

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ
ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ
(MULTIPLE STEP-STRESS MODELS)
ΓΙΑ ΛΟΓΟΚΡΙΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

Τρυφωνία Γ. Αγγελούλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ
ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ
(MULTIPLE STEP-STRESS MODELS)
ΓΙΑ ΛΟΓΟΚΡΙΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

Τρυφωνία Γ. Αγγελούλου

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κατέρη Μαρία (Επιβλέπουσα)
- Αντζουλάκος Δημήτριος
- Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**STUDY OF MULTIPLE STEP-STRESS
MODELS FOR CENSORED DATA**

By

Tryfonia G. Angelopoulou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece

February 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΙΑ

Στους γονείς μου,
Γιώργο & Ντίνα,
και στους αδερφούς μου,
Κώστα & Δημήτρη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κα. Κατέρη Μαρία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την άριστη συνεργασία που είχαμε καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια που μου προσέφερε για τη διαμόρφωση και ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αντζουλάκο Δημήτριο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά και τον κ. Μπούτσικα Μιχαήλ, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και όλους τους φίλους μου για τη συμπαράστασή τους καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τρυφωνία Αγγελοπούλου

Φεβρουάριος 2011

Περίληψη

Στα πειράματα αξιοπιστίας, τα προϊόντα τα οποία ελέγχονται είναι συνήθως άκρως αξιόπιστα με υψηλούς μέσους χρόνους ζωής κάτω από τις κανονικές συνθήκες λειτουργίας. Επομένως, είναι αρκετά δύσκολο να λάβουμε επαρκείς πληροφορίες για την κατανομή του χρόνου ζωής των προϊόντων και συχνά απαιτούνται χρονοβόροι και ακριβοί έλεγχοι προκειμένου να συλλέξουμε αρκετά δεδομένα. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών, οι ερευνητές καταφεύγουν στους Επιταχυνόμενους Ελέγχους Χρόνων Ζωής(ALT), βάσει των οποίων οι μονάδες υποβάλλονται σε υψηλότερα επίπεδα πίεσης, με στόχο την άμεση λήψη αποτυχιών. Οι έλεγχοι αυτοί επιτρέπουν στον πειραματιστή να λάβει επαρκείς πληροφορίες για τις παραμέτρους της κατανομής του χρόνου ζωής πιο γρήγορα από ότι κάτω από φυσιολογικές συνθήκες λειτουργίας.

Αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η μελέτη των πειραμάτων βηματικής πίεσης, τα οποία αποτελούν μία ειδική περίπτωση επιταχυνόμενων ελέγχων. Τα πειράματα βηματικής πίεσης επιτρέπουν στον ερευνητή να αυξάνει σταδιακά τα επίπεδα πίεσης σε δεδομένα χρονικά σημεία κατά τη διάρκεια του πειράματος, με στόχο να εξασφαλίσει περισσότερες αποτυχίες. Επιπλέον, προκειμένου να περιοριστεί το κόστος του πειράματος αλλά και λόγω χρονικών περιορισμών, η ύπαρξη λογοκρισίας στα δεδομένα είναι πρακτικά αναπόφευκτη.

Στη διπλωματική εργασία παρουσιάζεται το μοντέλο βηματικής πίεσης κάτω από διαφορετικά είδη λογοκρισίας. Συγκεκριμένα, περιγράφεται το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, δηλαδή το μοντέλο που περιλαμβάνει μόνο δύο επίπεδα πίεσης, όταν τα δεδομένα που διαθέτουμε προέρχονται από λογοκρισία τύπου II, λογοκρισία τύπου I, υβριδική λογοκρισία τύπου II, υβριδική λογοκρισία τύπου I και προοδευτική λογοκρισία τύπου II. Επιπλέον, δίνεται το μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης κάτω από λογοκρισία τύπου I, λογοκρισία τύπου II και προοδευτική λογοκρισία τύπου I. Στη συνέχεια, μελετάται το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων και κάτω από λογοκρισία τύπου I και II, έχοντας θεωρήσει ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων προέρχονται από την εκθετική κατανομή. Για όλα τα παραπάνω μοντέλα, δίνονται οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων, έχοντας υποθέσει ότι οι χρόνοι ζωής ακολουθούν την εκθετική κατανομή και προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης.

Abstract

In reliability experiments, the products that are tested are often highly reliable with large mean times to failure under normal operating conditions. Therefore, it is very difficult to obtain adequate information about the failure time distribution of the products and, consequently, time-consuming and expensive tests are frequently required in order to collect enough data. To overcome these problems, researchers resort to accelerated life-testing (ALT), wherein the units are subjected to higher stress levels so as to cause rapid failures. This testing enables the experimenter to obtain adequate information on the parameters of lifetime distribution more quickly than would be possible under normal operating conditions.

The subject of this dissertation is to study step-stress testing, which is a special class of accelerated life-testing. The step-stress test allows the researcher to gradually increase the stress levels at some fixed time points during the experiment so as to ensure more failures. Moreover, in order to reduce the cost of the experiment and due to time constraints, censoring is unavoidable in practice.

In this dissertation we present the step-stress model under different types of censoring. Specifically, we discuss the simple step-stress model, viz. the model with only with two stress levels, when the available data are Type-II censored, Type-I censored, Type-II hybrid censored, Type-I hybrid censored and Progressively Type-II censored. Furthermore, we present the multiple step-stress model under Type-I, Type-II and Progressive Type-I censoring. In addition, we describe a multi-sample set-up for the case of a simple step-stress experiment under exponentially distributed lifetimes with Type-I and Type-II censoring. For all the above models, we present the maximum likelihood estimators (MLEs) of the parameters by assuming a cumulative exposure model with lifetimes being exponentially distributed.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ix
Abstract	xi
1. Εισαγωγή	1
1.1 Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής (ALT)	1
1.1.1 Ορισμός και σκοπός των ALT	1
1.1.2 Κατηγορίες δεδομένων	3
1.1.3 Τρόποι εφαρμογής τεχνητής πίεσης	6
1.2 Διατεταγμένες παρατηρήσεις	10
1.3 Μοντέλο Αθροιστικής Έκθεσης	13
2. Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II	19
2.1 Εισαγωγή	19
2.2 Περιγραφή μοντέλου	21
2.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	23
2.4 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π.	28
2.5 Ροπές και Πιθανότητες Ουράς	34
2.6 Διαστήματα Εμπιστοσύνης	36
2.6.1 Ακριβή Διαστήματα Εμπιστοσύνης	37
2.6.2 Προσεγγιστικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης	38
2.6.3 Bootstrap Διαστήματα Εμπιστοσύνης	40
2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ	45
2.8 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με τυχαίο χρόνο αλλαγής του επιπέδου πίεσης	60
2.8.1 Περιγραφή μοντέλου	60
2.8.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	61

2.8.3	Μέση τιμή και διακύμανση των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$	63
2.8.4	Διαστήματα Εμπιστοσύνης	64
2.8.5	Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου πλήθους μονάδων n_1	69
2.8.5.1	Η διακύμανση των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$	70
2.8.5.2	Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας	71
2.8.5.3	Η διακύμανση του λογαρίθμου του μέσου χρόνου ζωής	72
2.8.6	Ειδική περίπτωση του μοντέλου όπου καταγράφονται μόνο δύο Παρατηρήσεις	74
2.9	Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής από την κατανομή Weibull	77
3.	Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I	83
3.1	Εισαγωγή	83
3.2	Περιγραφή μοντέλου	84
3.3	Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	86
3.4	Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π.	88
3.5	Ροπές και Πιθανότητες Ουράς	93
3.6	Διαστήματα Εμπιστοσύνης	94
3.6.1	Ακριβή Διαστήματα Εμπιστοσύνης	95
3.6.2	Προσεγγιστικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης	95
3.6.3	Bootstrap Διαστήματα Εμπιστοσύνης	97
3.7	Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την λογαριθμοκανονική κατανομή	98
3.8	Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή	102

4. Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με υβριδική λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα	105
4.1 Εισαγωγή	105
4.2 Περιγραφή μοντέλου	107
4.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	109
4.4 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π. και οι ροπές 1 ^{ης} και 2 ^{ης} τάξης	113
5. Μοντέλο βηματικής πίεσης με προοδευτική λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα	117
5.1 Εισαγωγή	117
5.2 Προοδευτική λογοκρισία τύπου II	118
5.2.1 Περιγραφή μοντέλου	118
5.2.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	120
5.2.3 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π. & οι ροπές 1 ^{ης} και 2 ^{ης} τάξης	121
5.2.4 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ και του βέλτιστου πλαισίου λογοκρισίας	123
5.3 Προοδευτική λογοκρισία τύπου I	124
5.3.1 Περιγραφή μοντέλου	124
5.3.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	127
5.3.3 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ	128
6. Σχετικά ζητήματα αναφορικά με τα μοντέλα βηματικής πίεσης	133
6.1 Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα	133
6.1.1 Εισαγωγή	133
6.1.2 Περιγραφή μοντέλου	135
6.1.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	136
6.2 Μελέτη μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων	138

6.2.1	Εισαγωγή	138
6.2.2	Περιγραφή μοντέλου και Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας	139
6.2.3	Σύγκριση των μεθόδων χρήσης ενός και πολλαπλών δειγμάτων στα πλαίσια ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης	145
	Βιβλιογραφία	149

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

1.1 Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής (ALT)

1.1.1 Ορισμός και σκοπός των ALT

Ο υψηλός ανταγωνισμός που επικρατεί στην παγκόσμια αγορά σε συνδυασμό με τη ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη, έχουν επιβάλει αυξημένες απαιτήσεις στην παραγωγή και ποιότητα των προϊόντων. Τα τελευταία χρόνια, η ποιότητα έχει καθιερωθεί ως ένα βασικό κριτήριο καταναλωτικής και επιχειρηματικής συμπεριφοράς. Οι καταναλωτές, πλέον, θεωρούν την ποιότητα ως το σημαντικότερο κριτήριο για τις επιλογές τους, ανάγοντας την επομένως σε στοιχείο βιωσιμότητας της κάθε επιχείρησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι βιομηχανίες, στην προσπάθειά τους να αναβαθμίσουν την ποιότητα των προϊόντων τους, να πραγματοποιούν συχνότερα στατιστικούς ελέγχους έχοντας ως στόχο τη λήψη ακριβέστερων εκτιμήσεων για τις παραμέτρους που μελετούν.

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της υλοποίησης των στατιστικών ελέγχων ποιότητας αποτελεί συνήθως το μεγάλο χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης αυτών. Στα βιομηχανικά πειράματα, τα προϊόντα τα οποία ελέγχονται είναι συνήθως άκρως αξιόπιστα με υψηλούς μέσους χρόνους ζωής κάτω από φυσιολογικές συνθήκες, με αποτέλεσμα οι σχετικοί έλεγχοι να είναι ακριβοί και χρονοβόροι. Για την αντιμετώπιση του θέματος αυτού, οι ερευνητές καταφεύγουν σε εναλλακτικές μεθόδους διεξαγωγής στατιστικών ελέγχων, οι οποίες συμβάλλουν στην ελάττωση του χρόνου ζωής των υπό εξέταση προϊόντων θέτοντας αυτά σε συνθήκες τεχνητής πίεσης. Οι στατιστικές αυτές μέθοδοι καλούνται Επιταχυνόμενοι Έλεγχοι Χρόνων Ζωής (ALT). Βασικά σημεία αναφοράς των ALT αποτελούν τα βιβλία των Lawless (1982), Meeker and Hahn (1985), Nelson (1990), Meeker and Escobar (1998) και Bagdonavicius and Nikulin (2002), ενώ μία πρόσφατη επισκόπηση των ALT δίνεται από τον Elsayed (2003).

Στα πειράματα αξιοπιστίας, ο ερευνητής συχνά ενδιαφέρεται για την επίδραση που έχουν κάποιοι συγκεκριμένοι παράγοντες στη διάρκεια ζωής των πειραματικών μονάδων, όπως θερμοκρασία, πίεση, τάση, φορτίο. Οι επιταχυνόμενοι έλεγχοι επιτρέπουν στον ερευνητή να αυξήσει τα επίπεδα πίεσης των παραγόντων αυτών με σκοπό να εξασφαλίσει ότι οι

1.1 Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής (ALT)

αποτυχίες των μονάδων θα επιτευχθούν σε μικρότερο χρονικό διάστημα και να αποσπάσει πληροφορίες για τις παραμέτρους των κατανομών των χρόνων ζωής πιο γρήγορα από ότι στην περίπτωση που οι μονάδες λειτουργούσαν κάτω από φυσιολογικές συνθήκες. Οι πληροφορίες που λαμβάνονται κάτω από τις επιταχυνόμενες-τεχνητές συνθήκες πίεσης χρησιμοποιούνται, σε συνδυασμό με ένα στατιστικό μοντέλο αξιοπιστίας, για την εκτίμηση των ζητούμενων χαρακτηριστικών των κατανομών των χρόνων ζωής, κάτω από τις φυσιολογικές συνθήκες. Το στατιστικό αυτό μοντέλο εκτιμά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο φυσιολογικό επίπεδο πίεσης, στηριζόμενο στα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας σε κάθε επιταχυνόμενο επίπεδο πίεσης. Τα βασικότερα και πιο γνωστά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στους επιταχυνόμενους ελέγχους είναι τα μοντέλα Arrhenius, Eyring και Inverse power law, τα οποία περιγράφονται εκτενώς στο βιβλίο του Nelson (1990).

Η πραγματοποίηση των επιταχυνόμενων χρόνων ζωής απαιτεί προσεκτική τοποθέτηση των μονάδων στα διαφορετικά επίπεδα πίεσης του πειράματος έτσι ώστε οι εκτιμήσεις, κάτω από τις κανονικές συνθήκες λειτουργίας, να είναι ακριβείς και να λαμβάνονται με τη χρησιμοποίηση μικρών μεγεθών δείγματος και σε μικρό χρονικό διάστημα. Επιπλέον, κάθε φορά θα πρέπει να διευκρινίζονται το είδος πίεσης που θα ασκηθεί, η μέθοδος με την οποία θα εφαρμοσθεί η πίεση, τα επίπεδα πίεσης (καθώς και το πλήθος αυτών), το πλήθος των μονάδων που θα χρησιμοποιηθούν στο πείραμα καθώς και το στατιστικό μοντέλο, το οποίο θα συνδέει τις πληροφορίες που λαμβάνονται υπό πίεση σε σχέση με τις κανονικές συνθήκες.

Οι πειραματικές μονάδες των προαναφερομένων ελέγχων μπορεί να είναι είτε υλικά είδη είτε προϊόντα. Στην κατηγορία των υλικών συμπεριλαμβάνονται τα μέταλλα, τα πλαστικά, κεραμικά, λιπαντικά, τρόφιμα και φάρμακα ενώ στην κατηγορία των προϊόντων συμπεριλαμβάνονται οι πυκνωτές, λαμπτήρες, μηχανικά εξαρτήματα, ηλεκτρικές συσκευές, αντιστάσεις, ημιαγωγοί, κλπ.

1.1.2 Κατηγορίες δεδομένων

Η βασική διάκριση για τα δεδομένα που λαμβάνονται από ένα επιταχυνόμενο έλεγχο, γίνεται βάσει του χαρακτηριστικού του προϊόντος το οποίο θέλουμε να μελετήσουμε.

Τα δεδομένα που συγκεντρώνουμε επομένως διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Στην 1^η κατηγορία, το χαρακτηριστικό του προϊόντος που μελετάται είναι ο χρόνος ζωής του (life data) ενώ στη 2^η κατηγορία, το χαρακτηριστικό είναι κάποιο άλλο μέτρο επίδοσης, όπως ένταση δύναμης ή πλαστικότητα του προϊόντος (performance data). Τα δεδομένα που θα μας απασχολήσουν στη διπλωματική αυτή εργασία είναι αυτά της 1^{ης} κατηγορίας.

Τα δεδομένα (χρόνοι ζωής) που λαμβάνουμε από την εκτέλεση ενός πειράματος διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, σε πλήρη και λογοκριμένα.

› Πλήρη δεδομένα

Τα πλήρη δεδομένα αποτελούνται από τους ακριβείς χρόνους ζωής καθεμίας από τις μονάδες του δείγματος που μελετάμε. Για να επιτευχθεί η συγκέντρωση πλήρων δεδομένων, ο ερευνητής θα πρέπει να συνεχίσει το πείραμα μέχρι να καταστραφούν όλες οι μονάδες που τέθηκαν υπό έλεγχο.

› Λογοκριμένα ή ελλιπή δεδομένα

Όταν τα δεδομένα που διαθέτουμε είναι λογοκριμένα, τότε υπάρχει μόνο μερική πληροφόρηση για το χρόνο ζωής των πειραματικών μονάδων, ο οποίος μπορεί να είναι είτε λογοκριμένος από τα δεξιά(right censoring), στην περίπτωση που ο χρόνος ζωής είναι μεγαλύτερος από κάποιο δεδομένο χρόνο τ , είτε λογοκριμένος από τα αριστερά(left censoring), στην περίπτωση που είναι μικρότερος από ένα δεδομένο χρόνο τ , είτε λογοκριμένος σε διάστημα(interval censoring), όταν δηλαδή βρίσκεται εντός ενός διαστήματος.

Στην παρούσα εργασία, όταν αναφερόμαστε σε λογοκριμένα δεδομένα θα εννοούμε λογοκριμένα δεδομένα από τα δεξιά.

Τέτοια δεδομένα προκύπτουν όταν κάποιες μονάδες :

- 1) απομακρυνθούν από το τεστ πριν την αποτυχία τους
- 2) έχουν επιβιώσει μέχρι και τη στιγμή ολοκλήρωσης του πειράματος και
- 3) απομακρύνθηκαν από το τεστ επειδή απέτυχαν λόγω κάποιου εξωτερικού παράγοντα.

1.1 Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής (ALT)

Οι περιπτώσεις λογοκρισίας που θα μας απασχολήσουν, στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας, είναι οι ακόλουθες :

• Λογοκρισία τύπου I (Type I censoring)

Όλες οι πειραματικές μονάδες τίθενται σε λειτουργία στην αρχή του πειράματος ($t = 0$) και το πείραμα συνεχίζεται μέχρι μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , όπου σταματά η εκτέλεσή του ή η συλλογή δεδομένων.

Επομένως, στη λογοκρισία τύπου I, το πείραμα ολοκληρώνεται μετά από δεδομένη χρονική περίοδο (time constrained) με πρακτικό πλεονέκτημα να έχουμε γνώση της ακριβούς διάρκειας του πειράματος, αντισταθμίζοντας όμως την αβεβαιότητα που υπάρχει ως προς τον αριθμό των αποτυχιών που θα παρατηρήσουμε, ο οποίος αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

• Λογοκρισίας τύπου II (Type II censoring)

Όλες οι πειραματικές μονάδες τίθενται σε λειτουργία στην αρχή του πειράματος ($t = 0$) και το πείραμα συνεχίζεται μέχρι τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που καταστρέφεται η r -οστή μονάδα (με $r \leq n$).

Συνεπώς, η λογοκρισία τύπου II βασίζεται στην παρατήρηση ενός προεπιλεγμένου αριθμού αποτυχιών (r μονάδων), έχοντας όμως ταυτόχρονα αβεβαιότητα ως προς τη διάρκεια του πειράματος, η οποία αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

• Υβριδική Λογοκρισία (Hybrid censoring)

Η υβριδική λογοκρισία αποτελεί ένα συνδυασμό των τύπων λογοκρισίας I και II και διακρίνεται στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

• Υβριδική λογοκρισία τύπου I

Στην εν λόγω περίπτωση, το πείραμα τερματίζεται την τυχαία χρονική στιγμή $t^* = \min\{t_0, t_{r:n}\}$, δηλαδή τη χρονική στιγμή που θα πραγματοποιηθεί πρώτο ένα από τα κριτήρια που τέθηκαν στις λογοκρισίες τύπου I και II. Το είδος αυτό λογοκρισίας εγγυάται ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης του πειράματος δε θα ξεπεράσει το χρόνο t_0 .

• Υβριδική λογοκρισία τύπου II

Σύμφωνα με αυτό το είδος λογοκρισίας, το πείραμα τερματίζεται τη χρονική στιγμή t_0 εάν η r αποτυχία συμβεί πριν το χρόνο t_0 , διαφορετικά το πείραμα ολοκληρώνεται αμέσως μόλις αποτύχει η r μονάδα. Επομένως, ο χρόνος τερματισμού του πειράματος θα είναι τυχαίος και ίσος με $t^* = \max\{t_0, t_{r:n}\}$. Αν συγκρίνουμε αυτό το είδος λογοκρισίας με την

«παραδοσιακή» λογοκρισία τύπου II παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει είναι τουλάχιστον r . Συνήθως, η υβριδική λογοκρισία τύπου II προτιμάται έναντι της υβριδικής λογοκρισίας τύπου I καθώς χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μπορούμε να καταλήξουμε σε μειωμένο αριθμό δεδομένων, εν αντιθέσει με την πρώτη, σύμφωνα με την οποία προκύπτουν τουλάχιστον r παρατηρήσεις.

▪ Προοδευτική Λογοκρισία (Progressive censoring)

› Προοδευτική λογοκρισία τύπου II

Διαπιστώσαμε ότι βάσει της λογοκρισίας τύπου II, το δείγμα που λαμβάνουμε αποτελείται από r πλήρεις και $n-r$ λογοκριμένους χρόνους ζωής. Μία λογική επέκταση του παραπάνω πλαισίου λογοκρισίας θα ήταν οι $n-r$ μονάδες να αποσυρθούν από το πείραμα σε διαφορετικά χρονικά σημεία και όχι όλες στο χρόνο τερματισμού του πειράματος $X_{r:n}$. Το σχήμα αυτό λογοκρισίας καλείται προοδευτική λογοκρισία τύπου II. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου n όμοιες μονάδες, με συνάρτηση κατανομή $F(x)$ και σ.π.π. $f(x)$, τίθενται υπό μελέτη. Αμέσως μόλις παρατηρηθεί η 1^η αποτυχία, R_1 από τις $n-1$ μονάδες που έχουν επιβιώσει απομακρύνονται τυχαία από το πείραμα. Στη συνέχεια, στη στιγμή που θα καταγραφεί η 2^η αποτυχία μονάδας, τότε θα απομακρυνθούν τυχαία από το τεστ R_2 από τις $n-2-R_1$ εναπομείνουσες μονάδες, κ.ο.κ. . Τελικά, στο χρόνο που θα αποτύχει η r -οστή μονάδα, όλες οι μονάδες $R_r = n-r-R_1-\dots-R_{r-1}$ που έχουν επιβιώσει θα απομακρυνθούν από το πείραμα. Βάσει αυτού του σχήματος λογοκρισίας, το πλήθος r των μονάδων που αποτυγχάνουν και οι ποσότητες R_1, R_2, \dots, R_r είναι προκαθορισμένες ενώ αντίθετα οι χρόνοι λογοκρισίας είναι όλοι τυχαίοι. Συνήθως, οι χρόνοι ζωής που καταγράφονται κάτω από αυτό το πλαίσιο λογοκρισίας συμβολίζονται με $X_{1:r:n}, \dots, X_{r:r:n}$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν $R_1 = \dots = R_{r-1} = 0$ τότε $R_r = n-r$, περίπτωση που αντιστοιχεί στην «παραδοσιακή» λογοκρισία τύπου II. Στην περίπτωση που $R_1 = \dots = R_r = 0$ τότε $n=r$ και επομένως τα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι πλήρη.

▸ Προοδευτική λογοκρισία τύπου I

Στην περίπτωση της λογοκρισίας τύπου I διαπιστώσαμε ότι κριτήριο λογοκρισίας αποτελεί ο χρονικός περιορισμός που θέτουμε. Ανάλογο κριτήριο μπορούμε να υιοθετήσουμε και στα πλαίσια της προοδευτικής λογοκρισίας. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι n όμοιες μονάδες τοποθετούνται σε ένα πείραμα. Στις χρονικές στιγμές T_1, T_2, \dots, T_{m-1} , από το τεστ απομακρύνονται τυχαία ή λογοκρίνονται R_1, R_2, \dots, R_{m-1} μονάδες, αντίστοιχα. Οι χρόνοι T_1, \dots, T_{m-1} είναι προεπιλεγμένοι. Τα R_i , για $i=1, \dots, m-1$ είναι καθορισμένα έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι στο χρόνο λογοκρισίας T_i υπάρχουν τουλάχιστον R_i μονάδες που έχουν επιβιώσει. Τέλος, το πείραμα ολοκληρώνεται τη χρονική στιγμή T_m , με την απομάκρυνση, εκείνη τη χρονική στιγμή, των R_m μονάδων που έχουν απομείνει. Το σχήμα αυτό λογοκρισίας είναι προφανώς μια γενίκευση της λογοκρισίας τύπου I και καλείται προοδευτική λογοκρισία τύπου I. Μπορούμε να επισημάνουμε ότι η λογοκρισία αυτού του τύπου είναι πιο πρακτική και πιο χρήσιμη από άποψη σχεδιασμού του πειράματος. Παρόλα αυτά, ενέχει αρκετές δυσκολίες όσον αφορά στη θεωρητική της μελέτη καθώς υπάρχει η πιθανότητα το πείραμα να ολοκληρωθεί πριν να φτάσει στο m στάδιο λογοκρισίας (δηλαδή πριν από το χρόνο T_m) εξαιτίας της τυχαιότητας με την οποία συμβαίνουν οι αποτυχίες των μονάδων σε κάθε χρονικό διάστημα $[T_{i-1}, T_i]$. Επομένως, τα συμπεράσματα τα οποία περιέχονται στην πλειοψηφία της βιβλιογραφίας στηρίζονται κυρίως σε υπολογιστικά αποτελέσματα.

1.1.3 Τρόποι εφαρμογής τεχνητής πίεσης

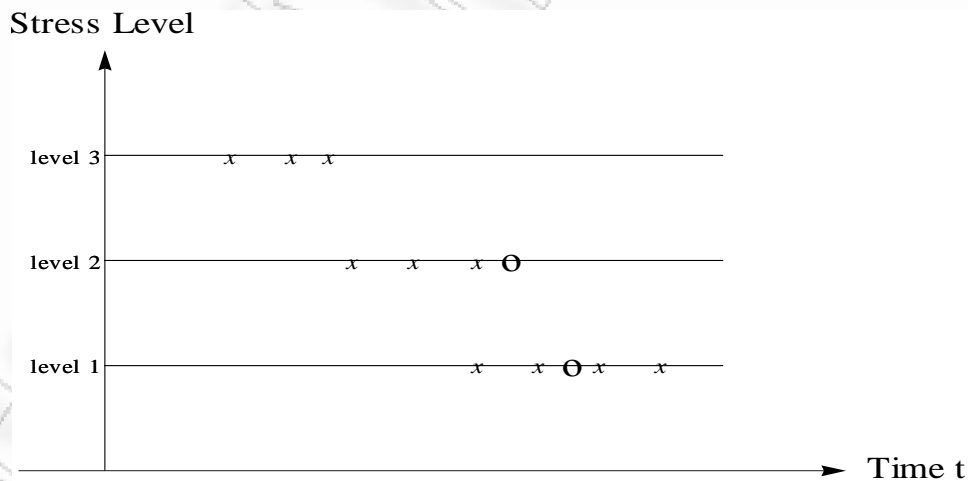
Για την πραγματοποίηση ενός επιταχυνόμενου ελέγχου, η επιλογή του τύπου πίεσης που θα ασκήσουμε εξαρτάται από το πώς η πειραματική μονάδα χρησιμοποιείται στην πράξη καθώς επίσης και από κάποιους πρακτικούς και θεωρητικούς περιορισμούς.

Οι συνηθέστεροι τύποι τεχνητής πίεσης που χρησιμοποιούνται στους επιταχυνόμενους ελέγχους είναι οι ακόλουθοι :

1) Σταθερή πίεση (Constant Stress)

Ο πιο κοινός και εύχρηστος τρόπος πραγματοποίησης ενός επιταχυνόμενου ελέγχου είναι κάτω από σταθερή πίεση. Για την εκτέλεση ενός τέτοιου ελέγχου, θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε k επίπεδα πίεσης σε καθένα από τα οποία τοποθετούμε διαφορετικές ομάδες μονάδων από το συνολικό πλήθος των μονάδων που έχουμε στη διάθεσή μας. Κάθε πειραματική μονάδα υποβάλλεται σε σταθερή πίεση καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Αυτός ο τρόπος άσκησης πίεσης έχει αρκετά προτερήματα, όπως ευκολία εφαρμογής, ύπαρξη αξιόπιστων και άρτια ανεπτυγμένων μοντέλων για αρκετά υλικά και προϊόντα καθώς επίσης και ανεπτυγμένη και μηχανογραφημένη ανάλυση τέτοιων δεδομένων.

Στο επόμενο γράφημα απεικονίζεται ένα πείραμα σταθερής πίεσης με τρία επίπεδα πίεσης. Κάθε ευθεία αποτελεί και ένα επίπεδο πίεσης. Με το σύμβολο “x” συμβολίζεται το χρονικό σημείο στο οποίο καταγράφηκε μία αποτυχία ενώ με το σύμβολο “o” συμβολίζεται το χρονικό σημείο στο οποίο μία πειραματική μονάδα λογοκρίθηκε. Για παράδειγμα, στο 1^ο επίπεδο πίεσης, διακρίνουμε ότι 4 πειραματικές μονάδες απέτυχαν ενώ μία λογοκρίθηκε. Παρατηρώντας το παρακάτω γράφημα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι όσο υψηλότερο είναι το επίπεδο πίεσης τόσο συντομότερα αποτυγχάνουν οι πειραματικές μονάδες.

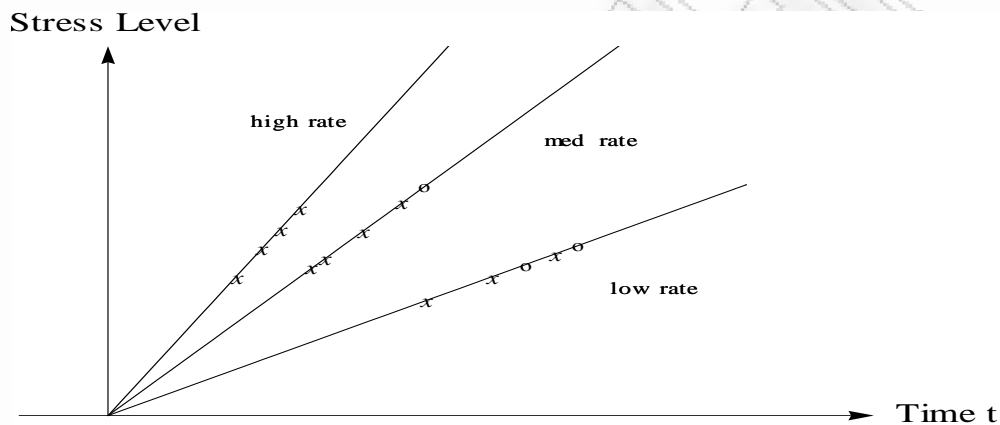


Γράφημα 1.1 : Διάγραμμα πίεσης-χρόνου σε ένα ALT πείραμα στο οποίο εφαρμόζεται σταθερή πίεση

1.1 Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής (ALT)

2) Προοδευτική πίεση (Progressive Stress)

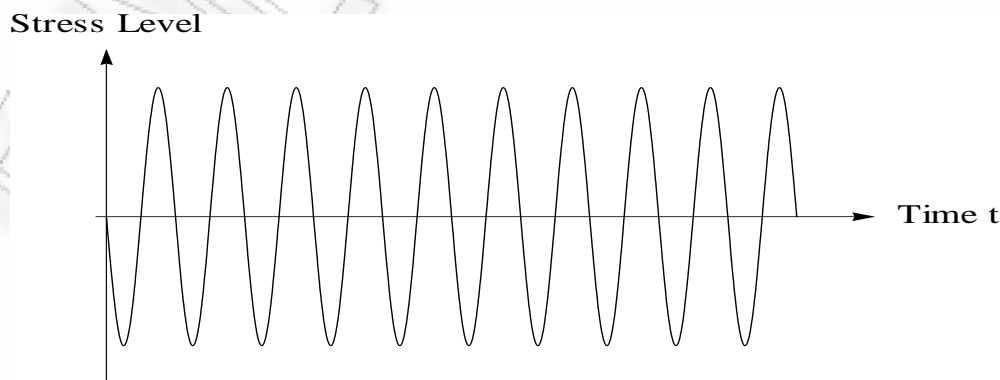
Στα πειράματα που εκτελούνται κάτω από προοδευτική πίεση, οι πειραματικές μονάδες υφίστανται μία συνεχώς αυξανόμενη πίεση. Διαφορετικές ομάδες πειραματικών μονάδων μπορούν να υποβληθούν σε διαφορετικά πρότυπα προοδευτικής πίεσης. Στο ακόλουθο γράφημα απεικονίζεται ένα πείραμα με τρία διαφορετικά πρότυπα προοδευτικής πίεσης, σε καθένα από τα οποία η αύξηση της τεχνητής πίεσης εφαρμόζεται γραμμικά. Διακρίνουμε ότι όταν η αύξηση της πίεσης υφίσταται με χαμηλούς ρυθμούς (low rate) τότε οι πειραματικές μονάδες τείνουν να επιβιώνουν περισσότερο.



Γράφημα 1.2 : Διάγραμμα πίεσης-χρόνου σε ένα ALT πείραμα στο οποίο εφαρμόζεται προοδευτική πίεση

3) Κυκλική πίεση (Cyclic Stress)

Στην πράξη, μερικά προϊόντα υφίστανται κυκλική πίεση, όπως για παράδειγμα η μόνωση κάτω από εναλλασσόμενη τάση δέχεται πίεση ημιτονοειδούς μορφής. Το μοτίβο της κυκλικής πίεσης παρατηρείται συχνά σε μεταλλικά εξαρτήματα.



Γράφημα 1.3 : Διάγραμμα πίεσης-χρόνου σε ένα ALT πείραμα στο οποίο εφαρμόζεται κυκλική πίεση

4) Πίεση κατά βήματα (Step Stress)

Ένας εναλλακτικός τρόπος άσκησης πίεσης είναι αυτός κατά βήματα, ο οποίος αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

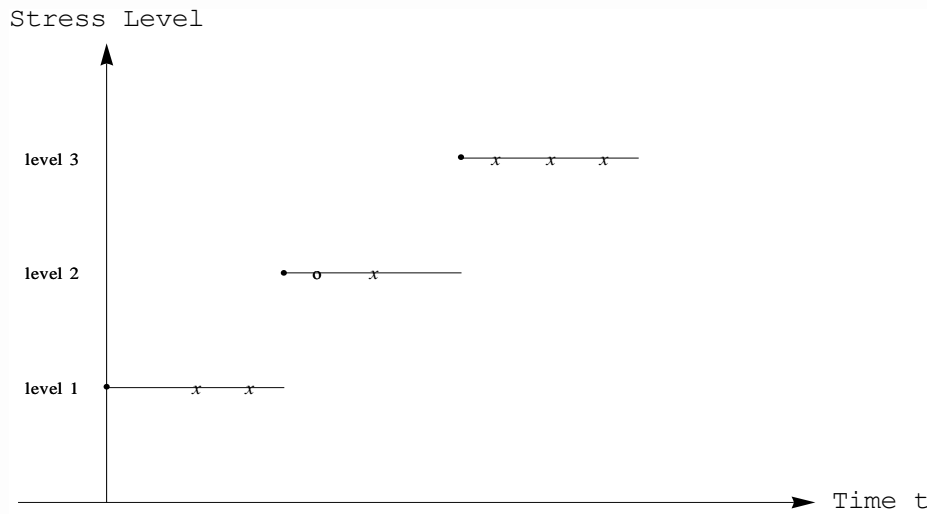
Με τον προαναφερόμενο τρόπο άσκησης πίεσης, οι πειραματικές μονάδες υποβάλλονται διαδοχικώς σε υψηλότερα επίπεδα πίεσης. Τα πειράματα βηματικής πίεσης επιτρέπουν στον ερευνητή να αυξάνει τα επίπεδα των παραγόντων πίεσης σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια του πειράματος (time-step stress model) ή με την επίτευξη προκαθορισμένου αριθμού αποτυχιών σε κάθε επίπεδο (failure-step stress model).

Το κυριότερο πλεονέκτημα των πειραμάτων στα οποία οι μονάδες δέχονται πίεση κατά βήματα, είναι ότι αυξάνοντας το επίπεδο πίεσης αναμένουμε να αποτύχει ένα ικανοποιητικό πλήθος πειραματικών μονάδων. Τα υψηλά επίπεδα πίεσης άλλωστε το διασφαλίζουν αυτό. Η ύπαρξη πλήρων χρόνων ζωής είναι απαραίτητη, από στατιστικής άποψης, καθώς συμβάλλει στην καλύτερη εκτίμηση (μικρότερο σφάλμα) των παραμέτρων του υπό μελέτη μοντέλου. Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα σε μικρότερο χρονικό διάστημα αλλά και με μικρότερο κόστος, καθώς πλέον η διάρκεια του πειράματος έχει μειωθεί.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι και η επιλογή του στατιστικού μοντέλου που θα προτιμήσουμε για την ανάλυση των δεδομένων. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη την αθροιστική επίδραση της έκθεσης στα διαδοχικά αυξανόμενα επίπεδα πίεσης.

Ένα όμως μειονέκτημα του μοντέλου βηματικής πίεσης είναι ότι η πλειοψηφία των αποτυχιών επιτυγχάνεται στα υψηλά επίπεδα πίεσης, στα οποία οι συνθήκες διαφέρουν σημαντικά σε σχέση με τις φυσικές συνθήκες λειτουργίας. Για το λόγο αυτό, το υψηλότερο επίπεδο πίεσης που θα ασκήσουμε θα πρέπει να είναι το υψηλότερο δυνατό επίπεδο πίεσης το οποίο θα εφαρμοστεί χωρίς να προκαλέσει αποτυχίες μονάδων διαφορετικές από εκείνες που είναι πιθανό να σημειωθούν υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας.

Στο επόμενο γράφημα παριστάνεται ένα μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης, στο οποίο απεικονίζονται τα τρία επίπεδα πίεσης καθώς και οι χρόνοι αποτυχίας και λογοκρισίας των πειραματικών μονάδων.



Γράφημα 1.4 : Διάγραμμα πίεσης-χρόνου σε ένα ALT πείραμα στο οποίο εφαρμόζεται βηματική πίεση

Τέλος, υπάρχει και η άσκηση τυχαίας πίεσης (Random Stress), καθώς αρκετά προϊόντα υφίστανται τυχαίες αλλαγές των επιπέδων πίεσης (όπως για παράδειγμα κάποια τμήματα της γέφυρας ή κάποια κατασκευαστικά εξαρτήματα των αεροπλάνων υφίστανται αιολικό στροβιλισμό).

1.2 Διατεταγμένες παρατηρήσεις

Γενικά, οι χρόνοι ζωής που παρατηρούμε σε ένα πείραμα ζωής προκύπτουν, όπως είναι φυσικό, κατά αύξουσα σειρά. Επομένως, για να αναλύσουμε αυτού του είδους τα δεδομένα αρκεί να στηριχθούμε στη θεωρία των διατεταγμένων παρατηρήσεων. Για εκτενή μελέτη της θεωρίας των διατεταγμένων παρατηρήσεων κάποιος μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία των Balakrishnan and Cohen (1991) και Arnold et al. (1992).

Στη συνέχεια, παραθέτουμε κάποια βασικά συμπεράσματα από τη θεωρία των διατεταγμένων παρατηρήσεων, τα οποία είναι απαραίτητα για την εργασία αυτή.

Οι διατεταγμένες παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος X_1, \dots, X_n είναι οι τιμές του δείγματος τοποθετημένες κατά αύξουσα σειρά μεγέθους, τις οποίες συμβολίζουμε συνήθως με τον ακόλουθο τρόπο $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$.

Αρχικά, θα προσδιορίσουμε την από κοινού σ.π.π. των n διατεταγμένων παρατηρήσεων. Έστω X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με α.σ.κ. $F(x)$ και έστω

$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Δεδομένου ότι οι παρατηρηθείσες τιμές των παραπάνω n διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι οι $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$, θεωρούμε ότι οι αρχικές μεταβλητές X_i , για $i = 1, \dots, n$ είναι «αναγκασμένες» να λάβουν τις τιμές $x_{i:k:n}$ που παρατηρήσαμε, ενδεχόμενο που βάσει συμμετρίας εμφανίζει ίση πιθανότητα για κάθε μία από τις $n!$ μεταθέσεις (i_1, \dots, i_n) των $(1, \dots, n)$.

Συνεπώς, η από κοινού σ.π.π. όλων των n διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_{1:n}, \dots, x_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^n f(x_{i:n}), \quad -\infty < x_{1:n} < \dots < x_{n:n} < \infty.$$

Για να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή των πρώτων i -διατεταγμένων παρατηρήσεων αρκεί να ολοκληρώσουμε την παραπάνω από κοινού σ.π.π. και των n διατεταγμένων παρατηρήσεων ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές.

Επομένως,

$$\begin{aligned} f_{1,2,\dots,i:n}(x_{1:n}, \dots, x_{i:n}) &= n! f(x_{1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{i:n}) \cdot \int_{x_{i:n}}^{\infty} \dots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{n:n}) dx_{i+1:n} \dots dx_{n:n} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!} \{1 - F(x_{i:n})\}^{n-i} \prod_{k=1}^i f(x_{k:n}), \quad \text{όπου } -\infty < x_{1:n} < \dots < x_{i:n} < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ομοίως, για να λάβουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$ αρκεί να ολοκληρώσουμε την από κοινού σ.π.π. των n διατεταγμένων

παρατηρήσεων, δηλαδή την $f_{1,2,\dots,n:n}(x_{1:n}, \dots, x_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^n f(x_{i:n})$, ως προς τις υπόλοιπες $n-1$

και έχουμε :

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x_{i:n}) &= n! f(x_{i:n}) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{x_{i:n}} \dots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{i-1:n}) dx_{1:n} \dots dx_{i-1:n} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \int_{x_{i:n}}^{\infty} \dots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{n:n}) dx_{i+1:n} \dots dx_{n:n} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Όμως, } \left\{ \int_{-\infty}^{x_{i:n}} \dots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{i-1:n}) dx_{1:n} \dots dx_{i-1:n} \right\} = \frac{\{F(x_{i:n})\}^{i-1}}{(i-1)!} \quad \text{και}$$

$$\left\{ \int_{x_{i:n}}^{\infty} \dots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{n:n}) dx_{i+1:n} \dots dx_{n:n} \right\} = \frac{\{1 - F(x_{i:n})\}^{n-i}}{(n-i)!}.$$

1.2 Διατεταγμένες παρατηρήσεις

Επομένως, αντικαθιστώντας διαπιστώνουμε ότι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$ δίνεται από τη σχέση:

$$f_{i:n}(x_{i:n}) = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{1-F(x_{i:n})\}^{n-i} f(x_{i:n}), \quad -\infty < x_{i:n} < \infty \quad (1.2)$$

Αντίστοιχη διαδικασία με αυτή που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση της συνάρτησης πυκνότητας της σχέσης (1.2) μίας διατεταγμένης παρατήρησης μπορούμε να ακολουθήσουμε για να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων.

Συγκεκριμένα, για να λάβουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}$ και $X_{j:n}$, όπου $1 \leq i < j \leq n$, αρκεί να ολοκληρώσουμε την από κοινού σ.π.π. των n διατεταγμένων παρατηρήσεων ως ακολούθως :

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = n! f(x_{i:n}) f(x_{j:n}) \times \left\{ \int_{-\infty}^{x_{i:n}} \dots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{i-1:n}) dx_{1:n} \dots dx_{i-1:n} \right\} \\ \times \left\{ \int_{x_{i:n}}^{x_{j:n}} \dots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{j-1:n}) dx_{i+1:n} \dots dx_{j-1:n} \right\} \\ \times \left\{ \int_{x_{j:n}}^{\infty} \dots \int_{x_{j:n}}^{x_{j+2:n}} f(x_{j+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{n:n}) dx_{j+1:n} \dots dx_{n:n} \right\}$$

$$\text{Όμως, } \left\{ \int_{-\infty}^{x_{i:n}} \dots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{i-1:n}) dx_{1:n} \dots dx_{i-1:n} \right\} = \frac{\{F(x_{i:n})\}^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$\left\{ \int_{x_{i:n}}^{x_{j:n}} \dots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{j-1:n}) dx_{i+1:n} \dots dx_{j-1:n} \right\} = \frac{\{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})\}^{j-i-1}}{(j-i-1)!},$$

$$\left\{ \int_{x_{j:n}}^{\infty} \dots \int_{x_{j:n}}^{x_{j+2:n}} f(x_{j+1:n}) \cdot \dots \cdot f(x_{n:n}) dx_{j+1:n} \dots dx_{n:n} \right\} = \frac{\{1 - F(x_{j:n})\}^{n-j}}{(n-j)!}$$

Αντικαθιστώντας, η κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}$ και $X_{j:n}$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(x_{i:n}) f(x_{j:n}) \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})\}^{j-i-1} \{1 - F(x_{j:n})\}^{n-j} \quad (1.3)$$

Πρόταση 1

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από μία συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και έστω $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Η υπό συνθήκη κατανομή του $X_{i:n}$, δοθέντος ότι $X_{j:n} = x_{j:n}$ (για $1 \leq i < j \leq n$) ταυτίζεται με την κατανομή της i -οστής διατεταγμένης παρατήρησης σε ένα δείγμα μεγέθους $j-1$ από ένα πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ περικομμένη από δεξιά στο $x_{j:n}$.

Πρόταση 2

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από μία συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και έστω $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Η υπό συνθήκη κατανομή του $X_{j:n}$, δοθέντος ότι $X_{i:n} = x_{i:n}$ (για $1 \leq i < j \leq n$) ταυτίζεται με την κατανομή της $(j-i)$ -οστής διατεταγμένης παρατήρησης σε ένα δείγμα μεγέθους $n-i$ από ένα πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ περικομμένη από αριστερά στο $x_{i:n}$.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων δίνονται στο βιβλίο των Arnold et al. (1992).

1.3 Μοντέλο Αθροιστικής Έκθεσης

Το πιο διακεκριμένο και συχνά χρησιμοποιούμενο στη βιβλιογραφία μοντέλο για την ανάλυση δεδομένων που προέρχονται από την εφαρμογή μοντέλων πολλαπλής βηματικής πίεσης είναι το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης (cumulative exposure model). Το μοντέλο αυτό εισήχθη από τον Sedyakin (1966) και μελετήθηκε περαιτέρω από τους Bagdonavicius (1978) και Nelson (1980, 1990).

Όπως γνωρίζουμε, σε ένα πείραμα βηματικής πίεσης οι πειραματικές μονάδες εκτίθενται σε πολλά διαφορετικά επίπεδα πίεσης και επομένως η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων θα πρέπει να συνδυάζει τις κατανομές των χρόνων ζωής των μονάδων σε όλα τα επιμέρους επίπεδα πίεσης που χρησιμοποιούνται στο πείραμα, και μάλιστα να λαμβάνει υπόψη και τη σειρά με την οποία τα επίπεδα πίεσης εφαρμόστηκαν.

1.3 Μοντέλο Αθροιστικής Έκθεσης

Το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης σχετίζει την κατανομή του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων σε ένα επίπεδο πίεσης με τις κατανομές σε προηγούμενα επίπεδα υποθέτοντας ότι η εναπομένουσα ζωή των πειραματικών μονάδων εξαρτάται μόνο από το ισχύον επίπεδο πίεσης και από το παρόν αθροιστικό κλάσμα μονάδων που έχει αποτύχει, ανεξαρτήτως από το πώς αυτό το κλάσμα συσσωρεύτηκε (Μαρκοβιανή ιδιότητα).

Επιπλέον, βάσει του μοντέλου, αν οι πειραματικές μονάδες που έχουν επιβιώσει παραμείνουν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο πίεσης τότε θα αποτύχουν σύμφωνα με την α.σ.κ. του επιπέδου στο οποίο βρίσκονται αλλά αρχίζοντας από το προηγούμενο αθροιστικό κλάσμα αποτυχίας.

Τέλος, το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι η αλλαγή στα επίπεδα πίεσης δεν επιδρά στο χρόνο ζωής των πειραματικών μονάδων ενώ αντίθετα το επίπεδο πίεσης που θα ασκήσουμε παίζει καθοριστικό ρόλο.

Μαθηματική διατύπωση του μοντέλου

Για να κατασκευάσουμε το μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω θα θεωρήσουμε ότι διεξάγουμε ένα πείραμα πολλαπλής βηματικής πίεσης.

Αρχικά, όλες οι πειραματικές μονάδες υποβάλλονται στο αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 μέχρι τη χρονική στιγμή τ_1 . Στη συνέχεια, αυξάνουμε το επίπεδο πίεσης σε x_2 και διατηρούμε την πίεση αυτή μέχρι και το χρόνο τ_2 . Με όμοιο τρόπο αυξάνουμε τα επίπεδα πίεσης x_3, x_4, \dots, x_{m+1} στους χρόνους $\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_{m+1}$ αντίστοιχα. Έστω, επίσης, ότι με F_i συμβολίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής υπό πίεση x_i , όπου $i = 1, \dots, m + 1$.

Βάσει των παραδοχών του μοντέλου, η α.σ.κ. $G(t)$ του χρόνου ζωής T κάτω από ένα μοντέλο βηματικής πίεσης λαμβάνεται αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος t_{i-1} κάτω από το επίπεδο πίεσης x_{i-1} έχει έναν ισοδύναμο χρόνο u_i κάτω από το επίπεδο πίεσης x_i , τέτοιον ώστε $F_{i-1}(t_{i-1}) = F_i(u_i)$, σχέση η οποία μας εξασφαλίζει τη συνέχεια της α.σ.κ. στα χρονικά σημεία που μεταβάλλεται το επίπεδο πίεσης.

Επομένως, το μοντέλο δομείται ως ακολούθως :

Βήμα 1^ο :

Υποθέτουμε ότι η α.σ.κ. του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων στο επίπεδο πίεσης x_1 είναι $G(t) = F_1(t)$, για $0 \leq t < \tau_1$.

Βήμα 2^ο :

Σύμφωνα με τις παραδοχές που αναφέρθηκαν παραπάνω, θα πρέπει $F_2(u_1) = F_1(\tau_1)$, όπου το u_1 η λύση της εξίσωσης αυτής. Επομένως, η α.σ.κ. θα δίνεται από τη σχέση $G(t) = F_2(t - \tau_1 + u_1)$, για $\tau_1 \leq t < \tau_2$.

Βήμα 3^ο :

Ομοίως με τα προηγούμενα βήματα, στο 3^ο βήμα οι μονάδες που διαθέτουμε είναι αυτές που έχουν επιβιώσει από το 2^ο βήμα, όπου και εδώ θεωρούμε ένα χρόνο u_2 κάτω από το επίπεδο πίεσης x_3 , ο οποίος αποτελεί τη λύση της εξίσωσης $F_3(u_2) = F_2(\tau_2 - \tau_1 + u_1)$, όπου $\tau_2 - \tau_1 + u_1$ είναι ο ισοδύναμος χρόνος κάτω από το επίπεδο πίεσης x_2 . Επομένως, θα ισχύει $G(t) = F_3(t - \tau_2 + u_2)$, για $\tau_2 \leq t < \tau_3$.

Γενικά για το i -οστό βήμα θα ισχύει $G(t) = F_i(t - \tau_{i-1} + u_{i-1})$ για $\tau_{i-1} \leq t < \tau_i$, όπου u_{i-1} είναι η λύση της εξίσωσης $F_i(u_{i-1}) = F_{i-1}(\tau_{i-1} - \tau_{i-2} + u_{i-2})$.

Επομένως, το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης έχει την ακόλουθη μορφή :

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 \leq t < \tau_1 \\ F_2(t - \tau_1 + u_1) & , \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ F_3(t - \tau_2 + u_2) & , \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \\ F_{m+1}(t - \tau_m + u_m) & , \tau_m \leq t < +\infty \end{cases} ,$$

όπου $u_0 = \tau_0 = 0$ και u_i η λύση της εξίσωσης. $F_{i+1}(u_i) = F_i(\tau_i - \tau_{i-1} + u_{i-1})$, για $i = 1, \dots, m$.

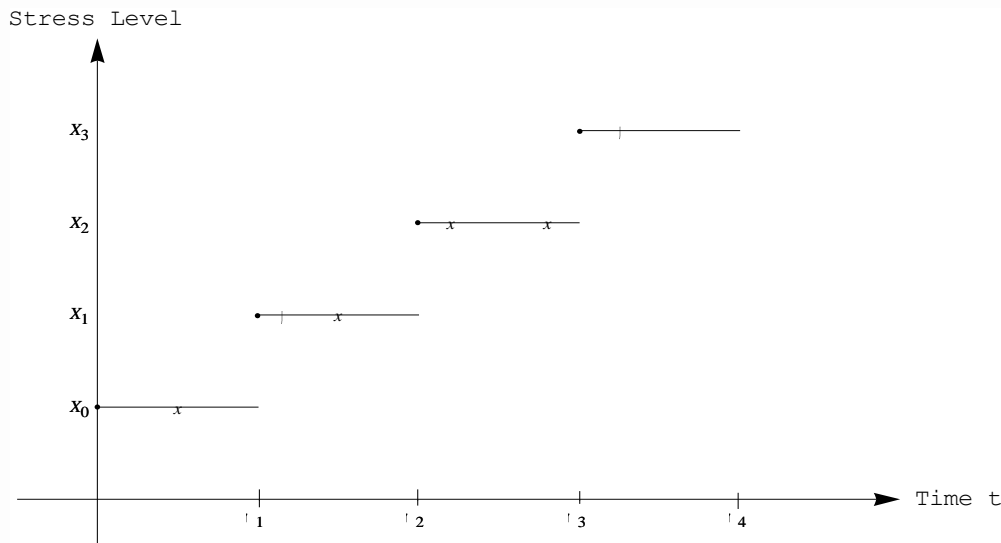
Βάσει της παραπάνω σχέσης διακρίνουμε καλύτερα αυτό που διατυπώσαμε προηγουμένως, δηλαδή ότι η $G(t)$ σε ένα μοντέλο βηματικής πίεσης αποτελείται από τμήματα των αθροιστικών κατανομών $F_1(t)$, $F_2(t)$, ..., $F_{m+1}(t)$.

Ένα μειονέκτημα του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης είναι ότι υποθέτει ότι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο μεταβάλλεται το επίπεδο πίεσης είναι πολύ σύντομο για να προκαλέσει κάποια απώλεια στις πειραματικές μονάδες, υπόθεση βέβαια που δεν ισχύει για όλα τα προϊόντα-υλικά. Επομένως, το μοντέλο αυτό είναι ανεπαρκές για εκείνα τα προϊόντα τα οποία συχνά αποτυγχάνουν κατά τη βραχεία διάρκεια που χρειαζόμαστε για να αυξήσουμε την πίεση από το ισχύον επίπεδο στο επόμενο. Επιπλέον, διακρίνουμε ότι το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης δεν είναι κατάλληλο για την περιγραφή δεδομένων που προέρχονται από εφαρμογές της ανάλυσης επιβίωσης καθώς η υπόθεση του μοντέλου ότι η επίδραση της αλλαγής του επιπέδου πίεσης είναι στιγμιαία δεν παρατηρείται συχνά στην πράξη. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού οι Kannan et al. (2010) εισήγαγαν ένα νέο μοντέλο, βάσει του οποίου εξασφαλίζεται η συνέχεια της συνάρτησης επιβίωσης, σε αντίθεση με το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης όπου εξασφαλίζεται η συνέχεια της συνάρτησης κατανομής. Σύμφωνα με το νέο αυτό μοντέλο θεωρούμε και πάλι ότι η επίδραση της αλλαγής επιπέδου θα αυξήσει την πιθανότητα αποτυχίας, αλλά πλέον αναμένουμε ότι θα υπάρξει και μία λανθάνουσα περίοδος πριν τα αποτελέσματα της αλλαγής του επιπέδου πίεσης παρατηρηθούν.

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, το μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται για τη μελέτη των μοντέλων βηματικής πίεσης είναι το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης.

Γραφική απεικόνιση του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης

Τα γραφήματα που δίνονται στη συνέχεια αποτελούν τη γραφική απεικόνιση του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης. Συγκεκριμένα, στο πρώτο γράφημα απεικονίζεται ένα μοντέλο βηματικής πίεσης με τέσσερα επίπεδα πίεσης, στο οποίο σημειώνονται οι χρόνοι αποτυχίας και λογοκρισίας των πειραματικών μονάδων καθώς επίσης και οι χρόνοι στους οποίους μεταβάλλουμε το επίπεδο πίεσης.

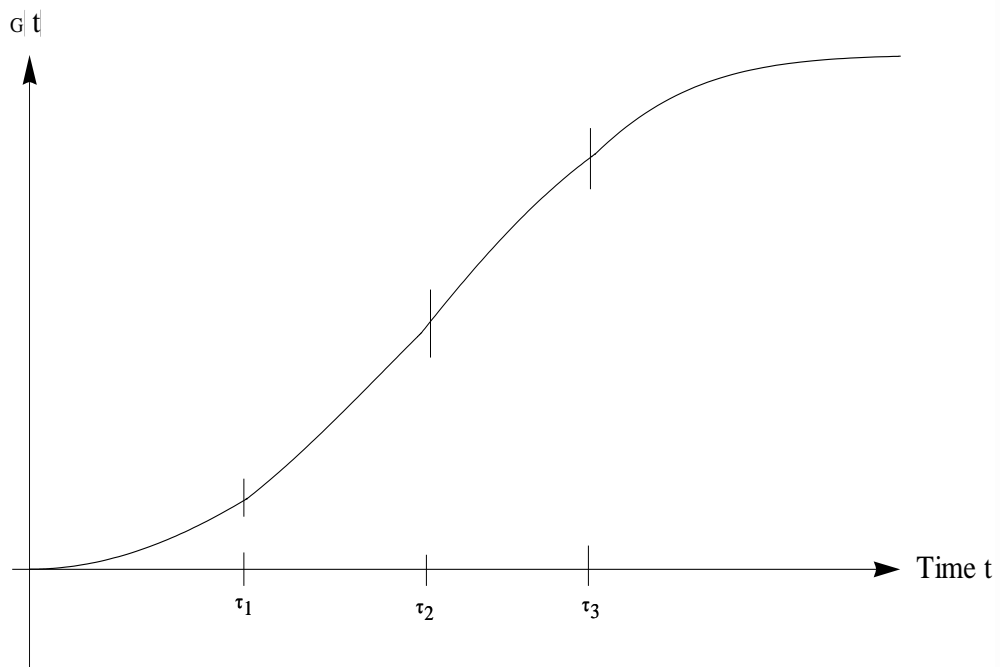
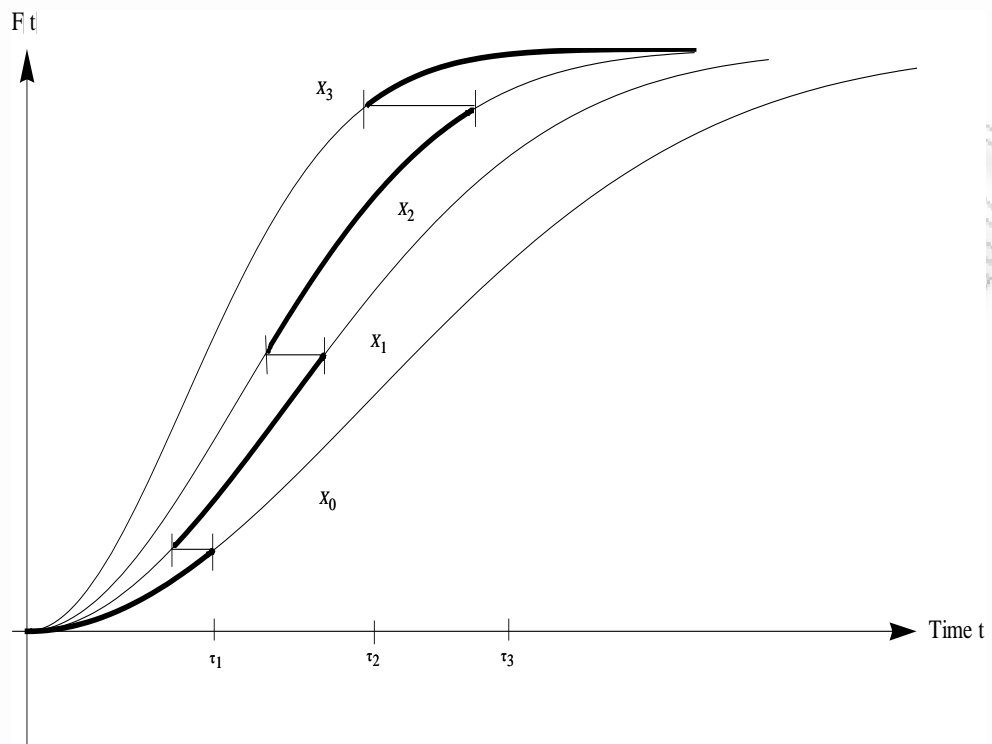


Γράφημα 1.5 : Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης

Στο επόμενο γράφημα δίνονται οι α.σ.κ. για καθένα από τα 4 επίπεδα πίεσης. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αρχικά όλες οι πειραματικές μονάδες ακολουθούν την α.σ.κ. του επιπέδου πίεσης x_0 . Όταν το επίπεδο πίεσης αυξηθεί σε x_1 , οι μονάδες που απέμειναν από το προηγούμενο επίπεδο ακολουθούν τώρα την α.σ.κ. του νέου επιπέδου πίεσης αρχίζοντας όμως από το αθροιστικό κλάσμα αποτυχίας του προηγούμενου επιπέδου. Ίδια διαδικασία ακολουθείται και όταν το επίπεδο πίεσης αυξάνεται από x_1 σε x_2 και από x_2 σε x_3 .

Στο δεύτερο γράφημα απεικονίζεται η συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής βάσει του μοντέλου βηματικής πίεσης. Η συνάρτηση αυτή διακρίνουμε ότι αποτελείται από τμήματα των τεσσάρων α.σ.κ. του προηγούμενου σχήματος, γεγονός που υποδηλώνει ότι το μοντέλο που έχουμε θεωρήσει λαμβάνει υπόψη του το ιστορικό έκθεσης των πειραματικών μονάδων.

1.3 Μοντέλο Αθροιστικής Έκθεσης



Γράφημα 1.6 : Μοντέλο αθροιστικής έκθεσης

Κεφάλαιο 2^ο

Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II

2.1 Εισαγωγή

Η περιγραφή ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης, δηλαδή εκείνου που περιλαμβάνει 2 μόνο επίπεδα πίεσης, με λογοκρισία τύπου II είναι η ακόλουθη:

Θεωρούμε ότι n όμοιες μονάδες τοποθετούνται σε ένα πείραμα και υποβάλλονται σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε έναν προεπιλεγμένο χρόνο τ , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Τα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 είναι προκαθορισμένα. Το πείραμα συνεχίζει μέχρι ένας συγκεκριμένος αριθμός r μονάδων αποτύχει.

Το μοντέλο αυτό έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία.

Ο Xiong (1998) μελέτησε το εν λόγω μοντέλο με εκθετικούς χρόνους ζωής και έχοντας θεωρήσει ότι ο μέσος χρόνος ζωής των πειραματικών μονάδων συνδέεται λογαριθμογραμμικά με το επίπεδο πίεσης μέσω της σχέσης $\log \theta_i = \alpha + \beta x_i$, για $i=1,2$. Βάσει αυτής της υπόθεσης υπολόγισε τους ε.μ.π. των παραμέτρων α και β , καθώς και τα δ.ε. αυτών.

Ο Watkins (2001) υποστήριξε ότι είναι προτιμότερο να εργαζόμαστε με τις αρχικές παραμέτρους της εκθετικής κατανομής θ_1 και θ_2 και ότι η λογαριθμογραμμική συνάρτησή μας εξασφαλίζει μία απλή παραμετροποίηση των θ_1 και θ_2 σε α και β αντίστοιχα.

Οι Balakrishnan et al. (2007) προσδιόρισαν τις ακριβείς κατανομές των ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 καθώς και δ.ε. για τις υπό μελέτη παραμέτρους, έχοντας θεωρήσει ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

Αντίστοιχη διαδικασία με αυτή των Balakrishnan et al. (2007) ακολούθησαν οι Kateri et al. (2008) για την περίπτωση όμως που οι χρόνοι ζωής των πειραματικών μονάδων ακολουθούν τη Weibull κατανομή.

Οι Balakrishnan and Han (2008) θεώρησαν ότι όταν μία μονάδα αποτύχει υπάρχουν περισσότεροι από ένας παράγοντες που την προκάλεσαν. Βάσει αυτού του πλαισίου, μελέτησαν το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II,

όπου οι κατανομές του χρόνου ζωής των διαφορετικών παραγόντων είναι ανεξάρτητες εκθετικές.

Στη συνέχεια, οι Kateri et al. (2011) προσδιόρισαν το βέλτιστο χρόνο τ κατά τον οποίο το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται, σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με εκθετικούς χρόνους ζωής, στηριζόμενοι στις πιθανότητες μη ύπαρξης των ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 .

Η παραπάνω βιβλιογραφία αναφέρεται στο μοντέλο απλής βηματικής στο οποίο η μεταβολή του επιπέδου πίεσης συντελείται σε ένα προεπιλεγμένο χρόνο τ . Σύμφωνα με μία παραλλαγή του παραπάνω μοντέλου, η αύξηση του επιπέδου πίεσης δε γίνεται σε ένα προκαθορισμένο χρόνο τ αλλά συντελείται όταν στο 1^ο επίπεδο πίεσης παρατηρηθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός αποτυχιών και επομένως πλέον ο χρόνος αλλαγής είναι τυχαία μεταβλητή.

Το μοντέλο που μόλις περιγράψαμε έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς μελέτης.

Οι Bai et al. (1989) προσδιόρισαν το βέλτιστο πλήθος μονάδων που πρέπει να αποτύχουν στο επίπεδο πίεσης x_1 έτσι ώστε το επίπεδο πίεσης να αυξηθεί σε x_2 στηριζόμενοι στην ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του ε.μ.π. του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο σχεδιασμού (αντίστοιχη μεθοδολογία ακολούθησαν και οι Miller and Nelson (1983) για την περίπτωση που διαθέτουμε πλήρη δεδομένα).

Οι Xiong and Miliken (1999) και Xiong et al. (2006) μελέτησαν το μοντέλο αυτό στην περίπτωση που οι χρόνοι ζωής των μονάδων προέρχονται από την εκθετική κατανομή και θεωρώντας ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μονάδων συνδέεται λογαριθμογραμμικά με το επίπεδο πίεσης.

Ο Wang (2006) προσδιόρισε τους αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου και τους συνέκρινε με τους αντίστοιχους ε.μ.π. ενώ ο Wang (2009) διερεύνησε την ισχύ των υποθέσεων που έχουν τεθεί για τη μελέτη του μοντέλου.

Τέλος, οι Kundu and Balakrishnan (2009) προσδιόρισαν τους ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 καθώς και δ.ε. για τις υπό μελέτη παραμέτρους, έχοντας θεωρήσει ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

2.2 Περιγραφή μοντέλου

Τα πειράματα πολλαπλής βηματικής πίεσης, όπως προαναφέραμε, αποτελούν μία ειδική κατηγορία επιταχυνόμενων ελέγχων επιβίωσης, που επιτρέπουν την ύπαρξη διαφορετικών συνθηκών σε ενδιάμεσα στάδια του πειράματος.

Η γενική περιγραφή ενός τέτοιου πειράματος είναι η ακόλουθη :

Ένα τυχαίο δείγμα από n όμοιες μονάδες τοποθετείται κάτω από το αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 . Σε καθορισμένους χρόνους $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ τα επίπεδα πίεσης αυξάνονται σε x_2, \dots, x_{m+1} αντίστοιχα. Όταν η λογοκρισία είναι τύπου II, τότε το πείραμα θα ολοκληρωθεί όταν ένας δεδομένος αριθμός r ($\leq n$) μονάδων αποτύχει.

Αν $r = n$ τότε τα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι πλήρη.

Στη συνέχεια, θεωρούμε το απλούστερο μοντέλο βηματικής πίεσης, το οποίο αποτελείται μόνο από 2 επίπεδα πίεσης. Η περιγραφή του είναι η ακόλουθη :

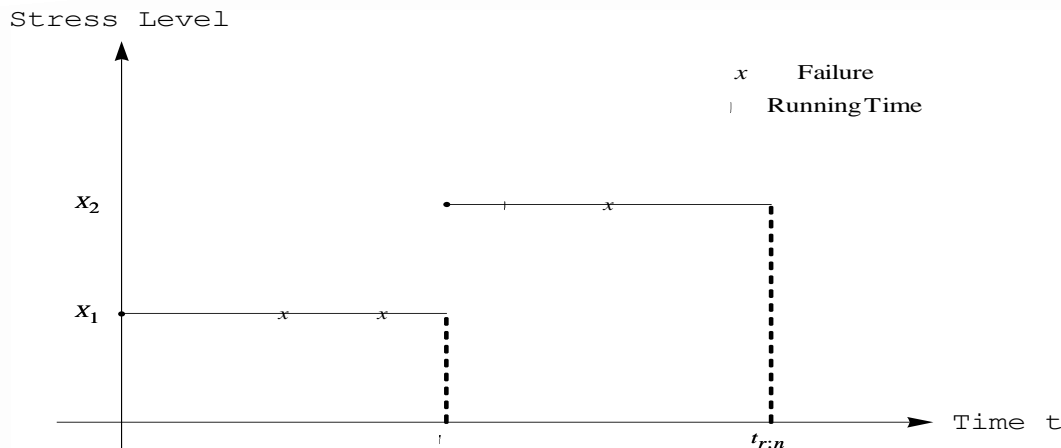
Τοποθετούμε n όμοιες μονάδες σε ένα πείραμα και τις υποβάλλουμε σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε έναν προεπιλεγμένο χρόνο τ , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Τα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 είναι προκαθορισμένα και όχι τυχαία. Το πείραμα συνεχίζει μέχρι ένας συγκεκριμένος αριθμός r μονάδων αποτύχει.

Με n_1 συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο τ και με $n_2 = r - n_1$ το πλήθος των μονάδων που απέτυχαν μετά το χρόνο τ .

Αν το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο 1^ο επίπεδο πίεσης είναι ίσο με r , δηλαδή όταν $n_1 = r$, τότε το πείραμα τερματίζεται χωρίς να χρειαστεί να αυξήσουμε το επίπεδο πίεσης σε x_2 .

Αν $n_1 < r$ τότε το πείραμα παραμένει κάτω από τις ίδιες συνθήκες μέχρι το χρόνο τ και εκείνη τη χρονική στιγμή το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται σε x_2 και το πείραμα συνεχίζεται μέχρι να παρατηρηθούν συνολικά r αποτυχίες.

Η γραφική απεικόνιση του μοντέλου που μόλις περιγράψαμε είναι η ακόλουθη :



Γράφημα 2.1 : Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II

Με $t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{n:n}$ δηλώνουμε τους διατεταγμένους χρόνους ζωής των μονάδων, για τους οποίους ισχύει η σχέση $t_{1:n} < t_{2:n} < \dots < t_{n:n}$. Τα δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση του πειράματος υποθέτουμε ότι προέρχονται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης και βάσει των συμβολισμών που έχουμε εισάγει παραπάνω, θα είναι της μορφής :

$$\left\{ t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} \right\}.$$

Στη συνέχεια, περιγράφουμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, στο οποίο σε κάθε επίπεδο πίεσης x_i , $i=1,2$, θεωρούμε ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων του πειράματος είναι η εκθετική με μέσο θ_i . Επομένως, η α.σ.κ στο επίπεδο x_i είναι η

$$F_i(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}}, \quad t > 0 \quad \text{για } i=1,2 \quad (2.1)$$

Όπως γνωρίζουμε, η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον για την περιγραφή χρόνων ζωής καθώς είναι η μοναδική συνεχής κατανομή με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας (διαθέτει την αμνήμονα ιδιότητα). Για το λόγο αυτό, διακρίνουμε ότι και στην πλειοψηφία της βιβλιογραφίας που αναφέρεται σε μοντέλα βηματικής πίεσης, η εκθετική κατανομή αποτελεί μία από τις βασικές υποθέσεις.

Συνεπώς, βάσει των όσων αναφέραμε παραπάνω και σύμφωνα με τις υποθέσεις του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ είναι η

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 < t < \tau \\ F_2(t - \tau + u_1) & , \tau \leq t < \infty \end{cases}$$

όπου u_1 η λύση της εξίσωσης $F_2(u_1) = F_1(\tau) \rightarrow 1 - e^{-\frac{u_1}{\theta_2}} = 1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}} \rightarrow u_1 = \frac{\theta_2 \tau}{\theta_1}$.

Επομένως,

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 < t < \tau \\ F_2\left(\frac{\theta_2 \tau}{\theta_1} + t - \tau\right) & , \tau \leq t < \infty \end{cases} \quad (2.2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ δίνεται από τη σχέση :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau \\ g_2(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}} & , \tau \leq t < \infty \end{cases} \quad (2.3)$$

Βάσει των παραπάνω συναρτήσεων διακρίνουμε ότι ο ρυθμός αποτυχίας παραμένει σταθερός σε καθένα από τα διαστήματα $(0, \tau)$ και $[\tau, \infty)$ και συγκεκριμένα είναι ίσος με $\frac{1}{\theta_1}$ και $\frac{1}{\theta_2}$ αντίστοιχα. Επομένως, το τ δεν αποτελεί μόνο το χρόνο κατά τον οποίο αλλάζει το επίπεδο πίεσης αλλά και το χρονικό σημείο στο οποίο μεταβάλλεται ο ρυθμός αποτυχίας.

2.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο γενικό πλαίσιο των μοντέλων βηματικής πίεσης για την εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν, όπως η προσέγγιση βάσει ελαχίστων τετραγώνων (βλ. Teng and Yeo (2002)) ή η Μπευζιανή προσέγγιση (βλ. DeGroot and Goel (1979)). Η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη όμως μέθοδος είναι αυτή της μέγιστης πιθανοφάνειας, η οποία προτιμάται συνήθως λόγω των βέλτιστων ιδιοτήτων που εξασφαλίζει και παρά την υπολογιστική της πολυπλοκότητα, καθώς οι εκτιμητές δε δίνονται πάντα σε κλειστή μορφή και επομένως απαιτούνται εκτενείς επαναληπτικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό τους.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας και κατ' επέκταση των ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 θα πρέπει αρχικά να προσδιορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων χρόνων ζωής $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}$.

2.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Σύμφωνα, με τη σχέση (1.1), στο μοντέλο που μελετάμε η από κοινού συνάρτηση κατανομής για τους r -πρώτους διατεταγμένους χρόνους ζωής είναι η

$$g_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=1}^r g(t_{i:n}).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = L(\theta_1, \theta_2 | t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = g_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}).$$

➤ Για $n_1 = r$, δηλαδή στην περίπτωση που όλες οι αποτυχίες παρατηρηθούν στο 1^ο επίπεδο πίεσης, η συνάρτηση πιθανοφάνειας, βάσει των σχέσεων (2.1) - (2.3), λαμβάνει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= c \{1 - F_1(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=1}^r g_1(t_{i:n}) = c \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\frac{t_{r:n}}{\theta_1}} \right) \right\}^{n-r} \prod_{i=1}^r \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta_1}} = \\ &= \frac{c}{\theta_1^r} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^r t_{i:n} + (n-r)t_{r:n} \right] \right\}, \text{ όπου } c = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ σταθερά.} \end{aligned}$$

➤ Για $n_1 = 0$, δηλαδή όταν όλες οι αποτυχίες πραγματοποιηθούν στο 2^ο επίπεδο πίεσης, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= c \left\{ 1 - F_2 \left(\frac{\theta_2 \tau}{\theta_1} + t_{r:n} - \tau \right) \right\}^{n-r} \prod_{i=1}^r g_2(t_{i:n}) = \\ &= \frac{c}{\theta_2^r} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) \right] - \frac{n\tau}{\theta_1} \right\}. \end{aligned}$$

➤ Για $1 \leq n_1 \leq r-1$, δηλαδή στην περίπτωση που παρατηρούνται απώλειες και στα 2 επίπεδα πίεσης, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι η ακόλουθη :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= c \left\{ 1 - F_2 \left(\frac{\theta_2 \tau}{\theta_1} + t_{r:n} - \tau \right) \right\}^{n-r} \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) = \\ &= \frac{c}{\theta_1^{n_1} \theta_2^{r-n_1}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)\tau \right] - \frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανοφάνειας διαμορφώνεται ως εξής :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{c}{\theta_1^r} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^r t_{i:n} + (n-r)t_{r:n} \right] \right\} & , \quad n_1 = r \\ \frac{c}{\theta_2^r} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) \right] - \frac{n\tau}{\theta_1} \right\} & , \quad n_1 = 0 \\ \frac{c}{\theta_1^{n_1} \theta_2^{r-n_1}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)\tau \right] - \frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) \right] \right\} & , \quad 1 \leq n_1 \leq r-1 \end{cases}$$

Βάσει της μορφής της συνάρτησης πιθανοφάνειας διακρίνουμε ότι όταν $n_1 = 0$, ο ε.μ.π. του θ_1 δεν υπάρχει, ενώ όταν $n_1 = r$ δεν υπάρχει ο ε.μ.π. του θ_2 .

Οι ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $1 \leq n_1 \leq r-1$. Για να τους υπολογίσουμε αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, και συγκεκριμένα το λογάριθμο αυτής.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. των ζητούμενων παραμέτρων είναι οι

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)\tau}{n_1} \quad \text{και} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau)}{r-n_1} .$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αντιπροσωπεύουν τους υπό συνθήκη εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , δεδομένης της συνθήκης $1 \leq n_1 \leq r-1$.

Μια διαισθητική ερμηνεία για τον ε.μ.π. της παραμέτρου θ_1 είναι η ακόλουθη :

Η πληροφορία που μπορούμε να λάβουμε για την παράμετρο θ_1 υφίσταται μέχρι το χρόνο τ , όπου μέχρι εκείνο το χρονικό σημείο περιλαμβάνει τους χρόνους αποτυχίας των n_1 πειραματικών μονάδων καθώς και τους υπόλοιπους $n - n_1$ λογοκριμένους χρόνους ίσους με τ . Επομένως, ένας λογικός εκτιμητής για το θ_1 είναι ο ολικός χρόνος έκθεσης των μονάδων κάτω από το 1^ο επίπεδο πίεσης διαιρεμένος με το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει στο αντίστοιχο επίπεδο.

Αντίστοιχα, μπορούμε να αντιληφθούμε τη σχέση για τον ε.μ.π. του θ_2 .

Εναλλακτική προσέγγιση για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου

Μία εναλλακτική προσέγγιση για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II στο δεύτερο επίπεδο πίεσης δόθηκε από τον Xiong (1998). Ο Xiong υποθέτει ότι ο μέσος χρόνος ζωής μιας μονάδας κάτω από σταθερό επίπεδο πίεσης συνδέεται μέσω μιας λογαριθμικής συνάρτησης με το επίπεδο πίεσης. Η λογαριθμογραμμική συνάρτηση σύνδεσης του μέσου χρόνου ζωής και του επιπέδου πίεσης εμφανίζεται αρκετά συχνά στη βιβλιογραφία των μοντέλων βηματικής πίεσης, όπως για παράδειγμα στα άρθρα των Miller and Nelson (1983) και Bai et al. (1989).

Συγκεκριμένα, ο Xiong (1998) θεωρεί τις ακόλουθες υποθέσεις :

- ▷ Χρησιμοποιούνται 2 επίπεδα πίεσης x_1, x_2 (με $x_1 < x_2$)
- ▷ Για κάθε επίπεδο πίεσης, η κατανομή του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων είναι η εκθετική
- ▷ Στο επίπεδο πίεσης x , ο μέσος χρόνος ζωής κάθε πειραματικής μονάδας είναι μια λογαριθμογραμμική συνάρτηση του επιπέδου πίεσης, δηλαδή ισχύει η σχέση $\log \theta(x) = \alpha + \beta x$, όπου α, β άγνωστες παράμετροι, οι οποίες εξαρτώνται από τη φύση του προϊόντος και τη μέθοδο του πειράματος
- ▷ Εφαρμόζεται το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, για να υπάρχουν οι ε.μ.π. των α και β θα πρέπει $1 \leq n_1 \leq r - 1$. Για την εύρεση των ε.μ.π. των α, β αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\alpha, \beta)$, η οποία υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στην $L(\theta_1, \theta_2)$ τα θ_1 και θ_2 σύμφωνα με τις σχέσεις $\log \theta_1 = \alpha + \beta x_1$ και $\log \theta_2 = \alpha + \beta x_2$.

Συνεπώς, $\log L(\alpha, \beta) \propto$

$$LL(\alpha, \beta) = - \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau}{\exp(\alpha + \beta x_1)} + n_1(\alpha + \beta x_1) \right] - \left[\frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n - r)(t_{r:n} - \tau)}{\exp(\alpha + \beta x_2)} + n_2(\alpha + \beta x_2) \right]$$

Λύνοντας επομένως τις εξισώσεις $\frac{\partial LL(a,\beta)}{\partial a} = \frac{\partial LL(a,\beta)}{\partial \beta} = 0$ υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των a και β , που δίνονται από τις σχέσεις :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[x_1 \log \left(\frac{n_2}{U_2} \right) - x_2 \log \left(\frac{n_1}{U_1} \right) \right] \quad \text{και} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{x_2 - x_1} \log \left(\frac{n_1 \cdot U_2}{n_2 \cdot U_1} \right),$$

όπου $U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau$ και $U_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n - r)(t_{r:n} - \tau)$, ο οποίος αποτελεί και

το συνολικό χρόνο ελέγχου (total time on test) στο επίπεδο πίεσης x_2 .

Για την ύπαρξη των παραπάνω εκτιμητών ασφαλώς θα πρέπει να ισχύει $1 \leq n_1 \leq r - 1$ και $n_1 U_2 < n_2 U_1$.

Στηριζόμενοι στη σχέση $\log \theta(x) = \alpha + \beta x$, ένας ενδιαφέρων και χρήσιμος έλεγχος που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι αυτός με μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta = 0$ (και εναλλακτική την $H_1 : \beta < 0$), καθώς η παράμετρος β περιγράφει τη σχέση που συνδέει το μέσο χρόνο ζωής της πειραματικής μονάδας με το επίπεδο πίεσης.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ο ε.μ.π. του a είναι ο $\tilde{\alpha} = \log \left(\frac{U_1 + U_2}{r} \right)$ ενώ για την πραγματοποίηση του παραπάνω ελέγχου θα στηριχθούμε στο λόγο πιθανοφάνειας

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\alpha}, 0)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = \left(\frac{r}{U_1 + U_2} \right)^r \left(\frac{U_1}{n_1} \right)^{n_1} \left(\frac{U_2}{n_2} \right)^{n_2}.$$

Βέβαια, επειδή η κατανομή της ποσότητας Λ είναι δύσκολο να προσδιορισθεί, μπορούμε να λάβουμε μία προσέγγιση αυτής κάτω από τη μηδενική υπόθεση μέσω προσομοίωσης, έτσι ώστε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο που μας ενδιαφέρει.

Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους a και β του μοντέλου. Λόγω της σύνθετης μορφής των διαστημάτων αυτών, για την ακριβή τους έκφραση κάποιος μπορεί να ανατρέξει στο άρθρο του Xiong (1998), στο οποίο υπολογίζεται το ακριβές $(1 - \gamma)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο β και ένα τουλάχιστον $(1 - \gamma)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο a .

Βάσει των όσων αναφέραμε, ένα εύλογο ερώτημα που ανακύπτει είναι ποιος από τους παραπάνω τρόπους προσέγγισης είναι πιο ικανοποιητικός.

Ο Watkins (2001) υποστήριξε ότι είναι προτιμότερο να εργαζόμαστε με τις αρχικές παραμέτρους της εκθετικής κατανομής θ_1 και θ_2 . Συγκεκριμένα, ισχυρίστηκε ότι χρησιμοποιώντας τη λογαριθμογραμμική συνάρτηση σύνδεσης λαμβάνουμε μία απλή παραμετροποίηση των θ_1 και θ_2 σε α και β αντίστοιχα, χωρίς αυτή να συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάλυση των δεδομένων (όπως για παράδειγμα, δεν οδηγεί σε μείωση των παραμέτρων που είναι προς εκτίμηση, κλπ). Επιπλέον, θεωρεί ότι είναι ευκολότερο να εργαζόμαστε με τα θ_i λόγω της αμνήμονος ιδιότητας της εκθετικής. Επίσης, παρόλο που γνωρίζοντας τους ε.μ.π. των α και β μπορούμε να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 (βάσει της σχέσης $\log \theta(x) = \alpha + \beta x$ που τους συνδέει), τα δ.ε. των α και β που υπολόγισε ο Xiong (1998) δε μπορούν να μετασχηματιστούν έτσι ώστε να εξάγουμε δ.ε. για τις παραμέτρους που δηλώνουν τους μέσους χρόνους ζωής θ_i και που συνδέονται με τις σχέσεις :

$$a = \frac{x_1 \log \theta_2 - x_2 \log \theta_1}{x_1 - x_2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\log \theta_2 - \log \theta_1}{x_2 - x_1}.$$

Έχοντας προσδιορίσει τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 . Για να μπορέσουμε όμως να εξάγουμε τα δ.ε. θα πρέπει αρχικά να προσδιορίσουμε τις περιθώριες κατανομές των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

Στην επόμενη ενότητα περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία εύρεσης των κατανομών αυτών.

2.4 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π.

Ο προσδιορισμός των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ των παραμέτρων θ_1 και θ_2 περιγράφεται στο άρθρο των Balakrishnan et al. (2007).

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τις ροπογεννήτριες των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, τις οποίες συμβολίζουμε με

$$M_1(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1} \mid 1 \leq n_1 \leq r-1\right) \quad \text{και} \quad M_2(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_2} \mid 1 \leq n_1 \leq r-1\right), \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$

Η ροπογεννήτρια του $\hat{\theta}_1$ μπορεί να γραφεί ως ακολούθως :

$$M_1(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1} \mid 1 \leq n_1 \leq r-1\right) = \sum_{j=1}^{r-1} E\left(e^{t\hat{\theta}_1} \mid n_1=j\right) P(n_1=j \mid 1 \leq n_1 \leq r-1) \quad (2.4)$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το πλήθος των αποτυχιών που συμβαίνουν πριν από το χρόνο τ είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή

με n πλήθος δοκιμών και πιθανότητα επιτυχίας $F_1(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}$, δηλαδή $n_1 \sim B(n, F_1(\tau))$.

Επομένως, σύμφωνα με τη συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής θα ισχύει:

$$P(n_1=j) = \binom{n}{j} [F_1(\tau)]^j [1-F_1(\tau)]^{n-j} = \binom{n}{j} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}\right)^j e^{-\frac{\tau}{\theta_1}(n-j)} := p_j \quad (2.5)$$

για $j = 0, 1, \dots, n$.

Συνεπώς,

$$P(n_1=j \mid 1 \leq n_1 \leq r-1) = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \quad (2.6)$$

Για τον υπολογισμό της ποσότητας $E\left(e^{t\hat{\theta}_1} \mid n_1=j\right)$ θα πρέπει αρχικά να αναφέρουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Σύμφωνα με την πρόταση 1 της παραγράφου 1.2, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι χρόνοι που λαμβάνουμε στο 1^ο επίπεδο πίεσης αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n_1 = j$ με σ.π.π. την περικομμένη στα δεξιά σ.π.π.

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{F(\tau)}, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έχοντας υποθέσει ότι στο 1^ο επίπεδο πίεσης η κατανομή του χρόνου ζωής είναι η εκθετική με παράμετρο θ_1 , η παραπάνω σχέση θα διαμορφωθεί ως εξής :

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} \\ \frac{\tau}{1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}}, & 0 < t < \tau \\ 0 & , \text{ αλλού} \end{cases}$$

Η ροπογεννήτρια του Z είναι

$$M_Z(t) = E(e^{tz}) = \int_0^{\tau} e^{tz} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{z}{\theta_1}} dz = \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1} (1 - \theta_1 t)}}{1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}} \cdot \frac{1}{(1 - \theta_1 t)} \quad (2.7)$$

Επομένως,

$$E\left(e^{t\hat{\theta}_1 | n_1=j}\right) = E\left(e^{t \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)\tau}{n_1} | n_1=j}\right) = e^{\frac{t}{j}(n-j)\tau} E\left(e^{t \frac{t_{1:n} + \dots + t_{j:n}}{j}}\right) \stackrel{t_{i:n} \text{ ανεξ}}{=} \\ e^{\frac{t}{j}(n-j)\tau} E\left(e^{t \frac{t_{1:n}}{j}}\right) \dots E\left(e^{t \frac{t_{j:n}}{j}}\right) \stackrel{\text{ισον}}{=} e^{\frac{t}{j}(n-j)\tau} \left(M_Z\left(\frac{t}{j}\right)\right)^j \stackrel{(2.7)}{=} \frac{e^{\frac{t}{j}(n-j)\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)}\right)^j}{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}\right)^j \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)^j} \quad (2.8)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας στη σχέση (2.4) τις σχέσεις (2.5), (2.6), (2.8),

η ροπογεννήτρια του $\hat{\theta}_1$ διαμορφώνεται ως ακολούθως :

$$M_1(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \sum_{j=1}^{r-1} \binom{n}{j} \frac{e^{-\frac{\tau}{\theta_1}(n-j)} e^{\frac{t}{j}(n-j)\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)}\right)^j}{\left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)^j} \quad (2.9)$$

Όμως βάσει του διωνυμικού αναπτύγματος ισχύει η σχέση :

$$\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)}\right)^j = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} e^{-\frac{\tau k}{\theta_1} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2.9) παίρνουμε :

$$M_1(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{n}{j} \binom{j}{k} \frac{e^{-\frac{\tau}{\theta_1}(n-j+k)} e^{\frac{t\tau}{j}(n-j+k)}}{\left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)^j}.$$

Θέτοντας $c_{j,k} = \frac{(-1)^k}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \binom{n}{j} \binom{j}{k} e^{-\frac{\tau}{\theta_1}(n-j+k)}$ και $\tau_{j,k} = \frac{\tau}{j}(n-j+k)$ η παραπάνω σχέση

$$\text{λαμβάνει την ακόλουθη μορφή } M_1(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j e^{t\tau_{j,k}} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)^{-j} c_{j,k}. \quad (2.10)$$

Γενικά, από τη θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι αν Y μία τυχαία μεταβλητή από την

$$\text{κατανομή } Gamma(a, \lambda) \text{ με σ.π.π. } f_Y(y; a, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.11)$$

τότε η ροπογεννήτρια της είναι η συνάρτηση $M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$, $|t| < \lambda$.

Επομένως, αν θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή $W = Y + \tau_{j,k}$ τότε η ροπογεννήτρια αυτής

$$\text{θα είναι η συνάρτηση } M_W(t) = e^{t\tau_{j,k}} M_Y(t) = e^{t\tau_{j,k}} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η ποσότητα $e^{t\tau_{j,k}} \left(1 - \frac{\theta_1 t}{j}\right)^{-j}$ που εμφανίζεται στη σχέση (2.10)

αντιστοιχεί στη ροπογεννήτρια της μεταβλητής $W = Y + \tau_{j,k}$, όπου η τυχαία μεταβλητή

$$Y \sim Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_1}\right).$$

$$\text{Συνεπώς, η σχέση (2.10) μπορεί να γραφεί } M_1(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} M_W(t). \quad (2.12)$$

Από το θεώρημα αντιστροφής της ροπογεννήτριας συνάρτησης και στηριζόμενοι στη σχέση

(2.12) μπορούμε να εξάγουμε τη σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$, που δίνεται από τη σχέση

$$f_{\hat{\theta}_1}(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} f_Y\left(t - \tau_{j,k}; j, \frac{j}{\theta_1}\right)$$

(καθώς $F_W(t) = P(W \leq t) = P(Y \leq t - \tau_{j,k}) = F_Y(t - \tau_{j,k}) \Rightarrow f_W(t) = f_Y(t - \tau_{j,k})$), όπου $f_Y(y; a, \lambda)$ η σ.π.π. της γάμμα κατανομής της σχέσης (2.11).

Η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$

Για τον υπολογισμό της σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ θα ακολουθήσουμε αντίστοιχη διαδικασία με παραπάνω.

Η ροπογεννήτρια του $\hat{\theta}_2$ μπορεί να γραφεί ως ακολούθως :

$$M_2(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_2} \mid 1 \leq n_1 \leq r-1\right) = \sum_{j=1}^{r-1} E\left(e^{t\hat{\theta}_2} \mid n_1=j\right) P(n_1=j \mid 1 \leq n_1 \leq r-1). \quad (2.13)$$

Για τον υπολογισμό της ποσότητας $E\left(e^{t\hat{\theta}_2} \mid n_1=j\right)$ θα πρέπει να στηριχθούμε στην πρόταση 2 της παραγράφου 1.2.

Σύμφωνα με το μοντέλο που προσαρμόζουμε, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι χρόνοι που λαμβάνουμε στο 2^ο επίπεδο πίεσης αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n-j$, δοθέντος ότι $n_1 = j$, με σ.π.π. την περικομμένη στα αριστερά σ.π.π.

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_2}}, & t > \tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.14)$$

Επομένως, η υπό συνθήκη από κοινού σ.π.π. των $T_{n_1+1:n}, \dots, T_{r:n} \mid n_1 = j$ είναι η

$$f_{T_{n_1+1:n}, \dots, T_{r:n} \mid n_1=j}(t_{n_1+1:n}, \dots, t_{r:n}) = \frac{c}{\theta_2^{r-j}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau)}{\theta_2} \right\},$$

όπου c σταθερά κανονικοποίησης.

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η τ.μ. $Y = Z - \tau$, όπου Z η τ.μ. με σ.π.π. αυτή της σχέσης (2.14), προέρχεται από την εκθετική κατανομή με μέσο θ_2 καθώς

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(Z \leq t + \tau) = F_Z(t + \tau) \Rightarrow f_Y(t) = f_Z(t + \tau) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t}{\theta_2}}.$$

Γενικά, γνωρίζουμε ότι αν Y_k , για $k=1, \dots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ_2 ($Y_k \sim \text{Exp}(\theta_2)$) τότε οι τυχαίες μεταβλητές $(n-k+1)D_k$ είναι και αυτές ανεξάρτητες, όπου με D_k συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο μεταξύ της $k-1$ και της k αποτυχίας, η οποία καλείται k -οστό spacing και δίνεται από τη σχέση $D_k = Y_{k:n} - Y_{(k-1):n}$.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή D_k ακολουθεί την εκθετική κατανομή και συγκεκριμένα $D_k \sim \text{Exp}((n-k+1)\theta_2) \Rightarrow (n-k+1)D_k \sim \text{Exp}(\theta_2)$.

Έχοντας θεωρήσει ότι $Y = Z - \tau$, η ποσότητα $\sum_{i=j+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau)$

μπορεί να γραφεί $\sum_{i=j+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) = \sum_{i=j+1}^r Y_{i:n} + (n-r)Y_{r:n} = \sum_{i=j+1}^r (n-i+1)D_i$, όπου $Y_{j:n} = 0$.

Εφόσον ισχύει ότι $(n-k+1)D_k \sim \text{Exp}(\theta_2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $\sum_{i=j+1}^r (n-i+1)D_i$

ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους θ_2 και $r-j$.

Επομένως, η ροπογεννήτρια της τ.μ. $W = \sum_{i=j+1}^r (n-i+1)D_i$ θα είναι η συνάρτηση

$$M_W(t) = (1 - \theta_2 t)^{-(r-j)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς, } E\left(e^{t\hat{\theta}_2} | n_1 = j\right) &= E\left(\exp\left\{\frac{t}{r-j} \left[\sum_{i=j+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n-r)(t_{r:n} - \tau) \right]\right\}\right) = M_W\left(\frac{t}{r-j}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\theta_2 t}{r-j}\right)^{-(r-j)} \end{aligned}$$

Βάσει της παραπάνω ισότητας και των σχέσεων (2.5) και (2.6), η σχέση (2.13) λαμβάνει την

$$\text{εξής μορφή : } M_2(t) = \sum_{j=1}^{r-1} E\left(e^{t\hat{\theta}_2} | n_1 = j\right) P(n_1 = j | 1 \leq n_1 \leq r-1) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \left(1 - \frac{\theta_2 t}{r-j}\right)^{-(r-j)} \Rightarrow$$

$$M_2(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \left(1 - \frac{\theta_2 t}{j}\right)^{-j} \quad (2.15)$$

Από το θεώρημα αντιστροφής της ροπογεννήτριας συνάρτησης και στηριζόμενοι στη σχέση (2.15) μπορούμε να εξάγουμε τη σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$f_{\hat{\theta}_2}(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} f\left(t; j, \frac{j}{\theta_2}\right), \text{ όπου } f(y; a, \lambda) \text{ η συνάρτηση της σχέσης (2.11).}$$

Διακρίνουμε ότι η υπό συνθήκη σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ αποτελεί μίξη γάμμα κατανομών.

2.5 Ροπές και Πιθανότητες Ουράς

Ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως

Είναι γνωστό ότι η ροπογεννήτρια μίας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί μία συνάρτηση βάσει της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ροπές κ-τάξεως της μεταβλητής. Συγκεκριμένα, η ροπή κ-τάξεως της τ.μ. είναι ίση με την τιμή της κ-οστής παραγώγου της ροπογεννήτριας συνάρτησης στο σημείο $t=0$.

Στη συνέχεια, δίνονται οι ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως για τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$:

$$E(\hat{\theta}_1) = \left. \frac{dM_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} (\tau_{j,k} + \theta_1) \quad \text{και}$$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \left. \frac{d^2 M_1(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \left(\tau_{j,k}^2 + 2\theta_1 \tau_{j,k} + \frac{\theta_1^2 (j+1)}{j} \right)$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \left. \frac{dM_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \theta_2 \quad \text{και}$$

$$E(\hat{\theta}_2^2) = \left. \frac{d^2 M_2(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \theta_2^2 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \frac{(j+1)}{j}$$

Βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων διακρίνουμε ότι ο ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ_2 , ιδιότητα που δεν ισχύει για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$.

Οι εκφράσεις των δεύτερων ροπών δίνονται καθώς είναι απαραίτητες για την εύρεση των τυπικών σφαλμάτων των ε.μ.π. .

Πιθανότητες Ουράς

Απαραίτητη για την κατασκευή δ.ε. είναι η γνώση των πιθανοτήτων ουράς των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Για την εύρεση τους αρκεί να ολοκληρώσουμε τις σ.π.π. των εκτιμητών.

$$\begin{aligned} \text{Συγκεκριμένα, } P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b) &= \int_b^{\infty} f_{\hat{\theta}_1}(t) dt = \int_b^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} f_Y\left(t - \tau_{j,k}; j, \frac{j}{\theta_1}\right) dt = \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \int_b^{\infty} \frac{1}{\Gamma(j)} \left(\frac{j}{\theta_1}\right)^j (t - \tau_{j,k})^{j-1} e^{-\frac{j}{\theta_1}(t - \tau_{j,k})} dt = \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \frac{1}{\Gamma(j)} \int_{\frac{j}{\theta_1}(b - \tau_{j,k})}^{\infty} t^{j-1} e^{-t} dt = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_1} \langle b - \tau_{j,k} \rangle\right), \end{aligned}$$

όπου $\langle x \rangle = \max\{x, 0\}$ και με $\Gamma(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ συμβολίζουμε τη μη πλήρη

συνάρτηση Γάμμα.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω πιθανότητα ουράς, η οποία αποτελεί και τη συνάρτηση επιβίωσης του $\hat{\theta}_1$, μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή :

$$P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b) = P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b | 1 \leq n_1 \leq r-1) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{P(n_1 = j)}{P(1 \leq n_1 \leq r-1)} P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b | n_1 = j).$$

Οι Balakrishnan and Iliopoulos (2010), στηριζόμενοι στο Three Monotoncities Lemma, απέδειξαν ότι η $P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b)$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του θ_1 , συμπέρασμα βάσει του οποίου διαισθητικά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές του θ_1 αναμένουμε να παρατηρήσουμε μεγαλύτερες τιμές και για το $\hat{\theta}_1$. Η γνώση ότι η $P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b)$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του θ_1 είναι απαραίτητη στη συνέχεια για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για το θ_1 .

Αντίστοιχη μεθοδολογία θα εφαρμόσουμε και για τον προσδιορισμό της πιθανότητας ουράς του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι :

$$P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b) = \int_b^{\infty} f_{\hat{\theta}_2}(t) dt = \int_b^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} f\left(t; j, \frac{j}{\theta_2}\right) dt = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \Gamma\left(j, \frac{bj}{\theta_2}\right).$$

Η παραπάνω πιθανότητα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή :

$$P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b) = P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b | 1 \leq n_1 \leq r-1) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{P(n_1 = j)}{P(1 \leq n_1 \leq r-1)} P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b | n_1 = j).$$

Βάσει των σχέσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να διακρίνουμε ότι η υπό συνθήκη κατανομή του $\hat{\theta}_2$, δοθέντος ότι $n_1 = j$, είναι η $\Gamma\left(j, \frac{bj}{\theta_2}\right)$,

$$\text{όπου } \Gamma(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι για σταθερό θ_1 , η πιθανότητα $P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b | n_1 = j)$ είναι αύξουσα

$$\text{συνάρτηση της παραμέτρου } \theta_2, \text{ καθώς ισχύει } \theta_2 < \theta_2' \Rightarrow \frac{bj}{\theta_2} < \frac{bj}{\theta_2'} \Rightarrow \Gamma\left(j, \frac{bj}{\theta_2}\right) < \Gamma\left(j, \frac{bj}{\theta_2'}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b | n_1 = j) < P_{\theta_2'}(\hat{\theta}_2 \geq b | n_1 = j).$$

Επιπλέον, παρατηρώντας ότι ποσότητα $\frac{P(n_1 = j)}{P(1 \leq n_1 \leq r-1)}$ είναι ανεξάρτητη του θ_2 ,

καταλήγουμε ότι και η $P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του θ_2 για δεδομένα b και

$$\theta_1 \text{ (καθώς το } \theta_1 \text{ περιέχεται στην ποσότητα } \frac{P(n_1 = j)}{P(1 \leq n_1 \leq r-1)}).$$

2.6 Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις άγνωστες παραμέτρους θ_1 και θ_2 έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος στηρίζεται στις ακριβείς υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π. που έχουμε εξάγει στην προηγούμενη ενότητα. Με τη δεύτερη μέθοδο λαμβάνουμε προσεγγιστικά δ.ε. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 καθώς για την εξαγωγή τους χρησιμοποιείται η ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμητών. Τέλος, δ.ε. εξάγονται στηριζόμενοι στην μέθοδο Bootstrap.

2.6.1 Ακριβή Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Έχοντας εξασφαλίσει, από την προηγούμενη παράγραφο, ότι οι πιθανότητες $P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq b)$ και $P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq b)$ είναι αύξουσες συναρτήσεις ως προς τα θ_1 και θ_2 αντίστοιχα, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε ακριβή δ.ε. για τα θ_1 και θ_2 .

Ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_i και έστω ότι με θ_{iL} και θ_{iU} συμβολίζουμε τα κάτω και άνω όρια του δ.ε. του θ_i αντίστοιχα, για $i=1,2$. Τότε, λόγω της υπόθεσης της μονοτονίας των παραπάνω πιθανοτήτων, τα θ_{iL} και θ_{iU} αποτελούν τις μοναδικές λύσεις των εξισώσεων

$$P_{\theta_{iL}}(\hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_i^{obs}) = \frac{a}{2} \quad \text{και} \quad P_{\theta_{iU}}(\hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_i^{obs}) = 1 - \frac{a}{2} \quad \text{αντίστοιχα,}$$

όπου με $\hat{\theta}_i^{obs}$ συμβολίζουμε την παρατηρούμενη τιμή του ε.μ.π. του θ_i .

Εφόσον τα θ_{iL} και θ_{iU} δε μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή, για να λάβουμε τη λύση των μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η μέθοδος Newton-Raphson.

Επομένως, το $[\theta_{iL}, \theta_{iU}]$ αποτελεί το $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_i και τα άκρα του δ.ε. είναι οι λύσεις των ακόλουθων μη γραμμικών εξισώσεων :

$$\frac{a}{2} = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i(\theta_{iL})} \binom{n}{j} \binom{j}{k} e^{-\frac{\tau}{\theta_{iL}}(n-j+k)} \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_{iL}} < \hat{\theta}_1^{obs} - \tau_{j,k} >\right)$$

$$1 - \frac{a}{2} = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i(\theta_{iU})} \binom{n}{j} \binom{j}{k} e^{-\frac{\tau}{\theta_{iU}}(n-j+k)} \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_{iU}} < \hat{\theta}_1^{obs} - \tau_{j,k} >\right),$$

όπου $\Gamma(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ και $p_j(\theta_1) = \binom{n}{j} \left(1 - \frac{\tau}{\theta_1}\right)^j e^{-\frac{\tau}{\theta_1}(n-j)}$.

Αντίστοιχα, το $[\theta_{2L}, \theta_{2U}]$ αποτελεί το $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_2 και τα άκρα του δ.ε. είναι οι λύσεις των ακόλουθων μη γραμμικών εξισώσεων :

$$\frac{a}{2} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \Gamma\left(j, \frac{j\hat{\theta}_2^{obs}}{\theta_{2L}}\right) \quad \text{και} \quad 1 - \frac{a}{2} = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} \Gamma\left(j, \frac{j\hat{\theta}_2^{obs}}{\theta_{2U}}\right)$$

Καθώς το δ.ε. για την παράμετρο θ_2 εμπλέκει την άγνωστη παράμετρο θ_1 , μέσω των πιθανοτήτων p_j , για την επίλυση των παραπάνω μη γραμμικών εξισώσεων αρκεί να αντικαταστήσουμε τη θ_1 με τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ στις πιθανότητες p_j που εμφανίζεται.

2.6.2 Προσεγγιστικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Διακρίναμε παραπάνω ότι ο υπολογισμός των ακριβών δ.ε. για τα θ_1 και θ_2 δεν είναι ιδιαίτερα εύκολος από υπολογιστικής άποψης καθώς τα άνω και κάτω όρια των δ.ε. δίνονται σε κλειστούς τύπους, με αποτέλεσμα να είναι απαραίτητο να κάνουμε χρήση υπολογιστικών τεχνικών. Για το λόγο αυτό, απαραίτητος είναι και ο υπολογισμός προσεγγιστικών δ.ε. για τα θ_1 και θ_2 .

Στηριζόμενοι στην ασυμπτωτική κανονικότητα των ε.μ.π. αλλά και στο πίνακα πληροφορίας του Fisher για τα θ_1 και θ_2 , τα δ.ε. κατασκευάζονται ως ακολούθως:

Έστω ότι με $I(\theta_1, \theta_2)$ συμβολίζουμε τον πίνακα πληροφορίας του Fisher των θ_1 και θ_2 .

Ισχύει ότι,

$$I(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{n_1}{\theta_1^2} + \frac{2U_1}{\theta_1^3}\right) & 0 \\ 0 & E\left(-\frac{n_2}{\theta_2^2} + \frac{2U_2}{\theta_2^3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau (=n_1\hat{\theta}_1) \quad \text{και} \quad U_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n - r)(t_{r:n} - \tau) (= (r - n_1)\hat{\theta}_2)$$

Για μεγάλες τιμές των n_1 και n_2 , ο $I(\theta_1, \theta_2)$ μπορεί να εκτιμηθεί από τον παρατηρούμενο πίνακα πληροφορίας, ο οποίος διαμορφώνεται ως εξής :

$$\hat{I}(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\hat{\theta}_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{\hat{\theta}_2^2} \end{bmatrix},$$

καθώς $O_{11} = -\frac{n_1}{\hat{\theta}_1^2} + \frac{2n_1\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1^3} = \frac{n_1}{\hat{\theta}_1^2}$, $O_{12} = O_{21} = 0$ και $O_{22} = -\frac{n_2}{\hat{\theta}_2^2} + \frac{2n_2\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_2^3} = \frac{n_2}{\hat{\theta}_2^2}$

Συνεπώς, $V_1 = \hat{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\hat{\theta}_1^2}{n_1}$ και $V_2 = \hat{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_2^2}{n_2}$.

Γνωρίζουμε ότι ασυμπτωτικά οι ε.μ.π. ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επομένως, θα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\frac{\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)}{\sqrt{V_1}} = \frac{\hat{\theta}_1 - \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} (\tau_{j,k} + \theta_1)}{\sqrt{V_1}} = \frac{\left(\hat{\theta}_1 - \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \tau_{j,k} \right) - \theta_1}{\sqrt{V_1}} \sim N(0,1),$$

καθώς $\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} = 1$.

Συνεπώς, ένα $100(1-\alpha)\%$ προσεγγιστικό δ.ε. για το θ_1 είναι το ακόλουθο :

$$\left[\hat{\theta}_1 - \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \tau_{j,k} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{V_1} \right].$$

Ομοίως, $\frac{\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2)}{\sqrt{V_2}} = \frac{\hat{\theta}_2 - \theta_2}{\sqrt{V_2}} \sim N(0,1)$ και επομένως το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για το θ_2 είναι το

$$\left[\hat{\theta}_2 \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{V_2} \right],$$

όπου Z_q είναι το q άνω ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής.

2.6.3 Bootstrap Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Συνήθως, μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε μια εκτιμήτρια μαζί με το τυπικό της σφάλμα, με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα δ.ε. για την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Ωστόσο, τις περισσότερες φορές είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί ακριβής έκφραση για τη διακύμανση διαφόρων εκτιμητριών. Οι στατιστικοί, για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού και εκμεταλλευόμενοι την υπολογιστική δύναμη που διαθέτουν, χρησιμοποιούν τεχνικές επαναδειγματοληψίας, όπως για παράδειγμα οι μέθοδοι jackknife και bootstrap.

Η μέθοδος bootstrap, η οποία παρουσιάστηκε από τον Efron (1979), βασίζεται στη δημιουργία B νέων δειγμάτων ίδιου μεγέθους με το αρχικό, όπου τα δείγματα αυτά δημιουργούνται με επανάθεση από το αρχικό μας δείγμα. Η εκτιμήτρια της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει υπολογίζεται για καθένα από τα B δείγματα bootstrap και παράγει την κατανομή bootstrap της εκτιμήτριας.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορα είδη δ.ε. βασισμένα στη μέθοδο bootstrap, όπως για παράδειγμα τα bootstrap-t και bootstrap percentile δ.ε. (τα οποία μελετώνται σε επόμενο κεφάλαιο).

Στη συνέχεια, περιγράφουμε τα BCa (bias-corrected accelerated) δ.ε. που προτάθηκαν από τον Efron (1987) και τα οποία είναι πιο σύνθετα από τα προαναφερθέντα bootstrap δ.ε., αλλά πλεονεκτούν των άλλων καθώς έχουν προσαρμοστεί έτσι ώστε να διορθώνουν τη μεροληψία και τη λοξότητα της κατανομής.

Ακολούθως, δίνεται ο τρόπος κατασκευής των BCa δ.ε.

Ας θεωρήσουμε ότι με $\hat{\theta}^{*(a)}$ συμβολίζεται το $\alpha\%$ ποσοστιαίο σημείο των B bootstrap επαναλήψεις $\hat{\theta}_{(1)}^*, \dots, \hat{\theta}_{(B)}^*$. Για τον υπολογισμό των BCa δ.ε. στηρίζομαστε στις ποσότητες \hat{a} και \hat{z}_0 , οι οποίες καλούνται σταθερά επιτάχυνσης (acceleration constant) και διόρθωση μεροληψίας (bias-correction), αντίστοιχα.

Ένα δίπλευρο $100(1-\alpha)\%$ BCa δ.ε. για την παράμετρο θ είναι το ακόλουθο :

$$\left[\hat{\theta}_{lo}, \hat{\theta}_{up} \right] = \left[\hat{\theta}^{*(a_1)}, \hat{\theta}^{*(a_2)} \right],$$

$$\text{όπου } a_1 = \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + Z_{\alpha/2}}{1 - \hat{\alpha}(\hat{z}_0 + Z_{\alpha/2})} \right), \quad a_2 = \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + Z_{1-\alpha/2}}{1 - \hat{\alpha}(\hat{z}_0 + Z_{1-\alpha/2})} \right),$$

$\Phi(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής και Z_a το a ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής.

Η τιμή της διόρθωσης μεροληψίας \hat{z}_0 λαμβάνεται από το ποσοστό των bootstrap επαναλήψεων που λαμβάνουν τιμή μικρότερη από την τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ που έχουμε υπολογίσει από το αρχικό μας δείγμα.

$$\text{Συγκεκριμένα, δίνεται από τη σχέση } \hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#\{\hat{\theta}_{(b)}^* < \hat{\theta}\}}{B} \right),$$

όπου B το πλήθος των επαναλήψεων και Φ^{-1} η αντίστροφη της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής.

Η σταθερά επιτάχυνσης a ωστόσο δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί ή να εκτιμηθεί. Οι Efron and Tibshirani (1993) πρότειναν να δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}(\cdot) - \hat{\theta}(i))^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}(\cdot) - \hat{\theta}(i))^2 \right)^{3/2}},$$

όπου $\hat{\theta}(\cdot) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\theta}(i)}{n}$ και $\hat{\theta}(i)$ είναι ο ε.μ.π. του θ αν στηριχθούμε στο αρχικό δείγμα έχοντας όμως εξαιρέσει την i -οστή παρατήρηση.

Η ποσότητα $\hat{\alpha}$ καλείται σταθερά επιτάχυνσης καθώς αναφέρεται στο ρυθμό αλλαγής του τυπικού σφάλματος του $\hat{\theta}$ σε σχέση με την πραγματική τιμή της παραμέτρου θ .

Στη συνέχεια, περιγράφονται τα βήματα του αλγορίθμου για την παραγωγή ενός δείγματος που προέρχεται από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με εκθετικούς χρόνους ζωής και λογοκρισία τύπου II καθώς και τα βήματα για την κατασκευή των BCa bootstrap δ.ε. για τις παραμέτρους του μοντέλου.

Βήμα 1^ο

Από τους χρόνους ζωής που λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα, υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 από τους τύπους :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau}{n_1} \quad \text{και} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n - r)(t_{r:n} - \tau)}{r - n_1}$$

Βήμα 2^ο

Παράγουμε ένα δείγμα μεγέθους n από την $U(0,1)$, από το οποίο λαμβάνουμε τις πρώτες r διατεταγμένες παρατηρήσεις $U_{1:n}, \dots, U_{r:n}$.

Βήμα 3^ο

Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο 1^ο επίπεδο πίεσης, δηλαδή το n_1 , αρκεί να βρούμε εκείνο το n_1 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση

$$U_{n_1:n} \leq 1 - e^{-\frac{\tau}{\hat{\theta}_1}} \leq U_{n_1+1:n} .$$

Βήμα 4^ο

Γενικά, γνωρίζουμε ότι αν X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων τ.μ. από μία συνεχή κατανομή με α.σ.κ. F , τότε οι νέες τ.μ. $Y_1 = F(X_1), \dots, Y_n = F(X_n)$ είναι και αυτές ανεξάρτητες και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, καθώς ισχύει

$$P(F(X) \leq x) = P(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, \text{ όπου } x \in [0,1].$$

Επομένως, βάσει της παραπάνω παρατήρησης καταλήγουμε στα ακόλουθα :

Για $j \leq n_1$, μέσω της σχέσης $U_{j:n} = 1 - e^{-\frac{T_{j:n}}{\hat{\theta}_1}}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T_{j:n}$ ως εξής

$$T_{j:n} = -\hat{\theta}_1 \ln(1 - U_{j:n}) .$$

Για $n_1 + 1 \leq j \leq r$, τα $U_{j:n}$ δίνονται από τη σχέση $U_{j:n} = 1 - e^{-\frac{T_{j:n} - \tau}{\hat{\theta}_2} - \frac{\tau}{\hat{\theta}_1}}$,

από όπου και λαμβάνουμε $T_{j:n} = -\hat{\theta}_2 \ln(1 - U_{j:n}) + \tau - \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1} \tau$.

Βήμα 5^ο

Έχοντας πλέον λάβει τα $T_{1:n}, \dots, T_{r:n}$ μπορούμε, στηριζόμενοι στο « νέο αυτό δείγμα», να υπολογίσουμε εκ νέου ε.μ.π. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , τους οποίους έστω ότι συμβολίζουμε με $\hat{\theta}_1^{(1)}$ και $\hat{\theta}_2^{(1)}$ αντίστοιχα.

Βήμα 6^ο

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2-5 Β φορές και στο τέλος της διαδικασίας αυτής θα έχουμε λάβει τις ακόλουθες ποσότητες : $\hat{\theta}_1^{(1)}, \hat{\theta}_2^{(1)}, \hat{\theta}_1^{(2)}, \hat{\theta}_2^{(2)}, \dots, \hat{\theta}_1^{(B)}, \hat{\theta}_2^{(B)}$.

Βήμα 7^ο

Στο βήμα αυτό διατάσσουμε τις τιμές $\hat{\theta}_1^{(1)}, \dots, \hat{\theta}_1^{(B)}$ κατά αύξουσα σειρά και λαμβάνουμε τα $\hat{\theta}_1^{[1]}, \dots, \hat{\theta}_1^{[B]}$.

Ομοίως, διατάσσουμε τα $\hat{\theta}_2^{(1)}, \dots, \hat{\theta}_2^{(B)}$ και παίρνουμε $\hat{\theta}_2^{[1]}, \dots, \hat{\theta}_2^{[B]}$.

Επομένως, ένα δίπλευρο $100(1-\alpha)\%$ BCa δ.ε. για την παράμετρο θ_i είναι το

$$[\theta_{iL}^*, \theta_{iU}^*] = [\hat{\theta}_i^{(1Ba_i)}, \hat{\theta}_i^{(1B(1-a_2i))}] ,$$

$$\text{όπου } a_{1i} = \Phi \left(\hat{z}_{0i} + \frac{\hat{z}_{0i} + Z_{\alpha/2}}{1 - \hat{\alpha}_i (\hat{z}_{0i} + Z_{\alpha/2})} \right) \text{ και } a_{2i} = \Phi \left(\hat{z}_{0i} + \frac{\hat{z}_{0i} + Z_{1-\alpha/2}}{1 - \hat{\alpha}_i (\hat{z}_{0i} + Z_{1-\alpha/2})} \right), \text{ για } i = 1, 2$$

Η διόρθωση μεροληψίας (bias correction) \hat{z}_{0i} και η σταθερά επιτάχυνσης $\hat{\alpha}_i$ δίνονται από τις

$$\text{σχέσεις } \hat{z}_{0i} = \Phi^{-1} \left(\frac{\#\{\hat{\theta}_i^{[m]} < \hat{\theta}_i\}}{B} \right) \text{ και } \hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^r (\hat{\theta}_i(\cdot) - \hat{\theta}_i(j))^3}{6 \left(\sum_{j=1}^r (\hat{\theta}_i(\cdot) - \hat{\theta}_i(j))^2 \right)^{3/2}} ,$$

όπου $\hat{\theta}_i(\cdot) = \frac{\sum_{j=1}^r \hat{\theta}_i(j)}{r}$, για $i = 1, 2$, $m = 1, \dots, B$. Με $\hat{\theta}_i(j)$ συμβολίζουμε τον ε.μ.π. του θ_i , τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε από τις εξισώσεις των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, αν στηριχθούμε στο αρχικό μας δείγμα έχοντας όμως εξαιρέσει την j -οστή παρατήρηση (η οποία αντιστοιχεί στο χρόνο $t_{j:n}$).

Για την αξιολόγηση των 3 διαφορετικών δ.ε. που προαναφέραμε, οι Balakrishnan et al. (2007) διεξήγαγαν μελέτη προσομοίωσης. Βάσει της μελέτης αυτής, διαπίστωσαν ότι τα ακριβή δ.ε., όπως ήταν αναμενόμενο, είναι τα πιο αξιόπιστα διαστήματα και προτείνονται για οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος. Τα bootstrap BCa δ.ε. για την παράμετρο θ_2 είναι ικανοποιητικά για όλα τα μεγέθη δείγματος, εν αντιθέσει με την παράμετρο θ_1 , όπου τα BCa δ.ε. συνίστανται κυρίως για μεγάλα μεγέθη δείγματος. Τέλος, τα δ.ε. που βασίζονται στην προσεγγιστική μέθοδο θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο όταν τα r και n είναι αρκετά μεγάλα.

2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ

Κριτήριο βελτιστοποίησης η πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II, στο οποίο έχουμε θεωρήσει το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης καθώς και εκθετικούς χρόνους ζωής, οι ε.μ.π. των παραμέτρων των θ_1 και θ_2 υπάρχουν όταν $1 \leq n_1 \leq r-1$. Επομένως, οι ζητούμενες για εμάς ποσότητες δε θα μπορούσαν να προσδιοριστούν αν δεν παρατηρούσαμε καμία αποτυχία πριν ή μετά από τον καθορισμένο χρόνο τ στον οποίο μεταβάλλεται το επίπεδο πίεσης. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επιλογή του χρόνου τ είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για τα αποτελέσματα και τις εκτιμήσεις που θα εξάγουμε.

Οι Kateri et al. (2011) μελέτησαν τη βέλτιστη επιλογή του χρόνου τ έχοντας ως κριτήριο την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας μη ύπαρξης των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

Για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ της παραμέτρου θ_1 , η πιθανότητα μη ύπαρξης του εκτιμητή είναι

$$\begin{aligned} P(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) &= P(T_{1:n} > \tau) = P(T_1, \dots, T_n > \tau) = P(T_1 > \tau) \cdot \dots \cdot P(T_n > \tau) = \\ &= (1 - P(T_1 \leq \tau)) \cdot \dots \cdot (1 - P(T_n \leq \tau)) = (1 - P(T \leq \tau))^n = (1 - F_{\theta_1, \theta_2}(\tau))^n = \left(\tilde{F}_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^n \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου θ_2 , η πιθανότητα μη ύπαρξης του είναι

$$P(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) = P(T_{r:n} \leq \tau) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \left(F_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^j \left(1 - F_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^{n-j},$$

$$\text{όπου } F_{\theta_1, \theta_2}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}} & , \tau \leq t < \infty \end{cases}.$$

Βάσει των παραπάνω σχέσεων, μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι πιθανότητες μη ύπαρξης των ε.μ.π. εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος n , από το χρόνο τ και τη παράμετρο θ_1 . Παρατηρούμε ότι δεν επηρεάζονται από την τιμή του θ_2 ενώ μόνο η πιθανότητα μη ύπαρξης του $\hat{\theta}_2$ επηρεάζεται από το πλήθος των πειραματικών μονάδων που έχουν λογοκριθεί.

Είναι φυσικό να επιθυμούμε η πιθανότητα μη ύπαρξης των 2 εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ να είναι η ελάχιστη δυνατή. Η συνολική πιθανότητα μη ύπαρξης των εκτιμητών είναι ίση με το άθροισμα των επί μέρους πιθανοτήτων καθώς τα ενδεχόμενα μη ύπαρξης των εκτιμητών είναι ανεξάρτητα. Συνεπώς, ισχύει :

$$P(\text{non-ex } \hat{\theta}_1 \text{ ή non-ex } \hat{\theta}_2) = P(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) + P(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) = \\ = \left(\tilde{F}_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^n + \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \left(F_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^j \left(\tilde{F}_{\theta_1, \theta_2}(\tau) \right)^{n-j} = e^{-\frac{n\tau}{\theta_1}} + \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}} \right)^j e^{-\frac{\tau(n-j)}{\theta_1}}.$$

Παρατηρούμε ότι η ολική πιθανότητα μη ύπαρξης των εκτιμητών είναι συνάρτηση της ποσότητας $\frac{\tau}{\theta_1}$. Θέτοντας $k = \frac{\tau}{\theta_1}$, η πιθανότητα μπορεί να γραφεί ως ακολούθως :

$$P(\text{non-ex } \hat{\theta}_1 \text{ ή non-ex } \hat{\theta}_2) = h(k) = e^{-kn} + \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \left(1 - e^{-k} \right)^j e^{-(n-j)k}$$

Ακολουθώντας την κατάλληλη διαδικασία διαπιστώνουμε ότι η τιμή του λόγου $\frac{\tau}{\theta_1}$ που ελαχιστοποιεί την παραπάνω πιθανότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\tau^*}{\theta_1} = \ln \left[\binom{n-1}{r-1}^{-\frac{1}{r-1}} + 1 \right]. \quad (2.16)$$

Μέσω προσομοίωσης οι Kateri et al. (2011) διέκριναν επίσης τα ακόλουθα :

- ▶ Το βέλτιστο τ^* , που δίνεται από τη σχέση (2.16), δε μεταβάλλεται σημαντικά για τα διάφορα μεγέθη δείγματος, δεδομένου ότι κάθε φορά το ποσοστό των πειραματικών μονάδων που λογοκρίνεται είναι το ίδιο
- ▶ Ο βέλτιστος λόγος $\frac{\tau^*}{\theta_1}$ φθίνει απότομα όσο το ποσοστό λογοκρισίας αυξάνεται, για δεδομένο μέγεθος δείγματος
- ▶ Υπάρχει μία ευρεία περιοχή γύρω από το βέλτιστο $\frac{\tau^*}{\theta_1}$ για την οποία η ολική πιθανότητα γίνεται ελάχιστη. Συνεπώς, μία εκ των προτέρων γνώση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ θα μπορούσε να οδηγήσει σε καλύτερη επιλογή του χρόνου τ

Κριτήρια βελτιστοποίησης η διακύμανση και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των ε.μ.π.

Εκτός από την πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π., σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης ένα εναλλακτικό κριτήριο για την επιλογή του χρόνου τ , κατά τον οποίο θα μεταβάλλουμε το επίπεδο πίεσης, θα μπορούσε να αποτελέσει η διακύμανση των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Αρχικά, για να διαπιστώσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο χρόνος τ επηρεάζει τις διακυμάνσεις των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ διεξάγουμε την ακόλουθη μελέτη.

Χρησιμοποιώντας το πλαίσιο του πειράματος που αναφέρει ο Xiong (1998), το οποίο συναντάται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία των μοντέλων βηματικής πίεσης, θεωρούμε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με παραμέτρους $\theta_1 = e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$, όπου το μέγεθος δείγματος που διαθέτουμε είναι $n = 20$ και το ποσοστό λογοκρισίας 20% (δηλαδή $r = 16$). Ο Xiong (1998), επίσης, θεώρησε ότι ο χρόνος αλλαγής του επιπέδου πίεσης είναι $\tau = 5$.

Εν συνεχεία, για διαφορετικές τιμές του χρόνου τ (συμπεριλαμβανομένης και αυτής του Xiong) υπολογίζονται οι διακυμάνσεις των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, οι οποίες δίνονται στον Πίνακα 2.1. Οι διακυμάνσεις των εκτιμητών, σύμφωνα με την παράγραφο 2.4, δίνονται από τις σχέσεις :

$$Var(\hat{\theta}_1) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \left(\tau_{j,k}^2 + 2\theta_1 \tau_{j,k} + \frac{\theta_1^2(j+1)}{j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} (\tau_{j,k} + \theta_1) \right)^2 \text{ και}$$

$$Var(\hat{\theta}_2) = \theta_2^2 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j}(j+1)}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} - \theta_2^2.$$

Επίσης, στον Πίνακα 2.1 αναφέρεται και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$, καθώς δεν αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ_1 .

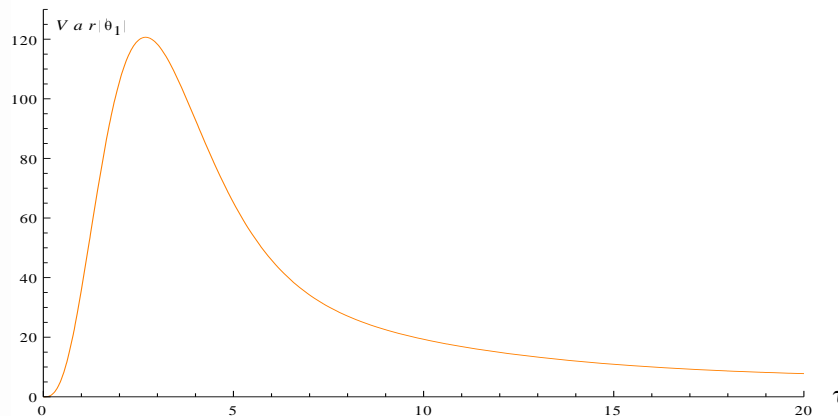
	$\tau = 3$	$\tau = 4$	$\tau = 5$	$\tau = 6$
$Var(\hat{\theta}_1)$	118.299	92.8982	65.1233	45.9026
$MSE(\hat{\theta}_1)$	130.463	100.132	69.2698	48.4437
$Var(\hat{\theta}_2)$	1.78039	2.01879	2.3127	2.6821

Πίνακας 2.1 : Η διακύμανση και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ καθώς και η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1 μπορούμε να διακρίνουμε ότι η αύξηση του χρόνου τ συνεπάγεται και αύξηση της ακρίβειας του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ έχοντας όμως ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας του εκτιμητή $\hat{\theta}_2$.

Καλύτερη εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο ο χρόνος τ επηρεάζει τις διακυμάνσεις των εκτιμητών μπορούμε να λάβουμε από τα ακόλουθα γραφήματα.

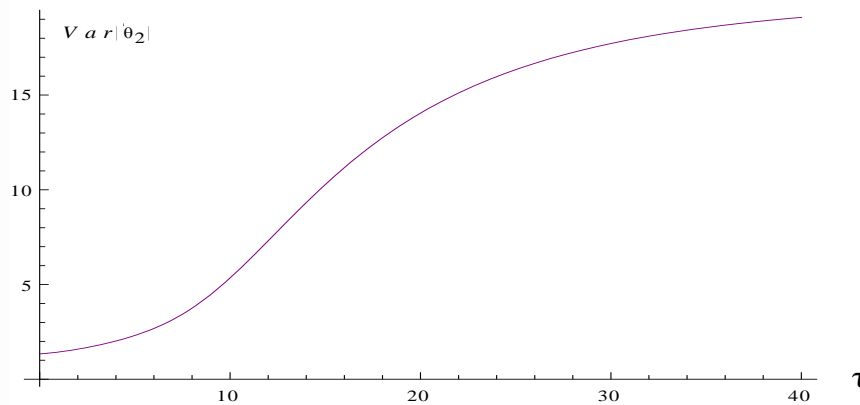


Γράφημα 2.2: Διάγραμμα της διακύμανσης του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ με το χρόνο τ , όπου $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

Τόσο από τη μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης $Var(\hat{\theta}_1)$, όσο και από το Γράφημα 2.2 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι στο διάστημα $[0, 2.687]$ η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου τ ενώ για τιμές του χρόνου μεγαλύτερες του 2.687 γίνεται φθίνουσα. Συγκεκριμένα, βάσει του Γραφήματος 2.2 διακρίνουμε ότι η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ για μικρές τιμές του χρόνου τ λαμβάνει υψηλές τιμές, αποτέλεσμα αναμενόμενο καθώς το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο 1^ο επίπεδο πίεσης είναι ελάχιστο, έχοντας ως απόρροια τη μείωση της ακρίβειας του εκτιμητή. Επίσης, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος τ τόσο μικρότερη είναι η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$. Αυτό αποτελεί συνέπεια του γεγονότος ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος κατά τον οποίο οι μονάδες παραμένουν εκτεθειμένες στο επίπεδο πίεσης x_1 , τόσες περισσότερες μονάδες αναμένουμε να αποτύχουν στο εν λόγω επίπεδο, ελαττώνοντας επομένως τη διακύμανση του εκτιμητή.

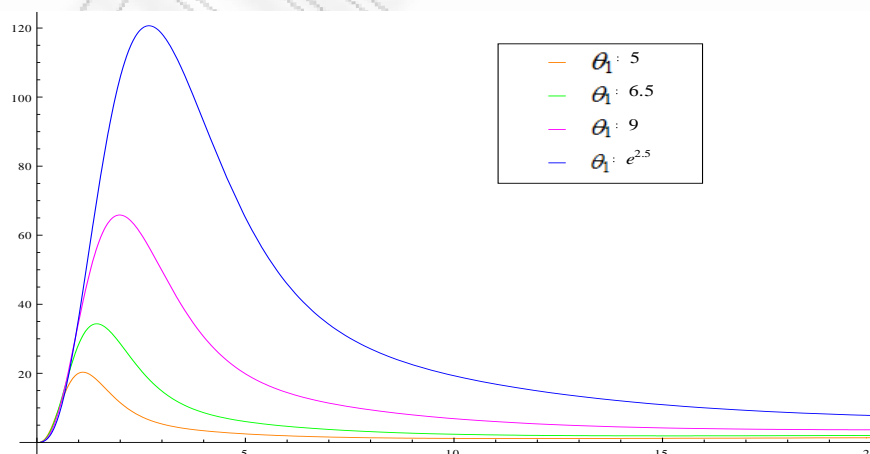
Αντίστροφη εικόνα παρουσιάζεται για τον εκτιμητή $\hat{\theta}_2$. Η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ παρατηρούμε ότι αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του χρόνου τ . Όπως είναι λογικό, η αύξηση

του χρόνου τ θα οδηγήσει σε αύξηση και της μεταβλητότητας του εκτιμητή. Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται ο χρόνος τ τόσες περισσότερες απώλειες καταγράφονται στο 1^ο επίπεδο πίεσης, άρα μεγαλύτερες τιμές για το n_1 και μικρότερες για το $n_2 = r - n_1$, δεδομένου ότι το r είναι σταθερό. Ανάλογα συμπεράσματα λαμβάνουμε και από το γράφημα της διακύμανσης του εκτιμητή $\hat{\theta}_2$ με το χρόνο τ που δίνεται ακολούθως.



Γράφημα 2.3 : Διάγραμμα της διακύμανσης του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ με το χρόνο τ , όπου $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

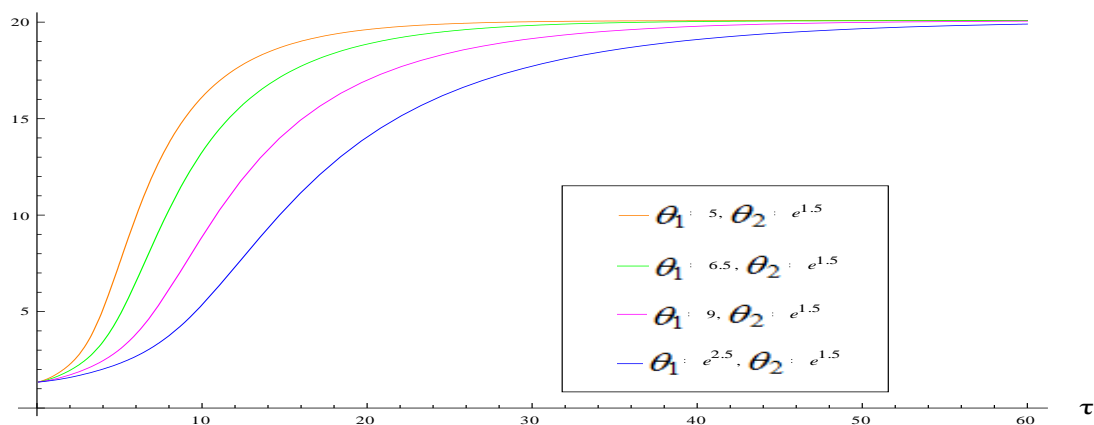
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η «συμπεριφορά» της διακύμανσης του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ σε σχέση με το χρόνο τ είναι παρόμοια και για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου θ_1 , όπως φαίνεται άλλωστε και από το ακόλουθο γράφημα, όπου παρατηρούμε ότι για δεδομένο τ , η διακύμανση του $\hat{\theta}_1$ αυξάνεται όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου θ_1 .



Γράφημα 2.4: Διάγραμμα της διακύμανσης του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ με το χρόνο τ για $\theta_1 = 5, 6.5, 9$ και $e^{2.5}$ όπου $n = 20$ και $r = 16$

2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ

Αντίστοιχα, για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, μέσω του Γραφήματος 2.5, διακρίνουμε ότι η διακύμανση του μεταβάλλεται κατά τον ίδιο τρόπο για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ_1 . Βέβαια, παρουσιάζεται η αντίστροφη εικόνα από αυτή του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$. Διαπιστώνουμε ότι θεωρώντας το θ_2 σταθερό και μεταβάλλοντας τις τιμές της παραμέτρου θ_1 , η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή του θ_1 .



Γράφημα 2.5: Διάγραμμα της διακύμανσης του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ με το χρόνο τ για $\theta_1 = 5, 6.5, 9$ και $e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$, όπου $n = 20$ και $r = 16$

Στη συνέχεια, στηριζόμενοι στον Πίνακα 2.2 λαμβάνουμε μία ένδειξη για τον τρόπο με τον οποίο κυμαίνονται οι διακυμάνσεις των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ για διαφορετικές τιμές του χρόνου τ αλλά και για διαφορετικά μεγέθη δείγματος, θεωρώντας όμως, σε καθένα από τα 3 πλαίσια που αναφέρουμε, ότι το ποσοστό των μονάδων που λογοκρίνονται είναι το ίδιο και συγκεκριμένα ίσο με 20%.

n	R	$\tau = 6$			$\tau = 8$			$\tau = 10$		
		Var($\hat{\theta}_1$)	MSE($\hat{\theta}_1$)	Var($\hat{\theta}_2$)	Var($\hat{\theta}_1$)	MSE($\hat{\theta}_1$)	Var($\hat{\theta}_2$)	Var($\hat{\theta}_1$)	MSE($\hat{\theta}_1$)	Var($\hat{\theta}_2$)
15	12	80,5511	85,9855	3,71778	48,0403	50,8497	5,1817	31,6413	33,9333	7,04537
20	16	45,9026	48,4437	2,6821	27,0955	28,3364	3,7513	19,3005	20,2364	5,34599
35	28	16,2311	16,8607	1,46207	11,5457	11,8657	1,97238	9,21789	9,42045	2,85196

Πίνακας 2.2: Η διακύμανση και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ καθώς και η διακύμανση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$ για διαφορετικά ζεύγη (n, r) και $\tau = 6, 8$ και 10

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις :

- ▶ Για καθένα από τα ζεύγη (n, r) διακρίνουμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του χρόνου τ η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ μειώνεται, εις βάρος όμως της ακρίβειας του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, του οποίου παρατηρούμε ότι η διακύμανση αυξάνεται (συμπέρασμα που είχαμε λάβει και από τον Πίνακα 2.1)
- ▶ Για καθεμία από τις διαφορετικές τιμές του χρόνου τ που έχουμε χρησιμοποιήσει μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αύξηση του μεγέθους του δείγματος που χρησιμοποιούμε (θεωρώντας σταθερό το ποσοστό λογοκρισίας όμως) συνεπάγεται και αύξηση της ακρίβειας των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$

Βάσει των παραπάνω διακρίνουμε ότι η επιλογή του βέλτιστου τ είναι καθοριστική, καθώς θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνο το τ που εξασφαλίζει τη βέλτιστη δυνατή ακρίβεια για τους 2 ε.μ.π. και περιορίζει την επίδραση που μπορεί να έχει η επιλογή αυτή εις βάρος ενός εκ των δύο εκτιμητών.

• Κριτήριο επιλογής του χρόνου τ η διακύμανση των ε.μ.π.

Γνωρίζουμε ότι όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα των εκτιμητών τόσο πιο ακριβείς και αξιόπιστες είναι οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε. Επομένως, η συνάρτηση στην οποία θα στηριχθούμε είναι η

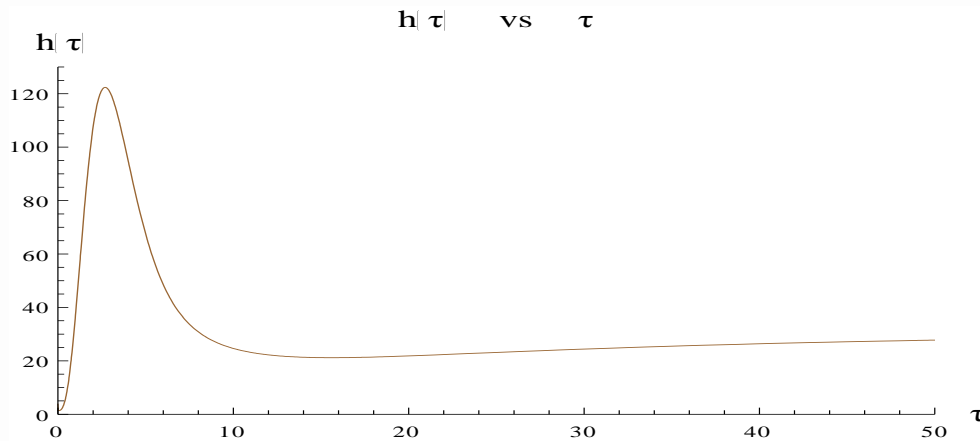
$$h(\tau) = \text{Var}(\hat{\theta}_1) + \text{Var}(\hat{\theta}_2),$$

όπου σύμφωνα με την παράγραφο 2.4 γράφεται ισοδύναμα :

$$h(\tau) = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} \left(\tau_{j,k}^2 + 2\theta_1 \tau_{j,k} + \frac{\theta_1^2 (j+1)}{j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=0}^j c_{j,k} (\tau_{j,k} + \theta_1) \right)^2 + \theta_2^2 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{p_{r-j} (j+1)}{\sum_{i=1}^{r-1} p_i} - \theta_2^2$$

Βάσει του κριτηρίου αυτού, θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνο το χρόνο τ για τον οποίο ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $h(\tau)$.

Στη συνέχεια, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(\tau)$, η οποία αντιστοιχεί στη συνολική μεταβλητότητα των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, με το χρόνο τ .



Γράφημα 2.6: Διάγραμμα της συνάρτησης $h(\tau) = \text{Var}(\hat{\theta}_1) + \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ με το χρόνο τ , όπου $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

Διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη τιμή του χρόνου τ που λαμβάνουμε, μέσω αυτού του κριτηρίου, είναι η $\tau = 15,5815$. Για αυτή την τιμή του χρόνου τ , το άθροισμα των διακυμάνσεων των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ είναι ίσο με 21.1835. Δε λαμβάνουμε υπόψη τις τιμές του τ οι οποίες είναι μικρότερες του 2 καθώς μπορεί θεωρητικά να εξασφαλίζουν μικρότερες τιμές για τη συνάρτηση $h(\tau)$ όμως πρακτικά δεν ανταποκρίνονται στα πλαίσια του πειράματος που διεξάγουμε (αρκεί να αναλογιστούμε ότι έχουμε θεωρήσει ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μονάδων στο 1^ο επίπεδο πίεσης είναι $\theta_1 = e^{2.5} \approx 12.18$).

▪ **Κριτήριο επιλογής του χρόνου τ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των ε.μ.π.**

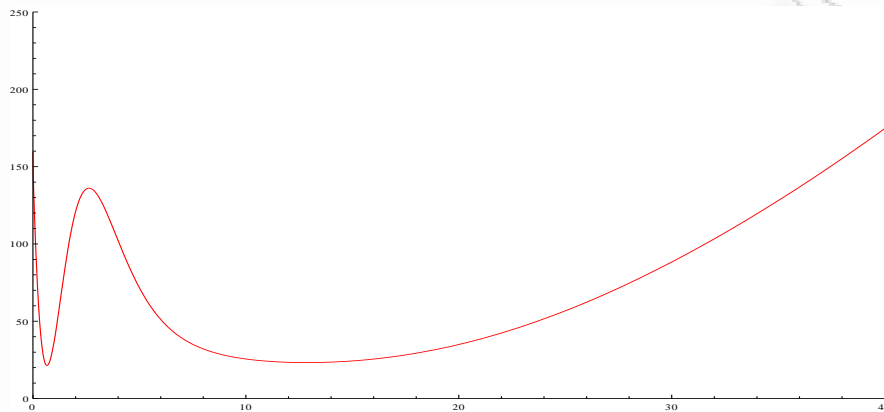
Εφόσον το $\hat{\theta}_1$ δεν αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ_1 , λογικό θα ήταν αντί της διακύμανσης $\text{Var}(\hat{\theta}_1)$ στη συνάρτηση $h(\tau)$ να χρησιμοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή. Όσον αφορά τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, γνωρίζουμε ότι είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου θ_2 και επομένως ισχύει ότι $MSE(\hat{\theta}_2) = \text{Var}(\hat{\theta}_2)$.

Συνεπώς, η συνάρτηση $h(\tau)$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$k(\tau) = MSE(\hat{\theta}_1) + \text{Var}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}(\hat{\theta}_1) + \left(E(\hat{\theta}_1) - \theta_1\right)^2 + \text{Var}(\hat{\theta}_2)$$

Όπως και παραπάνω, στόχος είναι να προσδιορίσουμε εκείνο το χρόνο τ για τον οποίο ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $k(\tau)$.

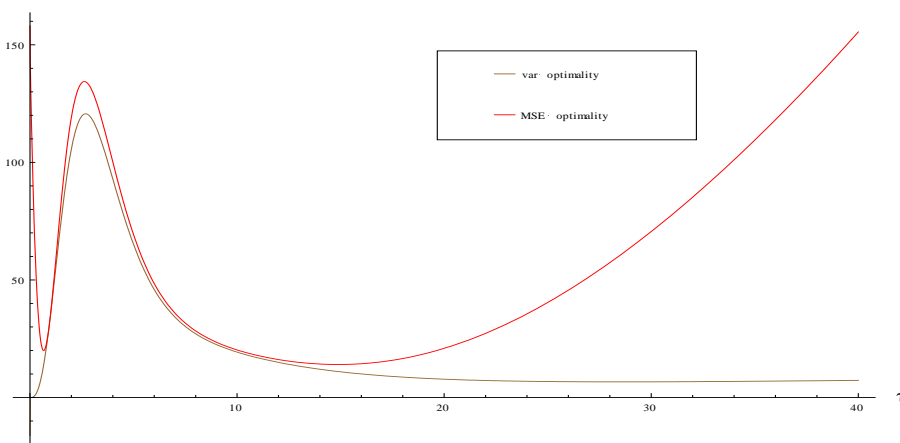
Μία πρώτη εικόνα για τη μορφή της συνάρτησης μπορούμε να λάβουμε από την ακόλουθη γραφική παράσταση.



Γράφημα 2.7: Διάγραμμα της συνάρτησης $k(\tau) = \text{MSE}(\hat{\theta}_1) + \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ με το χρόνο τ , όπου $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

Από το παραπάνω γράφημα διακρίνουμε ότι η συνάρτηση $k(\tau)$ παρουσιάζει 2 τοπικά ελάχιστα. Το 1^ο αντιστοιχεί στην τιμή $\tau = 0.659$, για την οποία η συνάρτηση $k(\tau)$ λαμβάνει την τιμή 21.3647. Το 2^ο τοπικό ελάχιστο αντιστοιχεί στην τιμή $\tau = 12.8544$ για την οποία ισχύει ότι $k(12.8544) = 23.2702$.

Παρόλο που ο χρόνος $\tau = 0.659$ εξασφαλίζει μικρότερη τιμή για τη συνάρτηση $k(\tau)$, η χρήση του δεν ενδείκνυται καθώς, στα πλαίσια του πειράματος που εκτελούμε, μία τόσο μικρή τιμή για το τ δεν έχει πρακτική ισχύ.



Γράφημα 2.8: Διάγραμμα των συναρτήσεων $h(\tau)$ και $k(\tau)$ με το χρόνο τ , όπου $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$

2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ

Βάσει του Γραφήματος 2.8, στο οποίο απεικονίζονται, από κοινού, οι συναρτήσεις $h(\tau)$ και $k(\tau)$ με το χρόνο τ , διακρίνουμε ότι οι εν λόγω συναρτήσεις για τιμές του τ που κυμαίνονται στο διάστημα $[1,16]$ δε διαφοροποιούνται σημαντικά. Αντίθετα, όταν ο χρόνος τ λάβει τιμές πολύ μικρές (μικρότερες της μονάδος) ή αρκετά υψηλές (για $\tau > 16$), διαπιστώνουμε ότι η μεροληψία του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ αυξάνεται σημαντικά.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω η συνάρτηση $k(\tau) = MSE(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χρόνου τ , για δεδομένη επιλογή των θ_1, θ_2, n και r . Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται οι βέλτιστοι χρόνοι τ για διαφορετικές επιλογές των n και r και για τις περιπτώσεις που $(\theta_1, \theta_2) = (e^{1.5}, e^{0.5}), (e^{2.5}, e^{1.5})$.

Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι αρκετά χρήσιμα για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου πειράματος απλής βηματικής πίεσης έχοντας εκ των προτέρων γνώση για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 .

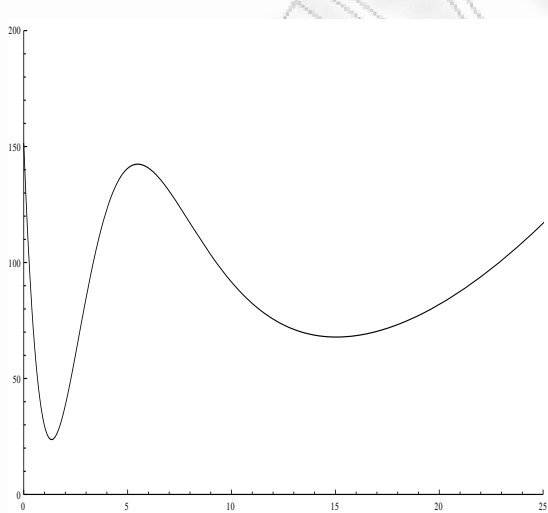
n	r	$\theta_1 = e^{1.5}, \theta_2 = e^{0.5}$		$\theta_1 = e^{2.5}, \theta_2 = e^{1.5}$	
		optimal time τ	min.MSE	optimal time τ	min.MSE
10	4	0,497272	3,77453	1,35172	27,8902
	6	3,28667	21,79094	8,93404	161,014
	8	5,53583	9,18665	15,048	67,8807
12	6	0,40719	3,38778	1,10685	25,0325
	8	4,1259	10,8734	11,2154	80,3445
	10	5,631	5,9287	15,3066	43,8075
16	8	2,75469	13,1034	7,48801	96,822
	10	3,55985	7,23034	9,67668	53,4254
	12	4,49333	4,76922	12,2141	35,24
20	10	2,63951	8,11745	7,17492	59,9803
	12	3,21508	5,30242	8,7395	39,1799
	16	4,72886	3,14927	12,8544	23,2702

Πίνακας 2.3 : Οι βέλτιστοι χρόνοι τ που ελαχιστοποιούν την $k(\tau) = MSE(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2)$ για αντιπροσωπευτικές τιμές των θ_1, θ_2, n και r

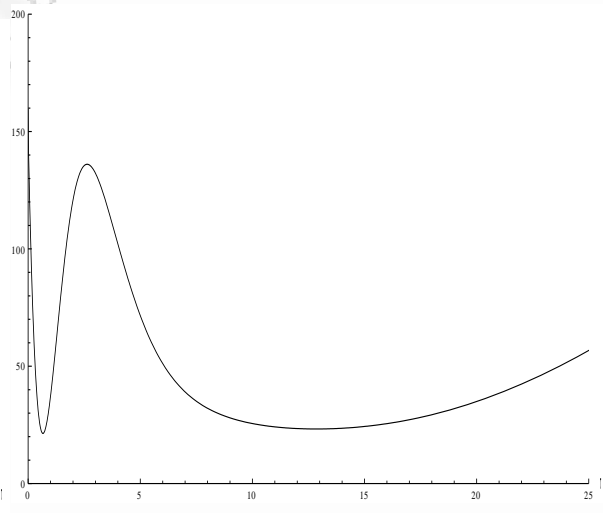
Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα διακρίνουμε ότι στην περίπτωση που $n=10$, $r=8$, $\theta_1 = e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$ ο βέλτιστος χρόνος τ , βάσει του κριτηρίου που στηρίζεται στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών, είναι 15.048. Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το διακρίνουμε και από το Γράφημα 2.9, στο οποίο παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις του χρόνου τ και της συνάρτησης $k(\tau) = MSE(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2)$ για διαφορετικές επιλογές των θ_1, θ_2, n και r .

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.3 και το Γράφημα 2.9 μπορούμε να διακρίνουμε ότι :

- › Η αύξηση των τιμών των παραμέτρων (θ_1, θ_2) από $(e^{1.5}, e^{0.5})$ σε $(e^{2.5}, e^{1.5})$ έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ελάχιστης μεταβλητότητας των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$
- › Για δεδομένο ζεύγος (θ_1, θ_2) η αύξηση του μεγέθους του δείγματος που χρησιμοποιούμε εξασφαλίζει μεγαλύτερη ακρίβεια για τους 2 εκτιμητές
- › Για καθεμία από τις περιπτώσεις $(\theta_1, \theta_2) = (e^{1.5}, e^{0.5}), (e^{2.5}, e^{1.5})$ διακρίνουμε ότι μείωση του ποσοστού των μονάδων που λογοκρίνονται συμβάλλει στη αύξηση της ακρίβειας των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$

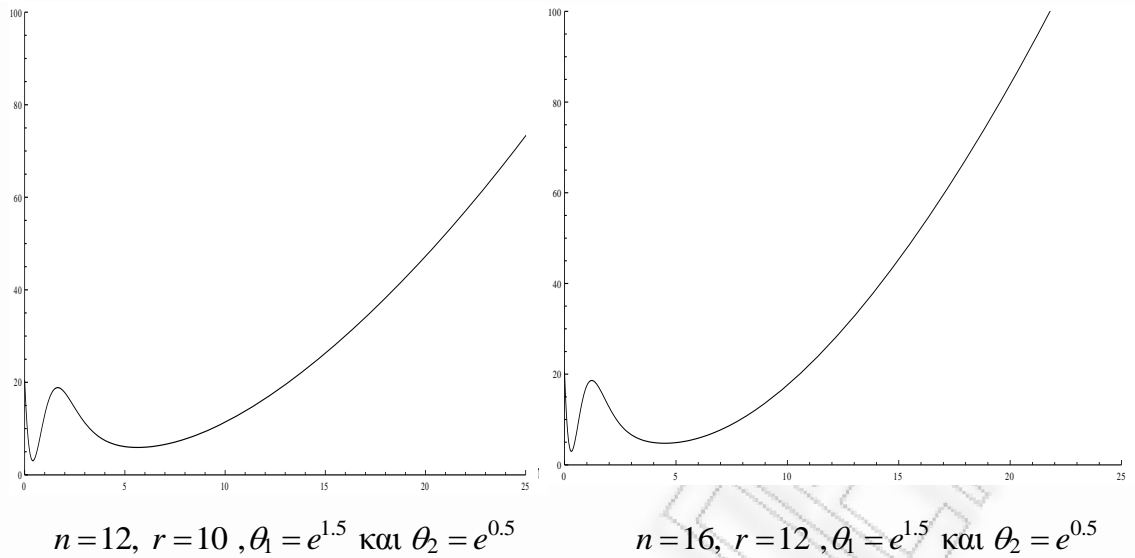


$n = 10, r = 8, \theta_1 = e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$



$n = 20, r = 16, \theta_1 = e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$

2.7 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ



Γράφημα 2.9: Διάγραμμα της συνάρτησης $k(\tau) = MSE(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2)$ με το χρόνο τ , για αντιπροσωπευτικές τιμές των θ_1, θ_2, n και r

Επομένως, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην εν λόγω παράγραφο, διακρίνουμε ότι κριτήρια για την επιλογή του χρόνου τ , κατά τον οποίο θα πραγματοποιήσουμε την αλλαγή του επιπέδου πίεσης, μπορούν να αποτελέσουν η πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ καθώς και η διακύμανση και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αυτών.

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τα κριτήρια αυτά. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το πλαίσιο του Xiong (1998), δηλαδή θεωρούμε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με παραμέτρους $\theta_1 = e^{2.5}$ και $\theta_2 = e^{1.5}$, όπου το μέγεθος δείγματος που διαθέτουμε είναι $n = 20$ και $r = 16$. Για τις τιμές αυτές των παραμέτρων, υπολογίζουμε το βέλτιστο χρόνο τ σύμφωνα με καθένα από τα τρία κριτήρια που αναφέραμε.

Βάσει του κριτηρίου ελαχιστοποίησης της πιθανότητας μη ύπαρξης των εκτιμητών και σύμφωνα με τη σχέση (2.16), ο βέλτιστος χρόνος τ που λαμβάνουμε είναι ο $\tau_{non-ex} = 5.5453$. Επίσης, στηριζόμενοι σε όσα προαναφέραμε, οι χρόνοι που ελαχιστοποιούν τα κριτήρια της διακύμανσης και του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι οι $\tau_{var} = 15.5815$ και $\tau_{mse} = 12.8544$, αντίστοιχα.

Ακολουθώς, για να αξιολογήσουμε τα κριτήρια που αναφέραμε, διεξάγουμε μελέτη προσομοίωσης. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$ και $r = 16$ εκτιμούμε τους μέσους και τις διακυμάνσεις των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ για καθέναν από τους βέλτιστους χρόνους που λάβαμε από τα τρία κριτήρια. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε βασίζονται σε 10.000 δείγματα και παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.4.

	$\tau_{non-ex} = 5.5453$	$\tau_{var} = 15.5815$	$\tau_{mse} = 12.8544$
Mean($\hat{\theta}_1$)	13,9617	14,1154	13,4369
Var($\hat{\theta}_1$)	57,8458	10,1735	13,9033
MSE($\hat{\theta}_1$)	61,0057	13,9087	15,4754
Mean($\hat{\theta}_2$)	4,47537	4,52112	4,51565
Var($\hat{\theta}_2$)	2,50727	10,739	8,22287

Πίνακας 2.4 : Η μέση τιμή, διακύμανση και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του $\hat{\theta}_1$ και η μέση τιμή και διακύμανση του $\hat{\theta}_2$, βασισμένα σε 10.000 δείγματα από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$, $r = 16$ για τους βέλτιστους χρόνους τ_{non-ex} , τ_{var} και τ_{mse}

Σύμφωνα με το περιεχόμενο του Πίνακα 2.4, μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα :

- ▶ Ο χρόνος τ που εξασφαλίζει μεγαλύτερη ακρίβεια για τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, δηλαδή μικρότερη τιμή για την ποσότητα $Var(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2)$, είναι εκείνος που λαμβάνουμε από το κριτήριο της διακύμανσης, όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο. Αντίθετα, οι εκτιμητές παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα αν θεωρήσουμε το χρόνο τ_{non-ex}
- ▶ Διακρίνουμε ότι οι χρόνοι τ_{var} και τ_{mse} εξασφαλίζουν περίπου την ίδια ακρίβεια για τους εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου μας. Ωστόσο, οι χρόνοι αυτοί παρουσιάζουν έντονη διαφοροποίηση όσον αφορά την πιθανότητα μη ύπαρξης των εκτιμητών. Συγκεκριμένα, διακρίνουμε ότι για τον χρόνο $\tau_{var} = 15.5815$ η πιθανότητα

$$P(non - ex \hat{\theta}_1 \text{ ή } non - ex \hat{\theta}_2) = e^{-\frac{n\tau}{\theta_1}} + \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}\right)^j e^{-\frac{\tau(n-j)}{\theta_1}}$$

λαμβάνει την τιμή 0.30774 (αντίστοιχη τιμή 0.30565 λάβαμε και από την παραπάνω προσομοίωση) ενώ για τ_{mse} η πιθανότητα γίνεται ίση με 0.121615 (αντίστοιχα η εκτίμηση της πιθανότητας που λαμβάνουμε από την προσομοίωση είναι 0.1186). Επομένως, διακρίνουμε ότι η χρήση του βέλτιστου χρόνου που προήλθε από το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι προτιμότερη καθώς εξασφαλίζει όχι μόνο ικανοποιητική ακρίβεια για τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αλλά και υψηλή πιθανότητα ύπαρξης αυτών

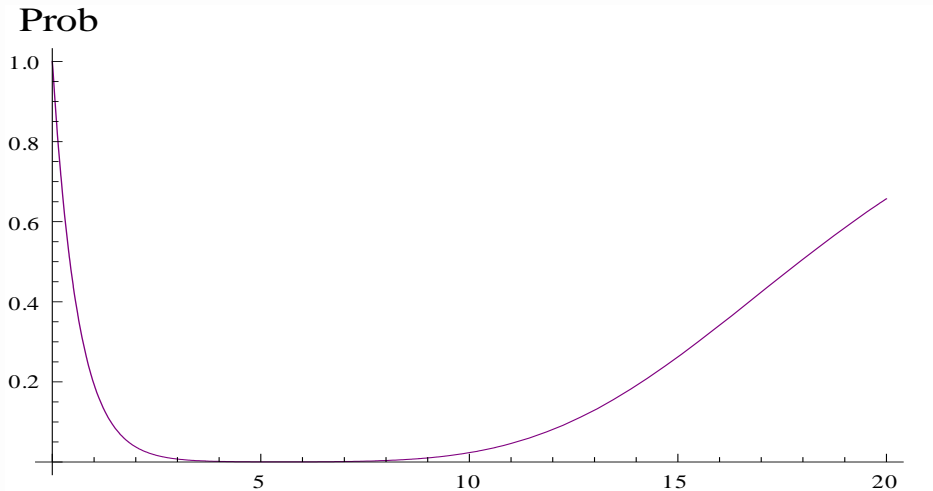
- ▶ Διακρίνουμε ότι και για τους 3 χρόνους τ που περιέχονται στον Πίνακα 2.4, οι εκτιμήσεις που λαμβάνουμε για τη μέση τιμή του $\hat{\theta}_2$ είναι σχεδόν ίσες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό καθώς ο ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ_2 και επομένως αναμένουμε ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των επαναλήψεων-δειγμάτων που παράγουμε τόσο περισσότερο η $E(\hat{\theta}_2)$ θα συγκλίνει στο $\theta_2 = e^{1.5} = 4.482$

• Συνδυασμός των κριτηρίων του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και της πιθανότητας μη ύπαρξης των ε.μ.π. για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χρόνου τ

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, διακρίνουμε ότι ο βέλτιστος χρόνος που λαμβάνουμε από το κριτήριο της πιθανότητας μη ύπαρξης των εκτιμητών δεν εξασφαλίζει ικανοποιητική ακρίβεια για τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ και αντίστοιχα οι βέλτιστοι χρόνοι που λαμβάνουμε από τα κριτήρια της διακύμανσης και του μέσου τετραγωνικού σφάλματος παρουσιάζουν υψηλή πιθανότητα μη ύπαρξης των εκτιμητών.

Επομένως, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η χρήση ενός κριτηρίου, βάσει του οποίου θα προσδιορίζαμε το χρόνο τ που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών, κρατώντας όμως ελεγχόμενη την πιθανότητα μη ύπαρξης αυτών.

Διακρίνουμε ότι σύμφωνα με το πλαίσιο που έχουμε θεωρήσει, δηλαδή για $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$, $n = 20$, $r = 16$, υπάρχει μία ευρεία περιοχή γύρω από το βέλτιστο χρόνο τ για την οποία η πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π. λαμβάνει ιδιαίτερα χαμηλές τιμές. Αυτό διαφαίνεται άμεσα και από το ακόλουθο γράφημα της πιθανότητας μη ύπαρξης των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση που δόθηκε παραπάνω, με το χρόνο τ .



Γράφημα 2.10: Διάγραμμα της πιθανότητας μη ύπαρξης των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ με το χρόνο τ , σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με παραμέτρους $\theta_1 = e^{2.5}$, $\theta_2 = e^{1.5}$ και $n = 20$, $r = 16$

Επομένως, θεωρώντας ένα μέγιστο επιτρεπτό όριο για την πιθανότητα μη ύπαρξης των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, λαμβάνουμε ένα εύρος τιμών για το χρόνο τ που ικανοποιούν αυτή τη σχέση, εκ των οποίων επιλέγουμε εκείνο που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των εκτιμητών.

Κάνοντας χρήση του κριτηρίου αυτού, καταλήγουμε στην εύρεση τιμών για το χρόνο τ που είναι πιο ρεαλιστικές και ουσιαστικές για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων που επιθυμούμε να λάβουμε. Για παράδειγμα, το κριτήριο αυτό θα απέτρεπε την εύρεση του χρόνου $\tau = 0.659$, ο οποίος, όπως διαπιστώσαμε, μπορεί να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\kappa(\tau)$, σύμφωνα με το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (βλ. Γράφημα 2.7), όμως αυξάνει την πιθανότητα μη ύπαρξης των εκτιμητών σε 34%, τιμή καθόλου ικανοποιητική.

2.8 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με τυχαίο χρόνο αλλαγής του επιπέδου πίεσης

2.8.1 Περιγραφή μοντέλου

Στα «παραδοσιακά» πειράματα απλής βηματικής πίεσης, όπως παρατηρήσαμε, οι παράμετροι που αναφέρονται στους μέσους χρόνους ζωής στα 2 επίπεδα πίεσης δε μπορούν πάντα να εκτιμηθούν. Διαπιστώσαμε ότι για να μπορέσουμε να τις εκτιμήσουμε θα πρέπει να παρατηρηθούν απώλειες σε κάθε επίπεδο πίεσης.

Για την αντιμετώπιση του προαναφερόμενου προβλήματος, οι Xiong and Milliken (1999) εισήγαγαν ένα νέο μοντέλο απλής βηματικής πίεσης. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η αλλαγή του επιπέδου πίεσης συντελείται όταν ένας προκαθορισμένος αριθμός πειραματικών μονάδων αποτύχει στο εκάστοτε επίπεδο πίεσης, εν αντιθέσει με τα «παραδοσιακά» πειράματα απλής βηματικής πίεσης, στα οποία ο χρόνος αλλαγής του επιπέδου πίεσης είναι προεπιλεγμένος. Επομένως, βάσει του νέου μοντέλου, οι παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν πάντα και οι χρόνοι αλλαγής των επιπέδων πίεσης είναι πλέον τυχαίες μεταβλητές. Τα δεδομένα, και σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης.

Η περιγραφή του μοντέλου που μελετάμε, για m επίπεδα πίεσης, είναι η εξής:

Ένα τυχαίο δείγμα από n όμοιες μονάδες τοποθετείται κάτω από το αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 . Όταν παρατηρηθούν n_1 αποτυχίες, δηλαδή στο χρόνο $t_{n_1:n}$, το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται σε x_2 . Το πείραμα συνεχίζεται στο επίπεδο πίεσης x_2 μέχρι και το χρόνο $t_{n_1+n_2:n}$, δηλαδή μέχρι να παρατηρηθούν συνολικά $n_1 + n_2$ αποτυχίες. Τότε στο χρόνο $t_{n_1+n_2:n}$ το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται σε x_3 , κ.ο.κ.. Τέλος, στο χρόνο $t_{n_1+\dots+n_{m-1}:n}$ το επίπεδο πίεσης αλλάζει σε x_m και το τεστ ολοκληρώνεται όταν αποτύχουν $n_1 + \dots + n_m (< n)$ πειραματικές μονάδες.

Βάσει της περιγραφής του μοντέλου, διακρίνουμε ότι οι χρόνοι στους οποίους σημειώνονται οι αλλαγές των επιπέδων πίεσης, αποτελούν διατεταγμένους χρόνους ζωής της κατανομής του χρόνου ζωής του εκάστοτε επιπέδου πίεσης και συνεπώς είναι τυχαίες μεταβλητές.

2.8.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Οι Kundu and Balakrishnan (2009) μελέτησαν εκτενώς το αντίστοιχο μοντέλο βηματικής πίεσης με 2 επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 , όπου σε κάθε επίπεδο ο χρόνος ζωής των πειραματικών μονάδων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παραμέτρους θ_1 και θ_2 αντίστοιχα.

Έστω ότι με $\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} = t_{r:n}\}$ συμβολίζουμε τους χρόνους ζωής των πειραματικών μονάδων του δείγματος που λαμβάνουμε.

Η από κοινού σ.π.π. των $t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n}$, λόγω της υπόθεσης του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης, μπορεί να γραφεί ως η από κοινού σ.π.π. των $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n}\}$, δηλαδή ως η από κοινού σ.π.π. των πρώτων n_1 διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους n από την εκθετική κατανομή με μέσο θ_1 (με συνάρτηση κατανομής την $G(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta_1}}$ και σ.π.π. την $g(t)$) και της υπό συνθήκη σ.π.π. των $\{t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n}\}$, δοθέντος των $t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n}$, δηλαδή της από κοινού σ.π.π. των μικρότερων n_2 διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους $n - n_1$ από την $\exp(t_{n_1:n}, \theta_2)$, δηλαδή από την

εκθετική κατανομή με σ.π.π. την $h(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-t_{n_1:n}}{\theta_2}}$, $t > t_{n_1:n}$

(καθώς $H(t) = P(T \leq t | T > t_{n_1:n}) = \frac{P(t_{n_1:n} < T \leq t)}{P(T > t_{n_1:n})} = \frac{F(t) - F(t_{n_1:n})}{1 - F(t_{n_1:n})} = 1 - e^{-\frac{t-t_{n_1:n}}{\theta_2}}$).

Επομένως, η από κοινού σ.π.π. των $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}\}$ θα δίνεται από τη σχέση

$$g_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = g_{T_{1:n}, \dots, T_{n_1:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n}) \cdot h_{T_{n_1+1:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{n_1+1:n}, \dots, t_{r:n} | t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n})$$

Η συνάρτηση $g_{T_{1:n}, \dots, T_{n_1:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n})$ αποτελεί την από κοινού σ.π.π. των πρώτων n_1 διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους n από την εκθετική

κατανομή με μέσο θ_1 και συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (1.1), είναι η ακόλουθη :

$$\begin{aligned} g_{T_{1:n}, \dots, T_{n_1:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n}) &= \frac{n!}{(n-n_1)!} \{1-G(t_{n_1:n})\}^{n-n_1} \prod_{i=1}^{n_1} g(t_{i:n}) = \\ &= \frac{n!}{(n-n_1)!} e^{-\frac{(n-n_1)t_{n_1:n}}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_1^{n_1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n}}{\theta_1}} = \frac{n!}{(n-n_1)!} \frac{1}{\theta_1^{n_1}} \cdot e^{-\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)t_{n_1:n} \right]} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση $h_{T_{n_1+1:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{n_1+1:n}, \dots, t_{r:n} | t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n})$ αποτελεί την από κοινού σ.π.π. των μικρότερων $n_2 = r - n_1$ διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους $n - n_1$ από την $\exp(t_{n_1:n}, \theta_2)$ και υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} h_{T_{n_1+1:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{n_1+1:n}, \dots, t_{r:n} | t_{1:n}, \dots, t_{n_1:n}) &= \frac{(n-n_1)!}{(n-r)!} \{1-H(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=n_1+1}^r h(t_{i:n}) = \\ &= \frac{(n-n_1)!}{(n-r)!} e^{-\frac{(t_{r:n}-t_{n_1:n})(n-r)}{\theta_2}} \frac{1}{\theta_2^{n_2}} e^{-\frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n}-t_{n_1:n})}{\theta_2}} = \\ &= \frac{(n-n_1)!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta_2^{n_2}} e^{-\frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n}-t_{n_1:n}) + (t_{r:n}-t_{n_1:n})(n-r) \right]} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Βάσει των σχέσεων (2.17) και (2.18), η από κοινού σ.π.π. των $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}\}$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$g_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2}} e^{-\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n-n_1)t_{n_1:n} \right] - \frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n}-t_{n_1:n}) + (t_{r:n}-t_{n_1:n})(n-r) \right]}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας των $t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} = t_{r:n}$ δίνεται

$$\text{από τη σχέση } L(\theta_1, \theta_2) = g_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = \frac{c}{\theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2}} \cdot e^{-\frac{T_1}{\theta_1} - \frac{T_2}{\theta_2}},$$

όπου $c = \frac{n!}{(n-r)!}$ σταθερά και

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)t_{n_1:n}, \quad T_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - t_{n_1:n}) + (n - r)(t_{r:n} - t_{n_1:n}),$$

οι ολικοί χρόνοι ελέγχου στο 1^ο και 2^ο επίπεδο αντίστοιχα.

Για να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. είναι οι $\hat{\theta}_1 = \frac{T_1}{n_1}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{T_2}{n_2}$.

Στη συνέχεια, για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε δ.ε. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , θα προσδιορίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

2.8.3 Μέση τιμή και διακύμανση των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$

Για τον υπολογισμό των ζητούμενων ποσοτήτων, θα πρέπει αρχικά να παρατηρήσουμε ότι η

από κοινού ροπογεννήτρια συνάρτηση των $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1}$ και $\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2}$ δίνεται από τη σχέση :

$$M(t, s) = E \left(e^{t \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} + s \frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2}} \right) = \left(1 - \frac{t}{n_1} \right)^{-n_1} \left(1 - \frac{s}{n_2} \right)^{-n_2}$$

(η απόδειξη δίνεται στο paper των Kundu and Balakrishnan (2009)).

Βάσει της παραπάνω σχέσης και δεδομένου ότι αν Y τυχαία μεταβλητή από την κατανομή

$Gamma(a, \lambda)$ τότε η ροπογεννήτρια αυτής είναι η $M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda} \right)^{-a}$, μπορούμε να

συμπεράνουμε ότι $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \sim Gamma(n_1, n_1)$ και $\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2} \sim Gamma(n_2, n_2)$,

καθώς και ότι οι $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1}$ και $\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2}$ είναι ανεξάρτητες.

Άμεσα, διακρίνουμε ότι $E \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \right) = \frac{n_1}{n_1} = 1 \Rightarrow E(\hat{\theta}_1) = \theta_1$. Ομοίως, $E(\hat{\theta}_2) = \theta_2$.

Επομένως, διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ είναι και αμερόληπτοι εκτιμητές των θ_1 και θ_2 , ιδιότητα την οποία δε μπορούμε να εξασφαλίσουμε με το «παραδοσιακό» μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II.

Επίσης, οι διακυμάνσεις των ε.μ.π. είναι οι $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta_1^2}{n_1}$ και $Var(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta_2^2}{n_2}$.

Βάσει των παραπάνω σχέσεων είναι προφανές ότι όσο τα n_1 και n_2 αυξάνονται τόσο πιο ακριβείς είναι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

2.8.4 Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Για τις άγνωστες παραμέτρους θ_1 και θ_2 μπορούμε να κατασκευάσουμε ακριβή δ.ε. εφόσον γνωρίζουμε την ακριβή κατανομή των ποσοτήτων $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1}$ και $\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2}$.

Εκτός από τα ακριβή δ.ε., περιγράφεται και η διαδικασία για την κατασκευή Bootstrap δ.ε. βάσει των μεθόδων Boot-P και Boot-T.

Η μέθοδος Boot-T για την κατασκευή δ.ε. προτάθηκε από τον Efron (1979) και βασίζεται σε ένα τυποποιημένο στατιστικό $z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}$, όπου $\hat{\theta}$ ένας εκτιμητής του θ και $\hat{\sigma}^2$ ο εκτιμητής της διασποράς του θ . Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, για κάθε bootstrap δείγμα που παράγουμε, υπολογίζουμε τη στατιστική συνάρτηση $z_b^* = \frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}_b}$, όπου $\hat{\theta}_b^*$ είναι ένας εκτιμητής του τυπικού σφάλματος του $\hat{\theta}^*$, βασισμένος στα δεδομένα που λαμβάνουμε από το b-οστό δείγμα bootstrap. Στη συνέχεια, εκτιμάται το α -ποσοστιαίο σημείο του z_b^* από την τιμή \hat{t}_a , έτσι ώστε $B^{-1} \sum_b I(z_b^* \leq \hat{t}_a) = a$, όπου $B \cdot a$ ακέραιος. Επομένως, ένα $100(1-2a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ θα είναι το $(\hat{\theta} - \hat{t}_{1-a} \hat{\sigma}, \hat{\theta} - \hat{t}_a \hat{\sigma})$.

Παρόλο που η μέθοδος Boot-T είναι απλή και κατανοητή, έχει τρία βασικά μειονεκτήματα. Αρχικά για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής είναι απαραίτητη η γνώση του εκτιμητή του τυπικού σφάλματος $\hat{\sigma}$, η εκτίμηση του οποίου δεν είναι άμεση. Για την εύρεση της θα πρέπει να χρησιμοποιούν είτε κάποιες άλλες μέθοδοι επαναδειγματοληψίας (όπως για παράδειγμα η μέθοδος jackknife) είτε να επαναληφθεί η μέθοδος bootstrap, γεγονός

όμως που συνεπάγεται ότι απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις. Συνεπώς, η μέθοδος αυτή είναι αρκετά χρονοβόρα. Ένα ακόμα μειονέκτημα της μεθόδου Boot-T είναι ότι δεν παραμένει αμετάβλητη κάτω από επαναπαραμετροποίηση (reparameterization invariant). Τέλος, το δ.ε. που λαμβάνουμε από αυτή τη μέθοδο δεν έχει την ιδιότητα να διατηρεί το εύρος των τιμών της στατιστικής συνάρτησης (δεν είναι range-preserving).

Όσον αφορά τα δ.ε. που βασίζονται στη μέθοδο bootstrap percentile (Boot-P), ο τρόπος κατασκευής τους είναι ο ακόλουθος. Αν θεωρήσουμε ότι \hat{G} είναι η αθροιστική συνάρτηση του $\hat{\theta}^*$, η οποία δίνεται από τη σχέση $\hat{G}(t) = P(\hat{\theta}^* \leq t)$, ένα $100(1-2a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ είναι το $[\hat{G}^{-1}(a), \hat{G}^{-1}(1-a)]$. Η ονομασία της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι το $\hat{G}^{-1}(a)$ αποτελεί ποσοστημόριο της κατανομής \hat{G} . Εφόσον ισχύει $\hat{G}^{-1}(a) = \hat{\theta}^{*(a)}$, το δ.ε. μπορεί ισοδύναμα να γραφεί $[\hat{\theta}^{*(a)}, \hat{\theta}^{*(1-a)}]$. Η παραπάνω σχέση για το Boot-P δ.ε. αναφέρεται στην περίπτωση που το πλήθος των bootstrap επαναλήψεων είναι άπειρο. Στην πράξη όμως χρησιμοποιείται πάντα ένα πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων B . Για καθένα από τα B δείγματα που παράγουμε υπολογίζουμε τον $\hat{\theta}_b^*$ εκτιμητή bootstrap του θ . Τις B τιμές που λαμβάνουμε τις διατάσσουμε και εκτιμούμε το ζητούμενο ποσοστημόριο. Οπότε όταν η ποσότητα $B \cdot a$ είναι ακέραιος, το $100(1-2a)\%$ Boot-P δ.ε. για την παράμετρο θ είναι το $[\hat{\theta}^{*(Ba)}, \hat{\theta}^{*(B(1-a))}]$.

Συμπεραίνουμε ότι τα Boot-P δ.ε. είναι πιο απλά στην κατασκευή από τα Boot-T δ.ε. και επίσης έχουν ως βασικά πλεονεκτήματα ότι διατηρούν το εύρος των τιμών και είναι αμετάβλητα σε μετασχηματισμούς της παραμέτρου θ .

Ακριβή Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Διαπιστώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι $\frac{\hat{\theta}_i}{\theta_i} \sim \text{Gamma}(n_i, n_i)$, για $i = 1, 2$.

Στηριζόμενοι στο αποτέλεσμα αυτό, ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ_i είναι το $\left[\frac{\hat{\theta}_i}{\gamma_{n_i, n_i}(1-a/2)}, \frac{\hat{\theta}_i}{\gamma_{n_i, n_i}(a/2)} \right]$, όπου με $\gamma_{n_i, n_i}(\delta)$ συμβολίζουμε

το δ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής $\text{Gamma}(n_i, n_i)$, για $i = 1, 2$.

Ένα εναλλακτικό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ_1 μπορεί να προκύψει από την ακόλουθη παρατήρηση.

Αν η τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(n_1, n_1)$ με συνάρτηση ροπογεννήτριας $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{n_1}\right)^{-n_1}$, τότε η

τυχαία μεταβλητή $Z = 2n_1 X$ ακολουθεί την $\chi_{2n_1}^2$ καθώς

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t2n_1 X}) = M_X(2n_1 t) = (1 - 2t)^{-n_1},$$

η οποία συνάρτηση αντιστοιχεί στη ροπογεννήτρια τ.μ. από την $\chi_{2n_1}^2$ κατανομή.

Καθώς ισχύει ότι $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{T_1}{n_1 \theta_1} \sim \text{Gamma}(n_1, n_1)$, τότε η τ.μ. $Z = 2n_1 \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{2T_1}{\theta_1} \sim \chi_{2n_1}^2$.

Συνεπώς, ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ_1 είναι το

$$\left[\frac{2T_1}{\chi_{2n_1}^2(1-a/2)}, \frac{2T_1}{\chi_{2n_1}^2(a/2)} \right].$$

Αντίστοιχα, ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ_2 είναι το

$$\left[\frac{2T_2}{\chi_{2n_2}^2(1-a/2)}, \frac{2T_2}{\chi_{2n_2}^2(a/2)} \right],$$

όπου με $\chi_{2n_i}^2(a)$ συμβολίζουμε το a ποσοστιαίο σημείο της χ^2 κατανομής με $2n_i$ βαθμούς ελευθερίας, για $i = 1, 2$.

Bootstrap διαστήματα εμπιστοσύνης με τη μέθοδο Boot-P (percentile)

Για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης μέσω της μεθόδου Boot-P αρκεί να εφαρμόσουμε τα ακόλουθα βήματα :

Βήμα 1^ο

Υπολογίζουμε τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1 = \frac{T_1}{n_1}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{T_2}{n_2}$ στηριζόμενοι στους χρόνους ζωής που

λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα.

Βήμα 2^ο

Δεδομένου ότι οι ποσότητες n, n_1, n_2 είναι γνωστές, παράγουμε n τυχαίες μεταβλητές από την εκθετική κατανομή με μέσο 1 και επιλέγουμε τις πρώτες n_1 διατεταγμένες μεταβλητές, τις οποίες συμβολίζουμε με y_1, \dots, y_{n_1} .

Επομένως, οι πρώτοι n_1 χρόνοι ζωής θα δίνονται από τις σχέσεις $t_{1:n} = \hat{\theta}_1 y_1, \dots, t_{n_1:n} = \hat{\theta}_1 y_{n_1}$. Στη συνέχεια, παράγουμε $n - n_1$ τυχαίες μεταβλητές από την εκθετική κατανομή με μέσο 1 και επιλέγουμε τις πρώτες n_2 διατεταγμένες μεταβλητές, τις οποίες τις συμβολίζουμε με $y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}$. Οι χρόνοι ζωής θα υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$t_{n_1+1:n} = \hat{\theta}_2 y_{n_1+1} + t_{n_1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n} = \hat{\theta}_2 y_{n_1+n_2} + t_{n_1:n}.$$

Συνεπώς, το $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}\}$ είναι το απαιτούμενο δείγμα.

Σημειώνουμε ότι για τα $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ που περιέχονται στις παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις που λαμβάνουμε από το προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου.

Βήμα 3^ο

Έχοντας πλέον λάβει τα $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}\}$, μπορούμε, στηριζόμενοι σε αυτές τις τιμές, να

υπολογίσουμε εκ νέου ε.μ.π. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , βάσει των σχέσεων $\hat{\theta}_1 = \frac{T_1}{n_1}$

και $\hat{\theta}_2 = \frac{T_2}{n_2}$, τους οποίους συμβολίζουμε με $\hat{\theta}_1^{(1)}$ και $\hat{\theta}_2^{(1)}$ αντίστοιχα.

Βήμα 4^ο

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2-3 Β φορές και στο τέλος της διαδικασίας αυτής θα έχουμε λάβει τις ακόλουθες ποσότητες: $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \dots, \hat{\theta}^{(B)}$, όπου $\hat{\theta}^{(k)} = (\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\theta}_2^{(k)})$, για $k=1, \dots, B$.

Βήμα 5^ο

Στο βήμα αυτό διατάσσουμε τις τιμές $\hat{\theta}_i^{(1)}, \dots, \hat{\theta}_i^{(B)}$ κατά αύξουσα σειρά και λαμβάνουμε τα $\hat{\theta}_i^{[1]}, \dots, \hat{\theta}_i^{[B]}$, για $i=1, 2$.

Βήμα 6^ο

Κατασκευάζουμε όλα τα πιθανά $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_i , της μορφής $[\hat{\theta}_i^{[j]}, \hat{\theta}_i^{[(1-a)B+j]}]$, όπου $j=1, \dots, B - [(1-a)B]$ και $i=1, 2$.

Βήμα 7^ο

Από τα παραπάνω δ.ε. επιλέγουμε εκείνο με το μικρότερο μήκος, το οποίο θα αποτελέσει και το $100(1-a)\%$ Boot-P δ.ε. για την παράμετρο θ_i .

Bootstrap διαστήματα εμπιστοσύνης με τη μέθοδο Boot-T

Για την κατασκευή δ.ε. μέσω της μεθόδου Boot-T αρκεί να εφαρμόσουμε τα ακόλουθα βήματα :

Βήμα 1^ο

Υπολογίζουμε τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1 = \frac{T_1}{n_1}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{T_2}{n_2}$, στηριζόμενοι στους χρόνους ζωής που

λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα.

Βήμα 2^ο

Με τον τρόπο που περιγράψαμε στο 2^ο βήμα του προηγούμενου αλγορίθμου, λαμβάνουμε ένα νέο τυχαίο δείγμα $\{t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}\}$, βάσει του οποίου υπολογίζουμε εκ νέου τους ε.μ.π. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , που τους συμβολίζουμε με $\hat{\theta}_1^{(1)}$ και $\hat{\theta}_2^{(1)}$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη στατιστική συνάρτηση

$$T_i^* = \frac{\sqrt{n_i}(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_i^{(k)})}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_i^{(k)})}}, \quad \text{για } i=1, 2$$

Βήμα 3^ο

Επαναλαμβάνουμε το 2^ο βήμα Β φορές (δηλαδή $k = 1, \dots, B$) και στο τέλος κάθε επανάληψης αποθηκεύουμε τις τιμές που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση T_i^* . Έπειτα, διατάσσουμε τις Β τιμές της στατιστικής συνάρτησης, τις οποίες συμβολίζουμε με $T_i^{*(1)} < \dots < T_i^{*(B)}$.

Βήμα 4^ο

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε όλα τα πιθανά $100(1-a)\%$ δ.ε. της μορφής $\left[T_i^{*(j)}, T_i^{*((1-a)B+j)} \right]$, όπου $j = 1, \dots, B - [(1-a)B]$ και $i = 1, 2$.

Βήμα 5^ο

Από τα παραπάνω δ.ε. επιλέγουμε αυτό με το μικρότερο μήκος, το οποίο έστω ότι συμβολίζουμε με $\left[T_{iL}^*, T_{iU}^* \right]$.

Το $100(1-a)\%$ Boot-T δ.ε. για την παράμετρο θ_i θα είναι το :

$$\left[\hat{\theta}_i + n_i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_i)} T_{iL}^*, \hat{\theta}_i + n_i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_i)} T_{iU}^* \right], \text{ για } i = 1, 2.$$

2.8.5 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου πλήθους μονάδων n_1

Ένα εύλογο ερώτημα το οποίο προκύπτει από τη δομή με την οποία έχουμε ορίσει το μοντέλο, αποτελεί η βέλτιστη επιλογή του n_1 , για δεδομένα r και n .

Οι Kundu and Balakrishnan (2009) για τον προσδιορισμό του βέλτιστου n_1 χρησιμοποίησαν κριτήρια τα οποία σχετίζονται με τη διακύμανση και με την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας. Στη συνέχεια, δίνεται αναλυτικά η περιγραφή αυτών των κριτηρίων βελτιστοποίησης.

2.8.5.1 Η διακύμανση των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$

Ένα από τα βασικά κριτήρια για την επιλογή του βέλτιστου n_1 είναι η διακύμανση. Συγκεκριμένα, στόχος ενός πειράματος είναι η εκτίμηση των παραμέτρων να γίνεται με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια. Επομένως, βάσει του μοντέλου που έχουμε θεωρήσει, η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης επιτυγχάνεται για την τιμή εκείνη του n_1 για την οποία

ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $\tau_1(n_1) = \left\{ \frac{\theta_1^2}{n_1} + \frac{\theta_2^2}{r-n_1} \right\}$, όπου $1 \leq n_1 \leq r-1$ και για δεδομένες

τιμές των θ_1 και θ_2 .

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση τυπικά εκφράζει το άθροισμα των διακυμάνσεων των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ ως συνάρτηση του n_1 . Για να μπορέσουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παραπάνω ποσότητα θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των παραμέτρων θ_1 και θ_2 . Σε περίπτωση που δεν έχουμε κάποια διαθέσιμη πληροφορία για τα θ_1 και θ_2 , δε μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο n_1 . Απεναντίας, αν γνωρίζουμε έστω και το λόγο των θ_1 και θ_2 μπορούμε να προσδιορίσουμε το βέλτιστο n_1 . Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι $\theta_1 = c\theta_2$, όπου c γνωστό, τότε η συνάρτηση $\tau_1(n_1)$ μπορεί να γραφεί ως

ακολούθως: $\tau_1(n_1) = \theta_2^2 \left\{ \frac{c^2}{n_1} + \frac{1}{r-n_1} \right\}$, $1 \leq n_1 \leq r-1$. Λύνοντας την εξίσωση $\tau_1'(n_1) = 0$

βρίσκουμε ότι $n_1 = \frac{r}{1 + \frac{1}{c}}$. Η τιμή αυτή αποτελεί και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης,

καθώς $\tau_1''(n_1) > 0$ για $1 \leq n_1 \leq r-1$.

Επειδή επιθυμούμε ο n_1 να είναι ακέραιος αριθμός (καθώς αντιπροσωπεύει το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο 1^ο επίπεδο πίεσης), αν η ποσότητα $\frac{r}{1 + \frac{1}{c}}$ είναι ακέραιος

τότε αυτή αποτελεί και το πλήθος μονάδων n_1 που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση μας,

διαφορετικά θεωρούμε τους δύο διαδοχικούς ακεραίους αριθμούς $\left[\frac{r}{1 + \frac{1}{c}} \right]$ και

$\left[\frac{r}{1 + \frac{1}{c}} \right] + 1$ και επιλέγουμε εκείνον που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\tau_1(n_1)$.

2.8.5.2 Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας

Ένα ακόμα κριτήριο για τη βέλτιστη επιλογή του n_1 μπορεί να αποτελέσει η μεγιστοποίηση της διακρίνουσας του πίνακα πληροφορίας.

Έστω ότι με $I(\theta_1, \theta_2)$ συμβολίζουμε τον πίνακα πληροφορίας του Fisher των θ_1 και θ_2 .

Ισχύει ότι,

$$I(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{n_1}{\theta_1^2} + \frac{2T_1}{\theta_1^3}\right) & 0 \\ 0 & E\left(-\frac{n_2}{\theta_2^2} + \frac{2T_2}{\theta_2^3}\right) \end{bmatrix}$$

όπου $T_1 = n_1 \hat{\theta}_1$ και $T_2 = n_2 \hat{\theta}_2$.

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε ότι $E\left(-\frac{n_1}{\theta_1^2} + \frac{2T_1}{\theta_1^3}\right) = -\frac{n_1}{\theta_1^2} + \frac{2n_1}{\theta_1^2} E\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1}\right) = \frac{n_1}{\theta_1^2}$.

Ομοίως, $E\left(-\frac{n_2}{\theta_2^2} + \frac{2T_2}{\theta_2^3}\right) = \frac{n_2}{\theta_2^2}$.

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας θα είναι ίση με την ποσότητα $\frac{n_1 n_2}{\theta_1^2 \theta_2^2}$.

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, στόχος μας είναι η εύρεση εκείνου του n_1 για το οποίο μεγιστοποιείται η παραπάνω ποσότητα. Ισοδύναμα, βέλτιστο n_1 θα μπορούσε να αποτελέσει

αυτό που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\tau_2(n_1) = \left\{ \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{n_1 (r - n_1)} \right\}$, $1 \leq n_1 \leq r - 1$. Εύκολα μπορούμε να

διαπιστώσουμε ότι η τιμή του n_1 που ελαχιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση είναι $n_1 = \frac{r}{2}$.

Επομένως, αν η ποσότητα $\frac{r}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός, καταλήγουμε ότι η βέλτιστη τιμή για το

n_1 είναι $\frac{r}{2}$.

Ειδικότερα, θεωρούμε τους δύο διαδοχικούς ακεραίους $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ και $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$ και επιλέγουμε αυτόν που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\tau_2(n_1)$.

Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι για τον υπολογισμό του βέλτιστου n_1 δεν είναι απαραίτητη η γνώση των θ_1 και θ_2 .

2.8.5.3 Η διακύμανση του λογαρίθμου του μέσου χρόνου ζωής

Ένα εναλλακτικό κριτήριο για την επιλογή του n_1 , στα πλαίσια του μοντέλου που μελετάμε, δόθηκε από τους Bai et al. (1989) και στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του λογαρίθμου του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο σχεδιασμού x_0 .

Οι Bai et al. (1989) θεωρούν ότι η δομή του μοντέλου είναι ίδια με αυτή που περιγράψαμε παραπάνω, με μόνη διαφορά ότι ο μέσος χρόνος ζωής κάθε μονάδας συνδέεται λογαριθμογραμμικά με το επίπεδο πίεσης, και συγκεκριμένα μέσω της σχέσης $\log \theta_i = \alpha + \beta x_i$, για $i = 1, 2$, όπου α, β άγνωστες παράμετροι.

Στη συνέχεια, με $\pi_i = \frac{n_i}{n}$ θα συμβολίζουμε το ποσοστό των μονάδων που αποτυγχάνει στο επίπεδο πίεσης x_i και με $\pi_c = \frac{n_c}{n}$ το ποσοστό των πειραματικών μονάδων που λογοκρίνεται.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο βελτιστοποίησης, θα θεωρήσουμε ότι το π_c είναι προκαθορισμένο και επομένως στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε το π_1 (και κατ'επέκταση το n_1), δηλαδή το βέλτιστο ποσοστό πειραματικών μονάδων που αποτυγχάνουν στο επίπεδο x_1 .

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\alpha, \beta)$ υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στην $L(\theta_1, \theta_2)$ που υπολογίσαμε στην παράγραφο 2.8.2, τα θ_1 και θ_2 σύμφωνα με τις σχέσεις $\log \theta_1 = \alpha + \beta x_1$ και $\log \theta_2 = \alpha + \beta x_2$.

Συνεπώς, $\log L(\alpha, \beta) \propto$

$$LL(\alpha, \beta) = -n_1(\alpha + \beta x_1) - n_2(\alpha + \beta x_2) - T_1 \exp(-\alpha - \beta x_1) - T_2 \exp(-\alpha - \beta x_2),$$

$$\text{όπου } T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)t_{n_1:n}, \quad T_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - t_{n_1:n}) + (n - r)(t_{r:n} - t_{n_1:n}).$$

Λύνοντας τις εξισώσεις $\frac{\partial LL(a,\beta)}{\partial a} = \frac{\partial LL(a,\beta)}{\partial \beta} = 0$, υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των a και β που δίνονται από τις σχέσεις :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[x_1 \log\left(\frac{n_2}{T_2}\right) - x_2 \log\left(\frac{n_1}{T_1}\right) \right] \quad \text{και} \quad \hat{\beta} = \frac{1}{x_2 - x_1} \log\left(\frac{n_1 \cdot T_2}{n_2 \cdot T_1}\right),$$

Ο πίνακας πληροφορίας του Fisher, $I(a, \beta)$ δίνεται από τη σχέση :

$$I(a, \beta) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 LL(a,\beta)}{\partial a^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 LL(a,\beta)}{\partial a \partial \beta}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 LL(a,\beta)}{\partial a \partial \beta}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 LL(a,\beta)}{\partial \beta^2}\right) \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} \pi_1 + \pi_2 & \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 \\ \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 & \pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_2^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, η διακύμανση του λογαρίθμου του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο σχεδιασμού x_0 μπορεί να γραφεί ως ακολούθως :

$$n \cdot \text{Var}(\log \hat{\theta}_0) = n \cdot \text{Var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_0) = n \cdot (1 \ x_0) I^{-1}(a, \beta) (1 \ x_0)' = \frac{(1 + \xi)^2}{\pi_1} + \frac{\xi^2}{1 - \pi_1 - \pi_c},$$

$$\text{όπου} \quad \xi = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}.$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ποσότητα αποτελεί συνάρτηση του π_1 , έστω $g(\pi_1)$, και συνεπώς λύνοντας την εξίσωση $g'(\pi_1) = 0$, διαπιστώνουμε ότι λύση της εξίσωσης είναι η $\pi_1^* = \frac{(1 - \pi_c)(1 + \xi)}{1 + 2\xi}$. Η λύση αυτή είναι η βέλτιστη καθώς αποτελεί ολικό ελάχιστο της

$$\text{συνάρτησης } g(\pi_1), \text{ εφόσον ισχύει } g''(\pi_1) = \frac{2(1 + \xi)^2}{\pi_1^3} + \frac{2\xi^2}{(1 - \pi_c - \pi_1)^3} > 0.$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που τα δεδομένα που διαθέτουμε είναι πλήρη (δηλαδή όταν $\pi_c = 0$), το βέλτιστο π_1 δίνεται από τη σχέση $\pi_1^* = \frac{1 + \xi}{1 + 2\xi}$, το οποίο ταυτίζεται με το αποτέλεσμα που εξήγαγαν οι Miller and Nelson (1983).

2.8.6 Ειδική περίπτωση του μοντέλου όπου καταγράφονται μόνο δύο παρατηρήσεις

Οι Xiong et al. (2006) θεωρούν ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των πειραμάτων που περιγράφονται παραπάνω. Συγκεκριμένα, θεωρούν ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, στο οποίο η αλλαγή του επιπέδου πίεσης επιτυγχάνεται όταν παρατηρηθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός αποτυχιών (συνεπώς η χρονική στιγμή αλλαγής του επιπέδου πίεσης αποτελεί μία διατεταγμένη παρατήρηση και άρα είναι τυχαία) και το πείραμα τερματίζεται όταν συνολικά παρατηρηθούν r αποτυχίες. Επομένως, στο 2^ο επίπεδο πίεσης παρατηρείται λογοκρισία τύπου Π. Η διαφορά με το μοντέλο που περιγράφεται παραπάνω έγκειται στο γεγονός ότι οι Xiong et al. (2006) υποθέτουν ότι οι μοναδικοί χρόνοι ζωής που παρατηρούνται καθ'όλη τη διάρκεια του πειράματος είναι ο χρόνος που αντιστοιχεί στο χρόνο αλλαγής του επιπέδου πίεσης κάτω από το χαμηλό επίπεδο πίεσης και η τελευταία διατεταγμένη παρατήρηση κάτω από το υψηλό επίπεδο πίεσης, η οποία αποτελεί και το χρόνο διάρκειας-λήξης του πειράματος.

Αυτό το είδος μοντέλου απλής βηματικής πίεσης μπορεί στην πράξη να επιτευχθεί όταν η κατάσταση των μονάδων ελέγχεται κατά περιόδους, πρακτική η οποία εφαρμόζεται συχνά στην πράξη καθώς δεν απαιτεί συνεχή έλεγχο της διαδικασίας και επομένως είναι πιο απλή στην εφαρμογή. Ασφαλώς, ένα βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι εξασφαλίζεται πάντα η ύπαρξη των εκτιμητών για τις παραμέτρους του μοντέλου, καθώς παρατηρούνται απώλειες και στα 2 επίπεδα πίεσης (συγκεκριμένα παρατηρείται από μία αποτυχία σε κάθε επίπεδο πίεσης).

Οι υποθέσεις του συγκεκριμένου μοντέλου επιγραμματικά είναι οι ακόλουθες :

- ▶ Τα επίπεδα πίεσης εφαρμόζονται με την ακόλουθη σειρά $x_1 < x_2$
- ▶ Για κάθε επίπεδο πίεσης, η κατανομή του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων είναι η εκθετική, με συνάρτηση κατανομής αυτή της σχέσης (2.1)
- ▶ Ο χρόνος ζωής των μονάδων κάτω από το μοντέλο που έχουμε θεωρήσει και δοθέντος ότι $T_{n_1:n} = t_{n_1:n}$, προέρχεται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης
- ▶ Μόνο 2 διατεταγμένες παρατηρήσεις καταγράφονται σε όλη τη διάρκεια του πειράματος. Ο ένας είναι ο χρόνος που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή αλλαγής

του επιπέδου πίεσης, δηλαδή ο $T_{n_1:n}$ και ο άλλος είναι ο τελευταίος χρόνος αποτυχίας του πειράματος, ο οποίος αποτελεί την $T_{n_1+n_2:n}$ διατεταγμένη παρατήρηση κάτω από το επίπεδο πίεσης x_2 (και ταυτίζεται με το χρόνο λήξης του πειράματος $T_{r:n}$)

- Ο μέσος χρόνος ζωής κάθε πειραματικής μονάδας συνδέεται λογαριθμογραμμικά με το επίπεδο πίεσης, και συγκεκριμένα μέσω της σχέσης $\log \theta_i = \alpha + \beta x_i$, για $i=1,2$, όπου α, β άγνωστες παράμετροι

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν και στην προηγούμενη παράγραφο, η υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής T , δοθέντος ότι $T_{n_1:n} = t_{n_1:n}$, δίνεται από τη σχέση

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 < t < t_{n_1:n} \\ F_2\left(\frac{\theta_2 t_{n_1:n}}{\theta_1} + t - t_{n_1:n}\right) & , t_{n_1:n} \leq t < \infty \end{cases}$$

και αντίστοιχα η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ του χρόνου ζωής T , δοθέντος $T_{n_1:n} = t_{n_1:n}$, δίνεται από τη σχέση

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < t_{n_1:n} \\ g_2(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-t_{n_1:n}}{\theta_2} - \frac{t_{n_1:n}}{\theta_1}} & , t_{n_1:n} \leq t < \infty \end{cases} .$$

Βάσει του πλαισίου του μοντέλου που μελετάμε, διακρίνουμε ότι σε κάθε εκτέλεση του πειράματος τα μόνα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι το διάνυσμα $(T_{n_1:n}, T_{n_1+n_2:n})$.

Συνεπώς, η από κοινού σ.π.π των $(T_{n_1:n}, T_{n_1+n_2:n})$, σύμφωνα με τη σχέση (1.3), είναι η ακόλουθη :

$$f(t_{n_1:n}, t_{n_1+n_2:n}) = \frac{C}{\theta_1 \theta_2} \left\{ \exp\left[-(n-n_1+1)\frac{t_{n_1:n}}{\theta_1}\right] \right\} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{n_1:n}}{\theta_1}\right) \right]^{n_1-1} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[- (n - n_1 - n_2 + 1) \frac{t_{n_1+n_2:n} - t_{n_1:n}}{\theta_2} \right] \right\} \cdot \left[1 - \exp \left(- \frac{t_{n_1+n_2:n} - t_{n_1:n}}{\theta_2} \right) \right]^{n_2-1},$$

$$\text{όπου } C = n(n - n_1) \binom{n - n_1 - 1}{n_2 - 1} \binom{n - 1}{n_1 - 1}.$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(\theta_1, \theta_2 | t_{n_1:n}, t_{n_1+n_2:n}) = f(t_{n_1:n}, t_{n_1+n_2:n}).$$

Για να λάβουμε τους ε.μ.π. των α, β αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\alpha, \beta)$, η οποία υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στην $L(\theta_1, \theta_2)$ τα θ_1 και θ_2 σύμφωνα με τις σχέσεις $\log \theta_1 = \alpha + \beta x_1$ και $\log \theta_2 = \alpha + \beta x_2$.

Συνεπώς, λαμβάνουμε τους ε.μ.π. των α, β επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \log L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0.$$

Εκτελώντας τις παραπάνω πράξεις διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. δε δίνονται σε κλειστή μορφή, επομένως για την εύρεση των λύσεων του παραπάνω συστήματος θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι.

Για τη μεθοδολογία κατασκευής δ.ε. κάποιος μπορεί να ανατρέξει στο άρθρο των Xiong et al. (2006), στο οποίο δίνονται τα δ.ε. για τις παραμέτρους α και β , καθώς και για την παράμετρο $\theta_0 = \exp(\alpha + \beta x_0)$.

Συμπεράσματα

Συμπεραίνουμε ότι η θεώρηση ενός τέτοιου πλαισίου έχει ως βασικό πλεονέκτημα την απλότητα εφαρμογής του καθώς και την εξασφάλιση της ύπαρξης των εκτιμητών των παραμέτρων του μοντέλου.

Παρόλα αυτά διαπιστώσαμε ότι οι εκτιμητές που λαμβάνουμε δε δίνονται σε κλειστή μορφή ενώ ένα βασικό μειονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στηρίζονται σε δύο μόνο παρατηρήσεις, αυτές των $(T_{n_1:n}, T_{n_1+n_2:n})$, που λαμβάνουμε με κάθε εκτέλεση του πειράματος. Συνεπώς, η χρήση κατανομών που περιλαμβάνουν περισσότερες από 2 παραμέτρους δεν ενδείκνυται, καθώς η εκτίμηση αυτών δε θα ήταν ιδιαίτερα αξιόπιστη.

2.9 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής από την κατανομή Weibull

Στις παραπάνω παραγράφους μελετήσαμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και εκθετικούς χρόνους ζωής. Εκτός όμως από την εκθετική κατανομή, μία άλλη κατανομή που χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή των χρόνων ζωής των μονάδων είναι η Weibull.

Η Weibull αποτελεί μία ευέλικτη κατανομή και για το λόγο αυτό προτιμάται για τη μοντελοποίηση και περιγραφή ποικίλων ειδών δεδομένων. Ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροι της κατανομής, και κυρίως η παράμετρος μορφής, η συνάρτηση πυκνότητας αυτής μπορεί να λάβει διαφορετικές μορφές και η συνάρτηση κινδύνου μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα και σταθερή συνάρτηση.

Το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής που ακολουθούν τη Weibull κατανομή μελετήθηκε από τους Kateri and Balakrishnan (2008). Η περιγραφή του μοντέλου είναι αντίστοιχη με αυτή που περιγράψαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα, n όμοιες μονάδες τοποθετούνται σε ένα πείραμα και υποβάλλονται σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε προκαθορισμένο χρόνο τ , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Το πείραμα συνεχίζεται μέχρι ένας προκαθορισμένος αριθμός μονάδων r αποτύχει. Με n_1 συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο τ και με $n_2 = r - n_1$ το πλήθος των μονάδων που απέτυχαν μετά το χρόνο τ . Με $t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{r:n}$ δηλώνουμε τους διατεταγμένους χρόνους ζωής των μονάδων για τους οποίους ισχύει η σχέση $t_{1:n} < t_{2:n} < \dots < t_{r:n}$. Ασφαλώς, βασική υπόθεση και στο μοντέλο αυτό είναι ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης.

Τώρα, υποθέτουμε ότι η κατανομή των χρόνων ζωής στα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 είναι η Weibull, με κοινή παράμετρο μορφής β και παραμέτρους κλίμακας τα θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα. Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής στο επίπεδο πίεσης x_i είναι

$$\eta F_i(t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\theta_i} \right)^\beta \right\}, t > 0 \text{ για } i = 1, 2 .$$

2.9 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής από την κατανομή Weibull

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ θα δίνεται από τη σχέση :

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 < t < \tau \\ F_2\left(\frac{\theta_2\tau}{\theta_1} + t - \tau\right) & , \tau \leq t < \infty \end{cases} .$$

και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{\beta}{\theta_1^\beta} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^\beta} & , 0 < t < \tau \\ g_2(t) = \frac{\beta}{\theta_2^\beta} \left(\frac{\theta_2\tau}{\theta_1} + t - \tau\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\theta_2\tau}{\theta_1} + t - \tau\right)^\beta} & , \tau \leq t < \infty \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta_1, \theta_2, \beta) = \begin{cases} c \cdot \{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) & , n_1 = r \\ c \cdot \{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=1}^r g_2(t_{i:n}) & , n_1 = 0 \\ c \cdot \{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r} \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) & , 1 \leq n_1 \leq r-1 \end{cases} ,$$

όπου $c = \frac{n!}{(n-r)!}$ σταθερά.

Παρατηρούμε ότι οι ε.μ.π. των θ_1 , θ_2 και β υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $1 \leq n_1 \leq r-1$, δηλαδή στην περίπτωση που παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης.

Επομένως, για να υπολογίσουμε τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 , θ_2 και β αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας ή ισοδύναμα το λογάριθμο αυτής. Λαμβάνοντας τις εξισώσεις πιθανοφάνειας μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι ζητούμενοι ε.μ.π. δε δίνονται σε κλειστή μορφή. Επομένως, για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων πιθανοφάνειας απαιτείται η χρήση επαναληπτικών μεθόδων.

Η πιο γνωστή επαναληπτική μέθοδος είναι αυτή των Newton-Raphson. Η μέθοδος αυτή συγκλίνει αρκετά γρήγορα, κυρίως όταν οι αρχικές τιμές (starting values) που χρησιμοποιούμε είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή.

Οι εξισώσεις προσδιορισμού των παραμέτρων, βάσει του Newton-Raphson αλγορίθμου, δίνονται από τη σχέση $\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(t)} + (\mathbf{I}_{obs})^{-1} \mathbf{u}^{(t)}$,

όπου $(\mathbf{I}_{obs})^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του παρατηρούμενου πίνακα πληροφορίας του Fisher,

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{\partial l}{\partial \theta_1}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2}, \frac{\partial l}{\partial \theta_3} \right) \text{ και } l(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = l(\theta_1, \theta_2, \beta) = \log L(\theta_1, \theta_2, \beta).$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ιδιαίτερα σημαντική είναι η επιλογή των κατάλληλων αρχικών τιμών. Οι Kateri and Balakrishnan (2008) πρότειναν τους ακόλουθους τρόπους επιλογής των τιμών αυτών :

► Ο ευκολότερος τρόπος προσέγγισης θα ήταν αν θεωρούσαμε ότι ξεκινάμε από την εκθετική κατανομή, αντί για τη Weibull, όπου εκεί οι αρχικές τιμές θα ήταν

$$\beta^{(0)} = 1, \quad \theta_1^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau}{n_1} \quad \text{και} \quad \theta_2^{(0)} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau) + (n - r)(t_{r:n} - \tau)}{r - n_1}.$$

Βέβαια, αυτή η επιλογή είναι αρκετά εύκολη αλλά όχι κατ'ανάγκη και η βέλτιστη.

► Στην περίπτωση που τα θ_1 και θ_2 είναι γνωστά, τότε μπορούμε να εξάγουμε έναν εκτιμητή για την παράμετρο β σε κλειστή μορφή.

Συγκεκριμένα, ο εκτιμητής αυτός δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{\beta} = \frac{r}{n_1 \log(\theta_1) + (r - n_1) \log(\theta_2) - \sum_{i=1}^{n_1} \log(t_{i:n}) - \sum_{i=n_1+1}^r \log\left(\frac{\theta_2 \tau + t_{i:n} - \tau}{\theta_1}\right)}. \quad (2.19)$$

Επομένως, έχοντας εκ των προτέρων πληροφορία για τα θ_1 και θ_2 , αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην παραπάνω σχέση μπορούμε να λάβουμε και μία αρχική εκτίμηση για την παράμετρο β . Συνεπώς, οι εν λόγω τιμές θα μπορούσαν να αποτελέσουν το διάνυσμα με τις αρχικές τιμές που απαιτούνται για τον αλγόριθμο.

► Στην περίπτωση, που δε διαθέτουμε καμία πληροφορία για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , μπορούμε να στηριχθούμε στις κατανομές των n_1 και n_2 . Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι $n_1 \sim B(n, F_1(\tau))$ και $n_2 \sim B(n - n_1, F_2(t_{r:n}) - F_1(\tau))$, δοθέντος των n_1 και $t_{r:n}$.

2.9 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής από την κατανομή Weibull

Εξισώνοντας τις παρατηρηθείσες τιμές των n_1 και n_2 με τις αναμενόμενες $E(n_1)$ και $E(n_2)$, αντίστοιχα, και στη συνέχεια λύνοντας το σύστημα

$$n_1 = n \left(1 - e^{-\left(\frac{\tau}{\theta_1}\right)^\beta} \right) \quad \text{και} \quad r - n_1 = (n - n_1) \left(e^{-\left(\frac{\tau}{\theta_1}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{tr:n - \tau}{\theta_2} + \frac{\tau}{\theta_1}\right)^\beta} \right)$$

μπορούμε να λάβουμε αρχικές εκτιμήσεις για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , όπου το β έχει αντικατασταθεί από την ισοδύναμη έκφραση της σχέσης (2.19).

Διαστήματα εμπιστοσύνης

Δεδομένου ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1, θ_2 και β δε δίνονται σε κλειστή μορφή, είναι αδύνατο να διαπιστώσουμε από ποια κατανομή προέρχονται και άρα να εξάγουμε ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους του μοντέλου.

Για το λόγο αυτό, για τις ζητούμενες παραμέτρους στη συνέχεια δίνονται τα προσεγγιστικά δ.ε. καθώς και Bootstrap δ.ε.

► Προσεγγιστικά δ.ε.

Στηριζόμενοι στην ασυμπτωτική κανονικότητα των ε.μ.π. μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\frac{\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}} \sim N(0,1), \quad \frac{\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}} \sim N(0,1) \quad \text{και} \quad \frac{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}} \sim N(0,1).$$

Επομένως, τα ασυμπτωτικά $100(1-a)\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τα θ_1, θ_2 και β έχουν τη μορφή:

$$\left[\hat{\theta}_1 \pm Z_{1-a/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_1)} \right], \left[\hat{\theta}_2 \pm Z_{1-a/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}_2)} \right] \quad \text{και} \quad \left[\hat{\beta} \pm Z_{1-a/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})} \right],$$

όπου Z_q είναι το q άνω ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής.

Οι ποσότητες $\text{Var}(\hat{\theta}_1)$, $\text{Var}(\hat{\theta}_2)$ και $\text{Var}(\hat{\beta})$ αποτελούν τα διαγώνια στοιχεία του αντίστροφου του παρατηρούμενου πίνακα πληροφορίας του Fisher.

(Οι παραπάνω διακυμάνσεις είναι ιδιαίτερα σύνθετες και για το λόγο αυτό δεν τις παραθέτουμε στην εργασία αυτή. Δίνονται αναλυτικά στο άρθρο των Kateri and Balakrishnan (2008)).

► **Bootstrap δ.ε.**

Για τις παραμέτρους του μοντέλου μπορούμε να κατασκευάσουμε διάφορα είδη Bootstrap δ.ε. ανάλογα με τη μέθοδο που επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε, όπως για παράδειγμα οι μέθοδοι BCa (bias corrected accelerated), Boot-T και Boot-P (percentile). Στις προηγούμενες παραγράφους δόθηκε αναλυτικά η διαδικασία με τη οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτού του είδους δ.ε. Όμοια μεθοδολογία μπορεί κανείς να ακολουθήσει για την κατασκευή των δ.ε. , με μόνη διαφοροποίηση τον τρόπο που παράγουμε τους χρόνους ζωής των πειραματικών μονάδων.

Για να προσομοιώσουμε δεδομένα από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, όπου παρατηρείται λογοκρισία τύπου II στο 2^ο επίπεδο πίεσης και οι χρόνοι ζωής προέρχονται από τη Weibull κατανομή, αρκεί να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα :

Βήμα 1^ο

Από τους χρόνους ζωής που λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα, υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 , θ_2 και β .

Βήμα 2^ο

Παράγουμε ένα δείγμα μεγέθους n από την $U(0,1)$, από το οποίο λαμβάνουμε τις πρώτες r διατεταγμένες παρατηρήσεις $U_{1:n}, \dots, U_{r:n}$.

Βήμα 3^ο

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις ποσότητες $Y_{j:n}^{(1)} = \hat{\theta}_1 \left[-\ln(1 - U_{j:n}) \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$ και

$$Y_{j:n}^{(2)} = \hat{\theta}_2 \left[-\ln \left[(1 - U_{j:n}) \exp \left[- \left(\frac{\tau}{\hat{\theta}_1} \right)^{\hat{\beta}} \right] \right] \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} - \tau \left(\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1} - 1 \right)$$

Βήμα 4^ο

Εισάγοντας τη δείκτρια συνάρτηση $I_{\tau}(j) = I(Y_{j:n}^{(1)} < \tau)$, η οποία ουσιαστικά δηλώνει το ενδεχόμενο η j -οστή μονάδα να αποτύχει στο 1^ο επίπεδο πίεσης, υπολογίζουμε τους χρόνους ζωής σύμφωνα με τη σχέση $T_{j:n} = I_{\tau}(j)Y_{j:n}^{(1)} + (1 - I_{\tau}(j))Y_{j:n}^{(2)}$, για $j = 1, \dots, r$. Έχοντας πλέον λάβει τα $T_{1:n}, \dots, T_{r:n}$ μπορούμε να εξάγουμε Bootstrap δ.ε. για τις παραμέτρους ακολουθώντας, κάθε φορά, την κατάλληλη διαδικασία.

2.9 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου II και χρόνους ζωής από την κατανομή Weibull

Τέλος, οι Kateri and Balakrishnan (2008) θεώρησαν ότι τα διαστήματα εμπιστοσύνης που αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο για τη διάκριση μεταξύ των μοντέλων της εκθετικής και της Weibull κατανομής. Συγκεκριμένα, παρατηρώντας αν το δ.ε. της παραμέτρου μορφής β περιλαμβάνει τη μονάδα (καθώς για $\beta = 1$ η Weibull κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική) μπορούμε να λάβουμε μία ένδειξη για το αν τα δεδομένα μας προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

Κεφάλαιο 3^ο

Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I

3.1 Εισαγωγή

Η περιγραφή ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I είναι η εξής :

Θεωρούμε ότι n όμοιες πειραματικές μονάδες τοποθετούνται σε ένα πείραμα και υποβάλλονται σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε έναν προεπιλεγμένο χρόνο τ_1 , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Το πείραμα παραμένει στο 2^ο επίπεδο πίεσης μέχρι και το χρόνο τ_2 , όπου και ολοκληρώνεται. Τόσο τα επίπεδα x_1, x_2 όσο και οι χρόνοι τ_1, τ_2 είναι καθορισμένα από την αρχή του πειράματος.

Το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών άρθρων.

Οι Bai et al. (1989) προσδιόρισαν το βέλτιστο χρόνο τ_1 σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με εκθετικούς χρόνους ζωής, στηριζόμενοι στην ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του ε.μ.π. του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο σχεδιασμού.

Οι Balakrishnan et al. (2009a) προσδιόρισαν τους ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , τις ακριβείς κατανομές αυτών καθώς και δ.ε. για τις υπό μελέτη παραμέτρους, έχοντας θεωρήσει ότι οι χρόνοι ζωής ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η εκθετική κατανομή στην πλειοψηφία των άρθρων που αναφέρονται σε μοντέλα βηματικής πίεσης αποτελεί μία από τις βασικές υποθέσεις. Υπάρχουν όμως άρθρα τα οποία θεωρούν ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων ακολουθούν διαφορετική κατανομή από την εκθετική. Συγκεκριμένα, οι Balakrishnan et al. (2009b) θεώρησαν ότι οι χρόνοι ζωής των πειραματικών μονάδων ακολουθούν τη λογαριθμοκανονική κατανομή ενώ οι Abdel-Hamid and Al-Hussaini (2009) χρησιμοποίησαν την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή.

Οι Fard and Li(2009) μελέτησαν το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από τη Weibull κατανομή έχοντας όμως θεωρήσει ότι τα δεδομένα δεν προέρχονται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης αλλά από το μοντέλο των Khamis and

Higgins (1998), το οποίο προέρχεται από ένα χρονικό μετασχηματισμό του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης με χρόνους ζωής που ακολουθούν τη Weibull κατανομή.

Οι Balakrishnan and Han (2010) μελέτησαν το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I, χρόνους από την εκθετική κατανομή και περισσότερους έναν παράγοντες πίεσης.

3.2 Περιγραφή μοντέλου

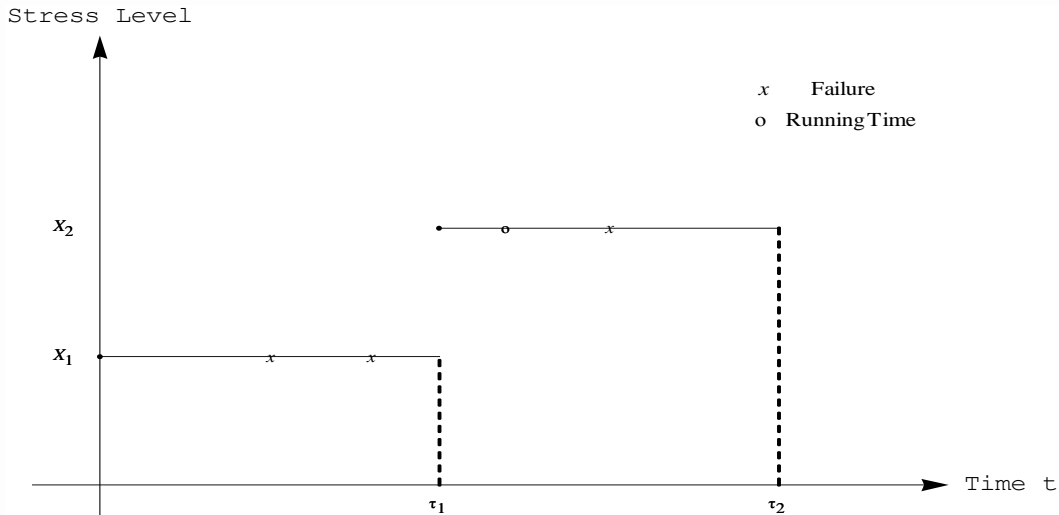
Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε πειράματα στα οποία παρατηρείται στο τελευταίο επίπεδο πίεσης λογοκρισία τύπου II, δηλαδή πειράματα τα οποία τερματίζονται όταν παρατηρηθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός πειραματικών μονάδων που έχουν αποτύχει. Ένα άλλο κριτήριο για τη λήξη ενός πειράματος, που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη, είναι η χρονική του διάρκεια.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με δύο επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 , όπου υπάρχει χρονικός περιορισμός (έστω ο χρόνος τ_2) στη διάρκεια του πειράματος. Θεωρούμε ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων στα επίπεδα x_1 και x_2 είναι η εκθετική με παραμέτρους θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα. Συνεπώς, η α.σ.κ. του χρόνου ζωής στο επίπεδο x_i θα δίνεται από τη σχέση (2.1).

Η περιγραφή ενός τέτοιου πειράματος είναι η ακόλουθη :

Τοποθετούμε n όμοιες μονάδες στο πείραμα και τις υποβάλλουμε σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε ένα προεπιλεγμένο χρόνο τ_1 , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Το πείραμα συνεχίζει στο επίπεδο πίεσης x_2 μέχρι και τη χρονική στιγμή τ_2 . Επομένως, το πείραμα ολοκληρώνεται είτε στο χρόνο τ_2 είτε νωρίτερα, στην περίπτωση που όλες οι πειραματικές μονάδες αποτύχουν πριν από το χρόνο τ_2 . Τόσο τα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 όσο και οι χρόνοι τ_1 και τ_2 (όπου $\tau_1 < \tau_2$) είναι προκαθορισμένα από την αρχή του πειράματος.

Η ακόλουθη γραφική παράσταση απεικονίζει το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I που μόλις περιγράψαμε.



Γράφημα 3.1 : Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I

Αν συγκρίνουμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I με αυτό κάτω από λογοκρισία τύπου II, διαπιστώνουμε ότι η μόνη διαφορά έγκειται στο χρόνο τερματισμού του πειράματος. Κάτω από τη λογοκρισία τύπου I, ο χρόνος λήξης είναι καθορισμένος ενώ στη λογοκρισία τύπου II ο χρόνος λήξης του πειράματος ταυτίζεται με το χρόνο αποτυχίας της r -οστής μονάδας και συνεπώς είναι τυχαίος.

Στη συνέχεια, με n_1 θα συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο τ_1 και με n_2 το πλήθος των πειραματικών μονάδων που απέτυχαν στο διάστημα $[\tau_1, \tau_2]$.

Επομένως, από την εκτέλεση ενός τέτοιου πειράματος, τα δεδομένα τα οποία θα συλλέξουμε είναι οι ακόλουθοι χρόνοι ζωής :

$$\left\{ t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2 \right\} \quad (3.1)$$

Βασική υπόθεση αποτελεί, και πάλι, ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του μοντέλου, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ θα δίνεται από τη σχέση :

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2\left(\frac{\theta_2 \tau_1}{\theta_1} + t - \tau_1\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ από τη σχέση :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 στηριζόμενοι στο δείγμα $\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$, το οποίο προήλθε από λογοκρισία τύπου I και στη συνέχεια θα εξάγουμε τους ε.μ.π. των άγνωστων αυτών παραμέτρων.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , βάσει των δεδομένων της σχέσης (3.1), (βλ. Arnold et al. (1992, p.160)) δίνεται από τον τύπο :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) \right\} \left\{ 1 - G(\tau_2) \right\}^{n-r}, \\ t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2, \quad 0 < r \leq n, \\ \left\{ 1 - G(\tau_2) \right\}^n, & r = 0, \tau_2 < t_{1:n} \end{cases}$$

όπου $r = n_1 + n_2$, ο συνολικός αριθμός των μονάδων που έχουν αποτύχει.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2) και (3.3), η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 διαμορφώνεται ως ακολούθως :

➤ Για $n_1 = 0$ και $n_2 = 0$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 είναι η εξής :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = L(\theta_1, \theta_2 | t_{1:n}, \dots, t_{n_1+n_2:n}) = \left\{ 1 - G(\tau_2) \right\}^n = \exp \left\{ -\frac{(\tau_2 - \tau_1)n}{\theta_2} - \frac{n\tau_1}{\theta_1} \right\}, \tau_2 < t_{1:n}$$

➤ Για $n_1 = n$ και $n_2 = 0$, δηλαδή στην περίπτωση που διαθέτουμε πλήρη δεδομένα, καθώς όλες οι μονάδες αποτυγχάνουν στο 1^ο επίπεδο πίεσης, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 λαμβάνει την ακόλουθη μορφή :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = n! \prod_{i=1}^n g_1(t_{i:n}) = \frac{n!}{\theta_1^n} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^n t_{i:n} \right\}, \quad 0 < t_{1:n} < \dots < t_{n:n} < \tau_1.$$

➤ Για $n_1 = 0$ και $n_2 = n$, δηλαδή στην περίπτωση που δεν παρατηρείται καμία αποτυχία στο 1^ο επίπεδο πίεσης καθώς όλες οι μονάδες αποτυγχάνουν στο 2^ο επίπεδο πίεσης (πλήρη δεδομένα), η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 είναι η εξής :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = n! \prod_{i=1}^n g_2(t_{i:n}) = \frac{n!}{\theta_2^n} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n (t_{i:n} - \tau_1) - \frac{n}{\theta_1} \tau_1 \right\}, \quad \text{όπου } \tau_1 \leq t_{1:n} < \dots < t_{n:n} < \tau_2$$

➤ Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 διαμορφώνεται ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) \right\} \{1 - G(\tau_2)\}^{n-r} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)! \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{D_1}{\theta_1} - \frac{D_2}{\theta_2} \right\}, \quad 0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2, \end{aligned}$$

$$\text{όπου } r = n_1 + n_2, \quad D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1) \tau_1 \quad \text{και} \quad D_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r) (\tau_2 - \tau_1).$$

Βάσει της μορφής της συνάρτησης πιθανοφάνειας των περιπτώσεων που αναφέραμε παραπάνω, διακρίνουμε ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $n_1 \geq 1$ και $n_2 \geq 1$, δηλαδή όταν παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης.

Στην περίπτωση αυτή, για να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 αρκεί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας ή ισοδύναμα το λογάριθμο αυτής.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι οι :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{n_1} \quad \text{και} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{D_2}{n_2}, \quad (3.4)$$

αντίστοιχα. Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω εκτιμητές είναι οι υπό συνθήκη εκτιμητές των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , δοθέντος του ενδεχομένου:

$$A = \{1 \leq n_1 \leq n-1 \text{ και } 1 \leq n_2 \leq n-n_1\}$$

3.4 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π.

Ο προσδιορισμός των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ των παραμέτρων θ_1 και θ_2 περιγράφεται στο άρθρο των Balakrishnan et al. (2009a).

Για να προσδιορίσουμε τις ζητούμενες κατανομές των ε.μ.π. θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τις υπό συνθήκη ροπογεννήτριες των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Έστω ότι τις συμβολίζουμε με $M_1(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1} | A\right)$ και $M_2(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_2} | A\right)$ αντίστοιχα, όπου A το ενδεχόμενο $A = \{1 \leq n_1 \leq n-1 \text{ και } 1 \leq n_2 \leq n-n_1\}$, δηλαδή το ενδεχόμενο το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

Οι παραπάνω ροπογεννήτριες μπορούν να ληφθούν άμεσα από την από κοινού υπό συνθήκη ροπογεννήτρια των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, $M(t,s) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1 + s\hat{\theta}_2} | A\right)$. Επομένως, στη συνέχεια δίνεται ο τρόπος υπολογισμού της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M(t,s)$.

Προφανώς, ισχύει η σχέση :

$$M(t,s) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1 + s\hat{\theta}_2} | A\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} E\left(e^{t\hat{\theta}_1 + s\hat{\theta}_2} | n_1=i, n_2=j\right) P(n_1=i, n_2=j | A). \quad (3.5)$$

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω ροπογεννήτρια θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις επιμέρους ποσότητες $P(n_1=i, n_2=j | A)$ και $E\left(e^{t\hat{\theta}_1 + s\hat{\theta}_2} | n_1=i, n_2=j\right)$.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$$P(n_1=i, n_2=j | A) = P(n_1=i, n_2=j | 1 \leq n_1 \leq n-1, 1 \leq n_2 \leq n-n_1) = \frac{P(n_1=i, n_2=j)}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} P(n_1=i, n_2=j)}$$

Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές n_1 και n_2 ακολουθούν την τριωνυμική κατανομή με

$$\text{συνάρτηση πιθανότητας την } P(n_1=i, n_2=j) = \binom{n}{i, j, n-i-j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j},$$

$$\text{όπου } p_1 = P(T < \tau_1) = G_1(\tau_1) = 1 - e^{-\frac{\tau_1}{\theta_1}},$$

$$p_2 = P(\tau_1 \leq T < \tau_2) = G_2(\tau_2) - G_1(\tau_1) = e^{-\frac{\tau_1}{\theta_1}} - e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} = (1 - p_1) \left(1 - e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\theta_2}}\right) \text{ και } p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

Επίσης, για την εύρεση της $P(n_1=i, n_2=j|A)$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} P(n_1=i, n_2=j) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n}{i, j, n-i-j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} p_2^j p_3^{n-i-j} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p_1^i \left[(p_2 + p_3)^{n-i} - p_3^{n-i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p_1^i p_3^{n-i} = \left[-p_1^n + 1 - (1-p_1)^n \right] - \left[-p_1^n + (p_1 + p_3)^n - p_3^n \right] \\ &= 1 - (1-p_1)^n - (p_1 + p_3)^n + p_3^n = 1 - (1-p_1)^n - (1-p_2)^n + p_3^n =: \frac{1}{C_n}. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, θα ισχύει } P(n_1=i, n_2=j|A) = C_n \cdot P(n_1=i, n_2=j). \quad (3.6)$$

Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής $E\left(e^{t\hat{\theta}_1 + s\hat{\theta}_2} | n_1=i, n_2=j\right)$ θα βασιστούμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση

Έστω ότι με $T_{1:n} < \dots < T_{n:n}$ συμβολίζουμε τις n διατεταγμένες παρατηρήσεις με συνάρτηση κατανομής την $G(t)$ και σ.π.π. την $g(t)$, που δίνονται από τις σχέσεις (3.2) και (3.3), αντίστοιχα. Τότε η από κοινού σ.π.π. των $T_{1:n}, \dots, T_{n_1+n_2:n}$, δοθέντος $n_1 = i$ και $n_2 = j$ είναι η :

$$f(t_{1:n}, \dots, t_{i+j:n} | n_1 = i, n_2 = j) = R_{ij} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1} \sum_{k=1}^i t_{k:n} - \frac{1}{\theta_2} \sum_{k=i+1}^{i+j} (t_{k:n} - \tau_1)\right\}, \quad (3.7)$$

$$0 < t_{1:n} < \dots < t_{i:n} \leq \tau_1 < t_{i+1:n} < \dots < t_{i+j:n} \leq \tau_2, \text{ όπου } R_{ij} = \frac{n!}{(n-i-j)!} \cdot \frac{p_3^{n-i-j} (1-p_1)^j}{\theta_1^i \theta_2^j P(n_1=i, n_2=j)}.$$

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης δίνεται στο άρθρο των Balakrishnan et al. (2009a).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.4), που υπολογίζει τους ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, καθώς και τη σχέση (3.7), η δεσμευμένη μέση τιμή λαμβάνει την ακόλουθη μορφή :

$$E\left(e^{t\hat{\theta}_1+s\hat{\theta}_2} \mid n_1=i, n_2=j\right) = E\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_{k:n} + (n-n_1)\tau_1}{n_1} + s \frac{\sum_{k=n_1+1}^r (t_{k:n} - \tau_1) + (n-r)(\tau_2 - \tau_1)}{n_2}} \mid n_1=i, n_2=j\right)$$

$$= e^{\frac{t(n-i)\tau_1 + s(n-i-j)(\tau_2 - \tau_1)}{i} + s \frac{(n-i-j)(\tau_2 - \tau_1)}{j}} E\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_{k:n}}{n_1} + s \frac{\sum_{k=n_1+1}^r (t_{k:n} - \tau_1)}{n_2}} \mid n_1=i, n_2=j\right) \quad (3.8)$$

Όμως, η μέση τιμή που εμφανίζεται μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως :

$$E\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n_1} t_{k:n}}{n_1} + s \frac{\sum_{k=n_1+1}^r (t_{k:n} - \tau_1)}{n_2}} \mid n_1=i, n_2=j\right) = R_{ij} \cdot \left\{ \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_2} e^{\left(\frac{t-1}{i} - \frac{1}{\theta_1}\right) \sum_{k=1}^i t_{k:n}} dt_{1:n} \dots dt_{i:n} \right\}$$

$$\times \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dots \int_{\tau_1}^{t_{(i+2):n}} e^{\left(\frac{s}{j} - \frac{1}{\theta_2}\right) \sum_{k=i+1}^{i+j} (t_{k:n} - \tau_1)} dt_{i+1:n} \dots dt_{i+j:n} \right\}$$

Επίσης, ισχύει $\left\{ \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_2} e^{\left(\frac{t-1}{i} - \frac{1}{\theta_1}\right) \sum_{k=1}^i t_{k:n}} dt_{1:n} \dots dt_{i:n} \right\} = \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{t}{i}\right)\tau_1}\right)^i}{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{t}{i}\right)^i i!}$ και αντίστοιχα

$$\left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dots \int_{\tau_1}^{t_{(i+2):n}} e^{\left(\frac{s}{j} - \frac{1}{\theta_2}\right) \sum_{k=i+1}^{i+j} (t_{k:n} - \tau_1)} dt_{i+1:n} \dots dt_{i+j:n} \right\} = \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{s}{j}\right)(\tau_2 - \tau_1)}\right)^j}{\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{s}{j}\right)^j j!}$$

Απλοποιώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κάνοντας χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, η σχέση (3.8) διαμορφώνεται ως εξής :

$$E\left(e^{t\hat{\theta}_1+s\hat{\theta}_2} \mid n_1=i, n_2=j\right) = \frac{R_{ij}}{i!j!} \cdot \frac{e^{\frac{t(n-i)\tau_1+s(n-i-j)(\tau_2-\tau_1)}{i} + \frac{(n-i-j)(\tau_2-\tau_1)}{j}}}{\left(\frac{1-t}{\theta_1} - \frac{t}{i}\right)^i \left(\frac{1-s}{\theta_2} - \frac{s}{j}\right)^j} \\ \times \sum_{z=0}^i \sum_{\rho=0}^j (-1)^{z+\rho} \binom{j}{\rho} \binom{i}{z} e^{-\left(\frac{1-s}{\theta_2} - \frac{s}{j}\right)(\tau_2-\tau_1)\rho} e^{-\left(\frac{1-t}{\theta_1} - \frac{t}{i}\right)\tau_1 z} \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.6) και (3.9) στη σχέση (3.5) και εκτελώντας κάποιες πράξεις, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα :

$$M(t, s) = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{z=0}^i \sum_{\rho=0}^j C_{ijz\rho} \frac{e^{\frac{t(n-i+z)\tau_1+s(n-i-j+\rho)(\tau_2-\tau_1)}{i} + \frac{(n-i-j+\rho)(\tau_2-\tau_1)}{j}}}{\left(1 - \frac{\theta_1 t}{i}\right)^i \left(1 - \frac{\theta_2 s}{j}\right)^j}, \quad (3.10)$$

$$\text{όπου } C_{ijz\rho} = (-1)^{z+\rho} \binom{n}{i, j, n-i-j} \binom{j}{\rho} \binom{i}{z} p_3^{n-i-j+\rho} (1-p_1)^{j+z-\rho}.$$

Η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$

Για την εύρεση της υπό συνθήκης κατανομής του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ αρκεί να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη ροπογεννήτρια αυτού, δηλαδή την $M_1(t) = E\left(e^{t\hat{\theta}_1} \mid A\right)$.

Εφόσον παραπάνω βρήκαμε την από κοινού υπό συνθήκη ροπογεννήτρια των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, $M(t, s)$, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τη συνάρτηση $M_1(t)$ θέτοντας στη σχέση (3.10) όπου $s = 0$. Επομένως, η $M_1(t)$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$M_1(t) = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \frac{e^{\frac{t(n-i+z)\tau_1}{i}}}{\left(1 - \frac{\theta_1 t}{i}\right)^i} = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \frac{e^{t\tau_{iz}}}{\left(1 - \frac{\theta_1 t}{i}\right)^i}, \quad t < \frac{1}{\theta_1}, \quad (3.11)$$

$$\text{όπου } \tau_{iz} = \frac{\tau_1}{i}(n-i+z) \text{ και } C_{iz} = (-1)^z \binom{n}{i} \binom{i}{z} \left\{ (1-p_1)^{n-i} - p_3^{n-i} \right\} (1-p_1)^z.$$

Γενικά, γνωρίζουμε ότι αν $Y \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ τ.μ. με σ.π.π. αυτή της σχέσης (2.11),

η ροπογεννήτρια αυτής είναι η συνάρτηση $M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$. Αν θεωρήσουμε μία τ.μ.

$$Z = Y + \zeta \text{ με σ.π.π. } \gamma(y - \zeta; a, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y - \zeta)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-\zeta)}, & y > \zeta \\ 0 & , \text{ αλλού} \end{cases} \quad (3.12)$$

τότε η ροπογεννήτρια της τ.μ. Z είναι η συνάρτηση $M_Z(t) = e^{t\zeta} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$, $|t| < \lambda$.

Στηριζόμενοι στην παραπάνω παρατήρηση, αλλά και στο θεώρημα αντιστροφής της ροπογεννήτριας συνάρτησης, μπορούμε να εξάγουμε την υπό συνθήκη σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$, βάσει της σχέσης (3.11), που δίνεται από τον τύπο :

$$f_{\hat{\theta}_1}(y) = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \gamma\left(y - \tau_{iz}; i, \frac{i}{\theta_1}\right),$$

όπου $\tau_{iz} = \frac{\tau_1}{i}(n - i + z)$ και $\gamma(\cdot)$ η συνάρτηση της σχέσης (3.12).

Η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$

Αντίστοιχα, για την εύρεση της υπό συνθήκης κατανομής του εκτιμητή $\hat{\theta}_2$ θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία με αυτή που περιγράφηκε παραπάνω.

Συγκεκριμένα, θα προσδιορίσουμε την υπό συνθήκη ροπογεννήτρια συνάρτηση του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$,

$M_2(s) = E\left(e^{t\hat{\theta}_2} \mid A\right)$. Στηριζόμενοι και πάλι στην από κοινού υπό συνθήκη ροπογεννήτρια

των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της σχέσεως (3.10), $M(t, s)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση

$M_2(s)$ θέτοντας στη σχέση (3.10) όπου $t = 0$.

Συνεπώς, η $M_2(s)$ διαμορφώνεται ως ακολούθως

$$M_2(s) = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \frac{e^{\frac{(n-i-j+\rho)(\tau_2-\tau_1)}{j} s}}{\left(1 - \frac{\theta_2 s}{j}\right)^j} = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \frac{e^{s\tau_{ij\rho}}}{\left(1 - \frac{\theta_2 s}{j}\right)^j}, \quad s < \frac{1}{\theta_2}, \quad (3.13)$$

$$\text{όπου } \tau_{ij\rho} = \frac{(n-i-j+\rho)(\tau_2 - \tau_1)}{j} \text{ και } C_{ij\rho} = (-1)^\rho \binom{n}{i, j, n-i-j} \binom{j}{\rho} p_1^i p_3^{n-i-j+\rho} (1-p_1)^{j-\rho}.$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (3.13) η υπό συνθήκη σ.π.π. του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ δίνεται από τη

$$\text{σχέση : } f_{\hat{\theta}_2}(y) = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \gamma\left(y - \tau_{ij\rho}; j, \frac{j}{\theta_2}\right),$$

όπου $\gamma(\cdot)$ η συνάρτηση της σχέσης (3.12).

3.5 Ροπές και Πιθανότητες Ουράς

Ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως

$$E(\hat{\theta}_1) = \left. \frac{dM_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} (\tau_{iz} + \theta_1) = \theta_1 + C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \tau_{iz} \text{ και}$$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \left. \frac{d^2 M_1(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \theta_1^2 + C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \left(\tau_{iz}^2 + 2\tau_{iz} \theta_1 + \frac{\theta_1^2}{i} \right)$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \left. \frac{dM_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \theta_2 + C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \tau_{ij\rho} \text{ και}$$

$$E(\hat{\theta}_2^2) = \left. \frac{d^2 M_2(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \theta_2^2 + C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \left(\tau_{ij\rho}^2 + 2\tau_{ij\rho} \theta_2 + \frac{\theta_2^2}{j} \right)$$

$$\text{Δεδομένου ότι } C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} = 1 \text{ και } C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} = 1 .$$

Πιθανότητες Ουράς

Στη συνέχεια, για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ακριβή δ.ε., θα προσδιορίσουμε τις πιθανότητες ουράς των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$.

Συγκεκριμένα, για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ ισχύει :

$$P_{\hat{\theta}_1}(\hat{\theta}_1 \geq \xi) = \int_{\xi}^{\infty} f_{\hat{\theta}_1}(t) dt = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz} \Gamma\left(i, \frac{i}{\theta_1} < \xi - \tau_{iz} >\right)$$

και αντίστοιχα για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ ισχύει :

$$P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq \xi) = \int_{\xi}^{\infty} f_{\hat{\theta}_2}(t) dt = C_n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho} \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_2} \langle \xi - \tau_{ij\rho} \rangle\right)$$

όπου $\langle x \rangle = \max\{x, 0\}$ και με $\Gamma(a, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ συμβολίζουμε τη μη πλήρη

συνάρτηση Γάμμα.

Όπως και στην περίπτωση λογοκρισίας τύπου II που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αντίστοιχα και για τη λογοκρισία τύπου I, οι πιθανότητες ουράς $P_{\theta_1}(\hat{\theta}_1 \geq \xi)$ και $P_{\theta_2}(\hat{\theta}_2 \geq \xi)$ αποτελούν αύξουσες συναρτήσεις των θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα. Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων στηρίζεται στο Three Monotonicities Lemma και δίνεται αναλυτικά στο άρθρο των Balakrishnan and Iliopoulos (2009).

3.6 Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Στην παράγραφο αυτή περιγράφουμε 3 διαφορετικά είδη διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους του μοντέλου. Αρχικά, δίνονται τα ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , σύμφωνα με τις υπό συνθήκη σ.π.π. και τις πιθανότητες ουράς των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ που έχουμε εξάγει στην προηγούμενη παράγραφο. Στη συνέχεια, δίνονται τα προσεγγιστικά δ.ε. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , τα οποία βασίζονται στην ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμητών. Τέλος, περιγράφεται ο αλγόριθμος για την προσομοίωση δεδομένων που προέρχονται από λογοκρισία τύπου I, βάσει του οποίου μπορούν να κατασκευαστούν δ.ε. με τη μέθοδο Bootstrap. Ο τρόπος εξαγωγής των παραπάνω δ.ε. περιγράφεται αναλυτικά στο άρθρο των Balakrishnan et al. (2009a), όπου επίσης γίνεται και η σύγκριση των δ.ε. μέσω προσομοίωσης.

3.6.1 Ακριβή Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Έστω ότι με θ_{iL} και θ_{iU} συμβολίζουμε τα κάτω και άνω όρια του δ.ε. της παραμέτρου θ_i αντίστοιχα, για $i=1,2$. Άρα, τα θ_{iL} και θ_{iU} αποτελούν τις λύσεις των εξισώσεων

$$P_{\theta_{iL}}(\hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_i^{obs}) = \frac{a}{2} \text{ και } P_{\theta_{iU}}(\hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_i^{obs}) = 1 - \frac{a}{2} \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου με $\hat{\theta}_i^{obs}$ συμβολίζουμε την παρατηρούμενη τιμή του ε.μ.π. του θ_i .

Επομένως, ένα $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_1 , το οποίο έστω ότι συμβολίζουμε με $(\theta_{1L}, \theta_{1U})$, μπορεί να ληφθεί λύνοντας μέσω επαναληπτικών μεθόδων τις ακόλουθες 2 μη γραμμικές εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= C_n(\theta_{1L}, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz}(\theta_{1L}, \hat{\theta}_2) \Gamma\left(i, \frac{i}{\theta_{1L}} \langle \hat{\theta}_1^{obs} - \tau_{iz} \rangle\right) \text{ και} \\ 1 - \frac{a}{2} &= C_n(\theta_{1U}, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz}(\theta_{1U}, \hat{\theta}_2) \Gamma\left(i, \frac{i}{\theta_{1U}} \langle \hat{\theta}_1^{obs} - \tau_{iz} \rangle\right) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, ένα $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_2 , το οποίο συμβολίζουμε με $(\theta_{2L}, \theta_{2U})$, μπορεί να υπολογιστεί βάσει των ακόλουθων 2 μη γραμμικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= C_n(\hat{\theta}_1, \theta_{2L}) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho}(\hat{\theta}_1, \theta_{2L}) \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_{2L}} \langle \hat{\theta}_2^{obs} - \tau_{ij\rho} \rangle\right) \text{ και} \\ 1 - \frac{a}{2} &= C_n(\hat{\theta}_1, \theta_{2U}) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho}(\hat{\theta}_1, \theta_{2U}) \Gamma\left(j, \frac{j}{\theta_{2U}} \langle \hat{\theta}_2^{obs} - \tau_{ij\rho} \rangle\right) \end{aligned}$$

3.6.2 Προσεγγιστικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Διαπιστώσαμε ότι τα όρια των ακριβών δ.ε. είναι ιδιαίτερα περίπλοκα λόγω της σύνθετης μορφής που έχουν οι σ.π.π. των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Για το λόγο αυτό, εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε προσεγγιστικά δ.ε. , τα οποία στηρίζονται στην ασυμπτωτική κανονικότητα των ε.μ.π. .

Έστω ότι με $I(\theta_1, \theta_2)$ συμβολίζουμε τον πίνακα πληροφορίας του Fisher των παραμέτρων θ_1 και θ_2 . Ισχύει,

$$I(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{n_1}{\theta_1^2} + \frac{2D_1}{\theta_1^3}\right) & 0 \\ 0 & E\left(-\frac{n_2}{\theta_2^2} + \frac{2D_2}{\theta_2^3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau_1 (= n_1 \hat{\theta}_1) \quad \text{και} \quad D_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r)(\tau_2 - \tau_1) (= n_2 \hat{\theta}_2).$$

Επομένως, ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας του Fisher $\hat{I}(\theta_1, \theta_2)$ λαμβάνει την

$$\text{ακόλουθη μορφή: } \hat{I}(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\hat{\theta}_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{\hat{\theta}_2^2} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, οι ασυμπτωτικές διακυμάνσεις των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ δίνονται από τις σχέσεις :

$$V_1 = \hat{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\hat{\theta}_1^2}{n_1} \quad \text{και} \quad V_2 = \hat{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_2^2}{n_2} .$$

Μία από τις βασικές ιδιότητες των ε.μ.π. είναι ότι ασυμπτωτικά ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επομένως, βάσει αυτής της ιδιότητας θα ισχύει:

$$\frac{\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)}{\sqrt{V_1}} = \frac{\hat{\theta}_1 - \left(\theta_1 + C_n(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tau_{iz} \right)}{\sqrt{V_1}} = \frac{(\hat{\theta}_1 - W_1) - \theta_1}{\sqrt{V_1}} \sim N(0,1) ,$$

$$\text{όπου } W_1 = C_n(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{z=0}^i C_{iz}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tau_{iz} .$$

Συμπεραίνουμε ότι το ασυμπτωτικό $100(1-a)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_1 είναι το

$$\left[\hat{\theta}_1 - W_1 \pm Z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{V_1} \right]$$

Ομοίως, για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ ισχύει :

$$\frac{\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2)}{\sqrt{V_2}} = \frac{\hat{\theta}_2 - \left(\theta_2 + C_n(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tau_{ij\rho} \right)}{\sqrt{V_2}} = \frac{(\hat{\theta}_2 - W_2) - \theta_2}{\sqrt{V_2}} \sim N(0,1)$$

$$\text{όπου } W_2 = C_n(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{\rho=0}^j C_{ij\rho}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tau_{ij\rho}.$$

Συνεπώς, ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ_2 είναι το $\left[\hat{\theta}_2 - W_2 \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{V_2} \right]$,

όπου Z_q είναι το q άνω ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής.

3.6.3 Bootstrap Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενες παραγράφους, μπορούν να κατασκευαστούν διάφορα είδη Bootstrap δ.ε. για τις παραμέτρους του μοντέλου.

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι παρόμοια με αυτή που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η διαφοροποίηση έγκειται στον τρόπο με τον οποίον παράγουμε τους χρόνους ζωής των μονάδων.

Εν συνέχεια, περιγράφουμε τα βήματα του αλγορίθμου βάσει του οποίου λαμβάνουμε ένα δείγμα που περιλαμβάνει χρόνους που προέρχονται από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I.

Βήμα 1^ο

Από τους χρόνους ζωής που λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα υπολογίζουμε τους ε.μ.π.

$$\text{των παραμέτρων } \theta_1 \text{ και } \theta_2, \text{ οι οποίο δίνονται από τις σχέσεις } \hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{n_1} \text{ και } \hat{\theta}_2 = \frac{D_2}{n_2}.$$

Οι ποσότητες τ_1 και τ_2 θεωρούνται γνωστές.

Βήμα 2^ο

Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την $U(0,1)$ και λαμβάνουμε τις διατεταγμένες παρατηρήσεις $U_{1:n}, \dots, U_{n:n}$.

Βήμα 3^ο

Για να βρούμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο 1^ο επίπεδο πίεσης,, αρκεί να προσδιοριστεί το n_1 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση

$U_{n_1:n} \leq 1 - e^{-\frac{\tau_1}{\hat{\theta}_1}} \leq U_{n_1+1:n}$. Για $1 \leq i \leq n_1$, μέσω της σχέσης $U_{i:n} = 1 - e^{-\frac{T_{i:n}}{\hat{\theta}_1}}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T_{i:n}$ από τη σχέση $T_{i:n} = -\hat{\theta}_1 \ln(1 - U_{i:n})$.

Βήμα 4^ο

Έπειτα, παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $m = n - n_1$ από την $U(0,1)$ και λαμβάνουμε τις διατεταγμένες παρατηρήσεις $V_{1:m}, \dots, V_{m:m}$.

Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο διάστημα $[\tau_1, \tau_2]$ αρκεί να βρούμε εκείνο το n_2 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση

$V_{n_2:m} \leq 1 - e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\hat{\theta}_2}} \leq V_{n_2+1:m}$. Για $1 \leq j \leq n_2$ βάσει της σχέσης $V_{j:m} = 1 - e^{-\frac{T_{j:n} - \tau_1}{\hat{\theta}_2}}$, λαμβάνουμε ότι $T_{n_1+j:n} = \tau_1 - \hat{\theta}_2 \ln(1 - V_{j:m})$.

Οι παρατηρήσεις $\{T_{1:n}, \dots, T_{n_1+n_2:n}\}$ αποτελούν ένα δείγμα που περιλαμβάνει χρόνους που προέρχονται από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και πλέον για να εξάγουμε τα επιθυμητά Bootstrap δ.ε. για τις παραμέτρους αρκεί να ακολουθήσουμε την κατάλληλη διαδικασία.

3.7 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την λογαριθμοκανονική κατανομή

Εκτός από την εκθετική, μία άλλη κατανομή που χρησιμοποιείται συχνά για την περιγραφή των χρόνων ζωής των μονάδων είναι η λογαριθμοκανονική κατανομή.

Μία συνεχής τ.μ. T λέμε ότι ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 ($-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$) αν η τ.μ. $Y = \log(T)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Η συνάρτηση κατανομής και η σ.π.π. της λογαριθμοκανονικής κατανομής δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$F(t; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \text{ και } f(t; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, t > 0,$$

όπου $\Phi(\cdot)$ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής.

Η περιγραφή του μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I είναι αντίστοιχη με αυτή που δόθηκε παραπάνω, με μόνη διαφορά ότι πλέον σε κάθε επίπεδο πίεσης x_i η κατανομή του χρόνου ζωής είναι η λογαριθμοκανονική με παραμέτρους (μ_i, σ) , για $i=1,2$. Συνεπώς, η α.σ.κ. στο επίπεδο x_i δίνεται από τη σχέση

$$F_i(t; \mu_i, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{\log t - \mu_i}{\sigma}\right), \quad t, \sigma > 0, \quad -\infty < \mu_i < \infty \text{ για } i=1,2.$$

Η χρήση λογαριθμοκανονικής κατανομής για την περιγραφή του χρόνου ζωής των μονάδων σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I μελετήθηκε από τους Balakrishnan et al. (2009b).

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης και επομένως βάσει των υποθέσεων του μοντέλου, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ θα δίνεται από τη σχέση :

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = \Phi\left(\frac{\log t - \mu_1}{\sigma}\right), & 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = \Phi\left(\frac{\log[t-a(\mu)] - \mu_2}{\sigma}\right), & \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ από τη σχέση :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu_1}{\sigma}\right)^2\right\}, & 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = \frac{1}{\sigma [t-a(\mu)] \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log[t-a(\mu)] - \mu_2}{\sigma}\right)^2\right\}, & \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

όπου $a(\mu) = \tau_1 (1 - e^{\mu_2 - \mu_1})$.

Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Για να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των παραμέτρων μ_1, μ_2 και σ , αρχικά θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των προαναφερθέντων παραμέτρων στηριζόμενοι στο δείγμα $\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$,

το οποίο προήλθε από λογοκρισία τύπου I.

3.7 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την λογαριθμοκανονική κατανομή

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του διανύσματος των παραμέτρων $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)$, βάσει των δεδομένων του λογοκριμένου δείγματος, δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta | t) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) \right\} \{1-G(\tau_2)\}^{n-r}, \\ t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2, & 0 < r \leq n, \\ \{1-G(\tau_2)\}^n, & r=0, \tau_2 < t_{1:n} \end{cases}, \quad (3.14)$$

όπου $r = n_1 + n_2$, ο συνολικός αριθμός των μονάδων που έχουν αποτύχει.

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση πιθανοφάνειας της σχέσης (3.14) τις αντίστοιχες σχέσεις της σ.π.π. και της συνάρτησης κατανομής, η συνάρτηση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$L(\theta | t) = c\sigma^{-r} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} t_{i:n} \right\}^{-1} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - a(\mu)) \right\}^{-1} \left(1 - \Phi \left(\frac{\log[\tau_2 - a(\mu)] - \mu_2}{\sigma} \right) \right)^{n-r} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{\log t_{i:n} - \mu_1}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=n_1+1}^r \left(\frac{\log(t_{i:n} - a(\mu)) - \mu_2}{\sigma} \right)^2 \right\}, \text{ όπου } c \text{ σταθερά.}$$

Στηριζόμενοι στη συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)$ μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις :

- ▶ Για $n_1 = 0$ και $n_2 = 0$, οι ε.μ.π. των παραμέτρων μ_1, μ_2 και σ δεν υπάρχουν.
- ▶ Για $n_1 = 0$ δεν υπάρχει ο ε.μ.π της παραμέτρου μ_1 .
- ▶ Για $n_2 = 0$ δεν υπάρχει ο ε.μ.π της παραμέτρου μ_2 .
- ▶ Διακρίνουμε ότι οι ε.μ.π. των μ_1, μ_2 και σ υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $n_1 \geq 1$ και $n_2 \geq 1$ (και $r \geq 3$), δηλαδή όταν παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης.

Στην περίπτωση αυτή, για τον υπολογισμό των ε.μ.π. των παραμέτρων $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων:

$$\frac{\partial l(\theta | t)}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial l(\theta | t)}{\partial \mu_2} = 0 \text{ και } \frac{\partial l(\theta | t)}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.15)$$

όπου $l(\theta | t)$ ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta | t)$.

Οι ε.μ.π. δε δίνονται σε κλειστή μορφή και επομένως για την εύρεση τους θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι.

Για την κατασκευή δ.ε. για τις ζητούμενες παραμέτρους δε μπορούμε να λάβουμε ακριβή δ.ε. Για το λόγο αυτό, εναλλακτικά μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά δ.ε. καθώς και Bootstrap δ.ε.

Για την κατασκευή των Bootstrap δ.ε. απαραίτητο είναι να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να παράγουμε ένα δείγμα με λογοκρισία τύπου I, το οποίο προέρχεται από ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με χρόνους ζωής από την λογαριθμοκανονική κατανομή.

Στη συνέχεια περιγράφεται ο αλγόριθμος για την παραγωγή του ζητούμενου δείγματος :

Βήμα 1^ο

Από τους χρόνους ζωής που λαμβάνουμε από το αρχικό μας δείγμα υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των παραμέτρων $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)$ χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες επαναληπτικές μεθόδους για τη λύση του συστήματος της σχέσης (3.15). Οι ποσότητες τ_1 και τ_2 θεωρούνται γνωστές.

Βήμα 2^ο

Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την ομοιόμορφη $U(0,1)$ και λαμβάνουμε τις διατεταγμένες παρατηρήσεις $U_{1:n}, \dots, U_{n:n}$.

Βήμα 3^ο

Για να βρούμε το πλήθος n_1 των μονάδων που αποτυγχάνει στο 1^ο επίπεδο πίεσης, αρκεί να προσδιορίσουμε το n_1 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση :

$$U_{n_1:n} \leq \Phi\left(\frac{\log \tau_1 - \hat{\mu}_1}{\hat{\sigma}}\right) \leq U_{n_1+1:n}.$$

Για $1 \leq i \leq n_1$, μέσω της σχέσης $U_{i:n} = \Phi\left(\frac{\log T_{i:n} - \hat{\mu}_1}{\hat{\sigma}}\right)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τους χρόνους $T_{i:n}$ από τον τύπο $T_{i:n} = \exp\left\{\hat{\mu}_1 + \hat{\sigma} \Phi^{-1}(U_{i:n})\right\}$.

Για $n_1 + 1 \leq j \leq n$, βάσει της σχέσης $U_{j:n} = \Phi\left(\frac{\log(T_{j:n} - a(\hat{\mu})) - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}}\right)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T_{j:n}$ από τον τύπο $T_{j:n} = a(\hat{\mu}) + \exp\left\{\hat{\mu}_2 + \hat{\sigma} \Phi^{-1}(U_{j:n})\right\}$.

3.7 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την λογαριθμοκανονική κατανομή

Σημειώνουμε ότι το διάνυσμα $\hat{\theta} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma})'$ που χρησιμοποιείται στις παραπάνω σχέσεις, αποτελεί το διάνυσμα με τους ε.μ.π. των παραμέτρων που λάβαμε από το 1^ο βήμα του αλγορίθμου.

Βήμα 4^ο

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο 2^ο επίπεδο πίεσης αρκεί να βρούμε εκείνο το n_2 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση $T_{j:n} \leq \tau_2$.

Οι παρατηρήσεις $\{T_{1:n}, \dots, T_{n_1+n_2:n}\}$ που λαμβάνουμε από την υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου αποτελούν το ζητούμενο δείγμα.

3.8 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή

Στις προηγούμενες παραγράφους περιγράψαμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I έχοντας θεωρήσει ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων ακολουθούν είτε την εκθετική κατανομή είτε τη λογαριθμοκανονική κατανομή.

Οι Abdel-Hamid and Al-Hussaini (2009) μελέτησαν το ίδιο μοντέλο, έχοντας όμως θεωρήσει ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων είναι η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή (exponentiated exponential distribution).

Η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή, γνωστή επίσης ως και γενικευμένη εκθετική κατανομή (Generalized Exponential Distribution), με δύο παραμέτρους χρησιμοποιείται συχνά για την ανάλυση χρόνων ζωής και γενικότερα δεδομένων που παρουσιάζουν έντονη λοξότητα, καθώς είναι μία κατανομή που εμφανίζει θετική ασυμμετρία.

Η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή ορίζεται σαν μια ειδική περίπτωση της κατανομής

Gompertz-Verhulst, της οποίας η συνάρτηση κατανομής είναι η $G(t) = \left(1 - \rho e^{-\frac{t}{\theta}}\right)^c$, όπου

ρ, θ, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, όταν το $\rho = 1$.

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι η X αποτελεί τ.μ., η οποία προέρχεται από την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή, η συνάρτηση κατανομής και η σ.π.π. αυτής δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$F(t; \theta, c) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right)^c \text{ και } f(t; \theta, c) = \frac{c}{\theta} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right)^{c-1} e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad t, \theta, c > 0,$$

όπου θ και c , οι παράμετροι κλίμακας και μορφής, αντίστοιχα.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $c=1$, η εκθετικοποιημένη εκθετική ανάγεται στην εκθετική κατανομή με παράμετρο θ .

Η εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή διαθέτει αρκετές ιδιότητες που είναι παραπλήσιες με εκείνες των κατανομών Weibull και Gamma. Οι Gurta and Kundu (2001) συνέκριναν την εκθετικοποιημένη εκθετική με τις Weibull και Gamma κατανομές και διαπίστωσαν ότι, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, η εκθετικοποιημένη εκθετική μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την ανάλυση δεδομένων χρόνων ζωής στη θέση των δύο αυτών κατανομών (Gurta and Kundu (2003,2004)).

Η περιγραφή του μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I είναι ανάλογη με αυτή που αναφέραμε και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις κατανομών, θεωρώντας όμως πλέον ότι σε κάθε επίπεδο πίεσης x_i η κατανομή του χρόνου ζωής είναι η εκθετικοποιημένη εκθετική με παραμέτρους (θ_i, c) , για $i=1, 2$.

Επομένως, η συνάρτηση κατανομής στο επίπεδο x_i δίνεται από τη σχέση :

$$F_i(t; \theta_i, c) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}}\right)^c, \quad t, \theta_i, c > 0 \quad \text{για } i=1, 2.$$

Θεωρώντας ότι τα δεδομένα μας προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης, βάσει των υποθέσεων του μοντέλου, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ θα δίνεται από τη σχέση :

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t; \theta_1, c) & , 0 < t < \tau_1 \\ G_2(t) = F_2\left(\frac{\theta_2 \tau_1}{\theta_1} + t - \tau_1; \theta_2, c\right) & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ από τη σχέση :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \frac{c}{\theta_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta_1}}\right)^{c-1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau_1 \\ g_2(t) = \frac{c}{\theta_2} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}}\right)^{c-1} e^{-\frac{t-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} & , \tau_1 \leq t < \infty \end{cases}.$$

3.8 Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και χρόνους ζωής από την εκθετικοποιημένη εκθετική κατανομή

Για την εξαγωγή των ε.μ.π. των 3 παραμέτρων του μοντέλου απλής βηματικής πίεσης θα στηριχθούμε στη συνάρτηση πιθανοφάνειας των $\theta = (\theta_1, \theta_2, c)$, η οποία, καθώς διαθέτουμε λογοκριμένα δεδομένα τύπου I, δίνεται από τη σχέση (3.14).

Επομένως, αντικαθιστώντας τις παραπάνω συναρτήσεις στην (3.14) έχουμε:

$$L(\theta | t) = k \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:n}) \right\} \left\{ 1 - G(\tau_2) \right\}^{n-r} = k \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} \frac{c}{\theta_1} \left(1 - e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta_1}} \right)^{c-1} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta_1}} \right\} \\ \times \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r \frac{c}{\theta_2} \left(1 - e^{-\frac{t_{i:n}-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} \right)^{c-1} e^{-\frac{t_{i:n}-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} \right\} \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\frac{\tau_2-\tau_1}{\theta_2} - \frac{\tau_1}{\theta_1}} \right)^c \right\}^{n-r}$$

όπου $k = \frac{n!}{(n-r)!}$ και $r = n_1 + n_2$, ο συνολικός αριθμός μονάδων που απέτυχαν.

Όπως αναφέρθηκε και στις προηγούμενες παραγράφους, οι ε.μ.π. των θ_1, θ_2 και c υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $n_1 \geq 1$ και $n_2 \geq 1$, δηλαδή όταν παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα δύο επίπεδα πίεσης.

Για τον υπολογισμό των ε.μ.π. των παραμέτρων $\theta = (\theta_1, \theta_2, c)$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων :

$$\frac{\partial l(\theta | t)}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial l(\theta | t)}{\partial \theta_2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial l(\theta | t)}{\partial c} = 0,$$

όπου $l(\theta | t)$ ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta | t)$.

Οι ε.μ.π. των παραμέτρων της εκθετικοποιημένης εκθετικής κατανομής, όπως και στην περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής, δε δίνονται σε κλειστή μορφή και συνεπώς για τον υπολογισμό τους είναι απαραίτητη η χρήση επαναληπτικών μεθόδων.

Οι εξισώσεις πιθανοφάνειας καθώς και η εξαγωγή Bootstrap δ.ε. περιγράφονται αναλυτικά στο άρθρο των Abdel-Hamid and Al-Hussaini (2009).

Κεφάλαιο 4^ο

Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με υβριδική λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα

4.1 Εισαγωγή

Οι τύποι λογοκρισίας I και II, τους οποίους μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, αποτελούν τα πιο γνωστά είδη λογοκρισίας και συναντώνται πολύ συχνά στην πράξη. Ένα εναλλακτικό είδος λογοκρισίας, το οποίο συνδυάζει τους τύπους I και II, είναι η υβριδική λογοκρισία. Θεωρούμε ότι σε ένα πείραμα n μονάδες τίθενται υπό έλεγχο και καταγράφονται οι διαδοχικοί χρόνοι αποτυχίας. Οι χρόνοι ζωής των μονάδων του δείγματος είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Βάσει αυτού του είδους λογοκρισίας, το πείραμα ολοκληρώνεται είτε όταν ένας προκαθορισμένος αριθμός r μονάδων αποτύχει είτε σε ένα προκαθορισμένο χρόνο T , οποιοδήποτε εκ των δύο συμβεί πρώτο. Δηλαδή, ο χρόνος λήξης του πειράματος είναι ο $T_1^* = \min\{T_{r:n}, T\}$, όπου τα $1 \leq r \leq n$ και $T \in (0, \infty)$ είναι προεπιλεγμένα από την αρχή του πειράματος.

Ο Epstein (1954) εισήγαγε αυτό το είδος λογοκρισίας και ανέλυσε τα δεδομένα έχοντας υποθέσει ότι ο χρόνος ζωής των μονάδων προέρχεται από την εκθετική κατανομή. Οι Childs et al. (2003) ονόμασαν αυτό το είδος λογοκρισίας, υβριδική λογοκρισία τύπου I, καθώς ο χρόνος διάρκειας του πειράματος δε μπορεί να ξεπεράσει το χρόνο T . Οι Chen and Bhattacharyya (1988) υπολόγισαν την ακριβή κατανομή του ε.μ.π. του μέσου καθώς και το κάτω όριο αυτού. Κάποια σημαντικά άρθρα που αναφέρονται στην υβριδική λογοκρισία τύπου I είναι αυτά των Bartholomew (1963), Barlow et al. (1968), Fairbanks et al. (1982), Ebrahimi (1992), Jeong et al. (1996) και Gupta and Kundu (1998).

Όπως και στην «παραδοσιακή» λογοκρισία τύπου I, το μειονέκτημα της υβριδικής λογοκρισίας τύπου I είναι ότι όλη η συμπεραματολογία που επιθυμούμε να λάβουμε υφίσταται μόνο κάτω από τη συνθήκη ότι παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία. Επιπλέον, κάτω από αυτό το είδος λογοκρισίας, υπάρχει η πιθανότητα να παρατηρηθούν λίγες παρατηρήσεις πριν από το χρόνο T_1^* . Για το λόγο αυτό, οι Childs et al. (2003) πρότειναν ένα νέο είδος υβριδικής λογοκρισίας, που το ονόμασαν υβριδική λογοκρισία τύπου II και το

οποίο εγγυάται την αποτυχία ενός καθορισμένου αριθμού r μονάδων. Στην περίπτωση αυτή της υβριδικής λογοκρισίας, τοποθετούνται n μονάδες υπό μελέτη και ο χρόνος λήξης του πειράματος τώρα είναι ο $T_2^* = \max\{T_{r,n}, T\}$, όπου τα $1 \leq r \leq n$ και $T \in (0, \infty)$ είναι προκαθορισμένα.

Παρόλο που η υβριδική λογοκρισία τύπου II εξασφαλίζει ένα συγκεκριμένο αριθμό αποτυχιών, έχει ως κύριο μειονέκτημα ότι μπορεί να χρειαστεί ένα μεγάλο χρονικό διάστημα για να παρατηρηθούν r απώλειες και να ολοκληρωθεί το πείραμα.

Οι Chandrasekar et al. (2004) βελτίωσαν τα προαναφερθέντα πλαίσια εισάγοντας δύο παραλλαγές των τύπων αυτών, τις οποίες χαρακτήρισαν ως γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου I και II. Στην γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου I, καθορίζουμε τα $k, r \in \{1, \dots, n\}$ και $T \in (0, \infty)$ έτσι ώστε $k < r$. Αν η k -οστή αποτυχία συμβεί πριν από το χρόνο T , τότε το πείραμα ολοκληρώνεται στο χρόνο $\min\{T_{r,n}, T\}$, ειδάλλως το πείραμα τερματίζεται στο χρόνο $T_{k,n}$. Επομένως, στην γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου I, ένας ελάχιστος αριθμός k αποτυχιών είναι εξασφαλισμένος. Στη γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου II προκαθορίζονται τα $r \in \{1, \dots, n\}$ και $T_1, T_2 \in (0, \infty)$ έτσι ώστε $T_1 < T_2$. Αν η r -οστή αποτυχία συμβεί πριν από τη χρονική στιγμή T_1 , τότε το πείραμα ολοκληρώνεται στο χρόνο T_1 . Αν η r -οστή μονάδα αποτύχει στο χρονικό διάστημα $[T_1, T_2]$ το πείραμα σταματά στο χρόνο $T_{r,n}$. Αν δεν ισχύει καμία από τις 2 παραπάνω περιπτώσεις, τότε το πείραμα θα ολοκληρωθεί στο χρόνο T_2 . Το είδος αυτό λογοκρισίας εξασφαλίζει ότι το πείραμα δε θα διαρκέσει πέραν του χρόνου T_2 . Παρόλο που τα δύο αυτά γενικευμένα είδη λογοκρισίας είναι πιο ικανοποιητικά από τα προηγούμενα, διαθέτουν και αυτά κάποια μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, στη γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου I, δε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη r αποτυχιών. Στη γενικευμένη υβριδική λογοκρισία τύπου II, υπάρχει η πιθανότητα να μην παρατηρηθεί καμία αποτυχία ή να καταγράψουμε ελάχιστες αποτυχίες μέχρι τον προεπιλεγμένο χρόνο T_2 και επομένως να αντιμετωπίσουμε το ίδιο πρόβλημα με την υβριδική λογοκρισία τύπου I. Για το λόγο αυτό, οι Balakrishnan et al. (2008) εισήγαγαν ένα νέο είδος υβριδικής λογοκρισίας, το οποίο συνδυάζει τα δύο προαναφερθέντα είδη γενικευμένης υβριδικής λογοκρισίας.

Τόσο η γενικευμένη υβριδική λογοκρισία όσο και το είδος υβριδικής λογοκρισίας που εισήγαγαν οι Balakrishnan et al. (2008) δε μελετώνται αναλυτικά στην εργασία αυτή καθώς δεν έχουν εφαρμοσθεί για την μελέτη μοντέλων βηματικής πίεσης.

Επομένως, στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, στις περιπτώσεις που θεωρούμε υβριδική λογοκρισία τύπου I και II. Θα υπολογίσουμε τους ε.μ.π. καθώς και τις ακριβείς κατανομές των ε.μ.π. των παραμέτρων του μοντέλου, για καθένα από τους δύο τύπους υβριδικής λογοκρισίας.

4.2 Περιγραφή μοντέλου

Υβριδική λογοκρισία τύπου I

Η υβριδική λογοκρισία τύπου I, στα πλαίσια ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης, μελετήθηκε από τους Balakrishnan and Xie (2007b).

Η περιγραφή του μοντέλου είναι η ακόλουθη:

Θεωρούμε ένα δείγμα από n όμοιες μονάδες, τις οποίες τοποθετούμε σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης και τις υποβάλλουμε, αρχικά, σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε ένα προεπιλεγμένο χρόνο τ_1 , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Σύμφωνα με την υβριδική λογοκρισία τύπου I, εάν η r -οστή αποτυχία συμβεί μετά από ένα προεπιλεγμένο χρόνο τ_2 , τότε το πείραμα ολοκληρώνεται στο χρόνο τ_2 . Διαφορετικά το πείραμα σταματά αμέσως μόλις αποτύχει και η r -οστή μονάδα. Επομένως, ο χρόνος διάρκειας του πειράματος είναι ο $T_2^* = \min\{t_{r:n}, \tau_2\}$.

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος τ_2 είναι ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος διάρκειας του πειράματος, ενώ ο χρόνος T_2^* αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο ολοκλήρωσης του πειράματος. Τα $r(\leq n)$ και $0 < \tau_1 < \tau_2$ είναι καθορισμένα από την αρχή του πειράματος.

Έστω ότι με n_1 συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο τ_1 , με n_2 το πλήθος των μονάδων που απέτυχαν πριν από το χρόνο τ_2 στο 2^ο επίπεδο πίεσης και με n_2^* το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο T_2^* στο επίπεδο πίεσης που βρίσκεται το T_2^* .

Βάσει των όσων αναφέραμε, είναι προφανές ότι ισχύει $n_2^* = \begin{cases} n_2 & , \quad \tau_2 < t_{r:n} \\ r & , \quad t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2 \\ r - n_1 & , \quad \tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2 \end{cases}$

Επομένως, με την εκτέλεση του πειράματος, οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι οι ακόλουθες :

► Αν $t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2$ τότε οι χρόνοι ζωής που θα παρατηρήσουμε θα είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2\}$$

► Αν $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$ τότε οι χρόνοι ζωής που θα λάβουμε θα είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} \leq \tau_2\}$$

► Αν $\tau_2 < t_{r:n}$ τότε οι χρόνοι ζωής που θα παρατηρήσουμε θα είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$$

Υβριδική λογοκρισία τύπου II

Η υβριδική λογοκρισία τύπου II, στο πλαίσιο ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης, μελετήθηκε από τους Balakrishnan and Xie (2007a).

Όπως και στην περίπτωση της υβριδικής λογοκρισίας τύπου I, θεωρούμε, και σε αυτόν τον τύπο λογοκρισίας, ένα δείγμα από n όμοιες μονάδες, τις οποίες τοποθετούμε σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης και τις υποβάλλουμε, αρχικά, σε επίπεδο πίεσης x_1 . Σε ένα προεπιλεγμένο χρόνο τ_1 , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 . Βάσει της υβριδικής λογοκρισίας τύπου II, εάν η r -οστή μονάδα αποτύχει πριν από το χρόνο τ_2 τότε το πείραμα ολοκληρώνεται στο χρόνο τ_2 . Διαφορετικά, το πείραμα τερματίζεται αμέσως μόλις αποτύχει η r -οστή μονάδα. Επομένως, ο χρόνος διάρκειας του πειράματος είναι τυχαία μεταβλητή και ίσος με $T_2^* = \max\{t_{r:n}, \tau_2\}$. Οι ποσότητες r ($\leq n$) και $0 < \tau_1 < \tau_2$ θεωρούνται γνωστές.

Έστω ότι με n_1 συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο τ_1 , με n_2 το πλήθος των μονάδων που απέτυχαν πριν από το χρόνο τ_2 στο 2^ο επίπεδο πίεσης και με n_2^* το πλήθος των μονάδων που έχουν αποτύχει πριν από το χρόνο T_2^* στο 2^ο επίπεδο πίεσης.

Συνεπώς, θα ισχύει $n_2^* = \begin{cases} r - n_1 & , \quad \tau_2 < t_{r:n} \\ n_2 & , \quad t_{r:n} \leq \tau_2 \end{cases}$.

Βάσει των συμβολισμών που έχουμε χρησιμοποιήσει παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι οι πιθανές καταστάσεις που μπορεί να παρατηρήσουμε είναι οι ακόλουθες :

› Αν $t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2$ τότε θα παρατηρήσουμε $\{t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$

› Αν $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$ τότε τα δεδομένα που θα λάβουμε θα είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$$

› Αν $\tau_2 < t_{r:n}$ τότε οι χρόνοι ζωής που θα παρατηρήσουμε θα έχουν την εξής μορφή

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2 < t_{n_1+n_2+1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty\}$$

Στη συνέχεια, για τους τύπους I και II υβριδικής λογοκρισίας, θα μελετήσουμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, θεωρώντας ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων στα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 είναι η εκθετική με παραμέτρους θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα. Επομένως, η συνάρτηση κατανομής στο επίπεδο x_i θα δίνεται από τη σχέση (2.1).

Επίσης, καθώς τα δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση του πειράματος προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης, βάσει των υποθέσεων του μοντέλου, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ θα δίνονται από τις σχέσεις (3.2) και (3.3), αντίστοιχα.

4.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Υβριδική λογοκρισία τύπου I

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

› Αν $t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2$, τα δεδομένα που θα λάβουμε από την εκτέλεση του πειράματος θα είναι της μορφής $\{t_{1:n} < \dots < t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2\}$. Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 , βάσει του διανύσματος t που παρατηρούμε και των σχέσεων (3.2) και (3.3), διαμορφώνεται ως εξής :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^r g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ 1 - G_1(t_{r:n}) \right\}^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \theta_1^r} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^r t_{i:n} + (n-r)t_{r:n} \right] \right\}$$

► Για τις άλλες δύο περιπτώσεις που διακρίναμε στην παραπάνω παράγραφο, δηλαδή για $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$ και $\tau_2 < t_{r:n}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 λαμβάνει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r^*)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^{r^*} g_2(t_{i:n}) \right\} \left\{ 1 - G_2(T_2^*) \right\}^{n-r^*} = \\ &= \frac{n!}{(n-r^*)! \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2^*}} \cdot \exp \left\{ -\frac{D_1}{\theta_1} - \frac{D_2^*}{\theta_2} \right\}, \quad 0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r^*:n} \leq T_2^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{όπου } r^* = n_1 + n_2^*, \quad D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau_1 \quad \text{και} \quad D_2^* = \sum_{i=n_1+1}^{r^*} (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r^*)(T_2^* - \tau_1).$$

Βάσει των συναρτήσεων πιθανοφάνειας διακρίνουμε ότι οι ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 υπάρχουν και οι δύο μόνο όταν τουλάχιστον μία αποτυχία παρατηρηθεί σε καθένα από τα διαστήματα $[0, \tau_1)$ και $[\tau_1, \tau_2]$. Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας, για την περίπτωση αυτή, δίνεται από τη σχέση (4.1) και συνεπώς για να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 αρκεί να βρούμε τις τιμές εκείνες που τη μεγιστοποιούν ή ισοδύναμα μεγιστοποιούν το λογάριθμό της.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι οι

$$\hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau_1}{n_1}, \quad \tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2 \quad \text{ή} \quad \tau_2 < t_{r:n}$$

και

$$\hat{\theta}_2 = \frac{D_2^*}{n_2^*} = \begin{cases} \frac{1}{n_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (t_{i:n} - \tau_1) + (n - n_1 - n_2)(\tau_2 - \tau_1) \right], & \tau_2 < t_{r:n} \\ \frac{1}{r - n_1} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r)(t_{r:n} - \tau_1) \right], & \tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2 \end{cases}.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αντιπροσωπεύουν τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 . Διαπιστώσαμε ότι οι ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ υπάρχουν όταν $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$ ή $\tau_2 < t_{r:n}$.

Όπως αναφέρθηκε, στην περίπτωση $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$, τα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι της μορφής $\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} \leq \tau_2\}$, επομένως οι δυνατές τιμές των τ.μ. n_1 και n_2 δίνονται από το ενδεχόμενο $A_1 = \{1 \leq n_1 \leq r-1, r-n_1 \leq n_2 \leq n-n_1\}$.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση που $\tau_2 < t_{r:n}$, οι χρόνοι ζωής που παρατηρούμε είναι της μορφής $\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}$. Συνεπώς, οι δυνατές τιμές των τ.μ. n_1 και n_2 δίνονται από το ενδεχόμενο $A_2 = \{1 \leq n_1 \leq r-2, 1 \leq n_2 \leq r-n_1-1\}$.

Βάσει των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αποτελούν τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 , δεδομένης της συνθήκης

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ (1 \leq n_1 \leq r-1, r-n_1 \leq n_2 \leq n-n_1) \cup (1 \leq n_1 \leq r-2, 1 \leq n_2 \leq r-n_1-1) \right\}$$

Υβριδική λογοκρισία τύπου II

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , βασισμένη σε ένα δείγμα που προέρχεται από υβριδική λογοκρισία τύπου II και σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2) και (3.3), δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r^*)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:n}) \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^{r^*} g_2(t_{i:n}) \right\} \left\{ 1 - G_2(T_2^*) \right\}^{n-r^*} = \\ &= \frac{n!}{(n-r^*)! \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2^*}} \cdot \exp \left\{ -\frac{D_1}{\theta_1} - \frac{D_2^*}{\theta_2} \right\}, \quad 0 < t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r^*:n} \leq T_2^* \end{aligned}$$

$$\text{όπου } r^* = n_1 + n_2^*, \quad D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau_1 \quad \text{και} \quad D_2^* = \sum_{i=n_1+1}^{r^*} (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r^*)(T_2^* - \tau_1).$$

Διακρίνουμε ότι οι ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 υπάρχουν και οι δύο μόνο στην περίπτωση που καταγραφεί από μία τουλάχιστον αποτυχία σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης.

Επομένως, βάσει της σχέσης της συνάρτησης πιθανοφάνειας που δόθηκε παραπάνω, καταλήγουμε στους ακόλουθους ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{i:n} + (n - n_1)\tau_1}{n_1} \quad \text{για } t_{r:n} \leq \tau_2 \text{ ή } \tau_2 < t_{r:n} \quad \text{και}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{D_2^*}{n_2^*} = \begin{cases} \frac{1}{r - n_1} \left[\sum_{i=n_1+1}^r (t_{i:n} - \tau_1) + (n - r)(t_{r:n} - \tau_1) \right], & \tau_2 < t_{r:n} \\ \frac{1}{n_2} \left[\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (t_{i:n} - \tau_1) + (n - n_1 - n_2)(\tau_2 - \tau_1) \right], & t_{r:n} \leq \tau_2 \end{cases}$$

Οι ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αποτελούν τους υπό συνθήκη εκτιμητές των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα και υπάρχουν είτε ισχύει $\tau_2 < t_{r:n}$ είτε $t_{r:n} \leq \tau_2$. Στην προηγούμενη παράγραφο διακρίναμε ότι όταν $t_{r:n} \leq \tau_1 < \tau_2$ τότε το δείγμα που παρατηρούμε είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\}. \text{ Άρα, οι τιμές που μπορούν να λάβουν οι τ.μ.}$$

$$n_1 \text{ και } n_2 \text{ δίνονται από το ενδεχόμενο } A_1 = \{r \leq n_1 \leq n-1, 1 \leq n_2 \leq n-n_1\}.$$

Αντίστοιχα, όταν $\tau_1 < t_{r:n} \leq \tau_2$ τότε τα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι της μορφής

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{r:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2\} \text{ και συνεπώς οι δυνατές τιμές για τα } n_1$$

$$\text{και } n_2 \text{ θα είναι } A_2 = \{1 \leq n_1 \leq r-1, r-n_1 \leq n_2 \leq n-n_1\}.$$

Τέλος, αν $\tau_2 < t_{r:n}$ τότε το δείγμα που θα καταγράψουμε θα έχει τη μορφή

$$\{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} \leq \tau_1 < t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} \leq \tau_2 < t_{n_1+n_2+1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty\} \text{ και οι τιμές των τ.μ.}$$

$$n_1 \text{ και } n_2 \text{ δίνονται από το ενδεχόμενο } A_3 = \{1 \leq n_1 \leq r-1, 0 \leq n_2 \leq r-n_1-1\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ αποτελούν τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 , δεδομένης της συνθήκης

$$\begin{aligned} B &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \\ &= \{(r \leq n_1 \leq n-1, 1 \leq n_2 \leq n-n_1) \cup (1 \leq n_1 \leq r-1, r-n_1 \leq n_2 \leq n-n_1) \cup (1 \leq n_1 \leq r-1, 0 \leq n_2 \leq r-n_1-1)\} \\ &= \{(r \leq n_1 \leq n-1, 1 \leq n_2 \leq n-n_1) \cup (1 \leq n_1 \leq r-1, 0 \leq n_2 \leq n-n_1)\} \end{aligned}$$

4.4 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π. και οι ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης

Για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ θα βασιστούμε, όπως στο 2^ο και 3^ο κεφάλαιο, στις υπό συνθήκη ροπογεννήτριες των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Οι Balakrishnan and Xie (2007a,b) περιγράφουν αναλυτικά τον τρόπο εύρεσης της από κοινού ροπογεννήτριας συνάρτησης των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ και κατ'επέκταση των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των εκτιμητών αυτών, τόσο στην περίπτωση υβριδική λογοκρισίας τύπου I όσο και για την υβριδική λογοκρισία τύπου II.

Στη συνέχεια, δίνονται οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ για καθένα από τα δύο είδη λογοκρισίας, καθώς και οι ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

Υβριδική λογοκρισία τύπου I

Σύμφωνα, με τους Balakrishnan and Xie (2007b), η υπό συνθήκη κατανομή του $\hat{\theta}_1$, δοθέντος του ενδεχομένου $A = \{(1 \leq m \leq r-1, r-m \leq n_2 \leq n-m) \cup (1 \leq m \leq r-2, 1 \leq m_2 \leq r-m-1)\}$, δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_1}(y) = C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(1)} \gamma\left(y - \tau_{ij}^{(1)}; i, \frac{i}{\theta_1}\right) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(2)} \gamma\left(y - \tau_{ij}^{(1)}; i, \frac{i}{\theta_1}\right) \right\}, \quad (4.2)$$

όπου $\tau_{ij}^{(1)} = \frac{\tau_1}{i}(n-i+j)$, $A_{ij}^{(1)} = (-1)^j \binom{n}{i} \binom{i}{j} (1-p_1)^j \sum_{k=1}^{r-i-1} \binom{n-i}{k} p_2^k p_3^{n-i-k}$,

$$A_{ij}^{(2)} = (-1)^j \binom{n}{i} \binom{i}{j} \left[1 - B\left(\frac{p_3}{1-p_1}; n-r+1, r-i\right) \right] (1-p_1)^{n-i+j},$$

$$C_I = \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \binom{n}{i} p_1^i \left[(1-p_1)^{n-i} - p_3^{n-i} \right] + \binom{n}{r-1} p_1^{r-1} \left[(1-p_1)^{n-r+1} - p_3^{n-r+1} \right] \right\}^{-1},$$

$$B(z; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad 0 < z < 1, \alpha, \beta > 0$$
 η μη πλήρης συνάρτηση Βήτα

και $\gamma(\cdot)$ η συνάρτηση της σχέσης (3.12).

Αντίστοιχα, η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, δοθέντος του ενδεχομένου

$A = \{(1 \leq m \leq r-1, r-m \leq n_2 \leq n-m)\} \cup \{(1 \leq m \leq r-2, 1 \leq n_2 \leq r-m-1)\}$, δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_2}(y) = C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=1}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk} \gamma \left(y - \tau_{ijk}^{(1)}; j, \frac{j}{\theta_2} \right) + \sum_{i=1}^{r-1} B_i \gamma \left(y; r-i, \frac{r-i}{\theta_2} \right) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-i-1} B_{ik} \gamma \left(y - \tau_{ik}^{(2)}; r-i, \frac{r-i}{\theta_2} \right) \right\} \quad (4.3)$$

$$\text{όπου } \tau_{ijk}^{(1)} = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{j} (n - i - j + k), \quad \tau_{ik}^{(2)} = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{r-i} (n - r + k + 1),$$

$$B_i = \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}, \quad B_{ijk} = (-1)^k \binom{n}{i, j, n-i-j} \binom{j}{k} p_1^i p_3^{n-i-j+k} (1-p_1)^{j-k},$$

$$B_{ik} = (-1)^k \frac{r-i}{n-r+k+1} \binom{n}{i, r-i, n-r} \binom{r-i-1}{k} p_1^i p_3^{n-r+k+1} (1-p_1)^{r-i+k-1}.$$

Βάσει της σ.π.π. που δίνεται στη σχέση (4.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τις δύο πρώτες ροπές για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$. Διαπιστώνουμε ότι :

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta_1 + C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(1)} \tau_{ij}^{(1)} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(2)} \tau_{ij}^{(1)} \right\} \text{ και}$$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(1)} \left((\tau_{ij}^{(1)} + \theta_1)^2 + \frac{\theta_1^2}{i} \right) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(2)} \left((\tau_{ij}^{(1)} + \theta_1)^2 + \frac{\theta_1^2}{i} \right) \right\}$$

Αντίστοιχα, σύμφωνα με την υπό συνθήκη περιθώρια κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ της σχέσης (4.3), οι δύο πρώτες ροπές διαμορφώνονται ως εξής :

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta_2 + C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=1}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk} \tau_{ijk} - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-i-1} B_{ik} \tau_{ik}^{(2)} \right\}$$

$$E(\hat{\theta}_2^2) = C_I \left\{ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{j=1}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk} \left((\tau_{ijk} + \theta_2)^2 + \frac{\theta_2^2}{j} \right) + \sum_{i=1}^{r-1} B_i \frac{\theta_2^2}{r-i} - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-i-1} B_{ik} \left((\tau_{ik}^{(2)} + \theta_2)^2 + \frac{\theta_2^2}{r-i} \right) \right\}$$

Υβριδική λογοκρισία τύπου II

Οι Balakrishnan and Xie (2007a), διαπίστωσαν ότι η υπό συνθήκη κατανομή του $\hat{\theta}_1$, δοθέντος του ενδεχομένου $B = \{(r \leq m_1 \leq n-1, 1 \leq m_2 \leq n-m_1) \cup (1 \leq m_1 \leq r-1, 0 \leq m_2 \leq n-m_1)\}$,

δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_1}(y) = C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(3)} \gamma\left(y - \tau_{ij}; i, \frac{i}{\theta_1}\right) - \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(4)} \gamma\left(y - \tau_{ij}; i, \frac{i}{\theta_1}\right) \right\}, \quad (4.4)$$

όπου $\tau_{ij} = \frac{\tau_1}{i}(n-i+j)$, $A_{ij}^{(3)} = (-1)^j \binom{n}{i} \binom{i}{j} (1-p_1)^{n-i+j}$, $A_{ij}^{(4)} = (-1)^j \binom{n}{i} \binom{i}{j} p_3^{n-i} (1-p_1)^j$,

$$C_{II} = \left\{ 1 - p_1^n - (1-p_1)^n - \sum_{i=r}^{n-1} \binom{n}{i} p_1^i p_3^{n-i} \right\}^{-1}$$

Αντίστοιχα, η υπό συνθήκη κατανομή του ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$, δοθέντος του ενδεχομένου $B = \{(r \leq m_1 \leq n-1, 1 \leq m_2 \leq n-m_1) \cup (1 \leq m_1 \leq r-1, 0 \leq m_2 \leq n-m_1)\}$, δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_2}(y) = C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \gamma\left(y - \tau_{ijk}^{(1)}; r-i, \frac{r-i}{\theta_2}\right) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=r-i}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \gamma\left(y - \tau_{ijk}^{(2)}; j, \frac{j}{\theta_2}\right) + \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \gamma\left(y - \tau_{ijk}^{(2)}; j, \frac{j}{\theta_2}\right) \right\}$$

όπου $\tau_{ijk}^{(1)} = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{r-i}(n-i-j+k)$, $\tau_{ijk}^{(2)} = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{j}(n-i-j+k)$,

$$B_{ijk}^{(1)} = (-1)^k \binom{n}{i, j, n-i-j} \binom{j}{k} p_1^i p_3^{n-i-j+k} (1-p_1)^{j-k}.$$

Σύμφωνα με τη σ.π.π. που δίνεται στη σχέση (4.4) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δύο πρώτες ροπές του ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις :

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta_1 + C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(3)} \tau_{ij} - \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(4)} \tau_{ij} \right\} \text{ και}$$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(3)} \left((\tau_{ij} + \theta_1)^2 + \frac{\theta_1^2}{i} \right) - \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(4)} \left((\tau_{ij} + \theta_1)^2 + \frac{\theta_1^2}{i} \right) \right\}$$

Αντίστοιχα, οι δύο πρώτες ροπές για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ δίνονται από τις σχέσεις :

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta_2 + C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \tau_{ijk}^{(1)} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=r-i}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \tau_{ijk}^{(2)} + \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \tau_{ijk}^{(2)} \right\}$$

$$E(\hat{\theta}_2^2) = C_{II} \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \left((\tau_{ijk}^{(1)} + \theta_2)^2 + \frac{\theta_2^2}{r-i} \right) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=r-i}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \left((\tau_{ijk}^{(2)} + \theta_2)^2 + \frac{\theta_2^2}{j} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=r}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{k=0}^j B_{ijk}^{(1)} \left((\tau_{ijk}^{(2)} + \theta_2)^2 + \frac{\theta_2^2}{j} \right) \right\}$$

Επίσης, στα άρθρα των Balakrishnan and Xie(2007a,2007b), εκτός από τον τρόπο εύρεσης των προαναφερθέντων υπό συνθήκη σ.π., περιγράφεται αναλυτικά και η διαδικασία κατασκευής ακριβών, προσεγγιστικών, Bootstrap δ.ε. για τις παραμέτρους του μοντέλου και για τους 2 τύπους υβριδικής λογοκρισίας.

Κεφάλαιο 5^ο

Μοντέλο βηματικής πίεσης με προοδευτική λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα

5.1 Εισαγωγή

Σε πειράματα ελέγχου χρόνων ζωής και αξιοπιστίας ένα αρκετά σύνηθες φαινόμενο είναι η απομάκρυνση κάποιων μονάδων από το πείραμα πριν την αποτυχία τους ή την ολοκλήρωση του πειράματος. Οι απώλειες αυτές μπορεί να συμβούν ακούσια ή μπορεί να αποτελούν μέρος του σχεδιασμού του πειράματος. Ακούσια απώλεια μπορεί να θεωρηθεί, για παράδειγμα, η τυχαία καταστροφή της μονάδας ή η εκούσια αποχώρηση ενός ατόμου από το τεστ ή η διακοπή του πειράματος εξαιτίας απρόβλεπτων παραγόντων. Η προσχεδιασμένη και σκόπιμη απομάκρυνση μονάδων από το πείραμα, μπορεί, για παράδειγμα, να αποβλέπει στη μείωση του κόστους και χρόνου του πειράματος καθώς και στην ελευθέρωση των εγκαταστάσεων-μηχανημάτων που χρησιμοποιούνται για την πραγματοποίηση του πειράματος. Δύναται επίσης να συντελείται λόγω ηθικών παραγόντων, στην περίπτωση βεβαίως που οι υπό μελέτη μονάδες είναι έμψυχα όντα. Επομένως, διακρίνουμε ότι το πλαίσιο της προοδευτικής λογοκρισίας είναι αρκετά σημαντικό και χρήσιμο για πειράματα που αφορούν στον έλεγχο χρόνων ζωής. Βάσει αυτού του είδους λογοκρισίας, όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 1.1.2, επιτρέπεται στον πειραματιστή να απομακρύνει μονάδες από το τεστ σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια του πειράματος, εν αντιθέσει με τους «παραδοσιακούς» τύπους λογοκρισίας I και II.

Η προοδευτική λογοκρισία εισήχθη από τον Herd (1956). Μερικά από τα κυριότερα άρθρα είναι αυτά των Cohen (1963,1976,1991), Cohen and Norgaard (1977), Viveros and Balakrishnan (1994) από τα οποία εξάγονται στατιστικά συμπεράσματα για ένα ευρύ φάσμα κατανομών υπό το πλαίσιο της προοδευτικής λογοκρισίας. Επίσης, μία πιο πρόσφατη επισκόπηση για την προοδευτική λογοκρισία δίνεται από τους Balakrishnan and Aggarwala (2000), Balakrishnan (2007) και Aggarwala (2001).

5.2 Προοδευτική λογοκρισία τύπου II

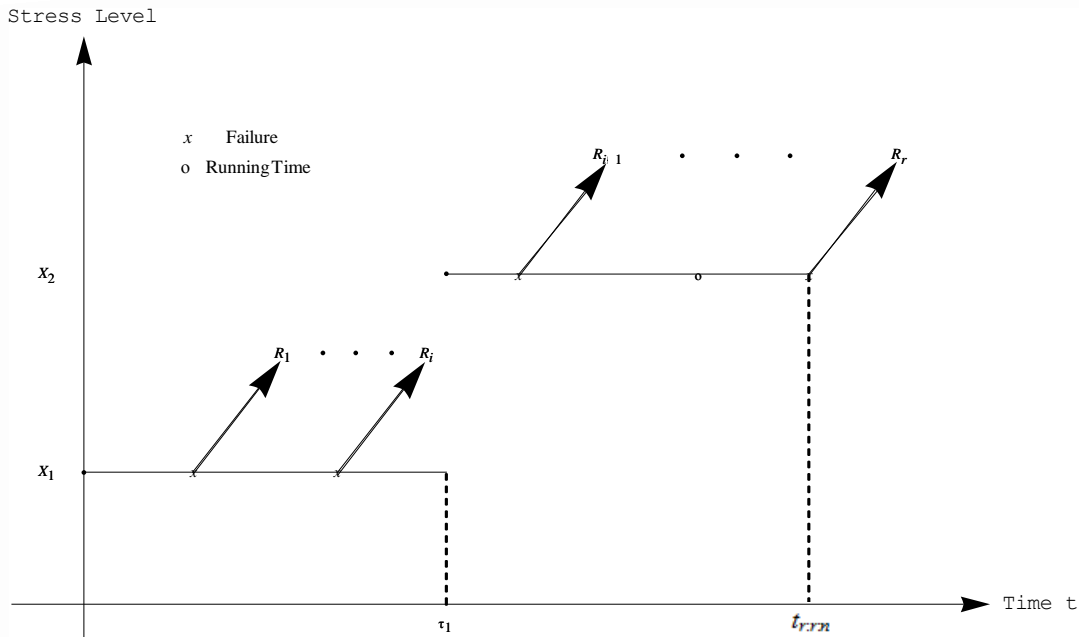
5.2.1 Περιγραφή μοντέλου

Στην εισαγωγική παράγραφο έγινε αναφορά γενικά στην προοδευτική λογοκρισία και στα βασικά άρθρα που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια, περιγράφεται η εφαρμογή της προοδευτικής λογοκρισίας τύπου II στα πλαίσια ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης.

Η περιγραφή του μοντέλου είναι η ακόλουθη:

Ένα δείγμα από n όμοιες μονάδες τοποθετείται σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης και τίθεται, αρχικά, σε επίπεδο πίεσης x_1 . Τη χρονική στιγμή που θα παρατηρηθεί η 1^η αποτυχία, R_1 από τις $n-1$ μονάδες που έχουν επιβιώσει απομακρύνονται τυχαία από το πείραμα. Στη συνέχεια, τη στιγμή που θα καταγραφεί η 2^η αποτυχία μονάδας θα απομακρυνθούν τυχαία από το τεστ R_2 από τις $n-2-R_1$ μονάδες που έχουν απομείνει, κ.ο.κ. . Σε προεπιλεγμένο χρόνο τ , το επίπεδο πίεσης από x_1 αυξάνεται σε x_2 και το πείραμα ολοκληρώνεται όταν αποτύχει και η r -οστή μονάδα, δηλαδή στο χρόνο $t_{r:r:n}$, χρόνο κατά τον οποίο οι $R_r = n - R_1 - \dots - R_{r-1} - r$ που έχουν απομείνει απομακρύνονται. Διακρίνουμε ότι αν $R_1 = \dots = R_{r-1} = 0$ τότε $R_r = n - r$, περίπτωση που συμπίπτει με την «παραδοσιακή» λογοκρισία τύπου II ενώ όταν $R_1 = \dots = R_r = 0$ τότε $n = r$, και συνεπώς τα δεδομένα που λαμβάνουμε είναι πλήρη. Βάσει αυτού του σχήματος λογοκρισίας, το πλήθος r των μονάδων που αποτυγχάνουν και οι ποσότητες R_1, R_2, \dots, R_r είναι προκαθορισμένες ενώ αντίθετα οι χρόνοι λογοκρισίας είναι όλοι τυχαίοι.

Το διάγραμμα που δίνεται στη συνέχεια, αναπαριστά ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης κάτω από προοδευτική λογοκρισία τύπου II.



Γράφημα 5.1 : Μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με προοδευτική λογοκρισία τύπου II

Υποθέτουμε, και σε αυτή την περίπτωση, ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων στα επίπεδα πίεσης x_1 και x_2 είναι η εκθετική με παραμέτρους θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα, με συνάρτηση κατανομής στο επίπεδο x_i αυτή της σχέσης (2.1). Επιπλέον, τα δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση του πειράματος θεωρούμε ότι προέρχονται από το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης, όπου βάσει των υποθέσεων του μοντέλου, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ και η συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.2) και (2.3), αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, με n_1 θα συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν πριν από το χρόνο τ στο επίπεδο πίεσης x_1 και με n_2 το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν μετά το χρόνο τ , στο 2^ο επίπεδο πίεσης x_2 .

Βάσει των συμβολισμών αυτών, διακρίνουμε ότι τα δεδομένα που θα λάβουμε από την εκτέλεση του πειράματος είναι της μορφής :

$$t = \{t_{1:r:n} < \dots < t_{n_1:r:n} \leq \tau < t_{n_1+1:r:n} < \dots < t_{r:r:n}\} \quad (5.1)$$

με αντίστοιχο πλαίσιο λογοκρισίας $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_r)$, όπου $\sum_{i=1}^r R_i = n - r$.

5.2.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 , στηριζόμενοι στο δείγμα της σχέσης (5.1), το οποίο προήλθε από προοδευτική λογοκρισία τύπου II και εν συνέχεια θα προσδιορίσουμε τους ε.μ.π. των άγνωστων αυτών παραμέτρων.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , σύμφωνα με τα δεδομένα της σχέσης (5.1) (βλ. Balakrishnan and Aggarwala (2000, p.8)), είναι η :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = L(\theta_1, \theta_2 | t_{1:r:n}, \dots, t_{r:r:n}) = C_p \prod_{i=1}^r g(t_{i:r:n}) \{1 - G(t_{i:r:n})\}^{R_i},$$

όπου $r = n_1 + n_2$, και $C_p = n(n-1-R_1)(n-2-R_1-R_2) \cdots \left(n-r+1 - \sum_{i=1}^{r-1} R_i \right)$

Βάσει της συνάρτησης κατανομής της σχέσης (2.2) και της αντίστοιχης σ.π.π. της σχέσης (2.3), λαμβάνουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 ως εξής :

► Για $n_1 = r$ και $n_2 = 0$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 είναι η :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = C_p \prod_{i=1}^r g_1(t_{i:r:n}) \{1 - G_1(t_{i:r:n})\}^{R_i} = \frac{C_p}{\theta_1^r} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^r (R_i + 1) t_{i:r:n} \right\},$$

$0 < t_{1:r:n} < \dots < t_{r:r:n} < \tau$.

► Για $n_1 = 0$ και $n_2 = r$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 λαμβάνει την ακόλουθη μορφή :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = C_p \prod_{i=1}^r g_2(t_{i:r:n}) \{1 - G_2(t_{i:r:n})\}^{R_i} = \frac{C_p}{\theta_2^r} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^r (R_i + 1) \tau \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^r (R_i + 1) (t_{i:r:n} - \tau) \right\}$$

όπου $\tau < t_{1:r:n} < \dots < t_{r:r:n} < \infty$.

► Για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις, η συνάρτηση πιθανοφάνειας των θ_1 και θ_2 διαμορφώνεται ως ακολούθως :

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) = C_p \left\{ \prod_{i=1}^{n_1} g_1(t_{i:r:n}) \{1 - G_1(t_{i:r:n})\}^{R_i} \right\} \left\{ \prod_{i=n_1+1}^r g_2(t_{i:r:n}) \{1 - G_2(t_{i:r:n})\}^{R_i} \right\} \quad (5.2)$$

$$= \frac{C_p}{\theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{D_1}{\theta_1} - \frac{D_2}{\theta_2} \right\}, 0 < t_{1:r:n} < \dots < t_{n_1:r:n} \leq \tau < t_{n_1+1:r:n} < \dots < t_{r:r:n} < \infty,$$

$$\text{όπου } r = n_1 + n_2 \ (2 \leq r \leq n), \ D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (R_i + 1) t_{i:r:n} + \tau \sum_{i=n_1+1}^r (R_i + 1) \text{ και } D_2 = \sum_{i=n_1+1}^r (R_i + 1) (t_{i:r:n} - \tau).$$

Βάσει της μορφής που λαμβάνει η συνάρτηση πιθανοφάνειας στις παραπάνω περιπτώσεις, μπορούμε να διακρίνουμε ότι για $n_1 = r$ και $n_2 = 0$, ο ε.μ.π. του θ_2 δεν υπάρχει. Αντίστοιχα, δεν υπάρχει ο ε.μ.π. για της παραμέτρου θ_1 όταν $n_1 = 0$ και $n_2 = r$. Διαπιστώνουμε ότι οι ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 υπάρχουν και οι δύο μόνο στην περίπτωση που $n_1 \geq 1$ και $n_2 \geq 1$, δηλαδή όταν παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης.

Στηριζόμενοι στη σχέση (5.2), μπορούμε να υπολογίσουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 , οι οποίοι δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{n_1} \quad \text{και} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{D_2}{n_2}, \quad (5.3)$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω εκτιμητές αποτελούν τους υπό συνθήκη εκτιμητές των παραμέτρων θ_1 και θ_2 , δοθέντος του ενδεχομένου $A = \{1 \leq n_i \leq r-1\}$.

5.2.3 Οι υπό συνθήκη κατανομές των ε.μ.π. και οι ροπές 1^{ης} και 2^{ης} τάξης

Για την εύρεση των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, της σχέσης (5.3), στην περίπτωση προοδευτικής λογοκρισίας τύπου II, οι Xie et al. (2008) στηρίχθηκαν στις υπό συνθήκη ροπογεννήτριες των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Για την ακρίβεια, αρχικά προσδιόρισαν την από κοινού υπό συνθήκη ροπογεννήτρια συνάρτηση των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, βάσει της οποίας στη συνέχεια υπολόγισαν τις περιθώριες υπό συνθήκη ροπογεννήτριες των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, αντίστοιχα.

Η διαδικασία εύρεσης των υπό συνθήκη περιθώριων κατανομών των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, είναι ανάλογη της διαδικασίας που περιγράψαμε στις παραγράφους 2.3 και 3.3 και περιγράφεται αναλυτικά στο άρθρο των Xie et al. (2008).

Η υπό συνθήκη περιθώρια κατανομή του $\hat{\theta}_1$ απέδειξαν ότι δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_1}(y) = D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \gamma \left(y - \tau_{ik}; i, \frac{i}{\theta_1} \right) \quad (5.4)$$

$$\text{όπου } D = \frac{C_p}{\sum_{i=1}^{r-1} P(n_1=i)}, \quad D_{ikl} = \frac{C_{k,i}(S_i) C_{l,r-i-1}(S_{i+l})}{B_{l,r-i}(S_{i+l})} \exp \left\{ -\frac{\tau}{\theta_1} \sum_{j=i-k+1}^r S_j \right\},$$

$$\tau_{ik} = \frac{\tau}{i} \sum_{j=i-k+1}^r (R_j + 1), \quad S_j = R_j + 1, \quad S_i = (S_1, \dots, S_i), \quad S_{i+l} = (S_{i+1}, \dots, S_{i+l}), \quad B_{l,r-i}(S_{i+l}) = \sum_{j=r-i-l}^{r-i} S_{i+j}$$

$$C_{k,i}(S_i) = \frac{(-1)^k}{\left\{ \prod_{j=1}^k \sum_{m=i-k+1}^{i-k+j} S_m \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{i-k} \sum_{m=j}^{i-k} S_m \right\}}, \quad C_{l,r-i-1}(S_{i+l}) = \frac{(-1)^l}{\left\{ \prod_{j=1}^l \sum_{m=r-i-l}^{r-i-l+j-1} S_{i+m} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{r-i-l-1} \sum_{m=j}^{r-i-l-1} S_{i+m} \right\}},$$

$$P(n_1=i) = C_p \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} \frac{C_{k,i}(S_i) C_{l,r-i-1}(S_{i+l})}{B_{l,r-i}(S_{i+l})} \exp \left\{ -\frac{\tau}{\theta_1} \sum_{j=i-k+1}^r S_j \right\} \text{ και } \gamma(\cdot) \text{ η συνάρτηση της}$$

σχέσης (3.12).

Ομοίως, η υπό συνθήκη περιθώρια κατανομή του $\hat{\theta}_2$ δίνεται από τη σχέση :

$$f_{\hat{\theta}_2}(y) = D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \gamma \left(y; r-i, \frac{r-i}{\theta_2} \right) \quad (5.5)$$

Από τις σχέσεις (5.4) και (5.5) διακρίνουμε ότι οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές των $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$, αντίστοιχα, αποτελούν μία γενικευμένη μίξη γάμμα κατανομών.

Βάσει των σχέσεων αυτών, επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των εκτιμητών, οι οποίες δίνονται από τους ακόλουθους τύπους :

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta_1 + D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \tau_{ik} \text{ και}$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \left(\tau_{ik}^2 + \frac{\theta_1^2}{i} \right) - \left(D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \tau_{ik} \right)^2$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta_2 \text{ και } \text{Var}(\hat{\theta}_2) = D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \frac{\theta_2^2}{r-i}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις για τους μέσους των ε.μ.π. υποδηλώνουν ότι ο $\hat{\theta}_2$ αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ_2 , ιδιότητα που δεν ισχύει για τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$.

Όσον αφορά, την κατασκευή δ.ε. για τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 , στο άρθρο των Xie et al. (2008) δίνονται, αναλυτικά, τα βήματα για την κατασκευή ακριβών δ.ε. (πράγμα εφικτό καθώς γνωρίζουμε τις υπό συνθήκη κατανομές των εκτιμητών), προσεγγιστικών δ.ε. και Bootstrap δ.ε. . Επιπλέον, στο ίδιο άρθρο, μέσω προσομοίωσης, γίνεται σύγκριση αυτών των 3 ειδών δ.ε. .

5.2.4 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ και του βέλτιστου πλαισίου λογοκρισίας

Έχοντας συμβολίσει με $\mathbf{R}=(R_1,\dots,R_r)$ το πλαίσιο λογοκρισίας σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι ποια είναι η βέλτιστη επιλογή των R_i , $i=1,\dots,r-1$. Με τον προσδιορισμό του βέλτιστου πλαισίου λογοκρισίας ασχολήθηκαν οι Xie et al. (2008), οι οποίοι ως κριτήριο βελτιστοποίησης χρησιμοποίησαν την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης και του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των εκτιμητών.

Κριτήριο βελτιστοποίησης η διακύμανση

Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, η συνάρτηση που επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η $\psi(\mathbf{R})=Var(\hat{\theta}_1)+Var(\hat{\theta}_2)$, η οποία βάσει των διακυμάνσεων των εκτιμητών που υπολογίσαμε παραπάνω διαμορφώνεται ως εξής :

$$\psi(\mathbf{R})=D\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=0}^i\sum_{l=0}^{r-i-1}D_{ikl}\left(\tau_{ik}^2+\frac{\theta_1^2}{i}+\frac{\theta_2^2}{r-i}\right)-\left(D\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=0}^i\sum_{l=0}^{r-i-1}D_{ikl}\tau_{ik}\right)^2$$

Επομένως, το βέλτιστο πλαίσιο λογοκρισίας μπορεί να βρεθεί ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση $\psi(\mathbf{R})$, για σταθερό χρόνο τ .

Κριτήριο βελτιστοποίησης το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

Παραπάνω, διαπιστώσαμε ότι ο ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ δεν αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ_1 , σε αντίθεση με τον ε.μ.π. $\hat{\theta}_2$ που είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ_2 και επομένως θα ήταν πιο λογικό και ουσιαστικό να προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$.

Συνεπώς, η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είναι η ακόλουθη :

$$\psi(\mathbf{R}) = MSE(\hat{\theta}_1) + Var(\hat{\theta}_2) = D \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{r-i-1} D_{ikl} \left(\tau_{ik}^2 + \frac{\theta_1^2}{i} + \frac{\theta_2^2}{r-i} \right) \quad (5.6)$$

Η συνάρτηση $\psi(\mathbf{R})$, της παραπάνω σχέσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό του βέλτιστου τ , κατά τον οποίο θα πραγματοποιηθεί η αλλαγή του επιπέδου πίεσης, για δεδομένα $n, r, \mathbf{R}, \theta_1$ και θ_2 .

Επιπλέον, βασιζόμενοι στη συνάρτηση της σχέσης (5.6) μπορούμε να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα το βέλτιστο χρόνο τ και το βέλτιστο πλαίσιο λογοκρισίας \mathbf{R} , για μια δεδομένη επιλογή των n, r, θ_1 και θ_2 .

5.3 Προοδευτική λογοκρισία τύπου I

5.3.1 Περιγραφή μοντέλου

Βάσει των όσων αναφέραμε στην παράγραφο 5.1, διακρίνουμε ότι η προοδευτική λογοκρισία παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία στον πειραματιστή ως προς το σχεδιασμό του πειράματος καθώς επιτρέπει την απόσυρση μονάδων από το τεστ σε χρονικές στιγμές, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα οι τερματικές. Στην προοδευτική λογοκρισία τύπου I διακρίναμε ότι η απομάκρυνση των μονάδων συντελείται σε χρονικές στιγμές, οι οποίες είναι καθορισμένες από την αρχή του πειράματος.

Στη συνέχεια, περιγράφεται το πλαίσιο αυτό της προοδευτικής λογοκρισίας σε ένα μοντέλο βηματικής πίεσης. Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι ο χρόνος παραμονής των μονάδων σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης είναι ίδιος και ίσος με τ και η απομάκρυνση των μονάδων συντελείται στο τέλος του εκάστοτε επιπέδου.

Για να περιγράψουμε το μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με προοδευτική πίεση τύπου I, όπου κάθε βήμα έχει διάρκεια τ , θα πρέπει αρχικά να αναφέρουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: Με x_i , $i=1, \dots, k$ ορίζουμε τα επίπεδα πίεσης που χρησιμοποιούνται στο πείραμα και με n_i , $i=1, \dots, k$ το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο επίπεδο x_i . Επιπλέον, με $y_{i,j}$ δηλώνουμε τον j-οστό διατεταγμένο χρόνο ζώης από τις n_i μονάδες που αποτυγχάνουν στο x_i επίπεδο πίεσης, ενώ με R_i το πλήθος των πειραματικών μονάδων που λογοκρίνονται στο χρόνο $i\tau$.

Επίσης, με $\pi_i = \frac{R_i}{n}$ ορίζουμε το ποσοστό των μονάδων που λογοκρίνονται στο τέλος του επιπέδου πίεσης x_i επί των συνολικών n μονάδων που υπάρχουν στο πείραμα. Τέλος, με N_i συμβολίζεται το πλήθος των μονάδων που λειτουργούν και παραμένουν στο τεστ στην αρχή του επιπέδου πίεσης x_i και δίνεται από τη σχέση $N_i = n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j - \sum_{j=1}^{i-1} R_j$.

Η περιγραφή ενός μοντέλου βηματικής πίεσης, με k επίπεδα πίεσης διάρκειας τ το καθένα, στο οποίο εφαρμόζεται προοδευτική λογοκρισία τύπου I είναι η ακόλουθη:

Τοποθετούνται, αρχικά, $N_1 = n$ όμοιες μονάδες σε επίπεδο πίεσης x_1 και η πίεση διατηρείται σταθερή μέχρι τον προκαθορισμένο χρόνο τ , όπου και αλλάζει το επίπεδο πίεσης σε x_2 . Στο χρόνο αυτό τ , από το πείραμα απομακρύνονται τυχαία R_1 μονάδες. Επομένως, παραμένουν $N_2 = n - n_1 - R_1$ μονάδες, οι οποίες και συνεχίζουν στο επίπεδο πίεσης x_2 μέχρι το χρόνο 2τ , όπου τότε το επίπεδο πίεσης αλλάζει σε x_3 και R_2 μονάδες απομακρύνονται τυχαία από το πείραμα, κ.ο.κ. Τελικά, στο χρόνο $k\tau$, οι μονάδες $R_k = n - \sum_{j=1}^k n_j - \sum_{j=1}^{k-1} R_j$ που έχουν επιβιώσει θα απομακρυνθούν και θα ολοκληρωθεί το πείραμα. Το διάνυσμα $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_{k-1})$ είναι προκαθορισμένο.

Το μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με προοδευτική λογοκρισία τύπου I που περιγράφηκε παραπάνω, μελέτησαν εκτενώς οι Gouno et al. (2004), Balakrishnan and Han (2009), Han et al. (2006) καθώς και οι Wu et al. (2006) στην περίπτωση που διαθέτουμε grouped data (ομάδες δεδομένων). Κύριος στόχος των παραπάνω άρθρων ήταν ο προσδιορισμός του βέλτιστου χρόνου τ , παράμετρος ιδιαίτερα σημαντική καθώς αποτελεί το χρόνο που υποβάλλονται οι μονάδες στο εκάστοτε επίπεδο πίεσης.

Βασικές υποθέσεις για την μελέτη του μοντέλου είναι οι ακόλουθες:

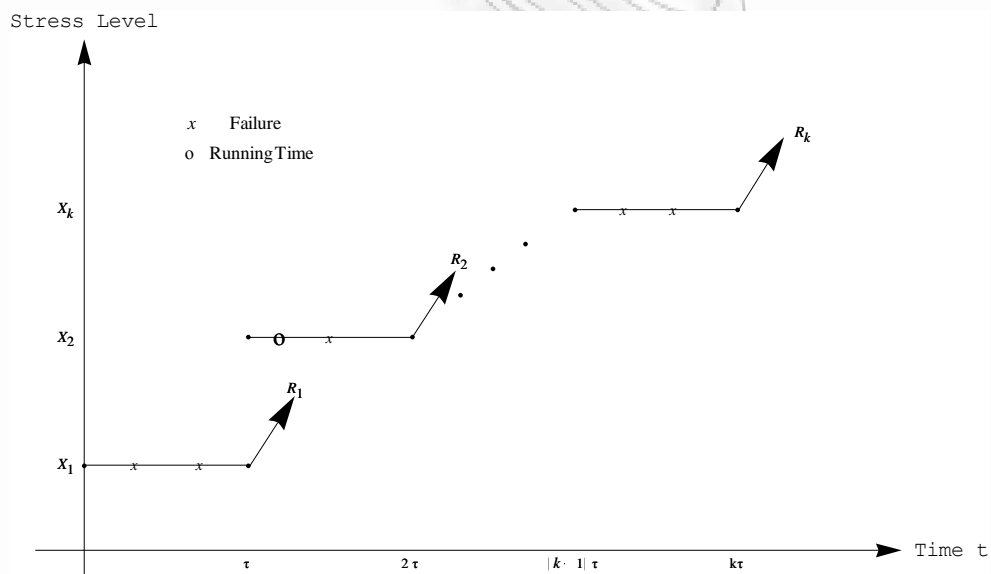
- ▶ Τα δεδομένα προέρχονται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης
- ▶ Στο επίπεδο πίεσης x_i , η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων είναι η εκθετική με παράμετρο θ_i και συνάρτηση κατανομή αυτή της σχέσης (2.1)
- ▶ Στο επίπεδο πίεσης x_i , ο μέσος χρόνος ζωής κάθε μονάδας αποτελεί μια λογαριθμογραμμική συνάρτηση του επιπέδου πίεσης, δηλαδή ισχύει $\log \theta_i = \alpha + \beta x_i$, όπου α, β άγνωστες παράμετροι.

5.3 Προοδευτική λογοκρισία τύπου I

Σύμφωνα με τις δύο πρώτες υποθέσεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η σ.π. του χρόνου ζωής μίας μονάδας στο μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης είναι η :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-\tau}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}} & , \tau \leq t \leq 2\tau \\ \vdots \\ \frac{1}{\theta_k} e^{-\frac{t-(k-1)\tau}{\theta_k} - \frac{\tau}{\theta_{k-1}} - \dots - \frac{\tau}{\theta_1}} & , (k-1)\tau \leq t < \infty \end{cases}$$

Η εφαρμογή της προοδευτικής λογοκρισίας τύπου I σε ένα μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης μπορεί σχηματικά να αποδοθεί ως ακολούθως :



Γράφημα 5.2 : Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με προοδευτική λογοκρισία τύπου I

5.3.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας των παραμέτρων θ_1 και θ_2 δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^k \frac{N_i!}{(N_i - n_i)!} \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\theta_1} \exp\left(-\frac{y_{1,j}}{\theta_1}\right) \right\} \left[\exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \right]^{R_1} \times \dots \times \left\{ \prod_{j=1}^{n_k} \frac{1}{\theta_k} \exp\left(-\frac{y_{k,j} - (k-1)\tau}{\theta_k} - \frac{\tau}{\theta_{k-1}} - \dots - \frac{\tau}{\theta_1}\right) \right\} \times \left[\exp\left(-\frac{\tau}{\theta_k} - \frac{\tau}{\theta_{k-1}} - \dots - \frac{\tau}{\theta_1}\right) \right]^{R_k} = \left[\prod_{i=1}^k \frac{N_i!}{(N_i - n_i)!} \right] \left[\prod_{i=1}^k \theta_i^{-n_i} \right] \exp\left(-\sum_{i=1}^k \frac{U_i}{\theta_i}\right),$$

όπου $U_i = \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - (i-1)\tau) + (N_i - n_i)\tau$, που αποτελούν το συνολικό χρόνο ελέγχου (Total time on test) στο επίπεδο x_i .

Για την εύρεση των ε.μ.π. των α, β θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\alpha, \beta)$, η οποία υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στη $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ τα θ_i σύμφωνα με τις σχέσεις $\log \theta_i = \alpha + \beta x_i$, για $i = 1, \dots, k$.

Λύνοντας επομένως τις εξισώσεις $\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$, όπου $l(\alpha, \beta) = \log L(\alpha, \beta)$, υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των α και β . Οι ε.μ.π. $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ αποτελούν τις λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων :

$$\hat{\alpha} = \log \left(\frac{\sum_{i=1}^k U_i \exp(-\hat{\beta} x_i)}{\sum_{i=1}^k n_i} \right) \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^k n_i \sum_{i=1}^k U_i x_i \exp(-\hat{\beta} x_i) - \sum_{i=1}^k n_i x_i \sum_{i=1}^k U_i \exp(-\hat{\beta} x_i) = 0.$$

Διαπιστώνουμε ότι τα $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ αποτελούν μη γραμμικές συναρτήσεις τυχαίων ποσοτήτων, γεγονός που καθιστά αδύνατο τον προσδιορισμό των ακριβών υπό συνθήκη κατανομών των ε.μ.π. . Για το λόγο αυτό, η συμπερασματολογία που θα λάβουμε στη συνέχεια στηρίζεται στην ασυμπτωτική θεωρία. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι το διάνυσμα $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ακολουθεί ασυμπτωτικά τη διδιάστατη κανονική κατανομή με μέσο το διάνυσμα (α, β) και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τον $[I(\alpha, \beta)]^{-1}$, δηλαδή τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας του Fisher.

5.3.3 Κριτήρια επιλογής του βέλτιστου χρόνου τ

Οι Gouno et al. (2004) για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χρόνου τ χρησιμοποίησαν ως κριτήρια τη διακύμανση και τη διακρίνουσα του πίνακα πληροφορίας του Fisher. Αντίστοιχα, οι Han et al. (2006), εκτός από τα δύο προαναφερθέντα κριτήρια, επέλεξαν ως κριτήριο το ίχνος του πίνακα πληροφορίας. Διακρίνουμε ότι για την εφαρμογή και των τριών κριτηρίων, απαραίτητη είναι η γνώση του πίνακα πληροφορίας.

Ο πίνακας πληροφορίας γνωρίζουμε ότι δίνεται από τη σχέση :

$$I(a, \beta) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 l(a, \beta)}{\partial a^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(a, \beta)}{\partial a \partial \beta}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 l(a, \beta)}{\partial a \partial \beta}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(a, \beta)}{\partial \beta^2}\right) \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k A_i(\tau) & \sum_{i=1}^k A_i(\tau)x_i \\ \sum_{i=1}^k A_i(\tau)x_i & \sum_{i=1}^k A_i(\tau)x_i^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{όπου } A_i(\tau) = \left[1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\pi_j}{G_j(\tau)} \right] G_{i-1}(\tau) F_i(\tau), \quad F_i(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_i}\right), \quad G_j(\tau) = \prod_{i=1}^j (1 - F_i(\tau))$$

Η απόδειξη της σχέσης αυτής δίνεται αναλυτικά στο άρθρο των Gouno et al. (2004).

Τα $A_i(\tau)$, για ορισμένες τιμές του τ , λαμβάνουν αρνητικές τιμές, γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα στην εύρεση αρνητικής τιμής για τη διακύμανση των παραμέτρων. Επομένως, ο προσδιορισμός του βέλτιστου χρόνου τ , θα πρέπει να περιοριστεί σε εκείνη την περιοχή των τιμών, για τις οποίες $A_i(\tau) > 0$. Ο περιορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη ότι, κατά μέσο όρο, το πλήθος των μονάδων που έχουν επιβιώσει στο τέλος κάθε επιπέδου θα πρέπει να υπερβαίνει το πλήθος των μονάδων που προοδευτικά λογοκρίνονται σε εκείνο το επίπεδο. Είναι εμφανές ότι η συνθήκη αυτή θα πρέπει να πληρείται έτσι ώστε το πείραμα να μπορεί να προχωρήσει στο επόμενο επίπεδο πίεσης.

Για τα αποτελέσματα που εξάγονται στη συνέχεια, θεωρούμε ότι στα πειράματα που διεξάγονται, οι πειραματικές μονάδες είναι υψηλής αξιοπιστίας και το ποσοστό λογοκρισίας στο τέλος κάθε επιπέδου είναι χαμηλό, συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ικανοποίηση της συνθήκης που προαναφέραμε.

Κριτήριο βελτιστοποίησης η διακύμανση

Σκοπός ενός πειράματος είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου να γίνεται με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια. Στα πλαίσια ενός μοντέλου βηματικής πίεσης, συχνά ενδιαφερόμαστε για την εκτίμηση του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο σχεδιασμού x_0 . Επομένως, η διακύμανση του λογαρίθμου του μέσου χρόνου ζωής στο επίπεδο αυτό αποτελεί συνάρτηση του χρόνου τ και δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= n \cdot \text{Var}(\log \hat{\theta}_0) = n \cdot \text{Var}(\hat{a} + \hat{\beta}x_0) = n \cdot (1 \ x_0) I^{-1}(a, \beta) (1 \ x_0)' = \\ &= \frac{2 \sum_{i=1}^k A_i(\tau) (x_i - x_0)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_i(\tau) A_j(\tau) (x_i - x_j)^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Βέλτιστο τ είναι εκείνο το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\varphi(\tau)$.

Στην περίπτωση $k = 2$, δηλαδή σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, η συνάρτηση $\varphi(\tau)$

διαμορφώνεται ως εξής: $\varphi(\tau) = \frac{(1 + \xi)^2}{A_1(\tau)} + \frac{\xi^2}{A_2(\tau)}$, όπου $\xi = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}$.

Κριτήριο βελτιστοποίησης η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας

Ένα ακόμα κριτήριο που χρησιμοποιείται συχνά είναι αυτό της διακρίνουσας του πίνακα πληροφορίας. Γνωρίζουμε ότι μία υψηλή τιμή για τη διακρίνουσα του πίνακα $I(a, \beta)$ αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια των εκτιμητών \hat{a} και $\hat{\beta}$.

Επομένως, η συνάρτηση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού είναι η ακόλουθη :

$$g(\tau) = n^{-2} |I(a, \beta)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_i(\tau) A_j(\tau) (x_i - x_j)^2,$$

η οποία αποτελεί τον παρονομαστή της σχέσεως (5.7).

Επομένως, ο βέλτιστος χρόνος τ είναι εκείνος που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $g(\tau)$.

Στην περίπτωση $k = 2$, ο βέλτιστος χρόνος τ αποτελεί ρίζα της εξίσωσης

$$A_1'(\tau) A_2(\tau) + A_1(\tau) A_2'(\tau) = 0.$$

Κριτήριο βελτιστοποίησης το ίχνος του πίνακα πληροφορίας

Βάσει του κριτηρίου αυτού, ο βέλτιστος χρόνος τ είναι αυτός που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση :

$$a(\tau) = \frac{1}{n} \text{tr}(I(a, \beta)) = \sum_{i=1}^k A_i(\tau) + \sum_{i=1}^k A_i(\tau) x_i^2 = \sum_{i=1}^k A_i(\tau)(1 + x_i^2).$$

Για την περίπτωση που υπάρχουν μόνο δύο επίπεδα πίεσης ($k=2$), η συνάρτηση $a(\tau)$ διαμορφώνεται ως εξής $a(\tau) = A_1(\tau)(1 + x_1^2) + A_2(\tau)(1 + x_2^2)$.

Σύμφωνα με το πλαίσιο της προοδευτικής λογοκρισίας τύπου I σε ένα μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης που περιγράψαμε παραπάνω, θεωρήσαμε ότι το πλήθος των μονάδων που λογοκρίνεται στο τέλος κάθε επιπέδου πίεσης είναι προεπιλεγμένο από την αρχή του πειράματος, δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_{k-1})$ είναι γνωστό. Ασφαλώς, κατά τη διεξαγωγή του πειράματος, υπάρχει η πιθανότητα όλες οι μονάδες να αποτύχουν πριν φτάσουν στο τελευταίο επίπεδο (στο k επίπεδο), με αποτέλεσμα να μην εφαρμοσθεί πλήρως το πλαίσιο \mathbf{R} που έχουμε θεωρήσει. Οι Gouno et al. (2004), όπως αναφέραμε, μελέτησαν το μοντέλο έχοντας θεωρήσει ότι το μέγεθος δείγματος που διαθέτουμε είναι μεγάλο, τα ποσοστά λογοκρισίας είναι χαμηλά και το πλήθος των επιπέδων πίεσης είναι μικρό, έτσι ώστε να εξασφαλίσουν ότι όλες οι μονάδες δε θα έχουν αποτύχει πριν το τελευταίο επίπεδο πίεσης.

Συνήθως, στα πειράματα αξιοπιστίας το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιείται είναι μικρό, με αποτέλεσμα οι υποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω να παραβιάζονται. Για την υπερπήδηση του εμποδίου αυτού, οι Balakrishnan and Han (2009) υιοθέτησαν μία τροποποίηση του προαναφερόμενου πλαισίου, σύμφωνα με την οποία το διάνυσμα των $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_{k-1})$ δεν είναι πλέον γνωστό, αλλά τυχαίο.

Συγκεκριμένα, οι Balakrishnan and Han (2009) επέλεξαν να προκαθορίσουν το ποσοστό μονάδων που θα λογοκρίνεται στο τέλος κάθε επιπέδου, από τις μονάδες που έχουν επιβιώσει μέχρι εκείνο το επίπεδο, εν αντιθέσει με το προηγούμενο πλαίσιο, όπου το αντίστοιχο ποσοστό ήταν επί του αρχικού συνολικού δείγματος.

Επομένως, βάσει της τροποποίησης αυτής, θα πρέπει να ορίσουμε ένα διάνυσμα από ποσοστά, έστω $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_{k-1}^*)$, όπου $0 \leq \pi_i^* < 1$, για $i = 1, \dots, k-1$ και $\pi_k^* = 1$.

Το πλήθος των μονάδων που θα λογοκρίνονται στο τέλος του επιπέδου x_i θα δίνεται, συνεπώς, από τη σχέση $R_i = H((N_i - n_i)\pi_i^*)$, $i = 1, \dots, k-1$, όπου $H(\cdot)$ μπορεί να είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση, η οποία θα μας εξασφαλίζει ότι το όρισμα είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις $round(\cdot)$, $floor(\cdot)$, κ.ο.κ. Συμπεραίνουμε ότι βάσει της τροποποίησης αυτής, το πείραμα μπορεί να ολοκληρωθεί πλέον πριν να φτάσει στο τελευταίο επίπεδο πίεσης.

Οι Balakrishnan and Han (2009), στηριζόμενοι στο νέο-τροποποιημένο πλαίσιο που εισήγαγαν, προσδιόρισαν το βέλτιστο χρόνο τ χρησιμοποιώντας τα ίδια κριτήρια με αυτά που αναφέραμε προηγουμένως. Η διαδικασία που ακολούθησαν είναι όμοια με αυτή που περιγράφηκε παραπάνω και δίνεται αναλυτικά στο άρθρο τους.

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

Κεφάλαιο 6^ο

Σχετικά ζητήματα αναφορικά με τα μοντέλα βηματικής πίεσης

6.1 Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα

6.1.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης κάτω από διαφορετικά είδη λογοκρισίας. Σε αυτό το κεφάλαιο, επεκτείνουμε το απλό μοντέλο έτσι ώστε πλέον τα επίπεδα πίεσης, στα οποία θα υποβάλλονται οι πειραματικές μονάδες, να είναι περισσότερα από 2. Το μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης, ως λογική προέκταση του απλού μοντέλου, αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης αρκετών άρθρων. Οι Khamis and Higgins (1996) προσδιόρισαν το βέλτιστο σχεδιασμό ενός μοντέλου με 3 επίπεδα πίεσης, οι Li and Fard (2007) θεώρησαν το μοντέλο με 2 παράγοντες πίεσης, 3 επίπεδα και χρόνους ζωής από τη Weibull κατανομή ενώ ο Khamis (1997) ακολούθησε αντίστοιχη διαδικασία για την περίπτωση του μοντέλου με m επίπεδα, k παράγοντες πίεσης και εκθετικούς χρόνους ζωής, όπου εξήγαγε τους ε.μ.π. των παραμέτρων του μοντέλου, τον πίνακα πληροφορίας του Fisher καθώς επίσης και τους βέλτιστους χρόνους στους οποίους θα πρέπει να συντελούνται οι αλλαγές στα επίπεδα πίεσης. Μία επισκόπηση των αποτελεσμάτων που αφορούν τα μοντέλα πολλαπλής βηματικής πίεσης δίνεται στο άρθρο του Tang (2003).

Στη συνέχεια, περιγράφεται το μοντέλο βηματικής πίεσης με m επίπεδα πίεσης ($m \geq 2$), όπου τα δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση του πειράματος προέρχονται από λογοκρισία τύπου I και II. Θεωρούμε ότι τα δεδομένα λαμβάνονται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης και ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων στο επίπεδο x_k είναι η εκθετική με παράμετρο θ_k και συνάρτηση κατανομής αυτή της σχέσης (2.1), για $k = 1, \dots, m$.

6.1 Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I και II αντίστοιχα

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.3, η συνάρτηση κατανομής $G(t)$ δίνεται από τη σχέση :

$$G(t) = \begin{cases} F_1(t) & , 0 \leq t < \tau_1 \\ F_2(t - \tau_1 + u_1) & , \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ F_3(t - \tau_2 + u_2) & , \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \\ F_m(t - \tau_{m-1} + u_{m-1}) & , \tau_{m-1} \leq t < +\infty \end{cases} , \quad \text{όπου } u_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\theta_k}{\theta_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) .$$

Βάσει της παραπάνω ισότητας, καθώς και της σχέσης (2.1), η συνάρτηση $G(t)$ διαμορφώνεται ως ακολούθως :

$$G(t) = \begin{cases} G_k(t) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_k} (t - \tau_{k-1}) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\theta_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) \right\} , & \tau_{k-1} \leq t < \tau_k, k=1, \dots, m-1 \\ G_m(t) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_m} (t - \tau_{m-1}) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\theta_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) \right\} , & \tau_{m-1} \leq t < +\infty \end{cases} \quad (6.1)$$

όπου $\tau_0 = 0$.

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τη σχέση :

$$g(t) = \begin{cases} g_k(t) = \frac{1}{\theta_k} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_k} (t - \tau_{k-1}) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\theta_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) \right\} , & \tau_{k-1} \leq t < \tau_k, k=1, \dots, m-1 \\ g_m(t) = \frac{1}{\theta_m} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_m} (t - \tau_{m-1}) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\theta_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) \right\} , & \tau_{m-1} \leq t < +\infty \end{cases} \quad (6.2)$$

Παρατηρούμε ότι για $m=2$ καταλήγουμε στις σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, στα πλαίσια του μοντέλου απλής βηματικής πίεσης.

Στη συνέχεια, περιγράφεται το μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης και επιπλέον δίνονται οι ε.μ.π. των άγνωστων παραμέτρων, για καθένα από τα πλαίσια λογοκρισίας τύπου I και II.

6.1.2 Περιγραφή μοντέλου

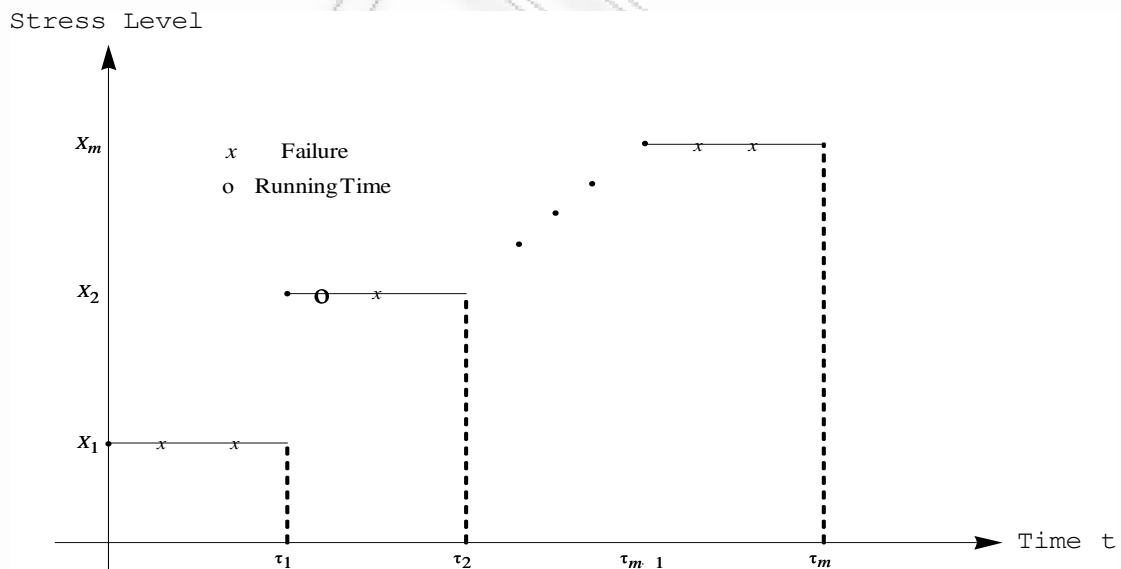
Λογοκρισία τύπου I

Θεωρούμε ότι n όμοιες μονάδες τοποθετούνται στο αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 και καταγράφονται, κάθε φορά, οι διαδοχικοί χρόνοι αποτυχίας των μονάδων. Το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται σε x_2, \dots, x_m στους χρόνους $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$, αντίστοιχα. Το πείραμα ολοκληρώνεται στο χρόνο τ_m στο επίπεδο πίεσης x_m . Οι χρόνοι $\tau_1 < \dots < \tau_{m-1}$ είναι καθορισμένοι από την αρχή του πειράματος. Επίσης, με n_k συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο επίπεδο x_k , όπου $k = 1, \dots, m$.

Διακρίνουμε ότι τα δεδομένα που θα λάβουμε από την εκτέλεση του πειράματος είναι της μορφής:

$$t = \left\{ t_{1n} < \dots < t_{n_1 n} < \tau_1 \leq t_{n_1 + 1n} < \dots < t_{n_1 + n_1 n} < \tau_2 \leq \dots < t_{n_1 + \dots + n_m n} < \tau_m \right\} \quad (6.3)$$

Η γραφική απεικόνιση του μοντέλου πολλαπλής βηματικής πίεσης κάτω από λογοκρισία τύπου I είναι η ακόλουθη :



Γράφημα 6.1 : Μοντέλο πολλαπλής βηματικής πίεσης με λογοκρισία τύπου I

Λογοκρισία τύπου II

Αρχικά, τοποθετούμε n όμοιες πειραματικές μονάδες στο επίπεδο πίεσης x_1 . Το επίπεδο πίεσης μεταβάλλεται σε x_2, \dots, x_m στους χρόνους $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ αντίστοιχα. Το πείραμα ολοκληρώνεται μόλις αποτύχει η r_m -οστή μονάδα στο επίπεδο x_m . Οι χρόνοι $\tau_1 < \dots < \tau_{m-1}$ καθώς και το r_m είναι προκαθορισμένα. Με n_k συμβολίζουμε το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο χρονικό διάστημα $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ στο επίπεδο x_k , για $k=1, \dots, m-1$ και n_m το σύνολο των μονάδων που αποτυγχάνουν στο διάστημα $[\tau_{m-1}, t_{r_m:n}]$ στο τελευταίο επίπεδο πίεσης x_m .

Σε αυτή την περίπτωση, και βάσει των παραπάνω συμβολισμών, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση του πειράματος είναι της μορφής :

$$t = \{t_{1:n} < \dots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \dots < t_{n_1+n_2:n} < \tau_2 \leq \dots < \tau_{m-1} \leq t_{n_1+\dots+n_{m-1}+1:n} < \dots < t_{r_m:n}\} \quad (6.4)$$

Η σχηματική απεικόνιση του μοντέλου που περιγράψαμε είναι όμοια με αυτή της λογοκρισίας τύπου I και η μόνη διαφορά έγκειται στο χρόνο τερματισμού του πειράματος, ο οποίος δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων και αποτελεί πλέον τυχαία μεταβλητή καθώς αντιστοιχεί στο χρόνο που αποτυγχάνει η r_m -οστή μονάδα.

6.1.3 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Λογοκρισία τύπου I

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, βάσει του διανύσματος t της σχέσης (6.3), δίνεται από τη σχέση :

$$L(\theta | t) = \frac{n!}{(n - r_m)!} \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} g_k(t_{i_k:n}) \right\} \{1 - G_m(\tau_m)\}^{n-r_m}, \quad \text{όπου } r_k = \sum_{j=1}^k n_j,$$

το συνολικό πλήθος μονάδων που έχει αποτύχει μέχρι και το k επίπεδο και $r_0 = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.1) και (6.2), η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να γραφεί

$$\text{ισοδύναμα ως εξής : } L(\theta | t) = \frac{n!}{(n - r_m)! \theta_1^{n_1} \dots \theta_m^{n_m}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\theta_k} D_k \right\},$$

$$\text{όπου } D_k = \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (t_{i_k:n} - \tau_{k-1}) + (n - r_k)(\tau_k - \tau_{k-1}), \text{ για } k=1, \dots, m.$$

Βάσει της συνάρτησης πιθανοφάνειας, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_k , για $k=1, \dots, m$ δίνονται από τη σχέση : $\hat{\theta}_k = \frac{D_k}{n_k}$.

Θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι οι εκτιμητές $\hat{\theta}_k$ αποτελούν τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των παραμέτρων θ_k , δοθέντος της συνθήκης:

$$A = \{1 \leq n_1 \leq n - m + 1, \dots, 1 \leq n_k \leq n - m + k - r_{k-1}, \dots, 1 \leq n_m \leq n - r_{m-1}\},$$

η οποία υποδηλώνει ότι για την ύπαρξη των εκτιμητών των παραμέτρων του μοντέλου, θα πρέπει να παρατηρηθεί τουλάχιστον μία αποτυχία σε καθένα από τα m επίπεδα πίεσης.

Λογοκρισία τύπου II

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, δεδομένου του διανύσματος \mathbf{t} της σχέσης (6.4), δίνεται από τον τύπο:

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}) = \frac{n!}{(n - r_m)!} \prod_{k=1}^m \left\{ \prod_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} g_k(t_{i_k:n}) \right\} \{1 - G_m(t_{r_m:n})\}^{n-r_m}, \text{ όπου } r_k = \sum_{j=1}^k n_j, k=1, \dots, m$$

το συνολικό πλήθος μονάδων που αποτυγχάνει μέχρι και το k -οστό επίπεδο, r_m το συνολικό πλήθος μονάδων που αποτυγχάνει μέχρι την ολοκλήρωση του πειράματος και το οποίο είναι προεπιλεγμένο και $r_0 = 0$.

Βάσει των σχέσεων (6.1) και (6.2), η συνάρτηση πιθανοφάνειας διαμορφώνεται ως

$$\text{ακολουθώς : } L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}) = \frac{n!}{(n - r_m)! \theta_1^{n_1} \dots \theta_m^{n_m}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\theta_k} D_k \right\},$$

$$\text{όπου } D_k = \sum_{i_k=r_{k-1}+1}^{r_k} (t_{i_k:n} - \tau_{k-1}) + (n - r_k)(\tau_k - \tau_{k-1}), \text{ για } k=1, \dots, m-1 \quad \text{και}$$

$$D_m = \sum_{i_m=r_{m-1}+1}^{r_m} (t_{i_m:n} - \tau_{m-1}) + (n - r_m)(t_{r_m:n} - \tau_{m-1})$$

Στηρίζόμενοι στη συνάρτηση πιθανοφάνειας, διακρίνουμε ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_k ,

για $k = 1, \dots, m$ δίνονται από τη σχέση: $\hat{\theta}_k = \frac{D_k}{n_k}$.

Και σε αυτή την περίπτωση, οι ε.μ.π. $\hat{\theta}_k$ αποτελούν τους υπό συνθήκη ε.μ.π. των παραμέτρων θ_k , δοθέντος του ενδεχομένου:

$$B = \{1 \leq n_1 \leq r_m - m + 1, \dots, 1 \leq n_k \leq r_m - m + k - r_{k-1}, \dots, 1 \leq n_{m-1} \leq r_m - 1 - r_{m-2}\}.$$

Ακολουθώντας αντίστοιχη μεθοδολογία με αυτή των προηγούμενων κεφαλαίων, μπορούμε επιπλέον να εξάγουμε τις υπό συνθήκη κατανομές των παραμέτρων του μοντέλου, τις ροπές κ-τάξης, τις πιθανότητες ουράς καθώς και δ.ε. για τις ζητούμενες παραμέτρους.

6.2 Μελέτη μοντέλου απλής βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων

6.2.1 Εισαγωγή

Όλα τα μοντέλα βηματικής πίεσης που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα, στηρίζονται σε δεδομένα που λαμβάνουμε από την εκτέλεση ενός μόνο πειράματος. Υπάρχει η περίπτωση όμως, τα δεδομένα που διαθέτουμε να συλλέγονται από διαφορετικά ανεξάρτητα πειράματα, τα οποία μπορεί να πραγματοποιήθηκαν σε διαφορετικές τοποθεσίες ή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, και στα οποία οι πειραματικές μονάδες έχουν εκτεθεί στα ίδια επίπεδα πίεσης και κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Τα πειράματα αυτά μπορεί να περιλαμβάνουν διαφορετικό πλήθος μονάδων που θέτουμε υπό μελέτη καθώς και διαφορετικό πλήθος μονάδων που αποτυγχάνουν. Είναι, συνεπώς, αναμενόμενο κάποιος να επιθυμεί το συνδυασμό της πληροφορίας που αποκτάται από όλα τα πειράματα, έτσι ώστε η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου να πραγματοποιείται με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Τα μοντέλα βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων, εισήχθησαν από τους Kateri et al. (2009), οι οποίοι μελέτησαν το μοντέλο απλής βηματικής πίεσης με εκθετικούς χρόνους ζωής και λογοκρισία τύπου II. Προσδιόρισαν την ακριβή έκφραση των ε.μ.π. των μέσων χρόνων ζωής σε κάθε επίπεδο πίεσης, καθώς και την υπό συνθήκη κατανομή των εκτιμητών. Στη συνέχεια, οι Kateri et al. (2010) υιοθέτησαν αντίστοιχο πλαίσιο με το παραπάνω, έχοντας όμως θεωρήσει ότι η λογοκρισία που παρατηρείται στο τελευταίο επίπεδο πίεσης είναι τύπου I.

Στην παράγραφο αυτή επικεντρωνόμαστε στο μοντέλο απλής βηματικής πίεσης, στο οποίο θεωρούμε ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων προέρχονται από την εκθετική κατανομή και μελετάμε τις περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιείται λογοκρισία τύπου I και II, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, δίνεται η περιγραφή των μοντέλων για κάθε είδος λογοκρισίας, οι ε.μ.π. των παραμέτρων του μοντέλου καθώς και οι πιθανότητες μη ύπαρξης αυτών.

6.2.2 Περιγραφή μοντέλου και Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Λογοκρισία τύπου II

Η περιγραφή ενός μοντέλου πολλαπλής βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων και λογοκρισία τύπου II είναι η ακόλουθη:

Θεωρούμε s ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_1, \dots, n_s , τα οποία τοποθετούμε στο αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 . Κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του πειράματος, τα επίπεδα πίεσης αυξάνονται σε x_2, \dots, x_{m+1} στους προεπιλεγμένους χρόνους $\tau_{1k}, \dots, \tau_{mk}$, αντίστοιχα, για το k -οστό δείγμα, όπου $k = 1, \dots, s$. Με R_{jk} , για $j = 1, \dots, m+1$, συμβολίζεται το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει στο επίπεδο j για το k -οστό δείγμα, ενώ με $R_k = \sum_{j=1}^{m+1} R_{jk}$

συμβολίζεται ο συνολικός αριθμός μονάδων που αποτυγχάνει σε όλα τα επίπεδα πίεσης για το k -οστό δείγμα. Επομένως, ο συνολικός αριθμός μονάδων που αποτυγχάνει και στα s δείγματα είναι $R = \sum_{k=1}^s R_k$.

Εφόσον έχουμε θεωρήσει λογοκρισία τύπου II, το πείραμα για το k -οστό δείγμα θα ολοκληρωθεί όταν ένας προκαθορισμένος αριθμός $R_k = r_k$ μονάδων αποτύχει.

Οι χρόνοι ζωής των μονάδων του k -οστού δείγματος θα συμβολίζονται με $t_k = (t_{i:n_k}^{(k)})_{1 \leq i \leq r_k}$ και επομένως το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει σε κάθε επίπεδο πίεσης δίνεται από τη σχέση $R_{jk} = \#\{i : \tau_{j-1,k} < t_{i:n_k}^{(k)} \leq \tau_{jk}\}$, για $0 \leq R_{jk} \leq R_k$, όπου $\tau_{0,k} = 0$, $j = 1, \dots, m+1$ και $k = 1, \dots, s$.

Αν εστιάσουμε στο μοντέλο απλής βηματικής πίεσης (δηλαδή $m = 2$) με λογοκρισία τύπου II, η περιγραφή του μοντέλου μπορεί να απλοποιηθεί ως ακολούθως:

Για το k -οστό δείγμα, θεωρούμε ότι n_k μονάδες τοποθετούνται στο επίπεδο x_1 και παραμένουν στο επίπεδο αυτό μέχρι το χρόνο τ_k , όπου το επίπεδο πίεσης αυξάνεται σε x_2 . Το πείραμα, για το k -οστό δείγμα, ολοκληρώνεται όταν παρατηρηθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός r_k αποτυχιών. Συνεπώς, ο ολικός αριθμός αποτυχιών που θα παρατηρήσουμε και

στα s δείγματα θα είναι ίσος με $r = \sum_{k=1}^s r_k$.

Το διάνυσμα t_k που περιλαμβάνει τους χρόνους αποτυχίας των πειραματικών μονάδων θεωρούμε ότι προέρχεται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης και ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων στο επίπεδο x_k είναι η εκθετική με παράμετρο θ_k και συνάρτηση κατανομής αυτή της σχέσης (2.1).

Επομένως, βάσει των υποθέσεων του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης, η συνάρτηση κατανομής $G_k(t)$ δίνεται από τη σχέση :

$$G_k(t) = \begin{cases} G_{1k}(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_k \\ G_{2k}(t) = F_2\left(\frac{\theta_2 \tau_k}{\theta_1} + t - \tau_k\right) & , \tau_k \leq t < \infty \end{cases} \quad (6.5)$$

και η συνάρτηση πυκνότητας $g_k(t)$ από τη σχέση :

$$g_k(t) = \begin{cases} g_{1k}(t) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau_k \\ g_{2k}(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t-\tau_k}{\theta_2} - \frac{\tau_k}{\theta_1}} & , \tau_k \leq t < \infty \end{cases} \quad , \text{ για } k = 1, \dots, s \quad (6.6)$$

Σύμφωνα με την παράγραφο 1.2, η από κοινού συνάρτηση κατανομής για τους πρώτους r_k διατεταγμένους χρόνους ζωής που παρατηρούμε στο k -οστό δείγμα, διαμορφώνεται ως ακολούθως :

$$g_{T_{1:n_k}^{(k)}, T_{2:n_k}^{(k)}, \dots, T_{r_k:n_k}^{(k)}}(t_{1:n_k}, t_{2:n_k}, \dots, t_{r_k:n_k}) = \frac{n_k!}{(n_k - r_k)!} \left\{ 1 - G_k(t_{r_k:n_k}) \right\}^{n_k - r_k} \prod_{i=1}^{r_k} g_k(t_{i:n_k})$$

όπου $G_k(t)$ και $g_k(t)$ οι συναρτήσεις των σχέσεων (6.5) και (6.6) αντίστοιχα.

› Όταν $R_{1k} = r_k$ για κάθε $k = 1, \dots, s$, το πείραμα ολοκληρώνεται χωρίς να εισέλθει στο 2^ο επίπεδο πίεσης και κατά συνέπεια χωρίς να μπορεί να εκτιμηθεί η παράμετρος θ_2 .

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το k -οστό δείγμα, σε αυτή την περίπτωση, διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$L_1^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = c \left\{ 1 - G_{1k}(t_{r_k:n_k}) \right\}^{n_k - r_k} \prod_{i=1}^{r_k} g_{1k}(t_{i:n}) = \frac{c}{\theta_1^{r_k}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} \right] \right\} \quad (6.7)$$

όπου $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ και c σταθερά.

› Αντίστοιχα, αν $R_{1k} = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, s$, αυτό συνεπάγεται ότι δεν παρατηρούνται καθόλου απώλειες στο 1^ο επίπεδο πίεσης σε καθένα από τα s δείγματα και επομένως δεν είναι εφικτή η εκτίμηση της παραμέτρου θ_1 .

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το k -οστό δείγμα, σε αυτή την περίπτωση, είναι η :

$$\begin{aligned} L_2^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) &= c \left\{ 1 - G_{2k}(t_{r_k:n_k}) \right\}^{n_k - r_k} \prod_{i=1}^{r_k} g_{2k}(t_{i:n}) = \\ &= \frac{c}{\theta_2^{r_k}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} \right] - n_k \tau_k \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

› Στην περίπτωση που $0 < R_{1k} < r_k$, δηλαδή όταν καταγράφονται αποτυχίες και στα δύο επίπεδα πίεσης, η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το k -οστό δείγμα δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} L_{12}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) &= c_1 \left\{ 1 - G_{2k}(t_{r_k:n_k}) \right\}^{n_k - r_k} \prod_{i=1}^{R_{1k}} g_{1k}(t_{i:n}) \prod_{i=R_{1k}+1}^{r_k} g_{2k}(t_{i:n}) = \\ &= \frac{c_1}{\theta_1^{R_{1k}} \theta_2^{r_k - R_{1k}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{R_{1k}} t_{i:n_k} - \frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=R_{1k}+1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} \right] - (n_k - R_{1k}) \tau_k \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

όπου c_1 σταθερά.

Βάσει των τριών περιπτώσεων που διακρίναμε παραπάνω, η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το k -οστό δείγμα μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως εξής :

$$L^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = L_1^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) I(R_{1k} = r_k) + L_2^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) I(R_{1k} = 0) + L_{12}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) I(0 < R_{1k} < r_k),$$

όπου $I(\cdot)$ δείκτρια συνάρτηση.

Επομένως, η ολική συνάρτηση πιθανοφάνειας, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί και στα

$$s \text{ δείγματα, είναι η } L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^s L^{(k)}(\boldsymbol{\theta}).$$

Η ολική συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να γραφεί διαφορετικά αν λάβουμε υπόψη ότι από τα s ανεξάρτητα δείγματα, σε κάποια από αυτά μπορεί όλες οι αποτυχίες που παρατηρούνται να είναι πριν από το χρόνο τ_k , σε κάποια άλλα μετά το χρόνο τ_k ή να καταγράφονται αποτυχίες και στα δύο επίπεδα πίεσης.

Επομένως, εισάγοντας τους συμβολισμούς $s_1 = \#\{k : R_{1k} = r_k\}$, $s_2 = \#\{k : R_{1k} = 0\}$ και $s_{12} = \#\{k : 0 < R_{1k} < r_k\}$, για τα οποία ισχύει $s = s_1 + s_2 + s_{12}$, η ολική συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως εξής :

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \left(\prod_{k=1}^{s_1} L_1^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) \right) \left(\prod_{k=s_1+1}^{s_1+s_2} L_2^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) \right) \left(\prod_{k=s_1+s_2+1}^s L_{12}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) \right) \quad (6.10)$$

όπου $L_1^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$, $L_2^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ και $L_{12}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ οι συναρτήσεις των σχέσεων (6.7), (6.8) και (6.9), αντίστοιχα.

Λύνοντας επομένως τις εξισώσεις $\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$, βάσει της σχέσης (6.10), υπολογίζουμε τους ε.μ.π. των θ_1 και θ_2 , δοθέντος των αποτυχιών που θα παρατηρήσουμε κάτω από το 1^ο επίπεδο πίεσης, δηλαδή δοθέντος της συνθήκης $R_{1k} = r_{1k}$, οι οποίοι δίνονται από τις σχέσεις :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{s_1} \left(\sum_{i=1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} \right) + \sum_{k=s_1+1}^{s_1+s_2} n_k \tau_k + \sum_{k=s_1+s_2+1}^s \left(\sum_{i=1}^{r_{1k}} t_{i:n_k} + (n_k - r_{1k}) \tau_k \right)}{\sum_{k=1}^{s_1} r_k + \sum_{k=s_1+s_2+1}^s r_{1k}}$$

αν $s_1 + s_{12} > 0$,

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{k=s_1+1}^{s_1+s_2} \left(\sum_{i=1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} - n_k \tau_k \right) + \sum_{k=s_1+s_2+1}^s \left(\sum_{i=r_{1k}+1}^{r_k} t_{i:n_k} + (n_k - r_k) t_{r_k:n_k} - (n_k - r_{1k}) \tau_k \right)}{\sum_{k=s_1+1}^{s_1+s_2} r_k + \sum_{k=s_1+s_2+1}^s (r_k - r_{1k})}$$

αν $s_2 + s_{12} > 0$, αντίστοιχα.

Επομένως, διαπιστώνουμε ότι για την ύπαρξη των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ θα πρέπει να πληρούνται οι συνθήκες $s_1 + s_{12} > 0$ και $s_2 + s_{12} > 0$.

Η απόδειξη για την εύρεση των παραπάνω εκτιμητών δίνεται αναλυτικά στο άρθρο των Kateri et al. (2009), ενώ στο ίδιο άρθρο παρουσιάζονται επίσης οι υπό συνθήκη κατανομές και οι δύο πρώτες ροπές των εκτιμητών.

Λογοκρισία τύπου I

Η περιγραφή ενός μοντέλου πολλαπλής βηματικής πίεσης με χρήση πολλαπλών δειγμάτων και λογοκρισία τύπου I είναι η εξής:

Θεωρούμε s ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_1, \dots, n_s , τα οποία τοποθετούμε στο αρχικό επίπεδο πίεσης x_1 . Επομένως, ο συνολικός αριθμός μονάδων που χρησιμοποιείται για το πείραμα είναι $n = \sum_{k=1}^s n_k$. Κατά τη διάρκεια εξέλιξης του πειράματος, τα επίπεδα πίεσης αυξάνονται σε x_2, \dots, x_m στους προκαθορισμένους χρόνους $\tau_{1k}, \dots, \tau_{(m-1)k}$, αντίστοιχα, για το k -οστό δείγμα, όπου $k = 1, \dots, s$. Διακρίνουμε ότι οι χρόνοι κατά τους οποίους μεταβάλλεται το επίπεδο πίεσης μπορεί να διαφέρουν για καθένα από τα s δείγματα.

Όπως και στην περίπτωση λογοκρισίας τύπου II, με R_{jk} , για $j = 1, \dots, m$, συμβολίζεται το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνουν στο επίπεδο j για το k -οστό δείγμα, ενώ με

$R_k = \sum_{j=1}^m R_{jk}$ υποδηλώνεται ο συνολικός αριθμός μονάδων που αποτυγχάνουν σε όλα τα

επίπεδα πίεσης για το k -οστό δείγμα. Συνεπώς, το $R = \sum_{k=1}^s R_k$ αποτελεί το συνολικό αριθμό πειραματικών μονάδων που αποτυγχάνει και στα s δείγματα.

Καθώς μελετάμε την περίπτωση λογοκρισίας τύπου I, γνωρίζουμε ότι το πείραμα για το k -οστό δείγμα θα ολοκληρωθεί σε έναν προεπιλεγμένο χρόνο τ_{mk} . Οι χρόνοι ολοκλήρωσης του πειράματος για καθένα από τα s δείγματα μπορεί να διαφέρουν.

Συμβολίζοντας με $\mathbf{t}_k = (t_{i:n_k}^{(k)})_{1 \leq i \leq n_k}$ το διάνυσμα που περιλαμβάνει τους χρόνους ζωής των μονάδων του k -οστού δείγματος, το πλήθος των μονάδων που αποτυγχάνει σε κάθε επίπεδο πίεσης μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση $R_{jk} = \#\{i: \tau_{j-1,k} < t_{i:n_k}^{(k)} \leq \tau_{jk}\}$ για $0 \leq R_{jk} \leq R_k$, όπου $\tau_{0,k} = 0$, $j = 1, \dots, m$ και $k = 1, \dots, s$.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στο μοντέλο με 2 επίπεδα πίεσης, όπου στην αρχή του πειράματος, για το k -οστό δείγμα, τίθενται υπό μελέτη n_k μονάδες στο επίπεδο πίεσης x_1 . Οι μονάδες παραμένουν στο 1^ο επίπεδο πίεσης μέχρι και το χρόνο τ_{1k} , όπου το επίπεδο πίεσης αυξάνεται σε x_2 . Το πείραμα για το k -οστό δείγμα ολοκληρώνεται στο χρόνο τ_{2k} . Συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός χρόνος διάρκειας ολόκληρου του πειράματος είναι ίσος με $\max\{\tau_{2k}, k = 1, \dots, s\}$.

Και σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων προέρχονται από ένα μοντέλο αθροιστικής έκθεσης και ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Επομένως, οι συναρτήσεις κατανομής $G_k(t)$ και πυκνότητας $g_k(t)$, βάσει των υποθέσεων του μοντέλου αθροιστικής έκθεσης, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$G_k(t) = \begin{cases} G_{1k}(t) = F_1(t) & , 0 < t < \tau_{1k} \\ G_{2k}(t) = F_2\left(\frac{\theta_2 \tau_{1k}}{\theta_1} + t - \tau_{1k}\right) & , \tau_{1k} \leq t < \infty \end{cases} \quad (6.11)$$

$$g_k(t) = \begin{cases} g_{1k}(t) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau_{1k} \\ g_{2k}(t) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{t - \tau_{1k} - \frac{\tau_{1k}}{\theta_1}}{\theta_2}} & , \tau_{1k} \leq t < \infty \end{cases} \quad , \text{για } k = 1, \dots, s \quad (6.12)$$

Διακρίνουμε ότι αν όλες οι n_k μονάδες αποτύχουν πριν από το χρόνο τ_{1k} τότε το πείραμα, για το k -οστό δείγμα, δε θα συνεχίσει στο 2^ο επίπεδο πίεσης και συνεπώς $R_{2k} = 0$. Αν $R_{2k} = 0$, για κάθε $k = 1, \dots, s$, δε θα μπορέσουμε εκτιμήσουμε την παράμετρο θ_2 . Αντίστοιχα, αν $R_{1k} = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, s$, ο ε.μ.π. της παραμέτρου θ_1 δεν υπάρχει. Επομένως, για το k -οστό δείγμα και οι 2 εκτιμητές υπάρχουν μόνο στην περίπτωση που $R_{1k} \geq 1$ και $R_{2k} \geq 1$.

Βάσει των όσων αναφέραμε στην παράγραφο 3.2, η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το k -οστό δείγμα, δεδομένου ότι $R_{1k} = r_{1k}$ και $R_{2k} = r_{2k}$ και βάσει των σχέσεων (6.11) και (6.12), δίνεται από τη σχέση :

$$L^{(k)}(\theta) = c \left\{ 1 - G_{2k}(\tau_{2k}) \right\}^{n_k - (r_{1k} + r_{2k})} \prod_{i=1}^{r_{1k}} g_{1k}(t_{i:n}) \prod_{i=r_{1k}+1}^{r_{1k}+r_{2k}} g_{2k}(t_{i:n}) =$$

$$= \frac{c}{\theta_1^{r_{1k}} \theta_2^{r_{2k}}} \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{r_{1k}} t_{i:n_k} + (n_k - r_{1k}) \tau_{1k} \right] - \frac{1}{\theta_2} \left[\sum_{i=r_{1k}+1}^{r_{1k}+r_{2k}} (t_{i:n_k} - \tau_{1k}) + [n_k - (r_{1k} + r_{2k})] (\tau_{2k} - \tau_{1k}) \right] \right\}$$

$$\text{όπου } c = \frac{n_k!}{[n_k - (r_{1k} + r_{2k})]!}.$$

Συνεπώς, η ολική συνάρτηση πιθανοφάνειας των s δειγμάτων δίνεται από την ακόλουθη

$$\text{σχέση : } L(\theta) = \prod_{k=1}^s L^{(k)}(\theta).$$

Επομένως, οι ε.μ.π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι οι ακόλουθοι :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{r_{1k}} t_{i:n_k} + (n_k - r_{1k}) \tau_{1k} \right)}{\sum_{k=1}^s r_{1k}} \quad \text{και} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=r_{1k}+1}^{r_{1k}+r_{2k}} (t_{i:n_k} - \tau_{1k}) + [n_k - (r_{1k} + r_{2k})] (\tau_{2k} - \tau_{1k}) \right)}{\sum_{k=1}^s r_{2k}}$$

Εκτός από τους ε.μ.π. που δόθηκαν παραπάνω, στο άρθρο των Kateri et al. (2010) δίνονται επίσης και οι υπό συνθήκη κατανομές των εκτιμητών.

6.2.3 Σύγκριση των μεθόδων χρήσης ενός και πολλαπλών δειγμάτων στα πλαίσια ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης

Η χρήση πολλαπλών δειγμάτων για τη μελέτη ενός μοντέλου βηματικής πίεσης μπορεί να θεωρηθεί ως μία μέθοδος για την ανάλυση δεδομένων που έχουν προέλθει από διαφορετικά πειράματα. Εκτός όμως από την περίπτωση αυτή, το νέο πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη φάση του πειραματικού σχεδιασμού, έτσι ώστε να βελτιωθεί η ακρίβεια των εκτιμητών που λαμβάνουμε.

Κριτήριο σύγκρισης των πολλαπλών δειγμάτων αντί του ενός, στα πλαίσια ενός μοντέλου απλής βηματικής πίεσης, μπορεί να αποτελέσει η πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π.. Στο κεφάλαιο 2, διακρίναμε ότι στην περίπτωση που τα δεδομένα προέρχονται από ένα μόνο δείγμα, οι εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να υπολογιστούν μόνο όταν παρατηρείται τουλάχιστον μία αποτυχία μονάδας σε καθένα από τα επίπεδα πίεσης. Βάσει του πλαισίου που έχουμε θεωρήσει στο εν λόγω κεφάλαιο, η πιθανότητα μη ύπαρξης των ε.μ.π. είναι μικρότερη, καθώς πλέον ο εκτιμητής σε ένα επίπεδο πίεσης δεν υπάρχει μόνο στην περίπτωση που δεν παρατηρείται καμία αποτυχία στο επίπεδο αυτό, για όλα τα δείγματα s που χρησιμοποιούνται.

Το ανωτέρω κριτήριο χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Kateri et al. (2011), οι οποίοι υπολόγισαν και συνέκριναν τις πιθανότητες μη ύπαρξης των εκτιμητών για τις περιπτώσεις ενός και πολλαπλών δειγμάτων, έχοντας θεωρήσει λογοκρισία τύπου II. Αντίστοιχη διαδικασία για την περίπτωση της λογοκρισίας τύπου I ακολούθησαν οι Kateri et al. (2010).

Στη συνέχεια, δίνονται οι πιθανότητες μη ύπαρξης των εκτιμητών για τις περιπτώσεις ενός και πολλαπλών δειγμάτων και για τους δύο τύπους λογοκρισίας.

Λογοκρισία τύπου II

Στην παράγραφο 2.7 είχαμε αναφερθεί στο βέλτιστο χρόνο κατά τον οποίο πρέπει να αυξήσουμε το επίπεδο πίεσης σε ένα μοντέλο απλής βηματικής πίεσης. Κριτήριο της επιλογής εκείνης αποτέλεσε η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας μη ύπαρξης των εκτιμητών $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$. Οι πιθανότητες μη ύπαρξης των ε.μ.π. $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ είχαμε διαπιστώσει ότι δίνονται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} \triangleright P_1(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) &= P(T_{1:n} > \tau) = (1 - F_{\theta_1, \theta_2}(\tau))^n = e^{-\frac{n\tau}{\theta_1}} \\ \triangleright P_1(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) &= P(T_{r:n} \leq \tau) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} (F_{\theta_1, \theta_2}(\tau))^j (1 - F_{\theta_1, \theta_2}(\tau))^{n-j} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } F_{\theta_1, \theta_2}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{\theta_1}} & , 0 < t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\theta_2} - \frac{\tau}{\theta_1}} & , \tau \leq t < \infty \end{cases} \quad (6.13)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα το πλαίσιο εκείνο που περιλαμβάνει s ανεξάρτητα δείγματα, οι παραπάνω πιθανότητες, βάσει της σχέσης (6.5), διαμορφώνονται ως εξής :

$$\triangleright P_s(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) = \prod_{k=1}^s P(T_{1:n_k} > \tau_k) = \prod_{k=1}^s (1 - G_k(\tau_k))^{n_k} = \prod_{k=1}^s e^{-\frac{n_k \tau_k}{\theta_1}}$$

$$\triangleright P_s(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) = \prod_{k=1}^s P(T_{r_k:n_k} \leq \tau_k) = \prod_{k=1}^s \left[\sum_{j=r_k}^{n_k} \binom{n_k}{j} (G_k(\tau_k))^j (1 - G_k(\tau_k))^{n_k - j} \right]$$

όπου οι δείκτες 1 και s των πιθανοτήτων αναφέρονται στις περιπτώσεις του ενός και των s δειγμάτων αντίστοιχα.

Διακρίνουμε ότι για $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = \tau$ και $n = \sum_{k=1}^s n_k$ η πιθανότητα μη ύπαρξης του ε.μ.π.

$\hat{\theta}_1$ είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Λογοκρισία τύπου I

Έστω ότι με τ_1 και τ_2 δηλώνουμε το χρόνο αλλαγής επιπέδου πίεσης και τερματισμού του πειράματος αντίστοιχα, στην περίπτωση του ενός δείγματος μεγέθους n . Οι πιθανότητες μη ύπαρξης των ε.μ.π. είναι οι ακόλουθες :

$$\triangleright P_1(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) = P(T_{1:n} > \tau_1) = \left(1 - F_{\theta_1, \theta_2}(\tau_1)\right)^n = e^{-\frac{n\tau_1}{\theta_1}}$$

$$\triangleright P_1(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) = \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_1}{\theta_1}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\theta_2}} \right) \right\}^n$$

όπου $F_{\theta_1, \theta_2}(t)$ η συνάρτηση της σχέσης (6.13), θέτοντας όμως όπου $\tau = \tau_1$.

Θεωρώντας ότι διαθέτουμε s ανεξάρτητα δείγματα, οι ζητούμενες πιθανότητες δίνονται τώρα από τις σχέσεις :

$$\triangleright P_s(\text{non-ex } \hat{\theta}_1) = P(R_{11} = \dots = R_{1s} = 0) = \prod_{k=1}^s P(T_{1:n_k} > \tau_{1k}) = \prod_{k=1}^s (1 - G_k(\tau_{1k}))^{n_k} = \prod_{k=1}^s e^{-\frac{n_k \tau_{1k}}{\theta_1}}$$

$$\triangleright P_s(\text{non-ex } \hat{\theta}_2) = P(R_{21} = R_{22} = \dots = R_{2s} = 0) = \prod_{k=1}^s \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_{1k}}{\theta_1}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{2k} - \tau_{1k}}{\theta_2}} \right) \right\}^{n_k}$$

όπου η συνάρτηση $G_k(t)$ δίνεται από τη σχέση (6.11).

Διακρίνουμε ότι οι πιθανότητες μη ύπαρξης του εκτιμητή $\hat{\theta}_1$ για το ένα και τα πολλαπλά δείγματα ταυτίζονται με τις αντίστοιχες πιθανότητες που είχαμε υπολογίσει στην περίπτωση λογοκρισίας τύπου II, όπως άλλωστε αναμέναμε.

Συμπεραίνουμε ότι οι παραπάνω πιθανότητες μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο για την επιλογή του πλήθους των ανεξάρτητων δειγμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε ή για τον προσδιορισμό των χρονικών σημείων στα οποία θα πρέπει να συντελούνται οι αλλαγές των επιπέδων πίεσης σε καθένα από τα s ανεξάρτητα δείγματα-πειράματα.

Βιβλιογραφία

- Abdel-Hamid, A.H., Al-Hussaini, E.K. (2009). Estimation in step-stress accelerated life tests for the exponentiated exponential distribution with Type-I censoring. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 1328-1338
- Aggarwala, R. (2001). Progressive Censoring: A Review. *Handbook of Statistics*, **20**, 373-429
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley & Sons, New York
- Bagdonavicius, V. (1978). Testing the hypothesis of additive accumulation of damages. *Probability Theory and Its Applications*, **23**, 403-408
- Bagdonavicius, V., Nikulin, M. (2002). *Accelerated life models : Modelling and Statistical Analysis*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida
- Bai, D. S., Kim, M.S. and Lee, S.H. (1989). Optimum simple step-stress accelerated life-test with censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, **38**, 528-532
- Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: an appraisal. *TEST*, **16**, 211-259
- Balakrishnan, N. (2009). A synthesis of exact inferential results for exponential step-stress models and associated optimal accelerated life-tests. *Metrika*, **69**, 351-396
- Balakrishnan, N., Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: Theory, Methods, and Applications*. Birkhäuser, Boston
- Balakrishnan, N., Cohen, A. (1991). *Order Statistics and Inference : Estimation Methods*, Academic Press
- Balakrishnan, N., Han, D. (2008). Exact inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from exponential distribution under Type-II censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 4172-4186
- Balakrishnan, N., Han, D. (2009). Optimal step-stress testing for progressively Type-I censored data from exponential distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 1782-1798
- Balakrishnan, N., Han, D. (2010). Inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from the exponential distribution under time constraint. *Computational Statistics & Data Analysis*, **54**, 2066-2081
- Balakrishnan, N., Iliopoulos, G. (2010). Stochastic monotonicity of the MLEs of parameters in exponential simple step-stress models under Type-I and Type-II censoring. *Metrika*, **72**, 89-109
- Balakrishnan, N., Kundu, D., Ng, H.K.T. and Kannan, N. (2007). Point and interval estimation for a simple step-stress model with Type-II censoring. *Journal of Quality Technology*, **39**, 35-47

- Balakrishnan, N., Rasouli, A., Sanjari Farsipour N. (2008). Exact likelihood inference based on an unified hybrid censored sample from the exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 475–488
- Balakrishnan, N., Xie, Q. (2007a). Exact inference for a simple step-stress model with Type-II hybrid censored data from the exponential distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2543-2563
- Balakrishnan, N., Xie, Q. (2007b). Exact inference for a simple step-stress model with Type-I hybrid censored data from the exponential distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3268-3290
- Balakrishnan, N., Xie, Q. , Kundu, D. (2009a). Exact inference for a simple step-stress model from the exponential distribution under time constraint. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*(to appear)
- Balakrishnan, N., Zhang, Li., Xie, Q. (2009b). Inference for a simple step-stress model with Type-I censoring and lognormally distributed lifetimes. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **38**, 1690-1709
- Barlow, R.E., Madansky, A., Proschan, F., Scheuer, E. (1968). Statistical estimation procedure for the “burn-in” process. *Technometrics*, **10**, 51–62
- Bartholomew, D.J. (1963). The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics*, **10**, 361–374
- Chandrasekar, B., Childs, A., Balakrishnan, N. (2004). Exact likelihood inference for the exponential distribution under general Type-I and Type-II hybrid censoring. *Naval Research Logistics*, **51**, 994–1004
- Chen, S. and Bhattacharyya, G.K. (1998). Exact confidence bounds for an exponential parameter under hybrid censoring. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 1857–1870
- Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N. and Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **55**, 319–330
- Cohen, A.C. (1963). Progressively censored samples in life testing. *Technometrics*, **5**, 327-329
- Cohen, A.C. (1976). Progressively censored sampling in the log-normal distribution. *Technometrics*, **18**, 841-846
- Cohen, A.C. (1991). *Truncated and Censored Samples*. Marcel Dekker, New York
- Cohen, A.C., Norgaard, N.J. (1977). Progressively censored sampling in the three parameter gamma distribution. *Technometrics*, **19**, 333-340
- DeGroot, M.H. , Goel, P.K. (1979). Bayesian estimation and optimal design in partially accelerated life testing. *Naval Research Logistics Quarterly*, **26**, 223-235
- Ebrahimi, N. (1992). Prediction intervals for future failures in the exponential distribution under hybrid censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 127–132

- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, **7**, 1-26
- Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 171-185
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York
- Elsayed, EA. (2003). Accelerated life testing. *Handbook of Reliability Engineering*, Part IV, 415-428
- Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case. *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 555–564
- Fairbanks, K., Madson, R., Dykstra, R. (1982). A confidence interval for an exponential parameter from a hybrid life test. *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 137–140
- Fard, N., Li, C. (2009). Optimal simple step stress accelerated life test design for reliability prediction. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 1799-1808
- Gouno, E. and Balakrishnan, N. (2001). Step-stress accelerated life test. In *Handbook of Statistics 20 : Advances in Reliability*, 623-639, North-Holland, Amsterdam
- Gouno, E., Sen, A., Balakrishnan, N. (2004). Optimal step-stress test under progressive Type-I censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, **53**, 388-393
- Gupta, R.D., Kundu, D. (1998). Hybrid censoring with exponential failure distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **27**, 3065–3083
- Gupta, R.D., Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal*, **43**, 117-130
- Gupta, R.D., Kundu, D. (2003). Discriminating between Weibull and generalized exponential distributions. *Comm. Statist. Theory Methods*, **32**, 705-721
- Gupta, R.D., Kundu, D. (2004). Discriminating between gamma and generalized exponential distributions. *J. Statist. Comput. Simul.*, **74**, 107-121
- Han, D., Balakrishnan, N., Sen, A., Gouno, E. (2006). Corrections on “Optimal step-stress test under progressive Type-I censoring”. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 613-614
- Herd, R. G. (1956). Estimation of the parameters of a population from a multi-censored sample. Ph.D. Thesis, Iowa State College, Ames, Iowa
- Jeong, H.S., Park, J.I., Yum, B.J. (1996). Development of (r, T) hybrid sampling plans for exponential lifetime distributions. *Journal of Applied Statistics*, **23**, 601–607
- Kannan, N., Kundu, D., Balakrishnan, N. (2010). Survival Models for Step-Stress Experiments with Lagged Effects. Special volume dedicated to W. Meeker, eds. Misha Nikulin, Nikolaos Limnios and N. Balakrishnan, *Advances in Degradation Modeling*, Birkhauser, 355 - 369
- Kateri, M. , Balakrishnan, N. (2008). Inference for a Simple Step-Stress Model with Type-II Censoring, and Weibull Distributed Lifetimes. *IEEE Transactions on Reliability*, **57**(NO.4), 616-626

- Kateri, M., Kamps, U., Balakrishnan, N. (2009). A Meta-Analysis Approach for Step-Stress Experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 2907-2919
- Kateri, M., Kamps, U., Balakrishnan, N. (2010). Multi-sample simple step-stress experiment under time constraints, *Statistica Neerlandica*, **64**, 77-96
- Kateri, M., Kamps, U., Balakrishnan, N. (2011). Optimal allocation of change points in simple step-stress experiments under Type-II censoring. *Computational Statistics & Data Analysis*, **55**, 236-247
- Khamis, I.H. (1997). Optimum M-step, step-stress design with k stress variables. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **26**, 1301-1313
- Khamis, I.H, Higgins, J.J. (1996). Optimum 3-step, step-stress tests. *IEEE Transactions on Reliability*, **32**, 59-65
- Khamis, I.H, Higgins, J.J. (1998). A New model for step-stress testing. *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, No. 2, 131-134
- Kundu, D. , Balakrishnan, N. (2009). Point and interval estimation for a simple step-stress model with random stress-change time. *Journal of Probability and Statistical Science*, **7** (2), 113-126
- Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley & Sons
- Li, C., Fard, N. (2007). Optimum Bivariate step-stress accelerated life test for censored data. *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 77-84
- Meeker, W.Q., Escobar, L.A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons, New York
- Meeker, W.Q., Hahn, G.J. (1985). How to Plan Accelerated Life Tests, In: *ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques*, 10. The American Society for Quality Control, Milwaukee, WI
- Miller, R., Nelson, W.B. (1983). Optimum simple step-stress plans for accelerated life testing. *IEEE Transactions on Reliability*, **32**, 59-65
- Nelson, W.B. (1980). Accelerated Life Testing: Step-stress models and data analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, **29**, 103-108
- Nelson, W.B. (1990). *Accelerated Life Testing, Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. John Wiley & Sons, New York
- Sedyakin, N.M. (1966). On one physical principle in reliability theory (in Russian). *Tech. Cybernetics*, **3**, 80-87
- Tang, L.C. (2003). Multiple steps step-stress accelerated tests. In: *Handbook of Reliability Engineering*(Ed., H.Pham), Chapter 24, 441-455, Springer-Verlag, New York
- Teng, S.L. , Yeo, K.P. (2002). A Least-Squares Approach to Analyzing Life-Stress Relationship in Step-Stress Accelerated Life Tests. *IEEE Transactions on Reliability*, **29**, 103-108
- Viveros, R., Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of the life characteristics from progressively censored data. *Technometrics*, **36**, 84-91

- Wang, B. (2006). Unbiased estimations for the exponential distribution based on step-stress accelerated life-testing data. *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 1227-1237
- Wang, B. (2009). Testing for the validity of the assumptions in the exponential step-stress accelerated life-testing model. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 2702-2709
- Watkins, A.J. (2001). Commentary: inference in simple step-stress models. *IEEE Transactions on Reliability*, **50**, 36-37
- Wu, S.J., Lin, Y.P., Chen, Y.J. (2006). Planning step-stress life test with progressively type I group-censored exponential data. *Statistica Neerlandica*, **60**, 46-56
- Xie, Q., Balakrishnan, N. and Han, D. (2008). Exact inference and optimal censoring scheme for a simple step-stress model under progressive Type-II censoring. *Advances in Mathematical and Statistical Modeling* (Eds., B.C. Arnold, N. Balakrishnan, J.M. Sarabia and R. Minguez), 107–137, Birkhauser, Boston
- Xiong, C. (1998). Inferences on a simple step-stress model with Type-II censored exponential data. *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, 142-146
- Xiong, C. (2003). Step-stress Accelerated Life Testing. *Handbook of Reliability Engineering*, Part IV, 457-469
- Xiong, C. , Miliken, G. (1999). Step-stress life-testing with random stress-change times for exponential data. *IEEE Transactions on Reliability*, **48**, No 2, 141-148
- Xiong, C. , Zhu, K. , Ji , M. (2006). Analysis of a simple step-stress life test with a random stress-change time. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, No 1, 67-74

РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА