

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ
ΧΡΟΝΩΝ ΖΩΗΣ**

Κωνσταντίνος Β. Παπαδημητρίου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάιος 2004

to be a significant determinant of the extent to which the public will accept a proposed project (see also Roberts and Smith 2004).

It is also possible that the public's perception of the benefits of a proposed project will be a significant determinant of their willingness to accept it. For example, the public may be more willing to accept a proposed project if they believe that the benefits of the project will be significant and will be distributed fairly.

Finally, it is possible that the public's perception of the risks of a proposed project will be a significant determinant of their willingness to accept it. For example, the public may be more willing to accept a proposed project if they believe that the risks of the project will be low and will be managed effectively.

These three factors – the public's perception of the costs, benefits, and risks of a proposed project – are likely to be important determinants of the public's willingness to accept it. However, there are many other factors that may also be important, and these factors may interact with each other in complex ways.

For example, the public's perception of the costs of a proposed project may be influenced by the public's perception of the benefits of the project. Similarly, the public's perception of the risks of a proposed project may be influenced by the public's perception of the benefits of the project.

Therefore, it is important to consider all of these factors when assessing the public's willingness to accept a proposed project. This will help to ensure that the project is accepted by the public and that the benefits of the project are realized.

In conclusion, the public's willingness to accept a proposed project is a complex phenomenon that is influenced by many factors. These factors include the public's perception of the costs, benefits, and risks of the project, as well as the public's perception of the fairness of the project and the public's perception of the trustworthiness of the project sponsor.

Understanding these factors is important for project sponsors who want to ensure that their projects are accepted by the public. This will help to ensure that the projects are successful and that the benefits of the projects are realized.

Therefore, project sponsors should take the time to understand the public's perception of the costs, benefits, and risks of their projects. This will help them to design projects that are more likely to be accepted by the public.

In addition, project sponsors should also take the time to build trust with the public. This will help to ensure that the public is more willing to accept their projects.

Finally, project sponsors should also take the time to communicate the benefits of their projects to the public. This will help to ensure that the public is aware of the benefits of the projects and is more likely to accept them.

By following these guidelines, project sponsors can increase the public's willingness to accept their projects. This will help to ensure that the projects are successful and that the benefits of the projects are realized.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ
ΧΡΟΝΩΝ ΖΩΗΣ**

Κωνσταντίνος Β. Παπαδημητρίου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάιος 2004

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)
-
-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

ACCELERATED LIFE TESTING

By

Constantinos V. Papadimitriou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
May 2004

*Αυτή η εργασία αφιερώνεται
στην οικογένεια μου*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους εκείνους που βοήθησαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, κ. Κούτρα Μάρκο για τη συμβολή του στη συγγραφή της εργασίας.

Ολοκληρώνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, στην οποία και αφιερώνεται αυτή η εργασία, για την πολύτιμη συμπαράσταση που έδειξε.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία ασχολείται με το θέμα των Επιταχυνόμενων Ελέγχων Χρόνων Ζωής (*Accelerated Life Testing* ή ALT). Δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί για την εισαγωγή στην έννοια των ALT καθώς και περιπτώσεις στις οποίες γίνεται εφαρμογή της μεθόδου. Κατόπιν γίνεται μια γενική αναφορά στον τρόπο διεξαγωγής πειραμάτων που αφορούν τους ALT όπως επίσης και στην εξαγωγή συμπερασμάτων από δεδομένα που προέρχονται από σχεδιασμούς ALT. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα επικρατέστερα και σημαντικότερα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι ALT όπως και τα υπομοντέλα τους και οι περιοχές εφαρμογής τους. Τα παραπάνω μοντέλα ανάλογα με τη δομή τους εκτιμώνται χρησιμοποιώντας μεθόδους τόσο από τον χώρο της παραμετρικής όσο και της μη παραμετρικής στατιστικής.

Abstract

This MSc thesis studies the subject of accelerated life testing (ALT). The basic definitions are given in order to clarify the main concept of ALT and cases in which the method can be applied. Next a review is presented of the techniques used in establishing an ALT as well as inference issues pertaining to ALT designs. Afterwards the prevalent and most important models used in ALT are presented along with their submodels and their areas of application. Those models are, depending on their structure, studied using methods either from the parametric or the non parametric statistics.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xvii
Κατάλογος Σχημάτων	xix
Κατάλογος Συντομογραφιών	xxi
1. Εισαγωγή	1
2. Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής	4
2.1 Ορισμός των επιταχυνόμενων ελέγχων χρόνων ζωής	4
2.2 Σκοποί – στόχοι των EEXZ	5
2.3 Είδη των EEXZ	5
2.4 Σχέση χρόνου ζωής – πίεσης	7
2.5 Είδη πιέσεων και επίπεδα πίεσης	8
2.6 Υλικά και προϊόντα στα οποία χρησιμοποιούνται EEXZ	9
3. Τρόποι διεξαγωγής επιταχυνόμενων ελέγχων και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων	13
3.1 Πειραματικοί σχεδιασμοί στους EEXZ	13
α. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας σταθερή πίεση	13
β. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας πίεση αυξανόμενη κατά βήματα	15
γ. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας πίεση που είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση του χρόνου	16
3.2 Επεξεργασία των επιταχυνόμενων δεδομένων	17
α. Προσαρμογή των δεδομένων σε γνωστή οικογένεια κατανομών και εφαρμοσμένες τεχνικές	17
β. Επίδραση της πίεσης στο χρόνο ζωής των πειραματικών μονάδων	19
γ. Βασικότερες σχέσεις χρόνων ζωής – πίεσης στους EEXZ	21
I) Σχέση Arrhenius	23
II) Σχέση Inverse Power	33

III) Σχέση Eyring	39
3.3 Παραμετρικά και μη Παραμετρικά δεδομένα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εκτίμησής τους	40
α. Παραμετρικό παράδειγμα	42
β. Μη παραμετρικό παράδειγμα	46
4. Γενικευμένα μοντέλα	54
4.1 Εισαγωγή στα γενικευμένα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι EEXZ	54
4.2 Μοντέλο αναλογικού κινδύνου	57
α. Ορισμός	57
β. Ιδιότητες	57
4.3 Μοντέλο Προσθετικής Συσσώρευσης των Ζημιών	58
α. Ορισμός	58
β. Το AAD μοντέλο στις διάφορες μορφές εφαρμογής επιταχυνόμενης πίεσης	59
γ. Τροποποιημένο AAD μοντέλο και η σχέση του με το AAD	60
δ. Υπομοντέλα του AAD στην περίπτωση που εφαρμόζεται σταθερή πίεση	61
4.4 Γενικευμένο πολλαπλασιαστικό μοντέλο	64
α. Ορισμός	64
β. Το μοντέλο GM στις διάφορες μορφές εφαρμογής επιταχυνόμενης πίεσης	65
γ. Υπομοντέλα του GM	66
δ. Κλάσεις υπομοντέλων του GM	68
ε. Τροποποιημένο GM μοντέλο – σύνδεση με το GM μοντέλο	70
4.5 Το γενικευμένο μοντέλο του Sedyakin ή το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης	72
α. Ορισμός	72
β. Μορφή του μοντέλου στην περίπτωση της αυξανόμενης πίεσης κατά βήματα	72
4.6 Γενικευμένα μοντέλα αναλογικού κινδύνου	73
α. Ορισμός GPH 1	73

β. Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου GPH1	74
γ. Διάφορα γνωστά υπομοντέλα του GPH1	75
δ. Ορισμός του GPH 2	76
5. Μέθοδοι Εκτίμησης	78
5.1 Μη παραμετρική εκτίμηση του μοντέλου AAD	78
5.2 Εκτίμηση του μοντέλου του Sedyakin	87
5.3 Μη παραμετρική εκτίμηση του γενικευμένου μοντέλου αναλογικού κινδύνου	90
5.4 Εκτίμηση του γενικευμένου πολλαπλασιαστικού μοντέλου	93
Παραρτήματα	98
Π1. Λογοκριμένα δεδομένα	98
Π2. Μέθοδος Newton ή Newton – Raphson	100
Π3. Διαγράμματα πιθανότητας	102
Περίληψη	105
Abstract	106
Βιβλιογραφία	107

Κατάλογος Πινάκων

1.	Πίνακας μετασχηματισμών	43
2.	Πίνακας προσομοιωμένων και εκτιμώμενων τιμών της βαθμίδας επιτυχίας	50
3.	Πίνακας εκτιμητών ΕΤ και ΜΠ	53

Κατάλογος Σχημάτων

1.	Διάγραμμα πίεσης – χρόνου ζωής σε EEXZ που εφαρμόζεται σταθερή πίεση σε κάθε φάση του πειράματος	15
2.	Πειραματικός σχεδιασμός EEXZ με πίεση αυξανόμενη κατά βήματα	16
3.	Σχεδιασμός EEXZ όταν η πίεση αυξάνεται προοδευτικά με το χρόνο	17
4.	Διάγραμμα χρόνου ζωής – πίεσης σε μοντέλο Arrhenius – Weibull	26
5.	Διάγραμμα κατανομής Weibull όταν έχουμε σχέση χρόνου ζωής - πίεσης Arrhenius	28
6.	Διάγραμμα Arrhenius για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής - πίεσης Arrhenius – Lognormal	31
7.	Διάγραμμα πιθανότητας Lognormal για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Lognormal – Arrhenius	32
8.	Διάγραμμα Inverse Power για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Inverse Power – Weibull	35
9.	Διάγραμμα πιθανότητας Weibull για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Weibull – Inverse Power Law	36
10.	Θεωρητική και εκτιμημένη βαθμίδα αποτυχίας σε σχέση με το χρόνο	50
11.	Διάγραμμα διασποράς	51
12.	Γραφική εξήγηση της μεθόδου Newton – Raphson	100
13.	Γραφική επεξήγηση της διπλά λογαριθμημένης αντίστροφης κλίμακας	103

Κατάλογος Συντομογραφιών

EEXZ	Επιταχυνόμενοι Έλεγχοι Χρόνων Ζωής
α.σ.κ.	αθροιστική συνάρτηση κατανομής
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
ε.μ.π.	εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας
ε.ε.τ.	εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων
PH	Proportional Hazards
τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
π.π.	πηγή πληροφοριών
σ.κ.	συνάρτηση κινδύνου
σ.ε.	συνάρτηση επιβίωσης
AAD	Additive Accumulation of Damages
AFT	Accelerated Failure Time
GM	Generalized Multiplicative
CE	Cumulative Exposure
GPH	Generalized Proportional Hazards

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η σημερινή εποχή μπορεί να χαρακτηριστεί από τον υψηλό ανταγωνισμό που αναπτύσσεται ολοένα και περισσότερο στο εμπόριο. Ο ανταγωνισμός αποτελεί το αποτέλεσμα της ελεύθερης παγκόσμιας αγοράς και της δυνατότητας που έχει πλέον ο καθένας να διαθέσει στους αγοραστές του ποιοτικά προϊόντα. Με τον όρο ποιότητα ενός προϊόντος εννοούμε το αποτέλεσμα ενός αριθμού επιθυμητών συνιστωσών οι οποίες αναφέρονται σε διάφορους επί μέρους παράγοντες όπως: Απόδοση, αξιοπιστία, διάρκεια, επισκευασιμότητα, αισθητική, δυνατότητες, φήμη επιχείρησης και συμμόρφωση με τις προδιαγραφές.

Προκειμένου να αναβαθμίσει μια βιομηχανία την ποιότητα των προϊόντων της πραγματοποιεί συχνά στατιστικούς ελέγχους ώστε να διαπιστώσει κατά πόσο τα παραγόμενα προϊόντα ακολουθούν το ποιοτικό επίπεδο που επιθυμεί η εταιρία να αποδοθεί προς το αγοραστικό κοινό. Ο στατιστικός έλεγχος αποσκοπεί στην εξαγωγή ενός αριθμού συμπερασμάτων που αφορούν το χρόνο ζωής του προϊόντος και αποτελεί τη στατιστική ανάλυση που διενεργείται μετά την αποτυχία ενός δείγματος προϊόντων που έχει στη διάθεση του ο ερευνητής.

Ένα πρόβλημα που απαντάται κατά την πραγματοποίηση στατιστικών ελέγχων ποιότητας είναι ότι συνήθως απαιτούν μεγάλα χρονικά διαστήματα μέχρι να περατωθούν. Ειδικά σε περιπτώσεις προϊόντων όπως οι κινητήρες, οι ηλεκτρικές συσκευές και τα συστατικά μέρη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι μέσοι χρόνοι ζωής τους μπορούν να φτάσουν εκατοντάδες χιλιάδες ώρες ή δεκαετίες. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην έχει σημασία το στατιστικό συμπέρασμα του ελέγχου καθώς αν αναλογιστούμε την ταχύτητα με την οποία αναπτύσσεται η τεχνολογία στις μέρες μας είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το προϊόν θα έχει ξεπεραστεί με τον τερματισμό του πειράματος.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος έχουν αναπτυχθεί νέες μέθοδοι διεξαγωγής στατιστικών ελέγχων, οι οποίες έχουν την ιδιότητα να ελαττώνουν το χρόνο ζωής των προϊόντων και να καθιστούν το αποτέλεσμα του ελέγχου στατιστικά σημαντικό στα πλαίσια τις δεδομένης εποχής. Οι παραπάνω μεθοδολογίες θέτουν το δείγμα των προϊόντων σε

συνθήκες τεχνητής πίεσης έτσι ώστε να φέρουν την κατάσταση λειτουργίας τους σε οριακά σημεία. Συνεπώς αν ο μέσος χρόνος ζωής ενός δείγματος αντικειμένων κάτω από φυσιολογικές συνθήκες λειτουργίας είναι κάποια έτη, μπορεί να περιοριστεί σε κάποιες εβδομάδες εφόσον εκθέσουμε το δείγμα σε συνθήκες πίεσης υψηλότερες από αυτές τις κανονικής λειτουργίας. Οι αναπτυσσόμενες ως και σήμερα μέθοδοι λόγω της ιδιότητας που έχουν να επιταχύνουν το ρυθμό αποτυχίας τις προϊόντος καλούνται Επιταχυνόμενοι Έλεγχοι Χρόνων Ζωής (*Accelerated Life Tests (ALT)*).

Οι Επιταχυνόμενοι Έλεγχοι Χρόνων Ζωής (EEXZ) εισήχθησαν στο επιστημονικό πεδίο μετά το δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα με μια από τις πρώτες αναφορές στο θέμα να δίνεται από τον Levenbach, G.J. το 1957 για τους EEXZ στους πυκνωτές, ένα άρθρο που εκδόθηκε για βιομηχανικό ενδιαφέρον κυρίως παρά για επιστημονική μελέτη. Πρώιμες αναφορές στους EEXZ έγιναν από τον Chernoff, H., και τον Doksum, K., όπου ο πρώτος το 1962 παρουσίασε ορισμένους σχεδιασμούς επιταχυνόμενων ελέγχων χρόνων ζωής με κάποιες μεθόδους εκτίμησης ενώ ο δεύτερος το 1967 μελέτησε την ασυμπτωτική συμπεριφορά μοντέλων με αυξανόμενη βαθμίδα αποτυχίας. Το 1972 αποτέλεσε μια χρόνια σταθμό για το χώρο των EEXZ καθώς ο Cox, D.R. εισήγαγε το μοντέλο αναλογικού κινδύνου, το οποίο αποτέλεσε ένα από τα βασικότερα μοντέλα του τομέα. Την ίδια χρόνια ο Nelson, W.B. ανέπτυξε επιταχυνόμενους ελέγχους χρησιμοποιώντας τα μοντέλα Inverse Power και Arrhenius τα οποία αποτελούν ακόμα και σήμερα ένα ισχυρό σημείο αναφοράς στη διεξαγωγή EEXZ. Οι Steck G.P., Zimmer W.J. και Williams R.G. πραγματοποίησαν το 1974 μια από τις πρώτες απόπειρες εκτίμησης των παραμέτρων στα επιταχυνόμενα μοντέλα.

Το 1978 αναπτύχθηκε μια θεωρία επιταχυνόμενων ελέγχων για λογοκριμένα δεδομένα που ακολουθούν τις κατανομές Weibull, Κανονική και Λογαριθμοκανονική από τους Nelson, W.B. και Meeker, W.Q. ενώ ο Bagdonavicius V. εισήγαγε το μοντέλο αθροιστικής συσσώρευσης των ζημιών. Ο Nelson, W.B. δυο χρόνια αργότερα παρέδωσε το πρώτο του βιβλίο πάνω στους EEXZ και παρουσίασε μια διεξοδική ανάλυση για τα μοντέλα step-stress στους EEXZ. Με το ίδιο θέμα ασχολήθηκαν το 1983 οι Shaked, M. και Singpurwalla, N.D. δίνοντας ακόμα μεγαλύτερη έκταση. Ένα χρόνο νωρίτερα, το 1982, έγινε μια από τις πρώτες προσπάθειες για εκτίμηση των μοντέλων στους EEXZ με μη παραμετρικό τρόπο τόσο από τους Shaked, M. και Singpurwalla, N.D. όσο και από τους Basu, A.P. και Ebrahimi, N..

Το 1991 έγινε μια προσέγγιση, από τους Lin, Z. και Fei, H. για μη παραμετρική εκτίμηση σε EEXZ με πίεση που αυξάνεται προοδευτικά με το χρόνο ενώ το ίδιο έτος ο Viertl, R.

παρουσίασε ορισμένες στατιστικές μεθόδους για EEXZ. Ο Nelson, W.B. το 1990 δημοσίευσε το δεύτερο βιβλίο του πάνω σε EEXZ στο οποίο μελέτησε κυρίως τη συμπεριφορά των θεμελιωδών σχέσεων που αναπτύσσονται στους EEXZ. Μετά το 1995 οι πλειοψηφία των επιστημόνων ασχολείται με μη παραμετρικούς EEXZ. Έτσι το 1995 οι Bagdonavicius, V. και Nikulin, M. δημοσιεύουν ένα άρθρο για μη παραμετρικά μοντέλα στους EEXZ ενώ με το ίδιο θέμα ασχολούνται τη δεδομένη περίοδο και οι Lin, D.Y. και Ying, Z. για περιπτώσεις που οι μεταβλητές είναι χρονοεξαρτημένες. Το 1999 οι Bagdonavicius, V. και Nikulin, M. παρουσιάζουν το γενικευμένο μοντέλο αναλογικού κινδύνου καθώς και νέες μεθόδους μη παραμετρικής εκτίμησης για τα πλέον γενικευμένα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί. Τα τελευταία χρόνια οι EEXZ χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη βιομηχανία και για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί και ειδικά στατιστικά πακέτα, όπως τα ALTA 6 PRO και Weibull++, για ακριβέστερα και ταχύτερα αποτελέσματα.

Η διπλωματική εργασία έχει σκοπό να παρουσιάσει ένα σημαντικό μέρος των EEXZ, μέσω πειραματικών σχεδιασμών, παραδειγμάτων, μοντέλων και εκτιμήσεων τους. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο τις εργασίας δίνεται ο ορισμός και τα είδη των EEXZ καθώς επίσης γίνεται μια καταγραφή των στόχων των EEXZ. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνονται τα είδη των πειραματικών σχεδιασμών που εφαρμόζονται στους EEXZ και κατόπιν παρέχονται τρόποι επεξεργασίας των δεδομένων με το τέλος του πειράματος, όπου φανερώνεται και ο διαχωρισμός μεταξύ παραμετρικών και μη παραμετρικών δεδομένων. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σημαντικότερα γενικευμένα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι EEXZ, μαζί με τα υπομοντέλα τους και τις σχέσεις που τα συνδέουν. Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο δίνονται λεπτομερώς κάποιες από τις μεθόδους εκτίμησης που έχουν αναπτυχθεί στα γενικευμένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε επιταχυνόμενους ελέγχους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής

2.1 Ορισμός των Επιταχυνόμενων Ελέγχων Χρόνων Ζωής

Ένας μεγάλος αριθμός συσκευών που παράγονται σήμερα και αποτελούν μέρη σύνθετων τεχνικών συστημάτων όπως είναι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και τα αυτοκίνητα, παρουσιάζουν πολύ υψηλή αξιοπιστία όταν χρησιμοποιούνται σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας. Τέτοιες συσκευές μπορούν να έχουν μέσους χρόνους ζωής δεκάδες χιλιάδες ώρες ή αρκετά έτη αντίστοιχα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις οι κλασσικές διαδικασίες στατιστικού ελέγχου χρόνου ζωής απαιτούν υπερβολικά μεγάλα χρονικά διαστήματα για τη πραγματοποίησή τους. Επιπροσθέτως κατά την ολοκλήρωση του ελέγχου η συσκευή θεωρείται τεχνολογικά ξεπερασμένη καθώς έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια του ελέγχου πιο εξελιγμένα μοντέλα με συνέπεια το αποτέλεσμα που θα δώσει ο στατιστικός έλεγχος να μην παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον. Ένας συνηθισμένος τρόπος για την αποφυγή αυτού του προβλήματος είναι να εκθέσουμε τη συσκευή σε υπερβολική-τεχνητή πίεση (overstress) έτσι ώστε να φέρουμε το μέσο χρόνο ζωής σε ικανοποιητικά επίπεδα από άποψη συλλογής στατιστικών στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να εξάγει συμπεράσματα από τις πληροφορίες που θα αποκτηθούν κάτω από συνθήκες υπερβολικής πίεσης και με κατάλληλες τεχνικές να τις προσαρμόσει σε φυσιολογικές συνθήκες λειτουργίας της συσκευής. Αυτού του είδους οι διεργασίες καλούνται Επιταχυνόμενοι Ελέγχοι Χρόνων Ζωής (EEXZ). Οι EEXZ περιλαμβάνουν μια ποικιλία μεθόδων με τις οποίες μπορούμε να επιτύχουμε συντομότερους χρόνους ζωής ή διαφορετικά ταχύτερες "αποτυχίες" αντικειμένων – προϊόντων με πολύ μεγάλους μέσους χρόνους ζωής, ενώ παράλληλα υπάρχει η δυνατότητα διεξαγωγής στατιστικής ανάλυσης για τα αρχικά.

2.2 Σκοποί – στόχοι των EEXZ

Βασικός σκοπός των EEXZ είναι η εξοικονόμηση χρόνου και κόστους κατά την διεξαγωγή του στατιστικού ελέγχου του χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Το κέρδος όσον αφορά τα χρονικά πλαίσια του ελέγχου είναι προφανές καθώς αυτά βρίσκονται σε άμεση εξάρτηση με τον χρόνο ζωής της υπό μελέτη συσκευής, εφόσον όσο πιο γρήγορα αποτυγχάνει μια μονάδα τόσο ταχύτερα μπορεί να ξεκινήσει η στατιστική ανάλυση και η διεξαγωγή συμπερασμάτων για την ποιότητα αυτής. Το σκέλος του οικονομικού οφέλους προκύπτει από το γεγονός ότι όσο περισσότερο διαρκεί μια διεργασία ελέγχου ποιότητας τόσο περισσότερο πρέπει να συντηρούνται ορισμένοι παράγοντες που συντελούν στη διεξαγωγή της όπως είναι οι τεχνικοί, οι μηχανικοί και οι στατιστικοί συνεργάτες. Συνεπώς ένας πελάτης που επιθυμεί να εκτιμήσει την ποιότητα της συσκευής-προϊόντος που παράγει, κυρίως με την έννοια της πιθανότητας αποκλίσεων από τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί ή του ποσοστού αποτυχίας της ισχύουσας εγγύησης, αναζητά μια μέθοδο που θα του προσφέρει την καλύτερη δυνατή οικονομική άνεση καθώς και γρήγορα αποτελέσματα ώστε να είναι ανταγωνιστικό το προϊόν προτού ξεπεραστεί .

Ο δεύτερος βασικός σκοπός της διεξαγωγής των EEXZ είναι η αποκάλυψη – αναγνώριση των αδυναμιών του προϊόντος με απώτερο στόχο τη βελτίωση της αξιοπιστίας του. Επομένως εκθέτοντας το προϊόν σε υψηλές συνθήκες τεχνητής πίεσης προκαλούμε την αποτυχία του αλλά ταυτόχρονα ανακαλύπτουμε και το αίτιο που την προκάλεσε. Συνεπώς ο πελάτης που επιθυμεί να ελέγξει την ποιότητα και την αντοχή του προϊόντος του, έχει στα χέρια του τις απαραίτητες πληροφορίες για την βελτίωση της κατασκευής σύμφωνα με τις προδιαγραφές που επιθυμεί.

2.3 Είδη των EEXZ

Οι μέθοδοι επιταχυνόμενου ελέγχου μπορούν να διακριθούν είτε σε ποιοτικές είτε σε ποσοτικές (www.weibull.com/basics/accelerated) :

1. Οι ποιοτικοί επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής χρησιμοποιούνται κυρίως για την αποκάλυψη πιθανών αιτιών αποτυχίας των συσκευών. Επομένως μέσω αυτής της μεθόδου ελέγχων μπορεί ο κατασκευαστής να βελτιώσει την παραγωγική διαδικασία εφόσον θα έχει επίγνωση των σφαλμάτων που γίνονται κατά την παρασκευή του προϊόντος. Η μέθοδος αυτή παρέχει απλά ενδείξεις που αφορούν την ποιότητα κατασκευής και δε χρησιμοποιείται για στατιστικό έλεγχο ποιότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει η έκθεση ενός λαμπτήρα πυρακτώσεως σε υψηλή τάση όπου αν η αποτυχία είναι αρκετά συντομότερη από την αναμενόμενη έχουμε κάποιες ενδείξεις για την κακή ποιότητα του νήματος του λαμπτήρα.

2. Οι ποσοτικοί επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής που σχεδιάζονται για να ποσοτικοποιήσουν τον χρόνο ζωής των προϊόντων και να παράγουν πληροφορίες που απαιτούνται για την ανάλυση επιταχυνόμενων δεδομένων. Οι ποσοτικοί EEXZ μπορούν να χρησιμοποιήσουν είτε την *επιτάχυνση του ρυθμού χρήσης* είτε την *επιτάχυνση της φθοράς μέσω τεχνητής πίεσης* για να ελαττώσουν το χρόνο αποτυχίας των προϊόντων κατά τη διάρκεια του ελέγχου. Με τη μέθοδο επιτάχυνσης του ρυθμού χρήσης, που είναι κατάλληλη για προϊόντα που δεν έχουν συνεχόμενη λειτουργία κάτω από φυσιολογικές συνθήκες, οι μονάδες τίθενται σε λειτουργία σε μεγαλύτερο ρυθμό από τον κανονικό έτσι ώστε να προσομοιώσουμε μεγαλύτερες περιόδους λειτουργίας κάτω από φυσιολογικές συνθήκες. Τα δεδομένα που προκύπτουν από τέτοιου είδους ελέγχους μπορούν να αναλυθούν με τυπικές στατιστικές τεχνικές ανάλυσης χρόνων ζωής. Μια περίπτωση που απαντάται συχνά σε ελέγχους επιταχυνόμενου ρυθμού χρήσης είναι η συνεχόμενη λειτουργία ηλεκτρικών συσκευών όπως στερεοφωνικά συστήματα, ηλεκτρονικοί υπολογιστές και τηλεοράσεις μέχρι την αποτυχία τους, οπότε καταγράφεται ο χρόνος ζωής τους και η στατιστική ανάλυση γίνεται βάση των μεθόδων του κλασσικού στατιστικού ελέγχου χρόνων ζωής .

Με τη μέθοδο της επιτάχυνσης λόγω τεχνητής πίεσης (*overstress acceleration*) ένας ή περισσότεροι περιβαλλοντικοί παράγοντες που μπορούν να προκαλέσουν την αποτυχία του προϊόντος κάτω από φυσιολογικές συνθήκες, αυξάνονται με διάφορους τρόπους έτσι ώστε να προκαλέσουν την αποτυχία του προϊόντος ταχύτερα. Τα δεδομένα που εξάγονται από αυτού του τύπου ελέγχους απαιτούν ειδικές τεχνικές ανάλυσης επιταχυνόμενων δεδομένων και είναι το είδος EEXZ που θα μας απασχολήσει και θα τους καλούμε απλά EEXZ.

Οι ποσοτικοί EEXZ μπορούν να διακριθούν ανάλογα με τον τρόπο που αυξάνεται η τεχνητή πίεση, δηλαδή αν πρόκειται για *αύξηση κατά βήματα (step-stress)* ή για *προοδευτική-συνεχόμενη αύξηση (progressive-stress)* με το χρόνο.

Επομένως αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν k παράγοντες πίεσης x_1, x_2, \dots, x_k και ότι αυτοί ενεργούν ταυτόχρονα στο προϊόν τότε μπορούμε να θεωρήσουμε και ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ το οποίο καλείται διάνυσμα πιέσεων (stress vector).

Ας υποθέσουμε προς το παρόν για λόγους απλότητας, ότι το διάνυσμα των πιέσεων είναι μονοδιάστατο, δηλαδή το προϊόν δέχεται μόνο έναν παράγοντα πίεσης, έστω x .

- Στην περίπτωση των **αυξανόμενων κατά βήματα EEXZ** συμβολίζουμε με $x^{(0)}$ το φυσιολογικό επίπεδο της πίεσης και με $x^{(i)}$ το i -οστό αυξημένο επίπεδο πίεσης υποθέτοντας ότι υπάρχουν m επίπεδα τεχνητής πίεσης τέτοια ώστε : $x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(m)}$. Επομένως σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση κάθε μονάδα που εισέρχεται στο πείραμα δοκιμάζεται σταδιακά στα διάφορα επίπεδα ως ότου αποτύχει. Στη σύνθετη περίπτωση όπου υπάρχουν k διαφορετικοί παράγοντες πίεσης δεν είναι αναγκαίο να έχουν όλοι τον ίδιο αριθμό επιπέδων. Συνεπώς ο x_j παράγοντας (j -συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{x}) απαντάται σε m_j επίπεδα τέτοια ώστε: $x_j^{(0)} < x_j^{(1)} < \dots < x_j^{(m_j)}$ όπου $j = 1, 2, \dots, k$
- Στην περίπτωση των **προοδευτικά αυξανόμενων με το χρόνο EEXZ** ο παράγοντας πίεσης $x=x(t)$ αποτελεί μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Κατά συνέπεια οι μονάδες που εισέρχονται στο πείραμα υποβάλλονται σε συνεχώς αυξανόμενη πίεση μέχρι να αποτύχουν .

Εκτενέστερη αναφορά των δυο παραπάνω μεθόδων θα γίνει στο επόμενο κεφαλαίο.

2.4 Σχέση χρόνου ζωής – πίεσης

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που λαμβάνονται σε κάθε επίπεδο πίεσης μπορούμε να εφαρμόσουμε τυπικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων χρόνων ζωής για την εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής του χρόνου ζωής που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα σε κάθε

επίπεδο πίεσης. Στη συνέχεια δημιουργείται η ανάγκη για την εισαγωγή ενός μαθηματικού μοντέλου, της σχέσης χρόνου ζωής – πίεσης, για την εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας σε κανονικό επίπεδο πίεσης βασιζόμενοι στα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας σε κάθε επιταχυνόμενο επίπεδο πίεσης. Αυτή η σχέση αποτελεί μια σύνδεση ενός χαρακτηριστικού της κατανομής του χρόνου ζωής από το ένα επίπεδο πίεσης στο άλλο. Χαρακτηριστικό χρόνου ζωής μπορεί να αποτελέσει κάθε στατιστικός δείκτης ή συνάρτηση που περιγράφει την πιθανοθεωρητική συμπεριφορά του υπό μελέτη χαρακτηριστικού, όπως είναι ο μέσος, η διάμεσος και η συνάρτηση κίνδυνου (βαθμίδα αποτυχίας), που μπορεί να εκφραστεί σαν μια συνάρτηση της πίεσης. Η σχέση χρόνου ζωής – πίεσης που ταιριάζει στο είδος των δεδομένων που αναλύουμε, προκύπτει από τη συνεργασία στατιστικών, μαθηματικών και μηχανολόγων.

Οι βασικότερες σχέσεις χρόνων ζωής – πίεσης περιγράφονται από τα μοντέλα **Arrhenius**, **Eyring** και **inverse power law** που σχεδιάστηκαν για την ανάλυση δεδομένων κυρίως με έναν παράγοντα πίεσης. Στα μοντέλα αυτά θα γίνει λεπτομερέστερη αναφορά σε επόμενο κεφαλαίο.

2.5 Είδη πιέσεων και επίπεδα πίεσης

Τα είδη πίεσης που εφαρμόζονται στους EEXZ ποικίλλουν όσον αφορά το πλήθος και το εύρος της αύξησης τους ανάλογα με την συσκευή που επιθυμούμε να εξετάσουμε. Τα πιο διαδεδομένα είδη πίεσης (Jayawardhana, A, A. and Samaranayake, V. A. (2003)) που εμφανίζονται σε επιταχυνόμενους ελέγχους είναι η **θερμοκρασία**, η **ηλεκτρική τάση**, η **υγρασία**, η **δόνηση**, η **κρούση**, η **αντοχή**, η **τριβή** και η **μηχανική φόρτωση**.

Καθένα από τα παραπάνω είδη πιέσεων εφαρμόζεται κατά περίπτωση εφόσον μπορεί να οδηγήσει το προϊόν σε αποτυχία. Για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε έναν λαμπτήρα, που σε κανονικές συνθήκες λειτουργεί κάτω από τάση 60V, ο οποίος δέχεται αυξανόμενη τάση είτε σταδιακά είτε συνεχόμενα έχοντας ως αρχική τιμή τα 60V. Η αυξανόμενη τάση μειώνει τη ζωή του λαμπτήρα με αποτέλεσμα να έχουμε σύντομα ως δεδομένο το χρόνο ζωής του λαμπτήρα κάτω από συνθήκες τεχνητής πίεσης.

Μια πιο σύνθετη περίπτωση από τον λαμπτήρα αποτελούν τα λάστιχα των αυτοκινήτων τα οποία μπορούν να τεθούν εκτός ορίων προδιαγραφών είτε αυξάνοντας τη θερμοκρασία, είτε υποβάλλοντάς τα σε υψηλά επίπεδα τριβής και υγρασίας καθώς επίσης αυξάνοντας το φορτίο του οχήματος. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε παράγοντα πίεσης ως μια συνιστώσα του διανύσματος των πιέσεων και σε κάθε φάση του επιταχυνόμενου ελέγχου να μεταβάλλουμε τις τιμές των συνιστωσών ανάλογα με τις αντοχές της συσκευής.

2.6 Υλικά και προϊόντα στα οποία χρησιμοποιούνται EEXZ

Οι πειραματικές μονάδες που χρησιμοποιούνται στους επιταχυνόμενους ελέγχους είναι στην συντριπτική πλειοψηφία τους υλικά είδη και προϊόντα βιομηχανικής παραγωγής (Nelson, W. B. (1990)). Τα παραπάνω αντικείμενα εισέρχονται στους ελέγχους είτε ως μονάδες είτε ως συστατικά στοιχεία συστημάτων.

α) Υλικά

Μέταλλα. Οι επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρησιμοποιούνται στα μέταλλα είτε λαμβάνοντάς τα ως πειραματικές μονάδες αυτά καθαυτά είτε θεωρώντας τα ως μέρη σύνθετων συστημάτων όπως είναι οι συγκολλημένες κατασκευές μετάλλων. Η διαδικασία του επιταχυνόμενου ελέγχου αποτελείται από την προσπάθεια για την φθορά του μετάλλου με διάφορες μορφές όπως το σύρσιμο, το σπάσιμο, το χτύπημα, την τήξη, τη διάβρωση, την οξείδωση και το λάξευμα. Τα είδη επιταχυνόμενης πίεσης που εφαρμόζονται στα μέταλλα είναι η μηχανική πίεση, η θερμοκρασία και η γεωμετρία της μονάδας ενώ επίσης χρησιμοποιούνται και χημικοί επιταχυνόμενοι παράγοντες όπως η υγρασία, το αλάτι και ορισμένα οξέα.

Πλαστικά. Τα πλαστικά είδη που χρησιμοποιούνται στους EEXZ είναι κυρίως οικοδομικά υλικά, όπως οι σωλήνες και τα μονωτικά υλικά, αλλά επίσης και μέρη μηχανικών συστημάτων. Όπως και στα μέταλλα η αξιολόγηση του πλαστικού γίνεται με βάση την αντοχή του και την ταχύτητα τήξης του. Για το λόγο αυτό οι μηχανικοί χρησιμοποιούν κατά τη διεξαγωγή του ελέγχου ισχυρή μηχανική φόρτωση, μια διαδικασία που περιλαμβάνει

συνεχείς και ξαφνικές δονήσεις-κρούσεις, καθώς και υψηλές θερμοκρασίες που θα συμβάλουν στην τήξη του υλικού.

Λιπαντικά. Για τον έλεγχο των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των λαδιών, του γράσου καθώς και λιπαντικών που βρίσκονται σε στέρεα μορφή όπως ο μόλυβδος και το τεφλόν διεξάγονται επιταχυνόμενοι έλεγχοι. Η πραγματοποίηση τους περιλαμβάνει οξείδωση, εξάτμιση και μόλυνση των υλικών που μελετάμε. Τα είδη επιταχυνόμενης πίεσης περιλαμβάνουν τη θερμοκρασία, την ταχύτητα και μολύνοντα υλικά (νερό, χαλκός και ατσάλι) .

Τρόφιμα και Φάρμακα. Οι EEXZ χρησιμοποιούνται επίσης για τον έλεγχο των τροφίμων, των φάρμακων-φαρμακευτικών προϊόντων και άλλων χημικών. Η διαδικασία αφορά το χρόνο διάρκειας (αποθήκευσης) του προϊόντος, ο οποίος συνήθως μετράται από το ποσό ενός ενεργού συστατικού το οποίο φθείρεται. Οι μεταβλητές που ενδιαφέρουν περιλαμβάνουν τη γεύση, το PH, την ανάπτυξη μικροβίων, την αλλαγή του χρώματος καθώς και την εμφάνιση συγκεκριμένων χημικών αντιδράσεων. Οι επιταχυνόμενοι παράγοντες που αναπτύσσονται είναι η θερμοκρασία, η υγρασία, το PH, το οξυγόνο και η ηλιακή ακτινοβολία .

Κολλοειδή. Οι EEXZ εφαρμόζονται και στην περίπτωση των κολλών και των υλικών συγκολλήσεως όπως οι εποξικές κόλλες. Η διαδικασία δοκιμάζει το χρόνο ζωής και τη δύναμη τους. Οι επιταχυνόμενοι παράγοντες αποτελούνται από τη μηχανική πίεση, την υγρασία και τη θερμοκρασία .

Χρώματα και προστατευτικά στρώματα επικάλυψης. Εδώ οι EEXZ χρησιμοποιούνται με σκοπό την αποσύνθεση των χρωμάτων, των πολυμερών, των αντιοξειδωτικών και των γαλβανιζέ. Για τη διεξαγωγή των EEXZ χρησιμοποιούμε διάφορα μέσα όπως το χρώμα, το λούστρο και τη φυσική ακεραιότητα (φθορά και εμφάνιση φουσκαλών). Επιταχυνόμενοι παράγοντες αποτελούν η θερμοκρασία, η υγρασία και η ηλιακή ακτινοβολία.

β) Προϊόντα

Ημιαγωγοί και μικροηλεκτρονικά. Οι EEXZ βρίσκουν εφαρμογή σε πολλούς τύπους ημιαγωγίμων συσκευών όπως οι ενισχυτές. Συγκεκριμένα είδη που δοκιμάζονται στους EEXZ είναι οι ενισχυτές : γαλλίου-αρσενιδίου (GaAs FETs), ελέγχου ροής απομονωμένης

πύλης (IGFETs), διόδου εκπομπής φωτός (LEDs), τυχαίας πρόσβασης πληροφοριών (RAMs). Οι συσκευές λαμβάνουν μέρος στη δοκιμασία είτε μεμονωμένες είτε συναρμολογημένες ως ηλεκτρικά κυκλώματα, ολοκληρωμένα κυκλώματα (LSI και VLSI) και μικροκυκλώματα. Η επίδοση που ενδιαφέρει είναι ο χρόνος ζωής και ορισμένα συγκεκριμένα λειτουργικά χαρακτηριστικά. Οι επιταχυνόμενες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν τη θερμοκρασία, την ισχύ, την τάση, την υγρασία, τη δόνηση τη μηχανική κρούση και την πυρηνική ακτινοβολία.

Πυκνωτές. Για τους περισσότερους τύπους πυκνωτών μπορούν να εφαρμοστούν EEXZ. Τέτοιοι τύποι είναι οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές, το πολυπροπυλένιο, το λεπτό φιλμ και οι πυκνωτές τανταλίου. Οι επιταχυνόμενοι παράγοντες είναι η θερμοκρασία, η τάση και η δόνηση.

Κυψέλες και Μπαταρίες. Οι επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις ηλιακών κυψελών αλλά και επαναφορτιζόμενων και μη-επαναφορτιζόμενων μπαταριών. Ελέγχεται ο χρόνος ζωής τους, η αυτόματη αποφόρτιση, η ισχύς καθώς και η ένταση της αποφόρτισης τους. Σαν επιταχυνόμενους παράγοντες χρησιμοποιούμε τη θερμοκρασία και το ρυθμό φόρτισης και αποφόρτισής τους.

Ηλεκτρικές συσκευές-μηχανήματα. Οι επιταχυνόμενοι έλεγχοι λαμβάνουν χώρα σε ποικίλες ηλεκτρικές συσκευές όπως οι κινητήρες, οι θερμαντικές συσκευές και οι θερμοηλεκτρικοί μετατροπείς. Οι κινητήρες και οι γεννήτριες συνήθως αποτυγχάνουν λόγω μόνωσης ή λόγω τριβής. Η κατανομή του χρόνου ζωής τους προκύπτει από τη μόνωση και την τριβή τους.

Μηχανικά μέρη. Τα μηχανικά μέρη που χρησιμοποιούνται στους EEXZ αποτελούν συστατικά μέρη αυτοκίνητων, υδραυλικών συστημάτων, εργαλείων και εξαρτημάτων πλοίου. Η επίδοσή τους κρίνεται από το χρόνο ζωής και τη φθορά που εμφανίζουν. Οι επιταχυνόμενες μεταβλητές που λαμβάνουμε υπόψη σε αυτού του είδους τους ελέγχους είναι η μηχανική φόρτωση, η δόνηση, η θερμοκρασία καθώς και άλλοι περιβαλλοντικοί παράγοντες.

Λαμπτήρες. Επιταχυνόμενοι έλεγχοι εφαρμόζονται για λάμπες πυρακτώσεως, φθορισμού, ατμών υδρογόνου και φακούς. Εξετάζουμε την επίδοσή τους ελέγχοντας την

αντοχή, το χρόνο ζωής τους, την αποδοτικότητα και φωτεινότητα τους. Οι επιταχυνόμενες μεταβλητές περιλαμβάνουν, τη θερμοκρασία, τη δόνηση και τη μηχανική και ηλεκτρική κρούση .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τρόποι διεξαγωγής επιταχυνόμενων ελέγχων και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων

3.1 Πειραματικοί σχεδιασμοί στους EEXZ

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό ενός πειράματος στους EEXZ είναι ανάλογες με εκείνες που χρησιμοποιεί η ανάλυση επιβίωσης. Δηλαδή έχουμε συχνά εμφάνιση λογοκριμένων δεδομένων από δεξιά, τύπου I ή II (σύντομη αναφορά στο παράρτημα Π 1), ανάλογα με τον τρόπο σχεδιασμού, με διαφορά ότι πλέον οι πειραματικές μονάδες (προϊόντα) εκτίθενται σε πολλά επίπεδα τεχνητής πίεσης, προκειμένου να λάβουμε ταχύτερες αποτυχίες, όσον αφορά τη λειτουργία τους. Παρακάτω θα δοθούν 3 είδη πειραματικών σχεδιασμών ανάλογα με τον τρόπο εφαρμογής της τεχνητής πίεσης. Για ευκολότερη κατανόηση των πειραμάτων θα υποθέσουμε στη συγκεκριμένη ενότητα ότι επιδρά μόνο ένας παράγοντας πίεσης στις πειραματικές μονάδες, συνεπώς το διάνυσμα των πιέσεων θα είναι μονοδιάστατο.

α. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας σταθερή πίεση (ανεξάρτητη του χρόνου)

Για τη διεξαγωγή του πειράματος χρησιμοποιούμε m επίπεδα πίεσης τέτοια ώστε $x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(m)}$, όπου $x^{(0)}$ αποτελεί την πίεση σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας της συσκευής που μελετάμε. Υποθέτουμε ότι είναι διαθέσιμος ένας μεγάλος αριθμός πειραματικών μονάδων για την εκτέλεση του πειράματος και ότι n_j από αυτά εκτίθενται σε επίπεδο πίεσης $x^{(j)}$ για $j = 1, \dots, m$.

Φάση 1.

Επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο ένα επίπεδο πίεσης $x^{(i)}$, από τα $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$, και n_i πειραματικές μονάδες επιλέγονται τυχαία από αυτές που έχουμε στη διάθεση μας, οι οποίες δοκιμάζονται στο δεδομένο επίπεδο. Στο συγκεκριμένο πείραμα εμφανίζεται λογοκρισία

τύπου II από δεξιά καθώς ο έλεγχος τερματίζεται μόλις εμφανιστούν r_i αποτυχίες, όπου $r_i \leq n_i$. Στη συνέχεια καταγράφουμε τους διατεταγμένους χρόνους ζωής των μονάδων που απέτυχαν: $T_{i1} \leq T_{i2} \leq \dots \leq T_{ir_i}$. Οι χρόνοι ζωής των υπολοίπων $n_i - r_i$ μονάδων που δεν απέτυχαν είναι λογοκριμένοι και ταυτίζονται με τον μέγιστο χρόνο ζωής T_{ir_i} .

Φάση 2.

Από τα μη χρησιμοποιημένα επίπεδα πίεσης επιλέγουμε τυχαία ένα επίπεδο $x^{(j)}$ και n_j πειραματικές μονάδες επιλέγονται τυχαία από τις εναπομείναντες διαθέσιμες. Το πείραμα τερματίζεται μόλις εμφανιστούν $r_j \leq n_j$ αποτυχίες. Οι διατεταγμένοι χρόνοι ζωής είναι $T_{j1} \leq T_{j2} \leq \dots \leq T_{jr_j}$ ενώ λογοκρίθηκαν οι χρόνοι ζωής των υπολοίπων $(n_j - r_j)$ μονάδων.

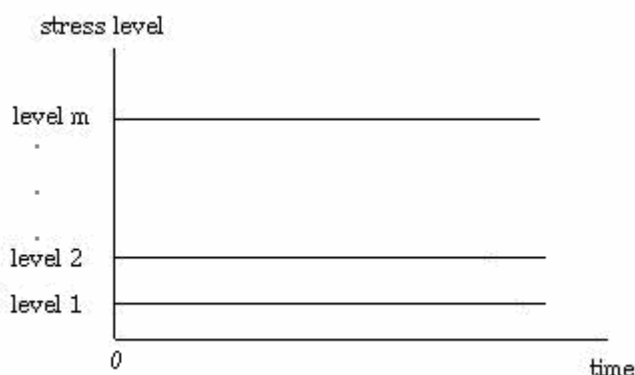
Όπως γίνεται κατανοητό το πείραμα αποτελείται από m παρόμοιες φάσεις μέχρις ότου δηλαδή ολοκληρωθούν όλα τα επίπεδα του παράγοντα πίεσης που εφαρμόζουμε στις μονάδες που διαθέτουμε. Στο τέλος του πειράματος καταγράφουμε όλους τους χρόνους ζωής που έχουμε βρει δηλώνοντας ταυτόχρονα και το επίπεδο της πίεσης που βρισκόταν κάθε μονάδα όταν απέτυχε, δηλαδή καταγράφουμε τους εξής χρόνους ζωής :

$$T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0n_0}, T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n_1}, \dots, T_{m1}, \dots, T_{mn_m}.$$

Αν ο αριθμός των πειραματικών μονάδων που διαθέτουμε είναι αρκετά μεγάλος σε σχέση με τον αριθμό $n = \sum_{j=1}^m n_j$ των μονάδων που τελικά χρησιμοποιήσαμε για την ολοκλήρωση του πειράματος τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παραγόμενοι χρόνοι ζωής είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι, γεγονός που θα μας εξυπηρετήσει ικανοποιητικά στην ανάλυση.

Στο παρακάτω διάγραμμα (σχήμα 1) δίνεται η επίδραση της πίεσης σε αυτό το είδος των πειραμάτων και δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι η πίεση παραμένει αμετάβλητη στο χρόνο.

Σχήμα 1. Διάγραμμα πίεσης – χρόνου ζωής σε EEXZ που εφαρμόζεται σταθερή πίεση σε κάθε φάση του πειράματος



β. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας πίεση αυξανόμενη κατά βήματα (step - stress)

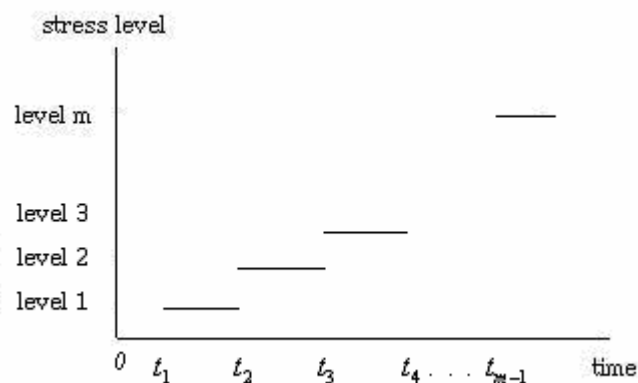
Για τον σχηματισμό του πειράματος ορίζουμε m χρονικές στιγμές ως εξής :

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t.$$

Τοποθετούμε n πειραματικές μονάδες, που έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο, στην αρχή του χρόνου 0 . Στο χρονικό διάστημα $(0, t_1]$ οι μονάδες υποβάλλονται σε πίεση $x^{(1)}$. Στη συνέχεια του πειράματος οι μονάδες που δεν απέτυχαν μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 υποβάλλονται σε πίεση $x^{(2)}$ εντός του διαστήματος $(t_1, t_2]$. Στο επόμενο διάστημα $(t_2, t_3]$ οι μονάδες που επιβίωσαν πέρα της χρονικής στιγμής t_2 υποβάλλονται σε επίπεδο πίεσης $x^{(3)}$. Η διαδικασία συνεχίζεται ως ότου αποτύχουν όλες οι πειραματικές μονάδες. Στην περίπτωση που δεν έχουν αποτύχει όλες οι μονάδες μέχρι τη χρονική στιγμή t_m τότε θα θεωρήσουμε ένα νέο χρονικό διάστημα $(t_m, \infty]$ στο οποίο εφαρμόζουμε τον παράγοντα της πίεσης σε $m+1$ επίπεδο, δηλαδή $x^{(m+1)}$, μέχρι την ολική τους αποτυχία. Συνεπώς σε αυτό το είδος σχεδιασμού δεν εμφανίζονται λογοκριμένα δεδομένα. Στο τέλος του πειράματος καταγράφουμε τους χρόνους ζωής των n πειραματικών μονάδων T_1, T_2, \dots, T_n . Όπως και στον προηγούμενο σχεδιασμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι χρόνοι ζωής είναι ανεξάρτητοι εφόσον το πλήθος των μονάδων που χρησιμοποιούνται στον έλεγχο είναι αρκετά μικρότερο από τις διαθέσιμες μονάδες.

Το παρακάτω γράφημα (σχήμα 2) δείχνει παραστατικά τη μεταβολή του επιπέδου πίεσης στα διάφορα χρονικά διαστήματα.

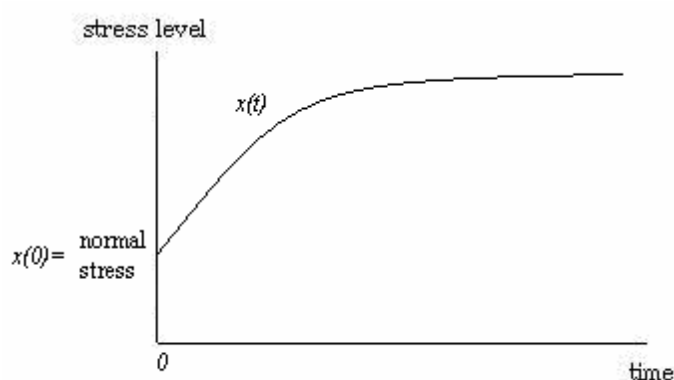
Σχήμα 2. Πειραματικός σχεδιασμός EEXZ με πίεση αυξανόμενη κατά βήματα



γ. Σχεδιασμός χρησιμοποιώντας πίεση που είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση του χρόνου (progressive- stress)

Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό πειραματικών μονάδων, έστω n , από τις συνολικές μονάδες που διαθέτουμε και τις εκθέτουμε σε πίεση $x(t)$, η οποία αυξάνεται με το χρόνο μέχρι να αποτύχουν όλες οι μονάδες. Η συνάρτηση $x(t)$ υποθέτουμε ότι είναι γνωστή. Καταγράφουμε τους χρόνους ζωής των μονάδων T_1, T_2, \dots, T_n και εφόσον ο αριθμός n είναι μικρός σε σχέση με τις μονάδες που μπορούμε να διαθέσουμε για τη διεξαγωγή του πειράματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι χρόνοι ζωής είναι ανεξάρτητοι. Το επόμενο γράφημα (σχήμα 3) δείχνει ένα παράδειγμα της μεταβολής της πίεσης με το χρόνο σε αυτές τις περιπτώσεις.

Σχήμα 3. Σχεδιασμός EEXZ όταν η πίεση αυξάνεται προοδευτικά με το χρόνο



3.2 Επεξεργασία των επιταχυνόμενων δεδομένων

Με το τέλος του πειράματος λαμβάνονται ως δεδομένα οι χρόνοι ζωής των πειραματικών μονάδων. Τα δεδομένα αυτά λόγω του τρόπου που αποκτήθηκαν αναφέρονται και ως επιταχυνόμενα δεδομένα. Η επεξεργασία τους αποτελείται κυριώς από μεθόδους που αποσκοπούν στην εκτίμηση ορισμένων χαρακτηριστικών του χρόνου ζωής των μονάδων σε συνθήκες κανονικής λειτουργίας όπως ο μέσος, η διάμεσος και τα όρια εμπιστοσύνης τους. Για να γίνει η αναγωγή των αποτελεσμάτων που λήφθηκαν σε υψηλά επίπεδα πίεσης στα φυσιολογικά είναι απαραίτητη μια σχέση που συνδέει το χρόνο ζωής με την μεταβαλλόμενη πίεση. Αυτές οι σχέσεις καλούνται "χρόνου ζωής – πίεσης", τα βασικότερα μοντέλα των οποίων θα αναπτυχθούν σε αυτή την ενότητα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι διαδικασίες που ακολουθούνται από τους ερευνητές με το πέρας του πειράματος για την εκκίνηση της στατιστικής ανάλυσης.

α) Προσαρμογή των δεδομένων σε γνωστή οικογένεια κατανομών και εφαρμοσμένες τεχνικές

Το πρώτο βήμα κατά τη στατιστική ανάλυση αποτελείται συνήθως από την προσπάθεια για δημιουργία ενός πιθανοθεωρητικού μοντέλου της κατάστασης, το οποίο προκύπτει από τα παρελθοντικά δεδομένα που έχουμε στη διάθεση μας. Επειδή το ενδιαφέρον μας αφορά κατανομές χρόνων ζωής, τα δεδομένα που θα αποκτηθούν μέσω των επιταχυνόμενων ελέγχων θα δίνουν πληροφορίες για:

1. Τη συνάρτηση κατανομής

$$F_T(t; \underline{x}) = P(T \leq t; \underline{x}),$$

η οποία αφορά το χρόνο ζωής T μιας πειραματικής μονάδας όταν \underline{x} είναι το μεταβαλλόμενο διάνυσμα των πιέσεων που ασκούνται στη μονάδα, δηλαδή $\underline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ όπου $x^{(i)}$ αποτελεί το i -οστό παράγοντα πίεσης.

2. Τη συνάρτηση επιβίωσης ή συνάρτηση αξιοπιστίας

$$R_T(t; \underline{x}) = P(T > t; \underline{x}) = 1 - F_T(t; \underline{x})$$

3. Τη βαθμίδα αποτυχίας ή συνάρτηση κινδύνου

$$I(t; \underline{x}) = -\frac{R'_T(t; \underline{x})}{R_T(t; \underline{x})},$$

για τις οποίες αρχικά δεν έχουμε ικανοποιητικές πληροφορίες .

Κατ' αρχάς πρέπει να διερευνήσουμε τις πληροφορίες που έχουμε για την κατανομή του χρόνου ζωής των μονάδων κάτω από συνθήκες φυσιολογικής λειτουργίας. Πρέπει δηλαδή να δούμε αν υπάρχουν ιδιαίτεροι λόγοι που μας κατευθύνουν στο γεγονός να δεχτούμε ότι η κατανομή του χρόνου ζωής ανήκει στην Εκθετική, τη Weibull, τη Λογαριθμοκανονική ή την αντίστροφη Gaussian οικογένεια κατανομών, οι οποίες καλύπτουν το φάσμα των κατανομών που απαντώνται στους χρόνους ζωής. Επομένως πρέπει να αναρωτηθούμε αν είμαστε ικανοί να εξάγουμε συμπεράσματα για την κατανομή του χρόνου ζωής με βάση τα παρελθοντικά δεδομένα που έχουμε στη διάθεση μας προτού ξεκινήσουμε τους EEXZ.

Ένας τρόπος που συχνά εφαρμόζεται στη στατιστική για την εύρεση ενός κατάλληλου μοντέλου είναι η τοποθέτηση των διαθέσιμων δεδομένων μας σε διάφορα φύλλα πιθανότητας (*probability papers*) και η επιλογή της οικογένειας κατανομών που "ταιριάζει" καλύτερα σε αυτά.

Μια δεύτερη μέθοδος που ακολουθείται για την εύρεση της κατάλληλης οικογένειας κατανομών του χρόνου ζωής των μονάδων είναι η τοποθέτηση των παρατηρούμενων χρόνων ζωής σε διαγράμματα πιθανότητας (*probability plots*). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το normal probability plot για τον έλεγχο της κανονικότητας των παρατηρήσεων που διαθέτουμε.

β) Επίδραση της πίεσης στο χρόνο ζωής των πειραματικών μονάδων

Υποθέτουμε ότι καταφέραμε να προσαρμόσουμε μια κατάλληλη *παραμετρική* οικογένεια κατανομών χρόνου ζωής κάτω από συνθήκες φυσιολογικής λειτουργίας. Το επόμενο στάδιο της ανάλυσης αφορά τη διερεύνηση του τρόπου που επηρεάζει η τεχνητή πίεση που εφαρμόζουμε τη συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών. Επομένως ένα ερώτημα που πηγάζει από αυτό το βήμα έχει να κάνει με το κατά πόσο η οικογένεια κατανομών του χρόνου ζωής κάτω από φυσιολογικές συνθήκες πίεσης, παραμένει η ίδια όταν η πειραματική μονάδα βρίσκεται κάτω από αυξανόμενη πίεση. Το επόμενο ερώτημα που γεννάται, εφόσον δεχτούμε ότι η οικογένεια κατανομών δεν αλλάζει, είναι αν η επίδραση των διάφορων επιπέδων πίεσης οδηγεί σε διαφορετικά παραμετρικά διανύσματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα πυρακτώσεως έχει αποδειχτεί ότι ακολουθεί την Weibull κατανομή με παράμετρο σχήματος β και παράμετρο κλίμακας ή *χαρακτηριστική ζωή* (*characteristic life*) η , δηλαδή $T \sim W(b, h)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση αξιοπιστίας

$$f_T(t) = \frac{b}{h} \left(\frac{t}{h} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{h} \right)^b} \quad \text{και} \quad R_T(t) = e^{-\left(\frac{t}{h} \right)^b} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Θέτουμε τον λαμπτήρα σε μια διαδικασία επιταχυνόμενου ελέγχου αυξάνοντας κατά βήματα την τάση του. Έστω ότι το φυσιολογικό επίπεδο λειτουργίας του λαμπτήρα είναι 60V και έστω 70V και 80V δυο αυξημένα επίπεδα τάσης τα οποία θα μας βοηθήσουν να λάβουμε μικρότερο χρόνο ζωής. Το διάνυσμα των παραμέτρων της δοθείσας οικογένειας κατανομών είναι το $\underline{d} = (b, h)'$. Άρα το ζήτημα που τίθεται είναι κατά πόσο τα αυξημένα επίπεδα τάσης θα προκαλέσουν αλλαγές στο διάνυσμα αυτό, δηλαδή αν θα προκύψουν νέα διανύσματα

$d_{\underline{0}70V} = (b_1, h_1)'$ και $d_{\underline{0}80V} = (b_2, h_2)'$ για τάση 70V και 80V αντίστοιχα, όπου $h \neq h_1 \neq h_2$ και $b \neq b_1 \neq b_2$.

Ο παραπάνω προβληματισμός αποτέλεσε το κίνητρο για τη δημιουργία των σχέσεων χρόνων ζωής – πίεσης που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η έρευνα δηλαδή για την εύρεση μιας συναρτησιακής σχέσης της μορφής $d_{\underline{0}} = g(x_{\underline{0}})$ που θα δηλώνει τον τρόπο με τον οποίο το διάνυσμα των παραμέτρων $d_{\underline{0}}$ εξαρτάται από το διάνυσμα των πιέσεων $x_{\underline{0}} = x_{\underline{0}}(t) = (x_1(t), \mathbf{K}, x_m(t))'$ οδήγησε τους ερευνητές σε κάποια συγκεκριμένα μοντέλα. Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι ο χρόνος ζωής συνδέεται με το διάνυσμα των παραμέτρων εφόσον κάθε συνιστώσα αυτού του διανύσματος έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο. Μπορούμε να αναφέρουμε τις παρακάτω κατανομές ώστε να φανερώσουμε αυτή την εξάρτηση.

- **Κανονική κατανομή $N(m, S^2)$** : Το μ αποτελεί τον μέσο χρόνο ζωής της κατανομής και εκτιμάται αμερόληπτα σύμφωνα με τη σχέση $\hat{m} = \bar{T}$ ενώ η παράμετρος S^2 αποτελεί τη διασπορά του χρόνου ζωής και έχει εκτιμήτρια την ποσότητα $\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2$.

- **Εκθετική κατανομή (Exponential)**: Η εκθετική κατανομή $E(\lambda)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_T(t) = I e^{-\lambda t}$, συνάρτηση αξιοπιστίας $R_T(t) = e^{-\lambda t}$ και βαθμίδα αποτυχίας $I_T(t) = I$. Η παράμετρος λ συνδέεται επίσης με το χρόνο ζωής T σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E(T) = 1/I, \quad V(T) = 1/I^2,$$

οι οποίες αποτελούν τη μέση τιμή και της διασπορά του χρόνου ζωής.

- **Weibull κατανομή $W(b, h)$** : Η παράμετρος σχήματος β είναι ανεξάρτητη του χρόνου ζωής καθώς παραμένει σταθερή εφόσον εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του προϊόντος που μελετάμε και τη μέθοδο ελέγχου. Η παράμετρος κλίμακας η αποτελεί το 63,2^ο κάτω ποσοστημόριο της κατανομής του χρόνου ζωής, δηλαδή $h = t_{0.63}$. Αυτό προκύπτει από τη σχέση:

$$F_T(n) = P(T \leq h) = 1 - P(T > h) = 1 - R_T(n) = 1 - e^{-\left(\frac{h}{h}\right)^\beta} = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

- **Λογαριθμοκανονική κατανομή $Lognormal(m, S)$** : Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$f_T(t) = \frac{1}{t\sqrt{2ps^2}} e^{-\frac{(\log t - m)^2}{2s^2}}$, $t > 0$. Η συνάρτηση αξιοπιστίας της συγκεκριμένης

κατανομής δίνεται από τη σχέση $R_T(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log t - m}{s}\right)$, όπου $\Phi(t)$ αποτελεί την

αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην περίπτωση που

έχουμε ένα δείγμα από n χρόνους ζωής τότε δείχνεται ότι ο μέσος μ εκτιμάται αμερόληπτα

με την ποσότητα $\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log T_i$ και η τυπική απόκλιση s της κατανομής έχει

αμερόληπτο εκτιμητή τον $\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log T_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log T_i))^2}$. Επίσης αποδεικνύεται ότι το

50° ποσοστμόριο της λογαριθμοκανονικής κατανομής, δηλαδή η διάμεσος είναι ίση με

$t_{0.50} = 10^m$.

Συμπεραίνουμε ότι στο σύνολο των παραμετρικών κατανομών στις οποίες εντάσσεται η πλειοψηφία των χρόνων ζωής υλικών και προϊόντων, υπάρχουν κάποιες σχέσεις που συνδέουν τις παραμέτρους με τους χρόνους ζωής. Μέσω αυτής της σχέσης και μέσω της συναρτησιακής σχέσης του χρόνου ζωής και της πίεσης μπορούμε να κάνουμε αναγωγές των αποτελεσμάτων που λαμβάνουμε από τα υψηλότερα στα φυσιολογικά επίπεδα λειτουργίας και στη συνέχεια με κατάλληλες μεθόδους να εκτιμήσουμε τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν.

Στην επόμενη ενότητα θα αναπτύξουμε τις 3 βασικότερες σχέσεις χρόνων ζωής – τεχνητής πίεσης οι οποίες ενώ αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των σημερινών γενικευμένων μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί, ωστόσο εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται στους EEXZ σε πολύ μεγάλη κλίμακα.

γ) Οι βασικότερες σχέσεις χρόνων ζωής – πίεσης στους EEXZ

Οι σχέσεις στις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια αποτελούν θεμέλια στους EEXZ καθώς είναι διαδεδομένες ευρέως και αποτέλεσαν τη βάση για τα γενικευμένα μοντέλα που ακόμα αναπτύσσονται στις μέρες μας. Οι σχέσεις αυτές είναι οι **Arrhenius**, **Inverse Power** και **Eyring** οι οποίες χρησιμοποιούνται στα πιο αναπτυγμένα στατιστικά πακέτα που ασχολούνται με επιταχυνόμενους ελέγχους και γενικότερα επιταχυνόμενα δεδομένα όπως το

ALTA 6 PRO και το *Weibull++* για τη Weibull, την Εκθετική και τη Lognormal κατανομή. Συνήθως αυτές οι σχέσεις εφαρμόζονται για περιπτώσεις όπου υπάρχει μια αιτία αποτυχίας χωρίς να σημαίνει ότι δεν εφαρμόζονται και σε περιπτώσεις όπου η αποτυχία οφείλεται σε άνω του ενός αιτίου. Απλά στις περιπτώσεις που υπάρχει ένας λόγος αποτυχίας, οπότε επιδρά μόνο ένας παράγοντας πίεσης, το μοντέλο περιγράφει τόσο ικανοποιητικά την κατάσταση που σε περίπτωση σφάλματος στα αποτελέσματα, η πιθανότερη εκδοχή είναι να έγινε λάθος σε κάποιο σημείο της ανάλυσης παρά στην επιλογή του μοντέλου. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα μοντέλα Arrhenius και Inverse Power μαζί με τα κυριότερα χαρακτηριστικά τους για τις σημαντικότερες κατανομές, όπως αναλύονται στον Nelson (1990), ενώ θα κάνουμε και μια σύντομη αναφορά στη σχέση Eyring.

Για την καλύτερη ερμηνεία των διάφορων χαρακτηριστικών των μοντέλων θα δοθούν και ορισμένα γραφήματα που εφαρμόζονται σε αυτές τις περιπτώσεις.

Τα διαγράμματα που κυρίως χρησιμοποιούνται στους EEXZ είναι τα διαγράμματα χρόνου ζωής – πίεσης (*life vs stress plots*) και τα διαγράμματα φύλλων πιθανότητας ή διαγράμματα κατανομής (*Probability Plotting Papers – Distribution plots*).

- **Διαγράμματα χρόνου ζωής – πίεσης:** Στα διαγράμματα αυτά όπως προκύπτει και από την ονομασία τους παριστάνεται η μεταβολή του χρόνου ζωής σε σχέση με τα διάφορα επίπεδα πίεσης. Στα σημεία αυτών των διαγραμμάτων συνήθως προσαρμόζεται μια καμπύλη γραμμής. Για λόγους ευκολίας προτιμάται να εκφράζουμε το λογάριθμο του χρόνου ζωής ως συνάρτηση της πίεσης έτσι ώστε οι γραμμές που θα προκύψουν να είναι ευθείες, καθώς η ευθεία προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα από ότι η καμπύλη. Η λογαριθμοποίηση της σχέσεως χρόνου ζωής – πίεσης ουσιαστικά αποτελεί ένα γραμμικό μετασχηματισμό της, καθώς η νέα εξίσωση που προκύπτει, χρησιμοποιώντας τις μετασχηματισμένες μεταβλητές, είναι πρωτοβάθμια.
- **Διαγράμματα πιθανότητας (*probability plotting papers*) :** Τα σημεία που δίνονται σε αυτά τα διαγράμματα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή η οποία εκφράζει ένα μετασχηματισμό του αθροιστικού ποσοστού αποτυχίας του πληθυσμού (συνάρτηση κατανομής) ως συνάρτηση ενός μετασχηματισμού του χρόνου σε δεδομένο επίπεδο πίεσης. Διαγράμματα κατανομών δίνονται για τις πιο εφαρμοσμένες κατανομές όπως η εκθετική, η κανονική, η Weibull και η λογαριθμοκανονική. Αναλυτική περιγραφή του τρόπου αναπαράστασης των δεδομένων σε αυτού του είδους τα γραφήματα δίνεται στο παράρτημα Π3. Στα μοντέλα Arrhenius και Inverse Power οι γραμμές που

προκύπτουν σε τέτοια γραφήματα, Arrhenius paper και Inverse Power paper (log-log paper), είναι παράλληλες για όλες τις κατανομές. Δε συμβαίνει το ίδιο όμως για πιο γενικευμένα μοντέλα.

I) Σχέση Arrhenius

Η σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Arrhenius χρησιμοποιείται ευρύτατα κατά τη διεξαγωγή ΕΕΧΖ για τη μοντελοποίηση του χρόνου ζωής ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Το μοντέλο εφαρμόζεται στα παρακάτω προϊόντα και υλικά:

- ηλεκτρικές μονώσεις και διηλεκτρικά
- ημιαγώγιμες συσκευές
- λιπαντικά
- πλαστικά
- νήματα λαμπτήρων πυρακτώσεως

Η σχέση Arrhenius περιγράφει το χρόνο ζωής προϊόντων και πειραματικών μονάδων που λειτουργούν κάτω από τον παράγοντα πίεσης θερμοκρασία.

Πριν αναφέρουμε το κίνητρο για την εύρεση της σχέσης Arrhenius, θα δώσουμε τον ορισμό του νόμου του Arrhenius στη φυσική.

Νόμος του Arrhenius: Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης (ταχύτητα) των προϊόντων μιας χημικής αντίδρασης εξαρτάται από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση

$$\text{ρυθμός} = A' \exp\left[-\frac{E}{kT}\right], \quad (3.2.1)$$

όπου

E αποτελεί την ενέργεια δραστηριοποίησης της αντίδρασης,

k είναι η σταθερά του Boltzmann ίση με 8.6171×10^{-5} μονάδες έργου ανά $^{\circ}\text{C}$,

T είναι η απόλυτη θερμοκρασία του Kelvin και ισοδυναμεί με την κλίμακα Celsius προσθέτοντας σ' αυτή 273.16 βαθμούς,

A' είναι μια σταθερά που αποτελεί το χαρακτηριστικό της παραγωγής μηχανισμού αποτυχίας και των συνθηκών του ελέγχου.

Η ενέργεια δραστηριοποίησης είναι η ενέργεια που πρέπει να έχει ένα μόριο για να συμμετάσχει σε μια αντίδραση. Με άλλα λόγια, η ενέργεια δραστηριοποίησης αποτελεί ένα μέτρο της επίδρασης που έχει η θερμοκρασία στην αντίδραση.

Κίνητρο. Η σχέση που ακολουθεί βασίζεται στην αποτυχία που προκαλείται σε ένα προϊόν όταν αυξάνεται κάποιος παράγοντας πίεσης. Υποθέτουμε ότι το προϊόν αποτυγχάνει όταν ένα κρίσιμο πόσο ενός χημικού συστατικού του έχει αντιδράσει. Μια απλή αναπαράσταση αυτής της υπόθεσης είναι η εξής:

$$(\text{κρίσιμη ποσότητα}) = (\text{ρυθμός}) \times (\text{χρόνος ζωής}).$$

Ισοδύναμα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$(\text{χρόνος ζωής}) = (\text{κρίσιμη ποσότητα}) / (\text{ρυθμός}).$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι ο χρόνος ζωής, έστω t , είναι αντιστρόφως ανάλογος προς το ρυθμό που δίνει η σχέση (3.2.1). Από αυτό το συλλογισμό προκύπτει η **σχέση Arrhenius**:

$$t = A \exp\left[\frac{E}{kT}\right]. \quad (3.2.2)$$

Στην τελευταία σχέση το A είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη γεωμετρία, το μέγεθος και τη δομή του προϊόντος όπως επίσης από τη μέθοδο ελέγχου καθώς και από άλλους παράγοντες. Για προϊόντα με περισσότερες από μια καταστάσεις αποτυχίας αντιστοιχούν διαφορετικά A και E σε κάθε κατάσταση. Η καταλληλότητα του μοντέλου έχει εγκριθεί πειραματικά για συγκεκριμένα μοντέλα και καταστάσεις αποτυχίας. Στην πραγματικότητα, σε συγκεκριμένες εφαρμογές (π.χ. μόνωση κινητήρα), αν η σχέση Arrhenius δεν εφαρμόζει καλά στα δεδομένα τότε τα δεδομένα θεωρούνται πιο ύποπτα από την επιλογή του μοντέλου.

Επιταχυνόμενος παράγοντας Arrhenius. Ο επιταχυνόμενος παράγοντας του Arrhenius μεταξύ του χρόνου ζωής t κάτω από θερμοκρασία T και του χρόνου ζωής t' κάτω από μια θερμοκρασία αναφοράς T' ορίζεται από τη σχέση :

$$K = \frac{t}{t'} = \exp\left\{\frac{E}{k} \cdot \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right]\right\}. \quad (3.2.3)$$

Ο παράγοντας K δηλαδή δηλώνει πόσες φορές περισσότερο λειτουργεί μια μονάδα σε θερμοκρασία T από ότι θα λειτουργούσε σε θερμοκρασία T' .

Γραμμική μορφή της σχέσης Arrhenius. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την έκφραση (3.2.2) ο χρόνος ζωής μεταβάλλεται εκθετικά με τη θερμοκρασία. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό μπορούμε να μετατρέψουμε το μοντέλο σε γραμμικό, γεγονός που θα μας διευκολύνει αρκετά στη στατιστική ανάλυση του ελέγχου. Ο μετασχηματισμός θα γίνει λογαριθμίζοντας τη σχέση (3.2.2) οπότε θα λάβουμε το μοντέλο:

$$\ln(t) = g_0 + \frac{g_1}{T}, \quad (3.2.4)$$

όπου $g_0 = \ln A$ και $g_1 = \left(\frac{E}{k}\right) \ln(e) = \frac{E}{k}$.

Το μοντέλο (3.2.4) δηλώνει ότι ο λογάριθμος του χρόνου ζωής μιας μονάδας είναι γραμμική συνάρτηση της αντίστροφης απόλυτης θερμοκρασίας.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τις μορφές που λαμβάνει το μοντέλο Arrhenius για τις σημαντικότερες κατανομές που χρησιμοποιούν οι EEXZ, δηλαδή τις Weibull, Exponential και Lognormal.

I 1. Μοντέλο Arrhenius – Weibull

Ο χρόνος ζωής ορισμένων προϊόντων και υλικών σε έλεγχο επιταχυνόμενης θερμοκρασίας περιγράφεται από την κατανομή Weibull. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι διηλεκτρικοί πυκνωτές και οι μονωτικές ταινίες. Το μοντέλο που ακολουθεί συνδυάζει μια κατανομή Weibull του χρόνου ζωής με μια Arrhenius εξάρτηση του χρόνου ζωής στη θερμοκρασία.

Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

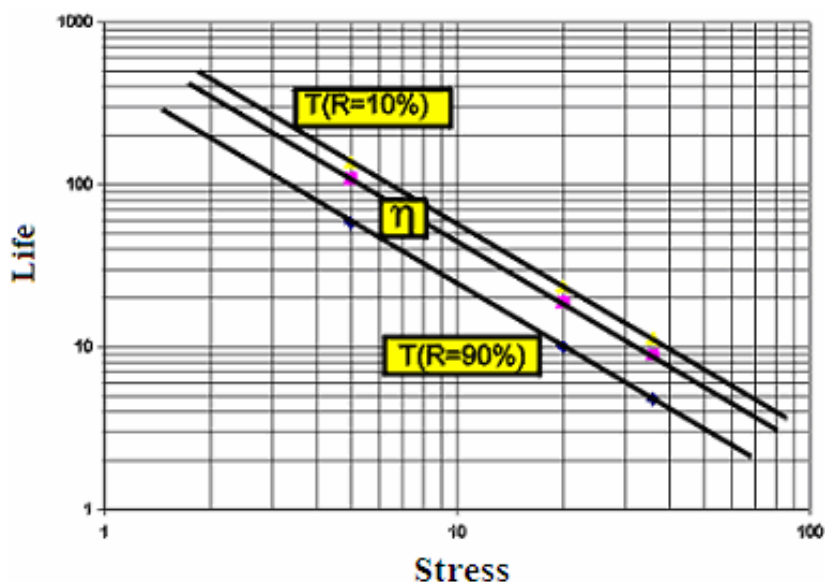
1. Σε απόλυτη θερμοκρασία T , ο χρόνος ζωής του προϊόντος ακολουθεί την κατανομή Weibull. Ισοδύναμα ο νεπεριος λογάριθμος του χρόνου ζωής ακολουθεί την κατανομή extreme value.
2. Η παράμετρος σχήματος β της Weibull είναι σταθερή. Ισοδύναμα η κατανομή extreme value του νεπεριου λογάριθμου του χρόνου ζωής έχει σταθερή παράμετρο κλίμακας $\delta=1/\beta$.

3. Ο νεπεριος λογάριθμος της χαρακτηριστικής ζωής η (παράμετρος κλίμακας) της Weibull είναι γραμμική συνάρτηση της αντίστροφου της θερμοκρασίας

$$\ln[h(T)] = g_0 + \frac{g_1'}{T}. \quad (3.2.5)$$

Οι παράμετροι g_0, g_1' και β αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε. Αυτές οι παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα. Η συνάρτηση $\ln[\eta(T)]$ παριστάνει μια ευθεία γραμμή σε ένα διάγραμμα Arrhenius όπως φαίνεται παρακάτω.

Σχήμα 4. Διάγραμμα χρόνου ζωής – πίεσης σε μοντέλο Arrhenius – Weibull



Στο διάγραμμα του σχήματος 4 παρατηρούμε ότι στον y- άξονα υπάρχουν οι τιμές του χρόνου ζωής και στον x- άξονα οι τιμές της πίεσης. Αυτές οι τιμές έρχονται σε αντίφαση με την ευθεία γραμμή που σχηματίζουν τα σημεία πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο. Στην πραγματικότητα το διάγραμμα περιγράφει τη σχέση (3.2.5) η οποία δηλώνει τη γραμμική εξάρτηση του λογαρίθμου της $\eta(T)$ με την αντίστροφη θερμοκρασία. Οπότε θα έπρεπε

κανονικά στον y- άξονα να υπήρχαν οι τιμές της $\ln\eta(T)$ και στον x- άξονα οι τιμές της $1/T$. Επειδή όμως η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με αυτή την αναπαράσταση θα ήταν εξαιρετικά σύνθετη για καποιόν ασυνήθιστο σε μαθηματικές έννοιες, όπως κάποιον ενδιαφερόμενο κατασκευαστή του προϊόντος που μελετάμε, θεωρήθηκε από τους στατιστικούς ερευνητές προτιμότερη η αντιστοίχιση της τιμής της $\eta(T)$ σε κάθε $\ln\eta(T)$ στον y- άξονα και της τιμής της T σε κάθε σημείο της $1/T$ στον x- άξονα. Συνεπώς για μια συγκεκριμένη θερμοκρασία έστω $T= 300^{\circ}K$, στον x- άξονα θα έπρεπε κανονικά να τοποθετίσουμε την τιμή $1/300$ και στον y- άξονα την τιμή $\ln\eta(300)$. Όμως εδώ, για λόγους ευκολότερης ερμηνείας από μη ειδικούς, στο σχηματιζόμενο διάγραμμα αντιστοιχίζουμε την τιμή $300^{\circ}K$ στον x- και την τιμή $\eta(300)$ στον y- άξονα.

Στο παραπάνω διάγραμμα που προκύπτει από ένα παράδειγμα σχέσης Arrhenius – Weibull χρησιμοποιώντας 3 επίπεδα θερμοκρασίας, διακρίνονται με κόκκινο χρώμα τα σημεία του λογαρίθμου της $\eta(T)$ σε κάθε επίπεδο θερμοκρασίας. Επομένως η μεσαία γραμμή περνάει από τα $63,2^a$ κάτω ποσοστιαία σημεία της Weibull κατανομής σε κάθε επίπεδο πίεσης ($\eta(T) = t_{0.632}(T)$). Οι δυο ακραίες γραμμές διέρχονται από τα 10^a και 90^a ποσοστιαία σημεία αντίστοιχα σε κάθε επίπεδο πίεσης. Η σχέση $T(R=p\%)$ δηλώνει το σημείο του χρόνου ζωής όταν η αξιοπιστία της μονάδας φτάσει στο $p\%$. Οπότε το $T(R=90\%)$ πρόκειται ουσιαστικά για το κάτω ποσοστιαίο σημείο $t_{0.10}(T)$ εφόσον όταν η αξιοπιστία είναι 90% το ποσοστό αποτυχίας είναι 10% . Αντίστοιχα το $T(R=10\%)$ είναι το κάτω ποσοστιαίο σημείο $t_{0.90}(T)$. Τα δυο αυτά σημεία, $t_{0.10}(T)$ και $t_{0.90}(T)$, και κατά συνέπεια οι γραμμές που σχηματίζουν αποτελούν τα όρια ενός 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για την $\eta(T)$.

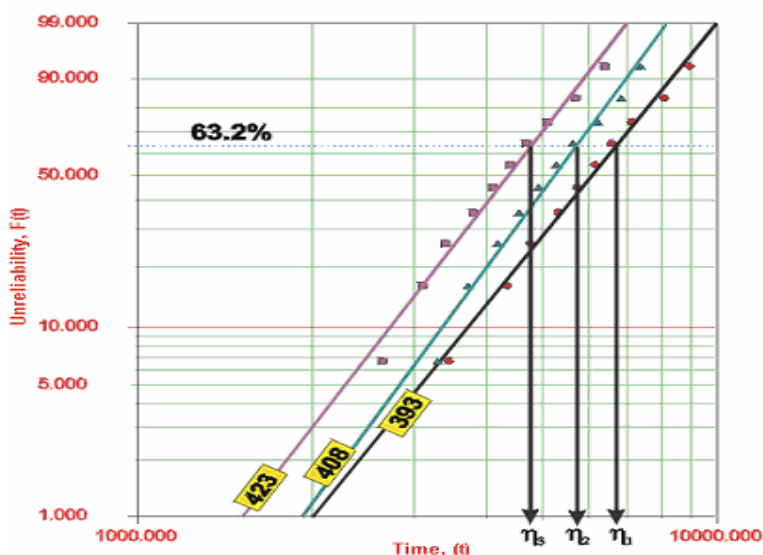
Ποσοστό αποτυχίας. Σε απόλυτη θερμοκρασία T , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (πληθυσμιακό κλάσμα αποτυχίας) στο χρόνο t είναι

$$F(t;T) = 1 - \exp\{-[t/h(T)]^b\} = 1 - \exp\{-[t \exp[-g_0 - (g'_1/T)]]^b\}. \quad (3.2.6)$$

Για συγκεκριμένη θερμοκρασία T σε μια χρονική στιγμή t αυτό το ποσοστό αντιπροσωπεύεται από ένα σημείο που βρίσκεται πάνω σε μια προσαρμοσμένη ευθεία γραμμή σε συνάρτηση με το χρόνο σε ένα διάγραμμα πιθανότητας Weibull (βλέπε παράρτημα Π3). Αυτού του είδους το διάγραμμα δίνεται στη συνέχεια. Η τιμή της β καθορίζει την κλίση των ευθειών στα διαγράμματα Weibull. Για το λόγο αυτό η παράμετρος

β καλείται επίσης και παράμετρος κλίσης, χωρίς βεβαίως να συγχέεται με την κλίση g'_1 της σχέσης (3.2.5). Το διάγραμμα δίνεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 5. Διάγραμμα πιθανότητας Weibull όταν έχουμε σχέση χρόνου ζωής - πίεσης Arrhenius



Στο διάγραμμα πιθανότητας δίνονται οι τιμές της συνάρτησης κατανομής ή αναξιοπιστίας $F(t) = 1 - R(t)$ όπως καλείται συχνά, σε τρία διαφορετικά επίπεδα θερμοκρασίας. Παρατηρούμε ότι στο σημείο που η συνάρτηση κατανομής λαμβάνει την τιμή 0.63 ο χρόνος ζωής αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική ζωή η της Weibull. Συμπεραίνουμε ότι για όσο αυξάνει η θερμοκρασία τόσο η χαρακτηριστική ζωή λαμβάνει μικρότερες τιμές κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον η σχέση (3.2.5) εκφράζει αυτή την αντίστροφη αναλογία του $t_{0.63}$ και της θερμοκρασίας.

Ποσοστιαία σημεία. Σε θερμοκρασία T , το $100p^o$ ποσοστιαίο σημείο (p ποσοστό) είναι

$$t_p(T) = h(T)[- \ln(1 - p)]^{1/b} = \exp[g_0 + g_1(1000/T)][- \ln(1 - p)]^{1/b}. \quad (3.2.7)$$

Για σταθερό p το $t_p(T)$ παριστάνεται σαν ευθεία γραμμή σε σχέση με την T σε ένα διάγραμμα σχέσης χρόνου ζωής - πίεσης, όπως τα $t_{0.10}(T)$ και $t_{0.90}(T)$ που είδαμε στο σχήμα 4.

12. Μοντέλο Arrhenius – Exponential

Οι χρόνοι ζωής των ημιαγωγών, των συσκευών στερεάς μορφής και άλλων ηλεκτρονικών μονάδων περιγράφονται ικανοποιητικά από την εκθετική κατανομή. Η εκθετική κατανομή αποτελεί συχνά λογική προσέγγιση για τους χρόνους ζωής σύνθετων ηλεκτρονικών συστημάτων. Ωστόσο είναι συχνά κακή επιλογή για την περιγραφή του χρόνου ζωής ενός προϊόντος ή ενός υλικού. Από τον ορισμό της εκθετικής κατανομής συμπεραίνουμε ότι το Arrhenius – exponential μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση του Arrhenius-Weibull μοντέλου με $\beta=1$.

Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

1. Για κάθε απόλυτη θερμοκρασία T , ο χρόνος ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή.
2. Ο νεπέριος λογάριθμος του μέσου χρόνου ζωής θ είναι γραμμική συνάρτηση της αντιστρόφου της θερμοκρασίας

$$\ln[\theta(T)] = g_0 + (g_1/T).$$

Οι παράμετροι g_0, g_1 και β αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε και θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα .

Η συνάρτηση $\ln\theta(T)$ παριστάνει μια ευθεία γραμμή ως προς την $1/T$ σε διάγραμμα Arrhenius όπως στην περίπτωση της παραμέτρου κλίμακας $\eta(T)$ της Weibull.

Ποσοστό αποτυχίας. Σε απόλυτη θερμοκρασία T , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (πληθυσμιακό κλάσμα αποτυχίας) στο χρόνο t είναι

$$\begin{aligned} F(t; T) &= 1 - \exp[-t/q(T)] = 1 - \exp[-tI(T)] \\ &= 1 - \exp\{-t \exp[-g_0 - (g_1/T)]\}. \end{aligned}$$

Τον τρόπο με τον οποίο παριστάνεται η συνάρτηση κατανομής σε σχέση με το χρόνο στα διάφορα επίπεδα θερμοκρασίας είδαμε στην περίπτωση της Weibull, καθώς όπως προαναφέραμε η εκθετική αποτελεί υποπερίπτωσή της.

Ποσοστιαία σημεία. Σε θερμοκρασία T , το $100p^{\circ}$ ποσοστιαίο σημείο είναι

$$t_p(T) = q(T)[- \ln(1 - p)] = \exp[g_0 + g_1(1000/T)][- \ln(1 - p)].$$

Για σταθερό p , το p -ποσοστιαίο σημείο $t_p(T)$ λαμβάνει τη μορφή ευθείας γραμμής όταν αναπαριστάται γραφικά με τη θερμοκρασία σε διάγραμμα σχέσης χρόνου ζωής – πίεσης Arrhenius. Τέτοιες “ποσοστιαίες γραμμές” είναι παράλληλες μεταξύ τους όταν διαφέρουν τα ποσοστά p (βλέπε σχήμα 4).

I 3. Μοντέλο Arrhenius – Lognormal

Ο χρόνος ζωής ορισμένων προϊόντων και υλικών σε ελέγχους επιταχυνόμενης θερμοκρασίας περιγράφεται από την κατανομή Lognormal. Η κατανομή Lognormal εφαρμόζεται σε περιπτώσεις ημιαγωγών και μονώσεων κινητήρα. Το μοντέλο που ακολουθεί συνδυάζει μια Lognormal κατανομή χρόνου ζωής με μια Arrhenius εξάρτηση του χρόνου ζωής στη θερμοκρασία.

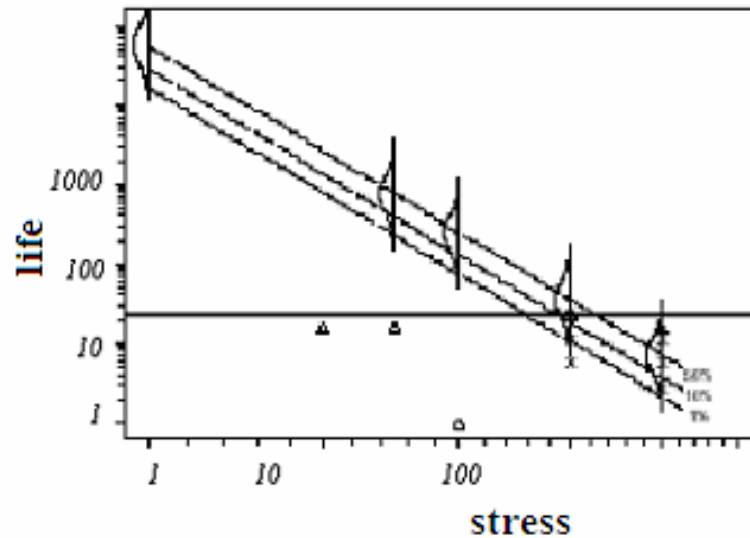
Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

1. Σε απόλυτη θερμοκρασία T , ο χρόνος ζωής του προϊόντος ακολουθεί την κατανομή Lognormal. Ισοδύναμα ο λογάριθμος του χρόνου ζωής ακολουθεί την κανονική κατανομή.
2. Η τυπική απόκλιση σ του λογαρίθμου του χρόνου ζωής είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας.
3. Ο λογάριθμος της διαμέσου του χρόνου ζωής $t_{.50}$ είναι γραμμική συνάρτηση της αντιστρόφου της απόλυτης θερμοκρασίας

$$\log[t_{.50}(T)] = g_0 + \frac{g'_1}{T},$$

ο οποίος καλείται *σχέση χρόνου ζωής κατά Arrhenius*. Οι παράμετροι g_0, g'_1 και σ αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε. Αυτές οι παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα. Ένα παράδειγμα για τον τρόπο που περιγράφονται διάφορα ποσοστιαία σημεία σε διάγραμμα Arrhenius δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 6. Διάγραμμα Arrhenius για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης
Arrhenius - Lognormal



Στο διάγραμμα τρεις ευθείες γραμμές διέρχονται από τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία της lognormal κατανομής στα διάφορα επίπεδα πίεσης. Συγκεκριμένα η πρώτη ευθεία συνδέει τα 1% ποσοστημόρια στα τέσσερα επίπεδα πίεσης, η δεύτερη συνδέει τα 10% ποσοστημόρια και η τρίτη διέρχεται από τις διαμέσους, δηλαδή από τα 50% ποσοστιαία σημεία.

Ισοδύναμα ο μέσος $m(x)$ του λογαρίθμου του χρόνου ζωής είναι γραμμική συνάρτηση του $x=1000/T$:

$$m(x) = g_0 + g_1'x .$$

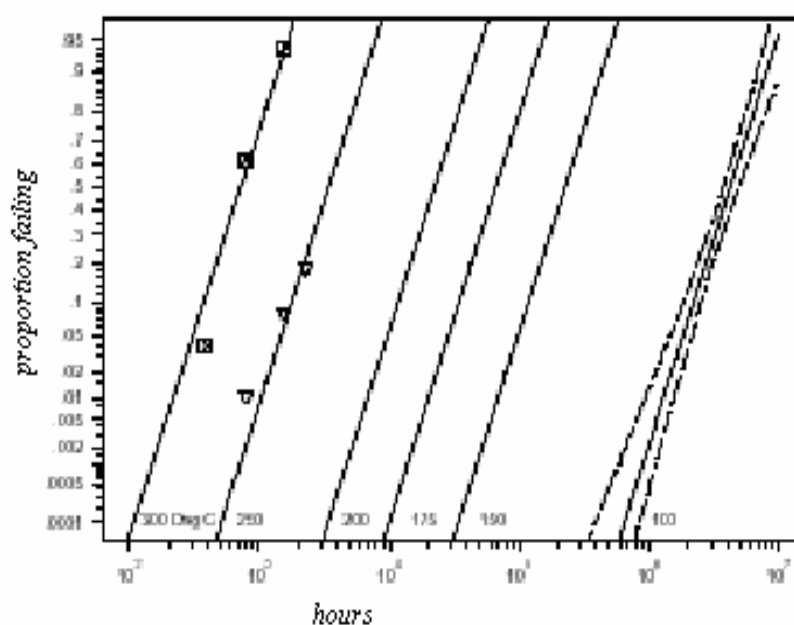
Ποσοστό αποτυχίας. Σε απόλυτη θερμοκρασία T , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (πληθυσμιακό κλάσμα αποτυχίας) στο χρόνο t είναι

$$F(t;T) = \Phi\{[\log(t) - m(x)]/s\} ,$$

όπου $\Phi\{\}$ αποτελεί την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Το παραπάνω κλάσμα αποτυχίας αναπαριστάται σαν ευθεία γραμμή σε συνάρτηση με το χρόνο σε διάγραμμα πιθανότητας lognormal όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (7). Η τιμή της σ καθορίζει την κλίση αυτών των ευθειών. Μια υψηλή (χαμηλή) τιμή της τυπικής απόκλισης αντιστοιχεί σε υψηλή (χαμηλή) κλίση και σε πλατιά (στενή) κατανομή του λογαρίθμου του χρόνου ζωής. Στο σχήμα (7) οι γραμμές κατανομής είναι παράλληλες. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση 2, η οποία χρειάζεται για τον ακόλουθο λόγο. Διαφορετικά σ

σε διαφορετικές θερμοκρασίες έχουν ως αποτέλεσμα οι γραμμές κατανομής να έχουν διαφορετικές κλίσεις. Τέτοιες γραμμές τέμνονται έχοντας ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερο ποσοστό αποτυχίας για υψηλότερη θερμοκρασία, πέρα από την χρονολογία που οι γραμμές τέμνονται. Για αυτό συνήθως το σ λαμβάνεται σταθερό.

Σχήμα 7. Διάγραμμα πιθανότητας Lognormal για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Lognormal – Arrhenius



Ποσοστιαία σημεία. Σε θερμοκρασία T , το $100p^o$ ποσοστιαίο σημείο είναι

$$t_p(T) = 10^{m(x)+z_p s} = 10^{g_0+g_1(1000/T)+z_p s},$$

όπου το z_p είναι το p -ποσοστιμόριο της τυπικής κανονικής κατανομής. Για σταθερό p , το $t_p(T)$ αναπαρίσταται γραφικά σε σχέση με τη θερμοκρασία ως ευθεία γραμμή σε ένα διάγραμμα Arrhenius όπως είδαμε στο σχήμα (6).

Η τιμή του z_p καθορίζει την κατακόρυφη θέση της αντίστοιχης γραμμής. Το αντίστοιχο ποσοστιμόριο του λογαρίθμου του χρόνου ζωής είναι

$$n_p(x) = \log[t_p(x)] = m(x) + z_p s.$$

II) Σχέση Inverse Power

Η σχέση Inverse Power χρησιμοποιείται ευρύτατα για τη μοντελοποίηση του χρόνου ζωής ως συνάρτηση της επιταχυνόμενης πίεσης. Σημαντικότερες εφαρμογές του μοντέλου είναι οι

- Ηλεκτρικές μονώσεις και τα διηλεκτρικά σε ελέγχους αντοχής στην τάση
- Σφαιρικά και κυλινδρικά ρουλεμάν
- Λάμπες πυρακτώσεως
- Ηλεκτρικοί φακοί
- Απλή μεταλλική κόπωση λόγω μηχανικής φόρτωσης και κυκλικής θέρμανσης

Η σχέση ορισμένες φορές καλείται **inverse power law** ή απλά **power law**.

Ορισμός. Υποθέτουμε ότι η επιταχυνόμενη μεταβλητή πίεσης V είναι θετική. Η σχέση **inverse power** μεταξύ του χρόνου ζωής t ενός προϊόντος και της V είναι

$$t(V) = \frac{A}{V^{g_1}}, \quad (3.2.8)$$

όπου A και g_1 είναι παράμετροι των χαρακτηριστικών του προϊόντος, του είδους γεωμετρίας και κατασκευής, της μεθόδου ελέγχου κτλ.

Το μοντέλο επίσης εμφανίζεται και στις παρακάτω ισοδύναμες μορφές

$$t(V) = (A'/V)^{g_1} \quad \text{και} \quad t(V) = A''(V_0/V)^{g_1},$$

όπου V_0 αποτελεί το φυσιολογικό επίπεδο πίεσης. Η παράμετρος g_1 καλείται *δύναμη* ή *εκθέτης*.

Γραμμική μορφή της σχέσης Inverse Power

Ο νεπέριος λογάριθμος της σχέσης (3.2.8) είναι

$$\ln(t) = g_0 + g_1[-\ln(V)].$$

Συνεπώς ο λογάριθμος του χρόνου ζωής είναι γραμμική συνάρτηση της μετασχηματισμένης πίεσης $x = -\ln(V)$.

Επιταχυνόμενος παράγοντας Inverse Power

Ο επιταχυνόμενος παράγοντας της Inverse Power μεταξύ του χρόνου ζωής t κάτω από πίεση V και του χρόνου ζωής t' κάτω από μια πίεση αναφοράς V' ορίζεται από τη σχέση :

$$K = \frac{t}{t'} = \left(\frac{V'}{V} \right)^{g_1}.$$

Π 1. Μοντέλο Power - Weibull

Ο χρόνος ζωής συγκεκριμένων προϊόντων περιγράφεται από μια Weibull κατανομή της οποίας η χαρακτηριστική ζωή είναι εκθετική συνάρτηση της πίεσης που δέχεται το προϊόν. Το μοντέλο βρίσκει συχνή εφαρμογή στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Ηλεκτρική μόνωση και διηλεκτρικά. Η επιταχυνόμενη μεταβλητή πίεσης είναι η τάση μετρομένη σε Volt
- Σφαιρικά και κυλινδρικά ρουλεμάν με επιταχυνόμενη μεταβλητή τη φόρτωση
- Αντοχή μετάλλων. Επιταχυνόμενος παράγοντας η μηχανική πίεση (λίβρες ανά τετραγωνική ίντσα)

Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

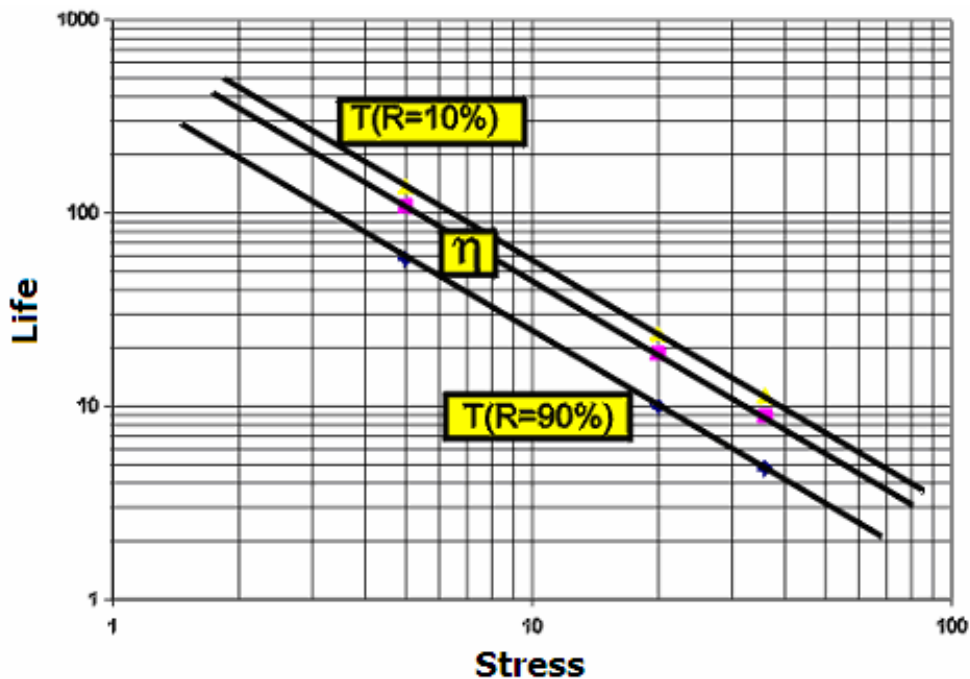
1. Σε επίπεδο πίεσης V , ο χρόνος ζωής του προϊόντος ακολουθεί τη Weibull
2. Η παράμετρος σχήματος της Weibull β είναι σταθερή (ανεξάρτητη του V)
3. Η χαρακτηριστική ζωή της Weibull η είναι συνάρτηση της αντίστροφης δύναμης (*inverse power*) της πίεσης V

$$h(V) = \frac{e^{g_0}}{V^{g_1}}.$$

Οι παράμετροι g_0, g_1 και β αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε. Αυτές οι παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα. Στη συνέχεια δίνουμε ένα log-log διάγραμμα χρόνου ζωής – πίεσης, που καλείται έτσι λόγω των λογαριθμήσεων που γίνονται κατά το μετασχηματισμό ($\ln h(V) = g_0 - g_1 \ln V$), στο οποίο φαίνονται οι τιμές που λαμβάνει η χαρακτηριστική ζωή $\eta(V)$ (κόκκινα σημεία) για τρία δεδομένα επίπεδα πίεσης. Παρατηρούμε ότι στα σημεία προσαρμόζεται ικανοποιητικά μια

ευθεία γραμμή. Επίσης δίνονται και οι τιμές του 90^{ου} και 10^{ου} ποσοστημορίου στα αντίστοιχα επίπεδα πίεσης.

Σχήμα 8. Διάγραμμα Inverse Power για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Inverse Power - Weibull

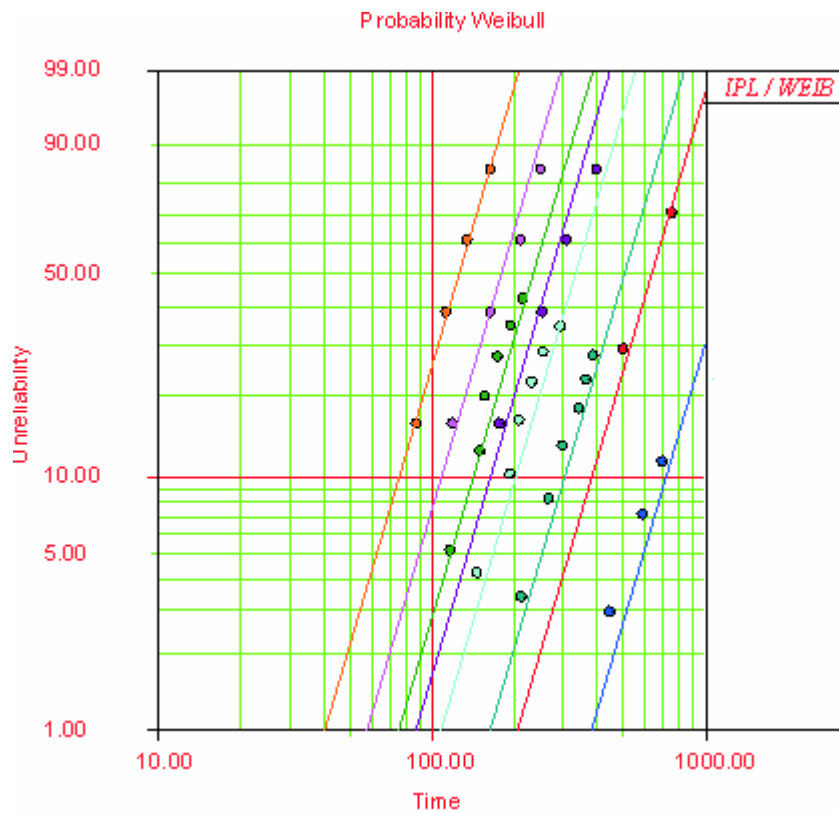


Ποσοστό αποτυχίας. Σε επίπεδο πίεσης V , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (πληθυσμιακό κλάσμα αποτυχίας τη χρονική στιγμή t) είναι

$$F(t;V) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t}{h(V)} \right]^b \right\} = 1 - \exp \left\{ - \left[t e^{-g_0} V^{g_1} \right]^b \right\}.$$

Για δεδομένο επίπεδο πίεσης V , η $F(t;V)$ έχει τη μορφή ευθείας γραμμής στην γραφική παράσταση της σε σχέση με το χρόνο σε ένα διάγραμμα πιθανότητας Weibull. Τέτοιες γραμμές φαίνονται στο επόμενο σχήμα (9). Μια υψηλή (χαμηλή) τιμή της β αντιστοιχεί σε πλατιά (στενή) κατανομή του λογάριθμου του χρόνου ζωής.

Σχήμα 9. Διάγραμμα πιθανότητας Weibull για επιταχυνόμενα δεδομένα με σχέση χρόνου ζωής – πίεσης Weibull – Inverse Power Law



Ποσοστιαία σημεία. Σε επίπεδο πίεσης V , το $100p^0$ ποσοστιμόριο (το p ποσοστό) είναι

$$t_p(V) = h(V)[- \ln(1 - p)]^{1/b} = \left[\frac{e^{g_0}}{V^{g_1}} \right] [- \ln(1 - p)]^{1/b}.$$

Επίπεδο φυσιολογικής πίεσης. Υποθέτουμε ότι ο επιθυμητός χρόνος ζωής καθορίζεται ως η τιμή ενός ποσοστιμορίου t_p^* . Τότε για το μοντέλο power - Weibull, το επίπεδο πίεσης που αποδίδεται σε αυτό το χρόνο ζωής είναι

$$V^* = \left\{ \frac{e^{g_0} [- \ln(1 - p)]^{1/b}}{t_p^*} \right\}^{1/g_1}.$$

Π 2. Μοντέλο Power – Exponential.

Ο χρόνος ζωής των ημιαγωγών, των συσκευών στέρεας μορφής καθώς και άλλων ηλεκτρικών μονάδων, αντιπροσωπεύεται συχνά από την εκθετική κατανομή. Γενικότερα το μοντέλο Power – Weibull δίνει πιο αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα. Υπάρχουν όμως ειδικές περιπτώσεις, όπως στον μετασχηματιστή πετρελαίου σε ελέγχους αντοχής στην τάση, που το power – exponential δίνει επαρκή αποτελέσματα. Το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση του Power-Weibull για $\beta=1$.

Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

1. Σε κάθε επίπεδο πίεσης V , ο χρόνος ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή.
2. Ο μέσος χρόνος ζωής θ είναι συνάρτηση της αντίστροφης δύναμης της V

$$q(V) = \frac{e^{g_0}}{V^{g_1}}.$$

Οι παράμετροι g_0 και g_1 αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε και θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα. Η συνάρτηση $q(V)$ παριστάνει ευθεία γραμμή σε διάγραμμα log-log.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda=1/\theta$ είναι συνάρτηση της δύναμης της πίεσης V

$$I(V) = e^{-g_0} V^{g_1}.$$

Η $\lambda(V)$ παριστάνει επίσης ευθεία γραμμή σε διάγραμμα log-log.

Ποσοστό αποτυχίας. Σε επίπεδο πίεσης V , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(t;V) = 1 - \exp\left\{-\left[\frac{t}{q(V)}\right]\right\} = 1 - \exp\{-tI(V)\} = 1 - \exp\{-te^{-g_0}V^{g_1}\}.$$

Για δοθέν V , αυτό το ποσοστό αποτυχίας παριστάνει ευθεία γραμμή σε διάγραμμα πιθανότητας Weibull. Τέτοιες γραμμές κατανομής είναι παράλληλες όπως είδαμε και στο διάγραμμα πιθανότητας στην περίπτωση της Weibull στο σχήμα (9).

Ποσοστιαία σημεία. Σε επίπεδο πίεσης V , το $100p$ ποσοστημόριο είναι

$$t_p(V) = q(V)[- \ln(1-p)] = \left[\frac{e^{g_0}}{V^{g_1}} \right] [- \ln(1-p)].$$

Για δοθέν P , η συνάρτηση $t_p(V)$ παριστάνει ευθεία γραμμή σε σχέση με την πίεση V σε ένα διάγραμμα log-log όπως φαίνεται στο σχήμα (8). Τέτοιες ποσοστιαίες γραμμές είναι παράλληλες για διαφορετικά ποσοστά p .

Επίπεδο φυσιολογικής πίεσης. Υποθέτουμε ότι ο επιθυμητός χρόνος ζωής καθορίζεται ως ο μέσος χρόνος για την αποτυχία q^* . Τότε για το power – exponential μοντέλο, το επίπεδο πίεσης που αντιστοιχεί σε αυτό το χρόνο είναι

$$V^* = \left(\frac{e^{g_0}}{q^*} \right)^{1/g_1}.$$

Π 3. Μοντέλο Power – Lognormal.

Ο χρόνος ζωής συγκεκριμένων προϊόντων περιγράφεται από μια lognormal κατανομή της οποίας η διάμεσος είναι συνάρτηση της αντίστροφης δύναμης της πίεσεως. Αυτό είναι το απλούτερο μοντέλο που χρησιμοποιείται για την αντοχή των μετάλλων. Μια άλλη εφαρμογή που βρίσκει το μοντέλο είναι κατά τον έλεγχο της αντοχής μιας μονωτικής ταινίας στην τάση.

Βασικές υποθέσεις για την ισχύ του μοντέλου

1. Σε κάθε επίπεδο πίεσης V , ο χρόνος ζωής ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή.
2. Η τυπική απόκλιση σ , του λογαρίθμου του χρόνου ζωής είναι σταθερή, δεν επηρεάζεται δηλαδή από την πίεση.
3. Η διάμεσος του χρόνου ζωής $t_{.50}$ είναι συνάρτηση της αντίστροφης δύναμης της πίεσεως, δηλαδή

$$t_{.50}(V) = \frac{10^{g_0}}{V^{g_1}}.$$

Οι παράμετροι g_0, g_1 και σ αποτελούν χαρακτηριστικά του προϊόντος και της μεθόδου ελέγχου που χρησιμοποιούμε. Ισοδύναμα ο μέσος $m(x)$ του λογαρίθμου του χρόνου ζωής είναι γραμμική συνάρτηση της μετασχηματισμένης πίεσης $x = -\log(V)$.

$$m(x) = g_0 + g_1 x.$$

Ποσοστό αποτυχίας. Σε επίπεδο πίεσης V , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(t; V) = \Phi\{[\log(t) - m(x)]/\sigma\}.$$

Το ποσοστό αποτυχίας παριστάνει ευθεία γραμμή σε σχέση με το χρόνο σε διάγραμμα πιθανότητας lognormal.

Ποσοστιαία σημεία. Σε επίπεδο πίεσης V , το $100p^{\circ}$ ποσοστμόριο είναι

$$t_p(V) = 10^{m(x) + z_p \sigma} = \frac{10^{g_0}}{V^{g_1}} 10^{z_p \sigma}.$$

Για δοθέν p , η συνάρτηση $t_p(V)$ παριστάνει ευθεία γραμμή σε σχέση με την πίεση V σε ένα διάγραμμα log-log.

Επίπεδο φυσιολογικής πίεσης. Αν ο επιθυμητός χρόνος ζωής καθορίζεται με το ποσοστμόριο t_p^* τότε το επίπεδο πίεσης V^* που αντιστοιχεί σε αυτό δίνεται από τη σχέση

$$V^* = \frac{1}{g_1} 10^{g_0 + z_p \sigma - \log(t_p^*)}.$$

III) Σχέση Eyring

Μια εναλλακτική περίπτωση στη σχέση Arrhenius για την περίπτωση της επιταχυνόμενης θερμοκρασίας αποτελεί η σχέση Eyring. Βασισμένη στην κβαντομηχανική, παρουσιάζει το ρυθμό αντίδρασης μιας χημικής φθοράς όπως δόθηκε από τους Glasstone, Laidler και Eyring (1941).

Η σχέση Eyring για κάποιο χρόνο ζωής t ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας δίνεται από τη σχέση

$$t = \frac{A}{T} \exp\left[\frac{B}{kT}\right], \quad (3.2.9)$$

όπου τα A και B είναι σταθερές των χαρακτηριστικών του προϊόντος και της διαδικασίας ελέγχου ενώ k είναι η σταθερά του Boltzmann. Για περιπτώσεις που τα επίπεδα της θερμοκρασίας έχουν μικρές διαφορές, το πηλίκο (A/T) είναι ουσιαστικά σταθερό και η σχέση (3.2.9) είναι πολύ κοντά στη σχέση (3.2.2), δηλαδή τη σχέση Arrhenius.

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται για την προσαρμογή του μοντέλου Eyring στα δεδομένα είναι οι ίδιες με εκείνες που εφαρμόζονται στο μοντέλο Arrhenius που αναπτύχθηκε προηγουμένως. Αν θεωρήσουμε τους μετασχηματισμένους χρόνους $t' = t \cdot T$ τότε μπορούμε να αναλύσουμε τα δεδομένα μας σαν να προέρχονται από το μοντέλο Arrhenius καθώς σε αυτή την περίπτωση η σχέση (3.2.9) θα λάβει τη μορφή

$$t = \frac{A}{T} \exp\left[\frac{B}{kT}\right] \Leftrightarrow \frac{t'}{T} = \frac{A}{T} \exp\left[\frac{B}{kT}\right] \Leftrightarrow t' = A \exp\left[\frac{B}{kT}\right],$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση Arrhenius (3.2.2).

Στην περίπτωση του μοντέλου Eyring – Lognormal η σχέση (3.2.9) είναι αυτή που δίνει τη διάμεσο του χρόνου ζωής. Επίσης, η τυπική απόκλιση σ του λογαρίθμου του χρόνου ζωής θεωρείται σταθερή. Τότε και η τυπική απόκλιση του λογαρίθμου του μετασχηματισμένου χρόνου ζωής θα έχει τη σταθερή τιμή σ .

3.3. Παραμετρικά και μη Παραμετρικά δεδομένα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εκτίμησης τους.

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύχθηκαν εκτενώς οι τρεις βασικότερες σχέσεις χρόνου ζωής – πίεσης που χρησιμοποιούν οι EEXZ και για την πληρέστερη ανάπτυξή τους δόθηκαν οι μορφές που λαμβάνουν για τις κυριότερες κατανομές που ακολουθούν οι χρόνοι ζωής. Τα παραπάνω μοντέλα, όπως παρουσιάστηκαν, ανήκουν στον παραμετρικό χώρο των μοντέλων

που χρησιμοποιούν οι EEXZ. Συγκεκριμένα για το σχηματισμό ενός παραμετρικού μοντέλου σε επιταχυνόμενους ελέγχους είναι απαραίτητο να ισχύουν οι επόμενες τρεις βασικές υποθέσεις (Shaked, M. and Singpurwalla, N. D. (1982)).

1. Η κατανομή του χρόνου ζωής πρέπει να ανήκει σε κάποια γνωστή οικογένεια κατανομών.
2. Η κατανομή του χρόνου ζωής πρέπει να ανήκει στην ίδια παραμετρική οικογένεια κατανομών τόσο κάτω από συνθήκες φυσιολογικής πίεσης όσο και κάτω από συνθήκες επιταχυνόμενης πίεσης.
3. Η σχέση μεταξύ του διανύσματος των παραμέτρων αυτής της οικογένειας και των παραγόντων πίεσης πρέπει να είναι γνωστή.

Έχοντας ως δεδομένες αυτές τις συνθήκες, η λύση του προβλήματος είναι αρκετά απλοποιημένη. Για το λόγο αυτό υπάρχει κίνδυνος οι υποθέσεις να λαμβάνονται συχνά μόνο για μαθηματική άνεση χωρίς να έχουν βάση στην πραγματικότητα. Για την αποφυγή της εμφάνισης τέτοιων φαινομένων έχουν γίνει αξιοσημείωτες προσπάθειες τα τελευταία χρόνια, ώστε να αναπτυχθούν μοντέλα και μέθοδοι που δεν απαιτούν υποθέσεις για τη συναρτησιακή μορφή της κατανομής του χρόνου ζωής. Αυτές οι προσπάθειες αποτέλεσαν το βασικότερο κίνητρο για την ανάπτυξη των μη παραμετρικών ελέγχων χρόνων ζωής.

Κατά συνέπεια όταν έχουμε να κάνουμε με μη παραμετρικά δεδομένα στους EEXZ ουσιαστικά πρόκειται για δεδομένα για τα οποία οι δυο πρώτες υποθέσεις δεν είναι διαθέσιμες. Δηλαδή δεν υποθέτουμε ότι ο χρόνος ζωής τους ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή παρά μόνο μπορούμε να θεωρήσουμε τη σχέση χρόνου ζωής – πίεσης η οποία είναι ανεξάρτητη της κατανομής αλλά εξαρτάται από τη φύση και τα χαρακτηριστικά του προϊόντος καθώς και του τρόπου διεξαγωγής του ελέγχου.

Ένα βασικό μειονέκτημα των μη παραμετρικών EEXZ είναι ότι συχνά απαιτούν υπερβολικά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων ώστε να καλύψουν την αδυναμία που έχουν εξαιτίας της απουσίας παρελθοντικών δεδομένων, που θα έδιναν ικανοποιητικές πληροφορίες για την κατανομή του χρόνου ζωής.

Στη συνέχεια θα δοθούν δυο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα EEXZ ώστε να φανούν περισσότερο οι διαφορές στον τρόπο αντιμετώπισης μεταξύ παραμετρικών και μη παραμετρικών επιταχυνόμενων ελέγχων. Το πρώτο παράδειγμα (παραμετρικό) παρουσιάζει

τον τρόπο εκτίμησης των στατιστικών χαρακτηριστικών του χρόνου ζωής προϊόντων τα οποία δέχονται πολλαπλές πιέσεις. Δηλαδή επιδρά σε αυτά ένα διάνυσμα πιέσεων, όταν γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ζωής της ακολουθεί μια Weibull κατανομή και υποθέτοντας ότι ισχύει κάποια γνωστή σχέση μεταξύ χρόνου ζωής – πίεσης. Στο δεύτερο παράδειγμα (μη παραμετρικό) θεωρούμε ότι επιδρά στις πειραματικές μονάδες σταδιακά αυξανόμενη θερμοκρασία και ότι ισχύει η σχέση Arrhenius χωρίς να έχουμε γνώση για την κατανομή που ακολουθεί ο χρόνος ζωής των μονάδων.

α) Παραμετρικό παράδειγμα

Το παρακάτω παράδειγμα (Mettas, A. (2000)) δίνεται για να διασαφηνίσει καλύτερα τη στατιστική ανάλυση κατά τα παραμετρικά μοντέλα. Για το λόγο αυτό κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

1. Ο χρόνος ζωής των αντικειμένων που υποβάλλονται σε τεχνητή πίεση ακολουθεί τη κατανομή Weibull σε κάθε επίπεδο πίεσης.
2. Κατά τη μετάβαση σε διαφορετικά επίπεδα πίεσης μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος κλίμακας η της Weibull και όχι η παράμετρος σχήματος β που διατηρείται σταθερή.
3. Τα διάφορα είδη τεχνητής πίεσης είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, δηλαδή οι μεταβλητές του διανύσματος των πιέσεων $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{K}, x_m)'$ είναι ανεξάρτητες.
4. Υποθέτουμε ότι για μια δεδομένη χρονική ή διαφορετικά για ένα συγκεκριμένο ποσοστημόριο t_p της κατανομής Weibull, που ακολουθεί ο χρόνος ζωής, ισχύει η λογαριθμογραμμική σχέση μεταξύ αυτού και του διανύσματος των πιέσεων, δηλαδή $\ln(t_p) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$.

Σκοπός μας είναι να εξάγουμε συμπεράσματα για το χρόνο ζωής των αντικειμένων σε φυσιολογικά επίπεδα πιέσεων με βάση τα αποτελέσματα που θα λάβουμε από τους επιταχυνόμενους ελέγχους. Η υπόθεση (4) ουσιαστικά εκφράζει τη σχέση με την οποία θα γίνει η μετάβαση από τα αυξημένα επίπεδα πίεσης στα επίπεδα λειτουργίας καθώς μας επιτρέπει να υπολογίσουμε οποιοδήποτε p -ποσοστημόριο ($0 \leq p \leq 1$) του χρόνου ζωής αντιστοιχώντας σε κάθε συμμεταβλητή (είδος πίεσης) την αντίστοιχη τιμή της, δηλαδή την

τιμή στο επίπεδο που αυτή βρίσκεται. Επομένως αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε τη διάμεσο (*median*) του χρόνου ζωής τότε θα υπολογίσουμε μέσω αυτής της λογαριθμογραμμικής σχέσης το $t_{0.5}$ ή 50%-ποσοστημόριο ενώ αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράμετρο κλίμακας η της Weibull θα επιλέξουμε το 63,2% ποσοστιαίο σημείο που αντιστοιχεί σε αυτή. Το πλεονέκτημα της έκφρασης των ποσοστημορίων με μια λογαριθμογραμμική σχέση είναι ότι βασικές σχέσεις όπως οι Arrhenius και Inverse power μπορούν να υποτεθούν για τις συμμεταβλητες εφαρμόζοντας έναν απλό μετασχηματισμό. Οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί για τα ευρέως διαδεδομένα μοντέλα καθώς και τους πιθανούς συνδυασμούς τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα .

Πίνακας 1. Πίνακας μετασχηματισμών

σχέση Χρόνου ζωής – πίεσης	Μοντέλο	Μετασχηματισμός
Arrhenius	$t_p = Ae^{\frac{B}{V}}$	$x = \frac{1}{V}$
Inverse Power	$t_p = \frac{1}{K \cdot V^n}$	$x = \ln V$
Συνδυασμός 1 (Θερμοκρασία- Τάση)	$t_p = \frac{C \cdot e^{\frac{B}{V}}}{U^n}$	$x_1 = \frac{1}{V}$ $x_2 = \ln U$
Συνδυασμός 2 (Θερμοκρασία- Υγρασία)	$t_p = A \cdot e^{\frac{f}{V} + \frac{b}{U}}$	$x_1 = \frac{1}{V}$ $x_2 = \frac{1}{U}$

Επομένως ανάλογα με το είδος της πίεσης ή των πιέσεων που εφαρμόζουμε κατά τη διεξαγωγή του πειράματος μπορούμε να εκφράσουμε την η σύμφωνα με τις σχέσεις Arrhenius και Inverse Power ή συνδυασμούς τους .

Ας θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση όπου $h = t_{0.632} = e^{\sum_{k=0}^m a_k x_k}$ για m παράγοντες πίεσης. Τότε θεωρώντας γνωστές τις τιμές των διαφόρων ειδών πίεσης στα διάφορα επίπεδα πρέπει

να εκτιμήσουμε τις τιμές των συντελεστών a_1, \dots, a_m . Σύμφωνα με τον ορισμό της Weibull η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση

$$f(t) = \frac{b}{h} \left(\frac{t}{h} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{h} \right)^b}, \quad (3.3.1)$$

ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{h} \right)^b}. \quad (3.3.2)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της h στις (3.3.1) και (3.3.2) προκύπτουν οι νέες σχέσεις για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση αξιοπιστίας

$$f(t) = bt^{b-1} e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_k} e^{-t^b e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_k}} \quad (3.3.3)$$

και

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{e^{\sum_{k=0}^m a_k x_k}} \right)^b} = e^{-t^b e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_k}}. \quad (3.3.4)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις δόθηκαν με σκοπό την εύρεση της συνάρτησης πιθανοφάνειας από τη μεγιστοποίηση της οποίας θα προκύψουν οι τιμές των παραμέτρων a_1, \dots, a_m για τον υπολογισμό της h . Από τη θεωρία της Ανάλυσης Επιβίωσης γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$L = \prod_{i=1}^F f(T_{F,i}) \prod_{j=1}^S R(T_{S,j}),$$

όπου $T_{F,i}$ αποτελεί τον πλήρη χρόνο ζωής του i -αντικειμένου και $T_{S,j}$ είναι ο λογοκριμένος χρόνος του j -αντικειμένου όταν έχουμε F αποτυχίες και S λογοκριμένα δεδομένα.

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$\ln L = \Lambda = \sum_{i=1}^F \ln[f(T_{F,i})] + \sum_{j=1}^S \ln[R(T_{S,j})]. \quad (3.3.5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.4) στη σχέση (3.3.5) έχουμε τη νέα έκφραση του λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^F \ln \left[b T_{F,i} b^{-1} e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_{i,k}} e^{-T_{F,i} b} e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_{i,k}} \right] - \sum_{j=1}^S T_{S,j} b e^{-b \sum_{k=0}^m a_k x_{j,k}} . \quad (3.3.6)$$

Το σύνολο των αγνώστων παραμέτρων που μεγιστοποιούν τη σχέση (3.3.6) προκύπτουν επιλύοντας τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial b} = 0 ; \frac{\partial \Lambda}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3.7)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας όπως δίνεται από τη σχέση (3.3.6) έχει γενική μορφή και αναλόγως το μετασχηματισμό των συμμεταβλητών προκύπτουν διαφορετικά γνωστά μοντέλα. Αν για παράδειγμα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό $x_k = \frac{1}{S_k}$, τότε η ισότητα (3.3.6) γίνεται η συνάρτηση πιθανοφάνειας για τη σχέση Arrhenius όπου S_k είναι ο k-παράγοντας πίεσης.

Παρομοίως η Inverse Power σχέση μπορεί να προκύψει αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό

$$x_k = \ln S_k .$$

Για την επίλυση των σχέσεων (3.3.7) χρησιμοποιούνται διάφοροι αλγόριθμοι όπως η μέθοδος Newton, οι γενετικοί αλγόριθμοι, ο δυναμικός προγραμματισμός κτλ. Η πιο αξιόπιστη και ταχύτερη μέθοδος είναι η μέθοδος Newton (παράρτημα Π2). Η μέθοδος μεγιστοποιεί το λογάριθμο της πιθανοφάνειας εκτελώντας βήματα Newton ώστε να φέρει τις μερικές παραγώγους στο μηδέν. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου ελέγχεται αν το δεδομένο βήμα μειώνει τη συγκεκριμένη μερική παράγωγο της πιθανοφάνειας. Αν όχι, εκτελούμε την ίδια πορεία μέχρι να φτάσουμε σε ένα αποδεκτό στάδιο. Όπως σε κάθε αλγόριθμο βελτιστοποίησης, οι αρχικές εκτιμήσεις των παραμέτρων (πρώτα βήματα) είναι πολύ κρίσιμες. Για το λόγο αυτό απαιτείται αρκετή έρευνα για την απόκτησή τους. Οι αρχικές εκτιμήσεις προκύπτουν από τα διαθέσιμα δεδομένα. Ο αλγόριθμος έχει αναπτυχθεί για την επίλυση ως οκτώ διαφορετικών ειδών πίεσης.

β) Μη παραμετρικό παράδειγμα

Στο ακόλουθο παράδειγμα (Gouno, E. (2001)) θα παρουσιάσουμε την ανάπτυξη ενός μη παραμετρικού μοντέλου Arrhenius. Το πείραμα εκτελείται χρησιμοποιώντας αυξανόμενη πίεση κατά βήματα (*step stress*). Ο παράγοντας πίεσης που χρησιμοποιούμε για την επιτάχυνση του χρόνου ζωής των προϊόντων (ηλεκτρονικές συσκευές) που διαθέτουμε είναι η θερμοκρασία. Διαθέτουμε N μονάδες ηλεκτρονικών συσκευών για τη διεξαγωγή του πειράματος οι οποίες τίθενται κάτω από θερμοκρασία T_i σε κάθε χρονικό διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ με καθορισμένο μήκος $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ για $i = 2, \dots, m$. Συνεπώς έχουμε m διαφορετικά επίπεδα θερμοκρασίας, τέτοια ώστε $T_1 < T_2 < \dots < T_m$, τα οποία εφαρμόζονται σε m διαδοχικά βήματα στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα με μήκη $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$. Τις χρονικές στιγμές αλλαγής του επιπέδου της πίεσης t_i παρατηρούμε τον αριθμό k_i των αποτυχιών (πλήρων χρόνων ζωής) και τον αριθμό των λογοκριμένων χρόνων ζωής c_i μονάδων που για διάφορους λόγους αποσύρθηκαν από το πείραμα (λογοκρισία από αριστερά). Συνεπώς ο αριθμός των μονάδων που "βρίσκονται σε κίνδυνο" ή που "λειτουργούν ακόμα" κατά το i -οστό διάστημα προκύπτει από τη σχέση.

$$n_i = n_{i-1} - k_{i-1} - c_{i-1} \quad \text{για } i = 2, \dots, m.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $n_0 = N$ και t_m είναι η στιγμή λήξης του πειράματος. Από όσα αναφέραμε μπορούμε να δείξουμε ότι ο αριθμός των μονάδων που αποχώρησαν για διάφορους λόγους στο τελευταίο διάστημα είναι ίσος με

$$c_m = N - \sum_{j=1}^m k_j - \sum_{j=1}^{m-1} c_j,$$

έτσι ώστε

$$N = \sum_{j=1}^m k_j + \sum_{j=1}^m c_j.$$

Επομένως οι μονάδες που εξακολουθούν να λειτουργούν στο διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ κάτω από θερμοκρασία T_i είναι

$$n_i = \sum_{j=i}^m (k_j + c_j) = N - \sum_{j=1}^{i-1} (k_j + c_j).$$

Τα παρατηρούμενα δεδομένα ομαδοποιούνται, ωστόσο οι ακριβείς χρόνοι αποτυχίας δεν είναι διαθέσιμοι. Για να εργαστούμε με χρόνους ζωής επιλέγουμε τυχαία (προσομοιώνουμε) k_i χρόνους ζωής, έστω $t_{i,l}$ ($l=1, \dots, k_i$), μεταξύ των χρονικών στιγμών t_{i-1} και t_i χρησιμοποιώντας μια ομοιόμορφη κατανομή.

Κατά το σχηματισμό του πειράματος υποθέτουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας I_i , που συνδέεται με τους χρόνους αποτυχίας, διατηρείται σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα, στο δεδομένο επίπεδο πίεσης, οπότε και αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, δηλαδή $I_{i-1} \leq I_i$, $i=2, \dots, m$. Τότε ισχύει η σχέση

$$I(t) = \sum_{j=1}^m I_j I_{[t_{i-1}, t_i]}(t), \quad (3.3.8)$$

όπου $I_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$ είναι δείκτρια συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η βαθμίδα αποτυχίας I_i συνδέεται με τη θερμοκρασία T_i που εφαρμόζεται στο δεδομένο βήμα σύμφωνα με ένα μοντέλο Arrhenius, ως εξής :

$$I_i = \exp \left\{ -\frac{E_a}{K} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_0} \right) \right\} I_0, \quad (3.3.9)$$

όπου I_0 είναι η βαθμίδα αποτυχίας σε θερμοκρασία T_0 κανονικής λειτουργίας, E_a η ενέργεια δραστηριοποίησης και K η σταθερά του Boltzmann.

Αν θέσουμε

$$x_i = -\frac{1}{K} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_0} \right),$$

τότε η σχέση (3.3.9) λαμβάνει τη μορφή

$$I_i = \exp \{ E_a x_i \} I_0, \quad (3.3.10)$$

το οποίο αποτελεί το κλασσικό μοντέλο αναλογικού κινδύνου (Cox (1972)) που θα μελετήσουμε περισσότερο σε επόμενο κεφάλαιο .

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρεις άγνωστες παράμετροι οι I_i , I_0 και E_a . Αρχικά θα εκτιμήσουμε τις τιμές των I_i χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.3.8) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας του χρόνου ζωής μιας μονάδας κάτω από *step-stress* σύμφωνα με γνωστή σχέση, οπότε έχουμε

$$f(t) = I(t) \cdot R(t) = I(t) \exp\left\{-\int_0^t I(u) du\right\}, \quad (3.3.11)$$

η οποία εναλλακτικά γράφεται ως εξής

$$f(t/I) = \sum_{i=1}^m I_i \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^{i-1} I_j \Delta_j + I_i(t-t_{i-1})\right]\right\} I_{[t_{i-1}, t_i]}(t). \quad (3.3.12)$$

Η συνάρτηση επιβίωσης προκύπτει τότε από τη σχέση

$$R(t) = \sum_{i=1}^m \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^{i-1} I_j \Delta_j + I_i(t-t_{i-1})\right]\right\} I_{[t_{i-1}, t_i]}(t). \quad (3.3.13)$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ) της I_i λαμβάνεται αν αρχικά θεωρήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(I) \propto \prod_{i=1}^m \left[\prod_{l=1}^{k_i} f(t_{i,l}/I) \right] [R(t_i)]^{c_i}. \quad (3.3.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.3.12) και (3.3.13) αποδεικνύεται ότι

$$L(I) \propto \prod_{i=1}^m I_i^{k_i} \exp\{-I_i TTT_i\}, \quad (3.3.15)$$

όπου $TTT_i = \sum_{l=1}^{k_i} (t_{i,l} - t_{i-1}) + (n_i - k_i) \Delta_i$ αποτελεί το συνολικό χρόνο ζωής στον έλεγχο κάτω από θερμοκρασία T_i (*Total Time on Test at level T_i*).

Μεγιστοποιώντας τον λογάριθμο της ποσότητας της σχέσης (3.3.15) λαμβάνουμε τους EMΠ της βαθμίδας αποτυχίας σε κάθε διάστημα. Οι εκτιμητές προκύπτουν εκτελώντας μια σειρά πράξεων και έχουν το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\hat{I}_i = \frac{k_i}{TTT_i}, \quad i=1, \dots, m. \quad (3.3.16)$$

Ένας τέτοιος εκτιμητής ενδεχομένως να παραβιάζει την υπόθεση ότι η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται ανά διαστήματα καθώς οι παράγοντες της αναλογίας (3.3.16) δεν μπορούν να εξασφαλίσουν την ανίσωση $\hat{I}_i > \hat{I}_{i-1}$. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ένας εμπειρικός

εκτιμητής [Proschan F, Singpurwalla ND. (1980)] έτσι ώστε αν παραβιάζεται η προηγούμενη ανίσωση να έχουμε

$$\hat{I}_i = \hat{I}_{i-1} + \frac{\hat{I}_j - \hat{I}_{i-1}}{j-i+1},$$

όπου $j > i$ αποτελεί τον πρώτο δείκτη για τον οποίο ο εκτιμητής \hat{I}_j είναι μεγαλύτερος από τον \hat{I}_i .

Αντικαθιστώντας το I_i με το \hat{I}_i στη σχέση (3.3.10) και λογαριθμίζοντας τις δυο πλευρές τις ισότητας λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\ln \hat{I}_i = E_a x_i + \ln I_0.$$

Αν παραστήσουμε γραφικά τα σημεία $\ln \hat{I}_i$ σε σχέση με τα x_i ή διαφορετικά σχηματίσουμε το γράφημα $(x_i, \ln \hat{I}_i)$ τότε θα προκύψει μια ευθεία γραμμή με κλίση E_a και αρχική συνιστώσα $\ln I_0$ όπως ορίζει η τελευταία σχέση. Εφόσον λοιπόν τα x_i αποτελούν γνωστές σταθερές και οι ΕΜΠ \hat{I}_i είναι υπολογισμένοι τότε σύμφωνα με την τελευταία σχέση μπορούμε, μέσω ενός γραφήματος, να υπολογίσουμε τις τιμές των E_a και I_0 . Αυτοί οι γραφικοί εκτιμητές καλούνται και εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων (ΕΕΤ) καθώς αν θεωρήσουμε την $\ln \hat{I}_i$ ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x_i εξαρτημένη, τότε στο μοντέλο παλινδρόμησης τα E_a και I_0 αποτελούν τις άγνωστες παραμέτρους. Εκτιμώντας τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προκύπτουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με τη γραφική μέθοδο.

Στη συνέχεια θα δώσουμε συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα στο παράδειγμα ώστε να συγκρίνουμε τους ΕΜΠ \hat{I}_i με προσομοιωμένες τιμές της βαθμίδας αποτυχίας.

Διαθέτουμε $N=45$ πειραματικές μονάδες, $E_a=0,37$ eV και $I_0=5.707 \times 10^{-6} h^{-1}$. Η επιλογή αυτών των τιμών έγινε τελείως αυθαίρετα. Ωστόσο η τιμή $5.707 \times 10^{-6} h^{-1}$ αντιστοιχεί σε μέσο χρόνο ζωής ίσο με 20 χρόνια και 0,37 eV αποτελεί την κοινή τιμή της ενέργειας δραστηριοποίησης μιας διηλεκτρικής κατάρρευσης (βλάβη λειτουργίας).

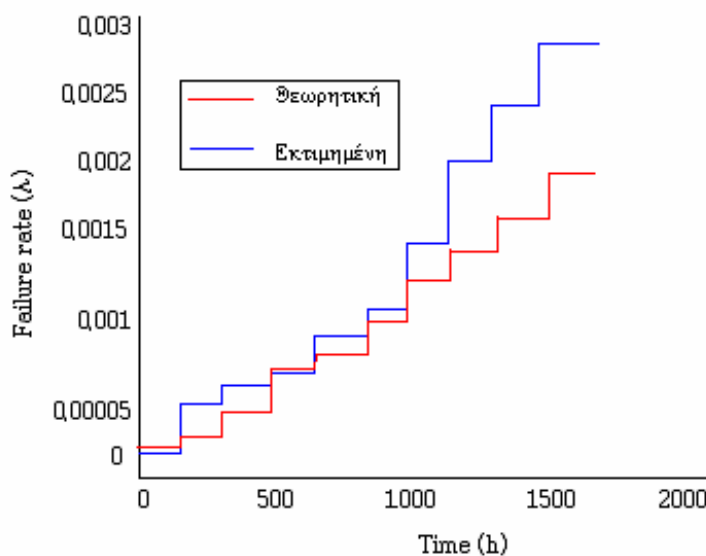
Στον πίνακα (2) η πρώτη στήλη παρουσιάζει τα επίπεδα θερμοκρασίας σε κάθε χρονικό διάστημα σταθερού μήκους 168 hours. Η τελευταία στήλη δίνει τις τιμές των εμπειρικών

εκτιμητών σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράψαμε. Αυτές οι τιμές μπορούν να συγκριθούν με τις τιμές της πέμπτης στήλης οι οποίες προέκυψαν από την προσομοίωση των αριθμητικών δεδομένων του παραδείγματος. Στο σχήμα (10) απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα οι θεωρητικές και με μπλε χρώμα οι εκτιμημένες τιμές της βαθμίδας αποτυχίας. Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις είναι πολύ κοντά στις προσομοιωμένες τιμές.

Πίνακας 2. Πίνακας προσομοιωμένων και εκτιμώμενων τιμών της βαθμίδας αποτυχίας

$T(^{\circ}C)$	n_i	k_i	c_i	$I_{Theoretical}(h^{-1})$	$\hat{I}_i(h^{-1})$
120	45	1	0	,000160	,000134
140	44	4	0	,000273	,000568
160	40	2	1	,000442	,000613
180	37	4	0	,000684	,000659
190	33	5	0	,000839	,000953
200	28	5	1	,001021	,001093
210	22	1	0	,001232	,001517
220	21	2	0	,001476	,001942
230	19	7	0	,001755	,002366
240	12	2	0	,002073	,002791

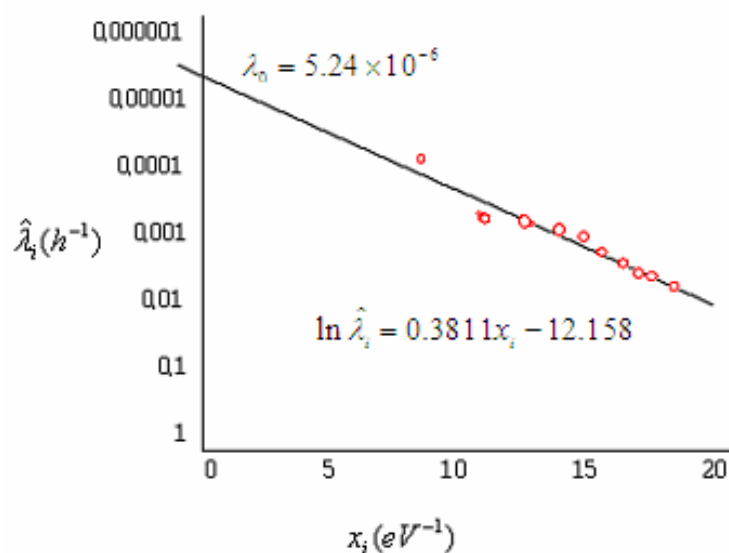
Σχήμα 10. Θεωρητική και εκτιμημένη βαθμίδα αποτυχίας σε σχέση με το χρόνο



Στο επόμενο σχήμα (11) δίνεται η προσαρμοσμένη ευθεία των $\ln \hat{I}_i$ και x_i η οποία δείχνεται ότι δίνεται από τη σχέση $\ln \hat{I}_i = 0.381x_i - 12.158$. Συνεπώς οι EET έχουν τιμές :

$$E_a = 0,381 \quad \text{και} \quad \ln I_0 = -12.158 \Leftrightarrow I_0 = 5.24 \times 10^{-6}.$$

Σχήμα 11. Διάγραμμα διασποράς



Το διάγραμμα έχει τον y-άξονα σε λογαριθμική κλίμακα ώστε να δίνονται απ' ευθείας οι τιμές των εκτιμητριών \hat{I}_i και όχι του $\ln \hat{I}_i$ που θα έπρεπε κανονικά να υπάρχει.

Ως εδώ είδαμε έναν τρόπο υπολογισμού των E_a και I_0 μέσω γραφήματος. Εκτός όμως από αυτόν, οι E_a και I_0 μπορούν να εκτιμηθούν μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας. Για τον υπολογισμό των ΕΜΠ χρησιμοποιείται και η μέθοδος Newton – Raphson (βλέπε παράρτημα Π2).

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.3.9) στην (3.3.15), η συνάρτηση πιθανοφάνειας με άγνωστες παραμέτρους τις E_a και I_0 θα είναι

$$L(E_a, I_0) \propto \prod_{i=1}^m \exp\{k_i E_a x_i\} I_0^{k_i} \times \exp\{-\exp(E_a x_i) I_0 TTT_i\}.$$

Τότε ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας θα είναι

$$\log L(E_a, I_0) \propto E_a \sum_{i=1}^m k_i x_i + \log I_0 \sum_{i=1}^m k_i - I_0 \sum_{i=1}^m \exp(E_a x_i) TTT_i .$$

Οι μερικές παράγωγοι ως προς E_a και I_0 δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\frac{\partial \log L(E_a, I_0)}{\partial E_a} = \sum_{i=1}^m k_i x_i - I_0 \sum_{i=1}^m x_i \exp(E_a x_i) TTT_i = 0 \quad (3.3.17)$$

$$\frac{\partial \log L(E_a, I_0)}{\partial I_0} = \frac{1}{I_0} \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m \exp(E_a x_i) TTT_i = 0 .$$

Οι παραπάνω εξισώσεις οδηγούν στα εξής αποτελέσματα:

$$I_0 = \frac{\sum_{i=1}^m k_i}{\sum_{i=1}^m \exp(E_a x_i) TTT_i}$$

και

$$\sum_{i=1}^m k_i x_i - \frac{\sum_{i=1}^m k_i}{\sum_{i=1}^m \exp(E_a x_i) TTT_i} \times \sum_{i=1}^m x_i \exp(E_a x_i) TTT_i = 0 . \quad (3.3.18)$$

Έστω :

$$U(E_a) = \sum_{i=1}^m \exp(E_a x_i) TTT_i$$

$$U'(E_a) = \sum_{i=1}^m x_i \exp(E_a x_i) TTT_i$$

$$U''(E_a) = \sum_{i=1}^m x_i^2 \exp(E_a x_i) TTT_i$$

$$k = \sum_{i=1}^m k_i .$$

Επίσης θέτουμε

$$y(E_a) = \sum_{i=1}^m k_i x_i - (k / U(E_a)) U'(E_a) ,$$

το οποίο αποτελεί το αριστερό μέλος της σχέσης (3.3.17). Η ισότητα (3.3.18) λύνεται με χρήση του αλγορίθμου Newton (παράρτημα Π2) και η εκτίμηση της E_a αποκτάται

επαναληπτικά μετά από ένα μικρό αριθμό βημάτων σύμφωνα με την επαναλαμβανόμενη σχέση θεωρώντας ως $E_a^{(0)}$ την τιμή που λαμβάνουμε από τη γραφική μέθοδο. Τότε

$$E_a^{(p+1)} = E_a^{(p)} - \frac{f(E_a^{(p)})}{f'(E_a^{(p)})},$$

όπου

$$f'(E_a) = -k \left[\frac{U''(E_a)U(E_a) - (U'(E_a))^2}{(U(E_a))^2} \right].$$

Τέλος στον επόμενο πίνακα 3 συγκρίνονται οι τιμές των εκτιμητών των E_a και I_0 με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, που αποκτήθηκαν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Newton, με τους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων (EET).

Πίνακας 3. Πίνακας εκτιμητών ET και ΜΠ

	E_a (eV)	I_0 (h^{-1})	MTTF(years)
Δεδομένα εισόδου	0,37	$5,707 \times 10^{-6}$	20
EMΠ	0,277	$1,6601 \times 10^{-6}$	7
EET	0,3811	$5,246 \times 10^{-6}$	22

Διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας δεν δίνει καλούς εκτιμητές. Αυτό προκαλείται από το γεγονός ότι τα επιλεγμένα προσομοιωμένα δεδομένα δεν είναι πάντα ρεαλιστικά (π.χ. μόνο μια αποτυχία στο βήμα $210 \text{ } ^\circ\text{C}$ είναι εξαιρετικά σπάνιο γεγονός, χωρίς όμως να είναι και απίθανο). Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει καλύτερα αποτελέσματα καθώς εφαρμόζεται η διόρθωση με τη χρήση του εμπειρικού εκτιμητή έτσι ώστε να διασφαλίζεται η αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Γενικευμένα μοντέλα

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν τα σημαντικότερα και πλέον γενικευμένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται ή που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στους EEXZ. Ο όρος μοντέλο στους EEXZ ισοδυναμεί με την σχέση που μπορεί να έχει ο χρόνος ζωής των μονάδων που μελετάμε με το διάνυσμα των πιέσεων. Ένα μοντέλο εκφράζει δηλαδή τη μεταβολή μιας συνάρτησης του χρόνου ζωής, όπως είναι η συνάρτηση κινδύνου ή η συνάρτηση επιβίωσης, όταν εφαρμόζουμε στις μονάδες μας ένα διάνυσμα πιέσεων $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))'$ όπου $x_i(t)$ για $i = 1, \dots, m$ αποτελεί ένα είδος πίεσης.

4.1 Εισαγωγή στα γενικευμένα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι EEXZ

Ο χρόνος ζωής T των μονάδων αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή η οποία βρίσκεται σε άμεση εξάρτηση από το διάνυσμα των πιέσεων και για το λόγο αυτό στο εξής θα τη συμβολίζουμε με $T_{x(\cdot)}$ ώστε να υποδηλώνεται αυτή η εξάρτηση. Η τυχαία μεταβλητή $T_{x(\cdot)}$ έχει συνάρτηση επιβίωσης

$$S_{x(\cdot)}(t) = P[T_{x(\cdot)} > t]$$

και συνάρτηση κινδύνου

$$I_{x(\cdot)}(t) = -\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)},$$

οι οποίες εξαρτώνται από το διάνυσμα των πιέσεων $x(t)$. Ο χρόνος ζωής $T_{x(\cdot)}$ καλείται συνήθως *πηγή πληροφοριών (resource)* ενός αντικειμένου (Bagdonavicius, V. (1990), Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1994)). Θα ήταν όμως επιθυμητό μια πηγή πληροφοριών να μην έχει καμία εξάρτηση από το $x(t)$. Η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου δίνεται από τη σχέση

$$\Lambda_{x(\cdot)}(t) = \int_0^t I_{x(\cdot)}(u) du .$$

Αν θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $R = \Lambda_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})$ τότε δείχνεται ότι αυτή ακολουθεί την τυπική εκθετική κατανομή $Exp(1)$ με συνάρτηση επιβίωσης $S_R(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει αν ακολουθήσουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

Ισχύει ότι

$$S_R(t) = P(\Lambda_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}) > t). \quad (4.1.1)$$

Όμως η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ενώ ορίζεται και η αντίστροφη της $\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)$. Άρα η σχέση (4.1.1) γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$S_R(t) = P(T_{x(\cdot)} > \Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)) = S_{x(\cdot)}(\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)). \quad (4.1.2).$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\Lambda_{x(\cdot)}(t) = -\ln S_{x(\cdot)}(t)$. Επομένως αν στην τελευταία σχέση στη θέση του t τοποθετήσουμε το $\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)$ θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\Lambda_{x(\cdot)}(\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)) = -\ln S_{x(\cdot)}(\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)) \Leftrightarrow t = -\ln S_{x(\cdot)}(\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)) \Leftrightarrow e^{-t} = S_{x(\cdot)}(\Lambda_{x(\cdot)}^{-1}(t)).$$

Το οποίο λόγω της σχέσης (4.1.2) μας δίνει

$$S_R(t) = e^{-t}. \quad (4.1.3).$$

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή R παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$ και δεν εξαρτάται από το διάνυσμα $x(t)$. Επίσης διαπιστώνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $T_{x(\cdot)}$ λαμβάνει την τιμή t αν και μόνο αν η τυχαία μεταβλητή R λαμβάνει την τιμή $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$. Συνεπώς **για κάθε διάνυσμα $x(\cdot)$, η χρονική στιγμή t για αντικείμενα που δουλεύουν κάτω από συνθήκες πίεσης $x(\cdot)$ είναι ισοδύναμη με τη χρονική στιγμή $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$ για αντικείμενα που δουλεύουν σε συνθήκες τέτοιες ώστε ο χρόνος ζωής τους να ακολουθεί την τυπική εκθετική κατανομή** (Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999)). Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\Lambda_{x(\cdot)}$ αποτελεί ένα μετασχηματισμό του χρόνου ζωής μέσω του οποίου μπορούμε να λάβουμε ισοδύναμα αποτελέσματα χωρίς την επίδραση του διανύσματος των πιέσεων. Επομένως τα αποτελέσματα που θα λάβουμε θα είναι γενικότερης φύσεως καθώς δεν θα εξαρτώνται άμεσα από το $x(\cdot)$. Ο αριθμός $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$ καλείται **εκθετική πηγή πληροφοριών που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τη χρονική στιγμή t κάτω από πίεση $x(\cdot)$** (*exponential resource used until the moment t under stress $x(\cdot)$*). Άρα ένα συγκεκριμένο αντικείμενο που απέτυχε τη χρονική στιγμή t

κάτω από πίεση $x(\cdot)$ χρησιμοποίησε $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$ ποσότητα της εκθετικής πηγής πληροφοριών μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή.

Αντί για την εκθετική πηγή πληροφοριών μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή από κάθε κατανομή πιθανότητας. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής :

Ορίσαμε ότι $R = \Lambda_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}) = -\ln S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})$. Αν θέσουμε $H(t) = -\ln t$ τότε μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε $R = H(S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}))$, ενώ επίσης ισχύει $H^{-1}(t) = e^{-t}$, η οποία δίνει και τη συνάρτηση επιβίωσης της τυπικής εκθετικής κατανομής. Άρα σύμφωνα με τη σχέση (4.1.3) ισχύει $H^{-1} \equiv S_R$.

Αντιστρέφοντας τους παραπάνω συλλογισμούς παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $G = H^{-1}$, τότε G είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση επιβίωσης (και όχι ειδική περίπτωση $H^{-1}(t) = e^{-t}$ που αντιστοιχεί στην εκθετική κατανομή), γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \infty)$ ενώ η τυχαία μεταβλητή

$$R^G = g_{x(\cdot)}^G(T_{x(\cdot)}) = H(S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})), \quad (4.1.4)$$

έχει συνάρτηση επιβίωσης την G η οποία δεν εξαρτάται από το $x(\cdot)$, όπου $g_{x(\cdot)}^G = H \circ S_{x(\cdot)}$. Η τυχαία μεταβλητή R^G καλείται G -πηγή πληροφοριών (G -resource) και ο αριθμός $g_{x(\cdot)}^G(t)$ καλείται το πόσο της πηγής πληροφοριών που καταναλώθηκε ως τη χρονική στιγμή t . Στην περίπτωση όπου η $G = e^{-t}$ είδαμε ότι $g_{x(\cdot)}^G(t) = \Lambda_{x(\cdot)}(t)$.

Για παράδειγμα ας δούμε την περίπτωση που η G είναι η συνάρτηση επιβίωσης της Weibull, δηλαδή $G(t) = e^{-\left(\frac{t}{h}\right)^b}$, οπότε θα έχουμε :

$$\ln(G(t)) = -\left(\frac{t}{h}\right)^b \Leftrightarrow -\ln(G(t)) = \left(\frac{t}{h}\right)^b,$$

επειδή η $G(t)$ είναι συνάρτηση επιβίωσης, άρα $0 \leq G(t) \leq 1$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ln(G(t))$ θα παίρνει τιμές στο $(-\infty, 0]$ συνεπώς η ποσότητα $-\ln(G(t))$ θα είναι θετική. Επομένως μπορούμε να πάρουμε την παρακάτω ρίζα σε κάθε περίπτωση, δηλαδή

$$\sqrt[b]{-\ln(G(t))} = \frac{t}{h} \Leftrightarrow h \sqrt[b]{-\ln(G(t))} = t \Leftrightarrow h(-\ln(G(t)))^{\frac{1}{b}} = t.$$

Συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση της G θα είναι η $G^{-1}(t) = H(t) = h(-\ln t)^{\frac{1}{b}}$. Άρα η

τυχαία μεταβλητή R^G , σύμφωνα με τη σχέση (4.1.4) θα έχει τη μορφή

$$R^G = h\left(-\ln(S_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)}))\right)^{\frac{1}{b}}.$$

Τα μοντέλα των επιταχυνόμενων χρόνων ζωής θα τυποποιηθούν σε σχέση με την R^G και τον τρόπο που χρησιμοποιείται καθώς διαφορετική πηγή πληροφοριών μπορεί να έχει διαφορετικό τρόπο χρήσης.

4.2 Μοντέλο αναλογικού κινδύνου

α) Ορισμός

Το μοντέλο αναλογικού κινδύνου (*Proportional Hazards model*), συμβολικά μοντέλο PH, εισήγαγε ο Cox (1972) και για το λόγο αυτό καλείται επίσης μοντέλο παλινδρόμησης του Cox. Έστω E ο χώρος στον οποίο ανήκουν τα m -διάστατα διανύσματα πιέσεων $x(\cdot)$, ο οποίος καλείται και *χώρος συμμεταβλητών* (*set of covariates*), τότε θα λέμε ότι έχουμε ένα μοντέλο PH στον E αν για κάθε $x(\cdot) \in E$ ισχύει:

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)] \cdot I_0(t), \quad (4.2.1)$$

όπου $r(\cdot)$ και $I_0(\cdot)$ είναι μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις.

Το μοντέλο αναλογικού κινδύνου υποθέτει δηλαδή ότι η συνάρτηση κινδύνου μιας μονάδας που εκτίθεται σε πίεση $x(\cdot)$ τη χρονική στιγμή t είναι ανάλογη κάποιας θετικής συνάρτησης r των m συμμεταβλητών, δηλαδή του διανύσματος $x(\cdot)$ τη στιγμή t , καθώς και μιας αναφορικής συνάρτησης κίνδυνου $I_0(t)$ (*baseline rate*) που εξαρτάται μόνο από το χρόνο t και όχι από την πίεση που εφαρμόζεται τη δεδομένη χρονική στιγμή.

β) Ιδιότητες

Ας συμβολίσουμε με $x_0(\cdot)$ το διάνυσμα των πιέσεων όταν το αντικείμενο δουλεύει σε κανονικές συνθήκες χρήσης και έστω $x(\cdot)$ ένα επιταχυνόμενο διάνυσμα πιέσεων όπως έχει ήδη αναφερθεί. Τότε ο λόγος των συναρτήσεων κινδύνου των δυο παραπάνω διανυσμάτων τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από τα διανύσματα αυτά τη δεδομένη στιγμή t καθώς

$$\frac{I_{x(\cdot)}(t)}{I_{x_0(\cdot)}(t)} = \frac{r[x(t)]}{r[x_0(t)]}. \quad (4.2.2)$$

Η παραπάνω σχέση καλείται **(σχετικός) λόγος κινδύνου** (*relative risk ratio or hazard ratio*) και αποτελεί ουσιαστικά ένα τρόπο μετάβασης από επιταχυνόμενα επίπεδα πίεσης σε φυσιολογικά.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της πηγής πληροφοριών (εκθετική) $R = \Lambda_{x(\cdot)}(T_{x(\cdot)})$ καθώς και την ποσότητα $I_{x(\cdot)}(t) = \frac{\partial \Lambda_{x(\cdot)}(t)}{\partial t}$ συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο PH υποθέτει ότι ο λόγος των παραγώγων των πηγών πληροφοριών (π.π.) που χρησιμοποιούν δυο μονάδες τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από τις τιμές των συμμεταβλητών τη χρονική στιγμή t και όχι από τις π.π. που χρησιμοποιήσαν ως τη χρονική στιγμή t . Επομένως αν θεωρήσουμε δυο μονάδες που λειτουργούν σε διαφορετικά επίπεδα πίεσης έστω $x(\cdot)$ και $y(\cdot)$, τότε ο λόγος κινδύνου είναι ο εξής :

$$\frac{\partial \Lambda_{x(\cdot)}(t)}{\partial t} / \frac{\partial \Lambda_{y(\cdot)}(t)}{\partial t} = r[x(t)]/r[y(t)]. \quad (4.2.3)$$

Γενικεύοντας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το μοντέλο PH αποτελεί μια τάξη μοντέλων με την ιδιότητα ότι διαφορετικές μονάδες έχουν συναρτήσεις κινδύνου που είναι ανάλογες μεταξύ τους.

4.3 Μοντέλο Προσθετικής Συσσώρευσης των Βλαβών

α) Ορισμός

Το μοντέλο Προσθετικής Συσσώρευσης των Βλαβών ή μοντέλο AAD (*Additive Accumulation of Damages model*) σύμφωνα με τα αρχικά της αγγλικής ορολογίας, εισήχθηκε από τον Bagdonavicius (1978) με την υπόθεση ότι η παράγωγος της $g_{x(\cdot)}^G(t)$, που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t , εξαρτάται μόνο από την τιμή του διανύσματος των

πιέσεων εκείνη τη χρονική στιγμή. Επομένως το μοντέλο AAD ισχύει στο χώρο E αν υπάρχει θετική συνάρτηση r στον E τέτοια ώστε για κάθε $x(\cdot) \in E$ να ισχύει :

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r[x(t)], \quad (4.3.1)$$

με αρχική συνθήκη $g_{x(\cdot)}^G(0) = 0$.

Στην περίπτωση όπου ισχύει $G(t) = e^{-t}$ η σχέση (4.3.1) θα έχει τη μορφή

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)].$$

Από τη σχέση (4.3.1) και σύμφωνα με την (4.1.4) προκύπτει ότι η συνάρτηση επιβίωσης μιας μονάδας με χρόνο ζωής που μεταβάλλεται σύμφωνα με το διάνυσμα $x(\cdot)$ όπως καθορίζει το μοντέλο AAD θα είναι

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\left(\int_0^t r[x(u)]du\right). \quad (4.3.2)$$

Το μοντέλο AAD καλείται επίσης και μοντέλο επιταχυνόμενου χρόνου αποτυχίας (*accelerated failure time (AFT) model*) όπως αποδόθηκε από τους Cox και Oakes (1984).

β) Το μοντέλο AAD στις διάφορες μορφές εφαρμογής επιταχυνόμενης πίεσης

Το μοντέλο AAD αλλάζει μορφή ανάλογα με τον πειραματικό σχεδιασμό που χρησιμοποιούμε, δηλαδή ανάλογα με τον τρόπο που ασκείται η επιταχυνόμενη πίεση στις μοναδες (Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999)).

- Υποθέτουμε ότι σε κάθε αντικείμενο εφαρμόζεται σταθερή πίεση $x(t) = x$. Τότε από τη σχέση (4.3.2) προκύπτει ότι

$$S_{x(\cdot)}(t) = G(r(x) \cdot t). \quad (4.3.3)$$

Συνεπώς στην περίπτωση που εφαρμόζουμε σταθερή πίεση βλέπουμε ότι η συνάρτηση $r(x)$ της πίεσης αποτελεί ένα σταθερό όρο και παράλληλα συντελεστή του χρόνου t . Άρα σε αυτή

την περίπτωση η πίεση μεταβάλλει μόνο την κλίμακα της συνάρτησης και όχι το σχήμα ή τη θέση της.

- Έστω ότι σε κάθε μονάδα εφαρμόζεται πίεση αυξανόμενη κατά βήματα , δηλαδή

$$x(t) = x_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i) , \quad (i = 1, \dots, m) , \quad (4.3.4)$$

όπου $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = +\infty$.

Τότε η συνάρτηση επιβίωσης της μονάδας σύμφωνα και με τη σχέση (4.3.2) θα είναι

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\left\{\sum_{i=1}^k r(x_i)(t_i - t_{i-1}) + r(x_k)(t - t_k)\right\}, \quad \text{αν } t \in [t_{k-1}, t_k) . \quad (4.3.5)$$

Η περίπτωση της συνεχούς επιταχυνόμενης πίεσης (*progressive stress*) με το χρόνο δεν αξίζει ιδιαίτερης αναφοράς καθώς οι σχέσεις που δίνει συμπίπτουν με αυτές που δόθηκαν κατά τον ορισμό του μοντέλου .

γ) Τροποποιημένο μοντέλο AAD και η σχέση του με το AAD

Το τροποποιημένο μοντέλο AAD (*modified AAD*) (Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999))ορίζεται στον E αν υπάρχει συνάρτηση r στον E και θετική συνάρτηση q τέτοια ώστε για κάθε $x(\cdot) \in E$ να ισχύει

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r[x(t)] \cdot q[g_{x(\cdot)}^G(t)] \quad (4.3.6)$$

με αρχική συνθήκη $g_{x(\cdot)}^G(0) = 0$.

Στην περίπτωση όπου η G είναι η συνάρτηση επιβίωσης της τυπικής εκθετικής κατανομής τότε η σχέση (4.3.6) γίνεται

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)]q[\Lambda_{x(\cdot)}(t)] .$$

Η τάξη των τροποποιημένων μοντέλων AAD ισοδυναμεί με την τάξη των μοντέλων AAD σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση : Υποθέτουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^x \frac{du}{q(u)}$$

συγκλίνει για κάθε $x \geq 0$.

Τότε το τροποποιημένο μοντέλο AAD ικανοποιείται στον E για κάποια τυχαία μεταβλητή R^G αν και μόνο αν το μοντέλο AAD ικανοποιείται στον E για κάποια τυχαία μεταβλητή R^{G_1} . Τότε ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$H_1(p) = \int_0^{H(p)} \frac{du}{q(u)}, \quad (4.3.7)$$

όπου $H_1 = G_1^{-1}$ και $H = G^{-1}$.

Συνεπώς η πρόταση δηλώνει ότι αν καθορίσουμε μια συνάρτηση G τέτοια ώστε η παράγωγος της G -πηγής πληροφοριών που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t να είναι ανάλογη τόσο του διανύσματος $x(\cdot)$ εκείνη τη στιγμή όσο και της $g_{x(\cdot)}^G(t)$ που χρησιμοποιήθηκε μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή (όταν δηλαδή ισχύει το τροποποιημένο AAD) τότε υπάρχει μια συνάρτηση G_1 τέτοια ώστε η παραγωγός της G_1 -πηγής πληροφοριών που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t να είναι ανάλογη μόνο του διανύσματος $x(\cdot)$ (οπότε ισχύει το AAD) και οι δυο συναρτήσεις να συνδέονται μέσω της σχέσης (4.3.7).

δ) Υπομοντέλα του AAD στην περίπτωση που εφαρμόζεται σταθερή πίεση

Τα υπομοντελα του AAD προκύπτουν από την παραμετροποίηση της συνάρτησης $r(\cdot)$ η οποία έγινε από τον Viertl (1988). Στην περίπτωση που ισχύει η ισότητα (4.3.3), όταν δηλαδή εφαρμόζουμε σταθερό διάνυσμα πίεσης σε κάθε πειραματική μονάδα και υποθέτοντας ότι E_0 είναι ο χώρος των σταθερών διανυσμάτων της μορφής $x(t) = x$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in E_0$ ισχύει

$$S_{x_2}(t) = S_{x_1}(p(x_1, x_2) \cdot t),$$

όπου η συνάρτηση

$$p(x_1, x_2) = \frac{r(x_2)}{r(x_1)}$$

εκφράζει το βαθμό μεταβολής της κλίμακας της κατανομής όταν εφαρμόζουμε στη μονάδα διάνυσμα πιέσεων x_2 αντί για x_1 . Δείχνεται ότι όταν δεν έχουμε μεταβολή του διανύσματος των πιέσεων η συνάρτηση p διατηρείται σταθερά ίση με τη μονάδα, $p(x, x) = 1$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι το διάνυσμα x είναι μονοδιάστατο. Τότε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης p ορίζεται από το *απειροστικό χαρακτηριστικό (infinitesimal characteristic)* [Viertl (1988)] :

$$d(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x, x + \Delta x) - p(x, x)}{\Delta x} = (\log r(x))' . \quad (4.3.8)$$

Άρα για κάθε $x \in E_0$ η συνάρτηση $r(x)$ δίνεται από τη σχέση :

$$r(x) = r(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x d(u) du \right\} . \quad (4.3.9)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι ανάλογη κάποιας γνωστής συνάρτησης της πίεσης x , έστω $u(x)$.

Τότε $\delta(x) = \alpha u(x)$, $\alpha > 0$.

Συνεπώς από τις σχέσεις (4.3.8) και (4.3.9) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} r(x) &= r(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \alpha u(v) dv \right\} = \exp \left\{ \mathbf{b} + \alpha \int_{x_0}^x (z(v))' dv \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r(x) = \exp \{ \mathbf{b} - \alpha z(x_0) + \alpha z(x) \} = e^{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 z(x)} . \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Για την τελευταία σχέση χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί :

$$\mathbf{b} = e^{r(x_0)} , \quad \frac{dz(x)}{dx} = u(x) , \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b} - \alpha z(x_0) \quad \text{και} \quad \mathbf{b}_1 = \alpha .$$

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η $z(x)$ είναι κάποια γνωστή συνάρτηση ενώ οι $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ αποτελούν άγνωστες παραμέτρους.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ορισμένα υπομοντέλα που προκύπτουν για συγκεκριμένες συναρτήσεις $\delta(x)$.

- $\delta(x) = a$, προκύπτει το $r(x) = \exp(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x)$ για $\mathbf{b}_1 > 0$ το οποίο καλείται *μοντέλο log-linear*.
- $\delta(x) = a/x$, τότε λαμβάνουμε το $r(x) = \exp(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \log x) = a_1 x^{\mathbf{b}_1}$ για $\mathbf{b}_1 > 0$ το οποίο καλείται και *inverse power law μοντέλο*.
- $\delta(x) = a/x^2$, τότε έχουμε το $r(x) = \exp(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 / x) = a_1 e^{\mathbf{b}_1 / x}$ για $\mathbf{b}_1 < 0$ το οποίο λέγεται και *Arrhenius μοντέλο*.

Το μοντέλο (4.3.10) μπορεί να γενικευτεί αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό από γνωστές συναρτήσεις της πίεσης, δηλαδή

$$d(x) = \sum_{i=1}^k a_i u_i(x). \quad (4.3.11)$$

Τότε σύμφωνα με τη σχέση (4.3.11) το μοντέλο $r(x)$ γίνεται :

$$r(x) = \exp \left\{ b_0 + \sum_{i=1}^k b_i z_i(x) \right\},$$

όπου $z_i(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις της πίεσης ενώ b_0, \dots, b_k είναι άγνωστες παράμετροι.

- Για $\delta(x) = 1/x + a/x^2$ θα λάβουμε το

$$r(x) = \exp(b_0 + b_1 \log x + b_2 / x) = a_1 x e^{b_2/x}$$

όπου $b_1 = 1, b_2 < 0$. Το μοντέλο καλείται *Eyring*, και εφαρμόζεται όταν η πίεση x είναι η θερμοκρασία .

- Αν $\delta(x) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{x^i}$ τότε

$$r(x) = \exp \left\{ b_0 + b_1 \log x + \sum_{i=1}^k b_i / x^i \right\}$$

και καλείται *γενικευμένο μοντέλο Eyring*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διάνυσμα της πίεσης είναι πολυδιάστατο $x = (x_1, \dots, x_m)$. Ορίζουμε τότε τα απειροστικά χαρακτηριστικά [βλέπε Viertel (1988)] $d_i(x)$ να δίνονται από τις ισότητες

$$d_i(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{p(x, x + \Delta x_i e_i) - p(x, x)}{\Delta x_i} = \frac{\partial \log r(x)}{\partial x_i},$$

όπου $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ αποτελεί το i -ιδιοδιάνυσμα του διανύσματος x .

Γενικεύοντας τη μονοδιάστατη περίπτωση, το $d_i(x)$ μπορεί να παραμετροποιηθεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$d_i(x) = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} u_{ij}(x),$$

όπου $u_{ij}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις και a_{ij} άγνωστες σταθερές. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $r(x)$ λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$r(x) = \exp \left\{ b_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij} z_{ij}(x) \right\},$$

όπου $z_{ij}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις και b_{ij} άγνωστες σταθερές.

- Για $d_1(x) = 1/x_1 + (a_{11} + a_{12}x_2)/x_1^2$ και $d_2(x) = a_{21} + a_{22}x_2/x_1$ έχουμε

$$r(x) = \exp \{ b_0 + b_1 \log x + b_2 x_2 + b_3 / x_1 + b_4 x_2 / x_1 \}.$$

Το μοντέλο επίσης καλείται *γενικευμένο Eyring μοντέλο* και βρίσκει εφαρμογή σε συγκεκριμένα ημιαγώγιμα υλικά, όταν x_1 είναι η θερμοκρασία και x_2 είναι η τάση.

- $d_i(x) = a_i u_i(x_i)$, όπου u_i είναι γνωστές συναρτήσεις. Τότε

$$r(x) = \exp \left\{ b_0 + \sum_{j=1}^k b_j z_j(x_j) \right\},$$

όπου z_j είναι γνωστές συναρτήσεις. Το τελευταίο καλείται *γενικευμένο μοντέλο Arrhenius*.

Επίσης καλείται και *loglinear μοντέλο*.

Μια παρατήρηση που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι τα θεμελιώδη μοντέλα Arrhenius, Inverse Power και Eyring που αναπτύχθηκαν λεπτομερώς σε προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς επίσης και οι γενικευμένες τους μορφές, αποτελούν πλέον υπομοντέλα του AFT μοντέλου.

4.4 Γενικευμένο πολλαπλασιαστικό μοντέλο

α) Ορισμός

Το γενικευμένο πολλαπλασιαστικό μοντέλο ή μοντέλο *GM (Generalized Multiplicative model)* χρησιμοποιώντας τα αρχικά της αγγλικής ορολογίας [Bagdonavicius και Nikulin

(1994)] ορίζεται στο χώρο E αν υπάρχει μια θετική συνάρτηση r στον E και μια συνάρτηση επιβίωσης S_0 τέτοια ώστε για κάθε $x(\cdot) \in E$ να ισχύει

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r[x(t)] \cdot \frac{\partial g_0^G(t)}{\partial t} \quad (4.4.1)$$

με αρχικές συνθήκες $g_{x(\cdot)}^G(0) = g_0^G(0) = 0$, όπου $g_0^G(t) = H(S_0(t))$.

Η S_0 καλείται αναφορική συνάρτηση επιβίωσης (*baseline survival function*).

Το μοντέλο GM δηλώνει ότι η παράγωγος της πηγής πληροφοριών που χρησιμοποιείται τη στιγμή t είναι ανάλογη κάποιας "αναφορικής παραγώγου". Η αναλογική σταθερά είναι μια συνάρτηση της πίεσης που εφαρμόζεται τη στιγμή t .

Στην περίπτωση όπου η G είναι η συνάρτηση επιβίωσης της τυπικής εκθετικής κατανομής τότε η σχέση (4.4.1) γίνεται

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)]I_0(t),$$

το οποίο συμπίπτει με το μοντέλο αναλογικού κινδύνου (4.2.1). Συνεπώς το PH μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση του GM μοντέλου.

Αν λάβουμε δυο πιέσεις $x(\cdot), y(\cdot) \in E$ τότε από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} / \frac{\partial g_{y(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r[x(t)] / r[y(t)].$$

Ο λόγος των παραγώγων των πηγών πληροφοριών που χρησιμοποιούνται τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από τις τιμές των πιέσεων $x(\cdot)$ και $y(\cdot)$ εκείνη τη χρονική στιγμή t .

β) Το μοντέλο GM στις διάφορες μορφές εφαρμογής επιταχνομενης πίεσης

Οι μορφές του μοντέλου GM διαφέρουν ανάλογα με τον τρόπο σχεδιασμού του πειράματος.

- Στην περίπτωση που εφαρμόζουμε συνεχή πίεση που μεταβάλλεται τυχαία με το χρόνο σε μια μονάδα, η συνάρτηση επιβίωσης της προκύπτει από τη σχέση (4.4.1) και είναι ίση με

$$S_{x(\cdot)}(t) = G\left(\int_0^t r[x(u)]dH(S_0(u))\right) \quad (4.4.2)$$

- Αν $x(t)=x=σταθερό$ τότε από το μοντέλο (4.4.2) συνεπάγεται ότι

$$S_x(t) = G(r(x)H(S_0(t)))$$

- Στην περίπτωση που εφαρμόζεται πίεση αυξανόμενη κατά βήματα δηλαδή $x(t) = x_i, t \in [t_{i-1}, t_i)$ για $i = 1, \dots, m$, όπου $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = +\infty$ και $x_0 \in E$ είναι μια σταθερή πίεση στο χρόνο τότε

$$S_{x(\cdot)}(t) = G \left(\sum_{i=1}^k p(x_i)(H(S_{x_0}(t_i)) - H(S_{x_0}(t_{i-1}))) + p(x_k)(H(S_{x_0}(t)) - H(S_{x_0}(t_k))) \right),$$

όπου $p(x_i) = \frac{r(x_i)}{r(x_0)}$

Μια υποπερίπτωση της αυξανόμενης πίεσης κατά βήματα ή *step-stress* αποτελεί η αυξανόμενη πίεση κατά ένα βήμα ή *single step-stress*, όταν δηλαδή το x_0 αποτελεί το φυσιολογικό επίπεδο πίεσης (ή πιέσεων αν πρόκειται για διάνυσμα) και x_1 ένα επιταχυνόμενο (αυξημένο) επίπεδο πίεσης. Τότε ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ x_1, & t > t_1 \end{cases}$$

και συνεπώς η συνάρτηση επιβίωσης μιας μονάδας που δέχεται τέτοιου είδους πίεση θα είναι

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} S_{x_0}(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ G(H(S_{x_0}(t_1)) + p(x_1)(H(S_{x_0}(t)) - H(S_{x_0}(t_1))))), & t > t_1 \end{cases}$$

γ) Υπομοντέλα του GM

Τα υπομοντέλα του μοντέλου GM θα δοθούν για συγκεκριμένες συναρτήσεις G .

- i) Αν η τυχαία μεταβλητή R^G ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε θα ισχύουν

$$G(t) = \exp(-t), \quad t \geq 0$$

και ισχύει

$$H(t) = G^{-1}(t) = -(\ln t), \quad t \geq 0.$$

Άρα θα ισχύει

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \frac{\partial H(S_{x(\cdot)}(t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [-\ln S_{x(\cdot)}(t)] = I_{x(\cdot)}(t),$$

δηλαδή η παράγωγος της πηγής πληροφοριών είναι η συνάρτηση κινδύνου. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο GM θα έχει την παρακάτω μορφή :

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)]I_0(t),$$

όπου $I_0(t)$ είναι η αναφορική συνάρτηση κινδύνου. Συνεπώς παρατηρούμε ότι μέσω του μοντέλου GM λαμβάνουμε το μοντέλο αναλογικού κινδύνου αν και εφόσον η τυχαία μεταβλητή R^G ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

ii) Αν η κατανομή της R^G είναι η loglogistic τότε η θα ισχύει :

$$G(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$H(t) = G^{-1}(t) = \left(\frac{1}{t} - 1 \right), \quad t \geq 0.$$

Συνεπώς από τον ορισμό της πηγής πληροφοριών προκύπτει ότι

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \frac{\partial H(S_{x(\cdot)}(t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{S_{x(\cdot)}(t)} - 1 \right) = -\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{(S_{x(\cdot)}(t))^2} = \frac{I_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)}.$$

Άρα το GM μοντέλο θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{I_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)} = r[x(t)] \frac{I_0(t)}{S_0(t)}.$$

Το τελευταίο μοντέλο προσεγγίζει το μοντέλο παλινδρόμησης του Cox όταν το t είναι μικρό, όταν δηλαδή η $S_{x(\cdot)}(t)$ είναι κοντά στη μονάδα.

iii) Αν η R^G ακολουθεί την lognormal κατανομή τότε η συνάρτηση επιβίωσης θα είναι

$$G(t) = \Phi(\log t),$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$H(t) = G^{-1}(t) = \exp[\Phi^{-1}(t)].$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \Phi^{-1}(S_{x(\cdot)}(t))$$

Άρα το GM μοντέλο σε αυτή την περίπτωση θα είναι :

$$\Phi^{-1}(S_{x(\cdot)}(t)) = \log(r[x(t)]) + \Phi^{-1}(S_0(t)).$$

Το μοντέλο αυτό καλείται γενικευμένο probit [Dabrowska και Doksum (1988)].

- iv) Υποθέτουμε ότι η R^G κατανέμεται με τέτοιο τρόπο στον \mathbf{R} ώστε να έχει συνάρτηση επιβίωσης $G(t) = \exp(-\exp(t))$. Συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση της G θα είναι η

$$G^{-1}(t) = \log(-\log(t)).$$

Άρα η παράγωγος της πηγής πληροφοριών που χρησιμοποιείται τη στιγμή t θα ισούται

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \frac{\partial H(S_{x(\cdot)}(t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\log(-\log S_{x(\cdot)}(t)) \right) = -\frac{1}{\log S_{x(\cdot)}(t)} \left(-\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)} \right) = \frac{I_{x(\cdot)}(t)}{\Lambda_{x(\cdot)}(t)}.$$

Άρα το GM μοντέλο θα αποκτά την εξής μορφή :

$$\frac{I_{x(\cdot)}(t)}{\Lambda_{x(\cdot)}(t)} = r[x(t)] \frac{I_0(t)}{\Lambda_0(t)},$$

όπου $\Lambda_{x(\cdot)}(t) = -\log S_{x(\cdot)}(t) = \int_0^t I_{x(\cdot)}(u) du$ και $\Lambda_0(t) = \int_0^t I_0(u) du$.

- v) Αν $G(t) = (1 + e^t)^{-1}$ τότε $G^{-1}(t) = \ln\left(\frac{1}{t} - 1\right)$.

Άρα θα έχουμε,

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \frac{\partial H(S_{x(\cdot)}(t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln\left(\frac{1}{S_{x(\cdot)}(t)} - 1\right) \right) = \frac{1}{1 - S_{x(\cdot)}(t)} \left(-\frac{S'_{x(\cdot)}(t)}{S_{x(\cdot)}(t)} \right) = \frac{I_{x(\cdot)}(t)}{1 - S_{x(\cdot)}(t)}.$$

Άρα το GM μοντέλο θα έχει την μορφή :

$$\frac{I_{x(\cdot)}(t)}{1 - S_{x(\cdot)}(t)} = r[x(t)] \frac{I_0(t)}{1 - S_0(t)}.$$

Το μοντέλο που προέκυψε προσεγγίζει το PH μοντέλο όταν το t είναι αρκετά μεγάλο.

δ) Κλάσεις υπομοντελων του GM

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πέντε από τα βασικότερα υπομοντελα του GM μοντέλου. Υπάρχουν όμως και αρκετά άλλα υπομοντελα [βλέπε Bagdonavicius και Nikulin

(1995)] στα οποία δε θα αναφερθούμε. Όλα τα παραπάνω μοντέλα μπορούν να αποτελέσουν μια κλάση υπομοντελών του GM σύμφωνα με το θεώρημα που θα δοθεί παρακάτω.

Θεώρημα [Bagdonavicius, Malon και Nikulin (1998)].

Έστω ότι G αποτελεί μια συνεχή και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, \infty)$ και για μια συνάρτηση G_1 ισχύει $G_1(u) = G((u/q)^p)$, όπου $u \in [0, \infty)$ ενώ θ και p είναι θετικές σταθερές.

Έστω $\{S_z, z \in [z_0, z_1] \subset \mathbf{R}^m\}$ μια κλάση συνεχών συναρτήσεων επιβίωσης,

$H = G^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ και $H_1 = G_1^{-1}$ οι αντίστροφες συναρτήσεις των G και G_1 αντίστοιχα.

Αν ισχύει

$$H(S_z(t)) = a(z)H(S_{z_0}(t)), t \in \mathbf{R}, z \in [z_0, z_1] \quad (4.4.3)$$

για κάποια συνεχή και αυστηρά μονότονη συνάρτηση $a : [z_0, z_1] \rightarrow \mathbf{R}^+$, τότε θα ισχύει

$$H_1(S_z(t)) = a^{1/p}(z)H_1(S_{z_0}(t)), t \in \mathbf{R}, z \in [z_0, z_1]. \quad (4.4.4)$$

Απόδειξη :

Η σχέση (4.4.3) αποτελεί τον ορισμό του μοντέλου GM. Συνεπώς για την π.π. R^G που ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή τέτοια ώστε να έχει σ.ε. G ισχύει το μοντέλο GM στο χώρο $[z_0, z_1] \subset \mathbf{R}^m$.

Για τη G_1 γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση :

$$G_1(u) = G((u/q)^p) \text{ όπου } u \in [0, \infty).$$

$$\text{Αν θέσουμε } y = \left(\frac{u}{q}\right)^p \Rightarrow u = q \cdot y^{1/p}.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$G(y) = G_1(q \cdot y^{1/p}) \quad (4.4.5)$$

Όμως επίσης ισχύει : $G(G^{-1}(y)) = y$,

οπότε σύμφωνα με τη σχέση (4.4.5) θα έχουμε :

$$G_1(q \cdot (G^{-1}(y))^{1/p}) = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow G^{-1}(y) = \left(\frac{1}{q} G_1^{-1}(y)\right)^p \Leftrightarrow H(y) = \left(\frac{1}{q} H_1(y)\right)^p. \quad (4.4.6)$$

Από τη σχέση (4.4.3) έχουμε ότι:

$$H(S_z(t)) = a(z)H(S_{z_0}(t)),$$

συνεπώς αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (4.4.6) τότε προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$\left(\frac{1}{q}H_1(S_z(t))\right)^p = a(z)\left(\frac{1}{q}H_1(S_{z_0}(t))\right)^p \Leftrightarrow H_1(S_z(t)) = (a(z))^{1/p}H_1(S_{z_0}(t)).$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το μοντέλο GM υπάρχει στον χώρο $[z_0, z_1] \subset \mathbf{R}^m$ για μια π.π. R^G που ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή τέτοια ώστε να έχει σ.ε. την G_1 .

Συνεπώς το θεώρημα εμφανίζει την ύπαρξη της κλάσης των διαφόρων υπομοντέλων του GM ανάλογα με την κατανομή της π.π. και κατα συνέπεια τη συνάρτηση επιβίωσής της. Επομένως ο μετασχηματισμός $G_1(u) = G((u/q)^p)$ ουσιαστικά αποτελεί μια μετάβαση από ένα GM μοντέλο σε ένα άλλο GM μοντέλο.

Για παράδειγμα το θεώρημα υποδηλώνει ότι το μοντέλο PH, είναι υπομοντελο του GM όχι μόνο όταν η μεταβλητή R^G ακολουθεί την τυπική εκθετική κατανομή (όπως δείξαμε στο υπομοντέλο (i) στην προηγούμενη ενότητα) αλλά για κάθε εκθετική ή Weibull κατανομή. Επομένως τα υπομοντέλα του GM μοντέλου σχηματίζουν τάξεις που παράγονται από τις τάξεις των κατανομών των τυχαίων μεταβλητών R^G που διαφέρουν μόνο στις παραμέτρους θέσης και κλίμακας.

ε) Τροποποιημένο μοντέλο GM – σύνδεση με το μοντέλο GM

Το τροποποιημένο μοντέλο GM (Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999)) ορίζεται στον E αν υπάρχει μια συνάρτηση r στον E και μια θετική συνάρτηση q τέτοια ώστε για κάθε $x(\cdot) \in E$ να ισχύει

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = r[x(t)] \cdot q[g_{x(\cdot)}^G(t)] \cdot \frac{\partial g_0^G(t)}{\partial t} \quad (4.4.5)$$

με αρχική συνθήκη $g_{x(\cdot)}^G(0) = g_0^G(0) = 0$.

Το μοντέλο δηλώνει ότι η παράγωγος της π.π. που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t είναι ανάλογη μιας συνάρτησης της πίεσης τη στιγμή t , κάποιας συνάρτησης της π.π. που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τη στιγμή t και μιας αναφορικής παραγώγου.

Το μοντέλο (7) υποδηλώνει ότι για κάθε $x(\cdot), x_0(\cdot) \in E$ ισχύει

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial g_{x_0(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = \frac{r[x(t)]}{r[x_0(t)]} \frac{q[g_{x(\cdot)}^G(t)]}{q[g_{x_0(\cdot)}^G(t)]}. \quad (4.4.6)$$

Ο λόγος των παραγώγων των π.π. που χρησιμοποιούνται τη στιγμή t εξαρτάται τόσο από τις τιμές των πιέσεων όσο και από τις τιμές των π.π. εκείνη τη χρονική στιγμή.

Το τροποποιημένο μοντέλο GM συνδέεται με το μοντέλο GM σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση

Πρόταση : Υποθέτουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^x \frac{du}{q(u)}$$

συγκλίνει για κάθε $x \geq 0$.

Τότε το τροποποιημένο μοντέλο GM ορίζεται στον E για κάποια τυχαία μεταβλητή R^G αν και μόνο αν το μοντέλο GM ορίζεται στον E για κάποια τυχαία μεταβλητή R^{G_1} . Τότε ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$g_{x(\cdot)}^{G_1}(t) = \int_0^{g_{x(\cdot)}^G(t)} \frac{du}{q(u)}, \quad H_1(p) = \int_0^{H(p)} \frac{du}{q(u)}, \quad (4.4.7)$$

όπου $H_1 = G_1^{-1}$ και $H = G^{-1}$.

Επομένως αν ο λόγος των παραγώγων της π.π. R^G που χρησιμοποιείται τη στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές των πιέσεων και των π.π. που χρησιμοποιούνται τη δεδομένη χρονική στιγμή, όταν ισχύει δηλαδή το τροποποιημένο μοντέλο GM, τότε μπορούμε να βρούμε μια π.π. R^{G_1} τέτοια ώστε ο λόγος των παραγώγων της G_1 -resource να εξαρτάται μόνο από τις τιμές των πιέσεων που εφαρμόζονται εκείνη τη χρονική στιγμή (μοντέλο GM).

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την περίπτωση της εκθετικής π.π. για την οποία γνωρίζουμε ότι ισχύει $g_{x(\cdot)}^{S_{x(\cdot)}}(t) = \Lambda_{x(\cdot)}(t)$ και η σχέση (4.4.6) δηλώνει ότι

$$\frac{I_{x(\cdot)}(t)}{I_{x_0(\cdot)}(t)} = \frac{r[x(t)]}{r[x_0(t)]} \frac{q[\Lambda_{x(\cdot)}(t)]}{q[\Lambda_{x_0(\cdot)}(t)]}. \quad (4.4.8)$$

Η προηγούμενη πρόταση δηλώνει ότι το μοντέλο (4.4.8) ικανοποιείται στον E αν και μόνο αν υπάρχει μια π.π. R^G τέτοια ώστε το μοντέλο GM (4.4.2) να ικανοποιείται στον E . Σε αυτή την περίπτωση

$$g_{x(\cdot)}^G(t) = \int_0^{\Lambda_{x(\cdot)}(t)} \frac{du}{q(u)} .$$

Το μοντέλο (4.4.8) με καθορισμένη συνάρτηση q είναι ισοδύναμο με το μοντέλο GM με συνάρτηση επιβίωσης της π.π. την $G = H^{-1}$, όπου

$$H(u) = \int_0^{-\ln u} \frac{du}{q(u)} .$$

4.5 Το γενικευμένο μοντέλο του Sedyakin ή το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης

α) Ορισμός

Το γενικευμένο μοντέλο του Sedyakin [Nelson (1980)] ή το μοντέλο αθροιστικής έκθεσης (cumulative exposure model) ορίζεται στον E αν και μόνο αν υπάρχει θετική συνάρτηση h στον $E \times \mathbf{R}^+$ τέτοια ώστε για κάθε $x(\cdot) \in E$

$$\frac{\partial g_{x(\cdot)}^G(t)}{\partial t} = h[x(t), g_{x(\cdot)}^G(t)] \quad (4.5.1)$$

με αρχική συνθήκη $g_{x(\cdot)}^G(0) = 0$.

Το μοντέλο CE δηλώνει ότι η παράγωγος της resource που χρησιμοποιείται τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της πίεσης τη στιγμή t και από την π.π. που χρησιμοποιήθηκε μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή.

β) Μορφή του μοντέλου στην περίπτωση της αυξανόμενης πίεσης κατά βήματα

Έστω ότι ισχύει η σχέση $x(t) = x_i$, $t \in [t_{i-1}, t_i)$, ($i = 1, \dots, m$), όπου $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = +\infty$.

Τότε η λύση της εξίσωσης (4.5.1) ως προς $g_{x(\cdot)}^G(t)$ ικανοποιεί της ιδιότητες

$$g_{x(\cdot)}^G(t) = g_{x_i}^G(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*), \text{ αν } t \in [t_{i-1}, t_i),$$

όπου τα t_i^* βρίσκονται λύνοντας τις εξισώσεις

$$g_{x_1}^G(t_1) = g_{x_2}^G(t_1^*), \dots, g_{x_i}^G(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*) = g_{x_{i+1}}^G(t_i^*).$$

Οι τελευταίες ιδιότητες είναι ισοδύναμες με τις παρακάτω

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_i}(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*), \text{ αν } t \in [t_{i-1}, t_i), \quad (4.5.2)$$

όπου

$$S_{x_1}(t_1) = S_{x_2}(t_1^*), \dots, S_{x_i}(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*) = S_{x_{i+1}}(t_i^*).$$

Στην περίπτωση της αυξανόμενης πίεσης κατά ένα βήμα (single step-stress), δηλαδή για $m=2$ έχουμε,

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_{x_i}(t - t_{i-1} + t_{i-1}^*) = \begin{cases} S_{x_1}(t), & \text{if } t < t_1, \\ S_{x_2}(t - t_1 + t_1^*) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

4.6 Γενικευμένα μοντέλα αναλογικού κινδύνου

(Generalized Proportional Hazards (GPH) models)

α) Ορισμός GPH 1

Μια γενίκευση των μοντέλων AAD και PH λαμβάνεται αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση κινδύνου (ρυθμός μεταβολής της εκθετικής πηγής πληροφοριών) σε κάθε χρονική στιγμή t είναι ανάλογη μιας συνάρτησης του διανύσματος των πιέσεων, μιας συνάρτησης της αθροιστικής συνάρτησης κινδύνου (εκθετικής πηγής πληροφοριών), που καταναλώθηκε μέχρι τη στιγμή t καθώς και ενός αναφορικού ρυθμού μεταβολής. Η παραπάνω αναλογία τυποποιείται από τον ακόλουθο ορισμό:

Το πρώτο γενικευμένο μοντέλο αναλογικού κινδύνου (GPH1) (Bagdonavicius και Nikulin (1999c)) υφίσταται στον E αν για κάθε $x(\cdot) \in E$ ισχύει

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)] \cdot q[\Lambda_{x(\cdot)}(t)] \cdot I_0(t). \quad (4.6.1)$$

Όπως παρατηρούμε από τη σχέση (4.4.5) το μοντέλο GPH1 αποτελεί ειδική περίπτωση του τροποποιημένου GM μοντέλου στην περίπτωση της εκθετικής πηγής πληροφοριών, δηλαδή για $G(t) = e^{-t}$.

β) Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου GPH1

Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου GPH1 είναι το PH μοντέλο ($q(u)=1$) και το τροποποιημένο AAD μοντέλο ($I_0(t) = I_0 = staqero'$).

Μια ειδική αλλά ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση του (4.6.1) είναι αυτή του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου αναλογικού κινδύνου (*generalized linear proportional hazards model (GLPH)*)(Bagdonavicius και Nikulin (1999c)) που προκύπτει από την ακόλουθη παραμετροποίηση

$$r\{x(t)\} = e^{b^T x(t)}, \quad q\{\Lambda_{x(\cdot)}(t)\} = e^{g\Lambda_{x(\cdot)}(t)}.$$

Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο (4.6.1) αποκτάει την μορφή

$$I_{x(\cdot)}(t) = e^{b^T x(t) + g\Lambda_{x(\cdot)}(t)} I_0(t). \quad (4.6.2)$$

Ας υποθέσουμε ότι η $I_0(t)$ είναι άγνωστη. Αν $g=0$ τότε η (4.6.2) γίνεται το σύνηθες μοντέλο αναλογικού κινδύνου. Αν $g \neq 0$ τότε η πηγή πληροφοριών που καταναλώθηκε έως εκείνη τη χρονική στιγμή t , $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$, συμπεριφέρεται σαν επιπρόσθετη συμμεταβλητή.

Το μοντέλο (4.6.2) υποδηλώνει ότι για κάθε $x(\cdot) \in E$

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \left\{ 1 - g \int_0^t e^{b^T x(u)} d\Lambda_0(u) \right\}^{1/g}, & \text{an } g \neq 0 \\ \exp \left\{ -g \int_0^t e^{b^T x(u)} d\Lambda_0(u) \right\}, & \text{an } g = 0 \end{cases}$$

$$\text{με } \Lambda_0(t) = \int_0^t I_0(u) du.$$

Αν τώρα $x_0(\cdot)$ αποτελεί το διάνυσμα των πιέσεων όταν τα αντικείμενα δουλεύουν σε κανονικές συνθήκες χρήσης και $x(\cdot)$ είναι ένα αυξημένο επίπεδο πιέσεων τότε η τελευταία σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$S_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \left\{ 1 + g \int_0^t e^{b^T \{x(t) - x_0(t)\}} dS_{x_0(\cdot)}^g(t) \right\}^{1/g}, & \text{an } g \neq 0 \\ \exp \left\{ \int_0^t e^{b^T \{x(t) - x_0(t)\}} d \ln S_{x_0(\cdot)}(t) \right\}, & \text{an } g = 0. \end{cases}$$

Αν $x(t) = x = staqero'$, $x_0(t) = x_0 = staqero'$, τότε

$$S_x(t) = \begin{cases} \left\{ 1 + e^{b^T(x-x_0)} (S_{x_0}^g(t) - 1) \right\}^{1/g}, & \text{αν } g \neq 0 \\ (S_{x_0}(t)) e^{b^T(x-x_0)}, & \text{αν } g = 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση q μπορεί να έχει και μη-μονότονη μορφή όπως σε αντίθεση με την περίπτωση του GLPH. Σε αυτή την περίπτωση ας θεωρήσουμε τη μη-λογαριθμογραμμική συνάρτηση του $\Lambda_{x(\cdot)}(t)$ με την ακόλουθη παραμετροποίηση

$$q\{\Lambda_{x(\cdot)}(t)\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^m g_i \Lambda_{x(\cdot)}^i(t)\right\}.$$

Το GPH1 μοντέλο που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$I_{x(\cdot)}(t) = \exp\left\{b^T x(t) + \sum_{i=1}^m g_i \Lambda_{x(\cdot)}^i(t)\right\} I_0(t).$$

γ) Διάφορα γνωστά υπομοντέλα του GPH1

Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του GPH1 δίνουν σημαντικά μοντέλα επιταχυνόμενων ελέγχων. Ένας μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων δείχνει ότι αν λάβουμε 2 σταθερά στο χρόνο διανύσματα πίεσεων x_1 και x_2 , τότε ο λόγος κινδύνου $I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t)$ (που για το PH μοντέλο είναι σταθερός) μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου.

1) Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη παραμετροποίηση της q σε ένα GPH1 μοντέλο:

$q(u) = (1+u)^{g+1}$, όπου $g \in \mathbf{R}$ μια άγνωστη παράμετρος. Τότε θα έχουμε το μοντέλο

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)] \cdot (1 + \Lambda_{x(\cdot)}(t))^{g+1} \cdot I_0(t).$$

Υποθέτουμε ότι $g < 0$ και $c_0 = r(x_2)/r(x_1)$. Τότε δείχνεται ότι (Bagdonavicius και Nikulin (2000))

$$I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t) = c_0 = \left\{ \frac{1 - gr(x_2)\Lambda_0(t)}{1 - gr(x_1)\Lambda_0(t)} \right\}^{-1-\frac{1}{g}}.$$

Ο λόγος κινδύνου $I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

- Αν $-1 < g < 0$, τότε ο λόγος $I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t)$ αυξάνεται από την τιμή c_0 ως την τιμή $c_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} [I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t)]$, όπου c_∞ μπορεί να πάρει κάθε τιμή από εντός του διαστήματος (c_0, ∞) .
- Αν $g = -1$ (PH μοντέλο), ο λόγος είναι σταθερός στο χρόνο.
- Αν $g < -1$, τότε ο λόγος $I_{x_2}(t)/I_{x_1}(t)$ μειώνεται από την τιμή c_0 ως την τιμή $c_\infty \in (1, c_0)$.

2) Αν θεωρήσουμε την παραμετροποίηση $q(u) = e^{gu}$, $g \in \mathbf{R}$, θα αποκτήσουμε το μοντέλο

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)] \cdot e^{g\Lambda_{x(\cdot)}(t)} \cdot I_0(t).$$

Το μοντέλο αυτό αποτελεί τη γενίκευση του μοντέλου Γάμμα αστάθειας (Vaupel (1979)).

Αν $g = 0$, τότε γίνεται το σύνηθες μοντέλο PH.

3) Έστω $q(u) = 1/(1+gu)$, $g > 0$, τότε λαμβάνουμε το μοντέλο

$$I_{x(\cdot)}(t) = r[x(t)] \cdot \frac{1}{(1+g\Lambda_{x(\cdot)}(t))} \cdot I_0(t) \cdot q(u).$$

δ) Ορισμός του GPH 2

Το δεύτερο γενικευμένο μοντέλο αναλογικού κινδύνου (Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. (2000)) αποτελεί μια γενίκευση των μοντέλων GS και PH, στην περίπτωση της εκθετικής πηγής πληροφοριών. Το μοντέλο GPH2 υφίσταται στον χώρο E αν για κάθε $x(\cdot) \in E$ ισχύει

$$I_{x(\cdot)}(t) = u\{x(t), \Lambda_{x(\cdot)}(t)\} \cdot I_0(t). \quad (4.6.3)$$

Από τους ορισμούς (4.6.1) και (4.6.2) προκύπτουν τα συμπεράσματα :

$$AAD \subset GS \subset GPH1 \subset GPH2, \quad PH \subset GPH1 \subset GPH2.$$

Διαπιστώνουμε ότι τα θεμελιώδη μοντέλα που χρησιμοποιούνται στους EEXZ για περιπτώσεις επίδρασης ενός παράγοντα, όπως τα Arrhenius και Inverse Power, γενικεύονται σε σύνθετα μοντέλα περισσότερων παραγόντων, όπως τα PH, AAD και GS, τα οποία με τη σειρά τους διευρύνονται σχηματίζοντας τα πλέον γενικευμένα μοντέλα GPH1 και GPH2. Συνεπώς έχοντας ως σημείο αναφοράς ένα από τα δυο γενικευμένα μοντέλα αναλογικού κινδύνου μπορούμε με κατάλληλη παραμετροποίηση να αντιμετωπίσουμε κάθε πρόβλημα επιταχυνόμενου ελέγχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μέθοδοι εκτίμησης

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν τρόποι εκτίμησης των γενικευμένων μοντέλων που χρησιμοποιούν οι επιταχυνόμενοι έλεγχοι χρόνων ζωής όπως αυτά περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 4. Τα περισσότερα μοντέλα μπορούν να εκτιμηθούν τόσο σε παραμετρικό όσο και σε μη παραμετρικό επίπεδο. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπως το μοντέλο GS για το οποίο δεν έχει δοθεί ως σήμερα κάποιος μη παραμετρικός τρόπος εκτίμησης. Επειδή οι μέθοδοι μη παραμετρικής εκτίμησης έχουν πιο πλατιά εφαρμογή εφόσον δεν υποθέτουν κάποια συγκεκριμένη κατανομή για το χρόνο ζωής των πειραματικών μονάδων, θα προτιμηθεί η παρουσίαση τέτοιων μεθόδων. Αξίζει να σημειωθεί ότι γενικά αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούν δυσκολότερες και πιο ενδιαφέρουσες τεχνικές.

5.1 Μη παραμετρική εκτίμηση του μοντέλου AAD

Για την μη παραμετρική εκτίμηση του μοντέλου AAD (4.3.1) (Robins J and Tsiatis A, (1992)) θεωρούμε ότι οι πειραματικές μονάδες που διαθέτουμε δέχονται τη συμβολή ενός διανύσματος πιέσεων – συμμεταβλητών $X_{\theta_n} = (X_1, \mathbf{K}, X_p)'$. Τελικός σκοπός μας είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου στην περίπτωση που οι συμμεταβλητές είναι μεταβαλλόμενες με το χρόνο, όταν δηλαδή $X_{\theta_n}(t) = (X_1(t), \mathbf{K}, X_p(t))'$. Η πορεία της εκτίμησης θα γίνει ξεκινώντας από την απλή περίπτωση όπου $X_{\theta_n}(t) = X_{\theta_n} =$ σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του χρόνου και κατόπιν θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα στη χρονομεταβλητή περίπτωση. Στην περίπτωση του χρονικά ανεξάρτητου διανύσματος συμμεταβλητών, για μια δεδομένη τιμή των συμμεταβλητών $X_{\theta_n} = x_{\theta_n}$ είδαμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση (4.3.3) δηλαδή,

$$S_{x_{\theta_n}}(t) = G(r(x_{\theta_n}) \cdot t). \quad (5.1.1)$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η συνάρτηση $r(x)$ εκφράζεται από το μοντέλο loglinear, τότε θα έχουμε

$$r\left(\frac{x}{\theta_n}\right) = e^{b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_p x_p} = \exp\left(\frac{\mathbf{b}'x}{\theta_n}\right),$$

όπου $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_p)'$.

Έστω $G = S_0$ όπου S_0 αποτελεί μια "αναφορική" συνάρτηση επιβίωσης ("baseline" survival function). Με τον όρο αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση επιβίωσης που θα είχε μια πειραματική μονάδα στην περίπτωση όπου η τιμή $x = \theta_n$ αν δηλαδή η μονάδα λειτουργούσε χωρίς την επίδραση κανενός παράγοντα πίεσης, συνεπώς θα ίσχυε $S_0(t) = G(r(\theta_n) \cdot t)$.

Αν η τυχαία μεταβλητή T αποτελεί το χρόνο ζωής μιας μονάδας που βρίσκεται κάτω από συνθήκες πίεσης $X \neq \theta_n$ τότε θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή U η οποία δηλώνει το χρόνο ζωής των μονάδων με διάνυσμα συμμεταβλητών ίσο με μηδέν ή $X = \theta_n$. Επομένως στην περίπτωση που ισχύει η λογαριθμογραμμική σχέση οι τυχαίες μεταβλητές T και U συνδέονται, για μια δεδομένη τιμή συμμεταβλητών $X = x$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$T = \exp\left(-\frac{\mathbf{b}'x}{\theta_n}\right)U.$$

Εφόσον ο παράγοντας $r(x) = \exp\left(\frac{\mathbf{b}'x}{\theta_n}\right)$ εκφράζει την αναλογική σταθερά στη σχέση (5.1.1), μπορεί να θεωρηθεί ως παράγοντας κλίμακας, σύμφωνα με τον οποίο ο χρόνος ζωής μειώνεται ως συνάρτηση των συμμεταβλητών x .

Συμμεταβλητές μεταβαλλόμενες με το χρόνο

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας n πειραματικές μονάδες και έστω T_i η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει το χρόνο ζωής i -οστής μονάδας, $i=1, \dots, n$. Το τυχαίο διάνυσμα $X_{\theta_n^i}(t)$ καταγράφει την τιμή του διανύσματος των χρόνο-εξαρτημένων συμμεταβλητών της i -οστής μονάδας τη στιγμή t και έστω $\bar{X}_{\theta_n^i}(t) = \{X_{\theta_n^i}(s); 0 \leq s \leq t\}$ το παρελθόν της συμμεταβλητής διαδικασίας στη διάρκεια του χρόνου t . Προσωρινά θα υποθέσουμε ότι δεν

υπάρχουν λογοκριμένα δεδομένα. Επομένως για κάθε μονάδα i , οι παρατηρούμενες τυχαίες μεταβλητές είναι οι $\{T_i, \bar{X}_i(T_i)\}$.

Στην περίπτωση των χρόνο-μεταβαλλόμενων συμμεταβλητών είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε την ύπαρξη δυο χρονικών κλίμακων. Η μια χρονική κλίμακα θα είναι η "αναφορική χρονική κλίμακα", u , στην υποθετική περίπτωση που η πειραματική μονάδα δεν εκτίθεται σε συνθήκες πίεσης, δηλαδή $X_{\omega_i}(t) = 0_{\omega}$. Σε αυτή τη χρονική κλίμακα η i -οστή μονάδα θα ζούσε U_i χρόνια. Ωστόσο θα πρέπει επίσης να θεωρήσουμε και την παρατηρούμενη χρονική κλίμακα, t . Σε αυτή τη χρονική κλίμακα η μονάδα βιώνει ένα συγκεκριμένο παρελθόν έκθεσης σε τεχνητή πίεση $\bar{X}_{\omega_i}(T_i)$ και παρατηρείται ότι έχει χρόνο ζωής T_i . Το μοντέλο που θα θεωρηθεί προκειμένου να γίνει η εκτίμηση του διανύσματος b_{ω} υποθέτει ότι υπάρχει ένας μονότονος μετασχηματισμός από μια αναφορική χρονική κλίμακα, u , σε μια παρατηρούμενη χρονική κλίμακα, t , σαν συνάρτηση του παρελθόντος των συμμεταβλητών.

Για λόγους καλύτερης ερμηνείας είναι προτιμότερο να θεωρήσουμε την παράγωγο του μετασχηματισμού, du / dt , ως συνάρτηση του παρελθόντος των συμμεταβλητών έως τη χρονική στιγμή t . Για το λόγο αυτό δηλώνουμε $du / dt = r\{\bar{X}_{\omega}(t), b_{\omega}\}$ για να αντιστοιχίσουμε το σχετικό ρυθμό με τον οποίο ο αναφορικός χρόνος ζωής συγκρίνεται με τον πραγματικό χρόνο ζωής ως μια συνάρτηση της έκθεσης σε τεχνητή πίεση $\bar{X}_{\omega}(t)$, έως εκείνη τη χρονική στιγμή.

Έστω r μια θετική γνωστή συνάρτηση με $r\{\bar{X}_{\omega}(t), b_{\omega}\} = 1$ όταν $\bar{X}_{\omega}(t) = 0_{\omega}$ ή $b_{\omega} = 0_{\omega}$ και $b_{\omega} \in R^p$ το άγνωστο παραμετρικό διάνυσμα που θα εκτιμηθεί. Η συνάρτηση μετασχηματισμού από το u στο t είναι η εξής

$$u = \int_0^t \left[r\left\{ \bar{X}_{\omega}(s), b_{\omega} \right\} ds \right],$$

η οποία θα δηλώνεται ως $u = y\left\{ \bar{X}_{\omega}(t), b_{\omega} \right\}$. Για το λόγο αυτό μια μονάδα που είχε χρόνο ζωής T_i με ένα συγκεκριμένο παρελθόν έκθεσης σε τεχνητή πίεση, θα ζούσε U_i χρόνια αν δεν

εκτίθονταν σε καμία πίεση, όπου $U_i = Y\left\{\bar{X}_{\%}^i(T_i), \mathbf{b}_{\%}^i\right\}$. Για την ειδική περίπτωση όπου $r\left\{X_{\%}^i(t), \mathbf{b}_{\%}^i\right\} = e^{\frac{b'X_{\%}^i(t)}{\%}}$ λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$u = \int_0^t e^{\frac{b'X_{\%}^i(s)}{\%}} ds, \quad U_i = \int_0^{T_i} e^{\frac{b'X_{\%}^i(s)}{\%}} ds.$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους, $\mathbf{b}_{\%}$, της συνάρτησης μετασχηματισμού μας από το δείγμα των δεδομένων, πρέπει αρχικά να θεωρήσουμε ένα μοντέλο πιθανότητας που παράγει τα δεδομένα. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των αναφορικών χρόνων αποτυχίας, U_i , σε ένα πληθυσμό έχει συνάρτηση επιβίωσης, $S_0(u) = P(U \geq u)$ που αντιστοιχεί στην πληθυσμιακή κατανομή του χρόνου ζωής όταν κανένα μέλος του πληθυσμού δεν έχει εκτεθεί σε πίεση. Αν μια μονάδα εκτίθεται σε ένα συγκεκριμένο παρελθόν πίεσης, $\bar{X}_{\%} = \{X_{\%}(s); 0 \leq s \leq \infty\}$, τότε η κατανομή του παρατηρούμενου χρόνου ζωής, T , σύμφωνα με το μετασχηματισμό θα ικανοποιεί τη σχέση

$$P\left\{Y\left\{\bar{X}_{\%}(T), \mathbf{b}_{\%}\right\} \geq u \mid \bar{X}_{\%}\right\} = S_0(u). \quad (5.1.2)$$

Με $\mathbf{b}_{\%}^0$ δηλώνουμε την αληθινή τιμή του $\mathbf{b}_{\%}$ που παράγουν τα δεδομένα. Με $U(\mathbf{b}_{\%})$ θα δηλώνουμε στο εξής το μετασχηματισμό του T όπως δίνεται από τη συνάρτηση $Y\left\{\bar{X}_{\%}(T), \mathbf{b}_{\%}\right\}$, ενώ με $U(\mathbf{b}_{\%}^0)$ θα εκφράζουμε τον αληθινό αναφορικό χρόνο ζωής ο οποίος θα συμβολίζεται από εδώ και πέρα με U .

Το μοντέλο (5.1.2) υποθέτει την ύπαρξη της τιμής του $X_{\%}(t)$ για τιμές του χρόνου $t \geq T$. Ωστόσο, η τιμή του $X_{\%}(t)$ δεν μετράται συνήθως μετά την αποτυχία της μονάδας. Συνεπώς ο ορισμός (5.1.2) δεν έχει σχέση με τις παρατηρούμενες τυχαίες ποσότητες, $\{T, \bar{X}_{\%}(T)\}$. Για το λόγο αυτό είναι πιο βολικό να εκφράσουμε το μοντέλο με τη μορφή της συνάρτησης κινδύνου, που σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι

$$I_0(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\left[u \leq U \leq u+h \mid U \geq u, \bar{X}_{\%}\left\{Y^{-1}(u, \bar{X}_{\%}, \mathbf{b}_{\%}^0)\right\}\right]}{h}, \quad (5.1.3)$$

όπου $U = Y \left\{ \bar{X}_{\%}(T), \mathbf{b}_{\%0} \right\}$ και με $Y^{-1}(u, \bar{X}_{\%}, \mathbf{b}_{\%0})$ ορίζουμε την τιμή, t , τέτοια ώστε $Y \left\{ \bar{X}_{\%}(t), \mathbf{b}_{\%0} \right\} = u$. Επειδή $U \geq u$ ή $Y \left\{ \bar{X}_{\%}(T), \mathbf{b}_{\%0} \right\} \geq u$ συνεπάγεται ότι $Y^{-1}(u, \bar{X}_{\%}, \mathbf{b}_{\%0}) < T$, γεγονός που δηλώνει ότι το μοντέλο (5.1.3) αφορά μόνο την από κοινού συνάρτηση κατανομής των παρατηρήσιμων τυχαίων μεταβλητών, $\{T, \bar{X}_{\%}(T)\}$. Το μοντέλο (5.1.3) θα καλείται AAD ή AFT μοντέλο για μεταβαλλόμενες συμμεταβλητές.

Για την γενίκευση του μοντέλου (5.1.3) θεωρούμε την ύπαρξη λογοκριμένων δεδομένων από δεξιά και έστω C η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει τον ενδεχόμενο χρόνο λογοκρισίας μιας μονάδας. Άρα πλέον οι παρατηρούμενες τυχαίες μεταβλητές είναι $\{Y, \Delta, \bar{X}_{\%}(Y)\}$, όπου $Y = \min\{T, C\}$ και $\Delta = \begin{cases} 1, & Y = T \\ 0, & Y = C \end{cases}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η λογοκρισία δεν είναι πληροφοριακή (*noninformative censoring*) (Cox και Oakes, (1984), Tsiatis (1990)), τότε το μοντέλο (5.1.3) μπορεί να περιγραφεί σε σχέση με την συνάρτηση κινδύνου "συγκεκριμένου-αιτίου", $I_0(u)$, ως εξής

$$I_0(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P \left[u \leq V \leq u+h, \Delta = 1 \mid V \geq u, \bar{X}_{\%} \left\{ Y^{-1}(u, \bar{X}_{\%}, \mathbf{b}_{\%0}) \right\} \right]}{h}, \quad (5.1.4)$$

όπου $V(\mathbf{b}_{\%0}) = Y \left\{ \bar{X}_{\%}(Y), \mathbf{b}_{\%0} \right\}$ και η V εδώ ισούται με $V(\mathbf{b}_{\%0})$. Επειδή, όπως και στη μη λογοκριμένη περίπτωση, $V \geq v$ δηλώνει ότι $Y^{-1}(u, \bar{X}_{\%}, \mathbf{b}_{\%0}) < Y$, το μοντέλο (5.1.4) αναφέρεται μόνο στις παρατηρήσιμες τυχαίες μεταβλητές, $\{Y, \Delta, \bar{X}_{\%}(Y)\}$.

Οι εκτιμητές των παραμέτρων $\mathbf{b}_{\%0}$ του μοντέλου (5.1.4) θα προκύψουν από την επίλυση της $S(\hat{\mathbf{b}}_{\%0}) = 0$ που θα δείξουμε στη συνέχεια, όπου $S(\mathbf{b}_{\%0})$ είναι ένα μη παραμετρικό test της υπόθεσης $\mathbf{b}_{\%0} = \mathbf{b}_{\%0}$, χρησιμοποιώντας έναν τύπο ανάλογο του σταθμισμένου log rank test.

Αρχικά θα θεωρήσουμε την απλή περίπτωση όπου έχουμε μια παράμετρο \mathbf{b} . Στο τέλος θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα για το πολυπαραμετρικό πρόβλημα. Τα παρατηρούμενα δεδομένα μπορούν να αντιπροσωπευτούν από n ανεξάρτητα διανύσματα $\{Y_i, \Delta_i, \bar{X}_i(Y_i)\}$,

$i = 1, \dots, n$. Η χρήση του στατιστικού μέτρου $S(\mathbf{b}_0)$ για τον έλεγχο της $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0$ προέκυψε από τον ορισμό που δόθηκε για το μοντέλο (5.1.4).

Δηλαδή, αν διαλέξουμε την ορθή τιμή του \mathbf{b}_0 στο μετασχηματισμό $V_i(\mathbf{b}) = \mathcal{Y}\{\bar{X}_i(Y_i), \mathbf{b}\}$, τότε η συνάρτηση κινδύνου συγκεκριμένου-αιτίου $I_0(u)$ του $V_i = V_i(\mathbf{b}_0)$ σε κάθε u θα είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος της συμμεταβλητής ως τη χρονική στιγμή u . Επομένως για κάθε πειραματική μονάδα, ορίζουμε μια συνάρτηση score ως εξής

$$G_i(u, \mathbf{b}) = g\left[\bar{X}_i\left\{\mathcal{Y}^{-1}(u, \bar{X}_i, \mathbf{b})\right\}\right].$$

Η συνάρτηση score αποτελεί μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές του αναφορικού χρόνου ζωής u και του παρελθόντος της συμμεταβλητής που καθορίζεται έως την αντίστοιχη πραγματική χρονική στιγμή $t = \mathcal{Y}^{-1}(u, \bar{X}_i, \mathbf{b})$.

Το στατιστικό μέτρο $S(\mathbf{b}_0)$ ορίζεται ως ακολούθως. Αρχικά μετασχηματίζουμε όλες τις μεταβλητές υπολογίζοντας τα $V_i(\mathbf{b}_0) = \mathcal{Y}\{\bar{X}_i(Y_i), \mathbf{b}_0\}$. Χρησιμοποιώντας τις μετασχηματισμένες μεταβλητές υπολογίζουμε ένα άθροισμα, πάνω στις χρονικές στιγμές αποτυχίας των μονάδων, των παρατηρούμενων μείον των αναμενόμενων scores, G_i , σε κάθε χρονική στιγμή αποτυχίας.

Συγκεκριμένα,

$$S(\mathbf{b}_0) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \left[G_i\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \right], \quad (5.1.5)$$

όπου $G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\}$ είναι ο μέσος όρος των scores που αποτιμήθηκαν τη χρονική στιγμή $V_i(\mathbf{b}_0)$ μεταξύ των μονάδων που σε αναφορική κλίμακα βρίσκονται σε κίνδυνο έως εκείνη τη χρονική στιγμή. Έστω $Z_j(u, \mathbf{b}_0)$ μια δείκτρια συνάρτηση που δηλώνει αν η j -οστή μονάδα βρίσκεται σε κίνδυνο τη χρονική στιγμή, u , δηλαδή $Z_j(u, \mathbf{b}_0) = 1$ αν $V_j(\mathbf{b}_0) \geq u$ και 0 διαφορετικά. Τότε

$$G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} = \frac{\sum_{j=1}^n \left[G_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} Z_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \right]}{\sum_{j=1}^n \left[Z_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \right]}. \quad (5.1.6)$$

Το στατιστικό μέτρο (5.1.5) είναι παρεμφερές με ένα σταθμισμένο log rank test. Σύμφωνα με το μοντέλο (5.1.4) η συνάρτηση κινδύνου για τα $V_i(\mathbf{b}_0)$ δεν εξαρτάται από το παρελθόν των συμμεταβλητών. Επιπλέον, τα παρατηρούμενα μείον τα αναμενόμενα scores

$$A_i(\mathbf{b}_0) = G_i\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\}$$

αποτελούν συναρτήσεις μόνο του παρελθόντος των συμμεταβλητών. Συνεπώς, αν

- (i) θέσουμε τον όρο τα παρελθοντικά γεγονότα να φτάνουν έως το χρόνο $V_i(\mathbf{b}_0)$ και
- (ii) θέσουμε ως γεγονός ότι μια μονάδα απέτυχε τη στιγμή $V_i(\mathbf{b}_0)$

τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του μοντέλου (5.1.4), κάθε μια από τις μονάδες που βρίσκονται σε κίνδυνο εκείνη τη χρονική στιγμή είναι εξ ίσου πιθανό να αποτύχει. Για το λόγο αυτό το στατιστικό μέτρο $A_i(\mathbf{b}_0)$ έχει μέση τιμή ίση με μηδέν. Εξαιτίας του τελευταίου συμπεράσματος έπεται ότι και η $n^{\frac{1}{2}}S(\mathbf{b}_0)$ όπως δίνεται από τη σχέση (5.1.5) θα έχει μέσο που προσεγγίζει το μηδέν με διασπορά που μπορεί να εκτιμηθεί από την $n^{-1}\Omega(\mathbf{b}_0)$, όπου

$$\Omega(\mathbf{b}_0) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \left(\sum_{j=1}^n [G_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\}]^2 Z_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \times \left[\sum_{j=1}^n Z_j\{V_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \right]^{-1} \right)$$

Η τελευταία αποτελεί συνεπή εκτιμήτρια της διασποράς του $n^{\frac{1}{2}}S(\mathbf{b}_0)$. Επειδή το στατιστικό μέτρο $S(\mathbf{b}_0)$ έχει μέσο μηδέν όταν $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$, προτείνεται το $S(\mathbf{b})$ ως μια εξίσωση εκτίμησης και ορίζεται σημειακός εκτιμητής, $\hat{\mathbf{b}}$, η λύση της $S(\hat{\mathbf{b}}) = 0$. Ωστόσο, επειδή η $S(\mathbf{b})$ είναι κλιμακωτή συνάρτηση, μπορούμε να θεωρήσουμε ως $\hat{\mathbf{b}}$ την τιμή για την οποία η $S(\mathbf{b})$ αλλάζει πρόσημο. Κάτω από συνθήκες ομαλότητας παρόμοιες με αυτές του Tsiatis (1990), το $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_0)$ είναι ασυμπτωτικά κανονικό με μέσο μηδέν και διασπορά που μπορεί να εκτιμηθεί μέσω συνεπούς εκτιμήτριας.

Αν η $S(\mathbf{b})$ ήταν διαφορίσιμη ως προς \mathbf{b} , τότε η ασυμπτωτική κανονικότητα θα προέκυπτε από τη γενική θεωρία των παραγωγίσιμων εξισώσεων εκτίμησης όπως δίνεται από τον Serfling (1980). Σε αυτή την περίπτωση, αναπτύσσοντας την $n^{\frac{1}{2}}S(\mathbf{b})$ σε σειρά Taylor, σε μια γειτονιά του \mathbf{b}_0 βρίσκουμε

$$n^{\frac{1}{2}}S(\mathbf{b}) = n^{\frac{1}{2}}S(\mathbf{b}_0) + n^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)K(\mathbf{b}_0) + o_p(1), \quad (5.1.7)$$

όπου $K(\mathbf{b}_0)$ είναι το όριο του $E\{n^{-1}\partial S(\mathbf{b})/\partial \mathbf{b}\}$ όταν $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$.

Ο Tsiatis (1990) έδειξε ότι, όταν η $S(\mathbf{b})$ είναι μη διαφορίσιμη όπως στο συγκεκριμένο πρόβλημα, το αποτέλεσμα (5.1.7) εξακολουθεί να ισχύει όπου όμως τώρα το $K(\mathbf{b}_0)$ είναι ίσο με το όριο της $\partial[n^{-1}E\{S(\mathbf{b})\}]/\partial\mathbf{b}$ όταν $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$. Η σχέση (5.1.7) μαζί με την ασυμπτωτική κανονικότητα της $S(\mathbf{b}_0)$ δηλώνουν ότι το $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_0)$ είναι ασυμπτωτικά κανονικό. Η διασπορά του τελευταίου μπορεί να εκτιμηθεί συνεπώς από την $n^{-1}\{\Omega(\hat{\mathbf{b}})\}/\hat{K}^2$, όπου \hat{K} είναι ο συνεπής εκτιμητής της $K(\mathbf{b}_0)$ που δίνεται από μια "αριθμητική παράγωγο" της $n^{-1}S(\mathbf{b})$ με μέγεθος βήματος της σειράς $n^{\frac{1}{2}}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\hat{K} = \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} \left\{ S(\hat{\mathbf{b}} + cn^{\frac{1}{2}}) - S(\hat{\mathbf{b}} - cn^{\frac{1}{2}}) \right\} / c.$$

Οι προτεινόμενοι εκτιμητές είναι μη παραμετρικοί καθώς από τα όσα προηγήθηκαν παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι δε θεωρήθηκε σε κανένα σημείο της ανάλυσης κάποια συγκεκριμένη μορφή θεμελιώδους αναφορικής συνάρτησης κινδύνου, $I_0(u)$, που δίνεται από το μοντέλο (5.1.4). Κάτω από ορισμένες συνθήκες ομαλότητας υπάρχει επίσης μεγάλη ευελιξία στην επιλογή της σταθμικής συνάρτησης $G_i(u, \mathbf{b})$.

Η ικανότητα του εκτιμητή $\hat{\mathbf{b}}$, δηλαδή κατά πόσο έχει μικρή μεροληψία, εξαρτάται στην επιλογή της συνάρτησης του score $g[\bar{X}_i\{Y^{-1}(u, \bar{X}_i, \mathbf{b})\}]$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Schoenfeld (1981), Gill (1980) και Tsiatis (1990), μπορεί να δειχτεί ότι η καταλληλότερη επιλογή $g_{opt}[\bar{X}_i\{Y^{-1}(u, \bar{X}_i, \mathbf{b})\}]$ είναι ανάλογη της παραγώγου του λογαρίθμου του λόγου κινδύνου ως προς την παράμετρο β . Δηλαδή είναι ανάλογη της,

$$\partial \log\{I_i(u, \mathbf{b})/I_0(u)\}/\partial\mathbf{b}$$

υπολογισμένη στο $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$, όπου $I_i(u, \mathbf{b})$ είναι το όριο

$$I_i(u, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[u \leq U_i(\mathbf{b}) \leq u+h | U_i(\mathbf{b}) \geq u, \bar{X}_i\{Y^{-1}(u, \bar{X}_i, \mathbf{b})\}]}{h}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει $I_i(u, \mathbf{b}_0) = I_0(u)$.

Μέχρι αυτό το σημείο, είχαμε υποθέσει ότι η \mathbf{b} είναι μια απλή παράμετρος. Οι παραπάνω μέθοδοι μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση όπου $\mathbf{b}_{\%}$ είναι ένα $p \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων. Αν $\mathbf{b}_{\%} \in R^p$, ορίζουμε

$$g\{\bar{X}_{\%}(t)\} = \left[g_1\{\bar{X}_{\%}(t)\}, \dots, g_p\{\bar{X}_{\%}(t)\} \right]'$$

το $p \times 1$ διάνυσμα σταθμικών συναρτήσεων. Έστω το διάνυσμα $\bar{X}_{\%}(t)$ των χρόνο-εξαρτημένων συμμεταβλητών (παραγόντων πίεσης) $X_1(t), \dots, X_p(t)$ και μια συνάρτηση μετασχηματισμού

$$y\{\bar{X}_{\%}(t), \mathbf{b}_{\%}\} = \int_0^t \exp\{b_1 X_1(x) + \dots + b_p X_p(x)\} dx.$$

Μπορούμε τότε να επιλέξουμε $g_j\{\bar{X}_{\%}(t)\}$ να αντιστοιχεί στην $X_j(t)$, την τιμή της j -οστής χρονοεξαρτημένης μεταβλητής όπως αποτιμήθηκε τη χρονική στιγμή t για $j = 1, \dots, p$.

Στο πολυπαραμετρικό πρόβλημα, έχουμε

$$A_i(\mathbf{b}_{\%}) = G_i\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\},$$

όπου το $p \times 1$ διάνυσμα $G_i\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\}$ έχει την l -οστή συνιστώσα ίση με $g_l\left[\bar{X}_i\{y^{-1}(V_i(\mathbf{b}_{\%}), \bar{X}_i, \mathbf{b}_{\%})\}\right]$ και η $G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\}$ είναι η συνάρτηση που ορίστηκε στη σχέση (5.1.6). Παρομοίως, ο πίνακας συνδιασποράς του $S(\mathbf{b}_0)$ εκτιμάται από τον $p \times p$ πίνακα $\Omega(\mathbf{b}_0)$, όπου ο πίνακας $\Omega(\mathbf{b}_{\%})$ ορίζεται αναλόγως με τη μονοπαραμετρική περίπτωση, μόνο που το

$$\left[G_j\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\} \right] \left[G_j\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\} - G^{av}\{V_i(\mathbf{b}_{\%}), \mathbf{b}_{\%}\} \right]'$$

λαμβάνει τη θέση του $\left[G_j\{U_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} - G^{av}\{U_i(\mathbf{b}_0), \mathbf{b}_0\} \right]^2$.

Ορίζουμε ως $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}$ να είναι η λύση της εξίσωσης $S(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}) = 0$. Ωστόσο, κάθε συνιστώσα $S_j(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k})$ του $S(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση (step function) στο $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}$, οπότε ορίζουμε ως $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}$ την τιμή της $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}$ που ελαχιστοποιεί την τετραγωνική μορφή

$$S(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k})'S(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}).$$

Έστω c_1, \dots, c_p κάποιες καθορισμένες σταθερές και \mathbf{e}_k το $p \times 1$ διάνυσμα με k -οστή συνιστώσα ίση με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία 0. Επίσης ορίζουμε $\hat{K}(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k})$ να είναι ο $p \times p$ πίνακας των αριθμητικών μερικών παραγώγων με (j,k) -οστό στοιχείο το

$$\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \left\{ S_j(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k} + c_k \mathbf{e}_k n^{\frac{1}{2}}) - S_j(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k} - c_k \mathbf{e}_k n^{\frac{1}{2}}) \right\} / c_k .$$

το οποίο είναι ανάλογο με το $\hat{K}(\hat{\mathbf{b}})$ που αναφέραμε στην μονομεταβλητή περίπτωση. Ο Tsiatis (1990), κάτω από κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας έδειξε ότι το $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k} - \mathbf{b}_{\mathbf{0}_k})$ είναι ασυμπτωτικά κανονικό με μέσο μηδέν και πίνακα συνδιασποράς που μπορεί να εκτιμηθεί συνεπώς από την

$$n^{-1} \{ \hat{K}^{-1}(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}) \} \Omega(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}) \{ \hat{K}^{-1}(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{0}_k}) \}' .$$

5.2 Εκτίμηση του μοντέλου του Sedyakin

Η εκτίμηση του μοντέλου cumulative exposure γίνεται με παραμετρικό τρόπο (Khamis, I. (1997)). Για την εκτίμηση του μοντέλου υποθέτουμε ότι επιδρούν k μεταβλητές πίεσης $(x_{1i}, \mathbf{K}, x_{ki})$ στις πειραματικές μονάδες και ο πειραματικός σχεδιασμός αποτελείται από m βήματα ($i=1, \dots, m$) κατά τα οποία αυξάνονται τα επίπεδα των παραγόντων πίεσης. Διαθέτουμε n πειραματικές μονάδες οι οποίες αρχικά λειτουργούν κάτω από συνθήκες φυσιολογικής πίεσης $(x_{11}, \mathbf{K}, x_{k1})$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία οι παράγοντες πίεσης

αυξάνονται σε $(x_{12}, \mathbf{K}, x_{k2})$. Ο έλεγχος συνεχίζεται μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 όπου η πίεση μεταβάλλεται σε $(x_{13}, \mathbf{K}, x_{k3})$ και η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται σε m βήματα. Στο τελευταίο βήμα, δηλαδή με το πέρας της χρονικής στιγμής t_m , πρέπει να αποτύχουν όλες οι μονάδες που επιβίωσαν από τα προηγούμενα βήματα. Για το λόγο αυτό το τελικό διάνυσμα πιέσεων επιλέγεται να έχει αρκετά μεγάλες τιμές έτσι ώστε όλες οι εναπομείναντες μονάδες να αποτύχουν σύντομα. Οι βασικές υποθέσεις για την εκτίμηση του μοντέλου είναι οι εξής:

(1) Ο έλεγχος γίνεται με m διανύσματα πίεσης $(x_{11}, \mathbf{K}, x_{k1}), (x_{12}, \mathbf{K}, x_{k2}), \dots, (x_{1m}, \mathbf{K}, x_{km})$, όπου $x_{li} \leq x_{lj}$, $1 \leq l \leq k$ για όλα τα i, j με $i \leq j$, ενώ ισχύει $k+1 \leq m$.

(2) Η κατανομή του χρόνου ζωής κάθε μονάδας σε κάθε επίπεδο πίεσης είναι η εκθετική.

(3) Για το μέσο χρόνο ζωής q_i σε επίπεδο πίεσης $(x_{li}, \mathbf{K}, x_{ki})$ ισχύει η λογαριθμογραμμική σχέση με τους παράγοντες πίεσης

$$\log(q_i) = g_0 + \sum_{l=1}^k g_l x_{li} \quad (5.2.1)$$

(4) Η αποτυχία συμβαίνει σύμφωνα με το μοντέλο cumulative exposure (Nelson 1980).

Σύμφωνα με τη σχέση (4.5.2) θα μπορούσαμε να γράψουμε ισοδύναμα ότι η συνάρτηση κατανομής των μονάδων σε κάθε βήμα δίνεται από τη σχέση

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & 0 \leq t < t_1 \\ F_2(t - t_1 + s_1) & t_1 \leq t < t_2 \\ F_3(t - t_2 + s_2) & t_2 \leq t < t_3 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ F_m(t - t_{m-1} + s_{m-1}) & t_{m-1} \leq t < \infty \end{cases}$$

καθώς $F_i(t) = 1 - S_i(t)$ ενώ s_i όπως είχαμε δει είναι η λύση της εξίσωσης

$$F_{i+1}(s_i) = F_i(t_i - t_{i-1} + s_{i-1}) \text{ για } i=1, \dots, m-1.$$

Η εκτίμηση θα γίνει με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και χωρίς απώλεια της γενικότητας χρησιμοποιούμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$y_{li} = \frac{x_{li} - x_{l0}}{x_{lm} - x_{l0}} \quad l=1, 2, \dots, k \text{ και } i=1, 2, \dots, m.$$

Τότε το μοντέλο (5.2.1) μετασχηματίζεται όπως παρακάτω

$$\log(\mathbf{q}_i) = b_0 + \sum_{l=1}^k b_l y_{li} . \quad (5.2.2)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας που προκύπτει από τις παρατηρήσεις $T_{ij} = t_{ij}$, $i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,n_i$ είναι

$$L(b_0, b_1, \dots, b_k) = \prod_{j=1}^{n_1} \left[\frac{1}{q_1} \exp\left(-\frac{t_{1j}}{q_1}\right) \right] \prod_{j=1}^{n_2} \left[\frac{1}{q_2} \exp\left(-\frac{t_{2j}-t_1}{q_2} - \frac{t_1}{q_1}\right) \right] \dots \prod_{j=1}^{n_m} \left[\frac{1}{q_m} \exp\left(-\frac{t_{mj}-t_{m-1}}{q_m} - \frac{t_2-t_1}{q_2} - \frac{t_1}{q_1}\right) \right], \quad (5.2.3)$$

όπου n_i είναι ο αριθμός των μονάδων που απέτυχαν στο i -οστό διάλυμα πίεσεων. Αντικαθιστώντας το q_i , $i=1,2,\dots,k$ από τη σχέση (5.2.2) στη σχέση (5.2.3) μπορούμε να βρούμε το λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως συνάρτηση των αγνώστων παραμέτρων b_0, b_1, \dots, b_k . Αυτή είναι η εξής:

$$\log L(b_0, b_1, \dots, b_k) = -nb_0 - \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^k n_l b_i y_{il} \right) - \sum_{l=1}^m U_l \exp(-b_0 - \sum_{i=1}^k b_i y_{il}),$$

όπου

$$U_1 = \sum_{j=1}^{n_1} t_{1j} + (n_2 + n_3 + \dots + n_m)t_1$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (t_{2j} - t_1) + (n_3 + n_4 + \dots + n_m)(t_2 - t_1)$$

Μ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij} - t_{i-1}) + (n_{i+1} + n_{i+2} + \dots + n_m)(t_i - t_{i-1})$$

Μ

$$U_m = \sum_{j=1}^{n_m} (t_{mj} - t_{m-1})$$

Επισημαίνουμε ότι U_j αποτελεί τον συνολικό χρόνο κάτω από πίεση $(x_{1j}, x_{2j}, \mathbf{K}, x_{kj})$, $j=1,2,\dots,m$.

Οι ΕΜΠ για τις παραμέτρους b_0, b_1, \dots, b_k βρίσκονται επιλύοντας τις ακόλουθες εξισώσεις με τη μέθοδο Newton-Raphson (Παράρτημα Π2).

$$\frac{\partial \log L(b_0, b_1, \dots, b_k)}{\partial b_0} = -n + \sum_{l=1}^m U_l \exp(-b_0 - \sum_{i=1}^k b_i y_{il}) = 0$$

και

$$\frac{\partial \log L(b_0, b_1, \dots, b_k)}{\partial b_s} = \sum_{l=1}^m [-n_l y_{sl} + U_l \exp(-b_0 - \sum_{i=1}^k b_i y_{is})] = 0,$$

όπου $s=1,2,\dots,k$.

5.3 Μη παραμετρική εκτίμηση του γενικευμένου μοντέλου αναλογικού κινδύνου

Θεωρούμε το γενικότερο μοντέλο GPH2 το οποίο όπως είδαμε δίνεται από τη σχέση

$$I_{x(\cdot)}(t) = u\{x(t), \Lambda_{x(\cdot)}(t), \mathbf{q}\} \cdot I_0(t), \quad (5.3.1)$$

όπου η συνάρτηση κινδύνου αποτελεί γινόμενο μιας συνάρτησης $u = u(x, s, \mathbf{q})$, με παράμετρο θ , και της άγνωστης αναφορικής συνάρτησης κινδύνου $I_0(t)$. Η εκτίμηση δόθηκε από τους Bagdonavičius, V. και Nikulin, M. (2000).

Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε m ομάδες αντικειμένων που θα εισέρχονται στον επιταχυνόμενο έλεγχο. Η i -οστή ομάδα με k_i πειραματικές μονάδες δοκιμάζεται κάτω από διάνυσμα επιταχυνόμενων πιέσεων $x_i(\cdot)$. Δηλώνουμε με T_{ij} και C_{ij} τους χρόνους αποτυχίας και λογοκρισίας αντίστοιχα της j -οστής μονάδας της i -οστής ομάδας και έστω

$$X_{ij} = \min\{T_{ij}, C_{ij}\}, \quad d_{ij} = I_{\{T_{ij} \leq C_{ij}\}}, \quad N_{ij}(t) = I_{\{T_{ij} \leq t, d_{ij}=1\}}, \quad Y_{ij}(t) = I_{\{X_{ij} \geq t\}},$$

όπου I_A αποτελεί τη δείκτρια του γεγονότος A . Τότε οι ποσότητες

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i} N_{ij}(t) \quad \text{και} \quad Y_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i} Y_{ij}(t),$$

εκφράζουν τον αριθμό των παρατηρούμενων αποτυχιών (πλήρων χρόνων ζωής) στο διάστημα $[0, t]$ και τις μονάδες που βρίσκονται "σε κίνδυνο" ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή t , αντίστοιχα, για τη i -οστή ομάδα αντικειμένων.

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι ζωής T_{ij} είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και η λογοκρισία είναι ανεξάρτητη λογοκρισία από δεξιά.

Υποθέτουμε ότι ο μέγιστος χρόνος που δίνεται για τη διεξαγωγή του πειράματος είναι $t \in (0, \infty)$ και όλες οι μονάδες που δεν απέτυχαν και δε λογοκρίθηκαν πριν τη χρονική στιγμή τ , λογοκρίνονται εκείνη τη χρονική στιγμή.

Η συνάρτηση μερικής πιθανοφάνειας (βλέπε Andersen κά (1993)) είναι

$$L(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} \left(\frac{u\{x_i(v), \Lambda_i(v), \mathbf{q}\}}{\sum_{l=1}^m Y_l(v) u\{x_l(v), \Lambda_l(v), \mathbf{q}\}} dN_{ij}(v) \right)^{d_{ij}}. \quad (5.3.2)$$

Τροποποιούμε τη συνάρτηση μερικής πιθανοφάνειας με τον ακόλουθο τρόπο:

Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις $\Lambda_i(t)$ στη σχέση (5.3.1) με τους εκτιμητές Nelson-Aalen:

$$\hat{\Lambda}_i(t) = \int_0^t \frac{dN_i(s)}{Y_i(s)}.$$

Η τροποποιημένη συνάρτηση μερικής πιθανοφάνειας είναι

$$\hat{L}(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} \left(\frac{u\{x_i(v), \hat{\Lambda}_i(v), \mathbf{q}\}}{\sum_{l=1}^m Y_l(v) u\{x_l(v), \hat{\Lambda}_l(v), \mathbf{q}\}} dN_{ij}(v) \right)^{d_{ij}}. \quad (5.3.3)$$

Θέτουμε $g(x, t, \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} u(x, t, \mathbf{q})$. Η συνάρτηση score θα έχει τη μορφή

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \int_0^t \left(\frac{g\{x_i(v), \hat{\Lambda}_i(v), \mathbf{q}\}}{u\{x_i(v), \hat{\Lambda}_i(v), \mathbf{q}\}} - \frac{\sum_{l=1}^m Y_l(v) g\{x_l(v), \hat{\Lambda}_l(v), \mathbf{q}\}}{\sum_{l=1}^m Y_l(v) u\{x_l(v), \hat{\Lambda}_l(v), \mathbf{q}\}} \right) dN_i(v). \quad (5.3.4)$$

Αν τα k_i είναι μικρά, τότε οι εκτιμητές Nelson-Aalen δεν μπορούν να είναι αρκετά ακριβείς και οι συναρτήσεις $\Lambda_i(t)$ θα πρέπει να αντικατασταθούν από κάποιον άλλο εκτιμητή ο οποίος θα είναι συνάρτηση όλων των δεδομένων.

Το μοντέλο (5.3.1) υποδηλώνει ότι

$$d\Lambda_i(t) = u\{x_i(t), \Lambda_i(t), \mathbf{q}\} \cdot d\Lambda_0(t).$$

Για την εκτίμηση των συναρτήσεων $\Lambda_0(t)$ θα χρησιμοποιηθούν οι ψευδοεκτιμητές $\mathbb{K}_0(t, \mathbf{q})$ (εξαρτώμενοι από το θ). Αυτοί δίνονται από τη σχέση

$$\mathbb{K}_0(t, \mathbf{q}) = \int_0^t \frac{dN(v)}{\sum_{i=1}^m u\{x_i(v), \mathbb{K}_i(v-; \mathbf{q}), \mathbf{q}\} Y_i(v)}.$$

Οι τελευταίες δυο ισότητες σχηματίζουν έναν αλγόριθμο βημάτων για την εύρεση του ψευδοεκτιμητή $\mathbb{K}_i(t, \mathbf{q})$ της $\Lambda_i(t)$:

$$\mathbb{K}_i(t, \mathbf{q}) = \int_0^t \frac{u\{x_i(v), \mathbb{K}_i(v-; \mathbf{q}), \mathbf{q}\} dN(v)}{\sum_{l=1}^m u\{x_l(v), \mathbb{K}_l(v-; \mathbf{q}), \mathbf{q}\} Y_l(v)}, \quad \mathbb{K}_i(0, \mathbf{q}) = 0. \quad (5.3.5)$$

Τροποποιώντας τη συνάρτηση score (5.3.4) σύμφωνα με τους ψευδοεκτιμητές $\mathbb{K}_i(t, \mathbf{q})$ λαμβάνουμε τη νέα μορφή της που έχει ως εξής

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \int_0^t \left(\frac{g\{x_i(v), \hat{\Lambda}_i(v, \mathbf{q}), \mathbf{q}\}}{u\{x_i(v), \hat{\Lambda}_i(v, \mathbf{q}), \mathbf{q}\}} - \frac{\sum_{l=1}^m Y_l(v) g\{x_l(v), \hat{\Lambda}_l(v, \mathbf{q}), \mathbf{q}\}}{\sum_{l=1}^m Y_l(v) u\{x_l(v), \hat{\Lambda}_l(v, \mathbf{q}), \mathbf{q}\}} \right) dN_i(v). \quad (5.3.6)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι, για να βρούμε τον αρχικό εκτιμητή $\hat{\mathbf{q}}^{(0)}$ επαληθεύοντας τις ισότητες (5.3.6), χρειαζόμαστε τους αρχικούς εκτιμητές $\mathbb{K}_i^{(0)}(t, \mathbf{q})$ και αντίστροφα: για να βρούμε τους αρχικούς εκτιμητές $\mathbb{K}_i^{(0)}(t, \mathbf{q})$ χρειαζόμαστε τον αρχικό εκτιμητή $\hat{\mathbf{q}}^{(0)}$. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν πάρουμε ως αρχικό εκτιμητή $\hat{\mathbf{q}}^{(0)}$ τη λύση της ισότητας $U(\mathbf{q}) = 0$, όπου η συνάρτηση $U(\mathbf{q})$ ορίζεται από τη σχέση (5.3.4). Τότε οι αρχικοί εκτιμητές $\mathbb{K}_i^{(0)}(t, \mathbf{q}^{(0)})$ προκύπτουν επαναληπτικά από τη σχέση (5.3.5). Ο εκτιμητής $\hat{\mathbf{q}}^{(1)}$ προκύπτει από τη λύση των εξισώσεων $\mathcal{U}(\mathbf{q}) = 0$, όπου η $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ δίνεται από τη σχέση (5.3.6) αν στη θέση του

$\mathbb{K}_i(t, \mathbf{q})$ βάλουμε το $\mathbb{K}_i^{(0)}(t, \mathbf{q}^{(0)})$. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και στη συνέχεια. Δοθέντος του εκτιμητή $\hat{\mathbf{q}}^{(l)}$, ο εκτιμητής $\mathbb{K}_i^{(l)}(t, \mathbf{q}^{(l)})$ είναι δεξιά συνεχής και κλιμακωτή συνάρτηση με άλματα στους παρατηρούμενους χρόνους αποτυχίας (οι οποίοι είναι σημεία αλμάτων και για την $N(t)$).

Ο εκτιμητής της συνάρτησης επιβίωσης $S_{x_0}(t)$, $t \leq t$ κάτω από φυσιολογική πίεση είναι $S_{x_0}(t) = \exp\{-\hat{\Lambda}_{x_0}(t)\}$, όπου $\hat{\Lambda}_{x_0}(t)$ λαμβάνεται επαναληπτικά από την ισότητα

$$\hat{\Lambda}_{x_0}(t) = \int_0^t \frac{u\{x_0, \mathbb{K}_{x_0}(v-), \mathbf{q}\} dN(v)}{\sum_{l=1}^m u\{x_0, \mathbb{K}_l(v-), \mathbf{q}\} Y_l(v)}, \quad \hat{\Lambda}_{x_0}(0) = 0.$$

5.4 Εκτίμηση του γενικευμένου πολλαπλασιαστικού μοντέλου (GM model)

Για την εκτίμηση του μοντέλου GM θα χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο του τροποποιημένο GM. Όπως είδαμε στην περίπτωση της εκθετικής resource το τροποποιημένο GM λαμβάνει τη μορφή του GPH1.

Η εκτίμηση του μοντέλου θα γίνει με μη παραμετρικό τρόπο (Bagdonavicius, V. και Nikulin, M. (1999c)), συνεπώς η μεθοδολογία που αναπτύσσεται εδώ είναι κατάλληλη όταν δεν μας παρέχεται καμία ένδειξη για την κατανομή του χρόνου ζωής των πειραματικών μονάδων. Η μέθοδος θα στηριχθεί στην ειδική περίπτωση του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου αναλογικού κινδύνου GLPH (4.6.2), όταν δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις :

$$r\{x(t)\} = e^{b^T x(t)}, \quad q\{\Lambda_{x(\cdot)}(t)\} = e^{g\Lambda_x(t)}.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς :

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \Lambda_{x(\cdot)}(t) \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Τότε το μοντέλο GLPH μπορεί να γραφτεί και ως εξής :

$$a_{x(\cdot)}(t) = e^{q^T z(t)} a_0(t).$$

Υποθέτουμε ότι παρατηρούμε n πειραματικές μονάδες και έστω $x_i(\cdot)$ το διάνυσμα συμμεταβλητών – πιέσεων που αφορά την i -οστή μονάδα. Δηλώνουμε με T_i και C_i τους πλήρεις και λογοκριμένους χρόνους ζωής αντίστοιχα της i μονάδας και έστω

$$X_i = \min\{T_i, C_i\}, \quad d_i = I_{\{T_i \leq C_i\}}, \quad N_i(t) = I_{\{T_i \leq t, d_i=1\}}, \quad Y_i(t) = I_{\{X_i \geq t\}},$$

όπου I_A αποτελεί τη δείκτρια του γεγονότος A . Τότε οι ποσότητες

$$N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \quad \text{και} \quad Y(t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t),$$

αποτελούν τον αριθμό των παρατηρούμενων αποτυχιών (πλήρων χρόνων ζωής) στο διάστημα $[0, t]$ και τις μονάδες που βρίσκονται σε κίνδυνο τη χρονική στιγμή t , αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t \in (0, \infty)$ όλες οι μονάδες που δεν απέτυχαν και δε λογοκρίθηκαν για διάφορους λόγους πριν τη στιγμή t , λογοκρίνονται.

Έστω $T_{(1)} < \dots < T_{(r)}$ οι παρατηρούμενοι διατεταγμένοι πλήρεις χρόνοι ζωής, όπου $r \leq n$ και έστω

$$R_{(j)} = \{i : X_i \geq T_{(j)}\},$$

το σύνολο των μονάδων σε κίνδυνο τη χρονική στιγμή $T_{(j)}$. Τότε σύμφωνα με το μοντέλο (4.6.2) η συνάρτηση μερικής πιθανοφάνειας (βλέπε Cox 1972) θα είναι

$$L(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^r \frac{e^{b^T x_{(j)}(T_{(j)}) + g \Lambda_{(j)}(T_{(j)})}}{\sum_{l \in R_{(j)}} e^{b^T x_l(T_{(j)}) + g \Lambda_{(l)}(T_{(j)})}}, \quad (5.4.1)$$

η οποία δεν εξαρτάται από την άγνωστη αναφορική συνάρτηση κινδύνου $I_0(t)$. Ωστόσο οι συναρτήσεις

$$\Lambda_{(l)}(t) = -\frac{1}{g} \left\{ 1 - g e^{b^T x_l(t)} \Lambda_0(t) \right\},$$

είναι άγνωστες και οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας θα εξαρτώνται από την αναφορική συνάρτηση κατανομής Λ_0 . Για το λόγο αυτό θεωρούμε την τροποποιημένη συνάρτηση μερικής πιθανοφάνειας

$$\mathbb{L}(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^r \frac{e^{b^T x_{(j)}(T_{(j)}) + g \mathbb{K}_0(T_{(j)}; \mathbf{q})}}{\sum_{l \in R_{(j)}} e^{b^T x_l(T_{(j)}) + g \mathbb{K}_0(T_{(j)}; \mathbf{q})}},$$

όπου

$$e^{g \mathbb{K}_0(u; \mathbf{q})} = \left\{ 1 - g \int_0^u e^{b^T x_i(v)} d\mathbb{K}_0(v; \mathbf{q}) \right\}^{-1}$$

και η $\mathbb{K}_0(u; \mathbf{q})$ λαμβάνεται αναδρομικά από τη σχέση

$$\mathbb{K}_0(t; \mathbf{q}) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{Y_i(u) e^{b^T x_i(u)}}{1 - g \int_0^{u-} e^{b^T x_i(v)} d\mathbb{K}_0(v; \mathbf{q})} \right) dN(u). \quad (5.4.2)$$

Ο εκτιμητής $\mathbb{K}_0(t; \mathbf{q})$ της συνάρτησης Λ_0 δόθηκε από την ανάλυση των Doob-Mejer σύμφωνα με την οποία

$$dN(t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{b^T x_i(t)} Y_i(t)}{1 - g \int_0^t e^{b^T x_i(v)} d\Lambda_0(v)} d\Lambda_0(t) + dM(t).$$

Για σταθερό θ ο εκτιμητής $\mathbb{K}_0(t; \mathbf{q})$ υπολογίζεται ακολουθώντας το παρακάτω σχήμα:

$$\mathbb{K}_0(0; \mathbf{q}) = 0, \quad \mathbb{K}_0(T_{(1)}; \mathbf{q}) = \left(\sum_{i=1}^n Y_i(T_{(1)}) e^{b^T x_i(T_{(1)})} \right)^{-1},$$

$$\mathbb{K}_0(T_{(j+1)}; \mathbf{q}) = \mathbb{K}_0(T_{(j)}; \mathbf{q}) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{Y_i(T_{(j+1)}) e^{b^T x_i(T_{(j+1)})}}{1 - g \sum_{l=1}^j e^{b^T x_i(T_{(l)})} \Delta \mathbb{K}_0(T_{(l)}; \mathbf{q})} \right)^{-1},$$

για $j = 1, \dots, r-1$ με

$$T_{(0)} = 0, \quad \Delta \mathbb{K}_0(T_{(l)}; \mathbf{q}) = \mathbb{K}_0(T_{(l)}; \mathbf{q}) - \mathbb{K}_0(T_{(l-1)}; \mathbf{q}).$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω εκτιμητές θα γίνει ο υπολογισμός της παραγώγου της συνάρτησης μερικής πιθανοφάνειας, δηλαδή της συνάρτησης score, από όπου και θα

προκύψουν οι εκτιμητές του παραμετρικού διανύσματος θ . Η συνάρτηση score μπορεί να υπολογιστεί με δυο τρόπους:

α' τρόπος

Θεωρούμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$\mathfrak{z}_j(u; \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_j(u) \\ \Lambda_j(u; \mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}^{(0)}(u; \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n Y_j(u) e^{q^T \mathfrak{z}_j(u; \mathbf{q})}, \quad (5.4.3)$$

$$\mathfrak{B}(u; \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathfrak{L}_j(u; \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_j(u; \mathbf{q})}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial \mathfrak{L}_j(u; \mathbf{q})}{\partial b_k}, \frac{\partial \mathfrak{L}_j(u; \mathbf{q})}{\partial \mathbf{g}} \right)^T, \quad (5.4.4)$$

$$\mathfrak{w}_j(u; \mathbf{q}) = \mathfrak{z}_j(u; \mathbf{q}) + \mathbf{g} \mathfrak{B}_j(u; \mathbf{q}), \quad (5.4.5)$$

$$\mathfrak{S}^{(1)}(u; \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{w}_j(u; \mathbf{q}) Y_j(u) e^{q^T \mathfrak{z}_j(u; \mathbf{q})}, \quad \mathfrak{E}(u; \mathbf{q}) = \frac{\mathfrak{S}^{(1)}(u; \mathbf{q})}{\mathfrak{S}^{(0)}(u; \mathbf{q})}.$$

Τότε η τροποποιημένη μερική συνάρτηση score δίνεται από τη σχέση :

$$\mathfrak{U}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \log \mathfrak{L}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \{ \mathfrak{w}_j(u; \mathbf{q}) - \mathfrak{E}(u; \mathbf{q}) \} dN_j(u). \quad (5.4.6)$$

β' τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε μια απλουστευμένη μέθοδο εκτίμησης υποθέτοντας αρχικά ότι η $\Lambda_j(u)$ αποτελεί την $(k+1)$ -οστή γνωστή συμμεταβλητή και μεγιστοποιώντας τη μερική συνάρτηση πιθανοφάνειας (5.4.1) ως προς β και γ .

Η αποκτούμενη μερική συνάρτηση score είναι

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \{ z_j(u; \mathbf{q}) - E^{(1)}(u; \mathbf{q}) \} dN_j(u),$$

όπου

$$z_j(u; \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_j(u) \\ \Lambda_j(u; \mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad E^{(1)}(u; \mathbf{q}) = \frac{S^{(1)}(u; \mathbf{q})}{S^{(0)}(u; \mathbf{q})}$$

$$S^{(1)}(u; \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n z_j(u; \mathbf{q}) Y_j(u) e^{q^T z_j(u; \mathbf{q})}, \quad S^{(0)}(u; \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n Y_j(u) e^{q^T z_j(u; \mathbf{q})}.$$

Στη συνέχεια οι συναρτήσεις Λ_i αντικαθιστώνται από τους εκτιμητές $\hat{\Lambda}_i(u; \mathbf{q})$. Η τροποποιημένη μερική συνάρτηση του score είναι η παρακάτω

$$U_1^{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \{ \mathcal{Z}_j(u; \mathbf{q}) - E^{\mathbf{q}}(\mathcal{Z}_j(u; \mathbf{q})) \} dN_i(u).$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τις παραγώγους $\dot{\mathcal{Z}}_j(u; \mathbf{q})$.

Συμβολίζουμε με $\hat{\theta}$ το εκτιμώμενο διάνυσμα

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Αυτοί οι εκτιμητές τροποποιημένης μερικής πιθανοφάνειας προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες

$$U^{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = 0, \quad \text{ή} \quad U_1^{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = 0.$$

Η συνάρτηση επιβίωσης κάτω από κάθε διάνυσμα πίεσης $x(\cdot) \in E$ εκτιμάται από τη σχέση

$$\hat{S}_{x(\cdot)}(t) = \begin{cases} \left\{ 1 - \hat{g} \int_0^t e^{\hat{b}^T x(u)} d\hat{\Lambda}_0(u) \right\}^{\frac{1}{\hat{g}}}, & \text{if } \hat{g} \neq 0 \\ \exp \left\{ - \int_0^t e^{\hat{b}^T x(u)} d\hat{\Lambda}_0(u) \right\}, & \text{if } \hat{g} = 0 \end{cases},$$

όπου

$$\hat{\Lambda}_0(u) = \hat{\mathcal{Z}}_0(u; \hat{\mathbf{q}}) = \int_0^u \frac{dN(v)}{\hat{\mathcal{S}}^{(0)}(v; \hat{\mathbf{q}})}.$$

Ακολουθώντας τα επόμενα τρία βήματα μπορούμε να αποκτήσουμε έναν αρχικό εκτιμητή για την παράμετρο θ . Αρχικά διαιρούμε τα δεδομένα σε αρκετές ομάδες όπου η κάθε ομάδα έχει τις ίδιες τιμές στις μεταβλητές σε κάθε χρονική στιγμή. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις $\Lambda_{(j)}$ στη σχέση (5.4.1) με τις εκτιμήτριες Nelson – Aalen που λαμβάνουμε από τις αντίστοιχες ομάδες. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας που θα προκύψει δεν εξαρτάται από την Λ_0 . Το τρίτο βήμα της διαδικασίας είναι να μεγιστοποιήσουμε αυτή τη συνάρτηση ώστε να αποκτήσουμε τον αρχικό εκτιμητή.

Παραρτήματα

Π 1. Λογοκριμένα δεδομένα

Σε ένα τυχαίο δείγμα χρόνων ζωής T_1, \mathbf{K}, T_n έχουμε συχνά εμφάνιση **λογοκριμένων δεδομένων**. Μια παρατήρηση καλείται "λογοκριμένη" αν η πληροφορία που μας παρέχει για το χρόνο ζωής ενός αντικειμένου δεν είναι πλήρης, όταν δηλαδή δεν γνωρίζουμε τον ακριβή χρόνο μέχρι την αποτυχία του. Αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι ο χρόνος ζωής της μονάδας είναι είτε μεγαλύτερος από κάποιο χρόνο U , οπότε έχουμε εμφάνιση λογοκρισίας από δεξιά, είτε μικρότερος ή ίσος από κάποιο χρόνο U οπότε και έχουμε εμφάνιση λογοκρισίας από αριστερά.

Τόσο η ανάλυση επιβίωσης όσο και η θεωρία αξιοπιστίας ασχολούνται κυρίως με λογοκριμένα δεδομένα από δεξιά καθώς είναι τα πιο συνηθισμένα στην πράξη. Η λογοκρισία από δεξιά διακρίνεται σε δυο διαφορετικούς τύπους που είναι οι εξής:

- **Λογοκρισία τύπου I (type I censoring)**

Αυτός ο τύπος λογοκρισίας εμφανίζεται σε έρευνες με προκαθορισμένο χρόνο u . Ο ερευνητής καταγράφει τους χρόνους ζωής των μονάδων που απέτυχαν κατά τη διάρκεια της έρευνας (πλήρεις χρόνοι ζωής) ενώ για τις υπόλοιπες μονάδες που δεν απέτυχαν κατά τη διάρκεια της έρευνας γνωρίζει μόνο ότι οι χρόνοι ζωής τους είναι μεγαλύτεροι του χρόνου u (λογοκριμένοι χρόνοι ζωής). Ο χρόνος u καλείται χρόνος λογοκρισίας. Για να δούμε πως περιγράφονται τα δεδομένα που προκύπτουν από μια τέτοια διαδικασία ας θεωρήσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1, \mathbf{K}, X_n αποτελούν τους χρόνους ζωής των n μονάδων από τη χρονική στιγμή αρχής της έρευνας. Ο ακριβής χρόνος ζωής X_i της i μονάδας παρατηρείται αν και μόνο αν $X_i \leq u$. Άρα η i μονάδα μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά με ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών της μορφής (T_i, Δ_i) , $i = 1, \dots, n$, όπου

$$T_i = \min(X_i, u) \quad \text{και} \quad \Delta_i = \begin{cases} 1, & X_i \leq u \\ 0, & X_i > u \end{cases}.$$

Συνεπώς, η τιμή της ποσότητας Δ_i (τυχαία μεταβλητή) δηλώνει αν ο χρόνος ζωής του I ατόμου είναι λογοκριμένος ($\Delta_i = 0$) ή πλήρης ($\Delta_i = 1$).

- **Λογοκρισία τύπου II (type I censoring)**

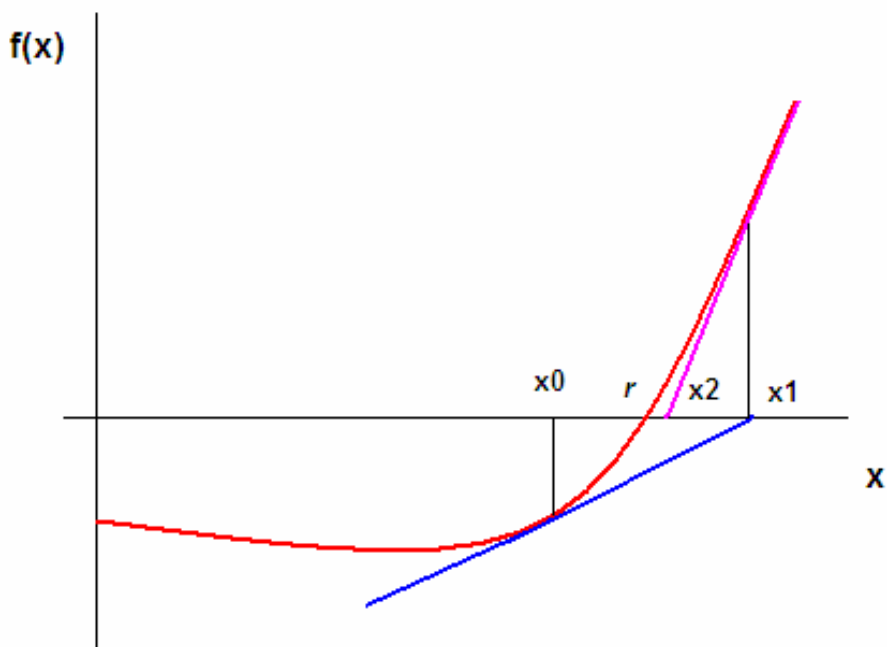
Η λογοκρισία τύπου II εμφανίζεται σε έρευνες κατά τις οποίες έχει καθοριστεί από την αρχή ότι τη χρονική στιγμή που θα αποτύχουν συνολικά r μονάδες ($r < n$) θα τερματιστούν. Επομένως τα δεδομένα μας αποτελούνται από τους πλήρη χρόνους ζωής των πρώτων r ατόμων που απέτυχαν (διατεταγμένοι χρόνοι ζωής), ενώ για τα υπόλοιπα $n - r$ άτομα γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ζωής τους είναι μεγαλύτερος από το μέγιστο χρόνο ζωής των r ατόμων που απέτυχαν. Συνεπώς τα δεδομένα που προκύπτουν από μια τέτοια διαδικασία μπορούν να περιγραφούν με ζευγάρια της μορφής $(T_{(i)}, \Delta_i)$, $i = 1, \dots, n$, όπου

$$T_{(i)} = \begin{cases} X_{(i)}, & 1 \leq i \leq r \\ X_{(r)}, & r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad \text{και} \quad \Delta_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Π 2. Μέθοδος Newton ή Newton – Raphson

Η μέθοδος Newton – Raphson χρησιμοποιεί μια επαναληπτική διαδικασία για την προσέγγιση της ρίζας μιας συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή τη λύση της $f(x) = 0$. Η ακριβής ρίζα r που προσδιορίζεται από τη διαδικασία εξαρτάται από την αρχική, αυθαίρετα επιλεγμένη τιμή που της αποδόσαμε. Ας καλέσουμε αυτή την αρχική εκτίμηση x_0 . Στη συνέχεια φέρουμε την εφαπτομένη στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Έπειτα υπολογίζουμε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των τεταγμένων. Το σημείο αυτό, έστω x_1 , αποτελεί την επόμενη εκτίμηση για τη ρίζα r . Η παραπάνω διαδικασία απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί

Σχήμα 12 : Γραφική εξήγηση της μεθόδου Newton – Raphson



Η εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 είναι

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

όπου

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{και} \quad m = f'(x_0).$$

Συνεπώς,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (\text{Π2.1})$$

Η εφαπτομένη τέμνεται με τον άξονα των x όταν $y = 0$ και αυτή η τιμή του x μας δίνει την επόμενη εκτίμηση της ρίζας r . Άρα,

$$x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (\text{Π2.2})$$

Χρησιμοποιώντας την (Π2.2) λαμβάνουμε την x_1 . Αν στη σχέση (Π2.2) τοποθετίσουμε την x_1 στη θέση του x_0 , τότε παράγεται η x_2 η οποία αποτελεί καλύτερη εκτίμηση της ρίζας r από τη x_1 καθώς την προσεγγίζει περισσότερο.

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παράγεται μια ακολουθία *προσεγγίσεων*

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

που πιθανότατα συγκλίνουν στη ρίζα r . Για αυτό το λόγο,

$$x_n \rightarrow r \quad \text{όσο το } n \rightarrow \infty.$$

Γνωρίζοντας το x_n μπορούμε να παράγουμε το x_{n+1} χρησιμοποιώντας την (Π2.2) ή συγκεκριμένα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Η παραπάνω διαδικασία αποτελεί τη μέθοδο Newton – Raphson για την εύρεση της ρίζας μιας συνάρτησης f . Είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος που χρησιμοποιείται στην πράξη για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, καθώς έχει ταχεία σύγκλιση.

Π 3. Διαγράμματα πιθανότητας

Όπως υποδηλώνει ο όρος, τα διαγράμματα πιθανότητας περιλαμβάνουν μια φυσική αναπαράσταση των δεδομένων σε ένα ειδικά κατασκευασμένο διάγραμμα. Η μέθοδος που ακολουθείται σε αυτού του είδους τα διαγράμματα λαμβάνει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής και προσπαθεί μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού να καταλήξει σε μια γραμμική σχέση που θα απλοποιεί την αναπαράσταση των δεδομένων.

Για την κατανόηση της μεθόδου ας θεωρήσουμε ότι οι χρόνοι ζωής των δεδομένων που διαθέτουμε ακολουθούν την κατανομή Weibull κάτω από φυσιολογικές συνθήκες πίεσης. Τότε η α.σ.κ. της Weibull δίνεται από τη σχέση:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{h}\right)^b}.$$

Αυτή η συνάρτηση μπορεί τότε να μετατραπεί σε γραμμική, δηλαδή της μορφής $y = a + bx$, ως ακολούθως,

$$F_T(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{h}\right)^b}$$

$$\ln(1 - F_T(t)) = \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{h}\right)^b}\right)$$

$$\ln(1 - F_T(t)) = -\left(\frac{t}{h}\right)^b$$

$$\ln[-\ln(1 - F_T(t))] = b \ln\left(\frac{t}{h}\right)$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F_T(t)}\right)\right) = b \ln(t) - b \ln(h)$$

Τότε θέτοντας,

$$y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F_T(t)}\right)\right)$$

και

$$x = \ln(t)$$

η ισότητα μπορεί να γραφεί και ως εξής,

$$y = bx - b \ln(h),$$

η οποία είναι μια γραμμική εξίσωση με κλίση β και σταθερό όρο $b \ln(h)$.

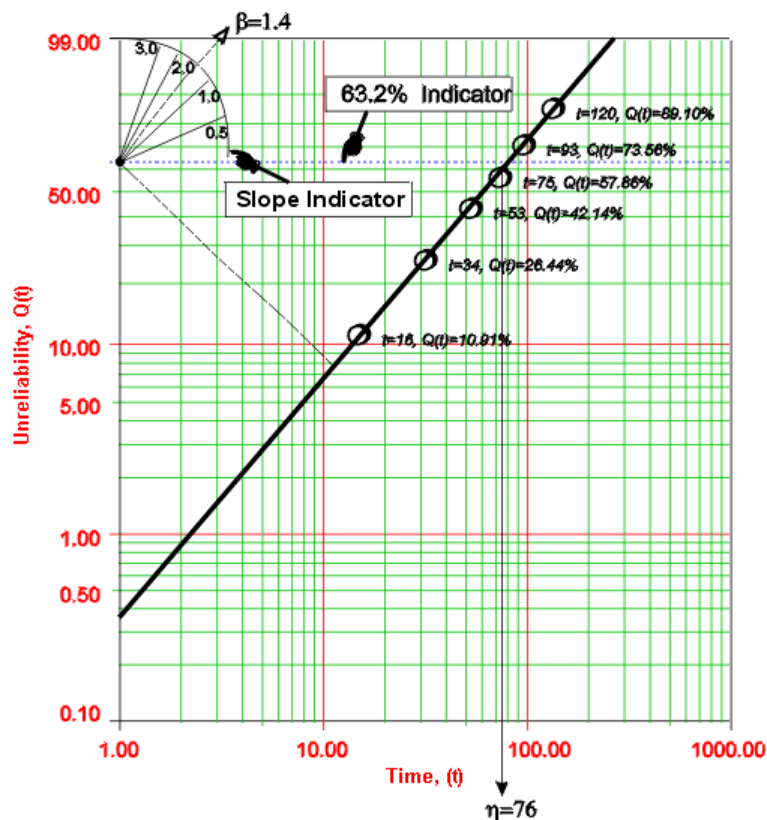
Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή ενός διαγράμματος με τον κατάλληλο y και x -άξονα. Όσον αφορά τον x -άξονα τα πράγματα είναι εύκολα καθώς πρόκειται για μια απλή λογαριθμοποίηση. Ο y -άξονας, ωστόσο, πρέπει να αντιπροσωπεύει τη,

$$y = \ln \left(\ln \left(\frac{1}{1 - F_T(t)} \right) \right),$$

όπου $F_T(t)$ αποτελεί την α.σ.κ. ή αναξιόπιστία (*unreliability*) όπως αναφέρεται από πολλούς συγγραφείς. Ο παραπάνω μετασχηματισμός της α.σ.κ. καλείται συχνά και διπλά λογαριθμημένη αντίστροφη κλίμακα (*double log reciprocal scale*). Τέτοιου είδους διαγράμματα δημιουργήθηκαν από διάφορους ερευνητές ποιοτικού ελέγχου για την απλούστερη αναπαράσταση των αποτελεσμάτων στους εργοδότες τους και ονομάζονται διαγράμματα πιθανότητας.

Για την γραφική επεξήγηση, ας θεωρήσουμε ένα διάγραμμα πιθανότητας σε ένα φύλλο πιθανότητας Weibull όπως δίνεται από το υπολογιστικό πακέτο Weibull++.

Σχήμα 13. Γραφική επεξήγηση της διπλά λογαριθμημένης αντίστροφης κλίμακας



Αυτό το διάγραμμα κατασκευάστηκε βάση στους μετασχηματισμούς y - και x - όταν ο y - άξονας αντιπροσωπεύει την αναξιопιστία και ο x - άξονας αντιπροσωπεύει το χρόνο. Αυτές οι δύο τιμές πρέπει να είναι γνωστές για κάθε χρονικό σημείο αποτυχίας που επιθυμούμε να αναπαραστήσουμε γραφικά. Επίσης λόγω αυτής της αντιστοίχισης παρατηρούμε ότι οι σχηματιζόμενες κλίμακες στους δύο άξονες είναι ασύμετρες.

Τότε, δοθέντος των τιμών των y και x σε κάθε σημείο, αυτά μπορούν εύκολα να εισέλθουν στο διάγραμμα. Μόλις τα σημεία τοποθετηθούν στο γράφημα, σχηματίζεται η καλύτερη δυνατή γραμμή που διέρχεται από αυτά. Μετά τον σχηματισμό της ευθείας μπορούμε να προσδιορίσουμε και την κλίση της και κατά συνέπεια να αποκτήσουμε και μια εκτίμηση της παραμέτρου β . Για την εκτίμηση της παραμέτρου η αρκεί να βρούμε το 63,2 % κάτω ποσοστμόριο της κατανομής στον y -άξονα και κατόπιν το σημείο τομής του με την προσαρμοσμένη ευθεία. Το χρονικό σημείο που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σημείο τομής μας δίνει την παράμετρο κλίμακας η .

Στην περίπτωση όπου εφαρμόζουμε στις πειραματικές μονάδες αυξανόμενη πίεση τότε το διάγραμμα πιθανότητας αποτελείται από παράλληλες ευθείες, που καθεμία αντιπροσωπεύει κάποιο επίπεδο πίεσης, καθώς η παράμετρος κλίσης β παραμένει σταθερή.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία ασχολείται με το θέμα των Επιταχυνομένων Ελέγχων Χρόνων Ζωής (*Accelerated Life Testing* ή ALT). Δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί για την εισαγωγή στην έννοια των ALT καθώς και περιπτώσεις στις οποίες γίνεται εφαρμογή της μεθόδου. Κατόπιν γίνεται μια γενική αναφορά στον τρόπο διεξαγωγής πειραμάτων που αφορούν τους ALT όπως επίσης και στην εξαγωγή συμπερασμάτων από δεδομένα που προέρχονται από σχεδιασμούς ALT. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα επικρατέστερα και σημαντικότερα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι ALT όπως και τα υπομοντέλα τους και οι περιοχές εφαρμογής τους. Τα παραπάνω μοντέλα ανάλογα με τη δομή τους εκτιμώνται χρησιμοποιώντας μεθόδους τόσο από τον χώρο της παραμετρικής όσο και της μη παραμετρικής στατιστικής.

Abstract

This MSc thesis studies the subject of accelerated life testing (ALT). The basic definitions are given in order to clarify the main concept of ALT and cases in which the method can be applied. Next a review is presented of the techniques used in establishing an ALT as well as inference issues pertaining to ALT designs. Afterwards the prevalent and most important models used in ALT are presented along with their submodels and their areas of application. Those models are, depending on their structure, studied using methods either from the parametric or the non parametric statistics.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ. (2002). Ανάλυση Επιβίωσης, Σημειώσεις παραδόσεων στο ΠΜΣ "Εφαρμοσμένη Στατιστική", Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Κούτρας, Μ. (2003). Στατιστική θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής, Σημειώσεις παραδόσεων στο ΠΜΣ "Εφαρμοσμένη Στατιστική", Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ξένη

Andersen, P. K., Borgan, O., Gill, R. D. and Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Process*, New York: Springer-Verlag.

Bagdonavicius, V. (1978). Testing the hypothesis of the additive accumulation of damages, *Probability Theory and its Applications*, **23**, 403-408.

Bagdonavicius, V. (1990). Accelerated life models when the stress is not constant, *Kybernetika*, **26**, 289-295.

Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1994). Stochastic models of accelerated life, *Selected Topics on Stochastic Modeling*, World Scientists, Singapore, 73-87.

Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1995). Semiparametric models in accelerated life testing, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, **98**, 70.

Bagdonavicius, V., Malov, S. and Nikulin, M. (1998). On characterizations and semiparametric regression estimation in Archimedean copula, *Journal of Applied Statistical Science* (to appear)

Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999). Models building in accelerated experiments, *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, Boston: Birkhauser, 51-73.

- Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1999c). Generalized Proportional Hazards Model Based on Modified Partial Likelihood, *Lifetime Data Analysis*, **5**, 329-350.
- Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. (2000). Semiparametric estimation in accelerated life testing, In: *Recent Advances in Reliability Theory. Methodology, Practice and Inference* (Eds. N. Limnios and M. Nikulin) , , Birkhauser , Boston, p. 405-418.
- Basu, A. P. and Ebrahemi, N. (1982). Nonparametric Accelerated Life Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **31(1)**, 432-435.
- Chernoff, H. (1962). Optimal Accelerated Life Designs for Estimation, *Technometrics*, **V.4**, 381- 408.
- Cox, D. R. (1972). Regression models and life tables, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **34**, 187-220.
- Cox, D. R. and Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*, London: Chapman and Hall.
- Doksum, K. (1967). Asymptotically optimal statistics in some models with increasing failure rate in average, *Annals of Statistics*, 297.
- Gill, E. (1980). *Censoring and Statistics Integrals*, Mathematical Center Tract 124. Amsterdam: Mathematische Centrum.
- Gouno, E. (2001). An inference method for temperature step-stress accelerated life testing, *Quality and Reliability Engineering International*, **17**, 11-18.
- Jayawardhana, A, A. and Samaranyake, V. A. (2003). Prediction Bounds in Accelerated Life Testing: Weibull Models with Inverse Power Relationship, *Journal of Quality Technology*, **35**, 89-103.
- Khamis, I. H. (1997). Optimum m-step, step-stress design with k stress variables, *Communications in Statistics-Simulation*, **26(4)**, 1301-1313.
- Levenbach, G.J. (1957). Accelerated Life Testing of Capacitors, *IRE Transactions*, **V.10**, 9-20.
- Lin, Z. and Fei, H. (1991). A nonparametric approach to progressive stress accelerated life testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 173-176.
- Lin, D. Y. and Ying, Z. (1995). Semiparametric inference for the accelerated life model with time dependent covariates, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **44**, 47-63.
- Mettas, A. (2000). Modeling and Analysis for Multiple Stress-Type Accelerated Life Data, *Reliasoft Publishing*, 2000.
- Nelson, W. B. (1972). Graphical analysis of accelerated life test data with inverse power law model, *IEEE Transactions on Reliability*, **21**, 2-11.

- Nelson, W.B. και Meeker, W.Q. (1978). Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions, *Technometrics*, **V.20**, 171-177
- Nelson, W. B. (1980). Accelerated life testing step-stress models and data analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**, 103-108.
- Nelson, W. B. (1982). Applied Life Data Analysis, John Wiley, New York.
- Nelson, W. B. (1990). *Accelerated Testing, Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*, John Wiley, New York.
- Prooschan, F. and Singpurwalla, N.D. (1980). A new approach to inference from accelerated life tests, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**, 98-102.
- Robins, J. and Tsiatis, A. (1992). Semiparametric estimation of an accelerated failure time model with time-dependent covariates, *Biometrika*, **79**, 311-319.
- Schoenfeld, D. (1981). The asymptotic properties of nonparametric tests for comparing survival distributions, *Biometrika*, **68**, 316-319.
- Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, New York: Wiley.
- Shaked, M. and Singpurwalla, N. D. (1982). Nonparametric Estimation and Goodness-of-Fit Testing of Hypothesis for Distributions in Accelerated Life Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **31(1)**, 69-74.
- Shaked, M., Singpurwalla, N.D. (1983). Inference for step-stress accelerated life tests, *Journal of Statistics*, **V.7**, 295-306.
- Tsiatis, A. (1990). Estimating regression parameters using linear rank tests for censored data, *Annals of Statistics*, **18**, 354-372.
- Viertl, R. (1988). *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*, Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Viertl, R. and Spencer, F. (1991). Statistical methods in accelerated life testing, *Technometrics*, **33**, 360-362.
- Vaupel, J.W., Manton, K.G. and Stallard, E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality, *Demography*, **16**, 439-454.

Διαδικτυακοί τόποι

- <http://www.weibull.com>
- <http://www.reliasoft.com>
- <http://www.halt-hass.co.uk>
- <http://www.copycat.net/alt.html>
- <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>

