ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΜΣ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ:

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

ΜΟΥΡΕΛΑΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ ΜΑΕ 07010

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2010

Αφιερώνεται στη μνήμη του αδελφού μου, Γεράσιμου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ MARKOV-MODULATED POISSON ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ M=2 ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

ΤΟ MARKOV-MODULATED POISSON ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.

<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u>

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, για τη συμβολή του στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας αλλά και για την άριστη συνεργασία που είχαμε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.κ. καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την πολύτιμη γνώση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εύρυθμη λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κυρίως από το σχηματισμό επαρκών αποθεματικών προκειμένου να είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις του έναντι τρίτων (επιχειρηματικά ρίσκα) και κυρίως των ασφαλισμένων του (ασφαλιστικά ρίσκα). Στην ασφαλιστική ορολογία, τα εν λόγω αποθεματικά (ή ακριβέστερα η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στην καλύτερη δυνατή αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών της υποχρεώσεων-αποζημιώσεων) χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα. Βασικό πρόβλημα της (κλασσικής) θεωρίας κινδύνου είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας τα αποθεματικά να μην είναι επαρκή για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων.

Η αρχή της (μαθηματικής) θεωρίας κινδύνου προσδιορίζεται στις αρχές του 20ου αιώνα, όταν ο Σουηδός Filip Lundberg (1903) με την περίφημη διδακτορική διατριβή του ('Approximerad fremstallning au sannolikheets funktionen, Upsalla) έθεσε τα θεμέλια της. Βασιζόμενος σε αυτή, ο Harald Cramer (1930), με μια σειρά από εργασίες, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνου. Το βασικό μοντέλο που προέκυψε από τις παραπάνω συνεισφορές ονομάζεται, κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο Cramer – Lundberg. Κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από την κατανομή Poisson. Η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε, στο 15ο αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία 'On the collective theory of risk in case of contagion between the claims'. Κύριο χαρακτηριστικό στο μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία. Επομένως, είναι φανερό ότι τα μοντέλα που εισήχθησαν για την μοντελοποίηση του προβλήματος της χρεοκοπίας εξαρτώνται άμεσα από τη (στοχαστική) διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων.

1.1. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Ένα πρώτο βήμα για να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των κινδύνων, στον οποίο αυτός εκτίθεται. Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Τότε η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν

i. $N(t) > 0, με\ N(0) = 0$

ii. $N(t)$ είναι διακριτή

iii. αν $s \leq t\ τότε\ N(s) \leq N(t)$

Μια από τις πιο γενικές οικογένειες στοχαστικών διαδικασιών, ευρέως χρησιμοποιούμενη τόσο στη θεωρία ουρών όσο και στη θεωρία κινδύνου, είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των γεγονότων (ενδεχομένων) που απαριθμεί η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$□

1.2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Έχοντας μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, το επόμενο βήμα είναι να μοντελοποιήσουμε τα αποθεματικά ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Έτσι θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, όπου το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη διαδικασία πλεονάσματος, $\{U(t), t \geq 0\}$ και ορίζεται ακολούθως.

Ορισμός 1.2

Ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

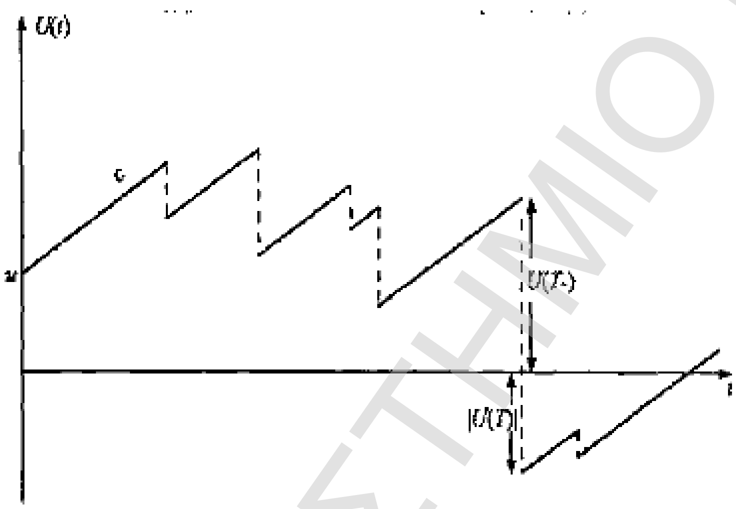
$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{1.2.1}$$

όπου $U(0) = u(\geq 0)$ το αρχικό απόθεμα, c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου και S(t) οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα [0,t]□

Ακόμη ορίζουμε

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

όπου $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με X_i να περιγράφει το μέγεθος της i- οστής ζημιάς



Σχήμα 1. Η διαδικασία πλεονάσματος U(t)

Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_i έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ και μέση τιμή $m = \mathbb{E}(X) < \infty$. Βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι ακολουθίες $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες.

1.3 Η αλυσίδα Markov

Στα Μαθηματικά Αλυσίδες Markov, είναι πιθανοθεωρητικά μοντέλα, στοχαστικές διαδικασίες, που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, καθώς αυτές παρουσιάζονται με το πέρασμα του χρόνου. Στις ακολουθίες αυτές η κάθε μεταβλητή φαίνεται να επηρεάζεται μόνο από την αμέσως προηγούμενη της και όχι από όλη την υπόλοιπη ακολουθία που προηγήθηκε.

Όταν έχουμε μια στοχαστική διαδικασία, σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι πιθανές. Σε κάθε βήμα, λοιπόν της ακολουθίας (κάθε παρατήρηση), πρέπει να αλλάξει η παρούσα κατάσταση με μια άλλη σύμφωνα με μια κατανομή πιθανότητας. Οι αλλαγές αυτές της κατάστασης καλούνται *Μεταβάσεις*. Οι δε πιθανότητες οι σχετικές με τις διαφορετικές αλλαγές - καταστάσεις, καλούνται *Πιθανότητες Μετάβασης*

Ο αυστηρός ορισμός για μια αλυσίδα Markov δίνεται παρακάτω:

Ορισμός 1.3

Μία αλυσίδα Markov είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, $X_1, X_2, X_3 \ldots$ η οποία παρουσιάζει την ιδιότητα:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

(1.3.1)

□

Ορισμός 1.4

Η Ομογενής αλυσίδα – διαδικασία Markov προσδιορίζεται από την ιδιότητα:

$$P(X_{n+1} = x \; | X_n = y \;) = P(X_n = x \; | X_{n-1} = y \;).$$

(1.3.2)

Η παραπάνω σχέση ερμηνεύει μία διαδικασία στην οποία το σύστημα που μελετάμε μεταβαίνει από μία κατάσταση y σε μία κατάσταση x, με πιθανότητα μετάβασης που δεν εξαρτάται καθόλου από τον αριθμό των καταστάσεων της ακολουθίας.

□

1.3.1 Ιδιότητες αλυσίδας Markov

Ορισμός 1.5

Η πιθανότητα $p_{ij} = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = j | \mathrm{X}_0 = i)$ *,(1.3.3)* περιγράφει την μετάβαση από την κατάσταση i στην κατάσταση j, σε ένα βήμα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια απλή μετάβαση (single – step).

□

Σε μία ομογενή αλυσίδα Markov, μια αλυσίδα στην οποία η πιθανότητα μετάβασης είναι ανεξάρτητη του βήματος n, γράφουμε $p_{ij} = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1} = j | \mathrm{X}_k = i)$, ώστε το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση i στην κατάσταση j, σε ένα βήμα.

Οι πιθανότητες μετάβασης από μία κατάσταση σε μια άλλη, σε ένα βήμα, πραγματοποιώντας όλους τις δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ των καταστάσεων, παρουσιάζονται σε μία μήτρα που είναι γνωστή με την ονομασία, «πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης» ή απλά «πίνακας μετάβασης» τις αλυσίδας Markov.

Ορισμός 1.6

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης τις αλυσίδας Markov δίνεται από τον τύπο

$$P = [p_{ij}], p_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_i}, i \neq j, i, j \epsilon I \end{cases} \quad (1.3.4)$$

$$p_{ij} = P(J_n = j | J_{n-1} = i, J_k, k \leq n-1)$$

□

Ορισμός 1.7

Αν J(s)=I για όλα τα s στο διάστημα(t,t+h) τότε ο αριθμός των ενδεχομένων στο διάστημα αυτό , N(t+h)-N(t), ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λi>0.

P(N(t+h)=n+1/ N(t)=n,J(s)=I για t<s≤t+h)=λιh+o(h) *(1.3.5)*

Τότε η διαδικασία $\{N(t); t > 0\}$ καλείται Markov Modulated Poisson Process (Μαρκοβιανή προσαρμοσμένη διαδικασία Poisson).

Οι βασικότερες ιδιότητες μιας αλυσίδας Markov, είναι:

- Η Πρόσβαση – Η Επικοινωνία (Reducibility)

Λέγεται ότι μία κατάσταση j είναι **προσβάσιμη** από μία άλλη κατάσταση i, όταν για ένα θετικό αριθμό βημάτων $n \geq 0$, η πιθανότητα μετάβασης είναι θετική $P_{ij}^{n} > 0$. Οι δύο καταστάσεις έχουν πρόσβαση η μία στην άλλη, και λέμε ότι επικοινωνούν γράφοντας $i \leftrightarrow j$. Έτσι η κατάσταση i λέμε ότι επικοινωνεί με την κατάσταση j, όταν η i έχει πρόσβαση στην j, $i \rightarrow j$, αλλά και η j έχει πρόσβαση στην I, $j \rightarrow i$.

- Η Περιοδικότητα (Periodicity)

Μία κατάσταση i έχει περίοδο k αν κάθε επάνοδος – μετάβαση στην κατάσταση i συμβαίνει σε βήματα πολλαπλάσια του k.

Τυπικά η περίοδος μιας κατάστασης ορίζεται ως εξής:

$$k = \gcd\{n : \Pr(X_n = i | X_0 = i) > 0$$

όπου gcd (greatest common divisor) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

- Η Επαναληπτικότητα – Επανάληψη (Recurrence)

Μία κατάσταση i, σε μια αλυσίδα Markov, καλείται **μεταβατική** (transient), αν δεδομένου ότι έχουμε ξεκινήσει από την κατάσταση i , υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να μην επιστρέψουμε ποτέ στην κατάσταση απ' όπου ξεκινήσαμε. Έτσι υπάρχει η πιθανότητα, σαφώς μικρότερη του 1, να επιστρέψουμε και πάλι στην αρχική κατάσταση, αλλά ταυτόχρονα υπάρχει και η πιθανότητα, μη μηδενική και μικρότερη της μονάδας, να μην συμβεί η επιστροφή στην αρχική κατάσταση.

- Η Εργοδικότητα (Ergodicity)

Μία κατάσταση i είναι εργοδική, αν είναι μη περιοδική, και θετικά επαναληπτική. Αν όλες οι καταστάσεις σε μια αλυσίδα Markov είναι εργοδικές τότε η αλυσίδα Markov, είναι εργοδική. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι μία μη προσβάσιμη αλυσίδα Markov, με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, αν έχει μία μη περιοδική κατάσταση τότε είναι εργοδική.

Ορισμός 1.8 **Στάσιμη κατανομή**

Σε μια ομογενή αλυσίδα Markov, όπου η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από έναν απλό πίνακα των πιθανοτήτων p_{ij} , ανεξάρτητο από το χρόνο μετάβασης, υπάρχει το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}$ που καλείται «στάσιμη κατανομή», αν τα p_j αθροίζουν στο ένα και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad (1.3.6)$$

□

Ορισμός 1.9 **Μήτρα μετάβασης**

Αν σε μία μαρκοβιανή αλυσίδα ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος η πιθανότητα κατανομής μετάβασης μπορεί να περιγραφεί από μία μήτρα, την λεγόμενη μήτρα μετάβασης ***P***, με στοιχείο (i, j), το στοιχείο με πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i, στην κατάσταση j, σε ένα βήμα

$$p_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

□

Ορισμός 1.10

Για την εκθετική κατανομή η πιθανότητα το σύστημα να φύγει από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, την κατάσταση i , σε ένα μικρό χρονικό διάστημα h, δίνεται από τη σχέση: $P(X_i \le h) = 1 - e^{-\lambda_i h} = \lambda_i h + o(h)$ *(1.3.7)*, ανεξάρτητα από το χρόνο που έχει παρέλθει. Η ποσότητα o(h), είναι μία ποσότητα τείνουσα στο μηδέν.

□

1.4 Το κλασσικό μοντέλο θεωρίας χρεοκοπίας

Ορισμός 1.11 (time to ruin)

Για $t \geq 0$, ορίζουμε $T = \inf\{t \geq 0: U(t) < 0\} \mu\varepsilon \ inf\emptyset = \infty$

Να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική □

Ορισμός 1.12.

Για $u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) := \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$$

□

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν είναι ο μοναδικός «πόρος» μιας ασφαλιστικής επιχείρησης και ότι η καταβολή μιας αποζημίωσης δεν είναι στιγμιαίο γεγονός (απαιτείται κάποιο χρονικό διάστημα, που συνεπάγεται εισροή ασφαλίστρου πέρα από το καταβεβλημένο μέχρι την χρονική στιγμή T). Έτσι η «μαθηματική χρεοκοπία» που ορίζουμε δεν ταυτίζεται αναγκαία με την πραγματική χρεοκοπία, αλλά είναι ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου από το οποίο η επιχείρηση μπορεί να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι, με βάση αυτό το μέτρο κινδύνου, αν η επιχείρηση έχει ενδείξεις ότι οι υποχρεώσεις της θα είναι εξαιρετικά αυξημένες μπορεί να προχωρήσει σε αύξηση ασφαλίστρων, σύναψη δανείου, αύξηση μετοχικού κεφαλαίου κ.ο.κ. Από μαθηματικής άποψης είναι φανερό ότι υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί κανείς να προσδιορίσει κατάλληλα το αρχικό απόθεμα u και το ασφάλιστρο c έτσι ώστε να αποφύγει (ή σε κάθε περίπτωση ν α επιμηκύνει) το ενδεχόμενο, η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική.

Επιπλέον, από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος προκύπτει άμεσα ότι τα ασφάλιστρα της επιχείρησης c δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρηματικό ποσό (για παράδειγμα δεν μπορεί να είναι μηδενικά). Έτσι υποθέτουμε ότι ο ρυθμός είσπραξης του ασφαλίστρου c στο [0,t] είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τις μέσες ζημιές, $\mathbb{E}(S(t))$, που εμφανίζονται στο [0,t], διαφορετικά η χρεοκοπία στο [0,t] είναι βέβαια (από την πρώτη κιόλας ζημιά).

Ορισμός 1.13 Για $u \geq 0, \delta \geq 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως

$$\varphi(u) := \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} w\big(U(T-), |U(T)| I_{\{T<\infty\}} \big| U(0) = u\big)\right), u \geq 0$$

Όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $0 \leq w(x, y) < \infty$ μια διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(.)$ η δείκτρια συνάρτηση.

□

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που εκτός από τη χρήση της στα αναλογιστικά μαθηματικά, έχει και εφαρμογές στη θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Παραδείγματος χάρη, όταν $w(x,y) = \max\{0, K - x\}$, η $\varphi(u)$ χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ενός αμερικανικού put option με τιμή άσκησης K (Gerber-Shiu (1999) και Gerber και Landry (1998)).

Η μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου έγινε από τους Gerber και Shiu (1998). Σε αυτή την εργασία οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρό-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληρό-διαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε από τους Lin και Willmot (1999) σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (associated compound geometric).Στην ίδια εργασία γίνεται ο υπολογισμός της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόστηκε και στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Οι αναφορές περιλαμβάνουν τους Dickson και Hipp (2001), Cheng και Tang (2003), Gerber και Shiu (2003a), Gerber και Shiu (2003b), Li (2003), Lin (2003), Li και Garrido (2004), Sun (2004), Gerber και Shiu (2005), Li και Garrido (2005), Schmidli (2005), Albecher (2005), Tsai (2005), Li (2005), Ng (2005), Yin και Chiu (2005).

Ορισμός 1.14

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma(\chi) = \int_x^\infty w(x, y-x) f(y) dy$

(1.4.1)

□

Ορισμός 1.15

Ορίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων $f(x), \gamma(x), \varphi(x)$ ως εξής

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

$$\hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \gamma(x) dx$$

και

$$\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi(x) dx$$

□

Ορισμός 1.16

Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου της συνάρτησης $\varphi(x)$ ως εξής

$$\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx = s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)$$

(1.4.2)

□

Ορισμός 1.17

Ορίζουμε την παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής

$$\frac{d}{ds}\hat{f}(s) = \int_0^\infty -xe^{-sx}f(x)dx$$

□

Άρα για $s = 0$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{d}{ds}\hat{f}(0) = -\int_0^\infty xf(x)dx = -E(x)$$

(1.4.3)

Ορισμός 1.18

Ορίζουμε τον τελεστή T_r της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)}f(y)dy$$

(1.4.4)

□

Ισχύει $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ry}f(y)dy = \hat{f}(r)$

και

$$T_0 f(x) = \int_x^\infty f(y)dy = \bar{F}(x)$$

Ορισμός 1.19

Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $T_r f(x)$ ως εξής

$$\begin{aligned}\tilde{T}_r f(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^y e^{-sx} e^{-ry} e^{rx} f(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \int_0^y e^{-(s-r)x} dx dy = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}\end{aligned}$$

(1.4.5)

□

Σύμφωνα με τις ακόλουθες προτάσεις μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση Gerber – Shiu ως ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

1.5. Ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Πρόταση 1.5.1 Ισχύει

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi} \int_0^x r(x-y) dG(y) + r(x)$$

(1.4.6)

□

Πρόταση 1.5.2 Ισχύει

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi} r(x) - \frac{r(0)}{1-\varphi} \bar{G}(x) - \frac{1}{1-\varphi} \int_0^x \bar{G}(x-y) r'(y)\, dy$$

(1.4.7)

□

1.6 Συνάρτηση κατανομής πλεονάσματος – συνάρτηση κατανομής ελλείμματος

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε τις συναρτήσεις κατανομής πλεονάσματος και κατανομής ελλείμματος

Ορισμός 1.20

Έστω $F(x,y|u)$ η πιθανότητα ότι εμφανίζεται χρεοκοπία, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία είναι x και το έλλειμμα αμέσως μετά τη χρεοκοπία είναι y.

$$F(x,y|u) = P[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, I(T < \infty)|U(0) = u]$$

□

Ορισμός 1.21

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F_1(x|u) = P[U(T-) \leq x, I(T < \infty)|U(0) = u]$$

ως συνάρτηση κατανομής πλεονάσματος

$$F_2(y|u) = P[|U(T)| \leq y, I(T < \infty)|U(0) = u]$$

ως συνάρτηση κατανομής ελλείμματος

□

Ορισμός 1.22

Ορίζουμε ως $\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \leq y) I(T < \infty|U(0) = u]$

την προεξοφλημένη τιμή της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος αμέσως μετά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Συνήθως συμβολίζεται με $G(u,y) = F_2(y|u)$ (severity at ruin)

□

1.7 Το κλασσικό μοντέλο θεωρίας χρεοκοπίας σε Μαρκοβιανό περιβάλλον

Προκειμένου να ορίσουμε την διαδικασία πλεονάσματος στο μοντέλο Markov-modulated θεωρούμε ότι $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$ να είναι μια ομογενής, μεταβατική, συνεχούς χρόνου αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $E = \{1, \dots, m\}$ και πίνακα τάσης $\Lambda = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$ με $a_{ii} = -a_i = -\sum_{i \neq j}^{m} a_{ij}$ για $i \in E$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι το $1 \times m$

διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ είναι η στάσιμη κατανομή (stationary distribution) της αλυσίδας $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$,η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{\pi\Lambda} = \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{\pi e} = \mathbf{1}$ με 0 να είναι $1 \times m$ διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία και **e** ένα $m \times 1$ διάνυσμα με όλα του τα στοιχεία ίσα με 1.

Στο μοντέλο Markov-modulated Poisson, θεωρούμε ότι όταν η αλυσίδα $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$ βρίσκεται στην κατάσταση i τότε ο αριθμός των κινδύνων δίνεται από την απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N_i(t)\}_{t=0}^{\infty}$η οποία υποθέτουμε οτι είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ_i, και η κατανομή των μεγεθών των ζημιών είναι $F_i(.)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_i(.)$και πεπερασμένη μέση τιμή m_i,$i \in E$. Επιπλέον σε κάθε κατάσταση εισπράττεται ένα ασφάλιστρο μεγέθους c_i.

Από τις παραπάνω υποθέσεις θεωρούμε ότι σε κάθε κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να ορισθεί μια στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U_i(t), t \geq 0\}$, όμοια με τη σχέση $U(t) = u + ct - S(t)$, όπου οι σωρευτικές ζημιές είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson (λ_i, F_i).

Τότε ο συνολικός αριθμός των κινδύνων, για όλες τις καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας δίνεται από την απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$,

$$N(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dN_i(s)$$

Ενώ η αντίστοιχη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dU_i(s)$$

Ορισμός 1.23

Επιπλέον ορίζουμε $T = \inf\{t \geq 0: U(t) < 0\}$ με $inf\emptyset = \infty$,

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, ενώ προκειμένου να μην έχουμε χρεοκοπία με την πρώτη ζημιά, ο περιορισμός για την επάρκεια του ασφαλίστρου δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

□

Ορισμός 1.24

Έστω $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}_i(\cdot\ |J(0) = i)$ και $\mathbb{E}_i$ η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_i$.

Τότε για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$$\varphi_i(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)| I_{(T<\infty)} | U(0) = u), i \in E, u \geq 0$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber–Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης i και του αρχικού αποθεματικού u, με δ ένταση ανατοκισμού, $w(x,y)$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I_{(.)}$ η δείκτρια συνάρτηση.

□

Η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των $\varphi_i(u)$ αντικατοπτρίζεται στα εξής βήματα: αρχικά θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_i(u)$ ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace μπορούμε να προσδιορίσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση (δηλαδή την εξίσωση Lundberg για το μοντέλο Markov-modulated Poisson), ενώ με βάση τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορούμε να γράψουμε το μετασχηματισμό των $\varphi_i(u)$ σε μια κατάλληλη μορφή ώστε να είναι δυνατή η αντιστροφή του όταν οι f_i ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.25

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$w_i(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f_i(x)dx = \int_0^\infty w(u,x) f_i(x+u)dx$$

και

$$\widehat{w}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_i(x)dx$$

ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $w_i(x)$

□

Ορισμός 1.26

Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace, $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\mathbf{A}^*(\mathrm{s})\varphi(0) - \mathbf{A}^*(\mathrm{s})\widehat{\boldsymbol{w}}(s)}{\det \mathbf{A}(\mathrm{s})}$$

Όπου $\mathbf{A}^*(\mathbf{s})$είναι ο ad joint πίνακας του $\boldsymbol{A}(s)$□

Ορισμός 1.27

Η εξίσωση $\det\mathbf{A}(\mathbf{s}) = 0$ καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του μοντέλου.

Ορισμός 1.28 **Διαιρετές διαφορές**

Ορίζουμε τις διαιρετές διαφορές του πίνακα $B(s)$, σε συνάρτηση των διακριτών αριθμών $r_1, r_2, \dots\dots, r_m$ ως ακολούθως:

$$B[r_1, s] = \frac{B(s) - B(r_1)}{s - r_1}$$

$$B[r_1, r_2, s] = \frac{B[r_1, s] - B[r_1, r_2]}{s - r_2}$$

$$B[r_1, r_2, r_3, s] = \frac{B[r_1, r_2, s] - B[r_1, r_2, r_3]}{s - r_3}$$

Για την κ-1 διαφορά έχουμε

$$B[r_1, r_2, \dots, r_\kappa] = \sum_{j=1}^{k} \frac{B(r_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{k} (r_j - r_i)}$$

Εφαρμόζοντας τις διαιρετές διαφορές στη σχέση $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\mathbf{A}^*(s)\boldsymbol{\varphi}(0) - \mathbf{A}^*(s)\hat{\boldsymbol{w}}(s)}{\det \mathbf{A}(s)}$ μετατρέπουμε το μετασχηματισμό Laplace σε κατάλληλη μορφή ώστε να πετύχουμε την αντιστροφή του και να υπολογίσουμε τον πίνακα $\boldsymbol{\varphi}(u)$.

Ορισμός 1.29

Ορίζουμε τον τελεστή T_r για ένα πίνακα $B(y)$ ως εξής

$$T_r \boldsymbol{B}(y) = \int_y^\infty e^{-r(x-y)} \boldsymbol{B}(x) dx \text{ , } r \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Εδώ ο $\boldsymbol{B}(y)$ είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις του y.

Ορισμός 1.30

Έστω $\psi_i(u) = \mathbb{P}\{T < \infty | U(0) = u, I(0) = i\}, i \in J, u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας δοθέντος αρχικού αποθέματος u και αρχικής κατάστασης i.

Τότε η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \psi_i(u), \quad u \geq 0 \square$$

Ορισμός 1.31

Ορίζουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας (non-ruin probability) ως

$$\varphi_i(u) = 1 - \psi_i(u)$$

Τότε η συνολική πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \varphi_i(u), \quad u \geq 0$$

□

Ορισμός 1.32

Ορίζουμε την κατανομή του ελλείμματος κατά το χρόνο χρεοκοπίας στο Markov Modulated Poisson Risk Model ως

$$\Psi_i(y; u) = P\{T < \infty, U(T) < -y | U(0) = u, I(0) = i\}, i \in J, \ u, y \geq 0$$

που αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και τη στιγμή της χρεοκοπίας το πλεόνασμα παίρνει τιμή μικρότερη από $-y$, ή αλλιώς το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερο από y, δοθέντος αρχικού αποθέματος u και αρχικού περιβάλλοντος $i \in J$.

□

Ορισμός 1.33

Ορίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων $\Psi_i(y; u)$ και $f_i(x)$ ως ακολούθως

$$\Phi_i(s; y) = \int_0^\infty e^{-su} \Psi_i(y; u) \, du, \quad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

και

$$\hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_i(u)du, \qquad s \in \mathbb{C}$$

□

Ορισμός 1.34

Ορίζουμε τον τελεστή

$$T_r f(y) = \int_y^\infty e^{-r(x-y)} f(x)dx, \quad r \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

(1.4.8)

□

Είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$ ισούται με $T_s f(0)$, και για διακριτούς αριθμούς r_1, r_2 έχουμε την ακόλουθη ιδιότητα

$$T_{r_1} T_{r_2} f(y) = T_{r_2} T_{r_1} f(y) = \frac{T_{r_1} f(y) - T_{r_2} f(y)}{r_2 - r_1}, r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

(1.4.9)

Όταν $r_1, r_2 = r \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$T_r T_r f(y) = \lim_{s \to r} \frac{T_r f(y) - T_s f(y)}{s - r} = \int_y^\infty e^{-r(x-y)} (x - y) f(x) dx$$

(1.4.10)

Ορισμός 1.35

Ορίζουμε τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας, δοθέντος αρχικού αποθέματος 0, για τις δύο καταστάσεις ως εξής $\Phi_1(0)$ και $\Phi_2(0)$□

Ορισμός 1.36

Ορίζουμε $\hat{\Phi}_1(s)$ και $\hat{\Phi}_2(s)$ τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων μη-χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2□

Ορισμός 1.37

Ορίζουμε

$$p_{k-1}[s,\rho] = \frac{p_{k-1}(s) - p_{k-1}(\rho)}{s-\rho}$$

πολυώνυμο κ-2 βαθμού που ορίζεται ως η πρώτη διαφορά του $p_{k-1}(s)$□

1.8 Το Markov Modulated Poisson Risk Model για m=2 καταστάσεις

1.8.1 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να βρούμε κατάλληλους τύπους ώστε να υπολογίσουμε τις ποσότητες:

- συναρτήσεις μη χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2
  $\Phi_1(u), \Phi_2(u)$
- συναρτήσεις μη χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2, με αρχικό απόθεμα 0
  $\Phi_1(0), \Phi_2(0)$
- μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων μη χρεοκοπίας
  $\tilde{\Phi}_1(s), \tilde{\Phi}_2(s)$

1.8.2 Κατανομή ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για το Markov Modulated Poisson Risk Model για m=2 καταστάσεις.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε διακριτά αποτελέσματα για τις παρακάτω ποσότητες $\Psi_1(y;0)$, $\Psi_2(y;0)$, $\Psi_1(y;u)$, $\Psi_2(y;u)$ και $\tilde{\Psi}_1(s;y)$,$\tilde{\Psi}_2(s;y)$.

Ορισμός 1.38

Ορίζουμε τις ποσότητες $\Psi_1(y;0)$ και $\Psi_2(y;0)$ ως κατανομές του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2 δοθέντος αρχικού αποθέματος 0

□

Ορισμός 1.39

Ορίζουμε τις ποσότητες $\Psi_1(y;u)$ και $\Psi_2(y;u)$ κατανομές του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας για τις καταστάσεις 1 και 2

□

Ορισμός 1.40

Ορίζουμε τις ποσότητες $\tilde{\Psi}_1(s;y)$ και $\tilde{\Psi}_2(s;y)$ως τους μετασχηματισμούς Laplace των ποσοτήτων $\Psi_1(y;u)$ και $\Psi_2(y;u)$

□

Ορισμός 1.41

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$T_sT_0T_0f_i(y) = \frac{[T_0T_0f_i(y) - T_sT_0f_i(y)]}{s}, \qquad i = 1{,}2$$

και

$$T_0T_0f_i(y) = \int_y^{\infty}(x-y)f_i(x)dx = \int_y^{\infty}\bar{F}_i(x)dx$$

□

Ορισμός 1.42

Επιπρόσθετα δηλώνουμε με

$$p_k[s,\rho] := \frac{[p_k(s) - p_k(\rho)]}{[s-\rho]}$$

την πρώτης τάξεως διαιρετή διαφορά του $p_k(s)$,

και με

$$p_k[s,\rho,0] := \frac{[p_k[s,0] - p_k[\rho,0]]}{[s-\rho]}$$

τη δεύτερης τάξεως διαιρετή διαφορά του $p_k(s)$.

□

1.9 Το Markov Modulated Poisson Risk Model με την ύπαρξη σταθερού μερίσματος

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την υπόθεση της ύπαρξης ενός οριζόντιου κατωφλιού στο επίπεδο $b(\geq u)$ για το μοντέλο Markov-modulated Poisson

Ορισμός 1.43

Ορίζουμε τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την υπόθεση ύπαρξης σταθερού μερίσματος να δίνεται από τη σχέση

$$dU_b(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dU_{b,i}(s), \quad 0 \leq u \leq b$$

□

Ορισμός 1.44

Επιπλέον ορίζουμε

$T_b = \inf\{t \geq 0: U_b(t) < 0\}$ $\;$ $\mu\varepsilon$ $\; inf\emptyset = \infty$

Να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$

□

Για κάθε μια από τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας, η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.45

'Εστω $\mathbb{P}_i(.) = \mathbb{P}(.|J(0) = i)$ και $\mathbb{E}_i$ να είναι η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_i$.Τότε για το μοντέλο Markov-modulated Poisson υπό την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζουμε

$$\varphi_{b,i}(u) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta T_b} w\left(U(T_b -), |U(T_b)| I_{(T_b<\infty)}\right| U_b(0) = u\right), \qquad i \in E, \quad 0 \leq u \leq b,$$

Να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης i και του αρχικού αποθεματικού u, με ένταση ανατοκισμού δ, $0 \leq w(x,y) \leq \infty$ μια διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(.)$ η δείκτρια συνάρτηση.

□

Ορισμός 1.46

Ορίζουμε $D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t)$ την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων μέχρι το χρόνο χρεοκοπίας T_b,όπου $D(t)$ τα συνολικά πληρωθέντα μερίσματα μέχρι το χρόνο t.

□

Ορισμός 1.47

Έστω ο μέσος του $D_{u,b}$δοθέντος αρχικής κατάστασης i.

$V_i(u,b) = E\left[D_{u,b} \middle| I(0) = i\right]\ \ 0 \le u \le b\ \ , i \in J$

□

Στην παρούσα ενότητα μελετάται η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$μέσω της οποίας αναλύεται η ανώτερη ροπή της παρούσας αξίας όλων των πληρωθέντων μερισμάτων πριν την χρεοκοπία.

□

Ορισμός 1.48

Ορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$, δοθέντος αρχικού περιβάλλοντος i, ως

$M_i(u,y;b) = E\left[e^{yD_{u,b}} \middle| U(0) = u, I(0) = i\right], \qquad 0 \le u \le b, i \in J$

Όπου y είναι τέτοιο ώστε να υπάρχει η $M_i(u,y;b)$□

Ορισμός 1.49

Για $0 \le u \le b$ και $i = 1,2,\dots m$ ορίζουμε

$V_{i,m}(u;b) = E\left[D_{u,b}^m \middle| I(0) = i\right], \qquad m \in \mathbb{N}$

Τη ν-οστή ροπή της $D_{u,b}$ με $V_{i,0}(u;b) = 1\ \ \kappa\alpha\iota\ V_{i,1}(u;b) = V_i(u;b)$

□

Ορισμός 1.50

Ορίζουμε τ_bνα είναι η πρώτη φορά που το πλεόνασμα γίνεται b χωρίς να έχει προηγηθεί χρεοκοπία και για $\delta > 0$.

□

Ορισμός 1.51

Για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$$L_i(u;b) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta\tau_b} I(\tau_b < T_b)\middle|U(0) = u\right), i \in E, 0 \le u \le b$$

Να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου τ_b.

□

Ορισμός 1.52

Για $0 \le u \le b$ ορίζουμε

$$\xi_i(u;b) = \mathbb{P}_i\left\{sup_{0\le t\le T_\infty} U(t) < b, T_\infty < \infty \middle| U(0) = u, I(0) = i\right\}, i \in J$$

Να είναι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u χωρίς να έχει φτάσει το κατώφλι b πριν την χρεοκοπία, δοθέντος ότι το αρχικό περιβάλλον είναι i όπου T_∞ ο χρόνος χρεοκοπίας χωρίς την ύπαρξη κατωφλιού.

Αλλιώς $\xi_i(u;b)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη απορροφητικού ορίου b, δοθέντος αρχικής κατάστασης i. □

Ορισμός 1.53

Ορίζουμε $\chi_i(u;b)$ να είναι η πιθανότητα οτι η διαδικασία πλεονάσματος πλησιάζει το όριο b από αρχικό απόθεμα u χωρίς να έχει ήδη γίνει μηδέν, δοθέντος αρχικής κατάστασης i.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

2.1. **Η** συνάρτηση Gerber-Shiu

Οι Gerber-Shiu το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές Τ, |U(T)| και U(T-) σε μια μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function).

Ορισμός 2.1 Για $u \geq 0, \delta \geq 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται ως

$$\varphi(u) := \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} w\big(U(T-), |U(T)| I_{(T<\infty)} \big| U(0)=u\big)\right), u \geq 0 \qquad (2.1)$$

Όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $0 \leq w(x,y) < \infty$ μια διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(.)$ η δεικτρια συνάρτηση.

□

Διαισθητικά η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη ποινή η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $\varphi(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου.

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

- Για $\delta = 0, w(x,y) = 1$,παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi(u) = \mathbb{E}\left(\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right)$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = 1$, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\varphi_T(u) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right.$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(x=x_1)(y=x_2)}$,παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f(x_1 x_2|u) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} I_{(|U(T)|=x_1)((U(T-)=x_2)}\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right.$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(x=x_1)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $U(T-)$,

$$h(x_1/u) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} I_{((U(T-)=x_1)}\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right.$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$,

$$g(x_2/u) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T} I_{(|U(T)|=x_2)}\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right.$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = x_1^k$ $(w(x,y) = x_2^k)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία),

$$\mathbb{E}\left(e^{-\delta T}|U(T)|^k\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right., \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}U(T-)^k\left(I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)\right.$$

□

2.2.Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις και μετασχηματισμοί Laplace

Αν δεσμεύσουμε ως προς το χρόνο εμφάνισης και το μέγεθος απαίτησης του πρώτου claim δηλαδή $(T_1 = t, X_1 = x)$ ισχύει

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(u|t,x) f_{x_1}(x) f_{T_1}(t) dx dt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \varphi(u|t,x) f(x) dx dt$$
$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \varphi(u|t,x) f(x) dx dt$$

(2.2.1)

Τη στιγμή εμφάνισης του πρώτου claim ισχύει $U(t) = u + ct - x$

Αν $\begin{cases} 0 \le x \le u + ct, \text{τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία} \\ x > u + ct, \text{τότε εμφανίζεται χρεοκοπία} \end{cases}$

Τότε $I(T < \infty) = 1, U(T-) = u + ct, \ |U(T)| = x - u - ct$

Άρα

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \{ \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} \varphi(u + ct - x) f(x) dx$$
$$+ \int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t} w(u + ct, x - u - ct) f(x) dx \} dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \{ \int_0^{u+ct} \varphi(u + ct - x) f(x) dx$$
$$+ \int_{u+ct}^{\infty} w(u + ct, x - u - ct) f(x) dx \} dt$$

Θέτουμε $s = u + ct \Rightarrow t = \frac{s-u}{c}, dt = \left(\frac{1}{c}\right) ds, 0 \le t \le \infty, u \le s \le \infty$

Τότε

$$\varphi(u) = \lambda \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^{s} \varphi(s - x) f(x) dx \left(\frac{1}{c}\right) ds$$
$$+ \lambda \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^{\infty} w(s, x - s) f(x) dx \left(\frac{1}{c}\right) ds \}$$

(2.2.2)

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.4.1) στη σχέση (2.2.2) παίρνουμε

$$c\varphi(u) = \lambda \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^{s} \varphi(s - x) f(x) dx ds + \lambda \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s) ds$$

(2.2.3)

Ορισμός 2.2.1

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_1(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dx \qquad (2.2.4)$$

και τη συνάρτηση

$$g_2(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s) \qquad (2.2.5)$$

□

Παραγωγίζοντας ως προς u τις συναρτήσεις (2.2.4) και (2.2.5) παίρνουμε

$$\frac{d}{du}\int_u^\infty g_1(u,s)\,ds = -\,g_1(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial u} g_1(u,s)$$
$$= -\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g_1(u,s)\,ds$$

και

$$\frac{d}{du}\int_u^\infty g_2(u,s)ds = \;-g_2(u,u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g_2(u,s)$$

Παραγωγίζοντας ως προς u τη συνάρτηση (2.2.3) παίρνουμε

$$c\varphi'(u) = \lambda\frac{d}{du}\int_u^\infty g_1(u,s)ds + \lambda\frac{d}{du}\int_u^\infty g_2(u,s)\,ds \Rightarrow c\varphi'(u)$$
$$= \lambda\left\{-g_1(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial u} g_1(u,s)\right\}$$
$$+\lambda\left\{\int_u^\infty \gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g_2(u,s)\right\} \Rightarrow c\varphi'(u)$$
$$= -\lambda\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}c\varphi(u)$$

Άρα $\qquad c\varphi'(u) = (\lambda+\delta)\varphi(u) - \lambda\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u)$

$$(2.2.6)$$

Για δ=0 και $w(x,y) = 1$ ισχύει

$$c\psi'(u) = (\lambda+\delta)\psi(u) - \lambda\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \lambda\bar{F}(u)$$

(2.2.7)

όπου $\boldsymbol{\psi(u)}$ η πιθανότητα χρεοκοπίας και $\bar{F}(u)$ η δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής του μεγέθους ζημιών.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στη σχέση (2.2.6) έχουμε

$$c[s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)] = (\lambda+\delta)\hat{\varphi}(s) - \lambda\hat{\varphi}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$[cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)]\hat{\varphi}(s) = c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)}$$

(2.2.8)

Όπως είναι γνωστό $1 + (1+\theta)E(x)r = M_x(r)$ $\kappa\alpha\iota$ $c = (1+\theta)\lambda E(x)$

Άρα $\lambda + cr = \lambda M_x(r)$ για r=-s ισχύει $\lambda - cs = \lambda M_x(-s) \Rightarrow \lambda - cs = \lambda\hat{f}(s)$

Η εξίσωση $\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s) = 0$ *(2.2.9)*

καλείται εξίσωση Lundberg.

Η εξίσωση Lundberg έχει μοναδική θετική ρίζα που εξαρτάται από το δ.

Ισχύει $\hat{\varphi}(s) < \infty, \forall\, s > 0$

Αφού το ρ είναι ρίζα του παρανομαστή θα ισχύει

$$\hat{\varphi}(\rho) = \frac{c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(\rho)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(\rho)}$$

(2.2.10)

Άρα το ρ θα είναι και ρίζα του αριθμητή.

Ορισμός 2.2.2

Ορίζουμε $A(s) = c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$

και

$$B(s) = cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)$$

$\square$

Άρα

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{2.2.11}$$

Επειδή $\hat{\varphi}(s) < \infty, \forall\, s > 0$ και $B(\rho) = 0 \Rightarrow A(\rho) = 0$

Είναι

$$B(s) = B(s) - B(\rho) = cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s) - \left(c\rho - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(\rho)\right)$$
$$= c(s-\rho) - \lambda\left(\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\right) = (s-\rho)[c - \lambda\frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s-\rho}] \tag{2.2.12}$$

Επίσης $A(\rho) = 0 \Rightarrow c\varphi(0) = \lambda\hat{\gamma}(\rho)$

Άρα

$$A(s) = \lambda\hat{\gamma}(\rho) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s-\rho} \tag{2.2.13}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.4.2) και (1.4.4) στη σχέση (2.2.11) έχουμε

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda\frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{c - \lambda\frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s-\rho}} \tag{2.2.14}$$

Αντικαθιστώντας την (1.4.5) στην (2.2.14) έχουμε

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda\hat{T}_\rho\gamma(s)}{c - \lambda\hat{T}_\rho f(s)}$$

η οποία συνεπάγεται την ακόλουθη σχέση

$$c\hat{\varphi}(s) = \lambda\hat{T}_\rho f(s)\hat{\varphi}(s) + \lambda\hat{T}_\rho\gamma(s) \tag{2.2.15}$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην (2.2.15) έχουμε

$$c\varphi(u) = \lambda \int_0^u \varphi(u-x) T_\rho f(x) dx + \lambda T_\rho \gamma(u)$$

η οποία συνεπάγεται τη σχέση

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u-x) T_\rho f(x) dx + \frac{\lambda}{c} T_\rho \gamma(u)$$

(2.2.16)

Για
$$\delta = 0, w(x,y) = 1 \Rightarrow \varphi(u) = \psi(u), \gamma(u) = \bar{F}(u), T_0 f(x) = \bar{F}(x), T_0 \gamma(u) = \int_u^\infty \bar{F}(x) dx$$

Οπότε για $\delta = 0$ από την (2.2.16) παίρνουμε

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx$$

(2.2.17)

2.3 Η συνάρτηση Gerber – Shiu ως ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

Η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση όταν έχει τη μορφή

$$m(x) = \varphi \int_0^x m(x-y) dF(y) + \varphi r(x), \qquad 0 < \varphi < 1$$

(2.3.1)

Ορισμός 2.3.1

Ορίζουμε τη συνάρτηση $z(x)$ ως

$$z(x) = \frac{\lambda}{c} T_\rho f(x)$$

□

Ισχύει

$$\int_0^\infty z(x)dx = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty T_\rho f(x)dx = \frac{\lambda}{c}\hat{T}_\rho f(0) = \frac{\lambda}{c}\frac{\hat{f}(0) - \hat{f}(\rho)}{\rho - 0} = \frac{\lambda}{c}\frac{(1 - \hat{f}(\rho))}{\rho}$$

(2.3.2)

Όμως από την εξίσωση Lundberg (2.2.9) για $s = \rho$ έχουμε ότι

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda \hat{f}(\rho)$$

(2.3.3)

η οποία συνεπάγεται

$$\lambda\left(1 - \hat{f}(\rho)\right) = c\rho - \delta$$

Από τις σχέσεις (2.3.2) και (2.3.3) έχουμε

$$\int_0^\infty z(x)dx = \frac{c\rho - \delta}{c\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} < 1$$

Οπότε από τη (2.2.16) έχουμε ότι η $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορισμός 2.3.2

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\frac{1}{1 + \xi_\delta} = \int_0^\infty z(x)dx, \xi_\delta > 0$$

(2.3.4)

και

$$G(u) = \frac{\int_0^u z(x)dx}{\int_0^\infty z(x)dx}$$

(2.3.5)

□

Η $G(u)$ είναι συνάρτηση κατανομής και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(u) = \frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx}$$

(2.3.6)

Άρα $G_\delta(u) = (1+\xi_\delta)\int_0^u z(x)dx \quad \kappa\alpha\iota \quad g(u) = (1+\xi_\delta)z(u)$

Ορισμός 2.3.3

Ορίζουμε τη συνάρτηση $H_\delta(u) = (1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)$

(2.3.7)

□

Τότε από τη (2.2.16) έχουμε

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{(1+\xi_\delta)}\int_0^u \varphi(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{(1+\xi_\delta)}H_\delta(u)$$

(2.3.8)

Επειδή η g είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έπεται ότι και η $\varphi(u)$είναι μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.

Ισχύει

$$\frac{1}{(1+\xi_\delta)} = 1 - \frac{\delta}{c\rho(\delta)}$$

όπου ρ = ρ(δ) η ρίζα της εξίσωσης Lundberg

Για δ=0 έχουμε

$$\frac{1}{(1+\xi_0)} = \lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{(1+\xi_\delta)} = 1 - \lim_{\delta\to 0+}\frac{\delta}{c\rho(\delta)} = 1 - \frac{1}{c\lim\limits_{\delta\to 0}\rho'(\delta)} = 1 - \frac{1}{c\rho'(0)}$$

(2.3.9)

Παραγωγίζω ως προς δ τη σχέση (2.3.3) παίρνουμε

$$1 - c\rho'(\delta) = \lambda\rho'(\delta)\hat{f}'(\rho(\delta))$$

(2.3.10)

Για δ=0 η σχέση (2.3.10) γίνεται

$$1 - c\rho'(0) = \lambda\rho'(0)\hat{f}'(\rho(0)) = \lambda\rho'(0)\hat{f}'(0)$$

(2.3.11)

Άρα σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3.11) και (1.4.3) ισχύει

$$1 - c\rho'(0) = -\lambda E(x)\rho'(0)$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\rho'(0) = \frac{1}{c - \lambda E(x)}$$

(2.3.12)

Άρα από τις σχέσεις (2.3.9) και (2.3.14) έχουμε

$$\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{1}{c\rho'(0)} = 1 - \frac{c - \lambda E(x)}{c} = \frac{\lambda E(x)}{c} \Rightarrow \frac{1}{1+\xi_0} = \frac{1}{1+\theta} \Rightarrow \xi_0 = \theta$$

Για $\delta = 0, w(x,y) = 1$ έχουμε $\varphi(u) = \psi(u)$ και $\rho = \rho(0) = 0$

Άρα $g_0(x) = (1+\xi_0)z(x) = (1+\theta)z(x) = (1+\theta)\frac{\lambda}{c}T_0 f(x) = (1+\theta)\frac{\lambda}{c}\bar{F}(x)$

Άρα

$$g(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)} = f_e(x)$$

Και

$$H_0(u) = (1+\xi_0)\frac{\lambda}{c}T_0\gamma(u) = (1+\theta)\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \bar{F}(x)\,dx = \frac{\int_u^\infty \bar{F}(x)\,dx}{E(x)} = \bar{F}_e(u)$$

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u)$$

(2.3.13)

Ορισμός 2.3.5

Ορίζουμε συνάρτηση κατανομής $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$ μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με $\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n \bar{F}^{*n}(x)$ και $G(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N > x)$

Όπου $P(N = n) = (1-\varphi)\varphi^n$ με $N \sim G(1-\varphi)$

□

Ορισμός 2.3.6

Ορίζουμε την

$$\overline{K_\delta}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\right)\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n \bar{G}_\delta^{*n}(u)$$

Δηλαδή η συνάρτηση $\overline{K_\delta}(u)$ είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με $\overline{K_\delta}(u) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N > u)$ όπου η $N \sim G(\frac{1}{1+\xi_\delta})$ και η X έχει συνάρτηση κατανομής τη G_δ.

□

Για

$$\varphi = \frac{1}{1+\xi_\delta} \quad dG_\delta(x) = dG(x) \quad r(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$$

από την πρόταση 1.5.1 και τη σχέση (2.3.8) έχουμε

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$$

η οποία συνεπάγεται τη σχέση

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$$

(2.3.14)

Επίσης από την πρόταση 1.5.2 και τη σχέση (2.3.8) έχουμε

$$\varphi_\delta(u) = \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u) - \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(0)\overline{K}_\delta(u) - \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)H'_\delta(x)dx \Rightarrow \varphi_\delta(u) = \frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(u) - \frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(0)\overline{K}_\delta(u) - \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)H'_\delta(x)dx$$

2.4.Συνάρτηση κατανομής πλεονάσματος-συνάρτηση κατανομής ελλείμματος

Ισχύει $\varphi_\delta(u) := \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}w\big(U(T-), |U(T)|I_{(T<\infty)}\big|U(0)=u\big)\right), u \geq 0$

Ορισμός 2.4.1

Έστω $F(x,y|u)$ η πιθανότητα ότι εμφανίζεται χρεοκοπία, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία είναι x και το έλλειμμα αμέσως μετά τη χρεοκοπία είναι y.

$$F(x,y|u) = P[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, I(T<\infty)|U(0)=u] \quad (2.4.1)$$

□

Για $\delta = 0$ $w(x_1,x_2) = I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)$ η $\varphi_\delta(u)$ γίνεται

$$\varphi_0(u) = E[I(x_1 \leq x)I(x_2 \leq y)I(T<\infty)|U(0)=u] = P[U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, I(T<\infty)|U(0)=u] = F(x,y|u)$$

Ορισμός 2.4.2

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F_1(x|u) = P[U(T-) \leq x, I(T<\infty)|U(0)=u]$$

ως συνάρτηση κατανομής πλεονάσματος *(2.4.2)*

$$F_2(y|u) = P[|U(T)| \leq y, I(T<\infty)|U(0)=u]$$

ως συνάρτηση κατανομής ελλείμματος *(2.4.3)*

□

- Για $\delta = 0, w(x_1,x_2) = I(x_1 \le x)$ ισχύει
  $\varphi_0(u) = E[I(U(T-) \le x)I(T < \infty)|U(0) = u] = F_1(x|u)$
- Για $\delta = 0, w(x_1,x_2) = I(x_2 \le y)$ισχύει
  $\varphi_0(u) = E[I(|U(T)| \le y)I(T < \infty)|U(0) = u] = F_2(y|u)$

Ισχύει $F_1(x|u) = \lim_{y\to\infty} F(x,y|u)$ και $F_2(y|u) = \lim_{x\to\infty} F(x,y|u)$

Ορισμός 2.4.3

Ορίζουμε ως $\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \le y)I(T < \infty|U(0) = u]$

(2.4.4)

την προεξοφλημένη τιμή της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος αμέσως μετά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Συνήθως συμβολίζεται με $G(u,y) = F_2(y|u)$ (severity at ruin)

□

Από τη σχέση (2.3.8) για $\delta = 0$ έχουμε

$$G(u,y) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u G(u-x,y)g_0(x)dx + \frac{1}{1+\theta}H_0(u)$$

(2.4.5)

Ισχύει

$$g_\delta(x) = \frac{T_\rho f(x)}{\widehat{\bar{F}(\rho)}}$$

η οποία συνεπάγεται για $\delta = 0$

$$g_0(x) = \frac{T_0 f(x)}{\widehat{\bar{F}(0)}} = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)} = f_e(x)$$

(2.4.6)

και

$$H_\delta(u) = \frac{T_\rho \gamma(u)}{\widehat{\bar{F}(\rho)}}$$

η οποία συνεπάγεται για $\delta = 0$

$$H_0(u) = \frac{T_0\gamma(u)}{\bar{F}(0)} = \frac{\int_u^\infty \gamma(x)dx}{E(x)}$$

(2.4.7)

Όμως

$$\int_u^\infty \gamma(x)dx = \int_u^\infty \int_x^\infty w(x,t-x)f(t)dtdx$$

Όμως

$$w(x,t-x) = \begin{cases} 1, \gamma\iota\alpha\ t-x \leq y \Rightarrow t \leq x+y \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ,\alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Άρα

$$\int_u^\infty \gamma(x)dx = \int_u^\infty \int_x^{x+y} f(t)dtdx = \int_u^\infty [\bar{F}(x) - \bar{F}(x+y)]\,dx$$

(2.4.8)

Επομένως από τις σχέσεις (2.4.7) και (2.4.8) έχουμε ότι

$$H_0(u) = \frac{\int_u^\infty [\bar{F}(x) - \bar{F}(x+y)]dx}{E(x)} = \bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(u+y)$$

(2.4.9)

Άρα η σχέση (2.4.5) σύμφωνα με τις σχέσεις (2.4.6) και (2.4.9) έχουμε

$$G(u,y) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u G(u-x,y)f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}[\bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(u+y)]$$

(2.4.10)

Ισχύει $\psi(u) = \lim_{y\to\infty} G(u,y)$

Άρα για $\boldsymbol{y} \to \infty$ έχουμε

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u)$$

(2.4.11)

Ορισμός 2.4.4.

Ορίζουμε την πιθανότητα εμφάνισης χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο 0 και το έλλειμμα αμέσως μετά τη χρεοκοπία είναι το πολύ y, ή αλλιώς το επίπεδο πτώσης κάτω από το 0.

Για u=0 από τη σχέση (2.4.10) έχουμε

$$G(0,y)=\frac{1}{1+\theta}[\bar{F}_e(0)-\bar{F}_e(y)]=\frac{1}{1+\theta}[1-\bar{F}_e(y)]=\frac{1}{1+\theta}F_e(y)=\psi(0)F_e(y) \qquad (2.4.12)$$

□

Άρα $g(0,y)=\frac{\partial}{\partial y}G(0,y)=\psi(0)f_e(y)$

Ορισμός 2.4.5

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\bar{G}(u,y)=P[T<\infty,|U(T)|>y|U(0)=u]=\psi(u)-G(u,y) \qquad (2.4.13)$$

ως τη δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής του ελλείμματος.

□

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.4.11) και (2.4.10) η σχέση (2.4.13) γίνεται

$$\bar{G}(u,y)=\left[\frac{1}{1+\theta}\int_0^u\psi(u-x)f_e(x)dx+\frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u)\right]-\left[\frac{1}{1+\theta}\int_0^u G(u-x,y)f_e(x)dx+\frac{1}{1+\theta}[\bar{F}_e(u)-\bar{F}_e(u+y)]\right]$$

Άρα

$$\bar{G}(u,y)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u\bar{G}(u-x,y)f_e(x)dx+\frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u+y) \qquad (2.4.14)$$

Η παραπάνω είναι μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση.

Όπως είναι γνωστό από την πρόταση 1.5.1. η πρώτη μορφή λύσης για μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση είναι η ακόλουθη

$$m(u) = \frac{1}{1-\varphi}\int_0^u r(u-x)dG(x) + r(u) \; \kappa\alpha\iota \; G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n F^{*n}(x)$$

Άρα για

$$\varphi = \frac{1}{1+\theta} \quad \kappa\alpha\iota \; r(u) = \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u+y)$$

Έχουμε ότι

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n F_e^{*n}(x) = \psi(\chi)$$

Άρα

$$G(x) = 1 - \psi(\chi)$$

από την οποία παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$dG(x) = -\psi'(\chi)dx$$

Άρα λύση της (2.4.14) είναι η ακόλουθη

$$\bar{G}(u,y) = \frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u-x+y)\{-\psi'(x)dx\} + \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u+y)$$

Όπως είναι γνωστό

$$G(u,y) = \psi(u) - \bar{G}(u,y)$$

η οποία συνεπάγεται

$$G(u,y) = \psi(u) + \frac{1}{\theta}\int_0^u \bar{F}_e(u-x+y)\{\psi'(x)dx\} - \frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u+y)$$

(2.4.15)

Σύμφωνα με την πρόταση 1.5.2 η δεύτερη μορφή λύσης μιας ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι η

$$m(u) = \frac{1}{1-\varphi}r(u) - \frac{1}{1-\varphi}r(0)\bar{G}(u) - \frac{1}{1-\varphi}\int_0^u \bar{G}(u-x)r'(x)dx$$

Τότε η λύση της (2.4.14) δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\bar{G}(u,y) = \frac{1+\theta}{\theta}\frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(u+y) - \frac{1+\theta}{\theta}\frac{1}{1+\theta}\bar{F}_e(y)\psi(u)$$
$$-\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u \psi(u-x)\{-\frac{1}{1+\theta}f_e(x+y)\}dx$$

η οποία συνεπάγεται

$$\bar{G}(u,y) = \frac{\bar{F}_e(u+y) - \bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta} + \frac{1}{\theta}\int_0^u \psi(u-x)f_e(x+y)dx \tag{2.4.16}$$

Θέτουμε $x+y=t \Rightarrow dx = dt,\ 0 \le x \le u,\ y \le t \le u+y$

Άρα

$$\bar{G}(u,y) = \frac{\bar{F}_e(u+y) - \bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta} + \frac{1}{\theta}\int_y^{u+y} \psi(u+y-t)f_e(t)dt =$$

$$= \frac{\bar{F}_e(u+y) - \bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta}$$
$$+\frac{1}{\theta}\left\{\int_0^{u+y} \psi(u+y-t)f_e(t)dt - \int_0^{y} \psi(u+y-t)f_e(t)dt\right\}$$

$$= \frac{\bar{F}_e(u+y) - \bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta} + \frac{1}{\theta}\{(1+\theta)\psi(u+y) - \bar{F}_e(u+y)\}$$
$$-\frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)f_e(t)dt$$

$$\Rightarrow \bar{G}(u,y) = \frac{1+\theta}{\theta}\psi(u+y) - \frac{1}{\theta}\bar{F}_e(y)\psi(u) - \frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)f_e(t)dt \tag{2.4.17}$$

Άρα σύμφωνα με τις σχέσεις (2.4.13) και (2.4.17) έχουμε

$$G(u,y) = \psi(u) - \bar{G}(u,y)$$
$$= \psi(u) - \frac{1+\theta}{\theta}\psi(u+y) + \frac{1}{\theta}\bar{F}_e(y)\psi(u)$$
$$+\frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)f_e(t)dt$$
$$= \left\{1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right\}\psi(u) - \frac{1+\theta}{\theta}\psi(u+y) + \frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)f_e(t)dt$$

Άρα

$$G(u,y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta}[\bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y)] + \frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)f_e(t)dt \tag{2.4.18}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

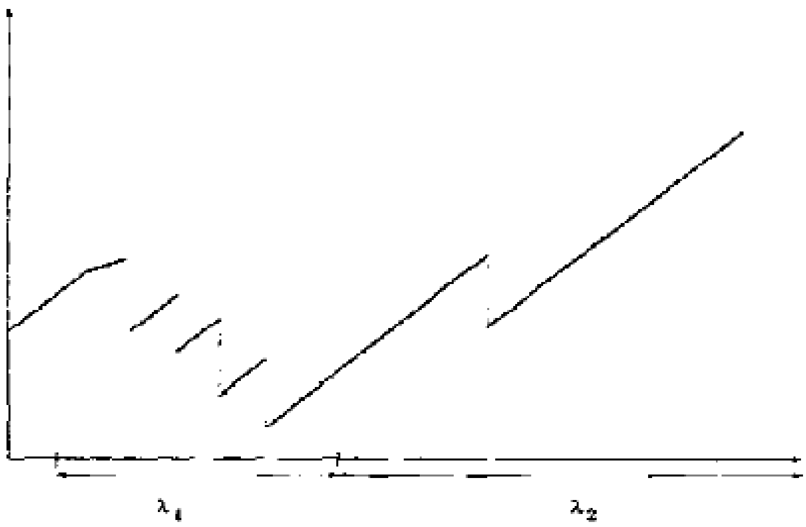
3.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου

Το κλασσικό όσο και το ανανεωτικό μοντέλο «αποτυγχάνουν» στο να περιγράψουν ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια στα οποία η «ένταση» των κινδύνων ή ακόμη και το μέγεθος των ζημιών αλλάζουν (μεταβάλλονται) στο χρονικό διάστημα (0,t).

Η λύση του παραπάνω προβλήματος δόθηκε από τον Reinhard (1984) ο οποίος εισήγαγε το Markov-modulated Poisson μοντέλο κινδύνου, όπου τόσο η «ένταση» των ζημιών όσο και τα μεγέθη των ζημιών μεταβάλλονται σύμφωνα με μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του μοντέλου είναι τα φυσικά φαινόμενα El Nino, La Nina και Kobe. Για να γίνει κατανοητό πως επιδρούν αυτά τα φυσικά φαινόμενα στην ασφάλιση και πως το Markov-modulated είναι κατάλληλο για την ερμηνεία τέτοιων φαινομένων δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα. Έστω λοιπόν ότι ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από ασφαλιστήρια συμβόλαια στη χρονική περίοδο (0,t) έναντι του κινδύνου των σεισμών. Υποθέτουμε ότι στη χρονική διάρκεια $(0,t_1)$ υπάρχει μια έντονη σεισμική δραστηριότητα όπου ο αριθμός των σεισμών περιγράφεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ_1, ενώ τη χρονική περίοδο (t_1,t) υπάρχει μια ασθενής σεισμική δραστηριότητα όπου ο αριθμός των σεισμών περιγράφεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ_2, με $\lambda_2<\lambda_1$.

Το παραπάνω είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα του Markov-modulated Poisson μοντέλου όπου η εισηγμένη μαρκοβιανή αλυσίδα επιτρέπει τη μετάβαση από την κατάσταση υψηλής σεισμικής δραστηριότητας στην κατάσταση χαμηλής σεισμικής δραστηριότητας.

Γενικότερα οι καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας μπορούν να περιγράψουν είδη ασθενειών (Asmussen 1999) ή ακόμη και διαφορετικές οικονομικό-πολιτικές συνθήκες (Ng και Yang 2006).



Σχήμα 2. Η διαδικασία πλεονάσματος στο Markov-modulated Poisson μοντέλο

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας, της κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, της κατανομής του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία ή γενικότερα η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης από πολλούς συγγραφείς. Οι κυριότερες αναφορές περιλαμβάνουν τους Reinhard (1984), Janssen (1980), Bauerle (1996), Schmidli (1997), Rolski, Schmidli, Schmidt, και Teugels (1999), Asmussen (1999), Reinhard και Snoussi (2001), Snoussi (2002), Wu και Wei (2004), Lu και Li (2005), Ng και Yang (2006), Lu και Tsai (2007), Zhang (2007), Li και Lu (2008).

Προκειμένου να ορίσουμε την διαδικασία πλεονάσματος στο μοντέλο Markov-modulated θεωρούμε ότι $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$ να είναι μια ομογενής, μεταβατική, συνεχούς χρόνου αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{m}\}$ και πίνακα τάσης $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\alpha}_{ij})_{i,j=1}^{n}$ με $\boldsymbol{\alpha}_{ii} = -\alpha_i = -\sum_{i \neq j}^{m} \boldsymbol{\alpha}_{ij}$ για $i \in \boldsymbol{E}$. Επιπλέον, θεωρούμε οτι το $\boldsymbol{1} \times \boldsymbol{m}$ διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} = (\pi_{\boldsymbol{1}}, \dots, \pi_m)$ είναι η στάσιμη κατανομή (stationary distribution) της αλυσίδας $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$,η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{\pi\Lambda} = \boldsymbol{0}$ και $\boldsymbol{\pi e} = \boldsymbol{1}$ με 0 να είναι $\boldsymbol{1} \times \boldsymbol{m}$ διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία και **e** ένα $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{1}$ διάνυσμα με όλα του τα στοιχεία ίσα με 1.

Στο μοντέλο Markov-modulated Poisson, θεωρούμε ότι όταν η αλυσίδα $\{J(t)\}_{t=0}^{\infty}$ βρίσκεται στην κατάσταση i τότε ο αριθμός των κινδύνων δίνεται από την απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N_i(t)\}_{t=0}^{\infty}$η οποία υποθέτουμε οτι είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ_i, και η κατανομή των μεγεθών των ζημιών είναι $F_i(.)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_i(.)$και πεπερασμένη μέση τιμή m_i,$i \in E$. Επιπλέον σε κάθε κατάσταση εισπράττεται ένα ασφάλιστρο μεγέθους c_i.

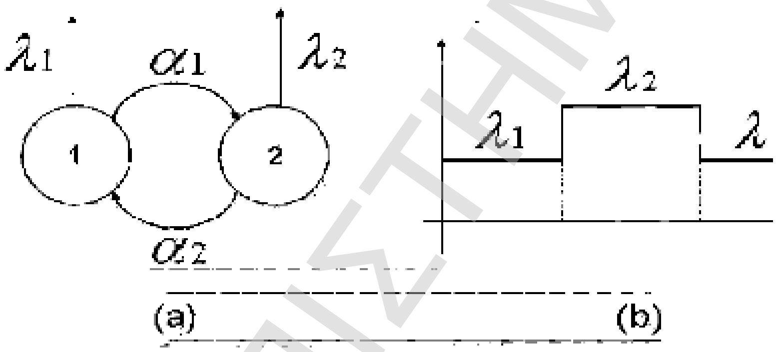
Από τις παραπάνω υποθέσεις θεωρούμε ότι σε κάθε κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να ορισθεί μια στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U_i(t), t \geq 0\}$, όμοια με τη σχέση $U(t) = u + ct - S(t)$, όπου οι σωρευτικές ζημιές είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson (λ_i, F_i).

Τότε ο συνολικός αριθμός των κινδύνων, για όλες τις καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας δίνεται από την απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$,

$$N(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dN_i(s) \tag{3.1.1}$$

Ενώ η αντίστοιχη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dU_i(s) \tag{3.1.2}$$



Σχήμα 3. (a) Markov-modulated με δυο καταστάσεις, (b) διάγραμμα της απαριθμήτριας $N(t)$

Επιπλέον ορίζουμε $T = \inf\{t \geq 0: U(t) < 0\}$ με $inf\emptyset = \infty$,

να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, ενώ προκειμένου να μην έχουμε χρεοκοπία με την πρώτη ζημιά, ο περιορισμός για την επάρκεια του ασφαλίστρου δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, αν και μόνο αν

$$c > \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i m_i$$

(3.1.3) □

Θεώρημα 3.1.1.

Θεωρούμε ότι Λ μη προσβάσιμη διαδικασία.

Τότε $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} U(t) = c - \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i m_i$

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $u = 0$

Έστω $V_i(t) = \int_0^t I_{(J(u)=i)} du$ δηλώνει το χρόνο στο διάστημα $(0, t]$ που η $\{J(t)\}$ βρίσκεται στην κατάσταση i.

Η σχέση $U(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(u)=i)} dU_i(u)$ γράφεται

$\frac{1}{t} U(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{V_i(t)}{t} \frac{1}{V_i(t)} \int_0^t I_{(J(u)=i)} dU_i(u)$

Ισχύει $\lim_{t\to\infty} \frac{V_i(t)}{t} = \pi_i$

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

$\frac{1}{V_i(t)} \int_0^t I_{(J(u)=i)} dU_i(u) \to c - \lambda_i \mu_i$ καθώς $t \to \infty$

Αλλά $\int_0^t I_{(J(u)=i)} dU_i(u)$ έχει την ίδια κατανομή με $U_i(V_i(t)$ γιατί η $\{U_i(t)\}$ έχει ανεξάρτητα και στάσιμα στοιχεία.

Αφού η Λ μη προσβάσιμη ισχύει $V_i(t) \to \infty$ καθώς $t \to \infty$

□

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι $\psi(u) \equiv 1$ όταν $\beta_i \leq \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i m_i$

Θεωρούμε $J(0) = i$

Έστω $I_0 = 0$ και $I_{n+1} = \inf\{t > I_n : J(t) = i, J(t-0) \neq i\}$ είναι τα βήματα που η $\{J(t)\}$ επιστρέφει στην κατάσταση i. Άρα η διαδικασία $\{U(I_n)\}$ είναι τυχαίος περίπατος.

Αφού $n^{-1}U(I_n) = \frac{I_n}{n}\frac{U(I_n)}{I_n}$ και $I_n \to \infty$, από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει οτι η διαδικασία $\{U(I_n)\}$ δεν έχει θετική τάση όταν

$$c \leq \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i m_i$$

Τότε συμβαίνει σίγουρα χρεοκοπία.

Άρα για να μην συμβεί χρεοκοπία θα πρέπει

$$c > \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i m_i$$

□

3.2. Η συνάρτηση των Gerber–Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson.

Επειδή το μοντέλο Markov-modulated Poisson είναι ένα μη ομογενές μοντέλο και επομένως η συνάρτηση των Gerber–Shiu ορίζεται για κάθε μία από τις καταστάσεις της μαρκοβιανής αλυσίδας, όπως δίνεται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.2.1.

Έστω $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}_i(\cdot\, | J(0) = i)$ και $\mathbb{E}_i$ η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_i$.

Τότε για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$$\varphi_i(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)| I_{(T<\infty)} | U(0) = u), i \in E, u \geq 0 \tag{3.2.1}$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber–Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης i και του αρχικού αποθεματικού u, με δ ένταση ανατοκισμού, $w(x, y)$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I_{(.)}$ η δείκτρια συνάρτηση.

□

Διαισθητικά η συνάρτηση των Gerber–Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως η προεξοφλημένη ποινή η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της $\varphi_i(u)$ και για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου.

Ειδικές περιπτώσεις

- για δ=0, $w(x,y) = 1$, παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,
  $\mathbb{E}_i(I_{(T<\infty)}|U(0) = u)$,
- για δ>0, $w(x,y) = 1$, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας
  $$\varphi_{Ti}(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T} I_{(T<\infty)}|U(0) = u)$$
- για δ>0, $w(x,y) = I_{(x=x_1)} I_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,
  $f_i(x_1, x_2|u) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta T} I_{(U(T-)=x_1, |U(T)|=x_2)} I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)$,
- για δ>0, $w(x,y) = I_{(x=x_1)}$,παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $U(T-)$,
  $h_i(x_1|u) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta T} I_{(U(T-)=x_1)} I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)$,
- για δ>0, $w(x,y) = I_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$,
  $g_i(x_2|u) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta T} I_{(|U(T)|=x_2)} I_{(T<\infty)}\middle|U(0) = u\right)$
- για δ>0, $w(x,y) = x_1^k$, $(w(x,y) = x_2^k)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία),
  $\mathbb{E}i(e^{-\delta T}|U(T)|^k I_{(T<\infty)}|U(0) = u)$ $\mathbb{E}i(e^{-\delta T} U(T-)^k I_{(T<\infty)}|U(0) = u)$

Τότε, η «συνολική» Gerber–Shiu συνάρτηση για το μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \varphi_i(u), u \geq 0 \tag{3.2.2}$$

Η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των φ_i αντικατοπτρίζεται στα εξής βήματα: αρχικά θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις φ_i ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace μπορούμε να προσδιορίσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση (δηλαδή την εξίσωση Lundberg για το μοντέλο Markov-modulated Poisson), ενώ με βάση τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορούμε να γράψουμε το μετασχηματισμό των φ_i σε μια κατάλληλη μορφή ώστε να είναι δυνατή η αντιστροφή του όταν οι f_i ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

3.3. Ολοκληρό-διαφορικές εξισώσεις και μετασχηματισμοί Laplace

Θεώρημα 3.3.1. *Για* $u \geq 0, \delta \geq 0$ *και* $i \in E$ *οι συναρτήσεις* $\varphi_i(u)$ *ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων*

$$c_i\varphi'_i(u) - (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\varphi_i(u) + \lambda_i\left(\int_0^u \varphi_i(u-x)f_i(x)dx + w_i(u)\right) + \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}\varphi_k(u) = 0 \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη.

Παρατήρηση. *Για* $p_{ik} \to 0$ *η εξίσωση γίνεται η ολοκληρό-διαφορική εξίσωση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.*

Θεωρούμε το διάστημα dt.

Με βάση την ιδιότητα της μαρκοβιανής διαδικασίας έχουμε τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- καμία αλλαγή κατάστασης και κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- αλλαγή κατάστασης αλλά κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- καμία αλλαγή κατάστασης αλλά υπάρχει ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- όλα τα παραπάνω με συνολική πιθανότητα 0(dt)

$$\begin{aligned}\varphi_i(u) = {} & (1-\alpha_i dt - \lambda_i dt)e^{-\delta dt}\varphi_i(u+c_i dt) \\ & + \lambda_i dt e^{-\delta dt}\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_i(u+c_i dt - x)dF_i(x) \right. \\ & \left. + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx \right] + \alpha_i dt e^{-\delta dt}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_k(u+c_k dt) \\ & + 0(dt)\end{aligned}$$

Για $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + 0(dt)$ έχουμε

$$\varphi_i(u) = (1 - \alpha_i dt - \lambda_i dt)\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\varphi_i(u + c_i dt) + \lambda_i dt\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_i(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u) f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_k(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\varphi_i(u) = (1 - \delta dt + 0(dt) - \alpha_i dt - \lambda_i dt)\varphi_i(u + c_i dt) + \lambda_i dt\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_i(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u) f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_k(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\varphi_i(u) = [1 - (\delta + \alpha_i + \lambda_i)dt + 0(dt)]\varphi_i(u + c_i dt) + \lambda_i dt\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_i(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u) f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_k(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi_i(u + c_i dt) - \varphi_i(u)}{dt} = \left[\frac{(\delta + \alpha_i + \lambda_i)dt}{dt} + \frac{0(dt)}{dt}\right]\varphi_i(u + c_i dt) - \frac{\lambda_i dt}{dt}\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_i(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u) f_i(x)dx\right] - \frac{\alpha_i dt}{dt}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_k(u + c_k dt) - \frac{0(dt)}{dt}$$

Παίρνοντας όρια για $dt \to 0$ και στα δύο μέλη παίρνουμε τη σχέση

$$c_i\varphi'_i(u) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\varphi_i(u) - \lambda_i\left(\int_0^u \varphi_i(u-x) f_i(x)dx + w_i(u)\right) - \alpha_i \sum_{k=1, k\neq i}^{m} p_{ik}\varphi_k(u)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δυο μέλη έχουμε

$$c_i[s\hat{\varphi}_i(s) - \varphi_i(0)]$$
$$= (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\hat{\varphi}_i(s) - \lambda_i\hat{\varphi}_i(s)\hat{f}_i(s) - \lambda_i\hat{w}_i(s) - \alpha_i \sum_{k=1, k\neq i}^{m} p_{ik}\hat{\varphi}_k(s)$$

η οποία συνεπάγεται

$$[c_i s - \lambda_i\left(1 - \hat{f}_i(s)\right) - (\alpha_i + \delta)]\hat{\varphi}_i(s) + \alpha_i \sum_{\kappa=1}^{m} p_{ik}\hat{\varphi}_\kappa(s) = c_i\varphi_i(0) - \lambda_i\hat{w}_i(s)$$

(3.3.2)

Ορισμός 3.3.1.

Τώρα προκειμένου να αναλύσουμε και τις m-συναρτήσεις μαζί, ορίζουμε τους πίνακες

$$A(s) = diag\left(S_1(s), \ldots, S_m(s)\right) + A$$

$$\hat{\varphi}(s) = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s))^T$$

$$\hat{\varphi}(0) = \left(c_1\varphi_1(0), \ldots, c_m\varphi_m(0)\right)^T$$

$$\hat{w}(s) = \left(\lambda_1\hat{w}_1(s), \ldots, \lambda_m\hat{w}_m(s)\right)^T$$

Με $S_i(s) = c_i s - \delta - \lambda_i\left(1 - \hat{f}_i(s)\right), i \in E$ και T να είναι το σύμβολο του ανάστροφου πίνακα.

□

Τότε με βάση τους παραπάνω πίνακες, η εξίσωση (3.3.2) γράφεται ως

$$A(s)\hat{\varphi}(s) = \hat{\varphi}(0) - \hat{w}(s)$$

(3.3.3)

Από όπου εύκολα παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace, $\hat{\varphi}(s)$ όπως δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.2

Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace, $\hat{\varphi}(s)$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\mathbf{A}^*(s)\varphi(0) - \mathbf{A}^*(s)\hat{w}(s)}{\det\mathbf{A}(s)}$$

(3.3.4)

Όπου $\mathbf{A}^*(s)$ *είναι ο ad joint πίνακας του* $A(s)$ □

Ορισμός 3.3.4

Επιπλέον ορίζουμε $\det\mathbf{A}(s) = 0$ *(3.3.5)* να είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του μοντέλου μας. Η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο τόσο στον υπολογισμό των αρχικών τιμών $\varphi(0)$, όσο και στο να εκφράσουμε την σχέση (3.3.4) σε μια κατάλληλη μορφή προκειμένου να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Laplace. Για τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det\mathbf{A}(s)$ χρειαζόμαστε αρχικά τον παρακάτω ορισμό και τα δυο θεωρήματα που ακολουθούν.

Ορισμός 3.3.5 Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m}$ λέγεται ότι *κυριαρχεί διαγωνίως* (diagonally dominant) αν και μόνο αν

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}|, \forall i.$$

□

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3.(Levy - Desplanques theorem). *Αν ο τετραγωνικός πίνακας* $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m}$ *κυριαρχεί διαγωνίως, τότε ο* A *είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Horn and Johnson 1985 6.1.10

□

Θεώρημα 3.3.4 (Cauchy's argument principle). *Έστω f(x) μια αναλυτική και ολόμορφη συνάρτηση πάνω ή εντός κάποιου κύκλου C στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε αν f(x) ≠ 0, ο αριθμός των ριζών N, της συνάρτησης f(x) μέσα στον κύκλο* C^+ *, που είναι το εσωτερικό τμήμα του C, δίνεται από τη σχέση,*

$$N = \frac{1}{2\pi_i} \int_{C^+} \frac{\frac{d}{ds} f(s)}{f(s)} ds$$

Απόδειξη. Reade 2002 σελ.76

□

Λήμμα 3.3.1 *Για* $\Re(s) \geq 0$ *και* $\delta > 0$, *η χαρακτηριστική εξίσωση* detA(s)=0, *έχει ακριβώς* m *ρίζες*, $r_1,\ldots,r_m$ *με* $\Re(r_i) > 0, i \in E$.

Απόδειξη.

Έστω C_δ ο κύκλος με κέντρο $s_0 = (M_\delta, 0)$ και ακτίνα M_δ όπου

$M_\delta = max_i(\beta_i + \delta - \lambda_{ii})/c_i$

Έστω $A_\delta(s) = P(s) + u(B(s) + \Lambda)$

Τότε $\bar{C}_\delta$ είναι η περιοχή $\{s: R_e(s) \geq 0, |s - M_\delta| \geq M_\delta$

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι για $0 \leq u \leq 1$ $|A_\delta(s,u)| \neq 0 \; για \; s \in \bar{C}_\delta$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $A_\delta(s,u)$ κυριαρχεί διαγωνίως για $0 \leq u \leq 1$

Για $s \in \bar{C}_\delta$

$$\begin{aligned}
&\left|cs + u(\lambda_i \hat{f}_i(s) + \lambda_{ii}) - (\lambda_i + \delta)\right| \\
&\qquad \geq \left|cs - (\lambda_i + \delta - u\lambda_{ii}) - u\lambda_i \hat{f}_i(s)\right. \\
&\qquad \geq |cs - cs_0| - |cs_0 - (\lambda_i + \delta - u\lambda_{ii})| - \lambda_i \\
&\qquad \geq cM_\delta - |M_\delta - (\lambda_i + \delta - u\lambda_{ii})| - \lambda_i = \delta - u\lambda_{ii} > -u\lambda_{ii} \\
&\qquad = -u \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε $|A_\delta(s,u)| \neq 0 \; για \; s \in \bar{C}_\delta$

Έστω f(u) ο αριθμός των ριζών της $|A_\delta(s,u)|$ στο C_δ^+, το εσωτερικό του C_δ

Τότε $f(u) = \frac{1}{2\pi_i} \int_{C_\delta} \frac{\frac{d}{ds}|A_\delta(s,u)|}{|A_\delta(s,u)|} ds$

Η $f(u)$ είναι συνεχής στο [0,1] και σταθερή.

$f(0) = n$, επειδή $|A_\delta(s,0)| = |(cs - (\lambda_i + \delta)_{diag}| = 0$ για $s = \frac{\lambda_i + \delta}{c}, 1 \leq i \leq n$

Έτσι $f(1) = n$.

Εξάλλου για u=1, ισχύει $|A_\delta(s,u)| \neq 0 \; για \; s \in \bar{C}_\delta$

□

Για διακριτούς $\boldsymbol{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m}$ αφού οι ποσότητες $\hat{\varphi}_{ij}(s)$ είναι πεπερασμένες για $\Re(s) \geq 0$ τότε

$$A^*(\rho_i)\varphi(0) = A^*(\rho_i)\hat{w}(\rho_i) \text{ για } i = 1,2, \ldots, m.$$

Έτσι $\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2]\boldsymbol{\varphi}(0) = (\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2]$

Όπου $(A^*\hat{w})[\rho_1,\rho_2]$ η διαιρετή διαφορά του γινομένου των πινάκων $A^*(s)$ και $\hat{w}(s)$ όσον αφορά τους αριθμούς ρ_1 και ρ_2 η οποία δίνεται από τη σχέση

$(\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2] = \boldsymbol{A}^*(\rho_1)\hat{\boldsymbol{w}}[\rho_1,\rho_2] + \boldsymbol{A}^*(\rho_1,\rho_2)\hat{\boldsymbol{w}}[\rho_2]$ και επαγωγικά

$$\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_i]\boldsymbol{\varphi}(0) = (\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_i] \quad i = 2,3,\ldots,m$$

Όπου ο πίνακας $(\boldsymbol{A}^*\widehat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m]$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$(\boldsymbol{A}^*\widehat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m] = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_i]\hat{\boldsymbol{w}}[\rho_i,\rho_{i+1},\ldots,\rho_m]$$

Έτσι $\boldsymbol{\varphi}(0) = \{\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m]\}^{-1}(\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m]$

(3.3.6)

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι στο Markov-modulated Poisson μοντέλο δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $\varphi(u)$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Συνεπώς η εύρεση των συναρτήσεων Gerber-Shiu γίνεται με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, $\hat{\varphi}(s)$

Εφαρμόζοντας τις διαιρετές διαφορές στον αριθμητή της (3.3.4)

ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}{\det|A(s)|}(\boldsymbol{A}^*(s)[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m,s]\boldsymbol{\varphi}(0) - (\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})(s)[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m,s]$$

(3.3.7)

Όπου

$$(\boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{w}})(s)[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m,s] = \boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m,s]\hat{w}(s) + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_i]\hat{\boldsymbol{w}}(\rho_i,\ldots,\rho_m,s)$$

Έτσι η $\hat{\varphi}(s)$ ξαναγράφεται

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}{\det|A(s)|}[A^*(s)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,s](\varphi(0)-\hat{w}(s)) - \sum_{i=1}^{m} A^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]\hat{w}(\rho_i,\dots,\rho_m,s)]$$

(3.3.8)

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γίνει σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Έτσι θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων $f_i(x)$ ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να εκφρασθεί ως πηλίκο πολυωνύμων. Δηλαδή

$$\hat{f}_i(s) = \frac{p_{k_i-1}^{(i)}(s)}{q_{k_i}^{(i)}(s)}$$

(3.3.9)

Όπου $q_{k_i}^{(i)}$ είναι ένα πολυώνυμο κ_i βαθμού ενώ το $p_{k_i-1}^{(i)}$ είναι ένα πολυώνυμο k_{i-1} ή μικρότερου για τα οποία ισχύει ότι $p_{k_i-1}^{(i)}(0) = q_{k_i}^{(i)}(0)$

Επιπλέον η εξίσωση $q_{k_i}^{(i)}(s) = 0$ έχει ρίζες με αρνητικά μόνο πραγματικά μέρη.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή της (3.3.8) με $\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$ και έχουμε

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}{\det|A(s)|\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)}[A^*(s)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)(\varphi(0)-\hat{w}(s)) - \prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)\sum_{i=1}^{m} A^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]\hat{w}(\rho_i,\dots,\rho_m,s)]$$

(3.3.10)

Ο παρανομαστής $D(s) = \det|A(s)|\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού

$m + \sum_{i=1}^{m} k_i$, επομένως η εξίσωση $D(s) = 0$ έχει ακριβώς $m + \sum_{i=1}^{m} k_i$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο.

Από το γεγονός ότι η εξίσωση $\det|A(s)| = 0$ έχει ακριβώς m ρίζες $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m$ με θετικά πραγματικά μέρη μπορούμε να γράψουμε το $D(s) = \prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\prod_{i=1}^{k_m}(s+R_i)$

Όπου $K_m = \sum_{i=1}^{m} k_i$ και όλα τα R_i έχουν θετικά πραγματικά μέρη σύμφωνα με τον ορισμό της οικογένειας κλασματικών κατανομών.

Επομένως η εξίσωση (3.3.10) γράφεται

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k_m}(s+R_i)}\left[\boldsymbol{A}^*(s)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)\left(\boldsymbol{\varphi}(0)-\hat{\boldsymbol{w}}(s)\right)\right.$$
$$\left. - \prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]\hat{\boldsymbol{w}}(\rho_i,\dots,\rho_m,s)\right] \tag{3.3.11}$$

Τώρα παρατηρώντας τα στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{A}^*(s)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου από K_m και ότι τα στοιχεία του πίνακα $A^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]$ είναι σταθεροί αριθμοί χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων έχουμε

$$\frac{\boldsymbol{A}^*(s)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)}{\prod_{l=1}^{k_m}(s+R_l)} = \sum_{l=1}^{k_m}\frac{\boldsymbol{M}^{(l)}}{s+R_l} \tag{3.3.12}$$

και

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)}{\prod_{i=1}^{k_m}(s+R_i)} = 1+\sum_{l=1}^{k_m}\frac{n_l}{s+R_l} \tag{3.3.13}$$

Όπου οι όροι $\boldsymbol{M}^{(l)} = (m_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ για $l = 1,2,\dots,K_m$ είναι συντελεστές πίνακες με

$$\boldsymbol{M}^{(l)} = \frac{\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m,-R_l]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(-R_l)}{\prod_{v=1,v\neq l}^{k_m}(R_v-R_l)}$$

Ενώ ο συντελεστής n_l δίνεται από τον τύπο

$$n_l = \frac{\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(-R_l)}{\prod_{v=1,v\neq l}^{k_m}(R_v-R_l)}$$

Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace γράφεται

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \sum_{l=1}^{K_m}\frac{1}{s+R_l}\{\boldsymbol{M}^{(l)}[\boldsymbol{\varphi}(0)-\hat{\boldsymbol{w}}(s)] - n_l\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]\,w[\rho_i,\dots,\rho_m,s]\} - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i]\,w[\rho_i,\dots,\rho_m,s]$$

.

(3.3.14)

Ορισμός 3.3.6

Ορίζουμε τον τελεστή T_r για ένα πίνακα $\boldsymbol{B}(y)$ ως εξής

$$T_r \boldsymbol{B}(y) = \int_y^{\infty} e^{-r(x-y)} \boldsymbol{B}(x) dx \ , r \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Εδώ ο $\boldsymbol{B}(y)$ είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις του y.

□

Ισχύει

$$T_{r_1} T_{r_2} \boldsymbol{B}(y) = T_{r_2} T_{r_1} \boldsymbol{B}(y) = \frac{T_{r_1} \boldsymbol{B}(y) - T_{r_2} \boldsymbol{B}(y)}{r_2 - r_1} \quad r_1 \neq r_2 \in \ \mathbb{C}, y \geq 0$$

Ισχύει η σχέση μεταξύ του τελεστή και της διαιρετής διαφοράς

$$\left(\prod_{i=1}^{m} T_{r_i} \right) \boldsymbol{B}(0) = (-1)^{m-1} \widehat{\boldsymbol{B}}[r_1, r_2, \ldots\ldots, r_m]$$

Επίσης ισχύει $T_s T_r \boldsymbol{B}(0) = \int_0^{\infty} e^{-sx} [T_r \boldsymbol{B}(x)] dx$ από το οποίο φαίνεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $T_s T_r \boldsymbol{B}(0)$ είναι ο $T_r \boldsymbol{B}(x)$

Ισχύει $\mathcal{L}^{-1}\left[T_s \left(\prod_{i=1}^{m} T_{r_i}\right) \boldsymbol{B}(0)\right] = \left(\prod_{i=1}^{m} T_{r_i}\right) \boldsymbol{B}(x)$

Επομένως παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} A^*[\rho_1, \ldots\ldots, \rho_i] \left(\prod_{k=1}^{m} T_{r_k} \right) w(u) + \sum_{i=1}^{K_m} \{ e^{-R_i u} \boldsymbol{M}^{(i)} \varphi(0) - e^{-R_i u}$$
$$\star \left[w(u) - n_i \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} A^*[\rho_1, \ldots\ldots, \rho_i] \left(\prod_{k=1}^{m} T_{r_k} \right) \right] \}$$

(3.3.15)

Όπου $\star$ είναι ο τελεστής συνέλιξης.

3.4. Η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας (Severity at ruin) στο Markov Modulated Poisson Risk Model

Ορισμός 3.4.1

Ορίζουμε την κατανομή του ελλείμματος κατά το χρόνο χρεοκοπίας στο Markov Modulated Poisson Risk Model ως

$$\Psi_i(y;u) = P\{T < \infty, U(T) < -y | U(0) = u, I(0) = i\}, i \in J,\ u, y \geq 0$$

(3.4.1)

που αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία και τη στιγμή της χρεοκοπίας το πλεόνασμα παίρνει τιμή μικρότερη από $-y$, ή αλλιώς το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το πολύ y, δοθέντος αρχικού αποθέματος u και αρχικού περιβάλλοντος $i \in J$.

□

Η συνολική κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία δίνεται από τον τύπο

$$\Psi(y;u) = \sum_{k=1}^{m} \pi_i \Psi_i(y;u),\ \ u \geq 0$$

(3.4.2)

Θέτοντας $y = 0$ στη σχέση (3.4.1), έχουμε

$$\Psi_i(u) = \Psi(0;u) = P\{T < \infty | U(0) = u, I(0) = i\}, \qquad i \in J, u \geq 0$$

τη συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας, δοθέντος αρχικής κατάστασης i και αρχικού αποθέματος u.

Από τη σχέση

$$G_i(y;u) = P\{T < \infty, U(T) \geq -y | U(0) = u, I(0) = i\} = \Psi_i(u) - \Psi_i(y;u)$$

(3.4.3)

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $G_i(y;u)$, και τις αντίστοιχες πυκνότητες, ως ακολούθως

$$g_i(y;u) = \frac{\partial}{\partial y} G_i(y;u),\ \ i \in J, u, y \geq 0$$

(3.4.4)

Οι πιθανότητες $\Psi_i(y;u)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

$$c_i \frac{\partial}{\partial u}\Psi_i(y;u) = (\lambda_i + \alpha_i + \delta)\Psi_i(y;u) - \lambda_i \left[\int_0^u \Psi_i(y;u-x)dF_i(x) + \bar{F}_i(u+y)\right]$$
$$- \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\Psi_k(y;u), \qquad i \in J, u, y \geq 0$$

(3.4.5)

Η οποία έχει μοναδική ρίζα τέτοια ώστε $\Psi_i(y;\infty) = 0$, *για* $i \in J, y \in \mathbb{R}^+$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.4.5) από 0 έως t, ως προς u, παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$c_i\Psi_i(y;t) = c_i\Psi_i(y;0)$$
$$+ \lambda_i \int_0^t \Psi_i(y;t-u)\bar{F}_i(u)du - \lambda_i \int_0^t \bar{F}_i(u+y)du$$
$$+ \alpha_i \int_0^t \left[\Psi_i(y;u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\Psi_k(y;u)\right]du, \quad i \in J, t, y \geq 0$$

(3.4.6)

Όταν το t τείνει στο άπειρο η σχέση (3.4.6), γίνεται

$$\Psi_i(y;0) = \frac{\lambda_i}{c_i}\int_y^\infty \bar{F}_i(u)du - \frac{\alpha_i}{c_i}\int_0^\infty [\Psi_i(y;u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\Psi_k(y;u)]du$$

(3.4.7)

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δυο μέλη της σχέσης (3.4.6), παίρνουμε

$$c_i\widehat{\Psi}_i(s;y) = c_i\frac{\Psi_i(y;0)}{s} + \lambda_i\widehat{\Psi}_i(s;y)\left[\frac{1-\hat{f}_i(s)}{s}\right]$$
$$- \lambda_i \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t \bar{F}_i(u+y)\,du\right]dt + \alpha_i[\frac{\widehat{\Psi}_i(s;y)}{s}$$
$$- \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\frac{\widehat{\Psi}_k(s;y)}{s}]du]$$

(3.4.8)

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r και τη σχέση (1.4.9) έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t \bar{F}_i(u+y)\,du\right]dt = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\bar{F}_i(t+y)dt$$
$$= \frac{1}{s}\left[\bar{F}_i(t+y)\frac{e^{-st}}{(-s)}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} f_i(t+y)dt\right]$$
$$= \frac{1}{s}\left[\frac{T_0 f_i(y) - T_s f_i(y)}{s}\right] = \frac{T_s T_0 f_i(y)}{s}$$

Τότε η σχέση (3.4.8) γράφεται

$$\left[s - \frac{\lambda_i + \alpha_i}{c_i} + \frac{\lambda_i}{c_i}\hat{f}_i(s)\right]\hat{\Psi}_i(s;y) + \frac{\alpha_i}{c_i}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\hat{\Psi}_k(s;y) = \Psi_i(y;0) - \frac{\lambda_i}{c_i}T_s T_0 f_i(y) \qquad (3.4.9)$$

Ή σε μορφή πινάκων

$$A(s)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(s;y) = \boldsymbol{B}(s;y) \quad ,s \in \mathbb{C} \qquad (3.4.10)$$

όπου

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1[1-\hat{f}_1(s)]+\alpha_1}{c_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & s - \frac{\lambda_m[1-\hat{f}_m(s)]+\alpha_m}{c_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{c_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \frac{\alpha_m}{c_m} \end{pmatrix} P \qquad (3.4.11)$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{B}(s;y)$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{B}(s;y) = \left(\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_s T_0 f_1(y), \ldots, \Psi_m(y;0) - \frac{\lambda_m}{c_m}T_s T_0 f_m(y)\right)$$

Και

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(s;y) = (\hat{\Psi}_1(s;y), \ldots, \hat{\Psi}_m(s;y))$$

Τότε το διάνυσμα των μετασχηματισμών Laplace $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}(s;y)$ δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{\Psi}(s;y) = [A(s)]^{-1}\boldsymbol{B}(s;y) \quad ,s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Και η εξίσωση

$$|A(s)| = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

(3.4.12)

Καλείται χαρακτηριστική εξίσωση της σχέσης (3.4.10).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ MARKOV-MODULATED POISSON **ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ Μ**=2 **ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ**

4.1. **Η πιθανότητα χρεοκοπίας**

Εξετάζουμε το μοντέλο 2 καταστάσεων που μπορεί να αναφέρεται σε καταστάσεις κανονικός μη-κανονικός και υψηλή περίοδος χαμηλή περίοδος.

Η μοναδική στάσιμη κατανομή π_i δίνεται από τον τύπο:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2)$$

με

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_i n_i}{\alpha_i}}{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}}$$

Και η αύξηση ασφαλίστρου από τον τύπο:

$$d = \frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \mu_1\right) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{c_2}{\lambda_2} - \mu_2\right)}{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}}$$

(4.1.1)

Στο μοντέλο 2 καταστάσεων ο πίνακας γράφεται ως εξής:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1(1-\hat{f}_1(s)) + a_1}{c_1} & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2(1-\hat{f}_2(s)) + a_2}{c_2} \end{pmatrix}$$

(4.1.2)

Πρόταση 4.1.

Η χαρακτηριστική εξίσωση (3.4.12) έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα, έστω ρ στο δεξί μισό του μιγαδικού επιπέδου.

□

Και η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$Q(s) := \left(s - \frac{\lambda_1(1-\hat{f}_1(s)) + a_1}{c_1}\right)\left(s - \frac{\lambda_2(1-\hat{f}_2(s)) + a_2}{c_2}\right) = \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}$$

(4.1.3)

Τώρα η εξίσωση $\boldsymbol{A}(s)\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s) = \boldsymbol{\Phi}(0)$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1(1-\hat{f}_1(s) + a_1}{c_1} & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2(1-\hat{f}_2(s) + a_2}{c_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_1(s) \\ \widehat{\Phi}_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(0) \\ \Phi_2(0) \end{pmatrix}$$

(4.1.4)

Από την οποία παίρνουμε

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)\left[s - \frac{\lambda_2(1-\hat{f}_2(s)+a_2}{c_2}\right] - \Phi_2(0)\frac{a_1}{c_1}}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}}$$

(4.1.5)

Και

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)\left[s - \frac{\lambda_1(1-\hat{f}_1(s)+a_1}{c_1}\right] - \Phi_1(0)\frac{a_2}{c_2}}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}}$$

(4.1.6)

Αφού οι ποσότητες $\hat{\Phi}_1(s)$ *και* $\hat{\Phi}_2(s)$ είναι πεπερασμένες για κάθε s με $\Re(s) \geq 0$ και Q(ρ)= $\frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}$ έχουμε ότι οι αριθμητές στις σχέσεις (4.1.5) και (4.1.6) είναι ίσοι με 0 όταν s=ρ, δηλαδή

$$\Phi_1(0)\left[\rho - \frac{\lambda_2(1-\hat{f}_2(\rho)+a_2}{c_2}\right] = \Phi_2(0)\frac{a_1}{c_1}$$

(4.1.7)

έτσι οι εξισώσεις (4.1.5) και (4.1.6) ξαναγράφονται ως εξής:

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)\left[(s-\rho) + \frac{\lambda_2(\hat{f}_2(s)-\hat{f}_2(\rho)}{c_2}\right]}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}}$$

(4.1.8)

και

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)\left[(s-\rho) + \frac{\lambda_1(\hat{f}_1(s)-\hat{f}_1(\rho)}{c_1}\right]}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}}$$

(4.1.9)

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\frac{\alpha_2}{c_2}\Phi_1(0)+\frac{\alpha_1}{c_1}\Phi_2(0)=\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1-\frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}\right)+\frac{\alpha_2}{c_2}\left(1-\frac{\lambda_1\mu_1}{c_1}\right)$$

(4.1.10)

Συνεπώς οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας, δοθέντος αρχικού αποθέματος 0, για τις δύο καταστάσεις είναι

$$\Phi_1(0)=\frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1-\frac{\lambda_{2\mu_2}}{c_2}\right)+\frac{\alpha_2}{c_2}\left(1-\frac{\lambda_{1\mu_1}}{c_1}\right)}{\rho-\frac{\lambda_2}{c_2}(1-\hat{f}_2(\rho))}$$

(4.1.11)

και

$$\Phi_2(0)=\frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1-\frac{\lambda_{2\mu_2}}{c_2}\right)+\frac{\alpha_2}{c_2}\left(1-\frac{\lambda_{1\mu_1}}{c_1}\right)}{\rho-\frac{\lambda_1}{c_1}(1-\hat{f}_1(\rho))}$$

(4.1.12)

Υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί Laplace του ύψους των ζημιών είναι πηλίκα πολυωνύμων, δηλαδή

$$\hat{f}_1(s)=\frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}$$

(4.1.13)

και

$$\hat{f}_2(s)=\frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)}$$

(4.1.14)

Όπου οι αριθμητές είναι πολυώνυμα κ-1 και l-1 βαθμών αντίστοιχα και οι παρανομαστές είναι πολυώνυμα κ και l βαθμών.

Έτσι οι εξισώσεις (4.1.5) και (4.1.6) μπορεί να μετατραπούν στις ακόλουθες μορφές πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με $p_k(s)q_l(s)$

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)(s-\rho)p_k(s)\left[q_l(s) + \frac{\lambda_2(q_{l-1}(s)q_l(\rho) - q_{l-1}(\rho)q_l(s))}{c_2 q_l(\rho)(s-\rho)}\right]}{p_k(s)q_l(s)(Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2})}$$

Η οποία με τη χρήση των διαιρετών διαφορών γίνεται

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)(s-\rho)p_k(s)\left[q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho])\right]}{p_k(s)q_l(s)(Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2})}$$

(4.1.15)

και

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)(s-\rho)q_l(s)\left[p_k(s) + \frac{\lambda_1(p_{k-1}(s)p_k(\rho) - p_{k-1}(\rho)p_k(s))}{c_1 p_k(\rho)(s-\rho)}\right]}{p_k(s)q_l(s)(Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2})}$$

Η οποία με τη χρήση των διαιρετών διαφορών γίνεται

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)(s-\rho)q_l(s)\left[p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)p_k[s,\rho]}{p_k(\rho)}\right]}{p_k(s)q_l(s)(Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2})}$$

(4.1.16)

Στις σχέσεις (4.1.15) και (4.1.16) οι αριθμητές είναι πολυώνυμα k+l+1 βαθμού.

Ορισμός 4.1

Ορίζουμε

$$p_{k-1}[s,\rho] = \frac{p_{k-1}(s) - p_{k-1}(\rho)}{s-\rho}$$

πολυώνυμο κ-2 βαθμού που ορίζεται ως η πρώτη διαφορά του $p_{k-1}(s)$.

□

Ορισμός 4.2

Ορίζεται ως $D_{k+l+2}(s)$ ο κοινός παρανομαστής των σχέσεων (4.1.15) και (4.1.16) το οποίο είναι πολυώνυμο k+l+2 βαθμού.

□

Επειδή το s=o και s=ρ είναι δύο ρίζες είναι προφανές ότι $D_{k+l+2}(s) = s(s-\rho)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)$

Τότε η εξίσωση $D_{k+l+2}(s) = 0$ η οποία συνεπάγεται

$$\left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right)p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}p_{k-1}(s)\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right)q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}q_{l-1}(s)\right] - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}p_k(s)q_l(s) = 0 \tag{4.1.17}$$

Έχει k+l+2 ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο

Έτσι οι εξισώσεις (4.1.15) και (4.1.16) γράφονται ως εξής:

$$\tilde{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)(s-\rho)p_k(s)\left[q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho]\right)\right]}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = \frac{\Phi_1(0)g_{k+l}(s)}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} \tag{4.1.18}$$

και

$$\tilde{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)(s-\rho)q_l(s)\left[p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}\left(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)p_k[s,\rho]}{p_k(\rho)}\right]\right.}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = \frac{\Phi_2(0)h_{k+l}(s)}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)}$$

(4.1.19)

Ορισμός 4.3

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g_{k+l}(s)$ ως

$$g_{k+l}(s) = p_k(s)\left[q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho]\right)\right]$$

(4.1.20)

□

Ορισμός 4.4

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h_{k+l}(s)$ ως

$$h_{k+l}(s) = q_l(s)\left[p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)p_k[s,\rho]}{p_k(\rho)}\right]$$

(4.1.21)

□

Τότε αν $R_i,\ i = 1,2,\dots,k+l$ διακριτοί αριθμοί παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1

Για το μοντέλο κινδύνου $\mathrm{U(t)} = \mathrm{u} + \mathrm{C(t)} - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ για m=2 και d>0 αν οι κατανομές των μεγεθών ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\Phi_1(u) = 1 + \Phi_1(0)\sum_{i=1}^{k+l} g_i e^{-R_i u}$$

(4.1.22)

και

$$\Phi_2(u) = 1 + \Phi_2(0)\sum_{i=1}^{k+l} h_i e^{-R_i u}$$

(4.1.23)

όπου

$-R_1, -R_2, \dots, -R_{k+l}$

Διακριτές ρίζες της (4.1.17) με αρνητικά πραγματικά μέρη και $\Phi_1(0)$, $\Phi_2(0)$ δίνονται από τις σχέσεις (4.1.11) και (4.1.12) οι ποσότητες g_i και h_i δίνονται από τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.5

Ορίζουμε τις ποσότητες g_i και h_i ως

$$g_i = \frac{-g_{k+l}(-R_i)}{R_i \prod_{j=1}^{k+l}[R_j - R_i]}$$

(4.1.24)

και

$$h_i = \frac{-h_{k+l}(-R_i)}{R_i \prod_{j=1}^{k+l}[R_j - R_i]}$$

(4.1.25)

όπου $i = 1, 2, \dots, k+l$

□

4.2. Κατανομή ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για το Markov Modulated Poisson Risk Model για m=2 καταστάσεις

Θεωρούμε την εξωτερική περιβαλλοντική διαδικασία $\{I(t); t \geq 0\}$ ως μαρκοβιανή αλυσίδα 2 καταστάσεων, με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Η οποία αντικατοπτρίζει δυο τυχαία περιβαλλοντικά φαινόμενα όπως «κανονικό» και «ακραίο» ή δύο τυχαίες καταστάσεις όπως «υψηλή περίοδος» και «χαμηλή περίοδος».

4.2.1. Εξισώσεις για τις ποσότητες $\boldsymbol{\Psi_1(y;0)}$ και $\boldsymbol{\Psi_2(y;0)}$

Η εξίσωση (3.4.12) παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s) & \frac{\alpha_1}{c_1} \\ \frac{\alpha_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1(s;y) \\ \hat{\Psi}_2(s;y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y) \\ \Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(y) \end{pmatrix}, \qquad y \geq 0 \tag{4.2.1}$$

Ή ισοδύναμα, για $y \geq 0$

$$
\begin{cases}
\hat{\Psi}_1(s;y) = \dfrac{\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right] - \left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(y)\right]\frac{\alpha_1}{c_1}}{Q(s) - \frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}} \\
\hat{\Psi}_2(s;y) = \dfrac{\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(y)\right]\left[s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right] - \left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y)\right]\frac{\alpha_2}{c_2}}{Q(s) - \frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}}
\end{cases}
$$

(4.2.2)

Αφού οι ποσότητες $\hat{\Psi}_1(s;y)$ και $\hat{\Psi}_2(s;y)$ είναι πεπερασμένες για κάθε s *με* $\Re(s) \geq 0$ και το γεγονός ότι η ρίζα ρ ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση δηλαδή $Q(\rho) = \frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}$, έχουμε ότι οι αριθμητές στη (4.2.2) είναι ίσοι με μηδέν όταν $s = \rho$

$$
\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y)\right]\left[\rho - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(\rho)\right] = \left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_\rho T_0 f_2(y)\right]\frac{\alpha_1}{c_1}
$$

(4.2.3)

Επιπρόσθετα έχουμε

$$
\frac{\alpha_2}{c_2}\Psi_1(y;0) + \frac{\alpha_1}{c_1}\Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}\int_y^\infty \bar{F}_1(u)\,du + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}\int_y^\infty \bar{F}_2(u)\,du
$$

Σχέση (4.2.4)

Επιλύοντας τις εξισώσεις (4.2.3) και (4.2.4) παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα για την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχικό απόθεμα ίσο με μηδέν.

Θεώρημα 4.2.1. *Για το μοντέλο κινδύνου* $U(t) = u + C(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ $, t \geq 0$,*για* m=2 *καταστάσεις και* d>0, *οι πιθανότητες της σφοδρότητας χρεοκοπίας με αρχικό απόθεμα ίσο με μηδέν δίνονται από τους παρακάτω τύπους*

$$
\begin{cases}
\Psi_1(y;0) = \dfrac{\lambda_1}{c_1} T_\rho T_0 f_1(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)\,du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)\,du - T_\rho T_0 f_1(y)\right]}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \hat{f}_2(\rho)\right]} \\
\Psi_2(y;0) = \dfrac{\lambda_2}{c_2} T_\rho T_0 f_2(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)\,du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)\,du - T_\rho T_0 f_1(y)\right]}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}\left[1 - \hat{f}_1(\rho)\right]}
\end{cases}
$$

(4.2.5)

□

4.2.2. Διακριτά αποτελέσματα για τις ποσότητες $\Psi_1(y;u)$ και $\Psi_2(y;u)$

Έστω $n_1(s;y)$ και $n_2(s;y)$ οι αριθμητές της (4.2.2.) αντίστοιχα. Με βάση το γεγονός ότι $s=0$ είναι ρίζα των $n_1(s;y)$ και $n_2(s;y)$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} n_1(s;y) &= n_1(s;y) - n_1(0;y) \\ &= s\left\{\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_sT_0f_1(y)\right]\left[1 - \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(0)\right]\right. \\ &\left. - \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_sT_0T_0f_1(y) - \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_sT_0T_0f_2(y)\right\} = sn_1^*(s;y) \end{aligned}$$

(4.2.6)

Επιπρόσθετα το γεγονός ότι το ρ αποτελεί ρίζα του $n_1(s;y)$ συνεπάγεται ότι αποτελεί και ρίζα του $n_1^*(s;y)$, γεγονός που σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} n_1^*(s;y) &= n_1^*(s;y) - n_1^*(\rho;y) \\ &= (s-\rho)\{\frac{\lambda_2}{c_2}\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_\rho T_0f_1(y)\right]T_sT_\rho T_0f_2(0) \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_sT_\rho T_0T_0f_2(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_sT_\rho T_0T_0f_1(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}[1 \\ &- \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(0)]T_sT_\rho T_0f_1(y) \ \} \end{aligned}$$

Όπου

$$n_1(s;y) = s(s-\rho)m_1(s;y)$$

και

$$n_2(s;y) = s(s-\rho)m_2(s;y)$$

Ορισμός 4.2.1

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$\begin{aligned} m_1(s;y) = \frac{\lambda_2}{c_2}&\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_\rho T_0f_1(y)\right]T_sT_\rho T_0f_2(0) + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_sT_\rho T_0T_0f_2(y) \\ &+ \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_sT_\rho T_0T_0f_1(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}[1 - \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(0)]T_sT_\rho T_0f_1(y) \end{aligned}$$

(4.2.7)

και

$$m_2(s;y) = \frac{\lambda_1}{c_1}\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_\rho T_0 f_2(y)\right]T_s T_\rho T_0 f_1(0) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y) + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \frac{\lambda_1}{c_1}T_s T_0 f_1(0)\right]T_s T_\rho T_0 f_2(y)$$

Σχέση (4.2.8)

□

Τελικά η σχέση (4.2.2) γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_1(s;y) = \dfrac{s(s-\rho)m_1(s;y)}{Q(s) - \dfrac{\alpha_1}{c_1}\dfrac{\alpha_2}{c_2}} \\ \widehat{\Psi}_2(s;y) = \dfrac{s(s-\rho)m_2(s;y)}{Q(s) - \dfrac{\alpha_1}{c_1}\dfrac{\alpha_2}{c_2}} \end{cases} \quad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

(4.2.9)

Ορισμός 4.2.2

Στις σχέσεις (4.2.7) και (4.2.8), οι σύνθετοι τελεστές δίνονται από τις σχέσεις

$$T_s T_\rho T_0 f_i(y) = \frac{T_\rho T_0 f_i(y) - T_s T_0 f_i(y)}{s-\rho}, \quad i = 1,2$$

$$T_s T_\rho T_0 T_0 f_i(y) = \frac{T_\rho T_0 T_0 f_i(y) - T_s T_0 T_0 f_i(y)}{s-\rho}, \qquad i = 1,2$$

□

Στην περίπτωση που οι κατανομές των μεγεθών ζημιών f_1 *και* f_2 ανήκουν στην κλασματική οικογένεια, οι μετασχηματισμοί Laplace δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}, \qquad k \in \mathbb{N}^+$$

και

$$\hat{f}_2(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)}, \qquad l \in \mathbb{N}^+$$

(4.2.10)

Όπου p_k και q_l είναι πολυώνυμα βαθμών k και l αντίστοιχα, p_{k-1} και q_{l-1} είναι πολυώνυμα βαθμών k-1 και l-1αντίστοιχα. Ισχύει επίσης ότι $p_{k-1}(0) = p_k(0)$ και $q_{l-1}(0) = q_l(0)$.

Επιπρόσθετα οι εξισώσεις $p_k(s)$ και $q_l(s)$ έχουν ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη.

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή της (4.2.9) με $p_k(s)q_l(s)$ παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_1(s;y) = \dfrac{s(s-\rho)m_1(s;y)p_k(s)q_l(s)}{[Q(s)-\frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}]p_k(s)q_l(s)} \\ \hat{\Psi}_2(s;y) = \dfrac{s(s-\rho)m_2(s;y)p_k(s)q_l(s)}{[Q(s)-\frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}]p_k(s)q_l(s)} \end{cases} \quad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

(4.2.11)

Όπου

$$\begin{aligned} m_1(s;y)p_k(s)q_l(s) &= \frac{\lambda_2}{c_2}\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_\rho T_0 f_1(y)\right] T_s T_\rho T_0 f_2(0) p_k(s) q_l(s) \\ &+ \left[\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1} T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y)\right] p_k(s) q_l(s) \\ &+ \frac{\lambda_1}{c_1}[q_l(s) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(0) q_l(s)] p_k(s) T_s T_\rho T_0 f_1(y) \end{aligned}$$

(4.2.12)

και

$$\begin{aligned} m_2(s;y)p_k(s)q_l(s) &= \frac{\lambda_1}{c_1}\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_\rho T_0 f_2(y)\right] T_s T_\rho T_0 f_1(0) p_k(s) q_l(s) \\ &+ \left[\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1} T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y)\right] p_k(s) q_l(s) \\ &+ \frac{\lambda_2}{c_2}[p_k(s) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(0) p_k(s)] q_l(s) T_s T_\rho T_0 f_2(y) \end{aligned}$$

(4.2.13)

Ορισμός 4.2.3

Επιπρόσθετα δηλώνουμε με

$$p_k[s,\rho] := \frac{[p_k(s) - p_k(\rho)]}{[s-\rho]}$$

την πρώτης τάξεως διαιρετή διαφορά του $p_k(s)$, και με

$$p_k[s,\rho,0] := \frac{[p_k[s,0]-p_k[\rho,0]]}{[s-\rho]}$$

τη δεύτερης τάξεως διαιρετή διαφορά του $p_k(s)$.

□

Τα πολυώνυμα $p_k[s,\rho]$ και $p_k[s,\rho,0]$ είναι πολυώνυμα $k-1$ και $k-2$ αντίστοιχα.

Τότε αφού $p_{k-1}(0) = p_k(0)$, ισχύει

$$[T_s T_0 f_1(0)]p_k(s) = p_k[s,0] - p_{k-1}[s,0]$$

Και

$$[T_s T_0 f_2(0)]q_l(s) = q_l[s,0] - q_{l-1}[s,0]$$

Ομοίως

$$[T_s T_\rho T_0 f_1(0)]p_k(s) = [T_\rho T_0 f_1(0)]p_k[s,\rho] - p_k[s,\rho,0] + p_{k-1}[s,\rho,0]$$

Και

$$[T_s T_\rho T_0 f_2(0)]q_l(s) = [T_\rho T_0 f_2(0)]q_l[s,\rho] - q_l[s,\rho,0] + q_{l-1}[s,\rho,0]$$

Όπου τα πολυώνυμα $[T_s T_0 f_1(0)]p_k(s)$ *και* $[T_s T_\rho T_0 f_1(0)]p_k(s)$ είναι $\kappa - 1$ βαθμού, ενώ τα πολυώνυμα $[T_s T_0 f_2(0)]q_l(s)$ και $[T_s T_\rho T_0 f_2(0)]q_l(s)$ είναι $l-1$ βαθμού.

Θεώρημα 4.2.1. *Για το μοντέλο κινδύνου* $U(t) = u + C(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ *,* $t \geq 0$*,για m=2 καταστάσεις και d>0,όταν οι κατανομές μεγέθους ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, οι πιθανότητες της σφοδρότητας χρεοκοπίας για* $i = 1,2$ *,* $u, y \geq 0$ *δίνονται από τους παρακάτω τύπους*

$$\Psi_i(y;u) = \frac{\lambda_{\partial(i)}}{c_{\partial(i)}}\left[\Psi_i(y;0) - \frac{\lambda_i}{c_i}T_\rho T_0 f_i(y)\right]\sum_{j=1}^{k+l} g_{ij}e^{-R_j u} + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}\left[T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u) + \sum_{j=1}^{k+l} g_j e^{-R_j u} * T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)\right] + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}\left[T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u) + \sum_{j=1}^{k+l} g_j e^{-R_j u} * T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u)\right] + \frac{\lambda_i}{c_i}T_\rho T_0 f_i(u+y) + \frac{\lambda_i}{c_i}\sum_{j=1}^{k+l} h_{ij}\, e^{-R_j u} * T_\rho T_0 f_i(u+y)$$

(4.2.14)

Όπου $\partial(1) = 2, \partial(2) = 1, -R_1, -R_2, \dots, -R_{k+l}$ *είναι διακριτές και αρνητικές πραγματικές ρίζες της εξίσωσης* $D_{k+l+2}(s) = 0$, ρ *είναι η μοναδική θετική πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.3), και οι ποσότητες* $\Psi_1(y;0)$ *και* $\Psi_2(y;0)$ *δίνονται από το Θεώρημα* 4.2.1, *ενώ οι συντελεστές* g_{ij}, h_{ij}, g_j *για* $j = 1,2, \dots, k+l$ *και* $i = 1,2$ *δίνονται από τους παρακάτω τύπους*

$$g_{ij} = \frac{g_i(-R_j)}{\prod_{v=1, v\neq j}^{k+l}(R_v - R_j)}$$

$$h_{ij} = \frac{h_i(-R_j)}{\prod_{v=1, v\neq j}^{k+l}(R_v - R_j)}$$

$$g_i = \frac{p_k(-R_j)q_l(-R_j)}{\prod_{v=1, v\neq j}^{k+l}(R_v - R_j)}$$

Σχέση (4.2.15)

Απόδειξη

Έστω $D_{k+l+2}(s)$ ο κοινός παρανομαστής της (4.2.15), η οποία είναι ένα πολυώνυμο $k+l+2$ βαθμού. Τότε η εξίσωση $D_{k+l+2}(s) = 0$ έχει $k+l+2$ ρίζες στο μικτό επίπεδο και οι μικτές ρίζες αποτελούν συζευγμένα ζεύγη.

Αφού δύο ρίζες είναι οι $s = 0$ και $s = \rho$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το πολυώνυμο $D_{k+l+2}(s)$ ως:

$$D_{k+l+2}(s) = s(s-\rho)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)$$

Όπου οι ρίζες R_i έχουν θετικά πραγματικά μέρη.

Στις σχέσεις (4.2.12) και (4.2.13) ισχύουν

$$g_i(s) = \{[T_s T_\rho T_0 f_{\partial(i)}(0)]q_i(s)\}p_k(s), \quad i = 1,2$$

Και

$$h_i(s) = \left\{1 - \frac{\lambda_{\partial(i)}}{c_{\partial(i)}}[T_s T_0 f_{\partial(i)}(0)]\right\}p_k(s)q_i(s), \quad i = 1,2$$

Όπου $\partial(1) = 2, \partial(2) = 1$ και $g_i(s)$ και $h_i(s)$ είναι πολυώνυμα $k+l-1$ και $k+l$ βαθμών αντίστοιχα.

Τότε η (4.2.11) ξαναγράφεται

$$\begin{aligned}\Phi_i(s;y) = {} & \frac{\lambda_{\partial(i)}}{c_{\partial(i)}}\left[\Psi_i(y;0) - \frac{\lambda_i}{c_i}T_\rho T_0 f_i(y)\right]\frac{g_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)} \\ & + \left[\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y)\right]\frac{p_k(s)q_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)} \\ & + \frac{\lambda_i}{c_i}[T_s T_\rho T_0 f_i(y)]\frac{h_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)}\end{aligned}$$

(4.2.16)

Αν $R_i, i = 1,2, \dots, k+l$ είναι διακριτοί πραγματικοί αριθμοί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα μερικά κλάσματα στη σχέση (4.2.16)

$$\frac{g_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)} = \sum_{j=1}^{k+l}\frac{g_{ij}}{s+R_j}$$

$$\frac{h_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)} = 1 + \sum_{j=1}^{k+l}\frac{h_{ij}}{s+R_j}$$

$$\frac{p_k(s)q_i(s)}{\prod_{j=1}^{k+l}(s+R_j)} = 1 + \sum_{j=1}^{k+l}\frac{g_j}{s+R_j}, \qquad j = 1,2,\dots,k+l, \qquad i = 1,2$$

Όπου οι συντελεστές g_{ij}, h_{ij}, g_j δίνονται από τη σχέση (4.2.15).

Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη σχέση για την ποσότητα $\widehat{\Psi}_i(s; y)$:

$$\widehat{\Psi}_i(s; y) = \frac{\lambda_{\vartheta(i)}}{c_{\vartheta(i)}}\left[\Psi_i(y; 0) - \frac{\lambda_i}{c_i}T_\rho T_0 f_i(y)\right]\sum_{j=1}^{k+l}\frac{g_{ij}}{s+R_j}$$
$$+\left[\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\alpha_1}{c_1}T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y)\right][1 + \sum_{j=1}^{k+l}\frac{g_j}{s+R_j}]$$
$$+\frac{\lambda_i}{c_i}[T_s T_\rho T_0 f_i(y)][1 + \sum_{j=1}^{k+l}\frac{h_{ij}}{s+R_j}]$$

(4.2.17)

Τώρα θέλουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της ποσότητας $\widehat{\Psi}_i(s; y)$.

Από τον ορισμό του τελεστή T_r στη σχέση (3.4.8), έχουμε ότι

$$T_s T_\rho T_0 f_i(y) = \int_y^\infty e^{-s(x-y)} T_\rho T_0 f_i(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-st}\, T_\rho T_0 f_i(y+t)\,dt$$

Ορισμός 4.2.4

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της ποσότητας $T_s T_\rho T_0 f_i(y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}^{-1}\left[T_s T_\rho T_0 f_i(y)\right] = T_\rho T_0 f_i(y+u) = \frac{1}{\rho}\int_u^\infty \left[1 - e^{-\rho(t-u)}\right] f_i(y+t)\,dt, \qquad u, y \geq 0$$

(4.2.18)

□

Ορισμός 4.2.5

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της ποσότητας $T_s T_\rho T_0 T_0 f_i(y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}^{-1}\left[T_s T_\rho T_0 T_0 f_i(y)\right] = T_\rho T_0 T_0 f_i(y+u), \; u, y \geq 0$$

(4.2.19)

□

Έτσι παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (4.2.17) παίρνουμε τη σχέση (4.2.14).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

ΤΟ MARKOV-MODULATED POISSON **ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΜΙΑΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ**

5.1. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο μοντέλο Markov-modulated Poisson με την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu κάτω από την υπόθεση της ύπαρξης ενός οριζόντιου κατωφλιού στο επίπεδο $b(\geq u)$ για το μοντέλο Markov-modulated Poisson

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dU_i(s) \tag{5.1}$$

Όταν το πλεόνασμα ξεπερνά ένα σταθερό όριο $b \geq u$, μερίσματα πληρώνονται συνεχώς έτσι ώστε το απόθεμα να παραμένει σε επίπεδο b μέχρι να συμβεί νέα ζημιά.

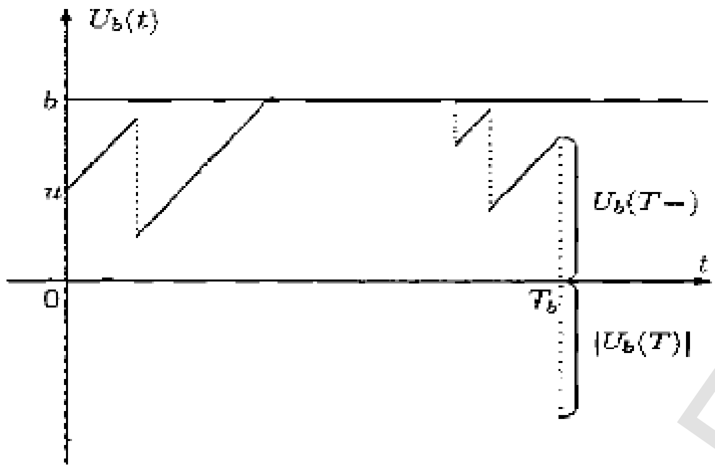
Όμοια ορίζουμε σε κάθε κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας $\{U_{b,i}(t), t \geq 0\}$,να είναι μια τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την υπόθεση ύπαρξης σταθερού μερίσματος, με τη συνολική διαδικασία πλεονάσματος να δίνεται από τη σχέση

$$dU_b(t) = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t I_{(J(s)=i)} dU_{b,i}(s), \quad 0 \leq u \leq b \tag{5.2}$$

Επιπλέον ορίζουμε

$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}$ $\mu\varepsilon$ $inf\emptyset = \infty$

Να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$, ενώ για κάθε μια από τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας, η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.



Σχήμα 4. Η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ με στρατηγική σταθερού μερίσματος

Ορισμός 5.1. Έστω $\mathbb{P}_i(.) = \mathbb{P}(.|J(0) = i)$ και $\mathbb{E}_i$ να είναι η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_i$.Τότε για το μοντέλο Markov-modulated Poisson υπό την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζουμε

$$\varphi_{b,i}(u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} w(U(T_b -), |U(T_b)| I_{(T_b < \infty)} | U_b(0) = u), \qquad i \in E, \quad 0 \leq u \leq b, \tag{5.3}$$

Να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος της αρχικής κατάστασης i και του αρχικού αποθεματικού u, με ένταση ανατοκισμού δ, $0 \leq w(x, y) \leq \infty$ μια διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $I(.)$ η δείκτρια συνάρτηση.

□

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

- Για $\delta = 0, w(x, y) = 1$,παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi_{b,i}(u) = \mathbb{E}_i\left(\left(I_{(T_b < \infty)} | U(0) = u\right)\right)$$

- Για $\delta > 0, w(x, y) = 1$, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\varphi_{T,b,i}(u) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta T_b}\left(I_{(T_b < \infty)} | U(0) = u\right)\right.$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(x=x_1)(y=x_2)}$,παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $(U(T_b -), |U(T_b)|)$,

$$f_{b,i}(x_1 x_2|u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} I_{(|U(T_b)|=x_1)((U(T_b -)=x_2)} (I_{(T_b<\infty)} | U(0) = u)$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(x=x_1)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $U(T-)$,

$$h_{b,i}(x_1/u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} I_{((U(T_b -)=x_1)} (I_{(T_b<\infty)} | U(0) = u)$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = I_{(y=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$,

$$g_{b,i}(x_2/u) = \mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} I_{(|U(T_b)|=x_2)} (I_{(T_b<\infty)} | U(0) = u)$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = x_1^k$ $(w(x,y) = x_2^k)$, παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία (του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία),

$$\mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} |U(T_b)|^k (I_{(T_b<\infty)} | U(0) = u),$$
$$\mathbb{E}_i(e^{-\delta T_b} U(T_b -)^k (I_{(T_b<\infty)} | U(0) = u)$$

Τότε η συνολική Gerber-Shiu συνάρτηση για το μοντέλο δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_b(u) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \varphi_{b,i}(u), \quad u \geq 0 \tag{5.4}$$

Όπου π_i, $i \in E$ να είναι οι αρχικές πιθανότητες της στάσιμης κατανομής.

Θεώρημα 5.1 *Για* $0 \leq u \leq b, \delta \geq 0$ *και* $i \in E$ *οι συναρτήσεις* $\varphi_{b,i}(u)$ *ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων*

$$c\varphi'_{b,i}(u) - (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\varphi_{b,i}(u) + \lambda_i\left(\int_0^u \varphi_{b,i}(u-x)f_i(x)dx + w_i(u)\right) + \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u) = 0$$

(5.5)

Με οριακές συνθήκες $\varphi'_{b,i}(b) = 0, \quad i \in E$

(5.6)

Απόδειξη

Θεωρούμε το διάστημα dt.

Με βάση την ιδιότητα της μαρκοβιανής διαδικασίας έχουμε τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- καμία αλλαγή κατάστασης και κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- αλλαγή κατάστασης αλλά κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- καμία αλλαγή κατάστασης αλλά υπάρχει ζημιογόνο ενδεχόμενο στο dt
- όλα τα παραπάνω με συνολική πιθανότητα 0(dt)

$$\varphi_{b,i}(u) = (1 - \alpha_i dt - \lambda_i dt)e^{-\delta dt}\varphi_{b,i}(u + c_i dt) + \lambda_i dt e^{-\delta dt}\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_{b,i}(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt e^{-\delta dt}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u + c_k dt) + 0(dt)$$

Για $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + 0(dt)$ έχουμε

$$\varphi_{b,i}(u) = (1 - \alpha_i dt - \lambda_i dt)\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\varphi_{b,i}(u + c_i dt) + \lambda_i dt\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_{b,i}(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx\right]$$
$$+ \alpha_i dt\big(1 - \delta dt + 0(dt)\big)\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\varphi_{b,i}(u) = (1 - \delta dt + 0(dt) - \alpha_i dt - \lambda_i dt)\varphi_{b,i}(u + c_i dt) + \lambda_i dt\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_{b,i}(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\varphi_{b,i}(u) = [1 - (\delta + \alpha_i + \lambda_i)dt + 0(dt)]\varphi_{b,i}(u + c_i dt) + \lambda_i dt\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_{b,i}(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx\right] + \alpha_i dt\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u + c_k dt) + 0(dt) \Rightarrow$$

$$\frac{\varphi_{b,i}(u + c_i dt) - \varphi_{b,i}(u)}{dt} = \left[\frac{(\delta + \alpha_i + \lambda_i)dt}{dt} + \frac{0(dt)}{dt}\right]\varphi_{b,i}(u + c_i dt) - \frac{\lambda_i dt}{dt}\left[\int_0^{u+c_i dt} \varphi_{b,i}(u + c_i dt - x)dF_i(x) + \int_{u+c_i dt}^{\infty} w(u, x-u)f_i(x)dx\right] - \frac{\alpha_i dt}{dt}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u + c_k dt) - \frac{0(dt)}{dt}$$

Παίρνοντας όρια για $dt \to 0$ και στα δύο μέλη παίρνουμε τη σχέση

$$c_i\varphi'_{b,i}(u) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\varphi_{b,i}(u) - \lambda_i\left(\int_0^u \varphi_{b,i}(u - x)f_i(x)dx + w_i(u)\right) - \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}\varphi_{b,k}(u)$$

Παρατήρηση. Για $p_{ik} \to 0$, η εξίσωση (5.5) ανάγεται στην ολοκληρό-διαφορική εξίσωση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

Η λύση της ολοκληρό-διαφορικής εξίσωσης (5.5) με οριακές συνθήκες (5.6) εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρό-διαφορικού συστήματος, για $i \in E$

$$c_i v'_{\delta,i}(u) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta) v_{\delta,i}(u) - \lambda_i \int_0^u v_{\delta,i}(u-x) f_i(x) dx - \alpha_i \sum_{k=1, k\neq i}^{m} p_{ik} v_{\delta,k}(u) \tag{5.7}$$

Η λύση του ομογενούς ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.7), προσδιορίζεται με βάση τις αρχικές συνθήκες $v_{\delta,i}(0), i \in E$. Έστω ότι $v_{\delta,1j}(u), v_{\delta,2j}(u), \ldots, v_{\delta,mj}(u)$ να είναι κάποιες λύσεις του συστήματος (5.7) με αρχικές τιμές

$$v_{\delta,ij}(0) = I_{(i=j)}, i, j \in E \tag{5.8}$$

Τώρα είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι κάτω από τις αρχικές συνθήκες (5.8), οι λύσεις $v_{\delta,ij}(u)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και έτσι από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων η γενική λύση του ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.7) δίνεται από τη σχέση

$$v_{\delta,i}(u) = \sum_{j=1}^{m} v_{\delta,i}(0) v_{\delta,ij}(u), \qquad u \geq 0$$

Η γενική λύση των $\varphi_{b,1}(u), \varphi_{b,2}(u), \ldots, \varphi_{b,m}(u)$, δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_{b,i}(u) = \varphi_i(u) + \sum_{j=1}^{m} v_{\delta,i}(0) v_{\delta,ij}(u), \quad 0 \leq u \leq b \tag{5.9}$$

Όπου οι σταθεροί αριθμοί $v_{\delta,i}(0)$ υπολογίζονται με βάση τις οριακές συνθήκες (5.6), δηλαδή αποτελούν λύσεις του συστήματος

$$\varphi'_i(b) + \sum_{j=1}^{m} v_{\delta,i}(0) v'_{\delta,ij}(b) = 0 \tag{5.10}$$

Προκειμένου να γράψουμε τις εξισώσεις (5.9) και (5.10) σε μορφή πινάκων (ώστε να αναλύσουμε και τις m συναρτήσεις ταυτόχρονα) ορίζουμε τους πίνακες-διανύσματα

$$\boldsymbol{\varphi}(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u))^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}_b(u) = (\varphi_{b,1}(u), \ldots, \varphi_{b,m}(u))^T$$

$\boldsymbol{v}_\delta(u) = (v_{\delta,ij}(u))_{i,j=1}^m$

$\boldsymbol{v}(0) = (v_1(0), \ldots\ldots, v_m(0))^T$

Τότε οι εξισώσεις (5.9) και (5.10) γράφονται ως

$$\boldsymbol{\varphi}_b(u) = \boldsymbol{\varphi}(u) + \boldsymbol{v}_\delta(u)\boldsymbol{v}(0), \quad 0 \leq u \leq b \tag{5.11}$$

$$\mathbf{0}_m = \boldsymbol{\varphi}_b{}'(b) + \boldsymbol{v}'_\delta(b)\boldsymbol{v}(0) \tag{5.12}$$

Όπου $\mathbf{0}_m$ είναι ένας $m \times m$ τετραγωνικός πίνακας με μηδενικά στοιχεία.

Επομένως υπολογίζοντας από την εξίσωση (5.12), το $\boldsymbol{v}(\mathbf{0})$, η γενική λύση του μη ομογενούς ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.5) δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\varphi}_b(u) = \boldsymbol{\varphi}(u) - \boldsymbol{v}_\delta(u)[\boldsymbol{v}_\delta(b)]^{-1}\boldsymbol{\varphi}_b(u), 0 \leq u \leq b \tag{5.13}$$

Παρατήρηση. Παρόλο που το Markov-modulated Poisson μοντέλο είναι ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο στη θεωρία κινδύνου, στη βιβλιογραφία είναι γνωστές οι λύσεις του ομογενούς συστήματος (5.5) μόνο για την περίπτωση όπου η Μαρκοβιανή ανέλιξη $\{J(t)\}_{t\geq 0}$ αποτελείται από δυο μόνο καταστάσεις, $E = \{1,2\}$. Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις $v_{\delta,ij}(u)$ χωρίς τον περιορισμό των δυο καταστάσεων ,δηλαδή όταν $i,j \in E = \{1,2, \ldots\ldots, m\}$

Μορφοποιήθηκε: Ελληνικά

Ορισμός 5.2

Ορίζουμε $D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t)$ την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων μέχρι το χρόνο χρεοκοπίας T_b,όπου $D(t)$ τα συνολικά πληρωθέντα μερίσματα μέχρι το χρόνο t.

□

Ορισμός 5.3

Έστω ο μέσος του $D_{u,b}$δοθέντος αρχικής κατάστασης i.

$V_i(u,b) = E\left[D_{u,b} \middle| J(0) = i\right] \quad 0 \leq u \leq b \quad , i \in J$

(5.14)

□

Τότε η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών πληρωθέντων μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία είναι

$$V(u,b) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i V_i(u,b)$$

(5.15)

Θεώρημα 5.2 *Για* $0 \leq u \leq b, \quad \delta \geq 0, \quad \kappa\alpha\iota\ i \in E$ *οι συναρτήσεις* $V_i(u,b)$ *ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων*

$$cV_i'(u,b) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)V_i(u,b) - \lambda_i \int_0^u V_i(u-x,b)\,dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} \rho_{ik} V_k(u,b)$$

(5.16)

Απόδειξη.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα $[0,h]$

Στο παραπάνω διάστημα μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- Κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο και καμία αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0,h]$
- Ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο $[0,h]$ (προκαλεί ή όχι χρεοκοπία)
- Αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0,h]$
- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα συμβαίνουν στο $[0,h]$

Έτσι έχουμε

$V_i(u,b) = (1-\alpha_i h - \lambda_i h)e^{-\delta h} V_i(u+c_i h,b) + \lambda_i h e^{-\delta h} \int_0^{u+c_i h} V_i(u+c_i h - x,b)\,dF_i(x) + \alpha_i h e^{-\delta h} \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik} V_k(u+c_i h,b) + 0(h)$

Όπου $\frac{0(h)}{h} \to 0 \ \text{όταν}\ h \to 0$

Αφού $e^{-\delta h} = 1 - \delta h + 0(h)$ έχουμε

$$V_i(u,b) = (1 - a_i h - \lambda_i h)(1 - \delta h + 0(h))V_i(u + c_i h, b) + \lambda_i h(1 - \delta h + 0(h))\int_0^{u+c_i h} V_i(u + c_i h - x, b)dF_i(x) + a_i h(1 - \delta h + 0(h))\sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}V_k(u + c_i h, b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$V_i(u,b) = \{1 - \delta h + 0(h) - a_i h(1 - \delta h + 0(h)) - \lambda_i h(1 - \delta h + 0(h))\}V_i(u + c_i h, b) + \lambda_i h(1 - \delta h + 0(h))\int_0^{u+c_i h} V_i(u + c_i h - x, b)dF_i(x) + a_i h(1 - \delta h + 0(h))\sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}V_k(u + c_i h, b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$V_i(u,b) = [1 - \delta h + 0(h) - a_i h + a_i \delta h^2 - a_i h0(h) - \lambda_i h + \lambda_i \delta h^2 - \lambda_i h0(h)]V_i(u + c_i h, b) + [\lambda_i h - \lambda_i \delta h^2 + \lambda_i h0(h)]\int_0^{u+c_i h} V_i(u + c_i h - x, b)dF_i(x) + [a_i h - a_i \delta h^2 + a_i h0(h)]\sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}V_k(u + c_i h, b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$V_i(u,b) = [1 - (a_i + \lambda_i + \delta)h]V_i(u + c_i h, b) + \lambda_i h\int_0^{u+c_i h} V_i(u + c_i h - x, b)dF_i(x) + a_i h\sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}V_k(u + c_i h, b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$V_i(u + c_i h, b) - V_i(u,b) = [(a_i + \lambda_i + \delta)h]V_i(u + c_i h, b) - \lambda_i h\int_0^{u+c_i h} V_i(u + c_i h - x, b)dF_i(x) - a_i h\sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}V_k(u + c_i h, b) - 0(h) \Rightarrow$$

$$\frac{V_i(u+c_ih,b)-V_i(u,b)}{h}=[(\alpha_i+\lambda_i+\delta)]V_i(u+c_ih,b)$$
$$-\lambda_i\int_0^{u+c_ih}V_i(u+c_ih-x,b)dF_i(x)-\alpha_i\sum_{k=1,k\neq i}^{m}p_{ik}V_k(u+c_ih,b)-\frac{0(h)}{h}$$

Καθώς το $h\to 0$ παίρνουμε

$$cV_i'(u,b)=(\alpha_i+\lambda_i+\delta)V_i(u,b)-\lambda_i\int_0^{u}V_i(u-x,b)d\,F_i(x)$$
$$-\alpha_i\sum_{k=1,k\neq i}^{m}\rho_{ik}V_k(u,b)$$

(5.16)

Στην περίπτωση που $u=b$ έχουμε

$$\begin{aligned}V_i(b,b)=(1-\alpha_ih-\lambda_ih)&\left(e^{-\delta h}V_i(b,b)+c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds\right)\\&+\lambda_ihe^{-\delta h}\left(\int_0^{b}V_i(b-x,b)dF_i(x)+c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds\right)\\&+\alpha_ihe^{-\delta h}\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{m}p_{ik}V_k(b,b)+c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds\right)+0(h)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$V_i(b,b)=(1-\alpha_ih-\lambda_ih)(1-\delta h+0(h))V_i(b,b)+(1-\alpha_ih-\lambda_ih)c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds$$
$$+\lambda_ih(1-\delta h+0(h))\int_0^{b}V_i(b-x,b)dF_i(x)+\lambda_ih(1-\delta h+0(h))c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds$$
$$+\alpha_ih(1-\delta h+0(h))\sum_{k=1,k\neq i}^{m}p_{ik}V_k(b,b)+\alpha_ih(1-\delta h+0(h))c_i\int_0^{h}e^{-\delta s}ds\Rightarrow$$

$$V_i(b,b) = [1 - \delta h + 0(h) - \alpha_i h + \alpha_i \delta h^2 - \alpha_i h0(h) - \lambda_i h + \lambda_i \delta h^2 - \lambda_i h0(h)]V_i(b,b) + [\lambda_i h - \lambda_i \delta h^2 + \lambda_i h0(h)] \int_0^b V_i(b-x,b)dF_i(x) + (\alpha_i h - \alpha_i \delta h^2 + \alpha_i h0(h)) \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik} V_k(b,b) + [1 - \alpha_i h - \lambda_i h + \lambda_i h - \lambda_i \delta h^2 + \lambda_i h0(h) + \alpha_i h - \alpha_i \delta h^2 + \alpha_i h0(h)]c_i \int_0^h e^{-\delta s} ds \Rightarrow$$

$$V_i(b,b) = [1 - h(\delta + \alpha_i + \lambda_i)]V_i(b,b) + \lambda_i h \int_0^b V_i(b-x,b)dF_i(x) + \alpha_i h \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik} V_k(b,b) + c_i \int_0^h e^{-\delta s} ds$$

Αλλάζω πρόσημα και διαιρώ με h και έχω

$$(\delta + \alpha_i + \lambda_i)V_i(b,b) - \lambda_i \int_0^b V_i(b-x,b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik} V_k(b,b) = c_i \tag{5.17}$$

Θέτοντας $u = b$ στην εξίσωση (5.16) και χρησιμοποιώντας την (5.17) έχουμε ότι

$$V_i'(u,b)|_{u=b} = 1 \tag{5.18}$$

Θεωρώντας στην (5.16) ότι $v_i(u)$ η λύση της ολοκληρό-διαφορικής εξίσωσης έχουμε

$$c_i v_i'(u) = (\delta + \alpha_i + \lambda_i)v_i(u) - \lambda_i \int_0^u v_i(u-x,b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik} v_k(u) \tag{5.19}$$

Οι λύσεις της (5.19) είναι μοναδικώς καθορισμένες από την αρχική συνθήκη $v_i(0), \ \ i \in J$

Για $j \in J$ έχουμε $v_{1,j}(u), v_{2,j}(u), \dots, v_{m,j}(u)$ λύσεις της (5.19) με την ακόλουθη συνθήκη

$$v_{i,j}(0) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Έτσι η γενική λύση της (5.19) είναι της μορφής $v_i(u) = \sum_{j=1}^{m} a_j v_{i,j}(u), \quad i \in J$ με $a_1, a_2, \dots, a_m$ πραγματικούς αριθμούς.

Συνεπώς οι λύσεις της (5.16) με τον περιορισμό (5.18) εκφράζονται ως

$$V_i(u,b) = \sum_{j=1}^{m} a_j(b) V_{i,j}(u), \quad 0 \le u \le b, \quad i \in J$$

Με $a_1(b), a_2(b), \dots, a_m(b)$ οι λύσεις του ακόλουθου συστήματος γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(b) V'_{i,j}(b) = 1$$

Ορισμός 5.4

Ορίζουμε $\hat{v}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} v_{ij}(x) dx$ το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $v_{ij}(u)$ ως προς s.

□

Έτσι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι $v_{\delta,ij}(u)$ αποτελούν λύσεις του ολοκληρό-διαφορικού συστήματος 5.7 και παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace, έχουμε ότι για $\Re(s) \ge 0$

$$\left(cs - (\alpha_i + \lambda_i + \delta) + \lambda_i \hat{f}_i(s)\right) \hat{v}_{ij}(s) + a_i \sum_{k=1, k \ne i}^{m} p_{ik} \hat{v}_{kj}(s) = c\hat{v}_{ij}(0)$$

(5.20)

Από όπου χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (5.8), η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\hat{v}_\delta(s) = \frac{A^*(s)}{detA(s)} I_m, u \ge 0$$

(5.21)

Όπου $\hat{v}_\delta(s) = \left(v_{\delta,ij}(s)\right)_{i,j=1}^{m}$. Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (5.20), οι λύσεις του ομογενούς ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.7) όταν τα μεγέθη των ζημιών ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών δίνονται από το παρακάτω θεώρημα.

Μορφοποιήθηκε: Ελληνικά

Μορφοποιήθηκε: Γραμματοσειρά: Πλάγια, Ελληνικά

Θεώρημα 5.3. *Αν ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους της ζημιάς,* $\hat{f}_i(s), i \in E$, *δίνεται από τη σχέση* $\hat{f}_i(x) = \frac{Q_{k_{i-1}}(s)}{Q_{k_i}(s)}, k_i \in \mathbb{N}^+, i \in$ *τότε*

$$v_{\delta,ij}(u) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{h}_{ij,k} e^{r_k u} + \sum_{l=1}^{m} \tilde{g}_{ij,l} e^{-R_l u}, \qquad u \geq 0 \tag{5.22}$$

Όπου

$$\tilde{h}_{ij,k} = \frac{\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(r_k)(\boldsymbol{A}^*(r_k))_{ij}}{c^m \prod_{j=1}^{K_m}(r_k + R_j) \prod_{l=1, l\neq k}^{m}(r_k - r_l)}$$

$$\tilde{g}_{ij,l} = \frac{\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(-R_l)(\boldsymbol{A}^*(-R_l))_{ij}}{c^m (-1)^m \prod_{j=1}^{m}(R_l - r_j) \prod_{l=1, l\neq l}^{m}(R_l - R_l)}$$

Με $(\boldsymbol{A}^*(s))_{ij}$ *το* (i,j) *στοιχείο του πίνακα* $\boldsymbol{A}^*(s)$ *και* R_i *με* $\Re(R_i) < 0, i = 1,2,\ldots,K_m$ *είναι οι ρίζες της εξίσωσης* $\boldsymbol{detA}(s) \prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s) = 0$

Απόδειξη.

Από την εξίσωση (5.21), έπεται ότι

$$\vartheta_{\delta,ij}(s) = \frac{(\boldsymbol{A}^*(s))_{ij}}{det\boldsymbol{A}(s)}$$

Υποθέτοντας ότι $\hat{f}_i(x) = \frac{Q_{k_{i-1}}(s)}{Q_{k_i}(s)}, k_i \in \mathbb{N}^+, i \in E$ και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή της παραπάνω εξίσωσης με $\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s)$, έχουμε ότι

$$\vartheta_{\delta,ij}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s)(\boldsymbol{A}^*(s))_{ij}}{\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s)\, det\boldsymbol{A}(s)} \tag{5.23}$$

Παρατηρώντας ότι ο παρανομαστής της (5.23) είναι ένα πολυώνυμο $m + K_m$ βαθμού με το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου να είναι το c^m και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η εξίσωση $Q_{k_i}(s) = 0, i \in E$,έχει ρίζες μόνο με αρνητικά πραγματικά μέρη, έπεται ότι η εξίσωση $\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s)\, det\boldsymbol{A}(s) = 0$ έχει r_i ρίζες, με $\Re(r_i) > 0, i = 1, \ldots, m$ και $-R_j$ ρίζες, με $\Re(R_j) > 0, j = 1, \ldots, K_m$ και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως

$$\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(s)\, det\boldsymbol{A}(s) = c^m \prod_{i=1}^{m}(s - r_i)\prod_{j=1}^{K_m}(s + R_j)$$

(5.24)

□

Τότε από τις εξισώσεις (5.23) και (5.24) παίρνουμε άμεσα ότι

$$\hat{\vartheta}_{\delta,ij}(s) = \frac{(\boldsymbol{A}^*(s))_{ij}}{c^m \prod_{i=1}^{m}(s - r_i)\prod_{j=1}^{K_m}(s + R_j)}$$

Επιπλέον, εφόσον ο αριθμητής της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από $m + K_m$, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, έχουμε ότι

$$\hat{\vartheta}_{\delta,ij}(s) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\tilde{h}_{ij,k}}{s - r_k} + \sum_{l=1}^{K_m}\frac{\tilde{g}_{ij,l}}{s + R_l}$$

Από όπου αντιστρέφοντας ως προς s παίρνουμε άμεσα την εξίσωση (5.22).

5.2. **Ροπές των συνολικών μερισμάτων στο μοντέλο** Markov-modulated Poisson

Στην παρούσα ενότητα μελετάται η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$ μέσω της οποίας αναλύεται η ανώτερη ροπή της παρούσας αξίας όλων των πληρωθέντων μερισμάτων πριν την χρεοκοπία.

Ορισμός 5.2.1 Ορίζεται η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $D_{u,b}$, δοθέντος αρχικού περιβάλλοντος i, ως

$$M_i(u, y; b) = E\left[e^{yD_{u,b}} \middle| U(0) = u, I(0) = i\right], \qquad 0 \le u \le b, i \in J$$

(5.2.1)

Όπου y είναι τέτοιο ώστε να υπάρχει η $M_i(u, y; b)$

□

Θεώρημα 5.2.1

Για $0 \le u \le b, \delta > 0$ και $i \in E$ οι συναρτήσεις $M_i(u, y; b)$ ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων

$$c_i \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u} - \delta y \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y} - (\lambda_i + \alpha_i) M_i(u,y;b) + \lambda_i \left[\int_0^u M_i(u-x, y; b)\, dF_i(x) + \bar{F}_i(u) \right] + \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_i(u,y;b) = 0, \quad 0 \le u \le b, i \in J$$

(5.2.2)

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα $[0, h]$

Στο παραπάνω διάστημα μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- Κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο και καμία αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0, h]$
- Ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο $[0, h]$ (προκαλεί ή όχι χρεοκοπία)
- Αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0, h]$
- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα συμβαίνουν στο $[0, h]$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} M_i(u,y;b) &= E[e^{yD_{u,b}} | U(0) = u, I(0) = i] \\ &= (1 - \alpha_i h - \lambda_i h) M_i(u + c_i h, e^{-\delta h} y; b) \\ &+ \lambda_i h \left[\int_0^{u + c_i h} M_i(u + c_i h - x, e^{-\delta h} y; b)\, dF_i(x) + \bar{F}_i(u + c_i h) \right] \\ &+ \alpha_i h \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_k(u + c_i h, e^{-\delta h} y; b) + o(h), \quad 0 \le u \le b, i \in J \end{aligned}$$

Το ανάπτυγμα Taylor δίνει

$$M_i(u + c_i h, e^{-\delta h} y; b) = M_i(u,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u} - \delta y h \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y} + o(h)$$

Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
M_i(u,y;b) = {} & (1-\alpha_i h-\lambda_i h)\left[M_i(u,y;b)+c_i h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}-\delta y h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y}\right. \\
& \left.+\,0(h)\right] \\
& +\lambda_i h\int_0^{u+c_i h} M_i(u,y;b)dF_i(x)+\lambda_i h\int_0^{u+c_i h} c_i h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}dF_i(x) \\
& -\lambda_i h\int_0^{u+c_i h}\delta y h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y}dF_i(x) \\
& +\lambda_i h\int_0^{u+c_i h} 0(h)dF_i(x)+\lambda_i h\bar{F}_i(u+c_i h)+\alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(u,y;b) \\
& +\alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}-\alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\delta y h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y}+\alpha_i h0(h) \\
& +0(h)\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_i(u,y;b) = {} & (1-\alpha_i h-\lambda_i h)M_i(u,y;b)+c_i h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}-\delta y h\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y} \\
& +\lambda_i h\int_0^{u+c_i h} M_i(u,y;b)dF_i(x)+\lambda_i h\bar{F}_i(u+c_i h) \\
& +\alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(u,y;b)+0(h)\Rightarrow
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας με h και τείνοντας στο 0 έχουμε

$$
\begin{aligned}
c_i & \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}-\delta y\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial y}-(\lambda_i+\alpha_i)M_i(u,y;b) \\
& +\lambda_i\left[\int_0^{u} M_i(u-x,y;b)\,dF_i(x)+\bar{F}_i(u)\right] \\
& +\alpha_i\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(u,y;b)=0,\quad 0\le u\le b, i\in J
\end{aligned}
$$

(5.2.2)

Στην περίπτωση που $u=b$

$$M_i(b,y;b) = (1-\alpha_i h - \lambda_i h)e^{yc_i h} M_i\left(b, e^{-\delta h} y; b\right) + \lambda_i h e^{yc_i h}\left[\int_0^b M_i\left(b-x, e^{-\delta h} y; b\right) dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] + \alpha_i h e^{yc_i h} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_i\left(b, e^{-\delta h} y; b\right) + 0(h), \quad i \in J$$

Το ανάπτυγμα Taylor για $u = b$ γίνεται

$$M_i\left(b, e^{-\delta h} y; b\right) = M_i(b,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + 0(h)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} M_i(b,y;b) = {} & (1-\alpha_i h - \lambda_i h)e^{yc_i h}\left[M_i(b,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} \right. \\ & \left. - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + 0(h)\right] \\ & + \lambda_i h e^{yc_i h}\left[\left(\int_0^b M_i(b-x,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} \right.\right. \\ & \left.\left. - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + 0(h)\right) dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] \\ & + \alpha_i h e^{yc_i h} \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\left[M_i(b,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} \right. \\ & \left. + 0(h)\right] + 0(h) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i(b,y;b) = {} & (1-\alpha_i h - \lambda_i h)\left(1 + yc_i h + 0(h)\right)\left[M_i(b,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} \right. \\ & \left. - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + 0(h)\right] \\ & + \lambda_i h\left(1 + yc_i h \right. \\ & \left. + 0(h)\right)\left[\left(\int_0^b M_i(b-x,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} \right.\right. \\ & \left.\left. + 0(h)\right) dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] + \alpha_i h(1 - \alpha_i h \\ & - \lambda_i h) \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\left[M_i(b,y;b) + c_i h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h \frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} \right. \\ & \left. + 0(h)\right] + 0(h) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M_i(b,y;b) = (1 + yc_i h + 0(h) - \alpha_i h - \lambda_i h)\left[M_i(b,y;b) + c_i h\frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h\frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + 0(h)\right] + \lambda_i h\left[\int_0^b M_i(b-x,y;b)dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] + \alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(b,y;b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$M_i(b,y;b) = M_i(b,y;b) + h(yc_i - \alpha_i - \lambda_i)M_i(b,y;b) + c_i h\frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial b} - \delta y h\frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + \lambda_i h\left[\int_0^b M_i(b-x,y;b)dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] + \alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(b,y;b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$\delta y\frac{\partial M_i(b,y;b)}{\partial y} + (\lambda_i + \alpha_i + yc_i)M_i(b,y;b) + \lambda_i\left[\int_0^b M_i(b-x,y;b)dF_i(x) + \bar{F}_i(b)\right] + \alpha_i\sum_{k=1}^{m} p_{ik}M_i(b,y;b) = 0$$

(5.2.3)

Έχουμε έτσι τον ακόλουθο περιορισμό

$$\left.\frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u}\right|_{u=b} = yM_i(b,y;b)$$

(5.2.4)

□

Ορισμός 5.2.2 Για $0 \leq u \leq b$ και $i = 1,2,\ldots m$ ορίζουμε

$$V_{i,m}(u;b) = E\left[D_{u,b}^{m} \middle| I(0) = i\right], \qquad m \in \mathbb{N}$$

(5.2.5)

Τη ν-οστή ροπή της $D_{u,b}$ με $V_{i,0}(u;b) = 1$ και $V_{i,1}(u;b) = V_i(u;b)$

□

Τότε η συνολική m-τάξης ροπή για το μοντέλο που μελετάται δίνεται από τη σχέση

$$V_m(u;b) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i V_{i,m}(u;b)\,, 0 \leq u \leq \mathrm{b}$$

(5.2.6)

Ορισμός 5.2.3

Ορίζουμε $M_i(u,y;b) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} V_{i,m}(u;b)$

(5.2.7)

□

Αντικαθιστώντας την (5.2.7) στην (5.2.2) παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων

$$cV'_{i,m}(u;b) = (\lambda_i + \alpha_i + m\delta)V_{i,m}(u;b) - \lambda_i \int_0^u V_{i,m}(u-x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} V_{k,m}(u;b)\,,\quad 0 \leq u \leq b, i \in J$$

(5.2.8)

Από τη (5.2.4) συνεπάγεται ότι

$$V'_{i,m}(u;b)|_{u=b} = mV_{i,m-1}(b;b), i \in J, m \in \mathbb{N}$$

(5.2.9)

Με $V_{i,0}(b;b) = 1$

Παρατήρηση Για $p_{ik} \to 0$, για κάθε $i \in E$ το ολοκληρό-διαφορικό σύστημα ανάγεται στο ολοκληρό-διαφορικό σύστημα για το κλασσικό μοντέλο □

Η λύση του ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.2.3), εξαρτάται άμεσα από τη λύση του ακόλουθου ομογενούς ολοκληρό-διαφορικού συστήματος

$$cv'_{\tilde{\delta},i}(u) - \left(\lambda_i + \alpha_i + \tilde{\delta}\right)v_{\tilde{\delta},i}(u) + \lambda_i \int_0^u v_{\tilde{\delta},i}(u-x)\, f_i(x)dx + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} p_{ik}\, v_{\tilde{\delta},i}(u) = 0$$

(5.2.10)

Έστω $v_{\tilde{\delta},ij}(u), i, j \in E$ να είναι οι λύσεις του παραπάνω ολοκληρό-διαφορικού συστήματος με αρχικές συνθήκες $v_{\tilde{\delta},ij}(u) = I(i = j) i, j \in E$. Παρατηρώντας ότι το ομογενές ολοκληρό-διαφορικό σύστημα (5.2.10), είναι ακριβώς το ίδιο με το ομογενές ολοκληρό-διαφορικό σύστημα (5.7), με $\tilde{\delta}$ στη θέση του δ, είναι φανερό ότι ο υπολογισμός των $v_{\tilde{\delta},ij}(u)$ για μεγέθη ζημιών που ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δίνεται από το θεώρημα (5.3) με $\tilde{\delta}$ στη θέση του δ.

Τότε από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έπεται ότι η γενική λύση του ολοκληρό-διαφορικού συστήματος (5.2.3) δίνεται από τη σχέση

$$V_{m,i}(u,b) = \sum_{j=1}^{m} V_{m,i}(0,b)\, v_{\tilde{\delta},ij}(u)$$

(5.2.11)

Όπου οι σταθερές $V_{m,i}(0,b)$ υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (5.2.9)

Ορισμός 5.2.4

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\boldsymbol{V}_m(u,b) = (V_m, 1(u,b), V_{m,2}(u,b), \dots, V_{m,m}(u,b))^T$$

και

$$\boldsymbol{v}_{\tilde{\delta}}(u) = (v_{\tilde{\delta},ij}(u))_{i,j=1}^{m}$$

□

Η εξίσωση 5.2.11 γράφεται, για κάθε $i \in E$ ως

$$\boldsymbol{V}_m(u,b) = \boldsymbol{v}_{\tilde{\delta}}(u)\boldsymbol{V}_m(0,b), 0 \leq u \leq b$$

(5.2.12)

Όπου οι σταθερές $\boldsymbol{V}_m(0,b)$ υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες (5.2.9) αναδρομικά από τη σχέση

$$\boldsymbol{V}_m(0,b) = m[v'_{\tilde{\delta}_1}(b)]^{-1} v_{\tilde{\delta}_1}(b)\boldsymbol{V}_{m-1}(0,b)$$

Με $\tilde{\delta}_1 = \delta(m-1)$, και $\boldsymbol{v}'_0(b) = \boldsymbol{I}_m$

5.3 Άλλα μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με την ύπαρξη μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος στο μοντέλο Markov-modulated Poisson

Ορισμός 5.3.1 Ορίζουμε τ_b να είναι η πρώτη φορά που το πλεόνασμα γίνεται b χωρίς να έχει προηγηθεί χρεοκοπία και για $\delta > 0$.

□

Ορισμός 5.3.2 Έστω $\mathbb{P}_i(.) = \mathbb{P}_i(.\,|J(0) = i)$ και $\mathbb{E}_i$ η δεσμευμένη τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_i$.

□

Ορισμός 5.3.3

Για το μοντέλο Markov-modulated Poisson ορίζουμε

$L_i(u;b) = \mathbb{E}_i\left(e^{-\delta\tau_b} I(\tau_b < T_b)\middle|U(0) = u\right), i \in E, 0 \le u \le b$

Να είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου τ_b.

□

Θεώρημα 5.3.1 *Η $L_i(u;b)$ ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων*

$$c_i L_i'(u,b) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta) L_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u L_i(u-x;b)\, dF_i(x)$$
$$- \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u;b), 0 \le u \le b, i \in J$$

(5.3.1)

Με οριακές συνθήκες $L_i(b;b) = 1, i \in E$

Απόδειξη.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα $[0,h]$

Στο παραπάνω διάστημα μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- Κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο και καμία αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0,h]$
- Ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο $[0,h]$ (προκαλεί ή όχι χρεοκοπία)
- Αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0,h]$
- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα συμβαίνουν στο $[0,h]$

Έτσι έχουμε

$L_i(u;b) = (1 - \alpha_i h - \lambda_i h)e^{-\delta h} L_i(u + c_i h; b) + \lambda_i h e^{-\delta h} \int_0^{u+c_i h} L_i(u + c_i h - x; b)\, dF_i(x) + \alpha_i h e^{-\delta h} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u + c_i h; b) + 0(h) \Rightarrow$

Αφού $e^{-\delta h} = 1 - \delta h + 0(h)$ έχουμε

$$L_i(u;b) = (1 - \alpha_i h - \lambda_i h)\big(1 - \delta h + 0(h)\big)L_i(u + c_i h; b) + \lambda_i h\big(1 - \delta h + 0(h)\big)\int_0^{u+c_i h} L_i(u + c_i h - x; b)dF_i(x) + \alpha_i h\big(1 - \delta h + 0(h)\big)\sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u + c_i h; b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$L_i(u;b) = (1 - \delta h + 0(h) - \alpha_i h - \lambda_i h)L_i(u + c_i h; b) + \lambda_i h \int_0^{u+c_i h} L_i(u + c_i h - x; b)dF_i(x) + \alpha_i h \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u + c_i h; b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$L_i(u;b) = [1 - h(\delta + \alpha_i + \lambda_i) + 0(h)]L_i(u + c_i h; b) + \lambda_i h \int_0^{u+c_i h} L_i(u + c_i h - x; b)dF_i(x) + \alpha_i h \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u + c_i h; b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$\frac{L_i(u + c_i h; b) - L_i(u;b)}{h} = \left(\delta + \alpha_i + \lambda_i + \frac{0(h)}{h}\right)L_i(u + c_i h; b) - \lambda_i \int_0^{u+c_i h} L_i(u + c_i h - x; b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u + c_i h; b) + \frac{0(h)}{h}$$

Καθώς το $h \to 0$ έχουμε

$$cL_i'(u,b) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)L_i(u;b) - \lambda_i \int_0^{u} L_i(u - x; b)d\,F_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} L_k(u;b), 0 \le u \le b, i \in J$$

□

Ορισμός 5.3.4 Για $0 \leq u \leq b$ ορίζουμε

$$\xi_i(u;b) = \mathbb{P}_i\{sup_{0\leq t\leq T_\infty} U(t) < b, T_\infty < \infty | U(0) = u, I(0) = i\}, i \in J$$

(5.3.2)

Να είναι η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u χωρίς να έχει φτάσει το κατώφλι b πριν την χρεοκοπία, δοθέντος ότι το αρχικό περιβάλλον είναι i όπου T_∞ ο χρόνος χρεοκοπίας χωρίς την ύπαρξη κατωφλιού.

Αλλιώς $\xi_i(u;b)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη απορροφητικού ορίου b, δοθέντος αρχικής κατάστασης i.

□

Προφανώς $\xi_i(u;b) = 0$ για $b \leq u$

Ορισμός 5.3.5 Ορίζουμε $\chi_i(u;b)$ να είναι η πιθανότητα οτι η διαδικασία πλεονάσματος πλησιάζει το όριο b από αρχικό απόθεμα u χωρίς να έχει ήδη γίνει μηδέν, δοθέντος αρχικής κατάστασης i.

□

Θεώρημα 5.3.2 *Για μια μικρή τιμή* $h > 0$, *δοθέντος των ενδεχομένων που συμβαίνουν στο* $[0,h]$*και για* $0 \leq u \leq b$ *έχουμε*

$$c\chi_i'(u;b) = (\alpha_i + \lambda_i)\chi_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u \chi_i(u-x;b)\, dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\, \chi_k(u;b)$$

(5.3.3)

Με οριακές συνθήκες $\chi_i(b;b) = 1$

Απόδειξη.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα $[0,h]$

Στο παραπάνω διάστημα μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα τέσσερα ενδεχόμενα:

- Κανένα ζημιογόνο ενδεχόμενο και καμία αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0, h]$
- Ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο στο $[0, h]$ (προκαλεί ή όχι χρεοκοπία)
- Αλλαγή περιβάλλοντος στο $[0, h]$
- Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα συμβαίνουν στο $[0, h]$

Έτσι έχουμε

$$\chi_i(u;b) = (1-\alpha_i h - \lambda_i h)\chi_i(u+c_i h;b) + \lambda_i h\int_0^{u+c_i h}\chi_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) + \alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\chi_k(u+c_i h;b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$\chi_i(u;b) = \chi_i(u+c_i h;b) - (\alpha_i+\lambda_i)h\chi_i(u+c_i h;b) + \lambda_i h\int_0^{u+c_i h}\chi_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) + \alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\chi_k(u+c_i h;b) + 0(h) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi_i(u+c_i h;b) - \chi_i(u;b)}{h} = (\alpha_i+\lambda_i)\chi_i(u+c_i h;b) - \lambda_i\int_0^{u+c_i h}\chi_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) - \alpha_i\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\chi_k(u+c_i h;b) + \frac{0(h)}{h}$$

Καθώς το $h \to 0$ έχουμε

$$c\chi_i'(u;b) = (\alpha_i+\lambda_i)\chi_i(u;b) - \lambda_i\int_0^{u}\chi_i(u-x;b)\,dF_i(x) - \alpha_i\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\chi_k(u;b)$$

Έστω $v_{i,j}^0(u)$ οι λύσεις της ολοκληρό-διαφορικής εξίσωσης (5.1.2) με δ=0

Τότε

$$\chi_i(u;b) = \sum_{j=1}^{m} h_j(b)\ v_{i,j}^0(u), 0 \le u \le b, i \in J \tag{5.3.5}$$

όπου $h_1(b), h_2(b), \dots, h_m(b)$ οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{m} h_j(b)\, v_{i,j}^{0}(u) = 1, i \in J$$

(5.3.6)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Θεωρούμε

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$$

Και

$$f_2(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$$

Οι κατανομές των μεγεθών ζημιών για τις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα.

Με αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace που ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_0(s)}{p_1(s)} = \frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}}$$

Και

$$\hat{f}_2(s) = \frac{q_0(s)}{q_1(s)} = \frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}$$

Όπου

$$p_0(s) = \frac{1}{3}$$

$$p_1(s) = s + \frac{1}{3}$$

$$q_0(s) = \frac{1}{4}$$

$$q_1(s) = s + \frac{1}{4}$$

Θεωρούμε επίσης ότι στο χρόνο t συμβαίνουν ζημιές που ακολουθούν διαδικασία Poisson με παραμέτρους $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ για $I(t) = 1$ και $I(t) = 2$ αντίστοιχα. Ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων για τις δυο καταστάσεις είναι

$c_1 = 4, c_2 = 3$ και $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$

Θεωρούμε τον πίνακα τάσης

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της εμπεριεχόμενης αλυσίδας Markov

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_1} \\ \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε επίσης ότι η μοναδική στάσιμη κατανομή πιθανότητας της εμπεριεχόμενης αλυσίδας Markov της διαδικασίας I, είναι

$$n = (n_1, n_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$$

Τότε

$$\pi_i = \frac{\dfrac{\lambda_i n_i}{\alpha_i}}{\dfrac{\lambda_1 n_1}{\alpha_1} + \dfrac{\lambda_2 n_2}{\alpha_2}}$$

Άρα

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) = (\frac{15}{18}, \frac{3}{18})$$

Επίσης

$$d = \frac{\dfrac{\lambda_1}{\alpha_1} * \left(\dfrac{c_1}{\lambda_1} - \mu_1\right) + \dfrac{\lambda_2}{\alpha_2} * \left(\dfrac{c_2}{\lambda_2} - \mu_2\right)}{\dfrac{\lambda_1}{\alpha_1} + \dfrac{\lambda_2}{\alpha_2}}$$

Άρα ικανοποιείται η συνθήκη $d > 0$ αφού ισχύει

$$d = \frac{\dfrac{1}{1/3} * \left(\dfrac{4}{1} - 3\right) + \dfrac{1}{2/3} * (\dfrac{3}{1} - 4)}{\dfrac{1}{1/3} + \dfrac{1}{2/3}} = 1 > 0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.1 οι ποσότητες $\Psi_1(y; 0)$ και $\Psi_2(y; 0)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\Psi_1(y;0) = \frac{\lambda_1}{c_1 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})} e^{-\frac{y}{\mu_1}} + \frac{\frac{\lambda_2 * a_1 * \mu_2}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})} e^{-\frac{y}{\mu_2}} + \frac{\lambda_1 * a_2 * \mu_1}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})} e^{-\frac{y}{\mu_1}}}{1 - \frac{\lambda_2}{c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})}}$$

$$\Psi_1(y;0) = \frac{1}{4 * (\rho + \frac{1}{3})} e^{-\frac{y}{3}} + \frac{\frac{1 * \frac{1}{3} * \frac{1}{4}}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{4})} e^{-\frac{y}{4}} + \frac{1 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3}}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{3})} e^{-\frac{y}{3}}}{1 - \frac{1}{3 * (\rho + \frac{1}{4})}}$$

$$\Psi_1(y;0) = e^{-\frac{y}{3}} + 1{,}34104(0{,}0218828 e^{-\frac{y}{3}} + 0{,}0091024 e^{-\frac{y}{4}})$$

(6.1)

Ομοίως

$$\Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_2}{c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})} e^{-\frac{y}{\mu_2}} + \frac{\frac{\lambda_1 * a_2 * \mu_1}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})} e^{-\frac{y}{\mu_1}} + \frac{\lambda_2 * a_1 * \mu_2}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})} e^{-\frac{y}{\mu_2}}}{1 - \frac{\lambda_2}{c_1 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})}}$$

$$\Psi_2(y;0) = \frac{1}{3 * (\rho + \frac{1}{4})} e^{-\frac{y}{4}} + \frac{\frac{1 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3}}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{3})} e^{-\frac{y}{3}} + \frac{1 * \frac{1}{3} * \frac{1}{4}}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{4})} e^{-\frac{y}{4}}}{1 - \frac{1}{4 * (\rho + \frac{1}{3})}}$$

$$\Psi_2(y;0) = 3e^{-\frac{y}{4}} + 1{,}26833(0{,}0218828 e^{-\frac{y}{3}} + 0{,}0091024 e^{-\frac{y}{4}})$$

(6.2)

Όπου ρ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης

$$Q(s) := \left[s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right] = \frac{\alpha_1 * \alpha_2}{c_1 * c_2}$$

$$Q(s) := \left[s - \frac{1 + \frac{1}{3}}{4} + \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{3}}{s + \frac{1}{3}}\right]\left[s - \frac{1 + \frac{1}{3}}{3} + \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{4}}{s + \frac{1}{4}}\right] = \frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{3}}{4 * 3}$$

(6.3)

Η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες $s = 0$

$s = 0{,}51925 = \rho$

$s = -0{,}182663 = -R_1$

$s = -0{,}0247066 = -R_2$

Έτσι έχουμε για τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας με αρχικό απόθεμα 0,

$$\Phi_1(0) = \frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2 \mu_2}{c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1 \mu_1}{c_1}\right)}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}[1 - \hat{f}_2(\rho)]}$$

Έτσι

$$\Phi_1(0) = \frac{\frac{1/3}{4}\left(1 - \frac{1 * 4}{3}\right) + \frac{2/3}{3}\left(1 - \frac{1 * 3}{4}\right)}{0{,}51925 - \frac{1}{3}[1 - \frac{\frac{1}{4}}{0{,}51925 + \frac{1}{4}}]} = 0{,}0961767$$

(6.4)

Ομοίως

$$\Phi_2(0) = \frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1-\frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}\right)+\frac{\alpha_2}{c_2}\left(1-\frac{\lambda_1\mu_1}{c_1}\right)}{\rho-\frac{\lambda_1}{c_1}[1-\hat{f}_1(\rho)]}$$

$$\Phi_2(0) = \frac{\frac{1/3}{4}\left(1-\frac{1*4}{3}\right)+\frac{2/3}{3}\left(1-\frac{1*3}{4}\right)}{0{,}51925-\frac{1}{4}\left[1-\frac{\frac{1}{3}}{0{,}51925+\frac{1}{3}}\right]} = 0{,}0768621$$

(6.5)

Ισχύει για τους μετασχηματισμούς Laplace των πιθανοτήτων μη χρεοκοπίας

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{\Phi_1(0)\left[s-\frac{\lambda_2+\alpha_2}{c_2}+\frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right]-\Phi_2(0)\frac{\alpha_1}{c_1}}{Q(s)-\frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}}$$

Έτσι

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{0{,}0961767\left[s-\frac{1+2/3}{3}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}\right]-0{,}0768621\frac{1/3}{4}}{\left[s-\frac{1+\frac{1}{3}}{4}+\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}}\right]\left[s-\frac{1+\frac{1}{3}}{3}+\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}\right]-\frac{1/3}{4}*\frac{2/3}{3}}$$

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{0{,}0961767\left[-0{,}512925+s+\frac{1}{3}\left(-0{,}327686+\frac{1}{4(s+\frac{1}{4})}\right)\right]}{-\frac{1}{27}+\left(-\frac{5}{9}+s+\frac{1}{12(s+\frac{1}{4})}\right)\left(-\frac{1}{3}+s+\frac{1}{12(s+\frac{1}{3})}\right)}$$

(6.6)

Ομοίως

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{\Phi_2(0)\left[s-\frac{\lambda_1+\alpha_1}{c_1}+\frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right]-\Phi_1(0)\frac{\alpha_2}{c_2}}{Q(s)-\frac{\alpha_1}{c_1}\frac{\alpha_2}{c_2}}$$

Έτσι

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{0{,}0768621\left[s - \frac{1+1/3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}}\right] - 0{,}0961767\frac{1/3}{4}}{\left[s - \frac{1+\frac{1}{3}}{4} + \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}}\right]\left[s - \frac{1+\frac{1}{3}}{3} + \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}\right] - \frac{1/3}{4} * \frac{2/3}{3}}$$

$$\hat{\Phi}_2(s) = \frac{0{,}0768621[-0{,}512925 + s + \frac{1}{4}\left(-0{,}393891 + \frac{1}{3(s+\frac{1}{3})}\right)]}{-\frac{1}{27} + \left(-\frac{5}{9} + s + \frac{1}{12(s+\frac{1}{4})}\right)(-\frac{1}{3} + s + \frac{1}{12(s+\frac{1}{3})})} \tag{6.7}$$

Επίσης έχουμε

$$g_1(s) = \frac{s+\frac{1}{3}}{\rho+\frac{1}{4}}$$

$$g_2(s) = \frac{s+\frac{1}{4}}{\rho+\frac{1}{3}}$$

$$h_1(s) = \left(s + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)$$

$$h_2(s) = \left(s + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4}\right)$$

$$g_{11} = \frac{-R_1 + \frac{1}{3}}{-1(R_1 - R_2)(\rho + \frac{1}{4})}$$

$$g_{12} = \frac{-R_2 + \frac{1}{3}}{1(R_1 - R_2)(\rho + \frac{1}{4})}$$

$$g_{21} = \frac{-R_1 + \frac{1}{4}}{-1(R_1 - R_2)(\rho + \frac{1}{3})}$$

$$g_{22} = \frac{-R_2 + \frac{1}{4}}{1(R_1 - R_2)(\rho + \frac{1}{3})}$$

$$h_{11} = \frac{\left(-R_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)(-R_1 + \frac{1}{3})}{-1(R_1 - R_2)}$$

$$h_{12} = \frac{\left(-R_2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)(-R_2 + \frac{1}{3})}{(R_1 - R_2)}$$

$$h_{21} = \frac{\left(-R_1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(-R_1 + \frac{1}{4})}{-1(R_1 - R_2)}$$

$$h_{22} = \frac{\left(-R_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(-R_2 + \frac{1}{4})}{(R_1 - R_2)}$$

$$g_1 = \frac{\left(-R_1 + \frac{1}{4}\right)(-R_1 + \frac{1}{3})}{-(R_1 - R_2)}$$

$$g_2 = \frac{\left(-R_2 + \frac{1}{4}\right)(-R_2 + \frac{1}{3})}{(R_1 - R_2)}$$

Έτσι οι ποσότητες $\Psi_1(y;u)$ και $\Psi_2(y;u)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\Psi_1(y;u) = \left[\Psi_1(y;0) - \frac{1}{c_1\left(\rho + \frac{1}{\mu_1}\right)} e^{-\frac{y}{\mu_1}}\right] \sum_{j=1}^{2} g_{1j} e^{-R_j u} + \frac{\lambda_1}{c_1\left(\rho + \frac{1}{\mu_1}\right)} e^{-\frac{y+u}{\mu_1}}$$
$$+ \frac{\lambda_1 e^{-\frac{y}{\mu_1}}}{c_1\left(\rho + \frac{1}{\mu_1}\right)} \sum_{j=1}^{2} [h_{1j} + \frac{\alpha_2 * \mu_1}{c_2} g_j] \frac{e^{-\frac{u}{\mu_1}} - e^{-R_j u}}{(R_j - \frac{1}{\mu_1})}$$
$$+ \frac{\lambda_1 * \alpha_2 * \mu_1}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})} e^{-\frac{y+u}{\mu_1}} + \frac{\lambda_2 * \alpha_1 * \mu_2}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})} e^{-\frac{y+u}{\mu_2}}$$
$$+ \frac{\mu_2 e^{-\frac{y}{\mu_2}}}{(\rho + \frac{1}{\mu_2})} \sum_{j=1}^{2} \frac{g_j [e^{-\frac{u}{\mu_2}} - e^{-R_j u}]}{(R_j - \frac{1}{\mu_2})}$$

(6.8)

$$\Psi_1(y;u) = \left[\Psi_1(y;0) - \frac{1}{4\left(\rho + \frac{1}{3}\right)} e^{-\frac{y}{3}}\right] \sum_{j=1}^{2} g_{1j} e^{-R_j u} + \frac{1}{4\left(\rho + \frac{1}{3}\right)} e^{-\frac{y+u}{3}}$$
$$+ \frac{1 e^{-\frac{y}{3}}}{4\left(\rho + \frac{1}{3}\right)} \sum_{j=1}^{2} [h_{1j} + \frac{\frac{2}{3} * 3}{3} g_j] \frac{e^{-\frac{u}{3}} - e^{-R_j u}}{(R_j - \frac{1}{3})} + \frac{1 * \frac{2}{3} * 3}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{3})} e^{-\frac{y+u}{3}}$$
$$+ \frac{1 * \frac{1}{3} * 4}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{4})} e^{-\frac{y+u}{4}} + \frac{4 e^{-\frac{y}{4}}}{(\rho + \frac{1}{4})} \sum_{j=1}^{2} \frac{g_j [e^{-\frac{u}{4}} - e^{-R_j u}]}{(R_j - \frac{1}{4})}$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_2(y;u) = {} & \left[\Psi_2(y;0) - \frac{1}{c_2\left(\rho + \frac{1}{\mu_2}\right)} e^{-\frac{y}{\mu_2}}\right] \sum_{j=1}^{2} g_{2j} e^{-R_j u} + \frac{\lambda_1}{c_2\left(\rho + \frac{1}{\mu_2}\right)} e^{-\frac{y+u}{\mu_2}} \\
& + \frac{\lambda_2 e^{-\frac{y}{\mu_2}}}{c_2\left(\rho + \frac{1}{\mu_2}\right)} \sum_{j=1}^{2} [h_{2j} + \frac{\alpha_1 * \mu_2}{c_1} g_j] \frac{e^{-\frac{u}{\mu_2}} - e^{-R_j u}}{(R_j - \frac{1}{\mu_2})} \\
& + \frac{\lambda_2 * \alpha_1 * \mu_2}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_2})} e^{-\frac{y+u}{\mu_2}} + \frac{\lambda_1 * \alpha_2 * \mu_1}{c_1 * c_2 * (\rho + \frac{1}{\mu_1})} e^{-\frac{y+u}{\mu_1}} \\
& + \frac{\mu_1 e^{-\frac{y}{\mu_1}}}{(\rho + \frac{1}{\mu_1})} \sum_{j=1}^{2} \frac{g_j [e^{-\frac{u}{\mu_1}} - e^{-R_j u}]}{(R_j - \frac{1}{\mu_1})}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\Psi_2(y;u) = {} & \left[\Psi_2(y;0) - \frac{1}{3\left(\rho + \frac{1}{4}\right)} e^{-\frac{y}{4}}\right] \sum_{j=1}^{2} g_{2j} e^{-R_j u} + \frac{1}{3\left(\rho + \frac{1}{4}\right)} e^{-\frac{y+u}{4}} \\
& + \frac{1 e^{-\frac{y}{4}}}{3\left(\rho + \frac{1}{4}\right)} \sum_{j=1}^{2} [h_{2j} + \frac{\frac{1}{3} * 4}{4} g_j] \frac{e^{-\frac{u}{4}} - e^{-R_j u}}{(R_j - \frac{1}{4})} + \frac{1 * \frac{1}{3} * 4}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{4})} e^{-\frac{y+u}{4}} \\
& + \frac{1 * \frac{2}{3} * 3}{4 * 3 * (\rho + \frac{1}{3})} e^{-\frac{y+u}{3}} + \frac{3 e^{-\frac{y}{3}}}{(\rho + \frac{1}{3})} \sum_{j=1}^{2} \frac{g_j [e^{-\frac{u}{3}} - e^{-R_j u}]}{(R_j - \frac{1}{3})}
\end{aligned}
$$

Όπου οι ποσότητες $\Psi_1(y;0)$ και $\Psi_2(y;0)$ δίνονται από τις σχέσεις (6.4) και (6.5).

Βιβλιογραφία

Albrecher, H. & Boxma,O.J.,(2005) "On the discounted penalty function in a Markov-dependent risk model" *Insurance: Mathematics and Economics* vol.37

Asmussen, S. (1989) "Risk theory in a Markovian environment" *Scandinavian Actuarial Journal* 2

Asmussen S.,(*2000) Ruin Probabilities* (World Scientific)

Asmussen S., Frey A.,Rolski T.,& Schmidt V. (1995). "Does Markov-modulation increase the risk?" *ASTIN Bulletin* 25

Bauerle N. (1996) "Some results about the expected ruin time in Markov-modulated risk models" *Insurance: Mathematics and Economics* 18

Chadjiconstantinidis S., Papaioannou A.D. (2009) "Analysis of the Gerber –Shiu function and dividend barrier problems for a risk process with two classes of claims" *Insurance: Mathematics and Economics* 45

Dickson D.C.M. & Waters H.R. (2004) "Some optimal dividend problems" *ASTIN Bulletin* vol. 34 (1)

Dickson D.C.M. & Hipp, C. (2001) "On the time to ruin for Erlang (2) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics* 29

Dickson D.C.M. & Hipp, C. (2001) "Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 22

Dickson D.C.M. & Gray, J. (1984) "Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier" *Scandinavian Actuarial Journal*

Dickson D.C.M. & Li, S. (2006)"The maximum surplus before ruin in an Erlang(n) risk process and related problems" *Insurance: Mathematics and Economics* 38

Dickson, D.C.M. (1992) " On the distribution of the surplus prior to ruin" *Insurance: Mathematics and Economics* 11

Gerber, H. U., Goovaerts, M.J. & Kass, R. (1987) On the probability and severity of ruin *ASTIN Bulletin* 17

Gerber, H.U & Shiu, E.S.W.(1998), "On the time value of ruin" *North American Actuarial Journal* vol.2

Gerber H.U, Lin X.S., Yang H., (2006) "A note on the dividends-penalty identity and the optimal dividend barrier" *ASTIN Bulletin* 36 (2)

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., (1997) "The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* 21

Li S. & Garrido J. (2004) "On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier" *Insurance: Mathematics and Economics 35*

Li S. & Garrido J. (2004) "On ruin for the Erlang*(n)* risk process" *Insurance: Mathematics and Economics* 34

Li S. & Garrido J. (2005) "On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function" *Advances in Applied Probabilities* 37

Lin X.S., Willmot G.E. & Drekic S., (2003), "The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function" *Insurance: Mathematics and Economics* 33

Lin X.S., Willmot G.E., (2000) "The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin" *Insurance: Mathematics and Economics* 27

Lin X.S., Willmot G.E., (1999) "Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory" *Insurance: Mathematics and Economics* 25

Lu Y.,& Li S., (2005) "On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model". *Insurance: Mathematics and Economics* 37

Lu Y.,& Li S., (2005) "On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes.". *Insurance: Mathematics and Economics* 36

Lu Y.,& Li S., (2007) "Moments of the dividends payments and related problems in a Markov-modulated risk model" *North American Actuarial Journal* vol 11(2)

Lu Y.,& Li S., (2007) "Some optimal dividend problems in a Markov-modulated risk model" *Economic University of Melbourne* No.130

Lu Y.,& Li S., (2008) "The decompositions of the discounted penalty functions and dividends-penalty identity in a Markov-modulated risk model" *Economic University of Melbourne* No.162

Lu Y (2006) "On the severity of ruin in a Markov-modulated risk model" *Scandinavian Actuarial Journal* 4

Ng, A.C.Y. & Yang, H. (2006) "On the joint distribution of surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model" *Stochastic Processes and their Applications* vol.116

Picard P., (1994) "On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model" *Insurance: Mathematics and Economics* 14

Reinhard J.M. (1984). "On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment." *ASTIN Bulletin* 14

Reinhard, J.M. & Snoussi, M. (2002) "The severity of ruin in a discrete semi-Markov risk model *Stochastic Models"* 18

Reinhard, J.M. & Snoussi, M. (2001) "On the distribution of the surplus prior to ruin in a discrete semi-Markov risk model" *ASTIN Bulletin* vol. 31

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. & Teugels, J. (1999) *Stochastic Processes for Insurance and Finance* (Wiley)

Schmidli, H., (1999) "On the distribution of the surplus prior to and at ruin" *ASTIN Bulletin* 29

Snoussi, M. (2002) "The severity of ruin in Markov-modulated risk models. *Schweiz. Aktuarver Mitt.* 1

Willmot, G.E., Dickson, D.C.M., (2003) "The Gerber-Shiu discounted penalty function in the stationary renewal risk model" *Insurance: Mathematics and Economics* 32

Wu, Y. (1999) "Bounds for the ruin probability under a Markovian modulated risk model" *Communications in Statistics-Stochastic Models* 15

Zhang Xin (2007) "On the ruin problem in a Markov-modulated risk model" *Methodology and Computing in Applied Probability* 10

Zhu J., Yang H., (2007) "Ruin theory for a Markov regime-switching model under a threshold dividend strategy" *Insurance: Mathematics and Economics* 42

Zhu J., Yang H., (2009) "On differentiability of ruin functions under Markov-modulated models" *Stochastic Processes and their Applications* 119