ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων (*theory of order statistics*) ασχολείται με τις ιδιότητες και εφαρμογές διατεταγμένων τυχαίων μεταβλητών, καθώς και συναρτήσεων των μεταβλητών αυτών. Αν n τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1,2,...,n$ διαταχθούν σε αύξουσα σειρά μεγέθους, τότε οδηγούμαστε στο διατεταγμένο δείγμα

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n},$$

όπου με $X_{1:n}$ έχουμε συμβολίσει τη μικρότερη διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος, $X_{2:n}$ τη δεύτερη μικρότερη διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος,..., $X_{n:n}$ τη μεγαλύτερη διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος (γενικά με $X_{i:n}$ έχει συμβολιστεί η i–οστή διατεταγμένη παρατήρηση σε ένα δείγμα μεγέθους n). Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμη και στην περίπτωση που οι μη διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (*independent and identically distributed*, *i.i.d.*), οι τυχαίες μεταβλητές $X_{i:n}$, $i = 1,2,...,n$ είναι εξαρτημένες λόγω των παραπάνω ανισοτικών σχέσεων που πρέπει να ικανοποιούν.

Παραδείγματα τυχαίων μεταβλητών $X_{i:n}$ που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είναι οι ακραίες τιμές (*extreme values*) $X_{1:n} = \min\{X_1, X_2,..., X_n\}$ και $X_{n:n} = \max\{X_1, X_2,..., X_n\}$, καθώς επίσης και συναρτήσεις, όπως το εύρος (*range*) $W = X_{n:n} - X_{1:n}$, η διάμεσος (*median*)

$$\delta = \begin{cases} X_{(n+1)/2:n}, \text{ αν το μέγεθος του δείγματος } n \text{ είναι περιττός} \\ \frac{1}{2}(X_{n/2:n} + X_{n/2+1:n}), \text{αν το μέγεθος του δείγματος } n \text{ είναι άρτιος,} \end{cases}$$

η ακραία απόκλιση από το δειγματικό μέσο (*extreme deviate from the sample mean*) $X_{n:n} - \overline{X}$, ενώ στις περιπτώσεις, στις οποίες το τυχαίο δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, ιδιαίτερα χρήσιμη είναι και η κατανομή του τυποποιημένου εύρους (*studentized range*) W/S_ν, όπου S_ν είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου σ με ν βαθμούς ελευθερίας. Οι ακραίες τιμές συμβάλουν σημαντικά στη στατιστική μελέτη φυσικών φαινομένων (π.χ. πλημμυρών, ξηρασίας) και στη θεωρία πλειστηριασμών (Krishna(2002)), το εύρος χρησιμοποιείται στον Έλεγχο Ποιότητας ως απλή εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ του υπό μελέτη χαρακτηριστικού, η διάμεσος βρίσκει εφαρμογές στις χρονοσειρές και στην κατασκευή μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, η ακραία απόκλιση αποτελεί βασικό εργαλείο για τον εντοπισμό έκτροπων παρατηρήσεων (*outliers*) (Grubbs (1969), Barnett & Lewis (1984)), ενώ το τυποποιημένο εύρος, που εξετάζεται λεπτομερώς στις εργασίες του Borenius (1959, 1966), χρησιμοποιείται σε ελέγχους βιοϊσοδυναμίας και προβλήματα ανάλυσης διακύμανσης.

Οι Sarhan & Greenberg (1957, 1962) χρησιμοποίησαν γραμμικές συναρτήσεις διατεταγμένων παρατηρήσεων για να εκτιμήσουν παραμέτρους θέσης και κλίμακας, τόσο σε πλήρη όσο και σε ελλιπή δεδομένα (η συνάρτηση πυκνότητας μιας γραμμικής συνάρτησης διατεταγμένων παρατηρήσεων υπολογίζεται σε ειδικές περιπτώσεις κατανομών, όπως για παράδειγμα για την εκθετική και την ομοιόμορφη στις εργασίες των Ali & Obaidullah (1982) και Ali & Mead (1969) αντίστοιχα). Εκτενής μελέτη γραμμικών εκτιμήσεων της μέσης τιμής σε κανονικούς πληθυσμούς, όπως για παράδειγμα

- Δειγματικός μέσος (*sample mean*): $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i:n}$
- Περικομμένος μέσος (*trimmed mean*): $T_n(r) = \dfrac{1}{n-2r}\sum_{i=r+1}^{n-r} X_{i:n}$
- *Winsorized* μέσος: $W_n(r) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=r+2}^{n-r-1} X_{i:n} + (r+1)(X_{r+1:n} + X_{n-r:n})\right)$
- Τροποποιημένη εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (*modified maximum likelihood estimator*): $M_n(r) = \dfrac{1}{m}\left(\sum_{i=r+2}^{n-r-1} X_{i:n} + (1+r\beta)(X_{r+1:n} + X_{n-r:n})\right)$, όπου $m = n - 2r + 2r\beta$
- Γραμμικά σταθμισμένος μέσος (*linearly weighted mean*): $L_n(r) = \dfrac{1}{2(n/2-r)^2}\sum_{i=1}^{n/2-r}(2i-1)(X_{r+i:n} + X_{n-r-i+1:n})$,

πραγματοποιείται στην εργασία των David & Shu (1978), με βάση τους πίνακες που δίνονται στην εργασία των David *et al*. (1977). Επιπλέον, η ακραία τιμή $X_{1:n}$ έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την εκτίμηση παραμέτρων σε μη κανονικές κατανομές. Συγκεκριμένα, οι Cohen & Whitten (1980, 1981, 1982, 1985, 1986, 1988), Cohen (1988) και Cohen *et al*. (1984, 1985) υπολόγισαν εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους διαφόρων κατανομών, όπως της *Weibull*, της λογαριθμοκανονικής ή της γενικευμένης *Γάμμα* κατανομής.

Ένα ακόμη πεδίο στο οποίο η θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων παίζει σημαντικό ρόλο, είναι η ταξινόμηση (*ranking*) και επιλογή πληθυσμών όταν η βασική υπόθεση είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές προέρχονται από διαφορετικούς πληθυσμούς. Στόχος είναι η αξιολόγηση και επιλογή του καλύτερου πληθυσμού με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφή των Gibbons *et al*. (1977). Επιπλέον, η θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων βρίσκει εφαρμογή στη διαδικασία πολλαπλών συγκρίσεων, όταν οι εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές δεν είναι ισόνομες (βλ. Hochberg & Tamhane (1987)), αλλά και στη δημιουργία μη παραμετρικών διαστημάτων εμπιστοσύνης για διάφορα ποσοστημόρια (ή διαφορές αυτών) της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής (βλ. Krewski (1976), Guildbaud (1983, 2001), Fligner & Wolfe (1979) και Bristol (1990)).

Η θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων έχει επίσης ουσιαστική συμβολή στη μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας. Ένα σύστημα n μονάδων ονομάζεται k–από–τα–n:G αν λειτουργεί όταν και μόνο όταν λειτουργούν τουλάχιστον k από τις n μονάδες του. Είναι φανερό ότι, ο χρόνος έως την αποτυχία του συστήματος (δηλαδή ο χρόνος ζωής του συστήματος) είναι η $(n-k+1)$ –οστή διατεταγμένη παρατήρηση ή ισοδύναμα ο χρόνος μέχρι να μείνουν σε λειτουργία λιγότερες από k μονάδες. Οι ειδικές περιπτώσεις $k=1$ και $k=n$, αντιστοιχούν στο παράλληλο και το σειριακό σύστημα. Στη Θεωρία Αξιοπιστίας υπάρχει πληθώρα συστημάτων, των οποίων ο χρόνος ζωής μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια των κατανομών των διατεταγμένων παρατηρήσεων. Αναλυτικότερη παρουσίαση δίνεται σε επόμενο κεφάλαιο του παρόντος κειμένου. Επιπλέον, στοχαστικές διατάξεις ανάμεσα στους χρόνους ζωής συστημάτων αξιοπιστίας, οι οποίες υλοποιούνται με τη στοχαστική σύγκριση διατεταγμένων παρατηρήσεων, προσφέρουν σημαντικές πληροφορίες για την ποιότητα και τη λειτουργία των συστημάτων αυτών (βλ. Kim (1993), Bapat & Korwar (1994), Boland et al. (1994), Hu et al. (2001) και Korwar (2003)).

Σημαντική είναι επίσης η συμβολή της θεωρίας διατεταγμένων παρατηρήσεων στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας. Βασικά εργαλεία για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας, είναι τα διαγράμματα ελέγχου (*control charts*), τα οποία έχουν στόχο να εντοπίσουν τυχόν ειδικά αίτια μεταβλητότητας του υπό μελέτη χαρακτηριστικού. Η κατασκευή πολλών διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται σε διατεταγμένες παρατηρήσεις ή συναρτήσεις αυτών, όπως είναι το εύρος (*R charts*) και η διάμεσος (*median charts*). Επιπροσθέτως, πολλοί στατιστικοί έλεγχοι καλής προσαρμογής των δεδομένων σε συγκεκριμένη κατανομή στηρίζονται σε διατεταγμένες παρατηρήσεις, καθώς βασίζονται σε αποκλίσεις ανάμεσα στην εμπειρική και τη θεωρητική κατανομή του υπό μελέτη δείγματος (βλ. Tiku (1988)). Για παράδειγμα ένα γράφημα των διατεταγμένων παρατηρήσεων έναντι απλών συναρτήσεων των τάξεων (*ranks*) τους, έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο για παρόμοια προβλήματα. Στην εργασία του Nelson (1972) έχει αναπτυχθεί η συγκεκριμένη τεχνική (με γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης κινδύνου (*hazard function*)), προκειμένου να εκτιμηθούν παράμετροι από προοδευτικά λογοκριμένα δείγματα (*progressively censored samples*).

Η μελέτη των διατεταγμένων παρατηρήσεων έχει επεκταθεί και στις περιπτώσεις που οι τυχαίες μεταβλητές $X_{i:n}$, $i=1,2,...,n$ είναι εξαρτημένες και μη ισόνομες. Οι Boncelet (1987) και Sathe & Dixit (1990) αποδεικνύουν αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της κατανομής τέτοιων διατεταγμένων παρατηρήσεων, ενώ στις εργασίες των Sen (1970), Pledger & Proschan (1971), Proschan & Sethuraman (1976), Hu & Hu (1998) και Kim *et al.* (1988) παρουσιάζονται ενδιαφέροντα αποτελέσματα (ανισοτικές σχέσεις για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και στοχαστικές διατάξεις ανάμεσα σε εξαρτημένες και μη ισόνομες τυχαίες μεταβλητές) που βρίσκουν εφαρμογή σε συστήματα αξιοπιστίας με εξαρτημένες και μη ισόνομες μονάδες. Για εκτενή ανάλυση μη ισόνομων διατεταγμένων παρατηρήσεων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Balakrishnan (2007). Τέλος, μία ακόμη εφαρμογή της θεωρίας των διατεταγμένων παρατηρήσεων εντοπίζεται σε τεχνικές συμπίεσης δεδομένων (*data compression*), στις οποίες μεγάλος αριθμός δεδομένων αντικαθίσταται με μικρό αριθμό κατάλληλα επιλεγμένων διατεταγμένων παρατηρήσεων (για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Eisenberger & Posner (1965)). Η συγκεκριμένη εφαρμογή χρήζει ιδιαίτερης σημασίας σε προγράμματα διαστημικών αποστολών.

1.2 Από κοινού κατανομή *n* διατεταγμένων παρατηρήσεων

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και απόλυτα συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ και αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και θα συμβολίζουμε με $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ τις αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Τότε, δεδομένων των αντίστοιχων παρατηρούμενων τιμών $x_{1:n} \le x_{2:n} \le ... \le x_{n:n}$ για τις n διατεταγμένες παρατηρήσεις, οι τυχαίες μεταβλητές X_i $(i = 1,2,...,n)$ λαμβάνουν τις τιμές $x_{i_k:n}$, οι οποίες λόγω συμμετρίας είναι ισοπίθανες για κάθε μία από τις $n!$ μεταθέσεις $(i_1, i_2, ..., i_n)$ των ακεραίων $\{1,2,...,n\}$. Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των n διατεταγμένων παρατηρήσεων (βλ. Balakrishnan & Cohen (1991))

$$f_{1,2,...,n:n}(x_{1:n}, x_{2:n}, ..., x_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_{i:n}), \ -\infty < x_{1:n} < x_{2:n} < ... < x_{n:n} < \infty . \quad (1.1)$$

Για παράδειγμα, αν οι τυχαίες μεταβλητές X_i $(i = 1,2,...,n)$ ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των n διατεταγμένων παρατηρήσεων θα δίνεται από τον τύπο

$$f_{1,2,...,n:n}(x_{1:n}, x_{2:n}, ..., x_{n:n}) = n!, \ 0 < x_{1:n} < x_{2:n} < ... < x_{n:n} < 1 . \quad (1.2)$$

1.3 Από κοινού κατανομή δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων

Έστω ότι λαμβάνονται δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις $X_{i:n}, X_{j:n}$ $(1 \le i < j \le n)$από το σύνολο των n τυχαίων μεταβλητών $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$. Ένας τρόπος για να καταλήξουμε στην από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X_{i:n}, X_{j:n}$, είναι ολοκληρώνοντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των n διατεταγμένων παρατηρήσεων, που δίνεται στη σχέση (1.1), ως προς $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{i-1:n}$, $X_{i+1:n}, X_{i+2:n}, ..., X_{j-1:n}$, $X_{j+1:n}, X_{j+2:n}, ..., X_{n:n}$. Έτσι παίρνουμε

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = n! f(x_{i:n}) f(x_{j:n})$$

$$\times \int_{-\infty}^{x_{1:n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdots f(x_{i-1:n})\, dx_{1:n} \cdots dx_{i-1:n}$$

$$\times \int_{x_{i:n}}^{x_{j:n}} \cdots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdots f(x_{j-1:n})\, dx_{i+1:n} \cdots dx_{j-1:n}$$

$$\times \int_{x_{j:n}}^{\infty} \cdots \int_{x_{j:n}}^{x_{j+2:n}} f(x_{j+1:n}) \cdots f(x_{n:n})\, dx_{j+1:n} \cdots dx_{n:n} \,. \tag{1.3}$$

Υπολογίζοντας τα παραπάνω ολοκληρώματα λαμβάνουμε αντιστοίχως τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\int_{-\infty}^{x_{1:n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdots f(x_{i-1:n})\, dx_{1:n} \cdots dx_{i-1:n} = \frac{\{F(x_{i:n})\}^{i-1}}{(i-1)!},$$

$$\int_{x_{i:n}}^{x_{j:n}} \cdots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdots f(x_{j-1:n})\, dx_{i+1:n} \cdots dx_{j-1:n} = \frac{\{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})\}^{j-i-1}}{(j-i-1)!}$$

και

$$\int_{x_{j:n}}^{\infty} \cdots \int_{x_{j:n}}^{x_{j+2:n}} f(x_{j+1:n}) \cdots f(x_{n:n})\, dx_{j+1:n} \cdots dx_{n:n} = \frac{\{1 - F(x_{j:n})\}^{n-j}}{(n-j)!} \,.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις για τις τρεις ομάδες ολοκληρωμάτων στη σχέση (1.3), η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X_{i:n}, X_{j:n}$ παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n}))\}^{j-i-1}$$

$$\times \{1 - F(x_{j:n}))\}^{n-j} f(x_{i:n}) f(x_{j:n}) \,, \quad -\infty < x_{i:n} < x_{j:n} < \infty \,. \tag{1.4}$$

Αν θέσουμε στη σχέση (1.4) $i = 1$ και $j = n$, τότε προκύπτει εύκολα η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της μικρότερης και της μεγαλύτερης διατεταγμένης παρατήρησης, η οποία θα δίνεται από τον τύπο

$$f_{1,n:n}(x_{1:n}, x_{n:n}) = n(n-1)\{F(x_{n:n}) - F(x_{1:n})\}^{n-2} f(x_{1:n}) f(x_{n:n}) \,, \ -\infty < x_{1:n} < x_{n:n} < \infty \,.$$

Θέτοντας $j = i + 1$ στη σχέση (1.4) μπορούμε να πάρουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας δύο οποιονδήποτε **διαδοχικών** διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{i+1:n}$ $(1 \le i \le n-1)$, η οποία θα έχει την εξής μορφή

$$f_{i,i+1:n}(x_{i:n}, x_{i+1:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{1 - F(x_{i+1:n}))\}^{n-i-1} f(x_{i:n}) f(x_{i+1:n}) \,,$$

$$-\infty < x_{i:n} < x_{i+1:n} < \infty \,.$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ $(1 \le i < j \le n)$, όπως αυτή δίνεται στη σχέση (1.4), είναι δυνατόν να μελετηθεί και με έναν δεύτερο εναλλακτικό τρόπο, ο οποίος είναι αλγεβρικά απλούστερος και επιτρέπει περαιτέρω γενικεύσεις που μπορούν να εφαρμοσθούν σε πολυπλοκότερα προβλήματα (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα κείμενα των David (2003), David & Shu (1978) και Arnold & Balakrishnan (1989)). Πιο συγκεκριμένα, το ενδεχόμενο $(x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n} + \delta x_{i:n}, x_{j:n} < X_{j:n} \le x_{j:n} + \delta x_{j:n})$ αντιστοιχεί στην ακόλουθη τοποθέτηση των τυχαίων μεταβλητών X_i του αρχικού δείγματος: μία από τις τυχαίες μεταβλητές X_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ λαμβάνει τιμή στο διάστημα $(x_{i:n}, x_{i:n} + \delta x_{i:n}]$, μία δεύτερη λαμβάνει τιμή στο διάστημα $(x_{j:n}, x_{j:n} + \delta x_{j:n}]$ και για τις υπόλοιπες ικανοποιούνται οι επόμενοι περιορισμοί (βλ. και σχήμα 1.1) :

- $(i-1)$ τυχαίες μεταβλητές είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{i:n}$,
- $(j-i-1)$ τυχαίες μεταβλητές είναι μεγαλύτερες από την τιμή $x_{i:n} + \delta x_{i:n}$ και μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{j:n}$,
- $(n-j)$ τυχαίες μεταβλητές είναι μεγαλύτερες από την τιμή $x_{j:n} + \delta x_{j:n}$.

ΣΧΗΜΑ 1.1.

$$\underset{-\infty}{\overbrace{------}^{i-1}}\,\underset{x_{i:n}}{]}\ \overbrace{---}^{1}\ \underset{x_{i:n}+\delta x_{i:n}}{]}\ \overbrace{------}^{j-i-1}\underset{x_{j:n}}{]}\ \overbrace{---}^{1}\ \underset{x_{j:n}+\delta x_{j:n}}{]}\ \underset{\infty}{\overbrace{------}^{n-j}}.$$

Η πιθανότητα να παρατηρηθεί η παραπάνω διάταξη δίνεται από την ακόλουθη έκφραση η οποία προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση πιθανότητας της πολυωνυμικής κατανομής

$$\begin{aligned}
&P(x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n} + \delta x_{i:n}, x_{j:n} < X_{j:n} \le x_{j:n} + \delta x_{j:n}) = \\
&\qquad = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\{F(x_{i:n})\}^{i-1}\{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n} + \delta x_{i:n})\}^{j-i-1} \\
&\qquad \times \{1 - F(x_{j:n} + \delta x_{j:n})\}^{n-j}\{F(x_{i:n} + \delta x_{i:n}) - F(x_{i:n})\} \\
&\qquad \times \{F(x_{j:n} + \delta x_{j:n}) - F(x_{j:n})\} \\
&\qquad + \mathrm{O}((\delta x_{i:n})^2 \delta x_{j:n}) + \mathrm{O}(\delta x_{i:n}(\delta x_{j:n})^2).
\end{aligned}$$

Στις ποσότητες $\mathrm{O}((\delta x_{i:n})^2 \delta x_{j:n})$ και $\mathrm{O}(\delta x_{i:n} (\delta x_{j:n})^2)$ έχουν ενσωματωθεί οι πιθανότητες ότι παραπάνω από μία τ.μ. $X_i, i = 1,2,...,n$ λαμβάνουν τιμή στα διαστήματα $(x_{i:n}, x_{i:n} + \delta x_{i:n}]$ και $(x_{j:n}, x_{j:n} + \delta x_{j:n}]$ αντίστοιχα. Συνεπώς η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ $(1 \le i < j \le n)$ θα προκύψει από την τελευταία σχέση ως εξής

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = \lim_{\substack{\delta x_{i:n} \to 0 \\ \delta x_{j:n} \to 0}} \frac{P(x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n} + \delta x_{i:n}, x_{j:n} < X_{j:n} \le x_{j:n} + \delta x_{j:n})}{\delta x_{i:n} \delta x_{j:n}}$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})\}^{j-i-1}$$

$$\times \{1 - F(x_{j:n})\}^{n-j} f(x_{i:n}) f(x_{j:n}), \qquad -\infty < x_{i:n} < x_{j:n} < \infty,$$

οπότε καταλήγουμε και πάλι στην έκφραση (1.4).

Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1,2,...,n$ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των ακραίων τιμών $X_{1:n}, X_{n:n}$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f_{1,n:n}(x_{1:n}, x_{n:n}) = n(n-1)(x_{n:n} - x_{1:n})^{n-2}, \qquad 0 < x_{1:n} < x_{n:n} < 1.$$

Η τελευταία έκφραση έχει σημαντική συμβολή στη μελέτη των κατανομών του εύρους και του μέσου εύρους (*midrange*). Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Gumbel (1944, 1947), Gumbel et al. (1965) και τις μονογραφές των Casella & Berger (2002) και Gumbel (1958).

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ $(1 \le i < j \le n)$ προκύπτει αν ολοκληρώσουμε την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας των $X_{i:n}, X_{j:n}$, όπως αυτή δίνεται στη σχέση (1.4), διαδοχικά ως προς $X_{i:n}$ και $X_{j:n}$. Έτσι θα πάρουμε

$$F_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = \int_0^{F(x_{i:n})} \int_0^{F(x_{j:n})} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1-t_2)^{n-j} \, dt_2 dt_1,$$

$$-\infty < x_{i:n} < x_{j:n} < \infty. \quad (1.5)$$

Εναλλακτικά, η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των $X_{i:n}, X_{j:n}$ μπορεί να εκφρασθεί ως ακολούθως

$F_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = P(X_{i:n} \le x_{i:n}, X_{j:n} \le x_{j:n})$

=P(τουλάχιστον i τ.μ. X_i είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{i:n}$

και τουλάχιστον j είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{j:n}$)

$= \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} P$ (ακριβώς r τ.μ. X_i είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{i:n}$

και ακριβώς s τ.μ. X_i είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{j:n}$)

$$= \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} \{F(x_{i:n})\}^r \{F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})\}^{s-r} \{1 - F(x_{j:n})\}^{n-s}.$$

Συνεπώς η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ $(1 \le i < j \le n)$ αποτελεί την ουρά της δισδιάστατης διωνυμικής κατανομής στην ορθογώνια περιοχή $(j,i),(j,i+1),...,(n,n)$. Σημειώνουμε ότι, συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις, προκύπτει η ακόλουθη χρήσιμη ισότητα (για $0 < p_1 < p_2 < 1$)

$$\sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \frac{n!}{r!(s-r)!(n-s)!} p_1^r (p_2 - p_1)^{s-r} (1-p_2)^{n-s} =$$

$$= \int_0^{p_1} \int_0^{p_2} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1} (t_2 - t_1)^{j-i-1} (1-t_2)^{n-j} \, dt_2 dt_1.$$

Είναι φανερό από τη σχέση (1.5), πως η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ είναι μια μη πλήρης διδιάστατη συνάρτηση Βήτα. Μια διαφορετική προσέγγιση της παραπάνω συνάρτησης δίνεται στην εργασία του Galambos (1975). Η συσχέτιση των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$ έχει μελετηθεί από τους Bofinger & Bofinger (1965) για την περίπτωση της δισδιάστατης κανονικής κατανομής, ενώ για μη κανονικές κατανομές από τον Bofinger (1970). Για μια γενικότερη ανασκόπηση στα αποτελέσματα της συσχέτισης πολυμεταβλητών δεδομένων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Barnett (1976).

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να μελετήσουμε δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές U_i $(i = 1,2,...,n)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και προέρχονται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4), η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $U_{i:n}, U_{j:n}$ ($1 \le i < j \le n$) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$f_{i,j:n}(u_{i:n}, u_{j:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} u_{i:n}^{i-1}(u_{j:n} - u_{i:n})^{j-i-1}(1-u_{j:n})^{n-j},$$

$$0 \le u_{i:n} < u_{j:n} \le 1. \tag{1.6}$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι η (1.6) είναι η συνάρτηση πυκνότητας της δισδιάστατης κατανομής Βήτα (ή κατανομής Dirichlet), ενώ ο σταθερός όρος που εμφανίζεται στην ίδια σχέση είναι της μορφής $\{B(i, j-i, n-j+1)\}^{-1}$, όπου $B(a,b,c)$ είναι η τριπαραμετρική πλήρης συνάρτηση Βήτα

$$B(a,b,c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)},$$

και

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

είναι η πλήρης συνάρτηση Γάμμα.

Με τη βοήθεια της σχέσης (1.6), μπορούμε να υπολογίσουμε την (m_i, m_j)–οστή ροπή των διατεταγμένων παρατηρήσεων $U_{i:n}, U_{j:n}$, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)} = E(U_{i:n}^{m_i} U_{j:n}^{m_j}) = \int_0^1 \int_0^{u_j} u_{i:n}^{m_i} u_{j:n}^{m_j} f_{i,j:n}(u_{i:n}, u_{j:n}) du_i du_j$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} B(i+m_i, j-i) B(j+m_i+m_j, n-j+1),$$

ενώ μετά από αλγεβρικές απλοποιήσεις καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\mu_{i,j:n}^{(m_i m_j)} = \frac{n!}{(n+m_i+m_j)!} \frac{(i+m_i-1)!}{(i-1)!} \frac{(j+m_i+m_j-1)!}{(j+m_i-1)!}.$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση $m_i = m_j = 1$, λαμβάνουμε τον ακόλουθο τύπο

$$\mu_{i,j:n} = E(U_{i:n} U_{j:n}) = \frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)}, \qquad 1 \le i < j \le n,$$

και εισάγοντας τον συμβολισμό

$$\mu_{i:n} = E(U_{i:n}) = p_i,$$

υπολογίζεται η συνδιακύμανση των δύο τυχαίων μεταβλητών $U_{i:n}, U_{j:n}$, ως εξής

$$Cov(U_{i:n}, U_{j:n}) = \mu_{i,j:n} - \mu_{i:n}\mu_{j:n} = \frac{p_i q_j}{(n+2)},$$

όπου

$$p_i = \frac{i}{n+2},\ q_j = 1 - p_j .$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι η συνδιακύμανση των τ.μ. $U_{i:n}, U_{j:n}$ είναι μη μηδενική, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις από ένα τυχαίο δείγμα είναι εξαρτημένες μεταβλητές. Ωστόσο, οι τυχαίες μεταβλητές $U_{i:n} / U_{j:n}$ και $U_{j:n}$ αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητες και ότι ακολουθούν Βήτα κατανομές με παραμέτρους $(i, j-i)$ και $(j, n-j+1)$ αντίστοιχα. Πρόσθετες ενδιαφέρουσες ιδιότητες σχετικά με διατεταγμένες παρατηρήσεις από την ομοιόμορφη κατανομή δίνονται στις εργασίες των Malmquist (1950) και David & Johnson (1954).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τριγωνικός κανόνας (*triangle rule*) που ικανοποιούν οι $(m_i, m_j)-$οστές ροπές των διατεταγμένων παρατηρήσεων $U_{i:n}, U_{j:n}$, για $2 \le i < j \le n$, όπως φαίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$(i-1)\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)} + (j-i)\mu_{i-1,j:n}^{(m_i,m_j)} + (n-j+1)\mu_{i-1,j-1:n}^{(m_i,m_j)} = n\mu_{i-1,j-1:n-1}^{(m_i,m_j)},\quad m_i, m_j = 1,2,\ldots .$$

Η τελευταία αναδρομική σχέση που αρχικά αποδείχθηκε στην εργασία του Govindarajulu (1963), επιτρέπει τον υπολογισμό των $(m_i, m_j)-$οστών ροπών από $(n-1)$ κατάλληλα επιλεγμένα ζεύγη διατεταγμένων παρατηρήσεων, αν είναι διαθέσιμες οι συγκεκριμένες ροπές στα δείγματα μεγέθους μικρότερου από n. Παράλληλα, οι Srikantan (1962) και Balakrishan *et al*. (1992) έχουν αποδείξει, για $1 \le i < j \le n$, την ακόλουθη αναδρομική σχέση για τις $(m_i, m_j)-$οστές ροπές

$$\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)} = \sum_{r=i}^{j-1} \sum_{s=n-j+r+1}^{n} (-1)^{s+n-i-j+1} \binom{r-1}{i-1}\binom{s-r-1}{n-j}\binom{n}{s} \mu_{r,r+1:s}^{(m_i,m_j)},\ \ m_i, m_j = 1,2,\ldots,$$

ενώ οι συνδιακυμάνσεις δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων $U_{i:n}, U_{j:n}$, για $2 \le i < j \le n$, ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση (βλ. Balakrishnan (1989))

$$(i-1)Cov(U_{i:n}, U_{j:n}) + (j-i)Cov(U_{i-1:n}, U_{j:n}) + (n-j+1)Cov(U_{i-1:n}, U_{j-1:n})$$
$$= n\{Cov(U_{i-1:n-1}, U_{j-1:n-1}) + (\mu_{i-1:n-1} - \mu_{i-1:n})(\mu_{j-1:n-1} - \mu_{j:n})\} .$$

Για γενικότερα αποτελέσματα σχετικά με τη συνδιακύμανση συναρτήσεων διατεταγμένων παρατηρήσεων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Qi (1994).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5), η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των διατεταγμένων παρατηρήσεων $U_{i:n}, U_{j:n}$ για την περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές U_i, $i = 1,2,...,n$ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$F_{i,j:n}(u_{i:n}, u_{j:n}) = \int_0^{u_{i:n}} \int_0^{u_{j:n}} \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} t_1^{i-1}(t_2 - t_1)^{j-i-1}(1-t_2)^{n-j}\, dt_2 dt_1,$$

$$0 \le u_{i:n} < u_{j:n} \le 1. \quad (1.7)$$

1.4 Κατανομή μίας διατεταγμένης παρατήρησης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την κατανομή μιας διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$ $(1 \le i \le n)$ που επιλέγεται από το σύνολο των n ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$. Ακολουθώντας ίδια μεθοδολογία με αυτή που εφαρμόσθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η συνάρτηση πυκνότητας της $X_{i:n}$ μπορεί να προκύψει από τη σχέση (1.1) με διαδοχικές ολοκληρώσεις ως προς $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{i-1:n}$, $X_{i+1:n}, X_{j+2:n}, ..., X_{n:n}$, όπως φαίνεται ακολούθως

$$f_{i:n}(x_{i:n}) = n!\, f(x_{i:n}) \times \int_{-\infty}^{x_{1:n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:n}} f(x_{1:n}) \cdots f(x_{i-1:n})\, dx_{1:n} \cdots dx_{i-1:n}$$

$$\times \int_{x_{i:n}}^{\infty} \cdots \int_{x_{i:n}}^{x_{i+2:n}} f(x_{i+1:n}) \cdots f(x_{n:n})\, dx_{i+1:n} \cdots dx_{n:n}.$$

Ωστόσο, γνωρίζοντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (1.4) δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}$, $X_{j:n}$, $1 \le i < j \le n$, μπορούμε να καταλήξουμε στη ζητούμενη πυκνότητα της $X_{i:n}$, ολοκληρώνοντας την έκφραση (1.4) μόνο ως προς $X_{j:n}$. Πιο συγκεκριμένα, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $X_{i:n}$ $(1 \le i \le n)$ παίρνει την παρακάτω μορφή

$$f_{i:n}(x_{i:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \{F(x_{i:n})\}^{i-1} \{1 - F(x_{i:n})\}^{n-i} f(x_{i:n}), \quad -\infty < x_{i:n} < \infty.$$

(1.8)

Για παράδειγμα, η συνάρτηση πυκνότητας της ελάχιστης και της μέγιστης διατεταγμένης παρατήρησης προκύπτει θέτοντας στη σχέση (1.8) $i=1$ και $i=n$ αντίστοιχα, οπότε θα πάρουμε

$$f_{1:n}(x_{1:n}) = n\{1-F(x_{1:n})\}^{n-1} f(x_{1:n}), \qquad -\infty < x_{1:n} < \infty$$

και

$$f_{n:n}(x_{n:n}) = n\{F(x_{n:n})\}^{n-1} f(x_{n:n}), \qquad -\infty < x_{n:n} < \infty .$$

Εναλλακτικά, προκειμένου να υπολογίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $X_{i:n}$, $i=1,2,\dots,n$, μπορούμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο ($x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n} + \delta x_{i:n}$) ως εξής: μία από τις τυχαίες μεταβλητές X_i $(i=1,2,\dots,n)$ λαμβάνει τιμή στο διάστημα $(x_{i:n}, x_{i:n}+\delta x_{i:n}]$ έτσι ώστε (βλ. το ακόλουθο σχεδιάγραμμα)

- $(i-1)$ τυχαίες μεταβλητές να είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή $x_{i:n}$,
- $(n-i)$ τυχαίες μεταβλητές να είναι μεγαλύτερες από την τιμή $x_{i:n} + \delta x_{i:n}$.

ΣΧΗΜΑ 1.2.

$$\underset{-\infty}{\overbrace{------}^{i-1}}\ \underset{x_{i:n}}{]}\ \overbrace{---}^{1}\ \underset{x_{i:n}+\delta x_{i:n}}{]}\ \underset{\infty}{\overbrace{------}^{n-i}}.$$

Η πιθανότητα να παρατηρηθεί η παραπάνω διάταξη εκφράζεται ως εξής

$$P(x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n} + \delta x_{i:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\{F(x_{i:n})\}^{i-1}\{1-F(x_{i:n}+\delta x_{i:n})\}^{n-i}$$
$$\times\{F(x_{i:n}+\delta x_{i:n}) - F(x_{i:n})\} + O((\delta x_{i:n})^2),$$

όπου ο όρος $O((\delta x_{i:n})^2)$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα ότι παραπάνω από μία τ.μ. X_i $(i=1,2,\dots,n)$ λαμβάνουν τιμή στο διάστημα $(x_{i:n}, x_{i:n}+\delta x_{i:n}]$. Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$ $(1 \le i \le n)$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ως ακολούθως

$$f_{i:n}(x_{i:n}) = \lim_{\delta x_{i:n}\to 0} \frac{P(x_{i:n} < X_{i:n} \le x_{i:n}+\delta x_{i:n})}{\delta x_{i:n}}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\{F(x_{i:n})\}^{i-1}\{1-F(x_{i:n})\}^{n-i} f(x_{i:n}), \qquad -\infty < x_{i:n} < \infty, \tag{1.9}$$

και έτσι καταλήγουμε και πάλι στην έκφραση (1.8).

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $X_{i:n}, 1 \le i \le n$ μπορεί να εκφρασθεί όπως φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{aligned}
F_{i:n}(x_{i:n}) &= P(X_{i:n} \le x_{i:n}) \\
&= P(\text{τουλάχιστον } i \text{ τ.μ. } X_i \text{ είναι μικρότερες ή ίσες από την τιμή } x_{i:n}) \\
&= \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} \{F(x_{i:n})\}^r \{1 - F(x_{i:n})\}^{n-r}.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Είναι φανερό από την τελευταία σχέση πως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $X_{i:n}$ εκφράζεται μέσω της ουράς (*tail probability*) της διωνυμικής κατανομής $b(n, F(x_{i:n}))$, όπου n είναι το πλήθος των δοκιμών και $F(x_{i:n})$ η πιθανότητα επιτυχίας. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $X_{i:n}$ μπορεί εναλλακτικά να γραφεί με τη βοήθεια της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, όπως απέδειξαν οι Pinsker *et al*. (1986). Πράγματι, έχουμε διαδοχικά

$$
\begin{aligned}
F_{i:n}(x_{i:n}) &= P(X_{i:n} \le x_{i:n}) \\
&= P(\text{συμβαίνουν } i \text{ επιτυχίες σε σύνολο το πολύ } n \text{ δοκιμών με πιθανότητα επιτυχίας } F(x)) \\
&= \binom{i-1}{i-1} \{F(x)\}^i \{1 - F(x)\}^0 + \binom{i}{i-1} \{F(x)\}^i \{1 - F(x)\}^1 \\
&\quad + \dots + \binom{n-1}{i-1} \{F(x)\}^i \{1 - F(x)\}^{n-i}, \qquad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Ταυτόχρονα είναι γνωστό πως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $X_{i:n}$, για $1 \le i \le n$, ικανοποιεί τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις (βλ. David & Shu (1978))

$$
F_{r:n}(x) = F_{r+1:n}(x_{r:n}) + \binom{n}{r} \{F(x)\}^r \{1 - F(x)\}^{n-r}
$$

και

$$
F_{r:n}(x) = F_{r:n-1}(x_{r:n}) + \binom{n-1}{r-1} \{F(x)\}^r \{1 - F(x)\}^{n-r},
$$

για $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τριγωνικός κανόνας (*triangle rule*) που ικανοποιούν οι ροπές μιας διατεταγμένης παρατήρησης $U_{i:n}$, για $1 \le i \le n-1$, όπως φαίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$i\mu_{i+1:n}^{(m)} + (n-i)\mu_{i:n}^{(m)} = n\mu_{i:n-1}^{(m)}, \qquad m = 1,2,\ldots .$$

Εναλλακτικά, οι ροπές $m-$τάξης μπορούν να υπολογισθούν από την επόμενη έκφραση

$$\mu_{i:n}^{(m)} = \sum_{r=i}^{n} (-1)^{r-i} \binom{n}{r} \binom{r-1}{i-1} \mu_{r:r}^{(m)}.$$

Αν θέσουμε $i = n/2$ στον παραπάνω τριγωνικό κανόνα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\{\mu_{n/2+1:n}^{(m)} + \mu_{n/2:n}^{(m)}\} = \mu_{n/2:n-1}^{(m)},$$

και για την ειδική περίπτωση $m = 1$, προκύπτει άμεσα η σχέση

$$\frac{1}{2}\{\mu_{n/2+1:n} + \mu_{n/2:n}\} = \mu_{n/2:n-1}$$

ή ισοδύναμα

$$E\{\frac{1}{2}(X_{n/2+1:n} + X_{n/2:n})\} = E(X_{n/2:n-1}),$$

η οποία δηλώνει ότι η αναμενόμενη τιμή της δειγματικής διαμέσου σε ένα δείγμα μεγέθους n, είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή της δειγματικής διαμέσου σε ένα δείγμα περιττού μεγέθους $(n-1)$.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για τη συνάρτηση πυκνότητας και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μίας διατεταγμένης παρατήρησης για την περίπτωση, που οι τυχαίες μεταβλητές U_i , $i = 1,2,\ldots,n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και προέρχονται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.8), η συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης παρατήρησης $U_{i:n}$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f_{i:n}(u_{i:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} u_{i:n}^{i-1} (1-u_{i:n})^{n-i}, \qquad 0 \le u_{i:n} \le 1,$$

και είναι φανερό πως η κατανομή της τ.μ. $U_{i:n}$ ταυτίζεται με την κατανομή Βήτα με παραμέτρους i και $n-i+1$ (για εκτενή μελέτη της κατανομής Βήτα ο αναγνώστης παραπέμπεται στα κείμενα των Johnson *et al*. (1995) και Κούτρας (2002)).

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την m–οστή ροπή της διατεταγμένης παρατήρησης $U_{i:n}$, ως εξής

$$\mu_{i:n}^{(m)} = E(U_{i:n}^{m}) = \int_0^1 u_{i:n}^{m} f_{i:n}(u_{i:n}) du_{i:n} = B(i+m, n-i+1) / B(i, n-i+1)$$

ή ισοδύναμα

$$\mu_{i:n}^{(m)} = \frac{n!}{(n+m)!} \frac{(i+m-1)!}{(i-1)!},$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $U_{i:n}$ δίνεται, σύμφωνα με την (1.10), από τον ακόλουθο τύπο

$$F_{U_{i:n}}(u_{i:n}) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} u_{i:n}^{r} (1-u_{i:n})^{n-r}$$

ή εναλλακτικά (βλ. σχέση (1.9))

$$F_{U_{i:n}}(u_{i:n}) = \int_0^{u_{i:n}} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} dt, \qquad 0 \le u_{i:n} \le 1, \tag{1.11}$$

η οποία είναι μια συνάρτηση Βήτα.

Συγκρίνοντας τις τελευταίες σχέσεις με τις (1.9) και (1.10), καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μίας διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$ $(1 \le i \le n)$, από τυχαίο δείγμα μεγέθους n που προέρχεται από οποιαδήποτε κατανομή F,

$$F_{i:n}(x_{i:n}) = \int_0^{F(x_{i:n})} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} dt, \qquad -\infty < x_{i:n} < \infty.$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι, στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί και αποδειχθεί αντίστοιχα αποτελέσματα υπολογισμού των ροπών μιας διατεταγμένης παρατήρησης που προέρχεται από άλλες συνεχείς κατανομές, όπως για παράδειγμα την κατανομή *Pareto* (Huang (1991)), την εκθετική κατανομή (Joshi (1978, 1982)), την κατανομή *Weibull* (Lieblein (1955)), τη λογιστική (Gupta & Shah (1965), Balakrishnan & Kocherlakota (1986)) την κανονική (Teichroew (1956), Sarhan & Greenberg (1956)), την κατανομή *Γάμμα* (Gupta (1960)), κ.α.

1.5 Ιδιότητες των διατεταγμένων παρατηρήσεων

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα παρουσιάσουμε γνωστά αποτελέσματα που αφορούν τις διατεταγμένες παρατηρήσεις, τα οποία θα φανούν χρήσιμα σε επόμενα κεφάλαια. Θεωρούμε ότι $U_1, U_2, ..., U_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n που προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1) και $X_1, X_2, ..., X_n$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n που προέρχεται από μία κατανομή $F(x)$. Επιπλέον, $U_{1:n}, U_{2:n}, ..., U_{n:n}$ και $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ είναι τα διατεταγμένα δείγματα που προκύπτουν από τα παραπάνω δείγματα αντιστοίχως. Είναι γνωστό ότι αν η κατανομή $F(x)$ είναι συνεχής, τότε ο μετασχηματισμός $U = F(X)$ παράγει την ομοιόμορφη κατανομή. Συνεπώς, όταν η $F(x)$ είναι συνεχής ισχύει ότι

$$F(X_{i:n}) \overset{d}{=} U_{i:n}, \qquad i = 1,2,...,n,$$

όπου $\overset{d}{=}$ συμβολίζει την ταύτιση των κατανομών που ακολουθούν οι δύο τυχαίες μεταβλητές. Αν $F^{-1}(\cdot)$ είναι η αντίστροφη αθροιστική συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως ακολούθως

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \qquad 0 < u < 1$$

τότε θα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$F(F^{-1}(u)) \geq u, \qquad F(F^{-1}(x)) \leq x$$

και οδηγούμαστε στην ισοδυναμία (βλ. Serfling (1980))

$$u \leq F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(u) \leq x.$$

Συνεπώς, για $0 \leq F(x) \leq 1$, έχουμε τα εξής

$$F(x) = P(X \leq x) = P(F(X) \leq F(x)) = P(U \leq F(x)) = P(F^{-1}(U) \leq x),$$

ή ισοδύναμα

$$F^{-1}(U_i) \overset{d}{=} X_i, \qquad i = 1,2,...,n \tag{1.12}$$

και

$$F^{-1}(U_{i:n}) \overset{d}{=} X_{i:n}, \qquad i = 1,2,...,n. \tag{1.13}$$

Οι σχέσεις (1.12) και (1.13), οι οποίες είχαν αρχικά παρατηρηθεί από τους Scheffe και Tukey (1945), μπορούν (με τη βοήθεια της σχέσης (1.11)) να οδηγήσουν στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας της διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης ενός ποσοστημορίου $F^{-1}(p)$ του πληθυσμού, των οποίων τα όρια είναι διατεταγμένες παρατηρήσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν η κατανομή είναι απόλυτα συνεχής, τότε $F(F^{-1}(p)) = p$ και συνεπώς έχουμε

$$P(X_{i:n} \le F^{-1}(p)) = P(F(X_{i:n}) \le p) = P(U_{i:n} \le p) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Όμως για $i < j$, ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} P(X_{i:n} \le F^{-1}(p)) &= P(X_{i:n} \le F^{-1}(p), X_{j:n} < F^{-1}(p)) \\ &\quad + P(X_{i:n} \le F^{-1}(p), X_{j:n} \ge F^{-1}(p)) \\ &= P(X_{j:n} < F^{-1}(p)) + P(X_{i:n} \le F^{-1}(p) \le X_{j:n}). \end{aligned}$$

Εφόσον η τυχαία μεταβλητή $X_{j:n}$ είναι απόλυτα συνεχής, η τελευταία ισότητα γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} P(X_{i:n} \le F^{-1}(p) \le X_{j:n}) &= P(X_{i:n} \le F^{-1}(p)) - P(X_{j:n} \le F^{-1}(p)) \\ &= \sum_{r=i}^{j-1} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Συνεπώς μπορούμε να κατασκευάσουμε διάστημα εμπιστοσύνης για την ποσότητα $F^{-1}(p)$ της μορφής $[Y_{i:n}, Y_{j:n}]$ με συντελεστή που δίνεται στην (1.14). Είναι φανερό πως το διάστημα εμπιστοσύνης που δημιουργείται με τον τρόπο αυτό δεν εξαρτάται από την κατανομή F και μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια των πινάκων της διωνυμικής κατανομής. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να γενικευθεί για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για διαφορές ποσοστημορίων, όπως για παράδειγμα για το γνωστό ενδοτεταρτημοριακό εύρος (*interquartile range*). Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Thompson (1936), McKinnon (1964) και Hettmansperger & Sheather (1986).

Οι επόμενες δύο προτάσεις συνδέουν τη δεσμευμένη κατανομή διατεταγμένων παρατηρήσεων (η δέσμευση αναφέρεται σε μία διατεταγμένη παρατήρηση) με την κατανομή διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται από πληθυσμό, του οποίου η κατανομή είναι μία περικομμένη μορφή της αρχικής κατανομής F του πληθυσμού.

Πρόταση 1.1. *Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους* n *που προέρχεται από μία κατανομή* $F(x)$ *και* $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ *το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα. Τότε η δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής* $X_{j:n}$, *δοθέντος ότι* $X_{i:n} = x_i$ *για* $i < j$, *είναι ίδια με την κατανομή της* $(j-i)-$*οστής* διατεταγμένης παρατήρησης από ένα δείγμα μεγέθους $(n-i)$ *που προέρχεται από την περικομμένη* (*αριστερά στην τιμή* x_i) *κατανομή* $F(x)$.

Πρόταση 1.2. *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_n$ *ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους* n *που προέρχεται από μία κατανομή* $F(x)$ *και* $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ *το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα. Τότε η δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής* $X_{i:n}$, *δοθέντος ότι* $X_{j:n} = x_j$ *για* $i < j$, *είναι ίδια με την κατανομή της* i *–οστής διατεταγμένης παρατήρησης από ένα δείγμα μεγέθους* $(j-1)$ *που προέρχεται από την περικομμένη* (*δεξιά στην τιμή* x_j) *κατανομή* $F(x)$.

Τα αποτελέσματα των παραπάνω προτάσεων γενικεύονται και στην περίπτωση που η δέσμευση γίνεται με δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις. Για τις αποδείξεις των Προτάσεων 1.1 και 1.2, αλλά και τις γενικεύσεις αυτών, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφή των Arnold *et al*. (1992).

Στην περίπτωση που η κατανομή του υπό μελέτη δείγματος $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, η κατανομή των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, 1 \le i \le n$, παρουσιάζει ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις

$$f(-x) = f(x), \qquad F(-x) = 1 - F(x),$$

η σχέση (1.8) οδηγεί στο συμπέρασμα

$$X_{i:n} \overset{d}{=} X_{n-i+1:n}$$

ενώ από τη σχέση (1.4) έχουμε το εξής

$$(X_{i:n}, X_{j:n}) \overset{d}{=} (-X_{n-j+1:n}, -X_{n-i+1:n}).$$

Τα δύο τελευταία αποτελέσματα μειώνουν σημαντικά το υπολογιστικό βάρος των ροπών των διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται από συμμετρικές κατανομές. Για παράδειγμα, για τις ροπές $\mu_{i:n}^{(m)} = E(X_{i:n}^m)$ μίας διατεταγμένης παρατήρησης $X_{i:n}, 1 \le i \le n$, ισχύει ότι

$$\mu_{i:n}^{(m)} = (-1)^m \mu_{n-i+1:n}^{(m)},$$

και συνεπώς για $m = 1$, προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\mu_{i:n} = -\mu_{n-i+1:n},$$

ενώ για τις ροπές $\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)}$ δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_{i:n}, X_{j:n}$, $1 \le i < j \le n$, έχουμε ότι

$$\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)} = (-1)^{m_i+m_j} \mu_{n-j+1,n-i+1:n}^{(m_i,m_j)},$$

και παίρνουμε

$$\mu_{i,j:n} = \mu_{n-j+1:n,n-i+1:n}.$$

Τέλος, για τη συνδιακύμανση των $X_{i:n}, X_{j:n}$, $1 \le i < j \le n$, ισχύει

$$Cov(X_{i:n}, X_{j:n}) = Cov(X_{n-j+1:n}, X_{n-i+1:n}).$$

Η θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων έχει σημαντική συμβολή στη μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας. Για παράδειγμα, ο χρόνος ζωής ενός συστήματος *k*–από–τα–*n*: *F*, το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον *k* μονάδες του, ταυτίζεται με τον $k-$οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής των μονάδων του, δηλαδή ο χρόνος ζωής του παραπάνω συστήματος έχει την ίδια κατανομή με τη διατεταγμένη παρατήρηση $X_{k:n}$ που προέρχεται από ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$ (το X_i, $i = 1,2,...,n$ παριστάνει το χρόνο ζωής της $i-$οστής μονάδας του συστήματος). Με ανάλογο τρόπο προκύπτει πως στο σύστημα *k*–από–τα–*n*:*G*, όπως αυτό ορίζεται στην Παράγραφο 1.1, η $(n-k+1)-$οστή διατεταγμένη αποτυχία μονάδας του προκαλεί την αποτυχία του συστήματος, δηλαδή ο χρόνος ζωής του παραπάνω συστήματος έχει την ίδια κατανομή με τη διατεταγμένη παρατήρηση $X_{n-k+1:n}$ που προέρχεται από ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$. Η εφαρμογή των αποτελεσμάτων της εργασίας του Cole (1951) προσφέρει, για τον παραπάνω τύπο συστημάτων, αναδρομικές σχέσεις για το χρόνο ζωής τους. Πρόσθετα συμπεράσματα σχετικά με αναδρομικές σχέσεις διατεταγμένων παρατηρήσεων περιλαμβάνονται στις εργασίες των Arnold (1977), Joshi (1971) και Joshi & Balakrishnan (1982).

1.6 Ιδιότητες γήρανσης των διατεταγμένων παρατηρήσεων

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα μελετήσουμε ιδιότητες γήρανσης των διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται από διάφορες κλάσεις κατανομών. Συγκεκριμένα, αφού δώσουμε σύντομα τους απαραίτητους ορισμούς, θα εξετάσουμε αν διατηρείται το είδος γήρανσης της κατανομής της $i-$οστής διατεταγμένης παρατήρησης ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιασθούν στην παρούσα παράγραφο είναι γνωστά στη διεθνή βιβλιογραφία και βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στη Θεωρία Αξιοπιστίας, όπως για παράδειγμα στη μελέτη του χρόνου ζωής του συστήματος k–από–τα–n: F.

Θεωρούμε ένα σύστημα αξιοπιστίας με n μονάδες. Έστω ότι μια μονάδα έχει λειτουργήσει χωρίς αποτυχία στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ για $t \geq 0$. Αν συμβολίσουμε με X_i, $1 \leq i \leq n$, το χρόνο ζωής της μονάδας (τυχαία μεταβλητή), τότε η πιθανότητα να λειτουργήσει χωρίς αποτυχία για Δt επιπλέον χρονικές μονάδες, δηλαδή με άλλα λόγια η πιθανότητα να επιβιώσει στο χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t]$ θα είναι ίση με

$$P(X_i > t + \Delta t \mid X_i > t) = \frac{P(X_i > t + \Delta t)}{P(X_i > t)} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)},$$

όπου $R(t) = P(X_i > t)$ εκφράζει την πιθανότητα να ζήσει η μονάδα μέχρι τη χρονική στιγμή t (αξιοπιστία της μονάδας τη στιγμή t). Επιπλέον η πιθανότητα αποτυχίας της μονάδας στο ίδιο αυτό διάστημα $(t, t+\Delta t]$ θα είναι

$$P(X_i \leq t + \Delta t \mid X_i > t) = \frac{P(t < X_i \leq t + \Delta t)}{P(X_i > t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}. \tag{1.15}$$

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας $R(t)$, τότε θα δίνεται από τον τύπο

$$R'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \tag{1.16}$$

οπότε

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t)}. \tag{1.17}$$

Από τις σχέσεις (1.15) , (1.16) , (1.17) παίρνουμε

$$-\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X_i \leq t + x \mid X_i > t)}{\Delta t}.$$

Ο λόγος

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X_i \le t + \Delta t \mid X_i > t)}{\Delta t}$$

είναι η (στιγμιαία) βαθμίδα αποτυχίας (*failure rate*, *hazard rate*, *intensity of failures*) και εκφράζει το δεσμευμένο ρυθμό αποτυχίας της μονάδας στο διάστημα $(t, t + \Delta t]$ για $\Delta t \to 0$, δεδομένου ότι $X_i > t$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί σαν ρυθμός αποτυχίας με την ακόλουθη έννοια. Αν υπάρχει μεγάλος αριθμός μονάδων (έστω $n(t)$) σε λειτουργία τη στιγμή t, τότε η ποσότητα $n(t) \cdot \lambda(t)$ είναι, κατά προσέγγιση, ίση με τον αριθμό αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου (εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι, κατά προσέγγιση, ίση με τον αριθμό αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα σε κίνδυνο). Επιπρόσθετα, αν T είναι ο χρόνος ζωής ενός συστήματος που αποτελείται από n μονάδες και $R_T(t)$ η αξιοπιστία του, τότε η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_T(t)$ του συστήματος θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\lambda_T(t) = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)}.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη βαθμίδα αποτυχίας ενός μονότονου συστήματος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Esary & Proschan (1963), Esary & Marshall (1964) και τις μονογραφές των Barlow & Proschan (1965, 1975).

Στη συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς ορισμένων κλάσεων κατανομών, οι οποίες θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια της συγκεκριμένης Παραγράφου. Η οικογένεια των κατανομών με την ιδιότητα η βαθμίδα αποτυχίας τους να είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του t, ονομάζεται οικογένεια *Increasing Failure Rate* (*IFR*) (*Decreasing Failure Rate* (*DFR*)). Πιο συγκεκριμένα, η οικογένεια κατανομών *IFR* (*DFR*) ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.1. *Μια μη διακριτή κατανομή F είναι IFR (DFR) αν και μόνο αν ο λόγος*

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

αυξάνεται (μειώνεται) ως προς t, ή ισοδύναμα αν η συνάρτηση

$$\overline{F}(x / t) = \frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}$$

είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς t, για $t \ge 0$ και για $x > 0$ ώστε $F(t) < 1$.

Ο επόμενος ορισμός αφορά τις οικογένειες κατανομών *Increasing Failure Rate on Average* (*IFRA*) και *Decreasing Failure Rate on Average* (*DFRA*).

Ορισμός 1.2. *Μια κατανομή F*(*t*) *λέμε ότι είναι IFRA* (*DFRA*) *αν για* $t > 0$ *ο λόγος*

$$\frac{\int_0^t \lambda(s)ds}{t}$$

αυξάνεται (*μειώνεται*) *ως προς το t.*

Διαισθητικά, αν μια κατανομή είναι *IFRA* (*DFRA*), τότε η βαθμίδα αποτυχίας της αυξάνεται (μειώνεται), όχι συνεχώς (όπως στην περίπτωση μιας *IFR* (*DFR*) κατανομής), αλλά «κατά μέσο όρο». Ο επόμενος ορισμός αφορά τις οικογένειες κατανομών *NBU* (*new better than used*) και *NWU* (*new worse than used*).

Ορισμός 1.3. *Μια κατανομή F*(*t*) *είναι NBU* (*NWU*) *αν και μόνο αν*

$$\overline{F}(x+y) \le (\ge)\, \overline{F}(x)\overline{F}(y) \quad \text{για } x, y \ge 0 .$$

Η ιδιότητα *NBU* (*NWU*) δηλώνει ότι η πιθανότητα επιβίωσης πέρα από την ηλικία *x+y,* δεδομένου ότι η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή x, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)$$

είναι μικρότερη ή ίση (μεγαλύτερη ή ίση) από την πιθανότητα επιβίωσης πέραν του χρόνου *y* για μια καινούρια μονάδα. (η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής).

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους *n* που προέρχεται από μία κατανομή $F(x)$ και $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ είναι οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Οι Barlow & Proschan (1975) απέδειξαν τη διατήρηση των ιδιοτήτων γήρανσης των παρατηρήσεων του αρχικού δείγματος, όπως φαίνεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.3. (*α*) *Αν η κατανομή* F *των τυχαίων μεταβλητών* X_i, $i = 1,2,...,n$, *είναι* IFR ($IFRA$), *τότε και η κατανομή* $F_{i:n}$ *των* $X_{i:n}$ *είναι* IFR ($IFRA$).

(*β*) *Αν η κατανομή* F_1 *της τυχαίας μεταβλητής* X_1 *είναι* IFR ($IFRA$), *τότε και η κατανομή* $F_{i:n}$ *των* $X_{i:n}$, $i = 1,2,...,n$, *είναι* IFR ($IFRA$).

Στην εργασία του Takahasi (1988) αποδεικνύεται η ακόλουθη Πρόταση, που σχετίζεται με τη διατήρηση της ιδιότητας IFR (DFR) από την $i-$οστή διατεταγμένη παρατήρηση $X_{i:n}$ στην αμέσως επόμενη (προηγούμενη) του ίδιου τυχαίου δείγματος.

Πρόταση 1.4. *(α) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$, $i=1,2,...,n-1$, είναι IFR, τότε και η κατανομή της $X_{i+1:n}$ είναι IFR.*

(β) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$, $i=2,3,...,n$, είναι DFR, τότε και η κατανομή της $X_{i-1:n}$ είναι DFR.

Ο Nagaraja (1990) γενίκευσε τα αποτελέσματα της Πρότασης 1.4, μελετώντας τη διατήρηση ιδιοτήτων γήρανσης από την $i-$οστή διατεταγμένη παρατήρηση $X_{i:n}$ ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n σε διατεταγμένες παρατηρήσεις διαφορετικού μεγέθους. Τα αποτελέσματα της εργασίας του δίνονται στην Πρόταση 1.5.

Πρόταση 1.5. *(α) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$, $i=1,2,...,n-1$, είναι IFR, τότε και οι κατανομές $F_{i:n-1}$, $F_{i+1:n+1}$ των $X_{i:n-1}$, $X_{i+1:n+1}$ είναι IFR.*

(β) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$, $i=2,3,...,n$, είναι DFR, τότε και οι κατανομές $F_{i-1:n-1}$, $F_{i:n+1}$ των $X_{i-1:n-1}$, $X_{i:n+1}$ είναι DFR.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Πρόταση 1.5 ισχύει και για άλλες οικογένειες κατανομών, όπως η $IFRA$ ($DFRA$) και NBU (NWU). Ένα πρόσθετο αποτέλεσμα διατήρησης προκύπτει αν ικανοποιείται μια συγκεκριμένη συνθήκη για την τάξη της διατεταγμένης παρατήρησης, όπως φαίνεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.6. *(α) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$ είναι IFR και $i \le \frac{n+3}{2}$, τότε και η κατανομή της $X_{i+1:n+2}$ είναι IFR.*

(β) Αν η κατανομή $F_{i:n}$ της τυχαίας μεταβλητής $X_{i:n}$ και $i \le \frac{n+1}{2}$ είναι DFR, τότε και η κατανομή της $X_{i-1:n-2}$ είναι DFR.

Οι Προτάσεις 1.5 και 1.6 βρίσκουν ποικίλες εφαρμογές και ενδιαφέρουσες ερμηνείες. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι το μέγεθος n του δείγματος είναι περιττός αριθμός και θέσουμε $i = \frac{n+1}{2}$, τότε η διατεταγμένη παρατήρηση $X_{i:n} = X_{(n+1)/2:n}$ εκφράζει τη δειγματική διάμεσο. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν η διάμεσος ενός δείγματος μεγέθους n ακολουθεί IFR (DFR) κατανομή, τότε και οι διάμεσοι όλων των δειγμάτων με (περιττό) μέγεθος μεγαλύτερο (μικρότερο) από n ακολουθούν IFR (DFR) κατανομές. Επιπλέον, τα παραπάνω αποτελέσματα συντελούν και στη μελέτη του χρόνου ζωής συστημάτων αξιοπιστίας με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες. Συγκεκριμένα, αν ο χρόνος ζωής ενός παράλληλου συστήματος με n μονάδες ακολουθεί κατανομή $IFR, IFRA$ ή NBU, τότε όλα τα παράλληλα συστήματα με περισσότερες (από n) μονάδες έχουν χρόνους ζωής με αυτές τις ιδιότητες αντίστοιχα. Παρόμοια συμπεράσματα εξάγονται και για τις κλάσεις κατανομών $DFR, DFRA$ και NWU.

1.7 Στοχαστική σύγκριση των διατεταγμένων παρατηρήσεων

Η ιδέα της στοχαστικής διάταξης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στη σύγκριση των χρόνων ζωής συστημάτων αξιοπιστίας. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν διάφοροι τύποι στοχαστικής σύγκρισης, ωστόσο στο παρόν κείμενο θα περιοριστούμε στη συνήθη στοχαστική διάταξη (*usual stochastic ordering*), στη διάταξη με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας (*hazard rate ordering)* και τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (*likelihood ratio ordering)*, οι ορισμοί των οποίων δίνονται παρακάτω (για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις στοχαστικές διατάξεις μεταξύ τυχαίων μεταβλητών ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφία των Shaked & Shanthikumar (1994)).

Ορισμός 1.4. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.), τότε λέμε ότι η τ.μ. T_2 είναι μεγαλύτερη από την T_1 ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη (συμβολικά $T_1 \le_{st} T_2$) αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}_{T_1}(t) \le \overline{F}_{T_2}(t) \text{ για όλα τα } t.$$

Πιο απλά η συγκεκριμένη διάταξη σημαίνει ότι, για κάθε t, η τ.μ. T_2 είναι πιο πιθανόν να υπερβεί την τιμή t από ότι η T_1.

Ορισμός 1.5. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.), τότε λέμε ότι η τ.μ. T_2 είναι μεγαλύτερη από την T_1 ως προς τη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας (συμβολικά $T_1 \le_{hr} T_2$) αν η συνάρτηση*

$$\overline{F}_{T_2}(t)/\overline{F}_{T_1}(t)$$

είναι αύξουσα ως προς t.

Ο ορισμός της διάταξης αυτής είναι ισοδύναμος με την ακόλουθη ανίσωση

$$P[T_2 - x > t \mid T_2 > x] \geq P[T_1 - x > t \mid T_1 > x], \text{ για κάθε } t, x \geq 0.$$

Συνεπώς διαισθητικά η διάταξη βαθμίδας αποτυχίας σημαίνει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής της T_2 είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της T_1, δεδομένου ότι έχουν και οι δύο επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t (βλ. Boland & El-Neweihi (1995)).

Ορισμός 1.6. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.), τότε λέμε ότι η τ.μ. T_2 είναι μεγαλύτερη από την T_1 ως προς τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (συμβολικά $T_1 \leq_{lr} T_2$) αν η συνάρτηση*

$$f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t)$$

είναι αύξουσα ως προς t.

Από τον ορισμό αυτό έχουμε ότι αν $T_1 \leq_{lr} T_2$, τότε η πιθανότητα

$$P(t \leq T_2 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_2}(t)$, αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό έναντι της πιθανότητας

$$P(t \leq T_1 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_1}(t)$, για το ίδιο πλάτος Δt.

Για τους παραπάνω τύπους διάταξης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών T_1 και T_2 ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές

$$T_1 \leq_{lr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2.$$

Η επόμενη πρόταση θεμελιώνει στοχαστικές συγκρίσεις μεταξύ δύο διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_n$.

Πρόταση 1.7. (*α*) *Αν $1 \leq i \leq n-1$ τότε ισχύει τη σχέση*

$$X_{i:n} \leq_{hr} X_{i+1:n}.$$

(*β*) *Αν ισχύει ότι $\lambda_j(t) \geq \lambda_n(t)$, για $j = 1,2,...,n-1$ και $t \geq 0$, τότε*

$$X_{i-1:n-1} \leq_{hr} X_{i:n}, \quad i = 2,3,...,n-1.$$

(*γ*) *Αν ισχύει ότι* $\lambda_j(t) \le \lambda_n(t)$, *για* $j = 1,2,...,n-1$ *και* $t \ge 0$, *τότε*

$$X_{i:n-1} \ge_{hr} X_{i:n}, \quad i = 1,2,...,n-1.$$

Επιπλέον, αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2,..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και η κατανομή της X_1 είναι απόλυτα συνεχής, τότε ισχύουν οι ακόλουθες διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας

$$X_{n:n} \le_{lr} X_{n+1:n+1}, \quad n = 1,2,...$$

και

$$X_{1:n+1} \le_{lr} X_{1:n}, \quad n = 1,2,.... \tag{1.18}$$

Θεωρούμε τώρα ότι $Y_1, Y_2,..., Y_m$ είναι ένα δεύτερο τυχαίο δείγμα μεγέθους m που προέρχεται από την κατανομή G, και συμβολίζουμε με $Y_{1:m}, Y_{2:m},..., Y_{m:m}$ τις αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Είναι γνωστό ότι, για $n = m$, η στοχαστική διάταξη μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών X_i, Y_i, $i = 1,2,...,n$, διατηρείται και μεταξύ των αντίστοιχων διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$X_i \le_{st} Y_i \Rightarrow X_{i:n} \le_{st} Y_{i:n}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Στην εργασία του Ma (1997), για την ειδική περίπτωση $n = m$, αποδεικνύεται η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.8. *Αν οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.)* $X_1, X_2,..., X_n$ *είναι ισόνομες αλλά όχι ανεξάρτητες και οι τ.μ.* $Y_1, Y_2,..., Y_n$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

(*α*) *Αν* $X_{n:n} \le_{st} Y_{n:n}$, *τότε ισχύει ότι* $X_{i:n} \le_{st} Y_{i:n}$, *για* $i = 1,2,...,n$.

(*β*) *Αν* $X_{1:n} \ge_{st} Y_{1:n}$, *τότε ισχύει ότι* $X_{i:n} \ge_{st} Y_{i:n}$, *για* $i = 1,2,...,n$.

Οι Lillo *et al.* (2001) εξετάζουν τη διατήρηση της διάταξης λόγου πιθανοφάνειας για τη γενική περίπτωση $n \ne m$. Συγκεκριμένα, αν για όλες τις τιμές $i = 1,2,...,n$, ισχύει ότι $Y_i \le_{lr} X_i$, τότε προκύπτουν οι ακόλουθες διατάξεις

$$Y_{r:m} \le_{lr} X_{s:n}, \text{ για } r \le s \text{ και } m - r \ge n - s.$$

Οι στοχαστικές διατάξεις μεταξύ διατεταγμένων παρατηρήσεων έχουν ιδιαίτερη συμβολή στη μελέτη και σύγκριση των χρόνων ζωής μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας. Είναι γνωστό ότι οι χρόνοι ζωής των σειριακών συστημάτων διατάσσονται σύμφωνα με τη συνήθη στοχαστική διάταξη, δηλαδή ότι ισχύει

$$X_{1:i} \leq_{st} X_{1:i+1}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Οι Hu *et al.* (2001) απέδειξαν πως οι χρόνοι ζωής $X_{1:i}, X_{1:i+1}$ διατάσσονται και σύμφωνα με τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, όταν οι μονάδες είναι ανεξάρτητες και ικανοποιούν τη σχέση $X_1 \geq_{lr} X_2 \geq_{lr} ... \geq_{lr} X_n$. Οι Navarro & Shaked (2006) μελέτησαν την περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1,2,...,n$, είναι εξαρτημένες, συμπεραίνοντας ότι οι χρόνοι ζωής των σειριακών συστημάτων με εξαρτημένες μονάδες δεν ικανοποιούν πάντα τη διάταξη κατά βαθμίδα αποτυχίας. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, στην εργασία του Navarro (2008) διατυπώνονται συνθήκες που αν ικανοποιούνται, τότε τα σειριακά συστήματα διατάσσονται σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη.

Επιπλέον, οι Khaledi & Kochar (2000) και Boland *et al.* (1994) θεμελιώνουν στοχαστικές συγκρίσεις για παράλληλα συστήματα, ενώ οι Mi & Shaked (2002) απέδειξαν ότι, αν οι μονάδες διατάσσονται στοχαστικά, τότε και τα συστήματα *k*–από–τα–*n*:*F* που αποτελούνται από αυτές διατάσσονται σύμφωνα με τη στοχαστική διάταξη. Οι Pledger & Proschan (1971) παρουσιάζουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τα συστήματα *k*–από–τα–*n*:*F*, τα οποία γενικεύονται περαιτέρω στην εργασία των Proschan & Sethuraman (1976), ενώ οι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής των παραπάνω συστημάτων διατάσσονται στοχαστικά από τους Khaledi & Shaked (2007). Για πρόσθετα αποτελέσματα σχετικά με στοχαστικές συγκρίσεις υπολειπόμενων χρόνων ζωής που συνδέονται με ιδιότητες γήρανσης μονότονων συστημάτων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Ahmad & Kayid (2003), Belzunce *et al.* (2004) και Belzunce *et al.* (1999). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι Li & Zuo (2002) και Li & Chen (2004) εξέτασαν τις τυχαίες μεταβλητές $[X_{n-k+1:n} - X_{n-k:n} | X_{n-k:n} = t]$, μελετώντας τις ιδιότητες γήρανσης τους, ενώ οι Li & Zuo (2004) συνέκριναν την $[X - Y_1 | X > Y_1]$ με την $[X - Y_2 | X > Y_2]$ σύμφωνα με τη συνήθη στοχαστική διάταξη, διατυπώνοντας σημαντικά συμπεράσματα για τους χρόνους ζωής των συστημάτων *k*–από–τα–*n*:*F*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΛΕΤΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΓΗΡΑΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΓΡΑΦΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συστημάτων αξιοπιστίας που ονομάζεται υπογραφή (*signature*) και παρουσιάζουμε αποτελέσματα που τη σχετίζουν με τους χρόνους ζωής των συστημάτων. Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 2.2 δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί βασικών εννοιών των δομών αξιοπιστίας, καθώς επίσης και γνωστά αποτελέσματα που συνδέουν την υπογραφή ενός συστήματος με τα σύνολα διακοπής και τη συνάρτηση αξιοπιστίας του. Στην Παράγραφο 2.3 παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος εύρεσης της γεννήτριας των συντεταγμένων της υπογραφής ενός συστήματος, ενώ στην Παράγραφο 2.4 η μελέτη επικεντρώνεται στη διατήρηση ιδιοτήτων γήρανσης κατά το σχηματισμό ενός μονότονου συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, διατυπώνονται συνθήκες, οι οποίες αν ισχύουν, εξασφαλίζουν τη διατήρηση του είδους γήρανσης των μονάδων και στο σύστημα που σχηματίζουν.

Το σύστημα συνεχόμενο k–από–τα–n: F αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της Παραγράφου 2.5, όπου εφαρμόζονται τα γενικότερα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων για το συγκεκριμένο σύστημα, θεμελιώνονται αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της υπογραφής του, αποδεικνύεται μια ενδιαφέρουσα σχέση που συνδέει τις υπογραφές του ευθύγραμμου και του κυκλικού συστήματος και παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα. Στις Παραγράφους 2.6 και 2.7 πραγματοποιείται η ανάλυση δύο παραλλαγών του παραπάνω συστήματος, ενώ η Παράγραφος 2.8 περιλαμβάνει αποτελέσματα σχετικά με τη στοχαστική διάταξη των χρόνων ζωής συστημάτων αξιοπιστίας με χρήση της υπογραφής τους.

2.2 Βασικές έννοιες της δομικής αξιοπιστίας

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε θεμελιώδεις έννοιες για τη μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας. Η απόδοση ενός συστήματος, αλλά και των μονάδων που το αποτελούν, μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους. Συνηθέστερα, για την περιγραφή της κατάστασης της i–μονάδας (i=1,2,...,n) ενός συστήματος αξιοπιστίας χρησιμοποιείται μια δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i-\text{μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν η } i-\text{μονάδα δεν λειτουργεί.} \end{cases}$$

Όμοια το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, δύναται και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία. Για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί.} \end{cases}$$

Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται πλήρως από τις καταστάσεις των μονάδων που το αποτελούν, δηλαδή

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των n μονάδων του συστήματος.

Ορισμός 2.1. *Η συνάρτηση* $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *η οποία σε κάθε διάνυσμα κατάστασης* $\mathbf{x}$ *των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση* $\varphi(\mathbf{x})$ *του συστήματος, λέγεται συνάρτηση δομής* (*structure function*) *του συστήματος.*

Ένα φυσικό σύστημα θα ήταν κάπως ασυνήθιστο (ή πιθανόν φτωχά σχεδιασμένο) αν η βελτίωση της απόδοσης μίας μονάδας του προκαλούσε χειροτέρευση του συστήματος (αυτό θα σήμαινε μετάβαση του συστήματος από κατάσταση λειτουργίας σε κατάσταση αποτυχίας). Για το λόγο αυτό περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας σε συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες ως προς την ποιότητα κάθε μονάδας, με την έννοια ότι η βελτίωση μίας μονάδας του συστήματος συνεπάγεται και την παράλληλη βελτίωση (ή τουλάχιστον τη μη χειροτέρευση) του συστήματος. Επιπλέον για να αποφύγουμε μελέτη συστημάτων με ελάχιστη αξία και σημασία, δεν θα μελετήσουμε συστήματα, η κατάσταση των οποίων δεν εξαρτάται από την κατάσταση των μονάδων τους. Έχοντας τα παραπάνω υπόψη φτάνουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2. *Ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο ή μονότονης δομής (coherent structure) αν ισχύουν τα εξής*

α. Η συνάρτηση δομής του $\varphi(\mathbf{x})$ *είναι αύξουσα, δηλαδή*

$$\text{αν } x_i \le y_i, i=1,2,...,n \text{, τότε } \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2,..., x_n) \le \varphi(y_1, y_2,..., y_n) = \varphi(\mathbf{y}),$$

β. Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η φ *δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.*

Όταν για τα διανύσματα $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ ισχύει $x_i \le y_i, i=1,2,...,n$, θα γράφουμε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ συνεπώς η συνθήκη (*α*) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\text{αν } \mathbf{x} \le \mathbf{y}, \text{ τότε } \varphi(\mathbf{x}) \le \varphi(\boldsymbol{y}).$$

Συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες (με την έννοια που δίνεται στη συνθήκη (α) του Ορισμού 2.2) ονομάζονται ημι–μονότονες (*semi-coherent*). Τα μόνα ημι–μονότονα συστήματα που δεν είναι μονότονα είναι οι δύο περιπτώσεις $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$ και $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$, δηλαδή ένα σύστημα που δουλεύει πάντα ή ένα σύστημα που δεν δουλεύει ποτέ. Στις περιπτώσεις αυτές οι μονάδες δεν επηρεάζουν προφανώς την κατάσταση του συστήματος και συνεπώς για τέτοια συστήματα δεν ισχύει η συνθήκη (β) του παραπάνω ορισμού (βλ. Ramamurthy (1990)).

Η ιδιότητα της συνάρτησης δομής των μονότονων συστημάτων να είναι αύξουσα φαίνεται να περιγράφει πολλά πραγματικά συστήματα. Σε περιπτώσεις που λειτουργούν επαρκείς μονάδες για να εξασφαλίσουν τη λειτουργία του συστήματος, τότε η λειτουργία επιπλέον μονάδων θα μπορούσε να βελτιώσει μόνο τα πράγματα, ενώ αντίθετα αν έχουν αποτύχει επαρκείς μονάδες ώστε να προκληθεί αποτυχία του συστήματος, τότε η αποτυχία και επιπλέον μονάδων δεν θα μπορούσε να βελτιώσει την κατάσταση του συστήματος (να το επαναφέρει σε λειτουργία).

Η συνθήκη (α) είναι ισοδύναμη με το ότι η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, δηλαδή ότι, για όλα τα i=1,2,…,n, ισχύει

$$\varphi(0_i, \mathbf{x}) \le \varphi(1_i, \mathbf{x}), \text{ για κάθε } \mathbf{x},$$

ενώ για κάθε μονότονο σύστημα ισχύουν τα ακόλουθα

$$\varphi(\mathbf{0})=0,\ \varphi(\mathbf{1})=1.$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης δομής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας χρειάζονται οι εξής έννοιες.

- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (ε.δ.λ.) (*minimal path vector*) αν $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ και $\varphi(\mathbf{y}) = 0$, για κάθε **y**<**x**.
- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας τότε το $P_x = \{i : x_i = 1\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο λειτουργίας (ε.σ.λ.) (*minimal path set*).
- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα διακοπής (ε.δ.δ.) (*minimal cut vector*) αν $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ και $\varphi(\mathbf{y}) = 1$, για κάθε **y**>**x**.
- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα διακοπής τότε το $C_x = \{i : x_i = 0\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ.) (*minimal cut set*).

Για την κατάσταση ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας ισχύει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.1. α. *Ένα μονότονο σύστημα λειτουργεί* ($\varphi(\mathbf{x}) = 1$) *αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ε.σ.λ. λειτουργούν (δηλαδή* $\exists P : x_i = 1, \forall i \in P$),

β. Ένα μονότονο σύστημα δεν λειτουργεί ($\varphi(\mathbf{x}) = 0$) *αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ε.σ.δ. δεν λειτουργούν.* ($\exists C : x_i = 0, \forall i \in C$).

Ο υπολογισμός της συνάρτησης δομής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των ακόλουθων Προτάσεων.

Πρόταση 2.2. *Αν* $\boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, ..., P_M\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας (ε.σ.λ.) μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται από τον τύπο*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j \in \{1,2,...,M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{M} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - \prod_{i \in P_j} x_i).$$

Πρόταση 2.3. *Αν* $\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, ..., C_N\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.) μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται ως ακολούθως*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j \in \{1,2,...,N\}} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^{N} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^{N} \coprod_{i \in C_j} x_i \ .$$

Για την απόδειξη των Προτάσεων 2.2 και 2.3 και πληθώρα παραδειγμάτων υπολογισμού γνωστών συστημάτων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα κείμενα των Gertsbakh (1989) και Κούτρας (2007).

Οι συναρτήσεις δομής προσφέρουν ένα δείκτη προσδιορισμού του συγκριτικού επιπέδου των μονότονων συστημάτων, ωστόσο δεν έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμες στο ρόλο αυτό. Μολονότι η συνάρτηση δομής για κάθε μονότονο σύστημα είναι μοναδική, οι συγκεκριμένες συναρτήσεις είναι αλγεβρικές παραστάσεις που είναι δύσκολο να συγκριθούν και να υπολογισθούν (όπως φαίνεται από τις Προτάσεις 2.2 και 2.3). Το παραπάνω πρόβλημα επιδεινώνεται από το γεγονός ότι η μετονομασία των μονάδων του συστήματος προκαλεί την αλλαγή της συνάρτησης δομής σε μία ισοδύναμη μορφή. Στην εργασία του Samaniego (1985) προτείνεται ένας εναλλακτικός δείκτης για την κατάσταση ενός μονότονου συστήματος, ο οποίος ονομάζεται υπογραφή (*signature*). Ο ορισμός της υπογραφής ενός συστήματος, που δίνεται στη συγκεκριμένη εργασία, περιλαμβάνει την υπόθεση ότι οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (*independently, identically distributed*). Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα μονότονο σύστημα με *n* ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες (*i.i.d.*), των οποίων οι χρόνοι ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ προέρχονται από μια συνεχή κατανομή *F*. Αν *T* είναι ο χρόνος ζωής του συστήματος, τότε η αποτυχία του συστήματος θα συμπίπτει πάντα με το χρόνο ζωής της *i*–οστής μονάδας για κάποιο $i \in \{1,2,...,n\}$. Συγκεκριμένα αν $X_{(i)}$ δηλώνει το *i*–οστό μικρότερο χρόνο ζωής μονάδας, για $i = 1,2,...,n$, τότε έχουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος $T \in \{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}\}$ με πιθανότητα 1.

Ορισμός 2.3. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)'$ *με συντεταγμένες*

$$s_i = P(T = X_{(i)}) \ , \quad i = 1,2,...,n \qquad (2.1)$$

όπου $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}\}$ *είναι το διατεταγμένο τυχαίο δείγμα από τη συνεχή κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος.*

Η ιδέα της υπογραφής ενός συστήματος αναπτύχθηκε φυσιολογικά από μια συγκεκριμένη ιδιότητα των μονότονων συστημάτων, στα οποία οι μονάδες είναι ισόνομες και ανεξάρτητες. Για τέτοια συστήματα, η πιθανότητα ότι το σύστημα αποτυγχάνει στην *i*–οστή αποτυχία μονάδας δεν εξαρτάται από την κατανομή *F* των χρόνων ζωής των μονάδων. Αντίθετα η πιθανότητα αυτή είναι συνάρτηση μόνο του σχεδιασμού του συστήματος, συνεπώς η υπογραφή αποτελεί καθαρό μέτρο αξιολόγησης του σχεδιασμού ενός συστήματος αξιοπιστίας. Η υπόθεση ισόνομων και ανεξάρτητων μονάδων σε ένα σύστημα βοηθάει στη σύγκριση μεταξύ συστημάτων αξιοπιστίας, μιας και εξαλείφει παράδοξα συμπεράσματα, όπως το γεγονός ότι ένα σειριακό σύστημα με καλές μονάδες μπορεί να έχει καλύτερη απόδοση από ένα παράλληλο σύστημα με χαμηλής ποιότητας μονάδες, μολονότι ένα παράλληλο σύστημα είναι σαφώς ανώτερο (ως προς το σχεδιασμό του) από ένα σειριακό.

Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα της υπογραφής ως μέτρου αξιολόγησης του σχεδιασμού ενός συστήματος, περιλαμβάνεται το γεγονός ότι μπορούν να εφαρμοσθούν οι βασικές μαθηματικές αρχές της Συνδυαστικής συντελώντας στον σχετικά εύκολο υπολογισμό της. Επιπλέον, είναι ξεκάθαρο πως μπορεί να εφαρμοσθεί η θεωρία διατεταγμένων παρατηρήσεων από τυχαία *i.i.d.* δείγματα που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή F για τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών των χρόνων ζωής των μονάδων ενός συστήματος (για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Boland & Samaniego (2004) ή Navarro *et al*. (2008)).

Το γεγονός ότι η υπογραφή **s** εξαρτάται μόνο από την τυπολογία του συστήματος, και όχι από την κατανομή *F*, είναι συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε μία από τις $n!$ διατάξεις των χρόνων ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ των μονάδων του συστήματος είναι το ίδιο πιθανόν να συμβεί υπό την *i.i.d.* υπόθεση. Συνεπώς η πιθανότητα ότι η αποτυχία της *i*–οστής μονάδας είναι μοιραία για το σύστημα εξαρτάται αποκλειστικά από την πιθανότητα ότι η τελευταία μονάδα που λειτουργεί σε ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ.) είναι ταυτόχρονα η *i*–οστή μονάδα που αποτυγχάνει γενικά στο σύστημα. Με άλλα λόγια για να υπολογισθεί η υπογραφή **s** ενός συστήματος αρκεί να εξετασθούν τα ε.σ.δ. και να μετρηθούν πόσοι συνδυασμοί ανάμεσα στις ισοπίθανες μεταθέσεις των $X_1, X_2, ..., X_n$ συμπίπτουν ακριβώς με την αποτυχία κάποιου ε.σ.δ. κατά το συμβάν $X_{(i)}$. Επομένως εναλλακτικά η υπογραφή **s** ενός μονότονου συστήματος με *n* μονάδες μπορεί να δοθεί μέσω των μεταθέσεων των χρόνων ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ των μονάδων του συστήματος ως εξής.

Ορισμός 2.4. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* $\mathbf{s} = (s_1(n), s_2(n), ..., s_n(n))'$ *με συντεταγμένες της μορφής*

$$s_i(n) = \frac{A_i}{n!},$$

όπου A_i *είναι το πλήθος των μεταθέσεων των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος για τις οποίες η i–οστή αποτυχία προκαλεί αποτυχία του.*

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την έννοια των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε ένα διαφορετικό ορισμό της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας.

Ορισμός 2.5. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες και* $C = \{1,2,..,n\}$ *το σύνολο που δηλώνει τις μονάδες αυτές. Ένα υποσύνολο* $K^* = \{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(k)\}$ *(όπου π είναι κάποια μετάθεση των* $1,2,...,n$ *με* $k \le n$*) του συνόλου C ορίζεται ως διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν οι σχέσεις* $X_{(1)} = X_{\pi(1)}, X_{(2)} = X_{\pi(2)}, ..., X_{(k)} = X_{\pi(k)}$ *υποδηλώνουν για το χρόνο ζωής του συστήματος T ότι ισχύει* $T \le X_{\pi(k)}$*. Επιπλέον το σύνολο* K^* *είναι ελάχιστο διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής ενώ το σύνολο* $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(k-1)\}$ *δεν είναι.*

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος στον Ορισμό 2.4 της υπογραφής που δόθηκε παραπάνω με την ποσότητα $(n-i)!$, προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός της υπογραφής που χρησιμοποιεί τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής του συστήματος, όπως φαίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$s_i(n) = \frac{\text{πλήθος ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής μεγέθους } i}{(n)_i},$$

όπου $(n)_i = \dfrac{n!}{(n-i)!}$.

Στην εναλλακτική αυτή έκφραση για τις συντεταγμένες $s_i(n)$ του διανύσματος της υπογραφής ενός συστήματος λαμβάνονται υπόψη μόνο οι διατάξεις των *i* από τις *n* μονάδες. Συνεπώς μπορούμε να βλέπουμε την *i*–οστή συντεταγμένη της υπογραφής ενός συστήματος σαν την αναλογία των διατεταγμένων υποσυνόλων μεγέθους *i* του $\{1,2,...n\}$, που είναι ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής. Με άλλα λόγια για να υπολογίσουμε την υπογραφή ενός συστήματος πρέπει πρώτα να βρούμε τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής και στη συνέχεια με βάση τον τελευταίο τύπο να προσδιορίσουμε όλες τις συντεταγμένες $s_i(n)$. Τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι σύνολα που περιέχουν k μονάδες, ώστε ο χρόνος ζωής του συστήματος να μην υπερβαίνει τον $k-$οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του συγκεκριμένου συνόλου και ταυτόχρονα αφαιρώντας τη μονάδα με τον $k-$οστό διατεταγμένο χρόνο, το σύνολο να παύει να είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής.

Η χρησιμότητα της υπογραφής στη μελέτη του χρόνου ζωής ενός συστήματος αξιοπιστίας, γίνεται φανερή από την ακόλουθη πρόταση, η οποία αρχικά δόθηκε στην εργασία του Samaniego (1985) και παρουσιάζεται εκτενώς στη μονογραφία του Samaniego (2007).

Πρόταση 2.4. *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_n$ *οι χρόνοι ζωής των n ισόνομων και ανεξάρτητων μονάδων ενός μονότονου συστήματος και T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i(n) \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} , \qquad (2.2)$$

όπου $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.4 ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Kochar *et al*. (1999).

Η Πρόταση 2.4 δηλώνει ότι αν έχουμε ένα σύστημα με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες από μια κατανομή *F*, τότε η κατανομή του χρόνου ζωής *T* του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως μια συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από το σχεδιασμό του συστήματος μόνο μέσω της υπογραφής του. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (2.2) μπορεί να γενικευτεί και να εφαρμοσθεί στην περίπτωση όπου οι χρόνοι ζωής των μονάδων ενός συστήματος είναι ανταλλάξιμοι (*exchangeable*).

Επειδή το πλήθος των μονότονων συστημάτων με n μονάδες είναι αρκετά μεγάλο (αυξάνεται εκθετικά με το n), αποτελέσματα που αποδεικνύουν σχέσεις ανάμεσα σε συγκεκριμένα συστήματα συμβάλουν στη μείωση του υπολογιστικού βάρους των υπογραφών όλων των συστημάτων. Η ακόλουθη πρόταση μειώνει το βάρος αυτό στο μισό, δίνοντας μια σχέση που συνδέει την υπογραφή ενός συστήματος με την υπογραφή του αντίστοιχου δυϊκού του.

Πρόταση 2.5. *Έστω* $\mathbf{s}$ *η υπογραφή ενός συστήματος με* n *ισόνομες και ανεξάρτητες μονάδες και συνάρτηση δομής* φ *και έστω το δυϊκό του σύστημα με υπογραφή* $\mathbf{s}^D$ *και συνάρτηση δομής* φ^D. *Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$s_i(n) = s_{n-i+1}^D(n), \quad \text{για } i = 1,2,\ldots,n.$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.5 ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Kochar *et al*. (1999).

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια πρόταση, η οποία αρχικά θεμελιώθηκε στην εργασία του Boland (2001) και δίνει τη σχέση που έχει η υπογραφή ενός συστήματος με τα σύνολα λειτουργίας του. Για ένα μονότονο σύστημα με χρόνο ζωής T ορίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_T = (a_1(n), a_2(n), \ldots, a_n(n))$, όπου

$$a_i(n) = \frac{\text{πλήθος συνόλων λειτουργίας μεγέθους } i}{\binom{n}{i}}. \tag{2.3}$$

Με άλλα λόγια το $a_i(n)$ εκφράζει την αναλογία (ποσοστό) των υποσυνόλων μεγέθους i, τα οποία είναι σύνολα λειτουργίας για το σύστημα.

Πρόταση 2.6. *Έστω ένα μονότονο i.i.d. σύστημα με* n *μονάδες και υπογραφή* $\mathbf{s} = (s_1(n), s_2(n), \ldots, s_n(n))'$. *Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος* $\mathbf{s}$ *συνδέονται με τις αντίστοιχες του διανύσματος* $\boldsymbol{\alpha} = (a_1(n), a_2(n), \ldots, a_n(n))'$ *με την ακόλουθη σχέση*

$$a_i(n) = \sum_{j=n-i+1}^{n} s_j(n), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

ή ισοδύναμα

$$s_i(n) = a_{n-i+1}(n) - a_{n-i}(n), \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.4}$$

(σύμβαση: $a_0(n) = 0$).

Επιπρόσθετα, το διάνυσμα της υπογραφής ενός συστήματος αξιοπιστίας συνδέεται με τις ποσότητες d_r που ονομάζονται *dominations* και οι οποίες χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της πιθανότητας λειτουργίας ενός δικτύου αξιοπιστίας (για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Boland *et al*. (2001) ή Agrawal & Barlow (1984)). Οι ποσότητες d_r ικανοποιούν τις σχέσεις

$$d_0 = 0, \quad \sum_{r=1}^{n} d_r = 1,$$

και εκφράζονται μέσω των συντεταγμένων s_i, $i = 1,2,...,n$, του διανύσματος της υπογραφής ενός συστήματος αξιοπιστίας, με την ακόλουθη σχέση

$$d_r = \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i \right\} \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j} (-1)^{r-j}, \quad r = 1,2,...,n.$$

2.3 Γεννήτρια συνάρτηση της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ οι χρόνοι ζωής των *n* μονάδων ενός μονότονου συστήματος και T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Στην παρούσα ενότητα, υποθέτουμε πως οι μονάδες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (*i.i.d.*) και συνεπώς η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει κατά την αποτυχία της $i-$οστής μονάδας του, δεν εξαρτάται από τη συνεχή κατανομή F των χρόνων X_i μόνο μέσω της τιμής της $F(t)$ τη χρονική στιγμή t που το εξετάζουμε. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $r_i(n)$ το πλήθος των συνόλων λειτουργίας του συστήματος που περιέχουν i μονάδες και με $R_n(p)$ τη συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος ($q = 1 - p = F(t)$ είναι η συνήθης πιθανότητα αποτυχίας των μονάδων του). Στην επόμενη Πρόταση θα αποδείξουμε τη σχέση που συνδέει τη διπλή γεννήτρια συνάρτηση $H(x,t)$ των $r_i(n)$, $1 \le i \le n$ και τη διπλή γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων

$$i \binom{n}{i} s_i(n), \qquad 1 \le i \le n.$$

Πρόταση 2.7. *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $i \binom{n}{i} s_i(n)$, $1 \le i \le n$, *δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} s_i(n)\, t^i x^n = tx \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} - t(t+1) \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}, \tag{2.5}$$

όπου

$$H(x,t) = G(xt, 1/t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} r_{n-i}(n)\, t^i x^n \, . \tag{2.6}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.3) στο δεξί μέλος της σχέσης (2.4), παίρνουμε διαδοχικά

$$s_i(n) = \binom{n}{n-i+1}^{-1} r_{n-i+1}(n) - \binom{n}{n-i}^{-1} r_{n-i}(n)$$

$$= \frac{(n-i)!(i-1)!}{n!} \cdot \{(n-i+1) r_{n-i+1}(n) - i r_{n-i}(n)\}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} s_i(n) = (n-i+1) r_{n-i+1}(n) - i r_{n-i}(n) \, ,$$

οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$i\binom{n}{i} s_i(n) = (n-i+1)\, r_{n-i+1}(n) - i\, r_{n-i}(n). \tag{2.7}$$

Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων $i\binom{n}{i} s_i(n),\ 1 \le i \le n$, γράφεται στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} s_i(n)\, t^i x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} n\, r_{n-i+1}(n) t^i x^n - t^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} (i-1) r_{n-i+1}(n) t^{i-2} x^n$$

$$- t\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\, r_{n-i}(n) t^{i-1} x^n \, .$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $j = i-1,\ 1 \le i \le n$, οι τρεις όροι στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης, παίρνουν τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} n\, r_{n-i}(n) t^{i+1} x^n = tx \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, r_0(n)\, t^{n+1} x^n \, ,$$

$$t^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} i\, r_{n-i}(n)\, t^{i-1} x^n = t^2 \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, r_0(n)\, t^{n+1} x^n$$

και

$$t\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\, r_{n-i}(n) t^{i-1} x^n = t \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}$$

αντίστοιχα και καταλήγουμε άμεσα στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Στην επόμενη Πρόταση θα αποδείξουμε τη σχέση που συνδέει τη γεννήτρια συνάρτηση της αξιοπιστίας $R_n(p)$ ενός συστήματος αξιοπιστίας

$$R(z;p)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(p) z^n$$

και τη διπλή γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων

$$i\binom{n}{i} s_i(n), \qquad 1 \le i \le n.$$

Η απόδειξη της Πρότασης θα βασιστεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.1. *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $r_i(n)$, $1 \le i \le n$, *δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} r_i(n)\, t^i x^n = R(x(1+t);\frac{t}{1+t}). \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός μονότονου συστήματος με n μονάδες εκφράζεται μέσω του πλήθους $r_i(n)$ ως ακολούθως (βλ. Boland *et al.* (2004))

$$R_n(p)=\sum_{i=1}^{n} a_i(n)\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} r_i(n) p^i q^{n-i} \ .$$

Συνεπώς η γεννήτρια της συνάρτησης αξιοπιστίας $R_n(p)$, $n=1,2,\ldots$, παίρνει τη μορφή

$$R(z;p)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(p) z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} r_i(n)(\frac{p}{q})^i (qz)^n \ .$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς

$$t=\frac{p}{q}, \ \ x=qz$$

προκύπτουν άμεσα τα ακόλουθα

$$p=\frac{t}{1+t}, \ z=x(1+t)$$

και καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Πρόταση 2.8. *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $i\binom{n}{i} s_i(n)$, $1 \le i \le n$, *δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} s_i(n)\, t^i x^n = tx\frac{\partial R(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial x} - t(t+1)\frac{\partial R(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial t}.$$

(2.9)

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.8) στη σχέση (2.5), το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα. □

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.8, είναι φανερό ότι, αν γνωρίζουμε την αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος, ή ισοδύναμα τη γεννήτρια συνάρτησή της, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη γεννήτρια ενός απλού πολλαπλασίου της υπογραφής του (για εκτενή ανάλυση των γεννητριών συναρτήσεων συνδυασμών ή διατάξεων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις μονογραφίες των Κούτρα (2001, Κεφ. 5) και Χαραλαμπίδη (1996, Κεφ. 6)). Εφαρμογές της παραπάνω μεθοδολογίας για τον υπολογισμό του διανύσματος της υπογραφής για διάφορες οικογένειες συστημάτων, θα παρουσιασθούν σε επόμενες Παραγράφους του παρόντος Κεφαλαίου.

2.4 Συνθήκες διατήρησης της ιδιότητας *IFR* ενός μονότονου συστήματος

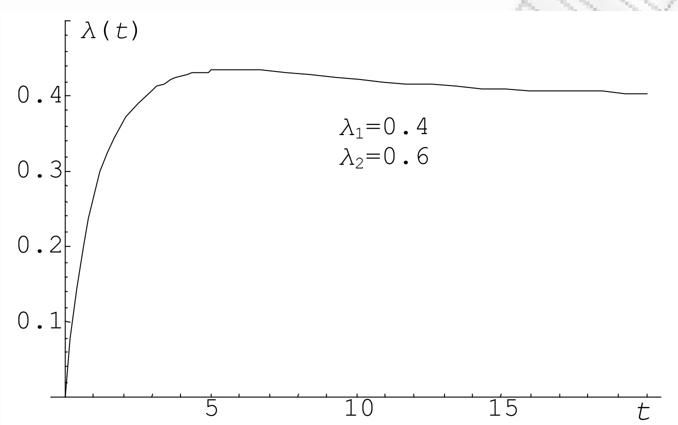
Ένα πρόβλημα, το οποίο παρουσιάζει μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον, είναι η διατήρηση του είδους γήρανσης κάτω από διάφορες πράξεις, όπως ο σχηματισμός μονότονων συστημάτων, η μίξη ή άθροιση τυχαίων μεταβλητών. Στην παράγραφο αυτή, θα δούμε αναλυτικά την περίπτωση της ιδιότητας *IFR*, εξετάζοντας αν το συγκεκριμένο είδος γήρανσης των μονάδων διατηρείται ή όχι όταν με αυτές σχηματίζεται ένα μονότονο σύστημα. Η οικογένεια των κατανομών με την ιδιότητα η βαθμίδα αποτυχίας τους να είναι αύξουσα συνάρτηση του t, ονομάζεται οικογένεια *Increasing Failure Rate* (*IFR*), όπως έχει ήδη ορισθεί στο Κεφάλαιο 1.

Αν $X_1, X_2, ..., X_n$ οι χρόνοι ζωής των *n* μονάδων ενός μονότονου συστήματος και T ο χρόνος ζωής του συστήματος, τότε γνωρίζουμε πως οι χρόνοι ζωής X_i $(1 \le i \le n)$ των μονάδων είναι IFR, δεν είναι απαραίτητο και ο χρόνος ζωής T του συστήματος να διατηρεί τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα, αν οι δύο μονάδες σχηματίζουν ένα παράλληλο σύστημα και οι χρόνοι ζωής τους X_1, X_2 ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\lambda_{PS}(t) = -\frac{R'_{PS}(t)}{R_{PS}(t)} = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}, \; t \geq 0 .$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος δεν είναι αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $\lambda_1 = 0.4$ και $\lambda_2 = 0.6$, τότε η γραφική παράσταση της βαθμίδας αποτυχίας του συστήματος δίνεται στο ακόλουθο σχήμα

ΣΧΗΜΑ 2.1



όπου παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(0,t_0)$ και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[t_0,+\infty)$. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια κατανομών *IFR* δεν είναι κλειστή ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Αντίθετα, υπάρχουν κλειστές κλάσεις κατανομών ως προς τη διατήρηση των ιδιοτήτων των μονάδων σε ένα μονότονο σύστημα, όπως οι οικογένειες κατανομών *IFRA* (Birnbaum *et al*. (1966)), *NBU* (Esary *et al*. (1970)), *NBAFR* (Loh (1984)) και *NBUFR* (Gohout & Kuhnert (1995)). Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε συνθήκες, κάτω από τις οποίες, η μη κλειστή κλάση κατατομών *IFR* (ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων), καθίσταται κλειστή. Η ακόλουθη Πρόταση δίνει μια συνθήκη, η οποία επαρκεί ώστε, κατά το σχηματισμό ενός μονότονου συστήματος, η ιδιότητα *IFR* να διατηρείται (Esary & Proschan (1963)).

Πρόταση 2.9. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση αξιοπιστίας* $R_S(\mathbf{p}) = R_S(p_1, p_2,..., p_n)$, *για το οποίο ισχύουν τα εξής*

α. οι μονάδες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d.) με χρόνους ζωής IFR και

β. η συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση

$$g(x) = \frac{x \cdot r'(x)}{r(x)}, \;\; 0 < x < 1$$

όπου $r(p) = R_s(p, p, \ldots, p)$ *είναι η αξιοπιστία του συστήματος, είναι φθίνουσα. Τότε ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι IFR.*

Η Πρόταση 2.9 προσφέρει έναν τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να εξετάζουμε εάν ένα μονότονο σύστημα διατηρεί την ιδιότητα *IFR* των μονάδων του. Ωστόσο το παραπάνω αποτέλεσμα δεν καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι αύξουσα και οι $i.i.d.$ μονάδες του συστήματος είναι *IFR*, τότε δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τις ιδιότητες γήρανσης του χρόνου ζωής του συστήματος. Η επόμενη Πρόταση, η οποία παρέχει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε ένα μονότονο σύστημα να διατηρεί την ιδιότητα *IFR*, έχει διατυπωθεί και αποδειχθεί στην εργασία του Samaniego (1985).

Πρόταση 2.10. *Ένα μονότονο σύστημα που αποτελείται από n ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες, είναι κλειστό ως προς την ιδιότητα IFR, αν και μόνο αν η συνάρτηση* $h(x)$*, η οποία ορίζεται από τον τύπο*

$$h(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \cdot s_{i+1}(n) \cdot \binom{n}{i} \cdot x^i}{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} s_j(n) \right) \cdot \binom{n}{i} \cdot x^i} \tag{2.10}$$

όπου $s_i(n) = P(T = X_{(i)})$, $i = 1,2,\ldots,n$, *είναι η i–οστή συντεταγμένη της υπογραφής* **s** *του συστήματος, είναι αύξουσα ως προς x, για* $x \in (0,+\infty)$.

Ο χαρακτηρισμός των *IFR* κλειστών συστημάτων, ο οποίος τεκμηριώνεται από την προηγούμενη Πρόταση, δίνει μια μέθοδο για να μπορούμε να καθορίσουμε αν ένα σύστημα με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες διατηρεί τη ιδιότητα *IFR*. Δεδομένου ότι αυτά τα συστήματα χρησιμοποιούνται συχνά στην Εφαρμοσμένη Μηχανική, το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις η πολύπλοκη μορφή της συνάρτησης $h(x)$ καθιστά την εύρεση της μονοτονίας της ιδιαίτερα δύσκολη. Στην Πρόταση 2.11 που ακολουθεί (βλ. επίσης Triantafyllou & Koutras (2008)), αποδεικνύουμε μία επαρκή συνθήκη, η οποία εξασφαλίζει τη μη διατήρηση της ιδιότητας *IFR* στο σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Το συγκριτικό της πλεονέκτημα σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα διατήρησης (ή μη) της ιδιότητας *IFR*, είναι ότι για την εφαρμογή της απαιτεί τον υπολογισμό μόνο δύο συντεταγμένων του διανύσματος της υπογραφής **s** και επιπλέον δεν βασίζεται στη μελέτη της μονοτονίας συνάρτησης αλλά σε μια απλή ανισοτική σχέση. Η απόδειξη της Πρότασης βασίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα, που αφορά τη μονοτονία μιας ρητής συνάρτησης.

Λήμμα 2.2. *Έστω*

$$z(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} \beta_i x^i},\ x > 0 \tag{2.11}$$

μία ρητή συνάρτηση ως προς x, *με* $\alpha_m \neq 0$ *και* $\beta_m \neq 0$. *Αν ισχύει*

$$\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1} > 0,$$

τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός x_0, *τέτοιος ώστε η συνάρτηση* $z(x)$ *να είναι γνησίως φθίνουσα* για $x > x_0$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = z(1/x)$ μπορεί να εκφρασθεί ως ακολούθως

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_{m-i} x^i}{\sum_{i=0}^{m} \beta_{m-i} x^i},\ x > 0,$$

ενώ η πρώτη παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης παίρνει τη μορφή

$$f'(x) = \left[(\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1}) + \sum_{i=1}^{2m-1}\gamma_i x^i\right]\left[\sum_{i=0}^{m}\beta_{m-i}x^i\right]^{-2}.$$

Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = (\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1})\beta_m^{-2} > 0,$$

προκύπτει ότι υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $f'(x) > 0$ για $0 < x < \varepsilon$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $0 < x < \varepsilon$, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $z(x) = f(1/x)$ είναι φθίνουσα για $x > \frac{1}{\varepsilon} = x_0$.

□

Πρόταση 2.11. *Έστω* n_0 $(1 \leq n_0 \leq n)$ *το ελάχιστο πλήθος μονάδων που πρέπει να λειτουργούν σε ένα σύστημα αξιοπιστίας ώστε το σύστημα να συνεχίζει να λειτουργεί. Αν ισχύει*

$$s_{i_0}(n) > (n - i_0)s_{i_0+1}(n), \tag{2.12}$$

για $i_0 = n - n_0$, *τότε το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα* IFR.

Απόδειξη. Αφού το n_0 είναι το ελάχιστο πλήθος μονάδων του συστήματος που πρέπει να λειτουργούν ώστε αυτό να συνεχίζει να βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, η πιθανότητα ότι η αποτυχία της $i-$οστής μονάδας είναι μοιραία για το σύστημα είναι ίση με μηδέν για όλες τις τιμές $n - n_0 + 2 \le i \le n$. Αυτό σημαίνει ότι η τελευταία μη μηδενική συντεταγμένη $s_i(n)$ στο διάνυσμα της υπογραφής $(s_1(n), s_2(n), ..., s_n(n))'$ του συστήματος είναι η $s_{n-n_0+1}(n)$. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $h(x)$, όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (2.10), είναι μια ρητή συνάρτηση ως προς x, με κοινό βαθμό αριθμητή και παρονομαστή ίσο με $m = n - n_0$. Συνεπώς η $h(x)$ μπορεί, σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.2, να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα οδηγώντας στη διατύπωση επαρκούς συνθήκης μη διατήρησης της IFR ιδιότητας κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, άμεση σύγκριση των σχέσεων (2.10) και (2.11) αποκαλύπτει τα ακόλουθα

$$\alpha_i = (n-i)s_{i+1}(n)\binom{n}{i}, \ \beta_i = \binom{n}{i}\sum_{j=i+1}^{n} s_j(n), \qquad i = 0,1,...,m.$$

Επιπρόσθετα ισχύει

$$\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1} = (n-m+1)s_m(n)\binom{n}{m-1}\binom{n}{m}\sum_{j=m+1}^{n} s_j(n) - (n-m)s_{m+1}(n)\binom{n}{m}\binom{n}{m-1}\sum_{j=m}^{n} s_j(n),$$

και δεδομένου ότι $\sum_{j=i_0}^{n} s_j(n) = s_{i_0}(n) + s_{i_0+1}(n)$ και $m = i_0$, η τελευταία σχέση οδηγεί στην παρακάτω ισότητα

$$\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1} = \binom{n}{i_0}\binom{n}{i_0-1}\{(n-i_0+1)s_{i_0}(n)s_{i_0+1}(n) - (n-i_0)s_{i_0+1}(n)(s_{i_0}(n) + s_{i_0+1}(n))\}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1} = \binom{n}{i_0}\binom{n}{i_0-1}s_{i_0+1}(n)(s_{i_0}(n) - (n-i_0)s_{i_0+1}(n)),$$

Λόγω της σχέσης (2.12) θα ισχύει $\alpha_{m-1}\beta_m - \alpha_m\beta_{m-1} > 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ειδική περίπτωση $n_0 = n$, η οποία εξαιρέθηκε από την Πρόταση 2.11 (επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ισχύει $i_0 = 0$ και η συντεταγμένη $s_0(n)$ δεν έχει νόημα), αντιπροσωπεύει το παράλληλο σύστημα με n μονάδες, το οποίο όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR* (για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη διατήρηση ιδιοτήτων γήρανσης κατά το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Abouammoh & El–Neweihi (1986), Hendi *et al.* (1993), Cai & Wu (1997) και Li (2004)).

Από τη σχέση (2.12) είναι φανερό ότι ένα μονότονο σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR*, αν η πιθανότητα να αποτύχει κατά την $(n-n_0+1)-$οστή διατεταγμένη αποτυχία μιας μονάδας του είναι μεγαλύτερη από $m = n - n_0$ φορές την πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει αργότερα. Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με d_{n_0} την αναλογία

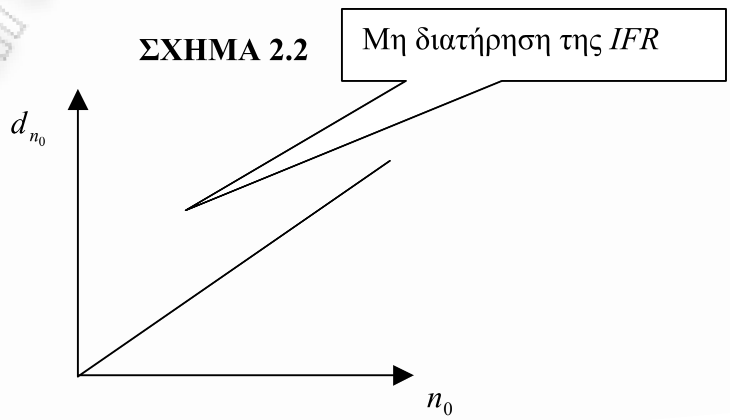
$$d_{n_0} = \frac{s_{i_0}(n)}{s_{i_0+1}(n)},$$

τότε η σχέση (2.12) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d_{n_0}}{n_0} > 1 .$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεραίνουμε τη μη διατήρηση της ιδιότητας *IFR* μέσω ενός απλού γραφήματος. Συγκεκριμένα, παραστaίνοντας, σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, την ποσότητα d_{n_0} συναρτήσει του n_0,

ΣΧΗΜΑ 2.2



αν για ένα σύστημα αξιοπιστίας, το σημείο (d_{n_0}, n_0) ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου (δηλαδή την ευθεία $d_{n_0} = n_0$), συμπεραίνουμε πως το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR.

2.5 Διατήρηση της ιδιότητας *IFR* σε ένα σύστημα συνεχόμενο *k*–από–τα–*n*: *F*

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση ενός μονότονου συστήματος, που ονομάζεται σύστημα συνεχόμενο *k*–από–τα–*n*: *F* (*consecutive k*–out–of–*n*: *F system*), αποδεικνύοντας (με ανεξάρτητο τρόπο) ορισμένες ιδιότητες του, αλλά και εφαρμόζοντας τα γενικά αποτελέσματα των Παραγράφων 2.3 και 2.4 για το συγκεκριμένο σύστημα. Το σύστημα συνεχόμενο *k*–από–τα–*n*:*F* αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες από τις *n*. Οι συγκεκριμένες δομές αξιοπιστίας, οι οποίες έχουν εισαχθεί από τους Kontoleon (1980) και Chiang και Niu (1981), εφαρμόζονται συχνά σε συστήματα τηλεπικοινωνιών, σε δίκτυα μεταφοράς υγρών, καθώς και στο σχεδιασμό ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Chao *et al*. (1995), Derman *et al*. (1982) και Kuo *et al*. (1994)). Γενικεύσεις και παραλλαγές των συστημάτων συνεχόμενα–*k*–από–τα–*n*: *F* αποτελούν τα συστήματα κυκλικά συνεχόμενα *k*–από–τα–*n*: *F* (Du & Hwang (1988) και Boland & Papastavridis (1999)), τα συστήματα συνεχόμενα–σταθμισμένα–*k*–από–τα–*n*: *F* (Chang *et al*. (1998) και Wu & Chen (1994)), τα δισδιάστατα συστήματα συνεχόμενα *k*–από–τα–*n*: *F* (Koutras *et al*. (1993) και Koutras *et al*. (1996)), τα συστήματα *r*–μεταξύ–*k*–από–τα–*n*: *F* (Griffith (1986), Boutsikas & Koutras (2000)), τα συστήματα αυστηρώς συνεχόμενα *k*–από–τα–*n*: *F* (Papastavridis (1986) και Philippou & Makri (1987)) και τα συστήματα *m*–συνεχόμενα–*k*–από–τα–*n*: *F* (Papastavridis (1990), Godbole (1993) και Papastavridis & Koutras (1993b)). Ορισμένες παραλλαγές των συστημάτων συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*:*F* που αναφέρθηκαν παραπάνω, θα μελετηθούν διεξοδικά σε επόμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου.

Τα ε.σ.δ. ενός συστήματος συνεχόμενου *k*–από–τα–*n*:*F*, είναι τα σύνολα $\{1,2,...,k\}, \{2,3,...,k+1\}, \{n-k+1, n-k+2,...,n\}$, δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,...,n\}$ με *k* διαδοχικά στοιχεία. Για την οικογένεια των ε.σ.δ. γράφουμε

$$\mathbf{C} = \{\{j, j+1,..., j+k-1\}, j = 1,2,...,n-k+1\}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση δομής του δίνεται, με τη βοήθεια της Πρότασης 2.2, ως εξής

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n-k+1} (1 - \prod_{i=j}^{j-k+1} (1 - x_i)) .$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός συστήματος συνεχόμενου *k*–από–τα–*n*:*F*, το οποίο αποτελείται από ισόνομες και ανεξάρτητες μονάδες με κοινή αξιοπιστία p, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$R_n(p) = \sum_{j=0}^{n} N(j, n-j+1; k-1) p^{n-j} (1-p)^j ,$$

όπου η ποσότητα $N(j, n-j+1; k-1)$ εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους j όμοια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε $(n-j+1)$ διαφορετικά κελιά, με την προϋπόθεση ότι σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν το πολύ $(k-1)$ αντικείμενα. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον υπολογισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος συνεχόμενο–*k*–από–τα–*n*:*F*, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Derman *et al.* (1982), Wu & Chen (1993), Sfakianakis & Papastavridis (1993), Papastavridis & Koutras (1993a) και Chao, Fu & Koutras (1995).

Ας θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο σύστημα συνεχόμενο *k*–από–τα–*n*:*F*. Τότε ένα σύνολο λειτουργίας του θα προκύψει αν διατάξουμε τις i μονάδες που λειτουργούν σε μία ευθεία γραμμή, οπότε και δημιουργούνται $(i+1)$ κενά κελιά ($(i-1)$ κενά κελιά ανάμεσα στις i διαδοχικές μονάδες που λειτουργούν, ένα πριν την πρώτη και ένα μετά την τελευταία). Στη συνέχεια κατανέμουμε τις υπόλοιπες $(n-i)$ μονάδες που έχουν αποτύχει, έτσι ώστε κανένα από τα κελιά να μην περιέχει k ή και περισσότερες μονάδες. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με $M(r,m)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους r όμοια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε m διαφορετικά κελιά, έτσι ώστε κάθε κελί να περιέχει το πολύ $(k-1)$ αντικείμενα, είναι προφανές ότι το πλήθος των συνόλων λειτουργίας του συστήματος με i μονάδες να λειτουργούν μπορεί να εκφρασθεί ως ακολούθως

$$r_i(n) = M(n-i, i+1) . \tag{2.13}$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η παραπάνω ποσότητα ταυτίζεται με τους αριθμούς $N(i, n-i+1; k-1)$, οι οποίοι αρχικά αναπτύχθηκαν από τους Derman *et al.* (1982) για τη μελέτη της αξιοπιστίας ενός συστήματος συνεχόμενου *k*–από–τα–*n*:*F* (για περισσότερες λεπτομέρειες για τους παραπάνω αριθμούς ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Kaplansky (1943), Charalambides (1991) και Hwang & Yao (1991)).

Προκειμένου να υπολογίσουμε το διάνυσμα της υπογραφής ενός συστήματος συνεχόμενου k–από–τα–n:F, αρκεί να βρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση του πλήθους $r_i(n)$ των συνόλων λειτουργίας του και να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.7, ώστε να καταλήξουμε σε αναδρομικές σχέσεις που θα επιτρέπουν τον υπολογισμό των συντεταγμένων της υπογραφής του. Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 2.12. *Έστω ότι* $s_i(n)$, $i = 1,2,...,n$, *είναι η υπογραφή ενός ευθύγραμμου συστήματος συνεχόμενο–k–από–τα–n:F. Τότε*

(*α*) *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $i\binom{n}{i}s_i(n),\ 1 \le i \le n$, *δίνεται από τη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} s_i(n)\, t^i x^n = \frac{(tx)^k[k - tx - ktx + (tx)^{k+1}]}{[1 - x - tx + x(tx)^k]^2}. \tag{2.14}$$

(*β*) *Οι ποσότητες* $q_i(n) = (n)_i s_i(n), i = 1,2,...,n$ *ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση*

$$\begin{aligned} q_{i+1}(n+1) = {} & 2q_{i+1}(n) - q_{i+1}(n-1) + 2i(q_i(n) - q_i(n-1)) \\ & - 2(i)_k (q_{i-k+1}(n-k) - q_{i-k+1}(n-k-1)) \\ & - (i)_2\, q_{i-1}(n-1) + 2(i)_{k+1}\, q_{i-k}(n-k-1) \\ & - (i)_{2k}\, q_{i-2k+1}(n-2k-1) \end{aligned} \tag{2.15}$$

για $i = 0,1,...,n-1$ και $n \ge 2k+2$.

Απόδειξη. (*α*) Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση του πλήθους $M(r,m)$, $r = 1,2,...$, των τρόπων κατανομής r διαφορετικών αντικειμένων σε m όμοια κελιά, κάθε ένα από τα οποία έχει χωρητικότητα $(k-1)$, είναι ίση με

$$\sum_{r=1}^{\infty} M(r,m)t^r = [f(t)]^m ,$$

όπου

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} t^j = \frac{1-t^k}{1-t}$$

είναι το μέσο αρίθμησης για κάθε ένα από τα κελιά (βλ. Charalambides (2002)). Πολλαπλασιάζοντας με x^m και αθροίζοντας για όλες τις τιμές $m = 1,2,\ldots$, έχουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} M(r,m)t^r x^m = \frac{xf(t)}{1-xf(t)}. \tag{2.16}$$

Λόγω της σχέσης (2.12), η ποσότητα $H(x,t)$, όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (2.6), γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} M(i,n-i+1)t^i x^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} M(i,n-i+1)x^n t^i. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $n-i+1=m$ στο εσωτερικό άθροισμα, η τελευταία σχέση παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$H(x,t) = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} M(i,m)x^m (tx)^i$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (2.16) καταλήγουμε στην έκφραση

$$H(x,t) = \frac{1}{x}\cdot\frac{xf(xt)}{1-xf(xt)} = \frac{1-(xt)^k}{1-x-xt+x(xt)^k}.$$

Στη συνέχεια, αφού υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $H(x,t)$, όπως φαίνεται ακολούθως

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = \frac{x[t+t\,(k-1)(tx)^k + ((tx)^k-1)^2] - k(tx)^k}{x[x((tx)^k - t - 1) + 1]^2},$$

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = \frac{tx + (tx)^k((k-1)tx - k)}{t\,[x(1+t-(tx)^k) - 1]^2},$$

αντικαθιστούμε τις παραπάνω εκφράσεις στη σχέση (2.5) και, ύστερα από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στη ζητούμενη έκφραση για τη γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων $i\binom{n}{i}s_i(n),\ 1 \le i \le n.$ Αξίζει να σημειωθεί ότι η μορφή της συνάρτησης $H(x,t)$ μπορεί να προκύψει και ως ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος των Koutras & Papastavridis (1993).

(β) Αν συμβολίσουμε με $c_n(t)$ την ποσότητα

$$c_n(t) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i(n)t^i \tag{2.17}$$

και γράψουμε τη σχέση (2.17) στη μορφή

$$[1-x-tx+x(tx)^k]^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)x^n=(tx)^k[k-tx-ktx+(tx)^{k+1}], \qquad (2.18)$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε αναδρομική σχέση για τις ποσότητες $c_n(t)$. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας πως οι συντελεστές των όρων x^{n+1} στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν για $n\geq 2k+1$, προκύπτει η ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned}c_{n+1}(t)&=2(t+1)c_n(t)-(t+1)^2c_{n-1}(t)-2t^kc_{n-k}(t)\\&\quad+2t^k(t+1)c_{n-k-1}(t)-t^{2k}c_{n-2k-1}(t), \qquad n\geq 2k+1.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $c_n(t)$ με τη βοήθεια της σχέσης (2.17) και εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς στις μεταβλητές άθροισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}j\binom{n}{i}s_i(n)t^i&=2\sum_{i=1}^{n-1}j\binom{n}{i-1}s_i(n-1)t^i+2\sum_{i=2}^{n}(i-1)\binom{n-1}{i-1}s_{i-1}(n-1)t^i\\&\quad-\sum_{i=3}^{n}(i-2)\binom{n-2}{i-2}s_{i-2}(n-2)t^i+2\sum_{i=2}^{n-1}(i-1)\binom{n-2}{i-1}s_{i-1}(n-2)t^i\\&\quad-\sum_{i=1}^{n-2}i\binom{n-2}{i}s_i(n-2)t^i-2\sum_{i=k+1}^{n-1}(i-k)\binom{n-k-1}{i-k}s_{i-k}(n-k-1)t^i\\&\quad+2\sum_{i=k+1}^{n-2}(i-k)\binom{n-k-2}{i-k}s_{i-k}(n-k-2)t^i\\&\quad+2\sum_{i=k+2}^{n-1}(i-k-1)\binom{n-k-2}{i-k-1}s_{i-k-1}(n-k-2)t^i\\&\quad-\sum_{i=2k+1}^{n-2}(i-2k)\binom{n-2k-2}{i-2k}s_{i-2k}(n-2k-2)t^i.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε τους συντελεστές των όρων t^i, $i=1,2,...,n$ στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης, θέτουμε $q_i(n)=(n)_i s_i(n), i=1,2,...,n$ και υλοποιώντας αλγεβρικές απλοποιήσεις, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναδρομική σχέση για τα $q_i(n)$

$$\frac{1}{(i-1)!}q_i(n) = \frac{2}{(i-1)!}q_i(n-1) + \frac{2}{(i-2)!}q_{i-1}(n-1) - \frac{1}{(i-3)!}q_{i-2}(n-2)$$
$$- \frac{2}{(i-2)!}q_{i-1}(n-2) - \frac{1}{(i-1)!}q_i(n-2) - \frac{2}{(i-k-1)!}q_{i-k}(n-k-1)$$
$$+ \frac{2}{(i-k-1)!}q_{i-k}(n-k-2) + \frac{2}{(i-k-2)!}q_{i-k-1}(n-k-2)$$
$$- \frac{1}{(i-2k-1)!}q_{i-2k}(n-2k-2).$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της τελευταίας σχέσης με $(i-1)!$ και εκτελώντας κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Προκειμένου να αξιοποιηθεί η αναδρομική σχέση (2.15), απαιτείται ένα πλήθος από κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να προκύψουν αν χρησιμοποιήσουμε ξανά τη σχέση (2.18), αλλά αυτή τη φορά επιλέξουμε τους συντελεστές των όρων x^{n+1}, για $n < 2k+1$. Ένα επαρκές σύνολο αρχικών συνθηκών που επιτρέπει τον υπολογισμό των ποσοτήτων $q_i(n)$ (και συνεπώς των συντεταγμένων $s_i(n)$ του διανύσματος της υπογραφής), δίνεται ακολούθως

$$q_i(n) = 0, \text{ για } 1 \le i \le n \le k-1,$$

$$q_i(k) = \begin{cases} 0, \ 1 \le i \le k-1 \\ k!, \ i = k, \end{cases} \qquad q_i(k+1) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le k-1 \\ 2k!, & i = k \\ (k+1)! - 2k!, & i = k+1. \end{cases}$$

Οι επιπρόσθετες τιμές των $q_i(n)$, για $k+1 < n \le 2k+2$, που είναι αναγκαίες πριν τη χρήση της αναδρομικής σχέσης (2.15), μπορούν να προκύψουν με την ίδια διαδικασία, θέτοντας $q_i(n) = 0$ αν $i \le 0, n \le 0, i < k$ ή $n < k$ και στις περιπτώσεις αρνητικών τιμών των $q_i(n)$.

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι έπειτα από αλγεβρικές πράξεις, το δεξί μέλος της σχέσης (2.14) μπορεί να δώσει την επόμενη εναλλακτική έκφραση για τη διπλή γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων $i\binom{n}{i}s_i(n),\ 1 \le i \le n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} s_i(n) t^i x^n = \frac{(tx)^k \sum_{i=0}^{k-1}(k-i)(tx)^i}{[1 - x\sum_{i=0}^{k-1}(tx)^i]^2}.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία έκφραση, μπορούμε να καταλήξουμε σε μία διαφορετική αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες $s_i(n)$ της υπογραφής ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά της απόδειξης της Πρότασης 2.12. Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη αναδρομή που θα προκύψει, θα εκφράζει τις ποσότητες $s_i(n)$ συναρτήσει όλων των $s_{i-j}(n-r)$, $j = 0,1,...,2k-2$, $i = 1,2,...,2k$, και θα έχει περιπλοκότερη μορφή από τη σχέση (2.15), δεν προχωρούμε στην υλοποίηση της συγκεκριμένης προσέγγισης.

Εναλλακτικά, μπορούμε να καταλήξουμε σε αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες $s_i(n)$ της υπογραφής ενός συστήματος συνεχόμενου *k–από–τα–n:F* χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.8. Πιο συγκεκριμένα, γράφοντας τη γεννήτρια της συνάρτησης αξιοπιστίας του ευθύγραμμου συστήματος συνεχόμενο–*k–από–τα–n:F* στην ακόλουθη έκφραση (βλ. Koutras & Papastavridis (1993))

$$R_L(z;p) = \frac{1-(qz)^k}{1 - z + pq^k z^{k+1}}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στη σχέση (2.9), προκύπτει η επόμενη ρητή συνάρτηση

$$L(x,t) = \frac{(tx)^k[k - tx - ktx + (tx)^{k+1}]}{[1 - x - tx + x(tx)^k]^2}, \tag{2.19}$$

η οποία ταυτίζεται με τη διπλή γεννήτρια των ποσοτήτων $i\binom{n}{i}s_i(n),\ 1 \le i \le n$, στην οποία καταλήξαμε στο (*α*) μέρος της Πρότασης 2.12. Έχοντας πλέον τη συνάρτηση $L(x,t)$, μπορούμε ακολουθώντας τα ίδια βήματα να οδηγηθούμε στην αναδρομική σχέση (2.15).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο 2.2, η ποσότητα

$$\bar{s}_i(n) = n! s_i(n)$$

είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός. Στην πραγματικότητα, το $\bar{s}_i(n)$ μετρά πόσοι συνδυασμοί ανάμεσα στις ισοπίθανες μεταθέσεις των χρόνων ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ των μονάδων του συστήματος συμπίπτουν ακριβώς με την αποτυχία κάποιου ε.σ.δ.

κατά την $i-$οστή διατεταγμένη αποτυχία μονάδας του συστήματος. Συνεπώς θα είχε ενδιαφέρον να υπολογίσουμε πρώτα τους ακέραιους αριθμούς $\bar{s}_i(n)$ και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των συντεταγμένων $s_i(n)$ της υπογραφής του συστήματος. Από τη σχέση (2.15), δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι οι ποσότητες $\bar{s}_i(n)$, $1 \le i \le n$, ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{s}_{i+1}(n+1)}{(n-i)!} &= 2\frac{\bar{s}_{i+1}(n)}{(n-i-1)!} - \frac{\bar{s}_{i+1}(n-1)}{(n-i-2)!} + 2i\left(\frac{\bar{s}_i(n)}{(n-i)!} - \frac{\bar{s}_i(n-1)}{(n-i-1)!}\right) \\
&\quad - 2(i)_k\left(\frac{\bar{s}_{i-k+1}(n-k)}{(n-i-1)!} - \frac{\bar{s}_{i-k+1}(n-k+1)}{(n-i)!}\right) \\
&\quad - (i)_2\frac{\bar{s}_{i-1}(n-1)}{(n-i)!} + 2(i)_{k+1}\frac{\bar{s}_{i-k}(n-k-1)}{(n-i-1)!} \\
&\quad - (i)_{2k}\frac{\bar{s}_{i-2k+1}(n-2k-1)}{(n-i-2)!}
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{i+1}(n+1) &= (n-i)(2\bar{s}_{i+1}(n) - (n-i-1)\bar{s}_{i+1}(n-1)) + i(2\bar{s}_i(n) - 2(n-i)\bar{s}_i(n-1)) \\
&\quad - (i)_2\bar{s}_{i-1}(n-1)) + (i)_k(n-i)(2(n-i-1)\bar{s}_{i-k+1}(n-k-1) - 2\bar{s}_{i-k-1}(n-k) \\
&\quad + 2(i-k)\bar{s}_{i-k}(n-k-1) - (n-i-1)(i-k)_k\bar{s}_{-2k+1}(n-2k-1)),
\end{aligned}$$

για $i = 0,1,\dots,n-1$ και $n \ge 2k+2$, με αρχικές συνθήκες

$$\bar{s}_i(n) = 0, \text{ για } 1 \le i \le n \le k-1,$$

$$\bar{s}_i(k) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le k-1 \\ k!, & i = k, \end{cases} \qquad \bar{s}_i(k+1) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le k-1 \\ 2k!, & i = k \\ (k+1)! - 2k!, & i = k+1. \end{cases}$$

Οι επιπρόσθετες τιμές των $\bar{s}_i(n)$, για $k+1 < n \le 2k+2$, που είναι αναγκαίες πριν τη χρήση της παραπάνω αναδρομικής σχέσης, μπορούν να προκύψουν με την ίδια διαδικασία, θέτοντας $\bar{s}_i(n) = 0$ αν $i \le 0, n \le 0, i < k$ ή $n < k$ και στις περιπτώσεις αρνητικών τιμών των $\bar{s}_i(n)$. Ο Πίνακας 2.1 δίνει τις ποσότητες $\bar{s}_i(n)$ για συστήματα συνεχόμενα *k–από–τα–n:F*, για $2 \le k \le n$ και $n = 2,3,\dots,10$.

Πίνακας 2.1. Οι ποσότητες $\bar{s}_i(n)$ για συστήματα συνεχόμενα *k–από–τα–n:F*

		i									
n	***k***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	0	2								
3	2	0	4	2							
	3	0	0	6							
4	2	0	12	12	0						
	3	0	0	12	12						
	4	0	0	0	24						
5	2	0	48	60	12	0					
	3	0	0	36	60	24					
	4	0	0	0	48	72					
	5	0	0	0	0	120					
6	2	0	240	336	144	0	0				
	3	0	0	144	288	288	0				
	4	0	0	0	144	336	240				
	5	0	0	0	0	240	480				
	6	0	0	0	0	0	720				
7	2	0	1440	2160	1296	144	0	0			
	3	0	0	720	1584	2016	720	0			
	4	0	0	0	576	1584	2160	720			
	5	0	0	0	0	720	2160	2160			
	6	0	0	0	0	0	1440	3600			
	7	0	0	0	0	0	0	720			
8	2	0	10080	15840	11520	2880	0	0	0		
	3	0	0	4320	10080	14400	10080	1440	0		
	4	0	0	0	2880	8640	14400	14400	0		
	5	0	0	0	0	2880	10080	17280	10080		
	6	0	0	0	0	0	4320	15840	20160		
	7	0	0	0	0	0	0	10080	30240		
	8	0	0	0	0	0	0	0	40320		
9	2	0	80640	131040	10810	40320	2870	0	0	0	
	3	0	0	30240	73440	112340	103680	43200	0	0	
	4	0	0	0	17280	54720	100800	129600	60480	0	
	5	0	0	0	0	78560	54720	112320	76960	40320	
	6	0	0	0	0	0	17280	73440	151200	120960	
	7	0	0	0	0	0	0	30240	131040	201600	
	8	0	0	0	0	0	0	0	80640	282240	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	362880	
10	2	0	725760	1209600	1088640	518400	86400	0	0	0	0
	3	0	0	1693440	604800	967680	1036800	656640	120960	0	0
	4	0	0	0	120960	397440	777600	1123200	967680	241920	0

	5	0	0	0	0	86400	345600	777600	1209600	1209600	0
	6	0	0	0	0	0	86400	397440	967680	1451520	725760
	7	0	0	0	0	0	0	120960	604800	1451520	1451520
	8	0	0	0	0	0	0	0	241920	1209600	2177280
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	725760	2903040
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3628800

Όπως είναι γνωστό, σε ένα σύστημα συνεχόμενο *k–από–τα–n:F*, οι μονάδες μπορούν να διαταχθούν σε ευθεία γραμμή (ευθύγραμμο σύστημα) ή σε κυκλική μορφή (κυκλικό σύστημα). Το κυκλικό σύστημα συνεχόμενο *k–από–τα–n:F* εξετάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία των Derman *et al*. (1982), ενώ οι Lambiris & Papastavridis (1985), Hwang (1986) και Kossow & Preuss (1989) μελέτησαν την αξιοπιστία του, αποδεικνύοντας αναδρομικές σχέσεις και κλειστούς τύπους υπολογισμού της.

Για τον υπολογισμό της υπογραφής $\mathbf{s}^c$ ενός κυκλικού συστήματος συνεχόμενο–*k–από–τα–n:F* μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία με αυτή που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για το ευθύγραμμο σύστημα και να καταλήξουμε σε αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες της. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητη η εύρεση αρχικά της γεννήτριας συνάρτησης των ποσοτήτων $i\binom{n}{i}s_i^c(n),\ 1 \le i \le n$. Αυτή δίνεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.13. *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $i\binom{n}{i}s_i^c(n),\ 1 \le i \le n$ *, δίνεται από τη σχέση*

$$C(x,t) = \frac{tx^3(tx)^{2k} + tx(-1+x+tx)^2 - x(tx)^k k^2(tx-1)^2(-1+x+tx)}{(-1+tx)^2(1+x(-1-t+(tx)^k))^2}$$
$$+\frac{x(tx)^k(t(-1+2(1+t)x-(2+t(2+t))x^2)+k(-1+tx)^2(1+t(-1+x+tx)))}{(-1+tx)^2(1+x(-1-t+(tx)^k))^2}. \qquad (2.20)$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.8 για ένα κυκλικό σύστημα συνεχόμενο *k–από–τα–n:F*, μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i^C(n)\,t^i x^n = tx\frac{\partial R_C(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial x} - t(t+1)\frac{\partial R_C(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial t}, \qquad (2.21)$$

όπου $R_C(z;p)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Ωστόσο η γεννήτρια $R_C(z;p)$ μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$R_C(z;p) = \frac{1-kpq^k z^{k+1}}{1-z+pq^k z^{k+1}} - \frac{(qz)^k}{1-qz}$$

και συνεπώς

$$R_C(x(1+t);\frac{1}{1+t}) = \frac{(tx)^k + k(1-tx)}{-1+tx} + \frac{1+k-kx(1+t)}{1+x(-1-t+(tx)^k)}.$$

Το δεξί μέλος της (2.20) προκύπτει άμεσα αν υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της γεννήτριας συνάρτησης ως προς x και t, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\frac{\partial R_C(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial x} = \frac{k((tx)^k - tx)}{x(tx-1)} - \frac{t(k-ktx+(tx)^k)}{(tx-1)^2} + \frac{k(1+t)}{x(1+t-(tx)^k)-1}$$
$$+\frac{((tx)^k(k+1)-t-1)(k(tx+x-1)-1)}{(1+x((tx)^k-t-1)^2},$$

$$\frac{\partial R_C(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial t} = \frac{k((tx)^k - tx)}{x(tx-1)} - \frac{x(k-ktx+(tx)^k)}{(tx-1)^2} + \frac{kx}{x(1+t-(tx)^k)-1}$$
$$+\frac{x(k+1-kx(1+t))(kt^{k-1}x^k-1)}{(1+x((tx)^k-t-1)^2}$$

και τις αντικαταστήσουμε κατάλληλα στην (2.21). □

Με βάση το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.13, μπορούμε να βρούμε αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες της υπογραφής του κυκλικού συστήματος συνεχόμενου *k*–*από*–*τα*–*n*:*F*, ακολουθώντας αντίστοιχα βήματα με αυτά της απόδειξης του (*β*) μέρους της Πρότασης 2.12, που αφορούσε την περίπτωση του ευθύγραμμου συστήματος. Ωστόσο η επόμενη Πρόταση μας απαλλάσσει από την πολυπλοκότητα της προαναφερθείσας διαδικασίας, προσφέροντας έναν αλγεβρικά συντομότερο τρόπο για τον προσδιορισμό της υπογραφής του κυκλικού συστήματος συνεχόμενου *k*–*από*–*τα*–*n*:*F*.

Πρόταση 2.14. *Αν* s_i^c *και* s_i, $1 \le i \le n$, *είναι οι υπογραφές ενός κυκλικού και ενός ευθύγραμμου συστήματος συνεχόμενο k–από–τα–n:F αντίστοιχα, τότε*

$$s_i^c(n) = s_i(n-1), \qquad 1 \le i \le n. \tag{2.22}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το γενικό αποτέλεσμα της σχέσης (2.7) για ένα ευθύγραμμο συνεχόμενο σύστημα *k–από–τα–*(*n*–1)*:F* και ένα κυκλικό συνεχόμενο *k–από–τα–n:F*, προκύπτουν τα εξής

$$i\binom{n-1}{i}s_i\,(n-1)=(n-i)\,r_{n-i}(n-1)-i\,r_{n-i-1}(n-1), \tag{2.23}$$

$$i\binom{n}{i}s_i^c(n)=(n-i+1)\,r_{n-i+1}^c(n)-i\,r_{n-i}^c(n), \tag{2.24}$$

όπου το πλήθος $r_i(n)=M(n-i,i+1)$ έχει περιγραφεί νωρίτερα, ενώ η ποσότητα $r_i^c(n)=M_C(n-i,i+1)$ αναφέρεται στην περίπτωση όπου η πρώτη και η τελευταία μονάδα του συστήματος είναι γειτονικές. Με άλλα λόγια, η ποσότητα $M_C(r,m)$ εκφράζει το πλήθος των τρόπων κατανομής r όμοιων αντικειμένων σε m διαφορετικά κελιά $1,2,...,m$, έτσι ώστε κάθε ένα από τα κελιά $2,3,...,m-1$, να περιέχει το πολύ $(k-1)$ μονάδες και τα κελιά 1 και m να περιέχουν, συνολικά και τα δύο μαζί, το πολύ $(k-1)$ μονάδες. Οι Koutras & Papastavridis (1993) έχουν αποδείξει πως οι ποσότητες $M_C(r,m)$ μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των $M(r,m-1)$ ως ακολούθως

$$M_C(r,m)=\frac{r+m-1}{m-1}M(r,m-1),\quad m>1.$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} r_i^c(n) &= M_C(n-i,i+1)=\frac{n}{i}M(n-i,i) \\ &= \frac{n}{i}r_{i-1}(n-1),\qquad 1\le i\le n. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε δύο φορές το συγκεκριμένο αποτέλεσμα στο δεξί μέλος της σχέσης (2.24), ώστε να καταλήξουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i}s_i^c(n) &= nr_{i-1}(n-1)-\frac{in}{n-i}r_{n-i-1}(n-1) \\ &= \frac{n}{n-i}[(n-1)r_{i-1}(n-1)-ir_{n-i-1}(n-1)],\qquad 1\le i\le n \end{aligned}$$

και κάνοντας χρήση της (2.23), προκύπτει η επόμενη ισότητα

$$i\binom{n}{i}s_i^c(n)=\frac{n}{n-i}i\binom{n-1}{i}s_i(n-1)$$
$$=i\binom{n}{i}s_i(n-1).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα ο ισχυρισμός της Πρότασης.

□

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση (2.22) μεταξύ των υπογραφών ευθύγραμμου και κυκλικού συστήματος συνεχόμενου *k–από–τα–n:F*, με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων $L(x,t)$, $C(x,t)$ που δίνονται στις (2.19) και (2.20) αντίστοιχα και του επόμενου Λήμματος.

Λήμμα 2.3. (*α*) *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $(n-i)i\binom{n}{i}s_i^c(n)$, *δίνεται από τη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(n-i)i\binom{n}{i}s_i^c(n)\,t^i x^n=x\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}-t\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}. \qquad (2.25)$$

(*β*) *Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των* $ni\binom{n-1}{i}s_i(n-1)$, *δίνεται από τη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}ni\binom{n-1}{i}s_i(n-1)\,t^i x^n=x^2\frac{\partial L(x,t)}{\partial x}+xL(x,t). \qquad (2.26)$$

Απόδειξη. (*α*) Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των $(n-i)i\binom{n}{i}s_i^c(n)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(n-i)i\binom{n}{i}s_i^c(n)\,t^i x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}ni\binom{n}{i}s_i^c(n)t^i x^{n-1}-t\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}i^2\binom{n}{i}s_i^c(n)t^{i-1}x^n$$

και το δεξί μέλος της (2.25) προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}ni\binom{n}{i}s_i^c(n)t^i x^{n-1}, \qquad \frac{\partial C(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}i^2\binom{n}{i}s_i^c(n)t^{i-1}x^n .$$

(*β*) Χρησιμοποιώντας την ακόλουθη προφανή ταυτότητα

$$ni\binom{n-1}{i} = (n-1)i\binom{n-1}{i} + i\binom{n-1}{i},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} ni\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)\,t^i x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)i\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)t^i x^n$$
$$+\, x\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)t^i x^{n-1}$$

και η ζητούμενη σχέση (2.26) προκύπτει άμεσα, αν παρατηρήσουμε ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της τελευταίας σχέσης ταυτίζεται με τη συνάρτηση $L(x,t)$, ενώ ο πρώτος της όρος γράφεται ως ακολούθως

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)i\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)t^i x^{n-2} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} ni\binom{n}{i} s_i\,(n)t^i x^{n-1}$$
$$= x^2\,\frac{\partial L(x,t)}{\partial x}.$$

□

Προκειμένου να καταλήξουμε στη σχέση (2.22), αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις $C(x,t)$, $L(x,t)$ στις σχέσεις (2.25) και (2.26) αντίστοιχα, οπότε προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(n-i)i\binom{n}{i} s_i^C(n)\,t^i x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} ni\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)\,t^i x^n,$$

ή ισοδύναμα

$$(n-i)i\binom{n}{i} s_i^C(n) = ni\binom{n-1}{i} s_i\,(n-1)$$

και η (εναλλακτική) απόδειξη για τη σχέση ανάμεσα στις υπογραφές του ευθύγραμμου και κυκλικού συστήματος συνεχόμενου *k–από–τα–n:F* ολοκληρώνεται με απλοποίηση των συντελεστών των $s_i^C(n), s_i(n-1)$ και στα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αναλυτικά την οικογένεια των συνεχόμενα–2*–από–τα–n:F* συστημάτων, εφαρμόζοντας τα γενικότερα αποτελέσματα προηγούμενων Προτάσεων που αφορούσαν το σύστημα συνεχόμενο *k–από–τα–n:F* για $k \geq 1$. Συγκεκριμένα, θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό της υπογραφής του και την απόδειξη Προτάσεων σχετικά με τη μη διατήρηση της *IFR* ιδιότητας ενός συστήματος συνεχόμενου 2*–από–τα–n:F*. Στην ειδική περίπτωση $n=2$, το συνεχόμενο 2–από–τα–2 σύστημα με ισόνομες μονάδες είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμο με ένα παράλληλο σύστημα δύο μονάδων, μιας και για να αποτύχει το σύστημα αυτό θα πρέπει να αποτύχουν και οι 2 μονάδες του (όπως ακριβώς συμβαίνει και στο παράλληλο). Συνεπώς η υπογραφή του θα είναι

$$\mathbf{s} = (0,1)'.$$

Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων της υπογραφής ενός συστήματος συνεχόμενο 2*–από–τα–n:F*, χρειαζόμαστε τη γεννήτρια συνάρτηση των ποσοτήτων $i\binom{n}{i}s_i\,(n),\ 1 \le i \le n$, η οποία προκύπτει αν θέσουμε $k=2$ στη σχέση (2.14) , όπως φαίνεται παρακάτω

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i\,(n)\,t^i x^n = \frac{t^2x^2(tx+2)}{(1-x-tx^2)^2}. \tag{2.27}$$

Με αλγεβρικές πράξεις στο δεξί μέλος της (2.27), παίρνουμε διαδοχικά

$$\frac{(tx)^2(2+tx)}{[1-x(1+tx\ )]^2} = (tx)^2(2+tx)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(x+tx^2)^j$$

$$= (2t^2x^2+t^3x^3)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}(tx^2)^r x^{j-r}.$$

Γράφοντας την τελευταία έκφραση σε μορφή διπλής δυναμοσειράς και επιλέγοντας τους συντελεστές $t^i x^n$, συμπεραίνουμε ότι

$$i\binom{n}{i}s_i\,(n) = (n-i+1)\binom{n-i+2}{i-1} - i\binom{n-i+1}{i}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα ο ακόλουθος κλειστός τύπος υπολογισμού των συντεταγμένων της υπογραφής ενός συστήματος συνεχόμενο*–2–από–τα–n:F*

$$s_i\,(n) = \frac{(n-i+2)!(n-i+1)!}{n!(n-2i+3)!} - \frac{(n-j+1)!(n-j)!}{n!(n-2j+1)!}$$

$$= \frac{(n-j)_{j-1}}{(n)_{j-1}}\left(\frac{(n-j+1)(n-j+2)}{(n-2j+2)(n-2j+3)} - 1\right).$$

Επιπρόσθετα, αν, χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $c_n(t)$ που ορίζονται στη σχέση (2.17), γράψουμε τη σχέση (2.27) στη μορφή

$$(1-x-tx^2)^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)x^n = t^2x^2(2+tx),$$

προκύπτει (παρατηρώντας ότι οι συντελεστές των x^n στο αριστερό μέλος είναι ίσοι με μηδέν για $n \geq 4$) ότι

$$\begin{aligned} c_{n+1}(t) &= 2(t+1)c_n(t)-(t+1)^2c_{n-1}(t)-2t^2c_{n-2}(t) \\ &\quad + 2t^2(t+1)c_{n-3}(t)-t^4c_{n-5}(t), \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε τους συντελεστές των t^{i+1}, $i = 0,1,...,n$ και με τη βοήθεια της (2.17) προκύπτει η ακόλουθη αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες $s_i(n)$

$$\begin{aligned} & i\cdot\binom{n}{i}s_i(n)-2i\cdot\binom{n-1}{i}s_i(n-1)-2(i-1)\binom{n-2}{i-1}\cdot s_{i-1}(n-2)+ \\ &\qquad +i\binom{n-2}{i}s_i(n-2)+2(i-1)\binom{n-3}{i-1}s_{i-1}(n-3) \\ &\qquad +(i-2)\binom{n-4}{i-2}s_{i-2}(n-4)=0, \end{aligned}$$

για $1 \leq i \leq n$ και $n \geq 5$. Ένα επαρκές σύνολο αρχικών συνθηκών για την παραπάνω αναδρομική σχέση δίνεται ακολούθως

$$s_1(1)=0, \quad (s_1(2),s_2(2))=(0,1), \quad (s_1(3),s_2(3),s_3(3))=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$(s_1(4),s_2(4),s_3(4),s_4(4))=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

(επιπλέον θέτουμε $s_i(n)=0$ για $i \leq 0$ ή $j < n$).

Προκειμένου να εξετάσουμε αν το σύστημα συνεχόμενο 2*–από–τα–n:F* διατηρεί την ιδιότητα *IFR* ή όχι για τις τιμές $n \geq 2$, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.11. Πιο συγκεκριμένα, αν n είναι άρτιος αριθμός, τότε οι παράμετροι που ορίζονται στη συγκεκριμένη Πρόταση, είναι

$$n_0=\frac{n}{2}, \qquad i_0=n-n_0=\frac{n}{2}$$

και έχουμε τα εξής

$$\frac{s_{i_0}(n)}{s_{i_0+1}(n)}=\frac{s_{n_0}(n)}{s_{n_0+1}(n)}=\frac{\frac{(n_0+2)!(n_0+1)!}{(2n_0)!3!}-\frac{(n_0+1)!n_0!}{(2n_0)!}}{\frac{(n_0+1)!n_0!}{(2n_0)!}-\frac{(n_0-1)!n_0!}{(2n_0)!}}$$

$$=\frac{n_0(n_0+1)\left(\frac{(n_0+1)(n_0+2)}{3!}-1\right)}{n_0(n_0+1)-1}$$

$$>\frac{(n_0+1)(n_0+2)}{6}-1=\frac{(n_0-1)(n_0+4)}{6}. \tag{2.28}$$

Είναι προφανές ότι το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης είναι μεγαλύτερο από την ποσότητα n_0, για $n_0 \geq 5$, οπότε εξάγουμε την ακόλουθη σχέση

$$s_{i_0}(n) > n_0 s_{i_0+1}(n), \qquad n_0 \geq 5.$$

Η τελευταία ανίσωση, με τη βοήθεια της Πρότασης 2.11, συνεπάγεται ότι το σύστημα συνεχόμενο 2*–από–τα–n:F* δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR* για τους άρτιους αριθμούς $n \geq 10$.

Αν το n είναι περιττός αριθμός, τότε οι παράμετροι που ορίζονται στη Πρόταση 2.11, είναι

$$n_0=\frac{n-1}{2},\ i_0=n-n_0=\frac{n+1}{2}$$

και ακολουθώντας ανάλογα βήματα, έχουμε διαδοχικά

$$\frac{s_{i_0}(n)}{s_{i_0+1}(n)}=\frac{s_{n_0+1}(n)}{s_{n_0+2}(n)}=\frac{\frac{(n_0+2)!(n_0+1)!}{(2n_0+1)!2!}-\frac{(n_0+1)!n_0!}{(2n_0+1)!}}{\frac{(n_0+1)!n_0!}{(2n_0+1)!}-\frac{(n_0-1)!n_0!}{(2n_0+1)!}}$$

$$=\frac{n_0(n_0+1)\left(\frac{(n_0+1)(n_0+2)}{2}-1\right)}{n_0(n_0+1)-1}$$

$$>\frac{(n_0+1)(n_0+2)}{2}-1=\frac{n_0(n_0+3)}{2}>n_0 \tag{2.29}$$

για $n_0 \geq 1$. Επομένως συμπεραίνουμε πως το σύστημα συνεχόμενο 2*–από–τα–n:F* δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR* για τους περιττούς αριθμούς $n \geq 3$.

Η παραπάνω διαδικασία δεν καλύπτει τις περιπτώσεις των συστημάτων συνεχόμενα–2–*από–τα–n:F* για $n = 2,4,6,8$. Αυτές μπορούν να εξετασθούν εύκολα με τη βοήθεια της ικανής και αναγκαίας συνθήκης της Πρότασης 2.10. Για παράδειγμα, αν $n = 4$ υπολογίζουμε τη συνάρτηση $h(x)$ με τη βοήθεια του Πίνακα 2.1, όπως φαίνεται παρακάτω

$$h(x) = \frac{6x + 6x^2}{3x^2 + 4x + 1} = \frac{6x}{3x+1} = 2 - \frac{2}{3x+1}, \ x > 0 .$$

Είναι φανερό πως η συνάρτηση $h(x)$ είναι αύξουσα ως προς x και συνεπώς το σύστημα συνεχόμενο–2–*από–τα*–4*:F* διατηρεί την ιδιότητα *IFR*. Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται με ανάλογο τρόπο για τις υπόλοιπες περιπτώσεις $n = 2,6,8$.

Αποτελέσματα σχετικά με τη διατήρηση (ή μη) της ιδιότητας *IFR* κατά το σχηματισμό ενός συστήματος συνεχόμενο–*k*–*από–τα–n:F*, έχουν αποδειχθεί και στην εργασία των Hwang & Yao (1990), ενώ οι Cui *et al.* (1995) και Cui (2002) μελέτησαν το παραπάνω πρόβλημα σε σχέση με το εύρος των τιμών του μεγέθους n των συγκεκριμένων συστημάτων.

2.6 Διατήρηση της ιδιότητας *IFR* σε ένα σύστημα–*r*–μεταξύ–συνεχόμενων–*k*–από–τα–*n*: *F*

Ένα σύστημα–*r*–μεταξύ–συνεχόμενων–*k*–από–τα–*n*: *F* (*r–within–consecutive–k–out–of–n: Fail system*) αποτελείται από n γραμμικά διατεταγμένες μονάδες και αποτυγχάνει αν και μόνο αν υπάρχουν k συνεχόμενες μονάδες, εκ των οποίων τουλάχιστον r έχουν αποτύχει ($1 \le r \le k \le n$). Το συγκεκριμένο σύστημα έχει εισαχθεί στην εργασία του Griffith (1986), ωστόσο η μελέτη του μαθηματικού μοντέλου που το διέπει, είχε πραγματοποιηθεί νωρίτερα στις εργασίες των Greenberg (1970) και Saperstein (1973, 1975). Φράγματα για τη συνάρτηση αξιοπιστίας του συγκεκριμένου συστήματος έχουν προταθεί από τους Papastavridis & Koutras (1993b) και Μπούτσικας (2000), ενώ η σύνδεση του με το γνωστό γενικευμένο πρόβλημα των γενεθλίων οφείλεται στην εργασία των Kounias & Sfakianakis (1991). Αξίζει να σημειωθεί πως στην ειδική περίπτωση $r = k$, το σύστημα ταυτίζεται με το σύστημα συνεχόμενο–*k*–από–τα–*n*: *F*, ενώ στην ειδική περίπτωση $k = n$ με το σύστημα *k*–από–τα–*n*: *F*.

Από τον ορισμό του συγκεκριμένου συστήματος προκύπτει ότι τα ε.σ.δ. είναι όλα τα υποσύνολα του $\{i, i+1, ..., i+k-1\}$ μεγέθους r, για $i = 1,2,...,n-k+1$. Λόγω της πολυπλοκότητας της μορφής της συνάρτησης δομής του, η εύρεση του διανύσματος της υπογραφής του κρίνεται ιδιαίτερα αναγκαία. Η ακόλουθη Πρόταση προσφέρει μία αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής ενός συστήματος–2–μεταξύ–συνεχόμενων–k–από–τα–n: F με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες και κοινή αξιοπιστία p.

Πρόταση 2.15. *Έστω ότι $s_i(n)$, $i = 1,2,...,n$, είναι η υπογραφή ενός συστήματος–2–μεταξύ–συνεχόμενων–k–από–τα–n: F.*

(α) Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των $i\binom{n}{i}s_i(n)$, $1 \le i \le n.$, δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i(n)\,t^i x^n = \frac{t^2 x[2x - 2x^2 + ((k-1)t-2)x^k + (2-kt)x^{k+1} + tx^{2k}]}{(x-1)^2(1-x-tx^k)^2}. \tag{2.30}$$

(β) Οι ποσότητες $q_i(n) = (n)_i s_i(n), i = 1,2,...,n$ ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} q_{i+1}(n+1) = {} & 2(2(q_{i+1}(n) + q_{i+1}(n-2)) - 3q_{i+1}(n-1)) - q_{i+1}(n-3) \\ & + i(2(q_i(n-k+1) - q_i(n-k-2) - 3q_i(n-k) + 3q_i(n-k-1) \\ & - (i-1)(q_i(n-2k+1) - q_i(n-2k) + q_i(n-2k-1))) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.8 για ένα σύστημα–r–μεταξύ–συνεχόμενων–k–από–τα–n: F προκύπτει η ακόλουθη ισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i(n)\,t^i x^n = tx\frac{\partial R(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial x} - t(t+1)\frac{\partial R(x(1+t);\frac{1}{1+t})}{\partial t} \tag{2.32}$$

όπου $R(z;p)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Επιπλέον, η γεννήτρια συνάρτηση $R(z;p)$, δίνεται από την επόμενη σχέση

$$R(z;p) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(p) z^n = \frac{1 + qz\sum_{j=0}^{k-2}(pz)^j}{1 - pz - qp^{k-1}z^k}$$

και συνεπώς

$$R\left(x(1+t); \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1+x(t-1)-tx^k}{(x-1)(x+tx^k-1)}.$$

Το δεξί μέλος της σχέσης (2.30) προκύπτει αν υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της γεννήτριας συνάρτησης ως προς x και t, όπως φαίνεται ακολούθως

$$\frac{\partial R(x(1+t); \frac{1}{1+t})}{\partial x} = \frac{(x-1)(-t(k(x-1)-2x)x^k - x(1+t+(t-1)x))}{x(tx-1)}$$
$$- \frac{tx^k(x(x-1)(1+(t-1)x) - tx(x^k-1))}{x(tx-1)},$$

$$\frac{\partial R(x(1+t); \frac{1}{1+t})}{\partial t} = \frac{x}{x+tx^k-1}$$

και τις αντικαταστήσουμε κατάλληλα στη σχέση (2.32).

(β) Αν συμβολίσουμε με $c_n(t)$ την ποσότητα

$$c_n(t) = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} s_i(n) t^i \tag{2.33}$$

και γράψουμε τη σχέση (2.30) στη μορφή

$$(x-1)^2(1-x-tx^k)^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)x^n = t^2 x[2x-2x^2+((k-1)t-2)x^k+(2-kt)x^{k+1}+tx^{2k}], \tag{2.34}$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε αναδρομική σχέση για τις ποσότητες $c_n(t)$. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας πως οι συντελεστές των όρων x^{n+1} στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν για $n \geq 2k+2$, προκύπτει η ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$c_{n+1}(t) - 4(c_n(t)+c_{n-2}(t)) + 6c_{n-1}(t) + c_{n-3}(t) - 2t(c_{n-k+1}(t) + tc_{n-2k}(t) - c_{n-k-2}(t))$$
$$+ 6tc_{n-k}(t) - 6tc_{n-k-1}(t) + t^2(c_{n-2k+1}(t) + c_{n-2k-1}(t)) = 0, \qquad n \geq 2k+2.$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $c_n(t)$ με τη βοήθεια της σχέσης (2.33) και εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς στις μεταβλητές άθροισης, παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i(n)t^i = 4\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n-1}{i}s_i(n-1)t^i - 6\sum_{i=1}^{n-2} i\binom{n-2}{i}s_i(n-2)t^i$$
$$+4\sum_{i=1}^{n-3} i\binom{n-3}{i}s_i(n-3)t^i - 2\sum_{i=1}^{n-4} i\binom{n-4}{i}s_i(n-4)t^i$$
$$+2\sum_{i=2}^{n-k+1}(i-1)\binom{n-k}{i-1}s_{i-1}(n-k)t^i - 6\sum_{i=2}^{n-k}(i-1)\binom{n-k-1}{i-1}s_{i-1}(n-k-1)t^i$$
$$+6\sum_{i=2}^{n-k-1}(i-1)\binom{n-k-2}{i-1}s_{i-1}(n-k-2)t^i - 2\sum_{i=2}^{n-k-2}(i-1)\binom{n-k-3}{i-1}s_{i-1}(n-k-3)t^i$$
$$-\sum_{i=3}^{n-2k+2}(i-2)\binom{n-2k}{i-2}s_{i-2}(n-2k)t^i + 2\sum_{i=3}^{n-2k+1}(i-2)\binom{n-2k-1}{i-2}s_{i-2}(n-2k-1)t^i$$
$$-\sum_{i=3}^{n-2k}(i-2)\binom{n-2k-2}{i-2}s_{i-2}(n-2k-2)t^i.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε τους συντελεστές των όρων t^i, $i=1,2,...,n$ στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης, θέτουμε $q_i(n)=(n)_i\, s_i(n), i=1,2,...,n$ και υλοποιώντας αλγεβρικές απλοποιήσεις, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναδρομική σχέση για τα $q_i(n)$

$$\frac{1}{(i-1)!}q_i(n) = \frac{4}{(i-1)!}q_i(n-1) - \frac{6}{(i-1)!}q_i(n-2) + \frac{4}{(i-1)!}q_i(n-3)$$
$$-\frac{1}{(i-1)!}q_i(n-4) + \frac{2}{(i-2)!}q_{i-1}(n-k) - \frac{6}{(i-2)!}q_{i-1}(n-k-1)$$
$$+\frac{6}{(i-2)!}q_{i-1}(n-k-2) - \frac{2}{(i-2)!}q_{i-1}(n-k-3)$$
$$-\frac{1}{(i-3)!}q_{i-2}(n-2k) + \frac{2}{(i-3)!}q_{i-2}(n-2k-1)$$
$$-\frac{1}{(i-3)!}q_{i-2}(n-2k-2).$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της τελευταίας σχέσης με $(i-1)!$ και εκτελώντας κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Προκειμένου να αξιοποιηθεί η αναδρομική σχέση (2.31), απαιτείται ένα πλήθος από κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να προκύψουν αν χρησιμοποιήσουμε ξανά τη σχέση (2.34), αλλά αυτή τη φορά επιλέξουμε τους συντελεστές των όρων x^{n+1}, για $n < 2k + 2$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να εφαρμοσθεί (με κόστος τις πιο περίπλοκες αλγεβρικές πράξεις) για την ανάλυση του συστήματος–*r*–μεταξύ–συνεχόμενων–*k*–από–τα–*n*: *F* για $r > 2$. Ο Πίνακας 2.2 δίνει τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής για συστήματα –*2*–μεταξύ–συνεχόμενων–3–από–τα–*n*: *F* με $n = 3,4,...,10$.

Πίνακας 2.2. Οι συντεταγμένες $s_i(n)$ της υπογραφής για συστήματα–2–μεταξύ–συνεχόμενων–3 – από–τα–*n*:*F*

	i									
n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	0	1	0							
4	0	5/6	1/6	0						
5	0	7/10	3/10	0	0					
6	0	3/5	2/5	0	0	0				
7	0	11/21	47/105	1/35	0	0	0			
8	0	13/28	13/28	1/14	0	0	0	0		
9	0	5/12	13/28	5/42	0	0	0	0	0	
10	0	17/45	41/90	17/105	1/210	0	0	0	0	0

Με τη βοήθεια του Πίνακα 2.2 και της Πρότασης 2.11, μπορούμε να εξετάσουμε αν ένα σύστημα–*2*–μεταξύ–συνεχόμενων–3–από–τα–*n*: *F* διατηρεί την ιδιότητα *IFR* ή όχι. Για παράδειγμα αν $n = 7$, τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι το ελάχιστο πλήθος μονάδων που πρέπει να λειτουργούν ώστε το σύστημα να συνεχίζει να λειτουργεί είναι $n_0 = 4$ και η συνθήκη (2.12) παίρνει τη μορφή

$$s_3(7) > (7-3)s_4(7)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{47}{105} > \frac{4}{35},$$

που ισχύει. Συνεπώς, προκύπτει άμεσα ότι το σύστημα–*2*–μεταξύ– συνεχόμενο– 3–από–τα–7: *F* δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR*.

2.7 Διατήρηση της ιδιότητας *IFR* σε ένα σύστημα *m*–συνεχόμενο–*k*–από–τα–*n*:*F*

Ένα σύστημα m–συνεχόμενο–k–από–τα–n: F (*m–consecutive k–out–of–n: Fail system*) αποτελείται από n γραμμικά διατεταγμένες μονάδες και αποτυγχάνει αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον m ροές από k συνεχόμενες μονάδες που έχουν αποτύχει ($1 \le k \le n$), με την προϋπόθεση ότι δεν επικαλύπτει η μία ροή την άλλη. Το συγκεκριμένο σύστημα αξιοπιστίας, το οποίο έχει εισαχθεί στην εργασία του Griffith (1986), είναι στενά συνδεδεμένο με τις Διωνυμικές κατανομές τάξης k (βλ. Aki & Hirano (1989), Charalambides (1986) και Phillipou & Makri (1986)), ή ισοδύναμα με τις κατανομές των ροών επιτυχίας. Στις εργασίες των Papastavridis (1990) και Godbole (1993), έχουν αποδειχθεί αναδρομικές σχέσεις και φράγματα για τη συνάρτηση αξιοπιστίας των παραπάνω συστημάτων, ενώ στις εργασίες των Godbole (1990, 1991) και Fu (1992) μελετήθηκε το πρόβλημα προσέγγισης από μια κατανομή *Poisson*. Αξίζει να σημειωθεί πως στην ειδική περίπτωση $m = 1$, το συγκεκριμένο σύστημα ταυτίζεται με το σύστημα συνεχόμενο–k–από–τα–n: F.

Η ακόλουθη Πρόταση προσφέρει μία αναδρομική σχέση για τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής ενός συστήματος m–συνεχόμενο–k–από–τα–n: F που αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες με κοινή αξιοπιστία p.

Πρόταση 2.16. *Έστω* $s_i(n)$, $i = 1,2,\ldots,n$, *η υπογραφή ενός συστήματος* m–*συνεχόμενου*– k–*από–τα*–n: F.

(*α*) *Η διμεταβλητή γεννήτρια συνάρτηση των* $i\binom{n}{i}s_i(n)$, $1 \le i \le n$, *δίνεται από τη σχέση*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}s_i(n)\,t^i x^n = \frac{m(tx)^{km}(tx-1)^{m-1}[k-ktx+tx((tx)^k-1)]}{(x(1+t-(tx)^k)-1)^{m+1}}. \tag{2.35}$$

(*β*) *Οι ποσότητες* $q_i(n) = (n)_i\, s_i(n), i = 1,2,\ldots,n$ *και* $m = 2$, *ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση*

$$
\begin{aligned}
q_{i+1}(n+1) = {} & 3(q_{i+1}(n) - q_{i+1}(n-1)) + 3i\,(q_i(n) - 2q_i(n-1) + q_i(n-2)) + q_{i+1}(n-2) \\
& + 3(i)_2\,(q_{i-1}(n-2) - q_{i-1}(n-1) + (i-2)q_{i-2}(n-2)) \\
& + 6(i)_{k+1}(q_{i-k}(n-k-1) - q_{i-k}(n-k-2)) \\
& - 3(i)_k\,(q_{i-k+1}(n-k) - 2q_{i-k+1}(n-k-1) + q_{i-k+1}(n-k-2)) \\
& - 3((i)_{k+2}\,q_{i-k-1}(n-k-2) + (i)_{2k}\,q_{i-2k+1}(n-2k-1)) \\
& + 3((i)_{2k}\,q_{i-2k+1}(n-2k-2) + (i)_{2k+1}\,q_{i-2k}(n-2k-2)) \\
& - (i)_{3k}\,q_{i-3k+1}(n-3k-2).
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.8 για ένα σύστημα m–συνεχόμενο–k–από–τα–n: F προκύπτει η ακόλουθη ισότητα

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} s_i(n)\, t^i x^n = tx \frac{\partial R(x(1+t); \frac{1}{1+t})}{\partial x} - t(t+1) \frac{\partial R(x(1+t); \frac{1}{1+t})}{\partial t} \tag{2.37}
$$

όπου $R(z;p)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Επιπλέον, η συνάρτηση $R(z;p)$ δίνεται στην επόμενη σχέση (βλ. Koutras (1996))

$$
R_m(z;p) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(p) z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{(qz)^{mk}}{(1-z)(1-pz\sum_{j=0}^{k-1}(qz)^j)^m}
$$

και συνεπώς

$$
R\left(x(1+t); \frac{1}{1+t}\right) = \frac{((tx)^k(tx-1))^m - (x(1+t-(tx)^k)-1)^m}{(x+tx-1)(x(1+t-(tx)^k)-1)^m}.
$$

Το δεξί μέλος της ζητούμενης σχέσης προκύπτει αν υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της γεννήτριας συνάρτησης ως προς x και t και τις αντικαταστήσουμε κατάλληλα στη σχέση (2.37).

(β) Χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $c_n(t)$, όπως έχουν ορισθεί στη σχέση (2.17) και γράφοντας τη σχέση (2.35), για $m=2$, στη μορφή

$$
(x(1+t-(tx)^k)-1)^3 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) x^n = 2(tx)^{2k}(tx-1)[k - ktx + tx((tx)^k - 1)], \tag{2.38}
$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε αναδρομική σχέση για τις ποσότητες $c_n(t)$. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας πως οι συντελεστές των όρων x^{n+1} στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν για $n \geq 3k+3$, προκύπτει η ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} c_{n+1}(t) &= 3(1+t)c_n(t) - 3(1+t)^2 c_{n-1}(t) + (1+t)^3 c_{n-2}(t) - 3t^k c_{n-k}(t) + 6(1+t)t^k c_{n-k-1}(t) \\ &\quad - 3(1+t)^2 t^k c_{n-k-2}(t) - 3t^{2k} c_{n-2k-1}(t) + 3(1+t)t^{2k} c_{n-2k-2}(t) - t^{3k} c_{n-3k-2}(t), \quad n \geq 3k+3. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $c_n(t)$ με τη βοήθεια της σχέσης (2.17) και εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς στις μεταβλητές άθροισης, παίρνουμε, επιλέγοντας τους συντελεστές των όρων t^i, $i=1,2,...,n$ στα δύο μέλη, την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i}s_i(n) &= 3i\binom{n-1}{i}s_i(n-1) + 3(i-1)\binom{n-1}{i-1}s_{i-1}(n-1) - 3i\binom{n-2}{i}s_i(n-2) \\ &\quad - 6(i-1)\binom{n-2}{i-1}s_{i-1}(n-2) - 3(i-2)\binom{n-2}{i-2}s_{i-2}(n-2) \\ &\quad + i\binom{n-3}{i}s_i(n-3) + 3(i-1)\binom{n-3}{i-1}s_{i-1}(n-3) \\ &\quad + 3(i-2)\binom{n-3}{i-2}s_{i-2}(n-3) + (i-3)\binom{n-k-2}{i-3}s_{i-3}(n-3) \\ &\quad - 3(i-k)\left(\binom{n-k-1}{i-k}s_{i-k}(n-k-1) - 2\binom{n-k-2}{i-k}s_{i-k}(n-k-2)\right) \\ &\quad + 6(i-k-1)\left(\binom{n-k-2}{i-k-1}s_{i-k-1}(n-k-2) - \binom{n-k-3}{i-k-1}s_{i-k-1}(n-k-3)\right) \\ &\quad - 3(i-2k)\left(\binom{n-2k-2}{i-2k}s_{i-2k}(n-2k-2) - \binom{n-2k-3}{i-2k}s_{i-2k}(n-2k-3)\right) \\ &\quad - 3(i-k)\binom{n-k-3}{i-k}s_{i-k}(n-k-3) \\ &\quad - 3(i-k-2)\binom{n-k-3}{i-k-2}s_{i-k-2}(n-k-3) \\ &\quad + 3(i-2k-1)\binom{n-2k-3}{i-2k-1}s_{i-2k-1}(n-2k-3) \\ &\quad - (i-3k)\binom{n-3k-3}{i-3k}s_{i-3k}(n-3k-3). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $q_i(n) = (n)_i s_i(n), i = 1,2,...,n$ και υλοποιώντας αλγεβρικές απλοποιήσεις, καταλήγουμε στη ζητούμενη αναδρομική σχέση για τα $q_i(n)$.

□

Προκειμένου να αξιοποιηθεί η αναδρομική σχέση (2.36), απαιτείται ένα πλήθος από κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να προκύψουν αν χρησιμοποιήσουμε ξανά τη σχέση (2.38), αλλά αυτή τη φορά επιλέξουμε τους συντελεστές των όρων x^{n+1}, για $n < 3k + 3$.

Ο Πίνακας 2.3 δίνει τις συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής για συστήματα 2–συνεχόμενα–2–από–τα–*n*: *F*, με $n = 2,3,...,10$.

Πίνακας 2.3. Οι συντεταγμένες $s_i(n)$ της υπογραφής για συστήματα–2–συνεχόμενα–2– από–τα–*n*:*F*

	i									
n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	0	0								
3	0	0	0							
4	0	0	0	1						
5	0	0	0	3/5	2/5					
6	0	0	0	2/5	3/5	0				
7	0	0	0	2/7	12/21	1/7	0			
8	0	0	0	3/14	1/2	2/7	0	0		
9	0	0	0	1/6	3/7	5/14	1/21	0	0	
10	0	0	0	2/15	11/30	8/21	5/42	0	0	0

Με τη βοήθεια του Πίνακα 2.3 και της Πρότασης 2.11, μπορούμε να εξετάσουμε αν το σύστημα–2–συνεχόμενο–2–από–τα–*n*: *F* διατηρεί την ιδιότητα *IFR* ή όχι. Για παράδειγμα αν $n = 7$, εύκολα διαπιστώνεται ότι το ελάχιστο πλήθος μονάδων που πρέπει να λειτουργούν ώστε το σύστημα να συνεχίζει να λειτουργεί είναι $n_0 = 2$ και η συνθήκη (2.12) παίρνει τη μορφή

$$s_5(7) > (7-5)s_6(7)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{12}{21} > \frac{2}{7},$$

που ισχύει. Συνεπώς, προκύπτει άμεσα ότι το σύστημα–2–συνεχόμενο–2–από–τα–7: *F* δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR*.

2.8 Στοχαστική σύγκριση μονότονων συστημάτων με τη βοήθεια της υπογραφής

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε τρεις διαφορετικούς τρόπους σύγκρισης της απόδοσης μονότονων συστημάτων. Τα αποτελέσματα στηρίζονται στη διάταξη των διανυσμάτων της υπογραφής των συστημάτων και οδηγούν σε συμπεράσματα σχετικά με τις κατανομές των χρόνων ζωής τους.

Είναι συχνά πιθανό να μπορούμε να κρίνουμε ένα σύστημα ως καλύτερο από ένα άλλο με μια απλή παρατήρηση των υπογραφών τους, όπως για παράδειγμα σε συστήματα *k*–από–τα–*n*: *G*, για $k \le n$. Ένα σύστημα *k*–από–τα–*n*: *G* λειτουργεί αν λειτουργούν τουλάχιστον *k* από τις *n* μονάδες, ή ισοδύναμα αποτυγχάνει αν αποτύχουν τουλάχιστον $(n-k+1)$ μονάδες. Συνεπώς η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος ταυτίζεται με το χρόνο ζωής $X_{(i)}$ της *i*–διατεταγμένης μονάδας (ως προς τη σειρά αποτυχίας) για όλα τα $i = 1,2,...,n-k$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$P(T = X_{(i)}) = 0, \quad \textit{για} \quad i = 1,2,...,n-k\,.$$

Ταυτόχρονα, το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν μόνο $(k-1)$ μονάδες του βρίσκονται σε λειτουργία και άρα

$$s_{n-k+1} = P(T = X_{(n-k+1)}) = 1\,.$$

Η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει ταυτόχρονα με την *i*–οστή μονάδα για $i > n-k+1$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή με άλλα λόγια οι $(k-1)$ τελευταίες συντεταγμένες του διανύσματος της υπογραφής δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$s_i = P(T = X_{(i)}) = 0, \quad \text{για} \quad n-k+1 < i \le n\,.$$

Τελικά η υπογραφή του συστήματος *k*–από–τα–*n*: *G* δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\mathbf{s}^{t}_{k/n} = (\underbrace{0,0,...0}_{n-k},1,\underbrace{0,0,...,0}_{k-1})\,.$$

Με βάση τα παραπάνω, ένα σύστημα 2–από–τα–4:*G* με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες έχει υπογραφή $\mathbf{s}_{2/4} = (0,0,1,0)'$, ενώ ένα σύστημα 3–από–τα–4:*G* έχει υπογραφή $\mathbf{s}_{3/4} = (0,1,0,0)'$. Συνεπώς οι δύο υπογραφές είναι ικανές να ποσοτικοποιήσουν το γεγονός ότι ένα σύστημα 2–από–τα–4:*G* είναι καλύτερο από ένα σύστημα 3–από–τα–4:*G*, το οποίο έχει τις ίδιες μονάδες με το πρώτο. Πράγματι αυτό είναι εμφανές, καθώς, σύμφωνα με τα δύο διανύσματα $\mathbf{s}_{2/4}$ και $\mathbf{s}_{3/4}$, ο χρόνος ζωής του συστήματος 2–από–τα–4:G ταυτίζεται, με πιθανότητα 1, με τον τρίτο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του συστήματος, ενώ ο χρόνος ζωής του συστήματος 3–από–τα–4:G ταυτίζεται, με πιθανότητα 1, με το δεύτερο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του, άρα το σύστημα 2–από–τα–4:G τείνει να διαρκέσει περισσότερο από το σύστημα 3–από–τα–4:G. Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις, η σύγκριση των χρόνων ζωής δύο μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας δεν είναι δυνατόν να θεμελιωθεί με τον απλό τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Για να γίνει εφικτή η πραγματοποίηση στοχαστικών συγκρίσεων για τους χρόνους ζωής συστημάτων μέσω της υπογραφής τους έχουν εισαχθεί διάφορες έννοιες στοχαστικών διατάξεων για τις υπογραφές δύο συστημάτων. Οι ακόλουθοι ορισμοί που αναφέρονται σε διάταξη υπογραφών δίνονται σε αντιστοιχία με τους Ορισμούς 1.4, 1.5 και 1.6 για στοχαστική διάταξη τυχαίων χρόνων ζωής.

Ορισμός 2.6. *Αν* $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, ..., s_{1n})$, $\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}, ..., s_{2n})$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη (συμβολικά* $\mathbf{s}_1 \le_{st} \mathbf{s}_2$*) αν ισχύει η σχέση*

$$\sum_{j=i}^{n} s_{1j} \le \sum_{j=i}^{n} s_{2j} \quad \text{για όλα τα } i = 1,2,...,n. \tag{2.40}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνθήκη (2.40) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$a_{1i} \le a_{2i}, \text{ για όλα τα } i = 1,2,...,n$$

όπου $a_{1i} = a_{1i}(n)$ και $a_{2i} = a_{2i}(n)$ είναι οι ποσότητες που ορίζονται στη σχέση (2.3). Επιπλέον, αν οι συναρτήσεις δομής φ_1, φ_2 των δύο συστημάτων έχουν την ιδιότητα $\varphi_1(\mathbf{x}) \le \varphi_2(\mathbf{x})$, για όλα τα διανύσματα κατάστασης $\mathbf{x}$ των μονάδων τους, τότε οι αντίστοιχες υπογραφές ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{s}_1 \le_{st} \mathbf{s}_2$. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει (για την εύρεση κατάλληλου αντιπαραδείγματος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο κείμενο των Block & Borges (1984)).

Ορισμός 2.7. *Αν* $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, ..., s_{1n})$, $\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}, ..., s_{2n})$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ $\mathbf{s}_1$

ως προς τη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας (*συμβολικά* $\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2$) *αν ο λόγος* $\sum_{j=i}^{n} s_{2j} / \sum_{j=i}^{n} s_{1j}$ *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς i*, για $i = 1,2,...,n$. (2.41)

Ορισμός 2.8. *Αν* $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, ..., s_{1n})$, $\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}, ..., s_{2n})$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *ως προς τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (συμβολικά* $\mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2$*) αν ο λόγος* s_{2i} / s_{1i} *είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς i, για* $i = 1,2,...,n$.

(2.42)

Η σχέση ανάμεσα σε δύο στοχαστικά διατεταγμένες υπογραφές μονότονων συστημάτων και τους αντίστοιχους χρόνους ζωής τους, τεκμηριώνεται στις ακόλουθες Προτάσεις.

Πρόταση 2.17. *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο μονότονων συστημάτων με n ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές*

$$(\alpha)\ \mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$$

$$(\beta)\ \mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2$$

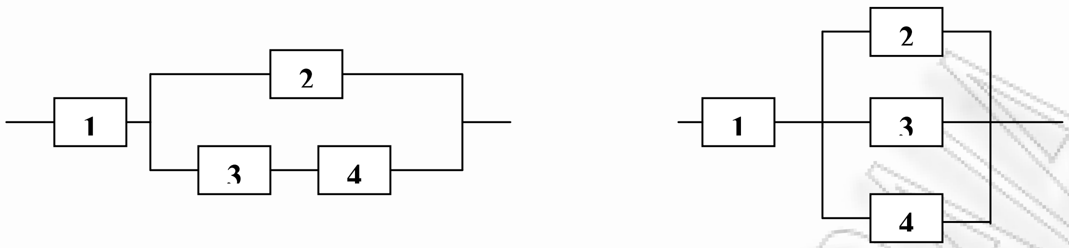
$$(\gamma)\ \mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{lr} T_2 .$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.17, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Kochar *et al*. (1999). Η σημασία των παραπάνω αποτελεσμάτων έγκειται στο γεγονός ότι προσφέρουν απλές επαρκείς συνθήκες για τη δομή (αναφορικά με τις υπογραφές) δύο συστημάτων, οι οποίες θεμελιώνουν στοχαστικές διατάξεις των αντίστοιχων χρόνων ζωής τους (ανεξάρτητα των πραγματικών χρόνων ζωής των μονάδων των συστημάτων αυτών). Για τους τρεις τύπους διάταξης δύο υπογραφών ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές

$$\mathbf{s}_1 \leq_{lr} \mathbf{s}_2 \Rightarrow \mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2 \Rightarrow \mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2 .$$

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν γενικά όπως φαίνεται και από το επόμενο παράδειγμα, όπου δίνονται δύο μονότονα συστήματα, των οποίων οι υπογραφές ικανοποιούν κάποιες αλλά όχι όλες τις παραπάνω σχέσεις στοχαστικής διάταξης. Ας θεωρήσουμε τα συστήματα που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 2.3



Σύστημα 1 **Σύστημα 2**

Οι υπογραφές των δύο συστημάτων του Σχήματος 2.3 είναι αντίστοιχα τα διανύσματα

$$\mathbf{s}_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0\right)', \quad \mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)'.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι ισχύουν οι στοχαστικές διατάξεις

$$\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2,$$

ενώ για τη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας έχουμε διαδοχικά, για $i = 1,2,3$,

$$\frac{s_{31}}{s_{41}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1, \quad \frac{s_{32}}{s_{42}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{3}, \quad \frac{s_{33}}{s_{43}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\frac{s_{3i}}{s_{4i}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό 2.8 έχουμε ότι

$$\mathbf{s}_1 \not\leq_{lr} \mathbf{s}_2.$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι Navarro *et al*. (2005) γενίκευσαν τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.17, για μονότονα συστήματα με (πιθανώς) εξαρτημένες μονάδες, ενώ οι Navarro *et al*. (2008) θεμελίωσαν στοχαστικές συγκρίσεις μεταξύ χρόνων ζωής μονότονων συστημάτων διαφορετικού μεγέθους.

Οι Boland & Samaniego (2004a) απέδειξαν (με χρήση της υπογραφής) την ακόλουθη Πρόταση που αναφέρεται στη στοχαστική διάταξη των χρόνων ζωής των συστημάτων συνεχόμενων 2–από–τα–n: F.

Πρόταση 2.18. *Έστω* $T_{2|n}$ *ο χρόνος ζωής ενός συστήματος 2–από–τα–n: F με ανεξάρτητες κα ισόνομες μονάδες. Τότε ισχύει*

$$T_{2|n} \geq_{st} T_{2|n+1}.$$

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.18 μπορεί να γενικευθεί και για το σύστημα συνεχόμενο–k–από–τα–n:F, για $k > 2$. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα αποδεικνύεται στην εργασία των Boland & Samaniego (2004b), χρησιμοποιώντας μια διαφορετική προσέγγιση. Για πρόσθετα αποτελέσματα σχετικά με στοχαστικές διατάξεις των χρόνων ζωής των συστημάτων k–από–τα–n: F και k–από–τα–n: G, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Eryilmaz (2007) και Korwar (2003) αντίστοιχα.

Ως παράδειγμα το πως τα νέα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο παρόν Κεφάλαιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη στοχαστική σύγκριση χρόνων ζωής δομών αξιοπιστίας, ας θεωρήσουμε την οικογένεια των συστημάτων k–από–τα–n: F και τα συστήματα συνεχόμενα k–από–τα–n: F (ευθύγραμμα και κυκλικά). Για την υπογραφή $\mathbf{s}(n) = (s_1(n), s_2(n), \ldots, s_n(n))'$ της πρώτης κλάσης, γνωρίζουμε ότι

$$s_i(n) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

ενώ οι υπογραφές των συνεχόμενων συστημάτων (ευθύγραμμων και κυκλικών) k–από–τα–n: F μπορούν εύκολα να υπολογισθούν με τη βοήθεια των Προτάσεων 2.12 και 2.14 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, η συνθήκη (2.40) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη θεμελίωση της συνήθους στοχαστικής διάταξης μεταξύ των χρόνων ζωής τους.

Ο Πίνακας 2.4 παρουσιάζει τη στοχαστική διάταξη που μπορεί να επιτευχθεί ανάμεσα στις οικογένειες συστημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω για $n = 5$ και για όλες τις τιμές $k = 1,2,\ldots,5$. Είναι προφανές ότι η περίπτωση $k = 1$ αντιστοιχεί στο σειριακό και η τιμή $k = 5$ στο παράλληλο σύστημα με πέντε μονάδες.

Από τον Πίνακα 2.4, διαπιστώνουμε ότι τα έντεκα (11) μονότονα συστήματα μπορούν να διαταχθούν σχεδόν πλήρως. Πιο συγκεκριμένα, για 52 ζεύγη από τις $\binom{11}{2} = 55$ πιθανές ανά δύο συγκρίσεις μεταξύ των συστημάτων μεγέθους 5, υλοποιείται στοχαστική σύγκριση. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα υπολειπόμενα τρία ζεύγη δεν είναι δυνατόν να διαταχθούν, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί μέσω της σύγκρισης των συναρτήσεων αξιοπιστίας τους στην απλή περίπτωση όπου όλες οι μονάδες έχουν εκθετικούς χρόνους ζωής.

Ορισμένες συγκρίσεις που απεικονίζονται στον Πίνακα 2.4, μπορούν να θεμελιωθούν και με εναλλακτικό τρόπο, όπως για παράδειγμα εξετάζοντας αν είναι δυνατόν να διαταχθούν οι αντίστοιχες οικογένειες των ε.σ.δ. των συστημάτων. Αυτό είναι εφικτό, αν για παράδειγμα, συγκρίνουμε συστήματα με την ίδια τιμή του k. Έτσι, το σύστημα k–από–τα–n: F έχει μεγαλύτερη οικογένεια ε.σ.δ. σε σχέση με το σύστημα συνεχόμενο κυκλικό k–από–τα–n: F και το τελευταίο έχει μεγαλύτερη οικογένεια ε.σ.δ. από το σύστημα συνεχόμενο ευθύγραμμο k–από–τα–n: F.

Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένα ζεύγη συστημάτων για τα οποία οι οικογένειες των ε.σ.δ. τους δεν μπορούν να διαταχθούν. Μια τέτοια περίπτωση προκύπτει αν συγκρίνουμε το σύστημα 2–από–τα–5: F (το οποίο έχει $\binom{5}{2} = 10$ ε.σ.λ. της μορφής $\{i, j\}$, με $1 \le i < j \le 5$) με το ευθύγραμμο σύστημα 3–από–τα–5: F (το οποίο έχει τρία ε.σ.δ. της μορφής $\{i, i+1, i+2\}$, $i = 1,2,3$). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι υπογραφές των συστημάτων μπορούν να υπολογισθούν εύκολα μέσω της Πρότασης 2.12 ως εξής

$$\mathbf{s}_1(n) = (0,1,0,0,0)', \ \mathbf{s}_2(n) = \left(0,0,\frac{3}{10},\frac{5}{10},\frac{2}{10}\right)'$$

αντίστοιχα και βάσει της (2.40) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο χρόνος ζωής του πρώτου συστήματος είναι στοχαστικά μικρότερος από το χρόνο ζωής του δεύτερου.

Πίνακας 2.4. Στοχαστική διάταξη για συστήματα μεγέθους $n = 5$.

	Σειριακό	Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 2-από-τα-5	Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 3-από-τα-5	Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 4-από-τα-5	2-από-τα-5	3-από-τα-5	4-από-τα-5	Συνεχόμενο Κυκλικό 2-από-τα-5	Συνεχόμενο Κυκλικό 3-από-τα-5	Συνεχόμενο Κυκλικό 4-από-τα-5	Παράλληλο
Σειριακό	$=_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 2-από-τα-5		$=_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$>_{st}$	---	$<_{st}$	$>_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 3-από-τα-5			$=_{st}$	$<_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	---	$>_{st}$	$>_{st}$	---	$<_{st}$
Συνεχόμενο Ευθύγραμμο 4-από-τα-5				$=_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$<_{st}$
2-από-τα-5					$=_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
3-από-τα-5						$=_{st}$	$<_{st}$	$>_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
4-από-τα-5							$=_{st}$	$>_{st}$	$>_{st}$	$=_{st}$	$<_{st}$
Συνεχόμενο Κυκλικό 2-από-τα-5								$=_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
Συνεχόμενο Κυκλικό 3-από-τα-5									$=_{st}$	$<_{st}$	$<_{st}$
Συνεχόμενο Κυκλικό 4-από-τα-5										$=_{st}$	$<_{st}$
Παράλληλο											$=_{st}$