

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ  
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΡΟΩΝ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ**

Αθανάσιος Χ. Ρακιτζής

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

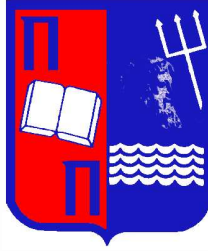
Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς

Απρίλιος 2008





**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**THEORY OF RUNS AND PATTERNS  
IN STATISTICAL QUALITY CONTROL**

Athanasios C. Rakitzis

PhD Thesis

Submitted to

Department of Statistics and Insurance Science of  
the University of Piraeus

Piraeus  
May 2008



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑ

*Στους γονείς μου  
Χρήστο και Ιωάννα  
και στον αδερφό μου  
Βασίλη*



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή Δημήτρη Λ. Αντζουλάκο για την αδιάκοπη, καθοριστική και πολύπλευρη βοήθειά του. Χωρίς την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλε και χωρίς τη στήριξη των προσπαθειών μου δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

Επίσης, επιθυμώ να ευχαριστήσω τον καθηγητή Μάρκο Β. Κούτρα για τη προσφορά πολύτιμης βοήθειας και συνεργασίας σε όλα τα έτη εκπόνησης της διατριβής καθώς και τον καθηγητή Θεόδωρο Αρτίκη, για τη διαρκή ενθάρρυνση σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Επιπλέον οφείλω να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής, καθώς και τους γονείς μου και τον αδερφό μου για την κατανόηση και την αμέριστη συμπαράστασή τους.

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διατριβή αυτή παρουσιάζονται διαδικασίες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας οι οποίες σχετίζονται με την εμφάνιση δεδομένων σχηματισμών. Οι πιο γνωστές τέτοιες διαδικασίες είναι τα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών, τα τεστ εκκίνησης, τα συνεχή σχέδια δειγματοληψίας κτλ. Πιο συγκεκριμένα, προτείνονται και μελετώνται νέα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας τα οποία βασίζονται σε ένα κανόνα ροών τύπου  $r$  από  $m$  συνεχόμενα σημεία. Τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου έχουν καλύτερη απόδοση από παρόμοια διαγράμματα που ήδη χρησιμοποιούνται αφού μειώνουν το χρόνο ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασίας. Εκτός από τα διαγράμματα ελέγχου προτείνεται και ένα νέο τεστ εκκίνησης για την αποδοχή μηχανημάτων. Η μελέτη της απόδοσης όλων των προαναφερθέντων μεθόδων στηρίζεται στην τεχνική της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα.

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

## ABSTRACT

This PhD thesis presents statistical quality control procedures that are related to the occurrence of a specific pattern. The most famous procedures are the control charts with supplementary runs rules, the start-up demonstration test, the continuous sampling plans etc. More specifically, new control charts based on a runs rule of type  $r$  out of  $m$  consecutive points are proposed and studied for the monitoring of the mean and the variance of a manufacturing process. The proposed charts are more sensitive in the detection of an out of control process than similar runs rules based control charts already being used in practice. Apart from the control charts, a new start-up demonstration test based on run and scan statistics is also proposed and studied. The performance of all the aforementioned techniques can be evaluated by the aid of the Markov chain embedding technique.

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	xι
<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	xv
<b>Πρόλογος</b>	xvii
<b>1. Διαγράμματα Ελέγχου</b>	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Περιγραφή ενός Διαγράμματος Ελέγχου	2
1.3 Τύποι Διαγραμμάτων Ελέγχου	4
1.4 Κατασκευή ενός Διαγράμματος Ελέγχου	4
1.5 Μέτρα Απόδοσης ενός Διαγράμματος Ελέγχου	7
1.6 Άλλα Μέτρα Απόδοσης	12
1.7 Ταξινόμηση Διαγραμμάτων Ελέγχου	13
1.8 Βασικά Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου	15
1.8.1 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου Shewhart	16
1.8.2 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου Cusum	17
1.8.3 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA	19
1.9 Ερμηνεία Διαγράμματος Ελέγχου και Ανάλυση Εμφάνισης Μη Τυχαίων Σχηματισμών σε ένα Διάγραμμα Ελέγχου	20
1.10 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για την Παρακολούθηση της Μέσης Τιμής μιας Παραγωγικής Διεργασίας	28
1.10.1 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για την Παρακολούθηση της Διασποράς	34
1.10.2 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών και Προσαρμόσιμες Παραμέτρους	36
1.10.3 Πολυμεταβλητά Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών	38
1.10.4 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για Διακριτά Χαρακτηριστικά	40

1.11	Κανόνες Ροών και Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας	42
	1.11.1 Δειγματοληψία Αποδοχής	43
	1.11.2 Έλεγχος Αποδοχής Μηχανημάτων Μέσω Τεστ Εκκίνησης	44
1.12	Ανακεφαλαίωση	45
<b>2.</b>	<b>Η Μέθοδος της Μαρκοβιανής Εμφύτευσης</b>	<b>47</b>
2.1	Εισαγωγή	47
2.2	Έννοιες και Συμβολισμοί	49
2.3	Κατανομές Χρόνων Αναμονής	51
2.4	Η Μεθοδολογία της Εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή Αλυσίδα	52
2.5	Χρόνος Αναμονής Μέχρι την Εμφάνιση ενός Απλού Σχηματισμού	54
2.6	Χρόνος Αναμονής Μέχρι την Εμφάνιση ενός Σύνθετου Σχηματισμού	60
2.7	Από Κοινού Κατανομή Χρόνου Αναμονής και Αριθμού Επιτυχιών	67
2.8	Μεθοδολογία Εμφύτευσης και Μέσο Μήκος Ροής	72
	2.8.1 Υπολογισμός του Μέσου Μήκους Ροής στα Διαγράμματα Ελέγχου Shewhart με Κανόνες Ροών	72
	2.8.2 Μέσο Μήκος Ροής Σταθερής Κατάστασης	80
	2.8.3 Η Μέθοδος της Άμεσης Αρχικής Αντίδρασης σε Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών	82
2.9	Ανακεφαλαίωση	85
<b>3.</b>	<b>Διαγράμματα Ελέγχου για τη Μέση Τιμή που Βασίζονται στον Κανόνα <math>r</math>-από-<math>m</math></b>	<b>87</b>
3.1	Εισαγωγή	87
3.2	Ο Τροποποιημένος $r$ -από- $m$ Κανόνας Ευαισθητοποίησης	87
3.3	Τεχνική Τυποποίησης Διαγραμμάτων Ελέγχου για τη Μέση Τιμή	90
3.4	Κατασκευή του $M : m / m$ Διαγράμματος Ελέγχου	92
3.5	Κατασκευή του $M : 2 / m$ Διαγράμματος Ελέγχου	95
3.6	Κατασκευή του $M : 3 / 4$ Διαγράμματος Ελέγχου	98
3.7	Μέσο Μήκος Ροής του $M : r / m$ Διαγράμματος Ελέγχου	101
3.8	Απόδοση του $M : r / m$ Διαγράμματος Ελέγχου	103
3.9	Ο Αναθεωρημένος $r$ -από- $m$ Κανόνας Ευαισθητοποίησης	109

3.10	Κατασκευή του $R : r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου	111
3.11	Απόδοση του $R : r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου	117
3.12	Περαιτέρω Μελέτη Ειδικών Περιπτώσεων του $R : r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου	122
3.13	Ανακεφαλαίωση	129
<b>4.</b>	<b>Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά που Βασίζονται στον Κανόνα <math>r</math>-από-<math>m</math></b>	<b>131</b>
4.1	Εισαγωγή	131
4.2	Βασικά Χαρακτηριστικά των Διαγραμμάτων Ελέγχου για τη Διασπορά	132
	4.2.1 Τύποι Διαγραμμάτων	133
	4.2.2 Ανίχνευση Βελτίωσης της Διεργασίας	134
	4.2.3 Αμεροληψία Διαγράμματος	134
4.3	Μονόπλευρα Διαγράμματα για τη Διασπορά	135
	4.3.1 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου I	136
	4.3.2 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου II	140
	4.3.3 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου III	145
	4.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου IV	150
4.4	Απόδοση των Μονόπλευρων Διαγραμμάτων Τύπου $r$ -από- $m$	156
4.5	Η Μέθοδος της Άμεσης Αρχικής Αντίδρασης	164
4.6	Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου Παρακολούθησης της Διασποράς	172
	4.6.1 Δίπλευρα $r$ -από- $m$ Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά	172
4.7	Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου Χωρίς Κάτω Όριο Ελέγχου	183
	4.7.1 Το Δίπλευρο Διάγραμμα Ελέγχου $1/1 - m/m$	184
4.8	Ανακεφαλαίωση	193
<b>5.</b>	<b>Έλεγχος Αποδοχής Μηχανημάτων Μέσω Τεστ Εκκίνησης</b>	<b>195</b>
5.1	Εισαγωγή	195
5.2	Το CSDF Τεστ Εκκίνησης	198
5.3	Ορισμοί και Συμβολισμοί	198
5.4	Ανάπτυξη του CSDF Τεστ Εκκίνησης	200
5.5	Στατιστική Συμπερασματολογία για την Πιθανότητα Επιτυχούς Εκκίνησης ενός Εξοπλισμού	212

5.6	Οδηγός Επιλογής των Παραμέτρων του CSDF Τεστ Εκκίνησης	222
5.7	Ανακεφαλαίωση	226
	<b>Παράρτημα</b>	227
	<b>Βιβλιογραφία</b>	271

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ



## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1	Μοντέλο ορίων σίγμα	4
Πίνακας 1.2	Μοντέλο ορίων πιθανότητας	5
Πίνακας 1.3	Πίνακας στατιστικών μέτρων για την κατανομή του μήκους ροής	11
Πίνακας 1.4	Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου	14
Πίνακας 1.5	Διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA	19
Πίνακας 1.6	Διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA (όρια σταθερής κατάστασης)	20
Πίνακας 1.7	Μη-τυχαίοι σχηματισμοί σε διαγράμματα ελέγχου	27
Πίνακας 2.1	Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης	73
Πίνακας 2.2	Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής του διαγράμματος $C_{12}$	77
Πίνακας 2.3	Ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος $C_{12}$	78
Πίνακας 2.4	Πιθανότητες εμφάνισης των ενδεχομένων $\mathcal{E}_i$ , $i = 1, 2$	80
Πίνακας 2.5	Τιμές των $ARL$ , $ARL_s$ του διαγράμματος $C_{12}$	82
Πίνακας 2.6	Μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων $C_{12}$ και FIR- $C_{12}$	84
Πίνακας 3.1	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για τα διαγράμματα ελέγχου $M : r / m$	102
Πίνακας 3.2	Τιμές του $ARL$ και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα $m / m$ και $M : r / m$ ( $ARL_{in} = 370.4$ )	105
Πίνακας 3.3	Προτεινόμενα $M : r / m$ διαγράμματα ελέγχου ( $ARL_{in} = 370.4$ )	107
Πίνακας 3.4	Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το $ARL$ για τα διαγράμματα $M : r / 5$ , $r = 2, 3, 4$ ( $ARL_{in} = 370.4$ )	108
Πίνακας 3.5	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για τα διαγράμματα ελέγχου $R : r / m$	114
Πίνακας 3.6	Προτεινόμενα $R : r / m$ διαγράμματα ελέγχου ( $ARL_{in} = 370.4$ )	118
Πίνακας 3.7	Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το $ARL$ για τα προτεινόμενα διαγράμματα $R : r / m$ ( $ARL_{in} = 370.4$ )	120
Πίνακας 3.8	Τυπική απόκλιση των προτεινόμενων $R : r / m$ διαγραμμάτων ελέγχου	121
Πίνακας 3.9	Επιλογή βέλτιστου $R : r / m$ διαγράμματος ελέγχου	127

Πίνακας 4.1	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων $C_{3/4}^{(I)}$ , $C_{3/5}^{(I)}$ και $C_{4/5}^{(I)}$	140
Πίνακας 4.2	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων $C_{3/4}^{(II)}$ , $C_{3/5}^{(II)}$ και $C_{4/5}^{(II)}$	145
Πίνακας 4.3	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων $C_{3/4}^{(III)}$ , $C_{3/5}^{(III)}$ και $C_{4/5}^{(III)}$	149
Πίνακας 4.4	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων $C_{3/4}^{(IV)}$ , $C_{3/5}^{(IV)}$ και $C_{4/5}^{(IV)}$	155
Πίνακας 4.5	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ , $n = 5$ )	160
Πίνακας 4.6	Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ , $n = 5$ )	161
Πίνακας 4.7	Επιλογή του διανύσματος αρχικών πιθανοτήτων για τη μέθοδο FIR	168
Πίνακας 4.8	Άνω μονόπλευρα διαγράμματα με FIR	170
Πίνακας 4.9	Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα με FIR	170
Πίνακας 4.10	Απόδοση των $r/m$ και $M:r/m$ διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ , $n = 5$ )	176
Πίνακας 4.11	Επιλογή δίπλευρου διαγράμματος μεταξύ των $r/m$ , $M:r/m$ για την παρακολούθηση της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ , $n = 5$ )	178
Πίνακας 4.12	Επιλογή των εξωτερικών ορίων ελέγχου για τα διαγράμματα $I:r/m$ , $R:r/m$	180
Πίνακας 4.13	Απόδοση των δίπλευρων διαγραμμάτων $I:r/m$ , $R:r/m$ για την παρακολούθηση της διασποράς	181
Πίνακας 4.14	Επιλογή καταλληλότερου δίπλευρου διαγράμματος $I:r/m$ , $R:r/m$ για την παρακολούθηση της διασποράς	182
Πίνακας 4.15	Άνω όριο ελέγχου διαγράμματος $1/1 - m/m$ για $n = 2(1)5$	187
Πίνακας 4.16	Προτεινόμενα διαγράμματα $1/1 - m/m$ για $n = 2(1)5$	189

Πίνακας 4.17	Ποσοστό βελτίωσης του διαγράμματος $1/1 - m/m$ έναντι του $S$ διαγράμματος με όρια πιθανότητας και του διαγράμματος $S(\neq)$ , για $n = 2(1)5$	191
Πίνακας 5.1	Τιμές των $k, d$	210
Πίνακας 5.2	Πιθανότητα λήψης απόφασης στη $n$ - οστή δοκιμή	212
Πίνακας 5.3	Προσομοιωμένα δεδομένα για $n = 30$ όμοιους εξοπλισμούς ( $p = 0.90$ , τεστ εκκίνησης CSDF για $k = 10$ , $d = 3$ )	220
Πίνακας 5.4	Εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας και τυπικό σφάλμα για τις μεθόδους VB, SG και EM	222
Πίνακας 5.5	Βέλτιστα τεστ εκκίνησης CSDF για διάφορες επιλογές των $a, \beta, p_1, p_0$	225

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1	Τυπική μορφή διαγράμματος ελέγχου	3
Σχήμα 1.2	Χαρακτηριστικές καμπύλες του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου	10
Σχήμα 1.3	Εμφάνιση μη-τυχαίων σχηματισμών σε ένα διάγραμμα ελέγχου	21
Σχήμα 1.4	Ζώνες A, B, C σε ένα διάγραμμα ελέγχου	23
Σχήμα 2.1	Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $T$	66
Σχήμα 2.2	Η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου αναμονής $T_1$	67
Σχήμα 2.3	Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα $C_{12}$	74
Σχήμα 2.4	Γραφικές παραστάσεις των $F_T(n)$ και $f_T(n)$ για $\delta = 0, 0.5$	79
Σχήμα 3.1	Γραφική απεικόνιση διαγραμμάτων ελέγχου $r/m$	89
Σχήμα 3.2	Γραφική απεικόνιση προτεινόμενων κανόνων τύπου 2-από-3	90
Σχήμα 3.3	Το διάγραμμα ελέγχου $R:2/3$	111
Σχήμα 4.1	Το διάγραμμα $C_{3/4}^{(I)}$	137
Σχήμα 4.2	Το διάγραμμα $C_{2/5}^{(II)}$	142
Σχήμα 4.3	Το διάγραμμα $C_{3/3}^{(III)}$	146
Σχήμα 4.4	Το διάγραμμα $C_{3/5}^{(IV)}$	151
Σχήμα 4.5	Η κατανομή της δειγματικής τυπικής απόκλισης $S$ για διάφορα μεγέθη δείγματος $n$	163
Σχήμα 4.6	Το διάγραμμα $1/1 - 5/5$	185
Σχήμα 4.7	Γραφική παράσταση του $ARL_{in}$ του διαγράμματος $1/1 - m/m$ για $n = 2(1)5, m = 2(1)12$	193
Σχήμα 5.1	Η $E(T)$ ως συνάρτηση του $k$ για $d = 2, 3, 4$	203
Σχήμα 5.2	Η $E(T)$ ως συνάρτηση του $d$ για $k = 30, 40, 50$	203
Σχήμα 5.3	Τυπική απόκλιση της $W_1$ ως συνάρτηση του $p$ για $k = 10$ και $d = 3, 4, 5$	207
Σχήμα 5.4	Τυπική απόκλιση της $W_1$ ως συνάρτηση του $p$ για $d = 5$ και $k = 10, 15, 20$	207

# РАНЕЕЗНАМО ПЕРПАА

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για παραπάνω από μισό αιώνα η θεωρία ροών και σχηματισμών βρίσκει εφαρμογή σε διαδικασίες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας των προϊόντων μιας παραγωγικής διαδικασίας. Αρχικά ξεκίνησε να εφαρμόζεται στην περιοχή της δειγματοληψίας αποδοχής (Mosteller (1941), Wolfowitz (1943)) και των συνεχών σχεδίων δειγματοληψίας (Dodge (1943), Praire et al. (1962), Vance and McDonald (1979)) και στη συνέχεια πέρασε στα διαγράμματα ελέγχου (Page (1955), Western Electric Company (1956)) και στα τεστ εκκίνησης για την αποδοχή εξαρτημάτων (Hahn and Gage (1983), Viveros and Balakrishnan (1993)).

Τα διαγράμματα ελέγχου προτάθηκαν από τον W. A. Shewhart (1931) ο οποίος δούλευε ως στατιστικός στα εργαστήρια της εταιρείας Bell. Το πιο γνωστό και ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα φέρει το όνομα του. Το βασικότερο μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart είναι ότι καθυστερούν να δώσουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν η διεργασία λειτουργεί παρουσία κάποιας ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Για το σκοπό αυτό προτάθηκε η χρήση κανόνων ροών. Η Western Electric Company (1956) πρότεινε στο εγχειρίδιό της ένα σύνολο τεσσάρων κανόνων καθώς επίσης και οδηγίες με το πως πρέπει αυτοί οι κανόνες να χρησιμοποιούνται σε ένα διάγραμμα τύπου Shewhart ώστε να αυξάνει η ευαισθησία του διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών μεταβολών της διεργασίας. Οι κανόνες αυτοί αποτέλεσαν τη βάση των κανόνων που προτάθηκαν από τότε μέχρι και σήμερα ενώ συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη.

Η έρευνα στην περιοχή των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών ξεκίνησε ουσιαστικά με την εργασία του Page (1995) ο οποίος πρότεινε κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου οι οποίοι βασίζονται στη θεωρία ροών και σχηματισμών. Για τον υπολογισμό της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών ο Page (1995) χρησιμοποίησε στοιχεία από τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Έκτοτε η συγκεκριμένη μεθοδολογία αποτελεί ένα από τα βασικότερα εργαλεία για τον υπολογισμό της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου ειδικά σε περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει να εξάγουμε ακριβή αποτελέσματα. Η πιο συστηματική μελέτη διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών δόθηκε από τους Champ and Woodall (1987) οι οποίοι μελέτησαν την απόδοση ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διαδικασίας με

ένα ή περισσότερους κανόνες ευαισθητοποίησης που βασίζονται στη θεωρία ροών. Για τη μελέτη των εν λόγω διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Το βασικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν οι Champ and Woodall (1987) είναι ότι αν και η χρήση κανόνων ροών βελτιώνει την απόδοση ενός διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας εντούτοις αυξάνει το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεμίων με συνέπεια να διακόπτεται πολύ συχνά η παραγωγική διεργασία ενώ στην πραγματικότητα δεν συντρέχει λόγος. Αυτό ήταν και το βασικότερο μειονέκτημα που αποθάρρυνε τη χρήση των κανόνων ροών στα διαγράμματα ελέγχου.

Ο Klein (2000a) με την εργασία του έδωσε νέα ώθηση στη χρήση των κανόνων ροών σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Μέχρι τότε οι κανόνες ροών χρησιμοποιούνταν ως συμπληρωματικοί κανόνες για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος. Ο Klein (2000a) πρότεινε δύο διαγράμματα ελέγχου ως εναλλακτικά του  $\bar{X}$  διαγράμματος τα οποία βασίζονται στη χρήση στατιστικών συναρτήσεων ροών και σάρωσης. Για την ανάπτυξή τους χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Κύριο χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων που πρότεινε ο Klein (2000a) είναι ότι το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεμίων να είναι δεδομένο και δεν επηρεάζεται από την εφαρμογή των κανόνων ευαισθητοποίησης. Η κατανομή του μήκους ροής των προτεινόμενων διαγραμμάτων ταυτίζεται με την κατανομή του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός δεδομένου σχηματισμού ο οποίος περιγράφει τον κανόνα εκτός ελέγχου διεργασίας. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση και μελέτη της κατανομής του αντίστοιχου χρόνου αναμονής. Μετά την εργασία του Klein (2000a) εμφανίστηκαν και άλλες παρεμφερείς εργασίες στην περιοχή και ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Klein (2000b), Khoo (2004a), Koutras et al (2006), Khoo and Ariffin (2006), Acosta-Mejia (2007).

Ο κύριος άξονας της παρούσας διατριβής είναι η εισαγωγή και η μελέτη τυχαίων μεταβλητών που σχετίζονται με το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός δεδομένου σχηματισμού και οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή στο επιστημονικό πεδίο του στατιστικού ελέγχου ποιότητας και ειδικότερα στα διαγράμματα ελέγχου και στον έλεγχο αποδοχής εξαρτημάτων μέσω τεστ εκκίνησης.

Πιο συγκεκριμένα στα πέντε κεφάλαια της παρούσας διατριβής περιλαμβάνονται τα ακόλουθα:



Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε περιεκτικά τις βασικές έννοιες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας και δίνουμε μια βιβλιογραφική ανασκόπηση της χρήσης των στατιστικών συναρτήσεων ροών και σάρωσης στα διαγράμματα ελέγχου και γενικότερα στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μεθοδολογία της εμφύτευσης μιας τυχαίας μεταβλητής σε Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία προτάθηκε από τους Fu and Koutras (1994) και δίνονται τα βασικά θεωρήματα και προτάσεις τα οποία εφαρμόζονται στα Κεφάλαια 3 έως 5 της παρούσας διατριβής. Η μεθοδολογία της εμφύτευσης αποτελεί ένα πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη τυχαίων μεταβλητών που σχετίζονται με χρόνους αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός δεδομένου σχηματισμού. Στο ίδιο κεφάλαιο δίνεται και ένα αναλυτικό παράδειγμα υπολογισμού της κατανομής του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγεται και μελετάται το τροποποιημένο  $r$ -από- $m$  διάγραμμα ελέγχου (συμβ.  $M:r/m$ ) για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας. Δίνονται πίνακες με την απόδοση του εν λόγω διαγράμματος ενώ γίνονται και συγκρίσεις με άλλα παρεμφερή διαγράμματα. Στο ίδιο κεφάλαιο εισάγεται και μελετάται επίσης το αναθεωρημένο  $r$ -από- $m$  διάγραμμα ελέγχου (συμβ.  $R:r/m$ ) για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας. Το διάγραμμα  $R:r/m$  αποτελεί τροποποίηση του διαγράμματος  $M:r/m$  με σκοπό τη βελτίωση της απόδοσης του τελευταίου στην ανίχνευση και μεγαλύτερης τάξης μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας.

Στο Κεφάλαιο 4 εισάγονται και μελετώνται μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας. Εξάγεται η κατανομή του μήκους ροής τεσσάρων διαφορετικών κανόνων τύπου  $r$ -από- $m$  και μελετάται η απόδοση των εν λόγω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου. Στο ίδιο κεφάλαιο μελετάται επίσης η απόδοση των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου  $M:r/m$  και  $R:r/m$  του Κεφαλαίου 3 για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας και η απόδοσή τους συγκρίνεται με παρεμφερή διαγράμματα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εισάγεται και μελετάται ένα νέο τεστ εκκίνησης για την αποδοχή ενός εξοπλισμού που βασίζεται στη χρήση στατιστικών συναρτήσεων ροών και σάρωσης. Το τεστ που προτείνεται καλείται τεστ συνεχόμενων επιτυχιών

αποτυχιών σε απόσταση (συμβ. CSDF). Με εφαρμογή της μεθοδολογίας του Κεφαλαίου 2 εξάγεται η κατανομή του αριθμού των εκκινήσεων μέχρι το τέλος του τεστ καθώς και αναλυτικοί τύποι για την πιθανότητα αποδοχής και την πιθανότητα απόρριψης ενός εξοπλισμού και τον αναμενόμενο αριθμό εκκινήσεων μέχρι το τέλος του τεστ. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις διαφορετικοί τρόποι εκτίμησης της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης ενός εξοπλισμού οι οποίοι βασίζονται στη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Τα νέα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής αφορούν τα διαγράμματα ελέγχου  $M : r/m$  και  $R : r/m$  καθώς και το τεστ εκκίνησης CSDF. Τα αποτελέσματα αυτά δημοσιεύονται στις εργασίες των Antzoulakos and Rakitzis (2008a), Antzoulakos and Rakitzis (2008b) και Antzoulakos, Koutras and Rakitzis (2008c).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

### 1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής θα ασχοληθούμε γενικά με τα διαγράμματα ελέγχου και ειδικότερα με τα διαγράμματα ελέγχου που είναι εφοδιασμένα με κανόνες ροών. Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν το βασικότερο εργαλείο στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διεργασίας. Είναι γνωστό πως σε οποιαδήποτε παραγωγική διαδικασία, όσο καλά σχεδιασμένη και προσεκτικά εκτελεσμένη είναι, εμφανίζεται πάντοτε ένα ποσό έμφυτης ή φυσικής μεταβλητότητας. Η μεταβλητότητα αυτή είναι αποτέλεσμα πολλών μικρών και συνήθως μη-σημαντικών παραγόντων. Στα πλαίσια του στατιστικού ελέγχου ποιότητας η παρουσία αυτής της μεταβλητότητας μόνο έχει ως αποτέλεσμα τη λειτουργία της διεργασίας υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας ή ισοδύναμα λέμε ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου (για συντομία εντός ελέγχου). Αν όμως υπάρχουν άλλες αιτίες μεταβλητότητας (π.χ. λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, απειρία χειριστών, ελαττωματικό πρωτογενές υλικό κτλ.), τότε η διεργασία εμφανίζει αυξημένη μεταβλητότητα και λειτουργεί σε μη-αποδεκτό επίπεδο. Αυτές οι αιτίες μεταβλητότητας ονομάζονται ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Μια διεργασία που λειτουργεί παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας λέμε ότι βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (για συντομία εκτός ελέγχου).

Βασικός σκοπός του στατιστικού ελέγχου ποιότητας είναι η έγκαιρη ανίχνευση της παρουσίας ειδικών αιτιών μεταβλητότητας ώστε να διεξαχθεί η κατάλληλη έρευνα για τον εντοπισμό και απομόνωσή των (αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό) πριν η παραγωγή δώσει μεγάλο αριθμό προϊόντων χαμηλής ποιότητας. Τα διαγράμματα ελέγχου (*control charts*) αποτελούν το πιο διαδεδομένο εργαλείο για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διεργασίας σε πραγματικό χρόνο (*on-line process monitoring*). Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση των παραμέτρων της διεργασίας

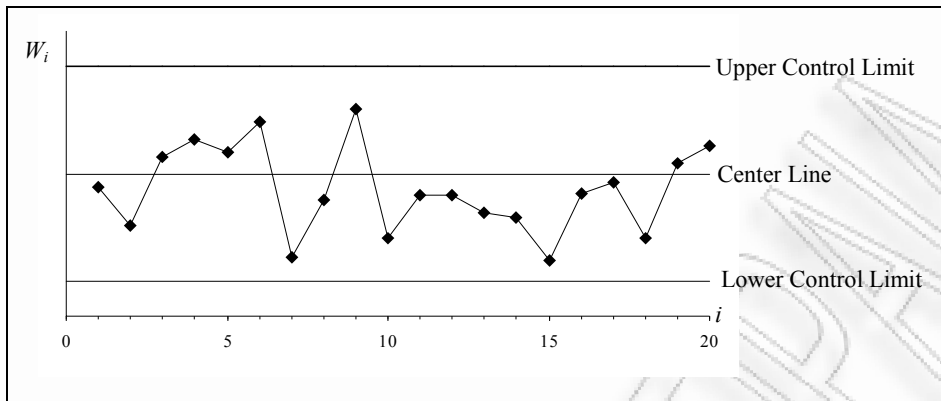
καθώς και στον προσδιορισμό της ικανότητάς της να παράγει αποδεκτά προϊόντα. Στα Κεφάλαια 1-4 της παρούσας διατριβής θα μας απασχολήσουν διαγράμματα ελέγχου τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της διεργασίας σε πραγματικό χρόνο.

## 1.2 Περιγραφή ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι σε μια παραγωγική διεργασία ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού  $X$  η οποία καθορίζει την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Από την παραγωγή επιλέγουμε τυχαία δείγματα του προϊόντος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών της μεταβλητής  $X$ , έστω τα  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ . Χρησιμοποιώντας τα δείγματα υπολογίζουμε την τιμή  $W_i = g(\mathbf{X}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , μιας στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα (π.χ. μέση τιμή, διακύμανση, ποσοστό κτλ.) που μας ενδιαφέρει. Έτσι η παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση  $W$  στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής  $\mu$  ενός χαρακτηριστικού  $X$  (π.χ. διάμετρος κυλίνδρων). Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  από το παραγόμενο προϊόν σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση  $W_i = g(\mathbf{X}_i) = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}) / n$  για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Η τυπική μορφή ενός διαγράμματος ελέγχου δίνεται στο Σχήμα 1.1.



**Σχήμα 1.1:** Τυπική μορφή διαγράμματος ελέγχου

Στο Σχήμα 1.1, εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές της  $W_i$  (που απεικονίζονται με μικρούς ρόμβους), έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*Center Line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή της  $W$  όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας (ή ακόμη και την τιμή στόχο (*target value*) που έχει τεθεί για την υπό παρακολούθηση μεταβλητή). Οι δύο ακραίες γραμμές του διαγράμματος ονομάζονται άνω και κάτω όριο ελέγχου (*Upper Control Limit, Lower Control Limit*) και συμβολίζονται με *UCL* και *LCL*, αντίστοιχα. Όσο οι τιμές (σημεία) της  $W$  εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι «τυχαία» μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός (στατιστικού) ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός (στατιστικού) ελέγχου οπότε και θα πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Επισημαίνουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ως παράδειγμα μη τυχαίας συμπεριφοράς θα μπορούσε κανείς να αναφέρει στο Σχήμα 1.1 την παρουσία 9 συνεχόμενων σημείων μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου (δείγματα 10-18).

### 1.3 Τύποι Διαγραμμάτων Ελέγχου

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος που ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε. Έτσι έχουμε τα διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές (*control charts for variables*) όταν η απεικονιζόμενη ποσότητα είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, και τα διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά (*control charts for attributes*) όταν η απεικονιζόμενη ποσότητα είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε μόνο με διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές.

### 1.4 Κατασκευή ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο θα περιγράψουμε τη γενική διαδικασία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου και θα τονίσουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής.

Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία δείγματα του προϊόντος σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της παραγωγής στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών της μεταβλητής  $X$  έστω τα  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ . Έστω  $W_i = g(\mathbf{X}_i)$ ,  $i=1,2,\dots$ , οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $W = g(\mathbf{X})$  που εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα (π.χ. μέση τιμή, διακύμανση, ποσοστό συμφωνούντων με τις προδιαγραφές προϊόντων κτλ.) που μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε. Το γενικό μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου περιγράφεται στον επόμενο πίνακα

**Πίνακας 1.1:** Μοντέλο ορίων σίγμα

$LCL$	$Center\ Line$	$UCL$
$\mu_W - L\sigma_W$	$\mu_W$	$\mu_W + L\sigma_W$

όπου  $\mu_W$ ,  $\sigma_W$  δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  η οποία απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, ενώ η ποσότητα  $L$  δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Η πιο συνηθισμένη τιμή του  $L$  είναι το 3 και σε αυτή την περίπτωση θα αναφερόμαστε στην κατασκευή διαγράμματος ελέγχου τριών σίγμα (συμβ.  $3\sigma$ ). Αν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου τότε έχουμε ένδειξη εκτός

ελέγχου διεργασίας και θα πρέπει να γίνει έρευνα για την ανεύρεση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας οι οποίες, αν βρεθούν, θα πρέπει να απομονωθούν.

Το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου προτάθηκε από τον Walter A. Shewhart (1931) και ονομάζεται διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου στην πράξη λόγω της απλότητας στην κατασκευή και ερμηνεία του. Μια σύντομη και περιεκτική αναφορά στα διαγράμματα τύπου Shewhart δίνεται στην Παράγραφο 1.8.1.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που περιγράφεται στον επόμενο πίνακα (μοντέλο ορίων πιθανότητας  $\alpha$ ) για κανονική ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της  $W$

**Πίνακας 1.2:** Μοντέλο Ορίων Πιθανότητας  $\alpha$

$LCL$	$Center\ Line$	$UCL$
$\mu_W - z_{\alpha/2}\sigma_W$	$\mu_W$	$\mu_W + z_{\alpha/2}\sigma_W$

Με  $z_\alpha$  συμβολίζουμε το άνω  $\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής. Σημειώνουμε πως στην περίπτωση που η κατανομή της  $W$  δεν είναι κανονική (ή δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος) μπορούμε αντί των ποσοστιαίων σημείων της τυπικής κανονικής κατανομής να χρησιμοποιήσουμε ποσοστιαία σημεία της κατανομής της  $W$ .

Πέρα από το άνω και κάτω όριο ενός διαγράμματος ελέγχου, έχουν οριστεί και εξωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου (*outer warning limits, OWL*) καθώς και εσωτερικά όρια ελέγχου (*inner warning limits, IWL*). Σε μοντέλο ορίων  $3\sigma$  τα εξωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου σχεδιάζονται (συνήθως) σε απόσταση  $2\sigma$  (όρια  $2\sigma$ ) από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος και στοχεύουν στην αύξηση της ευαισθησίας αυτού. Έτσι, αν παρατηρήσουμε ένα ή περισσότερα σημεία μεταξύ των εξωτερικών προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου (προς τη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής) τότε αυτό λαμβάνεται ως ένδειξη ότι η διεργασία μπορεί να είναι εκτός ελέγχου. Επίσης, σε μοντέλο ορίων  $3\sigma$  τα εσωτερικά προειδοποιητικά όρια σχεδιάζονται σε απόσταση  $1\sigma$  (όρια  $1\sigma$ ) από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος. Έτσι, το διάγραμμα ελέγχου χωρίζεται σε τρεις ζώνες (προς κάθε πλευρά της κεντρικής γραμμής) και οι ζώνες αυτές χρησιμοποιούνται για τον ορισμό διαφόρων κανόνων των οποίων η χρήση αποσκοπεί στο να κάνουν πιο ευαίσθητο ένα

διάγραμμα ελέγχου στην ανίχνευση της παρουσίας ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Σε επόμενες παραγράφους θα αναφερθούμε εκτενέστερα στους τρόπους με τους οποίους μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου ώστε να αυξηθεί η ευαισθησία ενός διαγράμματος.

Για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος ελέγχου είναι απαραίτητο να επιλέξουμε το μέγεθος του δείγματος  $n$  που θα χρησιμοποιήσουμε, αφού λόγοι κόστους αλλά και λειτουργίας της ίδιας της διεργασίας δεν επιτρέπουν σε πολλές περιπτώσεις την εξέταση όλων των παραγόμενων προϊόντων. Επίσης θα πρέπει να καθοριστεί και ο ρυθμός με τον οποίο θα συλλέγονται τα δείγματα. Γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι οι επιλογές των παραμέτρων αυτών παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδοση του διαγράμματος ενώ επηρεάζουν και επηρεάζονται από τον παράγοντα κόστος. Η γενική πολιτική που ακολουθείται είναι να συλλέγουμε μικρά μεγέθη δειγμάτων αρκετά συχνά (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μαζικής παραγωγής προϊόντων ή όταν εμφανίζονται συχνά ειδικές αιτίες μεταβλητότητας) παρά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων λιγότερο συχνά. Γενικά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων κάνουν πιο εύκολη την ανίχνευση οποιασδήποτε μεταβολής στην τιμή της κρίσιμης ποσότητας που παρακολουθούμε ενώ ένας ταχύς ρυθμός συλλογής δειγμάτων επιτρέπει την έγκαιρη ανίχνευση της μεταβολής. Τα τελευταία 20 χρόνια έχει γίνει μια προσπάθεια είτε το μέγεθος δείγματος είτε ο ρυθμός δειγματοληψίας είτε και τα δύο να καθορίζονται από τη συμπεριφορά των σημείων που απεικονίζονται στο διάγραμμα ελέγχου. Έτσι έχει προταθεί η χρήση μεταβλητού ρυθμού δειγματοληψίας ή/και μεταβλητού μεγέθους δείγματος, δηλαδή η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου με προσαρμόσιμες παραμέτρους (*adaptive control charts*).

Έτσι, εκτός της τιμής του  $L$  θα πρέπει να καθοριστεί η τιμή του  $n$  καθώς και η συχνότητα δειγματοληψίας (*sampling rate*). Σε περιπτώσεις που η επιλογή των παραμέτρων του διαγράμματος γίνεται με στατιστικά κριτήρια θα αναφερόμαστε σε στατιστικό σχεδιασμό των διαγραμμάτων ελέγχου (*Statistical Design Control Charts*) ενώ αν γίνεται με οικονομικά κριτήρια θα αναφερόμαστε σε σχεδιασμό διαγραμμάτων ελέγχου με οικονομικά κριτήρια (*Economical Design Control Charts*). Στην παρούσα διατριβή η ανάπτυξη των προτεινόμενων διαγραμμάτων βασίζεται σε στατιστικά κριτήρια.

Στην επόμενη παράγραφο περιγράφονται τα βασικά μέτρα που καθορίζουν την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου.



## 1.5 Μέτρα Απόδοσης ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Μια από τις βασικότερες έννοιες που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ή μέσο μήκος διαδρομής (*Average Run Length*, συμβ. *ARL*) του διαγράμματος. Το *ARL* ορίζεται από τη σχέση

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (1.1)$$

όπου  $p$  συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Έτσι, ο αριθμός των σημείων που σχεδιάζονται στο διάγραμμα μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου είναι μια τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητας επιτυχίας  $p$ . Θυμίζουμε πως αν η τυχαία μεταβλητή  $T$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $p$  (συμβ.  $T \sim G(p)$ ), τότε

$$\Pr(T = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

και

$$E(T) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1}{p^2}. \quad (1.3)$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι η ποσότητα *ARL* δηλώνει τη μέση τιμή του αριθμού  $T$  των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου), αφού το  $T \sim G(p)$ . Η τυχαία μεταβλητή  $T$  ονομάζεται μήκος ροής (*run length*) του διαγράμματος.

Το μέσο μήκος ροής μιας διεργασίας που βρίσκεται εντός ελέγχου συμβολίζεται με  $ARL_{in}$  (*in-control average run length*) και είναι ίσο με

$$ARL_{in} = \frac{1}{a} \quad (1.4)$$

όπου  $a$  είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Προφανώς, στην πράξη θέλουμε να έχουμε μεγάλο  $ARL_{in}$ . Η πιθανότητα  $a$  υπολογίζεται με τη σχέση

$$a = \Pr(W < LCL \text{ ή } W > UCL | W \sim F_W) = 1 - \Pr(LCL \leq W \leq UCL | W \sim F_W)$$

δηλαδή

$$a = 1 - F_W(UCL) + F_W(LCL-) \quad (1.5)$$

όπου  $F_W(\cdot)$  είναι η εντός ελέγχου συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $W$ . Ως εντός ελέγχου συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $W$  εννοούμε την κατανομή της  $W$  όταν η διεργασία λειτουργεί μόνο υπό την παρουσία μόνο φυσικών αιτιών μεταβλητότητας οπότε οι παράμετροι της κατανομής της  $W$  έχουν τις εντός ελέγχου τιμές.

Ειδικότερα, για την περίπτωση που το ποιοτικό χαρακτηριστικό  $X$  του προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με (εντός ελέγχου) μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$  (δηλ.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) και μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της μέσης τιμής  $\mu$ , τότε χρησιμοποιούμε συνήθως ένα διάγραμμα ελέγχου  $3\sigma$  στο οποίο απεικονίζεται ο δειγματικός μέσος  $W = \bar{X}$  ( $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου). Αφού  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ , η σχέση (1.5) δίνει

$$\alpha = \Pr\left(\bar{X} < \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{X} > \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu, \sigma^2)\right) = 2(1 - \Phi(3)) = 0.0027. \quad (1.6)$$

Είναι φανερό ότι η πιθανότητα  $\alpha$  δεν εξαρτάται από το μέγεθος δείγματος, και σε αυτή την περίπτωση το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισούται με  $ARL_{in} = 1/0.0027 \approx 370.4$ .

Το μέσο μήκος ροής μιας διεργασίας που βρίσκεται εκτός ελέγχου συμβολίζεται με  $ARL_{out}$  (*out-of-control average run length*) και είναι ίσο με

$$ARL_{out} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (1.8)$$

όπου με  $\beta$  συμβολίζουμε την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εντός των ορίων ελέγχου, οπότε η πιθανότητα να βρίσκεται εκτός των ορίων είναι ίση με  $1 - \beta$ . Σε αντιστοιχία με τον υπολογισμό της πιθανότητας  $\alpha$ , η πιθανότητα  $\beta$  υπολογίζεται με τη σχέση

$$\beta = \Pr(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim F_W^*) = F_W^*(UCL) - F_W^*(LCL-) \quad (1.9)$$

όπου  $F_W^*(\cdot)$  είναι η εκτός ελέγχου συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $W$  που είναι διαφορετική από την εντός ελέγχου κατανομή  $F_W(\cdot)$ . Ως εκτός ελέγχου συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $W$  εννοούμε την κατανομή της  $W$  όταν η διεργασία λειτουργεί υπό την παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας και οι τιμές των παραμέτρων της κατανομής της  $W$  έχουν μετατοπιστεί από τις εντός ελέγχου τιμές. Στην πράξη είναι επιθυμητή μια μικρή τιμή του  $ARL_{out}$  αφού το

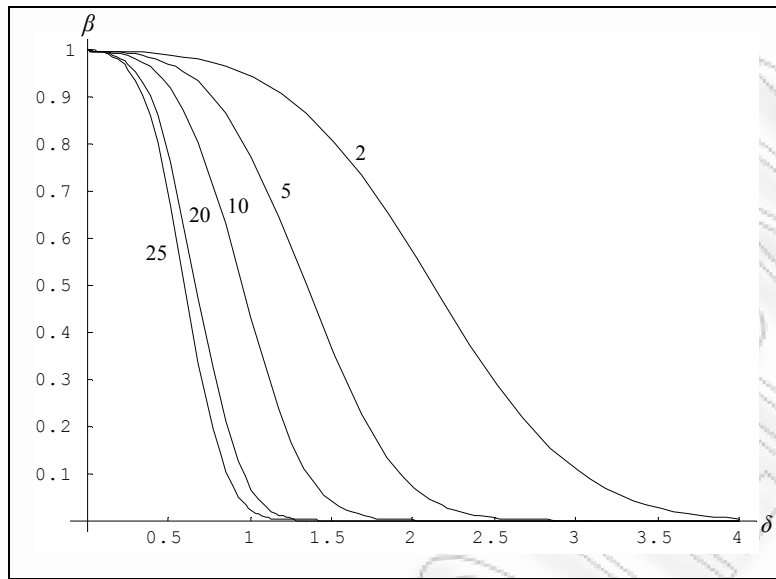
$ARL_{out}$  δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η αλλαγή στο μέσο επίπεδο της διεργασίας από τη στιγμή που η μετατόπιση αυτή συμβεί.

Συνεχίζοντας την προαναφερθείσα ειδική περίπτωση της κανονικής κατανομής υποθέτουμε ότι η μέση τιμή της  $X$  μετατοπίζεται από  $\mu$  σε  $\mu^*$  (η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή), οπότε  $W = \bar{X} \sim N(\mu^*, \sigma^2/n)$ . Τότε η σχέση (1.3) δίνει

$$\begin{aligned} \beta &= \Pr\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu^*, \sigma^2)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} - 3\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Είναι εμφανές ότι η πιθανότητα  $\beta$  εξαρτάται από το  $\mu^*$  και από το μέγεθος δείγματος  $n$ .

Στο Σχήμα 1.2 δίνονται γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας  $\beta$  συναρτήσει της μετατόπισης  $\delta = |\mu^* - \mu|$  ( $0 \leq \delta \leq 4$ ) για διάφορα μεγέθη δειγμάτων ( $n = 2, 5, 10, 20, 25$ ). Για την τυπική απόκλιση  $\sigma$  θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $\sigma = 1$ . Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος  $n$  η πιθανότητα  $\beta$  μειώνεται και συνεπώς βελτιώνεται η ικανότητα του διαγράμματος ελέγχου να ανιχνεύει εγκαίρως τις μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Με βάση τη μετατόπιση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε (είτε μικρή είτε μεγάλη) είναι δυνατό να επιλέξουμε το κατάλληλο μέγεθος δείγματος έτσι ώστε να έχουμε συγκεκριμένη τιμή για το  $ARL_{out}$ .



**Σχήμα 1.2.** Χαρακτηριστικές καμπύλες του  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου

Αν αντί των ορίων  $3\sigma$  είχαμε επιλέξει  $L\sigma$  όρια, τότε οι σχέσεις (1.6) και (1.10) παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$a = \Pr\left(\bar{X} < \mu - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{X} > \mu + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu, \sigma^2)\right) = 2(1 - \Phi(L)) \quad (1.11)$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} + L\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} - L\right). \quad (1.12)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή του  $L$  μειώνεται η πιθανότητα εσφαλμένης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας. Επίσης αυξάνεται ενώ αντίθετα αυξάνεται η πιθανότητα λανθασμένης ένδειξης ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα βρίσκεται εκτός λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας. Επισημαίνουμε την ομοιότητα των παραπάνω με τον έλεγχο της υπόθεσης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού όπου τα  $a$ ,  $\beta$  δηλώνουν τα Σφάλματα τύπου I, II αντίστοιχα.

Η χρήση του  $ARL$  ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί κριτική τα τελευταία χρόνια (Montgomery (2005), σελ. 161) αφού το  $ARL$  που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το «θεωρητικό»  $ARL$  (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο) λόγω του ότι η κατανομή του μήκους ροής είναι μη-συμμετρική (παρουσιάζει δεξιά ουρά) και συνεπώς η μέση τιμή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο

κεντρικής τάσης της κατανομής (ιδιαίτερα για μικρές τιμές του  $p$ ). Μια συνήθης πρακτική είναι να συνοδεύεται η τιμή του  $ARL$  με την τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής  $SDRL$  (*standard deviation run length*). Στην περίπτωση που η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος είναι η γεωμετρική η τιμή του  $SDRL$  ταυτίζεται με την τιμή του  $ARL$ , όπως φαίνεται από τη σχέση (1.3). Επιπλέον, η γνώση της κατανομής του μήκους ροής, η οποία με βάση τα όσα έχουμε δει έως τώρα είναι μια γεωμετρική κατανομή, μας επιτρέπει τον υπολογισμό και τη χρήση ποσοστιαίων σημείων προκειμένου να έχουμε περισσότερη πληροφορία σχετικά με την απόδοση του διαγράμματος.

Για να γίνει πιο κατανοητή η χρήση των ποσοστιαίων σημείων ας δούμε το επόμενο παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο ορίων  $3\sigma$  όπου η κατανομή της  $W$  είναι κανονική με γνωστές παραμέτρους. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τη μέση τιμή ( $ARL$ ), την τυπική απόκλιση ( $SDRL$ ), το πρώτο ( $Q_1$ ), το τρίτο ( $Q_3$ ) τεταρτημόριο και τη διάμεσο ( $M$ ) της κατανομής του μήκους ροής όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

**Πίνακας 1.3:** Πίνακας στατιστικών μέτρων για την κατανομή του μήκους ροής

$a$	$ARL$	$SDRL$	$Q_1$	$M$	$Q_3$
0.0027	370.4	370.4	107	257	513

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι κατά μέσο όρο αναμένονται περίπου 370 δείγματα μέχρι να βρεθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Εκτός αυτού όμως, από την τιμή της διαμέσου ο διαχειριστής του διαγράμματος γνωρίζει ότι η πιθανότητα να περιμένω περίπου 257 δείγματα μέχρι να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου είναι τουλάχιστον 50%. Επιπλέον από την τιμή  $Q_3$  έχουμε ότι η πιθανότητα να μη δώσει το διάγραμμα ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας μετά το 513<sup>ο</sup> απεικονιζόμενο σημείο είναι το πολύ 25%. Έτσι λοιπόν σε πρακτικές εφαρμογές η χρήση των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής μας παρέχει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την απόδοση του διαγράμματος ελέγχου.

## 1.6 Άλλα Μέτρα Απόδοσης

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε το βασικότερο μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου και είδαμε τα κύρια χαρακτηριστικά του. Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε εν συντομία σε εναλλακτικά μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου.

Ένα μέτρο που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην πράξη είναι ο μέσος χρόνος σήματος (ή μέσος χρόνος ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας) *ATS* (*average time to signal*) που ορίζεται με τη σχέση

$$ATS = ARL \times \tau \quad (1.13)$$

όπου  $\tau$  συμβολίζει το χρόνο που μεσολαβεί για τη λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων (θεωρούμε ότι το  $\tau$  είναι σταθερό). Έτσι η ποσότητα *ATS* δηλώνει το μέσο χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ελέγχου ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μεταβλητός τότε ορίζεται μια νέα κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου, τα διαγράμματα με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας (*adaptive sampling rate control charts*). Σε αυτή την περίπτωση το  $\tau$  δεν είναι σταθερό αλλά τυχαία μεταβλητή και ο μέσος χρόνος σήματος δίνεται από τη σχέση

$$ATS = ARL \times E(\tau). \quad (1.14)$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να γίνει η εξής διάκριση. Τα μέτρα *ARL*, *ATS* που έχουμε αναφέρει έως τώρα υπολογίζουν την απόδοση του διαγράμματος θεωρώντας ότι η μεταβολή στην εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου συμβαίνει ακριβώς τη χρονική στιγμή που αρχίζει η παρακολούθηση της διεργασίας. Σε αυτή την περίπτωση ομιλούμε για μέτρα *ARL* και *ATS* αρχικής κατάστασης (*initial state ARL*, *ATS*). Σε πολλές περιπτώσεις όμως η διεργασία ξεκινάει ευρισκόμενη εντός ελέγχου και η μεταβολή στην τιμή της υπό παρακολούθηση παραμέτρου συμβαίνει σε κάποιο τυχαίο χρονικό σημείο μεταξύ της λήψης δύο διαδοχικών δειγμάτων. Σε αυτή την περίπτωση για τον υπολογισμό της απόδοσης ενός διαγράμματος με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας χρησιμοποιείται το μέτρο *ATS* σταθερής κατάστασης (*steady state ATS*) το οποίο στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως προσαρμοσμένος μέσος χρόνος σήματος (*adjusted average time to signal*, συμβ. *AATS*). Ανάλογη είναι η περίπτωση των διαγραμμάτων με σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας όπου χρησιμοποιείται το μέτρο *ARL* σταθερής κατάστασης (*steady state ARL*). Γενικά οι συγκρίσεις μεταξύ των διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου

χωρίς μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας έχει επικρατήσει να γίνονται χρησιμοποιώντας το *ARL* αρχικής κατάστασης, ενώ για τα διαγράμματα με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας χρησιμοποιείται το *AATS*.

## 1.7 Ταξινόμηση Διαγραμμάτων Ελέγχου

Έχουμε ήδη αναφέρει μια πρώτη διάκριση των διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζεται στην κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει. Έτσι, αν αυτή είναι συνεχής έχουμε διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές (*control charts for variables*) ενώ αν είναι διακριτή έχουμε τα διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά (*control charts for attributes*). Στη συνέχεια δίνουμε περαιτέρω διακρίσεις των διαγραμμάτων ελέγχου:

1. Αν από την παραγωγική διεργασία λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους μεγαλύτερου της μονάδας μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου για ομάδες (*control charts for rational subgroups*), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ίσου με τη μονάδα μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις (*control charts for individual observations*).
2. Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται κάθε χρονική στιγμή  $t$  εξαρτώνται από μετρήσεις που ελήφθησαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες (*control charts for autocorrelated processes*), ενώ αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητες από μετρήσεις που ελήφθησαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες (*control charts for uncorrelated processes*).
3. Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό χρησιμοποιούμε μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου (*univariate control charts*) ενώ αν οι μετρήσεις αναφέρονται σε περισσότερα ποιοτικά χαρακτηριστικά χρησιμοποιούμε πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου (*multivariate control charts*).
4. Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν μια γνωστή κατανομή τότε ομιλούμε για παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου ενώ στην αντίθετη περίπτωση ομιλούμε για μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου.

5. Αν το διάγραμμα ελέγχου στοχεύει στην παρακολούθηση της μέσης τιμής του ποιοτικού χαρακτηριστικού ομιλούμε για διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή, ενώ αν στοχεύει στην παρακολούθηση της διασποράς του ομιλούμε για διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά.
6. Αν οι μετρήσεις (δείγματα) λαμβάνονται σε σταθερούς χρόνους ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου σταθερού χρόνου, ενώ αν λαμβάνονται σε μη σταθερούς χρόνους ομιλούμε για διαγράμματα μεταβλητού χρόνου.
7. Αν το μέγεθος δείγματος είναι σταθερό τότε ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου σταθερού μεγέθους δείγματος ενώ σε αντίθετη περίπτωση ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου μεταβλητού μεγέθους δείγματος.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η ορολογία του κατάλληλου διαγράμματος ελέγχου ανάλογα με την κατηγορία που αυτό εμπίπτει.

**Πίνακας 1.4:** Ταξινόμηση Διαγραμμάτων Ελέγχου

Distribution of the quality characteristic		Continuous	Control Charts for Variables
		Discrete	Control Charts for Attributes
Sample Size		$n = 1$	Control Charts for Individuals
		$n > 1$	Control Charts for Rational Subgroups
Time Dependence		No	Control Charts for Uncorrelated Processes
		Yes	Control Charts for Autocorrelated Processes
Number of Process Variables		One	Univariate Control Charts
		More than one	Multivariate Control Charts
Process Distribution		Known	Parametric Control Chart
		Unknown	Non-Parametric Control Chart
Adaptive Control Charts	Sampling Interval	Fixed	Fixed Sampling Interval Control Chart
		Variable	Variable Sampling Interval Control Chart
	Sample Size	Fixed	Fixed Sample Size Control Chart
		Variable	Variable Sample Size Control Chart



## 1.8 Βασικά Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου

Τα βασικότερα είδη διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, CUSUM και EWMA. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις βασικές ιδιότητες και τη χρήση των διαγραμμάτων αυτών, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Montgomery (2005), Ryan (2000), Derman and Ross (1997), Wheeler and Chambers (1992), και Grant and Leavenworth (1999).

Προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση των διαγραμμάτων πρέπει να τονίσουμε ότι για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με χρήση διαγραμμάτων ελέγχου υπάρχουν δύο φάσεις (*phases*), η Φάση I και η Φάση II και τις οποίες θα περιγράψουμε στη συνέχεια:

**Φάση I (Phase I):** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται αναδρομικά για να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σκοπός τους είναι να βοηθήσουν το διαχειριστή της διεργασίας να τη φέρει τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για μελλοντική παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διεργασίας. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*). Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διεργασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο κανείς να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που τα δεδομένα συλλέχθηκαν.

**Φάση II (Phase II):** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατό να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που λαμβάνεται ένα δείγμα από τη διεργασία ο διαχειριστής παίρνει μια απάντηση στο ερώτημα εάν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Παράλληλα αδιαφορεί για τον τρόπο με τον

οποίο προέκυψαν τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος που χρησιμοποιεί.

### 1.8.1 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου Shewhart

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart προτάθηκαν από τον Walter A. Shewhart (1931) ο οποίος εργαζόταν ως στατιστικός στα εργαστήρια της εταιρείας Bell και αποτελούν τα πιο γνωστά αλλά και πιο συχνά χρησιμοποιούμενα διαγράμματα ελέγχου.

Αποτελούνται από δύο όρια ελέγχου, το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  και το κάτω όριο ελέγχου  $LCL$ , και την κεντρική γραμμή του διαγράμματος  $CL$  η οποία έχει τιμή ίση με το μέσο επίπεδο της διεργασία χωρίς την παρουσία ειδικής αιτίας μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασία). Για την κατασκευή ενός διαγράμματος Shewhart συλλέγονται δείγματα μεγέθους  $n \geq 1$ , υπολογίζεται η τιμή κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης  $W$  η οποία απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα όπου τα όρια ελέγχου απέχουν απόσταση  $L$  το καθένα (σε μονάδες τυπικής απόκλισης) από την κεντρική γραμμή. Όταν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου τότε έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Η πρόταση του Shewhart ήταν για  $L = 3$  αν και έκτοτε προτάθηκαν διάφορες επιλογές για την τιμή του  $L$  με σκοπό να καλύψουν τις απαιτήσεις στην πράξη. Το διάγραμμα τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας, το οποίο βασίζεται σε  $3\sigma$  όρια ελέγχου με μετρήσεις που προέρχονται από κανονική κατανομή με γνωστές παραμέτρους είναι το πιο γνωστό και ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα της κατηγορίας αυτής και αποτελεί μέτρο σύγκρισης με όλα τα νέα προτεινόμενα διαγράμματα παρακολούθησης της μέσης τιμής. Θα αναφερόμαστε σε αυτό ως το σύνηθες ή το τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου Shewhart.

Το βασικό μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών ή και μεσαίων μετατοπίσεων στην τιμή της υπό παρακολούθηση παραμέτρου που καθορίζει την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων ή προσφερόμενων υπηρεσιών. Έτσι, έχουν προταθεί διαγράμματα τα οποία χρησιμοποιούν σύνθετους κανόνες για την ανακήρυξη μιας διεργασίας εκτός ελέγχου. Ειδικότερα, ένας τρόπος να αυξηθεί η ευαισθησία του διαγράμματος είναι η

χρήση προειδοποιητικών ορίων ελέγχου (δείτε Παράγραφο 1.4) και κανόνων διακοπής οι οποίοι βασίζονται στη θεωρία ροών (*runs rules*). Τέτοιοι κανόνες προτάθηκαν για πρώτη φορά από τη Western Electric Company (1956) με σκοπό την αύξηση της ευαισθησίας του  $\bar{X}$  διαγράμματος και χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη. Εκτενέστερη αναφορά στους κανόνες της Western Electric Company αλλά και γενικά στα διαγράμματα τύπου Shewhart με κανόνες ροών γίνεται σε επόμενες παραγράφους.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart αρκεί η γνώση της κατανομής της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $W$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1.1 με την επιθυμητή τιμή για το  $L$  μπορούμε να αναπτύξουμε διαγράμματα τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς του υπό παρακολούθηση χαρακτηριστικού οποιαδήποτε και αν είναι (συνεχής ή διακριτή) η κατανομή των αρχικών παρατηρήσεων.

Στο Παράρτημα δίνονται οι βασικοί τύποι για την ανάπτυξη των βασικότερων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart. Για λόγους πληρότητας έχουμε συμπεριλάβει διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές (Παράρτημα Π.1) και για ιδιότητες (Παράρτημα Π.2) αν και με τα δεύτερα δεν θα ασχοληθούμε καθόλου.

### 1.8.2. Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου CUSUM

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM προτάθηκαν από τον Page (1954). Σε αυτά απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0 \quad (1.15)$$

με σκοπό την ανίχνευση μετατοπίσεων στη μέση τιμή της παραγωγικής διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο. Η τιμή  $\mu_0$  δηλώνει την εντός ελέγχου μέση τιμή ενώ με  $X_t$  συμβολίζεται η τιμή της μεμονωμένης παρατήρησης που λαμβάνεται τη χρονική στιγμή  $t$ . Επίσης απεικονίζεται και η ποσότητα

$$S_t^- = \max[0, X_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0, \quad (1.16)$$

με σκοπό την ανίχνευση μετατοπίσεων στη μέση τιμή της παραγωγικής διεργασίας σε χαμηλότερο επίπεδο.

Οι τιμές των ποσοτήτων  $S_0^+$  και  $S_0^-$  ονομάζονται τιμές εκκίνησης (*headstart values*). Η ποσότητα  $K (\geq 0)$  ονομάζεται τιμή αναφοράς (*reference value*) και η συνήθης τιμή της προκύπτει από τη σχέση  $K = \delta\sigma/2 = |\mu_1 - \mu_0|/2 = k\sigma$ , όπου η τιμή  $\mu_1$  δηλώνει μια εκτός ελέγχου μέση τιμή. Η ποσότητα  $S_i^+$  συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων  $X_i$  από την ποσότητα  $\mu_0 + K$  από τη στιγμή που θα εμφανιστεί θετική απόκλιση, και μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 - H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma, \delta > 0 \quad (1.17)$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της  $S_i^+$  οδηγούν σε αποδοχή της υπόθεσης  $H_1^+$ . Ανάλογα, η ποσότητα  $S_i^-$  συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων  $X_i$  από την ποσότητα  $\mu_0 - K$  από τη στιγμή που θα εμφανιστεί αρνητική απόκλιση, και μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 - H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma, \delta > 0 \quad (1.18)$$

αφού μεγάλες αρνητικές τιμές της  $S_i^-$  οδηγούν σε αποδοχή της υπόθεσης  $H_1^-$ . Για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις  $H_1^+$  και  $H_1^-$  θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας η απόφασή μας θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση  $S_i^+ > H$  ή η σχέση  $S_i^- < H$ , όπου  $H$  μια θετική σταθερά ( $H > 0$ ). Η ποσότητα  $H$  ονομάζεται διάστημα απόφασης (*decision interval*). Η πιο συνηθισμένη τιμή για το διάστημα απόφασης είναι η  $H = h\sigma$ ,  $h = 4, 5$ . Είναι προφανές λοιπόν πως έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (μετατόπιση της μέσης τιμής της παραγωγικής διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο) αν γίνει αποδεκτή μια εκ των εναλλακτικών υποθέσεων  $H_1^+$  και  $H_1^-$ , αντίστοιχα.

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM αποτελούν εναλλακτική πρόταση έναντι των διαγραμμάτων τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στην τιμή της υπό παρακολούθησης παραμέτρου. Εμπίπτουν σε μια γενική κατηγορία διαγραμμάτων τα οποία ονομάζονται διαγράμματα ελέγχου με μνήμη που το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η ενσωμάτωση πληροφοριών από τις τιμές των προηγούμενων παρατηρήσεων στην απεικονιζόμενη ποσότητα. Ειδικότερα, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα με ομοιόμορφη μνήμη αφού δίνουν την ίδια βαρύτητα σε όλες τις προηγούμενες παρατηρήσεις. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διαγράμματα τύπου EWMA τα οποία

εμπίπτουν και αυτά στην κατηγορία των διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη, δίνοντας όμως αυξημένη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις.

### 1.8.3. Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA

Τα διαγράμματα τύπου EWMA προτάθηκαν από τον Roberts (1959) και μελετήθηκαν με λεπτομέρεια από τους Crowder (1987, 1989) και τους Lucas and Saccucci (1990). Στα διαγράμματα τύπου EWMA απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)X_{t-1}, \quad X_0 = \mu, \quad (1.19)$$

με σκοπό την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας. Με  $X_t$  συμβολίζεται η τιμή της μεμονωμένης παρατήρησης που λαμβάνεται τη χρονική στιγμή  $t$  ενώ η τιμή  $\mu$  δηλώνει τη μέση τιμή της κατανομής της  $X_t$ . Σε αντιστοιχία με τα διαγράμματα τύπου CUSUM η τιμή της ποσότητας  $X_0$  ονομάζεται τιμή εκκίνησης (*headstart value*) ενώ η σταθερά  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) καθορίζει το βάρος που δίνουμε στην τιμή του πιο πρόσφατου δείγματος. Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου EWMA χρειαζόμαστε τη μέση τιμή  $\mu_{Z_t}$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma_{Z_t}$  της ποσότητας  $Z_t$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα. Για την περίπτωση που οι αρχικές παρατηρήσεις  $X_t$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$  και διασπορά  $\sigma^2$ , η μέση τιμή και η διακύμανση της  $Z_t$  θα είναι αντίστοιχα  $\mu_0$  και  $\sigma_{Z_t}^2 = \sigma^2(\lambda/2 - \lambda)[1 - (1 - \lambda)^{2t}]$ . Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος τύπου EWMA για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας

**Πίνακας 1.5:** Διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA

LCL	Center Line	UCL
$\mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}[1-(1-\lambda)^{2t}]}$	$\mu_0$	$\mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}[1-(1-\lambda)^{2t}]}$

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου EWMA απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων  $L$  και  $\lambda$ . Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται συνήθως με στατιστικά κριτήρια. Η τιμή της παραμέτρου  $L$  καθορίζει την απόσταση των ορίων

ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Οι συνηθέστερες τιμές για το  $\lambda$  είναι  $\lambda = 0.05$ ,  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$  (Montgomery (2005), σελ. 410).

Σημειώνουμε πως τα όρια ελέγχου του Πίνακα 1.5 ονομάζονται χρονομεταβλητά (*time-varying limits*) αφού υπάρχει εξάρτηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma_{Z_t}$  από το χρόνο  $t$ . Όμως, καθώς το  $t$  αυξάνει, τα όρια ελέγχου προσεγγίζουν μια σταθερή τιμή και έτσι καταλήγουμε στα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (*steady-state control limits*) τα οποία δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

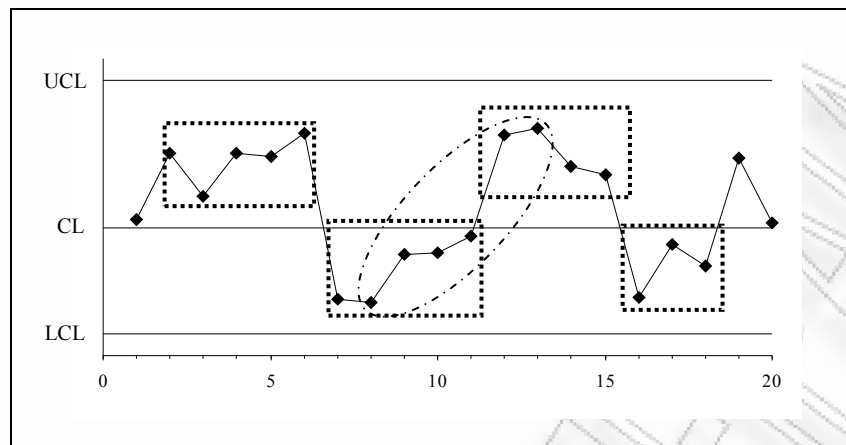
**Πίνακας 1.6:** Διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA (όρια σταθερής κατάστασης)

<i>LCL</i>	<i>Center Line</i>	<i>UCL</i>
$\mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$	$\mu_0$	$\mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$

Προτού ολοκληρώσουμε την αναφορά μας στα διαγράμματα τύπου EWMA θα πρέπει να τονίσουμε πως λόγω του ότι απεικονίζονται σε αυτά σημεία που αποτελούν σταθμισμένο μέσο όρο όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων, είναι ιδιαίτερα ανθεκτικά στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας των αρχικών παρατηρήσεων. Έτσι, αποτελούν τα πλέον κατάλληλα διαγράμματα για την παρακολούθηση διεργασιών μέσω μεμονωμένων παρατηρήσεων έναντι των αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart.

## 1.9 Ερμηνεία Διαγράμματος Ελέγχου - Ανάλυση της Εμφάνισης Μη-Τυχαίων Σχηματισμών σε ένα Διάγραμμα Ελέγχου

Ένα διάγραμμα ελέγχου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα ή περισσότερα σημεία βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου του. Ο συγκεκριμένος κανόνας είναι και ο πιο τυπικός κανόνας ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου και όπως έχουμε δει εφαρμόζεται και στους τρεις τύπους διαγραμμάτων ελέγχου (Shewhart, CUSUM, EWMA). Ωστόσο αν η ακολουθία των απεικονιζόμενων σημείων επιδεικνύει μια μη-τυχαία συμπεριφορά μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Για παράδειγμα ας δούμε το επόμενο σχήμα.



**Σχήμα 1.3:** Εμφάνιση μη-τυχαίων σχηματισμών σε ένα διάγραμμα ελέγχου

Τα 20 απεικονιζόμενα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου όμως η συμπεριφορά τους δείχνει ότι η διεργασία δεν βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου αφού δεν συμπεριφέρονται τυχαία. Ειδικότερα παρατηρείται μια εναλλαγή από ομάδες σημείων μεταξύ των δύο πλευρών της κεντρικής γραμμής κάτι το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα της κυκλικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Παρόλο λοιπόν που και το ποσοστό των σημείων στις δύο πλευρές του διαγράμματος είναι στη συγκεκριμένη περίπτωση το ίδιο, εντούτοις η συμπεριφορά των απεικονιζόμενων σημείων δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία.

Τέτοιου είδους σχηματισμοί μπορεί να οφείλονται σε αιτίες όπως π.χ. η κούραση του χειριστή, η ακαταλληλότητα των συνθηκών παραγωγής των προϊόντων (π.χ. όχι σωστή θερμοκρασία), σε αστοχία του πρωτογενούς υλικού κτλ. Έτσι, αν και το διάγραμμα ελέγχου δεν δίνει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου (αφού όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου) η αναγνώριση προτύπων (όπως αυτά του Σχήματος 1.3) και η απαλοιφή των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας που τα προκάλεσαν είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα οδηγήσει στη βελτίωση της παραγωγής.

Επίσης, στο διάγραμμα του Σχήματος 1.3 υπάρχουν 6 συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα σειρά (από το 8<sup>ο</sup> μέχρι και το 13<sup>ο</sup>), δηλαδή

$$W_8 < W_9 < W_{10} < W_{11} < W_{12} < W_{13},$$

όπου  $W_i$  συμβολίζει την τιμή της στατιστικής συνάρτησης που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου τη χρονική στιγμή  $i$ . Η παρουσία ακολουθιών αυτής της μορφής συνήθως αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει ειδική αιτία μεταβλητότητας στη διεργασία.

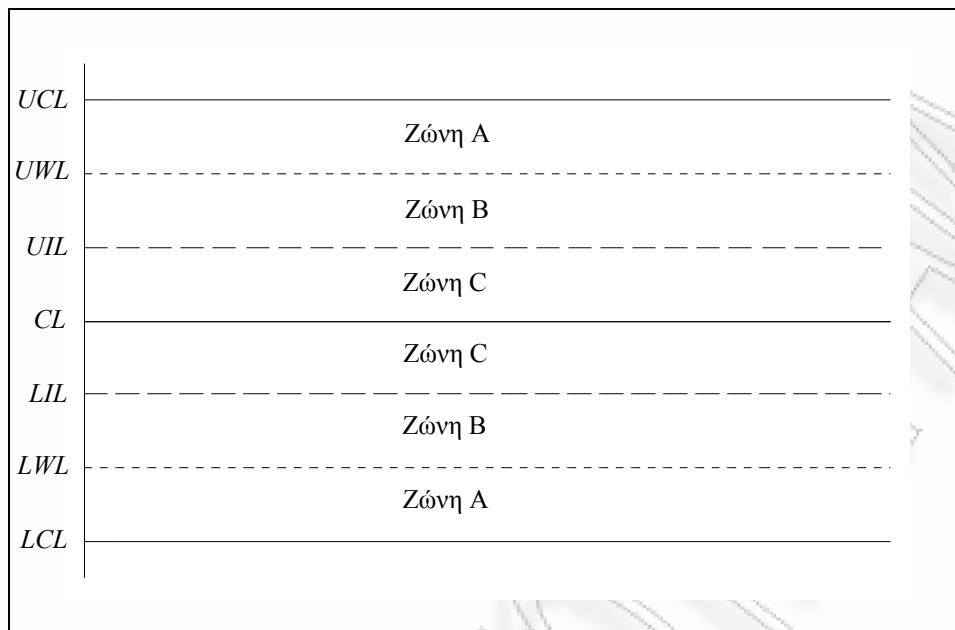
Η συγκεκριμένη διάταξη των σημείων καλείται αύξουσα ροή (*increasing run*) σημείων αφού οι τιμές τους διαδοχικά αυξάνουν. Σύμφωνα με τον Montgomery (2005, σελ. 164) ως ροή ορίζουμε μια ακολουθία από παρατηρήσεις του ίδιου τύπου. Στο Κεφάλαιο 2 θα δοθεί ένας πιο αυστηρός στατιστικός ορισμός της έννοιας της ροής. Στον παραπάνω σχηματισμό, το κοινό χαρακτηριστικό των παρατηρήσεων είναι ότι η τιμή της παρούσας παρατήρησης είναι μεγαλύτερη από την ακριβώς προηγούμενής της ( $W_{i-1} < W_i$ ). Έτσι, ως αύξουσα (φθίνουσα) ροή (*increasing run* (*decreasing run*))  $k$  σημείων ορίζεται η εμφάνιση ενός σχηματισμού μήκους  $k$  για τον οποίο ισχύει

$$W_i < W_{i+1} < \dots < W_{i+k-1} \quad (W_i > W_{i+1} > \dots > W_{i+k-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Επιπλέον, εκτός από τις αύξουσες και τις φθίνουσες ροές, ως παρατηρήσεις του ίδιου τύπου μπορούμε να ορίσουμε αυτές οι οποίες βρίσκονται στην ίδια Περιοχή (ζώνη) του διαγράμματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι δύο πλευρές της κεντρικής γραμμής. Αν δύο συνεχόμενες παρατηρήσεις βρεθούν στην ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής λέμε ότι έχουμε την εμφάνιση μιας ροής μήκους 2. Στο Σχήμα 1.3 έχουμε μια ροή μήκους 5 και μια ροή μήκους 4 πάνω από την κεντρική γραμμή καθώς και μια ροή μήκους 5 και μια ροή μήκους 3 κάτω από την κεντρική γραμμή. Η εμφάνιση μιας ροής μεγάλου μήκους στη μια από τις δύο πλευρές της κεντρικής γραμμής αποτελεί, συνήθως, ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Η Western Electric Company (1956) πρότεινε ένα σύνολο 4 κανόνων απόφασης που βοηθούν στην ανίχνευση μη-τυχαίων σχηματισμών σε ένα διάγραμμα ελέγχου οι οποίοι είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules*. Προκειμένου να εφαρμοστούν οι κανόνες ροών σε ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με  $3\sigma$  όρια ελέγχου, θα πρέπει να ορίσουμε κατάλληλες ζώνες σε αυτό όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.





**Σχήμα 1.4:** Ζώνες A, B, C σε ένα διάγραμμα ελέγχου

Στο Σχήμα 1.4 με *UWL* (*upper warning limit*) και *LWL* (*lower warning limit*) έχουμε συμβολίσει τα εξωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου που σχεδιάζονται σε απόσταση 2 τυπικών αποκλίσεων από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος ενώ με *UIL* (*upper inner limit*) και *LIL* (*lower inner limit*) έχουμε συμβολίσει τα εσωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου που σχεδιάζονται σε απόσταση 1 τυπικής απόκλισης από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος. Οι σημαντικότεροι και πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι στην πράξη κανόνες ροών είναι:

Κανόνας 1: Ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Κανόνας 2: Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία βρίσκονται εκτός των  $2\sigma$  προειδοποιητικών ορίων ελέγχου (προς την ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής).

Κανόνας 3: Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία βρίσκονται εκτός των  $1\sigma$  εσωτερικών προειδοποιητικών ορίων ελέγχου (προς την ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής).

Κανόνας 4: Οκτώ συνεχόμενα σημεία βρίσκονται στην ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής.

Οι παραπάνω κανόνες προτάθηκαν έτσι ώστε το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεμίων να είναι σχεδόν το ίδιο με το αντίστοιχο ποσοστό ενός διαγράμματος για

την παρακολούθηση της μέσης τιμής με  $3\sigma$  όρια ελέγχου, δηλαδή περίπου ίσο με 0.0027 (Ταγαράς (2001, σελ. 189)). Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον Κανόνα 4 ο οποίος αναφέρεται στην εμφάνιση 8 συνεχόμενων σημείων στην ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου στην περιοχή αυτή του διαγράμματος είναι εύκολο να υπολογιστεί από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και για εντός ελέγχου διεργασία θα είναι ίση με  $1 - \Phi(0) = 0.5$ . Έτσι η πιθανότητα εμφάνισης του δεδομένου σχηματισμού στη μία πλευρά του διαγράμματος θα είναι  $(0.5)^8 \approx 0.0039$ . Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται οι αντίστοιχες πιθανότητες των υπόλοιπων κανόνων (για τη μια πλευρά του διαγράμματος) που είναι 0.00135 (Κανόνας 1), 0.0015 (Κανόνας 2), και 0.0028 (Κανόνας 3). Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο υπολογισμός των πιθανοτήτων αυτών γίνεται με χρήση της διωνυμικής κατανομής. Για παράδειγμα, για τον Κανόνα 2 έχουμε ότι

$$p^3 + \binom{3}{2} p^2 (1-p) \approx 0.0015, \quad p = 1 - \Phi(2)$$

όπου  $p$  είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου στην περιοχή πάνω από το όριο  $UWL$ .

Ο Nelson (1984, 1985) πρότεινε τους ακόλουθους κανόνες ροών για την ανίχνευση μη τυχαίων σχηματισμών ενώ έδωσε και οδηγίες χρήσης και ερμηνείας αυτών. Οι περισσότεροι από τους επόμενους κανόνες έχουν προκύψει κυρίως εμπειρικά και αποτελούν κριτήρια περισσότερο εποπτικής παρά στατιστικής φύσεως.

- NR1: Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
- NR2: Εννέα συνεχόμενα σημεία στη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής.
- NR3: Έξι συνεχόμενα σημεία σε συνεχή αύξουσα ή φθίνουσα πορεία.
- NR4: Δεκατέσσερα σημεία εναλλασσόμενα πάνω και κάτω.
- NR5: Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης A (προς την ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής).
- NR6: Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης B (προς την ίδια πλευρά της κεντρικής γραμμής).
- NR7: Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στις ζώνες C.
- NR8: Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός των ζωνών C.

Άλλοι κανόνες ροών έχουν προταθεί επίσης από τους Grant and Leavenworth (1999, σελ. 132) οι οποίοι δίνονται στη συνέχεια.

- GL1: Επτά συνεχόμενα σημεία στη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής.
- GL2: Τουλάχιστον 10 από 11 συνεχόμενα σημεία στη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής.
- GL3: Τουλάχιστον 12 από 14 συνεχόμενα σημεία στη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής.
- GL4: Τουλάχιστον 14 από 17 συνεχόμενα σημεία στη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής.

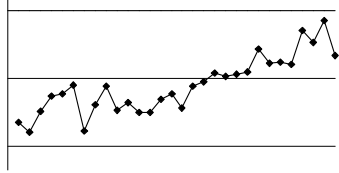
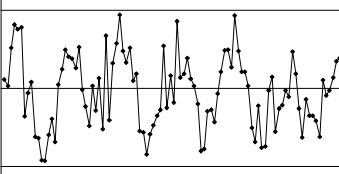
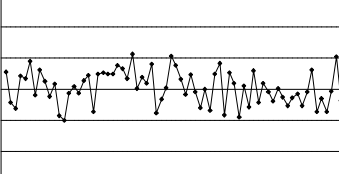
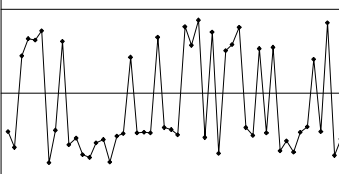
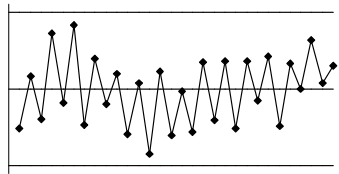
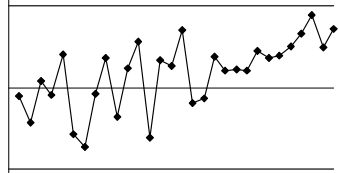
Και σε αυτή την περίπτωση το μήκος των σχηματισμών έχει προταθεί με βάση την πιθανότητα εμφάνισης του σχηματισμού η οποία θα πρέπει να είναι «κοντά» στο 0.00135 του Κανόνα 1 της Western Electric Company. Οι πιθανότητες εμφάνισης των Κανόνων GL1- GL4 στη μία πλευρά του διαγράμματος είναι αντίστοιχα 0.00781, 0.00586, 0.00647 και 0.00636.

Η χρησιμοποίηση συνδυασμών των παραπάνω κανόνων οδηγεί σε αύξηση της ευαισθησία ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart για μικρές ή και μεσαίες μετατοπίσεις της τιμής της παραμέτρου που καθορίζει την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Σημειώνεται πάντως πως η εφαρμογή πολλών κανόνων ταυτόχρονα θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή αφού αυξάνεται το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών (Montgomery (2005, σελ. 167)). Η αύξηση του

ποσοστού των εσφαλμένων συναγερμών συνεπάγεται και αντίστοιχο αριθμό εσφαλμένων διακοπών της παραγωγικής διεργασίας για την ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής. Επίσης, οι κανόνες ροών, ως κανόνες διακοπής συνδυάζονται με ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart και όχι με διαγράμματα τύπου CUSUM ή EWMA. Αυτό συμβαίνει επειδή τα απεικονιζόμενα σημεία στην περίπτωση των δύο προαναφερθέντων διαγραμμάτων αντιστοιχούν σε μη-ανεξάρτητες παρατηρήσεις. Οι παραπάνω πιθανότητες εμφάνισης των σχηματισμών εκτός από κανονική κατανομή υποθέτουν και ανεξαρτησία των παρατηρήσεων  $W_i$  που απεικονίζονται στο διάγραμμα. Γενικότερα, λόγω της απλότητάς τους και κυρίως στην ερμηνεία των κανόνων, τα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών χρησιμοποιούνται συχνότερα στην πράξη έναντι των διαγραμμάτων CUSUM και EWMA για την ανίχνευση μικρών ή και μεσαίων μετατοπίσεων παρόλο που πολλοί συγγραφείς τα απορρίπτουν και συστήνουν ως βασικά εργαλεία ανίχνευσης μικρών μετατοπίσεων στο μέσο μιας παραγωγικής διεργασίας τα διαγράμματα CUSUM, EWMA (Montgomery (2005, σελ. 169), Ryan (2000, σελ. 220)).

Εκτός της αύξησης της ευαισθησίας των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart, οι κανόνες ροών χρησιμοποιούνται και για την ανίχνευση ειδικών μη-τυχαίων σχηματισμών σημείων (*non-random patterns*) οι οποίοι συνήθως προκύπτουν παρουσία συγκεκριμένων ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Ενδεικτικά, στον επόμενο πίνακα (Al-Ghanim and Jordan (1996)) δίνονται οι πιο συχνά εμφανιζόμενοι στην πράξη μη-τυχαίοι σχηματισμοί, τα αίτια που τους προκαλούν καθώς και μια αναπαράσταση του εκάστοτε μη-τυχαίου σχηματισμού σε ένα διάγραμμα ελέγχου.

**Πίνακας 1.7: Μη-τυχαίοι σχηματισμοί σε διαγράμματα ελέγχου**

Μη-Τυχαίος Σχηματισμός	Αιτία	Εικόνα Διαγράμματος
Τάση	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Φθορά συσκευής, εργαλείου</li> <li>- Ηλικία</li> <li>- Ανθρώπινος παράγοντας</li> <li>- Κούραση χειριστή</li> <li>- Κακή συντήρηση</li> <li>- Βαθμιαίες αλλαγές στα ήδη χρησιμοποιούμενα πρότυπα</li> </ul>	
Κυκλικότητα	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Επίδραση εποχικότητας</li> <li>- Κούραση Χειριστή</li> <li>- Εναλλαγή θέσεων προσωπικού</li> <li>- Διαφορετική απόδοση μεταξύ χειριστών διαφορετικής βάρδιας</li> <li>- Διαφορά στα συστήματα μέτρησης</li> </ul>	
Στρωματοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Λανθασμένος υπολογισμός ορίων ελέγχου</li> <li>- Λανθασμένες ρυθμίσεις στις μηχανές</li> </ul>	
Μίξη	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Λάθη στον υπολογισμό της τιμής της απεικονιζόμενης ποσότητας <math>\bar{W}</math></li> <li>- Αλλαγή του συστήματος μέτρησης</li> <li>- Απροσεξία</li> <li>- Αλλαγή στο πρωτογενές υλικό.</li> </ul>	
Συστηματική συμπεριφορά	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Διαφοροποίηση μεταξύ γραμμών παραγωγής</li> <li>- Παρουσία συστηματικής μεταβλητής στη διεργασία</li> </ul>	
Απότομη μετατόπιση	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Νέος χειριστής</li> <li>- Νέος επιθεωρητής</li> <li>- Νέες ρυθμίσεις</li> <li>- Καινούργια μηχανήματα</li> </ul>	

Ο Montgomery (2005, σελ.169) πρότεινε η εφαρμογή των κανόνων ροών να γίνεται στην ανάλυση Φάσης I με σκοπό την ανίχνευση και αναγνώριση του μη-τυχαίου σχηματισμού και στη συνέχεια να εντοπίζονται, και αν είναι δυνατό να απομακρύνονται, οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Κατόπιν τα όρια ελέγχου θα υπολογίζονται εκ νέου ώστε να μπορούν να δοθούν για μελλοντική παρακολούθηση της διεργασίας.

Τα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών μελετώνται για πάνω από 50 χρόνια ενώ αποτελούν σημαντικό πεδίο έρευνας μέχρι σήμερα. Στην επόμενη παράγραφο θα δοθεί μια πλήρη ανασκόπηση των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών. Μια επισκόπηση της περιοχής δόθηκε πρόσφατα από τους Koutras et al. (2007).

### **1.10 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για την Παρακολούθηση της Μέσης Τιμής μιας Παραγωγικής Διεργασίας**

Στην Παράγραφο 1.9 παρουσιάστηκαν οι τέσσερις κανόνες οι οποίοι προτάθηκαν από τη Western Electric Company (1956) για την ευαισθητοποίηση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο μιας παραγωγικής διεργασίας. Ο Page (1955) ήταν ο πρώτος ουσιαστικά που μελέτησε διαγράμματα ελέγχου με προειδοποιητικά όρια ελέγχου προτείνοντας τέσσερις κανόνες της μορφής  $r$ -από- $m$ . Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό αν  $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ προειδοποιητικού ορίου και άνω ορίου ελέγχου τότε έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Η μελέτη της απόδοσης αυτών των διαγραμμάτων έγινε με χρήση της θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων που εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους ροής (*run length distribution*) του διαγράμματος. Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση του Page (1955) ότι πρέπει να χρησιμοποιούνται οι τιμές 2 και  $m$  για το  $r$  αφού σε αυτή την περίπτωση το διάγραμμα που προκύπτει θα ισοδυναμεί με ένα διάγραμμα τύπου CUSUM για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων  $h$  και  $k$ . Εκτός από κανόνες για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ο Page (1955) πρότεινε και ένα σύνολο κανόνων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για ταυτόχρονη παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς μιας διεργασίας με χρήση ενός μόνο διαγράμματος. Ο συγκεκριμένος κανόνας μελετήθηκε πρόσφατα από τους Trip and

Wieringa (2006) οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν έχει υψηλή απόδοση στην ανίχνευση ταυτόχρονων μετατοπίσεων στις παραμέτρους της διεργασίας.

Προγενέστερα του Page (1955) οι κανόνες ροών χρησιμοποιήθηκαν στον ποιοτικό έλεγχο και ειδικότερα σε διαγράμματα ελέγχου με προειδοποιητικά όρια από τους Mosteller (1941), Dudding and Jannet (1942), Wolfowitz (1943), ενώ ο Weiler (1953) μελέτησε διαγράμματα με κανόνες τύπου  $m$ -από- $m$  χωρίς όμως όρια ελέγχου. Ο Moore (1958) υπολόγισε την απόδοση των κανόνων του Weiler (1953) για  $m = 2, 3, 4$  και συγκρίνοντάς τους με τους αντίστοιχους του Page (1955) κατέληξε ότι είναι περισσότερο αποδοτικοί μόνο για μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας.

Παρόλο που η απόδοση των διαγραμμάτων στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων αυξάνει με χρήση των κανόνων ροών εντούτοις η ταυτόχρονη χρήση τους αυξάνεται και το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεμίων όπως παρατήρησε ο Roberts (1958). Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι στην εργασία του Roberts (1958) έχουμε την εισαγωγή του όρου διάγραμμα ζώνης (*Zone Chart*) το οποίο περιγράφει ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart χωρισμένο σε ζώνες αντίστοιχο με αυτό του Σχήματος 1.4. Ο όρος *Zone Chart* χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Jaehn (1987a, 1987b, 1987c, 1989, 1991) ο οποίος πρότεινε ένα πολύ απλό και συνάμα αρκετά αποδοτικό διάγραμμα ελέγχου, το οποίο συνδυάζει τη φιλοσοφία του διαγράμματος CUSUM και των διαγραμμάτων με κανόνες ροών για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας.

Η αύξηση του ποσοστού των εσφαλμένων συναγεμίων λόγω της χρήσης κανόνων ροών σε ένα διάγραμμα ελέγχου επιβεβαιώθηκε και από τους Westgard and Groth (1979) και τους Westgard et al. (1981) μέσω μελετών προσομοίωσης. Σημειώνουμε ότι στα άρθρα του Westgard έχουμε εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου στην περιοχή της Αναλυτικής Χημείας (*Clinical Chemistry*) και γενικότερα σε εφαρμογές που προέρχονται από το χώρο των επιστημών υγείας.

Συνηθίζεται λοιπόν οι επιστήμονες που χρησιμοποιούν διαγράμματα τύπου Shewhart να αναφέρονται σε αυτά ως διαγράμματα Levey – Jennings (Levey and Jennings (1950)) από τους συγγραφείς που εισήγαγαν τα διαγράμματα ελέγχου στην περιοχή των επιστημών υγείας.

Ο Wheeler (1983) υπολόγισε την ισχύ μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι ένα τέτοιο διάγραμμα έχει υψηλή ισχύ στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Ο

Nelson (1984, 1985) έδωσε μια λεπτομερή περιγραφή της χρήσης αλλά και της ερμηνείας ενός διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών.

Οι Champ and Woodall (1987) ήταν οι πρώτοι ουσιαστικά που μελέτησαν συστηματικά το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών. Στην εργασία τους εισάγεται ο συμβολισμός  $T(r, m, a, b)$  για έναν κανόνα ροών ο οποίος δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $r$  από  $m$  ( $r \leq m$ ) το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν στο διάστημα  $(a, b)$ , ( $a < b$ ) ενός διαγράμματος στο οποίο απεικονίζονται τυποποιημένες δειγματικές μέσες τιμές.

Με το συμβολισμό των Champ and Woodall (1987) οι τέσσερις κανόνες της Western Electric Company (1956) παίρνουν τη μορφή:

$$\text{Κανόνας 1: } C_1 = \{T(1, 1, -\infty, -3), T(1, 1, 3, +\infty)\}$$

$$\text{Κανόνας 2: } C_2 = \{T(2, 3, -3, -2), T(2, 3, 2, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 3: } C_3 = \{T(4, 5, -3, -1), T(4, 5, 1, 3)\}$$

$$\text{Κανόνας 4: } C_4 = \{T(8, 8, -3, 0), T(8, 8, 0, 3)\}$$

Επιπλέον, οι συγγραφείς μελέτησαν παραλλαγές των κανόνων 2 και 3 καθώς και κανόνες που βασίζονται σε όρια πιθανότητας που χρησιμοποιούνται συχνά στη Βρετανία, όπως οι ακόλουθοι

$$C_5 = \{T(2, 2, -3, -2), T(3, 3, 2, 3)\}$$

$$C_6 = \{T(5, 5, -3, -1), T(5, 5, 1, 3)\}$$

$$C_7 = \{T(1, 1, -\infty, -3.09), T(1, 1, 3.09, +\infty)\}$$

$$C_8 = \{T(2, 3, -3.09, -1.96), T(2, 3, 1.96, 3.09)\}$$

$$C_9 = \{T(8, 8, -3.09, 0), T(8, 8, 0, 3.09)\}$$

Στην ίδια εργασία υπολογίστηκε η απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου στα οποία χρησιμοποιούνται περισσότεροι από ένας (αλλά όχι παραπάνω από 4) κανόνες. Έτσι, το διάγραμμα  $C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$  είναι ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου στο οποίο εφαρμόζονται οι κανόνες  $C_i, C_j, \dots, C_k$ . Η χρησιμοποίηση περισσότερων από δύο κανόνες στοχεύει στη βελτίωση της ευαισθησίας του διαγράμματος. Η μελέτη της κατανομής του μήκους ροής για καθένα από τα διαγράμματα έγινε με χρήση της θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων, ενώ οι Champ and Woodall (1990) έδωσαν ένα πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran για τον υπολογισμό της τιμής του  $ARL$  για δεδομένη



μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας για τους διαφορετικούς συνδυασμούς των κανόνων. Όπως σχεδόν όλοι οι προηγούμενοι συγγραφείς, οι Champ and Woodall (1987) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ταυτόχρονη χρήση πολλών κανόνων αυξάνει το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών παρόλο που υπάρχει σημαντική βελτίωση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας όχι όμως ανάλογη με αυτή που επιτυγχάνει κανείς με χρήση διαγραμμάτων CUSUM.

Ο Palm (1990) έδωσε πίνακες με τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα ποσοστιαία σημεία μπορούν να αποτελέσουν εναλλακτικό μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου. Πίνακες με ποσοστιαία σημεία για την κατανομή του μήκους ροής των  $\bar{X}$  διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών των Champ and Woodall (1987) έδωσαν και οι Shmueli and Cohen (2003). Η μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών έγινε με χρήση της θεωρίας των ανανεωτικών ενδεχομένων (*recurrent events*) με σκοπό τον προσδιορισμό της γεννήτριας συνάρτησης της κατανομής του μήκους ροής. Από τη μελέτη τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει βέλτιστος κανόνας στην ανίχνευση οποιασδήποτε μετατόπισης ενώ οι συγκρίσεις μεταξύ αυτών θα πρέπει να γίνονται συγκρίνοντας τις εντός και εκτός ελέγχου κατανομές του μήκους ροής.

Οι Walker et al. (1991) χρησιμοποιώντας τεχνικές προσομοίωσης επιβεβαίωσαν το γεγονός της αύξησης στο ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών λόγω της ταυτόχρονης χρήσης πολλών κανόνων ροών. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι οι Walker et al. (1991) υπολόγισαν την κατανομή του μήκους ροής στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι άγνωστοι και αναγκαστικά θα πρέπει να εκτιμηθούν από τα διαθέσιμα δεδομένα. Λίγες εργασίες έχουν εμφανιστεί σχετικά με διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (όπου απαιτείται εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων από ένα διαθέσιμο προκαταρκτικό δείγμα) και κανόνες ροών και η περιοχή προσφέρεται για περαιτέρω έρευνα. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τις εργασίες των Does and Schriever (1992), Trietsch and Hwang (1997) και Yang et al. (2006).

Ο Champ (1992) χρησιμοποιώντας της μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων υπολόγισε την απόδοση ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος με κανόνες ροών βάσει της κατανομής του μήκους ροής όταν η διεργασία έχει φτάσει σε μια σταθερή κατάσταση (*steady-state run length distribution*). Αυτό που προκύπτει είναι ότι οι τιμές για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι σε αυτή την περίπτωση ελαφρώς μικρότερες

από τις αντίστοιχες για μέσο μήκος ροής αρχικής κατάστασης ενώ ταυτόχρονα αυξάνει (ελαφρώς) και το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών. Περισσότερα για την κατανομή του μήκους ροής σταθερής κατάστασης ενός διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών θα αναφέρουμε σε ειδική παράγραφο στο Κεφάλαιο 2. Επιπλέον, οι Champ and Woodall (1997) χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων υπολόγισαν την πιθανότητα να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (*signal probability*) ένας συγκεκριμένος κανόνας από αυτούς που εφαρμόζονται ενώ έδωσαν και αναλυτικές εκφράσεις των πιθανοτήτων αυτών για τους κανόνες  $T(m, m, a, b)$  και  $T(2, m, a, b)$  στην περίπτωση μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου.

Οι Artiles-Leon et al. (1996) χρησιμοποιώντας κατάλληλες τεχνικές βελτιστοποίησης πρότειναν βέλτιστα  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών. Τα διαγράμματα αυτά βασίζονται στον προσδιορισμό των τιμών των προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου ώστε για δεδομένη μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας να ελαχιστοποιείται το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ενώ το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι το επιθυμητό. Οι κανόνες που μελετήθηκαν είναι οι ακόλουθοι (βάσει του συμβολισμού των Champ and Woodall (1987))

$$T(1,1, a, b), T(2,3, a', b') \text{ και } T(3,4, a'', b'').$$

Στο ίδιο πνεύμα οι Zhang and Wu (2005) ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου στο οποίο χρησιμοποιούνται συνδυασμοί των τεσσάρων κανόνων της Western Electric Company (1956). Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν ως μέτρο απόδοσης των διαγραμμάτων αυτών το μέσο μήκος ροής σταθερής κατάστασης (*steady-state average run length*) ενώ εκτός των βασικών συνδυασμών των 4 κανόνων της Western Electric Company (1956) υπολόγισαν και την απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου για διάφορους συνδυασμούς κανόνων στους οποίους δεν περιλαμβάνεται ο τυπικός κανόνας του ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου.

Η χρήση των κανόνων διακοπής που βασίζονται στη θεωρία ροών είχε δεχθεί ισχυρή κριτική κυρίως λόγω του γεγονότος ότι αυξάνει το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών. Οι Derman and Ross (1997, σελ. 123-128) έδωσαν ένα απλό παράδειγμα του πως θα ήταν δυνατό να εφαρμοσθούν οι κανόνες ροών 2-από-2 και 2-από-3 σε ένα διάγραμμα ελέγχου ώστε το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών να μην αυξάνει αλλά να παραμένει σταθερό σε μια επιθυμητή τιμή. Ο Klein (2000a) ορμώμενος από αυτή την παρατήρηση πρότεινε την εφαρμογή των κανόνων 2-από-2

και 2-από-3 σε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου στο οποίο υπάρχουν μόνο κατάλληλα συμμετρικά όρια ελέγχου των οποίων η τιμή προσδιορίζεται έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να έχει μια προκαθορισμένη τιμή (ή ισοδύναμα, το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμένων να είναι προκαθορισμένο). Πριν από αυτή την εργασία ο Klein (1997) είχε χρησιμοποιήσει τον κανόνα 2-από-2 για τη μείωση της τυπικής απόκλισης της κατανομής του μήκους ροής των σύνθετων διαγραμμάτων Shewhart-EWMA (*composite Shewhart-EWMA*).

Τα προτεινόμενα διαγράμματα και ειδικότερα το 2-από-3 έχουν σημαντικά καλύτερη απόδοση έναντι του συνήθους  $\bar{X}$  διαγράμματος για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας. Παρόλο που το προτεινόμενο διάγραμμα δεν είναι καλύτερο στην ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας έναντι ενός διαγράμματος τύπου CUSUM ή EWMA, με την εργασία του αυτή ο Klein έδωσε νέα ώθηση στη χρήση των κανόνων ροών σε ένα διάγραμμα ελέγχου.

Θα πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι ο κανόνας 2-από-2 είχε ήδη προταθεί από τους Hurwitz and Mathur (1992) σε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα με δύο μόνο όρια ελέγχου, άνω και κάτω, με σκοπό να αντικαταστήσει τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου με πολύπλοκους συνδυασμούς κανόνων όπως των Champ and Woodall (1987). Οι κανόνες των Hurwitz and Mathur (1992) επιδεικνύουν παρόμοια συμπεριφορά με τα διαγράμματα  $C_{1234}$  και  $C_{123}$  των Champ and Woodall (1987) στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας ενώ η ανάπτυξή τους είναι σημαντικά απλούστερη.

Ο Khoo (2004a) χρησιμοποιώντας τεχνικές προσομοίωσης επέκτεινε τη μελέτη του Klein (2000a) στους κανόνες 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4. Από την εφαρμογή των κανόνων των Klein (2000a) και Khoo (2004a) προέκυψε ότι παρόλο που βελτιώνεται η απόδοση των νέων διαγραμμάτων έναντι του συνήθους  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, για μεγαλύτερες μετατοπίσεις τα διαγράμματα δεν έχουν καλύτερη απόδοση. Για παράδειγμα, ο κανόνας 3-από-4 απαιτεί την εμφάνιση τουλάχιστον 3 σημείων μέχρι την ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ακόμη και αν ο μέσος έχει μετατοπιστεί σε υπερβολικά μεγάλο βαθμό. Σε μια προσπάθεια βελτίωσης της απόδοσης και για μεγάλες μετατοπίσεις χωρίς όμως να μειωθεί η ισχύς για μικρές ή/και μεσαίες, οι Khoo and Griffin (2006) μελέτησαν μια βελτιωμένη έκδοση των κανόνων 2-από-2 και 2-από-3 εισάγοντας επιπλέον όρια ελέγχου, συμμετρικά και εξωτερικά των ήδη υπάρχοντων

ορίων. Στα όρια αυτά εφαρμόζεται ο κλασικός κανόνας 1-από-1. Για την επιλογή της τιμής των εξωτερικών ορίων οι Khoo and Ariffin (2006) πρότειναν αυτή να προκαθορίζεται και στη συνέχεια να προσδιορίζεται η τιμή των εσωτερικών ορίων ελέγχου (τα οποία συνδέονται με τον κανόνα ροών) ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι το επιθυμητό. Ο Acosta-Mejia (2007) επέκτεινε τη μελέτη των Khoo and Ariffin (2006) μελετώντας  $\bar{X}$  διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών της μορφής  $m$ -από- $m$  και  $(m - 1)$ -από- $m$  στα οποία εφαρμόζεται και ο κλασικός κανόνας 1-από-1. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα διαγράμματα των Klein (2000a), Khoo (2004a), Khoo and Ariffin (2006) και Acosta-Mejia (2007), καθώς και συγκρίσεις με παρόμοια διαγράμματα, δίνονται στο Κεφάλαιο 3.

Όπως γίνεται αντιληπτό, οι κανόνες ροών έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης για περισσότερο από 50 χρόνια ενώ η ανάπτυξη και εφαρμογή τους σε διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας συνεχίζεται μέχρι και σήμερα. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε διαγράμματα ελέγχου στα οποία οι κανόνες ροών εφαρμόζονται είτε σε άλλα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart είτε με τρόπο διαφορετικό από αυτούς που έχουμε αναφέρει έως τώρα.

### **1.10.1 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για την Παρακολούθηση της Διασποράς**

Τα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας παίζουν (αν όχι σημαντικότερο) εξίσου σημαντικό ρόλο με τα διαγράμματα παρακολούθησης της μέσης τιμής αφού η διασπορά της κατανομής του μετρήσιμου χαρακτηριστικού του παραγόμενου προϊόντος καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την ποιότητά του.

Ωστόσο, είναι γεγονός, ότι δεν έχουν μελετηθεί εκτεταμένα από τους ερευνητές έως τώρα. Ο Page (1963) μελέτησε άνω μονόπλευρα διαγράμματα τύπου Shewhart που βασίζονται στο δειγματικό εύρος  $R$  με δύο όρια, ένα άνω όριο ελέγχου και ένα προειδοποιητικό όριο ελέγχου. Στο άνω όριο ελέγχου εφαρμόζεται ο κανόνας 1-από-1 ενώ στο προειδοποιητικό όριο ελέγχου εφαρμόζεται ο κανόνας 2-από-2 μεταξύ προειδοποιητικού ορίου και ορίου ελέγχου για την ανίχνευση μετατόπισης σε υψηλότερο επίπεδο της διασποράς της διεργασίας. Οι Tuprah and Ncube (1987)

επέκτειναν τη μελέτη του Page (1963) βασιζόμενοι στη δειγματική τυπική απόκλιση  $S$  ενώ έδωσαν πίνακες με την απόδοση του κανόνα για διαφορετικά μεγέθη δείγματος. Ο Nelson (1990) πρότεινε έναν κανόνα για την παρακολούθηση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας παρατηρώντας ταυτόχρονα ότι η ανίχνευση οποιασδήποτε μείωσης στη διασπορά θα πρέπει να αξιολογείται σημαντικότερη από την ανίχνευση αυξήσεων αφού η εφαρμογή περαιτέρω κατάλληλων ενεργειών μπορεί να οδηγήσει στην καλύτερευση των παραγόμενων προϊόντων μέσω μείωσης της μεταβλητότητάς των. Σύμφωνα με τον κανόνα του Nelson (1990) η εμφάνιση 7 συνεχόμενων σημείων κάτω από τη *διάμεση γραμμή* (*median line*) ενός διαγράμματος  $R$  δίνει ένδειξη ότι η διασπορά της διεργασίας έχει μειωθεί. Η επιλογή της διαμέσου της κατανομής των απεικονιζόμενων σημείων ως διάμεσης γραμμής καθώς και η τιμή 7 για το μήκος ροής βασίστηκαν στο γεγονός ότι  $(1/2)^7 \approx 0.0078$  το οποίο κρίνεται ότι βρίσκεται κοντά στο 0.00135. Η απόδοση του κανόνα του Nelson υπολογίστηκε από τον Acosta-Mejia (1998). Οι Lowry et al. (1995) εξέτασαν την απόδοση των διαγραμμάτων  $R$  και  $S$  εφαρμόζοντας τους προτεινόμενους από τη Western Electric Company (1956) κανόνες και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμών που δίνουν οι συγκεκριμένοι συνδυασμοί κανόνων είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από αυτό που αναφέρεται στο Western Electric Handbook (1956). Έτσι τροποποίησαν τις τιμές των προειδοποιητικών ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα  $R$  και σε ένα διάγραμμα  $S$  ώστε η τιμή του  $ARL_{in}$  των διαγραμμάτων αυτών με κανόνες ροών να είναι η ίδια με την τιμή  $ARL_{in}$  των βασικών διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της μέσης τιμής των Champ and Woodall (1987). Ο Klein (2000b) πρότεινε ένα τροποποιημένο δίπλευρο διάγραμμα που βασίζεται στη δειγματική τυπική απόκλιση σύμφωνα με το οποίο έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν δύο συνεχόμενα σημεία βρεθούν εκτός του ίδιου ορίου ελέγχου. Πρόσφατα οι Huang and Chen (2005) και Chen and Huang (2005) μελέτησαν το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου (*Synthetic Control Chart*), για την παρακολούθηση της διασποράς δίνοντας πίνακες με την απόδοση του διαγράμματος αλλά και οδηγίες για το στατιστικό σχεδιασμό αυτού με σκοπό την ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης στην τιμή της τυπικής απόκλισης της διεργασίας, χρησιμοποιώντας τη δειγματική τυπική απόκλιση και το δειγματικό εύρος, αντίστοιχα. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου εισήχθη από τους Wu and Spedding (2000) και έχει προταθεί ως εναλλακτικό του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου για

την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Πρόσφατα οι Davis and Woodall (2002) έδειξαν ότι το συνθετικό διάγραμμα είναι ισοδύναμο με ένα διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου δείτε Wu et al. (2001), Wu and Yeo (2001), Calzada and Scariano (2001), Scariano and Calzada (2003), Davis and Woodall (2002).

Διαγράμματα με κανόνες ροών για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας αναπτύσσονται στο Κεφάλαιο 4.

### 1.10.2 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών και Προσαρμόσιμες Παραμέτρους

Τα διαγράμματα ελέγχου με προσαρμόσιμες παραμέτρους και κανόνες ροών (*adaptive control charts with runs rules*) προτάθηκαν με σκοπό την αύξηση της ευαισθησίας ενός διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μιας εκτός ελέγχου κατάστασης αφού συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα της εφαρμογής των κανόνων ροών και του μεταβλητού ρυθμού δειγματοληψίας ή/και μεταβλητού μεγέθους δείγματος.

Αρχικά, οι Reynolds et al. (1988) μελέτησαν το  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών και μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας στο οποίο χρησιμοποιείται ο κανόνας  $C_5$  ή ο κανόνας  $C_6$  των Champ and Woodall (1987) μαζί με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας. Το διάγραμμα αυτό δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου ή όταν 2 συνεχόμενα σημεία βρεθούν σε μία από τις ζώνες A (Κανόνας  $C_5$ ). Ταυτόχρονα το χρονικό διάστημα μεταξύ της συλλογής δειγμάτων εναλλάσσεται μεταξύ δύο ρυθμών, ενός βραδέως (αργού) και ενός ταχέως (γρήγορου). Έτσι, αν ένα σημείο βρεθεί στη ζώνη A (είτε στην άνω είτε στην κάτω μεριά του διαγράμματος), το επόμενο δείγμα θα ληφθεί μετά από  $h_1$  ( $0 < h_1 < 1$ ) χρονικές μονάδες ενώ αν ένα σημείο βρεθεί μεταξύ των ορίων ελέγχου αλλά σε καμία από τις ζώνες A τότε το επόμενο δείγμα θα ληφθεί μετά από  $h_2$  ( $h_2 > 1$ ) χρονικές μονάδες. Είναι φανερό ότι η επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας βασίζεται στην τιμή του πιο πρόσφατου δείγματος. Η ανάπτυξη και μελέτη των διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου που μελέτησαν οι Reynolds et al. (1988) έγινε με χρήση της μεθοδολογίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων, παρόμοια με αυτή που εφάρμοσαν οι Champ and Woodall (1987). Για τη σύγκριση της απόδοσης μεταξύ των προτεινόμενων διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε το μέτρο *AATS* ενώ όλα τα

διαγράμματα είχαν την ίδια εντός ελέγχου τιμή για το *ATS*. Όπως ήταν αναμενόμενο, η βελτίωση που επιτυγχάνεται στη μείωση του χρόνου ανίχνευσης της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας με τα διαγράμματα με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας είναι μεγαλύτερη έναντι των διαγραμμάτων χωρίς μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας.

Οι κανόνες ροών χρησιμοποιήθηκαν επίσης και ως κανόνες εναλλαγής (*switching rules*) μεταξύ των διαφορετικών ρυθμών δειγματοληψίας από τους Amin and Letsinger (1991) και Amin and Hemasinha (1993) σε ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου. Στα δύο προαναφερθέντα άρθρα η επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας εξαρτάται από το αν  $r$ -από- $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ ενός προειδοποιητικού ορίου και του ορίου ελέγχου (άνω ή κάτω) οπότε και επιλέγεται ο ταχύς ρυθμός δειγματοληψίας  $h_1$ , διαφορετικά επιλέγεται ο βραδύς  $h_2$ . Ταυτόχρονα διατηρείται μικρός (κατά μέσο όρο) ο αριθμός των εναλλαγών μεταξύ των διαφορετικών ρυθμών δειγματοληψίας κάτι που κάνει την εφαρμογή ενός τέτοιου διαγράμματος στην πράξη απλούστερη. Οι Amin and Letsinger (1991) κατέληξαν ότι μεταξύ των κανόνων 2-από-3, 3-από-5 και 4-από-7, ο κανόνας 2-από-3 έχει κατά μέσο όρο το μικρότερο αριθμό εναλλαγών. Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τους παραπάνω κανόνες αφού διατηρούν την τιμή του εντός ελέγχου *ATS* σε αποδεκτά επίπεδα.

Οι Cui and Reynolds (1988) ανέπτυξαν  $\bar{X}$  διαγράμματα με κανόνες ροών και μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας όπου (διαφορετικοί) κανόνες ροών χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση της ευαισθησίας στην ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας αλλά και για την επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας. Το συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι η χρήση κανόνων ροών συμβάλει στην ταχύτερη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας ενώ ο μεταβλητός ρυθμός δειγματοληψίας συμβάλει στην ανίχνευση κυρίως μεσαίων ή μεγάλων μετατοπίσεων. Οι συγγραφείς πρότειναν επίσης και συγκεκριμένους κανόνες ροών για την εφαρμογή των διαγραμμάτων αυτών στην πράξη. Για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων των Cui and Reynolds (1988) με βάση οικονομικά κριτήρια παραπέμπουμε στην εργασία των Das et al. (1997).

Οι Celano et al. (2006) ανέπτυξαν  $\bar{X}$  διαγράμματα με κανόνες ροών και μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας ή/και μέγεθος δείγματος. Η ανάπτυξη των διαγραμμάτων έγινε με στατιστικά κριτήρια και ειδικότερα με σκοπό την εύρεση των παραμέτρων εκείνων οι οποίες δίνουν την ελάχιστη τιμή *AATS* για δεδομένη

μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στη μέχρι τώρα βιβλιογραφία διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών και μεταβλητό μέγεθος δείγματος δεν έχουν μελετηθεί. Σύμφωνα με τον Montgomery (2005, σελ. 457) μεταξύ της επιλογής μεταβλητού ρυθμού δειγματοληψίας και μεταβλητού μεγέθους δείγματος προτιμότερο είναι το δεύτερο αφού η αύξηση στο μέγεθος δείγματος αυξάνει σημαντικά την ισχύ του διαγράμματος. Οι Celano et al. (2006) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι για μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας το καλύτερο διάγραμμα είναι ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα στο οποίο οι Κανόνες 1, 2 και 3 της της Western Electric Company χρησιμοποιούνται για την ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ενώ εφαρμόζεται μεταβλητός ρυθμός δειγματοληψίας και μεταβλητό μέγεθος δείγματος. Η επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας και του μεγέθους του δείγματος βασίζεται στην τιμή της πιο πρόσφατης παρατήρησης.

Σημειώνουμε πώς διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς με κανόνες ροών και μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας δεν έχουν μελετηθεί εκτός από την περίπτωση του συνθετικού διαγράμματος (Huang and Chen (2005) και Chen and Huang (2005)).

### 1.10.3 Πολυμεταβλητά Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών

Ο πολυμεταβλητός στατιστικός έλεγχος ποιότητας και ειδικά τα πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις όπου η ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος εξαρτάται από  $p$  ( $p \geq 2$ ) χαρακτηριστικά, συσχετισμένα ή μη μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή το ποιοτικό χαρακτηριστικό περιγράφεται από ένα διάνυσμα με τις τιμές των  $p$  ( $p \geq 2$ ) χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα που παραγόμενου προϊόντος. Σκοπός είναι η παρακολούθηση του διανύσματος των μέσων τιμών  $\mu$  και του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων  $\Sigma$  του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ . Για το  $\mathbf{X}$  υποθέτουμε ότι ακολουθεί την  $p$ -διάστατη κανονική κατανομή.

Ανάλογα με τη μονομεταβλητή περίπτωση, μετρήσεις συλλέγονται περιοδικά και σχηματίζονται δείγματα μεγέθους  $n$  ( $n \geq 1$ ) από την κατανομή του διανύσματος των χαρακτηριστικών ποιότητας. Για το διάνυσμα  $\mu$  υποθέτουμε ότι έχει εντός ελέγχου



τιμή  $\boldsymbol{\mu}_0 = [\mu_{0,1}, \mu_{0,2}, \dots, \mu_{0,p}]$  όπου  $\mu_{0,i} = E(X_i)$  ( $1 \leq i \leq p$ ) ενώ ο εντός ελέγχου πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων θα συμβολίζεται με  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ .

Τα πιο γνωστά διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση του  $\boldsymbol{\mu}$  είναι το διάγραμμα χι-τετράγωνο (*chi-square control chart*, συμβ. *CSCC*) και το διάγραμμα  $T^2$  του Hotelling. Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση στο CSCC διάγραμμα ελέγχου ακολουθεί χι-τετράγωνο κατανομή με  $p$  βαθμούς ελευθερίας ενώ για την περίπτωση του διαγράμματος  $T^2$  ακολουθεί είτε κατανομή Snedecor- $F$  (με κατάλληλες παραμέτρους) είτε κατανομή Βήτα (περίπτωση μεμονωμένων παρατηρήσεων). Για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας χρησιμοποιούνται κυρίως τα επόμενα δύο διαγράμματα. Το πρώτο βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση

$$V_i = -pn + pn \ln(n) - n \ln(|\mathbf{A}_i| |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1}) + tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}_i) \sim \chi_{p(p+1)/2}^2$$

όπου  $\mathbf{A}_i = (n-1)\mathbf{S}_i$ ,  $\mathbf{S}_i$  είναι ο δειγματικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του  $i$ -οστού δείγματος και  $tr(\cdot)$  είναι το ίχνος ενός πίνακα.

Το δεύτερο διάγραμμα βασίζεται στη γενικευμένη διακύμανση (*generalized variance*) που ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων και αποτελεί γνωστό μέτρο πολυμεταβλητής διασποράς. Η απεικονιζόμενη ποσότητα του διαγράμματος είναι η γενικευμένη διακύμανση  $|\mathbf{S}_i|$  της οποίας η κατανομή έχει μελετηθεί από τους Aparisi et al. (1999). Στην ειδική περίπτωση  $p = 2$  έχουμε ότι (Alt and Smith (1985))  $(2(n-1)|\mathbf{S}_i|^{1/2})|\boldsymbol{\Sigma}_0|^{-1/2} \sim \chi_{2n-4}^2$ .

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφία των Mason and Young (2001) ενώ μια αναλυτική επισκόπηση της περιοχής δόθηκε πρόσφατα από τους Bersimis et al. (2007).

Ως προς τα πολυμεταβλητά διαγράμματα με κανόνες ροών, οι Khoo and Quah (2003), Khoo et al. (2003) και Khoo and Quah (2004) μελέτησαν την απόδοση των παραπάνω διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας κανόνες ροών οι οποίοι βασίζονται στην εμφάνιση σχηματισμών μήκους δύο ή τριών σημείων πέρα ενός κατάλληλου ορίου ελέγχου. Παρόλο που η κατανομή για την απεικονιζόμενη ποσότητα για καθένα από τα προαναφερθέντα διαγράμματα είναι γνωστή, οι συγγραφείς ανέπτυξαν και μελέτησαν τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών βασιζόμενοι σε κατάλληλους μετασχηματισμούς με σκοπό η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση

σε κάθε διάγραμμα να ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Επίσης ο Khoo (2005a) μελέτησε την απόδοση του διαγράμματος  $T^2$  του Hotelling με κανόνες ροών που βασίζονται στην εμφάνιση σχηματισμών μήκους δύο ή τριών συνεχόμενων σημείων χρησιμοποιώντας την κατανομή της απεικονιζόμενης ποσότητας στο διάγραμμα.

Πρόσφατα, οι Koutras et al. (2006) πρότειναν τα διαγράμματα  $k/k$  CSCC και  $k/k-r/r$  CSCC τα οποία βελτιώνουν την απόδοση του τυπικού διαγράμματος CSCC χρησιμοποιώντας ένα ή δύο κανόνες ροών οι οποίοι βασίζονται στην εμφάνιση  $k$  ή  $r$  συνεχόμενων σημείων σε μια περιοχή του διαγράμματος, οποιοδήποτε από τα δύο συμβεί πρώτο. Από τις αριθμητικές συγκρίσεις προέκυψε ότι το διάγραμμα  $k/k$  CSCC (ή το  $k/k-r/r$  CSCC) βελτιώνει σημαντικά την απόδοση του CSCC σε επίπεδο τέτοιο ώστε να μην είναι απαραίτητη η χρήση πολύπλοκων συνδυασμών των κανόνων της Western Electric Company στο διάγραμμα χι-τετράγωνο. Για την απόδοση ενός διαγράμματος χι-τετράγωνο με χρήση των κανόνων της Western Electric Company παραπέμπουμε στην εργασία των Aparisi et al. (2004).

Γενικότερα, τα πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών προσφάτως άρχισαν να μελετώνται και αποτελούν μια ακόμη περιοχή του στατιστικού ελέγχου ποιότητας η οποία προσφέρεται για περαιτέρω έρευνα.

#### **1.10.4 Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών για Διακριτά Χαρακτηριστικά**

Τα πιο γνωστά διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά είναι τα διαγράμματα ελέγχου  $p$ ,  $np$ ,  $c$  και  $u$ . Με  $p$  συμβολίζεται το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  προϊόντων. Τα διαγράμματα  $p$  και  $np$  χρησιμοποιούνται αντίστοιχα για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας και για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων της διεργασίας, ενώ τα διαγράμματα  $c$  και  $u$  χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων καθώς και για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης (*inspection unit*). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά δείτε Montgomery (2005) ενώ μια

σύνοψη των βασικών τύπων ανάπτυξης και εφαρμογής των δίνεται στο Παράρτημα Π.2.

Τα διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά και κανόνες ροών δεν έχουν αναπτυχθεί και μελετηθεί εκτενώς όπως τα αντίστοιχα για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Ο Burr (1979) πρότεινε τη χρήση του κανόνα των  $m$  συνεχόμενων σημείων σε μία από τις δύο πλευρές της κεντρικής γραμμής ενός διαγράμματος  $np$  προκειμένου το διάγραμμα να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Ο Duncan (1986) πρότεινε τον κανόνα των 7 συνεχόμενων σημείων, σύμφωνα με τον οποίο η εμφάνιση 7 συνεχόμενων σημείων στη μία πλευρά της διαμέσου γραμμής του διαγράμματος αποτελεί ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Ως διάμεση γραμμή (*median line*) χρησιμοποιείται η τιμή της διαμέσου της κατανομής της απεικονιζόμενης ποσότητας και η οποία στην περίπτωση του  $np$  διαγράμματος είναι η διωνυμική κατανομή  $b(n, p)$ . Ο Nelson (1997) πρότεινε τον ακόλουθο κανόνα που βασίζεται σε ροές, χωρίς πάντως να υπολογίσει την απόδοσή του:

*«Η εμφάνιση  $c$  συνεχόμενων δειγμάτων στα οποία υπάρχουν  $d$  ή λιγότερα ελαττωματικά προϊόντα στο καθένα αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει μείωση στο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που παράγει η διεργασία και άρα υπάρχει ένδειξη βελτίωσης της διεργασίας».*

Είναι φανερό πως στην περίπτωση του διαγράμματος  $np$  οι τιμές των  $c$  και  $d$  εξαρτώνται από τις τιμές των  $n$  και  $p$  και για το λόγο αυτό ανέπτυξε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα BASIC για τον προσδιορισμό των  $c$  και  $d$ . Ο προσδιορισμός των τιμών μπορεί να γίνει μέσω της εξίσωσης

$$(\text{Pr}(d))^c = \left( \sum_{x=0}^d \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \right)^c \cong a$$

όπου  $\text{Pr}(d)$  είναι η πιθανότητα στο δείγμα να βρίσκονται  $d$  ή λιγότερα ελαττωματικά προϊόντα,  $a$  είναι το επιθυμητό ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών και  $p_0$  η πιθανότητα να είναι ένα προϊόν του δείγματος ελαττωματικό, δεδομένου ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Σημειώνουμε επίσης πως τα  $d$ ,  $c$  και  $n$  είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Η αριθμητική επίλυσή της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γίνει αρκετά εύκολα με ένα κατάλληλο μαθηματικό πρόγραμμα.

Ο Acosta-Mejia (1999) υπολόγισε την απόδοση ενός διαγράμματος  $p$  με σκοπό την ανίχνευση βελτίωσης στη διεργασία. Το διάγραμμα αυτό δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου

διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί εκτός του άνω ορίου ελέγχου ή όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από ένα κατάλληλο κάτω όριο ελέγχου  $MCL$  (*modified center line*). Ο προσδιορισμός της τιμής του  $MCL$  γίνεται με τρόπο τέτοιο ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι το επιθυμητό. Η απόδοση του κανόνα μελετήθηκε για  $m = 7$ .

Ο Khoo (2004b) χρησιμοποίησε την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής και ανέπτυξε διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών τα οποία παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση στην ικανότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων (αυξήσεων ή μειώσεων) στο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που παράγει η διεργασία. Σύμφωνα με τον Montgomery (2005, σελ. 79) η χρήση της κανονικής προσέγγισης για τη διωνυμική κατανομή δεν είναι ικανοποιητική για

$$p < \frac{1}{n+1} \quad \text{ή} \quad p > \frac{n}{n+1}.$$

Πρόσφατα, οι Lucas et al. (2006) πρότειναν μια διαδικασία που βασίζεται στη χρήση κανόνων ροών με σκοπό την ανίχνευση βελτίωσης της διεργασίας σε διαγράμματα για διακριτά χαρακτηριστικά όπου το κάτω όριο ελέγχου είναι ίσο με 0. Σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία η εμφάνιση  $m$  συνεχόμενων δειγμάτων ή η εμφάνιση 2-από- $k$  συνεχόμενων δειγμάτων με αριθμό ελαττωματικών προϊόντων μηδέν αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία έχει βελτιωθεί, δηλαδή έχει μειωθεί ο αριθμός των ελαττωματικών που αυτή παράγει. Θα πρέπει να αναφέρουμε πως οι δύο κανόνες δε χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα και ότι η επιλογή του καταλληλότερου βασίζεται στην τιμή της πιθανότητας να έχει ένα δείγμα μηδέν ελαττωματικά. Αξίζει να αναφέρουμε πως ανάλογη διαδικασία με αυτή των Lucas et al. (2006) ανέπτυξαν και οι Chang and Gan (2007) για διαγράμματα ελέγχου που αφορούν υψηλής ποιότητας διεργασίες (*high yield processes*). Η βασική διαφοροποίηση είναι ότι οι Chang and Gan (2007) χρησιμοποίησαν κανόνες ροών στοχεύοντας εκτός από την ανίχνευση μείωσης στο ποσοστό των ελαττωματικών και στην ανίχνευση αύξησης στο ποσοστό αυτών.

## 1.11 Κανόνες Ροών και Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Μέχρι τώρα αναφέραμε τη χρήση των κανόνων ροών στα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση μιας κρίσιμης ποσότητας η οποία καθορίζει το επίπεδο

ποιότητας των προϊόντων που παράγει μια διεργασία. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε εν συντομία στη χρήση των κανόνων ροών σε δύο άλλες περιοχές του ελέγχου ποιότητας, τη δειγματοληψία αποδοχής (*acceptance sampling*) και τον έλεγχο αποδοχής μηχανημάτων μέσω τεστ εκκίνησης (*start-up demonstration test*).

### 1.11.1 Δειγματοληψία Αποδοχής

Η δειγματοληψία αποδοχής (*acceptance sampling*) αποτέλεσε ουσιαστικά την περιοχή του στατιστικού ελέγχου ποιότητας στην οποία εφαρμόστηκαν αρχικά οι κανόνες ροών. Ο Wolfowitz (1943) και αργότερα οι Praire et al. (1962) ανέπτυξαν ένα απλό δειγματικό σχέδιο (κατά σωρούς) σύμφωνα με το οποίο ένα σωρός γίνεται αποδεκτός αν  $m$  συνεχόμενα αντικείμενα από το σωρό βρεθούν μη-ελαττωματικά πριν ή ακριβώς στο  $n$ -οστό εξεταζόμενο προϊόν από το σωρό. Οι Vance and McDonald (1979) επέκτειναν το δειγματικό σχέδιο των Praire et al. (1962) προτείνοντας ένα δειγματικό σχέδιο το οποίο λαμβάνει υπόψη του τον αριθμό  $d$  των ελαττωματικών αντικειμένων που βρίσκονται κατά τον έλεγχο του σωρού. Σύμφωνα με τους Vance and McDonald (1979) ο σωρός γίνεται αποδεκτός εάν  $m$  συνεχόμενα αντικείμενα από το σωρό βρεθούν μη-ελαττωματικά πριν από την εμφάνιση  $d$  συνολικά ελαττωματικών. Αν  $d$  ελαττωματικά αντικείμενα βρεθούν ελαττωματικά πριν από την εμφάνιση  $m$  συνεχόμενων μη-ελαττωματικών τότε ο σωρός απορρίπτεται. Το σχέδιο αυτό μελετήθηκε επίσης και από τους Govindaraju and Lai (1999) οι οποίοι έδωσαν έναν πρακτικό οδηγό επιλογής των παραμέτρων του σχεδίου (τιμές των  $m$  και  $d$ ) όταν η πιθανότητα ενός ελαττωματικού αντικειμένου είναι πολύ μικρή ( $<1\%$ ).

Εκτός από τα μεμονωμένα δειγματικά σχέδια που αναφέρονται στην αποδοχή ή όχι ενός μόνο σωρού, έχουν αναπτυχθεί δειγματικά συστήματα (*sampling systems or schemes*) για την επιθεώρηση μιας ακολουθίας σωρών. Παραδείγματα τέτοιων σχεδίων αποτελούν τα συνεχή δειγματικά σχέδια (Dodge (1943)) και το σύστημα δειγματοληψίας Military Standard 105E (καθώς και το αντίστοιχο για «ιδιωτικές» εφαρμογές ANSI/ASQC Z1.4). Τέτοιου είδους συστήματα περιλαμβάνουν διαφορετικά επίπεδα αυστηρότητας δειγματοληψίας και είναι απαραίτητη η χρήση κανόνων για την εναλλαγή μεταξύ αυτών. Οι κανόνες ροών βρίσκουν εφαρμογή ως κανόνες εναλλαγής (*switching rules*) μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων της

δειγματικής εξέτασης. Για παράδειγμα στο σχέδιο MIL-STD 105E για την εναλλαγή από κανονική σε αυστηρή δειγματική εξέταση απαιτείται 2-από-5 διαδοχικοί σωροί να μη γίνουν αποδεκτοί ενώ για την εναλλαγή από κανονική σε ελαστική απαιτείται 10 διαδοχικοί σωροί να γίνουν αποδεκτοί. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις πιθανοθεωρητικές ιδιότητες των κανόνων εναλλαγής στα δειγματικά συστήματα δείτε Shmueli (2002).

Πριν κλείσουμε αξίζει να αναφέρουμε ότι οι βασικές ποσότητες οι οποίες περιγράφουν ένα δειγματικό σχέδιο είναι η πιθανότητα αποδοχής (*acceptance probability*) και η πιθανότητα απόρριψης (*rejection probability*) του σωρού, η χαρακτηριστική καμπύλη (*operating curve*) η οποία εκφράζει την πιθανότητα αποδοχής του σωρού μέχρι την εξέταση του  $n$ -οστού αντικειμένου και ο μέσος αριθμός επιθεωρημένων μονάδων (*average sample number*, συμβ. *ASN*). Η μεθοδολογία που θα παρουσιάσουμε στο Κεφάλαιο 2, επιτρέπει τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων για τα προαναφερθέντα αλλά και για παρόμοια δειγματικά σχέδια.

### 1.11.2 Έλεγχος Αποδοχής Μηχανημάτων Μέσω Τεστ Εκκίνησης

Τα τεστ εκκίνησης (*start-up demonstration tests*) αποτελούν μια περιοχή του στατιστικού ελέγχου ποιότητας στην οποία βρίσκει άμεση εφαρμογή η θεωρία ροών. Ας υποθέσουμε ότι ένας έμπορος προτού αγοράσει το εμπόρευσμά του, απαιτεί να του πιστοποιηθεί το επίπεδο ποιότητας αυτού. Έτσι, αναμένει από τον προμηθευτή να του επιδείξει ότι ο εξοπλισμός που πρόκειται να αγοράσει μπορεί να ξεκινήσει επιτυχημένα  $m$  συνεχόμενες φορές.

Σε ένα τεστ εκκίνησης εφαρμόζονται συνήθως δύο κριτήρια, ένα που οδηγεί στην αποδοχή του εξοπλισμού και ένα που οδηγεί στην απόρριψη αυτού. Για παράδειγμα ένας εξοπλισμός να γίνεται αποδεκτός όταν συμβούν  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από  $c_2$  συνεχόμενες αποτυχημένες, ή ένας εξοπλισμός να γίνεται αποδεκτός όταν συμβούν  $c_1$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση  $f$  συνολικά αποτυχημένων. Βλέπουμε, ότι και στην περίπτωση των τεστ εκκίνησης, οι ροές επιτυχιών/αποτυχιών βρίσκουν άμεσα εφαρμογή. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα τεστ εκκίνησης καθώς και ένα νέο τεστ το οποίο βασίζεται στη χρήση στατιστικών συναρτήσεων σάρωσης δίνονται στο Κεφάλαιο 5.

## 1.12 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου, τους τρόπους εφαρμογή και ανάπτυξής τους καθώς επίσης και τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της απόδοσης αυτών. Δόθηκε επίσης μια αναλυτική επισκόπηση της περιοχής των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών ενώ έγινε και μια σύντομη αναφορά στις δυνατές εφαρμογές της θεωρίας ροών και σχηματισμών στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας γενικότερα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη βασική μεθοδολογία για την ανάπτυξη και μελέτη των στατιστικών συναρτήσεων οι οποίες σχετίζονται με την εμφάνιση ροών και σχηματισμών.

РАНЕКЪМЪО РЕПАА



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗΣ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗΣ

### 2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου που βασίζονται στη θεωρία ροών έχει ευρεία χρήση στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας. Γενικότερα όμως, η θεωρία ροών και σχηματισμών βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς και σύγχρονους επιστημονικούς κλάδους όπως ο έλεγχος ποιότητας, η θεωρία αξιολογίας, η κοινωνιολογία, η οικολογία, η ραδιοαστρονομία, η ταυτοποίηση DNA, η ψυχομετρία, κτλ. Για περισσότερες εφαρμογές ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μονογραφία των Balakrishnan and Koutras (2002).

Αντικειμενικός σκοπός σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι η μελέτη των διάφορων κατανομών των τυχαίων μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν και οι οποίες σχετίζονται με τη εμφάνιση (δεδομένων) σχηματισμών σε ακολουθίες δοκιμών (ανεξάρτητες ή εξαρτημένες) με  $s \geq 2$  δυνατά αποτελέσματα.

Οι σημαντικότερες τυχαίες μεταβλητές που μας απασχολούν στην πράξη είναι οι εξής δύο: (i) η κατανομή του αριθμού των ροών (ή σχηματισμών) σε μια ακολουθία  $n$  δοκιμών, και (ii) ο χρόνος αναμονής μέχρι την  $r$ -οστή εμφάνιση της ροής (ή του σχηματισμού).

Η μελέτη των δύο αυτών κατανομών μπορεί να γίνει μελετώντας είτε τη μία είτε την άλλη αφού σχετίζονται άμεσα (Feller (1968), Koutras (1997a)). Ως ένα απλό παράδειγμα αυτής της δυϊκής σχέσης αναφέρουμε τη σχέση μεταξύ διωνυμικής κατανομής και αρνητικής διωνυμικής κατανομής όπου η πιθανότητα να είναι ο αριθμός των επιτυχιών σε  $n$  δοκιμές μικρότερος από  $r$  ισούται με την πιθανότητα να χρειαστούν περισσότερες από  $n$  δοκιμές για την εμφάνιση της  $r$ -οστής επιτυχίας.

Αρχικά η μελέτη των κατανομών τυχαίων μεταβλητών που σχετίζονται με ροές και σχηματισμούς βασίστηκε σε συνδυαστικές μεθόδους (Philippou and Muwafi (1982), Uppuluri and Patil (1983), Philippou and Makri (1986)). Αργότερα αναπτύχθηκε η μέθοδος των (υπό συνθήκη) γενικευμένων πιθανογεννητριών (*generalized probability generating functions*) (Ebneshrashoob and Sobel (1990), Aki (1992), Uchida (1998), Aki and Hirano (2000)).

Οι Fu and Koutras (1994) εισήγαγαν και ανέπτυξαν μια γενική μεθοδολογία με σκοπό να γίνει υπολογιστικά ευκολότερη η μελέτη τυχαίων μεταβλητών που σχετίζονται με ροές και σχηματισμούς. Η μεθοδολογία αυτή ονομάστηκε μεθοδολογία εμφύτευσης σε πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα (*finite Markov chain embedding technique*) και αρχικά είχε εμφανιστεί στις εργασίες των Fu (1986) και Chao and Fu (1989). Οι Koutras and Alexandrou (1995) επαναδιατύπωσαν τη μεθοδολογία της εμφύτευσης με τη βοήθεια πολυδιάστατων διανυσμάτων πιθανοτήτων, ενώ ο Fu (1996) επέκτεινε τη αρχική μέθοδο ώστε να είναι δυνατή η μελέτη οποιουδήποτε σχηματισμού.

Στο παρόν κεφάλαιο θα περιγράψουμε τη μεθοδολογία της εμφύτευσης και θα δώσουμε τα βασικά θεωρήματα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την πρώτη εμφάνιση ενός σχηματισμού. Η μελέτη τυχαίων μεταβλητών οι οποίες σχετίζονται με χρόνους αναμονής αποτελεί αντικείμενο έρευνας πολλών ερευνητών και ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Koutras (1997a, 1997b), Koutras and Alexandrou (1997), Antzoulakos (1999, 2001), Makri et al. (2007) ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις μονογραφίες των Balakrishnan and Koutras (2002) και Fu and Lou (2003).

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εφαρμογή των ανωτέρω είναι άμεση στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας αφού η κατανομή του μήκους ροής των διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών συμπίπτει με την κατανομή του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός κατάλληλα ορισμένου σχηματισμού. Επίσης η μεθοδολογία της εμφύτευσης θα χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη ενός τεστ εκκίνησης για την αποδοχή εξαρτημάτων στο Κεφάλαιο 5.

Στο τέλος του Κεφαλαίου 2 δίνονται παραδείγματα υπολογισμού του μέσου μήκους ροής (ή μέσου μήκους διαδρομής) και των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής σε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας στο οποίο εφαρμόζονται κανόνες διακοπής

που βασίζονται στη θεωρία ροών. Επίσης θα γίνει μια σύντομη αναφορά στο μέσο μήκος ροής σταθερής κατάστασης, στις πιθανότητες σήματος καθώς και στο χαρακτηριστικό της άμεσης αρχικής αντίδρασης ενός διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών. Εκεί θα δούμε ποιες είναι οι απαραίτητες τροποποιήσεις που πρέπει να γίνουν στη γενική μεθοδολογία με σκοπό τον υπολογισμό όλων των προαναφερθέντων ποσοτήτων.

## 2.2 Έννοιες και Συμβολισμοί

Έστω μια ακολουθία δοκιμών  $\{X_t, t \geq 1\}$  με  $s \geq 2$  δυνατά αποτελέσματα. Θα συμβολίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα ως  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  με αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης  $p_j = \Pr(X_t = b_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Στη συνέχεια δίνουμε δύο χρήσιμους για τη συνέχεια ορισμούς σχετικά με την έννοια του σχηματισμού.

**Ορισμός 2.1** (Fu and Lou (2003)): Ο σχηματισμός (*pattern*)  $\mathcal{E}$  μήκους  $k$  είναι ένας απλός σχηματισμός εάν αποτελείται από μια πεπερασμένη ακολουθία  $k$  δυνατών αποτελεσμάτων (συμβόλων), δηλαδή  $\mathcal{E} = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}$ , με  $i_j \in \{1, 2, \dots, s\}$  για  $j = 1, 2, \dots, k$ . Το μήκος του σχηματισμού είναι σταθερό και επιτρέπεται η επαναληπτική χρήση των συμβόλων  $b_1, b_2, \dots, b_s$ .

**Ορισμός 2.2** (Fu and Lou (2003)): Υποσχηματισμός (*subpattern*) ενός απλού σχηματισμού  $\mathcal{E}$  μήκους  $k$  ορίζεται μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της μορφής  $\mathcal{E}' = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j}$  με  $1 \leq j \leq k$ .

Για λόγους απλότητας το ενδεχόμενο της εμφάνισης ενός σχηματισμού και ο σχηματισμός θα συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα,  $\mathcal{E}$ .

Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση ενός απλού σχηματισμού είναι η ροή επιτυχιών μήκους  $k$  σε μια ακολουθία δίτιμων δοκιμών Bernoulli. Αν συμβολίσουμε με  $S$  ( $F$ ) την εμφάνιση επιτυχίας (αποτυχίας) σε μια δοκιμή Bernoulli, τότε ο σχηματισμός που αντιστοιχεί στην εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχιών μπορεί να εκφραστεί αντίστοιχα ως

$$\mathcal{E} = \underbrace{SS \dots S}_k.$$

Ένας αυστηρός ορισμός της ροής όμοιων συμβόλων καθώς και μια άμεση γενίκευση αυτής δίνεται παρακάτω (δείτε Balakrishnan and Koutras (2002)).

**Ορισμός 2.3:** Έστω μια ακολουθία δοκιμών  $\{X_t, t \geq 1\}$  με  $s$  ( $s \geq 2$ ) δυνατά αποτελέσματα. Ως ροή αποτελεσμάτων ιδίου τύπου ορίζουμε την εμφάνιση διαδοχικών (χωρίς διακοπή) όμοιων αποτελεσμάτων τα οποία ακολουθούνται και έπονται από διαφορετικά αποτελέσματα. Ο αριθμός  $k$  των όμοιων στοιχείων μιας ροής αναφέρεται και ως μήκος της ροής ( $k$  θετικός ακέραιος).

Οι στατιστικές συναρτήσεις που σχετίζονται με την εμφάνιση ροών καλούνται στατιστικές συναρτήσεις ροών (*run statistics*). Μια άμεση γενίκευση της έννοιας της ροής προκύπτει αν αντί για όμοια διαδοχικά αποτελέσματα ενδιαφερόμαστε για ένα προκαθορισμένο αριθμό όμοιων αποτελεσμάτων σε ένα «παράθυρο» δοκιμών προκαθορισμένου μήκους (*moving window*). Έτσι προκύπτει ο ορισμός της γενικευμένης ροής επιτυχιών (*generalized run of type  $k/m$* ) ή διαφορετικά ο ορισμός της στατιστικής συνάρτησης σάρωσης (*scan statistic*).

**Ορισμός 2.4:** Έστω μια ακολουθία δοκιμών  $\{X_t, t \geq 1\}$  με  $s$  ( $s \geq 2$ ) δυνατά αποτελέσματα. Ως γενικευμένη ροή αποτελεσμάτων τύπου  $k/m$  ορίζουμε την εμφάνιση τουλάχιστον  $k$  όμοιων αποτελεσμάτων σε ένα «παράθυρο» μήκους  $m$  ( $k, m$  θετικοί ακέραιοι).

Γενικά οποιοσδήποτε σταθερού μήκους σχηματισμός αποτελούμενος από επιτυχίες και αποτυχίες, π.χ.  $\mathcal{E} = SSFSF$ , είναι σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 ένας απλός σχηματισμός σε μια ακολουθία δίτιμων δοκιμών.

Στη συνέχεια, έστω  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_2$  δύο απλοί σχηματισμοί μήκους  $k_1$  και  $k_2$  αντίστοιχα. Θα λέμε ότι οι  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_2$  είναι ξεχωριστοί (*distinct*) σχηματισμοί εάν ούτε ο  $\mathcal{E}_1$  περιέχεται στον  $\mathcal{E}_2$  και ούτε ο  $\mathcal{E}_2$  περιέχεται στον  $\mathcal{E}_1$ . Επιπλέον ορίζουμε ως  $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$  το ενδεχόμενο της εμφάνισης είτε του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$  είτε του σχηματισμού  $\mathcal{E}_2$ .

**Ορισμός 2.5:** (Fu and Lou (2003)): Ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  είναι ένας σύνθετος σχηματισμός εάν αποτελεί ένωση  $m$  ( $1 < m < \infty$ ) ξεχωριστών απλών σχηματισμών, δηλαδή  $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι δύο τυχαίες μεταβλητές που παίζουν σημαντικό ρόλο και σχετίζονται με εμφανίσεις ενός σχηματισμού  $\mathcal{E}$  είναι ο αριθμός εμφανίσεων του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  σε μια ακολουθία  $n$  δοκιμών με  $s \geq 2$  δυνατά αποτελέσματα, και ο χρόνος αναμονής μέχρι την  $r$ -οστή εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  σε μια ακολουθία δοκιμών με  $s \geq 2$  δυνατά αποτελέσματα. Θα συμβολίσουμε τις δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές αντίστοιχα ως  $X_n(\mathcal{E}) \equiv X_n$  και  $T_{r,\mathcal{E}} \equiv T_r$ . Ειδικότερα, για το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση για πρώτη φορά του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $T_{1,\mathcal{E}} \equiv T$ . Έτσι, η δυϊκή σχέση που προαναφέραμε στην Παράγραφο 2.1 μεταξύ των  $X_n$  και  $T_r$  εκφράζεται ως

$$\Pr(X_n < r) = \Pr(T_r > n) \quad (2.1)$$

Αρκεί λοιπόν η μελέτη μόνο της μίας από τις δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές για μελετήσουμε με τη βοήθεια της σχέσης (2.1) την άλλη. Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε αναλυτικά την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_1 \equiv T$ .

### 2.3. Κατανομές Χρόνων Αναμονής

Προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου για τη μελέτη χρόνων αναμονής θα αναφέρουμε κάποια γενικά πράγματα ξεκινώντας με τη γεωμετρική κατανομή η οποία αποτελεί την απλούστερη περίπτωση κατανομής χρόνου αναμονής. Η γεωμετρική κατανομή περιγράφει τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση μιας επιτυχίας σε μια ακολουθία δίτιμων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητας επιτυχίας  $p$ . Σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση της γεωμετρικής κατανομής ο απλός σχηματισμός  $\mathcal{E}$  αντιστοιχεί στην εμφάνιση μίας επιτυχίας, δηλ.  $\mathcal{E} = \{S\}$ . Η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου αναμονής  $T$  μέχρι την πρώτη εμφάνιση του  $\mathcal{E}$  δίνεται από τον τύπο

$$\Pr(T = n) = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2).$$

όπου  $p(q)$  είναι η πιθανότητα επιτυχίας (αποτυχίας) σε μια δοκιμή ( $q = 1 - p$ ).

Ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση της  $r$ -οστής επιτυχίας περιγράφεται από την αρνητική διωνυμική κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$\Pr(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots \quad (2.3)$$

Άμεση γενίκευση της γεωμετρικής κατανομής είναι η κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχιών. Τότε, το ενδεχόμενο  $\mathcal{E}$  περιγράφεται ως

$$\mathcal{E} = \underbrace{SS \dots S}_k.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε το μοντέλο της γεωμετρικής κατανομής τάξης  $k$  η οποία έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (Feller (1968), Philippou et al. (1983), Aki et al. (1984), Aki (1985), Hirano (1986), Philippou (1986), Hirano and Aki (1987), Aki and Hirano (1988)). Με ανάλογο τρόπο μπορεί να οριστεί η αρνητική διωνυμική κατανομή τάξης  $k$  (Philippou et al. (1983), Philippou (1984), Aki et al. (1984)).

Για τη μελέτη όλων των παραπάνω χρόνων αναμονής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η μεθοδολογία της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα. Στην επόμενη παράγραφο δίνουμε τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής εμφυτεύσιμης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα καθώς και τα βασικά θεωρήματα (χωρίς απόδειξη) όπως αυτά διατυπώθηκαν από τους Fu and Koutras (1994). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Fu (1986, 1996), Koutras (1997a), Koutras and Alexandrou (1995, 1997).

## 2.4. Η Μεθοδολογία της Εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζουμε τη μέθοδο εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα όπως αυτή διατυπώθηκε από τους Fu and Koutras (1994).

**Ορισμός 2.6:** Έστω ένας χώρος καταστάσεων  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Μια θετική ακέραια τυχαία μεταβλητή  $X_n$  με σύνολο τιμών

$$\{0, 1, 2, \dots, l_n\} \quad (n \in \mathbb{N}, l_n = \max\{x : \Pr(X_n = x) > 0\})$$

θα λέγεται εμφυτεύσιμη σε Μαρκοβιανή αλυσίδα αν

(i) υπάρχει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου  $\{Y_t, t \geq 0\}$  ορισμένη στο χώρο καταστάσεων  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$

(ii) υπάρχει διαμέριση  $\{C_x, x = 0, 1, 2, \dots\}$  του  $\Omega$  και

(iii) για κάθε  $x \in \{0, 1, 2, \dots, l_n\}$  ισχύει  $\Pr(X_n = x) = \Pr(Y_n \in C_x)$ .

Ο υπολογισμός της συνάρτησης πιθανότητας της εμφυτεύσιμης τυχαίας μεταβλητής μπορεί να γίνει με χρήση του επόμενου θεωρήματος.

**Θεώρημα 2.1:** Αν η τυχαία μεταβλητή  $X_n$  είναι εμφυτεύσιμη στη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$  με χώρο καταστάσεων  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ , τότε

$$\Pr(X_n = x) = \pi_0 \left( \prod_{t=1}^n \mathbf{P}_t \right) \sum_{r: a_r \in C_x} \mathbf{e}'_r$$

όπου  $\pi_0 = [\Pr(Y_0 = a_1), \Pr(Y_0 = a_2), \dots]$  είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της αλυσίδας,  $\mathbf{P}_t$  είναι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης της αλυσίδας και  $\mathbf{e}_r$  το μοναδιαίο διάνυσμα (γραμμή) με όλες του τις συνιστώσες ίσες με 0 εκτός της συνιστώσας  $r$  που είναι ίση με 1.

Με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 μπορεί κανείς να υπολογίσει τις ροπές και την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της εμφυτεύσιμης μεταβλητής. Τα αποτελέσματα διατυπώνονται στο επόμενο Πόρισμα.

**Πόρισμα 2.1:** Αν η τυχαία μεταβλητή  $X_n$  είναι εμφυτεύσιμη σε Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$  με χώρο καταστάσεων  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ , τότε οι ροπές περί την αρχή και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση εκφράζονται, αντίστοιχα, ως

$$E(X_n^i) = \pi_0 \left( \prod_{t=1}^n \mathbf{P}_t \right) \mathbf{v}'_i$$

$$G_{X_n}(z) = \sum_{n=0}^{l_n} \Pr(X_n = x) z^n = \pi_0 \left( \prod_{t=1}^n \mathbf{P}_t \right) \mathbf{w}'_z$$

όπου

$$\mathbf{v}_i = \sum_{x=0}^{l_n} x^i \left( \sum_{r: a \in C_x} \mathbf{e}'_r \right) \text{ και } \mathbf{w}_z = \sum_{x=0}^{l_n} z^x \left( \sum_{r: a \in C_x} \mathbf{e}'_r \right).$$

## 2.5 Χρόνος Αναμονής Μέχρι την Εμφάνιση ενός Απλού Σχηματισμού

Στην παρούσα παράγραφο δίνουμε τα βασικά εργαλεία για τη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός σχηματισμού  $\mathcal{E}$  (απλού ή σύνθετου). Για ευκολία στους συμβολισμούς, τα αποτελέσματα δίνονται στην περίπτωση του χρόνου αναμονής μέχρι την πρώτη εμφάνιση ενός απλού σχηματισμού ενώ η επέκτασή τους για την περίπτωση ενός σύνθετου σχηματισμού είναι άμεση.

Έστω  $\{X_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών με δυνατά αποτελέσματα στο σύνολο  $A = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ , ( $s \geq 2$ ) και έστω  $p_i$  η πιθανότητα να εμφανιστεί στη  $j$ -οστή δοκιμή το αποτέλεσμα  $b_i$ , δηλαδή  $\Pr(X_j = b_i) = p_i$  ( $j \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $\sum_{i=1}^s p_i = 1$ ). Θεωρούμε τον απλό σχηματισμό  $\mathcal{E} = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}$  μήκους  $k$  ( $1 \leq i_n \leq s$ ,  $1 \leq n \leq k$ ) και έστω  $T$  ο χρόνος αναμονής μέχρι την πρώτη εμφάνιση του  $\mathcal{E}$ . Προκειμένου να μελετήσουμε την τυχαία μεταβλητή  $T$  ορίζουμε μια κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα χώρο καταστάσεων  $\Omega$ . Για τον καθορισμό του χώρου καταστάσεων εργαζόμαστε ως εξής:

Αποσυνθέτουμε αρχικά τον σχηματισμό σε  $k$  το πλήθος υποσχηματισμούς και ορίζουμε  $k+1$  καταστάσεις που δηλώνονται με τις ταμπέλες  $1, 2, \dots, k+1$  ως ακολούθως

$$"1", \quad "2" = b_{i_1}, \quad "3" = b_{i_1} b_{i_2}, \dots, \quad "k+1" = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k},$$

όπου στην ταμπέλα "1" αντιστοιχούμε όλους τους υποσχηματισμούς  $A - \{b_{i_1}\}$ .



Αφού ορίστηκε ο (πεπερασμένος) χώρος καταστάσεων  $\Omega = \{1, 2, \dots, k+1\}$  ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  στο χώρο  $\Omega$  που λειτουργεί παράλληλα με την ακολουθία  $\{X_t, t \geq 0\}$  ως εξής:

Η  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ ,  $2 \leq j \leq k+1$ , αν στο τελικό κομμάτι της ακολουθίας  $X_1 X_2, \dots, X_t$ , κοιτώντας προς τα πίσω, αναγνωρίζουμε το σχηματισμό  $b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j}$ , δηλαδή  $X_{t-j+1} = b_{i_1}$ ,  $X_{t-j+2} = b_{i_2}$ , ...,  $X_t = b_{i_j}$ , ο οποίος είναι ο σχηματισμός με το μεγαλύτερο μήκος από τους σχηματισμούς που αντιστοιχούν στις ταμπέλες "2", "3" ... "k+1". Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση ορίζουμε ως τιμή της  $Y_t$  την τιμή 1. Επίσης ορίζουμε την κατάσταση "k+1" ως απορροφητική.

Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα στον  $\Omega$  με διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k+1}] = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = k+1)] = [1 - p_{i_1}, p_{i_1}, 0, \dots, 0]$$

και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{(k+1) \times (k+1)}$  ο οποίος ορίζεται ως

$$p_{ij} = \Pr(Y_n = i | Y_{n-1} = j) = \sum p_u, \quad i, j \in \Omega, n \geq 2$$

με το άθροισμα  $\sum p_u$  να εκφράζει το άθροισμα των πιθανοτήτων  $p_u$  οι οποίες αντιστοιχούν στο αποτέλεσμα  $b_u$ , η εμφάνιση του οποίου οδηγεί στη μετάβαση της αλυσίδας  $\{Y_t, t \geq 1\}$  από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$ . Η είσοδος για πρώτη φορά της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση "k+1" σηματοδοτεί την εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Είναι επίσης φανερό  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e}_1 \mathbf{P}$ , όπου το διάνυσμα  $\mathbf{e}_1$  συμβολίζει το διάνυσμα με μονάδα στην πρώτη συνιστώσα και με 0 σε όλες τις υπόλοιπες του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  γράφεται πάντα στη μορφή

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right]_{(k+1) \times (k+1)}$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{Q}_{k \times k}$  είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων και  $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}'$  είναι ένα διάνυσμα (στήλη) διάστασης  $k$  με τις πιθανότητες μετάβασης από κάθε μία μεταβατική κατάσταση στην απορροφητική κατάσταση. Επίσης, ο πίνακας  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας  $k \times k$  και το διάνυσμα

(γραμμή)  $\mathbf{1}$  που ανήκει στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^k$  έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με 1.

Ας συμβολίσουμε με

$$F_T(n) = \Pr(T \leq n), \quad \bar{F}_T(n) = 1 - F_T(n) = \Pr(T > n), \quad f_T(n) = \Pr(T = n)$$

$$G_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T = n)z^n, \quad H_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T > n)z^n, \quad M_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T = n)e^{zn}$$

την συνάρτηση κατανομής, την πιθανότητα ουράς, τη συνάρτηση πιθανότητας, την πιθανογεννήτρια συνάρτηση, τη γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς και τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $T$ , αντίστοιχα.

**Θεώρημα 2.2:** Η συνάρτηση κατανομής, η πιθανότητα ουράς και η συνάρτηση πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή  $T$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$F_T(n) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{1}' + \pi_{k+1}, \quad n \geq 1 \quad (2.4)$$

$$\bar{F}_T(n) = \alpha\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{1}', \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

$$f_T(n) = \begin{cases} \pi_{k+1}, & n = 1 \\ \alpha\mathbf{Q}^{n-2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}', & n \geq 2 \end{cases} \quad (2.6)$$

όπου

$$\alpha = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = k)] \quad (2.7)$$

**Απόδειξη:** Η πιθανότητα  $\Pr(T \leq n)$  εκφράζει την πιθανότητα να εμφανιστεί ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  πριν ή ακριβώς στη  $n$ -οστή δοκιμή. Το ενδεχόμενο  $\{T \leq n\}$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο  $\{Y_n = k+1\}$ , δηλαδή να βρίσκεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  στην απορροφητική κατάσταση  $k+1$  στη  $n$ -οστή δοκιμή. Ως εκ τούτου, από τις εξισώσεις Chapman – Kolmogorov, παίρνουμε

$$\Pr(T \leq n) = \Pr(Y_n = k+1) = \pi\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{e}'_{k+1}, \quad n \geq 1.$$

Με επαγωγή ως προς  $n$  μπορεί να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^n)\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

οπότε

$$F_T(n) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{1}' + \pi_{k+1}, \quad n \geq 1.$$

Στη συνέχεια, τα ενδεχόμενα  $\{T \leq n\}$  και  $\{Y_n = k+1\}$  είναι συμπληρωματικά των ενδεχομένων  $\{T > n\}$  και  $\{Y_n \neq k+1\} = \{Y_n \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ , αντίστοιχα. Έτσι

$$\Pr(T > n) = \Pr(Y_n \in \{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^k \Pr(Y_n = i) = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{1}' - \mathbf{e}'_{k+1})$$

όπου  $\mathbf{1}$  είναι ένα διάνυσμα (γραμμή) του χώρου  $\mathbb{R}^{k+1}$  με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Επομένως, για  $n \geq 1$ , έχουμε ότι

$$\bar{F}_T(n) = P(T > n) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{n-1} \mathbf{1}', \quad n \geq 1.$$

Για  $n \geq 2$ , έχουμε

$$\Pr(T = n) = \Pr(T > n-1) - \Pr(T > n) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{n-2} \mathbf{1}' - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{n-1} \mathbf{1}' = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{n-2} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbf{1}'$$

ενώ για  $n=1$  είναι προφανές ότι  $f_T(1) = F_T(1) = 1 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1}' = \pi_{k+1}$ .  $\square$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε πως αν το μήκος του απλού σχηματισμού είναι  $k \geq 2$  τότε  $\pi_{k+1} = 0$ .

Στο επόμενο θεώρημα δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση καθώς και η  $\ell$ -τάξης καθοδική παραγοντική ροπή  $\mu'_{[\ell]} = E[T(T-1)\dots(T-\ell+1)]$ .

**Θεώρημα 2.3:** Η γεννήτρια συνάρτηση  $H_T(z)$  των πιθανοτήτων ουράς  $\bar{F}_T(n)$ , η πιθανογεννήτρια συνάρτηση  $G_T(z)$  καθώς και η  $\ell$ -τάξης καθοδική παραγοντική ροπή  $\mu'_{[\ell]}$  της τυχαίας μεταβλητής  $T$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$H_T(z) = 1 + z \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - z \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}' \quad (2.8)$$

$$G_T(z) = z(1 - (1-z) \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - z \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}') \quad (2.9)$$

$$\mu'_{[\ell]} = \begin{cases} 1 + \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}', & \ell = 1 \\ \ell! \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-\ell} \mathbf{Q}^{\ell-2} \mathbf{1}', & \ell \geq 2 \end{cases} \quad (2.10)$$

όπου το διάνυσμα  $\boldsymbol{\alpha}$  δίνεται από τη σχέση (2.7).

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα 2.2 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} H_T(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T > n) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_T(n) z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}^{n-1} \mathbf{1}' z^n = 1 + z \boldsymbol{\alpha} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (z \mathbf{Q})^{n-1} \right) \mathbf{1}' = 1 + z \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{I} - z \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}' \end{aligned}$$

(η παραπάνω σχέση ισχύει όταν το  $z$  περιοριστεί σε μια κατάλληλη περιοχή του 0 έτσι ώστε να συγκλίνει η σειρά).

Για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση  $G_T(z)$ , θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση που συνδέει τις γεννήτριες  $G_T(z)$  και  $H_T(z)$  (Feller (1968), σελ. 265)

$$G_T(z) = 1 - (1-z)H_T(z),$$

που δίνει ότι

$$G_T(z) = z(1 - (1-z)\mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}').$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T$  δίνεται από τη σχέση

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_T(n) = H_T(1) = 1 + \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'$$

ενώ η  $\ell$ -τάξης καθοδική παραγοντική ροπή  $\mu'_{[\ell]}$  για  $\ell \geq 2$  προκύπτει από τη σχέση

$$\mu'_{[\ell]} = \left[ \ell \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}} H_T(z) \right]_{z=1}$$

κάνοντας χρήση της εξίσωσης

$$\frac{d}{dz} (\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-\ell} = \ell(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-(\ell+1)}\mathbf{Q}, \quad \ell \geq 1. \quad \square$$

Μια εναλλακτική έκφραση για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση  $G_T(z)$  μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 ως εξής:

$$\begin{aligned} G_T(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_T(n)z^n = \pi_{k+1}z + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{a}\mathbf{Q}^{n-2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}'z^n = \pi_{k+1}z + z^2\mathbf{a}\left(\sum_{n=2}^{\infty} (z\mathbf{Q})^{n-2}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ &= \pi_{k+1}z + z^2\mathbf{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (z\mathbf{Q})^n\right)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' = \pi_{k+1}z + z^2\mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης  $M_T(z)$  καθώς και τον υπολογισμό της πρώτης και της δεύτερης κεντρικής ροπής της τυχαίας μεταβλητής  $T$  διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.4:** Η ροπογεννήτρια συνάρτηση  $M_T(z)$  και η δεύτερη ροπή  $E(T^2)$  της τυχαίας μεταβλητής  $T$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$M_T(z) = e^z[1 + (e^z - 1)\mathbf{a}(\mathbf{I} - e^z\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}'] \quad (2.11)$$

$$E(T^2) = 1 + \mathbf{a}(3\mathbf{I} - \mathbf{Q})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-2}\mathbf{1}' \quad (2.12)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  δίνεται από τον τύπο (2.7).

**Απόδειξη:** Για τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής  $T$  έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
M_T(z) &= E(e^{zT}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T=n)e^{zn} = \sum_{n=1}^{\infty} [\Pr(T > n-1) - \Pr(T > n)]e^{zn} \\
&= \pi_{k+1}e^z + \sum_{n=2}^{\infty} \Pr(T > n-1)e^{zn} - \sum_{n=2}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} \\
&= \pi_{k+1}e^z + \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{z(n+1)} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} - \Pr(T > 1)e^z \right) \\
&= \pi_{k+1}e^z + \Pr(T > 1)e^z + e^z \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} \\
&= \pi_{k+1}e^z + (1 - \pi_{k+1})e^z + (e^z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} \\
&= e^z + (e^z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > n)e^{zn} = e^z + (e^z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a} \mathbf{Q}^{n-1} \mathbf{1}' e^{zn} \\
&= e^z + e^z (e^z - 1) \mathbf{a} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (e^z \mathbf{Q})^{n-1} \right) \mathbf{1}' = e^z + e^z (e^z - 1) \mathbf{a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (e^z \mathbf{Q})^n \right) \mathbf{1}' \\
&= e^z + e^z (e^z - 1) \mathbf{a} (\mathbf{I} - e^z \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}' = e^z [1 + (e^z - 1) \mathbf{a} (\mathbf{I} - e^z \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}'] .
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ροπή  $E(T^2)$  της τυχαίας μεταβλητής  $T$  προκύπτει άμεσα από τη σχέση

$$E(T^2) = \left[ \frac{d^2}{dz^2} M_T(z) \right]_{z=0}$$

κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\frac{d}{dz} (\mathbf{I} - e^z \mathbf{Q})^{-1} = e^z (\mathbf{I} - e^z \mathbf{Q})^{-2} . \quad \square$$

Από τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 2.2, 2.3 και 2.4 είναι φανερό ότι σημαντικό ρόλο για τη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός απλού σχηματισμού  $\mathcal{E}$  παίζει η γνώση του πίνακα  $\mathbf{Q}$ , ο οποίος περιέχει τις πιθανότητες μεταπήδησης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι ο τρόπος ορισμού του χώρου καταστάσεων  $\Omega$  όπως αυτός περιγράφηκε στην παρούσα παράγραφο δεν είναι μοναδικός. Ειδικότερα θα μπορούσε κανείς να ορίσει καταστάσεις που αντιστοιχούν σε καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  και να προσθέσει ακόμη μία «τεχνητή» κατάσταση η οποία θα συμβόλιζε την αρχική κατάσταση της αλυσίδας.

Ωστόσο η χρήση επιπλέον καταστάσεων οδηγεί σε αύξηση της διάστασης του χώρου καταστάσεων  $\Omega$ , το οποίο συνεπάγεται μεγαλύτερη διάσταση του πίνακα

πιθανοτήτων μεταπήδησης όπως θα δούμε στη συνέχεια (δείτε Fu and Chang (2002) και Fu and Lou (2003)).

## 2.6 Χρόνος Αναμονής Μέχρι την Εμφάνιση ενός Σύνθετου Σχηματισμού

Η μεθοδολογία που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την πρώτη εμφάνιση ενός απλού σχηματισμού μπορεί εύκολα να επεκταθεί στην περίπτωση ενός σύνθετου σχηματισμού. Για το σκοπό αυτό, έστω ο σύνθετος σχηματισμός  $\mathcal{E}$  ο οποίος αποτελείται από ένωση  $m$  απλών σχηματισμών, δηλαδή  $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i$ . Η βασική ιδέα είναι η εξής: Αποσυνθέτουμε καθένα από τους  $m$  απλούς σχηματισμούς στους υποσχηματισμούς του και κρατάμε από το σύνολο των υποσχηματισμών μόνο αυτούς που διαφέρουν μεταξύ τους. Αντιστοιχούμε καταστάσεις σε καθένα από τους υποσχηματισμούς με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως και έτσι ορίζεται ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$ .

Επειδή στην περίπτωση του σύνθετου σχηματισμού το πλήθος των απορροφητικών καταστάσεων είναι όσο και το πλήθος  $m$  των απλών σχηματισμών, και προκειμένου να μειώσουμε τη διάσταση του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  μπορούμε να ορίσουμε μια απορροφητική κατάσταση που θα τις περιλαμβάνει όλες. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης γράφεται πάλι στη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix}$$

και έχει διάσταση  $(h+1) \times (h+1)$ , όπου  $h$  είναι το πλήθος των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας.

Στην περίπτωση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε  $m$  διαφορετικές απορροφητικές καταστάσεις, μια για κάθε έναν από τους  $m$  διαφορετικούς απλούς σχηματισμούς  $\mathcal{E}_i$  που συμμετέχουν στο σύνθετο σχηματισμό  $\mathcal{E}$ , θα πρέπει να σχηματίσουμε έναν εκτεταμένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ο οποίος έχει την ίδια γενική μορφή με τον πίνακα  $\mathbf{P}$  με βασική διαφοροποίηση ότι αντί για μια απορροφητική κατάσταση θα υπάρχει μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $m \times m$ . Έτσι η γενική μορφή του  $\mathbf{P}$  είναι

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|cccc} \mathbf{Q} & & & & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & & & & \mathbf{I} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1h} & p_{1,h+1} & p_{1,h+2} & \cdots & p_{1,h+m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2h} & p_{2,h+1} & p_{2,h+2} & \cdots & p_{2,h+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{h1} & p_{h2} & p_{h3} & \cdots & p_{hh} & p_{h,h+1} & p_{h,h+2} & \cdots & p_{h,h+m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(h+m) \times (h+m)}$$

ενώ το διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi}$  των αρχικών πιθανοτήτων θα δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_h, \pi_{h+1}, \pi_{h+2}, \dots, \pi_{h+m}].$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι το ανωτέρω διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων αποτελεί γενική περίπτωση του διανύσματος  $\boldsymbol{\pi}$  της Παραγράφου 2.5 αφού ταυτίζονται όταν  $h = k$  και  $m = 1$ .

Παρόλο που στη συγκεκριμένη περίπτωση ο πίνακας  $\mathbf{P}$  έχει μεγαλύτερη διάσταση σε σχέση με πριν επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης του σύνθετου σχηματισμού η οποία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιου συγκεκριμένου από τους απλούς σχηματισμούς.

Προτού προχωρήσουμε στον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας είναι απαραίτητο να εισάγουμε τους κατάλληλους συμβολισμούς. Έστω  $T_j$  ο χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i$  λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_j$ , για κάποιο  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ <sup>†</sup>. Για το σχηματισμό  $\mathcal{E}_j$  υποθέτουμε ότι είναι μήκους  $k \geq 2$ . Σε αντιστοιχία με τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήσαμε για τη μελέτη της  $T$  (δείτε Παράγραφο 2.5) εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$F_{T_j}(n) = \Pr(T_j \leq n), \quad \bar{F}_{T_j}(n) = 1 - F_{T_j}(n) = \Pr(T_j > n), \quad f_{T_j}(n) = \Pr(T_j = n)$$

$$G_{T_j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T_j = n) z^n, \quad H_{T_j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T_j > n) z^n$$

<sup>†</sup> Ο χρόνος αναμονής  $T_j$  δεν αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Όταν γράφουμε  $\Pr(T_j = n)$  εννοούμε  $\Pr(T = n, J = j)$ , όπου  $J$  είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, \dots, m\}$  ανάλογα με το ποιος από τους  $m$  απλούς σχηματισμούς εμφανίστηκε τη χρονική στιγμή  $n$ . Ωστόσο για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιούνται (καταχρηστικά) οι όροι συνάρτηση πιθανότητας, συνάρτηση κατανομής και πιθανότητες ουράς σε σχέση με την «τυχαία μεταβλητή»  $T_j$  για τις πιθανότητες  $\Pr(T_j = n) (= \Pr(T = n, J = j))$ ,  $\Pr(T_j \leq n) (= \Pr(T \leq n, J = j))$  και  $\Pr(T_j > n) (= \Pr(J = j) - \Pr(T \leq n, J = j))$  αντίστοιχα.

που αναφέρονται στο χρόνο αναμονής  $T_j$ . Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.5:** Οι πιθανότητες  $F_{T_j}(n)$ ,  $f_{T_j}(n)$ ,  $\bar{F}_{T_j}(n)$  και οι γεννήτριες συναρτήσεις  $G_{T_j}(z)$  και  $H_{T_j}(z)$  του χρόνου αναμονής  $T_j$  δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$F_{T_j}(n) = \Pr(T_j \leq n) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^n)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \quad (2.13)$$

$$f_{T_j}(n) = P(T_j = n) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ \mathbf{a}\mathbf{Q}^{n-2}\mathbf{C}_j & , \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\bar{F}_{T_j}(n) = \mathbf{a}\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \quad (2.15)$$

$$G_{T_j}(z) = z^2\mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \quad (2.16)$$

$$H_{T_j}(z) = \mathbf{a}(\mathbf{I} + z(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \quad (2.17)$$

όπου  $\mathbf{C}_j$  είναι  $j$ -στήλη του πίνακα  $\mathbf{C}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) και  $\mathbf{a}$  το διάνυσμα που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{a} = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = h)].$$

**Απόδειξη:** Η πιθανότητα  $\Pr(T_j \leq n)$  εκφράζει την πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου  $\mathcal{E}$  λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_j$  μέχρι τη  $n$ -οστή δοκιμή. Το ενδεχόμενο  $\{T_j \leq n\}$  είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο  $\{Y_n = h + j\}$ , δηλαδή θέλουμε η αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  να βρίσκεται στην απορροφητική κατάσταση  $h + j$  στη  $n$ -οστή δοκιμή. Από τις εξισώσεις Charman – Kolmogorov παίρνουμε

$$F_{T_j}(n) = \Pr(T_j \leq n) = \Pr(Y_n = h + j) = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{e}'_{h+j}, \quad n \geq 1,$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{e}'_{h+j}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στήλη του διανυσματικού χώρου  $\mathbf{R}^{h+m}$ , με μονάδα στη θέση  $h + j$  ( $1 \leq g \leq m$ ) και μηδέν σε όλες τις υπόλοιπες και το διάνυσμα  $\mathbf{e}_{h+j}$  μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\mathbf{e}_{h+j} = [\mathbf{0} | \mathbf{e}_j]$ , όπου το  $\mathbf{e}_j$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα γραμμή του διανυσματικού χώρου  $\mathbf{R}^m$ .

Το διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi}$  είναι διάστασης  $1 \times (h + m)$  και μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\boldsymbol{\pi} = [\mathbf{a} | \mathbf{0}]$ , με το  $\mathbf{a}$  να δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{a} = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = h)].$$

Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί ότι



$$\mathbf{P}^n = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^n & (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^n)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

οπότε

$$F_{T_j}(n) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n-1})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j, \quad n \geq 1.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\Pr(T_j = n) = \Pr(T_j \leq n) - \Pr(T_j \leq n-1), \quad n \geq 2$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$f_{T_j}(n) = \alpha\mathbf{Q}^{n-2}\mathbf{C}_j, \quad n \geq 2,$$

ενώ για  $n=1$  είναι προφανές ότι

$$f_{T_j}(1) = F_{T_j}(1) = 0.$$

Για τις πιθανότητες ουράς  $\bar{F}_{T_j}(n)$ , για  $n \geq 1$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T_j}(n) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} f_{T_j}(i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha\mathbf{Q}^{i-2}\mathbf{C}_j \\ &= \alpha\mathbf{Q}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Q}^i \right) \mathbf{C}_j = \alpha\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\bar{F}_{T_j}(n) = \Pr(T_j > n) = \alpha\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j, \quad n \geq 1.$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης  $G_{T_j}(z)$  έχουμε ότι

$$G_{T_j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{T_j}(n)z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(z\mathbf{Q})^n \mathbf{C}_j = z^2 \alpha(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j.$$

Για τη γεννήτρια συνάρτηση  $H_{T_j}(z)$  έχουμε

$$\begin{aligned} H_{T_j}(z) &= \bar{F}_{T_j}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{T_j}(n)z^n = \bar{F}_{T_j}(0) + z\alpha \left( \sum_{n=1}^{\infty} (z\mathbf{Q})^{n-1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j \\ &= \bar{F}_{T_j}(0) + z\alpha(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη σχέση για την  $H_{T_j}(z)$  προκύπτει από την παρατήρηση ότι

$$\bar{F}_{T_j}(0) = \bar{F}_{T_j}(1) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{C}_j$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη. □

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι οι χρόνοι αναμονής  $T_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) ικανοποιούν την ταυτότητα  $T = \sum_{j=1}^m T_j$  όπου  $T$  είναι ο χρόνος αναμονής (τ.μ.) μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Από την παραπάνω σχέση έπονται οι ταυτότητες

$$f_T(n) = \sum_{j=1}^m f_{T_j}(n), \quad G_T(z) = \sum_{j=1}^m G_{T_j}(z), \quad H_T(z) = \sum_{j=1}^m H_{T_j}(z)$$

ενώ η πιθανότητα εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  λόγω εμφάνισης του απλού σχηματισμού  $\mathcal{E}_j$  είναι ίση με  $P_{\mathcal{E}_j} = G_{T_j}(1)$ .

Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα όσα έχουμε ήδη αναφέρει δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

**Παράδειγμα 2.1 :** Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t, t \geq 0\}$  με 4 δυνατά αποτελέσματα  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  και έστω

$$p_j = P(X_t = b_j), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad t \geq 1.$$

Έστω  $T$  τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E} = \{b_1 b_2 b_1, b_3 b_3 b_3\}$  ο οποίος γράφεται ως ένωση δύο απλών σχηματισμών  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \{b_1 b_2 b_1\} \cup \{b_3 b_3 b_3\}$ . Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της εμφύτευσης θα ορίσουμε μια κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα χώρο καταστάσεων  $\Omega$ . Αρχικά, αποσυνθέτουμε τους απλούς σχηματισμούς σε αποσχηματισμούς με τη μεθοδολογία που περιγράψαμε, οπότε

$$"1" \equiv \{b_2, b_4\}, \quad "2" \equiv b_1, \quad "3" \equiv b_1 b_2, \quad "4" \equiv b_3, \quad "5" \equiv b_3 b_3, \quad "6" \equiv \{b_1 b_2 b_1, b_3 b_3 b_3\}.$$

Η κατάσταση "1" αντιστοιχεί σε όλους τους υποσχηματισμούς που δεν προέκυψαν από την αποσύνθεση των δύο απλών σχηματισμών ενώ η κατάσταση "6" αντιστοιχεί στην εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  και αποτελεί την απορροφητική κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$  περιλαμβάνει 6 καταστάσεις, το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6] = [p_2 + p_4, p_1, 0, p_3, 0, 0]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$ , που έχει διάσταση  $6 \times 6$ , είναι ο ακόλουθος

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccccc|c} p_2 + p_4 & p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ p_4 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ p_2 + p_4 & 0 & 0 & p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_4 & p_1 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ p_2 + p_4 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $T$  είναι δυνατός με χρήση των σχέσεων (2.4) και (2.6) ενώ με χρήση της σχέσης (2.10) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $T$ . Η αναλυτική έκφραση για τη μέση τιμή  $E(T)$  είναι

$$E(T) = \frac{(1 + p_1 p_2)(1 + p_3 + p_3^2)}{p_3^3 + p_1 p_2 p_3^3 + p_1^2 p_2 (1 + p_3 + p_3^2)}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.9), και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, είναι δυνατό να εξάγουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτησης της τ.μ.  $T$  και η οποία δίνεται από τον τύπο  $G_T(z) = G_1(z)/G_2(z)$  όπου

$$G_1(z) = (p_1^2 p_2 + p_3^3)z^3 + (p_1^2 p_2 p_3)z^4 + p_1 p_2 p_3^2 (p_1 + p_3)z^5$$

$$G_2(z) = 1 - (1 - p_3)z + (p_1 p_2 - p_3(1 - p_3))z^2 - (p_1 p_2 (p_2 + p_4) + p_3^2 (1 - p_3))z^3 - p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_4)z^4 - p_1 p_2 p_3^2 (p_2 + p_4)z^5.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναλυτικό τύπο της  $G_T(z)$  και εξισώνοντας στην ταυτότητα  $G_2(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T = n)z^n = G_1(z)$  τους συντελεστές των δυνάμεων του  $z$  προκύπτει η επόμενη αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $T$ .

$$f_T(n) = (1 - p_3)f_T(n-1) - (p_1 p_2 - p_3(1 - p_3))f_T(n-2) + (p_1 p_2 (p_2 + p_4) + p_3^2 (1 - p_3))f_T(n-3) + p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_4)f_T(n-4) + p_1 p_2 p_3^2 (p_2 + p_4)f_T(n-5), \quad n > 5$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2 \\ p_1^2 p_2 + p_3^3, & n = 3 \\ p_1^2 p_2 + p_3^3 (1 - p_3), & n = 4 \\ p_1^2 p_2 (1 - p_1 p_2) + p_3^3 (1 - p_3), & n = 5 \end{cases}.$$

Ως αριθμητική εφαρμογή ας θεωρήσουμε ότι  $p_1 = p_2 = 1/3$ ,  $p_3 = 1/4$  και  $p_4 = 1/12$ .

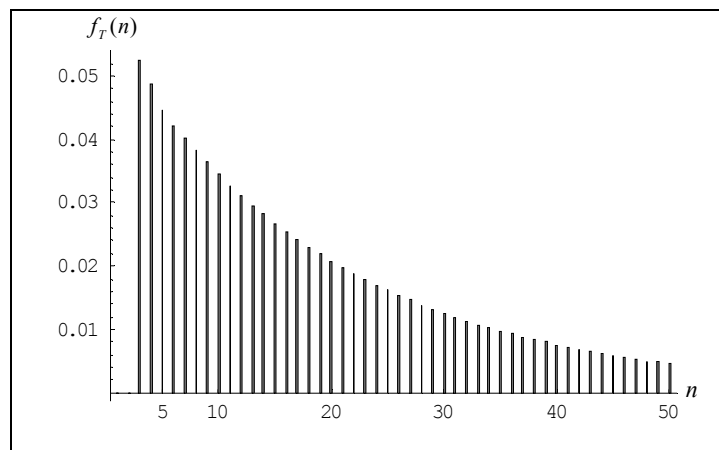
Τότε

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/12 & 1/3 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 5/12 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 5/12 & 1/3 & 0 & 0 & 1/4 \\ 5/12 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = [5/12, 1/3, 0, 1/4, 0], \quad \mathbf{1} = [1, 1, 1, 1, 1]$$

και με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3 προκύπτει ότι

$$E(T) = 22.1053, \quad E(T(T-1)) = 854.493, \quad V(T) = 387.954.$$

Χρησιμοποιώντας είτε την προαναφερθείσα αναδρομική σχέση για τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $T$  είτε το Θεώρημα 2.2 μπορούμε να εξάγουμε την επόμενη γραφική παράσταση για τη συνάρτηση πιθανότητας της  $T$ .



**Σχήμα 2.1** Συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $T$

Αντί της παραπάνω έκφρασης για τον πίνακα  $\mathbf{Q}$ , μπορούμε να ορίσουμε τον πλήρη χώρο καταστάσεων  $\Omega$  χρησιμοποιώντας δύο απορροφητικές καταστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας έχει τη μορφή

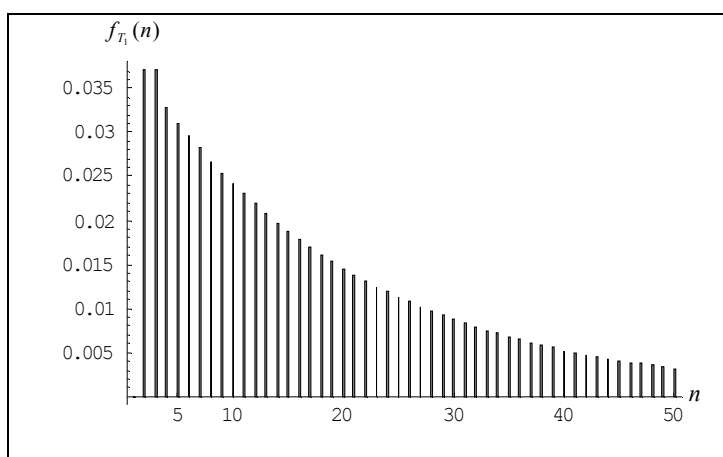
$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{Q} & \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & & \end{array} \right] = \begin{pmatrix} p_2 + p_4 & p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 + p_4 & 0 & 0 & p_3 & 0 & p_1 & 0 \\ p_2 + p_4 & p_1 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ p_2 + p_4 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18) υπολογίζεται η πιθανότητα ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  να εμφανιστεί ακριβώς στη  $n$ -οστή δοκιμή λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$ , που δίνεται από τη σχέση

$$f_{T_1}(n) = P(T_1 = n) = \mathbf{aQ}^{n-1}\mathbf{C}'_1$$

όπου  $\mathbf{C}_1 = [0, 0, p_1, 0, 0]$ .

Στα επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας  $f_{T_1}(n)$  του χρόνου αναμονής  $T_1$ .



Σχήμα 2.2 Συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου αναμονής  $T_1$

## 2.7 Από Κοινού Κατανομή Χρόνου Αναμονής και Αριθμού Επιτυχιών

Στην περίπτωση των δοκιμών Bernoulli με δύο δυνατά αποτελέσματα (επιτυχία, αποτυχία) εκτός από τον αριθμό  $T$  των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση ενός σχηματισμού  $\mathcal{E}$ , απλού ή σύνθετου, ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο αριθμός των επιτυχιών  $S_T$  (ή αποτυχιών  $F_T$ ) που έχουν συμβεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε το γενικό πλαίσιο για τη μελέτη της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής  $(T, S_T)$ . Αν και θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ , με κατάλληλες τροποποιήσεις η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση δοκιμών με  $s$  ( $s \geq 2$ ) δυνατά αποτελέσματα.

Έως τώρα στη βιβλιογραφία υπάρχει μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων και ερευνητών οι οποίοι ασχολούνται με τη μελέτη ανάλογων διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Aki and Hirano (1994, 1995),

Antzoulakos and Philippou (1996), Balakrishnan (1997), Uchida (1998), Chadjikonstantinidis and Koutras (2001), Chadjikonstantinidis et al. (2000), Antzoulakos and Boutsikas (2007).

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσσεται η μεθοδολογία των Chadjikonstantinidis et al. (2000). Αρχικά, δίνουμε τον ορισμό μιας τυχαίας μεταβλητής διωνυμικού τύπου εμφυτεύσιμης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα (Koutras and Alexandrou (1995)).

**Ορισμός 2.7:** Έστω  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) μια ακέραια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, \dots, l_n\}$ . Η τυχαία μεταβλητή  $X_n$  θα καλείται διωνυμικού τύπου εμφυτεύσιμη σε Μαρκοβιανή αλυσίδα (*Markov-chain imbeddable variable of binomial type* (MVB)) εάν

(i) Υπάρχει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$  ορισμένη σε ένα διακριτό χώρο καταστάσεων  $\Omega$ , ο οποίος διαμερίζεται ως

$$\Omega = \bigcup_{x \geq 0} C_x, \quad C_x = \{c_{x,0}, c_{x,1}, \dots, c_{x,h-1}\}.$$

(ii)  $\Pr(Y_t \in C_v | Y_{t-1} \in C_x) = 0$  για όλα τα  $v \neq x, x+1$  και  $t \geq 1$ .

(iii) Ισχύει ότι  $\Pr(X_n = x) = \Pr(Y_n \in C_x)$ .

Από τη συνθήκη (ii) παρατηρούμε ότι ορίζονται δύο σύνολα μετάβασης πρώτης τάξης για την αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , ένα για μεταβάσεις εντός του ιδίου συνόλου  $C_x$  (*within states*) και ένα για μεταβάσεις από το σύνολο  $C_x$  στο σύνολο  $C_{x+1}$  (*between states*). Οι πίνακες πιθανοτήτων μεταπήδησης που αντιστοιχούν στα δύο παραπάνω είδη μεταβάσεων είναι οι ακόλουθοι

$$A_t(x) = (\Pr(Y_t = C_{x,j} | Y_{t-1} = C_{x,i}))_{h \times h},$$

$$B_t(x) = (\Pr(Y_t = C_{x+1,j} | Y_{t-1} = C_{x,i}))_{h \times h}.$$

Τα στοιχεία του πίνακα  $A_t(x)$  δίνουν τις πιθανότητες μετάβασης εντός των υποκαταστάσεων του συνόλου  $C_x$ , ενώ τα στοιχεία του πίνακα  $B_t(x)$  δίνουν τις πιθανότητες μετάβασης από τις υποκαταστάσεις του συνόλου  $C_x$  στις καταστάσεις του συνόλου  $C_{x+1}$  ( $x \geq 0$ ).

Έστω  $\pi_x$  το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας, δηλαδή

$$\pi_x = [\Pr(Y_0 = c_{x,0}), \Pr(Y_0 = c_{x,1}), \dots, \Pr(Y_0 = c_{x,h-1})], \quad x \geq 0$$

και

$$\mathbf{f}_t(x) = [\Pr(Y_t = c_{x,0}), \Pr(Y_t = c_{x,1}), \dots, \Pr(Y_t = c_{x,h-1})], \quad 0 \leq x \leq l_n, \quad 1 \leq t \leq n$$

το διάνυσμα (γραμμή) των πιθανοτήτων τη χρονική στιγμή  $t$ . Στο επόμενο θεώρημα δίνεται ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X_n$  με τη βοήθεια των διανυσμάτων  $\mathbf{f}_t(x)$  (για την απόδειξη δείτε Koutras (2003)).

**Θεώρημα 2.6:** Τα διανύσματα πιθανοτήτων  $\mathbf{f}_t(x)$ ,  $0 \leq x \leq l_n$ ,  $1 \leq t \leq n$ , ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις

$$\mathbf{f}_t(0) = \mathbf{f}_{t-1}(0)\mathbf{A}_t(0), \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{f}_t(x) = \mathbf{f}_{t-1}(x)\mathbf{A}_t(x) + \mathbf{f}_{t-1}(x-1)\mathbf{B}_t(x-1), \quad 0 \leq x \leq l_n, \quad t \geq 1$$

με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{f}_0(x) = \boldsymbol{\pi}_x$ ,  $0 \leq x \leq l_n$ . Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X_n$  δίνεται από τον τύπο

$$\Pr(X_n = x) = \mathbf{f}_n(x)\mathbf{1}', \quad 0 \leq x \leq l_n. \quad (2.18)$$

Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  δίτιμων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας  $p$  σε κάθε δοκιμή. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα για τη μελέτη της από κοινού κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής  $(X_n, S_n)$ , όπου η  $X_n$  είναι μια MVB τυχαία μεταβλητή που καταγράφει τον αριθμό εμφάνισης ενός σχηματισμού  $\mathcal{E}$  (σύνθετου ή απλού) στην ακολουθία δοκιμών Bernoulli και η  $S_n$  δηλώνει τον αριθμό των επιτυχιών στις  $n$  δοκιμές Bernoulli. Έστω ότι για τη  $X_n$  έχει καθοριστεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 0\}$  και ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$ , όπως αυτοί περιγράφονται στον Ορισμό 2.7.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή των  $X_n, S_n$ , ορίζουμε τους επόμενους δύο πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{A}_{t,j}(x, y) = (\Pr(Y_t = C_{x,j'}, S_t = y + j | Y_{t-1} = C_{x,j}, S_{t-1} = y))_{h \times h}, \quad j = 0, 1$$

$$\mathbf{B}_{t,j}(x, y) = (\Pr(Y_t = C_{x+1,j'}, S_t = y + j | Y_{t-1} = C_{x,j}, S_{t-1} = y))_{h \times h}, \quad j = 0, 1$$

καθώς και τα διανύσματα πιθανοτήτων

$$\mathbf{f}_t(x, y) = [\Pr(Y_t = c_{x,0}, S_t = y), \Pr(Y_t = c_{x,1}, S_t = y), \dots, \Pr(Y_t = c_{x,s-1}, S_t = y)], \quad t \geq 1.$$

Είναι προφανές ότι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών  $(X_n, S_n)$  ικανοποιεί τη σχέση

$$f_n(x, y) = \Pr(X_n = x, S_n = y) = \sum_{i=0}^{h-1} \Pr(Y_n = c_{x,i}, S_n = y) = \mathbf{f}_n(x, y) \mathbf{1}' . \quad (2.19)$$

Στο επόμενο θεώρημα δίνεται ένα αναδρομικό σχήμα για τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{f}_n(x, y)$  (για την απόδειξη δείτε Chadjiconstantinidis et al. (2000)).

**Θεώρημα 2.7:** Τα διανύσματα πιθανοτήτων  $\mathbf{f}_t(x, y)$ ,  $t = 1, 2, \dots$  ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\mathbf{f}_t(x, y) = \sum_{j=0}^1 \mathbf{f}_{t-1}(x, y) \mathbf{A}_{t,j}(x, y - j) + \sum_{j=0}^1 \mathbf{f}_{t-1}(x-1, y-j) \mathbf{B}_{t,j}(x-1, y-j) \quad (2.20)$$

για  $t = 2, 3, \dots$  και  $y = 0, 1, \dots, t$ ,  $x = 0, 1, \dots, l_t$ , με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{f}_1(x, y) = (\Pr(Y_1 = c_{x,0}, Z_1 = y), \Pr(Y_1 = c_{x,1}, Z_1 = y), \dots, \Pr(Y_1 = c_{x,h-1}, Z_1 = y))$$

για  $y = 0, 1$  και  $x = 0, 1, \dots, l_1$ .

**Παρατήρηση 2.1:** Εάν το μήκος του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  (ή όλων των στοιχείων του εάν πρόκειται για σύνθετο σχηματισμό) είναι μεγαλύτερο από 1, τότε  $l_1 = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι για να εμφανιστεί ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  είναι απαραίτητο να εκτελεστούν τουλάχιστον 2 δοκιμές. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\mathbf{f}_1(x, y) = \mathbf{0}$  για  $x \neq 0$  και είναι αναγκαίος μόνο ο ορισμός του διανύσματος  $\mathbf{f}_1(0, y)$ , για  $y = 0, 1$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σκοπός να είναι να δώσουμε αποτελέσματα σχετικά με την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου αναμονής  $T$  μέχρι την πρώτη εμφάνιση του  $\mathcal{E}$  και του αριθμού των επιτυχιών  $S_T$  μέχρι τη στιγμή εκείνη σε μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητες επιτυχίας  $p$ . Συμβολίζουμε με  $T_r$  το χρόνο αναμονής μέχρι την  $r$ -οστή εμφάνιση του  $\mathcal{E}$  και με  $S_{T_r}$  τον αριθμό των επιτυχιών μέχρι τη στιγμή εκείνη. Για  $r = 1$  θα είναι  $T_1 \equiv T$  και  $S_{T_1} \equiv S_T$ .

Έστω

$$h_r(n, y) = \Pr(T_r = n, S_{T_r} = y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad y = 0, 1, \dots, n \quad (2.21)$$

η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των  $T_r, S_{T_r}$ . Στο επόμενο θεώρημα δίνεται ένα αναδρομικό σχήμα για τον υπολογισμό της  $h_r(n, y)$  (για την απόδειξη δείτε Chadjiconstantinidis et al. (2000)).



**Θεώρημα 2.8:** Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ.  $T_r, S_{T_r}$  δίνεται από τη σχέση

$$h_r(n, y) = \sum_{i=1}^h [\beta_{i,0}(n; r, y) \mathbf{f}_{n-1}(r-1, y) + \beta_{i,1}(n; r, y) \mathbf{f}_{n-1}(r-1, y-1)] \mathbf{e}'_i,$$

$$n \geq 2, \quad y = 0, 1, \dots, n$$

όπου  $h_r(1, y) = 0$ , για  $y = 0, 1$ , και

$$\beta_{i,j}(n; r, y) = \mathbf{e}_i \mathbf{B}_{n,j}(r-1, y-j) \mathbf{1}', \quad j = 0, 1.$$

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές οι πίνακες  $\mathbf{A}_{t,j}(x, y)$ ,  $\mathbf{B}_{t,j}(x, y)$  είναι ανεξάρτητοι των  $x, y$  και  $t$ , δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbf{A}_{t,j}(x, y) \equiv \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{B}_{t,j}(x, y) \equiv \mathbf{B}_j.$$

Τότε, το αναδρομικό σχήμα του Θεωρήματος 2.7 ανάγεται στο ακόλουθο αναδρομικό σχήμα που αφορά την εύρεση της από κοινού κατανομής των τυχαίων μεταβλητών  $T$  και  $S_T$ :

$$\Pr(T = 1, S_T = y) = 0, \quad y = 0, 1,$$

$$\Pr(T = n, S_T = y) = \sum_{i=1}^h [\beta_{i,0} \mathbf{f}_{n-1}(y) + \beta_{i,1} \mathbf{f}_{n-1}(y)] \mathbf{e}'_i, \quad n \geq 2, \quad y = 0, 1, \dots, n$$

όπου

$$\beta_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{B}_j \mathbf{1}', \quad i = 0, 1, \dots, h, \quad j = 0, 1$$

ενώ τα διανύσματα πιθανοτήτων  $\mathbf{f}_t(y)$  ικανοποιούν το αναδρομικό σχήμα

$$\mathbf{f}_t(y) = \mathbf{f}_{t-1}(y) \mathbf{A}_0 + \mathbf{f}_{t-1}(y-1) \mathbf{A}_1, \quad y = 0, 1, 2, \dots, t, \quad t = 2, 3, \dots$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{f}_1(y) = (\Pr(Y_1 = c_0, Z_1 = y), \Pr(Y_1 = c_1, Z_1 = y), \dots, \Pr(Y_1 = c_{h-1}, Z_1 = y))$$

για  $y = 0, 1$  και  $x = 0, 1, \dots, l_1$ .

Στο Κεφάλαιο 5 εφαρμόζονται τα Θεωρήματα 2.7 και 2.8 για τον υπολογισμό της δεσμευμένης κατανομής του αριθμού των αποτυχιών δοθέντος του αριθμού των δοκιμών μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά ένας ειδικός σύνθετος σχηματισμός  $\mathcal{E}$  που σχετίζεται με τη λειτουργία ενός τεστ εκκίνησης.

## 2.8 Μεθοδολογία Εμφύτευσης και Μέσο Μήκος Ροής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε τα βασικά διαγράμματα ελέγχου (Shewhart, CUSUM, EWMA) τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση παραμέτρων ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  που καθορίζουν την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Μέχρι τώρα έχουν προταθεί πολλές μεθοδολογίες για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής και τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής  $ARL$  των διαγραμμάτων ελέγχου. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τις εργασίες των Barnard (1959), Ewan and Kemp (1960), Brook and Evans (1972), Lucas and Crosier (1982), Wheeler (1983) και Chao (1999). Πρόσφατα, οι Fu et al. (2002, 2003) ανέπτυξαν μια γενική μεθοδολογία χρήσης της μεθόδου εμφύτευσης για τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους ροής για όλα τα βασικά διαγράμματα ελέγχου, είτε απλά είτε σύνθετα. Ως απλό διάγραμμα ελέγχου θεωρούμε το διάγραμμα στο οποίο χρησιμοποιείται ένας κανόνας απόφασης για το αν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου ενώ ως σύνθετο το διάγραμμα στο οποίο οι κανόνες απόφασης είναι τουλάχιστον δύο.

Στην επόμενη παράγραφο δίνουμε έναν τρόπο υπολογισμού του μέσου μήκους ροής αλλά και της κατανομής της μήκους ροής των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ευαισθητοποίησης τα οποία και εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία.

### 2.8.1 Υπολογισμός του Μέσου Μήκους Ροής στα Διαγράμματα Ελέγχου Shewhart με Κανόνες Ροών.

Στο Κεφάλαιο 1 αναφέραμε ότι οι Champ and Woodall (1987) ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν συστηματικά ένα  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου εφοδιασμένο με κανόνες ροών. Η τεχνική που χρησιμοποίησαν βασίζεται στη μέθοδο των Μαρκοβιανών αλυσίδων και κατόρθωσαν να εξάγουν τις τιμές του μέσου μήκους ροής για διάφορους συνδυασμούς κανόνων. Οι τιμές του  $ARL$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1.

**Πίνακας 2.1.** Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης

$\delta$	ARL															
	$C_1$	$C_7$	$C_{12}$	$C_{78}$	$C_{15}$	$C_{13}$	$C_{14}$	$C_{79}$	$C_{16}$	$C_{123}$	$C_{156}$	$C_{124}$	$C_{789}$	$C_{134}$	$C_{1456}$	$C_{1234}$
0.0	370.40	499.62	225.44	239.75	278.03	166.05	152.73	170.41	349.38	132.89	266.82	122.05	122.05	105.78	133.21	91.75
0.2	308.43	412.01	177.56	185.48	222.59	120.70	110.52	120.87	279.53	97.86	208.82	89.14	89.14	76.01	6.37	66.80
0.4	200.08	262.19	104.46	106.15	134.17	63.88	59.76	63.80	165.48	52.93	119.47	48.71	48.71	40.95	51.94	36.61
0.6	119.67	153.86	57.92	57.80	75.27	33.99	33.64	35.46	89.07	28.70	63.70	27.49	27.49	23.15	29.01	20.90
0.8	71.55	90.41	33.12	32.75	42.96	19.78	21.07	22.09	48.40	16.93	34.96	17.14	17.14	14.62	17.94	13.25
1.0	43.89	54.55	20.01	19.70	25.61	12.66	15.58	15.26	27.74	10.95	20.43	11.73	11.73	10.19	12.19	9.22
1.2	27.82	34.03	12.81	12.62	16.06	8.84	10.90	11.42	17.05	6.78	12.83	8.61	8.61	7.66	8.90	6.89
1.4	18.25	21.97	8.69	8.58	10.60	6.62	8.60	9.05	11.28	5.76	8.65	6.63	6.63	6.08	6.84	5.41
1.6	12.38	14.68	6.21	6.16	7.36	5.24	7.03	7.44	7.98	4.54	6.22	5.27	5.27	5.01	5.42	4.41
1.8	8.69	10.15	4.66	4.64	5.36	4.33	5.85	6.24	5.97	3.73	4.71	4.27	4.27	4.24	4.39	3.68
2.0	6.30	7.25	3.65	3.65	4.07	3.68	4.89	5.25	4.67	3.14	3.72	3.50	3.50	3.65	3.61	3.13
2.2	4.72	5.36	2.96	2.98	3.22	3.18	4.08	4.41	3.78	2.70	3.04	2.91	2.91	3.17	3.01	2.70
2.4	3.65	4.08	2.48	2.51	2.64	2.78	3.38	3.67	3.14	2.35	2.55	2.47	2.47	2.77	2.54	2.35
2.6	2.90	3.20	2.13	2.17	2.22	2.43	2.81	3.05	2.64	2.07	2.19	2.13	2.13	2.43	2.19	2.07
2.8	2.38	2.59	1.87	1.91	1.93	2.14	2.35	2.54	2.26	1.85	1.91	1.87	1.87	2.14	1.91	1.85
3.0	2.00	2.15	1.68	1.71	1.70	1.89	1.99	2.14	1.95	1.67	1.70	1.68	1.68	1.89	1.70	1.67

$\delta$ : Μετατόπιση του εντός ελέγχου μέσου  $\mu$  σε μονάδες τυπικής απόκλισης

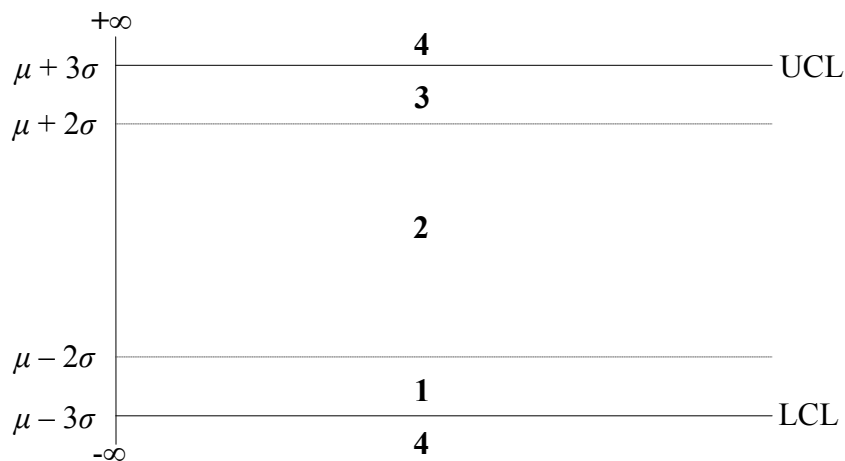
Από τον Πίνακα 2.1 προκύπτει ότι, παρόλο που το μέσο μήκος ροής για μικρές μετατοπίσεις της μέσης τιμής μειώνεται έναντι του κλασικού  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου με  $3\sigma$  όρια ελέγχου (στήλη  $C_1$ ), ταυτόχρονα μειώνεται και η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής το οποίο συνεπάγεται αύξηση του ποσοστού των εσφαλμένων συναγερμών.

Στη συνέχεια θα επιδείξουμε τη μεθοδολογία των Παραγράφων 2.5 και 2.6 για την εξαγωγή των τιμών του μέσου μήκους ροής που αντιστοιχεί στον κανόνα  $C_{12}$ .

Ας θεωρήσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart με  $3\sigma$  όρια ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται διαδοχικές τιμές  $\{W_t, t \geq 1\}$  της τυχαίας μεταβλητής  $W$  η οποία έχει εντός ελέγχου κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ . Ο σύνθετος κανόνας  $C_{12}$  μπορεί να γραφεί ως

$$C_{12} = C_1 \cup C_2 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty), T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}.$$

Χωρίζουμε το διάγραμμα ελέγχου Shewhart με  $3\sigma$  όρια ελέγχου στις ζώνες που φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα



**Σχήμα 2.3:** Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου Shewhart για τον κανόνα  $C_{12}$ .

Για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $W$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, για την οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή  $N(\mu + \delta\sigma, \sigma^2)$  (για  $\delta = 0$  έχουμε εντός ελέγχου διεργασία), ορίζουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή  $X$  με τιμές που καθορίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο

Τιμή της $W$	Τιμή της $X$
$(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$	1
$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	2
$(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$	3
$(-\infty, \mu - 3\sigma) \cup (\mu + 3\sigma, +\infty)$	4

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X$  καθορίζεται από τις σχέσεις

$$p_1(\delta) \equiv p_1 = \Pr(X = 1) = \Pr(\mu - 3\sigma < W < \mu - 2\sigma) = \Phi(-2 - \delta) - \Phi(-3 - \delta)$$

$$p_2(\delta) \equiv p_2 = \Pr(X = 2) = \Pr(\mu - 2\sigma < W < \mu + 2\sigma) = \Phi(2 - \delta) - \Phi(-2 - \delta)$$

$$p_3(\delta) \equiv p_3 = \Pr(X = 3) = \Pr(\mu + 2\sigma < W < \mu + 3\sigma) = \Phi(3 - \delta) - \Phi(2 - \delta)$$

$$p_4(\delta) \equiv p_4 = \Pr(X = 4) = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = \Phi(-3 - \delta) + 1 - \Phi(3 - \delta).$$

Είναι προφανές από την παραπάνω ανάλυση ότι η διαδικασία απεικόνισης των σημείων  $\{W_t, t \geq 1\}$  στο διάγραμμα ελέγχου παράγει μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t, t \geq 1\}$  σύμφωνα με το παραπάνω πλαίσιο. Ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου μέχρις ότου δώσει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ισοδυναμεί με τον αριθμό  $T$  των δοκιμών της ακολουθίας  $\{X_t, t \geq 1\}$  που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{4, 11, 121, 131, 33, 313, 323\}.$$

Από τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής  $T$  έχουμε ότι  $ARL = E(T)$ , και ότι η  $T$  παριστάνει το μήκος ροής του διαγράμματος.

Ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  είναι δυνατό να γραφεί και ως ένωση δύο σχηματισμών  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_2$  ως εξής

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \{4\} \cup \{11, 121, 131, 33, 313, 323\}.$$

Είναι προφανές ότι ο κανόνας  $C_1$  ( $C_2$ ) αντιστοιχεί στην εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$  ( $\mathcal{E}_2$ ). Ας συμβολίσουμε ως  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_i$ . Τότε η τυχαία μεταβλητή  $T$  μπορεί να γραφεί ως  $T = T_1 + T_2$ .

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε αρχικά στη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T$  χρησιμοποιώντας αποτελέσματα των Παραγράφων 2.5 και 2.6. Αποσυνθέτοντας το σχηματισμό  $\mathcal{E}$  παίρνουμε τους ακόλουθους υποσχηματισμούς

$$4, 1, 11, 1, 12, 121, 1, 13, 131, 3, 33, 3, 31, 313, 3, 32, 323.$$

Απομακρύνοντας τους υποσχηματισμούς που επαναλαμβάνονται καταλήγουμε στους ακόλουθους

$$4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

Εισάγουμε τον υποσχηματισμό 2 (είναι ο υποσχηματισμός που αντιστοιχεί στην ταμπέλα 1 της γενικής μεθοδολογίας) καταλήγουμε στους ακόλουθους υποσχηματισμούς

$$2, 4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

στους οποίους αντιστοιχούμε τις ταμπέλες/καταστάσεις

$$\begin{aligned} "1" &\equiv 2, & "2" &\equiv 1, & "3" &\equiv 3, & "4" &\equiv 12, & "5" &\equiv 13, & "6" &\equiv 31, \\ "7" &\equiv 32, & "8" &\equiv \{4, 11, 121, 131, 33, 313, 323\} \end{aligned}$$

όπου στην ταμπέλα 8 (η οποία θα παίζει το ρόλο της απορροφητικής κατάστασης) αντιστοιχούμε όλα τους υποσχηματισμούς που οδηγούν στην εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$ .

Για την αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  έχουμε ότι το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων  $\boldsymbol{\pi}$  είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8] = [p_2, p_1, p_3, 0, 0, 0, 0, p_4]$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{cccccccc|c} p_2 & p_1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 + p_4 \\ p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 + p_3 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 + p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{8 \times 8}$$

Με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3 προκύπτει ο επόμενος πίνακας που δίνει τη μέση τιμή, τη δεύτερη κεντρική ροπή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $T$ . Σημειώνουμε επίσης ότι τα αποτελέσματα του πίνακα μπορούν να προκύψουν και με χρήση του Θεωρήματος 2.4.

**Πίνακας 2.2:** Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{12}$

$\delta$	$ARL$	$E(T^2)$	$Var(T)$	$\delta$	$ARL$	$E(T^2)$	$Var(T)$
0.0	225.44	101167.00	50344.20	1.6	6.21	64.97	26.37
0.2	177.56	62662.00	31136.20	1.8	4.66	34.79	13.07
0.4	104.46	21582.20	10671.10	2.0	3.65	20.24	6.94
0.6	57.92	6573.97	3219.21	2.2	2.96	12.68	3.92
0.8	33.12	2117.40	1020.18	2.4	2.48	8.49	2.35
1.0	20.01	755.02	354.82	2.6	2.13	6.03	1.49
1.2	12.81	300.40	136.22	2.8	1.87	4.50	0.99
1.4	8.69	132.93	57.43	3.0	1.68	3.50	0.69

Ένας αναλυτικός τύπος για τη μέση τιμή της τ.μ.  $T$  ο οποίος προκύπτει με άμεση εφαρμογή του τύπου (2.10) και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις είναι ο ακόλουθος

$$E(T) = \frac{1 + p_3 + p_2 p_3 - p_1^2 p_2 p_3^2 (2 + p_2) + p_1 (1 + p_2 + 2 p_3 + p_2 p_3 (2 + p_2))}{1 - p_2 - p_2^2 p_3 + p_1^2 p_2^2 p_3^2 (1 + p_2) - p_1 p_2 (p_2 + p_3 (2 + p_2 + p_2^2))}.$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $T$  βρίσκεται από τη σχέση (2.9) και μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο πολυωνύμων  $Q_1(z)$ ,  $Q_2(z)$ , δηλαδή  $G_T(z) = Q_1(z)/Q_2(z)$  όπου

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= p_4 z + (p_3(1 - p_2) + p_1(1 - 2p_3 - p_2))z^2 \\ &\quad + (p_2 p_3(1 - p_2) + p_1(2p_3(1 - 2p_2) + p_2(1 - p_2)))z^3 + 2p_1 p_2 p_3(1 - p_2)z^4 \\ &\quad + p_1 p_2 p_3(p_2(1 - p_2) + 2p_1 p_3)z^5 - 2p_1^2 p_2 p_3^2(1 - p_2)z^6 - p_1^2 p_2^2 p_3^2(1 - p_2)z^7 \\ Q_2(z) &= 1 - p_2 z - (p_1 p_2^2 + 2p_1 p_2 p_3 + p_2^2 p_3)z^3 - p_1 p_2^2 p_3 z^4 \\ &\quad - p_1 p_2^2 p_3 z^5 + p_1^2 p_2^2 p_3^2 z^6 + p_1^2 p_2^3 p_3^2 z^7 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω πηλίκο μπορεί εύκολα να προκύψει το ακόλουθο αναδρομικό σχήμα για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων  $f_T(n)$  για  $n > 7$  αλλά και οι αρχικές συνθήκες του σχήματος οι οποίες παραλείπονται

$$\begin{aligned} f_T(n) &= p_2 f_T(n-1) + (p_1 p_2^2 + 2p_1 p_2 p_3 + p_2^2 p_3) f_T(n-3) + p_1 p_2^2 p_3 f_T(n-4) \\ &\quad + p_1 p_2^3 p_3 f_T(n-5) - p_1^2 p_2^2 p_3^2 f_T(n-6) - p_1^2 p_2^3 p_3^2 f_T(n-7). \end{aligned}$$

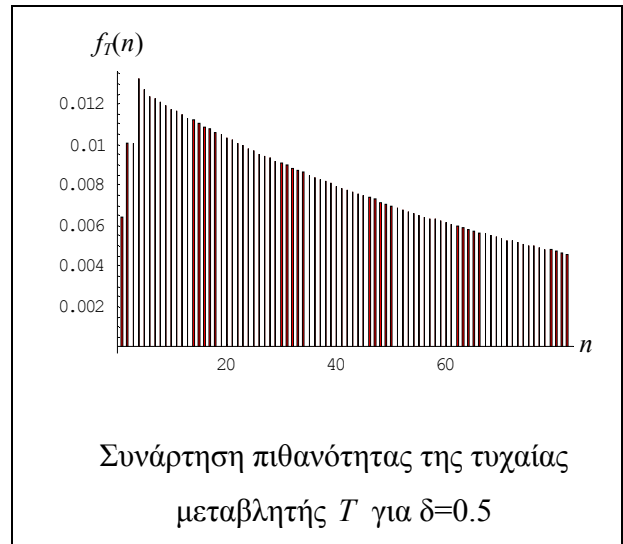
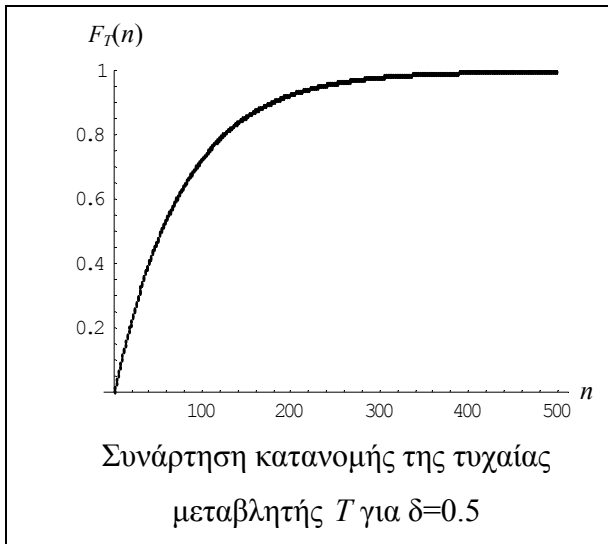
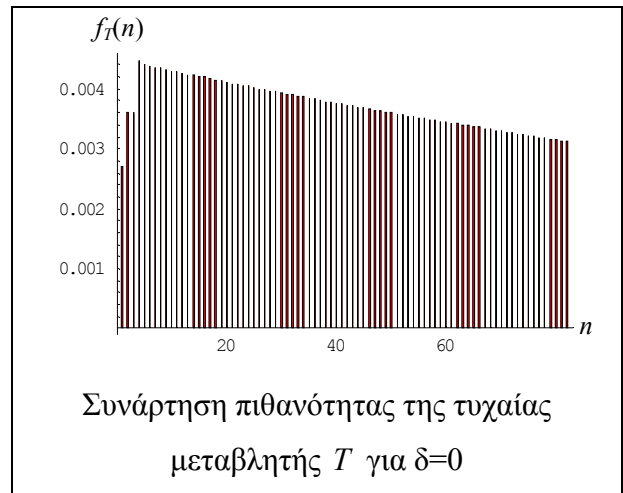
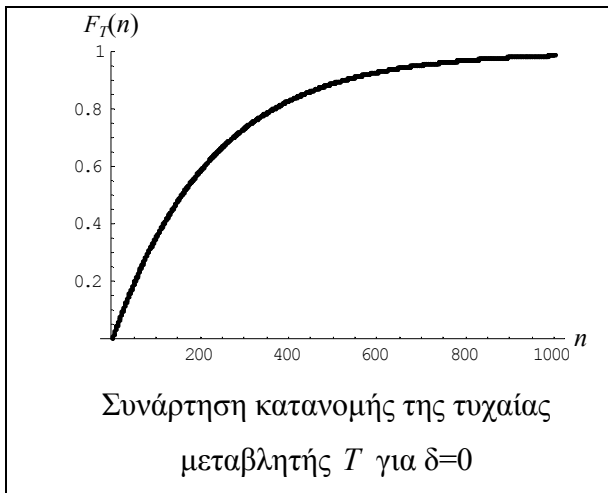
Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής. Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας.

**Πίνακας 2.3:** Ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{12}$

$\delta$	$Q_1$	$M$	$Q_3$	$ARL$	$\delta$	$Q_1$	$M$	$Q_3$	$ARL$
0.0	66	157	312	225.44	1.6	3	5	8	6.21
0.2	52	123	246	177.56	1.8	2	4	6	4.66
0.4	31	73	144	104.46	2.0	2	3	5	3.65
0.6	18	41	80	57.92	2.2	2	2	4	2.96
0.8	10	23	45	33.12	2.4	1	2	3	2.48
1.0	7	14	27	20.01	2.6	1	2	3	2.13
1.2	4	9	17	12.81	2.8	1	2	2	1.87
1.4	3	6	12	8.69	3.0	1	2	2	1.68

Μπορούμε επίσης να δώσουμε γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $F_T(n)$  και  $f_T(n)$  για διάφορες τιμές της μετατόπισης  $\delta$ . Ενδεικτικά δίνουμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις ( $\delta = 0, 0.5$ ).





**Σχήμα 2.4:** Γραφικές παραστάσεις των  $F_T(n)$  και  $f_T(n)$  για  $\delta = 0, 0.5$

Στον επόμενο πίνακα δίνουμε τις πιθανότητες εμφάνισης  $P_{\mathcal{E}_1}$  ( $P_{\mathcal{E}_2}$ ) του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  λόγω εμφάνισης του απλού σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$  ( $\mathcal{E}_2$ ) για δεδομένη μετατόπιση  $\delta$  του μέσου της διεργασίας. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $P_{\mathcal{E}_2}$  χρησιμοποιήθηκε η σχέση  $P_{\mathcal{E}_2} = G_{T_2}(1)$  ενώ για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $P_{\mathcal{E}_1}$  χρησιμοποιήθηκε η σχέση  $P_{\mathcal{E}_1} = 1 - P_{\mathcal{E}_2}$ .

**Πίνακας 2.4:** Πιθανότητες εμφάνισης των σχηματισμών  $\mathcal{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ 

$\delta$	$P_{\mathcal{E}_1}$	$P_{\mathcal{E}_2} = 1 - P_{\mathcal{E}_1}$	$\delta$	$P_{\mathcal{E}_1}$	$P_{\mathcal{E}_2} = 1 - P_{\mathcal{E}_1}$
0.0	0.606	0.394	1.6	0.421	0.579
0.2	0.572	0.428	1.8	0.421	0.579
0.4	0.517	0.483	2.0	0.420	0.580
0.6	0.476	0.524	2.2	0.415	0.585
0.8	0.449	0.551	2.4	0.406	0.594
1.0	0.433	0.567	2.6	0.390	0.610
1.2	0.425	0.575	2.8	0.367	0.633
1.4	0.421	0.579	3.0	0.338	0.662

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όσο αυξάνει η μετατόπιση  $\delta$  τόσο μειώνεται (αυξάνεται) η πιθανότητα να εμφανιστεί ο σχηματισμός  $\mathcal{E}$  λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$  ( $\mathcal{E}_2$ ). Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως μείωση (αύξηση) στο ποσοστό των ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας που οφείλονται στον κανόνα  $C_1$  ( $C_2$ ) καθώς το  $\delta$  αυξάνει.

### 2.8.2 Μέσο Μήκος Ροής Σταθερής Κατάστασης

Ο Crosier (1986) ανέπτυξε μια μεθοδολογία, την οποία επαναδιατύπωσε ο Champ (1992), με σκοπό τον υπολογισμό της κατανομή του μήκους ροής σταθερής κατάστασης για διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart που είναι εφοδιασμένα με κανόνες ροών. Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχουν δύο τύποι υπολογισμού του μέσου μήκους ροής (και αντίστοιχα δύο κατανομές για το μήκος ροής): (i) το μέσο μήκος ροής αρχικής κατάστασης (*initial-state run length*, συμβ. *ARL*) το οποίο ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου μέχρις ότου αυτό να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά, δεδομένου ότι ξεκίνησε από μια αρχική κατάσταση (*initial state*), και (ii) το μέσο μήκος ροής σταθερής κατάστασης (*steady-state run length*, συμβ. *ARL<sub>ss</sub>*) το οποίο ορίζεται ως αναμενόμενος αριθμός σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα μέχρις ότου αυτό δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή που η διεργασία έχει εισέλθει, μετά από κάποιο χρόνο.

Όταν χρησιμοποιούμε το  $ARL_s$  ως μέτρο απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου θεωρούμε ότι η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε συμβαίνει κάποια τυχαία χρονική στιγμή μετά την έναρξη παρακολούθησης της διεργασίας. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων  $\boldsymbol{\pi}$  (και επομένως και το  $\boldsymbol{\alpha}$ ) θα πρέπει να αντικατασταθεί από το διάνυσμα της στάσιμης κατανομής της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Για την εύρεση της κατανομής του μήκους ροής σταθερής κατάστασης, ο Champ (1992) πρότεινε την εξής διαδικασία (δείτε επίσης Crosier (1986)):

Έστω  $\boldsymbol{\alpha}_s$  το ζητούμενο διάνυσμα της στάσιμης κατανομής της Μαρκοβιανής αλυσίδας η οποία περιγράφει τη λειτουργία του διαγράμματος. Τότε

$$\boldsymbol{\alpha}_s = \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}\mathbf{1}'} \right) \cdot \mathbf{q} \quad (2.22)$$

όπου

$$\mathbf{q} = (\mathbf{G} - \mathbf{Q}')^{-1} \mathbf{e}_1 \quad (2.23)$$

και

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{h \times h} .$$

Το  $h$  είναι το πλήθος των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας ενώ  $\mathbf{e}_1$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα (γραμμή) διάστασης  $1 \times h$  του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδέν εκτός από την πρώτη συνιστώσα η οποία είναι 1.

Το μέσο μήκος ροής σταθερής κατάστασης δίνεται από τη σχέση (Champ (1992))

$$ARL_s = \boldsymbol{\alpha}_s (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}'$$

ενώ για τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους ροής  $T_s$  σταθερής κατάστασης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2 με αντικατάσταση του διανύσματος  $\boldsymbol{\alpha}$  από το διάνυσμα  $\boldsymbol{\alpha}_s$ .

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές για το μέσο μήκος ροής αρχικής ( $ARL$ ) και σταθερής κατάστασης ( $ARL_s$ ) για το διάγραμμα  $C_{12}$ .

**Πίνακας 2.5:** Τιμές των  $ARL$   $ARL_s$  του διαγράμματος  $C_{12}$

$\delta$	$ARL$	$ARL_s$	$\delta$	$ARL$	$ARL_s$
0.0	225.44	224.88	1.6	6.21	6.15
0.2	177.56	177.08	1.8	4.66	4.61
0.4	104.46	104.12	2.0	3.65	3.61
0.6	57.92	57.69	2.2	2.96	2.93
0.8	33.12	32.95	2.4	2.48	2.45
1.0	20.01	19.88	2.6	2.13	2.11
1.2	12.81	12.72	2.8	1.87	1.85
1.4	8.69	8.61	3.0	1.68	1.66

Από την ανάγνωση των τιμών του πίνακα είναι εμφανές ότι ισχύει  $ARL_s < ARL$ , από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η χρησιμοποίηση της κατανομής του μήκους ροής σταθερής κατάστασης ως μέτρου απόδοσης ενός διαγράμματος συνεπάγεται (i) μικρότερες τιμές για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (γρηγορότερη ανίχνευση των μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας), και (ii) αύξηση στο ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμών (μείωση της τιμής του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής). Το βασικότερο πάντως πλεονέκτημα της χρήσης του  $ARL_s$  είναι ότι αποτελεί πιο ρεαλιστικό μέτρο για την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου έναντι του συνήθους  $ARL$ .

### 2.8.3 Η Μέθοδος της Άμεσης Αρχικής Αντίδρασης σε Διαγράμματα Ελέγχου με Κανόνες Ροών

Στην πράξη, όταν ένα διάγραμμα ελέγχου δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας τότε προβαίνουμε σε διορθωτικές ενέργειες για την επαναφορά της υπό παρακολούθηση παραμέτρου (π.χ. μέσος της διεργασίας) στην εντός ελέγχου τιμή και στη συνέχεια η παρακολούθηση της διεργασίας γίνεται με την εκκίνηση ενός νέου διαγράμματος. Στην περίπτωση που οι διορθωτικές ενέργειες δεν επαναφέρουν το μέσο στην εντός ελέγχου τιμή θα θέλαμε αυτή η μη-συμμόρφωση με τις διορθωτικές ενέργειες να γίνει όσο το δυνατόν πιο άμεσα αντιληπτή. Για το σκοπό αυτό έχει προταθεί η μέθοδος της άμεσης αρχικής αντίδρασης (*fast initial response*, συμβ. FIR

ή *Headstart*) η οποία μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε μονόπλευρα είτε σε δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου.

Η μέθοδος FIR εισήχθη από τους Lucas and Crosier (1982) για την περίπτωση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου CUSUM και έκτοτε έχει χρησιμοποιηθεί στα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA (Lucas and Saccucci (1990), Rhoads et al. (1996)) καθώς και σε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών (Champ and Woodall (1987)). Ειδικότερα, οι Champ and Woodall (1987) έδειξαν πως η χρήση της μεθόδου FIR επιφέρει μείωση στην τιμή του  $ARL_{out}$ , αλλά ταυτόχρονα αυξάνει και το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμών. Όπως είδαμε και στην Παράγραφο 1.10 η πιο χαρακτηριστική περίπτωση διαγράμματος ελέγχου με κανόνες ροών στο οποίο εφαρμόζεται το χαρακτηριστικό της άμεσης αρχικής αντίδρασης είναι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου (*synthetic control chart*, δείτε π.χ. Davis and Woodall (2002)).

Για την εφαρμογή της μεθόδου αρκεί να τροποποιήσουμε κατάλληλα το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Θα περιγράψουμε τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας την περίπτωση του διαγράμματος  $C_{12}$  (δείτε Παράγραφο 2.8.1).

Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της αλυσίδας δεν περιέχει τις πιθανότητες εμφάνισης ενός σημείου στις Περιοχές 1, 2 και 3 του διαγράμματος  $C_{12}$  (δείτε Σχήμα 2.3) αλλά περιέχει την πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου «ταυτόχρονα» στις Περιοχές 1 και 3 με την έννοια ότι αν η αλυσίδα ξεκινήσει ευρισκόμενη ταυτόχρονα στις Περιοχές 1 και 3, τότε αρκεί στην αμέσως επόμενη δοκιμή η εμφάνιση ενός εκ των δυνατών αποτελεσμάτων 1, 3 ή 4 ώστε το διάγραμμα θα δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (ή ισοδύναμα, να έχουμε εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$ ). Η τροποποίηση αυτή του διανύσματος των αρχικών πιθανοτήτων απαιτεί τη χρήση μιας επιπρόσθετης (τεχνητής) κατάστασης.

Έτσι ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο  $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$  όπου η ερμηνεία των καταστάσεων 1, 2, ..., 7 παραμένει όπως αυτή που είχαμε δώσει στην Παράγραφο 2.8.1, η κατάσταση 9 είναι τώρα η απορροφητική κατάσταση, και η επιπρόσθετη (τεχνητή) κατάσταση είναι η 8.

Έτσι, το νέο διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $\pi_{FIR}$  καθώς και ο νέος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}_{FIR}$  είναι τα ακόλουθα

$$\boldsymbol{\pi}_{FIR} = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = 8), \Pr(Y_1 = 9)] = [0, \dots, 0, p_2, p_1 + p_3 + p_4],$$

$$\mathbf{P}_{FIR} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{FIR} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{FIR})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{cccccccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & p_3 + p_4 \\ p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 + p_4 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{9 \times 9}.$$

Για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής του διαγράμματος εφαρμόζεται η σχέση (2.10) χρησιμοποιώντας αντί του πίνακα  $\mathbf{Q}$  τον πίνακα  $\mathbf{Q}_{FIR}$  και ως  $\mathbf{a}$  το διάνυσμα  $\mathbf{a}_{FIR}$  το οποίο προκύπτει από το διάνυσμα  $\boldsymbol{\pi}_{FIR}$  διαγράφοντας τη συνιστώσα που αντιστοιχεί στην κατάσταση απορρόφησης. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές του μέσου μήκους ροής για τα διαγράμματα FIR- $C_{12}$  και  $C_{12}$ .

**Πίνακας 2.6:** Μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $C_{12}$  και FIR- $C_{12}$

$\delta$	$C_{12}$	FIR- $C_{12}$	$\delta$	$C_{12}$	FIR- $C_{12}$
0.0	225.44	207.35	1.6	6.21	4.32
0.2	177.56	162.25	1.8	4.66	3.14
0.4	104.46	93.65	2.0	3.65	2.41
0.6	57.92	50.36	2.2	2.96	1.94
0.8	33.12	27.67	2.4	2.48	1.64
1.0	20.01	15.96	2.6	2.13	1.43
1.2	12.81	9.73	2.8	1.87	1.30
1.4	8.69	6.30	3.0	1.68	1.20

Από την ανάγνωση των αποτελεσμάτων του Πίνακα 2.6 είναι εμφανές ότι η χρήση του χαρακτηριστικού FIR επιφέρει μείωση των τιμών του  $ARL$  έναντι του αντίστοιχου διαγράμματος χωρίς χρήση FIR. Τα διαγράμματα ελέγχου με FIR είναι πιο ευαίσθητα στην ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας και η ευαισθησία αυτή είναι αισθητή κυρίως για μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Ταυτόχρονα όμως αυξάνει και το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερμών αφού η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής για το διάγραμμα FIR- $C_{12}$  είναι μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή του διαγράμματος  $C_{12}$ .

Γενικά, τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται σε κανόνες ροών στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος FIR δεν είναι ευρέως διαδεδομένα. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών στα οποία είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου FIR ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_{in}$  να είναι δεδομένη (ή ισοδύναμα το ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμών να παραμένει σταθερό).

## 2.9 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία της μεθοδολογίας της εμφύτευσης μιας τυχαίας μεταβλητής σε μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία επιτρέπει τη μελέτη τυχαίων μεταβλητών που συνδέονται με την εμφάνιση σχηματισμών σε ακολουθίες πλειότιμων δοκιμών. Ειδικότερα, το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός σχηματισμού ο οποίος συμπίπτει με τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου. Τέλος, δόθηκαν παραδείγματα υπολογισμού του μέσου μήκους ροής σε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με κανόνες ροών.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε πως η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε δεν περιορίζεται από τον τύπο του διαγράμματος ή από τον κανόνα απόφασης που εφαρμόζεται. Το παράδειγμα που δώσαμε αφορά ένα διάγραμμα τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής. Με κατάλληλες τροποποιήσεις είναι δυνατό να μελετηθεί η κατανομή του μήκους ροής για διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς, του ποσοστού των ελαττωματικών κ.ο.κ. στα οποία εφαρμόζονται διάφορων τύπων κανόνες απόφασης.

Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε στα χέρια μας ένα ισχυρό εργαλείο που επιτρέπει τη γενική μελέτη διαγραμμάτων ελέγχου (μονόπλευρα ή δίπλευρα, με σύνθετους ή απλούς κανόνες απόφασης) το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάπτυξη και μελέτη των διαγραμμάτων ελέγχου που θα παρουσιαστούν στα επόμενα δύο κεφάλαια.





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ $r$ -ΑΠΟ- $m$

### 3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας που βασίζονται σε έναν κατάλληλα ορισμένο κανόνα ροών τύπου  $r$ -από- $m$ . Η ανάπτυξή τους θα γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να έχουν την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Αν και τα διαγράμματα ελέγχου που θα μελετήσουμε είναι δίπλευρα με ανάλογο τρόπο είναι δυνατό να αναπτυχθούν αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Ως μέτρο απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων θα χρησιμοποιήσουμε το μέσο μήκος ροής  $ARL$  αλλά και τιμές ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής.

### 3.2 Ο Τροποποιημένος $r$ -από- $m$ Κανόνας Ευαισθητοποίησης

Στην Παράγραφο 1.10 του Κεφαλαίου 1 αναφερθήκαμε στις εργασίες των Derman and Ross (1997) και Klein (2000a) οι οποίοι πρότειναν απλούς κανόνες για την αύξηση της ευαισθησίας ενός διαγράμματος τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων του μέσου της παραγωγικής διεργασίας. Οι κανόνες αυτοί βασίζονται στην εμφάνιση  $r$  από  $m$  συνεχόμενων σημείων σε μια κατάλληλη περιοχή ενός διαγράμματος ελέγχου.

Ειδικότερα, οι Derman and Ross (1997) πρότειναν ως κανόνα ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας την εμφάνιση δύο συνεχόμενων σημείων (κανόνας  $DR:2/2$ ) ή δύο από τρία συνεχόμενα σημεία (κανόνας  $DR:2/3$ ) εκτός των ορίων ελέγχου. Ας θεωρήσουμε ως Περιοχή 0 την περιοχή μεταξύ των ορίων ελέγχου  $UCL$  και  $LCL$

και ως Περιοχή 1 την περιοχή άνω του ορίου  $UCL$  και κάτω του ορίου  $LCL$ . Με βάση τους συμβολισμούς της Παραγράφου 2.2 και τη μεθοδολογία των Παραγράφων 2.5 και 2.6 η μελέτη της κατανομής του μήκους ροής των κανόνων  $DR:2/2$  και  $DR:2/3$  ανάγεται στη μελέτη της εμφάνισης των σχηματισμών

$$\mathcal{E}_1 = \{11\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{11,101\}$$

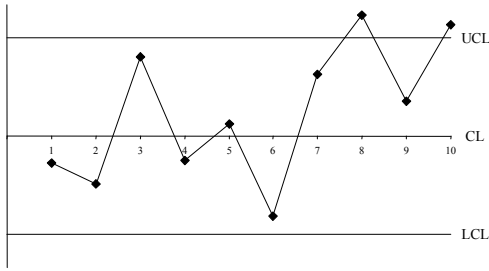
σε μια ακολουθία ανεξάρτητων δίτιμων δοκιμών.

Ο Klein (2000a) πρότεινε τους κανόνες 2-από-2 και 2-από-3 όπου τα δύο σημεία θα πρέπει να βρίσκονται εκτός του ίδιου ορίου ελέγχου. Οι κανόνες του Klein (2000a) αποτελούν τροποποίηση των κανόνων των Derman and Ross (1997). Ο Khoo (2004a) χρησιμοποιώντας τεχνικές προσομοίωσης επέκτεινε τη μελέτη του Klein (2000a) στους κανόνες 2-από-4, 3-από-3 και 3-από-4. Όλα τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τους προαναφερθέντες κανόνες πλεονεκτούν έναντι των συνήθων διαγραμμάτων Shewhart με κανόνες ροών υπό την έννοια ότι επιτρέπουν στο χρήστη να επιλέξει την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής η οποία καθορίζει τα όρια ελέγχου του διαγράμματος.

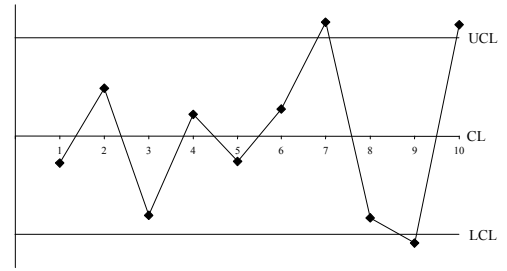
Τα διαγράμματα ελέγχου των Klein (2000a) και Khoo (2004a) βασίζονται στη χρησιμοποίηση κανόνων ευαισθητοποίησης τύπου  $r$ -από- $m$ . Σύμφωνα με τον κανόνα ευαισθητοποίησης  $r$ -από- $m$  ένα διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από ένα άνω όριο ελέγχου (σύνολο σημείων A) με τα υπόλοιπα  $m-r$  σημεία να βρίσκονται στη συμπληρωματική περιοχή του διαγράμματος (σύνολο σημείων B), ή όταν  $r$  από  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από ένα κάτω όριο ελέγχου (σύνολο σημείων A) με τα υπόλοιπα  $m-r$  σημεία να βρίσκονται στη συμπληρωματική περιοχή του διαγράμματος (σύνολο σημείων B), οποιοδήποτε από τα δύο σύνολα σημείων A εμφανιστεί συντομότερα. Τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν τον παραπάνω κανόνα ως ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας θα τα αποκαλούμε διαγράμματα ελέγχου  $r/m$  και θα συμβολίζονται με  $r/m$  ( $2 \leq r \leq m$ ).

Στο Σχήμα 3.1 δίνουμε παραδείγματα διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου  $r/m$ .

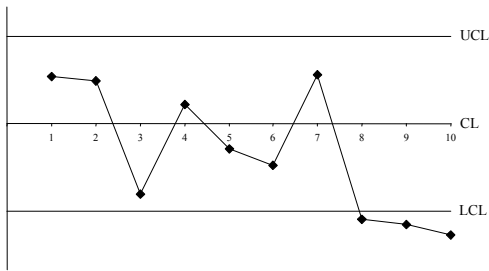
Διεργασία I: Διάγραμμα ελέγχου 2/3



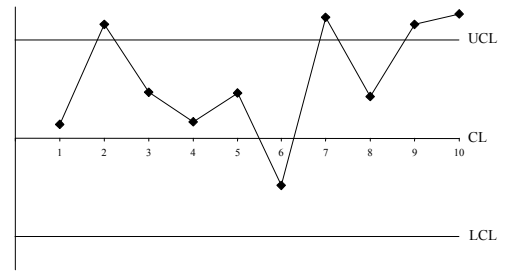
Διεργασία II: Διάγραμμα ελέγχου 2/4



Διεργασία III: Διάγραμμα ελέγχου 3/3



Διεργασία IV: Διάγραμμα ελέγχου 3/4



**Σχήμα 3.1.** Γραφική απεικόνιση των διαγραμμάτων ελέγχου  $r/m$ .

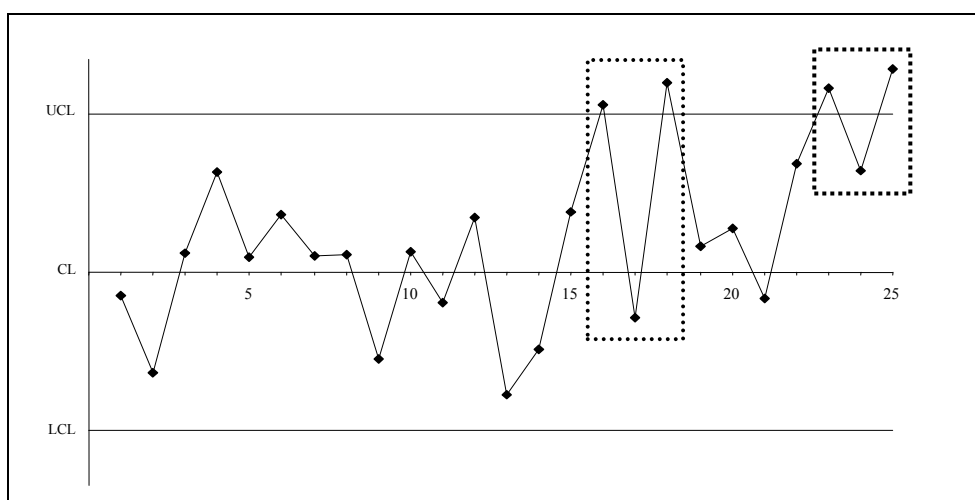
Για τις διεργασίες I, II και IV έχουμε ενδείξεις ότι ο μέσος (για κάθε διεργασία) έχει μετατοπιστεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο, ενώ για τη διεργασία III έχουμε ενδείξεις ότι ο μέσος της διεργασία έχει μετατοπιστεί σε χαμηλότερο επίπεδο. Ωστόσο, υπάρχουν αμφιβολίες στη διεργασία II αν όντως η ένδειξη εκτός ελέγχου που δίνει ο κανόνας αφορά μετατόπιση του μέσου σε υψηλότερο επίπεδο αφού μεταξύ των δύο σημείων που βρίσκονται πέραν του άνω ορίου ελέγχου υπάρχουν 2 σημεία τα οποία βρίσκονται κάτω από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος με το ένα από τα δύο να βρίσκεται κάτω από το κάτω όριο ελέγχου. Θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς πως η συμπεριφορά αυτή των σημείων είναι πιθανό να οφείλεται σε άλλους λόγους, για παράδειγμα σε μεταβολή στη διασπορά της διεργασίας. Φαίνεται λοιπόν λογικό να ορίσουμε κανόνες οι οποίοι λαμβάνουν υπόψη τους την περιοχή του διαγράμματος στην οποία βρίσκονται τα ενδιάμεσα  $m-r$  σημεία (εάν υπάρχουν) σε σχέση με το που βρίσκονται τα  $r$  σημεία. Μια λογική επέκταση αυτού του ισχυρισμού είναι να απαιτήσουμε ότι τα σημεία που απαρτίζουν το σύνολο B να βρίσκονται «κοντά» στα σημεία που απαρτίζουν το σύνολο A.

Ορίζουμε ως τροποποιημένο (δίπλευρο) διάγραμμα ελέγχου  $r$ -από- $m$  ( $r \leq m$ ) και το συμβολίζουμε με  $M:r/m$ , το διάγραμμα το οποίο δίνει σήμα εκτός ελέγχου

διεργασίας όταν είτε « $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από ένα άνω όριο ελέγχου με τα υπόλοιπα  $m-r$  σημεία να βρίσκονται μεταξύ κεντρικής γραμμής και άνω ορίου ελέγχου», είτε « $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από ένα κάτω όριο ελέγχου με τα υπόλοιπα  $m-r$  σημεία να βρίσκονται μεταξύ κεντρικής γραμμής και κάτω ορίου ελέγχου», οτιδήποτε από τα δύο εμφανιστεί συντομότερα. Ο αντίστοιχος κανόνας ευαισθητοποίησης που χρησιμοποιείται από το  $M:r/m$  διάγραμμα ελέγχου καλείται τροποποιημένος  $r$ -από- $m$  κανόνας.

Σημειώνεται πως στην περίπτωση  $r=m$  το διάγραμμα ελέγχου  $M:m/m$  ταυτίζεται με το διάγραμμα  $m/m$  το οποίο έχει μελετηθεί, για διάφορες τιμές του  $m$ , από τους Klein (2000a), Khoo (2004a) και Acosta-Mejia (2007).

Στο Σχήμα 3.2 δίνεται μια γραφική αναπαράσταση διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζονται στον κανόνα ευαισθητοποίησης 2-από-3 και στον τροποποιημένο κανόνα 2-από-3 καθώς και οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις. Το διάγραμμα ελέγχου  $M:2/3$  δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο σημείο 25, ενώ το διάγραμμα ελέγχου  $2/3$  δίνει στο  $18^\circ$  και στο  $25^\circ$ .



**Σχήμα 3.2:** Γραφική απεικόνιση προτεινόμενων κανόνων τύπου 2-από-3.

### 3.3 Τεχνική Τυποποίησης Διαγραμμάτων Ελέγχου για τη Μέση Τιμή

Στην παρούσα παράγραφο εισάγουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της τεχνικής που ακολουθείται για την περιγραφή της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας.

Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία καθορίζει την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και με γνωστή και σταθερή διακύμανση  $\sigma^2$ . Για την παρακολούθηση της μέσης τιμής  $\mu$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$  συλλέγονται σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  στα οποία αντιστοιχούν δειγματικές μέσες τιμές  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ , που ακολουθούν κανονική κατανομή ( $\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ,  $i=1, 2, \dots$ ). Για να αποφασίζουμε μετά τη λήψη κάθε δείγματος εάν η μέση τιμή  $\mu$  της τυχαίας μεταβλητής  $X$  έχει (ή δεν έχει) μετατοπιστεί από την εντός ελέγχου τιμή της, έστω  $\mu_0$ , χρησιμοποιείται ένα τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου ( $L=3$ ). Τα σημεία που απεικονίζονται στο διάγραμμα είναι οι δειγματικοί μέσοι  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ , τα όρια ελέγχου του διαγράμματος είναι τα  $LCL = \mu_0 - 3(\sigma/\sqrt{n})$  και  $UCL = \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n}$ , και η κεντρική γραμμή είναι ίση με  $CL = \mu_0$  (η εντός ελέγχου κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι η  $N(\mu_0, \sigma^2)$  και των δειγματικών μέσων  $\bar{X}_i$  είναι η  $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ ). Πέρα από τη λήψη απόφασης για τη μετατόπιση ή όχι της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  από την εντός ελέγχου τιμή της  $\mu_0$ , μας ενδιαφέρει και ο υπολογισμός του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για κάθε εκτός ελέγχου τιμή  $\mu_1$  της μέσης τιμής ( $\mu_1 \neq \mu_0$ ).

Προκειμένου να “ανεξαρτητοποιήσουμε” το διάγραμμα ελέγχου από το μέγεθος του δείγματος αλλά και από την εκάστοτε εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$ , χρησιμοποιούμε ένα ισοδύναμο τυποποιημένο (*standardized*) διάγραμμα ελέγχου. Σε αυτό απεικονίζονται τα σημεία  $Z_i = \sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu)/\sigma$  ( $i=1, 2, \dots$ ), τα όρια ελέγχου του τυποποιημένου διαγράμματος είναι τα  $LCL = -3$ ,  $UCL = +3$ , και η κεντρική γραμμή του είναι ίση με  $CL = 0$  (η εντός ελέγχου κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $Z_i$  είναι η  $N(0, 1)$ ). Το νέο διάγραμμα ελέγχου ονομάζεται τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα ελέγχου. Είναι προφανές ότι ένα τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου και το αντίστοιχο τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα ελέγχου δίνουν ακριβώς τις ίδιες πληροφορίες αφού σαν σχήματα είναι όμοια (έχουν τις ίδιες αναλογίες σε όλα τα στοιχεία τους).

Μια μετατόπιση της μέσης τιμής από την εντός ελέγχου τιμή της  $\mu_0$  στην εκτός ελέγχου τιμή  $\mu_1$  ( $\mu_1 > \mu_0$ ) κατά  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) μονάδες τυπικής απόκλισης της κατανομής

της  $\bar{X}$  (δηλαδή  $\delta = \sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)/\sigma$ ) στο τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα ελέγχου, ισοδυναμεί με μετατόπιση από την εντός ελέγχου τιμή 0 στην εκτός ελέγχου τιμή  $\delta$  στο τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα ελέγχου. Έτσι ο υπολογισμός του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής προκύπτει από τη σχέση  $ARL_{out} = 1/(1 - \beta)$  με

$$\beta = \Pr(-3 \leq Z \leq 3 | Z \sim N(\delta, 1)).$$

Λόγω της συμμετρικότητας της κανονικής κατανομής η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής παραμένει η ίδια για τις εκτός ελέγχου τιμές  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma/\sqrt{n}$  και  $\mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma/\sqrt{n}$ . Έτσι από εδώ και πέρα για τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής θα εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που η μέση τιμή μετατοπίζεται σε υψηλότερο επίπεδο αφού η ανάλογη μετατόπιση σε χαμηλότερο επίπεδο οδηγεί στην ίδια τιμή. Το τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα ελέγχου εφοδιασμένο με τον κλασικό κανόνα ανακήρυξης εκτός ελέγχου μιας διεργασίας (ένα σημείο πέραν των ορίων ελέγχου) θα το συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής ως 1/1 διάγραμμα ελέγχου και αποτελεί τη βάση σύγκρισης όλων των διαγραμμάτων ελέγχου του παρόντος κεφαλαίου. Ο κανόνας ανακήρυξης εκτός ελέγχου διεργασίας που χρησιμοποιείται από το τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα ελέγχου θα καλείται κανόνας 1-από-1.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται η μέθοδος κατασκευής τριών βασικών τροποποιημένων διαγραμμάτων. Πιο συγκεκριμένα θα μελετηθούν αναλυτικά τα διαγράμματα ελέγχου  $M : m/m$  και  $M : 2/m$ , ενώ ως αντιπρόσωπος της κλάσης όλων των υπόλοιπων τροποποιημένων διαγραμμάτων ελέγχου που προκύπτει από όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς των  $r, m$  θα μελετηθεί το  $M : 3/4$ . Για τη μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου  $M : r/m$  χρησιμοποιείται η μεθοδολογία της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

### 3.4 Κατασκευή του $M : m/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Προκειμένου να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου  $M : m/m$  θεωρούμε ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή  $CL = 0$  και όρια ελέγχου  $UCL, LCL$  συμμετρικά ως προς την κεντρική γραμμή, δηλαδή  $LCL = -UCL$  ( $UCL > 0$ ). Σημειώνουμε ότι το  $M : m/m$  διάγραμμα ελέγχου δεν κάνει χρήση της κεντρικής

γραμμής  $CL$  παρά μόνο των ορίων ελέγχου. Στο διάγραμμα ορίζουμε τρεις περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ των δύο ορίων ελέγχου.

Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.3, στο  $M:m/m$  διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι τυποποιημένες τιμές  $Z$  που ακολουθούν κατανομή  $N(\delta,1)$  (για  $\delta=0$  προκύπτει η εντός ελέγχου κατανομή της  $Z$ ). Η πιθανότητα να βρεθεί ένα απεικονιζόμενο σημείο του διαγράμματος σε καθεμία από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_0(\delta), p_1(\delta), p_2(\delta)$ . Ορισμένες φορές για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς οι πιθανότητες  $p_0(\delta), p_1(\delta), p_2(\delta)$  θα δίνονται ως  $p_0, p_1, p_2$ , αντίστοιχα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_1(\delta) = 1 - \Phi(UCL - \delta), \quad p_2(\delta) = 1 - \Phi(UCL + \delta), \quad p_0(\delta) = 1 - p_1(\delta) - p_2(\delta)$$

( $\Phi(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής).

Έστω τώρα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο σύνολο  $\{0,1,2\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_t = 0) = p_0(\delta), \quad \Pr(Y_t = 1) = p_1(\delta), \quad \Pr(Y_t = 2) = p_2(\delta).$$

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{\underbrace{11\dots 1}_m, \underbrace{22\dots 2}_m\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{m/m}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $M:m/m$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{m/m}$ . Έτσι για να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά του  $M:m/m$  διαγράμματος ελέγχου που απορρέουν από τη μελέτη του μήκους ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{m/m}$ . Η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_{m/m}$  μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 (δείτε επίσης Koutras and Alexandrou (1997)).

Η εφαρμογή της μεθοδολογίας της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα ξεκινά με την αποσύνθεση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  σε υποσχηματισμούς προκειμένου να καθορισθεί ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$ . Έτσι έχουμε

$$"1" \equiv 0, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 11, \quad \dots, \quad "m" \equiv \underbrace{11\dots 1}_{m-1}$$

$$"m+1" \equiv 2, \quad "m+2" \equiv 22, \quad \dots, \quad "2m-1" \equiv \underbrace{22\dots 2}_{m-1}, \quad "2m" \equiv \{\underbrace{11\dots 1}_m, \underbrace{22\dots 2}_m\},$$

οπότε  $\Omega = \{1, 2, \dots, 2m-1, 2m\}$ . Οι καταστάσεις  $1, 2, \dots, 2m-1$  είναι μεταβατικές ενώ η κατάσταση  $2m$  είναι απορροφητική. Το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [p_0, p_1, 0, \dots, 0, p_2, 0, \dots, 0, 0]_{1 \times 2m}$$

όπου η πιθανότητα  $p_2$  βρίσκεται στην  $(m+1)$ -συνιστώσα του  $\boldsymbol{\pi}$ , ενώ μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{cccccc|cccc} p_0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & p_1 & \dots & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ p_0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)_{(2m) \times (2m)}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.10), και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, βρίσκουμε ότι τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{m/m}$  δίνεται από τον τύπο

$$E(T_{m/m} | \delta) = \frac{1}{p_1 + p_2 + \frac{p_1 - p_1^m}{1 - p_1^m} + \frac{p_2 - p_2^m}{1 - p_2^m}}. \quad (3.1)$$

Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ( $\delta = 0$ , οπότε  $p_1 = p_2 = p$ ), ο τύπος (3.1) ανάγεται στον ακόλουθο

$$E(T_{m/m} | \delta = 0) = \frac{1 - p^m}{2p^m(1 - p)}, \quad p = 1 - \Phi(UCL). \quad (3.2)$$

Η σχέση (3.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του  $M : m/m$  διαγράμματος ελέγχου με την προϋπόθεση ότι



είναι γνωστό το  $UCL$ . Αντίστροφα, αν θέλουμε να έχουμε προκαθορισμένο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, η σχέση (3.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $UCL$ . Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή των διακριτών βημάτων που απαιτούνται για την κατασκευή του  $M : m/m$  διαγράμματος ελέγχου.

---

#### Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του $M : m/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

---

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο  $m$  ( $m \geq 2$ ) και την επιθυμητή τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής

**Βήμα 2:** Θέτουμε  $ARL_{in} = (1 - p^m)/(2p^m(1 - p)) = c$ .

**Βήμα 3:** Βρίσκουμε τη μοναδική ρίζα  $p$  της εξίσωσης  $(1 - p^m)/(2p^m(1 - p)) = c$  στο διάστημα  $(0, 1/2)$ .

**Βήμα 4:** Θέτουμε  $UCL = z_p$  και  $LCL = -z_p$ .

**Βήμα 5:** Ακολουθούμε τον τροποποιημένο  $m$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

---

Προτού κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση  $f(p) = (1 - p^m)/(2p^m(1 - p))$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $p$  στο διάστημα  $(0, 1/2)$ . Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{p \rightarrow 0} f(p) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1/2} f(p) = 2^m - 1.$$

Συνεπώς λύση ως προς  $p$  της εξίσωσης του Βήματος 3 υπάρχει μόνο όταν  $c \geq 2^m - 1$ .

### 3.5 Κατασκευή του $M : 2/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσσουμε το διάγραμμα ελέγχου  $M : 2/m$ . Έστω ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή  $CL = 0$  και όρια ελέγχου  $UCL$ ,  $LCL$  συμμετρικά ως προς την κεντρική γραμμή, δηλαδή  $LCL = -UCL$  ( $UCL > 0$ ). Σε αντίθεση με το  $M : m/m$  διάγραμμα ελέγχου, το  $M : 2/m$  διάγραμμα ελέγχου κάνει χρήση της κεντρικής γραμμής  $CL$ . Στο διάγραμμα ορίζουμε τέσσερις περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής, την Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του κάτω ορίου ελέγχου και της

κεντρικής γραμμής και την Περιοχή 4 ( $\Pi_4$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.3, στο  $M:2/m$  διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι τυποποιημένες τιμές  $Z$  που ακολουθούν κατανομή  $N(\delta,1)$  (για  $\delta=0$  προκύπτει η εντός ελέγχου κατανομή της  $Z$ ). Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τέσσερις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\delta), p_2(\delta), p_3(\delta), p_4(\delta)$ . Ορισμένες φορές για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς οι πιθανότητες  $p_1(\delta), p_2(\delta), p_3(\delta), p_4(\delta)$  θα δίνονται ως  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , αντίστοιχα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_1(\delta) = 1 - \Phi(UCL - \delta), \quad p_2(\delta) = \Phi(UCL - \delta) - \Phi(CL - \delta),$$

$$p_3(\delta) = \Phi(CL - \delta) + \Phi(UCL + \delta) - 1, \quad p_4(\delta) = 1 - p_1(\delta) - p_2(\delta) - p_3(\delta).$$

Έστω τώρα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_t = 1) = p_1(\delta), \quad \Pr(Y_t = 2) = p_2(\delta), \quad \Pr(Y_t = 3) = p_3(\delta), \quad \Pr(Y_t = 4) = p_4(\delta).$$

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{11, 121, \dots, \underbrace{12 \dots 21}_{m-2}, 44, 434, \dots, \underbrace{43 \dots 34}_{m-2}\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{2/m}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $M:2/m$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}$ . Προκειμένου να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά της κατανομής του μήκους ροής του  $M:2/m$  διαγράμματος ελέγχου αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{2/m}$ . Η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}$  μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσής της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Αποσυνθέτοντας το σύνθετο ενδεχόμενο  $\mathcal{E}$  σε υποσχηματισμούς έχουμε

$$"1" \equiv \{2, 3\}, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 12, \quad \dots, \quad "m" \equiv \underbrace{12\dots 2}_{m-2}$$

$$"m+1" \equiv 4, \quad "m+2" \equiv 43, \quad \dots, \quad "2m-1" \equiv \underbrace{43\dots 3}_{m-2},$$

$$"2m" \equiv \{11, 121, \dots, \underbrace{12\dots 21}_{m-2}, 44, 434, \dots, \underbrace{43\dots 34}_{m-2}\},$$

οπότε  $\Omega = \{1, 2, \dots, 2m-1, 2m\}$ . Οι καταστάσεις  $1, 2, \dots, 2m-1$  είναι μεταβατικές ενώ η κατάσταση  $2m$  είναι απορροφητική. Το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [p_2 + p_3, p_1, 0, \dots, 0, p_4, 0, \dots, 0, 0]_{1 \times 2m}$$

όπου η πιθανότητα  $p_4$  βρίσκεται στην  $(m+1)$ -συνιστώσα του  $\boldsymbol{\pi}$ , ενώ μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{I}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} p_2 + p_3 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & p_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & p_4 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ p_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_4 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_4 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2m) \times (2m)}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.10) είναι δυνατό να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}$  για οποιαδήποτε τιμή του  $m$ . Για  $\delta \neq 0$  δεν είναι εύκολο να βρεθεί γενικός αναλυτικός τύπος της μέσης τιμής. Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ( $\delta = 0$  οπότε  $p_1 = p_4 = p$ ,  $p_2 = p_3 = q = 1/2 - p$ ) η εντός ελέγχου μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}$  δίνεται από τον τύπο

$$E(T_{2/m} | \delta = 0) = \frac{8p^2 - 2p - 1 + 4p \left( \frac{1}{2} - p \right)^m}{4p^2 \left( 2p - 1 + 2 \left( \frac{1}{2} - p \right)^m \right)}, \quad p = 1 - \Phi(UCL) \quad (3.3)$$

Η σχέση (3.3) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του  $M:2/m$  διαγράμματος ελέγχου με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστό το  $UCL$ . Αντίστροφα, αν θέλουμε να έχουμε προκαθορισμένο εντός ελέγχου

μέσο μήκος ροής, η σχέση (3.3) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του  $UCL$ . Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή των διακριτών βημάτων που απαιτούνται για την κατασκευή του  $M : 2/m$  διαγράμματος ελέγχου.

---

### Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του $M : 2/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

---

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο  $m$  ( $m \geq 2$ ) και την επιθυμητή τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής

**Βήμα 2:** Θέτουμε

$$ARL_{in} = \frac{2^{m+3} p^2 - 2^{m+1} p - 2^m + 4p(1-2p)^m}{4p^2(2^{m+1} p - 2^m + 2(1-2p)^m)} = c.$$

**Βήμα 3:** Βρίσκουμε τη μοναδική ρίζα  $p$  της εξίσωσης

$$\frac{2^{m+3} p^2 - 2^{m+1} p - 2^m + 4p(1-2p)^m}{4p^2(2^{m+1} p - 2^m + 2(1-2p)^m)} = c$$

στο διάστημα  $(0, 1/2)$ .

**Βήμα 4:** Θέτουμε  $UCL = z_p$  και  $LCL = -z_p$ .

**Βήμα 5:** Ακολουθούμε τον τροποποιημένο 2-από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

---

Προτού κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση

$$g(p) = \frac{2^{m+3} p^2 - 2^{m+1} p - 2^m + 4p(1-2p)^m}{4p^2(2^{m+1} p - 2^m + 2(1-2p)^m)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $p$  στο διάστημα  $(0, 1/2)$ . Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1/2} g(p) = 3.$$

Συνεπώς, λύση ως προς  $p$  της εξίσωσης του Βήματος 3 υπάρχει για όλες τις επιθυμητές τιμές του  $c$  αφού στην πράξη  $c \gg 3$ .

### 3.6 Κατασκευή του $M : 3/4$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται η ανάπτυξη του διαγράμματος ελέγχου  $M : 3/4$  η οποία είναι αντιπροσωπευτική για την ανάπτυξη όλων των διαγραμμάτων ελέγχου  $M : r/m$  ( $r \neq 2, r < m$ ). Έστω ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή

$CL=0$  και όρια ελέγχου  $UCL$ ,  $LCL$  συμμετρικά ως προς την κεντρική γραμμή, δηλαδή  $LCL = -UCL$  ( $UCL > 0$ ). Όπως το διάγραμμα ελέγχου  $M : 2/m$  έτσι και το  $M : 3/4$  διάγραμμα ελέγχου κάνει χρήση της κεντρικής γραμμής  $CL$ . Στο διάγραμμα ορίζουμε τέσσερις περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής, την Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του κάτω ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής και την Περιοχή 4 ( $\Pi_4$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου.

Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τέσσερις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\delta)$ ,  $p_2(\delta)$ ,  $p_3(\delta)$ ,  $p_4(\delta)$  και όπου κριθεί απαραίτητο αυτές οι πιθανότητες θα δίνονται ως  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  αντίστοιχα. Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε σε προηγούμενες παραγράφους είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_1(\delta) = 1 - \Phi(UCL - \delta), \quad p_2(\delta) = \Phi(UCL - \delta) - \Phi(CL - \delta),$$

$$p_3(\delta) = \Phi(CL - \delta) + \Phi(UCL + \delta) - 1, \quad p_4(\delta) = 1 - p_1(\delta) - p_2(\delta) - p_3(\delta).$$

Έστω  $\{Y_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_t = 1) = p_1(\delta), \quad \Pr(Y_t = 2) = p_2(\delta), \quad \Pr(Y_t = 3) = p_3(\delta), \quad \Pr(Y_t = 4) = p_4(\delta).$$

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{111, 1211, 1121, 444, 4344, 4434\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{3/4}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $M : 3/4$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{3/4}$ . Προκειμένου να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά του  $M : 3/4$  διαγράμματος ελέγχου που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{3/4}$ . Όπως και στην περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών  $T_{m/m}$  και  $T_{2/m}$ , η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_{3/4}$  μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Αποσυνθέτοντας το σύνθετο σχηματισμό  $\mathcal{E}$  σε υποσχηματισμούς έχουμε

"1"  $\equiv$  {2,3}, "2"  $\equiv$  1, "3"  $\equiv$  11, "4"  $\equiv$  12, "5"  $\equiv$  121, "6"  $\equiv$  112, "7"  $\equiv$  4,  
 "8"  $\equiv$  44, "9"  $\equiv$  43, "10"  $\equiv$  434, "11"  $\equiv$  443, "12"  $\equiv$  {111,1211,1121,444,4344,4434},  
 οπότε  $\Omega = \{1,2,\dots,11,12\}$ . Οι καταστάσεις 1, 2, ..., 11 είναι μεταβατικές ενώ η  
 κατάσταση 12 είναι απορροφητική. Το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [p_2 + p_3, p_1, 0, 0, 0, 0, p_4, 0, 0, 0, 0, 0]_{1 \times 12}$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & p_1 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & p_3 & 0 & 0 & | & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & | & p_4 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & | & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & | & p_4 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.10) είναι δυνατό να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{3/4}$ . Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ( $\delta = 0$  οπότε  $p_1 = p_4 = p$ ,  $p_2 = p_3 = q = 1/2 - p$ ) η εντός ελέγχου μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{3/4}$  ισούται με

$$E(T_{3/4} | \delta = 0) = \frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)}, \quad p = 1 - \Phi(UCL). \quad (3.4)$$

Η σχέση (3.4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του  $M : 3/4$  διαγράμματος ελέγχου με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστό το  $UCL$ . Αντίστροφα, αν θέλουμε να έχουμε προκαθορισμένο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, η σχέση (3.4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $UCL$ . Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή των διακριτών βημάτων που απαιτούνται για την κατασκευή του  $M : 3/4$  διαγράμματος ελέγχου.

---

### Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του $M : 3 / 4$ Διαγράμματος Ελέγχου

---

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε την επιθυμητή τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής

**Βήμα 2:** Θέτουμε

$$ARL_{in} = \frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)} = c.$$

**Βήμα 3:** Βρίσκουμε τη μοναδική ρίζα  $p$  της εξίσωσης

$$\frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)} = c$$

στο διάστημα  $(0, 1/2)$ .

**Βήμα 4:** Θέτουμε  $UCL = z_p$  και  $LCL = -z_p$ .

**Βήμα 5:** Ακολουθούμε τον τροποποιημένο 3-από-4 κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

---

Προτού κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση

$$h(p) = \frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $p$  στο διάστημα  $(0, 1/2)$  Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1/2} g(p) = 7.$$

Συνεπώς λύση ως προς  $p$  της εξίσωσης του Βήματος 3 υπάρχει για όλες τις επιθυμητές τιμές του  $c$  αφού στην πράξη  $c \gg 7$ .

### 3.7 Μέσο Μήκος Ροής του $M : r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάσαμε το γενικό πλαίσιο κατασκευής των διαγραμμάτων ελέγχου  $M : m/m$ ,  $M : 2/m$  και  $M : 3/4$ . Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται οποιοδήποτε διάγραμμα ελέγχου  $M : r/m$ . Ας συμβολίσουμε ως  $T_{r/m}$  την τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μήκος ροής του διαγράμματος ελέγχου  $M : r/m$ . Γενικά δεν είναι δυνατό να βρεθούν εύχρηστοι αναλυτικοί τύποι για τη μέση τιμή αυτής για οποιεσδήποτε τιμές των θετικών ακεραίων  $r$ ,  $m$  ( $2 \leq r < m$ ) ακόμη και για εντός ελέγχου διεργασίες ( $\delta = 0$ ). Σε αυτές τις

περιπτώσεις αρκούμαστε στη χρήση της σχέσης (2.10) της Παραγράφου 2.5 για υπολογισμούς.

Στον Πίνακα 3.1 δίνεται η εντός ελέγχου μέση τιμή  $E(T_{r/m} | \delta = 0)$  της τυχαίας μεταβλητής  $T_{r/m}$  στις ειδικές περιπτώσεις  $r = m$  και  $r = 2$  καθώς και στις περιπτώσεις  $3 \leq r < m \leq 5$ . Οι χώροι καταστάσεων  $\Omega$ , τα διανύσματα αρχικών πιθανοτήτων και οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης για τα διαγράμματα  $M : 3/5$  και  $M : 4/5$  δίνονται στο Παράρτημα Π.3.

**Πίνακας 3.1:** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για τα διαγράμματα ελέγχου  $M : r / m$

$M : r / m$	$E(T_{r/m}   \delta = 0), p = 1 - \Phi(UCL), 0 < p < 1/2$
$m / m$	$\frac{1 - p^m}{2p^m(1 - p)}$
$M : 2 / m$	$\frac{8p^2 - 2p - 1 + 4p\left(\frac{1}{2} - p\right)^m}{4p^2\left(2p - 1 + 2\left(\frac{1}{2} - p\right)^m\right)}$
$M : 3 / 4$	$\frac{4p^5 - 8p^4 + 7p^3 - 6p^2 - 4p - 4}{2p^3(4p^3 - 8p^2 + 11p - 8)}$
$M : 3 / 5$	$\frac{32p^9 - 112p^8 + 144p^7 - 40p^6 - 78p^5 + 129p^4 - 142p^3 + 48p^2 + 48p + 32}{2p^2(32p^7 - 112p^6 + 144p^5 - 72p^4 - 30p^3 + 137p^2 - 170p + 88)}$
$M : 4 / 5$	$\frac{8p^9 - 20p^8 + 14p^7 - 11p^6 + 16p^5 - 22p^4 + 8p^3 + 12p^2 + 8p + 8}{2p^4(8p^6 - 20p^5 + 22p^4 - 19p^3 + 18p^2 - 30p + 20)}$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $M : 3/5$  και  $M : 4/5$  αποτελεί φθίνουσα συνάρτηση του  $p$  ενώ ισχύει ότι

$$\lim_{p \rightarrow 0} E(T_{3/5} | \delta = 0) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1/2} E(T_{3/5} | \delta = 0) = 7$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} E(T_{4/5} | \delta = 0) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1/2} E(T_{4/5} | \delta = 0) = 15.$$

Στη συνέχεια δίνεται η (γενική) αλγοριθμική περιγραφή της κατασκευής ενός  $M : r / m$  διαγράμματος ελέγχου.



---

### Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του $M : r / m$ Διαγράμματος Ελέγχου

---

- Βήμα 1:** Επιλέγουμε τις τιμές των θετικών ακεραίων  $r, m$  ( $2 \leq r \leq m$ ) και την επιθυμητή τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής
- Βήμα 2:** Θέτουμε  $ARL_{in} = E(T_{r/m} | \delta = 0) = c$ .
- Βήμα 3:** Βρίσκουμε τη μοναδική ρίζα  $p$  της εξίσωσης  $E(T_{r/m} | \delta = 0) = c$  στο διάστημα  $(0, 1/2)$ .
- Βήμα 4:** Θέτουμε  $UCL = z_p$  και  $LCL = -z_p$ .
- Βήμα 5:** Ακολουθούμε τον τροποποιημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.
- 

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι στην ειδική περίπτωση που τα όρια ελέγχου  $UCL, LCL$  ταυτίζονται με την κεντρική γραμμή  $CL$  το διάγραμμα που θα προκύψει δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $r$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από την κεντρική γραμμή  $CL$ . Το διάγραμμα αυτό δε χρησιμοποιεί όρια ελέγχου και στη βιβλιογραφία αναφέρεται συνήθως ως διάγραμμα ροής (*run chart*, δείτε π.χ. Chambers et al. (1983)). Επίσης, για εντός ελέγχου διεργασία η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο πάνω (ή κάτω) από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος  $M : r / m$  είναι  $1/2$ , συνεπώς λύση ως προς  $p$  της εξίσωσης του Βήματος 3 υπάρχει μόνο όταν  $c \geq 2^r - 1$ .

Ακολουθώντας την παραπάνω αλγοριθμική διαδικασία είναι δυνατή η κατασκευή διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου  $M : r / m$  και η μελέτη της απόδοσης. Αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης αυτής δίνονται στην επόμενη παράγραφο.

### 3.8 Απόδοση του $M : r / m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στη παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε την απόδοση των διαγραμμάτων  $M : r / m$  με  $2 \leq r \leq m \leq 5$ . Στον Πίνακα 3.2 δίνουμε τις τιμές για το  $ARL$  καθώς και τα όρια ελέγχου για τα διάφορα διαγράμματα ελέγχου  $M : r / m$ . Ειδικότερα, υπολογίζεται η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου  $M : m / m$ ,  $m = 1(1)5$  και  $M : r / m$ ,  $2 \leq r < m \leq 5$ , καθώς επίσης και η απόδοση των αντίστοιχων  $r / m$  διαγραμμάτων ελέγχου ώστε να υπάρχει άμεση σύγκριση μεταξύ των  $M : r / m$  διαγραμμάτων και των  $r / m$  διαγραμμάτων που προτάθηκαν από τους Klein (2000a) και Khoo (2004a).

Θυμίζουμε ότι το διάγραμμα ελέγχου  $M : m / m$  ταυτίζεται με το διάγραμμα ελέγχου  $m / m$  και για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς θα το συμβολίζουμε ως  $m / m$ . Η τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής έχει τεθεί ίση με 370.4 ώστε να συμπίπτει με την τιμή του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος. Οι εκτός ελέγχου τιμές του μέσου της διεργασίας κυμαίνονται από μηδέν έως τέσσερις μονάδες τυπικής απόκλισης. Η μικρότερη τιμή για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής σημειώνεται με έντονη γραμματοσειρά.

Επίσης, επειδή η αποκλειστική χρήση του  $ARL$  ως μέτρο απόδοσης των διαγραμμάτων έχει δεχθεί ισχυρή κριτική (δείτε Παράγραφο 1.5), λόγω της μη-συμμετρίας της κατανομής του μήκους ροής (λοξή προς τα δεξιά), στον Πίνακα 3.2 δίνεται (σε παρένθεση) και η τυπική απόκλιση αυτής. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (2.10).

Αποτελέσματα για  $ARL_{in} = 500$  και  $ARL_{in} = 1000$  δίνονται στο Παράρτημα Π.4.

**Πίνακας 3.2.** Τιμές του  $ARL$  και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα  $m/m$  και  $M:r/m$  ( $ARL_{in} = 370.40$ )

	1/1	2/2	M: 2/3	2/3	3/3	M: 2/4	2/4	M: 3/4	3/4	4/4	M: 2/5	M: 3/5	M: 4/5	5/5
	Όρια Ελέγχου													
$\delta$	$\pm 3$	$\pm 1.781$	$\pm 1.866$	$\pm 1.929$	$\pm 1.2$	$\pm 1.897$	$\pm 2.011$	$\pm 1.312$	$\pm 1.393$	$\pm 0.832$	$\pm 1.91$	$\pm 1.358$	$\pm 0.949$	$\pm 0.568$
0.0	370.40 (369.90)	370.40 (368.94)	370.40 (368.63)	370.40 (368.47)	370.40 (368.03)	370.40 (368.04)	370.40 (368.43)	370.40 (367.61)	370.40 (367.44)	370.40 (367.13)	370.40 (368.28)	370.40 (367.30)	370.40 (366.68)	370.40 (366.27)
0.2	308.43 (307.93)	276.67 (275.22)	264.79 (263.03)	270.10 (268.20)	259.30 (256.96)	257.81 (264.64)	266.96 (255.82)	243.10 (240.35)	248.65 (245.76)	248.54 (245.34)	253.39 (251.24)	233.55 (230.48)	<b>231.24</b> (227.61)	241.32 (237.28)
0.4	200.10 (199.58)	150.25 (148.82)	134.92 (133.18)	141.61 (139.78)	129.55 (127.26)	126.61 (135.58)	137.81 (124.63)	112.01 (109.34)	117.78 (115.01)	118.70 (115.96)	121.52 (119.35)	102.82 (99.83)	<b>101.68</b> (98.18)	112.26 (108.37)
0.6	119.67 (119.16)	78.91 (77.51)	67.89 (66.18)	72.64 (70.86)	65.25 (63.02)	62.24 (67.99)	70.12 (60.29)	53.79 (51.21)	57.48 (54.83)	58.99 (55.98)	58.85 (56.70)	<b>48.26</b> (45.37)	48.34 (44.98)	55.71 (51.95)
0.8	71.55 (71.05)	43.63 (42.25)	36.64 (34.97)	39.64 (37.92)	35.76 (33.59)	33.22 (36.15)	38.18 (31.33)	28.83 (26.34)	31.04 (28.49)	32.63 (29.71)	31.21 (29.12)	<b>25.71</b> (22.93)	26.28 (23.03)	31.28 (27.63)
1.0	43.90 (43.39)	25.78 (24.42)	21.44 (18.82)	23.30 (21.64)	21.45 (19.34)	19.42 (20.57)	22.50 (17.59)	17.23 (14.82)	18.57 (16.11)	20.06 (17.20)	18.26 (16.25)	<b>15.46</b> (12.78)	16.18 (13.03)	19.72 (16.13)
1.2	27.82 (27.32)	16.28 (19.94)	13.56 (11.99)	14.73 (13.12)	14.00 (11.92)	12.37 (12.45)	14.30 (10.60)	11.36 (9.00)	12.18 (9.80)	13.54 (10.73)	11.70 (9.77)	<b>10.32</b> (7.72)	11.09 (7.98)	13.72 (10.18)
1.4	18.25 (17.74)	10.94 (9.62)	9.21 (7.67)	9.96 (8.40)	9.85 (7.79)	8.49 (7.97)	9.74 (6.78)	8.14 (5.82)	8.67 (6.33)	9.91 (7.11)	8.11 (6.25)	<b>7.53</b> (4.98)	8.30 (5.20)	10.37 (6.82)
1.6	12.38 (11.87)	7.79 (6.48)	6.67 (5.15)	7.16 (5.63)	7.41 (5.35)	6.23 (5.34)	7.06 (4.56)	6.26 (3.95)	6.62 (4.28)	7.77 (4.95)	6.02 (4.21)	<b>5.90</b> (3.37)	6.67 (3.55)	8.39 (4.80)
1.8	8.70 (8.18)	5.85 (4.54)	5.10 (3.60)	5.43 (3.92)	5.89 (3.82)	4.84 (3.72)	5.40 (3.19)	5.11 (2.78)	5.35 (3.01)	6.44 (3.58)	<b>4.72</b> (2.96)	4.91 (2.36)	5.69 (2.50)	7.16 (3.49)
2.0	6.30 (5.78)	4.61 (3.29)	4.10 (2.60)	4.33 (2.82)	4.92 (2.81)	3.95 (2.67)	4.33 (2.31)	4.38 (2.01)	4.55 (2.17)	5.59 (2.66)	<b>3.89</b> (2.15)	4.27 (1.70)	5.07 (1.80)	6.38 (2.60)
2.2	4.70 (4.19)	3.79 (2.45)	3.44 (1.93)	3.60 (2.09)	4.28 (2.12)	3.35 (1.97)	3.62 (1.71)	3.91 (1.47)	4.02 (1.59)	5.03 (2.01)	<b>3.33</b> (1.61)	3.85 (1.26)	4.67 (1.31)	5.87 (1.97)
2.4	3.65 (3.11)	3.23 (1.87)	2.99 (1.45)	3.10 (1.57)	3.85 (1.63)	2.95 (1.49)	3.14 (1.30)	3.59 (1.10)	3.68 (1.18)	4.66 (1.54)	<b>2.94</b> (1.24)	3.57 (0.95)	4.42 (0.96)	5.54 (1.50)
2.6	2.90 (2.35)	2.85 (1.45)	2.68 (1.11)	2.76 (1.20)	3.56 (1.26)	2.66 (1.14)	2.80 (1.00)	3.39 (0.82)	3.44 (0.88)	4.42 (1.19)	<b>2.66</b> (0.97)	3.38 (0.72)	4.26 (0.70)	5.33 (1.15)
2.8	<b>2.38</b> (1.81)	2.58 (1.13)	2.47 (0.86)	2.52 (0.93)	3.36 (0.98)	2.46 (0.89)	2.56 (0.79)	3.25 (0.62)	3.29 (0.66)	4.26 (0.91)	2.46 (0.77)	3.25 (0.56)	4.16 (0.52)	5.20 (0.87)
3.0	<b>2.00</b> (1.41)	2.39 (0.89)	2.32 (0.67)	2.36 (0.72)	3.23 (0.76)	2.32 (0.70)	2.39 (0.62)	3.16 (0.46)	3.18 (0.50)	4.16 (0.70)	2.32 (0.62)	3.16 (0.44)	4.09 (0.38)	5.11 (0.66)
3.5	<b>1.45</b> (0.80)	2.14 (0.24)	2.11 (0.36)	2.13 (0.39)	3.07 (0.40)	2.12 (0.35)	2.15 (0.40)	3.05 (0.23)	3.05 (0.25)	4.04 (0.34)	2.12 (0.36)	3.05 (0.23)	4.02 (0.17)	5.03 (0.31)
4.0	<b>1.19</b> (0.47)	2.04 (0.07)	2.03 (0.19)	2.04 (0.20)	3.02 (0.19)	2.04 (0.19)	2.05 (0.22)	3.01 (0.11)	3.01 (0.12)	4.01 (0.15)	2.04 (0.20)	3.01 (0.11)	4.00 (0.07)	5.00 (0.13)

Από τον Πίνακα 3.2 (αλλά και από τους αντίστοιχους πίνακες στο Παράρτημα Π.4) προκύπτει ότι τα διαγράμματα  $M:r/m$  έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση από τα αντίστοιχα διαγράμματα  $r/m$  των Klein (2000a) και Khoo (2004a). Για μετατοπίσεις μέχρι 2.6 μονάδων τυπικής απόκλισης το διάγραμμα  $M:r/5$ ,  $m=2,3,4$ , έχει την καλύτερη απόδοση (ως προς την τιμή του  $ARL$ ) έναντι του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος (στήλη «1/1»). Αν και τα διαγράμματα των Klein (2000a) και Khoo (2004a) είναι πιο ευαίσθητα έναντι του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων, εντούτοις οι τιμές του  $ARL_{out}$  είναι μεγαλύτερες (για το ίδιο  $\delta$ ) έναντι των αντίστοιχων τιμών για τα διαγράμματα  $M:r/m$ .

Από τη μελέτη του Khoo (2004a) προέκυψε ότι για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας τα καλύτερα αποτελέσματα δίνει το διάγραμμα ελέγχου 3/4 ενώ για μεσαίες μετατοπίσεις προτείνεται το διάγραμμα ελέγχου 2/3. Γίνεται φανερό πως όσο αυξάνει το μήκος  $m$  ενός κανόνα  $M:r/m$  (ή  $r/m$ ) τόσο περισσότερο θα αυξάνει η ευαισθησία του αντίστοιχου διαγράμματος ειδικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας.

Η επιλογή του καταλληλότερου διαγράμματος θα πρέπει κάθε φορά να γίνεται σε σχέση με τις ανάγκες που πρόκειται να καλύψει το διάγραμμα. Ειδικότερα, αφού επιλεγεί η τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής μπορούμε βάσει της μετατόπισης στην τιμή του μέσου που θέλουμε να ανιχνεύσουμε να επιλέξουμε αυτό με τη μικρότερη τιμή του  $ARL_{out}$ . Για την ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας το διάγραμμα  $M:r/5$ , για κατάλληλη τιμή του  $r$ , είναι προτιμότερο έναντι του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος. Ωστόσο, για μετατοπίσεις μεγαλύτερες των 2.6 μονάδων τυπικής απόκλισης το τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα παραμένει η καλύτερη επιλογή λαμβάνοντας υπόψη και την απλότητα στην εφαρμογή και ερμηνεία του.

Από τις τιμές της τυπικής απόκλισης που δίνονται στον Πίνακα 3.2 παρατηρούμε ότι για μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας έως και 0.6 μονάδων τυπικής απόκλισης αυτές είναι σχεδόν ίσες με την αντίστοιχη τιμή του  $ARL$  ενώ όσο αυξάνει η τιμή της μετατόπισης μειώνεται η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής. Ειδικά στα διαγράμματα  $M:r/m$  η μείωση αυτή είναι εμφανής. Επιπλέον, η κατανομή του μήκους ροής για τον κανόνα με τη μικρότερη τιμή  $ARL_{out}$  έχει ταυτόχρονα και τη μικρότερη τυπική απόκλιση για τη δεδομένη μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας.

Ο ακόλουθος πίνακας μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερος χρήσιμος στην πράξη προκειμένου να επιλεγεί το καταλληλότερο διάγραμμα για την ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας.

**Πίνακας 3.3.** Προτεινόμενα  $M : r / m$  διαγράμματα ελέγχου ( $ARL_{in} = 370.40$ ).

$\delta$	$ARL$ 1/1	$ARL$ $M : r / m$	Διάγραμμα ελέγχου	Όρια Ελέγχου
0.0	370.40	370.40		
0.2	308.43	231.24	$M : 4 / 5$	$\pm 0.949$
0.4	200.10	101.68		
0.6	119.67	48.26		
0.8	71.55	25.71	$M : 3 / 5$	$\pm 1.358$
1.0	43.90	15.46		
1.2	27.82	10.32		
1.4	18.25	7.53		
1.6	12.38	5.90		
1.8	8.70	4.72	$M : 2 / 5$	$\pm 1.910$
2.0	6.30	3.89		
2.2	4.70	3.33		
2.4	3.65	2.94		
2.6	2.90	2.66		

Στην 3<sup>η</sup> στήλη του πίνακα δίνεται η μικρότερη τιμή για το  $ARL_{out}$  για δεδομένη μετατόπιση του μέσου της διεργασίας, στην 4<sup>η</sup> το προτεινόμενο διάγραμμα καθώς και τα όρια ελέγχου αυτού (στήλη 5). Για λόγους σύγκρισης δίνουμε στη 2<sup>η</sup> στήλη και τις τιμές του  $ARL$  για το τυπικό  $\bar{X}$  διάγραμμα.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η κατανομή του μήκους ροής για τα διαγράμματα ελέγχου  $M : r / m$  είναι αρκετά λοξή αφού εμφανίζει δεξιά ουρά η οποία φθίνει με αργό ρυθμό για μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας. Έτσι, για την αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος έχει προταθεί η χρησιμοποίηση όλων των διαθέσιμων πληροφοριών που μπορούμε να αντλήσουμε από την κατανομή του μήκους ροής. Στην πράξη είναι χρήσιμο να δίνονται και τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος (δείτε Palm (1990), Shmueli and Cohen (2003)). Στον Πίνακα 3.4 δίνονται τα πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο (στήλες  $Q_1$ ,  $Q_3$  αντίστοιχα) καθώς και η διάμεσος (στήλη  $M$ ) της κατανομής του μήκους ροής για τα διαγράμματα  $M : r / 5$ ,  $r = 2, 3, 4$ , όταν η τιμή του  $ARL_{in}$  είναι

370.4. Θυμίζουμε ότι τα διαγράμματα  $M : r/5$ ,  $r = 2, 3, 4$  έδωσαν την ελάχιστη τιμή  $ARL_{out}$  μεταξύ των εξεταζόμενων διαγραμμάτων. Για μετατοπίσεις μεγαλύτερες των δύο τυπικών αποκλίσεων η τιμή του  $Q_1$  ταυτίζεται με την τιμή του  $r$ . Για περισσότερες εφαρμογές κυρίως στη χρήση των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής ως μέτρο απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου παραπέμπουμε στην εργασία του Palm (1990). Στο Παράρτημα Π.5 δίνονται αντίστοιχοι πίνακες όταν  $ARL_{in} = 500, 1000$ .

**Πίνακας 3.4.** Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το  $ARL$  για τα διαγράμματα  $M : r/5$ ,  $r = 2, 3, 4$  ( $ARL_{in} = 370.4$ ).

$\delta$	Ποσοστιαία Σημεία											
	$ARL$			$Q_1$			$M$			$Q_3$		
	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5
0.0	370.40	370.40	370.40	108	109	109	257	258	258	513	512	512
0.2	253.30	233.55	231.24	74	69	69	176	163	161	350	323	319
0.4	121.52	102.82	101.68	37	32	32	85	72	72	168	141	140
0.6	58.85	48.26	48.34	18	16	16	41	34	35	81	66	66
0.8	31.21	25.71	26.28	10	9	10	22	19	19	42	35	35
1.0	18.26	15.46	16.18	7	6	7	13	11	12	25	20	21
1.2	11.70	10.32	11.09	5	5	5	9	8	9	15	13	14
1.4	8.11	7.53	8.30	4	4	5	6	6	6	11	9	10
1.6	6.02	5.90	6.67	3	4	4	5	5	5	8	7	8
1.8	4.72	4.91	5.69	3	3	4	4	4	5	6	5	6
2.0	3.89	4.27	5.07	2	3	4	3	4	4	5	5	5
2.2	3.33	3.85	4.67	2	3	4	3	3	4	4	4	5
2.4	2.94	3.57	4.42	2	3	4	3	3	4	3	4	5
2.6	2.66	3.38	4.26	2	3	4	2	3	4	3	4	4
2.8	2.46	3.25	4.16	2	3	4	2	3	4	3	3	4
3.0	2.32	3.16	4.09	2	3	4	2	3	4	3	3	4
3.5	2.12	3.05	4.02	2	3	4	2	3	4	2	3	4
4.0	2.04	3.01	4.00	2	3	4	2	3	4	2	3	4

### 3.9 Ο Αναθεωρημένος $r$ -από- $m$ Κανόνας Ευαισθητοποίησης

Μια λογική επέκταση του διαγράμματος  $M : r/m$  θα ήταν να χρησιμοποιηθούν δύο ή περισσότεροι κανόνες στο ίδιο διάγραμμα ώστε αυτό να αποκτήσει τη συνδυασμένη ισχύ των κανόνων αυτών στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της παραγωγικής διεργασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου διαγράμματος με κανόνες ροών αποτελεί το διάγραμμα  $k/k - r/r$  CSCC που προτάθηκε και μελετήθηκε από τους Koutras et al. (2006). Εκτός όμως από τη συνδυασμένη ισχύ δύο ή περισσότερων κανόνων, η ανάπτυξη ανάλογων διαγραμμάτων προέκυψε από την ανάγκη αφενός μεν της διατήρησης της ευαισθησίας στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, και αφετέρου να μπορούν ταυτόχρονα να ανιχνεύουν και αρκετά μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Μια προσεκτική ματιά στον Πίνακα 3.2 αποκαλύπτει ότι για μετατοπίσεις μεγαλύτερες των 2.6 τυπικών αποκλίσεων η τιμή του  $ARL_{out}$  δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή  $r$ . Για παράδειγμα ενώ το διάγραμμα  $M : 4/5$  είναι το πλέον ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, για μεγαλύτερες μετατοπίσεις απαιτεί την εμφάνιση τουλάχιστον 4 σημείων προκειμένου να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Δεδομένου ότι στην πράξη ακραίες τιμές για τους μέσους της διεργασίας δεν είναι απίθανο να εμφανιστούν (και θα πρέπει να ανιχνευθούν το δυνατόν συντομότερα προκειμένου να αντιμετωπιστούν κατάλληλα) είναι απαραίτητη μια κατάλληλη τροποποίηση των κανόνων που εφαρμόζονται σε κάθε διάγραμμα ώστε να βελτιωθεί η απόδοση των εν λόγω διαγραμμάτων και για αρκετά μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Σημειώνουμε πως ανάλογη είναι η συμπεριφορά και των διαγραμμάτων ελέγχου  $r/m$  που μελετήθηκαν από τους Klein (2000a) και Khoo (2004a).

Μια λογική τροποποίηση του κανόνα που εφαρμόζεται στα διαγράμματα ελέγχου  $r/m$  και  $M : r/m$  είναι να συνδυαστεί με τον κλασικό κανόνα του ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου (κανόνας 1-από-1). Έτσι, εκτός από τα όρια ελέγχου που αντιστοιχούν στον κανόνα ροών (όποιος και αν χρησιμοποιείται) προστίθενται και δύο ακόμα (συμμετρικά) όρια ελέγχου τα οποία θα χρησιμοποιεί ο κανόνας 1-από-1.

Στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί διαγράμματα στα οποία συνδυάζεται ο κλασικός κανόνας του ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου με κάποια άλλη διαδικασία παρακολούθησης της διεργασίας ώστε να αποκομίσουμε τα πλεονεκτήματα και των δύο διαδικασιών. Τέτοιες διαδικασίες για την περίπτωση παρακολούθησης της μέσης τιμής είναι

το συνδυασμένο διάγραμμα Shewhart-CUSUM (*Combined Shewhart-CUSUM* Lucas (1982)), το συνδυασμένο διάγραμμα Shewhart-EWMA (*Combined Shewhart-EWMA*, Lucas and Saccucci (1990)) το σύνθετο διάγραμμα Shewhart-EWMA (*Composite Shewhart-EWMA*, Klein ((1996), (1997))) ή ακόμα πιο πρόσφατα το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου (*Synthetic Control Chart*, Wu and Spedding (2000)). Μάλιστα, έχει προταθεί (Montgomery (2005), σελ. 398) το όριο ελέγχου για τον κανόνα 1-από-1 να έχει τιμή σε απόσταση 3.5 ή 4 μονάδων τυπικής απόκλισης από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος προκειμένου να ανιχνεύονται ακραίες τιμές του μέσου ενώ ταυτόχρονα να μην είναι μεγάλο το ποσοστό των εσφαλμένων συναγευμένων.

Οι Khoo and Ariffin (2006) και ο Acosta-Mejia (2007) μελέτησαν διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας όπου συνδυάζονται ο κανόνας 1-από-1 και ο κανόνας  $r$ -από- $m$ . Τα διαγράμματα ελέγχου που συνδυάζουν τους δύο αυτούς κανόνες θα ονομάζονται βελτιωμένα (*Improved*)  $r$ -από- $m$  διαγράμματα ελέγχου και θα συμβολίζονται ως  $I:r/m$ . Ο σύνθετος κανόνας ευαισθητοποίησης που εφαρμόζεται στο διάγραμμα  $I:r/m$  καλείται βελτιωμένος (*Improved*)  $r$ -από- $m$  κανόνας.

Ανάλογα, όταν συνδυάσουμε τον κανόνα 1-από-1 με τον τροποποιημένο κανόνα  $r$ -από- $m$  το διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει θα ονομάζεται αναθεωρημένο (*Revised*)  $r$ -από- $m$  διάγραμμα ελέγχου και θα συμβολίζεται ως  $R:r/m$ . Ο σύνθετος κανόνας ευαισθητοποίησης που εφαρμόζεται στο διάγραμμα  $R:r/m$  καλείται αναθεωρημένος (*Revised*)  $r$ -από- $m$  κανόνας.

Για την περιγραφή του νέου αυτού διαγράμματος ας θεωρήσουμε ένα τυποποιημένο  $Z$  διάγραμμα (δείτε Παράγραφο 3.3) για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της παραγωγικής διεργασίας στο οποίο υπάρχει η κεντρική γραμμή ( $CL$ ). Σε κάθε πλευρά της κεντρικής γραμμής του διαγράμματος σχεδιάζονται από δύο ακόμη γραμμές, τα εσωτερικά και τα εξωτερικά όρια ελέγχου. Έτσι, πάνω (κάτω) από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος υπάρχει το άνω (κάτω) εσωτερικό όριο ελέγχου  $UICL$  (αντ.  $LICL$ ) και το άνω (κάτω) εξωτερικό όριο ελέγχου  $UOCL$  (αντ.  $LOCL$ ). Τα ζεύγη των εξωτερικών και των εσωτερικών ορίων ελέγχου είναι συμμετρικά μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει ότι

$$LICL = -UICL, \quad LOCL = -UOCL$$

ενώ ταυτόχρονα ικανοποιούν και την ανισότητα

$$LOCL < LICL < CL < UICL < UOCL.$$

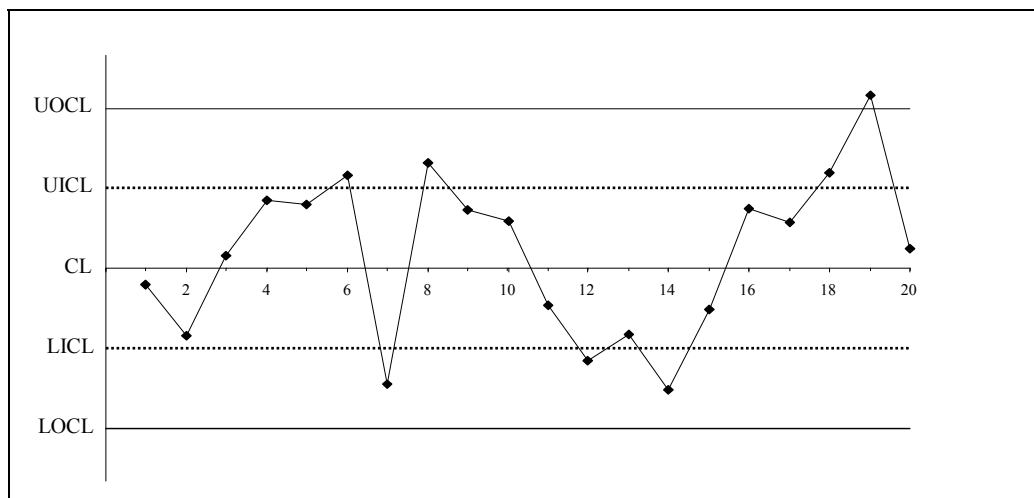


Για  $2 \leq r \leq m$  και  $m \geq 2$  το διάγραμμα ελέγχου  $R:r/m$  δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

- (i) ένα σημείο βρεθεί εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου ( $UOCL$  ή  $LOCL$ ), ή
- (ii) όταν  $r$  από  $m$  το πολύ διαδοχικά σημεία βρίσκονται μεταξύ των ορίων  $UICL$  ( $LICL$ ) και  $UOCL$  ( $LOCL$ ) (σύνολο A) και τα υπόλοιπα σημεία (σύνολο B) βρίσκονται στην περιοχή μεταξύ κεντρικής γραμμής  $CL$  και  $UICL$  ( $LICL$ )

οτιδήποτε από τα δύο εμφανιστεί συντομότερα.

Στο Σχήμα 3.3 δίνουμε μια γραφική αναπαράσταση του τροποποιημένου διαγράμματος  $R:r/m$  για  $r=2$  και  $m=3$ . Σημειώνουμε ότι το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 14 λόγω του τροποποιημένου κανόνα 2-από-3 που χρησιμοποιεί ως όρια ελέγχου τα  $UICL$  και  $LICL$  καθώς και στο δείγμα 19 λόγω του κανόνα 1-από-1. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο δείγμα 8 ο αναθεωρημένος κανόνας 2-από-3 δε δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (δίνει ο βελτιωμένος κανόνας 2-από-3).



Σχήμα 3.3: Το διάγραμμα ελέγχου  $R:2/3$

### 3.10 Κατασκευή του $R:r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Προκειμένου να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου  $R:r/m$  θεωρούμε ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή  $CL=0$ , εσωτερικά όρια ελέγχου  $UICL$ ,  $LICL$  και εξωτερικά όρια ελέγχου  $UOCL$ ,  $LOCL$ . Τα εξωτερικά και τα εσωτερικά όρια ελέγχου είναι

συμμετρικά ως προς την κεντρική γραμμή, δηλαδή  $LICL = -UICL$  και  $LOCL = -UOCL$  ( $UICL, UOCL > 0$ ). Σημειώνουμε ότι μόνο το διάγραμμα ελέγχου  $R: m/m$  δεν κάνει χρήση της κεντρικής γραμμής  $CL$  παρά μόνο των εξωτερικών και των εσωτερικών ορίων ελέγχου. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γενική διαδικασία κατασκευής ενός διαγράμματος  $R:r/m$  για  $r \neq m$ . Η περίπτωση  $r = m$  απαιτεί κάποιες απλές τροποποιήσεις στη γενική διαδικασία κατασκευής και για λόγους οικονομίας χώρου παραλείπεται.

Στο διάγραμμα  $R:r/m$  ορίζουμε πέντε περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι περιοχή μεταξύ του άνω εξωτερικού και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής, την Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω εσωτερικού ορίου ελέγχου, την Περιοχή 4 ( $\Pi_4$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του κάτω εσωτερικού και του κάτω εξωτερικού ορίου ελέγχου και την Περιοχή 5 ( $\Pi_5$ ) που είναι η περιοχή κάτω του κάτω εξωτερικού ορίου ελέγχου και πάνω από το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο 3.3 στο  $R:r/m$  διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι τυποποιημένες τιμές  $Z$  που ακολουθούν κατανομή  $N(\delta, 1)$ . Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\delta), p_2(\delta), p_3(\delta), p_4(\delta), p_5(\delta)$ . Για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς σε ορισμένες περιπτώσεις οι παραπάνω πιθανότητες θα συμβολίζονται ως  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ , αντίστοιχα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\begin{aligned} p_1(\delta) &= \Phi(UOCL - \delta) - \Phi(UICL - \delta), & p_2(\delta) &= \Phi(UICL - \delta) - \Phi(CL - \delta), \\ p_3(\delta) &= \Phi(CL - \delta) + \Phi(UICL - \delta) - 1, & p_4(\delta) &= \Phi(UOCL + \delta) - \Phi(UICL - \delta), \\ p_5(\delta) &= 1 - p_1(\delta) - p_2(\delta) - p_3(\delta) - p_4(\delta). \end{aligned}$$

Έστω τώρα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\begin{aligned} \Pr(Y_t = 1) &= p_1(\delta), & \Pr(Y_t = 2) &= p_2(\delta), & \Pr(Y_t = 3) &= p_3(\delta), \\ \Pr(Y_t = 4) &= p_4(\delta), & \Pr(Y_t = 5) &= p_5(\delta). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του αναθεωρημένου  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η βασική διαφοροποίηση έναντι του αντίστοιχου τροποποιημένου  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης είναι η ύπαρξη ενός ακόμη σχηματισμού, ο οποίος έχει μήκος 1 (σχηματισμός "5").

Ας θεωρήσουμε ότι  $\mathcal{E}$  είναι ο σύνθετος σχηματισμός ο οποίος περιγράφει τον αναθεωρημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης. Η αποσύνθεση του  $\mathcal{E}$  σε υποσχηματισμούς μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη μεθοδολογία που περιγράψαμε στις Παραγράφους 3.4-3.6 και είναι δυνατό κανείς να επιβεβαιώσει ότι οι μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας που αντιστοιχούν στο  $R:r/m$  διάγραμμα ελέγχου ταυτίζονται με τις αντίστοιχες του  $M:r/m$  διαγράμματος ελέγχου. Έτσι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{Q}$  μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του  $R:r/m$  διαγράμματος ελέγχου έχει την ίδια μορφή με τον αντίστοιχο πίνακα  $\mathbf{Q}$  του  $M:r/m$  διαγράμματος ελέγχου. Θα πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι οι πιθανότητες  $p_1(\delta)$ ,  $p_2(\delta)$ ,  $p_3(\delta)$ ,  $p_4(\delta)$  για τη μελέτη του  $R:r/m$  διαγράμματος ελέγχου διαφέρουν από τις αντίστοιχες πιθανότητες  $p_1(\delta)$ ,  $p_2(\delta)$ ,  $p_3(\delta)$ ,  $p_4(\delta)$  για τη μελέτη του  $M:r/m$  διαγράμματος ελέγχου. Η τυπική μορφή του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  για το διάγραμμα  $R:r/m$  μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση της τιμής 0 με την πιθανότητα  $p_5$  στην τελευταία στήλη του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  του διαγράμματος  $M:r/m$ .

Στον επόμενο Πίνακα 3.5 δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για το  $ARL_{in}$  για τα διαγράμματα  $R:r/m$ .

**Πίνακας 3.5:** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για τα διαγράμματα ελέγχου  $R : r / m$

$R : r / m$	$E(T_R   \delta = 0), p = \Phi(UOCL) - \Phi(UICL), p + q = \Phi(UOCL) - 1/2$
$R : m / m$	$\frac{1 - q^m}{(1 - q)^2 - p(1 - q^{m-1})(1 + q)}$
$R : 2 / m$	$\frac{2 - q - q^{m-1}}{(1 - q)(1 - 2q - 2pq^{m-1}) - p(1 - q^{m-1})}$
$R : 3 / 4$	$\frac{1 + p[1 + p(1 + q)(pq - 1)]}{1 - 2q + p[(pq - 1)(1 + q + 2q^2)p - 1 - 2q]}$
$R : 3 / 5$	$\frac{(1 + p + p^2) + pq(1 + 2p) + p^2q^2(2 - p) - p^3q^3(1 + p) - p^3q^4(1 + p) - p^4q^5}{(1 - p - p^2) - q(2 + p + 2p^2) - q^2(2p + 2p^2 - p^3) - q^3(4p^2 - p^3 - p^4) + q^4(p^3 + p^4) + q^5(2p^3 + p^4) + 2p^4q^6}$
$R : 4 / 5$	$\frac{1 + p + p^2 + p^3 + p^2q(1 + 2p - p^2) - p^4q^2(1 + p^2 + p^2q)}{(1 - p - p^2 - p^3) - q[2(1 + p + p^3) + p^2(1 - p^2)] - q^2[2p^2(1 + 2p) - p^4(1 + p^2)] + q^3[p^4(2 + p^2)] + 2q^4p^6}$

Από τη στιγμή που υπάρχει έκφραση για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής μπορούμε να υπολογίσουμε το ζεύγος  $(UICL, UOCL)$  (ή  $(LICL, LOCL)$ ) και επομένως τα όρια ελέγχου του διαγράμματος  $R:r/m$  ώστε η τιμή του  $ARL_{in}$  να είναι η επιθυμητή. Για λόγους ευκολίας θα συμβολίσουμε την τιμή του άνω εξωτερικού και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου αντίστοιχα ως  $K_1$  και  $K_2$ . Είναι προφανές λοιπόν ότι θα ισχύει

$$UOCL = K_1, UICL = K_2, LICL = -K_2, LOCL = -K_1.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι υπάρχουν αρκετά ζεύγη τιμών  $(K_1, K_2)$  που δίνουν το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής στο διάγραμμα  $R:r/m$ . Προκειμένου να βρούμε τα όρια ελέγχου για το διάγραμμα  $R:r/m$  ώστε η τιμή  $ARL_{in}$  να είναι η επιθυμητή επιλέγουμε αρχικά την τιμή  $c$  για το  $ARL_{in}$  καθώς και την τιμή  $K_1$  για το εξωτερικό όριο ελέγχου. Η τιμή για το  $K_1$  που θα επιλέξουμε πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα  $K_1 > z_{1/2c}$  προκειμένου να είναι δυνατός ο προσδιορισμός της τιμής  $K_2$  για το εσωτερικό όριο ελέγχου ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι ίσο με  $c$ . Σε αυτή την περίπτωση τα εξωτερικά όρια ελέγχου θα είναι πιο «πλατιά» έναντι των αντίστοιχων ορίων ελέγχου του τυποποιημένου  $\bar{X}$  διαγράμματος. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές των εσωτερικών (συμμετρικών) ορίων ελέγχου. Στο επόμενο πλαίσιο περιγράφονται τα διακριτά βήματα που απαιτούνται για την ανάπτυξη ενός  $R:r/m$  διαγράμματος ελέγχου. Ως  $T_R$  συμβολίσουμε την τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετο σχηματισμού  $\mathcal{E}$  ο οποίος περιγράφει τον αναθεωρημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης. Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του  $R:r/m$  διαγράμματος ελέγχου συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_R$ .

---

### Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του Διαγράμματος $R:r/m$

---

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε θετικούς ακεραίους  $r$  και  $m$  με  $2 \leq r \leq m$ .

**Βήμα 2:** Επιλέγουμε την επιθυμητή τιμή  $c$  για το  $ARL_{in}$ , την τιμή  $K_1$  για τα εξωτερικά όρια ελέγχου, και θέτουμε  $UOCL = K_1$ ,  $LOCL = -K_1$ .

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τη μοναδική ρίζα  $p$  της εξίσωσης  $ARL_{in} = E(T_R | \delta = 0) = c$  στο διάστημα  $(0,1)$ .

**Βήμα 4:** Υπολογίζουμε την τιμή  $K_2$  για το άνω εσωτερικό όριο ελέγχου  $UICL$  λύνοντας την εξίσωση  $p = \Phi(K_1) - \Phi(K_2)$  και θέτουμε  $UICL = K_2$ ,  $LICL = -UICL$ .

**Βήμα 5:** Εφαρμόζουμε τον αναθεωρημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

---

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι αν η τιμή  $K_2$  για τα εσωτερικά όρια ελέγχου ταυτιστεί με την τιμή της κεντρικής γραμμής  $CL$  προκύπτει ένα διάγραμμα ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

- (i) ένα σημείο βρεθεί εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου ή όταν
- (ii)  $r$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν στη μία πλευρά της κεντρικής γραμμής του διαγράμματος,

οτιδήποτε από τα δύο συμβεί συντομότερα.

Επίσης αν η τιμή  $K_2$  για τα εσωτερικά όρια ελέγχου ταυτιστεί με την τιμή  $K_1$  για τα εξωτερικά όρια ελέγχου τότε προκύπτει τυποποιημένο  $\bar{X}$  διάγραμμα με όρια ελέγχου  $K_1$ ,  $-K_1$  το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου.

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων  $R:r/m$  χρησιμοποιώντας ως μέτρο σύγκρισης το  $ARL$  αλλά και ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής.

### 3.11 Απόδοση του $R : r/m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο γίνεται μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων  $R : r/m$ ,  $2 \leq r \leq m \leq 5$ . Επίσης συγκρίνονται οι τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα  $R : r/m$  με τις αντίστοιχες τιμές του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος, των διαγραμμάτων  $r/m$  (περιπτώσεις του οποίου έχουν μελετηθεί από τους Klein (2000a), Khoo (2004a), Acosta-Mejia (2007)), του διαγράμματος  $M : r/m$  καθώς και του διαγράμματος  $I : r/m$  (Acosta-Mejia (2007)). Για λόγους σύγκρισης, η τιμή του  $K_1$  για τα εξωτερικά όρια ελέγχου ταυτίζεται με τις τιμές που χρησιμοποίησαν οι Khoo and Ariffin (2006) και είναι  $K_1 = 3.4(0.1)3.8$ . Η τιμή για το  $ARL_{in}$  είναι ίση με 370.4. Οι πλήρεις πίνακες δίνονται στο Παράρτημα Π.6 ενώ όπως και στον Πίνακα 3.2 με έντονη γραμματοσειρά έχει σημειωθεί η ελάχιστη τιμή για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των διαγραμμάτων ελέγχου  $R : r/m$  και  $I : r/m$  είναι ότι η τιμή για τα εσωτερικά όρια μειώνεται και στα δύο καθώς αυξάνει η τιμή των εξωτερικών ορίων. Έτσι, η διαφορά  $K_1 - K_2$  γίνεται όλο και μεγαλύτερη καθώς η τιμή του  $K_1$  αυξάνει. Επίσης, η τιμή  $K_2$  για το εσωτερικό όριο ελέγχου είναι μικρότερη στο  $R : r/m$  διάγραμμα έναντι της αντίστοιχης στο  $I : r/m$  διάγραμμα για την ίδια τιμή  $K_1$  των εξωτερικών ορίων ελέγχου.

Το βασικό συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι ένα διάγραμμα  $R : r/m$  υπερτερεί ομοιόμορφα σε απόδοση έναντι του διαγράμματος  $I : r/m$  για οποιαδήποτε μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας όταν τα εξωτερικά όρια ελέγχου έχουν την ίδια (προεπιλεγμένη) τιμή. Τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Επιπλέον, για μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας έως και τρεις τυπικές αποκλίσεις μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλο διάγραμμα  $R : r/m$ ,  $2 \leq r \leq m \leq 5$  το οποίο να έχει μικρότερη τιμή  $ARL_{out}$  έναντι του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος. Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, οι διαφοροποιήσεις στην απόδοση των διαγραμμάτων είναι ανεπαίσθητες. Η επιλογή του καταλληλότερου διαγράμματος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 3.6.** Προτεινόμενα  $R : r / m$  διαγράμματα ελέγχου ( $ARL_{in} = 370.40$ ).

$\delta$	$ARL$ 1/1	$ARL$ $R : r / m$	Διάγραμμα ελέγχου	Ζεύγος ορίων ( $K_1, K_2$ )
0.0	370.40	370.40		
0.2	308.43	232.21	$R : 4 / 5$	(3.8, 0.960)
0.4	200.10	102.28		
0.6	119.67	48.55	$R : 3 / 5$	(3.8, 1.369)
0.8	71.55	25.77		
1.0	43.90	15.42		
1.2	27.82	10.24		
1.4	18.25	7.40	$R : 3 / 5$	(3.6, 1.382)
1.6	12.38	5.69	$R : 3 / 5$	(3.4, 1.413)
1.8	8.70	4.60		
2.0	6.30	3.72	$R : 2 / 5$	(3.4, 1.968)
2.2	4.70	3.11		
2.4	3.65	2.66		
2.6	2.90	2.33	$R : 2 / 4$	(3.4, 1.956)
2.8	2.38	2.07	$R : 2 / 3$	(3.4, 1.926)
3.0	1.87	1.87		

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.6 με τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3 παρατηρούμε ότι για εύρος μετατοπίσεων έως 0.8 τυπικές αποκλίσεις τα διαγράμματα ελέγχου  $M : 4 / 5$  και  $M : 3 / 5$  δίνουν μικρότερη τιμή  $ARL_{out}$ , αν και η διαφοροποίηση αυτή είναι ανεπαίσθητη, έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου  $R : 4 / 5$  και  $R : 3 / 5$ . Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις τα διαγράμματα  $R : r / m$  αποδεικνύονται πιο ευαίσθητα έναντι των αντίστοιχων  $M : r / m$  αφού ο κανόνας 1-από-1 δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας με μεγαλύτερη συχνότητα και έτσι μειώνεται η τιμή του  $ARL_{out}$ .

Πριν προχωρήσουμε την ανάλυσή μας είναι χρήσιμο να αναφέρουμε τι συμβαίνει στην πράξη όταν η μετατόπιση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε δεν είναι γνωστή και άρα ο παραπάνω πίνακας δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί. Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κανόνες που βασίζονται στην εμφάνιση 2 από 3 ή 4 από 5 συνεχόμενων σημείων χρησιμοποιούνται πολύ συχνά, μπορούμε να χρησιμοποιούμε για μετατοπίσεις μέχρι 1.4 μονάδες τυπικών αποκλίσεων το διάγραμμα  $R : 4 / 5$  (έναντι του



διαγράμματος  $R:2/3$ ) ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις το διάγραμμα  $R:2/3$ . Αν παρόλ' αυτά δεν έχουμε καμία πληροφορία περί της μετατόπισης που επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε προτείνουμε να χρησιμοποιείται το διάγραμμα  $R:2/3$ , λαμβάνοντας υπόψη την απλότητα στην ερμηνεία και εφαρμογή του, αφού γενικά μεσαίες μετατοπίσεις θα πρέπει να ανιχνεύονται γρήγορα.

Στον επόμενο πίνακα δίνουμε τις τιμές του  $ARL$  και ποσοστιαία σημεία ( $Q_1$ ,  $M$ ,  $Q_3$ ) για τα διαγράμματα ελέγχου  $R:2/3$ ,  $R:2/4$ ,  $R:2/5$ ,  $R:3/5$  και  $R:4/5$ . Τα όρια ελέγχου δόθηκαν στον Πίνακα 3.6 και για το λόγο αυτό παραλείπονται.

**Πίνακας 3.7.** Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το  $ARL$  για τα προτεινόμενα διαγράμματα  $R:r/m$  ( $ARL_{in} = 370.4$ ).

$\delta$	Ποσοστιαία Σημεία																			
	$ARL$					$Q_1$					$M$					$Q_3$				
	2/3	2/4	2/5	3/5	4/5	2/3	2/4	2/5	3/5	4/5	2/3	2/4	2/5	3/5	4/5	2/3	2/4	2/5	3/5	4/5
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	108	108	108	109	109	257	258	257	258	258	513	514	512	513	513
0.2	269.18	263.49	259.82	234.64	232.21	79	77	76	70	69	187	183	180	164	162	373	365	359	324	321
0.4	139.75	132.56	128.02	103.59	102.28	41	39	38	32	32	97	93	89	73	72	193	183	177	143	141
0.6	70.71	65.66	62.58	48.55	48.50	21	20	19	16	16	50	46	44	35	35	98	90	86	66	66
0.8	38.02	34.94	33.04	25.77	26.24	12	11	11	9	10	27	25	23	19	19	52	48	45	35	35
1.0	22.05	20.24	19.14	15.42	16.06	7	7	7	6	7	16	15	14	11	12	30	27	26	20	21
1.2	13.78	12.72	12.10	10.24	10.93	5	5	5	5	5	10	9	9	8	8	19	17	16	13	14
1.4	9.22	8.60	8.26	7.42	8.11	4	4	4	4	5	7	6	6	6	6	12	11	11	9	10
1.6	6.56	6.21	6.02	5.77	6.45	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	9	8	8	7	8
1.8	4.93	4.73	4.63	4.74	5.41	2	2	3	3	4	4	4	4	4	5	6	6	6	5	6
2.0	3.88	3.77	3.72	4.07	4.72	2	2	2	3	4	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5
2.2	3.18	3.12	3.11	3.60	4.24	2	2	2	3	4	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5
2.4	2.69	2.67	2.66	3.25	3.86	2	2	2	3	4	2	2	2	3	4	3	3	3	4	4
2.6	2.34	2.33	2.33	2.97	3.54	2	2	2	3	4	2	2	2	3	4	3	3	3	3	4
2.8	2.07	2.08	2.08	2.73	3.24	1	1	1	2	3	2	2	2	3	4	2	2	3	3	4
3.0	1.87	1.87	1.88	2.51	2.94	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	3	4
4.0	1.28	1.29	1.29	1.60	1.67	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
5.0	1.05	1.05	1.05	1.13	1.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6.0	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Στον επόμενο πίνακα δίνεται και η τυπική απόκλιση του μήκους ροής για τα προτεινόμενα  $R : r/m$  διαγράμματα ελέγχου. Από τις τιμές αυτές παρατηρούμε ότι οι κανόνες που δίνουν το μικρότερο  $ARL_{out}$  για την ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης έχουν και τη μικρότερη τυπική απόκλιση (σημειώνεται με έντονη γραμματοσειρά) όπως άλλωστε είχε συμβεί και στην περίπτωση των  $M : r/m$  διαγραμμάτων ελέγχου. Σημειώνεται επίσης ότι στη στήλη «1/1» βρίσκονται οι τιμές της τυπικής απόκλισης για την κατανομή του μήκους ροής του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος οι οποίες, όπως έχουμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 1 (παράγραφος 1.5), ταυτίζονται με τις τιμές του μέσου μήκους ροής αφού η κατανομή του μήκους ροής είναι η γεωμετρική.

**Πίνακας 3.8.** Τυπική απόκλιση των προτεινόμενων  $R : r/m$  διαγράμματα ελέγχου

$\delta$	1/1	2/3	2/4	2/5	3/5	4/5
0.0	370.40	369.36	368.79	368.68	367.43	<b>367.44</b>
0.2	308.43	267.99	261.82	258.02	231.68	<b>229.04</b>
0.4	200.10	138.38	130.84	126.12	100.69	<b>99.01</b>
0.6	119.67	69.27	63.93	60.59	45.74	<b>45.27</b>
0.8	71.55	36.57	33.24	31.15	<b>23.07</b>	23.10
1.0	43.90	20.63	18.59	17.32	<b>12.82</b>	13.01
1.2	27.82	12.39	11.13	10.35	<b>7.73</b>	7.95
1.4	18.25	7.87	7.08	6.59	<b>4.97</b>	5.17
1.6	12.38	5.25	4.74	4.43	<b>3.37</b>	3.54
1.8	8.70	3.66	3.32	3.12	<b>2.39</b>	2.54
2.0	6.30	2.64	2.41	2.29	<b>1.77</b>	1.92
2.2	4.70	1.97	1.82	1.74	<b>1.39</b>	1.55
2.4	3.65	1.51	1.42	1.38	<b>1.16</b>	1.36
2.6	2.90	1.20	1.14	1.13	<b>1.03</b>	1.29
2.8	2.38	0.98	0.95	<b>0.95</b>	0.98	1.28
3.0	1.87	0.83	<b>0.82</b>	0.82	0.95	1.29
4.0	1.19	<b>0.47</b>	0.48	0.48	0.78	1.67
5.0	1.02	<b>0.23</b>	0.23	0.23	0.37	1.13
6.0	1.00	<b>0.07</b>	0.07	0.07	0.12	0.12

### 3.12 Περαιτέρω Μελέτη Ειδικών Περιπτώσεων του $R : r / m$ Διαγράμματος Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τα  $R : r / m$  διαγράμματα ελέγχου για  $r = 2, m - 1$  και  $m$ , για  $m = 2(1)8$  αφού οι κανόνες ευαισθητοποίησης τύπου 2-από- $m$ ,  $m$ -από- $m$ ,  $(m - 1)$ -από- $m$  είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στην πράξη. Ο λόγος που δεν επεκτείναμε τη μελέτη μας για τιμές του  $m$  μεγαλύτερες του 8 είναι εξαιτίας του ότι οι 4 βασικοί κανόνες της Western Electric Company (1956) δεν χρησιμοποιούν πληροφορία για περισσότερα από 8 συνεχόμενα σημεία.

Πριν προχωρήσουμε στην παράθεση των αποτελεσμάτων αξίζει να σταθούμε στον υπολογισμό της απόδοσης των διαγραμμάτων  $R : r / m$  για  $r, m \geq 5$  ( $r \neq m$ ). Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει αρκετά μεγάλη διάσταση το οποίο συνεπάγεται αυξημένες απαιτήσεις σε χρόνο αλλά και υπολογιστική δύναμη. Έτσι χρησιμοποιούμε τον πολύ γνωστό τύπο του Roberts (1958) για τον υπολογισμό του  $ARL$  όταν συνδυάζεται η απόδοση των αντίστοιχων άνω και κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου

$$\frac{1}{ARL} \cong \frac{1}{ARL_U} + \frac{1}{ARL_L} \quad (3.5)$$

(Το  $ARL_U$  (αντ.  $ARL_L$ ) συμβολίζει το μέσο μήκος ροής για το άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου).

Στη συνέχεια δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου. Ως τυπικό άνω (κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου ορίζουμε ένα διάγραμμα ελέγχου με κεντρική γραμμή  $CL$  και ένα άνω (κάτω) όριο ελέγχου  $UCL$  ( $LCL$ ). Το διάγραμμα αυτό χρησιμοποιείται μόνο για την ανίχνευση αυξήσεων (μειώσεων) του μέσου της διεργασίας και δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί πάνω (κάτω) από το άνω (κάτω) όριο ελέγχου  $UCL$  ( $LCL$ ).

Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατό να οριστούν μονόπλευρα διαγράμματα τα οποία βασίζονται σε κανόνες τύπου  $r$ -από- $m$ . Για παράδειγμα το άνω μονόπλευρο διάγραμμα  $M : r / m$  δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (μετατόπιση του μέσου σε υψηλότερο (αντ. χαμηλότερο) επίπεδο) όταν « $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από ένα άνω (κάτω) όριο ελέγχου με τα υπόλοιπα  $m - r$  σημεία να βρίσκονται μεταξύ κεντρικής γραμμής και άνω (κάτω) ορίου ελέγχου».

Δοθέντος ότι η κατανομή της απεικονιζόμενης ποσότητας είναι κανονική (και άρα συμμετρική) και ότι οι κανόνες που εφαρμόζονται στις δύο πλευρές του διαγράμματος δεν μπορούν να δώσουν ταυτόχρονα ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, είναι δυνατή η μελέτη του δίπλευρου διαγράμματος μέσω της μελέτης των αντίστοιχων μονόπλευρων. Σε πολλές περιπτώσεις η προσέγγιση του τύπου (3.5) είναι εντυπωσιακά καλή. Για παράδειγμα στην περίπτωση του διαγράμματος  $R:3/5$  η τιμή του  $ARL_U$  και του  $ARL_L$  είναι αντίστοιχα 48.6624 και 34028.9 για μετατόπιση του μέσου της διεργασίας  $\delta = 0.6$  και άρα ο τύπος (3.5) δίνει τιμή  $ARL_{out} \approx 48.55$  η οποία ταυτίζεται με την ακριβή τιμή του  $ARL_{out}$  για το διάγραμμα αυτό (δείτε Πίνακα 3.6). Έτσι αρκεί η κατασκευή του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης για το άνω ή το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα και στη συνέχεια ο υπολογισμός του αντίστοιχου εσωτερικού ορίου ελέγχου ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να είναι ίσο με το διπλάσιο του επιθυμητού.

Έχοντας προσδιορίσει τις τιμές των ορίων ελέγχου, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5) μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοση του δίπλευρου διαγράμματος για διάφορες τιμές της μετατόπισης  $\delta$ . Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα παραπάνω παραθέτουμε το επόμενο παράδειγμα το οποίο αφορά τη μελέτη του διαγράμματος  $R:5/6$

**Παράδειγμα 3.1:** Η μελέτη της απόδοσης του δίπλευρου διαγράμματος  $R:5/6$  θα γίνει μέσω των αντίστοιχων άνω και κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων  $R:5/6$ . Θα παρουσιάσουμε αρχικά την περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος ενώ για τη μελέτη του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος θα πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες τροποποιήσεις.

Έστω ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R:5/6$  με κεντρική γραμμή στο  $CL = 0$ , άνω εξωτερικό όριο  $UOCL$  και άνω εσωτερικό όριο  $UICL$  ( $UOCL, UICL > 0$ ). Στο διάγραμμα ορίζουμε τέσσερις περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ άνω εξωτερικού και άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου και κεντρικής γραμμής, την Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή κάτω από την κεντρική γραμμή και την Περιοχή 4 ( $\Pi_4$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου. Στο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R:5/6$  απεικονίζονται οι τυποποιημένες τιμές  $Z$  που ακολουθούν κατανομή  $N(\delta, 1)$ . Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε μία από τις τέσσερις

περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\delta), p_2(\delta), p_3(\delta), p_4(\delta)$  (ή με  $p_1, p_2, p_3, p_4$  για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς). Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_1(\delta) = \Phi(UOCL - \delta) - \Phi(UICL - \delta), \quad p_2(\delta) = \Phi(UICL - \delta) - \Phi(CL - \delta)$$

$$p_3(\delta) = \Phi(CL - \delta), \quad p_4(\delta) = 1 - \Phi(UOCL - \delta).$$

Έστω  $\{Y_t, t \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_t = 1) = p_1(\delta), \quad \Pr(Y_t = 2) = p_2(\delta), \quad \Pr(Y_t = 3) = p_3(\delta), \quad \Pr(Y_t = 4) = p_4(\delta).$$

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{4, 11111, 121111, 112111, 111211, 111121\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{5/6}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του άνω μονόπλευρου διαγράμματος  $R : 5/6$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{5/6}$ . Προκειμένου να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά του άνω μονόπλευρου  $R : 5/6$  διαγράμματος ελέγχου που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{5/6}$ . Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα αποσυνθέτουμε το σύνθετο σχηματισμό  $\mathcal{E}$  σε υποσχηματισμούς προκειμένου να καθοριστεί ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$ . Έτσι έχουμε

$$"1" \equiv \{2, 3\}, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 11, \quad "4" \equiv 111, \quad "5" \equiv 1111, \quad "6" \equiv 12, \quad "7" \equiv 121, \quad "8" \equiv 1211$$

$$"9" \equiv 12111, \quad "10" \equiv 112, \quad "11" \equiv 1121, \quad "12" \equiv 11211, \quad "13" \equiv 1112, \quad "14" \equiv 11121$$

$$"15" \equiv 11112, \quad "16" \equiv \{4, 11111, 121111, 112111, 111211, 111121\}$$

οπότε  $\Omega = \{1, 2, \dots, 15, 16\}$ . Οι καταστάσεις  $1, 2, \dots, 15$  είναι μεταβατικές ενώ η κατάσταση  $16$  είναι απορροφητική. Το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = 15), \Pr(Y_1 = 16)] = (p_3 + p_2)\mathbf{e}_1 + p_1\mathbf{e}_2$$

( $\mathbf{e}_i$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα γραμμή του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^{16}$ ) ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 + p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_4 + p_1 \\ p_3 + p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ p_3 + p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ p_3 + p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_4 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ p_3 + p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.10) είναι δυνατό να βρεθεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{5/6}$ . Θα πρέπει να τονίσουμε πως ακόμη και όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου ( $\delta = 0$ , οπότε  $p_1 = \Phi(UOCL) - \Phi(UICL)$ ,  $p_2 = \Phi(UICL) - \Phi(0) = \Phi(UICL) - 1/2$ ,  $p_3 = \Phi(0) = 1/2$ ,  $p_4 = 1 - \Phi(UOCL)$ ) δεν είναι δυνατή η εύρεση εύχρηστου αναλυτικού τύπου αυτής.

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να μελετηθεί το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R:5/6$ . Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τη σχέση (3.5) υπολογίζεται η τιμή του μέσου μήκους ροής για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R:5/6$ .

Για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου η διαδικασία που ακολουθείται περιγράφεται στα επόμενα βήματα:

---

**Αλγοριθμική Περιγραφή Κατασκευής του Διαγράμματος  $R : 5 / 6$**

---

- Βήμα 1** Επιλέγουμε την τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του δίπλευρου διαγράμματος  $R : 5 / 6$ .
- Βήμα 2** Επιλέγουμε την τιμή του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου ώστε
- $$UOCL > z_{1/2c}$$
- Βήμα 3** Θέτουμε  $E(T_{5/6} | \delta = 0) = 2c$
- Βήμα 4** Προσδιορίζουμε τη μοναδική λύση  $UICL$  της εξίσωσης
- $$ARL_{in,U} = E(T_{5/6} | \delta = 0) = 2c \text{ στο διάστημα } (0, z_{1/2c})$$
- Βήμα 5** Θέτουμε  $LOCL = -UOCL$ ,  $LICL = -UICL$
- Βήμα 6** Χρησιμοποιούμε τον αναθεωρημένο 5-από-6 κανόνα ευαισθητοποίησης για να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου
- 

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αναπτύξουμε και να μελετήσουμε τα διαγράμματα  $R : 6 / 7$  και  $R : 7 / 8$  των οποίων οι αντίστοιχοι χώροι καταστάσεων  $\Omega$ , οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  και τα διανύσματα αρχικών πιθανοτήτων  $\boldsymbol{\pi}$  δίνονται στο Παράρτημα Π.7. Επιπλέον στο Παράρτημα Π.8 δίνονται δύο προγράμματα σε Mathematica τα οποία υλοποιούν την ανάπτυξη του δίπλευρου  $R : 5 / 6$  διαγράμματος ελέγχου. Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις τα προγράμματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υλοποίηση οποιουδήποτε  $R : r / m$  διαγράμματος ελέγχου.

Τα αποτελέσματα της απόδοσης όλων των διαγραμμάτων της παρούσας παραγράφου δίνονται στον επόμενο πίνακα.



**Πίνακας 3.9.** Επιλογή βέλτιστου  $R: r / m$  διαγράμματος ελέγχου

$\delta$	$ARL$ 1/1	$ARL$ $R:r/m$	Βέλτιστο διάγραμμα ( $r / m, K_1, K_2$ )
0.00	370.40	370.40	
0.20	308.43	221.56	(7/8, 4.0, 0.28003)
0.40	200.08	95.14	(6/7, 4.0, 0.46673)
0.60	119.67	46.22	(5/6, 4.0, 0.68300)
0.80	71.55	25.56	(5/6, 4.0, 0.68630)
1.00	43.89	16.06	(4/5, 3.8, 0.95968)
1.20	27.82	10.85	(2/8, 4.0, 1.92476)
1.40	18.25	7.63	(2/8, 3.9, 1.92734)
1.60	12.38	5.73	(2/8, 3.7, 1.93697)
1.80	8.69	4.52	(2/8, 3.6, 1.94558)
2.00	6.30	3.69	(2/8, 3.4, 1.97824)
2.20	4.72	3.09	(2/8, 3.3, 2.00927)
2.40	3.65	2.64	(2/6, 3.2, 2.05074)
2.60	2.90	2.28	(2/4, 3.2, 2.03922)
2.80	2.38	2.00	(2/4, 3.1, 2.14250)
3.00	2.00	1.77	(2/3, 3.1, 2.11496)

Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως για μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας τα διαγράμματα  $R:(m-1)/m$  με τιμή για εξωτερικά όρια ελέγχου μεγαλύτερη του 3.8 (κατ' απόλυτη τιμή) είναι τα πλέον ευαίσθητα. Για μεσαίες και μεγαλύτερες μετατοπίσεις βλέπουμε ότι τα διαγράμματα  $R:2/m$ , για κατάλληλες τιμές του  $m$ , δίνουν τη μικρότερη τιμή  $ARL_{out}$ . Όσο αυξάνει το μέγεθος της μετατόπισης  $\delta$  τόσο μειώνεται η προτεινόμενη τιμή για τα εξωτερικά όρια ελέγχου, κάτι επίσης αναμενόμενο αφού αύξηση του  $\delta$  συνεπάγεται μεγαλύτερη πιθανότητα να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου. Έτσι αυξάνει και η πιθανότητα ο κανόνας 1-από-1 να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο πρέπει να τονίσουμε ότι μέχρι τώρα προτείναμε η τιμή για το  $K_1$  να προεπιλέγεται. Αυτή η τακτική ακολουθήθηκε και από τους Khoo and Ariffin (2006). Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να επιλέξει το ζεύγος τιμών  $(K_1, K_2)$  για

το οποίο η τιμή του  $ARL_{out}$  γίνεται η ελάχιστη για δεδομένη μετατόπιση του μέσου της διεργασίας  $\delta$  υπό τον περιορισμό ότι η τιμή για το  $ARL_{in}$  είναι δεδομένη.

Η διαδικασία αυτή, την οποία ονομάζουμε διαδικασία βελτιστοποίησης, περιγράφεται εν συντομία στη συνέχεια.

### Διαδικασία Βελτιστοποίησης του Διαγράμματος Ελέγχου $R : r / m$

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε τους θετικούς ακεραίους  $r$  και  $m$  με  $2 \leq r \leq m$ , την επιθυμητή τιμή  $ARL_{in} = c$  και τη μετατόπιση  $\delta$  την οποία μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε.

**Βήμα 2:** Ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση  $ARL_{out} \equiv ARL_{out}(K_1, K_2; c, \delta, r, m)$  υπό τους περιορισμούς ότι  $ARL_{in} \geq c$  και  $0 < K_2 < z_{1/2c} < K_1$ , όπου

$$UOCL = K_1, \quad UICL = K_2, \quad LOCL = -UOCL, \quad LICL = -UICL$$

**Βήμα 3:** Για το βέλτιστο ζεύγος τιμών  $(K_1^*, K_2^*)$  που προκύπτει, θέτουμε

$$UOCL^* = K_1^*, \quad UICL^* = K_2^*, \quad LOCL^* = -UOCL^*, \quad LICL^* = -UICL^*$$

και ακολουθούμε τον αναθεωρημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα ευαισθητοποίησης προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

Τα διαγράμματα που θα προκύψουν από την παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης θα έχουν μικρότερη τιμή  $ARL_{out}$  στην ανίχνευση της δεδομένης μετατόπισης  $\delta$  έναντι των διαγραμμάτων στα οποία η τιμή  $K_1$  για τα εξωτερικά όρια ελέγχου έχει προεπιλεγεί. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών ώστε αυτά να είναι βέλτιστα στην ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης παραπέμπουμε στις εργασίες των Artiles-Leon et al. (1996), Zhang and Wu (2005) και Zhao and Wang (2006).

### 3.13 Ανακεφαλαίωση

Στον παρόν κεφάλαιο αρχικά προτάθηκε και μελετήθηκε ένας νέος κανόνας ροών, ο τροποποιημένος  $r$ -από- $m$  κανόνας ο οποίος αυξάνει την ευαισθησία του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Το διάγραμμα ελέγχου το οποίο χρησιμοποιεί τον εν λόγω κανόνα ονομάστηκε τροποποιημένο  $r$  από  $m$  διάγραμμα ελέγχου και συμβολίζεται ως  $M : r/m$ . Η απόδοση του  $M : r/m$  διαγράμματος ελέγχου υπολογίστηκε με χρήση της μεθοδολογίας του Κεφαλαίου 2 και παρατηρήσαμε ότι η απόδοσή του είναι ομοιόμορφα καλύτερη έναντι του αντίστοιχου  $r/m$  διαγράμματος που προτάθηκε από τους Klein (2000a) και Khoo (2004a).

Παρόλο που ο κανόνας αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποδοτικός στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, εντούτοις η απόδοσή του φθίνει για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Προκειμένου να βελτιώσουμε την απόδοσή του και για μεγαλύτερες μετατοπίσεις διατηρώντας όμως ταυτόχρονα την ίδια ευαισθησία στις μικρές και μεσαίες, συνδυάσαμε τον τροποποιημένο  $r$ -από- $m$  κανόνα με τον κανόνα 1-από-1. Ο κανόνας που προέκυψε ονομάστηκε αναθεωρημένος  $r$ -από- $m$  κανόνας και το αντίστοιχο διάγραμμα που τον χρησιμοποιεί καλείται αναθεωρημένο  $r$  από  $m$  διάγραμμα ελέγχου και συμβολίζεται ως  $R : r/m$ . Το  $R : r/m$  διάγραμμα ελέγχου είναι αισθητά καλύτερο έναντι του τυπικού  $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μετατοπίσεων έως τρεις μονάδες τυπικής απόκλισης.

Η απόδοση των διαγραμμάτων αποτιμήθηκε βάσει των αντίστοιχων τιμών του  $ARL$  ενώ υπολογίσαμε επίσης ποσοστιαία σημεία της κατανομής του μήκους ροής για όλα σχεδόν τα προτεινόμενα διαγράμματα.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ $r$ -ΑΠΟ- $m$

### 4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας τα οποία βασίζονται σε κανόνες ροών τύπου  $r$ -από- $m$ , ανάλογους με αυτούς που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Παρόλο που η παρακολούθηση της διασποράς μιας παραγωγικής διεργασίας είναι, αν όχι σημαντικότερη, εξίσου σημαντική με την παρακολούθηση της μέσης τιμής, εντούτοις δεν έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή σε διαγράμματα με κανόνες ροών για την παρακολούθηση της διασποράς.

Η ανάπτυξη των διαγραμμάτων θα γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να έχουν την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{in}$ . Θα μελετήσουμε μονόπλευρα αλλά και δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου ενώ θα δοθεί έμφαση στην ανάπτυξη διαγραμμάτων τα οποία θα μπορούν να ανιχνεύουν μειώσεις στη διασπορά της διεργασίας, δηλαδή να ανιχνεύουν τυχόν βελτίωση σε αυτή.

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα δώσουμε εν συντομία τα βασικά χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς καθώς και τα πιο συνηθισμένα προβλήματα που συναντώνται κατά την εφαρμογή τους στην πράξη (Παράγραφοι 4.2, 4.2.1-4.2.3). Στις Παραγράφους 4.3.1-4.3.4 θα μελετηθούν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς. Στα διαγράμματα ελέγχου των Παραγράφων 4.3.1 και 4.3.2 εφαρμόζεται ένας μόνο κανόνας ευαισθητοποίησης. Το διάγραμμα ελέγχου της Παραγράφου 4.3.3 χρησιμοποιεί δύο κανόνες ανακήρυξης εκτός ελέγχου διεργασίας, τον κανόνα ευαισθητοποίησης  $r$ -από- $m$  που χρησιμοποιεί το

διάγραμμα ελέγχου της Παραγράφου 4.3.1 μαζί με τον κανόνα 1-από-1. Όμοια, το διάγραμμα της Παραγράφου 4.3.4 χρησιμοποιεί ως κανόνες ανακήρυξης εκτός ελέγχου διεργασίας τον κανόνα 1-από-1 μαζί με τον κανόνα ευαισθητοποίησης  $r$ -από- $m$  που χρησιμοποιείται από το διάγραμμα ελέγχου της Παραγράφου 4.3.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για την απόδοση όλων των προαναφερθέντων διαγραμμάτων ελέγχου δίνονται στην Παράγραφο 4.4.

Στην Παράγραφο 4.5 μελετώνται τα διαγράμματα ελέγχου των Παραγράφων 4.3.1-4.3.4 στα οποία έχουμε ενσωματώσει το χαρακτηριστικό της άμεσης αρχικής αντίδρασης ενώ Στην Παράγραφο 4.6 παρουσιάζονται τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου  $r/m$ ,  $M:r/m$ ,  $I:r/m$  και  $R:r/m$  (δείτε Κεφάλαιο 3) για την παρακολούθηση της διασποράς. Τέλος, στην Παράγραφο 4.7 δίνεται ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς της διεργασίας για μικρά μεγέθη δείγματος στο οποίο χρησιμοποιείται ένας κανόνας ροών τύπου  $m$ -από- $m$ . Ως μέτρο απόδοσης όλων των προαναφερθέντων διαγραμμάτων χρησιμοποιείται το μέσο μήκος ροής  $ARL$ .

## 4.2 Βασικά Χαρακτηριστικά Διαγραμμάτων Ελέγχου για τη Διασπορά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε τέσσερα διαφορετικά δίπλευρα διαγράμματα το καθένα από τα οποία βασίζεται σε διαφορετικού τύπου κανόνες ευαισθητοποίησης  $r$ -από- $m$  για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας. Είναι λογικό να σκεφτεί κανείς να εφαρμόσει τους κανόνες αυτούς σε διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς. Όμως, προτού γίνει αυτό θα αναφέρουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά των εν λόγω διαγραμμάτων τα οποία θα πρέπει να έχει κανείς υπόψη του προτού προβεί στην ανάπτυξή τους.

Σε ότι ακολουθεί θεωρούμε ότι το χαρακτηριστικό του οποίου η παρακολούθηση της διασποράς μας ενδιαφέρει ακολουθεί κανονική κατανομή με εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$  και διασπορά  $\sigma_0^2$ , αντίστοιχα. Για την παρακολούθηση της διασποράς συλλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, και θεωρούμε ότι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού δε μεταβάλλεται στα δείγματα και επομένως παραμένει συνεχώς εντός ελέγχου.

## 4.2.1 Τύποι Διαγραμμάτων

Στα διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα είναι είτε η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ , είτε το δειγματικό εύρος  $R$ , είτε η δειγματική διασπορά  $S^2$ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

όπου  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , δίνεται από τη σχέση (δείτε π.χ. Khoo(2005b))

$$g(s) = \frac{2^{\frac{3-n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} s^{n-2} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}, \quad s > 0. \quad (4.1)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής του εύρους  $R = \max\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\} - \min\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  δίνεται από τη σχέση (δείτε π.χ. Αντζουλάκος (2007))

$$f_R(r) = \frac{n(n-1)}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) [\Phi(v+r/\sigma) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+r/\sigma) dv, \quad r > 0 \quad (4.2)$$

όπου  $\Phi(\cdot)$ ,  $\varphi(\cdot)$  είναι αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Για την τυχαία μεταβλητή  $S^2$  ισχύει το πολύ γνωστό αποτέλεσμα ότι  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ , όπου  $\chi_\nu^2$  είναι η κατανομή χι-τετράγωνο με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας.

Είναι προφανές ότι στα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς η κατανομή της απεικονιζόμενης ποσότητας εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος. Οι παραπάνω κατανομές δεν είναι συμμετρικές με αποτέλεσμα η κατανομή του μήκους ροής να είναι αρκετά λοξή.

### 4.2.2 Ανίχνευση Βελτίωσης της Διεργασίας

Στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως τα δίπλευρα διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς ( $S$ ,  $R$  ή  $S^2$ ) με όρια ελέγχου  $3\sigma$  (δείτε Παράρτημα Π.1). Σε αυτή την περίπτωση, για μέγεθος δείγματος  $n \leq 5$  για τα  $S$ ,  $S^2$  διαγράμματα, και για  $n \leq 6$  για το  $R$  διάγραμμα, το κάτω όριο ελέγχου είναι αρνητικό οπότε η τιμή του τίθεται ίση με το 0. Έτσι, το διάγραμμα δεν μπορεί να ανιχνεύσει πιθανή βελτίωση της παραγωγικής διεργασίας (αφού δεν υπάρχει δυνατότητα να εμφανίζονται σημεία κάτω από το κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος) και επομένως δεν υπάρχει η δυνατότητα, για παράδειγμα, να γίνει επανασχεδιασμός της διεργασίας ώστε το επίπεδο μεταβλητότητάς της να μειωθεί. Λόγω του ότι η απεικονιζόμενη ποσότητα σε καθένα από τα τρία διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς δεν ακολουθεί κανονική κατανομή, η χρήση  $3\sigma$  ορίων ελέγχου δε συνεπάγεται ποσοστό εσφαλμένων συναγερωμών ίσο με 0.27% αλλά αρκετά μεγαλύτερο.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί (μερικώς) με χρήση ορίων πιθανότητας τα οποία βασίζονται είτε σε ίσες είτε σε άνισες πιθανότητες ουράς της κατανομής της απεικονιζόμενης ποσότητας (δείτε Ryan (2000, σελ. 89-93), Grant and Leavenworth (1999, σελ. 380-381), Klein (2000b)).

### 4.2.3 Αμεροληψία Διαγράμματος

Συνήθως, οι διαχειριστές ενός οποιουδήποτε διαγράμματος ελέγχου επιθυμούν να χρησιμοποιούν δίπλευρα διαγράμματα ώστε με ένα διάγραμμα να ανιχνεύουν πιθανές αλλαγές στην τιμή της παραμέτρου της διεργασίας, είτε αυξήσεις είτε μειώσεις. Ωστόσο ορισμένα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων ελέγχου για τη μέση τιμή που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 3 παύουν να ισχύουν στην περίπτωση των διαγραμμάτων ελέγχου για τη διασπορά. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου  $S$  με  $3\sigma$  όρια ελέγχου τότε ακόμα και για μεγέθη δειγμάτων  $n \geq 6$  (έτσι ώστε η τιμή του κάτω ορίου ελέγχου να μην είναι ίση με μηδέν) το μέγιστο  $ARL$  δεν επιτυγχάνεται στην εντός ελέγχου τιμή  $\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης αλλά σε κάποια άλλη εκτός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης. Έτσι, παρατηρείται το φαινόμενο να ισχύει  $ARL_{out} > ARL_{in}$  για ένα εύρος μετατοπίσεων (συνήθως για μειώσεις) στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.



Τέτοιου είδους διαγράμματα ελέγχου καλούνται *ARL* – μεροληπτικά (*ARL – biased*, Pignatiello et al. (1995), Acosta-Mejia (1998)). Τα συνήθη διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς ( $S$ ,  $R$ ) είναι μεροληπτικά, είτε χρησιμοποιούν 3σ όρια ελέγχου είτε όρια πιθανότητας τα οποία βασίζονται σε ίσες πιθανότητες ουράς. Ως *ARL* – αμερόληπτο (*ARL – unbiased*) ορίζεται το διάγραμμα ελέγχου στο οποίο η μέγιστη τιμή του *ARL* επιτυγχάνεται όταν οι τιμές των υπό παρακολούθηση παραμέτρων είναι εντός ελέγχου.

Στη βιβλιογραφία έχουν εμφανιστεί αρκετές προτάσεις και μεθοδολογίες για την ανάπτυξη *ARL* – αμερόληπτων διαγραμμάτων ελέγχου (Champ and Lowry (1994), Acosta-Mejia (1998), Klein (2000b)).

Δύο από αυτές, (δείτε Acosta-Mejia (1998)) είναι οι εξής:

1. Χρησιμοποίηση μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου, χωριστά για την παρακολούθηση αυξήσεων και χωριστά για την παρακολούθηση μειώσεων στη διασπορά της παραγωγικής διεργασίας.
2. Αντικατάσταση του κάτω ορίου ελέγχου με ένα όριο στο οποίο θα βασιστεί η εφαρμογή ενός κανόνα ροών, αντίστοιχο με αυτό που πρότεινε ο Nelson (1990) προκειμένου να παρακολουθείται η διεργασία για τυχόν μειώσεις στην τιμή της διασποράς της.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προτάσεις θα προχωρήσουμε στη μελέτη μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών τύπου *r* -από- *m* . Στις επόμενες παραγράφους θα περιγράψουμε τα διαγράμματα αυτά.

### 4.3 Μονόπλευρα Διαγράμματα για τη Διασπορά

Στη παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών ανάλογους με εκείνους που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Θα αναφερθούμε μόνο σε άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου αφού η περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων μπορεί να μελετηθεί με ανάλογο τρόπο, (ύστερα βέβαια από κάποιες απλές τροποποιήσεις) και γι' αυτό το λόγο η μελέτη τους παραλείπεται.

Για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου καθώς και για τον υπολογισμό της απόδοσής τους, στις επόμενες παραγράφους θεωρούμε ότι συλλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , μεγέθους  $n$  όπου η τυχαία μεταβλητή  $X_{ij}$  που περιγράφει την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με

γνωστή εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$  και εντός ελέγχου διακύμανση  $\sigma_0^2$ . Για τη μέση τιμή θεωρούμε επιπλέον ότι αυτή δε μεταβάλλεται και παραμένει διαρκώς εντός ελέγχου. Η εκτός ελέγχου διακύμανση θα συμβολίζεται με  $\sigma_1^2$  και μπορεί να γραφεί ως  $\sigma_1^2 = \rho^2 \sigma_0^2$  ( $\rho > 0$ ).

Στα διαγράμματα απεικονίζεται η τιμή της δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S$  (η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της οποίας δίνεται από τον τύπο (4.1)) για την οποία ισχύει ότι

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\rho\sigma_0} \sim \chi_{n-1}$$

(όπου  $\chi_{n-1}$  είναι η κατανομή  $\chi$  με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας).

Αν  $\rho > 1$ , τότε  $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ , οπότε η διασπορά της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο. Αν  $0 < \rho < 1$ , τότε  $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ , οπότε η διασπορά της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε χαμηλότερο επίπεδο. Η περίπτωση  $\rho = 1$  αντιστοιχεί σε διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου.

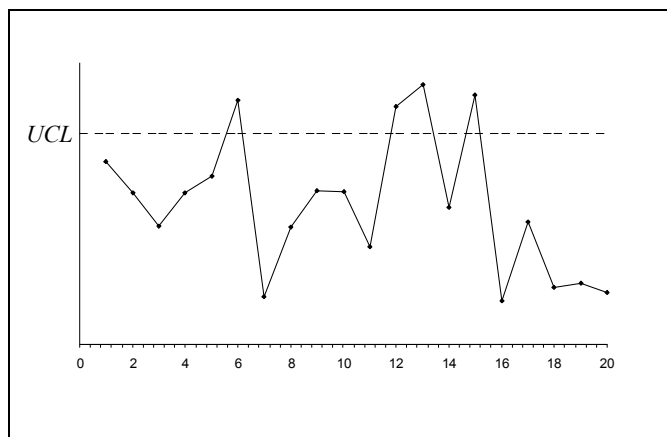
Κλείνοντας αξίζει να αναφέρουμε πως αντί της δειγματικής τυπικής απόκλισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά είτε το δειγματικό εύρος  $R$  είτε η δειγματική διασπορά  $S^2$ . Επιλέξαμε τη δειγματική τυπική απόκλιση αφού φαίνεται να χρησιμοποιείται ευρέως στην πράξη ενώ είναι αποτελεσματικότερη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης έναντι του εύρους ειδικά για μεγέθη δειγμάτων μεγαλύτερα του 10 (δείτε Montgomery (2005), σελ.222).

### 4.3.1 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου I

Για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος  $r$ -από- $m$  τύπου I (συμβ.  $C_{r/m}^{(1)}$ ) θεωρούμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου με ένα άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ( $UCL > 0$ ) στο οποίο απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ . Το  $C_{r/m}^{(1)}$  διάγραμμα ελέγχου δεν κάνει χρήση κεντρικής γραμμής και γι' αυτό το λόγο παραλείπεται η σχεδιάσή της.

Το  $C_{r/m}^{(1)}$  διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου  $UCL$ . Τότε έχουμε ένδειξη ότι η τυπική απόκλιση της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο. Στο Σχήμα 4.1

δίνεται μια γραφική αναπαράσταση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος  $C_{3/4}^{(1)}$  το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 15.



**Σχήμα 4.1.** Το διάγραμμα  $C_{3/4}^{(1)}$

Το  $C_{r/m}^{(1)}$  διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ουσιαστικά τη μονόπλευρη έκδοση του δίπλευρου διαγράμματος  $r/m$  του Κεφαλαίου 3.

Στο διάγραμμα ορίζουμε δύο περιοχές, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το άνω όριο ελέγχου. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις δύο περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_0(\rho)$ ,  $p_1(\rho)$ . Ειδικότερα για  $\rho=1$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $p_0(1) = p_0$  και  $p_1(1) = p_1$ .

Αφού

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\rho\sigma_0} \sim \chi_{n-1}$$

(για  $\rho=1$  έχουμε εντός ελέγχου διεργασία) είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_1(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad p_0(\rho) = 1 - p_1(\rho)$$

( $F_{\chi_{n-1}^2}(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της χι-τετράγωνο κατανομής με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας).

Για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(1)}$  ορίζουμε τις δίτιμες τυχαίες μεταβλητές  $Y_t$  με

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_t > UCL \\ 0, & \text{αν } S_t \leq UCL \end{cases}.$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_t$  αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας και αποτυχίας αντίστοιχα

$$\Pr(Y_t = 1) = p_1(\rho), \quad \Pr(Y_t = 0) = p_0(\rho) = 1 - p_1(\rho).$$

Στη συνέχεια δίνονται εν συντομία βασικά αποτελέσματα για την κατασκευή ειδικών περιπτώσεων του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(1)}$ . Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = m$ , δηλαδή το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(1)}$ .

Ας θεωρήσουμε τον απλό σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{\underbrace{11 \dots 1}_m\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_m^{(1)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του απλού σχηματισμού  $\mathcal{E}$  στην ακολουθία  $Y_1, Y_2, \dots$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(1)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_m^{(1)}$  η οποία είναι η γεωμετρική κατανομή τάξης  $m$  (δείτε Feller (1968), Philippou et al. (1983)). Για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(1)}$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_m^{(1)}$ .

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(1)}$  δίνεται από τον τύπο (Philippou et al. (1983))

$$ARL_{in} = E(T_m^{(1)} | \rho = 1) = \frac{1 - p_1^m}{p_1^m (1 - p_1)}, \quad p_1 = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2} \right) \quad (4.4)$$

ενώ το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_m^{(1)} | \rho \neq 1) = \frac{1 - p_1^m(\rho)}{p_1^m(\rho)(1 - p_1(\rho))}.$$

Δοθέντος της τιμής του  $UCL$ , από την έκφραση για το  $ARL_{in}$  είναι δυνατός ο υπολογισμός της τιμής του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Αντίστροφα, μπορούμε να υπολογίσουμε το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ώστε να έχουμε την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Η έκφραση για το  $ARL_{out}$  μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\rho > 1$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Σημειώνουμε επίσης ότι το  $ARL_{in}$  ως συνάρτηση του  $p_1$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση και ισχύει

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_1^m}{p_1^m (1 - p_1)} = +\infty, \quad \lim_{p_1 \rightarrow 1^-} \frac{1 - p_1^m}{p_1^m (1 - p_1)} = m.$$

Συνεπώς είναι δυνατή η εύρεση μοναδικής τιμής για το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{in}$  να έχει την επιθυμητή τιμή  $c$  ( $c \geq m$ ).

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = 2$ ,  $m > 2$ , δηλαδή το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(1)}$ . Έστω ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{11, 101, 1001, \dots, \underbrace{100 \dots 01}_{m-2}\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{2/m}^{(1)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(1)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(1)}$ . Για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(1)}$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{2/m}^{(1)}$ . Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι η γεωμετρική κατανομή τάξης  $2/m$  (δείτε π.χ. Balakrishnan and Koutras (2002)). Για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(1)}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(1)}$  δίνεται από τον τύπο (δείτε επίσης Balakrishnan and Koutras (2002))

$$ARL_{in} = E(T_{2/m}^{(1)} | \rho = 1) = \frac{2 - p_0^{m-1}}{(1 - p_0)(1 - p_0^{m-1})}, \quad p_0 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2} \right) \quad (4.5)$$

ενώ το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{\text{out}} = E(T_{2/m}^{(1)} | \rho \neq 1) = \frac{2 - p_0^{m-1}(\rho)}{(1 - p_0(\rho))(1 - p_0^{m-1}(\rho))}.$$

Δοθέντος της τιμής του  $UCL$  από την έκφραση για το  $ARL_{\text{in}}$  μπορούμε να υπολογίσουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(1)}$ . Αντίστροφα, από τη σχέση (4.5) είναι δυνατός ο προσδιορισμός της τιμής του  $UCL$  ώστε να έχουμε την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Σημειώνουμε επίσης ότι το  $ARL_{\text{in}}$  ως συνάρτηση του  $p_0$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση και ισχύει ότι

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0^+} \frac{2 - p_0^{m-1}}{(1 - p_0)(1 - p_0^{m-1})} = 2, \quad \lim_{p_0 \rightarrow 1^-} \frac{2 - p_0^{m-1}}{(1 - p_0)(1 - p_0^{m-1})} = +\infty.$$

Συνεπώς είναι δυνατή η εύρεση μοναδικής τιμής για το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{\text{in}}$  να έχει την επιθυμητή τιμή  $c$  ( $c \geq 2$ ).

Για  $r \neq m$  και  $r \neq 2$  δεν υπάρχει (προς το παρόν τουλάχιστον) γενικός τύπος για το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(1)}$ . Στον επόμενο πίνακα δίνεται το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{3/4}^{(1)}$ ,  $C_{3/5}^{(1)}$  και  $C_{4/5}^{(1)}$ .

**Πίνακας 4.1.** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $C_{3/4}^{(1)}$ ,  $C_{3/5}^{(1)}$  και  $C_{4/5}^{(1)}$

Διάγραμμα Ελέγχου	$ARL_{\text{in}} = E(T_{2/m}^{(1)}   \rho = 1), \quad 3 \leq r < m \leq 5$
$C_{3/4}^{(1)}$	$\frac{3(1 - p_0) + p_0^2(1 + (1 - p_0^2))}{(1 - p_0)^3(1 + p_0 + p_0^2)}$
$C_{3/5}^{(1)}$	$\frac{p_1^9 - 6p_1^8 + 14p_1^7 - 14p_1^6 + 2p_1^5 + 8p_1^4 - 9p_1^3 + 4p_1^2 + 2p_1 + 1}{p_1^3(p_1^7 - 6p_1^6 + 14p_1^5 - 15p_1^4 + 5p_1^3 + 6p_1^2 - 10p_1 + 6)}$
$C_{4/5}^{(1)}$	$\frac{p_1^9 - 4p_1^8 + 5p_1^7 - 3p_1^6 + 3p_1^5 - 4p_1^4 + 2p_1^3 + 2p_1^2 + p_1 + 1}{p_1^4(p_1^6 - 4p_1^5 + 6p_1^4 - 5p_1^3 + 4p_1^2 - 5p_1 + 4)}$

### 4.3.2 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου II

Για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος  $r$ -από- $m$  τύπου II (συμβ.  $C_{r/m}^{(II)}$ ) θεωρούμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου με ένα άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ( $UCL > 0$ ) και κεντρική γραμμή  $CL$  στο οποίο απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ . Ως κεντρική γραμμή του διαγράμματος ορίζεται να είναι η διάμεσος της εντός ελέγχου κατανομής της

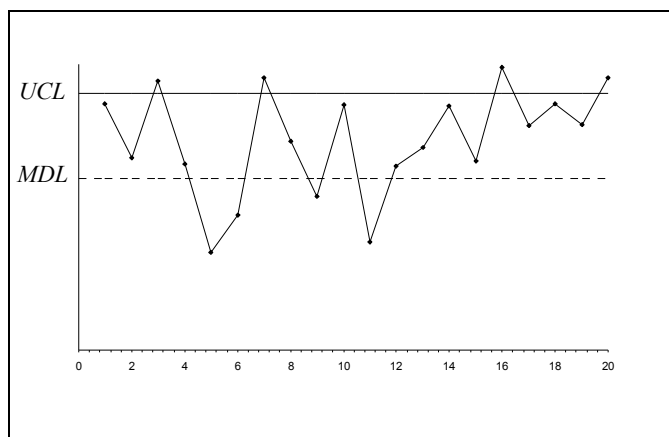
απεικονιζόμενη στατιστικής συνάρτησης  $S$  η οποία θα συμβολίζεται με  $MDL$  (*Median Line*). Για την κεντρική γραμμή του διαγράμματος ισχύει ότι  $0 < MDL < UCL$  ενώ η τιμή της, που προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης  $\Pr(S \leq MDL) = 0.5$ , είναι ίση με

$$CL = MDL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1,0.5}^2}{n-1}}. \quad (4.6)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι η διάμεσος της κατανομής της δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S$  (ή του δειγματικού εύρους  $R$ ) έχει προταθεί να χρησιμοποιείται ως κεντρική γραμμή στα διαγράμματα  $S$  (ή  $R$ ) ώστε η μη-συμμετρική κατανομή της κατανομής του  $S$  να μην επηρεάζει την εφαρμογή των κανόνων ροών της Western Electric Company (Montgomery (2005), σελ.473).

Το  $C_{r/m}^{(II)}$  διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $r$ -από- $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  με τα υπόλοιπα  $m-r$  σημεία, αν υπάρχουν, να βρίσκονται μεταξύ κεντρικής γραμμής και άνω ορίου ελέγχου. Τότε έχουμε ένδειξη ότι η τυπική απόκλιση της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο.

Στο επόμενο σχήμα δίνεται μια γραφική αναπαράσταση του άνω μονόπλευρου  $C_{2/5}^{(II)}$  διαγράμματος ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο 20<sup>ο</sup> δείγμα. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι εμφανίζονται 2-από-5 συνεχόμενα σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου (σημεία 3 έως 7) όμως επειδή τα ενδιάμεσα σημεία 4, 5 και 6 δε βρίσκονται όλα μεταξύ κεντρικής γραμμής και άνω ορίου ελέγχου, το διάγραμμα δε δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο σημείο 7. Είναι προφανές ότι το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(I)}$  μπορεί να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας περισσότερες φορές έναντι του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(II)}$ , κάτι το οποίο δε συνεπάγεται (όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια) ότι είναι απαραίτητα και πιο ευαίσθητο.



**Σχήμα 4.2.** Το διάγραμμα  $C_{2/5}^{(II)}$

Το  $C_{r/m}^{(II)}$  διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ουσιαστικά τη μονόπλευρη έκδοση του δίπλευρου διαγράμματος  $M : r/m$  του Κεφαλαίου 3.

Στο διάγραμμα ορίζουμε τρεις περιοχές, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή κάτω από την κεντρική γραμμή. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $f_0(\rho)$ ,  $f_1(\rho)$ ,  $f_2(\rho)$ . Ειδικότερα για  $\rho = 1$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $f_0(1) = f_0$ ,  $f_1(1) = f_1$  και  $f_2(1) = f_2$ .

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$f_1(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$f_2(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad f_0(\rho) = 1 - f_1(\rho) - f_2(\rho).$$

Για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(II)}$  ορίζουμε μια ακολουθία τρίτιμων τυχαίων μεταβλητών  $Y_t$  με

$$Y_t = \begin{cases} 2, & \text{αν } S_t > UCL \\ 1, & \text{αν } MDL < S_t \leq UCL. \\ 0, & \text{αν } S_t \leq LCL \end{cases}$$



Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων τρίτιμων δοκιμών με τιμές στο σύνολο  $\{0,1,2\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_i = 2) = f_2(\rho), \quad \Pr(Y_i = 1) = f_1(\rho), \quad P(Y_i = 0) = f_0(\rho) = 1 - f_1(\rho) - f_2(\rho).$$

Στη συνέχεια δίνονται εν συντομία βασικά αποτελέσματα για την κατασκευή ειδικών περιπτώσεων του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(II)}$ . Η περίπτωση  $r = m$  (δηλαδή το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(II)}$ ) παραλείπεται αφού το διάγραμμα αυτό δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου όπως ακριβώς και στο  $C_{m/m}^{(I)}$  διάγραμμα ελέγχου του οποίου η ανάπτυξη παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.3.1.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = 2$ ,  $m > 2$ . Έστω ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{22, 212, 2112, \dots, 2\underbrace{11 \dots 1}_m 2\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{2/m}^{(II)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  στην ακολουθία  $Y_1, Y_2, \dots$ . Η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(II)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(II)}$  οπότε για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(II)}$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{2/m}^{(II)}$ . Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(II)}$  δεν είναι κάποια γνωστή κατανομή και η μελέτη της μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσής της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(II)}$  δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{in} = E(T_{2/m}^{(II)} | \rho = 1) = \frac{(1 - f_1) + f_2(1 - f_1^{m-1})}{f_2^2(1 - f_1^{m-1})} \quad (4.7)$$

όπου οι πιθανότητες  $f_1$ ,  $f_2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$f_2 = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2} \right), \quad f_1 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{\sigma_0^2} \right).$$

Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_{2/m}^{(II)} | \rho \neq 1) = \frac{(1 - f_1(\rho)) + (f_2(\rho))(1 - f_1^{m-1}(\rho))}{f_2^2(\rho)(1 - f_1^{m-1}(\rho))}.$$

Δοθέντος των τιμών  $MDL$ ,  $UCL$  και χρησιμοποιώντας την έκφραση για το  $ARL_{in}$  μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(II)}$ . Αντίστροφα, από τη σχέση (4.7) είναι δυνατός ο υπολογισμός της τιμής του άνω ορίου ελέγχου  $UCL$  ώστε να έχουμε την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Η έκφραση για το  $ARL_{out}$  μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\rho$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Σημειώνουμε επίσης ότι δοθέντος της τιμής  $MDL$  η πιθανότητα  $f_0$  (εντός ελέγχου διεργασία) είναι ίση με  $1/2$ . Τότε, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{in}$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς  $f_1$  και ισχύει ότι

$$\lim_{f_1 \rightarrow 0^-} \frac{(1 - f_1) + (0.5 - f_1)(1 - f_1^{m-1})}{(0.5 - f_1)^2(1 - f_1^{m-1})} = 6, \quad \lim_{f_1 \rightarrow 1/2^+} \frac{(1 - f_1) + (0.5 - f_1)(1 - f_1^{m-1})}{(0.5 - f_1)^2(1 - f_1^{m-1})} = +\infty.$$

Συνεπώς είναι δυνατή η εύρεση μοναδικής τιμής για το άνω όριο ελέγχου  $UCL$  ώστε το  $ARL_{in}$  να έχει την επιθυμητή τιμή  $c$  ( $c \geq 6$ ).

Για  $r \neq m$  και  $r \neq 2$  δεν υπάρχει, προς το παρόν τουλάχιστον, αναλυτικός τύπος για το μέσο μήκος ροής του  $C_{r/m}^{(II)}$  διαγράμματος ελέγχου. Ο υπολογισμός του  $ARL$  σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να γίνει με άμεση εφαρμογή της μεθοδολογίας του Κεφαλαίου 2 (δείτε Παράγραφο 2.5). Η εύρεση του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός  $C_{r/m}^{(II)}$  διαγράμματος μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο πίνακα  $\mathbf{P}$  του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(I)}$ ,  $r \neq m$ . Πιο συγκεκριμένα αντικαθιστούμε τις πιθανότητες  $p_0$ ,  $p_1$  με τις  $f_1$ ,  $f_2$  αντίστοιχα και επιπλέον προσθέτουμε την τιμή  $f_0$  στην πρώτη στήλη του πίνακα  $\mathbf{P}$  και μόνο για τις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας. Έτσι κατασκευάζεται άμεσα ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  για το αντίστοιχο διάγραμμα  $C_{r/m}^{(II)}$ ,  $r \neq m$ . Στον επόμενο πίνακα δίνεται το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $ARL_{in}$  των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{3/4}^{(II)}$ ,  $C_{3/5}^{(II)}$  και  $C_{4/5}^{(II)}$ .

**Πίνακας 4.2.** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $C_{3/4}^{(II)}$ ,  $C_{3/5}^{(II)}$  και  $C_{4/5}^{(II)}$

Διάγραμμα Ελέγχου	$ARL_{in} = E(T_{2/m}^{(II)}   \rho = 1), \quad 3 \leq r < m \leq 5$
$C_{3/4}^{(II)}$	$\frac{12 + 6f_1 - 10f_1^2 + 28f_1^3 + 8f_1^4 - 16f_1^5}{10 - 11f_1 - 15f_1^2 - 8f_1^4 - 16f_1^5 + 16f_1^6}$
$C_{3/5}^{(II)}$	$\frac{24 + 24f_1^2 - 22f_1^3 + 106f_1^4 - 42f_1^5 + 48f_1^6 - 48f_1^7 + 32f_1^8 - 32f_1^9}{20 - 32f_1 + 6f_1^2 - 37f_1^3 + 11f_1^4 - 47f_1^5 + 2f_1^6 - 40f_1^7 + 64f_1^8 - 48f_1^9 + 32f_1^{10}}$
$C_{4/5}^{(II)}$	$\frac{80 + 88f_1 + 54f_1^2 - 234f_1^3 + 224f_1^4 + 328f_1^5 - 288f_1^6 - 96f_1^7 + 256f_1^8 - 128f_1^9}{88 - 108f_1 - 155f_1^2 + 61f_1^3 + 82f_1^4 - 252f_1^5 + 8f_1^6 - 144f_1^7 + 352f_1^8 - 320f_1^9 + 128f_1^{10}}$

### 4.3.3 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ Τύπου III

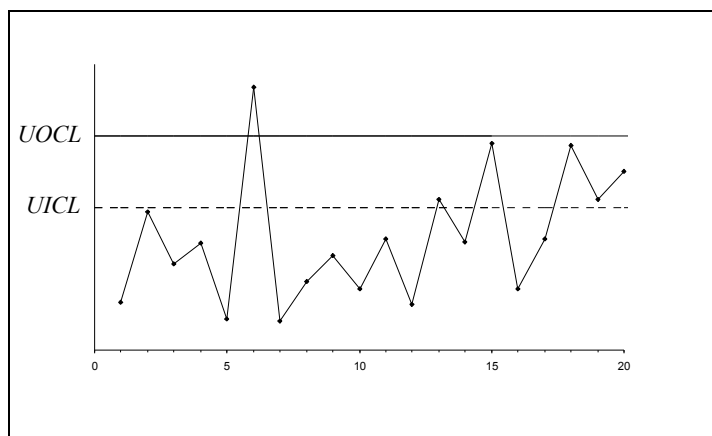
Για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος  $r$ -από- $m$  τύπου III (συμβ.  $C_{r/m}^{(III)}$ ) θεωρούμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου με ένα άνω εξωτερικό όριο ελέγχου  $UOCL$  και ένα άνω εσωτερικό όριο ελέγχου  $UICL$  στο οποίο απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ . Για τα όρια ελέγχου  $UOCL$ ,  $UICL$  ισχύει ότι  $0 < UICL < UOCL$ . Το  $C_{r/m}^{(III)}$  διάγραμμα ελέγχου δεν κάνει χρήση κεντρικής γραμμής και γι' αυτό το λόγο παραλείπεται η σχεδίασή της.

Το  $C_{r/m}^{(III)}$  διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

- (i) ένα σημείο βρεθεί πάνω από το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου  $UOCL$ , ή
- (ii) όταν  $r$ -από- $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου  $UOCL$  και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$ ,

οτιδήποτε από τα δύο εμφανιστεί συντομότερα. Τότε έχουμε ένδειξη ότι η τυπική απόκλιση της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο.

Στο Σχήμα 4.3 δίνεται μια γραφική αναπαράσταση του άνω μονόπλευρου  $C_{3/3}^{(III)}$  το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο 6<sup>ο</sup> δείγμα (σημείο άνω του εξωτερικού ορίου ελέγχου) καθώς επίσης και στο 20<sup>ο</sup> δείγμα (3 συνεχόμενα σημεία μεταξύ άνω εξωτερικού και άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου).



**Σχήμα 4.3.** Το διάγραμμα  $C_{3/3}^{(III)}$

Το  $C_{r/m}^{(III)}$  διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ουσιαστικά τη μονόπλευρη έκδοση του δίπλευρου διαγράμματος  $I : r / m$  του Κεφαλαίου 3.

Στο διάγραμμα ορίζουμε τρεις περιοχές, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου, ως Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το άνω εσωτερικό όριο ελέγχου. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $\gamma_0(\rho), \gamma_1(\rho), \gamma_2(\rho)$ . Ειδικότερα για  $\rho = 1$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\gamma_0(1) = \gamma_0, \gamma_1(1) = \gamma_1$  και  $\gamma_2(1) = \gamma_2$ .

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\gamma_2(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad \gamma_1(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$\gamma_0(\rho) = 1 - \gamma_1(\rho) - \gamma_2(\rho).$$

Για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(III)}$  ορίζουμε μια ακολουθία τρίτιμων τυχαίων μεταβλητών  $Y_i$  με

$$Y_i = \begin{cases} 2, & \text{αν } S_i > UOCL \\ 1, & \text{αν } UICL < S_i \leq UOCL. \\ 0, & \text{αν } S_i \leq UICL \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων τρίτιμων δοκιμών με τιμές στο σύνολο  $\{0,1,2\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_i = 2) = \gamma_2(\rho), \quad \Pr(Y_i = 1) = \gamma_1(\rho), \quad \Pr(Y_i = 0) = \gamma_0(\rho) = 1 - \gamma_1(\rho) - \gamma_2(\rho).$$

Στη συνέχεια δίνονται εν συντομία βασικά αποτελέσματα για την κατασκευή ειδικών περιπτώσεων του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(III)}$ . Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = m$ .

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{2, \underbrace{11 \dots 1}_m\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_m^{(III)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  στην ακολουθία  $Y_1, Y_2, \dots$ . Είναι προφανές ότι η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(III)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_m^{(III)}$ . Για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(III)}$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_m^{(III)}$ . Η μελέτη της μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(III)}$  δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{in} = E(T_m^{(III)} | \rho = 1) = \frac{1 - \gamma_1^m}{1 - \gamma_1 - \gamma_0(1 - \gamma_1^m)}, \quad (4.8)$$

όπου

$$\gamma_1 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{\sigma_0^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{\sigma_0^2} \right), \quad \gamma_0 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{\sigma_0^2} \right)$$

ενώ το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_m^{(III)} | \rho \neq 1) = \frac{1 - \gamma_1^m(\rho)}{1 - \gamma_1(\rho) - \gamma_0(\rho)(1 - \gamma_1^m(\rho))}.$$

Δοθέντος των τιμών των  $UICL$ ,  $UOCL$  από την έκφραση για το  $ARL_{in}$  μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(III)}$ . Αν ακριβώς μια από τις τιμές  $UICL$ ,  $UOCL$  είναι γνωστή τότε ο τύπος (4.8) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της άλλης ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου

μήκους ροής να είναι προκαθορισμένη (δείτε επίσης Παράγραφο 4.4). Από την έκφραση για το  $ARL_{out}$  είναι δυνατός ο υπολογισμός του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\rho$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Σημειώνουμε πως όταν η τιμή του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου είναι πάρα πολύ μεγάλη ( $UOCL \rightarrow +\infty$ ) το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(III)}$  που προκύπτει ταυτίζεται πρακτικά με το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(I)}$  ενώ όταν  $UOCL = UICL$  τότε προκύπτει το σύνθετος άνω μονόπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου στο οποίο χρησιμοποιείται ο κανόνας 1-από-1.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = 2$ ,  $m > 2$ . Έστω ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{2, 11, 101, 1001, \dots, \underbrace{100\dots 01}_{m-2}\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{2/m}^{(III)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Η κατανομή του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(III)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(III)}$ . Για τη μελέτη των χαρακτηριστικών που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{2/m}^{(III)}$ . Η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(III)}$  μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(III)}$  δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{in} = E(T_{2/m}^{(III)} | \rho = 1) = \frac{1 - \gamma_0 + \gamma_1(1 - \gamma_0^{m-1})}{1 - \gamma_1 - \gamma_0(1 + \gamma_1\gamma_0^{m-2})} \quad (4.9)$$

ενώ το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_{2/m}^{(III)} | \rho \neq 1) = \frac{1 - \gamma_0(\rho) + \gamma_1(1 - \gamma_0^{m-1}(\rho))}{1 - \gamma_1(\rho) - \gamma_0(\rho)(1 + \gamma_1(\rho)\gamma_0^{m-2}(\rho))}.$$

Δοθέντος των τιμών των  $UICL$ ,  $UOCL$  από την έκφραση για το  $ARL_{in}$  μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(III)}$ . Σημειώνουμε ότι για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων  $C_{r/m}^{(III)}$  έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να έχει δεδομένη τιμή, απαιτείται ο προσδιορισμός ενός ζεύγους ορίων, του εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$  και του εξωτερικού ορίου ελέγχου  $UOCL$ . Αν ακριβώς μια

από τις τιμές  $UICL$ ,  $UOCL$  είναι γνωστή τότε ο τύπος (4.9) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της άλλης ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής να είναι προκαθορισμένη. Από την έκφραση για το  $ARL_{out}$  είναι δυνατός ο υπολογισμός του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\rho$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Σημειώνουμε πως όταν η τιμή του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου είναι πάρα πολύ μεγάλη ( $UOCL \rightarrow +\infty$ ) το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(III)}$  που προκύπτει ταυτίζεται πρακτικά με το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(I)}$  ενώ όταν  $UOCL = UICL$  τότε προκύπτει το σύνηθες άνω μονόπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου στο οποίο χρησιμοποιείται ο κανόνας 1-από-1.

Οι εκφράσεις του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής  $ARL_{in}$  για τα υπόλοιπα διαγράμματα  $C_{3/4}^{(III)}$ ,  $C_{3/5}^{(III)}$  και  $C_{4/5}^{(III)}$  δίνονται στον επόμενο πίνακα

**Πίνακας 4.3.** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $C_{3/4}^{(III)}$ ,  $C_{3/5}^{(III)}$  και  $C_{4/5}^{(III)}$

Διάγραμμα Ελέγχου	$ARL_{in} = E(T_{r/m}^{(III)}   \rho = 1), \quad 3 \leq r < m \leq 5$
$C_{3/4}^{(III)}$	$\frac{1 + \gamma_1 + (1 + \gamma_0)\gamma_1^2 - \gamma_0(1 + \gamma_0)\gamma_1^3}{1 - \gamma_0(1 + \gamma_1) - \gamma_0^2\gamma_1^2(1 - \gamma_0\gamma_1)}$
$C_{3/5}^{(III)}$	$\frac{1 + (1 + \gamma_0)\gamma_1 + (1 + 2\gamma_0 + 2\gamma_0^2)\gamma_1^2 - \gamma_0^2\gamma_1^3(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2)(1 + \gamma_0\gamma_1)}{1 - \gamma_0 - \gamma_0^2\gamma_1 - 2\gamma_0^3\gamma_1^2 + \gamma_0^5\gamma_1^3 + \gamma_0^6\gamma_1^4}$
$C_{4/5}^{(III)}$	$\frac{1 + \gamma_1 + (1 + \gamma_0)\gamma_1^2 + (1 + 2\gamma_0)\gamma_1^3 - \gamma_0\gamma_1^4(1 + \gamma_0)(1 + \gamma_0\gamma_1^2)}{1 - \gamma_0 - \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0^2\gamma_1^2 - 2\gamma_0^2\gamma_1^3 + \gamma_0^3\gamma_1^4 + \gamma_0^4\gamma_1^6}$

Πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε ότι οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  όλων των  $C_{r/m}^{(III)}$  διαγραμμάτων μπορούν να προκύψουν από τους αντίστοιχους πίνακες  $\mathbf{P}$  των  $C_{r/m}^{(I)}$  διαγραμμάτων. Έτσι αντικαθιστώντας στον πίνακα  $\mathbf{P}$  ενός  $C_{r/m}^{(I)}$  διαγράμματος τις πιθανότητες  $p_0$ ,  $p_1$  με τις πιθανότητες  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  αντίστοιχα και προσθέτοντας στην τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbf{P}$ , και μόνο για τις γραμμές που αφορούν τις μεταβατικές καταστάσεις, την πιθανότητα  $\gamma_2$  προκύπτουν οι αντίστοιχοι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  των διαγραμμάτων  $C_{r/m}^{(III)}$ .

#### 4.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά $r$ -από- $m$ τύπου IV

Για την ανάπτυξη ενός διαγράμματος  $r$ -από- $m$  τύπου IV (συμβ.  $C_{r/m}^{(IV)}$ ) θεωρούμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου με ένα άνω εξωτερικό όριο ελέγχου  $UOCL$ , ένα άνω εσωτερικό όριο ελέγχου  $UICL$  και κεντρική γραμμή  $CL = MDL$ , όπως αυτή ορίστηκε στην Παράγραφο 4.3.2, στο οποίο απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ . Για τις γραμμές που σχεδιάζονται στο διάγραμμα ισχύει ότι  $0 < MDL < UICL < UOCL$ .

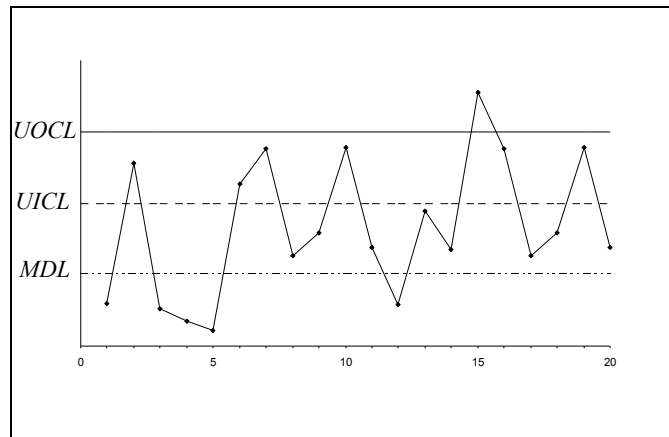
Το  $C_{r/m}^{(IV)}$  διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

- (i) ένα σημείο βρεθεί πάνω από το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου  $UOCL$ , ή
- (ii) όταν  $r$  από  $m$  το πολύ συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ του άνω εσωτερικού και του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου με τα υπόλοιπα  $m - r$  σημεία να βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής  $MDL$  και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου

οτιδήποτε από τα δύο συμβεί συντομότερα.

Στο Σχήμα 4.4 δίνεται μια γραφική αναπαράσταση του άνω μονόπλευρου  $C_{3/5}^{(IV)}$ . Όπως και προηγουμένως, ο κανόνας ανακήρυξης εκτός ελέγχου διεργασίας είναι σύνθετος και έχουμε ένδειξη μετατόπισης της διασποράς σε υψηλότερο επίπεδο στο  $10^\circ$  δείγμα (3-από-5 συνεχόμενα σημεία) και στο  $15^\circ$  δείγμα (1 σημείο εκτός του εξωτερικού ορίου ελέγχου).





**Σχήμα 4.4.** Το διάγραμμα  $C_{3/5}^{(IV)}$

Το διάγραμμα αυτό αποτελεί ουσιαστικά τη μονόπλευρη έκδοση του δίπλευρου διαγράμματος  $R:r/m$  του Κεφαλαίου 3.

Στο διάγραμμα ορίζουμε τέσσερις περιοχές, την Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το εξωτερικό όριο ελέγχου, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εξωτερικού και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου και της κεντρικής γραμμής και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή κάτω από την κεντρική γραμμή. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τέσσερις περιοχές του  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $b_0(\rho), b_1(\rho), b_2(\rho), b_3(\rho)$ . Ειδικότερα για  $\rho=1$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $b_0(1)=b_0, b_1(1)=b_1, b_2(1)=b_2$  και  $b_3(1)=b_3$ .

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$b_3(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad b_2(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$b_1(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad b_0(\rho) = 1 - b_1(\rho) - b_2(\rho) - b_3(\rho).$$

Για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του  $C_{r/m}^{(IV)}$  διαγράμματος ορίζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $Y_i$  με δυνατά αποτελέσματα στο σύνολο  $\{0, 1, 2, 3\}$ ,

$$Y_i = \begin{cases} 3, & \text{αν } S_i > UOCL \\ 2, & \text{αν } UICL < S_i \leq UOCL \\ 1, & \text{αν } MDL < S_i \leq UICL \\ 0, & \text{αν } S_i \leq MDL \end{cases} .$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων πλειότιμων δοκιμών με τέσσερα δυνατά αποτελέσματα στο σύνολο  $\{0,1,2,3\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_i = 3) = b_3(\rho), \quad \Pr(Y_i = 2) = b_2(\rho)$$

$$\Pr(Y_i = 1) = b_1(\rho), \quad \Pr(Y_i = 0) = b_0(\rho) = 1 - b_3(\rho) - b_2(\rho) - b_1(\rho).$$

Στη συνέχεια δίνουμε εν συντομία βασικά αποτελέσματα για την κατασκευή ειδικών περιπτώσεων του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(IV)}$ . Η περίπτωση  $r = m$  (δηλαδή το διάγραμμα  $C_{m/m}^{(II)}$ ) παραλείπεται αφού το διάγραμμα αυτό δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί πάνω από το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου ή όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν μεταξύ του άνω εσωτερικού και του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου, οτιδήποτε από τα δύο συμβεί συντομότερα. Σε αυτή την περίπτωση η ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(IV)}$  ταυτίζεται με την ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας του διαγράμματος  $C_{m/m}^{(III)}$  του οποίου η ανάπτυξη παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.3.3.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση  $r = 2$ ,  $m > 2$ . Έστω ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{3, 22, 212, 2112, \dots, \underbrace{211 \dots 12}_{m-2}\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{2/m}^{(IV)}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$ . Η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(IV)}$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{2/m}^{(IV)}$  οπότε για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(IV)}$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{2/m}^{(IV)}$ . Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής δεν είναι κάποια γνωστή κατανομή και η μελέτη της μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(IV)}$  δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{in} = E(T_{2/m}^{(IV)} | \rho = 1) = \frac{1 - b_1 + b_2(1 - b_1^{m-1})}{(1 - b_1)(1 - b_0 - b_1(1 + b_2 b_1^{m-2})) - b_0 b_2(1 - b_1^{m-1})} \quad (4.10)$$

όπου οι πιθανότητες  $b_0, b_1, b_2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$b_0 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{\sigma_0^2} \right), \quad b_1 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{\sigma_0^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{\sigma_0^2} \right),$$

$$b_2 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{\sigma_0^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{\sigma_0^2} \right).$$

Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_{2/m}^{(IV)} | \rho \neq 1)$$

$$= \frac{1 - b_1(\rho) + b_2(\rho)(1 - b_1^{m-1}(\rho))}{(1 - b_1(\rho))(1 - b_0(\rho) - b_1(\rho)(1 + b_2(\rho)b_1^{m-2}(\rho))) - b_0(\rho)b_2(\rho)(1 - b_1^{m-1}(\rho))}.$$

Δοθέντος των τιμών  $UOCL, UICL$  από την έκφραση του  $ARL_{in}$  είναι δυνατός ο υπολογισμός του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{2/m}^{(IV)}$ . Σημειώνουμε ότι για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων  $C_{r/m}^{(IV)}$  έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής να έχει δεδομένη τιμή, απαιτείται ο προσδιορισμός ενός ζεύγους ορίων, του εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$  και του εξωτερικού ορίου ελέγχου  $UOCL$ . Αν ακριβώς μια από τις τιμές  $UICL, UOCL$  είναι γνωστή τότε ο τύπος (4.10) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της άλλης ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής να είναι προκαθορισμένη. Από την έκφραση του  $ARL_{out}$  έχουμε τη δυνατότητα υπολογισμού του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\rho$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

Για  $r \neq m$  και  $r \neq 2$  δεν υπάρχει προς το παρόν τουλάχιστον αναλυτικός τύπος για το μέσο μήκος ροής του  $C_{r/m}^{(IV)}$  διαγράμματος ελέγχου. Ο υπολογισμός του  $ARL$  σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να γίνει με άμεση εφαρμογή της μεθοδολογίας του Κεφαλαίου 2. Σχετικά με την εύρεση του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(IV)}$  αναφέρουμε ότι μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο πίνακα  $\mathbf{P}$  του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(II)}$ . Έτσι αντικαθιστώντας τις πιθανότητες  $f_0, f_1$  με τις  $b_1, b_2$  αντίστοιχα, την τιμή 0 με την τιμή  $b_0$  στην πρώτη στήλη του πίνακα  $\mathbf{P}$ , και μόνο για τις μεταβατικές

καταστάσεις της αλυσίδας, καθώς και την τιμή  $\theta$  με την τιμή  $b_3$  στην τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbf{P}$  προκύπτει ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  για το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(IV)}$ . Στον επόμενο πίνακα δίνεται το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμάτων  $C_{3/4}^{(IV)}$ ,  $C_{3/5}^{(IV)}$  και  $C_{4/5}^{(IV)}$ .

**Πίνακας 4.4.** Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής των διαγραμμμάτων  $C_{3/4}^{(IV)}$ ,  $C_{3/5}^{(IV)}$  και  $C_{4/5}^{(IV)}$

Διάγραμμα Ελέγχου	$ARL_{in} = E(T_{r/m}^{(IV)}   \rho = 1), \quad 3 \leq r < m \leq 5$
$C_{3/4}^{(IV)}$	$\frac{2(1 + b_2) + 2(1 + b_1)b_2^2(1 - b_1b_2)}{1 - 2b_1 - (1 + 2b_1)b_2 - (1 + b_1 + b_1^2)(1 - b_1b_2)b_2^2}$
$C_{3/5}^{(IV)}$	$\frac{2 + 2(1 + b_1)b_2 + 2(1 + 2b_1 + 2b_1^2)b_2^2 - 2b_1^2(1 + b_1 + b_1^2)(1 + b_1b_2)b_2^3}{1 - 2b_1 - (1 + b_1 + 2b_1^2)b_2 - (1 + 2b_1)(1 + 2b_1^2)b_2^2 + b_1^2(1 + b_1 + b_1^2 + 2b_1^3)(1 + b_1b_2)b_2^3}$
$C_{4/5}^{(IV)}$	$\frac{2 + 2b_2 + 2(1 + b_1)b_2^2 + 2(1 + 2b_1)b_2^3 - 2b_1(1 + b_1)b_2^4(1 + b_1b_2^2)}{1 - 2b_1 - (1 + 2b_1)b_2 - b_2^2(1 + b_1 + 2b_1^2 + b_2(1 + 2b_1 + 4b_1^2)) + b_1b_2^4(1 + b_1 + 2b_2^2 + b_1b_2^2(1 + b_1 + 2b_1^2))}$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης για την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II, III$  και  $IV$  στην ανίχνευση αυξήσεων και στην ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο. Ως μέτρο απόδοσης χρησιμοποιείται το  $ARL$ .

#### 4.4 Απόδοση των Μονόπλευρων Διαγραμμάτων Τύπου $r$ -από- $m$

Στην παρούσα παράγραφο θα αξιολογηθεί απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$  για  $a = I, II, III$  και  $IV$  που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4.3.

Στο σύνηθες άνω μονόπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας  $a$  (συμβ.  $S_U$ ) απεικονίζονται οι τιμές της  $i$ -οστής δειγματικής απόκλισης  $S_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n-1)}$ . Ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης σε υψηλότερο επίπεδο έχουμε όταν  $S_i > \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1;a}^2 / (n-1)}$ . Το  $a$  εκφράζει το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεμίων. Όμοια, στο αντίστοιχο σύνηθες κάτω μονόπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας  $a$  (συμβ.  $S_L$ ) έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν  $S_i < \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1;1-a}^2 / (n-1)}$ .

Ας θεωρήσουμε το  $C_{r/m}^{(a)}$  ( $a = I, II, III$  και  $IV$ ) διάγραμμα ελέγχου και έστω  $T_{r/m}^{(a)}$  η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι το  $C_{r/m}^{(a)}$  διάγραμμα να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Στη συνέχεια δίνουμε τα βήματα για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II$ . Η περιγραφή δίνεται για την περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ενώ με τις κατάλληλες τροποποιήσεις μπορεί να περιγραφεί η ανάλογη διαδικασία για τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα.

**Αλγοριθμική Περιγραφή της Ανάπτυξης των Διαγραμμάτων  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II$**

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε τους θετικούς ακεραίους  $r$  και  $m$  με  $2 \leq r \leq m$  και την επιθυμητή τιμή  $c$  του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(a)}$ .

**Βήμα 2:** Θέτουμε  $ARL_{in} = c$ .

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τη μοναδική ρίζα  $UCL$  της εξίσωσης  $ARL_{in} = E(T_{r/m}^{(a)} | \rho = 1) = c$  και θέτουμε το άνω όριο ελέγχου ίσο με αυτή την τιμή.

**Βήμα 4:** Ακολουθούμε τον κανόνα ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας για το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(a)}$  προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

Στη συνέχεια δίνουμε τα βήματα για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = III$  και  $IV$  κοινό χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι χρησιμοποιούνται δύο όρια ελέγχου. Προτού προχωρήσουμε στην περιγραφή της ανάπτυξης τους πρέπει να αναφέρουμε ότι η τιμή του εξωτερικού ορίου ελέγχου ( $UOCL$ ) προεπιλέγεται. Η επιλογή της τιμής αυτής εξαρτάται άμεσα από το επιθυμητό μέσο μήκος ροής  $c$  του διαγράμματος ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$  ( $a = III, IV$ ) και προτείνεται να χρησιμοποιείται ως  $UOCL$  ένα όριο της μορφής  $\sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1; 1/c^*}^2 / (n-1)}$  με  $c^* > c$ . Η επιλογή αυτή είναι απαραίτητη έτσι ώστε να είναι δυνατή η εύρεση ενός ζεύγους εξωτερικών και εσωτερικών ορίων ( $UOCL, UICL$ ) για το οποίο να ισχύει  $ARL_{in}^{(a)} = c$ . Η θεωρητική αιτιολόγηση της επιλογής αυτής για το  $UOCL$  βασίζεται στο γεγονός ότι το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(III)}$  ( $C_{r/m}^{(IV)}$ ) αποτελείται από δύο διαφορετικούς κανόνες, τον κανόνα 1-από-1 και τον κανόνα  $r$ -από- $m$  τύπου III (τύπου IV). Η προτεινόμενη τιμή  $UOCL$  δίνει ουσιαστικά εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $c^*$  όταν λειτουργεί μόνο ο κανόνας 1-από-1 και επιτρέπει τον προσδιορισμό του εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$  ώστε το διάγραμμα ελέγχου  $C_{r/m}^{(III)}$  (ή  $C_{r/m}^{(IV)}$ ) να μπορεί να έχει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $c$ .

**Αλγοριθμική Περιγραφή της Ανάπτυξης των Διαγραμμάτων  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = \text{III, IV}$**

**Βήμα 1:** Επιλέγουμε τους θετικούς ακεραίους  $r$  και  $m$  με  $2 \leq r \leq m$ , την επιθυμητή τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(a)}$  και τον αριθμό  $c^* > c$ .

**Βήμα 2:** Θέτουμε

$$UOCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1; 1/c^*}^2 / (n-1)}, \text{ όπου } c^* > c.$$

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τη μοναδική ρίζα  $UICL$  της εξίσωσης  $ARL_{in} = E(T_{r/m}^{(a)} | \rho = 1) = c$  και θέτουμε το άνω εσωτερικό όριο ελέγχου ίσο με αυτή την τιμή.

**Βήμα 4:** Ακολουθούμε τον κανόνα ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας για το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(a)}$  προκειμένου να ανακηρύξουμε τη διεργασία εκτός ελέγχου.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = \text{I, II, III}$  και IV για  $2 \leq r \leq m \leq 5$  με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $c = ARL_{in} = 370.4$ . Για το μέγεθος του δείγματος επιλέξαμε την τιμή 5 αφού εμφανίζεται πολύ συχνά στην πράξη. Στα διαγράμματα ελέγχου  $C_{r/m}^{(\text{III})}$  και  $C_{r/m}^{(\text{IV})}$  χρησιμοποιήσαμε ως προεπιλεγμένη τιμή για το  $UOCL$  την τιμή που προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\Pr(S > UOCL | \rho = 1) = \Pr(Z > z_0 | Z \sim N(0,1)) = 1 - \Phi(z_0)$$

για  $z_0 = 3.5$  (όπου  $\Phi(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής). Στην πράξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε τιμή  $z_0 > z_{1/c}$ , όπου  $c$  είναι το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος  $C_{r/m}^{(\text{III})}$  (ή  $C_{r/m}^{(\text{IV})}$ ). Το παραπάνω όριο πιθανότητας είναι τέτοιο ώστε η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός  $UOCL$  ισούται με την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του  $\bar{X}$  διαγράμματος με όρια  $3.5\sigma$  εκτός του άνω ορίου ελέγχου.

Αφού

$$\Pr(Z > 3.5 | Z \sim N(0,1)) \cong 0.000233$$

η τιμή του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε είναι  $UOCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{5-1; 1-0.999767}^2 / (5-1)} \cong 2.3276 \cdot \sigma_0$ . Ομοίως για τα κάτω μονόπλευρα



διαγράμματα ελέγχου έχουμε  $LOCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{5-1;0.999767}^2 / (5-1)} \cong 0.1043 \cdot \sigma_0$ . Στη συνέχεια για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου των διαγραμμάτων που μελετάμε έχουμε υποθέσει ότι  $\sigma_0 = 1$ .

Υπενθυμίζουμε ότι στην Παράγραφο 3.12 είχε αναφερθεί η διαδικασία επιλογής του βέλτιστου ζεύγους ορίων έτσι ώστε το διάγραμμα  $R : r/m$  να έχει την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής και ταυτόχρονα τη μικρότερη τιμή για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για δεδομένη μετατόπιση του μέσου. Η διαδικασία βελτιστοποίησης, όπως την είχαμε ονομάσει, μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και εδώ και ουσιαστικά αποτελεί το βασικό τρόπο επιλογής των παραμέτρων για τα διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς (δείτε Acosta-Mejia (1999), Huang and Chen (2005)).

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα διαγράμματα με την καλύτερη απόδοση (μικρότερο  $ARL_{out}$ ) για την ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης στη διασπορά της διεργασίας σε όρους  $\rho$  ( $\rho = \sigma_1 / \sigma_0$ ) μεταξύ των διαγραμμάτων ελέγχου  $C_{r/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II, III$  και  $IV$  για  $2 \leq r \leq m \leq 5$  με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $c = ARL_{in} = 370.4$  και μέγεθος δείγματος  $n = 5$ . Οι πλήρεις πίνακες για όλα τα διαγράμματα δίνονται στο Παράρτημα Π.9. Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα διαγράμματα με το μικρότερο  $ARL_{out}$  για την ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά της διεργασίας, για τιμές  $\rho = 1.0(0.1)1.9$ . Στη 2<sup>η</sup> στήλη του πίνακα δίνεται η απόδοση του συνήθους διαγράμματος  $S_U$  ενώ στις στήλες 3 και 4 δίνονται αντίστοιχα η τιμή του  $ARL_{out}$  και το διάγραμμα με το οποίο αυτή επιτυγχάνεται. Στην τελευταία στήλη του πίνακα δίνονται οι τιμές των άνω εσωτερικών ορίων ελέγχου αφού η τιμή του άνω εξωτερικού ορίου, όπου αυτό χρησιμοποιείται, είναι προεπιλεγμένη και ίση με 2.328. Ο υπολογισμός της διάμεσης γραμμής  $MDL$  είναι άμεσος από τη σχέση (4.6). Για  $n = 5$  ισχύει ότι  $MDL = 0.916$ .

**Πίνακας 4.5:** Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ ,  $n = 5$ )

$\rho$	$S_U$	$C_{r/m}^{(a)}$	Προτεινόμενο διάγραμμα	Όρια Ελέγχου
1.0	370.40			
1.1	106.94	85.19	$C_{3/5}^{(III)}$	$UICL = 1.3737$
1.2	42.49	31.72		
1.3	21.09	15.73		
1.4	12.28	9.53		
1.5	8.03	6.59	$C_{2/5}^{(IV)}$	$UICL = 1.5889$
1.6	5.73	4.99		
1.7	4.36	4.01		
1.8	3.50	3.36		
1.9	2.92	2.91		

Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα στον Πίνακα 4.6, ο οποίος αναφέρεται στην ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας για τιμές  $\rho = 0.3(0.1)1.0$ . Στην τελευταία στήλη του πίνακα δίνονται οι τιμές των κάτω εσωτερικών ορίων ελέγχου αφού η τιμή του κάτω εξωτερικού ορίου, όπου αυτό χρησιμοποιείται, είναι προεπιλεγμένη και ίση με 0.104.

**Πίνακας 4.6:** Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4$ )

$\rho$	$S_L$	$C_{r/m}^{(a)}$	Προτεινόμενο διάγραμμα	Όρια Ελέγχου
1.0	370.40			
0.9	245.88	118.07	$C_{5/5}^{(I)}$	$LCL = 0.7697$
0.8	156.03	40.94	$C_{4/5}^{(II)}$	$LCL = 0.6521$
0.7	93.66	16.13		
0.6	52.43	3.09	$C_{4/5}^{(III)}$	$LICL = 0.6155$
0.5	26.85	4.80	$C_{3/5}^{(II)}$	$LCL = 0.5354$
0.4	12.27	3.43	$C_{3/4}^{(IV)}$	$LICL = 0.5428$
0.3	4.89	2.27	$C_{2/3}^{(IV)}$	$LOCL = 0.4031$

Από την εκτεταμένη μελέτη που διενεργήθηκε προκειμένου να αξιολογηθεί η απόδοση των κανόνων για  $n=5$  και  $ARL_{in}=370.4$  προέκυψαν τα επόμενα ενδιαφέροντα αποτελέσματα τα οποία εξακολουθούν να ισχύουν ακόμη και για διαφορετικά μεγέθη δείγματος αλλά και για διαφορετικές τιμές του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής.

### Ανίχνευση Αυξήσεων - Συμπεράσματα

1. Τα διαγράμματα  $C_{m/m}^{(III)}$  έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση από τα  $C_{m/m}^{(I)}$  το οποίο συνεπάγεται ότι η ύπαρξη δύο ορίων ελέγχου (εσωτερικού και εξωτερικού) βελτιώνει την απόδοση των κανόνων τύπου  $m$ -από- $m$  στην ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά.

2. Το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(II)}$  είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το  $C_{2/m}^{(I)}$  όπως επίσης και το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(IV)}$  είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το  $C_{2/m}^{(III)}$ . Έτσι η απόδοση του κανόνα 2-από- $m$  βελτιώνεται όταν αυτός συνδυάζεται με τον κανόνα 1-από-1 και με τη χρησιμοποίηση της διάμεσης γραμμής  $MDL$  ως κεντρικής γραμμής του διαγράμματος.

3. Τα διαγράμματα  $C_{3/4}^{(I)}$ ,  $C_{3/5}^{(I)}$ ,  $C_{4/5}^{(I)}$  έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση έναντι αντίστοιχα των  $C_{3/4}^{(II)}$ ,  $C_{3/5}^{(II)}$ ,  $C_{4/5}^{(II)}$ . Επίσης τα διαγράμματα  $C_{3/4}^{(III)}$ ,  $C_{4/5}^{(III)}$  έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση έναντι αντίστοιχα των  $C_{3/4}^{(IV)}$ ,  $C_{4/5}^{(IV)}$  στην ανίχνευση αυξήσεων στη

διασπορά. Το διάγραμμα  $C_{3/5}^{(III)}$  είναι καλύτερο από το  $C_{3/5}^{(IV)}$  για μετατοπίσεις στο εύρος  $1.1 \leq \rho \leq 1.7$  ενώ για μετατοπίσεις στο εύρος  $1.8 \leq \rho \leq 2.0$  το  $C_{3/5}^{(IV)}$  είναι καλύτερο από το  $C_{3/5}^{(III)}$ .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.5 συμπεραίνουμε ότι για την ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά της διεργασίας το καταλληλότερο διάγραμμα ελέγχου είναι το  $C_{2/m}^{(IV)}$ . Το διάγραμμα αυτό αποτίει ουσιαστικά τη μονόπλευρη έκδοση του δίπλευρου διαγράμματος  $R:2/m$  του Κεφαλαίου 3. Για αρκετά μικρές μετατοπίσεις, της τάξης του 10% ( $1.0 < \rho < 1.1$ ), προτείνεται το διάγραμμα  $C_{3/5}^{(III)}$ , το οποίο είναι το μονόπλευρο ανάλογο του διαγράμματος  $I:3/5$ , ενώ για ανίχνευση μετατόπισης της τάξης του 100% ( $\rho = 2$ ) το  $S_U$  διάγραμμα είναι το καταλληλότερο.

### Ανίχνευση Μειώσεων - Συμπεράσματα

1. Τα διαγράμματα ελέγχου  $C_{m/m}^{(III)}$  δεν έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση από τα  $C_{m/m}^{(I)}$ . Για μειώσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας μέχρι περίπου 50% ( $0.5 \leq \rho < 1$ ) προτείνονται τα διαγράμματα  $C_{m/m}^{(I)}$ , ενώ για μεγαλύτερες μειώσεις καλύτερη απόδοση έχουν τα διαγράμματα  $C_{m/m}^{(III)}$ .

2. Το διάγραμμα  $C_{r/m}^{(IV)}$ , για  $2 \leq r < m \leq 5$ , είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το αντίστοιχο  $C_{r/m}^{(III)}$  και άρα η χρήση της διάμεσης γραμμής  $MDL$  βελτιώνει την απόδοση του κανόνα τύπου  $r$ -από- $m$ .

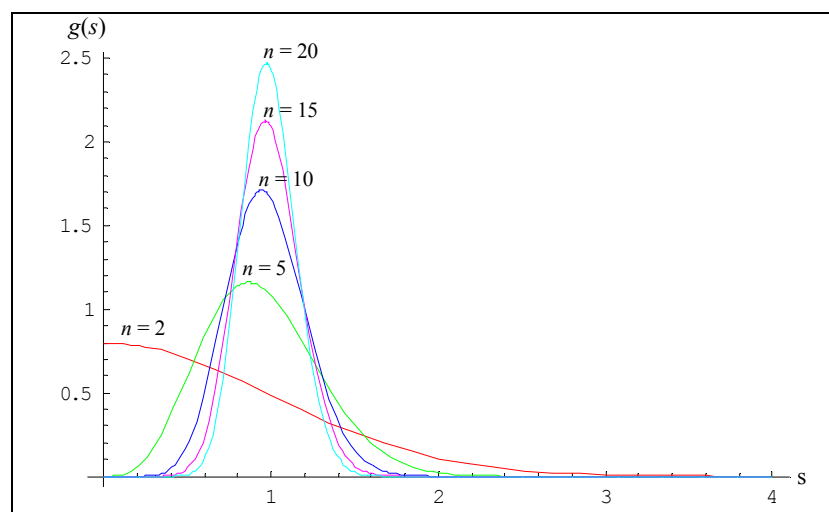
3. Το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(II)}$  είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το  $C_{2/m}^{(I)}$  και άρα η χρήση της διάμεσης γραμμής  $MDL$  βελτιώνει την απόδοση του κανόνα τύπου  $2/m$ .

4. Τα διαγράμματα  $C_{3/4}^{(II)}$ ,  $C_{3/5}^{(II)}$ ,  $C_{4/5}^{(II)}$  έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση έναντι αντίστοιχα των διαγραμμάτων  $C_{3/4}^{(I)}$ ,  $C_{3/5}^{(I)}$ ,  $C_{4/5}^{(I)}$ .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.6 προκύπτει το συμπέρασμα ότι για την ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας δεν υπάρχει ένα διάγραμμα το οποίο να είναι εμφανώς το αποδοτικότερο. Αυτό που προκύπτει είναι ότι η χρήση ενός κανόνα της μορφής  $r$ -από-5 επιφέρει σημαντική βελτίωση στην

ανίχνευση μειώσεων στην τυπική απόκλιση για μετατοπίσεις  $0.5 \leq \rho < 1$ . Εδώ, η χρήση της διαμέσου άλλοτε επιφέρει και άλλοτε όχι σημαντική βελτίωση στην απόδοση του διαγράμματος. Επιπλέον, στην ανίχνευση αρκετά μικρών μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας ( $0.7 \leq \rho < 1.0$ ) τα διαγράμματα με εξωτερικό όριο ελέγχου έχουν μεγαλύτερη τιμή  $ARL_{out}$  έναντι των αντίστοιχων διαγραμμάτων χωρίς εξωτερικό όριο ελέγχου. Ανάλογο αποτέλεσμα είχε παρατηρηθεί και κατά τη σύγκριση των διαγραμμάτων  $M:r/m$  και  $R:r/m$  του Κεφαλαίου 3.

Πριν κλείσουμε θα πρέπει να αναφέρουμε ότι από τους κανόνες που εξετάσαμε, δεν υπάρχει κάποιος που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο αποδοτικά στην ανίχνευση μειώσεων και αυξήσεων στη διασπορά της διεργασίας. Είδαμε ότι στα άνω μονόπλευρα διαγράμματα οι κανόνες της μορφής 2-από- $m$  έχουν την καλύτερη απόδοση ενώ στα κάτω μονόπλευρα οι κανόνες τύπου  $r$ -από-5 δίνουν το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Το γεγονός αυτό εξηγείται μερικώς από τη μορφή της κατανομής της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $S$ , η οποία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5 για διάφορες τιμές του μεγέθους δείγματος  $n$ , είναι μη-συμμετρική (παρουσιάζει δεξιά ουρά).



**Σχήμα 4.5.** Η κατανομή της δειγματικής τυπικής απόκλισης  $S$  για διάφορα μεγέθη δείγματος  $n$

## 4.5 Η Μέθοδος της Άμεσης Αρχικής Αντίδρασης

Στις Παραγράφους 1.10.1 και 2.8.3 αναφερθήκαμε σε διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος της άμεσης αρχικής αντίδρασης (συμβ. FIR). Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς που βασίζονται στον κανόνα  $r$ -από- $m$  και στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος FIR. Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση διαγράμματος με κανόνες ροών και FIR είναι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου. Πρόσφατα οι Huang and Chen (2005) μελέτησαν το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς με χρήση της δειγματικής τυπικής απόκλισης και έδειξαν ότι αποτελεί ένα πολύ ευαίσθητο διάγραμμα στην ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας έναντι των μονόπλευρων διαγραμμάτων  $S_U$  και  $S_L$ . Το διάγραμμα αυτό θα το συμβολίζουμε ως *Syn-S*. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε εν συντομία στη λειτουργία του συνθετικού διαγράμματος και στην ισοδυναμία του με ένα διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Davis and Woodall (2002)).

Ας θεωρήσουμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $S_U$  με ένα άνω όριο ελέγχου  $UCL$  και έστω ότι κάθε τιμή της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $S$  μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ως "0" (αν βρίσκεται εντός του άνω ορίου ελέγχου του διαγράμματος) ή ως "1" (αν βρίσκεται εκτός του άνω ορίου ελέγχου του διαγράμματος). Έστω η τυχαία μεταβλητή  $CRL$  η οποία εκφράζει είτε τον αριθμό των συμβόλων "0" από τη στιγμή που ξεκίνησε η διεργασία ή που έπονται ενός συμβόλου "1" συμπεριλαμβανομένου και του επόμενου "1" που θα εμφανιστεί. Για παράδειγμα στην ακολουθία

00001000001000000100001

οι διαδοχικές τιμές του  $CRL$  είναι  $CRL_1 = 5$ ,  $CRL_2 = 6$ ,  $CRL_3 = 7$  και  $CRL_4 = 5$ . Αξίζει να αναφέρουμε πως η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $CRL$  είναι η γεωμετρική κατανομή και έχει χρησιμοποιηθεί από τον Bourke (1991) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων σε υψηλής ποιότητας διεργασίες (*high yield processes*). Όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $CRL$  τόσο περισσότερο αυξάνει η υποψία ότι η διεργασία λειτουργεί παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας αφού τα εκτός ελέγχου σημεία εμφανίζονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

$CRL \leq L$ , όπου  $L$  είναι κάποιος προεπιλεγμένος θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, όταν  $L = 4$  έχουμε ότι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν εμφανιστεί ένας από τους σχηματισμούς 11, 101, 1001, 10001 αφού οι αντίστοιχες τιμές του  $CRL$  είναι 1, 2, 3 και 4. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα και βάσει των σχηματισμών που έχουμε μελετήσει έως τώρα μπορούμε να πούμε ότι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε έναν κανόνα ευαισθητοποίησης τύπου 2-από-5. Στη γενική περίπτωση το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν εμφανιστεί ο σύνθετος σχηματισμός

$$\mathcal{E} = \{11, 101, 1001, \dots, \underbrace{100\dots 01}_{L+1}\}.$$

Έτσι ο κανόνας εκτός ελέγχου διεργασίας του συνθετικού διαγράμματος ταυτίζεται με τον κανόνα εκτός ελέγχου διεργασίας του διαγράμματος ελέγχου  $C_{2/m}^{(1)}$  (δείτε Παράγραφο 4.3.1) για  $m = L + 1$ . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ως παράμετρο του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου αντί για το  $L$  την παράμετρο  $m$  για την οποία ισχύει ότι  $L = m - 1$ . Η βασική διαφοροποίηση των δύο αυτών διαγραμμάτων είναι ότι το συνθετικό διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν εμφανιστεί και ένας από τους σχηματισμούς 0001, 001, 01, 1 όταν ξεκινά για πρώτη φορά η παρακολούθηση της διεργασίας. Το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(1)}$  δε δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας σε αυτές τις περιπτώσεις.

Η απόδοση των δύο διαγραμμάτων μπορεί να γίνει ταυτόσημη χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό FIR στο διάγραμμα  $C_{2/m}^{(1)}$ . Όπως είδαμε και στην Παράγραφο 2.8.3 για την ενσωμάτωση του χαρακτηριστικού FIR σε ένα διάγραμμα ελέγχου με κανόνες ροών είναι απαραίτητη τροποποίηση του διανύσματος  $\pi$  των αρχικών πιθανοτήτων. Η αναγκαία τροποποίηση είναι να θεωρήσουμε ότι το διάγραμμα  $C_{2/m}^{(1)}$  ξεκινάει έχοντας ήδη εμφανιστεί μία παρατήρηση εκτός του άνω ορίου ελέγχου ή ισοδύναμα ότι η ακολουθία από 0 και 1 ξεκινάει από το σύμβολο "1". Τότε, η εμφάνιση ενός από τους (αρχικούς) σχηματισμούς

$$\{1, 01, 001, \dots, \underbrace{00\dots 01}_{m-2}\}$$

οδηγεί σε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και στα δύο διαγράμματα και άρα η απόδοσή τους θεωρείται ταυτόσημη. Στην παρούσα παράγραφο με την ορολογία αρχικός σχηματισμός

θα αναφερόμαστε σε έναν σχηματισμό η εμφάνιση του οποίου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας μόνο όταν στο διάγραμμα χρησιμοποιείται η μέθοδος FIR.

Στη συνέχεια θα ενσωματώσουμε το χαρακτηριστικό FIR στα διαγράμματα ελέγχου των Παραγράφων 4.3.1-4.3.4. Για την επιλογή του διανύσματος των αρχικών πιθανοτήτων  $\pi_{FIR}$  ακολουθήθηκαν προτάσεις ανάλογες με αυτές που εμφανίστηκαν στις εργασίες των Champ and Woodall (1987) και Davis and Woodall (2002) για διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών και χαρακτηριστικό FIR. Η μεθοδολογία της μελέτης των διαγραμμάτων με κανόνες ροών και FIR μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσης που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Για την περίπτωση των διαγραμμάτων  $C_{2/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II, III$  και  $IV$ , η επιλογή της αρχικής κατάστασης έγινε ώστε το αντίστοιχο διάγραμμα να δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και για τους αρχικούς σχηματισμούς. Οι αρχικοί σχηματισμοί των διαγραμμάτων  $C_{2/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II, III$  και  $IV$  είναι οι εξής:

Διάγραμμα	$C_{2/m}^{(I)}, C_{2/m}^{(III)}$	$C_{2/m}^{(II)}, C_{2/m}^{(IV)}$
Αρχικοί Σχηματισμοί	$\{1, 01, 001, \dots, \underbrace{00 \dots 01}_{m-2}\}$	$\{2, 12, 112, \dots, \underbrace{11 \dots 12}_{m-2}\}$

Για την περίπτωση των διαγραμμάτων  $C_{m/m}^{(a)}$ ,  $a = I, II, III$  και  $IV$ , η επιλογή της αρχικής κατάστασης είναι αντίστοιχη της πρότασης των Lucas and Crosier (1982) για την επιλογή της αρχικής τιμής του συσσωρευμένου αθροίσματος σε ένα διάγραμμα τύπου CUSUM. Πιο συγκεκριμένα οι Lucas and Crosier (1982) πρότειναν για τα διαγράμματα τύπου CUSUM ως αρχική τιμή την  $S_0 = H/2$  (δείτε Παράγραφο 1.8.2) ώστε αν η διεργασία δεν έχει επανέλθει εντός ελέγχου μετά τις πρώτες διορθωτικές ενέργειες, τότε το διάγραμμα να δώσει το συντομότερο δυνατό ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ( $S_t^+ > H$  ή  $S_t^- < H$ ). Η τιμή αυτή επιλέχθηκε προκειμένου να υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ της αύξησης της ευαισθησίας του διαγράμματος και της αύξησης στο ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών. Ανάλογο είναι το σκεπτικό και στην περίπτωση των  $C_{m/m}^{(a)}$ , ( $a = I, II, III$  και  $IV$ ) διαγραμμάτων ελέγχου με κανόνες ροών, όπου το μήκος του σχηματισμού που αντιστοιχεί στην ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας εμπεριέχει πληροφορία αντίστοιχη με το συσσωρευμένο άθροισμα  $S_t$  των ίδιων



παρατηρήσεων. Έτσι ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα διάγραμμα ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν εμφανιστούν πάνω από το άνω όριο ελέγχου 4 συνεχόμενα σημεία. Η ενσωμάτωση του χαρακτηριστικού FIR οδηγεί σε επανεκκίνηση του διαγράμματος όταν έχουν ήδη εμφανιστεί 2 συνεχόμενα σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου και έτσι το νέο διάγραμμα να δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας πιο σύντομα. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Lucas and Crosier (1982) και Lucas and Saccucci (1990).

Στα διαγράμματα ελέγχου  $C_{3/4}^{(a)}$ ,  $C_{3/5}^{(a)}$ ,  $C_{4/5}^{(a)}$ , ( $a = \text{I, II, III και IV}$ ), για την αρχική κατάσταση του διαγράμματος θεωρούμε ότι έχουν εμφανιστεί το πολύ τα μισά σε αριθμό σημεία σε σχέση με το συνολικό μήκος  $m$  του σχηματισμού. Στη 2<sup>η</sup> στήλη του επόμενου πίνακα δίνεται η αρχική κατάσταση για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την εξέλιξη του αντίστοιχου διαγράμματος ελέγχου (δείτε Παράγραφο 4.3.1-4.3.4) καθώς και τη γενική μορφή του διάνυσματος  $\mathbf{a}_{FIR}$ . Σημειώνεται ότι το διάνυσμα  $\mathbf{a}_{FIR}$  προκύπτει από το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων  $\mathbf{\pi}_{FIR}$  παραλείποντας τη συνιστώσα που αντιστοιχεί στην απορροφητική κατάσταση της αλυσίδας.

**Πίνακας 4.7.** Επιλογή του διανύσματος αρχικών πιθανοτήτων για τη μέθοδο *FIR*

Τύπος διαγράμματος	Περιοχή του διαγράμματος	Διάνυσμα $\mathbf{a}_1$
$C_{r/m}^{(a)}$ , $a = \text{I, III}$		
$C_{m/m}^{(a)}$	$\left[ \frac{m}{2} + 1 \right]$ συνεχόμενα σημεία στην Περιοχή 1 όπου $[x]$ : είναι το ακέραιο μέρος του $x$	$a = \text{I}, \mathbf{a}_{FIR} = \begin{cases} p_0 \mathbf{e}_1 + p_1 \mathbf{e}_{r+2}, & r = \left[ \frac{m}{2} + 1 \right], m \neq 2 \\ p_0^{(a)} \mathbf{e}_1, & m = 2 \end{cases}$ <hr/> $a = \text{III}, \mathbf{a}_{FIR} = \begin{cases} \gamma_0 \mathbf{e}_1 + \gamma_1 \mathbf{e}_{r+2}, & r = \left[ \frac{m}{2} + 1 \right], m \neq 2 \\ \gamma_0 \mathbf{e}_1, & m = 2 \end{cases}$
$C_{2/m}^{(a)}$	1 σημείο στην Περιοχή 1	$a = \text{I}, \mathbf{a}_{FIR} = p_0 \mathbf{e}_3$ <hr/> $a = \text{III}, \mathbf{a}_{FIR} = \gamma_0 \mathbf{e}_3$
$C_{3/m}^{(a)}$ , $m = 4, 5$	1 σημείο στην Περιοχή 1	$a = \text{I}, m = 4: \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, p_1, p_0, 0, 0]$ <hr/> $a = \text{III}, m = 4: \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, \gamma_1, \gamma_0, 0, 0]$ <hr/> $a = \text{I}, m = 5: \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, p_1, p_0, 0, 0, 0, 0, 0]$ <hr/> $a = \text{III}, m = 5: \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, \gamma_1, \gamma_0, 0, 0, 0, 0, 0]$
$C_{4/5}^{(a)}$	2 συνεχόμενα σημεία στην Περιοχή 1	$a = \text{I}, \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, 0, p_1, 0, 0, 0, p_0, 0, 0]$ <hr/> $a = \text{III}, \mathbf{a}_{FIR} = [0, 0, 0, \gamma_1, 0, 0, 0, \gamma_0, 0, 0]$

Πίνακας 4.7. (συνέχεια)

Τύπος διαγράμματος	Περιοχή του διαγράμματος	Διάνυσμα $\mathbf{a}_1$
$C_{r/m}^{(a)}$ , $a = \text{II, IV}$		
$C_{2/m}^{(a)}$	1 σημείο στην Περιοχή 2	$a = \text{II}$ , $\mathbf{a}_{FIR} = f_0\mathbf{e}_1 + f_1\mathbf{e}_3$
		$a = \text{IV}$ , $\mathbf{a}_{FIR} = b_0\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_3$
$C_{3/m}^{(a)}$ , $m = 4, 5$	1 σημείο στην Περιοχή 2	$a = \text{II}$ , $m = 4$ : $\mathbf{a}_{FIR} = [f_0, 0, f_2, f_1, 0, 0]$
		$a = \text{IV}$ , $m = 4$ : $\mathbf{a}_{FIR} = [b_0, 0, b_2, b_1, 0, 0]$
		$a = \text{II}$ , $m = 5$ : $\mathbf{a}_{FIR} = [f_0, 0, f_2, f_1, 0, 0, 0, 0, 0]$
		$a = \text{IV}$ , $m = 5$ : $\mathbf{a}_{FIR} = [b_0, 0, b_2, b_1, 0, 0, 0, 0, 0]$
$C_{4/5}^{(a)}$	2 συνεχόμενα σημεία στην Περιοχή 2	$a = \text{II}$ , $\mathbf{a}_{FIR} = [f_0, 0, 0, f_2, 0, 0, 0, f_1, 0, 0]$
		$a = \text{IV}$ , $\mathbf{a}_{FIR} = [b_0, 0, 0, b_2, 0, 0, 0, b_1, 0, 0]$

Στους δύο ακόλουθους πίνακες δίνεται η απόδοση των προτεινόμενων μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου  $C_{r/m}^{(a)}$  (δείτε Πίνακες 4.5 και 4.6) στα οποία έχουμε ενσωματώσει τη μέθοδο *FIR*. Όλα τα διαγράμματα έχουν το ίδιο εντός ελέγχου  $ARL_{in} = 370.4$  και το μέγεθος του δείγματος είναι  $n = 5$ . Επιπλέον δίνεται η απόδοση του συνθετικού διαγράμματος (στήλη «*Syn – S*») με τιμή της παραμέτρου  $m$  ίση με 5. Επιλέξαμε τη συγκεκριμένη τιμή για την παράμετρο του συνθετικού διαγράμματος ώστε όλοι οι σχηματισμοί που δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας να έχουν το ίδιο μήκος  $m$ . Για την ανάπτυξη του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου απαιτείται ο προσδιορισμός μόνο ενός ορίου ελέγχου το οποίο δίνεται στην πρώτη γραμμή κάθε πίνακα μαζί με τις τιμές των εσωτερικών ορίου ελέγχου για τα υπόλοιπα διαγράμματα. Σε όλους τους υπολογισμούς για την εύρεση των ορίων ελέγχου κάθε διαγράμματος υποθέσαμε ότι η τιμή της εντός ελέγχου τυπικής απόκλισης είναι  $\sigma_0 = 1$ . Έτσι οι τιμές των εξωτερικών ορίων ελέγχου είναι 2.328 για το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου και 0.104 για το κάτω εξωτερικό όριο ελέγχου ενώ η τιμή της διαμέσου είναι 0.916, για τα διαγράμματα που είναι απαραίτητη η χρησιμοποίησή τους.

**Πίνακας 4.8.** Άνω μονόπλευρα διαγράμματα με FIR

<i>UICL</i>	1.600	1.439	1.659
$\rho$	$C_{3/5}^{(III)}$	$C_{2/5}^{(IV)}$	<i>Syn-S, m = 5</i>
1.00	370.40	370.40	370.40
1.10	80.81	78.94	79.12
1.20	28.40	26.08	26.31
1.30	13.68	11.75	11.92
1.40	8.15	6.60	6.71
1.50	5.61	4.34	4.42
1.60	4.26	3.19	3.25
1.70	3.47	2.53	2.58
1.80	2.95	2.13	2.17
1.90	2.60	1.86	1.90
2.00	2.35	1.68	1.71

**Πίνακας 4.9.** Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα με FIR

<i>LICL</i>	0.768	0.648	0.611	0.534	0.541	0.399	0.367
$\rho$	$C_{5/5}^{(I)}$	$C_{4/5}^{(II)}$	$C_{4/5}^{(III)}$	$C_{3/5}^{(II)}$	$C_{3/4}^{(IV)}$	$C_{2/3}^{(IV)}$	<i>Syn-S, m = 5</i>
1.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.90	113.56	111.61	<b>124.38</b>	126.43	138.99	169.73	175.60
0.80	37.04	34.32	<b>40.94</b>	43.09	50.59	72.80	78.52
0.70	13.64	11.48	<b>14.05</b>	15.51	18.72	29.52	33.10
0.60	6.15	4.64	<b>5.53</b>	6.39	7.53	11.58	13.29
0.50	3.71	2.60	<b>2.87</b>	3.32	3.62	4.60	5.27
0.40	3.06	2.08	2.12	2.31	2.32	<b>2.02</b>	2.27
0.30	3.00	2.00	1.98	2.03	2.00	<b>1.17</b>	1.26
0.20	3.00	2.00	1.90	2.00	1.90	<b>1.00</b>	1.01
0.10	3.00	2.00	1.36	2.00	1.36	<b>1.00</b>	1.00

Από την ενσωμάτωση του χαρακτηριστικού *FIR* προκύπτει ότι για την περίπτωση παρακολούθησης αυξήσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, το διάγραμμα  $C_{2/5}^{(IV)}$  και

το συνθετικό διάγραμμα  $Syn - S$  των Huang and Chen (2005) έχουν σχεδόν ίδια απόδοση αφού οι διαφοροποιήσεις στις τιμές του  $ARL_{out}$  είναι ανεπαίσθητες. Τα δύο αυτά διαγράμματα έχουν ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση έναντι του  $C_{3/5}^{(III)}$  το οποίο ήταν το πλέον ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών αυξήσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Έτσι, είτε το συνθετικό διάγραμμα  $Syn - S$  για  $m=5$  είτε το διάγραμμα  $C_{2/5}^{(IV)}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση αυξήσεων.

Για την ανίχνευση μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας με σκοπό την ανίχνευση βελτίωσης της διεργασίας, βλέπουμε ότι το συνθετικό διάγραμμα  $Syn - S$  των Huang and Chen (2005) δεν είναι το καλύτερο, χρησιμοποιώντας πάντα ως μέτρο σύγκρισης το  $ARL$ . Από τον Πίνακα 4.9 είναι εμφανές ότι π.χ., το διάγραμμα  $C_{2/3}^{(IV)}$  με χρήση της μεθόδου  $FIR$  έχει ομοιόμορφα καλύτερη απόδοση έναντι του συνθετικού διαγράμματος ενώ επιπλέον για μετατοπίσεις στο εύρος  $0.5 \leq \rho < 1$  το διάγραμμα  $C_{4/5}^{(III)}$  είναι το πλέον ευαίσθητο.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η χρήση του χαρακτηριστικού  $FIR$  στα διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών βελτιώνει ακόμη περισσότερο την ευαισθησία τους στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας και λαμβάνοντας υπόψη την ευκολία στην ανάπτυξή τους, συστήνουμε τη χρήση τους στην πράξη.

Πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε πως το διάγραμμα  $Syn - S$  για  $m=5$  επιλέχθηκε ώστε το μήκος όλων των σχηματισμών που εφαρμόζονται στα αντίστοιχα διαγράμματα να είναι το πολύ 5. Οι Chen and Huang (2005) και οι Huang and Chen (2005) έδωσαν πίνακες με τα βέλτιστα συνθετικά διαγράμματα για τη διασπορά για μέγεθος δείγματος  $n=5, 10, 15, 20$  και  $ARL_{in} = 200, 370, 500, 1000$  προσδιορίζοντας την τιμή του  $m$  και την τιμή του ορίου ελέγχου ώστε για δεδομένη μετατόπιση  $\rho$  το διάγραμμα να δίνει την ελάχιστη τιμή  $ARL_{out}$ . Για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Chen and Huang (2005) και Huang and Chen (2005).

## 4.6 Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου Παρακολούθησης της Διασποράς

Ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου είναι προτιμότερο από ένα ή δύο μονόπλευρα αφού επιτρέπει ταυτόχρονα, όταν είναι σωστά σχεδιασμένο, την ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τα οποία και θα συγκρίνουμε μεταξύ τους. Στα διαγράμματα αυτά εφαρμόζουμε τους κανόνες του Κεφαλαίου 3, ενώ εξετάζουμε και την απόδοση ενός ακόμα διαγράμματος ελέγχου στο οποίο χρησιμοποιούνται μη-συμμετρικά όρια ελέγχου.

### 4.6.1 Δίπλευρα $r$ -από- $m$ Διαγράμματα Ελέγχου για τη Διασπορά

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου  $r/m$ ,  $M:r/m$ ,  $I:r/m$  και  $R:r/m$ ,  $2 \leq r \leq m \leq 5$  (δείτε Κεφάλαιο 3) στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε τη διασπορά της διεργασίας. Αυτό που αλλάζει είναι η κατανομή της απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση και η κατανομή της (δειγματική τυπική απόκλιση) και επομένως τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3 απαιτούν κατάλληλη τροποποίηση. Διατηρούμε τους ίδιους συμβολισμούς και όπου υπάρχει διαφοροποίηση αυτή θα τονίζεται.

Ειδικότερα, στο διάγραμμα  $r/m$  ορίζονται τρεις περιοχές, η Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου  $UCL$ , η Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου  $LCL$  και η Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω και του κάτω ορίου ελέγχου. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_0$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\rho)$ ,  $p_2(\rho)$ ,  $p_0(\rho)$  και θα δίνεται από τις σχέσεις

$$p_1(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad p_2(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$
$$p_0(\rho) = 1 - p_1(\rho) - p_2(\rho).$$

Για το  $M:r/m$  διάγραμμα η πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου στις τέσσερις περιοχές του διαγράμματος (δείτε Παραγράφους 3.5, 3.6) θα συμβολίζεται με  $p_1(\rho)$ ,  $p_2(\rho)$ ,  $p_3(\rho)$ ,  $p_4(\rho)$  και θα δίνεται από τις σχέσεις

$$p_1(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad p_2(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$p_3(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad p_4(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right).$$

Στα διαγράμματα  $I : r/m$  και  $R : r/m$  υπάρχουν επιπλέον εξωτερικά όρια ελέγχου άνω και κάτω τα οποία συμβολίζονται ως  $UOCL$  και  $LOCL$ , αντίστοιχα. Τα εσωτερικά όρια ελέγχου άνω και κάτω συμβολίζονται ως  $UICL$  και  $LICL$ , αντίστοιχα. Έτσι, στο διάγραμμα  $I : r/m$  ορίζονται τέσσερις περιοχές, η Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εξωτερικού ορίου ελέγχου  $UOCL$  και του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$ , η Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω εσωτερικού ορίου ελέγχου  $UICL$  και του κάτω εσωτερικού ορίου ελέγχου  $LICL$ , η Περιοχή 3 ( $\Pi_3$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του κάτω εξωτερικού ορίου ελέγχου  $LOCL$  και του κάτω εσωτερικού ορίου ελέγχου  $LICL$  και η Περιοχή 4 ( $\Pi_4$ ) που είναι η περιοχή εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις τέσσερις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $p_1(\rho), p_2(\rho), p_3(\rho), p_4(\rho)$  και θα δίνεται από τις σχέσεις

$$p_1(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 UOCL}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 UICL}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$p_2(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 UICL}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 LICL}{(\rho\sigma_0)^2} \right)$$

$$p_3(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 LICL}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)^2 LOCL}{(\rho\sigma_0)^2} \right),$$

$$p_4(\rho) = 1 - p_1(\rho) - p_2(\rho) - p_3(\rho).$$

Στο  $R : r/m$  διάγραμμα ελέγχου η πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου στις πέντε περιοχές του διαγράμματος (δείτε Παράγραφο 3.10) θα συμβολίζεται με  $p_1(\rho), p_2(\rho), p_3(\rho), p_4(\rho), p_5(\rho)$  και θα δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
p_1(\rho) &= F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \\
p_2(\rho) &= F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \\
p_3(\rho) &= F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)MDL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \\
p_4(\rho) &= F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LICL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)LOCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \\
p_5(\rho) &= 1 - p_1(\rho) - p_2(\rho) - p_3(\rho) - p_4(\rho).
\end{aligned}$$

Τα παραπάνω δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τα συγκρίνουμε πέραν από το σύνηθες δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας, και με το διάγραμμα  $S(\neq)$  το οποίο προτάθηκε από τον Klein (2000b). Το διάγραμμα αυτό χρησιμοποιεί άνισα όρια πιθανότητας τα οποία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την κατανομή της δειγματικής τυπικής απόκλισης (σχέση (4.1)). Θυμίζουμε ότι η συνήθης πρακτική για την κατασκευή ενός διαγράμματος  $S$  με όρια πιθανότητας έτσι ώστε το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών να είναι ίσο με  $a$ , είναι η χρησιμοποίηση ορίων ελέγχου που βασίζονται σε ίσες πιθανότητες ουράς και δίνονται από τους τύπους

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; a/2}^2}{n-1}}, \quad LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-a/2}^2}{n-1}}.$$

Στο διάγραμμα  $S(\neq)$ , τα όρια που χρησιμοποιούνται δίνονται από τους τύπους

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; \beta}^2}{n-1}}, \quad LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1; 1-\gamma}^2}{n-1}}$$

με  $0 < \beta, \gamma < 1$  και  $a = \beta + \gamma$ . Δεδομένου του ότι δεν υπάρχει μοναδικό ζεύγος τιμών  $\beta$  και  $\gamma$  έτσι ώστε το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών να είναι ίσο με  $a$ , η επιλογή των τιμών τους γίνεται βάσει των επόμενων δύο συνθηκών  $\Sigma 1$  και  $\Sigma 2$ :

**$\Sigma 1$ .** Η μέγιστη τιμή του  $ARL$  ως συνάρτηση του  $\rho$  να επιτυγχάνεται για  $\rho = 1$  (εντός ελέγχου διεργασία), και

**$\Sigma 2$ .** Οι τιμές του  $ARL_{out}$  για  $\rho = 1.01$  και  $\rho = 0.99$  να είναι σχεδόν ίσες και ταυτόχρονα μικρότερες από την τιμή του  $ARL_{in}$ .



Στον επόμενο πίνακα δίνονται τιμές του  $ARL$  για τα δίπλευρα διαγράμματα παρακολούθησης της διασποράς  $r/m$  και  $M:r/m$  για μετατοπίσεις  $\rho = 0.1(0.1)2.0$ . Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με 370.4 ενώ το μέγεθος δείγματος είναι ίσο με  $n = 5$ . Για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου ακολουθήθηκαν τα διακριτά βήματα της αλγοριθμικής περιγραφής για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων  $r/m$  και  $M:r/m$  (Παράγραφος 3.7) ενώ ως κεντρική γραμμή του διαγράμματος  $M:r/m$  χρησιμοποιήθηκε η τιμή  $CL = MDL$ . Αναφέρουμε επίσης ότι στους υπολογισμούς των ορίων ελέγχου σε καθένα από τα διαγράμματα ελέγχου έχουμε υποθέσει ότι η εντός ελέγχου τυπική απόκλιση  $\sigma_0$  είναι ίση με 1.

**Πίνακας 4.10:** Απόδοση των  $r/m$  και  $M : r/m$  διαγραμμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς ( $ARL_{in} = 370.4, n = 5$ )

	$S$	$S(\neq)$	2/2	$M:2/3$	2/3	3/3	$M:2/4$	2/4	$M:3/4$	3/4	4/4	$M:2/5$	2/5	$M:3/5$	3/5	$M:4/5$	4/5	5/5
<i>UCL</i>	1.265	2.242	1.596	1.631	1.656	1.362	1.643	1.690	1.407	1.439	1.220	1.648	1.714	1.425	1.483	1.265	1.301	1.120
<i>MDL</i>				0.916			0.916		0.916			0.916		0.916		0.916		
<i>LCL</i>	0.610	0.185	0.389	0.369	0.355	0.538	0.362	0.337	0.507	0.486	0.645	0.359	0.325	0.495	0.457	0.610	0.582	0.727
$\rho$																		
0.10	1.0	<b>1.0</b>	2.0	2.0	2.0	3.0	2.0	2.0	3.0	3.0	4.0	2.0	2.0	3.0	3.0	4.0	4.0	5.0
0.20	2.6	<b>2.0</b>	2.0	2.0	2.0	3.0	2.0	2.1	3.0	3.0	4.0	2.0	2.1	3.0	3.0	4.0	4.0	5.0
0.30	8.5	5.7	2.6	<b>2.5</b>	2.7	3.1	2.6	2.8	3.1	3.1	4.0	2.6	3.0	3.1	3.2	4.0	4.0	5.0
0.40	22.8	14.5	4.9	4.6	5.1	3.9	4.4	5.4	3.8	4.0	4.4	4.3	5.7	<b>3.7</b>	4.2	4.3	4.4	5.2
0.50	51.4	32.1	11.6	10.1	11.9	7.0	9.2	12.3	6.1	7.0	6.2	8.7	12.8	5.8	7.3	<b>5.6</b>	6.1	6.4
0.60	102.2	63.1	28.6	24.0	28.8	15.6	21.3	29.4	12.9	15.5	11.9	19.5	30.3	11.5	15.9	<b>10.0</b>	11.6	10.7
0.70	184.5	113.1	69.4	58.7	69.5	39.8	52.0	70.1	32.4	39.2	28.8	47.6	71.2	28.3	39.4	<b>23.4</b>	27.8	23.8
0.80	308.2	188.7	161.1	142.1	160.7	106.7	129.7	161.1	90.1	104.6	80.6	121.4	162.5	80.1	104.2	67.5	77.9	<b>66.6</b>
0.90	445.8	293.3	333.8	316.3	336.1	270.9	303.8	337.5	250.6	271.0	232.4	295.2	339.5	236.3	271.0	212.5	230.2	<b>206.8</b>
0.95	451.0	345.4	403.6	399.2	409.4	369.7	394.8	412.7	362.6	375.5	345.2	391.4	415.1	356.1	378.6	336.6	349.8	<b>326.7</b>
0.99	392.0	369.2	386.4	387.2	388.5	381.6	387.3	389.7	382.5	384.5	377.7	387.3	390.5	382.6	386.2	378.4	380.8	<b>374.5</b>
1.00	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.01	347.4	369.2	351.0	349.5	348.7	354.5	349.0	347.3	352.5	351.0	357.4	348.7	<b>346.5</b>	351.7	349.1	355.4	353.5	359.9
1.05	253.5	339.6	258.9	249.7	248.3	266.1	245.4	242.7	253.3	250.3	272.9	243.0	<b>239.4</b>	247.0	241.6	259.2	254.0	279.2
1.10	159.6	261.6	160.1	147.1	146.8	164.8	141.1	140.3	147.3	145.4	170.2	137.7	136.6	139.0	<b>135.5</b>	151.3	146.9	175.5
1.20	64.5	117.7	63.4	54.6	54.9	66.1	50.8	51.2	54.7	54.0	69.6	48.7	49.3	49.9	<b>48.6</b>	57.3	55.1	73.0
1.30	60.5	52.9	30.6	26.7	25.9	32.9	23.7	24.1	26.5	26.1	35.6	<b>22.7</b>	23.2	24.1	23.4	28.6	27.4	38.2
1.40	16.8	27.1	17.7	14.7	15.0	19.7	13.6	13.9	15.8	15.6	21.8	<b>13.1</b>	13.5	14.5	14.1	17.6	16.8	24.0
1.50	10.5	15.8	11.6	9.7	9.9	13.4	9.1	9.3	10.9	10.7	15.3	<b>8.8</b>	9.1	10.1	9.8	12.5	11.9	17.1
1.60	7.2	10.3	8.4	7.2	7.2	10.0	6.8	6.9	8.3	8.2	11.7	<b>6.6</b>	6.8	7.8	7.6	9.7	9.3	13.3
1.70	5.3	7.2	6.6	5.7	5.7	8.04	5.4	5.5	6.8	6.7	9.5	<b>5.3</b>	5.4	6.4	6.3	8.1	7.7	11.0
1.80	<b>4.2</b>	5.4	5.4	4.7	4.7	6.8	4.5	4.6	5.8	5.7	8.2	4.4	4.6	5.6	5.4	7.0	6.7	9.5
1.90	<b>3.4</b>	4.3	4.6	4.1	4.1	5.9	3.9	4.0	5.1	5.1	7.2	3.9	4.0	5.0	4.9	6.3	6.1	8.5
2.00	<b>2.9</b>	3.5	4.0	3.6	3.6	5.3	3.5	3.6	4.7	4.6	6.5	3.5	3.6	4.6	4.5	5.8	5.6	7.8

Από τον Πίνακα 4.10 προκύπτει ότι τα διαγράμματα ελέγχου  $r/m$ ,  $M:r/m$  βελτιώνουν την απόδοση του διαγράμματος  $S$  για εύρος τιμών του  $\rho$  στο διάστημα  $[0.4, 1.7]$  και κυρίως συμβάλουν στη συντομότερη ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά, δηλαδή στην ανίχνευση βελτίωσης της διεργασίας. Παρατηρούμε επίσης πως η απόδοση των διαγραμμάτων, με εξαίρεση το  $S (\neq)$ , δεν είναι αμερόληπτη αφού για  $0.9 < \rho < 1$  το αντίστοιχο  $ARL_{out}$  είναι μεγαλύτερο από το  $ARL_{in}$ .

Αυτό που είναι επίσης εμφανές είναι ότι η απόδοση των διαγραμμάτων του Πίνακα 4.10 τείνει να γίνει αμερόληπτη καθώς αυξάνει η τιμή του  $r$  του κανόνα  $r$ -από- $m$  που εφαρμόζεται στις δύο πλευρές του διαγράμματος. Από εκτεταμένες αριθμητικές συγκρίσεις που έγιναν για διάφορα μεγέθη δείγματος προκύπτει ότι αυτή η συμπεριφορά δεν αλλάζει καθώς αυξάνει το μέγεθος δείγματος  $n$ . Ένας κανόνας με μεγάλη τιμή για το  $r$  θα ήταν ιδιαιτέρως χρήσιμος εάν υπάρχει ανάγκη ανίχνευσης μικρών μετατοπίσεων της διασποράς αφού για μεσαίες και μεγαλύτερες μετατοπίσεις καθυστερεί εμφανώς να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Σχετικά με την απόδοση ενός  $r/m$  διαγράμματος σε σύγκριση με το αντίστοιχο  $M:r/m$  παρατηρούμε ότι το διάγραμμα  $r/m$  με  $2 < r < m$  είναι ομοιόμορφα καλύτερο του αντίστοιχου  $M:r/m$  στην ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά ενώ το  $M:r/m$  διάγραμμα είναι καλύτερο από το αντίστοιχο  $r/m$  στην ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά. Μεταξύ των διαγραμμάτων  $r/m$  και  $M:r/m$  δεν υπάρχει κάποιο που να είναι ομοιόμορφα καλύτερο σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων της διασποράς της διεργασίας.

Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα καταλληλότερα διαγράμματα ελέγχου βάσει της μικρότερης τιμής του  $ARL_{out}$ .

**Πίνακας 4.11:** Επιλογή δίπλευρου διαγράμματος μεταξύ των  $r/m$ ,  $M : r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς, ( $ARL_{in} = 370.4$ ,  $n = 5$ )

$\rho$	$S$ διάγραμμα	Προτεινόμενο διάγραμμα	
0.10	1.03	1.01	$S(\neq)$
0.20	2.62	1.01	
0.30	8.49	2.53	$M : 2/3$
0.40	22.75	3.74	$M : 3/5$
0.50	51.40	5.59	
0.60	102.16	9.95	$M : 4/5$
0.70	184.45	23.41	
0.80	308.15	66.58	5/5
0.90	445.75	206.75	
1.10	159.56	135.54	3/5
1.20	64.45	48.62	
1.30	60.46	22.66	
1.40	16.82	13.11	
1.50	10.51	8.81	$M : 2/5$
1.60	7.22	6.57	
1.70	5.33	5.27	

Στη συνέχεια προχωρούμε σε μια συγκριτική μελέτη μεταξύ των διαγραμμάτων  $I : r/m$  και  $R : r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς, αντίστοιχη με αυτή του Κεφαλαίου 3. Σε αυτά τα διαγράμματα χρησιμοποιείται και ένα ζεύγος εξωτερικών ορίων οι τιμές των οποίων αποφασίστηκε να προεπιλέγονται κάθε φορά ώστε να απαιτείται μόνο ο προσδιορισμός των τιμών για τα εσωτερικά όρια ελέγχου προκειμένου τα διαγράμματα να έχουν δεδομένη τιμή για το  $ARL_{in}$ .

Για τις τιμές των εξωτερικών ορίων ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε όρια πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα ας συμβολίσουμε ως  $UOCL_{\bar{x}}$  το άνω εξωτερικό όριο ελέγχου του διαγράμματος  $R : r/m$  (ή  $I : r/m$ ) για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και με  $UOCL_S$  και  $LOCL_S$  το άνω και το κάτω εξωτερικό όριο ελέγχου αντίστοιχα για το  $R : r/m$  (ή  $I : r/m$ ) διάγραμμα παρακολούθησης της διασποράς, και έστω  $p$  η πιθανότητα

$$p = \Pr(Z > UOCL_{\bar{x}} \mid Z \sim N(0,1)).$$

Τότε για τα εξωτερικά όρια ελέγχου του  $R:r/m$  (ή  $I:r/m$ ) διαγράμματος για την παρακολούθηση της διασποράς προτείνεται να ικανοποιούν τη συνθήκη

$$p = \Pr(S > UOCL_S | \rho = 1) = \Pr(S \leq LOCL_S | \rho = 1).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι τα εξωτερικά όρια ελέγχου για τα διαγράμματα  $I:r/m$  και  $R:r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$UOCL_S = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;p}^2}{n-1}}, \quad LOCL_S = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n-1;1-p}^2}{n-1}}.$$

Στον Πίνακα 4.12 δίνονται τις τιμές των εξωτερικών ορίων που χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη για την απόδοση των διαγραμμάτων για  $n=5$ ,  $ARL_{in}=370.4$  και  $UOCL_{\bar{x}}=3.4(0.1)3.8$ . Για τον υπολογισμό των τιμών των ορίων ελέγχου των εν λόγω διαγραμμάτων έχουμε υποθέσει ότι  $\sigma_0=1$ . Οι τιμές των εξωτερικών ορίων ελέγχου για τα διαγράμματα  $I:r/m$  και  $R:r/m$  για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στην Παράγραφο 3.10. Η λογική της επιλογής των συγκεκριμένων τιμών απορρέει από το γεγονός ότι η πιθανότητα εμφάνισης ενός σημείου εκτός των εξωτερικών ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου  $R:r/m$  (ή  $I:r/m$ ) είναι η ίδια, είτε το διάγραμμα χρησιμοποιείται για την ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας είτε στην ανίχνευση μετατοπίσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Έτσι η εφαρμογή και η ερμηνεία ενός διαγράμματος ελέγχου  $R:r/m$  (ή  $I:r/m$ ) είναι άμεση. Επιπλέον σε πολλές πρακτικές εφαρμογές δεν είναι γνωστή η μετατόπιση που επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε. Ειδικότερα στην περίπτωση παρακολούθησης της διασποράς πρέπει επιπλέον να αποφασίσουμε αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αύξηση ή μείωση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για το λόγο αυτό αλλά και επειδή δεν μας ενδιαφέρει η εύρεση του βέλτιστου διαγράμματος ελέγχου μεταξύ των διαγραμμάτων  $R:r/m$  και  $I:r/m$  αλλά η σύγκριση της απόδοσης μεταξύ των διαφορετικών  $r$ -από- $m$  κανόνων αποφασίσαμε οι τιμές των εξωτερικών ορίων ελέγχου να προεπιλέγονται.

**Πίνακας 4.12:** Επιλογή των εξωτερικών ορίων ελέγχου  
για τα διαγράμματα  $I : r / m$  και  $R : r / m$ .

$UOCL_{\bar{x}}$	$p$	$LOCL_s$	$UOCL_s$
3.4	0.00034	0.114	2.284
3.5	0.00023	0.104	2.328
3.6	0.00016	0.095	2.372
3.7	0.00011	0.086	2.416
3.8	0.00007	0.078	2.460

Στη συνέχεια δίνουμε δύο συγκεντρωτικούς πίνακες, έναν με την απόδοση των καλύτερων διαγραμμάτων (Πίνακας 4.13) και ένα (Πίνακας 4.14) για την επιλογή του καταλληλότερου διαγράμματος ανίχνευσης δεδομένης μετατόπισης στη διασπορά της διεργασίας. Οι πλήρεις πίνακες δίνονται στο Παράρτημα Π.10. Η απόδοση των διαγραμμάτων  $I : r / m$  και  $R : r / m$  υπολογίζεται για μετατοπίσεις  $\rho = 0.1(0.1)2$ .

**Πίνακας 4.13:** Απόδοση των δίπλευρων διαγραμμάτων  $I : r/m, R : r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς

	$S$	$S (\neq)$	$I : 2/2$	$I : 5/5$	$I : 3/5$	$R : 2/3$	$R : 2/5$	$R : 3/5$	$R : 4/5$
<i>UOCL</i>	1.265	2.242	2.284	2.460	2.284	2.460	2.284	2.460	2.460
<i>UICL</i>			1.621	1.124	1.503	1.635	1.673	1.429	1.269
<i>MDL</i>						0.916	0.916	0.916	0.916
<i>LICL</i>			0.374	0.724	0.444	0.366	0.346	0.492	0.607
<i>LOCL</i>	0.610	0.185	0.114	0.078	0.114	0.078	0.114	0.078	0.078
$\rho$									
0.10	1.03	<b>1.01</b>	1.26	2.57	1.33	1.66	1.26	2.10	2.39
0.20	2.62	1.97	<b>1.88</b>	4.64	2.60	1.98	1.89	2.89	3.78
0.30	8.49	5.67	2.64	4.92	3.10	<b>2.54</b>	2.63	3.06	3.96
0.40	22.75	14.54	5.41	5.14	4.34	4.65	4.70	<b>3.76</b>	4.25
0.50	51.40	32.13	13.18	6.41	7.95	10.31	9.81	5.87	<b>5.63</b>
0.60	102.16	63.10	33.02	10.81	17.96	24.69	22.58	11.78	<b>10.12</b>
0.70	184.45	113.10	79.66	24.37	45.56	60.45	55.63	29.07	<b>24.00</b>
0.80	308.15	188.74	179.91	<b>68.44</b>	119.90	145.66	139.56	82.58	69.47
0.90	445.75	293.26	356.78	<b>211.87</b>	297.70	321.53	321.56	241.75	217.72
0.95	450.97	345.39	419.06	<b>332.14</b>	397.35	403.21	408.44	361.08	341.92
0.99	391.89	369.17	389.55	<b>376.00</b>	389.41	388.12	390.17	383.76	379.77
1.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
1.01	347.40	369.20	348.11	358.36	346.49	348.67	<b>346.37</b>	350.60	354.13
1.05	253.53	339.63	248.27	272.73	<b>234.74</b>	246.37	236.90	243.36	254.43
1.10	159.56	261.62	147.70	167.14	<b>129.32</b>	143.10	132.31	135.08	145.95
1.20	64.45	117.73	54.96	65.92	<b>44.78</b>	51.74	45.73	47.25	53.38
1.30	60.46	52.89	25.31	32.50	20.80	23.80	<b>20.78</b>	22.21	25.68
1.40	16.82	27.13	14.06	19.14	12.06	13.39	<b>11.74</b>	13.00	15.17
1.50	10.51	15.84	8.97	12.75	8.10	8.70	<b>7.71</b>	8.81	10.28
1.60	7.22	10.27	6.33	9.25	5.99	6.26	<b>5.61</b>	6.57	7.63
1.70	5.33	7.23	4.81	7.13	4.74	4.84	<b>4.38</b>	5.22	6.02
1.80	4.16	5.42	3.86	5.73	3.92	3.94	<b>3.60</b>	4.34	4.96
1.90	3.39	4.28	3.23	4.76	3.35	3.34	<b>3.06</b>	3.72	4.21
2.00	2.87	3.51	2.78	4.04	2.93	2.91	<b>2.68</b>	3.27	3.65

**Πίνακας 4.14:** Επιλογή καταλληλότερου δίπλευρου διαγράμματος  $I : r/m$ ,  $R : r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς

$\rho$	$S$ Διάγραμμα	Προτεινόμενο διάγραμμα	
0.10	1.03	1.01	$S (\neq)$
0.20	2.62	1.88	$I : 2/2$
0.30	8.49	2.54	$R : 2/3$
0.40	22.75	3.76	$R : 3/5$
0.50	51.40	5.63	
0.60	102.16	10.12	$R : 4/5$
0.70	184.45	24.00	
0.80	308.15	68.44	$I : 5/5$
0.90	445.75	211.87	
1.10	159.56	129.32	$I : 3/5$
1.20	64.45	44.78	
1.30	60.46	20.78	
1.40	16.82	11.74	
1.50	10.51	7.71	
1.60	7.22	5.61	$R : 2/5$
1.70	5.33	4.38	
1.80	4.16	3.60	
1.90	3.40	3.06	
2.00	2.87	2.68	

Από τους παραπάνω πίνακες προκύπτει ότι η χρήση ενός εξωτερικού ορίου σε κάθε πλευρά του διαγράμματος που αντιστοιχεί στη χρησιμοποίηση του κανόνα 1-από-1 επιφέρει βελτίωση στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων στη διασπορά της διεργασίας αφού μειώνεται η τιμή του  $ARL_{out}$  έναντι των αντίστοιχων τιμών των διαγραμμάτων ελέγχου  $r/m$  και  $M : r/m$  (δείτε Πίνακα 4.11). Αξίζει να αναφέρουμε πως τα προτεινόμενα διαγράμματα του Πίνακα 4.14 χρησιμοποιούν τους κανόνες ευαισθητοποίησης των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου του Πίνακα 4.11, συνδυάζοντας τους με τον κανόνα 1-από-1. Η βελτίωση που επιτυγχάνεται στην ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά με χρήση των κανόνων



του Πίνακα 4.14 είναι εμφανής έναντι των κανόνων του Πίνακα 4.11 ενώ για τις μειώσεις θα λέγαμε ότι τα διαγράμματα είναι τουλάχιστον ισοδύναμα.

Καταλήγοντας, παρόλο που τα προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα δεν είναι αμερόληπτα για  $0.9 < \rho < 1$ , εντούτοις, η μείωση που επιτυγχάνεται στις τιμές του  $ARL_{out}$  για  $\rho \leq 0.9$  ή  $\rho > 1$  καθώς και η ευκολία στην ανάπτυξή τους τα καθιστούν ιδιαίτερος ελκυστικά έναντι του συνήθους διαγράμματος  $S$ .

#### 4.7 Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου Χωρίς Κάτω Όριο Ελέγχου

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε ένα δίπλευρο  $S$  διάγραμμα ελέγχου για μικρά μεγέθη δείγματος. Το διάγραμμα που προτείνουμε διαφέρει από τα δίπλευρα  $S$  διαγράμματα ελέγχου της Παραγράφου 4.6 αφού δε χρησιμοποιείται ο ίδιος κανόνας ανακήρυξης εκτός ελέγχου διεργασίας στις δύο πλευρές του διαγράμματος. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για μεγέθη δείγματος μικρότερα από 6 ( $n \leq 5$ ), το κάτω όριο ελέγχου στο σύνηθες διάγραμμα  $S$  με όρια ελέγχου  $3\sigma$  είναι αρνητικό και έτσι δεν είναι δυνατή η ανίχνευση μειώσεων στο μέσο της διεργασίας. Θυμίζουμε πως όταν προκύπτει αρνητικό το κάτω όριο ελέγχου του  $S$  διαγράμματος τότε αυτό τίθεται ίσο με το μηδέν. Ο Acosta-Mejia (1998) πρότεινε αντί της χρησιμοποίησης της τιμής 0 για το κάτω όριο ελέγχου όταν αυτό είναι αρνητικό, να εφαρμόζεται ο κανόνας του Nelson (1990) για την ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας σύμφωνα με τον οποίο έχουμε ένδειξη βελτίωσης της διεργασίας όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από τη διάμεση γραμμή του διαγράμματος  $MDL$ . Οι συνήθεις τιμές για το  $m$  είναι 7 ή 8 ενώ η διάμεση γραμμή ενός  $S$  διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από τη σχέση (4.6). Το βασικό μειονέκτημα του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι προκαθορισμένο και μάλιστα εξαρτάται από την τιμή του  $m$ . Το διάγραμμα που προτείνουμε χρησιμοποιεί τον κανόνα των  $m$  συνεχόμενων σημείων για την ανίχνευση εκτός ελέγχου διεργασίας. Η ανάπτυξή του γίνεται με τρόπο τέτοιο ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του να είναι δεδομένο.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα ελέγχου  $1/1 - m/m$  και θα περιγράψουμε τα διακριτά βήματα που μπορεί κανείς να ακολουθήσει για την ανάπτυξή του. Κατόπιν θα δώσουμε τα αποτελέσματα μελέτης της απόδοσης του  $1/1 - m/m$  διαγράμματος ελέγχου για μέγεθος δείγματος  $n = 2(1)5$ . Σκοπός μας είναι να δούμε ποιοι κανόνες είναι προτιμότερο να

χρησιμοποιούνται όταν το κάτω όριο ελέγχου είναι μηδέν. Επιπλέον, θα εξετάσουμε την επίδραση που έχει στο ποσοστό των εσφαλμένων συναγερωμών η επιλογή της τιμής του άνω ορίου ελέγχου. Θυμίζουμε ότι εκτός από όρια πιθανότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για άνω όριο ελέγχου ενός  $S$  διαγράμματος η τιμή  $UCL = (c_4(n) + k_U \sqrt{1 - c_4^2(n)}) \sigma_0$  αν και όπως θα δούμε στη συνέχεια επιφέρει αυξημένο ποσοστό εσφαλμένων συναγερωμών. Για  $k_U = 3$  η τιμή αυτή ταυτίζεται με το άνω όριο ελέγχου ενός  $S$  διαγράμματος ελέγχου με 3σ όρια (δείτε Παράρτημα Π.1).

#### 4.7.1 Το Δίπλευρο Διάγραμμα Ελέγχου 1/1 – $m / m$

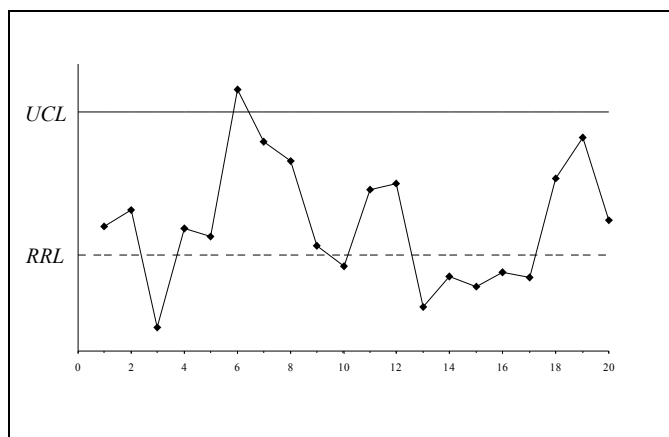
Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου στο οποίο χρησιμοποιούνται δύο κανόνες, ο κλασικός κανόνας 1-από-1 και ένας κανόνας ευαισθητοποίησης τύπου  $m$ -από- $m$ . Το διάγραμμα θα το συμβολίζουμε ως 1/1 –  $m / m$ . Για την ανάπτυξή του θεωρούμε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου με ένα άνω όριο ελέγχου  $UCL$  και ένα κάτω όριο ελέγχου  $RRL$  (*run rule limit*) στο οποίο απεικονίζεται η δειγματική τυπική απόκλιση  $S$ . Το 1/1 –  $m / m$  διάγραμμα ελέγχου δεν κάνει χρήση κεντρικής γραμμής ενώ για τις γραμμές που σχεδιάζονται στο διάγραμμα ισχύει  $0 < RRL < UCL$ .

Το 1/1 –  $m / m$  διάγραμμα ελέγχου δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

- (i) ένα σημείο βρεθεί εκτός του άνω ορίου ελέγχου ή
  - (ii) όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από το κάτω όριο ελέγχου,
- οτιδήποτε από τα δύο συμβεί συντομότερα.

Το 1/1 –  $m / m$  διάγραμμα ελέγχου αποτελεί συνδυασμό του κανόνα 1-από-1 ο οποίος εφαρμόζεται στο άνω όριο ελέγχου και του κανόνα  $m$ -από- $m$  ο οποίος εφαρμόζεται στο κάτω όριο ελέγχου. Έτσι το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας χρησιμοποιώντας διαφορετικό κανόνα στις δύο πλευρές του. Αν συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφεται στο (i) τότε έχουμε ένδειξη ότι η τυπική απόκλιση της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο ενώ αν εμφανιστεί ο σχηματισμός που περιγράφεται στο (ii) έχουμε ότι η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε χαμηλότερο επίπεδο.

Στο επόμενο σχήμα δίνεται μια γραφική αναπαράσταση του 1/1-5/5 διαγράμματος ελέγχου το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο σημείο 6 (κανόνας 1-από-1) και στο σημείο 17 (κανόνας 5-από-5).



**Σχήμα 4.6.** Το διάγραμμα 1/1-5/5

Στο διάγραμμα ορίζουμε τρεις περιοχές, την Περιοχή 2 ( $\Pi_2$ ) που είναι η περιοχή πάνω από το άνω όριο ελέγχου, την Περιοχή 1 ( $\Pi_1$ ) που είναι η περιοχή μεταξύ του άνω ορίου ελέγχου και του κάτω ορίου ελέγχου και την Περιοχή 0 ( $\Pi_0$ ) που είναι η περιοχή κάτω από το κάτω όριο ελέγχου. Η πιθανότητα εμφάνισης ενός απεικονιζόμενου σημείου του διαγράμματος σε καθεμία από τις περιοχές του διαγράμματος  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  θα συμβολίζεται αντίστοιχα με  $r_0(\rho)$ ,  $r_1(\rho)$ ,  $r_2(\rho)$ . Ειδικότερα για  $\rho = 1$  θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $r_0(1) = r_0$ ,  $r_1(1) = r_1$ ,  $r_2(1) = r_2$ .

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$r_2(\rho) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right), \quad r_0(\rho) = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)RRL^2}{(\rho\sigma_0)^2} \right)$$

$$r_1(\rho) = 1 - r_0(\rho) - r_2(\rho).$$

Για τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος 1/1- $m/m$  ορίζουμε μια ακολουθία τρίτιμων τυχαίων μεταβλητών  $Y_i$  με

$$Y_i = \begin{cases} 2, & S_i < UCL \\ 1, & RRL \leq S_i < UCL. \\ 0, & S_i \leq RRL \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων τρίτιμων δοκιμών με τιμές στο σύνολο  $\{0, 1, 2\}$  και συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr(Y_i = 0) = r_0(\rho), \quad \Pr(Y_i = 1) = r_1(\rho), \quad \Pr(Y_i = 2) = r_2(\rho).$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνθετο σχηματισμό

$$\mathcal{E} = \{2, \underbrace{00\dots 0}_m\}$$

και ας συμβολίσουμε με  $T_{1,m}$  την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του  $\mathcal{E}$  στην ακολουθία των δοκιμών  $Y_1, Y_2, \dots$ . Η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος ελέγχου  $1/1-m/m$  συμπίπτει με την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T_{1,m}$  οπότε για τη μελέτη των χαρακτηριστικών του διαγράμματος  $1/1-m/m$  που απορρέουν από το μήκος ροής του αρκεί να μελετηθεί ισοδύναμα η τυχαία μεταβλητή  $T_{1,m}$ . Η μελέτη της μπορεί να γίνει με τη μεθοδολογία της εμφύτευσής της σε Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $\rho = 1$ ) του διαγράμματος  $1/1-m/m$  δίνεται από τον τύπο (δείτε επίσης Koutras et al. (2006))

$$ARL_{in} = E(T_{1,m} | \rho = 1) = \frac{1 - r_0^m}{1 - r_0 - r_1(1 - r_0^m)} \quad (4.11)$$

όπου οι πιθανότητες  $r_0, r_1$  δίνονται από τις σχέσεις

$$r_0 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)RRL^2}{\sigma_0^2} \right), \quad r_1 = F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left( \frac{(n-1)RRL^2}{\sigma_0^2} \right).$$

Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$  της τυπικής απόκλισης δίνεται από τον τύπο

$$ARL_{out} = E(T_{1,m} | \rho \neq 1) = \frac{1 - r_0^m(\rho)}{1 - r_0(\rho) - r_1(\rho)(1 - r_0^m(\rho))}.$$

Δοθέντος των ορίων  $UCL, RRL$  είναι δυνατός ο υπολογισμός του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Αν ακριβώς μια από τις τιμές  $UCL, RRL$  είναι γνωστή τότε ο τύπος (4.11) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της άλλης ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής να είναι προκαθορισμένη. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι η τιμή του  $UCL$  είναι προκαθορισμένη και θα υπολογίζουμε την τιμή του  $RRL$  ώστε η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής να είναι η επιθυμητή. Για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή 370.4.

Για το άνω όριο ελέγχου επιλέξαμε την τιμή  $UCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1;0.00135}^2 / (n-1)}$ . Η τιμή αυτή είναι ενδεικτική και ο λόγος που τη χρησιμοποιήσαμε είναι επειδή μας επιτρέπει να βρούμε

τιμή για το  $RRL$  που να δίνει  $ARL_{out}$  ίσο με 370.4. Το συγκεκριμένο όριο πιθανότητας δίνει στο διάγραμμα  $1/1-m/m$  εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με  $1/0.00135 \approx 740.8 = 2 \cdot 370.4$  όταν εφαρμόζεται μόνο ο κανόνας 1-από-1. Οι τιμές του συγκεκριμένου άνω ορίου ελέγχου για μέγεθος δείγματος  $n = 2(1)5$  δίνονται στον επόμενο πίνακα όπου επιπλέον έχουμε υποθέσει η τιμή της εντός ελέγχου τυπικής απόκλισης  $\sigma_0$  είναι ίση με 1.

**Πίνακας 4.15** Άνω όριο ελέγχου διαγράμματος  $1/1-m/m$  για  $n = 2(1)5$

$n$	2	3	4	5
$UCL$	3.205	2.571	2.283	2.110

Αντί του ποσοστιαίου σημείου  $\chi_{n-1;0.00135}^2$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε άλλο ποσοστιαίο σημείο  $\chi_{n-1;p}^2$  αρκεί να ισχύει ότι  $p < 0.0027 = 1/370.4$ . Πιο γενικά αν συμβολίσουμε με  $c$  το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του  $1/1-m/m$  διαγράμματος ελέγχου και με  $c^*$  ( $c^* > c$ ) το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για το διάγραμμα  $1/1-m/m$  όταν εφαρμόζεται μόνο ο κανόνας 1-από-1. Τότε για το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος  $1/1-m/m$  θα πρέπει να επιλέξουμε τιμή  $UCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1;1/c^*}^2 / (n-1)}$  ώστε να είναι δυνατή εύρεση της τιμής του  $RRL$  προκειμένου το  $1/1-m/m$  διάγραμμα ελέγχου να έχει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής  $c$ . Τα διακριτά βήματα για την ανάπτυξη του  $1/1-m/m$  διαγράμματος ελέγχου είναι τα εξής:

### Αλγοριθμική Περιγραφή της Ανάπτυξης του Διαγράμματος 1/1 – m / m

**Βήμα 1** Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο  $m \geq 2$ , την τιμή  $c$  για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος ελέγχου 1/1 – m / m και την τιμή  $c^*$  ( $c^* > c$ ).

**Βήμα 2** Θέτουμε το άνω όριο ελέγχου ίσο με

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\chi_{n-1; 1/c^*}^2 / (n-1)}$$

**Βήμα 3** Θέτουμε  $ARL_{in} = (1 - r_0^m) / (1 - r_0 - r_1(1 - r_0^m)) = c$

**Βήμα 4** Επιλύουμε την εξίσωση  $(1 - r_0^m) / (1 - r_0 - r_1(1 - r_0^m)) = c$  ως προς την τιμή του  $RRL$  και θέτουμε το κάτω όριο ελέγχου ίσο με την τιμή αυτή.

**Βήμα 5** Το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν ένα σημείο βρεθεί πάνω από το άνω όριο ελέγχου ή όταν  $m$  συνεχόμενα σημεία βρεθούν κάτω από το όριο  $RRL$ .

Στον επόμενο πίνακα δίνεται ένας οδηγός για την επιλογή της τιμής του  $m$ . Εξετάσαμε την απόδοση των διαγραμμάτων 1/1 – m / m για  $m = 2(1)8$  χρησιμοποιώντας ως μέτρο απόδοσης την τιμή του  $ARL$ . Επεκτείναμε το μήκος του σχηματισμού  $m$  από 5 σε 8 ώστε τα διαγράμματα να είναι περισσότερο αποδοτικά κυρίως στην ανίχνευση μικρών μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για  $m = 8$  το 1/1-8/8 διάγραμμα ελέγχου αποτελεί γενική περίπτωση του δίπλευρου διαγράμματος που πρότεινε ο Nelson (1990) και την απόδοση του οποίου υπολόγισε ο Acosta-Mejia (1998). Τα μεγέθη δείγματος που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $n = 2(1)5$  ενώ οι τιμές του άνω ορίου ελέγχου δόθηκαν στον Πίνακα 4.15. Για τον υπολογισμό των τιμών των ορίων ελέγχου σε καθένα από τα διαγράμματα έχουμε υποθέσει ότι  $\sigma_0 = 1$ .

Για δεδομένο  $n$  και μετατόπιση  $\rho$  στην τυπική απόκλιση της διεργασίας δίνεται η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής (στήλη « $ARL_{out}$ »), η τιμή του  $m$  και το κάτω όριο ελέγχου (στήλη « $RRL$ »). Για λόγους σύγκρισης υπολογίσαμε και την απόδοση των αντίστοιχων δίπλευρων διαγραμμάτων  $S$  και  $S(\neq)$ .

**Πίνακας 4.16:** Προτεινόμενα διαγράμματα  $1/1 - m/m$  για  $n = 2(1)5$

$n = 2$						$n = 3$					
$\rho$	$ARL_{out}$	$m$	$RRL$	$S$	$S(\neq)$	$\rho$	$ARL_{out}$	$m$	$RRL$	$S$	$S(\neq)$
0.10	4.10	4	0.257	74.08	39.50	0.10	2.07	2	0.195	7.91	4.67
0.20	6.20	5	0.365	148.15	78.99	0.20	3.31	3	0.350	30.11	17.12
0.30	9.23	7	0.465	222.22	118.49	0.30	4.96	4	0.746	67.12	37.88
0.40	14.22			296.30	157.98	0.40	7.53	5	0.579	118.94	66.95
0.50	25.58			370.37	197.47	0.50	11.62	7	0.739	185.56	104.33
0.60	50.05			444.43	236.97	0.60	19.92			266.99	150.01
0.70	100.49	8	0.635	517.26	276.46	0.70	41.94			363.04	204.00
0.80	198.26			571.71	315.70	0.80	101.75	8	0.802	466.99	266.08
0.90	342.12	535.02	351.82	0.90	250.74	512.05	331.99				
0.95	386.03			462.46	364.97	0.95	344.70			463.63	358.80
0.99	378.45			389.19	370.13	0.99	373.91			390.95	369.84

$n = 4$						$n = 5$					
$\rho$	$ARL_{out}$	$m$	$RRL$	$S$	$S(\neq)$	$\rho$	$ARL_{out}$	$m$	$RRL$	$S$	$S(\neq)$
0.10	2.00	2	0.309	1.66	1.31	0.10	2.00			1.03	1.01
0.20	2.22			7.30	4.67	0.20	2.01	2	0.389	2.62	1.97
0.30	3.44	3	0.465	21.87	13.30	0.30	2.57			8.49	5.67
0.40	5.18	4	0.582	49.66	29.67	0.40	3.93	3	0.538	22.75	14.53
0.50	8.11	5	0.673	95.09	56.33	0.50	6.21	4	0.645	51.40	32.12
0.60	13.40			162.55	95.85	0.60	10.36	6	0.793	102.16	63.07
0.70	26.15			256.40	150.79	0.70	19.39			184.45	113.05
0.80	66.61	8	0.863	378.22	223.58	0.80	49.10			308.15	188.65
0.90	198.76			479.54	312.14	0.90	164.70	8	0.894	445.75	293.14
0.95	314.40			458.58	352.19	0.95	290.38			450.97	345.39
0.99	370.34			391.64	369.52	0.99	367.31			391.89	369.17

Από τον Πίνακα 4.16 μπορούμε να πούμε ότι η απόδοση των διαγραμμάτων είναι σχεδόν αμερόληπτη (*nearly ARL – Unbiased*) ενώ όσο η τιμή του  $m$  αυξάνει η απόδοση του διαγράμματος τείνει να γίνει αμερόληπτη. Αν και η χρήση του κανόνα  $m$ -από- $m$  βελτιώνει την απόδοση των διαγραμμάτων στην ανίχνευση μειώσεων στην τυπική απόκλιση ταυτόχρονα επιφέρει αύξηση στις τιμές του  $ARL_{out}$  στην ανίχνευση αυξήσεων, η οποία όμως δεν είναι πολύ σημαντική. Συνστήνουμε τη χρήση του διαγράμματος  $1/1-m/m$  στην πράξη όταν το κάτω όριο ελέγχου του συνήθους δίπλευρου  $S$  διαγράμματος είναι μηδέν αφού ανιχνεύει μειώσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας και ταυτόχρονα το ποσοστό των εσφαλμένων συναγεργμών είναι προκαθορισμένο.

Στον επόμενο πίνακα έχουμε υπολογίσει την ποσοστιαία βελτίωση που επιφέρει στις τιμές του  $ARL_{out}$  των διαγραμμάτων  $S$  με όρια πιθανότητας και  $S(\neq)$  η χρησιμοποίηση του προτεινόμενου διαγράμματος  $1/1-m/m$  (δείτε Πίνακα 4.16) στην ανίχνευση της δεδομένης μετατόπισης. Ας συμβολίσουμε με  $ARL_{out}$  την τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του δίπλευρου διαγράμματος  $S$  ή του διαγράμματος  $S(\neq)$  και ως  $ARL_{out,1/1-m/m}$  την τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του διαγράμματος  $1/1-m/m$  για οποιαδήποτε μετατόπιση  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$ . Τότε ως ποσοστιαία βελτίωση ορίζουμε το πηλίκο

$$I(\rho) = \frac{ARL_{out} - ARL_{out,1/1-m/m}}{ARL_{out}} 100\% .$$

Σημειώνουμε ότι στον επόμενο πίνακα το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το  $ARL_{out,1/1-m/m}$  είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο  $ARL_{out}$  του διαγράμματος  $S$  ή  $S(\neq)$ .



**Πίνακας 4.17:** Ποσοστό βελτίωσης του διαγράμματος  $1/1 - m/m$  έναντι του  $S$  διαγράμματος με όρια πιθανότητας και του διαγράμματος  $S(\neq)$ , για  $n = 2(1)5$ .

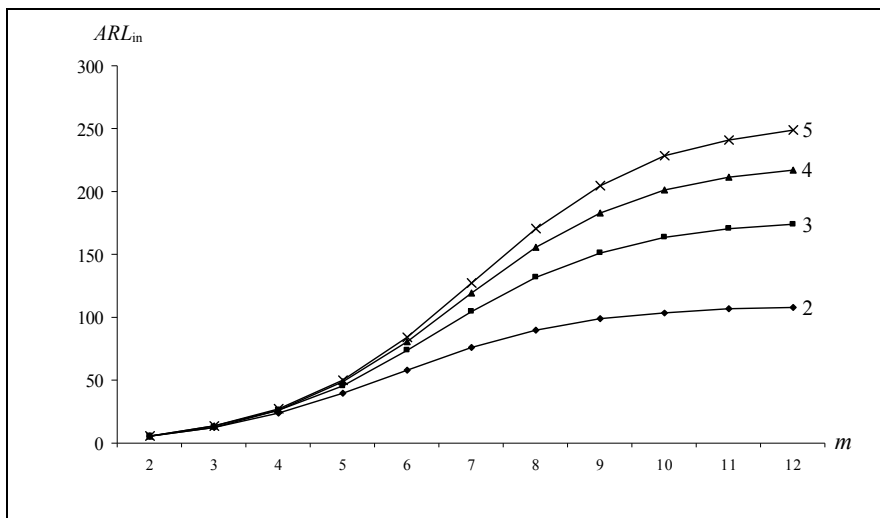
	$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S$ chart	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S(\neq)$	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S$ chart	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S(\neq)$	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S$ chart	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S(\neq)$	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S$ chart	Ποσοστό Βελτίωσης έναντι του $S(\neq)$
0.1	94%	90%	74%	56%	-21%	-53%	-94%	-98%
0.2	96%	92%	89%	81%	70%	52%	23%	-2%
0.3	96%	92%	93%	87%	84%	74%	70%	55%
0.4	95%	91%	94%	89%	90%	83%	83%	73%
0.5	93%	87%	94%	89%	91%	86%	88%	81%
0.6	89%	79%	93%	87%	92%	86%	90%	84%
0.7	81%	64%	88%	79%	90%	83%	89%	83%
0.8	65%	37%	78%	62%	82%	70%	84%	74%
0.9	36%	3%	51%	24%	59%	36%	63%	44%
1.1	-2%	38%	-4%	38%	-4%	38%	-4%	37%
1.2	-2%	55%	-3%	52%	-2%	48%	-2%	44%
1.3	-2%	60%	-2%	53%	-1%	47%	-1%	42%
1.4	-1%	60%	-1%	51%	-1%	43%	0%	38%
1.5	-1%	58%	-1%	47%	0%	39%	0%	34%
1.6	-1%	56%	0%	44%	0%	36%	0%	30%
1.7	-1%	53%	0%	40%	0%	32%	0%	26%
1.8	0%	50%	0%	37%	0%	29%	0%	23%
1.9	0%	47%	0%	34%	0%	26%	0%	21%
2	0%	44%	0%	31%	0%	24%	0%	18%

Όπως είναι εμφανές από τον Πίνακα 4.17, η βελτίωση είναι ελκυστική στην ανίχνευση μικρής και μεσαίας τάξης μείωσης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας ενώ στην ανίχνευση αυξήσεων τα προτεινόμενα διαγράμματα  $1/1-m/m$  έχουν σχεδόν ίδια απόδοση έναντι του συνήθους διαγράμματος  $S$  με όρια πιθανότητας ενώ είναι καλύτερα έναντι του διαγράμματος  $S(\neq)$ .

Πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο αξίζει να αναφέρουμε δύο βασικά στοιχεία σχετικά με το  $1/1-m/m$  διάγραμμα ελέγχου. Είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1 τους τέσσερις κανόνες της Western Electric Company όπου σύμφωνα με τον Κανόνα 4 έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν 8 συνεχόμενα σημεία βρεθούν σε μία από τις δύο πλευρές της κεντρικής γραμμής του διαγράμματος ελέγχου. Για την εφαρμογή του Κανόνα 4 στα διαγράμματα για την παρακολούθηση της διασποράς έχει προταθεί αντί της κεντρικής γραμμής του δίπλευρου  $S$  διαγράμματος να χρησιμοποιείται η διάμεση γραμμή  $MDL$  (σχέση (4.6)) ενώ συνήθως ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο στην κάτω πλευρά του διαγράμματος. Έτσι η εμφάνιση 8 συνεχόμενων σημείων κάτω από τη διάμεση γραμμή αποτελεί ένδειξη ότι η τυπική απόκλιση της διεργασίας έχει μειωθεί.

Στη συνέχεια θεωρούμε την ειδική περίπτωση του διαγράμματος  $1/1-m/m$  με άνω όριο ελέγχου  $UCL = (c_4(n) + 3\sqrt{1 - c_4^2(n)})\sigma_0$  και κάτω όριο ελέγχου  $RRL = MDL$ . Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του ποσοστού των εσφαλμένων συναγερωμών του διαγράμματος ή ισοδύναμα των τιμών για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ως προς την τιμή του  $m$  και το μέγεθος δείγματος  $n$ .

Στο επόμενο σχήμα 4.7 δίνουμε μια γραφική παράσταση των τιμών του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής (κάθετος άξονας) ως προς τον αριθμό  $m$  των συνεχόμενων σημείων κάτω από τη διάμεση γραμμή  $MDL$  (οριζόντιος άξονας) για μεγέθη δείγματος  $n = 2(1)5$ . Για την εντός ελέγχου τυπική απόκλιση έχουμε υποθέσει ότι  $\sigma_0 = 1$ .



**Σχήμα 4.7.** Γραφική παράσταση του  $ARL_{in}$  του διαγράμματος  $1/1 - m / m$  για  $n = 2(1)5$  και  $m = 2(1)12$ .

Είναι άμεσο να συμπεράνει κανείς πως η χρησιμοποίηση του συνήθους άνω  $3\sigma$  ορίου του  $S$  διαγράμματος σε συνδυασμό με τον προτεινόμενο κανόνα των  $m$  συνεχόμενων σημείων κάτω από τη διάμεση γραμμή, οδηγεί σε αυξημένο ποσοστό εσφαλμένων συναγερμών αφού η τιμή του  $ARL_{in}$  δεν ξεπερνάει την τιμή 250 παρά μόνο για μέγεθος δείγματος 5 και αριθμό συνεχόμενων σημείων στην κάτω πλευρά του διαγράμματος ίσο με  $m = 12$ . Έτσι, θα συστήναμε τη μη-χρησιμοποίηση των παραπάνω τιμών ως όρια ελέγχου του διαγράμματος  $1/1 - m / m$ .

#### 4.8. Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήσαμε διαγράμματα ελέγχου με κανόνες ροών για την παρακολούθηση της διασποράς. Λόγω των ιδιοτήτων που παρουσιάζει η κατανομή της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης, τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου μπορούν σε τέτοιες περιπτώσεις να δώσουν αξιόπιστες λύσεις ειδικότερα στην έγκαιρη ανίχνευση μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας. Μελετήθηκαν οι βασικοί τύποι κανόνων  $r$ -από- $m$  καθώς και παραλλαγές αυτών και προτάθηκαν οι καλύτεροι για την ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης. Επίσης, εξετάσαμε την επίδραση της μεθόδου άμεσης αρχικής αντίδρασης στα μονόπλευρα διαγράμματα.

Ακόμη, εξετάσαμε την απόδοση των κανόνων  $r/m$ ,  $M:r/m$ ,  $I:r/m$  και  $R:r/m$  για την περίπτωση δίπλευρων διαγραμμάτων παρακολούθησης της διασποράς και προτάθηκαν τα καταλληλότερα διαγράμματα. Τα προτεινόμενα διαγράμματα αν και δεν παρουσιάζουν αμερόληπτη απόδοση για μετατοπίσεις του  $\rho$  στο εύρος  $0.9 < \rho < 1$  εντούτοις αυξάνουν την ευαισθησία του διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων, (είτε αυξήσεων είτε μειώσεων) στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

Τέλος, προτάθηκε και ένα δίπλευρο διάγραμμα για τις περιπτώσεις που δεν υπάρχει κάτω όριο ελέγχου λόγω μικρού μεγέθους δείγματος ( $n \leq 5$ ). Το προτεινόμενο διάγραμμα  $1/1 - m/m$  επιτρέπει την ανίχνευση μείωσης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας για μικρό μέγεθος δείγματος  $n$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΤΕΣΤ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ

### 5.1 Εισαγωγή

Τα τεστ εκκίνησης (*start-up demonstration tests*, συμβ. SDT) είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας πιστοποιείται η αξιοπιστία ενός εξοπλισμού σε σχέση με το να ξεκινά επιτυχώς τη λειτουργία του. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις εξοπλισμών στους οποίους μπορεί γίνει εφαρμογή ενός τεστ εκκίνησης αποτελούν οι μηχανές κοπής γκαζόν, οι αντλίες νερού, τα αλυσοπρίονα και οι μπαταρίες αυτοκινήτου. Για παράδειγμα, προτού ο έμπορος αγοράσει από τον προμηθευτή τον εξοπλισμό θα μπορούσε να απαιτήσει να του πιστοποιηθεί η αξιοπιστία του ζητώντας, για παράδειγμα, 20 συνεχείς επιτυχημένες εκκινήσεις του εξοπλισμού ενώ για τις αποτυχημένες εκκινήσεις να απαιτήσει αυτές να μη συμβαίνουν πολύ κοντά.

Τα τεστ εκκίνησης προτάθηκαν από τους Hahn and Gage (1983) οι οποίοι μελέτησαν την περίπτωση στην οποία η εμφάνιση ενός συγκεκριμένου (προεπιλεγμένου) αριθμού διαδοχικών επιτυχημένων εκκινήσεων του εξοπλισμού να οδηγεί στην αποδοχή του. Το τεστ αυτό ονομάζεται τεστ εκκίνησης συνεχόμενων επιτυχιών (*consecutive successes*, συμβ. CS). Για τη μελέτη του τεστ οι Hahn and Gage (1983) χρησιμοποίησαν το μοντέλο των ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli προκειμένου να περιγράψουν τις διαδοχικές εκκινήσεις του εξοπλισμού. Η κατανομή του μήκους του τεστ ή ισοδύναμα η κατανομή του αριθμού των εκκινήσεων μέχρι την αποδοχή του εξοπλισμού είναι γνωστή ως γεωμετρική κατανομή τάξης  $k$  (Philippou et al. (1983)), όπου  $k$  είναι ο (προεπιλεγμένος) αριθμός των επιτυχημένων εκκινήσεων. Οι Viveros and Balakrishnan (1993) μελέτησαν περαιτέρω την κατανομή του αριθμού των εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ. Εκτός από το

μοντέλο ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli εξέτασαν και την περίπτωση που οι δοκιμές έχουν Μαρκοβιανή εξάρτηση πρώτης τάξης. Επιπλέον, έδωσαν την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας και την εκτιμήτρια ροπών για την άγνωστη πιθανότητα  $p$  επιτυχούς εκκίνησης του εξοπλισμού. Εκτός από τους Viveros and Balakrishnan (1993), το μοντέλο της Μαρκοβιανής εξάρτησης πρώτης τάξης για τις διαδοχικές εκκινήσεις του εξοπλισμού μελετήθηκε από τους Balakrishnan et al. (1995) και Balakrishnan et al. (1997) που εξέτασαν την περίπτωση που είναι δυνατή η εφαρμογή διορθωτικών ενεργειών στον εξοπλισμό μετά την πρώτη ή μετά από κάθε αποτυχημένη εκκίνησή του.

Το βασικότερο μειονέκτημα ενός CS τεστ εκκίνησης είναι ότι δε λαμβάνει υπόψη του τον αριθμό  $f$  των μη-επιτυχημένων εκκινήσεων με αποτέλεσμα πολλές φορές να απαιτείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός δοκιμών μέχρι να ληφθεί απόφαση για την αποδοχή ή όχι του εξοπλισμού. Έτσι οι Balakrishnan and Chan (2000) πρότειναν το τεστ εκκίνησης συνεχόμενων επιτυχιών συνολικών αποτυχιών (*consecutive successes total failures*, συμβ. CSTF) σύμφωνα με το οποίο εάν  $k$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις εμφανιστούν πριν από  $f$  συνολικά αποτυχημένες τότε ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός ενώ αν  $f$  συνολικά αποτυχημένες εκκινήσεις συμβούν πριν από την εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχημένων τότε ο εξοπλισμός απορρίπτεται. Οι Balakrishnan and Chan (2000) μελέτησαν το CSTF τεστ εκκίνησης στην περίπτωση που οι διαδοχικές εκκινήσεις αποτελούν ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli. Ο Martin (2004) μελέτησε το CSTF τεστ εκκίνησης υποθέτοντας ότι υπάρχει Μαρκοβιανή εξάρτηση πρώτης τάξης μεταξύ των διαδοχικών εκκινήσεων. Επιπρόσθετα αποτελέσματα που αφορούν στην εκτίμηση της άγνωστης πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$  καθώς και έναν οδηγό επιλογής των παραμέτρων του CSTF τεστ εκκίνησης μπορεί να βρει κανείς στην εργασία των Smith and Griffith (2005). Αξίζει να αναφέρουμε πως στο CSTF τεστ εκκίνησης δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των ροπών για την εκτίμηση του  $p$  (αφού ο μέσος αριθμός εκκινήσεων μέχρι τη λήψη απόφασης δεν αποτελεί μονότονη συνάρτηση του  $p$ ) και για το λόγο αυτό οι Chan et al. (2007) πρότειναν τη χρήση EM αλγόριθμου.

Ακόμα πιο πρόσφατα οι Smith and Griffith (2008) υιοθετώντας ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli για τις διαδοχικές εκκινήσεις του εξοπλισμού πρότειναν δύο νέα τεστ εκκίνησης, το τεστ συνεχόμενων επιτυχιών συνεχόμενων αποτυχιών (*consecutive successes consecutive failures*, συμβ. CSCF) και το τεστ συνολικών επιτυχιών συνολικών αποτυχιών

(*total successes total failures*, συμβ. TSTF). Τα νέα τεστ εκκίνησης συγκρίθηκαν ως προς την απόδοσή τους με το CSTF τεστ εκκίνησης. Η μελέτη των CSCF και TSTF τεστ εκκίνησης για την περίπτωση της Μαρκοβιανής εξάρτησης πρώτης τάξης μεταξύ των δοκιμών έγινε από τον Martin (2008).

Από τις έως τώρα αναφορές στη βιβλιογραφία είναι εμφανές ότι οι στατιστικές συναρτήσεις ροών χρησιμοποιούνται ευρέως στην ανάπτυξη των τεστ εκκίνησης. Τα τελευταία χρόνια όμως εκτός από τις στατιστικές συναρτήσεις ροών χρησιμοποιούνται και οι στατιστικές συναρτήσεις σάρωσης. Οι Koutras and Balakrishnan (1999) πρότειναν ένα τεστ εκκίνησης σύμφωνα με το οποίο

(i) ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν υπάρξει μια δεύτερη αποτυχημένη εκκίνηση όταν η πρώτη έχει συμβεί στις πρώτες  $r - 1$  εκκινήσεις, ή

(ii) ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν 2 αποτυχημένες εκκινήσεις απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από  $k$  εκκινήσεις ενώ οι  $r - 1$  πρώτες εκκινήσεις ήταν όλες επιτυχημένες, ή

(iii) ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν δεν συμβεί κάποιο από τα (i), (ii) εντός ενός προκαθορισμένου αριθμού εκκινήσεων  $N$ .

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το παραπάνω τεστ εκκίνησης βασίζεται σε στατιστικές συναρτήσεις σάρωσης λαμβάνοντας υπόψη πρώιμες αποτυχημένες εκκινήσεις καθώς και αποτυχημένες εκκινήσεις που δεν απέχουν πολύ μεταξύ τους. Οι Smith and Griffith (2004) πρότειναν ένα τεστ εκκίνησης στο οποίο ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν συμβούν  $k$  επιτυχημένες εκκινήσεις σε ένα «παράθυρο» μήκους  $m$  εκκινήσεων πριν από την εμφάνιση  $f$  συνολικά αποτυχημένων εκκινήσεων ενώ ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν συμβούν  $f$  συνολικά αποτυχημένες εκκινήσεις πριν από  $k$  επιτυχημένες εκκινήσεις σε ένα «παράθυρο» μήκους  $m$  εκκινήσεων. Το τεστ αυτό ονομάζεται τεστ εκκίνησης σάρωσης επιτυχιών συνολικών αποτυχιών (*scan successes total failures*, συμβ. ScanSTF). Είναι εμφανές πως το ScanSTF τεστ εκκίνησης αποτελεί παραλλαγή του CSTF τεστ εκκίνησης.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα νέο τεστ εκκίνησης που βασίζεται στη χρήση στατιστικών συναρτήσεων σάρωσης.

## 5.2 Το CSDF Τεστ Εκκίνησης

Ας θεωρήσουμε το CS τεστ εκκίνησης σύμφωνα με το οποίο ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός όταν συμβούν  $k$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις του εξοπλισμού. Ως κριτήριο απόρριψης του εξοπλισμού θα χρησιμοποιηθεί ο αριθμός των επιτυχημένων εκκινήσεων που επιτρέπεται να παρεμβάλλεται μεταξύ δύο αποτυχημένων. Έτσι

(i) ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός εάν συμβούν  $k$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις του εξοπλισμού πριν από την εμφάνιση 2 αποτυχημένων εκκινήσεων μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται το πολύ  $d - 2$  επιτυχημένες εκκινήσεις, ή

(ii) ο εξοπλισμός απορρίπτεται εάν συμβούν 2 αποτυχημένες εκκινήσεις μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται το πολύ  $d - 2$  επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχημένων εκκινήσεων.

Θα αναφερόμαστε στο συγκεκριμένο τεστ εκκίνησης ως τεστ συνεχόμενων επιτυχιών αποτυχιών σε απόσταση (*consecutive successes distance failures*, συμβ. CSDF).

Για την αποδοχή του εξοπλισμού απαιτείται οι αποτυχημένες εκκινήσεις (αν υπάρχουν) να απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Η «απόσταση» μεταξύ των αποτυχημένων εκκινήσεων καθορίζεται από την τιμή της παραμέτρου  $d$ . Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι για την περίπτωση που  $k \geq d$  το στήριγμα της τυχαίας μεταβλητής η οποία εκφράζει τον αριθμό δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ δεν είναι πεπερασμένο. Σημειώνουμε ότι το στήριγμα της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής για το CSTF τεστ εκκίνησης είναι πάντοτε πεπερασμένο.

Στην επόμενη παράγραφο θα δοθούν οι βασικές έννοιες και συμβολισμοί για την ανάπτυξη του CSDF τεστ εκκίνησης.

## 5.3 Ορισμοί και Συμβολισμοί

Έστω  $Z_1, Z_2, \dots$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli με τιμές 1 (Επιτυχία) και 0 (Αποτυχία) και αντίστοιχες πιθανότητες  $p = P(Z_i = 1)$  και  $q = P(Z_i = 0) = 1 - p$ ,  $i \geq 1$ . Θεωρούμε ως  $\mathcal{E}_1$  το σχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί στην εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχιών και ως  $\mathcal{E}_0$  το σχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί στην εμφάνιση 2 αποτυχιών μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται το πολύ  $d - 2$  επιτυχίες ( $d \geq 2$ ,



$k \geq d$ ). Θα συμβολίζουμε με  $T$  το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$  ή  $\mathcal{E}_0$ , οποιοσδήποτε από τους δύο εμφανιστεί συντομότερα. Η τυχαία μεταβλητή  $T$  αποτελεί το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_0 = \{\underbrace{11\dots 1}_k\} \cup \{00, 010, 0110, \dots, \underbrace{011\dots 10}_{d-2}\}.$$

Για τη συνάρτηση πιθανότητας  $f_T(n)$ , την πιθανότητα ουράς  $\bar{F}_T(n)$ , τη συνάρτηση κατανομής  $F_T(n)$ , την πιθανογεννήτρια συνάρτηση  $G_T(z)$  και τη γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων ουράς  $H_T(z)$  της τυχαίας μεταβλητής  $T$  έχουμε ότι

$$f_T(n) = \Pr(T = n), \quad \bar{F}_T(n) = \Pr(T > n), \quad F_T(n) = \Pr(T \leq n)$$

$$G_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(n)z^n, \quad H_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_T(n)z^n.$$

Ας συμβολίσουμε με  $T_1$  (αντ.  $T_0$ ) το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του  $\mathcal{E}$  που οφείλεται στην εμφάνιση του  $\mathcal{E}_1$  (αντ.  $\mathcal{E}_0$ ). Για το χρόνο αναμονής  $T_i$ ,  $i = 0, 1$ , θα χρησιμοποιήσουμε ανάλογους συμβολισμούς, δηλαδή

$$f_{T_i}(n) = \Pr(T_i = n), \quad \bar{F}_{T_i}(n) = \Pr(T_i > n), \quad F_{T_i}(n) = \Pr(T_i \leq n)$$

$$G_{T_i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_i}(n)z^n, \quad H_{T_i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{T_i}(n)z^n.$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι χρόνοι αναμονής  $T_0$  και  $T_1$  δεν αποτελούν τυχαίες μεταβλητές (για τον αυστηρό ορισμό των  $T_0$  και  $T_1$  δείτε σελ. 61 της παρούσας διατριβής). Επίσης είναι εύκολο να διαπιστωθεί η ισχύς των παρακάτω σχέσεων

$$f_T(n) = f_{T_0}(n) + f_{T_1}(n), \quad G_T(z) = G_{T_0}(z) + G_{T_1}(z), \quad H_T(z) = H_{T_0}(z) + H_{T_1}(z).$$

Ας υποθέσουμε ότι το CSDF τεστ εκκίνησης εφαρμόζεται για την αποδοχή ή απόρριψη ενός εξοπλισμού με πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p$ . Τότε η πιθανότητα να τερματιστεί το τεστ ακριβώς στη  $n$ -οστή δοκιμή είναι ίση με  $f_T(n)$ . Η πιθανότητα απόρριψης του εξοπλισμού στη  $n$ -οστή δοκιμή είναι ίση με  $f_{T_0}(n)$  ενώ η πιθανότητα αποδοχής του εξοπλισμού στη  $n$ -οστή δοκιμή είναι ίση με  $f_{T_1}(n)$ . Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός της πιθανότητας αποδοχής  $P_A$  και της πιθανότητας απόρριψης  $P_R$  ενός εξοπλισμού. Οι πιθανότητες αυτές δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$P_A = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_1}(n) = G_{T_1}(1), \quad P_R = \sum_{n=0}^{\infty} f_{T_0}(n) = G_{T_0}(1).$$

Έχοντας δώσει τις απαραίτητες έννοιες και τους κατάλληλους συμβολισμούς, είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην παράθεση των θεωρητικών αποτελεσμάτων για τη μελέτη ενός CSDF τεστ εκκίνησης.

#### 5.4 Ανάπτυξη του CSDF Τεστ Εκκίνησης

Στην παρούσα παράγραφο θα δώσουμε αρκετά χρήσιμα αποτελέσματα για τη διεξοδική μελέτη ενός CSDF τεστ εκκίνησης. Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη του χρόνου αναμονής  $T$  του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_0$  που ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο βασίζεται στη μεθοδολογία της εμφύτευσης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Αποσυνθέτοντας το σύνθετο σχηματισμό  $\mathcal{E}$  σε απλούς υποσχηματισμούς παίρνουμε τους παρακάτω  $k + d - 2$  το πλήθος υποσχηματισμούς

$$"1" \equiv 1, \quad "2" \equiv 11, \quad "3" \equiv 111, \quad \dots, \quad "k-1" \equiv \underbrace{11\dots1}_k$$

$$"k" \equiv 0, \quad "k+1" \equiv 01, \quad "k+2" \equiv 011, \quad \dots, \quad "k+d-2" \equiv 0\underbrace{11\dots1}_{d-2}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας, ενώ ως απορροφητική κατάσταση ορίζεται η

$$"k+d-1" \equiv \{ \underbrace{11\dots1}_k, 00, 010, \dots, 0\underbrace{11\dots10}_{d-2} \}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων  $\Omega = \{1, 2, \dots, k + d - 1\}$  και η οποία μεταβαίνει στις διάφορες καταστάσεις της ανάλογα με τα αποτελέσματα των δοκιμών  $Z_1, Z_2, \dots$  ως εξής:

(i) εάν  $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_t = 1$  για  $1 \leq t \leq k-1$  τότε η αλυσίδα  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $t$ ,

(ii) εάν  $Z_t = 0$  και  $Z_{t-1} = Z_{t-2} = \dots = Z_1 = 1$  για  $1 \leq t \leq k$  τότε η αλυσίδα  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $k$ ,

(iii) εάν  $Z_t = 0$  και  $Z_{t-1} = Z_{t-2} = \dots = Z_{t-i} = 1$  για  $d-1 \leq i \leq k-1$  τότε η αλυσίδα  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $k$ ;

(iv) εάν  $Z_t = Z_{t-1} = \dots = Z_{t-i+1} = 1$  και  $Z_{t-i} = 0$  για  $1 \leq i \leq d-2$  τότε η αλυσίδα  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $k+i$ , και

(v) εάν  $Z_t = Z_{t-1} = \dots = Z_{t-i+1} = 1$  και  $Z_{t-i} = 0$  για  $d-1 \leq i \leq k-1$  τότε η αλυσίδα  $Y_t$  βρίσκεται στην κατάσταση  $i$ .

Για τη χρήση του παραπάνω ορισμού των μεταβάσεων της αλυσίδας στις διάφορες καταστάσεις, υποθέτουμε πως δεν έχει κάνει την εμφάνισή του κάποιο από τα ενδεχόμενα  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_0$ . Τέλος, στην απορροφητική κατάσταση  $k+d-1$  συγκεντρώνονται όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί οι οποίοι οδηγούν στην εμφάνιση των ενδεχομένων  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_0$ .

Από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε τη λειτουργία της αλυσίδας διαπιστώνουμε ότι αποτελεί μια ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  με χώρο καταστάσεων  $\Omega$  και διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων

$$\boldsymbol{\pi} = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = k+d-1)] = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_k$$

(το διάνυσμα  $\mathbf{e}_i$ ,  $i=1,2,\dots,k+d-1$ , συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα (γραμμή) του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^{k+d-1}$  με μονάδα στην  $i$  συνιστώσα και 0). Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  είναι ο

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix}_{(k+d-1) \times (k+d-1)}$$

όπου

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & | & \mathbf{Q}_{12} \\ \hline \mathbf{Q}_{21} & | & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}_{(k+d-2) \times (k+d-2)}, \quad \mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(k-1) \times (k-1)},$$

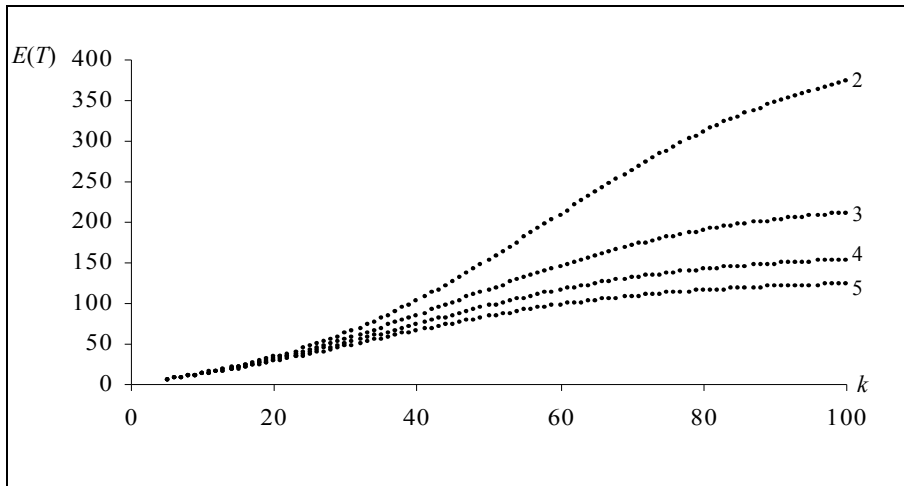
$$\mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} q & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(k-1) \times (d-1)}, \quad \mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(d-1) \times (d-1)}.$$

Ο πίνακας  $\mathbf{Q}_{21}$  είναι ένας  $(d-1) \times (k-1)$  πίνακας με όλα τα στοιχεία του μηδενικά εκτός από το στοιχείο της θέσης  $(d-1, d-1)$  το οποίο ισούται με  $p$ . Με  $\mathbf{0}$  και  $\mathbf{1}$  συμβολίζουμε τα  $1 \times (k+d-2)$  διανύσματα (γραμμής) των οποίων όλα τα στοιχεία είναι αντίστοιχα 0 και 1, και  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $(k+d-2) \times (k+d-2)$ .

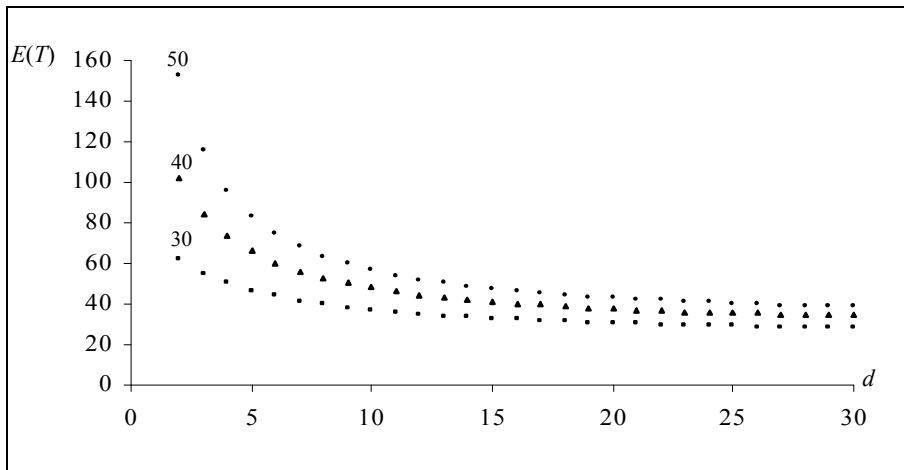
Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων  $F_T(n)$ ,  $\bar{F}_T(n)$ ,  $f_T(n)$  καθώς και η εύρεση των γεννητριών συναρτήσεων  $G_T(z)$ ,  $H_T(z)$  και των  $\ell$ -τάξης (καθοδικών) παραγοντικών ροπών της  $T$  γίνεται με άμεση εφαρμογή των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3 (δείτε Παράγραφο 2.5). Από τη σχέση (2.10) και μετά από αρκετές αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $T$ , η οποία εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ, δίνεται από τον τύπο

$$E(T) = \frac{(1-p^k)(2-p^{d-1})}{q(1+p^k-p^{d-1})}. \quad (5.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι για δεδομένες τιμές των  $p$  και  $d$  ( $k$ ) η αναμενόμενη τιμή της  $T$  είναι μια αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του  $k$  ( $d$ ). Στα επόμενα σχήματα δίνεται μια γραφική παράσταση του αναμενόμενου αριθμού εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $k$  και  $d$  για  $p = 0.95$ .



Σχήμα 5.1. Η  $E(T)$  ως συνάρτηση του  $k$  για  $d = 2, 3, 4, 5$ .



Σχήμα 5.2. Η  $E(T)$  ως συνάρτηση του  $d$  για  $k = 30, 40, 50$ .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.9) καταλήγουμε στον επόμενο αναλυτικό τύπο για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση  $G_T(z)$  της  $T$

$$G_T(z) = \frac{(1-(pz))(pz)^k(1-pz+qz-(qz)(pz)^{d-1})+(qz)^2(1-(pz)^k)(1-(pz)^{d-1})}{(1-pz)(1-pz-(qz)(pz)^{d-1}+(qz)(pz)^k)}. \quad (5.2)$$

Για τη μελέτη της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $T_1$ , θα χρησιμοποιήσουμε μια νέα τεχνική. Η τυχαία μεταβλητή  $T_1$  εκφράζει το χρόνο αναμονής μέχρι την εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  λόγω της εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_1$ . Έτσι, προκειμένου να είναι δυνατή η μελέτη της μέσω της ανάλυσης που έχει ήδη προηγηθεί θα πρέπει να τροποποιήσουμε τον πίνακα  $\mathbf{P}$  της Μαρκοβιανής αλυσίδας που αντιστοιχεί στην  $T$ ,

προκειμένου να μην είναι δυνατή η μετάβαση στην απορροφητική κατάσταση  $k + d - 1$  και να αποτραπεί η εμφάνιση του σχηματισμού  $\mathcal{E}$  λόγω της εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_0$ . Έτσι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{P}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right]_{(k+d-1) \times (k+d-1)}$$

όπου  $\mathbf{M}_1$  είναι ένας  $(k + d - 2) \times (k + d - 2)$  πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με το μηδέν εκτός από τα στοιχεία στις τελευταίες  $d - 1$  θέσεις της κύριας διαγωνίου του τα οποία είναι όλα ίσα με  $q$ .

**Παρατήρηση 5.1:** Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε τα βασικά αποτελέσματα για τη μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την εμφάνιση ενός σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i$  λόγω της εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_j$  για κάποιο  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Η τεχνική που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο επιτρέπει τη μελέτη της  $T_i$ ,  $i = 0, 1$ , χωρίς απαραίτητα να αυξήσουμε τη διάσταση του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης με την προσθήκη επιπλέον καταστάσεων που καθεμία από αυτές αντιστοιχεί σε διαφορετικό τρόπο εμφάνισης του  $\mathcal{E}$ . Έτσι ελαττώνουμε τη διάσταση του χώρου καταστάσεων  $\Omega$  και του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  με αποτέλεσμα να μειώνονται οι απαιτήσεις σε χρόνο και υπολογιστική δύναμη.

Στις επόμενες προτάσεις δίνονται η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πιθανότητας, οι πιθανότητες ουράς και οι γεννήτριες συναρτήσεις  $G_{T_i}(z)$  και  $H_{T_i}(z)$  του χρόνου αναμονής  $T_i$ .

**Πρόταση 5.1.** Η συνάρτηση κατανομής, οι πιθανότητες ουράς και η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου αναμονής  $T_1$  δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$F_{T_1}(n) = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n-1})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}', \quad n \geq 1, \quad (5.3)$$

$$\bar{F}_{T_1}(n) = \alpha\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}', \quad n \geq 1, \quad (5.4)$$

$$f_{T_1}(n) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \alpha\mathbf{Q}^{n-2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}', & n \geq 2, \end{cases} \quad (5.5)$$

όπου το διάνυσμα  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση

$$\alpha = [\Pr(Y_1 = 1), \Pr(Y_1 = 2), \dots, \Pr(Y_1 = k + d - 2)] = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_k \quad (5.6)$$

και το διάνυσμα  $\mathbf{e}_i$  συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα (γραμμή) του διανυσματικού χώρου  $\mathbf{R}^{k+d-2}$ .

**Απόδειξη:** Οι εκφράσεις για τη συνάρτηση κατανομής  $F_{T_1}(n)$  και τη συνάρτηση πιθανότητας  $f_{T_1}(n)$  προκύπτουν άμεσα με χρήση των σχέσεων

$$F_{T_1}^-(n) = \pi\mathbf{P}_1^{n-1}\mathbf{e}'_{k+d-1}, \quad n \geq 1,$$

$$f_{T_1}(n) = F_{T_1}^-(n) - F_{T_1}^-(n-1), \quad n \geq 2,$$

ενώ μπορεί να διαπιστωθεί ότι

$$\mathbf{P}_1^n = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^n & (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^n)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right], \quad n \geq 0.$$

Επιπλέον, για  $n \geq 1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{F}_{T_1}(n) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} f_{T_1}(i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha\mathbf{Q}^{i-2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}' \\ &= \alpha\mathbf{Q}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Q}^i \right) (\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}' = \alpha\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{1}' \end{aligned}$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 5.1. □

**Πρόταση 5.2:** Οι γεννήτριες συναρτήσεις  $G_{T_1}(z)$  και  $H_{T_1}(z)$  της  $T_1$  δίνονται από τις σχέσεις

$$G_{T_1}(z) = z^2 \mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}', \quad (5.7)$$

$$H_{T_1}(z) = \mathbf{a}(\mathbf{I} + z(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}', \quad (5.8)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  δίνεται από τη σχέση (5.6).

**Απόδειξη.** Από την Πρόταση 5.1 προκύπτει ότι

$$G_{T_1}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} f_{T_1}(n)z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{a}(z\mathbf{Q})^{n-2}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}' = z^2 \mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}'$$

ενώ

$$\begin{aligned} H_{T_1}(z) &= \bar{F}_{T_1}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{T_1}(n)z^n = \bar{F}_{T_1}(0) + z\mathbf{a} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (z\mathbf{Q})^{n-1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}' \\ &= \bar{F}_{T_1}(0) + z\mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}'. \end{aligned}$$

Η τελική έκφραση για τη γεννήτρια  $H_{T_1}(z)$  προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης

$$\bar{F}_{T_1}(0) = \bar{F}_{T_1}(1) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_1)\mathbf{I}'. \quad \square$$

Με χρήση της Πρότασης 5.2 και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στον επόμενο αναλυτικό τύπο για τη γεννήτρια συνάρτηση  $G_{T_1}(z)$  της  $T_1$

$$G_{T_1}(z) = \frac{(pz)^k (1 - pz + qz(1 - (pz)^{d-1}))}{1 - pz - qz((pz)^{d-1} - (pz)^k)} \quad (5.9)$$

ενώ η αναμενόμενη τιμή της  $T_1$  δίνεται από τον τύπο

$$E(T_1) = G'_{T_1}(1) = \frac{(1 - p^k + 2kq - qp^{d-1}(3k - r + 1 - p^k(1 - r) - kp^{d-1}))qp^k}{q^2(1 - p^{d-1} + p^k)^2}. \quad (5.10)$$

Επιπλέον, η πιθανότητα αποδοχής του εξοπλισμού δίνεται από τον τύπο

$$P_A = G_{T_1}(1) = \frac{p^k(2 - p^{d-1})}{1 - p^{d-1} + p^k} \quad (5.11)$$

από τον οποίο μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι αποτελεί φθίνουσα συνάρτηση για το  $k$  ( $d$ ) για δεδομένες τιμές των  $p$  και  $d$  ( $k$ )<sup>†</sup>.

<sup>†</sup> Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.6, σελ. 61, έχουμε ότι  $P_A = \Pr(J=1)$  ενώ  $E(T_1) = E(T|J=1) \cdot P_A$  (εδώ η τυχαία μεταβλητή  $J$  λαμβάνει τις τιμές 0 και 1, ανάλογα με το ποιος από τους σχηματισμούς  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$  εμφανίστηκε). Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση του χρόνου αναμονής  $T_0$  η οποία μελετάται στη συνέχεια.



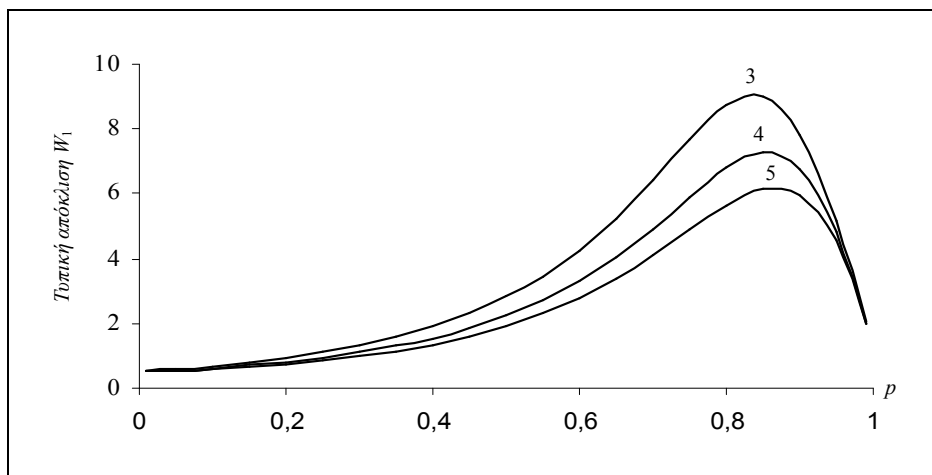
Έστω τώρα η τυχαία μεταβλητή  $W_1$  η οποία εκφράζει τον αριθμό των εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ, δεδομένου ότι ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $W_1$  θα δίνεται από τη σχέση

$$\Pr(W_1 = n) = (P_A)^{-1} P(T_1 = n), \quad n \geq 1$$

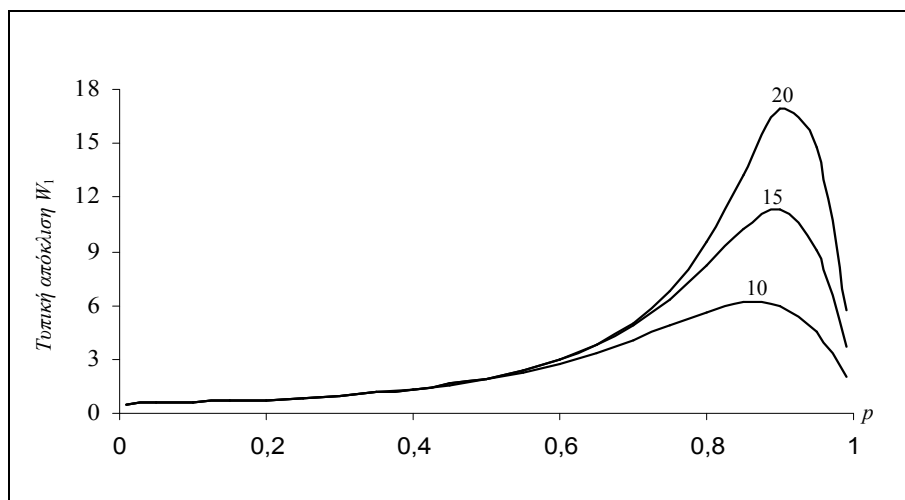
ενώ η μέση τιμή  $E(W_1)$  είναι δυνατό να υπολογιστεί από τον τύπο

$$E(W_1) = (P_A)^{-1} E(T_1).$$

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφέρουμε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής  $W_1$  δεν αποτελούν μονότονες συναρτήσεις του  $p$  για δεδομένες τιμές των  $k$  και  $d$ . Για την περίπτωση της τυπικής απόκλισης  $\sqrt{V(W_1)}$  της τυχαίας μεταβλητής  $W_1$  αυτό είναι εμφανές στα επόμενα δύο διαγράμματα.



**Σχήμα 5.3.** Τυπική απόκλιση της  $W_1$  ως συνάρτηση του  $p$  για  $k = 10$  και  $d = 3, 4, 5$ .



**Σχήμα 5.4.** Τυπική απόκλιση της  $W_1$  ως συνάρτηση του  $p$  για  $d = 5$  και  $k = 10, 15, 20$ .

Σημειώνουμε ότι ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον επόμενο τύπο

$$V(W_1) = \frac{1}{P_A} E(T_1^2) - \frac{1}{P_A^2} E^2(T_1)$$

για τον υπολογισμό της διασποράς  $V(W_1)$  καθώς και τις σχέσεις

$$E(T_1^2) = E(T_1(T_1 - 1)) + E(T_1) \quad \text{και} \quad \left[ \frac{d^2}{dz^2} G_{T_1}(z) \right]_{z=1} = E(T_1(T_1 - 1)).$$

Η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_0$  μπορεί να γίνει με κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_1$ . Κατ' αντιστοιχία, επιτρέπουμε στη Μαρκοβιανή αλυσίδα να εισέρχεται στην απορροφητική κατάσταση  $k + d - 1$  μόνο μέσω της εμφάνισης του σχηματισμού  $\mathcal{E}_0$ . Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T_0$  είναι ο

$$\mathbf{P}_0 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_0)\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right]_{(k+d-1) \times (k+d-1)}$$

όπου  $\mathbf{M}_0$  είναι ένας πίνακας διάστασης  $(k + d - 2) \times (k + d - 2)$  με όλα του τα στοιχεία ίσα με μηδέν εκτός από το στοιχείο της θέσης  $(k - 1, k - 1)$  το οποίο ισούται με  $p$ . Οι ποσότητες  $F_{T_0}(n)$ ,  $f_{T_0}(n)$ ,  $\bar{F}_{T_0}(n)$ ,  $G_{T_0}(z)$  και  $H_{T_0}(z)$  μπορούν άμεσα να εξαχθούν από τις σχέσεις (5.3)-(5.5) και (5.7), (5.8) με αντικατάσταση του πίνακα  $\mathbf{M}_1$  από τον πίνακα  $\mathbf{M}_0$ .

Η γεννήτρια συνάρτηση  $G_{T_0}(z)$  και η πιθανότητα απόρριψης  $P_R$  του εξοπλισμού μπορούν να προκύψουν άμεσα από τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις τυχαίες μεταβλητές  $T$  και  $T_1$  αφού

$$G_{T_0}(z) = G_T(z) - G_{T_1}(z) = \frac{(qz)^2(1 - (pz)^k)(1 - (pz)^{d-1})}{(1 - pz)(1 - pz - qz((pz)^{d-1} - (pz)^k))} \quad (5.12)$$

και

$$P_R = 1 - P_A = \frac{(1 - p^k)(1 - p^{d-1})}{1 - p^{d-1} + p^k}. \quad (5.13)$$

Σημειώνουμε ότι η πιθανότητα  $P_R$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση του  $k$  ( $d$ ) για δεδομένες τιμές των  $p$  και  $d$  ( $k$ ).

Έστω επίσης  $W_0$  η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό αριθμό εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ δεδομένου ότι ο εξοπλισμός δεν έγινε αποδεκτός. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $W_0$  δίνεται από τη σχέση

$$\Pr(W_0 = n) = (P_R)^{-1} \Pr(T_0 = n), \quad n \geq 1$$

ενώ ο υπολογισμός της μέσης τιμής  $E(W_0)$  μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$E(W_0) = (P_R)^{-1} E(T_0) = (P_R)^{-1} (E(T) - E(T_1)).$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα με σκοπό να επιδείξουμε την εφαρμογή ορισμένων από τα προαναφερθέντα αποτελέσματα.

**Παράδειγμα 5.1:** Υποθέτουμε ότι ο αγοραστής ενός εξοπλισμού επιθυμεί να χρησιμοποιήσει ένα CSDF τεστ εκκίνησης προτού προχωρήσει στην αγορά αυτού, έτσι ώστε

- (i) ένας εξοπλισμός με αξιοπιστία (πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης σε μια απλή δοκιμή) 0.9 ή μεγαλύτερη να γίνεται αποδεκτός με πιθανότητα (τουλάχιστον) 0.8 και ταυτόχρονα
- (ii) ένας εξοπλισμός με αξιοπιστία μικρότερη ή ίση από 0.7 να απορρίπτεται με πιθανότητα (τουλάχιστον) 0.8.

Είναι εμφανές ότι για την πρώτη συνθήκη απαιτείται να ισχύει  $P_A \geq 0.8$  όταν  $p \geq 0.9$ , ενώ για τη δεύτερη απαιτείται να ισχύει  $P_R \geq 0.8$  για  $p \leq 0.7$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει (σχέσεις (5.11) και (5.13)) η  $P_A$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση του  $p$  ενώ η  $P_R$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του  $p$ . Έτσι, αρκεί να αναζητήσουμε τις τιμές εκείνες για τα  $k$  και  $d$  οι οποίες ικανοποιούν τις ανισώσεις  $P_A \geq 0.8$  για  $p = 0.9$  και  $P_R \geq 0.8$  για  $p = 0.7$ .

Με άμεση εφαρμογή των σχέσεων (5.11) και (5.13) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει μοναδικό ζεύγος τιμών  $k, d$ , το οποίο ικανοποιεί τις παραπάνω ανισότητες. Στον επόμενο πίνακα δίνονται όλα τα δυνατά ζεύγη

**Πίνακας 5.1.** Τιμές των  $k, d$

$k$	$d$	$P_A$	$P_R$
6	5	0.815915	0.764058
7	3	0.851677	0.790067
7	4	0.811314	0.815432
8	2	0.892636	0.790458
8	3	0.825597	0.846651
9	2	0.874322	0.845867
10	2	0.854836	0.888128
11	2	0.834178	0.919614
12	2	0.812365	0.942666

Με τη σχέση (5.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του αριθμού των δοκιμών που απαιτούνται για τον τερματισμό του τεστ για τις διάφορες τιμές των  $k, d$  του Πίνακα 5.1. Από τους υπολογισμούς αυτούς διαπιστώνουμε ότι το CSDF τεστ εκκίνησης για  $k = 6, d = 5$  δίνει τη μικρότερη τιμή  $E(T)$  για όλες τις τιμές του  $p$ . Έτσι, το CSDF τεστ εκκίνησης με  $k = 6$  και  $d = 5$  αποτελεί την πιο λογική επιλογή για τον έλεγχο αποδοχής εξαρτημάτων μέσω τεστ εκκίνησης ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του πελάτη.

Ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας  $\{Y_t, t \geq 1\}$  για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής  $T$  είναι ο  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Ακολουθώς δίνουμε το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$ . Για  $p = 0.9$  θα είναι

$$\boldsymbol{\pi} = [0.9, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0, 0, 0],$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & | & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & | & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & | & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}_{10 \times 10}$$

ενώ ο πίνακας  $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$  είναι (κατά προσέγγιση) ο

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.90 & 0.81 & 1.04 & 0.93 & 0.47 & 0.42 & 0.38 & 0.34 \\ 0 & 1 & 0.90 & 1.07 & 0.96 & 0.39 & 0.35 & 0.32 & 0.29 \\ 0 & 0 & 1 & 1.10 & 0.99 & 0.31 & 0.28 & 0.25 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 1.14 & 1.03 & 0.22 & 0.20 & 0.18 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & 1.07 & 0.11 & 0.10 & 0.09 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.67 & 1.14 & 1.03 & 0.93 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0.75 & 0.16 & 1.14 & 1.03 & 0.93 \\ 0 & 0 & 0 & 0.93 & 0.83 & 0.18 & 0.16 & 1.14 & 1.03 \\ 0 & 0 & 0 & 1.03 & 0.93 & 0.20 & 0.18 & 0.16 & 1.14 \end{pmatrix} .$$

Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων αποδοχής και απόρριψης του εξοπλισμού  $P_A$  και  $P_R$  γίνεται άμεσα από τις εξισώσεις (5.11) και (5.13) ως εξής

$$P_A = \frac{0.90^6(2-0.90^4)}{1-0.90^4+0.90^6} = 0.816, \quad P_R = \frac{(1-0.9^6)(1-0.9^4)}{1-0.9^4+0.9^6} = 0.184.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.1) και τη σχέση (2.10), μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ καθώς επίσης και τη διασπορά του. Έτσι

$$E(T) = \frac{(1-0.90^6)(2-0.90^4)}{(1-0.90)(1+0.90^6-0.90^4)} = 7.194,$$

$$V(T) = 2!\alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-2}\mathbf{1}' - (1 + \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}')(\alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}') = 6.958.$$

Τέλος, για την περίπτωση που επιθυμούμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της κατανομής του χρόνου αναμονής μέχρι τον τερματισμό του τεστ, είναι δυνατός ο υπολογισμός των πιθανοτήτων  $f_T(n)$ . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 προκύπτει ο επόμενος πίνακας των πιθανοτήτων  $f_T(n)$ .

**Πίνακας 5.2.** Πιθανότητα λήψης απόφασης στη  $n$  – οστή δοκιμή

$n$	$f_T(n)$	$n$	$f_T(n)$
1	0	8	0.0655
2	0.01	9	0.0553
3	0.018	10	0.0464
4	0.0243	11	0.0383
5	0.0292	12	0.0380
6	0.5577	13	0.0089
7	0.0774	14	0.0075

### 5.5. Στατιστική Συμπερασματολογία για την Πιθανότητα Επιτυχούς Εκκίνησης ενός Εξοπλισμού.

Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε τους δυνατούς τρόπους εκτίμησης της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$  όταν έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα από τη διενέργεια ενός CSDF τεστ εκκίνησης. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας  $n$  όμοιους εξοπλισμούς με την ίδια πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p$ . Όλοι οι εξοπλισμοί υπόκεινται στο ίδιο CSDF τεστ εκκίνησης και σε καθένα τεστ εκκίνησης καταγράφεται ο αριθμός εκκινήσεων μέχρι τον τερματισμό του τεστ, ο αριθμός των επιτυχημένων ή αποτυχημένων εκκινήσεων, το τρόπο τερματισμού του τεστ (αποδοχή ή όχι του εξοπλισμού) κτλ. Τα δεδομένα που συλλέγονται από τα  $n$  τεστ εκκίνησης θα χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του  $p$  ενώ ο υπολογισμός των ποσοτήτων που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 5.4 βασίζεται σε αυτή την εκτίμηση.

Σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι δυνατή η γνώση του πλήρους σετ των δεδομένων, όπως αυτό περιγράφηκε ανωτέρω, αλλά μόνο ένα μέρος του οπότε δεν εφαρμόζεται πάντοτε η ίδια μεθοδολογία. Για το σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε 3 διαφορετικές μεθοδολογίες οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν ανάλογα με τις διαθέσιμες πληροφορίες.

Ας υποθέσουμε ότι διενεργούνται  $n$  τεστ εκκίνησης (οποιοδήποτε τύπου) και ας συμβολίσουμε αντίστοιχα με  $N_i$ ,  $S_i$  και  $F_i$  το συνολικό αριθμό των εκκινήσεων, τον αριθμό των επιτυχημένων εκκινήσεων και τον αριθμό των αποτυχημένων εκκινήσεων έως ότου ολοκληρωθεί το  $i$ -οστό τεστ ( $1 \leq i \leq n$ ). Ο συνολικός αριθμός δοκιμών (επιτυχημένων

εκκινήσεων)  $N$  και ο συνολικός αριθμός επιτυχιών  $S$  και αποτυχιών  $F$  στα  $n$  τεστ εκκίνησης δίνονται από τις σχέσεις

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad N = \sum_{i=1}^n N_i = S + F.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(p)$  για τα διαθέσιμα δεδομένα είναι

$$L(p) = p^{N-F} (1-p)^F$$

ενώ ο λογάριθμός της είναι ίσος με

$$l(p) = \log L(p) = N \log p + F \log((1-p)/p) \quad (5.14)$$

απ' όπου μπορούμε να εξάγουμε τον εκτιμητή μέγιστη πιθανοφάνειας  $\hat{p}$  του  $p$ .

Υπολογίζοντας την παράγωγο  $d \log(L(p))/dp$  της σχέσης (5.14) και λύνοντας την εξίσωση  $d \log(L(p))/dp = 0$  ως προς  $p$ , προκύπτει ότι ο ζητούμενος εκτιμητής είναι ο  $\hat{p} = S/N$ .

Προκειμένου να έχουμε και ένα μέτρο για τη διακύμανση του εκτιμητή, θα χρησιμοποιήσουμε το παρατηρούμενο μέτρο πληροφορίας του Fisher (*Observed Fisher Information*) το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$I(\hat{p}) = - \left. \frac{\partial^2 l(p)}{\partial p^2} \right|_{p=\hat{p}} = \frac{N}{\hat{p}(1-\hat{p})} \quad (5.15)$$

ενώ ένα προσεγγιστικό (ασυμπτωτικά)  $(1-a)100\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  θα είναι το  $\hat{p} \pm z_{a/2} / \sqrt{I(\hat{p})}$ . Η παραπάνω μεθοδολογία χρησιμοποιήθηκε από τους Viveros and Balakrishnan (1993) για την εκτίμηση του  $p$  στην περίπτωση του CS τεστ εκκίνησης. Μπορεί όμως να εφαρμοστεί και για οποιοδήποτε άλλο τεστ αφού απαιτεί τη γνώση μόνο του συνολικού αριθμού δοκιμών, επιτυχιών και αποτυχιών και δε λαμβάνει υπόψη του τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε τεστ. Για λόγους συντομίας θα αναφερόμαστε στη μεθοδολογία αυτή ως μέθοδος VB.

Πρόσφατα, οι Smith and Griffith (2005) πρότειναν έναν διαφορετικό τρόπο για την εκτίμηση του  $p$ , ο οποίος μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις που έχουμε πληροφορίες μόνο για τον τρόπο τερματισμού του τεστ. Έστω ότι για καθένα από τα  $n$  τεστ εκκίνησης που διενεργούνται, γνωρίζουμε μόνο τις συχνότητες εμφάνισης των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να τερματιστεί το τεστ, με κάποιους να οδηγούν σε αποδοχή και κάποιους σε απόρριψη του εξοπλισμού. Για συντομία θα αναφερόμαστε στη μέθοδο αυτή ως μέθοδος SG.

Στην περίπτωση του CSDF τεστ εκκίνησης έχουμε  $d$  διαφορετικούς τρόπους τερματισμού του τεστ, οι οποίοι αντιστοιχούν στους ακόλουθους σχηματισμούς

$$C_1 = \{\underbrace{11\dots 1}_k\}, C_{0,1} = \{00\}, C_{0,2} = \{010\}, \dots, C_{0,d-1} = \{0\underbrace{11\dots 10}_{d-2}\}.$$

Ας συμβολίσουμε ως  $p_{C_1}, p_{C_{0,1}}, \dots, p_{C_{0,d-1}}$  τις πιθανότητες τερματισμού του τεστ λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $C_1, C_{0,1}, \dots, C_{0,d-1}$  αντίστοιχα. Η πιθανότητα  $C_1$  για τον τερματισμό του τεστ λόγω της εμφάνισης του σχηματισμού  $C_1 = \{\underbrace{11\dots 1}_k\}$  ταυτίζεται με την πιθανότητα αποδοχής του εξοπλισμού  $P_A$ .

Έστω  $T_{0,i}$  ο χρόνος αναμονής για τον τερματισμό του τεστ λόγω εμφάνισης του σχηματισμού  $C_{0,i}$ ,  $1 \leq i \leq d-1$ . Η μελέτη της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $T_{0,i}$ <sup>‡</sup> μπορεί να γίνει με τρόπο ανάλογο της μελέτης των τυχαίων μεταβλητών  $T_0$  και  $T_1$ . Ειδικότερα, για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα  $\{Y_t, t \geq 1\}$  που έχουμε ορίσει στην Παράγραφο 5.4, δεν επιτρέπουμε μεταβάσεις σε καταστάσεις οι οποίες αναφέρονται στους σχηματισμούς  $C_1$  και  $C_{0,j}$  για  $1 \leq i \neq j \leq d-1$ . Έτσι, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για τη μελέτη της  $T_{0,i}$  θα είναι ο

$$\mathbf{P}_{0,i} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_{0,i})\mathbf{1}' \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right]_{(k+d-1) \times (k+d-1)}$$

όπου  $\mathbf{M}_{0,i}$  είναι ένας πίνακας διάστασης  $(k+d-2) \times (k+d-2)$  με όλα του τα στοιχεία μηδέν εκτός από το στοιχείο της θέσης  $(k-1, k-1)$  το οποίο ισούται με  $p$ , και τα στοιχεία των θέσεων  $(j, j)$  για  $k \leq j \neq k+i-1 \leq k+d-2$  τα οποία είναι όλα ίσα με  $q$ . Από την Πρόταση 5.2, και αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\mathbf{M}_1$  με τον πίνακα  $\mathbf{M}_{0,i}$ , προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση της  $T_{0,i}$  που δίνεται από τον τύπο

$$G_{T_{0,i}}(z) = z^2 \mathbf{a}(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}_{0,i})\mathbf{1}'. \quad (5.16)$$

Για  $z=1$  έχουμε ότι  $p_{C_{0,i}} = G_{T_{0,i}}(1)$ , και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στον τύπο

$$p_{C_{0,i}} = \frac{p^{i-2}(1-p)(1-p^k)}{1-p^{r-1}+p^k}, \quad i = 1, 2, \dots, d-1 \quad (5.17)$$

<sup>‡</sup> Ο όρος τυχαία μεταβλητή χρησιμοποιείται καταχρηστικά (δείτε όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.6, σελ. 61).



ενώ είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$P_R = \sum_{i=1}^{d-1} p_{C_{0,i}}.$$

Εάν στα  $n$  τεστ εκκίνησης που διενεργήθηκαν οι σχηματισμοί  $C_1, C_{0,1}, \dots, C_{0,d-1}$  παρατηρήθηκαν αντίστοιχα  $n_1, n_{0,1}, \dots, n_{0,d-1}$  φορές (όπου  $n_1 + n_{0,1} + \dots + n_{0,d-1} = n$ ), τότε για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(p)$  έχουμε ότι

$$L(p) \propto p_{C_1}^{n_1} \prod_{i=1}^{d-1} p_{C_{0,i}}^{n_{0,i}} \quad (5.18)$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για το  $p$  βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης  $d \ln(L(p)) / dp = 0$ . Αναλυτικός τύπος για τον συγκεκριμένο εκτιμητή δεν είναι εύκολο να βρεθεί και για το σκοπό αυτό στο Παράρτημα Π.11 δίνεται ένα πρόγραμμα (σε Mathematica) το οποίο υπολογίζει τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του  $p$ , το τυπικό σφάλμα αυτού καθώς και ένα προσεγγιστικό (ασυμπτωτικά) διάστημα εμπιστοσύνης.

Ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο σχετικά με τις διαθέσιμες πληροφορίες από τη διενέργεια των  $n$  τεστ εκκίνησης προκύπτει όταν είναι γνωστοί μόνο οι αριθμοί των δοκιμών (εκκινήσεων)  $N_i$  μέχρι τον τερματισμό του  $i$ -οστού τεστ. Για την περίπτωση αυτή, οι Viveros and Balakrishnan (1993) πρότειναν τη χρήση της μεθόδου των ροπών προκειμένου να εκτιμηθεί το  $p$ . Όμως, για την εφαρμογή της μεθόδου των ροπών απαιτείται ο μέσος αριθμός δοκιμών ( $E(N_i)$ ) να είναι μια μονότονη συνάρτηση ως προς  $p$ . Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει για τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών του CSDF τεστ εκκίνησης όπως επίσης και για τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών του CSTF τεστ εκκίνησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατή η χρήση του EM αλγορίθμου (δείτε Robert and Casella (2005)) και η οποία προσφέρει μια διαδικασία εκτίμησης της άγνωστης πιθανότητας  $p$ . Οι Chan et al. (2007) πρότειναν την εφαρμογή του EM αλγορίθμου για την περίπτωση του CSTF τεστ εκκίνησης. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο EM αλγόριθμος στην περίπτωση του CSDF τεστ εκκίνησης.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι είναι γνωστές μόνο οι τιμές  $N_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ). Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των επιτυχιών στο  $i$ -οστό τεστ εκκίνησης θα ισούται με  $S_i = N_i - F_i$  και άρα οι τιμές  $F_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) μπορούν να θεωρηθούν ως μη-παρατηρούμενα ή ελλιπή

δεδομένα, οπότε και βρίσκει άμεση εφαρμογή ο EM αλγόριθμος. Θα συμβολίζουμε με  $v_i$  τον παρατηρούμενο αριθμό δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του  $i$  τεστ εκκίνησης ενώ ο παρατηρούμενος συνολικός αριθμός δοκιμών για τα  $n$  τεστ εκκίνησης θα συμβολίζεται με  $v = \sum_{i=1}^n v_i$ .

Από τη σχέση (5.14) έχουμε ότι ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας  $l(p; F, N)$  δίνεται από τη σχέση

$$l(p; F, N) = N \log p + F \log((1-p)/p) \quad (5.19)$$

όπου ο συνολικός αριθμός των δοκιμών  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  είναι γνωστός και ίσος με  $v$  ενώ ο συνολικός αριθμός των αποτυχιών  $F = \sum_{i=1}^n F_i$  είναι άγνωστος και πρόκειται να αντικατασταθεί από το άθροισμα των δεσμευμένων μέσων τιμών  $E(F_i | N_i = v_i)$ . Έτσι, η αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας (*expected complete-data log likelihood function*) δίνεται από τη σχέση

$$E_{F|N=v}(l(p; F, N)) = v \log p + \left( \sum_{i=1}^n E(F_i | N_i = v_i) \right) \log \left( \frac{1-p}{p} \right). \quad (5.20)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (5.20) ως προς  $p$  και εξισώνοντας το αποτέλεσμα με το μηδέν καταλήγουμε στο επόμενο επαναληπτικό σχήμα για την εφαρμογή του EM αλγορίθμου

$$p^{(j+1)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n E(F_i | N_i = v_i, p^{(j)})}{v} \quad (5.21)$$

όπου το  $p^{(j)}$  συμβολίζει τον εκτιμητή του  $p$  στο  $j$  βήμα. Για να ξεκινήσει η επαναληπτική διαδικασία απαιτείται μια αρχική τιμή για το  $p$  και η οποία συμβολίζεται με  $p^{(0)}$ . Τα βήματα για την εφαρμογή του EM αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

**Βήμα 1. (Expectation Step)**

Υπολογισμός του αναμενόμενου αριθμού αποτυχιών στο  $i$  τεστ εκκίνησης δοθέντος του αριθμού των δοκιμών  $N_i$  και της εκτίμησης για την (άγνωστη) πιθανότητα  $p$ , ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση

$$E(F_i | N_i = v_i, p^{(j)}).$$

**Βήμα 2. (Maximization Step)**

Εφαρμογή του αναδρομικού σχήματος (5.21) για τον υπολογισμό της εκτίμησης  $p^{(j+1)}$  του  $p$  στο επόμενο βήμα.

**Βήμα 3.** Ο αλγόριθμος σταματάει όταν επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων  $p^{(j)}$ ,  $p^{(j+1)}$  για την άγνωστη πιθανότητα  $p$ .

Το παρατηρούμενο μέτρο πληροφορίας του Fisher, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή προσεγγιστικών διαστημάτων εμπιστοσύνης για το  $p$  δίνεται από τη σχέση

$$I(\hat{p}) = -\left. \frac{\partial^2 l(p; F, N)}{\partial p^2} \right|_{p=\hat{p}} = E\left( \left. \frac{\partial^2 l(p; F, N)}{\partial p^2} \right| N = v \right)_{p=\hat{p}} + \text{Var}\left( \left. \frac{\partial l(p; F, N)}{\partial p} \right| N = v \right)_{p=\hat{p}}.$$

Για την εφαρμογή του EM αλγορίθμου είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής  $E(F_i | N_i = v_i, p^{(j)})$ . Προκειμένου να γίνει αυτό, χρειάζεται να γνωρίζουμε τη δεσμευμένη κατανομή του  $F$  δοθέντος του  $N$ . Στις Παραγράφους 2.7 και 2.8 δόθηκαν τα βασικά θεωρήματα (Θεωρήματα 2.7-2.8) τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια προκειμένου να υπολογίσουμε τη ζητούμενη δεσμευμένη κατανομή.

Έστω  $N$  ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση του σύνθετου σχηματισμού  $\mathcal{E}$  το οποίο περιγράφεται στην Παράγραφο 5.3, και έστω  $S_N$  ο αριθμός των επιτυχιών στην ακολουθία των δοκιμών  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ .

Οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{A}_0$  και  $\mathbf{A}_1$  οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την εφαρμογή των θεωρημάτων έχουν τη μορφή

$$\mathbf{A}_0 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{array} \right]_{(k+d) \times (k+d)}, \quad \mathbf{A}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_3 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 \end{array} \right]_{(k+d) \times (k+d)}$$

όπου  $\mathbf{R}_1$  είναι ένας πίνακας διάστασης  $k \times d$  με όλα τα στοιχεία ίσα με το 0 εκτός από τα στοιχεία της πρώτης στήλης τα οποία είναι όλα ίσα με  $q$ ,  $\mathbf{R}_2$  είναι ένας πίνακας διάστασης

$d \times k$  με όλα τα στοιχεία ίσα με το 0 εκτός από το στοιχείο της θέσης  $(d,1)$  το οποίο είναι ίσο με  $q$ ,  $\mathbf{R}_4$  είναι ένας πίνακας διάστασης  $d \times k$  με όλα του τα στοιχεία ίσα με 0 εκτός από τα στοιχεία των θέσεων  $(d,1)$  και  $(d-1,d-1)$  τα οποία είναι ίσα με  $p$  και τέλος οι πίνακες  $\mathbf{R}_3$  και  $\mathbf{R}_5$  έχουν τη μορφή

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad \mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{d \times d}.$$

Επιπλέον, δύο πίνακες που είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό της ζητούμενης δεσμευμένης κατανομής είναι ο πίνακας  $\mathbf{B}_0$  ο οποίος είναι ένας πίνακας διάστασης  $(k+d) \times (k+d)$  με όλα του τα στοιχεία ίσα με το 0 εκτός από τα στοιχεία των θέσεων  $(k+i, k+d)$  για  $i=1,2,\dots,d-1$  τα οποία είναι όλα ίσα με  $q$ , καθώς επίσης και ο πίνακας  $\mathbf{B}_1$  ο οποίος είναι ένας πίνακας διάστασης  $(k+d) \times (k+d)$  με όλα τα στοιχεία ίσα με 0 εκτός από το στοιχείο της θέσης  $(k-1,k)$  το οποίο ισούται με  $p$ .

Ένα αναδρομικό σχήμα για τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $(N, S_N)$  δίνεται από το Θεώρημα 2.8 χρησιμοποιώντας για αρχική συνθήκη τη σχέση

$$\mathbf{f}_1(y) = ype_1 + (1-y)qe_k, \quad y=0,1.$$

Ως εκ τούτου, η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών  $N$  και  $F_N$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$P(N=n, F_N=x) = P(N=n, S_N=n-x), \quad x=0,1,2,\dots,n,$$

ενώ ο αναμενόμενος αριθμός αποτυχιών δοθέντος του αριθμού των προσπαθειών  $N$  υπολογίζεται με χρήση της σχέσης

$$E(F_N | N=n) = \sum_{x=0}^n x \frac{P(N=n, F_N=x)}{P(N=n)}.$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα ώστε να γίνει κατανοητή η χρήση των τριών διαφορετικών μεθοδολογιών για την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$  ενός εξοπλισμού.

**Παράδειγμα 5.2:** Ας υποθέσουμε ότι  $n = 30$  όμοιοι εξοπλισμοί, οι οποίοι έχουν την ίδια πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p = 0.90$  υπόκεινται σε τεστ εκκίνησης CSDF. Ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός όταν συμβούν  $k = 10$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση δύο αποτυχημένων εκκινήσεων οι οποίες απέχουν το πολύ 1 επιτυχημένη εκκίνηση ( $d = 3$ ). Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα (προσομοιωμένα) διαθέσιμα δεδομένα από τη διεξαγωγή των  $n = 30$  τεστ εκκίνησης. Έχουν καταγραφεί οι τιμές του αριθμού των δοκιμών, επιτυχιών και αποτυχιών (στήλες  $N_i$ ,  $S_i$  και  $F_i$  αντίστοιχα) στο  $i$ -οστό τεστ ενώ η στήλη  $C$  δίνει το σχηματισμό του οποίου η εμφάνιση οδήγησε στον τερματισμό του τεστ και στη λήψη απόφασης.

**Πίνακας 5.3.** Προσομοιωμένα δεδομένα για  $n = 30$  όμοιους εξοπλισμούς  
( $p = 0.90$ , τεστ εκκίνησης CSDF για  $k = 10$ ,  $d = 3$ ).

$i$	$N_i$	$S_i$	$F_i$	$C$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	26	24	2	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	2	$C_{0,2}$	0	1	0																							
3	11	10	1	$C_1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
4	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
5	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
6	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
7	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
8	23	20	3	$C_1$	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	11	9	2	$C_{0,2}$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0															
10	6	4	2	$C_{0,1}$	1	1	1	1	0	0																				
11	19	18	1	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
13	11	10	1	$C_1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
14	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
15	10	8	2	$C_{0,2}$	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0																
16	15	11	4	$C_{0,2}$	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0										
17	5	3	2	$C_{0,1}$	1	1	1	0	0																					
18	18	16	2	$C_1$	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	16	15	1	$C_1$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	12	11	1	$C_1$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1														
21	11	10	1	$C_1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
22	14	13	1	$C_1$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1											
23	10	10	0	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																
24	6	4	2	$C_{0,2}$	1	1	1	0	1	0																				
25	13	12	1	$C_1$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	12	11	1	$C_1$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	20	19	1	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	4	2	2	$C_{0,1}$	1	1	0	0																						
29	16	15	1	$C_1$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	20	19	1	$C_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Από τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$$S = \sum_{i=1}^{30} S_i = 335, \quad F = \sum_{i=1}^{30} F_i = 37, \quad N = \sum_{i=1}^{30} N_i = S + F = 372.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο VB προκύπτουν οι εκτιμήσεις

$$\hat{p} = \frac{S}{S+F} = \frac{335}{372} \approx 0.9005, \quad I(\hat{p}) = \frac{N}{\hat{p}(1-\hat{p})} \approx 4153.19$$

ενώ το προσεγγιστικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  είναι το

$$(0.9005 - 1.96/\sqrt{4153.19}, 0.9005 + 1.96/\sqrt{4153.19}) = (0.8701, 0.9310).$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας με τη μέθοδο SG ( $n_1 = 22$ ,  $n_{0,1} = 3$ ,  $n_{0,2} = 5$ ) είναι ίση με

$$L(p) = \left( \frac{p^{10}(2-p^2)}{1-p^2+p^{10}} \right)^{22} \left( \frac{(1-p)(1-p^{10})}{p(1-p^2+p^{10})} \right)^3 \left( \frac{(1-p)(1-p^{10})}{(1-p^2+p^{10})} \right)^5.$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας και το παρατηρούμενο μέτρο πληροφορίας του Fisher, αντίστοιχα, είναι ίσα με

$$\hat{p} = 0.8923, \quad I(\hat{p}) = 3306.02$$

και ένα προσεγγιστικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  είναι το

$$(0.8923 - 1.96/\sqrt{3306.02}, 0.8923 + 1.96/\sqrt{3306.02}) = (0.8582, 0.9264).$$

Τέλος, με τη μέθοδο EM προκύπτει ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας και το παρατηρούμενο μέτρο πληροφορίας του Fisher είναι αντίστοιχα ίσο με

$$\hat{p} = 0.8834, \quad I(\hat{p}) = 1803.58$$

ενώ το προσεγγιστικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το  $p$  είναι το

$$(0.8834 - 1.96/\sqrt{1803.58}, 0.8834 + 1.96/\sqrt{1803.58}) = (0.8378, 0.9301).$$

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων με τη μέθοδο EM αναπτύχθηκε κατάλληλος αλγόριθμος με το Mathematica ο οποίος δίνεται στο Παράρτημα Π.12.

Από μια απλή ανάγνωση των παραπάνω αποτελεσμάτων προκύπτει ότι η μέθοδος VB δίνει τον καλύτερο σημειακό εκτιμητή και το πιο στενό διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη πιθανότητα  $p$ . Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο αφού η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιεί πολύ περισσότερες πληροφορίες έναντι των άλλων δύο μεθόδων.

Από εκτενείς αριθμητικές μελέτες που έγιναν με χρήση τεχνικών προσομοίωσης, το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί. Ενδεικτικά δίνουμε τον επόμενο πίνακα στον οποίο έχουμε υπολογίσει τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας ( $MLE$ ) και το τυπικό σφάλμα ( $se$ ) του  $p$  με χρήση και των τριών μεθόδων στην περίπτωση ενός CSDF τεστ εκκίνησης με τιμές παραμέτρων  $k = 5$  και  $d = 3$ . Οι τιμές του  $p$  κυμάνθηκαν από 0.50 έως 0.99 ενώ χρησιμοποιήθηκαν  $n = 30, 40$  όμοιοι εξοπλισμοί.

**Πίνακας 5.4.** Εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας και τυπικό σφάλμα για τις μεθόδους VB, SG και EM

$p$	$n = 30, k = 5, d = 3$						$n = 40, k = 5, d = 3$					
	VB		SG		EM		VB		SG		EM	
	MLE	se	MLE	se	MLE	se	MLE	se	MLE	se	MLE	se
0.50	0.4595	0.0473	0.5446	0.0537	0.4206	0.0522	0.5200	0.0353	0.4826	0.0551	0.5562	0.0411
0.60	0.5349	0.0439	0.5696	0.0501	0.5056	0.0538	0.6034	0.0321	0.5656	0.0443	0.6492	0.0445
0.70	0.6978	0.0340	0.7009	0.0358	0.7197	0.0493	0.6863	0.0291	0.6726	0.0334	0.6901	0.0408
0.80	0.7921	0.0286	0.8193	0.0296	0.7636	0.0420	0.8145	0.0247	0.7905	0.0267	0.8469	0.0305
0.90	0.9231	0.0198	0.9186	0.0282	0.9084	0.0250	0.9205	0.0175	0.9133	0.0245	0.9252	0.0196
0.95	0.9576	0.0157	1.0000	0.0408	0.9599	0.0164	0.9409	0.0153	0.9290	0.0246	0.9421	0.0167
0.99	0.9872	0.0090	1.0000	0.0408	0.9867	0.0094	0.9901	0.0069	1.0000	0.0354	0.9900	0.0071

Από τις τιμές του Πίνακα 5.4 έπεται ότι το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή με τη μέθοδο VB είναι ομοιόμορφα μικρότερο έναντι των αντιστοίχων τυπικών σφαλμάτων των υπόλοιπων δύο μεθόδων, παρόλο που ο σημειακός εκτιμητής της μεθόδου VB δεν είναι πάντοτε ο καλύτερος (τιμή κοντά στην πραγματική τιμή). Κάτι ανάλογο δεν ισχύει για τις άλλες δύο μεθόδους, συγκρινόμενες μεταξύ τους, αφού για ένα εύρος τιμών του  $p$  οι σημειακές εκτιμήσεις της μεθόδου SG είναι πολύ καλύτερες ενώ για τις υπόλοιπες η μέθοδος EM δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα.

## 5.6 Οδηγός Επιλογής των Παραμέτρων του CSDF Τεστ Εκκίνησης

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τους δυνατούς τρόπους επιλογής αξιόπιστων και συνάμα αποδοτικών τεστ εκκίνησης τα οποία θα ικανοποιούν τις απαιτήσεις του χρήστη. Ειδικότερα, θα δούμε τρόπους επιλογής των κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους  $k$  και  $d$  του CSDF τεστ εκκίνησης ώστε να πληρούνται δεδομένα στατιστικά κριτήρια. Παράδειγμα ενός (απλού) στατιστικού σχεδιασμού είναι ο τρόπος επιλογής των παραμέτρων  $k$  και  $d$  όπως περιγράφηκε στο Παράδειγμα 5.1. Στη μέχρι τώρα βιβλιογραφία, μόνο οι Smith and Griffith (2005, 2008) έδωσαν πρακτικούς οδηγούς για την επιλογή των παραμέτρων των τεστ εκκίνησης.

Αρχικά, θεωρούμε ότι ένας εξοπλισμός υψηλής αξιοπιστίας είναι αυτός που έχει πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p \geq p_1$ , όπου  $p_1$  κάποια δεδομένη τιμή. Όμοια θεωρούμε ως εξοπλισμό χαμηλής αξιοπιστίας αυτόν που έχει πιθανότητα επιτυχούς εκκίνησης  $p \leq p_0$ ,



όπου  $p_0$  κάποια δεδομένη τιμή με  $p_0 < p_1$ . Στην πράξη απαιτείται η εφαρμογή ενός τεστ εκκίνησης τέτοιο ώστε να αποδέχεται με μεγάλη πιθανότητα εξοπλισμούς υψηλής αξιοπιστίας ενώ ταυτόχρονα να αποδέχεται με μικρή πιθανότητα εξοπλισμούς χαμηλής αξιοπιστίας. Θα προσδιορίσουμε τις τιμές των  $k$  και  $d$  ώστε το CSDF τεστ εκκίνησης που θα προκύψει να ικανοποιεί τα δύο παραπάνω κριτήρια

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο 5.4 η πιθανότητα αποδοχής του εξοπλισμού ο οποίος υπόκειται σε ένα CSDF τεστ εκκίνησης είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $d$  ( $k$ ) όταν το  $k$  ( $d$ ) παραμένει σταθερό. Ας συμβολίσουμε με  $\Pr(\mathcal{E}_1 | p = p_i)$ ,  $i = 0,1$ , την πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού αξιοπιστίας  $p_i$ ,  $i = 0,1$ . Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Govindaraju and Lai (1999) και Smith and Griffith (2005, 2008) οι βέλτιστες τιμές για τα  $k$  και  $d$  πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα το σύστημα των επόμενων δύο ανισώσεων

$$\Pr(\mathcal{E}_1 | p = p_1) > 1 - \beta, \quad \Pr(\mathcal{E}_1 | p = p_0) < \alpha.$$

Για δεδομένη τιμή του  $d$ , οι τιμές του  $k$  θα ικανοποιούν την παρακάτω ανισότητα

$$LB \equiv \frac{\ln\left(\frac{\alpha(1-p_0^{d-1})}{2-\alpha-p_0^{d-1}}\right)}{\ln(p_0)} < k < \frac{\ln\left(\frac{(1-\beta)(1-p_1^{d-1})}{1+\beta-p_1^{d-1}}\right)}{\ln(p_1)} \equiv UB. \quad (5.22)$$

Σε πολλές περιπτώσεις, δεν υπάρχει μοναδική τιμή του  $k$  η οποία να βρίσκεται μεταξύ του κάτω ορίου ( $LB$ ) και του άνω ορίου ( $UB$ ). Οι Govindaraju and Lai (1999) (όπως και οι Smith and Griffith (2005)) πρότειναν να χρησιμοποιείται ως  $k$  η τιμή  $[LB]+1$ , όπου  $[.]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού. Χρησιμοποιώντας όμως αυτή την τιμή για τον προσδιορισμό των παραμέτρων  $k$  και  $d$  στο CSDF τεστ εκκίνησης προκύπτει το εξής πρόβλημα:

Το τεστ εκκίνησης CSDF που προκύπτει ταυτίζεται αρκετές φορές με το CSCF τεστ εκκίνησης των Smith and Griffith (2008), στο οποίο ο εξοπλισμός θα απορρίπτεται όταν εμφανιστούν 2 συνεχόμενες αποτυχημένες εκκινήσεις ( $d=2$ ) πριν από την εμφάνιση  $k$  συνεχόμενων επιτυχημένων. Έτσι το βασικό χαρακτηριστικό της απόστασης μεταξύ δύο αποτυχημένων εκκινήσεων ενός CSDF τεστ εκκίνησης χάνεται αφού η βέλτιστη τιμή που προκύπτει για το  $d$  είναι το 2.

Για την επιλογή των βέλτιστων τιμών  $k$  και  $d$  βασιστήκαμε επιπλέον στον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών  $E(T)$  μέχρι το τέλος του τεστ λαμβάνοντας υπόψη και τη μονοτονία της

πιθανότητας αποδοχής του εξοπλισμού. Έτσι, επιλέξαμε τα  $k$  και  $d$  τα οποία ικανοποιούν τις ανισότητες της σχέσης (5.22) ενώ ταυτόχρονα δίνουν και τη μικρότερη τιμή  $E(T)$ . Οι Smith and Griffith (2005, 2008) έδωσαν πίνακες με τις βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους των τεστ εκκίνησης CSTF, CSCF και TSTF για διάφορες επιλογές των  $a, \beta, p_1, p_0$ .

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές των παραμέτρων  $k$  και  $d$ , η πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού υψηλής αξιοπιστίας (στήλη  $\Pr(\mathcal{E}_1 | p_1)$ ), η πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού χαμηλής αξιοπιστίας (στήλη  $\Pr(\mathcal{E}_1 | p_0)$ ) καθώς και ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών  $E(T)$  και η τυπική απόκλιση  $\sqrt{V(T)}$  της κατανομής του αριθμού των δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του τεστ. Στην τελευταία στήλη έχει υπολογιστεί το μέγεθος δείγματος  $n_z$  που απαιτείται για τον έλεγχο υπόθεσης του ποσοστού ενός πληθυσμού με χρήση κανονικής προσέγγισης δοθέντος των σφαλμάτων τύπου I και τύπου II. Έτσι για δεδομένα  $a$  (σφάλμα τύπου I) και  $\beta$  (σφάλμα τύπου II) το  $n_z$  ισούται με

$$n_z = \left[ \frac{z_a \sqrt{p_0(1-p_0)} - z_{(1-\beta)} \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0} \right]^2 + 1$$

όπου με  $[x]$  συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού  $x$ . Το τεστ εκκίνησης είναι προτιμότερο όταν ισχύει  $E(T) < n_z$ . Σημειώνουμε επίσης πως οι στήλες  $E(T)$  και  $\sqrt{V(T)}$  έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10) για τις προτεινόμενες τιμές του  $k$  και του  $d$  και για  $p = p_1$ .

**Πίνακας 5.5.** Βέλτιστα τεστ εκκίνησης CSDF για διάφορες επιλογές των  $\alpha, \beta, p_1, p_0$ .

$\alpha$	$\beta$	$p_1$	$p_0$	$k$	$d$	$\Pr(\mathcal{E}_1   p_1)$	$\Pr(\mathcal{E}_1   p_0)$	$E(T)$	$\sqrt{V(T)}$	$n_z$
0.05	0.05	0.99	0.95	99	4	0.9783	0.0460	162.479	92.355	171
		0.99	0.90	37	15	0.9503	0.0454	42.806	14.300	54
		0.99	0.85	23	23	0.9587	0.0471	24.933	5.536	29
		0.99	0.80	17	17	0.9765	0.0447	18.194	3.718	19
		0.99	0.75	13	13	0.9560	0.0471	13.761	2.601	14
		0.99	0.70	11	11	0.9899	0.0393	11.572	2.080	11
		0.95	0.70	13	2	0.9570	0.041	18.141	8.743	20
0.10	0.05	0.99	0.95	80	5	0.9553	0.0970	117.933	60.581	123
		0.99	0.90	29	21	0.9505	0.0960	32.162	8.714	38
		0.99	0.85	19	19	0.9710	0.0895	20.430	4.306	20
		0.99	0.80	14	14	0.9838	0.0865	14.863	2.871	13
		0.99	0.75	11	11	0.9900	0.0833	11.572	2.079	9
		0.99	0.70	9	9	0.9933	0.0800	9.403	1.588	7
		0.95	0.75	14	2	0.9524	0.0832	20.001	9.966	21
0.95	0.70	11	2	0.9652	0.0804	14.634	6.548	15		
0.05	0.25	0.99	0.95	72	61	0.7513	0.0496	79.782	27.612	114
		0.99	0.90	35	35	0.9136	0.0495	38.512	9.545	39
		0.99	0.85	23	23	0.9587	0.0471	24.933	5.536	22
		0.99	0.80	17	17	0.9765	0.0447	18.194	3.718	15
		0.99	0.75	13	13	0.9860	0.0471	13.761	2.601	11
		0.99	0.70	11	11	0.9899	0.0393	11.572	2.080	9
		0.95	0.85	28	3	0.7784	0.0468	49.891	33.306	54
		0.95	0.80	17	8	0.7561	0.0496	21.046	9.932	29
		0.95	0.75	13	13	0.7701	0.0471	14.601	4.531	19
0.95	0.70	11	11	0.8216	0.0393	12.457	3.718	13		
0.90	0.70	13	2	0.7894	0.0407	23.163	15.256	23		
0.10	0.25	0.99	0.95	58	58	0.8063	0.0996	63.797	18.264	75
		0.99	0.90	29	29	0.9375	0.0922	31.724	7.485	26
		0.99	0.85	19	19	0.9710	0.0894	20.430	4.306	14
		0.99	0.80	14	14	0.9838	0.0865	14.863	2.871	10
		0.99	0.75	11	11	0.9899	0.0833	11.572	2.079	7
		0.99	0.70	9	9	0.9933	0.0797	9.403	1.588	6
		0.95	0.85	21	5	0.7675	0.0953	29.722	16.877	37
		0.95	0.80	14	13	0.7514	0.0871	15.788	5.287	20
		0.95	0.75	11	11	0.8216	0.0833	12.457	3.718	13
		0.95	0.70	9	9	0.8713	0.0797	10.223	2.937	9
		0.90	0.70	10	3	0.7703	0.0792	14.388	8.111	16

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνει κατανοητή η χρήση του Πίνακα 5.5.

**Παράδειγμα 5.3:** Έστω ότι  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . Θέλουμε η πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού ποιότητας  $p \geq 0.99$  να είναι τουλάχιστον 95% ενώ η πιθανότητα αποδοχής ενός εξοπλισμού αξιοπιστίας  $p \leq 0.85$  να είναι μικρότερη από 5%. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 5.5 προκύπτει ότι το καταλληλότερο CSDF τεστ εκκίνησης σε αυτή την περίπτωση είναι αυτό στο οποίο ο εξοπλισμός γίνεται αποδεκτός όταν εμφανιστούν  $k = 23$  συνεχόμενες επιτυχημένες εκκινήσεις πριν από την εμφάνιση 2 αποτυχημένων εκκινήσεων μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται το πολύ  $d - 2 = 23 - 2 = 21$  επιτυχημένες εκκινήσεις. Έτσι, ένας εξοπλισμός αξιοπιστίας  $p_1 = 0.99$  θα γίνεται αποδεκτός με πιθανότητα 0.9587 ενώ ένας εξοπλισμός με επίπεδο αξιοπιστίας  $p_0 = 0.85$  θα γίνεται αποδεκτός με πιθανότητα 0.0471.

## 5.7 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάστηκε η λειτουργία των τεστ εκκίνησης και ο τρόπος εφαρμογής τους στο ευρύτερο πλαίσιο του στατιστικού ελέγχου ποιότητας που αποσκοπεί στην αποδοχή ή όχι ενός καινούργιου εξοπλισμού, προτού αυτός δοθεί προς χρήση. Τα κριτήρια αποδοχής/απόρριψης ενός εξοπλισμού που έχουν μελετηθεί έως τώρα στη βιβλιογραφία βασίζονται στη χρήση στατιστικών συναρτήσεων ροών και στατιστικών συναρτήσεων σάρωσης. Προτάθηκε και μελετήθηκε ένα νέο τεστ εκκίνησης, το CSDF τεστ εκκίνησης το οποίο χρησιμοποιεί μια κατάλληλη στατιστική συνάρτηση σάρωσης σύμφωνα με την οποία ο εξοπλισμός για να γίνει αποδεκτός θα πρέπει οι αποτυχημένες εκκινήσεις αυτού να απέχουν απόσταση μεγαλύτερη από  $d$  δοκιμές. Εκτός από τη θεωρητική μελέτη, εξετάστηκε και η διαδικασία εκτίμησης της άγνωστης πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$ , χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλους βασισμένους στη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας. Τέλος, δόθηκε και ένας πρακτικός οδηγός για την επιλογή των παραμέτρων  $k$  και  $d$  ενός CSDF τεστ εκκίνησης ώστε να πληρούνται δεδομένα στατιστικά κριτήρια.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Παράρτημα Π.1: Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για συνεχή χαρακτηριστικά

$\bar{X}$ διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II			$\bar{X}$ διάγραμμα Lσ όρια ελέγχου Φάσης II			$\bar{X}$ διάγραμμα Όρια ελέγχου πιθανότητας $\alpha$ Φάσης II		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu$	$\mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu$	$\mu + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\mu$	$\mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{X}$ διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I (Μέθοδος R)			$\bar{X}$ διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I (Μέθοδος S)			$\bar{X}$ διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I (Μέθοδος $S^2$ )		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$\bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{c_4 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{c_4 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}} - 3 \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + 3 \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}$

<i>R</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II			<i>S</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II			$S^2$ διάγραμμα όρια ελέγχου πιθανότητας $\alpha$ Φάσης II		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$(d_2 - 3d_3)\sigma$	$d_2\sigma$	$(d_2 + 3d_3)\sigma$	$(c_4 - 3\sqrt{1-c_4^2})\sigma$	$c_4\sigma$	$(c_4 + 3\sqrt{1-c_4^2})\sigma$	$\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1;1-a/2}^2$	$\sigma^2$	$\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1;a/2}^2$

<i>R</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I			<i>S</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I			$S^2$ διάγραμμα όρια ελέγχου πιθανότητας $\alpha$ Φάσης I		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$(1 - 3 \frac{d_3}{d_2})\bar{R}$	$\bar{R}$	$(1 + 3 \frac{d_3}{d_2})\bar{R}$	$(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1-c_4^2})\bar{S}$	$\bar{S}$	$(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1-c_4^2})\bar{S}$	$\frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{n-1;1-a/2}^2$	$\bar{S}^2$	$\frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{n-1;a/2}^2$

**Παράρτημα Π.2: Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για ιδιότητες (διακριτά χαρακτηριστικά)**

<i>p</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II			<i>np</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	<i>p</i>	$p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$np - 3\sqrt{np(1-p)}$	<i>np</i>	$np + 3\sqrt{np(1-p)}$

<i>c</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II			<i>u</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$c - 3\sqrt{c}$	<i>c</i>	$c + 3\sqrt{c}$	$c - 3\sqrt{\frac{c}{n}}$	<i>c</i>	$c + 3\sqrt{\frac{c}{n}}$

<i>p</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I			<i>np</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$\bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$	$\bar{P}$	$\bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$	$n\bar{P} - 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$	$n\bar{P}$	$n\bar{P} + 3\sqrt{n\bar{P}(1-\bar{P})}$

<i>c</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I			<i>u</i> διάγραμμα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I		
<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>	<i>CL</i>	<i>UCL</i>
$\bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$	$\bar{C}$	$\bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$	$\bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$	$\bar{U}$	$\bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$

### Παράρτημα Π.3: Βασικά Στοιχεία για την Κατασκευή των διαγραμμάτων ελέγχου $M : 3/5$ και $M : 4/5$

Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του Κεφαλαίου 2 καθώς και την τεχνική που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 3.6 μπορούμε να εξάγουμε το χώρο καταστάσεων  $\Omega$ , το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων  $\pi$  και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $M : 3/5$  και  $M : 4/5$ . Αρχικά παρουσιάζεται το  $M : 3/5$  διάγραμμα ελέγχου και στη συνέχεια το  $M : 4/5$ .

Έτσι, ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$  για το διάγραμμα ελέγχου  $M : 3/5$  είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$$

με καταστάσεις μετάβασης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα τις

$$"1" \equiv \{2, 3\}, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 11, \quad "4" \equiv 12, \quad "5" \equiv 121, \quad "6" \equiv 112, \quad "7" \equiv 122,$$

$$"8" \equiv 1221, \quad "9" \equiv 1212, \quad "10" \equiv 1122, \quad "11" \equiv 4, \quad "12" \equiv 44, \quad "13" \equiv 43$$

$$"14" \equiv 434, \quad "15" \equiv 443, \quad "16" \equiv 433, \quad "17" \equiv 4334, \quad "18" \equiv 4343, \quad "19" \equiv 4433$$

ενώ ως απορροφητική κατάσταση ορίζεται η

$$"20" = \{111, 1211, 1121, 12211, 12121, 11221, 444, 4344, 4434, 43344, 43434, 44334\}.$$

Το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το

$$\pi = [p_2 + p_3, p_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, p_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια, ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$  για το διάγραμμα ελέγχου  $M : 4/5$  είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$$

με καταστάσεις μετάβασης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα τις

$$"1" \equiv \{2, 3\}, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 11, \quad "4" \equiv 111, \quad "5" \equiv 12, \quad "6" \equiv 121, \quad "7" \equiv 1211,$$

$$"8" \equiv 112, \quad "9" \equiv 1121, \quad "10" \equiv 1112, \quad "11" \equiv 4, \quad "12" \equiv 44, \quad "13" \equiv 444$$

$$"14" \equiv 43, \quad "15" \equiv 434, \quad "16" \equiv 4344, \quad "17" \equiv 443, \quad "18" \equiv 4434, \quad "19" \equiv 4443$$

ενώ ως απορροφητική κατάσταση ορίζεται η

$$"20" = \{1111, 12111, 11211, 11121, 4444, 43444, 44344, 44434\}.$$

Το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το

$$\pi = [p_2 + p_3, p_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, p_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Παράρτημα Π.4: Τιμές του  $ARL$  και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα  $m/m$  και  $M : r/m$ ,  $2 \leq r \leq m \leq 5$  όταν  $ARL_{in} = 500, 1000$**

Στο παρόν παράρτημα δίνονται οι τιμές του  $ARL$  και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα ελέγχου  $m/m$  και  $M : r/m$ , ( $2 \leq r \leq m \leq 5$ ). Για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές  $ARL_{in} = 500, 1000$  ενώ για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 2.

**Πίνακας 1.** Τιμές του  $ARL$  και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα  $m/m$  και  $M:r/m$  ( $ARL_{in} = 500$ )

	1/1	2/2	M: 2/3	2/3	3/3	M: 2/4	2/4	M: 3/4	3/4	4/4	M: 2/5	M: 3/5	M: 4/5	5/5
	Όρια Ελέγχου													
$\delta$	$\pm 3.09$	$\pm 1.850$	$\pm 1.934$	$\pm 1.995$	$\pm 1.261$	$\pm 1.964$	$\pm 2.076$	$\pm 1.372$	$\pm 1.45$	$\pm 0.888$	$\pm 1.977$	$\pm 1.418$	$\pm 1.005$	$\pm 0.621$
0.0	500.00 (499.50)	500.00 (498.54)	500.00 (498.54)	500.00 (497.60)	500.00 (497.60)	500.00 (496.71)	500.00 (495.84)	500.00 (498.22)	500.00 (498.06)	500.00 (496.71)	500.00 (497.60)	500.00 (498.02)	500.00 (497.20)	500.00 (495.84)
0.2	412.32 (411.82)	366.76 (365.30)	350.27 (365.30)	357.59 (339.00)	341.36 (339.00)	340.53 (322.18)	353.10 (310.43)	318.80 (348.49)	326.57 (355.69)	325.40 (322.18)	334.32 (350.76)	305.33 (338.52)	301.15 (316.03)	314.49 (310.43)
0.4	262.37 (261.87)	193.21 (191.77)	172.77 (191.77)	181.62 (161.86)	164.16 (161.86)	161.62 (145.63)	176.37 (135.53)	140.92 (171.02)	148.59 (179.76)	148.75 (145.63)	154.74 (174.12)	128.59 (159.61)	126.22 (138.23)	139.45 (135.53)
0.6	153.96 (153.46)	98.70 (97.28)	84.40 (97.28)	90.49 (77.73)	79.97 (77.73)	77.01 (68.21)	87.07 (62.72)	65.28 (82.67)	70.01 (88.70)	71.24 (68.21)	72.54 (84.91)	58.09 (75.03)	57.64 (62.67)	66.51 (62.72)
0.8	90.46 (89.96)	53.20 (51.80)	44.31 (51.80)	48.06 (40.35)	42.53 (40.35)	39.93 (35.20)	46.11 (32.40)	33.88 (42.63)	36.62 (44.33)	38.14 (35.20)	37.33 (44.05)	29.91 (38.01)	30.25 (31.35)	36.08 (32.40)
1.0	54.58 (54.08)	30.68 (29.32)	25.27 (29.32)	27.54 (22.70)	24.83 (22.70)	22.73 (19.91)	26.47 (18.48)	19.67 (23.63)	21.29 (25.87)	22.78 (19.91)	21.25 (24.51)	17.46 (20.87)	18.08 (17.23)	22.08 (18.48)
1.2	34.05 (33.54)	18.94 (17.59)	15.61 (17.59)	17.00 (13.72)	15.81 (13.72)	14.12 (12.17)	16.43 (11.44)	12.64 (14.02)	13.62 (15.38)	15.00 (12.17)	13.28 (14.56)	11.37 (12.33)	12.07 (10.26)	14.99 (11.44)
1.4	21.98 (21.47)	12.46 (11.14)	10.37 (11.14)	11.25 (8.82)	10.88 (8.82)	9.49 (7.94)	10.95 (7.56)	8.86 (8.82)	9.48 (9.68)	10.75 (7.94)	9.01 (3.15)	8.12 (7.76)	8.85 (6.53)	11.10 (7.56)
1.6	14.69 (14.18)	8.71 (7.40)	7.36 (7.40)	7.93 (5.97)	8.03 (5.97)	6.84 (5.46)	7.78 (5.25)	6.70 (5.84)	7.10 (6.40)	8.27 (5.46)	6.56 (6.05)	6.26 (5.14)	7.00 (4.38)	8.83 (5.25)
1.8	10.15 (9.64)	6.43 (5.12)	5.54 (5.12)	5.92 (4.21)	6.28 (4.21)	5.22 (3.91)	5.86 (3.79)	5.38 (4.04)	5.66 (4.40)	6.75 (3.91)	5.07 (4.16)	5.13 (3.56)	5.89 (3.05)	7.44 (3.79)
2.0	7.26 (6.74)	4.98 (3.67)	4.39 (3.67)	4.64 (3.08)	5.17 (3.08)	4.20 (2.88)	4.63 (2.81)	4.56 (2.89)	4.74 (3.14)	5.79 (2.88)	4.12 (2.97)	4.42 (2.55)	5.19 (2.19)	6.56 (2.81)
2.2	5.36 (4.83)	4.04 (2.71)	3.63 (2.71)	3.81 (2.31)	4.45 (2.31)	3.52 (2.17)	3.82 (2.12)	4.02 (2.12)	4.15 (2.30)	5.16 (2.17)	3.49 (2.17)	3.95 (1.88)	4.75 (1.60)	5.99 (2.12)
2.4	4.08 (3.55)	3.40 (2.05)	3.12 (2.05)	3.25 (1.76)	3.96 (1.76)	3.06 (1.66)	3.28 (1.62)	3.67 (1.59)	3.76 (1.72)	4.75 (1.66)	3.05 (1.63)	3.64 (1.42)	4.47 (1.19)	5.62 (1.62)
2.6	3.21 (2.66)	2.97 (1.58)	2.77 (1.58)	2.86 (1.36)	3.64 (1.36)	2.74 (1.28)	2.90 (1.23)	3.44 (1.22)	3.50 (1.31)	4.48 (1.28)	2.74 (1.24)	3.43 (1.09)	4.29 (0.89)	5.38 (1.23)
2.8	2.59 (2.03)	2.66 (1.23)	2.53 (1.23)	2.59 (1.06)	3.41 (1.06)	2.52 (0.98)	2.63 (0.94)	3.28 (0.94)	3.33 (1.01)	4.30 (0.98)	2.52 (0.97)	3.29 (0.85)	4.18 (0.67)	5.23 (0.94)
3.0	2.15 (1.58)	2.45 (0.97)	2.36 (0.97)	2.40 (0.82)	3.26 (0.82)	2.36 (0.75)	2.44 (0.71)	3.18 (0.73)	3.21 (0.78)	4.18 (0.75)	2.36 (0.76)	3.19 (0.67)	4.11 (0.50)	5.13 (0.71)
3.5	1.52 (0.89)	2.16 (0.29)	2.13 (0.29)	2.15 (0.43)	3.08 (0.43)	2.13 (0.37)	2.17 (0.33)	3.05 (0.39)	3.06 (0.42)	4.05 (0.37)	2.14 (0.38)	3.06 (0.43)	4.03 (0.25)	5.03 (0.33)
4.0	1.22 (0.52)	2.05 (0.08)	2.04 (0.08)	2.05 (0.21)	3.02 (0.21)	2.04 (0.17)	2.06 (0.14)	3.01 (0.21)	3.02 (0.22)	4.01 (0.17)	2.04 (0.21)	3.01 (0.24)	4.01 (0.12)	5.01 (0.14)

**Πίνακας 2.** Τιμές του  $ARL$  και της τυπικής απόκλισης για τα διαγράμματα  $m/m$  και  $M:r/m$  ( $ARL_{in} = 1000$ )

	1/1	2/2	M: 2/3	2/3	3/3	M: 2/4	2/4	M: 3/4	3/4	4/4	M: 2/5	M: 3/5	M: 4/5	5/5
	Όρια Ελέγχου													
$\delta$	$\pm 3.291$	$\pm 2.003$	$\pm 2.083$	$\pm 2.141$	$\pm 1.394$	$\pm 2.112$	$\pm 2.219$	$\pm 1.503$	$\pm 1.575$	$\pm 1.011$	$\pm 2.125$	$\pm 1.548$	$\pm 1.128$	$\pm 0.738$
0.0	1000.00 (999.51)	1000.00 (998.50)	1000.00 (998.23)	1000.00 (998.05)	1000.00 (997.59)	1000.00 (997.59)	1000.00 (997.96)	1000.00 (997.16)	1000.00 (996.98)	1000.00 (996.65)	1000.00 (997.86)	1000.00 (996.80)	1000.00 (996.18)	1000.00 (995.79)
0.2	806.43 (805.93)	703.88 (702.41)	669.46 (667.67)	684.65 (682.72)	644.96 (642.58)	648.85 (672.47)	674.85 (646.81)	597.53 (594.71)	614.13 (611.17)	607.07 (603.81)	635.66 (633.44)	568.67 (565.49)	555.69 (551.94)	580.59 (576.47)
0.4	491.44 (490.94)	346.73 (345.28)	307.59 (305.80)	324.32 (322.44)	285.20 (282.87)	285.92 (311.38)	313.69 (283.86)	241.27 (238.51)	255.90 (253.03)	252.10 (248.93)	272.42 (270.16)	217.48 (214.36)	209.74 (206.12)	231.66 (227.67)
0.6	276.48 (275.98)	166.65 (165.22)	140.82 (139.06)	151.61 (149.77)	129.07 (126.80)	127.25 (142.73)	144.96 (125.21)	103.20 (100.52)	111.53 (108.77)	111.18 (108.10)	118.93 (116.66)	90.24 (87.21)	87.56 (84.07)	101.10 (97.24)
0.8	156.27 (155.77)	84.86 (83.45)	69.54 (67.82)	75.83 (74.05)	64.17 (61.95)	61.85 (69.99)	72.12 (59.86)	49.77 (47.18)	54.29 (51.64)	55.27 (52.28)	57.20 (54.98)	43.01 (40.10)	42.43 (39.07)	50.71 (46.97)
1.0	90.87 (90.37)	46.36 (44.98)	37.41 (35.73)	41.04 (39.31)	35.19 (33.02)	33.11 (36.99)	39.03 (31.18)	27.03 (24.54)	29.55 (27.01)	30.88 (27.97)	30.56 (28.42)	23.43 (20.64)	23.64 (20.40)	28.98 (25.34)
1.2	54.68 (54.18)	27.17 (25.81)	21.87 (20.25)	24.00 (22.34)	21.16 (19.04)	19.44 (20.98)	22.92 (17.59)	16.37 (13.95)	17.82 (15.37)	19.18 (16.33)	18.03 (15.99)	14.38 (11.70)	14.88 (11.73)	18.56 (14.98)
1.4	34.08 (33.57)	17.04 (15.70)	13.82 (12.24)	15.10 (13.50)	13.84 (11.76)	12.42 (12.68)	14.53 (10.64)	10.91 (8.55)	11.79 (9.40)	13.07 (10.26)	11.64 (9.68)	9.77 (7.16)	10.39 (7.28)	13.09 (9.55)
1.6	22.00 (21.49)	11.38 (10.06)	9.38 (7.83)	10.17 (8.61)	9.76 (7.70)	8.56 (8.09)	9.87 (6.83)	7.89 (5.56)	8.44 (6.10)	9.64 (6.84)	8.11 (6.23)	7.23 (4.66)	7.90 (4.79)	10.01 (6.45)
1.8	14.70 (14.19)	8.06 (6.75)	6.78 (5.26)	7.29 (5.76)	7.35 (5.29)	6.29 (5.41)	7.14 (4.60)	6.12 (3.79)	6.48 (4.15)	7.60 (4.78)	6.04 (4.21)	5.73 (3.17)	6.43 (3.29)	8.17 (4.56)
2.0	10.16 (9.65)	6.02 (4.71)	5.18 (3.68)	5.51 (4.01)	5.86 (3.78)	4.89 (3.77)	5.45 (3.23)	5.03 (2.68)	5.27 (2.92)	6.33 (3.46)	4.75 (2.97)	4.80 (2.24)	5.53 (2.32)	7.02 (3.34)
2.2	7.26 (6.74)	4.72 (3.40)	4.16 (2.65)	4.38 (2.88)	4.90 (2.79)	3.98 (2.71)	4.37 (2.34)	4.33 (1.94)	4.49 (2.11)	5.52 (2.58)	3.91 (2.16)	4.21 (1.62)	4.97 (1.67)	6.29 (2.49)
2.4	5.36 (4.83)	3.86 (2.53)	3.48 (1.96)	3.63 (2.12)	4.27 (2.10)	3.38 (2.00)	3.65 (1.74)	3.87 (1.43)	3.99 (1.55)	4.98 (1.96)	3.35 (1.62)	3.82 (1.20)	4.61 (1.21)	5.81 (1.89)
2.6	4.08 (3.55)	3.28 (1.92)	3.02 (1.48)	3.13 (1.60)	3.84 (1.61)	2.97 (1.50)	3.15 (1.32)	3.57 (1.06)	3.65 (1.15)	4.63 (1.50)	2.95 (1.25)	3.55 (0.90)	4.38 (0.88)	5.51 (1.44)
2.8	3.21 (2.66)	2.88 (1.48)	2.70 (1.13)	2.78 (1.22)	3.55 (1.25)	2.68 (1.15)	2.81 (1.02)	3.37 (0.79)	3.43 (0.86)	4.40 (1.15)	2.68 (0.98)	3.37 (0.69)	4.24 (0.65)	5.31 (1.10)
3.0	2.59 (2.03)	2.60 (1.16)	2.48 (0.88)	2.53 (0.94)	3.36 (0.97)	2.47 (0.90)	2.57 (0.80)	3.24 (0.60)	3.28 (0.65)	4.24 (0.89)	2.48 (0.78)	3.24 (0.54)	4.14 (0.47)	5.18 (0.84)
3.5	1.72 (1.11)	2.22 (0.41)	2.18 (0.47)	2.20 (0.50)	3.11 (0.51)	2.18 (0.45)	2.22 (0.51)	3.07 (0.29)	3.09 (0.32)	4.06 (0.45)	2.19 (0.45)	3.08 (0.29)	4.04 (0.22)	5.04 (0.40)
4.0	1.31 (0.64)	2.07 (0.12)	2.06 (0.25)	2.07 (0.27)	3.03 (0.26)	2.06 (0.25)	2.08 (0.28)	3.02 (0.14)	3.02 (0.16)	4.01 (0.21)	2.06 (0.25)	3.02 (0.15)	4.01 (0.10)	5.01 (0.17)

**Παράρτημα Π.5: Τιμές των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής των διαγραμμάτων ελέγχου  $M : r/5$  όταν  $ARL_{in} = 500, 1000$**

Στο παρόν παράρτημα δίνονται οι τιμές των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής του μήκους ροής για τα διαγράμματα ελέγχου  $M : r/5$  ( $r = 2, 3, 4$ ). Για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές  $ARL_{in} = 500, 1000$  ενώ για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 2.

**Πίνακας 3.** Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το  $ARL$  για τα διαγράμματα  $M : r/5$ ,  $r = 2, 3, 4$  ( $ARL_{in} = 500$ ).

$\delta$	$ARL$			Ποσοστιαία Σημεία								
	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$Q_1$			$M$			$Q_3$		
	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$
0.0	500.00	500.00	500.00	145	146	147	347	348	348	692	692	692
0.2	334.32	305.33	301.14	98	90	89	232	213	210	463	422	416
0.4	154.74	128.59	126.21	46	39	39	108	90	89	214	177	174
0.6	72.54	58.09	57.64	22	19	19	51	41	41	100	79	79
0.8	37.33	29.01	30.25	12	11	11	27	22	22	51	40	41
1.0	21.25	17.46	18.08	8	7	7	15	13	13	29	23	24
1.2	13.28	11.37	12.07	5	5	5	10	9	9	18	15	15
1.4	9.01	8.12	8.85	4	4	5	7	6	7	12	10	11
1.6	6.56	6.26	7.00	3	4	4	5	5	5	8	8	8
1.8	5.07	5.13	5.89	3	3	4	4	4	5	6	6	7
2.0	4.12	4.42	5.19	2	3	4	3	4	5	5	5	5
2.2	3.49	3.95	4.75	2	3	4	3	4	4	4	4	5
2.4	3.05	3.64	4.47	2	3	4	3	3	4	4	4	5
2.6	2.74	3.43	4.29	2	3	4	2	3	4	3	4	4
2.8	2.52	3.29	4.18	2	3	4	2	3	4	3	3	4
3.0	2.36	3.19	4.11	2	3	4	2	3	4	3	3	4
3.5	2.14	3.06	4.03	2	3	4	2	3	4	2	3	4
4.0	2.04	3.01	4.01	2	3	4	2	3	4	2	3	4

**Πίνακας 4.** Ποσοστιαία σημεία και τιμές για το  $ARL$  για τα διαγράμματα  $M : r/5$ ,  
 $r = 2, 3, 4$  ( $ARL_{in} = 1000$ ).

$\delta$	Ποσοστιαία Σημεία											
	$ARL$			$Q_1$			$M$			$Q_3$		
	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5	2/5	3/5	4/5
0.0	1000.00	1000.00	1000.00	289	290	290	694	694	694	1385	1385	1385
0.2	635.66	568.67	555.68	184	166	163	441	395	386	880	787	769
0.4	272.42	217.48	209.74	80	65	63	190	152	146	377	300	289
0.6	118.93	90.24	87.56	36	28	28	83	63	62	164	124	120
0.8	57.20	43.01	42.43	18	14	15	40	31	30	78	58	58
1.0	30.56	23.43	23.64	10	9	9	22	17	17	42	31	31
1.2	18.03	14.38	14.88	7	6	6	13	11	11	24	19	19
1.4	11.64	9.77	10.39	5	5	5	9	7	8	15	12	13
1.6	8.11	7.23	7.90	4	4	5	6	6	6	10	9	10
1.8	6.04	5.73	6.43	3	4	4	5	5	5	8	7	8
2.0	4.75	4.80	5.53	3	3	4	4	4	5	6	5	6
2.2	3.91	4.21	4.97	2	3	4	3	4	4	5	5	5
2.4	3.35	3.82	4.61	2	3	4	3	3	4	4	4	5
2.6	2.95	3.55	4.38	2	3	4	3	3	4	3	4	5
2.8	2.68	3.37	4.24	2	3	4	2	3	4	3	4	4
3.0	2.48	3.24	4.14	2	3	4	2	3	4	3	3	4
3.5	2.19	3.08	4.04	2	3	4	2	3	4	2	3	4
4.0	2.06	3.02	4.01	2	3	4	2	3	4	2	3	4

**Παράρτημα Π.6: Τιμές  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I: r/m, R: r/m, ARL_{in} = 370.4$  και  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$**

Στο παρόν παράρτημα δίνονται οι τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα ελέγχου  $R:r/m$ ,  $2 \leq r \leq m \leq 5$ . Η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής είναι  $ARL_{in} = 370.4$ . Για τα εξωτερικά όρια ελέγχου έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$  (2<sup>η</sup> γραμμή κάθε πίνακα) ενώ στην 3<sup>η</sup> γραμμή κάθε πίνακα δίνονται οι τιμές για το εσωτερικό όριο ελέγχου  $UICL$  του αντίστοιχου διαγράμματος. Για  $r < m$  έχει υπολογιστεί επίσης και η απόδοση των  $I:r/m$  διαγραμμάτων ελέγχου. Για λόγους σύγκρισης έχουμε συμπεριλάβει και τις τιμές του  $ARL$  για τα αντίστοιχα  $r/m$  και  $M:r/m$  διαγράμματα ελέγχου. Λόγω του ότι τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούν ένα μόνο όριο ελέγχου σε κάθε πλευρά του διαγράμματος, η τιμή του δίνεται στη 2<sup>η</sup> γραμμή κάθε πίνακα.

**Πίνακας 5.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα  $R:2/2$ ,

$$ARL_{in} = 370.4, UOCL = 3.4(0.1)3.8$$

	1/1	2/2	R:2/2				
			3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
$\delta$	3.0	1.781	1.843	1.822	1.808	1.799	1.793
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	276.67	278.59	277.44	276.83	276.53	276.41
0.4	200.08	150.25	152.35	150.92	150.20	149.87	149.76
0.6	119.67	78.91	79.94	79.03	78.59	78.42	78.39
0.8	71.55	43.63	43.90	43.41	43.20	43.14	43.16
1.0	43.89	25.78	25.66	25.42	25.34	25.34	25.38
1.2	27.82	16.28	15.98	15.88	15.86	15.89	15.93
1.4	18.25	10.94	10.58	10.54	10.56	10.60	10.64
1.6	12.38	7.79	7.41	7.41	7.44	7.48	7.53
1.8	8.69	5.85	5.46	5.48	5.52	5.56	5.61
2.0	6.30	4.61	4.21	4.24	4.29	4.33	4.37
2.2	4.72	3.79	3.38	3.42	3.46	3.51	3.55
2.4	3.65	3.23	2.81	2.86	2.90	2.94	2.98
2.6	2.90	2.85	2.41	2.45	2.50	2.54	2.58
2.8	2.38	2.58	2.11	2.16	2.20	2.25	2.29
3.0	2.00	2.39	1.89	1.94	1.98	2.03	2.07
4.0	1.19	2.04	1.28	1.32	1.36	1.39	1.43
5.0	1.02	2.00	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12
6.0	1.00	2.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 6.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα  $R:3/3$ ,  
 $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	3/3	$R:3/3$				
	3.0	1.200	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	259.30	263.26	261.45	260.39	259.80	259.47
0.4	200.08	129.55	133.24	131.39	130.36	129.81	129.53
0.6	119.67	65.25	66.92	65.92	65.39	65.14	65.03
0.8	71.55	35.76	36.23	35.77	35.56	35.48	35.47
1.0	43.89	21.45	21.36	21.17	21.11	21.11	21.15
1.2	27.82	14.00	13.65	13.60	13.61	13.65	13.70
1.4	18.25	9.85	9.38	9.40	9.44	9.50	9.56
1.6	12.38	7.41	6.87	6.92	6.98	7.05	7.11
1.8	8.69	5.89	5.31	5.38	5.45	5.52	5.59
2.0	6.30	4.92	4.30	4.37	4.45	4.52	4.59
2.2	4.72	4.28	3.60	3.68	3.77	3.84	3.91
2.4	3.65	3.85	3.10	3.19	3.27	3.35	3.43
2.6	2.90	3.56	2.72	2.81	2.90	2.99	3.06
2.8	2.38	3.36	2.42	2.51	2.60	2.69	2.78
3.0	2.00	3.23	2.17	2.26	2.35	2.44	2.53
4.0	1.19	3.02	1.35	1.40	1.46	1.53	1.60
5.0	1.02	3.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	3.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 7.** Τιμές του *ARL* για το διάγραμμα *R:4/4*,

$$ARL_{in} = 370.4, UOCL = 3.4(0.1)3.8$$

$\delta$	1/1	4/4	<i>R:4/4</i>				
	3.0	0.832	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	248.54	253.55	251.40	250.13	249.38	248.95
0.4	200.08	118.70	122.82	120.90	119.80	119.19	118.86
0.6	119.67	58.99	60.68	59.73	59.23	58.97	58.86
0.8	71.55	32.63	33.01	32.62	32.44	32.38	32.37
1.0	43.89	20.06	19.85	19.72	19.70	19.72	19.76
1.2	27.82	13.54	13.06	13.06	13.11	13.17	13.23
1.4	18.25	9.91	9.30	9.36	9.43	9.51	9.59
1.6	12.38	7.77	7.06	7.15	7.24	7.33	7.41
1.8	8.69	6.44	5.64	5.75	5.86	5.96	6.04
2.0	6.30	5.59	4.69	4.81	4.93	5.04	5.13
2.2	4.72	5.03	4.01	4.14	4.27	4.38	4.49
2.4	3.65	4.66	3.49	3.63	3.77	3.89	4.01
2.6	2.90	4.42	3.07	3.22	3.36	3.49	3.62
2.8	2.38	4.26	2.72	2.86	3.00	3.14	3.28
3.0	2.00	4.16	2.40	2.54	2.68	2.82	2.96
4.0	1.19	4.01	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67
5.0	1.02	4.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	4.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01



**Πίνακας 8.** Τιμές του *ARL* για το διάγραμμα *R:5/5*,

$$ARL_{in} = 370.4, UOCL = 3.4(0.1)3.8$$

$\delta$	1/1	5/5	<i>R:5/5</i>				
	3.0	0.568	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	241.32	246.85	244.53	243.15	242.33	241.85
0.4	200.08	112.26	116.42	114.52	113.43	112.81	112.48
0.6	119.67	55.71	57.26	56.39	55.93	55.70	55.60
0.8	71.55	31.28	31.50	31.19	31.05	31.01	31.02
1.0	43.89	19.72	19.36	19.29	19.30	19.34	19.40
1.2	27.82	13.72	13.09	13.14	13.21	13.29	13.37
1.4	18.25	10.37	9.58	9.69	9.80	9.90	9.99
1.6	12.38	8.39	7.47	7.61	7.74	7.85	7.96
1.8	8.69	7.16	6.11	6.26	6.41	6.54	6.66
2.0	6.30	6.38	5.16	5.33	5.49	5.64	5.77
2.2	4.72	5.87	4.45	4.64	4.81	4.97	5.12
2.4	3.65	5.54	3.88	4.07	4.26	4.44	4.60
2.6	2.90	5.33	3.39	3.59	3.78	3.97	4.15
2.8	2.38	5.20	2.95	3.15	3.34	3.54	3.73
3.0	2.00	5.11	2.57	2.75	2.94	3.13	3.32
4.0	1.19	5.00	1.38	1.44	1.52	1.61	1.70
5.0	1.02	5.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	5.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 9.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:2/3$  και  $R:2/3$ ,  $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	2/3	$M:2/3$	$I:2/3$					$R:2/3$				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	270.10	264.79	273.63	272.01	271.06	270.53	270.23	269.18	267.29	266.16	265.50	265.11
0.4	200.08	141.61	134.92	145.62	143.69	142.59	141.99	141.66	139.75	137.59	136.32	135.60	135.19
0.6	119.67	72.64	67.89	75.00	73.78	73.10	72.73	72.55	70.71	69.37	68.60	68.18	67.95
0.8	71.55	39.64	36.64	40.77	40.10	39.74	39.56	39.48	38.02	37.30	36.90	36.69	36.58
1.0	43.89	23.30	21.44	23.76	23.41	23.23	23.15	23.13	22.05	21.68	21.48	21.38	21.34
1.2	27.82	14.73	13.56	14.84	14.66	14.58	14.56	14.56	13.78	13.58	13.49	13.45	13.44
1.4	18.25	9.96	9.21	9.89	9.81	9.78	9.78	9.79	9.22	9.13	9.09	9.08	9.08
1.6	12.38	7.16	6.67	7.00	6.96	6.96	6.98	7.00	6.56	6.52	6.51	6.52	6.54
1.8	8.69	5.43	5.10	5.22	5.21	5.23	5.25	5.27	4.93	4.92	4.93	4.95	4.97
2.0	6.30	4.33	4.10	4.07	4.08	4.11	4.14	4.16	3.88	3.89	3.91	3.93	3.96
2.2	4.72	3.60	3.44	3.31	3.33	3.36	3.39	3.42	3.18	3.20	3.23	3.25	3.28
2.4	3.65	3.10	2.99	2.78	2.81	2.84	2.88	2.91	2.69	2.72	2.75	2.78	2.81
2.6	2.90	2.76	2.68	2.39	2.43	2.47	2.51	2.54	2.34	2.37	2.41	2.44	2.48
2.8	2.38	2.52	2.47	2.11	2.15	2.19	2.23	2.27	2.07	2.11	2.15	2.19	2.23
3.0	2.00	2.36	2.32	1.90	1.94	1.98	2.02	2.06	1.87	1.91	1.95	1.99	2.03
4.0	1.19	2.03	2.03	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44	1.28	1.32	1.36	1.40	1.44
5.0	1.02	2.00	2.00	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12
6.0	1.00	2.00	2.00	1.05	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 10.** Τιμές του *ARL* για τα διαγράμματα ελέγχου *I:2/4* και *R:2/4*,  $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	2/4	<i>M:2/4</i>	<i>I:2/4</i>					<i>R:2/4</i>				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
	3.0	2.011	1.897	2.065	2.047	2.035	2.027	2.021	1.956	1.936	1.923	1.914	1.908
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	266.53	257.81	270.93	269.07	267.95	267.27	266.89	263.49	261.20	259.80	258.94	258.43
0.4	200.08	137.50	126.61	142.38	140.23	138.97	138.23	137.81	132.56	130.09	128.61	127.72	127.19
0.6	119.67	69.96	62.24	72.86	71.51	70.74	70.30	70.06	65.66	64.19	63.32	62.81	62.51
0.8	71.55	38.11	33.22	39.56	38.82	38.41	38.19	38.08	34.94	34.16	33.71	33.45	33.30
1.0	43.89	22.46	19.42	23.12	22.73	22.53	22.42	22.37	20.24	19.83	19.60	19.48	19.41
1.2	27.82	14.28	12.37	14.52	14.33	14.23	14.18	14.17	12.72	12.51	12.39	12.34	12.31
1.4	18.25	9.73	8.49	9.75	9.65	9.61	9.60	9.61	8.60	8.50	8.44	8.42	8.42
1.6	12.38	7.05	6.23	6.95	6.91	6.90	6.91	6.92	6.21	6.16	6.14	6.14	6.14
1.8	8.69	5.40	4.84	5.22	5.21	5.22	5.24	5.26	4.73	4.71	4.71	4.72	4.74
2.0	6.30	4.33	3.95	4.10	4.11	4.13	4.16	4.18	3.77	3.78	3.79	3.81	3.83
2.2	4.72	3.62	3.35	3.35	3.37	3.40	3.43	3.46	3.12	3.14	3.16	3.19	3.21
2.4	3.65	3.14	2.95	2.82	2.85	2.88	2.92	2.95	2.67	2.69	2.72	2.75	2.78
2.6	2.90	2.80	2.66	2.43	2.47	2.51	2.55	2.58	2.33	2.36	2.40	2.43	2.47
2.8	2.38	2.56	2.46	2.14	2.19	2.23	2.27	2.31	2.08	2.11	2.15	2.19	2.23
3.0	2.00	2.39	2.32	1.92	1.96	2.01	2.05	2.09	1.87	1.92	1.96	2.00	2.04
4.0	1.19	2.05	2.04	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44
5.0	1.02	2.00	2.00	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12
6.0	1.00	2.00	2.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 11.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:2/5$  και  $R:2/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	2/5	$M:2/5$	$I:2/5$					$R:2/5$				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	265.08	253.39	269.81	267.86	266.67	265.96	265.54	259.82	257.31	255.75	254.78	254.19
0.4	200.08	135.70	121.52	140.94	138.70	137.36	136.58	136.12	128.02	125.40	123.82	122.85	122.26
0.6	119.67	68.83	58.85	71.95	70.55	69.74	69.27	69.01	62.58	60.99	60.08	59.54	59.22
0.8	71.55	37.53	31.21	39.11	38.35	37.92	37.68	37.55	33.04	32.25	31.78	31.51	31.35
1.0	43.89	22.21	18.26	22.94	22.55	22.33	22.21	22.16	19.14	18.73	18.50	18.36	18.29
1.2	27.82	14.20	11.70	14.49	14.29	14.18	14.13	14.11	12.10	11.88	11.77	11.70	11.67
1.4	18.25	9.73	8.11	9.79	9.69	9.64	9.63	9.63	8.26	8.15	8.09	8.07	8.06
1.6	12.38	7.10	6.02	7.02	6.97	6.96	6.97	6.98	6.02	5.96	5.94	5.94	5.94
1.8	8.69	5.46	4.72	5.30	5.29	5.29	5.31	5.33	4.63	4.61	4.61	4.62	4.63
2.0	6.30	4.40	3.89	4.17	4.19	4.21	4.23	4.26	3.72	3.73	3.74	3.76	3.78
2.2	4.72	3.69	3.33	3.41	3.44	3.47	3.50	3.53	3.11	3.12	3.14	3.17	3.19
2.4	3.65	3.20	2.94	2.87	2.91	2.94	2.98	3.01	2.66	2.69	2.72	2.75	2.78
2.6	2.90	2.86	2.66	2.48	2.52	2.56	2.60	2.63	2.33	2.37	2.40	2.44	2.47
2.8	2.38	2.61	2.46	2.18	2.22	2.26	2.31	2.35	2.08	2.12	2.16	2.20	2.23
3.0	2.00	2.43	2.32	1.94	1.99	2.03	2.08	2.12	1.88	1.92	1.96	2.00	2.04
4.0	1.19	2.05	2.04	1.29	1.33	1.36	1.40	1.44	1.29	1.32	1.36	1.40	1.44
5.0	1.02	2.00	2.00	1.06	1.07	1.08	1.10	1.12	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12
6.0	1.00	2.00	2.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 12.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:3/4$  και  $R:3/4$ ,  $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	3/4	$M:3/4$	$I:3/4$					$R:3/4$				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
	3.0	1.393	1.312	1.445	1.427	1.416	1.408	1.403	1.367	1.349	1.336	1.328	1.323
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	248.65	243.10	254.57	252.17	250.72	249.82	249.29	249.74	247.10	245.49	244.51	243.89
0.4	200.08	117.78	112.01	123.12	120.84	119.50	118.71	118.24	117.73	115.36	113.94	113.10	112.59
0.6	119.67	57.48	53.79	60.12	58.91	58.21	57.82	57.60	56.57	55.34	54.62	54.21	53.98
0.8	71.55	31.04	28.83	32.11	31.54	31.23	31.07	30.99	29.98	29.40	29.09	28.91	28.82
1.0	43.89	18.57	17.23	18.90	18.64	18.52	18.46	18.44	17.62	17.36	17.23	17.17	17.14
1.2	27.82	12.18	11.36	12.16	12.06	12.02	12.02	12.03	11.38	11.27	11.23	11.22	11.23
1.4	18.25	8.67	8.14	8.47	8.45	8.45	8.47	8.50	7.98	7.95	7.95	7.97	7.99
1.6	12.38	6.62	6.26	6.31	6.32	6.36	6.39	6.43	5.99	6.01	6.03	6.06	6.10
1.8	8.69	5.35	5.11	4.97	5.01	5.05	5.10	5.14	4.76	4.80	4.84	4.88	4.92
2.0	6.30	4.55	4.38	4.09	4.14	4.20	4.26	4.31	3.95	4.01	4.06	4.11	4.16
2.2	4.72	4.02	3.91	3.48	3.55	3.62	3.68	3.73	3.39	3.46	3.52	3.58	3.63
2.4	3.65	3.68	3.59	3.04	3.11	3.19	3.26	3.32	2.98	3.06	3.13	3.20	3.26
2.6	2.90	3.44	3.39	2.69	2.78	2.86	2.94	3.01	2.66	2.74	2.82	2.90	2.96
2.8	2.38	3.29	3.25	2.41	2.50	2.59	2.67	2.75	2.39	2.48	2.56	2.64	2.72
3.0	2.00	3.18	3.16	2.17	2.26	2.35	2.44	2.52	2.16	2.25	2.34	2.42	2.51
4.0	1.19	3.01	3.01	1.35	1.41	1.47	1.53	1.60	1.35	1.40	1.46	1.53	1.60
5.0	1.02	3.00	3.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	3.00	3.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 13.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:3/5$  και  $R:3/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$ ,  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	3/5	$M:3/5$	$I:3/5$					$R:3/5$				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
	3.0	1.504	1.358	1.554	1.537	1.526	1.518	1.513	1.413	1.395	1.382	1.374	1.369
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	242.82	233.46	249.75	247.06	245.38	244.35	243.71	241.46	238.44	236.56	235.37	234.64
0.4	200.08	112.03	102.78	118.02	115.59	114.12	113.23	112.70	109.13	106.62	105.09	104.16	103.59
0.6	119.67	54.06	48.24	57.01	55.73	54.99	54.55	54.30	51.22	49.98	49.25	48.81	48.55
0.8	71.55	29.16	25.70	30.41	29.82	29.48	29.29	29.19	26.95	26.38	26.06	25.88	25.77
1.0	43.89	17.54	15.45	18.00	17.73	17.58	17.51	17.48	15.92	15.66	15.53	15.46	15.42
1.2	27.82	11.63	10.32	11.70	11.58	11.53	11.52	11.52	10.42	10.31	10.26	10.24	10.24
1.4	18.25	8.38	7.53	8.24	8.21	8.21	8.22	8.24	7.43	7.40	7.40	7.40	7.42
1.6	12.38	6.47	5.90	6.21	6.22	6.25	6.28	6.31	5.69	5.70	5.72	5.74	5.77
1.8	8.69	5.30	4.91	4.95	4.98	5.03	5.07	5.11	4.60	4.63	4.67	4.71	4.74
2.0	6.30	4.55	4.27	4.11	4.16	4.22	4.27	4.32	3.87	3.92	3.98	4.02	4.07
2.2	4.72	4.05	3.85	3.52	3.58	3.65	3.71	3.77	3.36	3.43	3.49	3.54	3.60
2.4	3.65	3.72	3.57	3.07	3.15	3.23	3.30	3.37	2.97	3.05	3.12	3.19	3.25
2.6	2.90	3.49	3.38	2.72	2.81	2.90	2.97	3.05	2.66	2.74	2.82	2.90	2.97
2.8	2.38	3.33	3.25	2.43	2.53	2.62	2.70	2.78	2.39	2.48	2.57	2.65	2.73
3.0	2.00	3.22	3.16	2.18	2.28	2.37	2.46	2.54	2.16	2.25	2.34	2.43	2.51
4.0	1.19	3.02	3.01	1.35	1.41	1.47	1.53	1.60	1.35	1.41	1.46	1.53	1.60
5.0	1.02	3.00	3.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	3.00	3.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

**Πίνακας 14.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:4/5$  και  $R:4/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$ .  $UOCL = 3.4(0.1)3.8$

$\delta$	1/1	4/5	$M:4/5$	$I:4/5$					$R:4/5$				
				3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
0.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.2	308.43	235.22	231.24	242.36	239.57	237.85	236.79	236.14	238.64	235.76	233.98	232.88	232.21
0.4	200.08	105.40	101.68	110.95	108.66	107.30	106.48	105.99	107.20	104.93	103.58	102.77	102.28
0.6	119.67	50.61	48.34	53.06	51.96	51.33	50.97	50.77	50.72	49.66	49.05	48.70	48.50
0.8	71.55	27.60	26.28	28.48	28.01	27.76	27.62	27.56	27.11	26.67	26.43	26.30	26.24
1.0	43.89	16.97	16.18	17.15	16.96	16.87	16.84	16.84	16.34	16.17	16.09	16.06	16.06
1.2	27.82	11.57	11.09	11.41	11.36	11.36	11.37	11.40	10.93	10.88	10.88	10.90	10.93
1.4	18.25	8.60	8.30	8.27	8.29	8.32	8.36	8.40	7.97	7.99	8.02	8.07	8.11
1.6	12.38	6.87	6.67	6.41	6.47	6.53	6.59	6.64	6.22	6.28	6.34	6.40	6.45
1.8	8.69	5.82	5.69	5.24	5.32	5.40	5.47	5.54	5.12	5.20	5.28	5.35	5.41
2.0	6.30	5.16	5.07	4.45	4.55	4.65	4.73	4.81	4.38	4.47	4.57	4.65	4.72
2.2	4.72	4.74	4.67	3.88	4.00	4.11	4.20	4.29	3.83	3.95	4.05	4.15	4.24
2.4	3.65	4.47	4.42	3.43	3.56	3.68	3.79	3.90	3.40	3.53	3.65	3.76	3.86
2.6	2.90	4.29	4.26	3.05	3.19	3.32	3.44	3.56	3.03	3.17	3.30	3.42	3.54
2.8	2.38	4.18	4.16	2.71	2.85	2.99	3.12	3.25	2.70	2.84	2.98	3.11	3.24
3.0	2.00	4.11	4.09	2.40	2.54	2.68	2.82	2.95	2.39	2.53	2.67	2.81	2.94
4.0	1.19	4.01	4.00	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67	1.37	1.43	1.50	1.58	1.67
5.0	1.02	4.00	4.00	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13	1.06	1.07	1.09	1.11	1.13
6.0	1.00	4.00	4.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01

## Παράρτημα Π.7: Βασικά Στοιχεία για την Κατασκευή των δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου $R : 6/7$ και $R : 7/8$

Χρησιμοποιώντας την τεχνική που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.12 είναι δυνατή η μελέτη των διαγραμμάτων ελέγχου  $R : 6/7$  και  $R : 7/8$ . Στο παρόν παράρτημα δίνουμε το χώρο καταστάσεων  $\Omega$  της Μαρκοβιανής αλυσίδας, το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων  $\pi$  και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  για άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου  $R : 6/7$  και  $R : 7/8$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει (δείτε Παράγραφο 3.12) η γενική μορφή των αντίστοιχων στοιχείων για τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου  $R : 6/7$  και  $R : 7/8$  είναι ακριβώς η ίδια. Αρχικά παρουσιάζεται η περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου  $R : 6/7$  και στη συνέχεια του  $R : 7/8$ .

Έτσι έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$  για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R : 6/7$  είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 21\}$$

με καταστάσεις μετάβασης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα τις

$$\begin{aligned} "1" &\equiv \{2, 3\}, & "2" &\equiv 1, & "3" &\equiv 11, & "4" &\equiv 111, & "5" &\equiv 1111, & "6" &\equiv 11111, \\ "7" &\equiv 12, & "8" &\equiv 121, & "9" &\equiv 1211, & "10" &\equiv 12111, & "11" &\equiv 121111, \\ "12" &\equiv 112, & "13" &\equiv 1121, & "14" &\equiv 11211, & "15" &\equiv 112111, & "16" &\equiv 1112, \\ "17" &\equiv 11121, & "18" &\equiv 111211, & "19" &\equiv 11112, & "20" &\equiv 111121, & "21" &\equiv 111112 \end{aligned}$$

ενώ ως απορροφητική κατάσταση ορίζεται η

$$"22" = \{4, 11111, 121111, 112111, 111211, 1111211, 1111121\}.$$

Το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το

$$\pi = (p_2 + p_3)\mathbf{e}_1 + p_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{22}$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
p_2 + p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 + p_4 \\
p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 + p_4 \\
p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\
p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\
p_2 + p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_4 \\
p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\
p_2 + p_3 & 0 & p_1 + p_4 \\
0 & 1
\end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια, ο χώρος καταστάσεων  $\Omega$  για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R : 7/8$  είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 29\}$$

με καταστάσεις μετάβασης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα τις

$$"1" \equiv \{2, 3\}, \quad "2" \equiv 1, \quad "3" \equiv 11, \quad "4" \equiv 111, \quad "5" \equiv 1111, \quad "6" \equiv 11111,$$

$$"7" \equiv 111111, \quad "8" \equiv 12, \quad "9" \equiv 121, \quad "10" \equiv 1211, \quad "11" \equiv 12111, \quad "12" \equiv 121111,$$

$$"13" \equiv 1211111, \quad "14" \equiv 112, \quad "15" \equiv 1121, \quad "16" \equiv 11211, \quad "17" \equiv 112111, \quad "18" \equiv 1121111,$$

$$"19" \equiv 1112, \quad "20" \equiv 11121, \quad "21" \equiv 111211, \quad "22" \equiv 1112111, \quad "23" \equiv 11112, \quad "24" \equiv 111121,$$

$$"25" \equiv 1111211, \quad "26" \equiv 111112, \quad "27" \equiv 1111121, \quad "28" \equiv 1111112,$$

ενώ ως απορροφητική κατάσταση ορίζεται η

$$"29" = \{4, 111111, 1211111, 1121111, 1112111, 11112111, 11111211\}.$$

Το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το

$$\boldsymbol{\pi} = (p_2 + p_3)\mathbf{e}_1 + p_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^{29}$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  έχει τη μορφή



## Παράρτημα Π.8: Προγράμματα Mathematica για την κατασκευή του διαγράμματος ελέγχου $R : 5/6$

Εκτός από τους πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης που δόθηκαν στο Παράρτημα Π.7 δίνουμε και δύο προγράμματα σε Mathematica για τον υπολογισμό (i) της τιμής του εσωτερικού ορίου ελέγχου για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου  $R : 5/6$  και (ii) των τιμών του  $ARL$  για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου. Τα προγράμματα που δίνονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή οποιουδήποτε διαγράμματος ελέγχου  $R : r/m$ . Το μόνο που απαιτεί το πρόγραμμα είναι ο καθορισμός του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας  $Q$  για το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου. Δίνοντας κάθε φορά τη μορφή του  $Q$  και την επιθυμητή τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής μπορούμε με χρήση του πρώτου προγράμματος να υπολογίσουμε την τιμή των εσωτερικών ορίων ελέγχου και στη συνέχεια την τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για δεδομένη μετατόπιση του μέσο της διεργασίας.

# Πρόγραμμα Mathematica για τον Υπολογισμό του Εσωτερικού Ορίου Ελέγχου του Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου $R : 5/6$

```

<<Statistics`ContinuousDistributions`
dist := NormalDistribution[0, 1];
(* In-control average run length value for the two-sided Revised 5/6 control chart *)
c=370.4;
(* Shift  $\delta=0$  for in-control process *)
 $\delta=0$ ;
(* Prefixed Value for the Upper Outer Control Limit *)
L=4.0;
(* Probabilities of interest *)
pU4=1-CDF[dist, L- $\delta$ ];
pU1=CDF[dist, L- $\delta$ ]-CDF[dist, d- $\delta$ ];
pU2=CDF[dist, d- $\delta$ ]-CDF[dist, - $\delta$ ];
pU3=1-pU1-pU2-pU3;

(* Transition Probabilities Matrix for the Upper Sided Revised 5/6 control chart *)

QU=

$$\begin{pmatrix} pU3+pU2 & pU1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & pU1 & 0 & 0 & pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & pU1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 \\ pU3+pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 & pU1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU1 & pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 & 0 \\ pU3+pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU1 & 0 & 0 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3+pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU1 & 0 \\ pU3 & 0 & 0 & 0 & 0 & pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pU3+pU2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
;

(* Initial Probabilities Vector  $\alpha$  *)
 $\alphaU=QU[[1]]$ ;
l1=Table[1, {Length[ $\alphaU$ ]}];
ID=IdentityMatrix[{Length[ $\alphaU$ ]}];

(* In-Control Average Run Length for the Upper Revised 5/6 Control Chart *)
ARL[d_]=1+ $\alphaU$ .Inverse[ID-QU].l1;

(* Numerical evaluation of the value d=UICL *)
FindRoot[ARL[d]==2*c, {d, 0.7}]

d: 0.683995   ARL[in]: 740.801

```

# Πρόγραμμα Mathematica για τον Υπολογισμό των τιμών του ARL του

## Δίπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου $R : 5/6$

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
dist := NormalDistribution[0, 1];
(* List with the values of the Inner Control Limits *)
λ = {0.89243, 0.80407, 0.75868, 0.73143, 0.714, 0.70253, 0.694875, 0.68974, 0.686296, 0.683995};

(* List with the values of the Outer Control Limits *)
SS = {3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 4.0};

Do[
d = λ[[i]]; (* The i-th Inner Control Limit *)
L = SS[[i]]; (* The i-th Outer Control Limit *)

Do[
(* Probabilities of Interest for the Upper Sided Revised 5/6 Control Chart*)
pU4 = 1 - CDF[dist, L - δ];
pU1 = CDF[dist, L - δ] - CDF[dist, d - δ];
pU2 = CDF[dist, d - δ] - CDF[dist, -δ];
pU3 = 1 - pU1 - pU2 - pU3;

(* Transition Probabilities Matrix for the Upper Sided Revised 5/6 Control Chart*)
QU = (
pU3 + pU2 pU1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pU3 0 pU1 0 0 pU2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pU3 0 0 pU1 0 0 0 0 0 0 pU2 0 0 0 0 0
pU3 0 0 0 0 pU1 0 0 0 0 0 0 0 pU2 0 0
pU3 0 0 0 0 0 0 pU1 0 0 0 0 0 0 0 0
pU4 + pU2 pU3 0 0 0 0 pU2 0 pU1 0 0 0 0 0 0 0
pU3 0 0 0 0 0 0 0 0 pU1 pU2 0 0 0 0 0 0
pU3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pU2 0 0 0 0 0
pU4 + pU2 pU3 0 0 0 0 0 0 0 0 pU1 0 0 0 0 0
pU3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pU2 0 0 0 0 0 0
pU3 + pU2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pU1 0
pU3 0 0 0 0 0 pU2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pU3 + pU2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
);

(* Initial Probabilities Vector α *)
αU = QU[[1]];
l1 = Table[1, {Length[αU]}];
ID = IdentityMatrix[{Length[αU]}];

(* Upper Out-of-Control Average Run Length, ARLU *)
ARLU[δ_] = N[1 + αU.Inverse[ID - QU].l1];

(* Probabilities of Interest for the Lower Sided Revised 5/6 Control Chart*)
pL4 = CDF[dist, -L - δ];
pL1 = CDF[dist, -d - δ] - CDF[dist, -L - δ];
pL2 = CDF[dist, -δ] - CDF[dist, -d - δ];
pL3 = 1 - pL1 - pL2 - pL3;

(* Transition Probabilities Matrix for the Lower Sided Revised 5/6 Control Chart*)
QL = (
pL3 + pL2 pL1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pL3 0 pL1 0 0 pL2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pL3 0 0 pL1 0 0 0 0 0 0 pL2 0 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pL2
pL3 + pL2 0 0 0 0 0 0 pL1 0 0 0 0 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 pL2 0 pL1 0 0 0 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 0 0 0 pL1 pL2 0 0 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pL2 0 0 0 0
pL3 + pL2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pL1 0 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 pL2 0 0 0 0 0 pL1 0 0 0 0
pL3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pL2 0 0 0 0 0 0
pL3 + pL2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 pL1 0
pL3 0 0 0 0 0 pL2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
pL3 + pL2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
);

(* Initial Probabilities Vector α *)
αL = QL[[1]];

(* Lower Out-of-Control Average Run Length, ARLU *)
ARLL[δ_] = N[1 + αL.Inverse[ID - QL].l1];

(* Table of ARL values for the two-sided Revised 5/6 control chart, UOCL=3.1 (0.1) 4.0, ARLin=370.4 *)
Print["d: ", λ[[i]], " ", "L: ", SS[[i]], " ", "δ: ", δ, " ", "ARLU: ", ARLU[δ], " ", "ARLL: ", ARLL[δ], " ",
"ARL using Robert's Formula: ", N[ $\frac{ARLU[\delta] * ARLL[\delta]}{ARLU[\delta] + ARLL[\delta]}$ ], {δ, 0, 6, 0.2}], {i, 1, Length[SS]}]
```

**Παράρτημα Π.9: Πίνακες με τις τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου των Παραγράφων 4.3.1-4.3.4**

Ανίχνευση Αυξήσεων – Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση  $\sigma_0 = 1$

**Πίνακας 15.** Τιμές του  $ARL$  τα διαγράμματα ελέγχου  $r$  – από –  $m$  τύπου I

	$S_U$	$C_{2/2}^{(I)}$	$C_{3/3}^{(I)}$	$C_{4/4}^{(I)}$	$C_{5/5}^{(I)}$	$C_{2/3}^{(I)}$	$C_{2/4}^{(I)}$	$C_{2/5}^{(I)}$	$C_{3/4}^{(I)}$	$C_{3/5}^{(I)}$	$C_{4/5}^{(I)}$
$UCL$	2.016	1.527	1.304	1.167	1.071	1.591	1.626	1.645	1.383	1.430	1.251
$\rho$											
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
1.1	106.94	104.52	106.51	109.38	112.39	95.71	91.71	89.40	94.01	88.03	94.72
1.2	42.49	42.30	44.59	47.28	49.98	37.08	34.98	33.88	37.11	33.96	38.33
1.3	21.09	21.88	23.99	26.24	28.47	18.88	17.79	17.28	19.56	17.87	20.81
1.4	12.28	13.42	15.29	17.21	19.09	11.56	10.96	10.72	12.46	11.48	13.65
1.5	8.03	9.28	10.95	12.63	14.28	8.05	7.69	7.57	9.01	8.40	10.14
1.6	5.73	7.00	8.52	10.03	11.52	6.13	5.90	5.85	7.10	6.71	8.18
1.7	4.36	5.62	7.02	8.42	9.80	4.97	4.83	4.81	5.95	5.69	6.99
1.8	3.50	4.72	6.05	7.36	8.65	4.23	4.13	4.14	5.20	5.02	6.22
1.9	2.92	4.11	5.37	6.62	7.86	3.72	3.66	3.67	4.69	4.57	5.70
2	2.52	3.68	4.89	6.09	7.28	3.36	3.32	3.34	4.33	4.25	5.33

**Πίνακας 16.** Τιμές του  $ARL$  τα διαγράμματα ελέγχου  $r$  – από –  $m$  τύπου II

	$S_U$	$C_{2/3}^{(II)}$	$C_{2/4}^{(II)}$	$C_{2/5}^{(II)}$	$C_{3/4}^{(II)}$	$C_{3/5}^{(II)}$	$C_{4/5}^{(II)}$
$UCL$	2.016	1.563	1.576	1.581	1.349	1.366	1.211
$\rho$							
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
1.1	106.94	95.35	91.26	89.10	94.99	89.90	97.73
1.2	42.49	36.82	34.56	33.40	37.69	34.96	40.18
1.3	21.09	18.71	17.49	16.90	19.91	18.45	21.98
1.4	12.28	11.46	10.76	10.44	12.71	11.87	14.46
1.5	8.03	7.98	7.56	7.37	9.20	8.68	10.74
1.6	5.73	6.08	5.81	5.70	7.26	6.92	8.65
1.7	4.36	4.94	4.76	4.69	6.08	5.86	7.38
1.8	3.50	4.21	4.08	4.04	5.31	5.16	6.54
1.9	2.92	3.71	3.62	3.59	4.79	4.68	5.97
2	2.52	3.35	3.29	3.28	4.41	4.34	5.56

**Πίνακας 17.** Τιμές του *ARL* τα διαγράμματα ελέγχου *r* – από – *m* τύπου III

	$S_U$	$C_{2/2}^{(III)}$	$C_{3/3}^{(III)}$	$C_{4/4}^{(III)}$	$C_{5/5}^{(III)}$	$C_{2/3}^{(III)}$	$C_{2/4}^{(III)}$	$C_{2/5}^{(III)}$	$C_{3/4}^{(III)}$	$C_{3/5}^{(III)}$	$C_{4/5}^{(III)}$
<i>UOCL</i>	2.016	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328
<i>UICL</i>		1.536	1.312	1.174	1.078	1.598	1.633	1.657	1.390	1.436	1.258
$\rho$											
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
1.1	106.94	99.56	100.57	102.71	105.05	92.41	89.16	87.29	90.23	85.19	90.56
1.2	42.49	38.59	39.84	41.65	43.51	34.79	33.24	32.44	34.31	31.89	35.09
1.3	21.09	19.23	20.33	21.68	23.04	17.28	16.57	16.26	17.45	16.30	18.25
1.4	12.28	11.41	12.32	13.34	14.33	10.35	10.01	9.90	10.74	10.17	11.45
1.5	8.03	7.66	8.41	9.20	9.94	7.05	6.89	6.86	7.49	7.20	8.11
1.6	5.73	5.62	6.24	6.86	7.43	5.25	5.17	5.18	5.69	5.54	6.22
1.7	4.36	4.40	4.92	5.41	5.85	4.17	4.13	4.16	4.58	4.51	5.03
1.8	3.50	3.61	4.05	4.45	4.78	3.46	3.45	3.48	3.84	3.81	4.21
1.9	2.92	3.07	3.44	3.76	4.02	2.97	2.98	3.01	3.31	3.30	3.62
2	2.52	2.68	3.00	3.26	3.45	2.62	2.63	2.66	2.92	2.92	3.18

**Πίνακας 18.** Τιμές του *ARL* τα διαγράμματα ελέγχου *r* – από – *m* τύπου IV

	$S_U$	$C_{2/3}^{(IV)}$	$C_{2/4}^{(IV)}$	$C_{2/5}^{(IV)}$	$C_{3/4}^{(IV)}$	$C_{3/5}^{(IV)}$	$C_{4/5}^{(IV)}$
<i>UOCL</i>	2.016	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328	2.328
<i>UICL</i>		1.571	1.584	1.589	1.356	1.374	1.218
$\rho$							
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
1.1	106.94	91.94	88.45	86.57	90.92	86.52	92.93
1.2	42.49	34.45	32.66	31.72	64.65	32.49	36.38
1.3	21.09	17.07	16.18	15.73	17.62	16.58	18.95
1.4	12.28	10.22	9.75	9.53	10.83	10.30	11.86
1.5	8.03	6.96	6.71	6.59	7.55	7.27	8.36
1.6	5.73	5.19	5.04	4.99	5.72	5.57	6.37
1.7	4.36	4.12	4.04	4.01	4.60	4.52	5.12
1.8	3.50	3.43	3.38	3.36	3.85	3.81	4.27
1.9	2.92	2.95	2.92	2.91	3.32	3.30	3.66
2	2.52	2.60	2.59	2.58	2.92	2.91	3.20

**Ανίχνευση Μειώσεων – Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση  $\sigma_0 = 1$**

**Πίνακας 19.** Τιμές του *ARL* τα διαγράμματα ελέγχου *r* – από – *m* τύπου I

	$S_U$	$C_{2/2}^{(I)}$	$C_{3/3}^{(I)}$	$C_{4/4}^{(I)}$	$C_{5/5}^{(I)}$	$C_{2/3}^{(I)}$	$C_{2/4}^{(I)}$	$C_{2/5}^{(I)}$	$C_{3/4}^{(I)}$	$C_{3/5}^{(I)}$	$C_{4/5}^{(I)}$
<i>LCL</i>	0.194	0.429	0.580	0.688	0.770	0.392	0.372	0.359	0.524	0.492	0.620
$\rho$											
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.9	245.88	182.18	149.62	130.47	118.07	182.06	182.62	183.31	148.43	148.70	128.21
0.8	156.03	85.68	59.86	47.79	41.26	85.79	86.54	87.41	59.20	59.70	46.50
0.7	93.66	38.72	24.48	19.20	16.90	39.01	39.72	40.50	24.30	24.80	18.69
0.6	52.43	17.08	10.76	9.06	8.68	17.41	17.97	18.55	10.80	11.19	8.89
0.5	26.85	7.63	5.48	5.38	5.85	7.90	8.28	8.67	5.56	5.84	5.36
0.4	12.27	3.72	3.53	4.19	5.08	3.89	4.13	4.36	3.60	3.77	4.22
0.3	4.89	2.29	3.03	4.00	5.00	2.37	2.47	2.57	3.05	3.09	4.01
0.2	1.78	2.00	3.00	4.00	5.00	2.01	2.02	2.02	3.00	3.00	4.00
0.1	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	4.00

**Πίνακας 20.** Τιμές του *ARL* τα διαγράμματα ελέγχου *r* – από – *m* τύπου II

	$S_U$	$C_{2/3}^{(II)}$	$C_{2/4}^{(II)}$	$C_{2/5}^{(II)}$	$C_{3/4}^{(II)}$	$C_{3/5}^{(II)}$	$C_{4/5}^{(II)}$
<i>LCL</i>	0.194	0.408	0.400	0.397	0.548	0.535	0.652
$\rho$							
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.9	245.88	171.19	164.09	159.47	137.59	129.99	119.18
0.8	156.03	76.24	70.28	66.34	51.57	46.70	40.94
0.7	93.66	33.32	30.03	27.87	20.49	18.33	16.13
0.6	52.43	14.71	13.35	12.46	9.18	8.43	7.84
0.5	26.85	6.83	6.42	6.17	4.96	4.80	4.99
0.4	12.27	3.54	3.48	3.46	3.43	3.45	4.14
0.3	4.89	2.28	2.30	2.31	3.03	3.04	4.00
0.2	1.78	2.00	2.01	2.01	3.00	3.00	4.00
0.1	1.00	2.00	2.00	2.00	3.00	3.00	4.00



**Πίνακας 21.** Τιμές του  $ARL$  τα διαγράμματα ελέγχου  $r - από - m$  τύπου III

	$S_U$	$C_{2/2}^{(III)}$	$C_{3/3}^{(III)}$	$C_{4/4}^{(III)}$	$C_{5/5}^{(III)}$	$C_{2/3}^{(III)}$	$C_{2/4}^{(III)}$	$C_{2/5}^{(III)}$	$C_{3/4}^{(III)}$	$C_{3/5}^{(III)}$	$C_{4/5}^{(III)}$
<i>LICL</i>		0.424	0.575	0.682	0.764	0.387	0.368	0.355	0.519	0.487	0.615
<i>LOCL</i>	0.194	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104
$\rho$											
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.9	245.88	185.75	153.84	134.68	122.11	185.62	186.12	186.76	152.66	152.89	132.43
0.8	156.03	88.49	62.28	49.75	42.88	88.57	89.28	90.11	61.59	62.06	48.41
0.7	93.66	40.25	25.48	19.89	17.41	40.52	41.22	41.97	25.28	25.77	19.35
0.6	52.43	17.76	11.11	9.27	8.82	18.08	18.64	19.21	11.14	11.54	3.09
0.5	26.85	7.88	5.58	5.42	5.85	8.15	8.54	8.92	5.66	5.94	5.39
0.4	12.27	3.79	3.53	4.15	5.00	3.97	4.20	4.43	3.60	3.78	4.18
0.3	4.89	2.28	2.96	3.86	4.76	2.36	2.47	2.56	2.98	3.02	3.86
0.2	1.78	1.90	2.70	3.42	4.07	1.90	1.91	1.92	2.70	2.70	3.42
0.1	1.00	1.36	1.49	1.54	1.56	1.36	1.36	1.36	1.49	1.49	1.54

**Πίνακας 22.** Τιμές του  $ARL$  τα διαγράμματα ελέγχου  $r - από - m$  τύπου IV

	$S_U$	$C_{2/3}^{(IV)}$	$C_{2/4}^{(IV)}$	$C_{2/5}^{(IV)}$	$C_{3/4}^{(IV)}$	$C_{3/5}^{(IV)}$	$C_{4/5}^{(IV)}$
<i>LICL</i>		0.403	0.396	0.393	0.543	0.530	0.646
<i>LOCL</i>	0.194	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104
$\rho$							
1.0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.9	106.94	175.15	168.25	163.72	141.96	134.37	123.37
0.8	42.49	79.08	73.07	69.06	53.81	48.75	42.66
0.7	21.09	34.75	31.36	29.11	21.34	19.07	16.68
0.6	12.28	15.32	13.89	12.96	9.47	8.68	8.01
0.5	8.03	7.05	6.62	6.36	5.04	4.87	5.01
0.4	5.73	3.60	3.54	3.52	3.43	3.45	4.10
0.3	4.36	2.27	2.29	2.30	2.96	2.97	3.86
0.2	3.50	1.90	1.90	1.90	2.70	2.70	3.42
0.1	2.92	1.36	1.36	1.36	1.49	1.49	1.54

**Παράρτημα Π.10: Πίνακες με τις τιμές του  $ARL$  των διαγραμμάτων ελέγχου  $I : r/m, R : r/m$  για την παρακολούθηση της διασποράς**

**Πίνακας 23.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα ελέγχου  $I : 2/2$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 2/2$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.621	1.612	1.607	1.603	1.601
$MDL$							
$LICL$			0.374	0.379	0.382	0.384	0.386
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$							
0.1	1.0	1.0	1.3	1.4	1.5	1.5	1.6
0.2	2.6	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	2.0
0.3	8.5	5.7	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
0.4	22.8	14.5	5.4	5.2	5.1	5.1	5.1
0.5	51.4	32.1	13.2	12.6	12.2	12.2	12.0
0.6	102.2	63.1	33.0	31.4	30.4	30.4	29.8
0.7	184.4	113.1	79.7	76.1	73.8	73.8	72.3
0.8	308.2	188.7	179.9	173.5	169.3	169.3	166.6
0.9	445.8	293.3	356.8	349.5	344.5	344.5	341.1
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	147.7	149.6	151.4	151.4	153.1
1.2	64.5	117.7	55.0	56.0	57.0	57.0	58.0
1.3	30.5	52.9	25.3	25.8	26.4	26.4	27.0
1.4	16.8	27.1	14.1	14.4	14.7	14.7	15.1
1.5	10.5	15.8	9.0	9.2	9.4	9.4	9.6
1.6	7.2	10.3	6.3	6.5	6.6	6.6	6.8
1.7	5.3	7.2	4.8	4.9	5.0	5.0	5.2
1.8	4.2	5.4	3.9	3.9	4.0	4.0	4.1
1.9	3.4	4.3	3.2	3.3	3.3	3.4	3.5
2.0	2.9	3.5	2.8	2.8	2.9	2.9	3.0

**Πίνακας 24.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα ελέγχου  $I : 3/3$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 3/3$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.385	1.377	1.372	1.369	1.367
$MDL$							
$LICL$			0.523	0.528	0.531	0.534	0.535
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$							
0.1	1.0	1.0	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
0.2	2.6	2.0	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9
0.3	8.5	5.7	3.0	3.0	3.0	3.0	3.1
0.4	22.8	14.5	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0
0.5	51.4	32.1	7.6	7.4	7.2	7.1	7.1
0.6	102.2	63.1	17.8	17.0	16.5	16.2	16.0
0.7	184.4	113.1	46.2	4.4	42.5	41.6	41.0
0.8	308.2	188.7	122.4	116.7	113.1	110.8	109.3
0.9	445.8	293.3	298.3	289.3	283.3	279.2	276.4
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	149.1	151.7	154.1	156.3	158.2
1.2	64.5	117.7	55.4	56.7	58.1	59.5	60.7
1.3	30.5	52.9	25.8	26.6	27.4	28.2	28.9
1.4	16.8	27.1	14.6	15.0	15.5	16.0	16.5
1.5	10.5	15.8	9.4	9.8	10.1	10.4	10.8
1.6	7.2	10.3	6.7	7.0	7.2	7.5	7.7
1.7	5.3	7.2	5.2	5.3	5.5	5.7	5.9
1.8	4.2	5.4	4.2	4.3	4.5	4.6	4.8
1.9	3.4	4.3	3.5	3.6	3.7	3.9	4.0
2.0	2.9	3.5	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4

**Πίνακας 25.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα ελέγχου  $I : 4/4$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 4/4$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.240	1.233	1.234	1.226	1.224
$MDL$							
$LICL$			0.629	0.634	0.634	0.640	0.642
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$							
0.1	1.0	1.0	1.4	1.5	1.8	2.1	2.4
0.2	2.6	2.0	3.2	3.4	3.6	3.7	3.8
0.3	8.5	5.7	3.8	3.9	3.9	3.9	4.0
0.4	22.8	14.5	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4
0.5	51.4	32.1	6.5	6.4	6.4	6.3	6.3
0.6	102.2	63.1	13.2	12.7	12.8	12.3	12.1
0.7	184.4	113.1	33.0	31.5	31.9	30.0	29.6
0.8	308.2	188.7	93.4	88.8	90.6	84.1	82.9
0.9	445.8	293.3	259.9	250.6	259.7	240.5	237.8
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	151.9	155.0	165.2	160.5	162.7
1.2	64.5	117.7	56.8	58.5	62.2	61.8	63.2
1.3	30.5	52.9	26.8	27.8	29.5	29.8	30.7
1.4	16.8	27.1	15.3	16.0	16.9	17.2	17.8
1.5	10.5	15.8	10.0	10.5	11.0	11.4	11.8
1.6	7.2	10.3	7.2	7.5	7.9	8.2	8.5
1.7	5.3	7.2	5.5	5.8	6.1	6.3	6.6
1.8	4.2	5.4	4.5	4.7	4.9	5.1	5.3
1.9	3.4	4.3	3.7	3.9	4.1	4.2	4.4
2.0	2.9	3.5	3.2	3.3	3.5	3.6	3.8

**Πίνακας 26.** Τιμές του  $ARL$  για το διάγραμμα ελέγχου  $I : 5/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 5/5$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.139	1.133	1.129	1.126	1.124
$MDL$							
$LICL$			0.711	0.716	0.720	0.722	0.724
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$							
0.1	1.0	1.0	1.4	1.6	1.8	2.2	2.6
0.2	2.6	2.0	3.8	4.1	4.3	4.5	4.6
0.3	8.5	5.7	4.7	4.8	4.8	4.9	4.9
0.4	22.8	14.5	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1
0.5	51.4	32.1	6.6	6.5	6.4	6.4	6.4
0.6	102.2	63.1	11.5	11.2	11.0	10.9	10.8
0.7	184.4	113.1	26.9	25.8	25.1	24.7	24.4
0.8	308.2	188.7	76.9	73.2	70.9	69.4	68.4
0.9	445.8	293.3	233.2	224.2	218.3	214.5	211.9
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	154.8	158.4	161.8	164.7	167.1
1.2	64.5	117.7	58.5	60.5	62.5	64.3	65.9
1.3	30.5	52.9	28.0	29.1	30.3	31.4	32.5
1.4	16.8	27.1	16.1	16.9	17.7	18.4	19.1
1.5	10.5	15.8	10.6	11.1	11.7	12.2	12.8
1.6	7.2	10.3	7.6	8.0	8.4	8.9	9.3
1.7	5.3	7.2	5.9	6.1	6.5	6.8	7.1
1.8	4.2	5.4	4.7	5.0	5.2	5.5	5.7
1.9	3.4	4.3	3.9	4.1	4.3	4.5	4.8
2.0	2.9	3.5	3.3	3.5	3.7	3.9	4.0

**Πίνακας 27.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I : 2/3$ ,  $R : 2/3$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 2/3$					$R : 2/3$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.680	1.672	1.667	1.663	1.661	1.655	1.647	1.641	1.638	1.635
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.342	0.346	0.349	0.351	0.352	0.356	0.360	0.363	0.365	0.366
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.2	2.6	2.0	1.9	1.9	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	2.0	2.0
0.3	8.5	5.7	2.8	2.7	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6	2.5	2.5
0.4	22.8	14.5	5.6	5.5	5.3	5.3	5.2	5.0	4.8	4.7	4.7	4.6
0.5	51.4	32.1	13.5	12.9	12.5	12.3	12.1	11.5	10.9	10.6	10.4	10.3
0.6	102.2	63.1	33.2	31.7	30.7	30.0	29.6	27.9	26.5	25.6	25.1	24.7
0.7	184.4	113.1	79.6	76.0	73.8	72.3	71.3	68.2	64.8	62.7	61.4	60.4
0.8	308.2	188.7	179.4	173.1	168.9	166.2	164.3	161.0	154.5	150.3	147.5	145.7
0.9	445.8	293.3	358.4	351.4	346.5	343.2	340.8	341.1	333.2	327.8	324.1	321.5
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	139.2	140.0	141.0	142.1	143.0	139.0	139.9	141.0	142.1	143.1
1.2	64.5	117.7	50.1	50.5	51.1	51.6	52.2	49.7	50.1	50.6	51.2	51.7
1.3	30.5	52.9	23.0	23.2	23.5	23.8	24.1	22.6	22.9	23.2	23.5	23.8
1.4	16.8	27.1	12.9	13.0	13.2	13.4	13.6	12.7	12.8	13.0	13.2	13.4
1.5	10.5	15.8	8.3	8.4	8.6	8.7	8.8	8.2	8.3	8.4	8.6	8.7
1.6	7.2	10.3	6.0	6.0	6.1	6.2	6.3	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3
1.7	5.3	7.2	4.6	4.7	4.7	4.8	4.9	4.5	4.6	4.7	4.8	4.8
1.8	4.2	5.4	3.7	3.8	3.8	3.9	4.0	3.7	3.7	3.8	3.9	3.9
1.9	3.4	4.3	3.1	3.2	3.3	3.3	3.4	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3
2.0	2.9	3.5	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9

**Πίνακας 28.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I : 2/4$ ,  $R : 2/4$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 2/4$					$R : 2/4$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.713	1.705	1.700	1.697	1.694	1.667	1.659	1.654	1.650	1.648
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.325	0.329	0.332	0.333	0.335	0.349	0.353	0.356	0.358	0.360
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.2	2.6	2.0	1.9	1.9	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	2.0	2.0
0.3	8.5	5.7	2.9	2.9	2.9	2.8	2.8	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
0.4	22.8	14.5	5.9	5.7	5.6	5.6	5.5	4.8	4.7	4.6	4.5	4.5
0.5	51.4	32.1	13.9	13.3	13.0	12.8	12.6	10.5	10.0	9.7	9.6	9.4
0.6	102.2	63.1	33.8	32.3	31.3	30.7	30.2	24.7	23.5	22.7	22.2	21.9
0.7	184.4	113.1	80.1	76.6	74.4	72.9	71.9	60.7	57.7	55.7	54.4	53.6
0.8	308.2	188.7	179.7	173.4	169.2	166.5	164.7	148.3	141.9	137.8	135.0	133.2
0.9	445.8	293.3	359.5	352.5	347.8	344.5	342.2	329.6	321.3	315.6	311.8	309.2
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	134.9	135.3	135.9	136.6	137.2	134.8	135.3	136.0	136.9	137.7
1.2	64.5	117.7	48.0	48.1	48.4	48.8	49.1	47.1	47.3	47.7	48.1	48.5
1.3	30.5	52.9	22.0	22.1	22.3	22.5	22.7	21.4	21.6	21.8	22.0	22.2
1.4	16.8	27.1	12.4	12.5	12.6	12.8	12.9	12.1	12.2	12.3	12.4	12.6
1.5	10.5	15.8	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3
1.6	7.2	10.3	5.9	5.9	6.0	6.1	6.2	5.7	5.8	5.8	5.9	6.0
1.7	5.3	7.2	4.5	4.6	4.7	4.7	4.8	4.4	4.5	4.6	4.6	4.7
1.8	4.2	5.4	3.7	3.8	3.8	3.9	3.9	3.6	3.7	3.7	3.8	3.9
1.9	3.4	4.3	3.1	3.2	3.2	3.3	3.4	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3
2.0	2.9	3.5	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9

**Πίνακας 29.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I : 2/5$ ,  $R : 2/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 2/5$					$R : 2/5$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.736	1.728	1.723	1.720	1.718	1.673	1.664	1.659	1.656	1.653
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.314	0.317	0.320	0.321	0.323	0.346	0.351	0.353	0.355	0.357
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.2	2.6	2.0	1.9	2.0	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	2.0	2.0	2.0
0.3	8.5	5.7	3.1	3.0	3.0	3.0	3.0	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
0.4	22.8	14.5	6.2	6.1	5.9	5.9	5.8	4.7	4.6	4.5	4.4	4.4
0.5	51.4	32.1	14.5	13.9	13.5	13.3	13.1	9.8	9.4	9.2	9.0	8.9
0.6	102.2	63.1	34.6	33.1	32.1	31.5	31.0	22.6	21.5	20.8	20.3	20.0
0.7	184.4	113.1	81.2	77.7	75.5	74.0	73.1	55.6	52.8	50.9	49.8	49.0
0.8	308.2	188.7	180.9	174.6	170.5	167.8	166.0	139.6	133.2	129.2	126.6	124.8
0.9	445.8	293.3	360.9	354.1	349.5	346.3	344.1	321.6	313.0	307.2	303.3	300.6
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	132.5	132.5	132.9	133.5	134.0	132.3	132.6	133.2	133.9	134.7
1.2	64.5	117.7	46.8	46.8	47.0	47.3	47.6	45.7	45.8	46.1	46.4	46.8
1.3	30.5	52.9	21.6	21.6	21.7	21.9	22.1	20.8	20.9	21.0	21.2	21.4
1.4	16.8	27.1	12.3	12.3	12.4	12.5	12.6	11.7	11.8	11.9	12.1	12.2
1.5	10.5	15.8	8.1	8.1	8.2	8.3	8.4	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1
1.6	7.2	10.3	5.9	5.9	6.0	6.1	6.1	5.6	5.7	5.7	5.8	5.9
1.7	5.3	7.2	4.6	4.6	4.7	4.7	4.8	4.4	4.4	4.5	4.6	4.6
1.8	4.2	5.4	3.7	3.8	3.8	3.9	4.0	3.6	3.7	3.7	3.8	3.8
1.9	3.4	4.3	3.2	3.2	3.3	3.3	3.4	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3
2.0	2.9	3.5	2.8	2.8	2.9	2.9	3.0	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9



**Πίνακας 30.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:3/4$ ,  $R:3/4$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I:3/4$					$R:3/4$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.460	1.452	1.448	1.445	1.443	1.429	1.421	1.416	1.413	1.411
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.472	0.477	0.480	0.482	0.483	0.493	0.498	0.501	0.503	0.504
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
0.2	2.6	2.0	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9
0.3	8.5	5.7	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
0.4	22.8	14.5	4.1	4.1	4.1	4.0	4.0	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
0.5	51.4	32.1	7.6	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	6.5	6.3	6.3	6.2
0.6	102.2	63.1	17.6	16.9	16.4	16.1	15.9	14.6	14.0	13.6	13.4	13.2
0.7	184.4	113.1	45.4	43.2	41.8	40.9	40.3	37.7	35.8	34.6	33.9	33.4
0.8	308.2	188.7	120.4	114.9	111.3	109.0	107.5	104.8	99.6	96.3	94.2	92.8
0.9	445.8	293.3	298.0	289.1	283.2	279.2	276.5	278.5	269.2	263.0	258.9	256.1
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	136.2	137.3	138.6	139.9	141.0	137.1	138.5	139.9	141.3	142.6
1.2	64.5	117.7	48.2	48.8	49.5	50.2	50.8	48.4	49.1	49.8	50.6	51.3
1.3	30.5	52.9	22.3	22.7	23.1	23.5	23.9	22.4	22.8	23.2	23.7	24.1
1.4	16.8	27.1	12.8	13.0	13.3	13.6	13.9	12.8	13.1	13.4	13.7	14.0
1.5	10.5	15.8	8.5	8.6	8.9	9.1	9.3	8.5	8.7	8.9	9.1	9.3
1.6	7.2	10.3	6.2	6.3	6.5	6.7	6.8	6.2	6.3	6.5	6.7	6.8
1.7	5.3	7.2	4.8	5.0	5.1	5.2	5.4	4.8	5.0	5.1	5.2	5.4
1.8	4.2	5.4	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
1.9	3.4	4.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
2.0	2.9	3.5	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3

**Πίνακας 31.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I:3/5$ ,  $R:3/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I:3/5$					$R:3/5$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.503	1.497	1.492	1.489	1.487	1.447	1.439	1.435	1.431	1.429
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.444	0.448	0.451	0.453	0.454	0.480	0.485	0.489	0.497	0.492
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
0.2	2.6	2.0	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9
0.3	8.5	5.7	3.1	3.1	3.1	3.1	3.2	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1
0.4	22.8	14.5	4.3	4.3	4.3	4.2	4.2	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
0.5	51.4	32.1	8.0	7.7	7.6	7.5	7.4	6.2	6.1	6.0	5.9	5.9
0.6	102.2	63.1	18.0	17.2	16.8	16.5	16.3	13.0	12.4	12.1	11.9	11.8
0.7	184.4	113.1	45.6	43.4	42.0	41.1	40.5	32.8	31.8	30.2	29.5	29.1
0.8	308.2	188.7	119.9	114.4	110.9	108.6	107.1	93.6	88.8	85.8	83.9	82.6
0.9	445.8	293.3	297.7	288.9	283.0	279.0	276.3	264.2	254.8	248.6	244.5	241.8
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	129.3	129.8	130.6	131.4	132.2	131.1	132.0	133.0	134.1	135.1
1.2	64.5	117.7	44.8	45.1	45.5	45.9	46.4	45.2	45.6	46.1	46.7	47.3
1.3	30.5	52.9	20.8	21.0	21.3	21.6	21.8	20.9	21.2	21.5	21.9	22.2
1.4	16.8	27.1	12.1	12.2	12.4	12.6	12.8	12.1	12.3	12.5	12.8	13.0
1.5	10.5	15.8	8.1	8.2	8.4	8.6	8.7	8.1	8.3	8.4	8.6	8.8
1.6	7.2	10.3	6.0	6.1	6.3	6.4	6.5	6.0	6.1	6.3	6.4	6.6
1.7	5.3	7.2	4.7	4.9	5.0	5.1	5.2	4.7	4.8	5.0	5.1	5.2
1.8	4.2	5.4	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3
1.9	3.4	4.3	3.4	3.4	3.5	3.6	3.7	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
2.0	2.9	3.5	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3

**Πίνακας 32.** Τιμές του  $ARL$  για τα διαγράμματα ελέγχου  $I : 4/5$ ,  $R : 4/5$ ,  $ARL_{in} = 370.4$

	$S$	$S(\neq)$	$I : 4/5$					$R : 4/5$				
$UOCL$	1.265	2.242	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460	2.284	2.328	2.372	2.416	2.460
$UICL$			1.320	1.314	1.310	1.307	1.305	1.285	1.278	1.274	1.271	1.269
$MDL$								0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
$LICL$			0.569	0.573	0.576	0.578	0.580	0.594	0.600	0.603	0.605	0.607
$LOCL$	0.610	0.185	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078	0.114	0.104	0.095	0.086	0.078
$\rho$												
0.1	1.0	1.0	1.4	1.5	1.8	2.1	2.4	1.4	1.5	1.8	2.1	2.4
0.2	2.6	2.0	3.2	3.4	3.6	3.7	3.8	3.2	3.4	3.6	3.7	3.8
0.3	8.5	5.7	3.8	3.9	3.9	3.9	4.0	3.8	3.9	3.9	3.9	4.0
0.4	22.8	14.5	4.4	4.4	4.4	4.4	4.4	4.2	4.2	4.2	4.3	4.3
0.5	51.4	32.1	6.4	6.3	6.3	6.2	6.2	5.8	5.7	5.7	5.7	5.6
0.6	102.2	63.1	12.8	12.3	12.1	11.9	11.8	10.9	10.6	10.3	10.2	10.1
0.7	184.4	113.1	31.8	30.4	29.5	28.9	28.5	26.7	25.5	24.8	24.3	24.0
0.8	308.2	188.7	90.3	85.9	83.2	81.4	80.2	78.5	74.6	72.1	70.5	69.5
0.9	445.8	293.3	257.4	248.3	242.3	238.3	235.6	239.6	230.4	224.4	220.4	217.7
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	159.6	261.6	136.4	137.9	139.4	140.9	142.1	139.0	140.8	142.7	144.4	145.9
1.2	64.5	117.7	48.4	49.2	50.0	50.8	51.6	49.6	50.5	51.5	52.5	53.4
1.3	30.5	52.9	22.7	23.3	23.8	24.3	24.8	23.3	23.9	24.5	25.1	25.7
1.4	16.8	27.1	13.3	13.6	14.0	14.3	14.7	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2
1.5	10.5	15.8	8.9	9.2	9.4	9.7	10.0	9.1	9.4	9.7	10.0	10.3
1.6	7.2	10.3	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	6.7	6.9	7.2	7.4	7.6
1.7	5.3	7.2	5.2	5.3	5.5	5.7	5.9	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
1.8	4.2	5.4	4.2	4.4	4.6	4.7	4.9	4.3	4.4	4.6	4.8	5.0
1.9	3.4	4.3	3.6	3.7	3.9	4.0	4.2	3.6	3.8	3.9	4.1	4.2
2.0	2.9	3.5	3.1	3.2	3.4	3.5	3.6	3.1	3.3	3.4	3.5	3.7

**Παράρτημα Π.11:** Πρόγραμμα για την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$  με τη μέθοδο SG.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
k = 10; r = 3; (* PARAMETERS k, r OF THE SDT *)
u = {}; (* CREATE A LIST FOR THE PROBABILITIES OF EACH ABSORBING STATE OF REJECTION *)
x = 14; (* FREQUENCY OF SUCCESSFULLY ENDED SDT *)
n = {0, 1} (* THE FREQUENCIES OF EACH ABSORBING STATE OF REJECTION *)
q = 1 - p;
(*--- INITIAL PROBABILITIES VECTOR ---*)
a = Table[0, {k + r - 2}];
a[[1]] = p;
a[[k]] = q;
(*--- IDENTITY MATRIX ---*)
ID = IdentityMatrix[k + r - 2];
(*--- MATRIX Q ---*)
X = Table[0, {k - 1}, {k - 1}];
Do[X[[i, i + 1]] = p, {i, 1, k - 2}];
Y = Table[0, {k - 1}, {r - 1}];
Do[Y[[i, 1]] = q, {i, 1, k - 1}];
W = Table[0, {r - 1}, {r - 1}];
Do[W[[i, i + 1]] = p, {i, 1, r - 2}];
Z = Table[0, {r - 1}, {k - 1}];
Z[[r - 1, r - 1]] = p;
Q = BlockMatrix[{{X, Y}, {Z, W}}];
(*--- A VECTOR WITH ALL OF ITS ENTRIES EQUAL TO 1 ---*)
l1 = Table[1, {k + r - 2}];
(*--- CALCULATION OF THE PROBABILITIES OF EACH ABSORBING STATE RELATED TO REJECTION ---*)
Do[
  Mi = Table[0, {k + r - 2}, {k + r - 2}];
  Mi[[k - 1, k - 1]] = p;
  Do[Mi[[j, j]] = q, {j, k, k + r - 2}];
  Mi[[k + i - 1, k + i - 1]] = 0;
  Gi[s_] = s^2 * a.Inverse[ID - s * Q].(ID - Q - Mi).l1;
  AppendTo[u, Simplify[Gi[1]]];
  Print["i: ", i, " ", "Prob of Ri absorbing state: ", Simplify[Gi[1]], {i, 1, r - 1}]
]
(*--- PROBABILITY OF ACCEPTANCE ---*)
uA =  $\frac{p^k * (2 - p^{r-1})}{1 - p^{r-1} + p^k}$ ;
(*--- LOG-LIKELIHOOD FUNCTION ---*)
l[p_] = Sum[n[[j]] * Log[u[[j]]], {j, 1, r - 1}] + x * Log[uA];
(*--- SOLVING THE EQUATION  $\partial_p l(p) = 0$  ---*)
NSolve[l'[p] = 0, p] // MatrixForm
NSolve[l'[p] = 0, p][[Length[NSolve[l'[p] = 0, p]]]]
(*--- Fisher's Information ---*)
u = p /. %;
Print["The MLE(II) estimator of p is : ", u]
Fish[lit_] = -l''[lit];
FishersI = Fish[u];
SE2 =  $\frac{1}{\text{Sqrt}[Fish[u]}}$ ;
Print["Fisher's Information is: ", FishersI]
Print["The S.E. of the MLE(II) estimator of p is: ", SE2]
Print["95% Confidence Interval: ", {"(", u - 1.96 * SE2, " , ", u + 1.96 * SE2, ")"}]
```

**Παράρτημα Π.12:** Πρόγραμμα για την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχούς εκκίνησης  $p$  με τη μέθοδο EM.

```
(*--- A list with the number of attempted start ups until the end of the test ---*)
n0 = {3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 23, 26};
(*--- A list with the frequencies of each different value of the attempted Start Ups ---*)
tm = {1, 1, 1, 2, 8, 4, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1};
Maxim = Max[n0];
Do[
  (*--- Parameters k and r of the CSDF SDT ---*)
  k = 10;
  r = 4;
  s = k + r;
  (*--- Construction of the Matrices ---*)
  q = 1 - p;
  T = Table[0, {k + r}, {k + r}];
  Do[T[[i, i + 1]] = p, {i, 1, k - 1}];
  T[[k, 1]] = p;
  Do[T[[i, k + 1]] = q, {i, 1, k}];
  T[[k + r - 1, r - 1]] = p;
  T[[k + r, 1]] = p;
  Do[T[[i, i + 1]] = p, {i, k + 1, k + r - 2}];
  Do[T[[i, k + r]] = q, {i, k + 1, k + r - 1}];
  T[[k + r, k + 1]] = q;
  (*T//MatrixForm*)
  (* Matrix A1 *)
  A = Table[0, {k + r}, {k + r}];
  Do[A[[i, i + 1]] = p, {i, 1, k - 2}];
  A[[k, 1]] = p;
  A[[k + r - 1, r - 1]] = p;
  A[[k + r, 1]] = p;
  Do[A[[i, i + 1]] = p, {i, k + 1, k + r - 2}];
  (*A//MatrixForm*)
  (* Matrix A0 *)
  L = Table[0, {k + r}, {k + r}];
  Do[L[[i, k + 1]] = q, {i, 1, k}];
  L[[k + r, k + 1]] = q;
  (*L//MatrixForm*)
  (* Matrix B1 *)
  B = Table[0, {k + r}, {k + r}];
  B[[k - 1, k]] = p;
  (*B//MatrixForm*)
  (* Matrix B0 *)
  K = Table[0, {k + r}, {k + r}];
  Do[K[[i, k + r]] = q, {i, k + 1, k + r - 1}];
  (*K//MatrixForm*)
  l1 = Table[1, {s}];
  ID = IdentityMatrix[s];
  Array[e, {s}];
  Do[e[i] = ID[[i]], {i, 1, s}];

```

```

(*--- JOINT DISTRIBUTION FUNCTION (T, S) ---*)

T2 = Table[F[x, y], {x, 0, n0[[i]]}, {y, 0, n0[[i]]}];
Do[
  Do[
    If[x < y, F[x, y] = 0], {x, 0, n0[[i]]}, {y, 0, n0[[i]]};

F[0, 0] = 0;
F[1, 0] = 0;
F[1, 1] = 0;
Do[
  Do[
    F[n, y] = Sum[(β[i, 0] * f[n-1, y].e[i] + β[i, 1] * f[n-1, y-1].e[i]), {i, 1, s}], {y, 1, n}], {n, 2, n0[[i]]};

Do[
  F[n, 0] = Sum[(β[i, 0] * f[n-1, y].e[i]), {i, 1, s}], {n, 2, n0[[i]]};
(*-----*)
(*Do[
  Do[
    Print["n: ", n, " ", "y: ", y, " ", F[n, y]], {y, 0, n}], {n, 0, n0[[i]]}];
(*-----*)
F[2, 0] = q^2;
Do[Print["n0: ", n0[[i]], " ", "z: ", y, " ", F[n0[[i]], n0[[i]] - y]], {y, 0, n0[[i]]};

G[lt_] = Sum[(y) * F[lt, lt-y], {y, 1, lt}]; (*-- Sum_{y=1}^n y P (T=n, S=n-y) --*)

(*--- For the calculation of variance ---*)
G2[lt_] = Sum[(y^2) * F[lt, lt-y], {y, 0, lt}]; (*-- Sum_{y=1}^n y^2 P (T=n, S=n-y) --*)
G0[lt_] = Sum[F[lt, lt-y], {y, 0, lt}];
, {i, 1, Length[n0]}]

g = {};
Do[Print["n0: ", n0[[i]], " ", G[n0[[i]]]; AppendTo[g, G[n0[[i]]], {i, 1, Length[n0]}]
g;
Q = Table[0, {Maxim}];
Do[Q[[n]] = (n-1) * q^2 * p^(n-2), {n, 2, r}];
Do[Q[[n]] = p * Q[[n-1]] + q * p^(n-1) * Q[[n-r]], {n, r+1, k-1}];
Q[[k]] = p * Q[[k-1]] + q * p^(k-1) * Q[[k-r]] + p^k;
Q[[k+1]] = p * Q[[k]] + q * p^(k-1) * Q[[k-r+1]] + p^k * (q-p);
Do[Q[[n]] = p * Q[[n-1]] + q * p^(n-1) * Q[[n-r]] - q * p^k * Q[[n-k-1]] - q^2 * p^(n-2), {n, k+2, k+r-1}];

Q[[k+r]] = p * Q[[k+r-1]] + q * p^(k-1) * Q[[k]] - q * p^k * Q[[r-1]] - q * p^(k-r-2) * (p+q);

Do[Q[[n]] = p * Q[[n-1]] + q * p^(n-1) * Q[[n-r]] - q * p^k * Q[[n-k-1]], {n, k+r+1, Maxim}];
g4 = {};
Do[Print["n0: ", n0[[i]], " ", Simplify[Q[[n0[[i]]]]]; AppendTo[g4, Simplify[Q[[n0[[i]]]]], {i, 1, Length[n0]}]
g4;

```

```

(*--- Calculation of the Conditional Distribution ---*)
g1 = {};
Do[Print["n0: ", n0[[i]], "      ", Simplify[G0[n0[[i]]]]; AppendTo[g1, Simplify[G0[n0[[i]]]], {i, 1, Length[n0]}];
g1;
g2 = {};
Do[Print["n0: ", n0[[i]], "      ", Simplify[ $\frac{G[n0[[i]]}{G0[n0[[i]]}$ ]]; AppendTo[g2, Simplify[ $\frac{G[n0[[i]]}{G0[n0[[i]]}$ ]], {i, 1, Length[n0]}];
g2;
g3 = {};
Do[Print["n0: ", n0[[i]], "      ", tm[[i]] * Simplify[ $\frac{G[n0[[i]]}{G0[n0[[i]]}$ ]]; AppendTo[g3, tm[[i]] * Simplify[ $\frac{G[n0[[i]]}{G0[n0[[i]]}$ ]], {i, 1, Length[n0]}];
g3;
SN = Sum[tm[[i]] * n0[[i]], {i, 1, Length[n0]}];
Sum[g3[[i]], {i, 1, Length[g3]}];
Condm[p_] = Sum[g3[[i]], {i, 1, Length[g3]}];
Condm2[p_] = Sum[tm[[i]] * Simplify[ $\frac{G2[n0[[i]]}{G0[n0[[i]]}$ ]], {i, 1, Length[n0]}];

(*--- Initial Value p0 for the EM algorithm ---*)
u[0] = 0.60;
u[j_] := u[j] =  $\frac{\text{Sum}[tm[[i]] * n0[[i]], \{i, 1, \text{Length}[n0]\}] - \text{Condm}[u[j-1]]}{\text{Sum}[tm[[i]] * n0[[i]], \{i, 1, \text{Length}[n0]\}]}$ ;
Print["p0: ", u[0]];
Do[Print["j: ", j, "      ", u[j]], {j, 1, 25}];
pstar = u[25]; Print["MLE point estimator via EM method is: ", pstar]

(* Calculation of Point Estimator,
Standard Error of the Estimator and the Approximate Confidence Interval (1- $\alpha$ ) 100 % *)
p = u[25];
 $\mu$  = Condm[p];
 $\mu2$  = Condm2[p];
Var =  $\frac{\text{Sum}[tm[[i]] * \left( \left( \frac{G2[n0[[i]]}{Q[n0[[i]]} \right) - \left( \frac{G[n0[[i]]}{Q[n0[[i]]} \right) \right)^2, \{i, 1, \text{Length}[n0]\}]}{(p * (1 - p))^2}$ ;
Print["Var( $\frac{d \log L(p | T, Z)}{dp}$ ): ", Var];
Qpp =  $\left( -\frac{1}{p^2} \right) * \text{Sum}[tm[[i]] * n0[[i]], \{i, 1, \text{Length}[n0]\}] + \frac{1 - 2 * p}{p^2 * (1 - p)^2} * \text{Sum}[tm[[i]] * \left( \frac{G[n0[[i]]}{Q[n0[[i]]} \right), \{i, 1, \text{Length}[n0]\}]$ ;
Print["- [ $\frac{d^2 Q}{dp^2}$ ]: ", -Qpp];
SE =  $\frac{1}{\sqrt{-Qpp - Var}}$ ;
Print["The EM-estimator is: ", N[p]];
Print["The S.E. of the EM-estimator is: ", N[SE]];
Print["95% Confidence Interval: ", " ( ", p - 1.96 * SE, " , ", p + 1.96 * SE, " ) "];

```





## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αντζουλάκος Δ. (2007). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Πειραιάς.
- Ταγαράς Γ. (2001). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Εκδόσεις Ζήτη.
- Acosta-Mejia, C. A. (1998). Monitoring reduction in variability with the range, *IIE Transactions*, **30**, 515-523.
- Acosta-Mejia, C. A. (1999). Improved  $p$  charts to monitor process quality, *IIE Transactions*, **31**, 509-516.
- Acosta-Mejia, C. A. (2007). Two sets of runs rules for the X-bar chart, *Quality Engineering*, **19**, 129-136.
- Aki, S. (1985). Discrete Distributions of order  $k$  on a binary sequence, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 205-224.
- Aki, S. (1992). Waiting time problems for a sequence of discrete random variables, *Annals of the Institute of Mathematical Statistics*, **44**, 363-378.
- Aki, S. and Hirano, K. (1988). Some characteristics of the binomial distribution of order  $k$  and related distributions, In *Statistical Theory and Data Analysis II* (Ed., K. Matusita), pp. 211-222, Elsevier Science Publishers, B. V., North-Holland.
- Aki, S. and Hirano, K. (1994). Distributions of numbers of failures and successes until the first consecutive  $k$  successes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **46**, 193-202.
- Aki, S. and Hirano, K. (1995). Joint distributions of numbers of success-runs and failures until the first consecutive  $k$  successes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **47**, 225-235.
- Aki, S. and Hirano, K. (2000). Numbers of success-runs of specified length until certain stopping time rules and generalized binomial distributions of order  $k$ , *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **52**, 767-777.
- Aki, S., Kuboki, H. and Hirano, K. (1984). On discrete distributions of order  $k$ , *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **36**, 431-440.
- Al-Ghanim, A. and Jordan, J. (1996). Automated process monitoring using statistical pattern recognition techniques on X-bar control charts, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, **2**(1), 25-49.

- Alt, F. B. and Smith, N. D. (1988). *Multivariate Process Control. Handbook of Statistics*, (Eds., P.R. Krishnaiah and C. R. Rao), Elsevier Science Publishers: North-Holland V.7, 333-351.
- Amin, R. W. and Letsinger, W. G. H. (1991). Improved switching rules in control procedures using variable sampling intervals, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **20**, 205-230.
- Amin R. W. and Hemasinha, R. (1993). The switching behavior of X-bar charts with variable sampling intervals, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **22**(7), 2081-2102.
- Antzoulakos, D. L. (1999). On waiting time problems associated with runs in Markov dependent trials, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **51**, 323-330.
- Antzoulakos, D. L. (2001). Waiting times for patterns in a sequence of multistate trials, *Journal of Applied Probability*, **38**, 508-518.
- Antzoulakos, D. L. and Boutsikas, M. V. (2007). A direct method to obtain the joint distribution of successes, failures and patterns in enumeration problems, *Statistics & Probability Letters*, **77**(1), 32-39.
- Antzoulakos, D. L. and Philippou, A. N. (1996). Derivation of the probability distribution functions for succession quota random variables, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 551-561.
- Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C. (2008a). The revised  $m$ -of- $k$  runs rule, *Quality Engineering*, **20**(1), 75-81.
- Antzoulakos, D. L. and Rakitzis, A. C. (2008b). The modified  $r$  out of  $m$  control chart, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **37**(2), 396-408.
- Antzoulakos, D. L., Koutras, M. V. and Rakitzis, A. C. (2008c). Start-up demonstration tests based on run and scan statistics, *Submitted for publication*.
- Aparisi, F., Jabaloyes, J. and Carrion, A. (1999). Statistical properties of the  $|S|$  multivariate control chart, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **28**, 2671-2686.
- Aparisi, F., Champ, C. W. and Garcia Diaz, J. C. (2004). A performance analysis of Hotelling's  $\chi^2$  control chart with supplementary runs rules, *Quality Engineering*, **16**(3), 13-22.

- Artiles-Leon, N., David, H. T. and Meeks, H.D. (1996). Statistical optimal design of control charts with supplementary stopping rules, *IIE Transactions*, **28**(3), 225-236.
- Balakrishnan, N. (1997). Joint distributions of numbers of success-runs and failures until the first consecutive  $k$  successes in a binary sequence, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **49**, 519-529.
- Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (2000). Start-up demonstration tests with rejection of units upon observing  $d$  failures, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **52**, 184-196.
- Balakrishnan, N. and Koutras, M. V. (2002). *Runs and Scans with Applications*. John Wiley: New York.
- Balakrishnan, N., Balasubramanian, K. and Viveros, R. (1995). Start-up demonstration tests under correlation and corrective action, *Naval Research Logistics*, **42**, 1271-1276.
- Balakrishnan, N., Mohanty, S. G. and Aki, S. (1997). Start-up demonstration tests under Markov dependence model with corrective actions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **49**, 155-169.
- Barnard, G. A. (1959). Control charts and stochastic processes, *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)*, **21**, 239-271.
- Bersimis, S., Psarakis, S. and Panaretos, J. (2007). Multivariate statistical process control charts: An overview, *Quality and Reliability Engineering International*, **23**(5), 517-543.
- Bourke, P. D. (1991). Detecting a shift in fraction nonconforming using run-length control charts with 100% inspection, *Journal of Quality Technology*, **23**, 225-238.
- Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length, *Biometrika*, **59**, 539-549.
- Burr, I. W. (1979). *Elementary Statistical Quality Control*, Marcel Dekker Inc. New York.
- Calzada, M. E. and Scariano, S. M. (2001). The robustness of the synthetic control chart to non-normality, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **30**, 311-326.
- Celano, G., Costa, A. and Fichera, S. (2006). Statistical design of variable sample size and sampling interval X-bar control charts with run rules, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **28**, 966-977.

- Chadjiconstantinidis, S. and Koutras, M. V. (2001). Distributions of the number of failures and successes in a waiting time problem, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53**, 576-598.
- Chadjiconstantinidis, S., Antzoulakos, D. L. and Koutras, M. V. (2000). Joint distributions of successes, failures and patterns in enumeration problems, *Advances in Applied Probability*, **32**, 866-884.
- Chambers, J., Cleveland, W., Kleiner, B. and Tukey, P. (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*. Wadsworth.
- Champ, C. W. (1992). Steady-state run length analysis of a Shewhart quality control chart with supplementary runs rules, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **21**, 3, 765-777.
- Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Technometrics*, **29**, 393-399.
- Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1990). A program to evaluate the run length distribution of a Shewhart control chart with supplementary runs rules, *Journal of Quality Technology*, **22**(1), 68-73.
- Champ, C. W. and Lowry, C. A. (1994). Adjusting the S-chart for detecting both increases and decreases in the standard deviation, *Proceedings Annual Decision Sciences Institute, 1994 Annual Meeting, Decision Science Institute*, **3**, pp. 2112-14, Atlanta.
- Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1997). Signal probabilities of runs rules supplementing a Shewhart control chart, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **26**, 1347-1360.
- Chan, P. S., Ng, T. H. K. and Balakrishnan, N. (2007). Statistical inference for start-up demonstration tests with rejection of units upon observing  $d$  failures, *Submitted for Publication*.
- Chang, T. C. and Gan, F. F. (2007). Modified Shewhart charts for high yield processes, *Journal of Applied Statistics*, **34**(7), 857-877.
- Chao, M. T. (1999). Applications of Markov chains in quality-related matters, In *Statistical Process Monitoring and Optimization* (eds. S. H. Park and G. G. Vining), Marcel Dekker, New York, 175-188.
- Chao, M. T. and Fu, J. C. (1989). A limit theorem of certain repairable systems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **41**, 809-818.

- Chen, F. L. and Huang, H. J. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample range, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **26**, 842-851.
- Crosier, R. B. (1986). A new two-sided cumulative sum quality control scheme, *Technometrics*, **28**(3), 187-194.
- Crowder, S. V. (1987). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics*, **29**, 401-407.
- Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes, *Journal of Quality Technology*, **21**, 155-162.
- Cui, R. and Reynolds, M. R. (1988). X-bar charts with runs rules and variable sampling intervals, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **17**, 1073-1093.
- Das, T. K., Jain, V. and Gosavi, A. (1997). Economic design of dual-sampling interval policies for X-bar charts with and without run rules, *IIE Transactions*, **29**, 497-506.
- Davis, R. B. and Woodall, W. H. (2002). Evaluating and improving the synthetic control chart, *Journal of Quality Technology*, **34**(2), 200-206.
- Derman C. and Ross, S. M. (1997). *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press: San Diego.
- Dodge, H. F. (1943). A sampling inspection plan for continuous production, *Annals of the Mathematical Statistics*, **14**, 264-279.
- Does, R. J. M. M. and Schriever, B. F. (1992). Variables control chart limits and tests for special causes, *Statistica Neerlandica*, **46**(4), 229-245.
- Dudding, B.P. and Jannet, W. J. (1942). *Quality control charts*, B.S. 600 R. London: B.S.I.
- Duncan, A. J. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*, 5<sup>th</sup> edn., Irwin Homewood, IL.
- Ebneshahrashoob, M. and Sobel, M. (1990). Sooner and later waiting time problems for Bernoulli trials: frequency and run quotas, *Statistics & Probability Letters*, **9**, 5-11.
- Ewan, W. D. and Kemp, K. W. (1960). Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results, *Biometrika*, **47**, 363-380.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. I, 3<sup>rd</sup> ed.), Wiley, New York.

- Fu, J. C. (1986). Reliability of consecutive-k-out-of-n:F system with  $(k - 1)$  step Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 602-606.
- Fu, J. C. (1996). Distribution theory of runs and patterns associated with a sequence of multi-state trials, *Statistica Sinica*, **6**, 957-974.
- Fu, J. C. and Koutras, M. V. (1994). Distribution theory on runs: a Markov chain approach, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1050-1058.
- Fu, J. C. and Chang, Y. M. (2002). On probability generating functions for waiting time distributions of compound patterns in a sequence of multistate trials, *Journal of Applied Probability*, **39**, 70-80.
- Fu, J. C. and Lou, W. Y. W. (2003). *Distribution Theory of Runs and Patterns and its Applications: A Finite Markov Chain Imbedding Approach*, World Scientific.
- Fu, J. C., Shmueli, G. and Chang, Y. M. (2003). A unified Markov chain approach for computing the run length distribution in control charts with simple or compound rules, *Statistics & Probability Letters*, **65**, 457-466.
- Fu, J. C., Spiring, F. A., and Xie, H. (2002). On the average run lengths of quality control schemes using a Markov chain approach, *Statistics and Probability Letters*, **56**, 369-380.
- Grant, E. L., and Leavenworth, R. S. (1999). *Statistical Quality Control*, McGraw Hill.
- Govindaraju, K. and Lai, C. D. (1999). Design of multiple sampling plan, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **28**, 1-11.
- Hahn, G. J. and Gage, J. B. (1983). Evaluation of a start-up demonstration test, *Journal of Quality Technology*, **15**, 103-106.
- Hirano, K. (1986). Some properties of the distributions of order  $k$ , In *Fibonacci Numbers and Their Applications* (eds. A. N. Philippou, G. E. Bergum, and A. F. Horadam), Reidel, Dordrecht, pp.43-53.
- Hirano, K., and Aki, S. (1987). Properties of the extended distributions of order  $k$ , *Statistics & Probability Letters*, **6**, 67-69.
- Huang, H. J. and Chen, F. L. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample standard deviation, *Computers and Industrial Engineering*, **49**, 221-240.
- Hurwitz, A. M. and Mathur, M. (1992). A very simple set of process control rules, *Quality Engineering*, **5**(1), 21-29.

- Jaehn, A. H. (1987a). Improving QC efficiency with zone control charts, *ASQC Chemical and Process Industries Division News*, **4**, 1-2.
- Jaehn, A. H. (1987b). Zone control charts – SPC made easy, *Quality*, October 1987, 51-53.
- Jaehn, A. H. (1987c). Zone control charts: A new tool for quality control, *Tappi Journal*, **70**, 159-161.
- Jaehn, A. H. (1989). Zone control charts find new applications, *ASQC Quality Congress Transactions*, 890-895.
- Jaehn, A. H. (1991). The zone control chart, *Quality Progress*, **24**(7), 65-68.
- Khoo, M. B. C. (2004a). Design of runs rules schemes, *Quality Engineering*, **16**(2), 27-43.
- Khoo, M. B. C. (2004b). Increasing the sensitivity of control chart for fraction nonconforming, *Quality Engineering*, **16**(2), 307-319.
- Khoo, M. B. C. (2005a). A nonrigorous approach of incorporating sensitizing rules into multivariate control charts, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **4**(2), 567-582.
- Khoo, M. B. C. (2005b). A modified *S* chart for the process variance, *Quality Engineering*, **17**, 567-577.
- Khoo, M. B. B. and Quah, S. H. (2003). Incorporating runs rules into Hotelling's  $\chi^2$  control charts, *Quality Engineering*, **15**, 671-675.
- Khoo, M. B. B. and Quah, S. H. (2004). Alternatives to the multivariate control chart for process dispersion, *Quality Engineering*, **16**(3), 423-435.
- Khoo, M. B. C. and Ariffin, K. N. (2006). Two improved runs rules for the Shewhart  $\bar{X}$  control chart, *Quality Engineering*, **18**, 1-6.
- Khoo, M. B. B., Quah, S. H. and Low, H. C. (2004). Powerful rules for Hotelling's  $\chi^2$  control chart, *Quality Engineering*, **17**, 139-149.
- Klein, M. (1996). Composite Shewart – EWMA statistical control schemes, *IIE Transactions*, **29**, 475-481.
- Klein, M. (1997). Modified Shewhart – exponentially weighted moving average control charts, *IIE Transactions*, **29**, 1051-1056.
- Klein, M. (2000a). Two alternatives to the Shewhart  $\bar{X}$  control chart, *Journal of Quality Technology*, **32**, 427-431.

- Klein, M. (2000b). Modified S-charts for controlling process variability, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **29**, 919-940.
- Koutras, M. V. (1997a). Waiting time distributions associated with runs of fixed length in two-state Markov chains, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 789-806.
- Koutras, M. V. (1997b). Waiting times and number of appearances of events in a sequence of discrete random variables, In *Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics* (Ed., N. Balakrishnan), pp. 363-384, Birkhauser, Boston.
- Koutras, M. V. (2003). Applications of Markov chains to the distribution theory of runs and patterns, In *Handbook of Statistics* (Eds., D. N. Shanbhag and C. R. Rao), pp.431-472, Elsevier Science.
- Koutras, M. V. and Alexandrou, V. A. (1995). Runs, scans and urn model distributions: A unified Markov chain approach, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **47**, 743-766.
- Koutras, M. V. and Alexandrou, V. A. (1997). Sooner waiting time problems in a sequence of trinary trials, *Journal of Applied Probability*, **34**, 593-609.
- Koutras, M. V. and Balakrishnan, N. (1999). A start-up demonstration test using a simple scan-based statistic, In *Scan Statistics and Applications* (Eds., Glaz, J. and Balakrishnan, N.), Birkhauser, Boston, pp.251-267.
- Koutras, M. V., Bersimis, S. and Antzoulakos, D. L. (2006). Improving the performance of the chi-square control chart via runs rules, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **8**, 409-426.
- Koutras, M. V., Bersimis, S. and Maravelakis, P. E. (2007). Statistical process control using Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **9**, 207-224.
- Levey, S. and Jennings, E. R. (1950) The use of control charts in the clinical laboratory, *American Journal of Clinical Pathology*, **20**, 1059.
- Lowry, C. A., Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **24**, 409-437.
- Lucas, J. M. (1982). Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes, *Journal of Quality Technology*, **14**, 51-59.



- Lucas, J. M. and Crosier, R. B. (1982). Fast initial response for CUSUM quality control schemes: Give your CUSUM a head start, *Technometrics*, **24**, 199-205.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements, *Technometrics*, **32**, 1-12.
- Lucas, J. M., Davis, D. J. and Saniga, E. M. (2006). Detecting improvement using Shewhart attribute control charts when the lower control limit is zero, *IIE Transactions*, **38**, 699-709.
- Makri, F. S., Philippou, A. N. and Psillakis, Z. M. (2007). Success run statistics defined on an urn model, *Advances in Applied Probability*, **39**(4), 991-1019.
- Martin, D. E. K. (2004). Markovian start-up demonstration tests with rejection of units upon observing  $d$  failures, *European Journal of Operational Research*, **155**, 474-486.
- Martin, D. E. K. (2008). Application of auxiliary Markov chains to start-up demonstration tests, *European Journal of Operational Research*, **184**, 574-583.
- Mason, R. L. and Young, J. C. (2001). *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, ASA-SIAM.
- Montgomery, D. C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control* (5<sup>th</sup> ed.), New York: John Wiley.
- Moore, P. T. (1958). Some properties of runs in quality control procedures, *Biometrika*, **45**, 89-95.
- Mosteller, F. (1941). Note on an application of runs to quality control charts, *Annals of Mathematical Statistics*, **12**, 228-232.
- Nelson, L. S. (1984). The Shewhart control chart – Tests for special causes, *Journal of Quality Technology*, **16**(4), 337-339.
- Nelson, L. S. (1985). Interpreting Shewhart's X-bar chart, *Journal of Quality Technology*, **17**, 114-116.
- Nelson, L. S. (1990). Monitoring reduction in variation with a range chart, *Journal of Quality Technology*, **22**, 163-165.
- Nelson, L. S. (1997). Supplementary runs tests for  $np$  control charts, *Journal of Quality Technology*, **29**, 225-227.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes, *Biometrika*, **41**, 100-115.
- Page, E. S. (1955). Control charts with warning lines, *Biometrika*, **42**, 243-257.
- Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines, *Technometrics*, **5**, 307-315.

- Palm, A. C. (1990). Tables of run length percentiles for determining the sensitivity of Shewhart control charts for averages with supplementary runs rules, *Journal of Quality Technology*, **22**, 289-298.
- Philippou, A. N. (1984). The negative binomial distribution of order  $k$  and some of its properties, *Biometrical Journal*, **26**, 789-794.
- Philippou, A. N. (1986). Distributions and Fibonacci polynomials of order  $k$ , longest runs and reliability of consecutive- $k$ -out-of- $n$ :  $F$  systems, In *Fibonacci Numbers and their Applications* (Eds., A. N. Philippou et al.), **28**, pp.203-227, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.
- Philippou, A. N. and Muwafi, A. A. (1982). Waiting for the  $k$ -th consecutive success and the Fibonacci sequence of order  $k$ , *The Fibonacci Quarterly*, **20**, 28-32.
- Philippou, A. N. and Makri, F. S. (1986). Success runs and longest runs, *Statistics & Probability Letters*, **4**, 211-215.
- Philippou, A. N., Georghiou, C., and Philippou, G. N. (1983). A generalized geometric distribution and some of its properties, *Statistics and Probability Letters*, **1**, 171-175.
- Pignatiello, J. J. Jr., Acosta-Mejia, C. A. And Rao, B. V. (1995). The performance of control charts for monitoring process dispersion, In *Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference*, (Eds., Schmeiser, B. and Bidanda, B.), Institute of Industrial Engineers, Nashville, TN, pp.320-328.
- Praire, R. R., Zimmer, W. J., and Brookhouse, J. K. (1962). Some acceptance sampling plans based on the theory of runs, *Technometrics*, **4**, 177-185.
- Reynolds, M. R., Amin, R. W., Arnold, J. C. and Nachlas, J. A. (1988). X-bar charts with variable sampling intervals, *Technometrics*, **30**, 181-192.
- Rhoads, T. R., Montgomery, D. C. and Mastrangelo, C. M. (1996). Fast initial response scheme for the EWMA control chart, *Quality Engineering*, **9**, 317-327.
- Robert, P. C. and Casella, G. (2005). *Monte Carlo Statistical Methods*, 2<sup>nd</sup> ed, Springer, New York.
- Roberts S. W. (1958). Properties of control chart zone tests, *Bell System Technical Journal*, **37**.
- Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages, *Technometrics*, **1**, 97-101.
- Ryan, T. P. (2000). *Statistical Methods for Quality Improvement* (2<sup>nd</sup> ed.), New York: John Wiley.

- Scariano, M. S. and Calzada, M.E. (2003). A note on the lower-sided synthetic chart for exponentials, *Quality Engineering*, **15**, 677-680.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of the Manufactured Product*, Van Nostrand, New York.
- Shmueli, G. (2002). System-wide probabilities for systems with runs and scans rules, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **4**, 409-419.
- Shmueli, G. and Cohen A. (2003). Run-length distribution for control charts with runs and scans rules, *Communication in Statistics – Theory and Methods*, **32**, 475-495.
- Smith, M. L. and Griffith, S. W. (2004). Multistate and scan start-up demonstration tests, Technical Report No. 392, Department of Statistics, University of Kentucky.
- Smith, M. L. and Griffith, S. W. (2005). Start-up demonstration tests based on consecutive successes and total failures, *Journal of Quality Technology*, **37**, 186-198.
- Smith, M. L. and Griffith, S. W. (2008). The analysis and comparison of start-up demonstration tests, *European Journal of Operational Research*, **186**, 1029-1045.
- Trietsch, D. and Hwang, F. K. (1997). Note on pattern tests for special causes, *Quality Engineering*, **9**(3), 467-477.
- Trip, A. and Wieringa, J. E. (2006). Individuals charts and additional tests for changes in spread, *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, 239-249.
- Tuprah, K. and Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts, *Sequential Analysis*, **6**, 155-163.
- Uchida, M. (1998). On generating function of waiting time problems for sequence patterns of discrete random variables, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **50**, 655-671.
- Uppuluri, V. R. R. and Patil, S. A. (1983). Waiting times and generalized Fibonacci sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **21**, 242-249.
- Vance, L. C. and McDonald, G. C. (1979). A class of multiple run sampling plans, *Technometrics*, **21**, 141-146.
- Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1993). Statistical inference from start-up demonstration test data, *Journal of Quality Technology*, **25**, 119-130.
- Walker, E., Philpot, J. W. and Clement, J. (1991). False signal rates for the Shewhart control chart with supplementary runs tests, *Journal of Quality Technology*, **23**, 247-252.

- Weiler, H. (1953). The use of runs to control the mean in quality control, *Journal of the American Statistical Association*, **48**, 816-825.
- Western Electric Company (1956). *Statistical Quality Control Handbook*, Western Electric Corporation, Indianapolis, IN.
- Westgard, J. O. and Groth, T. (1979). Power functions for statistical control rules, *Clinical Chemistry*, **25**(6), 863-869.
- Westgard, J. O., Barry, P. L., Hunt, M. R. and Groth, T. (1981). A multi-rule Shewhart chart for quality control in clinical chemistry, *Clinical Chemistry*, **27**(3), 493-501.
- Wheeler, D. J. (1983). Detecting a shift in process average: Tables of power function for X-bar charts, *Journal of Quality Technology*, **15**, 155-170.
- Wheeler, D. J. and Chambers, D. S. (1992). *Understanding Statistical Process Control*, Second Edition, SPC Press.
- Wolfowitz, J. (1943). On the theory of runs with some applications to quality control, *Annals of Mathematical Statistics*, **14**, 280-288.
- Wu, Z. and Spedding, T. A. (2000). A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean, *Journal of Quality Technology*, **32**, 32-38.
- Wu, Z. and Yeo, S. H. (2001). Implementing synthetic control chart for attributes, *Journal of Quality Technology*, **33**, 112-114.
- Wu, Z., Song H. Y. and Spedding, T. A. (2001). A synthetic control chart for detecting fraction nonconforming increases, *Journal of Quality Technology*, **33**(1), 104-111.
- Yang, C., Tse, S.-K. and Li, G. (2006). False signal rates for the X-bar control charts with runs tests when process parameters are estimated, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **35**, 1045-1056.
- Zhang, S. and Wu, Z. (2005). Designs of control charts with supplementary runs rules, *Computers and Industrial Engineering*, **49**, 76-97.
- Zhao, Y. and Wang, Z. (2007). Shewhart X-bar control chart with two optimal supplementary runs rules, Preprint.