη προτίμηση, το μοντέλο 2.20 δίνει την ίδια παρουσίαση των αντικειμένων με αυτή του μοντέλου Bradley-Terry.

Τα δεδομένα του Πίνακα 2.2 έχουν δημιουργηθεί σύμφωνα με μία ακριβή διδιάστατη παρουσίαση του $\text{logit } \Pi_{ij}$. Το Σχήμα 2.1 απεικονίζει τις ακριβείς αποστάσεις ανάμεσα στα αντικείμενα στο διδιάστατο χώρο, καθώς και τις αποστάσεις ανάμεσα στα Bradley-Terry σκορ. Όπως φαίνεται, ο άξονας x στη διδιάστατη απεικόνιση της προτίμησης εξακολουθεί να αντανακλά την κύρια τάση της προτίμησης όπως αυτή είχε προσδιοριστεί από το μοντέλο Bradley-Terry. Το διάγραμμα, ωστόσο, δείχνει ξεκάθαρα τις διαφορές ανάμεσα στα αντικείμενα 2,3,4. Η σύγκριση της γραμμικής και της διδιάστατης παρουσίασης των αντικειμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα γραφικό διαγνωστικό έλλειψης προσαρμογής του μοντέλου Bradley-Terry.



Σχήμα 2.1 Σύγκριση ανάμεσα στα Bradley-Terry σκορ και στις ακριβείς αποστάσεις

Πηγή: Causeur and Husson (2004)

2.6.1 Παράδειγμα

Το ακόλουθο σετ δεδομένων, το οποίο δείχνει τη συμβολή του διδιάστατου μοντέλου στην ανάλυση των συγκρίσεων κατά ζεύγη, προέρχεται από τη διεξαγωγή ερευνών γευστικής δοκιμής του Ανώτατου Εθνικού Ινστιτούτου για την Εκπαίδευση στη Βιομηχανία Τροφίμων στη Γαλλία το 2002. Σ' αυτό το πείραμα έλαβαν μέρος εκατό αξιολογητές με στόχο την ανάλυση της προτίμησης για επτά τύπους νιφάδων καλαμποκιού με βάση το πόσο τραγανές είναι αυτές. Ο Πίνακας 2.3 περιλαμβάνει τον αριθμό των αξιολογητών που θεώρησαν ότι το προϊόν i (γραμμές) είναι πιο τραγανό από το προϊόν j (στήλες).

Πίνακας 2.3

Αποτελέσματα συγκρίσεων κατά ζεύγη επτά ειδών νιφάδων καλαμποκιού από εκατό αξιολογητές⁵.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	39	64	40	61	76	46
2	61	0	65	59	55	85	60
3	36	35	0	31	25	41	35
4	60	41	69	0	41	80	28
5	39	45	75	59	0	71	37
6	24	15	59	20	29	0	18
7	54	40	65	72	63	82	0

Η ανάλυση των αποκλίσεων για την εξέταση της σημαντικότητας του διδιάστατου μοντέλου Bradley-Terry δίνεται στον Πίνακα 2.4. Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι η σύγκριση του μοντέλου 2.20 με τα παρακάτω μοντέλα:

$$M_0 : \text{logit } \Pi_{ij} = 0$$

$$M_1 : \text{logit } \Pi_{ij} = \sigma_{ij} |\lambda_i - \lambda_j|$$

Το μοντέλο M_0 προέρχεται από το μοντέλο 2.20 υποθέτοντας ότι $\lambda = \lambda'_1, \lambda'_2 = 0$ και υποδηλώνει το μηδενικό μοντέλο, ενώ το M_1 είναι το μονοδιάστατο μοντέλο που προέρχεται από το μοντέλο 2.20 υποθέτοντας ότι $\lambda_2 = 0$. Το M_1 συμπίπτει με το μοντέλο Bradley-Terry αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ανακολουθίες ανάμεσα στις παρατηρούμενες προτιμήσεις και στις τάξεις των Bradley-Terry σκορ.

Σύμφωνα με τον πίνακα της ανάλυσης των αποκλίσεων το μοντέλο Bradley-Terry, M_1 , φαίνεται να είναι στατιστικά σημαντικό για τα συγκεκριμένα δεδομένα $37.82 > X^2_{15} 0.05 = 25$. Το μοντέλο 2.20 είναι επίσης στατιστικά σημαντικό σε σχέση

⁵ Το κελί i, j περιέχει τον αριθμό των αξιολογητών που έχουν εκτιμήσει τις νιφάδες καλαμποκιού i ως πιο τραγανές από τις νιφάδες καλαμποκιού j

με τη μονοδιάστατη εκδοχή του, M_1 , καθώς: $243.49 > X_1^2 0.05 = 3.84$. Ταυτόχρονα, το διδιάστατο μοντέλο Bradley-Terry 2.20 είναι και επαρκές $12.23 < X_{10}^2 0.05 = 18.3$.

Πίνακας 2.4

Ανάλυση του πίνακα αποκλίσεων για τα δεδομένα των νιφάδων καλαμποκιού

Μοντέλο	Απόκλιση	β.ε.	Μεταβολή στην απόκλιση	Μεταβολή στους β.ε.
M_0	306.90	21		
M_1	269.08	6	37.82	15
Μοντέλο 2.20	25.59	5	243.49	1
Κατάλοιπο	12.23	10		

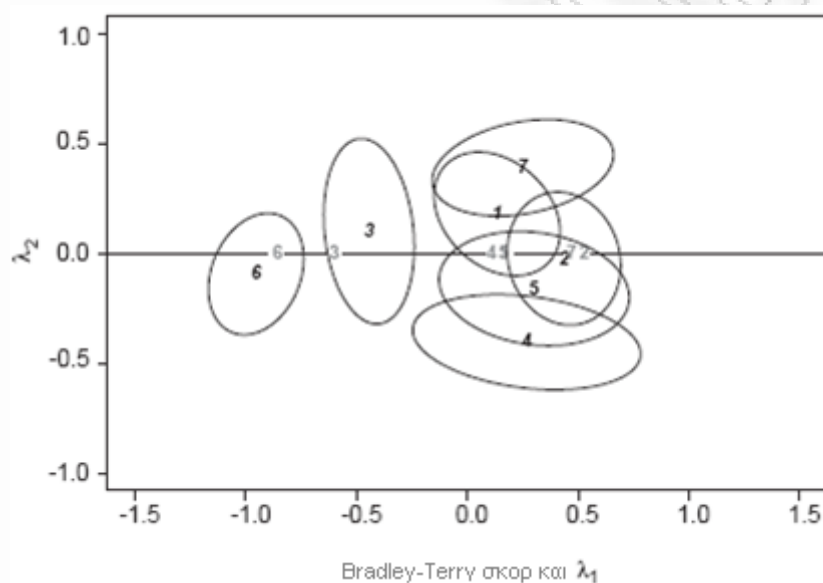
Τα Bradley-Terry σκορ, που δίνονται στον Πίνακα 2.5, προτείνουν την ακόλουθη ταξινόμηση για την προτίμηση: $6 < 3 < 4, 1, 5 < 7, 2$. Οι εκτιμήσεις των συντεταγμένων για καθένα από τα είδη νιφάδων καλαμποκιού δίνονται επίσης στον Πίνακα 2.5. Όπως είναι προφανές, η Bradley-Terry ταξινόμηση και το διάνυσμα λ_1 των συντεταγμένων συμφωνούν ως προς την κύρια τάση των προτιμήσεων. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 2.2, το οποίο περιλαμβάνει τα Bradley-Terry σκορ και τη διδιάστατη απεικόνιση μαζί με τα χωρία εμπιστοσύνης σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης. Σύμφωνα με την ανάλυση Bradley-Terry υπάρχει ένας διαχωρισμός σε τέσσερις ομάδες $6 < 3 < 4, 1, 5 < 7, 2$, με τη διδιάστατη απεικόνιση να δείχνει ότι όντως υπάρχει σημαντικά μικρότερη προτίμηση στα είδη 6 και 3 συγκριτικά με τα υπόλοιπα. Ωστόσο, η τελευταία εμβαθύνει περισσότερο στις αποστάσεις εντός του σετ προϊόντων $1, 2, 4, 5, 7$.

Ένα παράδειγμα αποτελούν τα προϊόντα 1, 4 και 5, τα οποία το μοντέλο Bradley-Terry τοποθετεί στην ίδια ομάδα. Στην πραγματικότητα, ο Πίνακας 2.3 δείχνει ότι το προϊόν 5 κερδίζει το 4 στο 59% των μεταξύ τους συγκρίσεων, το 4 κερδίζει το 1 στο 60% των μεταξύ τους συγκρίσεων και το 1 κερδίζει το 5 στο 61% των μεταξύ τους συγκρίσεων. Το διδιάστατο μοντέλο εμφανίζει αυτή την κατάσταση της μη μεταβατικότητας που ισχύει στην παραπάνω περίπτωση. Λαμβάνοντας υπόψη ένα άλλο παράδειγμα, το προϊόν 2 κερδίζει το 7 στο 60% των μεταξύ τους συγκρίσεων, τα 2 και 5 έχουν σχεδόν μοιρασμένες προτιμήσεις (το 2

Πίνακας 2.5

Εκτιμήσεις των Bradley-Terry σκορ και των συντεταγμένων λ_1, λ_2 του μοντέλου 2.20

	Είδη νιφάδων καλαμποκιού						
	1	2	3	4	5	6	7
Bradley-Terry σκορ	0.16	0.53	-0.60	0.12	0.16	-0.85	0.47
λ_1	0.14	0.44	-0.44	0.27	0.30	-0.95	0.25
λ_2	0.18	-0.02	0.10	-0.40	-0.16	-0.09	0.39



Σχήμα 2.2 Τα Bradley-Terry σκορ και η διδιάστατη απεικόνιση μαζί με τα χωρία εμπιστοσύνης σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης

Πηγή: Causeur and Husson (2004)

κερδίζει το 5 στο 55% των μεταξύ τους συγκρίσεων) και το 7 κερδίζει το 5 στο 63% των μεταξύ τους συγκρίσεων. Τα 2 και 7, ωστόσο, φαίνονται όμοια στο μονοδιάστατο γράφημα, ενώ το 2 φαίνεται ξεκάθαρα καλύτερο από το 5. Στην προκειμένη περίπτωση το διδιάστατο γράφημα παρουσιάζει τα 2 και 5 να είναι κοντά, ενώ διαχωρίζει τα 2 και 7.

Η παραπάνω γενίκευση έχει το πλεονέκτημα ότι οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων μπορούν άμεσα να απεικονιστούν σ' ένα διδιάστατο γράφημα, ενώ για γενικεύσεις μεγαλύτερων διαστάσεων το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να τις φανταστούμε. Η εκτίμηση, ωστόσο, σε τέτοια μη γραμμικά λογιστικά μοντέλα μπορεί να είναι βραδυκίνητη

διαδικασία ειδικά στην περίπτωση που ο αριθμός των αντικειμένων είναι μεγάλος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, εξάλλου, είναι σχεδόν αδύνατη η απόκτηση ενός πλήρους πίνακα δεδομένων. Τη λύση μπορεί να δώσει ένας μη πλήρης σχεδιασμός, σύμφωνα με τον οποίο μία ομάδα αντικειμένων μπορεί να παρουσιαστεί σε κάποιους αξιολογητές και μία άλλη μερικώς διαφορετική ομάδα αντικειμένων σε κάποιους άλλους αξιολογητές. Έτσι, έχουμε πλήρεις πίνακες διαθέσιμους για υποομάδες προϊόντων, αλλά δεν υπάρχουν συγκρίσεις για όλα τα ζεύγη προϊόντων. Η διδιάστατη μοντελοποίηση, στη συνέχεια, μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε προβλέψεις για τις μη παρατηρούμενες συγκρίσεις (Causeur and Husson, 2004).

Η χρήση του μοντέλου 2.20 δεν αποδίδει μια ταξινόμηση των αντικειμένων. Σύμφωνα με τα παραδείγματα, ωστόσο, μπορούμε να περιμένουμε στις περισσότερες περιπτώσεις ότι ο άξονας x της διδιάστατης απεικόνισης θα είναι εν μέρει συνεπής με την Bradley-Terry ταξινόμηση. Η 2^η διάσταση, τότε, χρησιμοποιείται ώστε να δειχθεί η σημαντικότητα ενός αθροιστικού τρόπου μοντελοποίησης της προτίμησης. Αυτό σημαίνει, επίσης, ότι ο πίνακας ανάλυσης των καταλοίπων παρέχει εργαλεία εξέτασης της σημαντικότητας της Bradley-Terry ταξινόμησης.

Αξίζει να αναφέρουμε, τέλος, ότι το μοντέλο 2.20 παραπέμπει στα μοντέλα συνάφειας και πιο συγκεκριμένα στο λογαριθμικό μη γραμμικό μοντέλο πολλαπλασιαστικής επίδρασης γραμμών-στηλών RC 2, $\log m_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \sum_{k=1}^2 \phi_k \mu_{ik} \nu_{jk}$, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, καθώς και στη μέθοδο της ανάλυσης αντιστοιχιών.

Οι παραπάνω αποτελούν, ίσως, τις πιο σημαντικές από άποψη εφαρμογών γενικεύσεις του μοντέλου και για το λόγο αυτό προχωρήσαμε σε μία πιο αναλυτική παρουσίασή τους. Όσον αφορά τις υπόλοιπες, η παρουσίασή τους είναι εκτός των στόχων της συγκεκριμένης εργασίας και γι' αυτό περιοριστήκαμε στη σύντομη αναφορά τους στα πλαίσια της ιστορικής αναδρομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εναλλακτικά Μοντέλα

3.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια του 3^{ου} κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με μοντέλα που βρίσκουν εφαρμογές σε τετραγωνικούς πίνακες συνάφειας και αφορούν στη σύγκριση συσχετισμένων αποκρίσεων της ίδιας κλίμακας. Τα εν λόγω μοντέλα χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον στην αντιμετώπιση του προβλήματος της συμφωνίας αξιολογητών (rater agreement). Ωστόσο, από τη στιγμή που αποτελούν κομμάτι της ευρύτερης οικογένειας των μοντέλων για σύμμετρες μεταβλητές ταξινόμησης, δεν μπορούν παρά να σχετίζονται άμεσα με το μοντέλο Bradley-Terry. Η ανάλυση στηρίζεται στη μοντελοποίηση της από κοινού κατανομής με τη χρήση logit ή loglinear μοντέλων.

3.2 Μοντέλο Συμμετρίας (S)

Μία $I \times I$ από κοινού κατανομή π_{ij} ικανοποιεί τη συμμετρία αν,

$$\pi_{ij} = \pi_{ji} \text{ όποτε } i \neq j \quad (3.1)$$

Κάτω από την υπόθεση της συμμετρίας, $\pi_{i\cdot} = \sum_j \pi_{ij} = \sum_j \pi_{ji} = \pi_{\cdot i}$ για όλα τα i και έτσι υπάρχει ομοιογένεια περιθωρίου. Για $I = 2$, η συμμετρία είναι ισοδύναμη της ομοιογένειας περιθωρίου, αλλά για $I > 2$ η τελευταία μπορεί να εμφανιστεί χωρίς τη συμμετρία. Όταν όλα τα $\pi_{ij} > 0$, η συμμετρία, με αναμενόμενες συχνότητες $\mu_{ij} = n\pi_{ij}$, έχει τη loglinear μορφή,

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_{ij}^{XY} \quad (3.2)$$

όπου όλα τα $\lambda_{ij}^{XY} = \lambda_{ji}^{XY}$ και $\lambda_i^X = \lambda_j^Y$, $i, j = 1, \dots, I$. Μια ισοδύναμη logit τύπου έκφραση είναι η,

$$\log \pi_{ij} / \pi_{ji} = 0 \text{ για όλα τα } i < j \quad (3.3)$$

3.3 Μοντέλο Quasi-Συμμετρίας (QS)

Επιτρέποντας στους όρους των κυρίων επιδράσεων του μοντέλου συμμετρίας 3.3 να διαφέρουν, μπορούμε να προσαρμόσουμε την ετερογένεια περιθωρίου. Το loglinear μοντέλο που προκύπτει είναι αυτό της quasi-συμμετρίας,

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_{ij}^{XY} \quad (3.4)$$

όπου $\lambda_{ij}^{XY} = \lambda_{ji}^{XY}$ για όλα τα $i < j$. Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου είναι η συμμετρία όταν $\lambda_i^X = \lambda_i^Y$ για $i = 1, \dots, I$ και η ανεξαρτησία όταν όλα τα $\lambda_{ij} = 0$.

Το μοντέλο της quasi-συμμετρίας είναι ακόμη γνωστό και ως μοντέλο συμμετρικής συνάφειας λόγω της συμμετρίας των odds ratio,

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, I \quad (3.5)$$

Άλλες ισοδύναμες εκφράσεις είναι η πολλαπλασιαστική,

$$\pi_{ij} = \alpha_i \beta_j \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, I \quad (3.6)$$

και η

$$\pi_{ij}^{QS} = \frac{2c_i}{c_i + c_j} \pi_{ij}^S, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, I \quad (3.7)$$

που έχει τη μορφή απόκλισης από τη συμμετρία.

3.4 Μοντέλο Quasi-ανεξαρτησίας (QI)

Οι τετραγωνικοί πίνακες παρουσιάζουν συνήθως θετική εξάρτηση, κάτι που αποδεικνύεται από τις αυξημένες, σε σχέση με αυτές που προβλέπει το μοντέλο της ανεξαρτησίας, συχνότητες των κελιών της κυρίας διαγωνίου. Εξαιτίας, όμως, του γεγονότος ότι τα σύμμετρα ζεύγη βρίσκονται εκτός κύριας διαγωνίου, η δομή απλοποιείται.

Ένας τετραγωνικός πίνακας συνάφειας ικανοποιεί την quasi-ανεξαρτησία όταν οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, δοθέντος ότι τα αποτελέσματα γραμμών και στηλών διαφέρουν. Το μοντέλο έχει τη loglinear μορφή,

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \delta_i I \quad i = j \quad (3.8)$$

όπου $I \cdot$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$I_{i=j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.9)$$

Αυτό προσθέτει μία παράμετρο για κάθε κελί της κύριας διαγωνίου στο μοντέλο της ανεξαρτησίας. Οι τρεις πρώτοι όροι της 3.8 καθορίζουν την ανεξαρτησία, ενώ τα δ_i επιτρέπουν στις μ_{ii} να αποκλίνουν απ' αυτό το σχέδιο και να έχουν τυχαίες θετικές τιμές. Όταν $\delta_i > 0$, μ_{ii} είναι μεγαλύτερη απ' ότι κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας.

Το μοντέλο της quasi-ανεξαρτησίας εφαρμόζεται σε πίνακες με $I \geq 3$. Αποτελεί, επιπροσθέτως, ειδική περίπτωση της quasi-συμμετρίας 3.6 κατά την οποία τα γ_{ij} για $i \neq j$ είναι όμοια. Ο Caussinus (1966, p.146) έδειξε ότι τα δύο μοντέλα είναι ισοδύναμα για $I = 3$.

3.5 Το μοντέλο Bradley-Terry και η quasi-συμμετρία

Αν θεωρήσουμε με x_{ij} τον παρατηρούμενο αριθμό φορών που η αγωγή i προτιμάται της j στις μεταξύ τους συγκρίσεις, τότε, οι αναμενόμενες κάτω από το μοντέλο Bradley-Terry συχνότητες $\hat{\mu}_{ij}$ δίνονται από την ακόλουθη έκφραση (Fienberg and Larntz, 1976),

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{n_{ij} \hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j} \quad (3.10)$$

όπου $n_{ij} = x_{ij} + x_{ji}$ και οι εκτιμήσεις των αναμενόμενων συχνοτήτων πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση,

$$\hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ji} = x_{ij} + x_{ji} = n_{ij} \text{ για } i \neq j \quad (3.11)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί καταδεικνύουν ότι το μοντέλο Bradley-Terry μπορεί να προσδιοριστεί εφαρμόζοντας το μοντέλο της quasi-συμμετρίας στον παραγόμενο $I \times I$ πίνακα, του οποίου η κύρια διαγώνιος αποτελείται από μηδενικά. Οι Fienberg and Larntz (1976) έδειξαν ότι το μοντέλο Bradley-Terry είναι μία logit εκδοχή του μοντέλου της quasi-συμμετρίας 3.4. Για την quasi-συμμετρία, δοθέντος ότι μία παρατήρηση βρίσκεται στο κελί i, j ή στο j, i , το logit της υπό συνθήκη πιθανότητας του κελιού i, j ισούται με,

$$\begin{aligned}\log \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ji}} &= \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_{ij}^{XY} - \lambda + \lambda_j^X + \lambda_i^Y + \lambda_{ji}^{XY} \\ &= \lambda_i^X - \lambda_i^Y - \lambda_j^X + \lambda_j^Y = \beta_i - \beta_j,\end{aligned}$$

όπου $\beta_i = \lambda_i^X - \lambda_i^Y$ και $\beta_j = \lambda_j^X - \lambda_j^Y$. Οι εκτιμήσεις $\hat{\lambda}_i^X$, $\hat{\lambda}_i^Y$, $\hat{\lambda}_j^X$ και $\hat{\lambda}_j^Y$ της quasi-συμμετρίας αποφέρουν τις εκτιμήσεις των $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_j$ για το μοντέλο Bradley-Terry.

Μία εναλλακτική προσέγγιση του μοντέλου Bradley-Terry προέρχεται από την ισοδύναμη έκφραση της quasi-συμμετρίας,

$$\pi_{ij}^{OS} = \frac{2c_i}{c_i + c_j} \pi_{ij}^S$$

Λόγω του ότι $\pi_{ij}^S = \pi_{ji}^S$, ισχύει $\frac{\pi_{ij}^{OS}}{\pi_{ji}^{OS}} = \frac{c_i}{c_j}$. Συνεπώς για $\pi_{ij}^{OS} = \Pi_{ij}$, το μοντέλο των Bradley-

Terry δεν είναι τίποτα άλλο από το μοντέλο της quasi-συμμετρίας με $c_i \propto \exp \beta_i$.

3.6 Το μοντέλο Bradley-Terry και η quasi-ανεξαρτησία

Η απεικόνιση της σχέσης μεταξύ των μοντέλων Bradley-Terry και quasi-ανεξαρτησίας μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή μέσα από την παράθεση του παρακάτω παραδείγματος όπως αυτό παρουσιάζεται από τους Fienberg and Larntz (1976). Ας πάρουμε την περίπτωση τεσσάρων αγωγών $t=4$. Η μορφή της quasi-συμμετρίας για το μοντέλο Bradley-Terry υποδεικνύει την τοποθέτηση των δεδομένων σ' έναν 4×4 πίνακα μετρήσεων όπως είναι ο 3.1(α). Οι παύλες στη διαγώνιο αντιπροσωπεύουν δομικά μηδενικά.

Μία εναλλακτική διάταξη προέρχεται από τη διωνυμική φύση του δειγματοληπτικού σχήματος που χρησιμοποιείται στις συγκρίσεις. Για $t=4$ έχουμε $\frac{t-1}{2} = \frac{4-1}{2} = 6$ διωνυμικά δείγματα που προκύπτουν από τις συγκρίσεις μεταξύ 2 εκ των 4 αγωγών. Έτσι μπορούμε να τοποθετήσουμε τα δεδομένα σ' έναν 4×6 πίνακα συχνοτήτων όπως είναι ο 3.1(β). Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε 12 δομικά μηδενικά. Γενικά ο πίνακας θα έχει τη μορφή ενός $t \times \frac{t-1}{2}$ πίνακα.

Πίνακας 3.1

Διάταξη δεδομένων για συγκρίσεις κατά ζεύγη με $t = 4$ αγωγές

(α) Τυπική Διάταξη

Εναντίον

		1	2	3	4
Υπέρ	1	-	x_{12}	x_{13}	x_{14}
	2	x_{21}	-	x_{23}	x_{24}
	3	x_{31}	x_{32}	-	x_{34}
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	-

Αγωγή που προτιμάται

(β) Εναλλακτική Διάταξη

Αριθμός ζεύγους σύγκρισης

		1	2	3	4	5	6
Υπέρ	1	x_{12}	x_{13}	x_{14}	-	-	-
	2	x_{21}	-	-	x_{23}	x_{24}	-
	3	-	x_{31}	-	x_{32}	-	x_{34}
	4	-	-	x_{41}	-	x_{42}	x_{43}

Τα αθροίσματα γραμμών στον Πίνακα 3.1(β) είναι τα επαρκή στατιστικά $x_{i\cdot}$, ενώ τα αθροίσματα στηλών αποτελούν τα δειγματικά μεγέθη $n_{\cdot j}$. Το μοντέλο Bradley –Terry αντιστοιχεί στο μοντέλο της quasi-ανεξαρτησίας στον $t \times \frac{t-1}{2}$ πίνακα των αναμενόμενων συχνοτήτων, μ_{ij} , οι οποίες είναι τοποθετημένες όπως στον Πίνακα 3.1(β).

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανάλυση χαρακτηριστικών εφαρμογών

4.1 Εισαγωγή

Στο 4^ο κεφάλαιο θα προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίαση χαρακτηριστικών εφαρμογών αναφορικά με το μοντέλο Bradley-Terry. Στην ενότητα 4.2 θα ασχοληθούμε με το παράδειγμα που φιλοξενείται στην εργασία των Li and Kim (2000), με σκοπό την αποτύπωση της διαδικασίας κατασκευής ενός μοντέλου για την εκτίμηση του κινδύνου αυτοκινητικών ατυχημάτων χρησιμοποιώντας ένα γενικευμένο μοντέλο Bradley-Terry. Στο πλαίσιο αυτό θα ακολουθήσει η περιγραφή της μορφής των δεδομένων, η περιγραφή του μοντέλου, η εξαγωγή εκτιμήσεων και η συμπερασματολογία. Η ενότητα 4.3 περιλαμβάνει την ανάλυση χαρακτηριστικών συνόλων δεδομένων της βιβλιογραφίας. Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιαστούν δύο παραδείγματα σχετικά με το μοντέλο Bradley-Terry, ένα που θα αφορά στη βασική μορφή του μοντέλου και ένα στη μορφή που περιλαμβάνει την επίδραση διάταξης, κάνοντας χρήση των στατιστικών πακέτων SPSS, S-Plus και της στατιστικής γλώσσας προγραμματισμού R.

4.2 Παράδειγμα

Για την κατασκευή του γενικευμένου μοντέλου Bradley-Terry για την εκτίμηση του κινδύνου αυτοκινητικών ατυχημάτων γίνεται χρήση μόνο των δεδομένων των ατυχημάτων. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένα loglinear μοντέλο για τα odds ατυχήματος διαφόρων ομάδων οδηγών, οι οποίες έχουν προσδιοριστεί από χαρακτηριστικά (οδηγού-οχήματος) όπως είναι η ηλικιακή ομάδα και το φύλο, ενώ παράλληλα γίνεται εκτίμηση ενός σετ σκορ για το σχετικό κίνδυνο ατυχήματος για τις συγκεκριμένες ομάδες οδηγών. Χρησιμοποιώντας την έννοια «υπαιτιότητα οδηγού», η μέθοδος εστιάζεται στην περίπτωση των συγκρούσεων μεταξύ δύο οχημάτων υποθέτοντας ότι η υπαιτιότητα του οδηγού μπορεί να εκφραστεί με μια δίτιμη μεταβλητή.

4.2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Η απόδοση της υπαιτιότητας στον έναν από τους δύο εμπλεκόμενους στη σύγκρουση οδηγούς μπορεί να θεωρηθεί ως σύγκριση με έκφραση προτίμησης μεταξύ δύο υποκειμένων. Οι οδηγοί χωρίζονται σε I ομάδες, οι οποίες διαμορφώνονται από συνδυασμούς χαρακτηριστικών (π.χ. δύο ηλικιακές ομάδες και το φύλο δημιουργούν τέσσερις καινούριες ομάδες: νέοι άντρες, νέες γυναίκες, ηλικιωμένοι άντρες και ηλικιωμένες γυναίκες). Οι συχνότητες αναφορικά με την υπαιτιότητα των οδηγών συνοψίζονται σ' έναν πίνακα συνάφειας (Πίνακας 4.1), στον οποίο τα n_{ij} αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των ατυχημάτων με εμπλεκόμενους έναν οδηγό με υπαιτιότητα που ανήκει στην ομάδα i και έναν οδηγό χωρίς υπαιτιότητα που ανήκει στην ομάδα j . Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου n_{ii} διαφέρουν από τα υπόλοιπα στοιχεία καθώς υποδεικνύουν τον αριθμό των συγκρούσεων μεταξύ δύο οδηγών που ανήκουν στην ίδια ομάδα i . Είναι φανερό ότι ο αριθμός των συγκρούσεων μεταξύ ενός οδηγού της ομάδας i και ενός οδηγού της ομάδας j είναι $n_{ij} + n_{ji}$, με το ποσοστό των υπαίτιων οδηγών της i ομάδας να είναι $n_{ij} / (n_{ij} + n_{ji})$.

Πίνακας 4.1

Πίνακας συνάφειας διπλής εισόδου για τις συχνότητες των δεδομένων

Οδηγός με υπαιτιότητα	Οδηγός χωρίς υπαιτιότητα			
	1	2	...	I
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1I}
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2I}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I	n_{I1}	n_{I2}	...	n_{II}

Στο μοντέλο Bradley-Terry η προτίμηση ενός αντικειμένου εις βάρος κάποιου άλλου εκφράζεται από μία παράμετρο. Αυτό στην περίπτωση μας υποδεικνύει την ύπαρξη I παραμέτρων για τις I ομάδες οδηγών οι οποίες δηλώνονται ως β_1, \dots, β_I . Η μία απ' αυτές, έστω η β_I , για λόγους προσδιορισιμότητας θεωρείται η ομάδα αναφοράς παίρνοντας την τιμή 0. Έτσι, μία θετική παράμετρος υποδηλώνει σημαντικό κίνδυνο ατυχήματος και μία

αρνητική μειωμένο κίνδυνο, σε σχέση πάντα με την ομάδα αναφοράς. Καθεμία παράμετρος αποτελεί το σκορ σχετικού κινδύνου για την υπό εξέταση ομάδα οδηγών. Το odds της υπαιτιότητας ενός οδηγού της ομάδας i που εμπλέκεται σε σύγκρουση μ' έναν οδηγό της ομάδας j είναι,

$$\log \theta_{ij} = \log \frac{\Pi_{ij}}{\Pi_{ji}} = \beta_i - \beta_j$$

ή ισοδύναμα,

$$\Pi_{ij} = \frac{\exp \beta_i - \beta_j}{1 + \exp \beta_i - \beta_j}$$

Αυτό σημαίνει ότι το odds του οδηγού με υπαιτιότητα καθορίζεται από τη διαφορά των σκορ σχετικού κινδύνου. Επίσης, οποιοδήποτε συμπέρασμα σχετικά με τα σκορ κινδύνου μπορεί να εξαχθεί μόνο από δεδομένα ατυχημάτων που αφορούν οδηγούς δύο διαφορετικών ομάδων. Με άλλα λόγια, οι πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν για τα β_i και β_j εμπεριέχονται στις συχνότητες n_{ij} και n_{ji} και όχι στις n_{ii} και n_{jj} .

Οι ερευνητές συχνά εκτιμούν τις επιδράσεις ενός αριθμού παραγόντων πάνω στον κίνδυνο ατυχήματος ενός οδηγού αντί να εκτιμούν απευθείας τα σκορ για το σχετικό κίνδυνο ατυχήματος. Γενικά, υπάρχουν δύο τύποι παραγόντων: αυτοί που σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά των οδηγών και των οχημάτων (συμμεταβλητές υποκειμένων) και αυτοί που σχετίζονται με τις συνθήκες ενός ατυχήματος (συμμεταβλητές αντικειμένων). Οι πρώτοι μπορεί να διαφέρουν για τους δύο εμπλεκόμενους στο ατύχημα οδηγούς και καλούνται παράγοντες οδηγού-οχήματος. Οι δεύτεροι είναι κοινί για τους δύο οδηγούς και καλούνται παράγοντες ατυχήματος. Το μοντέλο Bradley-Terry μπορεί να γενικευτεί για την εκτίμηση των επιδράσεων αυτών των παραγόντων κάτω από την υπόθεση ότι τα σκορ σχετικού κινδύνου αποτελούν γραμμικές συναρτήσεις αυτών των παραγόντων.

Προτού παρουσιάσουμε το μοντέλο στη γενική του μορφή, θα περιγράψουμε την περίπτωση όπου έχουμε δύο παράγοντες οδηγού-οχήματος: την ηλικιακή ομάδα και το φύλο. Το loglinear μοντέλο για το σκορ σχετικού κινδύνου έχει τη μορφή,

$$\beta_k = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^G + \lambda_{ij}^{AG}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, 4$$

Με A συμβολίζεται η ηλικιακή ομάδα $\left(i = \begin{cases} 1, & \text{νέος} \\ 2, & \text{ηλικιωμένος} \end{cases} \right)$ και με G το φύλο $\left(j = \begin{cases} 1, & \text{άντρας} \\ 2, & \text{γυναίκα} \end{cases} \right)$. Παίρνοντας όλους τους συνδυασμούς μεταξύ φύλου και ηλικίας είναι προφανές ότι σχηματίζονται τέσσερις διαφορετικές ομάδες οδηγών $k = 1, \dots, 4$. Η παράμετρος λ_j^A αποτελεί την κύρια επίδραση της ηλικιακής ομάδας πάνω στο σκορ σχετικού κινδύνου, ενώ η παράμετρος λ_j^G αποτελεί την κύρια επίδραση του φύλου. Με λ_{ij}^{AG} , τέλος, περιγράφεται η αλληλεπίδραση μεταξύ ηλικιακής ομάδας και φύλου.

Αντικαθιστώντας τις γραμμικές εξισώσεις στο μοντέλο Bradley-Terry, παίρνουμε μία γενίκευση για τα odds ενός οδηγού με υπαιτιότητα ως προς έναν άλλο οδηγό. Για παράδειγμα, σε μία σύγκρουση στην οποία εμπλέκονται ένας νέος άντρας της 1^{ης} ομάδας οδηγών και μία νέα γυναίκα της 2^{ης} ομάδας οδηγών,

$$\log \theta_{12} = \lambda - \lambda + \lambda_1^A - \lambda_1^A + \lambda_1^G - \lambda_2^G + \lambda_{11}^{AG} - \lambda_{12}^{AG}$$

Η ερμηνεία του μοντέλου είναι ξεκάθαρη. Παίρνοντας το δεξί μέρος της εξίσωσης στην εκθετική του μορφή έχουμε: $\exp \lambda_1^G - \lambda_2^G$ που δείχνει την κύρια επίδραση του φύλου από την άποψη του αριθμού των φορών που αυξάνεται το odds της υπαιτιότητας ενός άντρα οδηγού συγκρινόμενο με αυτό μιας γυναίκας οδηγού. Παρομοίως, ο όρος $\exp \lambda_1^A - \lambda_1^A$ δείχνει την κύρια πολλαπλασιαστική επίδραση της ηλικιακής ομάδας με υπαιτιότητα. Στην προκειμένη περίπτωση ισούται με 1 καθώς και οι δύο οδηγοί ανήκουν στην ίδια ηλικιακή ομάδα, αυτή των νέων. Επίσης, ο όρος $\exp \lambda_{11}^{AG} - \lambda_{12}^{AG}$ δείχνει την αλληλεπίδραση ηλικιακής ομάδας και φύλου και ερμηνεύεται αναλόγως.

Οι επιδράσεις των παραγόντων ατυχήματος εισάγονται στο μοντέλο ως όροι αλληλεπίδρασης. Πέρα από το φύλο και την ηλικία ενδιαφέρον παρουσιάζει και το είδος της σύγκρουσης, το οποίο προσδιορίζεται από την κατεύθυνση των δύο οχημάτων: αντίθετη ή ίδια. Η επίδραση του είδους της σύγκρουσης στο σκορ σχετικού κινδύνου αντιπροσωπεύεται από τις αλληλεπιδράσεις του είδους της σύγκρουσης με την ηλικιακή ομάδα και το φύλο. Το loglinear μοντέλο για το σκορ σχετικού κινδύνου έχει τη μορφή,

$$\beta_k = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^G + \lambda_{ij}^{AG} + \lambda_{il}^{AC} + \lambda_{jl}^{GC}, \quad i, j, l = 1, 2, \quad k = 1, \dots, 4$$

όπου με C συμβολίζεται το είδος της σύγκρουσης $\left(l = \begin{cases} 1, & \text{ίδια κατεύθυνση} \\ 2, & \text{αντίθετη κατεύθυνση} \end{cases} \right)$.

Οι όροι αλληλεπίδρασης του είδους της σύγκρουσης με την ηλικιακή ομάδα και το φύλο προσδιορίζονται από τα λ_{il}^{AC} και λ_{jl}^{GC} . Αντικαθιστώντας στο μοντέλο Bradley-Terry παίρνουμε τη γενίκευση για τα log-odds της υπαιτιότητας. Για παράδειγμα, για νέους άντρες και νέες γυναίκες οδηγούς που εμπλέκονται σε ατυχήματα αντίθετης κατεύθυνσης το μοντέλο είναι,

$$\log \theta_{12} = \lambda - \lambda + \lambda_1^A - \lambda_1^A + \lambda_1^G - \lambda_2^G + \lambda_{11}^{AG} - \lambda_{12}^{AG} + \lambda_{12}^{AC} - \lambda_{12}^{AC} + \lambda_{12}^{GC} - \lambda_{22}^{GC}$$

Οι κύριες επιδράσεις για τους παράγοντες ατυχήματος δεν συμπεριλαμβάνονται στα loglinear μοντέλα για τα σκορ σχετικού κινδύνου για δύο λόγους. Πρώτον, η ανάλυσή μας επικεντρώνεται στις ομάδες οδηγών που ορίζονται από τους παράγοντες οδηγού-οχήματος. Δεύτερον, αυτές οι κύριες επιδράσεις δεν μπορούν να εκτιμηθούν από το μοντέλο, το οποίο βασίζεται σε δεδομένα οδηγού-οχήματος και οι παράγοντες ατυχήματος είναι κοινοί για τους οδηγούς και τα οχήματα που εμπλέκονται στην ίδια σύγκρουση.

Για μεγαλύτερη ευκολία η γενική μορφή του μοντέλου θα παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας ένα σετ από ψευδομεταβλητές. Οι παράγοντες οδηγού-οχήματος που ορίζουν την i -οστή ομάδα οδηγών δηλώνονται από p ψευδομεταβλητές x_{i1}, \dots, x_{ip} , ενώ οι παράγοντες ατυχήματος από q ψευδομεταβλητές y_1, \dots, y_q . Το γραμμικό μοντέλο για το σκορ σχετικού κινδύνου γίνεται,

$$\beta_i = \sum a_r x_{ir} + \sum b_r x_{iu} x_{iv} + \sum c_r x_{iu} y_v$$

και το μοντέλο για τα log-odds γίνεται,

$$\log \theta_{ij} = \sum a_r x_{ir} - x_{jr} + \sum b_r x_{iu} x_{iv} - x_{ju} x_{jv} + \sum c_r x_{iu} - x_{ju} y_v$$

Η παράμετρος προς εκτίμηση a_r υποδεικνύει την κύρια επίδραση του παράγοντα οδηγού-οχήματος, η b_r την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δύο παράγοντες οδηγού-οχήματος και η c_r την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον παράγοντα οδηγού-οχήματος και στον παράγοντα ατυχήματος. Στο μοντέλο περιλαμβάνονται μόνο οι αλληλεπιδράσεις 2^{nc} τάξης καθώς μεγαλύτερης τάξης αλληλεπιδράσεις θα έκαναν την ερμηνεία των αποτελεσμάτων πιο περίπλοκη.

4.2.2 Δεδομένα και μέθοδοι ανάλυσης

Τα δεδομένα έχουν παρθεί από τις αναφορές ατυχημάτων της αστυνομίας της Χαβάης για την περίοδο 1986-1993. Η βάση δεδομένων έχει γραμμές που περιέχουν μεταβλητές οδηγού-οχήματος (συμμεταβλητές υποκειμένων), όπως είναι η υπαιτιότητα, η ηλικία, το φύλο, ο ελιγμός του οχήματος, ανθρώπινοι παράγοντες και οδηγικά λάθη και μεταβλητές ατυχήματος (συμμεταβλητές αντικειμένων) όπως είναι το είδος της σύγκρουσης, η ώρα, η τοποθεσία και ο καιρός. Οι κατανομές συχνοτήτων κάποιων από τις μεταβλητές οδηγού-οχήματος εμφανίζονται στον Πίνακα 4.2.

Για το διαχωρισμό ανάμεσα σε νέους και ηλικιωμένους οδηγούς, η ηλικία διαιρέθηκε σε έξι διαστήματα: 15-19, 20-24, 25-34, 35-54, 55-69 και 70+. Τρεις διαφορετικές αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν ως χαρακτηριστικά παραδείγματα. Η πρώτη περιγράφει τη συνολική σχέση της ηλικιακής ομάδας και του φύλου πάνω στον κίνδυνο ατυχήματος. Η δεύτερη περιλαμβάνει έναν πρόσθετο παράγοντα οδηγού-οχήματος, τον ελιγμό του οχήματος. Η τρίτη, τέλος, δείχνει τον τρόπο εκτίμησης της επίδρασης μιας μεταβλητής ατυχήματος, του είδους της σύγκρουσης, πάνω στον κίνδυνο ατυχήματος των οδηγών συμπεριλαμβανομένων των αλληλεπιδράσεών της με την ηλικιακή ομάδα και το φύλο. Για το είδος της σύγκρουσης κατασκευάστηκε μία δίτιμη μεταβλητή, για τις συγκρούσεις δύο οχημάτων που κινούνται στην ίδια κατεύθυνση και για τις συγκρούσεις δύο οχημάτων που κινούνται σε διαφορετική κατεύθυνση.

Πίνακας 4.2

Χαρακτηριστικά οδηγών που ενεπλάκησαν σε συγκρούσεις δύο οχημάτων στη Χαβάη

Χαρακτηριστικό	Οδηγοί με υπαιτιότητα		Οδηγοί χωρίς υπαιτιότητα	
	n	%	n	%
Φύλο				
Αντρας	60947	65.48	59500	62.71
Γυναίκα	32130	34.52	35382	37.29
Ελιγμός οχήματος				
Στροφή, προσπέραση, συγχώνευση λωρίδων, αλλαγή λωρίδας	61146	64.63	85843	90.29
Κίνηση στην ευθεία και άλλα	33463	35.37	9227	9.71
Ανθρώπινοι παράγοντες				
Κανένας	7081	7.82	87659	93.84
Απροσεξία	49516	54.67	2912	3.12
Λανθασμένη κρίση	25297	27.93	1523	1.63
Αλκοόλ ή ναρκωτικά	2399	2.65	252	0.27
Άλλοι	6283	6.94	1065	1.14
Οδηγικά λάθη				
Κανένα	19474	21.16	87956	94.07
Μη παραχώρηση προτεραιότητας	27958	30.38	930	0.99
Μη τήρηση αποστάσεων	15860	17.23	706	0.76
Άλλοι	28732	31.22	3904	4.18
Μέση ηλικία (σε έτη)	32.7		35.9	

4.2.3 Αποτελέσματα

Ο Πίνακας 4.3 περιέχει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων καθώς και τα τυπικά τους σφάλματα για τα τρία διαφορετικά μοντέλα. Μία κατηγορία για κάθε παράγοντα έχει επιλεγεί

ως κατηγορία αναφοράς και η αντίστοιχη παράμετρος έχει την τιμή 0. Τα στατιστικά απόκλισης εμφανίζονται στην τελευταία γραμμή και δείχνουν το πόσο καλή είναι η προσαρμογή των μοντέλων. Τα p -value είναι $P(X^2 \geq 79) = 0.02$ για το μοντέλο I, $P(X^2 \geq 340) = 0.0003$ για το μοντέλο II και $P(X^2 \geq 143) = 0.04$ για το μοντέλο III. Παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω μοντέλα εμφανίζονται στατιστικά σημαντικά σε σύγκριση με το μηδενικό μοντέλο $\log \theta_{ij} = 0$, με το μοντέλο II να έχει την καλύτερη προσαρμογή.

Στο μοντέλο I η εκτίμηση της παραμέτρου για την ηλικιακή ομάδα 35-54 είναι -0.879, η οποία είναι η μικρότερη αρνητική στατιστικά σημαντική εκτίμηση ανάμεσα στις έξι ηλικιακές ομάδες. Αυτό σημαίνει ότι οι οδηγοί της συγκεκριμένης ηλικιακής ομάδας είναι οι πιο ασφαλείς. Η εκτίμηση της παραμέτρου για τους άντρες οδηγούς είναι αρνητική και στατιστικά σημαντική -0.102, κάτι που σημαίνει ότι οι άντρες οδηγοί έχουν χαμηλότερα σκορ κινδύνου από τις γυναίκες οδηγούς. Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσου σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ ηλικιακής ομάδας και φύλου, η εκτίμηση του σκορ του σχετικού κινδύνου για του άντρες οδηγούς ηλικίας 35-54 είναι $-0.102 + -0.879 + 0.128 = -0.853$. Εναλλακτικά, παίρνοντας την εκθετική τιμή της εκτίμησης μιας παραμέτρου μπορούμε να δείξουμε την πολλαπλασιαστική επίδραση ενός παράγοντα στο odds της υπαιτιότητας σε σχέση με την ομάδα αναφοράς. Για παράδειγμα, το odds της υπαιτιότητας ενός οδηγού ηλικίας 35-54 είναι 0.415 φορές $\exp -0.879$ το odds ενός οδηγού ηλικίας 70+. Με άλλα λόγια, ένας οδηγός ηλικίας 70+ είναι περίπου 2.4 φορές πιθανότερο να είναι υπαίτιος από έναν οδηγό ηλικίας 35-54. Επίσης, όταν ένας άντρας οδηγός ηλικίας 15-19 συγκρουστεί μ' έναν άντρα οδηγό ηλικίας 35-54, το odds να είναι υπαίτιος ο νέος οδηγός είναι $2.029 \exp -0.172 + 0.879$ φορές το odds του μεγαλύτερου οδηγού.

Στο μοντέλο I οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για την ηλικιακή ομάδα, το φύλο και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις είναι όλες στατιστικά σημαντικές, υποδεικνύοντας τις σημαντικές διαφορές στο ρίσκο ατυχήματος ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα και το φύλο. Οι αρνητικές παράμετροι για τις ηλικίες 15-19 έως και 55-69 δείχνουν ότι οι οδηγοί αυτών των ηλικιακών ομάδων έχουν μικρότερο ρίσκο κινδύνου από τους οδηγούς της ομάδας αναφοράς 70+. Η μικρότερη εκτίμηση της ηλικιακής ομάδας 15-19 σημαίνει ότι οι οδηγοί 15-19 και

Πίνακας 4.3

Εκτιμήσεις παραμέτρων και τυπικά σφάλματα

	<i>Μοντέλο I</i>		<i>Μοντέλο II</i>		<i>Μοντέλο III</i>	
	β	<i>Standard error</i>	β	<i>Standard error</i>	β	<i>Standard error</i>
Ηλικιακή ομάδα (A)						
15-19	-0.172	0.054†	0.022	0.063	0.198	0.063‡
20-24	-0.506	0.053‡	-0.303	0.061‡	-0.175	0.061‡
25-34	-0.713	0.051‡	-0.537	0.059‡	-0.407	0.059‡
35-54	-0.879	0.050‡	-0.787	0.059‡	-0.718	0.058‡
55-69	-0.629	0.055‡	-0.623	0.064‡	-0.567	0.063‡
70+	0.000	§	0.000	§	0.000	§
Φύλο (G)						
Άντρας	-0.102	0.056‡	-0.051	0.063	0.057	0.057
Γυναίκα	0.000	§	0.000	§	0.000	§
Ελιγμός οχήματος (V)						
Στροφή, προσπέραση, συγχώνευση λωρίδων, αλλαγή λωρίδας			1.792	0.073‡		
Κίνηση στην ευθεία και άλλα			0.000	§		
Αλληλεπίδραση A × G						
15-19 × άντρας	0.204	0.063‡	0.224	0.071‡	0.177	0.064‡
20-24 × άντρας	0.254	0.061‡	0.281	0.069‡	0.229	0.062‡
25-34 × άντρας	0.189	0.059‡	0.206	0.066‡	0.150	0.060‡
35-54 × άντρας	0.128	0.059‡	0.157	0.066‡	0.093	0.059
55-69 × άντρας	0.054	0.064‡	0.079	0.072‡	0.049	0.065
70+ × άντρας	0.000	§	0.000	§	0.000	§
Αλληλεπίδραση A × V						
15-19 × στροφή κ.τ.λ.			-0.252	0.083‡		
20-24 × στροφή κ.τ.λ.			-0.212	0.079‡		
25-34 × στροφή κ.τ.λ.			-0.103	0.075		
35-54 × στροφή κ.τ.λ.			-0.006	0.074		
55-69 × στροφή κ.τ.λ.			0.129	0.081		
70+ × στροφή κ.τ.λ.			0.000	§		
Αλληλεπίδραση G × V						
Άντρας × στροφή κ.τ.λ.			-0.035	0.030		
Γυναίκα × στροφή κ.τ.λ.			0.000	§		
Αλληλεπίδραση A × C §§						
15-19 × αντίθετη κατεύθυνση					-0.688	0.058‡
20-24 × αντίθετη κατεύθυνση					-0.621	0.056‡
25-34 × αντίθετη κατεύθυνση					-0.553	0.054‡
35-54 × αντίθετη κατεύθυνση					-0.224	0.053‡
55-69 × αντίθετη κατεύθυνση					-0.052	0.058
70+ × αντίθετη κατεύθυνση					0.000	§
Αλληλεπίδραση G × C						
Άντρας × αντίθετη κατεύθυνση					-0.296	0.021‡
Μεταβολή στην απόκλιση						
	79		340		143	
	(55 β.ε.)		(256 β.ε.)		(115 β.ε.)	

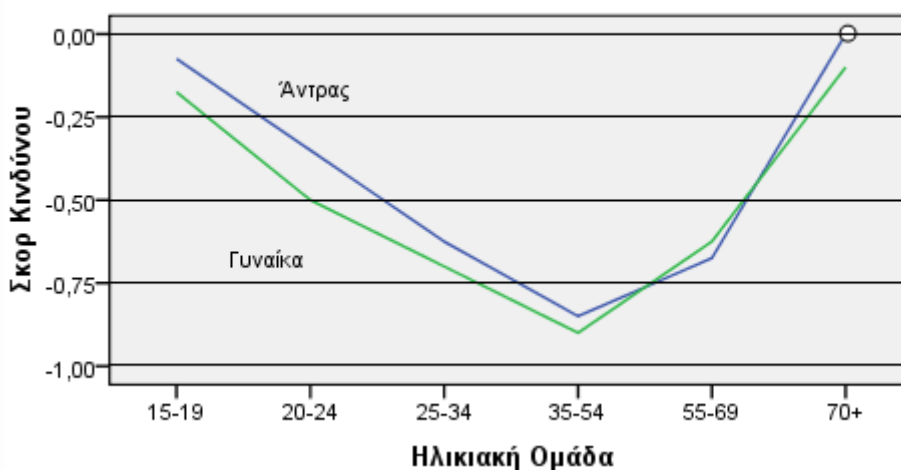
† *p*-value ανάμεσα σε 0.05 και 0.1

‡ *p*-value μικρότερο από 0.05

§ Μη εφαρμόσιμο

§§ C, είδος σύγκρουσης-οχήματα κινούμενα σε ίδιες ή αντίθετες κατευθύνσεις

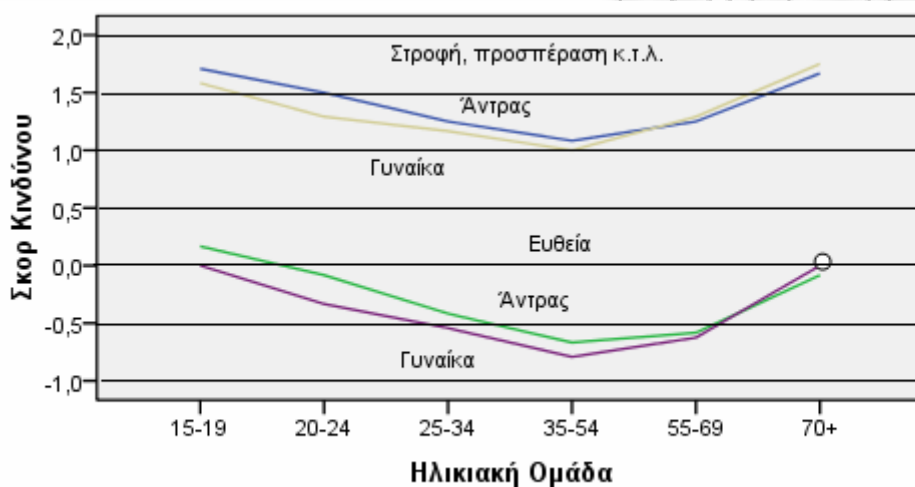
70+ έχουν παρόμοιο επίπεδο κινδύνου. Η παράμετρος για τους άντρες οδηγούς είναι σημαντική και αρνητική υποδεικνύοντας χαμηλότερα σκορ κινδύνου σε σχέση με τις γυναίκες οδηγούς. Η διαφορά αυτή, ωστόσο, ποικίλλει ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα κάτι που αποδεικνύεται από τις σημαντικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ της ηλικιακής ομάδας και του φύλου. Τα προβλεπόμενα σκορ σχετικού κινδύνου παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1. Οι οδηγοί 15-19 και 70+ έχουν υψηλότερα σκορ κινδύνου από τους μεσήλικες οδηγούς. Οι γυναίκες οδηγοί ηλικίας 70+ έχουν το υψηλότερο σκορ κινδύνου. Οι άντρες οδηγοί ηλικίας μέχρι 54 ετών έχουν υψηλότερα σκορ κινδύνου σε σχέση με τις γυναίκες, οι οποίες τους ξεπερνούν στις ηλικίες 55+.



Σχήμα 4.1 Κίνδυνος ατυχήματος ανά φύλο και ηλικία σε σχέση με τις γυναίκες οδηγούς ηλικίας 70+

Στο μοντέλο Π οι επιδράσεις της ηλικιακής ομάδας και του φύλου πάνω στο σκορ σχετικού κινδύνου γίνονται πιο ασθενείς. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πιο κοντά στο 0 και οι εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων τους είναι μεγαλύτερες. Πολύ ισχυρή επίδραση, ωστόσο, δείχνει να έχει το χαρακτηριστικό «ελιγμός οχήματος». Ο συγκεκριμένος παράγοντας αυξάνει κατά έξι φορές $\exp 1.792$ το odds της υπαιτιότητας. Οι σημαντικές αρνητικές εκτιμήσεις των παραμέτρων των αλληλεπιδράσεων των ηλικιακών ομάδων 15-19 και 20-24 με τον ελιγμό οχήματος δείχνει ότι αυτή η ισχυρή επίδραση περιορίζεται στους νέους οδηγούς. Αντίθετα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 δεν υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση ανάμεσα στο φύλο και στον ελιγμό οχήματος, καθώς οι καμπύλες αντρών και

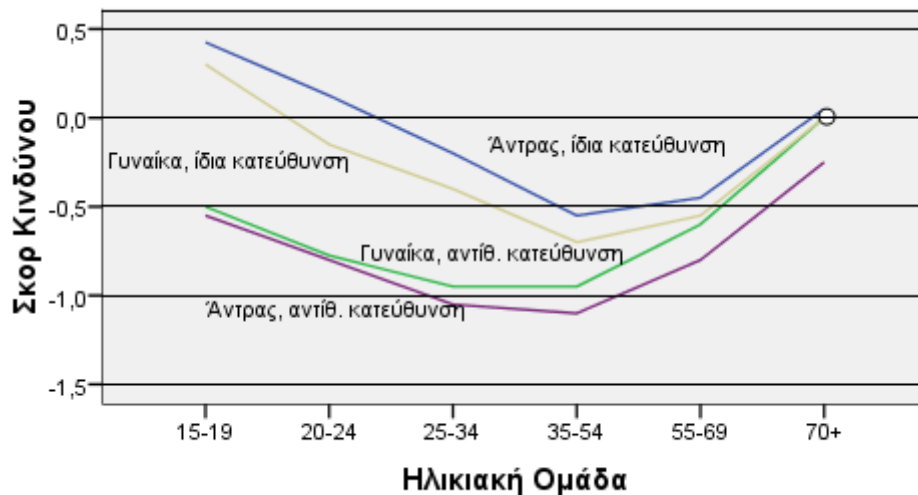
γυναικών είναι παρόμοιας μορφής. Επιπροσθέτως, οι οδηγοί ηλικίας 70+ έχουν υψηλότερο κίνδυνο από τους νεότερους οδηγούς ηλικίας 15-19 μόνο όταν ο ελιγμός του οχήματος είναι στροφή, προσπέραση ή αλλαγή λωρίδας. Δοθέντος ότι τέτοιου είδους ελιγμοί ενέχουν ούτως ή άλλως μεγάλο κίνδυνο, γίνεται κατανοητός ο λόγος που το προηγούμενο συμπέρασμα έχει μεγαλύτερη ισχύ στους ηλικιωμένους οδηγούς, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολία στο να κάνουν τον απαιτούμενο ελιγμό. Οι εκτιμήσεις των σκορ σχετικού κινδύνου για κάθε ομάδα οδηγών, αν και παραπλήσια αναφορικά με την ηλικία και το φύλο, απέχουν πολύ ως προς τον ελιγμό του οχήματος.



Σχήμα 4.2 Κίνδυνος ατυχήματος ανά φύλο, ηλικία και ελιγμό οχήματος σε σχέση με τις γυναίκες οδηγούς ηλικίας 70+ που κινούνται στην ευθεία

Στο μοντέλο III οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για την ηλικιακή ομάδα, το φύλο και τις αλληλεπιδράσεις τους είναι αντίστοιχες με αυτές του μοντέλου II. Το είδος σύγκρουσης παρουσιάζει ισχυρές και σημαντικές αλληλεπιδράσεις τόσο με την ηλικιακή ομάδα, όσο και με το φύλο. Οι μεγάλες αρνητικές εκτιμήσεις των αλληλεπιδράσεων, «αντίθετης κατεύθυνσης ατυχήματα × οδηγοί ηλικίας 15-54» και «αντίθετης κατεύθυνσης ατυχήματα × άντρες οδηγοί», υποδεικνύουν ότι ο υπερβολικός κίνδυνος ατυχήματος που αντιμετωπίζουν αυτές οι ομάδες οδηγών θα μειωνόταν σε σημαντικό βαθμό σε ατυχήματα αντίθετης κατεύθυνσης. Επίσης, εξαιτίας του ότι υπάρχει μόνο μία παράμετρος προς εκτίμηση για την αλληλεπίδραση μεταξύ φύλου και είδους σύγκρουσης (άντρας × αντίθετη κατεύθυνση), οι υπόλοιπες παίρνουν την τιμή 0 και γι' αυτό δεν εμφανίζονται στον Πίνακα 4.3. Τα προβλεπόμενα σκορ σχετικού κινδύνου απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3. Όπως φαίνεται, οι οδηγοί ηλικίας 15-19

έχουν τα υψηλότερα σκορ σχετικού κινδύνου σε συγκρούσεις ίδιας κατεύθυνσης, ενώ οι 70+ έχουν τα υψηλότερα σκορ σχετικού κινδύνου σε συγκρούσεις αντίθετης κατεύθυνσης. Οι άντρες οδηγοί, τέλος, έχουν χαμηλότερα σκορ σχετικού κινδύνου σε σχέση με τις γυναίκες σε ατυχήματα αντίθετης κατεύθυνσης και υψηλότερα σε ατυχήματα ίδιας κατεύθυνσης.



Σχήμα 4.3 Κίνδυνος ατυχήματος ανά φύλο, ηλικία και είδος σύγκρουσης σε σχέση με τις γυναίκες οδηγούς ηλικίας 70+

4.3 Παραδείγματα με τη χρήση των SPSS, S-Plus και της γλώσσας R

4.3.1 Παράδειγμα 1 – Το βασικό μοντέλο Bradley-Terry

Τα δεδομένα του Πίνακα 4.4 είναι των Andersen and Bonke (1980). Ο πίνακας σχετίζεται με προτιμήσεις που έχουν εκφραστεί σε ανά δύο συγκρίσεις για ένα σύνολο από έξι συλλογικά συγκροτήματα κατοικιών ενός δήμου της Δανίας.

Πίνακας 4.4

Προτίμηση για τα συλλογικά συγκροτήματα κατοικιών στη Δανία

Προτίμηση	Μη Προτίμηση					
	1	2	3	4	5	6
1	-	29	25	22	17	9
2	49	-	35	34	16	14
3	50	42	-	40	22	15
4	54	43	37	-	33	16
5	61	61	54	44	-	27
6	69	64	63	62	51	-

4.3.1.1 Εφαρμογή στο SPSS – 1^{ος} τρόπος

Ο παραπάνω είναι ένας 6×6 πίνακας με δομικά μηδενικά στην κύρια διαγώνιο του. Έτσι, για παράδειγμα, στο σύνολο των 78 μεταξύ τους συγκρίσεων, το 1^ο συγκρότημα κατοικιών προτιμήθηκε 17 φορές, ενώ το 5^ο 61 φορές. Εφαρμόζοντας το μοντέλο της QS (Παράρτημα – Πίνακας Α.2), το οποίο όπως έχουμε προαναφέρει είναι ισοδύναμο του μοντέλου Bradley-Terry, παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Run MATRIX procedure:

MLE OF THE EXPECTED UNDER QUASI SYMMETRY (QS) TABLE

.000	30.071	25.008	23.273	15.017	8.634
47.929	.000	34.158	31.798	21.203	12.912
49.992	42.842	.000	36.093	24.531	15.541
52.727	45.202	40.907	.000	27.006	17.157
62.983	55.797	51.469	49.994	.000	26.753
69.366	65.088	62.459	60.843	51.247	.000

MLE OF THE PARAMETER VECTOR C

.180	.287	.360	.408	.755	1.446
------	------	------	------	------	-------

ITERATIONS

7

LIKELIHOOD RATIO TEST FOR QS

G2	DF	SIG.
6.0721	10.0000	.8092

PEARSON'S X2 FOR QS

X2	DF	SIG.
6.0309	10.0000	.8127

----- END MATRIX -----

Η διαδικασία που εφαρμόσαμε μας δίνει τις εκτιμήσεις των αναμενόμενων τιμών των κελιών $\hat{\mu}_{ij}$, τις εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{c}_i και την προσαρμογή του μοντέλου. Όπως φαίνεται, το μοντέλο είναι πολύ καλής προσαρμογής με $G^2 = 6.0721$, 10 β.ε. και $p\text{-value} = 0.8092$.

Πίνακας 4.5**Αποτελέσματα της προσαρμογής του μοντέλου στα δεδομένα**

Συγκρότημα κατοικιών	Ποσοστό Προτίμησης (%)	\hat{c}_i	$\hat{\pi}_i = \exp \hat{\beta}_i$ ⁶
1	26.49	0.180	0.0524
2	32.04	0.287	0.0835
3	38.64	0.360	0.1048
4	41.75	0.408	0.1187
5	60.39	0.755	0.2197
6	76.92	1.446	0.4208
Άθροισμα		3.436	1

Όλες οι στήλες του Πίνακα 4.5 δείχνουν ξεκάθαρα ότι το 6^ο συγκρότημα κατοικιών είναι αυτό που συγκεντρώνει τις περισσότερες προτιμήσεις. Από τα μεγέθη των εκτιμήσεων, εξάλλου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διάταξη των προτιμήσεων είναι 6,5,4,3,2,1. Οι

⁶ $\exp \hat{\beta}_i = \hat{c}_i / \sum_{j=1}^I \hat{c}_j$

υπό συνθήκη πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ij}$ μπορούν να υπολογιστούν είτε από τις αναμενόμενες συχνότητες $\hat{\mu}_{ij}$, είτε από τις εκτιμήσεις των πιθανοτήτων π_i . Για παράδειγμα,

$$\hat{\Pi}_{23} = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_3} = \frac{0.0835}{0.0835 + 0.1048} = 0.444$$

ή

$$\hat{\Pi}_{23} = \frac{\hat{\mu}_{23}}{\hat{\mu}_{23} + \hat{\mu}_{32}} = \frac{34.158}{34.158 + 42.842} = 0.444$$

που αντιστοιχεί στην εκτίμηση της πιθανότητας το 2^ο συγκρότημα κατοικιών να θεωρείται καλύτερο από το 3^ο συγκρότημα, βάσει των προτιμήσεων που διαθέτουμε. Οι υπό συνθήκη πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ij}$ για τα δεδομένα του Πίνακα 4.4 είναι οι παρακάτω:

$$\hat{\Pi}_{ij} = \begin{bmatrix} - & 0.3854 & 0.3333 & 0.3061 & 0.1925 & 0.1107 \\ 0.6146 & - & 0.4436 & 0.4129 & 0.2754 & 0.1656 \\ 0.6667 & 0.5564 & - & 0.4688 & 0.3229 & 0.1993 \\ 0.6939 & 0.5871 & 0.5313 & - & 0.3508 & 0.2201 \\ 0.8075 & 0.7246 & 0.6771 & 0.6492 & - & 0.3430 \\ 0.8893 & 0.8344 & 0.8007 & 0.7799 & 0.6570 & - \end{bmatrix}$$

4.3.1.2 Εφαρμογή στο SPSS – 2^{ος} τρόπος

Ένας εναλλακτικός τρόπος ανάλυσης των δεδομένων με τη βοήθεια του SPSS είναι η αντιμετώπιση του μοντέλου Bradley-Terry ως ένα loglinear μοντέλο (Παράρτημα – Πίνακες A.3,4). Η εν λόγω διαδικασία δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Goodness-of-Fit Tests ^{a,b}			
	Value	df	Sig.
Likelihood Ratio	6,072	10	,809
Pearson Chi-Square	6,031	10	,813

a. Model: Multinomial

b. Design: Constant + winner + loser + t12 + t13 + t14 + t15 + t16 + t23 + t24 + t25 + t26 + t34 + t35 + t36 + t45 + t46 + t56

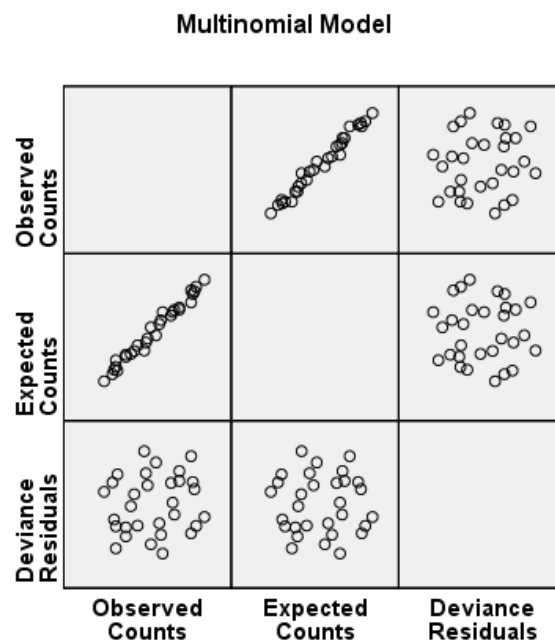
Cell Counts and Residuals^{a,b}

winner	loser	Observed		Expected		Residual	Standardized Residual	Adjusted Residual	Deviance
		Count	%	Count	%				
1	1	0	,0%	,000	,0%
	2	29	2,5%	30,071	2,6%	-1,071	-,198	-,319	-1,450
	3	25	2,2%	25,007	2,2%	-,007	-,001	-,002	-,121
	4	22	1,9%	23,272	2,0%	-1,272	-,266	-,392	-1,573
	5	17	1,5%	15,016	1,3%	1,984	,515	,672	2,054
	6	9	,8%	8,634	,7%	,366	,125	,149	,865
2	1	49	4,2%	47,929	4,1%	1,071	,158	,319	1,472
	2	0	,0%	,000	,0%
	3	35	3,0%	34,158	2,9%	,842	,146	,244	1,306
	4	34	2,9%	31,798	2,7%	2,202	,396	,640	2,134
	5	16	1,4%	21,203	1,8%	-5,203	-1,140	-1,612	-3,002
	6	14	1,2%	12,912	1,1%	1,088	,304	,387	1,505
3	1	50	4,3%	49,993	4,3%	,007	,001	,002	,122
	2	42	3,6%	42,842	3,7%	-,842	-,131	-,244	-1,291
	3	0	,0%	,000	,0%
	4	40	3,5%	36,093	3,1%	3,907	,661	1,124	2,867
	5	22	1,9%	24,531	2,1%	-2,531	-,516	-,764	-2,189
	6	15	1,3%	15,541	1,3%	-,541	-,138	-,183	-1,031
4	1	54	4,7%	52,728	4,6%	1,272	,179	,392	1,605
	2	43	3,7%	45,202	3,9%	-2,202	-,334	-,640	-2,072
	3	37	3,2%	40,907	3,5%	-3,907	-,622	-1,124	-2,725
	4	0	,0%	,000	,0%
	5	33	2,8%	27,005	2,3%	5,995	1,167	1,781	3,637
	6	16	1,4%	17,158	1,5%	-1,158	-,282	-,383	-1,495
5	1	61	5,3%	62,984	5,4%	-1,984	-,257	-,672	-1,976
	2	61	5,3%	55,797	4,8%	5,203	,714	1,612	3,298
	3	54	4,7%	51,469	4,4%	2,531	,361	,764	2,277
	4	44	3,8%	49,995	4,3%	-5,995	-,867	-1,781	-3,353
	5	0	,0%	,000	,0%
	6	27	2,3%	26,754	2,3%	,246	,048	,076	,703

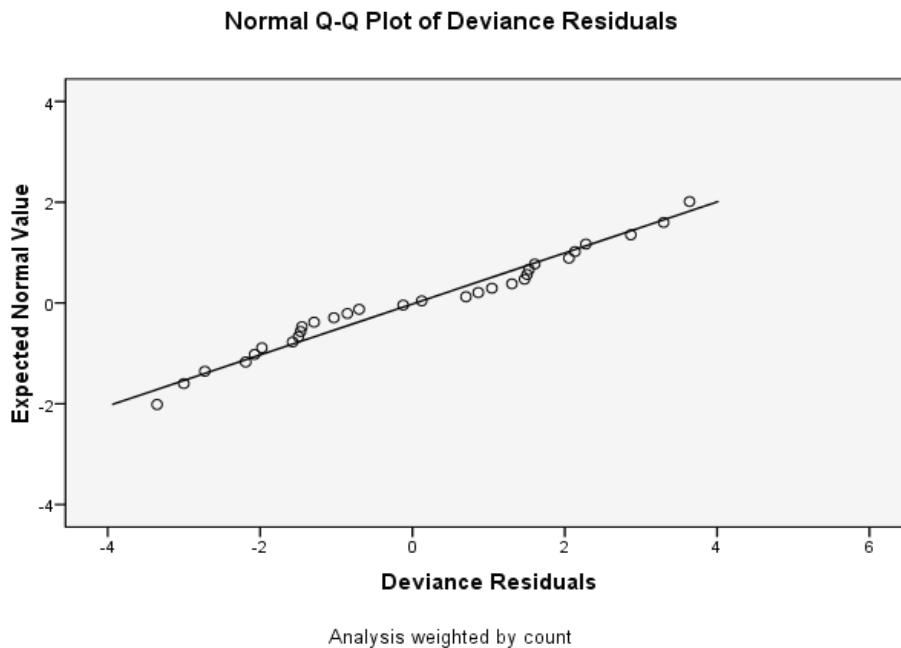
6	1	69	6,0%	69,366	6,0%	-,366	-,045	-,148	-,855
	2	64	5,5%	65,088	5,6%	-1,088	-,139	-,387	-1,469
	3	63	5,4%	62,459	5,4%	,541	,070	,183	1,043
	4	62	5,4%	60,842	5,3%	1,158	,153	,383	1,529
	5	51	4,4%	51,246	4,4%	-,246	-,035	-,076	-,700
	6	0	,0%	,000	,0%

a. Model: Multinomial

b. Design: Constant + winner + loser + t12 + t13 + t14 + t15 + t16 + t23 + t24 + t25 + t26 + t34 + t35 + t36 + t45 + t46 + t56



Σχήμα 4.4 Scatterplot matrix των καταλοίπων απόκλισης με τις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες συχνότητες



Σχήμα 4.5 Normal Q-Q plot των καταλοίπων απόκλισης

Οι δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες αναφορικά με την προσαρμογή του μοντέλου και τις αναμενόμενες συχνότητες. Η 2^η προσέγγιση, ωστόσο, μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε άμεσα τα κατάλοιπα που αποτελούν τις μετρήσεις της διαφοράς μεταξύ των παρατηρούμενων και των αναμενόμενων συχνοτήτων. Ελέγχοντας τα κατάλοιπα απόκλισης παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ακραίες τιμές γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλα τα κελιά προσαρμόζονται καλά από το μοντέλο. Αυτό επιβεβαιώνεται και οπτικά αν εξετάσουμε το scatterplot matrix των καταλοίπων απόκλισης με τις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες συχνότητες, καθώς και το Normal Q-Q plot. Τα σημεία στο scatterplot, μεταξύ παρατηρούμενων και αναμενόμενων συχνοτήτων, σχηματίζουν μία ευθεία, κάτι που δικαιολογεί την εμφάνιση των μικρών τιμών των καταλοίπων. Το Q-Q plot, επίσης, αποδεικνύει την καλή προσέγγιση των καταλοίπων από την κανονική κατανομή.

4.3.1.3 Εφαρμογή στην R

Η γλώσσα προγραμματισμού R μας επιτρέπει να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τα δεδομένα στα οποία εφαρμόζουμε το μοντέλο Bradley-Terry. Η διαδικασία, μάλιστα, έχει

απλοποιηθεί σε σημαντικό βαθμό χάρη στο πακέτο “BradleyTerry2” των Turner and Firth (2010). Το συγκεκριμένο πακέτο περιέχει έτοιμα σετ δεδομένων τα οποία καλύπτουν σχεδόν όλο το φάσμα των εφαρμογών του μοντέλου. Για τα συγκεκριμένα δεδομένα υπάρχουν πλήρεις αναλύσεις, τις οποίες μπορεί εύκολα οποιοσδήποτε να τρέξει χρησιμοποιώντας τις εντολές που περιλαμβάνει το παραπάνω πακέτο. Επιλέγοντας το παράδειγμα των Andersen and Bonke (1980), το οποίο δεν περιέχεται στο πακέτο, θα δείξουμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο Bradley-Terry σ’ ένα οποιοδήποτε σετ δεδομένων κάνοντας χρήση της R. Εδώ θα γίνει η παρουσίαση και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων, ενώ η παράθεση και ο σχολιασμός των εντολών θα γίνει στο Παράρτημα.

Η εφαρμογή του μοντέλου μας δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα (Παράρτημα – Πίνακας A.6):

Bradley Terry model fit by glm.fit

Call: BTm(outcome = cbind(pref1, pref2), player1 = house1, player2 = house2, formula = ~house, id = "house", data = house.sf)

Coefficients:

housefacility 2	housefacility 3	housefacility 4	housefacility 5	housefacility 6
0.4662	0.6927	0.8179	1.4338	2.0837

Degrees of Freedom: 15 Total (i.e. Null); 10 Residual

Null Deviance: 254.6

Residual Deviance: 6.072 **AIC:** 84.33

Οι συντελεστές που παίρνουμε αποτελούν εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ έχοντας θέσει ως ομάδα αναφοράς το 1^ο συγκρότημα κατοικιών $\beta_1 = 0$. Όπως είναι αναμενόμενο, επιβεβαιώνουμε την προσαρμογή του μοντέλου $G^2 = 6.072$ καθώς και τη διάταξη των προτιμήσεων 6,5,4,3,2,1. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο συγκρότημα ως ομάδα αναφοράς, π.χ. το 6^ο, η εντολή “update” μας δίνει αυτή τη

δυνατότητα (Παράρτημα – Πίνακας Α.6). Σ' αυτή την περίπτωση οι συντελεστές είναι οι παρακάτω:

Bradley Terry model fit by glm.fit

Call: BTm(outcome = cbind(pref1, pref2), player1 = house1, player2 = house2, formula = ~house, id = "house", refcat = "facility 6", data = house.sf)

Coefficients:

housefacility 1	housefacility 2	housefacility 3	housefacility 4	housefacility 5
-2.0837	-1.6175	-1.3910	-1.2658	-0.6499

Degrees of Freedom: 15 Total (i.e. Null); 10 Residual

Null Deviance: 254.6

Residual Deviance: 6.072 **AIC:** 84.33

Η πιο αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου περιλαμβάνει τα κάτωθι:

Call: BTm(outcome = cbind(pref1, pref2), player1 = house1, player2 = house2, formula = ~house, id = "house", data = house.sf)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.36628	-0.28396	0.05855	0.41788	1.41112

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
housefacility 2	0.4662	0.1454	3.206	0.00134 **
housefacility 3	0.6927	0.1464	4.733	2.21e-06 ***
housefacility 4	0.8179	0.1465	5.582	2.37e-08 ***
housefacility 5	1.4338	0.1522	9.421	< 2e-16 ***
housefacility 6	2.0837	0.1652	12.615	< 2e-16 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 254.5553 on 15 degrees of freedom

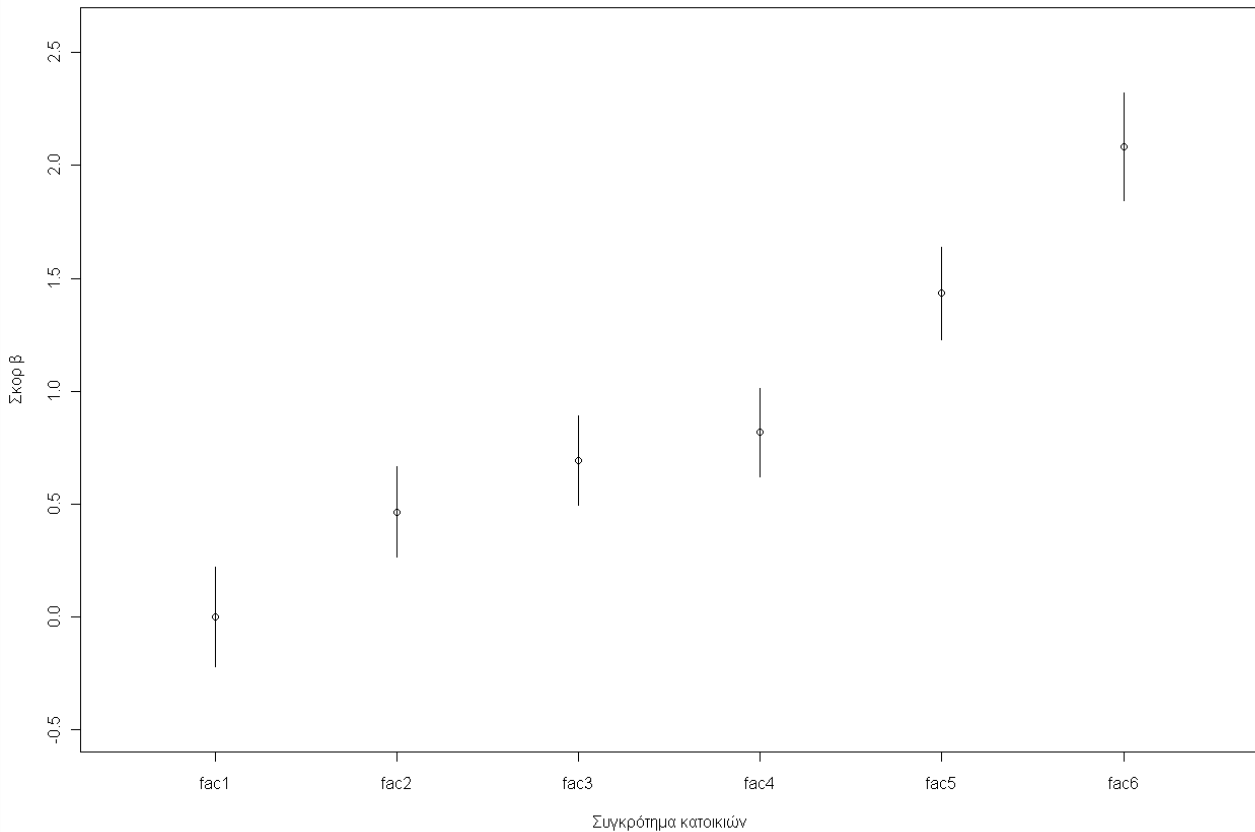
Residual deviance: 6.0721 on 10 degrees of freedom

AIC: 84.332

Number of Fisher Scoring iterations: 3

Παρατηρούμε ότι τα κατάλοιπα απόκλισης κυμαίνονται από -1.366 έως 1.411 χωρίς να εμφανίζονται ακραίες τιμές. Έχουμε, ακόμα, τα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων των β_i καθώς και τη σημαντικότητα των επιπέδων του παράγοντα “house” (με όλα τα επίπεδα να είναι σημαντικά). Οι εκτιμήσεις των β_i μπορούν να απεικονιστούν και γραφικά υπολογίζοντας τις quasi διακυμάνσεις (και τα αντίστοιχα quasi τυπικά σφάλματα), που σχετίζονται με τα επίπεδα του παράγοντα “house” (Firth and Menezes, 2004).

Διαστήματα βασισμένα στα quasi τυπικά σφάλματα



Σχήμα 4.6 Εκτιμήσεις των σκορ β_i των συγκροτημάτων κατοικιών

Για να εξετάσουμε εάν η διαφορά μεταξύ δύο συγκροτημάτων είναι στατιστικά σημαντική μπορούμε να συγκρίνουμε τη διαφορά $\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j$ προς το ASE της. Ο Πίνακας 4.6 αποτελείται από τις συνδιακυμάνσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τις οποίες ισχύει $ASE = \sqrt{Var \hat{\beta}_i + Var \hat{\beta}_j - 2Cov \hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j}$, ενώ ο Πίνακας 4.7 περιέχει όλες τις δυνατές συγκρίσεις μεταξύ των συγκροτημάτων κατοικιών.

Πίνακας 4.6

Πίνακας συνδιακυμάνσεων

	housefacility 2	housefacility 3	housefacility 4	housefacility 5	housefacility 6
housefacility 2	0.02114	0.01148	0.01151	0.01167	0.01180
housefacility 3	0.01148	0.02142	0.01179	0.01205	0.01228
housefacility 4	0.01151	0.01179	0.02147	0.01223	0.01250
housefacility 5	0.01167	0.01205	0.01223	0.02316	0.01369
housefacility 6	0.01180	0.01228	0.01250	0.01369	0.02728

Πίνακας 4.7

Σύγκριση συγκροτημάτων κατοικιών

Συγκροτήματα κατοικιών	ASE	$\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j$	$\frac{\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j}{ASE}$	95% Δ.Ε. $\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j$		95% Δ.Ε. $\hat{\Pi}_{ij}$	
				Κάτω Όριο	Άνω Όριο	Κάτω Όριο	Άνω Όριο
6 vs 5	0.15186	0.64990	4.27974	0.35	0.95	0.59	0.72
6 vs 4	0.15411	1.26580	8.21359	0.96	1.57	0.72	0.83
6 vs 3	0.15537	1.39100	8.95279	1.09	1.70	0.75	0.84
6 vs 2	0.15754	1.61750	10.26700	1.31	1.93	0.79	0.87
6 vs 1	0.16517	2.08370	12.61575	1.76	2.41	0.85	0.92
5 vs 4	0.14202	0.61590	4.33668	0.34	0.89	0.58	0.71
5 vs 3	0.14311	0.74110	5.17859	0.46	1.02	0.61	0.74
5 vs 2	0.14478	0.96760	6.68344	0.68	1.25	0.66	0.78
5 vs 1	0.15218	1.43380	9.42148	1.14	1.73	0.76	0.85
4 vs 3	0.13896	0.12520	0.90098	-0.15	0.40	0.46	0.60
4 vs 2	0.13996	0.35170	2.51278	0.08	0.63	0.52	0.65
4 vs 1	0.14653	0.81790	5.58193	0.53	1.11	0.63	0.75
3 vs 2	0.14000	0.22650	1.61786	-0.05	0.50	0.49	0.62
3 vs 1	0.14636	0.69270	4.73299	0.41	0.98	0.60	0.73
2 vs 1	0.14540	0.46620	3.20642	0.18	0.75	0.55	0.68

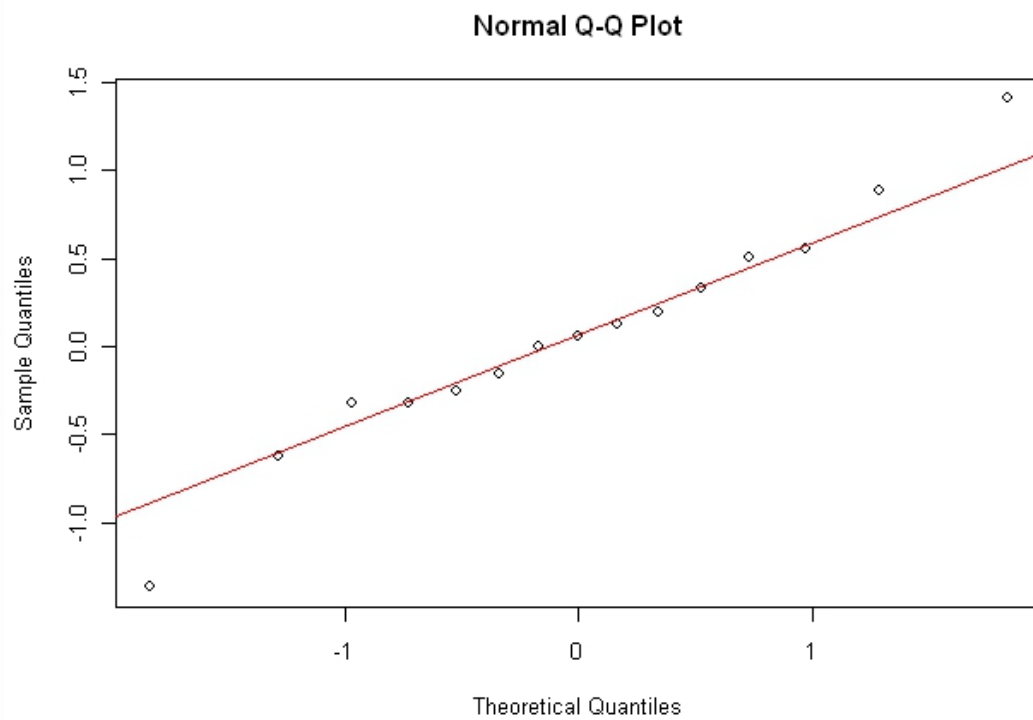
Όπως φαίνεται υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ όλων των συγκροτημάτων εκτός από τα ζεύγη 4,3 και 3,2. Έτσι, για παράδειγμα, στη σύγκριση μεταξύ των συγκροτημάτων 6 και 5, η πιθανότητα προτίμησης για το 6 $\hat{\Pi}_{65}$ κυμαίνεται

από 0.59 έως 0.72 αποδεικνύοντας τη σαφή υπεροχή του συγκεκριμένου συγκροτήματος. Αντίθετα, στη σύγκριση των συγκροτημάτων 4 και 3 δεν υπάρχει ξεκάθαρο προβάδισμα για κάποιο από τα δύο κι αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι το 95% Δ.Ε. $\hat{\Pi}_{ij}$ περιέχει την τιμή 0.5 (ή ισοδύναμα το 95% Δ.Ε. $\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j$ περιέχει την τιμή 0). Επίσης, ο παραπάνω πίνακας δικαιολογεί εν μέρει την κατάταξη που προκύπτει από την ταξινόμηση των $\hat{\beta}_i$. Το 6^ο συγκρότημα είναι προφανές ότι προτιμάται περισσότερο απ' όλα, το 5^ο είναι καθαρά δεύτερο και το 1^ο καταλαμβάνει την τελευταία θέση. Αναφορικά, όμως, με τα συγκροτήματα 4,3,2 δεν μπορούμε με σιγουριά να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα.

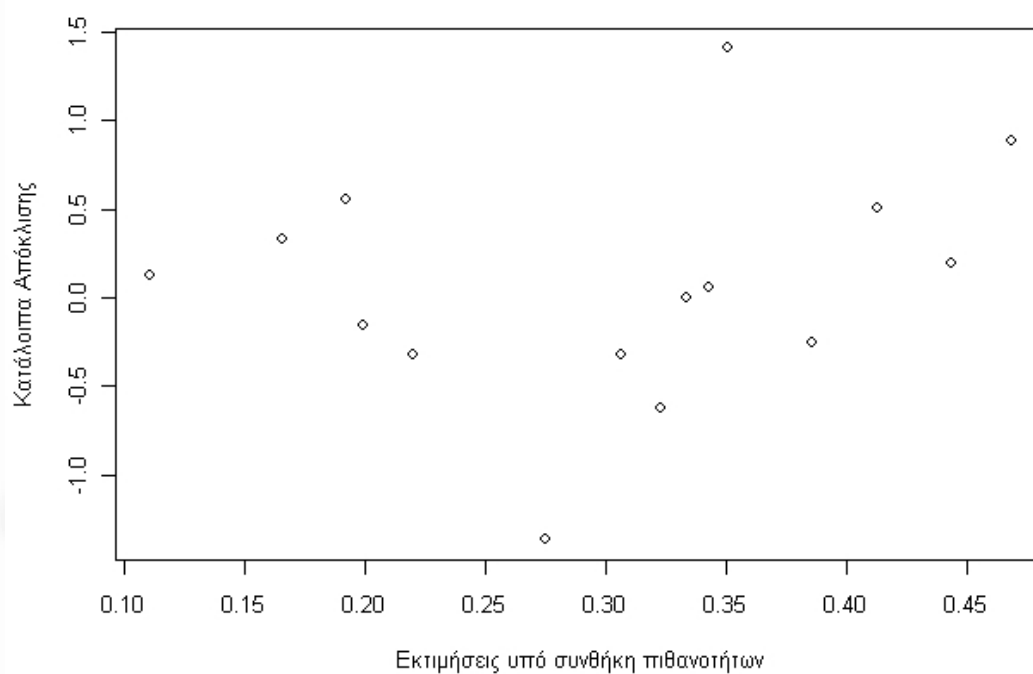
Οι υπό συνθήκη πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ij}$, καθώς και οι αναμενόμενες τιμές $\hat{\mu}_{ij}$ δεν διαφοροποιούνται από αυτές που ήδη έχουμε υπολογίσει στην ενότητα 4.3.1.1 (Παράρτημα – Πίνακας Α.6). Όσον αφορά, τέλος, τα κατάλοιπα απόκλισης που προκύπτουν για τα ζεύγη συγκρίσεων έχουμε:

Πίνακας 4.8
Κατάλοιπα απόκλισης

Ζεύγη συγκροτημάτων κατοικιών		Προτίμηση 1	Προτίμηση 2	Κατάλοιπα απόκλισης
1	2	29	49	-0.250
1	3	25	50	-0.002
1	4	22	54	-0.318
1	5	17	61	0.561
1	6	9	69	0.131
2	3	35	42	0.193
2	4	34	43	0.508
2	5	16	61	-1.366
2	6	14	64	0.328
3	4	40	37	0.891
3	5	22	54	-0.627
3	6	15	63	-0.154
4	5	33	44	1.411
4	6	16	62	-0.319
5	6	27	51	0.059



Σχήμα 4.7 Normal Q-Q plot των καταλοίπων απόκλισης



Σχήμα 4.8 Scatterplot – Κατάλοιπα απόκλισης και υπό συνθήκη πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ij}$

Τα παραπάνω γραφήματα αποδεικνύουν για άλλη μια φορά την καλή προσαρμογή του μοντέλου. Η προσέγγιση των καταλοίπων από την κανονική κατανομή είναι ικανοποιητική, ενώ και η διακύμανσή τους είναι σταθερή χωρίς να υπάρχει κάποια τιμή μεγαλύτερη από δύο τυπικές αποκλίσεις.

4.3.1.4 Εφαρμογή στο S-Plus

R και S-Plus χρησιμοποιούν την ίδια γλώσσα προγραμματισμού (S language) κάτι που σημαίνει ότι υπάρχουν μεταξύ τους πολλές κοινές λειτουργίες. Στην παρούσα ενότητα θα δείξουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής του logit μοντέλου καθώς και του ισοδύναμου του μοντέλου της quasi-συμμετρίας. Για το logit μοντέλο έχουμε (Παράρτημα – Πίνακας A.7):

Call: glm(formula = response ~ -1 + house2 + house3 + house4 + house5 + house6, family = binomial)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.411116	-0.4178795	-0.05855037	0.2839617	1.366279

Coefficients:

	Value	Std. Error	t value
house2	0.4661666	0.1453952	3.206203
house3	0.6927044	0.1463580	4.732944
house4	0.8178949	0.1465122	5.582437
house5	1.4337740	0.1521840	9.421316
house6	2.0837079	0.1651808	12.614706

(Dispersion Parameter for Binomial family taken to be 1)

Null Deviance: 254.5553 on 15 degrees of freedom

Residual Deviance: 6.072104 on 10 degrees of freedom

Number of Fisher Scoring Iterations: 3

Για το μοντέλο της quasi-συμμετρίας χρειάζεται να προσθέσουμε ένα παράγοντα που να διαφοροποιεί τις κύριες επιδράσεις γραμμών και στηλών και για το λόγο αυτό προσθέτουμε τον παράγοντα “winning”. Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν είναι οι διαφορές $\lambda_j^Y - \lambda_j^X$ για $j = 1, \dots, 6$ (Παράρτημα – Πίνακας Α.8):

Call: glm(formula = counts ~ symm + winning, family = poisson(log), data = table.1)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.181544	-0.1527045	-0.006420193	0.149525	1.114394

Coefficients:

	Value	Std. Error	t value
(Intercept)	-10.7897615	133.6040711	-0.080759227
symmfac1,fac2	14.1933184	133.6041490	0.106234114
symmfac1,fac3	14.0089324	133.6041567	0.104854016
symmfac1,fac4	13.9370130	133.6041591	0.104315712
symmfac1,fac5	13.4988700	133.6041756	0.101036288
symmfac1,fac6	12.9454525	133.6041999	0.096894053
symmfac2,fac2	-0.4661666	188.9447453	-0.002467211
symmfac2,fac3	13.8545830	133.6041813	0.103698723
symmfac2,fac4	13.7830039	133.6041818	0.103162968
symmfac2,fac5	13.3777158	133.6041887	0.100129464
symmfac2,fac6	12.8817868	133.6042046	0.096417526
symmfac3,fac3	-0.6927044	188.9447461	-0.003666175
symmfac3,fac4	13.6831623	133.6041820	0.102415673
symmfac3,fac5	13.2969760	133.6041882	0.099525144
symmfac3,fac6	12.8405589	133.6042025	0.096108944
symmfac4,fac4	-0.8178949	188.9447462	-0.004328752
symmfac4,fac5	13.2679028	133.6041870	0.099307537
symmfac4,fac6	12.8143333	133.6042012	0.095912652
symmfac5,fac5	-1.4337740	188.9447507	-0.007588324
symmfac5,fac6	12.6426844	133.6041965	0.094627899

symmfac6, fac6	-2.0837079	188.9447616	-0.011028133
winningfac2	0.4661666	0.1453955	3.206196970
winningfac3	0.6927044	0.1463583	4.732935061
winningfac4	0.8178949	0.1465125	5.582425628
winningfac5	1.4337740	0.1521847	9.421277994
winningfac6	2.0837079	0.1651814	12.614661740

(Dispersion Parameter for Poisson family taken to be 1)

Null Deviance: 676.9733 on 35 degrees of freedom

Residual Deviance: 6.072352 on 10 degrees of freedom

Number of Fisher Scoring Iterations: 9

Οι εκτιμήσεις που μας ενδιαφέρουν είναι οι “winningfac2”- “winningfac6”. Όπως είναι φανερό, τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι ακριβώς ίδια με αυτά που προέκυψαν μέσω της αντίστοιχης διαδικασίας στην R (το ίδιο ισχύει και για τα $\hat{\mu}_{ij}, \hat{\Pi}_{ij}$).

4.3.2 Παράδειγμα 2 – Το μοντέλο Bradley-Terry με επίδραση διάταξης

Πίνακας 4.9

Νίκες / Ήττες ανά γηπεδούχο και φιλοξενούμενη ομάδα, 1987

Γηπεδούχος	Φιλοξενούμενη						
	Milwaukee	Detroit	Toronto	New York	Boston	Cleveland	Baltimore
Milwaukee	-	4-3	4-2	4-3	6-1	4-2	6-0
Detroit	3-3	-	4-2	4-3	6-0	6-1	4-3
Toronto	2-5	4-3	-	2-4	4-3	4-2	6-0
New York	3-3	5-1	2-5	-	4-3	4-2	6-1
Boston	5-1	2-5	3-3	4-2	-	5-2	6-0
Cleveland	2-5	3-3	3-4	4-3	4-2	-	2-4
Baltimore	2-5	1-5	1-6	2-4	1-6	3-4	-

Πηγή: *American League Red Book*, 1988 (St. Louis, MO: Sporting News Publishing Co.).

Ο Πίνακας 4.9 δείχνει τα αποτελέσματα μεταξύ εφτά ομάδων μπέιζμπολ της Ανατολικής Περιφέρειας του Αμερικάνικου Πρωταθλήματος για το 1987 (Agresti, 2002). Για παράδειγμα, η Boston σε 6 παιχνίδια ως γηπεδούχος νίκησε τη New York 4 φορές και έχασε 2, ενώ η New York σε 7 παιχνίδια ως γηπεδούχος νίκησε 4 φορές και έχασε 3.

4.3.2.1 Εφαρμογή στην R

Το βασικό μοντέλο Bradley-Terry, χωρίς παράμετρο για το πλεονέκτημα έδρας, προσαρμόζεται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Call: BTm(outcome = cbind(home.wins, away.wins), player1 = home.team, player2 = away.team, id = "team", data = baseball)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.6539	-0.0508	0.4133	0.9736	2.5509

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
teamBoston	1.1077	0.3339	3.318	0.000908 ***
teamCleveland	0.6839	0.3319	2.061	0.039345 *
teamDetroit	1.4364	0.3396	4.230	2.34e-05 ***
teamMilwaukee	1.5814	0.3433	4.607	4.09e-06 ***
teamNew York	1.2476	0.3359	3.715	0.000203 ***
teamToronto	1.2945	0.3367	3.845	0.000121 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 78.015 on 42 degrees of freedom

Residual deviance: 44.053 on 36 degrees of freedom

AIC: 140.52

Number of Fisher Scoring iterations: 4

Ομάδα αναφοράς θεωρείται η Baltimore, η οποία εκτιμάται ως η πιο αδύνατη από τις 7 ομάδες με το Milwaukee και το Detroit να είναι οι πιο δυνατές. Τα επίπεδα του παράγοντα “team” είναι όλα σημαντικά, ενώ και το μοντέλο συνολικά είναι επαρκές $G^2 = 44.053$ β.ε. = 36, $p\text{-value} = P(X^2 \geq 44.053) = 0.168$. Η κατάταξη από την καλύτερη προς τη χειρότερη ομάδα είναι: Milwaukee, Detroit, Toronto, New York, Boston, Cleveland, Baltimore (Για να καταλήξουμε, ωστόσο, με μεγαλύτερη βεβαιότητα σε μια ορθή κατάταξη των ομάδων οφείλουμε να ενεργήσουμε κατά τον τρόπο που αναπτύξαμε στο Παράδειγμα 1). Για να εκτιμήσουμε την επίδραση του πλεονεκτήματος έδρας απαιτείται μια αναδιοργάνωση των δεδομένων. Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε μία καινούρια μεταβλητή (“at.home”), η οποία είναι απαραίτητη για τη διαφοροποίηση της γηπεδούχου από τη φιλοξενούμενη. Έτσι, η μεταβλητή παίρνει την τιμή 1 όταν η ομάδα αγωνίζεται στο γήπεδό της και την τιμή 0 όταν αγωνίζεται μακριά απ’ αυτό (Παράρτημα – Πίνακας Α.9).

Call: BTm(outcome = cbind(home.wins, away.wins), player1 = home.team, player2 = away.team, formula = ~team + at.home, id = "team", data = baseball)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-2.03819	-0.40577	0.04326	0.61163	2.26001

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
teamBoston	1.1438	0.3378	3.386	0.000710	***
teamCleveland	0.7047	0.3350	2.104	0.035417	*
teamDetroit	1.4754	0.3446	4.282	1.85e-05	***
teamMilwaukee	1.6196	0.3474	4.662	3.13e-06	***
teamNew York	1.2813	0.3404	3.764	0.000167	***
teamToronto	1.3271	0.3403	3.900	9.64e-05	***
at.home	0.3023	0.1309	2.308	0.020981	*

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 78.015 on 42 degrees of freedom

Residual deviance: 38.643 on 35 degrees of freedom

AIC: 137.11

Number of Fisher Scoring iterations: 4

Το μοντέλο τώρα περιγράφει 42 διωνυμικές κατανομές με 7 παραμέτρους. Η προσαρμογή του έχει βελτιωθεί καθώς $G^2 = 38.643$ β.ε. = 35, $p\text{-value} = P(X^2 \geq 38.643) = 0.308$. Η εκτίμηση της παραμέτρου για το πλεονέκτημα έδρας είναι $a^* = 0.3023$. Αυτό σημαίνει ότι για δύο ισοδύναμες ως προς τις νίκες και τις ήττες ομάδες η εκτίμηση της πιθανότητας νίκης για τη γηπεδούχο είναι $\exp a^* / [1 + \exp a^*] = 0.575$ ή αλλιώς η γηπεδούχος έχει έναν odds-πολλαπλασιαστή της τάξης του $\exp \hat{a}^* = \exp 0.3023 = 1.353$ υπέρ της. Για παράδειγμα, στα παιχνίδια μεταξύ Boston και New York η εκτίμηση της πιθανότητας νίκης για την Boston είναι:

$$\hat{\Pi}_{54} = \frac{\exp a^* + \beta_5 - \beta_4}{1 + \exp a^* + \beta_5 - \beta_4} = \frac{\exp 0.3023 + 1.1438 - 1.2813}{1 + \exp 0.3023 + 1.1438 - 1.2813} = 0.5411, \quad \text{ως}$$

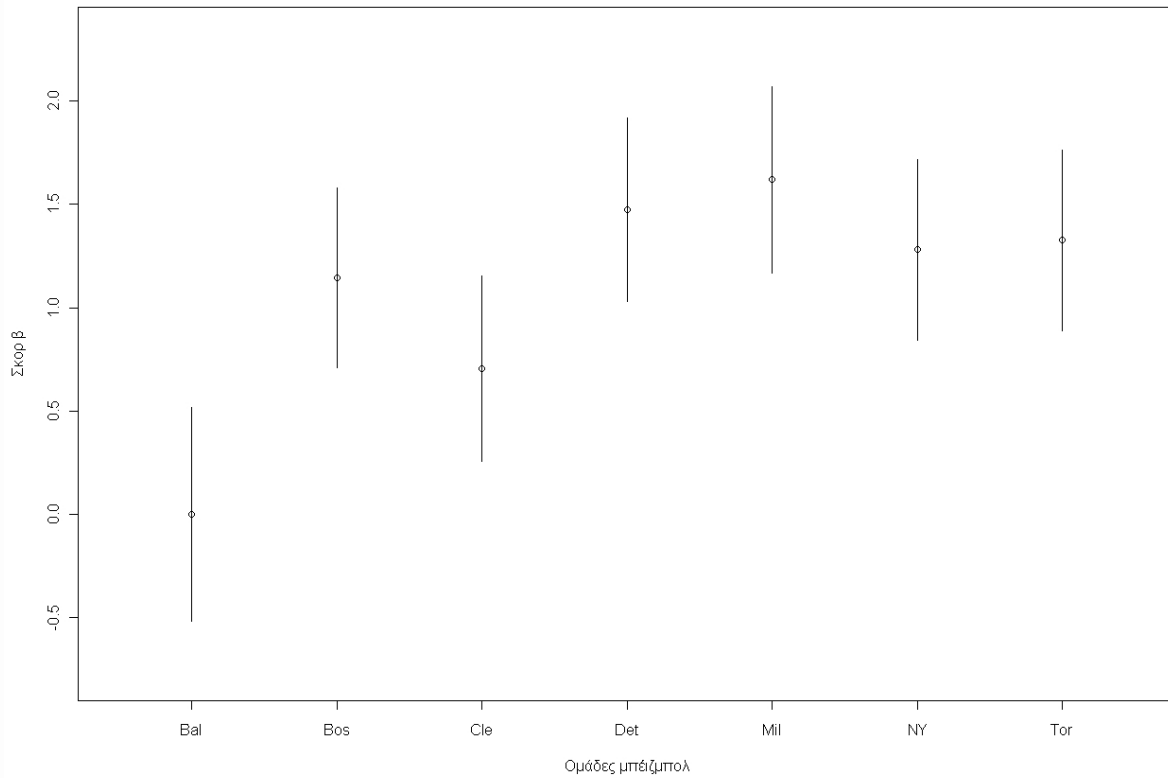
γηπεδούχος

$$\hat{\Pi}_{54} = \frac{\exp -a^* + \beta_5 - \beta_4}{1 + \exp -a^* + \beta_5 - \beta_4} = \frac{\exp -0.3023 + 1.1438 - 1.2813}{1 + \exp -0.3023 + 1.1438 - 1.2813} = 0.3918, \quad \text{ως}$$

φιλοξενούμενη

Η γραφική απεικόνιση των εκτιμήσεων των β_i και των αντίστοιχων quasi τυπικών σφαλμάτων επιτυγχάνεται μέσω του πακέτου “BradleyTerry2” (Παράρτημα – Πίνακας Α.9) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.8.

Διαστήματα βασισμένα στα quasi τυπικά σφάλματα



Σχήμα 4.8 Εκτιμήσεις των σκορ β_i των ομάδων μπέιζμπολ

Πίνακας 4.10

Αποτελέσματα της προσαρμογής των μοντέλων Bradley-Terry

Ομάδα	Χωρίς πλεονέκτημα έδρας		Με πλεονέκτημα έδρας	
	$\hat{\beta}_i$	$\exp \hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\exp \hat{\beta}_i$
Milwaukee	1.5814	0.219	1.6196	0.220
Detroit	1.4364	0.189	1.4754	0.190
Toronto	1.2945	0.164	1.3271	0.164
New York	1.2476	0.157	1.2813	0.157
Boston	1.1077	0.136	1.1438	0.137
Cleveland	0.6839	0.089	0.7047	0.088
Baltimore	0.0000	0.045	0.0000	0.044

Από τον Πίνακα 4.10, τέλος, μπορούμε να δούμε ότι τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων με βάση τα δύο μοντέλα δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές. Συγκρίνοντας τα δύο μοντέλα ως

προς την προσαρμογή τους: $G^2 BT_1 - G^2 BT_2 = 44.053 - 38.643 = 5.4106 > X_{36-35}^2 = 3.841$
 οπότε τα δύο μοντέλα δεν διαφέρουν σημαντικά.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι η παρούσα έκδοση του πακέτου "BradleyTerry2" δεν παρέχει τη δυνατότητα διαχείρισης δεσμών όταν οι τελευταίοι εμφανίζονται σε συγκρίσεις. Τα γνωστά μοντέλα των Rao and Kupper (1967) και Davidson (1970) δεν βρίσκουν εφαρμογή στο συγκεκριμένο πακέτο. Η λειτουργία *BTm* απαιτεί μία δίτιμη ή μία διωνυμική μεταβλητή απόκρισης και κατά συνέπεια δεν επιτρέπεται η ύπαρξη μιας τρίτης κατηγορίας απόκρισης που θα αντιπροσωπεύει το δεσμό. Αντί αυτού σε διάφορα σετ δεδομένων του πακέτου (CEMS, springall, sound.fields) οι δεσμοί αντιμετωπίζονται με την πρόσθεση «μισής νίκης» σε καθέναν από τους εμπλεκόμενους στη σύγκριση.

4.3.2.2 Εφαρμογή στο S-Plus

Η εφαρμογή της αντίστοιχης διαδικασίας στο S-Plus μας δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς συμφωνούν με αυτά της R (Παράρτημα – Πίνακας A.10):

Call: glm(formula = response ~ Milwaukee + Detroit + Toronto + NY + Boston + Cleveland, family = binomial)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-2.038187	-0.4057733	0.04325878	0.6116289	2.260009

Coefficients:

	Value	Std. Error	t value
(Intercept)*	0.3022600	0.1309006	2.309080
Milwaukee	1.6195516	0.3471395	4.665421
Detroit	1.4753535	0.3443070	4.284994
Toronto	1.3271072	0.3401072	3.902026
NY	1.2813372	0.3401858	3.766580
Boston	1.1437997	0.3376374	3.387657

Cleveland 0.7046919 0.3348132 2.104732

(Dispersion Parameter for Binomial family taken to be 1)

Null Deviance: 73.51592 on 41 degrees of freedom

Residual Deviance: 38.64285 on 35 degrees of freedom

Number of Fisher Scoring Iterations: 3

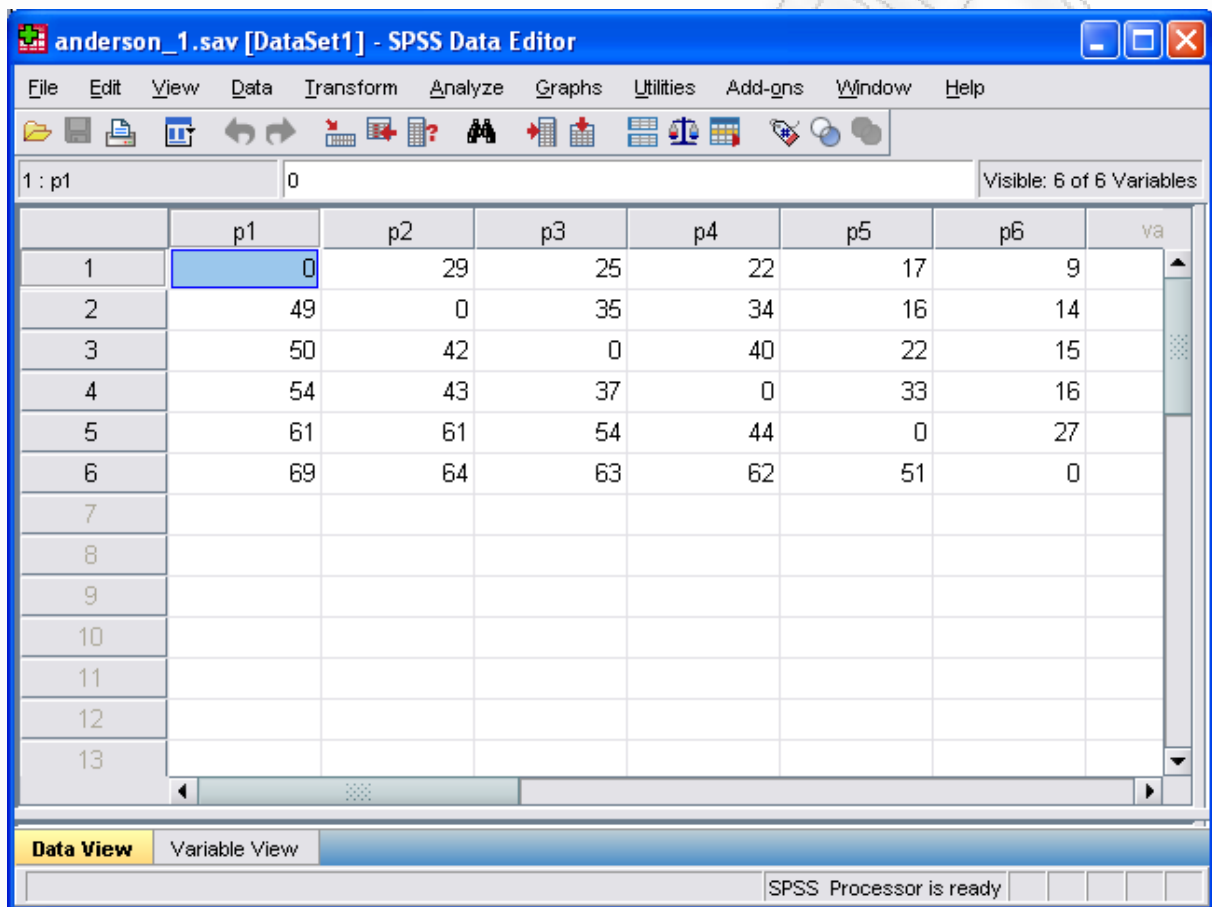
* Ο σταθερός όρος αποτελεί την εκτίμηση για το πλεονέκτημα έδρας \hat{a}^*

Το SPSS, το S-Plus και η γλώσσα προγραμματισμού R είναι μερικά από τα διαθέσιμα στατιστικά πακέτα που προσφέρονται για την ανάλυση κατηγορικών δεδομένων, τα οποία προέρχονται από συγκρίσεις κατά ζεύγη. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το SAS, ένα ισχυρό πακέτο που καλύπτει ένα μεγάλο εύρος στατιστικών αναλύσεων. Πιο συγκεκριμένα, η κύρια διαδικασία PROC GENMOD μας δίνει τη δυνατότητα να προσαρμόζουμε γενικευμένα γραμμικά μοντέλα. Το STATA, επίσης, διαθέτει το πρόγραμμα *glm* με τη βοήθεια του οποίου μπορεί να πραγματοποιηθεί η προσαρμογή τέτοιων μοντέλων, ενώ και το GLIM περιέχει μία αντίστοιχη ρουτίνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

4.3.1.1 Εφαρμογή στο SPSS – 1^{ος} τρόπος

Πίνακας Α.1 – Τα δεδομένα του Πίνακα 4.4 στο SPSS



The screenshot shows the SPSS Data Editor window for a file named 'anderson_1.sav'. The window title is 'anderson_1.sav [DataSet1] - SPSS Data Editor'. The menu bar includes File, Edit, View, Data, Transform, Analyze, Graphs, Utilities, Add-ons, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations and data manipulation. The main data grid shows 13 rows and 7 columns. The columns are labeled p1, p2, p3, p4, p5, p6, and va. The first row is highlighted, and the value '0' in the p1 column of the first row is selected. The status bar at the bottom indicates 'SPSS Processor is ready'.

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	va
1	0	29	25	22	17	9	
2	49	0	35	34	16	14	
3	50	42	0	40	22	15	
4	54	43	37	0	33	16	
5	61	61	54	44	0	27	
6	69	64	63	62	51	0	
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							

Πίνακας Α.2 – SPSS syntax για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.4 (Κατέρη, 2008)

* SYMMETRY and QUASI SYMMETRY models for an IxI contingency table.

SET MXLOOP=20000.

MATRIX.


```

GET X.
COMPUTE ES = X.

COMPUTE FL = X.
COMPUTE IFLAG=0.

LOOP i = 1 TO NROW(X).
  LOOP j = 1 TO NCOL(X).
    COMPUTE ES(i,j) = (X(i,j)+X(j,i))/2.
    DO IF (ES(i,j)>0).
      COMPUTE FL(i,j)=1.
    ELSE.
      DO IF (i<>j).
        COMPUTE FL(i,j)=0.
        COMPUTE IFLAG=IFLAG+1.
      END IF.
    END IF.
  END LOOP.
END LOOP.

COMPUTE IFLAG=IFLAG/2

*****
*QUASI SYMMETRY (ITERATIVELY)
*****

COMPUTE TOLER = 10**(-3).

COMPUTE RM=DIAG(X).
COMPUTE CM=DIAG(X).
COMPUTE CC=DIAG(X).
COMPUTE RM=RSUM(X).
COMPUTE CM=CSUM(X).

LOOP i=1 TO NROW(X).
  COMPUTE CC(i)=RM(i)/(RM(i)+CM(i)).
END LOOP.

COMPUTE EQQ=X.

```

```

LOOP i=1 TO NROW(CC).
  LOOP j=1 TO NROW(CC).
    COMPUTE EQQ(i,j)=2*CC(i)*ES(i,j)/(CC(i)+CC(j)).
  END LOOP.
END LOOP.

COMPUTE CHECK=10.

LOOP ITER = 1 TO 5000.

DO IF (CHECK<TOLER).
  BREAK.
END IF.

COMPUTE EQOLD = EQQ.
COMPUTE CCOLD = CC.
COMPUTE CD=MAKE(NROW(CC),NROW(CC),0).
LOOP j=1 TO NROW(CC).
  LOOP i=1 TO NROW(CC).
    COMPUTE CD(i,j)=CC(j).
  END LOOP.
END LOOP.

LOOP i = 1 TO NROW(X).
  LOOP j = 1 TO NCOL(X).
    DO IF (FL(i,j)=0).
      COMPUTE ES(i,j)=1.
    END IF.
  END LOOP.
END LOOP.

COMPUTE CC = RSUM(((X&*T(EQOLD))-T(X)&*EQOLD))&/ES).
COMPUTE CC=CCOLD+CC&/RSUM((T(EQOLD)&**2)&/CD&*ES)-(DIAG(X)&/CC)).

LOOP i = 1 TO NROW(X).
  DO IF (CC(i)<0).
    COMPUTE CC(i)=CCOLD(I).
  END IF.

```

END LOOP.

LOOP i = 1 TO NROW(X).

 LOOP j = 1 TO NCOL(X).

 DO IF (FL(i,j)=0).

 COMPUTE ES(i,j)=0.

 END IF.

 END LOOP.

END LOOP.

LOOP i=1 TO NROW(X).

 LOOP j=1 TO NCOL(X).

 COMPUTE EQQ(i,j)=2*CC(i)*ES(i,j)/(CC(i)+CC(j)).

 END LOOP.

END LOOP.

COMPUTE CHECK=MSUM(ABS(CC-CCOLD)).

END LOOP.

PRINT X /TITLE = "DATA TABLE" /FORMAT F10.3.

PRINT ES /TITLE = "MLE OF THE EXPECTED UNDER SYMMETRY (S) TABLE" /FORMAT F10.3.

PRINT EQQ /TITLE = "MLE OF THE EXPECTED UNDER QUASI SYMMETRY (QS) TABLE" /FORMAT F10.3.

PRINT T(CC) /TITLE = "MLE OF THE PARAMETER VECTOR C" /FORMAT F10.3.

PRINT ITER /TITLE="ITERATIONS".

LOOP i = 1 TO NROW(X).

 LOOP j = 1 TO NCOL(X).

 DO IF (FL(i,j)=0).

 COMPUTE X(i,j)=1.

 COMPUTE ES(i,j)=1.

 COMPUTE EQQ(i,j)=1.

```

        END IF.
    END LOOP.
END LOOP.

COMPUTE XX=X.
COMPUTE ESS=ES.
COMPUTE EQQS=EQQ.

LOOP i = 1 TO NROW(X).
    LOOP j = 1 TO NCOL(X).
        DO IF (FL(i,j)>0).
            DO IF (X(i,j)=0).
                COMPUTE XX(i,j)=1.
                COMPUTE ESS(i,j)=1.
                COMPUTE EQQS(i,j)=1.
            END IF.
        END IF.
    END LOOP.
END LOOP.

COMPUTE G2 = 2*MSUM(XX &* LN(XX &/ ESS) ).
COMPUTE X2 = MSUM((X-ES)&**2 &/ ES).
COMPUTE DF = NROW(X)*(NROW(X)-1)/2-IFLAG.

COMPUTE SIG = 1 - CHICDF(G2,DF).
PRINT {G2,DF,SIG} /TITLE = "LIKELIHOOD RATIO TEST FOR S" /FORMAT F10.4 /CLABELS
'G2','DF','SIG.'.
COMPUTE SIG = 1 - CHICDF(X2,DF).
PRINT {X2,DF,SIG} /TITLE = "PEARSON'S X2 FOR S" /FORMAT F10.4 /CLABELS 'X2','DF','SIG.'.

COMPUTE G2 = 2*MSUM( XX &* LN(XX &/ EQQS) ).
COMPUTE X2 = MSUM((X-EQQ)&**2 &/ EQQ).
COMPUTE DF = (NROW(X)-1)*(NROW(X)-2)/2-IFLAG.

COMPUTE SIG = 1 - CHICDF(G2,DF).
PRINT {G2,DF,SIG} /TITLE = "LIKELIHOOD RATIO TEST FOR QS" /FORMAT F10.4 /CLABELS
'G2','DF','SIG.'.

```

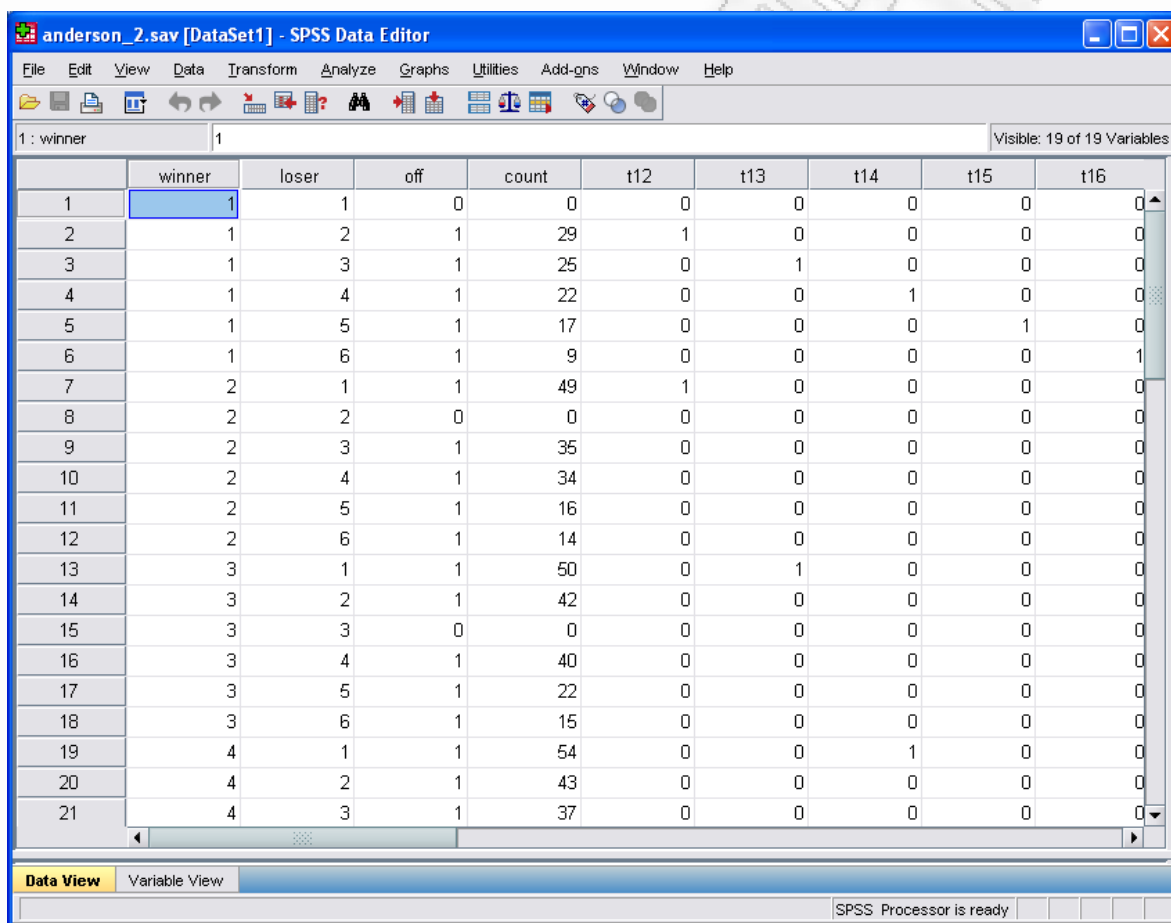
COMPUTE SIG = 1 - CHICDF(X2,DF).

PRINT {X2,DF,SIG} /TITLE = "PEARSON'S X2 FOR QS" /FORMAT F10.4 /CLABELS 'X2','DF','SIG'.

END MATRIX.

4.3.1.2 Εφαρμογή στο SPSS – 2^{ος} τρόπος

Πίνακας Α.3 - Τα δεδομένα του Πίνακα 4.4 στο SPSS (Κατέρη, 2010)



	winner	loser	off	count	t12	t13	t14	t15	t16
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	29	1	0	0	0	0
3	1	3	1	25	0	1	0	0	0
4	1	4	1	22	0	0	1	0	0
5	1	5	1	17	0	0	0	1	0
6	1	6	1	9	0	0	0	0	1
7	2	1	1	49	1	0	0	0	0
8	2	2	0	0	0	0	0	0	0
9	2	3	1	35	0	0	0	0	0
10	2	4	1	34	0	0	0	0	0
11	2	5	1	16	0	0	0	0	0
12	2	6	1	14	0	0	0	0	0
13	3	1	1	50	0	1	0	0	0
14	3	2	1	42	0	0	0	0	0
15	3	3	0	0	0	0	0	0	0
16	3	4	1	40	0	0	0	0	0
17	3	5	1	22	0	0	0	0	0
18	3	6	1	15	0	0	0	0	0
19	4	1	1	54	0	0	1	0	0
20	4	2	1	43	0	0	0	0	0
21	4	3	1	37	0	0	0	0	0

Κατασκευάζουμε δύο στήλες, “winner” και “loser”, που περιέχουν όλα τα ζεύγη συγκρίσεων μεταξύ των 6 συγκροτημάτων κατοικιών $6 \times 6 = 36$ γραμμές . Η στήλη “winner” αντιστοιχεί στις γραμμές του Πίνακα 4.4, ενώ η στήλη “loser” στις στήλες. Η τρίτη στήλη “off” παίρνει τις τιμές 0 για τα διαγώνια και 1 για τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα. Η στήλη “count” περιλαμβάνει τις συχνότητες που αντιστοιχούν σε κάθε συνδυασμό του πίνακα. Οι συχνότητες του πίνακα εισάγονται κατά γραμμή με τα διαγώνια στοιχεία να παίρνουν την

τιμή 0. Επειδή τα δεδομένα πρέπει να αντιπροσωπεύουν διωνυμικές συχνότητες πρέπει να οργανωθούν κατά ζεύγη. Καθώς $t=6$ συγκροτήματα κατοικιών, κατασκευάζουμε $\frac{t-1}{2} = \frac{6-1}{2} = 15$ στήλες (“t12”, “t13”, “t14”, “t15”, “t16”, “t23”,..., “t56”). Έτσι η στήλη “t12” παίρνει τις τιμές 1 για τους συνδυασμούς 1,2 και 2,1 και 0 για όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς. Ανάλογα συμπληρώνονται και οι υπόλοιπες στήλες.

Πίνακας A.4 – SPSS syntax για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.4

weight by count.

```
GENLOG winner loser WITH t12 t13 t14 t15 t16 t23 t24 t25 t26 t34 t35 t36 t45 t46 t56
  /CSTRUCTURE=off
  /MODEL=MULTINOMIAL
  /PRINT=FREQ RESID ADJRESID ZRESID DEV ESTIM
  /PLOT=RESID(ADJRESID DEV) NORMPROB(ADJRESID DEV)
  /CRITERIA=CIN(95) ITERATE(20) CONVERGE(0.001) DELTA(.5)
  /DESIGN winner loser t12 t13 t14 t15 t16 t23 t24 t25 t26 t34 t35 t36 t45 t46 t56.
```

Τα δεδομένα σταθμίζονται σύμφωνα με τη στήλη “count” των συχνοτήτων και μέσω της διαδικασίας General Loglinear που παρέχει το SPSS παίρνουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

4.3.1.3 Εφαρμογή στην R

Πίνακας A.5 – R κώδικας για την κατασκευή του Πίνακα 4.4

```
> library(BradleyTerry2)
```

```
# Φορτώνουμε το πακέτο
```

```
> win.house<-c("facility 1","facility 2","facility 3","facility 4","facility 5","facility 6")
```

Δημιουργούμε το διάνυσμα “win.house” που περιέχει ετικέτες για καθένα από τα συγκροτήματα κατοικιών

```
>house<-matrix(c(0,29,25,22,17,9,49,0,35,34,16,14,50,42,0,40,22,15,54,43,37,0,33,16,61,61,54,44,0,27,69,64,63,62,51,0),ncol=6,byrow=T,dimnames=list(win.house,win.house))
```

```
> house
```

	facility 1	facility 2	facility 3	facility 4	facility 5	facility 6
facility 1	0	29	25	22	17	9
facility 2	49	0	35	34	16	14
facility 3	50	42	0	40	22	15
facility 4	54	43	37	0	33	16
facility 5	61	61	54	44	0	27
facility 6	69	64	63	62	51	0

Δημιουργούμε τον πίνακα “house” εισάγοντας το διάνυσμα των συχνοτήτων. Τα δεδομένα χωρίζονται σε έξι γραμμές και στήλες και τοποθετούνται οι ετικέτες του διανύσματος “win.house” στις δύο διαστάσεις

Για να προσαρμόσουμε το μοντέλο Bradley-Terry και να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή *BTm* από το πακέτο, τα δεδομένα πρέπει αρχικά να μετατραπούν σε διωνυμικές συχνότητες. Όπως έχουμε δείξει και στο 3^ο κεφάλαιο (Πίνακας 3.1), τα δεδομένα πρέπει να οργανωθούν κατά ζεύγη (“house1”, “house2”) με τις αντίστοιχες συχνότητες για τις προτιμήσεις και τις μη προτιμήσεις του “house1” εναντίον του “house2”.

```
> house.sf<-countsToBinomial(house)
```

```
> names(house.sf)[1:4]<-c("house1","house2","pref1","pref2")
```

```
> house.sf
```

	house1	house2	pref1	pref2
1	facility 1	facility 2	29	49
2	facility 1	facility 3	25	50
3	facility 1	facility 4	22	54
4	facility 1	facility 5	17	61
5	facility 1	facility 6	9	69
6	facility 2	facility 3	35	42
7	facility 2	facility 4	34	43
8	facility 2	facility 5	16	61

9	facility 2	facility 6	14	64
10	facility 3	facility 4	40	37
11	facility 3	facility 5	22	54
12	facility 3	facility 6	15	63
13	facility 4	facility 5	33	44
14	facility 4	facility 6	16	62
15	facility 5	facility 6	27	51

Δημιουργούμε τον πίνακα των διωνυμικών συχνοτήτων “house.sf” από τον πίνακα “house”.
 Δίνουμε στις στήλες του πίνακα “house.sf” ονόματα (οι εξ ορισμού επιλογές για τις στήλες
 είναι “player1”, “player2”, “win1” και “win2”)

Πίνακας Α.6 – R κώδικας για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.4

Η διωνυμική απόκριση μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη διαφορά των παραμέτρων των
 συγκροτημάτων κατοικιών ως εξής:

```
> housemodel<-BTm(cbind(win1,win2),house1,house2,~house,id="house",data=
house.sf)
```

```
# Δημιουργούμε το μοντέλο “housemodel” από τα δεδομένα του πίνακα “house.sf”. Δίνουμε
το όνομα “house” στον παράγοντα που αντιπροσωπεύει τα έξι συγκροτήματα κατοικιών, για
τον οποίο προσδιορίζουμε ότι υπάρχει μία ξεχωριστή παράμετρος για καθένα από τα επίπεδά
του (“~house”)
```

```
> housemodel
```

```
# Συνοπτική παρουσίαση του μοντέλου
```

```
> update(housemodel,refcat="facility 6")
```

```
# Αλλαγή ομάδας αναφοράς χωρίς τον επαναπροσδιορισμό ολόκληρου του μοντέλου
```

```
> summary(housemodel)
```

```
# Αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου
```

```
> BTabilities(housemodel)
```


	ability	s.e.
facility 1	0.0000000	0.0000000
facility 2	0.4661666	0.1453952
facility 3	0.6927044	0.1463580
facility 4	0.8178949	0.1465122
facility 5	1.4337740	0.1521840
facility 6	2.0837079	0.1651808

Άλλος ένας τρόπος για να πάρουμε τις εκτιμήσεις και τα τυπικά τους σφάλματα

```
> library(qncalc)
```

```
> housemodel.qn<-qncalc(BTabilities(housemodel))
```

```
> plot(housemodel.qn,levelNames=c("fac1","fac2","fac3","fac4","fac5","fac6"),xlab="Συγκρότημα κατοικιών",ylab="Σκορ β",main="Διαστήματα βασισμένα στα quasi τυπικά σφάλματα")
```

Διαστήματα για τα $\hat{\beta}_i$ βασισμένα στα quasi τυπικά σφάλματα. Αρχικά φορτώνουμε το πακέτο “qncalc”. Δημιουργούμε το σετ των quasi τυπικών σφαλμάτων “housemodel.qn” από τους συντελεστές του Bradley-Terry μοντέλου “housemodel” και απεικονίζουμε γραφικά τους συντελεστές με τα αντίστοιχα διαστήματά τους

```
> round(vcov(housemodel),5)
```

Πίνακας συνδιακυμάνσεων

```
> fitted.probs<-fitted(housemodel)
```

```
> fitted.probs
```

Οι εκτιμήσεις των υπό συνθήκη πιθανοτήτων $\hat{\Pi}_{ij}$

```
> x1<-c(rep(0,6))
```

```
> x2<-c(fitted.probs[1],rep(0,5))
```

```
> x3<-c(fitted.probs[2],fitted.probs[6],rep(0,4))
```

```
> x4<-c(fitted.probs[3],fitted.probs[7],fitted.probs[10],rep(0,3))
```

```
> x5<-c(fitted.probs[4],fitted.probs[8],fitted.probs[11],fitted.probs[13],0,0)
```

```
> x6<-c(fitted.probs[5],fitted.probs[9],fitted.probs[12],fitted.probs[14],fitted.probs[15],0)
```

```
> fitted1.probs<-matrix(cbind(x1,x2,x3,x4,x5,x6),ncol=6,dimnames=list(win.house,
win.house))
```

```
> fitted1.probs[lower.tri(fitted1.probs)]<-1-round(fitted(housemodel),4)
```

```
> fitted1.probs
```

	facility 1	facility 2	facility 3	facility 4	facility 5	facility 6
facility 1	0.0000	0.3855	0.3334	0.3062	0.1925	0.1107
facility 2	0.6145	0.0000	0.4436	0.4130	0.2754	0.1655
facility 3	0.6666	0.5564	0.0000	0.4687	0.3228	0.1992
facility 4	0.6938	0.5870	0.5313	0.0000	0.3507	0.2200
facility 5	0.8075	0.7246	0.6772	0.6493	0.0000	0.3430
facility 6	0.8893	0.8345	0.8008	0.7800	0.6570	0.0000

Δημιουργία του πίνακα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων $\hat{\Pi}_{ij}$. Δημιουργούμε τα διανύσματα “x1”-“x6” τα οποία περιέχουν τις εκτιμήσεις των Π_{ij} και στη συνέχεια τα ενώνουμε φτιάχνοντας τον πίνακα “fitted1.probs”. Μ’ αυτό τον τρόπο συμπληρώνεται το άνω τρίγωνο του πίνακα. Όσον αφορά το κάτω τρίγωνο και τις συμπληρωματικές πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ji}$ δεν έχουμε παρά να αφαιρέσουμε από τη μονάδα την εκτίμηση του αντίστοιχου κελιού του άνω τριγώνου (αφού $\Pi_{ji} = 1 - \Pi_{ij}$)

```
>house.sum<-matrix(c(0,78,75,76,78,78,0,77,77,77,78,75,77,0,77,76,78,76,77,77,0,77,
78,78,77,76,77,0,78,78,78,78,78,0),6,6)
```

```
> house.sum
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	0	78	75	76	78	78
[2,]	78	0	77	77	77	78
[3,]	75	77	0	77	76	78
[4,]	76	77	77	0	77	78
[5,]	78	77	76	77	0	78
[6,]	78	78	78	78	78	0

```
> fitted.counts<-round(house.sum*fitted1.probs,3)
```

```
> fitted.counts
```

	facility 1	facility 2	facility 3	facility 4	facility 5	facility 6
facility 1	0.000	30.071	25.007	23.272	15.016	8.634
facility 2	47.931	0.000	34.158	31.798	21.203	12.912
facility 3	49.995	42.843	0.000	36.093	24.531	15.541
facility 4	52.729	45.199	40.910	0.000	27.005	17.158
facility 5	62.985	55.794	51.467	49.996	0.000	26.754
facility 6	69.365	65.091	62.462	60.840	51.246	0.000

Δημιουργία του πίνακα των αναμενόμενων τιμών $\hat{\mu}_{ij}$. Αρχικά φτιάχνουμε τον πίνακα “house.sum” του οποίου κάθε κελί αποτελεί άθροισμα των συγκρίσεων του αντίστοιχου ζεύγους συγκροτημάτων. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε αυτό τον πίνακα με τον πίνακα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων κατά στοιχείο.

```
> res<-round(resid(housemodel,type="deviance"),3)
> res1<-cbind(house.sf,res)
> res1
> par(mfrow=c(2,2))
> qqnorm(res)
> qqline(res,col=2)
> plot(fitted.probs,res,ylab="Κατάλοιπα Απόκλισης",xlab="Εκτιμήσεις υπό συνθήκη
πιθανοτήτων")
# Δημιουργούμε το διάνυσμα “res” των καταλοίπων απόκλισης και στη συνέχεια των πίνακα
“res1” ενώνοντας τον πίνακα “house.sf” με το διάνυσμα “res”. Δημιουργούμε το Q-Q plot
των καταλοίπων. Απεικονίζουμε τα κατάλοιπα μαζί με τις εκτιμήσεις των υπό συνθήκη
πιθανοτήτων  $\Pi_{ij}$ 
```

4.3.1.4 Εφαρμογή στο S-Plus

Πίνακας A.7 – S-Plus κώδικας για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.4 (μοντέλο logit)

```

> house1<-c(rep(-1,5),rep(0,10))
> house2<-c(1,0,0,0,0,-1,-1,-1,-1,rep(0,6))
> house3<-c(0,1,0,0,0,1,0,0,0,-1,-1,-1,0,0,0)
> house4<-c(0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,-1,-1,0)
> house5<-c(0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,-1)
> house6<-c(0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1)
# Δημιουργούμε τις 6 ψευδομεταβλητές “house1”-“house6” που αντιστοιχούν στα 6
συγκροτήματα κατοικιών. Για κάθε συγκρότημα ξεκινάμε από το 2ο κελί της 1ης στήλης του
Πίνακα 4.4 και τοποθετούμε τις τιμές: 1 αν το συγκεκριμένο συγκρότημα προτιμήθηκε στην
υπό εξέταση σύγκριση, -1 αν δεν προτιμήθηκε και 0 αν δεν συμμετείχε (15 τιμές όσα και τα
κελιά του κάτω τριγώνου)

> response<-cbind(c(49,50,54,61,69,42,43,61,64,37,54,63,44,62,51),c(78,75,76,78,78,77,77
,77,78,77,76,78,77,78,78))-c(49,50,54,61,69,42,43,61,64,37,54,63,44,62,51))
> response
      [,1] [,2]
[1,] 49  29
[2,] 50  25
[3,] 54  22
[4,] 61  17
[5,] 69   9
[6,] 42  35
[7,] 43  34
[8,] 61  16
[9,] 64  14
[10,] 37  40
[11,] 54  22
[12,] 63  15
[13,] 44  33
[14,] 62  16
[15,] 51  27

```

```
# Δημιουργούμε τον πίνακα "response". Η 1η στήλη αντιπροσωπεύει τον αριθμό των προτιμήσεων σε καθεμιά από τις 15 συγκρίσεις, ενώ η 2η τον αριθμό των μη προτιμήσεων  
> options(contrasts=c("contr.treatment","contr.poly"))
```

```
# Αλλάζουμε τους περιορισμούς επειδή έχουμε διωνυμικά δεδομένα
```

```
> fit.BT<-glm(response~-1+house2+house3+house4+house5+house6,family=binomial)  
> summary(fit.BT,cor=F)
```

```
# Προσαρμογή του μοντέλου "fit.BT" χωρίς σταθερό όρο και αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων
```

Οι αναμενόμενες συχνότητες $\hat{\mu}_{ij}$ και οι υπό συνθήκη πιθανότητες $\hat{\Pi}_{ij}$ υπολογίζονται με τον τρόπο που δείξαμε στον Πίνακα Α.6.

Πίνακας Α.8 – S-Plus κώδικας για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.4 (μοντέλο quasi-συμμετρίας)

```
> win.house<-c("fac1","fac2","fac3","fac4","fac5","fac6")
```

```
> losing.house<-win.house
```

```
# Δημιουργούμε ετικέτες για τα συγκροτήματα κατοικιών
```

```
> table.1<-expand.grid(losing=factor(losing.house),winning=factor(win.house))
```

```
> table.1
```

```
# Το πλαίσιο δεδομένων "table.1" αποτελείται από όλες τις δυνατές συγκρίσεις των παραγόντων "losing" και "winning", οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τα 6 συγκροτήματα κατοικιών
```

```
> table.1$counts<-c(0,29,25,22,17,9,49,0,35,34,16,14,50,42,0,40,22,15,54,43,37,0,33,16,61,  
61,54,44,0,27,69,64,63,62,51,0)
```

```
# Δημιουργούμε στο πλαίσιο δεδομένων "table.1" το διάνυσμα "counts" που περιέχει τις συχνότητες του Πίνακα 4.4 (οι συχνότητες τοποθετούνται στο διάνυσμα ανά γραμμή)
```

```
> table.1$symm<-paste(pmin(as.character(table.1$winning),as.character
(table.1$losing)),pmax(as.character(table.1$winning),as.character(table.1$losing)),
sep=",")
# Δημιουργούμε στο πλαίσιο δεδομένων “table.1” το διάνυσμα “symm” που περιέχει όλα τα
ζεύγη συγκρίσεων των παραγόντων “losing” και “winning”
```

```
> table.1
```

	losing	winning	counts	symm
1	fac1	fac1	0	fac1, fac1
2	fac2	fac1	29	fac1, fac2
3	fac3	fac1	25	fac1, fac3
4	fac4	fac1	22	fac1, fac4
5	fac5	fac1	17	fac1, fac5
6	fac6	fac1	9	fac1, fac6
7	fac1	fac2	49	fac1, fac2
8	fac2	fac2	0	fac2, fac2
9	fac3	fac2	35	fac2, fac3
.
.
.
35	fac5	fac6	51	fac5, fac6
36	fac6	fac6	0	fac6, fac6

```
# Η τελική μορφή του πλαισίου δεδομένων “table.1”
```

```
> fit.BTQS<-glm(counts~symm+winning,data=table.1,family=poisson(log))
```

```
> summary(fit.BTQS,cor=F)
```

```
# Προσαρμογή του μοντέλου “fit.BTQS” και αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων
```

```
> matrix(round(fitted(fit.BTQS),4),nr=6,byrow=T,dimnames=list(win.house,
losing.house))
```

```
# Οι εκτιμήσεις των αναμενόμενων συχνοτήτων  $\mu_{ij}$ 
```

4.3.2.1 Εφαρμογή στην R

Πίνακας Α.9 – R κώδικας για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.9

```
> library(BradleyTerry2)
```

```
> data(baseball)
```

```
> baseball
```

	home.team	away.team	home.wins	away.wins
1	Milwaukee	Detroit	4	3
2	Milwaukee	Toronto	4	2
3	Milwaukee	New York	4	3
4	Milwaukee	Boston	6	1
5	Milwaukee	Cleveland	4	2
6	Milwaukee	Baltimore	6	0
.
.
.
37	Baltimore	Milwaukee	2	5
38	Baltimore	Detroit	1	5
39	Baltimore	Toronto	1	6
40	Baltimore	New York	2	4
41	Baltimore	Boston	1	6
42	Baltimore	Cleveland	3	4

```
# Το παιχνίδι δεδομένων "baseball"
```

```
> baseballModel1<-BTm(cbind(home.wins,away.wins), home.team,away.team, data=baseball,id="team")
```

```
> summary(baseballModel1)
```

```
# Αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου "baseballModel1" (χωρίς την επίδραση διάταξης)
```

```
> baseball$home.team<-data.frame(team=baseball$home.team,at.home=1)
```

```
> baseball$away.team<-data.frame(team=baseball$away.team,at.home=0)
```

```
> baseballModel2<-update(baseballModel1,formula=~team+at.home)
```

```
> summary(baseballModel2)
```

```
# Αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου "baseballModel2" (με επίδραση διάταξης)
```

```
> library(qvcalc)
```

```
> baseball.qv<-qvcalc(BTabilities(baseballModel2))
```

```
> plot(baseball.qv,levelNames=c("Bal","Bos","Cle","Det","Mil","NY","Tor"),xlab="Ομάδες μπίζμπολ",ylab="Σκορ β",main="Διαστήματα βασισμένα στα quasi τυπικά σφάλματα")
```

Δημιουργούμε το σετ των quasi τυπικών σφαλμάτων “baseball.qn” από τους συντελεστές του Bradley-Terry μοντέλου “baseballModel2” και απεικονίζουμε γραφικά τους συντελεστές με τα αντίστοιχα διαστήματά τους

```
> anova(baseballModel1,baseballModel2)
```

```
# Σύγκριση της προσαρμογής των δύο μοντέλων
```

4.3.2.2 Εφαρμογή στο S-Plus

Πίνακας Α.10 – S-Plus κώδικας για την ανάλυση των δεδομένων του Πίνακα 4.9

```
> response<-cbind(c(4,4,4,6,4,6,4,4,6,6,4,2,4,4,6,4,4,6,5,6,2,3,2,3,5,2,2,4,5,2,3,1,2,3,3,1,4,4,2,4,1,3),c(3,2,3,1,2,0,2,3,0,1,3,4,3,2,0,3,2,1,2,0,4,3,5,3,1,5,5,3,1,5,3,5,5,3,4,6,2,3,4,2,6,4))
```

Δημιουργούμε τον πίνακα “response” ο οποίος αποτελείται από 42 ζεύγη (ή 42 ανεξάρτητα διωνυμικά δείγματα) που αντιπροσωπεύουν τις νίκες και τις ήττες της γηπεδούχου ομάδας

```
> Milwaukee<-c(rep(1,6),rep(0,15),rep(-1,6),rep(0,15))
```

```
> Detroit<-c(-1,rep(0,5),rep(1,5),rep(0,10),1,rep(0,5),rep(-1,5),rep(0,10))
```

```
> Toronto<-c(0,-1,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,1,1,1,1,rep(0,7),1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,-1,-1,-1,rep(0,6))
```

```
> NY<-c(0,0,-1,0,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,0,1,1,1,rep(0,5),1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,-1,-1,-1,0,0,0)
```

```
> Boston<-c(0,0,0,-1,0,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,-1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,-1,-1,0)
```

```
> Cleveland<-c(0,0,0,0,-1,0,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,-1,0,-1,0,-1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,-1)
```

```
> Baltimore<-c(rep(0,5),-1,0,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,-1,0,-1,-1,rep(0,5),1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1)
```

Δημιουργούμε 7 ψευδομεταβλητές για τις 7 ομάδες που καθεμιά παίρνει την τιμή 1 όταν η ομάδα είναι γηπεδούχος σε ένα συγκεκριμένο ζεύγος, -1 όταν είναι φιλοξενούμενη και 0 όταν δεν συμμετέχει

```
> options(contrasts=c("contr.treatment","contr.poly"))
```

```
> fit.BTO<-glm(response~Milwaukee+Detroit+Toronto+NY+Boston+Cleveland,family=
```


binomial)

```
> summary(fit.BTO,cor=F)
```

```
# Προσαρμογή του μοντέλου “fit.BTO” και αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων
```

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Κατέρη, Μ. 2008. Σημειώσεις «Ανάλυση Διακριτών Δεδομένων».

Κατέρη, Μ. 2010. Σημειώσεις Εργαστηρίου Η/Υ του μαθήματος «Ανάλυση Διακριτών Δεδομένων».

Ξένη

Abelson, R. M. & Bradley, R. A. 1954. A 2x2 factorial with paired comparisons. *Biometrics* **10**: 487.

Agresti, A. 1990. *Categorical Data Analysis*. Wiley, New York.

Agresti, A. 2002. *Categorical Data Analysis*, second ed. Wiley, New York.

Agresti, A. 2007. *Introduction to Categorical Data Analysis*, second ed. Wiley, New York.

Andersen, H. S. and J. Bonke 1980. "Boligsektorens fordelingsmæssige virkninger" (The distributional effects of housing). Working Paper 9, Low Income Commission, The National Danish Institute for Building Research, Hørsholm.

Atkinson, A. C. 1972. A test of the linear logistic and Bradley-Terry models. *Biometrika* **59**: 37-42.

Beaver, R. J. 1974. Locally asymptotically most stringent tests for paired comparison experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.* **69**: 423-7.

Beaver, R. J. and Gokhale, D. V. 1975. A model to incorporate within-pair order effects in paired comparisons. *Comm. In Statist.* **4**: 923-39.

Beaver, R. J. and Rao, P. V. 1972. The use of limit theorems in paired and triple comparison model building. *J. Math. Psychol.* **9**: 92-103.

Böckenholt, U. and Dillon, W. 1997. Modelling within-subject dependencies in ordinal paired comparison data. *Psychometrika* **62**: 411-34.

Bradley, R. A. 1952b. The distribution of the t and F statistics for a class of non-normal populations. *Virginia J Science* **3**: 1-32.

- Bradley, R. A. 1953. Some statistical methods in taste testing and quality evaluation. *Biometrics* **9**: 22-38.
- Bradley, R. A. 1954a. The rank analysis of incomplete block designs II. Additional tables for the method of paired comparisons. *Biometrika* **41**: 502-37.
- Bradley, R. A. 1976. Science, statistics, and paired comparisons. *Biometrics* **32**: 213-240.
- Bradley, R. A. and El-Helbawy, A. T. 1976. Treatment contrasts in paired comparisons. Basic procedures with applications to factorials. *Biometrika* **62**: 255-262.
- Bradley, R. A. and Terry, M. E. 1952a. Rank analysis of incomplete block designs I. The method of paired comparisons. *Biometrika* **39**: 324-345.
- Butler, K. and Whelan, J. T. 2000. The existence of maximum likelihood estimates in the Bradley-Terry model and its extensions. Dalhousie Univ. and Univ. of Bern.
- Causeur, D. and Husson, F. 2005. A 2-dimensional extension of the Bradley-Terry model for paired comparisons. *J. of Statist. Plan. and Inf.* **135**: 245-259.
- Caussinus, H. 1966. Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* **29**: 77-182.
- Cox, D.R., 1970. *The Analysis of Binary Data* (2nd ed. 1989, by D. R. Cox and E. J. Snell). London: Chapman & Hall.
- Cox, D.R., 1972. Regression models and life-tables. *J. Roy. Statist. Soc. B* **24**: 187-220.
- Critchlow, D. E. and Fligner, M. A. 1991. Paired comparison, triple comparison, and ranking experiments. *J. Am. Statist. Ass.* **65**: 317-328.
- David, H. A. 1963. *The Method of Paired Comparisons*. Griffin's Statistical Monographs and Courses No.12. London: Charles Griffin and Co.
- David, H. A. 1988. *The Method of Paired Comparisons*, 2nd ed. Oxford Univ. Press.
- Davidson, R. R. 1970. On extending the Bradley-Terry model to accommodate ties in paired comparison experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.* **65**: 317-28.
- Davidson, R. R. and Beaver R. J. 1977. On extending the Bradley-Terry model to incorporate within-pair order effects. *Biometrics* **33**: 693-702.
- Davidson, R. R. and Bradley, R. A. 1969. Multivariate paired comparisons: the extension of a univariate model and associated estimation and test procedures. *Biometrika* **56**: 81-95.
- Davidson, R. R. and Bradley, R. A. 1970. Multivariate paired comparisons: some large-sample results on estimation and tests of equality of preference. In *Nonparametric Techniques in Statistical Inference*, (M. L. Puri, ed.). Cambridge Univ. Press, 111-25.

- De Soete, G., Carroll, J.D., 1983. A maximum likelihood method for fitting the wandering vector model. *Psychometrika* **48**: 553–566.
- Dittrich, R., Hatzinger, R., Katzenbeisser, W., 1998. Modelling the effect of subject-specific covariates in paired comparison studies with an application to university rankings. *Appl. Statist.* **47**: 511–525.
- Dykstra, O. 1956. A note on the rank analysis of incomplete block designs-applications beyond the scope of existing tables. *Biometrics* **12**: 301-6.
- El-Helbawy, A. T. 1974. *Factorial treatment combinations in paired comparisons*. Doctoral dissertation, Florida State Univ.
- Fienberg, S. E. 1979. Loglinear representation for paired comparison models with ties and within-pair order effects. *Biometrics* **35**: 479-81.
- Fienberg, S. E. and Larntz, K. 1976. Loglinear representation for paired and multiple comparison models. *Biometrika* **63**: 245-254.
- Firth, D. and R. X. de Menezes 2004. Quasi-variances. *Biometrika* **91**: 65-80.
- Firth, D. and Turner, H. 2010. Bradley-Terry models in R: The BradleyTerry2 package. Univ. of Warwick, UK.
- Glenn, W. A. and David, H. A. 1960. Ties in paired-comparison experiments using a modified Thurstone-Mosteller method. *Biometrics* **16**: 86-109.
- Haberman, S. J. 1974. *The Analysis of Frequency Data*. University of Chicago Press.
- Hunter, D. R. and Lange, K. 2000. Rejoinder to discussion of “Optimization transfer algorithms using surrogate objective functions.” *J. Comput. Graph. Statist.* **9**: 52–59.
- Imrey, P. B. 1998. Bradley-Terry model. Pp. 437-443 in *Encyclopedia of Biostatistics*. Chichester, UK: Wiley.
- Imrey, P. B., Johnson, W. D. and Koch, G. G. 1976. An incomplete contingency table approach to paired-comparison experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.* **71**: 614-23.
- Joe, H. 1990. Extended use of paired comparison models, with application to chess rankings. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. C* **39(1)**: 85-93.
- Kim, K. and Li, L. 2000. Estimating driver crash risks based on the extended Bradley-Terry model: an induced exposure method. *J. R. Statist. Soc. A* **163**: Part 2, 227-240.
- Kousgaard, N. 1976. Models for paired comparisons with ties. *Scand. J. Statist.* **3**: 1-14.
- Lancaster, J. F. and Quade, D. 1983. Random effects in paired-comparison experiments using the Bradley-Terry model. *Biometrics* **39**: 245-249.

- Luce, R. D. 1959. *Individual Choice Behavior*. Wiley, New York.
- Mallows, C. L. 1957. Non-null ranking models. I. *Biometrika* **44**: 114-30.
- Matthews, J. N. S. and Morris, K. P. 1995. An application of Bradley-Terry-type models to the measurement of pain. *Appl. Statist.* **44**: 243-255.
- Maxwell, A. E. 1974. The logistic transformation in the analysis of paired-comparison data. *Br. J. Math. Statist. Psychol.* **27**: 62-71.
- McCullagh, P., 2000. Invariance and factorial models (RSS discussion paper, Oct 13 1999) reply. *J. Roy. Statist. Soc. B* **62**: 209–256.
- Mosteller, F. 1951. Remarks on the method of paired comparisons: I. The least-squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika* **16**: 3-9.
- Park, G. T. 1961. Sensory testing by triple comparisons. *Biometrics* **17**: 251-260.
- Pendergrass, R. N. and Bradley, R. A. 1960. Ranking in triple comparisons. *Contributions to Probability and Statistics*, (I. Olkin *et al.*, ed.). Stanford Univ. Press, 331-51.
- Quenoville, M. H. and John, J. A. 1971. Paired comparison design for 2^n factorials. *Appl. Statist.* **20**: 16-24.
- Rai, S. C. 1971b. Ranking in fractional triad comparisons. *J. Ind. Soc. Agric. Statist.* **23 (1)**: 52-61.
- Rao, P. V. and Kupper, L. L. 1967. Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model. *J. Amer. Statist. Assoc.* **62**: 194–204. [Corrigendum *J. Amer. Statist. Assoc.* **63**: 1550–1551.]
- Sen, P. K. and David, H. A. 1968. Paired comparisons for paired characteristics. *Ann. Math. Statist.* **39**: 200-8.
- Sinclair, C.D. 1982. GLIM for preference. *Lect. Notes Statist.* **14**: 164-178.
- Springall, A. 1973. Response surface fitting using a generalization of the Bradley-Terry paired comparison model. *Appl. Statist.* **22**: 59-68.
- Stigler, S. 1994. Citation patterns in the journals of statistics and probability. *Statist. Sci.* **9**: 94-108.
- Su, Y. and Zhou, M. 2006. On a connection between the Bradley-Terry model and the Cox proportional hazards model. *Statist. & Prob. Letters* **76**: 698-702
- Terry, M. E., Bradley, R. A. and Davis, L. L. 1952. New designs and techniques for organoleptic testing. *Food Tech.* **6**: 250-4.

Thurstone, L. L. 1927. The method of paired comparisons for social values. *J. Abnormal Social Psychology* **21**: 384-400.

Zermelo, E. 1929. Die berechnung der turnier-ergebnisse als ein maximum problem der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift* **29**: 436-460.

ПАВЕЛЪСЪМЪ ПЕРВА