ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Τραπεζικής Διοίκησης
Πρόγραμμα: Μεταπτυχιακών Σπουδών στη “ Χρηματοοικονομική Ανάλυση”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Ελευθερίας Αμιλήτου

ΘΕΜΑ

“Οριακά Θεωρήματα”

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναπ. Καθηγητής Ν. Πιττής
Ημερομηνία: Ιούνιος 2003

Στην Κωνσταντίνα,

που για συμπαράσταση,

έμαθε να μετράει και να γράφει ως το 10.....

1. Εισαγωγή

'…To conjecture about something is to measure its probability; and therefore the art of conjecturing, or the stochastic art is defined by us, as the art of measuring as exactly as possible the probabilities of things with this end in mind: that in our decisions or actions we may be able always to choose or to follow what has been perceived as being superior, more advantageous, safer, or better considered; in this alone lies all the wisdom of the philosopher and all the discretion of the statesman…'

Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713[1]

Η μαθηματική και φιλοσοφική θεώρηση της πιθανότητας αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα έως σήμερα. Ξεκινώντας από φιλοσοφικές αναζητήσεις μεταξύ υποκειμενικής και αντικειμενικής υπόστασης της πιθανότητας, αναπτύχθηκε σταδιακά η Θεωρία Πιθανοτήτων η οποία θεμελιώθηκε και μαθηματικά με τον Αξιωματικό Ορισμό της από τον Andrei Kolmogorov (1933).

Τα Οριακά Θεωρήματα αποτελούν μία από τις θεμελιώδεις περιοχές της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Η συγκεκριμένη μελέτη έχει ως στόχο την παρουσίαση μερικών από τα πιο γνωστά Οριακά Θεωρήματα, επικεντρώνοντας στην ταξινόμηση τους σύμφωνα με τις υποθέσεις που επιβάλλουν για την ισχύ τους. Η θεώρηση της ιστορικής εξέλιξης αυτών των υποθέσεων, αναδεικνύει την σταδιακή εξασθένησή τους, καθώς και την ύπαρξη trade off μεταξύ των κατηγοριών των υποθέσεων.

Στην πρώτη Ενότητα της μελέτης παρουσιάζονται κάποιες Βασικές έννοιες και μία σύντομη Ιστορική Αναδρομή.

Η επισκόπηση των Θεωρημάτων στο τέλος της Δεύτερης Ενότητας φιλοδοξεί να παρουσιάσει συνοπτικά στον αναγνώστη το εύρος των στοχαστικών διαδικασιών για τις οποίες είναι δυνατή η εφαρμογή των Οριακών Θεωρημάτων.

Η διερεύνηση της εφαρμογής των Οριακών Θεωρημάτων στις στοχαστικές διαδικασίες που υπονοούνται από οικονομετρικά μοντέλα που προτείνονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία, αποτελεί το αντικείμενο της Τρίτης Ενότητας.

2. Έννοιες- Ιστορική Αναδρομή

2.1. Βασικές έννοιες

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ένας γενικός ορισμός των Οριακών Θεωρημάτων, σε συνδυασμό με τις κατηγορίες των υποθέσεων που επιβάλλουν. Σε αυτό το γενικό πλαίσιο, εξετάζεται στη συνέχεια η χρησιμότητά τους. Το Κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των Κατηγοριών Οριακών Θεωρημάτων και τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές.

2.1.1. Ορισμός – Υποθέσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο όρος Οριακό Θεώρημα αναφέρεται σε μία ομάδα θεωρημάτων τα οποία προσδιορίζουν τη συμπεριφορά well-behaved[i] συναρτήσεων ενός συνόλου τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2, …, X_n) που ορίζονται στο ίδιο probability space (S, *F*, P(.)), όταν το *n* (το πλήθος των τυχαίων μεταβλητών που μετέχουν στη συνάρτηση), τείνει στο ∞. Δηλαδή τη συμπεριφορά της

$Y_n := g(X_1, X_2, ..., X_n)$, καθώς $n \to \infty$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, …, X_n, αποτελούν το δείγμα της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει το υπό μελέτη φαινόμενο.

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ: Είναι οι υποθέσεις για την probabilistic structure ων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, …, X_n, οι οποίες επιβάλλονται από το Οριακό Θεώρημα προκειμένου να ισχύει η συγκεκριμένη συμπεριφορά της Y_n.

Οι υποθέσεις αυτές κατατάσσονται σε 3 κατηγορίες υποθέσεων:

---

[i] Well-behaved με την έννοια της Borel συνάρτησης : Συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών η οποία είναι με τη σειρά της τυχαία μεταβλητή στο Borel field B(R).

a) Υποθέσεις ως προς την κατανομή τους (Distribution assumptions)

b) Υποθέσεις ως προς την Εξάρτησή τους (Dependence Assumptions)

c) Υποθέσεις ως προς την Ετερογένειά τους (Heterogeneity Assumptions)

Αυτή η ταξινόμηση των Υποθέσεων είναι συμβατή με την ταξινόμηση που ακολουθείται στη διαδικασία μοντελοποίησης ενός στοχαστικού φαινομένου.

Μεταξύ των τριών αυτών κατηγοριών Υποθέσεων υπάρχει ένα πολύ σημαντικό trade-off: Η εξασθένηση των υποθέσεων μίας Κατηγορίας, απαιτεί την ενίσχυση των υποθέσεων στις υπόλοιπες κατηγορίες.

2.1.2. Εφαρμογές

Ένα ερώτημα που γεννιέται στο σημείο αυτό, είναι για ποιό λόγο εξετάζεται η συμπεριφορά well-behaved συναρτήσεων του δείγματος της στοχαστικής διαδικασίας, όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο. ($Y_n := g(X_1, X_2, ..., X_n)$, καθώς $n \to \infty$)

Στη διαδικασία της Μοντελοποίησης μίας στοχαστικής διαδικασίας, σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται συναρτήσεις του δείγματος της διαδικασίας. Οι συναρτήσεις αυτές (statistics) χρησιμοποιούνται ως:

- Εκτιμητές παραμέτρων του Μοντέλου, (π.χ. Ο Δειγματικός μέσος $\hat{m}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ως εκτιμητής του μέσου)
- Test statistics στον Έλεγχο υποθέσεων. Εκεί μας ενδιαφέρει η ”απόσταση” κάποιας συνάρτησης του δείγματος π.χ. $\frac{\sqrt{n}(\hat{m}_n - m_0)}{s}$
- Προβλεπτές. Υπενθυμίζεται ότι προβλεπτής είναι μία συνάρτηση του δείγματος που δίνει πρόβλεψη, με την έννοια $\hat{x}_{n+1} = q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Έχοντας ορίσει ένα συγκεκριμένο statistic, το οποίο είναι και αυτό μία τυχαία μεταβλητή, εξετάζεται η συμπεριφορά του. Με τον όρο συμπεριφορά, υπονοείται πως η μέγιστη πληροφορία για το statistic θα ήταν διαθέσιμη, αν ήταν γνωστή η Κατανομή του. Πραγματικά, γνωρίζοντας την κατανομή, μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές του statistic, οι οποίες είναι απαραίτητες προκειμένου να εκτιμήσουμε την ποιότητα του statistic. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται πως ιδιότητες των εκτιμητών όπως η συνέπεια π.χ., εκφράζονται σε όρους των ροπών του εκτιμητή.

Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα στη Μοντελοποίηση είναι ο προσδιορισμός της κατανομής μίας συνάρτησης τυχαίων μεταβλητών $Y_n := g(X_1, X_2, ..., X_n)$ όταν η κατανομή των $(X_1, X_2, ..., X_n)$ δίνεται στο Specification step της Μοντελοποίησης.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε θεωρητικά να αντιμετωπιστεί μαθηματικά ως εξής:

Αν είναι γνωστή η από κοινού κατανομή του δείγματος (Joined Distribution of the Sample), $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, τότε η κατανομή της $Y_n := g(X_1, X_2, ..., X_n)$ προκύπτει ολοκληρώνοντας την $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n φορές ως εξής:

$F(Y \leq y) = P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_x\}$, όπου

$B_x = [g^{-1}(Y \leq y)] := \{g^{-1}(g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq y)\}$

Δηλαδή B_x είναι το σύνολο των n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, στις οποίες, αν εφαρμόσουμε την g(.) παίρνουμε $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq y$. Έτσι όσο πιο πολλές n-άδες έχει το B_x, τόσο πιο μεγάλη η πιθανότητα $P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_x\}$.

Η παραπάνω κατανομή επομένως προκύπτει σαν το πολλαπλό ολοκλήρωμα:

$$P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_x\} = \underbrace{\int\int \cdots \int}_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_x} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Ο υπολογισμός τέτοιων ολοκληρωμάτων όμως είναι ιδιαίτερα δύσκολος, ακόμη και για απλές συναρτήσεις g(.). Θεωρήματα που να προσδιορίζουν την κατανομή τέτοιων g(.) υπάρχουν λίγα και μόνο για συγκεκριμένες κατανομές των $(X_1, X_2, ..., X_n)$, π.χ. Κανονική Κατανομή.

Το ζητούμενο όμως είναι η εξαγωγή συμπεράσματος για την g(.) σε μία ευρεία γκάμα δυνατών κατανομών των τυχαίων μεταβλητών του δείγματος. Στην περίπτωση αυτή είναι εφικτή η εξαγωγή προσεγγιστικών λύσεων, οι οποίες στηρίζονται στην συμπεριφορά της $g(X_1, X_2,..., X_n)$ όταν $n \to \infty$.

Αυτή η συμπεριφορά όπως είδαμε είναι το αντικείμενο των Οριακών Θεωρημάτων.

2.2. Κατηγορίες Οριακών Θεωρημάτων

Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς από τα προηγούμενα, πως το αντικείμενο των Οριακών Θεωρημάτων είναι κάποιας μορφής “ασυμπτωτική” συμπεριφορά της $g(X_1, X_2,..., X_n)$ όταν $n \to \infty$. Ουσιαστικά δηλαδή εξετάζεται κάποια μορφή σύγκλισης προσαρμοσμένη στο χώρο των τυχαίων μεταβλητών . Ανάλογα με το είδος αυτής της στοχαστικής σύγκλισης, τα Οριακά Θεωρήματα μπορούν να ταξινομηθούν σε 3 βασικές κατηγορίες:

1. Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (Weak Law of Large Numbers) WLLN
2. Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (Strong Law of Large Numbers) SLLN
3. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) CLT

Μεταξύ των κατηγοριών αυτών υπάρχουν ομοιότητες, αλλά και σημαντικές διαφορές:

2.2.1. Κοινά χαρακτηριστικά

- **ü** Όλα τα Θεωρήματα αναφέρονται σε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, μία στοχαστική διαδικασία: $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} := \{X_1, X_2, \mathrm{L}, X_n\}$
- **ü** Επιβάλλουν κάποιες υποθέσεις για την probabilistic structure της στοχαστικής διαδικασίας, υποθέσεις που ανήκουν στις 3 κατηγορίες: a) Κατανομής, b) Εξάρτησης, c) Ετερογένειας.
- **ü** Σε όλα τα Θεωρήματα εξετάζεται η συμπεριφορά κάποιας g(X), η οποία είναι ένα scaled summation: $c_n^{-1} S_n := c_n^{-1}(\sum_{k=1}^{n}[X_k - E[X_k]])$ όταν $n \to \infty$, όπου

c_n είναι ο n-οστός όρος της ακολουθίας $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, η οποία είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (scaling sequence)που έχει επιλεγεί κατάλληλα, ανάλογα με το είδος της συμπεριφοράς του scaled summation που εξετάζεται, π.χ. αν συγκλίνει σε μία εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή ή τον τρόπο με τον οποίο συγκλίνει στην μεταβλητή αυτή.

2.2.2. Διαφορές μεταξύ των Κατηγοριών

- Η ακολουθία $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετική σε κάθε περίπτωση
- Τα συμπεράσματα ως προς την συμπεριφορά της συνάρτησης του δείγματος, αφορούν σε διαφορετικές μορφές στοχαστικής σύγκλισης:

a) Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (WLLN): Σύγκλιση κατά πιθανότητα: $a_n^{-1} S_n \xrightarrow{p} 0$, δηλαδή

$\lim_{n\to\infty} P(|a_n^{-1} S_n| < e) = 1, \forall e > 0$ (συνήθως $a_n^{-1} = \dfrac{1}{n}$)

Πρόκειται δηλαδή για σύγκλιση μίας ακολουθίας πιθανοτήτων, άρα για σύγκλιση μίας ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

Διαισθητικά: Αν για τα scaled sums $a_n^{-1} S_n = a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k - a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E[X_k]$ οριστεί η έννοια της απόστασης: $|a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k - a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E[X_k]|$, σαν απόσταση της τυχαίας μεταβλητής $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$ από την εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E[X_k]|$, κάνοντας την απλούστευση ότι απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων είναι η απόσταση μεταξύ των εικόνων τους, άρα απόσταση μεταξύ των πραγματοποιήσεων της $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$ και της $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E[X_k]|$, τότε, για διάφορες τιμές του n, ορίζεται μία ακολουθία τέτοιων αποστάσεων. Διαισθητικά η απόσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η απόσταση από τον πραγματικό μέσο. Αν για κάθε όρο της ακολουθίας των αποστάσεων οριστεί το event: Η απόσταση αυτή να είναι μικρότερη από μία θετική ποσότητα ε, οποιαδήποτε κι αν είναι αυτή, τότε μπορεί να οριστεί και η πιθανότητα αυτών των events. Ετσι τελικά από την ακολουθία αποστάσεων προκύπτει μία ακολουθία πιθανοτήτων. Σύμφωνα με τα WLLN αυτή η ακολουθία πιθανοτήτων συγκλίνει και έχει ως όριό της την μονάδα όταν $n \to \infty$.

b) Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (SLLN): Convergence almost surely: $a_n^{-1} S_n \xrightarrow{a.s.} 0$, δηλαδή:

$P(\lim_{n\to\infty}[a_n^{-1} S_n] = 0) = 1$ (και εδώ χρησιμοποιείται η ίδια scaling ακολουθία $a_n^{-1} = \dfrac{1}{n}$).

Πρέπει να σημειωθεί πως στην περίπτωση του SLLN , δεν εξετάζεται το όριο μίας ακολουθίας πιθανοτήτων, αλλά η σύγκλιση της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $a_n^{-1} S_n$ στο 0 όταν $n \to \infty$ και συγκεκριμένα εξετάζεται η πιθανότητα σύγκλισης αυτής της τυχαίας μεταβλητής, η οποία υπολογίζεται ότι είναι 1.

Εδώ το event για το οποίο υπολογίζεται η πιθανότητα, είναι το event: Το όριο της ακολουθίας $a_n^{-1} S_n$ καθώς $n \to \infty$ είναι 0. Δηλαδή καθώς το $n \to \infty$, το σύνολο των πραγματοποιήσεων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που δίνουν $a_n^{-1} S_n$ που δεν συγκλίνει στο 0 είναι το κενό σύνολο $\varnothing$

c) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (CLT): Σύγκλιση κατά Νόμο: $c_n^{-1} S_n \xrightarrow{D} \Phi(x)$,

δηλαδή $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R .$$

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δηλαδή παρέχει πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο συγκλίνει η ακολουθία $\boldsymbol{a}_n^{-1}\boldsymbol{S}_n$ στην εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή 0. Η διαφορετική scaling ακολουθία ($\sqrt{\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{S}_n)}$) μετριάζει τον ρυθμό σύγκλισης του αρχικού scaled sum στην εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή 0, ώστε να μπορεί να παρατηρηθεί οριακά σύγκλιση σε συγκεκριμένη Cumulated Distribution Function (cdf), η οποία μάλιστα είναι αυτή της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής (N(0,1)). Διαισθητικά: Ορίζοντας την ακολουθία με όρους $\dfrac{\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{S}_n]}{\sqrt{\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{S}_n)}}$, ορίζεται η ακολουθία των cdfs αυτών των τυχαίων μεταβλητών. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα εξετάζει την σύγκλιση αυτής της ακολουθίας συναρτήσεων στην cdf της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\boldsymbol{z}) := \dfrac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2}\,\boldsymbol{du}, \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$)

Ακολουθεί μία Ιστορική Αναδρομή στην διατύπωση των πιο γνωστών Θεωρημάτων με στόχο την ανάδειξη της εξασθένησης των Υποθέσεων.

2.3. Ιστορική Αναδρομή

2.3.1. Η μαθηματική και φιλοσοφική θεώρηση της πιθανότητας έως τη διατύπωση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών

PASCAL - FERMAT

Πολλοί συγγραφείς[2] θεωρούν ότι η μαθηματική προσέγγιση της πιθανότητας γίνεται για πρώτη φορά το 1654, με τη συνάντηση δύο Γάλλων μαθηματικών, των Pascal και

Fermat. Ένα από τα ζητήματα που συζητήθηκαν τότε, ήταν το «πρόβλημα των βαθμών». Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει το πρόβλημα καταμερισμού των μεριδίων, όταν ένα παιχνίδι διακόπτεται πριν τη λήξη του, δηλαδή προτού κάποιος από τους παίκτες φτάσει στο σημείο να έχει αρκετούς βαθμούς για να κερδίσει.

Η θεωρία του Pascal στηρίζεται στον αναδρομικό προσδιορισμό της «δίκαιης τιμής». Πιο συγκεκριμένα, βάση της θεωρίας αυτής σε κάθε γύρο, οι παίκτες έχουν την ίδια ευκαιρία να κερδίσουν, επομένως είναι δίκαιο για τους παίκτες να αποζημιωθούν κατά το ίδιο ποσοστό αν ο γύρος δεν εκτελεστεί. Αν πρόκειται για ένα παιχνίδι με δύο παίκτες το ποσοστό αυτό είναι το 50% των συνολικών κερδών. Εφαρμόζοντας την ίδια λογική αναδρομικά, μπορεί να προσδιοριστεί η αποζημίωση κάθε παίκτη ξεκινώντας από τον γύρο στον οποίο θα κέρδιζε το παιχνίδι και καταλήγοντας στον γύρο κατά τον οποίο σταμάτησε το παιχνίδι.

Ο Fermat διατύπωσε μία εναλλακτική συνδυαστική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος. Η μέθοδος στηρίζεται στην απαρίθμηση των συνδυασμών των διαφορετικών εκβάσεων του παιχνιδιού αν το παιχνίδι συνεχιστεί για ένα σταθερό αριθμό γύρων, ανεξάρτητα από το αν κάποιος παίκτης έχει κερδίσει ή όχι νωρίτερα. Από το σύνολο αυτό των συνδυασμών, κάποιοι αναδεικνύουν νικητή τον ένα παίκτη και κάποιοι τον άλλο. Η αποζημίωση κάθε παίκτη σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, θα πρέπει να είναι το ποσοστό των κερδοφόρων συνδυασμών του παίκτη επί τα συνολικά κέρδη του παιχνιδιού.

Η προσέγγιση της συνδυαστικής μεθόδου του Fermat, μπορεί να θεωρηθεί ως ο πρόγονος της measure theoretic probability. Αντίστοιχα η προσέγγιση του αναδρομικού προσδιορισμού της δίκαιης τιμής του Pascal μπορεί να θεωρηθεί ο πρόγονος της game theoretic probability.

Η εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων όπως ήταν αναμενόμενο, δεν περιορίστηκε στα πλαίσια των games of chance. Ο ίδιος ο Pascal μάλιστα διατύπωσε επιχειρήματα “στοιχηματίζοντας” πάνω στην ύπαρξη του Θεού. Η έκδοση του Port

Royal Logic, που γράφτηκε από φίλους του Pascal στην μονή Port Royal, επιχειρηματολογεί για την απόδοση πίστης στη συχνότητα με την οποία συμβαίνουν διάφορα γεγονότα.

2.3.2. Bernoulli – Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Ο επόμενος σημαντικός σταθμός στην προσέγγιση της πιθανότητας είναι η θεωρία του Jakob Bernoulli (1654 – 1705). Η προσέγγιση του Bernoulli βρίσκεται συγκεντρωμένη στο βιβλίο του *Ars Conjectandi [1]* το οποίο εκδόθηκε μετά θάνατον το 1713.

Σύμφωνα με τον Bernoulli, η πιθανότητα είναι ένας βαθμός βεβαιότητας, που μπορεί να αιτιολογηθεί από κάποιο επιχείρημα, κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο η αποζημίωση ενός παίκτη σε ένα τυχερό παιχνίδι, αιτιολογείται από την θέση του στο παιχνίδι.

Τα βασικά ζητήματα που απασχόλησαν τον Bernoulli ήταν αυτά της υποκειμενικής και της αντικειμενικής υπόστασης της πιθανότητας.

Συγκεκριμένα, εφόσον η πιθανότητα είναι ένας βαθμός βεβαιότητας, είναι μία ατελής βεβαιότητα και επομένως υποκειμενική. Η γνώση με απόλυτη βεβαιότητα, σύμφωνα με τον Bernoulli, δεν είναι εφικτή από τον άνθρωπο παρά μονό από τον Θεό.

Από την άλλη μεριά, η πιθανότητα δεν είναι απαραίτητα γνωστή σε εμάς. Απαιτούνται επανειλημμένες παρατηρήσεις προκειμένου να γνωρίσουμε το μέγεθός της. Από αυτή την άποψη η πιθανότητα έχει μία αντικειμενική πραγματικότητα.

Αυτή η ισορροπία μεταξύ υποκειμενικότητας και αντικειμενικότητας εκφράζεται με τον όρο “equally possible” που διατύπωσε ο Bernoulli αναφερόμενος σε εκβάσεις που έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Απαριθμώντας τις “equally possible” εκβάσεις, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι το ποσοστό των εκβάσεων πραγματοποιούν το συγκεκριμένο ενδεχόμενο.

Αυτό που κάνει τη θεωρία του Bernoulli τόσο σημαντική, είναι ότι για πρώτη φορά διατυπώνεται στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων, η ιδέα του ότι η πιθανότητα μπορεί να προσεγγιστεί με την παρατήρηση. Η ιδέα αυτή τυποποιήθηκε με την διατύπωση και απόδειξη του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών από τον Bernoulli. O Bernoulli αποκάλεσε το Θεώρημα “Golden Theorem” θέλοντας να δώσει έμφαση στην σημαντικότητα του. Η σημερινή του ονομασία ως Law of Large Numbers (LLN) δόθηκε από τον Poisson to 1837.

Bernoulli’s LLN

Ας θεωρήσουμε ένα παιχνίδι στο οποίο r “equally possible” εκβάσεις οδηγούν στην επιτυχία και s στην αποτυχία. Σύμφωνα με το Bernoulli LLN, αν παίξουμε το παιχνίδι για ένα αρκετά μεγάλο αριθμό γύρων, έστω N, μπορούμε να είμαστε όσο βέβαιοι θέλουμε ότι ο λόγος του παρατηρούμενου αριθμού επιτυχιών, προς τον παρατηρούμενο αριθμό αποτυχιών, έστω y/z, θα είναι σχεδόν ίδιος με τον λόγο r/s.

Συγκεκριμένα, αν N είναι ο αριθμός των επαναλήψεων του παιχνιδιού και p είναι η πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή N= y+z και p= r/(r+s) και η παρατηρούμενη συχνότητα επιτυχίας είναι y/N, τότε:

$\forall$ε>0, δ>0 $P\{|\frac{y}{N} - p| < \varepsilon\} > 1-\delta$ όταν το N είναι αρκετά μεγάλο.

Δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου η παρατηρούμενη συχνότητα επιτυχίας να απέχει από την πραγματική πιθανότητα επιτυχίας απόσταση μικρότερη από οποιαδήποτε θετική ποσότητα, είναι μεγαλύτερη από 1-δ

Ο Bernoulli προσδιόρισε επιπλέον άνω φράγμα για το πλήθος των επαναλήψεων του παιχνιδιού που απαιτούνται ώστε να εκτιμηθεί η πιθανότητα p με συγκεκριμένη ακρίβεια. Στην περίπτωση που η προς εκτίμηση πιθανότητα είναι 0.6, προσδιόρισε πως ένας αριθμός N= 25550 επαναλήψεων είναι αρκετός, ώστε η συχνότητα y/N να είναι στο διάστημα [0.58, 0.62] με ακρίβεια 1000 στα 1.

Η διατύπωση του Νόμου από τον Bernoulli, μπορεί να θεωρηθεί σαν μία σύγκριση μεταξύ πιθανότητας και συχνότητας. Βάση του Νόμου, μπορούμε να αιτιολογήσουμε τη χρήση της συχνότητας y/N σαν «εκτίμηση» της πραγματικής πιθανότητας p, όταν δεν γνωρίζουμε τα r και s ώστε να υπολογίσουμε την πραγματική πιθανότητα άμεσα.

Μία πολύ συχνή παρερμηνεία του LLN είναι η εξαγωγή του λανθασμένου συμπεράσματος πως μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων η διαφορά των παρατηρούμενων επιτυχιών y και των παρατηρούμενων αποτυχιών z θα είναι ίση με τη διαφορά r-s. Ο Νόμος όμως αυτό που συγκρίνει είναι την παρατηρούμενη συχνότητα επιτυχίας με την πραγματική πιθανότητα επιτυχίας και οποιαδήποτε άλλη ερμηνεία είναι λανθασμένη.

2.3.3. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα – Abraham de Moivre

Το 1718 δημοσιεύεται η $1^{η}$ έκδοση του βιβλίου του Abraham de Moivre (1667-1754) με τίτλο *Doctrine of Chances*. Στη $2^{η}$ έκδοση (1734) ο de Moivre αξιολόγησε την πιθανότητα του event: $\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{Xi}=\frac{1}{2}$, όπου $\{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}\}_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}$ ακολουθία Bernoulli distributed ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}=0)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}=1)=\frac{1}{2}$. Ο υπολογισμός της πιθανότητας του συγκεκριμένου event έγινε έμμεσα, θεωρώντας το ισοδύναμο event: Να πάρουμε n heads σε 2n επαναλήψεις ενός δίκαιου παιχνιδιού ρίψης νομίσματος[3].

Το event αυτό έχει πιθανότητα $\boldsymbol{P}(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{2\boldsymbol{n}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{n})=\binom{2\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}\frac{1}{2^{2\boldsymbol{n}}}$, εφόσον έχουμε $2^{2\boldsymbol{n}}$ δυνατούς συνδυασμούς από άσσους και μηδέν σε 2n επαναλήψεις, και από αυτούς έχουμε $\binom{2\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}$ συνδυασμούς n άσσων.

Όμως $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, δηλαδή $\binom{2n}{n} = \dfrac{2n!}{n!n!}$. Για μεγάλο n η συγκεκριμένη σχέση δεν ήταν εύχρηστη για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων (υπενθυμίζουμε ότι βρισκόμαστε στα 1730). Ετσι ο de Moivre χρησιμοποίησε την προσέγγιση του Stirling για το n!: $n! \approx \sqrt{2p}\, n^n \sqrt{n}\, \dfrac{1}{e^n}$. Ετσι:

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{\sqrt{2p}\,(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}} \times \frac{e^n}{\sqrt{2p}\,n^n\sqrt{n}} \times \frac{e^n}{\sqrt{2p}\,n^n\sqrt{n}} = \frac{2^{2n} n^{2n}\sqrt{2}\sqrt{n}e^{2n}}{e^{2n}n^{2n}\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{2p}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{np}}$$

Άρα, $P(\sum_{i=1}^{2n} X_i = n) \approx \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{np}} \times \dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{np}}$

Αυτό που παρατήρησε μετά από αυτό τον υπολογισμό ήταν πως καθώς $n \to \infty$, η ακολουθία των πιθανοτήτων αυτών συγκλίνει με όριο το 0. Επομένως για να μπορέσει να μελετήσει τον τρόπο σύγκλισης της πιθανότητας για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, σκέφτηκε να πολλαπλασιάσει το event με τον όρο . Ετσι προκύπτουν τα events:

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right)$$

Έχοντας ορίσει τις συγκεκριμένες τυχαίες μεταβλητές, ο de Moivre προσπάθησε να υπολογίσει την πιθανότητα events της μορφής $Z_n \le z$ και να βρει κάποιο όριο για αυτή την ακολουθία πιθανοτήτων όταν $n \to \infty$.

Το όριο αυτό βρέθηκε να είναι: $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \dfrac{2}{\sqrt{2p}} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^k 2^{k-1}}{k!(2k+1)}, z \in R$

Την εποχή εκείνη ο de Moivre δεν ήξερε πως το άθροισμα αυτό είναι η ανάλυση σε άπειρο άθροισμα Κανονικής Κατανομής με $E[z] = 0$ και διακύμανση $Var(z) = \dfrac{1}{4}$.

Η Κανονική Κατανομή ανακαλύφθηκε στις αρχές του 19[ου] αιώνα από τους Legendre και Gauss.

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827)

O Laplace ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε πως το ανάπτυγμα του de Moivre είναι η σειρά της $\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^z e^{-2x^2}dx, z\in R$ στο βιβλίο του Thèorie analytique des probabilities (1820).

Επιπλέον ο Laplace γενίκευσε το θεώρημα του de Moivre στην περίπτωση ανεξάρτητων δοκιμών με Bernoulli Identical Distribution, όπου $P(X=1)=p$ και $P(X=0)=1-p$. Ετσι το θεώρημα έγινε γνωστό ως de Moivre-Laplace CLT. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως βασική υπόθεση για την ισχύ του θεωρήματος είναι κάθε δοκιμή να αντιστοιχεί σε IID τυχαία μεταβλητή, επομένως η πιθανότητα p είναι σταθερή για όλες τις δοκιμές.

O Laplace συνέχισε αποδεικνύοντας πως το παραπάνω θεώρημα ισχύει γενικά για τυχαίες μεταβλητές που έχουν πεπερασμένο αριθμό δυνατών καταστάσεων, μέση τιμή μ και διακύμανση $σ^2$

SIMEON-DENIS POISSON (1781-1840)

O Poisson έδωσε μία εναλλακτική οριακή κατανομή (συγκεκριμένα όραση probability density function) για την ακολουθία των partial sums μίας Bernoulli Ανεξάρτητης στοχαστικής διαδικασίας:

Αν $\{X_n\}_{n+1}^{\infty}$, μία Bernoulli Ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία και $\{S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, n=1,2,\ldots\}$ η ακολουθία των partial sums της, αυτή θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή, δηλαδή: $S_n \sim Bi(n,p_n)=\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}$, με μέσο $E[X]=np_n$ και διακύμανση, $Var(x)=p_n(1-p_n)n$

Αυτή η ακολουθία καθώς $n \to \infty$ έχει pdf την $\frac{l^x e^{-x}}{x!}$, όπου $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

2.3.4. Measure Theory – Strong Law of Large Numbers

Μετά το θάνατο του Laplace (1827) ακολούθησε μία περίοδος που το ενδιαφέρον για την ανάπτυξη ενός σοβαρού μαθηματικού υπόβαθρου για τη Θεωρία Πιθανοτήτων ατόνησε. Από τη μία γιατί ο Laplace θεωρείτο αυθεντία που δύσκολα θα μπορούσε να ξεπεραστεί, από την άλλη γιατί στη διάρκεια του 19^ου^ αιώνα η επιστημονική έρευνα ήταν επικεντρωμένη σε ντετερμινιστικά μοντέλα, τόσο στις Βιολογικές Επιστήμες όσο και στις Φυσικές. Τα εμπειρικά αποτελέσματα ήταν αυτά που είχαν ιδιαίτερη σημασία. Η ανάπτυξη των Κοινωνικών Επιστημών και η νέα γενιά των Social Statisticians, διατήρησαν την frequentistic άποψη για την πιθανότητα. Επομένως από τη στιγμή που η πιθανότητα δεν θεωρείτο τίποτε άλλο παρά συχνότητα εμφάνισης, δεν υπήρξε ενδιαφέρον για την ανάπτυξη μαθηματικού υπόβαθρου που να υποστηρίζει την έννοια της σύγκλισης της συχνότητας εμφάνισης σε κάποια αντικειμενική πιθανότητα, όπως αυτή εκφραζόταν από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Στα τέλη του 19^ου^ αιώνα όμως, άρχισε να διαφαίνεται πως η πιθανότητα θα μπορούσε να παίξει σημαντικό ρόλο στις Φυσικές Επιστήμες. Ήδη από τα μέσα του αιώνα η έρευνα των James Clerk Maxwell, Lord Kelvin και Ludwig Boltzmann στην Στατιστική Φυσική, είχε χρησιμοποιήσει την έννοια της πιθανότητας και πάλι όμως ως συχνότητα εμφάνισης. Με την ανάπτυξη της Στατιστικής Θερμοδυναμικής όμως, αναζητείται πλέον ένα μαθηματικό υπόβαθρο για τη Θεωρία Πιθανοτήτων, με την ελπίδα πως έτσι θα μπορούσε να γίνει περισσότερο σαφής αυτή η νέα περιοχή των φυσικών επιστημών.

Συγκεκριμένα, στο 2^ο^ Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert διατυπώνοντας τα πιο σημαντικά ανοιχτά θέματα των Μαθηματικών, κατονόμασε την πιθανότητα σαν μία από τις υποενότητες των φυσικών επιστημών, της οποίας ο Αξιωματικός Ορισμός απαιτούσε περαιτέρω έρευνα.

Στο διάστημα αυτό αναπτύχθηκε η Θεωρία Μέτρου (Measure Theory) και η Θεωρία της Ολοκλήρωσης, με κίνητρα την ολοκλήρωση συναρτήσεων ολοένα και πιο badly behaved, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών.

Η εφαρμογή αυτής της θεωρίας στη Θεωρία Πιθανοτήτων άρχισε να πραγματοποιείται με την αλλαγή του αιώνα. Το 1898 ο Emile Borel επέκτεινε την Measure Theory, χρησιμοποιώντας sets που μπορούν να προσεγγιστούν από αριθμήσιμα άπειρες ενώσεις elementary sets. Η δουλειά του Borel ενέπνευσε τον Lebesgue ο οποίος το 1901 ανέπτυξε μία εντελώς νέα Θεωρία Ολοκλήρωσης.

Όταν στη δεκαετία του 1890 η νέα Measure Theory βρισκόταν υπό ανάπτυξη με στόχο την ανάπτυξη της θεωρίας της Ολοκλήρωσης, δεν φαινόταν η ανάγκη στη Θεωρία Πιθανοτήτων να χρησιμοποιήσει βελτιωμένες μεθόδους Ολοκλήρωσης. Αυτό όμως που φάνηκε χρήσιμο από τη νέα αυτή θεωρία, ήταν η έννοια των ενδεχομένων μηδενικού μέτρου (events of measure zero).

Στα 1890 ο Henri Poincarè διατυπώνει το Recurrence Theorem:

Ένα απομονωμένο μηχανικό σύστημα που αποτελείται από 3 σώματα, θα επιστρέψει κάποια στιγμή κοντά στην αρχική του κατάσταση, δεδομένου ότι αυτή η κατάσταση δεν είναι ιδιάζουσα. Το ζήτημα για τον Poincarè ήταν να δείξει πόσο λίγες ήταν αυτές οι ιδιάζουσες καταστάσεις. Πραγματικά έδειξε πως αυτές οι καταστάσεις έχουν μηδενική πιθανότητα και με την έννοια αυτή είναι ιδιάζουσες.

Αυτή θεωρείται η πρώτη εφαρμογή της ιδέας μηδενικού μέτρου (μηδενικής πιθανότητας) σε ένα μηχανικό σύστημα.

EMILE BOREL(1871-1956)

Στα 1909 ο Borel δημοσιεύει ένα άρθρο του που εισάγει την Measure Theory στον πυρήνα της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Σε αυτό το άρθρο ο Borel διερεύνησε τη συμπεριφορά μίας άπειρης ακολουθίας επιτυχιών και αποτυχιών, που προκύπτει όταν επαναλαμβάνεται ένα game άπειρες φορές. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού η πιθανότητα επιτυχίας είναι $\frac{1}{2}$ και οι επαναλήψεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Η στοχαστική διαδικασία υπό επεξεργασία είναι επομένως μία Bernoulli IID διαδικασία με $\boldsymbol{P(X_i = 1) = P(X_i = 0)} = \frac{1}{2}$. Το συμπέρασμα του Borel ήταν:

$\exists \boldsymbol{N} : \left| \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\mathbf{ln}\left(\boldsymbol{n}/2\right)}{\sqrt{2\boldsymbol{n}}}, \forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$, με πιθανότητα 1. Εφόσον όταν $\boldsymbol{n} \to \infty$, είναι $\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{\mathbf{ln}\left(\boldsymbol{n}/2\right)}{\sqrt{2\boldsymbol{n}}} = 0$, άρα $\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to\infty]{} \frac{1}{2}$, με πιθανότητα 1.

Αυτό το θεώρημα ονομάστηκε Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (SLLN) και η μαθηματική διατύπωση του συμπεράσματος είναι η εξής:

$$\boldsymbol{P(s} : \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \left(\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k(s)} \right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{)} = 1$$

Αυτό το είδος στοχαστικής σύγκλισης ονομάζεται almost sure convergence και ερμηνεύεται ως εξής: Τα υποσύνολα των εκβάσεων $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$ για τα οποία η $\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k(s)}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$, έχουν πιθανότητα 1. Διαφορετικά, τα υποσύνολα για τα οποία δεν παρατηρείται σύγκλιση, έχουν πιθανότητα 0, είναι δηλαδή μηδενικού μέτρου. Σε αντιδιαστολή με το WLLN του Bernoulli, εδώ η σύγκλιση δεν είναι σε όρους ακολουθίας πιθανοτήτων, αλλά ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών.

Ακολουθεί η επιμέρους παρουσίαση των Θεωρημάτων κάθε Κατηγορίας.

3. Παρουσίαση Οριακών Θεωρημάτων

3.1. Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (WLLN)

Διατύπωση: Για μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} := \{X_1, X_2, \mathbf{L}\}$, δηλαδή για μία στοχαστική διαδικασία, κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς – υποθέσεις ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] \right| < e \right) = 1, \forall e > 0$$

και συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E[X_k] \right) \right) \xrightarrow{p} 0$

Τα επιμέρους WLLNs χρησιμοποιούν διάφορες παραλλαγές συνθηκών για τη στοχαστική διαδικασία προκειμένου να αποδείξουν την σύγκλιση κατά πιθανότητα του παραπάνω scaled sum.

3.1.1. Bernoulli-s WLLN (1713)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k είναι Bernoulli distributed, δηλαδή:

$$f(x_k; J_k) = J_k^{x_k}(1 - J_k)^{1-x_k}, x_k = 0,1, k = 1,2, \mathbf{L}, 0 < J < 1$$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n; j) = f(x_1; J_1) f(x_2; J_2) \mathbf{L}\ f(x_n; J_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; J_k)$$

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. είναι Identically Distributed. Ήδη από τη συνθήκη (A) έχουν κοινή (Bernoulli) κατανομή αλλά εδώ απαιτείται επιπλέον να έχουν και τις ίδιες παραμέτρους $J_k = J, \forall k = 1,2, \mathbf{L}$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} J$$

Η ακολουθία πιθανοτήτων $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ των events $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| < e$ καθώς $n \to \infty$, συγκλίνει με όριο το 1. Τα events των οποίων οι πιθανότητες συγκλίνουν είναι τα events: Η απόσταση της $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ από την εκφυλισμένη τ.μ. J να είναι μικρότερη από οποιαδήποτε θετική ποσότητα e. Η εκφυλισμένη τ.μ. είναι ο μέσος της $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

<u>**Απόδειξη :**</u> Η απόδειξη του θεωρήματος [3] παρουσιάζεται με τη χρήση της ανισότητας Chebyshev και των αρχικών υποθέσεων. Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι η ανισότητα Chebyshev δεν ήταν γνωστή στον Bernoulli το 1713.

<u>*Ανισότητα Chebyshev:*</u> Αν η Χ είναι μία τ.μ. με πεπερασμένη διακύμανση, τότε

$$P(|X - E[X]| \geq e) \leq \frac{Var(X)}{e^2}, \forall e > 0$$

(Προφανώς εφόσον η Χ έχει περασμένη διακύμανση έχει και πεπερασμένο μέσο, αφού ο μέσος είναι ροπή χαμηλότερης τάξης από τη διακύμανση)

Αν θεωρηθεί η $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ως Χ με μέσο $E[X] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = E\left[\frac{1}{n} nJ\right] = J$, τότε η ανισότητα γίνεται: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| \geq e\right) \leq \frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{e^2}, \forall e > 0$

(Για τον υπολογισμό του μέσου $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$, χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση Identically Distributed X_k και με πεπερασμένο μέσο.)

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j)$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση Γενικής ανεξαρτησίας προκύπτει ότι οι τ.μ. X_k θα είναι και non-correlated, επομένως $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j) = 0$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της πεπερασμένης διακύμανσης, τα $Var(X_k) < \infty, \forall k$ και λόγω Bernoulli Distribution είναι: $Var(X_k) = J(1-J) < \infty, \forall k$. Ετσι τελικά, $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} nJ(1-J) = \frac{1}{n} J(1-J)$.

Άρα, $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| \geq e\right) \leq \frac{J(1-J)}{ne^2}, \forall e > 0$

Στο WLLN όμως το ζητούμενο είναι το όριο των πιθανοτήτων : $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| < e\right)$. Τα events αυτά είναι τα συμπληρωματικά events αυτών που χρησιμοποιήθηκαν στην ανισότητα Chebyshev. Επομένως, $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| < e\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| \geq e\right) \geq 1 - \frac{J(1-J)}{ne^2}$.

Παίρνοντας το όριο αυτής της ακολουθίας πιθανοτήτων καθώς $n \to \infty$, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{J(1-J)}{ne^2} = 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - J\right| < e\right) = 1$

<u>Χρήση των Υποθέσεων:</u>

A. Distribution: Χρησιμοποιήθηκε μόνο ώστε να εξασφαλιστεί ότι μέσος και διακύμανση είναι πεπερασμένα.

B. Dependence: Χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, ώστε να απαλειφθούν από το άθροισμα οι όροι $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, με απώτερο τελικά στόχο $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, οπότε το όριο της ακολουθίας πιθανοτήτων να είναι 1.

C. Heterogeneity: Χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό του $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$, ώστε να είναι ίσο με J και στον υπολογισμό του $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \frac{1}{n} Var(X_k)$

Ø Συμπέρασμα: Οι υποθέσεις του Bernoulli WLLN θα μπορούσαν να γίνουν λιγότερο δεσμευτικές προκειμένου να μπορεί να αποδειχτεί η σύγκλιση κατά πιθανότητα.

3.1.2. Poisson's WLLN (1837)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k είναι Bernoulli distributed, δηλαδή:

$$f(x_k; J_k) = J_k^{x_k}(1 - J_k)^{1-x_k}, x_k = 0,1, k = 1,2, \mathrm{L}, 0 < J < 1$$

(Το ίδιο δεσμευτική με Bernoulli's WLLN)

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \mathrm{L}, x_n; j) = f(x_1; J_1) f(x_2; J_2) \mathrm{L}\ f(x_n; J_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; J_k)$$

(Το ίδιο δεσμευτική με Bernoulli's WLLN)

C. Heterogeneity: Οι παράμετροι των marginal distributions μπορούν να είναι διαφορετικές, δηλαδή $J_i \neq J_j, i \neq j$

(Λιγότερο δεσμευτική από Bernoulli's WLLN)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$ και

συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k$

Ζήτημα: Η λιγότερο δεσμευτική υπόθεση διαφορετικών παραμέτρων στα marginal distributions έχει κάνει ελαχιστοποιήσει κάθε μορφή ομογένειας για τη στοχαστική διαδικασία? Η απάντηση είναι όχι. Για την ακρίβεια, εδώ έχει γίνει μία *Έμμεση Υπόθεση Ασυμπτωτικής Ομογένειας.*

Η υπόθεση ότι οι pdf των τ.μ. X_k έχουν όλες τον ίδιο τύπο μίας Bernoulli Κατανομής, επιβάλλει κάποιες συνέπειες για το μέσο και τη διακύμανση των τ.μ.:

a. $0 < J_k < 1, \forall k$ (από τον ορισμό της Bernoulli Distribution) (**Φραγμένος μέσος)**

b. $J_k(1 - J_k) \le \frac{1}{4}, \forall k$ (**Φραγμένη διακύμανση**). Πραγματικά η $J_k(1 - J_k)$ έχει max στο $\frac{d(J_k(1 - J_k))}{dJ_k} = 0 \Rightarrow 1 - J_k + J_k(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 2J_k = 0 \Rightarrow J_k = \frac{1}{2}$, το οποίο είναι: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Άρα $J_k(1 - J_k) \le \frac{1}{4}, \forall k$

Επομένως οι ακολουθίες των μέσων και των διακυμάνσεων των τ.μ. X_k, είναι 2 ακολουθίες με θετικούς και φραγμένους όρους (από το ίδιο άνω φράγμα). Άρα για τις ακολουθίες των partial sums τους:

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k$ και $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)$ προκύπτει ότι θα είναι και αυτές ακολουθίες θετικών όρων και φραγμένες, επομένως συγκλίνουν, δηλαδή τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right) = J < 1$ και $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)\right) = c \le \frac{1}{4}$.

Όμως $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$ και $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k) = nVar\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

Από τα παραπάνω προκύπτει πως ασυμπτωτικά, όταν δηλαδή $n \to \infty$, οι τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ έχουν ίδιο μέσο και ίδια διακύμανση, τα οποία είναι φραγμένα από το 1 και το 0 αντίστοιχα. Άρα υπάρχει έμμεση υποθεση Ασυμπτωτικής Ομογένειας.

Απόδειξη:[3] Χρησιμοποιείται και πάλι η ανισότητα Chebyshev, η οποία εδώ γίνεται:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right| \geq e\right) \leq \frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{e^2}, \forall e > 0$$

Όμως $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$ υπάρχει και από τα παραπάνω είναι $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k < 1$

Επίσης $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$, που λόγω Ανεξαρτησίας γίνεται: $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)$. Όμως $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)\right) \leq \frac{1}{4}$, άρα και $\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)\right)\right) < \infty$, άρα μπορεί να εφαρμοστεί η ανισότητα Chebyshev, η οποία γίνεται: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right| \geq e\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)}{n^2 e^2}$. Άρα

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right| < e\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right| \geq e\right) \geq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)}{n^2 e^2}.$$

Όταν $n \to \infty$, $\frac{\sum_{k=1}^{n} J_k(1 - J_k)}{n^2 e^2}$ τείνει στο 0, επομένως $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k\right| < e\right) = 1$

Χρήση των Υποθέσεων:

A. Distribution: Χρησιμοποιήθηκε μόνο ώστε να εξασφαλιστεί ότι μέσος και διακύμανση του scalled sum θα είναι φραγμένα.

B. Dependence: Χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, ώστε να απαλειφθούν από το άθροισμα οι όροι $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

C. Heterogeneity: Η έμμεση Υπόθεση Ασυμπτωτικής Ομογένειας που τέθηκε, χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του ορίου της $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, το οποίο βρέθηκε να είναι 0, αλλά και για την ύπαρξη των $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$ και $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

3.1.3. Chebyshev's WLLN (1867)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένη διακύμανση και φραγμένη από κοινό άνω φράγμα, δηλαδή $Var(X_k) < c < \infty, \forall k$

(Η υπόθεση Bernoulli Distribution έχει αντικατασταθεί με την πολύ λιγότερο δεσμευτική υπόθεση της ύπαρξης των ροπών α και β τάξης και της φραγμένης διακύμανσης)

B. **Dependence:** Οι τ.μ της ακολουθίας είναι Ανεξάρτητες ανά ζεύγη (Pairwise Independence.

(Πολύ λιγότερο δεσμευτική από Γενική Ανεξαρτησία. Εξασφαλίζει ότι $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$. Στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα αυτό θα προέκυπτε και με την ακόμη λιγότερο δεσμευτική υπόθεση γραμμικής ανεξαρτησίας (non-correlation). Πραγματικά η Pairwise Independence αποκλείει την εξάρτηση μέσω οποιασδήποτε τάξης ροπή της joined distribution $f(x_i, x_j; j)$. Αλλά την εποχή εκείνη ο διαχωρισμός μεταξύ pairwise Independence και γρ. Ανεξαρτησίας δεν ήταν τόσο ξεκάθαρος.)

C. **Heterogeneity:** Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης μπορούν να είναι διαφορετικές για κάθε τ.μ.: $E[X_k]=m_k, k=1,2,L$ και $Var(X_k)=s_k^2$ (Συμμερίστηκε την άποψη του Poisson για διαφορετικά parameter spaces των Marginal Distributions. Επομένως αποκλείει Στασιμότητα α και β τάξης)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$ και

συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$

<u>**Απόδειξη:**</u> Χρησιμοποιείται και πάλι η ανισότητα Chebyshev για την τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Τότε

$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$, υπάρχει εφόσον υπάρχει ο $E[X_k]$ και

$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$, λόγω Pairwise Independence η οποία εξασφαλίζει ότι

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0, i \neq j \Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$=0. Όμως

$Var(X_k) < c \Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}$. Άρα η ανισότητα Chebyshev γίνεται:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right| \geq e\right) \leq \frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{e^2}, \forall e > 0 \Rightarrow P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| \geq e\right) \leq \frac{c}{ne^2}$$

Επομένως, $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| < e\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| \geq e\right) \geq 1 - \frac{c}{ne^2}$ και

όταν $n \to \infty$, $\frac{c}{ne^2} \to 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| < e\right) = 1$

Ζήτημα: Έχοντας άρει την υπόθεση Bernoulli Distribution, προέκυψε και εξασθένηση της Έμμεσης Υπόθεσης Ασυμπτωτικής Ομογένειας? Η απάντηση είναι και πάλι όχι. Η Ασυμπτωτική Ομογένεια υπεισέρχεται και πάλι από την υπόθεση φραγμένης διακύμανσης:

Εφόσον $s_k^2 < c < \infty \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k^2 \leq c < \infty$. Άρα η ακολουθία των $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k^2$, είναι και πάλι μία ακολουθία με θετικούς όρους και κοινό άνω φράγμα το c. Επομένως το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k^2$ υπάρχει και είναι $s^2 \leq c$.

Επιπλέον, $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, άρα οι τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, ασυμπτωτικά είναι στάσιμες β τάξης.

Χρήση των Υποθέσεων:

A. Distribution: Η υπόθεση φραγμένης διακύμανσης χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του $\lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k^2\right) = 0$.

   Η υπόθεση φραγμένου μέσου χρησιμοποιήθηκε για την ύπαρξη του $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$, όμως είναι περιττή από τη στιγμή που πλέον είναι γνωστό πως εφόσον υπάρχει η διακύμανση θα υπάρχει και ο μέσος ως ροπή χαμηλότερης τάξης.

B. Dependence: Εξασφαλίζει ότι $\mathbf{cov}(X_i, X_j) = 0$ και χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.

C. Heterogeneity: Η Ασυμπτωτική Ομογένεια, προέκυψε από την ανάγκη για φραγμένη διακύμανση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Οι υποθέσεις ως προς την κατανομή των τ.μ., μπορούν να αντικατασταθούν από πολύ λιγότερο δεσμευτικές υποθέσεις ως προς την ύπαρξη κάποιων ροπών των Κατανομών των τ.μ. και την ύπαρξη άνω φράγματος για τις ροπές.

Στην πραγματικότητα, υποθέσεις για την ύπαρξη και το boundness των ροπών είναι Έμμεσες Distribution Υποθέσεις, γιατί περιορίζουν την γκάμα των πιθανών Κατανομών της στοχ. Διαδικασίας, εξαιρώντας αυτές που δεν έχουν πεπερασμένες και φραγμένες ροπές.

Στη διαδικασία της Μοντελοποίησης, η χρήση Αμέσων Υποθέσεων ως προς την Κατανομή (Direct Distribution Assumptions), οδηγεί σε πιο ακριβή αποτελέσματα. Ετσι γεννιέται το ερώτημα αν υπάρχει λόγος εξασθένησης των distribution assumptions στα Οριακά

Θεωρήματα. Από τη στιγμή μάλιστα που χρησιμοποιώντας υποθέσεις για την ύπαρξη ροπών, (έμμεσες distribution υποθέσεις), ο Μοντελοποιός αναγκάζεται να χρησιμοποιήσει ανισότητες, όπως αυτή του Chebyshev, προκύπτουν λιγότερο ακριβή αποτελέσματα από την περίπτωση direct distribution assumptions.

Η απάντηση είναι πως η εξασθένηση των υποθέσεων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, εφόσον η βασική χρησιμότητα των Οριακών Θεωρημάτων είναι η εξαγωγή προσεγγιστικών αποτελεσμάτων στις περιπτώσεις που είναι δύσκολο να προκύψουν ακριβή αποτελέσματα.

3.1.4. Markov's WLLN

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο και πεπερασμένη διακύμανση , η οποία είναι φραγμένη από κοινό άνω φράγμα, δηλαδή $Var(X_k) < c < \infty, \forall k$

(Δεν διαφοροποιήθηκε από Chebyshev)

B. **Dependence:** Άμεση Υπόθεση: $\frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Έμμεση Υπόθεση: Οι τ.μ της ακολουθίας Asymptotically non-correlated, δηλαδή: $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(Ο Markov,ο οποίος υπήρξε μαθητής του Chebyshev, ήταν ο πρώτος που εκμεταλλεύτηκε πλήρως την ανισότητα Chebyshev για την απόδειξη του WLLN, ώστε να εξασθενίσει όσο το δυνατόν περισσότερο τις συνθήκες που απαιτούνται για να ισχύει η ανισότητα. Ετσι παρατήρησε πως ακόμη και η υπόθεση non/correlated τ.μ. ήταν δεσμευτική και πως αρκεί η λιγότερη δεσμευτική ασυμπτωτική γρ. Ανεξαρτησία ώστε από την Ανισότητα να προκύψει το WLLN)

C. **Heterogeneity:** Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης μπορούν να είναι διαφορετικές για κάθε τ.μ.: $E[X_k] = n_k, k = 1,2,\ldots$ και $Var(X_k) = s_k^2$ (Δεν διαφοροποιήθηκε από Chebyshev)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] \right| < e \right) = 1, \forall e > 0$ και

συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$

<u>**Απόδειξη**</u>[3]**<u>:</u>** Χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Chebyshev για την τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Η ανισότητα Chebyshev μπορεί να εφαρμοστεί γιατί οι Distribution συνθήκες εξασφαλίζουν την ύπαρξη του μέσου, $E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$, ο οποίος υπάρχει εφόσον υπάρχει ο $E[X_k]$. Για τη διακύμανση, $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j)$. Εφόσον $Var(X_k) = s_k^2 < c < \infty$, η $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$, είναι μία ακολουθία φραγμένων θετικών όρων, επομένως οι όροι της είναι πεπερασμένοι και συγκλίνουν με όριο το

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \le \lim\limits_{n\leftarrow\infty} \frac{n s^2}{n^2} = \lim\limits_{n\leftarrow\infty} \frac{s^2}{n} = 0$. Για να είναι πεπερασμένη η διακύμανση αρκεί επομένως να είναι πεπερασμένο το $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j)$ και για να ισχύει το WLLN θα πρέπει και αυτό να συγκλίνει στο 0. Έχοντας υποθέσει ασυμπτωτική γρ. Ανεξαρτησία, προκύπτει ότι: $\mathbf{cov}(X_i, X_{i+t}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Ετσι $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=i+1}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_{i+t})$. Καθώς $n \to \infty \Rightarrow t \to \infty$, έτσι στο άθροισμα θα υπάρχουν άπειροι όροι για τους οποίους $\mathbf{cov}(X_i, X_{i+t}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Ετσι τελικά μένει στο άθροισμα μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων, οπότε αυτό θα είναι φραγμένο από κάποια σταθερά, έστω c. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\mathrm{cov}(X_i, X_j)\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^2}=0$

Επομένως η ανισότητα Chebyshev μπορεί να εφαρμοστεί και εφόσον

$\frac{1}{n^2}Var\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, προκύπτει:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]\right|\ge e\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{e^2}=0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E[X_k]\right|<e\right)=1-\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E[X_k]\right|\ge e\right)=1$$

3.1.5. Bernstein’s WLLN (1918)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο και πεπερασμένη διακύμανση , φραγμένα από κοινό άνω φράγμα, δηλαδή $E[X_k]<n<\infty, \forall k$ και $Var(X_k)<c<\infty, \forall k$

   (Σε σύγκριση με τα προηγούμενα θεωρήματα ισχυροποίησε την υπόθεση, απαιτώντας οι μέσοι να είναι φραγμένοι από κοινό άνω φράγμα)

B. **Dependence:** Asymptotic non-correlation, δηλαδή : $\mathrm{cov}(X_i, X_{i+t})\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

   Επιπλέον οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης να είναι φραγμένοι:

   $Corr(X_i, X_j)\le r(|i-j|)\le 1,$ όπου $i, j=1,2,\ldots, r(0)=1, \lim\limits_{k\to\infty}r(k)=0$

   (Η υπόθεση εδώ είναι πιο δεσμευτική από την υπόθεση του Θεωρήματος του Markov, γιατί πέραν της ασυμπτωτικής γρ. Ανεξαρτησίας, υποδεικνύει ότι και για τ.μ. που δεν απέχουν άπειρη απόσταση μεταξύ τους, το correlation θα είναι μία ακολουθία που κάθε όρος της θα είναι φραγμένος από μία φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης των τυχαίων μεταβλητών)

C. **Heterogeneity:** Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης μπορούν να είναι διαφορετικές για κάθε τ.μ.: $\boldsymbol{E[X_k]} = n_k, \boldsymbol{k} = 1,2,\mathbf{L}$ και $\boldsymbol{Var(X_k)} = s_k^2$

(Δεν διαφοροποιήθηκε από προηγούμενους)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\left| \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} - \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{E[X_k]} \right| < e \right) = 1, \forall e > 0$ και

συμβολίζουμε $\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} \xrightarrow{p} \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{E[X_k]}$

<u>Απόδειξη:</u> Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτή του Θεωρήματος του Markov. Οι υποθέσεις εδώ είναι περισσότερο δεσμευτικές επομένως μπορεί να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία εφαρμογής της ανισότητας Chebyshev.

Πραγματικά,

$$\boldsymbol{Var}\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} \right) = \frac{1}{\boldsymbol{n}^2} \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} r_{i,j} s_i s_j \le \frac{1}{\boldsymbol{n}^2} \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \left| r\left(|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| \right) \right| \sqrt{\boldsymbol{c}}\sqrt{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{n}^2} \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \left| r\left(|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| \right) \right|.$$

Όμως $\left| r\left(|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| \right) \right|$ είναι φραγμένη ακολουθία θετικών όρων, επομένως συγκλίνει και το όριό της είναι το 0 όταν $|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}| \to \infty$. Άρα στο άθροισμα υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων όταν $\boldsymbol{n} \to \infty$, ώστε τελικά $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{Var}\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k} \right) = 0$

<u>Χρήση των υποθέσεων</u>

Το Θεώρημα του Bernstein μπορεί να εφαρμοστεί σε Στάσιμες β τάξης στοχαστικές διαδικασίες, επιβάλλοντας όσο το δυνατόν λιγότερο δεσμευτικές υποθέσεις ως προς Κατανομή και Εξάρτηση.

Εξ'ορισμού μία στάσιμη διαδικασία β τάξης έχει:

a) $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X_i}] = m < \infty, \forall \boldsymbol{i}$

b) $\mathbf{cov}(\boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{X_{i+t}}) = r(|t|), \boldsymbol{i} = 1,2,\mathbf{L}, t = 0,1,2,\mathbf{L}$

Μία τέτοια διαδικασία πληρεί τις συνθήκες του Θεωρήματος, αρκεί να προστεθεί η συνθήκη Ασυμπτωτικής Γρ. Ανεξαρτησίας:

Μέσος και διακύμανση όχι μόνο είναι φραγμένα αλλά και τα ίδια για κάθε τ.μ. της διαδικασίας. Επιπλέον η συνδιακύμανση είναι η ίδια συνάρτηση μόνο της απόστασης των τ.μ.. και όχι μόνο φραγμένη από μία συνάρτηση της απόστασης των τ.μ.

Αντίθετα το θεώρημα του Markov δεν μπορεί να εφαρμοστεί ως έχει για μία Στάσιμη β τάξης διαδικασία, γιατί ακόμη κι αν οι τ.μ. έχουν κοινό μέσο και διακύμανση, δεν διασφαλίζεται, από τις υποθέσεις, ότι η συνδιακύμανση θα είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης των τ.μ.

3.1.6. Kolmogorov’s WLLN (1927, 1928)

Ο Kolmogorov έδωσε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ισχύ του WLLN. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρηθεί πως τα προηγούμενα θεωρήματα παρέχουν ικανές συνθήκες για την ισχύ του WLLN, όχι όμως και αναγκαίες. Ετσι μπορεί π.χ. μία στοχαστική διαδικασία να μην έχει πεπερασμένη διακύμανση και παρόλα αυτά το WLLN να ισχύει.

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο και πεπερασμένη διακύμανση

Υποθέσεις για την στοχαστική διαδικασία: $\left\{ S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k - E[X_k], n = 1,2,\ldots \right\}$:

$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2}\right] = 0$, δηλαδή ο μέσος της $\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2}$ υπάρχει και συγκλίνει στο 0

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$ και

συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$ **αν ΚΑΙ μόνο αν**

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2}\right] = 0$$

<u>**Απόδειξη[4]:**</u>

a) <u>Ικανό της συνθήκης:</u> Το ζητούμενο είναι να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k])\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$$

Έστω $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ και $\overline{m_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$. Τότε το ζητούμενο είναι:

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - \overline{m_n}\right| < e\right) = 1, \forall e > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - \overline{m_n}\right| \ge e\right) = 0, \forall e > 0$. Αλλά

$P\left(\left|\overline{X_n} - \overline{m_n}\right| \ge e\right) = P\left(\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2 \ge e^2\right)$. Επίσης, για οποιεσδήποτε θετικές

ποσότητες $a \ge b \Rightarrow \frac{a}{a+1} \ge \frac{b}{b+1}$, γιατί $\frac{a}{a+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{a}}$ και $\frac{b}{b+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{b}}$ και

όταν $a \ge b \Rightarrow 1 + \frac{1}{a} \le 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{a}} \ge \frac{1}{1+\frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{a}{a+1} \ge \frac{b}{b+1}$.

Άρα, $P\left(\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2 \ge e^2\right) \le P\left(\frac{\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2}{1 + \left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2} \ge \frac{e^2}{1+e^2}\right)$, γιατί

$\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2 \ge e^2 \Rightarrow \frac{\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2}{1 + \left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2} \ge \frac{e^2}{1+e^2}$, όχι όμως πάντα και αντίστροφα.

Ετσι η πιθανότητα της τ.μ. στο αριστερό σκέλος της συνεπαγωγής θα είναι μικρότερη από αυτή του δεξιού σκέλους, γιατί το δεύτερο σκέλος ικανοποιείται από περισσότερες πραγματοποιήσεις από ότι το πρώτο.

Για την $P\left(\frac{\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2}{1 + \left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)^2} \ge \frac{e^2}{1+e^2}\right)$ μπορεί να εφαρμοστεί η ανισότητα Markov:

<u>*Ανισότητα Markov:*</u> Αν X είναι τ.μ. και g(.) μία non-negative valued συνάρτηση της X, τότε $\forall a > 0, P(g(X) \ge a) \le \frac{E[g(X)]}{a}$

Στην προκειμένη περίπτωση, $g(X) = \frac{\left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)}{1 + \left(\overline{X_n} - \overline{m_n}\right)}$, η οποία είναι non-negative valued συνάρτηση της X_n. Άρα από ανισότητα Markov:

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\geq\frac{e^2}{1+e^2}\right)\leq\boldsymbol{E}\left[\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\right]\frac{\left(1+e^2\right)}{e^2}$$. Ετσι όταν

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\right]=0$$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\left(\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\geq\frac{e^2}{1+e^2}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\right]=0$$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\left(\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2\geq e^2\right)\leq\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\left(\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\geq\frac{e^2}{1+e^2}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\left(\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)\geq e\right)=0$$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}\left(\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)<e\right)=1$. Η συνθήκη $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}\right]=0$, είναι η

συνθήκη $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\frac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}\right]=0$, γιατί $\boldsymbol{S}_n:=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]$ και

$$\frac{\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}{1+\left(\overline{\boldsymbol{X}_n}-\overline{m_n}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k-\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k-\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]\right)^2}=\frac{\frac{1}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{S}_n^2}{1+\frac{1}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{S}_n^2}=\frac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}$$

b) <u>Αναγκαίο της Συνθήκης:</u> Για την απόδειξη στην περίπτωση Ανεξάρτητων τ.μ. βλέπε[5]

<u>Χρήση των υποθέσεων για τη στοχ. Διαδικασία:</u>

a) Η συνθήκη πεπερασμένης διακύμανσης, χρησιμοποιείται για την ύπαρξη του μέσου της $\frac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}$

b) Η συνθήκη $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\frac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}\right]=0$, εισάγει έμμεσα υποθέσεις ως προς την εξάρτηση της στοχ. Διαδικασίας. Ενδεικτικά μπορεί να παρατηρηθεί πως στην περίπτωση που για την στοχαστική διαδικασία $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$, υποθέσουμε ασυμπτωτική ανεξαρτησία, τότε: $\boldsymbol{E}\left[\dfrac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}\right]=\boldsymbol{E}\left[\dfrac{1}{\dfrac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{S}_n^2}+1}\right]=\dfrac{1}{\dfrac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{S}_n^2\right]}+1}$. Ετσι για να προκύψει το

συγκεκριμένο όριο, θα πρέπει η $\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{S}_n^2\right]$ να είναι $\mathrm{O}(\boldsymbol{n}^k),k<2$. Με την υπόθεση

ασυμπτωτικής Ανεξαρτησίας πραγματικά είναι:

$$\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{S}_n^2\right]=\boldsymbol{E}\left[\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k])^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_i])(\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_j])\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k])^2\right]+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_i])(\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_j])\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{X}_k)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_j)=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$$,εφόσον $\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{X}_k)<\infty,\forall\boldsymbol{k}$

Η αξία του θεωρήματος του Kolmogorov, έγκειται στο ότι δεν προσδιορίζεται μία συγκεκριμένη υπόθεση ως προς την Εξάρτηση της $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Οποιαδήποτε υπόθεση είναι ικανή ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left[\dfrac{\boldsymbol{S}_n^2}{\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{S}_n^2}\right]=0$, είναι ικανή και για το WLLN

3.1.7. Khintchine’s WLLN (1938)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. $\boldsymbol{X}_k$ έχουν πεπερασμένο μέσο, δηλαδή

$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]=m<\infty,\forall\boldsymbol{k}$

(Σε σύγκριση με τα προηγούμενα θεωρήματα είναι η λιγότερο δεσμευτική distribution υπόθεση: Δεν απαιτείται η ύπαρξη ροπών υψηλότερης τάξης)

B. **Dependence:** Γενική Ανεξαρτησία, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \mathrm{L}, x_n; j) = f_1(x_1; J_1) f_2(x_2; J_2) \mathrm{L}\ f_n(x_n; J_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k; J_k)$$

(Η ενίσχυση των υποθέσεων ως προς την εξάρτηση, αποτελεί επακόλουθο των λιγότερο δεσμευτικών Distribution Υποθέσεων)

C. **Heterogeneity:** Identically distributed, δηλαδή :

$$f_k(x_k; J_k) = f(x; J), \forall k = 1, 2, \mathrm{L}$$

(Και πάλι απαιτείται ενίσχυση των υποθέσεων λόγω λιγότερο δεσμευτικών distribution assumptions)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - n \right| < e \right) = 1, \forall e > 0$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} m$$

Με το θεώρημα του Khintchine γίνεται εμφανές το trade –off μεταξύ των 3 κατηγοριών υποθέσεων: Όσο λιγότερο δεσμευτικές οι υποθέσεις σε μία κατηγορία τόσο περισσότερο δεσμευτικές πρέπει να γίνουν σε κάποια άλλη. Το Θεώρημα του Khintchine επιτρέπει την εφαρμογή του WLLN και για διαδικασίες που δεν έχουν πεπερασμένη διακύμανση.

Απόδειξη[4]**:** Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει χρησιμοποιώντας την Moment Generating Function της ακολουθίας $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, υποθέτοντας πως υπάρχει. Για την γενική περίπτωση που η MGF δεν υπάρχει, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Χαρακτηριστική Συνάρτηση της ακολουθίας. Απόδειξη Οριακού Θεωρήματος με τη χρήση της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης, παρουσιάζεται για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Για το Khintchine's WLLN προτιμήθηκε η MGF, προκειμένου να παρουσιαστούν και οι δύο τεχνικές.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ο ορισμός της MGF, καθώς και κάποιες ιδιότητές της που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Moment Generating Function- Ορισμός: Αν X μία τ.μ., η Moment Generating Function της ορίζεται ως ο μέσος της $e^{tx}, t \in (-h,h), h>0$ και συμβολίζεται με $m_x(t)$. Δηλαδή,

$m_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_x(x;J)dx,$ όπου $t \in (-h,h), h>0$, δεδομένου ότι το $E[e^{tx}]$ υπάρχει για όλα τα t μέσα σε κάποιο διάστημα $(-h,h), h>0$. Η MGF χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των raw moments της X, εφαρμόζοντας παραγώγιση αντί ολοκλήρωσης.

Πραγματικά, η e^{tx} είναι η συνεπτυγμένη σειρά Maclaurin, η οποία έχει το εξής ανάπτυγμα:

$e^{tx} = 1 + Xt + \frac{(Xt)^2}{2!} + \frac{(Xt)^3}{3!} + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(Xt)^t}{t!}$. Ετσι αν η $m_x(t)$ υπάρχει για $t \in (-h,h), h>0$, τότε το I-moment της X προκύπτει αν υπολογιστεί η i-οστή παράγωγος της $m_x(t)$ ως προς t, και τεθεί το t=0

Ιδιότητες MGF:

1. Η MGF όταν υπάρχει, είναι μοναδική. Δηλαδή δύο τ.μ. με την ίδια MGF έχουν την ίδια κατανομή και αντίστροφα.
2. Αν X είναι τ.μ. και F(x) η cdf της ($F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$, όπου f(x) η pdf της, τότε η MGF της αν υπάρχει είναι $m_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x), t \in R$
3. Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. και οι αντίστοιχες MGF υπάρχουν, τότε $m_{x+y}(t) = m_x(t) m_y(t)$

Τώρα μπορεί να ακολουθήσει η απόδειξη του Θεωρήματος:

Για την $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, έστω ότι υπάρχει η MGF και είναι

$m_{\overline{X_n}}(t) = E\left[e^{t\overline{X_n}}\right] = E\left[\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right]$. Αν αποδειχτεί ότι $m_{\overline{X_n}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{tm}$, όπου e^{tm} είναι η MGF της εκφυλισμένης τυχαίας μεταβλητής μ, τότε λόγω της μοναδικότητας των MGF, η $\overline{X_n}$ θα έχει οριακά την ίδια κατανομή με την εκφυλισμένη τ.μ. μ, δηλαδή

$\overline{X_n} \xrightarrow{D} m$. Τότε όμως:

$$\overline{X_n} \xrightarrow{D} m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - m\right| < e\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(-e < \left(\overline{X_n} - m\right) < e\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(m - e < \overline{X_n} < m + e\right)$$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - F_{\overline{X_n}}(m-e)\right) + F_{\overline{X_n}}(m+e) = 1 - F_m(m-e) + F_m(m+e) = 1 - 0 + 0 = 1$. Άρα στην περίπτωση που $\overline{X_n} \xrightarrow{D} m$, όπου μ εκφυλισμένη τ.μ., τότε και $\overline{X_n} \xrightarrow{p} m$. Άρα για να προκύψει η σύγκλιση κατά πιθανότητα, αρκεί να συγκλίνει η MGF στην e^{tm} .

Είναι: $m_{\overline{X_n}}(t) = E\left[\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right] = E\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_k\right)\right] \underset{Independence}{=} \prod_{k=1}^{n} E\left[\exp\left(\frac{t}{n}X_k\right)\right]$.

Όμως $E\left[\exp\left(\frac{t}{n}X_k\right)\right] = m_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right)$. Άρα $m_{\overline{X_n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} m_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right)$. Λόγω υπόθεσης Identical Distribution θα είναι: $m_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = m_X\left(\frac{t}{n}\right), \forall k = 1,2,\ldots$.

Επομένως $m_{\overline{X_n}}(t) = \left(m_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. Για να προσδιοριστεί το όριο της $m_{\overline{X_n}}(t)$ θα χρησιμοποιηθεί το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} a_n}$

Αρκεί να εκφραστεί η $m_X\left(\frac{t}{n}\right)$ στην μορφή $\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)$.

Είναι: $m_X\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{m_X\left(\frac{t}{n}\right)}{n} n + 1 - 1 = 1 + \frac{n m_X\left(\frac{t}{n}\right) - n}{n}$.

Άρα, $\lim_{n\to\infty} m_{\overline{X_n}}\left(\frac{t}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n m_X\left(\frac{t}{n}\right) - n}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\left(m_X\left(\frac{t}{n}\right) - 1\right)\right)$. Το όριο του εκθέτη είναι της απροσδιόριστης μορφής $\infty \times 0$, επομένως για τον υπολογισμό του εφαρμόζουμε τον l'Hospital's rule:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{m_x\left(\frac{t}{n}\right)-1}{n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)-1\right)}{\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right)\frac{\frac{d}{dn}\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(-n^{-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right)\frac{\left(-tn^{-2}\right)}{\left(-n^{-2}\right)}=\lim_{n\to\infty} t\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

Όμως $\frac{d}{d(t_*)}(m_x(t_*))=m+E\left[X^2\right]t_*+\mathrm{L}$, και αν τεθεί $t_*=\frac{t}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, τότε

$\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right)=m$.Άρα $\lim_{n\to\infty} t\frac{d}{d\left(\frac{t}{n}\right)}\left(m_x\left(\frac{t}{n}\right)\right)=tm$ και $\lim_{n\to\infty} m_{\overline{X_n}}(t)=e^{tm}=m_m(t)$.

Άρα $\overline{X_n}\xrightarrow{p} m$

3.2. Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (SLLN)

Διατύπωση: Για μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}:=\{X_1,X_2,\mathrm{L}\}$,

δηλαδή για μία στοχαστική διαδικασία, κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς – υποθέσεις ισχύει:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E[X_k]\right]=0\right)=1$$

και συμβολίζουμε $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-E[X_k]\right)\right)\xrightarrow{a.s.}0$

Όπως αναφέρθηκε και στην πρώτη Ενότητα, σε αυτή την κατηγορίας Οριακών

Θεωρημάτων εξετάζεται η πιθανότητα σύγκλισης της $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ στην

$\overline{m_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$. Πριν την παρουσίαση των Θεωρημάτων της συγκεκριμένης κατηγορίας, δίνεται ο ορισμός της almost sure convergence, που είναι η μορφή σύγκλισης που διέπει το SLLN.

<u>Almost Sure Convergence-Ορισμός:</u> Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει almost surely σε μία τ.μ. X και συμβολίζουμε $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ αν $\forall e > 0$, το σύνολο $C \subset S$ των outcomes που ορίζεται: $C := \{s \in S : |X_n(s) - X(s)| < e, n \geq N(e,s)\}$, έχει $P(s : s \in C) = 1$ ή $P(\overline{C}) = 0$

Η σύγκλιση στο SLLN είναι μία ειδική περίπτωση almost surely convergence, όπου η ακολουθίας τ.μ. συγκλίνει σε μία εκφυλισμένη τ.μ.

<u>Σύγκριση με σύγκλιση κατά πιθανότητα:</u> *Η almost sure convergence είναι ισχυρότερη μορφή σύγκλισης από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα.*

Διαισθητικά, από τον ορισμό της σύγκλισης κατά πιθανότητα προκύπτει ότι καθώς $n \to \infty$, τα events $|\overline{X_n} - \overline{m_n}| \geq e$, έχουν πιθανότητες οι οποίες συγκλίνουν στο 0. Δεν εξασφαλίζεται ότι οι πιθανότητες είναι ίσες με 0. Ετσι μπορεί για κάποιο $n > N$, να ισχύει $P(|\overline{X_n} - \overline{m_n}| \geq e) \neq 0$, αλλά η ακολουθία των πιθανοτήτων να συγκλίνει στο 0.

Η a.s. convergence απαιτεί καθώς $n \to \infty$, τα events $|\overline{X_n} - \overline{m_n}| \geq e$, να έχουν πιθανότητα 0. Αυτός είναι και ο λόγος που την καθιστά ισχυρότερη μορφή σύγκλισης από την σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Επομένως, αν $\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} \overline{m_n} \Rightarrow \overline{X_n} \xrightarrow{p} \overline{m_n}$, όχι όμως και αντίστροφα.

Ακολουθεί η παρουσίαση των Θεωρημάτων ξεκινώντας από αυτά με τις περισσότερο δεσμευτικές υποθέσεις .

3.2.1. Borel's SLLN (1909)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k είναι Bernoulli distributed, δηλαδή:

$$f(x_k;J_k)=J_k^{x_k}(1-J_k)^{1-x_k},\ x_k=0,1,\ k=1,2,\mathbf{L},0<J<1$$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1,x_2,\mathbf{L},x_n;j)=f(x_1;J_1)f(x_2;J_2)\mathbf{L}\ f(x_n;J_n)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;J_k)$$

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. είναι Identically Distributed. Ήδη από τη συνθήκη (A) έχουν κοινή (Bernoulli) κατανομή αλλά εδώ απαιτείται επιπλέον να έχουν και τις ίδιες παραμέτρους $J_k=J,\forall k=1,2,\mathbf{L}$

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=J\right)=1$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{a.s.}J$$

Οι υποθέσεις του Θεωρήματος είναι ακριβώς ίδιες με αυτές του Bernoulli WLLN. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί εδώ, είναι πως με τις ίδιες υποθέσεις αποδεικνύεται ισχυρότερη μορφή σύγκλισης.

Απόδειξη: Για την απόδειξη των SLLN χρησιμοποιείται ένα Λήμμα από την Real Analysis:

Kronecker's Λήμμα: Αν $\{a_n\}$, μία ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία το άπειρο άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}<\infty$, είναι πεπερασμένο, τότε το όριο της $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ υπάρχει και είναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$$

Εφαρμογή στην απόδειξη a.s. convergence: Το ζητούμενο είναι να αποδειχτεί ότι

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-J)=0$, με πιθανότητα 1. Έστω $a_n=X_k-J$. Τότε το Λήμμα του Kronecker μπορεί να εφαρμοστεί αν επεκταθεί η ισχύ του σε ακολουθία τ.μ.. Ουσιαστικά η σύγκλιση της ακολουθίας των partial sums πρέπει να επεκταθεί σε ακολουθία partial sums τ.μ. και almost sure convergence.

Σύμφωνα με το Λήμμα, για να αποδειχτεί ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - J\right) = 0$ με πιθανότητα 1, αρκεί να αποδειχτεί ότι $\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(X_k - J\right)}{k} < \infty$, με πιθανότητα 1. Δηλαδή, $P\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - J)}{k}\right| \geq e\right) = 0, \forall e > 0$. Για τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας θα χρησιμοποιείται η ανισότητα Kolmogorov:

<u>*Ανισότητα Kolmogorov:*</u> Αν $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανεξάρτητη στ. Διαδικασία με $E[Y_n] = 0$ και $Var(Y_n) < \infty$, τότε $P\left(\max_{m\leq n}\left|\sum_{k=1}^{m} Y_k\right| \geq e\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^2}{e^2}, \forall e > 0$

Αν $Y_n = \frac{X_n - J}{n}$, τότε $E[Y_n] = 0$ και

$Var(Y_n) = E\left[(Y_n)^2\right] = E\left[\left(\frac{X_n - J}{n}\right)^2\right] = \frac{E\left[(X_n - J)^2\right]}{n^2} \underset{Bernoulli}{=} \frac{J(1-J)}{n^2} < \infty$. Άρα για την $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να εφαρμοστεί η ανισότητα Kolmogorov, η οποία γίνεται:

$P\left(\max_{m\leq n}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{(X_k - J)}{k}\right| \geq e\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{J(1-J)}{n^2 e^2} = \frac{J(1-J)}{e^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}, \forall e > 0$. Στην περίπτωση που $n \to \infty$, από την ανισότητα προκύπτει ότι η πιθανότητα των events $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - J)}{k}\right| \geq e$, (όπου το άθροισμα έχει γίνει πλέον άθροισμα άπειρων όρων) είναι φραγμένη από την ποσότητα $\frac{J(1-J)}{e^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}$, η οποία όταν $n \to \infty$, συγκλίνει στο 0. Πραγματικά, $\frac{J(1-J)}{e^2} < \infty$ και $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Άρα $P\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - J)}{k}\right| \geq e\right) = 0, \forall e > 0$, που σημαίνει πως ισχύει η συνθήκη για το Λήμμα του Kronecker και επομένως $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - J\right) = 0\right) = 1$

<u>Χρήση των Υποθέσεων:</u>

a) Distribution: Η υπόθεση Bernoulli κατανομής χρειάστηκε προκειμένου να διασφαλίσει ότι $E[X_n]<\infty$ και $Var(X_n)<\infty$. Είναι αρκετά δεσμευτική υπόθεση και θα μπορούσε να αντικατασταθεί με την υπόθεση ύπαρξης των συγκεκριμένων ροπών.

b) Dependence: Χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή της Ανισότητας Kolmogorov.

c) Heterogeneity: Η υπόθεση Identical Distribution χρησιμοποιήθηκε για τη θεώρηση κοινού μέσου J και κοινής διακύμανσης $J(1-J)$, στην ανισότητα Kolmogorov.

3.2.2. Kolmogorov's SLLN (1930)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο και διακύμανση,

$E[X_n]<\infty$ και $Var(X_n)<\infty$ και επιπλέον: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Var(X_k)}{k^2}<\infty$

(Πολύ λιγότερο δεσμευτική από την υπόθεση Bernoulli Distribution)

B. **Dependence:** Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1,x_2,\mathrm{L},x_n;j)=f_1(x_1;J_1)f_2(x_2;J_2)\,\mathrm{L}\;f_n(x_n;J_n)=\prod_{k=1}^{n}f_k(x_k;J_k)$$

(Διατήρηση του Αυστηρού Περιορισμού ως προς την Εξάρτηση)

C. **Heterogeneity:** Οι τ.μ. είναι μπορούν να έχουν διαφορετικό μέσο και διακύμανση, δηλαδή $E[X_k]=m_k$ και $Var(X_k)=s_k^2$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-E[X_k]\right)\right]=0\right)=1$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-E[X_k]\right)\xrightarrow{a.s.}0$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Θα χρησιμοποιηθεί και πάλι το Λήμμα του Kronecker: (Αν $\{a_n\}$, ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}<\infty$, τότε $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$). Θέτοντας

$a_k = X_k - E[X_k]$ και επεκτείνοντας το Λήμμα στην περίπτωση σύγκλισης τ.μ., προκειμένου να ισχύει $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k])\right]=0\right)=1$,αρκεί $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - E[X_k])}{k}<\infty$ με πιθανότητα 1.

Έστω $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $Y_n = \frac{X_n - E[X_n]}{n}$. Τότε $E[Y_n]=0$ και

$Var(Y_n) = E\left[(Y_n - E[Y_n])^2\right] = E\left[Y_n^{\ 2}\right] = E\left[\frac{(X_n - E[X_n])^2}{n^2}\right] = \frac{s_n^{\ 2}}{n^2} < \infty$. Επιπλέον η $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία, γιατί κάθε όρος της προκύπτει ως well-behaved συνάρτηση των αντίστοιχων όρων της $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, η οποία είναι ανεξάρτητη. Άρα μπορεί να εφαρμοστεί η ανισότητα Kolmogorov, η οποία γίνεται:

$P\left(\max_{m\le n}\left|\sum_{k=1}^{m}Y_k\right|\ge e\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{s_{Yk}^{\ 2}}{e^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{s_n^{\ 2}}{n^2e^2}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_n^{\ 2}}{n^1}, \forall e>0$. Άρα όταν $n\to\infty$, η ανισότητα γίνεται: $P\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - E[X_k])}{k}\right|\ge e\right)\le\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_n^{\ 2}}{n^2}$. Όμως λόγω της υπόθεσης $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Var(X_k)}{k^2}<\infty$, θα είναι και $\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_n^{\ 2}}{n^2}<\infty$. Επομένως μπορεί να εφαρμοστεί το Λήμμα του Kronecker, από το οποίο προκύπτει ότι αν

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - E[X_k])}{k}\right|\ge e\right)<\infty, \forall e>0 \Rightarrow P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k])\right]=0\right)=1$$

Σημείωση: Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που αντικατασταθεί η συνθήκη $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Var(X_k)}{k^2}<\infty$ με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Var(X_k)}{b_k^{\ 2}}<\infty$, όπου $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, μία αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών για την οποία $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

<u>Χρήση των Υποθέσεων:</u>

a) Distribution: Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι το φράγμα της πιθανότητας των events $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(X_k - E[X_k])}{k}\right|$ είναι πεπερασμένο, κατά την εφαρμογή της ανισότητας Kolmogorov, το οποίο είναι απαραίτητο προκειμένου να εφαρμοστεί το Λήμμα του Kronecker που αποδεικνύει την almost sure convergence.

b) Dependence: Απαιτείται για την εφαρμογή της ανισότητας Kolmogorov.

<u>Σύγκριση Kolmogorov's SLLN με Chebyshev's WLLN</u>

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα των δύο θεωρημάτων για να είναι εφικτή η σύγκριση:

Κατηγορίες Υποθέσεων	**Chebyshev's WLLN**	**Kolmogorov's SLLN**
Distribution	$E[X_n] < \infty$ και $Var(X_n) < c < \infty$	$E[X_n] < \infty$ και $Var(X_n) < \infty$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty$
Dependence	Pairwise Independence	Γενική Ανεξαρτησία
Herogeneity	$E[X_k] = m_k$ και $Var(X_k) = s_k^2$	$E[X_k] = m_k$ και $Var(X_k) = s_k^2$
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ	$\overline{X_n} \xrightarrow{p} \overline{m_n}$	$\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} \overline{m_n}$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι ισχυροποιώντας τις συνθήκες (Γενική Ανεξαρτησία έναντι Pairwise Independence), το Θεώρημα του Kolmogorov αποδεικνύει ισχυρότερης μορφής σύγκλιση της $\overline{X_n}$ στην εκφυλισμένη τ.μ. $\overline{m_n}$. Η συνθήκη $Var(X_n) < c < \infty$, υπονοεί την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty$, επομένως είναι ισχυρότερη της δεύτερης.

<u>**Ζήτημα:**</u> Η Υπόθεση Γενικής Ανεξαρτησίας είναι αρκετά δεσμευτική. Θα μπορούσε να θεωρηθεί κάποια λιγότερο δεσμευτική υπόθεση ως προς την Εξάρτηση της στ. Διαδικασίας? Και στην περίπτωση αυτή πώς θα έπρεπε να ισχυροποιηθούν οι Υποθέσεις στις άλλες Κατηγορίες?

Στο ερώτημα αυτό έδωσε απάντηση ο Doob (1953) αποδεικνύοντας πως αν η υπόθεση Γεν. Ανεξαρτησίας αντικατασταθεί σε υπόθεση Γρ. Ανεξαρτησίας, τότε για να προκύψει almost sure convergence θα πρέπει να ισχυροποιηθούν οι Distribution υποθέσεις με την:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^2 Var(X_k)}{k^2} < \infty$$

3.2.3. Kolmogorov's SLLN for IID process

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο, $E[X_n] = m < \infty$

(Πολύ λιγότερο δεσμευτική από την υπόθεση ύπαρξης ροπών υψηλότερης τάξης του μέσου)

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; j) = f_1(x_1; J_1) f_2(x_2; J_2) \ldots f_n(x_n; J_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k; J_k)$$

(Διατήρηση του Αυστηρού Περιορισμού ως προς την Εξάρτηση)

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. είναι Identically Distributed, δηλαδή

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; j) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; J)$$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε η συνθήκη $E[X_n] = m < \infty$ αποτελεί Ικανή ΚΑΙ Αναγκαία συνθήκη για την $P\left(\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \right] = 0 \right) = 1$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \xrightarrow{a.s.} 0$$

Διαπιστώνουμε πως η πολύ λιγότερη δεσμευτική Distribution συνθήκη, απαιτεί ισχυροποίηση των υποθέσεων για την Ετερογένεια της Στοχαστικής διαδικασίας. Συγκρίνοντας το Θεώρημα του Kolmogorov με το WLLN του Khintchine για IID διαδικασίες, μπορεί να παρατηρηθεί πως στην περίπτωση του SLLN, η συνθήκη

$E[X_n]=m<\infty$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για almost sure convergence , ενώ στην περίπτωση WLLN είναι μόνο ικανή.

Το παραπάνω θεώρημα όπως και τα επόμενα SLLN παρουσιάζονται χωρίς αποδείξεις.

3.2.4. SLLN για Martingale Difference διαδικασίες

Οι Martingale Difference διαδικασίες είναι διαδικασίες που εξ'ορισμού εισάγουν λιγότερο δεσμευτικές υποθέσεις ως προς την εξάρτηση σε σύγκριση με την Γενική Ανεξαρτησία που διέπει τα προηγούμενα SLLN.

Ο λόγος που γίνεται ειδική αναφορά στις διαδικασίες αυτές είναι γιατί αποτελούν το όχημα για την Μοντελοποίηση των Returns.

Πριν την παρουσίαση των Θεωρημάτων, κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ο ορισμός και μερικές χρήσιμες ιδιότητες των διαδικασιών αυτών.

Martingale Difference Process – Ορισμός: Μία διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, λέγεται Martingale difference όταν:

I. $E[X_n]<\infty, n\in N$, (πεπερασμένος μέσος) και

II. $E[X_n|s(X_{n-1},X_{n-2},\ldots,X_1)]=0, n\in N$, όπου $s(X_{n-1},X_{n-2},\ldots,X_1)$ είναι το σ-field όλου του παρελθόντος της διαδικασίας.

Ιδιότητες:

1. Μία MD διαδικασία είναι στάσιμη $1^{ης}$ τάξης με $E[X_n]=0, n\in N$
2. Μία MD διαδικασία είναι Mean Conditional Independent (MCI) διαδικασία, δηλαδή $E[X_n|s(X_{n-1},X_{n-2},\ldots,X_1)]=E[X_n]$
3. Κάθε MD διαδικασία μπορεί να προκύψει από τη διαφορά διαδοχικών τ.μ. μίας Martingale διαδικασίας, δηλαδή αν $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Martingale process, τότε η $\{X_n:=Y_n-Y_{n-1}, n=1,2,\ldots\}$ είναι MD process.

   Ετσι αν η διαδικασία $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η διαδικασία των φυσικών λογαρίθμων των τιμών σε διακριτές περιόδους, η διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, θα είναι η διαδικασία των returns μιας περιόδου:

$$P_n = e^{X_n} P_{n-1} \Rightarrow e^{X_n} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \Rightarrow X_n = \ln\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \ln P_n - \ln P_{n-1} = Y_n - Y_{n-1}$$

4. Κάθε Martingale process μπορεί να θεωρηθεί ως το process που προκύπτει από partial summation ενός MD process, δηλαδή αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι MD διαδικασία, τότε η $\left\{Y_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, n \in N\right\}$ είναι Martingale process.

   Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει πως η συμπεριφορά των partial sums μίας MD διαδικασίας ενδιαφέρει ιδιαίτερα, γιατί αντιστοιχεί στην συμπεριφορά του αντίστοιχου Martingale process. Ετσι αν η MD διαδικασία αναπαριστά τα returns, τότε η συμπεριφορά των partial sums της, αντιστοιχεί στη συμπεριφορά της διαδικασίας των τιμών.
5. Οποιαδήποτε διαδικασία με πεπερασμένο μέσο, μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μίας Martingale διαδικασίας: Πραγματικά, έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία διαδικασία με μοναδικό περιορισμό $E[X_n] < \infty, n \in N$. Τότε, αν

   $Z_n = X_n - E[X_n | s(X_{n-1}, X_{n-2}, \mathrm{L}, X_1)]$ και $Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, η $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Martingale διαδικασία και η $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι MD.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως αν για τη διαδικασία των returns το μόνο που μπορεί να υποτεθεί είναι ο πεπερασμένος μέσος, τότε η διαδικασία που προκύπτει ως η διαφορά των returns από τον δεσμευμένο μέσο τους, είναι Martingale Difference διαδικασία.

Μετά από αυτή τη σύντομη παρένθεση, γίνεται αντιληπτό πως οι Martingale διαδικασίες παρέχουν αρκετή ευελιξία στον Μοντελοποιό. Αυτός είναι και ο λόγος που εξετάζονται ιδιαίτερα τα Οριακά Θεωρήματα που αφορούν σε MD διαδικασίες.

Από την παράγραφο 3.2 έχει προκύψει το συμπέρασμα πως η almost sure convergence είναι ισχυρότερη μορφή σύγκλισης από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. Επομένως, οι συνθήκες που εξασφαλίζουν την ισχύ του SLLN για Martingales, είναι ικανές και για την ισχύ του WLLN.

Ζήτημα: Μία Martingale Difference διαδικασία εισάγει εξ'ορισμού κάποιους περιορισμούς. Είναι ικανοί αυτοί οι περιορισμοί για την ισχύ του SLLN? Η απάντηση προκύπτει συγκρίνοντας τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Kolmogorov για IID διαδικασίες: Για μία IID διαδικασία αρκεί η ύπαρξη του μέσου για την ισχύ του SLLN. Στην περίπτωση MD διαδικασίας όμως, τόσο η Υπόθεση εξάρτησης , όσο και η Υπόθεση Ετερογένειας είναι λιγότερο δεσμευτικές. Επομένως, οι συνθήκες που εισάγονται από τον ορισμό μίας Martingale Difference διαδικασίας δεν είναι αρκετές.

3.2.4.1. SLLN ΓΙΑ SQUARE-INTEGRABLE MARTINGALE-ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ (L_2 MARTINGALES) –SHIRYAYEV – 1984)

Square-integrable Martingale-διαδικασία - Ορισμός: Είναι μία Martingale διαδικασία οι οποία έχει πεπερασμένη διακύμανση και συμβολίζουμε L_2-Martingale process.

<u>Ιδιότητες:</u>

1. Ως προς τη διακύμανσή, της μία L_2-Martingale διαδικασία, συμπεριφέρεται σαν άθροισμα non.-correlated τ.μ.. Επομένως η αντίστοιχη MD διαδικασία θα συμπεριφέρεται σαν Γρ. Ανεξάρτητη διαδικασία.

   Πραγματικά: Αν $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία L_2-Martingale διαδικασία, που για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε πως έχει μέσο $E[Y_n]=0, n\in N$. Εξ'ορισμού για την $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύουν: $E[Y_n]=0, n\in N$ και

   $E[Y_n | \sigma(Y_{n-1}, Y_{n-2}, \ldots, Y_1)] = E[Y_n]=0, n\in N$.

   $Var(Y_n)=Var\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_i X_j]$. Όμως, για τη διακύμανση της $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει: $E[X_i X_j] = E\{E[X_i X_j | \sigma(X_{i-1}, X_{i-2}, \ldots X_1)]\}$, γιατί $i > j$ στο άθροισμα των διακυμάνσεων. Χρησιμοποιώντας την Taking Out What is known ιδιότητα του δεσμευμένου μέσου προκύπτει:

$E[X_i X_j] = E\{X_j E[X_i | \sigma(X_{i-1}, X_{i-2}, \ldots X_1)]\} = E\{X_j 0\} = 0$. Άρα

$Var(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$.

Ετσι στην περίπτωση αυτή ο SLLN ισχύει ως εξής:

Αν η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η MD διαδικασία που προκύπτει από μία L_2-Martingale διαδικασία, και ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένη διακύμανση,

   $Var(X_n) < \infty$ και επιπλέον: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty$

   (Ισχυροποίηση Distribution υποθέσεων σε σχέση με τον ορισμό της Martingale Differenece διαδικασίας)

B. **Dependence:** Οι τ.μ της ακολουθίας είναι Mean Conditional Independent, δηλαδή: $E[X_n | \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1)] = E[X_n]$=0

   (Καμία επιπλέον υπόθεση πέραν της εξ'ορισμού υπόθεσης για τη διαδικασία)

C. **Heterogeneity:** Στάσιμη α τάξης με $E[X_k] = 0$ και διακύμανση $Var(X_k) = \sigma_k^2$

   (Καμία επιπλέον υπόθεση πέραν της εξ'ορισμού υπόθεσης για τη διαδικασία)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=0\right)=1$ και συμβολίζουμε

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ και για την Martingale διαδικασία:

$P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}Y_n\right]=0\right)=1$ και συμβολίζουμε $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{a.s.}0$

Άρα, ισχυροποιώντας τα Distribution assumptions μόνο, προκύπτει SLLN για Martingales.

Ζήτημα: Εφόσον η σύγκλιση κατά πιθανότητα είναι ασθενέστερη μορφή σύγκλισης, μήπως μπορεί να ισχύει WLLN για Martingale διαδικασίες, χωρίς την υπόθεση ύπαρξης της διακύμανσης?

Πραγματικά, για την περίπτωση όπου δεν κάνουμε κάποια υπόθεση για ροπές υψηλότερης τάξης του μέσου, αρκεί η Υπόθεση ότι η διαδικασία είναι φραγμένη από μία τ.μ. X για να προκύψει το WLLN.

WLLN για L_1-Martingale διαδικασίες

Αν η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η MD διαδικασία που προκύπτει από μία L_1-Martingale διαδικασία, και ισχύει:

$P(|X_n|>x)\le cP(|X|>x), \forall x\ge 0, n\ge 1$

(Η συγκεκριμένη συνθήκη είναι στην πραγματικότητα Υπόθεση Ετερογένειας, γιατί υποθέτει για την $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$, ότι είναι “σχεδόν στάσιμη” εφόσον είναι φραγμένη από την trivially stationary διαδικασία $\{X, X, \ldots, X, \ldots\}$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| < e\right) = 1, \forall e > 0$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} 0$$

3.2.4.2. SLLN ΓΙΑ L_1-MARTINGALE ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Αν η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η MD διαδικασία που προκύπτει από μία L_1-Martingale διαδικασία, και ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο,

$E[X_n] < \infty, n \in N$

(Καμία επιπλέον υπόθεση πέραν της εξ’ορισμού υπόθεσης για τη διαδικασία)

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι Mean Conditional Independent, δηλαδή: $E[X_n | s(X_{n-1}, X_{n-2}, \mathbf{L}, X_1)] = E[X_n] = 0$

(Καμία επιπλέον υπόθεση πέραν της εξ’ορισμού υπόθεσης για τη διαδικασία)

C. Heterogeneity: Αυστηρά Στάσιμη διαδικασία, δηλαδή:

$f(x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n) = f(x_{1+t}, x_{2+t}, \mathbf{L}, x_{n+t}), \forall t$

(Ισχυροποίηση των εξ’ορισμού υποθέσεων ως προς Ετερογένεια)

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0\right) = 1$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0$$

Άρα ισχυροποιώντας μόνο τις υποθέσεις Ετερογένειας μπορεί να προκύψει SLLN για μία Martingale διαδικασία.

3.2.5. SLLN για Mixing Διαδικασίες

Οι διαδικασίες Mixing είναι διαδικασίες που εισάγουν εξ'ορισμού Υποθέσεις Εξάρτησης και συγκεκριμένα την υπόθεση κάποιας μορφής "Ασυμπτωτικής Ανεξαρτησίας".

Διαισθητικά, για μία mixing διαδικασία, το "μέτρο" της εξάρτησης μεταξύ δειγμάτων της διαδικασίας που απέχουν απόσταση τουλάχιστον τ μεταξύ τους, τείνει στο 0, όταν η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων απειρίζεται. Το είδος του "μέτρου" της εξάρτησης, προσδιορίζει και το είδος της mixing διαδικασίας.

Στη συνέχεια γίνεται μία σύντομη περιγραφή των mixing διαδικασιών και μία σύγκριση ως προς το βαθμό εξάρτησης που επιτρέπει κάθε μία από αυτές.

Mixing Process – Ορισμός: Αν $\{\boldsymbol{Y_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}\}$, μία στοχαστική διαδικασία και έστω τα παρακάτω σ-fields :

A$:= \sigma\left(\boldsymbol{Y}_{n+t}, \boldsymbol{Y}_{n+1+t}, \ldots\right)$, το οποίο αντιστοιχεί στο σ-field όλων των μελλοντικών events

B$:= \sigma\left(\ldots, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ldots, \boldsymbol{Y}_n\right)$, το οποίο αντιστοιχεί στο σ-field όλων των events του παρελθόντος έως τη χρονική στιγμή n.

Η διαδικασία $\{\boldsymbol{Y_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}\}$, λέγεται ξ-mixing όταν: $\xi(t) \to \infty$,όταν $t \to \infty$, όπου $\xi(t) = \sup_{n} \xi$ (A,B), όπου ξ είναι ένα μέτρο εξάρτησης, μεταξύ events του field A και events του field B και τ είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των events που εξετάζονται.

Ανάλογα με το είδος του μέτρου ξ προκύπτουν οι παρακάτω διαδικασίες:

1. <u>α-mixing (Strong Mixing):</u> Όταν ξ(A,B)=α(A,B)= $\sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \left|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})\right|$

   $a(t) \leq \frac{1}{4}$

2. <u>φ-mixing (Uniform Mixing):</u> Όταν ξ(A,B)=φ(A,B)= $\sup_{A\in \mathrm{A},\mathrm{B}\in \boldsymbol{B}} \left|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\right|, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) > 0$

   $f(t) \leq 1$

3. <u>ρ-mixing (Asymptotic non-correlation):</u> Όταν

   ξ(A,B)=ρ(A,B)= $\sup_{Y_{n+t},Y_n} \left|\boldsymbol{corr(Y_{n+t},Y_n)}\right|, \boldsymbol{Var}(\boldsymbol{Y_n}) < \infty$

   $r(t) \leq 1$

<u>Βαθμός εξάρτησης σε mixing διαδικασίες:</u>

φ-mixing ⇒ ρ-mixing ⇒ α-mixing

Δηλαδή οι α-mixing διαδικασίες επιβάλλουν τον ασθενέστερο περιορισμό ως προς την Εξάρτηση. Ετσι αν μία διαδικασία είναι ασυμπτωτικά γρ. Ανεξάρτητη, τότε είναι α-mixing, όχι όμως και το αντίστροφο.

3.2.5.1. SLLN ΓΙΑ STRONG MIXING ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Υποθέσεις για τη διαδικασία $\{\boldsymbol{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$:

A. **Distribution:** Όλες οι τ.μ. $\boldsymbol{X_k}$ έχουν πεπερασμένη κάποια ροπή βαθμού οσοδήποτε μεγαλύτερου από 2, $\boldsymbol{E}\left[\left|\boldsymbol{X_n}\right|^{2+d}\right] < \infty, d > 0, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$

   (Ισχυροποίηση Distribution Υποθέσεων έναντι SLLN με ισχυρότερες υποθέσεις εξάρτησης – π.χ. SLLN για Ανεξάρτητες διαδικασίες και για Martingales)

B. **Dependence:** Η διαδικασία είναι α-mixing, δηλαδή: $a(\boldsymbol{k}) \xrightarrow[\boldsymbol{k}\to\infty]{} 0$ και επιπλέον: $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\infty} a(\boldsymbol{k})^{\frac{d}{2+2}} < \infty$

   (Πολύ λιγότερη δεσμευτική συνθήκη ως προς την εξάρτηση. Η υποθεση για το πεπερασμένο του αθροίσματος έχει να κάνει με το ρυθμό mixing της διαδικασίας: Όσο η τάξη των πεπερασμένων ροπών που απαιτούνται μειώνεται πλησιάζοντας τη διακύμανση, τόσο μεγαλύτερος ρυθμός mixing απαιτείται. Πραγματικά όσο το δ τείνει στο 0, το $\frac{d}{2+d} = \frac{1}{\frac{2}{d}+1} \to 0$, και

εφόσον $a(k) \le \frac{1}{4}$, το άπειρο άθροισμα έχει μεγαλύτερους όρους. Άρα θα πρέπει η σύγκλιση του α(k) να γίνεται με μεγαλύτερο ρυθμό.)

C. **Heterogeneity:** Αυστηρά Στάσιμη διαδικασία, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{1+t}, x_{2+t}, \ldots, x_{n+t}), \forall t$$

(Ισχυρότερη συνθήκη από την αντίστοιχη για L_2 Martingale διαδικασίες)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τότε $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right] = 0\right) = 1$ και συμβολίζουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m \xrightarrow{a.s.} 0$$

Και στην περίπτωση αυτή γίνεται εμφανές το trade-off μεταξύ των κατηγοριών υποθέσεων. Έχοντας την λιγότερο δεσμευτική υπόθεση ως προς Ανεξαρτησία, το SLLN απαιτεί αυστηρή στασιμότητα και την ύπαρξη ροπών υψηλότερης τάξης από διακύμανση. Μάλιστα όσο η ύπαρξη ροπών γίνεται λιγότερο δεσμευτική, απαιτείται αύξηση του ρυθμού mixing, του ρυθμού δηλαδή με τον οποίο το συγκεκριμένο μέτρο εξάρτησης συγκλίνει στο 0, όταν η απόσταση των εξεταζόμενων events αυξάνεται.

3.2.6. Ρυθμός almost sure convergence – Law of Iterated Logarithm (LIL)

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν συνθήκες κάτω από τις οποίες μία διαδικασία που μπορεί να αναπαρασταθεί σαν scaled partial sum, συγκλίνει almost surely σε μία εκφυλισμένη τ.μ.

Ένα ερώτημα που γεννιέται είναι αν μπορεί να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα για το ρυθμό σύγκλισης της διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον το scaling των partial sums με n (το πλήθος των όρων στο άθροισμα), έχει ως αποτέλεσμα τη σύγκλιση, αν το scaling γινόταν με κάποια ποσότητα μικρότερης τάξης από n, είναι δυνατόν να παρατηρούνται διακυμάνσεις από το σημείο σύγκλισης?

Η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα επιχειρείται από το Law of Iterated Logarithm. Το αντικείμενο αυτών των Νόμων είναι ο προσδιορισμός των rescaling factors α_n, που κάνουν την διαδικασία $\frac{\boldsymbol{S}_n}{\boldsymbol{a}_n}, \boldsymbol{S}_n = \frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]\right)$, φραγμένη, καθώς και οι υποθέσεις που επιβάλλονται στην $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ για να προκύψει φραγμένη διαδικασία.

Οι υποθέσεις ως προς τη διαδικασία $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ κυμαίνονται μεταξύ δύο άκρων:

1. $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι μία IID διαδικασία και η μόνη distribution υπόθεση να είναι η ύπαρξη του μέσου. Για την περίπτωση αυτή, από το Θεώρημα του Kolmogorov για IID διαδικασίες προκύπτει πως $\boldsymbol{S}_n = \frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_k]\right)\xrightarrow[n\to\infty]{a.s.}0$. Όμως δεν μπορεί να εξαχθεί κανένα συμπέρασμα για τον πόσο ομαλά και με πιο ρυθμό γίνεται η σύγκλιση στο 0.
2. $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι μία IID διαδικασία και όλες οι ροπές της είναι πεπερασμένες και επιπλέον η διαδικασία είναι φραγμένη. Για την περίπτωση αυτή ο Hausdorff απέδειξε (1914) ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι $\boldsymbol{n}^{1/2}$, αποτέλεσμα που συμβολίζεται ως εξής: $\boldsymbol{P}\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k - m}{\boldsymbol{n}^{1/2}e}\right] \le \boldsymbol{M}\right) = 1, \boldsymbol{M} : 0 < \boldsymbol{M} < \infty, \forall e > 0$

   Ο ρυθμός σύγκλισης εδώ μπορεί να ερμηνευτεί σαν ένα το εύρος μίας ζώνης μέσα στην οποία κινούνται οι πραγματοποιήσεις της S_n, όταν το n τείνει στο άπειρο. Πραγματικά, στην περίπτωση αυτή οι πραγματοποιήσεις της S_n βρίσκονται μέσα στη ζώνη $\pm \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}^{1/2}e, \forall e > 0$

Ρυθμός σύγκλισης στο SLLN- Ορισμός: Θα είναι η ακολουθία $y(\boldsymbol{n}) : \boldsymbol{n}^{1/2} < y(\boldsymbol{n}) < \boldsymbol{n}$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο Laws of Iterated Logarithm, των οποίων οι υποθέσεις τοποθετούνται μεταξύ των 2 προαναφερθέντων άκρων.

3.2.6.1. HARDY'S & LITTLEWOOD LIL (1914):

Υποθέσεις για την διαδικασία $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$

A. **DISTRIBUTION:** Bernoulli-type distributed: $\boldsymbol{R}_X := \{-1,1\}$ αντί του $\{0,1\}$ και $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k = 1) = \boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k = -1) = 1 - \boldsymbol{p}$

B. **DEPENDENCE:** Ανεξαρτησία

C. **HETEROGENEITY:** Identically Distributed.

Τότε η διαδικασία $\boldsymbol{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_k$ είναι Simple Random Walk, εξ'ορισμού. Τα χαρακτηριστικά της είναι:

A. **DISTRIBUTION:** Binomial, δηλαδή $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{k}) = \binom{\boldsymbol{n}}{\frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}}{2}} \boldsymbol{p}^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})} (1-\boldsymbol{p})^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}$.

   (Η binomial κατανομή προκύπτει από το άθροισμα Bernoulli distributed τ.μ.)

B. **DEPENDENCE:** Markov Dependence, γιατί $\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{S}_{n-1} + \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{S}_0 = 0$

C. **HETEROGENEITY:**

   i. Spatially Homogeneity: Ομογένεια δηλαδή ως προς μετατοπίσεις στο state space: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{k} | \boldsymbol{S}_0 = 0) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{b} | \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{b})$

   ii. Temporally Homogeneity: Ομογένεια δηλαδή ως προς μετατοπίσεις στο χρόνο: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{k} | \boldsymbol{S}_0 = 0) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_{n+m} = \boldsymbol{k} | \boldsymbol{S}_0 = 0)$

   Και οι δύο αυτές υποθέσεις προκύπτουν από το γεγονός ότι το Bernoulli Distribution επιβάλει διακριτό State Space για την $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$

   iii. Random Walk Heterogeneity: Χαρακτηρίζεται και ως separable Ετερογένεια γιατί:

1. $E[S_n] = n(2p-1)$, επομένως αποτελείται από ένα ομογενές τμήμα: $(2p-1)$ και ένα ετερογενές: n

2. $Var(S_n) = 4np(1-p)$, που και πάλι αποτελείται από το ομογενές: $4p(1-p)$ και το ετερογενές: n

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Ο ρυθμός σύγκλισης της $\frac{S_n - E[X]}{n}$ στο 0 είναι $y(n) = \sqrt{n\ln(n)}$,

δηλαδή: $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E[X]}{\sqrt{n\ln(n)}}\right] \le M\right) = 1$

3.2.6.2. KHINTCHINE'S LIL (1924) – HARTMAN & WINTER (1941)

Υποθέσεις για τη διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

A. **DISTRIBUTION:** Πεπερασμένος μέσος και διακύμανση.

B. **DEPENDENCE:** Ανεξαρτησία

C. **HETEROGENEITY:** Identically Distributed.

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε ο ρυθμός σύγκλισης της $\frac{S_n - E[X]}{n}$ είναι $y(n) = \sqrt{n\ln(\ln(n))}$ και μάλιστα οι Hartman & Winter απέδειξαν πως το upper bound έχει συγκεκριμένη μορφή: $P\left(\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - m}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}}\right] = \sqrt{2s^2}\right) = 1$.

Η έννοια του $\limsup_{n\to\infty}$,είναι το ενδεχόμενο upper bound της ακολουθίας . Κάτω από αυτή την ερμηνεία το θεώρημα προσδιορίζει μία ζώνη εύρους $\pm\sqrt{2s^2 n\ln(\ln(n))}$

Συγκρίνοντας το ρυθμό σύγκλισης των 2 θεωρημάτων, προκύπτει ότι:

$$\underbrace{\sqrt{n}}_{Hausdorff} < \underbrace{\sqrt{2\sigma^2 n \ln(\ln(n))}}_{Khintchine} < \underbrace{\sqrt{n\ln(n)}}_{Hardy\,\&\,Littlewwod}$$

Δηλαδή όσο λιγότερο δεσμευτικές είναι οι υποθέσεις (Simple Random Walk Case), τόσο μεγαλύτερης τάξης rescaling factor απαιτείται προκειμένου να παρατηρηθεί boundness για τη rescaled διαδικασία.

3.3. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (CLT)

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δίνει πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο η ακολουθία $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ συγκλίνει στην εκφυλισμένη τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$. Τα LLN διασφαλίζουν ότι κάτω από κάποιες συνθήκες, ο δειγματικός μέσος μίας στοχαστικής διαδικασίας, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, συγκλίνει κατά πιθανότητα (WLLN) ή almost surely (SLLN) στο μέσο όρο των πραγματικών μέσων όταν $n \to \infty$.

Ένα άλλο σημείο όμως που θα ενδιέφερε, πέρα και από το ρυθμό σύγκλισης που αποτελεί αντικείμενο των Laws of Iterated Logarithm, θα ήταν αν υπάρχει κάποια ένδειξη για την Κατανομή της τ.μ. $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$, όταν $n \to \infty$. Από τη στιγμή που κάτω από τις υποθέσεις των LLN η $Y_n = \frac{(S_n - E[S_n])}{n}$, συγκλίνει είτε κατά πιθανότητα είτε almost surely στην εκφυλισμένη τ.μ. 0, γίνεται αντιληπτό πως με rescaling της $(S_n - E[S_n])$ με κάποια ποσότητα μικρότερης τάξης μεγέθους του n, θα μπορούσε ενδεχομένως να προκύψει σύγκλιση σε κάποια μη εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή με γνωστή Κατανομή.

Το CLT χρησιμοποιεί ως rescaling factor την τυπική απόκλιση της S_n. Ακολουθεί η τυπική διατύπωσή του.

Διατύπωση: Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία στοχαστική διαδικασία και $\left\{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n = 1,2,\ldots\right\}$, η ακολουθία των partial sums της, η οποία έχει: $E[S_n] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k]$, τότε κάτω από κάποιες συνθήκες για την $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R$$

Δηλαδή η τ.μ. $Z_n := \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$ όταν $n \to \infty$, έχει cdf η οποία συγκλίνει στην Τυπική Κανονική. Συμβολίζουμε $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Ακολουθεί η παρουσίαση των Θεωρημάτων.

3.3.1. De Moivre-Laplace (1734)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k είναι Bernoulli distributed, δηλαδή:

$$f(x_k;\theta_k) = \theta_k^{x_k}(1-\theta_k)^{1-x_k}, x_k = 0,1, k = 1,2,\ldots, 0 < \theta < 1$$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi) = f(x_1;\theta_1) f(x_2;\theta_2) \ldots f(x_n;\theta_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_k)$$

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. είναι Identically Distributed. Ήδη από τη συνθήκη (A) έχουν κοινή (Bernoulli) κατανομή αλλά εδώ απαιτείται επιπλέον να έχουν και τις ίδιες παραμέτρους $\theta_k = \theta, \forall k = 1,2,\ldots$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$, όπου $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$,

ισχύει: $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du, \forall z \in R$ και

συμβολίζουμε $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Μία προσέγγιση για το πώς οι De Moivre-Laplace κατέληξαν στο παραπάνω συμπέρασμα παρουσιάστηκε ήδη στην 2.3.3

3.3.2. Chebyshev's "near" CLT(1870)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Πεπερασμένος μέσος ίσος με 0 και πεπερασμένη διακύμανση, δηλαδή $E[X_k] = 0, Var(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$ και επιπλέον οι τ.μ. είναι φραγμένες, $|X_k| \le b, b > 0$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi) = f(x_1;\theta_1) f(x_2;\theta_2) \ldots f(x_n;\theta_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\theta_k)$$

C. Heterogeneity: Η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι στάσιμη α τάξης διαδικασία, δηλαδή: $E[X_k] = 0, \forall k \ge 1$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n}{s_n}$, όπου $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

, και $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du, \forall z \in R$$

Κριτική Θεωρήματος: Οι υποθέσεις του Chebyshev δεν ήταν ικανές για την ισχύ της σύγκλισης κατά Distribution. Τα λανθασμένα σημεία στον ισχυρισμό του ήταν τα εξής:

1. Για να προκύψει η σύγκλιση κατά Distribution, πρέπει επιπλέον να υποτεθεί ότι η διακύμανση της S_n απειρίζεται, δηλαδή: $s_n^2 = Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
2. Η απόδειξη του Chebyshev χρησιμοποιεί τη σύγκλιση των moments για να απόδειξη τη σύγκλιση κατά Distribution. Ετσι απέδειξε ότι τα moments της διαδικασίας $\frac{S_n}{s_n}$ συγκλίνουν σε αυτά της Τυποποιημένης Κανονικής.

   Το ζήτημα όμως είναι κατά πόσο τα moments καθορίζουν μοναδικά την κατανομή. Αυτό είναι το αντικείμενο του Moments problem:

   Moments Problem:

   i. **Ύπαρξη των moments-Λήμμα:** Ικανή συνθήκη για την ύπαρξη όλων των moments, είναι το range της τ.μ. X_k να είναι ένα φραγμένο διάστημα. (Η συνθήκη εξασφαλίζεται από τον Chebyshev με την απαίτηση $|X_k| \le b, b > 0$)

   ii. **Μοναδικός προσδιορισμός της κατανομής από τα moments-Λήμμα:** Αν υπάρχουν ΟΛΑ τα moments $m'_k, k = 1,2,\ldots$, τότε προσδιορίζουν μοναδικά την κατανομή αν: $\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left[\frac{{m'_{2n}}^{1/2n}}{2n}\right]\right) < \infty$.

   Εναλλακτικά:

   Συνθήκη Carleman: Η κατανομή προσδιορίζεται μοναδικά από τα moments υπό την προϋπόθεση πως όλα τα moments είναι πεπερασμένα και το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} {m'_{2n}}^{-1/2n}$ απειρίζεται.

   (Οι συνθήκες του Chebyshev εξασφαλίζουν μεν την ύπαρξη όλων των Moments αλλά όχι και τον μοναδικό προσδιορισμό της κατανομής από αυτά)

3. Προκείμενου να εξασφαλίσει την ύπαρξη όλων των moments, ο Chebyshev επέβαλλε την Distribution υπόθεση $|X_k| \le b, b > 0$. Αυτή είναι μία πολύ δεσμευτική υπόθεση, γιατί ενώ περιλαμβάνει τ.μ. με κατανομές όπως Beta και Uniform, εξαιρεί τις πιο γνωστές κατανομές όπως π.χ. Κανονική, Student's t, Exponential, Gamma και Pareto.

3.3.2.1. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ, MARKOV & LYAPUNOV

1. **Συνθήκη Markov:** $s_n^2 = Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

2. **Truncation Method:** Είναι μία τακτική με την οποία μπορεί από οποιαδήποτε τ.μ. να προκύψει μία φραγμένη τ.μ.. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να αντιμετωπιστεί το ζήτημα της δεσμευτικής συνθήκης για bounded support για την τ.μ. $X_k, k = 1,2,\ldots$.

   Συγκεκριμένα, αν X μία τ.μ. με unbounded range, μπορεί να οριστεί η τ.μ. $\tilde{X} := XI_{\{|X|\le b\}} = \begin{cases} X, |X| \le b \\ 0, |X| > b \end{cases}$, όπου I_A είναι η Indicator Function. Η $\tilde{X}$ λέγεται truncated τ.μ. και είναι φραγμένη, επομένως υπάρχουν όλα τα moments της. Ένα ερώτημα που γεννιέται εδώ, είναι αν μπορεί να διασφαλιστεί ότι συμπεράσματα που ισχύουν για την truncated τ.μ., ισχύουν και για την αρχική X. Αρκεί στην περίπτωση αυτή να αποδειχθεί πως η διαφορά μεταξύ των δύο τ.μ. είναι ασυμπτωτικά μηδαμινή, αφού τα αποτελέσματα για την truncated είναι ασυμπτωτικά. Επίσης από τη στιγμή που πρόκειται για τ.μ., αρκεί αυτό να συμβαίνει με πιθανότητα 1, δηλαδή: $P\{|X| \le b\} := P\{XI_{\{|X|\le b\}}\} = 1$

3.3.2.2. ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

1. **Uniform Integrability**

Uniform Integrable λέγεται μία διαδικασία όταν $\lim\limits_{M\to\infty}\left(\sup\limits_{n} E\left\{X_n I_{\{|X_n|>M\}}\right\}\right)=0$,

δηλαδή όταν η μέγιστη "συνεισφορά" extreme τιμών της X_n στο μέσο της, είναι οριακά μηδενική όσο πιο μεγάλες τιμές θεωρούνται ως extreme.

2. **Uniform Asymptotic Negligibility (UAN)**

$$\lim_{m\to\infty}\left[\max_{k\le m} P\left(\left|\frac{X_k - m_k}{s_m}\right| > e\right)\right]=0$$

Δηλαδή, κάθε τ.μ. X_k είναι "μικρή" σε σχέση με το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} X_k$, επομένως καμία τ.μ. δεν κυριαρχεί στο άθροισμα. Η συνθήκη αποτελεί συνδυασμό του Uniformly boundness: $P(|X_k| > e)=0$ και της Συνθήκης Markov: $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

3.3.3. Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα για IID διαδικασίες

<u>Παρατηρήσεις για την εύρεση Οριακών Κατανομών στην περίπτωση IID στοχ. Διαδικασίας με πεπερασμένο μέσο και διακύμανση</u>

Στην περίπτωση αυτή τα partial sums $\sum_{k=1}^{n} X_k$ είναι τ.μ. Y_n με $E[Y_n]=nm$ και $Var(Y_n)=ns^2$. Όσο αυξάνεται το n, τα $|nm|$ και ns^2 απειρίζονται, επομένως δεν μπορεί να παρατηρηθεί κάποια οριακή κατανομή για την Y_n.

Αν όμως γίνει "centering" της Y_n αφαιρώντας από κάθε όρο της το μέσο της, nμ, και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση της Y_n, δηλαδή με την ποσότητα $\sqrt{n}s$

προκύπτει η $Y_n' = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}s} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{\sqrt{n}s}$, όπου $Z_k = X_k - m$. Η $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$,θα είναι IID

διαδικασία με $E[Z_k] = 0$ και $Var(Z_k) = E[Z_k^2] = s^2$

Όσο αφορά στην Y_n', οποιαδήποτε επίδραση από moments υψηλότερης τάξης της

διακύμανσης της $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, όταν $n \to \infty$, είναι “centered and scaled away”. Δηλαδή

όλες οι δυνατές κατανομές της $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ που έχουν τον ίδιο μέσο και διακύμανση,

καθώς $n \to \infty$, δίνουν ακριβώς τα ίδια moments για την Y_n'.

Πραγματικά, $E[Y_n'^3] = \frac{1}{(\sqrt{n}s)^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E[Z_i Z_j Z_k]$. Όμως εφόσον $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι IID

διαδικασία με μέσο 0, οι μόνοι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα είναι αυτοί που

προκύπτουν με $i = j = k$, οι οποίοι είναι $E[Z_i^3] = m'_{Z3}$. Συνολικά υπάρχουν n τέτοιοι

μη μηδενικοί όροι, επομένως: $\mathrm{E}[Y_n'^3] = \frac{1}{(\sqrt{n}s)^3} n m'_{Z3} = \frac{1}{\sqrt{n}s^3} m'_{Z3}$. Άρα καθώς $n \to \infty$,

το $\mathrm{E}[Y_n'^3]$ θα τείνει στο 0, ανεξάρτητα από το m'_{Z3}.

Επιπλέον, αν γίνει ο υπολογισμός όλων των moments της Y_n', παρατηρείται πως όταν $n \to \infty$, αυτά συγκλίνουν στα moments της Κανονικής Κατανομής N(0,1)

Από τα παραπάνω προκύπτει πως η διαδικασία “centering and scaling away”των partial sums της αρχικής στ. Διαδικασίας, έχει ως αποτέλεσμα τα moments υψηλότερης τάξης της αρχικής διαδικασίας, να μην μπορούν να αλλάξουν τη σύγκλιση των moments της τελικής διαδικασίας σε αυτά της τυπικής κανονικής.

Έχοντας υπ’όψη τα παραπάνω, ακολουθεί η παρουσίαση των CLTs για IID διαδικασίες.

3.3.3.1. LINDEBERG - LEVY CLT

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο μέσο και διακύμανση και ο μέσος είναι 0, δηλαδή $E[X_k]=0, Var(X_k)=\sigma^2, k=1,2,\ldots$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. είναι Identically Distributed.

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \dfrac{S_n}{\sqrt{Var(S_n)}}$, όπου

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ με $E[S_n]=0, Var(S_n)=n\sigma^2$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R \text{ και}$$

συμβολίζουμε $\dfrac{S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

__Απόδειξη[6]:__ Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί η σύγκλιση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της διαδικασίας $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $Z_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$. Για το λόγο αυτό δίνονται εν συντομία ο ορισμός της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης και κάποιες ιδιότητές της που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Χαρακτηριστική Συνάρτηση – Ορισμός: Για την τ.μ. Χ, η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι: $\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} dF(x)$, όπου $F(x)$ είναι η cdf της Χ.

__Χαρακτηριστική Συνάρτηση – Ιδιότητες:__

1. Η $\Phi_X(t)$, υπάρχει πάντα ανεξάρτητα από την κατανομή της Χ.
2. Αν $E|X|^k < \infty \Rightarrow \dfrac{d^k \Phi_X(t)}{dt} = E\left[(iX)^k e^{itX}\right]$. Δηλαδή αν υπάρχει ο μέσος του μέτρου της Χ εις την k, τότε η k παράγωγος της Χαρακτηριστικής συνάρτησης ως προς t είναι: $E\left[(iX)^k e^{itX}\right]$

3. Αν $E|X|^k < \infty \Rightarrow \left.\dfrac{d^k \Phi_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = i^k E\left[X^k\right]$. Ετσι προκύπτουν τα moments k τάξης από τη χαρακτηριστική συνάρτηση (εφόσον υπάρχουν)

4. Θεώρημα: Αν $E|X|^k < \infty$, τότε $\left|\Phi_X(t) - \sum_{j=0}^{k} \dfrac{(it)^j E\left[X^j\right]}{j!}\right| \leq E\left[\min\left\{\dfrac{2|tX|^k}{k!}, \dfrac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}\right\}\right]$

   Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν απαιτείται η ύπαρξη του $E|X|^{k+1}$, για να ισχύει το θεώρημα.

5. Inversion Theorem: Αν οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις δύο τ.μ. είναι ίδιες, τότε οι τ.μ. έχουν την ίδια κατανομή.

Χαρακτηριστική Συνάρτηση της $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\Phi_{Z_n}(t) = \Phi_{\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}s}\right]}(t) = \Phi_{S_n}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}s}\right)$, γιατί

$\Phi_{ax}(t) = \Phi_x(at)$. Ετσι, $\Phi_{Z_n}(t) = \Phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}s}\right) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}s}\right)$, γιατί αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$. Επιπλέον η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Identiacally Distributed, επομένως όλες οι X_n θα έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση. Άρα:

$$\Phi_{Z_n}(t) = \left[\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}s}\right)\right]^n.$$

Εφόσον η διακύμανση είναι πεπερασμένη, μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα (3) από τα παραπάνω, θέτοντας k=2:

$$\left|\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}s}\right) - \sum_{j=0}^{2} \frac{(it^*)^j E\left[X^j\right]}{j!}\right| \leq E\left[\min\left\{\frac{2|t^* X|^2}{2!}, \frac{|t^* X|^3}{3!}\right\}\right] = E\left[\min\left\{|t^* X|^2, \frac{|t^* X|^3}{6}\right\}\right],$$

όπου $t^* = \dfrac{t}{\sqrt{n}s}$. Όμως

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{(it^*)^j E\left[X^j\right]}{j!} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}s} E[X] + \frac{(it)^2}{ns^2}\frac{E\left[X^2\right]}{2} = 1 + 0 + \frac{(-1)t^2 s^2}{2ns^2} = 1 - \frac{t^2}{2n}.$$

Επίσης οι όροι για τους οποίους υπολογίζεται το min είναι: $\frac{t^2X^2}{ns^2}, \frac{t^3X^3}{6n^{3/2}s^3}$. Ο πρώτος όρος

είναι τάξης n^{-1}, ενώ ο δεύτερος είναι τάξης $n^{-3/2}$. Άρα ο δεύτερος όρος είναι μικρότερος

ανεξάρτητα του τι μπορεί να είναι το X^3, γιατί καθώς $n \to \infty$ το $\frac{t^3X^3}{6n^{3/2}s^3}$ τείνει στο 0.

Άρα $\Phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}s}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + O\left(n^{-3/2}\right)$. Επομένως $\Phi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + O\left(n^{-3/2}\right)\right)^n$. Από το

Διωνυμικό Ανάπτυγμα είναι γνωστό πως: $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{a}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\frac{a^j}{n^j}$. Όταν

$n \to \infty$, το παραπάνω άθροισμα γίνεται: $\sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\frac{a^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{j!} = e^a$ (Ανάπτυγμα

McLaurin). Αν $a = -\frac{t^2}{2} + O\left(n^{-3/2}\right)n = -\frac{t^2}{2} + O\left(n^{-1/2}\right)$, τότε $\Phi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^a = e^{-\frac{t^2}{2}}$, γιατί

όταν $n \to \infty$ η ποσότητα $O\left(n^{-1/2}\right)$ τείνει στο 0. Άρα $\Phi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Αυτή όμως είναι η Χαρακτηριστική συνάρτηση της N(0, 1). Άρα χρησιμοποιώντας το Inversion Theorem, η $Z_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$.

Παρατήρηση: Στην απόδειξη δεν χρειάστηκε η ύπαρξη του $E\left|X^3\right|$, αλλά του $E\left[\frac{t^3X^3}{6n^{3/2}s^3}\right]$,

το οποίο είναι $E\left[O\left(n^{-3/2}\right)\right]$ και θα είναι πεπερασμένο όταν $n \to \infty$, εφόσον υπάρχει η διακύμανση.

Σχέση με Σύγκλιση κατά πιθανότητα: Η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει κατά πιθανότητα σε κάποια τ.μ. Z. Επομένως το rescaling μέσω του οποίου προέκυψε η $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, κάνει τη διαδικασία να μην συγκλίνει κατά πιθανότητα. Για την ακρίβεια κάθε όρος της $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ο αντίστοιχος όρος της $S_n = \sum_{k=1}^{n}X_k$, κανονικοποιημένος με την τυπική του απόκλιση. Επομένως, κάθε επιπλέον όρος που προστίθεται στα partial sums έχει την ίδια “βαρύτητα” με τους υπόλοιπους. Αυτός είναι και ο λόγος που ως οριακή κατανομή προκύπτει η τυποποιημένη Κανονική.

Συμπεράσματα

Στην περίπτωση IID διαδικασιών, αρκεί η ύπαρξη του μέσου και της διακύμανσης ώστε η διαδικασία $\frac{S_n}{\sqrt{n}s}$, να συγκλίνει ως προς Distribution στην τυπική Κανονική, όταν το n απειρίζεται.

Η ύπαρξη των Moments χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη για τον προσδιορισμό της τάξης διαφόρισης της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης των τ.μ. X. Ετσι μπόρεσε να προκύψει μία μορφή της για την οποία υπολογίστηκε το όριό της όταν $n \to \infty$.

Η υπόθεση Ανεξαρτησίας χρησιμοποιήθηκε για να εκφραστεί η Χαρακτηριστική Συνάρτηση της Z_n σαν γινόμενο των $\Phi_X(t)$.

Η υπόθεση Identically Distributed επέτρεψε τη χρήση της ίδιας Χαρακτηριστικής Συνάρτησης για όλες τις τ.μ. της διαδικασίας $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται Θεωρήματα με λιγότερο δεσμευτική Υποθεση Ετερογένειας. Η εξασθένηση αυτής της υπόθεσης, απαιτεί ισχυροποίηση των Distribution υποθέσεων εφόσον ήδη η Υπόθεση ως προς Εξάρτηση είναι η πιο δεσμευτική (Ανεξαρτησία)

3.3.4. Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα για Ανεξάρτητες non-Identically Distributed διαδικασίες

3.3.4.1. LINDEBERG’S CLT (1922)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution:

- Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένα moments δεύτερης τάξης, δηλαδή

$$E[X_k] = m_k, Var(X_k) = s_k^2, k = 1,2,\ldots$$

- **Lindeberg Condition (L):** $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k|>es_n\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. μπορούν να έχουν διαφορετικό μέσο και διακύμανση.

$$E[X_k] = m_k, Var(X_k) = s_k^{\,2}, k = 1,2, \mathbf{L}$$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n}{s_n}$, όπου

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - m_k$ με $E[S_n] = 0, Var(S_n) = s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} s_k^{\,2}$, ισχύει:

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R$ και

συμβολίζουμε $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Ερμηνεία των Distribution Υποθέσεων:

Η εξασθένηση της Υπόθεσης Ετερογένειας, επιβάλλει ισχυροποίηση των Υποθέσεων για την Κατανομή. Ετσι εκτός από πεπερασμένο μέσο και διακύμανση απαιτείται και η ικανοποίηση του Lindeberg Condition:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k|>e_{s_n}\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$$

Ο όρος $E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k|>e_{s_n}\}}\right]$ είναι η συνεισφορά στη διακύμανση της X_k, από πραγματοποιήσεις που απέχουν από το μέσο της απόσταση οσοδήποτε μεγαλύτερη (ε>0) από την τυπική απόκλιση s_n της ακολουθίας των partial sums.

Δηλαδή, η επίδραση “extreme” αποκλίσεων από το μέσο, στη διακύμανση των partial sums ως προς τη συνολική διακύμανση των partial sums, πρέπει να τείνει στο 0 όταν το n απειρίζεται. Ως “extreme” αποκλίσεις θεωρούνται αυτές που είναι, έστω και οριακά, μεγαλύτερες από την τυπική απόκλιση των partial sums.

Αν η διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ήταν Identically Distributed, τότε $s_n^2 = n s^2$ και δεν θα υπήρχε περίπτωση κάποιο πεπερασμένο σύνολο τ.μ. να επιδεικνύει extreme αποκλίσεις από το μέσο (γιατί τότε την ίδια συμπεριφορά θα είχαν και όλες οι υπόλοιπες τ.μ. με αποτέλεσμα να απειρίζεται η διακύμανση των X_n)

Όταν όμως η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ID, τότε υπάρχει η περίπτωση κάποιες τ.μ. να μην έχουν μηδαμινή συνεισφορά (ως προς τις “extreme” τιμές τους), στη διακύμανση των partial sums και να είναι dominant.

Αυτές τις περιπτώσεις εξαιρεί το Lindeberg Condition

<u>Απόδειξη:</u> Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί και πάλι η σύγκλιση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της Z_n. Το ζητούμενο είναι $Z_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$. Άρα: $\Phi_{Z_n}(l) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{=\frac{l^2}{2}}$, που είναι η χαρακτηριστική Συνάρτηση της Τυπικής Κανονικής.

Αρκεί να αποδειχτεί ότι $\left|\Phi_{Z_n}(l) - e^{-\frac{l^2}{2}}\right| \xrightarrow[nn\to\infty]{} 0$.

$\left|\Phi_{Z_n}(l) - e^{-\frac{l^2}{2}}\right| = \left|\Phi_{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)}{s_n}}(l) - e^{-\frac{l^2}{2}}\right| = \left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k - m_k)}{s_n}}(l) - e^{-\frac{l^2}{2}}\right|$, γιατί οι $\frac{(X_k - m_k)}{s_n}$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $E\left[\frac{(X_k - m_k)}{s_n}\right] = 0$ και $Var\left(\frac{(X_k - m_k)}{s_n}\right) = \frac{s_k^2}{s_n^2} < \infty$. Επιπλέον $\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^2}{s_n^2} = 1$.

Ετσι η $e^{-\frac{l^2}{2}}$ μπορεί να γραφτεί: $e^{-\frac{l^2}{2}} = e^{-\frac{l^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^2}{s_n^2}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}$. Άρα:

$$\left|\Phi_{Z_n}(l) - e^{-\frac{l^2}{2}}\right| = \left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k - m_k)}{s_n}}(l) - \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}\right|$$

Για την $\frac{(X_k - m_k)}{s_n}$ το ανάπτυγμα της Χαρακτηριστικής της συνάρτησης είναι διαφορίσιμο 2ου βαθμού, εφόσον η διακύμανσή της είναι $Var\left(\frac{(X_k - m_k)}{s_n}\right) = \frac{s_k^2}{s_n^2} < \infty$. Επομένως,

$$\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)=E\left[e^{il\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}\right]=E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(il)^j\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^j}{j!}\right]=1+ilE\left[\frac{X_k-m_k}{s_n}\right]+\frac{i^2l^2}{2}E\left[\frac{(X_k-m_k)^2}{s_n^2}\right]+$$

$$+E\left[\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(il)^j\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^j}{j!}\right]=1+0-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}+E[\mathrm{L}].$$

Η $\left|\Phi_{Z_n}(l)-e^{-\frac{l^2}{2}}\right|=\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}\right|$ με αφαίρεση και πρόσθεση του όρου $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)$, γίνεται:

$$\left|\Phi_{Z_n}(l)-e^{-\frac{l^2}{2}}\right|=\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)+\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}\right|=$$

$=\left|[\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)]+[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}]\right|$. Σύμφωνα όμως με triangular inequality $|a+b|\le|a|+|b|$. Άρα

$$\left|\Phi_{Z_n}(l)-e^{-\frac{l^2}{2}}\right|\le\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right|+\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\Phi_{Z_n}(l)-e^{-\frac{l^2}{2}}\right|\le\left|\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)}_{A_n}\right|+\left|\underbrace{\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)}_{B_n}\right|$$

.

Επομένως αρκεί να αποδειχτεί ότι $A_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ και $B_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Τότε

$\left|\Phi_{Z_n}(l)-e^{-\frac{l^2}{2}}\right|\le C_n, C_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Για την A_n, θα ήταν χρήσιμο αν μπορούσε το

$\left|\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{L})-\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{L})\right|$, να μετατραπεί σε $\sum_{k=1}^{n}\left|(\mathrm{L})-(\mathrm{L})\right|$, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται το παρακάτω Λήμμα.

<u>Λήμμα:</u> Αν $x_1, x_{2,}, \mathrm{L}, x_n$ και $y_1, y_{2,}, \mathrm{L}, y_n$, είναι μιγαδικοί αριθμοί με μέτρο $|x_k| \le 1$ και $|y_k| \le 1$, τότε $\left|\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} y_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$

Αλλά $A_n = \prod_{k=1}^{n}\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l) - \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)$ και $\left|\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l)\right| = E\left|e^{i\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)l}\right| \le 1$. Επίσης,

$\left|\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty}s_k^2}\right)\right| \le 1$. Άρα μπορεί να εφαρμοστεί το προηγούμενο Λήμμα και έτσι: $A_n \le \sum_{k=1}^{n}\left|\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l) - \left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right|$. Όμως

$\left|\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l) - \left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right| = \left|\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l) - \sum_{j=0}^{2}\frac{(il)^j}{j!}E\left[\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^j\right]\right|$. Σύμφωνα όμως με το Θεώρημα των Χαρακτηριστικών Συναρτήσεων,

$\left|\Phi_X(t) - \sum_{j=0}^{k}\frac{(it)^j E[X^j]}{j!}\right| \le E\left[\min\left\{\frac{2|tX|^k}{k!}, \frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}\right\}\right]$, και για k=2 προκύπτει:

$\left|\Phi_{\frac{(X_k-m_k)}{s_n}}(l) - \left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right| \le E\left[\min\left\{\frac{2\left|l\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)\right|^2}{2}, \frac{\left|l\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)\right|^3}{6}\right\}\right]$. Αποδεικνύεται πως, $E\left[\min\left\{\frac{2|lX|^k}{k!}, \frac{|lX|^{k+1}}{(k+1)!}\right\}\right] \le E\left[\frac{2|lX|^k}{k!}I_{\{|x|>e\}}\right] + E\left[\frac{|lX|^{k+1}}{(k+1)!}I_{\{|x|<e\}}\right] \le$

$\le \frac{2l^k}{k!}E\left[|X|^k I_{\{|X|>e\}}\right] + \frac{|l|^{k+1}}{(k+1)!}E|X|^k e, \forall e > 0$.

Άρα

$$E\left[\min\left\{\frac{2\left|l\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)\right|^2}{2},\frac{\left|l\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)\right|^3}{6}\right\}\right]\le l^2E\left[\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^2 I_{\left\{\left|\frac{X_k-m_k}{s_n}\right|>e\right\}}\right]+\frac{l^3}{6}E\left[\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^2\right]e=$$

$$=l^2E\left[\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^2 I_{\left\{\left|\frac{X_k-m_k}{s_n}\right|>e\right\}}\right]+\frac{l^3}{6}\frac{s_k^2}{s_n^2}e\ .$$

Άρα:

$$A_n\le\sum_{k=1}^{n}\left(l^2E\left[\left(\frac{X_k-m_k}{s_n}\right)^2 I_{\left\{\left|\frac{X_k-m_k}{s_n}\right|>e\right\}}\right]+\frac{l^3}{6}\frac{s_k^2}{s_n^2}e\right)=\frac{l^2}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(E\left[(X_k-m_k)^2 I_{\{|X_k-m_k|>es_n\}}\right]\right)+\frac{l^3}{6s_n^2}e\sum_{k=1}^{n}s_k^2=$$

$\frac{l^2}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(E\left[(X_k-m_k)^2 I_{\{|X_k-m_k|>es_n\}}\right]\right)+\frac{l^3}{6}e$. Εφόσον όμως ισχύει το Lindeberg Condition,

δηλαδή: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-m_k)^2 I_{\{|X_k-m_k|>e_{s_n}\}}\right]\right]=0,\forall e>0$, θα είναι

$A_n\le H_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0+\frac{l^3}{6}e$ και εφόσον ε>0, μπορεί να επιλεγεί αρκετά μικρό, οριακά

μεγαλύτερο από 0, οπότε $A_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Για την $B_n=\left|\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right|$, μπορεί και πάλι να εφαρμοστεί το Λήμμα, γιατί

$\left|e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}\right|\le 1$ και $\left|1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right|\le 1$. Άρα $B_n\le\sum_{k=1}^{n}\left|e^{-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}}-\left(1-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\right|$.

Έστω $z=-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2}\Rightarrow B_n\le\sum_{k=1}^{n}\left|e^z-1-z\right|$. Όμως $e^z=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}=1+z+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{z^j}{j!}$. Άρα

$e^z-1-z=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{z^j}{j!}$. Άρα $B_n\le\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(z_k)^j}{j!}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|z_n\right|^2\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z_k)^j}{(j+2)!}\right|$. Χρησιμοποιώντας την

$|a+b|\le|a|+|b|$, προκύπτει ότι: $B_n\le\sum_{k=1}^{n}\left|z_n\right|^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z_k|^j}{(j+2)!}$.

Αν $z \le \frac{1}{2}$, τότε $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z_k|^j}{(j+2)!} \le 1$, γιατί $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j}}{(j+2)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \mathbf{L} \le 1$.

Άρα $B_n \le \sum_{k=1}^{n} |z_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{l^2}{2}\frac{s_k^2}{s_n^2} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{l^4}{4}\frac{s_k^4}{s_n^4} = \frac{l^4}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^4}{s_n^4}$. Όμως

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^4}{s_n^4} = \frac{1}{s_n^2}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} s_k^4 \le \frac{1}{s_n^2}\frac{1}{s_n^2}\max_k(s_k^2)\sum_{k=1}^{n} s_k^2 .$$

Επίσης:

$$\frac{s_k^2}{s_n^2} = \frac{E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| \le e s_n\}}\right]}{s_n^2} + \frac{E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e s_n\}}\right]}{s_n^2} \le \frac{s_n^2 e^2}{s_n^2} + \frac{E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e s_n\}}\right]}{s_n^2}$$

Από το Lindeberg Condition $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e_{s_n}\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$. Εφόσον

όμως τα $\frac{E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e s_n\}}\right]}{s_n^2}$ είναι θετικές ποσότητες των οποίων το άθροισμα τείνει

στο 0, όταν απειρίζεται το πλήθος των όρων που αθροίζονται, αυτό σημαίνει πως

$\frac{E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e s_n\}}\right]}{s_n^2} \xrightarrow[k\le n]{n\to\infty} 0$. Άρα $\frac{s_k^2}{s_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} e^2, \forall k \le n$ και εφόσον το ε μπορεί

να είναι οριακά μεγαλύτερο από το 0, προκύπτει ότι $\max_{k\le n}\left(\frac{s_k^2}{s_n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Άρα $B_n \le \max_{k\le n}\left(\frac{s_k^2}{s_n^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^2}{s_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Ετσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Θεωρήματος.

Παρατηρήσεις για το Θεώρημα:

1. *Αν υποτεθεί επιπλέον και ID τότε το Lindeberg Condition ισχύει αν* $s^2 < \infty$

   Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι IID με $E[X_k] = m$ και $Var(X_k) = s^2 < \infty$, τότε εφαρμόζεται το CLT των Lindeberg-Levy . Το ζητούμενο είναι αν ισχύει και το Lindeberg Condition.

   Τότε $s_n^2 = n s^2 \Rightarrow s_n = \sqrt{n} s$ και το όριο που εξετάζει το Lindeberg Condition είναι:

   $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n s^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e s\sqrt{n}\}}\right]\right].$$

Όμως $es\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Άρα το σύνολο των $\{|X_k - m_k| > es\sqrt{n}\}$, συρρικνώνεται ώστε τελικά η συνεισφορά του στη διακύμανση σ^2 να είναι μηδαμινή. Επομένως για όλες τις χρ. Στιγμές $k \le n$, το Lindeberg Condition ισχύει.

2. *Αν $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} s_k^2 \le B$, αν δηλαδή είναι φραγμένη, τότε το Lindeberg Condition δεν ισχύει.*

Πραγματικά, το όριο τότε γίνεται: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{B}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e\sqrt{B}\}}\right]\right]$. Στην περίπτωση αυτή όμως, όταν $n \to \infty$, δεν εξασφαλίζεται ότι το σύνολο $\{|X_k - m_k| > e\sqrt{B}\}$ συρρικνώνεται ώστε να μην επηρεάζει τη συνολική διακύμανση .

3. *Αν $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, τότε το Lindeberg Condition γίνεται “average” Uniform Square Integrability Condition για την διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$*

Πραγματικά, η $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ εξασφαλίζει ότι $es_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \forall e > 0$ όσο μικρό κι αν είναι το ε. Άρα, $\lim_{es_n\to\infty}\left(\sup_{k\le n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > es_n\}}\right]\right) = 0$. Αυτός είναι και ο ορισμός μίας Uniform Square Integrable διαδικασίας. Τότε όμως,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e_{s_n}\}}\right]\right] \le \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2} n \sup_{k\le n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e_{s_n}\}}\right]\right],$$

το οποίο θα μηδενίζεται αν $\frac{n}{s_n^2} < \infty$.

*Επομένως το Uniform Square Integrability $\lim_{es_n\to\infty}\left(\sup_{k\le n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > es_n\}}\right]\right) = 0$, δεν είναι αρκετό για να ισχύει το Lindeberg Condition **.**Αν επιπλέον υποτεθεί και κάποια συνθήκη που να διασφαλίζει ότι $\frac{n}{s_n^2} < \infty$* , τότε το Lindeberg Condition ισχύει.

3.3.4.2. LYAPUNOV’S CLT (1901)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution:

- Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένο κάποιο moment υψηλότερης τάξης της δεύτερης, δηλαδή $E\left[\left|X_k\right|^{2+d}\right] < \infty, d > 0, k = 1,2, \mathrm{L}$
- **Lyapunov's Condition:** $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^{2+d}}\sum_{k=1}^{n} E\left|X_k - m_k\right|^{2+d}\right] = 0, \forall e > 0$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. μπορούν να έχουν διαφορετικό μέσο και διακύμανση.

$E\left[X_k\right] = m_k, Var\left(X_k\right) = s_k^2, k = 1,2, \mathrm{L}$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n}{s_n}$, όπου

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - m_k$ με $E\left[S_n\right] = 0, Var\left(S_n\right) = s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} s_k^2$, ισχύει:

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{1}{2}u^2}\, du, \forall z \in R$ και

συμβολίζουμε $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Ερμηνεία των Distribution Υποθέσεων:

Συγκριτικά με το προηγούμενο θεώρημα, παρατηρείται διαφορά μόνο στις Distribution υποθέσεις, όπου η υπόθεση πεπερασμένης διακύμανσης και το Lindeberg Condition, έχουν αντικατασταθεί από την υπόθεση πεπερασμένου moment υψηλότερης τάξης και το Lyapunov's Condition.

Από την απόδειξη του θεωρήματος, προκύπτει ότι οι υποθέσεις είναι ικανές για την ισχύ του Lindeberg Condition, επομένως είναι περισσότερο δεσμευτικές(απαίτηση ύπαρξης moments υψηλότερης τάξης).

Η χρησιμότητα όμως του Θεωρήματος, είναι ότι το Lyapunov Condition είναι πιο εύκολα ελέγξιμο σε σχέση με το Lindeberg Condition.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με τη χρήση του Lindeberg Condition. Συγκεκριμένα θα αποδειχθεί πως το Lindeberg Condition ισχύει, επομένως σύμφωνα με το Lindeberg's CLT ισχύει η σύγκλιση κατά Distribution.

Έστω $d : E\left[|X_k|^{2+d}\right] < \infty$. Τότε για οποιοδήποτε ε>0, μπορεί να γραφεί:

$$E\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right|^{2+d} = E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2+d} I_{\{|X_k - m_k| > e s_n\}}\right] + E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2+d} I_{\{|X_k - m_k| \le e s_n\}}\right] \Rightarrow$$

$$E\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right|^{2+d} \ge E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2+d} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right] = E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{d}\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right] \ge$$

$$\ge E\left[e^d\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right] = e^d E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right].$$

Άρα $\sum_{k=1}^{n} E\left[\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right|^{2+d}\right] \ge \sum_{k=1}^{n} e^d E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right]$. Σύμφωνα με το Lyapunov Condition: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^{2+d}}\sum_{k=1}^{n} E|X_k - m_k|^{2+d}\right] = 0,$ που είναι ο αριστερός όρος της παραπάνω ανισότητας. Άρα και το όριο του δεξιού όρου θα είναι 0. Ετσι:

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^d E\left[\left(\frac{X_k - m_k}{s_n}\right)^{2} I_{\left\{\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right\}}\right] = 0$. Άρα για ε=1 προκύπτει το Lindeberg Condition και πληρούνται και όλες οι υποθέσεις του Lindeberg's CLT, άρα η σύγκλιση κατά Distribution ισχύει.

3.3.4.3. ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΟΥ FELLER ΓΙΑ ΤΟ LINDEBERG CLT (1930)

a) Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένη διακύμανση και

Ανεξάρτητη με $E[X_k] = m_k, Var(X_k) = s_k^2, k = 1,2,\ldots$,

ΚΑΙ ισχύει το CLT, δηλαδή: $\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

ΚΑΙ ισχύει και το UAN Condition: $\lim_{n\to\infty}\left[\max_{k\le n} P\left(\left|\frac{X_k - m_k}{s_n}\right| > e\right)\right] = 0$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τότε ισχύει το Lindberg Condition

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e_{s_n}\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$$

b) Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένη διακύμανση και

Ανεξάρτητη με $E[X_k] = m_k, Var(X_k) = s_k^2, k = 1,2,\ldots$,

ΚΑΙ ισχύει το CLT, δηλαδή: $\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

ΚΑΙ ισχύει το **Feller's Condition**: $\lim_{n\to\infty}\left(\max_{k\le n}\frac{s_k^2}{s_n^2}\right) = 0$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τότε ισχύει το Lindberg Condition

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{|X_k - m_k| > e_{s_n}\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$$

UAN δεν ισχύει.

Chebyshev's CLT συγκριτικά με Lendeberg-Feller's CLT

Για το διορθωμένο Chebyshev CLT, οι υποθέσεις για την $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι:

A. Distribution:

- Όλες οι τ.μ. X_k έχουν πεπερασμένα moments δεύτερης τάξης, δηλαδή

  $E[X_k^2] < \infty, k = 1,2,\ldots$

- **Uniformly Bounded:** $P(|X_k| < b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, b > 0$, δηλαδή όλες οι τ.μ. έχουν bounded support από την ίδια σταθερά b, με πιθανότητα η οποία τείνει στο 1 όταν το n απειρίζεται.

- $s_n^2 = Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

B. Dependence: Οι τ.μ της ακολουθίας είναι μεταξύ τους Ανεξάρτητες

C. Heterogeneity: Οι τ.μ. μπορούν να έχουν διαφορετικό μέσο και διακύμανση.

$$E\left[X_k\right]=\mu_k, Var\left(X_k\right)=\sigma_k^{\,2}, k=1,2,\ldots$$

Τότε ισχύει το CLT.

Ζήτημα: Αυτό σημαίνει πως Uniformly Bounded + $\sigma_n^2=Var\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

συνεπάγονται και την ισχύ του Lindeberg Condition?

Πραγματικά, $\sigma_n^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty\Rightarrow\varepsilon\sigma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty, \forall\varepsilon>0$.

Άρα $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu_k)^2 I_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon\sigma_n\}}\right]}{\sigma_n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, γιατί όταν το n απειρίζεται, ο αριθμητής μεγαλώνει με μικρότερο ρυθμό από ότι ο παρονομαστής.

Σχέση μεταξύ conditions:

1. *Αν η διαδικασία* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, *με* $E\left[X_k\right]=\mu_k, Var\left(X_k\right)=\sigma_k^{\,2}, k=1,2,\ldots$ *ικανοποιεί την Lindeberg Condition, τότε ικανοποιεί και την UAN Condition, δηλαδή:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu_k)^2 I_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon\sigma_n\}}\right]\right]=0, \forall\varepsilon>0\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_{k\le n}P\left(\left|\frac{X_k-\mu_k}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]=0, \forall\varepsilon>0$$

<u>Παρατήρηση:</u> Καμία απαίτηση για ανεξαρτησία δεν τέθηκε προκειμένου το Lindeberg Condition να συνεπάγεται το UAN Condition.

2. *Αν η διαδικασία* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, *με* $E\left[X_k\right]=\mu_k, Var\left(X_k\right)=\sigma_k^{\,2}, k=1,2,\ldots$ *ικανοποιεί την Lindeberg Condition, τότε ικανοποιεί και την Feller Condition, δηλαδή:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu_k)^2 I_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon\sigma_n\}}\right]\right]=0, \forall\varepsilon>0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{k\le n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2}\right)=0$$

<u>Παρατήρηση:</u> Και πάλι για τη συνεπαγωγή δεν έγινε καμία υπόθεση ως προς την εξάρτηση της διαδικασίας.

Η έννοια του Feller Condition είναι ότι καμία διακύμανση δεν κυριαρχεί στην διακύμανση των partial sums στα οποία συμμετέχει, όταν το πλήθος των όρων στα partial sums απειρίζεται.

3. *Αν η διαδικασία* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, *με* $E[X_k]=\mu_k, Var(X_k)=\sigma_k^2, k=1,2,\dots$ *ικανοποιεί την Lyapunov Condition, τότε ικανοποιεί και την Lindeberg Condition, δηλαδή:*

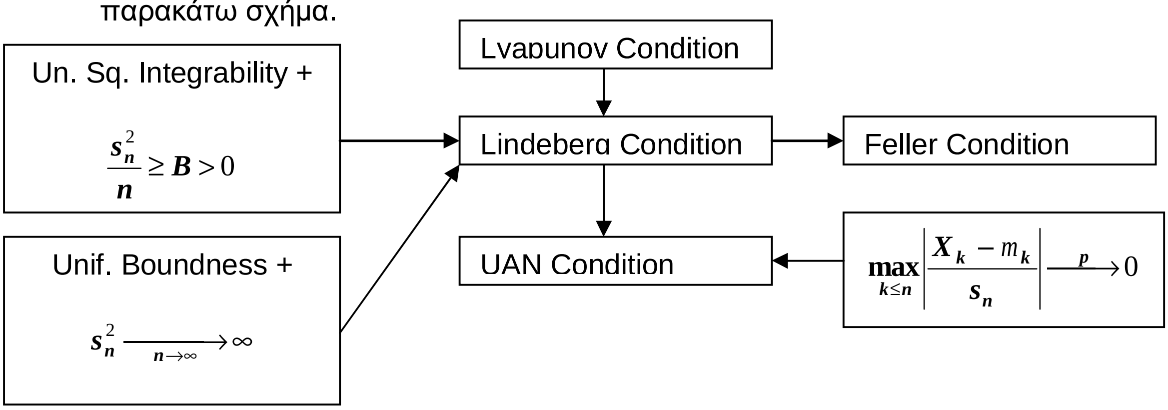
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\left|X_k-\mu_k\right|^{2+\delta}\right]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k-\mu_k)^2 I_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}\right]\right]=0,\forall\varepsilon>0$$

4. *Αν η διαδικασία* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, *με* $E[X_k]=\mu_k, Var(X_k)=\sigma_k^2, k=1,2,\dots$ *ικανοποιεί την :* $\lim_{n\to\infty}\left(P\left[\max_{k\le n}\frac{|X_k-\mu_k|}{s_n}>\varepsilon\right]\right)=0$ *επομένως την* $\max_{k\le n}\left(\frac{|X_k-\mu_k|}{s_n}\right)\xrightarrow{p}0$, *τότε ικανοποιεί και την UAN Condition, δηλαδή:*

$$\max_{k\le n}\left(\frac{|X_k-\mu_k|}{s_n}\right)\xrightarrow{p}0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left[\max_{k\le n}P\left(\left|\frac{X_k-\mu_k}{s_n}\right|>\varepsilon\right)\right]=0,\forall\varepsilon>0$$

Οι παραπάνω σχέσεις μεταξύ των συνθηκών φαίνονται συγκεντρωτικά στο παρακάτω σχήμα.



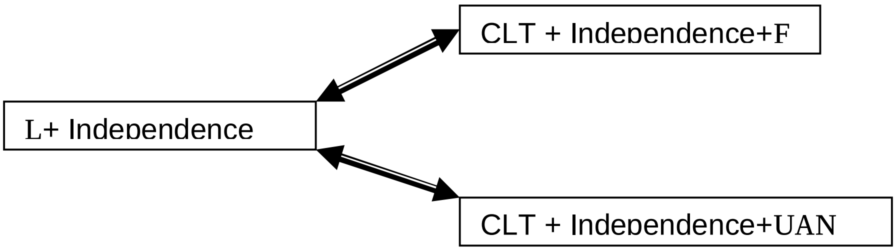
Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες για CLT

Αν χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω συμβολισμοί για τις συνθήκες που έχουν αναφερθεί έως τώρα, το επόμενο σχήμα συρρικνώνει τις Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για CLT.

L= Lindeberg Condition

F=Feller Condition

UAN=Uniform Asymptotic negligibility Condition



<u>Παράδειγμα:</u> Μπορεί το CLT να ισχύει για μία IID διαδικασία, αλλά το Feller Condition και το UAN condition να μην ισχύουν. Στην περίπτωση αυτή το Lindeberg Condition δεν ισχύει.

Μία περίπτωση όπου το CLT ισχύει trivially είναι η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι IID Normal με

$X_k \sim N(0, s_k^2)$. Έστω ότι $s_1^2 = 1$ και $s_k^2 = 2^{k-2}, k \geq 2$.

Τότε η $\sum_{k=1}^{n} X_k$, έχει $E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0$ και

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \mathbf{L} + 2^{n-2} = 2 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^k$$.Όμως,

$$\sum_{k=1}^{n-2} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \mathbf{L} + 2^{n-2} = A \Leftrightarrow 2A = 2^2 + 2^3 + \mathbf{L} + 2^{n-2} + 2^{n-1} \Rightarrow 2A - A = 2^{n-1} - 2 = A \Rightarrow$$

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = s_n^2 = 2 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^k = 2 + A = 2 + 2^{n-1} - 2 = 2^{n-1}.$$

Ετσι για την $\frac{X_k - m_k}{s_n} = \frac{X_k}{s_n}$, προκύπτει ότι θα είναι Normal Distributed με $E\left[\frac{X_k}{s_n}\right] = 0$ και

$$Var\left(\frac{X_k}{s_n}\right) = \frac{1}{s_n^2} s_k^2 = \frac{2^{k-2}}{2^{n-1}}.$$

Η $\frac{S_n}{\sigma_n}$, ως άθροισμα Normal τ.μ. θα είναι και αυτή Normal με $E\left[\frac{S_n}{\sigma_n}\right]=0$ και

$Var\left(\frac{S_n}{\sigma_n}\right)=\frac{1}{\sigma_n^2}Var(S_n)=1$. Άρα $\frac{S_n}{\sigma_n}\sim N(0,1)$. Άρα το CLT ισχύει και επιπλέον η διαδικασία είναι ανεξάρτητη.

Διερεύνηση Feller Condition: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{k\le n}\frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{k\le n}\frac{2^{k-2}}{2^{n-1}}\right)$. Το maximum είναι όταν k=n

και είναι: $\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{k\le n}\frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$. Άρα δεν ισχύει το Feller Condition.

Διερεύνηση UAN Condition:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_{k\le m}P\left(\left|\frac{X_k-\mu_k}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\max_{k\le m}P\left(\left|\frac{X_k}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]\ge\lim_{n\to\infty}\left[P\left(\left|\frac{X_n}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-P\left(\left|\frac{X_n}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]$$

Όμως $P\left(\left|\frac{X_n}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-u^2}du=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$.

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\max\limits_{k\le m}P\left(\left|\frac{X_k-\mu_k}{\sigma_n}\right|>\varepsilon\right)\right]\ge\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du}_{<1}\right]>0$. Επομένως το UAN δεν ισχύει.

3.3.5. Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα για Dependent Διαδικασίες

Έως τώρα παρουσιάστηκε το ελάχιστο set συνθηκών για να ισχύει το CLT στην περίπτωση Ανεξάρτητων Διαδικασιών.

Το επόμενο ερώτημα που γεννιέται είναι κατά πόσο μπορεί να γίνει λιγότερη δεσμευτική η υπόθεση Ανεξαρτησίας (ενισχύοντας τις υπόλοιπες Υποθέσεις), ώστε να προκύψει σύγκλιση κατά Distribution στην Τυπική Κανονική.

3.3.5.1. CLT ΓΙΑ MARTINGALE-DIFFERENCE ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Αν η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι MD διαδικασία, οπότε $E[X_k]=0, k=1,2,\ldots$ και $E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]=0$, όπου $\mathcal{F}_{k-1}=\sigma(X_{k-1},X_{k-2},\ldots,X_1)$ και επιπλέον ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

A. Distribution:

- Πεπερασμένηh Unconditional διακύμανση, δηλαδή $E[X_k^2]<\infty, k=1,2,\ldots$ (Square Integrability)
- **Lindeberg's Condition:** $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_k)^2 I_{\{|X_k|>\varepsilon s_n\}}\right]\right]=0, \forall\varepsilon>0$

B. Dependence: MD – Dependence, δηλαδή η διαδικασία είναι Mean Conditional Independent (MCI), γιατί $E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]=E[X_k]0$

C. Heterogeneity: Στάσιμη α τάξης, γιατί $E[X_k]=0, k=1,2,\ldots$. , με $Var(X_k)=\sigma_k^2, k=1,2,\ldots$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n:=\frac{S_n}{s_n}$, όπου $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ με $E[S_n]=0, Var(S_n)=s_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n}{s_n}\leq z\right)=\Phi(z):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{1}{2}u^2}du, \forall z\in R$$ και

συμβολίζουμε $\frac{S_n}{s_n}\xrightarrow{D}Z\sim N(0,1)$

Παρατηρήσεις

- Η απαίτηση για πεπερασμένη διακύμανση και το Lindeberg Condition είναι αρκετά για να κάνουν μία Ανεξάρτητη διαδικασία partially summed και rescaled να συγκλίνει στην Τυπική Κανονική.

  Εδώ όμως η έλλειψη ανεξαρτησίας και συγκεκριμένα με περιορισμό την απαγόρευση εξάρτησης από το μέσο (MCI), επιβάλλει την ενίσχυση του

Heterogeneity Restriction σε Στασιμότητα α τάξης. Βέβαια η συνθήκη αυτή επιβάλλεται εξ'ορισμού από την MD διαδικασία.

- Η διαδικασία $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ είναι Martingale, επομένως η scaled Martingale διαδικασία που προκύπτει με scaling factor την τυπική της απόκλιση, συγκλίνει κατά Distribution στην Τυπική Κανονική
- Αν η υποθεση Ετερογένειας ισχυροποιηθεί σε Αυστηρή Στασιμότητα, πόσο λιγότερο δεσμευτικές μπορούν να γίνουν οι Υποθέσεις Εξάρτησης? Μπορεί να προκύψει το CLT για παράδειγμα αν η MCI υπόθεση αντικατασταθεί με asymptotic Independence υπόθεση?

3.3.5.2. CLT ΓΙΑ STRONG MIXING ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ (ROSENBLATT – 1956)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution:

- Πεπερασμένα moments υψηλότερης τάξης της δεύτερης, δηλαδή

$$E\left[|X_k|^{2+\delta}\right] < \infty, \delta > 0, k = 1,2,\ldots$$

B. Dependence: α-mixing, δηλαδή $\lim_{t\to\infty} \sup_k \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, όπου

$\mathcal{A} = \sigma(X_{k+t}, X_{k+1+t}, \ldots), \mathcal{B} = \sigma(\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_k)$ και

$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

C. Heterogeneity: Αυστηρά Στάσιμη διαδικασία, δηλαδή:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{1+t}, x_{2+t}, \ldots, x_{n+t}), \forall t$$

➢ **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n}{s_n}$, όπου

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ με $E[S_n] = 0, Var(S_n) = s_n^2 = n\sigma^2$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \leq z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R$$ και

συμβολίζουμε $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Παρατηρήσεις: Η Αυστηρή Στασιμότητα δίνει τη δυνατότητα να προκύψει CLT με τη λιγότερο δεσμευτική υπόθεση ως προς εξάρτηση (α-mixing), αρκεί να υπάρχει κάποιο Moment υψηλότερης τάξης της δεύτερης.

3.3.5.3. CLT ΓΙΑ ASYMPTOTIC NON-CORRELATED ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ (ρ-mixing)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution:

- Πεπερασμένα moments δεύτερης τάξης , δηλαδή $E\left[X_k{}^2\right] < \infty, k = 1,2, \mathrm{L}$
- Η διακύμανση των Partial Sums να απειρίζεται, δηλαδή : $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

B. Dependence:

- ρ-mixing, δηλαδή $\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \sup_{X\in \mathrm{A},\, Y\in \mathrm{B}} \left|corr(X,Y)\right| = 0$, όπου

  Α $= s\left(X_{k+t}, X_{k+1+t}, \mathrm{L}\right)$,Β $= s\left(\mathrm{L}, X_1, X_2, \mathrm{L}, X_k\right)$.

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r\left(2^k\right) < \infty$. Ης συνθήκη αυτή καθορίζει την ομαλότητα του ρ-mixing.

C. Heterogeneity: Στάσιμη β τάξης, δηλαδή: $E\left[X_k\right] = m, Var(X_k) = s^2$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $Z_n := \frac{S_n}{s_n}$, όπου

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - m$ με $E\left[S_n\right] = 0, Var\left(S_n\right) = s_n^2 = n s^2$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n} \le z\right) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{1}{2}u^2} du, \forall z \in R \text{ και}$$

συμβολίζουμε $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Παρατηρήσεις:

a) Συγκριτικά με α-mixing υπόθεση, η ρ-mixing είναι περισσότερο δεσμευτική και έτσι οι υπόλοιπες υποθέσεις έγιναν λιγότερο δεσμευτικές:

   Distribution: Αρκεί πεπερασμένη διακύμανση.

   Heterogeneity: Στασιμότητα β τάξης.

b) Συγκριτικά με Lyapunov CLT: Η υπόθεση ρ-mixing είναι λιγότερο δεσμευτική από την Ανεξαρτησία και επιβάλλει την ισχυροποίηση της Υπόθεσης Ετερογένειας σε Στασιμότητα β τάξης.

3.3.6. Επέκταση CLT για Ακολουθία Τυχαίων Διανυσμάτων

Ζήτημα: Η επέκταση του CLT για ακολουθίες τ. διανυσμάτων μπορεί να προκύψει trivially?

Η απάντηση είναι πως όχι. Σε αντίθεση με τα LLN, όπου αν το LLN ισχύει για κάθε elemnt του διανύσματος, τότε ισχύει και για ολόκληρο το διάνυσμα, στην περίπτωση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η σύγκλιση ως προς Distribution, υπονοεί σύγκλιση στην multi-variate Κανονική Κατανομή. Οι παράμετροι της multi-variate Κανονικής όμως, είναι το διάνυσμα των μέσων και ο πίνακας Διακυμάνσεων-Συνδιακυμάνσεων, μεταξύ των elements του διανύσματος.

Επομένως στην περίπτωση αυτή εισάγεται και η έννοια της εξάρτησης μεταξύ των elemts του διανύσματος, η οποία απουσιάζει στα LLN γιατί εκεί η σύγκλιση είναι σε ένα εκφυλισμένο τυχαίο διάνυσμα.

3.3.6.1. MULTIVARIATE CLT

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοχαστική διαδικασία τυχαίων διανυσμάτων, $\left(X_{k1}, X_{k2}, \cdots, X_{km}\right)^T$.

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Πεπερασμένο διάνυσμα μέσων και πεπερασμένος Πίνακας Διακυμάνσεων-Συνδιακυμάνσεων , δηλαδή : $E\left[X_k\right] = \left(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m\right)^T = \vec{\mu}_{m\times 1}$ και

$$\Sigma_{k(m\times m)} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

B. Dependence: Ανεξαρτησία

C. Heterogeneity: Identically Distributed

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την $\sqrt{n}\left(\vec{X}_n - \vec{\mu}\right)$, όπου

  $\vec{X}_{n_{m\times 1}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{X}_{k_{m\times 1}} - \vec{\mu}_{m\times 1}$, ισχύει: $\sqrt{n}\left(\vec{X}_n - \vec{\mu}\right) \overset{a}{\sim} N(0, \Sigma)$

3.3.7. Συναρτήσεις τ.μ. και Μορφές στοχαστικής Σύγκλισης

Αν για μία στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, έχει προκύψει κάποια μορφή στοχαστικής σύγκλισης, μπορεί να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα και για την διαδικασία που προκύπτει από την εφαρμογή κάποιας συνάρτησης στην αρχική διαδικασία?

Η απάντηση είναι πως η νέα διαδικασία θα συγκλίνει επίσης και μάλιστα το είδος της σύγκλισης δεν μεταβάλλεται, αρκεί η συνάρτηση που θα εφαρμοστεί να είναι συνεχής. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα:

MANN & WALD THEOREM (1943)

Αν $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία στοχαστική διαδικασία και X μία τ.μ. ορισμένη στο ίδιο probability space με την $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, και $g(.): R \to R$ μία συνεχής συνάρτηση, τότε:

1. Αν $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$

2. Αν $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$

3. Αν $X_n \xrightarrow{D} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$

Εφαρμογή: Αν $X_n \xrightarrow{D} X \sim N(0,1) \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{D} X^2 \sim c^2(1)$

Οι Mann & Wald έδειξαν πως η διατήρηση της σύγκλισης ισχύει για οποιαδήποτε Borel function με set ασυνεχειών το οποίο έχει measure 0, δηλαδή πιθανότητα 0. Επιπλέον το θεώρημα επιτρέπει τη σύγκλιση σε οποιαδήποτε τ.μ. X και όχι μόνο σε εκφυλισμένη τ.μ. (που είναι η περίπτωση των LLN). Για την περίπτωση σύγκλισης κατά Distribution, το θεώρημα επιτρέπει σύγκλιση όχι μόνο στην Κανονική αλλά σε οποιαδήποτε οριακή κατανομή η οποία μπορεί να προκύψει ως συνάρτηση της Κανονικής.

Η παρουσίαση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος θα ολοκληρωθεί με μία πρακτική εφαρμογή του.

3.3.8. Πρακτική Εφαρμογή Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος

Έστω η διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, η οποία πληρεί τις υποθέσεις του Κεντρικού Οριακού θεωρήματος και επομένως

$$\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) \xrightarrow{D} Z \sim N(0, s_n^2)$$

Τότε, έχοντας μία πραγματοποίηση του δείγματος της διαδικασίας, μπορεί να υπολογιστεί ο δειγματικός μέσος $\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ και να χρησιμοποιηθεί αυτός για να προκύψει η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{m}_k)$. Προκειμένου να δημιουργηθεί η πραγματοποίηση του δείγματος της διαδικασίας που συγκλίνει κατά Distibution, πρέπει να γίνει scaling της S_n με την τυπική της απόκλιση, με την θεωρητική δηλαδή ροπή.

Αυτό σημαίνει πως τουλάχιστον στην περίπτωση που η διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι IID, θα έπρεπε να είναι γνωστή η ακολουθία των διακυμάνσεων ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η $s_n : s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} s^2 = ns^2$.

Αν χρησιμοποιηθεί εκτιμητής για την ακολουθία των διακυμάνσεων, που είναι και η τυπική πρακτική, τότε $\hat{s}_n : \hat{s}_n^2 = n\hat{s}^2 = n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \hat{m}_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \hat{m}_k\right)^2$

Επομένως η ακολουθία των πραγματοποιήσεων που εξετάζεται για σύγκλιση κατά Distribution είναι η $\hat{S}_n = \frac{1}{\hat{s}_n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \hat{m}_k\right) = d_n S_n$, όπου $d_n = \frac{\hat{S}_n}{S_n}$

Το ζήτημα είναι πως αν $S_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$, βάση των υποθέσεων που ισχύουν για την $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι και $\hat{S}_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$?

Η απάντηση είναι πως το ίδιο θα ισχύει και για την εκτιμούμενη S_n αν $d_n \xrightarrow{p} 1$

Το ερώτημα που γεννιέται επομένως είναι αν οι υποθέσεις που ισχύουν για την $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$,είναι ικανές ώστε $d_n \xrightarrow{p} 1$. Επομένως το ερώτημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Οι υποθέσεις που κάνουν την στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ να υπακούει σε κάποιο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, είναι ικανές ώστε ο εκτιμητής της S_n να είναι Συνεπής Εκτιμητής ($d_n = \frac{\hat{S}_n}{S_n} \xrightarrow{p} 1$)?

Προκειμένου να απαντηθεί το ερώτημα θα εξεταστεί κάθε κατηγορία CLT ξεχωριστά:

IID Case Για την ισχύ του CLT, αρκεί η ύπαρξη της διακύμανσης. Έστω ότι μ=0. τότε ο εκτιμητής της διακύμανσης θα είναι: $\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες είναι ικανές ώστε

$$\hat{s}^2 \xrightarrow{p} s^2 \Rightarrow \frac{\hat{S}_n}{S_n} \xrightarrow{p} 1.$$

N-ID Case Στην περίπτωση που η διαδικασία είναι Ανεξάρτητη αλλά Non-Identically Distributed, αρκεί η ύπαρξη της διακύμανσης και το Lindeberg Condition για να ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Αποδεικνύεται πως το Lindeberg Condition δεν είναι ικανό για να δώσει $d_n = \frac{\hat{S}_n}{S_n} \xrightarrow{p} 1$.

Αν αντί του Lindeberg Condition χρησιμοποιηθούν άλλα Conditions τα οποία είναι ικανά για την ισχύ του Lindeberg Condition, π.χ. Lyapunov Condition, ή Uniform Square Integrability και $\frac{s_n^2}{n} \geq B > 0$ και επομένως περισσότερο δεσμευτικά από το Lindeberg Condition, τότε η $d_n = \frac{\hat{S}_n}{S_n} \xrightarrow{p} 1$ ισχύει.

MD Case Αποδεικνύεται πως οι υποθέσεις που αρκούν ώστε ένα Martingale Difference process να υπακούει στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, είναι ικανές και για την $d_n = \frac{\hat{S}_n}{S_n} \xrightarrow{p} 1$

3.3.9. Functional Central Limit Theorem

Η χρησιμότητα του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, έγκειται στο ότι κάνοντας scaling στην ακολουθία των partial sums των αποκλίσεων από το μέσο, μίας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου, προκύπτει διαδικασία διακριτού χρόνου με Οριακή Κατανομή την Τυπική Κανονική.

Ένα ερώτημα που γεννιέται είναι κατά πόσο μπορεί να εφαρμοστεί μία παρόμοια τακτική, ώστε μία διαδικασία που θα προκύψει συνάρτηση - όχι απαραίτητα partial sum- της διαδικασίας των partial sums, να επιδεικνύει και αυτή οριακή κατανομή.

Από τα μέσα της δεκαετίας του ’40 έγιναν τέτοιες προσπάθειες, οι οποίες πήραν μία γενική μορφή από τον Donsker (1956) υπό την ονομασία Functional Central Limit Theorem.

3.3.9.1. ΒΑΣΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Ξεκινώντας από μία στοχαστική διαδικασία $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ με πεπερασμένο μέσο και διακύμανση, ορίζεται η ακολουθία των partial sums των αποκλίσεων από το μέσο:

$$\boldsymbol{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{X}_k - m_k \right).$$

Μπορεί να οριστεί μία “random function” $\{\boldsymbol{Y}_n(\boldsymbol{t}), 0 \le \boldsymbol{t} \le 1, \boldsymbol{n} = 1, 2, \ldots\}$. Μέσω της συνάρτησης αυτής ορίζεται μία ακολουθία συναρτήσεων, μία “function process”, η οποία πλέον είναι μία απεικόνιση: $\boldsymbol{Y}(.,.,.) : (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S} \times [0,1]) \to \boldsymbol{R}$

Προκειμένου να εξεταστεί η σύγκλιση αυτής της function process, θα πρέπει να οριστεί κάποιο measure space και όπως αρχικά από το probability space (S, F, P(.)), μέσω της τ.μ. $\boldsymbol{X}(.) : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{R}$ προέκυψε το (R, B, f(x)), έτσι και σε αυτή την περίπτωση να προκύψει ένα νέο measure space στο οποίο να μπορεί να οριστεί η έννοια της “απόστασης”.

Το “όχημα” μέσω του οποίου θα γίνει η μεταφορά από τον ένα χώρο στον άλλο, θα είναι μία random function από το $(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S}) \to \boldsymbol{C}[0,1]$, όπου C[0,1] είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο διάστημα [0,1].

Εετσι για ένα συγκεκριμένο sample s από το S και ένα συγκεκριμένο sample size n, μέσω της απεικόνισης αυτής θα προκύπτει μία συγκεκριμένη συνεχής real function ορισμένη στο [0,1] .

Στο χώρο αυτό θα πρέπει να οριστεί ένα σ-field και ένα measure καθώς και η έννοια της απόστασης.

<u>Στοχαστική Συνάρτηση στο Unit Interval:</u> Θα είναι μία συνάρτηση $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{S} \times [0,1] \to \boldsymbol{R}$, με τιμές $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{t} \in [0,1], \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$. Δηλαδή, είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει ένα

συγκεκριμένο sample s και μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t σε ένα πραγματικό αριθμό.

Διαισθητικά, η παρατήρηση μίας πραγματοποίησης της στοχαστικής διαδικασίας $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$, είναι μια δειγματοληψία, μέσω της οποίας καταγράφονται για διακριτές χρονικές στιγμές 1 έως n οι όροι της ακολουθίας. Η ένωση των διακριτών σημείων που προκύπτουν, ορίζει μία "random function", ,η οποία είναι συνεχής και είναι μέλος του C[1,n].

Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί ότι τα δείγματα δεν αντιστοιχούν σε μοναδιαία διαστήματα, αλλά σε διαστήματα μεγέθους $\frac{1}{n-1}$. Ετσι ο "χρονικός άξονας" έχει μεταβληθεί από 1…n, σε 0...1.

Ετσι το συνεχές γράφημα που έχει προκύψει είναι ένα "δείγμα" από το χώρο C[0,1].

Σε κάθε χρονική στιγμή $t = \frac{i}{n}$, αντιστοιχεί ένας όρος της πραγματοποίησης. Ετσι έχει προκύψει μία αντιστοίχηση από το R^n σε συναρτήσεις του C[0,1], με την έννοια ότι για μία διαφορετική πραγματοποίηση, θα προκύψει άλλη συνάρτηση όπως επίσης προκύπτει άλλη συνάρτηση, μεταβάλλοντας το μέγεθος του δείγματος n.

Ζήτημα: Καθώς το n αυξάνεται και τελικά απειρίζεται, ποια είναι η μορφή του συνεχούς γραφήματος που προκύπτει?

Αυτό είναι το αντικείμενο του functional Central Limit Theorem.

Uniform Metric στο χώρο C[0,1]

Ορίζεται ως εξής: $d_u(x, y) = \sup_{0 \le t \le q} \left| x(t) - y(t) \right|$

Δηλαδή, αν x(.), y(.) είναι συναρτήσεις του C[0,1] η Uniform Distance μεταξύ των δύο συναρτήσεων είναι, θεωρώντας και τα 2 γραφήματα μαζί, το minimum εύρος μίας fixed band που περιέχει και τα 2 curves.

Εφαρμογή

Έστω η διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ η οποία είναι IID διαδικασία με $E[X_k]=0$ και $Var(X_k)=s^2$. Έστω $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, η ακολουθία των partial sums με $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Μπορεί να οριστεί μία συγκεκριμένη function process $\{Y_n(t), 0\le t\le 1, n=1,2,\ldots\}$, ως εξής: $Y_n(t)=\begin{cases} 0 & t=0 \\ \Delta x S_k & t=k\Delta t, k=1,2,\ldots,n \end{cases}$, όπου

Δx= Scaling Factor

n= το πλήθος των intervals στα οποία έχει χωριστεί το Unit Interval [0,1]

Δt=Το interval size. Επομένως Δt=1/n

Στις χρονικές στιγμές t=kΔt, αντιστοιχίζονται οι scaled όροι της ακολουθίας S_n. Ετσι,

$$Y_n(t)=\begin{cases} & S_0=0 & 0\le t<\frac{1}{n} \\ \Delta x S_1= & \Delta x(X_1) & \frac{1}{n}\le t<\frac{2}{n} \\ \Delta x S_2= & \Delta x(X_1+X_2) & \frac{2}{n}\le t<\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x S_n= & \Delta x(X_1+X_2+\ldots+X_n) & t=1 \end{cases}$$

Ετσι $Y_n(t)=\Delta x\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} X_k, t\in[0,1]$.

Με τον τρόπο αυτό έχει συμπιεστεί η ακολουθία S_n στο Unit Interval.

Αυτό που ενδιαφέρει είναι να εξεταστεί η συμπεριφορά του γραφήματος της $Y_n(t)$ που προκύπτει, όταν $\Delta t\to 0 \underset{\Delta t=1/n}{\Rightarrow} n\to\infty$

Για την $Y_n(t)$ προκύπτει ότι $E[Y_n(t)]=E\left[\Delta x\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} X_k\right]=\Delta x\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} E[X_k]=0$ και

$$Var(Y_n(t))=Var\left(\Delta x\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} X_k\right)\underset{Independence}{=}\Delta x^2\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} Var(X_k)\underset{I.D.}{=}\Delta x^2\sum_{k=1}^{[t/\Delta t]} s^2$$

Όταν $\Delta t \to 0 \underset{\Delta t = 1/n}{\Rightarrow} n \to \infty$, προκύπτουν τα εξής:

1. Αν Δx είναι μία σταθερά, $\Delta x = c \neq 0$, τότε

   $Var(Y_n(t)) = c^2 \frac{t}{\Delta t} s^2 = c^2 tn s^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Άρα στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να προκύψει κάποια οριακή κατανομή.

2. Αν $\Delta x = \Delta t = \frac{1}{n} \Rightarrow Var(Y_n(t)) = \Delta t^2 \frac{t}{\Delta t} s^2 = \Delta t \cdot t \cdot s^2 \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$. Άρα στην περίπτωση αυτή μπορεί να προκύψει WLLN για την $Y_n(t)$, επομένως $Y_n(t) \xrightarrow{p} E[Y_n(t)] = 0$. Όμως και πάλι δεν μπορεί να προκύψει κάποιο οριακό γράφημα. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν εφαρμοστεί $\Delta x = O(\Delta t)$

3. Αν $\Delta x = O\left((\Delta t)^{1/2}\right)$, π.χ. $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$, τότε $Var(Y_n(t)) = c^2 \Delta t \frac{t}{\Delta t} s^2 = c^2 t s^2$, η οποία είναι πεπερασμένη και στην περίπτωση που $c = \frac{c'}{s}$, τότε

   $Var(Y_n(t)) = c^2 t s^2 = c'^2 t s^2 \frac{1}{s^2} = c'^2 t$

4. Αν $\Delta x = O\left((\Delta t)^{\frac{1}{p}}\right), p > 2$, π.χ. $\Delta x = c(\Delta t)^{1/p}$, τότε

   $Var(Y_n(t)) = c^2 (\Delta t)^{2/p} \frac{t}{\Delta t} s^2 = c^2 \frac{t}{(\Delta t)^{1-\frac{2}{p}}} s^2 \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \infty$. Οπότε και πάλι δεν μπορεί να προκύψει οριακή κατανομή.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως το scaling factor πρέπει να είναι της μορφής $\Delta x = c\sqrt{\Delta t} = c\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{c}{\sqrt{n}}$. Με την επιλογή π.χ. $c = \frac{1}{s} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{s\sqrt{n}}$, προκύπτει πεπερασμένη διακύμανση $Var(Y_n(t)) = t$. Ετσι για τη διαδικασία $\frac{Y_n(t)}{\sqrt{Var(Y_n(t))}}$, με μέσο 0 και διακύμανση: $Var\left(\frac{Y_n(t)}{\sqrt{Var(Y_n(t))}}\right) = 1$, ισχύουν οι συνθήκες για το Κεντρικό

Οριακό Θεώρημα, οπότε $\frac{Y_n(t)}{\sqrt{Var(Y_n(t))}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$. Ετσι στη γενική περίπτωση

θα είναι :

$$Var(Y_n(t)) = c^2 \Delta t \frac{t}{\Delta t} s^2 = c^2 t s^2 \Rightarrow \frac{Y_n(t)}{cs\sqrt{t}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1) \Rightarrow Y_n(t) \xrightarrow{D} B_t \sim N(0, c^2 s^2 t)$$

, όπου B_t είναι Brownian Motion διαδικασία, συνεχούς χρόνου, η οποία έχει τα εξής

χαρακτηριστικά (θεωρώντας c=1):

i. $B(t+|h|) - B(t) \sim N(0, s^2|h|), t, t+|h| \in [0,1]$

   Δηλαδή, το increment από t σε $t+|h|$, είναι Normal με μέσο 0 και διακύμανση

   $s^2|h|$, ανάλογη του χρονικού διαστήματος.

ii. Για οποιοδήποτε partitioning του Unit Interval σε $k \le n$ intervals:

   $0 \le t_0 \le t_1 \le \mathbf{L} \le t_k \le t$, η διαδικασία των increments έχει Normal joined

   Distribution και επιπλέον τα increments είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους:

$$f(b(t_0), b(t_1)-b(t_0), b(t_2)-b(t_1), \mathbf{L}, b(t_k)-b(t_{k-1}); j) = f(b(t_0); y_0)\prod_{j=1}^{k} f_{t_j-t_{j-1}}(b(t_j)-b(t_{j-1}); y_{tj})$$

   όπου $f_{t_j-t_{j-1}}(b(t_j)-b(t_{j-1}); y_{tj}) = \frac{1}{\sqrt{2p(t_j-t_{j-1})}s} \mathbf{exp}\left[-\frac{(b(t_j)-b(t_{j-1}))^2}{2(t_j-t_{j-1})s^2}\right]$

iii. $b(t_0)$=0

Μία Brownian Motion διαδικασία επομένως, εισάγει τις παρακάτω υποθέσεις:

- Distribution: Κανονική
- Εξάρτηση: Martingale Dependence
- Ετερογένεια: Partial Sum Heterogeneity

Ιδιότητες Brownian Motion

1. Αν και η B(t) είναι διαδικασία συνεχούς χρόνου, δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο t στο [0,1].

Πραγματικά, $Y_n(t) = \Delta x\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}\right)$. Ετσι για την $\dfrac{dY_n(t)}{dt}$, θα είναι:

$\dfrac{\Delta Y_n(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}\right)$. Όμως $\Delta x^2 = c^2 \Delta t \Rightarrow \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{c}{\Delta x}$. Ετσι καθώς

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \Rightarrow \dfrac{c}{\Delta x} \to \infty$, επομένως δεν ορίζεται η παράγωγος.

2. Το γράφημα της B(t) είναι fractal: Παρουσιάζει δηλαδή ομοιομορφία με την αλλαγή κλίμακας.

   Δηλαδή η $\{B(t), t \in [0,1]\}$ και η $\left\{\sqrt{c}B(\frac{t}{c}), t \in [0,1]\right\}$, έχουν την ίδια κατανομή.

Παρατήρηση: Η $Y_n(t)$, έτσι όπως ορίστηκε, δεν είναι συνεχής. Προκειμένου να προκύψει συνεχές γράφημα, εφαρμόζεται interpolation τεχνική, η οποία ισοδυναμεί με την ένωση των κορυφών του γραφήματος της $Y_n(t)$. Ετσι προκύπτει η $Y_n^*(t)$:

$Y_n^*(t) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} X_k\right) + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, t \in [0,1]$ και $[nt]$= το ακέραιο μέρος της nt.

3.3.9.2. FCLT FOR IID PROCESS (DONSKER)

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Πεπερασμένη διακύμανση και μηδενικός μέσος.

B. Dependence: Ανεξαρτησία

C. Heterogeneity: Identically Distributed, με $E[X_k] = 0, Var(X_k) = \sigma^2$

Ø ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τότε για την

$Y_n^*(t) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} X_k\right) + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, t \in [0,1]$, αν γίνει

scaled με την τυπική απόκλιση σ, ισχύει:

$\dfrac{Y_n^*(t)}{\sigma} \xrightarrow{D} Z(.) \sim B(.)$, όπου B(.) είναι Brownian Motion

στο [0,1]

ΤΟ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα προκύπτει από το FCLT αν t=1. Τότε:

$$Y_n^*(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \text{ και } \frac{Y_n^*(1)}{s} \xrightarrow{D} B(1) \sim N(0,1)$$

3.3.9.3. FCLT ΓΙΑ ΣΤΑΣΙΜΕΣ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Υποθέσεις για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$:

A. Distribution: Πεπερασμένη διακύμανση και μηδενικός μέσος.

B. Dependence: ρ-mixing (Asymptotic non-correlation) και $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ και

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[r\left(2^k\right)\right]^t < \infty, t = \frac{1}{2}, 1$$

C. Heterogeneity: Στάσιμη 2ης τάξης, $E[X_k] = m, Var(X_k) = s^2$

Ø **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Τότε για την

$$Y_n^*(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} X_k\right) + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, t \in [0,1]$$, αν γίνει

scaled με την τυπική απόκλιση σ, ισχύει:

$$\frac{Y_n^*(t)}{s} \xrightarrow{D} Z(.) \sim B(.)$$, όπου B(.) είναι Brownian Motion

στο [0,1]

Συγκριτικά με το CLT για ρ-mixing διαδικασίες απαιτείται επιπλέον η συνθήκη:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[r\left(2^k\right)\right]^t < \infty, t = \frac{1}{2}, 1$$

Η παρουσίαση των FCLTs ολοκληρώνεται με ένα Θεώρημα ανάλογο με εκείνο των Mann & Wald, για την περίπτωση συνεχούς χρόνου.

3.3.9.4. CONTINUOUS MAPPING THEOREM

Αν $Y_n(t) \xrightarrow{D} Z(t) \sim B(t)$, τότε για μία συνάρτηση g(.) από το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο [0,1] στο R, $g(.): C[0,1] \to R$, ισχύει:

$$g(Y_n(t)) \xrightarrow{D} g(Z(t)) \sim g(B(t))$$

3.3.10. Οικογένεια Stable Κατανομών

Ένα ερώτημα που γεννιέται , είναι κατά πόσο η Κανονική Κατανομή είναι η μόνη δυνατή οριακή κατανομή αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών. Υπάρχει μήπως κάποια ιδιότητα της Κανονικής Κατανομής που την κάνει υποψήφια οριακή Κατανομή?

Ο Paul Levy απέδειξε πως στην περίπτωση που η partially summed διαδικασία είναι IID, το σύνολο των δυνατών οριακών κατανομών των partial sums, συμπίπτει με την Οικογένεια Stable Κατανομών.

Επιπλέον, στην περίπτωση που η partially summed διαδικασία είναι ανεξάρτητη αλλά όχι και Identically Distributed, οι υποψήφιες οριακές Κατανομές ανήκουν στην Οικογένεια των Infinitely Divisible κατανομών.

Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο Θεώρημα των Gnedenko-Kolmogorov (1954).

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να δοθούν ορισμοί των Οικογενειών κατανομών που αναφέρθηκαν.

3.3.10.1. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Αν X, Y **ανεξάρτητες** τυχαίες μεταβλητές με cdf $F_X(x)$ και $F_Y(y)$, τότε η cdf του αθροίσματος W= X+Y, δίνεται από την συνέλιξη των $F_X(x)$ και $F_Y(y)$, η οποία ορίζεται ως εξής: $F_X * F_Y(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(w-y) dF_Y(y)$

Δηλαδή, $F_W(w) = P(X+Y \le w) = F_X * F_X(w)$

Απόδειξη: $P(X+Y\le w)=\int_{R^2} I_w(x,y)dF(x,y)$, όπου $I_w(x,y)=\begin{cases}1, x\le w-y\\ 0, x>w-y\end{cases}$. Λόγω ανεξαρτησίας $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$. Άρα

$$P(X+Y\le w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_W(x,y)dF_X(x)\right]dF_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{w-y} dF_X(x)\right]dF_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(w-y)dF_Y(y)$$

Επιπλέον, αν $\Phi_X(t)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της X και $\Phi_Y(t)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y, τότε για την χαρακτηριστική συνάρτηση της W= X+Y θα ισχύει: $\Phi_W(t)=\Phi_X(t)\cdot\Phi_Y(t)$

3.3.10.2. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ Ν ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην περίπτωση αθροίσματος n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, η cdf του αθροίσματος προκύπτει με την ανέλιξη των αντίστοιχων cdfs. Ετσι αν, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ όπου $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ, τότε:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\le w\right)=F_{S_n}(w)=F_1 * F_2 * \ldots * F_n.$$

Μία τέτοια συνέλιξη είναι αρκετά πολύπλοκη. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η πολλαπλασιαστική ιδιότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Ετσι :

$$\Phi_{S_n}(t)=\Phi_{X_1}(t)\Phi_{X_2}(t)\ldots\Phi_{X_n}(t)$$

3.3.10.3. INFINITELY DIVISIBLE DISTRIBUTION

Ορισμός

Μία κατανομή F λέγεται infinitely divisible, αν $\forall n\in N$ υπάρχει μία κατανομή F_n, τέτοια ώστε η F να μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνέλιξη n τέτοιων κατανομών:

$$F=\underbrace{F_n * F_n * \ldots * F_n}_{n}$$

Επομένως για τη Χαρακτηριστική συνάρτηση της F θα ισχύει:

$$\Phi(t) = [\Phi_n(t)]^n, \forall n \in N$$

Παράδειγμα: Η Τυπ. Κανονική Κατανομή έχει Χαρακτηριστική συνάρτηση την

$\Phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Έστω η $\Phi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2n}}$. Τότε

$$\forall n \in N, [\Phi_n(t)]^n = \left[e^{-\frac{t^2}{2n}} \right]^n = \Phi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \Phi(t)$$

Επομένως η Κανονική Κατανομή ανήκει στην οικογένεια Infinitely Divisible Distributions.

3.3.10.4. STABLE DISTRIBUTION FAMILY

Ορισμός

Μία κατανομή F με χαρακτηριστική συνάρτηση Φ(t), λέγεται stable αν

$\forall n \in N, [\Phi(t)]^n = e^{itb(n)}\Phi\left(n^{\frac{1}{p}} t \right)$, όπου $0 < p \leq 2$ και b(n) είναι κάποια συνάρτηση του n.

Από τις ιδιότητες των Χαρακτηριστικών συναρτήσεων προκύπτει ότι:

$$\Phi_{b(n)+n^{1/p}X}(t) = E\left[e^{it\left(b(n)+n^{1/p}X \right)} \right] = e^{itb(n)} E\left[e^{n^{1/p}X} \right] = e^{itb(n)}\Phi\left(n^{1/p} t \right)$$

Στην περίπτωση αυτή επομένως, η κατανομή του αθροίσματος n ανεξάρτητων και Identically distributed τυχαίων μεταβλητών είναι ίδια με την marginal Κατανομή εκτός από κάποια αλλαγή στο scale $\left(n^{1/p} \right)$ και στο origin (b(n)).

Επιπλέον αν η stable Κατανομή είναι και συμμετρική ως προς το 0, τότε η χαρακτηριστική της συνάρτηση θα είναι της μορφής:

$$\Phi(t) = e^{-a|t|^p}, a \geq 0$$

Παράδειγμα: Αν $X \sim N(0,1)$, τότε $\Phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ετσι $[\Phi_X(t)]^n = \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^n = e^{-\frac{nt^2}{2}}$.

Επίσης $\Phi_X(\sqrt{n}t) = e^{-\frac{(\sqrt{n}t)^2}{2}} = e^{-\frac{nt^2}{2}} = [\Phi_X(t)]^n$. Άρα η Κανονική Κατανομή ανήκει στην Οικογένεια των Stable Distributions.

Ιδιότητες stable Distributions

1. Όταν p < 2, τότε η κατανομή έχει absolute moments το πολύ τάξης r<p. επομένως η Κανονική Κατανομή είναι Η ΜΟΝΗ Stable Distribution για την οποία υπάρχει η διακύμανση.

2. Οι Stable Κατανομές λειτουργούν ως attractors για αθροίσματα IID τυχαίων μεταβλητών.

3.3.10.5. GNEDENKO-KOLMOGOROV THEOREM (1954)

Οι μόνες δυνατές Οριακές Κατανομές αθροισμάτων IID τυχαίων μεταβλητών ανήκουν στην Οικογένεια των Stable-Paretian Κατανομών.

Ορισμός-Stable Paretian Distribution

Ορίζεται μέσω του λογαρίθμου της Χαρακτηριστικής συνάρτησης ως εξής:

$$\log \Phi_X(t) = \log E\left[e^{itX}\right] = idt - a|t|^p \left(1 + ib\left(t/|t|\right)\right) w(t,p)$$, όπου

$$w(t,p) = \begin{cases} \tan \dfrac{pp}{2}, & p \neq 1 \\ \dfrac{2}{p} \log|t|, & p = 1 \end{cases}$$

<u>Ιδιότητες: </u>Οι κατανομές της Οικογένειας έχουν 4 παραμέτρους

1. **p:** Καθορίζει την πιθανότητα που περιέχεται στα tails της κατανομής και είναι $0 < p \leq 2$. Όταν p<2, τα tails των stable κατανομών είναι μεγαλύτερα από αυτά της Κανονικής Κατανομής. Επιπλέον στην περίπτωση αυτή η διακύμανση δεν είναι πεπερασμένη.

2. **b:** Είναι ένδειξη του skewness της Κατανομής. Όταν b=0, τότε η stable Paretian Κατανομή είναι Συμμετρική.
3. **δ:** Προσδιορίζει θέση και όταν p>1, που σημαίνει ότι υπάρχει ο μέσος, τότε αυτός συμπίπτει με την παράμετρο δ.
4. **α:** Προσδιορίζει το scale της κατανομής. Όταν p=2 , τότε $g = \frac{Var(X)}{2}$

Η Κανονική Κατανομή ανήκει στην Οικογένεια των Stable Paretian Κατανομών.

Η σπουδαιότητα του Θεωρήματος έγκειται στο γεγονός ότι δίνει τη δυνατότητα θεώρησης εναλλακτικών Κατανομών ως Οριακές Κατανομές στην περίπτωση αθροισμάτων IID τυχαίων μεταβλητών. Οι κατανομές αυτές μπορούν να μην έχουν πεπερασμένη διακύμανση, να επιδεικνύουν leptokurtosis, ασυμμετρία κλπ, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους της Stable Paretian χαρακτηριστικής Συνάρτησης.

3.4. Επισκόπηση Οριακών Θεωρημάτων

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι Υποθέσεις, ξεκινώντας από τις πιο δεσμευτικές ανά κατηγορία και τα Οριακά Θεωρήματα – Συμπεράσματα που αντιστοιχούν.

Αρχικά παρουσιάζονται οι υποθέσεις κάθε Κατηγορίας ξεχωριστά, ξεκινώντας από την περισσότερο δεσμευτική.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο Πίνακας με τους συνδυασμούς των Υποθέσεων για τους οποίους ισχύει κάποιο Οριακό Θεώρημα, ταξινομημένος ως προς την ισχύ της στοχαστικής σύγκλισης που συνεπάγεται κάθε Θεώρημα και ξεκινώντας από την πιο ισχυρή.

Με την συγκεκριμένη ταξινόμηση – βαθμολόγηση των υποθέσεων και των μορφών σύγκλισης ο Πίνακας αυτός μπορεί να αναδιαταχθεί ως προς οποιαδήποτε Κατηγορία Υποθέσεων. Ενδεικτικά παρουσιάζονται τρεις τέτοιες αναδιατάξεις.

3.4.1. Υποθέσεις ως προς την Κατανομή (Distribution Assumptions)

Σε κάθε περίπτωση οι υποθέσεις είναι ως προς τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Υπόθεση	"Βαθμός" Δέσμευσης[i]
Bernoulli Distributed: $f(x_k;J_k)=J_k^{x_k}(1-J_k)^{1-x_k},\ x_k=0,1,\ k=1,2,\ldots,0<J<1$	0
Πεπερασμένο moment υψηλότερης τάξης της 2ης + Lyapunov's Condition $E\left[\lvert X_k\rvert^{2+d}\right]<\infty, d>0, k=1,2,\ldots$ + $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^{2+d}}\sum_{k=1}^{n}E\lvert X_k-m_k\rvert^{2+d}\right]=0, \forall e>0$	1
Πεπερασμένο moment τάξης υψηλότερης της 2ης: $E\left[\lvert X_n\rvert^{2+d}\right]<\infty, d>0, n\in N$	2
Πεπερασμένα moments 2ης τάξης + Unformly Bounded διαδικασία + Η διακύμανση των partial sums της διαδικασίας απειρίζεται: $E\left[X_k^2\right]<\infty, k=1,2,\ldots$ + $P(\lvert X_k\rvert<b)\xrightarrow[n\to\infty]{}1, b>0$ + $s_n^2=Var\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$	3
Πεπερασμένη Διακύμανση + Η ακολουθία των μέσων είναι φραγμένη από κοινό άνω φράγμα + Η ακολουθία	4

---

[i] Χαμηλότερος βαθμός αντιστοιχεί στην περισσότερη δεσμευτική υπόθεση, ενώ όσο ο βαθμός αυξάνεται η υπόθεση γίνεται λιγότερο δεσμευτική

των διακυμάνσεων είναι φραγμένη από κοινό άνω φράγμα: $E[X_k] < n < \infty, \forall k$ + $Var(X_k) < c < \infty, \forall k$	
Πεπερασμένη Διακύμανση + Η ακολουθία των διακυμάνσεων είναι φραγμένη από κοινό άνω φράγμα: $Var(X_k) < c < \infty, \forall k$	5
Πεπερασμένη διακύμανση ($Var(X_k) < \infty, \forall k$) + $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty$	6
Πεπερασμένη διακύμανση + Lindeberg Condition: $Var(X_k) = s_k^{\,2}, k = 1,2,\ldots$ + $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[(X_k - m_k)^2 I_{\{\lvert X_k - m_k\rvert > e s_n\}}\right]\right] = 0, \forall e > 0$	7
Πεπερασμένη Διακύμανση + Η ακολουθία των διακυμάνσεων των partial sums απειρίζεται: $E[X_k^{\,2}] < \infty, k = 1,2,\ldots$ + $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$	8
Πεπερασμένη Διακύμανση + Μηδενικός Μέσος: $E[X_k] = 0, Var(X_k) = s_k^2, k = 1,2,\ldots$	9
Πεπερασμένη Διακύμανση: $Var(X_k) < \infty, \forall k$	10
Πεπερασμένος μέσος: $E[X_k] < \infty, \forall k$	11

3.4.2. Υποθέσεις ως προς την Εξάρτηση (Dependence Assumptions)

Σε κάθε περίπτωση οι υποθέσεις είναι ως προς τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Υπόθεση	"Βαθμός"

	Δέσμευσης
Γενική Ανεξαρτησία: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; j) = f_1(x_1; J_1) f_2(x_2; J_2) \ldots f_n(x_n; J_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k; J_k)$	0
Pairwise Independence	1
Mean Conditional Independence (MCI) - MD	2
Ασυμπτωτική Γρ. Ανεξαρτησία (ρ-mixing) + Η ακολουθία των συντελεστών αυτοσυσχέτισης είναι φραγμένη από συνάρτηση της απόστασης των τ.μ. η οποία τείνει στο 0 όταν η απόσταση απειρίζεται : $\mathbf{cov}(X_i, X_{i+t}) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ + $\mathbf{Corr}(X_i, X_j) \leq r(\lvert i - j \rvert) \leq 1$, όπου $i, j = 1, 2, \ldots, r(0) = 1, \lim_{k \to \infty} r(k) = 0$	3
Ασυμπτωτική Γρ. Ανεξαρτησία (ρ-mixing) + Συνθήκη για τον ρυθμό του mixing: ($\lim_{t \to \infty} r(t) = \lim_{t \to \infty} \sup_{X \in \mathrm{A},\, Y \in \mathrm{B}} \lvert corr(X, Y) \rvert = 0$) + $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} r(2^k) < \infty$	4
Ασυμπτωτική Γρ. Ανεξαρτησία (ρ-mixing) $\lim_{t \to \infty} r(t) = \lim_{t \to \infty} \sup_{X \in \mathrm{A},\, Y \in \mathrm{B}} \lvert corr(X, Y) \rvert = 0$	5
Kolmogorov's Condition: $\lim_{n \to \infty} E\left[\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2} \right] = 0$	6
α-mixing + Συνθήκη για το ρυθμό mixing: $a(k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ + $\sum_{k=1}^{\infty} a(k)^{\frac{d}{2+2}} < \infty$	7
α-mixing: $a(k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$	8

3.4.3. Υποθέσεις ως προς την Ετερογένεια (Heterogeneity Assumptions)

Σε κάθε περίπτωση οι υποθέσεις είναι ως προς τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$

Υπόθεση	"Βαθμός" Δέσμευσης
Strict Stationarity: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{1+t}, x_{2+t}, \ldots, x_{n+t}), \forall t$	0
Identically Distributed: $f_k(x_k; \vartheta_k) = f(x; \vartheta), \forall k = 1,2,\ldots$	1
Ίδια Οικογένεια marginal Distributions, δυνατότητα διαφορετικών Parameter Space	2
Η διαδικασία είναι bounded από trivially stationary διαδικασία: $P(\lvert X_n \rvert > x) \leq cP(\lvert X \rvert > x), \forall x \geq 0, n \geq 1$	3
Στάσιμη 2ης τάξης: $E[X_i] = m < \infty, \forall i$ + $\operatorname{cov}(X_i, X_{i+t}) = \rho(\lvert t \rvert), i = 1,2,\ldots, t = 0,1,2,\ldots$	4
Στάσιμη 1ης τάξης: $E[X_i] = m < \infty, \forall i$	5
Τα moments 1ης και 2ης τάξης μπορούν να είναι διαφορετικά: $E[X_k] = m_k, k = 1,2,\ldots$ + $Var(X_k) = \sigma_k^2$	6

3.4.4. Μορφές σύγκλισης στ. Διαδικασίας

Μορφή σύγκλισης – Θεώρημα	"Βαθμός" σύγκλισης[i]

[i] Μικρότερος βαθμός αντιστοιχεί στην πιο ισχυρή μορφή σύγκλισης.

Almost Sure Convergence (SLLN): $P\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - E\left[X_k\right]\right)\right]=0\right)=1$	0
Σύγκλιση κατά πιθανότητα (WLLN): $\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right\| < e\right)=1, \forall e>0$	1
Σύγκλιση κατά Distribution (CLT): Αν $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k - m_k$, με $E\left[S_n\right]=0, Var\left(S_n\right)=s_n^2=\sum_{k=1}^{n} s_k^2$, τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{s_n}\le z\right)=\Phi(z):=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{1}{2}u^2}du, \forall z\in R$	2

3.4.5. Συνδυασμοί Υποθέσεων που είναι ικανοί για την Ισχύ Οριακών Θεωρημάτων

Στον πίνακα που ακολουθεί οι Υποθέσεις κάθε Κατηγορίας απεικονίζονται με το βαθμό δέσμευσης που τους έχει αποδοθεί στην προηγούμενη ενότητα.

Η ταξινόμηση του Πίνακα έχει γίνει ως προς την μορφή σύγκλισης που υπεισέρχεται σε κάθε Οριακό Θεώρημα

Distribution	Dependence	Heterogeneity	Limit Theorem
0	0	1	0 – SLLN (Borel)
6	0	6	0 – SLLN (Kolmogorov)
11	0	1	0 – SLLN (Kolmogorov IID process)
6	2	5	0 – SLLN (L_2 Martingales) – Shiryayev

11	2	0	0 – SLLN (L_1-Martingales)
2	7	0	0 – SLLN (Strong Mixing processes)
0	0	1	1 – WLLN (Bernoulli)
0	0	2	1 – WLLN (Poisson)
5	1	6	1 – WLLN (Chebyshev)
5	5	6	1 – WLLN (Markov)
4	3	6	1 – WLLN (Bernstein)
10	6	6	1 – WLLN (Kolmogorov)
11	0	1	1 – WLLN (Khintchine)
0	0	1	2 – CLT (De Moivre-Laplace)
9	0	1	2 – CLT (Lindeberg –Levy)
7	0	6	2 – CLT (Lindeberg-Feller)
1	0	6	2 – CLT (Lyapunov)
3	0	6	2 – CLT (Chebyshev – Markov)
6	2	5	2 – CLT (Martingales)
2	8	0	2 – CLT (Strong Mixing)
8	4	4	2 – CLT (ρ-mixing)

3.4.5.1. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ DISTRIBUTION ΔΕΣΜΕΥΣΕΙΣ

Ο πίνακας που ακολουθεί έχει προκύψει από τον προηγούμενο με ταξινόμηση ως προς Distribution-Heterogeneity-Dependence

Distribution	Dependence	Heterogeneity	Limit Theorem
0	0	1	0 – SLLN (Borel)
0	0	1	1 – WLLN (Bernoulli)
0	0	1	2 – CLT (De Moivre-Laplace)

0	0	2	1 – WLLN (Poisson)
1	0	6	2 – CLT (Lyapunov)
2	7	0	0 – SLLN (Strong Mixing processes)
2	8	0	2 – CLT (Strong Mixing)
3	0	6	2 – CLT (Chebyshev – Markov)
4	3	6	1 – WLLN (Bernstein)
5	1	6	1 – WLLN (Chebyshev)
5	5	6	1 – WLLN (Markov)
6	2	5	0 – SLLN (L_2 Martingales) – Shiryayev
6	2	5	2 – CLT (Martingales)
6	0	6	0 – SLLN (Kolmogorov)
7	0	6	2 – CLT (Lindeberg-Feller)
8	4	4	2 – CLT (ρ-mixing)
9	0	1	2 – CLT (Lindeberg –Levy)
10	6	6	1 – WLLN (Kolmogorov)
11	2	0	0 – SLLN (L_1-Martingales)
11	0	1	0 – SLLN (Kolmogorov IID process)
11	0	1	1 – WLLN (Khintchine)

3.4.5.2. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ DEPENDENCE ΔΕΣΜΕΥΣΕΙΣ

Ο πίνακας που ακολουθεί έχει προκύψει από τον αρχικό με ταξινόμηση ως προς Dependence-Distribution-Heterogeneity

Distribution	**Dependence**	**Heterogeneity**	**Limit Theorem**
0	0	1	0 – SLLN (Borel)

0	0	1	1 – WLLN (Bernoulli)
0	0	1	2 – CLT (De Moivre-Laplace)
9	0	1	2 – CLT (Lindeberg –Levy)
11	0	1	0 – SLLN (Kolmogorov IID process)
11	0	1	1 – WLLN (Khintchine)
0	0	2	1 – WLLN (Poisson)
1	0	6	2 – CLT (Lyapunov)
3	0	6	2 – CLT (Chebyshev – Markov)
6	0	6	0 – SLLN (Kolmogorov)
7	0	6	2 – CLT (Lindeberg-Feller)
5	1	6	1 – WLLN (Chebyshev)
11	2	0	0 – SLLN (L_1-Martingales)
6	2	5	0 – SLLN (L_2 Martingales) – Shiryayev
6	2	5	2 – CLT (Martingales)
4	3	6	1 – WLLN (Bernstein)
8	4	4	2 – CLT (ρ-mixing)
5	5	6	1 – WLLN (Markov)
10	6	6	1 – WLLN (Kolmogorov)
2	7	0	0 – SLLN (Strong Mixing processes)
2	8	0	2 – CLT (Strong Mixing)

Με τη συγκεντρωτική αυτή παρουσίαση ολοκληρώθηκε η Δεύτερη Ενότητα. Έχοντας υπ’όψη τους Πίνακες που προέκυψαν, στην επόμενη Ενότητα διερευνάται η εφαρμογή των Οριακών Θεωρημάτων στις στοχαστικές διαδικασίες που υπονοούνται από οικονομετρικά μοντέλα που προτείνονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία.

4. Στατιστικά Μοντέλα και Οριακά Θεωρήματα

Στην ενότητα αυτή διερευνάται η εφαρμογή Οριακών θεωρημάτων και συγκεκριμένα του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, σε μερικά από τα πιο γνωστά στατιστικά μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση χρονοσειρών, όπως οι αποδόσεις των μετοχών, επιτόκια, exchange rates κλπ.

Αρχικά παρουσιάζεται το γενικό πλαίσιο, που επιτρέπει την εφαρμογή οριακών θεωρημάτων.

Στη συνέχεια εξετάζονται τα τρία βασικά μοντέλα που αντιστοιχούν σε τρεις χρονικές περιόδους, από την εποχή του Bachelier, έως σήμερα[7].

4.1. Γενικό Πλαίσιο

Στατιστικό Μοντέλο, είναι ένα σύνολο υποθέσεων ως προς την στοχαστική διαδικασία που εξετάζεται, οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν στις 3 βασικές κατηγορίες υποθέσεων: Κατανομής, Εξάρτησης, Ετερογένειας.

Στοχαστική Διαδικασία Αποδόσεων

Αν $\{\boldsymbol{P_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}\}$ η διαδικασία των τιμών, τότε η απόδοση για το χρονικό διάστημα (t-1,t], είναι $\boldsymbol{R_t} = \frac{\boldsymbol{P_t} - \boldsymbol{P_{t-1}}}{\boldsymbol{P_t}} = \frac{\boldsymbol{P_t}}{\boldsymbol{P_{t-1}}} - 1 \Rightarrow 1 + \boldsymbol{R_t} = \frac{\boldsymbol{P_t}}{\boldsymbol{P_{t-1}}}$. Επομένως η απόδοση συνεχούς χρόνου στο διάστημα (t-1,t], είναι:

$\boldsymbol{r_t} : \boldsymbol{e}^{r_t} = 1 + \boldsymbol{R_t} = \frac{\boldsymbol{P_t}}{\boldsymbol{P_{t-1}}} \Rightarrow \boldsymbol{r_t} = \ln \boldsymbol{P_t} - \ln \boldsymbol{P_{t-1}} = \boldsymbol{p_t} - \boldsymbol{p_{t-1}}$, όπου $\{\boldsymbol{p_t} := \ln \boldsymbol{P_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}\}$,

είναι η διαδικασία των λογαρίθμων των τιμών.

Τα μοντέλα που παρουσιάζονται στη συνέχεια, αφορούν στη διαδικασία των αποδόσεων $\{\boldsymbol{r_t}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}\}$

<u>**Ζήτημα:**</u> Για τη διαδικασία των αποδόσεων, μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει με partial summation από μία άλλη διαδικασία “στοιχειωδών” αποδόσεων? Μία τέτοια

θεώρηση θα επέτρεπε την εφαρμογή οριακών συμπερασμάτων για τη διαδικασία των αποδόσεων, αν το πλήθος των partially summed τυχαίων μεταβλητών είναι αρκετά μεγάλο και εφόσον ικανοποιεί τις υποθέσεις των Οριακών Θεωρημάτων.

Μία αρχική προσέγγιση είναι πως αν το unit interval στη διαδικασία $\{r_t, t \in T\}$ θεωρηθεί αρκετά μεγάλο, π.χ. έτος, τότε πραγματικά οι ετήσιες αποδόσεις είναι το άθροισμα των ημερήσιων αποδόσεων του έτους, ή το άθροισμα των εβδομαδιαίων αποδόσεων του έτους.

Σε κάθε περίπτωση οι ετήσιες αποδόσεις προκύπτουν ως άθροισμα πεπερασμένου και σχετικά μικρού αριθμού στοιχειωδών αποδόσεων. Μία τέτοια προσέγγιση επομένως δεν είναι ικανή να οδηγήσει σε Οριακά Συμπεράσματα.

Διαδικασία Στοιχειωδών Αποδόσεων

Έστω $\{x_i\}$ η διαδικασία των αποδόσεων από συναλλαγή σε συναλλαγή. Τότε

$r_t = \sum_{i=1}^{n_t} x_i$, όπου n_t = το πλήθος των συναλλαγών στο χρονικό διάστημα (t-1, t] και το οποίο μπορεί να είναι ικανοποιητικά μεγάλο ώστε να προκύψουν οριακά αποτελέσματα.

Οι υποθέσεις για την partially summed διαδικασία είτε εκφράζονται άμεσα στο Στατιστικό μοντέλο, είτε υπονοούνται από αυτό, όπως προκύπτει από την παρουσίαση που ακολουθεί.

4.2. Random Walk Model (Bachelier(1900) – Osborne(1960))

Υποθέσεις για τη διαδικασία $\{x_i\}$:

A. **DISTRIBUTION:** Μηδενικός μέσος και πεπερασμένη διακύμανση,

$$E[x_i] = 0, Var(x_i) = s^2 < \infty$$

B. **DEPENDENCE:** Ανεξαρτησία.

C. HETEROGENEITY: Identically Distributed.

Εφαρμογή Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος

Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις και χρησιμοποιώντας τους Πίνακες της προηγούμενης ενότητας, προκύπτει ότι ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Levy, σύμφωνα με το οποίο:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \xrightarrow{D} N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{D} N\left(0, Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right) = N\left(0, n s^2\right)$$

Άρα, $r_t \xrightarrow{D} N\left(0, s_r^2\right)$, όπου $s_r^2 = n s^2$

Οριακά Συμπεράσματα για τη διαδικασία των Αποδόσεων

A. Distribution: Κανονική, $r_t \xrightarrow{D} N\left(0, s_r^2\right)$, όπου $s_r^2 = n s^2$

B. Dependence:Ανεξαρτησία, γιατί $\mathbf{cov}(r_t, r_s) = E\left[\sum_{i=1}^{n_t} x_{t_i} \sum_{j=1}^{n_t} x_{t_j}\right] = 0$, λόγω ανεξαρτησίας της διαδικασίας $\{x_i\}$. Η γραμμική Ανεξαρτησία, λόγω Κανονικότητας είναι ισοδύναμη με Γενική Ανεξαρτησία.

C. Heterogeneity: Identically distributed, υπό την προϋπόθεση ότι το πλήθος των συναλλαγών στα διαστήματα (t-1,t], είναι οριακά ίδιο.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η διαδικασία των λογαρίθμων των τιμών είναι Random Walk: $p_t = p_{t-1} + r_t$, εφόσον για τη διαδικασία r_t είναι $r_t \sim IID(0, s_r^2)$.

Συμβατότητα Εμπειρικών αποτελεσμάτων και Στατιστικού

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των χρονοσειρών των αποδόσεων, είναι ικανά για την αμφισβήτηση του Normal – Random Walk model. Τα συμπεράσματα μπορούν και πάλι να ταξινομηθούν ως προς τις 3 βασικές κατηγορίες υποθέσεων:

A. Distribution: Η παρατηρούμενη κατανομή των αποδόσεων παρουσιάζει αποκλίσεις από την Κανονική. Ενώ παρατηρείται συμμετρία, και η δειγματική skewness είναι πολύ κοντά σε αυτήν της Κανονικής (α_3=0), ο δειγματικός συντελεστής kurtosis είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν της κανονικής (α_4=3). Η Κανονική Κατανομή για τις αποδόσεις τίθεται υπό αμφισβήτηση.

B. Dependence: Από τα tests Ανεξαρτησίας των αποδόσεων προέκυψαν διφορούμενα αποτελέσματα. Τα tests για Γρ. Εξάρτηση σε άλλες περιπτώσεις επιβεβαιώνουν την υπόθεση γραμμικής ανεξαρτησίας, ενώ σε άλλες επιδεικνύουν στατιστικά σημαντικό συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Η γραμμική εξάρτηση σε αυτή την περίπτωση ερμηνευτική ως spurious correlation , που οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο averaging των χρονοσειρών.

Λόγω της αρχικής υπόθεσης Κανονικής Κατανομής, η έλλειψη γραμμικής εξάρτησης ισοδυναμούσε με Γενική Ανεξαρτησία. Από τη στιγμή όμως που η Κανονική Κατανομή αμφισβητείται, η έλλειψη αυτοσυσχέτισης δεν ταυτίζεται με Ανεξαρτησία. Η εξάρτηση μπορεί να προκύψει από ροπές (δεσμευμένες) υψηλότερης τάξης.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε πως η δειγματική διακύμανση επιδεικνύει “erratic behavior”, δηλαδή δεν φαίνεται να συγκλίνει σε συγκεκριμένη τιμή, ακόμη και όταν το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγάλο.

Τέλος, αρχίζει να παρατηρείται η ύπαρξη διαδοχικών ομάδων (clusters) με παρόμοια διακύμανση στη χρονοσειρά των αποδόσεων (volatility clustering).

Η υπόθεση Ανεξαρτησίας υπό αμφισβήτηση.

C. Heterogeneity: Η διακύμανση των αποδόσεων δεν φαίνεται να είναι σταθερή διαχρονικά. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, όπως π.χ. στο γεγονός ότι το πλήθος των συναλλαγών είναι διαφορετικό από περίοδο σε περίοδο.

Η Υπόθεση Στασιμότητας υπό αμφισβήτηση.

Το αντιπροσωπευτικό μοντέλο της επόμενης περιόδου, απαντάει σε μερικά από αυτά τα ζητήματα, ενώ μία πλήρης προσέγγιση όλων των ζητημάτων που προκύπτουν από τα εμπειρικά αποτελέσματα γίνεται με τα GARCH Μοντέλα της επόμενης περιόδου.

4.3. Stable-Paretian Αποδόσεις (Mandelbrot(1960-1980))

Ο Mandelbrot παρατήρησε πως η παρατηρούμενη κατανομή των αποδόσεων έχει ιδιαίτερα long tails, γεγονός που, σε συνδυασμό με την “erratic behavior” της δειγματικής διακύμανσης αιτιολόγησε με το ενδεχόμενο μη πεπερασμένης διακύμανσης για τη διαδικασία των στοιχειωδών αποδόσεων.

Έτσι το προτεινόμενο μοντέλο εισάγει τις παρακάτω υποθέσεις για τη διαδικασία $\{x_i\}$:

A. DISTRIBUTION: Πεπερασμένος μέσος $\boldsymbol{E}[x_i]=0$, μη πεπερασμένη διακύμανση.

B. DEPNDENCE: Ανεξαρτησία

C. HETEROGENEITY: Identically Distributed.

<u>Εφαρμογή Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος</u>

Κάτω από την υπόθεση μη πεπερασμένης διακύμανσης , όπως προκύπτει από τους πίνακες της προηγούμενης ενότητας, δεν προκύπτει Κανονική Οριακή Κατανομή, παρά το γεγονός της ισχυρής IID υπόθεσης για τη διαδικασία των στοιχειωδών αποδόσεων.

Σύμφωνα όμως με το Θεώρημα των Gnedenko-Kolmogorov, η διαδικασία των αποδόσεων ως άθροισμα IID τυχαίων μεταβλητών, θα έχει οριακή κατανομή που θα ανήκει στην Οικογένεια των Stable Paretian Κατανομών.

Οριακά Συμπεράσματα για τη διαδικασία των Αποδόσεων

A. Distribution: Stable Paretian, $\boldsymbol{r_t} \xrightarrow{D} \boldsymbol{SP}$, με πεπερασμένο μέσο $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r_t}]=0$ και ενδεχομένως άπειρη διακύμανση.

B. Dependence: Ανεξαρτησία

C. Heterogeneity: Identically distributed.

<u>Συμβατότητα Εμπειρικών αποτελεσμάτων και Στατιστικού</u>

A. Distribution: Η ένδειξη Leptokurtosis στην παρατηρούμενη κατανομή, είναι συμβατή με την Οριακή Stable Paretian Κατανομή, η οποία προκύπτει όταν η παράμετρος p της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης είναι μικρότερη από 2. Στην περίπτωση αυτή η διακύμανση δεν είναι πεπερασμένη και το μέγεθος της πιθανότητας που περιέχεται στα tails της κατανομής είναι μεγαλύτερο από αυτό της Κανονικής. Η μη πεπερασμένη διακύμανση, αιτιολογεί και την “erratic behavior” της δειγματικής διακύμανσης.

B. Dependence: Η διατήρηση της υπόθεσης Γενικής Ανεξαρτησίας παρά το γεγονός ότι η Οριακή Κατανομή των αποδόσεων δεν είναι απαραίτητα Κανονική, δεν εξηγεί την ύπαρξη volatility clustering στις χρονοσειρές των αποδόσεων.

C. Heterogeneity: Το γεγονός ότι η διακύμανση των αποδόσεων φαίνεται να μην είναι σταθερή χρονικά, αιτιολογείται από την υπόθεση μη πεπερασμένης διακύμανσης.

Το γεγονός ότι οι μόνες Stable Paretian Κατανομές με γνωστή Distribution formula, είναι η Κανονική και η Cauchy Κατανομή, καθιστά το μοντέλο όχι ιδιαίτερα εύχρηστο. Επιπλέον η θεώρηση άπειρης διακύμανσης, έρχεται σε αντίφαση με την οικονομική ερμηνεία της διακύμανσης ως μέτρο κινδύνου.

Τα μοντέλα της επόμενης περιόδου αντιμετωπίζουν το παρατηρούμενο volatility clustering, επιτρέποντας στην αδέσμευτη διακύμανση να είναι πεπερασμένη.

4.4. MD-GARCH (1980 – Σήμερα)

Η βασική ιδέα των μοντέλων της περιόδου είναι ότι η διαδικασία των αποδόσεων δεν είναι απαραίτητα Ανεξάρτητη. Ετσι το μοντέλο είναι μοντέλο δεσμευμένων Κατανομών σε αντίθεση με τα Μοντέλα των προηγούμενων περιόδων που είναι μοντέλα marginal Distributions.

Η εξάρτηση μπορεί να εμφανίζεται μέσω δεσμευμένων ροπών υψηλότερης τάξης του δεσμευμένου μέσου, εισάγοντας ετεροσκεδαστικότητα για τη δεσμευμένη διακύμανση.

Το Μοντέλο που εξετάζεται για τη συγκεκριμένη περίοδο είναι το MD-GARCH. Οι υποθέσεις που εισάγει για την διαδικασία των στοιχειωδών αποδόσεων είναι :

A. DISTRIBUTION: Η δεσμευμένη Κατανομή των στοιχειωδών αποδόσεων έχει πεπερασμένο μέσο ίσο με 0 και πεπερασμένη διακύμανση, δηλαδή:

$x_i \left| s\left(x_{i-1}, x_{i-2}, \mathbf{L}, x_1\right) \sim (0, \boldsymbol{h}_i^2)\right.$

B. DEPENDENCE: MD Dependence. Εφόσον $\boldsymbol{E}\left[x_i \left| s\left(x_{i-1}, x_{i-2}, \mathbf{L}, x_1\right)\right.\right] = 0$ και αν υπάρχει ο αδέσμευτος μέσος, τότε προκύπτει Mean Conditional Independence.

C. HETEROGENEITY: Στάσιμη 1^{ης} τάξης.

<u>Υποθέσεις για την διαδικασία των αποδόσεων</u>

Είναι Martingale Difference διαδικασία 2^{ης} τάξης:

A. DISTRIBUTION: Πεπερασμένος μέσος ίσος με μηδέν και πεπερασμένη διακύμανση.

B. DEPENDENCE: Mean Conditional Independence. Ετεροσκεδαστική δεσμευμένη διακύμανση, δηλαδή: $\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{r}_t \left| s\left(\boldsymbol{r}_{t-1}, \boldsymbol{r}_{t-2}, \mathbf{L}, \boldsymbol{r}_1\right)\right.\right] = 0$ και

$\boldsymbol{Var}\left(\boldsymbol{r}_t \left| s\left(\boldsymbol{r}_{t-1}, \boldsymbol{r}_{t-2}, \mathbf{L}, \boldsymbol{r}_{1=g}\right)\right.\right) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{t-1}, \boldsymbol{r}_{t-2}, \mathbf{L}, \boldsymbol{r}_{1=g})$

C. HETEROGENEITY: Στάσιμη 1^{ης} τάξης.

<u>Εφαρμογή Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος</u>

Από τους Πίνακες της προηγούμενης ενότητας προκύπτει πως αν για τη διαδικασία των στοιχειωδών αποδόσεων υποτεθεί ότι είναι MD 2^{ης} τάξης, για να ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα απαιτείται η ενίσχυση των Distribution υποθέσεων με τη συνθήκη $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{Var}(x_{\boldsymbol{k}})}{\boldsymbol{k}^2} < \infty$. Επομένως δεν μπορεί να εξαχθεί ως Οριακή Κατανομή η κανονική χωρίς την λήψη ισχυρότερων distribution υποθέσεων.

Η αναζήτηση Οριακής κατανομής σε κάποια Οικογένεια Κατανομών όπως η Stable Paretian, δεν είναι εφικτή εφόσον οι Stable Κατανομές είναι attractors στην περίπτωση που οι στοιχειώδεις αποδόσεις είναι ανεξάρτητες και Identically distributed.

<u>Συμβατότητα Εμπειρικών αποτελεσμάτων και Στατιστικού Μοντέλου</u>

A. Distribution: Η ένδειξη Leptokurtosis στην παρατηρούμενη κατανομή, μπορεί να αιτιολογηθεί εφόσον οι αποδόσεις προκύπτουν ως άθροισμα στοιχειωδών αποδόσεων που μπορούν να έχουν διαφορετική αδέσμευτη διακύμανση και η οριακή κατανομή δεν είναι η κανονική. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει χωρίς την υπόθεση μη πεπερασμένης διακύμανσης.

B. Dependence: Η ετεροσκεδαστική δεσμευμένη διακύμανση εξηγεί το volatility clustering φαινόμενο και είναι συμβατή με την παρατηρούμενη ανυπαρξία γραμμικής εξάρτησης.

C. Heterogeneity: Το γεγονός πως η διακύμανση των αποδόσεων φαίνεται να μην είναι σταθερή διαχρονικά, εξηγείται από την ετεροσκεδαστική δεσμευμένη διακύμανση ακόμη και στην περίπτωση που η διαδικασία είναι στάσιμη.

Από τα παραπάνω προκύπτει για τα μοντέλα αυτής της περιόδου ένα ζήτημα που μένει αναπάντητο:

Μπορεί να προκύψει Οριακή κατανομή διαφορετική από την Κανονική στην περίπτωση που η διαδικασία των αποδόσεων είναι άθροισμα Εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών? Υπάρχει δηλαδή κάποια Οικογένεια Κατανομών που λειτουργεί ως attractor σε αυτή την περίπτωση?

Με αυτό το ανοιχτό ζήτημα ολοκληρώνεται η παρουσίαση των Οριακών Θεωρημάτων και των εφαρμογών τους, υποδηλώνοντας τη μελλοντική δυναμική της Θεωρίας της Στοχαστικής Σύγκλισης.

Βιβλιογραφία

[1] Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713- Translation by Bing Sung, Dept. of Statistics, Harvard University

[2] Glenn Shafer, Vladimir Vovk, *Probability and Finance*, 2001-Willey Series in Probability and Statistics

[3] Aris Spanos, *Probability Theory and Statistical Inference*, 1999-Cambridge University Press

[4] Ron C.Mittelhammer, *Mathematical Statistics for Economics and Business*, 1996-Springer-Verlag New York Inc.

[5] Valentin V.Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory,* 1995-Oxford Science Publications

[6] James Davidson, *Stochastic Limit Theory,* 1994 –Oxford University Press

[7] Elena Andreoy, Nikitas Pittis, Aris Spanos, *On Modeling Speculative prices: The Empirical Literature,* 2001- Journal of Economic Surveys Vol. 15, No.2, Blackwell Publishers Ltd