

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Δείκτες Ικανότητας Μιας Διεργασίας

Δήμητρα Ν. Μπράμη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2004

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΔΕΙΚΤΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ
ΜΙΑΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Δήμητρα Ν. Μπράμη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Ιούνιος 2004

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 1^η – 7/10/2003 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος, Επίκουρος Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Κούτρας Μάρκος, Καθηγητής
- Καφφές Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**PROCESS CAPABILITY
INDICES**

By

Dimitra N. Brami

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science
of the University of Piraeus in partial fulfilment of the
requirements for the degree of Master of Science in Applied
Statistics

Piraeus, Greece
June 2004

*Στους γονείς μου
Νικόλαο και Μαρία*

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Αντζουλάκο, για τις οδηγίες και τα χρήσιμα σχόλια του κατά την διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση στην ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου.

Περίληψη

Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας θεωρούνται ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ποιοτικού Ελέγχου. Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας αποτελούν μέτρα που περιγράφουν την ικανότητα μιας διεργασίας να παράγει εντός των τεθέντων προδιαγραφών προϊόντα.

Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας χρησιμοποιούνται ευρέως σε όλο τον κόσμο και δίνουν μια άμεση ένδειξη της ικανότητας της διεργασίας με ένα τρόπο που είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί και να κατανοηθεί. Η χρήση και η ανάπτυξη των δεικτών ικανότητας ως ενός τρόπου έκφρασης της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων αναμένεται να επεκταθεί. Αυτό οφείλεται στην αυξημένη απαίτηση των πελατών για συνεχή βελτίωση και τεκμηριωμένη ποιότητα των προϊόντων.

Οι πρώτοι δείκτες ικανότητας που προτάθηκαν παρουσίαζαν αρκετές αδυναμίες και έτσι στη βιβλιογραφία προτείνονται συνεχώς νέοι βελτιωμένοι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας.

Σκοπός της διπλωματικής είναι η καταγραφή αυτών των δεικτών, η παρουσίαση των ιδιοτήτων τους και η σύγκριση τους.

Abstract

The Process Capability Indices are considered as one of the most useful tools in the Statistical Process Control. The Process Capability Indices constitute measures that describe the capability of a process to produce conforming products.

The Process Capability Indices are broadly used all over the world and give a direct indication of the capability of the process in a way that is easy to be used and to be comprehended. The use and the growth of the capability indices as a tool of quality measure of produced products is expected to be extended. This is due to the increasing demand of clients for continuous improvement and argued quality of products.

The first Capability Indices that were proposed, owned a lot of weaknesses. For this reason in the bibliography, new improved Process Capability Indices are suggested at a constant rate.

The goal of this thesis is the registration of these indices, the presentation of their attributes and their comparison.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	x
Κατάλογος Σχημάτων	xii
1. Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά	1
1.2 Διαγράμματα ελέγχου	3
1.3 Ικανότητα μιας διεργασίας	8
1.4 Χρήση ή μη των δεικτών ικανότητας μιας διεργασίας	10
2. Ο δείκτης ικανότητας C_p	11
2.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_p	11
2.2 Εκτίμηση του δείκτη C_p	16
2.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p	18
2.4 Έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_p	21
2.5 Αδυναμίες του δείκτη C_p	26
3. Ο δείκτης ικανότητας C_{pk}	27
3.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pk}	27
3.2 Εκτίμηση του δείκτη C_{pk}	35
3.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_{pk}	39
3.4 Αδυναμίες του δείκτη C_{pk}	42
4. Ο δείκτης ικανότητας C_{pm}	45
4.1 Η συνάρτηση απώλειας $L(x)$	45
4.2 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pm}	46

4.3	Εκτίμηση του δείκτη C_{pm}	52
4.4	Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm}	56
4.5	Έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_{pm}	58
4.6	Συγγενικοί δείκτες ικανότητας	60
4.6	Αδυναμίες του δείκτη C_{pm}	61
5.	Ο δείκτης ικανότητας C_{pmk}	63
5.1	Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pmk}	63
5.2	Εκτίμηση του δείκτη C_{pmk}	65
5.3	Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_{pmk}	69
6.	Δείκτες ικανότητας για μη κανονικά δεδομένα	71
6.1	Ο δείκτης ικανότητας C_{θ}	71
6.2	Ο δείκτης ικανότητας C_s	73
6.3	Δείκτες ικανότητας για ασύμμετρες κατανομές με χρήση σταθμισμένης διακύμανσης	74
6.4	Ο δείκτης ικανότητας C_{pc}	76
6.5	Ο δείκτης ικανότητας C_{BP}	78
6.6	Η μέθοδος του Clement	80
	Βιβλιογραφία	91

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Δείκτης C_p και παραγόμενος αριθμός ελαττωματικών προϊόντων ανά 1,000,000 προϊόντα. Υποθέσεις: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = M$, διεργασία εντός ελέγχου	15
2.2	Αποτίμηση και ανταπόκριση σε σχέση με τις τιμές του δείκτη C_p	16
2.3	Τιμές του λόγου c_0 / \hat{C}_p για διάφορες τιμές των n, m ($a = 0.95$)	21
2.4	Τιμές των ποσοτήτων $C_p(\text{high})/C_p(\text{low})$ και $c/C_p(\text{low})$ για διάφορες τιμές των n, a, β .	24
3.1	Μέση τιμή $E = E[\hat{C}_{pk}]$ και τυπική απόκλιση $SD = \sigma[\hat{C}_{pk}]$ του εκτιμητή \hat{C}_{pk}	38
3.2	Τιμές του δείκτη C_{pk} για διάφορες τιμές των ποσοτήτων d/σ και $ \mu - M /\sigma$	39
3.3	Πιθανότητες κάλυψης του δείκτη ικανότητας C_{pk}	41
3.4	95% κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}	42
4.1	Ιδιότητες του εκτιμητή C_{pm}	48
4.2	Τιμές της ποσότητας $\sqrt{\chi_{\hat{\nu}, 1-a}^2} / \hat{\nu}$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του $1 - a$	57
4.3	Τιμές του $\hat{C}_{pm(B)}$ έτσι ώστε να ισχύει $C_{pm} > 1$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του $1 - a$	58
4.4	Τιμές των ποσοτήτων $C_{pm}(\text{high})/C_{pm}(\text{low})$ και $c/C_{pm}(\text{low})$ για διάφορες τιμές των n, a, β	60
5.1	Ιδιότητες του εκτιμητή C_{pmk}	64

5.2	Μέση τιμή $E = E[\hat{C}_{pmk}]$ διακύμανση $V = \sigma^2[\hat{C}_{pmk}]$ του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} για $M = T$	68
6.1	Τιμές του θ έτσι ώστε $P_\theta = P$ για την κατανομή χ_n^2	72
6.2	Τιμές του δείκτη C_p^w για την κατανομή Weibull	75
6.3	Τιμές των ποσοτήτων $z'_{0.00135}$ για $a_3 \geq 0$ και $z'_{0.99865}$ για $a_3 < 0$	84
6.4	Τιμές των ποσοτήτων $z'_{0.99865}$ για $a_3 \geq 0$ και $z'_{0.00135}$ για $a_3 < 0$	86
6.5	Τιμές της ποσότητας $z'_{0.5}$ για $a_3 \geq 0$	88

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1.1	Ερμηνεία ειδικών αιτίων μεταβλητότητας	3
1.2	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart	4
1.3	Δύο διεργασίες εντός στατιστικού ελέγχου με κοινά όρια προδιαγραφών	8
2.1	Γραφική ερμηνεία του δείκτη C_p	12
2.2	Σύγκριση δύο διεργασιών με τον ίδιο δείκτη C_p και σ	13
2.3	Πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος	14
2.4	Λειτουργική χαρακτηριστική καμπύλη για (a) $n = 30, c = 1.33$ (b) $n = 70, c = 1.46$	22
3.1	Γραφική ερμηνεία του δείκτη C_{pk}	28
3.2	Τρεις διεργασίες με κοινό δείκτη $C_{pk} = 1$ και διαφορετική κατανομή	29
3.3	Διεργασίες με κοινό δείκτη C_p αλλά διαφορετικό δείκτη C_{pk}	30
3.4	Άνω και κάτω φράγμα για την απόδοση μιας κανονικής διεργασίας συναρτήσει της τιμής του δείκτη C_{pk}	32
4.1	Σχέση μεταξύ των δεικτών C_p, C_{pk} και C_{pm}	49
4.2	Γραφική παράσταση των δεικτών C_p και C_{pm} στο (μ, σ) επίπεδο	50
4.3	Τιμές των δεικτών ικανότητας C_p, C_{pk} και C_{pm} για διάφορες τιμές του μ	51
6.1	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $BIN(1,0,3)$	79
6.2	Χαρακτηρισμός κατανομών βασισμένος στις ποσότητες a_3^2 και a_4	82

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

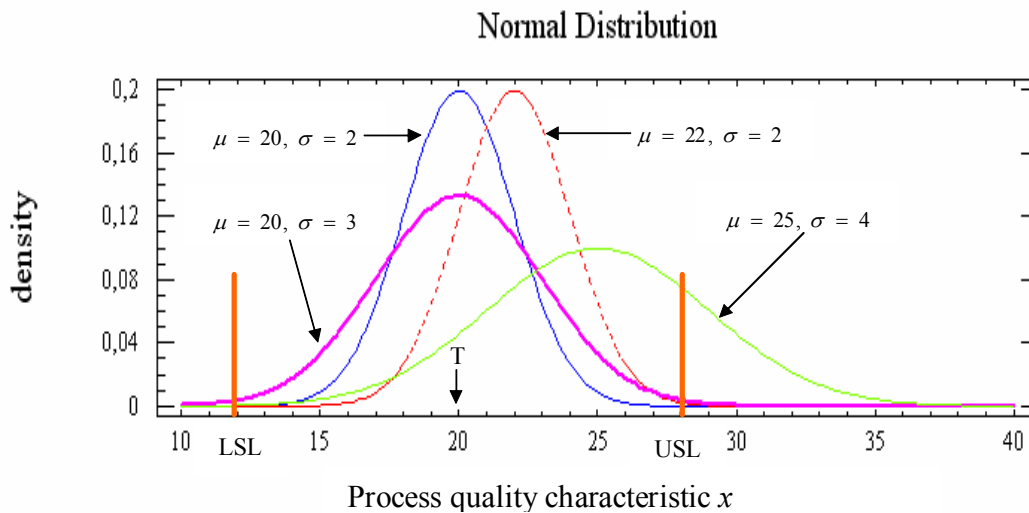
Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control) αποτελεί κρίσιμο εργαλείο κάθε παραγωγικής επιχείρησης που επηρεάζει αποφάσεις σχετικές με τις προδιαγραφές, την παραγωγική διαδικασία και τον έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων. Σήμερα, για την αποτελεσματική χρήση του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας απαιτείται η ενσωμάτωσή του σε ένα πλαίσιο λειτουργίας και διοίκησης της επιχείρησης που έχει ως στόχο τη διαρκή βελτίωση της ποιότητας σε κάθε επίπεδο, γνωστού ως Διοίκησης Ολικής Ποιότητας (Total Quality Management ή Total Quality Assurance). Μπορούμε να πούμε ότι ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτέλεσε τον προάγγελο της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας.

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Δηλαδή, όσο καλά ρυθμισμένα και αν είναι τα μηχανήματα, όσο ικανοί και να είναι οι χειριστές των μηχανημάτων, όσο ικανοποιητική και να είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα δεν θα είναι ίδια (θα υπάρχει κάποιο μετρήσιμο μέγεθος του προϊόντος του οποίου η τιμή θα είναι διαφορετική για τα δύο προϊόντα). Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (common or chance causes of variation). Μια διεργασία η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός ελέγχου διεργασία (in control process), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (stable state).

Όμως σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες και αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων ποιοτικών χαρακτηριστικών (quality characteristics) που καθορίζουν την τελική ποιότητα του προϊόντος. Αυτές οι μορφές μεταβλητότητας οφείλονται κυρίως σε λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, λάθη των χειριστών των μηχανημάτων και κακής ποιότητας ή ελαττωματική πρώτη

ύλη. Η μεταβλητότητα που οφείλεται στους παραπάνω λόγους είναι σε μέγεθος πολύ μεγαλύτερη της φυσικής μεταβλητότητας και η παρουσία της οδηγεί σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Αυτή η μεταβλητότητα αναφέρεται ως ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (special or assignable causes of variation). Μια διεργασία (σύστημα) η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εκτός ελέγχου διεργασία (out of control process) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (unstable state).

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (specifications limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού του. Αυτά είναι το κάτω και το άνω όριο προδιαγραφών (lower and upper specification limits, LSL and USL) και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται τιμή στόχος (target value, T) που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος $[LSL, USL]$. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η συντριπτική πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα παραγόμενα προϊόντα βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών. Όμως κάτω από συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η ποιότητα ενός προϊόντος εκφράζεται με την τιμή ενός μετρήσιμου ποιοτικού χαρακτηριστικού του για το οποίο $T = 20$, $LSL = 12$, $USL = 28$, και ότι κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασία) οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα παραγόμενα προϊόντα περιγράφονται από την κατανομή $N(20, 4)$. Το αποτέλεσμα που έχουν οι κοινές και οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας στην παραγωγική διεργασία περιγράφεται στο ακόλουθο σχήμα



Διάγραμμα 1.1: Ερμηνεία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας

Υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας σχεδόν όλα τα παραγόμενα προϊόντα πληρούν τις προδιαγραφές. Η εμφάνιση ειδικής μεταβλητότητας μπορεί να επιφέρει αλλαγή στην κατανομή των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού, είτε αλλάζοντας (μετατοπίζοντας) μόνο το μέσο της κατανομής ($N(22,4)$), είτε αλλάζοντας μόνο τη διακύμανση της κατανομής ($N(20,9)$), είτε αλλάζοντας το μέσο και τη διακύμανση της κατανομής ταυτόχρονα ($N(25,16)$). Σε κάθε περίπτωση, η επίδραση της ειδικής μεταβλητότητας μεταφράζεται σε αύξηση των παραγόμενων προϊόντων που έχουν τιμές ποιοτικού χαρακτηριστικού εκτός των ορίων προδιαγραφών.

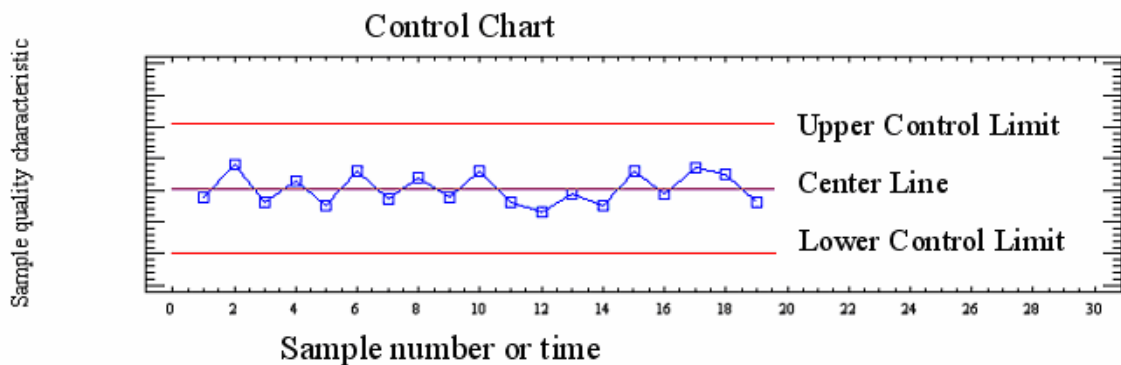
Ένα από τα κύρια αντικείμενα του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να προχωρήσουμε σε έρευνα και να προβούμε στις απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα μη συμμορφούμενα (*nonconforming*) με τις προδιαγραφές. Τα διαγράμματα ελέγχου (*control charts*) είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (*on-line process-monitoring*).

1.2 Διαγράμματα ελέγχου

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή)

των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$, $t=1,2,\dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (συνήθως η μέση τιμή μ , και η τυπική απόκλιση σ της X). Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή



Διάγραμμα 1.2: Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

όπου εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_t που έχουν απεικονιστεί με σημεία (τετραγωνάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασίας, δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας. Οι δύο άλλες γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου του διαγράμματος (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά

τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου Shewhart

Μοντέλο ορίων σίγμα	
UCL	$= \mu_w + L\sigma_w$
$Center\ Line$	$= \mu_w$
LCL	$= \mu_w - L\sigma_w$

Οι ποσότητες μ_w και σ_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L = 3$ οπότε ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου Shewhart με 3σ όρια ελέγχου.

Στην πράξη η μέση τιμή μ , και η τυπική απόκλιση σ της X είναι άγνωστες οπότε πρέπει πρώτα να εκτιμηθούν για να μπορέσουμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου. Για την εκτίμηση των ποσοτήτων μ , σ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν έχουμε δείγματα μεγέθους μεγαλύτερου ή ίσου με την μονάδα από την τυχαία μεταβλητή X .

(α) m ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους $n > 1$

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $n > 1$ το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$.

(α1) Εκτίμηση του μ

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και ας θέσουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας μ (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του μ), δηλαδή

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}.$$

(α2) Εκτίμηση του σ

Μέθοδος R: Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

και

$$\bar{R}_m = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Τότε

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}_m}{d_2}$$

όπου d_2 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n η οποία επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε $E(\hat{\sigma}) = \sigma$.

Μέθοδος S: Έστω S_1, S_2, \dots, S_m οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}.$$

Τότε

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

όπου c_4 είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n η οποία επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε $E(\hat{\sigma}) = \sigma$.

Μέθοδος S²: Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

και

$$\overline{S^2} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}.$$

Τότε

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{S^2}}.$$

(β) m ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους $n = 1$

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας m ανεξάρτητες παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_m από την X .

(β1) Εκτίμηση του μ

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}.$$

(β2) Εκτίμηση του σ

Μέθοδος MR : Θέτουμε

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}|, \quad 2 \leq i \leq m$$

και

$$\overline{MR} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_m}{m-1}.$$

Τότε

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

όπου η σταθερά d_2 υπολογίζεται για δείγμα μεγέθους $n = 2$ (προφανώς $E(\hat{\sigma}) = \sigma$).

Μέθοδος S : Έστω

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}.$$

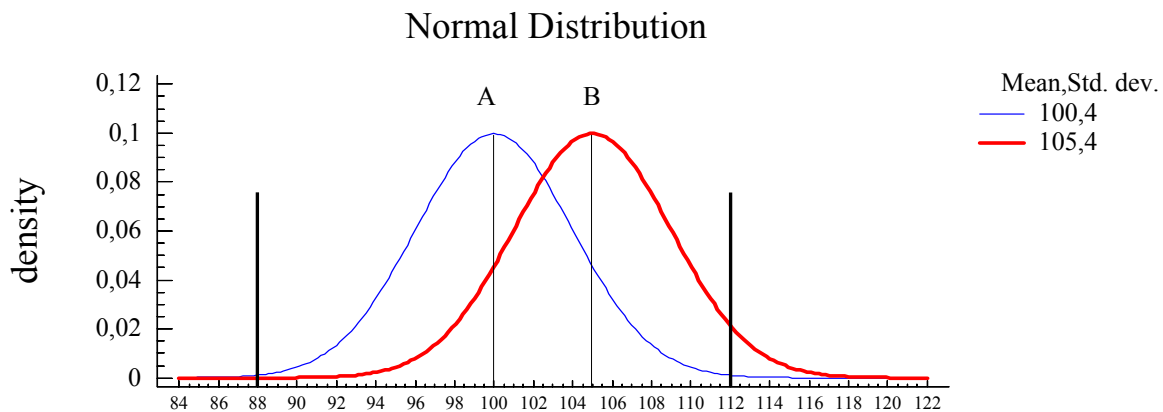
Τότε

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{c_4}$$

όπου η σταθερά c_4 υπολογίζεται για δείγμα μεγέθους $n = m$ (προφανώς $E(\hat{\sigma}) = \sigma$).

1.3 Ικανότητα μιας διεργασίας

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνονται δύο διεργασίες A, B οι οποίες περιγράφονται από τις κατανομές $N(100,16)$ και $N(105,16)$, αντίστοιχα, οι οποίες έχουν κοινό $LSL = 88$ και $USL = 112$. Υποθέτουμε ότι και οι δύο διεργασίες βρίσκονται εντός στατιστικού ελέγχου.



Διάγραμμα 1.3: Δύο διεργασίες εντός στατιστικού ελέγχου με κοινά όρια προδιαγραφών

Είναι προφανές από το παραπάνω διάγραμμα ότι ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων (προϊόντα με τιμές εκτός των ορίων προδιαγραφών) που παράγει καθεμία από τις διεργασίες A, B είναι διαφορετικός. Από το σχήμα προκύπτει ότι η διεργασία A είναι ικανότερη από τη B αφού παράγει λιγότερα ελαττωματικά προϊόντα.

Η ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας (process capability analysis) σχετίζεται συνήθως με το μέσο μ και την τυπική απόκλιση σ της κατανομής ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού X με τα όρια προδιαγραφών δίνοντας αριθμητικά μέτρα που ονομάζονται δείκτες ικανότητας της διεργασίας (process capability indices) που περιγράφουν την ικανότητα της διεργασίας να παράγει προϊόντα εντός των ορίων προδιαγραφών. Είναι κατανοητό ότι τέτοιου είδους πληροφορίες δεν μπορούν να προκύψουν από τα διαγράμματα ελέγχου αφού αυτά μας δίνουν πληροφορίες μόνο για το αν η παραγωγική διεργασία λειτουργεί με ένα σταθερό τρόπο (άλλωστε στην ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου δεν λαμβάνονται υπόψη τα όρια προδιαγραφών του προϊόντος).

Δεν θα πρέπει να μας προξενήσει έκπληξη ότι οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την έννοια της ικανότητας μιας διεργασίας (στη δεκαετία του 70) ήταν οι Ιάπωνες. Οι Ιάπωνες είχαν αναπτύξει μεθόδους έτσι ώστε να φέρουν διεργασίες εντός στατιστικού ελέγχου αλλά αντιλήφθηκαν ότι αυτό δεν ήταν αρκετό για να τους εγγυηθεί την υψηλή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Το αποτέλεσμα αυτής της ανησυχίας των Ιαπώνων οδήγησε στην ανάπτυξη των πρώτων πέντε δημοφιλών Ιαπωνικών δεικτών ικανότητας που είναι οι C_p , k , C_{pk} , C_{pl} και C_{pu} .

Οι περισσότεροι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας που έχουν προταθεί εμπλέκουν διάφορες ποσότητες βασικότερες από τις οποίες δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Μέση τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού	μ
Τυπική απόκλιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού	σ
Κάτω όριο προδιαγραφών	LSL
Άνω όριο προδιαγραφών	USL
Τιμή στόχος διεργασίας	T
Μέσο του διαστήματος $[LSL, USL]$	$M = \frac{LSL + USL}{2}$
Μισό μήκος του διαστήματος $[LSL, USL]$	$d = \frac{USL - LSL}{2}$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι συνήθως $\mu = M = T$, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι τρεις ποσότητες δεν ταυτίζονται. Επίσης υπάρχουν περιπτώσεις που ορίζεται μόνο ένα όριο προδιαγραφών, είτε το LSL είτε το USL .

Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας χρησιμοποιούνται ευρέως και δίνουν μια άμεση ένδειξη της ικανότητας της διεργασίας με ένα τρόπο που είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί και να κατανοηθεί. Η χρήση και η ανάπτυξη των δεικτών ικανότητας ως ενός τρόπου έκφρασης της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων αναμένεται να επεκταθεί. Αυτό οφείλεται εν μέρει στον αυξανόμενο αριθμό κατασκευαστών που περιλαμβάνουν στις συμβάσεις αγορών με τους προμηθευτές την απαίτηση τεκμηριωμένης απόδειξης της ποιότητας των προϊόντων μέσω του υπολογισμού δεικτών ικανότητας σε κάθε αποστολή.

1.4 Χρήση ή μη των δεικτών ικανότητας μιας διεργασίας

Η χρήση των δεικτών ικανότητας μιας διεργασίας έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένων συζητήσεων μεταξύ των στατιστικών και των επαγγελματιών και η κακή χρήση τους έχει ασκήσει σημαντική επίδραση στις βιομηχανίες που τους χρησιμοποιούν, κυρίως αρνητική. Οι δείκτες ικανότητας εμφανίζονται απλοί στην χρήση τους, αλλά η πρακτική εμπειρία έχει δείξει ότι μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένες ερμηνείες. Οι δείκτες αυτοί προσπαθούν να αντλήσουν πάρα πολλές πληροφορίες από τη διεργασία και να τις αποτυπώσουν σε ένα και μόνο αριθμό. Το πρόβλημα θεωρείται ότι δεν αφορά τους ίδιους τους δείκτες αλλά τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται. Οι δείκτες ικανότητας μπορούν να είναι ένα επικίνδυνο εργαλείο και έτσι η προσεκτική εφαρμογή τους θεωρείται αναγκαία προϋπόθεση για τη χρήση τους.

Μερικοί επαγγελματίες βλέπουν τους δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας ως το πιο χρήσιμο εργαλείο του Σύγχρονου Ποιοτικού Ελέγχου. Θεωρούν ότι οι δείκτες δεν είναι περισσότερο περίπλοκοι από κάποια άλλη στατιστική μέθοδο που χρησιμοποιείται από τους κατασκευαστές των προϊόντων για να αξιολογήσουν την παραγωγική διεργασία. Οι στατιστικές ιδιότητες και οι υποθέσεις πρέπει να γίνονται απόλυτα κατανοητές από τους κατασκευαστές που χρησιμοποιούν τους δείκτες ικανότητας οι οποίοι πρέπει να τους συνοδεύουν και με διαστήματα εμπιστοσύνης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ C_p

2.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_p

Ο δείκτης C_p εισήχθη από τον Juran et al. (1974) και είναι μέλος της οικογένειας των πέντε πρώτων δεικτών ικανότητας οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά στην Ιαπωνία τη δεκαετία του 70. Ο δείκτης C_p χρησιμοποιείται ευρύτατα στην βιομηχανία, παρά τις όποιες αδυναμίες του, λόγω της απλότητάς του. Ο δείκτης C_p ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

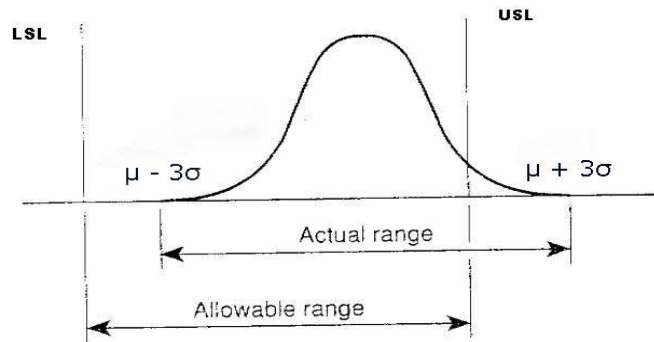
$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

όπου USL είναι το ανώτερο όριο προδιαγραφών, LSL είναι το κατώτερο όριο προδιαγραφών και σ είναι η τυπική απόκλιση της διεργασίας. Ο Montgomery (1996) αναφέρει το δείκτη C_p ως PCR (process capability ratio), δηλαδή λόγο ικανότητας μιας διεργασίας.

Ο δείκτης C_p αναπτύχθηκε για διεργασίες που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είναι γνωστό ότι η παρατηρούμενη τιμή μια τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ βρίσκεται με μεγάλη βεβαιότητα (για την ακρίβεια με πιθανότητα 99.73%) στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ δηλαδή εντός ενός διαστήματος εύρους 6σ . Έτσι ο δείκτης C_p μπορεί να οριστεί περιγραφικά ως εξής

$$C_p = \frac{\text{Επιτρεπτό εύρος μετρήσεων (allowable range)}}{\text{Πραγματικό εύρος μετρήσεων (actual range)}}$$

Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 2.1: Γραφική ερμηνεία του δείκτη C_p

Ο δείκτης ικανότητας C_p , όπως και οι δείκτες ικανότητας που θα ακολουθήσουν στα επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιείται όταν ισχύουν τα ακόλουθα

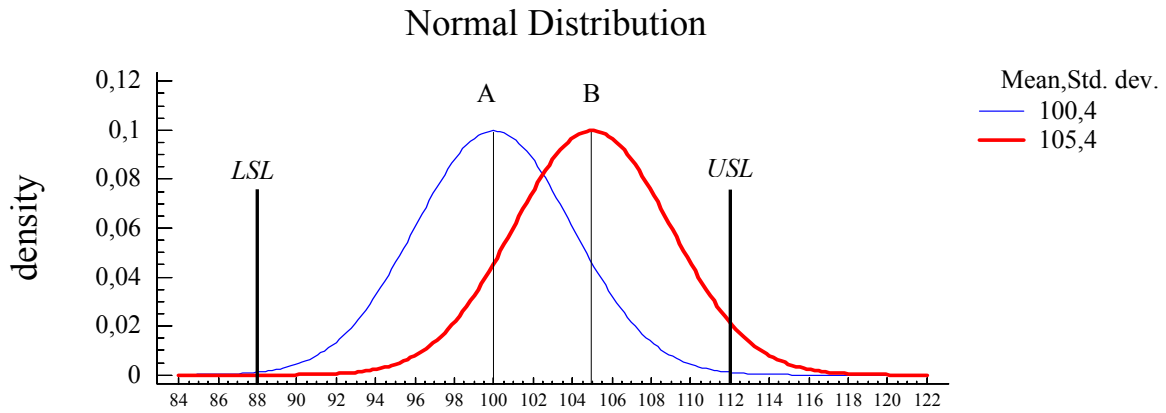
1. Η διεργασία περιγράφεται από μια κανονική κατανομή
2. Οι παρατηρήσεις μας (δείγμα ή δείγματα) είναι ανεξάρτητες.
3. Η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

Η ποσότητα

$$P = \left(\frac{1}{C_p} \right) 100\% = \left(\frac{6\sigma}{USL - LSL} \right) 100\%$$

δηλώνει το ποσοστό του εύρους των ορίων προδιαγραφών που χρησιμοποιεί η διεργασία. Για $C_p = 1$ έχουμε $P = 100\%$, ενώ για $C_p = 2$ έχουμε ότι $P = 50\%$. Είναι προφανές ότι σε μια διεργασία επιθυμούμε να έχουμε υψηλή τιμή του δείκτη C_p και επομένως μικρό ποσοστό P .

Το αδύνατο σημείο του δείκτη C_p είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη τη θέση της διεργασίας. Παρατηρούμε ότι ούτε ο αριθμητής αλλά ούτε και ο παρονομαστής του δείκτη C_p αναφέρεται στη θέση της κατανομής της διεργασίας στο βαθμό που αυτή καθορίζεται από το μέσο της. Αν η κατανομή της διεργασίας μετατοπιστεί σε άλλη θέση (μετατόπιση του μέσου της διεργασίας) και η μεταβλητότά της η οποία προσδιορίζεται από το σ^2 δεν αλλάξει, τότε η τιμή του δείκτη C_p δεν θα μεταβληθεί. Αυτό γίνεται άμεσα κατανοητό με το ακόλουθο διάγραμμα



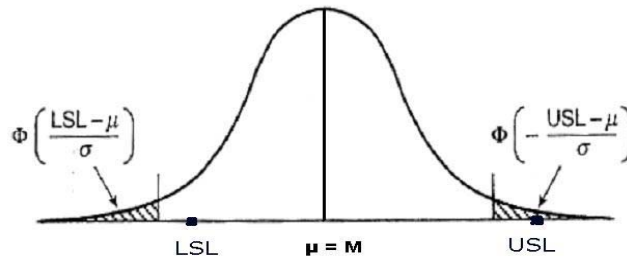
Διάγραμμα 2.2: Σύγκριση δύο διεργασιών με τον ίδιο δείκτη C_p και σ

όπου έχουν απεικονιστεί δύο διεργασίες A, B που περιγράφονται από τις κατανομές $N(100, 16)$ και $N(105, 16)$, αντίστοιχα, οι οποίες έχουν κοινό $LSL = 88$ και $USL = 112$. Και στις δύο διεργασίες το εύρος ανοχής των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι ίσο με $6\sigma = 24$, όμως ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων (προϊόντα με τιμές εκτός των ορίων προδιαγραφών) που παράγει καθεμιά από αυτές είναι διαφορετικός. Από το σχήμα προκύπτει ότι η διεργασία A είναι ικανότερη από τη B αφού παράγει λιγότερα ελαττωματικά προϊόντα παρόλο που και οι δύο διεργασίες έχουν τον ίδιο δείκτη ικανότητας $C_p = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι μια διεργασία αποδίδει προϊόντα των οποίων οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού X που μας ενδιαφέρει κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , και έχουν καθοριστεί τα όρια προδιαγραφών LSL και USL . Τότε η πιθανότητα p_{NC} να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν (NC: non conforming) δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
 p_{NC} &= 1 - P(LSL < X < USL) = 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \right\} \\
 &= \Phi\left(-\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$. Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο ακόλουθο διάγραμμα για $\mu = M = (USL + LSL)/2$.



Διάγραμμα 2.3: Πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος

Ο δείκτης C_p δεν παρέχει αρκετές πληροφορίες για την πιθανότητα p_{NC} παραγωγής ενός ελαττωματικού προϊόντος. Ωστόσο μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για το p_{NC} . Πράγματι στην περίπτωση που

$$\mu = M = \frac{LSL + USL}{2}$$

(δείτε Διάγραμμα 2.3) είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$LSL = \mu - 3\sigma C_p, \quad USL = \mu + 3\sigma C_p$$

οπότε

$$p_{NC} = 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \right\} = 1 - (\Phi(3C_p) - \Phi(-3C_p)) = 2\Phi(-3C_p).$$

Στη γενική περίπτωση, δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του μ , μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι

$$p_{NC} \geq 2\Phi(-3C_p).$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος για μια κανονική διεργασία εντός ελέγχου με $\mu = M$, για διάφορες τιμές του δείκτη C_p .

Πίνακας 2.1: Δείκτης C_p και παραγόμενος αριθμός ελαττωματικών προϊόντων ανά 1,000,000 προϊόντα. Υποθέσεις: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = M$, διεργασία εντός ελέγχου.

C_p	p_{NC}	$1000000p_{NC}$
0.5	0.133614	133614.
0.6	0.0718606	71860.6
0.7	0.0357288	35728.8
0.8	0.0163951	16395.1
0.9	0.00693395	6933.95
1.	0.0026998	2699.8
1.1	0.000966848	966.848
1.2	0.000318217	318.217
1.3	0.0000961927	96.1927
1.4	0.0000266915	26.6915
1.5	6.79535×10^{-6}	6.79535
1.6	1.58666×10^{-6}	1.58666
1.7	3.39653×10^{-7}	0.339653
1.8	6.66409×10^{-8}	0.0666409
1.9	1.19807×10^{-8}	0.0119807
2.	1.97318×10^{-9}	0.00197318

Μια εύλογη ερώτηση που προκύπτει είναι ποια τιμή πρέπει να έχει ο δείκτης C_p ώστε μια διεργασία να θεωρείται ικανή. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες ελάχιστες τιμές για το δείκτη C_p . Ο Montgomery (1996) προτείνει τις ελάχιστες τιμές 1.33 και 1.5 για διεργασίες που χρησιμοποιούνται για μεγάλο χρονικό διάστημα και για νέες διεργασίες, αντίστοιχα σημειώνοντας ότι αυτές οι τιμές θα πρέπει να αυξηθούν σε 1.5 και 1.67, αντίστοιχα, εφόσον η διεργασία σχετίζεται με την δημόσια ασφάλεια.

Ο Πίνακας 2.2, που πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Mizuno (1988), δίνει οδηγίες ανταπόκρισης σε διάφορες τιμές του δείκτη C_p που ακολουθούνται στις ΗΠΑ.

Πίνακας 2.2: Αποτίμηση και ανταπόκριση σε σχέση με τις τιμές του δείκτη C_p

Τιμή του C_p	Αποτίμηση-Ανταπόκριση
$1.33 \leq C_p$	Επιτυχημένη διεργασία – Δεν χρειάζεται συνεχής παρακολούθηση, Πιθανή επιτάχυνση ρυθμού παραγωγής προϊόντων.
$1 \leq C_p \leq 1.33$	Η διεργασία χρειάζεται παρακολούθηση - Κίνδυνος παραγωγής αυξημένου αριθμού ελαττωματικών προϊόντων.
$C_p < 1$	Αποτυχημένη διεργασία - Χρειάζεται αναθεώρηση του σχεδιασμού (μηχανές, προδιαγραφές, παραγωγικές διαδικασίες).

Σημειώνουμε ότι η τιμή του δείκτη $C_p = 1.33 = 4/3$ δηλώνει ότι το εύρος 6σ καταλαμβάνει το 75% του εύρους των ορίων προδιαγραφών.

2.2 Εκτίμηση του δείκτη C_p

Η μοναδική άγνωστη παράμετρος που περιέχεται στον δείκτη C_p και πρέπει να εκτιμηθεί είναι η τυπική απόκλιση σ , αφού σε μια πρακτική εφαρμογή η τυπική απόκλιση μιας διεργασίας είναι συνήθως άγνωστη.

Ας υποθέσουμε ότι μια διεργασία περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ όπου οι παράμετροι μ και σ δεν είναι γνωστές, και ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη διεργασία το (X_1, X_2, \dots, X_n) . Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ την δειγματική τυπική απόκλιση S προκύπτει ο ακόλουθος εκτιμητής \hat{C}_p του δείκτη C_p

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6S}$$

όπου

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Αφού

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6S}, \quad C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

είναι προφανές ότι

$$(n-1) \left(\frac{C_p}{\hat{C}_p} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

οπότε

$$\sqrt{n-1} \frac{C_p}{\hat{C}_p} \sim \chi_{n-1}$$

(χ_{n-1}^2 : χι τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας, χ_n : χι με n βαθμούς ελευθερίας).

Αφού η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ της κατανομής χ_n δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2^{(n/2)-1} \Gamma(n/2)} e^{-x^2/2} x^{n-1}, \quad x, n > 0$$

(δείτε Johnson et al. (1994)) είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_{\hat{C}_p}(y)$ του εκτιμητή \hat{C}_p δίνεται από τον τύπο

$$g_{\hat{C}_p}(y) = \frac{2(C_p \sqrt{f/2})^f}{\Gamma(f/2)} y^{-f-1} \cdot e^{-\frac{fC_p^2}{2y^2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

όπου $f = n - 1$.

Με ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$E(\hat{C}_p) = c(n)C_p$$

όπου

$$c(n) = \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

και

$$E(\hat{C}_p^2) = \frac{f}{f-2} C_p^2 = \frac{n-1}{n-3} C_p^2.$$

Συνεπώς

$$Var(\hat{C}_p) = \left(\frac{f}{f-2} - c^2(n) \right) C_p^2 = \left(\frac{n-1}{n-3} - c^2(n) \right) C_p^2.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο \hat{C}_p δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του C_p , όμως είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος αφού

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = 1.$$

Επίσης το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$MSE(\hat{C}_p) = E[(\hat{C}_p - C_p)^2] = 2C_p^2 \left(\frac{n-2}{n-3} - c(n) \right)$$

και συνεπώς ο \hat{C}_p είναι συνεπής εκτιμητής του C_p .

Οι ροπές r -τάξης (γύρω από το 0) του \hat{C}_p μπορούν να προκύψουν εύκολα από αντίστοιχες ροπές της κατανομής χ_n^2 . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\sqrt{n-1} \frac{C_p}{\hat{C}_p} \sim \chi_{n-1}$$

και

$$E[(\chi_n^2)^r] = 2^r \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(δείτε Johnson et al. (1994)) προκύπτει ότι

$$E(\hat{C}_p^r) = (n-1)^{r/2} C_p^r E(\chi_{n-1}^{-r}) = (n-1)^{r/2} C_p^r E[(\chi_{n-1}^2)^{-r/2}] = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες του εκτιμητή \hat{C}_p μπορούν να βρεθούν στα άρθρα των Chou et al. (1989, 1990), Chou and Owen (1989), Kane (1986), Li et al. (1990) και Kotz and Johnson (1993).

2.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης που έχουν αναπτυχθεί για όλους τους δείκτες ικανότητας μιας κανονικής διεργασίας υποθέτουν ότι η τυπική απόκλιση σ εκτιμάται με την ποσότητα $\hat{\sigma} = S$ και ο μέσος μ εκτιμάται με την ποσότητα $\hat{\mu} = \bar{X}$ ή $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ ανάλογα με το αν έχουμε

ένα ή περισσότερα δείγματα, αντίστοιχα. Υπό τις προϋποθέσεις της Παραγράφου 2.2 έχουμε ότι

$$P\left(\chi_{n-1,1-(a/2)}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1,a/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

($P(\chi_n^2 \geq \chi_{n,a}^2) = \alpha$) ή ισοδύναμα

$$P\left(\frac{1}{S} \sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-(a/2)}^2}{n-1}} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\chi_{n-1,a/2}^2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

ή ισοδύναμα

$$P\left(\frac{USL - LSL}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-(a/2)}^2}{n-1}} \leq \frac{USL - LSL}{6\sigma} \leq \frac{USL - LSL}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{n-1,a/2}^2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς ένα $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον δείκτη C_p , όταν η παράμετρος σ εκτιμηθεί με την ποσότητα $\hat{\sigma} = S$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-(a/2)}^2}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{n-1,a/2}^2}{n-1}}$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{C}_p \frac{\chi_{n-1,1-(a/2)}}{\sqrt{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \frac{\chi_{n-1,a/2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Ο Heavlin (1988) πρότεινε ένα διαφορετικό διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p . Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε τις ακόλουθες προσεγγίσεις

$$E(S^{-1}) \cong \left(1 + \frac{3}{4(n-1)}\right) \sigma^{-1}$$

$$Var(S^{-1}) \cong \frac{1}{2(n-3)\sigma^2}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$Var(\hat{C}_p) \cong \frac{C_p^2}{2(n-3)} \cdot \left(1 + \frac{6}{n-1}\right)$$

Έτσι, ένα εναλλακτικό προσεγγιστικό $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον δείκτη C_p δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{C}_p \left[1 - \left(\frac{1}{2(n-3)} \left(1 + \frac{6}{n-1} \right) \right)^{1/2} z_{\alpha/2} \right] \leq C_p \leq \hat{C}_p \left[1 + \left(\frac{1}{2(n-3)} \left(1 + \frac{6}{n-1} \right) \right)^{1/2} z_{\alpha/2} \right]$$

(αν $Z \sim N(0,1)$ τότε $P(Z \geq z_a) = a$).

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης υποθέτει ότι η παράμετρος σ έχει εκτιμηθεί με την ποσότητα $\hat{\sigma} = S$.

Σε ένα τυπικό πρόβλημα ποιοτικού ελέγχου η τυπική απόκλιση της διεργασίας εκτιμάται μέσω αμερόληπτων εκτιμητών της. Στο Κεφάλαιο 1 αναφέραμε ότι μια αμερόληπτη εκτίμηση του σ επιτυγχάνεται μέσω της στατιστικής R/d_2 (για ένα δείγμα μεγέθους n) ή γενικότερα μέσω της στατιστικής \bar{R}_m/d_2 (για m ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n , $\bar{R}_1 = R$). Στο άρθρο των Li et al. (1990) αναφέρεται ότι η στατιστική

$$\frac{\sqrt{v}}{c} \cdot \frac{\bar{R}_m}{\sigma} \stackrel{a}{\sim} \chi_v$$

όπου το σύμβολο $\stackrel{a}{\sim}$ δηλώνει “κατανέμεται προσεγγιστικά”, όπου τα c και v είναι σταθερές που σχετίζονται με τις δύο πρώτες ροπές του εύρους R_1 . Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα οι Li et al. (1990) έδωσαν μονόπλευρα διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p της μορφής $[c, \infty)$ χρησιμοποιώντας ως εκτιμητή του C_p την ποσότητα

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6 \frac{\bar{R}_m}{d_2}}.$$

Το $100a\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p με κάτω όριο c_0 ικανοποιεί τη σχέση

$$P(C_p \geq c_0) = a.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} 1 - a &= P(C_p \leq c_0) = P\left(\frac{C_p}{\hat{C}_p} \leq \frac{c_0}{\hat{C}_p}\right) = P\left(\frac{\bar{R}_m}{\sigma d_2} \leq \frac{c_0}{\hat{C}_p}\right) = P\left(\frac{\bar{R}_m}{\sigma} \leq \frac{c_0 d_2}{\hat{C}_p}\right) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{v}}{c} \cdot \frac{\bar{R}_m}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{v}}{c} \cdot \frac{c_0 d_2}{\hat{C}_p}\right) \cong P\left(\chi_v \leq \frac{\sqrt{v}}{c} \cdot \frac{c_0 d_2}{\hat{C}_p}\right) \end{aligned}$$

οπότε

$$c_0 = \frac{c \hat{C}_p}{\sqrt{v} d_2} \sqrt{\chi_{v,a}^2} = \frac{c \hat{C}_p}{\sqrt{v} d_2} \chi_{v,a}.$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον ακόλουθο πίνακα (δείτε Li et al. (1990)) με τιμές της ποσότητας

$$\frac{c_0}{\hat{C}_p} = \frac{c}{\sqrt{vd_2}} \chi_{v,a}$$

για $a = 0.95$ και για διάφορες τιμές των n, m .

Πίνακας 2.3: Τιμές του λόγου c_0 / \hat{C}_p για διάφορες τιμές των n, m ($a = 0.95$).

n	m				
	1	5	10	20	30
3	0.255	0.631	0.735	0.811	0.845
4	0.369	0.697	0.783	0.845	0.873
5	0.443	0.735	0.811	0.865	0.890
6	0.494	0.760	0.829	0.879	0.901
7	0.533	0.779	0.843	0.888	0.908
8	0.562	0.793	0.853	0.895	0.914
9	0.586	0.804	0.861	0.901	0.919
10	0.605	0.813	0.867	0.906	0.923

2.4 Έλεγχος υποθέσεων για τον δείκτη C_p

Στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας ο έλεγχος υπόθεσης που μας ενδιαφέρει είναι ο ακόλουθος

$$H_0 : \text{Η διεργασία δεν είναι ικανή} - H_1 : \text{Η διεργασία είναι ικανή}$$

(δείτε Kane (1986)). Η παραπάνω υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση

$$H_0 : C_p \leq c_0 - H_1 : C_p > c_0$$

όπου c_0 είναι μια κρίσιμη τιμή για το δείκτη C_p που συνήθως έχει τιμή 1.33 ή 1.67. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) είναι της μορφής $\hat{C}_p > c$, όπου c είναι μια θετική τιμή (κρίσιμη τιμή). Για σφάλμα τύπου I ίσο με a προκύπτει ότι

$$a = P_{C_p=c_0}(\hat{C}_p > c) = P_{C_p=c_0}[(n-1)(C_p / \hat{C}_p)^2 \leq (n-1)(C_p / c)^2] = P[\chi_{n-1}^2 \leq (n-1)(c_0 / c)^2]$$

οπότε

$$c = c_0 \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n-1,1-a}^2}}$$

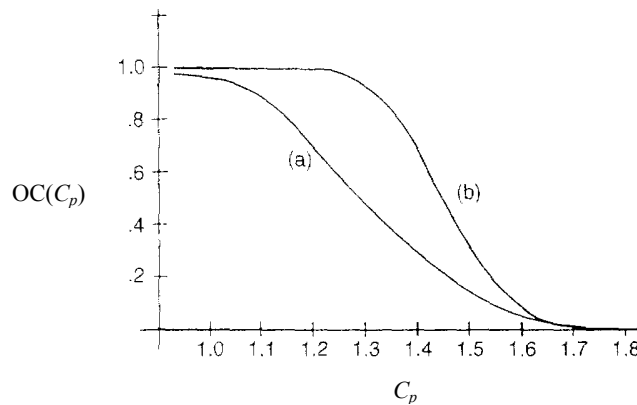
Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$P(\text{Απόρριψης } H_0) = \pi(C_p) = P(\hat{C}_p > c) = P[\chi_{n-1}^2 \leq (n-1)(C_p/c)^2]$$

και η λειτουργική χαρακτηριστική καμπύλη του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$OC(C_p) = 1 - \pi(C_p).$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνονται δύο γραφικές παραστάσεις της λειτουργικής χαρακτηριστικής καμπύλης (δείτε Kane (1986)).



Διάγραμμα 2.4: Λειτουργική χαρακτηριστική καμπύλη για
(a) $n = 30$, $c = 1.33$ (b) $n = 70$, $c = 1.46$

Σύμφωνα με τον Kane (1986) η επιλογή της κατάλληλης κρίσιμης τιμής c πρέπει να βασιστεί σε μια αποδεκτή τιμή $C_p(\text{high})$ του δείκτη C_p και σε μια μη αποδεκτή τιμή $C_p(\text{low})$ του δείκτη C_p , με $C_p(\text{low}) < C_p(\text{high})$. Έτσι αν ο δείκτης C_p έχει τιμή μεγαλύτερη της τιμής $C_p(\text{high})$ τότε η διεργασία θα θεωρείται ικανή, ενώ αν ο δείκτης C_p έχει τιμή μικρότερη της τιμής $C_p(\text{low})$ τότε η διεργασία θα θεωρείται μη ικανή. Για τον Kane (1986) η υπόθεση

$$H_0 : \text{Η διεργασία δεν είναι ικανή} - H_1 : \text{Η διεργασία είναι ικανή}$$

παίρνει τη μορφή

$$H_0 : C_p < C_p(\text{low}) - H_1 : C_p > C_p(\text{high}).$$

Από τα προαναφερθέντα είναι σαφής η σχέση της παραπάνω προσέγγισης με την προσέγγιση που ακολουθείται στη δειγματοληψία αποδοχής (acceptance sampling) όπου η έννοια του όρου $C_p(\text{high})$ είναι ισοδύναμη με το αποδεκτό επίπεδο ποιότητας (acceptable quality level, AQL) και η έννοια του όρου $C_p(\text{low})$ είναι ισοδύναμη με το απορριπτέο

επίπεδο ποιότητας (rejectable quality level, RQL ή LTPD). Στο αντίστοιχο πρόβλημα της δειγματοληψίας αποδοχής απαιτούμε η λειτουργική χαρακτηριστική καμπύλη να επιβεβαιώνει τα σημεία $(RQL, 1-a)$ και (AQL, β) , όπου τα a και β παριστάνουν το ρίσκο του παραγωγού και του καταναλωτή, αντίστοιχα. Έτσι εδώ απαιτούμε η συνάρτηση ισχύος να επιβεβαιώνει τα σημεία $(C_p(low), a)$ και $(C_p(high), 1-\beta)$. Συνεπώς απαιτούμε να ισχύουν οι σχέσεις

$$a = \pi(C_p(low)) = P[\chi_{n-1}^2 \leq (n-1)(C_p(low)/c)^2]$$

και

$$1-\beta = \pi(C_p(high)) = P[\chi_{n-1}^2 \leq (n-1)(C_p(high)/c)^2].$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{C_p(high)}{C_p(low)} = \sqrt{\frac{\chi_{n-1, \beta}^2}{\chi_{n-1, 1-a}^2}}$$

και

$$c = C_p(low) \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n-1, 1-a}^2}}.$$

Ο Kane (1986) έδωσε τον ακόλουθο πίνακα όπου για δεδομένα a , β , $C_p(high)$ και $C_p(low)$ μπορούμε να καθορίσουμε το μέγεθος του δείγματος n και την κρίσιμη τιμή c για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0: C_p < C_p(low) - H_1: C_p > C_p(high).$$

Πίνακας 2.4: Τιμές των ποσοτήτων $C_p(\text{high})/C_p(\text{low})$ και $c/C_p(\text{low})$ για διάφορες τιμές των n, a, β .

n	$a = \beta = 0.10$		$a = \beta = 0.05$	
	$C_p(\text{high})/C_p(\text{low})$	$c/C_p(\text{low})$	$C_p(\text{high})/C_p(\text{low})$	$c/C_p(\text{low})$
10	1.88	1.47	2.26	1.65
20	1.53	1.28	1.73	1.37
30	1.41	1.21	1.55	1.28
40	1.34	1.18	1.46	1.23
50	1.30	1.15	1.40	1.20
60	1.27	1.14	1.36	1.18
70	1.25	1.13	1.33	1.16
80	1.23	1.12	1.30	1.15
90	1.21	1.11	1.28	1.14
100	1.20	1.10	1.26	1.13

Για παράδειγμα αν $a = \beta = 0.05$, $C_p(\text{high}) = 1.6$ και $C_p(\text{low}) = 1.2$, τότε $C_p(\text{high})/C_p(\text{low}) = 1.33$ και από τον πίνακα 2.4 για $n = 70$ έχουμε $c = 1.16C_p(\text{low}) = 1.392$. Έτσι χρησιμοποιώντας ως κρίσιμη τιμή $c = 1.392$ και μέγεθος δείγματος $n = 70$ υπάρχει κίνδυνος 5% να θεωρηθεί ότι η διεργασία δεν είναι ικανή (αποδοχή H_0) με τιμή του δείκτη C_p πάνω από 1.6 και κίνδυνος 5% να κριθεί ότι η διεργασία είναι ικανή (απόρριψη H_0) με τιμή του δείκτη C_p κάτω από 1.2.

Επίσης, αξίζει να σημειώσουμε ότι η Hoffman (1993) παρέχει μια γενική προσέγγιση για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0: C_p < C_p(\text{low})$$

που βασίζεται στην κατανομή της ποσότητας σ/S .

Η μελέτη που ανέπτυξε ο Kane (1986) ισχύει στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n . Αντίθετα οι Kirmani et al. (1991) ασχολήθηκαν με την περίπτωση που έχουμε δεδομένα από m το πλήθος ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα. Ο εκτιμητής \hat{C}_p που χρησιμοποιήθηκε είναι ο ακόλουθος

$$\hat{C}_p = \frac{(USL - LSL)d_p}{6}$$

όπου

$$d_p = \sqrt{\frac{m(n-1)-1}{m(n-1)}} \cdot \frac{\varepsilon_{m(n-1)-1}}{S_p},$$

$$S_p^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m (n-1)S_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right)$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Οι Kirmani et. al. (1991) χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\frac{m(n-1)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi_{m(n-1)}^2$$

κατέληξαν στην κρίσιμη τιμή

$$c^2 = \frac{c_0^2 (m(n-1)-1) \varepsilon_{m(n-1)-1}^2}{\chi_{m(n-1), 1-a}^2}$$

για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0: C_p \leq c_0 - H_1: C_p > c_0$$

σε επίπεδο σημαντικότητας a .

Μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα που μελέτησαν οι Kirmani et al. (1991) είναι αυτή που προτείνει ο Kocherlakota (1992), ο οποίος χρησιμοποιεί τον ακόλουθο εκτιμητή

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}$$

όπου

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}_m}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_m)/m}{\varepsilon_{n-1}}$$

ως εκτιμητή του δείκτη C_p . Ο Kocherlakota (1992), παρατηρώντας ότι η ασυμπτωτική κατανομή του $\bar{S}_m / \varepsilon_{n-1}$ είναι η

$$\frac{\bar{S}_m}{\varepsilon_{n-1}} \stackrel{a}{\sim} N\left(\sigma, \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{n-1}^2} - 1}\right)$$

κατέληξε στην (προσεγγιστική) κρίσιμη τιμή

$$c = \frac{c_0}{1 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_{n-1}^2}{m \varepsilon_{n-1}^2}}}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος θα μπορούσε να εφαρμοσθεί όταν χρησιμοποιούμε \bar{X} και S διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διεργασίας.

2.5 Αδυναμίες του δείκτη C_p

Σήμερα οι περισσότερες εταιρείες δεν χρησιμοποιούν αποκλειστικά το δείκτη C_p για να εξετάσουν την ικανότητα μιας διεργασίας. Ο δείκτης C_p δεν είναι αποτελεσματικός δείκτης για την περιγραφή της ικανότητας μιας διεργασίας αφού αγνοεί την θέση στην οποία βρίσκεται ο μέσος μ της διεργασίας (δείτε Διάγραμμα 2.2) όπως επίσης και την τιμή στόχο T της διεργασίας. Επίσης ο δείκτης C_p για να υπολογιστεί χρειάζεται να υπάρχουν και τα δύο όρια προδιαγραφών του προϊόντος, τα οποία όμως δεν καθορίζονται πάντα και τα δύο. Ο δείκτης C_p δεν παρέχει ουσιαστικές ενδείξεις για την πραγματική απόδοση της διεργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ C_{pk}

3.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pk}

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} είναι ο δεύτερος πιο δημοφιλής δείκτης ικανότητας για την περιγραφή της ικανότητας μιας διεργασίας. Ο δείκτης C_{pk} παρέχει περισσότερες πληροφορίες για την ικανότητα μιας διεργασίας σε σχέση με το δείκτη C_p αφού λαμβάνει υπόψη του τη θέση στην οποία βρίσκεται ο μέσος μ της διεργασίας. Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu})$$

όπου

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{\text{Κάτω επιτρεπτό εύρος μετρήσεων}}{\text{Κάτω πραγματικό εύρος μετρήσεων}},$$
$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{\text{Άνω επιτρεπτό εύρος μετρήσεων}}{\text{Άνω πραγματικό εύρος μετρήσεων}}.$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu}) = \min\left(\frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \frac{USL - \mu}{3\sigma}\right) = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}$$

όπου

$$d = \frac{USL - LSL}{2}, \quad M = \frac{USL + LSL}{2}.$$

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} δηλώνει την ικανότητα της διεργασίας προς τη μεριά του ορίου προδιαγραφών που ευθύνεται για την παραγωγή του μεγαλύτερου ποσοστού ελαττωματικών προϊόντων. Επίσης επειδή υπολογίζεται η ικανότητα της διεργασίας προς τη μεριά και των δύο ορίων προδιαγραφών μέσω των ποσοτήτων C_{pl} και C_{pu} , ο δείκτης C_{pk} (σε αντίθεση με τον δείκτη C_p) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις που για ένα προϊόν καθορίζεται μόνο ένα όριο προδιαγραφών (one-sided specifications). Επίσης η τιμή του δείκτη C_{pk}

ορίζεται να είναι ίση με μηδέν όταν ο μέσος της διεργασίας βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών και έτσι ο δείκτης C_{pk} δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές (Boyles 1991).

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$C_{pk} = \frac{1}{3} Z_{\min}$$

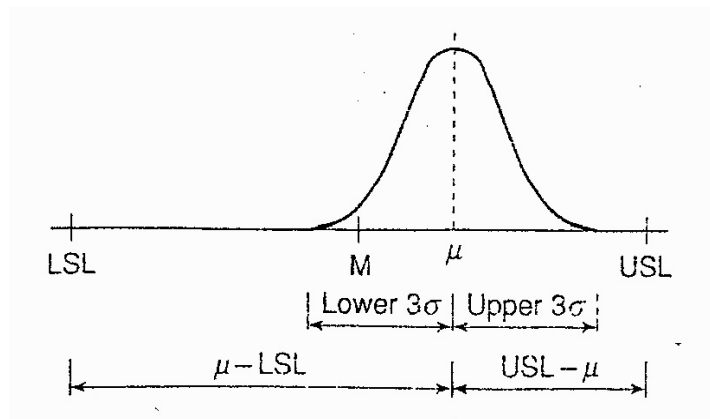
όπου

$$Z_{\min} = \min(Z_1, Z_2), \quad Z_1 = \frac{\mu - LSL}{\sigma}, \quad Z_2 = \frac{USL - \mu}{\sigma}$$

οπότε και οι δείκτες C_{pl} και C_{pu} γράφονται ως

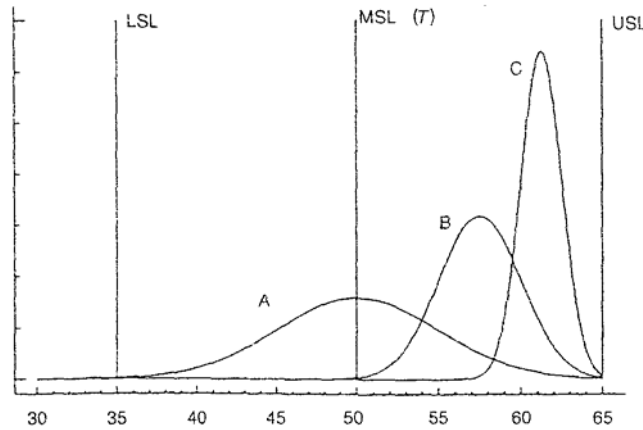
$$C_{pl} = \frac{Z_1}{3}, C_{pu} = \frac{Z_2}{3}.$$

Στο Διάγραμμα 3.1 δίνεται μια γραφική ερμηνεία του δείκτη ικανότητας C_{pk} . Η ποσότητα C_{pu} συγκρίνει το άνω πραγματικό εύρος των μετρήσεων που είναι ίσο με 3σ με την απόσταση μεταξύ του άνω ορίου προδιαγραφών USL και του μέσου μ της διεργασίας (άνω επιτρεπτό εύρος των μετρήσεων) που είναι ίση με $USL - \mu$. Αντίστοιχα, η ποσότητα C_{pl} συγκρίνει το κάτω πραγματικό εύρος των μετρήσεων που είναι ίσο με 3σ με την απόσταση μεταξύ του μέσου μ της διεργασίας και του κάτω ορίου προδιαγραφών LSL (κάτω επιτρεπτό εύρος της διεργασίας) που είναι ίση με $\mu - LSL$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο δείκτης C_{pk} μετρά πόσο κοντά είναι καθεμία ουρά της κατανομής της διεργασίας σε σχέση με το αντίστοιχο όριο προδιαγραφών και υπολογίζεται ως η χειρότερη από τις δύο περιπτώσεις.



Διάγραμμα 3.1: Γραφική ερμηνεία του δείκτη C_{pk}

Στο Διάγραμμα 3.2 ($MSL = M$) που παρουσιάστηκε από τον Boyles (1991) δίνονται τρεις διεργασίες A, B, C, οι οποίες έχουν κοινό δείκτη ικανότητας $C_{pk} = 1$.



Διάγραμμα 3.2: Τρεις διεργασίες με κοινό δείκτη $C_{pk} = 1$ και διαφορετική κατανομή

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι οι επιπτώσεις που επιφέρει η ταυτόχρονη αλλαγή του μέσου και της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας δεν αποτυπώνονται με σαφή τρόπο στην τιμή του δείκτη C_{pk} .

Στο Διάγραμμα 3.3 δίνονται μερικές διεργασίες ($LSL = 38$, $USL = 62$) με κοινή τυπική απόκλιση $\sigma = 2$ αλλά με διαφορετικούς μέσους μ ($\mu = 50, 53, 56, 62, 65$). Αν και όλες οι διεργασίες έχουν κοινό δείκτη C_p δεν συμβαίνει το ίδιο και με τον δείκτη C_{pk} . Όσο το μ απομακρύνεται από το M τόσο η τιμή του δείκτη ικανότητας C_{pk} μειώνεται και τόσο λιγότερο ικανή είναι η διεργασία. Προφανώς η ικανότερη διεργασία είναι αυτή που έχει τον υψηλότερο δείκτη C_{pk} . Συνεπώς ο δείκτης C_p δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες σε αυτή την περίπτωση για το ποία από τις διεργασίες είναι ικανότερη, σε αντίθεση με τον δείκτη C_{pk} . Άλλωστε η πιο βασική αδυναμία του δείκτη C_p είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη του τη θέση της διεργασίας και αυτή την αδυναμία έρχεται να καλύψει ο δείκτης C_{pk} .

Ας υποθέσουμε ότι μια διεργασία αποδίδει προϊόντα των οποίων οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού X κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), και έχουν καθοριστεί τα όρια προδιαγραφών LSL και USL . Τότε η πιθανότητα p'_{NC} να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν προς τη μεριά του ορίου προδιαγραφών που ευθύνεται για την παραγωγή του μεγαλύτερου ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων είναι ίση με

$$p'_{NC} = \Phi(-3C_{pk})$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$. Στο αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα διακρίνοντας δύο περιπτώσεις. Στην περίπτωση που $C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu}) = C_{pu}$, δηλαδή όταν

$$C_{pk} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$$

είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p'_{NC} = P(X > USL) = P\left(Z > \frac{USL - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > 3C_{pk}) = \Phi(-3C_{pk})$$

(ομοίως αντιμετωπίζεται και η περίπτωση $C_{pk} = \min(C_{pl}, C_{pu}) = C_{pl}$). Επίσης είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η πιθανότητα p_{NC} να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν ικανοποιεί την ανίσωση

$$\Phi(-3C_{pk}) \leq p_{NC} \leq 2\Phi(-3C_{pk})$$

αφού η πιθανότητα να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν προς τη μεριά του ορίου προδιαγραφών που ευθύνεται για την παραγωγή του μικρότερου ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα p'_{NC} , δηλαδή

$$p'_{NC} \leq p_{NC} \leq 2p'_{NC}.$$

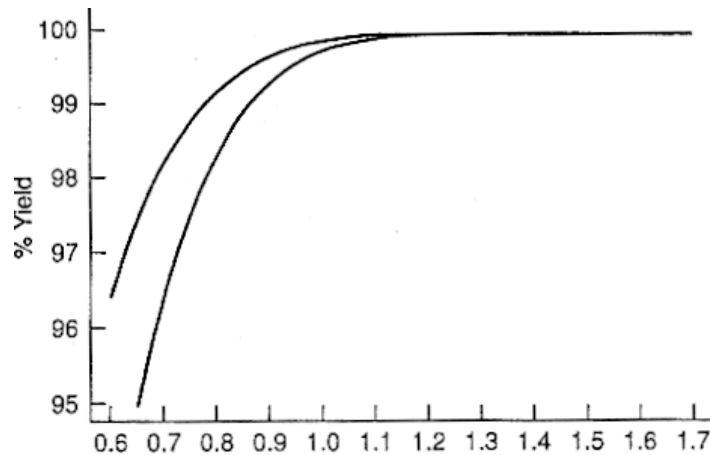
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πιθανότητα p_C να παραχθεί μη ελαττωματικό (conforming) προϊόν ικανοποιεί την ανίσωση

$$1 - 2\Phi(-3C_{pk}) \leq p_C \leq 1 - \Phi(-3C_{pk})$$

ή ισοδύναμα την ανίσωση

$$2\Phi(3C_{pk}) - 1 \leq p_C \leq \Phi(3C_{pk})$$

αφού $p_C = 1 - p_{NC}$. Ο Boyles (1991) παρουσίασε το ακόλουθο διάγραμμα όπου γίνεται γραφική παράσταση του κάτω και του άνω φράγματος της ποσότητας $100 p_C \%$ (σημειώνεται στο διάγραμμα ως % Yield), δηλαδή της απόδοσης της διεργασίας, συναρτήσει της τιμής του δείκτη C_{pk}



Διάγραμμα 3.4: Άνω και κάτω φράγμα για την απόδοσης μιας κανονικής διεργασίας συναρτήσει της τιμής του δείκτη C_{pk}

Ο Wierda (1994) μελέτησε τη σχέση μεταξύ της τιμής του δείκτη ικανότητας C_{pk} και της πιθανότητας p_C οι οποίες μπορεί να διαπιστωθεί ότι συνδέονται με τη σχέση

$$C_{pk} = \frac{1}{3} \min \left\{ \Phi^{-1} \left[p_C + \Phi \left(\frac{LSL - \mu}{\sigma} \right) \right], \Phi^{-1} \left[p_C + \Phi \left(\frac{\mu - USL}{\sigma} \right) \right] \right\}$$

και πρότεινε την ακόλουθη (συντηρητική) εκτίμηση για το δείκτη C_{pk} συναρτήσει της πιθανότητας p_C

$$\tilde{C}_{pk} \cong \frac{1}{3} \Phi^{-1}(p_C)$$

Γνωρίζοντας τους δύο δείκτες ικανότητας C_p και C_{pk} μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την πιθανότητα p_{NC} στην περίπτωση που $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ από τον τύπο

$$p_{NC} = \Phi(-3(2C_p - C_{pk})) + \Phi(-3C_{pk})$$

(για την απόδειξη, που είναι απλή, εξετάζονται χωριστά οι περιπτώσεις $C_{pk} = C_{pl}$ και $C_{pk} = C_{pu}$).

Στη συνέχεια αναφέρουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις που συνδέουν τους δείκτες ικανότητας C_p και C_{pk} . Για το δείκτη C_{pk} ισχύει προφανώς ότι $C_{pk} \leq C_p$, ενώ $C_{pk} = C_p$ αν και μόνο αν $\mu = M$, και $C_{pk} < C_p$ αν και μόνο αν $\mu \neq M$. Συνεπώς

$$C_{pk} = C_p \Leftrightarrow \mu = M$$

και

$$C_{pk} < C_p \Leftrightarrow \mu \neq M.$$

Προφανώς, σε μια διεργασία όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του C_{pk} ($\mu \rightarrow M \Rightarrow C_{pk} \uparrow$) τόσο πιο ικανή είναι η διεργασία. Επίσης ισχύουν οι σχέσεις

$$C_{pk} \leq C_{pu} \Rightarrow USL \geq \mu + 3\sigma C_{pk}$$

$$C_{pk} \geq C_{pl} \Rightarrow LSL \leq \mu - 3\sigma C_{pk}$$

Μια άλλη εναλλακτική προσέγγιση της σχέσης μεταξύ των δεικτών C_p και C_{pk} παρέχει ο δείκτης ικανότητας k που δίνεται από τη σχέση

$$k = \frac{|\mu - M|}{d} = \frac{|\mu - M|}{\frac{USL - LSL}{2}} = \frac{2 \left| \mu - \frac{LSL + USL}{2} \right|}{USL - LSL}.$$

Ο δείκτης ικανότητας k περιγράφει την ικανότητα της διεργασίας σε όρους της θέσης της διεργασίας μόνο (και όχι της μεταβλητότητας της διεργασίας) και παρέχει ένα μέτρο για το κατά πόσο η διεργασία βρίσκεται κοντά στο μέσο M του διαστήματος που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών. Στην περίπτωση που η τιμή στόχος T της διεργασίας δεν συμπίπτει με το M τότε χρησιμοποιείται ο δείκτης

$$k' = \frac{|T - \mu|}{\min(T - LSL, USL - T)}.$$

Όταν ο δείκτης $k = 0$, τότε η διεργασία είναι “κεντραρισμένη” στην θέση M . Όταν ο δείκτης $k = 1$, τότε η διεργασία είναι “κεντραρισμένη” σε κάποιο από τα δύο όρια προδιαγραφών. Όταν $0 < k < 1$ τότε ο μέσος της διεργασίας είναι τοποθετημένος μεταξύ του M και ενός ορίου προδιαγραφών και η απόστασή του από την τιμή M δίνεται από την τιμή του δείκτη k (σε μονάδες απόστασης της τιμής M από το αντίστοιχο όριο προδιαγραφών).

Οι τρεις δείκτες ικανότητας C_p , C_{pk} και k συνδέονται με την ενδιαφέρουσα σχέση

$$C_{pk} = C_p(1 - k).$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} = \frac{\frac{USL - LSL}{2} - |\mu - M|}{3\sigma} = C_p - \frac{|\mu - M|}{3\sigma} \\ &= C_p - \frac{(USL - LSL)|\mu - M|}{6\sigma \frac{USL - LSL}{2}} = C_p \left(1 - \frac{|\mu - M|}{d} \right) = C_p(1 - k) \end{aligned}$$

Η σχέση $C_{pk} = C_p(1 - k)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένας νέος ορισμός για τον δείκτη C_{pk} (ορίζουμε αξιωματικά ότι $C_{pk} = 0$ όταν $k > 1$). Παρατηρούμε ότι ο δείκτης C_{pk} αποτελείται από το γινόμενο δύο παραγόντων. Ο πρώτος παράγοντας είναι ο δείκτης ικανότητας C_p που λαμβάνει υπόψη του το μέγεθος της μεταβλητότητας της διεργασίας ενώ ο δεύτερος παράγοντας που είναι το $1 - k$ λαμβάνει υπόψη του τη θέση της διεργασίας. Η τιμή του παράγοντα $1 - k$ αυξάνεται όσο ο μέσος της διαδικασίας πλησιάζει την τιμή M . Όσο ο μέσος της διεργασίας βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών τότε η τιμή του k είναι πάντα μέσα στο διάστημα $[0, 1]$ και συνεπώς ισχύει ότι $C_{pk} \leq C_p$, με ισότητα όταν ο μέσος της διεργασίας συμπίπτει με το M (δηλαδή όταν $k = 0$).

Οι δείκτες ικανότητας C_p και C_{pk} αποτελούν τους ακρογωνιαίους λίθους της ανάλυσης της ικανότητας μιας διεργασίας. Οι δείκτες ικανότητας C_p και C_{pk} όταν χρησιμοποιούνται μαζί δίνουν μια πολύ καλή ένδειξη για το πόσο καλά λειτουργεί μια διεργασία. Οι περισσότεροι στατιστικοί χρησιμοποιούν και τους δύο δείκτες στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας.

Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι η τιμή 1.33 θεωρείται η τυπική ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο δείκτης C_{pk} μιας διεργασίας. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι για αυτή την τιμή του δείκτη C_{pk} τουλάχιστον το 75% της ζώνης που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών της διεργασίας χρησιμοποιείται από τη διεργασία. Το πρόγραμμα ποιοτικού ελέγχου Six Sigma της Motorola απαιτεί ελάχιστες τιμές για τους δείκτες C_p και C_{pk} ίσες με 2.0 και 1.5, αντίστοιχα, το οποίο ισοδυναμεί με 3.4 ελαττωματικά προϊόντα ανά 1,000,000 παραγόμενα προϊόντα (Harry (1986)). Η τιμή $C_{pk} = 2$ σημαίνει ότι ο μέσος της διεργασίας έχει απόσταση

από το κοντινότερο όριο προδιαγραφών το λιγότερο έξι τυπικές αποκλίσεις (Montgomery (1996)).

3.2 Εκτίμηση του δείκτη C_{pk}

Οι άγνωστοι παράμετροι που περιέχονται στον δείκτη ικανότητας C_{pk} και πρέπει να εκτιμηθούν είναι ο μέσος μ και η τυπική απόκλιση σ . Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του μ τον δειγματικό μέσο \bar{X} και της τυπικής απόκλισης σ τη δειγματική τυπική απόκλιση S προκύπτει ο ακόλουθος εκτιμητής \hat{C}_{pk} του δείκτη ικανότητας C_{pk}

$$\hat{C}_{pk} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{3S} = \min(\hat{C}_{pu}, \hat{C}_{pl})$$

όπου

$$d = \frac{USL - LSL}{2}, \quad M = \frac{LSL + USL}{2}, \quad \hat{C}_{pu} = \frac{USL - \bar{X}}{3S}, \quad \hat{C}_{pl} = \frac{\bar{X} - LSL}{3S}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} χρησιμοποιείται όταν έχουμε κανονικά, ανεξάρτητα δεδομένα, που βρίσκονται υπό στατιστικό έλεγχο. Έτσι οποιαδήποτε εκτίμηση για τον δείκτη ικανότητας C_{pk} είναι έγκυρη μόνο αν τα δεδομένα είναι κανονικά.

Οι Chou and Owen (1989) βρήκαν την κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_{pk} . Αρχικά παρατήρησαν ότι

$$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \bar{X}}{3S} = \frac{\sqrt{n}(USL - \mu)/\sigma - \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{3\sqrt{n}S/\sigma}$$

οπότε η ανίσωση $\hat{C}_{pu} \leq y$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma - \sqrt{n}(USL - \mu)/\sigma}{S/\sigma} \geq -3\sqrt{n}y$$

ή ισοδύναμα

$$T_f(\delta_1) = \frac{Z + \delta_1}{S/\sigma} \geq -3\sqrt{n}y$$

όπου $Z \sim N(0,1)$, $S/\sigma \sim \chi_{n-1}/\sqrt{n-1}$ και $\delta_1 = -\sqrt{n}(USL - \mu)/\sigma = -3\sqrt{n}C_{pu}$. Όμως η τυχαία μεταβλητή

$$T_f(\delta_1) \sim t_{n-1}(\delta_1)$$

όπου με $t_{n-1}(\delta_1)$ συμβολίζουμε την μη κεντρική t κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας με παράμετρο μη κεντρικότητας δ_1 . Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι η ανίσωση $\hat{C}_{pl} \leq y$ μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$T_f(\delta_2) \leq 3\sqrt{n}y$$

όπου $\delta_2 = \sqrt{n}(\mu - LSL)/\sigma = 3\sqrt{n}C_{pl}$, και

$$T_f(\delta_2) \sim t_{n-1}(\delta_2).$$

Αφού $\hat{C}_{pk} = \min(\hat{C}_{pu}, \hat{C}_{pl})$, τότε η ανισότητα $\hat{C}_{pk} \geq y$ είναι ισοδύναμη με τις ανισώσεις $\hat{C}_{pu} \geq y$ και $\hat{C}_{pl} \geq y$, δηλαδή $T_f(\delta_1) \leq -3\sqrt{n}y$ και $T_f(\delta_2) \geq 3\sqrt{n}y$. Συνεπώς η συνάρτηση κατανομής του εκτιμητή \hat{C}_{pk} δίνεται από τη σχέση

$$F_{\hat{C}_{pk}}(y) = 1 - P(\hat{C}_{pk} \geq y) = 1 - P\{T_f(\delta_1) \leq -3\sqrt{n}y, T_f(\delta_2) \geq 3\sqrt{n}y\}$$

και η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $(T_f(\delta_1), T_f(\delta_2))$ ακολουθεί τη διδιάστατη μη κεντρική t κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας και συντελεστή συσχέτισης ίσο με μονάδα (Owen (1985)). Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση οι Chou and Owen (1989) κατέληξαν στον ακόλουθο τύπο για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_{\hat{C}_{pk}}(y)$ του εκτιμητή \hat{C}_{pk}

$$g_{\hat{C}_{pk}}(y) = \begin{cases} 3\sqrt{n} \sum_{i=1}^2 g_{T_f(\delta_i)}(t_i), & y \leq 0 \\ 3\sqrt{n} \sum_{i=1}^2 \frac{f}{t_i} \left[Q_{f+2} \left(\sqrt{\frac{f+2}{f}} t_i, \delta_i; 0, R \right) - Q_f(t_i, \delta_i; 0, R) \right], & y > 0 \end{cases}$$

όπου

$$t_1 = -t_2 = -3\sqrt{n}y, \quad f = n-1, \quad \delta_1 = -3\sqrt{n}C_{pu}, \quad \delta_2 = 3\sqrt{n}C_{pl}, \quad R = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1} \sqrt{f},$$

και $g_{T_f(\delta_i)}(t_i)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μη κεντρικής κατανομής t με f βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας δ_i .

$$Q_f(t, \delta; 0, R) = C(f) \int_0^R \Phi\left(\frac{t_x}{\sqrt{f}} - \delta\right) x^{f-1} \Phi'(x) dx, \quad C(f) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right) 2^{(f-2)/2}}$$

($\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$). Οι Chou and Owen (1989) έδωσαν τους ακόλουθους τύπους για τη μέση τιμή και τη διακύμανση του εκτιμητή \hat{C}_{pk}

$$E[\hat{C}_{pk}] = C_{11} \left\{ C_p - \frac{2}{3\sqrt{n}} \Phi'(3\sqrt{n}D) - D[2\Phi(3\sqrt{n}D) - 1] \right\}$$

$$Var[\hat{C}_{pk}] = C_{22} C_p^2 - \frac{2}{3} C_{22} C_p E_0 + \frac{C_{20}}{9n} + C_{20} D^2 - \frac{C_{11}^2}{9} E_0^2$$

όπου

$$C_{11} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad C_{20} = \frac{n-1}{n-3}, \quad C_{22} = C_{20} - C_{11}^2,$$

$$D = C_p - C_{pk}, \quad E_0 = \frac{2}{\sqrt{n}} \Phi'(3\sqrt{n}D) + 3D[2\Phi(3\sqrt{n}D) - 1].$$

Οι Kotz και Johnson (1993) έδωσαν τον ακόλουθο τύπο για τη ροπή r -τάξης (γύρω από το 0) του εκτιμητή \hat{C}_{pk}

$$\begin{aligned} E[\hat{C}_{pk}^r] &= \frac{1}{3^r} E\left[\frac{1}{S^r}\right] \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} d^{r-j} E[|\bar{X} - M|^j] \\ &= \left(\frac{d\sqrt{n-1}}{3\sigma}\right)^r E[\chi_{n-1-r}] \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \left(\frac{\sigma}{d\sqrt{n}}\right)^j E\left[\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - M|}{\sigma}\right]^j \end{aligned}$$

Για $r=1$ προκύπτει ότι

$$E[\hat{C}_{pk}] = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{d}{\sigma} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left\{-\frac{n(\mu-M)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] - \frac{n(\mu-M)}{\sigma} \left\{ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}|\mu-M|}{\sigma}\right) \right\}$$

ενώ η διακύμανση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} Var[\hat{C}_{pk}] &= \frac{n-1}{9(n-3)} \left[\frac{2d}{\sigma} - \frac{2d}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left\{-\frac{n(\mu-M)^2}{2\sigma^2}\right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\mu-M|}{\sigma} \left\{ 1 - 2\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}|\mu-M|}{\sigma}\right) \right\} \right]^2 + \frac{(\mu-M)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{n} - (E[\hat{C}_{pk}])^2. \end{aligned}$$

Οι Kotz and Johnson (1993) έδειξαν ότι ο εκτιμητής \hat{C}_{pk} δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του δείκτη C_{pk} . Η μεροληψία του εκτιμητή είναι θετική όταν $\mu \neq M$. Όταν $\mu = M$, η μεροληψία είναι θετική όταν το μέγεθος του δείγματος $n = 10$ και γίνεται αρνητική για $n > 10$.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές για τις ποσότητες $E = E[\hat{C}_{pk}]$ και $SD = \sigma[\hat{C}_{pk}]$ για διάφορες τιμές των ποσοτήτων n , d/σ και $|\mu - M|/\sigma$

Πίνακας 3.1: Μέση τιμή $E = E[\hat{C}_{pk}]$ και τυπική απόκλιση $SD = \sigma[\hat{C}_{pk}]$ του εκτιμητή \hat{C}_{pk}

n	d/σ	$ \mu - M /\sigma$					
		0		1		2	
		E	SD	E	SD	E	SD
10	2	0.638	0.188	0.365	0.155	0.000	0.119
	3	1.002	0.282	0.729	0.231	0.365	0.155
	4	1.367	0.378	1.094	0.320	0.730	0.231
	5	1.732	0.476	1.459	0.414	1.094	0.320
	6	2.096	0.574	1.824	0.510	1.459	0.414
20	2	0.633	0.119	0.347	0.099	0.000	0.079
	3	0.980	0.176	0.694	0.144	0.347	0.099
	4	1.327	0.234	1.042	0.196	0.695	0.143
	5	1.674	0.293	1.389	0.253	1.042	0.196
	6	2.022	0.352	1.736	0.310	1.389	0.252
30	2	0.635	0.095	0.342	0.078	0.000	0.063
	3	0.977	0.139	0.685	0.113	0.342	0.079
	4	1.319	0.184	1.027	0.154	0.685	0.113
	5	1.662	0.230	1.369	0.198	1.027	0.154
	6	2.004	0.277	1.711	0.242	1.369	0.198
40	2	0.637	0.081	0.340	0.067	0.000	0.054
	3	0.977	0.119	0.680	0.096	0.340	0.067
	4	1.317	0.157	1.020	0.131	0.680	0.096
	5	1.657	0.196	1.360	0.168	1.020	0.131
	6	1.991	0.235	1.700	0.200	1.360	0.168
50	2	0.639	0.072	0.339	0.060	0.000	0.048
	3	0.977	0.105	0.667	0.085	0.339	0.060
	4	1.316	0.139	1.016	0.116	0.667	0.085
	5	1.655	0.174	1.354	0.148	1.016	0.116
	6	1.993	0.208	1.693	0.182	1.354	0.148

Για λόγους σύγκρισης παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα με τιμές του δείκτη

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}$$

για διάφορες τιμές των ποσοτήτων d/σ και $|\mu - M|/\sigma$.

Πίνακας 3.2: Τιμές του δείκτη C_{pk} για διάφορες τιμές των ποσοτήτων d/σ και $|\mu - M|/\sigma$

d/σ	$ \mu - M /\sigma$		
	0	1	2
2	0.67	0.33	0
3	1	0.67	0.33
4	1.33	1	0.67
5	1.67	1.33	1
6	2	1.67	1.33

3.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_{pk}

Η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk} είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις. Η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pk} παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες διότι η κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_{pk} εμπλέκει την από κοινού κατανομή δύο μη κεντρικών t κατανομών.

Ο Heavlin (1988) πρότεινε το ακόλουθο $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pk}

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_{a/2} \sqrt{\frac{n-1}{9n(n-3)} + \hat{C}_{pk}^2 \frac{1}{2(n-3)} \left(1 + \frac{6}{n-1}\right)}, \hat{C}_{pk} + z_{a/2} \sqrt{\frac{n-1}{9n(n-3)} + \hat{C}_{pk}^2 \frac{1}{2(n-3)} \left(1 + \frac{6}{n-1}\right)} \right)$$

Οι Franklin and Wasserman (1992) πρότειναν το ακόλουθο κάτω $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pk}

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_a \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)}}, +\infty \right)$$

το οποίο δίνει αρκετά ακριβή αποτελέσματα $n \geq 30$.

Ο Bisell (1990) υποθέτοντας ότι η κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_{pk} είναι κανονική πρότεινε το ακόλουθο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}

$$\hat{C}_{pk} \left(1 \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right)$$

που παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια.

Οι Nagata and Nagahata (1992) ανέπτυξαν το ακόλουθο $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}, \hat{C}_{pk} + z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}} \right).$$

Για το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης οι Nagata και Nagahata (1994) παρουσίασαν τον ακόλουθο πίνακα που δίνει τις πιθανότητες κάλυψης (coverage probabilities) για $n = 10$, $1-a = 0.95$, $C_{pk} = 0.40(0.30)1.6$ και $|d| = 0.00(0.10)1.00$

Πίνακας 3.3: Πιθανότητες κάλυψης του δείκτη ικανότητας C_{pk}

d	C_{pk}				
	0.40	0.70	1.00	1.30	1.60
0.00	0.952	0.949	0.948	0.948	0.948
0.10	0.970	0.962	0.957	0.955	0.953
0.20	0.965	0.959	0.956	0.954	0.953
0.30	0.958	0.955	0.953	0.953	0.952
0.40	0.953	0.952	0.952	0.952	0.952
0.50	0.951	0.952	0.952	0.951	0.951
0.60	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951
0.70	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951
0.80	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951
0.90	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951
1.00	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951

Αργότερα οι Nagata και Nagahata (1994) πρότειναν το ακόλουθο βελτιωμένο $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}

$$\left(\sqrt{1 - \frac{2}{5(n-1)} \hat{C}_{pk}} - z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}, \sqrt{1 - \frac{2}{5(n-1)} \hat{C}_{pk}} + z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}} \right).$$

Οι Kusler και Hurley (1992) πρότειναν κάτω $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk}

$$\left(\hat{C}_{pk} \left[\frac{1 - z_a}{(2n-2)^{1/2}} \right], +\infty \right)$$

ενώ ο Dovich (1992) πρότεινε το ακόλουθο $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης

$$\hat{C}_{pk} \left[\frac{1 \pm z_{a/2}}{(2n-2)^{1/2}} \right].$$

Οι Chou et al. (1990) έδωσαν πίνακες με προσεγγιστικές τιμές για το 95% κάτω όριο εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk} όταν γνωρίζουμε την τιμή του εκτιμητή \hat{C}_{pk} για

διάφορες τιμές του n . Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο απόσπασμα από τον πίνακα των Chou et al. (1990)

Πίνακας 3.4: 95% κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}

\hat{C}_{pk}	$n = 30$	$n = 50$	$n = 70$
1.0	0.72	0.79	0.83
1.1	0.80	0.87	0.91
1.5	1.12	1.21	1.26
1.667	1.25	1.35	1.40

Πρέπει να αναφερθεί ότι τα διαστήματα εμπιστοσύνης που αναπτύχθηκαν για τον δείκτη ικανότητας C_{pk} μιας κανονικής διεργασίας υποθέτουν ότι η τυπική απόκλιση σ εκτιμάται με την ποσότητα $\hat{\sigma} = S$. Οι Li et al. (1990) έδωσαν πίνακες με κατώτερα όρια εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk} στην περίπτωση που η παράμετρος σ εκτιμάται με την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$.

Στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας ο έλεγχος υπόθεσης που μας ενδιαφέρει είναι ο ακόλουθος

$$H_0 : \text{Η διεργασία δεν είναι ικανή} - H_1 : \text{Η διεργασία είναι ικανή}$$

Η παραπάνω υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση

$$H_0 : C_{pk} \leq c_0 - H_1 : C_{pk} > c_0$$

όπου c_0 είναι μια κρίσιμη τιμή για το δείκτη C_{pk} που συνήθως έχει τιμή 1.33 ή 1.67. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) είναι της μορφής $\hat{C}_{pk} > c$, όπου c είναι μια θετική τιμή.

Για τον παραπάνω έλεγχο δεν υπάρχει σχετική βιβλιογραφία.

3.4 Αδυναμίες του δείκτη C_{pk}

Ο δείκτης ικανότητας C_p δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες για την ικανότητα μιας διεργασίας αφού αγνοεί την θέση στην οποία βρίσκεται ο μέσος μ της διεργασίας σε σχέση με το σημείο M . Αν και ο δείκτης ικανότητας C_{pk} λαμβάνει υπόψη του το μέσο της διεργασίας, δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες για το πόσο κοντά βρίσκεται στο σημείο M .

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} δίνει πληροφορίες για το που βρίσκεται ο μέσος μ όταν $C_{pk} = 0$ (τότε ή $\mu = LSL$ ή $\mu = USL$). Για σταθερή απόσταση μεταξύ του μ και του M ο δείκτης ικανότητας C_{pk} μπορεί να πάρει διάφορες τιμές μειώνοντας ή αυξάνοντας την τυπική απόκλιση της διεργασίας. Επίσης δείξαμε στην Παράγραφο 3.1 ότι οι επιπτώσεις που επιφέρει η ταυτόχρονη αλλαγή του μέσου και της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας δεν αποτυπώνονται με σαφή τρόπο στην τιμή του δείκτη C_{pk} .

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} είναι ένας συνδυασμός δύο δεικτών, του δείκτη C_{pu} και του δείκτη C_{pl} . Συνεπώς ο δείκτης C_{pk} μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που ορίζεται μόνο ένα όριο προδιαγραφών. Αυτή η περίπτωση όμως εγκυμονεί σοβαρούς κινδύνους αφού ο δείκτης C_{pu} αγνοεί τα δεδομένα που βρίσκονται κοντά στο κάτω όριο προδιαγραφών. Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και για το C_{pl} . Για παράδειγμα αν $C_{pu} = 1.75$ και $C_{pl} = 0.67$ τότε ο δείκτης C_{pu} υπερεκτιμά την πραγματική ικανότητα της διαδικασίας ενώ ο δείκτης C_{pl} την υποεκτιμά.

Τέλος δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο δείκτης C_{pk} έχει νόημα να υπολογιστεί μόνο όταν έχουμε κανονικά, ανεξάρτητα δεδομένα, που βρίσκονται υπό στατιστικό έλεγχο. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται μεγάλο μέγεθος δείγματος για να εκτιμήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τον δείκτη C_{pk} όπως έδειξαν οι Chou et al. (1990).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ C_{pm}

4.1 Η συνάρτηση απώλειας $L(x)$

Οι δύο βασικότεροι δείκτες ικανότητας της πρώτης γενιάς, ο C_p και ο C_{pk} , δεν λαμβάνουν υπόψη τους την προκαθορισμένη τιμή στόχο T της διεργασίας. Οι πληροφορίες που μας δίνουν αυτοί οι δείκτες αναφέρονται κυρίως στην ικανότητα της διεργασίας να παράγει προϊόντα εντός των ορίων προδιαγραφών (μη ελαττωματικά προϊόντα) αλλά δεν μας δίνουν καμία πληροφορία για την ποιότητα των προϊόντων που παράγονται. Τα μη ελαττωματικά προϊόντα που έχουν τιμές εντός των ορίων προδιαγραφών αλλά πολύ κοντά σε αυτά θεωρούνται προϊόντα χαμηλής ποιότητας. Αυτή την αδυναμία των δεικτών ικανότητας της πρώτης γενιάς έρχεται να καλύψει η εισαγωγή των δεικτών ικανότητας δεύτερης γενιάς.

Στους δείκτες ικανότητας πρώτης γενιάς η μεταβλητότητα της διεργασίας αντικατοπτρίζεται στην ποσότητα

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$$

όπου X είναι η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει την τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που βρίσκεται υπό παρακολούθηση. Η ποσότητα σ^2 δεν μας δίνει πληροφορίες για τη μεταβλητότητα της διεργασίας γύρω από την τιμή στόχο T (εκτός και αν $T = \mu$) που δίνεται από τη σχέση

$$\tau^2 = E(X - T)^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2.$$

Οι Hsiang και Taguchi (1985) πρότειναν μια διαφορετική προσέγγιση που οδηγεί στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα προϊόντων και η οποία βασίζεται στην ελάττωση της ποσότητας τ^2 . Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση σε οποιαδήποτε τιμή X του ποιοτικού χαρακτηριστικού του προϊόντος αντιστοιχείται μια οικονομική απώλεια $L(X)$ (για τον πελάτη ή γενικότερα για την κοινωνία) που γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη όσο η τιμή X απομακρύνεται από την τιμή στόχο T του προϊόντος. Η συνάρτηση $L(\cdot)$ ονομάζεται συνάρτηση απώλειας (loss function) και οι Hsiang και Taguchi (1985) την όρισαν με τον τύπο

$$L(X) = k(X - T)^2$$

όπου k μια θετική σταθερά. Προφανώς αν $X = T$ (τέλειο προϊόν) τότε η οικονομική απώλεια είναι ίση με $L(T) = 0$.

Ο Boyles (1991) σημείωσε ότι η ικανότητα της διεργασίας μπορεί να αντιπροσωπευθεί από την αναμενόμενη απώλεια

$$E[L(X)] = kE[(X - T)^2] = k\tau^2 = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]$$

και προφανώς για $k = 1$ έχουμε ότι $E(L) = \tau^2$.

Η έννοια της αναμενόμενης απώλειας εκφράζει την ικανότητα της διεργασίας σε νομισματικές μονάδες και έτσι παρουσιάζεται μια φυσικότητα στην διαχείριση αποφάσεων που σχετίζονται με την παραγωγική διαδικασία. Από την άλλη μπορεί να είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιτύχεις συμφωνία μεταξύ κόστους παραγωγής και ικανοποίησης του πελάτη ή της κοινωνίας. Έτσι η οικονομική βάση της έννοιας της αναμενόμενης απώλειας είναι ταυτόχρονα και πλεονέκτημα αλλά και μειονέκτημα (επιλογή της σταθεράς k). Το βασικό χαρακτηριστικό αυτής της προσέγγισης είναι ότι η αναμενόμενη απώλεια είναι ανάλογη της ποσότητας $\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$ η οποία χρησιμοποιείται στην κατασκευή των δεικτών ικανότητας της δεύτερης γενιάς.

4.2 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pm}

Ο δείκτης ικανότητας C_{pm} ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

όπου

$$\tau = \sqrt{E(X - T)^2} = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}, \quad d = \frac{USL - LSL}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης C_{pm} διαφέρει από το δείκτη C_p , που δίνεται από τη σχέση

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

μόνο στον παρνομαστή όπου η ποσότητα $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ έχει αντικατασταθεί από την ποσότητα

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} \quad (\tau \geq \sigma).$$

Από τον ορισμό του δείκτη ικανότητας C_{pm} είναι προφανές ότι όσο μειώνεται (αυξάνεται) η διακύμανση σ^2 της διεργασίας, ο παρανομαστής μειώνεται (αυξάνεται) και ο δείκτης ικανότητας C_{pm} αυξάνεται (μειώνεται). Επίσης όσο μικραίνει (μεγαλώνει) η απόσταση του μέσου μ της διεργασίας από την τιμή στόχο T τότε ο παρανομαστής μειώνεται (αυξάνεται) και ο δείκτης ικανότητας C_{pm} αυξάνεται (μειώνεται).

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο δείκτης C_{pm} σχετίζεται με κάθε ένα από τους δείκτες C_p και C_{pk} σύμφωνα με τις σχέσεις

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} = \frac{C_{pk}}{\left(1 - \frac{|\mu - M|}{d}\right)\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}}.$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι για $|\mu - T| = 0$ (δηλαδή $\mu = T$) έχουμε $C_{pm} = C_p$, και επιπλέον για $\mu = T = M$ έχουμε ότι $C_{pm} = C_p = C_{pk}$ (αφού αν $\mu = M$ τότε $C_{pk} = C_p$). Επίσης αν $|\mu - T| \neq 0$ τότε $C_{pm} < C_p$ και για $|\mu - T| \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $C_{pm} \rightarrow 0$. Επίσης, αφού $\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} \geq |\mu - T|$ έχουμε ότι

$$C_{pm} \leq \frac{USL - LSL}{6|\mu - T|}$$

Συνεπώς για σταθερή τιμή της ποσότητας $|\mu - T|$ ο δείκτης ικανότητας C_{pm} είναι άνω φραγμένος σε αντίθεση με τους δείκτες C_p και C_{pk} που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μειώνοντας ή αυξάνοντας απλά την τιμή της τυπικής απόκλισης σ . Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι μια αναγκαία συνθήκη (αλλά όχι ικανή) για να ισχύει ότι $C_{pm} \geq 1$ είναι η

$$|\mu - T| \leq \frac{USL - LSL}{6}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν $C_{pm} \geq 1$ τότε ο μέσος της διεργασίας απέχει από την τιμή στόχο απόσταση μικρότερη του 1/6 του διαστήματος που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών. Στον ακόλουθο πίνακα δίνουμε συγκεντρωτικά τις βασικότερες ιδιότητες του εκτιμητή C_{pm} .

Πίνακας 4.1: Ιδιότητες του εκτιμητή C_{pm}

$\sigma \downarrow \Rightarrow C_{pm} \uparrow$
$ \mu - T \downarrow \Rightarrow C_{pm} \uparrow$
$\mu = T \Rightarrow C_{pm} = C_p$
$\mu = M = T \Rightarrow C_{pm} = C_p = C_{pk}$
$\mu \neq T \Rightarrow C_{pm} < C_p$
$ \mu - T \rightarrow \infty \Rightarrow C_{pm} \rightarrow 0$
$C_p \geq \max(C_{pk}, C_{pm})$

Συνήθως υποθέτουμε ότι η τιμή στόχος T της διεργασίας συμπίπτει με το μέσο του διαστήματος που ορίζουν τα δύο όρια προδιαγραφών, δηλαδή

$$T = M = \frac{LSL + USL}{2}.$$

Όταν $T \neq M$ υπάρχουν σοβαρά μειονεκτήματα στην ερμηνεία του δείκτη ικανότητας C_{pm} . Τη σύμβαση αυτή ($T = M$) θα την ακολουθήσουμε στη συνέχεια, εκτός και αν ρητά αναφερθεί το αντίθετο.

Οι Parlar και Wesolowsky (1999) έδωσαν τον ακόλουθο τύπο που συνδέει τους δείκτες C_p , C_{pk} και C_{pm} (για $T = M$)

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{C_p}{C_{pm}}\right)^2 - 1}$$

ή ισοδύναμα

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + 9(C_p - C_{pk})^2}}.$$

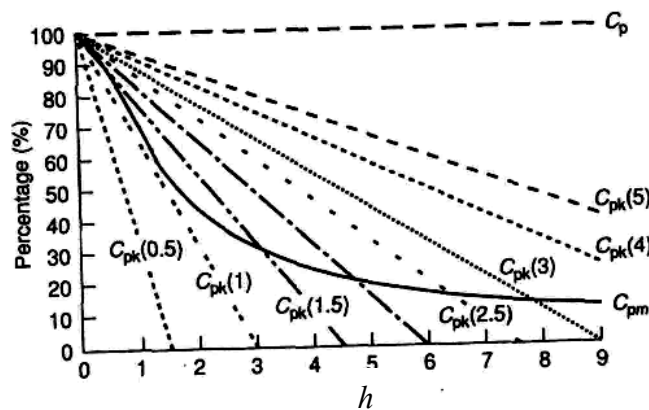
Το ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζει τη σχέση μεταξύ των τιμών του δείκτη ικανότητας C_{pk} και C_{pm} (Leung et al. (1997)) ως ποσοστά της τιμής του δείκτη C_p για δεδομένες τιμές της ποσότητας $h = |\mu - T| / \sigma$. Η τιμή του δείκτη C_{pm} ως ποσοστού του δείκτη C_p είναι ανεξάρτητη από την τιμή του δείκτη ικανότητας C_p , αφού

$$C_{pm} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} C_p.$$

Όμως η τιμή του δείκτη C_{pk} ως ποσοστού του δείκτη C_p δεν είναι ανεξάρτητη από την τιμή του δείκτη ικανότητας C_p , αφού

$$C_{pk} = C_p - \frac{h}{3}$$

(η τιμή του δείκτη C_{pk} σε σχέση με συγκεκριμένη τιμή του δείκτη C_p στο διάγραμμα σημειώνεται ως $C_{pk}(C_p)$)

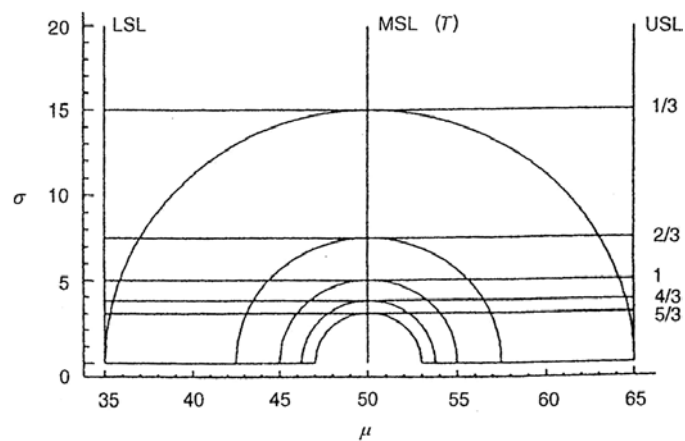


Διάγραμμα 4.1: Σχέση μεταξύ των δεικτών C_p , C_{pk} και C_{pm}

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται ένα (μ, σ) διάγραμμα των δεικτών ικανότητας C_p και C_{pm} . Επειδή η τιμή του δείκτη C_p είναι ανεξάρτητη της τιμής του μ η γραφική παράσταση των τιμών του δείκτη C_p στο διάγραμμα παριστάνεται με οριζόντιες γραμμές οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $C_p = 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3$. Από την άλλη το σύνολο των ζευγών (μ, σ) που ικανοποιούν τη σχέση $C_{pm} = c$ είναι το ημικύκλιο

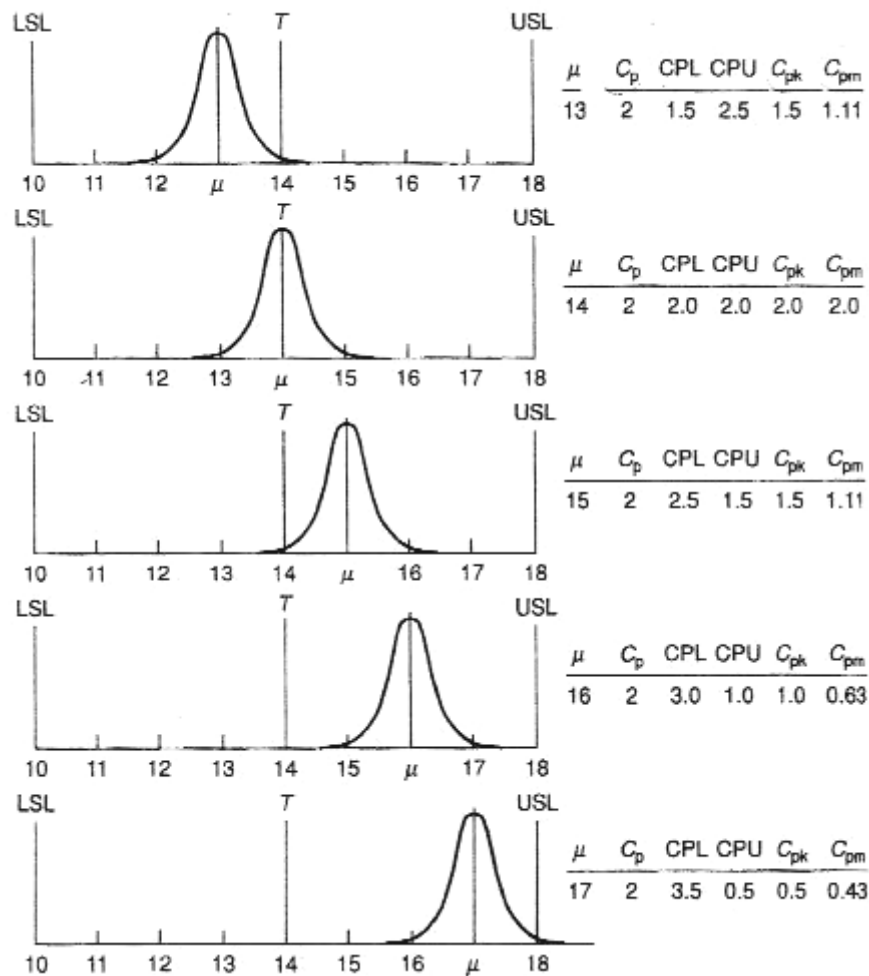
$$\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} = \frac{USL - LSL}{6c}$$

Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα αντίστοιχα ημικύκλια για $C_{pm} = c = 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3$ ($T = M \equiv MSL$).



Διάγραμμα 4.2: Γραφική παράσταση των δεικτών C_p και C_{pm} στο (μ, σ) επίπεδο.

Στο ακόλουθο διάγραμμα (Chan et al. (1988)) δίνονται τιμές των τριών δεικτών ικανότητας C_p , C_{pk} και C_{pm} για διάφορες διεργασίες στις οποίες $USL = 18$, $LSL = 10$, $T = M = 14$ και $\sigma = 2/3$.



Διάγραμμα 4.3: Τιμές των δεικτών ικανότητας C_p , C_{pk} και C_{pm} για διάφορες τιμές του μ .

Συγκρίνοντας τις τιμές των δεικτών C_{pk} και C_{pm} παρατηρούμε ότι ο δείκτης C_{pm} ενσωματώνει στην τιμή του μια επιπρόσθετη ποιινή όσο το μ απομακρύνεται από την τιμή στόχο T .

Έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια σχέσεις μεταξύ των δεικτών ικανότητας C_p και C_{pk} και της πιθανότητας να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν που είναι οι ακόλουθες

- $p_{NC} = 2\Phi(-3C_p)$ αν $\mu = M = \frac{USL + LSL}{2}$
- $p_{NC} \geq 2\Phi(-3C_p)$ για κάθε τιμή του μ
- $p_{NC} = \Phi(-3(2C_p - C_{pk})) + \Phi(-3C_{pk})$
- $\Phi(-3C_{pk}) \leq p_{NC} \leq 2\Phi(-3C_{pk})$

Οι Johnson και Kotz (1995) πραγματοποίησαν μια έρευνα για την σχέση μεταξύ του δείκτη ικανότητας C_{pm} και της πιθανότητας p_{NC} παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\sigma^2 = \left(\frac{d}{3C_{pm}} \right)^2 - (\mu - T)^2$$

μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι

$$\begin{aligned} p_{NC} &= 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{d}{3C_{pm}}\right)^2 - (\mu - T)^2}}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{d}{3C_{pm}}\right)^2 - (\mu - T)^2}}\right). \end{aligned}$$

Για $T = M$ έχουμε ότι

$$p_{NC} = 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{d}{3C_{pm}}\right)^2 - (\mu - M)^2}}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{d}{3C_{pm}}\right)^2 - (\mu - M)^2}}\right)$$

Αν επιπροσθέτως έχουμε ότι $\mu = M = T$ προκύπτει ότι

$$p_{NC} = 2\Phi(-3C_{pm})$$

αφού $d = USL - \mu = \mu - LSL$.

4.3 Εκτίμηση του δείκτη C_{pm}

Ας υποθέσουμε ότι μια διεργασία περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη διεργασία το (X_1, X_2, \dots, X_n) . Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της ποσότητας

$$\tau = \sqrt{E(X - T)^2}$$

τη στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\tau} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - T)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} + \frac{n(\bar{X} - T)^2}{n-1}} = \sqrt{S^2 + \frac{n}{n-1}(\bar{X} - T)^2}$$

προκύπτει ο ακόλουθος εκτιμητής \hat{C}_{pm} του δείκτη C_{pm} (δείτε Chan et al. (1988))

$$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\tau}}.$$

Οι ιδιότητες του παραπάνω εκτιμητή έχουν μελετηθεί από τους Chan et al. (1988). Αφού

$$\sum_{i=1}^n (X_i - T)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} + \frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2$$

είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η στατιστική

$$W = \frac{(n-1)\hat{\tau}^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί μη κεντρική χ^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και με παράμετρο μη κεντρικότητας λ ίση με

$$\lambda = \frac{n(\mu - T)^2}{\sigma^2}$$

(συμβ. $W \sim \chi_n^2(\lambda)$). Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στατιστικής W είναι ίση με

$$f(w) = \frac{e^{-(w+\lambda)/2}}{2^{n/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j w^{(n/2)+j-1}}{j! \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right) 2^{2j}}.$$

Παρατηρώντας ότι

$$W = \frac{a}{\hat{C}_{pm}^2}, \quad C_{pm} > 0$$

όπου

$$a = C_{pm}^2 \left(1 + \frac{\lambda}{n} \right) (n-1), \quad \lambda = \frac{n(\mu - T)^2}{\sigma^2}$$

είναι εύκολο να δειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(\cdot)$ του εκτιμητή \hat{C}_{pm} είναι ίση με

$$g(y) = \frac{a}{2^{(n/2)-1} y^3} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{y^2} + \lambda \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j \left(\frac{a}{y^2} \right)^{(n/2)+j-1}}{j! \Gamma \left(\frac{n}{2} + j \right) 2^{2j}} \right), \quad 0 < y < \infty$$

και

$$P(\hat{C}_{pm} > c) = \exp(-\lambda/2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2} \right)^j \int_0^{a/c^2} e^{-w/2} w^{(n/2)+j-1} dw}{j! 2^{(n/2)+j} \Gamma \left(\frac{n}{2} + j \right)}.$$

Αφού η στατιστική συνάρτηση

$$W = \frac{a}{\hat{C}_{pm}^2} \sim \chi_n^2(\lambda)$$

προκύπτει ότι

$$E[\hat{C}_{pm}] = a^{1/2} E(W^{-1/2})$$

και

$$Var[\hat{C}_{pm}] = a \{ E[W^{-1}] - (E[W^{-1/2}])^2 \}.$$

Οι στατιστικές ιδιότητες του εκτιμητή \hat{C}_{pm} στη γενική περίπτωση δεν είναι ελκυστικές.

Στην περίπτωση που $\mu = T$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η στατιστική

$$W = \frac{(n-1)\hat{t}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή χ_n^2 οπότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στατιστικής W είναι ίση με

$$f(w) = \frac{w^{(n/2)-1} e^{-w/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j w^{(n/2)+j-1}}{j! 2^{2j}}.$$

Παρατηρώντας ότι

$$W = \frac{C_{pm}^2 (n-1)}{\hat{C}_{pm}^2}$$

είναι εύκολο ναδειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(\cdot)$ του εκτιμητή \hat{C}_{pm} για $\mu = T$ είναι ίση με

$$g(y) = \frac{[C_{pm}(n-1)]^{n/2} \exp\left(-\frac{(n-1)C_{pm}^2}{2y^2}\right)}{2^{(n/2)-1} \Gamma(n/2) y^{(n+1)/2}}, \quad 0 < y < \infty.$$

Επίσης

$$E(\hat{C}_{pm}) = C_{pm} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$Var(\hat{C}_{pm}) = C_{pm}^2 \left(\frac{n-1}{2}\right) \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right\}.$$

Ο εκτιμητής \hat{C}_{pm} είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής του δείκτη C_{pm} για $\mu = T$.

Ο Boyles (1991) χρησιμοποίησε ως εκτιμητή της ποσότητας τ τη στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\tau}_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - T)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} + (\bar{X} - T)^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n} S^2 + (\bar{X} - T)^2}$$

αφού παρατήρησε ότι

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - T)^2\right) = \sigma^2 + (\mu - T)^2.$$

Έτσι κατέληξε στον εκτιμητή

$$\hat{C}_{pm(B)} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\tau}_B}.$$

Η στατιστική συνάρτηση $\hat{\tau}_B^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του

$$\tau^2 = E[(X - T)^2] = \sigma^2 + (\mu - T)^2.$$

Επίσης η στατιστική συνάρτηση $\hat{\tau}_B$ είναι εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του τ αφού \bar{X} και $(n-1)S^2/n$ είναι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας του μ και του σ^2 . Παρατηρώντας ότι

$$\hat{\tau}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) \hat{\tau}_B^2$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$E(\hat{\tau}^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\tau^2$$

$$Var(\hat{\tau}^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 Var(\hat{\tau}_B^2)$$

Συνεπώς η στατιστική $\hat{\tau}^2$ έχει μεγαλύτερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα στην εκτίμηση του τ^2 από την στατιστική συνάρτηση $\hat{\tau}_B^2$. Έτσι ο Boyles (1991) πρότεινε να χρησιμοποιείται ο εκτιμητής $\hat{C}_{pm(B)}$ για το δείκτη ικανότητας C_{pm} .

4.4 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm}

Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm} έχουν δοθεί από τον Boyles (1991). Ο Boyles παρατήρησε ότι η ποσότητα

$$\frac{n\hat{\tau}_B}{\sigma^2} \sim \chi_n^2(\lambda)$$

όπου

$$\lambda = \frac{n(\mu - T)^2}{\sigma^2} = n\zeta^2$$

και στη συνέχεια έδειξε ότι η ποσότητα

$$\frac{\hat{\tau}_B}{\tau} \stackrel{a}{\sim} \frac{\chi_\nu^2}{\nu}$$

όπου

$$\nu = \frac{n(1 + \zeta^2)^2}{1 + 2\zeta^2}.$$

Για μεγάλα ν έχουμε ότι

$$\frac{\hat{\tau}_B}{\tau} \stackrel{a}{\sim} N\left(1, \frac{1}{2\nu}\right).$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα του Boyles (1991) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία προσεγγιστικών διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pm} , παρατηρώντας ότι

$$\frac{C_{pm}}{\hat{C}_{pm(B)}} = \frac{\hat{\tau}_B}{\tau}$$

και ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\nu}$ του ν είναι ίσος με

$$\hat{\nu} = \frac{n(1 + \hat{\zeta}^2)^2}{1 + 2\hat{\zeta}^2}, \quad \hat{\zeta} = \frac{\bar{X} - T}{\sqrt{(n-1)S^2/n}}$$

Έτσι ένα προσεγγιστικό κάτω $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pm} είναι το ακόλουθο

$$\left(\hat{C}_{pm(B)} \sqrt{\frac{\chi_{\hat{\nu}, 1-a}^2}{\hat{\nu}}}, \infty \right)$$

και για μεγάλα $\hat{\nu}$ το

$$\left(\hat{C}_{pm(B)} \left(1 - z_a \sqrt{\frac{1}{2\hat{\nu}}} \right), \infty \right).$$

Ο Πίνακας 4.2 δίνει τιμές της ποσότητας $\sqrt{\chi_{\hat{\nu}, 1-a}^2 / \hat{\nu}}$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του $1-a$.

Πίνακας 4.2: Τιμές της ποσότητας $\sqrt{\chi_{\hat{\nu}, 1-a}^2 / \hat{\nu}}$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του $1-a$.

$\hat{\nu}$	100(1-a)%		
	90%	95%	99%
3	0.4414	0.3425	0.1956
5	0.5675	0.4786	0.3329
10	0.6975	0.6277	0.5058
20	0.7888	0.7366	0.6427
30	0.8286	0.7851	0.7060
40	0.8522	0.8141	0.7444
50	0.8682	0.8338	0.7708
60	0.8800	0.8484	0.7904
70	0.8891	0.8597	0.8057
80	0.8964	0.8688	0.8181
90	0.9024	0.8764	0.8283
100	0.9075	0.8828	0.8370

Ο Πίνακας 4.3 δίνει τιμές που πρέπει να υπερβαίνει ο εκτιμητής $\hat{C}_{pm(B)}$ για να ισχύει η σχέση $C_{pm} > 1$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του a (δείτε Boyles (1991)).

Πίνακας 4.3: Τιμές του $\hat{C}_{pm(B)}$ έτσι ώστε να ισχύει $C_{pm} > 1$ για διάφορες τιμές του $\hat{\nu}$ και του $1 - \alpha$.

$\hat{\nu}$	100(1 - α)%		
	90%	95%	99%
3	2.2658	2.9200	5.1113
5	1.7621	2.0893	3.0038
10	1.4337	1.5931	1.9771
20	1.2678	1.3576	1.5560
30	1.2068	1.2737	1.4164
40	1.1734	1.2284	1.3434
50	1.1518	1.1993	1.2974
60	1.1364	1.1787	1.2652
70	1.1248	1.1632	1.2411
80	1.1156	1.1510	1.2224
90	1.1081	1.1410	1.2072
100	1.1019	1.1328	1.1948

Επιπρόσθετες ιδιότητες του εκτιμητή $\hat{C}_{pm(B)}$ δίνονται από τους Kotz και Johnson (1993). Επίσης μια διαφορετική προσέγγιση εκτίμησης του δείκτη C_{pm} δίνεται από τους Pearn et al. (1992).

4.5 Έλεγχοι υποθέσεων για τον δείκτη C_{pm}

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας ο έλεγχος υπόθεσης που μας ενδιαφέρει είναι ο ακόλουθος

$$H_0 : \text{Η διεργασία δεν είναι ικανή} - H_1 : \text{Η διεργασία είναι ικανή}$$

Οι Chan et al. (1988) ακολούθησαν τη διαδικασία που πρότεινε ο Kane (1986) (δείτε Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.4) για τον έλεγχο της παραπάνω υπόθεσης βασιζόμενοι στο δείκτη ικανότητας C_{pm} στην περίπτωση που $\mu = T$. Έτσι ο παραπάνω έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$H_0 : C_{pm} < C_{pm}(low) - H_1 : C_{pm} > C_{pm}(high).$$

Αναφέραμε στην Παράγραφο 4.3 ότι στην περίπτωση που $\mu = T$ η στατιστική συνάρτηση

$$W = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

και ότι

$$W = \frac{C_{pm}^2(n-1)}{\hat{C}_{pm}^2}.$$

Συνεπώς

$$P(\hat{C}_{pm} \geq c) = P(\chi_n^2 \leq C_{pm}^2(n-1)/c^2).$$

Απαιτώντας η συνάρτηση ισχύος να επιβεβαιώνει τα σημεία $(C_p(low), a)$ και $(C_p(high), 1-\beta)$ και χρησιμοποιώντας ως περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) μια περιοχή της μορφής $\hat{C}_{pm} \geq c$ προκύπτει άμεσα ότι

$$a = \pi(C_p(low)) = P[\chi_n^2 \leq (n-1)(C_{pm}(low)/c)^2]$$

και

$$1-\beta = \pi(C_p(high)) = P[\chi_n^2 \leq (n-1)(C_{pm}(high)/c)^2].$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{C_{pm}(high)}{C_{pm}(low)} = \sqrt{\frac{\chi_{n,\beta}^2}{\chi_{n,1-a}^2}}$$

και

$$c = C_{pm}(low) \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n,1-a}^2}}.$$

Οι Chan et al. (1988) έδωσαν τον ακόλουθο πίνακα όπου για δεδομένα a , β , $C_p(high)$ και $C_p(low)$ μπορούμε να καθορίσουμε το μέγεθος του δείγματος n και την κρίσιμη τιμή c για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : C_{pm} < C_{pm}(low) - H_1 : C_{pm} > C_{pm}(high).$$

Πίνακας 4.4: Τιμές των ποσοτήτων $C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$ και $c/C_{pm}(low)$ για διάφορες τιμές των n , a , β

n	$a = \beta = 0.10$		$a = \beta = 0.05$	
	$C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$	$c/C_{pm}(low)$	$C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$	$c/C_{pm}(low)$
10	1.8127	1.3601	2.1555	1.5113
20	1.5111	1.2357	1.7014	1.3233
30	1.3979	1.1865	1.5385	1.2523
40	1.3354	1.1587	1.4503	1.2129
50	1.2946	1.1402	1.3935	1.1872
60	1.2655	1.1259	1.3532	1.1688
70	1.2433	1.1167	1.3228	1.1548
80	1.2258	1.1086	1.2988	1.1437
90	1.2115	1.1020	1.2794	1.1347
100	1.1995	1.0964	1.2632	1.1271

4.6 Συγγενικοί δείκτες ικανότητας

Στην περίπτωση που $T \neq M$, δηλαδή όταν $USL - T \neq T - LSL$, οι Chan et al. (1988) πρότειναν τη χρησιμοποίηση του δείκτη C_{pm}^* που ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pm}^* = \frac{\min(USL - T, T - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d - |T - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Προφανώς ο δείκτης C_{pm}^* “σχετίζεται” με το δείκτη C_{pm} όπως ο δείκτης C_{pk} “σχετίζεται” με το δείκτη C_p . Ο λόγος που εισήχθη ο δείκτης C_{pm}^* είναι ότι στην περίπτωση που $\mu = T \pm \delta$, $\delta > 0$, η τιμή του δείκτη C_{pm} δεν αλλάζει με αποτέλεσμα να μην είναι αποτελεσματικός. Από την άλλη μεριά ο δείκτης C_{pm}^* αλλάζει τιμή όταν $USL - T \neq T - LSL$. Αν $T = M$ τότε $C_{pm}^* = C_{pm}$. Επίσης αν $\mu = M$ τότε $C_{pm} = C_{pm}^* = C_{pk}$. Ο δείκτης ικανότητας C_{pm}^* μπορεί να εκτιμηθεί από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{C}_{pm}^* = \frac{(d - |T - M|)}{3} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - T)^2 \right\}.$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικές με το δείκτη C_{pm}^* δίνονται στην εργασία των Chan et al. (1988).

Ένας άλλος συγγενικός δείκτης του δείκτη ικανότητας C_{pm} είναι ο δείκτης C_{pm}^+ που πρότεινε ο Boyles (1995). Ο Boyles (1995) πρότεινε τη χρήση του δείκτη C_{pm}^+ στην περίπτωση που $USL - T \neq T - LSL$ και τον όρισε με τη σχέση

$$C_{pm}^+ = \frac{1}{3} \left[(T - LSL)^{-2} E_{X < T} [(X - T)^2] + (USL - T)^{-2} E_{X > T} [(X - T)^2] \right]^{-1/2}.$$

Ο Boyles (1995) κατέληξε στον παραπάνω ορισμό του δείκτη C_{pm}^+ χρησιμοποιώντας μια τμηματική συνάρτηση απώλειας της μορφής

$$L(X) = \begin{cases} k_1(X - T)^2, & X \leq T \\ k_2(X - T)^2, & X \geq T \end{cases}$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικές με το δείκτη C_{pm}^+ δίνονται στις εργασίες των Boyles (1995) και Kotz και Johnson (1993).

4.7 Αδυναμίες του δείκτη C_{pm}

Το βασικό μειονέκτημα του δείκτη ικανότητας C_{pm} είναι ότι παρόλο που λαμβάνει υπόψη του τη θέση του μέσου μ της διεργασίας σε σχέση με την τιμή στόχο T , δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη του τη θέση του μ σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ C_{pmk}

5.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pmk}

Οι δείκτες ικανότητας της πρώτης και της δεύτερης γενιάς αν και δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την ικανότητα μιας διεργασίας αφήνουν πολλά ερωτηματικά. Οι δείκτες της πρώτης και της δεύτερης γενιάς είναι αρκετά αποτελεσματικοί όταν η διεργασία περιγράφεται από μια κανονική κατανομή και οι παρατηρήσεις μας είναι ανεξάρτητες. Η παραβίαση των δύο αυτών συνθηκών ώθησε πολλούς ερευνητές τα τελευταία 20 χρόνια να προτείνουν δείκτες ικανότητας που να απαντούν στα παραπάνω προβλήματα. Ο σημαντικότερος δείκτης της τρίτης γενιάς είναι ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} που εισήχθη από τους Pearn et al.(1992). Ο δείκτης C_{pmk} είναι ένας συνδυασμός του δείκτη C_{pk} και του δείκτη C_{pm} και ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\tau} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Οι Choi και Owen (1990), ανεξάρτητα από τους Pearn et al.(1992), εισήγαγαν και αυτοί τον ίδιο δείκτη ικανότητας που τον συμβόλισαν με C_{pn} .

Ο δείκτης C_{pmk} μπορεί να γραφεί στις ισοδύναμες μορφές

$$C_{pmk} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} = \left(1 - \frac{|\mu - M|}{d}\right) C_{pm} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

και μια ενδιαφέρουσα σχέση που συνδέει τους τέσσερις δείκτες C_{pmk} , C_{pm} , C_p και C_{pk} είναι η ακόλουθη

$$C_{pmk} = \frac{C_{pm} C_{pk}}{C_p}.$$

Η λογική με την οποία προτάθηκε ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} είναι ότι ο δείκτης C_{pm} λαμβάνει υπόψη του τη θέση του μέσου μ της διεργασίας σε σχέση με την τιμή στόχο T

αλλά δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη τη θέση του μέσου μ σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών. Ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} χωρίς τον όρο $(\mu - T)^2$ στον παρονομαστή είναι ίδιος με τον δείκτη C_{pk} . Ο όρος $(\mu - T)^2$ στον παρονομαστή μπορεί να ερμηνευθεί ως μια επιπρόσθετη ποινή στην ικανότητα της διεργασίας που επιβάλλεται όταν ο μέσος μ της διεργασίας δεν ταυτίζεται με την τιμή στόχο T . Έτσι εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ευαισθησία στο δείκτη ικανότητας C_{pmk} σε σχέση με το δείκτη C_{pk} σε απομακρύνσεις του μέσου μ από την τιμή στόχο T . Προφανώς έχουμε ότι $C_{pmk} = C_{pk}$ αν $\mu = T$ και $C_{pmk} < C_{pk}$ αν $\mu \neq T$. Αν $\mu = M$ τότε $C_{pmk} = C_{pm}$ ανεξάρτητα από την τιμή της ποσότητας $|\mu - T|$. Από τη σχέση $C_{pk} \leq C_p$ προκύπτει ότι $C_{pmk} \leq C_{pm}$, ενώ αν $\mu \neq M$ τότε $C_{pmk} < C_{pm}$. Επίσης αν $|\mu - T| = 0$ τότε $C_{pmk} = C_{pk}$, και αν $\mu = T = M$ τότε $C_{pmk} = C_p$. Στον ακόλουθο πίνακα δίνουμε συγκεντρωτικά τις βασικότερες ιδιότητες του εκτιμητή C_{pmk}

Πίνακας 5.1: Ιδιότητες του εκτιμητή C_{pmk}

$\begin{aligned} \mu = M &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pm} \text{ (και } C_{pk} = C_p \text{)} \\ \mu = T &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pk} \text{ (και } C_{pm} = C_p \text{)} \\ \mu = M = T &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pm} = C_{pk} = C_p \\ &C_{pmk} \leq C_{pm} \end{aligned}$
--

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η πιθανότητα p_C να παραχθεί μη ελαττωματικό προϊόν (όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$) δίνεται από τον τύπο

$$p_C = P(LSL < X < USL) = \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right)$$

Αν $LSL \leq \mu \leq M$ τότε από τη σχέση

$$C_{pmk} = \frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

λαμβάνουμε ότι

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\mu - LSL}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu - T)^2}$$

οπότε (δείτε Perakis (2001))

$$p_C = \Phi \left(\frac{USL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{\mu - LSL}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu - T)^2}} \right) - \Phi \left(\frac{LSL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{\mu - LSL}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu - T)^2}} \right).$$

Στην περίπτωση που $M \leq \mu \leq USL$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_C = \Phi \left(\frac{USL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{USL - \mu}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu - T)^2}} \right) - \Phi \left(\frac{LSL - \mu}{\sqrt{\left(\frac{USL - \mu}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu - T)^2}} \right).$$

Για $\mu = M = T$ έχουμε ότι

$$USL - \mu = \mu - LSL = \frac{USL - LSL}{2}$$

οπότε οι δύο προαναφερθέντες τύποι ανάγονται στον τύπο

$$p_C = 2\Phi(3C_{pmk}) - 1.$$

Η τιμή της πιθανότητας p_C στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η μέγιστη τιμή της αφού η τιμή της πιθανότητας p_C μεγιστοποιείται για σταθερή τιμή του δείκτη C_{pmk} αν $\mu = M = T$.

Οι τέσσερις δείκτες ικανότητας $C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pmk}$ διατάσσονται σε σειρά, από τον πιο ευαίσθητο στον λιγότερο ευαίσθητο σε σχέση με την απομάκρυνση του μέσου μ της διεργασίας από την τιμή στόχο T , ως εξής: $C_{pmk}, C_{pm}, C_{pk}, C_p$.

5.2 Εκτίμηση του δείκτη C_{pmk}

Ας υποθέσουμε ότι μια διεργασία περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από τη διεργασία το

(X_1, X_2, \dots, X_n) . Οι Pearn et al.(1992) πρότειναν τον ακόλουθο εκτιμητή του δείκτη ικανότητας C_{pmk}

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} + (\bar{X} - T)^2}}.$$

Για $M = T$, διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με την ποσότητα $u = \sigma/\sqrt{n}$ προκύπτει ότι

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{\frac{d}{u} - \left| \frac{\bar{X} - T}{u} \right|}{3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X} - T}{u} \right)^2}}.$$

Παρατηρώντας ότι

$$\left(\frac{\bar{X} - T}{u} \right)^2 = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \sqrt{n} \frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_1^2(\lambda)$$

όπου

$$\lambda = n \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2$$

και

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{\frac{d}{u} - \chi_1(\lambda)}{3\sqrt{\chi_{n-1}^2 + \chi_1^2(\lambda)}}.$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα και ιδιότητες κατανομών οι Pearn et al. (1992) κατέληξαν στον ακόλουθο τύπο για τη ροπή r -τάξης του εκτιμητή \hat{C}_{pmk}

$$E[\hat{C}_{pmk}^r] = \frac{1}{3^r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \left[\frac{d}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} \right]^{r-i} e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n-r+i}{2} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n+i}{2} + j\right)}.$$

Συνεπώς

$$E[\hat{C}_{pmk}] = \frac{e^{-\lambda/2}}{3} \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left[\frac{d}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} \right]^{1-i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n-1+i}{2} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n+i}{2} + j\right)},$$

$$E[\hat{C}_{pmk}^2] = \frac{e^{-\lambda/2}}{9} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} \left[\frac{d}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} \right]^{2-i} e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n-2+i}{2} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + j\right) \Gamma\left(\frac{n+i}{2} + j\right)},$$

και

$$Var[\hat{C}_{pmk}] = E[\hat{C}_{pmk}^2] - \{E[\hat{C}_{pmk}]\}^2.$$

Εναλλακτικές εκφράσεις για το μέσο και τη διακύμανση του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} συναρτήσει ροπών μιας τυχαίας μεταβλητής J που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda/2$ ($J \sim P(\lambda/2)$) δίνονται από τους Pearn et al (1992). Όταν $\mu = M = T$ οι παραπάνω σχέσεις για τη μέση τιμή και τη διακύμανση του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} ανάγονται στις ακόλουθες σχέσεις

$$E[\hat{C}_{pmk}] = \frac{1}{3} \left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma} \frac{1}{R\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{n-1} \right)$$

$$Var[\hat{C}_{pmk}] = \frac{1}{9} \left(\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma} \right)^2 \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2R^2} \right] + \frac{1}{n} - \frac{4R^2}{\pi(n-1)^2} \right)$$

όπου

$$R = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον ακόλουθο πίνακα (δείτε Pearn et al (1992)), με τιμές για την μέση τιμή και την διακύμανση του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} όταν $M = T$.

Πίνακας 5.2: Μέση τιμή $E = E[\hat{C}_{pmk}]$ διακύμανση $V = \sigma^2[\hat{C}_{pmk}]$ του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} για $M = T$

n	d/σ	μ - M /σ					
		0		1		2	
		E	V	E	V	E	V
10	2	0.6363	0.0373	0.2641	0.0181	0.0065	0.0026
	4	1.3587	0.1380	0.7652	0.0581	0.3132	0.0088
	6	2.0812	0.3059	1.2664	0.1224	0.6199	0.0189
20	2	0.6328	0.0155	0.2490	0.0077	0.0031	0.0012
	4	1.3259	0.0560	0.7344	0.0241	0.3054	0.0040
	6	2.0189	0.1236	1.2198	0.0506	0.6077	0.0086
30	2	0.6350	0.0097	0.2444	0.0048	0.0020	0.0008
	4	1.3189	0.0350	0.7250	0.0152	0.3029	0.0026
	6	2.0028	0.0771	1.2055	0.0318	0.6038	0.0041
40	2	0.6372	0.0071	0.2422	0.0035	0.0015	0.0006
	4	1.3167	0.0254	0.7204	0.0111	0.3017	0.0019
	6	1.9962	0.0560	1.1986	0.0232	0.6019	0.0041
50	2	0.6391	0.0056	0.2408	0.0028	0.0012	0.0005
	4	1.3160	0.0200	0.7177	0.0087	0.3010	0.0015
	6	1.9928	0.0440	1.1945	0.0182	0.6008	0.0033

Αν συγκρίνουμε τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις των εκτιμητών \hat{C}_{pk} (δείτε Πίνακα 3.1) και \hat{C}_{pmk} αποκαλύπτονται τα ακόλουθα γενικά χαρακτηριστικά:

1. Για $\lambda = 0$ ($\mu = T$) οι τιμές $E(\hat{C}_{pmk})$ και $E(\hat{C}_{pk})$ είναι σχεδόν ίδιες για όλες τις τιμές του d/σ και για όλα τα μεγέθη δείγματος $n = 10(10)50$.
2. Για τιμές του $\frac{\mu - T}{\sigma} = 1.5$ και 2.0, οι τιμές $E(\hat{C}_{pmk})$ είναι σημαντικά μικρότερες από τις τιμές $E(\hat{C}_{pk})$. Σε μερικές περιπτώσεις για μεγάλες τιμές του n και του d/σ , η τιμή $E(\hat{C}_{pmk})$ είναι λιγότερη από το 50% της $E(\hat{C}_{pk})$.

3. Για τιμές του $\frac{\mu - T}{\sigma} = 0.5$ και 1.0 , οι τιμές $E(\hat{C}_{pmk})$ είναι κατά προσέγγιση τα $2/3$ της τιμής $E(\hat{C}_{pk})$.
4. Οι τιμές $Var(\hat{C}_{pmk})$ και $Var(\hat{C}_{pk})$ είναι σχεδόν ίδιες για $\lambda = 0$. Όμως για $\lambda \neq 0$, οι τιμές $Var(\hat{C}_{pmk})$ είναι πολύ μικρότερες από τις τιμές $Var(\hat{C}_{pk})$.

5.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη C_{pmk}

Οι Chen and Hsu (1995) μελέτησαν την ασυμπτωτική κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_{pmk} . Έδειξαν ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες η κατανομή του \hat{C}_{pmk} είναι ασυμπτωτικά κανονική και ότι ο \hat{C}_{pmk} είναι συνεπής και ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής του δείκτη ικανότητας C_{pmk} .

Οι Chen and Hsu (1995) έδωσαν ασυμπτωτικά κάτω $100(1-a)\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τον δείκτη ικανότητας C_{pmk} . Για $\mu = M$ έδειξαν ότι ένα προσεγγιστικό κάτω $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pmk} είναι το ακόλουθο

$$\left(\hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi_{\hat{v}, 1-a}^2}{\hat{v}}}, \infty \right)$$

όπου

$$\hat{v} = \frac{n(1 + \hat{\zeta}^2)^2}{1 + 2\hat{\zeta}^2}, \quad \hat{\zeta} = \frac{\bar{X} - T}{\sqrt{(n-1)S^2/n}}$$

επιβεβαιώνοντας το αντίστοιχο αποτέλεσμα του Boyles (1991) για το δείκτη ικανότητας C_{pm} (υπενθυμίζουμε ότι για $\mu = M$ ισχύει $C_{pm} = C_{pmk}$).

Για $\mu \neq M$ ένα ασυμπτωτικό $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης του δείκτη ικανότητας C_{pmk} είναι το ακόλουθο

$$\hat{C}_{pmk} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_{pmk}}{\sqrt{n}}$$

όπου

$$\hat{\sigma}_{pmk}^2 = \left(\frac{1}{9(1+\lambda^2)} + \frac{2\lambda}{3(1+\lambda^2)^{3/2}} \right) \hat{C}_{pmk} + \frac{144\lambda^2 + (USL - LSL) \left(\frac{m_4}{S_n^4} - 1 \right)}{144(1+\lambda^2)^2} \hat{C}_{pmk}^2$$

και

$$\lambda = \frac{\bar{X} - T}{S}, \quad m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4.$$

Έλεγχοι υποθέσεων ειδικά για τον δείκτη ικανότητας C_{pmk} δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς. Ωστόσο οι Pearn et al. (2001) ανέπτυξαν μια μεθοδολογία που επιτρέπει την πραγματοποίηση ελέγχου υποθέσεων για την πραγματική τιμή του δείκτη C_{pmk} .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΕΙΚΤΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

6.1 Ο δείκτης ικανότητας C_θ

Η πρώτη προσπάθεια για την ανάπτυξη δεικτών ικανότητας μιας διεργασίας που παράγει μη κανονικά δεδομένα τα οποία τα περιγράφει μια τυχαία μεταβλητή X πραγματοποιήθηκε από τον Pearn et al. (1992) που εισήγαγαν το δείκτη ικανότητας C_θ . Ο δείκτης ικανότητας C_θ ορίζεται με τη σχέση

$$C_\theta = \frac{USL - LSL}{\theta\sigma} = \frac{d}{\frac{1}{2}\theta\sigma}$$

όπου θ είναι μια σταθερά που επιλέγεται έτσι ώστε η πιθανότητα

$$P_\theta = P(\mu - \theta\sigma < X < \mu + \theta\sigma)$$

να είναι πολύ κοντά στη μονάδα και κατά το δυνατόν ανεξάρτητη από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X . Σε αντίθεση με άλλες τεχνικές ανάλυσης της ικανότητας μιας διεργασίας για μη κανονικά δεδομένα, οι οποίες κάνουν χρήση της ασυμμετρίας και της κύρτωσης της κατανομής, η τεχνική του Pearn et al. (1992) παρέχει μια γενική μέθοδο για οποιοδήποτε συνδυασμό ασυμμετρίας και κύρτωσης της κατανομής. Επομένως ο δείκτης C_θ είναι αρκετά ανθεκτικός στην παραβίαση της υπόθεσης των κανονικών δεδομένων.

Η επιλογή της τιμής της σταθεράς θ βασίζεται στην εργασία των Pearson και Tukey (1965), οι οποίοι εξήγαγαν τιμές της σταθεράς θ στην περίπτωση που η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ανήκει στην οικογένεια των κατανομών του Pearson Type III. Ο Πίνακας 6.1 δίνει ένα δείγμα της εργασίας των Pearson και Tukey (1965) για διάφορες κατανομές χ_n^2 .

Πίνακας 6.1: Τιμές του θ έτσι ώστε $P_\theta = P$ για την κατανομή χ_n^2

n	6	8	10	12	15	20	30	60	∞
β_1	1.33	1.00	0.80	0.67	0.53	0.40	0.27	0.13	0.00
β_2	5.00	4.50	4.20	4.00	3.80	3.60	3.40	3.20	3.00
θ για $P = 0.95$	3.82	3.84	3.85	3.87	3.88	3.89	3.90	3.91	3.92
θ για $P = 0.98$	4.60	4.61	4.62	4.62	4.63	4.63	4.64	4.64	4.65
θ για $P = 0.99$	5.16	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15	5.15

Στον παραπάνω πίνακα τα β_1 και β_2 ορίζονται ως εξής

$$\beta_1 = \alpha_3^2 = \frac{\mu_3^2}{\sigma^6}, \quad \beta_2 = \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad \mu_i = E[(X - E(X))^i], \quad i = 2, 3, 4$$

($\alpha_3 = \sqrt{\beta_1}$ είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας και $\alpha_4 = \beta_2$ είναι ο συντελεστής κύρτωσης).

Έτσι οι Pearn et al.(1992) κατέληξαν στις τιμές

$$\theta = 3.92 \text{ για } P_\theta \cong 0.95$$

$$\theta = 4.65 \text{ για } P_\theta \cong 0.98$$

$$\theta = 5.15 \text{ για } P_\theta \cong 0.99$$

Οι Pearn et al.(1992) πρότειναν τη χρήση της τιμής $\theta = 5.15$ για την οποία ισχύει ότι

$$\Pr(\mu - 5.15\sigma < X < \mu + 5.15\sigma) \cong 0.99$$

οπότε

$$C_{5.15} = \frac{USL - LSL}{5.15\sigma} = \frac{d}{\frac{5.15}{2}\sigma}$$

Η σύγκριση του παραπάνω δείκτη με τον δείκτη

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{\frac{6}{2}\sigma}$$

δείχνει ότι $C_6 = C_p$, και επιτρέπει την εισαγωγή αντίστοιχου δείκτη με το δείκτη C_{pk}

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} = \frac{d - |\mu - M|}{\frac{6}{2}\sigma}$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pk(\theta)} = \frac{d - |\mu - M|}{\frac{\theta}{2}\sigma}$$

Ο δείκτης C_θ μπορεί να εκτιμηθεί με τη σχέση

$$\hat{C}_\theta = \frac{USL - LSL}{\theta S}.$$

6.2 Ο δείκτης ικανότητας C_s

Ο Wright (1995) επέβαλλε στο δείκτη ικανότητας C_{pmk} μια επιπρόσθετη ποινή που σχετίζεται με την ασυμμετρία της κατανομής και δημιούργησε το δείκτη ικανότητας C_s που ορίζεται ως ακολούθως

$$C_s = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + \left|\frac{\mu_3}{\sigma}\right|}} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + \left|\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right|}} = \frac{\frac{d}{\sigma} - \left|\frac{\mu - M}{\sigma}\right|}{3\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2 + \sqrt{\beta_1}}}$$

όπου

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3, \quad \beta_1 = a_3^2 = \frac{\mu_3^2}{\sigma^6}.$$

Παράλληλα πρότεινε και τον εκτιμητή \hat{C}_s του δείκτη C_s που δίνεται από τη σχέση ($M = T$)

$$\hat{C}_s = \frac{d - |\bar{X} - T|}{3\sqrt{s^2 + (\bar{X} - T)^2 + \left|\frac{m_3}{s}\right|}}$$

όπου

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Οι Chen και Kotz (1996) μελέτησαν την ασυμπτωτική κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_s σε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις

1. $\mu = T$ και $\mu_3 = 0$
2. $\mu = T$ και $\mu_3 \neq 0$
3. $\mu \neq T$ και $\mu_3 = 0$

4. $\mu \neq T$ και $\mu_3 \neq 0$

Διαπίστωσαν ότι ο \hat{C}_s είναι συνεπής και ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής του C_s και στις τέσσερις περιπτώσεις. Επιπλέον έδειξαν ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του εκτιμητή \hat{C}_s είναι εξαιρετικά ευαίσθητη στην ασυμμετρία των δεδομένων. Επίσης τεκμηρίωσαν το συμπέρασμα του Wright (1995) ότι η ασυμπτωτική κατανομή του εκτιμητή \hat{C}_s είναι κανονική όταν $\mu \neq T$ και $\mu_3 \neq 0$, που δικαιολογεί την επιλογή του εκτιμητή \hat{C}_s για την αξιολόγηση της ικανότητας της διεργασίας για μεγάλα μεγέθη δειγμάτων ανεξάρτητα από την κατανομή τους. Γενικά ο δείκτης ικανότητας C_s παρέχει μια πολύ καλή στατιστική προσέγγιση στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας όταν ικανοποιούνται οι τρεις ακόλουθες συνθήκες

1. $USL - \mu \neq \mu - LSL$

2. $\mu \neq T$

3. $\mu_3 \neq 0$

Εντούτοις, η πρακτική σημασία του δείκτη C_s είναι αμφισβητήσιμη. Ο δείκτης C_s είναι σχετικά δύσκολο να υπολογιστεί και να κατανοηθεί από το μέσο επαγγελματία. Επιπλέον δεν υπάρχει καμία άμεση σύνδεση μεταξύ της πιθανότητας να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν και του δείκτη, δημιουργώντας στον επαγγελματία ερωτηματικά για το τι πραγματικά σημαίνει μια τιμή του δείκτη C_s .

6.3 Δείκτες ικανότητας για ασύμμετρες κατανομές με χρήση σταθμισμένης διακύμανσης

Οι Bai και Choi (1997) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της σταθμισμένης διακύμανσης και πρότειναν νέους δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας που παράγει μη κανονικά δεδομένα τα οποία περιγράφονται από μια τυχαία μεταβλητή X με μέσο μ_x και τυπική απόκλιση σ_x . Αυτή η τεχνική χρησιμοποιεί τις πιθανότητες

$$P_x = P(X < \mu_x) \quad \text{και} \quad 1 - P_x = P(X \geq \mu_x)$$

και σταθμίζει την τυπική απόκλιση σ_x που εμφανίζεται στους γνωστούς δείκτες ικανότητας με τα βάρη $\sqrt{2P_x}$ και $\sqrt{2(1-P_x)}$.

Έτσι ο νέος δείκτης ικανότητας C_p^w που πρότειναν οι Βαί και Choi (1997) που αντιστοιχεί στο δείκτη C_p δίνεται από τη σχέση

$$C_p^w = \min \left\{ \frac{USL - LSL}{6\sigma_x \sqrt{2P_x}}, \frac{USL - LSL}{6\sigma_x \sqrt{2(1-P_x)}} \right\} = \frac{USL - LSL}{6\sigma_x} \min \left(\frac{1}{\sqrt{2P_x}}, \frac{1}{\sqrt{2(1-P_x)}} \right)$$

$$= \frac{C_p}{W_x}$$

όπου

$$W_x = \max(\sqrt{2P_x}, \sqrt{2(1-P_x)}) = \sqrt{2} \max(\sqrt{P_x}, \sqrt{1-P_x}) = \sqrt{1+|1-2P_x|}.$$

Φυσικά για συμμετρικές κατανομές έχουμε ότι $P_x = 1/2$, και τότε $C_p^w = C_p$.

Ο Πίνακας 6.2 δίνει τον αναμενόμενο αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων ENC ανά 1,000,000 παραγόμενα προϊόντα ($ENC = 1,000,000 p_{NC}$) που αποδίδει μια διεργασία που περιγράφεται από μια κατανομή Weibull, δηλαδή

$$f_X(x) = \beta x^{\beta-1} e^{-x^\beta}, \quad x > 0$$

$$\mu_x = \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \quad \sigma_x^2 = \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right]^2$$

με

$$LSL = \mu_x - 3\sigma_x, \quad USL = \mu_x + 3\sigma_x$$

και τις αντίστοιχες τιμές του δείκτη C_p^w (για κανονικά δεδομένα με $C_p = 1$ έχουμε ότι $ENC = 2700$).

Πίνακας 6.2: Τιμές του δείκτη C_p^w για την κατανομή Weibull

a_3	β	P_x	ENC	C_p^w	C_p
0.00	3.56	0.500	695	1.00	1.00
0.50	2.21	0.535	4260	0.97	1.00
1.00	1.56	0.571	9796	0.94	1.00
1.50	1.21	0.604	14931	0.91	1.00
2.00	1.00	0.632	18316	0.89	1.00
2.50	0.86	0.656	20317	0.87	1.00
3.00	0.77	0.676	21248	0.86	1.00

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ο δείκτης C_{pk}^w που αντιστοιχεί στο δείκτη ικανότητας C_{pk} που δίνεται από τη σχέση

$$C_{pk}^w = \min \left\{ \frac{USL - \mu_x}{3\sigma_x \sqrt{2P_x}}, \frac{\mu_x - LSL}{3\sigma_x \sqrt{2(1-P_x)}} \right\},$$

ο δείκτης C_{pm}^w που αντιστοιχεί στο δείκτη ικανότητας C_{pm} που δίνεται από τη σχέση

$$C_{pm}^w = \frac{USL - LSL}{6\tau} \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2P_T}}, \frac{1}{\sqrt{2(1-P_T)}} \right\} = \frac{C_{pm}}{W_T}$$

όπου

$$P_T = P(X \leq T), \quad W_T = \sqrt{1 + |1 - 2P_T|}, \quad \tau = \sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T)^2}$$

και ο δείκτης C_{pm}^{*w} που αντιστοιχεί στο δείκτη ικανότητας C_{pm}^* που δίνεται από τη σχέση

$$C_{pm}^{*w} = \min \left\{ \frac{USL - T}{3\tau \sqrt{2P_T}}, \frac{T - LSL}{3\tau \sqrt{2(1-P_T)}} \right\}.$$

Για να εκτιμηθούν όλοι οι παραπάνω δείκτες πρέπει να εκτιμηθούν οι ποσότητες P_x , P_T , μ_x , σ_x . Οι πιθανότητες P_x και P_T μπορούν να εκτιμηθούν εμπειρικά ως το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με το μέσο \bar{X} ή την τιμή στόχο T , αντίστοιχα, δηλαδή

$$\hat{P}_x = \frac{\text{αριθμός παρατηρήσεων} \leq \bar{X}}{n},$$

$$\hat{P}_T = \frac{\text{αριθμός παρατηρήσεων} \leq T}{n}.$$

Επίσης

$$\hat{\mu}_x = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}_x = S.$$

6.4 Ο δείκτης ικανότητας C_{pc}

Ο δείκτης ικανότητας C_{pc} εισήχθη το 1996 από τον Luceno και σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να λαμβάνει υπόψη του τη θέση και τη μεταβλητότητα της διεργασίας και να προκύπτουν διαστήματα εμπιστοσύνης που να μην επηρεάζονται από την παραβίαση της υπόθεσης των κανονικών δεδομένων. Ο δείκτης C_{pc} ορίζεται ως ακολούθως

$$C_{pc} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\frac{\pi}{2}} E[|X - M|]}.$$

Ο παράγοντας $6\sqrt{\pi/2} \cong 7.52$ επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε όταν η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ο παρονομαστής του δείκτη C_{pc} να είναι ίσος με 6σ , οπότε σε αυτή την περίπτωση να ισχύει $C_{pc} = C_p$.

Η αναμενόμενη τιμή $E[|X - M|]$ εκτιμάται με την ποσότητα

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - M|$$

που οδηγεί στον ακόλουθο εκτιμητή του δείκτη C_{pc}

$$\bar{C}_{pc} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{c}}.$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $|X_i - M|$ για $i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και \bar{c} είναι ο μέσος όρος τους, από το κεντρικό οριακό θεώρημα προκύπτει ότι για μέτριες τιμές του n η κατανομή του \bar{c} είναι πολύ κοντά σε μια κανονική κατανομή με μέσο $E|X - M|$ και διακύμανση $Var[|X - M|]/n$. Ο Luceno (1996) παρατήρησε ότι η παραπάνω προσέγγιση είναι καλή ακόμα και όταν το n είναι μικρός αριθμός.

Έτσι ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την ποσότητα $E|X - M|$ είναι το ακόλουθο

$$\bar{c} \pm t_{n-1, a/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}}$$

όπου

$$s_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (|X_i - M| - \bar{c})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n |X_i - M|^2 - n\bar{c}^2 \right).$$

Ανάλογα ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pc} είναι το ακόλουθο

$$\frac{\bar{C}_{pc}}{1 \pm t_{n-1, a/2} [s_c / (\bar{c}\sqrt{n})]}.$$

Και τα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης δεν είναι ευαίσθητα όταν παραβιάζεται η υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων επειδή βασίζονται στο κεντρικό οριακό θεώρημα. Όταν η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και το n είναι μεγάλο τότε έχουμε ότι

$$\frac{s_c}{\bar{c}} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 = 0.7555$$

και έτσι το διάστημα εμπιστοσύνης του δείκτη C_{pc} μπορεί να προσεγγιστεί με τον ακόλουθο τύπο

$$\frac{\bar{C}_{pc}}{1 \pm 0.755 t_{n-1, a/2} / \sqrt{n}}$$

Επίσης ο Luceno (1996) εξέτασε τον έλεγχο

$$H_0 : C_{pc} = C_{pc_0} - H_1 : C_{pc} < C_{pc_0}$$

του οποίου η κρίσιμη περιοχή δίνεται από τη σχέση (σε επίπεδο σημαντικότητας a)

$$\left(\frac{\bar{C}_{pc}}{C_{pc_0}} - 1 \right) \frac{\bar{c} \sqrt{n}}{s_c} > t_{n-1, a}$$

6.5 Ο δείκτης ικανότητας C_{BP}

Μια σημαντική ασυμμετρική κατανομή που έχει πολλά πλεονεκτήματα είναι η δικανονική κατανομή (binormal distribution) που συμβολίζεται ως $BIN(\sigma_1, m, \sigma_2)$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Η δικανονική κατανομή αποτελείται από τα αριστερό και δεξιό μισό δύο διαφορετικών κανονικών κατανομών με τυπικές αποκλίσεις σ_1 και σ_2 και κοινό μέσο μ . Κάθε ένα κομμάτι σταθμίζεται σε αναλογία $2\sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2)$ για το αριστερό μισό και $2\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$ για το δεξιό μισό και το τελικό αποτέλεσμα είναι μια ασύμμετρη κατανομή με κορυφή το $m = \mu$.

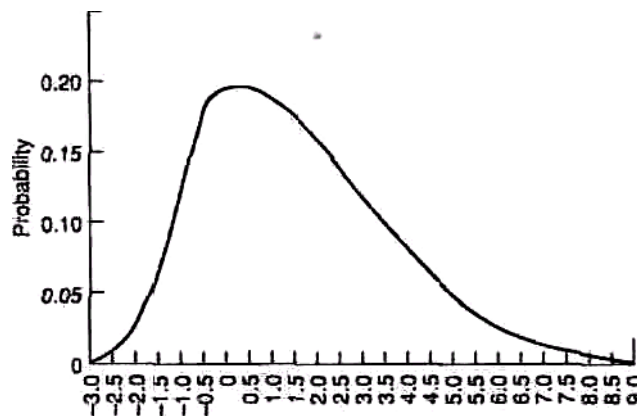
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δικανονικής κατανομής δίδεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_1}\right)^2\right], & -\infty < x < m \\ 1, & x = m \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_2}\right)^2\right], & m < x < \infty \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} f_1(x) & x < m \\ \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & x = m \\ \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} f_2(x) & x > m \end{cases}$$

όπου $f_1(x)$ και $f_2(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $N(m, \sigma_1^2)$ και $N(m, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα. Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της κατανομής $BIN(1,0,3)$



Διάγραμμα 6. 1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $BIN(1,0,3)$

Σύμφωνα με τον Garvin(1996) η δίκαιη κατανομή είναι πιο εύκολο να προσαρμοστεί σε περιπτώσεις που δεν έχουμε κανονικά δεδομένα σε σχέση με τις διπαραμετρικές οικογένειες κατανομών όπως του Pearson, των Bessel – Gram – Charlier και του Johnson. Επίσης έχει το

σημαντικό πλεονέκτημα να περιέχει ως ειδική περίπτωση και τη συνήθη κανονική κατανομή. Επίσης παρέχει καλή προσαρμογή σε περιπτώσεις που οι συνήθεις κατανομές όπως οι Gamma, lognormal, inverse Gaussian, Weibull δεν παρέχουν καλή προσαρμογή.

Ο Garvin(1996) ανέπτυξε ένα δείκτη ικανότητας μιας διεργασίας για δεδομένα τα οποία μπορούν να εκπροσωπηθούν επαρκώς από την δικανονική κατανομή. Ο συγκεκριμένος δείκτης ορίζεται ως ακολούθως

$$C_{BP} = \frac{USL - LSL}{3(\sigma_1 + \sigma_2)}.$$

Προφανώς για $\sigma_1 = \sigma_2$ ισχύει ότι $C_{BP} = C_p$.

6.6 Η μέθοδος του Clement

Όταν παραβιάζεται η υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων έχουμε συνήθως δύο βασικές επιλογές: (α) μετασχηματισμό των δεδομένων έτσι ώστε να προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μια κανονική κατανομή, και (β) χρησιμοποίηση της πραγματικής κατανομής των δεδομένων και κατασκευή “παρόμοιων” δεικτών ικανότητας. Πολλοί συγγραφείς συνιστούν την προσέγγιση του μετασχηματισμού των δεδομένων. Ο Guanter (1989), μεταξύ πολλών άλλων ερευνητών και στατιστικών, έχει διαπιστώσει ότι για αυτή τη γενική κατάσταση, τα αποτελέσματα για τα μετασχηματισμένα δεδομένα είναι καλύτερα από τα αποτελέσματα των ακατέργαστων στοιχείων. Προτάσεις για το μετασχηματισμό των δεδομένων μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Morrison (1958), Ferrell (1958) και Juran και Gryna (1980).

Για τη δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιούνται συνήθως ποσοστιαία σημεία της πραγματικής κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X που περιγράφει τα δεδομένα μας. Αν συμβολίσουμε με x_p το κάτω p -ποσοστιαίο της τυχαίας μεταβλητής X ($F(x_p) = p$ όπου $F(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X) τότε στην περίπτωση που η $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ έχουμε ότι

$$x_{0.5} = \mu, \quad x_{0.99865} = \mu + 3\sigma, \quad x_{0.00135} = \mu - 3\sigma.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε νέους δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας (οι οποίοι ανάγονται τους γνωστούς δείκτες ικανότητας όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

συναρτήσει των ποσοστιαίων σημείων $x_{0.5}$, $x_{0.99865}$ και $x_{0.00135}$ της τυχαίας μεταβλητής X ως ακολούθως:

$$C'_p = \frac{USL - LSL}{x_{0.99865} - x_{0.00135}},$$

$$C'_{pk} = \min\left(\frac{x_{0.5} - LSL}{x_{0.5} - x_{0.00135}}, \frac{USL - x_{0.5}}{x_{0.99865} - x_{0.5}}\right),$$

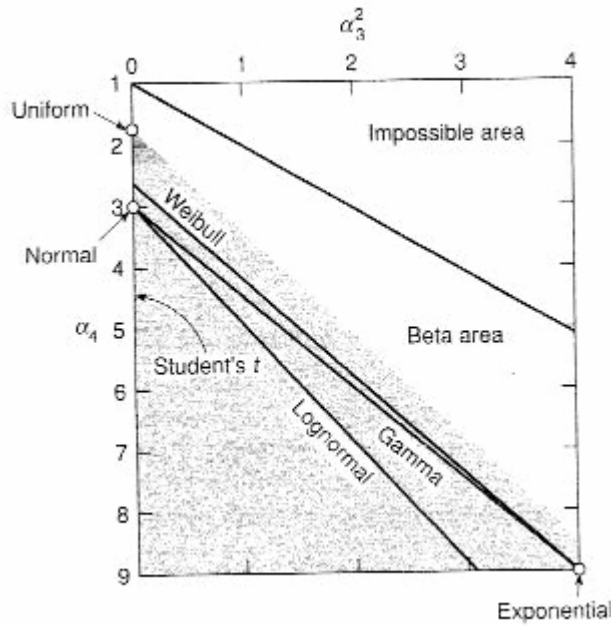
$$C'_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{x_{0.99865} - x_{0.00135}}{6}\right)^2 + (x_{0.5} - T)^2}},$$

$$C'_{pmk} = \min\left(\frac{x_{0.5} - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{x_{0.5} - x_{0.00135}}{3}\right)^2 + (x_{0.5} - T)^2}}, \frac{USL - x_{0.5}}{3\sqrt{\left(\frac{x_{0.99865} - x_{0.5}}{3}\right)^2 + (x_{0.5} - T)^2}}\right).$$

Στο Διάγραμμα 6.2 δίνεται μια γραφική παράσταση στο επίπεδο (a_3^2, a_4) όπου a_3 είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας και a_4 είναι ο συντελεστής κύρτωσης, δηλαδή

$$a_3^2 = \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\sigma^6}, \quad a_4 = \beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad \mu_i = E[(X - E(X))^i],$$

που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλεγθεί το καλύτερο εναλλακτικό μοντέλο για τα δεδομένα της διεργασίας και συνεπώς για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $x_{0.5}$, $x_{0.99865}$ και $x_{0.00135}$.



Διάγραμμα 6. 2: Χαρακτηρισμός κατανομών βασισμένος στις ποσότητες a_3^2 και a_4

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 6.2 παρατηρούμε ότι τα χαρακτηριστικά ενός ιδιαίτερου συνόλου δεδομένων που περιγράφεται από ένα ζευγάρι (a_3, a_4) ενδεχομένως να μην αντιστοιχεί σε μια ειδική κατανομή. Σε αυτήν την περίπτωση η κατασκευή μοντέλων μέσω μιας οικογένειας κατανομών μπορεί να είναι η καταλληλότερη. Για το πρόβλημα της επιλογής της κατάλληλης κατανομής που περιγράφει τη διεργασία συνήθως επιλέγουμε την κατανομή από την οικογένεια κατανομών του Pearson ή του Johnson χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που μας δίνουν ο συντελεστής ασυμμετρίας και κύρτωσης.

Η εύρεση των ποσοτήτων $x_{0.5}$, $x_{0.99865}$ και $x_{0.00135}$ γίνεται στην πράξη με την μέθοδο Clement. Ο Clement πινακοποίησε τιμές των ποσοτήτων $z'_{0.5}$, $z'_{0.99865}$, $z'_{0.00135}$ που δηλώνουν τα ποσοστιαία σημεία που αντιστοιχούν σε μια οποιαδήποτε τυποποιημένη κατανομή από την οικογένεια των κατανομών του Pearson συναρτήσει του συντελεστή ασυμμετρίας και κύρτωσης των αρχικών δεδομένων.

Η τεχνική του Clement χρησιμοποιεί τα ακόλουθα βήματα για την εκτίμηση των δεικτών C_p και C_{pk} στην περίπτωση μη κανονικών δεδομένων.

1. Υπολογίζουμε το μέσο \bar{X} , την τυπική απόκλιση S , το συντελεστή ασυμμετρίας $Sk = a_3^2$ και κύρτωσης $Ku = a_4 - 3$ των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας.

2. Με βάση τις εκτιμήσεις S_k και K_u (Βήμα 1), χρησιμοποιούμε τους Πίνακες 6.3 και 6.4 για να υπολογίσουμε τα $z'_{0.5}$, $z'_{0.99865}$, $z'_{0.00135}$ ως ακολούθως

Για το $z'_{0.00135}$ $\begin{cases} \text{χρησιμοποιούμε τον πίνακα 6.3 για θετική ασυμμετρία} \\ \text{χρησιμοποιούμε τον πίνακα 6.4 για αρνητική ασυμμετρία} \end{cases}$

Για το $z'_{0.99865}$ $\begin{cases} \text{χρησιμοποιούμε τον πίνακα 6.4 για θετική ασυμμετρία} \\ \text{χρησιμοποιούμε τον πίνακα 6.3 για αρνητική ασυμμετρία} \end{cases}$

3. Υπολογίζουμε το $z'_{0.5}$ χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 6.5 όπου
- για θετική ασυμμετρία χρησιμοποιούμε την αντίθετη τιμή του Πίνακα 6.5
 - για αρνητική ασυμμετρία χρησιμοποιούμε την τιμή του Πίνακα 6.5

4. Υπολογίζουμε το $x_{0.00135}$ με τον τύπο

$$x_{0.00135} = \bar{X} + z'_{0.00135}S$$

όπου

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

5. Υπολογίζουμε το $x_{0.50}$ με τον τύπο

$$x_{0.50} = \bar{X} + z'_{0.5}S$$

6. Υπολογίζουμε το $x_{0.99865}$ με τον τύπο

$$x_{0.99865} = \bar{X} + z'_{0.99865}S$$

7. Εκτιμούμε τους δείκτες ικανότητας της διεργασίας.

Πίνακας 6.3: Τιμές των ποσοτήτων $z'_{0.00135}$ για $a_3 \geq 0$ και $z'_{0.99865}$ για $a_3 < 0$

Kurtosis (Ku)	Skewness (Sk)																				Ku	
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9		2.0
-1.4	1.512	1.421	1.317	1.206	1.092	0.979	0.868	0.762														-1.4
-1.2	1.727	1.619	1.496	1.364	1.092	1.100	0.975	0.858	0.747													-1.2
-1.0	1.966	1.840	1.696	1.541	1.230	11.232	1.089	0.957	0.836													-1.0
-0.8	2.210	2.072	1.912	1.736	1.384	1.377	1.212	1.062	0.927	0.804	0.692											-0.8
-0.6	2.442	2.298	2.129	1.941	1.55	1.539	1.348	1.175	1.023	0.887	0.766	0.656										-0.6
-0.4	2.663	2.506	2.335	2.141	1.740	1.711	1.496	1.299	1.125	0.974	0.841	0.723	0.616									-0.4
-0.2	2.839	2.692	2.522	2.329	1.930	1.887	1.655	1.434	1.235	1.065	0.919	0.791	0.677	0.574								-0.2
0.0	3.000	2.856	2.689	2.500	2.116	2.059	1.817	1.578	1.356	1.163	1.000	0.861	0.739	0.630	0.531							0.0
0.2	3.140	2.966	2.834	2.653	2.289	2.220	1.976	1.726	1.485	1.269	1.086	0.933	0.801	0.686	0.583							0.2
0.4	3.261	3.088	2.952	2.785	2.447	2.368	2.127	1.873	1.619	1.382	1.178	1.008	0.865	0.742	0.634	0.536						0.4
0.6	3.366	3.164	3.045	2.896	2.589	2.502	2.267	2.015	1.754	1.502	1.277	1.087	0.931	0.799	0.685	0.583	0.489					0.6
0.8	3.458	3.222	3.118	2.986	2.714	2.622	2.396	2.148	1.887	1.625	1.381	1.172	1.000	0.857	0.736	0.629	0.533					0.8
1.0	3.539	3.266	3.174	3.058	2.821	2.727	2.512	2.271	2.013	1.748	1.491	1.262	1.072	0.917	0.787	0.675	0.575	0.484				1.0
1.2	3.611	3.300	3.218	3.115	2.910	2.817	2.610	2.385	2.132	1.876	1.602	1.357	1.149	0.979	0.840	0.721	0.617	0.524				1.2
1.4	3.674	3.327	3.254	3.161	2.983	2.893	2.708	2.488	2.243	1.981	1.713	1.456	1.230	1.045	0.894	0.768	0.659	0.562	0.475			1.4
1.6	3.731	3.349	3.282	3.199	3.043	2.957	2.787	2.581	2.345	2.089	1.821	1.556	1.316	1.113	0.950	0.815	0.701	0.600	0.510			1.6
1.8	3.782	3.367	3.306	3.229	3.092	3.011	2.855	2.664	2.438	2.189	1.925	1.664	1.404	1.185	1.008	0.863	0.743	0.638	0.546	0.461		1.8
2.0	3.828	3.382	3.325	3.255	3.133	3.055	2.914	2.736	2.524	2.283	2.023	1.755	1.494	1.261	1.068	0.913	0.785	0.676	0.580	0.494		2.0
2.2	3.870	3.395	3.342	3.277	3.167	3.093	2.964	2.800	2.600	2.369	2.116	1.850	1.584	1.339	1.132	0.964	0.828	0.714	0.615	0.526	0.445	2.2
2.4	3.908	3.405	3.356	3.295	3.196	3.126	3.006	2.855	2.669	2.448	2.202	1.940	1.673	1.420	1.198	1.018	0.873	0.752	0.649	0.557	0.475	2.4
2.6	3.943	3.415	3.367	3.311	3.220	3.153	3.043	2.904	2.730	2.521	2.283	2.026	1.760	1.501	1.267	1.073	0.918	0.791	0.683	0.589	0.504	2.6
2.8	3.975	3.423	3.378	3.324	3.241	3.177	3.075	2.946	2.784	2.586	2.358	2.107	1.844	1.581	1.338	1.131	0.965	0.830	0.717	0.620	0.533	2.8
3.0	4.004	3.430	3.387	3.326	3.259	3.198	3.103	2.983	2.831	2.646	2.427	2.183	1.924	1.661	1.410	1.191	1.013	0.870	0.752	0.651	0.562	3.0
3.2	4.031	3.436	3.395	3.346	3.274	3.216	3.127	3.015	2.874	2.699	2.491	2.254	2.000	1.738	1.483	1.253	1.063	0.911	0.787	0.681	0.590	3.2
3.4	4.056	3.441	3.402	3.356	3.268	3.233	3.149	3.043	2.911	2.747	2.549	2.321	2.072	1.813	1.555	1.317	1.115	0.953	0.822	0.712	0.618	3.4
3.6	4.079	3.446	3.408	3.364	3.311	3.247	3.168	3.069	2.945	2.790	2.602	2.383	2.140	1.884	1.626	1.381	1.169	0.996	0.858	0.744	0.646	3.6
3.8	4.101	3.450	3.414	3.371	3.321	3.259	3.184	3.091	2.974	2.829	2.651	2.440	2.205	1.953	1.695	1.446	1.224	1.041	0.895	0.775	0.674	3.8
4.0	4.121	3.454	3.419	3.378	3.329	3.271	3.200	3.111	3.001	2.864	2.695	2.494	2.265	2.018	1.762	1.510	1.281	1.088	0.932	0.807	0.702	4.0
4.2	4.140	3.458	3.423	3.384	3.337	3.281	3.213	3.129	3.025	2.895	2.735	2.543	2.321	2.080	1.827	1.574	1.338	1.135	0.971	0.839	0.730	4.2
4.4	4.157	3.461	3.428	3.389	3.344	3.290	3.225	3.145	3.047	2.923	2.771	2.588	2.374	2.138	1.889	1.636	1.396	1.184	1.011	0.872	0.758	4.4
4.6	4.174	3.464	3.431	3.394	3.350	3.299	3.236	3.160	3.066	2.949	2.805	2.629	2.424	2.194	1.948	1.697	1.453	1.234	1.052	0.905	0.786	4.6
4.8	4.189	3.466	3.435	3.399	3.356	3.306	3.246	3.173	3.084	2.972	2.835	2.668	2.470	2.246	2.005	1.756	1.510	1.285	1.094	0.939	0.815	4.8
5.0	4.204	3.469	3.438	3.403	3.362	3.313	3.256	3.186	3.100	2.994	2.863	2.703	2.513	2.296	2.059	1.813	1.566	1.336	1.137	0.975	0.844	5.0
5.2	4.218	3.471	3.441	3.406	3.367	3.320	3.264	3.197	3.114	3.013	2.888	2.735	2.562	2.342	2.111	1.867	1.621	1.387	1.181	1.010	0.874	5.2
5.4	4.231	3.473	3.444	3.410	3.371	3.336	3.272	3.207	3.128	3.031	2.911	2.765	2.589	2.386	2.160	1.920	1.675	1.438	1.225	1.047	0.904	5.4
5.6	4.243	3.475	3.446	3.413	3.375	3.341	3.279	3.216	3.140	3.047	2.933	2.793	2.624	2.427	2.206	1.970	1.727	1.489	1.270	1.085	0.935	5.6
5.8	4.255	3.477	3.448	3.416	3.379	3.345	3.286	3.225	3.152	3.062	2.952	2.818	2.656	2.465	2.250	2.019	1.778	1.539	1.316	1.123	0.966	5.8
6.0	4.266	3.478	3.451	3.419	3.383	3.349	3.292	3.233	3.162	3.076	2.970	2.841	2.685	2.501	2.292	2.065	1.827	1.588	1.361	1.162	0.999	6.0

Πίνακας 6.3: Συνέχεια

6.2	4.276	3.480	3.453	3.422	3.386	3.353	3.297	3.240	3.172	3.089	2.967	2.863	2.713	2.535	2.332	2.109	1.874	1.635	1.407	1.202	1.031	6.2		
6.4	4.286	3.481	3.454	3.424	3.389	3.357	3.303	3.247	3.181	3.100	3.003	2.883	2.739	2.567	2.369	2.151	1.919	1.682	1.452	1.242	1.065	6.4		
6.6	4.296	3.483	3.456	3.426	3.392	3.360	3.308	3.254	3.189	3.111	3.017	2.902	2.763	2.597	2.405	2.191	1.962	1.727	1.496	1.262	1.099	6.6		
6.8	4.305	3.484	3.458	3.429	3.395	3.363	3.312	3.260	3.197	3.122	3.030	2.919	2.785	2.624	2.438	2.229	2.004	1.771	1.540	1.323	1.134	6.8		
7.0	4.313	3.485	3.459	3.431	3.396	3.366	3.316	3.265	3.204	3.131	3.043	2.936	2.806	2.651	2.469	2.265	2.044	1.814	1.583	1.363	1.169	7.0		
7.2	4.322	3.486	3.461	3.432	3.400	3.369	3.321	3.270	3.211	3.140	3.054	2.951	2.825	2.675	2.499	2.300	2.083	1.855	1.625	1.403	1.204	7.2		
7.4	4.330	3.487	3.462	3.434	3.403	3.372	3.324	3.275	3.218	3.148	3.065	2.965	2.843	2.698	2.527	2.333	2.120	1.895	1.666	1.443	1.240	7.4		
7.6	4.337	3.488	3.464	3.436	3.405	3.374	3.328	3.280	3.224	3.156	3.075	2.978	2.860	2.720	2.554	2.364	2.155	1.933	1.706	1.482	1.276	7.6		
7.8	4.344	3.489	3.465	3.437	3.407	3.377	3.331	3.284	3.229	3.164	3.085	2.990	2.876	2.740	2.579	2.394	2.189	1.970	1.744	1.521	1.311	7.8		
8.0	4.351	3.490	3.466	3.439	3.409	3.379	3.335	3.289	3.235	3.171	3.094	3.002	2.891	2.759	2.603	2.422	2.221	2.005	1.782	1.559	1.347	8.0		
8.2	4.358	3.491	3.467	3.440	3.411	3.381	3.336	3.292	3.240	3.177	3.103	3.013	2.906	2.777	2.625	2.449	2.252	2.40	1.818	1.596	1.382	8.2		
8.4	4.365	3.492	3.468	3.442	3.412	3.383	3.340	3.296	3.244	3.183	3.111	3.023	2.919	2.794	2.646	2.475	2.282	2.073	1.854	1.632	1.418	8.4		
8.6	4.371	3.492	3.469	3.443	3.414	3.384	3.343	3.300	3.249	3.189	3.118	3.033	2.932	2.810	2.666	2.499	2.310	2.104	1.888	1.667	1.452	8.6		
8.8	4.377	3.493	3.470	3.444	3.416	3.387	3.346	3.303	3.253	3.195	3.125	3.042	2.943	2.825	2.685	2.522	2.337	2.135	1.921	1.702	1.486	8.8		
9.0	4.382	3.494	3.471	3.445	3.417	3.388	3.348	3.306	3.257	3.200	3.132	3.051	2.955	2.839	2.703	2.544	2.363	2.164	1.953	1.736	1.520	9.0		
9.2	4.388	3.495	3.472	3.447	3.418	3.390	3.351	3.309	3.261	3.205	3.138	3.059	2.965	2.853	2.720	2.565	2.388	2.192	1.984	1.768	1.553	9.2		
9.4	4.393	3.496	3.473	3.448	3.420	3.392	3.353	3.312	3.265	3.209	3.144	3.067	2.975	2.866	2.736	2.585	2.411	2.219	2.014	1.800	1.586	9.4		
9.6	4.398	3.496	3.473	3.449	3.421	3.393	3.355	3.315	3.268	3.214	3.150	3.075	2.985	2.878	2.752	2.604	2.434	2.245	2.042	1.831	1.617	9.6		
9.8	4.403	3.496	3.474	3.450	3.422	3.395	3.357	3.317	3.272	3.218	3.156	3.082	2.994	2.890	2.766	2.622	2.456	2.271	2.070	1.861	1.648	9.8		
10.0	4.408	3.497	3.475	3.451	3.424	3.396	3.359	3.320	3.275	3.222	3.161	3.088	3.003	2.901	2.780	2.639	2.476	2.295	2.097	1.890	1.679	10.0		
10.2					3.425	3.396	3.361	3.322	3.278	3.226	3.166	3.095	3.011	2.911	2.793	2.655	2.496	2.318	2.123	1.918	1.708	10.2		
10.4						3.396	3.363	3.325	3.281	3.230	3.171	3.101	3.019	2.921	2.806	2.671	2.515	2.340	2.148	1.945	1.737	10.4		
10.6							3.364	3.327	3.283	3.233	3.175	3.107	3.026	2.930	2.818	2.686	2.533	2.361	2.172	1.972	1.765	10.6		
10.8								3.329	3.286	3.237	3.179	3.112	3.033	2.940	2.829	2.700	2.551	2.382	2.196	1.996	1.793	10.8		
11.0									3.289	3.240	3.184	3.118	3.040	2.948	2.840	2.714	2.567	2.401	2.218	2.023	1.819	11.0		
11.2										3.243	3.188	3.123	3.046	2.956	2.851	2.727	2.583	2.420	2.240	2.047	1.845	11.2		
11.4											3.191	3.128	3.053	2.964	2.861	2.739	2.598	2.438	2.261	2.070	1.870	11.4		
11.6												3.195	3.132	3.058	2.972	2.870	2.751	2.613	2.456	2.281	2.093	1.895	11.6	
11.8													3.137	3.064	2.979	2.879	2.762	2.627	2.473	2.301	2.115	1.919	11.8	
12.0														3.141	3.070	2.986	2.888	2.773	2.641	2.489	2.320	2.136	1.942	12.0
12.2															3.075	2.993	2.896	2.784	2.653	2.505	2.338	2.157	1.965	12.2
Sk→	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0			

Πίνακας 6.4: Τιμές των ποσοτήτων $z'_{0,99865}$ για $a_3 \geq 0$ και $z'_{0,00135}$ για $a_3 < 0$

Kurtosis (Ku)	Skewness (Sk)																				Ku	
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9		2.0
-1.4	1.512	1.584	1.632	1.655	1.653	1.626	1.579	1.516														-1.4
-1.2	1.727	1.813	1.871	1.899	1.895	1.861	1.803	1.726	1.636													-1.2
-1.0	1.966	2.065	2.134	2.170	2.169	2.131	2.061	1.966	1.856													-1.0
-0.8	2.210	2.320	2.400	2.446	2.454	2.422	2.349	2.241	2.108	1.956	1.822											-0.8
-0.6	2.442	2.560	2.648	2.704	2.726	2.708	2.646	2.540	2.395	2.225	2.052	1.885										-0.6
-0.4	2.663	2.774	2.869	2.934	2.969	2.968	2.926	2.837	2.699	2.518	2.314	2.114	1.928									-0.4
-0.2	2.839	2.961	3.060	3.133	3.179	3.194	3.173	3.109	2.993	2.824	2.608	2.373	2.152	1.952								-0.2
0.0	3.000	3.123	3.224	3.303	3.358	3.387	3.385	3.345	3.259	3.116	2.914	2.665	2.405	2.169	1.960							0.0
0.2	3.140	3.261	3.364	3.447	3.510	3.550	3.564	3.546	3.488	3.378	3.206	2.970	2.690	2.412	2.167							0.2
0.4	3.261	3.381	3.484	3.570	3.639	3.688	3.715	3.715	3.681	3.603	3.468	3.264	2.993	2.687	2.398	2.149						0.4
0.6	3.366	3.485	3.588	3.676	3.749	3.805	3.843	3.858	3.844	3.793	3.696	3.529	3.290	2.984	2.658	2.366	2.119					0.6
0.8	3.458	3.575	3.678	3.768	3.844	3.905	3.951	3.978	3.981	3.953	3.883	3.758	3.561	3.283	2.945	2.609	2.322					0.8
1.0	3.539	3.654	3.757	3.847	3.926	3.991	4.044	4.080	4.096	4.087	4.043	3.952	3.797	3.561	3.243	2.881	2.547	2.269				1.0
1.2	3.611	3.724	3.826	3.917	3.997	4.066	4.124	4.167	4.194	4.208	4.177	4.115	3.996	3.808	3.529	3.172	2.798	2.476				1.2
1.4	3.674	3.786	3.887	3.978	4.060	4.131	4.193	4.243	4.278	4.296	4.290	4.252	4.168	4.020	3.789	3.463	3.075	2.705	2.399			1.4
1.6	3.731	3.842	3.942	4.033	4.115	4.189	4.253	4.308	4.351	4.378	4.386	4.367	4.311	4.200	4.015	3.736	3.364	2.961	2.609			1.6
1.8	3.782	3.891	3.990	4.081	4.164	4.239	4.307	4.365	4.414	4.449	4.468	4.472	4.431	4.352	4.209	3.979	3.646	3.238	2.840	2.511		1.8
2.0	3.828	3.936	4.034	4.125	4.208	4.285	4.354	4.416	4.468	4.511	4.539	4.549	4.532	4.479	4.372	4.189	3.907	3.522	3.095	2.719		2.0
2.2	3.870	3.976	4.073	4.164	4.248	4.325	4.396	4.460	4.517	4.564	4.600	4.620	4.619	4.587	4.510	4.369	4.137	3.796	3.370	2.949	2.603	2.2
2.4	3.908	4.013	4.109	4.199	4.283	4.361	4.433	4.500	4.559	4.611	4.653	4.682	4.693	4.678	4.627	4.521	4.336	4.047	3.648	3.201	2.808	2.4
2.6	3.943	4.046	4.142	4.231	4.315	4.394	4.467	4.535	4.597	4.653	4.700	4.736	4.757	4.756	4.725	4.649	4.506	4.269	3.916	3.471	3.033	2.6
2.8	3.975	4.077	4.172	4.261	4.344	4.423	4.498	4.567	4.631	4.690	4.741	4.783	4.812	4.824	4.809	4.758	4.650	4.460	4.160	3.745	3.280	2.8
3.0	4.004	4.105	4.199	4.287	4.371	4.450	4.525	4.596	4.662	4.723	4.777	4.824	4.860	4.882	4.881	4.850	4.771	4.623	4.376	4.007	3.544	3.0
3.2	4.031	4.131	4.224	4.312	4.396	4.475	4.550	4.622	4.689	4.752	4.810	4.861	4.903	4.932	4.94	4.929	4.875	4.762	4.563	4.247	3.813	3.2
3.4	4.056	4.155	4.247	4.335	4.418	4.498	4.573	4.645	4.714	4.779	4.839	4.893	4.940	4.976	4.997	4.996	4.963	4.880	4.723	4.461	4.072	3.4
3.6	4.079	4.177	4.269	4.356	4.439	4.518	4.594	4.667	4.737	4.803	4.865	4.922	4.973	5.015	5.044	5.055	5.038	4.980	4.859	4.647	4.311	3.6
3.8	4.101	4.197	4.288	4.375	4.458	4.537	4.614	4.687	4.757	4.825	4.888	4.948	5.002	5.049	5.085	5.106	5.103	5.066	4.976	4.806	4.524	3.8
4.0	4.121	4.217	4.307	4.393	4.476	4.555	4.631	4.705	4.776	4.845	4.910	4.972	5.029	5.080	5.122	5.150	5.159	5.139	5.075	4.943	4.712	4.0
4.2	4.140	4.234	4.324	4.410	4.492	4.571	4.648	4.722	4.794	4.863	4.929	4.993	5.052	5.107	5.153	5.189	5.208	5.202	5.159	5.059	4.873	4.2
4.4	4.157	4.251	4.340	4.425	4.508	4.587	4.663	4.737	4.809	4.879	4.947	5.012	5.074	5.131	5.181	5.223	5.250	5.257	5.232	5.159	5.012	4.4
4.6	4.174	4.267	4.355	4.440	4.522	4.601	4.677	4.752	4.824	4.895	4.963	5.029	5.093	5.152	5.207	5.253	5.288	5.305	5.295	5.244	5.131	4.6
4.8	4.189	4.281	4.369	4.454	4.535	4.614	4.691	4.765	4.838	4.909	4.978	5.045	5.110	5.172	5.229	5.280	5.321	5.346	5.349	5.318	5.233	4.8
5.0	4.204	4.295	4.383	4.467	4.548	4.627	4.703	4.778	4.851	4.922	4.992	5.060	5.126	5.190	5.249	5.303	5.350	5.383	5.396	5.381	5.320	5.0
5.2	4.218	4.308	4.395	4.479	4.560	4.638	4.715	4.789	4.862	4.934	5.004	5.073	5.141	5.206	5.267	5.325	5.376	5.415	5.437	5.436	5.395	5.2
5.4	4.231	4.321	4.407	4.490	4.571	4.649	4.725	4.800	4.873	4.945	5.016	5.086	5.154	5.220	5.284	5.344	5.399	5.443	5.474	5.483	5.460	5.4
5.6	4.243	4.332	4.418	4.501	4.581	4.659	4.736	4.810	4.884	4.956	5.027	5.097	5.166	5.233	5.299	5.361	5.418	5.468	5.505	5.525	5.516	5.6
5.8	4.255	4.343	4.429	4.511	4.591	4.669	4.745	4.820	4.893	4.966	5.037	5.108	5.177	5.246	5.312	5.376	5.436	5.491	5.533	5.561	5.565	5.8
6.0	4.266	4.354	4.439	4.521	4.600	4.678	4.754	4.829	4.902	4.975	5.046	5.117	5.188	5.257	5.325	5.390	5.452	5.511	5.558	5.593	5.608	6.0

Πίνακας 6.4: Συνέχεια

6.2	4.276	4.364	4.448	4.530	4.609	4.695	4.763	4.837	4.911	4.983	5.055	5.126	5.197	5.267	5.336	5.403	5.467	5.529	5.581	5.621	5.645	6.2
6.4	4.286	4.373	4.457	4.538	4.618	4.703	4.771	4.845	4.919	4.991	5.063	5.135	5.206	5.276	5.346	5.414	5.480	5.542	5.600	5.646	5.678	6.4
6.6	4.296	4.382	4.466	4.547	4.626	4.710	4.778	4.853	4.926	4.999	5.071	5.143	5.214	5.285	5.356	5.425	5.492	5.557	5.618	5.669	5.706	6.6
6.8	4.305	4.391	4.474	4.554	4.633	4.717	4.785	4.860	4.933	5.006	5.078	5.150	5.222	5.293	5.364	5.434	5.503	5.569	5.634	5.688	5.732	6.8
7.0	4.313	4.399	4.481	4.562	4.640	4.724	4.792	4.867	4.940	5.013	5.085	5.157	5.229	5.301	5.372	5.443	5.513	5.581	5.648	5.706	5.754	7.0
7.2	4.322	4.406	4.489	4.569	4.647	4.730	4.799	4.873	4.946	5.019	5.091	5.164	5.236	5.308	5.380	5.451	5.522	5.591	5.658	5.722	5.775	7.2
7.4	4.330	4.414	4.496	4.576	4.654	4.736	4.805	4.879	4.952	5.025	5.097	5.170	5.242	5.314	5.387	5.459	5.530	5.601	5.669	5.736	5.792	7.4
7.6	4.337	4.421	4.503	4.582	4.660	4.742	4.811	4.885	4.958	5.031	5.103	5.175	5.248	5.320	5.393	5.466	5.538	5.609	5.679	5.749	5.808	7.6
7.8	4.344	4.428	4.509	4.588	4.666	4.747	4.817	4.890	4.963	5.036	5.109	5.181	5.253	5.326	5.399	5.472	5.545	5.617	5.688	5.760	5.823	7.8
8.0	4.351	4.434	4.515	4.594	4.672	4.753	4.822	4.896	4.969	5.041	5.114	5.186	5.259	5.331	5.404	5.478	5.551	5.624	5.696	5.771	5.836	8.0
8.2	4.358	4.441	4.521	4.600	4.677	4.758	4.827	4.901	4.974	5.046	5.118	5.191	5.263	5.336	5.410	5.483	5.557	5.631	5.704	5.775	5.847	8.2
8.4	4.365	4.447	4.527	4.605	4.682	4.762	4.832	4.905	4.978	5.051	5.123	5.195	5.268	5.341	5.414	5.488	5.562	5.637	5.710	5.783	5.858	8.4
8.6	4.371	4.452	4.532	4.611	4.687	4.767	4.837	4.910	4.983	5.055	5.127	5.200	5.272	5.345	5.419	5.493	5.567	5.642	5.717	5.790	5.867	8.6
8.8	4.377	4.458	4.538	4.616	4.692	4.772	4.841	4.914	4.987	5.059	5.132	5.204	5.276	5.349	5.423	5.497	5.572	5.647	5.722	5.797	5.875	8.8
9.0	4.382	4.463	4.543	4.621	4.697	4.776	4.845	4.918	4.991	5.063	5.135	5.208	5.280	5.353	5.427	5.501	5.576	5.652	5.727	5.803	5.883	9.0
9.2	4.388	4.468	4.548	4.625	4.701	4.780	4.850	4.923	4.995	5.067	5.139	5.211	5.284	5.357	5.431	5.505	5.580	5.656	5.732	5.808	5.883	9.2
9.4	4.393	4.473	4.552	4.630	4.705	4.784	4.854	4.926	4.999	5.071	5.143	5.215	5.287	5.361	5.434	5.509	5.584	5.660	5.736	5.813	5.889	9.4
9.6	4.398	4.478	4.557	4.634	4.710	4.788	4.857	4.930	5.002	5.074	5.146	5.218	5.291	5.364	5.437	5.512	5.587	5.663	5.740	5.817	5.894	9.6
9.8	4.403	4.483	4.561	4.638	4.714	4.791	4.861	4.934	5.006	5.076	5.149	5.222	5.294	5.367	5.440	5.515	5.590	5.667	5.744	5.821	5.898	9.8
10.0	4.408	4.487	4.565	4.642	4.717	4.795	4.865	4.937	5.009	5.081	5.153	5.225	5.297	5.370	5.443	5.518	5.593	5.670	5.747	5.825	5.903	10.0
10.2					4.721	4.798	4.868	4.940	5.012	5.084	5.156	5.228	5.300	5.373	5.446	5.521	5.596	5.673	5.750	5.828	5.906	10.2
10.4							4.871	4.943	5.015	5.087	5.158	5.230	5.303	5.375	5.449	5.523	5.599	5.675	5.753	5.831	5.910	10.4
10.6							4.874	4.947	5.018	5.090	5.161	5.233	5.305	5.378	5.451	5.526	5.601	5.678	5.755	5.834	5.913	10.6
10.8								4.949	5.021	5.092	5.164	5.236	5.308	5.380	4.454	5.528	5.603	5.680	5.757	5.836	5.915	10.8
11.0									5.024	5.095	5.166	5.238	5.310	5.383	5.456	5.530	5.605	5.682	5.760	5.838	5.918	11.0
11.2										5.098	5.169	5.240	5.312	5.385	5.458	5.532	5.607	5.684	5.762	5.840	5.920	11.2
11.4											5.171	5.243	5.314	5.387	5.460	5.534	5.609	5.686	5.763	5.842	5.922	11.4
11.6											5.173	5.245	5.316	5.389	5.462	5.536	5.611	5.687	5.765	5.844	5.924	11.6
11.8												5.247	5.318	5.391	5.464	5.538	5.613	5.689	5.767	5.845	5.925	11.8
12.0												5.249	5.320	5.393	5.465	5.539	5.614	5.690	5.768	5.847	5.927	12.0
12.2													5.322	5.394	5.467	5.541	5.616	5.692	5.769	5.848	5.928	12.2
Sk→	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	

Πίνακας 6.5: Τιμές της ποσότητας $z'_{0.5}$ για $a_3 \geq 0$ (αν $a_3 < 0$ άλλαξε πρόσημο)

Kurtosis (Ku)	Skewness (Sk)																				Ku	
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9		2.0
-1.4	0.000	0.053	0.111	0.184	0.282	0.424	0.627	0.754														-1.4
-1.2	0.000	0.039	0.082	0.132	0.196	0.284	0.412	0.591	0.727													-1.2
-1.0	0.000	0.031	0.065	0.103	0.151	0.212	0.297	0.419	0.586													-1.0
-0.8	0.000	0.026	0.054	0.085	0.123	0.169	0.231	0.317	0.439	0.598	0.681											-0.8
-0.6	0.000	0.023	0.047	0.073	0.104	0.142	0.190	0.254	0.343	0.468	0.616	0.653										-0.6
-0.4	0.000	0.020	0.041	0.064	0.091	0.122	0.161	0.212	0.280	0.375	0.504	0.633	0.616									-0.4
-0.2	0.000	0.018	0.037	0.058	0.081	0.108	0.141	0.183	0.237	0.311	0.413	0.542	0.638	0.574								-0.2
0.0	0.000	0.017	0.034	0.053	0.073	0.097	0.126	0.161	0.206	0.266	0.347	0.456	0.579	0.621	0.531							0.0
0.2	0.000	0.015	0.032	0.049	0.068	0.089	0.114	0.145	0.183	0.233	0.299	0.388	0.501	0.605	0.582							0.2
0.4	0.000	0.014	0.029	0.045	0.063	0.082	0.105	0.132	0.165	0.208	0.263	0.336	0.433	0.545	0.607	0.536						0.4
0.6	0.000	0.013	0.028	0.043	0.059	0.077	0.097	0.122	0.151	0.188	0.235	0.297	0.379	0.481	0.579	0.579	0.489					0.6
0.8	0.000	0.013	0.026	0.040	0.055	0.072	0.091	0.113	0.140	0.172	0.213	0.266	0.336	0.425	0.527	0.590	0.533					0.8
1.0	0.000	0.012	0.025	0.038	0.053	0.068	0.086	0.106	0.130	0.159	0.196	0.242	0.301	0.379	0.474	0.563	0.569	0.484				1.0
1.2	0.000	0.011	0.024	0.036	0.050	0.065	0.082	0.100	0.122	0.148	0.181	0.222	0.274	0.341	0.426	0.520	0.576	0.524				1.2
1.4	0.000	0.011	0.023	0.035	0.048	0.062	0.078	0.095	0.116	0.140	0.169	0.206	0.252	0.310	0.385	0.474	0.554	0.555	0.475			1.4
1.6	0.000	0.010	0.022	0.034	0.046	0.060	0.074	0.091	0.110	0.132	0.159	0.192	0.233	0.285	0.351	0.432	0.518	0.564	0.510			1.6
1.8	0.000	0.010	0.021	0.032	0.044	0.057	0.072	0.087	0.105	0.126	0.151	0.180	0.217	0.264	0.323	0.396	0.480	0.549	0.540	0.461		1.8
2.0	0.000	0.009	0.020	0.031	0.043	0.055	0.069	0.084	0.101	0.120	0.143	0.171	0.204	0.246	0.299	0.365	0.443	0.521	0.552	0.494		2.0
2.2	0.000	0.009	0.020	0.030	0.042	0.054	0.067	0.081	0.097	0.115	0.137	0.162	0.193	0.231	0.279	0.338	0.410	0.488	0.544	0.522	0.445	2.2
2.4	0.000	0.009	0.019	0.029	0.040	0.052	0.065	0.078	0.094	0.111	0.131	0.155	0.183	0.218	0.261	0.315	0.381	0.456	0.524	0.538	0.475	2.4
2.6	0.000	0.008	0.018	0.029	0.039	0.051	0.063	0.076	0.091	0.107	0.126	0.148	0.175	0.207	0.246	0.295	0.355	0.426	0.498	0.539	0.503	2.6
2.8	0.000	0.008	0.018	0.028	0.038	0.049	0.061	0.074	0.088	0.104	0.122	0.143	0.167	0.197	0.233	0.278	0.333	0.398	0.470	0.526	0.522	2.8
3.0	0.000	0.008	0.017	0.027	0.037	0.048	0.059	0.072	0.085	0.101	0.118	0.138	0.161	0.189	0.222	0.263	0.313	0.374	0.443	0.506	0.530	3.0
3.2	0.000	0.008	0.017	0.027	0.037	0.047	0.058	0.070	0.083	0.098	0.114	0.133	0.155	0.181	0.212	0.250	0.296	0.352	0.417	0.483	0.525	3.2
3.4	0.000	0.008	0.017	0.026	0.036	0.046	0.057	0.068	0.081	0.095	0.111	0.129	0.150	0.174	0.203	0.239	0.281	0.333	0.394	0.460	0.513	3.4
3.6	0.000	0.007	0.016	0.025	0.035	0.045	0.056	0.067	0.079	0.093	0.108	0.125	0.145	0.168	0.196	0.228	0.268	0.316	0.373	0.437	0.495	3.6
3.8	0.000	0.007	0.016	0.025	0.034	0.044	0.054	0.066	0.078	0.091	0.105	0.122	0.141	0.163	0.188	0.219	0.256	0.301	0.354	0.415	0.475	3.8
4.0	0.000	0.007	0.015	0.025	0.034	0.043	0.053	0.064	0.076	0.089	0.103	0.119	0.137	0.158	0.182	0.211	0.246	0.288	0.337	0.395	0.455	4.0
4.2	0.000	0.007	0.015	0.024	0.033	0.043	0.053	0.063	0.075	0.087	0.101	0.116	0.133	0.153	0.176	0.204	0.236	0.276	0.322	0.376	0.435	4.2
4.4	0.000	0.007	0.015	0.024	0.033	0.042	0.052	0.062	0.073	0.085	0.099	0.113	0.130	0.149	0.171	0.197	0.228	0.265	0.308	0.359	0.416	4.4
4.6	0.000	0.007	0.015	0.023	0.032	0.041	0.051	0.061	0.072	0.084	0.097	0.111	0.127	0.145	0.167	0.191	0.220	0.255	0.296	0.344	0.399	4.6
4.8	0.000	0.006	0.015	0.023	0.032	0.041	0.050	0.060	0.071	0.082	0.095	0.109	0.124	0.142	0.162	0.186	0.213	0.246	0.285	0.330	0.382	4.8
5.0	0.000	0.006	0.014	0.023	0.031	0.040	0.049	0.059	0.070	0.081	0.093	0.107	0.122	0.139	0.158	0.181	0.207	0.238	0.274	0.317	0.367	5.0
5.2	0.000	0.006	0.014	0.022	0.031	0.040	0.049	0.068	0.069	0.080	0.092	0.105	0.119	0.136	0.155	0.176	0.201	0.231	0.265	0.306	0.353	5.2
5.4	0.000	0.006	0.014	0.022	0.030	0.039	0.048	0.057	0.068	0.078	0.090	0.103	0.117	0.133	0.151	0.172	0.196	0.224	0.257	0.295	0.340	5.4
5.6	0.000	0.006	0.014	0.022	0.030	0.039	0.047	0.057	0.067	0.077	0.089	0.101	0.115	0.131	0.148	0.168	0.191	0.218	0.249	0.285	0.328	5.6
5.8	0.000	0.006	0.014	0.022	0.030	0.038	0.047	0.056	0.066	0.076	0.087	0.100	0.113	0.128	0.145	0.164	0.186	0.212	0.242	0.277	0.317	5.8
6.0	0.000	0.006	0.014	0.021	0.029	0.038	0.046	0.055	0.065	0.075	0.086	0.098	0.111	0.126	0.142	0.161	0.182	0.207	0.235	0.268	0.307	6.0

Πίνακας 6.5: Συνέχεια

6.2	0.000	0.006	0.013	0.021	0.029	0.037	0.046	0.055	0.064	0.074	0.085	0.097	0.110	0.124	0.140	0.158	0.178	0.202	0.229	0.261	0.298	6.2
6.4	0.000	0.006	0.013	0.021	0.029	0.037	0.045	0.054	0.063	0.073	0.084	0.096	0.108	0.122	0.137	0.155	0.175	0.197	0.223	0.254	0.289	6.4
6.6	0.000	0.006	0.013	0.021	0.028	0.037	0.045	0.054	0.063	0.073	0.083	0.094	0.107	0.0120	0.135	0.152	0.171	0.193	0.218	0.247	0.281	6.6
6.8	0.000	0.006	0.013	0.021	0.028	0.036	0.044	0.053	0.062	0.072	0.082	0.093	0.105	0.118	0.133	0.150	0.168	0.189	0.213	0.241	0.273	6.8
7.0	0.000	0.005	0.013	0.020	0.028	0.036	0.044	0.053	0.061	0.071	0.081	0.092	0.104	0.117	0.131	0.147	0.165	0.185	0.209	0.236	0.267	7.0
7.2	0.000	0.005	0.013	0.020	0.028	0.036	0.044	0.052	0.061	0.070	0.080	0.091	0.103	0.115	0.129	0.145	0.162	0.182	0.205	0.230	0.260	7.2
7.4	0.000	0.005	0.013	0.020	0.027	0.035	0.043	0.052	0.060	0.070	0.079	0.090	0.101	0.114	0.128	0.143	0.160	0.179	0.201	0.226	0.254	7.4
7.6	0.000	0.005	0.012	0.020	0.027	0.035	0.043	0.051	0.060	0.069	0.079	0.089	0.100	0.113	0.126	0.141	0.157	0.176	0.197	0.221	0.249	7.6
7.8	0.000	0.005	0.012	0.020	0.027	0.035	0.043	0.051	0.059	0.068	0.078	0.088	0.099	0.111	0.124	0.139	0.155	0.173	0.193	0.217	0.243	7.8
8.0	0.000	0.005	0.012	0.019	0.027	0.034	0.042	0.050	0.059	0.068	0.077	0.087	0.098	0.110	0.123	0.137	0.153	0.170	0.190	0.213	0.238	8.0
8.2	0.000	0.005	0.012	0.019	0.027	0.034	0.042	0.050	0.058	0.067	0.076	0.086	0.097	0.109	0.121	0.135	0.151	0.168	0.167	0.209	0.234	8.2
8.4	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.034	0.042	0.050	0.058	0.067	0.076	0.086	0.096	0.108	0.120	0.134	0.149	0.165	0.184	0.205	0.229	8.4
8.6	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.034	0.041	0.049	0.057	0.066	0.075	0.085	0.095	0.107	0.119	0.132	0.147	0.163	0.181	0.202	0.225	8.6
8.8	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.033	0.041	0.049	0.057	0.066	0.075	0.084	0.094	0.106	0.118	0.131	0.145	0.161	0.179	0.199	0.221	8.8
9.0	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.033	0.041	0.049	0.057	0.065	0.074	0.084	0.094	0.105	0.116	0.129	0.143	0.159	0.176	0.196	0.218	9.0
9.2	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.033	0.040	0.048	0.056	0.065	0.073	0.083	0.093	0.104	0.115	0.128	0.142	0.157	0.174	0.193	0.214	9.2
9.4	0.000	0.005	0.012	0.019	0.026	0.033	0.040	0.048	0.056	0.064	0.073	0.082	0.092	0.103	0.114	0.127	0.140	0.155	0.172	0.190	0.211	9.4
9.6	0.000	0.005	0.012	0.019	0.025	0.033	0.040	0.048	0.055	0.064	0.072	0.082	0.091	0.0102	0.113	0.125	0.139	0.153	0.170	0.188	0.208	9.6
9.8	0.000	0.005	0.012	0.018	0.025	0.032	0.040	0.047	0.055	0.063	0.072	0.081	0.091	0.0101	0.112	0.124	0.137	0.152	0.168	0.185	0.205	9.8
10.0	0.000	0.005	0.011	0.018	0.025	0.032	0.040	0.047	0.055	0.063	0.071	0.080	0.090	0.100	0.111	0.123	0.136	0.150	0.166	0.183	0.202	10.0
10.2	0.000					0.032	0.039	0.047	0.054	0.063	0.071	0.080	0.089	0.099	0.110	0.122	0.135	0.149	0.164	0.181	0.200	10.2
10.4	0.000					0.032	0.039	0.047	0.054	0.062	0.071	0.079	0.089	0.099	0.109	0.121	0.133	0.147	0.162	0.179	0.197	10.4
10.6	0.000						0.039	0.046	0.054	0.062	0.070	0.079	0.088	0.098	0.109	0.120	0.132	0.146	0.160	0.177	0.195	10.6
10.8	0.000							0.046	0.054	0.061	0.070	0.078	0.088	0.097	0.108	0.119	0.131	0.144	0.159	0.175	0.192	10.8
11.0	0.000								0.053	0.061	0.069	0.078	0.087	0.097	0.107	0.118	0.130	0.143	0.157	0.173	0.190	11.0
11.2	0.000									0.061	0.069	0.078	0.087	0.096	0.106	0.117	0.129	0.142	0.156	0.171	0.188	11.2
11.4	0.000										0.069	0.077	0.086	0.095	0.105	0.116	0.128	0.141	0.154	0.169	0.186	11.4
11.6	0.000											0.068	0.077	0.086	0.095	0.104	0.116	0.127	0.139	0.153	0.168	11.6
11.8	0.000												0.076	0.085	0.094	0.104	0.115	0.126	0.138	0.152	0.166	11.8
12.0	0.000													0.076	0.085	0.094	0.104	0.114	0.125	0.137	0.150	12.0
12.2	0.000														0.084	0.093	0.103	0.113	0.124	0.136	0.149	12.2
Sk→	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ.Λ.(2003). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στα πλαίσια του Μ.Π.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*

Ξένα

Bai, D.S. and Choi, I.S. (1997). Process Capability Indices for Skewed Populations. *Manuscript*, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon, Korea

Bissell, A.F. (1990). How Reliable is Your Capability Index?. *Applied Statistics*, **39(3)**, 331-340.

Boyles, R.A. (1991). The Taguchi Capability Index. *Journal of Quality Technology*, **23(1)**, 17-26.

Boyles, R.A. (1995). Cpm for Asymmetric Tolerances. *Manuscript*, Precision Castparts Corp., Portland, OR.

Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988). A New Measure of Process Capability Cpm. *Journal of Quality Technology*, **20(3)**, 162-175.

Chen, S.M. and Hsu, N.F. (1995). The Asymptotic Distribution of the Process Capability Index Cpmk. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **24(5)**, 1279-1291

Choi, B.C. and Owen, D.B. (1990). A Study of a new Process Capability Index. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **19(4)**, 1231-1245.

Chou, Y.M. and Owen, D.B. (1989) On the Distributions of the Estimated Process Capability Indices. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **18(12)**, 4549-4560.

Chou, Y.M., Owen, D.B. and Borrego, A.S.A. (1990). Lower Confidence Limits on Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, **22(3)**, 223-229.

Clements, J.A. (1989). Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions. *Quality Progress*, **22(9)**, 95-100.

Franklin, L.A. and Wasserman, G.S. (1992). A Note on the Conservative Nature of the Tables of Lower Confidence Limits for Cpk with a Suggested Correction. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **21(4)**, 1165-1169.

Garvin J.S (1996). The theory of the Binormal Distribution and its Potential Application in Total Quality Management. *PhD thesis*, Faculty of Informatics, University of Ulster, Northern Ireland.

- Heavlin, W.D. (1988). Statistical Properties of Capability Indices. *Technical Report no 320*, Tech. Library, Advanced Micro Devices, Inc., Sunnyvale, CA.
- Hoffman, L.L. (1993). A General Approach for Testing the Process Capability Index. *Quality and Reliability Engineering International*, **9**, 445-449.
- Hsiang, T.C. and Taguchi, G. (1985). A Tutorial on Quality Control and Assurance - The Taguchi Methods. *ASA Annual Meeting*, Las Vegas, Nevada.
- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1995). Comment on: Percentages of units within specification limits associated with given values of Cpk and Cpm (by Chan L.K. and Tang J.H.). *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **24**.
- Juran, J.M., Gryna F.M. and Bingham R.S. Jr. (1974). *Quality Control Handbook*. McGraw-Hill, New York.
- Kane, V.E. (1986) Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, **18(1)**, 41-52.
- Kirmani, S.N.U.A., Kocherlakota, K. and Kocherlakota, S. (1991). Estimation of σ and the Process Capability Index Based on Subsamples. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **20**, 275-291.
- Kocherlakota, S. (1992). Process Capability Index: Recent Developments. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, **54(B)**, Pt.3, 352-369.
- Kotz, S. and Johnson, N.L. (1993). *Process Capability Indices*. Chapman and Hall, London.
- Kotz, S. and Lovelace, C.R. (1998). *Process Capability Indices in Theory and Practice*. Arnold.
- Kushler, R.H. and Hurley, P. (1992) Confidence Bounds for Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, **24**, 188-195.
- Leung B., Yeung A. and Spiring F (1997). The Robustness of Cpm to Departures from Normality. *Technical Report, (Ref. No. 010397)*, Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic University.
- Li, H., Owen, D.B. and Borrego, S.A. (1990). Lower Confidence Limits on Process Capability Indices Based on the Range. *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, **19(1)**, 1-24.
- Luceno, A. (1996). A Process Capability Index with Reliable Confidence Intervals. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **25(1)**, 235-245.
- Montgomery, D.C. (1996). *Introduction to Statistical Quality Control*. 3rd edn. John Wiley.
- Nagata, Y. and Nagahata, H. (1992). Approximation Formulas for the Confidence Intervals of Process Capability Indices. *Reports of Statistical Approx. Research*, JUSE **39(3)**, 15-29.
- Nagata, Y. and Nagahata, H. (1994). Approximation Formulas for the Lower Confidence Limits of Process Capability Indices. *Okayama Economic Review*, **25(4)**, 301-314.
- Parlar M. and Wesolowsky G.O. (1999). Specification Limits, Capability Indices and Process Centering in Assembly Manufacturing. *Journal of Quality Technology*, **31(3)**, 317-325.

- Pearn, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, **24(4)**, 216-231.
- Pearn, W.L., Yang, S.L., Chen, K.S. and Lin, P.C. (2001). Testing Process Capability Using the Index Cpmk with an Application. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **8(1)**, 15-34.
- Pearson E.S and Tukey J.W. (1965). Approximate Means and Standard Deviations Based on Differences between Percentage Points of Frequency Curves. *Biometrika*, **52**, 533-546.
- Perakis, M. (2001). Inferential Problems Connected with Process Capability Indices. Department of Statistics, Athens University of Economics and Business, September 2001.
- Wierda, S.J. (1994). Multivariate Statistical Process Control, *Groningen Thesis in Economics*. Wolters-Noordhoff Groningen.
- Wright, P.A. (1995). A Process Capability Index Sensitive to Skewness. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **52**, 195-203.