

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΡΥΘΜΟ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

ΛΑΓΓΑΡΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
Απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Οκτώβριος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 5<sup>η</sup>/17.03.08 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής
- Δημήτριος Αντζουλάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Γεώργιος Τζαβελάς, Λέκτορας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**CONTROL CHARTS  
WITH VARIABLE SAMPLING RATE**

By

Alexandros Langaris

MSc Dissertation  
submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment  
of the requirements for the degree of Master of Science  
in Applied Statistics

Piraeus, Greece  
October 2008

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού των προϊόντων που παράγονται. Αυτή η διαδικασία παρακολούθησης γίνεται με την βοήθεια κατάλληλων διαγραμμάτων ελέγχου. Η συνήθης πρακτική κατά την χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου είναι να συλλέγουμε ισομεγέθη δείγματα σε σταθερά διαστήματα δειγματοληψίας. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε διάφορες μελέτες σχετικά με το σχεδιασμό διαγραμμάτων στα οποία μπορεί να μεταβάλλεται το διαστήματα δειγματοληψίας ή/και το μέγεθος του δείγματος, ενώ παράλληλα γίνεται και σύγκριση ως προς την ταχύτητα ανίχνευσης σημαντικών μεταβολών των παραμέτρων του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει, σε σχέση με τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου. Τα διαγράμματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι το  $\bar{X}$ , το  $np$ , το CUSUM, το EWMA και το Hotelling's  $T^2$ . Σε κάθε περίπτωση η σύγκριση με τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου γίνεται κυρίως με την βοήθεια ποσοτήτων όπως ο μέσος χρόνος σήματος (average time to signal, ATS) και ο μέσος αριθμός δειγμάτων μέχρι το σήμα (average number of samples to signal, ANSS).

## ABSTRACT

What is of interest, in productive processes, is monitoring the behavior of a quality attribute of the product that is produced. This monitoring procedure is done using optimal control charts. It is common when using control charts, to take samples with fixed sample sizes in fixed sampling intervals. In the present work, we present some studies related to the design of control charts in which the sample size or the sampling interval may vary. Moreover, we will compare the detection speed of these charts against the classical control charts. We will work on  $\bar{X}$ ,  $np$ , CUSUM, EWMA and Hotelling's  $T^2$  control charts. In any case, all the comparisons are done using known statistical indices, such as, the average time to signal (ATS) and the average number of samples to signal (ANSS).

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> Μεταβλητό διάστημα δειγματοληψίας

1.1 $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου .....	1
1.2 Διαγράμματα ελέγχου $np$ .....	28
1.3 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM .....	38
1.4 Διαγράμματα ελέγχου EWMA .....	60
1.5 Διαγράμματα Hotelling's $T^2$ .....	75

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> Μεταβλητό μέγεθος δείγματος

2.1 $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου .....	94
2.2 Διαγράμματα ελέγχου $np$ .....	106
2.3 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM .....	113
2.4 Διαγράμματα ελέγχου EWMA .....	121
2.5 Διαγράμματα Hotelling's $T^2$ .....	137

Βιβλιογραφία .....	144
--------------------	-----

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1-1 ATS για συγκρίσιμα FSI και VSI $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου	14
1-2 ATS για αντιπροσωπευτικές τιμές διαστημάτων δειγματοληψίας	15
1-3 AATS για αντιπροσωπευτικές τιμές διαστημάτων δειγματοληψίας	16
1-4 Τιμές τυπικής απόκλισης του $T^*$ για FSI και VSI $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου	17
1-5 AATS και ANSW για συγκρίσιμα $\bar{X}$ διαγράμματα με $(d_1, d_2) = (0.1, 2.0)$	19
1-6 AATS και ANSW για συγκρίσιμα $\bar{X}$ διαγράμματα με $(d_1, d_2) = (0.1, 4.0)$	20
1-7 AATS και ANSW για συγκρίσιμα $\bar{X}$ διαγράμματα με $(d_1, d_2) = (0.5, 2.0)$	21
1-8 AATS και ANSW για συγκρίσιμα $\bar{X}$ διαγράμματα με $(d_1, d_2) = (0.5, 4.0)$	22
1-9 AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα με κανόνα $\Omega(2,3,2,3)$	24
1-10 AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα με κανόνα $\Omega(2,2,2,3)$	25
1-11 AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα με κανόνα $\Omega(4,5,1,3)$	25
1-12 AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα με κανόνα $\Omega(5,5,1,3)$	26
1-13 Μέσο AATS <sub>n</sub> για συγκρίσιμα $np$ διαγράμματα	36
1-14 SSATS για συγκρίσιμα μονόπλευρα FSI και VSI CUSUM διαγράμματα	51
1-15 SSATS για συγκρίσιμα δίπλευρα FSI και VSI CUSUM διαγράμματα	51
1-16 Τυπική απόκλιση του χρόνου σήματος σταθερής κατάστασης	51
1-17 $E(T^*)/d$ για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με ANSS = 200	55
1-18 $E(T^*)/d$ για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με ANSS = 740.8	56
1-19 $E(T^*)/d$ για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με ANSS = 2000	57
1-20 Τιμές του $g = g_U = g_L$ για διάφορα $k$	58
1-21 ATS μηδενικής κατάστασης για συγκρίσιμα VSI, FSI EWMA διαγράμματα	66
1-22 SSATS για συγκρίσιμα VSI και FSI EWMA διαγράμματα	67
1-23 ATS χειρότερης περίπτωσης για συγκρίσιμα VSI, FSI EWMA διαγράμματα	68
1-24 Τυπική απόκλιση χρόνου σήματος μηδενικής κατάστασης	70
1-25 Τυπική απόκλιση προσαρμοσμένου χρόνου σήματος σταθερής κατάστασης	71
1-26 SSAATS για συγκρίσιμα Shewhart, CUSUM και EWMA διαγράμματα	72



1-27	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 1$	81
1-28	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 3$	82
1-29	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 5$	83
1-30	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 1$	84
1-31	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 3$	85
1-32	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 2 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 5$	86
1-33	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 1$	87
1-34	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 3$	88
1-35	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.1, n = 5$	89
1-36	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 1$	90
1-37	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 3$	91
1-38	ATS για συγκρίσιμα $T^2$ διαγράμματα 4 μεταβλητών με $b = 0.2, n = 5$	92
2-1	Όρια ελέγχου και βοηθητικά όρια για ένα VSS διάγραμμα ελέγχου	97
2-2	Βοηθητικά όρια $w$ και πιθανότητες $b_1, b_2$ για μεγέθη δείγματος	101
2-3	ARL για συγκρίσιμα FSS και VSS $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου με $n_0 = 3$	103
2-4	ARL για συγκρίσιμα FSS και VSS $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου με $n_0 = 5$	104
2-5	$ARL(\delta)$ για το F.I.R. χαρακτηριστικό	105
2-6	Μέσο $AATS_n$ για συγκρίσιμα $np$ διαγράμματα	112
2-7	ARL για συγκρίσιμα FSS και VSS CUSUM διαγράμματα ελέγχου με $n_0 = 3$	116
2-8	ARL για συγκρίσιμα FSS και VSS CUSUM διαγράμματα ελέγχου με $n_0 = 5$	117
2-9	ARL για VSS CUSUM διάγραμμα ελέγχου με FIR	118
2-10	$SSATS/\bar{d}$ για συγκρίσιμα διαγράμματα EWMA με $d_1/\bar{d} = 0.1, \delta_1 = 0.5$	134
2-11	$SSATS/\bar{d}$ για συγκρίσιμα διαγράμματα EWMA με $d_1/\bar{d} = 0.1, \delta_1 = 1.0$	135
2-12	$SSATS/\bar{d}$ για συγκρίσιμα διαγράμματα EWMA με $d_1/\bar{d} = 0.25, \delta_1 = 0.5$	135
2-13	$SSATS/\bar{d}$ για συγκρίσιμα διαγράμματα EWMA με $d_1/\bar{d} = 0.25, \delta_1 = 1.0$	136

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1-1	VSI $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου με δύο διαστήματα δειγματοληψίας $d_1, d_2$ .	3
1-2	Προσαρμοσμένος χρόνος σήματος για την ανίχνευση μεταβολών του μέσου	10
1-3	Οι τρεις ζώνες του VSI $np$ διαγράμματος ελέγχου	30
1-4	Μέσο AATS <sub>n</sub> για συγκρίσιμα VSI και FSSI $np$ διαγράμματα	37
1-5	FSI Hotelling's $T^2$ διάγραμμα ελέγχου	76
1-6	VSI Hotelling's $T^2$ διάγραμμα ελέγχου	77
2-1	Οι τρεις ζώνες του VSS $np$ διαγράμματος ελέγχου	108
2-2	Μέσο AATS <sub>n</sub> για συγκρίσιμα VSI και FSSI $np$ διαγράμματα	113
2-3	Οι τρεις περιοχές του VSSC $T^2$ διαγράμματος ελέγχου	140

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

### 1.1 $\bar{x}$ διαγράμματα ελέγχου

#### 1.1.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουμε εάν μια διεργασία είναι εντός ή εκτός (στατιστικού) ελέγχου, για να επαναφέρουμε μια εκτός ελέγχου διεργασία εντός ελέγχου και για να παρακολουθούμε μια διεργασία ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι παραμένει εντός ελέγχου. Ένα διάγραμμα ελέγχου δημιουργείται όταν παίρνουμε δείγματα από μια διεργασία και τα αναπαριστούμε γραφικά συναρτήσει του χρόνου. Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος αντιπροσωπεύουν τα όρια μέσα στα οποία πέφτουν τα σημεία μας με μεγάλη πιθανότητα αν η διεργασία λειτουργεί εντός ελέγχου. Ένα σημείο εκτός των ορίων αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο προβαίνουμε σε διορθωτικές κινήσεις ώστε να φέρουμε και πάλι την διεργασία εντός ελέγχου.

Η συνήθης πρακτική κατά την δημιουργία ενός διαγράμματος ελέγχου είναι να παίρνουμε δείγματα από την διεργασία σε σταθερά διαστήματα δειγματοληψίας (Fixed Sampling Intervals, FSI), π.χ. ανά μία ώρα. Εδώ θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου τα διαστήματα δειγματοληψίας, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο δειγματοληψιών, μπορεί να τροποποιηθεί ανάλογα με το τι παρατηρούμε κάθε φορά στα δεδομένα μας (Variable Sampling Intervals, VSI). Με τον τρόπο αυτό ο χρόνος που μεσολαβεί θα είναι μικρός εάν έχουμε κάποια ένδειξη ότι μπορεί να υπάρχει πρόβλημα και μεγάλος όταν δεν υπάρχει τέτοια ένδειξη. Στην περίπτωση που η ένδειξη είναι πολύ ισχυρή (π.χ. όταν έχουμε σημείο εκτός των ορίων) τότε το προειδοποιητικό σήμα θα παράγεται με όμοιο τρόπο όπως στα FSI

διαγράμματα. Όλες οι έρευνες που έχουν γίνει αποδεικνύουν ότι τα VSI διαγράμματα ελέγχου είναι γρηγορότερα από τα ανάλογα FSI διαγράμματα στο να ανιχνεύουν μεταβολές στην διεργασία.

### 1.1.2 Περιγραφή του VSI $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων που παίρνουμε από τη διεργασία είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ , και επιπλέον έστω  $\mu_0$  η τιμή στόχος για το μέσο. Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  και έστω  $\mathbf{X}_i = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$  το δείγμα που πήραμε στην  $i$ -οστή δειγματοληψία. Όταν επιλέγουμε το  $i$ -οστό δείγμα, υπολογίζουμε την δειγματική μέση τιμή του  $\bar{X}_i$  και την αναπαριστούμε σε ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή ίση με  $\mu_0$  και όρια ελέγχου  $\mu_0 \pm \gamma\sigma/\sqrt{n}$  (συνήθως επιλέγουμε το  $\gamma$  να είναι ίσο με 3).

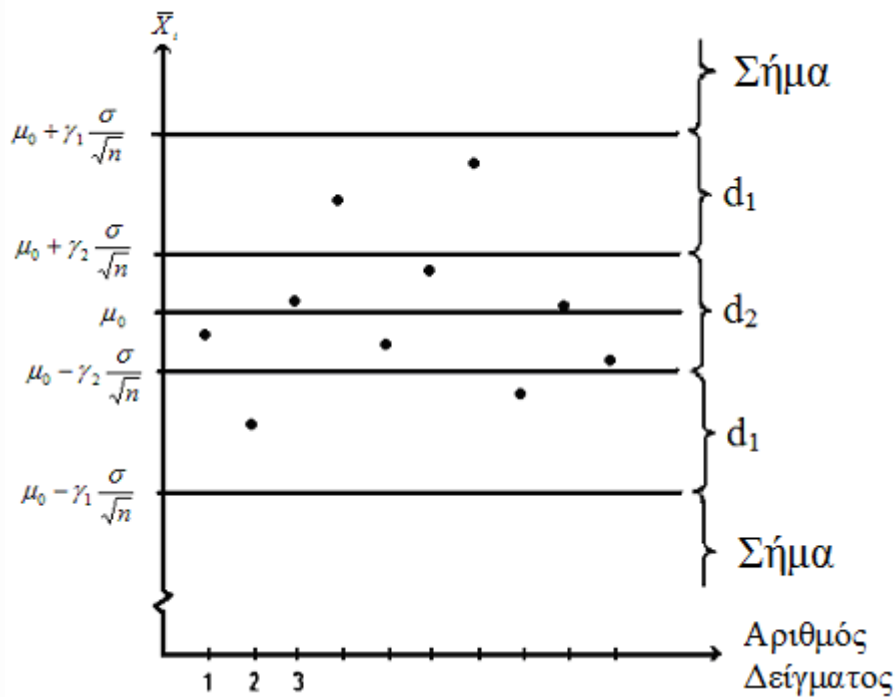
Στο κλασικό FSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου, το μήκος του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών δειγμάτων είναι προκαθορισμένο και σταθερό. Στην περίπτωση μας όμως, το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της επιλογής των δειγμάτων  $\mathbf{X}_i$  και  $\mathbf{X}_{i+1}$  εξαρτάται από την τιμή  $\bar{X}_i$ .

Στην γενική περίπτωση στο VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιούμε ένα πεπερασμένο αριθμό από μήκη διαστημάτων  $d_1, d_2, \dots, d_\nu$  με  $d_1 < d_2 < \dots < d_\nu$  και  $m_1 \leq d_j \leq m_2$  ( $1 \leq j \leq \nu$ ). Το  $m_1$  παριστάνει το ελάχιστο δυνατό μήκος το οποίο καθορίζεται από φυσικούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα το χρόνο που χρειαζόμαστε για να πάρουμε ένα δείγμα, και  $m_2$  είναι το μέγιστο δυνατό μήκος το οποίο καθορίζεται από τον μέγιστο χρόνο που μπορεί να αφηθεί η διεργασία να τρέχει χωρίς δειγματοληψία. Η επιλογή του διαστήματος δειγματοληψίας σαν συνάρτηση του  $\bar{X}_i$  καθορίζεται από την τιμή  $x$  του  $\bar{X}_i$  μέσω μιας συνάρτησης  $d(x)$ . Έστω ότι η περιοχή μεταξύ των δύο ορίων ελέγχου διαμερίζεται σε  $\nu$  περιοχές  $I_1, I_2, \dots, I_\nu$  τέτοιες ώστε

$$d(x) = d_j, \quad x \in I_j, \quad 1 \leq j \leq \nu.$$

Έτσι το διάστημα δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται μεταξύ των δειγμάτων  $\mathbf{X}_i$  και  $\mathbf{X}_{i+1}$  είναι ίσο με  $d(\bar{X}_i)$ .

Σαν παράδειγμα δίνουμε ένα VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου με δύο διαστήματα δειγματοληψίας  $d_1$  και  $d_2$  το οποίο απεικονίζεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα



ΣΧΗΜΑ 1-1

VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου με δύο διαστήματα δειγματοληψίας  $d_1$ ,  $d_2$

Εδώ τα όρια ελέγχου του διαγράμματος είναι τα  $\mu_0 \pm \gamma_1 \sigma / \sqrt{n}$  και η περιοχή μεταξύ των ορίων ελέγχου διαμερίζεται σε δύο περιοχές

$$I_1 = I_{1L} \cup I_{1U} = \left( \mu_0 - \gamma_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 - \gamma_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \cup \left[ \mu_0 + \gamma_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + \gamma_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \quad (1)$$

$$I_2 = \left( \mu_0 - \gamma_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + \gamma_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

όπου  $0 < \gamma_2 < \gamma_1$ . Έχει αποδειχθεί σε κάποιες μελέτες (δείτε για παράδειγμα Reynolds et al (1988), Runger & Pignatello (1991)) ότι η χρήση δύο μηκών  $d_1$  και  $d_2$  είναι η καταλληλότερη αναφορικά με το μέσο χρόνο ανίχνευσης κάποιας μεταβολής στην διεργασία και επιπλέον διατηρεί την πολυπλοκότητα του VSI πλαισίου σε λογικά επίπεδα. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί το VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ώστε να βελτιώσει την ανιχνευτική ικανότητα του  $\bar{X}$  διαγράμματος μπορεί να εξηγηθεί με την βοήθεια του παραπάνω σχήματος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $\gamma_1 = 3$  και  $\gamma_2 = 1$ . Για  $\mu = \mu_0$  έχουμε ότι ( $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$ )

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{X} \in I_1) &= P\left(\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + P\left(\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 2(\Phi(3) - \Phi(1)) = 0.3146,\end{aligned}$$

$$\Pr(\bar{X} \in I_2) = P\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6827.$$

Έτσι το μεγαλύτερο διάστημα δειγματοληψίας  $d_2$  θα χρησιμοποιείται σχεδόν διπλάσιες φορές σε σχέση με το μικρότερο διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$ . Τώρα, αν υποθέσουμε ότι το  $\mu$  γίνεται  $\mu = \mu_1 = \mu_0 + 2\sigma/\sqrt{n}$ , τότε έχουμε ότι  $(\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n))$

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{X} \in I_1) &= P\left(\mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + P\left(\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= (\Phi(-3) - \Phi(-5)) + (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 0.6840,\end{aligned}$$

$$\Pr(\bar{X} \in I_2) = P\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(-1) - \Phi(-3) = 0.1573.$$

Έτσι το μικρότερο διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$  χρησιμοποιείται σχεδόν διπλάσιες φορές σε σχέση με το μεγαλύτερο διάστημα δειγματοληψίας  $d_2$ . Χρησιμοποιώντας πιο συχνά το μικρότερο διάστημα δειγματοληψίας όταν μεταβάλλεται ο μέσος, η συχνότητα δειγματοληψίας αυξάνεται και ο χρόνος που χρειάζεται για να πάρουμε έναν δειγματικό μέσο εκτός των ορίων ελέγχου μειώνεται σημαντικά.

Οι δειγματικές μέσες τιμές που απεικονίζονται στο Σχήμα 1-1 αναπαριστώνται έναντι του αριθμού δείγματος. Σε πρακτικές εφαρμογές είναι μερικές φορές απαραίτητο να καταγράψουμε στο διάγραμμα τον χρόνο όπου επιλέξαμε το κάθε δείγμα, επειδή το σταθερό διάστημα μεταξύ των σημείων στο διάγραμμα αποκρύπτει το γεγονός ότι τα πραγματικά χρονικά διαστήματα μεταξύ των δειγμάτων δεν είναι τα ίδια. Για παράδειγμα, καθώς σχεδιάζουμε τα σημεία, το διάστημα δειγματοληψίας μεταξύ των δειγμάτων 1 και 2 είναι  $d_2$ , ενώ αυτό μεταξύ των 2 και 3 είναι  $d_1$ .

### 1.1.3 Ιδιότητες του VSI $\bar{x}$ διαγράμματος

Οι ιδιότητες ενός διαγράμματος ελέγχου καθορίζονται από το πλήθος των δειγμάτων και το χρόνο που χρειάζεται μέχρι να πάρουμε προειδοποιητικό σήμα (σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας). Αν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, τότε αυτός ο χρόνος πρέπει να είναι μεγάλος έτσι ώστε ο ρυθμός των εσφαλμένων συναγεμίων να είναι μικρός, στην περίπτωση όμως που ο μέσος της διεργασίας αλλάζει, ο χρόνος από την μεταβολή μέχρι το σήμα πρέπει να είναι μικρός ώστε η ανίχνευση του προβλήματος να γίνει γρήγορα. Το πλήθος των δειγμάτων που παίρνουμε σε μια διεργασία μέχρι να λάβουμε προειδοποιητικό σήμα καλείται μήκος ροής και η μέση τιμή του ονομάζεται μέσο μήκος ροής (Average Run Length, ARL). Στα FSI διαγράμματα ελέγχου το ARL μπορεί εύκολα να μετατραπεί στον αναμενόμενο χρόνο σήματος πολλαπλασιάζοντάς το απλά με το σταθερό μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε το ARL σαν τον αναμενόμενο χρόνο σήματος. Επιπλέον, ο ρυθμός δειγματοληψίας θα είναι σταθερός ανεξάρτητα από την μέση τιμή  $\mu$  της διεργασίας. Στην περίπτωση όμως των VSI διαγραμμάτων ο ρυθμός δειγματοληψίας εξαρτάται από την τιμή του  $\mu$ . Γι' αυτό τον λόγο στα VSI διαγράμματα πρέπει να καταγράφουμε και το πλήθος των δειγμάτων μέχρι το εκτός ελέγχου σήμα αλλά και το χρόνο σήματος, και επομένως θα πρέπει να ορίσουμε κάποιες άλλες ποσότητες που θα χρησιμοποιήσουμε για την αξιολόγηση του διαγράμματος.

Ορίζουμε το πλήθος δειγμάτων για τη λήψη σήματος (Number of Samples to Signal) να είναι το πλήθος των δειγμάτων που λάβαμε από την αρχή της διεργασίας (χρονική στιγμή 0) μέχρι τη στιγμή που εμφανίζεται σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, και η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των δειγμάτων για τη λήψη σήματος θα καλείται μέσος αριθμός δειγμάτων σήματος (Average Number of Samples to Signal, ANSS). Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή 0 παρακολούθησης της διεργασίας μέχρι να βρεθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ονομάζεται χρόνος για τη λήψη σήματος (Time to Signal) και ομοίως η αναμενόμενη τιμή του χρόνου αυτού θα καλείται μέσος χρόνος για τη λήψη σήματος (Average Time to Signal, ATS). Το ANSS και το ATS θα πρέπει να είναι μεγάλα όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ώστε ο ρυθμός εσφαλμένων συναγεμίων να είναι χαμηλός, και θα πρέπει να είναι μικρά όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ώστε η μεταβολή της διεργασίας να ανιχνεύεται γρήγορα.

Για κάθε  $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$  το ATS λειτουργεί σαν μετρητής του πόσο γρήγορα θα μας δώσει σήμα εκτός ελέγχου το διάγραμμα όταν η μέση τιμή της διεργασίας είναι ίση με  $\mu_1$  από τη χρονική στιγμή 0 και μετά. Σε πολλές περιπτώσεις, ωστόσο, η διεργασία μπορεί να ξεκινάει με  $\mu = \mu_0$  και στην πορεία να αλλάξει σε  $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$  σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή που μπορεί να είναι και μεταξύ της λήψης δύο διαδοχικών δειγμάτων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι καλύτερο να μελετάμε τον προσαρμοσμένο μέσο χρόνο σήματος (Adjusted Average Time to Signal, AATS) που λαμβάνει υπόψη το χρόνο από τη στιγμή που θα μετατοπιστεί ο μέσος μέχρις ότου λάβουμε σήμα εκτός ελέγχου. Στη συνέχεια, όταν  $\mu \neq \mu_0$ , θα υπολογίζουμε το AATS αντί του ATS.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό των VSI σχημάτων είναι η αλλαγή από μικρά σε μεγάλα διαστήματα δειγματοληψίας. Ως ένα χρήσιμο κριτήριο για την εκτίμηση τέτοιων αλλαγών έχει προταθεί (Amin & Letsinger (1991)) ο μέσος αριθμός αλλαγών για τη λήψη σήματος (Average Number of Switches to Signal, ANSW) που είναι ο αναμενόμενος αριθμός αλλαγών από την αρχή της διεργασίας (χρονική στιγμή 0) μέχρι το διάγραμμα να μας δώσει προειδοποιητικό σήμα.

Όσο τα όρια ελέγχου παραμένουν σταθερά, τα VSI σχήματα δεν επιδρούν στην πιθανότητα να πέσει ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  εκτός των ορίων ελέγχου που είναι ίση με

$$q = \Pr(X \in I_s) = \Pr\left(\bar{X} \leq \mu_0 - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{X} \geq \mu_0 + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

αφού είναι ανεξάρτητη από το διάστημα δειγματοληψίας μεταξύ των δειγμάτων. Αν συμβολίσουμε με  $N$  το πλήθος των δειγμάτων για τη λήψη σήματος, τότε η τυχαία μεταβλητή  $N$ , ως γνωστόν, ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $q$ . Συνεπώς το ANSS είναι ίσο με

$$E(N) = \frac{1}{q}$$

και η διακύμανση του  $N$  είναι ίση με

$$Var(N) = \frac{1-q}{q^2}.$$

Αν συμβολίσουμε με  $T$  το χρόνο για τη λήψη σήματος και με  $R_i$  το διάστημα δειγματοληψίας πριν πάρουμε το  $i$ -οστό δείγμα, τότε



$$T = \sum_{i=1}^N R_i .$$

Σημειώνουμε ότι η κατανομή των  $R_i$  στην παραπάνω σχέση θεωρείται ότι είναι η δεσμευμένη κατανομή της  $d(\bar{X})$  δοθέντος ότι δεν έχουμε λάβει σήμα, αφού η  $d(\bar{X})$  έχει οριστεί μόνο για τιμές του δειγματικού μέσου  $\bar{X}$  εντός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος. Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι το διάγραμμα ξεκινάει τη χρονική στιγμή 0 και ότι το  $R_i$ , που δηλώνει το διάστημα δειγματοληψίας για το πρώτο δείγμα, έχει την ίδια κατανομή με τα υπόλοιπα  $R_i$ , αν και δεν λαμβάνεται δείγμα τη χρονική στιγμή 0. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιείται το μικρότερο διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$  για να έχουμε μεγαλύτερη προστασία για τυχόν προβλήματα που δημιουργούνται στην εκκίνηση της διεργασίας.

Αν ο μέσος της διεργασίας είναι σταθερός, τότε τα  $R_1, R_2, \dots$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (iid) οπότε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Wald λαμβάνουμε ότι το ATS είναι ίσο με

$$E(T) = E(N)E(R_i) .$$

Έστω

$$p_j = \Pr(d(\bar{X}) = d_j) = \Pr(\bar{X} \in I_j), \quad j = 1, 2, \dots, \nu .$$

Τότε

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \Pr(R_i = d_j) = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \Pr(d(\bar{X}) = d_j \mid \bar{X} \notin I_s) = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \frac{p_j}{1-q}$$

και επομένως

$$E(T) = E(N)E(R_i) = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \frac{p_j}{q(1-q)} .$$

Επίσης αφού τα διαστήματα δειγματοληψίας  $R_1, R_2, \dots$ , είναι (υπό συνθήκη) ανεξάρτητα από το  $N$  έχουμε ότι

$$\text{Var}(T) = E(N)\text{Var}(R_i) + \text{Var}(N)E(R_i)^2 = \frac{\sum_{j=1}^{\nu} d_j^2 p_j}{q(1-q)} + \frac{(1-2q) \cdot \left( \sum_{j=1}^{\nu} d_j p_j \right)^2}{q^2(1-q)^2} .$$

Σημειώνουμε ότι οι πιθανότητες  $q$  και  $p_j$  ( $j=1,2,\dots,\nu$ ) που εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους εξαρτώνται από την τιμή του  $\mu$ . Όποτε είναι απαραίτητο να ξεχωρίσουμε μεταξύ της εντός ελέγχου τιμής του μέσου  $\mu_0$  και μιας άλλης τιμής  $\mu_1 (\neq \mu_0)$  θα συμβολίζουμε τις πιθανότητες υπό την τιμή  $\mu_0$  με  $q_0$  και  $p_{0j}$  ( $j=1,2,\dots,\nu$ ), και τις πιθανότητες υπό την τιμή  $\mu_1$  με  $q_1$  και  $p_{1j}$  ( $j=1,2,\dots,\nu$ ).

Σε αρκετές περιπτώσεις είναι σημαντικό να γνωρίζουμε και την από κοινού κατανομή του αριθμού των φορών που κάθε διάστημα δειγματοληψίας έχει χρησιμοποιηθεί πριν πάρουμε προειδοποιητικό σήμα. Έστω  $N_j$  ( $j=1,2,\dots,\nu$ ) το πλήθος των φορών που χρησιμοποιήθηκε το διάστημα δειγματοληψίας  $d_j$  πριν πάρουμε σήμα. Τότε, δεσμεύοντας ως προς την τιμή του  $N$ , έχουμε ότι η από κοινού κατανομή των  $N_j$  ( $j=1,2,\dots,\nu$ ) είναι η πολυωνυμική κατανομή, και

$$\Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_\nu = n_\nu) = \Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_\nu = n_\nu | N = n) P(N = n)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_\nu!} \left( \frac{p_1}{1-q} \right)^{n_1} \left( \frac{p_2}{1-q} \right)^{n_2} \dots \left( \frac{p_\nu}{1-q} \right)^{n_\nu} q(1-q)^{n-1} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_\nu!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_\nu^{n_\nu}$$

όπου  $n_j \geq 0$ ,  $j=1,2,\dots,\nu$  και  $n = \sum_{j=1}^{\nu} n_j$ . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\Pr(N_j = n_j) = \begin{cases} \frac{q(1-q-p_j)}{(1-q)(q+p_j)}, & n_j = 0 \\ \frac{qp_j^{n_j}}{(1-q)(q+p_j)^{n_j+1}}, & n_j \geq 1 \end{cases}$$

οπότε το αναμενόμενο πλήθος των φορών που χρησιμοποιήθηκε το διάστημα δειγματοληψίας  $d_j$  είναι ανάλογο της πιθανότητας  $p_j$ , όπως αναμενόταν, αφού

$$E(N_j) = \frac{p_j}{q(1-q)}.$$

Η κατανομή του  $T$  μπορεί να εξαχθεί για διάφορες ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε την περίπτωση που κάθε πιθανό διάστημα δειγματοληψίας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας σταθεράς  $h$ , δηλαδή  $d_j = m_j h$  για  $j=1,2,\dots,\nu$  όπου  $h > 0$  και  $m_j$  είναι θετικός ακέραιος. Τότε, οι χρονικές στιγμές που μπορούμε να πάρουμε δείγματα θα είναι ακέραια πολλαπλάσια του  $h$ . Για την πιθανότητα

$$\pi(i) = \Pr(\text{ένα δείγμα λαμβάνεται τη χρονική στιγμή } hi), \quad i = 1, 2, \dots$$

ισχύει ότι

$$\pi(i) = \sum_{j=1}^v \pi(i - m_j) p_j$$

και ορίζουμε επιπλέον ότι  $\pi(i) = 0$  για  $i < 0$  και  $\pi(0) = 1/(1-q)$ . Όταν ένα δείγμα επιλέγεται κάποια στιγμή, η πιθανότητα σήματος την στιγμή αυτή είναι ίση με  $q$  και έτσι

$$\Pr(T = hi) = \pi(i)q.$$

Έτσι το ATS μπορεί να εκφραστεί ως

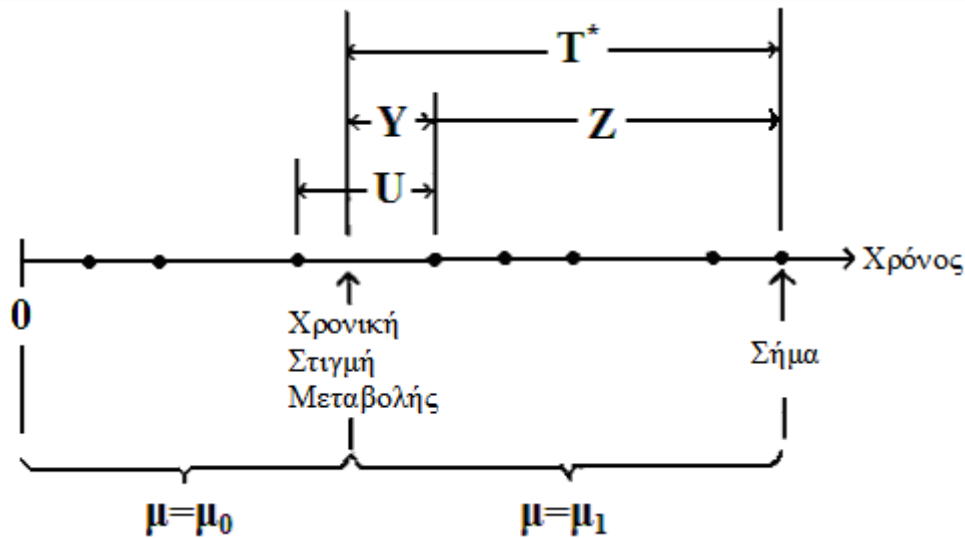
$$E(T) = \sum_{i=1}^{\infty} hi \pi(i)q.$$

Στην ειδική περίπτωση  $m_1 = 1$  και  $m_2 = m$ , μπορεί να δειχθεί ότι

$$\pi(i) = \frac{1}{1-q} \sum_{r=0}^u \binom{i - (m-1)r}{r} p_1^{i-mr} p_2^r, \quad i = 1, 2, \dots,$$

όπου  $u$  είναι το ακέραιο μέρος του  $i/m$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση που η διεργασία ξεκινάει με  $\mu = \mu_0$  τη χρονική στιγμή 0 και μετά αλλάζει σε  $\mu_1$  σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή, είναι προτιμότερο να μελετάμε το AATS. Έστω, λοιπόν,  $T^*$  ο προσαρμοσμένος χρόνος σήματος (χρόνος από την μεταβολή της διεργασίας έως το σήμα),  $U$  το μήκος του διαστήματος στο οποίο συνέβη η μεταβολή,  $Y$  ο χρόνος από την μεταβολή μέχρι την επιλογή του επόμενου δείγματος,  $Z$  ο χρόνος από το επόμενο δείγμα μετά την μεταβολή μέχρι ένα σήμα, και  $N$  το πλήθος των δειγμάτων μετά την μεταβολή μέχρι ένα σήμα. Όλες αυτές οι έννοιες διευκρινίζονται στο επόμενο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 1-2

Προσαρμοσμένος χρόνος σήματος για την ανίχνευση μετατοπίσεων της μέσης τιμής

Από το Σχήμα 1-2 φαίνεται ότι  $T^* = Y + Z$ , και ότι το  $Z$  έχει την ίδια κατανομή με το  $\sum_{i=1}^{N-1} R_i$ , όπου το  $R_i$  έχει την ίδια κατανομή με τη στατιστική συνάρτηση  $d(\bar{X})$  δοθέντος ότι δεν έχει προκύψει σήμα όταν η μέση τιμή της διεργασίας έχει αλλάξει. Το AATS, λοιπόν, είναι ίσο με

$$E(T^*) = E(Y) + E(Z) = E(Y) + E(N-1)E(R_i).$$

Η κατανομή του  $N$  είναι και πάλι η γεωμετρική με παράμετρο  $q$ , και η μέση τιμή του  $R_i$  θα είναι και πάλι  $E(R_i) = \sum_{j=1}^v d_j p_j / (1-q)$ . Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της κατανομής του  $Y$ , είναι καλό να ξεκαθαρίσουμε τις διαφορές μεταξύ των χρόνων  $T$  και  $T^*$ . Ο χρόνος  $T^*$  περιλαμβάνει τον χρόνο  $Y$  από την μεταβολή του μέσου έως το επόμενο δείγμα, όπου  $0 \leq Y \leq U$ , και η κατανομή του  $U$  είναι καθορισμένη όταν ο μέσος της διεργασίας είναι στο  $\mu_0$ , αφού το δείγμα ακριβώς πριν την μεταβολή επιλέχθηκε όταν ήταν  $\mu = \mu_0$ . Αντίθετα, η κατανομή του  $T$  είναι ίδια με την κατανομή του  $R + Z$ , όπου το  $R$  έχει την ίδια κατανομή με το  $d(\bar{X})$  δοθέντος ότι δεν έχουμε σήμα όταν  $\mu = \mu_1$ . Αυτό συνεπάγεται από το γεγονός ότι όταν η διεργασία ξεκινάει από την αρχή με  $\mu = \mu_1$ , η κατανομή του πρώτου διαστήματος υποθέτουμε ότι είναι ίδια με την κατανομή των μελλοντικών διαστημάτων που καθορίζονται υπό την προϋπόθεση ότι  $\mu = \mu_1$ . Επομένως η διαφορά μεταξύ των χρόνων  $T$  και  $T^*$  είναι η διαφορά μεταξύ του  $R$  και του  $Y$ .

Το AATS είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν το VSI σχήμα έχει μεγάλο  $d_v$  και το μέγεθος της μεταβολής  $\mu_1 - \mu_0$  είναι μεγάλο. Για παράδειγμα, έστω ότι το VSI σχήμα χρησιμοποιεί δύο διαστήματα δειγματοληψίας 10 λεπτών και 2 ωρών αντίστοιχα, και το συγκρίνουμε με ένα FSI σχήμα που χρησιμοποιεί ένα διάστημα μιας ώρας. Το διαισθητικό μειονέκτημα του VSI σχήματος είναι ότι μια μεγάλη μεταβολή στο  $\mu$  θα μπορούσε να συμβεί νωρίς στο δίωρο διάστημα και έτσι η διεργασία να λειτουργεί για σχετικά αρκετή ώρα σε λάθος επίπεδο μέχρι να πάρουμε το επόμενο δείγμα. Από την άλλη μεριά, στο FSI διάγραμμα ο μέγιστος δυνατός χρόνος λειτουργίας της διεργασίας σε λανθασμένο επίπεδο είναι μόνο μία ώρα. Έτσι η χρήση του AATS έχει ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση που η μεταβολή στη διεργασία συμβεί σε μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας σε ένα VSI σχήμα. Η διαφορά μεταξύ ATS και AATS είναι σημαντική μόνο όταν η μεταβολή του  $\mu$  είναι μεγάλη, αφού μικρές ή μέτριες μεταβολές χρειάζονται σχετικά μεγάλο αριθμό δειγμάτων για να ανιχνευτεί η αλλαγή, και σ' αυτή την περίπτωση το  $Y$  είναι μια σχετικά μικρή συνιστώσα του  $T^*$ .

Για να υπολογίσουμε το AATS, πρέπει να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τη μέση τιμή του  $Y$ . Η κατανομή του  $Y$  εξαρτάται από την χρονική στιγμή που συμβαίνει η μεταβολή στο  $\mu$ . Μια προσέγγιση για την δημιουργία ενός μοντέλου είναι η ακόλουθη: Υποθέτουμε ότι όταν η μεταβολή συμβαίνει σε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα, το σημείο μέσα στο διάστημα κατανέμεται ομοιόμορφα. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η πιθανότητα μια μεταβολή να συμβεί σε ένα διάστημα μήκους  $d_j$  είναι ανάλογη του γινομένου αυτού του μήκους με την πιθανότητα της πραγματοποίησης του συγκεκριμένου διαστήματος όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι

$$f_{Y|U}(y|u) = \frac{1}{u}, \quad 0 \leq y \leq u,$$

και

$$\Pr(U = d_j) = \frac{d_j p_{0j}}{\sum_{j=1}^v d_j p_{0j}}, \quad j = 1, 2, \dots, v.$$

Συνεπώς

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^v f_{Y|U}(y|d_j) \Pr(U = d_j) = \sum_{\{j: d_j \geq y\}} \frac{p_{0j}}{\sum_{j=1}^v d_j p_{0j}}, \quad 0 \leq y \leq d_v$$

και

$$E(Y) = \int_0^{d_v} y f_Y(y) dy = \sum_{j=1}^v \frac{d_j^2 p_{0j}}{\left(2 \sum_{j=1}^v d_j p_{0j}\right)}.$$

Το AATS όταν το  $\mu$  γίνει  $\mu_1$  είναι

$$E(T^*) = \frac{\sum_{j=1}^v d_j^2 p_{0j}}{2 \sum_{j=1}^v d_j p_{0j}} + \frac{1}{q_1} \sum_{j=1}^v d_j p_{1j}.$$

και η διακύμανση του  $T^*$  είναι

$$\begin{aligned} \text{Var}(T^*) &= \text{Var}(Y) + E(N-1)\text{Var}(R_i) + \text{Var}(N-1)(E(R_i))^2 \\ &= \frac{\sum_{j=1}^v d_j^3 p_{0j}}{3 \cdot \sum_{j=1}^v d_j p_{0j}} - \frac{\left(\sum_{j=1}^v d_j^2 p_{0j}\right)^2}{4 \cdot \left(\sum_{j=1}^v d_j p_{0j}\right)^2} + \sum_{j=1}^v \frac{d_j^2 p_{1j}}{q_1} + \frac{\left(\sum_{j=1}^v d_j p_{1j}\right)^2}{q_1^2}. \end{aligned}$$

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι η σχέση

$$E(T^*) = E(Y) + E(Z) = E(Y) + E(N-1)E(R_i)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγουμε και ένα μη προσαρμοσμένο ATS για την περίπτωση που το  $R_1$ , το διάστημα που χρησιμοποιείται πριν το πρώτο δείγμα, δεν έχει την ίδια κατανομή με τα  $R_2, R_3, \dots$ . Για παράδειγμα, αν το διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$  χρησιμοποιείται πάντα πριν πάρουμε το πρώτο δείγμα, τότε το μη προσαρμοσμένο ATS θα δίνεται από τη σχέση ήταν  $d_1 + E(N-1)E(R_i)$ .

### 1.1.4 Σύγκριση FSI και VSI $\bar{X}$ διαγραμμάτων ελέγχου

Για να διαπιστώσουμε τη χρησιμότητα των διαγραμμάτων VSI θα συγκρίνουμε την απόδοση του VSI  $\bar{X}$  διαγράμματος με ένα FSI  $\bar{X}$  διάγραμμα. Αν τα δύο διαγράμματα έχουν όρια ελέγχου  $\mu_0 \pm \gamma\sigma/\sqrt{n}$ , τότε και τα δύο θα έχουν την ίδια τιμή για την πιθανότητα  $q$  (η πιθανότητα να πέσει το  $\bar{X}$  εκτός των ορίων ελέγχου) και συνεπώς το ίδιο ANSS, γεγονός που σημαίνει ότι τα διαστήματα δειγματοληψίας που θα χρησιμοποιήσω στο διάγραμμα VSI δεν επηρεάζουν καθόλου τον αριθμό των δειγμάτων που χρειάζονται για να λάβουμε σήμα. Θα χρησιμοποιήσουμε το διάστημα δειγματοληψίας που χρησιμοποιεί το FSI διάγραμμα σαν χρονική μονάδα. Για παράδειγμα, αν στο FSI διάγραμμα παίρνουμε δείγματα κάθε δύο ώρες, τότε η χρονική μονάδα θα είναι ίση με την περίοδο των δύο ωρών. Στην περίπτωση αυτή, στο διάγραμμα FSI, η αριθμητική τιμή της συνάρτησης ATS θα είναι ίδια με την αριθμητική τιμή της συνάρτησης ANSS. Αν φτιάξουμε το VSI διάγραμμα έτσι ώστε το  $E(R_i)$  (αναμενόμενο μήκος του διαστήματος δειγματοληψίας) να είναι ίσο με μια χρονική μονάδα όταν  $\mu = \mu_0$ , τότε και τα δύο διαγράμματα θα έχουν την ίδια συνάρτηση ATS όταν  $\mu = \mu_0$ . Τα δύο διαγράμματα θα είναι συγκρίσιμα με την έννοια ότι και τα δύο χρειάζονται τον ίδιο αριθμό δειγμάτων για να δώσουν σήμα και επιπλέον όταν  $\mu = \mu_0$  θα έχουν τον ίδιο μέσο ρυθμό δειγματοληψίας και τον ίδιο ρυθμό λανθασμένων συναγερωμών. Τότε οι τιμές του ATS των δύο διαγραμμάτων θα μπορούν να συγκριθούν για διάφορες τιμές του  $\mu$ , ώστε να διαπιστώσουμε πιο διάγραμμα λειτουργεί καλύτερα ως προς την ανίχνευση αλλαγών της μέσης τιμή  $\mu$ .

Αν χρησιμοποιήσουμε δύο διαστήματα δειγματοληψίας, η συνθήκη  $E(R_i)=1$  όταν  $\mu = \mu_0$  συνεπάγεται ότι

$$d_1 p_{01} + d_2 p_{02} = 1 - q_0.$$

( $p_{01} + p_{02} = 1 - q_0$ ). Αν το  $\gamma$  είναι σταθερό, τότε και το  $q_0$  είναι σταθερό και η προηγούμενη σχέση μπορεί να ικανοποιηθεί ορίζοντας τα  $d_1$  και  $d_2$  και επιτρέποντας αυτά τα διαστήματα δειγματοληψίας να καθορίσουν τις πιθανότητες  $p_{01}$  και  $p_{02}$  και μετά τις περιοχές  $I_1$  και  $I_2$ . Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε τις περιοχές  $I_1$  και  $I_2$ , και μετά αυτές οι περιοχές θα καθορίσουν τις πιθανότητες  $p_{01}$  και  $p_{02}$ , και μετά τα  $d_1$  και  $d_2$ . Στην συνέχεια θα

προχωρήσουμε με την περίπτωση όπου αρχικά ορίζουμε τα  $d_1$  και  $d_2$  και κατόπιν τις πιθανότητες  $p_{01}$  και  $p_{02}$ , και τις περιοχές  $I_1$  και  $I_2$ . Για δεδομένες τιμές του  $\gamma$  και  $0 < d_1 < 1 < d_2$ , οι πιθανότητες  $p_{01}$  και  $p_{02}$  θα πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_{01} = \frac{d_2 - 1}{d_2 - d_1}(1 - q_0), \quad p_{02} = \frac{1 - d_1}{d_2 - d_1}(1 - q_0)$$

έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η σχέση  $d_1 p_{01} + d_2 p_{02} = 1 - q_0$ , και οι πιθανότητες αυτές θα καθορίσουν στη συνέχεια τις περιοχές  $I_1$  και  $I_2$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, έχει αποδειχτεί ότι αρκούν δύο διαστήματα δειγματοληψίας ( $\nu = 2$ ) για να δώσουν στο διάγραμμα VSI διάγραμμα καλές ιδιότητες. Στον Πίνακα 1-1 που ακολουθεί φαίνονται αποτελέσματα που συγκρίνουν VSI διαγράμματα με πλήθος διαστημάτων  $\nu = 2, 3, 5$  και  $9$ , στην περίπτωση που οι τιμές των διαστημάτων δειγματοληψίας είναι συμμετρικές της τιμής  $d = 1$  του διαστήματος δειγματοληψίας του FSI διαγράμματος και για ίσες πιθανότητες  $p_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ . Όλα τα διαγράμματα ελέγχου έχουν  $\gamma = 3$  και η μεταβολή  $\delta$  στον μέσο  $\mu$  εκφράζεται σε μονάδες τυπικής απόκλισης του  $\bar{X}$  ( $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$ ). Για  $\mu > \mu_0$  οι τιμές του ATS είναι ομοιόμορφα μικρότερες, εν συγκρίσει με το FSI διάγραμμα, στην περίπτωση όπου το  $\nu = 2$  και αυξάνονται βαθμιαία όσο αυξάνει το  $\nu$ . Το ίδιο σχήμα συμβαίνει και όταν συγκρίνουμε τις τυπικές αποκλίσεις του χρόνου σήματος  $T$  στα FSI και VSI διαγράμματα ελέγχου.

### Πίνακας 1-1

Τιμές του ATS για συγκρίσιμα FSI και VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου

$\delta$	FSI	VSI			
		N = 2	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 9$
0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.5	155.22	141.43	142.39	142.74	143.69
1	43.90	30.60	31.41	31.72	32.55
1.5	14.47	6.95	7.33	7.49	7.92
2	6.30	1.82	1.97	2.04	2.33
3	2.00	0.27	0.29	0.30	0.34
4	1.19	0.13	0.13	0.13	0.14

Διαστήματα δειγματοληψίας: Σταθερό  $d=1$ ,  $\nu=2$  ( $d_i=0.1, 1.9$ ),  $\nu=3$  ( $d_i=0.1, 1, 1.9$ ),  $\nu=5$  ( $d_i=0.1, 0.5, 1, 1.5, 1.9$ ),  $\nu=9$  ( $d_i=0.1, 0.3, 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$ ).



Στον επόμενο πίνακα δίνουμε συγκρίσεις για τρία συμμετρικά και τέσσερα μη συμμετρικά VSI διαγράμματα ελέγχου, όπου όλα χρησιμοποιούν δύο διαστήματα δειγματοληψίας ισοδύναμα ενός FSI διαγράμματος με  $d = 1$  και  $\gamma = 3$ . Από τον Πίνακα 1-2 φαίνεται ότι όσο η διαφορά  $d_2 - d_1$  γίνεται μεγαλύτερη παίρνουμε ολοένα και μικρότερες τιμές του ATS σε σχέση με το διάγραμμα FSI. Σημειώνουμε ότι η μείωση του ATS που επιτυγχάνεται από το διάγραμμα VSI προσδιορίζεται από την τιμή του  $E(R_i)$ , αφού το  $E(N)$  στη σχέση  $E(T) = E(N)E(R_i)$  είναι το ίδιο τόσο στο FSI όσο και στο VSI διάγραμμα ελέγχου για κάθε  $\mu$ . Το FSI διάγραμμα έχει  $E(R_i) = 1$  για κάθε τιμή του  $\mu$ , και μια ποσότητα, π.χ.  $E(R_i) = 0.6$ , για το VSI διάγραμμα αντιστοιχεί σε ένα ATS ίσο με το 60% του ATS του VSI διαγράμματος.

**Πίνακας 1-2**

Τιμές του ATS για συγκρίσιμα FSI και VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου για αντιπροσωπευτικές τιμές διαστημάτων δειγματοληψίας

$\delta$	VSI : Διαστήματα δειγματοληψίας ( $d_1, d_2$ )							
	FSI	Συμμετρικά			Μη Συμμετρικά			
		(0.5, 1.5)	(0.3, 1.7)	(0.1, 1.9)	(0.1, 1.1)	(0.1, 1.3)	(0.1, 1.5)	(0.1, 4)
0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.5	155.22	147.56	144.49	141.43	149.11	145.03	143.17	139.53
1	43.90	36.51	33.56	30.60	37.30	33.60	32.03	29.15
1.5	14.97	10.51	8.73	6.95	10.36	8.38	7.61	6.31
2	6.30	3.81	2.62	1.82	3.30	2.39	2.08	1.59
3	2.00	1.04	0.66	0.27	0.54	0.35	0.30	0.25
4	1.19	0.60	0.36	0.13	0.19	0.14	0.13	0.12
$\infty$	1.00	0.50	0.30	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10

### Πίνακας 1-3

Τιμές του AATS για συγκρίσιμα FSI και VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου για αντιπροσωπευτικές τιμές διαστημάτων δειγματοληψίας

VSI : Διαστήματα δειγματοληψίας ( $d_1, d_2$ )								
$\delta$	FSI	Συμμετρικά			Μη Συμμετρικά			
		(0.5, 1.5)	(0.3, 1.7)	(0.1, 1.9)	(0.1, 1.1)	(0.1, 1.3)	(0.1, 1.5)	(0.1, 4)
0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.5	154.72	147.23	144.31	141.42	148.69	144.73	142.98	140.48
1	43.40	36.30	33.54	30.81	36.99	33.47	32.02	30.34
1.5	14.47	10.44	8.89	7.39	10.21	8.45	7.83	7.74
2	5.80	3.83	3.12	2.44	3.33	2.65	2.47	3.19
3	1.50	1.15	1.07	1.04	0.82	0.81	0.88	1.97
4	0.69	0.72	0.80	0.93	0.58	0.66	0.75	1.87
$\infty$	0.50	0.63	0.75	0.91	0.55	0.64	0.73	1.85

Στον Πίνακα 1-3 δίνονται τιμές για το AATS για διάφορες μετατοπίσεις του  $\mu$  για τα διαγράμματα ελέγχου που δόθηκαν στον Πίνακα 1-2. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ATS και το AATS παίρνουν πολύ κοντινές τιμές, εκτός όμως από την περίπτωση που έχουμε μεγάλες μετατοπίσεις του  $\mu$ . Το ATS του διαγράμματος VSI είναι σε σημαντικό βαθμό μικρότερο του ATS του διαγράμματος FSI για μέτριες μεταβολές του μέσου ( $1 \leq \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma \leq 2$ ). Για πολύ μεγάλες μεταβολές, το AATS του διαγράμματος VSI είναι μεγαλύτερο από αυτό του FSI. Στις μεγάλες μεταβολές, η μετατόπιση συνήθως ανιχνεύεται μετά από μόνο ένα δείγμα, έτσι  $E(Z) \cong 0$  και το AATS είναι ουσιαστικά το  $E(Y)$ . Αν το VSI διάγραμμα ελέγχου έχει μεγάλο  $d_2$ , τότε η μεταβολή μπορεί να συμβεί μέσα σε ένα από τα διαστήματα που χρησιμοποιούν το  $d_2$  και το  $E(T^*)$  θα είναι μεγάλο. Από τον Πίνακα 1-3 φαίνεται ότι ένα διάγραμμα ελέγχου VSI με  $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$  ή  $(d_1, d_2) = (0.1, 1.9)$  φέρνει πολύ καλά αποτελέσματα για ένα μεγάλο εύρος μεταβολών του μέσου  $\mu$ . Επιπλέον πληροφορία για καλές επιλογές των  $d_1$  και  $d_2$  μπορούμε να πάρουμε βρίσκοντας τις τιμές των  $d_1$  και  $d_2$  που ελαχιστοποιούν το AATS σε συγκεκριμένη μεταβολή, υπό τον περιορισμό ότι το διάγραμμα θα ισοδυναμεί με ένα ειδικό διάγραμμα FSI όταν  $\mu = \mu_0$ . Βρέθηκε λοιπόν, ότι για τις περισσότερες εφαρμογές οι καταλληλότερες επιλογές των  $d_1$  και  $d_2$  είναι  $d_1 = 0.1$  και  $1 < d_2 < 2$ .

Εκτός από την επίδραση που έχουν τα διαστήματα δειγματοληψίας στην μέση τιμή του χρόνου που απαιτείται για να δοθεί προειδοποιητικό σήμα, μπορούμε να δούμε και την

επίδραση στην τυπική απόκλιση της κατανομής αυτού. Στον Πίνακα 1-4, δίνονται οι τυπικές αποκλίσεις του  $T^*$  για τα αντίστοιχα διαγράμματα που εξετάσαμε και στους προηγούμενους πίνακες. Αν δεν είναι μεγάλη η μεταβολή του μέσου, η τιμή της τυπικής απόκλισης είναι πολύ κοντά στην τιμή της μέσης τιμής, και όταν το  $\mu = \mu_0$  το διάγραμμα VSI έχει ελαφρώς μεγαλύτερη τυπική απόκλιση από το αντίστοιχο FSI διάγραμμα ελέγχου.

#### Πίνακας 1-4

Τιμές τυπικής απόκλισης του  $T^*$  για συγκρίσιμα  
FSI και VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου

		VSI : Διαστήματα δειγματοληψίας ( $d_1, d_2$ )							
		Συμμετρικά				Μη Συμμετρικά			
$\delta$	FSI	(0.5, 1.5)	(0.3, 1.7)	(0.1, 1.9)	(0.1, 1.1)	(0.1, 1.3)	(0.1, 1.5)	(0.1, 4)	
0	369.89	369.95	370.04	370.17	369.97	370.05	370.10	370.76	
0.5	154.72	147.21	144.29	141.41	148.69	144.72	142.97	140.45	
1	43.39	36.23	33.46	30.76	36.98	33.45	31.99	30.21	
1.5	14.46	10.28	8.71	7.26	10.18	8.39	7.74	7.40	
2	5.79	3.60	2.82	2.18	3.25	2.51	2.29	2.58	
3	1.44	0.87	0.72	0.65	0.63	0.54	0.56	1.27	
4	0.55	0.50	0.54	0.57	0.34	0.39	0.45	1.23	
$\infty$	0.29	0.44	0.52	0.57	0.32	0.38	0.44	1.23	

### 1.1.5 Ένα εναλλακτικό VSI $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα δημοσιεύτηκαν στην εργασία των Reynolds et al. (1988) και δείχνουν ξεκάθαρα τη χρησιμότητα των διαγραμμάτων ελέγχου με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας. Στη συνέχεια θα δώσουμε αποτελέσματα ενός νέου κανόνα για την επιλογή των διαστημάτων δειγματοληψίας με τον οποίο βελτιώνεται ακόμα περισσότερο η ικανότητα των VSI διαγραμμάτων ελέγχου ως προς την έγκαιρη ανίχνευση μεταβολών στο μέσο μιας διεργασίας. Με το νέο αυτό κανόνα θα χρησιμοποιούμε το μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας αν  $I_2$  ( $\geq 2$ ) συνεχόμενοι δειγματικοί μέσοι πέσουν κοντά στην κεντρική γραμμή του διαγράμματος και μικρό διάστημα δειγματοληψίας διαφορετικά. Θεωρώντας την διαμέριση που ορίσαμε με την σχέση (1) και αν επιπλέον ορίσουμε το  $Y_{2,i}$  να είναι ο αριθμός των συνεχόμενων δειγματικών μέσων που πέφτουν στην περιοχή  $I_2$  έως το  $i$ -στο δείγμα, τότε ο κανόνας απόφασης της μεθόδου αυτής μπορεί μαθηματικά να γραφεί ως εξής :

(1) σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας αν  $\bar{X}_i \in I_S$ ,

(2) χρησιμοποίησε το  $d_2$  αν  $Y_{2,i} \geq l_2$ ,

(3) χρησιμοποίησε το  $d_1$  σε κάθε άλλη περίπτωση.

Επειδή το πρώτο διάστημα δεν μπορεί να καθοριστεί από τον κανόνα αυτό, ως πρώτο διάστημα θα χρησιμοποιείται το  $d_1$ . Οι διάφορες στατιστικές ιδιότητες που απορρέουν από αυτήν τη μέθοδο για το VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου, βρίσκονται χρησιμοποιώντας μεθόδους Μαρκοβιανών αλυσίδων και για την πλήρη παρουσίασή τους παραπέμπουμε στην εργασία των Bai & Lee (2002). Ο κανόνας αυτός αποτελεί εξέλιξη ενός άλλου κανόνα που είχε προταθεί από τους Amin & Letsinger (1991) σύμφωνα με τον οποίο χρησιμοποιούμε το μικρό διάστημα δειγματοληψίας αν  $r'$  από τους  $r$  ( $r' \leq r$ ) τελευταίους δειγματικούς μέσους έχουν πέσει στις περιοχές που βρίσκονται κοντά στα όρια ελέγχου από την μια πλευρά της κεντρικής γραμμής, και μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας διαφορετικά. Τα VSI διαγράμματα ελέγχου των Bai & Lee (2002) και των Amin & Letsinger (1991) θα συμβολίζονται ως BL και AL VSI διαγράμματα ελέγχου, αντίστοιχα, για συντομία. Οι Amin & Hemasinha (1993) πρότειναν τη χρήση των τιμών  $(r', r) = (2, 3)$  αφού μια μεγάλη τιμή του  $r'$  κάνει το διάγραμμα αργό στο να εντοπίσει μεταβολές στο μέσο. Ένα πλεονέκτημα που έχει ο τελευταίος κανόνας, του οποίου θα δώσουμε και τα βασικά αριθμητικά αποτελέσματα, είναι ότι μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις όπου προσθέτουμε στο διάγραμμά μας και κανόνες ροών. Επιπλέον θα δούμε ότι με το νέο VSI διάγραμμα ελέγχου μειώνεται σημαντικά ο αριθμός αλλαγών μεταξύ μικρού και μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας σε σύγκριση με τα κλασικά VSI διαγράμματα.

Στους πίνακες που ακολουθούν δίνουμε τιμές για το εντός ελέγχου ATS, το εκτός ελέγχου AATS και το ANSW για το FSI διάγραμμα, το κλασικό VSI διάγραμμα (αυτό που προκύπτει για  $l_2 = 1$ ), το προτεινόμενο VSI διάγραμμα και το AL VSI διάγραμμα με  $(r', r) = (2, 3)$ . Τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε δίνονται για  $\gamma_1 = 3$  (δείτε Σχήμα 1-1) και διάφορους συνδυασμούς των  $d_1 = 0.1, 0.5$  και  $d_2 = 2.0, 4.0$ . Επιπλέον δίνονται και οι τιμές για το  $\gamma_2$  οι οποίες κάνουν τα τρία διαγράμματα να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου ATS.

### Πίνακας 1-5

AATS και ANSW για συγκρίσιμα FSI, STD VSI, BL VSI και AL VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα  
ελέγχου με  $(d_1, d_2) = (0.1, 2.0)$

	$\delta$	Proposed VSI							AL VSI
		FSI	STD VSI	$l_2 = 2$	3	5	7	9	
AATS	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.5	154.72	141.62	134.66	130.42	125.42	122.65	121.04	126.01
	1.0	43.40	30.75	25.54	22.85	20.23	19.12	18.69	21.23
	1.5	14.47	7.37	5.59	5.01	4.82	5.01	5.31	5.04
	2.0	5.80	2.46	2.08	2.09	2.29	2.51	2.71	2.57
	2.5	2.74	1.36	1.33	1.39	1.51	1.62	1.71	1.90
	3.0	1.50	1.08	1.10	1.12	1.18	1.22	1.27	1.55
ANSW	0.0	-	184.21	108.92	76.89	48.24	35.05	27.48	110.06
	0.5	-	75.43	45.20	32.13	20.26	14.72	11.52	41.39
	1.0	-	18.33	10.34	6.92	3.91	2.57	1.84	8.31
	1.5	-	4.18	1.86	1.02	0.41	0.20	0.11	2.46
	2.0	-	0.86	0.25	0.09	0.02	0.01	0.00	1.58
	2.5	-	0.16	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	1.16
	3.0	-	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.75
$\gamma_2$	-	0.634	1.012	1.225	1.480	1.639	1.735	0.421	

### Πίνακας 1-6

AATS και ANSW για συγκρίσιμα FSI, STD VSI, BL VSI και AL VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα  
ελέγχου με  $(d_1, d_2) = (0.1, 4.0)$

	$\delta$	Proposed VSI							AL VSI
		FSI	STD VSI	$l_2 = 2$	3	5	7	9	
AATS	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.5	154.72	141.00	131.27	124.93	117.27	112.98	110.47	123.87
	1.0	43.40	30.44	23.83	20.60	17.91	17.19	17.24	21.30
	1.5	14.47	7.76	5.80	5.38	5.56	6.06	6.59	6.26
	2.0	5.80	3.19	2.86	2.95	3.27	3.57	3.85	3.94
	2.5	2.74	2.21	2.20	2.27	2.42	2.56	2.69	3.21
	3.0	1.50	1.97	1.99	2.01	2.07	2.13	2.18	2.74
ANSW	0.0	-	131.27	88.60	65.86	43.22	32.08	25.47	82.31
	0.5	-	50.28	32.62	23.57	14.81	10.61	8.18	28.36
	1.0	-	10.55	5.75	3.61	1.80	1.07	0.70	5.36
	1.5	-	2.06	0.76	0.35	0.10	0.04	0.02	2.08
	2.0	-	0.37	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	1.56
	2.5	-	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	1.17
	3.0	-	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.75
$\gamma_2$	-	0.293	0.644	0.866	1.140	1.314	1.438	0.193	

### Πίνακας 1-7

AATS και ANSW για συγκρίσιμα FSI, STD VSI, BL VSI και AL VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα  
ελέγχου με  $(d_1, d_2) = (0.5, 2.0)$

	$\delta$	Proposed VSI							AL VSI
		FSI	STD VSI	$l_2 = 2$	3	5	7	9	
AATS	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.5	154.72	146.87	141.96	138.79	134.87	132.55	131.06	137.42
	1.0	43.40	35.92	32.45	30.66	28.95	28.24	27.95	30.47
	1.5	14.47	10.33	9.22	8.88	8.78	8.88	9.03	9.09
	2.0	5.80	3.88	3.66	3.66	3.75	3.85	3.95	3.97
	2.5	2.74	1.96	1.93	1.96	2.01	2.06	2.10	2.26
	3.0	1.50	1.27	1.27	1.28	1.30	1.32	1.34	1.52
	ANSW	0.0	-	164.29	104.03	75.39	48.38	35.53	28.04
0.5		-	64.45	40.17	38.78	18.10	13.06	10.14	35.58
1.0		-	14.27	7.87	5.09	2.70	1.68	1.15	6.66
1.5		-	2.95	1.18	0.59	0.20	0.09	0.04	2.23
2.0		-	0.56	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	1.56
2.5		-	0.09	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	1.17
3.0		-	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.75
$\gamma_2$		-	0.431	0.802	1.022	1.289	1.457	1.576	0.285

### Πίνακας 1-8

AATS και ANSW για συγκρίσιμα FSI, STD VSI, BL VSI και AL VSI  $\bar{X}$  διαγράμματα  
ελέγχου με  $(d_1, d_2) = (0.5, 4.0)$

	$\delta$	Proposed VSI							AL VSI
		FSI	STD VSI	$l_2 = 2$	3	5	7	9	
AATS	0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.5	154.72	146.95	140.82	136.58	131.23	128.08	126.11	136.61
	1.0	43.40	36.08	32.00	29.96	28.26	27.78	27.77	30.86
	1.5	14.47	10.69	9.50	9.23	9.30	9.54	9.80	9.83
	2.0	5.80	4.34	4.13	4.16	4.31	4.45	4.58	4.73
	2.5	2.74	2.45	2.43	2.46	2.53	2.59	2.65	2.97
	3.0	1.50	1.76	1.77	1.78	1.81	1.83	1.86	2.17
	ANSW	0.0	-	90.57	65.69	50.36	33.98	25.54	20.43
	0.5	-	34.12	23.25	17.01	10.69	7.61	5.81	19.98
	1.0	-	6.89	3.74	2.28	1.07	0.60	0.37	4.15
	1.5	-	1.29	0.45	0.19	0.05	0.02	0.01	1.97
	2.0	-	0.22	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	1.55
	2.5	-	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.17
	3.0	-	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.75
$\gamma_2$		-	0.180	0.493	0.711	0.990	1.168	1.298	0.117

Τα συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε από τα αποτελέσματα των παραπάνω πινάκων είναι τα εξής :

- 1) Στα προτεινόμενα VSI διαγράμματα, το ANSW μικραίνει αλλά το εκτός ελέγχου AATS για μεγάλες τιμές του  $\delta$  αυξάνει καθώς αυξάνει το  $l_2$ . Από την παρατήρηση αυτή και από πρακτικές μελέτες προτείνεται ως μια καλή επιλογή της τιμής του  $l_2$  το 5.
- 2) Τα προτεινόμενα διαγράμματα με  $l_2 = 5$  είναι σημαντικά γρηγορότερα από τα κλασικά VSI διαγράμματα ως προς την ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου, αλλά ως προς την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου γίνεται λίγο πιο αργό. Ακόμα, η χρήση του προτεινόμενου κανόνα αλλαγής μειώνει σημαντικά και τον αριθμό των εναλλαγών μεταξύ μικρού και μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας.
- 3) Τέλος, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως τα προτεινόμενα διαγράμματα με  $l_2 = 5$  παρουσιάζουν μικρότερες τιμές για το ANSW και το AATS από τα διαγράμματα AL VSI. Επομένως, τα νέα διαγράμματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα, ιδίως στην περίπτωση όπου οι εναλλαγές μεταξύ των δύο διαστημάτων δειγματοληψίας έχουν αυξημένο κόστος.



### 1.1.6 VSI $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών

Τέλος, για να ολοκληρώσουμε την παράγραφο των VSI  $\bar{X}$  διαγραμμάτων ελέγχου θα αναφέρουμε και την περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε και κάποιο κανόνα ροών. Εδώ αξίζει να αναφέρουμε πως είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα εναλλαγής που πρότειναν οι Amin και Letsinger, μιας και ο κανόνας αυτός αλλά και ο κανόνας ροών ορίζονται βάση της ίδιας περιοχής πλησίον των ορίων ελέγχου.

Θεωρούμε, λοιπόν, και πάλι ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα με όρια ελέγχου  $\mu_0 \pm \gamma_1 \sigma / \sqrt{n}$  και προειδοποιητικά όρια  $\mu_0 \pm \xi \sigma / \sqrt{n}$ , όπου  $\xi < \gamma_1$ . Το διάγραμμα θα δίνει σήμα αν (i) κάποιος δειγματικός μέσος πέσει εκτός ορίων ελέγχου ή (ii)  $I'_1$  από τους τελευταίους  $I_1$  ( $I'_1 \leq I_1$ ) δειγματικούς μέσους πέσουν ανάμεσα στα όρια ελέγχου και στα προειδοποιητικά όρια στην ίδια πλευρά του διαγράμματος (πάνω ή κάτω από την κεντρική γραμμή). Ας είναι λοιπόν  $\Omega(I'_1, I_1, \xi, \gamma_1)$  ο κανόνας ροών που δίνει σήμα αν  $I'_1$  από τους τελευταίους  $I_1$  τυποποιημένους δειγματικούς μέσους πέσουν στο διάστημα  $I_{1L} : (-\gamma_1, -\xi]$  ή  $I_{1U} : [\xi, \gamma_1)$ . Θα θεωρήσουμε τους εξής τέσσερις κανόνες ροών,  $\Omega(2,3,2,3)$ ,  $\Omega(2,2,2,3)$ ,  $\Omega(4,5,1,3)$  και  $\Omega(5,5,1,3)$ , οι οποίοι και εμφανίζονται συχνότερα στην βιβλιογραφία.

Όταν το σχήμα VSI προστίθεται σε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα με κανόνα ροών, επιλέγουμε να είναι  $\gamma_2 = \xi$  ώστε το διάγραμμα να είναι απλό και να είναι δυνατό να αποφασίζουμε γρήγορα πιο διάστημα δειγματοληψίας να χρησιμοποιήσουμε ή να δώσουμε σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία. Ας είναι  $Y_{1L,i}$  ( $Y_{1U,i}$ ) ο αριθμός των δειγματικών μέσων, που ανήκουν στην περιοχή  $I_{1L}$  ( $I_{1U}$ ), από τους τελευταίους  $I_1$  δειγματικούς μέσους. Εάν εφαρμόσουμε τον προτεινόμενο κανόνα, η απόφαση που θα πάρουμε στο  $i$ -οστό δείγμα συνοψίζεται ως εξής :

- (1) σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας, αν (i)  $\bar{X}_i \in I_S$  ή (ii)  $Y_{1L,i} = I'_1$  (ή  $Y_{1U,i} = I'_1$ ),
- (2) χρησιμοποίησε το  $d_2$  αν  $Y_{2,i} \geq I_2$ ,
- (3) χρησιμοποίησε το  $d_1$  σε κάθε άλλη περίπτωση.

( $Y_{2,i}$  είναι ο αριθμός συνεχόμενων δειγματικών μέσων που πέφτουν στην περιοχή  $I_2$  έως το  $i$ -οστό δείγμα). Σημειώνουμε ότι η περιοχή  $I_2$  χρησιμοποιείται για να καθορίσουμε το επόμενο διάστημα δειγματοληψίας και οι περιοχές  $I_1$  και  $I_S$  χρησιμοποιούνται ανεξάρτητα για να δίνουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στην συνέχεια, για να προχωρήσουμε στην σύγκριση του προτεινόμενου VSI διαγράμματος και του κλασικού VSI διαγράμματος θα πρέπει πρώτα να κάνουμε μερικές υποθέσεις. Αν τα δύο διαγράμματα χρησιμοποιούν τον ίδιο κανόνα ροών θα έχουν ίδιες τιμές για το ANSS. Επιπλέον, αν επιλέξουμε κάποιο κατάλληλο  $d_2$  ώστε τα δύο διαγράμματα να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου ATS για δεδομένο συνδυασμό των  $\gamma_1, \gamma_2, d_1$  τότε είναι συγκρίσιμα.

Για κάθε έναν από τους τέσσερις κανόνες ροών, που αναφέραμε παραπάνω, θα πάρουμε το εντός ελέγχου ATS, το εκτός ελέγχου AATS και το ANSW και για τα δύο διαγράμματα στους Πίνακες 1-9 έως 1-12, όπου  $\delta = 0.0(0.5)3.0$  και  $d_1 = 0.1$ . Επίσης, δίνονται και οι τιμές του  $d_2$  και του ANSS.

**Πίνακας 1-9**

AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα ελέγχου  
με τον κανόνα  $\Omega(2,3,2,3)$

	$\delta$	STD VSI		Proposed VSI				
				$l_2 = 2$	3	5	7	9
AATS	0.00	225.44	{225.44}*	225.44	225.44	225.44	225.44	225.44
	0.50	76.01	{77.22}	75.08	74.12	72.42	71.01	69.88
	1.00	18.22	{19.51}	17.20	16.31	14.97	14.09	13.60
	1.50	5.89	{6.80}	5.29	4.89	4.48	4.42	4.54
	2.00	2.49	{3.15}	2.20	2.07	2.05	2.16	2.32
	2.50	1.31	{1.79}	1.19	1.18	1.24	1.33	1.44
	3.00	0.84	{1.18}	0.81	0.82	0.89	0.96	1.03
ANSW	0.00	18.81		18.14	17.31	15.77	14.37	13.09
	0.50	9.82		9.32	8.64	7.43	6.38	5.48
	1.00	4.75		4.20	3.52	2.49	1.76	1.24
	1.50	2.57		1.92	1.33	0.64	0.30	0.15
	2.00	1.39		0.77	0.38	0.10	0.02	0.01
	2.50	0.69		0.23	0.07	0.01	0.00	0.00
	3.00	0.29		0.05	0.01	0.00	0.00	0.00
$d_2$		1.043		1.088	1.135	1.236	1.347	1.469

\*ANSS

**Πίνακας 1-10**

AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα ελέγχου με τον κανόνα  $\Omega(2,2,2,3)$

	$\delta$	STD VSI		Proposed VSI				
				$l_2 = 2$	3	5	7	9
AATS	0.00	278.05		278.05	278.05	278.05	278.05	278.05
	0.50	98.40	{278.05}*	96.80	95.28	92.51	90.09	88.00
	1.00	23.26	{100.1}	21.67	20.32	18.19	16.72	15.76
	1.50	7.02	{25.11}	6.14	5.54	4.90	4.70	4.76
	2.00	2.75	{8.28}	2.34	2.17	2.11	2.21	2.36
	2.50	1.36	{3.57}	1.21	1.19	1.25	1.34	1.45
	3.00	0.85	{1.91}	0.81	0.83	0.89	0.96	1.03
ANSW	0.00	23.43		22.37	21.35	19.45	17.72	16.15
	0.50	13.02		12.07	11.19	9.61	8.26	7.10
	1.00	6.40		5.37	4.51	3.18	2.25	1.59
	1.50	3.34		2.31	1.60	0.76	0.37	0.17
	2.00	1.71		0.86	0.43	0.11	0.03	0.01
	2.50	0.80		0.25	0.08	0.01	0.00	0.00
	3.00	0.32		0.05	0.01	0.00	0.00	0.00
$d_2$		1.043		1.088	1.135	1.236	1.347	1.469

\*ANSS

**Πίνακας 1-11**

AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα ελέγχου με τον κανόνα  $\Omega(4,5,1,3)$

	$\delta$	STD VSI		Proposed VSI				
				$l_2 = 2$	3	5	7	9
AATS	0.00	166.06	{166.06}*	166.06	166.06	166.06	166.06	166.06
	0.50	42.97	{45.68}	41.38	40.40	41.96	51.54	77.35
	1.00	9.71	{12.16}	8.57	8.32	10.79	18.84	37.48
	1.50	3.45	{5.36}	3.04	3.37	5.82	11.63	24.19
	2.00	1.69	{3.18}	1.70	2.17	4.15	8.46	17.71
	2.50	1.07	{2.10}	1.27	1.72	3.39	6.98	14.67
	3.00	0.83	{1.39}	1.10	1.52	3.05	6.33	13.38
ANSW	0.00	71.54		48.91	33.39	15.56	7.25	3.38
	0.50	21.35		13.41	8.38	3.27	1.28	0.50
	1.00	6.07		2.95	1.41	0.32	0.07	0.02
	1.50	2.27		0.71	0.22	0.02	0.00	0.00
	2.00	0.84		0.14	0.02	0.00	0.00	0.00
	2.50	0.26		0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	3.00	0.06		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$d_2$		1.418		2.031	2.929	6.169	13.122	28.04

\*ANSS

### Πίνακας 1-12

AATS και ANSW για συγκρίσιμα VSI διαγράμματα ελέγχου με τον κανόνα  $\Omega(5,5,1,3)$

	$\delta$	STD VSI		Proposed VSI				
				$l_2 = 2$	3	5	7	9
AATS	0.00	349.39	{349,39}*	349.39	349.39	349.39	349.39	349.39
	0.50	113.05	{121.3}	105.97	100.15	93.20	95.67	115.51
	1.00	20.80	{27.24}	16.92	14.47	14.56	21.45	39.51
	1.50	5.27	{8.91}	4.03	4.00	6.23	11.99	24.54
	2.00	2.02	{4.18}	1.85	2.28	4.25	8.55	17.80
	2.50	1.13	{2.37}	1.30	1.75	3.42	7.00	14.69
	3.00	0.84	{1.45}	1.10	1.53	3.06	6.34	13.38
ANSW	0.00	150.73		102.90	70.25	32.74	15.26	7.11
	0.50	56.63		35.37	22.10	8.62	3.36	1.31
	1.00	13.54		6.46	3.08	0.70	0.16	0.04
	1.50	3.78		1.14	0.35	0.03	0.00	0.00
	2.00	1.12		0.18	0.03	0.00	0.00	0.00
	2.50	0.30		0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	3.00	0.06		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$d_2$		1.418		2.031	2.929	6.169	13.122	28.04

\*ANSS

Τα συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε από τα αποτελέσματα των παραπάνω πινάκων είναι τα εξής :

- 1) Όταν  $\xi = \gamma_2 = 2.0$  προτείνεται το  $l_2$  να είναι 5-7. Ακόμα, η προτεινόμενη τιμή για το  $l_2$  είναι 3 για την περίπτωση που  $\xi = \gamma_2 = 1.0$ .
- 2) Οι τιμές για το εκτός ελέγχου AATS είναι μικρότερες στο προτεινόμενο διάγραμμα όταν η μεταβολή  $\delta$  είναι από μικρή έως μέτρια. Μιας και ο κανόνας ροών συνίσταται συνήθως για να ανιχνεύει γρήγορα μικρές ή μεσαίες μεταβολές του μέσου της διεργασίας, ο προτεινόμενος κανόνας θα είναι ιδιαίτερος αποτελεσματικός σ' αυτές τις περιπτώσεις.
- 3) Τέλος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ANSW των προτεινόμενων διαγραμμάτων είναι ομοιόμορφα μικρότερο από αυτό του κλασικού VSI διαγράμματος.

### 1.1.7 Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή αρχικά μέσω διάφορων αριθμητικών συγκρίσεων είδαμε πως για τα  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου η ιδέα των VSI διαγραμμάτων είναι χρήσιμη και παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα από ότι τα FSI διαγράμματα και επιπλέον δείξαμε πως είναι καλύτερη η χρήση μόνο δύο διαστημάτων δειγματοληψίας, το ένα εκ των οποίων θα είναι μικρό και το άλλο μεγάλο. Στην συνέχεια παρουσιάσαμε και συγκρίναμε κάποιους πιο εξελιγμένους κανόνες για την επιλογή μεταξύ των διαστημάτων δειγματοληψίας και καταλήξαμε σε έναν κανόνα όπου θα επιλέγουμε το μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας αν  $l_2$  συνεχόμενοι δειγματικοί μέσοι πέσουν κοντά στην κεντρική γραμμή του διαγράμματος και το μικρό διάστημα δειγματοληψίας σε άλλη περίπτωση. Και πάλι μέσω αριθμητικών συγκρίσεων είδαμε πως ο κανόνας αυτός είναι χρήσιμος ειδικά όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε μικρές ή μεσαίες μεταβολές στον μέσο της διεργασίας.

Σε όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που παραθέσαμε στην Παράγραφο 1.1.6, όπου εξετάσαμε τι συμβαίνει με τους κανόνες ροών, το μικρό διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$  ήταν 0.1 και οι τιμές του  $d_2$  επιλέχθηκαν έτσι ώστε το εντός ελέγχου ATS να είναι ίδιο και για το κλασικό VSI διάγραμμα ελέγχου και για το προτεινόμενο. Ωστόσο, σε πρακτικές εφαρμογές θα ήταν πιο ρεαλιστικό να επιλέγουμε πρώτα τις τιμές των  $(d_1, d_2)$  και μετά τον κατάλληλο κανόνα ροών.

## 1.2 Διαγράμματα ελέγχου $np$

### 1.2.1 Εισαγωγή

Ένα διάγραμμα ελέγχου θεωρείται προσαρμόσιμο (adaptive), όταν επιτρέπει σε τουλάχιστον μία από τις παραμέτρους του (μέγεθος δείγματος  $n$ , διάστημα δειγματοληψίας  $h$  και όρια ελέγχου  $LCL$  και  $UCL$ ) να μπορούν να αλλάξουν σε πραγματικό χρόνο κατά την διάρκεια παρακολούθησης μιας διεργασίας με βάση την πληροφορία που παίρνουμε για την κατάσταση της διεργασίας από τα στατιστικά δεδομένα που λαμβάνουμε μέσω των δειγμάτων. Μέχρι στιγμής παρουσιάσαμε τέτοια διαγράμματα που αφορούν τα  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου. Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με τα  $np$  διαγράμματα ελέγχου τα οποία όπως γνωρίζουμε χρησιμοποιούνται ευρέως στις βιομηχανίες.

Ξέρουμε ότι την ταχύτητα με την οποία ένα διάγραμμα ανιχνεύει εκτός στατιστικού ελέγχου καταστάσεις, την μετράμε με το ATS. Στα  $np$  διαγράμματα ελέγχου, συνήθως εκφράζουμε το διάστημα δειγματοληψίας  $h$  σε όρους του πλήθους παραγόμενων μονάδων μεταξύ των δειγμάτων. Όμοια, το ATS ορίζεται ως ο αριθμός μονάδων που παράχθηκαν από την στιγμή που συνέβη μια εκτός ελέγχου κατάσταση έως ότου αυτή ανιχνευθεί.

Σε πολλές εργασίες, το ATS εκτιμάται υπό την μηδενική κατάσταση (zero-state) όπου υποθέτουμε ότι μεταβολές στην διεργασία συμβαίνουν σταθερά στην αρχή ενός διαστήματος δειγματοληψίας. Οι Runger και Pignatiello (1991) και οι Runger και Montgomery (1993) πρότειναν αλγόριθμους για την εκτίμηση του ATS υπό την σταθερή κατάσταση (steady-state) στην οποία οι μεταβολές μπορούν να συμβούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ένα πιο ρεαλιστικό και ακριβές ATS απ' ό,τι στην περίπτωση της μηδενικής κατάστασης.

Στην συνέχεια, η παρουσίαση της κατασκευής του VSI  $np$  διαγράμματος ελέγχου, γίνεται υπό μια σκοπιά βελτιστοποίησης. Η συνάρτηση που τίθεται προς ελαχιστοποίηση είναι αυτή του εκτός στατιστικού ελέγχου ATS. Αυτή η ελαχιστοποίηση οδηγεί άμεσα στην μείωση του αριθμού των ελαττωματικών μονάδων. Ακόμα, η ελαχιστοποίηση αυτή βελτιώνει την ικανότητα του  $np$  διαγράμματος στην ανίχνευση της αιτίας που προκαλεί το πρόβλημα στην διεργασία. Επιπλέον, λήφθηκαν υπόψη δύο περιορισμοί. Ο ένας είναι το εντός ελέγχου  $ATS_0$  που πρέπει να προκαθοριστεί έτσι ώστε να έχουμε τον επιθυμητό ρυθμό εσφαλμένων

συναγερμών. Ο άλλος είναι ο μέσος ρυθμός επιθεώρησης (average inspection rate, AIR) που ορίζεται ως η μακροπρόθεσμη αναλογία μεταξύ των επιθεωρημένων και των παραγόμενων μονάδων όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Στο βέλτιστο σχεδιασμό που θα δούμε, το εκτός στατιστικού ελέγχου ATS υπολογίζεται υπό την σταθερή κατάσταση που αφήνει τη μεταβολή στο  $p$  να συμβεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Μιας και τα διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες συνήθως χρησιμοποιούνται για να ανιχνεύουν αυξήσεις του  $p$  (χειροτέρευση της ποιότητας), τα  $np$  διαγράμματα που θα παρουσιάσουμε χρησιμοποιούνται μόνο για να μεταχειριζόμαστε ανοδικές μεταβολές στο  $p$  και επομένως θα δούμε να είναι ενεργό μόνο το άνω όριο ελέγχου,  $UCL$ .

Θεωρούμε ότι η κατανομή του αριθμού  $d$  των ελαττωματικών μονάδων σε ένα δείγμα είναι η διωνυμική. Η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση αυτής της κατανομής δίνεται από τις σχέσεις

$$B(n, p, i) = C_i^n p^i (1-p)^{n-i} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$E(n, U, p) = \sum_{i=0}^U B(n, p, i)$$

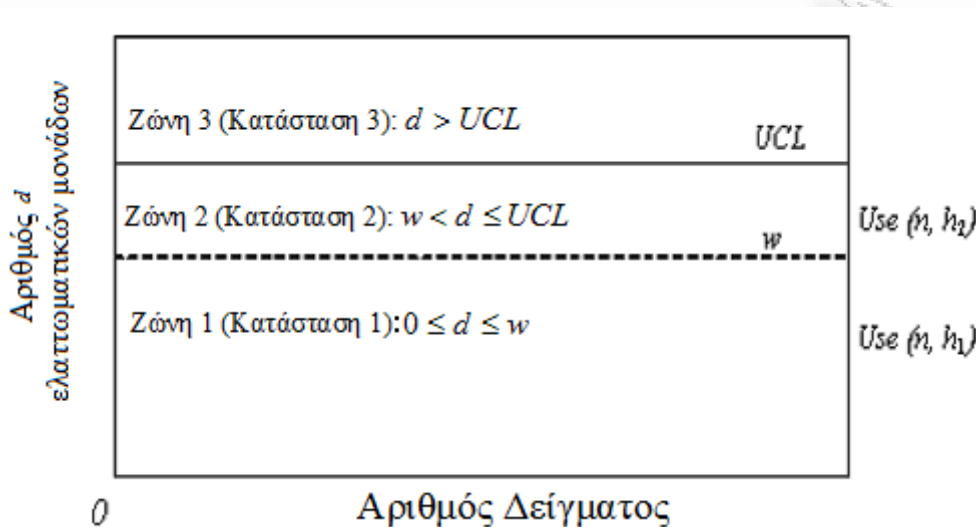
Αν η μεταβολή στο  $p$  συμβεί κατά την διάρκεια επιθεώρησης ενός δείγματος τότε η κατανομή του  $d$  θα είναι το άθροισμα δύο διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών με διαφορετικό  $p$ .

## 1.2.2 Λειτουργία του VSI $np$ διαγράμματος ελέγχου

Το VSI  $np$  διάγραμμα ελέγχου (δείτε, Luo & Wu (2002)) χρησιμοποιεί δύο διαστήματα δειγματοληψίας και έχει σταθερό μέγεθος δείγματος. Όταν θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου θα χρησιμοποιούμε το μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας  $h_1$  και όταν φαίνεται πως η διεργασία είναι κοντά σε εκτός ελέγχου κατάσταση θα χρησιμοποιούμε το μικρό διάστημα  $h_2$ . Εκτός από το άνω όριο ελέγχου,  $UCL$ , το VSI  $np$  διάγραμμα ελέγχου έχει και ένα προειδοποιητικό όριο  $w$ . Έτσι, τα δύο αυτά όρια διαχωρίζουν το VSI  $np$  διάγραμμα ελέγχου σε τρεις περιοχές, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.

### ΣΧΗΜΑ 1-3

Οι τρεις ζώνες του VSI  $np$  διαγράμματος ελέγχου



Το πιο διάστημα θα χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε το επόμενο δείγμα εξαρτάται από τον αριθμό  $d$  των ελαττωματικών μονάδων που θα βρούμε στο δείγμα μας. Αν το  $d$  πέσει στην ζώνη 1, τότε χρησιμοποιούμε το διάστημα  $h_1$ . Αν το  $d$  πέσει στην ζώνη 2, χρησιμοποιούμε το διάστημα  $h_2$  και αν πέσει στην ζώνη 3 το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας. Έστω  $p_{ij}^0$  και  $p_{ij}^+$  οι εντός και εκτός ελέγχου πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση (ή Ζώνη)  $i$  στην κατάσταση (ή Ζώνη)  $j$ . Οι πιθανότητες μετάβασης του διαγράμματος δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 p_{11}^0 &= p_{21}^0 = E(n, w, p_0) \\
 p_{12}^0 &= p_{22}^0 = E(n, UCL, p_0) - p_{11}^0 \\
 p_{13}^0 &= p_{23}^0 = 1 - p_{11}^0 - p_{21}^0 \\
 p_{11}^+ &= p_{21}^+ = E(n, w, p_+) \\
 p_{12}^+ &= p_{22}^+ = E(n, UCL, p_+) - p_{11}^+ \\
 p_{13}^+ &= p_{23}^+ = 1 - p_{11}^+ - p_{21}^+
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

(όπου  $p_+$  δηλώνει το εκτός ελέγχου  $p$ ).

Σημειώνουμε ότι οι εκτός ελέγχου πιθανότητες μετάβασης της σχέσης (2) ισχύουν μόνο στην μηδενική κατάσταση, όπου η διεργασία είναι εκτός ελέγχου καθ' όλη την διάρκεια της συλλογής του δείγματος. Στην εργασία των Luo & Wu (2002) υπάρχει εκτενής αναφορά και για την ειδική περίπτωση όπου η μεταβολή συμβαίνει κατά την διάρκεια της συλλογής του δείγματος.



Το πρώτο διάστημα δειγματοληψίας που θα χρησιμοποιηθεί μόλις ξεκινήσει η διεργασία μπορεί να επιλεγεί τυχαία, ωστόσο όπως επισημαίνεται από πολλούς ερευνητές, είναι καλύτερο για λόγους ασφαλείας να χρησιμοποιούμε το μικρό διάστημα (Costa (1997), Prabhu et al. (1993)).

### 1.2.3 Βέλτιστος σχεδιασμός του VSI *np* διαγράμματος ελέγχου

Για να προχωρήσουμε με την βελτιστοποίηση, θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε τις εξής ποσότητες :

$p_0$  : εντός ελέγχου ελαττωματικό κλάσμα

$p_+$  : ανοδικό εκτός ελέγχου ελαττωματικό κλάσμα που χρησιμοποιείται για βελτιστοποίηση

$n_{\max}$  : μέγιστο δυνατό μέγεθος δείγματος

$h_{\min}$  : ελάχιστο δυνατό διάστημα δειγματοληψίας

$\tau$  : ελάχιστο δυνατό εντός ελέγχου  $ATS_0$

$R$  : μέγιστος δυνατός εντός ελέγχου μέσος λόγος επιθεώρησης

Η πραγματική τιμή του  $p_0$  συνήθως εκτιμάται από ιστορικά δεδομένα ή μέσω δεδομένων που παρατηρήσαμε σε πιλοτικές λειτουργίες της διεργασίας. Η τιμή  $p_+$  υποδηλώνει το τυπικό επίπεδο απορριπτέας ποιότητας που χρησιμοποιείται για βελτιστοποίηση. Οι ποσότητες  $n_{\max}$  και  $h_{\min}$  καθορίζονται από πρακτικούς λόγους, όπως ο αριθμός μονάδων που μπορούμε να επιθεωρήσουμε σε ένα μικρό χρονικό διάστημα. Η τιμή του  $\tau$  καθορίζεται με βάση τον ανεκτό ρυθμό εσφαλμένων συναγερωμών. Το προκύπτον ή το πραγματικό εντός ελέγχου  $ATS_0$  πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $\tau$ . Τέλος το  $R$  καθορίζεται από τους διαθέσιμους πόρους για επιθεώρηση (π.χ. ανθρώπινο δυναμικό και μηχανήματα).

Ο συνολικός σχεδιασμός του VSI *np* διαγράμματος ελέγχου δίνεται σύμφωνα με το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης :

$$\text{Ελαχιστοποίηση : } \quad ATS(p_0, p_+, n, h_1, h_2, UCL, w)$$

$$\text{Περιορισμοί : } \quad ATS_0(p_0, n, h_1, h_2, UCL, w) \geq \tau \quad (3)$$

$$AIR(p_0, n, h_1, h_2, w, UCL) \leq R \quad (4)$$

$$\text{Σχεδιαστικές Μεταβλητές : } n, h_1, h_2, UCL, w$$

Έχει προταθεί από πολλούς ερευνητές (Reynolds et al. (1988), Runger & Montgomery (1993), Prabhu et al. (1994)) το διάστημα  $h_2$  να ορίζεται ως το  $h_{\min}$ . Για τις υπόλοιπες τέσσερις μεταβλητές έχουμε : οι μεταβλητές  $n$  και  $w$  είναι αυτές που ψάχνουμε ενώ το όριο ελέγχου  $UCL$  και το διάστημα  $h_1$  καθορίζονται ως εξής

(a) Η τιμή του  $h_1$  καθορίζεται από μέσες τιμές του περιορισμού που θέσαμε για τον μέσο ρυθμό επιθεώρησης. Σημειώνουμε ότι :

$$AIR = \frac{n}{B_1 h_1 + B_2 h_2} \leq R$$

όπου

$$B_1 = \frac{p_{21}^0}{1 - p_{11}^0 + p_{21}^0},$$

$$B_2 = \frac{1 - p_{11}^0}{1 - p_{11}^0 + p_{21}^0},$$

συνεπώς

$$h_1 \geq \frac{n - RB_2 h_2}{B_1 R} \quad (5)$$

και το  $h_1$  είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα (5).

(b) Η αρχική τιμή του  $UCL$  είναι ίση με  $w$ . Στην συνέχεια αυξάνεται συνεχώς κατά ένα μέχρι το προκύπτον  $ATS_0$  γίνει ίσο ή αμέσως μεγαλύτερο από την καθορισμένη τιμή του  $\tau$ .

Ολόκληρη η διαδικασία βελτιστοποίησης περιγράφεται ως εξής :

- I) Ορίζουμε τις ποσότητες  $p_0, p_+, n_{\max}, h_{\min}, \tau, R$ .
- II) Θέτουμε σαν αρχική τιμή του  $ATS$  μια πολύ μεγάλη τιμή  $ATS_{\min}$  και θέτουμε το  $h_2$  ίσο με  $h_{\min}$ .
- III) Ψάχνουμε το  $n$  μεταξύ του 2 και  $n_{\max}$ .
- IV) Ψάχνουμε το  $w$  μεταξύ 0 και  $n$ .
- V) Σύμφωνα με τις τιμές των  $h_2, n$  και  $w$  προσδιορίζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές  $h_1$  και  $UCL$ .
- VI) Αν στον υπολογισμό του  $h_1$  προκύψει τιμή μικρότερη από  $h_{\min}$ , τερματίζουμε την εύρεση του  $w$ , αυξάνουμε το  $n$  κατά ένα και επιστρέφουμε στο βήμα IV, αλλιώς πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα.

VII) Υπολογίζουμε το εκτός ελέγχου ATS.

VIII) Αν το ATS που βρήκαμε είναι μικρότερο από το  $ATS_{\min}$ , αντικαθιστούμε το τελευταίο με το  $ATS_{\min}$  και οι τρέχουσες τιμές των παραμέτρων  $n, h_1, h_2, UCL, w$  αποθηκεύονται ως προσωρινός αρχικός σχεδιασμός.

IX) Στο τέλος ολόκληρης της έρευνας, το βέλτιστο σχέδιο του VSI διαγράμματος μπορεί να αναγνωριστεί ως αυτό που καταλήγει στο ελάχιστο ATS.

Οι διάφοροι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης δόθηκαν από τους Luo & Wu (2002) μέσω του προγράμματος *ADAPT.C* στην γλώσσα C (το πρόγραμμα είναι διαθέσιμο από τους δύο ερευνητές).

## 1.2.4 Αριθμητική μελέτη

Εκτελέστηκε ένα  $2^6$  παραγοντικό πείραμα για την μελέτη και σύγκριση τριών  $np$  διαγραμμάτων : του συνηθισμένου στατικού  $np$  διαγράμματος, του βέλτιστου στατικού  $np$  διαγράμματος (FSSI) και του VSI  $np$  διαγράμματος. Για διευκόλυνση στην σύγκριση των διαγραμμάτων, το υπολογιζόμενο ATS κανονικοποιήθηκε.

Το μέγεθος δείγματος  $n$  του συνηθισμένου στατικού  $np$  διαγράμματος σπάνια καθορίζεται αναλυτικά. Το *BSI Handbook 24* (1985) προτείνει να καθορίζουμε το  $n$  από την σχέση

$$n = \frac{r}{p_0}$$

όπου το  $r$  είναι μια σταθερά μεταξύ 1 και 3 όταν  $p_0 \geq 0.03$  και μικρότερη όταν είναι μικρότερο το  $p_0$ . Μιας και στο πείραμα που θα παρουσιάσουμε το  $p_0$  είναι 0.02, το μέγεθος δείγματος θα καθοριστεί για  $r = 0.9$ , δηλαδή

$$n = \frac{0.9}{p_0}$$

Το διάστημα δειγματοληψίας  $h$  θα είναι τέτοιο ώστε

$$\frac{n}{h} \leq R \quad (6)$$

δηλαδή το  $h$  είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα (6). Το όριο ελέγχου  $UCL$  καθορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός που έχει τεθεί για το εντός ελέγχου  $ATS_0$ .

Αντίθετα από το συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα, οι παράμετροι  $n$ ,  $h$  και  $UCL$  του FSSI διαγράμματος σχεδιάζονται σύμφωνα με έναν βέλτιστο τρόπο, π.χ. το  $h$  καθορίζεται από την ανισότητα (6). Το FSSI διάγραμμα μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική περίπτωση του VSI διαγράμματος, μόνο που έχει συνεχώς σταθερό διάστημα δειγματοληψίας και μέγεθος δείγματος.

Οι έξι παράμετροι  $p_0, p_+, n_{\max}, h_{\min}, \tau, R$  χρησιμοποιούνται ως οι παράγοντες του παραγοντικού πειράματος. Καθένας από αυτούς παίρνει δύο διαφορετικές τιμές με αποτέλεσμα να έχουμε 64 διαφορετικές περιπτώσεις. Οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι οι εξής :

$$p_0 : 0.005 \quad 0.02$$

$$p_+ : 2p_0 \quad 3p_0$$

$$\tau : \frac{50}{p_0} \quad \frac{200}{p_0}$$

$$R : 0.1 \quad 0.4$$

$$n_{\max} : \frac{0.5}{p_0} \quad \frac{1.5}{p_0}$$

$$h_{\min} : \frac{n_{\max}}{3.0R} \quad \frac{n_{\max}}{1.5R}$$

Σημειώνουμε ότι οι παράμετροι  $p_+$ ,  $\tau$  και  $n_{\max}$  εκφράζονται σε όρους του  $p_0$  και ακόμα, το  $h_{\min}$  είναι συνάρτηση των  $R$  και  $n_{\max}$ . Ο καθορισμός του  $h_{\min}$  εγγυάται ότι ο μέγιστος δυνατός ρυθμός επιθεώρησης,  $n_{\max}/h_{\min}$ , θα είναι ίσος με  $3.0R$  (ή  $1.5R$ ).

Για κάθε μια από τις 64 περιπτώσεις του πειράματος ακολουθήθηκαν τα εξής τρία βήματα:

(A) Κατασκευή των βέλτιστων διαγραμμάτων : συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα, FSSI και VSI  $np$  διάγραμμα. Επιπλέον, οι περιορισμοί που θέσαμε για τα  $ATS_0$  και  $AIR$  (σχέσεις (3) και (4)) πρέπει να ικανοποιούνται και από τα τρία διαγράμματα.

(B) Το  $ATS$  σταθερής κατάστασης καθενός από τα τρία διαγράμματα υπολογίζεται για πέντε διαφορετικές εκτός ελέγχου τιμές του  $p$  που είναι οι  $1.5p_0$ ,  $2.0p_0$ ,  $3.0p_0$ ,  $4.0p_0$  και

$5.0p_0$ . Για να διευκολυνθεί η σύγκριση της αποτελεσματικότητας των τριών διαγραμμάτων, το ATS κανονικοποιήθηκε σύμφωνα με τον τύπο

$$ATS_n(p) = \frac{ATS(p)}{ATS_{static}(p)}$$

δηλαδή, για να πάρουμε το κανονικοποιημένο ATS, διαιρούμε το ATS που έχουμε υπολογίσει με το αντίστοιχο ATS του συνηθισμένου στατικού  $np$  διαγράμματος για την ίδια τιμή του  $p$ . Συνεπώς, αν ένα διάγραμμα έχει μικρότερο κανονικοποιημένο ATS από κάποιο άλλο, τότε το πρώτο είναι αποτελεσματικότερο από το συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα για την συγκεκριμένη τιμή του  $p$  που έχει υπολογιστεί.

(Γ) Στην συνέχεια υπολογίζουμε το μέσο  $AATS_n$  για κάθε ένα διάγραμμα για κάθε μια από τις πέντε μεταβολές του  $p$

$$AATS_n = \frac{1}{5} [ATS_n(1.5p_0) + ATS_n(2.0p_0) + ATS_n(3.0p_0) + ATS_n(4.0p_0) + ATS_n(5.0p_0)] \quad (7)$$

Είναι βέβαια κατανοητό ότι αν και όλα τα βέλτιστα  $np$  διαγράμματα έχουν κατασκευαστεί με βάση μια συγκεκριμένη τιμή του εκτός ελέγχου  $p_+$ , θα πρέπει να είναι ικανά ώστε να ανιχνεύσουν γρήγορα οποιαδήποτε μεταβολή στο  $p$ . Επειδή στις περισσότερες εφαρμογές υπάρχουν πολλοί παράγοντες που μπορούν να προκαλέσουν κάποια τυχαία μεταβολή στο  $p$ , η αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων θα εξεταστεί για ένα μεγάλο εύρος μεταβολών, για τον λόγο αυτό το  $AATS_n$  είναι καλύτερο μέτρο σύγκρισης της ικανότητας των διαγραμμάτων από ότι το  $ATS_n(p)$ .

Τέλος, υπολογίζουμε τον ολικό μέσο  $\overline{AATS_n}$  για κάθε διάγραμμα το οποίο είναι η μέση τιμή των 64  $AATS_n$  (σχέση 7) καθεμιάς από τις 64 διαφορετικές περιπτώσεις. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το  $\overline{AATS_n}$  περιλαμβάνει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε στην σύγκριση των διαγραμμάτων. Η τιμή του  $\overline{AATS_n}$  για κάθε ένα από τα τρία διαγράμματα είναι η εξής :

### Πίνακας 1-13

Μέσο  $AATS_n$  για συγκρίσιμα διαγράμματα ελέγχου  $np$

Τύπος διαγράμματος	Μέσο $AATS_n$
Στατικό $np$ διάγραμμα	1.00
FSSI	0.70
VSI	0.62

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το VSI  $np$  διάγραμμα είναι καλύτερο και από τα άλλα δύο στατικά διαγράμματα. Παρ' όλα αυτά, παρατηρούμε ότι αν και το FSSI διάγραμμα και το συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα χρησιμοποιούν και τα δύο σταθερό μέγεθος δείγματος και σταθερό διάστημα δειγματοληψίας, το FSSI είναι πιο ευαίσθητο σε μεταβολές του  $p$ . Το συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα συνήθως δημιουργεί ένα εντός ελέγχου  $ATS_0$  αρκετά μεγαλύτερο από το καθορισμένο  $\tau$ , με αποτέλεσμα να έχει χειρότερη αποτελεσματικότητα. Αυτό καθρεφτίζει ένα πραγματικό μειονέκτημα του συνηθισμένου στατικού  $np$  διαγράμματος που έχει σχέση με την διακριτή φύση των ποιοτικών χαρακτηριστικών. Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγουμε το μέγεθος δείγματος σ' αυτό το διάγραμμα, π.χ. μέσα από κάποιο εγχειρίδιο, έχει σαν αποτέλεσμα ένα  $UCL$  που δημιουργεί πολύ μεγάλο  $ATS_0$ . Επιπλέον αν επιχειρήσουμε να στενέψουμε το άνω όριο ελέγχου, σαν αποτέλεσμα θα πάρουμε ένα πάρα πολύ μικρό  $ATS_0$  που δεν θα ικανοποιεί την ανισότητα (3). Από την άλλη, το FSSI διάγραμμα μπορεί να προσαρμόσει τις παραμέτρους του με ένα ευνοϊκότερο τρόπο, ώστε οι περιορισμοί να ικανοποιούνται οριακά και το  $ATS$  να ελαχιστοποιείται. Αυτά τα ευρήματα τονίζουν την σπουδαιότητα ενός βέλτιστου σχεδιασμού των  $np$  διαγραμμάτων.

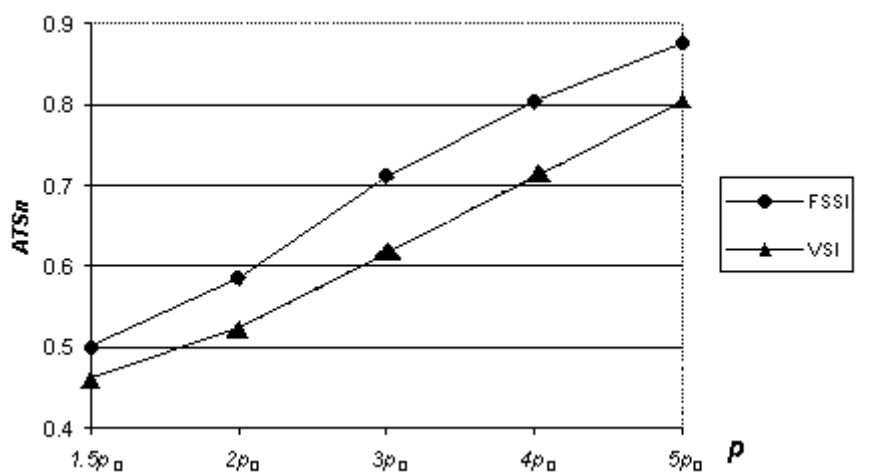
Επίσης, έχει μελετηθεί και η επίδραση που έχουν οι έξι παράμετροι στο κανονικοποιημένο  $AATS_n$  του VSI  $np$  διαγράμματος. Έχει βρεθεί ότι η επιρροή των παραγόντων  $p_0$  και  $p_+$  είναι μηδαμινή σε όλα τα διαγράμματα. Η επίδραση των άλλων παραγόντων είναι σχετικά αξιοσημείωτη. Η επίδραση του  $\tau$  στο  $AATS_n$  του VSI  $np$  διαγράμματος είναι  $-0.046$ . Η επίδραση του  $R$  στο  $AATS_n$  του VSI  $np$  διαγράμματος είναι  $-0.040$ . Η επίδραση του  $n_{max}$  στο  $AATS_n$  του VSI  $np$  διαγράμματος είναι  $-0.793$  και η επίδραση του  $h_{min}$  είναι  $0.117$ .

Στο Σχήμα 1-4, που ακολουθεί, βλέπουμε τις τιμές του  $ATS_n$  των βέλτιστων FSSI και VSI  $np$  διαγραμμάτων σε σχέση με πέντε εκτός ελέγχου τιμές του  $p$ . Φαίνεται ότι και τα

δύο διαγράμματα είναι καλύτερα όταν το  $p$  είναι μικρό, κάτι όμως που αρχίζει να χάνεται όσο αυξάνεται το  $p$ . Ωστόσο, συνεχίζουν να υπερέχουν του συνηθισμένου στατικού  $np$  διαγράμματος ακόμα και για  $p = 5.0p_0$ .

ΣΧΗΜΑ 1-4

$ATS_n$  των βέλτιστων FSSI και VSI  $np$  διαγραμμάτων



### 1.2.5 Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάσαμε την κατασκευή του VSI  $np$  διαγράμματος υπό την σταθερή κατάσταση. Σκοπός της κατασκευής που είδαμε ήταν η βελτίωση της αποτελεσματικότητας των  $np$  διαγραμμάτων ελαχιστοποιώντας το εκτός ελέγχου ATS με κάποιους περιορισμούς που βασίζονται στο εντός ελέγχου  $ATS_0$  και στον μέσο ρυθμό επιθεώρησης,  $AIR$ . Ο αλγόριθμος που είδαμε μπορεί πολύ εύκολα να επιλυθεί από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η περίπτωση της σταθερής κατάστασης, όπως έχουμε πει, αφήνει την μεταβολή να συμβεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, κάτι που κάνει τα αποτελέσματα που βρήκαμε πιο ρεαλιστικά.

Είδαμε πως τα VSI  $np$  διαγράμματα βελτιώνουν σημαντικά την αποτελεσματικότητα τους (ειδικά για μικρές και μεσαίες μεταβολές) χωρίς να αυξάνουν τον ρυθμό εσφαλμένων συναγερμών ούτε τον μέσο ρυθμό επιθεώρησης. Λόγω της διακριτής φύσης των ποιοτικών χαρακτηριστικών το συνηθισμένο στατικό  $np$  διάγραμμα παράγει ένα  $ATS_0$  που είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από την επιθυμητή τιμή. Αντίθετα, τα VSI διαγράμματα έδωσαν

τιμές πολύ κοντά στην επιθυμητή. Σαν συμπέρασμα, είδαμε ακόμα πως το στατικό FSSI *np* διάγραμμα δουλεύει πολύ καλύτερα από το συνηθισμένο στατικό διάγραμμα και η λειτουργία του είναι εξίσου εύκολη.

### 1.3 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM

#### 1.3.1 Εισαγωγή

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart η απόφαση για να δηλώσουμε αν μια διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου βασίζεται στο αν κάποιο σημείο του διαγράμματος ελέγχου βρίσκεται εντός ή εκτός των ορίων ελέγχου. Υπενθυμίζουμε ότι στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τα σημεία που σχεδιάζουμε βασίζονται σε πληροφορίες που δίνει μόνο ένα δείγμα, αγνοώντας πληροφορίες που μπορεί να δώσουν προηγούμενα. Για τον λόγο αυτό τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart καλούνται διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη. Τα τελευταία 50 χρόνια, ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί διαγράμματα ελέγχου στα οποία ο σχεδιασμός ενός σημείου στο διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε πληροφορίες που δίνει όχι μόνο το πιο πρόσφατο δείγμα αλλά και προγενέστερα δείγματα. Σ' αυτήν την κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου ανήκουν και τα αθροιστικά διαγράμματα (CUSUM) που χρησιμοποιούνται ευρέως για την παρακολούθηση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού μιας παραγωγικής διεργασίας. Έχει δειχθεί ότι τα διαγράμματα CUSUM είναι πιο αποτελεσματικά από τα απλούστερα  $\bar{X}$  Shewhart διαγράμματα ελέγχου όσον αφορά την ανίχνευση μικρών ή μεσαίων μεταβολών στον μέσο μιας διεργασίας. Τα διαγράμματα CUSUM συνήθως δημιουργούνται παίρνοντας δείγματα σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και σχεδιάζοντας ένα συσσωρευτικό άθροισμα διαφορών, μεταξύ μιας τιμής στόχου και των δειγματικών μέσων, με χρονική διάταξη στο διάγραμμα. Θεωρούμε ότι ο μέσος της διεργασίας παραμένει αμετάβλητος όσο η στατιστική συνάρτηση CUSUM που υπολογίζουμε από τα δείγματα δεν πέφτει στην περιοχή του διαγράμματος όπου δίνεται ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου. Μία τιμή της στατιστικής συνάρτησης εντός αυτής της περιοχής θεωρείται ως ένδειξη ότι ο μέσος της διεργασίας έχει αλλάξει και θα πρέπει να ερευνησουμε τα αίτια που οδήγησαν στην μεταβολή αυτή.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες ενός διαγράμματος ελέγχου CUSUM όπου ο χρόνος δειγματοληψίας μεταβάλλεται συναρτήσει της βέλτιστης συνάρτησης που



απεικονίζεται στο διάγραμμα. Αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM του VSI CUSUM διαγράμματος ελέγχου πέσει κοντά στην περιοχή προειδοποιητικού σήματος έχουμε ένδειξη ότι ο μέσος της διεργασίας έχει αλλάξει και επομένως το διάγραμμα χρησιμοποιεί ένα μικρό διάστημα δειγματοληψίας ώστε να πάρουμε γρήγορα περισσότερη πληροφορία από την διεργασία και η πιθανή μεταβολή του μέσου να επιβεβαιωθεί ή να διαψευστεί γρήγορα. Στην αντίθετη περίπτωση που η τιμή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM του VSI CUSUM διαγράμματος ελέγχου δεν είναι κοντά στην περιοχή προειδοποιητικού σήματος, τότε μπορούμε να θεωρούμε ότι η διεργασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου και το διάγραμμα ελέγχου να χρησιμοποιεί ένα μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας. Για τον λόγο αυτό το VSI CUSUM διάγραμμα που θα παρουσιάσουμε, αλλάζει μεταξύ διαφορετικών ρυθμών δειγματοληψίας ανάλογα με τι παρατηρούμε στα δεδομένα. Θα συλλέγουμε δείγματα με πιο γρήγορο ρυθμό όταν θα έχουμε κάποια ένδειξη ότι έχει συμβεί μεταβολή στον μέσο της διεργασίας και με πιο αργό ρυθμό όταν δεν θα έχουμε καμία τέτοια ένδειξη. Εάν η ένδειξη του προβλήματος είναι πολύ ισχυρή το διάγραμμα θα δίνει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία όπως ακριβώς και το FSI CUSUM διάγραμμα ελέγχου.

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια της παραγράφου αυτής βρίσκονται στην εργασία των Reynolds et al. (1990).

### 1.3.2 Περιγραφή του VSI CUSUM διαγράμματος

Υποθέτουμε ότι η παραγωγική διεργασία που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε έχει ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό  $X$  το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Στόχος μας είναι να ανιχνεύσουμε οποιαδήποτε απόκλιση του μέσου της διεργασίας από μια τιμή στόχο  $\mu_0$  παίρνοντας μια σειρά ανεξάρτητων δειγμάτων μεγέθους  $n$ , όπου υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις των δειγμάτων είναι ανεξάρτητες. Με  $\mu_1$  θα συμβολίζουμε μια συγκεκριμένη μεταβολή του μέσου που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε. Για το  $j$ -οστό δείγμα ( $j = 1, 2, \dots$ ) θεωρούμε την τυποποιημένη στατιστική συνάρτηση  $Z_j = \sqrt{n} \cdot (\bar{X}_j - \mu_0) / \sigma$ , όπου  $\bar{X}_j$  είναι η μέση τιμή του  $j$ -οστού δείγματος. Σημειώνουμε ότι το  $Z_j$  ουσιαστικά είναι η απόκλιση του  $\bar{X}_j$  από την τιμή στόχο  $\mu_0$  εκφρασμένη σε μονάδες τυπικού σφάλματος του  $\bar{X}$ . Στην πράξη

πολλές φορές χρειάζεται να εκτιμούμε τα  $\mu_0$  και  $\sigma$  από προηγούμενα δεδομένα, ωστόσο εδώ θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστά.

Για να ανιχνεύσουμε θετικές μεταβολές στο  $\mu$  χρησιμοποιούμε την εξής στατιστική συνάρτηση

$$\hat{U}_j = \max\{\hat{U}_{j-1} + (Z_j - k), 0\},$$

όπου  $\hat{U}_0$  είναι μια καθορισμένη σταθερά και  $k \geq 0$ . Η ποσότητα  $k$  καλείται τιμή αναφοράς (reference value) του CUSUM διαγράμματος και συνήθως δίνεται από την σχέση

$$k = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}.$$

Για να εισάγουμε την έννοια VSI στο διάγραμμα CUSUM θα χρησιμοποιήσουμε την τροποποιημένη στατιστική συνάρτηση

$$U_j = \max\{U_{j-1}, 0\} + (Z_j - k), \quad (8)$$

όπου το  $U_0$  είναι μια σταθερά. Η διαφορά των δύο αυτών στατιστικών συναρτήσεων είναι ότι η πρώτη αμέσως αλλάζει οποιαδήποτε αρνητική τιμή CUSUM σε 0, ενώ η δεύτερη καταγράφει την αρνητική CUSUM τιμή και μετά αρχίζει την άθροιση από το 0 για το επόμενο δείγμα. Εκτός από αυτή τη διαφορά τα  $\hat{U}_j$  και  $U_j$  είναι ισοδύναμα. Ο λόγος για τον οποίο χρειάζεται να γίνει η καταγραφή αυτών των αρνητικών CUSUM τιμών είναι ότι μπορεί να χρησιμεύσουν στον καθορισμό των διαστημάτων δειγματοληψίας. Το διάγραμμα CUSUM δίνει προειδοποιητικό σήμα όταν  $U_j > h$  (ισοδύναμα  $\hat{U}_j > h$ ), όπου το  $h \geq 0$  συνήθως καλείται διάστημα απόφασης (decision interval). Συνήθως ισχύει ότι  $U_0 = 0$ .

Οι παράμετροι  $h$  και  $k$  επιλέγονται έτσι ώστε το διάγραμμα να έχει συγκεκριμένες ιδιότητες. Το  $k$  συνήθως προσδιορίζεται από την μεταβολή του μέσου που το διάγραμμα CUSUM έχει σχεδιαστεί να ανιχνεύει. Ας είναι

$$\delta = \left| \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \right|$$

το μέγεθος της απόκλισης του  $\mu$  από το  $\mu_0$ , εκφρασμένο σε μονάδες τυπικού σφάλματος του  $\bar{X}$ . Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα CUSUM έτσι ώστε να ανιχνεύει μια μεταβολή του  $\mu_0$  σε μια προκαθορισμένη τιμή  $\mu_1$ , τότε το  $k$  θα πρέπει να είναι ίσο με  $\delta_1/2$ , όπου  $\delta_1$  είναι η αντίστοιχη τιμή του  $\delta$  για  $\mu$  ίσο με  $\mu_1$ . Όταν προσδιοριστεί το  $k$ , η παράμετρος  $h$

επιλέγεται έτσι ώστε να πάρουμε ένα προκαθορισμένο αναμενόμενο πλήθος δειγμάτων μέχρι το προειδοποιητικό σήμα όταν  $\mu = \mu_0$ .

Για να ανιχνεύσουμε αρνητικές μεταβολές στο  $\mu$ , αντί για την σχέση (8), χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$L_j = \min\{L_{j-1}, 0\} + (Z_j + k),$$

όπου  $L_0$  είναι σταθερά και  $k \geq 0$  η τιμή αναφοράς. Ένα διάγραμμα που χρησιμοποιεί αυτή την στατιστική συνάρτηση θα δίνει προειδοποιητικό σήμα όταν  $L_j < -h$ , με  $h \geq 0$ .

Όταν στόχος μας είναι να ανιχνεύσουμε και θετικές και αρνητικές μεταβολές στον μέσο της παραγωγικής διεργασίας, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δίπλευρο σχήμα που θα χρησιμοποιεί και τα δύο διαγράμματα ταυτόχρονα. Το δίπλευρο CUSUM διάγραμμα θα δίνει προειδοποιητικό σήμα, όποτε ένα από τα δύο μονόπλευρα διαγράμματα δώσει προειδοποιητικό σήμα. Γι' αυτόν τον λόγο, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου του δίπλευρου διαγράμματος θα είναι η δισδιάστατη την στατιστική συνάρτηση CUSUM  $(U_j, L_j)$ . Το δίπλευρο διάγραμμα λέμε ότι είναι συμμετρικό όταν τα μονόπλευρα έχουν τις ίδιες παραμέτρους  $h$  και  $k$ . Όταν δεν μας ενδιαφέρει αυτό, θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς  $U$  και  $L$  με τις παραμέτρους  $h$  και  $k$  για να δηλώσουμε το άνω και κάτω διάγραμμα, αντίστοιχα.

Για ένα δεδομένο CUSUM διάγραμμα, με  $C$  θα συμβολίζουμε την περιοχή συνέχισης του διαγράμματος, με την έννοια ότι όταν ένα σημείο πέσει σ' αυτή την περιοχή συνεχίζουμε με τη λήψη του επόμενου δείγματος και όταν πέσει εκτός αυτής της περιοχής θα παίρνουμε προειδοποιητικό σήμα. Όταν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM είναι εντός της περιοχής  $C$ , το διάστημα δειγματοληψίας θα αλλάζει σαν συνάρτηση της τρέχουσας τιμής της στατιστικής συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι τα πιθανά μήκη των διαστημάτων δειγματοληψίας μπορεί να είναι μεταξύ  $l_1$  και  $l_2$ , όπου το ελάχιστο μήκος  $l_1 > 0$  μπορεί να προσδιοριστεί από υποθέσεις όπως ο ελάχιστος δυνατός χρόνος που χρειάζεται για να πάρουμε ένα δείγμα και το μέγιστο μήκος  $l_2$  μπορεί να προσδιοριστεί από το μέγιστο λογικό χρόνο που μπορούμε να αφήσουμε την παραγωγική διεργασία να συνεχίσει χωρίς να πάρουμε κανένα δείγμα. Διαισθητικά, μπορούμε να πούμε ότι θα χρησιμοποιούμε ένα μικρό διάστημα όταν η στατιστική συνάρτηση CUSUM πέφτει κοντά στην περιοχή προειδοποιητικού σήματος. Θα συμβολίζουμε με  $d_1$  το μικρό διάστημα δειγματοληψίας και με  $d_2$  το μεγάλο.

Για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα θα χρησιμοποιούμε το  $d_1$  όταν  $U_j \in (g, h]$  και το  $d_2$  όταν  $U_j \in (-\infty, g]$ , όπου  $-\infty < g \leq h$ . Έτσι το  $g$  είναι το όριο μεταξύ των περιοχών που ορίζουνε πιο διάστημα δειγματοληψίας θα χρησιμοποιήσουμε. Για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα θα χρησιμοποιούμε το  $d_1$  όταν  $L_j \in [-h, -g)$  και το  $d_2$  όταν  $L_j \in [-g, \infty)$ . Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε δίπλευρο διάγραμμα, το κάθε μονόπλευρο μπορεί να έχει διαφορετικά διαστήματα δειγματοληψίας. Για παράδειγμα, εάν  $U_j \in (g, h]$  και  $L_j \in [-g, \infty)$ , το άνω διάγραμμα ορίζει για διάστημα το  $d_1$  ενώ το κάτω διάγραμμα ορίζει το  $d_2$ . Ένας λογικός κανόνας για να καθορίζουμε πιο διάστημα θα χρησιμοποιούμε όταν έχουμε το δίπλευρο διάγραμμα είναι να χρησιμοποιούμε το  $d_1$  όταν κάποιο από τα δύο μονόπλευρα ορίσουν το  $d_1$ , και να χρησιμοποιούμε το  $d_2$  όταν και τα δύο μονόπλευρα ορίζουν το  $d_2$ . Θα δούμε στην συνέχεια πως όταν ένα δίπλευρο διάγραμμα λειτουργεί μ' αυτόν τον κανόνα, συνήθως θα είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε ένα μεγαλύτερο  $g$  από ότι εάν λειτουργούσε κάποιο μονόπλευρο διάγραμμα μόνο του.

### 1.3.3 Ιδιότητες του VSI CUSUM διαγράμματος

Η ικανότητα ενός διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση αλλαγών σε μια παραγωγική διεργασία καθορίζεται από μια συνάρτηση του χρόνου που χρειάζεται το διάγραμμα για να δώσει προειδοποιητικό σήμα. Αν με  $N$  συμβολίζουμε τον αριθμό δειγμάτων που χρειάστηκαν μέχρι να πάρουμε προειδοποιητικό σήμα, τότε ο χρόνος  $T$  που χρειάζεται ένα FSI διάγραμμα για να δώσει σήμα είναι ουσιαστικά το γινόμενο του  $N$  επί το μήκος του σταθερού διαστήματος δειγματοληψίας. Επομένως, ότι μας ενδιαφέρει για τον χρόνο μπορούμε να το απαντήσουμε εύκολα μέσω του  $N$ , το οποίο είναι γνωστό ως μήκος ροής (run length). Όπως και στα διαγράμματα Shewhart έτσι και τώρα θα ασχοληθούμε με γνωστές πλέον έννοιες όπως το ARL, ATS και ANSS.

Θεωρούμε τώρα ότι χρησιμοποιούμε δύο διαστήματα δειγματοληψίας,  $d_1$  και  $d_2$ , και έστω  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$ , ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων πριν πάρουμε σήμα που καθορίζει ότι το  $i$  διάστημα δειγματοληψίας θα χρησιμοποιηθεί. Με  $d_0$  συμβολίζουμε το διάστημα δειγματοληψίας πριν πάρουμε το πρώτο δείγμα, δηλαδή τον χρόνο από την αρχή της διεργασίας μέχρι την στιγμή που θα πάρουμε το πρώτο δείγμα. Σε πολλές περιπτώσεις

συνηθίζεται να είναι  $d_0 = d_1$  ώστε να πάρουμε γρήγορα το πρώτο δείγμα, εδώ όμως θα υποθέσουμε πως το  $d_0$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις δύο τιμές. Αφού γνωρίζουμε τι είναι τα ATS, ANSS,  $\psi_1$  και  $\psi_2$  μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύει

$$ANSS = 1 + \psi_1 + \psi_2$$

και

$$ATS = d_0 + d_1\psi_1 + d_2\psi_2.$$

Με  $\rho_1$  συμβολίζουμε την πιθανότητα το διάστημα δειγματοληψίας να είναι το  $d_1$  και  $1 - \rho_1$  θα είναι η πιθανότητα το διάστημα δειγματοληψίας να είναι το  $d_2$ . Έτσι το  $\rho_1$  θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (\psi_1 + 1) / ANSS, \quad \alpha \nu d_0 = d_1 \\ &= \psi_1 / ANSS, \quad \alpha \nu d_0 = d_2 \end{aligned}$$

Το ATS σε σχέση με το ANSS μπορεί να γραφεί ως

$$ATS = d \cdot ANSS \quad (9)$$

όπου

$$d = d_1\rho_1 + d_2(1 - \rho_1). \quad (10)$$

Στα VSI διαγράμματα μπορούμε να ερμηνεύσουμε το  $d$  ως το μέσο διάστημα δειγματοληψίας. Ωστόσο, όταν θα αναφερόμαστε στα FSI διαγράμματα, το  $d$  θα αντιπροσωπεύει το προκαθορισμένο σταθερό διάστημά τους. Στην συνέχεια, όποτε θα χρειάζεται να ξεχωρίζουμε μεταξύ του άνω ή κάτω μονόπλευρου διαγράμματος και του δίπλευρου διαγράμματος, θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα  $U$ ,  $L$  και  $T$ , αντίστοιχα, πάνω στους συμβολισμούς ATS, ANSS,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  και  $\rho_1$ .

Ένα δίπλευρο CUSUM διάγραμμα είναι αρκετά πιο πολύπλοκο από ένα μονόπλευρο και η άμεση εκτίμηση των ιδιοτήτων του είναι συνήθως δύσκολη. Έτσι σε πολλές περιπτώσεις, οι διάφορες ιδιότητες του δίπλευρου εξάγονται από τις αντίστοιχες ιδιότητες των δύο μονόπλευρων διαγραμμάτων. Κάτω από την υπόθεση ότι :

$$|h_U - h_L| \leq k_U + k_L \quad (11)$$

είναι γνωστό ότι ισχύει

$$ANSS_T = ANSS_U \cdot ANSS_L / (ANSS_U + ANSS_L) \quad (12)$$

Η υπόθεση (11) εξασφαλίζει ότι το ένα μονόπλευρο διάγραμμα θα αρχίζει τη συσσώρευση από το 0 στο επόμενο δείγμα όταν το άλλο μονόπλευρο διάγραμμα δίνει προειδοποιητικό

σήμα. Όταν το δίπλευρο διάγραμμα είναι συμμετρικό, τότε πάντα θα ικανοποιείται ότι  $h_U = h_L$  καθώς επίσης και η σχέση (11). Όταν η σχέση (11) ικανοποιείται και το αρχικό σημείο ικανοποιεί τη σχέση  $(U_0, -L_0) \leq (0, 0)$  αποδεικνύεται ότι

$$\rho_{1T} = \rho_{1U} + \rho_{1L} - (\gamma / ANSS_T) \quad (13)$$

όπου  $\gamma$  είναι το αναμενόμενο πλήθος δειγμάτων στα οποία  $U_j \geq g_U$  και  $L_j \leq -g_L$  μέχρι το δείγμα όπου το δίπλευρο διάγραμμα δίνει συναγερμό.

Στην ειδική περίπτωση που ισχύει  $(U_0, -L_0) \leq (0, 0)$  και  $\gamma = 0$  αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12) και (13) στις (9) και (10) παίρνουμε

$$ATS_T = ANSS_U \cdot ANSS_L [d_1(\rho_{1U} + \rho_{1L}) + d_2(1 - \rho_{1U} - \rho_{1L})] / (ANSS_U + ANSS_L) \quad (14)$$

Έτσι, το ATS του δίπλευρου διαγράμματος μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τα μονόπλευρα διαγράμματα. Αποδεικνύεται ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει  $\gamma = 0$  είναι η

$$g_U + g_L \geq \max\{h_U, h_L\} - k_U - k_L \quad (15)$$

Όταν το δίπλευρο διάγραμμα είναι συμμετρικό η (15) είναι ισοδύναμη με  $g \geq (h - 2k)/2$ . Για τις περιπτώσεις όπου  $\gamma > 0$  μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι χρησιμοποιώντας  $\gamma = 0$  στις σχέσεις (13), (9) και (10) παίρνουμε ένα κάτω φράγμα για το ATS. Η διαφορά του φράγματος από το ATS είναι  $(d_2 - d_1) \cdot (\gamma / ANSS_T)$ . Σε μερικές περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος, η επιθυμητή τιμή του  $g$  θα είναι τέτοια ώστε το  $\gamma$  να είναι 0, και σε άλλες περιπτώσεις το  $\gamma$  θα είναι τόσο κοντά στο 0 που θα παίρνουμε πολύ καλή προσέγγιση του ATS από το φράγμα. Για τα συμμετρικά διαγράμματα που θα δούμε στην συνέχεια, η προσέγγιση του φράγματος θα είναι αρκετά καλή αν το  $g$  είναι τέτοιο ώστε  $\rho_{1T} \leq 5$ . Την επιλογή του  $g$  θα την δούμε στην συνέχεια.

### 1.3.4 Αριθμητικός υπολογισμός του ATS

Μια μέθοδος για τον προσεγγιστικό αριθμητικό υπολογισμό των ιδιοτήτων του VSI CUSUM διαγράμματος ελέγχου βασίζεται στις Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η μέθοδος αυτή είναι εύκολη στην χρήση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το ακριβές ANSS ενός CUSUM με διακριτό χώρο καταστάσεων και να δώσουμε καλές προσεγγίσεις όταν ο χώρος καταστάσεων είναι συνεχής. Στην δεύτερη περίπτωση, ο συνεχής χώρος καταστάσεων

της στατιστικής συνάρτησης CUSUM διαμερίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών κλάσεων διαστημάτων και η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM διακριτοποιείται.

Υποθέτουμε ότι η περιοχή  $C$  ενός CUSUM διαγράμματος διαμερίζεται σε  $r$  περιοχές  $E_1, E_2, \dots, E_r$ , όπου κάθε περιοχή αντιστοιχεί σε μια κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Επιπλέον, υπάρχει και μια απορροφητική κατάσταση  $A$  που αντιστοιχεί στην περιοχή συναγερμού. Για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ισχύει  $C = (-\infty, h]$  και σύμφωνα με τους Brook & Evans (1972) οι περιοχές είναι διαστήματα. Εκτός του  $E_1$ , τα διαστήματα έχουν ίσο μήκος, και το  $U_j$  αντικαθίσταται από μια διακριτή εκδοχή του οποίου πιθανές τιμές είναι τα μεσαία σημεία των διαστημάτων  $E_i$ . Όλες οι αρνητικές τιμές αυτής της διακριτής εκδοχής αντιστοιχούν στην κατάσταση  $E_1$ . Για το VSI CUSUM διάγραμμα με  $g < 0$ , όλες οι αρνητικές τιμές του  $U_j$  δεν ορίζουν το ίδιο διάστημα δειγματοληψίας, και έτσι για το διάστημα  $(-\infty, 0]$  πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο περιοχές, οι  $(-\infty, g]$  και  $(g, 0]$ . Στο δίπλευρο διάγραμμα, το  $C$  διαχωρίζεται σε τετράγωνα, όπου οι πιθανές τιμές της διακριτής έκφρασης των  $(U_j, L_j)$  είναι θέσεις εντός των τετραγώνων. Ωστόσο, στην συνέχεια όπου θα έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που θα βασίζεται σε μια διαμέριση του  $C$ , δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ της στατιστικής συνάρτησης CUSUM και της διακριτής εκδοχής της. Υποθέτουμε ότι κάθε κατάσταση  $E_i$  αντιστοιχεί στην χρήση ενός μήκους διαστήματος δειγματοληψίας όπου φυσικά πολλές καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιούν το ίδιο μήκος διαστήματος. Με  $b_i$  θα συμβολίζουμε το διάστημα δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται όταν η στατιστική συνάρτηση CUSUM είναι στην περιοχή  $E_i$ , και  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}'$ . Ο πίνακας μετάβασης  $P$  της Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να γραφεί ως

$$P = \begin{bmatrix} Q & (I - Q)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

όπου  $Q$  είναι ο υποπίνακας του  $P$  που αντιστοιχεί στις  $r$  μεταβατικές καταστάσεις,  $\mathbf{0}$  είναι ένα μηδενικό διάνυσμα διάστασης  $r \times 1$  και  $\mathbf{1}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα διάστασης  $r \times 1$ . Τις ιδιότητες του CUSUM διαγράμματος μπορούμε να τις πάρουμε δουλεύοντας με τον υποπίνακα  $Q$ . Ορίζουμε τον θεμελιώδη πίνακα  $M$  με  $M = [m_{ij}] = (I - Q)^{-1}$ . Οι πίνακες  $P$ ,  $Q$  και  $M$  εξαρτώνται από την τιμή του  $\mu$  κάτι όμως που δεν θα είναι ορατό. Είναι γνωστό

ότι  $m_{ij}$  είναι το αναμενόμενο πλήθος των φορών που η διεργασία είναι στην μεταβατική κατάσταση  $E_j$  πριν απορροφηθεί στην κατάσταση  $A$ , δεδομένου ότι η διεργασία ξεκινάει στην κατάσταση  $E_i$ .  $ANSS_i$  θα είναι το ANSS όταν το CUSUM ξεκινάει από την κατάσταση  $i$ , και  $\mathbf{ANSS}' = (ANSS_1, ANSS_2, \dots, ANSS_r)$ . Επειδή κάθε φορά που συλλέγουμε ένα δείγμα συμβαίνει και μια μετάβαση στην Μαρκοβιανή αλυσίδα, το  $ANSS_i$  θα είναι ίσο με

$$ANSS_i = \sum_{j=1}^r m_{ij} . \quad (16)$$

Το διάνυσμα τιμών του ANSS,  $\mathbf{ANSS} = M\mathbf{1}$ , μας δίνει το αναμενόμενο πλήθος των δειγμάτων μέχρι το προειδοποιητικό σήμα ανάλογα για τις διαφορετικές αρχικές καταστάσεις. Η τιμή του ANSS ενός CUSUM διαγράμματος εξαρτάται από τις δύο παραμέτρους  $k$  και  $h$ , όταν ένα VSI CUSUM διάγραμμα και ένα FSI CUSUM διάγραμμα έχουν τις ίδιες παραμέτρους  $k$  και  $h$  θα έχουν και το ίδιο ANSS.

Με  $ATS_i$  θα συμβολίζουμε το ATS όταν η αρχική κατάσταση είναι η  $i$ ,  $d_0 = b_i$ , και ο μέσος της διεργασίας είναι σταθερός. Τότε

$$ATS_i = \sum_{j=1}^r m_{ij} b_j . \quad (17)$$

Αυτό έχει τη διαισθητική ερμηνεία σαν το άθροισμα, για όλες τις μεταβατικές καταστάσεις, του γινομένου του αναμενόμενου πλήθους των επισκέψεων σε μια κατάσταση επί του μήκους του διαστήματος δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται όταν βρισκόμαστε σ' αυτήν την κατάσταση. Το διάνυσμα των ATS τιμών είναι το  $\mathbf{ATS} = M\mathbf{b}$ . Για περιπτώσεις όπου ως αρχική κατάσταση είναι η  $i$  αλλά  $d_0 \neq b_i$ , το ATS θα είναι  $ATS_i + d_0 - b_i$ .

Όταν είναι διαθέσιμο το μοντέλο των Μαρκοβιανών αλυσίδων για ένα μονόπλευρο ή δίπλευρο CUSUM διάγραμμα, μπορούμε να βρούμε το ATS και το ANSS χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (16) και (17). Όταν είναι απαραίτητο να βρούμε ιδιότητες του δίπλευρου διαγράμματος σε όρους του μονόπλευρου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις που δόθηκαν στην παράγραφο «1.2.3». Για να εκτιμήσουμε το  $\psi_1$  και το  $\rho_1$  μέσω ενός μοντέλου με Μαρκοβιανές αλυσίδες, έστω  $\psi_{1i}$  και  $\rho_{1i}$  οι τιμές του  $\psi_1$  και του  $\rho_1$ , αντίστοιχα, όταν η αρχική κατάσταση είναι η  $i$  και  $d_0 = b_i$ . Επιπλέον με  $D_1$  θα συμβολίζουμε το σύνολο των καταστάσεων που καθορίζουν το  $d_1$ . Τότε



$$\begin{aligned}\psi_{1i} &= \sum_{j \in D_1} m_{ij} - 1, \quad \alpha \nu i \in D_1 \\ &= \sum_{j \in D_1} m_{ij}, \quad \alpha \nu i \notin D_1\end{aligned}$$

και

$$\rho_{1i} = \sum_{j \in D_1} m_{ij} / ANSS_i .$$

Με  $\text{var}_i$  θα συμβολίζουμε την διακύμανση του χρόνου μέχρι τον συναγερμό όταν η αρχική κατάσταση είναι  $i$ . Τότε, έχει αποδειχθεί από τον Amin (1987), ότι το διάνυσμα των διακυμάνσεων είναι  $\mathbf{var} = MB(2M - 1)\mathbf{b} - (M\mathbf{b})^{(2)}$ , όπου  $B$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας που στην κύρια διαγώνιο έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του  $\mathbf{b}$  και  $(M\mathbf{b})^{(2)}$  είναι ένα διάνυσμα του οποίου το  $i$ -οστό στοιχείο είναι το τετράγωνο του  $i$ -οστού στοιχείου του  $M\mathbf{b}$ .

### 1.3.5 Το ATS σταθερής κατάστασης (steady-state ATS)

Για μια αρχική κατάσταση  $i$ , το ATS που υπολογίζεται υποθέτοντας ότι  $\mu = \mu_0$  μας δίνει τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι τον πρώτο εσφαλμένο συναγερμό. Το ATS που υπολογίζεται υποθέτοντας ότι  $\mu = \mu_1$  μας δίνει τον αναμενόμενο χρόνο ανίχνευσης για την περίπτωση που η διεργασία έχει ξεκινήσει με  $\mu = \mu_1$ . Μπορεί να υπάρχουν περιπτώσεις στην πράξη όπου η διεργασία ξεκινάει με  $\mu = \mu_1$ , στις περισσότερες όμως εφαρμογές είναι πιο ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι η διεργασία ξεκινάει με  $\mu = \mu_0$  και η μεταβολή σε  $\mu_1$  συμβαίνει σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή στην συνέχεια. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο χρόνος ανίχνευσης που μας ενδιαφέρει είναι το μήκος του χρόνου, έστω  $T^*$ , από την στιγμή που συμβαίνει η μεταβολή μέχρι την στιγμή που το διάγραμμα μας δίνει προειδοποιητικό σήμα. Ο καθορισμός της κατανομής του  $T^*$  είναι περίπλοκος λόγω του ότι η χρονική στιγμή στην οποία συμβαίνει η μεταβολή μπορεί να ανήκει στο διάστημα μεταξύ δύο δειγμάτων και εκείνη τη στιγμή η στατιστική συνάρτηση CUSUM μπορεί να μην είναι στην αρχική κατάσταση. Έτσι, για να καθορίσουμε την κατανομή του  $T^*$ , είναι απαραίτητο να καθορίσουμε την κατανομή του χρονικού σημείου που γίνεται η μεταβολή μέσα στο διάστημα δειγματοληψίας και την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM την στιγμή της μεταβολής.

Ένας τρόπος για να βρούμε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης CUSUM την στιγμή της μεταβολής, είναι να υποθέσουμε ότι ο χρόνος στον οποίο συμβαίνει η μεταβολή ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή, π.χ. την εκθετική κατανομή. Αυτή η προσέγγιση, ωστόσο, είναι λίγο δύσκολη. Αντί γι' αυτό, θα υποθέσουμε ότι η μεταβολή συμβαίνει αφού η διεργασία έχει λειτουργήσει για μια λογικά μεγάλη διάρκεια έτσι ώστε η στατιστική συνάρτηση CUSUM να βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση ή σε στάσιμη κατανομή στο δείγμα που πήραμε αμέσως πριν την μεταβολή. Η αναμενόμενη τιμή του  $T^*$  έχει ονομαστεί από τους Reynolds et al. (1988) σαν AATS, επειδή το ATS προσαρμόστηκε για τον υπολογισμό της μεταβολής που συμβαίνει αφού έχει ξεκινήσει η διεργασία. Όταν η προσαρμογή βασίζεται στην χρήση μιας κατανομής σταθερής κατάστασης, το AATS θα λέγεται ATS σταθερής κατάστασης (steady-state ATS).

Για να καθορίσουμε την συμπεριφορά της σταθερής κατάστασης στα FSI CUSUM διαγράμματα υπάρχουν διάφορες μέθοδοι. Για να ορίσουμε μια κατανομή σταθερής κατάστασης που θα έχει νόημα, είναι απαραίτητο να κάνουμε κάποια υπόθεση για τους λανθασμένους συναγερούς που συμβαίνουν πριν γίνει οποιαδήποτε μεταβολή στο  $\mu$ . Μία μέθοδος, η οποία καλείται «κυκλικό ARL σταθερής κατάστασης» (cyclical steady-state ARL) από τον Crosier (1986), υποθέτει ότι η στατιστική συνάρτηση CUSUM επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση αμέσως μετά από έναν λανθασμένο συναγερό. Αυτή η μέθοδος έχει το μειονέκτημα ότι τα αποτελέσματα που εξαρτώνται από την ειδική αρχική κατάσταση χρησιμοποιήθηκαν για την επαναφορά της στατιστικής συνάρτησης CUSUM στην αρχική του κατάσταση. Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια χρησιμοποιεί την στάσιμη κατανομή υπό την προϋπόθεση να μην έχει συμβεί λανθασμένος συναγερός (Yashchin 1985). Αυτή η υποθετική στάσιμη κατανομή, έστω  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$ , είναι το κανονικοποιημένο αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα  $Q$  (Darroch & Seneta 1965).

Όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει χρόνο να φτάσει σε στάσιμη κατανομή, η συχνότητα με την οποία χρησιμοποιούνται τα διαστήματα δειγματοληψίας εξαρτάται από το  $\boldsymbol{\pi}$ . Επιπλέον, η πιθανότητα με την οποία η μεταβολή πέφτει σε ένα συγκεκριμένο διάστημα θα εξαρτάται κι αυτή από το μήκος του διαστήματος. Για τον λόγο αυτό, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα με την οποία η μεταβολή συμβαίνει σε ένα διάστημα συγκεκριμένου μήκους είναι ανάλογη του γινομένου του μήκους αυτού του διαστήματος επί την συχνότητα με την οποία το διάστημα αυτό χρησιμοποιείται όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι σε σταθερή

κατάσταση. Αυτή η λογική συνεπάγεται ότι η πιθανότητα, έστω  $\alpha_i$ , με την οποία η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση  $i$  στο δείγμα ακριβώς πριν την μεταβολή είναι

$$\alpha_i = \pi_i b_i / \sum_{j=1}^r \pi_j b_j = \pi_i b_i / \boldsymbol{\pi}' \mathbf{b}.$$

Έστω  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι όταν η μεταβολή συμβεί σε ένα συγκεκριμένο διάστημα η θέση της μέσα στο διάστημα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Για τον λόγο αυτό, αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση  $i$  αμέσως πριν την μεταβολή, ο αναμενόμενος χρόνος από την μεταβολή ως το επόμενο δείγμα είναι  $b_i / 2$ . Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση  $j$  στο πρώτο δείγμα μετά την μεταβολή, ο επιπλέον χρόνος που χρειάζεται μέχρι τον συναγερμό είναι το  $ATS_j$  που υπολογίζεται υποθέτοντας ότι  $\mu = \mu_1$ . Επομένως, το ATS όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση  $i$  αμέσως πριν την μεταβολή είναι

$$(b_i / 2) + \sum_{j=1}^r p_{ij} ATS_j.$$

Τότε, βρίσκουμε το ATS σταθερής κατάστασης παίρνοντας ένα σταθμισμένο μέσο χρησιμοποιώντας το  $\boldsymbol{\alpha}$ . Αυτό δίνει

$$E(T^*) = \boldsymbol{\alpha}' [\mathbf{b}/2 + \mathbf{Q}ATS] = \boldsymbol{\alpha}' [I/2 + \mathbf{Q}M] \mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}' [M - I/2] \mathbf{b},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $\mathbf{Q}M = M - I$ . Έχει αποδειχθεί (Reynolds (1988)) ότι

$$\text{var}(T^*) = \boldsymbol{\alpha}' [(2M - I)(B/2 - \mathbf{b}'\boldsymbol{\alpha}/4)(2M - I) - B/6] \mathbf{b}.$$

Επισημαίνουμε ότι στις εκφράσεις που δώσαμε για την μέση τιμή και την διακύμανση του  $T^*$ , παίρνουμε το  $\boldsymbol{\alpha}$  χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης για  $\mu = \mu_0$ , και το  $M$  χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης για  $\mu = \mu_1$ .

Το ATS σταθερής κατάστασης υπολογίζει το μέσο όρο το ATS στις πιθανές καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας και στις πιθανές θέσεις της μεταβολής του  $\mu$  μέσα στο διάστημα. Ένα πρόβλημα που θα μπορούσε να δημιουργηθεί στην VSI θεωρία είναι ότι αν χρησιμοποιούμε ένα πολύ μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας και στην αρχή του διαστήματος αυτού συμβεί μια μεγάλη μεταβολή, θα υπάρχει μια σχετικά μεγάλη αναμονή μέχρι το επόμενο δείγμα. Στην περίπτωση αυτή, ο χρόνος ανίχνευσης μπορεί να είναι μεγαλύτερος

από ότι σε ένα FSI διάγραμμα. Για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα, αυτή η ανεπιθύμητη περίπτωση θα μπορούσε να συμβεί αν η μεταβολή συμβεί αμέσως μετά την λήψη ενός δείγματος που έδωσε  $U_j \leq 0$  και χρησιμοποιούσαμε το μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας. Στην περίπτωση αυτή, ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι τον συναγερμό είναι ισοδύναμος με το ATS όταν η διεργασία ξεκινάει στον χρόνο 0 όταν  $\mu = \mu_1$ , και η Μαρκοβιανή αλυσίδα ξεκινάει σε οποιαδήποτε κατάσταση  $i$  για την οποία  $U_j \leq 0$  και επιπλέον χρησιμοποιείται το μεγάλο διάστημα. Γενικότερα, το ATS αυτής της χειρότερης περίπτωσης είναι το μέγιστο  $ATS_i$ .

### 1.3.6 Σύγκριση FSI και VSI διαγραμμάτων

Για να δούμε κατά πόσο η χρήση ενός VSI CUSUM διαγράμματος είναι χρήσιμη, θα συγκρίνουμε το διάγραμμα αυτό με το αντίστοιχο FSI CUSUM διάγραμμα. Γνωρίζουμε ότι αν και τα δύο διαγράμματα έχουν τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους  $n$ ,  $h$  και  $k$  τότε θα έχουν και το ίδιο ANSS, δηλαδή η πρόσθεση του χαρακτηριστικού VSI στα διαγράμματα CUSUM δεν επιφέρει καμία επίδραση στο ANSS. Αν επιλέξουμε να έχουμε ίδια διαστήματα δειγματοληψίας τέτοια ώστε και τα δύο διαγράμματα να έχουν το ίδιο ATS όταν  $\mu = \mu_0$ , τότε και τα δύο διαγράμματα θα έχουν τον ίδιο μέσο ρυθμό δειγματοληψίας όταν  $\mu = \mu_0$ . Αν το  $d$  του FSI διαγράμματος είναι ίσο με το  $d$  που δόθηκε στην σχέση (10) για το VSI διάγραμμα όταν  $\mu = \mu_0$ , τότε τα δύο διαγράμματα θα έχουν το ίδιο ATS στο  $\mu = \mu_0$ . Όταν τα δύο διαγράμματα ταιριάζουν κατ' αυτόν τον τρόπο, η απόδοση τους μπορεί να μετρηθεί υπολογίζοντας το ATS για διάφορες τιμές του  $\mu_1$  έτσι ώστε να προσδιορίσουμε πιο από τα δύο διαγράμματα είναι καλύτερο στην ανίχνευση αλλαγών στον μέσο της διεργασίας. Προφανώς, όποιο διάγραμμα παρουσιάζει μικρότερο ATS σε κάποιο συγκεκριμένο  $\mu_1$ , τότε είναι και καλύτερο ως προς την ανίχνευση μιας τέτοιας μεταβολής.

Κατά την σύγκριση VSI και FSI διαγραμμάτων ως μονάδα του χρόνου επιλέγουμε το διάστημα δειγματοληψίας του FSI διαγράμματος έτσι ώστε  $d = 1$ . Όταν  $d = 1$ , το ATS και το ANSS του FSI CUSUM διαγράμματος έχουν την ίδια τιμή. Για τις συγκρίσεις που θα ακολουθήσουν, οι παράμετροι  $h$  και  $k$  έχουν επιλεγεί έτσι ώστε το ANSS του μονόπλευρου διαγράμματος να είναι 740.8 και του δίπλευρου διαγράμματος 370.4, δηλαδή το ίδιο με αυτό

του Shewhart  $\bar{X}$  διαγράμματος με  $3\sigma$  όρια ελέγχου. Τα παρακάτω αποτελέσματα που δίνονται για ένα μονόπλευρο διάγραμμα ισχύουν και για το άνω και για το κάτω διάγραμμα.

**Πίνακας 1-14**

ATS σταθερής κατάστασης για συγκρίσιμα CUSUM διαγράμματα ελέγχου

(δ)	X-bar chart		CUSUM chart			
	FSI	VSI	k = 0.25		k = 1.0	
			FSI	VSI	FSI	VSI
0.00	740.8	740.8	740.8	740.8	740.8	740.8
0.25	335.1	276.4	78.0	46.6	210.0	166.3
0.50	160.5	106.2	25.3	11.1	68.4	40.7
1.00	43.5	17.7	9.4	3.6	12.8	4.6
1.50	14.5	4.1	5.6	2.1	4.8	1.7
2.00	5.8	1.7	4.0	1.6	2.7	1.2
3.00	1.5	1.0	2.5	1.2	1.3	1.0
4.00	0.7	0.9	1.8	1.1	0.8	0.9

**Πίνακας 1-15**

ATS σταθερής κατάστασης για δίπλευρα διαγράμματα

(δ)	X-bar chart		CUSUM chart			
	FSI	VSI	k = 0.25		k = 1.0	
			FSI	VSI	FSI	VSI
0.00	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
0.25	280.7	274.6	76.3	62.8	195.2	187.9
0.50	154.7	141.5	25.1	16.4	68.0	57.5
1.00	43.4	30.8	9.4	5.2	12.8	7.5
1.50	14.5	7.4	5.6	2.9	4.8	2.4
2.00	5.8	2.4	4.0	2.0	2.7	1.4
3.00	1.5	1.0	2.5	1.3	1.3	1.0
4.00	0.7	0.9	1.8	1.1	0.8	0.9

**Πίνακας 1-16**

Τυπική απόκλιση του χρόνου συναγερμού σταθερής κατάστασης

(δ)	X-bar chart		CUSUM chart			
	FSI	VSI	k = 0.25		k = 1.0	
			FSI	VSI	FSI	VSI
0.00	740.3	740.7	725.3	737.5	738.7	741.5
0.25	335.1	276.4	68.8	45.1	209.1	166.1
0.50	160.5	106.1	17.0	9.5	67.0	40.5
1.00	43.5	17.6	4.5	2.7	11.1	4.2
1.50	14.5	3.8	2.3	1.4	3.4	1.2
2.00	5.8	1.2	1.5	1.0	1.6	0.7
3.00	1.4	0.6	0.9	0.6	0.8	0.6
4.00	0.6	0.6	0.7	0.6	0.5	0.6

Στον Πίνακα 1-14 δίνουμε τις τιμές του ATS σταθερής κατάστασης για συγκρίσιμα μονόπλευρα FSI και VSI CUSUM διαγράμματα όπου  $k = 0.25$ ,  $h = 8.01$  και  $g = 0.69$ , και όταν  $k = 1$ ,  $h = 2.52$  και  $g = -0.90$ . Επιπλέον στον ίδιο πίνακα δίνουμε και τις τιμές του ATS σταθερής κατάστασης για μονόπλευρο FSI και VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα με  $3\sigma$  όρια ελέγχου. Όλα τα VSI διαγράμματα χρησιμοποιήσαν για διαστήματα δειγματοληψίας τα  $d_1 = 0.1$  και  $d_2 = 1.9$ . Παρακάτω θα αναφερθούμε και σε τρόπους επιλογής των παραμέτρων  $h$ ,  $k$ ,  $d_1$  και  $d_2$  του VSI διαγράμματος. Στον Πίνακα 1-15 παίρνουμε τις τιμές του ATS σταθερής κατάστασης για τα αντίστοιχα δίπλευρα διαγράμματα με αυτά του Πίνακα 1-14. Το πρώτο δίπλευρο διάγραμμα χρησιμοποιεί  $g = 1.95$  και το δεύτερο  $g = -0.19$ .

Όταν προσθέτουμε σε ένα διάγραμμα ελέγχου το χαρακτηριστικό VSI, θα μπορούσαμε να περιμένουμε μια αύξηση στην διακύμανση της κατανομής του χρόνου μέχρι να έχουμε προειδοποιητικό σήμα. Στον Πίνακα 1-16 παίρνουμε την τυπική απόκλιση του χρόνου συναγερμού σταθερής κατάστασης για τα διαγράμματα του Πίνακα 1-14. Αν η μεταβολή στον μέσο  $\mu$  δεν είναι μεγάλη, η κατανομή του χρόνου συναγερμού παρουσιάζει μια δεξιά ουρά εκθετικού τύπου και η τυπική απόκλιση είναι περίπου ίση με την μέση τιμή. Όταν  $\mu = \mu_0$ , η χρήση του χαρακτηριστικού VSI σε ένα διάγραμμα ελέγχου έχει πολύ μικρή επίδραση πάνω στην τυπική απόκλιση. Στην περίπτωση όμως που  $\mu \neq \mu_0$ , η μέση τιμή μειώνεται τόσο που η τυπική απόκλιση είναι μικρότερη από ότι στο FSI διάγραμμα.

Αν, τώρα, κοιτάξουμε και τους τρεις παραπάνω πίνακες μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η χρήση του χαρακτηριστικού VSI σε ένα διάγραμμα ελέγχου βελτιώνει σημαντικά την ικανότητα του διαγράμματος. Επίσης μπορούμε να δούμε πως αν και σημαντική, η βελτίωση στο δίπλευρο διάγραμμα δεν είναι τόσο μεγάλη όσο στο μονόπλευρο διάγραμμα. Για το FSI CUSUM διάγραμμα, το ATS (ή το ANSS) στην δίπλευρη περίπτωση είναι πολύ κοντά με αυτό της μονόπλευρης περίπτωσης εκτός και αν το  $\mu$  δεν είναι κοντά στο  $\mu_0$ . Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για το ATS στα VSI CUSUM διαγράμματα. Το δίπλευρο ATS δεν πλησιάζει το μονόπλευρο ATS αν το  $\mu$  δεν είναι αρκετά μακριά από το  $\mu_0$ . Τα αποτελέσματα των πινάκων επιβεβαιώνουν το γνωστό γεγονός ότι ένα FSI CUSUM διάγραμμα είναι ικανότερο από ένα FSI  $\bar{X}$  διάγραμμα ως προς την ανίχνευση μικρών και μεσαίων μεταβολών στον μέσο. Ωστόσο, προσθέτοντας το VSI χαρακτηριστικό στο  $\bar{X}$  διάγραμμα βελτιώνουμε το διάγραμμα στην ανίχνευση μικρών

μεταβολών. Γι' αυτό τον λόγο, αν μια συγκεκριμένη εφαρμογή απαιτεί μεγάλη ευαισθησία σε πολύ μικρές μεταβολές χωρίς να καταφύγουμε στο πολύπλοκο CUSUM διάγραμμα, το VSI  $\bar{X}$  διάγραμμα αποτελεί μια πολύ καλή εναλλακτική. Πάντως, το VSI CUSUM διάγραμμα είναι αρκετά ικανότερο στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μεταβολών στον μέσο από ότι το VSI Shewhart διάγραμμα ή το FSI CUSUM διάγραμμα. Είδαμε λοιπόν πως η χρήση του χαρακτηριστικού VSI βελτιώνει και τα διαγράμματα Shewhart και τα διαγράμματα CUSUM, και τέλος είδαμε πως το καλύτερο είναι το VSI CUSUM διάγραμμα.

### 1.3.7 Επιλογή των παραμέτρων του VSI CUSUM διαγράμματος

Η κατασκευή ενός FSI CUSUM διαγράμματος απαιτεί τον καθορισμό του μεγέθους δείγματος  $n$ , του διαστήματος δειγματοληψίας  $d$  και των παραμέτρων  $h$  και  $k$ . Στο VSI CUSUM διάγραμμα, οι παράμετροι  $h$ ,  $k$  και  $n$  πρέπει να καθοριστούν όπως στο FSI διάγραμμα, τώρα όμως το διάστημα δειγματοληψίας  $d$  θα αντικατασταθεί από τα δύο διαστήματα  $d_1$  και  $d_2$  και την παράμετρο  $g$ , η οποία καθορίζει πόσο συχνά εφαρμόζονται τα διαστήματα αυτά. Αν το  $d_1$  και το μέσο διάστημα δειγματοληψίας  $d$  είναι σταθερά, τότε το διάστημα  $d_2$  του VSI διαγράμματος θα μεταβάλλεται ως γραμμική συνάρτηση του  $\rho_1$ .

Σαν βοήθεια για την αποτίμηση και κατασκευή του VSI CUSUM διαγράμματος, οι Πίνακες 17-19 που θα ακολουθήσουν δίνουν τιμές του  $E(T^*)/d$  ενός μονόπλευρου διαγράμματος για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων  $h$ ,  $k$ ,  $\rho_1$ ,  $d_1/d$  και  $\delta$ . Οι πίνακες αυτοί απευθύνονται και στο άνω και στο κάτω διάγραμμα και έχουν δημιουργηθεί έτσι ώστε οι συνδυασμοί των  $h$  και  $k$  σε ένα πίνακα να δίνουν όλοι το ίδιο ANSS όταν  $\mu = \mu_0$ , όπου η αρχική κατάσταση αντιστοιχεί στο  $U_0 = 0$  (ή  $L_0 = 0$ ). Αυτές οι τιμές του ANSS είναι αντίστοιχα 200, 740.8 και 2000 για τους Πίνακες 1-17 έως 1-19. Το 740.8 επιλέχτηκε γιατί αντιστοιχεί σε ένα  $3\sigma$  όριο σε  $\bar{X}$  διάγραμμα. Σημειώνουμε ότι όταν  $\mu = \mu_0$  το ANSS είναι ισοδύναμο με το  $ATS/d$  έτσι ώστε οι τιμές του ANSS να μπορούν εύκολα να μετατραπούν στον αναμενόμενο χρόνο εσφαλμένου συναγερμού. Το  $k$  σε κάθε πίνακα παίρνει τις τιμές 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25 και 1.50 και το  $h$  προσαρμόστηκε έτσι ώστε να πάρουμε το απαιτούμενο ANSS όταν  $\mu = \mu_0$ . Σε κάθε πίνακα το  $\rho_1$  παίρνει τις τιμές 0.3, 0.5 και 0.7. Επίσης σε κάθε πίνακα δίνεται και η τιμή του  $g$  που αντιστοιχεί στα  $\rho_1$ . Για

$0.3 \leq \rho_1 \leq 0.7$ , το  $g$  είναι περίπου γραμμική συνάρτηση του  $\rho_1$  και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στους πίνακες γραμμική παρεμβολή. Οι τιμές που παίρνει το  $d_1/d$  είναι 0.1 και 0.5 και του  $\delta$  είναι 0.25, 0.5, 1.00, 2.00, και 3.00.

Οι Πίνακες 1-17 έως 1-19 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποτιμήσουμε την επίδραση της επιλογής των παραμέτρων  $d_1$ ,  $d_2$  και  $g$  στην απόδοση του μονόπλευρου VSI CUSUM διαγράμματος. Μια γρήγορη σύγκριση των στηλών όπου  $d_1/d = 0.1$  και  $d_1/d = 0.5$  δείχνει ότι το  $d_1/d = 0.1$  δίνει καλύτερη απόδοση. Όπως ήδη γνωρίζουμε, το  $d_1$  πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρό και το  $d_2$  όσο το δυνατόν πιο μεγάλο, όταν χρησιμοποιούμε ως κριτήριο ικανότητας ενός διαγράμματος την τιμή του ATS. Αν όμως χρησιμοποιούμε σαν κριτήριο το ATS σταθερής κατάστασης, τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι το  $d_2$  δεν χρειάζεται να είναι υπερβολικά μεγάλο. Μπορούμε να παρατηρήσουμε την επίδραση που έχει το  $d_2$  απλά κοιτώντας την επίδραση που επιφέρει η μεταβολή του  $\rho_1$  στους πίνακες. Όταν  $d_1/d = 0.1$ , οι τιμές του  $d_2/d$  που αντιστοιχούν για  $\rho_1 = 0.3, 0.5, 0.7$  είναι 1.39, 1.90 και 3.10. Στην δεύτερη περίπτωση όπου  $d_1/d = 0.5$  οι αντίστοιχες τιμές του  $d_2/d$  είναι 1.21, 1.50 και 2.17. Από τα αποτελέσματα των πινάκων αυτών είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως μια σχετικά μικρή τιμή για το  $d_2$  είναι κατάλληλη για την ανίχνευση μεγάλων μεταβολών στον μέσο της διεργασίας, ενώ μια σχετικά μεγάλη τιμή για το  $d_2$  είναι κατάλληλη για την ανίχνευση μικρών μεταβολών. Στις περισσότερες περιπτώσεις, μια επιλογή του  $d_2$  που κάνει τα δύο διαστήματα δειγματοληψίας συμμετρικά σε σχέση με το  $d$ , παράγει ένα διάγραμμα με αρκετά καλή ικανότητα στην ανίχνευση ευρείας κλίμακας διαφορετικών μεταβολών του  $\mu$ .



**Πίνακας 1-17**

$E(T^*)/d$  για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με ANSS = 200 όταν  $\mu = \mu_0$

k	h	$\rho_1$	g	$d_1/d = 0.1$					$d_1/d = 0.5$				
				Shift ( $\delta$ )					Shift ( $\delta$ )				
				0.25	0.5	1.0	2.0	3.0	0.25	0.5	1.0	2.0	3.0
0.25	5.60	0.3	1.40	32.3	10.2	3.3	1.3	0.9	36.2	13.0	4.7	2.0	1.3
		0.5	0.55	29.5	9.1	3.1	1.4	1.1	34.6	12.3	4.6	2.0	1.3
		0.7	-0.16	27.4	8.5	3.2	1.8	1.6	33.3	11.9	4.5	2.1	1.5
0.50	3.50	0.3	0.47	44.2	13.3	3.1	1.1	0.8	48.2	16.3	4.5	1.6	1.0
		0.5	-0.14	40.9	11.6	2.8	1.2	1.0	46.4	15.3	4.3	1.6	1.1
		0.7	-0.74	37.6	10.3	2.9	1.7	1.5	44.4	14.5	4.2	1.7	1.2
0.75	2.48	0.3	0.00	56.2	18.2	3.6	1.0	0.8	60.2	21.5	5.1	1.5	0.9
		0.5	-0.57	51.9	15.7	3.1	1.2	1.0	57.7	20.1	4.8	1.5	0.9
		0.7	-1.13	47.9	13.8	3.1	1.6	1.5	55.4	18.9	4.7	1.6	1.1
1.00	1.87	0.3	-0.36	66.6	23.7	4.4	1.0	0.7	70.8	27.5	6.2	1.4	0.8
		0.5	-0.91	61.9	20.5	3.7	1.1	1.0	68.2	25.7	5.7	1.4	0.9
		0.7	-1.45	57.3	18.0	3.5	1.6	1.5	65.5	24.1	5.5	1.6	1.0
2.00	1.46	0.3	-0.67	75.4	29.3	5.5	1.0	0.7	79.8	33.6	7.7	1.5	0.8
		0.5	-1.20	70.2	25.5	4.5	1.2	1.0	76.9	31.4	7.1	1.5	0.9
		0.7	-1.73	65.1	22.2	4.2	1.6	1.5	73.9	29.5	6.8	1.6	1.0
3.00	1.13	0.3	-0.95	81.6	34.0	6.8	1.0	0.7	86.2	38.7	9.4	1.6	0.8
		0.5	-1.48	76.2	29.6	5.5	1.2	1.0	83.1	36.3	8.6	1.6	0.8
		0.7	-2.00	70.6	25.8	4.9	1.7	1.5	79.9	34.0	8.1	1.7	1.0

Παρόλο που οι Πίνακες 1-17 έως 1-19 αναφέρονται σε μονόπλευρα διαγράμματα, μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες και για τα δίπλευρα διαγράμματα. Σύμφωνα με προηγούμενη σχέση, οι τιμές του  $h$  και του  $k$  που δίνουν ένα συγκεκριμένο ANSS για την μονόπλευρη περίπτωση, θα δώσουν το μισό ANSS για την περίπτωση του συμμετρικού δίπλευρου διαγράμματος. Οι τιμές του  $\rho_{1U}$  (ή του  $\rho_{1L}$ ) που χρησιμοποιούνται στους Πίνακες 1-17 έως 1-19 είναι πολύ μεγάλες ώστε η προσέγγιση (14) να είναι αξιόπιστη. Έτσι, στον Πίνακα 1-20 δίνουμε τιμές για το  $g = g_U = g_L$ , που αντιστοιχούν στο  $\rho_{1T} = 0.3$  και 0.5 για διάφορες τιμές του  $k$ , και το ANSS όταν  $\mu = \mu_0$ . Αυτές οι τιμές βρέθηκαν χρησιμοποιώντας την σχέση (13) όταν  $\gamma = 0$ . Το ANSS που βλέπουμε στον Πίνακα 1-20 είναι το δίπλευρο ANSS που αντιστοιχεί στους συνδυασμούς των  $h$  και  $k$  που έχουμε στους Πίνακες 1-17 έως 1-19. Για παράδειγμα, η τιμή του  $g$  που αντιστοιχεί στο  $k = 0.25$ ,  $\rho_{1T} = 0.5$  και

$ANSS = 370.4$  είναι 1.96. Αυτή η τιμή του δίπλευρου ANSS αντιστοιχεί στο μονόπλευρο  $ANSS = 740.8$  και η τιμή του  $h$  στον Πίνακα 1-18 είναι 8.01.

**Πίνακας 1-18**

$E(T^*)/d$  για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με  $ANSS = 740.8$  όταν  $\mu = \mu_0$

k	h	$\rho_1$	g	$d_1/d = 0.1$					$d_1/d = 0.5$				
				Shift ( $\delta$ )					Shift ( $\delta$ )				
				0.25	0.5	1.0	2.0	3.0	0.25	0.5	1.0	2.0	3.0
0.25	8.01	0.3	1.65	52.4	12.6	3.9	1.6	1.0	63.9	18.2	6.4	2.7	1.7
		0.5	0.69	46.8	11.1	3.6	1.6	1.2	60.7	17.4	6.2	2.6	1.7
		0.7	-0.08	42.5	10.1	3.6	2.0	1.7	58.2	16.8	6.1	2.8	1.9
0.50	4.77	0.3	0.54	93.9	18.9	3.5	1.2	0.8	105.9	25.3	5.8	2.0	1.3
		0.5	-0.11	85.6	16.1	3.1	1.3	1.1	101.2	23.7	5.6	2.0	1.3
		0.7	-0.72	77.7	14.1	3.2	1.8	1.6	96.8	22.5	5.5	2.2	1.5
0.75	3.34	0.3	0.02	138.2	31.3	4.2	1.1	0.8	150.8	39.0	6.7	1.8	1.1
		0.5	-0.56	127.3	26.7	3.5	1.2	1.0	144.8	36.4	6.3	1.8	1.1
		0.7	-1.12	116.5	23.0	3.5	1.7	1.6	138.6	34.2	6.2	2.0	1.3
1.00	2.52	0.3	-0.35	179.7	47.5	5.6	1.1	0.8	193.2	56.8	8.8	1.8	1.0
		0.5	-0.90	166.3	40.8	4.6	1.2	1.0	185.6	53.0	8.2	1.8	1.0
		0.7	-1.44	152.7	34.9	4.3	1.7	1.5	177.9	49.6	7.9	1.9	1.2
2.00	1.99	0.3	-0.66	217.8	66.1	8.1	1.1	0.8	232.4	77.4	12.1	1.8	0.9
		0.5	-1.20	202.2	57.0	6.4	1.2	1.0	223.7	72.3	11.2	1.8	1.0
		0.7	-1.73	186.1	48.8	5.6	1.7	1.5	214.6	67.6	10.6	2.0	1.2
3.00	1.60	0.3	-0.94	249.7	85.1	11.4	1.2	0.8	265.3	98.4	16.7	2.0	0.9
		0.5	-1.47	232.2	73.5	8.9	1.3	1.0	255.6	91.9	15.3	2.0	1.0
		0.7	-2.00	214.1	63.0	7.5	1.8	1.5	245.4	85.9	14.3	2.2	1.2

Σε μερικές περιπτώσεις, είναι επιθυμητό να χρησιμοποιούμε ένα δίπλευρο διάγραμμα όπου το χαρακτηριστικό VSI θα υπάρχει μόνο στο ένα από τα δύο μονόπλευρα τμήματα του. Για παράδειγμα, για μια ποιοτική μεταβλητή όπως η ισχύς, μια μείωση στο  $\mu$  κάτω από το  $\mu_0$  συνήθως σημαίνει μείωση στην ποιότητα, και μια αύξηση στο  $\mu$  πάνω από το  $\mu_0$  συνήθως σημαίνει βελτίωση της ποιότητας. Στη περίπτωση αυτή το άνω μονόπλευρο διάγραμμα θα χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσει βελτίωση της ποιότητας, όμως η γρήγορη ανίχνευση δεν είναι αρκετά κρίσιμη ώστε να χρησιμοποιήσουμε το  $d_1$  όταν το  $U_j$  κινείται προς το  $h_U$ . Αν πάρουμε το  $g_U$  σαν  $g_U = h_U$  τότε το άνω διάγραμμα δεν θα ορίσει ποτέ το  $d_1$  και  $\rho_{1T} = \rho_{1L} - \gamma$ . Τότε, αν τα  $h$  και  $k$  είναι συμμετρικά τότε η ικανή και αναγκαία

συνθήκη (15) για να είναι  $\gamma = 0$  γίνεται  $g_L \geq -2k$ . Αυτή η υπόθεση ικανοποιείται από όλους τους συνδυασμούς των  $g$  και  $k$  στους πίνακες 1-17 έως 1-19.

### Πίνακας 1-19

$E(T^*)/d$  για μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα με ANSS = 2000 όταν  $\mu = \mu_0$

k	h	$\rho_1$	g	$d_1/d = 0.1$					$d_1/d = 0.5$				
				Shift ( $\delta$ )					Shift ( $\delta$ )				
				0.25	0.5	1.0	2.0	3.0	0.25	0.5	1.0	2.0	3.0
0.25	9.93	0.3	1.74	69.3	13.8	4.3	1.7	1.1	90.2	22.2	7.7	3.2	2.0
		0.5	0.74	61.1	12.2	3.9	1.7	1.2	85.6	21.3	7.5	3.2	2.1
		0.7	-0.05	55.0	11.1	3.9	2.1	1.8	82.1	20.6	7.4	3.3	2.3
0.50	5.76	0.3	0.56	160.9	23.3	3.8	1.3	0.9	185.2	33.3	6.8	2.3	1.4
		0.5	-0.10	145.8	19.8	3.4	1.4	1.1	176.7	31.3	6.6	2.4	1.5
		0.7	-0.71	131.9	17.2	3.4	1.8	1.6	168.9	29.8	6.5	2.5	1.7
0.75	4.00	0.3	0.03	271.4	46.1	4.6	1.2	0.8	298.6	59.2	8.0	2.1	1.2
		0.5	-0.55	249.3	39.1	3.9	1.3	1.0	286.3	55.3	7.6	2.1	1.3
		0.7	-1.11	227.3	33.4	3.8	1.8	1.6	274.0	52.0	7.4	2.2	1.5
1.00	3.01	0.3	-0.34	379.7	79.4	6.7	1.1	0.8	409.8	96.4	11.1	2.0	1.1
		0.5	-0.90	350.7	67.8	5.4	1.3	1.0	393.7	89.9	10.3	2.0	1.2
		0.7	-1.44	321.3	57.7	4.9	1.8	1.6	377.2	84.2	9.9	2.2	1.3
2.00	2.38	0.3	-0.66	482.4	120.7	10.5	1.1	0.8	516.2	142.5	16.5	2.1	1.0
		0.5	-1.19	447.5	103.7	8.3	1.3	1.0	496.7	133.0	15.2	2.1	1.1
		0.7	-1.73	411.0	88.2	7.0	1.8	1.5	476.3	124.3	14.4	2.2	1.3
3.00	1.94	0.3	-0.94	577.3	167.5	16.4	1.2	0.8	614.8	194.9	24.8	2.3	1.0
		0.5	-1.47	536.7	144.5	12.7	1.3	1.0	592.2	182.1	22.7	2.3	1.1
		0.7	-2.00	493.9	123.1	10.4	1.8	1.5	568.3	170.1	21.3	2.5	1.3

Για τον λόγο αυτό, οι Πίνακες 1-17 έως 1-19 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του  $g$  αυτού του ιδιαίτερου τύπου δίπλευρου διαγράμματος. Επιπλέον, οι τιμές του  $E(T^*)/d$  θα είναι κατά προσέγγιση σωστές εκτός και αν το  $\mu$  είναι κοντά στο  $\mu_0$ .

**Πίνακας 1-20**  
Δίπλευρο ANSS για συνδυασμούς των  $h$  και  $k$

k	ANSS=100		ANSS=370.4		ANSS=1000	
	$\rho_1=0.3$	$\rho_1=0.5$	$\rho_1=0.3$	$\rho_1=0.5$	$\rho_1=0.3$	$\rho_1=0.5$
0.25	2.38	1.67	2.83	1.96	3.02	2.08
0.50	1.13	0.66	1.24	0.73	1.29	0.76
0.75	0.54	0.15	0.60	0.19	0.62	0.20
1.00	0.15	-0.21	0.19	-0.19	0.20	-0.19
1.25	-0.15	-0.52	-0.13	-0.51	-0.13	-0.50
1.50	-0.43	-0.80	-0.42	-0.79	-0.42	-0.79

### 1.3.8 Οδηγίες για την κατασκευή ενός VSI CUSUM διαγράμματος

Αρχικά επιλέγουμε τα  $h$ ,  $k$  και  $n$  με τον ίδιο τρόπο όπως και στα FSI CUSUM διαγράμματα. Η παράμετρος  $d$  του FSI CUSUM διαγράμματος θα γίνει ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας στο VSI διάγραμμα. Αν χρησιμοποιούμε ήδη ένα FSI CUSUM διάγραμμα, τότε χρησιμοποιώντας το ίδιο  $d$  θα πάρουμε τον ίδιο μέσο ρυθμό δειγματοληψίας όταν  $\mu = \mu_0$ , αλλά ταυτόχρονα θα ελαττώσουμε τον χρόνο ανίχνευσης μεταβολών καθώς το VSI διάγραμμα είναι ικανότερο. Εναλλακτικά, μπορούμε να επιτύχουμε τον ίδιο χρόνο ανίχνευσης χρησιμοποιώντας στο VSI διάγραμμα ένα μεγαλύτερο  $d$ , που θα έχει σαν αποτέλεσμα και μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας. Αφού έχουμε καθορίσει το  $d$ , οι παράμετροι  $d_1$  και  $d_2$  μπορούν να επιλεγθούν μέσω της σχέσης (10). Αν επιλέξουμε το  $d_1$  να είναι όσο το δυνατόν μικρό, και το  $d_2$  σύμφωνα με το μέγεθος της μεταβολής που θέλουμε να ανιχνεύσουμε (όπως είπαμε στην παράγραφο 1.3.7) τότε το  $\rho_1$  και το  $g$  θα καθοριστούν κατά την απαίτηση του μέσου ρυθμού δειγματοληψίας. Στην πράξη είναι πιθανότατα προτιμότερο να χρησιμοποιούμε «βολικά» διαστήματα δειγματοληψίας. Για παράδειγμα, έστω ότι ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας είναι ένα δείγμα κάθε δύο ώρες ( $d = 2$ ) και ο ελάχιστος χρόνος μεταξύ δύο δειγμάτων είναι δέκα λεπτά. Το μεγάλο διάστημα,  $d_2$ , θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το  $d$  και μια κατάλληλη τιμή θα μπορούσε να είναι οι τρεις ώρες, που αντιστοιχούν σε  $1.5d$ . Αν δεν είναι πολύ πιθανές μεγάλες μεταβολές στον μέσο της διεργασίας, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και ακόμα μεγαλύτερο  $d_2$ , όπως το  $d_2 = 4 = 2d$ .

Σαν ένα παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μονόπλευρο VSI CUSUM διάγραμμα το οποίο θέλουμε να λειτουργεί ικανοποιητικά για μεταβολές της τάξης του μισού της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Υποθέτουμε, ακόμα, ότι ένας λογικός ρυθμός δειγματοληψίας όταν η διεργασία λειτουργεί σωστά, είναι τέσσερις παρατηρήσεις κάθε δύο ώρες κατά μέσο όρο. Για τον λόγο αυτό, αν  $\mu_1 - \mu_0 = \sigma/2$  και  $n = 4$ , τότε  $\delta = 1$  και η καλύτερη επιλογή για το  $k$  είναι  $k = 0.5$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι θέλουμε ο ρυθμός των εσφαλμένων συναγερωμών να μην ξεπερνάει τον ένα ανά τετρακόσιες ώρες. Αν  $d = 2$  ώρες, τότε το ANSS όταν  $\mu = \mu_0$  θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 200. Σύμφωνα με τον Πίνακα 1-17, ένα  $h = 3.50$  θα μας δώσει  $ANSS = 200$  όταν  $k = 0.5$  και  $\mu = \mu_0$ . Έστω τώρα ότι η μικρότερη πρακτική τιμή για το  $d_1$  είναι δέκα λεπτά. Μπορούμε τότε να επιλέξουμε το  $d_2$  να είναι τέσσερις ώρες, ώστε να είναι κατάλληλο και περίπου το διπλάσιο του μέσου ρυθμού δειγματοληψίας. Αυτό μας δίνει  $\rho_1 = 0.522$  και  $d_1/d = 0.08$  και σύμφωνα με τον Πίνακα 1-16 θα πάρουμε μια τιμή για το  $g$  ίση περίπου με  $-0.21$ . Από τον Πίνακα 1-17, έπεται ότι  $E(T^*)/d$  είναι περίπου 2.8 για  $\delta = 1$ , και για τον λόγο αυτό το ATS σταθερής κατάστασης θα είναι περίπου 5.6 ώρες.

Κάτι ακόμα που θα πρέπει να αναφέρουμε για την κατασκευή ενός VSI CUSUM διαγράμματος είναι τι διάστημα δειγματοληψίας θα χρησιμοποιήσουμε πριν πάρουμε το πρώτο δείγμα, όταν ξεκινάμε για πρώτη φορά το διάγραμμα. Παραδοσιακά, τα CUSUM διαγράμματα ξεκινάνε με αρχική τιμή για το  $U_0$  και/ή  $L_0$  ίσο με 0. Σ' αυτήν την περίπτωση ως πρώτο διάστημα μπορεί να μην είναι το  $d_1$ . Το 1986 προτάθηκε από τους Lucas & Crosier το χαρακτηριστικό FIR όπου  $U_0 > 0$  και/ή  $L_0 < 0$ . Το χαρακτηριστικό αυτό δίνει επιπλέον προστασία για προβλήματα που μπορεί να προκύψουν κατά την διάρκεια εκκίνησης της διεργασίας. Έτσι σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να είναι χρήσιμο να ξεκινάμε το VSI CUSUM διάγραμμα με  $U_0 > \max\{0, g\}$  και/ή  $L_0 < \min\{0, -g\}$  έτσι ώστε για πρώτο διάστημα δειγματοληψίας να πάρουμε το  $d_1$ . Με αυτήν την επιλογή δίνουμε στο διάγραμμα επιπλέον προστασία στο ξεκίνημα με δύο τρόπους (α) δίνοντας στο CUSUM καλή εκκίνηση και (β) χρησιμοποιώντας μικρά διαστήματα στην αρχή.

## 1.4 Διαγράμματα ελέγχου EWMA

### 1.4.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα EWMA παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Roberts (1959, 1966) ο οποίος μέσω προσομοίωσης εκτίμησε το ARL και έδειξε ότι τα EWMA διαγράμματα ελέγχου είναι χρήσιμα για την ανίχνευση μικρών μεταβολών. Αργότερα, οι Robinson & Ho (1978), Waldman (1986), Crowder (1987) και οι Lucas & Saccucci (1987, 1990) υπολόγισαν με αριθμητικές μεθόδους τις ιδιότητες του ARL του EWMA διαγράμματος ελέγχου.

Στην συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες ενός EWMA διαγράμματος όπου ο χρόνος μεταξύ των δειγμάτων δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή της στατιστικής συνάρτησης που χρησιμοποιούμε. Η λογική κι εδώ παραμένει ίδια, δηλαδή, θα χρησιμοποιούμε ένα μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας όταν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι κοντά στην τιμή στόχο, και ένα μικρό διάστημα όταν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι κοντά σε κάποιο από τα όρια ελέγχου. Όταν η στατιστική συνάρτηση πέφτει εκτός των ορίων ελέγχου, τότε το διάγραμμα θα μας δίνει σήμα για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία.

Με το να μεταβάλουμε το διάστημα δειγματοληψίας μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την διεργασία γρηγορότερα όταν συμβαίνει κάποια μεταβολή στον μέσο, με αποτέλεσμα να αποτρέπουμε την παραγωγή ελαττωματικών προϊόντων για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μιας και το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων είναι ανάλογο του χρόνου μέχρι την ανίχνευση της μεταβολής, η χρήση VSI διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την συνολική ποιότητα της διεργασίας. Επιπλέον, τα VSI διαγράμματα είναι πρακτικά στην χρήση για μικρές παραγωγές όπου αντίθετα, τα FSI διαγράμματα είναι λιγότερο αποτελεσματικά.

Η ιδέα των μη σταθερών διαστημάτων δειγματοληψίας άρχισε να ενδιαφέρει στις εφαρμογές του ποιοτικού ελέγχου από τότε που προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Dodge (1955). Στην συνέχεια ο Arnold (1970) ξεκίνησε νέες μελέτες στον τομέα αυτό όταν ερεύνησε τις ιδιότητες VSI διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνταν για τον έλεγχο των επιπέδων μόλυνσης του νερού. Στα χρόνια που ακολούθησαν διάφοροι ερευνητές κατάφεραν να επεκτείνουν τις ιδέες του Arnold για διαγράμματα τύπου Shewhart και για CUSUM

διαγράμματα ελέγχου και να δείξουν ότι το VSI χαρακτηριστικό βελτιώνει σημαντικά την ικανότητα των διαγραμμάτων αυτών.

Τα αποτελέσματα που θα δοθούν στην συνέχεια για το VSI EWMA διάγραμμα ελέγχου περιέχονται στην εργασία των Saccucci et al. (1992).

## 1.4.2 VSI EWMA διαγράμματα ελέγχου

Το VSI EWMA διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε έναν εκθετικά σταθμισμένο κινητό μέσο της παρούσας και των προηγούμενων παρατηρήσεων,

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j Y_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0 = \lambda Y_i + (1-\lambda)Z_{i-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

όπου συνήθως η αρχική τιμή,  $Z_0$ , είναι η τιμή στόχος της διεργασίας. Οι διαδοχικές παρατηρήσεις,  $Y_i$ , μπορεί να είναι μεμονωμένες παρατηρήσεις από την διεργασία ή μπορεί να είναι δειγματικοί μέσοι ορθολογικών υποομάδων. Στην προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε, θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις μας ακολουθούν την κανονική κατανομή και επιπλέον είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d.).

Αντίθετα από το FSI διάγραμμα, το διάστημα που θα χρησιμοποιηθεί μεταξύ των  $Y_i$  και  $Y_{i+1}$  εξαρτάται από την τιμή του  $Z_i$ . Θα χρησιμοποιούμε το μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας,  $d_L$ , όταν η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε πέφτει μέσα στην περιοχή

$$R_L = [LWL, UWL]$$

όπου  $LWL = TARGET - CUTOFF \sigma_Z$  είναι το κάτω προειδοποιητικό όριο,  $UWL = TARGET + CUTOFF \sigma_Z$  είναι το πάνω προειδοποιητικό όριο και  $\sigma_Z = \sigma_Y \sqrt{\lambda / (2 - \lambda)}$  είναι η ασυμπτωτική τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης. Η τιμή αποκοπής  $CUTOFF$  (όπως θα δούμε παρακάτω) καθορίζει την αναλογία των φορών που η στατιστική συνάρτηση θα πέσει στην μεγάλη ή στην μικρή περιοχή δειγματοληψίας. Όμοια, θα χρησιμοποιούμε το μικρό διάστημα δειγματοληψίας,  $d_S$ , όταν η στατιστική συνάρτηση πέφτει μέσα στην περιοχή

$$R_S = [LCL, LWL] \cup [UWL, UCL]$$

όπου  $LCL = TARGET - L\sigma_z$  και  $UCL = TARGET + L\sigma_z$  είναι το κάτω και άνω όριο ελέγχου, αντίστοιχα. Θα θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου όταν η τιμή  $Z_i$  βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου για κάποιο  $i$  ( $i \geq 1$ ).

Όπως έχει αποδειχθεί από τους Lucas & Saccucci (1987, 1990) οι ιδιότητες του μήκους ροής του EWMA διαγράμματος ελέγχου εξαρτώνται από την επιλογή των  $L$  και  $\lambda$ . Γενικά, ένα μεγάλο  $L$  έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερο μήκος ροής και ένα μικρό  $\lambda$  κάνει το διάγραμμα πιο ευαίσθητο σε μικρές μεταβολές στην τιμή στόχο της διεργασίας.

### 1.4.3 Μέσος χρόνος συναγεμμού

Οι διαδικασίες σχεδιασμού και οι συγκρίσεις των ιδιοτήτων των FSI διαγραμμάτων, συνήθως στηρίζονται στο ARL. Το ARL θα πρέπει να είναι μεγάλο όταν η διεργασία λειτουργεί κοντά στην τιμή στόχο και μικρό όταν συμβαίνει κάποια μη αποδεκτή μεταβολή. Οι Lucas και Saccucci (1987, 1990) έχουν δώσει ένα πλήρες σετ πινάκων που χρησιμεύουν στην κατασκευή FSI EWMA διαγραμμάτων βασιζόμενοι στις ιδιότητες του ARL τους. Οι πίνακες αυτοί βρέθηκαν με χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων, η οποία προτάθηκε πρώτη φορά από τους Brook & Evans (1972).

Η προσέγγιση αυτή περιλαμβάνει την διαμέριση του διαστήματος μεταξύ του πάνω και του κάτω ορίου ελέγχου σε  $t = 2m + 1$  διακριτές καταστάσεις,  $E_j$ ,  $j = -m, \dots, 0, \dots, m$ . Η στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  ορίζεται να είναι στη μεταβατική (εντός ελέγχου) κατάσταση  $E_j$  στο χρόνο ( $i$ ) αν  $Z_i \in E_j$ . Όμοια, η στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  είναι στην απορροφητική (εκτός ελέγχου) κατάσταση  $E_a$  αν πέσει εκτός των ορίων ελέγχου.

Οι ιδιότητες του μήκους ροής ενός FSI EWMA διαγράμματος καθορίζονται πλήρως από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης,  $\mathbf{P}$ , και το αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων  $\mathbf{p}^T$ . Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης περιέχει τις μονοβηματικές πιθανότητες μετάβασης. Το αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων περιέχει τις πιθανότητες που η στατιστική συνάρτηση ξεκινάει σε μια δεδομένη κατάσταση. Αν σαν κατάσταση εκκίνησης πάρουμε την τιμή στόχο της διεργασίας το αντίστοιχο ATS αναφέρεται σαν το ATS μηδενικής κατάστασης. Όμοια αν το αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων είναι διάνυσμα πιθανοτήτων σταθερής κατάστασης, το αντίστοιχο ATS αναφέρεται σαν το ATS σταθερής κατάστασης.



Στα FSI διαγράμματα ελέγχου ο χρόνος μέχρι τον συναγερό (εκτός από πιθανές διαφορές στην μέτρηση του χρόνου εκκίνησης) είναι πολλαπλάσιο του μήκους ροής. Στα VSI διαγράμματα ο χρόνος μέχρι τον συναγερό εξαρτάται από το μήκος ροής αλλά και από τα διαστήματα δειγματοληψίας που χρησιμοποιούνται. Για τον λόγο αυτό, ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που πρέπει να μελετούμε στα VSI διαγράμματα είναι το ATS.

Ο Amin (1987) έδειξε ότι μπορούμε να βρούμε τις ιδιότητες του χρόνου μέχρι το προειδοποιητικό σήμα ενός VSI EWMA διαγράμματος χρησιμοποιώντας και πάλι την προσέγγιση με Μαρκοβιανές αλυσίδες. Έτσι, ορίζουμε το  $\mathbf{b}$  να είναι ένα διάνυσμα διαστημάτων δειγματοληψίας που αντιστοιχεί στις διακριτικοποιημένες καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Το  $j$ -στο στοιχείο,  $b_j$ , δηλώνει το διάστημα δειγματοληψίας όταν η στατιστική συνάρτηση είναι στην κατάσταση  $E_j$ . Αν η τιμή αποκοπής *CUTOFF* δεν πέσει στο σύνορο μιας εντός ελέγχου κατάστασης το ATS μπορεί να προσεγγιστεί με παρεμβολή. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να επιλέξουμε τα όρια των καταστάσεων έτσι ώστε κάθε κατάσταση να πέφτει τελείως μέσα σε μια περιοχή δειγματοληψίας.

Ο Amin (1987) και οι Amin et al. (1987, 1990) έχουν εκφράσεις για το ATS και για την διακύμανση του χρόνου μέχρι το προειδοποιητικό σήμα (VTS). Αν οι εκφράσεις αυτές τροποποιηθούν έτσι ώστε να περιέχουν και το αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων τότε έχουμε

$$ATS = \mathbf{p}'\mathbf{Q}\mathbf{b} \quad (18)$$

$$VTS = \mathbf{p}'\mathbf{Q}\mathbf{B}(2\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{b} - (\mathbf{p}'\mathbf{Q}\mathbf{b})^2$$

όπου  $\mathbf{B}$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου το  $j$ -στο στοιχείο είναι ίσο με  $b_j$ ,  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας,  $\mathbf{R}$  είναι ο υποπίνακας των εντός ελέγχου πιθανοτήτων μετάβασης και  $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$ . Έτσι, το ATS είναι ένας σταθμισμένος μέσος του αναμενόμενου αριθμού επισκέψεων σε κάθε μία εντός ελέγχου κατάσταση και του αντίστοιχου διαστήματος δειγματοληψίας. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι η εξίσωση (18) υποθέτει ότι ο χρόνος μέχρι το προειδοποιητικό σήμα ξεκινάει ένα χρονικό διάστημα πριν την πρώτη παρατήρηση. Στην πράξη θεωρούμε ότι εκτιμούμε τον χρόνο μέχρι το προειδοποιητικό σήμα ξεκινώντας στην πρώτη παρατήρηση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, το ATS μηδενικής κατάστασης να δίνεται από την σχέση

$$ATS = \mathbf{p}'\mathbf{Q}\mathbf{b} - \mathbf{p}'\mathbf{b}$$

Όμοια, όταν εκτιμούμε τις τιμές του ATS και του VTS σταθερής κατάστασης είναι απαραίτητο να μελετάμε αν η μεταβολή συνέβη στο μεγάλο ή στο μικρό διάστημα

δειγματοληψίας. Όπως γνωρίζουμε το ATS είναι το ο χρόνος από την στιγμή που συμβαίνει η μεταβολή μέχρι την στιγμή που το διάγραμμα μας δίνει συναγερμό για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Έχει αποδειχθεί ότι αν η πιθανότητα μια μεταβολή να συμβεί σε κάποιο δεδομένο διάστημα δειγματοληψίας είναι ανάλογη του γινομένου του μήκους του διαστήματος δειγματοληψίας και της συχνότητας με την οποία η στατιστική συνάρτηση πέφτει σ' αυτή τη περιοχή αφού βρεθεί στην σταθερή κατάσταση, τότε το AATS και το AVTS δίνονται από τις σχέσεις

$$AATS = \mathbf{a}'[\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}]\mathbf{b}$$

$$AVTS = \mathbf{a}'[(2\mathbf{Q} - \mathbf{I}) \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{b}\mathbf{a}') \cdot (2\mathbf{Q} - \mathbf{I}) - \frac{1}{6}\mathbf{B}]\mathbf{b}$$

όπου  $\mathbf{a}$  είναι ένα διάνυσμα του οποίου το  $j$ -στο στοιχείο,  $a_j = p_j b_j / \mathbf{p}'\mathbf{b}$ , αναπαριστά την πιθανότητα το  $Z_i$  να βρίσκεται στην κατάσταση  $E_j$  κατά το χρονικό διάστημα πριν την μεταβολή, και το  $p_j$  είναι το  $j$ -στο στοιχείο του διανύσματος  $\mathbf{p}$ .

#### 1.4.4 Αξιολόγηση του VSI EWMA διαγράμματος ελέγχου

Για να εκτιμήσουμε την αποτελεσματικότητα του χαρακτηριστικού VSI είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε το VSI EWMA διάγραμμα με το FSI EWMA τα οποία θα έχουν ίδια εντός ελέγχου ARL και ATS. Αν και τα δύο διαγράμματα έχουν τις ίδιες τιμές για  $L$  και  $\lambda$ , θα έχουν ίδιο ARL μιας και το χαρακτηριστικό VSI δεν έχει καμία επίδραση στον αριθμό των δειγμάτων που χρειάζονται για να πάρουμε σήμα εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας. Για λόγους σύγκρισης, οι Amin (1987) και Amin et al. (1987, 1990) έχουν προτείνει η επιλογή των διαστημάτων δειγματοληψίας να είναι τέτοια ώστε το μέσο διάστημα δειγματοληψίας να είναι ίσο με 1, δηλαδή,

$$\rho_S d_S + \rho_L d_L = 1$$

όπου  $\rho_S$  ( $\rho_L$ ) είναι η αναλογία των φορών που χρησιμοποιήθηκε το μικρό (μεγάλο) διάστημα δειγματοληψίας. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να πάρουμε μια ATS τιμή ίδια με την τιμή του ARL και για το ίδιο VSI και FSI ATS τιμές αν το διάστημα πριν την πρώτη

παρατήρηση δεν έχει αφαιρεθεί. Αποδεικνύεται ότι λαμβάνοντας υπόψη την στιγμή εκκίνησης παίρνουμε  $\rho_S d_S + \rho_L d_L = 1.0 + \frac{\mathbf{p}'\mathbf{b} - 1.0}{ARL}$

Ωστόσο, το AATS σταθερής κατάστασης παραμένει ανεπηρέαστο από την επιλογή του διαστήματος δειγματοληψίας κατά την έναρξη της διεργασίας. Για τον λόγο αυτό, το AATS σταθερής κατάστασης θα είναι ίσο με το αντίστοιχο του ARL σταθερής κατάστασης μειωμένο κατά μισή μονάδα.

Από την στιγμή που τα εντός ελέγχου ATS των δύο διαγραμμάτων είναι ίσα, μπορούμε να τα συγκρίνουμε μελετώντας το εκτός στατιστικού ελέγχου ATS τους για διάφορες μεταβολές στην τιμή στόχο της διεργασίας. Για να βελτιωθεί η ακρίβεια της προσέγγισης με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες, οι Saccucci et al. (1992) εκτίμησαν την μέση τιμή και την διακύμανση του χρόνου μέχρι το προειδοποιητικό σήμα για  $t = 51, 59, 67, 75$  και  $83$  εντός ελέγχου καταστάσεις.

Ο Πίνακας 1-21 περιέχει το ATS μηδενικής κατάστασης του VSI EWMA και του FSI EWMA διαγράμματος ελέγχου όπου  $d_S = 0.1$ ,  $d_L = 1.905$  και  $\rho_S = \rho_L = 0.5$ . Τα  $L$  και  $\lambda$  επιλέχθηκαν έτσι ώστε το εντός ελέγχου ATS μηδενικής κατάστασης να είναι ίσο με 369, δηλαδή ίσο με το ARL μείον το μέσο διάστημα δειγματοληψίας. Στην πράξη κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το μικρό διάστημα για πολλές παρατηρήσεις για να πετύχει τα πλεονεκτήματα του χαρακτηριστικού της άμεσης αρχικής αντίδρασης (FIR) (Lucas και Crosier 1982). Αυτό όμως θα έχει σαν αποτέλεσμα, οι πίνακες του ATS μηδενικής κατάστασης να υπερτονίσουν τα πλεονεκτήματα του VSI χαρακτηριστικού.

### Πίνακας 1-21

ATS μηδενικής κατάστασης

	L	3.000	2.997	2.978	2.959	2.925	2.898	2.859	2.701	2.490	2.302
	λ	1.000	0.750	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.030
	CUTOFF	0.671	0.670	0.668	0.667	0.664	0.662	0.660	0.647	0.624	0.599
$\delta$											
0.00	FSI	369	369	369	369	369	369	369	369	369	369
	VSI	369	369	369	369	369	369	369	369	369	369
0.25	FSI	280	242	195	173	148	135	120	88.3	72.2	67.1
	VSI	274	233	183	159	132	118	102	68.5	52.3	47.9
0.50	FSI	154	109	70.7	57.5	45.6	40.1	35.2	27.2	25.5	26.1
	VSI	141	94.1	55.4	42.3	30.7	25.6	21.1	14.9	14.4	15.4
1.00	FSI	42.90	24.50	14.30	11.70	9.90	9.25	8.80	8.74	9.74	10.80
	VSI	29.90	14.30	6.50	4.85	3.81	3.53	3.41	3.80	4.78	5.71
1.50	FSI	14.00	7.68	4.99	4.47	4.21	4.18	4.23	4.80	5.75	6.62
	VSI	6.49	2.67	1.42	1.26	1.22	1.26	1.34	1.79	2.50	3.17
2.00	FSI	5.30	3.14	2.42	2.35	2.39	2.46	2.59	3.18	3.98	4.67
	VSI	1.53	0.70	0.51	0.51	0.54	0.58	0.64	0.96	1.48	2.00
3.00	FSI	1.00	0.79	0.85	0.95	1.09	1.19	1.31	1.76	2.35	2.83
	VSI	0.14	0.10	0.11	0.12	0.14	0.16	0.18	0.30	0.53	0.83
4.00	FSI	0.19	0.19	0.30	0.39	0.55	0.67	0.81	1.14	1.57	1.97
	VSI	0.02	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.12	0.20	0.31
5.00	FSI	0.02	0.03	0.06	0.10	0.18	0.27	0.41	0.89	1.10	1.39
	VSI	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.09	0.11	0.15

### Πίνακας 1-22

#### ΑΑΤS σταθερής κατάστασης

	L	3.000	2.997	2.978	2.959	2.925	2.898	2.859	2.701	2.490	2.302
	λ	1.000	0.750	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.030
	CUTOFF	0.671	0.670	0.668	0.667	0.664	0.662	0.660	0.647	0.624	0.599
$\delta$											
0.00	FSI	370	370	369	368	368	367	366	363	357	352
	VSI	370	370	370	370	370	370	369	368	367	365
0.25	FSI	281	243	195	173	147	134	119	86.8	70.3	65.1
	VSI	275	234	184	160	133	118	103	68.6	52	47.2
0.50	FSI	155	109	70.8	57.5	45.5	40.1	35.1	27	25.2	25.9
	VSI	141	94.8	56	42.9	31.4	26.4	21.9	15.5	14.8	15.8
1.00	FSI	43.40	24.90	14.60	12.00	10.20	9.56	9.10	9.03	10.00	11.20
	VSI	30.80	15.00	7.21	5.61	4.70	4.43	4.30	4.67	5.63	6.54
1.50	FSI	14.50	8.14	5.41	4.88	4.62	4.58	4.64	5.21	6.17	7.04
	VSI	7.38	3.56	2.33	2.17	2.16	2.21	2.30	2.77	3.48	4.11
2.00	FSI	5.80	3.62	2.87	2.79	2.83	2.91	3.04	3.63	4.43	5.12
	VSI	2.43	1.59	1.42	1.43	1.49	1.54	1.62	1.98	2.52	3.00
3.00	FSI	1.50	1.29	1.34	1.42	1.55	1.65	1.77	2.24	2.82	3.31
	VSI	1.03	1.00	1.01	1.03	1.06	1.09	1.13	1.30	1.65	1.97
4.00	FSI	0.69	0.70	0.82	0.92	1.05	1.14	1.25	1.62	2.07	2.44
	VSI	0.91	0.91	0.93	0.94	0.96	0.98	0.99	1.06	1.25	1.47
5.00	FSI	0.52	0.53	0.59	0.65	0.76	0.84	0.95	1.27	1.63	1.94
	VSI	0.90	0.90	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.99	1.07	1.19

**Πίνακας 1-23**

ATS της χειρότερης περίπτωσης

	L	3.000	2.997	2.978	2.959	2.925	2.898	2.859	2.701	2.490	2.302
	λ	1.000	0.750	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.030
	CUTOFF	0.671	0.670	0.668	0.667	0.664	0.662	0.660	0.647	0.624	0.599
<hr/>											
$\delta$											
0.00	FSI	370	367	352	339	317	302	281	215	155	119
	VSI	370	366	350	337	314	298	277	209	147	110
0.25	FSI	281	244	197	175	151	137	124	94.5	82.8	81.5
	VSI	276	236	185	161	135	121	106	73.8	59.7	57.7
0.50	FSI	155	111	72.8	59.9	48.5	43.5	39.1	33.4	34.5	37.9
	VSI	142	96.3	57.4	44.3	32.7	28.6	24.8	19.7	20.6	23.3
1.00	FSI	43.90	26.20	16.50	14.20	12.80	12.40	12.30	13.60	16.30	18.80
	VSI	31.80	16.40	8.41	6.76	6.48	6.41	6.52	7.61	9.46	11.30
1.50	FSI	15.00	9.32	7.01	6.73	6.78	6.97	7.30	8.86	11.00	12.80
	VSI	8.39	4.71	3.61	3.55	3.67	3.87	4.15	5.15	6.45	7.76
2.00	FSI	6.30	4.69	4.27	4.38	4.68	4.93	5.28	6.67	8.41	9.88
	VSI	3.44	2.68	2.58	2.65	2.80	2.96	3.20	4.02	5.00	6.00
3.00	FSI	2.00	2.22	2.51	2.70	3.02	3.23	3.51	4.52	5.74	6.76
	VSI	2.04	2.02	2.06	2.09	2.15	2.20	2.32	2.83	3.62	4.31
4.00	FSI	1.19	1.48	1.94	2.09	2.28	2.45	2.71	3.47	4.41	5.18
	VSI	1.92	1.93	1.95	1.97	1.99	2.01	2.04	2.22	2.76	3.53
5.00	FSI	1.02	1.13	1.56	1.82	2.00	2.06	2.17	2.92	3.62	4.22
	VSI	1.91	1.91	1.92	1.92	1.94	1.96	1.98	2.03	2.21	2.77

Ο Πίνακας 1-22 περιέχει το AATS σταθερής κατάστασης για τις ίδιες παραμέτρους όπως και στον Πίνακα 1-21. Μιας και τα ATS σταθερής κατάστασης παραμένουν ανεπηρέαστα από τον κανόνα εκκίνησης, είναι καλύτερες ποσότητες για να συγκρίνουμε το VSI EWMA διάγραμμα με άλλα διαγράμματα ελέγχου.

Ο Πίνακας 1-23 περιέχει το ATS της χειρότερης περίπτωσης. Για μια εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία, το ATS της χειρότερης περίπτωσης είναι το μεγαλύτερο ATS, όπου το ATS υπολογίζεται για όλες τις πιθανές καταστάσεις εκκίνησης. Για μια εντός ελέγχου διεργασία, είναι το μικρότερο ATS. Η διερεύνηση της χειρότερης περίπτωσης είναι χρήσιμη μιας και είναι πιθανό (αν και σπάνιο) η στατιστική συνάρτηση EWMA να είναι στην περιοχή

του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας από την μια πλευρά της τιμής στόχου, ενώ η μεταβολή να συμβαίνει στην αντίθετη πλευρά.

Ο Πίνακας 1-23 δείχνει ότι εκτός από μεγάλες τιμές του  $\lambda$ , το χαρακτηριστικό VSI βελτιώνει τις ιδιότητες του EWMA διαγράμματος ελέγχου στις χειρότερες περιπτώσεις. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι για μεγάλες μεταβολές στην τιμή στόχο της διεργασίας, το ATS της χειρότερης περίπτωσης βρίσκεται εντός του ορίου του μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας στην αντίθετη πλευρά από αυτήν που συμβαίνει η μεταβολή. Στο αντίστοιχο FSI διάγραμμα, συμβαίνει το ίδιο στο σύνορο όμως του ορίου ελέγχου. Για μικρές μεταβολές η χειρότερη περίπτωση βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή στόχο. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι πιθανό η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να βγει εκτός στατιστικού ελέγχου στην αντίθετη πλευρά αν βρεθεί πολύ κοντά στο όριο ελέγχου την στιγμή που γίνεται η μεταβολή.

Οι Saccucci et al. (1989) έχουν δώσει πίνακες για εντός ελέγχου ATS για 100, 500, 1000 και 2000. Με βάση το πλήρες σετ πινάκων φαίνεται ότι το VSI EWMA διάγραμμα παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες για το ATS από το FSI EWMA διάγραμμα ελέγχου. Επιπλέον φαίνεται ότι για δεδομένο εντός ελέγχου ATS, το  $\lambda$  που αντιστοιχεί στο μικρότερο εκτός στατιστικού ελέγχου ATS αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η μεταβολή. Οι Lucas & Saccucci (1987, 1990) βρήκαν παρόμοια αποτελέσματα για το ARL των FSI EWMA διαγραμμάτων ελέγχου.

### Πίνακας 1-24

Τυπική απόκλιση χρόνου σήματος μηδενικής κατάστασης

	L	3.000	2.997	2.978	2.959	2.925	2.898	2.859	2.701	2.490	2.302
	λ	1.000	0.750	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.030
	CUTOFF	0.671	0.670	0.668	0.667	0.664	0.662	0.660	0.647	0.624	0.599
<hr/>											
$\delta$											
0.00	FSI	370	370	369	368	368	367	366	363	357	352
	VSI	369	369	369	369	369	369	368	367	366	364
0.25	FSI	281	242	194	171	146	131	116	79.6	58	48.5
	VSI	274	233	183	159	132	117	102	66.6	48.3	42.1
0.50	FSI	155	109	69.5	55.6	42.3	36.7	30.9	20	15.2	13.6
	VSI	141	94.4	55.5	42.3	30.6	25.4	20.7	13.3	11.5	11.6
1.00	FSI	43.40	24.30	13.10	10.10	7.75	6.75	5.87	4.48	4.04	3.95
	VSI	30.70	14.70	6.78	5.02	3.86	3.50	3.26	3.19	3.45	3.65
1.50	FSI	14.50	7.52	4.16	3.36	2.75	2.51	2.31	2.03	1.98	2.02
	VSI	7.21	3.18	1.74	1.53	1.45	1.46	1.49	1.65	1.86	1.95
2.00	FSI	5.78	3.08	1.88	1.61	1.41	1.34	1.28	1.22	1.24	1.28
	VSI	2.09	1.05	0.79	0.77	0.81	0.84	0.89	1.06	1.26	1.33
3.00	FSI	1.41	0.94	0.75	0.70	0.64	0.62	0.61	0.66	0.67	0.71
	VSI	0.31	0.23	0.23	0.24	0.27	0.29	0.32	0.46	0.69	0.85
4.00	FSI	0.47	0.43	0.47	0.51	0.52	0.51	0.46	0.39	0.53	0.48
	VSI	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.09	0.14	0.28	0.43
5.00	FSI	0.15	0.17	0.24	0.30	0.39	0.44	0.49	0.33	0.30	0.49
	VSI	0.02	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.05	0.04	0.07	0.14



### Πίνακας 1-25

Τυπική απόκλιση προσαρμοσμένου χρόνου σήματος σταθερής κατάστασης

	L	3.000	2.997	2.978	2.959	2.925	2.898	2.859	2.701	2.490	2.302
	λ	1.000	0.750	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.030
	CUTOFF	0.671	0.670	0.668	0.667	0.664	0.662	0.660	0.647	0.624	0.599
$\Delta$											
0.00	FSI	370	370	369	368	368	367	366	363	357	352
	VSI	369	369	369	369	369	369	368	367	366	364
0.25	FSI	281	242	194	171	146	131	116	79.6	58.1	48.8
	VSI	274	234	183	159	132	117	102	66.6	48.4	42.3
0.50	FSI	155	109	69.5	55.6	42.3	36.7	30.9	20.1	15.4	14
	VSI	141	94.4	55.5	42.3	30.6	25.4	20.7	13.4	11.8	12.2
1.00	FSI	43.40	24.30	13.10	10.10	7.76	6.77	5.90	4.58	4.25	4.30
	VSI	30.70	14.80	6.80	5.05	3.92	3.57	3.35	3.40	3.91	4.39
1.50	FSI	14.50	7.52	4.18	3.38	2.79	2.55	2.36	2.14	2.19	2.32
	VSI	7.24	3.23	1.84	1.64	1.58	1.60	1.65	1.89	2.28	2.60
2.00	FSI	5.79	3.09	1.91	1.65	1.46	1.40	1.35	1.34	1.44	1.56
	VSI	2.17	1.20	0.98	0.98	1.02	1.06	1.11	1.32	1.61	1.85
3.00	FSI	1.44	0.98	0.81	0.77	0.73	0.72	0.72	0.78	0.87	0.95
	VSI	0.65	0.61	0.61	0.62	0.65	0.67	0.70	0.83	1.05	1.21
4.00	FSI	0.55	0.52	0.56	0.59	0.60	0.60	0.57	0.56	0.67	0.72
	VSI	0.57	0.57	0.57	0.57	0.58	0.58	0.59	0.63	0.78	0.93
5.00	FSI	0.33	0.34	0.38	0.43	0.50	0.54	0.57	0.51	0.52	0.62
	VSI	0.57	0.56	0.56	0.56	0.57	0.57	0.57	0.58	0.62	0.72

### Πίνακας 1-26

AATS σταθερής κατάστασης για συγκρίσιμα Shewhart, CUSUM  
και EWMA διαγράμματα ελέγχου

Shift	Shewhart <sup>1</sup>		CUSUM K=1.0		EWMA <sup>2</sup> λ=0.39		CUSUM K=0.25		EWMA <sup>3</sup> λ=0.05	
	FSI	VSI	FSI	VSI	FSI	VSI	FSI	VSI	FSI	VSI
0.00	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370
0.25	281	275	195	188	171	157	76.3	62.8	71.5	52.1
0.50	155	142	68	57.5	56.5	41.6	25.1	16.4	25.5	14.8
1.00	43.4	30.8	12.8	7.5	11.9	5.55	9.4	5.2	10.1	5.62
1.50	14.5	7.38	4.8	2.4	4.85	2.16	5.6	2.9	6.21	3.47
2.00	5.81	2.42	2.7	1.4	2.80	1.43	4.0	2.0	4.46	2.52
3.00	1.50	1.03	1.3	1.0	1.44	1.03	2.5	1.3	2.84	1.65
4.00	0.69	0.91	0.8	0.9	0.93	0.94	1.8	1.1	2.08	1.25

1 Όρια ελέγχου στο διάγραμμα Shewhart βασισμένα σε  $\pm 3\sigma$

2 FSI και VSI EWMA όρια ελέγχου βασισμένα σε  $L=2.958$

3 FSI EWMA όρια ελέγχου βασισμένα σε  $L=2.505$ , VSI EWMA όρια ελέγχου βασισμένα σε  $L=2.495$

Οι Πίνακες 1-24 και 1-25 περιέχουν την τυπική απόκλιση μηδενικής κατάστασης και την προσαρμοσμένη τυπική απόκλιση σταθερής κατάστασης για τον χρόνο μέχρι το προειδοποιητικό σήμα για FSI και VSI EWMA διαγράμματα ελέγχου με τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους  $L$  και  $\lambda$  όπως και τα διαγράμματα των Πινάκων 1-21 και 1-22. Η εντός ελέγχου τυπική απόκλιση του χρόνου σήματος είναι σχεδόν ίδια και στα δύο διαγράμματα. Ωστόσο, η εκτός στατιστικού ελέγχου τυπική απόκλιση μηδενικής κατάστασης στο VSI EWMA διάγραμμα είναι ομοιόμορφα μικρότερη από την αντίστοιχη του FSI EWMA διαγράμματος για όλες τις μεταβολές, στον μέσο της διεργασίας, που μελετήθηκαν. Η εκτός στατιστικού ελέγχου προσαρμοσμένη τυπική απόκλιση σταθερής κατάστασης του VSI EWMA διαγράμματος είναι μικρότερη μόνο για μεταβολές έως σχεδόν τρεις τυπικές αποκλίσεις. Γενικά, μπορούμε να συμπεράνουμε πως για τις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, η τυπική απόκλιση του χρόνου μέχρι το προειδοποιητικό σήμα είναι σχεδόν ίδια ή μικρότερη από την αντίστοιχη τυπική απόκλιση του FSI EWMA διαγράμματος ελέγχου.

Τέλος, ο Πίνακας 1-26 μας παρέχει πληροφορίες για την σύγκριση μεταξύ ενός δίπλευρου Shewhart διαγράμματος και CUSUM και EWMA διαγραμμάτων με ή χωρίς το χαρακτηριστικό VSI, μέσω του AATS σταθερής κατάστασης. Η επιλογή των παραμέτρων για κάθε ένα από τα διαγράμματα αυτά έγινε έτσι ώστε το εντός ελέγχου ATS τους να είναι 370. Οι Reynolds et al. (1990) έδωσαν το ATS για CUSUM διαγράμματα με  $K = 1.0$  και  $0.25$  (τα

σχήματα αυτά είναι κατάλληλα για την ανίχνευση μεταβολών  $2.0\sigma_Y$  και  $0.5\sigma_Y$  αντίστοιχα). Τα αντίστοιχα EWMA διαγράμματα υπολογίστηκαν για  $\lambda$  ίσο με 0.39 και 0.05. Οι τιμές αυτές είναι επίσης βέλτιστες για την ανίχνευση μεταβολών  $2.0\sigma_Y$  και  $0.5\sigma_Y$ .

Στον Πίνακα 1-26 βλέπουμε πως το VSI EWMA διάγραμμα και το VSI CUSUM διάγραμμα έχουν παρόμοιες ιδιότητες για το ATS. Οι Lucas & Saccucci (1987, 1990) βρήκαν παρόμοια αποτελέσματα όταν σύγκριναν τις ιδιότητες του ARL για το FSI EWMA διάγραμμα και το FSI CUSUM διάγραμμα ελέγχου. Επιπλέον, και τα δύο διαγράμματα είναι ικανά στο να ανιχνεύουν μικρές και μεσαίες μεταβολές στην τιμή στόχο της διεργασίας γρηγορότερα από τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου Shewhart.

#### 1.4.5 Διαδικασία σχεδιασμού του VSI EWMA διαγράμματος

Οι Lucas & Saccucci (1987, 1990) έχουν δώσει μια διαδικασία για την επιλογή των παραμέτρων ενός δίπλευρου FSI EWMA διαγράμματος βασιζόμενοι στο ARL. Για την επιλογή των παραμέτρων  $L$  και  $\lambda$  παραπέμπουμε στους πίνακες αυτούς. Οι αντίστοιχες τιμές αποκοπής ( για  $\rho_S = \rho_L = 0.5$ ) που καθορίζουν τις δύο περιοχές δειγματοληψίας δόθηκαν στους παραπάνω πίνακες. Ένα πρόγραμμα για την εκτίμηση των ιδιοτήτων του ATS του VSI EWMA διαγράμματος ελέγχου παρέχεται από τον Saccucci (1991), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση γενικότερων τιμών απόκλισης.

Η εμπειρία στην χρήση του VSI χαρακτηριστικού μπορεί να παρέχει καλύτερους τρόπους στην επιλογή των παραμέτρων αυτών. Ωστόσο η πρακτική εμπειρία από την χρήση FSI διαγραμμάτων έχει δείξει ότι υπάρχουν πιο σοβαρά προβλήματα από την ακριβή επιλογή των τιμών των παραμέτρων.

### 1.4.6 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα από όλη την μελέτη που προηγήθηκε στην παράγραφο αυτή δείχνουν ότι το VSI EWMA διάγραμμα ελέγχου είναι ικανότερο από το αντίστοιχο FSI διάγραμμα. Στην πράξη θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το μικρό διάστημα δειγματοληψίας για τις πρώτες παρατηρήσεις ώστε να έχουμε ασφάλεια σύμφωνα με το FIR χαρακτηριστικό. Οι απαραίτητες τροποποιήσεις που χρειάζονται στην προσέγγιση με Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι παρόμοιες μ' αυτές που έχουν δώσει οι Saccucci et al. (1987) για την εκτέλεση του FIR χαρακτηριστικού χρησιμοποιώντας μεταβλητά όρια ελέγχου.

Μια σύγκριση του VSI EWMA διαγράμματος δείχνει ότι οι ιδιότητες του είναι σχεδόν ίδιες με τις ιδιότητες του VSI CUSUM διαγράμματος ελέγχου. Επιπλέον, και τα δύο αυτά διαγράμματα έχουν την ικανότητα να ανιχνεύουν γρηγορότερα μικρές και μεσαίες μεταβολές στην τιμή στόχο της διεργασίας από ότι τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου Shewhart.

Η γενικότερη έρευνα γύρω από το VSI χαρακτηριστικό έχει γίνει ώστε να βρεθούν τρόποι για την ελαχιστοποίηση του κόστους. Για παράδειγμα, οι Amin & Letsinger (1990) έχουν βρει τρόπους για να μειωθεί ο μέσος αριθμός αλλαγών μεταξύ μικρού και μεγάλου διαστήματος δειγματοληψίας με κανόνες ροών. Μια άλλη προσέγγιση είναι η ενσωμάτωση μιας καθυστέρησης στο πλαίσιο των αλλαγών έτσι ώστε να χρειάζονται δύο παρατηρήσεις στην μεγάλη περιοχή δειγματοληψίας πριν μεταβούμε στο μεγάλο διάστημα δειγματοληψίας.

## 1.5 Διαγράμματα Hotelling's $T^2$

### 1.5.1 Εισαγωγή

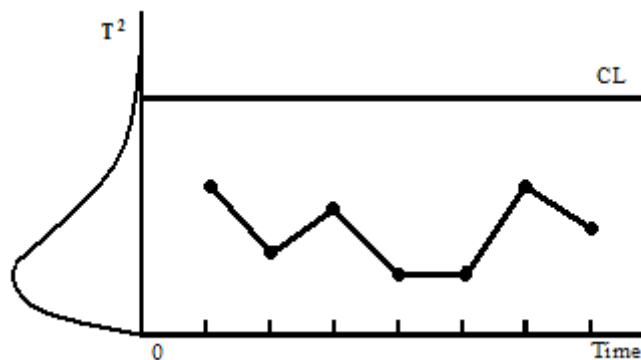
Το Hotelling's  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου είναι η πιο διαδεδομένη πολυμεταβλητή διαδικασία για τον έλεγχο αλλαγών στο διάνυσμα του μέσου  $p$  συσχετισμένων ποιοτικών χαρακτηριστικών μιας διεργασίας. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε  $p$  συσχετισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά τα οποία και εξετάζουμε ταυτόχρονα. Θεωρούμε ακόμα ότι τα χαρακτηριστικά αυτά ακολουθούν την  $p$ -διάστατη κανονική κατανομή, με  $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{0,1}, \mu_{0,2}, \dots, \mu_{0,p})'$  το διάνυσμα της μέσης τιμής και  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  τον πίνακα συνδιακύμανσης όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Με  $\mu_{0,j}$  συμβολίζουμε την μέση τιμή του  $j$  χαρακτηριστικού ( $1 \leq j \leq p$ ). Όταν λαμβάνουμε το  $i$  δείγμα μεγέθους  $n$ , έχουμε  $n$  παρατηρήσεις για κάθε ποιοτικό χαρακτηριστικό και είναι δυνατό να υπολογίσουμε το διάνυσμα  $\bar{\mathbf{X}}_i = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)$ , το οποίο αντιπροσωπεύει το διάνυσμα του  $i$  δειγματικού μέσου των  $p$  χαρακτηριστικών.

Όταν οι παράμετροι  $\boldsymbol{\mu}_0$  και  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  είναι γνωστοί, χρησιμοποιούμε την στατιστική συνάρτηση  $T_i^2 = n \cdot (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$ , η οποία, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, ακολουθεί την κατανομή  $\chi^2$ -τετράγωνο με  $p$  βαθμούς ελευθερίας,  $T_i^2 \sim \chi_p^2$ . Οι Tracy et al. (1992) έχουν δώσει την κατανομή του  $T_i^2$  όταν οι παράμετροι  $\boldsymbol{\mu}_0$  και  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  υπολογίζονται από προκαταρκτικά δείγματα.

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου,  $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_0$ , η στατιστική συνάρτηση  $T^2$  βρίσκεται πάνω από την κρίσιμη τιμή  $\chi_{p,\alpha}^2$  με πιθανότητα  $\alpha$ . Συνηθίζεται να αναπαριστούμε τις τιμές του  $T_i^2$  πάνω σε ένα διάγραμμα με ένα όριο ελέγχου,  $CL = \chi_{p,\alpha}^2$ , όπως στο Σχήμα 1-5.

Αν  $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_0$ , η στατιστική συνάρτηση  $T_i^2$  κατανέμεται σαν μια μη κεντρική  $\chi^2$ -τετράγωνο κατανομή με  $p$  βαθμούς ελευθερίας και με παράμετρο μη κεντρικότητας  $\lambda = n \cdot (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) = nd^2$ , όπου  $d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)}$  είναι η απόσταση Mahalanobis, η οποία μετράει τις αλλαγές στο διάνυσμα του μέσου της διεργασίας, και  $\boldsymbol{\mu}$

είναι το διάνυσμα της μέσης τιμής των  $p$  χαρακτηριστικών, όταν παρουσιάζεται κάποια αλλαγή σε τουλάχιστον έναν από τους  $p$  μέσους. Στο κλασικό  $T^2$  διάγραμμα λαμβάνουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  κάθε  $t_0$  μονάδες χρόνου, όπου  $n$  και  $t_0$  είναι προκαθορισμένα και σταθερά.



ΣΧΗΜΑ 1-5

FSI Hotelling's  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου

Στην συνέχεια, θα παρουσιάσουμε ένα Hotelling's  $T^2$  διάγραμμα το οποίο μειώνει τον χρόνο ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασίας, χρησιμοποιώντας δύο διαστήματα δειγματοληψίας. Τα αποτελέσματα δίνονται στην εργασία των Aparisi & Haro (2001).

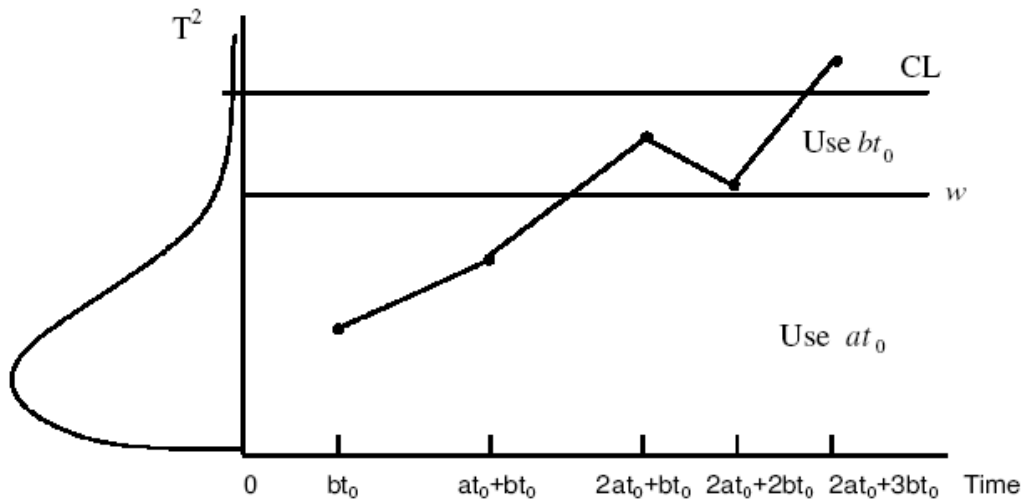
### 1.5.2 Σχεδιασμός του VSI $T^2$ διαγράμματος ελέγχου

Όπως αναφέραμε, στο διάγραμμα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση  $T_i^2$  μαζί με το όριο ελέγχου  $CL = \chi_{p,\alpha}^2$ . Στην πράξη, τα πιο συνηθισμένα  $\alpha$  που χρησιμοποιούμε είναι της τάξης του τρία ή πέντε στα χίλια. Η τιμή που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια είναι  $\alpha = 0.005$ . Με  $t_0$ , θα συμβολίζουμε το διάστημα δειγματοληψίας του FSI  $T^2$  διαγράμματος. Στο VSI  $T^2$  διάγραμμα θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαστήματα δειγματοληψίας,  $at_0$  και  $bt_0$ , με  $a > 1$  και  $0 < b < 1$ . Με  $w$  θα συμβολίζουμε το προειδοποιητικό όριο που καθορίζει πότε θα αλλάζουν τα διαστήματα δειγματοληψίας, όπου  $0 < w < CL$ . Θα χρησιμοποιούμε το  $at_0$  όταν  $T_{i-1}^2 \leq w$  και το  $bt_0$  όταν  $w < T_{i-1}^2 < CL$ . Συνοψίζοντας, το VSI  $T^2$  διάγραμμα ορίζεται ως εξής :

Όριο Ελέγχου :  $CL = \chi_{p,a}^2$ ,  $\alpha = 0.005$ .

$$t(T_i^2) = \begin{cases} bt_0, & \text{αν } w < T_{i-1}^2 < CL \\ at_0, & \text{αν } 0 < T_{i-1}^2 < w \end{cases} \quad (19)$$

όπου με  $t(T_i^2)$  συμβολίζουμε τον χρόνο μεταξύ δύο δειγμάτων. Αν  $T_{i-1}^2 > \chi_{p,a=0.005}^2$ , το διάγραμμα θα μας δείξει ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Στο Σχήμα 1-6 βλέπουμε ένα VSI  $T^2$  διάγραμμα.



**ΣΧΗΜΑ 1-6**

VSI Hotelling's  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε το όριο ελέγχου, CL, για διάφορες τιμές του  $p$  ( $\alpha = 0.005$ ).

$p$	CL
2	10.597
3	12.838
4	14.860
5	16.750

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε διάφορα σχέδια  $T^2$  διαγραμμάτων όταν ποικίλλει ο χρόνος μεταξύ των δειγμάτων, θεωρούμε ότι ένας κατάλληλος δείκτης αποδοτικότητας του κάθε διαγράμματος είναι το γνωστό μας, ATS. Στην συνέχεια θα συγκρίνουμε το κλασικό FSI  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου που έχει σταθερό διάστημα δειγματοληψίας  $t_0$ , με διάφορα VSI  $T^2$  διαγράμματα που ικανοποιούν την συνθήκη ότι ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας όταν

$\mu = \mu_0$ , είναι  $t_0$ . Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζουμε ότι οι δύο τύποι διαγραμμάτων είναι ανταλλάξιμοι όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} E(t(T^2) | T_{i-1}^2 < CL; d = 0) &= t_0 \\ at_0 \cdot P(T_{i-1}^2 < w | T_{i-1}^2 < CL) + bt_0 \cdot P(w < T_{i-1}^2 < CL | T_{i-1}^2 < CL) &= \\ = at_0 \cdot \frac{P(T_{i-1}^2 < w)}{P(T_{i-1}^2 < CL)} + bt_0 \cdot \frac{P(w < T_{i-1}^2 < CL)}{P(T_{i-1}^2 < CL)} &= t_0 \end{aligned}$$

Αφού  $T_{i-1}^2 \sim \chi_p^2$ , συνεπάγεται ότι

$$a \cdot \frac{P(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < CL)} + b \cdot \frac{P(w < \chi_p^2 < CL)}{P(\chi_p^2 < CL)} = 1 \quad (20)$$

οπότε λύνοντας ως προς  $w$  θα έχουμε

$$w = F^{-1} \left[ \left( \frac{1-a}{a-b} \right) \cdot F(CL, p), p \right], \quad (0 < b < 1 < a) \quad (21)$$

όπου

$$F(x; p) = P(\chi_p^2 \leq x) = \frac{1}{2^{p/2} \Gamma(p/2)} \cdot \int_0^x y^{(p/2)-1} e^{-y/2} dy$$

είναι η συνάρτηση κατανομής  $\chi$ -τετράγωνο με  $p$  βαθμούς ελευθερίας.

Επομένως, δοθέντος των διαστημάτων δειγματοληψίας  $at_0$  και  $bt_0$ , η παραπάνω τιμή  $w$  μπορεί να παράγει ένα VSI  $T^2$  διάγραμμα του οποίου ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας είναι ίσος με το διάστημα δειγματοληψίας του FSI  $T^2$  διαγράμματος όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Επιπλέον τα διαγράμματα που θα συγκρίνουμε στην συνέχεια έχουν το ίδιο ARL όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου.

Όταν γνωρίζουμε τα  $b$  και  $w$ , αν λύσουμε την (20) ως προς  $a$  θα πάρουμε :

$$a = \frac{(1-b)P(\chi_p^2 < CL) + bP(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < w)} = \frac{(1-b)F(CL; p) + bF(w; p)}{F(w; p)}$$

Ακόμα μπορούμε να δούμε πως για μια σταθερή τιμή  $b$  ισχύει

$$\lim_{a \rightarrow \infty} w = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι για σταθερό  $b$ , όσο το  $a$  αυξάνει, το προειδοποιητικό όριο  $w$  συγκλίνει στο 0. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση  $t(T_i^2)$  είναι ίση με  $bt_0$  για κάθε  $T_{i-1}^2$  εκτός από το  $T_{i-1}^2 = 0$ , όπου το διάστημα  $at_0$  γίνεται άπειρο. Τέτοια σχέδια ελέγχου με προειδοποιητικά όρια  $w$  κοντά στο μηδέν και πολύ μεγάλα  $a$  δεν είναι πολύ πρακτικά.



### 1.5.3 Το $ATS(d)$ του $VSI T^2$ διαγράμματος

Με  $ATS(d)$  συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο σήματος, όταν το διάνυσμα του μέσου της διεργασίας έχει αλλάξει από  $\mu_0$  σε  $\mu$  σε μονάδες  $d$ . Για να υπολογίσουμε το  $ATS(d)$ , θα χρησιμοποιήσουμε Μαρκοβιανές αλυσίδες. Ορίζουμε τρεις καταστάσεις, 1, 2, και 3, ανάλογα με την τιμή του  $T_{i-1}^2$ :

$$\text{Κατάσταση 1: } T_{i-1}^2 \in [0, w]$$

$$\text{Κατάσταση 2: } T_{i-1}^2 \in (w, CL]$$

$$\text{Κατάσταση 3: } T_{i-1}^2 \in (CL, \infty]$$

Η κατάσταση 3 είναι απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας με τις πιθανότητες μετάβασης για δεδομένη μεταβολή  $d$  είναι ο

$$P_d = (P_{ik}^d), \quad i, k = 1, 2, 3$$

όπου  $P_{ik}^d$  δηλώνει την πιθανότητα μετάβασης από την προηγούμενη κατάσταση  $i$  στην τωρινή κατάσταση  $k$ , όταν έχει επέλθει μια μεταβολή  $d$  στο διάνυσμα του μέσου. Συνεπώς

$$\begin{aligned} P_{12}^d &= P(w < T_{i-1}^2 < CL \mid a : d) = P(w < \chi_{p(\lambda)}^2 < CL) = \\ &= P(\chi_{p(\lambda)}^2 < CL) - P(\chi_{p(\lambda)}^2 < w) \end{aligned}$$

όπου  $\lambda = nd^2$ .

Οι Prabhu et al. (1994) χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των Μαρκοβιανών αλυσίδων βρήκαν το  $ATS$  για  $\bar{X}$  διαγράμματα με διαστήματα μεταβλητής συχνότητας. Ο Aparisi (1996) με την ίδια διαδικασία, όρισε το  $VSS T^2$  διάγραμμα ελέγχου. Μέσω αυτών των προσεγγίσεων βρέθηκε ότι

$$ATS(d) = b'(I - Q_d)^{-1}t \quad (22)$$

όπου  $b' = (p_1, p_2)$  είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων έτσι ώστε  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης 2,  $Q_d$  είναι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης όπου τα στοιχεία του που σχετίζονται με την απορροφητική κατάσταση εξαλείφονται και  $t' = (at_0, bt_0)$  είναι το διάνυσμα με στοιχεία τα δύο διαστήματα δειγματοληψίας. Μπορούμε να δούμε ότι  $p_1 = P(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 < CL; d = 0)$  είναι το πλήθος των φορών που η διεργασία

παραμένει στην κατάσταση 1 πριν πάρουμε σήμα για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Η εξίσωση (22) μπορεί να γραφτεί :

$$ATS(p, d, w, b, a) = \left( \frac{P(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < CL)}, 1 - \frac{P(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < CL)} \right) \cdot \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right)^{-1} \left( \begin{matrix} P(\chi_p^2(\lambda) < w) & P(w < \chi_p^2(\lambda) < CL) \\ P(\chi_p^2(\lambda) < w) & P(w < \chi_p^2(\lambda) < CL) \end{matrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Στην συνέχεια θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το ATS για σταθερές τιμές των  $p$ ,  $n$ ,  $d$  και  $b$  σύμφωνα με την σχέση (19). Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που υπάρχουν στην εξίσωση (23), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής της μη κεντρικής χι-τετράγωνο κατανομής,  $F(x; p, \lambda)$  :

$$F(x; p, \lambda) = P(\chi_p^2(\lambda) \leq x) = e^{-\lambda/2} \sum \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \cdot \frac{1}{2^{(p/2)+j} \Gamma\left(\frac{p}{2} + j\right)} \cdot \int_0^x y^{(p/2)+j-1} e^{-y/2} dy, \quad (x > 0).$$

Συνεπώς η σχέση (23) μπορεί να γραφτεί ως

$$ATS(p, d, w, b, a) = \left( \frac{F(w, p, 0)}{F(CL; p, 0)}, 1 - \frac{F(w, p, 0)}{F(CL; p, 0)} \right) \cdot \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right)^{-1} \left( \begin{matrix} F(w, p, \lambda) & F(CL; p, \lambda) - F(q, p, \lambda) \\ F(w, p, \lambda) & F(CL; p, \lambda) - F(wq, p, \lambda) \end{matrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Οι Aparisi & Haro (2001) ελαχιστοποίησαν το ATS για διάφορες τιμές των  $p$ ,  $n$  και  $d$ . Εδώ παραθέτουμε την διαδικασία για τις περιπτώσεις όπου  $p = 2$  και 4,  $n = 1, 3$  και 5,  $d = 0.5, 1.0, 1.5$  και 2.0 και  $b = 0.1$  και 0.2. Προτιμήσαμε τις τιμές  $b = 0.1$  και 0.2, γιατί παρατηρήθηκε ότι διαστήματα με μήκος μικρότερο από  $0.1t_0$  και  $0.2t_0$  μπορεί να είναι προβληματικά. Πρέπει να σημειωθεί ότι χρειάζεται μια ελάχιστη χρονική περίοδος μεταξύ των δειγμάτων, ώστε η διεργασία να μπορεί να παράγει το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος. Επιπλέον, αν το  $t_0$  είναι ήδη μικρό, τιμές μικρότερες του  $0.1t_0$  μπορεί να μην είναι διαθέσιμες στην πράξη.

Εάν γνωρίζουμε τα διαστήματα  $at_0$  και  $bt_0$ , η τιμή του  $w$  μπορεί να βρεθεί αμέσως από τη σχέση (21). Επειδή η απευθείας ελαχιστοποίηση της σχέσης (24) υπό τους περιορισμούς

που έχουμε υποθέσει φαντάζει αδύνατη, οι Aparisi & Haro (2001) χρησιμοποίησαν το πρόγραμμα *MATHCAD v.6.0 Professional* για να επιτύχουν την ζητούμενη ελαχιστοποίηση.

### Πίνακας 1-27

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές  
( $b = 0.1$ ,  $n = 1$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	3.219	110.759 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	108.272 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	105.803 t <sub>0</sub>	115.549 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	105.245 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	101.856 t <sub>0</sub> *	
1.0	0.1	1.219	3.219	35.485 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	32.610 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	29.906 t <sub>0</sub>	41.922 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	29.325 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	27.414 t <sub>0</sub> *	
1.5	0.1	1.219	3.219	11.059 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	9.416 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	8.024 t <sub>0</sub>	15.777 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	7.743 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	6.974 t <sub>0</sub> *	
2.0	0.1	1.219	3.219	4.002 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	3.280 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	2.747 t <sub>0</sub>	6.876 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	2.648 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	2.392 t <sub>0</sub> *	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο d.

### Πίνακας 1-28

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές

( $b = 0.1$ ,  $n = 3$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	A	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	3.219	48.792 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	45.719 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	42.767 t <sub>0</sub>	55.331 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	42.124 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	39.805 t <sub>0</sub> *	
1.0	0.1	1.219	3.219	6.714 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	5.566 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	4.651 t <sub>0</sub>	10.514 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	4.473 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	4.004 t <sub>0</sub> *	
1.5	0.1	1.219	3.219	1.744 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	1.520 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	1.385 t <sub>0</sub>	3.176 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	1.363 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	1.295 t <sub>0</sub> *	
2.0	0.1	1.219	3.219	1.109 t <sub>0</sub>	
	0.1	1.592	1.833	1.078 t <sub>0</sub>	
	0.1	3.000	0.739	1.065 t <sub>0</sub>	1.561 t <sub>0</sub>
	0.1	4.000	0.522	1.063 t <sub>0</sub>	
	0.1	84.000	0.021	1.040 t <sub>0</sub> *	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο d.

### Πίνακας 1-29

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές

( $b = 0.1$ ,  $n = 5$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	3.219	26.790 $t_0$	
	0.1	1.592	1.833	24.177 $t_0$	
	0.1	3.000	0.739	21.771 $t_0$	32.947 $t_0$
	0.1	4.000	0.522	21.260 $t_0$	
	0.1	84.000	0.021	19.680 $t_0^*$	
1.0	0.1	1.219	3.219	2.719 $t_0$	
	0.1	1.592	1.833	2.255 $t_0$	
	0.1	3.000	0.739	1.937 $t_0$	4.924 $t_0$
	0.1	4.000	0.522	1.881 $t_0$	
	0.1	84.000	0.021	1.732 $t_0^*$	
1.5	0.1	1.219	3.219	1.139 $t_0$	
	0.1	1.592	1.833	1.098 $t_0$	
	0.1	3.000	0.739	1.080 $t_0$	1.668 $t_0$
	0.1	4.000	0.522	1.077 $t_0$	
	0.1	84.000	0.021	1.053 $t_0^*$	
2.0	0.1	1.219	3.219	1.012 $t_0$	
	0.1	1.592	1.833	1.010 $t_0$	
	0.1	3.000	0.739	1.010 $t_0$	1.097 $t_0$
	0.1	4.000	0.522	1.010 $t_0$	
	0.1	84.000	0.021	0.991 $t_0^*$	

\* Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-30

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 1$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	3.219	111.320 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	109.131 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	106.698 $t_0$	115.549 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	106.212 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	103.616 $t_0^*$	
1.0	0.2	1.195	3.219	36.210 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	33.660 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	31.068 $t_0$	41.922 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	30.584 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	29.087 $t_0^*$	
1.5	0.2	1.195	3.219	11.586 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	10.127 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	8.803 $t_0$	15.777 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	8.572 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	7.966 $t_0^*$	
2.0	0.2	1.195	3.219	4.322 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	3.681 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	3.177 $t_0$	6.876 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	3.096 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	2.895 $t_0^*$	

\* Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-31

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 3$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	3.219	49.532 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	1.833	46.808 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	0.669	43.968 t <sub>0</sub>	55.331 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	0.470	43.430 t <sub>0</sub>	
	0.2	75.000	0.021	41.621 t <sub>0</sub> *	
1.0	0.2	1.195	3.219	7.138 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	1.833	6.118 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	0.669	5.250 t <sub>0</sub>	10.514 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	0.470	5.105 t <sub>0</sub>	
	0.2	75.000	0.021	4.735 t <sub>0</sub> *	
1.5	0.2	1.195	3.219	1.904 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	1.833	1.705 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	0.669	1.577 t <sub>0</sub>	3.176 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	0.470	1.559 t <sub>0</sub>	
	0.2	75.000	0.021	1.507 t <sub>0</sub> *	
2.0	0.2	1.195	3.219	1.160 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	1.833	1.132 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	0.669	1.119 t <sub>0</sub>	1.561 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	0.470	1.118 t <sub>0</sub>	
	0.2	75.000	0.021	1.101 t <sub>0</sub> *	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο d.

### Πίνακας 1-32

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με δύο μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 5$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	3.219	27.481 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	25.163 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	22.861 $t_0$	32.947 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	22.438 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	21.198 $t_0^*$	
1.0	0.2	1.195	3.219	2.965 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	2.552 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	2.252 $t_0$	4.924 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	2.206 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	2.090 $t_0^*$	
1.5	0.2	1.195	3.219	1.198 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	1.162 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	1.144 $t_0$	1.668 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	1.142 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	1.124 $t_0^*$	
2.0	0.2	1.195	3.219	1.022 $t_0$	
	0.2	1.527	1.833	1.020 $t_0$	
	0.2	3.000	0.669	1.020 $t_0$	1.097 $t_0$
	0.2	4.000	0.470	1.019 $t_0$	
	0.2	75.000	0.021	1.005 $t_0^*$	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .



### Πίνακας 1-33

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.1$ ,  $n = 1$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	5.989	134.039 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	131.548 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	128.559 $t_0$	138.131 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	127.675 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	124.241 $t_0^*$	
1.0	0.1	1.219	5.989	53.981 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	50.255 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	46.057 $t_0$	60.950 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	44.939 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	40.842 $t_0^*$	
1.5	0.1	1.219	5.989	18.741 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	16.214 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	13.665 $t_0$	24.617 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	13.041 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	10.909 $t_0^*$	
2.0	0.1	1.219	5.989	6.734 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	5.479 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	4.382 $t_0$	10.628 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	4.139 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	3.379 $t_0^*$	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-34

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.1$ ,  $n = 3$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	5.989	70.648 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	66.896 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	62.571 $t_0$	77.361 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	61.395 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	57.013 $t_0^*$	
1.0	0.1	1.219	5.989	11.510 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	9.635 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	7.859 $t_0$	16.454 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	7.443 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	6.076 $t_0^*$	
1.5	0.1	1.219	5.989	2.505 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	2.065 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	1.751 $t_0$	4.589 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	1.690 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	1.522 $t_0^*$	
2.0	0.1	1.219	5.989	1.231 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	1.158 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	1.120 $t_0$	1.962 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	1.114 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	1.099 $t_0^*$	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-35

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.1$ ,  $n = 5$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.1	1.219	5.989	42.247 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	38.697 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	34.787 $t_0$	49.189 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	33.765 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	30.076 $t_0^*$	
1.0	0.1	1.219	5.989	4.371 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	3.523 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	2.836 $t_0$	7.450 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	2.691 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	2.261 $t_0^*$	
1.5	0.1	1.219	5.989	1.292 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	1.198 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	1.148 $t_0$	2.134 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	1.140 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	1.120 $t_0^*$	
2.0	0.1	1.219	5.989	1.028 $t_0$	
	0.1	1.592	4.045	1.022 $t_0$	
	0.1	3.000	2.243	1.020 $t_0$	1.195 $t_0$
	0.1	4.000	1.811	1.020 $t_0$	
	0.1	84.000	0.307	1.017 $t_0^*$	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-36

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 1$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	5.989	134.529 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	4.045	132.341 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	2.109	129.383 t <sub>0</sub>	138.131 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	1.701	128.677 t <sub>0</sub>	
	0.2	85.000	0.287	125.775 t <sub>0</sub> *	
1.0	0.2	1.195	5.989	54.769 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	4.045	51.466 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	2.109	47.406 t <sub>0</sub>	60.950 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	1.701	46.477 t <sub>0</sub>	
	0.2	91.000	0.277	43.035 t <sub>0</sub> *	
1.5	0.2	1.195	5.989	19.399 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	4.045	17.155 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	2.109	14.710 t <sub>0</sub>	24.617 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	1.701	14.190 t <sub>0</sub>	
	0.2	91.000	0.277	12.404 t <sub>0</sub> *	
2.0	0.2	1.195	5.989	7.169 t <sub>0</sub>	
	0.2	1.527	4.045	6.054 t <sub>0</sub>	
	0.2	3.000	2.109	5.008 t <sub>0</sub>	10.628 t <sub>0</sub>
	0.2	4.000	1.701	4.807 t <sub>0</sub>	
	0.2	91.000	0.277	4.175 t <sub>0</sub> *	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο d.

### Πίνακας 1-37

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 3$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	5.989	71.412 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	68.089 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	63.894 $t_0$	77.361 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	62.919 $t_0$	
	0.2	85.000	0.287	59.235 $t_0^*$	
1.0	0.2	1.195	5.989	12.062 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	10.397 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	8.699 $t_0$	16.454 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	8.353 $t_0$	
	0.2	85.000	0.287	7.216 $t_0^*$	
1.5	0.2	1.195	5.989	2.737 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	2.346 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	2.049 $t_0$	4.589 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	1.999 $t_0$	
	0.2	85.000	0.287	1.862 $t_0^*$	
2.0	0.2	1.195	5.989	1.313 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	1.248 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	1.212 $t_0$	1.962 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	1.208 $t_0$	
	0.2	66.000	0.328	1.195 $t_0^*$	

\*Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

### Πίνακας 1-38

ATS για συγκρίσιμα VSI και FSI διαγράμματα με τέσσερις μεταβλητές

( $b = 0.2$ ,  $n = 5$  και  $\alpha = 0.005$ )

d	b	a	w	ATS <sub>variable</sub>	ATS <sub>fixed</sub>
0.5	0.2	1.195	5.989	43.030 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	39.881 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	36.108 $t_0$	49.189 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	35.257 $t_0$	
	0.2	91.000	0.277	32.157 $t_0^*$	
1.0	0.2	1.195	5.989	4.714 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	3.960 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	3.308 $t_0$	7.450 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	3.189 $t_0$	
	0.2	85.000	0.287	2.833 $t_0^*$	
1.5	0.2	1.195	5.989	1.386 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	1.303 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	1.255 $t_0$	2.134 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	1.249 $t_0$	
	0.2	54.000	0.365	1.233 $t_0^*$	
2.0	0.2	1.195	5.989	1.047 $t_0$	
	0.2	1.527	4.045	1.042 $t_0$	
	0.2	3.000	2.109	1.039 $t_0$	1.195 $t_0$
	0.2	4.000	1.701	1.039 $t_0$	
	0.2	54.000	0.365	1.037 $t_0^*$	

\* Οι ελάχιστες τιμές του ATS βρέθηκαν για δεδομένο  $d$ .

Οι Πίνακες 1-27 έως 1-32 και 1-33 έως 1-38 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για δύο και τέσσερις συσχετισμένες μεταβλητές αντίστοιχα, για τα VSI και FSI διαγράμματα. Οι πίνακες αυτοί μας δίνουν το ATS για διάφορους συνδυασμούς των  $d$  και  $a$ , χρησιμοποιώντας ως μικρό διάστημα δειγματοληψίας το  $bt_0$  να είναι ίσο με  $0.1t_0$  και  $0.2t_0$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι για την VSI περίπτωση το ATS είναι σημαντικά βελτιωμένο.

Οι πίνακες δείχνουν κατάλληλα σχέδια ελέγχου που ελήφθησαν ώστε να βρεθούν οι συνδυασμοί των  $w$  και  $a$  που δίνουν το ελάχιστο δυνατό ATS για δεδομένη μεταβολή  $d$ . Τα πλαίσια που είχαν το ελάχιστο ATS παρουσίασαν προειδοποιητικά όρια  $w$  κοντά στο μηδέν και είχαν πολύ μεγάλες τιμές για το  $a$ , για τον λόγο αυτό θεωρήθηκαν ότι δεν είναι

αρκετά πρακτικά. Έτσι, παρουσιάστηκαν εναλλακτικά σχέδια ελέγχου που δεν είχαν τόσο μεγάλα  $a$  και έδωσαν παρόμοια ATS με τα αρχικά, ειδικά στην περίπτωση όπου  $1 \leq d \leq 2$ .

Τέλος, η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η εξής : Οι πρώτες δύο γραμμές για κάθε τιμή του  $d$  είναι πλαίσια στα οποία τα προειδοποιητικά όρια  $w$  ικανοποιούν την σχέση  $P(\chi_p^2 \leq w) = 0.8$  και  $P(\chi_p^2 \leq w) = 0.6$  αντίστοιχα. Εναλλακτικά, η τρίτη και τέταρτη γραμμή που θεωρούν σταθερές τιμές για το  $a$  τις 3 και 4, παρήγαγαν ελαφρώς καλύτερα ATS από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Με τον τρόπο αυτό, οι Aparisi & Haro (2001) εξασφάλισαν πολλές διαφορετικές παραλλαγές που μπορούν να επιλεχτούν ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της διεργασίας που θέλουμε να παρακολουθήσουμε.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

### 2.1 $\bar{X}$ διαγράμματα ελέγχου

#### 2.1.1 Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας είναι ίσως τα πιο διαδεδομένα εργαλεία του ποιοτικού ελέγχου. Στα διαγράμματα αυτά σχεδιάζουμε τους δειγματικούς μέσους με χρονική σειρά και όσο αυτοί πέφτουν εντός των ορίων ελέγχου θεωρούμε ότι η διεργασία λειτουργεί εντός στατιστικού ελέγχου. Ο σκοπός ενός διαγράμματος ελέγχου είναι να αναγνωρίζει πότε μπορούμε να αφήνουμε την διεργασία ελεύθερη να λειτουργεί και πότε θα πρέπει να αναζητήσουμε την αιτία που οδηγεί σε αποκλίσεις από την τιμή στόχο της διεργασίας. Κατά την κατασκευή ενός κλασικού διαγράμματος τύπου Shewhart, επιλέγουμε ποια θα είναι τα όρια ελέγχου, τα οποία έχουν σταθερή απόσταση από την κεντρική γραμμή, ποιο θα είναι το μέγεθος δείγματος και ποιος θα είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας, τα οποία προκαθορίζονται επίσης και είναι σταθερά.

Όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, πολλοί ερευνητές μελέτησαν την περίπτωση τα διαστήματα μεταξύ των δειγμάτων να μπορούν να μεταβάλλονται, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι του διαγράμματος παραμένουν σταθερές. Αποδείχθηκε, λοιπόν, ότι η πρόσθεση του χαρακτηριστικού VSI σε ένα διάγραμμα το καθιστά ικανότερο στην ανίχνευση μεταβολών από το αντίστοιχο FSI διάγραμμα ελέγχου.

Ο Flaig (1991) μελέτησε μια άλλη ιδέα όπου το μέγεθος του δείγματος που επιλέγουμε κάθε φορά μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με την τάση των δεδομένων. Στην εργασία του ο Flaig χωρίζει την περιοχή μεταξύ της κεντρικής γραμμής και των ορίων ελέγχου σε τρεις για να χρησιμοποιήσει τρία διαφορετικά μεγέθη δείγματος. Ανάλογα σε ποια ζώνη θα πέσει η τιμή του δειγματικού μέσου επιλέγουμε και το αντίστοιχο μέγεθος δείγματος. Ο Daudin (1992) πρότεινε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα με δύο μεγέθη δείγματος. Σύμφωνα με την ιδέα του,



παίρνουμε ένα δείγμα και αν η δειγματική μέση τιμή του πέσει πέραν ενός ορίου, αλλά εντός των ορίων ελέγχου, επιλέγουμε ένα νέο δείγμα με μέγεθος μεγαλύτερο του προηγούμενου. Η απόφαση για την κατάσταση της διεργασίας παίρνεται χρησιμοποιώντας τη δειγματική μέση τιμή και των δύο δειγμάτων μαζί, αν έχει επιλεχτεί δεύτερο δείγμα.

Ο Nelson (1990) περιγράφει την κατασκευή ενός διαγράμματος όπου μπορεί να μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος. Εισήγαγε με αρκετές επιλογές για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας βασιζόμενος στο μέγεθος του κάθε δείγματος και στην διακύμανση του μεγέθους του δείγματος. Ο Burr (1969) εξήγαγε βάρη για τα δείγματα για να εκτιμήσει την τυπική απόκλιση όταν το μέγεθος του δείγματος μεταβάλλεται. Ωστόσο, και στις δύο εργασίες το χαρακτηριστικό του μεταβλητού μεγέθους δείγματος δεν προσαρμόζεται πάνω στο διάγραμμα αλλά βλέπουμε τρόπους με τους οποίους κατασκευάζεται ένα διάγραμμα ελέγχου όπου όλα τα δείγματα έχουν διαφορετικό μέγεθος.

Οι Cui & Reynolds (1988) έδειξαν ότι ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα που χρησιμοποιεί κανόνες ροών τροποποιείται με το VSI χαρακτηριστικό, μειώνει σημαντικά τον χρόνο ανίχνευσης μιας μεταβολής. Οι Reynolds & Arnold (1989) παρήγαγαν εκφράσεις για το καταλληλότερο μονόπλευρο Shewhart διάγραμμα ελέγχου όταν μεταβάλλεται ο χρόνος μεταξύ των δειγμάτων. Οι Chengalur et al. (1989) μελέτησαν ένα πολυπαραμετρικό διάγραμμα Shewhart με μεταβλητό ρυθμό δειματοληψίας και έδειξαν ότι είναι αποτελεσματικότερο από το κλασικό FSI διάγραμμα ελέγχου. Κατέληξαν στο γεγονός ότι το ATS του VSI διαγράμματος είναι αρκετά μικρότερο από αυτό του FSI διαγράμματος για μικρές και μεσαίες μεταβολές. Όταν όμως οι μεταβολές είναι μεγάλες, τότε το ATS του FSI διαγράμματος είναι μικρότερο ή σχεδόν ίσο με το ATS του VSI διαγράμματος.

Τα αποτελέσματα που θα δώσουμε στην συνέχεια αναφέρονται σε ένα σχήμα με διπλό μέγεθος δείγματος όπου οι υπόλοιπες παράμετροί του παραμένουν σταθερές. Υπάρχουν αρκετά κίνητρα προς αυτήν την κατεύθυνση εκτός από την προφανή αναλογία με τον χρόνο αναμονής ή με την συχνότητα δειματοληψίας. Η φύση της διεργασίας μπορεί να απαιτεί η συχνότητα δειματοληψίας να είναι σταθερή, όμως τέτοιοι περιορισμοί δεν θα ισχύουν για το μέγεθος δείγματος. Ακόμα γνωρίζουμε ότι αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος μειώνουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II. Καθώς το μέγεθος δείγματος αυξάνεται, μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II για μια συγκεκριμένη μεταβολή στον μέσο της διεργασίας και για μια συγκεκριμένη πιθανότητα σφάλματος τύπου I. Το προτεινόμενο σχήμα επωφελείται από την ιδιότητα αυτή. Με την προτεινόμενη διεργασία, απλά προσθέτουμε

κάποια συμμετρικά όρια εντός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος Shewhart. Η θέση της προηγούμενης μέσης τιμής σε σχέση με τα επιπρόσθετα όρια καθορίζει το μέγεθος του τρέχοντος δείγματος.

### 2.1.2 Σχεδιασμός του VSS $\bar{X}$ διαγράμματος

Στην περίπτωση που έχουμε σταθερό μέγεθος δείγματος, θα συμβολίζουμε το μέγεθος αυτό με  $n_0$ . Η επιλογή του  $n_0$  βασίζεται στο κόστος της δειγματοληψίας αλλά και σε διάφορους άλλους περιορισμούς. Στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε τα δύο μεγέθη δείγματος που θα χρησιμοποιήσουμε με  $n_1$  και  $n_2$ . Τα δύο αυτά μεγέθη επιλέγονται έτσι ώστε όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι  $n_0$ . Για τον λόγο αυτό μπορούμε να πούμε ότι το VSS  $\bar{X}$  διάγραμμα χρησιμοποιεί τους ίδιους πόρους με το κλασικό FSS  $\bar{X}$  διάγραμμα όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Το εντός ελέγχου ARL είναι ακριβώς ίδιο και για τους δύο τύπους διαγράμματος. Αυτή η ιδιότητα έχει σαν αποτέλεσμα να ξοδεύονται ελάχιστα επιπρόσθετα κόστη ή προσπάθειες δειγματοληψίας (όπως και στα FSS  $\bar{X}$  διαγράμματα) όσο η διεργασία είναι ενός ελέγχου. Για κάθε ζευγάρι μεγεθών  $n_1$  και  $n_2$  χρησιμοποιούνται βοηθητικά όρια τα οποία καθορίζουν πότε αλλάζουμε μέγεθος. Ορίζουμε τα βοηθητικά όρια ως  $\pm w$  τυπικές αποκλίσεις από την κεντρική γραμμή που δηλώνει την τιμή στόχο της διεργασίας. Τα όρια ελέγχου είναι καθορισμένα στις τρεις τυπικές αποκλίσεις ( $\pm 3\sigma$ ) από την κεντρική γραμμή, και ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι σταθερός. Όταν το προηγούμενο δείγμα πέφτει εντός των βοηθητικών ορίων θα χρησιμοποιούμε το μέγεθος  $n_1$  για το επόμενο δείγμα, ενώ όταν πέφτει εκτός των βοηθητικών ορίων αλλά μέσα στα όρια ελέγχου θα χρησιμοποιούμε το  $n_2$ . Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την σύγκριση ενός διαγράμματος που λειτουργεί κατ' αυτόν τον τρόπο με ένα αντίστοιχο FSS  $\bar{X}$  διάγραμμα για ένα σημαντικό εύρος μεταβολών στον μέσο της διεργασίας. Η ανάπτυξη που θα ακολουθήσει αφορά ένα δίπλευρο διάγραμμα, ένα διάγραμμα δηλαδή, που ελέγχει και θετικές και αρνητικές μεταβολές στον μέσο της διεργασίας.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή  $Z_i \sim N(0,1)$  ως

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma / n_j^{1/2}}$$

και την μεταβολή στον μέσο της διεργασίας,  $\delta$ , ως

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

όπου  $\mu_0$  είναι η τιμή στόχος της διεργασίας,  $\mu_1$  η μέση τιμή μετά την μεταβολή,  $\sigma$  είναι η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας,  $\bar{X}_i$  είναι η μέση τιμή του  $i$  δείγματος και  $n_j$  ( $j=1,2$ ) είναι το μέγεθος δείγματος που χρησιμοποιούμε ανάλογα με την θέση του  $Z_i$  στο  $\bar{X}$  διάγραμμα. Το μέγεθος του  $i$  δείγματος εξαρτάται από την θέση του  $Z_{i-1}$ .

Ορίζουμε το  $w$ , όπου  $CL < w < UCL$  και  $LCL < -w < CL$ , να είναι το βοηθητικό όριο που θα καθορίζει πότε θα αλλάζουμε μέγεθος δείγματος. Υποθέτουμε ότι το μέγεθος του δείγματος  $i-1$  είναι  $n_j$ ,  $j=1,2$ . Αν η μέση τιμή  $\bar{X}_{i-1}$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$-\frac{w\sigma}{n_j^{1/2}} < \bar{X}_{i-1} < +\frac{w\sigma}{n_j^{1/2}}$$

τότε το μέγεθος του δείγματος  $i$  θα είναι  $n_1$ . Αν όμως

$$+\frac{w\sigma}{n_j^{1/2}} < \bar{X}_{i-1} < UCL \frac{\sigma}{n_j^{1/2}} \quad \text{ή} \quad LCL \frac{\sigma}{n_j^{1/2}} < \bar{X}_{i-1} < -\frac{w\sigma}{n_j^{1/2}}$$

τότε το μέγεθος του δείγματος  $i$  θα είναι  $n_2$ . Για ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου η προσαρμόσιμη συνάρτηση ορίζεται ως εξής

$$n_j = \begin{cases} n_2, & \alpha \nu w < Z_i < UCL \\ n_1, & \alpha \nu -w \leq Z_i \leq w \\ n_2, & \alpha \nu LCL < Z_i < -w \end{cases}$$

**Πίνακας 2-1**

Όρια ελέγχου και βοηθητικά όρια για ένα VSS διάγραμμα ελέγχου

Sample size	Control limits	Limits for switching sample sizes
$n_1$	$\pm 3\sigma_{\bar{x}_1}$	$\pm w\sigma_{\bar{x}_1}$
$n_2$	$\pm 3\sigma_{\bar{x}_2}$	$\pm w\sigma_{\bar{x}_2}$

Το ζευγάρι  $n_1$  και  $n_2$  επιλέγεται σε συνάρτηση με τις παραμέτρους  $w$  και  $n_0$  έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL να είναι ίδιο με την περίπτωση που το διάγραμμα λειτουργούσε με

σταθερός μέγεθος δείγματος  $n_0$ . Με  $n_1$  ( $n_1 \geq 1$ ) θα συμβολίζουμε το μικρό μέγεθος δείγματος και με  $n_2$  το μεγάλο. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αφού ο χρόνος μεταξύ των δειγμάτων είναι σταθερός, θα πρέπει να είναι φυσικά τέτοιος ώστε να μπορούν να παραχθούν τουλάχιστον  $n_2$  μονάδες παραγωγής.

Η βασική προϋπόθεση που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του  $w$  του VSS διαγράμματος ελέγχου είναι ότι όταν η μέση τιμή της διεργασίας είναι ίση με την επιθυμητή τιμή,  $\mu = \mu_0$ , το μέσο μέγεθος δείγματος είναι  $n_0$ . Για ένα δίπλευρο διάγραμμα αυτό μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$E[n_j | LCL < Z_i < UCL; \delta = 0] = n_0, \quad j = 1, 2$$

Το βοηθητικό όριο  $w$  ενός δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου εξάγεται προσδιορίζοντας τις πιθανότητες για κάθε ένα από τα δύο μεγέθη δειγμάτων έτσι ώστε ο σταθμισμένος μέσος τους να είναι  $n_0$ ,

$$\begin{aligned} & n_2 \frac{P[LCL < Z_i < -w \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} + n_1 \frac{P[-w < Z_i < w \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} \\ & + n_2 \frac{P[w < Z_i < UCL \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} = n_0 \\ & n_2 \frac{\Phi(-w) - \Phi(LCL)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} + n_1 \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} + n_2 \frac{\Phi(UCL) - \Phi(w)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} = n_0 \\ & w = \Phi^{-1} \left( \frac{2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Για τον λόγο αυτό, αν γνωρίζουμε τα μεγέθη  $n_0$ ,  $n_1$  και  $n_2$ , με  $n_1 < n_0 < n_2$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (25) για να προσδιορίσουμε την τιμή του βοηθητικού ορίου  $w$  έχοντας και την ιδιότητα ότι το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι  $n_0$ . Η επιλογή των  $n_0$ ,  $n_1$  και  $n_2$  είναι αυθαίρετη, υπό τον όρο όμως ότι ισχύει  $n_1 < n_0 < n_2$ .

### 2.1.3 Υπολογισμός του $ARL(\delta)$

Αν  $ARL(\delta)$  είναι το ARL ενός διαγράμματος Shewhart όπου ο μέσος μεταβάλλεται κατά  $\delta$  μονάδες τυπικής απόκλισης, που σημαίνει ότι ο μέσος αλλάζει από  $\mu_0$  σε  $\mu_1$ , το μέγεθος της μεταβολής μπορεί να εκφραστεί σαν  $\delta = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma$ . Το  $ARL(\delta)$  μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Ας είναι η κατάσταση 1 η κατάσταση όπου ο δειγματικός μέσος είναι εντός των βοηθητικών ορίων. Η κατάσταση 2 θα είναι η κατάσταση όπου ο δειγματικός μέσος είναι μεταξύ των βοηθητικών ορίων και των ορίων ελέγχου και η κατάσταση 3 θα είναι η κατάσταση όπου ο δειγματικός μέσος είναι εκτός των ορίων ελέγχου. Η έκφραση  $\Pr(-w < Z_i < w | n_j)$  είναι η πιθανότητα ένας δειγματικός μέσος να βρίσκεται εντός του διαστήματος  $[-w, w]$  υποθέτοντας ότι  $\delta = 0$  και το μέγεθος δείγματος είναι  $n_j$ . Θεωρούμε, τώρα, τον πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

όπου

$$p_{j1} = \Pr(-w < Z_i < w | n_j)$$

$$p_{j2} = \Pr(w < Z_i < UCL_j | n_j) + p_{j1} = \Pr(LCL_j < Z_i < -w | n_j)$$

$$p_{j3} = \Pr(Z_i > UCL_j | n_j) + p_{j1} = \Pr(Z_i < LCL_j | n_j)$$

και  $j=1$  ή  $2$ ,  $p_{31} = 0$ ,  $p_{32} = 0$  και  $p_{33} = 1$ , μιας και η κατάσταση 3 είναι η εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση.

Η κατάσταση 3 είναι η απορροφητική κατάσταση και με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών μέχρι να φτάσουμε στην απορροφητική κατάσταση μπορεί να βρεθεί μέσω του  $\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_\delta)^{-1}$ , όπου  $\mathbf{Q}_\delta$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης όπου έχουν διαγραφεί οι γραμμές και οι στήλες της απορροφητικής κατάστασης και  $\mathbf{B}$  είναι το διάλυμα των αρχικών πιθανοτήτων. Οι Brook και Evans (1972) χρησιμοποίησαν αυτήν την ιδιότητα για να υπολογίσουν το ARL ενός διαγράμματος ελέγχου. Θεωρούμε, τώρα, τον πίνακα

$$\mathbf{P}_\delta = \begin{bmatrix} p_{11}^\delta & p_{12}^\delta & p_{13}^\delta \\ p_{21}^\delta & p_{22}^\delta & p_{23}^\delta \\ p_{31}^\delta & p_{32}^\delta & p_{33}^\delta \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} p_{11}^\delta &= \Phi(w - \delta n_1^{1/2}) - \Phi(-w - \delta n_1^{1/2}) \\ p_{12}^\delta &= \Phi(3 - \delta n_1^{1/2}) - \Phi(w - \delta n_1^{1/2}) + \Phi(-w - \delta n_1^{1/2}) - \Phi(-3 - \delta n_1^{1/2}) \\ p_{21}^\delta &= \Phi(w - \delta n_2^{1/2}) - \Phi(-w - \delta n_2^{1/2}) \\ p_{22}^\delta &= \Phi(3 - \delta n_2^{1/2}) - \Phi(w - \delta n_2^{1/2}) + \Phi(-w - \delta n_2^{1/2}) - \Phi(-3 - \delta n_2^{1/2}). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις τιμές της τρίτης γραμμής και της τρίτης στήλης του πίνακα  $\mathbf{P}_\delta$  μιας και συνδέονται με την απορροφητική κατάσταση και έχουν διαγραφεί από τον πίνακα  $\mathbf{Q}_\delta$ . Τότε

$$ARL(\delta) = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_\delta)^{-1} \mathbf{1}$$

όπου

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{B} = [b_1 \ b_2]$$

το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων. Επομένως,

$$b_1 + b_2 = 1.$$

Λογικές επιλογές για τα  $b_1$  και  $b_2$  είναι το μέγεθος του χρόνου που ξοδεύτηκε στις καταστάσεις 1 και 2 πριν το διάγραμμα ελέγχου σημάνει συναγερμό για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Με τις επιλογές αυτές για τα  $b_1$  και  $b_2$ , ο περιορισμός ότι το μέσο μέγεθος δείγματος θέλουμε, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, να είναι  $n_0$  συνεπάγεται ότι

$$b_1 n_1 + b_2 n_2 = n_0.$$

## Πίνακας 2-2

Βοηθητικά όρια  $w$  και οι αρχικές πιθανότητες  $b_1$  και  $b_2$   
για διάφορους συνδυασμούς μεγεθών δείγματος

$n_1/n_0$	$n_2/n_0$	$w$	$b_1$	$b_2$
0.00	1.5	0.43	0.33	0.67
0.10	1.5	0.46	0.36	0.64
0.20	1.5	0.50	0.38	0.62
0.25	1.5	0.52	0.40	0.60
0.30	1.5	0.55	0.42	0.58
0.40	1.5	0.60	0.45	0.55
0.50	1.5	0.67	0.50	0.50
0.60	1.5	0.76	0.56	0.44
0.70	1.5	0.88	0.63	0.38
0.75	1.5	0.96	0.67	0.33
0.80	1.5	1.06	0.71	0.29
0.00	2.0	0.67	0.50	0.50
0.10	2.0	0.71	0.53	0.47
0.20	2.0	0.76	0.56	0.44
0.25	2.0	0.78	0.57	0.43
0.30	2.0	0.82	0.59	0.41
0.40	2.0	0.88	0.63	0.38
0.50	2.0	0.96	0.67	0.33
0.60	2.0	1.06	0.71	0.29
0.70	2.0	1.19	0.77	0.23
0.75	2.0	1.27	0.80	0.20
0.80	2.0	1.37	0.83	0.17
0.00	5.0	1.27	0.80	0.20
0.10	5.0	1.32	0.82	0.18
0.20	5.0	1.37	0.83	0.17
0.25	5.0	1.40	0.84	0.16
0.30	5.0	1.43	0.85	0.15
0.40	5.0	1.50	0.87	0.13
0.50	5.0	1.58	0.89	0.11
0.60	5.0	1.68	0.91	0.09
0.70	5.0	1.79	0.93	0.07
0.75	5.0	1.87	0.94	0.06
0.80	5.0	1.96	0.95	0.05
0.00	10.0	1.63	0.90	0.10
0.10	10.0	1.68	0.91	0.09
0.20	10.0	1.73	0.92	0.08
0.25	10.0	1.75	0.92	0.08
0.30	10.0	1.78	0.93	0.06
0.40	10.0	1.84	0.94	0.06
0.50	10.0	1.92	0.95	0.05

0.60	10.0	2.00	0.96	0.04
0.70	10.0	2.11	0.97	0.03
0.75	10.0	2.18	0.97	0.03
0.80	10.0	2.25	0.98	0.02

Για όλη την διεργασία που παρουσιάζουμε σ' αυτήν την παράγραφο, το σχήμα ξεκινά χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2-2. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με  $n_1$  όταν  $b_1 > b_2$  και με  $n_2$  όταν  $b_1 < b_2$ . Ωστόσο, στην πράξη η πλειοψηφία των διαγραμμάτων ξεκινάει με  $n_1$ .

### 2.1.4 Ιδιότητες του VSS $\bar{X}$ διαγράμματος

Οι Πίνακες 2-3 και 2-4, για αρκετά ζευγάρια μεγεθών δείγματος, περιέχουν τιμές για τα ARL συναρτήσει του μεγέθους της μεταβολής  $\delta$  στον μέσο της διεργασίας. Ο Πίνακας 2-3 στηρίζεται σε  $n_0 = 3$  και ο Πίνακας 2-4 στηρίζεται σε  $n_0 = 5$ . Σε κάθε πίνακα, για λόγους σύγκρισης, υπάρχει και το ARL του αντίστοιχου FSS Shewhart διαγράμματος. Οι Prabhu et al. (1993) έχουν κατασκευάσει και πίνακες για  $n_0 = 8, 10, 12, 15$  και 20.

Σημειώνουμε ότι για την περίπτωση που  $\delta = 0$ , το ARL είναι ίδιο και για τους δύο τύπους διαγράμματος. Στην περίπτωση του VSS διαγράμματος, το ARL βελτιώνεται περισσότερο για μικρές μεταβολές παρά για μεγάλες. Στις περισσότερες περιπτώσεις η βελτίωση είναι ιδιαίτερα αισθητή.

Μπορούμε να δούμε στους Πίνακες 2-3 και 2-4 πως για μεγαλύτερα  $\delta$  και σταθερό  $n_1$ , το ARL μικραίνει όσο μεγαλώνει το  $n_2$ , μέχρι ένα σημείο, και μετά αυξάνεται. Αυτό ισχύει για όλα τα  $\delta > 0$ , αλλά οι τιμές που έχουμε στην διάθεσή μας δεν είναι τόσο μεγάλες για να φανεί αυτό καθαρά σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται.



### Πίνακας 2-3

Σύγκριση των FSS και VSS διαγραμμάτων μέσω του ARL

( $n_0 = 3$  και όρια ελέγχου  $\pm 3$ )

$n_1$	$n_2$	w	$\delta=0$	$\delta=0.25$	$\delta=0.5$	$\delta=0.75$	$\delta=1$	$\delta=2$
FSS			370.42	184.26	60.70	22.48	9.77	1.47
VSS								
1	4	0.43	370.42	179.86	52.78	17.16	7.00	1.47
1	5	0.67	370.42	175.93	46.46	13.65	5.49	1.53
1	8	1.06	370.42	166.01	33.85	8.54	3.85	1.73
1	10	1.22	370.42	160.39	28.60	7.15	3.61	1.83
1	12	1.33	370.42	155.27	24.82	6.45	3.61	1.92
1	15	1.46	370.42	148.33	20.92	6.04	3.78	2.02
1	20	1.61	370.42	138.16	17.25	6.15	4.25	2.15
1	25	1.72	370.42	129.37	15.50	6.64	4.76	2.26
2	4	0.67	370.42	180.88	53.97	17.60	7.13	1.44
2	5	0.96	370.42	178.18	48.85	14.41	5.68	1.44
2	8	1.38	370.42	171.91	38.42	9.49	3.97	1.51
2	10	1.52	370.42	168.42	33.72	8.01	3.65	1.55
2	12	1.63	370.42	165.25	30.13	7.18	3.56	1.58
2	15	1.75	370.42	160.84	26.17	6.61	3.62	1.61
2	20	1.89	370.42	154.18	22.06	6.48	3.90	1.65
2	25	1.99	370.42	148.15	19.84	6.78	4.23	1.68

### Πίνακας 2-4

Σύγκριση των FSS και VSS διαγραμμάτων μέσω του ARL

( $n_0 = 5$  και όρια ελέγχου  $\pm 3$ ).

$n_1$	$n_2$	w	$\delta=0$	$\delta=0.25$	$\delta=0.5$	$\delta=0.75$	$\delta=1$	$\delta=2$
FSS			370.42	184.26	60.70	22.48	9.77	1.47
VSS								
1	8	0.56	370.42	121.26	22.61	6.28	6.28	1.39
1	10	0.76	370.42	114.60	18.30	5.06	2.63	1.52
1	12	0.91	370.42	108.76	15.34	4.42	2.57	1.62
1	15	1.06	370.42	101.10	12.45	4.02	2.65	1.73
1	20	1.25	370.42	90.59	9.88	3.97	2.93	1.86
1	25	1.38	370.42	82.08	8.74	4.23	3.27	1.95
2	8	0.67	370.42	122.52	23.06	6.34	2.90	1.29
2	10	0.88	370.42	116.71	18.37	5.09	2.58	1.36
2	12	1.03	370.42	111.59	15.93	4.41	2.47	1.41
2	15	1.19	370.42	104.87	13.00	3.93	2.45	1.46
2	20	1.38	370.42	95.48	10.29	3.74	2.59	1.51
2	25	1.50	370.42	87.81	9.00	3.85	2.78	1.54
3	8	0.84	370.42	127.09	23.75	6.46	2.92	1.20
3	10	1.06	370.42	119.39	19.82	5.22	2.58	1.23
3	12	1.22	370.42	115.29	17.01	4.52	2.44	1.25
3	15	1.38	370.42	109.88	14.10	3.99	2.38	1.27
3	20	1.55	370.42	102.18	11.30	3.73	2.45	1.29
3	25	1.68	370.42	95.62	9.87	3.77	2.58	1.30
4	8	1.15	370.42	126.40	25.14	7.76	2.98	1.12
4	10	1.38	370.42	123.36	21.87	5.59	2.64	1.13
4	12	1.52	370.42	120.76	19.42	4.91	2.49	1.14
4	15	1.68	370.42	117.33	16.76	4.37	2.42	1.15
4	20	1.85	370.42	112.33	13.97	4.07	2.46	1.15
4	25	1.96	370.42	107.92	12.42	4.09	2.57	1.15

## 2.1.5 Το F.I.R. χαρακτηριστικό

Σύμφωνα με το χαρακτηριστικό F.I.R. είναι καλό να ξεκινήσουμε την διεργασία με μέγεθος δείγματος  $n_2$  ώστε να ανιχνεύσουμε πολύ γρήγορα πιθανά αρχικά προβλήματα. Έτσι το VSS σχέδιο που χρησιμοποιεί και το F.I.R. χαρακτηριστικό ξεκινάει με μέγεθος δείγματος  $n_2$ , που σημαίνει  $\mathbf{B} = [0 \ 1]$ . Στον Πίνακα 2-5 βλέπουμε τις τιμές του  $ARL(\delta)$  για το F.I.R. χαρακτηριστικό με παραμέτρους  $n_0 = 5$ ,  $\delta = 0.5$  και  $0.75$  και δεδομένα ζευγάρια μεγεθών δείγματος  $n_1$  και  $n_2$ . Βελτιώσεις σχετικά με το VSS διάγραμμα που δεν χρησιμοποιεί το F.I.R. χαρακτηριστικό είναι λιγότερο ορατές για μικρά  $n_2$ . Χρησιμοποιώντας μεγάλο  $n_2$  παρέχουμε μεγαλύτερη προστασία.

**Πίνακας 2-5**

Συγκριτικός πίνακας για το ARL τριών διαγραμμάτων όπου  $n_0 = 5$ ,  
όρια ελέγχου  $\pm 3$  και όταν  $\delta = 0$  το ARL είναι 370.42.

$n_1$	$n_2$	$w$	$\delta=0.50$		$\delta=0.75$	
			ARL( $\delta$ )	ARL <sub>FIR</sub> ( $\delta$ )	ARL( $\delta$ )	ARL <sub>FIR</sub> ( $\delta$ )
FSS			33.41	-	10.76	-
VSS						
1	8	0.56	22.61	22.01	6.28	5.68
1	10	0.76	18.30	17.31	5.06	4.11
1	12	0.91	15.34	13.97	4.42	3.17
1	15	1.06	12.45	10.52	4.02	2.33
1	20	1.25	9.88	7.07	3.97	1.65
1	25	1.38	8.74	5.09	4.23	1.33
2	8	0.67	23.06	22.43	6.34	5.73
2	10	0.88	18.37	17.83	5.09	4.16
2	12	1.03	15.93	14.51	4.41	3.20
2	15	1.19	13.00	11.02	3.93	2.36
2	20	1.38	10.29	7.46	3.74	1.66
2	25	1.50	9.00	5.39	3.85	1.34
3	8	0.84	23.75	23.08	6.46	5.82
3	10	1.06	19.82	18.72	5.22	4.26
3	12	1.22	17.01	15.49	4.52	3.29
3	15	1.38	14.10	12.00	3.99	2.42
3	20	1.55	11.30	8.29	3.73	1.70
3	25	1.68	9.87	6.05	3.77	1.36
4	8	1.15	25.14	24.41	6.76	6.07
4	10	1.38	21.87	20.65	5.59	4.54

4	12	1.52	19.42	17.72	4.91	3.55
4	15	1.68	16.76	14.33	4.37	2.62
4	20	1.85	13.97	10.42	4.07	1.81
4	25	1.96	12.42	7.83	4.09	1.43

## 2.1.6 Συμπεράσματα

Σε πολλές περιπτώσεις, για σημαντικό εύρος μεταβολών στον μέσο της διεργασίας, η τιμή του ARL που χρησιμοποιούμε για να ανιχνεύσουμε μια εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία, είναι αρκετά μικρότερη στο VSS διάγραμμα από ότι στο FSS διάγραμμα. Το ARL βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην επιλογή των δύο μεγεθών δείγματος,  $n_1$  και  $n_2$ . Οι Reynolds & Arnold (1989) έδειξαν, όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, ότι η πρόσθεση στο κλασικό διάγραμμα Shewhart δύο διαστημάτων δειγματοληψίας βελτιώνει την ικανότητα του διαγράμματος. Προσθέτοντας ένα σετ βοηθητικών ορίων στο κλασικό διάγραμμα Shewhart, το νέο διάγραμμα είναι εύκολο στην χρήση για πραγματικές παραγωγικές διεργασίας.

Η σημασία που έχουν τα αποτελέσματα αυτά στην βιομηχανία, είναι η πιο γρήγορη ανίχνευση μιας εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας, μείωση του κόστους δειγματοληψίας όσο η διεργασία είναι ενός ελέγχου.

## 2.2 Διαγράμματα ελέγχου $np$

### 2.2.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο, στην Παράγραφο 1.2, ασχοληθήκαμε με τα  $np$  διαγράμματα ελέγχου στα οποία προσαρμόστηκε το χαρακτηριστικό VSI. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορεί να προσαρμοστεί το χαρακτηριστικό VSS και τι αποτελέσματα αποφέρει η πρόσθεση αυτής της ιδιότητας στα  $np$  διαγράμματα ελέγχου.

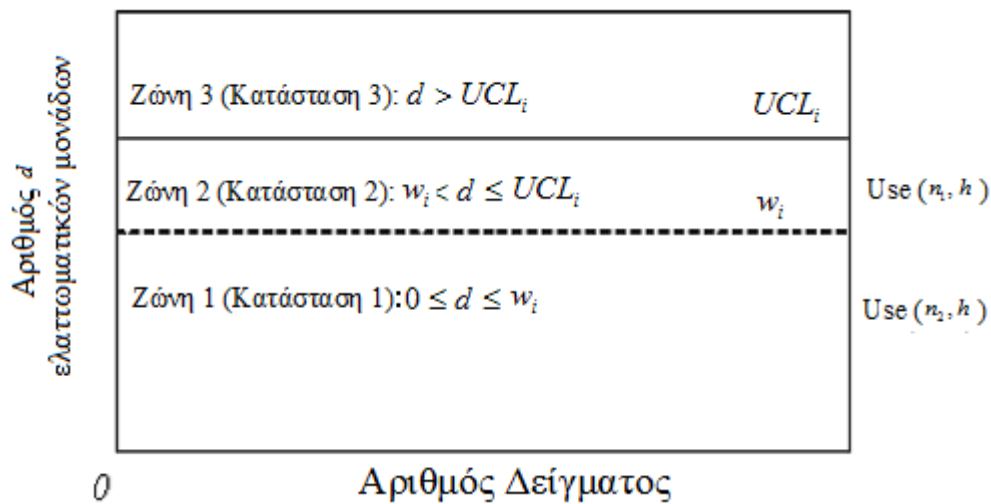
Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο, μια χρήσιμη ποσότητα για την σύγκριση της ικανότητας διάφορων διαγραμμάτων είναι το ATS. Επίσης είδαμε πως είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε αν η μεταβολή στον μέσο της διεργασίας συμβαίνει στην αρχή της

δειγματοληψίας ή κατά την διάρκεια του διαστήματος δειγματοληψίας. Αυτό είναι σημαντικό, διότι αν αγνοήσουμε την πιθανότητα η μεταβολή στον μέσο να συμβεί κατά την διάρκεια της μπορεί σαν αποτέλεσμα να έχουμε αξιοσημείωτο σφάλμα στους υπολογισμούς του ATS, ειδικά για τα διαγράμματα ελέγχου χαρακτηριστικών, παρά μεταβλητών, στα οποία παίρνουμε μεγαλύτερα δείγματα. Επιπλέον, όταν στα VSS διαγράμματα επιλέγουμε ένα μεγάλο δείγμα, είναι πολύ πιθανό μια μεταβολή στο  $p$  να συμβεί κατά την διάρκεια επιθεώρησης των  $n$  μονάδων.

Η κατασκευή του VSS  $np$  διαγράμματος ελέγχου, που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια, έχει σαν αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης το εκτός στατιστικού ελέγχου ATS. Οι περιορισμοί που θα εφαρμοστούν κατά την ελαχιστοποίηση αυτή, είναι οι ίδιοι με αυτούς που εφαρμόστηκαν στην Παράγραφο 1.2. Τα αποτελέσματα που δίνονται παρακάτω εμφανίζονται στην εργασία των Luo & Wu (2002).

### 2.2.2 Λειτουργία του VSS διαγράμματος ελέγχου

Στο VSS  $np$  διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικά μεγέθη δείγματος ενώ το διάστημα δειγματοληψίας παραμένει σταθερό. Όταν θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου θα χρησιμοποιούμε το μικρό μέγεθος δείγματος,  $n_1$ . Αντίθετα, όταν φαίνεται ότι η διεργασία είναι κοντά σε εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση, θα χρησιμοποιούμε το μεγάλο μέγεθος δείγματος,  $n_2$ . Σε κάθε περίπτωση, θα επιθεωρούμε τις τελευταίες  $n_i$ ,  $i = 1, 2$ , παραγόμενες μονάδες. Εκτός των δύο ορίων ελέγχου,  $UCL_1$  και  $UCL_2$  στο VSS  $np$  διάγραμμα χρησιμοποιούμε και δύο προειδοποιητικά όρια,  $w_1$  και  $w_2$ . Τα όρια  $UCL_1$  και  $w_1$  αναφέρονται στο μικρό μέγεθος δείγματος, ενώ αντίστοιχα τα  $UCL_2$  και  $w_2$  αναφέρονται στο μεγάλο μέγεθος δείγματος. Τα όρια αυτά χωρίζουν το διάγραμμα ελέγχου σε τρεις ζώνες, όπως φαίνονται και στο επόμενο σχήμα.



**ΣΧΗΜΑ 2-1**

Οι τρεις ζώνες του VSS διαγράμματος ελέγχου.

Το μέγεθος του επόμενου δείγματος εξαρτάται από τον αριθμό,  $d$ , των ελαττωματικών μονάδων του τρέχοντος δείγματος. Εάν το  $d$  είναι στην πρώτη ζώνη, επιλέγουμε το μικρό μέγεθος, εάν είναι στην ζώνη 2 επιλέγουμε το μεγάλο μέγεθος, ενώ αν πέσει στην ζώνη 3 τότε βρισκόμαστε σε εκτός στατιστικού ελέγχου κατάσταση.

Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο, θεωρούμε ότι η κατανομή της πιθανότητας να βρεθούν  $d$  ελαττωματικές μονάδες σε ένα δείγμα είναι η διωνυμική. Η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της είναι, αντίστοιχα,

$$B(n, p, i) = C_i^n p^i (1 - p)^{n-i},$$

$$E(n, U, p) = \sum_{i=0}^U B(n, p, i). \quad (26)$$

Θα συμβολίζουμε με  $p_{ij}^0$  και  $p_{ij}^+$  τις εντός και εκτός στατιστικού ελέγχου πιθανότητες μετάβασης, αντίστοιχα, από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$  (ή από την ζώνη  $i$  στην ζώνη  $j$ ). Αναφορικά με την σχέση (26) οι πιθανότητες μετάβασης μπορούν να γραφούν ως εξής

$$p_{i1}^0 = E(n_i, w_i, p_0)$$

$$p_{i2}^0 = E(n_i, UCL_i, p_0) - p_{i1}^0 \quad i = 1, 2$$

$$p_{i3}^0 = 1 - p_{i1}^0 - p_{i2}^0$$

$$\begin{aligned}
p_{i1}^+ &= E(n_i, w_i, p_+) \\
p_{i2}^+ &= E(n_i, UCL_i, p_+) - p_{i1}^+ \quad i = 1, 2 \\
p_{i3}^+ &= 1 - p_{i1}^+ - p_{i2}^+
\end{aligned}$$

### 2.2.3 Σχεδιασμός του VSS ηρ διαγράμματος ελέγχου

Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιήσουμε κατά την βελτιστοποίηση είναι οι ίδιες μ' αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο (Παράγραφος 1.2.3). Ένα επιθυμητό διάγραμμα ελέγχου θα πρέπει να έχει μικρό εκτός ελέγχου ATS για την ανίχνευση μεταβολών και την ίδια στιγμή θα πρέπει να έχει μικρό ρυθμό εσφαλμένων συναγεργμών και χαμηλό μέσο ρυθμό επιθεώρησης. Για τον λόγο αυτό, ο συνολικός σχεδιασμός του VSS ηρ διαγράμματος ελέγχου δίνεται σύμφωνα με το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης :

$$\text{Ελαχιστοποίηση :} \quad ATS(p_0, p_+, n_1, n_2, h, UCL_1, UCL_2, w_1, w_2)$$

$$\text{Περιορισμοί :} \quad ATS_0(p_0, n_1, n_2, h, UCL_1, UCL_2, w_1, w_2) \geq \tau \quad (27)$$

$$AIR(p_0, n_1, n_2, h, w_1, w_2, UCL_1, UCL_2) \leq R \quad (28)$$

$$\text{Μεταβλητές κατασκευής :} \quad n_1, n_2, h, UCL_1, UCL_2, w_1, w_2$$

όπου ATS είναι το εκτός ελέγχου ATS στο  $p = p_+$ , και  $ATS_0$  είναι το πραγματικό εντός ελέγχου ATS στο  $p = p_0$ . Το AIR υποδηλώνει τον πραγματικό μέσο ρυθμό επιθεώρησης και στα δύο μεγέθη δείγματος όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Θεωρούμε ότι την μεγαλύτερη διάρκεια η διεργασία θα βρίσκεται εντός ελέγχου. Κατά την διάρκεια που η διεργασία είναι εντός ελέγχου, ο ρυθμός εσφαλμένων συναγεργμών περιορίζεται από την ανισότητα (27), και ο μέσος ρυθμός επιθεώρησης από την ανισότητα (28).

Η διαδικασία βελτιστοποίησης οδηγεί το σημείο σχεδιασμού στα περιοριστικά όρια ( $ATS_0 = \tau$ ) και ( $AIR = R$ ) ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη σύγκλιση. Ωστόσο, επειδή οι παράμετροι είναι ακέραιοι αριθμοί, το προκύπτον  $ATS_0$  είναι λίγο μεγαλύτερο από το  $\tau$  και το AIR είναι λίγο μικρότερο από το  $R$ .

Πολλοί ερευνητές έχουν σημειώσει ότι το καταλληλότερο  $n_2$  για VSS πλαίσια είναι συνήθως πολύ μεγάλο για να επιλεγεί στην πράξη, ειδικά όταν η μεταβολή στον μέσο της διεργασίας είναι μικρή (Costa (1994), Reynolds & Arnold (2001)). Σε πολλές εργασίες συνηθίζεται όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, να είναι  $n_2 = n_{\max}$  (Prabhu et al. (1994), Reynolds &

Arnold (2001)). Το ίδιο ακολουθούμε και στην διαδικασία που παρουσιάζουμε. Δύο μεταβλητές κατασκευής,  $n_1$  και  $w_1$ , χρησιμοποιούνται σαν να είναι ανεξάρτητες. Θα ερευνηθούν βήμα βήμα αναλυτικά σε δύο επίπεδα. Οι περιοχές στις οποίες θα ερευνήσουμε τις δύο μεταβλητές ορίζονται ως εξής :

1) Το  $n_1$  θα βρίσκεται μεταξύ 2 και  $n_2$ .

2) Το  $w_1$  θα βρίσκεται μεταξύ 0 και  $n_1$ . Στην διεργασία βελτιστοποίησης, όταν  $h < h_{\min}$ , το VSS διάγραμμα γίνεται μη πρακτικό και η αναζήτηση του  $w_1$  θα τερματιστεί άμεσα, ώστε να γλιτώσουμε χρόνο. Αποδεικνύεται ότι το  $h$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $w_1$ . Επομένως, αυξάνοντας συνεχώς το  $w_1$  θα μειώνουμε περισσότερο το  $h$ .

Οι τιμές των άλλων τεσσάρων μεταβλητών,  $h, UCL_1, UCL_2$  και  $w_2$  καθορίζονται από τις πρώτες τρεις μεταβλητές και τους περιορισμούς.

1) Η τιμή του  $w_2$  είναι ο ακέραιος που ελαχιστοποιεί την διαφορά  $D$ ,

$$D = |p_{11}^0 - p_{21}^0|$$

που φέρνει τις πιθανότητες μετάβασης στην κατάσταση 1, και στα δύο μεγέθη δείγματος, όσο το δυνατόν πιο κοντά όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Αυτή η χρήση γίνεται συνήθως στα VSSI διαγράμματα (Prabhu et al. (1994), Costa (1999)).

2) Η τιμή του  $h$  καθορίζεται από τον περιορισμό στον μέσο ρυθμό επιθεώρησης. Σημειώνουμε ότι

$$AIR = \frac{B_1 n_1 + B_2 n_2}{h} \leq R$$

όπου  $B_1$  και  $B_2$  είναι οι σταθεροποιημένες πιθανότητες για την διεργασία να βρίσκεται στην κατάσταση 1 και 2 αντίστοιχα, όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Κατά την σταθερή κατάσταση η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου για μεγάλο χρονικό διάστημα και εισέρχεται σε μια σταθεροποιημένη θέση πριν συμβεί μια εκτός ελέγχου μεταβολή στο  $p$  σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή. Αν η διεργασία είναι σταθεροποιημένη και εντός ελέγχου, τότε οι πιθανότητες  $B_1$  και  $B_2$  είναι σταθερές.

$$[B_1 \ B_2] = [B_1 \ B_2] \cdot \begin{bmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{21}^0 & p_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Τα  $B_1$  και  $B_2$  μπορούν να βρεθούν λύνοντας την σχέση

$$B_1 + B_2 = 1 \quad (30)$$



και οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν από την σχέση (29) (Turner (1981)).  
Αν η σχέση (30) και η πρώτη εξίσωση της σχέσης (29) λυθούν ταυτόχρονα τότε :

$$B_1 = \frac{p_{21}^0}{1 - p_{11}^0 + p_{21}^0},$$

$$B_2 = \frac{1 - p_{11}^0}{1 - p_{11}^0 + p_{21}^0}.$$

Για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό του μέσου ρυθμού επιθεώρησης έχουμε

$$h \geq \frac{B_1 n_1 + B_2 n_2}{R}$$

και επομένως το  $h$  είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή.

3) Οι τιμές των ορίων  $UCL_1$  και  $UCL_2$  καθορίζονται ταυτόχρονα. Οι αρχικές τιμές των  $UCL_1$  και  $UCL_2$  τοποθετούνται όπως στα  $w_1$  και  $w_2$  αντίστοιχα. Στην συνέχεια αρχίζουμε και τα αυξάνουμε κατά μία μονάδα έως ότου το  $ATS_0$  που προκύπτει να γίνει ίσο ή αμέσως μεγαλύτερο από το  $\tau$ . Σημειώνουμε ότι σε κάθε βήμα μόνο το ένα από τα δύο όρια θα αυξάνεται κατά ένα, ενώ το άλλο θα παραμένει σταθερό. Για παράδειγμα, αν στο μικρό μέγεθος δείγματος η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση 3 είναι μεγαλύτερη από αυτήν του μεγάλου μεγέθους δείγματος, τότε θα αυξήσουμε κατά ένα το  $UCL_1$ , αλλιώς το  $UCL_2$ . Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε και τα δύο δείγματα να παράγουν ίδιες πιθανότητες σφάλματος τύπου 1.

Ολόκληρη η διεργασία βελτιστοποίησης μπορεί να περιγραφεί ως εξής :

- I) Ορίζουμε τις ποσότητες  $p_0, p_+, n_{\max}, h_{\min}, \tau, R$ .
- II) Τοποθετούμε σαν αρχική τιμή του  $ATS_{\min}$  μια πολύ μεγάλη τιμή, π.χ.  $10^{10}$ , και θέτουμε το  $n_2$  ίσο με  $n_{\max}$ .
- III) Ψάχνουμε το  $n_1$  μεταξύ του 2 και  $n_2$ .
- IV) Ψάχνουμε το  $w_1$  μεταξύ 0 και  $n_1$ .
- V) Σύμφωνα με τις τιμές των  $n_1, n_2$  και  $w_1$  προσδιορίζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές  $w_2, h, UCL_1$  και  $UCL_2$ .
- VI) Αν στον υπολογισμό του  $h$  προκύψει τιμή μικρότερη από  $h_{\min}$ , τερματίζουμε την εύρεση του  $w_1$ , αυξάνουμε το  $n_1$  κατά ένα και επιστρέφουμε στο βήμα IV, αλλιώς πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα.

- VII) Υπολογίζουμε το εκτός ελέγχου ATS.
- VIII) Αν το ATS που βρήκαμε είναι μικρότερο από το  $ATS_{\min}$ , το αντικαθιστούμε με το  $ATS_{\min}$  και οι τρέχουσες τιμές των παραμέτρων  $n_1, n_2, w_1, w_2, h, UCL_1$  και  $UCL_2$  αποθηκεύονται ως προσωρινό αρχικό σχέδιο.
- IX) Στο τέλος ολόκληρης της έρευνας, το αρχικό σχέδιο του VSS διαγράμματος που καταλήγει στο ελάχιστο ATS μπορεί να αναγνωρισθεί.

## 2.2.4 Αριθμητική μελέτη

Η μελέτη για το VSS διάγραμμα είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 1.2.4, μόνο που όπου είχαμε VSI χαρακτηριστικό τώρα έχουμε το VSS χαρακτηριστικό.

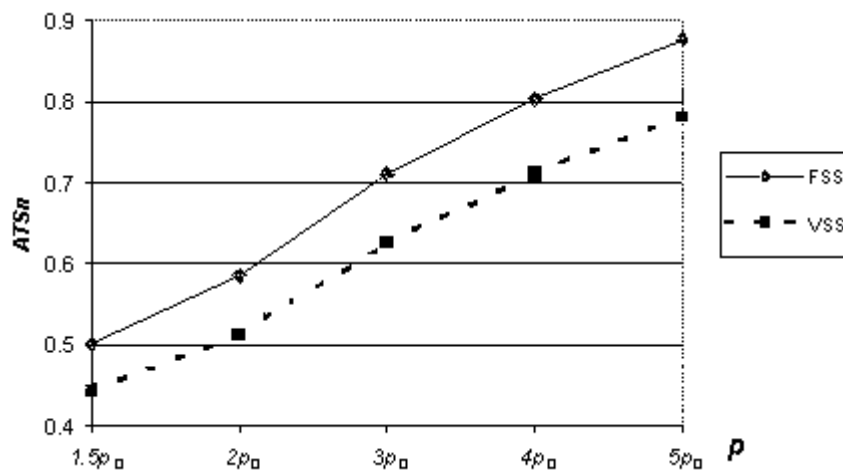
Το μόνο που αλλάζει τώρα είναι ο Πίνακας 1-13 που για την περίπτωση μας γίνεται ο παρακάτω πίνακας,

**Πίνακας 2-6**  
Μέσο  $AATS_n$  για συγκρίσιμα διαγράμματα  $np$

Τύπος διαγράμματος	Μέσο $AATS_n$
Στατικό διάγραμμα	$np$
FSSI	1.00
VSS	0.70
	0.61

Καθώς και το Σχήμα 1-4 το οποίο αλλάζει στο ακόλουθο σχήμα

**Σχήμα 2-2**  
 $ATS_n$  των βέλτιστων FSSI και VSI  $np$  διαγραμμάτων



### 2.2.5 Συμπεράσματα

Για τα συμπεράσματα που βγάζουμε για την πρόσθεση του VSS χαρακτηριστικού στο  $np$  διάγραμμα ελέγχου παραπέμπουμε στην Παράγραφο 1.2.5, καθώς τα αποτελέσματα που πήραμε είναι πολύ κοντά με αυτά της περίπτωσης του VSI χαρακτηριστικού.

## 2.3 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM

### 2.3.1 Εισαγωγή

Τα CUSUM διαγράμματα, όπως γνωρίζουμε, είναι ικανότερα από τα διαγράμματα Shewhart στο να ανιχνεύουν μικρές μεταβολές στον μέσο μιας διεργασίας. Απ' την άλλη μεριά όμως, τα διαγράμματα Shewhart είναι αποτελεσματικότερα στην ανίχνευση μεγάλων μεταβολών στον μέσο μιας διεργασίας. Έτσι, ο Lucas (1982) πρότεινε έναν συνδυασμένο Shewhart-CUSUM διάγραμμα το οποίο είναι ευαίσθητο για όλα τα μεγέθη μεταβολής του μέσου.

Όπως είναι γνωστό, η κλασική μέθοδος είναι να χρησιμοποιούμε σταθερό μέγεθος δείγματος και σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας. Οι Prabhu et al. (1993) πρότειναν ένα συνδυασμένο προσαρμόσιμο  $\bar{X}$  διάγραμμα στο οποίο μεταβάλλονται και το μέγεθος δείγματος και το διάστημα δειγματοληψίας. Χρησιμοποιούσαν ένα μεγάλο δείγμα και μικρό διάστημα δειγματοληψίας όταν η μέση τιμή του δείγματος δεν ήταν κοντά στην τιμή στόχο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιούσαν ένα μικρό δείγμα και μεγάλο διάστημα

δειγματοληψίας. Επιπλέον χρησιμοποιούσαν και βοηθητικά όρια με βάση τα οποία γινόταν η επιλογή των προσαρμόσιμων παραμέτρων. Άλλες γνωστές εργασίες πάνω στο ζήτημα αυτό είναι και αυτές των Flaig (1991) και Daudin (1992) που αναφέραμε στην Παράγραφο 2.1.1. Όλα αυτά είχαν σαν επακόλουθο να αναπτυχθεί κάποια θεωρία και γύρω από ένα προσαρμόσιμο CUSUM διάγραμμα στο οποίο θα μπορεί να μεταβάλλεται το μέγεθος δείγματος και όπως όλα δείχνουν θα πρέπει να είναι ικανότερο από το κλασικό CUSUM διάγραμμα. Η θεωρία αυτή εμφανίζεται στην εργασία των Annadi et al. (1995) την οποία και θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.

Στην εργασία αυτή, λοιπόν, προτείνεται ένα διάγραμμα με δύο μεγέθη δείγματος, παρόμοιο με αυτό του Prabhu (1993). Το βασικό πλεονέκτημα αυτού του σχεδίου είναι ότι επειδή βασίζεται σε CUSUM διάγραμμα, θα είναι αρκετά γρήγορο στην ανίχνευση μικρών αποκλίσεων από την τιμή στόχο. Μπορεί τα διαγράμματα Shewhart να είναι πολύ πιο εύκολα στην επεξήγηση, ωστόσο η εμπειρία έχει δείξει ότι με λίγη εκπαίδευση, τα προσαρμόσιμα CUSUM διαγράμματα μπορούν να γίνουν δημοφιλή. Επιπλέον μιας και τα κλασικά CUSUM διαγράμματα χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανίες που ενδιαφέρουν πολύ, μικρές μεταβολές στον μέσο της διεργασίας, π.χ. φαρμακευτικές βιομηχανίες, το προσαρμόσιμο μοντέλο θα είναι ακόμα πιο χρήσιμο.

### 2.3.2 Σχεδιασμός του VSS CUSUM διαγράμματος ελέγχου

Θα συμβολίζουμε με  $n_0$  το μέγεθος δείγματος που χρησιμοποιεί ένα διάγραμμα με σταθερό μέγεθος δείγματος. Στο διάγραμμα που παρουσιάζουμε χρησιμοποιούνται δύο μεγέθη δείγματος,  $n_1$  και  $n_2$ , τα οποία επιλέγονται έτσι ώστε όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι  $n_0$ . Για κάθε ζεύγος  $n_1$  και  $n_2$  υπολογίζεται και ένα βοηθητικό όριο  $w$  έτσι ώστε όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι  $n_0$ . Το  $w$  καθορίζει πότε θα χρησιμοποιούμε το κάθε μέγεθος δείγματος. Τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτή η επιλογή θα τον δούμε στην συνέχεια.

Ο υπολογισμός του ARL γίνεται μέσω της Μαρκοβιανής προσέγγισης που πρότειναν οι Brook & Evans (1972). Υποθέτουμε ότι  $Y$  είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή της οποίας οι αποκλίσεις από μια προκαθορισμένη τιμή  $k$ , συσσωρεύονται και απεικονίζονται σε ένα μονόπλευρο CUSUM διάγραμμα που έχει όριο ελέγχου  $h$ . Το σχέδιο αυτό δημιουργεί μια

Μαρκοβιανή αλυσίδα με  $m+1$  καταστάσεις,  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_m$ , όπου  $e_m$  είναι η απορροφητική κατάσταση. Τότε η πιθανότητα του να παραμείνει η αλυσίδα στην ίδια κατάσταση στο επόμενο βήμα θα είναι η περίπτωση που η αλλαγή στο συσσωρευμένο άθροισμα δεν ξεπερνάει μια μικρή ποσότητα, έστω  $\nu/2$ , δηλαδή η επόμενη τιμή του  $Y$  δεν διαφέρει από την τιμή στόχο περισσότερο από  $\nu/2$ . Η ποσότητα  $\nu$  είναι το εύρος του διαστήματος που εμπλέκεται στην διακριτικοποίηση της κατανομής πιθανοτήτων της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ . Έτσι, ισχύει

$$\nu = h/(m-1 + \frac{1}{2}) = 2h/(2m-1)$$

Επομένως, οι πιθανότητες μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, για  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , θα είναι

$$P_{i \rightarrow 0} = P(Y < (\frac{1}{2} - i)\nu + k - \delta\sqrt{n})$$

$$P_{i \rightarrow j} = P((j - i - \frac{1}{2})\nu + k - \delta\sqrt{n} < Y < (j - i + \frac{1}{2})\nu + k - \delta\sqrt{n})$$

$$P_{i \rightarrow m} = P(Y > (m - i - \frac{1}{2})\nu + k - \delta\sqrt{n})$$

όπου  $\delta$  είναι το μέγεθος της μεταβολής στον μέσο της διεργασίας.

Το προσαρμόσιμο CUSUM τροποποιεί το μέγεθος δείγματος χρησιμοποιώντας το  $n = n_1$  όσο το CUSUM είναι μακριά από το όριο ελέγχου, και το  $n = n_2$  όσο είναι κοντά στο όριο ελέγχου. Συγκεκριμένα

$$n \text{ στην κατάσταση } i = \begin{cases} n_1 & \text{αν η κατάσταση } i-1 \leq w \\ n_2 & \text{αν η κατάσταση } i-1 > w \end{cases}$$

όπου  $w$  είναι η τιμή του βοηθητικού ορίου.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}_\delta$  για μια διεργασία που λειτουργεί μακριά από την τιμή στόχο κατά  $\delta$ , μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων εξισώσεων. Ο πίνακας  $\mathbf{Q}_\delta$  προκύπτει αν διαγράψουμε από τον  $\mathbf{P}_\delta$  την τελευταία στήλη και την τελευταία γραμμή που αναφέρονται στην απορροφητική κατάσταση. Οι τιμές των  $n_0$ ,  $n_1$  και  $n_2$  επιλέγονται έτσι ώστε  $n_1 < n_0 < n_2$ . Θεωρούμε το διάνυσμα

$$N = (n_1, n_1, \dots, n_2, n_2, \dots, n_2)'$$

όπου το  $n_1$  αντιστοιχεί στις καταστάσεις από 0 έως  $w$  και  $n_2$  αντιστοιχεί στις καταστάσεις από  $w+1$  έως  $m-1$ . Τότε, η σχέση

$$b'(I - Q_\delta)^{-1} N$$

μας δίνει τον αναμενόμενο συνολικό αριθμό μονάδων που συλλέξαμε μέχρι το διάγραμμα να σημαίνει συναγερμό για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Μιας και η διεργασία μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια ανανεωτική διαδικασία με αμοιβές (Ross, 1970), το αναμενόμενο μέσο μέγεθος δείγματος είναι ο λόγος του αναμενόμενου αριθμού των μονάδων που συλλέξαμε προς το ARL μέχρι το διάγραμμα να δώσει σήμα για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Επομένως,

$$E(N) = \frac{b'(I - Q_\delta)^{-1} N}{b'(I - Q_\delta)^{-1} 1} \quad \text{για } \delta = 0$$

όπου  $b'$  είναι ένα  $1 \times m$  διάνυσμα  $(1 \ 0 \ 0 \dots 0)$  που ξεκινάει το CUSUM από την κατάσταση 0.

Το βοηθητικό όριο  $w$  βρίσκεται θέτοντας  $N = n_1$  για  $i = 0, \dots, w$  και  $N = n_2$  για  $i = w + 1, \dots, m$ , έτσι ώστε το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι  $E(N) = n_0$ . Το CUSUM σχέδιο ξεκινάει χρησιμοποιώντας για μέγεθος δείγματος το  $n_1$  για την κατάσταση 0 και το  $n_2$  για όλες τις άλλες καταστάσεις. Το πλήθος των καταστάσεων που έχουν μέγεθος δείγματος  $n_1$  αυξάνεται επαναληπτικά μέχρι το  $E(N) \leq n_0$ . Οι παράμετροι  $n_1$ ,  $n_2$  και  $w$  επιλέγονται έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL του VSS σχεδίου να είναι ίδιο με αυτό του κλασικού σχεδίου. Χρησιμοποιώντας την τιμή του  $w$  όπως είπαμε, βρίσκουμε το εκτός ελέγχου ARL του προσαρμόσιμου σχεδίου από την σχέση,

$$b'(I - Q_\delta)^{-1} 1 \tag{31}$$

Το ARL του κλασικού σχεδίου είναι,

$$b'(I - Q_\delta)^{-1} 1$$

με  $n_1 = n_2 = n_0$ .

### Πίνακας 2-7

ARL για FSS και VSS διάγραμμα με  $n_0 = 3$ .

Παράμετροι					$\delta$							
H	k	$n_1$	$n_2$	E(N)	w	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
4.00	0.50	σταθερά		3		334.584	34.051	10.498	5.749	3.964	2.519	1.938
4.00	0.50	1	5	2.73	0.14	334.584	25.054	8.452	5.177	3.863	2.698	2.184
4.00	0.50	1	8	2.90	0.68	334.584	19.671	7.557	4.939	3.763	2.620	2.214
4.00	0.50	1	10	2.87	0.95	334.584	18.653	7.682	5.112	3.882	2.719	2.310
5.00	0.50	σταθερά		3		925.169	51.000	13.188	7.001	4.776	2.988	2.247

5.00	0.50	1	5	2.74	0.17	925.169	33.780	10.093	6.040	4.449	3.074	2.411
5.00	0.50	1	8	2.72	0.85	925.169	25.390	9.046	5.794	4.365	2.960	2.315
5.00	0.50	1	10	2.88	1.02	925.169	22.624	8.771	5.751	4.351	2.908	2.352
8.00	0.25	σταθερά	3			726.062	35.684	13.620	8.372	6.078	3.995	3.046
8.00	0.25	1	5	2.75	1.08	726.062	27.513	11.819	7.733	5.834	4.007	3.180
8.00	0.25	1	8	2.97	1.90	726.062	24.112	11.350	7.607	5.769	4.008	3.056
8.00	0.25	1	10	2.85	2.44	726.062	24.755	11.985	8.013	6.054	4.151	3.066
9.00	0.25	σταθερά	3			1212.73	40.983	15.245	9.327	6.754	4.421	3.349
9.00	0.25	1	5	2.96	0.92	1212.73	30.224	12.709	8.264	6.219	4.272	3.335
9.00	0.25	1	8	2.81	2.14	1212.73	27.437	12.723	8.448	6.369	4.352	3.420
9.00	0.25	1	10	2.96	2.44	1212.73	26.507	12.695	8.462	6.373	4.408	3.305

### Πίνακας 2-8

ARL για FSS και VSS διάγραμμα με  $n_0 = 5$ .

Παράμετροι						$\delta$						
h	k	$n_1$	$n_2$	E(N)	w	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
5.00	0.50	σταθερά	5			925.169	30.255	8.721	4.974	3.524	2.313	1.867
5.00	0.50	1	6	3.18	0.17	925.169	28.420	9.028	5.568	4.169	2.930	2.301
5.00	0.50	1	8	4.05	0.17	925.169	21.885	7.697	4.959	3.803	2.718	2.167
5.00	0.50	1	10	4.92	0.17	925.169	18.104	6.890	4.580	3.573	2.557	2.111
5.00	0.50	1	12	4.66	0.51	925.169	16.858	6.911	4.693	3.667	2.546	2.164
5.00	0.50	2	6	3.74	0.17	925.169	27.342	8.520	5.146	3.798	2.626	2.111
5.00	0.50	2	8	4.62	0.17	925.169	21.094	7.241	4.564	3.451	2.433	2.042
5.00	0.50	2	10	4.66	0.51	925.169	18.355	6.805	4.391	3.345	2.330	2.032
5.00	0.50	2	12	4.87	0.68	925.169	16.560	6.521	4.279	3.268	2.272	2.040
5.00	0.50	3	6	4.31	0.17	925.169	26.608	8.200	4.895	3.583	2.451	2.027
5.00	0.50	3	8	4.91	0.34	925.169	20.848	7.049	4.377	3.275	2.289	1.995
5.00	0.50	3	10	4.72	0.85	925.169	18.655	6.740	4.250	3.183	2.213	1.994
5.00	0.50	3	12	4.88	1.00	925.169	16.975	6.464	4.129	3.094	2.178	1.999
5.00	0.50	4	6	4.87	0.17	925.169	26.043	7.964	4.712	3.425	2.325	1.954
5.00	0.50	4	8	4.98	0.85	925.169	21.250	7.058	4.306	3.175	2.197	1.940
5.00	0.50	4	10	4.89	1.53	925.169	19.411	6.789	4.188	3.087	2.159	1.943
5.00	0.50	4	12	4.99	1.86	925.169	17.925	6.544	4.076	3.008	2.154	1.946
8.00	0.25	σταθερά	5			726.082	24.478	9.972	6.295	4.646	3.136	2.380
8.00	0.25	1	6	4.22	0.27	726.082	22.863	9.969	6.608	5.062	3.586	2.948
8.00	0.25	1	8	4.52	0.81	726.082	20.091	9.269	6.303	4.866	3.459	2.830
8.00	0.25	1	10	4.95	1.08	726.082	18.484	8.937	6.148	4.763	3.438	2.670
8.00	0.25	1	12	4.60	1.63	726.082	18.897	9.502	6.555	5.048	3.600	2.631
8.00	0.25	2	6	4.57	0.27	726.082	22.428	9.616	6.282	4.763	3.346	2.724
8.00	0.25	2	8	4.63	1.08	726.082	19.881	8.961	5.939	4.515	3.190	2.524
8.00	0.25	2	10	4.62	1.63	726.082	18.948	8.832	5.888	4.473	3.173	2.369
8.00	0.25	2	12	4.81	1.90	726.082	18.248	8.699	5.822	4.435	3.106	2.997
8.00	0.25	3	6	4.93	0.27	726.082	22.127	9.388	6.081	4.582	3.201	2.544
8.00	0.25	3	8	4.90	1.36	726.082	19.665	8.707	5.700	4.302	3.031	2.335

8.00	0.25	3	10	4.97	1.90	726.082	18.549	8.428	5.550	4.200	2.952	2.205
8.00	0.25	3	12	4.85	2.44	726.082	18.422	8.461	5.577	4.238	2.893	2.213
8.00	0.25	4	6	4.88	1.08	726.082	22.276	9.371	6.008	4.484	3.093	2.391
8.00	0.25	4	8	4.96	2.17	726.082	20.076	8.727	5.654	4.243	2.943	2.216
8.00	0.25	4	10	4.90	2.98	726.082	19.511	8.578	5.582	4.214	2.876	2.210
8.00	0.25	4	12	4.85	3.53	726.082	19.399	8.555	5.378	4.207	2.895	2.334

### Πίνακας 2-9

ARL για VSS διάγραμμα με FIR με  $n_0 = 5$  και  $S_{90} = h/2$ .

Παράμετροι					0.00		0.25		0.50		1.00	
h	k	$n_1$	$n_2$	W	ARL	ARL_FIR	ARL	ARL_FIR	ARL	ARL_FIR	ARL	ARL_FIR
4	0.5	σταθερά			334.585	317.983	22.003	16.651	7.104	4.558	2.950	1.844
4	0.5	1	6	0.14	334.585	317.983	21.690	14.995	7.626	3.997	3.645	1.675
4	0.5	1	8	0.14	334.585	317.983	17.343	11.170	6.581	3.231	3.357	1.447
4	0.5	1	10	0.14	334.585	317.983	14.683	8.908	5.942	2.777	3.171	1.299
4	0.5	1	12	0.41	334.585	317.983	13.765	7.677	5.934	2.480	3.219	1.198
4	0.5	2	6	0.14	334.585	317.983	29.723	14.621	7.127	3.982	3.278	1.675
4	0.5	2	8	0.27	334.585	317.983	16.603	10.962	6.134	3.225	3.010	1.447
4	0.5	2	10	0.41	334.585	317.983	14.709	9.005	5.781	2.782	2.916	1.299
4	0.5	2	12	0.68	334.585	317.983	13.872	7.822	5.732	2.486	2.908	1.198
4	0.5	3	6	0.14	334.585	317.983	20.065	14.367	6.812	3.972	3.065	1.675
4	0.5	3	8	0.27	334.585	317.983	16.308	10.909	5.925	3.225	2.831	1.447
4	0.5	3	10	0.68	334.585	317.983	14.779	9.123	5.661	2.789	2.751	1.299
4	0.5	3	12	0.95	334.585	317.983	14.012	7.966	5.586	2.495	2.729	1.198
4	0.5	4	6	0.14	334.585	317.983	19.557	14.171	6.580	3.965	2.910	1.675
4	0.5	4	8	0.81	334.585	317.983	16.719	11.193	5.953	3.244	2.739	1.447
4	0.5	4	10	1.22	334.585	317.983	15.551	9.629	5.757	2.822	2.689	1.299
4	0.5	4	12	1.49	334.585	317.983	15.027	8.675	5.711	2.540	2.698	1.198
5	0.5	σταθερά			925.169	895.161	30.255	22.704	8.721	5.439	3.524	2.166
5	0.5	1	6	0.17	925.169	895.161	28.420	19.520	9.028	4.720	4.169	1.967
5	0.5	1	8	0.17	925.169	895.161	21.885	13.936	7.697	3.806	3.803	1.698
5	0.5	1	10	0.17	925.169	895.161	18.104	10.845	6.890	3.267	3.573	1.515
5	0.5	1	12	0.51	925.169	895.161	16.858	9.176	6.911	2.911	3.667	1.378
5	0.5	2	6	0.17	925.169	895.161	27.342	19.129	8.520	4.712	3.798	1.967
5	0.5	2	8	0.17	925.169	895.161	21.094	13.743	7.241	3.803	3.451	1.698
5	0.5	2	10	0.51	925.169	895.161	18.355	10.988	6.805	3.270	3.345	1.515
5	0.5	2	12	0.68	925.169	895.161	16.560	9.191	6.521	2.912	3.268	1.378
5	0.5	3	6	0.17	925.169	895.161	26.608	18.864	8.200	4.707	3.583	1.967
5	0.5	3	8	0.34	925.169	895.161	20.848	13.717	7.049	3.804	3.275	1.698



5	0.5	3	10	0.85	925.169	895.161	18.655	11.172	6.740	3.275	3.183	1.515
5	0.5	3	12	1.02	925.169	895.161	16.975	9.401	6.464	2.917	3.094	1.378
5	0.5	4	6	0.17	925.169	895.161	26.043	18.659	7.964	4.704	3.425	1.967
5	0.5	4	8	0.85	925.169	895.161	21.250	13.957	7.058	3.812	3.175	1.698
5	0.5	4	10	1.53	925.169	895.161	19.411	11.613	6.789	3.292	3.087	1.515
5	0.5	4	12	1.86	925.169	895.161	17.925	9.909	6.544	2.934	3.008	1.378

### 2.3.3 Υπολογισμός του ARL του προτεινόμενου διαγράμματος

Στους Πίνακες 2-7 και 2-8 βλέπουμε τις τιμές του ARL για ένα εύρος διάφορων μεγεθών δείγματος ως συνάρτηση του  $\delta$ , καθώς και το ARL του κλασικού διαγράμματος για τις αντίστοιχες τιμές των  $h$  και  $k$ .

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως για την περίπτωση που  $\delta = 0$ , το ARL και των δύο τύπων διαγράμματος είναι ίδιο. Ακόμα μπορούμε να δούμε πως για μεγάλες τιμές του  $\delta$ , το ARL μειώνεται όσο αυξάνει και το  $n_2$  μέχρι ένα σημείο, πέρα από το οποίο όμως αυξάνεται πάλι. Αυτό συμβαίνει για κάθε τιμή του  $n_1$  που μελετήθηκε. Για τον λόγο αυτό, για κάθε συνδυασμό των  $n_1$  και  $n_0$  υπάρχει κάποιο  $n_2$  που ελαχιστοποιεί το ARL για κάθε  $\delta > 0$ . Με την βοήθεια των δύο αυτών πινάκων μπορούμε να συμπεράνουμε πως το VSS διάγραμμα είναι ικανότερο για μικρές μεταβολές, ενώ για μεγάλες μεταβολές το ARL αυξάνεται. Για να επιτευχθεί μικρότερο ARL με το VSS CUSUM σχέδιο, κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει μεγαλύτερο  $n_2$  από αυτό των πινάκων. Ωστόσο, πρακτικοί περιορισμοί μπορεί να απαιτούν το μέγεθος δείγματος να είναι ίσο με αυτό των πινάκων.

Κατά την χρήση του VSS CUSUM διαγράμματος ελέγχου η επιλογή των μεγεθών  $n_1$  και  $n_2$  γίνεται έτσι ώστε η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους δείγματος ( $E(N)$ ) για μια εντός ελέγχου διεργασία να είναι αμέσως μικρότερη ή ίση με  $n_0$ . Μιας και το διάστημα μεταξύ 0 και  $h$  έχει χωριστεί σε 30 καταστάσεις, σε μερικές περιπτώσεις το  $E(N)$  είναι αρκετά μικρότερο από το  $n_0$  με αποτέλεσμα να συλλέγονται λιγότερα δείγματα από ότι με το

κλασικό σχέδιο. Αυτό σε συνάρτηση με το γεγονός ότι οι τιμές CUSUM ( $S_i$ ) είναι συνήθως 0 εξηγούν γιατί το  $w$  είναι τόσο μικρό. Ένας μεγαλύτερος αριθμός καταστάσεων μπορεί να αυξήσει το  $E(N)$  έως το επιθυμητό σημείο.

### 2.3.4 Το χαρακτηριστικό FIR

Όταν ξεκινάμε για πρώτη φορά το CUSUM διάγραμμα ή όταν το ξαναρχίζουμε μετά από μια εκτός στατιστικού ελέγχου περίπτωση, οι Lucas & Crosier (1982) προτείνουν ως αρχική τιμή του CUSUM την  $S_0 = h/2$ . Αυτό καλείται και FIR CUSUM. Το FIR CUSUM βοηθάει στην γρήγορη ανίχνευση μιας πρώιμης μεταβολής στον μέσο της διεργασίας.

Στον Πίνακα 2-9 βλέπουμε τις τιμές του ARL για διαγράμματα που έχουν το FIR χαρακτηριστικό σε σύγκριση με τα αντίστοιχα που δεν το έχουν. Για τον υπολογισμό του ARL στην FIR περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (31) όπου  $b'$  είναι ένας  $1 \times m$  πίνακας που όλα του τα στοιχεία είναι μηδενικά εκτός από το  $15^o$  που είναι μονάδα. Σημειώνουμε ότι ισχύει  $S_0 = 15$  για όλες τις περιπτώσεις, μιας και το όριο ελέγχου ( $h$ ) έχει διαχωριστεί σε 30 καταστάσεις. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 2-9 συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα που περιέχει το χαρακτηριστικό FIR ανιχνεύει γρηγορότερα μια αρχική εκτός ελέγχου περίπτωση.

### 2.3.5 Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάσαμε ένα προσαρμοσμένο CUSUM διάγραμμα, το οποίο χρησιμοποιεί δύο διαφορετικά μεγέθη δείγματος. Στο διάγραμμα αυτό προτείνεται και η χρήση ενός βοηθητικού ορίου, βάση του οποίου θα παίρνουμε την απόφαση για το ποιο από τα δύο μεγέθη θα χρησιμοποιούμε σε κάθε δειγματοληψία. Σημειώνουμε ότι το βοηθητικό

όριο επιλέγεται έτσι ώστε το μέσο μέγεθος δείγματος να είναι αμέσως μικρότερο ή ίσο με  $n_0$ , το μέγεθος δείγματος του αντίστοιχου FSS διαγράμματος. Κατά την διαδικασία παρατηρήθηκε σημαντική μείωση στο ARL σε σχέση με το FSS διάγραμμα, για πολλούς συνδυασμούς των  $n_0$ ,  $n_1$  και  $n_2$ . Επιπλέον, η χρήση και του χαρακτηριστικού FIR, μειώνει ακόμα περισσότερο το ARL.

Το διάγραμμα που παρουσιάσαμε είναι μια αρκετά απλή παραλλαγή του κλασικού FSS CUSUM διαγράμματος. Οι χρήστες που είναι εξοικειωμένοι με το κλασικό CUSUM διάγραμμα μπορούν αρκετά εύκολα να μάθουν να χρησιμοποιούν και το νέο διάγραμμα. Χρησιμοποιώντας το VSS διάγραμμα πετυχαίνουμε σημαντική μείωση στην ανίχνευση εκτός στατιστικού ελέγχου περιπτώσεων κάνοντας δυνατή και την χρήση διορθωτικών κινήσεων.

## **2.4 Διαγράμματα ελέγχου EWMA**

### **2.4.1 Εισαγωγή**

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε ένα EWMA διάγραμμα στο οποίο μπορούσε να μεταβληθεί ο ρυθμός δειγματοληψίας ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι του διαγράμματος παρέμειναν σταθερές. Στην παράγραφο αυτή θα προχωρήσουμε σε ένα EWMA διάγραμμα στο οποίο θα μπορούν να μεταβάλλονται και ο ρυθμός δειγματοληψίας αλλά και το μέγεθος του δείγματος.

Για περιπτώσεις όπου ο ρυθμός δειγματοληψίας και το μέγεθος του δείγματος πρέπει να καθοριστούν βάση των δεδομένων που έχουμε από το τρέχων δείγμα, το χαρακτηριστικό VSI και το χαρακτηριστικό VSS μπορούν να συνδυαστούν και να μας δώσουν ένα VSSVSI διάγραμμα στο οποίο μπορούν να μεταβάλλονται και οι δύο παράμετροι. Το VSSVSI Shewhart  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου έχει μελετηθεί από τους Costa (1997, 1998), Rendtel (1990), Arnold & Reynolds (1994, 2000). Το VSSVSI CUSUM διάγραμμα έχει επίσης μελετηθεί από τους Stoumbos & Reynolds (1997). Κάποια πρώτα αποτελέσματα για το VSSVSI EWMA διάγραμμα δόθηκαν από τους Arnold et al. (1993), ενώ ο Tagaras (1998) παρουσίασε μια γενική επισκόπηση για διάφορα διαγράμματα (VSR) με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας.

Στην συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια πλήρη έρευνα για το VSSVSI EWMA διάγραμμα, αλλά και για το VSS διάγραμμα το οποίο μας ενδιαφέρει περισσότερο στο κεφάλαιο αυτό. Σε κάθε περίπτωση, και στα δύο διαγράμματα επιθυμούμε να γνωρίζουμε

το μέγεθος του επόμενου δείγματος πριν ξεκινήσει η συλλογή του. Θα παρουσιάσουμε επίσης γενικές μεθόδους για την εκτίμηση των στατιστικών ιδιοτήτων των δύο διαγραμμάτων καθώς και για την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων τους.

## 2.4.2 Περιγραφή ενός γενικού VSSVSI διαγράμματος ελέγχου

Το VSSVSI διάγραμμα είναι ένα διάγραμμα στο οποίο μπορούν να μεταβάλλονται και το διάστημα δειγματοληψίας και το μέγεθος του δείγματος. Με FSR (fixed sampling rate) θα συμβολίζουμε ένα διάγραμμα στο οποίο όλες οι παράμετροι παραμένουν σταθερές.

Με  $X$  θα συμβολίζουμε την ποιοτική μεταβλητή που θέλουμε να μελετήσουμε και θεωρούμε ότι η κατανομή της είναι ανεξάρτητη μιας παραμέτρου  $\theta$ . Η βασική περιγραφή του VSSVSI διαγράμματος δίνεται σε όρους της παραμέτρου  $\theta$ . Η ειδική περίπτωση  $\theta = \mu$ , όπου  $\mu$  είναι η μέση τιμή, λαμβάνεται υπόψη για τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα δοθούν. Φυσικά, ο αντικειμενικός σκοπός της διεργασίας είναι πάντα η ανίχνευση οποιασδήποτε σημαντικής μεταβολής στο  $\theta$  από την τιμή στόχο,  $\theta_0$ .

Έστω ότι η συλλογή των δειγμάτων γίνεται κατά της χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots$ , όπου θεωρούμε ότι η διεργασία ξεκινάει την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Με  $Y_k$  θα συμβολίζουμε την στατιστική συνάρτηση που υπολογίζεται αφού πάρουμε το  $k$ -στο δείγμα που λαμβάνεται την χρονική στιγμή  $t_k$ . Στα διαγράμματα Shewhart το  $Y_k$  είναι συνάρτηση μόνο του τρέχοντος δείγματος, ενώ στα διαγράμματα CUSUM και EWMA περιέχει και πληροφορία από τα προηγούμενα δείγματα. Μερικά διαγράμματα CUSUM και EWMA απαιτούν την ύπαρξη μιας αρχικής τιμής  $Y_0$ , πριν την επιλογή του πρώτου δείγματος. Θα συμβολίζουμε με  $C$  την εντός ελέγχου περιοχή και με  $C'$  την εκτός στατιστικού ελέγχου περιοχή, δηλαδή αν κάποιος

$Y_k$  πέσει στην περιοχή  $C$  συνεχίζουμε κανονικά στο επόμενο δείγμα ενώ αν πέσει στην περιοχή  $C'$  το διάγραμμα μας δίνει σήμα για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία.

Όπως έχουμε αναφέρει, στο VSSVSI διάγραμμα, το διάστημα δειγματοληψίας μεταξύ των δειγμάτων  $k$  και  $k+1$  καθώς και το μέγεθος του δείγματος  $k+1$  εξαρτώνται από την τιμή του  $Y_k$ . Με  $d(Y_k)$  θα συμβολίζουμε την συνάρτηση που καθορίζει το διάστημα δειγματοληψίας μεταξύ των δειγμάτων  $k$  και  $k+1$  συναρτήσει του  $Y_k$ . Αυτό σημαίνει ότι  $t_{k+1} = t_k + d(Y_k)$ . Επιπλέον, με  $n(Y_k)$  θα συμβολίζουμε την συνάρτηση που καθορίζει το μέγεθος του δείγματος  $k+1$  συναρτήσει του  $Y_k$ . Όταν η διεργασία ξεκινάει σε χρόνο  $t_0 = 0$ , δεν υπάρχει κανένα διαθέσιμο δείγμα για να καθορίσει το πρώτο διάστημα δειγματοληψίας  $t_1$  και το μέγεθος του δείγματος που θα χρησιμοποιήσουμε στο  $t_1$ . Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε αυτές τις ποσότητες με τις οποίες θα ξεκινήσει να λειτουργεί η διεργασία. Επομένως με  $d_0 (= t_1)$  θα συμβολίζουμε το πρώτο διάστημα και με  $n_0$  το πρώτο μέγεθος δείγματος.

Γενικά, η συνάρτηση  $d(y)$  που καθορίζει τα διαστήματα δειγματοληψίας μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή, αλλά όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, αρκεί να έχει μόνο δύο δυνατές τιμές για τα διαστήματα ώστε να πετυχαίνουμε καλές στατιστικές ιδιότητες για τα διαγράμματα ελέγχου. Έτσι, τα δύο διαφορετικά διαστήματα θα τα συμβολίζουμε με  $d_1$  και  $d_2$ , όπου θα ισχύει ότι  $0 < d_1 < d_2$ . Τότε αν διαμερίσουμε την περιοχή  $C$  σε δύο περιοχές,  $D_1$  και  $D_2$ , μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση  $d(y)$  ως εξής :

$$d(y) = \begin{cases} d_1, & \text{αν } y \in D_1 \\ d_2, & \text{αν } y \in D_2 \end{cases}$$

Σε πολλές περιπτώσεις επιλέγουμε το πρώτο διάστημα  $d_0$  να είναι ίσο με το μικρό διάστημα  $d_1$  για την αποφυγή προβλημάτων κατά την εκκίνηση της διεργασίας, χωρίς όμως αυτό να είναι δεσμευτικό.

Η επιλογή δύο δυνατών τιμών και για την συνάρτηση  $n(y)$  είναι η απλούστερη για εφαρμογή. Οι Zimmer et al. (1998) έδειξαν ότι η χρήση τριών μεγεθών δείγματος βελτιώνει κάπως την ικανότητα ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος σε σχέση με την χρήση δύο μεγεθών, ωστόσο στα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε έχει γίνει χρήση μόνο δύο μεγεθών. Τα δύο δυνατά μεγέθη δείγματος θα τα συμβολίζουμε με  $n_1$  και  $n_2$ , όπου θα ισχύει ότι  $0 < n_1 < n_2$ .

Έτσι, αν διαμερίσουμε ξανά την περιοχή  $C$  σε δύο περιοχές,  $N_1$  και  $N_2$ , μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση  $n(y)$  ως εξής :

$$n(y) = \begin{cases} n_1, & \text{αν } y \in N_1 \\ n_2, & \text{αν } y \in N_2 \end{cases}$$

Προς χάριν απλούστευσης, μπορούμε με

$$M_k = n(Y_{k-1})$$

να συμβολίσουμε το μέγεθος του  $k$ -στού δείγματος. Με την ίδια λογική που επιλέγουμε το διάστημα  $d_0 = d_1$  επιλέγουμε και το μέγεθος του πρώτου δείγματος  $n_0$  να είναι ίσο με το μεγάλο δείγμα  $n_2$ .

Όταν λοιπόν έχουμε δύο μεγέθη και δύο διαστήματα δειγματοληψίας, υπάρχουν συγκεκριμένες υποπεριοχές του  $C$  που καθορίζουν το διάστημα και το μέγεθος του επόμενου δείγματος. Συγκεκριμένα, διαμερίζουμε την συνεχή περιοχή  $C$  σε τέσσερις περιοχές, έστω  $R_1 = D_2 \cup N_1$ ,  $R_2 = D_2 \cup N_2$ ,  $R_3 = D_1 \cup N_1$  και  $R_4 = D_1 \cup N_2$  έτσι ώστε να ισχύει :

$$(d(y), n(y)) = \begin{cases} (d_2, n_1) & \text{αν } y \in R_1 \\ (d_2, n_2) & \text{αν } y \in R_2 \\ (d_1, n_1) & \text{αν } y \in R_3 \\ (d_1, n_2) & \text{αν } y \in R_4 \end{cases} \quad (32)$$

Σε μερικές περιπτώσεις μια ή περισσότερες από αυτές τις περιοχές είναι κενές.

Για να επεξηγήσουμε τους κανόνες επιλογής του VSSVSI θεωρούμε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα για την παρακολούθηση της μέσης τιμής  $\mu$ , όπου οι παρατηρήσεις της διεργασίας ακολουθούν την κανονική κατανομή με διακύμανση  $\sigma^2$ , και  $\mu_0$  είναι η τιμή στόχος της διεργασίας. Στο  $\bar{X}$  διάγραμμα συνήθως απεικονίζουμε την ποσότητα  $\bar{X}_k$ , την μέση τιμή του  $k$ -στού δείγματος, αλλά όταν χρησιμοποιούμε μεταβλητό μέγεθος δείγματος είναι καταλληλότερο να απεικονίζουμε στο διάγραμμα μια κανονικοποιημένη μέση τιμή ώστε τα όρια ελέγχου να παραμείνουν σταθερά. Έτσι, η στατιστική συνάρτηση που θα απεικονίζουμε στο διάγραμμα για το  $k$ -στο δείγμα είναι η  $Z_k = Y_k$  όπου

$$Z_k = \sqrt{M_k} \frac{\bar{X}_k - \mu_0}{\sigma}$$

είναι η τυποποιημένη δειγματική μέση τιμή για το  $k$ -στο δείγμα.

Είναι κατάλληλο να εκφράζουμε τους κανόνες επιλογής σε όρους  $|Z_k|$  ώστε να αποφύγουμε να δώσουμε διαφορετικά όρια για θετικές και αρνητικές τιμές του  $Z_k$ . Το διάγραμμα αυτό μας δίνει σήμα ότι έχει συμβεί κάποια μεταβολή στον μέσο  $\mu$  αν  $|Z_k| > h$ , όπου  $h = 3$  ώστε να έχουμε «3σ» όρια ελέγχου. Υποθέτουμε ότι στο VSI σχέδιο, ο κανόνας επιλογής ορίζει να χρησιμοποιήσουμε το μεγάλο διάστημα  $d_2$  αν  $0 \leq |Z_k| < g_d$ , και το μικρό διάστημα  $d_1$  αν  $g_d \leq |Z_k| < h$ , όπου  $g_d < h$ . Στο VSS σχέδιο, ο κανόνας επιλογής ορίζει να χρησιμοποιήσουμε το μικρό μέγεθος δείγματος  $n_1$  αν  $0 \leq |Z_k| < g_n$  και το μεγάλο μέγεθος δείγματος  $n_2$  αν  $g_n \leq |Z_k| < h$ , όπου  $g_n < h$ . Αυτοί οι δύο κανόνες μαζί καθορίζουν τις περιοχές απόφασης της σχέσης (32). Η επιλογή των  $g_d$  και  $g_n$  καθορίζουν ποιες από τις περιοχές της σχέσης (32) θα είναι κενές.

### 2.4.3 Απόδοση του VSSVSI διαγράμματος

Η ικανότητα ενός VSSVSI διαγράμματος μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του αριθμού των δειγμάτων μέχρι να πάρουμε σήμα (ANSS) για εκτός ελέγχου διεργασία, του αριθμού των ατομικών παρατηρήσεων μέχρι το σήμα (ANOS, average number of observations to signal) και τον χρόνο που πέρασε μέχρι το σήμα (ATS), με αρχή μέτρησης τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

Όταν μεταβάλλεται το διάστημα δειγματοληψίας σε ένα διάγραμμα, ορίζουμε ως μέσο διάστημα δειγματοληψίας το  $\bar{d} = ATS / ANSS$ . Αντίστοιχα, όταν μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος το μέσο διάστημα δειγματοληψίας είναι το  $\bar{n} = ANOS / ANSS$ . Το ANSS που υπολογίζεται για  $\theta = \theta_0$  είναι ένα μέτρο του μέσου ρυθμού εσφαλμένων συναγερμών ανά δείγμα και το ATS που υπολογίζεται για  $\theta = \theta_0$  είναι ένα μέτρο του μέσου ρυθμού εσφαλμένων συναγερμών στην μονάδα του χρόνου. Καθορίζοντας τις εντός ελέγχου τιμές των  $\bar{d}$ ,  $\bar{n}$  και του μέσου ρυθμού εσφαλμένων συναγερμών προσδιορίζουμε τις εντός ελέγχου τιμές των ATS, ANSS και ANOS.

Το ATS που υπολογίζεται όταν  $\theta = \theta_1$  είναι ένα κατάλληλο μέτρο της ικανότητας του διαγράμματος να ανιχνεύει μια μεταβολή στο  $\theta_1$  αν η διεργασία ξεκινάει με  $\theta = \theta_1$  την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζεται η διεργασία να ξεκινάει

με  $\theta = \theta_0$  και στην συνέχεια σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή να γίνεται η μεταβολή σε  $\theta_1$ . Για τις περιπτώσεις αυτές καλύτερο μέτρο για τον χρόνο ανίχνευσης είναι ο αναμενόμενος χρόνος από την μεταβολή στο  $\theta$  έως τον συναγερμό.

Ο υπολογισμός του αναμενόμενου χρόνου από την μεταβολή στο  $\theta$  έως τον συναγερμό απαιτεί να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι κάποια μεταβολή μπορεί να συμβεί σε ένα διάστημα μεταξύ δύο δειγμάτων και το γεγονός ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης αμέσως πριν συμβεί η μεταβολή μπορεί να μην είναι η αρχική τιμή  $Y_0$ . Έχει αποδειχθεί σε πολλές μελέτες πάνω σε VSR διαγράμματα (Reynolds et al. (1990), Reynolds (1996), Stoumbos & Reynolds 1997) ότι η χρονική στιγμή στην οποία συμβαίνει η μεταβολή στο  $\theta$  είναι αρκετά μετά το  $t_0$  ώστε η στατιστική συνάρτηση να έχει φτάσει στην στάσιμη κατανομή της την στιγμή εκείνη. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα η μεταβολή να πέσει μέσα σε κάποιο διάστημα συγκεκριμένου μήκους είναι ανάλογη του γινομένου αυτού του μήκους επί την σταθερή πιθανότητα να χρησιμοποιήσουμε αυτό το διάστημα, όπου η σταθερή πιθανότητα προϋποθέτει να μην υπάρχουν εσφαλμένοι συναγερμοί πριν την μεταβολή. Επιπλέον υποθέτουμε ότι όταν η μεταβολή συμβαίνει σε κάποιο διάστημα μεταξύ δύο δειγμάτων, η θέση της μέσα στο διάστημα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε το γνωστό μας ATS σταθερής κατάστασης (SSATS), το ANSS σταθερής κατάστασης (SSANSS) και το ANOS σταθερής κατάστασης (SSANOS).

Ο υπολογισμός του ANSS για ένα κλασικό FSR EWMA ή CUSUM διάγραμμα γίνεται συνήθως με χρήση μεθόδου με Μαρκοβιανές αλυσίδες ή μεθόδους που χρησιμοποιούν ολοκληρωτικές συναρτήσεις. Για τον υπολογισμό των διαφόρων μέτρων ικανότητας ενός VSSVSI διαγράμματος ελέγχου απαιτείται η γενίκευση αυτών των μεθόδων. Για την πλήρη παρουσίαση των μεθόδων αυτών παραπέμπουμε στην εργασία των Reynolds & Arnold (2001).

Όταν δουλεύουμε με VSSVSI διαγράμματα ελέγχου είναι καλό να γνωρίζουμε τις αναλογίες των δειγμάτων που καθορίζουν κάθε δυνατό διάστημα δειγματοληψίας και κάθε δυνατό μέγεθος δείγματος. Ορίζουμε τα  $\psi_{d_1}$  και  $\psi_{d_2}$  να είναι ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων πριν το σήμα για τα οποία το  $Y_k$  πέφτει στις περιοχές  $D_1 = R_3 \cup R_4$  και  $D_2 = R_1 \cup R_2$  αντίστοιχα. Τότε, το ANSS και το ATS μπορούν να γραφούν σε όρους των  $\psi_{d_1}$  και  $\psi_{d_2}$  ως εξής :

$$ANSS = 1 + \psi_{d_1} + \psi_{d_2} \quad (33)$$



και

$$ATS = d_0 + d_1\psi_{d_1} + d_2\psi_{d_2}. \quad (34)$$

Έστω

$$\rho_{d_1} = \frac{\psi_{d_1}}{ANSS} \quad (35)$$

είναι η αναλογία των δειγμάτων που ορίζει ότι χρησιμοποιείται το  $d_1$  πριν το σήμα. Με την βοήθεια των σχέσεων (33), (34) και (35), το μέσο διάστημα δειγματοληψίας  $\bar{d}$  μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\bar{d} = \frac{ATS}{ANSS} = d_1\rho_{d_1} + d_2(1 - \rho_{d_1}) + \frac{d_0 - d_2}{ANSS}. \quad (36)$$

Οι σχέσεις (33) - (36) ισχύουν για κάθε τιμή του  $\theta$ , αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις θα χρησιμοποιούνται κυρίως όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου.

Επιπλέον, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πέφτουν στις περιοχές που καθορίζουν το μέγεθος δείγματος. Ορίζουμε τα  $\psi_{n_1}$  και  $\psi_{n_2}$  να είναι ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων πριν το σήμα που πέφτουν στις περιοχές  $N_1 = R_1 \cup R_3$  και  $N_2 = R_2 \cup R_4$  αντίστοιχα. Τότε το ANSS και το ANOS μπορούν να γραφούν ως εξής :

$$ANSS = 1 + \psi_{n_1} + \psi_{n_2} \quad (37)$$

και

$$ANOS = n_0 + n_1\psi_{n_1} + n_2\psi_{n_2}. \quad (38)$$

Έστω

$$\rho_{n_2} = \frac{\psi_{n_2}}{ANSS} \quad (39)$$

είναι η αναλογία των δειγμάτων που ορίζει ότι χρησιμοποιείται το  $n_2$  πριν το σήμα. Με την βοήθεια των σχέσεων (37), (38) και (39), το μέσο μέγεθος δείγματος  $\bar{n}$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{n} = \frac{ANOS}{ANSS} = n_2\rho_{n_2} + n_1(1 - \rho_{n_2}) + \frac{n_0 + n_1}{ANSS}.$$

#### 2.4.4 Μέθοδοι σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου

Σαν μέτρο σύγκρισης της ικανότητας των διαγραμμάτων που θα συγκρίνουμε στην συνέχεια χρησιμοποιείται το SSATS. Όλα τα διαγράμματα ελέγχου που θέτονται προς σύγκριση σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να έχουν τον ίδιο εντός ελέγχου μέσο ρυθμό δειγματοληψίας και τον ίδιο μέσο ρυθμό εσφαλμένων συναγερμών. Αυτό επιτυγχάνεται απαιτώντας όταν όλα τα διαγράμματα βρίσκονται εντός ελέγχου να έχουν το ίδιο  $\bar{d}$ , το ίδιο  $\bar{n}$  και το ίδιο ATS. Από τις απαιτήσεις αυτές συνεπάγεται ότι τα διαγράμματα θα έχουν το ίδιο εντός ελέγχου ANSS και το ίδιο εντός ελέγχου ANOS.

Οι αριθμητικές συγκρίσεις που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια γίνονται για την περίπτωση όπου η μέση τιμή  $\mu$  που παρακολουθούμε αντιστοιχεί σε μια ποιοτική μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Κατά την παρακολούθηση του  $\mu$ , είναι δυνατό να μειώσουμε τις περιπτώσεις που χρειάζεται να μελετήσουμε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι, όταν οι συγκρίσεις ορίζονται με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο, τα αποτελέσματα εξαρτώνται μόνο από τους λόγους των  $n_i$  προς το  $\bar{n}$  και από τους λόγους των  $d_i$  προς το  $\bar{d}$ . Για να δημιουργήσουμε αυτές τις συγκρίσεις είναι καταλληλότερο να εκφράσουμε την μεταβολή στο  $\mu$  με τον όρο

$$\delta = \sqrt{\bar{n}}(\mu - \mu_0) / \sigma$$

που είναι η τυποποιημένη μεταβολή του  $\mu$  για το μέσο μέγεθος δείγματος. Υποθέτουμε ότι τα  $h$ ,  $g$  και  $\delta$  είναι σταθερά. Τότε οι τιμές  $ATS/\bar{d}$ ,  $ANOS/\bar{n}$  και ANSS του VSSVSI διαγράμματος ελέγχου εξαρτώνται από τις ποσότητες  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\bar{n}$ ,  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  και  $\bar{d}$  και μόνο μέσω των λόγων  $n_0/\bar{n}$ ,  $n_1/\bar{n}$ ,  $n_2/\bar{n}$ ,  $d_0/\bar{d}$ ,  $d_1/\bar{d}$  και  $d_2/\bar{d}$ . Το ίδιο ισχύει και για τις αντίστοιχες τιμές στην σταθερή κατάσταση. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι περιοχές  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  και  $R_4$  επιλέγονται ώστε να δώσουν επιθυμητές εντός ελέγχου τιμές για τα  $ATS/\bar{d}$  και  $ANOS/\bar{n}$  για ένα σετ διαστημάτων και μεγεθών δείγματος. Τότε το  $ATS/\bar{d}$  και το  $ANOS/\bar{n}$  δεν αλλάζουν όταν αλλάζουν τα διαστήματα και το μέγεθος δείγματος, αφού οι λόγοι για το μέγεθος δείγματος και οι λόγοι για τα διαστήματα δειγματοληψίας παραμένουν αμετάβλητοι. Επιπλέον, και το  $SSATS/\bar{d}$  που σχετίζεται με κάποια συγκεκριμένη τιμή του  $\delta$ , δεν αλλάζει όταν αλλάζουν τα διαστήματα και το μέγεθος δείγματος, αφού οι λόγοι παραμένουν σταθεροί.

Για τις περισσότερες συγκρίσεις που θα δείξουμε, τα διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να έχουν το γνωστό εντός ελέγχου ANSS ίσο με 370.4. Από την επιλογή αυτή

συνεπάγεται ότι  $ATS/\bar{d} = ANOS/\bar{n} = 370.4$  όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Έτσι, για την επιλογή αυτή του ANSS τα αποτελέσματα που δίνονται για το  $SSATS/\bar{d}$  είναι ανεξάρτητα από την επιλογή των  $\bar{n}$  και  $\bar{d}$ .

## 2.4.5 Το VSSVSI EWMA διάγραμμα ελέγχου

Θεωρούμε την περίπτωση όπου η ποιοτική μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή και ο αντικειμενικός σκοπός είναι η παρακολούθηση της μέσης τιμής  $\mu$  χρησιμοποιώντας ένα EWMA διάγραμμα με το χαρακτηριστικό VSS ή VSSVSI. Όπως γνωρίζουμε, το διάγραμμα EWMA χρησιμοποιεί μια στατιστική συνάρτηση η οποία περιέχει πληροφορίες από το τρέχον δείγμα αλλά και από τα προηγούμενα στα οποία προσαρμόζονται κατάλληλα βάρη. Όταν τα διαφορετικά δείγματα έχουν διαφορετικά μεγέθη προτείνεται τα βάρη που χρησιμοποιούνται να εξαρτώνται από το μέγεθος του κάθε δείγματος. Για τον λόγο αυτό εγείρονται ερωτήματα γύρω από την μορφή που πρέπει να έχουν τα βάρη αυτά. Στον σχεδιασμό που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια, χρησιμοποιούνται τέσσερις διαφορετικές στατιστικές συναρτήσεις. Μία είναι η κλασική συνάρτηση που χρησιμοποιείται από το FSR EWMA διάγραμμα και οι άλλες τρεις είναι συναρτήσεις που χρησιμοποιούν βάρη τα οποία εξαρτώνται από τα μεγέθη των δειγμάτων.

Το κλασικό δίπλευρο FSR EWMA στατιστικό ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής  $\mu$  είναι της μορφής

$$E_k^U = (1 - \lambda)E_{k-1}^U + \lambda\bar{X}_k \quad (40)$$

όπου  $E_0^U$  είναι η αρχική τιμή (συνήθως ίση με  $\mu_0$ ) και  $\lambda$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης. Ο υπερδείκτης  $U$  στο  $E_k^U$ , υποδηλώνει ότι στην συγκεκριμένη ποσότητα δεν έχει προσαρμοστεί κάποιο βάρος (unweighted). Η τιμή του  $\lambda$  καθορίζει το βάρος που δίνεται στη τρέχουσα δειγματική μέση τιμή σε σχέση με τις προηγούμενες μέσες τιμές, με αποτέλεσμα να ρυθμίζει την ευαισθησία του διαγράμματος ως προς κάποια μεταβολή στο  $\mu$ . Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας μια μικρή τιμή για το  $\lambda$ , έχουμε ένα EWMA διάγραμμα που είναι ευαίσθητο σε μικρές μεταβολές, ανάλογα, ένα μεγάλο  $\lambda$  κάνει το διάγραμμα μας ευαίσθητο σε μεγάλες μεταβολές. Τα FSR EWMA διαγράμματα έχουν μελετηθεί σε πολλά άρθρα, όπως για παράδειγμα του Crowder (1989) ή των Lucas & Saccucci (1990). Ωστόσο για το VSSVSI

EWMA διάγραμμα παρουσιάστηκαν κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα από τους Arnold et al. (1993), ενώ ο Reynolds (1996) έδωσε ορισμένες περιορισμένες συγκρίσεις μεταξύ των VSS και VSI EWMA διαγραμμάτων.

Ένα EWMA διάγραμμα στο οποίο απεικονίζεται η ποσότητα  $E_k^U$  της σχέσης (40) είναι αρκετά βολικό για πρακτικές εφαρμογές, αφού το  $E_k^U$  απεικονίζεται στην ίδια κλίμακα με την ποιοτική μεταβλητή  $X$ . Ωστόσο, είναι κατάλληλο για την συνέχεια να ορίσουμε και μια κανονικοποιημένη μορφή του  $E_k^U$ , η οποία δίνεται στην επόμενη σχέση

$$Y_k^U = (1 - \lambda)Y_k^U + \lambda Z_k^*, \quad (41)$$

όπου

$$Z_k^* = \sqrt{\bar{n}} \frac{\bar{X}_k - \mu_0}{\sigma}$$

είναι η τυποποιημένη δειγματική μέση τιμή του δείγματος  $k$ , χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί στο μέσο μέγεθος δείγματος  $\bar{n}$ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι δύο ποσότητες των σχέσεων (40) και (41) συνδέονται με την εξίσωση

$$Y_k^U = \sqrt{\bar{n}}(E_k^U - \mu_0) / \sigma.$$

Το διάγραμμα που χρησιμοποιεί το  $Y_k^U$  δίνει σήμα για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία όταν  $|Y_k^U| \geq h$ . Όταν στο EWMA διάγραμμα προσθέτουμε και το VSSVSI χαρακτηριστικό, οι κανόνες απόφασης μπορούν να οριστούν με τον ίδιο τρόπο που έγινε προηγουμένα και για το  $\bar{X}$  διάγραμμα. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιούμε το διάστημα  $d_2$  αν  $|Y_k^U| < g_d$  και το διάστημα  $d_1$  αν  $g_d \leq |Y_k^U| < h$ , όπου  $g_d < h$ . Ανάλογα, θα χρησιμοποιούμε το μικρό μέγεθος δείγματος  $n_1$  αν  $|Y_k^U| < g_n$  και το μεγάλο μέγεθος δείγματος  $n_2$  αν  $g_n \leq |Y_k^U| < h$ , όπου  $g_n < h$ .

Η πρώτη σταθμισμένη EWMA στατιστική συνάρτηση ελέγχου χρησιμοποιεί ένα βάρος, για το τρέχον δείγμα, το οποίο είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του μεγέθους του δείγματος αυτού. Επομένως έχουμε,

$$E_k^S = \left(1 - \lambda \sqrt{\frac{M_k}{\bar{n}}}\right) E_{k-1}^S + \lambda \sqrt{\frac{M_k}{\bar{n}}} \bar{X}_k,$$

όπου ο δείκτης  $S$  υποδηλώνει την σταθμισμένη ποσότητα από την τετραγωνική ρίζα. Όπως και προηγουμένως, έτσι κι εδώ, θα ορίσουμε και την τυποποιημένη μορφή του  $E_k^S$ , η οποία δίνεται από την σχέση

$$Y_k^S = \left(1 - \lambda \sqrt{\frac{M_k}{\bar{n}}}\right) Y_{k-1}^S + \lambda \sqrt{\frac{M_k}{\bar{n}}} Z_k^*.$$

Οι κανόνες απόφασης για το VSSVSI EWMA διάγραμμα που χρησιμοποιεί το  $Y_k^S$  είναι όμοιοι με αυτούς που αναφέραμε παραπάνω για το  $Y_k^U$ .

Όταν εμφανίζονται προβλήματα κατά την εκτίμηση της μέσης τιμής ενός πληθυσμού όπου έχουμε χρησιμοποιήσει πολλά δείγματα διαφόρων μεγεθών, ορισμένες στατιστικές αρχές απαιτούν τα βάρη που χρησιμοποιούμε να είναι ανάλογα των μεγεθών των δειγμάτων. Με την λογική αυτή, στο παρόν πρόβλημα του EWMA διαγράμματος, το βάρος του τρέχοντος δείγματος θα είναι ακριβώς ανάλογο του μεγέθους του δείγματος αυτού. Επομένως, η δεύτερη σταθμισμένη EWMA στατιστική συνάρτηση ελέγχου θα χρησιμοποιεί ένα βάρος, για το τρέχον δείγμα, το οποίο θα είναι ανάλογο του μεγέθους του δείγματος αυτού. Αυτή η στατιστική συνάρτηση, έστω  $E_k^W$ , δίνεται από την σχέση

$$E_k^W = \left(1 - \lambda \frac{M_k}{\bar{n}}\right) E_{k-1}^W + \lambda \frac{M_k}{\bar{n}} \bar{X}_k.$$

Ανάλογα, κι εδώ έχουμε την αντίστοιχη τυποποιημένη μορφή του  $E_k^W$ , η οποία δίνεται από την σχέση

$$Y_k^W = \left(1 - \lambda \frac{M_k}{\bar{n}}\right) Y_{k-1}^W + \lambda \frac{M_k}{\bar{n}} Z_k^*.$$

Οι κανόνες απόφασης για το VSSVSI EWMA διάγραμμα που χρησιμοποιεί το  $Y_k^W$  είναι όμοιοι με αυτούς που αναφέραμε παραπάνω για το  $Y_k^U$  και το  $Y_k^S$ .

Όταν όλα τα μεγέθη των δειγμάτων είναι ίσα, τα EWMA διαγράμματα που βασίζονται στα  $Y_k^U$ ,  $Y_k^S$  και  $Y_k^W$  είναι ισοδύναμα, στην περίπτωση όμως που τα μεγέθη των δειγμάτων δεν είναι ίσα, τα τρία διαγράμματα δεν είναι ισοδύναμα. Επιπλέον, οι κατανομές των  $\bar{X}_k$  και  $Z_k^*$  εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος, έτσι όταν αυτό μπορεί να μεταβάλλεται οι τιμές των ορίων  $g_d$ ,  $g_n$  και  $h$  πρέπει να εξαρτώνται από τα πιθανά μεγέθη των δειγμάτων (στην πραγματικότητα από τους λόγους  $n_i / \bar{n}$ ) ώστε να πετύχουμε όλες τις καθορισμένες

εντός ελέγχου ιδιότητες. Το γεγονός αυτό δυσκολεύει την διαδικασία σχεδιασμού του EWMA διαγράμματος επειδή τα όρια  $g_d$ ,  $g_n$  και  $h$  αλλάζουν όταν αλλάζουν και οι λόγοι  $n_1/\bar{n}$  και  $n_2/\bar{n}$ .

Για να πάρουμε ένα EWMA διάγραμμα που δεν φέρει το πρόβλημα που προαναφέραμε, μπορούμε πρώτα να τυποποιούμε την εκάστοτε δειγματική μέση τιμή χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μέγεθος δείγματος. Αυτό μας δίνει την τυποποιημένη μέση τιμή :

$$Z_k = \sqrt{M_k} \frac{\bar{X}_k - \mu_0}{\sigma}.$$

Έτσι το EWMA στατιστικό ελέγχου που βασίζεται στο  $Z_k$  δίνεται από την σχέση

$$Y_k^Z = (1 - \lambda)Y_{k-1}^Z + \lambda Z_k. \quad (42)$$

Η τυποποίηση που στηρίζεται στο  $Z_k$  κάνει το βάρος που θα χρησιμοποιηθεί στην τρέχουσα δειγματική μέση τιμή να είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του μεγέθους αυτού του δείγματος, έτσι το  $Y_k^Z$  γίνεται η τρίτη EWMA στατιστική συνάρτηση ελέγχου που τα βάρη της είναι συναρτήσεις των μεγεθών των δειγμάτων. Σημειώνουμε, ωστόσο, πως το  $Y_k^Z$  δεν είναι ισοδύναμο με το  $Y_k^S$  διότι το βάρος  $(1 - \lambda)$  του  $Y_{k-1}^Z$  στην σχέση (42) δεν περιέχει κανένα μέγεθος δείγματος. Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου ( $\mu = \mu_0$ ) η κατανομή του  $Z_k$  είναι η τυπική κανονική και έτσι δεν εξαρτάται από κανένα μέγεθος δείγματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, ο σχεδιασμός του διαγράμματος να είναι αρκετά εύκολος για πρακτικές εφαρμογές, μιας και το όριο ελέγχου  $h$  καθορίζεται πλέον όπως και στα FSR EWMA διαγράμματα.

## 2.4.6 Συγκρίσεις των EWMA διαγραμμάτων ελέγχου

Στο σημείο αυτό έχει κάποιο ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την ικανότητα VSS EWMA διαγραμμάτων τα οποία βασίζονται στο καθένα από τις τέσσερις EWMA στατιστικές συναρτήσεις ελέγχου, ώστε να δούμε πια από τις τέσσερις είναι αποτελεσματικότερη ώστε να προταθεί για πρακτικές εφαρμογές. Για την σύγκριση αυτή στηρίζομαστε στους Πίνακες 1 και 2 του άρθρου των Reynolds & Arnold (2001).

Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι το μη σταθμισμένο  $Y_k^U$  δεν παρουσιάζει την ίδια καλή απόδοση όπως οι άλλες τρεις σταθμισμένες στατιστικές

συναρτήσεις. Όσον αφορά αυτές τις τρεις στατιστικές συναρτήσεις, το  $Y_k^W$  φαίνεται να είναι καλύτερο από το  $Y_k^S$  εκτός από την περίπτωση που έχουμε κάποια μεγάλη μεταβολή. Όταν προσαρμόζουμε το  $\lambda$  έτσι ώστε να έχουμε καλύτερη απόδοση ως προς συγκεκριμένη μεταβολή, το  $Y_k^W$  είναι καλύτερο για την μεταβολή αυτή. Ωστόσο, φαίνεται ότι το  $Y_k^Z$  είναι ελάχιστα χειρότερο από το  $Y_k^W$  σ' αυτή τη μεταβολή, ενώ είναι καλύτερο για μεγαλύτερη μεταβολή.

Επειδή στην πράξη είναι σχεδόν ανέφικτο να ρυθμίσουμε ένα EWMA διάγραμμα να ανιχνεύει μία συγκεκριμένη μεταβολή, χρειαζόμαστε ένα διάγραμμα που θα αποδίδει ικανοποιητικά για ένα σημαντικό εύρος μεταβολών. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό απαιτεί ένα μικρό  $\lambda$ , με το οποίο πετυχαίνουμε αρκετά γρήγορη ανίχνευση μικρών μεταβολών ενώ ταυτόχρονα η απόδοση του διαγράμματος είναι ικανοποιητική και για μεγαλύτερες μεταβολές. Επομένως, μιας και οι διαφορές του  $Y_k^W$  με το  $Y_k^Z$  είναι αρκετά μικρές, όταν βελτιστοποιούμε και τα δύο για ίδια μεταβολή, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξίσου για πρακτικές εφαρμογές.

## 2.4.7 Επιλογή των πιθανών μεγεθών δείγματος ενός VSS EWMA διαγράμματος

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια αναφορά στην επίδραση που έχει η επιλογή των μεγεθών  $n_1$  και  $n_2$  (στην πραγματικότητα η επιλογή των λόγων  $n_1/\bar{n}$  και  $n_2/\bar{n}$ ). Η σύγκριση γίνεται με βάση το SSATS που προκύπτει από την επιλογή των μεγεθών αυτών για ένα εύρος μεταβολών. Τα συμπεράσματά μας, βασίζονται και πάλι στο ίδιο άρθρο των Reynolds & Arnold (2001), στους Πίνακες 3 και 4.

Οι τιμές του SSATS που προέκυψαν δεν διαφέρουν σημαντικά για το κάθε ένα από τα εννέα διαφορετικά ζεύγη μεγεθών που επιλέχθηκαν. Ωστόσο, αν πρέπει να διαλέξουμε μια από τις επιλογές με βάση το SSATS τότε μπορούμε να πούμε πως το  $n_1/\bar{n} = 0.6$  και  $n_2/\bar{n} = 4.0$  είναι αρκετά λογικό για ένα μεγάλο εύρος μεταβολών. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας το  $n_2/\bar{n} = 4.0$ , έχουμε σαν αποτέλεσμα το  $n_2$  να είναι πολύ μεγαλύτερο από το  $n_1$  και από το  $\bar{n}$ , και ένα τόσο μεγάλο δείγμα μπορεί να μην είναι επιθυμητό σε

διάφορες εφαρμογές. Επιπλέον, στην πράξη, η επιλογή του  $n_1/\bar{n}$  περιορίζεται από το γεγονός ότι το  $n_1$  πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Τέλος, το γεγονός ότι το SSATS δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο στην επιλογή των μεγεθών των δειγμάτων, υποδηλώνει ότι υπάρχει κάποια ελαστικότητα στην επιλογή των  $n_1$  και  $n_2$  ώστε να καλυφθούν οι απαιτήσεις μιας εφαρμογής.

## 2.4.8 Σύγκριση μεταξύ FSR, VSS, VSI και VSSVSI EWMA διαγραμμάτων ελέγχου

Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, η πρόσθεση του χαρακτηριστικού VSI στο EWMA διάγραμμα μπορεί να μειώσει σημαντικά το χρόνο που χρειάζεται για ανιχνευθεί κάποια μεταβολή. Εδώ θα δούμε την επίδραση που έχει το χαρακτηριστικό VSS όπως και το VSSVSI σε σχέση με το κλασικό διάγραμμα και το VSI διάγραμμα.

Στους Πίνακες 2-10 έως 2-13 βλέπουμε πως χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό VSS στο διάγραμμα EWMA μειώνουμε αρκετά τον αναμενόμενο χρόνο ανίχνευσης μιας μεταβολής σε σχέση με το κλασικό FSR EWMA διάγραμμα, ωστόσο με το χαρακτηριστικό VSI ο αναμενόμενος χρόνος ανίχνευσης μειώνεται ακόμα περισσότερο, ειδικά όταν στο διάγραμμα αυτό ισχύει  $d_1/\bar{d} = 0.1$ . Έτσι, μπορούμε να πούμε πως για το EWMA διάγραμμα ελέγχου είναι καλύτερο να αφήνουμε να μεταβάλλεται το διάστημα δειγματοληψίας παρά το μέγεθος δείγματος. Όσον αφορά το χαρακτηριστικό VSSVSI, από τα αποτελέσματα των Πινάκων 2-10 έως 2-13 φαίνεται πως με το να μεταβάλλουμε και τις δύο παραμέτρους παίρνουμε ένα διάγραμμα το οποίο είναι αποτελεσματικότερο από όταν μεταβάλλεται μόνο το μέγεθος του δείγματος, ενώ σε σχέση με το VSI χαρακτηριστικό παρατηρούμαι μία μικρή βελτίωση από το VSSVSI διάγραμμα όταν  $d_1/\bar{d} = 0.25$ , ενώ όταν  $d_1/\bar{d} = 0.1$  η βελτίωση αυτή, αν υπάρχει, είναι σχεδόν αμελητέα.

**Πίνακας 2-10**

*SSATS* /  $\bar{d}$  για διαγράμματα EWMA με  $d_1/\bar{d} = 0.1$   
και  $\lambda$  βέλτιστο για  $\delta_1 = 0.5$

	FSR	VSS		VSI	VSSVSI		VSI	VSSVSI	
$n_1/n$	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6
$n_2/n$	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0
$d_1/d$	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1



$d_2/d$	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.9	1.9	1.9
$\lambda$	0.049	0.091	0.138	0.059	0.112	0.158	0.062	0.118	0.160
$\delta = 0$	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	69.94	62.80	61.09	56.46	57.70	58.82	55.68	58.66	58.99
0.50	25.21	19.73	17.93	15.22	14.65	15.12	14.66	14.75	15.16
0.75	14.51	11.05	9.95	8.06	7.86	7.99	7.77	7.89	7.99
1.00	10.07	7.64	6.88	5.48	5.42	5.34	5.29	5.42	5.31
1.50	6.20	4.72	4.26	3.35	3.34	3.11	3.24	3.30	3.09
2.00	4.45	3.42	3.14	2.42	2.40	2.17	2.35	2.36	2.17
3.00	2.84	2.17	2.19	1.57	1.53	1.38	1.54	1.51	1.41
4.00	2.08	1.68	1.71	1.18	1.14	1.04	1.18	1.17	1.13
5.00	1.65	1.45	1.36	0.95	0.94	0.87	1.04	1.04	1.02
H	0.394	0.584	0.757	0.444	0.665	0.824	0.458	0.687	0.830
$g_n$	-	0.223	0.410	-	0.250	0.443	-	0.258	0.446
$g_d$	-	-	-	0.150	0.216	0.263	0.113	0.163	0.194

**Πίνακας 2-11**

$SSATS/\bar{d}$  για διαγράμματα EWMA με  $d_1/\bar{d} = 0.1$   
και  $\lambda$  βέλτιστο για  $\delta_1 = 1.0$

	FSR	VSS		VSI	VSSVSI		VSI	VSSVSI	
$n_1/n$	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6
$n_2/n$	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0
$d_1/d$	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$d_2/d$	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.9	1.9	1.9
$\lambda$	0.141	0.246	0.353	0.181	0.321	0.411	0.189	0.332	0.411
$\delta = 0$	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	100.43	100.28	105.06	98.38	109.45	112.30	99.10	111.36	111.77
0.50	29.89	25.16	23.83	21.48	22.54	22.26	21.00	22.78	22.03
0.75	14.31	10.90	9.81	7.96	7.78	7.91	7.68	7.81	7.89
1.00	8.87	6.57	5.95	4.43	4.33	4.55	4.30	4.36	4.58
1.50	4.86	3.61	3.38	2.36	2.39	2.45	2.33	2.44	2.50
2.00	3.30	2.48	2.42	1.63	1.68	1.65	1.65	1.73	1.73
3.00	2.00	1.59	1.63	1.05	1.08	1.05	1.14	1.18	1.17
4.00	1.43	1.27	1.23	0.85	0.87	0.85	1.00	1.02	1.01
5.00	1.11	1.02	0.95	0.78	0.79	0.77	0.95	0.96	0.95
h	0.767	1.084	1.364	0.896	1.283	1.506	0.920	1.311	1.506
$g_n$	-	0.393	0.713	-	0.461	0.785	-	0.470	0.785
$g_d$	-	-	-	0.284	0.398	0.464	0.213	0.298	0.340

**Πίνακας 2-12**

$SSATS/\bar{d}$  για διαγράμματα EWMA με  $d_1/\bar{d} = 0.25$

και  $\lambda$  βέλτιστο για  $\delta_1 = 0.5$

	FSR	VSS		VSI	VSSVSI		VSI	VSSVSI	
$n_1/n$	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6
$n_2/n$	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0
$d_1/d$	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$d_2/d$	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.9	1.9	1.9
$\lambda$	0.049	0.091	0.138	0.058	0.109	0.154	0.060	0.114	0.156
$\delta = 0$	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	69.94	62.80	61.09	58.23	58.42	58.95	57.58	59.29	59.16
0.50	25.21	19.73	17.93	16.64	15.46	15.53	16.26	15.57	15.57
0.75	14.51	11.05	9.95	8.99	8.36	8.27	8.81	8.40	8.28
1.00	10.07	7.64	6.88	6.14	5.76	5.55	6.02	5.76	5.54
1.50	6.20	4.72	4.26	3.76	3.53	3.27	3.69	3.50	3.26
2.00	4.45	3.42	3.14	2.71	2.53	2.30	2.66	2.50	2.31
3.00	2.84	2.17	2.19	1.75	1.60	1.49	1.73	1.60	1.54
4.00	2.08	1.68	1.71	1.30	1.21	1.14	1.33	1.24	1.22
5.00	1.65	1.45	1.36	1.05	1.01	0.96	1.15	1.11	1.08
$h$	0.394	0.584	0.757	0.439	0.654	0.811	0.449	0.673	0.817
$g_n$	-	0.223	0.410	-	0.247	0.437	-	0.253	0.440
$g_d$	-	-	-	0.136	0.195	0.237	0.100	0.144	0.172

### Πίνακας 2-13

$SSATS/\bar{d}$  για διαγράμματα EWMA με  $d_1/\bar{d} = 0.25$   
και  $\lambda$  βέλτιστο για  $\delta_1 = 1.0$

	FSR	VSS		VSI	VSSVSI		VSI	VSSVSI	
$n_1/n$	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6	1.0	0.6	0.6
$n_2/n$	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0	1.0	2.0	4.0
$d_1/d$	1.0	1.0	1.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$d_2/d$	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.9	1.9	1.9
$\lambda$	0.141	0.246	0.353	0.173	0.308	0.399	0.178	0.315	0.399
$\delta = 0$	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	100.43	100.28	105.06	97.58	107.42	110.27	97.80	108.57	109.90
0.50	29.89	25.16	23.83	22.41	22.77	22.29	22.04	22.91	22.15
0.75	14.31	10.90	9.81	8.87	8.26	8.17	8.69	8.30	8.18
1.00	8.87	6.57	5.95	5.11	4.69	4.75	5.04	4.74	4.80
1.50	4.86	3.61	3.38	2.74	2.57	2.58	2.74	2.62	2.63
2.00	3.30	2.48	2.42	1.88	1.79	1.76	1.91	1.84	1.83
3.00	2.00	1.59	1.63	1.19	1.15	1.14	1.28	1.25	1.25
4.00	1.43	1.27	1.23	0.94	0.93	0.91	1.07	1.06	1.05
5.00	1.11	1.02	0.95	0.82	0.83	0.80	0.97	0.97	0.95
$H$	0.767	1.084	1.364	0.871	1.249	1.477	0.877	1.267	1.477
$g_n$	-	0.393	0.713	-	0.449	0.770	-	0.455	0.770
$g_d$	-	-	-	0.253	0.354	0.416	0.185	0.258	0.299

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Reynolds & Arnold (2001), για την επίδραση της επιλογής των  $\bar{d}$  και  $\bar{n}$ , για το FSR EWMA διάγραμμα δεν είναι απαραίτητο να παίρνουμε συχνά μικρά δείγματα για να βελτιώσουμε την απόδοση του διαγράμματος για τις μεταβολές που μελετήθηκαν. Για το VSS EWMA διάγραμμα επιλέγοντας μικρότερα δείγματα βελτιώνουμε την απόδοση του διαγράμματος, αλλά ελάχιστα, ενώ στο VSI EWMA διάγραμμα η ικανότητα του μειώνεται αισθητά.

### 2.4.9 Συμπεράσματα

Στην Παράγραφο 2.4 παρουσιάσαμε την μελέτη που έχει γίνει γύρω από τα EWMA διαγράμματα ελέγχου, όπου μπορεί να μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος και το διάστημα δειγματοληψίας. Επίσης ασχοληθήκαμε με το πώς γίνεται ο ορισμός της EWMA στατιστικής συνάρτησης ελέγχου όταν μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος. Είδαμε ακόμα πως χρησιμοποιώντας μια τυποποιημένη δειγματική μέση τιμή έχουμε αρκετά καλή απόδοση και απλουστεύουμε τον καθορισμό των ορίων ελέγχου. Για τον σχεδιασμό των διαφόρων διαγραμμάτων, παραπέμπουμε στην εργασία των Reynolds & Arnold (2001).

Χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό VSS είχαμε σημαντική βελτίωση στην ικανότητα ανίχνευσης μικρών και μεσαίων μεταβολών στον μέσο της διεργασίας, οι οποίες όμως δεν είναι τόσο μεγάλες όσο στην περίπτωση του χαρακτηριστικού VSI. Επομένως, η χρήση του VSS EWMA διαγράμματος προτείνεται για περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να μεταβάλουμε το μέγεθος του δείγματος αλλά όχι και του διαστήματος δειγματοληψίας. Όταν είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε και τα δύο χαρακτηριστικά, μπορούμε να έχουμε επιπλέον βελτίωση στην ικανότητα ανίχνευσης χρησιμοποιώντας το VSSVSI EWMA διάγραμμα ελέγχου, όταν η ελάχιστη δυνατή τιμή για το μικρό διάστημα δειγματοληψίας  $d_1$  είναι σχετικά μεγάλη ή όταν χρησιμοποιείται ένα μονόπλευρο EWMA διάγραμμα. Όταν είναι δυνατό η ελάχιστη δυνατή τιμή για το  $d_1$  να είναι σχετικά μικρή είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το VSI EWMA διάγραμμα το οποίο λειτουργεί εξίσου καλά.

Τέλος ένας άλλος τύπος VSS διαγράμματος, που είναι αρκετά ικανό, μπορεί να θεωρηθεί για εφαρμογές στις οποίες μπορούμε να αφήσουμε σε κάποιο σημείο να μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος συναρτήσει της πληροφορίας που έχουμε στο σημείο εκείνο. Οι Stoumbos & Reynolds (1996, 1997) και οι Reynolds & Stoumbos (1998) έχουν μελετήσει τις ιδιότητες αυτού του τύπου VSS διαγράμματος.

## 2.5 Διαγράμματα Hotelling's $T^2$

### 2.5.1 Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε, η πολυμεταβλητή διαδικασία ελέγχου του Hotelling αποτελεί μια φυσική πολυμεταβλητή επέκταση του μονοδιάστατου Shewhart διαγράμματος ελέγχου. Για την διεργασία αυτή θεωρούμε ότι έχουμε μια ακολουθία από  $(p \times 1)$  τυχαία διανύσματα  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ , το καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει μια ανεξάρτητη παρατήρηση ή το διάνυσμα δειγματικής μέσης τιμής  $p$  συσχετισμένων ποιοτικών χαρακτηριστικών. Τα χαρακτηριστικά αυτά ακολουθούν την  $p$ -διάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu_0$  και πίνακα συνδιακύμανσης  $\Sigma_0$ . Όταν τα  $\mathbf{X}_i$  αναπαριστούν ανεξάρτητα διανύσματα μέσων τιμών δειγμάτων μεγέθους  $n$ , το διάγραμμα Hotelling μας δίνει σήμα ότι έχει συμβεί κάποια μεταβολή στον μέσο της διεργασίας όταν :

$$T_i^2 = n(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) > k,$$

όπου  $\bar{\mathbf{X}}$  και  $\bar{\mathbf{S}}$  είναι το διάνυσμα μέσης τιμής και ο πίνακας συνδιακύμανσης των πρώτων  $m$  ( $p \times 1$ ) τυχαίων διανυσμάτων. Το  $k$  είναι ένα όριο ελέγχου το οποίο δίνεται από τον Alt (1984) μέσω της σχέσης

$$k = C(m, n, p) F_{p, \nu, \alpha}$$

όπου

$$C(m, n, p) = \frac{p(m+1)(n-1)}{(mn - m - p + 1)},$$

$\nu = mn - m - p + 1$  για  $n > 1$ . Στην περίπτωση όπου  $n = 1$ ,  $\nu = m - p$  και

$$C(m, n, p) = \frac{p(m+1)(m-1)}{(m^2 - mp)}.$$

Ο Aparisi επέκτεινε τις ιδέες των VSS, VSI και των προσαρμόσιμων ορίων ελέγχου της μονοδιάστατης περίπτωσης (π.χ. Reynolds et al. 1988, Tagaras 1998, Prabhu et al. 1994, Costa 1997) στην πολυμεταβλητή περίπτωση και επιπλέον πρότεινε τρεις τύπους τροποποιημένων  $T^2$  διαγραμμάτων, με τα χαρακτηριστικά VSS, VSI και VSSI (Aparisi

(1996), Aparisi & Haro (2001), Aparisi & Haro (2003)) δεδομένου ότι το  $\mu_0$  και το  $\Sigma_0$  είναι γνωστά. Τα αποτελέσματα των μελετών του έδειξαν ότι με το VSI  $T^2$  διάγραμμα έχουμε σημαντική βελτίωση στο ATS για μεσαίες μεταβολές και με το VSSI  $T^2$  διάγραμμα έχουμε σημαντική βελτίωση για μικρές μεταβολές.

Οι Chen & Chiou (2005) επέκτειναν ακόμα περισσότερο την δουλειά του Aparisi, θεωρώντας ότι τα  $\mu_0$  και  $\Sigma_0$  δεν είναι γνωστά, και πρότειναν τα (VP, variable parameter)  $T^2$  διαγράμματα (με πλήρως μεταβλητές παραμέτρους), στα οποία το μέγεθος δείγματος, το διάστημα δειγματοληψίας και τα όρια ελέγχου μπορούν να μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Τα νέα αυτά διαγράμματα ήταν αποτελεσματικότερα από το VSSI  $T^2$  διάγραμμα για μικρές μεταβολές, ενώ για μεσαίες μεταβολές είχαν σχεδόν ίδιο ATS.

Αν και τα προσαρμόσιμα  $T^2$  διαγράμματα είναι αποτελεσματικότερα από τα κλασικά  $T^2$  διαγράμματα ελέγχου για μικρές και μεσαίες μεταβολές, χρησιμοποιούν δύο διαστήματα δειγματοληψίας με αποτέλεσμα οι χρόνοι δειγματοληψίας σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο να μην είναι προβλέψιμοι. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα VSSC (variable sample size and control limit)  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου, στο οποίο μεταβάλλονται το μέγεθος δείγματος και τα όρια ελέγχου ενώ ο χρόνος αναμονής μεταξύ των δειγμάτων είναι σταθερός.

## 2.5.2 Το VSSC $T^2$ διάγραμμα ελέγχου

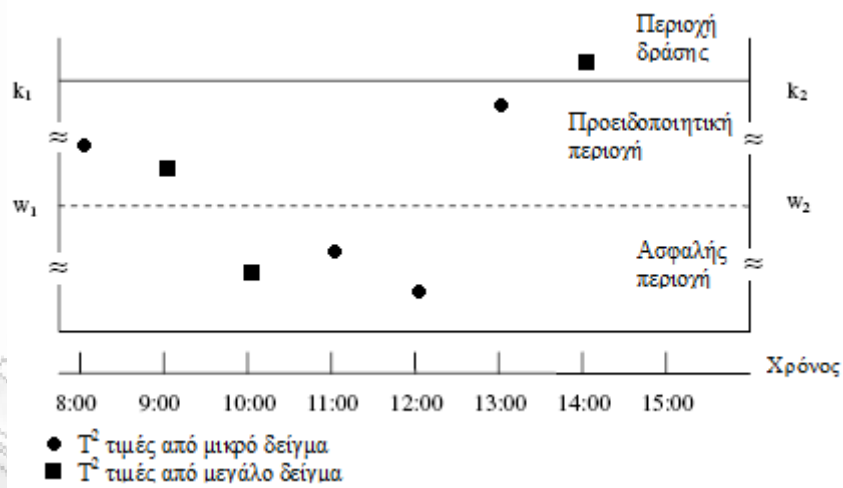
Όταν χρησιμοποιούμε το κλασικό FSR  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου, συλλέγουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n_0$  κάθε  $h_0$  ώρες και η αντίστοιχη τιμή του  $T^2$  στατιστικού σχεδιάζεται σε ένα διάγραμμα με όρια ελέγχου ή βοηθητικά όρια  $k_0 = C(m, n_0, p)F_{p, v, a_0}$ .

Το VSSC  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου είναι μια τροποποίηση του FSR  $T^2$  διαγράμματος ελέγχου. Με  $n_1$  και  $n_2$  θα συμβολίζουμε το μικρό και το μεγάλο μέγεθος δείγματος, αντίστοιχα, όπου ισχύει ότι  $n_1 < n_0 < n_2$  και το διάστημα δειγματοληψίας διατηρείται σταθερό στο  $h_0$ . Η απόφαση αλλαγής μεταξύ των δύο μεγεθών εξαρτάται από την θέση που έχει στο διάγραμμα ελέγχου το σημείο, που αναφέρεται στο προηγούμενο δείγμα. Αν το σημείο αυτό πέσει στην ασφαλή περιοχή, χρησιμοποιούμε το μέγεθος  $n_1$ , αν πέσει στην προειδοποιητική περιοχή χρησιμοποιούμε το μέγεθος  $n_2$ , ενώ, τέλος, αν πέσει εκτός των

ορίων ελέγχου τότε το διάγραμμα σημαίνει συναγερμό για εκτός ελέγχου διεργασία. Οι τρεις παραπάνω περιοχές χωρίζονται από το προειδοποιητικό όριο  $w_j$  και το όριο  $k_0 = C(m, n_j, p)F_{p, v_j, a_j}$ . Συγκεκριμένα, η ασφαλής περιοχή είναι η  $[0, w_j]$ , η προειδοποιητική περιοχή είναι η  $(w_j, k_j]$  και η περιοχή «δράσης» είναι η  $(k_j, \infty)$ , όπου  $j = 1$  ή  $2$  ανάλογα με το ποιο μέγεθος δείγματος χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο δείγμα. Τις περιοχές αυτές μπορούμε να τις δούμε με την βοήθεια του ακόλουθου σχήματος.

**Σχήμα 2-3**

Οι τρεις περιοχές του VSSC  $T^2$  διαγράμματος ελέγχου



Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στο VSSC  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου, παραπέμπουμε στο άρθρο των Chen & Hsieh (2007).

### 2.5.3 Στατιστικός σχεδιασμός του VSSC $T^2$ διαγράμματος

Η απόδοση του VSSC  $T^2$  διαγράμματος ελέγχου σχετίζεται με τον καθορισμό των σχεδιαστικών παραμέτρων : μέγεθος δείγματος ( $n_1$  και  $n_2$ ), προειδοποιητικά όρια ( $w_1$  και  $w_2$ ) και όρια ελέγχου ( $k_1$  και  $k_2$ ). Ο καθορισμός των παραμέτρων αυτών μπορεί να διατυπωθεί σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης του  $ATS_1$ , δηλαδή του εκτός ελέγχου μέσου χρόνου που χρειάζεται το διάγραμμα για να ανιχνεύσει μια μεταβολή. Όταν το διάστημα δειγματοληψίας παραμένει σταθερό η τιμή αυτή δίνεται σαν σταθερό πολλαπλάσιο ( $h_0$ ) του  $ARL_1$ , που είναι ο μέσος αριθμός δειγμάτων πριν το διάγραμμα δώσει σήμα.

Μιας και το όριο ελέγχου στο VSSC  $T^2$  διάγραμμα είναι προσαρμόσιμο, το  $ARL_1$  εξαρτάται από το πρώτο δείγμα. Όταν το πρώτο δείγμα έχει το μικρό μέγεθος, το  $ARL_1$  βρίσκεται μέσω του πλήθους των σημείων,  $U_1$ , που βρίσκονται στην ασφαλή περιοχή από την αρχή της διεργασίας μέχρι να πάρουμε σήμα. Για τον λόγο αυτό, το  $U_1$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $(1-q)$ , όπου  $q$  είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να λάβουμε ένα ακόμα σημείο μέσα στην ασφαλή περιοχή, δεδομένου ότι το τρέχον δείγμα βρίσκεται στην ασφαλή περιοχή.

Με  $N_i^1$  συμβολίζουμε τον αριθμό των διαδοχικών δειγμάτων από το τρέχον σημείο ( $i$ ) μέχρι να βρεθεί κάποιο δείγμα στην προειδοποιητική περιοχή, δεδομένου ότι το τρέχον δείγμα βρίσκεται στην ασφαλή περιοχή. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι ο συνολικός αριθμός δειγμάτων από την έναρξη της διεργασίας μέχρι την χρονική στιγμή που θα πάρουμε σήμα είναι

$$N_1 = \sum_{i=1}^{U_1} N_i^1 .$$

Αντίστοιχα, όταν το πρώτο δείγμα έχει το μεγάλο μέγεθος, το  $ARL_1$  βρίσκεται μέσω του πλήθους των σημείων,  $U_2$ , που βρίσκονται στην προειδοποιητική περιοχή από την αρχή της διεργασίας μέχρι να πάρουμε σήμα. Επιπλέον, με  $N_i^2$  συμβολίζουμε τον αριθμό των διαδοχικών δειγμάτων ( $i$ ) από το τρέχον σημείο μέχρι να βρεθεί κάποιο δείγμα στην ασφαλή περιοχή, δεδομένου ότι το τρέχον δείγμα βρίσκεται στην προειδοποιητική περιοχή. Τότε το  $ARL_1$  είναι η αναμενόμενη τιμή του  $N^2$  - τον συνολικό αριθμό δειγμάτων από την αρχή της διεργασίας μέχρι να πάρουμε σήμα.

Αφού το πρώτο δείγμα επιλέγεται τυχαία με πιθανότητα  $p_0$  να είναι μικρό και  $1-p_0$  να είναι μεγάλο, το  $ARL_1$  δίνεται από την σχέση

$$ARL_1 = p_0 E(N_1) + (1-p_0) E(N_2).$$

Εκτενής αναφορά πάνω στον σχεδιασμό του διαγράμματος καθώς και τον αλγόριθμο του προβλήματος βελτιστοποίησης που αναφέραμε, βρίσκονται στην εργασία των Chen & Hsieh (2007).

## 2.5.4 Επιδόσεις του VSSC $T^2$ διαγράμματος

Στο σημείο αυτό, με την βοήθεια των αποτελεσμάτων που υπάρχουν αναλυτικά στην μελέτη των Chen & Hsieh (2007) θα συγκρίνουμε την ικανότητα του VSSC  $T^2$  διαγράμματος ελέγχου σε σχέση με τα FSR, VSS, VSI, VSSI και VP  $T^2$  διαγράμματα ελέγχου.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την σύγκριση του VSSC  $T^2$  διαγράμματος με το αντίστοιχο FSR  $T^2$  διάγραμμα. Οι συγκρίσεις για τα δύο αυτά διαγράμματα έγιναν για τις περιπτώσεις όπου έχουμε δύο ή τέσσερις συσχετισμένες μεταβλητές προς παρακολούθηση. Οι βελτιώσεις (%) που παρατηρήσαμε στο  $ATS_1$  χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό VSSC,

$$\frac{ATS_{FSR} - ATS_{VSSC}}{ATS_{FSR}} \times 100,$$

ήταν αρκετά σημαντικές, ειδικά για μικρές ( $\delta < 1.00$ ) μεταβολές, γεγονός που σημαίνει λιγότερο χρόνο ανίχνευσης κάποιας εκτός στατιστικού ελέγχου κατάστασης. Μερικές φορές, όταν το μέσο μέγεθος δείγματος είναι μεγάλο και η μεταβολή είναι επίσης μεγάλη ( $\delta = 1.50$ ) η βελτίωση είναι ελάχιστη. Επιπλέον, κάτι που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι πως το διάστημα μεταξύ των δύο ορίων ελέγχου μικραίνει όσο μεγαλώνει το μέγεθος της μεταβολής, κάτι που συμβαίνει και στα προειδοποιητικά όρια.

Οι συγκρίσεις του VSSC  $T^2$  διαγράμματος με τα αντίστοιχα VSS, VSI, VSSI και VP  $T^2$  διαγράμματα, έγιναν για τις περιπτώσεις όπου έχουμε και πάλι, δύο ή τέσσερις συσχετισμένες μεταβλητές προς παρακολούθηση,  $n_0 = 2$  ή  $4$  και για μεταβολές από  $\delta = 0.25$  έως  $1.50$  με βήμα  $0.25$ . Ωστόσο, σημειώνουμε ότι πριν την έναρξη των συγκρίσεων αυτών θα πρέπει να γίνει η σωστή επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων των διαγραμμάτων, ώστε να είναι συγκρίσιμα. Η επιλογή των παραμέτρων γίνεται και πάλι μέσω ενός προβλήματος



βελτιστοποίησης. Για λεπτομέρειες για την επιλογή των παραμέτρων παραπέμπουμε στην Παράγραφο 5.2 της εργασίας των Chen & Hsieh (2007).

Από τα αποτελέσματα που έχουμε στην διάθεση μας συμπεραίνουμε πως για πολύ μικρές μεταβολές,  $\delta$ , το VSSC  $T^2$  διάγραμμα είναι καλύτερο από όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα. Επιπλέον το VSSC  $T^2$  διάγραμμα και το VP δίνουν τα ίδια αποτελέσματα για το εκτός ελέγχου ATS, επειδή όμως το VSSC διάγραμμα έχει σταθερό διάστημα δειγματοληψίας θεωρείται καταλληλότερο. Γενικότερα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε πως το VSSC  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου αποτελεί μια πολύ καλή επιλογή για την γρήγορη ανίχνευση μικρών μεταβολών. Για μεγάλες μεταβολές ( $\delta > 1$ ) το VSSC σχήμα είναι σχετικά ασήμαντη βελτίωση του FSR σχήματος σε σύγκριση με τα VSSI, VSI και VP σχήματα. Βέβαια, αυτό το γεγονός δεν πρέπει να μας ενοχλήσει, αφού για μεγάλες μεταβολές η τιμή του ATS είναι ήδη αρκετά μικρή.

## 2.5.5 Συμπεράσματα

Στην παράγραφο 2.5 παρουσιάσαμε το VSSC  $T^2$  διάγραμμα ελέγχου το οποίο προτάθηκε με σκοπό την αύξηση της ταχύτητας ανίχνευσης μικρών μεταβολών από τα  $T^2$  διαγράμματα. Ο στατιστικός σχεδιασμός του διαγράμματος βασίζεται σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο ελαχιστοποιεί το  $ATS_1$  δεδομένων των περιορισμών για το μέσο μέγεθος δείγματος και τον ρυθμό εσφαλμένων συναγερμών, όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Τέλος συγκρίναμε την ικανότητα του VSSC  $T^2$  διαγράμματος με τα αντίστοιχα FSR, VSS, VSI, VSSI και VP  $T^2$  διαγράμματα και συμπεράναμε ότι το προτεινόμενο διάγραμμα είναι το καταλληλότερο διάγραμμα για την ανίχνευση πολύ μικρών μεταβολών και είδαμε ακόμα πως το VSSC και το VP σχήμα είχαν παρόμοιες αποδόσεις.

# **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

## **ΕΛΛΗΝΙΚΗ**

Αντζουλάκος, Δ.Λ.(2006). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στα πλαίσια του Μ.Π.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

## **ΞΕΝΗ**

Amin, R. W. (1987). Variable Sampling Interval Control Charts, *unpublished P.h.D. dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Dept. of Statistics*

- Amin, R. W., Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C. (1987). CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals, *Technical Report 87-2*, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Annadi, H. P, Keats, J. B, Runger, G. C. and Montgomery, D. C. (1995). An adaptive sample size CUSUM control chart, *International Journal of Production Research*, **33**, 6, 1605-1616.
- Aparisi, F. and Haro, C. L. (2001). Hotelling's  $T^2$  control chart with variable sampling intervals, *International Journal of Production Research*, **39**, 14, 3127-3140.
- Arnold, J. C. (1970). Markovian Sampling Policy Applied to Quality Monitoring of Streams, *Biometrics*, **26**, 739-747.
- Bai, D. S. and Lee, K. T. (2002). Variable sampling interval  $\bar{X}$  control charts with an improved switching rule, *International Journal Production Economics*, **76**, 189-199.
- British Standard Institution. (1985). Quality Management Systems, *BSI Handbook 24, Quality Control*, London.
- Brook, D., Evans, D. A. (1972). An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length, *Biometrika*, **59**, 539-549.
- Chengalur, I. N., Arnold, J. C, and Reynolds, M. R., JR., (1989). Variable sampling intervals for multiparameter Shewhart charts. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **18**, 1769-1792.
- Costa, A. F. B. (1997). Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology*, **29**, 197-204.
- Crowder, S. V. (1987). A Simple Method for Studying Run Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts, *Technometrics*, **29**, 401-407.
- Cui, R., Reynolds, M. R., JR., (1988). X-charts with runs rules and variable sampling intervals. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **17**, 1073-1093.
- Dodge, H. F. (1955). Skip-Lot Sampling, *Industrial Quality Control*, **11**, 5, 3-5.
- Flaig, J. J., (1991). Adaptive Control Charts. Statistical Process Control in Manufacturing, edited by J. B. Keats and D. C. Montgomery (*New York: Marcel Dekker, ASQC Quality Press*), pp.111-122.
- Hua Luo and Zhang Wu. (2002). Optimal  $np$  control charts with variable sample sizes or variable sampling intervals, *Economic Quality Control*, **17**, 1, 39-61.

- Lucas, J. M., and Saccucci, M. S. (1987). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements, *Drexel University Faculty Working Paper Series 87-4*.
- Prabhu, S. S, Runger, G. C. and Keats, J. B. (1993).  $\bar{X}$  Chart with adaptive sample size, *International Journal of Production Research*, **31**, 12, 2895-2909.
- R. W. Amin, W. C. Letsinger. (1991). Improved switching rules in control procedures using variable sampling intervals, *Communications in Statistics, Series B* **20**, 205–230.
- R. W. Amin, R. Hemasinha. (1993). The switching behaviour of  $\bar{X}$  charts with variable sampling intervals, *Communications in Statistics, Series A* **22**, 2081–2102.
- Rendtel, U. (1990). CUSUM-schemes with variable sampling intervals and sample sizes. *Statistical Papers*, **31**, 103-118.
- Reynolds, M. R, Arnold, J. C, Amin, R. W. and Nachlas, J. A. (1988).  $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals, *Technometrics*, **30**, 2, 181-192.
- Reynolds, M. R. and Arnold, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *IIE Transactions*, **33**, 511-530.
- Reynolds, M. R, Amin, R. W. and Arnold, J. C, (1990). CUSUM charts with variable sampling intervals, *Technometrics*, **32**, 4, 371-384.
- Reynolds, M. R., JR., Arnold, J. C. (1989). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis*, **8**, 51-77.
- Roberts, S. W. (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages, *Technometrics*, **1**, 239-250.
- Roberts, S. W. (1966). A Comparison of Some Control Chart Procedures, **8**, 411-430.
- Robinson, P. B., and Ho, T. Y. (1978). Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods, *Technometrics*, **20**, 85-93.
- Ross, S. M., (1970). Applied Probability Models with Optimization Applications (*San Francisco: Holden Day*).
- Runger, G. C. and Pignatiello, J. J., Jr. (1991). Adaptive Sampling for Process Control. *Journal of Quality Technology*, **23**, 135–155.
- Runger, G. C. and Montgomery, D. C. (1993). Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts. *IIE Transactions*, **25**, 41–51.

- Saccucci, M. S, Amin, R. W. and Lucas, J. M. (1992). Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals, *Communication in Statistics*, **21**, 3, 627-657.
- Tagaras, G. (1998). A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology*, **30**, 212-231.
- Waldman, K. H. (1986). Bounds for the Distribution of the Run Length of Geometric Moving Average Charts, *Applied Statistics*, **35**, 151-158.
- Yan-Kwang Chen and Kun-Lin Hsieh. (2007). Hotelling's  $T^2$  charts with variable sample size and control limit, *European Journal of Operational Research*, **182**, 1251-1262.