

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**COPIULAS ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ  
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑ  
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ**

**Ιωάννης Π. Κόκκινος**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

**Πειραιάς**

**Ιούλιος 2009**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**COPIULAS ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ  
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑ  
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ**

**Ιωάννης Π. Κόκκινος**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

**Πειραιάς**

**Ιούλιος 2009**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην από 16/2/2009 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)

Επίκουρος Καθηγητής Μ. Μπούτσικας

Λέκτορας Σ. Βρόντος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS**

**COPULAS AND THEIR APPLICATIONS IN RISK  
MANAGEMENT AND FINANCE**

by

**Ioannis P. Kokkinos**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment  
of the requirements for the degree of Master of Science  
in Applied Statistics

**Piraeus, Greece**

**July 2009**



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες, οι συζεύξεις (copulas) έχουν αναγνωρισθεί ως ένα σημαντικό εργαλείο στα Χρηματοοικονομικά. Η έννοια των copulas εισήχθη πρώτη φορά το 1959 από τον A.Sklar. Μία σύζευξη (copula) είναι μια συνάρτηση που συνδέει μία πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομών της. Λόγω της ικανότητας τους να παρουσιάζουν μη παραμετρικά μέτρα εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, η χρησιμοποίησή τους γίνεται πολύ δημοφιλής σε χρηματοοικονομικά προβλήματα που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές.

Σε αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε τους γενικούς ορισμούς των πολυδιάστατων και διδιάστατων copulas και τις ιδιότητές τους. Θα συζητήσουμε για τις σημαντικότερες οικογένειες των διδιάστατων συζεύξεων, όπως είναι η οικογένεια Marshall Olkin, οι ελλειπτικές και οι Αρχιμήδειες συζεύξεις και τις επεκτάσεις τους στην πολυδιάστατη μορφή. Θα επικεντρωθούμε στις διαφορές και τα χαρακτηριστικά τους που τις κάνουν χρήσιμες στην προσέγγιση χρηματοοικονομικών ζητημάτων. Τέλος, θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές των σημαντικότερων συζεύξεων και θα εξετάσουμε πως αυτές αντιμετωπίζουν μερικά από τα σημαντικότερα χρηματοοικονομικά προβλήματα.





## **ABSTRACT**

In recent decades, copulas have been identified as an important tool in Finance. The notion of copula was introduced by A.Sklar in 1959. A copula is a function that links univariate marginals to their full multivariate distribution. Because of their ability to present non-parametric measures of dependence between random variables, their use is very popular in financial problems involving two or more random variables.

In this paper work we will present the general definitions of multivariate and bivariate copulas and their properties. We will discuss for the most important families of bivariate copulas as are the Marshall Olkin copulas, the Elliptical and Archimedean copulas and their extensions to the multivariate case. We will focus on their differences and on their features that make them useful to approach financial issues. Finally, we will present some applications of copulas and we will look how they face some of the most important financial problems.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>1</b>
<b>2. ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</b>	<b>3</b>
2.1 Πολυδιάστατες συζεύξεις .....	4
2.2 Διδιάστατες συζεύξεις .....	5
2.3 Συζεύξεις και τυχαίες μεταβλητές .....	6
2.4 Συμμετρία .....	10
2.5 Συμφωνία και Συσχέτιση .....	11
<b>3. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΖΕΥΞΕΩΝ</b>	<b>17</b>
3.1 Farlie Gumbel Morgenstern copulas.....	17
3.2 Marshall Olkin copulas.....	18
3.4 The Elliptical copulas.....	21
3.5 Archimedean copulas.....	26
<b>4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ</b>	<b>37</b>
4.1 Παραμετρική εκτίμηση μιας δοθείσας σύζευξης.....	37
4.2 Μη παραμετρική εκτίμηση .....	41
4.3 Επιλογή του κατάλληλου copula .....	43
4.4 Αλγόριθμοι προσομοίωσης .....	45
<b>5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ</b>	<b>55</b>
5.1 Παρούσες αξίες γενικών χρηματικών ροών.....	55
5.2 Risk Management – Value at Risk.....	65
5.3 Credit and Basket Derivatives.....	71
<b>6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>77</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για πολλά χρόνια οι στατιστικοί ενδιαφερόντουσαν για την σχέση των πολυδιάστατων συναρτήσεων κατανομών με τις μικρότερης διάστασης περιθώριες κατανομές τους. Στη δεκαετία του 50 οι M. Fréchet και G.Dall' Aglio εργάστηκαν πάνω σε αυτό το θέμα μελετώντας διδιάστατες και τριδιάστατες συναρτήσεις κατανομών με δοσμένες μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές. Η απάντηση στο πρόβλημα δόθηκε το 1959 από τον A. Sklar, ο οποίος δημιούργησε μία καινούργια κλάση συναρτήσεων, τις οποίες καλούμε συζεύξεις (copulas). Τα copulas είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την μοντελοποίηση και μελέτη της δομής εξάρτησης μεταξύ ομαδοποιημένων τυχαίων μεταβλητών. Πριν την εμφάνιση των copulas, Τα μοναδικά μοντέλα που μπορούσαν να παρουσιάσουν τέτοιου είδους δομές εξάρτησης ήταν τα κλασσικά πολυδιάστατα μοντέλα όπως το πολυδιάστατο Gaussian μοντέλο. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούσαν άκαμπτες υποθέσεις για τις περιθώριες κατανομές και τις από κοινού συμπεριφορές των τυχαίων μεταβλητών και ήταν σχεδόν άχρηστα στη μοντελοποίηση της δομής εξάρτησης μεταξύ πραγματικών χρηματοοικονομικών δεδομένων.

Η θεωρία των συζεύξεων προβλέπει μία απλή μεθοδολογία μοντελοποίησης της δομής εξάρτησης μεταξύ δύο σετ παρατηρήσεων χωρίς να εγκλωβίζεται σε πολύπλοκες υποθέσεις. Τα copulas ξεχωρίζουν τη περιθώρια συμπεριφορά των μεταβλητών από τη δομή εξάρτησης τους, με τη χρήση των συναρτήσεων κατανομών.

Τα copulas είναι εξαιρετικά ευέλικτα και είναι πολύ αναλυτικά εργαλεία που βρίσκουν εφαρμογές σε ένα μεγάλο φάσμα χρηματοοικονομικών ζητημάτων όπως είναι η εκτίμηση κινδύνων, η τιμολόγηση παραγώγων και η διαχείριση χαρτοφυλακίων. Οποιοδήποτε πρόβλημα που περιλαμβάνει παραπάνω από μία τυχαία μεταβλητή μπορεί να μοντελοποιηθεί και να αναλυθεί με τη βοήθεια των συζεύξεων, παρόλο που, καθώς

γνωρίζουμε, όσες περισσότερες μεταβλητές υπάρχουν σε ένα μοντέλο τόσο πολυπλοκότερη και χρονοβόρα γίνεται η ανάλυσή του.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τον ορισμό των συζεύξεων, την παρουσίαση των σημαντικότερων κλάσεων αυτών και κάποιες εφαρμογές τους στο χρηματοοικονομικό τομέα.

Στο κεφάλαιο 2, θα δώσουμε τους ορισμούς των πολυδιάστατων και διδιάστατων συζεύξεων, πως αυτές θεμελιώνονται μέσω του θεωρήματος του Sklar και θα αναφερθούμε σε κάποιες σημαντικές ιδιότητες αυτών. Θα επικεντρωθούμε κυρίως στις ιδιότητες τους στις τυχαίες μεταβλητές, στα μη παραμετρικά μέτρα εξάρτησης που παρουσιάζουν όπως είναι οι συντελεστές συσχέτισης του Spearman και Kendall και σε ένα πολύ σημαντικό μέτρο εξάρτησης, που βρίσκει εφαρμογή όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα με ακραίες τιμές, την εξάρτηση ουράς.

Στο κεφάλαιο 3, θα παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες κλάσεις των συζεύξεων που είναι τα Marshall Olkin copulas, τα Elliptical και Archimedean copulas, θα δούμε πόσες και ποιες οικογένειες χαρακτηρίζουν την κάθε κλάση και τις σημαντικότερες διαφορές τους. Θα εξετάσουμε πως διαμορφώνονται τα μέτρα εξάρτησης σε κάθε οικογένεια καθώς επίσης και ποιες παρουσιάζουν εξάρτηση ουράς.

Στο κεφάλαιο 4, θα δούμε τις διάφορες παραμετρικές μεθόδους εκτίμησης μιας δοθείσας σύζευξης και πώς κατασκευάζεται η εμπειρική σύζευξη. Επίσης θα δούμε διαισθητικά τους αλγορίθμους προσομοίωσης των σημαντικότερων συζεύξεων και θα παραστήσουμε γραφικά δύο από αυτές για διάφορες τιμές των παραμέτρων τους.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5, θα δούμε τη λειτουργία των συζεύξεων σε τρία χρηματοοικονομικά ζητήματα. Θα προσεγγίσουμε την παρούσα αξία μίας γενικής χρηματικής ροής με καθορισμένες θετικές και αρνητικές πληρωμές με την βοήθεια της κανονικής σύζευξης, θα δούμε πως βοηθάει μια επιλεγμένη σύζευξη στον υπολογισμό του Value-at-Risk χαρτοφυλακίων και θα εξετάσουμε πως με την βοήθεια των συζεύξεων μπορούμε να μελετήσουμε πως αλληλεπιδρούν τα VaR δύο μετοχών σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Θα ολοκληρώσουμε παρουσιάζοντας την χρησιμότητα των συζεύξεων σε ένα από τα πρωταρχικά προβλήματα τιμολόγησης των πιστωτικών παραγώγων που είναι η μοντελοποίηση των χρόνων αθέτησης (default times).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $S_1, \dots, S_n$  μη κενά υποσύνολα του  $\bar{R}$  όπου  $\bar{R}$  η προεκταμένη πραγματική ευθεία  $[-\infty, \infty]$ . Έστω  $H$  μία πραγματική συνάρτηση  $n$  τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε  $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$ . Έστω  $B = [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  με  $a \leq b$ , ένα  $n$ -κουτί που οι κορυφές του βρίσκονται στο  $DomH$ . Τότε ο  $H$ -όγκος του  $B$  δίνεται από τον τύπο:

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(c)H(c)$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται στις κορυφές  $c$  του  $B$  και το  $\text{sgn}(c)$  δίνεται από τον τύπο

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} 1 & , \text{εάν } c_k = a_k \text{ όταν } k \text{ άρτιος} \\ -1 & , \text{εάν } c_k = a_k \text{ όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια πραγματική συνάρτηση  $H$  με  $n$  τυχαίες μεταβλητές είναι  $n$ -αύξουσα όταν  $V_H(B) \geq 0$  για όλα τα  $n$ -κουτιά  $B$  των οποίων οι κορυφές βρίσκονται στο  $DomH$ .

Θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού μιας πραγματικής συνάρτησης  $H$  δίνεται από τον τύπο  $DomH = S_1 \times \dots \times S_n$  όπου κάθε  $S_k$  έχει ένα ελάχιστο στοιχείο  $a_k$ . Θα λέμε ότι η  $H$  είναι εδραιωμένη (grounded) εάν  $H(t) = 0$  για όλα τα  $t$  στο πεδίο ορισμού της  $H$  τέτοια ώστε  $t_k = a_k$  για τουλάχιστον ένα  $t$ .

Εάν  $S_k$  είναι μη κενό και έχει ένα μέγιστο στοιχείο  $b_k$  τότε η  $H$  έχει περιθώριες και αυτές οι μονοδιάστατες περιθώριες έχουν πεδίο ορισμού  $DomH_k = S_k$  και ισχύει:

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n)$$

για κάθε  $x \in S_k$ .

## 2.1 Πολυδιάστατες συζεύξεις

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια  $n$ -διάστατη σύζευξη είναι μια συνάρτηση  $C : [0,1]^N \rightarrow [0,1]$  με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Η  $C(u)$  είναι εδραιωμένη (grounded) και  $n$ -αύξουσα για κάθε  $u_k$ , με  $k \in \{1,2,\dots,n\}$
- 2) Η  $C$  έχει περιθώριες  $C_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$  που ικανοποιούν την  $C_k(u) = u$  για κάθε  $u \in [0,1]$

Αναλυτικότερα, μια  $n$ -διάστατη σύζευξη είναι μια συνάρτηση  $C : [0,1]^N \rightarrow [0,1]$  με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Για κάθε  $u \in [0,1]^N$

$$C(u) = 0 \text{ αν τουλάχιστον ένα από τα } u = 0$$

$$C(u) = u_k \text{ αν όλα τα } u = 1 \text{ εκτός από ένα } u_k = u, \text{ δηλ. } C(1,1,\dots,u,1,\dots,1) = u$$

- 2) Για κάθε  $a,b \in [0,1]^N$  με  $a \leq b$  και  $B=[a,b]=[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_N,b_N]$  των οποίων η τομή τους βρίσκεται στο  $[0,1]^N$ . Έχουμε ότι:

$$V_C([a,b]) \geq 0$$

Αν υποθέσουμε ότι  $F_1, \dots, F_N$  είναι μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομών, τότε η  $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N))$  είναι μια πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες κατανομές  $F_1, \dots, F_N$ , όπου  $U_n = F_n(x_n)$  μια τυχαία μεταβλητή. Η σύζευξη συνδέει τις περιθώριες μονοδιάστατες κατανομές με την πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι συζεύξεις είναι ένα προσαρμοσμένο εργαλείο κατασκευής πολυδιάστατων κατανομών.

### ΘΕΩΡΗΜΑ SKLAR (1959)

Έστω  $G(x_1, \dots, x_N) : R^N \rightarrow [0,1]$  μια πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις  $F_1, \dots, F_N$ . Τότε υπάρχει μια σύζευξη  $C(u_1, \dots, u_N) : [0,1]^N \rightarrow [0,1]$  τέτοια ώστε:

$$G(x_1, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N))$$



## Αντίστροφο του θεωρήματος

Αν  $C$  είναι μια σύζευξη και  $F_1, \dots, F_N$  συναρτήσεις κατανομών, τότε η  $G$  είναι μια πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις τις  $F_1, \dots, F_N$ .

### Παρατηρήσεις:

- 1) Εάν  $F_1, \dots, F_N$  είναι συνεχείς, τότε η σύζευξη  $C$  είναι μοναδική. Διαφορετικά, η  $C$  είναι μοναδικά ορισμένη στο  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ .
- 2) Εάν η  $G$  είναι μια πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής με συνεχείς περιθώριες κατανομές  $F_1, \dots, F_N$ , τότε έχουμε:

$$C(u_1, \dots, u_N) = G(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_N^{-1}(x_N))$$

όπου  $F_1^{-1}, \dots, F_N^{-1}$  είναι οι αντίστροφες των συναρτήσεων  $F_1, \dots, F_N$ .

- 3) Για κάθε  $n$ -διάστατη σύζευξη προκύπτει ότι:  $W^N(u) \leq C(u) \leq M^N(u)$ , όπου  $W^N(u) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_N - N + 1, 0)$  και  $M^N(u) = \min(u_1, u_2, \dots, u_N)$ . Επίσης ορίζουμε  $\Pi^N(u) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_N$  την σύζευξη γινόμενο. Οι συναρτήσεις  $M^N$  και  $\Pi^N$  είναι πολυδιάστατες συζεύξεις για κάθε  $N \geq 2$ , ενώ η συνάρτηση  $W^N$  δεν είναι σύζευξη για  $N > 2$ . Οι συναρτήσεις  $W^N$  και  $M^N$  προκύπτουν από την ανισότητα Fréchet – Hoeffding και ονομάζονται κάτω όριο Fréchet και άνω όριο Fréchet αντίστοιχα.

Στην συνέχεια θα δούμε πως ορίζεται η διδιάστατη σύζευξη η οποία συνδέει την διδιάστατη συνάρτηση κατανομής με τις μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές.

## 2.2 Διδιάστατες συζεύξεις

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια διδιάστατη σύζευξη είναι μια συνάρτηση  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Για κάθε  $u \in [0,1]$

$$C(0, u) = C(u, 0) = 0$$

2) Για κάθε  $u \in [0,1]$

$$C(u,1) = u \text{ και } C(1,u) = u$$

3) Για κάθε  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0,1] \times [0,1]$  με  $u_1 \leq u_2$  και  $v_1 \leq v_2$  έχουμε:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Για κάθε σύζευξη ισχύει ότι:

- Είναι αύξουσα για κάθε τυχαία μεταβλητή
- Είναι συνεχής
- Ικανοποιεί την ανισότητα:  $\max[u + v - 1, 0] \leq C(u, v) \leq \min[u, v]$  για όλα τα  $u, v \in [0,1]$

Τα  $\max[u + v - 1, 0]$  και  $\min[u, v]$  είναι τα όρια Fréchet όπως είδαμε προηγουμένως και είναι και αυτά συζεύξεις. Μια σημαντική σύζευξη που συναντάμε συχνά, όταν  $u$  και  $v$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, είναι η σύζευξη γινόμενο:  $\Pi(u, v) = u \cdot v$

### **ΘΕΩΡΗΜΑ SKLAR**

Έστω  $H$  μια διδιάστατη από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις  $F$  και  $G$ . Τότε υπάρχει μια σύζευξη  $C$  τέτοια ώστε  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ .

## **2.3 Συζεύξεις και τυχαίες μεταβλητές**

### **ΘΕΩΡΗΜΑ SKLAR (για τυχαίες μεταβλητές)**

Έστω  $X$  και  $Y$  τυχαίες μεταβλητές με περιθώριες συναρτήσεις κατανομών  $F$  και  $G$  και κοινή συνάρτηση κατανομής  $H$ . Τότε υπάρχει μια σύζευξη  $C$  η οποία ορίζεται ως εξής:  
 $H(x, y) = C(F(x), G(y))$

**Αντίστροφο:** Εάν  $C$  είναι μια σύζευξη και  $F, G$  συναρτήσεις κατανομών τότε η συνάρτηση  $H$  ορισμένη από τον προηγούμενο ορισμό, είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  με περιθώριες συναρτήσεις κατανομών  $F$  και  $G$  αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις:

- Εάν  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς τότε η σύζευξη  $C$  είναι μοναδική. Διαφορετικά, η  $C$  είναι μοναδικά ορισμένη στο  $RanF \times RanG$ .
- Έστω  $H$  μια από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες συναρτήσεις  $F$  και  $G$ . Τότε αν  $C$  είναι μια σύζευξη ορισμένη όπως προηγουμένως, γράφουμε:  
 $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$  όπου  $F^{-1}$  και  $G^{-1}$  είναι οι αντίστροφες των συναρτήσεων  $F$  και  $G$ .

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητες των copulas και ποιο συγκεκριμένα στην ιδιότητα τους να παραμένουν αναλλοίωτα για μονότονους μετασχηματισμούς.

### Θεώρημα

Έστω  $X$  και  $Y$  συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με σύζευξη  $C_{X,Y}$ . Έστω  $\alpha$  και  $\beta$  αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις στο σύνολο  $RanF \times RanG$ , τότε  $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$ . Συνεπώς, η  $C_{X,Y}$  παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αυστηρούς αύξοντες μετασχηματισμούς των  $X$  και  $Y$ .

### Απόδειξη

Έστω  $F$  και  $G$  συναρτήσεις κατανομών των  $X$  και  $Y$  και έστω  $L$  και  $M$  συναρτήσεις κατανομών των  $\alpha(X)$  και  $\beta(Y)$  αντίστοιχα. Επειδή  $\alpha$ ,  $\beta$  είναι αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις έχουμε:

$$L(x) = P\{\alpha(X) \leq x\} = P\{X \leq \alpha^{-1}(x)\} = F(\alpha^{-1}(x))$$

Άρα η σύζευξη παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(L(X), M(Y)) &= P\{\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y\} \\ &= P\{X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)\} \\ &= C_{XY}(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{XY}(L(X), M(Y)) \end{aligned}$$

Στις περιπτώσεις που δεν έχουμε αύξοντες μετασχηματισμούς η συμπεριφορά των συζεύξεων αλλάζει όπως θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα

## Θεώρημα

Έστω  $X$  και  $Y$  συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με σύζευξη  $C_{X,Y}$ . Έστω  $\alpha$  και  $\beta$  αυστηρά μονότονες συναρτήσεις ορισμένες στο  $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ .

a) Εάν  $\alpha$  είναι αυστηρά αύξουσα και  $\beta$  είναι αυστηρά φθίνουσα, τότε:

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = u - C_{X,Y}(u, 1 - v)$$

b) Εάν  $\beta$  είναι αυστηρά αύξουσα και  $\alpha$  είναι αυστηρά φθίνουσα, τότε:

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = v - C_{X,Y}(1 - u, v)$$

c) Εάν  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αυστηρά φθίνουσες, τότε:

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v)$$

## Απόδειξη

$$\text{a) } C_{\alpha(X),\beta(Y)} = P\{\alpha(X) \leq x, Y \geq \beta^{-1}(y)\}$$

$$= P\{\alpha(X) \leq x\} - P\{\alpha(X) \leq x, Y \leq \beta^{-1}(y)\}$$

$$= C_{\alpha(X)}(L(x)) - C_{\alpha(X),Y}(L(x), G(\beta^{-1}(y)))$$

$$= C_{\alpha(X)}(L(x)) - C_{\alpha(X),Y}(L(x), 1 - M(y))$$

$$= u - C_{X,\beta(Y)}(u, 1 - v)$$

$$= u - C_{X,Y}(u, 1 - v)$$

$$\text{b) } C_{\alpha(X),\beta(Y)} = P\{X \geq \alpha^{-1}(x), \beta(Y) \leq y\}$$

$$= P\{\beta(Y) \leq y\} - P\{X \leq \alpha^{-1}(x), \beta(Y) \leq y\}$$

$$= C_{\beta(Y)}(M(y)) - C_{X,\beta(Y)}(F(\alpha^{-1}(x)), M(y))$$

$$= C_{\beta(Y)}(M(y)) - C_{X,\beta(Y)}(1 - L(x), M(y))$$

$$= v - C_{X,\beta(Y)}(1 - u, v)$$

$$= v - C_{X,Y}(1 - u, v)$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C_{\alpha(x),\beta(y)} &= P\{X \geq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)\} \\
&= 1 - F(\alpha^{-1}(x)) - G(\beta^{-1}(y)) + C_{X,Y}(F(\alpha^{-1}(x)), G(\beta^{-1}(y))) \\
&= 1 - (1 - L(x)) - (1 - M(y)) + C_{X,Y}(1 - L(x), 1 - M(y)) \\
&= 1 - (1 - u) - (1 - v) + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v) \\
&= u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v)
\end{aligned}$$

### Θεώρημα

Έστω  $C$  μια σύζευξη. Τότε για κάθε  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$  έχουμε:

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε σύζευξη είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $\text{Dom}C$ .

### Θεώρημα

Έστω  $C$  μια σύζευξη. Για κάθε  $u \in [0, 1]$  η μερική παράγωγος  $\partial C / \partial v$  υπάρχει για όλα σχεδόν τα  $v \in [0, 1]$ . Για κάθε  $u$  και  $v$  έχουμε:  $0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$ .

Το θεώρημα ισχύει και για την μερική παράγωγο  $\partial C / \partial u$  αντίστοιχα.

Ένα παράδειγμα του θεωρήματος μπορούμε να δώσουμε χρησιμοποιώντας την Gumbel – Hougaard σύζευξη, που ανήκει στις Αρχιμήδειες συζεύξεις η ανάλυση και παρουσίαση των οποίων θα γίνει παρακάτω. Για την Gumbel – Hougaard σύζευξη έχουμε ότι:

$C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\}$  όπου η παράμετρος  $\theta$  μπορεί να πάρει όλες τις τιμές στο διάστημα  $[1, \infty)$ . Παίρνουμε την μερική παράγωγο της ως προς  $u$ :

$$C_{\theta,u}(v) = \frac{\partial}{\partial u} C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\} \times [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{-\frac{\theta-1}{\theta}} \frac{(-\ln u)^{\theta-1}}{u}$$

Για τα  $u \in [0,1]$  και για όλα τα  $\theta$  με  $\theta > 1$ , η  $C_{\theta,u}$  είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του  $v$ . Ως εκ τούτου η αντίστροφη συνάρτηση  $C_{\theta,u}^{-1}$  είναι καλώς ορισμένη. Παρολ' αυτά ο υπολογισμός της  $C_{\theta,u}^{-1}$  δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αναλυτικά. Επειδή η σύζευξη  $C_\theta$  είναι συμμετρική, τα παραπάνω ισχύουν και για την μερική παράγωγο της  $C_\theta$  ως προς  $v$ .

## 2.4 Συμμετρία

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποιες ιδιότητες των κατανομών τυχαίων μεταβλητών και κυρίως των διδιάστατων κατανομών που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες των συζεύξεων.

Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή και  $a$  ένας πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το  $X$  είναι συμμετρικό ως προς το  $a$  εάν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:  $P[X - a \leq x] = P[a - X \leq x]$ . Με άλλα λόγια, τα  $X - a$  και  $a - X$  έχουν την ίδια κατανομή.

Στις περιπτώσεις των διδιάστατων κατανομών έχουμε διάφορα είδη συμμετρίας ανάλογα με το πως συνδέονται οι δυο τυχαίες μεταβλητές.

Έστω  $X$  και  $Y$  δυο τυχαίες μεταβλητές και  $(a,b)$  ένα σημείο στο  $\mathbb{R}^2$ , τότε:

1. Τα  $(X,Y)$  είναι περιθωριακά συμμετρικά (marginally symmetric) ως προς το  $(a,b)$  αν τα  $X$  και  $Y$  είναι συμμετρικά ως προς τα  $a$  και  $b$  αντίστοιχα.
2. Τα  $(X,Y)$  είναι ακτινικά συμμετρικά (radially symmetric) ως προς το  $(a,b)$  αν η κοινή συνάρτηση κατανομής των  $X - a$  και  $Y - b$  είναι ίδια με την κοινή συνάρτηση κατανομής των  $a - X$  και  $b - Y$ .
3. Τα  $(X,Y)$  είναι από κοινού συμμετρικά (jointly symmetric) ως προς το  $(a,b)$  εάν τα  $(X - a, Y - b)$ ,  $(X - a, b - Y)$ ,  $(a - X, Y - b)$  και  $(a - X, b - Y)$  έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής.

Το ποιο γνωστό παράδειγμα ακτινικά συμμετρικής κατανομής είναι η διδιάστατη κανονική.

### Θεώρημα

Έστω  $X$  και  $Y$  συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής  $H$  και περιθώριες συναρτήσεις κατανομών  $F$  και  $G$  αντίστοιχα. Έστω  $(a, b)$  ένα σημείο στο  $R^2$ . Τότε τα  $(X, Y)$  είναι ακτινικά συμμετρικά ως προς το  $(a, b)$  αν και μόνο αν:

$$H(a+x, b+y) = \bar{H}(a-x, b-y), \text{ για όλα τα } (x, y) \in R^2$$

Όπου  $\bar{H}$  είναι η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\bar{H}(x, y) = P[X > x / Y > y].$$

### Θεώρημα

Έστω  $X$  και  $Y$  συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής  $H$  και περιθώριες συναρτήσεις κατανομών  $F$  και  $G$  αντίστοιχα. Έστω  $C$  σύζευξη και υποθέτουμε ότι τα  $X$  και  $Y$  είναι συμμετρικά ως προς τα  $a$  και  $b$  αντίστοιχα. Τότε τα  $(X, Y)$  είναι ακτινικά συμμετρικά

ως προς το  $(a, b)$  αν και μόνο αν  $C = \hat{C}$ , όπου

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$$

για κάθε  $(u, v) \in I^2$ . Όπου ο  $\hat{C}$  είναι ο σύνδεσμος επιβίωσης των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , που δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$$

και συνδέει την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης με τις μονοδιάστατες περιθώριες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$$

όπου  $\bar{F}$  και  $\bar{G}$  οι μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις.

## 2.5 Συμφωνία και Συσχέτιση

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τους γενικούς ορισμούς του μέτρου συμφωνίας (measure of concordance), των συντελεστών συσχέτισης του Pearson, του Kendall και του Spearman

καθώς επίσης και τους συντελεστές εξάρτησης ουράς που θα συναντήσουμε παρακάτω στις διάφορες οικογένειες των copulas.

### Μέτρο συμφωνίας (Measure of Concordance)

Γενικά μιλώντας, η συμφωνία εκφράζει την πιθανότητα δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  να έχουν και οι δύο μεγάλη ή μικρή αξία σε σύγκριση με την πιθανότητα η μία τυχαία μεταβλητή να έχει μεγάλη αξία και η άλλη μικρή. Ειδικότερα, ένα μέτρο  $M_{X,Y}$  με σύζευξη  $C$  είναι ένα μέτρο συμφωνίας (measure of concordance) εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Το  $M_{X,Y}$  ορίζεται για κάθε ζευγάρι  $(X, Y)$
- $M_{X,Y} \in [-1, 1]$  με  $M_{X,X} = 1$  και  $M_{X,-X} = -1$
- $M_{X,Y} = M_{Y,X}$
- Αν οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες τότε  $M_{X,Y} = 0$
- $M_{-X,Y} = M_{X,-Y} = -M_{X,Y}$
- Αν  $C_1$  και  $C_2$  είναι συζεύξεις με  $C_1 < C_2$  τότε  $M_{C_1} \leq M_{C_2}$
- Αν  $\{(X_n, Y_n)\}$  είναι μία ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών με συζεύξεις  $C_n$  και αν  $\{C_n\}$  συγκλίνει σημειακά στη  $C$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{C_n} = M_C$

### Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (Pearson)

Έστω  $X$  και  $Y$  τυχαίες μεταβλητές με κατανομές  $F$  και  $G$  αντίστοιχα και από κοινού κατανομή  $H$ . Τότε ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson,  $\rho$ , για τα  $X$  και  $Y$  ορίζεται ως εξής:

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy$$

Αντικαθιστώντας όπου  $u = F(x)$ ,  $v = G(y)$  και  $H(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(u, v)$  έχουμε:



$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)}} \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dF^{-1}(u) dG^{-1}(v)$$

### Συντελεστής συσχέτισης του Kendall (Kendall's tau)

Έστω  $X$  και  $Y$  τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την από κοινού διδιάστατη κατανομή  $H$ . Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall για τα  $X$  και  $Y$  ορίζεται ως εξής:

$$\tau(X, Y) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) dH(x, y) - 1$$

Αντικαθιστώντας όπου  $u = F(x)$ ,  $v = G(y)$  και  $H(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(u, v)$  έχουμε:

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1$$

### Συντελεστής συσχέτισης του Spearman (Spearman's rho)

Έστω  $X$  και  $Y$  τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την από κοινού διδιάστατη κατανομή  $H$ . Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman ορίζεται ως εξής:

$$\rho_s(X, Y) = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dF(x) dG(y)$$

Αντικαθιστώντας όπου  $u = F(x)$ ,  $v = G(y)$  και  $H(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(u, v)$  έχουμε:

$$\rho_s(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dudv$$

## Εξάρτηση ουράς (tail dependence)

Η μελέτη της εξάρτησης ουράς αφορά το ποσό εξάρτησης στο υψηλότερο δεξιά τεταρτοκύκλιο ουράς (upper-right-quadrant tail) και στο χαμηλότερο αριστερά τεταρτοκύκλιο ουράς (lower-left-quadrant tail) μιας διδιάστατης κατανομής. Η ιδέα της εξάρτησης ουράς είναι σχετική με την μελέτη εξάρτησης μεταξύ ακραίων τιμών. Αποδεικνύεται ότι η εξάρτηση ουράς μεταξύ δυο συνεχών τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  είναι μια ιδιότητα των συζεύξεων και επιπλέον το ποσό της εξάρτησης παραμένει αναλλοίωτο κάτω από αυστηρούς αύξοντες μετασχηματισμούς των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .

### Ορισμός

Έστω  $(X, Y)^T$  ένα διάνυσμα συνεχών τυχαίων μεταβλητών με περιθώριες συναρτήσεις  $F$  και  $G$  αντίστοιχα. Ο συντελεστής της άνω εξάρτησης ουράς (upper tail dependence) του διανύσματος  $(X, Y)^T$ , είναι:

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} P\{Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)\} = \lambda_U$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο  $\lambda_U \in [0, 1]$  υπάρχει. Εάν το  $\lambda_U \in (0, 1]$ , τότε λέμε ότι τα  $X$  και  $Y$  είναι ασυμπτωτικά εξαρτημένα στην άνω ουρά ενώ εάν  $\lambda_U = 0$ , τότε λέμε ότι τα  $X$  και  $Y$  είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητα στην άνω ουρά.

### Ορισμός

Έστω  $C$  μια διδιάστατη σύζευξη τέτοια ώστε το όριο  $\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lambda_U$  υπάρχει.

Τότε εάν  $\lambda_U \in (0, 1]$  η σύζευξη  $C$  παρουσιάζει άνω εξάρτηση ουράς, ενώ αν  $\lambda_U = 0$ , η σύζευξη  $C$  παρουσιάζει άνω ανεξαρτησία ουράς.

**Παράδειγμα:** Θεωρούμε την Gumbel οικογένεια συζεύξεων που δίνεται από τον τύπο:

$$C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\}, \text{ για } \theta \geq 1. \text{ Έχουμε:}$$

$$\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \frac{1-2u+u^{2^{\frac{1}{\theta}}}}{1-u}. \text{ Συνεπώς, το όριο γίνεται:}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{\theta}} u^{2^{\frac{1}{\theta}}-1} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}. \text{ Συμπεραίνουμε ότι, για } \theta > 1, \text{ η σύζευξη } C_{\theta}$$

έχει άνω εξάρτηση ουράς.

Αντίστοιχα, για τον συντελεστή κάτω εξάρτησης ουράς μπορούμε να πούμε ότι ορίζεται ως

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \{Y \leq G^{-1}(u) \setminus X \leq F^{-1}(u)\} = \lambda_L \text{ εάν αυτό υπάρχει.}$$

### Ορισμός

Έστω  $C$  μια διδιάστατη σύζευξη τέτοια ώστε το όριο  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u,u)}{u} = \lambda_L$  υπάρχει. Τότε εάν

$\lambda_L \in (0,1]$ , η σύζευξη  $C$  παρουσιάζει κάτω εξάρτηση ουράς, ενώ αν  $\lambda_L = 0$ , η σύζευξη  $C$  παρουσιάζει κάτω ανεξαρτησία ουράς.

РАНЕКЪМЪО РЕПАА

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΖΕΥΞΕΩΝ

### 3.1 Farlie-Gumbel-Morgenstern copula

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις συζεύξεις που προέρχονται από την οικογένεια διδιάστατων κατανομών Farlie-Gumbel-Morgenstern. Η οικογένεια κατανομών Farlie-Gumbel-Morgenstern περιορίζεται στο να εκφράζει μια ασθενή συσχέτιση μεταξύ δυο τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .

Δυο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  θα λέμε ότι ανήκουν στην οικογένεια FGM αν η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους δίνεται από τον τύπο:

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x)G(y)\{1 + \theta[1 - F(x)][1 - G(y)]\}$$

$$\forall x, y \in R \text{ και } -1 \leq \theta \leq 1$$

Για να συνδέσουμε την σύζευξη  $C$  με την από κοινού συνάρτηση κατανομής  $H$  ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Έστω ότι οι δυο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή και επιπλέον έχουμε ότι:  $F(x) = x$  και  $G(y) = y$ . Τότε:  $H(x, y) = xy[1 + \theta(1 - x)(1 - y)]$ , με  $0 \leq x, y \leq 1$ .

Η Farlie-Gumbel-Morgenstern ορίζεται ως εξής:

$$C^{FGM}(u, v) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)], \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

Οι συντελεστές συσχέτισης των Spearman και Kendall για την FGM οικογένεια συζεύξεων παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = \frac{2\theta}{9}$$

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dudv = \frac{\theta}{3}$$

όπου:  $-1 \leq \theta \leq 1$

### 3.2 Marshall Olkin copulas (the bivariate case)

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε την οικογένεια των συζεύξεων που παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τους Marshall και Olkin το 1967 και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μοντελοποίηση της από κοινού κατανομής της διάρκειας ζωής διαφόρων αντικειμένων όταν αυτές οι διάρκειες ζωής συνδέονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, τα Marshall-Olkin copulas είναι χρήσιμα για την μελέτη της διάρκειας ζωής των λαμπτήρων συγκεκριμένης εταιρίας ή της διάρκειας ζωής των ομολογιών εταιριών σε συγκεκριμένους επιχειρηματικούς τομείς. Στόχος των συζεύξεων Marshall-Olkin είναι η κατασκευή πολυδιάστατων κατανομών από περιθώριες εκθετικές κατανομές τυχαίων μεταβλητών. Η εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, για παράδειγμα στην διδιάστατη περίπτωση, κατασκευάζεται υπολογίζοντας ότι για κάθε χρονική στιγμή  $t$  στη διάρκεια ζωής των αντικειμένων το ένα από αυτά ή και τα δυο μαζί ταυτόχρονα θα δεκτούν ένα πλήγμα.

Η διάρκεια ζωής των αντικειμένων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson ( $\lambda$ ). Έστω ότι έχουμε δυο αντικείμενα 1 και 2 με διάρκειες ζωής  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα. Στη διδιάστατη περίπτωση και για κάθε χρονική στιγμή  $t$  έχουμε τρία πιθανά ενδεχόμενα: Το 1 αντικείμενο δέχεται ένα πλήγμα (αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $E_1$ ), το 2 αντικείμενο δέχεται ένα πλήγμα (αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $E_2$ ) ή και τα δυο δέχονται ένα πλήγμα ταυτόχρονα ( $E_{12}$ ).

Για να μοντελοποιήσουμε αυτό τα τρία ενδεχόμενα χρησιμοποιούμε τρεις ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$

Η πιθανότητα επιβίωσης,  $\bar{F}$ , για το αντικείμενο 1 σε χρόνο  $x$  ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(x) &= P\{E_1 > x\}P\{E_{12} > x\} \\ &= \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x]\end{aligned}$$

Η πιθανότητα επιβίωσης,  $\bar{F}$ , για το αντικείμενο 2 σε χρόνο  $y$  ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\bar{F}_2(y) &= P\{E_2 > y\}P\{E_{12} > y\} \\ &= \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})y]\end{aligned}$$

Η συνάρτηση επιβίωσης,  $\bar{H}$ , δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= P\{E_1 > x\}P\{E_2 > y\}P\{E_{12} > \max(x, y)\} \\ &= \exp[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)]\end{aligned}$$

Για να συνδέσουμε την από κοινού κατανομή επιβίωσης  $\bar{H}$  με την σύζευξη επιβίωσης της  $\bar{C}$  εκτελούμε την παρακάτω διαδικασία. Χρησιμοποιώντας την σχέση  $\max(x, y) = x + y - \min(x, y)$ , η σχέση 1 γίνεται:

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y - \lambda_{12} \min(x, y)) \\ &= \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y) \min(\exp(\lambda_{12}x), \exp(\lambda_{12}y))\end{aligned}$$

και θέτοντας:

$$\bar{F}_1(x) = u, \quad \bar{F}_2(y) = v, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}$$

έτσι ώστε:

$$\exp(\lambda_{12}x) = u^{-\alpha_1} \quad \text{και} \quad \exp(\lambda_{12}y) = v^{-\alpha_2}$$

προκύπτει ότι η σύζευξη επιβίωσης  $\bar{C}$  για τα  $X$  και  $Y$  παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\bar{C}(u, v) = uv \min(u^{-\alpha_1}, v^{-\alpha_2}) = \min(vu^{1-\alpha_1}, uv^{1-\alpha_2})$$

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την Marshall-Olkin σύζευξη ως εξής:

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}^{MO}(u, v) = \min(vu^{1-\alpha_1}, uv^{1-\alpha_2}) = \begin{cases} u^{1-\alpha_1} v & , v^{\alpha_1} > u^{\alpha_2} \\ v^{1-\alpha_2} u & , u^{\alpha_1} < v^{\alpha_2} \end{cases}$$

όπου  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$

- Τα Frechet – Hoeffding όρια, ορίζονται ως εξής:

$$C_{\alpha_1, 0} = C_{0, \alpha_2} = C_{\pi} \quad \text{και} \quad C_{1, 1} = M$$

- Θα δούμε τώρα πως διαμορφώνονται οι συντελεστές συσχέτισης των Spearman και Kendall. Έχουμε:

$$\rho_S(C_{\alpha_1, \alpha_2}^{MO}) = \frac{3a_1a_2}{2a_1 + 2a_2 - a_1a_2}$$

$$\tau(C_{\alpha_1, \alpha_2}^{MO}) = \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2 - a_1a_2}$$

- Ο συντελεστής της άνω εξάρτησης ουράς μπορεί εύκολα να υπολογιστεί:

$$\lambda_U^{MO} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C_{\alpha_1, \alpha_2}^{MO}(u, u)}{1-u} = \begin{cases} \alpha_2 & , \text{ αν } \alpha_1 > \alpha_2 \\ \alpha_1 & , \text{ αν } \alpha_1 < \alpha_2 \end{cases}$$

Άρα

$$\lambda_U^{C_{\alpha_1, \alpha_2}^{MO}} = \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

### Marshall-Olkin copulas (the multivariate case)

Οι επιπλοκές που συναντάμε στις πολυδιάστατες Marshall-Olkin συζεύξεις είναι ότι χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα μεγάλο αριθμό παραμέτρων. Χρειαζόμαστε ένα δείγμα  $2^n - 1$  ομοιόμορφων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε να μπορέσουμε αργότερα να κατασκευάσουμε  $n$  εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Αφού πάρουμε το δείγμα των τυχαίων μεταβλητών, στη συνέχεια τα κατηγοριοποιούμε και τα τοποθετούμε σε υπό-σεντ (subsets). Αφού τα ορίσουμε, ένα από αυτά τα σεντ το χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τις  $n$  διαφορετικές εντάσεις,  $\lambda_i^*$ . Η περιθώρια κατανομή είναι εύκολο να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους  $\lambda_i^*$ . Στην συνέχεια, όπως και στην διδιάστατη περίπτωση, με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς των  $\lambda_i^*$  ορίζουμε τα  $a_i$ . Τέλος υπολογίζουμε την σύζευξη επιβίωσης  $\bar{C}$  και την  $n$ -διάστατη Marshall-Olkin σύζευξη που θα έχει τώρα  $n$  παραμέτρους.



### 3.4 The Elliptical copulas

Η κλάση των ελλειπτικών συζεύξεων παρουσιάζει χρήσιμα παραδείγματα πολυδιάστατων κατανομών. Σε αυτές εμφανίζονται πολλές από τις ιδιότητες της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Τα elliptical copulas μας βοηθάνε στην μοντελοποίηση πολυδιάστατων ακραίων γεγονότων και στη διαμόρφωση μη παραμετρικών μέτρων εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών. Οι ελλειπτικές συζεύξεις είναι οι συζεύξεις των ελλειπτικών κατανομών. Συνεπώς, η προσομοίωση των ελλειπτικών συζεύξεων είναι εξίσου εύκολη με την προσομοίωση των ελλειπτικών κατανομών.

Γενικά μιλώντας, όταν «βλέπουμε» μια ελλειπτική σύζευξη ή μια από κοινού ελλειπτική κατανομή από πάνω, τα περιγράμματα αυτής της κατανομής έχουν ελλειψοειδή μορφή. Μια από τις ιδιότητες των elliptical copulas είναι η ακτινική συμμετρία ενώ το κύριο πλεονέκτημα τους είναι ότι μπορούμε εύκολα να πάρουμε παραδείγματα από αυτά. Από την άλλη, ένα σημαντικό μειονέκτημα τους, είναι ότι δεν μπορούν να γραφτούν σε κλειστές φόρμες.

#### A. The Gaussian copula

Η κανονική σύζευξη ή Gaussian copula είναι η σύζευξη της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Έστω  $R$  συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας με  $\text{diag}R=1$  και  $\Phi_R$  η τυποποιημένη πολυδιάστατη κανονική κατανομή με πίνακα συσχετίσεων  $R$ .

Η πολυδιάστατη κανονική σύζευξη ορίζεται ως εξής:

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Για  $n=2$  η κανονική σύζευξη γράφεται ως εξής:

$$C_R^{Ga}(u, v) = \Phi_R^2(\Phi^{-1}(u), \dots, \Phi^{-1}(v))$$

Έχουμε:

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds dt$$

- Στην περίπτωση που οι δυο τυχαίες μεταβλητές  $u$  και  $v$  είναι ασυσχέτιστες, η κανονική σύζευξη παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} C_0^{Ga}(u,v) &= \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} f_1(s) ds \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} f_2(t) dt \\ &= uv \\ &= \Pi(u,v) \end{aligned}$$

## **B. t-student copula**

Η t-student σύζευξη είναι η σύζευξη της πολυδιάστατης t-student κατανομής. Έστω  $X$  ένα διάνυσμα με  $n$ -διάστατη t-student κατανομή με  $v$  βαθμούς ελευθερίας, διάνυσμα μέσης τιμής  $\mu$  (για  $v > 1$ ) και πίνακα συνδιασπορών  $\frac{v}{v-2} \Sigma$  (για  $v > 2$ ). Έχουμε:

$$X^d = \mu + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} Z$$

Όπου  $\mu \in R^n$ ,  $S \sim \chi_v^2$  και το τυχαίο διάνυσμα  $Z \sim N(0, \Sigma)$ . Τα  $\mu$ ,  $S$ ,  $Z$  είναι ανεξάρτητα.

Η σύζευξη του διανύσματος  $X$  είναι η t-student σύζευξη με  $v$  βαθμούς ελευθερίας. Το t-student copula γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$C_{v,R}^t(\mathbf{u}) = t_{v,R}^n(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))$$

Όπου:  $R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$ , για  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

: Η  $t_{v,R}^n$  είναι η πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος

$$\frac{\sqrt{v}Y}{\sqrt{S}}, \quad Y \sim N_n(0, \Sigma)$$

: Οι τυχαίες μεταβλητές  $S \sim \chi_v^2$  και το τυχαίο διάνυσμα  $Y$  είναι ανεξάρτητα.

: Οι  $t_v$  είναι οι περιθώριες συναρτήσεις της  $t_{v,R}^n$

Για  $n=2$ , η t-student σύζευξη παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$C'_{\nu,R}(u,v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt$$

Όπου  $R_{12}$  είναι ο γραμμικός συντελεστής συσχέτισης της διδιάστατης t-student κατανομής με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας, αν  $\nu > 2$ .

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της t-student σύζευξης μοιάζει πολύ με αυτόν της Gaussian αλλά έχει μια επιπλέον παράμετρο, το  $\nu$ . Η παράμετρος αυτή ελέγχει την εξάρτηση στα άκρα της κατανομής. Όταν η παράμετρος  $\nu$  είναι μικρή τότε έχουμε εξάρτηση στα άκρα και ανεξαρτησία στο κέντρο της κατανομής. Αντίθετα, όταν το  $\nu$  είναι μεγάλο τότε έχουμε εξάρτηση στο κέντρο και η t-student σύζευξη συμπεριφέρεται ανάλογα με την Gaussian σύζευξη.

### Θεώρημα

Έστω  $X$  ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μια ελλειπτική κατανομή και έχουν πίνακα συνδιασπορών  $R$  τότε οι συντελεστές συσχέτισης του Kendall και του Spearman δίνονται από τους τύπους:

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{ij})$$

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_{ij}}{2}\right)$$

Τα όρια  $\lambda_U$  και  $\lambda_L$  της άνω και κάτω εξάρτησης ουράς διαμορφώνονται ως εξής:

$$\text{Εχουμε ότι } P\{V \leq v/U = u\} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \text{ και } P\{V > v/U = u\} = 1 - \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}.$$

Τότε:

$$\lambda_U = - \lim_{u \rightarrow 1^-} \left[ -2 + \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=v} + \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=u} \right]$$

$$\lambda_U = - \lim_{u \rightarrow 1^-} [ P\{V \geq v / U=u\} + P\{U \geq v / V=u\} ]$$

Για  $C(u, v) = C(v, u)$ , έχουμε:

$$\lambda_U = - \lim_{u \rightarrow 1^-} P\{V \geq u / U=u\}$$

Εάν τώρα ορίσουμε  $x = F^{-1}(u)$  και  $y = F^{-1}(v)$  όπου  $x, y \in R$  με  $F$  και  $G$  τις περιθώριες συναρτήσεις των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα. Τότε, το παραπάνω όριο γράφεται ως εξής:

$$\lambda_U = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} [ P\{F^{-1}(V) \geq x / F^{-1}(U) = x\} ] = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} P\{X > x / Y = x\}$$

- Αν  $F = \Phi$ , η κανονική κατανομή και γνωρίζοντας ότι για την διδιάστατη κανονική κατανομή  $Y/X=x \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$ , γράφουμε:

$$\lambda_U = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \right] = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \Phi\left(x \frac{\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right) \right]$$

- Όταν  $\rho < 1$ , στην κανονική σύζευξη δεν υπάρχει το  $\lambda_U$ .

- Λόγω συμμετρίας, τα παραπάνω ισχύουν και για το όριο  $\lambda_L$ .

- Αν  $F = t_\nu$ , η student κατανομή με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιώντας την σχέση (Dematra and McNeil (2004))

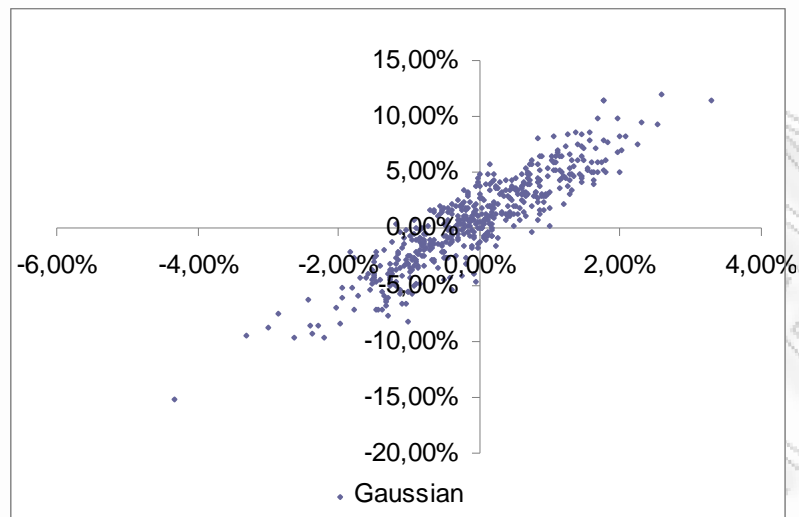
$$P\{X > x / X = x\} = 1 - t_{\nu+1} \left[ \left( \frac{\nu + x^2}{\nu + 1} \right)^{-1/2} \frac{x - rx}{\sqrt{1 - r^2}} \right], \quad \text{έχουμε:}$$

$$\lambda_U = 2t_{\nu+1} \left[ \frac{(-(\nu + 1)(1 - r))^{1/2}}{\sqrt{1 + r}} \right]$$

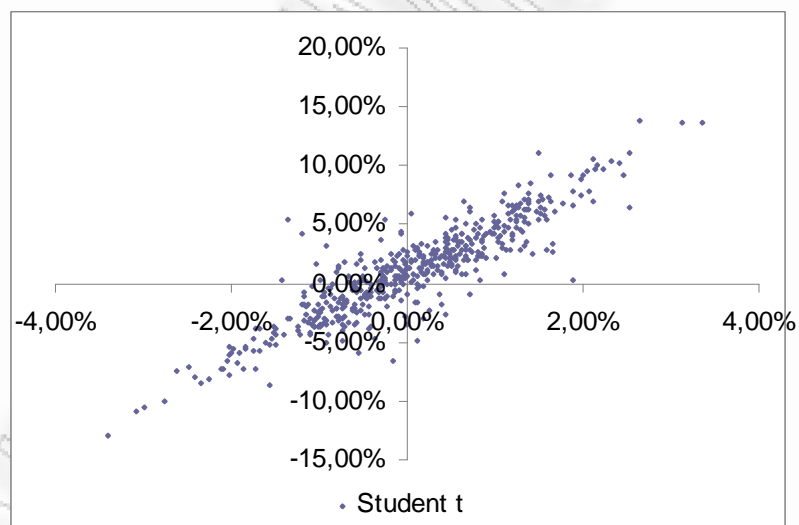
Επίσης έχουμε:

$$\lambda_L = 2t_{\nu+1} \left[ \frac{(-(\nu + 1)(1 - r))^{1/2}}{\sqrt{1 + r}} \right]$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές εξάρτησης  $\lambda_U$  και  $\lambda_L$  είναι ίδιοι λόγω ακτινικής συμμετρίας και είναι συναρτήσεις των βαθμών ελευθερίας και της γραμμικής συσχέτισης.



**Διδιάστατη κανονική σύζευξη με  $\rho = 0,9$ . Οι περιθώριες κατανομές είναι η τυποποιημένη κανονική και η κανονική με μέσο 1 και τυπική απόκλιση 4.**



**Διδιάστατη t-student σύζευξη με  $\rho = 0,9$  και 2 βαθμούς ελευθερίας,  $\nu=2$ . Οι περιθώριες κατανομές είναι η τυποποιημένη κανονική και η κανονική με μέσο 1 και τυπική απόκλιση 4.**

### 3.5 Archimedean copulas

Είδαμε προηγουμένως την οικογένεια των ελλειπτικών συζεύξεων και αναφέραμε ότι η προσομοίωση τους είναι εξίσου εύκολη με την προσομοίωση των ελλειπτικών κατανομών. Παρόλ' αυτά όμως τα elliptical copulas παρουσιάζουν κάποια μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να παρουσιαστούν σε κλειστές φόρμες και περιορίζονται να έχουν ακτινική συμμετρία. Σε πολλές χρηματοοικονομικές και ασφαλιστικές εφαρμογές παρουσιάζονται ισχυρότερες εξαρτήσεις μεταξύ μεγάλων απωλειών απ' ότι μεταξύ μεγάλων κερδών. Τέτοιες ασυμμετρίες δεν μπορούν να μελετηθούν με την βοήθεια των ελλειπτικών συζεύξεων.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μια άλλη οικογένεια συζεύξεων που καλούνται Archimedean copulas. Σε αντίθεση με τα elliptical copulas τα Archimedean μπορούν να εκφραστούν σε κλειστές φόρμες(τύπους). Παρουσιάζουν όμως και αυτά κάποια μειονεκτήματα. Επειδή οι Αρχιμήδειες συζεύξεις δεν προέρχονται από τις πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών που παίρνουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Sklar, για να επιβεβαιώσουμε την πολυδιάστατη μορφή των διδιάστατων Archimedean copulas χρησιμοποιούμε συγκεκριμένες τεχνικές. Επίσης, στις αρχιμήδειες συζεύξεις παρουσιάζεται έλλειψη ελευθέρων παραμέτρων στους πίνακες συσχετίσεων γιατί κάποιες τιμές εισάγονται εσκεμμένα ως ίσες.

Παρόλ' αυτά η χρησιμότητα και οι εφαρμογές των Archimedean copulas παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον λόγω της ευκολίας με την οποία κατασκευάζονται, των πολλών οικογενειών συζεύξεων που προέρχονται από τα Archimedean copulas και λόγω των ιδιοτήτων αυτών των οικογενειών.

#### Ορισμός

Έστω  $\phi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$  μια συνεχής και αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση με  $\phi(1)=0$ . Η ψευδό-αντίστροφη συνάρτηση της  $\phi$  είναι η συνάρτηση  $\phi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0,1]$  με τύπο:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & , \quad 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & , \quad \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι η  $\phi^{-1}$  είναι συνεχής και φθίνουσα στο διάστημα  $[0, \infty]$  και αυστηρά φθίνουσα στο  $[0, \phi(0)]$ . Επιπλέον,  $\phi^{-1}(\phi(u)) = u$  στο διάστημα  $[0, 1]$  και

$$\phi(\phi^{-1}(t)) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0) & , \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Τέλος, εάν  $\phi(0) = \infty$  τότε έχουμε ότι  $\phi^{-1} = \phi^{-1}$ .

### **Θεώρημα**

Έστω συνάρτηση  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  συνεχής και αυστηρά φθίνουσα τέτοια ώστε  $\phi(1) = 0$  και έστω  $\phi^{-1}$  η ψευδό-αντίστροφη της  $\phi$ . Τότε η συνάρτηση  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  που δίνεται από τον τύπο:

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

είναι μια σύζευξη αν και μόνο αν η συνάρτηση  $\phi$  είναι κυρτή.

Οι συζεύξεις αυτές καλούνται Archimedean συζεύξεις. Η συνάρτηση  $\phi$  καλείται γεννήτορας της σύζευξης. Εάν  $\phi(0) = \infty$  τότε η  $\phi$  είναι ένας αυστηρός γεννήτορας της σύζευξης. Σε αυτή τη περίπτωση,  $\phi^{-1} = \phi^{-1}$  και η  $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$  καλείται αυστηρή Archimedean σύζευξη.

### **Παράδειγμα**

Έστω συνάρτηση  $\phi(t) = 1 - t$  για  $t \in [0, 1]$ . Τότε η ψευδό-αντίστροφη της  $\phi$ ,  $\phi^{-1}(t) = 1 - t$  για  $t \in [0, 1]$  και  $\phi^{-1}(t) = 0$  για  $t > 1$ . Άρα,  $\phi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$ . Επίσης, όπως έχουμε αναφέρει, ισχύει ότι:  $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$ . Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι το διδιάστατο Frechet-Hoeffding κάτω όριο είναι μια Αρχιμήδεια σύζευξη.

### **Οικογένειες Αρχιμήδειων συζεύξεων**

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε συγκεκριμένα στις διάφορες οικογένειες Αρχιμήδειων συζεύξεων και στις ιδιότητες τους.

## Οικογένεια Gumbel

Έστω συνάρτηση  $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ , όπου  $\theta \geq 1$ . Η συνάρτηση  $\phi(t)$  είναι συνεχής και  $\phi(1)=0$ . Έχουμε,  $\phi'(t) = -\theta(-\ln t)^{\theta-1} \frac{1}{t}$ , άρα η  $\phi(t)$  είναι αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση από  $[0,1] \rightarrow [0,\infty]$ . Η  $\phi''(t) \geq 0$  στο διάστημα  $[0,1]$ , συνεπώς η  $\phi$  είναι κυρτή. Η  $\phi$  είναι γεννήτορας της σύζευξης και για  $\phi(0) = \infty$  είναι ο αυστηρός γεννήτορας της σύζευξης. Από το θεώρημα έχουμε:

$$C_\theta(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$$

Η σύζευξη αυτή καλείται Gumbel σύζευξη. Επιπλέον έχουμε ότι:  $C_1 = \Pi$  και  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$  όπου  $\Pi(u, v) = uv$  και  $M(u, v) = \min(u, v)$ . Η οικογένεια συζεύξεων Gumbel έχει άνω εξάρτηση ουράς όπως θα δείξουμε παρακάτω.

## Οικογένεια Clayton

Έστω συνάρτηση  $\phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$ , όπου  $\theta \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$ . Η συνάρτηση αυτή είναι ο γεννήτορας της Clayton οικογένειας συζεύξεων που δίνονται από τον τύπο:

$$C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{\frac{1}{\theta}}, 0)$$

Για  $\theta > 0$ , οι συζεύξεις Clayton είναι αυστηρές και δίνονται από τον παρακάτω τύπο:

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{1}{\theta}}$$

Η οικογένεια Clayton έχει κάτω εξάρτηση ουράς, όπως θα δείξουμε παρακάτω και επίσης έχουμε ότι:

$$\lim_{\theta \rightarrow -1} C_\theta = W, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$$



## Οικογένεια Frank

Έστω συνάρτηση  $\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ , όπου  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Η συνάρτηση αυτή είναι ο γεννήτορας της Frank οικογένειας συζεύξεων που δίνονται από τον τύπο:

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

Τα Frank copulas είναι αυστηρά Archimedean copulas. Επιπλέον έχουμε:

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_{\theta} = W, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta} = \Pi \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta} = M$$

Μέλη αυτής της οικογένειας συζεύξεων αποτελούν τις μοναδικές Αρχιμήδειες συζεύξεις που ικανοποιούν την ακτινική συμμετρία,  $C(u, v) = \hat{C}(u, v)$

## Συσχέτιση και εξάρτηση στα Archimedean copulas

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall καθώς επίσης και οι συντελεστές εξάρτησης ουράς για κάθε μια από τις οικογένειες των Αρχιμήδειων συζεύξεων.

## Θεώρημα

Έστω  $X$  και  $Y$  τυχαίες μεταβλητές και  $C$  μια Αρχιμήδεια σύζευξη που «γεννιέται» από την συνάρτηση  $\phi$ . Τότε, ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall,  $\tau$ , για τις  $X$  και  $Y$  δίνεται από τον τύπο:

$$\tau_c = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$$

### Οικογένεια Gumbel

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση  $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ , για  $\theta \geq 1$ . Έχουμε:  $\frac{\phi(t)}{\phi'(t)} = \frac{t \ln t}{\theta}$ . Τότε ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall παίρνει τη μορφή:

$$\tau_\theta = 1 + \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left( \left[ \frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) = 1 + \frac{4}{\theta} \left( 0 - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{\theta}$$

### Οικογένεια Clayton

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση  $\phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$ , με  $\theta \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$ . Έχουμε:

$\frac{\phi(t)}{\phi'(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}$ . Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall είναι:

$$\tau_\theta = 1 + \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}$$

### Οικογένεια Frank

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση  $\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$  με  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Τότε ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall παίρνει τη μορφή:

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta))$$

Όπου  $D_k(x)$  είναι η συνάρτηση Debye που δίνεται από τον τύπο:

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt, \text{ για κάθε θετικό αριθμό } k.$$

## Θεώρημα

Έστω  $\phi$  μια αυστηρά γεννήτρια συνάρτηση τέτοια ώστε η  $\phi^{-1}$  να ανήκει στην κλάση των μετασχηματισμών Laplace αυστηρά θετικών τυχαίων μεταβλητών. Εάν η  $\phi^{-1}(0)$  είναι πεπερασμένη, τότε η σύζευξη  $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$  δεν έχει άνω εξάρτηση ουράς. Εάν η  $C$  έχει άνω εξάρτηση ουράς, τότε  $\phi^{-1}(0) = -\infty$  και ο συντελεστής άνω εξάρτησης ουράς δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\phi^{-1}'(2s)}{\phi^{-1}'(s)} \right]$$

Ο συντελεστής κάτω εξάρτησης ουράς δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{\phi^{-1}'(2s)}{\phi^{-1}'(s)} \right]$$

## Οικογένεια Gumbel

Οι συζεύξεις Gumbel είναι αυστηρές Αρχιμήδειες συζεύξεις με γεννήτρια συνάρτηση  $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ . Έχουμε ότι:  $\phi^{-1}(s) = \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})$  και  $\phi^{-1}'(s) = -s^{\frac{1}{\theta}-1} \frac{1}{\theta} \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})$ . Οι συζεύξεις Gumbel έχουν άνω εξάρτηση ουράς η οποία με την βοήθεια του θεωρήματος δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\phi^{-1}'(2s)}{\phi^{-1}'(s)} \right] = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \left[ \frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right] = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$$

## Οικογένεια Clayton

Θεωρούμε την αυστηρή σύζευξη Clayton που δίνεται από τον τύπο:

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ για } \theta > 0 \text{ και γεννήτρια συνάρτηση } \phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}.$$

Έχουμε:  $\phi^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{\frac{1}{\theta}}$  και  $\phi^{-1}'(s) = -\frac{1}{\theta}(1 + \theta s)^{\frac{1}{\theta}-1}$ . Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\phi^{-1}'(2s)}{\phi^{-1}'(s)} \right] = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1 + 2\theta s)^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1 + \theta s)^{\frac{1}{\theta}-1}} \right] = 0.$$

Οι συζεύξεις Clayton παρουσιάζουν κάτω εξάρτηση ουράς της οποίας ο συντελεστής δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{\phi^{-1}'(2s)}{\phi^{-1}'(s)} \right] = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{(1 + 2\theta s)^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1 + \theta s)^{\frac{1}{\theta}-1}} \right] = 2 \cdot 2^{\frac{1}{\theta}-1} = 2^{\frac{1}{\theta}}$$

### Οικογένεια Frank

Θεωρούμε την αυστηρή σύζευξη Frank που δίνεται από τον τύπο

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad \text{για } \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ και γεννήτρια συνάρτηση}$$

$$\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}. \quad \text{Έχουμε: } \phi^{-1}(s) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 - (1 - e^{-\theta})e^{-s}) \quad \text{και}$$

$$\phi^{-1}'(s) = -\frac{1}{\theta} (1 - e^{-\theta})e^{-s} / (1 - (1 - e^{-\theta})e^{-s}). \quad \text{Επειδή } \phi^{-1}'(0) = -\frac{e^\theta - 1}{\theta} \text{ είναι πεπερασμένη, από}$$

το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι οι συζεύξεις Frank δεν έχουν άνω εξάρτηση ουράς. Τέλος, λόγω της ακτινικής συμμετρίας, οι Frank δεν έχουν ούτε κάτω εξάρτηση ουράς.

Η ανάλυση των Archimedean copulas συνοψίζεται στους παρακάτω πίνακες. Στον ΠΙΝΑΚΑ 1 παρουσιάζονται οι τύποι των συζεύξεων και οι γεννήτριες συναρτήσεις των τριών οικογενειών

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

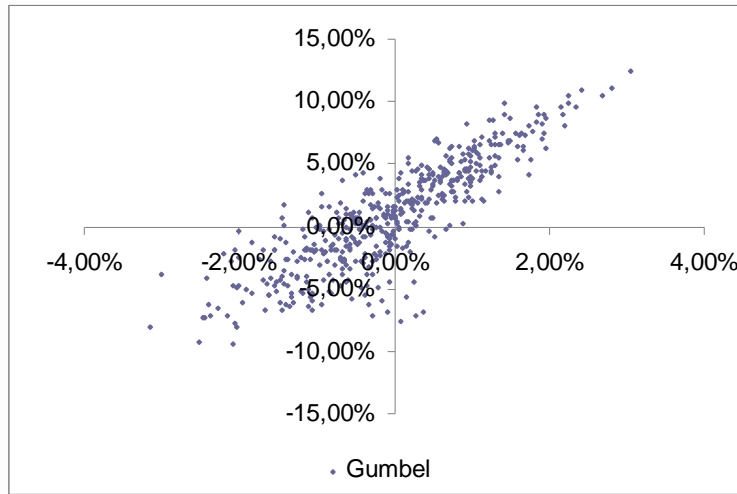
Family	Generator function $\phi(t)$	$\theta$	Bivariate copula $C(u,v)$
Product copula	$\phi(t) = -\ln t$	Not applicable	$C(u,v) = uv$
Gumbel	$\phi(t) = (-\ln t)^\theta$	$\theta \geq 1$	$C_\theta(u,v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$
Clayton	$\phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$	$\theta \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$	$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$
Frank	$\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1})$

Στον ΠΙΝΑΚΑ 2 παρουσιάζονται ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall και οι συντελεστές εξάρτησης ουράς των τριών οικογενειών Αρχιμήδειων συζεύξεων.

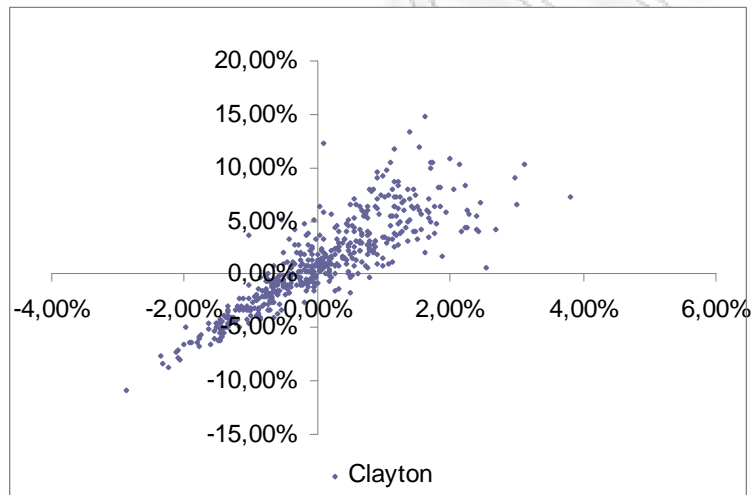
ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Family	Kendall's tau	Tail dependence
Product copula	$\tau_\theta = 0$	Δεν παρουσιάζει εξάρτηση ουράς
Gumbel	$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
Clayton	$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta + 2}$	$\lambda_U = 0$ $\lambda_L = 2^{\frac{1}{\theta}}$
Frank	$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta))$ όπου $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$	Δεν παρουσιάζει εξάρτηση ουράς

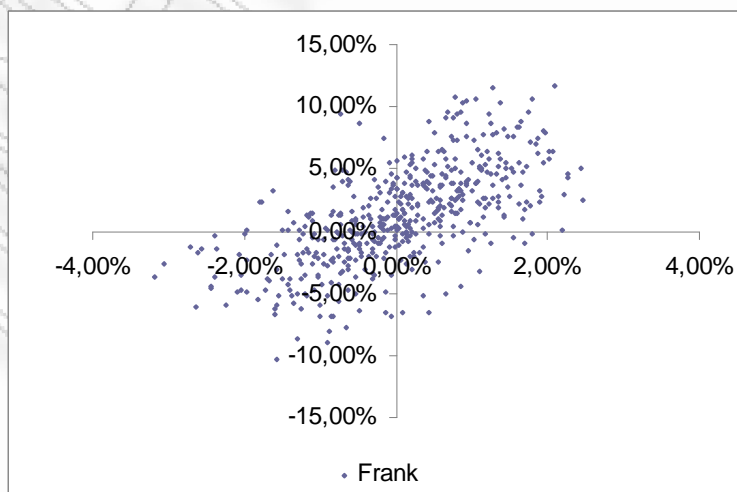
### Διδιάστατη Gumbel σύζευξη με $\theta=3$



### Διδιάστατη Clayton σύζευξη με $\theta=5$



### Διδιάστατη Frank σύζευξη με $\theta=20$



## Archimedean copulas (the multivariate case)

### Ορισμός

Μια συνάρτηση  $g(t)$  είναι ολοκληρωτικά μονότονη (completely monotone) στο διάστημα  $I$  εάν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

για όλα τα  $t \in I$  και τα  $k=0,1,2,\dots$

Εάν η  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  είναι ολοκληρωτικά μονότονη στο  $[0, \infty)$  και υπάρχει ένα  $t \in [0, \infty)$  τέτοιο ώστε  $g(t) = 0$ , τότε  $g(t) = 0$  για όλα τα  $t \in [0, \infty)$ . Επιπλέον, αν η ψευδο-αντίστροφη  $\phi^{[-1]}$  μιας Αρχιμήδειας γεννήτριας συνάρτησης  $\phi$  είναι ολοκληρωτικά μονότονη, τότε  $\phi^{[-1]}(t) > 0$  για όλα τα  $t \in [0, \infty)$  και έχουμε ότι  $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ .

### Θεώρημα

Έστω  $\phi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$  μια συνεχής αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε  $\phi(0) = \infty$  και  $\phi(1) = 0$  και έστω  $\phi^{-1}$  η αντίστροφη συνάρτηση της  $\phi$ . Έστω η συνάρτηση  $C^n : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  που δίνεται από τον τύπο:  $C^n(u) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))$ ,

Τότε η  $C^n$  είναι μια σύζευξη για όλα τα  $n \geq 2$  αν και μόνο αν η  $\phi^{-1}$  είναι ολοκληρωτικά μονότονη στο  $[0, \infty)$ .

### Πόρισμα

Αν η αντίστροφη συνάρτηση  $\phi^{-1}$  μιας αυστηρής γεννήτριας συνάρτησης  $\phi$  μιας Αρχιμήδειας σύζευξης  $C$  είναι ολοκληρωτικά μονότονη, τότε  $C \prec \Pi$  δηλ.  $C(u,v) = uv$  για όλα τα  $u, v \in [0,1]$ .

Γενικά, μια πολυδιάστατη Αρχιμήδεια σύζευξη δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$C^n(u) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))$$

όπου  $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$  και όπου η  $\phi$ , η γεννήτρια συνάρτηση, ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $\phi(1) = 0$
- Για όλα τα  $t \in (0,1)$ , η  $\phi$  είναι φθίνουσα,  $\phi'(t) < 0$
- Για όλα τα  $t \in (0,1)$ , η  $\phi$  είναι κυρτή,  $\phi''(t) \geq 0$

Μια επέκταση των οικογενειών των διδιάστατων Αρχιμήδειων συζεύξεων στην πολυδιάστατη μορφή τους δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

**Product copula:**

$$\Pi^n(u) = u_1 \cdots u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + \dots + (-\ln u_n)])$$

**Cook-Johnson copula:**

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{j=1}^n u_j^{-\theta} - \nu + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

**Gumbel-Hougaard copula:**

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta + \dots + (-\ln u_n)^\theta]^\frac{1}{\theta}\}$$

**Frank copula:**

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \cdots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right)$$



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

### 4.1 Παραμετρική εκτίμηση μιας δοθείσας σύζευξης

#### 1. The Maximum Likelihood (ML) method – Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Έστω  $f$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της από κοινού κατανομής  $F$  η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

όπου  $f_i$  είναι η μονοδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας της περιθώριας κατανομής  $F_i$  και  $c$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας της σύζευξης που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο  $T$  εμπειρικών δεδομένων αποτελούμενο από  $n$  λογαριθμοαποδόσεις παγίων ( $n$  financial asset log-returns),  $\chi = \{(x_1^t, \dots, x_n^t)\}_{t=1}^T$ . Έστω  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha)$  είναι το διάνυσμα παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε, όπου  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  είναι το διάνυσμα των παραμέτρων της περιθώριας κατανομής  $F_i$  και  $\alpha$  είναι το διάνυσμα των παραμέτρων της σύζευξης. Η συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας (log-likelihood function) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, (F_n(x_n^t; \theta_n); \alpha)) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i^t; \theta_i) \quad (1)$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας  $\hat{\theta}$  του διανύσματος παραμέτρων  $\theta$  είναι αυτός που μεγιστοποιεί την (1). Δηλαδή,

$$\hat{\theta} = \arg \max l(\theta)$$

## **2. The method of Inference Functions for Margins (IFM) – Η μέθοδος της συμπερασματολογίας των συναρτήσεων των περιθωρίων.**

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι παράμετροι των περιθωρίων κατανομών εκτιμώνται ξεχωριστά από τις παραμέτρους της σύζευξης. Η μέθοδος είναι χωρισμένη στα παρακάτω δύο βήματα:

1. Εκτίμηση των παραμέτρων  $\theta_i$ ,  $i=1, \dots, n$  των περιθωρίων κατανομών  $F_i$  χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας:

$$\hat{\theta}_i = \arg \max l^i(\theta_i) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_t^i; \theta_i)$$

όπου  $l^i$  είναι η συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας (log-likelihood function) της περιθώριας κατανομής  $F_i$ .

2. Εκτίμηση της παραμέτρου  $\alpha$  της σύζευξης, δεδομένου των εκτιμητών που βρήκαμε στο 1<sup>ο</sup> βήμα:

$$\hat{\alpha} = \arg \max l^c(\alpha) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_t^1; \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_t^n; \hat{\theta}_n); \alpha)$$

όπου  $l^c$  η συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας της σύζευξης C.

## **3. The Canonical Maximum Likelihood (CML) – Η «κανονική» μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας**

Η μέθοδος αυτή διαφοροποιείται από την IFM μέθοδο γιατί καμία υπόθεση δεν γίνεται για τους παραμετρικούς τύπους των περιθωρίων κατανομών. Η διαδικασία εκτίμησης είναι και αυτή χωρισμένη σε δυο βήματα:

1. Μετασχηματίζουμε τα δεδομένα  $(x_1^t, \dots, x_n^t)$   $t=1, \dots, T$  σε μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή,  $(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t)$ , χρησιμοποιώντας τις εμπειρικές κατανομές
2. Εκτιμάμε τη παράμετρο  $\alpha$  της σύζευξης:

$$\hat{\alpha} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t; \alpha)$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο  $R$  της κανονικής σύζευξης με την CML ή με την IFM μέθοδο σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{R}_{IFM \ CML} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t^T \zeta_t$$

όπου  $\zeta_t = (\Phi^{-1}(u_1^t), \dots, \Phi^{-1}(u_n^t))$ . Σημειώνουμε εδώ ότι  $u_i^t = \hat{u}_i^t$  όταν χρησιμοποιούμε την CML μέθοδο και  $u_i^t = F_i(x_i^t; \hat{\theta}_i)$  όταν χρησιμοποιούμε την IFM μέθοδο εκτίμησης, όπου  $i = 1, \dots, n$ .

Για την εκτίμηση της παραμέτρου  $R$  της  $t_\nu$ - Student σύζευξης χρησιμοποιούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Έστω  $\hat{R}_1$  ο εκτιμητής IFM/CML της παραμέτρου  $R$  της κανονικής σύζευξης.

$$\hat{R}_{m+1} = \frac{1}{T} \left( \frac{\nu + n}{\nu} \right) \sum_{t=1}^T \frac{\zeta_t^T \zeta_t}{1 + \frac{1}{\nu} \zeta_t^T \hat{R}_m^{-1} \zeta_t}, \quad m=1, 2, \dots$$

Όπου  $\zeta_t = (t_\nu^{-1}(u_1^t), \dots, t_\nu^{-1}(u_n^t))$

- Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα έως ότου  $\hat{R}_{m+1} = \hat{R}_m$ . Συνεπώς, η εκτίμηση της παραμέτρου  $R$  για την  $t_\nu$ - Student σύζευξη είναι ο IFM/CML εκτιμητής

$$\hat{R}_{IFM \ CML} = \hat{R}_\infty.$$

Οι Mashal και Zeevi (2002) προτείνουν να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω αλγόριθμο για την εκτίμηση των παραμέτρων  $\nu$  και  $R$  της  $t_\nu$ -Student σύζευξης:

I. Μετασχηματίζουμε τα δεδομένα  $(x_1^t, \dots, x_n^t)$   $t=1, \dots, T$  σε μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή,  $(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t)$ , χρησιμοποιώντας τις εμπειρικές περιθώριες κατανομές.

II. Εκτιμάμε το  $\hat{R}$  χρησιμοποιώντας τον συντελεστή συσχέτισης του Kendall:

$$\hat{R}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}_{ij}\right), \quad i, j=1, \dots, n$$

III. Εκτελούμε μια αριθμητική αναζήτηση για τον εκτιμητή  $\hat{\nu}$  σύμφωνα με το παρακάτω:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in (2, \infty]} \left[ \sum_{t=1}^T \log(c(u_1^t, \dots, u_n^t; \nu, \hat{R})) \right],$$

$$\text{όπου: } c(u_1, \dots, u_n; \nu, R) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2) [\Gamma(\nu/2)]^{n-1} (1 + y^T R^{-1} y)^{-(\nu+n)/2}}{|R|^{1/2} [\Gamma((\nu+1)/2)]^n \prod_{i=1}^n (1 + y_i^2 / \nu)^{-(\nu+1)/2}}$$

$$\text{και: } y = (y_1, \dots, y_n) = (t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$$

### Παραμετρική εκτίμηση και μέτρα εξάρτησης

Αυτή η μέθοδος δουλεύει μόνο με μονοπαραμετρικές διδιάστατες συζεύξεις. Τα κύρια μέτρα εξάρτησης μπορούν να γραφτούν σαν μια συνάρτηση της σύζευξης. Σε κάποιες περιπτώσεις, αναλυτικές λύσεις είναι διαθέσιμες και παρουσιάζονται με σκοπό να μπορούμε εύκολα να γράψουμε την παράμετρο της σύζευξης σαν μια συνάρτηση των μέτρων εξάρτησης. Σε διαφορετική περίπτωση, αναλυτικές αριθμητικές διαδικασίες είναι απαραίτητες. Παρακάτω θα δούμε πως μπορούμε να γράψουμε τις παραμέτρους διαφόρων οικογενειών ως συναρτήσεις των συντελεστών συσχέτισης των Spearman και Kendall.

Για παράδειγμα για το Gaussian copula έχουμε:

$$R_{12} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \rho_s\right) \quad \text{και} \quad R_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right)$$

Για το Clayton copula έχουμε:

$$\theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$$

Για το Gumbel copula έχουμε:

$$\theta = (1-\tau)^{-1}$$

για το Morgenstern copula έχουμε:

$$\theta = 3\rho_s \quad \text{και} \quad \theta = \frac{9}{2}\tau$$

## 4.2 Μη παραμετρική εκτίμηση

Στη προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μιας δοθείσας σύζευξης. Εδώ θα δούμε πως κατασκευάζεται η εμπειρική σύζευξη (Empirical copula or Deheuvels copula) από μια βάση δεδομένων. Όλα αυτά τα copulas προέρχονται από την εμπειρική πολυδιάστατη κατανομή.

### Ορισμός

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίες μεταβλητές με  $x_i = X_i(\omega) \in R$  όπου  $i = 1, \dots, n$ . Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής  $F_n(x, \omega)$  βασισμένη στα  $x_1, \dots, x_n$  ορίζεται ως εξής:

$$F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x, \omega)$$

όπου  $\chi_{A_i}$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση και  $A_i = \{(x, \omega) / x_i \leq x\}$ . Σημειώνουμε ότι κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Στην περίπτωση που έχουμε το τυχαίο διάνυσμα  $(X, Y)$  η διδιάστατη εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \{X_i \leq x, Y_i \leq y\}$$

### Ορισμός

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίες μεταβλητές. Για μια δεδομένη πραγματική τιμή  $\omega$ , διατάσσουμε τα  $x_i = X_i(\omega)$  σε μια μη-φθίνουσα σειρά τέτοια ώστε:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Σημειώνουμε ότι  $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$  και  $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$ . Τότε κάθε  $X_{(i)}$  τέτοιο ώστε  $X_{(i)}(\omega) = x_{(i)}$  είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συναρτήσεις πραγματικών δεδομένων ή παρατηρήσεων (Statistics) που ορίζονται από τις  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  καλούνται order Statistics των  $X_1, \dots, X_n$ . Αν όλες οι μερικές διατάξεις είναι αυστηρές τότε τα  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  είναι τα order Statistics των  $X_1, \dots, X_n$ .

### Ορισμός

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίες μεταβλητές και  $F$  μια συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση κατανομής. Σημειώνουμε ότι,  $P(\exists i \neq j: X_i = X_j) = 0$  δηλ. δεν υπάρχουν δεσμοί μεταξύ των δεδομένων. Το rank  $R_i$  για κάθε  $X_i$  ορίζεται ως εξής:

$$R_i = \sum_{j=1}^n 1\{X_j \leq X_i\}$$

δηλαδή, το  $R_i$  είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων που είναι μικρότερος ή ίσος του  $X_i$ .

### Ορισμός

Έστω  $\{x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}\}$  είναι τα order statistics και  $\{r_1^t, \dots, r_n^t\}$  είναι τα rank statistics μιας βάσεως δεδομένων, όπου  $t = 1, \dots, T$ . Έχουμε:  $x_i^{(r_i^t)} = x_i^t$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Κάθε συνάρτηση:

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[r_i^t \leq t_i]}$$

ορισμένη στο:

$$l = \left\{ \left( \frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) : 1 \leq i \leq n; t_i = 0, \dots, T \right\}$$

είναι ένα empirical copula.

Η πυκνότητα μιας εμπειρικής σύζευξης δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{c} \left( \frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \hat{C} \left( \frac{t_1 - i_1 + 1}{T}, \dots, \frac{t_n - i_n + 1}{T} \right)$$

### 4.3 Επιλογή του κατάλληλου copula

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε διάφορες μεθόδους εκτίμησης των παραμέτρων μια δοθείσας σύζευξης. Εδώ, θα μιλήσουμε για τρόπους επιλογής του καταλληλότερου copula που ταιριάζει καλύτερα με τα δεδομένα μας.

#### Επιλογή ενός Archimedean copula

Η μέθοδος αυτή θα μας περιγράψει τρόπους επιλογής εκείνης της Αρχιμήδειας σύζευξης που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μας. Όπως γνωρίζουμε μια Αρχιμήδεια σύζευξη δίνεται από τον τύπο:

$$C^n(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))$$

Για να επιλέξουμε το καταλληλότερο copula θα πρέπει πρώτα να αναγνωρίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση  $\phi$ .

Για την διδιάστατη περίπτωση, οι Genest και Rivest ορίζουν μια μονοδιάστατη συνάρτηση,  $K$ , που συνδέεται με την γεννήτρια συνάρτηση μιας Αρχιμήδειας σύζευξης σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$K_\phi(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)}$$

Μια μη παραμετρική εκτίμηση της συνάρτησης  $K$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{K}(z) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{[\theta_t \leq z]}$$

$$\text{όπου: } \theta_i = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{[x_1^i < x_1^j, x_2^i < x_2^j]}, \quad i=1, \dots, T$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε έχει ως εξής: Επιλέγουμε μια παραμετρική παρουσίαση της γεννήτριας συνάρτησης  $\phi$ . Τότε, η παράμετρος  $\alpha$  του επιλεγμένου Archimedean copula εκτιμάται, για παράδειγμα, με την παρακάτω μέθοδο εκτίμησης που βασίζεται στο συντελεστή συσχέτισης του Kendall

$$\tau = \binom{T}{2}^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(x_1^i - x_1^j) \cdot (x_2^i - x_2^j)]$$

Η παράμετρος  $\alpha$  της Αρχιμήδειας σύζευξης μπορεί να εκτιμηθεί επίσης με την μέθοδο της συμπερασματολογίας των συναρτήσεων των περιθωρίων (IFM) ή με την «κανονική» μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (CML). Χρησιμοποιώντας την  $\alpha$ , μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε μια παραμετρική εκτίμηση της συνάρτησης  $K_\phi(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)}$ .

Όλα τα βήματα που περιγράψαμε επαναλαμβάνονται για διάφορες επιλογές της γεννήτριας συνάρτησης  $\phi$ . Επίσης, για την επιλογή του κατάλληλου Archimedean copula που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μας, οι Frees και Valdez (1998), πρότειναν να χρησιμοποιείται ένα QQ-plot μεταξύ της συνάρτησης  $K_\phi(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)}$  και της εκτιμήτριας της

$$\hat{K}(z) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{[\theta_i \leq z]}.$$

Τέλος, το βέλτιστο copula μπορεί να επιλεγθεί ελαχιστοποιώντας την απόσταση μεταξύ των  $K_\phi(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)}$  και  $\hat{K}(z) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{[\theta_i \leq z]}$  με βάση τον κανόνα  $L^2$ . Δηλαδή ελαχιστοποιώντας την:

$$d^2(\hat{K}, K) = \int_0^1 [K(z) - \hat{K}(z)]^2 dz$$

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται επίσης όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε γραφικά την παράμετρο  $\alpha$  μιας δοθείσας Αρχιμήδειας σύζευξης.



### Επιλογή του κατάλληλου copula χρησιμοποιώντας το empirical copula

Έστω ότι έχουμε μια βάση διαθέσιμων συζεύξεων  $\{C_k\}_{1 \leq k \leq K}$ . Επιλέγουμε το copula  $C_k$  το οποίο ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ του συγκεκριμένου copula και του empirical copula. Ελαχιστοποιούμε δηλαδή την απόσταση:

$$\bar{d}_n(\hat{C}, C_k) = \left( \sum_{t_1=1}^T \dots \sum_{t_n=1}^T \left[ \hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) - C_k\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) \right]^2 \right)^{1/2}$$

Η απόσταση αυτή χρησιμοποιείται επίσης και στην εκτίμηση του διανύσματος των παραμέτρων  $\theta \in \Theta$  μιας δοθείσας σύζευξης  $C(u; \theta)$  σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \left( \sum_{u \in I} \left[ \hat{C}(u) - C(u; \theta) \right]^2 \right)^{1/2}$$

## 4.4 Προσομοίωση – Αλγόριθμοι προσομοίωσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε διάφορους αλγόριθμους, που βοηθάνε στην εκτίμηση των τυχαίων μεταβλητών  $(u_1, \dots, u_n)$ , από διάφορους τύπους συζεύξεων. Για να ορίζονται οι συζεύξεις θα αναφερθούμε σε συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ . Συνεπώς για να προχωρήσουμε στην εκτίμηση τυχαίων μεταβλητών  $x_1, \dots, x_n$  από μια πολυδιάστατη κατανομή  $F$  με δεδομένες περιθώριες κατανομές  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  και δοθείσα σύζευξη  $C$  θα πρέπει να αντιστρέψουμε κάθε  $u_i$  με την βοήθεια των περιθωρίων κατανομών, δηλ.  $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### Αλγόριθμος προσομοίωσης από το Gaussian copula

Για να δημιουργήσουμε τυχαίες μεταβλητές από την κανονική σύζευξη ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Έστω ότι ο πίνακας  $R$  είναι θετικά ορισμένος και υπάρχουν κάποιοι πίνακες  $A$   $n \times n$ , τέτοιοι ώστε  $R = AA^T$ . Επιπλέον θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές  $Z_1, \dots, Z_n$  που είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Τότε το τυχαίο διάνυσμα  $\mu + AZ$ , όπου  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$  και το διάνυσμα  $\mu \in R^n$ , ακολουθεί την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και πίνακα συνδιασπορών  $R$ .

Ο πίνακας  $A$  μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας την αποσύνθεση του Cholesky (Cholesky decomposition) στον πίνακα  $R$ . Αυτή η αποσύνθεση είναι ο μοναδικός κάτω-τριγωνικός πίνακας  $L$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $LL^T = R$ .

Η διαδικασία κατασκευής τυχαίων μεταβλητών από την  $n$ -διάστατη κανονική σύζευξη έχει ως εξής:

- Βρίσκουμε τον τριγωνικό πίνακα  $A$  που ορίζεται από την αποσύνθεση Cholesky (Cholesky decomposition) του πίνακα  $R$ .
- Προσομοιώνουμε  $n$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$  που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή.
- Θέτουμε  $x = Az$
- Προσδιορίζουμε τις συνιστώσες:  $u_i = \phi(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- Το διάνυσμα  $(u_1, \dots, u_n)^T$  των τυχαίων μεταβλητών  $u_i$  είναι το παραγόμενο αποτέλεσμα από την  $n$ -διάστατη κανονική σύζευξη,  $C_R^{Ga}$ .

### Αλγόριθμος προσομοίωσης από το t-Student copula

Για να κατασκευάσουμε τυχαίες μεταβλητές από την t-Student σύζευξη χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Βρίσκουμε τον τριγωνικό πίνακα  $A$  που ορίζεται από την αποσύνθεση Cholesky (Cholesky decomposition) του πίνακα  $R$ .
- Προσομοιώνουμε  $n$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$  που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή.
- Εισάγουμε μια τυχαία μεταβλητή  $s$ , η οποία είναι ανεξάρτητη του  $z$  και ακολουθεί την  $\chi^2$  - κατανομή.
- Ορίζουμε το διάνυσμα  $y = Az$
- Θέτουμε  $x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}} y$
- Προσδιορίζουμε τις συνιστώσες  $u_i = t_v(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$
- Το διάνυσμα  $(u_1, \dots, u_n)^T$  των τυχαίων μεταβλητών  $u_i$  είναι το παραγόμενο αποτέλεσμα από την t-Student σύζευξη,  $C_{v,R}^t$ .

### **Αλγόριθμος προσομοίωσης από το Cook-Johnson copula**

Ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε είναι μια συγκεκριμένη περίπτωση του αλγόριθμου που πρότειναν οι Marshall and Olkin (1988) για την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών από ένα σύνθετο copula. Για να κατασκευάσουμε τυχαίες μεταβλητές από την Cook-Johnson σύζευξη με παράμετρο  $\alpha$ , ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Δημιουργούμε  $n$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $y_1, \dots, y_n$  που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda = 1$ .

- Δημιουργούμε μια τυχαία μεταβλητή,  $z$ , που ακολουθεί την κατανομή  $\text{Gamma}(1/\alpha, 1)$  και είναι ανεξάρτητη από τις  $y_1, \dots, y_n$ .
- Θέτουμε  $u_j = \left(1 + \frac{y_j}{z}\right)^{-1/\alpha}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
- Το διάνυσμα  $u = (u_1, \dots, u_n)$  είναι το παραγόμενο αποτέλεσμα από την Cook-Johnson σύζευξη.

Σημειώνουμε ότι η Cook-Johnson σύζευξη αναπαράγει μια ακολουθία θετικών εξαρτήσεων μεταξύ των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Για να έχουμε αρνητικές εξαρτήσεις θέτουμε κάποιες από τις μεταβλητές:  $u_i^* = 1 - u_i$ .

### **Αλγόριθμος προσομοίωσης από το Morgenstern copula**

Για να κατασκευάσουμε διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές από την Farlie-Gumbel-Morgenstern σύζευξη χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Δημιουργούμε δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $v_1$  και  $v_2$  που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ .
- Θέτουμε  $u_1 = v_1$
- Υπολογίζουμε  $A = \alpha(2u_1 - 1) - 1$  και  $B = [1 - \alpha(2u_1 - 1)]^2 + 4\alpha v_2(2u_1 - 1)$
- Θέτουμε  $u_2 = \frac{2v_2}{\sqrt{B - A}}$

- Το διάνυσμα  $(u_1, u_2)$  είναι το παραγόμενο αποτέλεσμα από την Farlie-Gumbel-Morgenstern σύζευξη.

### Ένας γενικός αλγόριθμος για την προσομοίωση ενός copula

Έστω ότι έχουμε ένα διάνυσμα  $U = (U_1, \dots, U_n)$  τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν υποθετικές κατανομές. Για την διδιάστατη περίπτωση έχουμε:

$$\Pr\{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = C_{2|1}(u_1, u_2)$$

$$\text{όπου: } C_{2|1}(u_1, u_2) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{C(u_1 + \Delta u, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$$

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος:

- Δημιουργούμε δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $v_1$  και  $v_2$  που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ .
- Θέτουμε  $u_1 = v_1$
- Έστω ότι  $C(u_2; u_1) = C_{2|1}(u_1, u_2)$ . Θέτουμε  $u_2 = C^{-1}(v_2; u_1)$
- Το διάνυσμα  $(u_1, u_2)$  γεννιέται από την σύζευξη  $C$ .

Για παράδειγμα, για την διδιάστατη σύζευξη Frank που δίνεται από τον τύπο:

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \text{ έχουμε:}$$

$$C_{2|1}(u_1, u_2) = \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)e^{-\theta u_1}}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)} \text{ και:}$$

$$C^{-1}(u; u_1) = \{u_2 : C_{2|1}(u_1, u_2) = u\} = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{u(e^{-\theta} - 1)}{u_1 + (1 - u_1)e^{-\theta u_1}}\right)$$

Ο αλγόριθμος γενικεύεται στην πολυδιάστατη περίπτωση ως εξής:

- Δημιουργούμε  $n$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $(v_1, \dots, v_n)$  που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ .
- Θέτουμε  $u_1 = v_1$
- Έστω  $C(u_m; u_1, \dots, u_{m-1}) = C_{m \setminus 1, \dots, m-1}(u_1, \dots, u_m)$ ,  $m = 2, \dots, n$  όπου:  

$$C_{m \setminus 1, \dots, m-1}(u_1, \dots, u_m) = \Pr\{U_m \leq u_m \mid (U_1, \dots, U_{m-1}) = (u_1, \dots, u_{m-1})\}$$

$$= \frac{\partial^{m-1}_{(u_1, \dots, u_{m-1})} C(u_1, \dots, u_m, 1, \dots, 1)}{\partial^{m-1}_{(u_1, \dots, u_{m-1})} C(u_1, \dots, u_{m-1}, 1, \dots, 1)}$$
- Θέτουμε  $u_m = C^{-1}(v_m; u_1, \dots, u_{m-1})$ ,  $m = 2, \dots, n$
- Το διάνυσμα  $(u_1, \dots, u_n)$  γεννιέται από την σύζευξη  $C$ .

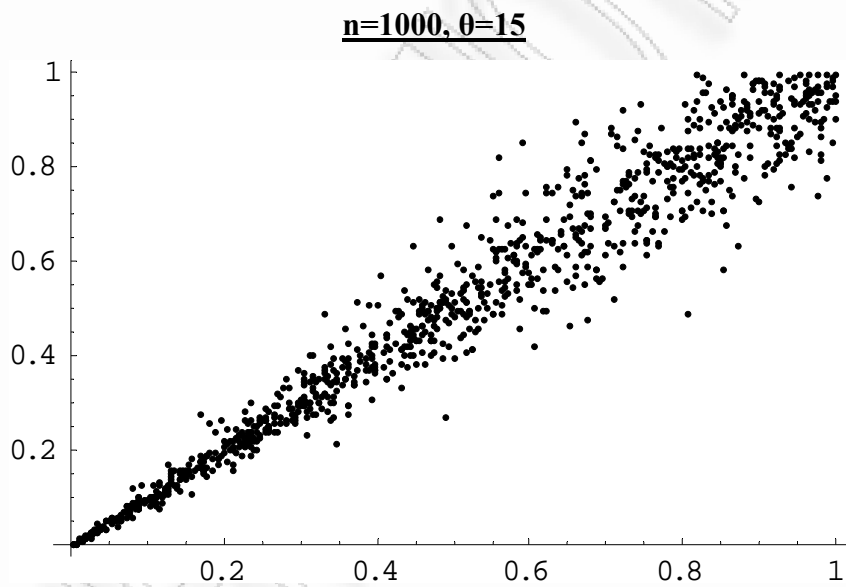
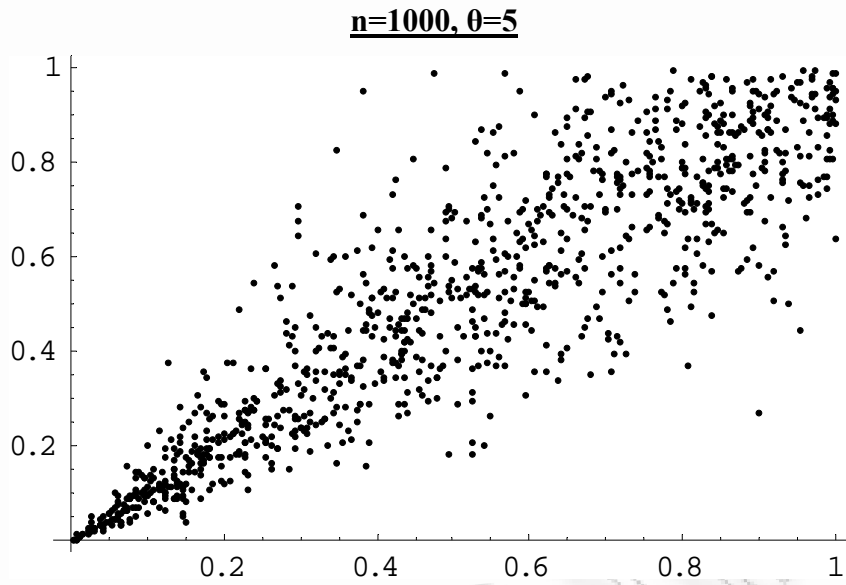
Σημειώνουμε ότι για πολύ μεγάλες τιμές του  $n$ , είναι δύσκολος ο υπολογισμός της  $C_{m \setminus 1, \dots, m-1}(u_1, \dots, u_m)$ .

Θα δούμε τώρα δύο συγκεκριμένες προσομοιώσεις των συζεύξεων της οικογένειας Clayton και της οικογένειας Frank.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε για να προσομοιάσουμε το Clayton copula είναι ο εξής:

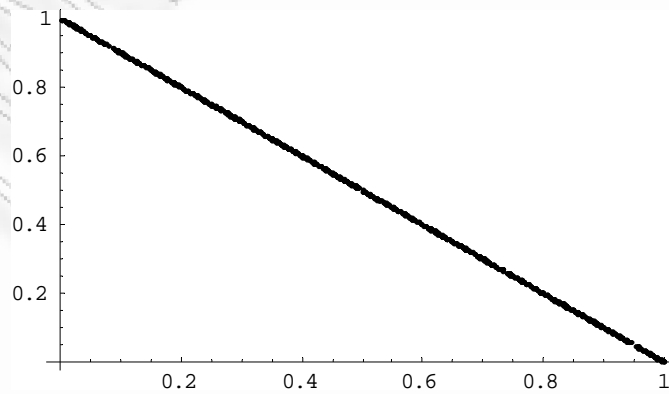
- Δημιουργούμε δύο τυχαίες μεταβλητές  $u_1, u_2$
- Θέτουμε  $x_1 = u_1$
- Θέτουμε  $x_2 = [u_1^{-\theta} (u_2^{-\theta/(1+\theta)} - 1) + 1]^{-1/\theta}$

Για  $n=1000$  και τιμές παραμέτρου  $\theta=5$  και  $\theta=15$  παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα.

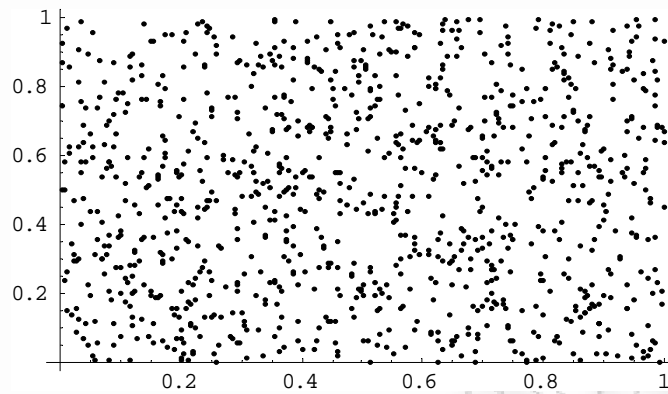


Παρακάτω θα παραστήσουμε γραφικά τις ακραίες περιπτώσεις για το Clayton copula:

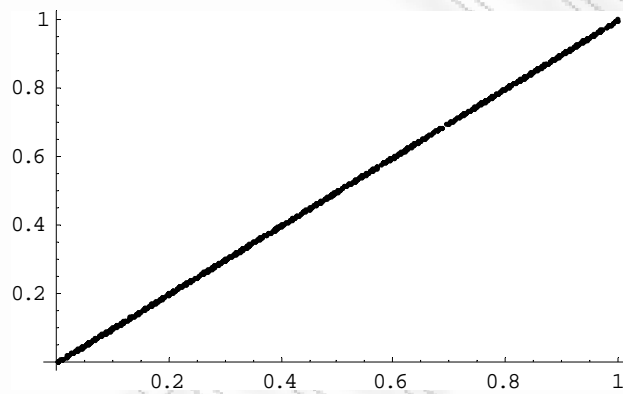
$$\lim_{\theta \rightarrow -1} C_{\theta} = W$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta} = \Pi$$



$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta} = M$$

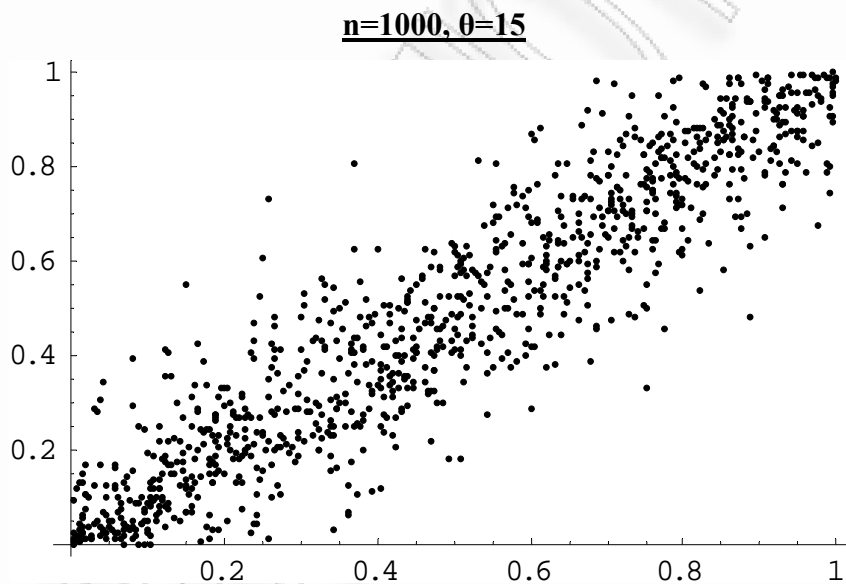
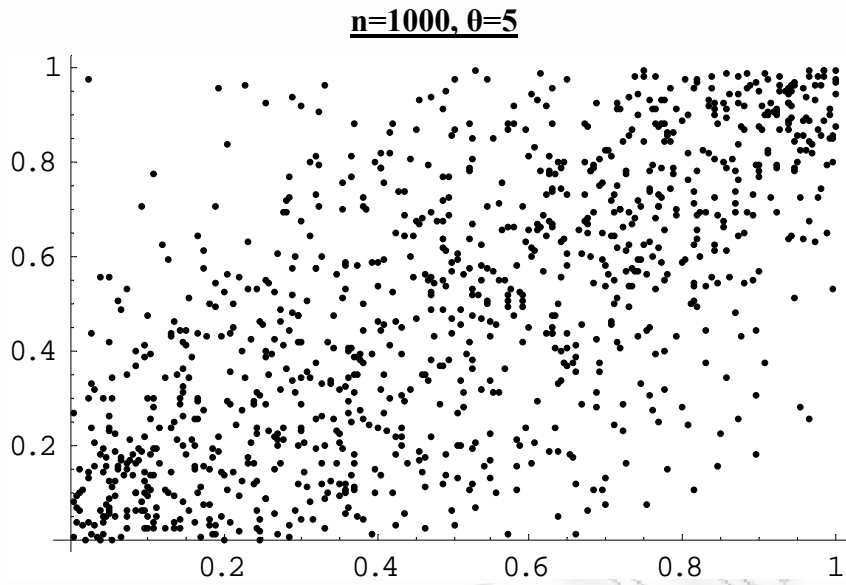


Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε για την προσομοίωση του Frank copula είναι ο εξής:

- Δημιουργούμε δύο τυχαίες μεταβλητές  $(u_1, u_2)$
- Θέτουμε  $x_1 = u_1$
- Θέτουμε  $x_2 = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{u_2(1 - e^{-\theta})}{u_2(e^{-\theta u_1} - 1) - e^{-\theta u_1}} \right)$

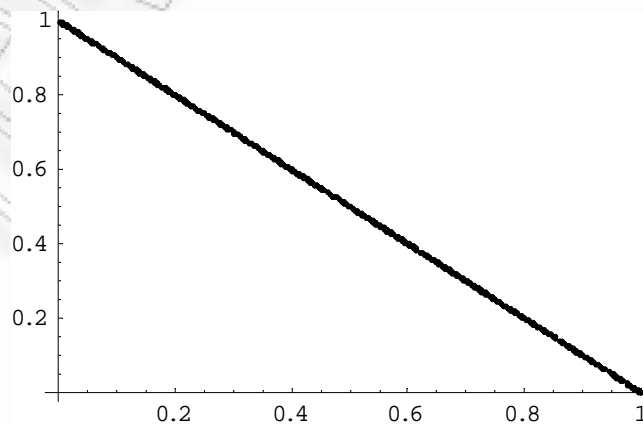
Για  $n=1000$  και τιμές παραμέτρου  $\theta=5$  και  $\theta=15$  παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα.



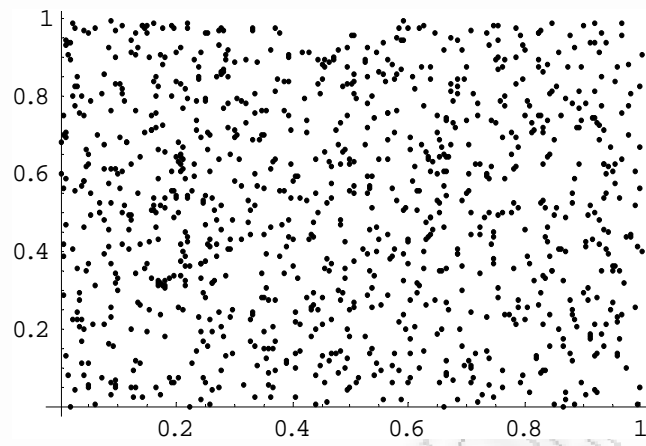


Παρακάτω θα παραστήσουμε γραφικά τις ακραίες περιπτώσεις για το Frank copula:

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_{\theta} = W$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$$



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

### 5.1 Παρούσες αξίες γενικών χρηματικών ροών

Θεωρούμε μια γενική σειρά καθορισμένων πληρωμών  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  σε χρόνους  $1, 2, \dots, n$  που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Η παρούσα αξία (present value) για αυτή τη χρηματική ροή δίνεται από τον τύπο:

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-Y(i)}$$

όπου οι στοχαστικές μεταβλητές  $Y(i) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i$  και οι μεταβλητές  $Y_i$  είναι τα στοχαστικά συνεχή σύνθετα ποσοστά απόδοσης κατά την περίοδο  $[i-1, i]$ .

Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή και οι τιμές ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή. Για τις παραμέτρους της κατανομής χρησιμοποιούμε:

$$\mu_i = E[Y_i], \sigma_i^2 = Var[Y_i], \mu_{(i)} = E[Y(i)] = \sum_{j=1}^i \mu_j \text{ και } \sigma_{(i)}^2 = Var[Y(i)] = \sum_{j=1}^i \sigma_j^2$$

Σε αντίθεση με τα  $Y_i$ , οι μεταβλητές  $Y(i)$  επομένως και οι προεξοφλημένες πληρωμές  $\alpha_i e^{-Y(i)}$  της χρηματικής ροής αλληλεξαρτώνται. Αυτό καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό της κατανομής του αθροίσματος  $S$ . Για τον λόγο αυτό οι Kaas, Dhaene and Goovaerts (2000) πρότειναν να αντικατασταθεί το άθροισμα  $S$  με ένα άλλο άθροισμα στο οποίο οι συνιστώσες του θα έχουν τις ίδιες περιθώριες συναρτήσεις όπως προηγουμένως αλλά με μια πιο «επικίνδυνη» δομή εξάρτησης. Το άθροισμα αυτό βασίζεται στην έννοια της κυρτής διάταξης (convex order). Το άθροισμα καλείται κυρτό άνω όριο και δίνεται από τον τύπο:

$$S_u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\mu_{(i)} + \text{sign}(\alpha_i) \sigma_{(i)} \Phi^{-1}(U)}$$

όπου  $U$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$  και  $\Phi$  η τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Σε πολλές χρηματοοικονομικές εφαρμογές αντιμετωπίζεται το πρόβλημα εύρεσης και αναλυτικής παρουσίασης μιας στοχαστικής ποσότητας. Αυτό οφείλεται στις εξαρτημένες συνιστώσες των ποσοτήτων αυτών. Στο πρόβλημα μας, οι μεταβλητές  $Y(i)$  είναι εξαρτημένες. Η μέθοδος αντικατάστασης του αθροίσματος που θα χρησιμοποιήσουμε, βασίζεται στην κυρτή διάταξη (convex order) και πως αυτή επηρεάζει την δομή εξάρτησης μεταξύ των συνιστωσών του αρχικού αθροίσματος.

Γενικά μια μεταβλητή  $W$  καλείται άνω όριο της  $V$  στη τάξη κυρτότητας αν:

**a)**  $E[u(V)] \leq E[u(W)]$  για κάθε κυρτή συνάρτηση  $u: R \rightarrow R$ .

Επειδή οι κυρτές συναρτήσεις παίρνουν τις μεγαλύτερες τιμές στις ουρές, η  $W$  παίρνει πιο ακραίες τιμές σε σχέση με την  $V$  και γι' αυτό η  $W$  είναι πιο επικίνδυνη.

**b)**  $E[u(-V)] \geq E[u(-W)]$  για κάθε κοίλη συνάρτηση  $u: R \rightarrow R$ .

Γενικά προτιμάται μια απώλεια  $V$  από μια απώλεια  $W$  και κατά συνέπεια η  $W$  είναι πιο επικίνδυνη.

**c)**  $E[V] = E[W]$  και  $E[(V - k)_+] \leq E[(W - k)_+]$  για κάθε τιμή του  $k$ .

Οι οικονομικές απώλειες που υπερβαίνουν μια διατήρηση τιμής  $k$ , είναι πάντοτε μεγαλύτερες για  $W$  παρά για την  $V$ , έτσι η  $W$  είναι πιο επικίνδυνη.

Συνεπώς η αντικατάσταση μίας τυχαίας μεταβλητής  $V$  με άγνωστη κατανομή, με μια μεταβλητή  $W$  με γνωστή κατανομή αλλά μεγαλύτερη στην τάξη κυρτότητας είναι μια σωστή στρατηγική.

### Πρόταση

Έστω ένα άθροισμα συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών:

$$V = \phi_1(X_1) + \phi_2(X_2) + \dots + \phi_n(X_n)$$

όπου οι συναρτήσεις  $\phi_i: R \rightarrow R: x \mapsto \phi_i(x)$  είναι όλες αύξουσες ή φθίνουσες. Η μεταβλητή

$$W = \phi_1(F_{X_1}^{-1}(U)) + \phi_2(F_{X_2}^{-1}(U)) + \dots + \phi_n(F_{X_n}^{-1}(U))$$

όπου  $U$  μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, ορίζεται σαν το πάνω όριο στη τάξη κυρτότητας, δηλ.  $V \leq_{cx} W$

Η  $F_{X_j}$  είναι η συνάρτηση κατανομής της  $X_j$ ,  $F_{X_j} = \text{Pr ob}(X_j \leq x)$  και η  $F_{X_j}^{-1}(p) = \inf\{x \in R : F_{X_j}(x) \geq p\}$ ,  $p \in [0,1]$  η αντίστροφη συνάρτηση της F.

Επιστρέφουμε στην εφαρμογή μας και χωρίζουμε την παρούσα αξία  $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-Y(i)}$  σε δύο μέρη, που αντιπροσωπεύουν τις θετικές και αρνητικές πληρωμές αντίστοιχα. Έχουμε  $S = S^+ - S^-$  όπου:

$$S^+ = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ e^{-Y(i)} \quad \text{και} \quad S^- = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i)_+ e^{-Y(i)}$$

και όπου  $(\alpha_i)_+ = \max(\alpha_i, 0)$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των  $S^+$  και  $S^-$  δίνεται από τον τύπο:

$$H(s^+, s^-) = \text{Pr ob}[S^+ \leq s^+, S^- \leq s^-]$$

Τα άνω όρια των  $S^+$  και  $S^-$  δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$S_u^+ = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ \exp(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)} \Phi^{-1}(U_1))$$

$$S_u^- = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i)_+ \exp(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)} \Phi^{-1}(U_2))$$

όπου  $U_1, U_2$  τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ .

Σημειώνουμε ότι:  $S_u^+ - S_u^- \leq_{cx} S_u$

Για τις συναρτήσεις κατανομών των  $S_u^+$  και  $S_u^-$  έχουμε:

$$F_{S_u^+}(s) = \text{Pr ob}[S_u^+ \leq s] = \Phi(v_s)$$

$$F_{S_u^-}(s) = \text{Pr ob}[S_u^- \leq s] = \Phi(w_s)$$

όπου  $v_s$  και  $w_s$  ορίζονται από:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ \exp(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)} v_s) = s$$

$$\sum_{i=1}^n (-\alpha_i)_+ \exp(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)} w_s) = s$$

Τώρα θέλουμε να συνδέσουμε τις κατανομές των  $S_u^+$  και  $S_u^-$  με την από κοινού κατανομή. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις συζεύξεις. Θα κατασκευάσουμε μία σύζευξη  $C(u, v; \hat{\rho}_S)$  όπου  $\hat{\rho}_S$  είναι η εκτιμώμενη συσχέτιση μεταξύ  $S^+$  και  $S^-$ . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής παίρνει τη μορφή:

$$H(s^+, s^-) \approx C\left(F_{S_u^+}(s^+), F_{S_u^-}(s^-); \hat{\rho}_S\right)$$

Το πρόβλημα είναι να βρούμε μία εκτίμηση  $\hat{\rho}_S$  του  $\rho_S$ . Έχουμε τρεις επιλογές:

- 1) Επειδή  $S_u^+$  και  $S_u^-$  είναι πολύ κοντά στα αρχικά αθροίσματα  $S^+$  και  $S^-$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συσχέτιση  $\rho_S(S_u^+, S_u^-)$  για την οποία έχουμε:

$$\rho_S(S_u^+, S_u^-) \approx \rho(F_{S_u^+}(S_u^+), F_{S_u^-}(S_u^-))$$

Επειδή οι δύο κατανομές είναι γνωστές, προσομοιώνοντας μπορούμε να βρούμε το  $\rho_S$ .

- 2) Μια καλύτερη λύση είναι η εκτίμηση με την βοήθεια της συσχέτισης μεταξύ των προσεγγίσεων των  $S^+$  και  $S^-$ . Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:

$$\Lambda^+ = \sum_{j=1}^n \beta_j^+ Y_j \quad \text{και} \quad \Lambda^- = \sum_{j=1}^n \beta_j^- Y_j$$

$$\text{με παραμέτρους: } \beta_j^+ = \sum_{k=j}^n (\alpha_k)_+ e^{-\mu(k)}, \quad \beta_j^- = \sum_{k=j}^n (\alpha_k)_- e^{-\mu(k)}$$

Τα  $\Lambda^+, \Lambda^-$  είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί των  $S^+$  και  $S^-$ . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S^+ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ e^{-Y(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ e^{-\mu(i)} e^{-\sum_{j=i}^i (Y_j - \mu_j)} \\ &\approx \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ e^{-\mu(i)} \left( 1 - \sum_{j=1}^i (Y_j - \mu_j) \right) \\ &\approx C - \sum_{i=1}^n (\alpha_i)_+ e^{-\mu(i)} \sum_{j=1}^i Y_j \end{aligned}$$

$$\approx C - \sum_{j=1}^i Y_j \sum_{i=j}^n (\alpha_i)_+ e^{-\mu(i)}$$

$$\approx C - \Lambda^+$$

όπου  $C$  η κατάλληλα επιλεγμένη σύζευξη. Σημειώνουμε ότι αυτή η προσέγγιση είναι ακριβής όταν οι διαφορές  $Y_j - \mu_j$  είναι αρκετά μικρές. Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson του ζευγαριού  $(\Lambda^+, \Lambda^-)$  υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\rho_p(\Lambda^+, \Lambda^-) = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^+ \beta_i^-}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\beta_i^+)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\beta_i^-)^2}}$$

Εφόσον τα  $(\Lambda^+, \Lambda^-)$  έχουν μία διδιάστατη κανονική κατανομή ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman δίνεται από τον τύπο:

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho_p}{2}\right)$$

- 3) Μια Τρίτη λύση είναι η χρησιμοποίηση του Gaussian copula με συντελεστή συσχέτισης του Pearson  $\rho_p(\Lambda^+, \Lambda^-)$  που βρήκαμε παραπάνω. Όπως είδαμε προηγουμένως, η δομή εξάρτησης της διδιάστατης κατανομής  $(S^+, S^-)$  είναι παρόμοια με τη δομή εξάρτησης των  $(\Lambda^+, \Lambda^-)$ . Οπότε, θα χρησιμοποιήσουμε τη σύζευξη των  $(\Lambda^+, \Lambda^-)$  για να προσεγγίσουμε την από κοινού κατανομή των χρηματικών ροών, που είναι η Gaussian σύζευξη με παράμετρο  $\rho_p(\Lambda^+, \Lambda^-)$ .

Υποθέτουμε ότι η ακριβής διδιάστατη κατανομή των  $S^+$  και  $S^-$  δίνεται από τον τύπο:

$$H(s^+, s^-) = \text{Pr ob}[S^+ \leq s^+, S^- \leq s^-] = C(F_{S^+}(s^+), F_{S^-}(s^-); \rho_s)$$

Τότε, ξεκινώντας από την από κοινού κατανομή, η συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής της διαφοράς  $S = S^+ - S^-$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F_S(s) = \text{Pr ob}[S^+ - S^- \leq s]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^+ \partial s^-} H(s^+, s^-) U(s - s^+ + s^-) ds^+ ds^- \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \rho_S) U(s - F_{S^+}^{-1}(u) + F_{S^-}^{-1}(v)) dudv \\
&= \int_0^1 du \int_{F_{S^-}^{-1}(F_{S^+}^{-1}(u)-s)}^1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \rho_S) dv
\end{aligned}$$

Όπου  $U(x) = \begin{cases} 1 & \alpha v \quad x \geq 0 \\ 0 & \alpha v \quad x < 0 \end{cases}$

Κάνοντας μερικές πράξεις έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_S(s) &= F_{S^+}(s) + \int_{F_{S^+}(s)}^1 du \int_{F_{S^-}^{-1}(F_{S^+}^{-1}(u)-s)}^1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v; \rho_S) dv \\
&= F_{S^+}(s) + \int_{F_{S^+}(s)}^1 du \left[ \frac{\partial}{\partial u} C(u, 1; \rho_S) - \frac{\partial}{\partial u} C(u, F_{S^-}^{-1}(F_{S^+}^{-1}(u)-s); \rho_S) \right] \\
&= 1 - \int_s^{\infty} dF_{S^+}(k) \frac{\partial}{\partial u} C(F_{S^+}(k), F_{S^-}^{-1}(k-s); \rho_S)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όπου  $S^+$  και  $S^-$  τις  $S_u^+$  και  $S_u^-$  αντίστοιχα έχουμε μία κατάλληλη εκτίμηση

της κατανομής της παρούσας αξίας  $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-Y(i)}$ . Έχουμε:

$$F_{S_{cop}}(s) = 1 - \int_s^{\infty} dF_{S_u^+}(k) \frac{\partial}{\partial u} C(F_{S_u^+}(k), F_{S_u^-}^{-1}(k-s); \hat{\rho}_S)$$

Εάν τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Gaussian copula θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v; \rho) = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(v) - \rho \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το Gumbel copula που δίνεται από τον τύπο:

$$C_{\theta}(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}) \text{ έχουμε:}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v; \rho_S) = \frac{1}{u} (-\ln u)^{\theta-1} \left( (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} \exp \left( - \left[ (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)$$



Παρακάτω θα εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της προσέγγισης μας σε δυο παραδείγματα χρηματικών ροών με διαφορετική δομή:

- $\alpha_i = \begin{cases} -1 & i = 1, \dots, 5 \\ +1 & i = 6, \dots, 20 \end{cases}$
- $\alpha_i = \begin{cases} -1 & i = 1, 3, 5, 7, \dots, 19 \\ +1 & i = 2, 4, 6, 8, \dots, 20 \end{cases}$

Τα δεδομένα μας προέρχονται από την μελέτη των Goovaerts, De Schepper, Hua, Darkiewicz and Vyncke (2005), 'On the Use of Copulas for Calculating the Present Value of a General Cash Flow'

Οι παράμετροι των λογαριθμοκανονικών κατανομών επιλέγονται να είναι:

$\mu_i = \mu = 0.07$  και  $\sigma_i = \sigma = 0.1$ . Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική σύζευξη.

Οι εκτιμήσεις των συντελεστών συσχέτισης που θα χρησιμοποιήσουμε για την πρώτη χρηματική ροή είναι:

$$\rho_S(\Lambda^+, \Lambda^-) = 0.6344 \text{ και } \rho_p(\Lambda^+, \Lambda^-) = 0.6522$$

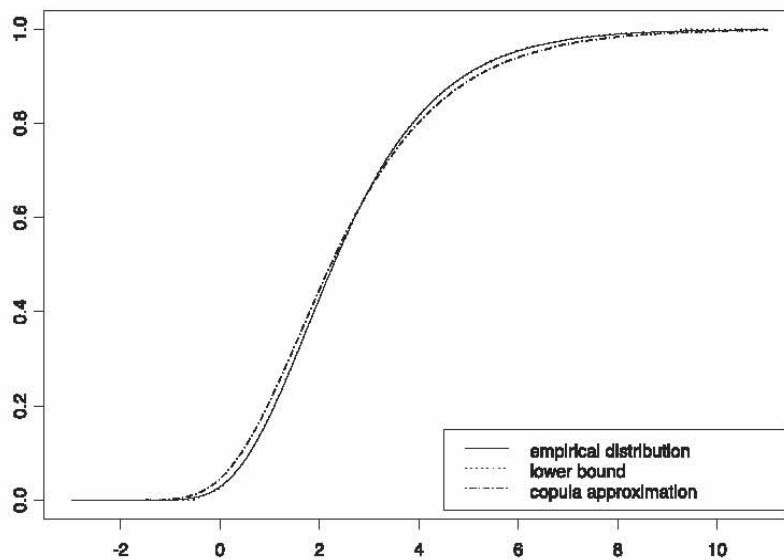
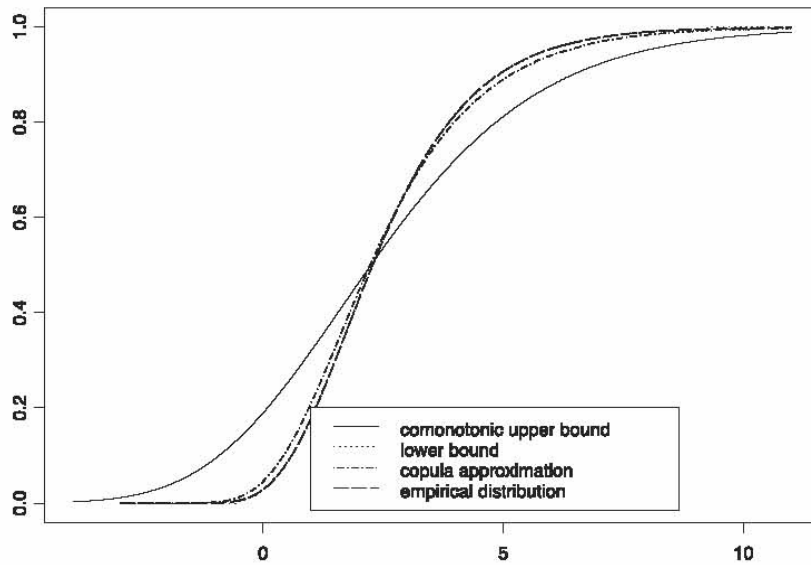
Για την δεύτερη χρηματική ροή έχουμε:

$$\rho_S(\Lambda^+, \Lambda^-) = 0.9928 \text{ και } \rho_p(\Lambda^+, \Lambda^-) = 0.9934$$

Στο γράφημα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστιαία σημεία της παρούσας αξίας της πρώτης χρηματικής ροής με αρνητικές πληρωμές στην αρχή και θετικές πληρωμές αργότερα. Στο γράφημα παρουσιάζεται η προσέγγιση της παρούσας αξίας με το Gaussian copula, με τα άνω και κάτω όρια και με την προσέγγιση της χρησιμοποιώντας την μέθοδο Monte Carlo.

Θα παρουσιάσουμε το γράφημα στην αρχή με το άνω κυρτό όριο και στην συνέχεια χωρίς το άνω κυρτό όριο.

## ΓΡΑΦΗΜΑ 1



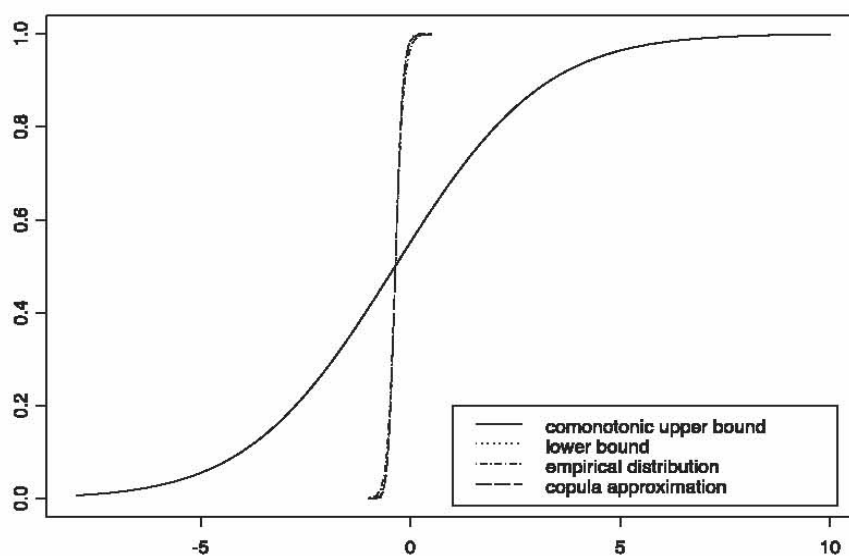
Παρατηρούμε ότι το κυρτό άνω όριο είναι αναποτελεσματικό στην προσέγγιση της ακριβής κατανομής. Αντίθετα, τόσο το Gaussian copula όσο και το κάτω όριο είναι πολύ ακριβή στην προσέγγιση της κατανομής. Αριθμητικά τα παραπάνω μπορούμε να τα παρατηρήσουμε από τον ακόλουθο πίνακα.

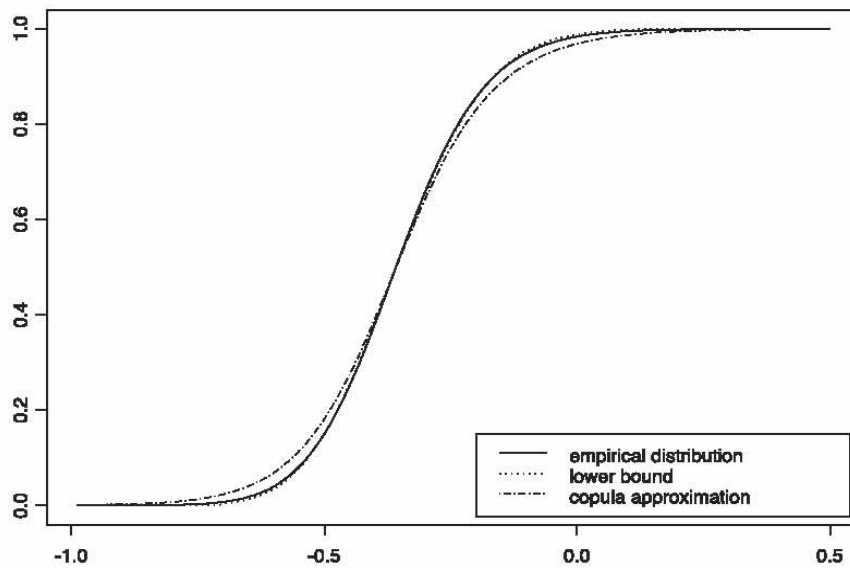
**ΠΙΝΑΚΑΣ 1**

Ποσοστιαία σημεία (q)	Κάτω όριο (Lower bound)	MC Μέθοδος (empirical distribution)	Gaussian copula	Κυρτό άνω όριο (Convex upper bound)
0.750	3.5159	3.5136	3.5843	4.2861
0.900	4.9045	4.8963	5.1536	6.4487
0.950	5.8851	5.8847	6.2964	7.9282
0.975	6.8406	6.8500	7.3559	9.3450
0.990	8.0885	8.0885	8.8204	11.1716
0.995	9.0300	9.0902	9.9422	12.5400
0.999	11.2519	11.3996	12.6233	15.7310

Αντίστοιχα για την δεύτερη χρηματική ροή έχουμε τα παρακάτω γραφήματα:

**ΓΡΑΦΗΜΑ 2**





Παρατηρούμε ότι το κυρτό άνω όριο είναι τελείως διαφορετικό από την πραγματική κατανομή της παρούσας αξίας της δεύτερης χρηματικής ροής. Αντίθετα, η προσέγγιση μας με το Gaussian copula καθώς και το κάτω όριο είναι πάρα πολύ κοντά με την πραγματική κατανομή όπως διαπιστώνουμε και αριθμητικά από τον παρακάτω πίνακα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2**

<b>Ποσοστιαία σημεία (q)</b>	<b>Κάτω όριο (Lower bound)</b>	<b>MC Μέθοδος (empirical distribution)</b>	<b>Gaussian copula</b>	<b>Κυρτό άνω όριο (Convex upper bound)</b>
<b>0.750</b>	-0.2585	-0.2610	-0.2494	1.5399
<b>0.900</b>	-0.1640	-0.1638	-0.1350	3.3359
<b>0.950</b>	-0.1100	-0.0983	-0.0534	4.4781
<b>0.975</b>	-0.0523	-0.0365	0.0278	5.5249
<b>0.990</b>	0.0108	0.0442	0.1365	6.8233
<b>0.995</b>	0.0551	0.1036	0.2207	7.7667
<b>0.999</b>	0.1498	0.2441	0.4241	9.8955

## Συμπέρασμα

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι η προσέγγιση του άνω ορίου  $S_u$  δεν είναι καθόλου καλή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούμε ένα παράδειγμα χρηματικής ροής με θετικές και αρνητικές πληρωμές. Στην πρώτη περίπτωση ξεκινάμε με αρνητικές πληρωμές και συνεχίζουμε με θετικές, ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχουμε αρνητικές και θετικές πληρωμές εναλλάξ σε όλη την διάρκεια. Γενικά το  $S_u$  προσεγγίζει πολύ καλά το άθροισμα  $S$  μόνο σε περιπτώσεις που έχουμε θετικές πληρωμές. Σε διαφορετική περίπτωση επιλέγουμε την προσέγγιση του κάτω κυρτού ορίου  $S_L$  ή την προσέγγιση με το επιλεγμένο copula. Η προσέγγιση του αθροίσματος  $S$  με το επιλεγμένο copula είναι λιγότερο επικίνδυνη από το  $S_u$  στην τάξη κυρτότητας αλλά παίρνει πιο ακραίες τιμές σε σχέση με το πραγματικό άθροισμα  $S$ .

## 5.2 Risk Management – Value at Risk

Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά και στο Risk Management, το VaR είναι ένα ευρέως διαδεδομένο μέτρο εκτίμησης του κινδύνου των απωλειών ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Από τις διάφορες μεθόδους που υπάρχουν για τον υπολογισμό του VaR, οι πιο διαδεδομένες είναι η ιστορική προσομοίωση, η μέθοδος διασποράς-συνδιασποράς (variance-covariance) και η προσομοίωση Monte Carlo. Ενώ η ιστορική προσομοίωση δεν βασίζεται σε συγκεκριμένες υποθέσεις για την συμπεριφορά των παραγόντων κινδύνου, η μέθοδος variance-covariance και η Monte Carlo προσομοίωση υποθέτουν κάποιου είδους κανονικής κατανομής για τους παράγοντες κινδύνου. Συνεπώς η δομή εξάρτησης μεταξύ διαφόρων παραγόντων κινδύνου φαίνεται από την συσχέτιση μεταξύ αυτών των παραγόντων. Η μελέτη της συσχέτισης όμως κρύβει παγίδες που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αναξιόπιστες εκτιμήσεις του VaR ενός χαρτοφυλακίου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι συζεύξεις που μπορούν να περιγράψουν τις εξαρτήσεις μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών που ακολουθούν περιθώριες κατανομές. Το Value-at-Risk ενός χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται από την πολυδιάστατη κατανομή των αυξήσεων των παραγόντων κινδύνου.

Αυτή η κατανομή μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια των συζεύξεων όπου οι παράμετροι των συζεύξεων δεν παραμένουν αναγκαστικά σταθεροί στο χρόνο.

Σε χρόνο  $t$  ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από  $d$  μονάδες μετοχικών κεφαλαίων  $w = (w_1, \dots, w_d)^T$  με τιμές  $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{d,t})^T$  και λογαριθμικές τιμές  $Z_t = \ln S_t$ , έχει αξία:

$$V_t = \sum_{j=1}^d w_j e^{Z_{j,t}}$$

Η συνάρτηση κερδών και απωλειών (P&L function) ορίζεται ως  $L_{t+1} = (V_{t+1} - V_t)$ . Ορίζουμε  $X_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$  τον χρόνο προσαύξησης των παραγόντων κινδύνου στο χρονικό διάστημα  $t, t+1$ . Η συνάρτηση P&L γράφεται ως εξής:

$$L_{t+1} = \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t} (e^{X_{j,t+1}} - 1)$$

Το value-at-risk υπολογίζεται ως το  $\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής  $F_L$  της συνάρτησης P&L. Έχουμε:

$$VaR = F_L^{-1}(\alpha)$$

Η μονοδιάστατη κατανομή  $F_L$  εξαρτάται από την  $d$ -διάστατη κατανομή  $F_X$ . Χρησιμοποιώντας τις συζεύξεις, οι περιθώριες κατανομές  $F_{X_j}$  από κάθε μονοδιάστατη προσαύξηση μπορούν να μοντελοποιηθούν ξεχωριστά και στη συνέχεια να συνθέσουν μαζί την πολυδιάστατη κατανομή  $F_X$ .

Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε τη παράμετρο εξάρτησης  $\hat{\theta}$  και την από κοινού κατανομή  $\hat{F}_X$  από ένα δείγμα  $\{X_t\}_{t=1}^T$  λογαριθμικών αποδόσεων (log-returns) από συναλλαγματικές ισοτιμίες με την βοήθεια των συζεύξεων. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση  $\hat{F}_X$  και με προσομοίωση δημιουργούμε διαφορετικά P&L δείγματα. Τα ποσοστιαία σημεία στις διάφορες βαθμίδες  $\alpha$ , των αποτελεσμάτων αυτής της προσομοίωσης χρησιμοποιούνται ως εκτιμητές του value-at-risk διαφόρων χαρτοφυλακίων. Συνήθως χρησιμοποιούμε πολύ μικρές βαθμίδες,  $\alpha=0,05$  ή  $\alpha=0,01$ .

Η εκτίμηση του value-at-risk βασισμένο σε ένα δείγμα  $\{X_t\}_{t=1}^T$  εφαρμόζεται με την παρακάτω διαδικασία:

- Προσδιορισμός των περιθώριων συναρτήσεων  $F_{X_j}(x_j)$ .
- Προσδιορισμός της σύζευξης  $C(u_1, \dots, u_d; \theta)$ .
- Εκτίμηση της παραμέτρου  $\hat{\theta}$  της σύζευξης C.
- Δημιουργία δεδομένων  $X_{T+1} \sim C(u_1, \dots, u_d; \hat{\theta})$ .
- Δημιουργία ενός δείγματος απωλειών  $L_{T+1}(X_{T+1})$  του χαρτοφυλακίου.
- Εκτίμηση του  $\hat{VaR}_{T+1}$  που είναι το εμπειρικό ποσοστιαίο σημείο  $\hat{\alpha}$  σε μία βαθμίδα  $\alpha$  του δείγματος απωλειών  $L_{T+1}(X_{T+1})$ .

Για την σύζευξη που ανήκει σε μία παραμετρική οικογένεια  $C = \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$  και για μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές  $F_{X_j}(x_j; \delta_j)$  η πυκνότητα του X δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, \dots, x_d; \delta_1, \dots, \delta_d, \theta) = c\{F_{X_1}(x_1; \delta_1), \dots, F_{X_d}(x_d; \delta_d); \theta\} \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \delta_j)$$

$$\text{όπου } c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d}$$

Με την μέθοδο IFM (Inference For Margins), η συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας για κάθε μία από τις περιθώριες συναρτήσεις, που δίνεται από τον τύπο

$$l_j(\delta_j) = \sum_{t=1}^T \ln f_j(x_{j,t}; \delta_j), \quad j = 1, \dots, d$$

μεγιστοποιείται για να πάρουμε εκτιμήσεις των  $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d)^T$ . Στη συνέχεια, η συνάρτηση:

$$l(\theta, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d) = \sum_{t=1}^T \left[ \ln c\left\{F_{X_1}(x_{1,t}; \hat{\delta}_1), \dots, F_{X_d}(x_{d,t}; \hat{\delta}_d); \theta\right\} \right]$$

μεγιστοποιείται για να πάρουμε την εκτίμηση του  $\hat{\theta}$ . Οι εκτιμήσεις  $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d, \hat{\theta})^T$  λύνουν την εξίσωση  $\left( \frac{\partial l_1}{\partial \delta_1}, \dots, \frac{\partial l_d}{\partial \delta_d}, \frac{\partial l}{\partial \theta} \right) = 0$ .

Τα copulas μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να αντισταθίσουμε δύο ρισκίνδυνες επενδύσεις. Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  που παριστάνουν δύο ποσά (αθροίσματα) με κίνδυνο απώλειας. Με την αντιστάθμιση σκοπεύουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των value-at-risk,  $x$  και  $y$ , των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .

Έχουμε δύο χρονοσειρές  $S_{1j}, S_{2j}$ ,  $j=1,2,\dots,N$  που παριστάνουν δύο στοχαστικές διαδικασίες, για παράδειγμα τις ημερήσιες αποδόσεις δύο μετοχών, που ακολουθούν την από κοινού κατανομή  $F(x, y)$ . Μια εμπειρική εκτίμηση της πιθανότητας ουράς (tail's probability)  $F(VaR_1(a), VaR_2(a))$ , δηλαδή της από κοινού πιθανότητας απώλειας, δίνεται από τον τύπο:

$$k = \frac{\{(S_{1j}, S_{2j}) : S_{1j} \leq VaR_1(a), S_{2j} \leq VaR_2(a)\}}{N} \quad (1)$$

όπου  $N$  είναι το σύνολο των παρατηρήσεων.

Μία άλλη έκφραση της πιθανότητας ουράς, σύμφωνα με το θεώρημα του Sklar, δίνεται με την βοήθεια των συζεύξεων από τον τύπο:

$$F(VaR_1(a), VaR_2(a)) = C(F_1(VaR_1(a)), F_2(VaR_2(a))) = C(a, a)$$

και παριστάνει το ίχνος της σύζευξης.

Οι συζεύξεις χρησιμοποιούνται για να πετύχουμε μία μη-παραμετρική διατύπωση της πιθανότητας ουράς και για να εξετάσουμε την εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών. Για τις Αρχιμήδειες συζεύξεις έχουμε:

$$C(u, u) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(u))$$



όπου η παράμετρος  $\theta$  της σύζευξης υπολογίζεται εξισώνοντας τη σύζευξη με τη σχέση (1).

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το τύπο της σύζευξης για να υπολογίσουμε την αντιστάθμιση των VaR σε ένα δοσμένο επίπεδο της κοινής πιθανότητας απώλειας,  $h$ . Με την βοήθεια των συζεύξεων μπορούμε να εκφράσουμε την μία τυχαία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} h &= C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) \\ \phi(h) &= \phi(u) + \phi(v) \\ \phi(v) &= \phi(h) - \phi(u) \\ \phi^{-1}(\phi(v)) &= \phi^{-1}(\phi(h) - \phi(u)) \\ v &= \phi^{-1}(\phi(h) - \phi(u)) \quad , \quad h < u \end{aligned} \quad (2)$$

Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει με τα value-at-risk  $x$  και  $y$  των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .

Θεωρούμε  $u = F_1(x)$  και  $v = F_2(y)$  και αν οι  $F_1, F_2$  είναι αντιστρέψιμες έχουμε:

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \phi^{-1}(\phi(h) - \phi(F_1(x))) \\ y &= F_2^{-1}(v) = F_2^{-1}(\phi^{-1}(\phi(h) - \phi(F_1(x)))) \end{aligned} \quad (3)$$

όπου είναι η σχέση μεταξύ των value-at-risk,  $x$  και  $y$ . Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι σε μια δοσμένη πιθανότητα απώλειας  $h$ , η σχέση (3) αντισταθμίζει τα value-at-risk,  $x$  και  $y$ . Έχοντας δηλαδή το επίπεδο απώλειας  $x$ , μπορούμε να βρούμε το επίπεδο απώλειας  $y$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το Gumbel copula, που δίνεται από τον τύπο:

$$C(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$$

Θεωρώντας το ίχνος της σύζευξης, έχουμε:

$$\begin{aligned} C(a, a) &= \exp(-[(-\ln a)^\theta + (-\ln a)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}) \\ &= \exp\left\{-\left[2(-\ln a)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{2^{\frac{1}{\theta}} \ln a\right\} \\
&= e^{2^{\frac{1}{\theta}} \ln a} \\
&= a^{2^{\frac{1}{\theta}}}
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας το  $C(a, a)$  με την σχέση (1) παίρνουμε μία εκτίμηση του  $\theta$ . Έχουμε:

$$k = a^{2^{\frac{1}{\theta}}} \Rightarrow \ln k = 2^{\frac{1}{\theta}} \ln a \Rightarrow \frac{\ln k}{\ln a} = 2^{\frac{1}{\theta}}, \quad a, k \in [0,1]$$

Υποθέτουμε ότι  $t = \frac{\ln k}{\ln a} > 0$ . Έχουμε:

$$t = 2^{\frac{1}{\theta}} \Rightarrow \ln t = \frac{1}{\theta} \ln 2 \Rightarrow \theta = \frac{\ln 2}{\ln t} \quad (4)$$

Θα εξετάσουμε τώρα τα αποτελέσματα που έχουμε χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα. Έστω  $X$ : οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής GA και  $Y$ : οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής PL. Τα δεδομένα μας είναι από  $N=926$  ημερήσιες παρατηρήσεις.

Για την χρονοσειρά  $X$  έχουμε 15 παρατηρήσεις (ημερήσιες απώλειες) που είναι κάτω από το  $-0,03$ . Έχουμε δηλαδή το ποσοστιαίο σημείο  $a = \frac{15}{926} = 0,016 = 1,6\%$  και μία εμπειρική αξιολόγηση του  $VaR_1$  είναι:

$$VaR_1(0,016) = F_1^{-1}(0,016) = -0,03$$

Ανάλογα δουλεύουμε για την χρονοσειρά  $Y$ . Μια εμπειρική αξιολόγηση του  $VaR_2$  είναι:

$$VaR_2(0,016) = F_2^{-1}(0,016) = -0,04$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το  $k = \frac{\{(S_{1j}, S_{2j}) : S_{1j} \leq VaR_1(a), S_{2j} \leq VaR_2(a)\}}{N}$ .

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε τις δύο χρονοσειρές και να μετρήσουμε τα ζευγάρια  $(S_{1j}, S_{2j})$  στα οποία  $S_{1j} \leq -0,03$  και  $S_{2j} \leq -0,04$  και αυτό που θα υπολογίσουμε θα είναι οι μέρες όπου οι δύο αυτές ανισώσεις έχουν κοινές λύσεις. Με άλλα λόγια θα βρούμε τον αριθμό των ημερών που οι απώλειες της μετοχής GA είναι κάτω από το 3% και της μετοχής PL είναι

κάτω από το 4%. Αυτό συμβαίνει 4 συγκεκριμένες ημερομηνίες. Συνεπώς έχουμε

$$k = \frac{4}{926} = 0,0043.$$

Από την σχέση (4) και αντικαθιστώντας  $k = 0,0043$  και  $a = 0,016$  υπολογίζουμε την παράμετρο  $\theta$  της σύζευξης. Έχουμε  $\theta = 2,5$ . Οπότε το copula γίνεται:

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{2,5} + (-\ln v)^{2,5}\right]^{\frac{1}{2,5}}\right)$$

Από το θεώρημα του Sklar και όπου  $u = F_1(x)$  και  $v = F_2(y)$  έχουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F$  σε σύνδεση με τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών  $F_1, F_2$

$$F(x, y) = \exp\left\{-\left[(-\ln F_1(x))^{2,5} + (-\ln F_2(y))^{2,5}\right]^{\frac{1}{2,5}}\right\}$$

Επιπλέον από τη σχέση (2) μπορούμε να βρούμε μία σχέση μεταξύ των  $u$  και  $v$ . Για παράδειγμα, με  $h = 0,004$  έχουμε:

$$v = \exp\left\{-\left[(-\ln 0,004)^{2,5} - (-\ln u)^{2,5}\right]^{\frac{1}{2,5}}\right\}$$

και ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall είναι:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} = 1 - \frac{1}{2,5} = 0,6$$

### 5.3 Credit and Basket Derivatives

Τα πιστωτικά παράγωγα (credit derivatives) είναι τα χρηματοοικονομικά εργαλεία των οποίων τα κέρδη συνδέονται με κάποιο τρόπο με τη μεταβολή της πιστωτικής ποιότητας ενός ή περισσοτέρων πιστοληπτών. Στόχο έχουν την μεταβίβαση του πιστωτικού κινδύνου ενός βασικού μέσου. Οι συναλλαγές αυτές συνδέουν δύο αντισυμβαλλόμενους, τον πωλητή του πιστωτικού κινδύνου (ή αγοραστή προστασίας) και τον αγοραστή του κινδύνου (ή πωλητή προστασίας).

Τα πιστωτικά παράγωγα χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες. Τις ανταλλαγές ολικής απόδοσης (total return swaps), τα προϊόντα πιστωτικού ανοίγματος (credit spread) και τα προϊόντα πιστωτικής αθέτησης (credit default products). Τα προϊόντα πιστωτικής αθέτησης χωρίζονται σε τρεις υποκατηγορίες: τις ανταλλαγές πιστωτικής αθέτησης (credit default swaps), τα δικαιώματα πιστωτικής αθέτησης (credit default options) και τις συμφωνίες αποζημιώσεων (indemnity agreements). Τα τελευταία 10 χρόνια παρουσιάζεται η αύξηση των “χαρτοφυλακίων πιστωτικών παραγώγων” που είναι τα basket default swap και τα CDO (collateralized debt obligation). Οι ανταλλαγές πιστωτικής αθέτησης (CDS) είναι ιδιωτικές συμβάσεις μεταξύ δύο μερών πάνω σε ένα «στοίχημα» για την πτώχευση, αθέτηση υποχρέωσης ή αναδιάρθρωση του χρέους ενός εκδότη. Τα CDO είναι μια «δεξαμενή» από δανειακές συμβάσεις που μεταβιβάζονται σε μια νομική οντότητα ειδικού σκοπού η οποία στη συνέχεια εκδίδει τίτλους με διαφορετική προτεραιότητα αποζημίωσης σε περίπτωση δυσκολίας τήρησης των υποχρεώσεων.

Στην περίπτωση των credit default swap ο αγοραστής προστασίας θέλει να θωρακιστεί από οποιαδήποτε γεγονός είναι δυνατόν να επηρεάσει την πιστωτική ικανότητα του οφειλέτη-κατόχου του βασικού μέσου. Αυτό αποκαλείται πιστωτικό συμβάν, το οποίο είναι ένας ευρύς όρος και καλύπτει τη μη εξόφληση ή την υποβάθμιση της ικανότητας του οφειλέτη. Ο αγοραστής προστασίας δεσμεύεται να καταβάλει σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα και μέχρι της λήξης της οφειλής (ή την εμφάνιση του πιστωτικού συμβάντος) ένα σταθερό πριμ. Αντίστοιχα, ο πωλητής προστασίας, σε περίπτωση πιστωτικού συμβάντος, δεσμεύεται να καταβάλει ποσά αντίστοιχα με τη ζημία που συνδέεται με το βασικό μέσο και που αντιστοιχεί στη διαφορά μεταξύ λογιστικής και αγοραίας αξίας.

Το πρώτο βήμα στην αξιολόγηση των πιστωτικών παραγώγων είναι η μοντελοποίηση των από κοινού χρόνων αθέτησης (joint default time).

Ο χρόνος αθέτησης  $\tau_i$  για κάθε οφειλέτη  $i = \{1, \dots, n\}$  είναι μία τυχαία μεταβλητή και η περίπτωση της αθέτησης πρέπει να είναι γνωστή στον οποιοδήποτε και σε οποιοδήποτε χρόνο διότι θεωρούμε μία τέλεια αγορά με ελεύθερη ροή πληροφοριών.

Έστω  $F(t) = P(\tau \leq t)$  η συνάρτηση κατανομής και  $f(t)$  η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου παύσης (default time). Ο ρυθμός κινδύνου  $h(t)$  δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{1}{1-F(t)} \times \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \tau \leq t + \Delta t / \tau > t)}{\Delta t}$$

όπου  $dF = (t < \tau \leq t + dt, \tau > t)$  και  $1 - F(t) = P(\tau > t) = S(t)$

όπου  $S(t)$  είναι η συνάρτηση επιβίωσης.

Ο ρυθμός κινδύνου είναι μια συνάρτηση που δίνει τη στιγμιαία πιθανότητα αθέτησης σε μια χρονική στιγμή  $t$ . Οι περιθώριες κατανομές επιβίωσης  $S_i(t_i)$  είναι ομαλές και αυστηρά φθίνουσες και δίνονται από τους τύπους:

$$S_i(t_i) = 1 - F_i(t_i) = e^{-\int_0^{t_i} h_i(s) ds}$$

Τότε:

$$F_i(t_i) = 1 - e^{-\int_0^{t_i} h_i(s) ds}$$

όπου  $h_i(\cdot)$  είναι οι εντάσεις αθέτησης των  $i$ . Ο χρόνος αθέτησης  $\tau_i$  ορίζεται ως εξής:

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0, \int_0^t h_i(s) ds \geq \theta_i \right\}$$

όπου τα  $\theta_i$  ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η από κοινού κατανομή των χρόνων αθέτησης  $\tau_i$  είναι:

$$F(t_1, \dots, t_n) = P(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n)$$

Η από κοινού κατανομή επιβίωσης είναι:

$$S(t_1, \dots, t_n) = P(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n) = C \left( e^{-\int_0^{t_1} h_1(s) ds}, \dots, e^{-\int_0^{t_n} h_n(s) ds} \right)$$

Ο χρόνος  $\tau_i$  ορίζεται ως ο πρώτος χρόνος που η διαδικασία αθέτησης  $\lambda_i(t) = e^{-\int_0^t h_i(s) ds}$  φτάνει το επίπεδο των ενεργοποιημένων μεταβλητών  $U_i$ :

$$\tau_i = \inf \{ t \geq 0, \lambda_i(t) \leq U_i \}$$

Για παράδειγμα θα δούμε τη χρήση του Gaussian copula στη μοντελοποίηση των default times. Το μονοπαραμετρικό Gaussian copula είναι το copula που σχετίζεται με τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την πολυδιάστατη κανονική κατανομή και εξηγεί την δομή συσχέτισης, μέσω της γραμμικής εξάρτησης, μιας παραμέτρου που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Έστω ότι έχουμε  $V_1, \dots, V_n$  μεταβλητές με περιθώριες τυποποιημένες κανονικές κατανομές. Για το μονοπαραμετρικό μοντέλο γράφουμε:

$$V_i(t) = a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} \varepsilon_i$$

όπου  $M$  θεωρείται η γενική κατάσταση της οικονομίας και είναι σταθερή παράμετρος για όλες τις επιχειρήσεις και  $\varepsilon_i$  είναι οι όροι λάθους (error terms). Τα  $M$  και  $\varepsilon_i$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Έχουμε ότι  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$ ,  $\text{cov}(V_i, V_j) = a_i a_j$  και  $\text{var}(V_i) = 1$ . Ο όρος  $a_i$  καθορίζει πόσο γερά συνδέεται η μεταβλητή  $V_i$  με την εξέλιξη της παραμέτρου  $M$ . Το  $V_i$  ερμηνεύεται ως η αξία του προϊόντος της επιχείρησης  $i$ .

Η αθέτηση ενός οφειλέτη ενεργοποιείται όταν  $V_i \leq K_i$  με  $K_i$  να είναι το όριο αθέτησης.

Η σχέση μεταξύ του  $V_i$  και του χρόνου αθέτησης  $\tau_i$  δίνεται από την περιθώρια κατανομή του χρόνου αθέτησης:

$$F_i(t) = P(\tau_i \leq t) = P(V_i \leq K_i)$$

$K_i = \Phi^{-1}(F_i(t))$ , όπου  $\Phi^{-1}$  είναι η αντίστροφη συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής.

Η υπό όρους πιθανότητα ότι μια πίστωση  $i$  αποτυγχάνει σε χρόνο  $t$  είναι:

$$p_i(t/M) = P(V_i \leq K_i / M) = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}[F_i(t)] - a_i M}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right]$$

Οι χρόνοι αθέτησης είναι ανεξάρτητοι. Η από κοινού κατανομή των χρόνων αθέτησης δίνεται από τον τύπο:

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}[F_i(t)] - a_i m}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right] g(m) dm$$

Η από κοινού κατανομή επιβίωσης δίνεται από τον τύπο:

$$S(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \Phi \left[ \frac{a_i m - \Phi^{-1}[F_i(t)]}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right] g(m) dm$$

όπου  $g(m) = \frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας της M.

Η επιλογή εξάρτησης μεταξύ των χρόνων αθέτησης καθορίζει τις τιμές των CDS και CDO's. Οι συζεύξεις μας επιτρέπουν να χωρίζουμε το πρόβλημα της μοντελοποίησης των χρόνων αθέτησης σε δύο μέρη. Πρώτον, να προσδιορίσουμε τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών και δεύτερον να επιλέξουμε την κατάλληλη σύζευξη που περιγράφει καλύτερα την δομή εξάρτησης μεταξύ των χρόνων αθέτησης. Στη συνέχεια, οι περιθώριες συναρτήσεις μαζί με την επιλεγμένη σύζευξη χρησιμοποιούνται στον προσδιορισμό της από κοινού κατανομής των χρόνων αθέτησης. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης των συζεύξεων στην μοντελοποίηση των από κοινού χρόνων αθέτησης είναι ότι διατηρούν σχετικά καλούς πίνακες συσχέτισεων, δεν υπάρχουν περιορισμοί στην προσέγγιση της κατανομής, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις διαδικασίες προσομοιώσεων, παρουσιάζουν διάφορες δομές εξάρτησης και βοηθούν στη κατασκευή μιας μοναδικής από κοινού κατανομής.

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Nelsen, R.B. (1998), "*An Introduction to Copulas*". Lectures Notes in Statistics, 139, Springer Verlag, New York.
- [2] Sklar, A. (1959): "*Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges*", Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, pp. 229-231.
- [3] Sklar, A. (1996): "*Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward*", in *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. By L. Rüschendorf, B. Schweizer and M. Taylor, pp. 1-14. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.
- [4] Li, D.X., (2000), "*On Default Correlation: a Copula Approach*", *Journal of Fixed Income*, 9, March, 43-54.
- [5] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967a), "*A generalized bivariate exponential distribution*", *J. Appl. Probability*. 4, 291-302.
- [6] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967b), "*Families of multivariate distributions*", *J. Amer. Statist. Assoc.* 62 , 30-44.
- [7] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1988), "*Families of multivariate distributions*", *J. Amer. Statist. Assoc.* 83, 834-841.
- [8] Schönbucher (2003), "*Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*", J. Wiley & Sons.
- [9] Schweizer, B. (1991), "*Thirty years of copulas*" in *Advances in Probability distribution with Given Marginals*, G. Dall'Aglio, S. Kotz, G. Sliennetti, editors (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), 13-50.
- [10] Durrelman, V., Nikeghbali, A. and Roncalli, T. (2000). "*Which Copula is the Right One ?*", Groupe de Recherche Operationnelle Credit Lyonnais.
- [11] Bielecki, T. R., S. Crepey, M. Jeanblanc, and M. Rutkowski (2005), "*Valuation of basket credit derivatives in the credit migrations environment*". Working paper, March 2005.

- [12] Enzo Giacomini, Wolfgang Härdle, “*Value-at-Risk Calculations with Time Varying Copulae*”, Discussion Paper 2005-004, Institut für Statistik und Ökonometrie Humboldt-Universität zu Berlin
- [13] Embrechts, A. J. McNeil and D. Straumann (1999): “*Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*”, To appear in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. By M. Dempster and H. K. Moffatt, Cambridge University Press.
- [14] Joe, H. and J. J. Xu(1996): “*The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*”, Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report 166.
- [15] Bouye, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet and T. Roncalli (2000): “*Copulas for finance – a reading guide and some applications*”, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Working Paper.
- [16] Embrechts, P., A. Hoeing and A. Juri (2001): “*Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*”, ETH Zurich, preprint.
- [17] Embrechts, P., F. Lindskog and A. J. McNeil (2001): “*Modelling dependence with copulas and applications to risk management*”, ETH Zurich, preprint.
- [18] Claudio Romano, “*Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market*”, Centro Interdipartimentale sul Diritto e l’Economia dei Mercati, Working Paper.
- [19] Paul Embrechts, Filip Lindskog and Alexander McNeil, “*Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*”, Department of Mathematics, Zurich Switzerland, working paper.
- [20] Genest, C., and L.-P. Rivest (1993): “*Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*,” *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1034–1043.
- [21] Maria Rosaria Simonelli, Teresa Squitieri, “*Copulas and risk indexes in finance*” Faculty of Economics, University of Naples Parthenope.
- [22] M. Goovaerts, A. De Schepper, Y. Hua, G. Darkiewicz and D. Vyncke, “*On the Use of Copulas for Calculating the Present Value of a General Cash Flow*” , *Tijdschrift voor Economie en Management* , Vol. L, 1, 2005

[23] Frey, R., and A. McNeil (2002), “*Modeling dependent defaults*”, working Paper, Department of Mathematics, ETHZ.

[24] Kaas R., Dhaene J. and Goovaerts M., 2000, “*Upper and Lower Bounds for Sums of Variables*”, *Mathematics and Economics* 27, 2, 151-168.

[25] Mashal, R. and A. Zeevi (2002): “*Beyond correlation: Extreme comovement Between Financial Assets*”, Columbia University.

[26] Demarta, S. and McNeil, A.J. (2004): “*The t Copula and Related Copulas*”, *International Statistical Review*.