

Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	Νευρωνικά Δίκτυα και Αναγνώριση Προτύπων
Όνοματεπώνυμο Φοιτητή	Αθανάσιος Παπαδημητρίου
Πατρώνυμο	Ιωάννης
Αριθμός Μητρώου	ΜΠΠΛ/ 07045
Επιβλέπων	Γεώργιος Τσιχριντζής

Ημερομηνία Παράδοσης **Μάιος 2010**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)

(υπογραφή)

(υπογραφή)

Όνομα Επώνυμο
Βαθμίδα

Όνομα Επώνυμο
Βαθμίδα

Όνομα Επώνυμο
Βαθμίδα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

- 2.1 Αναγνώριση Χαρακτήρων
- 2.2 Ταξινόμηση και παλινδρόμηση
- 2.3 Προεπεξεργασία και μελλοντική εξαγωγή
- 2.4 Η «Κατάρα» της Διαστατικότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

- 3.1 Ο νευρώνας
- 3.2 Υπολογιστικές προσομοιώσεις
- 3.3 Δομή των Νευρωνικών Δικτύων
- 3.4 Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΔΙΚΤΥΟ PERCEPTRON ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

- 4.1 Δυνατότητες Πολυεπίπεδων Δικτύων Perceptron
- 4.2 Εκπαίδευση Δικτύων MLP
- 4.3 Στοχαστικές Μηχανές
- 4.4 Εφαρμογές των Δικτύων MLP

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΔΙΚΤΥΑ ΑΚΤΙΝΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- 5.1 Τα Δίκτυα RBF
- 5.2 Σύγκριση δικτύων RBF - MLP
- 5.3 Εκπαίδευση δικτύου RBF
- 5.4 Εφαρμογές δικτύων RBF

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΧΕΜΠΙΑΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

- 6.1 Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών
- 6.2 Ο Γενικευμένος Αλγόριθμος του Hebb (GHA)
- 6.3 Εφαρμογές των Χεμπιανών Μοντέλων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΜΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

- 7.1 Το δίκτυο του Hopfield
- 7.2 Δομή δικτύου Hopfield
- 7.3 Το δίκτυο Hamming

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κατά τα τελευταία έτη η νευρωνική υπολογιστική έχει αναδειχθεί ως ένα πρακτικό της τεχνολογίας, με επιτυχημένες εφαρμογές σε πολλούς τομείς. Οι πλειοψηφίες αυτών των εφαρμογών ασχολείται με τα προβλήματα στην αναγνώριση προτύπων και να κάνουν χρήση feed-forward αρχιτεκτονικών δικτύων όπως το perceptron πολλαπλών στρωμάτων και τα δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων. Επίσης, έχει γίνει επίσης ευρέως γνωστό ότι οι επιτυχείς εφαρμογές των νευρωνικών απαιτούν μια προσέγγιση η οποία βασίζεται σε συγκεκριμένες αρχές και δεν είναι ad hoc.

Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι να παρουσιάσει τη χρήση των Νευρωνικών Δικτύων η οποία αντανάκλα της ως άνω εφαρμογές. Από την προοπτική της αναγνώρισης προτύπων, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να θεωρηθούν ως επέκταση των πολλών συμβατικών τεχνικών που έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια αρκετών δεκαετιών. Ιστορικά, πολλές έννοιες στο νευρικό υπολογισμό έχουν εμπνευστεί από τις μελέτες των βιολογικών δικτύων. Η προοπτικές της στατιστικής αναγνώρισης προτύπων, εντούτοις, προσφέρει έναν αμεσότερο δρόμο σε πολλές από τις ίδιες έννοιες.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσει τον τρόπο εφαρμογής της αναγνώρισης των προτύπων μέσω των νευρωνικών δικτύων. Αρχικά στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια αναφορά στις βασικές έννοιες της Στατιστικής Αναγνώρισης των Προτύπων στην αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων. Στην συνέχεια στο Κεφάλαιο 3 αναφερόμαστε στον τρόπο που είναι δομημένα και λειτουργούν τα Νευρωνικά Δίκτυα. Στο Κεφάλαιο 4 βλέπουμε την αναπαράσταση διαχωριστικών επιφανειών μέσω ενός δικτύου Perceptron Πολλαπλών Στρωμάτων. Στο Κεφάλαιο 5 αναπτύσσεται ο τρόπος λειτουργίας των Δικτύων Ακτινικών Συναρτήσεων ενώ στο Κεφάλαιο 6 των Χεμπιανών Μοντέλων Μάθησης, ειδικές περιπτώσεις Νευρωνικών Δικτύων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 αναφέρεται στα Μη Εκπαιδευόμενα Μοντέλα, στα Δίκτυα Hopfield και Hamming.

ABSTRACT

In recent years neural computing has emerged as a practical technology, with successful applications in many fields. The majorities of these applications is concerned with problems in pattern recognition and make use of feed-forward network architectures such as the multi-layer perceptron and the radial basis function network. Also, it has also become widely acknowledged that successful applications of neural computing require a principled, rather than ad hoc, approach.

The aim of this Diploma Thesis is to introduce to a treatment of neural networks which reflects these developments. From the perspective of pattern recognition, neural networks can be regarded as an extension of the many conventional techniques which have been developed over several decades. Historically, many concepts in neural computing have been inspired by studies of biological networks. The perspective of statistical pattern recognition, however, offers a much more direct and principled route to many of same concepts.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα συστήματα ταξινόμησης προτύπων που περιέχουν διασυνδεδεμένες μη γραμμικές υπολογιστικές μονάδες αποτελούν προσομοιώσεις της φυσιολογίας των νευρικών κυττάρων των έμβιων όντων και ονομάζονται τεχνητά νευρωνικά δίκτυα.

Ένας από τους πρώτους ερευνητές που συνέλαβε την ιδέα ότι οι εγκεφαλικές λειτουργίες εκτελούνται από στοιχειώδεις υπολογιστικές μονάδες που ονομάζονται νευρώνες είναι ο Ισπανός Santiago Ramón y Cajal (1911). Πειράματα που έγιναν στην φυσιολογία των νευρικών κυττάρων έδειξαν ότι η λειτουργία τους μπορεί, σε απλοποιημένη μορφή, να προσομοιωθεί με μη γραμμικούς τελεστές που δέχονται σήματα από έναν πεπερασμένο αριθμό εισόδων και διαθέτουν μονάχα μία έξοδο.

Η εγκεφαλική ουσία των έμβιων όντων αποτελείται από εκατομμύρια διασυνδεδεμένων νευρώνων τα οποία αποτελούν ένα πολύπλοκο και ισχυρά μη γραμμικό νευρωνικό δίκτυο. Έχει αποδειχθεί ότι η γνώση του κόσμου συσσωρεύεται στην μνήμη του δικτύου. Η τοπολογία του διαφέρει σημαντικά στα έμβια όντα και είναι αυτή η οποία δίνει και τα διαφορετικά χαρακτηριστικά αντίληψης των ερεθισμάτων του περιβάλλοντος. Έχουν παρατηρηθεί ποσοτικές αλλά και ποιοτικές διαφοροποιήσεις στο είδος των συνδέσεων, τον μηχανισμό επεξεργασίας σημάτων και το πλήθος των εισόδων των νευρικών κυττάρων. Γι' αυτό τον λόγο και τα νευρικά κύτταρα έχουν ομαδοποιηθεί σε έναν μικρό αριθμό κατηγοριών, ανάλογα με τους μηχανισμούς λειτουργίας τους.

Η υπάρχουσα τεχνολογία δεν επιτρέπει την προσομοίωση των πολύπλοκων επεξεργασιών που εκτελούνται στα νευρικά κύτταρα. Έχει αποδειχθεί όμως ότι απλές προσομοιώσεις των νευρικών κυττάρων, που περιγράφουν τα βασικά τους γνωρίσματα, δίνουν εντυπωσιακά αποτελέσματα σε εφαρμογές ταξινόμησης προτύπων, προσεγγίσεων απόκρισης συστημάτων, προβλήματα αυτόματου ελέγχου, κ.α..

Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μηχανισμών των φυσικών νευρωνικών δικτύων είναι τα ακόλουθα:

1. *Μη γραμμικότητα.*

Το βασικότερο γνώρισμα των φυσικών νευρωνικών δικτύων είναι ότι η έξοδος σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί έναν γραμμικό συνδυασμό των εισόδων του.

2. *Εκπαίδευση από παραδείγματα.*

Βασικό στοιχείο των νευρωνικών δικτύων είναι η ικανότητα τους να εκπαιδεύονται αντλώντας γνώση και τροποποιώντας τα στοιχεία μνήμης του δικτύου. Προηγούμενες ενεργοποιήσεις του δικτύου μεταβάλλουν την συμπεριφορά του έτσι ώστε όταν ενεργοποιηθεί από ίδια ή ομοιάζοντα σήματα εισόδου να δίνουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την επιθυμούμενη έξοδο.

3. *Προσαρμογή.*

Τα φυσικά νευρωνικά δίκτυα έχουν την δυνατότητα να αλλάζουν τα δεδομένα εξόδου τους και να προσαρμόζουν την συμπεριφορά τους όταν μεγάλης κλίμακας αλλαγές λαμβάνουν χώρα στην είσοδό τους.

Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα προσαρμογής αποτελεί η μεταβολή της συμπεριφοράς του δικτύου των νευρικών κυττάρων που βρίσκονται επάνω στον αμφιβληστροειδή χιτώνα. Με αλλαγή του φωτισμού του περιβάλλοντος χώρου τα νευρικά κύτταρα αλλάζουν την απόκριση τους έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η διακριτική τους ικανότητα (η αντίληψη των αντικειμένων που βρίσκονται στον περιβάλλοντα χώρο). Η διαδικασία προσαρμογής μακροσκοπικά γίνεται αντιληπτή σε μεγάλες μεταβολές του φωτισμού που διαρκεί από δέκατα του δευτερολέπτου έως έναν μικρό αριθμό δευτερολέπτων.

Οι περισσότεροι από εμάς θα έχουμε παρατηρήσει ότι ενώ βρισκόμαστε μέσα σε αυτοκίνητο που κινείται, όταν μπορούμε μέσα σε σκοτεινό τούνελ αρχικά δεν διακρίνουμε κανένα αντικείμενο. Με την πάροδο του χρόνου παρατηρούμε ότι μπορούμε να διακρίνουμε τα λευκά αντικείμενα που βρίσκονται μέσα στο τούνελ όπως οι διαγραμμίσεις επάνω στην άσφαλο. Όταν ξαφνικά βγούμε πάλι στο φως της ημέρας, για ένα μικρό χρονικό διάστημα μας τυφλώνει το φως το οποίο πριν μπορούμε στο τούνελ δεν μας ενοχλούσε καθόλου.

4. Αντοχή σε διακοπές συνδέσεων και λειτουργιών νευρώνων.

Η συμπεριφορά του δικτύου δεν διαταράσσεται σημαντικά από τυχόν διακοπή συνδέσεων ή και αφαίρεση νευρώνων. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς των νευρικών κυττάρων διότι είναι γνωστό ότι διακοπή της λειτουργίας μικρών τμημάτων του εγκεφάλου επηρεάζει συνήθως σε πολύ μικρό βαθμό τις υπόλοιπες εγκεφαλικές λειτουργίες.

5. Ομοιότητα λειτουργίας των νευρώνων.

Οι νευρώνες πρέπει να εκτελούν τις ίδιες βασικές λειτουργίες διότι τα νευρικά κύτταρα του ίδιου τύπου έχουν την ίδια φυσιολογία.

6. Παράλληλη επεξεργασία δεδομένων.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο συνδεσμολογίας των νευρικών κυττάρων, το τεράστιο πλήθος των πληροφοριών που επεξεργάζονται και την σχετικά μεγάλη καθυστέρηση απόκρισης του φυσικού κυττάρου (έχει υπολογιστεί ένας μέσος χρόνος απόκρισης της τάξης των 10^{-3} δευτερολέπτων, ενώ η απόκριση ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος ανέρχεται σε 10^{-6} δευτερόλεπτα), γίνεται φανερό ότι το φυσικό νευρωνικό δίκτυο επεξεργάζεται τα δεδομένα παράλληλα για να είναι σε θέση να επιτύχει απόκριση σε σχεδόν πραγματικό χρόνο και να επεξεργάζεται ταυτόχρονα έναν πολύ μεγάλο αριθμό πληροφοριών.

Η θεωρία των μη γραμμικών δικτύων που προσομοιάζουν την λειτουργία των νευρικών κυττάρων αναπτύχθηκε σημαντικά τα τελευταία χρόνια προσφέροντας σημαντικές βελτιώσεις στα χαρακτηριστικά προσομοιώσεων όπου αυτή εφαρμόστηκε. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα αποτελούν μία γενική θεωρία μη γραμμικών συστημάτων και γι' αυτό τον λόγο έχουν ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών με σημαντικότερους τομείς την αναγνώριση-ταξινόμηση προτύπων, την ψηφιακή επεξεργασία σήματος, τον αυτόματο έλεγχο συστημάτων κ.ο.κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Ο όρος «Αναγνώριση Προτύπων» καλύπτει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων επεξεργασίας πληροφοριών (*information processing problems*) μεγάλης πρακτικής σημασίας, από την αναγνώριση ομιλίας και την ταξινόμηση των χειρόγραφων χαρακτήρων, μέχρι την ανίχνευση βλάβης σε μηχανήματα αλλά και την ιατρική διάγνωση. Συχνά αυτά είναι προβλήματα που αρκετοί άνθρωποι επιλύουν χωρίς να απαιτείται να δαπανηθεί ιδιαίτερη προσπάθεια. Ωστόσο, η λύση των προβλημάτων αυτών με την χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει, σε πολλές περιπτώσεις, αποδειχθεί ότι είναι εξαιρετικά δύσκολη. Για να έχουμε την καλύτερη ευκαιρία για την ανάπτυξη αποτελεσματικών λύσεων, είναι σημαντικό να υιοθετηθεί μια προσέγγιση βασισμένη σε αρχές που θα στηρίζεται σε έγκυρες θεωρητικές έννοιες.

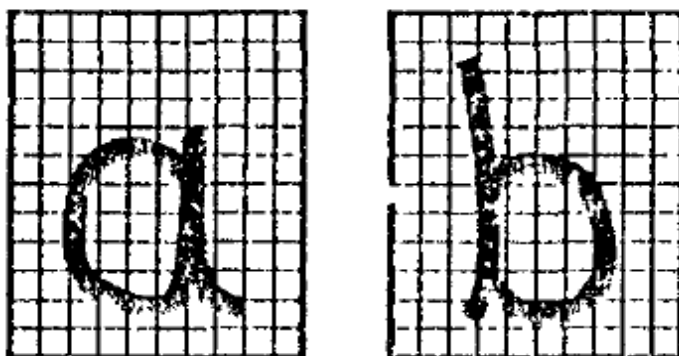
Το πιο γενικό, αλλά και πιο φυσικό πλαίσιο στο οποίο μπορούν να διατυπωθούν λύσεις σε προβλήματα αναγνώρισης προτύπων είναι με τη βοήθεια της στατιστικής, η οποία αναγνωρίζει η πιθανολογική φύση τόσο των πληροφοριών που επιδιώκουμε να επεξεργαστούμε, καθώς και η μορφή με την οποία οφείλουμε να εκφράσουμε τα αποτελέσματα. Η Στατιστική Αναγνώριση Προτύπων (Statistical Pattern Recognition) είναι ένας καλά θεμελιωμένος χώρος με μεγάλη ιστορία. Στη παρούσα εργασία θα αποτυπωθούν τα νευρωνικά δίκτυα σαν επέκταση των συμβατικών τεχνικών στατιστικής αναγνώρισης προτύπων και θα βασιστούμε στα πολλά ισχυρά αποτελέσματα που προσφέρει ο χώρος αυτός

Στο παρόν κεφάλαιο παρέχουμε μια εισαγωγή σε πολλές από τις βασικές έννοιες στην αναγνώριση προτύπων που θα είναι κεντρικής σημασίας στην χρήση των νευρωνικών δικτύων. Χρησιμοποιώντας ένα απλό παράδειγμα προτύπου ταξινόμησης, και κάνοντας μια αναλογία με το πρόβλημα της τοποθέτησης τιμών σε καμπύλη (*problem of curve fitting*), έχουμε εισαγάγει μια σειρά από σημαντικά θέματα τα οποία θα επανεμφανιστούν σε επόμενα κεφάλαια, στο πλαίσιο των νευρωνικών δικτύων. Το κεφάλαιο αυτό χρησιμεύει επίσης για να εισαγάγει ορισμένες από τις βασικές έννοιες της στατιστικής αναγνώρισης προτύπων.

2.1 Αναγνώριση Χαρακτήρων

Μια καλή εισαγωγή σε πολλές από τις θεμελιώδεις έννοιες της στατιστικής αναγνώρισης προτύπων, μπορεί να πραγματοποιηθεί εξετάζοντας ένα απλό, υποθετικό πρόβλημα της διάκρισης χειρόγραφων εκδόχων των χαρακτήρων «a» και «b». Εικόνες από τους χαρακτήρες θα μπορούσαν να συλληφθούν από μία κάμερα τηλεόρασης και τροφοδοτούνται σε έναν υπολογιστή, και επιδιώκουμε έναν αλγόριθμο που μπορεί να διακρίνει τόσο αξιόπιστα όσο το δυνατόν μεταξύ των δύο χαρακτήρων. Μια εικόνα αναπαριστάται από μια σειρά από pixels, όπως απεικονίζεται στο Διάγραμμα 1.1, καθένα από τα οποία φέρει μια σχετική αξία την οποία θα δηλώνουν με x_i (όπου ο δείκτης i προσδιορίζει τα επιμέρους pixel). Η αξία των x_i θα μπορούσε, για παράδειγμα, να κυμαίνεται από 0 για ένα εντελώς λευκό pixel σε 1 για ένα εντελώς μαύρο pixel.

Είναι συχνά πρακτικό να συγκεντρωθούν οι μεταβλητές x_i μαζί σε ένα διάνυσμα $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ όπου d είναι ο συνολικός αριθμός αυτών των μεταβλητών, καθώς και ο εκθέτης T υποδηλώνει τη μετατόπιση (transpose). Κατά την εξέταση του συγκεκριμένου παραδείγματος θα πρέπει να αγνοήσουμε μια σειρά από λεπτομερείς πρακτικές συνέπειες, οι οποίες θα πρέπει να αντιμετωπιστούν σε μια πραγματική εφαρμογή, και να επικεντρωθούμε αντ' αυτού σε θεμελιώδη θέματα.



Σχήμα 2.1, Εικονογράφηση 2 υποθετικών εικόνων οι οποίες απεικονίζουν την χειρόγραφο εκδοχή των γραμμάτων 'a' και 'b'.

Ο στόχος σε αυτό το 'πρόβλημα ταξινόμησης' (classification problem) είναι να αναπτυχθεί ένας αλγόριθμος που θα αναθέτει κάθε εικόνα, που απεικονίζεται από το διάνυσμα x , σε μία από τις δύο κλάσεις, οι οποίες δηλώνονται ως C_k όπου $k = 1, 2$, έτσι ώστε η κλάση C_1 αντιστοιχεί στο γράμμα 'a' και η κλάση C_2 στο γράμμα 'b'. Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε μια βάση δεδομένων με εικόνες οι οποίες αντιστοιχούν στα γράμματα «a» και «b» και οι οποίες έχουν ήδη ταξινομηθεί από άνθρωπο. Μια τέτοια συλλογή θα αναφέρεται ως ένα σύνολο δεδομένων (data set). Στη βιβλιογραφία της Στατιστικής ονομάζεται δείγμα (sample).

Ένα προφανές πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε απορρέει από τις πολλαπλές διαστάσεις των στοιχείων που υπάρχουν στο σύνολο δεδομένων. Για ένα τυπικό μέγεθος εικόνας των 256×256 pixels, κάθε εικόνα μπορεί να παρουσιαστεί σαν ένα σημείο σε ένα d -διαστάσεων χώρο, όπου $d = 65.536$. Οι άξονες αυτού του διαστήματος αντιπροσωπεύουν οι γραμμοσκιασμένες τιμές των αντίστοιχων εικονοστοιχείων οι οποίες, στο παράδειγμα αυτό μπορεί να αναπαρίσταται από αριθμούς των 8-bit.

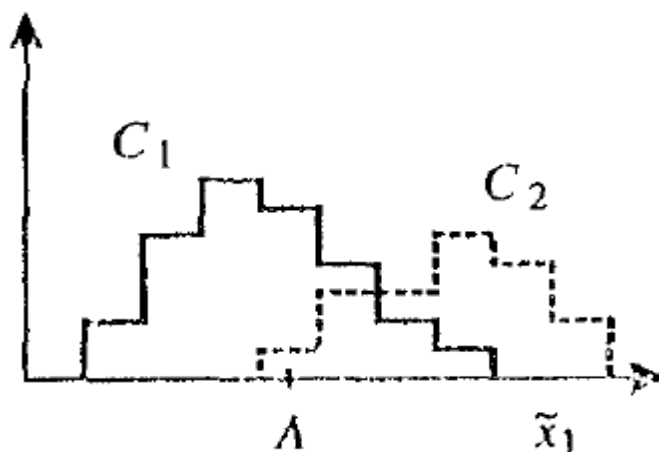
Κατ' αρχήν, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε την αποθήκευση κάθε εικόνας στην αντίστοιχη κατηγορία. Στην πράξη, βέβαια, αυτό είναι αδύνατο, λόγω του πολύ μεγάλου αριθμού των εικόνων: για μια εικόνα 256×256 με 8-bit pixel τιμών θα υπήρχαν $2^{8 \times 256 \times 256}$; 10^{158000} διαφορετικές εικόνες. Αντίθετα, θα μπορούσαμε να έχουμε μερικές χιλιάδες παραδείγματα στο σύνολο της κατάρτισης μας. Είναι σαφές τότε ότι το σύστημα ταξινόμησης πρέπει να είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να είναι σε θέση να χαρακτηρίσει σωστά προηγουμένως άγνωστο διάνυσμα εικόνας. Αυτό είναι το πρόβλημα της γενίκευσης (problem of generalization).

Η παρουσία μεγάλου αριθμού μεταβλητών εισόδου ενδέχεται να παρουσιάσει ορισμένα σοβαρά προβλήματα για τα συστήματα αναγνώρισης προτύπων. Μια τεχνική η οποία συμβάλει στην άμβλυνση των προβλημάτων αυτών είναι ο συνδυασμός μεταβλητών εισόδου ώστε να δημιουργηθεί μικρότερος αριθμός νέων μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές μπορούν να κατασκευαστούν «με το χέρι» (by hand) και οι οποίες θα στηρίζονται στην κατανόηση ενός συγκεκριμένου προβλήματος ή θα προκύπτουν από τα δεδομένα (data) μέσω αυτόματων διαδικασιών (automated procedures).

Στο παράδειγμα των γραμμάτων, μπορούμε να αξιολογήσουμε την αναλογία (ratio) του ύψους των χαρακτήρων με το πλάτος τους, η οποία θα ορίζεται ως x_1 , δεδομένου ότι αναμένουμε οι χαρακτήρες από την κλάση C_2 (που αντιστοιχεί στο γράμμα 'b') θα έχουν

μεγαλύτερες τιμές για το x_1 από αυτές της κλάσης C_k (που αντιστοιχεί στο γράμμα 'a'). Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε να ελπίζουμε ότι μόνο η τιμή της μεταβλητής x_1 θα επιτρέπει σε νέες εικόνες να ορίζονται στη σωστή κλάση.

Υποθέτουμε ότι μετράμε την τιμή του x_1 για κάθε εικόνα στη βάση δεδομένων μας, και τις αναπαραστήσουμε γραφικά για κάθε μία από τις δύο κλάσεις. Το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει τη μορφή την οποία παίρνουν τα συγκεκριμένα ιστογράμματα.



Σχήμα 2.2. Schematic, plot of the histograms of the feature variable x_1 given by the ratio of the height of η character to its width, for a data set of images containing examples from classes $C_1 \equiv 'a'$ and $C_2 \equiv 'b'$. Notice that diameters from class C_2 tend to have larger values of x_1 than characters from class C_1 , but that there, is a significant overlap between the two histograms. If a new image is observed which has a value of x_1 given by A , we might expect the image is more likely to belong to class C_1 than C_2 .

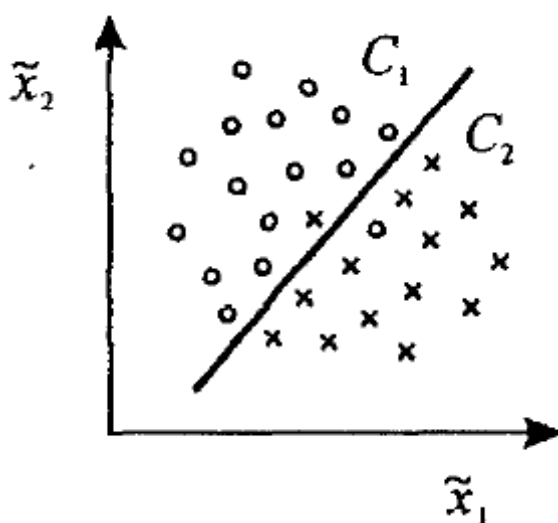
Παρατηρούμε ότι τυπικά παραδείγματα για το γράμμα 'b' παίρνουν μεγαλύτερες τιμές για το x_1 από ότι παραδείγματα για το γράμμα 'a'. Επίσης τα διαγράμματα αλληλεπικαλύπτονται έτσι ώστε ένα παράδειγμα του 'b', να έχει μια μικρότερη τιμή του x_1 από μερικά παράδειγμα του 'a' με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η διάκριση απόλυτα μεταξύ των δύο κλάσεων μόνο με την τιμή του x_1 .

Αν υποθέσουμε πως η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι η τιμή του x_1 , θα πρέπει να βρούμε ένα καλύτερο τρόπο αξιοποίησης της πληροφορίας που μας παρέχει ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των εσφαλμένων ταξινομήσεων των εικόνων στις κλάσεις. Μια προσέγγιση είναι η δημιουργία ενός συστήματος ταξινόμησης (classifier system) που χρησιμοποιεί ένα κατώτατο όριο για την τιμή του x_1 και το οποίο χαρακτηρίζει ως C_2 κάθε εικόνα για την οποία η τιμή του x_1 υπερβαίνει το κατώτατο όριο, και κατά συνέπεια ως C_k όλες τις υπόλοιπες εικόνες. Για να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των εσφαλμένων

ταξινομήσεων θα πρέπει το κατώτατο όριο να επιλεγεί το σημείο όπου συγκλίνουν τα 2 διαγράμματα.

Η μέθοδος αυτή αν και ελαττώνει τις εσφαλμένες ταξινομήσεις εντούτοις δεν τις ελαχιστοποιεί καθώς συνεχίζουν να υπάρχουν λιγοστά σημεία αλληλοεπικάλυψης των δύο διαγραμμάτων με αποτέλεσμα να γίνονται εσφαλμένες ταξινομήσεις εικόνων στις δύο κλάσεις. Ένας τρόπος βελτίωσης του προβλήματος είναι η εισαγωγή μιας 2^{n_s} μεταβλητής x_2 με αποτέλεσμα η ταξινόμηση των εικόνων να γίνεται με βάση την πληροφορία που παρέχουν οι x_1 και x_2 .

Στο παρακάτω διάγραμμα (2.3) μπορούμε να δούμε παραδείγματα προτύπων στο χώρο (x_1, x_2) .



Σχήμα 2.3, Ένα υποθετικό πρόβλημα ταξινόμησης μεταξύ των x_1 και x_2 . Οι κύκλοι δηλώνουν πρότυπα από την κλάση C_1 και οι σταυροί από την κλάση C_2 . Η διαχωριστική γραμμή μπορεί να προσδιορίσει ένα καλό χώνισμα των δύο κλάσεων παρόλο που κάποια πρότυπα θα ταξινομηθούν σε λάθος κλάση.

Αν σχεδιάσουμε μια γραμμή γνωστή ως όριο απόφασης (*decision boundary*), η οποία δίνει καλό διαχωρισμό των δύο κλάσεων. Τα νέα πρότυπα που τοποθετούνται από μία πλευρά της γραμμής ανήκουν στην κλάση C_k (που αντιστοιχεί στο γράμμα 'a') ενώ όσα τοποθετούνται από την άλλη πλευρά ανήκουν στην κλάση C_2 (που αντιστοιχεί στο γράμμα 'b').

2.2 Ταξινόμηση και παλινδρόμηση

(Classification and Regression)

Το σύστημα που αναπτύξαμε προηγουμένως μπορεί να ταξινομήσει χειρόγραφες εικόνες μεταξύ 2 κλάσεων C_k και C_2 . Μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα της ταξινόμησης μέσω μιας μεταβλητής y η οποία λαμβάνει την τιμή '1' αν μια εικόνα ανήκει στην κλάση C_k και την τιμή '0' αν μια εικόνα ανήκει στην κλάση C_2 . Το συνολικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι δέχεται σαν είσοδο μεταβλητές x_1, \dots, x_d οι οποίες αναπαριστούν την ένταση των Pixels, και σαν έξοδο μια μεταβλητή y η οποία δηλώνει το όνομα της κλάσης.

Σε πιο σύνθετα προβλήματα θα μπορούσαν να υπάρχουν σαν δυνατές έξοδοι πολλές μεταβλητές y_k όπου $k = 1, \dots, c$. Για παράδειγμα αν θέλουμε να ταξινομήσουμε τα 24 γράμματα του Αλφαβήτου, θα πρέπει να έχουμε 24 μεταβλητές κάθε μία από της οποίες θα αντιστοιχεί σε ένα γράμμα του Αλφαβήτου.

Σε γενικές γραμμές δεν είναι δυνατό να οριστεί ένας τύπος για την απαιτούμενη αντιστοίχιση, παρά μόνο με την βοήθεια συγκεκριμένων παραδειγμάτων δεδομένων. Η αντιστοίχιση πραγματοποιείται με τη χρήση μαθηματικών συναρτήσεων που περιέχουν μεταβλητές, των οποίων οι τιμές προσδιορίζονται με βάση τα δεδομένα.

Ένας γενικός τύπος τέτοιων συναρτήσεων είναι ο ακόλουθος:

$$y_k = y_k(x; w)$$

Όπου το w δηλώνει το διάνυσμα των παραμέτρων. Ένα Νευρωνικό Δίκτυο μπορεί να οριστεί σαν μια ειδική επιλογή από τις συναρτήσεις $y_k(x; w)$. Σε αυτή την περίπτωση οι παράμετροι που αποτελούν το w συχνά καλούνται weights (βάρη).

Η σημασία των νευρωνικών δικτύων σε αυτό το πλαίσιο είναι ότι προσφέρουν ένα πολύ ισχυρό και πολύ γενικό πλαίσιο για την αναπαράσταση των μη γραμμικών αντιστοιχίσεων (non-linear mappings) από διάφορες μεταβλητές εισόδου σε διάφορες μεταβλητές εξόδου, όπου είναι η μορφή της αντιστοίχισης διέπεται από μια σειρά παραμέτρων που προσαρμόζονται στο εκάστοτε πρόβλημα. Η διαδικασία καθορισμού των τιμών για τις παραμέτρους αυτές με βάση τα δεδομένα που υπάρχουν ονομάζεται εκπαίδευση (training), καθώς και για το λόγο αυτό το σύνολο στοιχείων των παραδειγμάτων γενικά αναφέρεται ως training set.

Μοντέλα νευρωνικών δικτύων, καθώς και πολλές συμβατικές προσεγγίσεις με στατιστική αναγνώριση προτύπων, μπορεί να θεωρηθούν ως συγκεκριμένες επιλογές για του τύπους που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν την αντιστοίχιση, μαζί με τις ειδικές διαδικασίες για τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων της αντιστοίχισης. Στην πραγματικότητα, τα μοντέλα νευρωνικών δικτύων συχνά περιέχουν συμβατικές προσεγγίσεις (conventional approaches) ως ειδικές περιπτώσεις.

Σε προβλήματα ταξινόμησης (classification problems) το δύσκολο που πρέπει να γίνει είναι να δοθούν νέες εισόδοι (inputs) σε καθεμία από τις διακριτές κλάσεις ή κατηγορίες. Ωστόσο, υπάρχουν πολλές άλλες δυσκολίες στην αναγνώριση προτύπων, τα οποία είναι γνωστά ως προβλήματα παλινδρόμησης, στα οποία οι έξοδοι (outputs) αντιπροσωπεύουν τις τιμές των συνεχών μεταβλητών. Παραδείγματα είναι ο προσδιορισμός του κλάσματος πετρελαίου σε αγωγό από τις μετρήσεις της εξασθένησης της ακτίνας γάμμα (gamma beams) που διέρχεται από το σωλήνα, και την πρόβλεψη της αξίας της συναλλαγματικής ισοτιμίας του νομίσματος στο μέλλον κάποια στιγμή, λόγω της αξίας της στο πρόσφατο παρελθόν.

2.3 Προεπεξεργασία και μελλοντική εξαγωγή

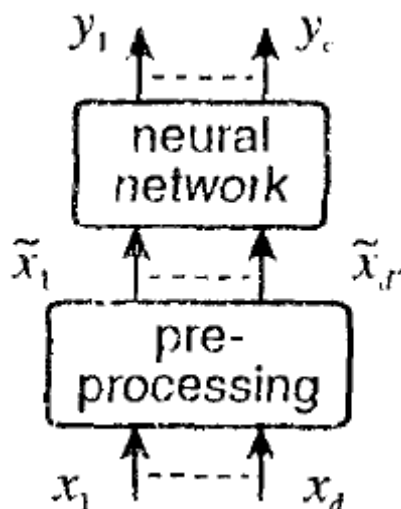
(Pre-processing and feature extraction)

Αντί να αντιπροσωπεύουν ολόκληρο το μετασχηματισμό από το σύνολο των μεταβλητών εισόδου x_1, \dots, x_d με το σύνολο των μεταβλητών εξόδου y_1, \dots, y_c από μια μόνο λειτουργία ενός νευρωνικού δικτύου (single neural network function), συχνά υπάρχει μεγάλο όφελος στη διάσπαση της αντιστοίχισης σε ένα αρχικό στάδιο πριν από την επεξεργασία, ακολουθούμενη από το ίδιο παραμετρικό (**Parameterized**) νευρωνικό μοντέλο δικτύου.

Για πολλές εφαρμογές, τα αποτελέσματα από το δίκτυο, υποβάλλονται σε επεξεργασία για τη μετατροπή τους στην απαιτούμενη μορφή (required form). Στο παράδειγμα αναγνώρισης χαρακτήρων των γραμμάτων, οι αρχικές μεταβλητές εισόδου οι οποίες δόθηκαν από τις τιμές των pixel x_i , μετασχηματίστηκαν σε μία μόνο μεταβλητή \mathcal{F} . Αυτό είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής της «προεπεξεργασίας» που ονομάζεται “feature extraction” (εξαγωγή χαρακτηριστικών).

Η διάκριση μεταξύ του σταδίου της προ-επεξεργασίας και του νευρωνικού δικτύου δεν είναι πάντα σαφής, αλλά συχνά η προεπεξεργασία μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερός μετασχηματισμός των μεταβλητών, ενώ το ίδιο το δίκτυο περιλαμβάνει προσαρμοστικές

παραμέτρους (adaptive parameters) των οποίων οι τιμές ορίζονται ως μέρος της διαδικασίας εκπαίδευσης (training process). Η χρήση της προ-επεξεργασίας μπορεί συχνά να βελτιώσει σημαντικά την απόδοση ενός συστήματος αναγνώρισης προτύπων.



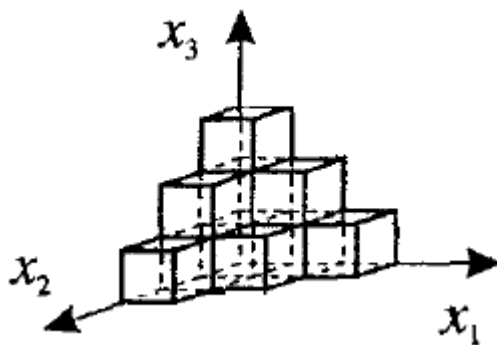
Σχήμα 2.4, The majority of neural network applications require the original input variables x_1, \dots, x_d to be transformed by some form of pre-processing to give a new set of variables $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$. These are then treated as the inputs to the neural network, whose outputs are denoted by y_1, \dots, y_c .

Η πλειοψηφία των εφαρμογών νευρικών δικτύων απαιτεί ότι οι αρχικές μεταβλητές εισαγωγής x_1, \dots, x_d μετασχηματίζονται από κάποια μορφή προ-επεξεργασίας για να δώσουν ένα νέο σύνολο μεταβλητών $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$. Αυτοί στη συνέχεια θεωρούνται οι μεταβλητές εισόδου στο νευρωνικό δίκτυο του οποίου τα αποτελέσματα δηλώνονται με y_1, \dots, y_c .

2.4 Η «Κατάρ» της Διαστατικότητας (the curse of dimensionality)

Υπάρχει ένας άλλος σημαντικός λόγος για τον οποίο η προ-επεξεργασία μπορεί να έχει μια βαθιά επίδραση στην απόδοση ενός συστήματος αναγνώρισης προτύπων. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της αναγνώρισης των γραμμάτων, είδαμε ότι αυξάνοντας τον αριθμό χαρακτηριστικών γνωρισμάτων από 1 σε 2 αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια βελτίωση στην απόδοση. Αυτό σημαίνει ότι καλό θα ήταν να αυξήσουμε τον αριθμό των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων ή ακόμα να χρησιμοποιήσουμε και τις 65.536 τιμές των εικονοστοιχείων (pixels) απευθείας σαν εισόδους στο νευρωνικό μας δίκτυο. Στην πράξη, εντούτοις, συχνά διαπιστώνουμε ότι, πέρα από ένα ορισμένο σημείο, η προσθήκη νέων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων μπορεί να οδηγήσει σε μια μείωση της απόδοσης του συστήματος ταξινόμησης.

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η επίδραση της διαστατικότητας, θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα για την μοντελοποίηση των μη γραμμικών αντιστοιχίσεων (non-linear mappings) από ένα σύνολο μεταβλητών εισόδου x_i σε μια μεταβλητή εξόδου y στηριζόμενο σε ένα σύνολο δοκιμαστικών δεδομένων.



Ένας τρόπος ορισμού της αντιστοίχισης από ένα χώρο d διαστάσεων x_1, \dots, x_d σε μια μεταβλητή εξόδο y είναι ο χωρισμός του χώρου εισόδου (input space) σε ένα αριθμό κελιών, (βλ. σχήμα όπου $d = 3$) και να καθοριστεί η τιμή του y για κάθε ένα κελί.

Το πρόβλημα που προκύπτει από την προσέγγιση αυτή είναι ότι ο αριθμός των κελιών και ως εκ τούτου ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμαστικών δεδομένων, αυξάνεται εκθετικά με το d , ένα φαινόμενο το οποίο είναι γνωστό ως “The curse of Dimensionality” (η κατάρα της Διαστατικότητας). Ο όρος εισήχθη το 1961 από τον Bellman και αναφέρεται στο πρόβλημα της ανάλυσης δεδομένων πολλών μεταβλητών καθώς αυξάνει η διάσταση.

Αν και οι συνέπειες της διαστατικότητας δεν είναι συνήθως τόσο σοβαρές όσο παρουσιάζονται στο παραπάνω παράδειγμα, είναι αληθές ότι σε αρκετά προβλήματα, η μείωση του αριθμού των μεταβλητών εισόδου μπορεί μερικές φορές να οδηγήσει σε βελτίωση της απόδοσης για ένα συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, αν και στο τέλος η πληροφορία απορρίπτεται.

Η σταθερή ποσότητα των δεδομένων είναι σε καλύτερη θέση να προσδιορίσει την αντιστοίχιση σε ένα χαμηλών διαστάσεων χώρο, και αυτό αντισταθμίζει την απώλεια πληροφορίας. Στο παράδειγμα αναγνώρισης γραμμάτων, θα μπορούσαμε να λάβουμε υπόψη μας όλες τις τιμές των 65.536 εικονοστοιχείων ως εισόδους στο μη-γραμμικό μοντέλο. Μια τέτοια προσέγγιση, ωστόσο, αναμένεται να δώσει εξαιρετικά φτωχά αποτελέσματα ως συνέπεια της επίδρασης της διαστατικότητας σε συνδυασμό με ένα περιορισμένο μέγεθος των δεδομένων.

Ένα σημαντικός ρόλος της προ-επεξεργασίας σε πολλές εφαρμογές είναι η μείωση της διαστατικότητας των δεδομένων πριν χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση ενός Νευρωνικού Δικτύου ή ενός άλλου συστήματος αναγνώρισης προτύπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Η έρευνα σχετικά με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι εμπνευσμένη από τη δομή και τη λειτουργία του εγκεφάλου. Βασικό δομικό στοιχείο του εγκεφάλου είναι οι νευρώνες, δηλαδή νευρικά κύτταρα τα οποία δημιουργούν ένα πυκνό δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ τους. Κίνητρο για τη μελέτη του νευρώνα και των νευρωνικών δικτύων είναι η ελπίδα ανακάλυψης ενός νέου υπολογιστικού μοντέλου βασισμένου σε μια δικτυακή δομή παρόμοια με αυτή του εγκεφάλου.

Αυτή η καινούργια υπολογιστική πλατφόρμα – γνωστή ως Connectionist Model – θα είναι πιο κατάλληλη για ανάπτυξη ευφυών αλγορίθμων και γενικότερα διαδικασιών σχετιζομένων με τη νοημοσύνη, όπως η μάθηση, η μνήμη, η γενίκευση, η ομαδοποίηση προτύπων, κλπ.

Τα συνήθη Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ) χρησιμοποιούν πολύ απλοποιημένα μοντέλα νευρώνων τέτοια ώστε να διατηρούν μόνο τα πολύ αδρά χαρακτηριστικά των λεπτομερών μοντέλων που χρησιμοποιούνται στη νευρολογία. Στη πράξη τα συνήθη τεχνητά νευρωνικά μοντέλα έχουν ελάχιστη σχέση με τα βιολογικά νευρωνικά συστήματα. Ωστόσο πιστεύεται ότι οι λεπτομέρειες δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία στην κατανόηση της ευφυούς συμπεριφοράς των βιολογικών νευρωνικών συστημάτων.

Ακόμα και αυτά τα απλά μοντέλα νευρώνων μπορούν να δημιουργήσουν ιδιαίτερος ενδιαφέροντα δίκτυα αρκεί να πληρούν δύο βασικά χαρακτηριστικά:

(α) οι νευρώνες να έχουν ρυθμιζόμενες παραμέτρους ώστε να διευκολύνεται η διαδικασία της μάθησης – ιδιότητα γνωστή ως πλαστικότητα των νευρώνων,

(β) το δίκτυο να αποτελείται από μεγάλο πλήθος νευρώνων ώστε να επιτυγχάνεται παραλληλισμός της επεξεργασίας και κατανομή της πληροφορίας.

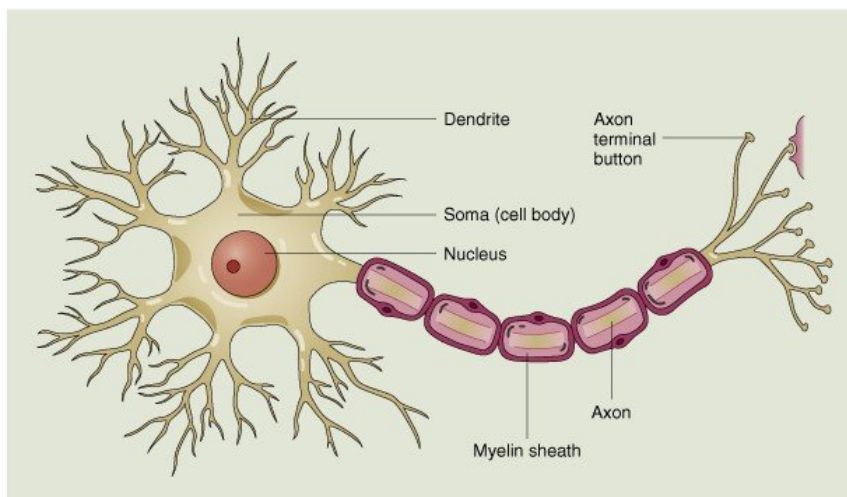
Η πρόκληση που αντιμετωπίζει η θεωρία των ΤΝΔ είναι η εύρεση κατάλληλων αλγορίθμων εκπαίδευσης των δικτύων και ανάκλησης της πληροφορίας που αυτά περιέχουν έτσι ώστε να προσομοιάζονται ευφυείς διαδικασίες. Για την επίτευξη αυτού του στόχου απαιτείται ο ορισμός του κατάλληλου περιβάλλοντος εκπαίδευσης, πχ. Αν το δίκτυο θα εκπαιδεύεται με επίβλεψη, δηλαδή με τη χρήση κάποιων δεδομένων οδηγών-δασκάλων, ή αν το δίκτυο θα αφήνεται μόνο του να αυτό-οργανωθεί και με ποιο συγκεκριμένο κριτήριο και στόχο.

3.1 Ο νευρώνας

Ο νευρώνας είναι το βασικό δομικό στοιχείο του εγκεφάλου τόσο στον άνθρωπο όσο και στα ζώα. Ο νευρώνας είναι ένα μεγάλο σε μέγεθος κύτταρο το οποίο, ανατομικά, αποτελείται από τα εξής τμήματα:

- (α) το σώμα,
- (β) τους δενδρίτες,
- (γ) τον άξονα, και

(δ) τις συνάψεις που συνδέουν τις διακλαδώσεις του άξονα με τους δένδριτες άλλων νευρώνων δημιουργώντας έτσι ένα νευρωνικό δίκτυο.



Σχήμα 3.1, Ο νευρώνας.

Λειτουργικά, τα τμήματα του νευρώνα παίζουν διαφορετικούς

ρόλους:

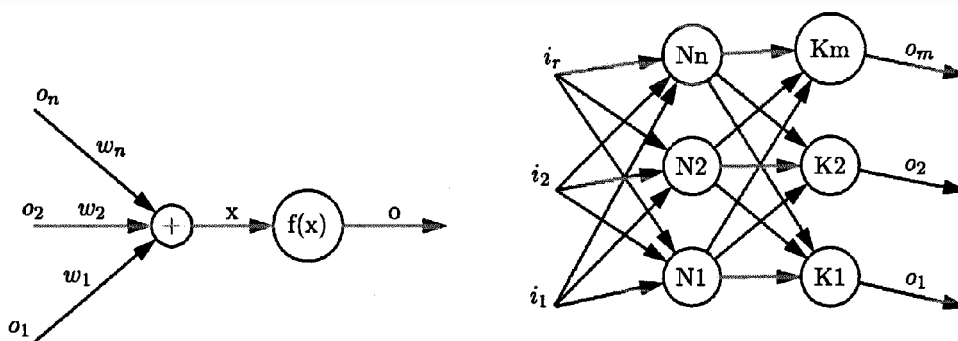
Οι δένδριτες είναι οι πύλες εισόδου του νευρώνα. Δέχονται ηλεκτρικά σήματα από άλλους νευρώνες.

Ο άξονας είναι η πύλη εξόδου του νευρώνα. Μοιάζει με μια μακρόστενη κλωστή που μερικές φορές ξεπερνάει το 1 m. Ο άξονας στέλνει σήματα προς άλλους νευρώνες υπό μορφή ηλεκτρικών παλμών σταθερού πλάτους αλλά μεταβλητής συχνότητας.

Οι συνάψεις είναι τα σημεία ένωσης μεταξύ διακλαδώσεων του άξονα ενός νευρώνα και των δένδριτων από άλλους νευρώνες. Είναι κύστες με ηλεκτροχημικό υλικό – ιόντα, κυρίως Νατρίου και Καλίου. Το υλικό αυτό μεταδίδει την ηλεκτρική δραστηριότητα του άξονα – αποστολέα στους δένδριτες-παραλήπτες. Το πλάτος της σύναψης, η απόστασή της από τον δένδριτη και η πυκνότητα του ηλεκτροχημικού υλικού επηρεάζουν την ευκολία με την οποία η ηλεκτρική δραστηριότητα μεταδίδεται από τον άξονα στο δένδριτη. Το ποσοστό της ηλεκτρικής δραστηριότητας που μεταδίδεται τελικά στο δένδριτη λέγεται συναπτικό βάρος. Οι συνάψεις χωρίζονται σε ενισχυτικές (excitatory) και σε ανασταλτικές (inhibitory) ανάλογα με το αν το φορτίο που εκλύεται από τη σύναψη ερεθίζει το νευρώνα προς το να παράγει παλμούς με μεγαλύτερη συχνότητα ή αντίθετα αν τον καταστέλλει εμποδίζοντάς τον να παράγει παλμούς.

3.2 Υπολογιστικές προσομοιώσεις

Κάθε νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από διασυνδεδεμένες υπολογιστικές μονάδες: τους νευρώνες. Κάθε νευρώνας μετασχηματίζει το διάνυσμα εισόδου του δίνοντας μία μονάχα έξοδο η οποία συνδέεται με εισόδους άλλων νευρώνων όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.2. Νευρώνας και τυπική μορφή Νευρωνικού Δικτύου.

Μελέτες που αναφέρονται στη φυσιολογία του νευρικού κυττάρου έδειξαν ότι η έξοδος αποτελεί έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό των εισόδων του. Οι προσομοιώσεις που θα περιγραφούν αποτελούν προσέγγιση των μετασχηματισμών που πραγματοποιούνται στο εσωτερικό των φυσικών νευρικών κυττάρων.

Οι σημαντικότερες προσομοιώσεις είναι υπολογιστικά απλές και αποδίδουν τους βασικούς μηχανισμούς ενεργοποίησης και εκπαίδευσης του φυσικού μοντέλου ικανοποιώντας τα χαρακτηριστικά του γνωρίσματα.

Οι περισσότερες προσομοιώσεις που έχουν προταθεί βασίστηκαν σε μελέτες του τρόπου λειτουργίας των νευρικών κυττάρων στο φυσικό τους περιβάλλον. Από την απλοποίηση των παρατηρήσεων της φυσιολογίας των νευρικών κυττάρων προέκυψαν τα διάφορα μαθηματικά μοντέλα. Το σημαντικότερο και το πλέον απλό μοντέλο περιγράφει τη συμπεριφορά ενός νευρικού κυττάρου με δύο τελεστές, έναν γραμμικό και έναν μη γραμμικό που είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

Ο γραμμικός τελεστής παριστάνεται σαν το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της εισόδου με το διάνυσμα της μνήμης του νευρώνα:

$$x = ow = \sum_{i=1}^N o_i w_i$$

Ο μη γραμμικός τελεστής είναι μία μη γραμμική συνάρτηση της εξόδου του γραμμικού τελεστή:

$$o = f(x)$$

Η έξοδος του δικτύου συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα με το οποίο συμβολίζεται και η είσοδος του νευρώνα διότι η έξοδος του νευρώνα είναι είσοδος σε άλλους νευρώνες. Η συνάρτηση του μη γραμμικού τελεστή ακολουθεί τα χαρακτηριστικά των σιγμοειδών (sigmoid) συναρτήσεων τα οποία είναι τα ακόλουθα:

1. Είναι αύξουσα συνάρτηση

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

2. Έχει πεπερασμένα απειροστικά όρια

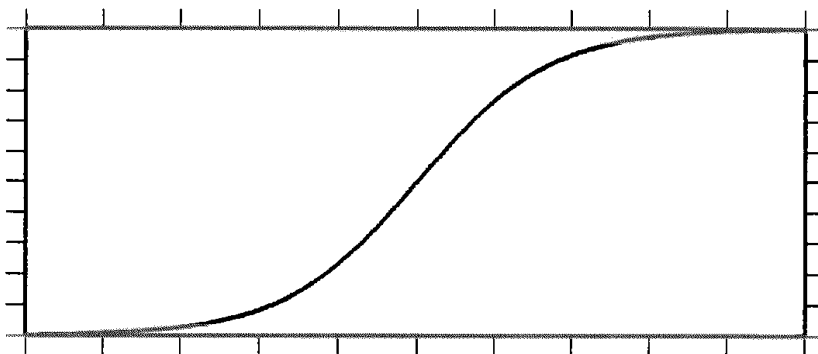
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, a \in \mathbf{R} - \{-\infty, +\infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, b \in \mathbf{R} - \{-\infty, +\infty\}$$

3. Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και έχουν φραγμένο πεδίο τιμών. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει σαν αποτέλεσμα των δύο προηγούμενων περιορισμών.

$$f : \mathbf{R} \rightarrow [a, b]$$

Μια συνάρτηση σιγμοειδών χαρακτηριστικών φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Σχήμα 3.3, Τυπική μορφή σιγμοειδούς συνάρτησης

Οι πλέον διαδεδομένοι σε πρακτικές εφαρμογές γραμμικοί νευρωνικοί τελεστές είναι οι ακόλουθοι:

- Εκθετική σιγμοειδής. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τον πλέον διαδεδομένο μη γραμμικό νευρωνικό τελεστή:

$$f(x) = \frac{1}{e^{-ax+b} + c}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

- Υπερβολική εφαπτομένη

$$o = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}, a \in \mathbb{R}^+$$

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός δύο εκθετικών όρων για την συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης και ενός εκθετικού όρου για την εκθετική σιγμοειδή συνάρτηση είναι μία υπολογιστικά χρονοβόρα διαδικασία, η οποία σε πολλές περιπτώσεις (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις δικτύων που περιέχουν μικρό αριθμό κόμβων) υπερκαλύπτει τον χρόνο υπολογισμού του γραμμικού τελεστή του νευρώνα. Γι' αυτό τον λόγο πολλές φορές καταφεύγουμε σε απλούστερες υπολογιστικά συναρτήσεις, όπως είναι οι ακόλουθες:

- Τμηματικά γραμμική συνάρτηση. Η τμηματικά γραμμική συνάρτηση χρησιμοποιείται σπανιότερα στις εφαρμογές διότι δεν αποδίδει αξιόπιστα την μη γραμμική συμπεριφορά των νευρωνικών δικτύων.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x & -a \leq x \leq a \\ -1 & x < -a \\ 1 & x > a \end{cases}, a \in \mathbb{R}^+$$

- Συνάρτηση δύο κλάδων:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x+b}, & x \geq 0 \\ -\frac{ax}{x-b}, & x < 0 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

- Βηματική συνάρτηση

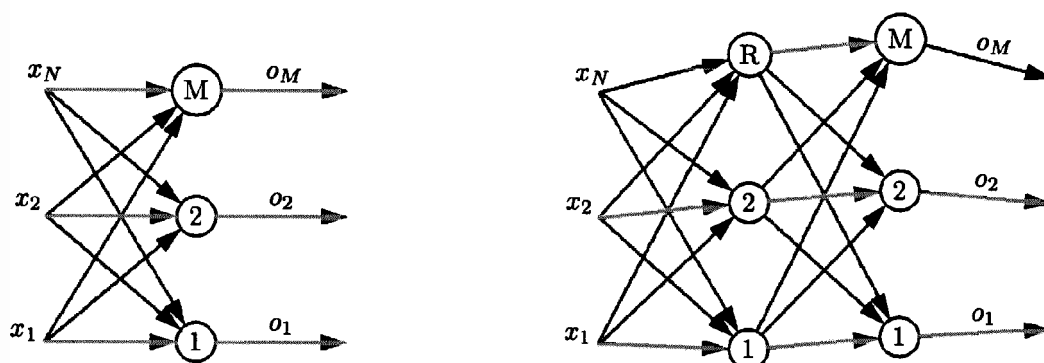
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Μη γραμμικός τελεστής του νευρώνα Adaline:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

3.3 Δομή των Νευρωνικών Δικτύων

Παρόλο που δεν υπάρχει περιορισμός για τον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται οι συνάψεις των νευρώνων, υπάρχουν μερικές ομάδες δομών οι οποίες έχουν μελετηθεί εκτενέστερα και είναι αυτές οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότερα σε διάφορες εφαρμογές.



Σχήμα 3.4, Νευρωνικό δίκτυο ενός επιπέδου και Νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων.

3.3.1 Νευρωνικά δίκτυα ενός επιπέδου

Αποτελεί την πλέον απλή περίπτωση οργάνωσης ενός νευρωνικού δικτύου. Οι εισοδοί κάθε νευρώνα συνδέονται με τις αντίστοιχες εισόδους του δικτύου και η έξοδος κάθε νευρώνα αποτελεί και έξοδο του δικτύου (σχήμα). Σε μερικές περιπτώσεις θεωρούμε ότι ο κάθε νευρώνας έχει και μία επιπλέον είσοδο η οποία συνδέεται με μία είσοδο σταθερής στάθμης.

Τα δίκτυα ενός επιπέδου νευρώνων χρησιμοποιούνται συνήθως σε απλά προβλήματα διότι έχουν δύο σοβαρά μειονεκτήματα.

(α) Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα που θέλουμε να προσομοιώσουμε έχει N εισόδους και M εξόδους, τότε στην καλύτερη των περιπτώσεων (όταν κάθε νευρώνας έχει συνάψεις που συνδέουν όλες τις εισόδους) το σύστημα προσομοίωσης έχει $(N + 1) \times M$ βαθμούς ελευθερίας, γεγονός που περιορίζει την ικανότητα του δικτύου να προσομοιώνει πολύπλοκες διανυσματικές συναρτήσεις.

Ο περιορισμός αυτός στην πράξη μπορεί να ξεπεραστεί επεκτείνοντας με τεχνητό τρόπο το διάνυσμα της εισόδου οπότε αυξάνουμε ταυτόχρονα και τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος προσομοίωσης. Η επέκταση αυτή μπορεί να επιτευχθεί όταν συνδυάσουμε με γραμμικό ή μη γραμμικό τρόπο τις αρχικές εισόδους του συστήματος.

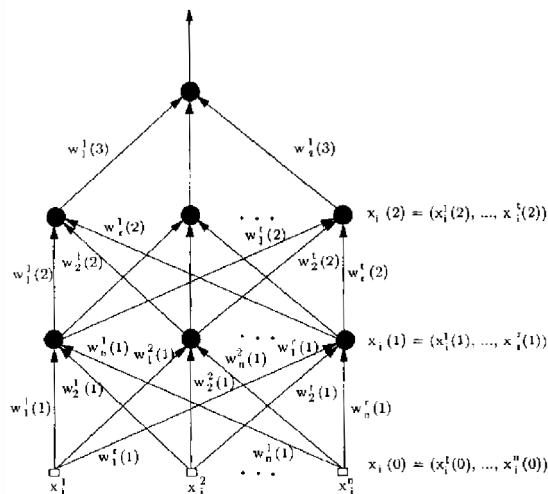
(β) Ο δεύτερος περιορισμός έχει να κάνει με τις περιορισμένες δυνατότητες του δικτύου στην προσομοίωση των μη γραμμικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης που

θέλουμε να προσομοιώσουμε. Συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε ότι κάθε έξοδος μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση των δεδομένων εισόδου στην εξής μορφή:

$$o_m = f\left(\sum_i x_i w_{mi}\right)$$

Η έξοδος O_m μπορεί να προσομοιώσει την πραγματική έξοδο του συστήματος μέσω μιας περιορισμένων δυνατοτήτων συνάρτησης.

Κλασικό πρόβλημα των περιορισμένων δυνατοτήτων των νευρωνικών δικτύων ενός επιπέδου στην ταξινόμηση προτύπων αποτελεί και η αδυναμία σωστής ταξινόμησης μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων.



Σχήμα 3.5. A neural network is a combination of several levels of sigmoid elements. The outputs of one layer form inputs for the next layer.

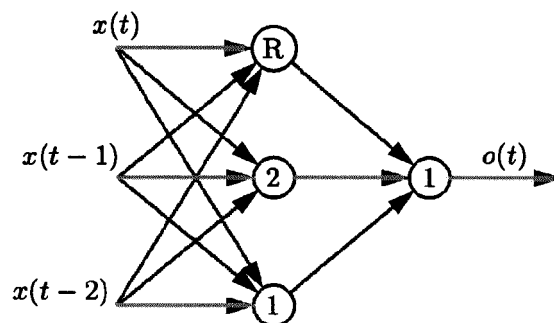
3.3.2 Πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα

Προσθέτοντας ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα μπορούμε να αυξήσουμε απεριόριστα τους βαθμούς ελευθερίας του νευρωνικού δικτύου. Συνήθης τακτική είναι, οι νευρώνες κάθε επιπέδου να συνδέονται με τις εξόδους των νευρώνων που βρίσκονται στο προηγούμενο επίπεδο (σχήμα 2.3). Όταν ο νευρώνας συνδέεται με όλους τους νευρώνες του προηγούμενου επιπέδου η σύνδεση ονομάζεται πλήρης διαφορετικά ονομάζεται μερική.

Κατά την διάρκεια εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου αν κάποιος συντελεστής βαρύτητας σύναψης πάρει την τιμή μηδέν, τότε το γεγονός αυτό ισοδυναμεί με την διακοπή σύνδεσης των νευρώνων διότι δεν μεταφέρεται πλέον πληροφορία από αυτή την σύναψη. Στην πράξη λοιπόν το δίκτυο μπορεί να εμφανίζει αρχιτεκτονική πλήρους σύνδεσης αλλά κατά την διάρκεια εκπαίδευσης κάποιες συνδέσεις μπορεί να αποκοπούν, γεγονός όχι σπάνιο σε πρακτικές εφαρμογές.

Στην ταξινόμηση προτύπων έχει αποδειχθεί ότι ένα δίκτυο που αποτελείται από νευρώνες perceptron δύο επιπέδων (ενός κρυφού και του επιπέδου εξόδου) μπορεί να ταξινομήσει σωστά γραμμικά και μη γραμμικά διαχωρίσιμες κατηγορίες προτύπων, ενώ ένα δίκτυο τριών επιπέδων νευρώνων μπορεί να ταξινομήσει σωστά κατηγορίες προτύπων μη γραμμικά διαχωρίσιμες που επιπλέον βρίσκονται σε διαφορετικές νησίδες στο χώρο των μετρήσεων.

Πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στην σχεδίαση πολύπλοκων συστημάτων ταξινόμησης προτύπων και καλύπτουν την πλειονότητα των εφαρμογών ταξινόμησης προτύπων με νευρωνικά δίκτυα. Αν στην είσοδο του δικτύου το οποίο έχει μόνο μία είσοδο, τοποθετηθούν δειγματοληπτημένα σήματα διακριτού χρόνου κατά αύξουσα χρονική σειρά τότε το δίκτυο λειτουργεί σαν ένα μη γραμμικό φίλτρο FIR.



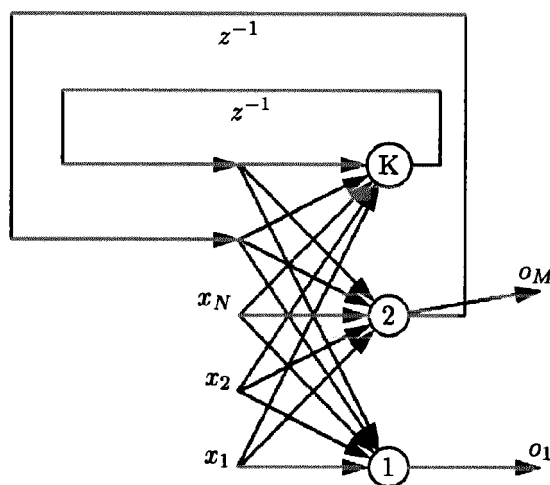
Σχήμα 3.5, Νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων σαν μη γραμμικό φίλτρο FIR.

3.3.3 Επανατροφοδοτούμενα Νευρωνικά Δίκτυα

Όταν υπάρχει έστω και μία διαδρομή μέσω της οποίας, ξεκινώντας από έναν νευρώνα και μέσω των συνάψεων και κατά την φορά ενεργοποίησης του δικτύου μπορούμε να επανέλθουμε στον νευρώνα εκκίνησης, τότε το νευρωνικό δίκτυο θα λέγεται επανατροφοδοτούμενο (recurrent).

Η αρχιτεκτονική αυτή προσδίδει στο νευρωνικό δίκτυο κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Οι χρονικές καθυστερήσεις δίνουν την δυνατότητα στο δίκτυο να προσομοιώσει χρονικά μεταβαλλόμενα πρότυπα. Επειδή σε αυτό το κεφάλαιο, όπως και στα προηγούμενα, η μελέτη μεθόδων ταξινόμησης προτύπων γίνεται για στατικά πρότυπα γι' αυτό τον λόγο και σε αυτό το κεφάλαιο δεν θα γίνει καμία αναφορά στην επεξεργασία χρονικά μεταβαλλόμενων προτύπων με αυτά τα δίκτυα.

Το επανατροφοδοτούμενο δίκτυο Hopfield το οποίο χρησιμοποιείται για ταξινόμηση στατικών προτύπων.



Σχήμα 3.6, Τυπική μορφή επανατροφοδοτούμενου νευρωνικού δικτύου.

3.4 Εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από περίπου 100 δισεκατομμύρια νευρώνες και σε κάθε νευρώνα αντιστοιχούν κατά μέσο όρο περίπου 1000 συνάψεις (δηλαδή έχουμε ένα σύνολο 100 τρισεκατομμυρίων συνάψεων).

Η τρομερή πολυπλοκότητα του εγκεφάλου τον καθιστά ικανό να εκτελεί με επιτυχία διάφορες λειτουργίες που συλλογικά οδηγούν σε αυτό που αποκαλούμε νοημοσύνη. Τέτοιες λειτουργίες είναι:

- Η αναγνώριση εικόνων (προσώπων, αντικειμένων κλπ)
- Η μνήμη
- Η αναγνώριση φωνής, η κατανόηση και η παραγωγή της γνώσας

- Η αυτόνομη πλοήγηση στο χώρο
- Η λήψη αποφάσεων
- Η κατάστρωση στρατηγικής και η επιλογή της καλύτερης με βάση διάφορα κριτήρια κόστους
- Η λογική, η ανάπτυξη επιχειρημάτων, η συνεπαγωγή
- Η μάθηση και η αυτοπροσαρμογή σε νέο περιβάλλον και σε νέες καταστάσεις.

Το τελευταίο αντικείμενο, δηλαδή η μάθηση είναι ίσως ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του εγκεφάλου και γενικά των βιολογικών νευρωνικών δικτύων. Ο λόγος που η μάθηση θεωρείται το κλειδί της νοημοσύνης είναι το γεγονός ότι οι περισσότερες από τις υπόλοιπες λειτουργίες που περιγράψαμε παραπάνω μαθαίνονται κατά τη διάρκεια του βίου, και συνήθως κατά τη βρεφική ηλικία, και δεν προκύπτουν εκ γενετής.

Βασική αρχή της Ταχνητής Νοημοσύνης (TN) είναι η ύπαρξη ενός υλικού στρώματος πάνω στο οποίο εκτελούνται όλες οι παραπάνω λειτουργίες. Το αντικείμενο μελέτης είναι διπλό:

1. Η ανάπτυξη ενός υλικού το οποίο θα μπορεί να υποστηρίξει τις παραπάνω επιθυμητές λειτουργίες, άσχετα με το αν αυτό το υλικό μιμείται τους νευρώνες ή όχι. Ένα τέτοι υλικό είναι το υλικό των υπολογιστών που αποτελείται από ημιαγωγά στοιχεία και τρανζίστορ.
2. Η ανάπτυξη αλγορίθμων που θα μιμούνται αυτές τις λειτουργίες.

Οι εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν κατά την κατασκευή νευρωνικού δικτύου ταξινόμησης προτύπων είναι οι ακόλουθες:

1. Αρχικά πρέπει να οριστεί η τοπολογία του, δηλαδή ο αριθμός των νευρώνων που θα το απαρτίζουν και η οργάνωση των συνάψεων, ο τρόπος δηλαδή με τον οποίο η πληροφορία θα μεταβιβάζεται στους νευρώνες. Δυστυχώς δεν υπάρχει μία γενικά αποδεκτή μέθοδος η οποία να προσδιορίζει την αρχιτεκτονική του δικτύου σε σχέση με το πρόβλημα προσομοίωσης που καλούμαστε να λύσουμε.

2. Υπολογίζεται οι συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων οι οποίοι ονομάζονται και μνήμη του νευρωνικού δικτύου. Η διαδικασία εκπαίδευσης υπολογίζει συνήθως τους συντελεστές βαρύτητας από ένα σύνολο παραδειγμάτων. Αν είναι γνωστή και η επιθυμούμενη έξοδος τότε εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο κατευθυνόμενης εκπαίδευσης, διαφορετικά χρησιμοποιούμε αλγόριθμο αυτοεκπαίδευσης του δικτύου.

Σε αυτές τις σημειώσεις δίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην κατηγορία εκείνων των προβλημάτων στα οποία κατά την εκπαίδευση η επιθυμούμενη έξοδος είναι γνωστή. Δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων διότι αυτά συναντάμε συνήθως σε πρακτικές εφαρμογές ταξινόμησης προτύπων και επιπλέον η κατευθυνόμενη εκπαίδευση δίνει συνήθως πολύ καλύτερα αποτελέσματα από τις μεθόδους αυτοεκπαίδευσης.

3.4.1 Διόρθωση σφάλματος εξόδου

Η μέθοδος διόρθωσης του σφάλματος της εξόδου αποτελεί την πλέον διαδεδομένη τεχνική κατευθυνόμενης εκπαίδευσης. Είναι μία γενική μέθοδος υπολογισμού των παραμέτρων γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων.

Έστω σύστημα $s(x, w)$ όπου x είναι η είσοδος του συστήματος και w είναι ένα σύνολο παραμέτρων του συστήματος των οποίων θέλουμε να υπολογίσουμε την αριθμητική τους τιμή από παραδείγματα. Έστω ότι είναι διαθέσιμα M παραδείγματα. Τοποθετούμε τα παραδείγματα στην είσοδο του συστήματος και υπολογίζουμε την έξοδο για κάθε ένα από αυτά. Έστω ότι $x_i, i = 1, M$ είναι οι είσοδοι και $t_i, i = 1, M$ οι επιθυμούμενες έξοδοι. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του συστήματος (LMS) είναι:

$$\text{Σφάλμα} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (t_i - s(x_i, w))^T (t_i - s(x_i, w))$$

Η μέθοδος διόρθωσης του σφάλματος της εξόδου προσπαθεί να υπολογίσει το διάνυσμα w το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Η λύση δίνεται συνήθως από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$\frac{\partial \Sigma \sigma \acute{\alpha} \lambda \mu \alpha}{\partial \omega} = 0$$

Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικής λύσης χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους επαναληπτικής ελάττωσης του σφάλματος. Με αυτές τις μεθόδους επαναπροσδιορίζουμε τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων έτσι ώστε να πετύχουμε διαδοχικές μειώσεις του συνολικού σφάλματος. Όταν το σφάλμα εκφράζεται σαν το τετράγωνο της διαφοράς της πραγματικής από την επιθυμούμενη έξοδο του νευρωνικού δικτύου τότε ο μέθοδος καλείται αλγόριθμος LMS (least mean square).

3.4.2 Εκπαίδευση Hebbian

Ο νευροφυσιολόγος Hebb περιέγραψε την διαδικασία μάθησης των νευρικών κυττάρων στο βιβλίο του "The Organization of Behaviour" (1949) ως εξής: "Όταν ένα νευρικό κύτταρο A διεγείρει συστηματικά ένα νευρικό κύτταρο B τότε μία διαδικασία μεταβολισμού αλλάζει την συμπεριφορά του κυττάρου B έτσι ώστε η διέγερση του κυττάρου B να προκαλείται πλέον με ευκολότερο τρόπο από το κύτταρο A".

Είναι προφανές ότι η διαδικασία επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας που περιέγραψε ο Hebb λαμβάνει υπόψη την σχέση ενεργοποίησης που έχουν αλληλοσυνδεδεμένοι νευρώνες οπότε και δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την επιθυμούμενη έξοδο του δικτύου. Συνεπώς οι συνάψεις Hebb αποτελούν μία διαδικασία αυτοεκπαίδευσης ενός νευρωνικού συστήματος.

Εικοσιπέντε χρόνια αργότερα η σύναψη Hebb ορίσθηκε σαν μία διαδικασία μεταβολής του συντελεστή βαρύτητας σύναψης εξαρτώμενη από την δραστηριότητα των δύο νευρώνων που συνδέονται στα άκρα της. Πιο συγκεκριμένα ορίσθηκαν δύο κανόνες που περιγράφουν την συμπεριφορά μιας σύναψης Hebb:

1. Όταν οι νευρώνες που βρίσκονται στα άκρα μιας σύναψης Hebb είναι ενεργοποιημένοι ταυτόχρονα, τότε η συνδεδετική της ικανότητα αυξάνει. Η συνδεδετική ικανότητα της σύναψης η οποία ονομάζεται και κέρδος της σύναψης δεν είναι τίποτα άλλο από την αριθμητική τιμή του αντίστοιχου συντελεστή βαρύτητας.
2. Όταν οι νευρώνες που βρίσκονται στα άκρα σύναψης Hebb ενεργοποιούνται ασύγχρονα, τότε η συνδεδετική ικανότητα της σύναψης μειώνεται.

Αν δώσουμε μία ποσοτική περιγραφή της διαδικασίας αυτοεκπαίδευσης μιας σύναψης Hebb, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή του συντελεστή βαρύτητας w_{ij} που συνδέει τον νευρώνα i με τον νευρώνα j μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta w_{ij} = H_{\varepsilon}(o_i, o_j)$$

όπου o_i, o_j είναι η στάθμη εξόδου των νευρώνων i (ο δέκτης της πληροφορίας που συνδέεται στην σύναψη) και j (πηγή της πληροφορίας) αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $H(x, y)$ επιλέγεται συνήθως να έχει πεδίο τιμών το $[-1, 1]$, γεγονός που περιορίζει τις δυνατότητες της σύναψης στον πρώτο κανόνα εκπαίδευσης. Η απλούστερη μορφή της συνάρτησης εκπαίδευσης που ικανοποιεί τους περιορισμούς που τέθηκαν είναι:

$$\Delta w_{ij} = \alpha o_i o_j$$

όπου α είναι μικρός θετικός πραγματικός αριθμός που εκφράζει τον ρυθμό εκπαίδευσης της σύναψης.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα των συνάψεων Hebb είναι το γεγονός του κορεσμού του συντελεστή βαρύτητας συνάψεων όταν επαναλαμβάνεται η διαδικασία επαναληπτικού επαναπροσδιορισμού λόγω διαδοχικών ενεργοποιήσεων των δύο νευρώνων που είναι συνδεδεμένοι στα άκρα της σύναψης. Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων προτάθηκε πρόσφατα ένα επιπρόσθετος μηχανισμός που ελαττώνει την αυξητική τάση των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων ικανοποιώντας έτσι και τον δεύτερο κανόνα των συνάψεων Hebb. Ο όρος αυτός ο οποίος εξαρτάται από την αριθμητική τιμή του συντελεστή βαρύτητας της σύναψης και της κατάστασης του νευρώνα στον οποίο ανήκει η σύναψη. Το

φυσικό νόημα αυτού του όρου είναι μία διαδικασία αφαίρεσης της πληροφορίας που έχει συσσωρευτεί στην σύναψη του νευρώνα:

$$\Delta w_{ij} = H_\varepsilon(o_i, o_j) - H_a(o_i, w_{ij})$$

Η συνάρτηση $H_a(o_i, w_{ij})$ έχει πεδίο τιμών το \mathbf{R}^+ .

Η πιο απλοποιημένη έκφραση που μπορεί να περιγράψει την διπλή λειτουργία εκπαίδευσης μιας σύναψης Hebb είναι η ακόλουθη:

$$\Delta w_{ij} = a o_i o_j - \beta o_i w_{ij} = \beta o_i (\gamma o_j - w_{ij}), \text{ όπου } \gamma = a/\beta.$$

Η στατιστική προσέγγιση των μηχανισμών εκπαίδευσης μιας σύναψης Hebb μπορεί να περιγραφεί υπολογίζοντας την στατιστική συσχέτιση των εξόδων των νευρώνων που είναι συνδεδεμένοι στα άκρα της σύναψης. Αν οι νευρώνες ενεργοποιούνται και απενεργοποιούνται ταυτόχρονα, η συσχέτιση θα παρουσιάζει θετικές τιμές, διαφορετικά στην περίπτωση που ενεργοποιούνται ασύγχρονα, η συσχέτιση θα παρουσιάζει αρνητικές τιμές με συνέπεια την ελάττωση της αριθμητικής τιμής του συντελεστή βαρύτητας του νευρώνα:

$$\Delta w_{ij} = a \text{Conu}(o_i, o_j) = aE[(o_i - E[o_i])(o_j - E[o_j])] = aE[o_i o_j] - aE[o_i]E[o_j]$$

Η σύναψη που εκτελεί την αντίθετη της Hebbian διαδικασία εκπαίδευσης ονομάζεται anti-Hebbian σύναψη. Η λειτουργία μιας anti-Hebbian σύναψης μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

1. Όταν οι νευρώνες που βρίσκονται στα άκρα μιας σύναψης anti-Hebb είναι ενεργοποιημένοι ταυτόχρονα, τότε η συνδετική ικανότητα της σύναψης μειώνεται.
2. Όταν οι νευρώνες που βρίσκονται στα άκρα μιας σύναψης anti-Hebb ενεργοποιούνται ασύγχρονα, τότε η συνδετική ικανότητα της σύναψης αυξάνεται. Σαν Non-Hebbian σύναψη ορίζεται κάθε διαδικασία εκπαίδευσης που δεν ούτε Hebbian ούτε anti-Hebbian.

3.4.3 Ανταγωνιστική Εκπαίδευση

Η δεύτερη μέθοδος αυτοεκπαίδευσης που θα εξετάσουμε είναι η ανταγωνιστική εκπαίδευση που εφαρμόζεται σε ανεξάρτητες ομάδες νευρώνων του δικτύου.

Κατά την εκπαίδευση συνάψεων Hebb είδαμε ότι η συνάρτηση επαναπροσδιορισμού του συντελεστή βαρύτητας της σύναψης εξαρτάται μόνο από την έξοδο των νευρώνων που η σύναψη συνδέει. Με αυτή την μέθοδο επαναπροσδιορίζονται οι συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων κάθε φορά που ενεργοποιείται η διαδικασία εκπαίδευσης. Το μεγάλο μειονέκτημα των συνάψεων Hebb είναι το φαινόμενο του κορεσμού των νευρώνων το οποίο εμφανίζεται όταν η διαδικασία εκπαίδευσης επαναληφθεί πολλές φορές και ο συντελεστής εκπαίδευσης έχει μεγάλη αριθμητική τιμή. Σε αυτή την περίπτωση, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από τα αριθμητικά αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, οι συντελεστές βαρύτητας τείνουν να πάρουν πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές αριθμητικές τιμές.

Σε αντίθεση με την λειτουργία εκπαίδευσης των συνάψεων Hebb, η ανταγωνιστική εκπαίδευση επαναπροσδιορίζει τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων ενός μόνο νευρώνα από ένα σύνολο ανεξάρτητων ομάδων νευρώνων. Ανεξάρτητη ομάδα νευρώνων ονομάζεται κάθε υποσύνολο νευρώνων του δικτύου που περιέχει όλους τους νευρώνες οι συνάψεις των οποίων δέχονται σήματα από τους ίδιους ακριβώς νευρώνες.

Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ομάδες νευρώνων την A και την B, όπου οι έξοδοι της A συνδέονται μέσω συνάψεων με τους νευρώνες της B τότε η διαδικασία ανταγωνιστικής εκπαίδευσης έχει ως εξής:

1. Αρχικές τιμές. Τοποθετούμε τυχαίους θετικούς πραγματικούς αριθμούς στους συντελεστές

βαρύτητας των συνάψεων και κανονικοποιούμε τις τιμές τους για κάθε ένα νευρώνα ξεχωριστά, έτσι ώστε:

$$\sum_i w_{ji} = 1$$

Εναλλακτικά έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία και η κανονικοποίηση του Ευκλείδειου χώρου:

$$\sum_i w_{ji}^2 = 1$$

2. Επιλέγουμε τυχαία ένα πρότυπο εκπαίδευσης και με αυτό ενεργοποιούμε το δίκτυο.

3. Βρίσκουμε τον νευρώνα j της ομάδας B ο οποίος βρίσκεται στην υψηλότερη στάθμη, έχει δηλαδή την υψηλότερη τιμή εξόδου. Τον νευρώνα αυτό ονομάζουμε νικητή (winning neuron).

4. Επαναπροσδιορίζουμε όλες τις συνάψεις του νικητή νευρώνα σύμφωνα με την σχέση: $\Delta w_{ji} = a(o_i - w_{ji})$, όπου a είναι μικρός θετικός πραγματικός αριθμός που

καθορίζει τον ρυθμό εκπαίδευσης του δικτύου και o_i είναι η έξοδος του νευρώνα i του προηγούμενου επιπέδου (A) το οποίο συνδέεται μέσω της σύναψης που έχει συντελεστή βαρύτητας w_{ji} με τον νευρώνα j .

5. Οι συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων του νικητή νευρώνα κανονικοποιούνται.

3.4.4 Το γραμμικό φίλτρο Wiener

Έστω ότι διαθέτουμε ένα δίκτυο νευρώνων ενός επιπέδου το οποίο δεν περιέχει μη-γραμμικούς τελεστές. Οι έξοδοι του δικτύου αποτελούν έναν γραμμικό συνδυασμό των εισόδων του. Κάθε έξοδος του δικτύου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$o = \sum_{i=1}^N x_i w_i$$

όπου N είναι ο αριθμός των εισόδων του δικτύου και o η έξοδος ενός νευρώνα.

Έστω d η επιθυμούμενη έξοδος για το πρότυπο της εισόδου: $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$

Το σφάλμα της εξόδου ισούται με την διαφορά της επιθυμούμενης από την πραγματική έξοδο: $e = d - o$

Όταν έχουμε στην διάθεση μας έναν αριθμό παραδειγμάτων τότε ορίζουμε σαν συνολικό σφάλμα το μισό του στατιστικά αναμενόμενου τετραγώνου του σφάλματος:

$$\text{Σφάλμα} = \frac{1}{2} E[e^2]$$

Όταν υπολογιστούν οι συντελεστές βαρύτητας του γραμμικού δικτύου που ελαχιστοποιεί το στατιστικά αναμενόμενο σφάλμα τότε θα λέμε ότι έχουμε κατασκευάσει ένα φίλτρο Wiener. Ο αλγόριθμος που υπολογίζει του συντελεστές του φίλτρου Wiener ανήκει στην ομάδα των αλγορίθμων LMS.

Οι συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων μπορούν να υπολογιστούν είτε με επαναληπτικό είτε με αναλυτικό τρόπο. Εμείς θα περιγράψουμε την αναλυτική μέθοδο η οποία δίνει την βέλτιστη λύση και έχει την μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Αντικαθιστώντας τις αναλυτικές εκφράσεις στην συνάρτηση του στατιστικά αναμενόμενου σφάλματος έχουμε:

$$\text{Σφάλμα} = \frac{1}{2} E[d^2] - E\left[\sum_{i=1}^N x_i w_i d\right] + \frac{1}{2} E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j x_i x_j\right]$$

Οι συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων είναι σταθεροί αριθμοί, συνεπώς οι αναμενόμενες τιμές απλοποιούνται σε:

$$\text{Σφάλμα} = \frac{1}{2} E[d^2] - \sum_{i=1}^N w_i E[x_i d] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j E[x_i x_j]$$

Η εύρεση των τιμών των συντελεστών βαρύτητας που ελαχιστοποιούν το στατιστικά αναμενόμενο σφάλμα υπολογίζονται με την μέθοδο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (LMS), προκύπτουν δηλαδή από την λύση του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων:

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \text{Σφάλμα} = 0$$

Αντικαθιστώντας την αναλυτική έκφραση του σφάλματος έχουμε το τελικό γραμμικό σύστημα εξισώσεων, το οποίο συναντάται στην βιβλιογραφία και σαν σύστημα εξισώσεων των Wiener-Hopf:

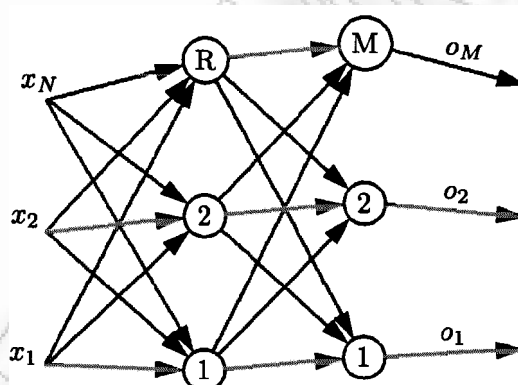
$$\sum_{j=1}^N w_j E[x_i x_j] = E[x_i d]$$

Ο όρος $E[x_i d]$ εκφράζει την ετεροσυσχέτιση της εισόδου με την επιθυμούμενη έξοδο, ενώ ο όρος $E[x_i x_j]$ είναι η αυτοσυσχέτιση της εισόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΚΤΥΟ PERCEPTRON ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

Οι δυνατότητες αναπαράστασης διαχωριστικών επιφανειών είναι περιορισμένες σε δίκτυα ενός επιπέδου καθώς με ένα μόνο νευρώνα το δίκτυο μπορεί να αναπαραστήσει μόνο επίπεδες επιφάνειες. Ο περιορισμός αυτός αίρεται με τη χρήση περισσότερων νευρώνων. Το πλέον διαδεδομένο νευρωνικό δίκτυο συνεχών τιμών εισόδου και εξόδου είναι το πολυεπίπεδο perceptron. Τα δίκτυα τέτοιου τύπου καλούνται δίκτυα Perceptron Πολλών Στρωμάτων (Multi-Layer Perceptron – MLP). Μια τυπική μορφή του δικτύου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (4.1):



Σχήμα 4.1, Τυπική μορφή Πολυεπιπέδου Δικτύου Perceptron

Αποτελείται από νευρώνες του τύπου perceptron οι οποίοι διαθέτουν έναν γραμμικό και έναν μη-γραμμικό τελεστή συνδεδεμένους σε σειρά:

$$y = \sum_{i=1}^N w_i x_i$$

$$o = f(y)$$

Το δίκτυο αποτελείται από περισσότερες των δύο ομάδων νευρώνων perceptron που ονομάζονται και επίπεδα του δικτύου. Ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα επεξεργάζονται τα δεδομένα εισόδου και το επίπεδο εξόδου περιέχει τους νευρώνες, η έξοδος των οποίων είναι ταυτόχρονα και έξοδος του δικτύου.

Η συνήθης σύνδεση των νευρώνων perceptron ενός επιπέδου περιλαμβάνει συνάψεις που συνδέουν κάθε νευρώνα με όλους τους νευρώνες του προηγούμενου επιπέδου. Η σύνδεση αυτή ονομάζεται πλήρης (full connected) και χρησιμοποιείται σε

περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούμε να ορίσουμε εκ των προτέρων την ακριβή τοπολογία του δικτύου. Η γενική αυτή τοπολογία καλύπτει και την πλειονότητα των εφαρμογών.

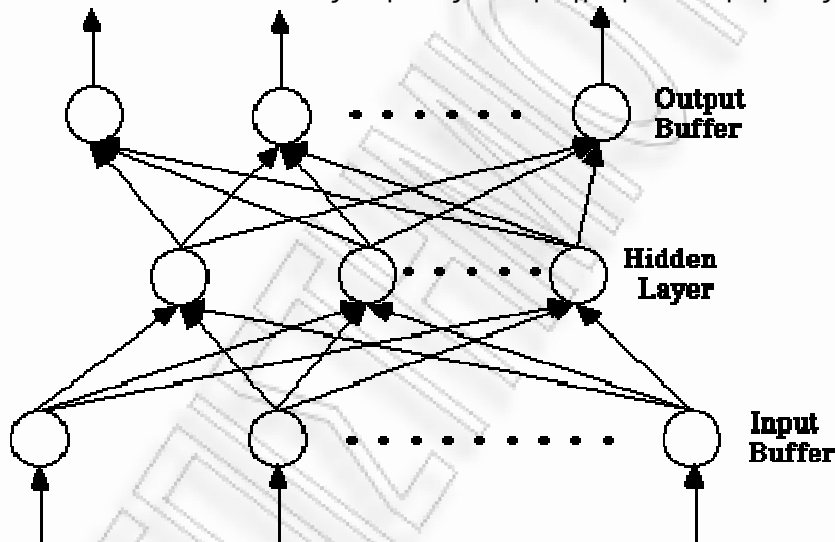
Η ευρεία διάδοση του πολυεπίπεδου δικτύου perceptron οφείλεται σε δύο κυρίως λόγους:

1. Η ισχυρή πολυπλοκότητα και μη γραμμικότητα του δικτύου μας παρέχει την δυνατότητα να προσομοιώσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια συνεχείς μη γραμμικές διανυσματικές συναρτήσεις.

2. Ο αλγόριθμος εκπαίδευσης LMS δίνει την δυνατότητα υπολογισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων από παραδείγματα. Η δυνατότητα αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το δίκτυο σε πρακτικές εφαρμογές.

Πράγματι από το 1985, όταν ο Werdos στην διδακτορική του διατριβή παρουσίασε την αρχική μορφή ενός αλγόριθμου εκπαίδευσης που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πραγματικής από την επιθυμούμενη έξοδο του δικτύου και που αργότερα πήρε το όνομα οπισθοδρομική διάδοση του σφάλματος (backpropagation of error), μεγάλος αριθμός εργασιών που αφορούσαν το πολυεπίπεδο δίκτυο perceptron παρουσιάστηκαν σε εφαρμογές ταξινόμησης προτύπων, αυτόματο έλεγχο, προσομοίωση συναρτήσεων, κ.ο.κ.

Η γενική αρχιτεκτονική ενός δικτύου MLP φαίνεται στο κάτωθι σχήμα (4.3). Το χαρακτηριστικό των δικτύων αυτών είναι ότι οι νευρώνες του οποιουδήποτε στρώματος (έστω l) τροφοδοτούν αποκλειστικά τους νευρώνες του επόμενου στρώματος ($l+1$) και τροφοδοτούνται αποκλειστικά από τους νευρώνες του προηγούμενου στρώματος ($l-1$).

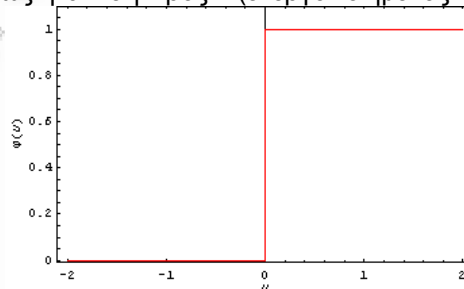


Σχήμα 4.2, The General Multi-Layer Perceptron.

4.1 Δυνατότητες Πολυεπίπεδων Δικτύων Perceptron

Τα δίκτυα Perceptron πολλών στρωμάτων (MLP) όπου οι νευρώνες χρησιμοποιούν τη βηματική συνάρτηση (step function) 0/1 ή 1/1, μπορούν να υλοποιήσουν συναρτήσεις που δεν μπορεί να υλοποιήσει ένα απλό δίκτυο Perceptron.

Μία τέτοια συνάρτηση φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 3. Αν το ενδιάμεσο αποτέλεσμα ήταν μικρότερο μιας τιμής κατωφλίου, η έξοδος του νευρώνα ήταν ίση προς 0 (αδρανής νευρώνας), αλλιώς ήταν ίση προς 1 (ενεργοποιημένος νευρώνας).



Σχήμα 4.3, Βηματική συνάρτηση για τιμή κατωφλίου ίση προς μηδέν.

Το παραπάνω μοντέλο αναφέρεται συχνά ως μοντέλο McCulloch-Pitts προς τιμή αυτών που το πρότειναν.

Αργότερα, η εξέλιξη στο θεωρητικό υπόβαθρο των τεχνητών νευρωνικών δικτύων φανέρωσε ότι η παράγωγος της συνάρτησης ενεργοποίησης μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για το νευρωνικό δίκτυο και να χρησιμοποιηθεί στην εκπαίδευσή του, γεγονός που υποδεικνύει ότι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και όχι η βηματική συνάρτηση, που είναι προφανώς μη παραγωγίσιμη.

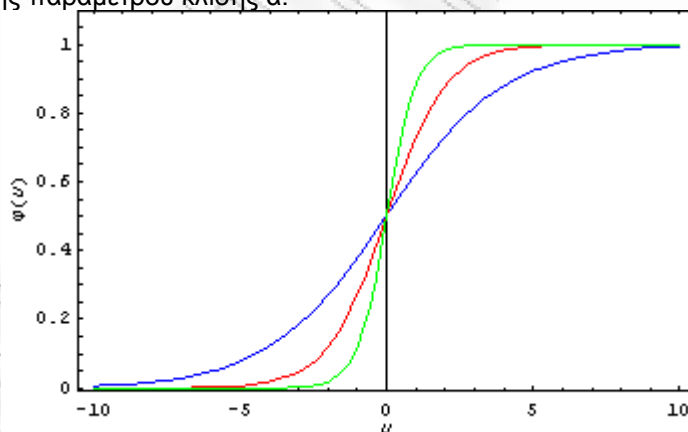
Ο λόγος είναι ότι οι περισσότεροι κανόνες εκπαίδευσης βασίζονται σε μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως πχ η μέθοδος της κατάβασης δυναμικού, οι οποίες χρησιμοποιούν παραγώγους, ενώ η βηματική συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.

Αυτή είναι μια τεχνική δυσκολία η οποία παρ' όλα αυτά ξεπερνιέται με τη χρήση της σιγμοειδούς συναρτήσεως. Σήμερα, στα περισσότερα μοντέλα η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι μία σιγμοειδής συνάρτηση. Αυτή είναι γενικά μία πραγματική, συνεχής και φραγμένη συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος είναι θετική. Το πεδίο ορισμού της μπορεί θεωρητικά να είναι όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά στην πράξη μπορεί να περιοριστεί, θέτοντας όρια στις τιμές των συναπτικών βαρών. Το σύνολο τιμών είναι συνήθως το διάστημα $[0,1]$ ή $[-1,1]$.

Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα σιγμοειδούς συνάρτησης που χρησιμοποιείται ως συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η *λογιστική συνάρτηση (logistic function)*, που δίνεται από τον τύπο

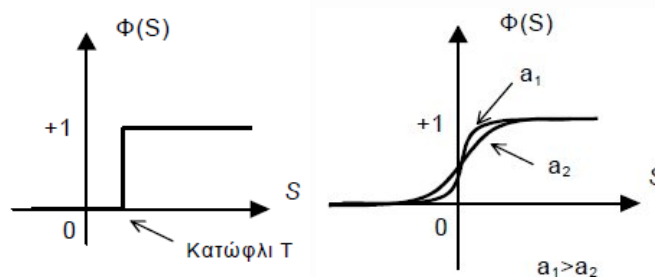
$$f(u) = \frac{1}{1 + e^{-au}}$$

όπου a η παράμετρος κλίσης. Μεταβάλλοντας την παράμετρο κλίσης, παίρνουμε συναρτήσεις με διαφορετικές κλίσεις. Όσο το a τείνει στο άπειρο, η λογιστική συνάρτηση τείνει προς τη βηματική συνάρτηση και έχουμε και πάλι το μοντέλο McCulloch-Pitts. Στο Σχήμα 4 που ακολουθεί, φαίνεται η γραφική παράσταση της λογιστικής συνάρτησης για διάφορες τιμές της παραμέτρου κλίσης a .



Σχήμα 4.4, Η λογιστική συνάρτηση, για $a = 0.5$ (μπλε), $a = 1$ (κόκκινο) και $a = 2$ (πράσινο).

Η σιγμοειδής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και πρακτικά μοιάζει πολύ με τη βηματική 0/1 όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα



Σχήμα 4.5, Βηματική και Σιγμοειδής συνάρτηση.

Για τους παραπάνω λόγους, το ενδιαφέρον των επιστημόνων που μελετούν δίκτυα Perceptron πολλών στρωμάτων σχεδόν μονοπωλείται από δίκτυα των οποίων οι νευρώνες χρησιμοποιούν τη σιγμοειδή συνάρτηση.

Άλλα παραδείγματα σιγμοειδών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις ενεργοποίησης είναι η υπερβολική συνάρτηση (hyperbolic function) και η συνάρτηση τόξου εφαπτομένης (arctangent function).

Η υπερβολική εφαπτομένη (hyperbolic tangent)

$$\tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

είναι μια συνάρτηση που χρησιμοποιείται εναλλακτικά και μοιάζει με τη βηματική συνάρτηση $-1/1$. Η υπερβολική εφαπτομένη είναι επίσης παραγωγίσιμη και έχει απλή σχέση με τη σιγμοειδή συνάρτηση

$$\tanh(u) = 2f(2u) - 1$$

Η χρήση των «μαλακών» συναρτήσεων κατωφλίωσης όπως η σιγμοειδής συνάρτηση ή η υπερβολική εφαπτομένη δημιουργεί ομαλές επιφάνειες χωρίς απότομες μεταβολές στην τιμή της εξόδου του δικτύου.

Τα δίκτυα Perceptron πολλών στρωμάτων που ενσωματώνουν τη σιγμοειδή συνάρτηση αποδεικνύεται ότι έχουν πολλές δυνατότητες αναπαράστασης συναρτήσεων. Σύμφωνα με το βασικό Θεώρημα τα δίκτυα αυτής της μορφής μπορούν να προσεγγίσουν οποιαδήποτε ομαλή συνάρτηση, όσο κοντά επιθυμούμε. Για το λόγο αυτό τα δίκτυα αυτά καλούνται και 'Universal Approximators' («Καθολικοί Προσεγγιστές»).

Με την εισαγωγή της συνάρτησης ενεργοποίησης, ο νευρώνας γίνεται μη γραμμικός. Αντίστοιχα, ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο που αποτελείται από τέτοιους νευρώνες θα είναι μη γραμμικό. Αυτή η εγγενής μη γραμμικότητα των νευρωνικών δικτύων είναι ένα πλεονέκτημα έναντι άλλων γνωστών μεθόδων αντιμετώπισης πολλών προβλημάτων. Για παράδειγμα, όταν σε ένα πρόβλημα πρόβλεψης το σύστημα που μελετάμε είναι μη γραμμικό και ιδιαίτερα όταν παρουσιάζει χασοπή συμπεριφορά, τα γνωστά γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης αδυνατούν να δώσουν σωστά αποτελέσματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα μη γραμμικά τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι προτιμότερα.

4.2 Εκπαίδευση Δικτύων MLP

Η εκπαίδευση ενός δικτύου πολλών στρωμάτων είναι η διαδικασία ρύθμισης των συναπτικών βαρών του έτσι ώστε να ικανοποιείται κάποιο κριτήριο καταλληλότητας. Αυτός άλλωστε είναι και ο στόχος της εκπαίδευσης σε οποιοδήποτε νευρωνικό δίκτυο όπως, πχ, σε ένα απλό Perceptron.

Αυτό που κάνει την εκπαίδευση ενός δικτύου MLP πολύ πιο ενδιαφέρουσα είναι η ιδιότητα του καθολικού προσεγγιστή. Αυτή λέει, με απλά λόγια, πως αν έχουμε το κατάλληλο σε μέγεθος δίκτυο μπορούμε να το εκπαιδεύσουμε να μάθει οποιαδήποτε συνάρτηση εμείς επιθυμούμε με οποιαδήποτε ποιότητα προσέγγισης εμείς επιθυμούμε. Σε αντιδιαστολή με αυτό, το απλό δίκτυο Perceptron μπορεί να υλοποιήσει μόνο γραμμικές διαχωριστικές επιφάνειες. Αυτό αιτιολογεί και τη δημοτικότητα των αλγορίθμων εκπαίδευσης των MLP με κυριότερο εκπρόσωπο τον αλγόριθμο Back-Propagation.

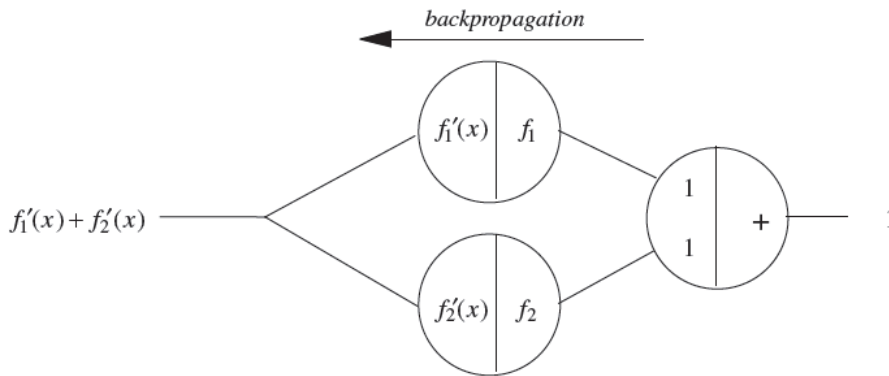
4.2.1 Ο αλγόριθμος Back-Propagation

Ο αλγόριθμος Back-Propagation προτάθηκε από τον Paul Werbos στη δεκαετία του 1970 στα πλαίσια της ανάλυσης μοντέλων οικονομικής και πολιτικής πρόβλεψης. Τότε, τα μοντέλα αυτά δεν είχαν σχεδιαστεί για να έχουν σχέση ή να θυμίζουν νευρωνικά δίκτυα. Παρόμοια μοντέλα είχαν προταθεί ανεξάρτητα και από άλλους ερευνητές όπως οι Bryson & Ho. Αργότερα, και συγκεκριμένα τη δεκαετία του 1980, έγινε αντιληπτό ότι η μέθοδος μπορούσε να μεταφερθεί αυτούσια στην εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων πολλών στρωμάτων, και έκτοτε έγινε η πιο γνωστή και η πιο διαδεδομένη μέθοδος για το σκοπό αυτό.

Βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η ύπαρξη στόχων, όπως ακριβώς και στο απλό δίκτυο Perceptron. Συνεπώς το μοντέλο ανήκει στην κατηγορία των δικτύων που εκπαιδεύονται με επίβλεψη.

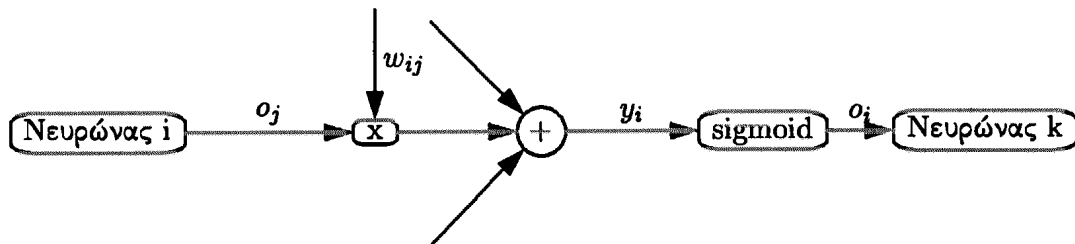
Η μέθοδος της κατευθυνόμενης εκπαίδευσης LMS έχει σαν σκοπό την εύρεση των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων που ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πραγματικής από την επιθυμούμενη έξοδο του δικτύου.

Οι ίδιες αρχές ακολουθούνται και στον αλγόριθμο οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος με την διαφορά ότι στο πολυεπίπεδο δίκτυο perceptron δεν μπορούμε να πετύχουμε αναλυτική λύση. Γι' αυτό τον λόγο καταφεύγουμε στην μέθοδο της διαδοχικής προσέγγισης των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων κατά την διεύθυνση της αρνητικής τιμής της πρώτης παραγώγου του σφάλματος (steepest descent - βαθύτατη κάθοδος). Η μέθοδος αυτή που είναι η πλέον διαδεδομένη τεχνική προσδιορισμού της μνήμης πολύπλοκων νευρωνικών ονομάζεται αλγόριθμος οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος.



Σχήμα 4.6, Result of the backpropagation step.

Ο αλγόριθμος οφείλει την ονομασία του στο γεγονός ότι ενώ κατά την ενεργοποίηση του νευρωνικού δικτύου οι υπολογισμοί ξεκινούν από τους νευρώνες εισόδου και κατευθύνονται διαδοχικά προς τους νευρώνες του εξόδου, υπολογίζοντας την τιμή της εξόδου των νευρώνων στα κρυφά επίπεδα, η εκπαίδευση εκτελεί την αντίστροφη διαδικασία. Μετά την ενεργοποίηση του δικτύου αρχίζει η διαδικασία επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων αρχικά στις συνάψεις που βρίσκονται στους νευρώνες εξόδου και στην συνέχεια ακολουθεί ο επαναπροσδιορισμός των συντελεστών βαρύτητας προς τους νευρώνες εισόδου.



Σχήμα 4.7, Διάταξη νευρώνων στον αλγόριθμο οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος.

Στην γενική περίπτωση ένα πολυεπίπεδο δίκτυο perceptron αποτελείται από έναν αριθμό κρυφών επιπέδων και το επίπεδο εξόδου που περιέχει M νευρώνες. Στην κατευθυνόμενη εκπαίδευση τα παραδείγματα αποτελούνται από ζεύγη διανυσμάτων εισόδου-εξόδου. Αν η είσοδος του δικτύου αποτελείται από N εισόδους τότε τα παραδείγματα είναι διατεταγμένες δυάδες διανυσμάτων (a, b) , $a \in \mathbf{R}^N$, $b \in \mathbf{R}^M$.

Το σφάλμα εκτίμησης για τυχαία είσοδο a είναι το τετράγωνο των διαφορών της πραγματικής εξόδου του δικτύου o με το αντίστοιχο διάνυσμα των αναμενόμενων τιμών b :

$$\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = \frac{1}{2}(b - o)^T(b - o) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^M (b_i - o_i)^2$$

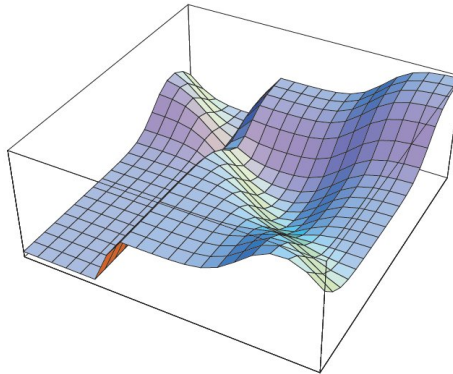
Δεδομένου ότι συνήθως έχουμε στην διάθεση μας Q παραδείγματα, το αναμενόμενο σφάλμα υπολογίζεται από την σχέση:

$$E[\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha] = \frac{1}{2}E\left[\sum_{i=1}^M (b_i - o_i)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^M R[(b_i - o_i)^2] = \frac{1}{2Q}\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^Q (b_{ij} - o_{ij})^2$$

Είναι γνωστό ότι οι προσπάθειες των ερευνητών για την αναζήτηση μεθόδου αναλυτικού υπολογισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων, μιας λύσης παρόμοιας με αυτή των φίλτρων Wiener, έχουν καταλήξει σε αποτυχία. Γι' αυτό τον λόγο καταφεύγουμε στην μέθοδο της διαδοχικής προσέγγισης των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων κατά την διεύθυνση της αρνητικής τιμής της πρώτης παραγώγου του σφάλματος. Η μέθοδος αυτή επαναπροσδιορίζει την αριθμητική τιμή του συντελεστή βαρύτητας των συνάψεων σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta w_{ij} = -n \frac{\partial \Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha}{\partial w_{ij}}$$

όπου n είναι μικρός θετικός πραγματικός αριθμός που ονομάζεται ρυθμός εκπαίδευσης του αλγόριθμου.



Σχήμα 4.8. A local minimum of the error function.

Η εξίσωση μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση της εξόδου και της εσωτερικής κατάστασης του νευρώνα:

$$\Delta w_{ij} = -n \frac{\partial \Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial w_{ij}}$$

Αν ορίσουμε σαν την δ_i αρνητική τιμή της παραγώγου του σφάλματος ως προς την εσωτερική κατάσταση του νευρώνα y_i (εσωτερική κατάσταση του νευρώνα είναι η έξοδος του γραμμικού του τελεστή), τότε:

$$\delta_i = -\frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial y_i} = -\frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial o_i} \frac{\partial o_i}{\partial y_i}$$

και

$$\Delta w_{ij} = n \delta_i \frac{\partial y_i}{\partial w_{ij}} = n \delta_i \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \sum_k w_{ik} o_k = n \delta_i o_j$$

Για να πετύχουμε μία αναλυτική έκφραση της συνάρτησης επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων χωρίζουμε τους νευρώνες σε δύο κατηγορίες.

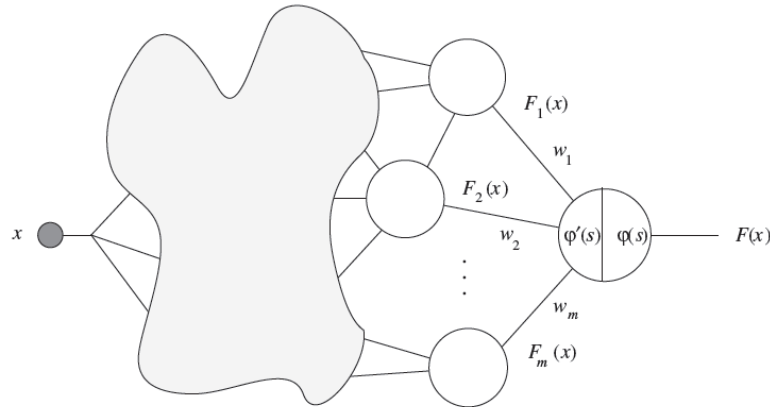
1. Νευρώνες εξόδου.

Η αρνητική τιμή της παραγώγου του σφάλματος ως προς την εσωτερική κατάσταση του νευρώνα (δ_i) γίνεται:

$$\delta_i = -\frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial o_i} \frac{\partial o_i}{\partial y_i} = -(-(b_i - o_i)) \frac{\partial}{\partial y_i} f(y_i)$$

Ο τελευταίος πολλαπλασιαστικός όρος δεν είναι τίποτα άλλο από την πρώτη παράγωγο του μη γραμμικού τελεστή του νευρώνα. Η συνάρτηση επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων για τους νευρώνες εξόδου γίνεται:

$$\Delta w_{ij} = n \delta_i o_j = n(b_i - o_i) o_j \frac{\partial}{\partial y_i} f(y_i)$$



Σχήμα 4.9, Backpropagation at the last node.

2. Κρυφοί νευρώνες. Η περίπτωση των κρυφών νευρώνων είναι ελαφρώς πολυπλοκότερη. Αν υποθέσουμε ότι στο αμέσως υψηλότερο επίπεδο βρίσκονται Κ νευρώνες, τότε η αρνητική τιμή της παραγώγου του σφάλματος ως προς την εσωτερική κατάσταση του νευρώνα (δ_i) γίνεται:

$$\delta_i = -\frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial o_i} \frac{\partial o_i}{\partial y_i} = -\frac{\partial o_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^K \frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial o_i} = \frac{\partial o_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^K \left(-\frac{\partial \Sigma \text{φάλαμα}}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial o_i} \sum_{m=1}^I w_{km} o_m$$

όπου I είναι ο αριθμός των νευρώνων του επιπέδου που μελετάμε. Μετά την απλοποίηση των παραπάνω εκφράσεων έχουμε:

$$\delta_i = \frac{\partial o_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^K \delta_k w_{ki}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο όρος δ του νευρώνα i εξαρτάται από τους αντίστοιχους όρους δ των νευρώνων που βρίσκονται στο αμέσως υψηλότερο επίπεδο και τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων που συνδέουν την έξοδο του νευρώνα. Προκύπτει μάλιστα σαν το εσωτερικό γινόμενο των αντίστοιχων διανυσμάτων τους.

Η συνάρτηση επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων για τους κρυφούς νευρώνες γίνεται:

$$\Delta w_{ij} = n\delta_i o_j = n o_j \frac{\partial o_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^K \delta_k w_{ki}$$

Επειδή ο υπολογισμός των συντελεστών δ είναι αναδρομικός, από τους νευρώνες υψηλότερων επιπέδων προς χαμηλότερα επίπεδα γι' αυτό και η διαδικασία επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων στον πολυεπίπεδο δίκτυο *perceptron* ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Τοποθέτηση αρχικών τιμών. Ορίζουμε τον ρυθμό εκπαίδευσης η και τοποθετούμε τυχαίες αρχικές τιμές στους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων.

2. Ενεργοποίηση του δικτύου. Τοποθετούμε στην είσοδο του δικτύου τυχαίο πρότυπο από τα παραδείγματα και στην συνέχεια υπολογίζουμε από χαμηλότερο προς υψηλότερο επίπεδο την έξοδο των νευρώνων κάθε επιπέδου.

3. Υπολογισμός των συντελεστών δ . Αντιστρέφοντας την φορά των υπολογισμών υπολογίζουμε τους συντελεστές δ από υψηλότερα σε χαμηλότερα επίπεδα.

4. Επαναπροσδιορισμός των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων. Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές δ και την αριθμητική τιμή των εξόδων των κόμβων μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων όλων των νευρώνων του δικτύου.

5. Έλεγχος σύγκλισης. Υπάρχουν διάφορα κριτήρια ελέγχου της σύγκλισης του αλγόριθμου. Οι συνήθεις έλεγχοι που γίνονται είναι οι εξής:

(α) Υπολογίζεται η συνολική απόλυτη μεταβολή των συντελεστών βαρύτητας σε σχέση με έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό, το κριτήριο σύγκλισης.

(β) Υπολογίζεται ο μέσος ρυθμός μεταβολής του σφάλματος στα παραδείγματα. Αν η μεταβολή αυτή είναι πολύ μικρή τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

(γ) Αν ο μέσος ρυθμός μεταβολής των συντελεστών δ για όλα τα παραδείγματα είναι πολύ μικρός, αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη μεταβολή των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων είναι επίσης πολύ μικρή.

6. Επανάληψη του αλγόριθμου. Τοποθετούμε νέο παράδειγμα στην είσοδο του δικτύου και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από το δεύτερο βήμα.

4.2.2 Βελτιώσεις του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος

Ο αλγόριθμος οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος εξασφαλίζει την σύγκλιση σε ένα τοπικά ελάχιστο σημείο με την έννοια ότι το σημείο αυτό, που ορίζει ένα σύνολο τιμών για τους συντελεστές σύναψης του δικτύου, εξασφαλίζει την ελάχιστη τιμή του σφάλματος της επιθυμούμενης από την πραγματική έξοδο του δικτύου για οποιαδήποτε μικρή μεταβολή κάθε συντελεστή βαρύτητας του δικτύου. Το γεγονός αυτό δεν μας εξασφαλίζει βέβαια και το συνολικά ελάχιστο το οποίο ορίζεται σαν το σύνολο τιμών των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων για το οποίο οποιαδήποτε μεταβολή των συντελεστών βαρύτητας δίνει μεγαλύτερο σφάλμα.

Μόνο στην περίπτωση κατά την οποία μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ενός μόνο τοπικά ελάχιστου σημείου (το οποίο θα είναι τότε και συνολικά ελάχιστο) θα είχαμε σύγκλιση του αλγόριθμου στην επιθυμούμενη λύση. Η συνθήκη αυτή δεν μπορεί να εξασφαλιστεί στην περίπτωση του πολυεπίπεδου δικτύου τύπου *perceptron*.

Είναι επίσης σημαντικό να επισημάνουμε ότι λανθασμένη επιλογή του ρυθμού εκπαίδευσης έχει σαν αποτέλεσμα δύο αντιθετικά συμβάντα. Αν ο συντελεστής εκπαίδευσης έχει μεγάλη αριθμητική τιμή τότε υπάρχει περίπτωση να μην επιτύχουμε σύγκλιση του αλγόριθμου σε κάποιο τοπικά ελάχιστο σημείο του σφάλματος αλλά να παρατηρήσουμε κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης ταλαντώσεις γύρω από ένα ή περισσότερα τοπικά ελάχιστα. Οι ταλαντώσεις αυτές είναι μεγαλύτερες όσο μεγαλύτερη είναι και η αριθμητική τιμή του ρυθμού εκπαίδευσης. Αντίθετα, αν επιλεγεί μικρός συντελεστής εκπαίδευσης τότε η σύγκλιση πιθανόν να απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος σε μερικές περιοχές μεταβάλλει με πολύ χαμηλούς ρυθμούς τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων, με άμεση συνέπεια την αύξηση των βημάτων του αλγόριθμου μέχρι την τελική σύγκλιση. Ταυτόχρονα αυξάνεται και η πιθανότητα σύγκλισης του αλγόριθμου σε ένα τοπικά ελάχιστο σημείο το οποίο δεν δίνει μικρό σφάλμα.

Ακολουθούν μερικές χρήσιμες οδηγίες για το πως θα βελτιώσουμε την απόδοση του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος.

1. Τα παραδείγματα πρέπει να επιλέγονται με τυχαίο τρόπο. Μια καλή στρατηγική είναι να αναδιατάξουμε με τυχαίο τρόπο τα παραδείγματα και κατόπιν να εφαρμόσουμε μία κυκλική διαδοχή χρήσης των παραδειγμάτων στον αλγόριθμο.

2. Οι υπολογισμοί του αλγόριθμου αναφέρονται στο σφάλμα που προκύπτει από την τοποθέτηση ενός μόνο παραδείγματος στην είσοδο του δικτύου. Η συνάρτηση σφάλματος που ελαχιστοποιείται αναφέρεται στο στιγμιαίο σφάλμα που ορίστηκε σαν την διαφορά της επιθυμούμενης από την πραγματική έξοδο για ένα μόνο παράδειγμα. Αν ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση σφάλματος που ορίζεται σαν την μέση τιμή του στιγμιαίου σφάλματος στα διαθέσιμα παραδείγματα εκπαίδευσης, τότε προκύπτουν οι ίδιες αναδρομικές εξισώσεις και όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται από τις αντίστοιχες αναμενόμενες τιμές, εφόσον τοποθετηθούν όλα τα παραδείγματα στο δίκτυο.

Αυτή η παραλλαγή του αλγόριθμου αποφεύγει σε σημαντικό βαθμό τα τοπικά ελάχιστα, αλλά απαιτεί χρονοβόρους υπολογισμούς διότι για κάθε ένα βήμα επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας απαιτείται η τοποθέτηση όλων των διαθέσιμων παραδειγμάτων στο δίκτυο. Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το νευρωνικό δίκτυο περιέχει πολλά επίπεδα, έχουμε μεγάλο αριθμό νευρώνων και διαθέτουμε πολλά παραδείγματα, η παραλλαγή του αλγόριθμου που προτείνουμε είναι στην πράξη ανεφάρμοστη.

Συνοπτικά, η στατιστική εκδοχή του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος έχει ως εξής:

(α) Τοποθετώ αρχικές τιμές για τον ρυθμό εκπαίδευσης και τους συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων.

(β) Τοποθετούμε ένα παράδειγμα στην είσοδο του δικτύου και υπολογίζουμε την πραγματική του έξοδο για την τρέχουσα εκτίμηση των συντελεστών βαρύτητας των νευρώνων

(γ) Κατά την αντίστροφη φορά υπολογίζουμε τους συντελεστές δ .

(δ) Επιλέγουμε το επόμενο παράδειγμα και επαναλαμβάνουμε το αλγόριθμο από το δεύτερο βήμα.

(ε) Όταν τοποθετήσουμε όλα τα παραδείγματα υπολογίζουμε την μέση τιμή των συντελεστών δ κάθε νευρώνα. Με την βοήθεια της μέσης τιμής δ επαναπροσδιορίζουμε τους συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων.

(στ) Ελέγχουμε την συνθήκη σύγκλισης. Αν δεν επιτευχθεί σύγκλιση ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται από την αρχή.

3. Πειράματα έχουν δείξει ότι ο αριθμός των νευρώνων που απαρτίζουν κάθε επίπεδο του νευρωνικού δικτύου πρέπει να μειώνεται καθώς προχωράμε από την είσοδο προς την έξοδο του. Η αρχιτεκτονική αυτή τείνει να μειώσει τον αριθμό των τοπικά ελάχιστων του δικτύου.

4. Καλή επιλογή των αρχικών τιμών των συντελεστών βαρύτητας των νευρώνων είναι μικροί πραγματικοί αριθμοί στην περιοχή του μηδενός. Οι αριθμοί αυτοί δεν πρέπει να προσεγγίζουν την τιμή του μηδενός.

5. Η αριθμητική τιμή του ρυθμού εκπαίδευσης (η) επιλέγεται συνήθως εμπειρικά. Συνήθως οι τιμές που εξασφαλίζουν καλή ταχύτητα σύγκλισης και αποφεύγουν τις ταλαντώσεις γύρω από τοπικά βέλτιστα είναι θετικοί πραγματικοί κοντά στην μονάδα.

6. Συνήθως ο παράγοντας δ για τους νευρώνες που περιέχονται σε χαμηλότερα επίπεδα λαμβάνει μικρότερες αριθμητικές τιμές. Συνεπώς καλό θα ήταν ο ρυθμός εκπαίδευσης να έχει μεγαλύτερη αριθμητική τιμή για τους νευρώνες των χαμηλότερων επιπέδων.

7. Η σύγκλιση του αλγόριθμου επιβραδύνεται σημαντικά με την αύξηση του αριθμού των επιπέδων του δικτύου. Γι' αυτό τον λόγο πρέπει να διατηρούμε τον χαμηλότερο αριθμό επιπέδων στο δίκτυο για το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε. Αν είναι απαραίτητο μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των νευρώνων στα ήδη υπάρχοντα επίπεδα. Αν το σφάλμα δεν μειώνεται κατά την επιθυμητή τιμή τότε πρέπει να δοκιμάσουμε να προσθέσουμε ένα επίπεδο νευρώνων.

8. Οι επιθυμούμενες τιμές των παραδειγμάτων δεν θα πρέπει να συμπίπτουν με τα απειροστά όρια της σιγμοειδούς συνάρτησης, αλλά πρέπει να βρίσκονται μέσα στο πεδίο τιμών της.

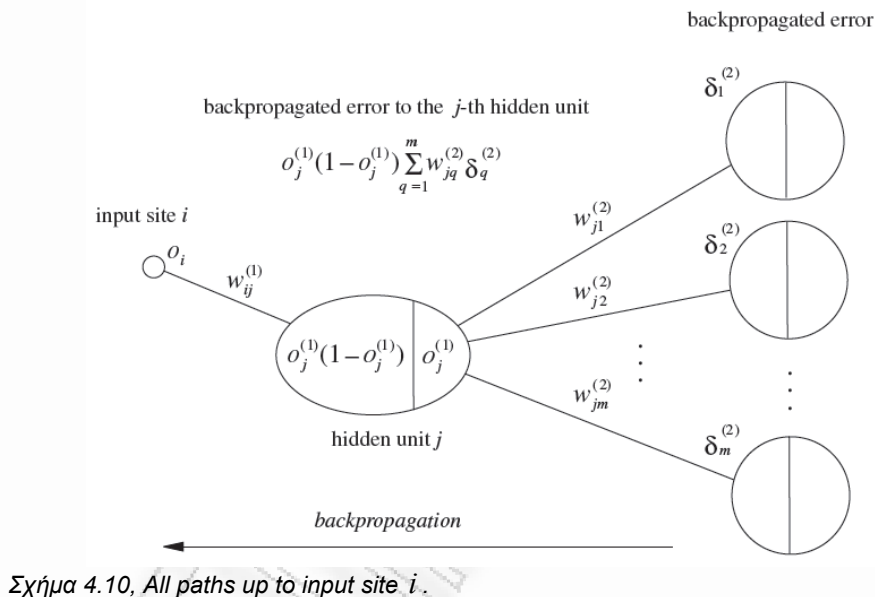
9. Καλό θα ήταν να επιλέξουμε έναν μη γραμμικό τελεστή που να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$f(-x) = -f(x)$$

Έχει παρατηρηθεί ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων ο αλγόριθμος "μαθαίνει" γρηγορότερα όταν ο μη γραμμικός τελεστής ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Τυπικό παράδειγμα μη γραμμικού νευρωνικού τελεστή που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη είναι η συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης.

10. Αυξημένες δυνατότητες αποφυγής τοπικά ελάχιστων σημείων παρουσιάζονται αν σε κάθε νευρώνα προστεθεί μία σύναψη η οποία έχει σταθερή είσοδο (συνήθως επιλέγονται οι τιμές 1 ή -1). Η επέκταση του διανύσματος εισόδου του νευρώνα έχει σαν συνέπεια την αύξηση των βαθμών ελευθερίας του δικτύου και πιστεύεται ότι αυτή είναι η κύρια αιτία ελάττωσης της πιθανότητας σύγκλισης σε τοπικά ελάχιστο σημείο της συνάρτησης του σφάλματος.

11. Μια έξυπνη τεχνική αύξησης της ταχύτητας εκπαίδευσης του δικτύου συνίσταται στην ανεξάρτητη (ανά νευρώνα) αύξηση του συντελεστή εκπαίδευσης όταν η πρώτη παράγωγος του σφάλματος ως προς τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων του νευρώνα παραμένουν ομόσημες για έναν αριθμό διαδοχικών επαναλήψεων του αλγόριθμου με διαφορετικά παραδείγματα. Αντίθετα όταν έχουμε φαινόμενα αλλαγής πρόσημου (πιθανή ύπαρξη φαινομένων ταλάντωσης γύρω από κάποιο τοπικά ελάχιστο) ο συντελεστής εκπαίδευσης πρέπει να ελαττώνεται.



Σχήμα 4.10, All paths up to input site i .

12. Σε πολλές εφαρμογές έχει παρατηρηθεί βελτίωση των χαρακτηριστικών σύγκλισης του αλγόριθμου όταν στην συνάρτηση επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων προστεθεί και ένας σταθμισμένος όρος που περιέχει την μεταβολή του συντελεστή βαρύτητας που προήλθε από την εφαρμογή του αλγόριθμου στο προηγούμενο παράδειγμα:

Ο αριθμός των εργασιών που μελετούν τα θεωρητικά προβλήματα και την συμπεριφορά του αλγόριθμου της οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος είναι πολύ μεγάλος στην διεθνή βιβλιογραφία, γεγονός που επιβεβαιώνει την σημαντικότητα των εφαρμογών του πολυεπίπεδου δικτύου perceptron.

4.3 Στοχαστικές Μηχανές

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα του αλγορίθμου εκπαίδευσης Back-Propagation είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι το σημείο όπου θα συγκλίνει θα είναι ολικό ελάχιστο. Το πρόβλημα γεννιέται από το γεγονός ότι η συνάρτηση κόστους J είναι έντονα γραμμική συνάρτηση των παραμέτρων w_{ij} . Η ελαχιστοποίηση πολύπλοκων συναρτήσεων

κόστους συναντάται συχνά στη στατιστική φυσική και επομένως μπορούμε να δανειστούμε μεθόδους και ιδέες από την ιδιαίτερα εκτεταμένη σχετική βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση της ελαχιστοποίησης του κόστους ενός δικτύου MLP.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εξομοίωση της διαδικασίας της ανόπτωσης (simulated annealing). Η φυσική διεργασία της ανόπτωσης εφαρμόζεται στη σκλήρυνση μετάλλων: το μέταλλο αρχικά θερμαίνεται σε μεγάλη θερμοκρασία και κατόπιν αφήνεται να κρυώσει. Με την ψύξη, τα μόρια του μετάλλου συγκλίνουν σε μια κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας και έτσι το υλικό γίνεται πιο σκληρό.

Στην εξομοιωμένη ανόπτωση παραλλάσσουμε την ιδέα της κατάβασης δυναμικού επιτρέποντας πιθανές διορθώσεις του διανύσματος των παραμέτρων έτσι ώστε το κόστος να αυξάνεται αντί να μειώνεται. Η πιθανότητα να κάνουμε μια τέτοια «λάθος» κίνηση είναι συνάρτηση μιας παραμέτρου T που αντιστοιχεί στη φυσική έννοια της θερμοκρασίας. Όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία T , τόσο πιο πιθανό είναι να κινηθούμε ανοδικά αν και ως εσπί το πλείστον οι κινήσεις μας είναι καθοδικές.

Αυτές οι περιστασιακές ανοδικές κινήσεις φαίνονται κατ' αρχήν άσκοπες και λάθος, πλην όμως μας επιτρέπουν να ξεφύγουμε από τοπικά ελάχιστα (λακκούβες) υπερπηδώντας τοπικά εμπόδια (λόφους). Σε χαμηλές θερμοκρασίες, το σύστημα έχει λίγες πιθανότητες να κάνει ανοδικές κινήσεις, ενώ σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες η μέθοδος ταυτίζεται ουσιαστικά με την κατάβαση δυναμικού αφού η πιθανότητα ανοδικής κίνησης είναι πρακτικά μηδέν.

Η μέθοδος της εξομοιωμένης ανόπτωσης βασίζεται στον κλασικό αλγόριθμο του Metropolis, ο οποίος τροποποιεί την κατάβαση δυναμικού με πιθανότητα ανοδικών μετακινήσεων εξαρτώμενων από τη θερμοκρασία και σε ένα χρονοδιάγραμμα ψύξης του μοντέλου όπως αυτό που προτάθηκε, για παράδειγμα από τον Kirkpatrick το 1983. Παρόλη την πολυπλοκότητά του ο αλγόριθμος δεν εγγυάται σύγκλιση σε κάποιο τοπικό ελάχιστο, αλλά δίνει δυνατότητα απεγκλωβισμού από ρηχά τοπικά ελάχιστα.

Άλλα νευρωνικά μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία της θερμοδυναμικής και στην στατιστική φυσική είναι η μηχανή Boltzmann, η μηχανή Helmholtz, και η Θεωρία του Μέσου Πεδίου (Mean Field Theory). Το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι περισσότερες από τις παραπάνω μεθόδους είναι η εξαιρετικά βραδεία σύγκλιση. Συνήθως ο χρόνος σύγκλισης είναι πολλαπλάσιος του χρόνου που αντιστοιχεί στον απλό αλγόριθμο back-propagation. Έτσι η πρακτική εφαρμογή των μεθόδων αυτών περιορίζεται στα προβλήματα εκείνα που η ποιότητα της τελικής λύσης είναι πολύ πιο σημαντική από τον χρόνο σύγκλισης.

4.4 Εφαρμογές των δικτύων MLP

Γενικά οι εφαρμογές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: (α) προβλήματα ταξινόμησης προτύπων και (β) προβλήματα εκτίμησης συναρτήσεων. Είναι ποικίλες οι εφαρμογές όπου μπορεί να βρει κανείς στη βιβλιογραφία και αφορούν πεδία, όπως:

- Την οικονομία και το εμπόριο (πρόβλεψη οικονομικών μεγεθών, ανίχνευσης απάτης σε ηλεκτρονικές συναλλαγές, εκτίμηση αξίας ακινήτων, κλπ)
- Την βιομηχανία (βιομηχανικός έλεγχος, ρύθμιση ηλεκτρονικού φορτίου, ρομποτική, εφαρμογές σε οχήματα),
- Την ιατρική (διάγνωση ασθενειών, βιοπληροφορική, κλπ) και
- Τους υπολογιστές (αναγνώριση προτύπων, ασφάλεια, ηλεκτρονικά παιχνίδια, κλπ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΚΤΥΑ ΑΚΤΙΝΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Υπάρχει μία ιδιαίτερη ομάδα νευρωνικών δικτύων τα οποία ονομάζονται δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων (Radial Basis Function networks - RBF networks). Τα δίκτυα αυτά αποτελούνται από ένα κρυφό επίπεδο και ένα επίπεδο νευρώνων εξόδου. Η ονομασία τους οφείλεται στο γεγονός της αντικατάστασης του γραμμικού τελεστή που υπάρχει στους νευρώνες του κρυφού επιπέδου.

Ο μη γραμμικός τελεστής είναι μία συνάρτηση που περιέχει έκφραση της γενικευμένης Ευκλείδειας απόστασης του διανύσματος εισόδου με το αντίστοιχο διάνυσμα των συντελεστών βαρύτητας των συνάψεων του νευρώνα. Οι νευρώνες εξόδου δεν διαθέτουν μη γραμμικό τελεστή και γι' αυτό το λόγο εκτελούν μονάχα ένα γραμμικό μετασχηματισμό των εξόδων των νευρώνων του κρυφού επιπέδου.

Η συνάρτηση που δίνει την σχέση μιας εξόδου του δικτύου με την είσοδο και τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων είναι η ακόλουθη:

$$o = \sum_{i=1}^N w_i G(x, q_i)$$

όπου x είναι η είσοδος του δικτύου, είναι ένα από N σταθερά σημεία στο χώρο των προτύπων, και $w_i, i = 1, N$ είναι οι συντελεστές βαρύτητας ενός νευρώνα εξόδου.

Το πρόβλημα της κατευθυνόμενης εκπαίδευσης των δικτύων ακτινικών συναρτήσεων μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Δοσμένου ενός αριθμού παραδειγμάτων εκπαίδευσης βρείτε τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων που ελαχιστοποιούν το μέσο σφάλμα της επιθυμούμενης από την πραγματική έξοδο του δικτύου.

Η εύρεση των συντελεστών βαρύτητας κάθε νευρώνα αποτελεί μια ανεξάρτητη λύση. Αν ορίσουμε σαν b την επιθυμούμενη έξοδο κάθε νευρώνα, το μέσο σφάλμα της προσομοίωσης για M παραδείγματα είναι:

$$\text{Σφάλμα} = (b - Gw)^T (b - Gw) = \|b - Gw\|^2 = \sum_{j=1}^M (b_j - \sum_{i=1}^N w_i G(x, q_i))^2$$

όπου $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)^T$ το διάνυσμα των επιθυμούμενων εξόδων, και $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$ οι συντελεστές βαρύτητας του νευρώνα. Το G περιγράφει ένα σύνολο σταθερών αριθμών:

$$G = \begin{pmatrix} G(x_1, q_1) & G(x_1, q_2) & \dots & G(x_1, q_N) \\ G(x_2, q_1) & G(x_2, q_2) & \dots & G(x_2, q_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(x_M, q_1) & G(x_M, q_2) & \dots & G(x_M, q_N) \end{pmatrix}$$

Η LMS λύση δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial w} \text{Σφάλμα} = 0 \Rightarrow G^T Gw = G^T b \Rightarrow w = (G^T G)^{-1} G^T b \Rightarrow w = G^+ b$$

Ο πίνακας G^+ ονομάζεται ψευδοαντίστροφος πίνακας της G διότι η διαδικασία υπολογισμού της έχει ομοιάζοντα χαρακτηριστικά με τον τρόπο υπολογισμού του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα.

Από την λύση που περιγράψαμε βλέπουμε ότι στην περίπτωση των δικτύων ακτινικών συναρτήσεων μπορούμε να βρούμε με αναλυτικό τρόπο τους συντελεστές βαρύτητας των συνάψεων. Το γεγονός αυτό αποτελεί σαφές πλεονέκτημα απέναντι στις μεθόδους εκπαίδευσης του πολυεπίπεδου perceptron. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι τα δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων μπορούν να προσομοιώσουν με την επιθυμητή ακρίβεια οποιαδήποτε συνεχή διανυσματική συνάρτηση.

Σε προβλήματα κατασκευής συστημάτων ταξινόμησης προτύπων τα δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων χρησιμοποιούνται πλέον συχνότερα από το πολυεπίπεδο perceptron διότι ο αλγόριθμος εκπαίδευσης έχει πολύ μικρή υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Συναρτήσεις ακτινικού τύπου

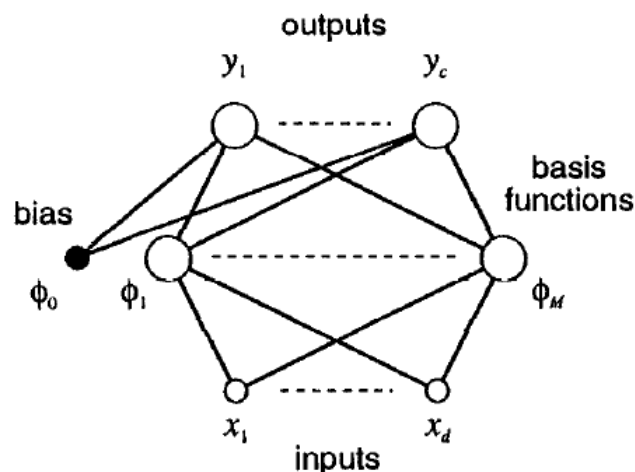
Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται συνάρτηση ακτινικού τύπου (radial function) αν υπάρχει κάποιο διάνυσμα c το οποίο καλούμε κέντρο (center ή centroid) και η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται μόνο από την απόσταση x από το κέντρο

$$f(x) = f(\|x - c\|)$$

Για ένα κύκλο με κέντρο το c και ακτίνα $r = \|x - c\|$ η τιμή της f είναι σταθερή. Το εύρος της συνάρτησης σ είναι επίσης μια παράμετρος που ρυθμίζεται. Κλασικό παράδειγμα ακτινικής συνάντησης η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα είναι η συνάρτηση Gauss.

5.1 Τα Δίκτυα RBF

Τα δίκτυα RBF έχουν δύο στρώματα (χωρίς να υπολογίζουμε το στρώμα εισόδου). Η αιτία δεν είναι ότι απαγορεύεται η χρήση περισσότερων στρωμάτων αλλά ότι δεν υπάρχει ικανοποιητικός αλγόριθμος εκπαίδευσης για τρία και περισσότερα στρώματα ενώ τα στρώματα αρκούν για να προσεγγίσουμε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση.



Σχήμα 5.1, Αρχιτεκτονική ενός δικτύου RBF.

5.1.1 Ανάκληση δικτύου RBF

Η ανάκληση σε ένα δίκτυο RBF είναι εντελώς όμοια με ένα δίκτυο MLP. Τα πράγματα μάλιστα είναι απλούστερα καθώς μιλάμε αποκλειστικά για δίκτυα δύο στρωμάτων όπου το κρυφό στρώμα περιέχει την ακτινική συνάρτηση ενεργοποίησης f , ενώ το στρώμα εξόδου είναι γραμμικό. Η διαφορά είναι ότι η συνάρτηση f δεν είναι πλέον η σιγμοειδής.

Αλγόριθμος**Είσοδοι**

Ένα διάνυσμα εισόδου $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

Πλήθος νευρώνων: στρώμα εισόδου = n , κρυφό στρώμα = K , στρώμα εξόδου = m

Κάθε κρυφός νευρώνας i έχει το δικό του κέντρο c_i και εύρος συνάρτησης σ_i .

Έξοδοι

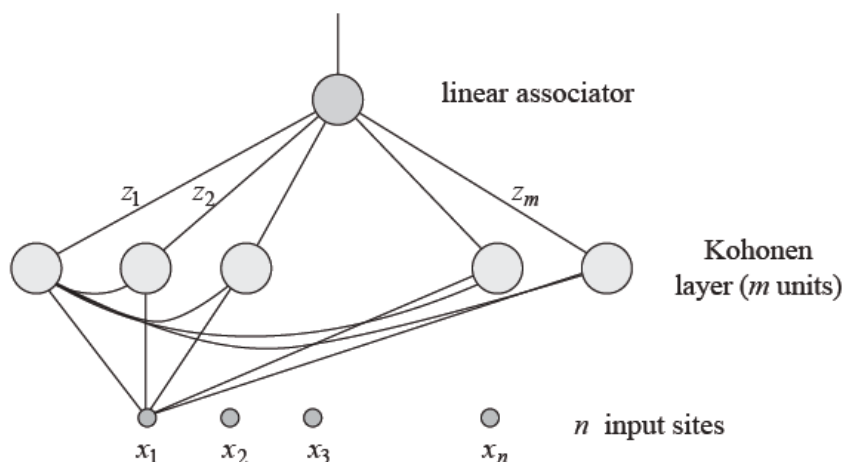
y_1, y_2, \dots, y_m

Μέθοδος

Για κάθε κρυφό νευρώνα $i = 1, \dots, K \{a_i = f(\|x - c_i\|, \sigma_i)\}$

Για κάθε νευρώνα εξόδου $i = 1, \dots, m \{y_i = \sum_{j=1}^K w_{ij} a_j + w_{i0}\}$

Ο νευρώνας i του κρυφού στρώματος έχει το δικό του κέντρο c_i και το δικό του εύρος συνάρτησης σ_i , ενώ δεν υπάρχουν συναπτικά βάρη μεταξύ εισόδων και κρυφού στρώματος. Συναπτικά βάρη υπάρχουν μόνο μεταξύ κρυφού στρώματος και στρώματος εξόδου.



Σχήμα 5.2, Hybrid Network with RBFs.

5.1.2 Πρόταση μοντελοποίησης

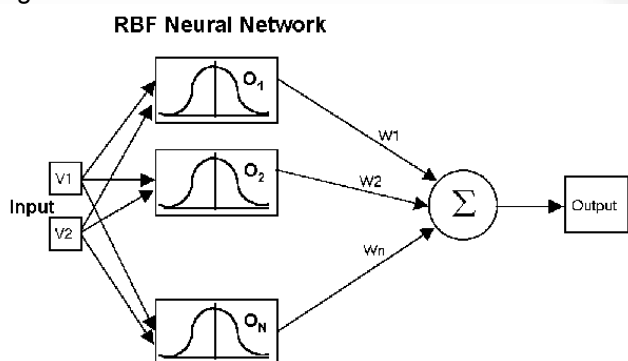
Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι κατά πόσο τα δίκτυα RBF μπορούν να χαρακτηριστούν ως νευρωνικά δίκτυα. Όσον αφορά το συγκεκριμένο μοντέλο αυτό είναι σαφές ότι έχει τη δομή ενός δικτύου πολλών στρωμάτων. Ωστόσο το ερώτημα είναι κατά πόσο το δίκτυο αυτό είναι «νευρωνικό».

Εδώ θα πρέπει να αναλογιστούμε ότι δίκτυα τα οποία αδιαμφισβήτητα χαρακτηρίζονται ως νευρωνικά, όπως πχ το δίκτυο Perceptron ενός ή περισσότερων στρωμάτων, είναι απλώς προσεγγίσεις των βιολογικών νευρωνικών δικτύων. Μάλιστα οι προσεγγίσεις αυτές απέχουν πολύ από την πραγματικότητα, καθώς η λογική «άθροισε-και-κατωφλίωσε» είναι στατική και αγνοεί τη δυναμική συμπεριφορά των πραγματικών νευρώνων.

Έτσι μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι τα δίκτυα RBF αποτελούν μια εναλλακτική πρόταση μοντελοποίησης των νευρωνικών δικτύων. Επί πλέον είναι σαφές ότι στη συνείδηση της επιστημονικής κοινότητας τα δίκτυα αυτά αποτελούν ένα σημαντικό και αναπόσπαστο κομμάτι της νευρωνικής φιλολογίας με σημαντικές εφαρμογές στην πράξη.

5.2 Σύγκριση δικτύων RBF - MLP

Όπως για τα δίκτυα MLP όσο και για τα δίκτυα RBF υπάρχει ένα αντίστοιχο θεώρημα καθολικού προσεγγιστή. Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις ακτινικού τύπου είναι βάση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων και επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση, με οποιοδήποτε βαθμό πιστότητας επιθυμούμε, αν θέσουμε ικανό πλήθος νευρώνων στο κρυφό στρώμα. Το Θεώρημα αυτό αποδείχτηκε από τους Park & Sandberg το 1991.



Σχήμα 5.3, A RBF Neural Network.

Καθώς τόσο τα δίκτυα RBF όσο και τα δίκτυα MLP είναι καθολικοί προσεγγιστές, μπορούμε να προσεγγίσουμε το ένα είδος δικτύου χρησιμοποιώντας το άλλο, και αντίστροφα. Έχει αποδειχτεί, για παράδειγμα, ότι τα δίκτυα MLP μπορούν να θεωρηθούν ως δίκτυα RBF με ακανόνιστες συναρτήσεις ακτινικής βάσης. Επίσης έχει αποδειχτεί η ισοδυναμία μεταξύ δικτύων RBF και μηχανών ασαφούς λογικής.

Αυτό που αποτελεί το κριτήριο για τη χρησιμοποίηση ενός δικτύου RBF ή ενός δικτύου MLP σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η ποιότητα της προσέγγισης που δίνει το κάθε μοντέλο για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων και με πεπερασμένο πλήθος νευρώνων.

5.3 Εκπαίδευση δικτύου RBF

Τα δίκτυα RBF είναι ανομοιογενή. Στο κρυφό στρώμα η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι ακτινικού τύπου και οι παράμετροι που πρέπει να εκπαιδευτούν είναι (α) τα κέντρα c_i και (β) τα εύρη σ_i των κρυφών νευρώνων $i = 1, 2, \dots, K$. Στο στρώμα εξόδου η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι γραμμική και οι παράμετροι που πρέπει να εκπαιδευτούν είναι οι τιμές των συναπτικών βαρών w_{ij} . Λόγω αυτής της ανομοιογένειας αντιμετωπίζουμε ξεχωριστά το πρόβλημα της εκπαίδευσης του στρώματος εξόδου. Αφού βρούμε τα κέντρα των κρυφών νευρώνων με κάποια μέθοδο clustering, κατόπιν βρίσκουμε τα συναπτικά βάρη του εξωτερικού στρώματος με κάποια μέθοδο εκπαίδευσης με επίβλεψη.

Εκπαίδευση κρυφού στρώματος

Διάφοροι ερευνητές έχουν προτείνει ποικίλες μεθόδους για την εκπαίδευση των νευρώνων του κρυφού στρώματος ενός δικτύου RBF. Κάποιες από αυτές είναι ιδιαίτερα απλές αλλά όχι τόσο αποδοτικές, ενώ άλλες έχουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα αλλά επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα με λιγότερους νευρώνες. Στην κατηγορία των απλών μεθόδων ανήκουν αυτές που επιλέγουν κάποια από (ή όλα) τα πρότυπα εισόδου για να αποτελέσουν τα κέντρα c_i που ζητάμε. Περισσότερο πολύπλοκες αλλά με καλύτερα αποτελέσματα είναι η μέθοδος των K - μέσων και η μηχανή διανυσμάτων υποστήριξης.

5.3.1 Κάθε πρότυπο και ένα κέντρο

Κατά τη μέθοδο αυτή κάθε διάνυσμα εισόδου $x^{(i)}$, $i=1,\dots,P$, αποτελεί και ένα κέντρο, δηλαδή $c_i = x^{(i)}$, $K = P$, $i=1,\dots,K$.

Συνεπώς έχουμε P συνολικά κέντρα, όσα και τα πρότυπα εισόδου. Προφανώς η μέθοδος αυτή είναι πολύ «ακριβή» αφού δημιουργεί πάρα πολλούς κρυφούς νευρώνες και δεν ενδείκνυται όταν έχουμε πολλά πρότυπα εισόδου, δηλαδή μεγάλο P . Το πλεονέκτημά της είναι ότι η μάθηση είναι ταχύτερη αφού δε χρησιμοποιούμε κανένα επαναληπτικό αλγόριθμο.

Ένα πρόβλημα που προκύπτει είναι ο υπολογισμός της τιμής του εύρους σ_i που αντιστοιχεί στον i -οστό κρυφό νευρώνα $f(\|x - c_i\|, \sigma_i)$. Ειδικά για τη Γκαουσιανή συνάρτηση ενεργοποίησης, έχει βρεθεί ότι αν δώσουμε σε όλους τους νευρώνες το ίδιο εύρος:

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_K = \sigma = \frac{D}{\sqrt{2P}}$$

όπου D είναι η απόσταση μεταξύ των πιο απομακρυσμένων κέντρων, τότε οι Γκαουσιανές καμπάνες δεν θα είναι ούτε πολύ «μυτερές» (μικρό εύρος) ούτε πολύ «επίπεδες» (μεγάλο εύρος). Οι δύο αυτές ακραίες καταστάσεις πρέπει να αποφεύγονται και συνεπώς η παραπάνω φόρμουλα είναι μια καλή επιλογή για το εύρος των συναρτήσεων του κρυφού στρώματος.

5.3.2 Τυχαία επιλογή προτύπων για να γίνουν κέντρα

Κατά την προηγούμενη μέθοδο τα κέντρα ήταν πάρα πολλά διότι χρησιμοποιήσαμε αδιακρίτως όλα τα πρότυπα εισόδου. Εναλλακτικά μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία τα πρότυπα εισόδου που θα γίνουν κέντρα, εκλέγοντας ένα ποσοστό επί του συνόλου, πχ $K = 10\%$ του P .

Το πλεονέκτημα είναι η μείωση του πλήθους των κέντρων, ενώ αρνητικό είναι το γεγονός ότι υπάρχει κάποια απώλεια πληροφορίας καθώς πολλά πρότυπα αγνοούνται. Ωστόσο σε περιοχές όπου τα πρότυπα είναι πυκνά είναι ιδιαίτερα πιθανό να επιλεγούν αρκετά πρότυπα ως κέντρα ώστε να αντιπροσωπεύσουν την περιοχή αυτή. Έτσι η απώλεια πληροφορίας είναι μικρής σημασίας. Αντίθετα, σε περιοχές όπου τα πρότυπα είναι πολύ αραιά, είναι πολύ πιθανό να μην επιλέξουμε κανένα κέντρο. Ωστόσο οι περιοχές αυτές είναι μικρού ενδιαφέροντος ακριβώς διότι δεν έχουν πολλά πρότυπα εισόδου. Έτσι δε μας ενδιαφέρει πολύ να έχουμε ακριβή αντιπροσώπευση εκεί.

Τόσο η μέθοδος αυτή όσο και η προηγούμενη είναι πολύ απλοϊκές και χρησιμοποιούν μεγάλο πλήθος κέντρων για να επιτύχουν καλή περιγραφή του προβλήματος.

5.3.3 Ομαδοποίηση K -μέσων

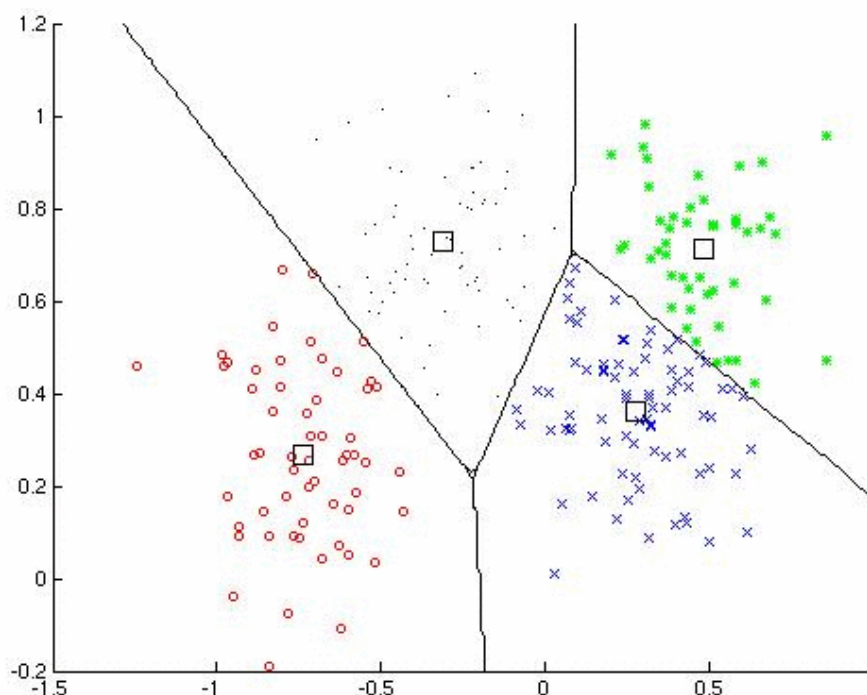
Ο αλγόριθμος K -μέσων (k-means algorithm) είναι γνωστός από τη βιβλιογραφία της αναγνώρισης και ταξινόμησης προτύπων. Θεωρούμε ότι διαθέτουμε P πρότυπα $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(P)}$ που ανήκουν σε K κλάσεις X_1, X_2, \dots, X_K . Το πλήθος των κλάσεων μας δίνεται εξ αρχής. Η μέθοδος K -μέσων αναζητά ένα διάνυσμα αντιπρόσωπο για κάθε κλάση. Ξεκινάει με τυχαία αρχικά διανύσματα κέντρων και προσπαθεί να συμφιλώσει τις εξής δύο βασικές απαιτήσεις:

(α) για κάθε $i = 1, \dots, K$, η κλάση X_i αποτελείται από τα πρότυπα $x^{(P)}$ τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στο διάνυσμα c_i σε σχέση με όλα τα άλλα διανύσματα c_j , $j \neq i$, δηλαδή $\|x^{(P)} - c_i\| = \min_j \|x^{(P)} - c_j\|$.

(β) για κάθε $i = 1, \dots, K$, το διάνυσμα c_i είναι ο μέσος όρος των προτύπων που ανήκουν στην κλάση X_i , δηλαδή

$$c_i = \frac{1}{|X_i|} \sum_{p \in X_i} x^{(p)}$$

Όπου $|X_i|$ είναι το πλήθος των προτύπων της κλάσης. Το διάνυσμα c_i , λέγεται κέντρο της κλάσης.



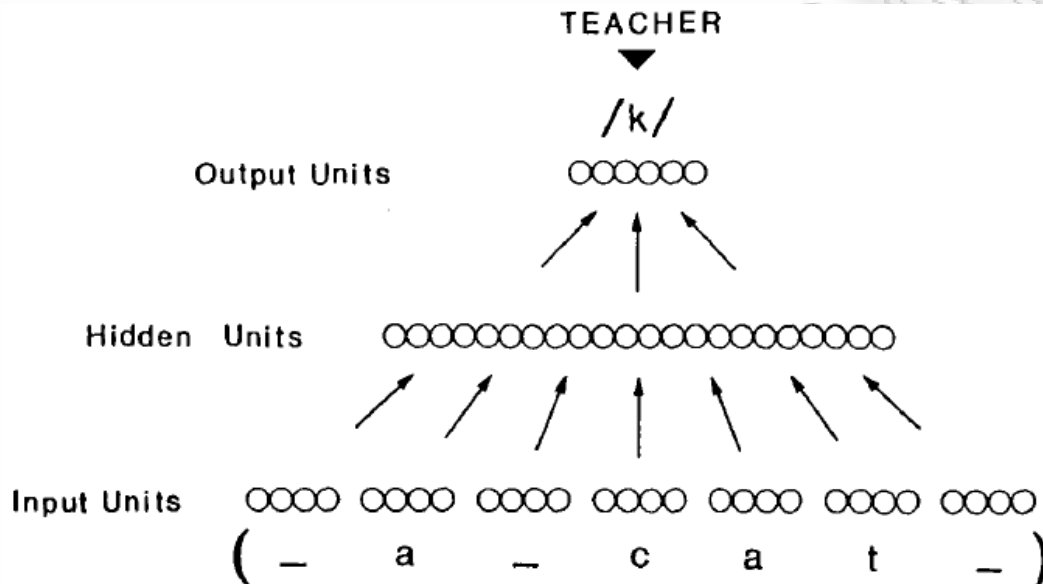
Σχήμα 5.4, Ο αλγόριθμος K -μέσων βρίσκει τα κέντρα c_i των κλάσεων (περιοχών) στις οποίες ανήκουν τα πρότυπα. Το κάθε κέντρο είναι ο μέσος όρος των προτύπων της περιοχής του.

Ο αλγόριθμος λειτουργεί επαναληπτικά εναλλάσσοντας τον υπολογισμό των μελών των κλάσεων με τον υπολογισμό του μέσου όρου της κάθε κλάσης. Αν ο αλγόριθμος δεν έχει συγκλίνει τότε ο υπολογισμός των μελών των κλάσεων μπορεί να αλλάξει το μέσο όρο της κλάσης διότι μπορεί να μετακινηθούν κάποια πρότυπα από μια κλάση σε μια άλλη. Αν πάλι τροποποιηθεί κάποιο κέντρο c_i τότε μπορεί να αλλάξουν τα μέλη των κλάσεων διότι κάποιο πρότυπο $x^{(p)}$ μπορεί να βρίσκεται πλέον κοντύτερα σε κάποιο άλλο κέντρο απ' ό,τι πριν. Μετά από πολλές επαναλήψεις, ωστόσο, ο αλγόριθμος συγκλίνει καθώς οι μετακινήσεις των μελών από κλάση σε κλάση μειώνονται σταδιακά και συνεπώς τα κέντρα των κλάσεων παγιώνονται μειώνοντας ακόμη περισσότερο τις μετακινήσεις μελών.

Για να εκπαιδευτεί πλήρως το κρυφό στρώμα ενός δικτύου RBF, πρέπει για κάθε κρυφό νευρώνα i , εκτός από το κέντρο c_i , να ορίσουμε και το εύρος σ_i της συνάρτησης $f(\|x - c_i\|, \sigma_i)$. Το εύρος δεν δίνεται άμεσα από τον αλγόριθμο. Έμμεσα ωστόσο σχετίζεται με το εύρος της αντίστοιχης περιοχής: όσο πιο πλατιά είναι η περιοχή i τόσο πιο μεγάλο είναι το σ_i .

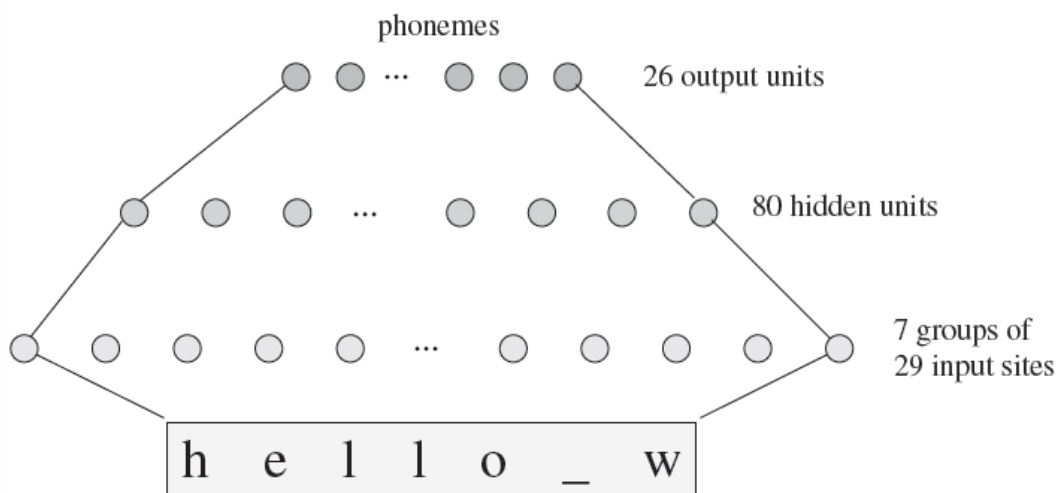
5.3.4 Εκπαίδευση με επίβλεψη

Οι Poggio και Girosi πρότειναν τη χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης όπως η κατάβαση δυναμικού για την εκπαίδευση τόσο των βαρών του εξωτερικού στρώματος όσο και των κέντρων του κρυφού στρώματος. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσιμης μπόρεσαν να εξάγουν τις σχετικές εξισώσεις εκπαίδευσης. Ονόμασαν τη μέθοδό τους Generalized RBF (GRBF). Οι Wettschereck και Dietterich εφάρμοσαν το μοντέλο αυτό στο πρόβλημα της μετατροπής κειμένου-σε-ομιλία γνωστό ως NETtalk.



Σχήμα 5.5, Σχηματική αναπαράσταση της αρχιτεκτονικής του δικτύου NetTalk: A window of letters in an English text is fed to an array of 203 input units. Information from these units is transformed by an intermediate layer of 80 "hidden" units to produce patterns of activity in 26 output units. The connections in the network are specified by a total of 18629 weight parameters (including a variable threshold for each unit).

Σκοπός του προβλήματος είναι να μάθει το δίκτυο την προφορά αγγλικών λέξεων μελετώντας ένα λεξικό με σωστές προφορές. Είσοδος στο δίκτυο είναι μια σειρά από χαρακτήρες (γράμματα και σημεία στίξης) και έξοδος το φώνημα που αντιστοιχεί στον χαρακτήρα που βρίσκεται στο κέντρο της σειράς. Βρήκαν ότι η χρήση του GRBF επέφερε βελτίωση της τάξης του 17% σε σχέση με ένα κανονικό δίκτυο RBF χρησιμοποιώντας των αλγόριθμο k-means για τον εντοπισμό των κέντρων.



Σχήμα 5.6, The NETtalk architecture.

5.3.5 Εκπαίδευση εξωτερικού στρώματος

Η εκπαίδευση του εξωτερικού στρώματος ακολουθεί τελείως διαφορετική φιλοσοφία σε σχέση με την εκπαίδευση του κρυφού στρώματος. Αφού έχουμε ήδη εκπαιδεύσει το κρυφό στρώμα, γνωρίζουμε τις τιμές ενεργοποίησης a_1, \dots, a_K , των κρυφών νευρώνων για κάθε πρότυπο εισόδου $x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Επομένως το πρόβλημα είναι όμοιο με την εκπαίδευση ενός δικτύου με ένα μόνο στρώμα. Καθώς το στρώμα εξόδου είναι γραμμικό η έξοδος του i -οστού νευρώνα εξόδου είναι

$$y_i = \sum_{j=1}^K w_{ij} a_j + w_{i0}$$

Οπότε το έχουμε ουσιαστικά την εκπαίδευση πολλών δικτύων ADALINE: ένα ADALINE αντιστοιχεί σε κάθε έξοδο.

5.4 Εφαρμογές δικτύων RBF

5.4.1 Μοντελοποίηση Χρονοσειρών

Χρονοσειρά είναι μια ακολουθία αριθμών ή διανυσμάτων συνεχούς χρόνου $y(t)$, $t \in \mathfrak{R}$, ή διακριτού χρόνου $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Σε συγκεκριμένες εφαρμογές οι χρονοσειρές παράγονται από κάποιο μαθηματικό μοντέλο της μορφής $y(t) = G(x(t))$ ή από κάποια διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dy}{dt} = G(y)$.

Το ζητούμενο είναι η εύρεση των παραμέτρων του κρυμμένου μοντέλου G με δεδομένα τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Αν το μοντέλο εκτιμηθεί με ικανοποιητική ακρίβεια, τότε μπορούμε να προβλέψουμε τις τιμές της χρονοσειράς και στο μέλλον. Συνήθως μια χρονοσειρά συνεχούς χρόνου δειγματοληπτείται οπότε δημιουργείται ένα διακριτό σύνολο παρατηρήσεων $\{y(0), y(1), y(2), \dots\}$ το οποίο τροφοδοτεί το νευρωνικό δίκτυο.

Παράδειγμα μοντέλου χρονοσειράς που εμπλέκει διαφορική εξίσωση με καθυστερήσεις είναι το γνωστό μοντέλο Mackey-Glass το οποίο προτάθηκε για την μοντελοποίηση της παραγωγής λευκών αιμοσφαιρίων

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t) + a \frac{y(t-d)}{1 + y(t-d)^{10}}$$

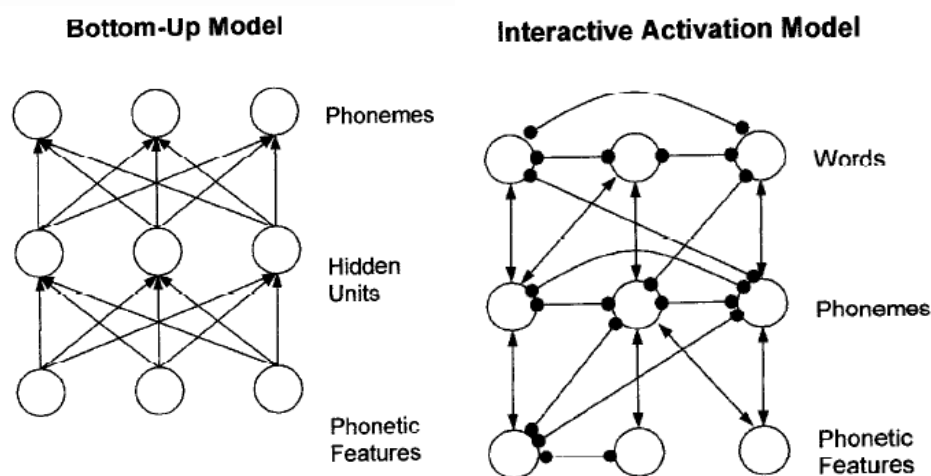
Το αποτέλεσμα της εξίσωσης είναι μια χασοτική χρονοσειρά: αν δοθεί ελάχιστα διαφορετική αρχική συνθήκη παίρνουμε τελείως διαφορετική λύση $y(t)$. Το ζητούμενο είναι η εκτίμηση των παραμέτρων a , b και της καθυστέρησης d με βάση τα παρελθόντα δείγματα της χρονοσειράς έτσι ώστε να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τη μελλοντική της πορεία. Το μοντέλο έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Οι Moody και Darken χρησιμοποίησαν δίκτυα RBF για τη μοντελοποίηση χρονοσειρών Mackey-Glass. Σε σύγκριση με τον αλγόριθμο Back-Propagation το δίκτυο RBF χρειάστηκε 27 φορές περισσότερα δεδομένα για να επιτύχει την ίδια ακρίβεια προσέγγισης. Παρ' όλα αυτά από απόψεως υπολογιστικού χρόνου το δίκτυο RBF ήταν 16 φορές ταχύτερο.

5.4.2 Ταξινόμηση φωνημάτων

Φώνημα (phoneme) καλείται ένα κομμάτι ήχου που παράγεται από ένα ομιλητή και αντιστοιχεί σε ένα φωνήεν ή σε ένα σύμφωνο. Τα φωνήματα είναι τα θεμελιώδη συστατικά

της ηχητικής παράστασης μιας λέξης. Το φώνημα είναι μια χρονοσειρά που καλείται και κυματομορφή καθώς παράγεται από ηχητικά κύματα. Συνήθως, πριν κάνουμε οτιδήποτε, το φώνημα υποβάλλεται σε μια προεπεξεργασία του φασματικού του περιεχομένου και το αναλύει σε διαμορφωτικές συχνότητες (formants). Έχει παρατηρηθεί ότι οι 15 κύριες διαμορφωτικές συχνότητες αρκούν για να χαρακτηρίσουν το φώνημα και να το ξεχωρίσουν από όλα τα υπόλοιπα.

Οι Moody και Darken προσπάθησαν να ταξινομήσουν 10 ήχους φωνηέντων με βάση μόνο τις δύο κύριες διαμορφωτικές συχνότητες. Χρησιμοποίησαν 338 φωνήματα για εκπαίδευση και 333 για έλεγχο. Το δίκτυο RBF αποτελείται από 100 κρυφούς νευρώνες τύπου Gauss και ως αλγόριθμος εκπαίδευσης χρησιμοποιήθηκε η ομαδοποίηση k -μέσων. Με το πείραμά τους πέτυχαν σφάλμα ελέγχου 18% το οποίο είναι ίδιο με το σφάλμα που επιτυγχάνουν οι καλύτερες μη-νευρωνικές μέθοδοι αναγνώρισης φωνημάτων.



Σχήμα 5.7. A bottom-up model of word recognition and an interactive model. The links in the bottom-up model can be either excitatory or inhibitory, and only allow information to flow upward from the phonetic features through the hidden units to the phonemes on the output. In the interactive activation model, the links are bidirectional and allow information to flow both bottom-up, from the phonetic features through the letter units to the word units, and top-down. Arrows denote excitatory links; solid circles denote inhibitory links.

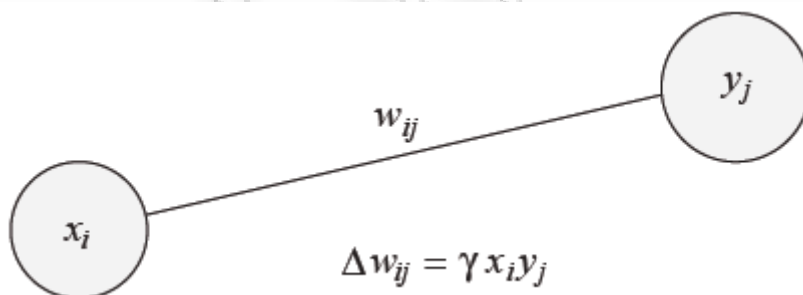
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΧΕΜΠΙΑΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Το σημαντικό έργο του Donald Hebb που δημοσιεύθηκε στα τέλη της δεκαετίας του '40 υπήρξε απαρχή για μια σειρά θεωριών μάθησης για τα νευρωνικά δίκτυα οι οποίες βασίστηκαν σε τοπικά μοντέλα αλληλεπίδρασης. Μεταξύ των άλλων, στο κεφάλαιο 4 του βιβλίου του 'The Organization of Behaviour' ο Hebb διατύπωσε την ακόλουθη υπόθεση σχετικά με την αυτοοργάνωση ενός συνόλου νευρώνων:

«Αν ο άξονας του κυττάρου A βρίσκεται αρκετά κοντά έτσι ώστε να διεγείρει το κύτταρο B και επίμονα και επανειλημμένα λαμβάνει μέρος στην διέγερση του B τότε λαμβάνει χώρα κάποια διαδικασία ανάπτυξης ή κάποια αλλαγή στο μεταβολισμό στο ένα από τα δύο ή και στα δύο κύτταρα έτσι ώστε η αποτελεσματικότητα του κυττάρου A στο να διεγείρει το B αυξάνεται».

Η βασική αυτή υπόθεση του Hebb υποστηρίζεται σοβαρά από πειραματικά δεδομένα. Το Χεμπιανό μοντέλο έχει προταθεί για την ανάλυση φαινομένων πλαστικότητας σε διάφορα τμήματα του εγκεφάλου, όπως π.χ. η διαδικασία της μακροχρόνια μνήμης (Long-Term-Potentiation) στο τμήμα του εγκεφάλου που καλείται 'Ιππόκαμπος', ο έλεγχος της αναπνοής από το κεντρικό στέλεχος του εγκεφάλου, η ανάπτυξη του οπτικού φλοιού (visual cortex), κα.



Σχήμα 6.1, The Hebb rule.

Σύμφωνα με τον Hebb, ο πιο πιθανός τρόπος αύξησης της αποτελεσματικότητας του κυττάρου A στο να διεγείρει το κύτταρο B είναι η αύξηση της επιφάνειας του συναπτικού κόμβου που συνδέει τον άξονα A με τον λαμβάνοντα δενδρίτη B. Έτσι ο άξονας του πρώτου κυττάρου είτε αναπτύσσει νέους συναπτικούς κόμβους με το δεύτερο κύτταρο είτε αυξάνει την επιφάνεια των ήδη υπάρχοντων κόμβων. Αυτή η διαδικασία μετάλλαξης δημιουργεί δομικές αλλαγές στο νευρωνικό δίκτυο και αποτελεί ουσιαστικά μια διαδικασία 'μάθησης'. Αν και ο παραπάνω γενικός κανόνας μάθησης είναι αρκετά ασαφής για να χρησιμοποιηθεί πρακτικά, έχουν αναπτυχθεί μαθηματικές θεωρίες βασισμένες στη Χεμπιανή φιλοσοφία που έχουν αρκετά σαφή μορφή για να χρησιμοποιηθούν στην πράξη.

Ο κανόνας του Hebb είναι στη βάση του συσχετιστικός. Έτσι μια απλή μαθηματική διατύπωση του κανόνα είναι η μεταβολή του συναπτικού βάρους w είναι ανάλογη του γινομένου της ενεργοποίησης b του νευρώνα B και της ενεργοποίησης a του νευρώνα A:

$$w(k+1) = w(k) + \beta(k)(b(k)a(k))$$

Στη εξίσωση αυτή η παράμετρος $\beta(k)$ είναι ένας μικρός, ενδεχόμενα μεταβλητός θετικός αριθμός το γνωστό βήμα εκπαίδευσης (learning rate). Αν υποθέσουμε ότι οι ενεργοποιήσεις των νευρώνων μπορούν να πάρουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές τότε σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση το συναπτικό βάρος αυξάνεται όταν οι δύο νευρώνες βρίσκονται σε συμφωνία (και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί) ενώ αντίθετα το συναπτικό βάρος μειώνεται όταν οι δύο νευρώνες βρίσκονται σε αντίθεση (ο ένας θετικός και ο άλλος αρνητικός).

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του Χεμπιανού μοντέλου μάθησης είναι η εντοπικότητα (locality). Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα, όλη η πληροφορία που χρειάζεται ο συναπτικός κόμβος για να αναπτυχθεί ή να συρρικνωθεί βρίσκεται τοπικά στον κόμβο αυτό. Πράγματι, η πληροφορία που χρειάζεται δεν είναι άλλη από την ηλεκτρική διέγερση, a , του άξονα πάνω στον οποίο βρίσκεται ο κόμβος και η ηλεκτρική διέγερση, b , του κυττάρου που λαμβάνει το σήμα του άξονα δηλαδή της μεμβράνης ακριβώς απέναντι από τη σύναψη.

Ακριβώς η ιδιότητα αυτή αυξάνει την πειστικότητα του κανόνα του Hebb σε σχέση με την ισχύ του σε πραγματικά βιολογικά νευρωνικά δίκτυα. Θα ήταν λιγότερο πειστικό π.χ. να υποθεθεί ότι η ανάπτυξη ενός συναπτικού κόμβου εξαρτάται από την ηλεκτρική δραστηριότητα απομακρυσμένων κυττάρων ή συνάψεων εκτός αν μπορεί να δικαιολογηθεί η ιδιαίτερη σχέση των απομακρυσμένων αυτών σημάτων με τον κόμβο αυτό.

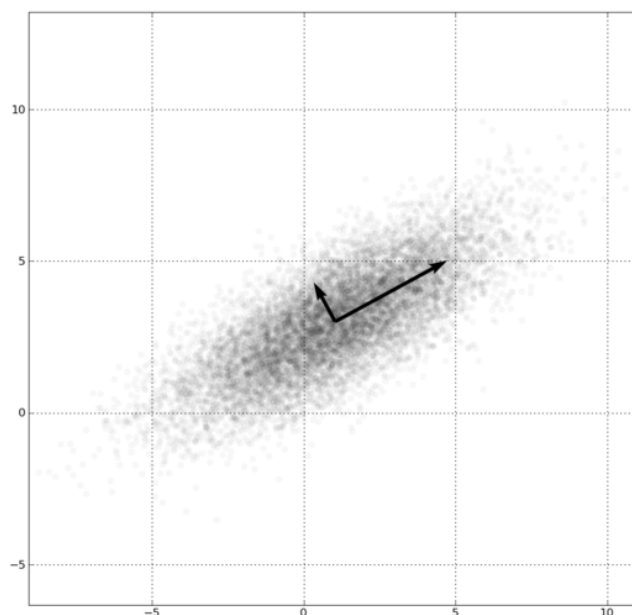
6.1 Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών

(Principal Component Analysis)

Η Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών (Principal Component Analysis - PCA) είναι μια κλασική στατιστική μέθοδος, ουσιαστικά ισοδύναμη με το Μετασχηματισμό Karhunen–Loève που χρησιμοποιείται στη μονοδιάστατη και δισδιάστατη επεξεργασία σήματος. Η μέθοδος PCA έχει παλιές ρίζες. Ξεκίνησε το 1901 από την δουλειά του Karl Pearson ο οποίος πρότεινε μια μέθοδο γραμμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων σε n διαστάσεις. Πατέρας της μεθόδου PCA ωστόσο θεωρείται ο Hotelling ο οποίος το 1933 πρότεινε τη μέθοδο αυτή για την ανάλυση της διασποράς πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών.

Η ιδέα της μεθόδου ξεκινάει από την παρατήρηση ότι σε πολλά συστήματα που περιγράφονται από πολλές, έστω n τυχαίες μεταβλητές, οι βαθμοί ελευθερίας m είναι λιγότεροι: $m < n$. Έτσι ενώ η διάσταση του διανύσματος παρατήρησης είναι n το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από m ασυσχέτιστες αλλά κρυμμένες τυχαίες μεταβλητές. Συχνά οι m κρυφές αυτές μεταβλητές καλούνται παράγοντες (factors) ή χαρακτηριστικά (features) του διανύσματος παρατήρησης.

Στη στατιστική ορολογία, θα ονομάσουμε τον αριθμό n ως την 'επιφανειακή διάσταση' (superficial dimensionality) του τυχαίου διανύσματος παρατήρησης ενώ θα καλέσουμε 'ουσιαστική διάσταση' (intrinsic dimensionality) του διανύσματος τον αριθμό m . Προφανώς, αν οι n τυχαίες μεταβλητές είναι τελείως ασυσχέτιστες, τότε οι δύο διαστάσεις είναι ίδιες ($m = n$), ενώ όσο πιο συσχετισμένες είναι μεταξύ τους τόσο πιο λίγα χαρακτηριστικά αρκούν για να περιγράψουν τις τυχαίες παρατηρήσεις. Οριακά είναι δυνατόν ένα μόνο χαρακτηριστικό ($m = 1$) να μπορεί να περιγράψει όλο το σύστημα.



Σχήμα 6.2, PCA της πολυμεταβλητής Gaussian κατανομής.

Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα παρατήρησης $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, με μέση τιμή $E\{x\} = 0$ και πίνακα αυτοσυσχέτισης $R_x = E\{xx^T\}$. Σύμφωνα με τη μέθοδο PCA το διάνυσμα $y \in \mathcal{R}^m$ των χαρακτηριστικών είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός των δεδομένων $y = Wx$, όπου $w \in \mathcal{R}^{m \times n}$ είναι ένας πίνακας με λιγότερες γραμμές απ' ότι στήλες. Έστω L ο m -διάστατος υποχώρος του \mathcal{R}^n που ορίζεται από τις γραμμές του πίνακα W . Ο υποχώρος αυτός καλείται 'υποχώρος των χαρακτηριστικών' (features subspace). Ο πίνακας W μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο ενός αντιστρέψιμου τετραγωνικού πίνακα $T \in \mathcal{R}^{m \times n}$ και ενός πίνακα $U \in \mathcal{R}^{m \times n}$ οι γραμμές του οποίου είναι μια ορθοκανονική βάση του L , έτσι ώστε έχουμε $W = TU$, $UU^T = I$.

Η προβολή των δεδομένων στον υποχώρο L είναι η βέλτιστη γραμμική ανακατασκευή των δεδομένων από το διάστημα y :

$$\hat{x} = W^+ y = W^+ W x$$

Ο ψευδοαντίστροφος του πίνακα W ορίζεται από τον τύπο:

$$W^+ = W^T (W W^T)^{-1} = U^T T^{-1}$$

Ο στόχος της μεθόδου PCA είναι η εύρεση του βέλτιστου υποχώρου των χαρακτηριστικών έτσι ώστε το μέσω τετραγωνικό σφάλμα ανακατασκευής να είναι ελάχιστο

$$J_e = E\{\|x - \hat{x}\|^2\}$$

Θεώρημα

Έστω ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_x είναι διατεταγμένες σε φθίνουσα σειρά και τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα είναι τα e_1, e_2, \dots, e_n . Τότε το μέσω τετραγωνικό σφάλμα J_e ελαχιστοποιείται (αντίστοιχα η διασπορά J_v μεγιστοποιείται)

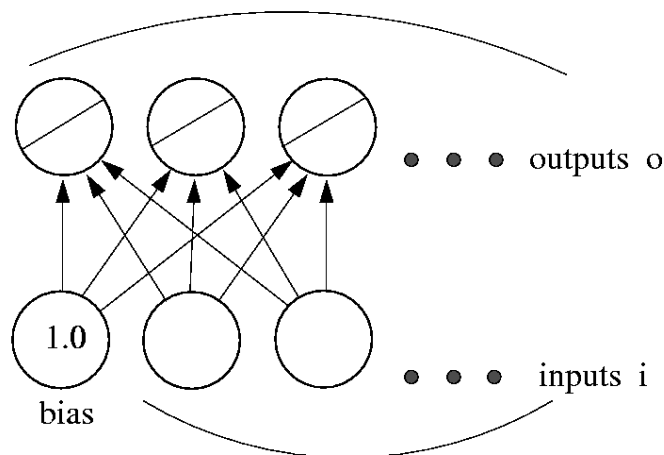
για $W = W^* = TU$ όπου $U = [e_1, e_2, \dots, e_m]^T$ και $T \in \mathcal{R}^{m \times n}$ είναι οποιοσδήποτε τετραγωνικός, αντιστρέψιμος πίνακας. Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι $\min J_e = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i$ ενώ η μέγιστη διασπορά της προβολής είναι $\max J_v = \sum_{i=1}^m \lambda_i$.

Σ' αυτό το πλαίσιο, τα διανύσματα e_1, e_2, \dots, e_m , καλούνται κύρια ιδιοδιανύσματα (principal eigenvectors) και ο υπόχωρος L που ορίζεται από αυτά τα διανύσματα καλείται κύριος υποχώρος (principal subspace) του διανύσματος παρατήρησης x . Ο μετασχηματισμός $y = Ux$ καλείται μετασχηματισμός Karhunen–Loève, ενώ τα στοιχεία y_1, y_2, \dots, y_m , του διανύσματος χαρακτηριστικών y καλούνται κύριες συνιστώσες (principal components). Οι κύριες συνιστώσες έχουν την ιδιότητα ότι είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, ενώ οι διασπορές τους έχουν φθίνουσα σειρά, $\sigma_{y_1}^2 \geq \sigma_{y_2}^2 \geq \dots \geq \sigma_{y_m}^2$, αφού ισούνται με τις ιδιοτιμές του πίνακα $R_x: E\{y_i y_j\}$, αν $i \neq j$ και $\sigma_{y_i}^2 = E\{y_i^2\} = \lambda_i$.

Αν, όπως συμβαίνει πολύ συχνά στην πράξη, οι ιδιοτιμές του R_x φθίνουν πολύ γρήγορα τότε η βασική απόρροια του Θεωρήματος είναι ότι το διάνυσμα x μπορεί να προσεγγιστεί με πολύ μικρή ακρίβεια (μικρό σφάλμα J_e) χρησιμοποιώντας πολύ λίγα χαρακτηριστικά y_i , δηλαδή έχοντας $m \ll n$.

6.2 Ο Γενικευμένος Αλγόριθμος του Hebb (GHA)

Ο Γενικευμένος Αλγόριθμος του Hebb (Generalized Hebbian Algorithm – GHA) είναι από τους πρώτους αλγόριθμους που εξήγαγαν πολλαπλές κύριες συνιστώσες. Υπάρχουν δύο ελαφρά διαφορετικές εκδόσεις του αλγορίθμου: (α) ο αρχικός αλγόριθμος και (β) ο μετέπειτα προταθείς τοπικός αλγόριθμος. Ο αρχικός αλγόριθμος βασίζεται σε ένα γραμμικό δίκτυο ενός στρώματος m νευρώνων με n εισόδους.



Σχήμα 6.3, Το δίκτυο του αρχικού αλγορίθμου GHA είναι ένα γραμμικό δίκτυο m νευρώνων με n εισόδους.

Λόγω της γραμμικότητας του δικτύου η έξοδος y_i του i νευρώνα είναι απλώς $y_i = w_i^T x$, όπου x είναι το διάνυσμα εισόδου και w_i είναι το διάνυσμα των συναπτικών βαρών του νευρώνα αυτού.

Αλγόριθμος

Είσοδος: Στοχαστική ακολουθία διανυσμάτων $x(1), x(2), \dots$

Έξοδος: Τα τελικά διανύσματα συναπτικών βαρών w_1, \dots, w_m θα ισούνται με τα κύρια ιδιοδιανύσματα e_1, \dots, e_m .

Μέθοδος:

Για κάθε νευρώνα $i = 1, \dots, m$ {

Αρχικοποίησε το διάνυσμα $w_i(0)$ σε κάποια τυχαία τιμή

Για κάθε πρότυπο k {

Υπολόγισε το $w_i(k+1)$ σύμφωνα με την εξίσωση

$$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \beta(k)[y_i(k)x_j(k) - y_i(k)\sum_{l=1}^i y_l(k)w_{lj}(k)]$$

Σταδιακά μικραίνει το βήμα εκπαίδευσης $\beta(k)$

}

}

Η κριτική κατά του αρχικού αλγορίθμου GHA είναι η έλλειψη εντοπικότητας. Η λύση δόθηκε από τον Sanger με την πρόταση του τοπικού αλγορίθμου GHA:

$$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \beta(k) \left[y_i(k) \left(x_j(k) - \sum_{l=1}^{i-1} y_l(k)w_{lj}(k) \right) - y_i(k)^2 w_{ij}(k) \right]$$

6.3 Εφαρμογές

6.3.1 Συμπύεση Εικόνας

Το γεγονός ότι η μέθοδος PCA παράγει τον βέλτιστο γραμμικό μετασχηματισμό απεικόνισης δεδομένων από τις n διαστάσεις στις m διαστάσεις, όπου $m < n$, οδηγεί σε εφαρμογές του PCA σε συμπύεση δεδομένων. Η ανακατασκευή που επιτυγχάνεται από την Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών είναι βέλτιστη υπό την έννοια του ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος. Έτσι τα αρχικά n -διάστατα δεδομένα μπορούν να ανακατασκευαστούν από την m -διάστατη απεικόνισή τους με το ελάχιστο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (MSE).

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που καταδεικνύει την βέλτιστη συμπύεση που επιτυγχάνεται με την ΑΚΣ είναι η συμπύεση εικόνας.

Θεωρούμε μια εικόνα όπου η φωτεινότητα κάθε pixel αντιστοιχεί σε έναν αριθμό από 0 (μαύρο) έως 255 (άσπρο). Η διάσταση της εικόνας είναι 512 x 512.

Η συμπύεση γίνεται ως εξής:

1. Τεμαχίζουμε τη εικόνα σε διαδοχικά blocks μεγέθους 8 x 8 δημιουργώντας έτσι συνολικά 64 x 64 = 4096 blocks.
2. Κάθε block B_k μετατρέπεται σε ένα διάνυσμα $x(k)$ μήκους 64 τοποθετώντας την μία στήλη του B_k κάτω από την άλλη.



Σχήμα 6.4, Συμπίεση εικόνας.

3. Αντιμετωπίζοντας την φωτεινότητα κάθε pixel σαν μια τυχαία μεταβλητή εφαρμόζουμε Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών στα διανύσματα $x(k)$ που προκύπτουν με την παραπάνω μέθοδο. Αφού τα διανύσματα είναι 64 διαστάσεων υπάρχουν συνολικά 64 Κύριες Συνιστώσες (Principal Components – PC's) που αντιστοιχούν στα 64 Κύρια Ιδιοδιανύσματα e_1, \dots, e_{64} .

4. Προβάλλουμε τα διανύσματα $x(k)$ σε μικρότερο χώρο m -διαστάσεων ($m < 64$) χρησιμοποιώντας τα πρώτα m ιδιοδιανύσματα

$$y_k = [y_1(k), \dots, y_m(k)]^T = [e_1, \dots, e_m]^T x(k)$$

5. Ανακατασκευάζουμε τα διανύσματα χρησιμοποιώντας την προβολή τους στο χώρο m -διαστάσεων

$$\hat{x}(k) = [e_1, \dots, e_m] y(k)$$

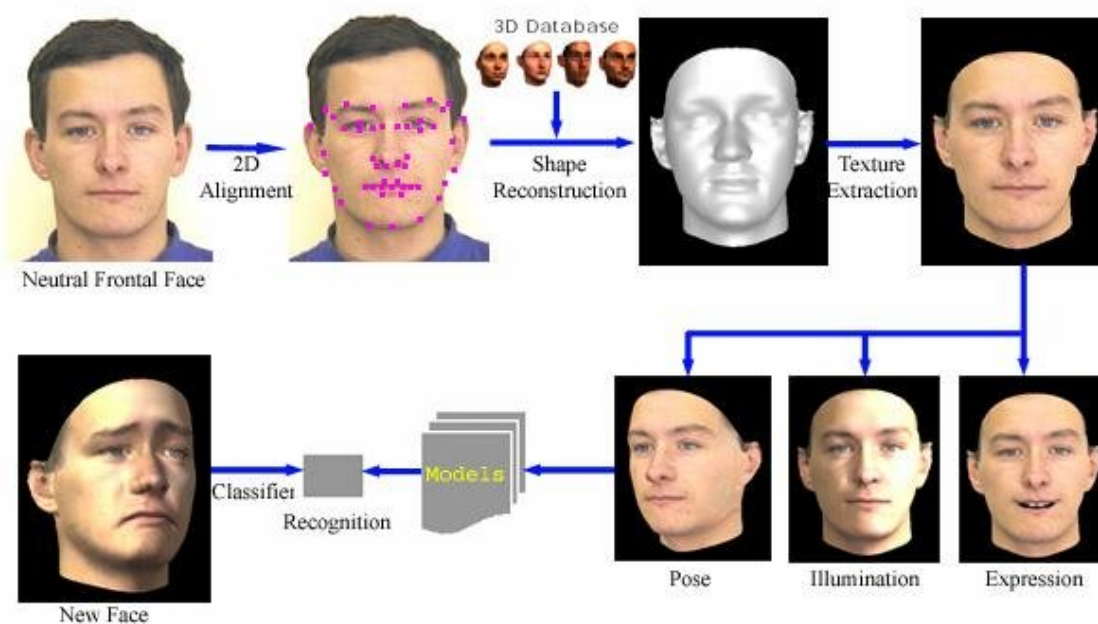
6. Από τα διανύσματα ανακατασκευάζουμε τα blocks και τελικά την εικόνα.

Η ιδέα πίσω από την διαδικασία αυτή είναι ότι η απώλεια των μικρότερων κυρίων συνιστωσών αντιστοιχεί στο μικρότερο δυνατό σφάλμα ανακατασκευής από τις m στις n διαστάσεις. Αν χρησιμοποιούσαμε και τα 64 ιδιοδιανύσματα θα είχαμε τέλεια ανακατασκευή των διανυσμάτων και συνεπώς ολόκληρης της εικόνας. Η συμπίεση έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα διότι τα pixels είναι συνήθως έντονα συσχετισμένα καθώς γειτονικά pixels έχουν παρόμοιες τιμές, εκτός αν βρίσκονται πάνω σε ακμές (απότομες αλλαγές φωτεινότητας). Έτσι η πληροφορία βρίσκεται συσσωρευμένη μέσα σε λίγες κύριες συνιστώσες. Οι υπόλοιπες (μικρές) συνιστώσες αφορούν κυρίως τις ακμές και το θόρυβο.

6.3.2 Αναγνώριση προσώπων (face recognition)

Η χρήση PCA για την ανάλυση ανθρώπινων προσώπων προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Turk και Pentland. Σκοπός της είναι:

- (α) η ομαδοποίηση των εικόνων που ανήκουν στο ίδιο πρόσωπο έτσι ώστε να μπορέσουμε να το ξεχωρίζουμε από άλλα πρόσωπα και
- (β) ο διαχωρισμών προσώπων από μη πρόσωπα.



Σχήμα 6.5. Face Recognition.

Μια εικόνα μεγέθους $N \times N$ pixels περιέχει συνολικά N^2 pixels και συνεπώς αποτελεί ένα σημείο στον χώρο των N^2 διαστάσεων. Έτσι, η άμεση ταξινόμηση των εικόνων και η ομαδοποίησή τους στο χώρο των N^2 διαστάσεων είναι εν γένει εξαιρετικά δύσκολη αφού ακόμη και για μικρές εικόνες, όπου έχουμε πχ $N = 100$, η κάθε εικόνα είναι ένα πρότυπο $N^2 = 10000$ διαστάσεων.

Η βασική ιδέα είναι να αναπτύξουμε μια μέθοδο συμπίεσης των δεδομένων έτσι ώστε να μειωθεί η διάστασή τους και να διευκολυνθεί ο αλγόριθμος ταξινόμησης ή ομαδοποίησής τους. Η συμπίεση αυτή πρέπει ωστόσο να διατηρεί, όσο γίνεται, τα βασικά χαρακτηριστικά των εικόνων ώστε να μπορούν να διακρίνονται τα πρόσωπα μεταξύ τους. Η ανάλυση PCA είναι ο πλέον κατάλληλος γραμμικός μετασχηματισμός για τη δουλειά αυτή.

Έστω ότι θέλουμε να αναγνωρίζουμε τα πρόσωπα S ανθρώπων. Για κάθε άνθρωπο i , διαθέτουμε P διαφορετικές φωτογραφίες $\phi(1,i), \dots, \phi(P,i)$, του προσώπου του. Έστω ότι κάθε φωτογραφία έχει μέγεθος $N_1 \times N_2$. Δημιουργούμε έτσι S κλάσεις εικόνων, μια για κάθε άνθρωπο. Η μεθοδολογία συμπίεσης των εικόνων και ταξινόμησης έχει ως εξής:

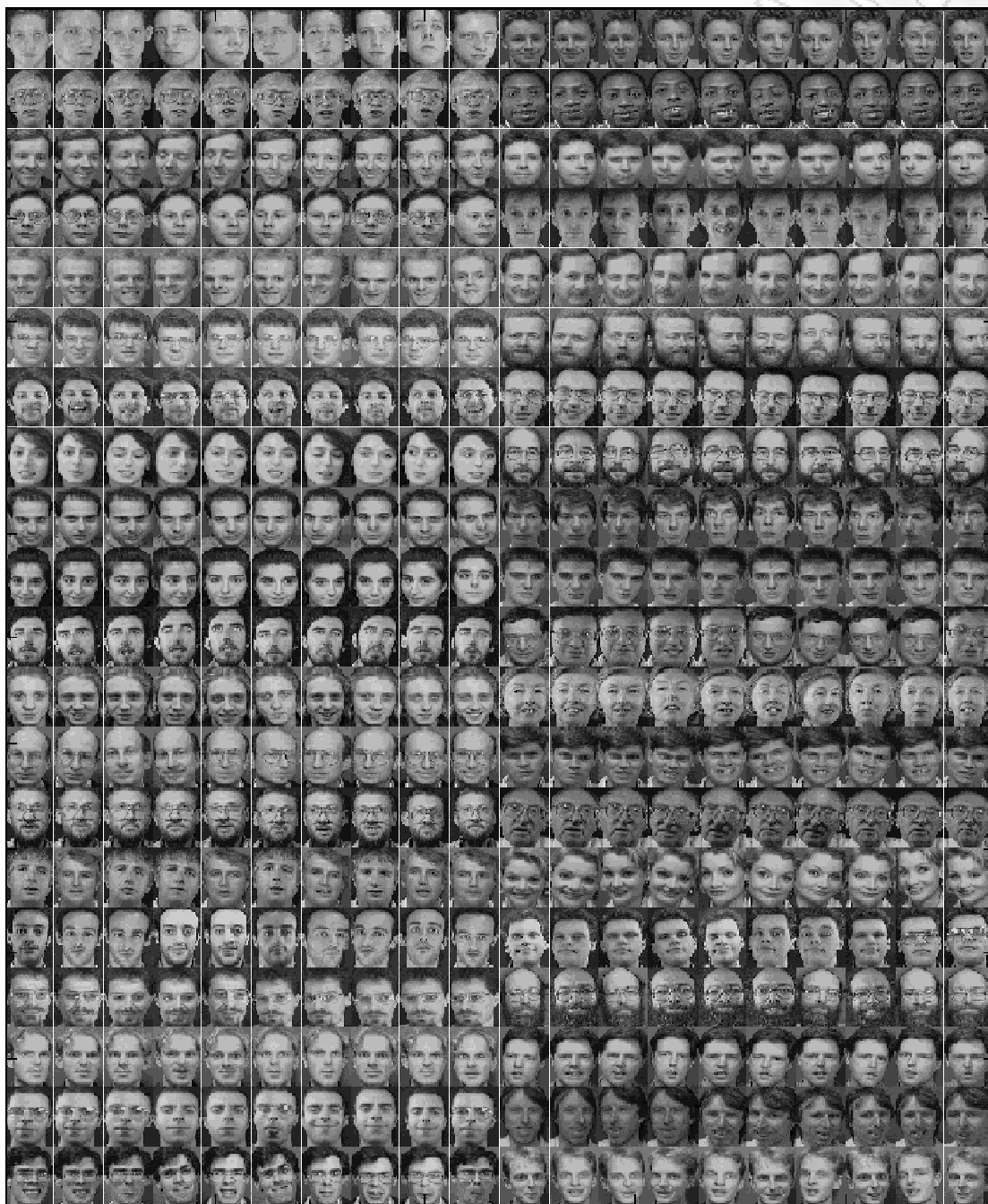
- Κατ' αρχάς, μετατρέπουμε κάθε εικόνα $\phi(k,i)$ σε ένα μονοδιάστατο διάνυσμα $x(k,i)$ μήκους $N = N_1 N_2$, βάζοντας τη μια στήλη πάνω από την άλλη. Κατόπιν υπολογίζουμε το «μέσο πρόσωπο»

$$\bar{x} = \frac{1}{SP} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^P x(k,i)$$

Για κάθε κλάση $i = 1, \dots, S$ αφαιρούμε τη μέση τιμή \bar{x} από τις εικόνες παίρνοντας τα διανύσματα $y(1,i) = x(1,i) - \bar{x}, \dots, y(P,i) = x(P,i) - \bar{x}$. Κατόπιν υπολογίζουμε τον κύριο υποχώρο PCA m διαστάσεων για το σύνολο των διανυσμάτων $y(k,i)$, $k = 1, \dots, P$, όπου m είναι ένας μικρός αριθμός (πχ $1 < m \leq 10$). Η ανάλυση αυτή θα μας δώσει τα m κύρια ιδιοδιανύσματα $e(1,i), \dots, e(m,i)$ του πίνακα αυτοσυσχέτισης

$$R_x(i) = \sum_{k=1}^P y(k,i) y(k,i)^T$$

που αντιστοιχεί στην κλάση i . Τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι διαστάσεων $N_1 N_2$ και άρα έχουν το ίδιο μέγεθος όπως μια εικόνα. Συνεπώς μπορούμε να τα αποκαλέσουμε ιδιο-εικόνες ή ιδιο-πρόσωπα (eigen-faces).



Σχήμα 6.6, *The Olivetti Research Laboratory (ORL) face database.*

Η ταξινόμηση ενός άγνωστου προτύπου (εικόνας) ϕ_{test} γίνεται ως εξής:

(α) Μετατρέπουμε την ϕ_{test} σε διάνυσμα x_{test}

(β) Αφαιρούμε τη μέση τιμή $y_{test} = x_{test} - \bar{x}$

(γ) προβάλλουμε το y_{test} στον κύριο υποχώρο της κάθε κλάσης $i = 1, \dots, S$ παίρνοντας τα διανύσματα

$$z_{test}(i) = \begin{bmatrix} z_{test,1}(i) \\ \mathbf{M} \\ z_{test,m}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(1,i)^T \\ \mathbf{M} \\ e(m,i)^T \end{bmatrix} y_{test}, \quad i = 1, \dots, S$$

(δ) Υπολογίζουμε τις νόρμες $\zeta(i) = \|z_{test}(i)\|$ των διανυσμάτων προβολής.

- Αν η εικόνα ανήκει στην κλάση p τότε η νόρμα $\zeta(p)$ της προβολής στον υποχώρο p θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από όλες τις υπόλοιπες νόρμες. Έτσι ταξινομούμε το πρότυπο στην κλάση που δίνει την μεγαλύτερη προβολή, εκτός εάν η μεγαλύτερη προβολή είναι πολύ μικρή (μικρότερη από κάποιο όριο) οπότε λέμε ότι η εικόνα δεν ανήκει σε καμία κλάση δηλαδή είναι μη-πρόσωπο.

6.3.3 Τυφλός διαχωρισμός σημάτων

Έστω ένα m -διάστατο στοχαστικό σήμα $x(k) = [x_1(k), \dots, x_m(k)]^T$, παράγεται από τη γραμμική μίξη n άγνωστων πηγαίων σημάτων $s_1(k), \dots, s_n(k)$, με μια απλή γραμμική σχέση της μορφής:

$$x(k) = As(k), \quad \text{όπου } s(k) = [s_1(k), \dots, s_n(k)]^T$$

Μας ενδιαφέρει η ανάκτηση των πηγών $s(k)$ χρησιμοποιώντας μόνο την πληροφορία $x(k)$. Αν ο πίνακας μίξης είναι γνωστός και υπό την προϋπόθεση ότι το πλήθος των παρατηρήσεων m , είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος των πηγών n , τότε η λύση του προβλήματος είναι μια διαδικασία ρουτίνας. Αν, ωστόσο, ο πίνακας A είναι άγνωστος τότε το πρόβλημα καλείται 'τυφλή εξαγωγή πηγών' και η λύση του δεν είναι προφανής ενώ είναι εφικτή μόνο κάτω από συγκεκριμένες παραδοχές.

Ένα σύνολο παραδοχών που οδηγεί σε λύση είναι και το παρακάτω:

1. Τα πηγαία σήματα έχουν μέση τιμή 0 και είναι στατικά υπό την ευρεία έννοια, δηλαδή ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μεταξύ των διανυσμάτων $s(k)$, $s(k-l)$, είναι συνάρτηση μόνο του l και όχι του k :

$$E\{s(k), s(k-l)^T\} = R_s(l)$$

2. Ο πίνακας συσχέτισης των πηγαίων σημάτων είναι διαγώνιος και μη μηδενικός για $l \neq 0$ ενώ για $l = 0$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας:

$$R_s(l) = \text{διαγώνιος} \neq 0, \quad l \neq 0,$$

$$R_s(0) = \mathbf{I}$$

Υπό τις παραπάνω παραδοχές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο PCA για να ανακτήσουμε τις πηγές $s(k)$ χωρίς γνώση του πίνακα A . Αυτό μπορεί να γίνει σε δύο βήματα: αρχικά γίνεται «ορθογωνιοποίηση» του σήματος x και κατόπιν εφαρμόζεται Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών επάνω σε ένα χρονικά φιλτραρισμένο σήμα y το οποίο παράγεται από το x .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Η γνωστή 'μνήμη τυχαίας πρόσβασης' (Random Access Memory – RAM) που χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές φυλάσσει δεδομένα τα οποία μπορεί κανείς να προσπελάσει με βάση τη διεύθυνσή τους. Το περιεχόμενο των δεδομένων είναι αδιάφορο. Η μνήμη RAM δέχεται σαν είσοδο την διεύθυνση του συγκεκριμένου δεδομένου και προσφέρει στην έξοδο το περιεχόμενο της θέσης αυτής:

Είσοδος = διεύθυνση → Έξοδος = δεδομένα

Ωστόσο η παραπάνω λογική δεν είναι απαραίτητα η πλέον κατάλληλη για προβλήματα που σχετίζονται με ευφυή συστήματα, όπως είναι η αναγνώριση προτύπων. Σε τέτοια προβλήματα το περιεχόμενο των δεδομένων είναι πολύ σημαντικό ενώ η διεύθυνση των δεδομένων είναι μάλλον αδιάφορη. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια μνήμη που φυλάσσει πρότυπες εικόνες προσώπων, πχ το πρόσωπο της «γιαγιάς μου», του «αδελφού μου», του «πατέρα μου», της «μητέρας μου», κλπ. Αν το σύστημα που διαθέτει μια τέτοια μνήμη είναι ευφυές, τότε θα πρέπει να αναγνωρίζει μη-πρότυπες εικόνες της «γιαγιάς μου». Για παράδειγμα, δίνοντας σαν είσοδο μια εικόνα της «γιαγιάς μου με καπέλο» θα πρέπει να πάρουμε στην έξοδο το πρότυπο πρόσωπο της «γιαγιάς μου» και όχι κάποιιο από τα υπόλοιπα πρότυπα. Με άλλα λόγια, το σύστημα θα πρέπει να αναγνωρίζει ότι στην είσοδο εμφανίζεται μια εικόνα της γιαγιάς κι όχι κάποιου άλλου προσώπου, κι ας έχει η εικόνα αυτή αλλοιωμένα χαρακτηριστικά σε σχέση με το πρότυπο.

Προς την κατεύθυνση αυτή βοηθάει η χρήση ενός άλλου είδους μνήμης που καλείται συσχετιστική μνήμη (content addressable memory – CAM). Η συσχετιστική μνήμη υπακούει στη λογική όπου τα δεδομένα εξόδου είναι πιο «κοντινά» με τα δεδομένα εισόδου, δηλαδή αυτά που μοιάζουν περισσότερο με την είσοδο:

Είσοδος = δεδομένα → Έξοδος = δεδομένα

Η ανάκληση λοιπόν της πληροφορίας δεν γίνεται με βάση τη διεύθυνση, αλλά με βάση το περιεχόμενο. Οι συσχετιστικές μνήμες επιδεικνύουν ανοχή σε σφάλματα ή παραμορφώσεις του προτύπου εισόδου, αρκεί αυτές να μην είναι τόσο μεγάλες ώστε το πρότυπο εισόδου τελικά να θυμίζει κάποιο άλλο πρότυπο. Τυπικές εφαρμογές των μνημών είναι η αναγνώριση και ανακατασκευή εικόνων, η αναζήτηση πληροφορίας με ελλιπή στοιχεία, κλπ.

b. Ekman Face Set (Experiment 2)



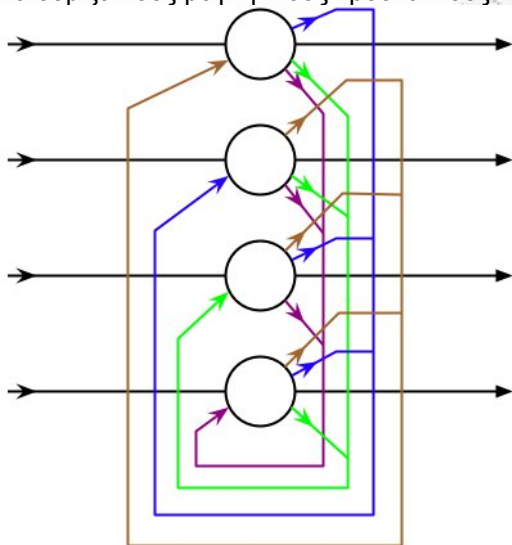
c. MMI Face Set (Experiments 3 and 4)



Σχήμα 7.1, Διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου προσώπου.

7.1 Το δίκτυο του Hopfield

Το μοντέλο του Hopfield είναι εμπνευσμένο από τη στατιστική φυσική και συγκεκριμένα από μοντέλα μαγνητικών υλικών όπου μικροί μαγνήτες υπό μορφή ατόμων είναι διατεταγμένοι σε κανονική δομή πλέγματος που αντιπροσωπεύει την κρυσταλλική δομή του υλικού. Στα μοντέλα αυτά βασικό χαρακτηριστικό των ατόμων είναι το 'spin' τους το οποίο μπορεί να πάρει δύο διακριτές κατευθύνσεις «πάνω» ή «κάτω». Αυτό αναπαρίσταται από μια δυαδική μεταβλητή που παίρνει τιμή 1 (αν το spin κοιτάει προς τα πάνω) ή -1 (αν το spin κοιτάει προς τα κάτω). Καθώς τα μοντέλα αυτά έχουν μελετηθεί εκτεταμένα, μπορούμε να δανειστούμε τα αποτελέσματα από τη φυσική και να τα εφαρμόσουμε είτε απ' ευθείας είτε με κάποιες τροποποιήσεις στα νευρωνικά δίκτυα, αρκεί να βρεθεί η κατάλληλη αναλογία, δηλαδή ένα νευρωνικό μοντέλο που να θυμίζει τους μαγνητικούς κρυστάλλους.



Σχήμα 7.2, A Hopfield net with four nodes.

Η αναλογία με τα νευρωνικά δίκτυα επιτυγχάνεται στο μοντέλο του Hopfield. Οι νευρώνες του δικτύου αυτού είναι διατεταγμένοι σε πλέγμα και κάθε νευρώνας έχει τιμή εξόδου 1 ή -1. Για να μοιάσουν οι νευρώνες με το μοντέλο των McCulloch-Pitts θεωρούμε ότι η έξοδος του i -οστού νευρώνα δίνεται από τον τύπο

$$y_i = f\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + w_{i0}\right)$$

όπου η συνάρτηση f είναι η βηματική συνάρτηση -1/1, η οποία αλλιώς καλείται και συνάρτηση προσήμου (sign) και συμβολίζεται sgn

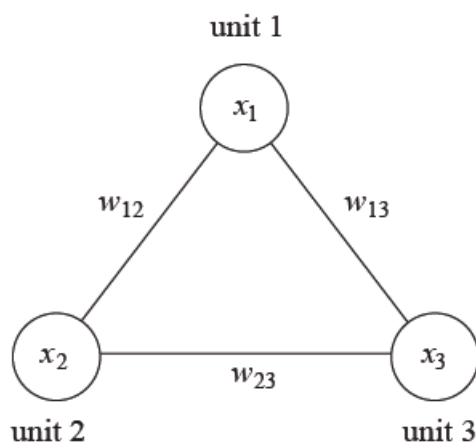
$$y_i = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + w_{i0}\right)$$

Επιλέγεται η βηματική συνάρτηση -1/1 αντί της βηματικής 1/0 για να είναι ακριβέστερη η αναλογία με το spin το οποίο παίρνει μια από δύο αντίθετες τιμές.

Το μοντέλο έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

- Είναι αναδρομικό: οι νευρώνες τροφοδοτούνται από τις εξόδους των υπολοίπων νευρώνων ακόμα και από τη δική τους έξοδο.
- Οι εξωτερικές εισοδοί εφαρμόζονται ως αρχικές συνθήκες στην αναδρομή.

Το μοντέλο δίνει ουσιαστικά n εξισώσεις για $i = 1, \dots, n$. Ακόμη και αν όλα τα βάρη w_{ij} είναι γνωστά και δεδομένα, οι εξισώσεις αυτές δεν ικανοποιούνται για οποιοδήποτε τιμές y_1, \dots, y_n . Επομένως τίθεται το ερώτημα πώς θα επιλέξω τις εξόδους του δικτύου ώστε να ικανοποιείται το παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Ωστόσο πριν από αυτό πρέπει να διερευνηθεί αν υπάρχει λύση στο σύστημα ή ενδεχομένως κανένας συνδυασμός εξόδων δε αποτελεί λύση, ενώ αν υπάρχει λύση, πρέπει να δούμε αν είναι, μόνο μια ή περισσότερες.



Σχήμα 7.3, A Hopfield network of three units.

Η επίλυση του συστήματος Εξισώσεων για $i = 1, \dots, n$ δηλαδή η εύρεση των εξόδων του δικτύου όταν τα συναπτικά βάρη είναι γνωστά, καλείται Ανάκληση. Η εύρεση των κατάλληλων συναπτικών βαρών ώστε το δίκτυο να έχει τις επιθυμητές εξόδους θα έπρεπε κανονικά να αποκαλείται Εκπαίδευση. Ξεφεύγει ωστόσο από τα πλαίσια της κλασικής εκπαίδευσης των νευρωνικών δικτύων καθώς τα συναπτικά βάρη δεν ορίζονται από κάποιο αναδρομικό κανόνα αλλά παίρνουν μια απ' ευθείας τιμή. Επομένως δε μιλάμε για κανόνα εκπαίδευσης του δικτύου Hopfield αλλά για απλή ανάθεση τιμών στα συναπτικά βάρη.

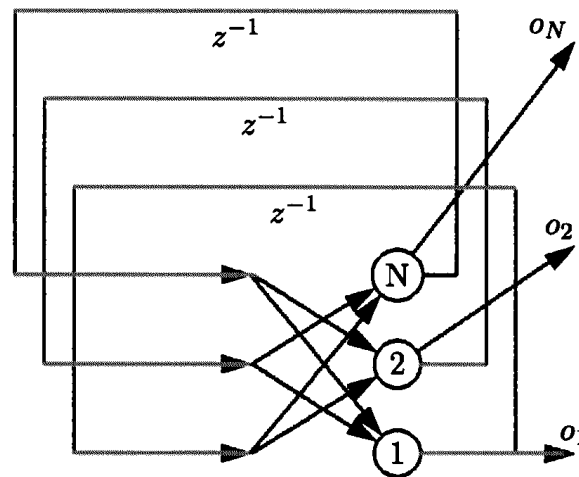
7.2 Δομή δικτύου Hopfield

Η δομή του δικτύου Hopfield φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αποτελείται από ένα μόνο επίπεδο νευρώνων το οποίο είναι ταυτόχρονα είσοδος και έξοδος για το δίκτυο. Η έξοδος κάθε νευρώνα συνδέεται με συνάψεις με όλους τους άλλους νευρώνες και δεν διαθέτει σύναψη που να συνδέει την έξοδο με την είσοδο του ίδιου νευρώνα.

Οι N νευρώνες διαθέτουν δύο τελεστές που συνδέονται σε σειρά και περιγράφονται από τις ακόλουθες αλγεβρικές εκφράσεις:

$$y_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} o_j, \quad o = \begin{cases} +1, y \geq 0 \\ -1, y < 0 \end{cases}$$

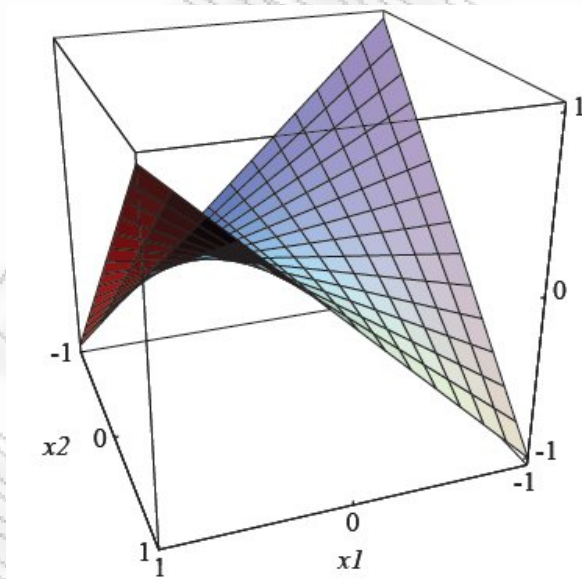
Το δίκτυο Hopfield αποτελεί την πιο απλή μορφή επανατροφοδοτούμενου νευρωνικού δικτύου. Η βασική ιδέα του δικτύου συνίσταται στην κατασκευή νευρωνικού δικτύου στο οποίο τα πρωτότυπα των κατηγοριών θα αποθηκεύονται σε κοιλάδες δυναμικού. Όταν το δίκτυο έχει συμμετρικούς συντελεστές βαρύτητας ($w_{ij} = w_{ji}$) τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία στο χώρο των καταστάσεων τα οποία αντιστοιχούν σε ελάχιστα ενεργειών, τα οποία καλούνται και ελκυστές του δικτύου. Αποδεικνύεται επίσης ότι όταν τοποθετήσουμε μία τυχαία αρχική κατάσταση στο δίκτυο και υπολογίσουμε διαδοχικά τις εξόδους του δικτύου, η τελική τιμή σύγκλισης είναι ένας από τους ελκυστές του δικτύου.



Σχήμα 7.4, Τυπική μορφή δικτύου Hopfield.

Ενέργεια του δικτύου Hopfield ορίζεται να είναι το ακόλουθο αριθμητικό μέγεθος:

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} o_i o_j$$



Σχήμα 7.5, Energy function of a flip-flop.

Η διαδικασία ενεργοποίησης του δικτύου αποτελείται από τις ακόλουθες ενέργειες:

1. Την τοποθέτηση του διανύσματος του άγνωστου πρότυπου στις εξόδους του δικτύου. Τα διανύσματα εισόδου έχουν δυαδικές τιμές, τις -1 και +1.
2. Την μεταφορά της εξόδου μέσω των συνάψεων επανατροφοδότησης στις εισόδους του δικτύου.
3. Τον υπολογισμό των νέων εξόδων του δικτύου.

4. Τον έλεγχο της σύγκλισης. Αν η κατάσταση των εξόδων δεν αλλάξει, τότε η σύγκλιση του δικτύου έχει πραγματοποιηθεί, διαφορετικά επαναλαμβάνονται οι υπολογισμοί από το δεύτερο βήμα.

Η διαδικασία επαναπροσδιορισμού των εξόδων του δικτύου μπορεί να γίνει και με ασύγχρονο τρόπο. Με αυτή την μέθοδο επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο έναν νευρώνα και ακολουθούμε την διαδικασία υπολογισμού της νέας εξόδου και της επανατροφοδότησης της εισόδου του δικτύου.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι συντελεστές βαρύτητας δεν είναι συμμετρικοί τότε δεν μπορεί να εξασφαλιστεί η σύγκλιση του δικτύου. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις στις οποίες παρόλο που οι συντελεστές βαρύτητας δεν είναι συμμετρικοί το δίκτυο συγκλίνει σε ελκυστή του.

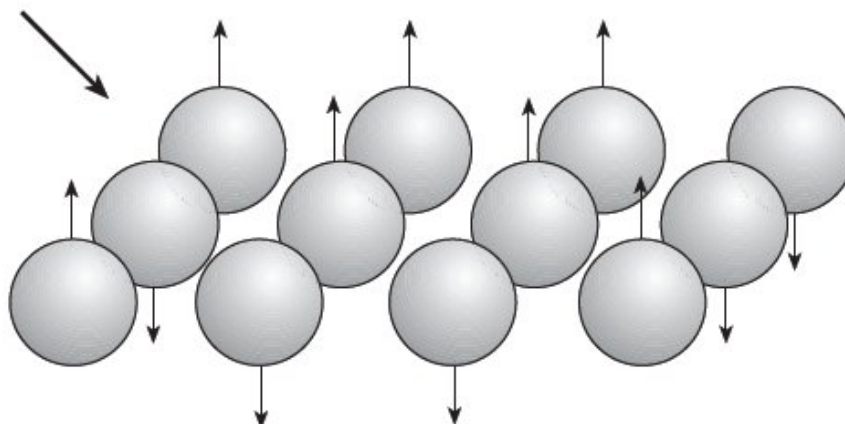
Η εκπαίδευση του δικτύου επιτυγχάνεται με την στατιστική έκδοση του κανόνα του Hebb. Χρησιμοποιώντας τις αναμενόμενες τιμές των M πρωτότυπων που αποθηκεύονται στο δίκτυο υπολογίζουμε τους συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων:

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_i^{(m)} x_j^{(m)}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Όπου $x_i^{(m)}$ είναι η i συνιστώσα του διανύσματος του m πρωτότυπου που θέλουμε να αποθηκεύσουμε σε ελκυστή του δικτύου.

Το πρόβλημα που τίθεται σε αυτή την μορφή του δικτύου, στην οποία ο αριθμός των νευρώνων ισούται με τον αριθμό των διαστάσεων των προτύπων, είναι ο περιορισμένος αριθμός πρωτότυπων που μπορούν να αποθηκευτούν στο δίκτυο. Έχει υπολογιστεί ότι βελτιωμένοι αλγόριθμοι εκπαίδευσης είναι σε θέση να αποθηκεύσουν και να ανακαλέσουν με επιτυχία μέχρι και αριθμό πρωτότυπων ίσο με τον αριθμό των νευρώνων του δικτύου. Σε πρακτικές εφαρμογές συνήθως αποφεύγουμε αυτό το πάνω όριο αυξάνοντας τεχνητά τις διαστάσεις του διανύσματος των προτύπων.

external field

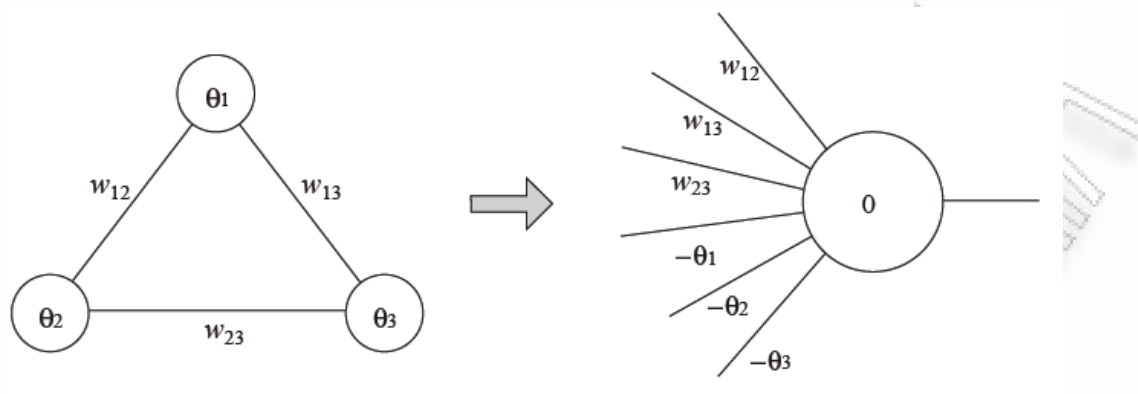


Σχήμα 7.6, *Particles with two possible spins.*

Μειονέκτημα επίσης αποτελεί το γεγονός ότι δεν υπάρχει τρόπος να ορίσουμε έναν μηχανισμό παραμόρφωσης των προτύπων και να ενσωματώσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του στην διαδικασία σύγκλισης του δικτύου.

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του δικτύου μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση είναι επίσης ένα από τα μειονεκτήματα του αλγόριθμου σε σύγκριση με την λύση του πολυεπίπεδου perceptron, των RBF, και των δομικών ή στοχαστικών συστημάτων.

Τα σημαντικά αυτά μειονεκτήματα είναι η αιτία της μειωμένης χρήσης του δικτύου Hopfield σε πρακτικές εφαρμογές.



Σχήμα 7.7, Transformation of a Hopfield network into a perceptron.

7.3 Το δίκτυο Hamming

Σε αντίθεση με το μοντέλο Hopfield, το δίκτυο Hamming δεν είναι αναδρομικό, ωστόσο, όπως και το δίκτυο Hopfield, το δίκτυο Hamming δεν εκπαιδεύεται με κάποιο αναδρομικό κανόνα αλλά τα βάρη ορίζονται με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο. Αποτελείται από ένα στρώμα νευρώνων εξόδου και ένα στρώμα εισόδου. Σκοπός του δικτύου είναι να αποθηκεύσει στη μνήμη του N δυαδικά (binary) πρότυπα $x^{(p)} = [x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}]^T$, $p = 1, \dots, n$. Κάθε πρότυπο περιέχει n στοιχεία (bits) με τιμές ± 1 . Το δίκτυο έχει n εισόδους και N νευρώνες όπου κάθε νευρώνας αντιστοιχεί και σε ένα διαφορετικό πρότυπο. Έτσι τα συναπτικά βάρη w_{ij} του i -ιστού νευρώνα έχουν τιμές

$$w_{ij} = x_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, n$$

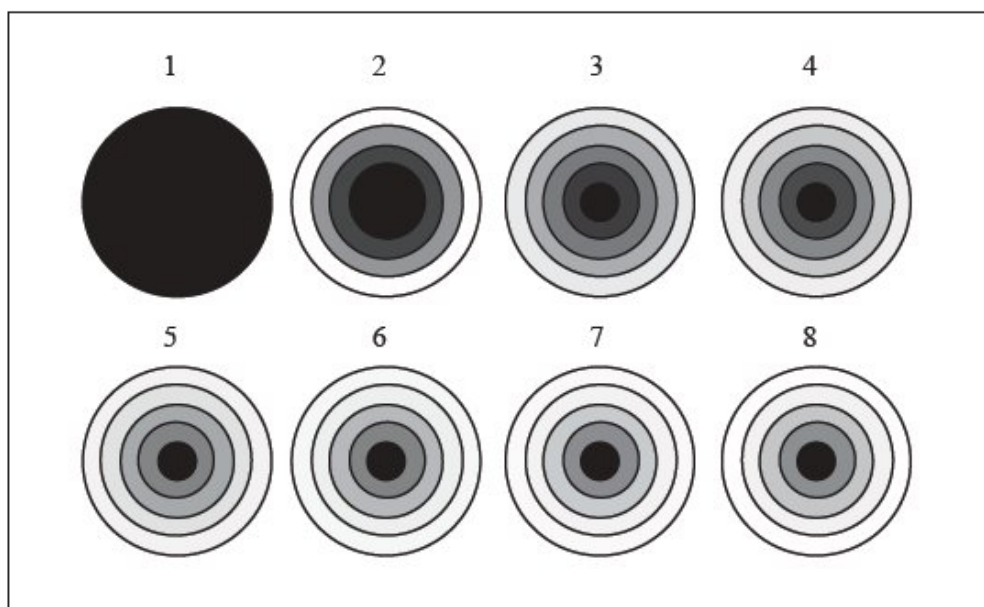
ενώ η έξοδος νευρώνα είναι

$$y_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j + w_{i0}, \quad i = 1, \dots, N$$

Αν στην είσοδο εισάγουμε ένα δυαδικό διάνυσμα x^{test} τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι η έξοδος του νευρώνα i είναι

$$y_i = 2(n - h_i)$$

όπου είναι το πλήθος των bits διαφοράς μεταξύ των διανυσμάτων $x^{(i)}$ και x^{test} . Η τιμή είναι γνωστή ως απόσταση Hamming μεταξύ των $x^{(i)}$ και x^{test} . Αν τα δύο διανύσματα δεν διαφέρουν σε κανένα bit τότε η απόσταση Hamming παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή $h_i = 0$ και συνεπώς το y_i παίρνει την μέγιστη δυνατή τιμή $y_i = 2n$. Στη χειρότερη περίπτωση όπου τα δύο διανύσματα διαφέρουν σε όλα τα bits τότε η απόσταση Hamming παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή $h_i = n$ και το y_i παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή $y_i = 0$. Έτσι η τιμή y_i είναι ένας μετρητής της ομοιότητας μεταξύ των δυαδικών διανυσμάτων $x^{(i)}$ και x^{test} .



Σχήμα 7.3, The grey shading of each concentric circle represents the percentage of vectors with Hamming distance from 0 to 4 to stored patterns and which converge to them. The smallest circle represents the vectors with Hamming distance 0. Increasing the number of stored patterns from 1 to 8 reduces the size of the basins of attraction.

Την μεγαλύτερη τιμή y_i θα έχει ο νευρώνας που μοιάζει πιο πολύ με το διάνυσμα εισόδου x^{test} . Συνεπώς, αν μετά από το δίκτυο Hamming τοποθετήσουμε ένα δίκτυο MAXNET τότε η έξοδος του δικτύου αυτού θα δείξει ποιος είναι ο νικητής. Το συνδυασμένο μοντέλο Hamming+MAXNET λειτουργεί σαν ένα είδος συσχετικής μνήμης, μόνο που στην έξοδο δεν επιστρέφεται το πρότυπο $x^{(i)}$ που μοιάζει περισσότερο με την είσοδο αλλά ο δέκτης i που δείχνει σε αυτό το πρότυπο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Δερματάς, Β. (1997). *Αναγνώριση Προτύπων*. Πάτρα.
- Διαμαντάρας, Κ. (2007). *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- Ρίζος, Γ. (1996). *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- Abu-Mostafa, Y. (1986), "Neural Networks for Computing", in: [Denker 1986], pp. 1–6.
- Aizerman, M. A., E. M. Braverman, and L. I. Rozonoer (1964). *The probability problem of pattern recognition learning and the method of potential functions*. Automation and Remote Control 25, 1175-1190.
- Albrecht, R. F., C. R. Reeves, and N. C. Steele (eds.) (1993), *Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms*, Springer-Verlag, Vienna.
- Albertini, F. and E. D. Sontag (1993). *For neural networks, function determines form*. Neural Networks 6, 975-990.
- Aleksander, I., and H. Morton (1990), *An Introduction to Neural Computing*, Chapman and Hall, London.
- Almeida, L. B. (1987). *A learning rule for asynchronous perceptrons with feedback in a combinatorial environment*. In Proceedings of the First International Conference on Neural Networks (Vol. 2, pp. 609{618). IEEE. [Cited on p. 50.]
- Arbib, M. (ed.) (1995), *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Baldi, P. (1989). 'Linear Learning: Landscapes and Algorithms', in *Advances in Neural Information Processing Systems*. Morgan Kaufmann.
- Barnard, E. (1992). *Optimization for training neural nets*. IEEE Transactions on Neural Networks, 232-240.
- Baum, E. B. (1988). *On the capabilities of multilayer perceptrons*. Journal of Complexity 4, 193-215.
- Baum, E. (1990b), "The Perceptron Algorithm is Fast for Nonmalicious Distributions", Neural Computation, Vol. 2, pp. 248–260.
- Bello, M. G. (1992). *Enhanced training algorithms, and integrated training/ architecture selection for multilayer perceptron networks*. IEEE Transactions on Neural Networks, 864-875.
- Bezdek, J., and S. Pal. (1992), "Fuzzy Models for Pattern Recognition – Background, Significance and Key Points", in: Bezdek, J. and Pal. S. (eds.), *Fuzzy Models for Pattern Recognition*, IEEE Press, New Jersey, pp. 1–28.
- Bridle, J. S. (1990). *Probabilistic interpretation of feedforward classification network outputs, with relationships to statistical pattern recognition*. New York: Springer-Verlag.

- Bishop, C. (2005). *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford Univ. Press.
- Cheng, B. and D. M. Titterton (1994). *Neural networks: a review from a statistical perspective*. *Statistical Science*, 2-54.
- Devijver, P. A. and J. Kittler (1982). *Pattern Recognition: A Statistical Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Fukunaga, K. (1990). *Introduction to Statistical Pattern Recognition (Second ed.)*. San Diego: Academic Press.
- Gallant, S. I. (1990), "Perceptron-Based Learning Algorithms", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 1, No. 2, pp. 179–191.
- Grossberg, S. (1976), "Adaptive Pattern Classification and Universal Pattern Recoding: I. Parallel Development and Coding of Neural Feature Detectors", *Biological Cybernetics*, Vol. 23, pp. 121–134.
- Hertz, J., A. Krogh, and R. G. Palmer (1991), *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Redwood City, CA: Addison Wesley.
- Hornik, K. (1991), "Approximation Capabilities of Multilayer Perceptrons", *Neural Networks*, Vol. 4, pp. 251–257.
- Hush, D., J. Salas, and B. Horne (1991), "Error Surfaces for Multilayer Perceptrons", in: [IEEE 1991], Vol. I, pp. 759–764.
- Lippmann, R. P. (1989). *Review of neural networks for speech recognition*. *Neural Computation*, 1, 1-38. [Cited on p. 58.]
- Lonstaff, I. D. and J. F. Cross (1987). *A pattern recognition approach to understanding the multi-layer perceptron*. *Pattern Recognition Letters* 5, 315-319.
- Minsky, M., and S. Papert (1969), *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Moody, J. (1994), "Prediction Risk and Architecture Selection for Neural Networks", in: V. Cherkassky, J. H. Friedman, and H. Wechsler (eds.), *From Statistics to Neural Networks: Theory and Pattern Recognition Applications*, NATO ASI Series F, Vol. 136, Springer-Verlag, Berlin.
- Lowe, D. (1995). Radial basis function networks. In M. A. Arbib (Ed.), *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Reid, M. B., L. Spirkovska, and E. Ochoa (1989). *Rapid training of higher-order neural networks for invariant pattern recognition*. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, Volume 1, pp. 689-692. San Diego, CA: IEEE.
- Widrow, B., and M. Lehr (1990), "30 Years of Adaptive Neural Networks: Perceptron, Madaline and Backpropagation", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 78, No. 9, pp. 1415–1442.
- Theodoridis, S. and Koutroumbas K. (1999), *Pattern Recognition*, Academic Press, London, UK.
- Tou J.T. and Gonzalez R.C. (1974) *Pattern Recognition Principles*, Addison-Wesley, Redwood City, CA.