

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

### 4.1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα της ισονομίας δύο ανεξάρτητων δειγμάτων έχει μελετηθεί εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία. Ένας δημοφιλής και ελεύθερος κατανομής έλεγχος για δύο δείγματα μεγέθους  $m, n$  είναι ο από κοινού έλεγχος διαμέσου (*joint median test*) των Mood (1954) και Westenberg (1948, 1952). Αν τα δείγματα  $X_1, X_2, \dots, X_m$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  προέρχονται από τις κατανομές  $F$  και  $G$  αντίστοιχα, τότε ο συγκεκριμένος έλεγχος βασίζεται στο πλήθος των  $Y$ -παρατηρήσεων που είναι μικρότερες (προηγούνται) από τη μεσαία παρατήρηση  $\delta$  του συνόλου των  $(m+n)$  παρατηρήσεων. Η μηδενική υπόθεση  $H_0 : F = G$  μπορεί να εξετασθεί με τη βοήθεια των αναλογιών των  $X$ - και  $Y$ -παρατηρήσεων που βρίσκονται πριν τη διάμεσο  $\delta$ . Πρόσθετες γενικεύσεις του παραπάνω ελέγχου για διάφορα τεταρτημόρια του από κοινού δείγματος, έχουν προταθεί στην εργασία του Massey (1951).

Εναλλακτικά, ο Mathisen (1943) έχει εισάγει έναν έλεγχο που βασίζεται στη διάμεσο για τη σύγκριση των κατανομών δύο δειγμάτων. Συγκεκριμένα το τεστ του Mathisen (1943) (*control median test*) στηρίζεται στο πλήθος των  $Y$ -παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από τη διάμεσο του  $X$ -δείγματος, με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος του  $X$ - και  $Y$ -δείγματος είναι περιττό και άρτιο αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Kimball *et al.* (1957) χρησιμοποίησαν τον παραπάνω έλεγχο για τη μελέτη των χρόνων επιβίωσης πειραματικών μονάδων που ήταν χωρισμένες σε δύο ομάδες και υποβάλλονταν σε ακτινοβολία, με σκοπό την εξέταση της επίδρασης ενός φαρμάκου ενάντια στον ιονισμό της ακτινοβολίας. Το φάρμακο χορηγήθηκε μόνο στις μονάδες της πειραματικής ομάδας, στην οποία καταγράφονται οι χρόνοι θανάτου μέχρι το θάνατο της μεσαίας μονάδας της ομάδας ελέγχου. Ο αριθμός των θανάτων που συμβαίνουν πριν το θάνατο της μεσαίας μονάδας της ομάδας ελέγχου, αποτελεί

το κριτήριο για τη λήψη της απόφασης για το αν το φάρμακο συντελεί στην επιβίωση μιας πειραματικής μονάδας που υποβάλλεται σε ακτινοβολία. Μολονότι ο Bowker (1944) επισήμανε ότι η παραπάνω συνάρτηση δεν θα είναι συνεπής σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα όταν οι κατανομές των δύο δειγμάτων έχουν τη ίδια διάμεσο, η συνάρτηση κρίνεται συνεπής για εναλλακτικές υποθέσεις μετατόπισης θέσης. Ο Gart (1963) μελέτησε ιδιότητες της διαμέσου ως ελεγχοσυνάρτησης, αποδεικνύοντας ότι είναι ασυμπτωτικά τόσο αποτελεσματική όσο το από κοινού τεστ διαμέσου που περιγράφηκε παραπάνω. Πρόσθετα, ο Gastwirth (1968) επισήμανε ότι η χρήση της διαμέσου σε ελέγχους για το αν δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή, μειώνει το πλήθος των παρατηρήσεων που απαιτούνται για την εφαρμογή τους.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η διάμεσος του δείγματος αντιστοιχεί στη στατιστική συνάρτηση προτεραιότητας  $P_{(r)}$  με  $r = (m+1)/2$  ( $m$  περιττός), που χρησιμοποιεί το άθροισμα των συχνοτήτων  $M_1, M_2, \dots, M_r$ , όπως αυτά ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 3 για δύο δείγματα  $X_1, X_2, \dots, X_m$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Συνεπώς, είναι δυνατόν να κατασκευαστούν πρόσθετες στατιστικές συναρτήσεις που ορίζονται με τη βοήθεια των  $M_i$ . Για παράδειγμα, οι Haga (1959) και Hajek & Sidak (1967) μελέτησαν τις συναρτήσεις  $M_{m+1} + M_1^* - (M_{n+1}^* + M_1)$  και  $\min(M_{m+1}, M_1^*) - \min(M_{n+1}^*, M_1)$ , όπου οι  $M_1, M_{m+1}$  εκφράζουν το πλήθος των  $Y$ -παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από την πρώτη διατεταγμένη παρατήρηση  $X_{1:m}$  και μεγαλύτερες από την  $m$ -οστή  $X_{m:m}$  αντίστοιχα, ενώ οι  $M_1^*, M_{n+1}^*$  εκφράζουν το πλήθος των  $X$ -παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από την πρώτη διατεταγμένη παρατήρηση  $Y_{1:n}$  και μεγαλύτερες από την  $n$ -οστή  $Y_{n:n}$  αντίστοιχα.

Η χρήση της δειγματικής διαμέσου βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας. Οι Janacek & Meikle (1997) πρότειναν την κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* που απεικονίζει τη διάμεσο του δείγματος που εξετάζεται από τη διεργασία. Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνεται ένα δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$  από την εντός ελέγχου διεργασία, δηλαδή έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους  $m$  που προέρχεται από την εντός ελέγχου (αθροιστική) κατανομή  $F_X(x) = F(x)$ , όπου το μέγεθος  $m$  είναι συνήθως μεγάλο. Στη συνέχεια,

εξάγονται από την παραγωγική διαδικασία τυχαία δείγματα (*test samples*) που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (και από το δείγμα αναφοράς) και ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν η παρατηρούμενη διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή όχι. Με άλλα λόγια, αν  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα που λαμβάνεται από διεργασία με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_Y(x) = G(x)$ , τότε ο στόχος είναι η γρήγορη ανίχνευση μιας πιθανής αλλαγής στην κατανομή της διεργασίας από  $F(x)$  σε  $G(x)$ , δηλαδή ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης  $H_0 : F(x) = G(x)$  έναντι της δίπλευρης εναλλακτικής  $H_1 : F(x) \neq G(x)$ . Στο διάγραμμα των Janacek & Meikle (1997), αντί να γίνει χρήση των δειγματικών μέσων, υπολογίζεται η δειγματική διάμεσος  $\delta$  του εξεταζόμενου τυχαίου δείγματος και συγκρίνεται με τα όρια ελέγχου, όπως αυτά έχουν καθορισθεί με βάση το δείγμα αναφοράς. Δεδομένου ότι η εντός ελέγχου κατανομή είναι άγνωστη, χρησιμοποιούνται ως όρια ελέγχου δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς. Σύμφωνα με τους Janacek & Meikle (1997), διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς

$$X_{1:m} \leq X_{2:m} \leq \dots \leq X_{m:m}$$

και στη συνέχεια επιλέγουμε δύο συμμετρικά όρια ελέγχου, όπως φαίνεται παρακάτω

$$LCL = X_{a:m} \quad \text{και} \quad UCL = X_{m-a+1:m}.$$

Η παράμετρος σχεδιασμού  $1 \leq a \leq m$  προσδιορίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*), δηλαδή η πιθανότητα το διάγραμμα να παράγει λανθασμένο σήμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ , δηλαδή

$$P(LCL < \delta < UCL | H_0) \geq 1 - f.$$

Το βασικό πλεονέκτημα του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου αποτελεί το γεγονός ότι, εξαιτίας της χρήσης της διαμέσου του εξεταζόμενου τυχαίου δείγματος (αντί της μέσης τιμής του), δεν είναι ευαίσθητο σε πιθανά λάθη μετρήσεων και επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις που το υπό μελέτη μετρήσιμο χαρακτηριστικό περιλαμβάνει μια υποκειμενική αξιολόγηση ή ακόμη και διατάξιμα δεδομένα. Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τις πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού για το διάγραμμα των Janacek & Meikle (1997), για διάφορες επιλογές των μεγεθών των δύο δειγμάτων  $m, n$  και της παραμέτρου σχεδιασμού  $a$ .

**Πίνακας 4.1.** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερισμού του διαγράμματος των Janacek και Meikle (1997)

Δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$					
$n$	$a$	25	30	35	40
		<i>FAR</i>	<i>FAR</i>	<i>FAR</i>	<i>FAR</i>
5	1	0.0049	0.0031	0.0020	0.0014
	2	0.0196	0.0117	0.0054	0.0054
	3	0.0439	0.0278	0.0186	0.0131
	4	0.0826	0.0528	0.0357	0.0252
	5	0.1359	0.0877	0.0598	0.0425
7	1	0.0020	0.0011	0.0006	0.0004
	2	0.0089	0.0049	0.0029	0.0019
	3	0.0244	0.0137	0.0082	0.0052
	4	0.0517	0.0294	0.0179	0.0115
	5	0.0938	0.0542	0.0335	0.0217
9	1	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
	2	0.0048	0.0024	0.0013	0.0007
	3	0.0149	0.0075	0.0041	0.0024
	4	0.0348	0.0179	0.0099	0.0058
	5	0.0686	0.0360	0.0202	0.0121

Επεκτείνοντας την ιδέα των Janacek & Meikle (1997), οι Chakraborti *et al.* (2004) μελέτησαν μία κλάση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart*, τα οποία χρησιμοποιούν ως όρια ελέγχου κατάλληλα επιλεγμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{a:m}, X_{b:m}$ ,  $1 \leq a < b \leq m$ , του δείγματος αναφοράς. Αφού πρώτα συλλεγεί ένα τυχαίο δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  από τη διεργασία, υπολογίζεται η  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση  $Y_{j:n}$  και συγκρίνεται με τα όρια ελέγχου  $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}$ . Αν η τιμή της  $Y_{j:n}$  βρεθεί μεταξύ των ορίων ελέγχου, τότε η διεργασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, ενώ σε διαφορετική περίπτωση η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε κατάσταση εκτός ελέγχου και απαιτείται διερεύνηση για τις αιτίες που προκάλεσαν τη μετατόπιση.

Η πιθανότητα ότι το προτεινόμενο διάγραμμα δεν παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση, μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης προτεραιότητας  $P_{(j)}$ , όπως αυτή ορίζεται στο Κεφάλαιο 3. Συγκεκριμένα, το συμβάν ότι η τιμή της  $Y_{j:n}$  βρίσκεται ανάμεσα στις διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$  είναι ισοδύναμο με το συμβάν ότι η συνάρτηση  $P_{(j)}$  παίρνει τιμές μεταξύ  $a$  και  $b-1$ . Συνεπώς ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$p = P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m}) = P(a \leq P_{(j)} \leq b-1). \quad (4.1)$$

Πράγματι, δεδομένου ότι η κατανομή είναι συνεχής, η ανίσωση  $Y_{j:n} \leq X_{b:m}$  ισχύει αν και μόνο αν το πολύ  $(b-1)$   $X$ -παρατηρήσεις είναι μικρότερες από την  $Y_{j:n}$ , ενώ με παρόμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η διάταξη  $X_{a:m} \leq Y_{j:n}$  είναι αληθής αν και μόνο αν τουλάχιστον  $a$   $X$ -παρατηρήσεις είναι μικρότερες από την  $Y_{j:n}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα  $1-p$ , όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση (4.1), είναι η πιθανότητα το διάγραμμα να δώσει σήμα ότι η διεργασία μετατοπίστηκε σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, j$  γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (*FAR*) να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ . Η χρήση των αποτελεσμάτων για τις στατιστικές συναρτήσεις προτεραιότητας, που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, οδηγεί στην ακόλουθη απλή συνθήκη, η οποία χρησιμοποιείται για την επιλογή του σχεδιασμού του προτεινόμενου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου

$$\sum_{w=a}^{b-1} \frac{\binom{j+w-1}{w} \binom{m+n-j-w}{m-w}}{\binom{m+n}{n}} \geq 1-f. \quad (4.2)$$

Ο Πίνακας 4.2 παρουσιάζει τις πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού για το διάγραμμα των Chakraborti *et al.* (2004), για διάφορες επιλογές των  $m, n$  και των παραμέτρων σχεδιασμού  $j, a$ , ώστε να ικανοποιείται η (4.2) για  $f = 0.01, 0.05, 0.0027$ .

**Πίνακας 4.2.** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού του διαγράμματος των Chakraborti *et al.* (2004) για δεδομένο σχεδιασμό ( $j = (n+1)/2, b = m-a+1$ )

Δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$									
$f$	$n$	50		100		500		1000	
		$a$	<i>FAR</i>	$a$	<i>FAR</i>	$a$	<i>FAR</i>	$a$	<i>FAR</i>
0.01	5	3	0.0036	7	0.0043	40	0.0048	82	0.0050
	11	6	0.0047	15	0.0043	83	0.0049	167	0.0049
	25	13	0.0031	23	0.0040	127	0.0047	258	0.0050
0.005	5	2	0.0015	5	0.0018	31	0.0023	64	0.0025
	11	5	0.0013	13	0.0023	72	0.0024	146	0.0024
	25	9	0.0016	21	0.0020	118	0.0024	239	0.0025
0.0027	5	1	0.0004	4	0.0010	25	0.0013	51	0.0013
	11	5	0.0013	11	0.0011	64	0.0013	130	0.0013
	25	8	0.0008	19	0.0009	110	0.0013	224	0.0013

Από τις λεπτομερείς αριθμητικές συγκρίσεις που υλοποιούνται στην εργασία των Chakraborti *et al.* (2004), είναι σαφές ότι το προτεινόμενο διάγραμμα υπερέρχει ενός  $\bar{X}$  – διαγράμματος ελέγχου σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Ωστόσο το βασικό μειονέκτημα του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι ότι η απόφαση βασίζεται σε μία μόνο διατεταγμένη παρατήρηση (διάμεσος ή κάποιο άλλο ποσοστημόριο). Το γεγονός αυτό έχει ως πιθανό αποτέλεσμα, ότι ενώ η συγκεκριμένη παρατήρηση μπορεί να βρίσκεται μεταξύ των ορίων ελέγχου, ταυτόχρονα το μεγαλύτερο πλήθος των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος να βρίσκεται εκτός των ορίων αυτών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το διάγραμμα θα δίνει σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, ενώ στην πραγματικότητα θα υπάρχει ισχυρή ένδειξη για το αντίθετο συμπέρασμα.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται στη συνέχεια ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*, το οποίο λαμβάνει υπόψιν του, όχι μόνο τη θέση της  $j$  – οστής διατεταγμένης παρατήρησης του εξεταζόμενου δείγματος, αλλά και το πλήθος των παρατηρήσεων του που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.

Στην Παράγραφο 4.2 προτείνουμε την κατασκευή ενός νέου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου, ενώ στις Παραγράφους 4.3 και 4.4 υπολογίζονται, για εντός και εκτός ελέγχου καταστάσεις αντίστοιχα, η χαρακτηριστική καμπύλη και η πιθανότητα συναγερμού του. Η κατανομή του μήκους ροής του νέου διαγράμματος ελέγχου μελετάται στην Παράγραφο 4.5, ενώ στην Παράγραφο 4.6 προτείνεται μια παραλλαγή του αρχικού διαγράμματος. Τέλος, στην Παράγραφο 4.7, υλοποιούνται αριθμητικές συγκρίσεις ώστε να επαληθευτεί η αποτελεσματικότητα και αντοχή των δύο νέων διαγραμμάτων σε εντός και εκτός ελέγχου καταστάσεις, όταν αυτά συγκρίνονται τόσο με γνωστά παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου (όπως το  $\bar{X}$  – διάγραμμα ελέγχου), όσο και με το ελεύθερο κατανομής διάγραμμα των Chakraborti *et al.* (2004).

#### **4.2. Ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου**

Έστω ότι ένα δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$  συλλέγεται από την εντός ελέγχου κατανομή  $F(x)$ , δηλαδή όταν γνωρίζουμε ότι η παραγωγική διαδικασία είναι εντός ελέγχου. Στη συνέχεια, λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  από τη διεργασία και θέλουμε να αποφασίσουμε αν παραμένει εντός ελέγχου ή αν έχει μετατοπιστεί σε

μια εκτός ελέγχου κατανομή  $G(x)$ . Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε δύο συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις από το δείγμα αναφοράς και τις χρησιμοποιούμε ως όρια ελέγχου του προτεινόμενου διαγράμματος, όπως φαίνεται παρακάτω

$$LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m},$$

όπου  $1 \leq a < b \leq m$ . Για τη διατύπωση του κανόνα απόφασης του νέου διαγράμματος χρησιμοποιούμε την  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση  $Y_{j:n}$  σε συνδυασμό με την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$R = R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, X_{b:m}) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : X_{a:m} \leq Y_i \leq X_{b:m}\}|.$$

Πιο συγκεκριμένα, η παραγωγική διαδικασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, αν επαληθεύονται οι δύο επόμενες συνθήκες

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r. \quad (4.3)$$

Οι παράμετροι  $a, b, j, r$  είναι παράμετροι σχεδιασμού του προτεινόμενου διαγράμματος. Στη διεθνή βιβλιογραφία, έχουν προταθεί δύο τρόποι προσδιορισμού των παραμέτρων σχεδιασμού ενός διαγράμματος ελέγχου. Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο, αρχικά καθορίζουμε μια συγκεκριμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ( $FAR$ ) που θέλουμε να πετύχουμε στο διάγραμμα και στη συνέχεια προχωρούμε στην κατασκευή του διαγράμματος. Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ( $FAR$ ) του νέου διαγράμματος, δηλαδή η πιθανότητα το διάγραμμα να παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση της διεργασίας, ενώ στην πραγματικότητα βρίσκεται εντός ελέγχου, δίνεται από τη σχέση

$$FAR = 1 - P_C(LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r),$$

όπου ο δείκτης  $C$  δηλώνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου, δηλαδή  $F = G$ .

Ο δεύτερος τρόπος προσδιορισμού των παραμέτρων σχεδιασμού του διαγράμματος, είναι η χρήση μιας συγκεκριμένης τιμής του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_{in}$ , όπως για παράδειγμα 370 ή 500. Το  $ARL_{in}$  του νέου διαγράμματος έχει, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, την ίδια τιμή για όλες τις συνεχείς κατανομές, συνεπώς το νέο διάγραμμα είναι ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο η κατανομή του μήκους ροής  $N$  δεν είναι γεωμετρική, συνεπώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση τα γνωστά αποτελέσματα για την κατανομή αυτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι το  $ARL_{in}$  του διαγράμματος δεν θα είναι ίσο με το αντίστροφο της πιθανότητας να παραχθεί σήμα

για εκτός ελέγχου μετατόπιση, όπως συμβαίνει (βλ. Κεφάλαιο 3 του παρόντος κειμένου) για άλλα διαγράμματα ελέγχου. Για το λόγο αυτό, θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής για το συγκεκριμένο διάγραμμα, χρησιμοποιώντας μια τεχνική δέσμευσης που εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην εργασία του Chakraborti (2000).

Αν οι παρατηρήσεις  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  του εξεταζόμενου δείγματος ακολουθούν μια συνεχή κατανομή  $G(x)$ , τότε η πιθανότητα ότι το προτεινόμενο διάγραμμα δεν παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση δίνεται στην ακόλουθη σχέση

$$p = p(m, n, a, b, j, r; F, G) = P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m} \text{ και } R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, X_{b:m}) \geq r). \quad (4.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω πιθανότητα είναι η χαρακτηριστική καμπύλη (*operating characteristic curve*) του διαγράμματος, ενώ η πιθανότητα να παραχθεί σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση είναι ίση με  $1 - p$ . Συνεπώς, υπό τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F = G$ , η πιθανότητα *FAR* του διαγράμματος είναι ίση με

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b, j, r; F, F).$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε μια έκφραση για την πιθανότητα  $p$ , όπως αυτή ορίζεται στην (4.4). Για το σκοπό αυτό, χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο παρουσιάζει και ανεξάρτητο ενδιαφέρον από τη σκοπιά της Θεωρίας Κατανομών.

**Λήμμα 4.1.** *Εστω ότι  $U_1, U_2, \dots, U_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 1)$  και ας συμβολίσουμε με  $U_{j:n}$  την  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρησή του. Τότε, η ποσότητα*

$$q(v, w, r) = P(v \leq U_{j:n} \leq w \text{ και } |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : v \leq U_i \leq w\}| \geq r), \quad 0 \leq v < w \leq 1$$

μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των πολυωνυμικών πιθανοτήτων

$$\begin{aligned} q_{c,d}(v, w) &= \frac{n!}{(j-c-1)!(c+d+1)!(n-j-d)!} v^{j-c-1} (w-v)^{c+d+1} (1-w)^{n-j-d} \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! r_3!} v^{r_1} (w-v)^{r_2} (1-w)^{r_3} \end{aligned}$$

( $r_1 = j - c - 1, r_2 = c + d + 1, r_3 = n - j - d$ ), ως εξής

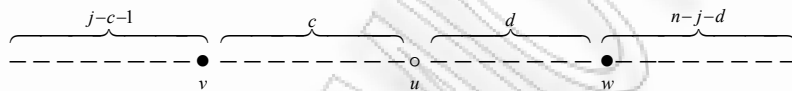


$$q(v, w; r) = \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} q_{c,d}(v, w), \quad 0 \leq v < w \leq 1.$$

**Απόδειξη.** Το συμβάν  $\{v \leq U_{j:n} \leq w \text{ και } |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : v \leq U_i \leq w\}| \geq r\}$  μπορεί να μελετηθεί ως εξής: μία από τις τυχαίες μεταβλητές  $U_1, U_2, \dots, U_n$  λαμβάνει τιμή  $u \in [v, w]$  και επιπλέον  $c + d \geq r - 1$   $U$ -μεταβλητές βρίσκονται μέσα στο διάστημα  $[v, w]$ , έτσι ώστε (βλ. Σχήμα 4.1)

- $(j - c - 1)$   $U$ -μεταβλητές να είναι μικρότερες ή ίσες από  $v$ ,
- $c$   $U$ -μεταβλητές να είναι μεγαλύτερες από  $v$  και μικρότερες από  $u$ ,
- $d$   $U$ -μεταβλητές να είναι μεγαλύτερες από  $u$  και μικρότερες από  $w$ ,
- $(n - j - d)$   $U$ -μεταβλητές να είναι μεγαλύτερες από  $w$ .

**ΣΧΗΜΑ 4.1.**



Η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια παρόμοια διάταξη μπορεί εύκολα να γραφεί ως πολυωνυμική πιθανότητα

$$\frac{n!}{(j-c-1)!c!d!(n-j-d)!} v^{j-c-1} (u-v)^c (w-u)^d (1-w)^{n-j-d}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω έκφραση ως προς  $u$  για  $v \leq u \leq w$ , προκύπτει η ακόλουθη ποσότητα

$$q_{c,d}(v, w) = \int_v^w \frac{n!}{(j-c-1)!c!d!(n-j-d)!} v^{j-c-1} (u-v)^c (w-u)^d (1-w)^{n-j-d} du,$$

και η ζητούμενη πιθανότητα θα βρεθεί, αν αθροίσουμε για όλες τις δυνατές τιμές των  $c, d$ , δηλαδή για όλες τις μη αρνητικές ακέραιες τιμές των  $c, d$  που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$c + d + 1 \geq r, \quad c + d + 1 \leq n.$$

Μετασχηματίζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης  $u$  σε  $t = \frac{u-v}{w-v}$ , παίρνουμε ότι

$$q_{c,d}(v, w) = \frac{n!}{(j-c-1)!c!d!(n-j-d)!} v^{j-c-1} (1-w)^{n-j-d} (w-v)^{c+d+1} \int_0^1 t^c (1-t)^d dt$$

και η απόδειξη του Λήμματος ολοκληρώνεται, παρατηρώντας ότι

$$\int_0^1 t^c (1-t)^d dt = B(c+1, d+1) = \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(d+1)}{\Gamma(c+d+2)} = \frac{c!d!}{(c+d+1)!}.$$

□

### 4.3. Μελέτη της χαρακτηριστικής καμπύλης και της πιθανότητας λανθασμένου συναγερωμού του νέου διαγράμματος ελέγχου

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μια σχέση υπολογισμού της χαρακτηριστικής συνάρτησης λειτουργίας του νέου διαγράμματος, όπως αυτή ορίζεται στην (4.4).

**Πρόταση 4.1.** Η χαρακτηριστική συνάρτηση λειτουργίας του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.4) δίνεται στην ακόλουθη σχέση

$$p = p(m, n, a, b, j, r; F, G) = \int_0^1 \int_0^t q(G(F^{-1}(s)), G(F^{-1}(t)); r) f(s, t) ds dt,$$

όπου

$$q(v, w; r) = \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} q_{c,d}(v, w), \quad 0 \leq v < w \leq 1,$$

$$q_{c,d}(v, w) = \binom{n}{j-c-1, c+d+1, n-j-d} v^{j-c-1} (w-v)^{c+d+1} (1-w)^{n-j-d} \quad (4.5)$$

όπου  $f(s, t)$  είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων από την ομοιόμορφη κατανομή, ενώ, ως συνήθως, με

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3$$

συμβολίζουμε τους πολυωνυμικούς συντελεστές.

**Απόδειξη.** Αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα  $p$  στο δεξί μέλος της (4.4) είναι η μέση τιμή για την από κοινού κατανομή των διατεταγμένων παρατηρήσεων  $X_{a:m}, X_{b:m}$ , τότε μπορούμε να εκφράσουμε την  $p$  ως εξής

$$p = E_{X_{a:m}, X_{b:m}} [P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m} \text{ και } R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, X_{b:m}) \geq r)].$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $F(X_{a:m}) = U_{a:m}$ ,  $F(X_{b:m}) = U_{b:m}$ , όπου  $U_{a:m}, U_{b:m}$  είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις από ένα τυχαίο δείγμα  $U_1, U_2, \dots, U_m$  που προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0,1)$ , παίρνουμε ότι

$$p = E_{U_{a:m}, U_{b:m}} [P(U_{a:m} \leq F(Y_{j:n}) \leq U_{b:m} \text{ και } R(F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)); U_{a:m}, U_{b:m}) \geq r)].$$

Συνεπώς

$$p = \int_0^1 \int_0^t P[s \leq F(Y_{j:n}) \leq t \text{ and } R(F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n); s, t) \geq r] f(s, t) ds dt, \quad (4.6)$$

όπου

$$f(s, t) = \frac{m!}{(a-1)!(b-a-1)!(m-b)!} s^{a-1} (t-s)^{b-a-1} (1-t)^{m-b}, \quad 0 < s < t < 1, \quad (4.7)$$

είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των  $U_{a:m}, U_{b:m}$  (βλ. Κεφάλαιο 1). Η πιθανότητα που βρίσκεται στο ολοκλήρωμα της (4.6), μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} & P[F^{-1}(s) \leq Y_{j:n} \leq F^{-1}(t) \text{ και } R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; F^{-1}(s), F^{-1}(t)) \geq r] \\ &= P[GF^{-1}(s) \leq G(Y_{j:n}) \leq GF^{-1}(t) \text{ και } R(G(Y_1), G(Y_2), \dots, G(Y_n); GF^{-1}(s), GF^{-1}(t)) \geq r]. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $G(Y_1), G(Y_2), \dots, G(Y_n)$  ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ , μια άμεση εφαρμογή του προηγούμενου Λήμματος οδηγεί στη σχέση

$$\begin{aligned} & P[GF^{-1}(s) \leq U_{j:n} \leq GF^{-1}(t) \text{ και } R(U_1, U_2, \dots, U_n; GF^{-1}(s), GF^{-1}(t)) \geq r] = \\ &= q(GF^{-1}(s), GF^{-1}(t); r) \end{aligned}$$

και η απόδειξη της Πρότασης ολοκληρώθηκε.  $\square$

Θέτοντας  $F = G$  στην Πρόταση 4.1, προκύπτει μια ακριβής έκφραση για την πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του νέου διαγράμματος ελέγχου, όπως φαίνεται στο ακόλουθο Πόρισμα.

**Πόρισμα 4.1.** Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.3) είναι ίση με

$$FAR = 1 - \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \frac{\binom{j-c+a-2}{a-1} \cdot \binom{m+n-b-d-j}{n-j-d} \cdot \binom{b+c+d-a}{c+d+1}}{\binom{m+n}{n}}$$

**Απόδειξη.** Δεδομένου ότι η πιθανότητα  $FAR$  παραπέμπει στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός ελέγχου, έχουμε  $F = G$  και η Πρόταση 4.1, στη συγκεκριμένη περίπτωση, δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$p = p(m, n, a, b, j, r; F, F) = \int_0^1 \int_0^t q(s, t; r) f(s, t) ds dt = \sum_{c=0}^{n-1} \sum_{d=\max(r-c-1, 0)}^{n-c-1} \int_0^1 \int_0^t q_{c,d}(s, t) f(s, t) ds dt.$$

Χρησιμοποιώντας την (4.7) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι το επόμενο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^t s^{a+j-c-2} (t-s)^{c+d+b-a} (1-t)^{n-j-d+m-b} ds dt$$

γράφεται (υλοποιώντας το μετασχηματισμό  $z = \frac{s}{t}$  στο εσωτερικό ολοκλήρωμα) στη

μορφή

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{j+d+b-1} \left( \int_0^1 z^{j-c+a-2} (1-z)^{c+d+b-a} dz \right) (1-t)^{n-j-d+m-b} dt &= \\ &= \int_0^1 t^{j+d+b-1} B(j-c+a-1, c+d+b-a+1) (1-t)^{n-j-d+m-b} dt \\ &= \frac{\Gamma(j-c+a-1) \Gamma(c+d+b-a+1)}{\Gamma(j+d+b)} B(j+d+b, n-j-d+m-b+1), \end{aligned} \tag{4.8}$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.  $\square$

#### 4.4. Μελέτη του νέου διαγράμματος ελέγχου για εναλλακτικές υποθέσεις τύπου **Lehmann**

Αν η διεργασία μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση, η Πρόταση 4.1 παρέχει την πιθανότητα ότι το διάγραμμα ελέγχου δεν παράγει σήμα, γεγονός που δεν είναι το επιθυμητό. Είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη πιθανότητα εξαρτάται τόσο από την εντός ελέγχου κατανομή  $F(x)$ , όσο και από την εκτός ελέγχου  $G(x)$ . Δεδομένου ότι το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης  $G \circ F^{-1}$ , θα ήταν παράλογο να αναμένουμε μια ακριβή έκφραση στη γενική περίπτωση. Ωστόσο για την κλάση των εναλλακτικών υποθέσεων τύπου *Lehmann*, που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 3 του παρόντος κειμένου, η έκφραση της Πρότασης 4.1 μπορεί να οδηγήσει σε μια κομψή και ακριβή μορφή. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν η εκτός ελέγχου κατανομή έχει τη μορφή  $G(x) = [F(x)]^\gamma$  ( $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$ ), όπου  $\gamma$  είναι θετικός ακέραιος, η εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann* δηλώνει ότι οι  $Y$ -μεταβλητές κατανέμονται ως η μεγαλύτερη (μικρότερη) από το πλήθος  $\gamma$   $X$ -μεταβλητών. Μια εναλλακτική υπόθεση της μορφής  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$  καλύπτει τις περιπτώσεις που η εντός ελέγχου κατανομή είναι εκθετική με μέσο  $\lambda$

και οι μετατοπίσεις που θέλουμε να ανιχνεύσουμε δημιουργούνται με αλλαγή της παραμέτρου  $\lambda$ . Με ανάλογο τρόπο, η υπόθεση της μορφής  $G(x)=[F(x)]^\gamma$  καλύπτει τις περιπτώσεις που η εντός ελέγχου κατανομή είναι ομοιόμορφη στο διάστημα  $(0,1)$ , ενώ η εκτός ελέγχου διεργασία περιγράφεται από την οικογένεια κατανομών με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $G(x) = x^\gamma$ ,  $0 < x < 1$ . Το ακόλουθο πόρισμα δίνει μια ακριβή έκφραση για τη χαρακτηριστική συνάρτηση λειτουργίας  $p$  για την περίπτωση των εναλλακτικών υποθέσεων τύπου *Lehmann*.

**Πόρισμα 4.2. α.** Η χαρακτηριστική συνάρτηση λειτουργίας  $p = p(m, n, a, b, j, r; \gamma)$  του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.3), υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x)=[F(x)]^\gamma$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$p(m, n, a, b, j, r; \gamma) = a(b-a) \binom{m}{a, b-a, m-b} \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \binom{n}{j-c-1, c+d+1, n-j-d} \times \\ B_\gamma(\gamma(j-c-1) + a, b-a; c+d+1) B_\gamma(\gamma(j+d) + b, m-b+1; n-j-d),$$

όπου

$$B_\gamma(a, b; l) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} (1-x^\gamma)^l dx = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} B(a+k\gamma, b).$$

**β.** Η χαρακτηριστική συνάρτηση λειτουργίας  $p' = p'(m, n, a, b, j, r; \gamma)$  του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.3), υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$p'(m, n, a, b, j, r; \gamma) = p(m, n, m-b+1, m-a+1, n-j+1, r; \gamma).$$

**Απόδειξη. α.** Υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x)=[F(x)]^\gamma$ , είναι σαφές ότι

$$(G \circ F^{-1})(x) = G(F^{-1}(x)) = (F(F^{-1}(x)))^\gamma = x^\gamma$$

και συνεπώς η Πρόταση 4.1 οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

$$p = p(m, n, a, b, j, r; \gamma) = \int_0^1 \int_0^t q(s^\gamma, t^\gamma; r) f(s, t) ds dt \\ = \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \int_0^1 \int_0^t q_{c,d}(s^\gamma, t^\gamma) f(s, t) ds dt.$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες  $q_{c,d}(s^\gamma, t^\gamma)$  και  $f(s,t)$  μέσω των (4.5) και (4.7) αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$p = a(b-a) \binom{m}{ab-am-b} \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \binom{n}{j-c-1, c+d+1, n-j-d} \times I_{c,d}(m, n, a, b, j, r; \gamma),$$

όπου

$$I_{c,d}(m, n, a, b, j, r; \gamma) = \int_0^1 \int_0^t s^{\gamma(j-c-1)+a-1} (t^\gamma - s^\gamma)^{c+d+1} (1-t^\gamma)^{n-j-d} (t-s)^{b-a-1} (1-t)^{m-b} ds dt.$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό  $z = s/t$ , το τελευταίο (διπλό) ολοκλήρωμα, γράφεται ως γινόμενο ολοκληρωμάτων, όπως φαίνεται στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} I_{c,d}(m, n, a, b, j, r; \gamma) &= \left( \int_0^1 z^{\gamma(j-c-1)+a-1} (1-z)^{b-a-1} (1-z^\gamma)^{c+d+1} dz \right) \times \\ &\int_0^1 t^{\gamma(j+d)+b-1} (1-t)^{m-b} (1-t^\gamma)^{n-j-d} dt = \\ &= B_\gamma(\gamma(j-c-1) + a, b-a; c+d+1) B_\gamma(\gamma(j+d) + b, m-b+1; n-j-d) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

**β.** Υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$ , είναι σαφές ότι

$$(G \circ F^{-1})(x) = G(F^{-1}(x)) = 1 - (1 - F^\gamma(F^{-1}(x))) = 1 - (1 - (F(F^{-1}(x)))^\gamma) = 1 - (1-x)^\gamma$$

και συνεπώς η Πρόταση 4.1 οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} p' &= p'(m, n, a, b, j, r; \gamma) = \int_0^1 \int_0^t q(1 - (1-s)^\gamma, 1 - (1-t)^\gamma) f(s,t) ds dt \\ &= \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \int_0^1 \int_0^t q_{c,d}(1 - (1-s)^\gamma, 1 - (1-t)^\gamma) f(s,t) ds dt. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες  $q_{c,d}(1 - (1-s)^\gamma, 1 - (1-t)^\gamma)$  και  $f(s,t)$  μέσω των (4.5) και (4.7) αντίστοιχα, καταλήγουμε σε μια αντίστοιχη σχέση με αυτή που αποδείχθηκε στο μέρος (α) του συγκεκριμένου Πορίσματος, η οποία μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ταυτίζεται με την πιθανότητα  $p(m, n, m-b+1, m-a+1, n-j+1, r; \gamma)$ . □

Υπολογίζοντας την πιθανότητα  $p$  με τη βοήθεια του Πορίσματος 4.2, οι ποσότητες  $1-p$  και  $1-p'$  εκφράζουν τις πιθανότητες συναγερμού (*alarm rates*), όταν η διεργασία έχει πράγματι μετατοπιστεί σε μια κατανομή τύπου *Lehmann* με παράμετρο  $\gamma > 0$ .

Ο Πίνακας 4.3 παρουσιάζει τις πιθανότητες  $FAR$  του νέου διαγράμματος για διάφορους σχεδιασμούς που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των  $a, b, m, n, j, r$ . Οι υπολογισμοί έχουν υλοποιηθεί με τη βοήθεια του Πορίσματος 4.1. Προκειμένου να μειωθεί το πλήθος των παραμέτρων που περιέχονται στον επόμενο Πίνακα,

**Πίνακας 4.3.** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερωμού για δεδομένο σχεδιασμό  
( $b = m - a + 1, j = (n + 1) / 2$ )

		Δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$							
$n$	$r$	40		60		100		200	
		$a$	$FAR$	$a$	$FAR$	$a$	$FAR$	$a$	$FAR$
5	1	5	0.0425	9	0.0616	16	0.0689	30	0.0559
		6	0.0654	10	0.0800	17	0.0805	33	0.0719
		7	0.0943	11	0.1011	18	0.0931	37	0.0971
	2	5	0.0482	8	0.0531	14	0.0572	27	0.0495
		6	0.0759	9	0.0721	15	0.0690	30	0.0665
		7	0.1116	10	0.0950	16	0.0821	34	0.0942
	3	4	0.0647	6	0.0626	10	0.0608	19	0.0520
		5	0.1091	7	0.0911	11	0.0773	21	0.0674
		6	0.1656	8	0.1252	12	0.0959	24	0.0946
11	3	8	0.0459	13	0.0558	23	0.0653	44	0.0481
		9	0.0737	14	0.0770	24	0.0796	48	0.0737
		10	0.1129	15	0.1039	25	0.0961	51	0.0988
	4	7	0.0363	11	0.0384	20	0.0517	40	0.0472
		8	0.0642	12	0.0574	21	0.0657	43	0.0687
		9	0.1061	13	0.0895	22	0.0824	46	0.0968
	5	6	0.0375	10	0.0530	17	0.0532	34	0.0496
		7	0.0715	11	0.0807	18	0.0696	37	0.0750
		8	0.1228	12	0.1172	19	0.0892	39	0.0962
25	7	9	0.0211	15	0.0324	27	0.0475	55	0.0462
		10	0.0431	16	0.0536	28	0.0652	57	0.0651
		11	0.0825	17	0.0857	29	0.0881	59	0.0900
	10	7	0.0144	12	0.0287	22	0.0500	45	0.0525
		8	0.0364	13	0.0526	23	0.0714	47	0.0761
		9	0.0798	14	0.0898	24	0.0991	49	0.1070
	12	6	0.0212	10	0.0327	18	0.0462	37	0.0490
		7	0.0539	11	0.0611	19	0.0675	39	0.0726
		8	0.1148	12	0.1048	20	0.0953	41	0.1036

μελετήθηκε μόνο η περίπτωση που η  $j$ -οστή  $Y_{j:n}$  είναι η διάμεσος του εξεταζόμενου δείγματος  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  ( $n$  περιττός ακέραιος) και τα όρια ελέγχου επιλέγονται συμμετρικά, δηλαδή  $b = m - a + 1$ . Είναι προφανές ότι το υπολογιστικό βάρος θα είναι το ίδιο, αν εξετασθούν και άλλες τιμές των  $j, a$  και  $b$ , ωστόσο θα είναι πολύ εκτεταμένη η παρουσίαση των αντίστοιχων πινάκων. Ο Πίνακας 4.3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος

ελέγχου που στοχεύει σε μια προκαθορισμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού  $f$ . Η χρήση των τεσσάρων παραμέτρων  $(m, n, a, r)$  στο συγκεκριμένο διάγραμμα, μας προσφέρει την ευελιξία να σταθεροποιήσουμε ορισμένες από αυτές και στη συνέχεια να αναζητήσουμε τη βέλτιστη επιλογή για τις υπόλοιπες, ή εναλλακτικά να βρούμε έναν αποδεκτό συνδυασμό των παραπάνω παραμέτρων που ικανοποιεί συγκεκριμένες απαιτήσεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 100$  και τα τυχαία δείγματα που εξετάζουμε από τη διεργασία, επιθυμούμε να είναι μεγέθους  $n = 25$ , τότε μία πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (σχεδόν) ίση με  $f = 0.05$  μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας

- την 27<sup>η</sup> μικρότερη και μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος αναφοράς ( $a = 27$ ) και  $r = 7$  ( $FAR = 0.0475$ ) ή
- την 22<sup>η</sup> μικρότερη και μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος αναφοράς ( $a = 22$ ) και  $r = 10$  ( $FAR = 0.0500$ ) ή
- την 18<sup>η</sup> μικρότερη και μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος αναφοράς ( $a = 18$ ) και  $r = 12$  ( $FAR = 0.0462$ ).

Στις περιπτώσεις εναλλακτικών υποθέσεων τύπου *Lehmann* μπορούν να εξαχθούν διάφορα χρήσιμα συμπεράσματα για την απόδοση του διαγράμματος ελέγχου με τη βοήθεια του Πίνακα 4.4. Στο συγκεκριμένο πίνακα, υπολογίζονται οι πιθανότητες συναγερμού για διάφορες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού  $m, n, a, r$  και της παραμέτρου της εκτός ελέγχου κατανομής  $\gamma > 0$ . Για λόγους παρουσίασης, συμπεριλήφθηκαν μόνο οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- (i) Η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0,1)$  ως εντός ελέγχου κατανομή ( $F(x) = x, 0 < x < 1$ ) και μια εκτός ελέγχου κατανομή της μορφής  $G(x) = x^\gamma, \gamma = 0.4, 4$ . Οι πιθανότητες συναγερμού υπολογίζονται με τη βοήθεια του μέρους (α) του Πορίσματος 4.2. Είναι προφανές ότι τα ίδια αποτελέσματα θα προκύψουν αν η  $x$  αντικατασταθεί με οποιαδήποτε συνεχή κατανομή  $F(x)$ .
- (ii) Η εκθετική με μέσο 1 ( $F(x) = 1 - \exp(-x), x > 0$ ) ως εντός ελέγχου κατανομή, και μια εκθετική ως εκτός ελέγχου κατανομή με μέσο  $1/\gamma = 1/0.4, 1/4$ . Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι πιθανότητες συναγερμού με τη βοήθεια του μέρους (β) του Πορίσματος 4.2. Είναι προφανές ότι τα ίδια αποτελέσματα θα προκύψουν αν η  $\exp(-x)$  αντικατασταθεί με οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση επιβίωσης  $1 - F(x)$ .



**Πίνακας 4.4.** Πιθανότητες συναγερμού ( $AR$ ) για δεδομένο σχεδιασμό ( $b = m - a + 1$ ,  $j = (n + 1) / 2$ ) και για  $\gamma=0.4$  (άνω είσοδος) και  $\gamma=4$  (κάτω είσοδος)

		Δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$									
$n$	$r$	40		60		100		200			
		$a$	$AR$	$a$	$AR$	$a$	$AR$	$a$	$AR$		
5	1	5	0.3637 0.3448	9	0.4298 0.4371	16	0.4580 0.4874	30	0.4388 0.4517		
		6	0.4238 0.4278	10	0.4678 0.5040	17	0.4805 0.5283	33	0.4734 0.5167		
		7	0.4797 0.5226	11	0.5041 0.5674	18	0.5024 0.5677	37	0.5172 0.5975		
		2	5	0.3718 0.3292	8	0.3993 0.3681	14	0.4215 0.4021	27	0.4122 0.3845	
			6	0.4359 0.4279	9	0.4421 0.4372	15	0.4471 0.4452	30	0.4510 0.4517	
			7	0.4969 0.5227	10	0.4834 0.5040	16	0.4722 0.4874	34	0.5010 0.5376	
	3	4	0.3660 0.2324	6	0.3728 0.2313	10	0.3785 0.2298	19	0.3646 0.2070		
		5	0.4518 0.3300	7	0.4312 0.2992	11	0.4142 0.2720	21	0.4010 0.2498		
		6	0.5317 0.4294	8	0.4871 0.3689	12	0.4490 0.3153	24	0.4539 0.3169		
		11	3	8	0.5389 0.6379	13	0.5943 0.7301	23	0.6382 0.8029	44	0.6193 0.7902
				9	0.6052 0.7319	14	0.6373 0.7878	24	0.6633 0.8337	48	0.6707 0.8547
				10	0.6667 0.8085	15	0.6780 0.8362	25	0.6875 0.8607	51	0.7067 0.8921
4	4	7	0.4797 0.5287	11	0.5145 0.5876	20	0.5744 0.6870	40	0.5810 0.7078		
		8	0.5561 0.6379	12	0.5660 0.6631	21	0.6047 0.7300	43	0.6266 0.7713		
		9	0.6123 0.6381	13	0.6156 0.7301	22	0.6343 0.7682	46	0.6702 0.8246		
	5	6	0.4349 0.4101	10	0.5049 0.5054	17	0.5252 0.5381	34	0.5314 0.5521		
		7	0.5257 0.5288	11	0.5656 0.5877	18	0.5623 0.5908	37	0.5875 0.6343		
		8	0.6123 0.6381	12	0.6239 0.6632	19	0.5985 0.6406	39	0.6236 0.6844		
25	7	9	0.6365 0.7714	15	0.7338 0.8901	27	0.8057 0.9572	55	0.8311 0.9791		
		10	0.7148 0.8534	16	0.7805 0.9263	28	0.8303 0.9688	57	0.8542 0.9859		
		11	0.7833 0.9112	17	0.8223 0.9521	29	0.8530 0.9776	59	0.8753 0.9907		
		10	7	0.4817 0.5345	12	0.6050 0.7001	22	0.7053 0.8314	45	0.7387 0.8850	
			8	0.5898 0.6638	13	0.6759 0.7781	23	0.7451 0.8680	47	0.7775 0.9152	
			9	0.6910 0.7714	14	0.7412 0.8412	24	0.7822 0.8981	49	0.8130 0.9386	
	12	6	0.4594 0.3940	10	0.5638 0.5069	18	0.6518 0.6180	37	0.6925 0.6815		
		7	0.5910 0.5347	11	0.6519 0.6087	19	0.7031 0.6810	39	0.7425 0.7456		
		8	0.7100 0.6643	12	0.7313 0.7004	20	0.7503 0.7381	41	0.7876 0.8009		

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.3 και 4.4, μπορούμε να επιλέξουμε έναν σχεδιασμό, ο οποίος όχι μόνο να επιτυγχάνει μια επιθυμητή τιμή πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού, αλλά ταυτόχρονα να είναι αποτελεσματικό στην ανίχνευση συγκεκριμένων μετατοπίσεων της εντός ελέγχου κατανομής που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\gamma$  των εναλλακτικών υποθέσεων τύπου *Lehmann*. Για παράδειγμα, στην περίπτωση  $m = 100, n = 25$  που περιγράφηκε ωρύτερα, εκ των τριών επιλογών σχεδιασμού για την επίτευξη πιθανότητας  $FAR \cong 0.05$ , ο σχεδιασμός που αντιστοιχεί στις τιμές  $a = 27$  και  $r = 7$  προσφέρει τη μεγαλύτερη πιθανότητα ανίχνευσης μιας μετατόπισης σε κατανομή τύπου *Lehmann* με  $\gamma = 0.4$  ( $AR = 0.8057$ ) και  $\gamma = 4$  ( $AR = 0.9572$ ).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένα δεύτερο κριτήριο για την αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου (και κατά συνέπεια για τον προσδιορισμό των κατάλληλων παραμέτρων σχεδιασμού) προκύπτει από την εξέταση της κατανομής του μήκους ροής (*run length distribution*), δηλαδή την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $N$  που απαριθμεί το πλήθος των δειγμάτων μέχρι να παραχθεί για πρώτη φορά σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση.

#### 4.5. Μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του νέου διαγράμματος ελέγχου

Μολονότι το νέο διάγραμμα ελέγχου είναι ένα διάγραμμα τύπου *Shewhart*, η κατανομή του μήκους ροής του δεν είναι γεωμετρική, διότι τα συμβάντα παραγωγής σήματος για εκτός ελέγχου μετατόπιση δεν είναι ανεξάρτητα και συνεπώς το μέσο μήκος ροής (*ARL*) δεν είναι ίσο με τον αντίστροφο της πιθανότητας παραγωγής σήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε μια τεχνική δέσμευσης, ώστε να καταλήξουμε σε μια ακριβή έκφραση για την κατανομή του μήκους ροής, καθώς και τη μέση τιμή της. Αν παρατηρήσουμε ότι, δοθέντων των  $X_{a:m} = x_a$ ,  $X_{b:m} = x_b$ , η μεταβλητή  $N$  ακολουθεί μια γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας

$$p(x_a, x_b) = P(x_a \leq Y_{j:n} \leq x_b \text{ και } R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; x_a, x_b) \geq r)$$

και συνάρτηση πιθανότητας

$$(1 - p(x_a, x_b))(p(x_a, x_b))^{k-1} = [p(x_a, x_b)]^{k-1} - [p(x_a, x_b)]^k,$$

τότε η μη δεσμευμένη κατανομή της  $N$  μπορεί να εκφρασθεί ως

$$P(N = k) = D(k - 1) - D(k), \quad (4.9)$$

όπου  $D(0) = 1$  και

$$D(k) = E_{X_{a,m}, X_{b,m}} \{ (p(X_{a,m}, X_{b,m}))^k \}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ακολουθώντας αντίστοιχα βήματα με αυτά της Πρότασης 4.1 για τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής καμπύλης του διαγράμματος ελέγχου, μπορούμε να καταλήξουμε στην επόμενη έκφραση για την ποσότητα στην (4.9)

$$D(k) = \int_0^1 \int_0^t q^k (GF^{-1}(s), GF^{-1}(t); r) f(s, t) ds dt, \quad (4.10)$$

όπου το  $q(v, w; r)$  δίνεται στην (4.5). Είναι σαφές ότι η κατανομή του μήκους ροής εξαρτάται από τις κατανομές  $F, G$  μέσω της συνάρτησης  $G \circ F^{-1}$ . Αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, δηλαδή ισχύει ότι  $F = G$ , η σχέση (4.10) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$D_C(k) = \int_0^1 \int_0^t q^k (s, t; r) f(s, t) ds dt. \quad (4.11)$$

Η αναμενόμενη τιμή της κατανομής του μήκους ροής, δηλαδή το μέσο μήκος ροής ( $ARL$ ), το οποίο είναι ίσως το πιο δημοφιλές μέτρο αξιολόγησης της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου, μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των ποσοτήτων  $D(k)$ . Αυτό επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι, δοθέντων των  $X_{a,m} = x_a, X_{b,m} = x_b$ , η μέση τιμή της μεταβλητής  $N$  ισούται με

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(N > k) = \sum_{k=0}^{\infty} (p(x_a, x_b))^k,$$

οπότε

$$ARL = E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{X_{a,m}, X_{b,m}} [(p(X_{a,m}, X_{b,m}))^k] = \sum_{k=0}^{\infty} D(k).$$

Συνεπώς, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) δίνεται στην ακόλουθη σχέση

$$ARL_{in} = \sum_{k=0}^{\infty} D_C(k),$$

όπου  $D_C(k)$  ορίζεται στην (4.11), ή ισοδύναμα

$$ARL_{in} = \int_0^1 \int_0^t \frac{1}{1 - q(s, t; r)} f(s, t) ds dt. \quad (4.12)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις για το μέσο μήκος ροής μπορούν να υπολογισθούν αριθμητικά για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού  $a, b, m, n, j, r$ .

**Πίνακας 4.5.** Τα  $ARL_{in}$  για καθορισμένη τιμή  $FAR$  και δεδομένο σχεδιασμό  
 $(b = m - a + 1, j = (n + 1) / 2)$

$FAR$	$m$	$n$	$(LCL, UCL)$	$r$	Ακριβής $FAR$	$ARL_{in}$
0.01	50	5	(3,48)	1	0.0072	635.7
		11	(7,44)	1	0.0093	642.2
		25	(6,45)	13	0.0097	3957820
	100	5	(7,94)	1	0.0086	214.9
		11	(6,95)	7	0.0091	518.8
		25	(8,93)	16	0.0082	4820
	500	5	(38,463)	2	0.0091	121
		11	(33,468)	7	0.00999	127.7
		25	(120,381)	7	0.0095	221
1000	5	(79,922)	2	0.00997	105.2	
	11	(96,905)	6	0.0098	113.2	
	25	(243,758)	7	0.00994	115.6	
0.005	50	5	(2,49)	1	0.003	5671
		11	(5,46)	2	0.0025	9503.1
		25	(7,44)	11	0.0048	9073150
	100	5	(5,96)	1	0.00352	678.4
		11	(5,96)	7	0.0046	1700.2
		25	(15,86)	11	0.00445	6223
	500	5	(20,481)	3	0.00477	254.1
		11	(56,445)	5	0.0049	260.1
		25	(90,411)	10	0.00499	319.8
1000	5	(62,939)	2	0.0049	217.7	
	11	(136,865)	4	0.0049	223.9	
	25	(129,872)	13	0.00497	258.7	
0.0027	50	5	(1,50)	1	0.0008	$\infty$
		11	(5,46)	2	0.0025	9503.1
		25	(7,44)	10	0.0021	29347500
	100	5	(4,97)	2	0.00214	1508
		11	(9,92)	5	0.0023	2540.4
		25	(12,89)	12	0.0019	45381
	500	5	(16,485)	3	0.0026	503.8
		11	(64,437)	2	0.00263	456
		25	(101,400)	8	0.0026	599.1
1000	5	(49,952)	2	0.0025	442.7	
	11	(49,952)	7	0.00267	449.7	
	25	(189,812)	9	0.00269	476.1	

Στον Πίνακα 4.5, παρουσιάζονται οι εντός ελέγχου τιμές  $ARL_{in}$  για επιλεγμένες τιμές των  $m, n$ . Αρχικά χρησιμοποιείται το Πρόρισμα 4.1 για την κατασκευή του διαγράμματος με ονομαστικές τιμές  $FAR$  ίσες με 0.01, 0.005 και 0.0027 (το οποίο σχετίζεται με το μέσο μήκος ροής  $ARL_{in} = 370$  για ένα  $\bar{X}$ -διάγραμμα τύπου *Shewhart*). Η διατεταγμένη παρατήρηση του εξεταζόμενου δείγματος που απεικονίζεται στο διάγραμμα είναι η διάμεσος, ενώ τα  $a, b$  επιλέγονται συμμετρικά ( $b = m - a + 1$ ). Η παράμετρος σχεδιασμού  $r$ , επιλέγεται σε κάθε περίπτωση κατάλληλα ώστε το διάγραμμα να επιτυγχάνει πιθανότητα λανθασμένου συναγερού, όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή-στόχο κάθε φορά (0.01, 0.005, 0.0027). Τέλος, το  $ARL_{in}$  υπολογίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (4.9) και (4.12).

Για παράδειγμα, με τη βοήθεια του Πίνακα 4.5, αν χρησιμοποιήσουμε δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 500$  και εξετάζουμε το αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου με τη βοήθεια τυχαίων δειγμάτων μεγέθους  $n = 11$  που εξάγονται από αυτή, τότε ο σχεδιασμός  $a = 33, b = 468, j = 6, r = 7$  παράγει λανθασμένο συναγερό με πιθανότητα 0.00999, ενώ αναμένεται να δώσει  $ARL_{in} = 127.7$ .

#### 4.6. Μία παραλλαγή του νέου διαγράμματος ελέγχου

Μία παραλλαγή του παραπάνω μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου προκύπτει αν, για τη διατύπωση του κανόνα απόφασης, λάβουμε υπόψιν το πλήθος των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος που βρίσκονται ανάμεσα σε κάθε ένα όριο ελέγχου και τη στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται. Πιο συγκεκριμένα, αφού συλλεγεί ένα τυχαίο δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  από τη διεργασία, χρησιμοποιείται η  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση σε συνδυασμό με τις επόμενες δύο στατιστικές συναρτήσεις

$$R_1 = R_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, Y_{j:n}) = \left| \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : X_{a:m} \leq Y_i \leq Y_{j:n}\} \right|,$$

$$R_2 = R_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; Y_{j:n}, X_{b:m}) = \left| \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : Y_{j:n} \leq Y_i \leq X_{b:m}\} \right|.$$

Στη συνέχεια, η διεργασία θεωρείται ότι είναι εντός ελέγχου, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL, \quad R_1 \geq r_1 \quad \text{και} \quad R_2 \geq r_2. \quad (4.13)$$

Οι παράμετροι  $a, b, j, r_1, r_2$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού του προτεινόμενου ελεύθερου κατανομής διαγράμματος ελέγχου. Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του διαγράμματος θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$FAR = 1 - P_C(LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL, R_1 \geq r_1 \text{ και } R_2 \geq r_2),$$

όπου ο δείκτης  $C$  δηλώνει ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Αν συμβολίσουμε με  $p^*$  την πιθανότητα ότι το νέο διάγραμμα δεν παράγει σήμα, δηλαδή

$$p^* = p^*(m, n, a, b, j, r_1, r_2; F, G) = P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m}, R_1 \geq r_1 \text{ και } R_2 \geq r_2),$$

τότε η πιθανότητα  $FAR$  θα γράφεται στη μορφή

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b, j, r_1, r_2; F, F).$$

Ακολουθώντας ανάλογα βήματα με αυτά της ανάλυσης του διαγράμματος ελέγχου που μελετήθηκε στις Παραγράφους 4.3 και 4.4, μπορούμε να καταλήξουμε σε ακριβή έκφραση για την πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού και το μέσο μήκος ροής του νέου διαγράμματος.

**Πρόταση 4.2.** Η χαρακτηριστική καμπύλη του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.13) δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$p^* = p^*(m, n, a, b, j, r_1, r_2; F, G) = \int_0^1 \int_0^t q^*(GF^{-1}(s), GF^{-1}(t); r_1, r_2) f(s, t) ds dt,$$

όπου

$$q^*(v, w; r_1, r_2) = \sum_{c=r_1}^{n-1} \sum_{d=r_2}^{n-c-1} q_{c,d}(v, w), \quad 0 \leq v < w \leq 1 \quad (4.14)$$

και  $q_{c,d}(v, w)$  είναι η ποσότητα που ορίστηκε στη σχέση (4.5).

Θέτοντας  $F = G$  στην Πρόταση 4.2, μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη ακριβή μορφή για την πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του νέου διαγράμματος ελέγχου.

**Πόρισμα 4.3.** Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.13) δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$FAR = 1 - \frac{\sum_{c=r_1}^{n-1} \sum_{d=r_2}^{n-c-1} \binom{j-c+a-2}{a-1} \binom{m+n-b-d-j}{n-j-d} \binom{b+c+d-a}{c+d+1}}{\binom{m+n}{n}}.$$

**Απόδειξη.** Δεδομένου ότι η πιθανότητα  $FAR$  παραπέμπει στην περίπτωση που η διεργασία είναι εντός ελέγχου, έχουμε ότι  $F = G$  και η Πρόταση 4.2 στη συγκεκριμένη περίπτωση παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} p^* &= p^*(m, n, a, b, j, r_1, r_2; F, F) = \int_0^1 \int_0^t q^*(s, t; r_1, r_2) f(s, t) ds dt \\ &= \sum_{c=r_1}^{n-1} \sum_{d=r_2}^{n-c-1} \int_0^1 \int_0^t q_{c,d}(s, t) f(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.8), προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.  $\square$

Το επόμενο Πόρισμα δίνει την ακριβή έκφραση για τη χαρακτηριστική καμπύλης  $p^*$  για την περίπτωση των εναλλακτικών υποθέσεων τύπου *Lehmann*.

**Πόρισμα 4.4. α.** Η χαρακτηριστική καμπύλη  $p^* = p^*(m, n, a, b, j, r_1, r_2; \gamma)$  του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.13), υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x) = [F(x)]^\gamma$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} p^*(m, n, a, b, j, r_1, r_2; \gamma) &= a(b-a) \binom{m}{a, b-a, m-b} \sum_{c=r_1}^{n-1} \sum_{d=r_2}^{n-c-1} \binom{n}{j-c-1, c+d+1, n-j-d} \times \\ &B_\gamma(\gamma(j-c-1) + a, b-a; c+d+1) B_\gamma(\gamma(j+d) + b, m-b+1; n-j-d), \end{aligned}$$

όπου

$$B_\gamma(a, b; l) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} (1-x^\gamma)^l dx = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} B(a+k\gamma, b).$$

**β.** Η χαρακτηριστική καμπύλη  $p^{**} = p^{**}(m, n, a, b, j, r_1, r_2; \gamma)$  του διαγράμματος ελέγχου που ορίζεται στην (4.13), υπό την εναλλακτική υπόθεση τύπου *Lehmann*  $G(x) = 1 - (1 - F(x))^\gamma$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$p^{**}(m, n, a, b, j, r_1, r_2; \gamma) = p^*(m, n, m-b+1, m-a+1, n-j+1, r_1, r_2; \gamma).$$

Για την απόδειξη του Πορίσματος 4.4, ακολουθούμε τα βήματα της απόδειξης του Πορίσματος 4.2 του παρόντος κειμένου. Τέλος, το μέσο μήκος ροής του προτεινόμενου διαγράμματος, μπορεί να εκφρασθεί ως εξής

$$ARL = \sum_{k=0}^{\infty} D^*(k),$$

όπου

$$D^*(k) = \int_0^1 \int_0^t (q^*)^k (GF^{-1}(s), GF^{-1}(t); r_1, r_2) f(s, t) ds dt.$$

Συνεπώς, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$ARL_{in} = \int_0^1 \int_0^t \frac{1}{1 - q^*(s, t; r_1, r_2)} f(s, t) ds dt.$$

Η παραπάνω έκφραση για το μέσο μήκος ροής μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού  $a, b, m, n, j, r_1, r_2$ . Στον Πίνακα 4.6, παρουσιάζονται οι εντός ελέγχου τιμές  $FAR$  για επιλεγμένες τιμές των  $m, n$ .

**Πίνακας 4.6.** Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού για δεδομένο σχεδιασμό  
( $b = m - a + 1, j = (n + 1) / 2$ )

Δείγμα αναφοράς μεγέθους $m$										
$n$	$r_1$	$r_2$	40		60		100		200	
			$a$	$FAR$	$a$	$FAR$	$a$	$FAR$	$a$	$FAR$
5	1	0	2	0.0316	2	0.0149	3	0.0111	7	0.0132
			3	0.0616	4	0.0478	7	0.0496	14	0.0476
			4	0.0999	6	0.0969	10	0.0943	20	0.0922
	1	1	1	0.0202	2	0.0279	2	0.0108	5	0.0138
			2	0.0575	3	0.0538	5	0.0505	10	0.0479
			3	0.1090	4	0.0865	7	0.0903	15	0.0988
11	2	1	3	0.0186	4	0.0107	8	0.0144	16	0.0120
			4	0.0392	7	0.0518	12	0.0499	24	0.0452
			6	0.1138	9	0.1053	15	0.0977	30	0.0917
	2	2	2	0.0116	4	0.0183	6	0.0106	13	0.0107
			3	0.0306	6	0.0547	10	0.0479	21	0.0496
			5	0.1095	7	0.0831	13	0.1025	26	0.0955
25	6	5	3	0.0183	5	0.0175	8	0.0097	18	0.0109
			4	0.0455	7	0.0596	12	0.0525	25	0.0505
			5	0.0927	8	0.0960	14	0.0971	29	0.0967
	6	6	2	0.0080	4	0.0118	7	0.0087	16	0.0099
			3	0.0631	6	0.0489	11	0.0539	22	0.0427
			5	0.1246	7	0.0836	13	0.1029	26	0.0879



#### 4.7. Αριθμητικές συγκρίσεις

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενες Παραγράφους, ένα βασικό πλεονέκτημα ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου είναι ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) δεν εξαρτάται από την κατανομή της διεργασίας. Επιπλέον, τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου (βλ. Κεφάλαιο 3 του παρόντος κειμένου) επηρεάζονται σημαντικά από τυχόν αλλαγή του τύπου της κατανομής του υπό μελέτη χαρακτηριστικού. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο των δύο διαγραμμάτων που περιγράφονται στο παρόν Κεφάλαιο είναι ότι έχουν καλή απόδοση για μια ευρεία κλάση κατανομών.

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου αξιολογείται με τη βοήθεια της κατανομής του μήκους ροής του, αλλά και την πιθανότητα να παράγει (ή όχι) σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση, όταν η διεργασία έχει πράγματι μετατοπιστεί. Ένας τρόπος σύγκρισης δύο διαφορετικών διαγραμμάτων είναι να επιλεγεί κατάλληλος σχεδιασμός ώστε να επιτυγχάνουν στην πράξη την ίδια (περίπου) πιθανότητα λανθασμένου σχεδιασμού και στη συνέχεια να υπολογισθούν τα εντός ελέγχου μέσα μήκη ροής τους. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια κοινή τιμή-στόχος για τα  $ARL_{in}$  και στη συνέχεια να συγκρίνουμε τις εκτός ελέγχου μέσες τιμές του μήκους ροής τους ( $ARL_{out}$ ) για διάφορες μετατοπίσεις της κατανομής της διεργασίας.

Στον ακόλουθο Πίνακα, συγκρίνουμε την απόδοση των δύο διαγραμμάτων που αναλύθηκαν εκτενώς στο κεφάλαιο του παρόντος κειμένου. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζοντας το επίπεδο πιθανότητας λανθασμένου συναγερμού προσδιορίζουμε κατάλληλα τις παραμέτρους των δύο διαγραμμάτων και υπολογίζουμε τα εντός ελέγχου μέσα μήκη ροής τους. Υπό την επικεφαλίδα ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1 συνοψίζουμε τα αποτελέσματα που σχετίζονται με το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου που ορίζεται στην (4.3), ενώ για το διάγραμμα που ορίζεται στην (4.13) οι αντίστοιχες τιμές βρίσκονται κάτω από τον τίτλο ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.

**Πίνακας 4.7.** Σύγκριση των  $ARL_{in}$  των δύο διαγραμμάτων ελέγχου με ίδια τιμή του  $FAR$

$FAR$	$m$	$n$	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1				ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2				
			$(LCL, UCL)$	$r$	Ακριβές $FAR$	$ARL_{in}$	$(LCL, UCL)$	$r_1$	$r_2$	Ακριβές $FAR$	$ARL_{in}$
0.05	100	5	(9, 92)	3	0.047	<b>30.40</b>	(7,94)	1	0	0.049	<b>29.97</b>
		11	(21, 80)	3	0.043	<b>34.91</b>	(12,89)	2	1	0.049	<b>33.90</b>
	200	5	(18, 183)	3	0.045	<b>26.21</b>	(14,187)	1	0	0.048	<b>25.58</b>
		11	(26, 175)	6	0.045	<b>30.67</b>	(24,177)	2	1	0.045	<b>28.93</b>
0.10	100	5	(12, 89)	3	0.096	<b>12.98</b>	(10,91)	1	0	0.094	<b>13.40</b>
		11	(25, 76)	3	0.096	<b>13.63</b>	(15,86)	2	1	0.098	<b>14.35</b>
	200	5	(24, 177)	3	0.095	<b>11.76</b>	(20,181)	1	1	0.092	<b>12.19</b>
		11	(46, 155)	4	0.097	<b>12.19</b>	(30,171)	2	1	0.092	<b>12.94</b>

Από τον Πίνακα 4.7 είναι σαφές ότι τα δύο μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου παρουσιάζουν παρόμοια απόδοση, αφού για την ίδια (σχεδόν) τιμή  $FAR$ , πετυχαίνουν πολύ κοντινές τιμές του μέσου μήκους ροής τους. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στην αξιολόγηση μόνο του ενός από τα δύο διαγράμματα και μάλιστα εκείνου που ορίζεται στην (4.3), δεδομένου ότι υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, το δεύτερο διάγραμμα εμφανίζει ισοδύναμα αποτελέσματα.

Στον Πίνακα 4.8, έχουμε καθορίσει τρία διαφορετικά επίπεδα για την πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού και διάφορες τιμές των παραμέτρων  $m, n$ . Για κάθε επιλογή, χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 4.1 για την κατασκευή του διαγράμματος και την επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού  $a, b, r$  ώστε η ακριβής τιμή της πιθανότητας  $FAR$  να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο προκαθορισμένο επιθυμητό επίπεδο. Στη συνέχεια, υπολογίζεται αριθμητικά με τη βοήθεια της (4.12) το αναμενόμενο μέσο μήκος του διαγράμματος που προκύπτει. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται υπό την επικεφαλίδα  $NEO$ , ενώ ο χαρακτηρισμός  $C-L-W$  αναφέρεται στα αντίστοιχα αποτελέσματα του διαγράμματος των Chakraborti *et al.* (2004) (δεδομένου ότι χρησιμοποιήσαμε τις ίδιες επιλογές για τα  $m, n, FAR$ , το συγκεκριμένο μέρος του Πίνακα 4.8, έχει ληφθεί από την τελευταία εργασία).

**Πίνακας 4.8.** Σύγκριση των  $ARL_{in}$  των διαγραμμάτων ελέγχου με ίδια τιμή του  $FAR$

$FAR$	$m$	$n$	$C-L-W$			$NEO$			
			$(LCL, UCL)$	Ακριβές $FAR$	$ARL_{in}$	$(LCL, UCL)$	$r$	Ακριβές $FAR$	$ARL_{in}$
0.01	50	5	(3, 48)	0.0072	<b>635.7</b>	(3,48)	1	0.0072	<b>635.7</b>
		11	(7, 44)	0.0093	<b>642.2</b>	(7,44)	1	0.0093	<b>642.2</b>
		25	(10, 41)	0.0061	<b>10990</b>	(6,45)	13	0.0097	<b>3957820</b>
	100	5	(7, 94)	0.00864	<b>214.9</b>	(7,94)	1	0.00864	<b>214.9</b>
		11	(15, 86)	0.00856	<b>245</b>	(6,95)	7	0.0091	<b>518.8</b>
		25	(23, 78)	0.00804	<b>510.8</b>	(8,93)	16	0.0082	<b>4820</b>
	500	5	(40, 461)	0.00954	<b>114.5</b>	(38,463)	2	0.0091	<b>121</b>
		11	(83, 418)	0.00988	<b>113.3</b>	(33,468)	7	0.00999	<b>127.7</b>
		25	(127, 374)	0.00946	<b>128.3</b>	(120,381)	7	0.0095	<b>221</b>
1000	5	(82, 919)	0.00998	<b>104.6</b>	(79,922)	2	0.00997	<b>105.2</b>	
	11	(167, 834)	0.00974	<b>108.4</b>	(96,905)	6	0.0098	<b>113.2</b>	
	25	(258, 743)	0.00994	<b>109.8</b>	(243,758)	7	0.00994	<b>115.6</b>	
0.005	50	5	(2, 49)	0.003	<b>5671</b>	(2,49)	1	0.003	<b>5671</b>
		11	(5, 46)	0.0025	<b>9503</b>	(5,46)	2	0.0025	<b>9503.1</b>
		25	(9, 42)	0.0031	<b>44750</b>	(7,44)	11	0.0048	<b>9073150</b>
	100	5	(5, 96)	0.00352	<b>678.4</b>	(5,96)	1	0.00352	<b>678.4</b>
		11	(13, 88)	0.0045	<b>574.5</b>	(5,96)	7	0.0046	<b>1700.2</b>
		25	(21, 80)	0.004	<b>1488</b>	(15,86)	11	0.00445	<b>6223</b>
	500	5	(31, 470)	0.00466	<b>242.3</b>	(20,481)	3	0.00477	<b>254.1</b>
		11	(72, 429)	0.0048	<b>240.9</b>	(56,445)	5	0.0049	<b>260.1</b>
		25	(118, 383)	0.00486	<b>261</b>	(90,411)	10	0.00499	<b>319.8</b>
1000	5	(64, 937)	0.00492	<b>215.1</b>	(62,939)	2	0.0049	<b>217.7</b>	
	11	(146, 855)	0.00488	<b>219.8</b>	(136,865)	4	0.0049	<b>223.9</b>	
	25	(239, 762)	0.0049	<b>227.5</b>	(129,872)	13	0.00497	<b>258.7</b>	
0.0027	50	5	(1, 50)	0.0008	$\infty$	(1,50)	1	0.0008	$\infty$
		11	(5, 46)	0.0025	<b>9503</b>	(5,46)	2	0.0025	<b>9503.1</b>
		25	(8, 43)	0.0015	<b>173700</b>	(7,44)	10	0.0021	<b>29347500</b>
	100	5	(4, 97)	0.00204	<b>1550</b>	(4,97)	2	0.00214	<b>1508</b>
		11	(11, 90)	0.00212	<b>1630</b>	(9,92)	5	0.0023	<b>2540.4</b>
		25	(19, 82)	0.00184	<b>5183</b>	(12,89)	12	0.0019	<b>45381</b>
	500	5	(25, 476)	0.00254	<b>460.2</b>	(16,485)	3	0.0026	<b>503.8</b>
		11	(64, 437)	0.00262	<b>456.1</b>	(64,437)	2	0.00263	<b>456</b>
		25	(110, 391)	0.00254	<b>526.2</b>	(101,400)	8	0.0026	<b>599.1</b>
1000	5	(51, 950)	0.00258	<b>419.5</b>	(49,952)	2	0.0025	<b>442.7</b>	
	11	(130, 871)	0.00262	<b>219.8</b>	(49,952)	7	0.00267	<b>449.7</b>	
	25	(224, 777)	0.00266	<b>430.2</b>	(189,812)	9	0.00269	<b>476.1</b>	

Ο Πίνακας 4.8 τεκμηριώνει ότι, υπό την ίδια τιμή  $FAR$ , το νέο διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζει, για όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα  $C - L - W$ , ως προς τις τιμές  $ARL_{in}$ .

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω Πίνακα, το  $\bar{X}$ -διάγραμμα δεν είναι ανθεκτικό (*robust*) ως προς το  $ARL_{in}$ . Για ένα δείγμα μεγέθους  $n = 5$ , οι Chakraborti *et al.* (2004) υπολόγισαν αρχικά τις παραμέτρους του διαγράμματος ώστε  $ARL_{in} = 500$  υπό την κανονική κατανομή  $N(0,1)$  και στη συνέχεια τις τιμές του  $ARL_{in}$  για το  $\bar{X}$ -διάγραμμα για διάφορες κατανομές (*Laplace*, μετατοπισμένη κανονική, *Γάμμα* και *Student t*). Οι συγκεκριμένες τιμές κυμάνθηκαν από 329.67 (*Student t* κατανομή με 40 βαθμούς ελευθερίας) έως 118 (*Γάμμα* κατανομή). Επιπλέον, το προτεινόμενο διάγραμμα των Chakraborti *et al.* (2004) που βασίζεται στη διάμεσο του εξεταζόμενου δείγματος μεγέθους  $n = 5$  επιτυγχάνει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 501.89, το οποίο είναι αρκετά κοντά στην τιμή 500, για  $m = 1000$ ,  $a = 48$  και  $b = m - a + 1 = 953$  (το  $FAR$  είναι ίσο με 0.0022). Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη τιμή του  $ARL_{in}$  παραμένει ίδια για όλες τις συνεχείς κατανομές, προκύπτει ότι το προτεινόμενο διάγραμμα παρουσιάζει μεγαλύτερη αντοχή ως προς τα  $ARL_{in}$  έναντι του  $\bar{X}$ -διαγράμματος τύπου *Shewhart*. Με τη βοήθεια της (4.12) και του Πορίσματος 4.1, υπολογίζουμε, για το νέο ελεύθερο κατανομής διάγραμμα ελέγχου, και τις επιλογές των παραμέτρων

$$n = 5, m = 1000, j = 3, a = 46, b = m - a + 1 = 955, r = 2,$$

τις τιμές των  $FAR$  και  $ARL_{in}$  οι οποίες είναι ίσες με  $FAR = 0.00204$  και  $ARL_{in} = 536.03$ . Συνεπώς, αν εφαρμοσθεί το προτεινόμενο διάγραμμα, θα έχουμε ένα αποτελεσματικότερο διάγραμμα ελέγχου ως προς τις τιμές  $ARL_{in}$  που επιτυγχάνει.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε την απόδοση των παραπάνω διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας ίδια τιμή  $ARL_{in}$  και υπολογίζοντας τις εκτός ελέγχου τιμές  $ARL_{out}$  για συγκεκριμένες μετατοπίσεις. Ας θεωρήσουμε μια διεργασία, η οποία αρχικά βρίσκεται σε εντός ελέγχου κατάσταση (ακολουθώντας κανονική κατανομή  $N(0,1)$ ), ενώ στη συνέχεια μετατοπίζεται στην κατανομή  $N(0, \theta)$ .

**Πίνακας 4.9.** Σύγκριση των  $ARL_{out}$  των διαγραμμάτων ελέγχου με την ίδια  $ARL_{in}$  τιμή.

Εντός ελέγχου κατανομή:  $N(0, 1)$  και εκτός ελέγχου κατανομή:  $N(0, \theta)$ .

Κάθε  $ARL_{out}$  κελί περιλαμβάνει τις τιμές που επιτυγχάνονται για  $\theta = 1.1, 1.2$  και  $1.3$ , αντίστοιχα

$ARL_{in}$	$m$	$n$	$C-L-W$			$NEO$				$\bar{X}$
			$(LCL, UCL)$	Ακριβές $ARL_{in}$	$ARL_{out}$	$(LCL, UCL)$	$r$	Ακριβές $ARL_{in}$	$ARL_{out}$	
370	200	5	(11,190)	385.5	162.8	(11,190)	2	363.6	150.2	156.6
					83.7				75.5	80.5
					49.4				43.6	47.6
	11	(27,174)	372.4	157.2	(22,179)	5	367.8	114.2	156.6	
				80.9				47.2	80.5	
				47.9				23.9	47.6	
	25	(46,155)	375.7	155.8	(43,158)	8	374.1	108.6	156.6	
				79.6				42.0	80.5	
				47.0				20.1	47.6	
500	5	(27,474)	365.5	157.0	(18,473)	3	350.4	124.9	156.6	
				81.5				56.7	80.5	
				48.4				30.6	47.6	
	11	(67,434)	355.3	152.6	(39,462)	2	373.8	106.4	156.6	
				79.3				41.6	80.5	
				47.2				20.3	47.6	
25	(114,387)	367.3	156.1	(89,412)	10	366.2	88.2	156.6		
			80.6				31.1	80.5		
			47.8				14.3	47.6		
500	200	5	(10,191)	520.1	209.3	(7,194)	3	500.2	164.3	207.1
					103.7				70.5	102.2
					59.5				36.5	58.5
	11	(26,175)	460.5	187.7	(21,180)	5	496.8	146.2	207.1	
				94.1				58.0	102.2	
				54.6				28.5	58.5	
	25	(45,156)	472.5	188.4	(26,175)	13	497.8	86.1	207.1	
				93.5				25.3	102.2	
				54.0				10.6	58.5	
	500	5	(24,477)	520.3	211.4	(16,485)	3	503.8	168.8	207.1
					105.1				73.1	102.2
					60.4				38.0	58.5
11		(63,438)	497.2	202.5	(37,464)	6	500.7	134.9	207.1	
				101.0				50.6	102.2	
				58.2				23.9	58.5	
25	(111,390)	480.1	195.4	(87,414)	10	483.8	110.2	207.1		
			97.7				37.3	102.2		
			56.4				16.6	58.5		

Στον Πίνακα 4.9, παρουσιάζουμε τις τιμές  $ARL_{out}$  για το διάγραμμα  $C-L-W$ , το προτεινόμενο διάγραμμα, και το  $\bar{X}$ -διάγραμμα τύπου *Shewhart* για  $ARL_{in} = 370, 500$ ,  $m = 200, 500$ ,  $n = 5, 11, 25$  ( $j = (n + 1) / 2$ ) και  $\theta = 1.1, 1.2, 1.3$ . Οι παράμετροι σχεδιασμού  $LCL = X_{a,m}$ ,  $UCL = X_{m-a+1,m}$ ,  $r$  έχουν καθορισθεί με τη βοήθεια της (4.12), έτσι ώστε οι τιμές  $ARL_{in}$  να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην

τιμή-στόχο. Στη συνέχεια, η εκτός ελέγχου  $ARL_{out}$  τιμή υπολογίζεται αριθμητικά με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης

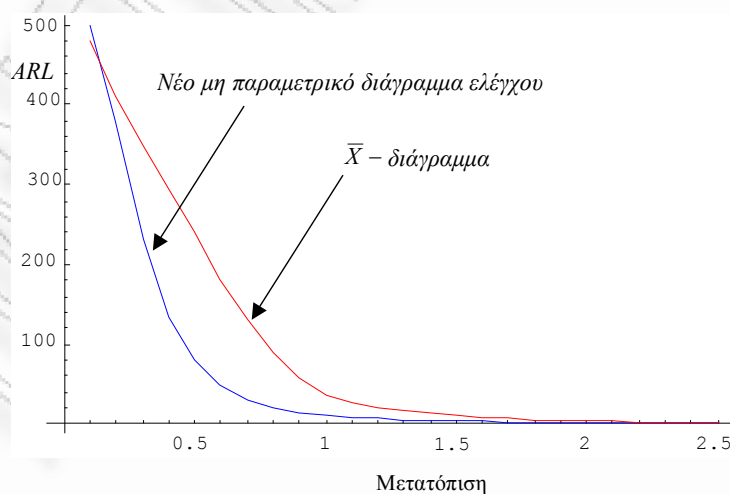
$$ARL = \sum_{k=0}^{\infty} D(k) = \int_0^1 \int_0^t \frac{1}{1 - q(G(\Phi^{-1}(s)), G(\Phi^{-1}(t)); r)} f(s, t) ds dt$$

(εφαρμόζοντας την (4.10) για  $GF^{-1}(t) = G(\Phi^{-1}(t))$ ).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν και η μετατόπιση της κατανομής που πραγματοποιείται αφορά μόνο τη διακύμανση της κατανομής, το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου είναι αποτελεσματικό στην ανίχνευσή της, πράγμα που οφείλεται στην ενσωμάτωση της πρόσθετης συνθήκης να βρίσκεται ανάμεσα στα όρια ελέγχου επαρκές πλήθος των παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος.

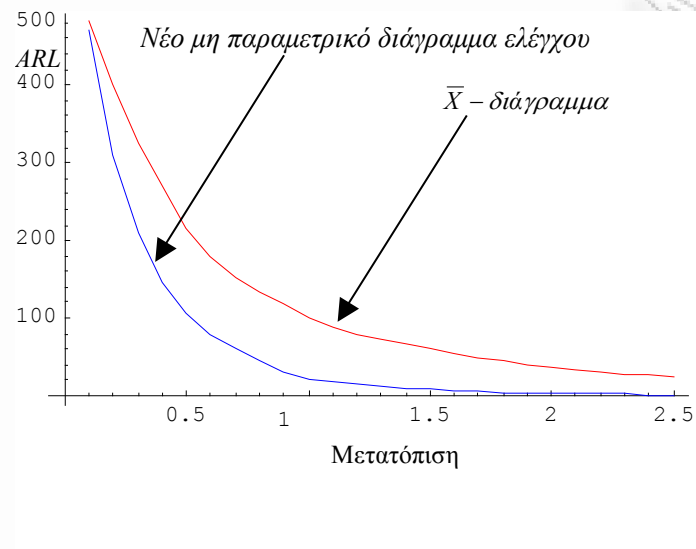
Τέλος, προκειμένου να συγκρίνουμε γραφικά τα εκτός ελέγχου μέσα μήκη ροής του  $\bar{X}$  - διαγράμματος τύπου *Shewhart* και του προτεινόμενου διαγράμματος, όπως αυτό ορίζεται στην (4.3), υπολογίζουμε, υπό δύο διαφορετικές εντός ελέγχου κατανομές (*Student t* με 4 βαθμούς ελευθερίας και *Εκθετική*) τα  $ARL_{in}$  για διαφορετικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Οι παράμετροι σχεδιασμού επιλέγονται έτσι ώστε το  $ARL_{in}$  να είναι σχεδόν ίσο με 500, ενώ για την εκθετική κατανομή, χρησιμοποιήσαμε ένα μονόπλευρο διάγραμμα, αφού είναι δυνατές μόνο θετικές μετατοπίσεις. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.2 και 4.3, όπου είναι σαφές ότι,

**Σχήμα 4.2.** Εκτός ελέγχου  $ARL$  για την εκθετική κατανομή



σε περιπτώσεις κατανομών με βαριές ουρές (όπως η *Student t*) ή με έντονη λοξότητα (όπως η *Εκθετική*), το νέο διάγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό από το  $\bar{X}$  - διάγραμμα τύπου *Shewhart*.

**Σχήμα 4.3.** Εκτός ελέγχου *ARL* για την κατανομή *Student* με 4 βαθμούς ελευθερίας.



РАНЕЕ НЕ ПЕРПА