

**ΕΠΙΛΟΓΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΡΙΖΕΣ**

Θεολόγος Παντελίδης

Η διατριβή αυτή κατατέθηκε προς εκπλήρωση των υποχρεώσεων για την απονομή
Διδακτορικού Διπλώματος στην Οικονομετρία

Υπεύθυνη Επιτροπή:

Καθηγητής Νικήτας Πιττής, Πρόεδρος
Καθηγητής Άγγελος Α. Αντζουλάτος
Καθηγητής Μάρκος Κούτρας
Αναπληρωτής Καθηγητής Δημήτριος Μαλλιάρopoulos
Καθηγητής Ιωάννης Μουρμούρας
Επίκουρος Καθηγητής Σπυρίδων Σκούρας
Καθηγητής Γκίκας Χαρδούβελης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Πειραιάς, Απρίλιος 2005

Σύντομη Περίληψη

Επιλογή Υποδείγματος και Προβλέψεις στα Πλαίσια Χρονολογικών Σειρών με και χωρίς

Μοναδιαίες Ρίζες

του Θεολόγου Παντελίδη

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικήτας Πιπτής

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Αυτή η διατριβή ερευνά τη προβλεπτική ικανότητα εναλλακτικών μοντέλων χρονοσειρών στην πρόβλεψη είτε του δεσμευμένου μέσου, είτε της δεσμευμένης διακύμανσης μιας (βαθμωτής ή διανυσματικής) στοχαστικής διαδικασίας. Εξετάζεται επίσης ο ρόλος της ύπαρξης αιτιότητας κατά Granger (Granger causality) στις πρώτες ή/και δεύτερες ροπές της διαδικασίας, στη προβλεπτική ικανότητα αυτών των μοντέλων. Επιπλέον, μελετώνται ζητήματα σχετικά με την ανάλυση Impulse Response. Ειδικότερα, προτείνεται μια νέα μεθοδολογία για τον υπολογισμό της συμβολής μιας μεταβλητής στην διάρκεια μιας διαταραχής σε μια άλλη μεταβλητή. Σε αυτή τη μελέτη ερευνάται επίσης η δυνατότητα μερικών γνωστών κριτηρίων επιλογής μοντέλων να καθορίσουν το βέλτιστο μοντέλο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Η διατριβή αποτελείται από πέντε δοκίμια. Στο πρώτο δοκίμιο, παρουσιάζεται το "ισοδύναμο" μονομεταβλητό αυτοπαλίνδρομο κινούμενου μέσου μοντέλο (ARMA) ενός στάσιμου, διμεταβλητού διανυσματικού αυτοπαλίνδρομου VAR(1) μοντέλου και εξετάζεται η σχετική προβλεπτική ικανότητα των δύο παραμετροποιήσεων βάσει τόσο αναλυτικών

όσο και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των μεταβλητών του VAR μοντέλου είναι απαραίτητη συνθήκη ώστε οι προβλέψεις του VAR μοντέλου να είναι πιο ακριβείς από τις προβλέψεις του ARMA μοντέλου σε ότι αφορά το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE). Επιπλέον, με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo ερευνάται η ισχύς των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων σε πεπερασμένα δείγματα. Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν την ανωτερότητα του VAR(1) μοντέλου σε σχέση με το "ισοδύναμο" ARMA μοντέλο, ειδικά για τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Το δεύτερο δοκίμιο εισάγει μια νέα μεθοδολογία που στοχεύει στη μέτρηση της συμβολής μιας μεταβλητής στην διάρκεια μιας διαταραχής στη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Η μεθοδολογία είναι βασισμένη στη σύγκριση της συνάρτησης Impulse Response ενός VAR μοντέλου με τη συνάρτηση Impulse Response του "ισοδύναμου" ARMA μοντέλου της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Το τρίτο δοκίμιο εστιάζει στην ύπαρξη της αιτιότητας κατά Granger στις πρώτες και δεύτερες ροπές οικονομικών χρονοσειρών. Πιο συγκεκριμένα, το τρίτο δοκίμιο εξετάζει τον βαθμό επίδρασης της ύπαρξης αιτιότητας κατά Granger στο μέσο, στη συμπεριφορά μερικών πρόσφατα προτεινόμενων τεστ για τον έλεγχο αιτιότητας κατά Granger στη διακύμανση. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων Monte Carlo δείχνουν ότι το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να φιλτράρει τις αλληλεπιδράσεις των υπό εξέταση μεταβλητών στο δεσμευμένο μέσο (πριν εξεταστεί η ύπαρξη ή μη αιτιότητας κατά Granger στη διακύμανση) πρέπει να λαμβάνει υπόψη του την πιθανή ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στο μέσο. Ελλείψει ενός τέτοιου φιλτραρίσματος, η παράβλεψη της ύπαρξης αιτιότητας στο μέσο οδηγεί σε σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions) των υπό εξέταση στατιστικών, προσκομίζοντας λανθασμένες

ενδείξεις για ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στη δεσμευμένη διακύμανση των σειρών. Το τέταρτο δοκίμιο ερευνά την επίδραση της επιβολής άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης (cointegration restrictions) ή της παράβλεψης έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης στη προβλεπτική ικανότητα ενός VAR μοντέλου. Εξετάζει επίσης την επίδραση της παράβλεψης της ύπαρξης επιδράσεων GARCH στην υπό εξέταση μεταβλητή, στη συμπεριφορά των τεστ συνολοκλήρωσης και στη προβλεπτική ικανότητα του VAR μοντέλου. Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι το "προβλεπτικό κόστος" της επιβολής άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης είναι πολύ μεγαλύτερο από το "προβλεπτικό κόστος" της παράβλεψης έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης. Επιπλέον, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η ύπαρξη επιδράσεων GARCH αυξάνει το "προβλεπτικό κόστος" της λανθασμένης παραμετροποίησης. Τέλος, το πέμπτο δοκίμιο εστιάζει στην πρόβλεψη της δεσμευμένης διακύμανσης μιας χρονοσειράς. Πιο συγκεκριμένα, το τελευταίο δοκίμιο εξετάζει τους λόγους για την κακή προβλεπτική ικανότητα του GARCH(1,1) μοντέλου που παρατηρείται σε πολλές εμπειρικές μελέτες. Αντίθετα με τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών, τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6, αποδεικνύουν ότι το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) μπορεί να αξιολογήσει σωστά τη σχετική προβλεπτική ικανότητα του GARCH(1,1) μοντέλου με ένα μοντέλο που υποθέτει σταθερή δεσμευμένη διακύμανση, δηλαδή ομοσκεδαστικότητα (homoscedasticity). Συμπεραίνεται ότι η φαινομενικά κακή προβλεπτική ικανότητα του GARCH(1,1) μοντέλου που αναφέρεται σε πολλές εμπειρικές μελέτες οφείλεται στην λανθασμένη στατιστική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται προκειμένου να αξιολογηθεί η σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων. Τέλος, παρέχονται χρήσιμες προτάσεις για την

κατάλληλη στατιστική αξιολόγηση των προβλέψεων του GARCH(1,1) μοντέλου, μαζί με μια εμπειρική εφαρμογή βασισμένη σε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες του δολαρίου των ΗΠΑ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ευχαριστίες.....	viii
Λίστα Ακρόνυμων.....	ix
Λίστα Διαγραμμάτων.....	xi
Λίστα Πινάκων.....	xii
Διάγραμμα Διατριβής.....	xviii
1. Εισαγωγή και Επισκόπηση.....	1
2. Η "Ισοδύναμη" Μονομεταβλητή ARMA Παραμετροποίηση ενός VAR(1) Μοντέλου.....	7
2.1 Εισαγωγή.....	7
2.2 Η Μονομεταβλητή ARMA Παραμετροποίηση μιας Στάσιμης VAR(1) Διαδικασίας.....	10
2.3 Πρόβλεψη της y_{1t} : VAR(1) εναντίον "Ισοδύναμης" ARMA(2,1) Παραμετροποίησης.....	12
2.3.1 Γνωστές Παράμετροι.....	12
2.3.2 Εκτιμημένες Παράμετροι (ο Βαθμός (Order) των Μοντέλων Υποτίθεται ότι είναι Γνωστός).....	16
2.3.3 Σύγκριση της Προβλεπτικής Ακρίβειας του VAR(1) Μοντέλου και του "Ισοδύναμου" ARMA(2,1) Μοντέλου.....	19
2.4 Προσομοίωση Monte Carlo.....	20
2.4.1 Ο ρόλος της Αιτιότητας κατά Granger.....	24
2.4.2 Ο ρόλος της Εμμονής (Persistence) της Στοχαστικής Διαδικασίας.....	29
2.5 Συμπεράσματα.....	31
3. Μέτρηση της Συνεισφοράς μιας Μεταβλητής στην Εμμονή μιας Διαταραχής.....	34
3.1 Εισαγωγή.....	34
3.2 Impulse Response Analysis: Πολυμεταβλητά Μοντέλα και οι "Ισοδύναμες" Μονομεταβλητές Παραμετροποιήσεις τους.....	36
3.2.1 Η Περίπτωση μιας Διαγώνιας Μήτρας Συνδιακύμανσης, ($\sigma_{12} = 0$).....	38
3.2.2 Η Περίπτωση μιας Μη-Διαγώνιας Μήτρας Συνδιακύμανσης, ($\sigma_{12} \neq 0$).....	40
3.3 Συμπεράσματα.....	41
4. Έλεγχος για την Ύπαρξη Αιτιότητας κατά Granger στη Διακύμανση κάτω από τη Παρουσία Αιτιότητας στο Μέσο.....	43
4.1 Εισαγωγή.....	43
4.2 Έλεγχοι για Αιτιότητα στη Διακύμανση.....	44
4.3 Αποτελέσματα Monte Carlo.....	46
4.4 Συμπεράσματα.....	51
5. Εκτίμηση και Πρόβλεψη στα Πλαίσια ενός VAR(1) Μοντέλου με Ρίζες πλησίον της Μονάδος και Ετεροσκεδαστικότητα.....	52

5.1 Εισαγωγή	52
5.2 Θεωρητικό Υποβάθρου	56
5.3 Αποτελέσματα Monte Carlo	60
5.3.1 Κόστος Πρόβλεψης Τύπου I (FC1)	61
5.3.2 Κόστος Πρόβλεψης Τύπου II (FC2).....	75
5.4 Μια Εμπειρική Εφαρμογή	77
5.5 Συμπεράσματα	80
6. Προβλέποντας τη Διακύμανση με ένα GARCH(1,1) Μοντέλο: Κάποια Νέα Αναλυτικά και Monte Carlo Αποτελέσματα.....	83
6.1 Εισαγωγή	83
6.2 Αξιολόγηση της Προβλεπτικής Απόδοσης του GARCH(1,1) Μοντέλου ..87	
6.2.1 Μη-Εφικτό και Εφικτό MSE των Προβλέψεων του GARCH(1,1) Μοντέλου	89
6.2.2 Μη-Εφικτό και Εφικτό MSE των Προβλέψεων του Ομοσκεδαστικού Μοντέλου	92
6.2.3 Η Σχετική Προβλεπτική Απόδοση του GARCH(1,1) Μοντέλου και του Ομοσκεδαστικού Μοντέλου	94
6.3 Η Σύγκριση της Προβλεπτικής Απόδοσης των δύο Μοντέλων	97
6.3.1 Τεστ για τη Σύγκριση της Προβλεπτικής Ακρίβειας	98
6.4 Προσομοιώσεις Monte Carlo.....	100
6.4.1 Στατικές Προβλέψεις	100
6.4.2 Δυναμικές Προβλέψεις	113
6.5 Μια Εμπειρική Εφαρμογή	114
6.6 Συμπεράσματα	119
7. Τελικές Παρατηρήσεις.....	122
Βιβλιογραφία	128
A. Παράρτημα Κεφαλαίου 2.....	135
A.1 Συνθήκες Στασιμότητας του VAR(1) Μοντέλου.....	135
A.2 Υπολογισμός της ARMA(2,1) Παραμετροποίησης της y_{1t}	135
A.3 Υπολογισμός της ARMA(2,1) Παραμετροποίησης της y_{2t}	138
A.4 Ισοδυναμία των (2.3) και (2.4) όταν $a_{12} = 0$	139
A.5 Απόδειξη της Πρότασης 2.3.....	141
A.6 Πίνακες.....	145
B. Παράρτημα Κεφαλαίου 3.....	164
B.1 Απόδειξη της Πρότασης 3.1.....	164
B.2 Απόδειξη της Πρότασης 3.2.....	164
B.3 Απόδειξη του Λήμματος 3.1.....	165
B.4 Απόδειξη της Πρότασης 3.3.....	165
B.5 Απόδειξη του Λήμματος 3.2.....	166
C. Παράρτημα Κεφαλαίου 4.....	167
C.1 Πίνακες.....	167
D. Παράρτημα Κεφαλαίου 5.....	170
D.1 Πίνακες.....	170
E. Παράρτημα Κεφαλαίου 6.....	184

E.1 Απόδειξη της Πρότασης 6.1.....	184
E.2 Απόδειξη της Πρότασης 6.2.....	184
E.3 Διαγράμματα.....	185
E.4 Πίνακες.....	186
F. «Γέννηση» Τυχαίων Διανυσμάτων από μια Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή.....	195

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Είμαι ευγνώμων στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικήτα Πιττή για τη συνεχή βοήθεια και την ενθάρρυνσή του καθώς επίσης και την προθυμία του να μοιραστεί μερικές από τις ιδέες του μαζί μου. Το τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς μου παρείχε ένα φιλικό περιβάλλον κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Θα επιθυμούσα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Άγγελο Α. Αντζουλάτο, τον αναπληρωτή καθηγητή Δημήτριο Μαλλιάρόπουλο και τον αναπληρωτή καθηγητή Εμμανουήλ Τσιριτάκη για τα χρήσιμα σχόλιά τους. Επιθυμώ επίσης να ευχαριστήσω τη Δρ. Αικατερίνη Πανοπούλου και τον Δρ. Τιμόθεο Αγγελίδη για τις πολυάριθμες χρήσιμες συζητήσεις που κάναμε μαζί.

Πάνω από όλα, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή υποστήριξη τους. Τέλος, πολλές ευχαριστίες πηγαίνουν στους φίλους μου Αλέξη, Δάκη, Δημήτρη, Θανάση και Βασίλη, καθώς επίσης και στους Θεοδόση, Κατερίνα, Μανόλη, Μιγάλη, Νικήτα, Τίμο και Χρήστο.

Η χρηματοδοτική συνδρομή από το ίδρυμα "Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης" εκτιμάται πολύ.

ΛΙΣΤΑ ΑΚΡΩΝΥΜΩΝ

AIC.....	Akaike Information Criterion
APB.....	Absolute Percentage Bias
ARMA.....	Autoregressive Moving Average
BHHH.....	Berndt-Hall-Hall-Hausman
DGP.....	Data Generation Process
EIG.....	maximum EIGenvalue
FC1.....	Forecast Cost of type I
FC2.....	Forecast Cost of type II
FD.....	First-Differenced
FE.....	Forecast Error
GARCH.....	Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic
GFESM.....	Generalized Forecast Error Second Moment
HL.....	Half-Life
HQ.....	Hannan-Quinn information criterion
IGARCH.....	Integrated Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic
IID.....	Independent and Identically Distributed
IQR.....	Inter-Quantile Range
IRA.....	Impulse Response Analysis
IRF.....	Impulse Response Function
I(1).....	Integrated of order 1
JOH.....	Johansen maximum likelihood estimator
LS.....	Least Squares

MA.....Moving Average
MAPB.....Median Absolute Percentage Bias
MC.....Monte Carlo
MGN.....Morgan-Granger-Newbold
ML.....Maximum Likelihood
MR.....Meese-Rogoff
MSE.....Mean Squared Error
NED.....Near-Epoch Dependent
NLLS.....Non-Linear Least Squares
OLS.....Ordinary Least Squares
RW.....Random Walk
RR.....Reduced Rank
SIC.....Schwarz Information Criterion
TMAPB.....Total Median Absolute Percentage Bias
TR.....TRace
TRS.....Johansen's small-sample version of Trace
VAR.....Vector Autoregressive
VARMA.....Vector Autoregressive Moving Average
VDM.....Van Der Waerden
VEC.....Vector Error Correction

Λίστα Διαγραμμάτων

Διάγραμμα Ε1

Τιμές και Πρώτες Διαφορές των Συναλλαγματικών
Ισοτιμιών

185

Λίστα Πινάκων

Πίνακας A1a	DGPs και οι Αντίστοιχες Ιδιοτιμές του Πρώτου Πειράματος Monte Carlo	145
Πίνακας A1b	Η “Ισοδύναμη” ARMA(2,1) Παραμετροποίηση της y_{1t}	145
Πίνακας A2a	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-1	146
Πίνακας A2b	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-1	146
Πίνακας A2c	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-1	147
Πίνακας A2d	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-1	147
Πίνακας A2e	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-1	148
Πίνακας A3a	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-2	148
Πίνακας A3b	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-2	149
Πίνακας A3c	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-2	149
Πίνακας A3d	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-2	150
Πίνακας A3e	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-2	150
Πίνακας A4a	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-3	151
Πίνακας A4b	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-3	151

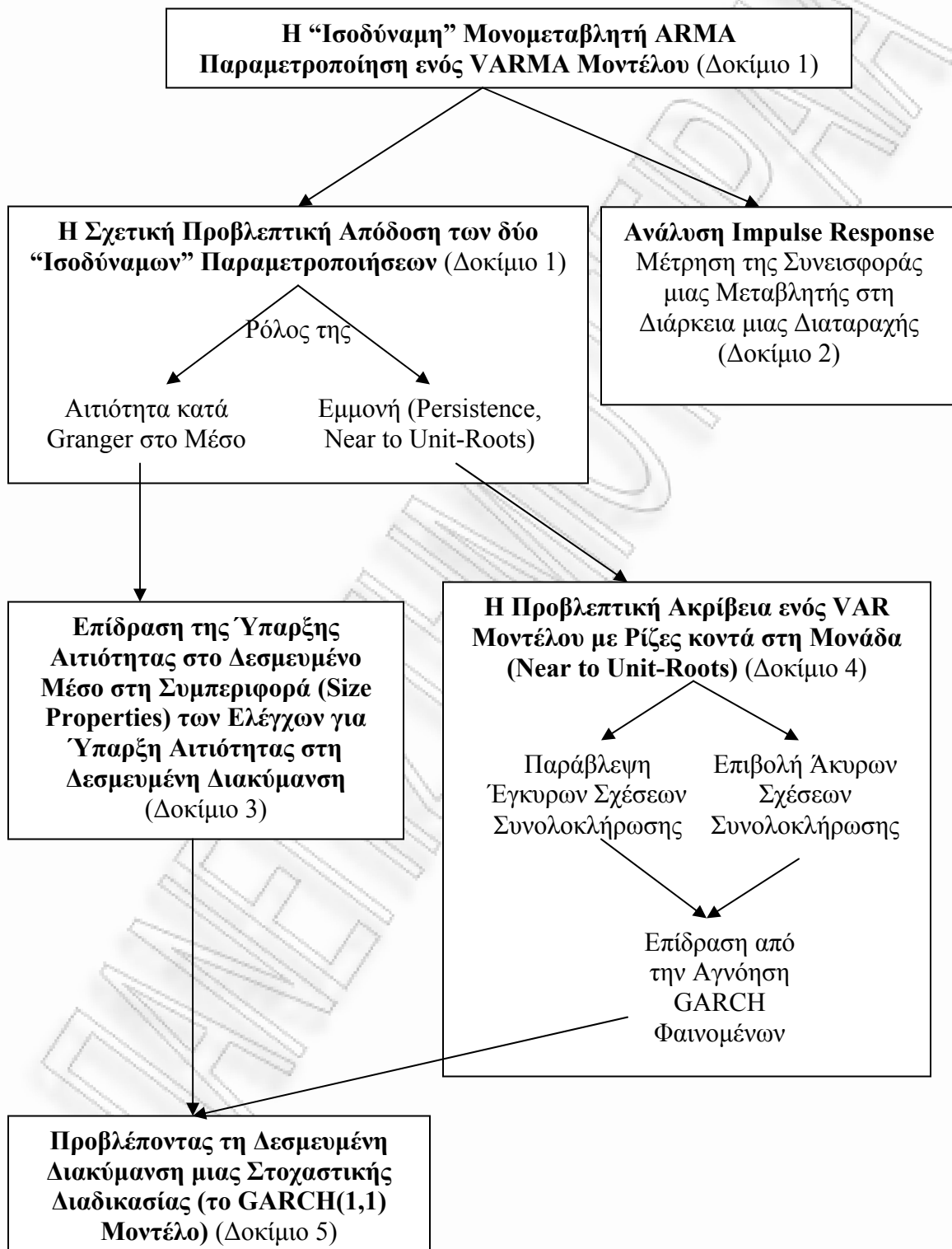
Πίνακας A7d	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-6	160
Πίνακας A7e	MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-6	160
Πίνακας A8a	Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά) και MSEs του AIC	161
Πίνακας A8b	Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά) και MSEs του SIC	162
Πίνακας A8c	Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά) και MSEs του HQ	163
Πίνακας C1	Ήπια Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_2=0.5$), Στάσιμο VAR. Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση. Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%	167
Πίνακας C2	Ισχυρή Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_2=0.9$), Στάσιμο VAR. Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση. Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%	168
Πίνακας C3	Ισχυρή Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_2=0.9$), Συνολοκληρώσιμο VAR. Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση. Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%	168
Πίνακας C4	Ήπια Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_2=0.5$), Στάσιμο VAR, IGARCH. Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση. Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%	169
Πίνακας D1	Ιδιότητες Μεγέθους του «Trace» Τεστ (Κανονικά Σφάλματα)	170
Πίνακας D2	«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS (Κανονικά Σφάλματα)	170
Πίνακας D3	Διαφορά μεταξύ του $TMAPB^{JOH}$ και του $TMAPB^{OLS}$ ως ποσοστό του $TMAPB$ του Βέλτιστου Εκτιμητή (Κανονικά Σφάλματα)	170
Πίνακας D4	FC1, Κανονικά Σφάλματα	171

Πίνακας D5	Επιλογή του Βαθμού του VAR Μοντέλου	171
Πίνακας D6	Εμπειρικό Μέγεθος των Τεστ Συνολοκλήρωσης	172
Πίνακας D7	«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS	172
Πίνακας D8	Διαφορά μεταξύ $TMAPB^{JOH}$ και $TMAPB^{OLS}$ ως Ποσοστό του $TMAPB$ του Βέλτιστου Εκτιμητή	173
Πίνακας D9	FC1, Σφάλματα Στάσιμα 4 ^{ης} Τάξης	173
Πίνακας D10	FC1, Σφάλματα Στάσιμα 2 ^{ης} Τάξης	174
Πίνακας D11	FC1, IGARCH Σφάλματα	175
Πίνακας D12	FC1, t(2) Σφάλματα	176
Πίνακας D13	Ιδιότητες Μεγέθους του «Trace» Τεστ	177
Πίνακας D14	«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS	178
Πίνακας D15	FC2, Κανονικά Σφάλματα	178
Πίνακας D16	FC2, Σφάλματα Στάσιμα 4 ^{ης} Τάξης	179
Πίνακας D17	FC2, Σφάλματα Στάσιμα 2 ^{ης} Τάξης	180
Πίνακας D18	FC2, IGARCH Σφάλματα	181
Πίνακας D19	FC2, t(2) Σφάλματα	182
Πίνακας D20	10% IQR της Άσκησης Πρόβλεψης Εκτός-Δείγματος (Περίοδος A)	182

Πίνακας D21	10% IQR της Άσκησης Πρόβλεψης Εκτός-Δείγματος (Περίοδος B)	183
Πίνακας E1	Εμπειρικό Μέγεθος (Στατικές Προβλέψεις, Κανονική Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%	186
Πίνακας E2	Εμπειρικό Μέγεθος (Στατικές Προβλέψεις, t(5)-Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%	186
Πίνακας E3	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F in Percentages (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	187
Πίνακας E4	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του S_1 (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	187
Πίνακας E5	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	188
Πίνακας E6	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του MGN (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	188
Πίνακας E7	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	189
Πίνακας E8	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του S_1 (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	189
Πίνακας E9	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	190
Πίνακας E10	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του MGN (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)	190
Πίνακας E11	Εμπειρικό Μέγεθος (Δυναμικές Προβλέψεις, Κανονική Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%	191

Πίνακας E12	Εμπειρικό Μέγεθος (Δυναμικές Προβλέψεις, $t(5)$ -Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%	191
Πίνακας E13	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F (Κανονική Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)	192
Πίνακας E14	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (Κανονική Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)	192
Πίνακας E15	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F ($t(5)$ -Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)	193
Πίνακας E16	Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t ($t(5)$ Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)	193
Πίνακας E17	Περιγραφικά Στατιστικά των Πρώτων Διαφορών των Συναλλαγματικών Ισοτιμιών	194
Πίνακας E18	Αποτελέσματα Εκτίμησης του GARCH(1,1) Μοντέλου (από 14/3/1973 ως 17/6/1981)	194
Πίνακας E19	Τιμές των Τεστ, Εβδομαδιαία Δεδομένα	194
Πίνακας E20	Τιμές των Τεστ, Ημερήσια Δεδομένα, Recursive Μέθοδος	194

Διάγραμμα της Διατριβής



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή και Επισκόπηση

Η πρόβλεψη είναι ένας από τους κύριους στόχους της οικονομετρίας. Οι προβλέψεις είναι χρήσιμες σε αυτούς που ασκούν οικονομική πολιτική προκειμένου να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητά τους στη λήψη αποφάσεων. Επιπλέον, οι περισσότερες επενδυτικές αποφάσεις είναι βασισμένες σε συγκεκριμένες προβλέψεις για τη μελλοντική κατάσταση της οικονομίας. Προκειμένου να προβλεφθεί το μέλλον, ο ερευνητής πρέπει να προσδιορίσει την ύπαρξη συγκεκριμένων ιδιοτήτων στη συμπεριφορά των οικονομικών σειρών, όπως η εποχικότητα και οι τάσεις, και να χρησιμοποιήσει αυτές τις ιδιότητες για να προβλέψει όσο το δυνατόν καλύτερα το μέλλον. Επιπλέον, η ύπαρξη σχέσεων αιτιότητας κατά Granger μεταξύ οικονομικών σειρών μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον ερευνητή για να επιλέξει το βέλτιστο μοντέλο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος.

Τα μοντέλα χρονοσειρών, όπως τα VAR και GARCH μοντέλα, είναι πιθανώς τα πιο συχνά χρησιμοποιημένα οικονομετρικά μοντέλα για να περιγράψει και να προβλέψει κάποιος τις μακροοικονομικές ή/και χρηματοοικονομικές μεταβλητές. Τα (διανυσματικά) αυτοπαλίνδρομα μοντέλα είναι πολύ δημοφιλή στις εμπειρικές μελέτες για την περιγραφή της δεσμευμένης μέσης τιμής μιας (ομάδας) μεταβλητής(ων). Η δημοτικότητά τους οφείλεται στην απλότητά τους και η δυνατότητά τους να λάβουν υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών του συστήματος και έτσι τα VAR μοντέλα θεωρούνται ότι παρέχουν μια καλή προσέγγιση των ελλοχευόντων στοιχείων που

παράγουν τη στοχαστική διαδικασία (DGP). Τα GARCH μοντέλα χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν την δεσμευμένη διακύμανση μιας (ομάδας) μεταβλητής(ων), δεδομένου ότι κατορθώνουν να συλλάβουν τη μεταβλητότητα που παρατηρείται στη διακύμανση πολλών χρονοσειρών, ιδιαίτερα υψηλής συχνότητας (high-frequency data).

Αυτή η διατριβή εστιάζει κυρίως στην έρευνα της προβλεπτικής ικανότητας εναλλακτικών μοντέλων χρονοσειρών στην πρόβλεψη είτε του δεσμευμένου μέσου, είτε της δεσμευμένης διακύμανσης μιας (βαθμωτής ή διανυσματικής) στοχαστικής διαδικασίας. Εντούτοις, όπως αναφέρεται προηγουμένως, ο προσδιορισμός των σχέσεων αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των οικονομικών σειρών είναι κρίσιμος, έτσι ώστε ο ερευνητής να μπορεί να περιγράψει και να προβλέψει τη μεταβλητή ενδιαφέροντος κατάλληλα. Για αυτό το λόγο, αυτή η διατριβή εξετάζει τη δυνατότητα ορισμένων στατιστικών ελέγχων να εντοπίσουν την ύπαρξη σχέσεων αιτιότητας μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών, καθώς επίσης και την επίδραση αυτών των σχέσεων αιτιότητας στη προβλεπτική ακρίβεια των υπό εξέταση μοντέλων.

Το υπόλοιπο αυτής της διατριβής οργανώνεται ως εξής. Στο κεφάλαιο 2 υπολογίζεται η "ισοδύναμη" μονομεταβλητή, αυτοπαλίνδρομη, κινούμενου μέσου (ARMA) παραμετροποίησης ενός στάσιμου, διμεταβλητού, πρώτου βαθμού αυτοπαλίνδρομου VAR(1) μοντέλου και η σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο παραμετροποιήσεων εξετάζεται. Σε όλο αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι ο ερευνητής ενδιαφέρεται για την πρόβλεψη της πρώτης μεταβλητής του συστήματος. Η σύγκριση των δύο εναλλακτικών παραμετροποιήσεων είναι βασισμένη είτε σε αναλυτικά αποτελέσματα όταν υποθέτουμε ότι οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές, είτε σε ασυμπτωτικά αποτελέσματα όταν εκτιμάμε τις παραμέτρους των μοντέλων. Και στις δύο περιπτώσεις, η σχετική

προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων εξαρτάται από την ύπαρξη ή όχι αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των μεταβλητών του VAR μοντέλου. Επιπλέον, στη παράγραφο 2.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Monte Carlo που στοχεύει στην εξέταση της ισχύος των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων σε πεπερασμένα δείγματα. Το πείραμα αποκαλύπτει ότι το VAR(1) μοντέλο ξεπερνά το "ισοδύναμο" ARMA μοντέλο, δίνοντας ακριβέστερες προβλέψεις για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Η ανωτερότητα του VAR(1) μοντέλου είναι πιο έντονη για τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις και τα μικρά δείγματα.

Το κεφάλαιο 3 περιγράφει μια νέα μεθοδολογία που στοχεύει στη μέτρηση της συμβολής μιας μεταβλητής στη διάρκεια των διαταραχών στη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Η μεθοδολογία είναι βασισμένη στη σύγκριση της συνάρτησης Impulse Response (IRF) ενός VAR μοντέλου με τη συνάρτηση Impulse Response της "ισοδύναμης" μονομεταβλητής ARMA παραμετροποίησης της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Παρέχονται οι συνθήκες για την ισοδυναμία των δύο IRFs και δίνονται επίσης οι αποδείξεις μερικών χρήσιμων ανισοτήτων μεταξύ των δύο IRFs.

Το κεφάλαιο 4 εξετάζει τα αποτελέσματα της ύπαρξης αιτιότητας στο δεσμευμένο μέσο δύο σειρών (όταν αυτή αγνοηθεί), στις ιδιότητες μεγέθους (size properties) μερικών πρόσφατα προτεινόμενων ελέγχων για την ύπαρξη αιτιότητας στη δεσμευμένη διακύμανση. Αυτό το ζήτημα αναλύεται στα πλαίσια ενός διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου, του οποίου τα σφάλματα ακολουθούν ένα διμεταβλητό GARCH(1,1) μοντέλο. Τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις Monte Carlo δείχνουν ότι οι έλεγχοι για την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση πάσχουν από έντονες διαστρεβλώσεις μεγέθους όταν αγνοηθεί η ύπαρξη αιτιότητας στο μέσο των υπό εξέταση σειρών. Επομένως, προτού να

χρησιμοποιηθούν τα τεστ για τον έλεγχο ύπαρξης αιτιότητας στη διακύμανση, οποιαδήποτε σχέση εξάρτησης στο δεσμευμένο μέσο των εξεταζόμενων σειρών πρέπει να λαμβάνεται υπόψη από ένα κατάλληλο παραμετρικό μοντέλο που επιτρέπει ρητά την παρουσία αιτιότητας στο μέσο.

Το κεφάλαιο 5 ερευνά την επίδραση της επιβολής άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης ή της αγνόησης έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης στις εκτιμήσεις και ειδικά στις προβλέψεις ενός διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου. Εξετάζουμε αρχικά ένα στάσιμο VAR, του οποίου όμως η μεγαλύτερη ρίζα, λ_{\max} , βρίσκεται κοντά στη μονάδα, ενώ η άλλη ρίζα, λ_{\min} , είναι αρκετά μικρότερη της μονάδας. Σε αυτό το πλαίσιο, καθορίζουμε το «κόστος πρόβλεψης τύπου I» να είναι η επιδείνωση στην προβλεπτική ακρίβεια του VAR μοντέλου λόγω της επιβολής άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η λανθασμένη παραμετροποίηση (misspecification) προκύπτει για τους αντίθετους λόγους, δηλαδή από την αγνόηση έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης. Τέτοιες περιπτώσεις μπορούν να προκύψουν όταν η λ_{\max} ισούται με 1, ενώ η λ_{\min} είναι μικρότερη αλλά πλησίον της μονάδας. Η επίδραση αυτού του τύπου λανθασμένης παραμετροποίησης στην προβλεπτική απόδοση του VAR μοντέλου ορίζεται ως το «κόστος πρόβλεψης τύπου II». Με τη βοήθεια των προσομοιώσεων Monte Carlo, μετράμε και τους δύο τύπους κόστους πρόβλεψης σε πραγματικές καταστάσεις, όπου ο ερευνητής οδηγείται (ή παραπλανιέται) από τα συνηθισμένα τεστ στασιμότητας στην επιλογή της δομής του μοντέλου. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις ενός VAR(1) μοντέλου που έχει *iid* γκαουσιανά (κανονικά) ή GARCH σφάλματα. Για να διακρίνουμε μεταξύ της επίδρασης της μη γραμμικής εξάρτησης και εκείνης της λεπτοκύρτωσης, θεωρούμε επίσης VAR(1) μοντέλα που έχουν *iid* σφάλματα

με $t(2)$ κατανομή. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αποκαλύπτουν ότι το κόστος πρόβλεψης από την επιβολή άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης είναι σημαντικό, ειδικά για τα μικρά δείγματα. Αντίθετα, το κόστος πρόβλεψης από την αγνόηση έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης είναι μικρό, αλλά μη αμελητέο. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, και οι δύο τύποι κόστους πρόβλεψης αυξάνονται με την ένταση των GARCH φαινομένων.

Το Κεφάλαιο 6 εστιάζει στην πρόβλεψη της δεσμευμένης διακύμανσης μιας σειράς. Συγκεκριμένα, αυτό το κεφάλαιο στοχεύει στην εξέταση των λόγων για την κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου που παρατηρείται σε πολλές εμπειρικές μελέτες. Διάφορες προηγούμενες εμπειρικές μελέτες συγκρίνουν τις προβλέψεις της δεσμευμένης διακύμανσης του GARCH(1,1) μοντέλου με εκείνες ενός «αφελούς» μοντέλου που υποθέτει σταθερή δεσμευμένη διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα) και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το GARCH(1,1) μοντέλο δεν παρέχει ακριβέστερες προβλέψεις από το ομοσκεδαστικό μοντέλο. Οι ερευνητές συγκρίνουν συνήθως τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων με τη βοήθεια ενός επιλεγμένου στατιστικού τεστ που είναι βασισμένο στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) των προβλέψεων. Μερικές πρόσφατες μελέτες υποστηρίζουν ότι η κακή προβλεπτική απόδοση των GARCH μοντέλων στις εμπειρικές μελέτες οφείλεται στη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την μη παρατηρήσιμη αληθινή δεσμευμένη διακύμανση, που καθιστά το κριτήριο MSE ακατάλληλο για την αξιολόγηση του GARCH(1,1) μοντέλου. Εντούτοις, τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6 αποδεικνύουν ότι το κριτήριο MSE μπορεί να αξιολογήσει κατάλληλα την προβλεπτική απόδοση ενός GARCH(1,1)

μοντέλου σε σχέση με ένα ομοσκεδαστικό μοντέλο. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η φαινομενικά κακή προβλεπτική ακρίβεια του GARCH(1,1) μοντέλου που παρατηρείται στις εφαρμοσμένες μελέτες οφείλεται στην μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των μοντέλων. Τέλος, παρέχονται χρήσιμες προτάσεις για την κατάλληλη στατιστική αξιολόγηση των προβλέψεων του GARCH(1,1) μοντέλου, μαζί με μια εμπειρική εφαρμογή βασισμένη σε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ.

Τέλος, το κεφάλαιο 7 ολοκληρώνει αυτήν την διατριβή. Οι αλγόριθμοι παραγωγής των δεδομένων στις προσομοιώσεις, οι σχετικοί πίνακες αποτελεσμάτων, καθώς επίσης και οι αποδείξεις των προτάσεων και λημμάτων της διατριβής παρέχονται στα παραρτήματα A-F.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η "Ισοδύναμη" Μονομεταβλητή ARMA Παραμετροποίηση ενός VAR(1) Μοντέλου

2.1 Εισαγωγή

Τα διανυσματικά αυτοπαλίνδρομα μοντέλα κινούμενου μέσου όρου (VARMA) είναι τα πιο συχνά χρησιμοποιημένα μοντέλα για την πρόβλεψη μακροοικονομικών ή/και χρηματοοικονομικών χρονοσειρών. Είναι ευρέως γνωστό, ότι κάθε μια από τις συνιστώσες μεταβλητές ενός VARMA μοντέλου έχει μια "ισοδύναμη" μονομεταβλητή αυτοπαλίνδρομη κινούμενου μέσου όρου (ARMA) παραμετροποίηση. Είναι αρκετά συχνό φαινόμενο οι εμπειρικοί ερευνητές να χρησιμοποιούν τα μονομεταβλητά μοντέλα για να προβλέψουν τη μεταβλητή ενδιαφέροντος, αγνοώντας κατά συνέπεια τις δυναμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών του συστήματος. Επομένως, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί η σχετική προβλεπτική απόδοση των εναλλακτικών μοντέλων (μονομεταβλητά και πολυμεταβλητά αυτοπαλίνδρομα μοντέλα). Η ερώτηση που τίθεται είναι εάν μια καλύτερη πρόβλεψη (δηλαδή πιο ακριβής από την άποψη ενός ειδικού κριτηρίου) της μεταβλητής ενδιαφέροντος λαμβάνεται με τη χρησιμοποίηση μόνο του παρελθόντος της (στα πλαίσια ενός μονομεταβλητού μοντέλου) ή με τη χρησιμοποίηση του συνόλου των μεταβλητών του συστήματος (στα πλαίσια ενός πολυμεταβλητού μοντέλου). Γενικά, αναμένεται ότι το πολυμεταβλητό μοντέλο πρέπει να αποδώσει καλύτερα, δεδομένου ότι περιέχει τουλάχιστον τόσο πολλές πληροφορίες όσες και το μονομεταβλητό μοντέλο και μια γενική αρχή λέει ότι ο ερευνητής δεν πρέπει

να πετύχει λιγότερα με περισσότερες πληροφορίες. Σε πολλές περιπτώσεις, η ασυμπτωτική θεωρία κατορθώνει να συγκρίνει τις δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις. Στην πράξη, η εκτίμηση και η πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος εκτελούνται με τη χρησιμοποίηση ενός πεπερασμένου δείγματος, το οποίο μπορεί να είναι πολύ μικρό σε μερικές περιπτώσεις. Κατά συνέπεια, η ισχύς των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων πρέπει να εξεταστεί όταν χρησιμοποιούνται πεπερασμένα δείγματα για την εκτίμηση των μοντέλων.

Αυτό το κεφάλαιο συγκρίνει την προβλεπτική ικανότητα ενός διμεταβλητού, στάσιμου, αυτοπαλίνδρομου μοντέλου μηδενικού μέσου (VAR(1) μοντέλο) με τις αντίστοιχες μονομεταβλητές ARMA(2,1) παραμετροποιήσεις για κάθε μια από τις δύο συνιστώσες μεταβλητές. Εστιάζουμε κυρίως στην πρόβλεψη της πρώτης μεταβλητής της στοχαστικής διαδικασίας (αυτή είναι η μεταβλητή ενδιαφέροντος για αυτό το κεφάλαιο). Καταρχήν, υπολογίζουμε τη μονομεταβλητή παραμετροποίηση της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Στη συνέχεια εξετάζεται η σχετική προβλεπτική ικανότητα των δύο εναλλακτικών παραμετροποιήσεων στις περιπτώσεις όπου οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) των προβλέψεων χρησιμοποιείται ως μέτρο της ακρίβειας. Επιπλέον, όταν οι παράμετροι του VAR(1) είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν, η ασυμπτωτική θεωρία χρησιμοποιείται για να συγκρίνει τη σχετική προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων. Τέλος, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo εφαρμόζεται για να ερευνηθεί η συμπεριφορά των μοντέλων σε πεπερασμένα δείγματα. Παράγονται μια σειρά από εναλλακτικές στοχαστικές διαδικασίες και πέντε διαφορετικά μεγέθη δείγματος και τέσσερις διαφορετικοί ορίζοντες πρόβλεψης εξετάζονται. Επιπλέον, το πείραμα Monte Carlo χρησιμοποιείται για να

εξετάσει τη δυνατότητα των τριών πιο ευρέως χρησιμοποιημένων κριτηρίων επιλογής μοντέλων (δηλ. AIC (Akaike, 1974), SIC (Schwarz, 1978) και HQ (Hannan και Quinn, 1979, Quinn, 1980)) να επιλέξουν το σωστό μοντέλο.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν οι παράμετροι του συστήματος είναι γνωστές, το VAR(1) μοντέλο δίνει καλύτερες προβλέψεις από το ARMA(2,1) μοντέλο σε όλες τις περιπτώσεις. Τα δύο μοντέλα γίνονται ισοδύναμα από την άποψη της πρόβλεψης της πρώτης συνιστώσας της στοχαστικής διαδικασίας, μόνο όταν δεν υπάρχει σχέση αιτιότητας κατά Granger από τη δεύτερη μεταβλητή του συστήματος προς τη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Στην περίπτωση των άγνωστων και επομένως εκτιμημένων παραμέτρων, το VAR(1) μοντέλο παραμένει βέλτιστο για να προβλέψει τη μεταβλητή ενδιαφέροντος ασυμπτωτικά, εκτός αν δεν υπάρχει καμία αιτιότητα κατά Granger από τη δεύτερη μεταβλητή του συστήματος προς τη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Σε αυτή την περίπτωση, το μονομεταβλητό μοντέλο μπορεί να είναι ανώτερο. Τέλος, το πείραμα Monte Carlo δείχνει ότι το VAR(1) μοντέλο είναι καλύτερο από το ARMA(2,1) μοντέλο σε όλες τις περιπτώσεις, τόσο για τις βραχυπρόθεσμες όσο και για τις μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Η απόδοση του μονομεταβλητού μοντέλου είναι πολύ κακή, ειδικά όταν χρησιμοποιούνται μικρά δείγματα για την εκτίμηση των μοντέλων. Όσον αφορά στα κριτήρια επιλογής μοντέλων, το SIC συμπεριφέρεται καλύτερα από το AIC και το HQ, με το AIC όντας το χειρότερο κριτήριο δεδομένου ότι οδηγεί συχνά σε μοντέλα με επιπλέον όρους (overspecified models).¹ Επιπλέον, η προσομοίωση διευκρινίζει ότι ένα “overspecified” μοντέλο οδηγεί πάντα σε χειρότερες προβλέψεις από το σωστό μοντέλο. Αφ' ετέρου, ένα “underspecified” μοντέλο μπορεί να δώσει καλύτερες προβλέψεις από το

¹ Το AIC χαρακτηρίζεται από μια θετική ασυμπτωτική πιθανότητα να επιλέγει μοντέλα με επιπλέον όρους (overspecified models). Σε πεπερασμένα δείγματα, αυτή η τάση του AIC είναι πιο έντονη.

σωστό μοντέλο για μερικές ιδιαίτερες περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Το κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής. Στην παράγραφο 2.2, υπολογίζουμε τη μονομεταβλητή ARMA(2,1) παραμετροποίηση για καθεμιά από τις συνιστώσες μεταβλητές ενός διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου. Στην παράγραφο 2.3, συγκρίνουμε αρχικά τη προβλεπτική ικανότητα του VAR(1) μοντέλου με αυτήν της "ισοδύναμης" μονομεταβλητής ARMA(2,1) παραμετροποίησης της πρώτης συνιστώσας της стоχαστικής διαδικασίας, βασισμένοι στην υπόθεση ότι οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές. Κατόπιν, η ασυμπτωτική θεωρία εφαρμόζεται για να επεκτείνει τα αποτελέσματα στην περίπτωση των εκτιμημένων παραμέτρων. Στην παράγραφο 2.4, εξετάζουμε την ισχύ των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων που παράγονται στην παράγραφο 2.3 σε πεπερασμένα δείγματα με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης Monte Carlo. Τέλος, η παράγραφος 2.5 ολοκληρώνει αυτό το κεφάλαιο.

2.2 Η Μονομεταβλητή ARMA Παραμετροποίηση μιας Στάσιμης VAR(1) Διαδικασίας

Ας υποθέσουμε ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ακολουθεί μια στάσιμη VAR(1) διαδικασία:

$$Y_t = AY_{t-1} + U_t \quad (2.1)$$

όπου $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ και $\det(I_2 - Az) \neq 0$ για $|z| \leq 1$.² Επίσης, υποθέτουμε

ότι το διάνυσμα σφάλματος $U_t = (u_{1t}, u_{2t})'$ είναι μια διαδικασία λευκού θορύβου (white

noise process), δηλαδή $E(U_t) = 0$ και $E(U_t U_s') = \Sigma_u = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ εάν $t = s$ ή

$E(U_t U_s') = 0$ εάν $t \neq s$. Ο πίνακας Σ_u είναι θετικά ορισμένος.

² Βλέπε Παράρτημα Α.1 για τις ακριβείς συνθήκες στασιμότητας του VAR(1) μοντέλου.

Η ακόλουθη πρόταση ισχύει:

Πρόταση (2,1): Έστω ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ικανοποιεί την (2.1). Τότε, κάθε συνιστώσα σειρά y_{it} , $i=1, 2$ έχει μια μονομεταβλητή ARMA(p,q) παραμετροποίηση, όπου $p \leq 2$ και $q \leq 1$.

Απόδειξη: Βλέπε το πόρισμα 6.1.1. στο Lütkerohl (1993), σελίδα 232.

Πιο συγκεκριμένα, η ARMA(p,q) παραμετροποίηση της y_{1t} είναι η ακόλουθη:

$$y_{1t} - (a_{11} + a_{22})y_{1t-1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y_{1t-2} = e_{1t} + \gamma_1 e_{1t-1} \quad (2.2)$$

όπου $\text{Var}(e_{1t}) = \sigma_1^2$, $\gamma_1 = \frac{S \pm \sqrt{Q+R}}{F}$ και $\sigma_1^2 = \frac{G_1}{\gamma_1}$.

Επιπλέον,

$$S = (1 + a_{22}^2)\sigma_{11} - 2a_{12}a_{22}\sigma_{12} + a_{12}^2\sigma_{22},$$

$$Q = (1 + a_{22}^4 - 2a_{22}^2)\sigma_{11}^2 + a_{12}^4\sigma_{22}^2 + (4a_{12}^2a_{22}^2 - 4a_{12}^2)\sigma_{12}^2 - 4(a_{12}a_{22}^3 - a_{22}a_{12})\sigma_{11}\sigma_{12},$$

$$R = (2a_{12}^2 + 2a_{22}^2a_{12}^2)\sigma_{11}\sigma_{22} - 4a_{12}^3a_{22}\sigma_{12}\sigma_{22},$$

$$F = 2(a_{12}\sigma_{12} - a_{22}\sigma_{11}),$$

$$G_1 = a_{12}\sigma_{12} - a_{22}\sigma_{11}^3.$$

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν $a_{12} = 0$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει καμία αιτιότητα κατά Granger από την y_{2t} στην y_{1t} . Σε αυτή την περίπτωση, η μονομεταβλητή παραμετροποίηση της y_{1t} γίνεται:

$$y_{1t} - (a_{11} + a_{22})y_{1t-1} + a_{11}a_{22}y_{1t-2} = e_{1t} - a_{22}e_{1t-1} \quad \text{όπου } \text{Var}(e_{1t}) = \sigma_{11} \quad (2.3)$$

³ Ο υπολογισμός της (2.2) δίνεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α.2. Στο Παράρτημα Α.3 υπολογίζεται η ARMA(2,1) παραμετροποίηση για τη δεύτερη συνιστώσα, y_{2t} , της Y_t .

Στο παράρτημα A.4, δείχνουμε ότι η (2.3) έχει την ίδια δομή αυτοδιακύμανσης (autocovariance structure), δηλ. είναι ισοδύναμη, με το ακόλουθο AR(1) μοντέλο:

$$y_{1t} = a_{11}y_{1t-1} + u_{1t} \quad (2.4)$$

Στα ακόλουθα κεφάλαια θα αποδειχθεί ότι οι περιορισμοί μη-αιτιότητας κατά Granger διαδραματίζουν έναν βασικό ρόλο στην ισοδυναμία μεταξύ των ARMA(2,1) και VAR(1) μοντέλων για την πρόβλεψη των μεταβλητών του συστήματος

2.3 Πρόβλεψη της y_{1t} : VAR(1) εναντίον “Ισοδύναμης” ARMA(2,1)

Παραμετροποίησης

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για την πρόβλεψη της y_{1t} . Η ανάλυση μέχρι τώρα, προτείνει δύο εναλλακτικές διαδικασίες για να το πραγματοποιήσουμε αυτό. Κατ' αρχάς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το VAR(1) μοντέλο για να προβλέψουμε το πλήρες διάνυσμα Y_t και εναλλακτικά μπορούμε να προβλέψουμε την y_{1t} άμεσα από τη μονομεταβλητή ARMA(2,1) παραμετροποίησης της. Σε αυτή την ενότητα, συγκρίνουμε την προβλεπτική ακρίβεια αυτών των δύο εναλλακτικών μεθοδολογιών στα πλαίσια του κριτηρίου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE), όταν οι παράμετροι των μοντέλων είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν. Εξετάζεται τόσο η ασυμπτωτική περίπτωση, όσο και η περίπτωση πεπερασμένου δείγματος. Σαν προοίμιο σε αυτήν την ανάλυση, συγκρίνουμε τις δύο μεθοδολογίες στη περίπτωση όπου οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές.

2.3.1 Γνωστές Παράμετροι

Βέλτιστες γραμμικές MSE προβλέψεις της VAR(1) διαδικασίας

Έστω Ω_t όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες στην περίοδο t . Είναι ευρέως γνωστό ότι η

καλύτερη γραμμική MSE πρόβλεψη h -περιόδων, $Y_t(h)$, της Y_{t+h} για το VAR(1) μοντέλο δίνεται από:

$$Y_t(h) = A^h Y_t = A Y_t(h-1)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $Y_{t+h} = A^h Y_t + \sum_{i=0}^{h-1} A^i U_{t+h-i}$, το λάθος πρόβλεψης (FE) είναι:

$$FE(h) = Y_{t+h} - Y_t(h) = \sum_{i=0}^{h-1} A^i U_{t+h-i}$$

Το MSE της πρόβλεψης, είναι ίσο με τη μήτρα συνδιακύμανσης, $\Sigma_y(h)$, του σφάλματος πρόβλεψης, η οποία είναι:

$$MSE[Y_t(h)] = \Sigma_y(h) = \sum_{i=0}^{h-1} A^i \Sigma_u (A^i)'$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\Sigma_y(h)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του h . Ας εστιάσουμε στη μεταβλητή ενδιαφέροντος y_{1t} : Η πρόβλεψη, $y_{1t}(h)$, το λάθος πρόβλεψης, $FE_1(h)$ και το MSE της πρόβλεψης, $\Sigma_{y_1}(h)$, για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος y_{1t} , δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$y_{1t}(h) = F_1 Y_t(h)$$

$$FE_1(h) = F_1 FE(h)$$

$$\Sigma_{y_1}(h) = F_1 \Sigma_y(h) F_1'$$

Στην περίπτωση που ο ορίζοντας πρόβλεψης, h , τείνει στο άπειρο, είναι εύκολο να δειχτεί ότι $\lim_{h \rightarrow \infty} \Sigma_y(h) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \Sigma_u (A^i)' = \Sigma_y$, και $\lim_{h \rightarrow \infty} Y_t(h) = \mathbf{0}$, όπου Σ_y είναι η μήτρα συνδιακύμανσης της Y_t . Επομένως,

$$y_{1t}(\infty) = 0$$

$$FE_1(\infty) = F_1 \sum_{i=0}^{\infty} A^i U_{t+h-i}$$

$$\Sigma_{y_1}(\infty) = \text{MSE}[y_{1t}(\infty)] = \text{var}(y_{1t})$$

Βέλτιστες γραμμικές MSE προβλέψεις της ARMA(2,1) διαδικασίας

Τώρα θα παρουσιάσουμε την πρόβλεψη, $y_{1t}(h)_{\text{ARMA}}$, το λάθος πρόβλεψης, $FE_1(h)_{\text{ARMA}}$,

και το MSE της πρόβλεψης, $\Sigma_{y_1}(h)_{\text{ARMA}}$, για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος, στα πλαίσια

του ARMA(2,1) μοντέλου, που καθορίζεται από (2.2). Θέτοντας $A_1 = a_{11} + a_{22}$,

$A_2 = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$, η βέλτιστη γραμμική MSE πρόβλεψη της y_{1t} είναι:

$$y_{1t}(h)_{\text{ARMA}} = A_1 y_{1t} + A_2 y_{1t-1} + \gamma_1 e_{1t} \quad \text{όταν } h = 1$$

$$y_{1t}(h)_{\text{ARMA}} = A_1 y_{1t}(h-1)_{\text{ARMA}} + A_2 y_{1t}(h-2)_{\text{ARMA}} \quad \text{όταν } h > 1$$

όπου $y_{1t}(0)_{\text{ARMA}} = y_{1t}$. Προκειμένου να υπολογιστούν τα $FE_1(h)_{\text{ARMA}}$ και $\Sigma_{y_1}(h)_{\text{ARMA}}$,

χρειαζόμαστε την ακόλουθη MA(∞) παραμετροποίηση:

$$y_{1t} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e_{1t-i}$$

όπου

$$\Phi_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^i A_j \Phi_{i-j}, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots$$

με $\Phi_0 := 1$, $A_j := 0$ για $j > 2$ και $\gamma_i = 0$ για $i > 1$. Κατόπιν, βρίσκουμε ότι:

$$FE_1(h)_{\text{ARMA}} = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i e_{1t+h-i}$$

$$\Sigma_{y_1}(h)_{\text{ARMA}} = \text{MSE}[y_{1t}(h)]_{\text{ARMA}} = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \sigma_1^2 \Phi_i'$$

Για την περίπτωση άπειρου χρονικού ορίζοντα, δηλ. $h \rightarrow \infty$, είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$\lim \Sigma_{y_t}(h)_{ARMA} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \sigma_1^2 \Phi_i' = \text{var}(y_{1t})$ και $\lim y_{1t}(h)_{ARMA} = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$y_{1t}(\infty)_{ARMA} = 0$$

$$FE_1(\infty)_{ARMA} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e_{1t+h-i}$$

$$\Sigma_{y_t}(\infty)_{ARMA} = \text{MSE}[y_{1t}(\infty)]_{ARMA} = \text{var}(y_{1t})$$

Γενικότερα, ο Lütkepohl (1984, 1987) αποδεικνύει ότι η διαδικασία πρόβλεψης στα πλαίσια του αρχικού VAR μοντέλου και μετασχηματίζοντας έπειτα την Y_t για να πάρουμε την y_{1t} , οδηγεί σε πιο ακριβείς προβλέψεις (ή τουλάχιστον όχι χειρότερες) από τη διαδικασία πρόβλεψης στα πλαίσια του μετασχηματισμένου ARMA(2,1) μοντέλου.

Γενικά, αποδεικνύει την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση (2,2): Έστω Y_t μια στάσιμη, αντιστρέψιμη (invertible), K -διάστατη VARMA (p, q) διαδικασία, και έστω F μια $(M \times K)$ μήτρα με τάξη (rank) M και $Z_t = FY_t$. Επιπλέον, συμβολίζουμε τις μήτρες των βέλτιστων προβλέψεων h -περιόδων για τις σειρές Y_t και Z_t με $\Sigma_y(h)$ και $\Sigma_z(h)$ αντίστοιχα. Τότε ο $\Sigma_z(h) - F\Sigma_y(h)F'$ είναι θετικά ημι-ορισμένος (positive semidefinite).

Απόδειξη: Βλέπε Lütkepohl (1987).

Στην παρούσα περίπτωση, η πρόταση (2.2) δηλώνει ότι $\Sigma_{y_t}(h) \leq \Sigma_{y_t}(h)_{ARMA}$ για κάθε πεπερασμένο h . Εντούτοις, όπως το h αυξάνεται, η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων μειώνονται. Ασυμπτωτικά, τα δύο μοντέλα είναι MSE-ισοδύναμα για την πρόβλεψη της y_{1t} .

Είναι πολύ ενδιαφέρον να εξεταστεί η προβλεπτική ακρίβεια των δύο εναλλακτικών μοντέλων όταν η μεταβλητή ενδιαφέροντος δεν προκαλείται κατά Granger από την άλλη

μεταβλητή του συστήματος. Από την άποψη των παραμέτρων του μοντέλου, αυτό σημαίνει ότι $a_{12} = 0$. Σε εκείνη την περίπτωση, η ακόλουθη πρόταση ισχύει:

Πρόταση (2,3): Όταν $a_{12} = 0$, το VAR(1) μοντέλο που δίνεται στη (2.1) και το ARMA(2,1) μοντέλο της y_{1t} που δίνεται στη (2.2) δίνουν ισοδύναμες προβλέψεις σε ότι αφορά το κριτήριο MSE.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Α.5.

Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι οι παράμετροι των μοντέλων ήταν γνωστές. Αυτή είναι μάλλον μια μη ρεαλιστική υπόθεση, δεδομένου ότι στην πράξη τα μοντέλα πρέπει να εκτιμηθούν. Η ακόλουθη υποενότητα ερευνά την προβλεπτική ακρίβεια των δύο εναλλακτικών μοντέλων όταν χρησιμοποιούνται οι εκτιμημένες παράμετροι.

2.3.2 Εκτιμημένες Παράμετροι (ο Βαθμός (Order) των Μοντέλων Υποτίθεται ότι είναι Γνωστός)

Τώρα χαλαρώνουμε τη (μη ρεαλιστική) υπόθεση των γνωστών παραμέτρων και συμβολίζουμε με \hat{a} τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (LS) της $a = \text{vec}(A)$. Κατόπιν, η πρόβλεψη για χρονικό ορίζοντα h , $\hat{Y}_t(h)$, του Y_t είναι:

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{A}\hat{Y}_t(h-1)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το λάθος πρόβλεψης, $\hat{FE}(h)$, και το MSE της πρόβλεψης, $\hat{\Sigma}_y(h)$, δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \widehat{FE}(h) &= Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h) = [Y_{t+h} - Y_t(h)] + [Y_t(h) - \hat{Y}_t(h)] = \sum_{i=0}^{h-1} A^i U_{t+h-i} + [Y_t(h) - \hat{Y}_t(h)] \\ \widehat{\Sigma}_y(h) &= \Sigma_y(h) + \text{MSE}\left(Y_t(h) - \hat{Y}_t(h)\right) \end{aligned}$$

Ο Lütkepohl (1987) αποδεικνύει ότι

$$\sqrt{T} \left(Y_t(h) - \widehat{Y}_t(h) \right) \xrightarrow{d} N(0, \Omega(h))$$

όπου

$$\Omega(h) = E \left(\frac{\partial Y_t(h)}{\partial a'} \Sigma_{\widehat{a}} \frac{\partial Y_t(h)'}{\partial a} \right)$$

Αυτό το αποτέλεσμα προτείνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\text{MSE}(Y_t(h) - \widehat{Y}_t(h))$ με το $\frac{1}{T} \Omega(h)$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε ότι:

$$\widehat{\Sigma}_y(h) = \Sigma_y(h) + \frac{1}{T} \Omega(h)$$

Η προηγούμενη εξίσωση δηλώνει ότι το MSE της πρόβλεψης είναι το άθροισμα δύο όρων, από τους οποίους ο πρώτος παράγεται στα πλαίσια του μοντέλου γνωστών παραμέτρων, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει την αβεβαιότητα που προκαλείται στις προβλέψεις, με την αντικατάσταση των παραμέτρων των μοντέλων με (τις συνεπείς) εκτιμήσεις τους. Εντούτοις, όταν χρησιμοποιούνται μεγάλα δείγματα για την εκτίμηση των παραμέτρων, η αβεβαιότητα εκτίμησης μπορεί να αγνοηθεί στην αξιολόγηση του MSE των προβλέψεων.

Προκειμένου να δώσουμε μια αναλυτική φόρμουλα για το $\Omega(h)$, πρέπει να

υπολογίσουμε το $\frac{\partial Y_t(h)}{\partial a'}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_t(h)}{\partial a'} &= \frac{\partial A^h Y_t}{\partial a'} = (Y_t' \otimes I_2) \frac{\partial \text{vec}(A^h)}{\partial a'} = \\ &= (Y_t' \otimes I_2) \left[\sum_{i=0}^{h-1} (A')^{h-1-i} \otimes A^i \right] \frac{\partial \text{vec}(A)}{\partial a'} = \sum_{i=0}^{h-1} Y_t' (A')^{h-1-i} \otimes A^i \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Omega(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{h-1} \text{tr}[(A')^{h-1-i} \Sigma_y^{-1} A^{h-1-j} \Sigma_y] A^i \Sigma_u A^j$$

Η πρόβλεψη, και το MSE της πρόβλεψης για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος, y_{1t} , δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1t}(h) &= F_1 A^h Y_T \\ \widehat{\Sigma}_{y1}(h) &= F_1 \Sigma_y(h) F_1' + \frac{1}{T} F_1 \Omega(h) F_1'\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που ο ορίζοντας πρόβλεψης γίνεται άπειρος, $h \rightarrow \infty$, ο ασυμπτωτικός όρος διακύμανσης τείνει σε μηδέν, αφού $A^h Y_T \rightarrow 0$, το οποίο στη συνέχεια υπονοεί ότι $\widehat{\Sigma}_{y1}(h) \rightarrow \Sigma_y(h) \rightarrow \Sigma_y$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{1t}(\infty) &= 0 \\ \widehat{\Sigma}_{y1}(\infty) &= \text{var}(y_{1t})\end{aligned}$$

Τώρα ας στρέψουμε την προσοχή μας στην εκτιμημένη ARMA(2,1) παραμετροποίηση για τη y_{1t} . Συμβολίζουμε με $\hat{\theta}$ τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του διανύσματος θ , που αποτελείται από τις παραμέτρους του ARMA μοντέλου, όπως καθορίζονται στη (2.2). Τότε, η ασυμπτωτική θεωρία λέει ότι: $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\theta)$

όπου Σ_θ είναι το αντίστροφο της μήτρας πληροφορίας (information matrix).

Είναι απλό να δείξει κανείς ότι παρόμοια με τη περίπτωση του VAR(1) μοντέλου, μια κατάλληλη προσέγγιση του MSE, $\widehat{\Sigma}_{y1}(h)_{ARMA}$ της πρόβλεψης $\widehat{y}_{1t}(h)_{ARMA}$ είναι:

$$\widehat{\Sigma}_{y1}(h)_{ARMA} = \Sigma_{y1}(h)_{ARMA} + \frac{1}{T} \omega_{y1}(h)$$

όπου

$$\omega_{y1}(h) = E\left(\frac{\partial y_{1t}(h)}{\partial \theta'} \Sigma_\theta \frac{\partial y_{1t}(h)'}{\partial \theta}\right)$$

είναι η διακύμανση της ασυμπτωτικής κατανομής του $\sqrt{T}(\hat{y}_{1t}(h) - y_{1t}(h))$. Παρόμοια με τη διμεταβλητή περίπτωση, $\omega_{y_1}(h) \rightarrow 0$, για $h \rightarrow \infty$, που με τη σειρά του υπονοεί ότι $\hat{\Sigma}_{y_1}(h)_{ARMA} \rightarrow \Sigma_{y_1}(h)_{ARMA} \rightarrow \text{var}(y_{1t})$.

2.3.3 Σύγκριση της Προβλεπτικής Ακρίβειας του VAR(1) Μοντέλου και του "Ισοδύναμου" ARMA(2,1) Μοντέλου

Συγκρίνουμε τώρα το MSE του VAR(1) μοντέλου και του "ισοδύναμου" ARMA(2,1) μοντέλου. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση (1): $a_{12} \neq 0$

Εάν η αιτιότητα κατά Granger είναι παρούσα και τα μοντέλα έχουν γνωστές παραμέτρους, τότε για σταθερά h και T , έχουμε δείξει ότι $\Sigma_{y_1}(h) < \Sigma_{y_1}(h)_{ARMA}$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι $\hat{\Sigma}_{y_1}(h) < \hat{\Sigma}_{y_1}(h)_{ARMA}$, δεδομένου ότι το T είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό σημαίνει ότι η αυστηρή ανισότητα μεταφέρεται και στην περίπτωση των εκτιμημένων παραμέτρων.

Περίπτωση (2a): $a_{12} = 0$ και εκτίμηση με περιορισμούς (restricted estimation)

Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείχθηκε ότι $\Sigma_{y_1}(h) = \Sigma_{y_1}(h)_{ARMA}$. Ο Lütkepohl (1987) δείχνει ότι εάν ο περιορισμός μη-αιτιότητας κατά Granger λαμβάνεται υπόψη στη διαδικασία εκτίμησης, η ανισότητα $\omega_{y_1}(h) \geq F\Omega_x(h)F'$ μπορεί επίσης να αποδειχθεί.

Επομένως, $\hat{\Sigma}_{y_1}(h) \leq \hat{\Sigma}_{y_1}(h)_{ARMA}$.

Περίπτωση (2b): $a_{12} = 0$ και εκτίμηση χωρίς περιορισμούς (unrestricted estimation)

Εάν αυτός ο περιορισμός ($a_{12} = 0$) αγνοείται στο στάδιο εκτίμησης, τότε είναι ασαφές

εάν η ανισότητα $\omega_{y1}(h) \geq F\Omega_x(h)F'$ συνεχίζει να κρατά. Σε αυτή την περίπτωση, οι προβλέψεις που λαμβάνονται με τη βοήθεια του μονομεταβλητού ARMA(2,1) μοντέλου μπορούν να είναι MSE-ανώτερες από εκείνες που λαμβάνονται από το VAR(1) μοντέλο. Είναι σαφές ότι στα πεπερασμένα δείγματα δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ανωτερότητα του VAR(1) μοντέλου έναντι του “ισοδύναμου” ARMA(2,1) μοντέλου. Επομένως, στην επόμενη ενότητα εξετάζουμε τη σχετική προβλεπτική ικανότητα των δύο εναλλακτικών μοντέλων σε πεπερασμένα δείγματα με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης Monte Carlo. Κατ' αυτό τον τρόπο, θα ανακαλύψουμε εάν τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα παραμένουν έγκυρα στα πεπερασμένα δείγματα.

2.4 Προσομοίωση Monte Carlo

Σε αυτή την ενότητα, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo (MC) εφαρμόζεται για να ερευνηθεί η ισχύς σε πεπερασμένα δείγματα των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στη προηγούμενη ενότητα. Επιπλέον, η προσομοίωση εξετάζει την απόδοση τριών κριτηρίων που χρησιμοποιούνται ευρέως σε εμπειρικές μελέτες για την επιλογή οικονομετρικού μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται το κριτήριο πληροφόρησης του Akaike (AIC), το κριτήριο πληροφόρησης του Schwarz (SIC) και το κριτήριο πληροφόρησης των Hannan-Quinn (HQ). Ελέγχουμε πόσο συχνά κάθε κριτήριο επιλέγει το σωστό μοντέλο, ένα μοντέλο με λιγότερες παραμέτρους (underspecified model) ή ένα μοντέλο με επιπλέον παραμέτρους (overspecified model).⁴ Τέλος, σχολιάζουμε την επίδραση λανθασμένης παραμετροποίησης (misspecification) στην προβλεπτική ακρίβεια. Είναι γνωστό ότι η λανθασμένη παραμετροποίηση σε ότι αφορά

⁴ Για τα τρία υπό εξέταση κριτήρια επιλογής μοντέλου, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα underspecified μοντέλο τείνει στο 0 καθώς το μέγεθος δείγματος T τείνει στο άπειρο. Για το SIC και το HQ, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα overspecified μοντέλο τείνει στο 0 καθώς το μέγεθος δείγματος T τείνει στο άπειρο.

το βαθμό (order) του μοντέλου προκαλεί σοβαρά προβλήματα στους εκτιμητές (λιγότερο αποδοτικοί ή ακόμα και μεροληπτικοί), ανάλογα με την ελλοχέουσα αληθινή στοχαστική διαδικασία.

Ο σχεδιασμός της μελέτης MC είναι ο ακόλουθος: Πραγματοποιήσεις από διάφορα διμεταβλητά VAR(1) μοντέλα παράγονται και τα MSEs των προβλέψεων των διαφορετικών μοντέλων υπολογίζονται. Γενικά, η διαδικασία παραγωγής στοιχείων (DGP) της Y_t που χρησιμοποιείται σε αυτό το πείραμα δίνεται από την (2.1).

Ενδιαφερόμαστε για την πρόβλεψη της y_{it} και χρησιμοποιούμε δέκα διαφορετικά μοντέλα για να το κάνουμε. Αυτά είναι: τα διμεταβλητά VAR(1), VAR(2) και VAR(3) μοντέλα και τα μονομεταβλητά AR(1), AR(2), AR(3), ARMA(1,1), ARMA(2,1), ARMA(3,1) και ARMA(2,2) μοντέλα. Σταθεροί όροι συμπεριλαμβάνονται σε όλα τα μοντέλα, δεδομένου ότι στην πλειοψηφία των εφαρμοσμένων μελετών, μια σταθερά συμπεριλαμβάνεται στα εκτιμημένα μοντέλα. Τα VAR(2), VAR(3), ARMA (3,1) και ARMA(2,2) μοντέλα είναι overspecified. Κατά συνέπεια, αναμένεται ότι το MSE αυτών των μοντέλων θα είναι πάντα μεγαλύτερο από αυτό του αληθινού μοντέλου. Οι προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι το MSE των προβλέψεων αυξάνεται όσο μεγαλώνει η διαφορά μεταξύ του αληθινού και του εκτιμημένου βαθμού του αυτοπαλίνδρομου μοντέλου. Εντούτοις, μεταξύ των άλλων ο Bhansali (1981) σχολιάζει ότι η επίδραση του overspecification στο MSE της πρόβλεψης h-περιόδων είναι της τάξης $O(T^{-1})$ και επομένως για μεγάλα μεγέθη δείγματος δεν είναι σημαντική.

Όταν $a_{12} \neq 0$, τα AR(1), AR(2) και AR(3) μοντέλα είναι underspecified. Σε αυτήν την περίπτωση, η επίδραση της λανθασμένης παραμετροποίησης δεν είναι σαφής και εξαρτάται από το αληθινό DGP και το μέγεθος δείγματος T. Όπως οι Kunitomo και

Yamamoto (1985) έχουν δείξει, σε μερικές περιπτώσεις ένα underspecified μοντέλο μπορεί να δώσει προβλέψεις με μικρότερο MSE από αυτό του αληθινού μοντέλου. Στο πείραμά μας, είναι ιδιαίτερα πιθανό να επιλεγούν underspecified μοντέλα όταν το T είναι μικρό και η αιτιότητα κατά Granger από τη y_{2t} στη y_{1t} είναι ήπια. Τέλος, όταν $a_{12} = 0$, το αληθινό DGP είναι ένα AR(1) μοντέλο και επομένως τα AR(2) και AR(3) μοντέλα είναι σε αυτήν την περίπτωση overspecified.

Για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα DGPs, 5000 επαναλήψεις (replications) πραγματοποιούνται και αποτελέσματα για τέσσερις διαφορετικούς ορίζοντες πρόβλεψης ($h=1, 2, 5$ και 10) και πέντε διαφορετικά μεγέθη δείγματος ($T=30, 50, 100, 200$ και 500) υπολογίζονται. Για κάθε επανάληψη, ένα δείγμα μεγέθους $T+20$ παράγεται αρχικά. Κατόπιν, οι πρώτες 20 παρατηρήσεις απορρίπτονται για να ελαχιστοποιήσουμε την επίδραση των αρχικών τιμών (initial value effect). Κρατάμε επίσης τον αριθμό παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση σταθερό ανάμεσα στα μοντέλα επειδή η θεωρία αποκαλύπτει ότι αυτό είναι απαραίτητο για έγκυρες συγκρίσεις των μοντέλων (NG και Perron, 2001). Οι ορίζοντες πρόβλεψης που εξετάζονται μας επιτρέπουν να ερευνήσουμε τη συμπεριφορά των μοντέλων τόσο σε βραχυπρόθεσμες όσο και σε μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Η περίοδος που ξεκινάει η διαδικασία πρόβλεψης είναι η τελευταία περίοδος του δείγματος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των μοντέλων. Υπολογίζουμε το MSE των προβλέψεων για h -περιόδους μπροστά για καθένα από τα μοντέλα με βάση τον ακόλουθο τύπο:

$$MSE(h) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} [y_{1t+h} - \hat{y}_{1t}(h)]^2$$

όπου y_{1t+h} είναι η αληθινή τιμή του y_1 για την περίοδο $t+h$ και $\hat{y}_{1t}(h)$ είναι η

εκτιμημένη τιμή που δίνεται από κάθε μοντέλο.

Τα έξι DGPs που χρησιμοποιούνται στο πείραμα αναφέρονται στον πίνακα A1a.⁵ Η τιμή μερικών παραμέτρων κρατιέται σταθερή σε όλη την προσομοίωση. Αυτές οι παράμετροι είναι: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ και $\sigma_{12} = 0.5$. Οι σημαντικότεροι συντελεστές του VAR(1) μοντέλου όταν ενδιαφερόμαστε για τη πρόβλεψη της y_{1t} είναι ο a_{11} και ειδικά ο a_{12} . Ο πρώτος (a_{11}) ελέγχει την εμμονή (persistence) της y_{1t} όταν κρατιούνται οι υπόλοιποι συντελεστές του μοντέλου σταθεροί, ενώ ο δεύτερος ελέγχει εάν η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Επομένως, χρησιμοποιούνται διαφορετικές τιμές αυτών των δύο παραμέτρων στο παραγόμενο DGP προκειμένου να εξεταστεί η επίδρασή τους στην προβλεπτική ακρίβεια των δέκα μοντέλων (εστιάζουμε κυρίως στη σύγκριση του VAR(1) μοντέλου και του ARMA(2,1) μοντέλου). Σε όλες τις περιπτώσεις, στους συντελεστές δίνονται τιμές που δεν παραβιάζουν τη στασιμότητα της VAR(1) διαδικασίας. Εντούτοις, σχεδόν μη στάσιμα (nearly unstable) DGPs εξετάζονται προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση της ύπαρξης ριζών του χαρακτηριστικού πολωνύμου του VAR(1) μοντέλου πλησίον της μονάδας στο MSE των προβλέψεων. Για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα DGPs, οι δύο ιδιοτιμές της μήτρας συντελεστών A του VAR(1) μοντέλου αναφέρονται στον πίνακα A1a. Ο πίνακας A1b περιέχει τις “ισοδύναμες” ARMA(2,1) παραμετροποιήσεις της y_{1t} για κάθε μια από τις διαδικασίες που εξετάζονται.

2.4.1 Ο Ρόλος της Αιτιότητας κατά Granger

Τα πρώτα τρία DGPs επιλέγονται κατάλληλα για να ερευνηθούν το ρόλο της αιτιότητας

⁵ Όλοι οι πίνακες αυτού του κεφαλαίου δίνονται στο Παράρτημα A.6.

κατά Granger στην προβλεπτική ακρίβεια των μοντέλων. Σε αυτό το μέρος της προσομοίωσης η τιμή του a_{11} τίθεται ίση με 0.5. Τα MSEs για καθένα από τα δέκα εκτιμημένα μοντέλα για την DGP-1 και για δείγμα $T = 30, 50, 100, 200$ και 500 αναφέρονται στους πίνακες A2a-A2e αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις DGP-2 και DGP-3 παρουσιάζονται στους πίνακες A3a-A3e και A4a-A4e αντίστοιχα.

Στις DGP-1 και DGP-3, θέτουμε $a_{12} \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Επομένως, η θεωρία προτείνει ότι όταν υποθέσουμε ότι οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές, το VAR(1) μοντέλο δίνει καλύτερες προβλέψεις από το ARMA(2,1) μοντέλο, αλλά τα δύο μοντέλα τείνουν να γίνουν ισοδύναμα καθώς ο ορίζοντας πρόβλεψης αυξάνεται (το MSE και των δύο μοντέλων τείνει στην αδέσμευτη διακύμανση της y_{1t} για $h \rightarrow \infty$). Από την άλλη, στο DGP-2 θέτουμε $a_{12} = 0$. Για αυτή τη διαδικασία η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Σε αυτό το πλαίσιο, η θεωρία προτείνει ότι για γνωστές παραμέτρους, το VAR(1) μοντέλο είναι ισοδύναμο με το ARMA(2,1) μοντέλο για κάθε ορίζοντα πρόβλεψης h . Έτσι, αυτή η διαδικασία είναι κατάλληλη για τη σύγκριση των προβλέψεων που δίνονται από τα VAR(1) και ARMA(2,1) μοντέλα επειδή οι διαφορές του MSE που προκύπτουν οφείλονται μόνο στην αβεβαιότητα εκτίμησης και όχι στη δομή της DGP. Όλα αυτά τα θεωρητικά αποτελέσματα είναι προφανή στο πρώτο μέρος των πινάκων A2a, A3a και A4a. Παραδείγματος χάριν, για τη πρώτη εξεταζόμενη DGP, η διαφορά μεταξύ των μοντέλων είναι 37,3% για $h=1$, αλλά η διαφορά μικραίνει καθώς το h αυξάνεται (διαφορά 0,03% για $h=10$).

Η ασυμπτωτική θεωρία δείχνει ότι για τις DGP-1 και DGP-3, το VAR(1) μοντέλο παραμένει βέλτιστο για την πρόβλεψη της y_{1t} ακόμα και όταν πρέπει να εκτιμήσουμε τις

παραμέτρους των μοντέλων. Εντούτοις, όταν δεν υπάρχει σχέση αιτιότητας κατά Granger από τη y_{2t} στη y_{1t} (αυτό συμβαίνει στη DGP-2) και χρησιμοποιούνται εκτιμημένα μοντέλα για να παραχθούν οι προβλέψεις, η ασυμπτωτική θεωρία δείχνει ότι το μονομεταβλητό ARMA(2,1) μοντέλο μπορεί να είναι MSE-ανώτερο από το VAR(1) μοντέλο. Παρόλα αυτά, η προσομοίωση αποκαλύπτει ότι όταν χρησιμοποιούνται πεπερασμένα δείγματα για να εκτιμηθούν οι παράμετροι των μοντέλων, οι προβλέψεις του VAR(1) μοντέλου είναι πάντα ακριβέστερες από εκείνες του ARMA(2,1) μοντέλου, ιδιαίτερα όταν η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Η ανωτερότητα του διμεταβλητού μοντέλου είναι προφανέστερη για τα μικρά δείγματα και τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Όταν το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει ή/και αυξάνεται ο ορίζοντας πρόβλεψης h , η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων μειώνεται. Παραδείγματος χάριν, για τη DGP-1, όταν χρησιμοποιούνται $h=1$ και ένα δείγμα 30 παρατηρήσεων για την εκτίμηση, το MSE του ARMA(2,1) μοντέλου είναι κατά 55,14% μεγαλύτερο από αυτό του εκτιμημένου VAR(1) μοντέλου. Η διαφορά μειώνεται στο 37,83% όταν χρησιμοποιείται ένα δείγμα 200 παρατηρήσεων. Επιπλέον για $T=200$ και $h=10$, τα δύο μοντέλα είναι σχεδόν ισοδύναμα (διαφορά 0,16%).

Τα αποτελέσματα σχετικά με τα υπόλοιπα μοντέλα που εξετάζονται μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- (i) Για τη πρώτη DGP, τα διμεταβλητά μοντέλα συμπεριφέρονται καλύτερα από τα μονομεταβλητά, ειδικά για τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Τα μονομεταβλητά μοντέλα δεν λαμβάνουν υπόψη το σημαντικό ρόλο της y_{2t} . Το AR(1) είναι το χειρότερο μοντέλο. Εντούτοις, τα πράγματα αλλάζουν εντυπωσιακά για τις άλλες δύο DGPs που εξετάζονται. Για τη DGP-2, το AR(1) μοντέλο δίνει τις καλύτερες προβλέψεις

ξεπερνώντας το VAR(1) μοντέλο. Αυτό είναι λογικό δεδομένου ότι το αληθινό DGP είναι ένα AR(1) μοντέλο και το VAR(1) μοντέλο είναι overspecified. Για τη DGP-3, η απόδοση των VAR(1) και AR(1) μοντέλων είναι σχεδόν ίδια. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι όταν το a_{12} είναι κοντά στο μηδέν ($a_{12} = 0.1$ στη DGP-3), η y_{2t} δεν είναι πολύ σημαντικός παράγοντας για την πρόβλεψη της y_{1t} . Επομένως, το AR(1) μοντέλο παραμένει ένα καλό μοντέλο για την πρόβλεψη της y_{1t} .

(II) Όπως αναμέναμε, όλα τα overspecified μοντέλα παράγουν προβλέψεις με υψηλότερο MSE από αυτό του αληθινού μοντέλου. Όταν χρησιμοποιούμε ένα overspecified μοντέλο, πάρα πολλές παράμετροι εκτιμούνται και η δειγματική μεταβλητότητα (sampling variability) λόγω της εκτίμησης είναι μεγαλύτερη απ'ό,τι στην περίπτωση του σωστού μοντέλου. Αυτό οδηγεί στην κακή προβλεπτική απόδοση. Αφ' ετέρου, η συμπεριφορά των underspecified μοντέλων εξαρτάται από τη δομή του αληθινού μοντέλου και το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση. Σε μερικές από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις τα underspecified μοντέλα δίνουν ακριβέστερες προβλέψεις από το αληθινό ARMA(2,1) μοντέλο (παραδείγματος χάριν στη DGP-1, το AR(2) μοντέλο ξεπερνά το ARMA(2,1) μοντέλο). Βέβαια, τα μοντέλα που αγνοούν σημαντικούς όρους οδηγούν σε πολύ κακές προβλέψεις (το AR(1) μοντέλο στη DGP-1 είναι ένα παράδειγμα).

(III) Γενικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η σχετική απόδοση (ταξινόμηση) των δέκα μοντέλων που εξετάζονται σε αυτήν την έρευνα είναι παρόμοια για όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη δείγματος. Γενικά, καθώς το μέγεθος δείγματος αυξάνεται, το MSE όλων των μοντέλων μειώνεται. Αυτό απεικονίζει το γεγονός ότι η συνεισφορά της μεταβλητότητας εκτίμησης στο MSE μειώνεται με το αυξανόμενο μέγεθος δείγματος.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη μελέτη των τριών κριτηρίων επιλογής μοντέλου, τα οποία είναι τα AIC, SIC και HQ. Η έρευνα για τη συμπεριφορά του AIC γίνεται ως εξής: Για κάθε επανάληψη, η τιμή του κριτηρίου υπολογίζεται για κάθε εκτιμημένο μοντέλο (για τα τρία διμεταβλητά μοντέλα, η τιμή του AIC της πρώτης εξίσωσης εξετάζεται). Εάν το κριτήριο επιλέγει ένα μονομεταβλητό μοντέλο, κατόπιν αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη και το MSE των προβλέψεων υπολογίζεται. Διαφορετικά, εάν το κριτήριο επιλέγει ένα διμεταβλητό μοντέλο για τη y_{1t} , στρέφουμε την προσοχή μας στο μοντέλο που επιλέγεται για τη y_{2t} . Κατόπιν, ο συνδυασμός των δύο επιλεγμένων μοντέλων (ένα μοντέλο για τη y_{1t} και ένα άλλο ένα για τη y_{2t}) χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη. Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι το AIC επιλέγει το VAR(1) μοντέλο για τη y_{1t} και το AR(2) μοντέλο για τη y_{2t} . Τότε, το AR(2) μοντέλο χρησιμοποιείται αρχικά για να προβλέψει τη y_{2t} και κατόπιν αυτές οι προβλέψεις χρησιμοποιούνται για να προβλέψουμε τη y_{1t} (με τη χρησιμοποίηση της πρώτης εξίσωσης του VAR(1) μοντέλου). Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για το SIC και το HQ

Τα αποτελέσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του AIC για τις πρώτες τρεις DGPs και για όλους τους εξεταζόμενους ορίζοντες πρόβλεψης αναφέρεται στα τμήματα A,B και C του πίνακα A8a. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το SIC και το HQ αναφέρονται στα τμήματα A,B και C των πινάκων A8b και A8c αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(i) Όλα τα κριτήρια φαίνονται να είναι σε θέση να προσδιορίσουν αν ένα μοντέλο πολλών μεταβλητών ή αν ένα μονομεταβλητό μοντέλο είναι βέλτιστο για την πρόβλεψη

της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Στη πρώτη DGP που η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} , τα κριτήρια επιλέγουν ένα VAR μοντέλο αναγνωρίζοντας το σημαντικό ρόλο της y_{2t} για την πρόβλεψη της y_{1t} . Αυτό ισχύει για όλα τα μεγέθη δείγματος εκτός από $T=30$. Για ένα τόσο μικρό δείγμα ($T=30$) τα κριτήρια πληροφόρησης επιλέγουν συχνά ένα μονομεταβλητό μοντέλο για τη y_{1t} . Στη δεύτερη DGP που η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} , τα κριτήρια είναι σε θέση να δείξουν ότι η y_{2t} είναι μη σημαντική για την πρόβλεψη της y_{1t} . Επομένως, επιλέγουν ένα μονομεταβλητό μοντέλο (παραδείγματος χάριν, το SIC επιλέγει ένα μονομεταβλητό μοντέλο σε περισσότερο από 95% των περιπτώσεων για όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη δείγματος).

(II) Το SIC συμπεριφέρεται καλύτερα από το AIC και το HQ, ειδικά στα μικρά δείγματα. Το AIC και σε ένα μικρότερο βαθμό το HQ, έχουν μια τάση να επιλέγουν overspecified μοντέλα. Αυτό επιβεβαιώνει τη γνωστή τάση του AIC για επιλογή overspecified μοντέλων. Αφ' ετέρου, οι προηγούμενες μελέτες έχουν αποκαλύψει ότι το SIC τείνει να επιλέξει το μοντέλο με τις ελάχιστες υστερήσεις. Αυτή η «ιδιότητα» λειτουργεί σαν πλεονέκτημα για το SIC στο πείραμα MC μας, δεδομένου ότι το αληθινό μοντέλο είναι VAR(1). Εντούτοις, όταν χρησιμοποιούνται δείγματα 500 παρατηρήσεων, τα κριτήρια είναι λίγο πολύ ισοδύναμα (από την άποψη του MSE). Τέλος, η ανωτερότητα του SIC είναι προφανέστερη για τις μικρές τιμές του a_{12} (δηλ. όταν η επίδραση της y_{2t} επάνω στη y_{1t} είναι ήπια).

(III) Η συμπεριφορά των κριτηρίων δεν επηρεάζεται από τις διαφορετικές DGPs που εξετάζονται σε αυτήν την μελέτη. Τα MSEs των κριτηρίων είναι πολύ κοντά στο MSE του σωστού μοντέλου. Κατά συνέπεια, ένας ερευνητής, που δεν είναι σίγουρος για την

αληθινή DGP, είναι καλύτερο να στηριχθεί στα κριτήρια πληροφόρησης για να επιλέξει ένα μοντέλο.

Τα πρώτα τρία DGPs είχαν ως σκοπό να δώσουν έμφαση στο ρόλο της αιτιότητας κατά Granger στην προβλεπτική ακρίβεια των μοντέλων. Η προσομοίωση Monte Carlo δείχνει ότι το VAR(1) μοντέλο είναι καλύτερο από το ARMA(2,1) μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} . Το VAR(1) μοντέλο είναι βέλτιστο ανεξάρτητα από το αν η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} ή όχι. Η χρήση του ARMA(2,1) μοντέλου για τη πρόβλεψη της y_{1t} μπορεί να οδηγήσει σε τεράστιο MSE, ειδικά όταν χρησιμοποιείται μικρό δείγμα για την εκτίμηση. Επιπλέον, τα τρία κριτήρια πληροφόρησης φαίνονται ικανά να δείξουν εάν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα διμεταβλητό ή μονομεταβλητό μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} .

2.4.2 Ο Ρόλος της Εμμονής (Persistence) της Στοχαστικής Διαδικασίας

Είναι τώρα χρήσιμο να εξεταστεί ο ρόλος της εμμονής στην προβλεπτική ακρίβεια των μοντέλων. Η εμμονή της y_{1t} ελέγχεται από τη παράμετρο a_{11} , δεδομένου ότι οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Στη τέταρτη DGP που εξετάζεται, το a_{11} τίθεται ίσο με 0,9. Η ARMA(2,1) παραμετροποίηση της y_{1t} είναι: $y_{1t} = 1.4y_{1t-1} - 0.87y_{1t-2} + e_{1t} - 0.1092e_{1t-1}$ όπου $\text{var}(e_{1t}) = 1.3736$.

Αφού $a_{12} \neq 0$, το VAR(1) μοντέλο δίνει τις ακριβέστερες προβλέψεις από το ARMA(2,1) μοντέλο όταν οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές. Τα θεωρητικά MSEs δίνονται στο πρώτο μέρος του πίνακα A5a. Για τις προβλέψεις μίας-περιόδου μπροστά, το VAR(1) μοντέλο είναι καλύτερο από το ARMA(2,1) μοντέλο κατά 37,4%. Η διαφορά μειώνεται σε 1,95% για $h=10$.

Όταν οι παράμετροι εκτιμώνται, το VAR(1) μοντέλο παραμένει βέλτιστο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Έχει το ελάχιστο MSE μεταξύ των δέκα μοντέλων για όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης και για όλα τα μεγέθη δείγματος που εξετάζονται. Η απόδοση του ARMA(2,1) μοντέλου είναι κακή, ακόμη και για $h=5$ και $h=10$. Η διακύμανση αυξάνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος μειώνεται. Το VAR(2) είναι το δεύτερο καλύτερο μοντέλο. Όπως πριν, το SIC συμπεριφέρεται καλύτερα από τα άλλα δύο κριτήρια, ειδικά για τα μικρά δείγματα και τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Τα αποτελέσματα για τη DGP-4 παρουσιάζονται στους πίνακες A5a-A5e.

Προκειμένου να αποκαλυφθεί ο ρόλος της εμμονής, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτής της DGP με τα αποτελέσματα της πρώτης DGP. Στη DGP-4, η y_{1t} είναι πιο επίμονη (persistent) από τη στη DGP-1. Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι σε γενικές γραμμές η υψηλότερη εμμονή οδηγεί σε υψηλότερο MSE για $h>1$. Επιπλέον, τα μονομεταβλητά μοντέλα που αγνοούν το δεύτερο αυτοπαλίνδρομο όρο συμπεριφέρονται πολύ άσχημα. Η απόδοση του ARMA(2,1) μοντέλου επιδεινώνεται σχετικά με αυτή του VAR(1) μοντέλου. Τέλος, η σχετική απόδοση των κριτηρίων πληροφόρησης δεν επηρεάζεται από το βαθμό εμμονής της σειράς.

Στη πέμπτη DGP, το a_{11} τίθεται ίσο με 1.1. Σε αυτήν την περίπτωση, αυξάνουμε το βαθμό εμμονής της σειράς και η στοχαστική διαδικασία είναι τώρα κοντά στο να γίνει ασταθής (unstable) (το μέτρο των δύο ιδιοτιμών είναι 0.97). Τα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται στους πίνακες A6a-A6e, δείχνουν μία αύξηση του MSE για όλα τα εκτιμημένα μοντέλα. Για $h=10$, τα MSEs γίνονται δύο φορές υψηλότερα από εκείνα στη προηγούμενη DGP. Εντούτοις, η συμπεριφορά των κριτηρίων επιλογής δεν επηρεάζεται. Η τελευταία DGP είναι παρόμοια με την πέμπτη αλλά θέτουμε τώρα το a_{12} κοντά στο

μηδέν, έτσι ώστε η y_{2t} να μη προκαλεί κατά Granger την y_{1t} . Τα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται στους πίνακες A7a-A7e, είναι παρόμοια με εκείνα της τρίτης DGP.

Εν περιλήψει, η προσομοίωση αποκαλύπτει ότι το VAR(1) μοντέλο είναι πάντα καλύτερο από το ARMA(2,1) μοντέλο για την πρόβλεψη της y_{1t} . Αυτό συμβαίνει ακόμα και όταν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Όσο μικρότερο το μέγεθος δείγματος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση, τόσο μεγαλύτερη η διαφορά μεταξύ του MSE των δύο μοντέλων. Το VAR(1) μοντέλο είναι βέλτιστο τόσο για τις βραχυπρόθεσμες όσο και για τις μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Είναι προφανές ότι εάν ένας ερευνητής χρησιμοποιεί το μονομεταβλητό ARMA(2,1) μοντέλο αντί του διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου, οι αποκτηθείσες προβλέψεις θα είναι ανακριβείς, ειδικά όταν χρησιμοποιείται ένα μικρό δείγμα για την εκτίμηση.

Όπως αναμέναμε, όλα τα overspecified μοντέλα παράγουν προβλέψεις με υψηλότερο MSE από αυτό του αληθινού μοντέλου. Αντίθετα, ένα underspecified μοντέλο μπορεί να δώσει ακριβέστερες προβλέψεις από το αληθινό μοντέλο. Όσον αφορά στα κριτήρια πληροφόρησης, το SIC συμπεριφέρεται καλύτερα από το AIC και το HQ, ειδικά στα μικρά δείγματα. Το AIC επιλέγει συχνά overspecified μοντέλα και το ίδιο ισχύει επίσης για το HQ (σε μικρότερο βέβαια βαθμό). Εντούτοις, όλα τα κριτήρια φαίνονται να είναι σε θέση να προσδιορίσουν αν ένα πολυμεταβλητό ή μονομεταβλητό μοντέλο είναι βέλτιστο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος.

2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παραγάγαμε την "ισοδύναμη" μονομεταβλητή ARMA(2,1) παραμετροποίηση της πρώτης συνιστώσας σειράς ενός διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου. Συγκρίνουμε έπειτα τις δύο εναλλακτικές παραμετροποιήσεις σε ότι αφορά τη

δυνατότητάς τους να παραγάγουν ακριβείς προβλέψεις για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος y_{1t} βασισμένοι στο κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE). Τα θεωρητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν υποθέσουμε ότι οι παράμετροι των μοντέλων είναι γνωστές, το VAR(1) μοντέλο δίνει ακριβέστερες προβλέψεις από το ARMA(2,1) μοντέλο δεδομένου ότι η δεύτερη συνιστώσα σειρά του VAR(1) μοντέλου προκαλεί κατά Granger την y_{1t} . Διαφορετικά, τα δύο μοντέλα γίνονται MSE-ισοδύναμα για την πρόβλεψη της y_{1t} . Επίσης, η ασυμπτωτική θεωρία δείχνει ότι το VAR(1) μοντέλο παραμένει βέλτιστο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος όταν οι παράμετροι των μοντέλων εκτιμώνται. Και πάλι όμως, η ανωτερότητα του VAR(1) μοντέλου στηρίζεται στην υπόθεση ότι η y_{2t} προκαλεί κατά Granger την y_{1t} . Εάν όμως, η y_{1t} δεν προκαλείται κατά Granger από την y_{2t} , τότε το μονομεταβλητό μοντέλο μπορεί να είναι ακριβέστερο από το VAR(1) μοντέλο.

Με τη βοήθεια των προσομοιώσεων Monte Carlo εξετάζουμε τη ισχύ των προαναφερθέντων θεωρητικών αποτελεσμάτων σε πεπερασμένα δείγματα. Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι το VAR(1) μοντέλο παράγει ακριβέστερες προβλέψεις από το "ισοδύναμο" ARMA(2,1) μοντέλο σε όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη δείγματος και τους εξεταζόμενους ορίζοντες πρόβλεψης. Η ανωτερότητα του VAR(1) μοντέλου είναι εμφανέστερη για τα μικρά δείγματα και τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Επιπλέον, τα αποτελέσματα του πειράματος δείχνουν ότι τα κριτήρια επιλογής μοντέλων (συγκεκριμένα το κριτήριο πληροφόρησης Akaike (AIC), το κριτήριο πληροφόρησης Schwarz (SIC) και το κριτήριο πληροφόρησης Hannan-Quinn (HQ)) είναι σε γενικές γραμμές ικανά να δείξουν εάν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πολυμεταβλητό ή ένα μονομεταβλητό μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} . Τέλος, το SIC φαίνεται να

συμπεριφέρεται καλύτερα από τα άλλα δύο κριτήρια επιλογής μοντέλων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέτρηση της Συνεισφοράς μιας Μεταβλητής στην Εμμονή μιας Διαταραχής

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παραγάγαμε τη "ισοδύναμη" ARMA παραμετροποίηση ενός VAR μοντέλου και συγκρίναμε τις δύο εναλλακτικές παραμετροποιήσεις από την άποψη της δυνατότητάς τους να παρέχουν ακριβείς προβλέψεις για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Σε αυτό το κεφάλαιο, εκμεταλλευόμαστε αυτήν την "ισοδυναμία" μεταξύ των δύο μοντέλων για να αναπτύξουμε μια νέα μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην εμμονή μιας διαταραχής (persistence of a shock) στη μεταβλητή ενδιαφέροντος.

Ας υποθέσουμε ότι ένας ερευνητής επιθυμεί να υπολογίσει την εμμονή μιας διαταραχής σε μια συγκεκριμένη μεταβλητή ενδιαφέροντος, π.χ. την y_{1t} .⁶ Η πιο συνηθισμένη μεθοδολογία για να υπολογιστεί η εμμονή των αποκλίσεων από το μέσο όρο της y_{1t} είναι η ανάλυση Impulse Response (IRA), η οποία πραγματοποιείται συνήθως στα πλαίσια είτε ενός μονομεταβλητού ARMA μοντέλου είτε ενός πολυμεταβλητού VARMA μοντέλου. Στα πλαίσια ενός μονομεταβλητού μοντέλου, ο όρος σφάλματος (error term), που καθορίζει τη μεταβλητότητα της y_{1t} , μπορεί να θεωρηθεί ως ένας σύνθετος όρος που ενσωματώνει την επίδραση από διάφορους μεμονωμένους παράγοντες. Κατά συνέπεια, η

⁶ Οι περισσότερες εμπειρικές μελέτες χρησιμοποιούν το Half-life (HL) ως μέτρο για την εμμονή μιας διαταραχής στη y_{1t} . Το Half-life μιας στάσιμης σειράς y_{1t} μηδενικού μέσου ορίζεται ως εξής: Έστω ότι πριν τη χρονική στιγμή $t=0$, $y_{1t}=0$. Τη περίοδο $t=0$, η διαταραχή συμβαίνει και η τιμή της y_{1t} γίνεται H . Το Half-life της y_{1t} ορίζεται ως ο αριθμός των περιόδων που χρειάζεται έτσι ώστε η τιμή της y_{1t} να μειωθεί στο $H/2$, εφόσον δεν συμβεί καμιά άλλη διαταραχή.

IRA στα πλαίσια ενός μονομεταβλητού μοντέλου δεν μπορεί να προσδιορίσει την επίδραση κάθε μεμονωμένου παράγοντα, αλλά απλά μας λέει πόσο γρήγορα η y_{1t} προσαρμόζεται σε μια διαταραχή άγνωστης προέλευσης. Από την άλλη μεριά, μια IRA στα πλαίσια ενός VAR μοντέλου λαμβάνει υπόψη την επίδραση των άλλων μεταβλητών του συστήματος (για παράδειγμα της y_{2t}) στην εμμονή μιας διαταραχής επάνω στη y_{1t} . Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά της y_{2t} στην εμμονή των διαταραχών επάνω στη y_{1t} με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της IRA στο μονομεταβλητό πλαίσιο με τα αποτελέσματα της IRA στο πολυμεταβλητό πλαίσιο.

Για να διευκρινιστεί περαιτέρω το σημείο αυτό, υποθέστε ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ακολουθεί ένα VAR(1) μοντέλο. Είναι ευρέως γνωστό ότι κάθε μεταβλητή του VAR(1) μοντέλου (συμπεριλαμβανομένης και της y_{1t}) έχει μια “ισοδύναμη” μονομεταβλητή ARMA(2,1) παραμετροποίηση. Λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την “ισοδυναμία”, δεν υπάρχει κανένα λάθος προσδιορισμού (specification error) στην απόφαση κάποιου να χρησιμοποιήσει το ARMA μοντέλο για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς της y_{1t} σε μια μοναδιαία διαταραχή (δηλαδή μια διαταραχή μεγέθους 1) στον όρο σφάλματος, π.χ. e_t .

Το τελευταίο όμως είναι ένας συνδυασμός των σφαλμάτων του VAR μοντέλου, το οποίο σημαίνει ότι η προέλευση αυτής της διαταραχής δεν μπορεί να προσδιοριστεί. Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι δεν υπάρχει κανένας ταυτόχρονος συσχετισμός (contemporaneous correlation) μεταξύ των συνιστωσών του όρου σφάλματος του VAR(1) μοντέλου και ας εξετάσουμε την πρώτη εξίσωση του VAR. Ο όρος σφάλματος σε αυτήν την εξίσωση, π.χ. u_{1t} , περιγράφει τις διαταραχές στην y_{1t} εξαιρουμένης της παρατηρηθείσας (και συμπεριλαμβανόμενης στο μοντέλο) μεταβλητής y_{2t} . Το Half-life

στα πλαίσια του VAR, HL^V , της y_{1t} σε μια μοναδιαία διαταραχή στην u_{1t} πρέπει να είναι διαφορετικό από το Half-life στα πλαίσια της “ισοδύναμης” ARMA παραμετροποίησης, HL^A , εάν η μεταβλητή y_{2t} διαδραματίζει πραγματικά έναν ρόλο στη συμπεριφορά της y_{1t} . Πράγματι, η διαφορά, $D = HL^A - HL^V$, περιγράφει τη δυναμική πορεία προσαρμογής της y_{1t} που οφείλεται στη παρατηρηθείσα μεταβλητή y_{2t} . Όσο μεγαλύτερη η D τόσο σημαντικότερος είναι ο ρόλος της y_{2t} στην εμμονή της y_{1t} .

Στην επόμενη ενότητα, περιγράφεται λεπτομερέστερα η μεθοδολογία και μερικά χρήσιμα αναλυτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αν και η ανάλυση είναι βασισμένη σε ένα απλό διμεταβλητό VAR(1) μοντέλο μηδενικού μέσου για να αποφύγουμε οποιεσδήποτε περιττές περιπλοκές, η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε ένα k -μεταβλητό VARMA(p,q) μοντέλο. Η ενότητα 3.3 ολοκληρώνει αυτό το κεφάλαιο.

3.2 Impulse Response Analysis: Πολυμεταβλητά Μοντέλα και οι “Ισοδύναμες” Μονομεταβλητές Παραμετροποιήσεις τους

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε τη προτεινόμενη μεθοδολογία που είναι βασισμένη στο γεγονός ότι η IRA στα πλαίσια ενός VAR μοντέλου διαφέρει γενικά από αυτή που διεξάγεται στα πλαίσια του ισοδύναμου μονομεταβλητού ARMA μοντέλου. Η διακύμανση μεταξύ των δύο συναρτήσεων Impulse Response (Impulse Response Functions ή IRFs) συλλαμβάνει την συνεισφορά στη δυναμική διαδικασία προσαρμογής της μεταβλητής ενδιαφέροντος, των μεταβλητών που την προκαλούν σε όρους Αιτιότητας κατά Granger. Παράγουμε αρχικά τις IRFs του VAR(1) μοντέλου και του

"ισοδύναμου" ARMA(2,1) μοντέλου και συγκρίνουμε έπειτα τις δύο IRFs.

Έστω ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ακολουθεί μια στάσιμη VAR(1) διαδικασία που δίνεται στην (2.1). Η "ισοδύναμη" ARMA(2,1) παραμετροποίηση της y_{1t} δίνεται από την (2.2). Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ο όρος κινητού μέσου (Moving Average term ή MA), $w_{1t} \equiv e_{1t} + \gamma_1 e_{1t-1}$, στο ARMA(2,1) μοντέλο συσχετίζεται με τα αρχικά σφάλματα του VAR μοντέλου ως εξής:

$$w_{1t} = u_{1t} - a_{22}u_{1t-1} + a_{12}u_{2t-1}$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι το σφάλμα στη μονομεταβλητή παραμετροποίηση της y_{1t} μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση των αρχικών σφαλμάτων του VAR μοντέλου. Κατά συνέπεια, η μεταβλητότητα της w_{1t} οφείλεται στην μεταβλητότητα της u_{1t} ή της u_{2t} ή και των δύο. Επιπλέον, οι ανωτέρω σχέση δείχνει ότι η διακύμανση, σ_1^2 , του όρου σφάλματος, e_{1t} , είναι μια περίπλοκη συνάρτηση των παραμέτρων του VAR. Αυτό σημαίνει ότι η διαταραχή e_{1t} της y_{1t} στα πλαίσια του ARMA μοντέλου καθορίζεται τόσο από τη δομή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των y_{1t} και y_{2t} όσο και από τις δεύτερες ροπές των u_{1t} και u_{2t} . Κατά συνέπεια, η «προέλευση» της είναι κάθε άλλο παρά σαφής.

Ας εξετάσουμε τώρα την συμπεριφορά της y_{1t} σε μια μοναδιαία διαταραχή στα σφάλματα της στα πλαίσια του VAR(1) μοντέλου και του "ισοδύναμου" ARMA(2,1) μοντέλου. Προτού να προχωρήσουμε περαιτέρω, είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε τον ρόλο που διαδραματίζει η παράμετρος σ_{12} (η ταυτόχρονη συνδιακύμανση μεταξύ των δύο συνιστωσών του σφάλματος του VAR μοντέλου) στην ερμηνεία των

σφαλμάτων στο VAR μοντέλο. Εάν $\sigma_{12} \neq 0$, τότε το σφάλμα, u_{1t} , στην πρώτη εξίσωση του VAR, δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως ο διαταρακτικός όρος που καθοδηγεί την y_{1t} (the innovation that drives y_{1t}). Αντίθετα, εάν $\sigma_{12} = 0$, η u_{1t} επανακτά τη θέση της ως ο διαταρακτικός όρος που καθοδηγεί την y_{1t} στο VAR μοντέλο και μπορεί να θεωρηθεί ότι συνοψίζει τους παράγοντες που συμβάλλουν στη μεταβλητότητα της y_{1t} , εκτός από την y_{1t-1} και την y_{2t-1} . Ενδιαφερόμαστε για την σύγκριση της IRF, IRF_u , της y_{1t} από το μονομεταβλητό μοντέλο με την IRF, IRF_m , της y_{1t} από το πολυμεταβλητό μοντέλο. Σημειώνουμε ότι η IRF_m αναφέρεται στην συμπεριφορά της y_{1t} σε μια μοναδιαία διαταραχή της u_{1t} .⁷ Οι περιπτώσεις $\sigma_{12} = 0$ και $\sigma_{12} \neq 0$ αναλύονται στις υποενότητες 3.2.1 και 3.2.2 αντίστοιχα.

3.2.1 Η Περίπτωση μιας Διαγώνιας Μήτρας Συνδιακύμανσης, ($\sigma_{12} = 0$)

Σε όλη αυτήν την υποενότητα υποθέτουμε ότι $\sigma_{12} = 0$. Οι υπό εξέταση IRFs, IRF_u και IRF_m , καθορίζονται ως εξής:

$$IRF_u(k) = \gamma_k + \sum_{j=1}^k a_j IRF_u(k-j)$$

όπου $k = 1, 2, 3, \dots$, $\gamma_k = 0$ για $k > 1$, $a_1 = (a_{11} + a_{22})$, $a_2 = (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})$ και $a_k = 0$ για $k > 2$. Από την άλλη μεριά, η IRF_m καθορίζεται συνήθως στα πλαίσια της άπειρης

ΜΑ παραμετροποίησης της Y_t , η οποία είναι: $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i U_{t-i}$, όπου $\Phi_i = A^i$. Κατόπιν,

είναι εύκολο να δειχτεί ότι:

⁷ Στα πλαίσια του VAR μοντέλου, η συμπεριφορά της y_{1t} μπορεί να επηρεαστεί από μια διαταραχή στη u_{2t} ακόμα και αν $\sigma_{12} = 0$.

$$\text{IRF}_m(k) = \phi_{11,k}$$

όπου $\phi_{11,k}$ είναι το πάνω-αριστερά στοιχείο του πίνακα Φ_k .

Ενδιαφερόμαστε για τη σύγκριση της $\text{IRF}_u(k)$ με την $\text{IRF}_m(k)$. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας υπό τη μορφή των ακόλουθων προτάσεων.

Πρόταση (3,1): Η $\text{IRF}_u(k)$ δεν είναι γενικά ισοδύναμη με την $\text{IRF}_m(k)$ για κάποιο $k < \infty$.⁸

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Β.1.

Λόγω της παρουσίας της γ_1 στην $\text{IRF}_u(k)$, είναι αναλυτικά αδύνατο να προσδιοριστούν όλες τις περιπτώσεις όπου $\text{IRF}_u(k) > \text{IRF}_m(k)$. Εάν, εντούτοις, επιβάλλουμε μερικούς πρόσθετους περιορισμούς στις παραμέτρους του VAR μοντέλου, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση (3,2): Εάν $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ και $a_{12}a_{21} > 0$, τότε $\text{IRF}_u(k) > \text{IRF}_m(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Β.2.

Όμως, υπάρχει μια περίπτωση όπου $\text{IRF}_u(k) = \text{IRF}_m(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμένα, αυτή η περίπτωση προκύπτει όταν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger την y_{1t} . Ισχύει το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα (3,1): Όταν $a_{12} = 0$, $\text{IRF}_u(k) = \text{IRF}_m(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Β.3.

⁸ Με δεδομένη τη στασιμότητα της (2.1), η $\text{IRF}_u(k)$ και η $\text{IRF}_m(k)$ τείνουν στο 0 καθώς το k τείνει στο άπειρο.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι μόνο όταν $a_{12} = 0$, το AR(1) μοντέλο είναι η σωστή μονομεταβλητή παραμετροποίηση για την y_{1t} . Στην αντίθετη περίπτωση, το AR(1) μοντέλο δεν είναι σωστά ορισμένο και κατά συνέπεια παράγει παραπλανητικά αποτελέσματα σε κάθε πτυχή της στατιστικής μελέτης. Η παρουσία έστω και μίας μεταβλητής που προκαλεί κατά Granger την y_{1t} , το AR(1) μοντέλο είναι σαφώς ακατάλληλο.

3.2.2 Η Περίπτωση μιας Μη-Διαγώνιας Μήτρας Συνδιακύμανσης, ($\sigma_{12} \neq 0$)

Σε αυτήν την περίπτωση, ο όρος σφάλματος, u_{1t} , στην πρώτη εξίσωση του VAR(1) μοντέλου δεν συμπίπτει με τον διαταρακτικό όρο που καθορίζει την y_{1t} . Με τη βοήθεια της συνηθισμένης πρακτικής που ακολουθείται σε παρόμοιες περιπτώσεις, αποκαθιστάμε την «ορθογωνιότητα» (orthogonality) των σφαλμάτων με την κατά τον Cholesky αποδόμηση (decomposition) της Σ_u , $\Sigma_u = PP'$, όπου P είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα. Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, λαμβάνουμε την ακόλουθη παραμετροποίηση για την Y_t :

$$\begin{aligned} y_{1t} &= a_{11}y_{1t-1} + a_{12}y_{2t-1} + v_{1t} \\ y_{2t} &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}y_{1t} + \left(a_{21} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}a_{11}\right)y_{1t-1} + \left(a_{22} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}a_{12}\right)y_{2t-1} + v_{2t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου $V_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}u_{1t} \end{bmatrix}$, με μήτρα συνδιακύμανσης $\Sigma_v = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}} \end{bmatrix}$. Αυτή

η ιδιαίτερη παραμετροποίηση λήφθηκε με την υπόθεση ότι η y_{1t} είναι “causally prior” από την y_{2t} . Αυτό σημαίνει ότι οι τρέχουσες τιμές της y_{1t} δεν αντιδρούν συγχρόνως στις αλλαγές της y_{2t} . Ο όρος σφάλματος, v_{1t} , στην πρώτη εξίσωση της (3.1) είναι

ορθογώνιος στις y_{1t-1} και y_{2t-1} . Με άλλα λόγια, η v_{1t} μπορεί να θεωρηθεί ότι συνοψίζει όλους τους άλλους παράγοντες που συμβάλλουν στη μεταβλητότητα της y_{1t} , εκτός από τις y_{1t-1} και y_{2t-1} . Με βάση την (3.1), λαμβάνουμε την ακόλουθη άπειρη MA παραμετροποίηση της Y_t :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i W_{t-i}$$

όπου $\Theta_i = \Phi_i P$ και $W_t = (w_{1t}, w_{2t})' = P^{-1}U_t$.⁹

Καθορίζουμε τώρα την IRF, IRF_{mo} , της y_{1t} να είναι:

$$IRF_{mo}(k) = \frac{\theta_{11,k}}{\sqrt{\sigma_{11}}}$$

όπου $\theta_{11,k}$ είναι το άνω-αριστερά στοιχείο του πίνακα Θ_k . Εξ ορισμού, η $IRF_{mo}(k)$ περιγράφει τη συμπεριφορά της y_{1t} σε μια μοναδιαία διαταραχή στην v_{1t} μετά από k περιόδους. Επομένως, η $IRF_{mo}(k)$ είναι άμεσα συγκρίσιμη με την $IRF_u(k)$. Η ακόλουθη πρόταση ισχύει:

Πρόταση (3,3): Γενικά, $IRF_{mo}(k) \neq IRF_u(k)$ για κάποιο πεπερασμένο k .

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Β.4.

Το ακόλουθο λήμμα παρέχει την ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισοδυναμία μεταξύ $IRF_{mo}(k)$ και $IRF_u(k)$.

Λήμμα (3,2): Όταν $a_{12} = 0$, $IRF_u(k) = IRF_{mo}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Β.5.

3.3 Συμπεράσματα

⁹ Εξ' ορισμού, η μήτρα συνδιακυμάνσεων της W_t είναι $\Sigma_W = I_2$.

Σε αυτό το κεφάλαιο εισαγάγαμε μια νέα μεθοδολογία που στοχεύει στη μέτρηση της συνεισφοράς μιας μεταβλητής (ή ενός συνόλου μεταβλητών) στην εμμονή (persistence) των διαταραχών στη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Η μεθοδολογία βασίστηκε στη σύγκριση της συνάρτησης Impulse Response (IRF) στα πλαίσια ενός VAR μοντέλο με την IRF στα πλαίσια της "ισοδύναμης" μονομεταβλητής ARMA παραμετροποίησης της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Επιπλέον, παρείχαμε συνθήκες για την ισοδυναμία των δύο συναρτήσεων IRF και αποδείξαμε επίσης μερικές χρήσιμες ανισότητες μεταξύ των δύο συναρτήσεων IRF.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Έλεγχος για την Ύπαρξη Αιτιότητας κατά Granger στη Διακύμανση κάτω από τη Παρουσία Αιτιότητας στο Μέσο

4.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε μια διμεταβλητή στάσιμη και εργοδική στοχαστική διαδικασία $Z_t = [z_{1t}, z_{2t}]^T$, $t = 1, 2, \dots$. Έστω $D(z_{1t} | Z_{t-1}^0; \theta)$ η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της z_{1t} με βάση την διαθέσιμη πληροφορία $Z_{t-1}^0 = \{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots\}$. Εάν $D(z_{1t} | Z_{t-1}^0; \theta) = D(z_{1t} | z_{1t-1}^0; \theta)$, τότε οι προηγούμενες τιμές της z_{2t} δεν διαδραματίζουν οποιοδήποτε ρόλο στον καθορισμό της κατανομής πιθανότητας της z_{1t} . Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η z_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger την z_{1t} . Η έννοια της αιτιότητας κατά Granger μπορεί να ταξινομηθεί περαιτέρω σε σχέση με την r -βαθμού δεσμευμένη ροπή της z_{1t} . Πιο συγκεκριμένα, εάν $E(z_{1t}^r | Z_{t-1}^0) \neq E(z_{1t}^r | z_{1t-1}^0)$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η z_{2t} προκαλεί κατά Granger την z_{1t} στην r -βαθμού δεσμευμένη ροπή. Η αιτιότητα στο μέσο και η αιτιότητα στη διακύμανση είναι οι δύο τύποι αιτιοτήτων Granger που εμφανίζονται να είναι οι πιο σχετικές στις οικονομικές και χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Ο έλεγχος για την αιτιότητα στο μέσο των σειρών έχει προσελκύσει πολύ ερευνητικό ενδιαφέρον κατά τη διάρκεια των τελευταίων τριάντα ετών, ειδικά μέσα στο πλαίσιο των διανυσματικών αυτοπαλίνδρομων μοντέλων (VAR(p)). Οι έλεγχοι για ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση έχει εμφανιστεί πρόσφατα στη βιβλιογραφία, στοχεύοντας στην

αποκάλυψη δυναμικών δεύτερης τάξης στις χρηματιστηριακές αγορές (βλ. Cheung και NG, 1996 και Hong, 2001). Αυτό το κεφάλαιο εστιάζει στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ της αιτιότητας στο μέσο και της αιτιότητας στη διακύμανση και πιο συγκεκριμένα μελετάται η επίδραση της ύπαρξης αιτιότητας στο μέσο στον έλεγχο για αιτιότητα στη διακύμανση. Με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo, αξιολογούμε την επίδραση από την ύπαρξη αιτιότητας στο μέσο (εφόσον αυτή αγνοηθεί) στις ιδιότητες μεγέθους (size properties) κάποιων στατιστικών ελέγχων για την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση.

4.2 Έλεγχοι για Αιτιότητα στη Διακύμανση

Η αρχική μεθοδολογία των Cheung και NG (1996) για τον έλεγχο για ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση μεταξύ δύο σειρών μπορεί να περιγραφεί με τα ακόλουθα βήματα:

1) Για κάθε μια από τις δύο σειρές, $z_{it}, i=1,2$, εκτιμούμε ένα μοντέλο που για το δεσμευμένο μέσο, μ_{it} , και τη δεσμευμένη διακύμανση, h_{it}^2 , καθορίζεται ως ένα ARMA(p,q) και GARCH(1,1) μοντέλο αντίστοιχα. Στην περίπτωση που η αιτιότητα στο μέσο όρο είναι παρούσα, η παραμετροποίηση του δεσμευμένου μέσου πρέπει να τροποποιηθεί αναλόγως προκειμένου να λάβει υπόψη της αυτήν την πρόσθετη πληροφορία. Διαφορετικά, οι έλεγχοι για αιτιότητα στη διακύμανση είναι πιθανό να πάσχουν από τις διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions).

2) Παίρνουμε τα τετράγωνα των τυποποιημένων υπολοίπων (squared standardized residuals), $\hat{\epsilon}_{it}^2 \equiv (z_{it} - \hat{\mu}_{it})^2 / \hat{h}_{it}^2$. Υπολογίζουμε τη δειγματική συνάρτηση συνδιακυμάνσεων μεταξύ $\hat{\epsilon}_{1t}^2$ και $\hat{\epsilon}_{2t}^2$

$$\hat{C}_{12}(j) \equiv T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \hat{\epsilon}_{1t}^2 \hat{\epsilon}_{2t-j}^2 \quad \text{για } j \geq 0$$

$$\hat{C}_{12}(j) \equiv T^{-1} \sum_{t=-j+1}^T \hat{\varepsilon}_{1t+j}^2 \hat{\varepsilon}_{2t}^2 \quad \text{για } j < 0$$

και υπολογίζουμε τη δειγματική συνάρτηση συσχέτισης, που ορίζεται ως

$$\hat{\rho}_{12}(j) = \left\{ \hat{C}_{11}(0) \hat{C}_{22}(0) \right\}^{-\frac{1}{2}} \hat{C}_{12}(j)$$

όπου $\hat{C}_{11}(0)$ και $\hat{C}_{22}(0)$ είναι οι δειγματικές διακυμάνσεις των z_{1t} και z_{2t} αντίστοιχα.

3) Υπολογίζουμε το στατιστικό των Cheung και NG (1996), S , που είναι βασισμένο

στα τετράγωνα των πρώτων M δειγματικών συσχετίσεων, $S = T \sum_{j=1}^M \hat{\rho}_{12}^2(j)$. Αυτό το

στατιστικό ακολουθεί ασυμπτωτικά την $X^2(M)$ κατανομή κάτω από την μηδενική

υπόθεση μη ύπαρξης αιτιότητας μεταξύ των δύο σειρών στη διακύμανση. Σημειώστε ότι

υπάρχει διαθέσιμη μια εναλλακτική μορφή για το ίδιο στατιστικό, η οποία είναι

κατάλληλη για δείγματα μικρού μεγέθους. Το στατιστικό αυτό το συμβολίζουμε με S^*

και ορίζεται ως $S = T \sum_{j=1}^M \omega_j \hat{\rho}_{12}^2(j)$ όπου $\omega_j = T/(T-j)$ ή $\omega_j = (T+2)/(T-j)$.

Ο Hong (2001) σημειώνει ότι το S μπορεί να μην είναι πλήρως αποτελεσματικό

δεδομένου ότι δίνει ίσο βάρος σε κάθε μια από τις M δειγματικές συσχετίσεις. Αντ'

αυτού, προτείνει την τροποποίηση του S στατιστικού με τη βοήθεια μιας συνάρτησης

στάθμισης (weighting scheme), $k(\cdot)$, που δίνει μεγαλύτερο βάρος στις χαμηλότερες τιμές

του j . Αυτή η τροποποίηση οδηγεί σε ένα νέο στατιστικό έλεγχο, Q_1 , μαζί με μια

εναλλακτική μορφή για μικρά δείγματα, Q_1^* . Ο Hong (2001) προτείνει μια σειρά από

συναρτήσεις στάθμισης, $k(\cdot)$, μερικές από τις οποίες παρέχουν μηδενικό βάρος για τις

συσχετίσεις βαθμού $j > M$ (π.χ. Bartlett, Parzen και Tukey- Hanning), ενώ κάποιες

άλλες λαμβάνουν υπόψη τους όλες τις συσχετίσεις (π.χ. Daniell, και Quadratic Spectral). Υπό τους κατάλληλους περιορισμούς αποδεικνύεται ότι $Q_1 \rightarrow N(0,1)$ όταν η H_0 είναι αληθής. Αφ' ετέρου, κάτω από μια γενική κλάση εναλλακτικών με ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση, $Q_1 \rightarrow \infty$, που υπονοεί ότι το Q_1 είναι ένα μονόπλευρος έλεγχος.

4.3 Αποτελέσματα Monte Carlo

Τα προαναφερθέντα ασυμπτωτικά αποτελέσματα, παρήχθησαν με βάση κάποιες μάλλον περιοριστικές υποθέσεις, ειδικά σε ότι αφορά τη παραμετροποίηση του δεσμευμένου μέσου για τις z_{it} , $i = 1, 2$. Ο Hong υποθέτει την παρουσία μόνο ενός σταθερού όρου, αν και στο Monte Carlo πείραμα του επιτρέπει τη χρησιμοποίηση εξωγενών μεταβλητών. Ακόμη και στην τελευταία περίπτωση όμως, τα πιθανά αποτελέσματα (προβλήματα) από την ύπαρξη αιτιότητας στο μέσο αφήνονται ανεξερεύνητα. Σε αυτό το τμήμα, ερευνάμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ της αιτιότητας στο μέσο και της αιτιότητας στη διακύμανση. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε εάν η παρουσία αιτιότητας στο μέσο, εφόσον αγνοηθεί, έχει επιπτώσεις στη συμπεριφορά των ελέγχων για αιτιότητα στη διακύμανση. Για να το πετύχουμε αυτό, υποθέτουμε ότι η $\mathbf{z}_t = [z_{1t}, z_{2t}]'$ ακολουθεί μια διμεταβλητή VAR(1) διαδικασία, η οποία είναι $\mathbf{z}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{e}_t$, με $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2$. Το διάνυσμα σφάλματος, $\mathbf{e}_t = [e_{1t}, e_{2t}]'$ ακολουθεί μια διμεταβλητή GARCH(1,1) διαδικασία, όπου το διάνυσμα διαταρακτικού όρου, $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, u_{2t}]'$, ακολουθεί την NIID(0, I_2). Η δεσμευμένη διακύμανση, $H_t = [h_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ περιγράφεται με ένα πρώτου βαθμού διαγώνιο BEKK μοντέλο, προτεινόμενο από τους Engle και Kroner (1995):

$$H_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \mathbf{N}\mathbf{e}_{t-1}'\mathbf{e}_{t-1}'\mathbf{N}' + \Delta H_{t-1}\Delta'$$

όπου $N = [v_{ij}]$, $\Delta = [\delta_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ και C είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει καμία αιτιότητα στη διακύμανση μεταξύ των δύο σειρών, θέτοντας $v_{12} = v_{21} = \delta_{12} = \delta_{21} = 0$. Ενδιαφερόμαστε για την εξέταση των ιδιοτήτων μεγέθους (size properties) των S , S^* , Q_1 και Q_1^* για τον έλεγχο της έγκυρης μηδενικής υπόθεσης ότι η z_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger στη διακύμανση τη z_{1t} , σε περιπτώσεις όπου $a_{12} \neq 0$, δηλ. όταν η z_{2t} προκαλεί κατά Granger στο μέσο τη z_{1t} . Εξετάζουμε δύο εναλλακτικές μεθόδους για να παραμετροποιήσουμε τον δεσμευμένο μέσο των σειρών. Η πρώτη μέθοδος εκτιμά ένα μονομεταβλητό ARMA(2,1) μοντέλο με GARCH(1,1) σφάλματα για την z_{1t} , ενώ η δεύτερη μέθοδος λαμβάνει άμεσα υπόψη της την παρουσία αιτιότητας στο μέσο με την εκτίμηση της πρώτης εξίσωσης του VAR(1) μοντέλου, δηλαδή $z_{1t} = a_{11}z_{1t-1} + a_{12}z_{2t-1} + e_{1t}$, επιτρέποντας πάλι για GARCH(1,1) σφάλματα. Και στις δύο περιπτώσεις, υποθέτουμε την πλήρη γνώση του δεσμευμένου μέσου, δεδομένου ότι η μονομεταβλητή παραμετροποίηση της z_{1t} είναι πράγματι ένα ARMA(2,1) μοντέλο. Εντούτοις, η εκτίμηση κάθε μιας από τις δύο εξισώσεις του VAR μοντέλου ξεχωριστά αντί για την εκτίμηση του VAR ως σύστημα εξισώσεων μπορεί να έχει επιπτώσεις στις ιδιότητες των ελέγχων για ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση. Σχετικά με τις παραμέτρους της δεσμευμένης διακύμανσης, θέτουμε: $v_{11} = v_{22} = \sqrt{0.15}$, $\delta_{11} = \delta_{22} = \sqrt{0.83}$, $c_{11} = 0,1$, $c_{21} = 0,05$, $c_{22} = 0,1$. Οι επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων είναι παρόμοιες με αυτές που αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία. Οι επιλεγμένες τιμές υπονοούν ότι οι e_{it} , $i = 1, 2$ είναι στάσιμες διαδικασίες δευτέρου βαθμού, χωρίς όμως να έχουν πεπερασμένες τέταρτες ροπές (βλ. Bollerslev, 1986, He και Terasvirta, 1999). Επομένως, ως υποπροϊόν αυτής της μελέτης, θα ερευνήσουμε επίσης εάν η συμπεριφορά

των υπό εξέταση στατιστικών ελέγχων επηρεάζεται από την ύπαρξη ή μη πεπερασμένων τέταρτων ροπών. Σημειώστε, εντούτοις, ότι η στασιμότητα τέταρτης τάξης δεν είναι απαραίτητη για να παραγάγουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των Q_1 και Q_1^* (Hong, 2001). Εξετάζουμε ένα μέγεθος δείγματος 500 παρατηρήσεων και χρησιμοποιούμε 1000 επαναλήψεις στη προσομοίωση. Για να εξαλείψουμε την επίδραση των αρχικών συνθηκών, οι πρώτες 500 παρατηρήσεις του δείγματος εξαιρούνται του πειράματος. Οι προσομοιώσεις οργανώθηκαν για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου M , 5 και 50. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Μοντέλο 1: Ήπια αιτιότητα στο μέσο - Στάσιμο VAR: $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (0.5, 0.5, 0.0, 0.5)$

Οι επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων παράγουν μια δευτέρου βαθμού στάσιμη, ασυμπτωτικά ανεξάρτητη διανυσματική διαδικασία \mathbf{z}_t . Τα αποτελέσματα για το μοντέλο 1 δίνονται στο πίνακα C1.¹⁰ Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Όταν ένα μονομεταβλητό ARMA(2,1) μοντέλο χρησιμοποιείται για να φιλτράρει το δεσμευμένο μέσο της z_{1t} (όταν δηλαδή αγνοηθεί η ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στο δεσμευμένο μέσο), οι έλεγχοι για αιτιότητα κατά Granger στη διακύμανση απορρίπτουν τη σωστή μηδενική υπόθεση πολύ συχνά για όλες τις τιμές της παραμέτρου M , ανεξάρτητα από την επιλογή της συνάρτησης στάθμισης. Παραδείγματος χάριν, το ποσοστό απόρριψης της H_0 από το Q_1^* για $M=5$, κυμαίνεται από 66,2 έως 77,2 τοις εκατό για τις “truncated” (ομοιόμορφη) και Parzen συναρτήσεις αντίστοιχα. Όταν η παράμετρος M αυξάνεται, τα εμπειρικά μεγέθη των ελέγχων πέφτουν ομοιόμορφα. Εντούτοις, αυτό δεν σημαίνει ότι οι έλεγχοι (τεστ) αποδίδουν καλύτερα όταν ένα μεγάλο

¹⁰ Όλοι οι πίνακες αυτού του κεφαλαίου δίνονται στο Παράρτημα C.1.

Μ χρησιμοποιείται, δεδομένου ότι ο συνυπολογισμός στατιστικά ασήμαντων συσχετίσεων μειώνει τη δύναμη (power) των ελέγχων. Τέλος, οι S και S^* εμφανίζονται να είναι λιγότερο ευαίσθητοι στην παρουσία αιτιότητας στο μέσο σε σχέση με τους Q_1 και Q_1^* .

(II) Από την άλλη μεριά, όταν φιλτράρονται την ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στο μέσο με την εκτίμηση του κατάλληλου μοντέλου για τον δεσμευμένο μέσο, οι έλεγχοι για ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στη διακύμανση συμπεριφέρονται καλά. Τα εμπειρικά μεγέθη όλων των υπό εξέταση ελέγχων είναι κοντά στις ονομαστικές τιμές τους για όλες τις τιμές της M . Τα αποτελεσμάτων επίσης δείχνουν ότι η εκτίμηση κάθε εξίσωσης του VAR χωριστά, αντί της εκτίμησης του VAR ως σύστημα, δεν έχει οποιαδήποτε δυσμενή επίδραση στις ιδιότητες των ελέγχων για αιτιότητα στη διακύμανση.

Μοντέλο 2: Ισχυρή αιτιότητα στο μέσο - Στάσιμο VAR: $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (0.5, 0.9, 0.0, 0.5)$

Εδώ, οι ιδιοτιμές του A είναι ίδιες με εκείνες της προηγούμενης περίπτωσης. Αυτό σημαίνει ότι εκτός από την ύπαρξη ισχυρότερης αιτιότητας στο μέσο, η στοχαστική συμπεριφορά (moment and memory properties) της διαδικασίας z_t δεν διαφέρει σημαντικά από εκείνη της προηγούμενης περίπτωσης. Τα αποτελέσματα για το μοντέλο 2 δίνονται στο πίνακα C2 και συνοψίζονται ως εξής:

(i) Η αγνόηση της ύπαρξης ισχυρής αιτιότητας στο μέσο έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα στις ιδιότητες όλων των υπό εξέταση στατιστικών ελέγχων. Όταν η M ισούται με 5, το εμπειρικό μέγεθος όλων των ελέγχων είναι περίπου 99 τοις εκατό, προτείνοντας λανθασμένα την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση σχεδόν σε κάθε

περίπτωση. Η επιλογή της τιμής για τη παράμετρο M γίνεται ένα δευτερεύον ζήτημα σε αυτήν την περίπτωση, αφού όλα τα τεστ απορρίπτουν τη σωστή H_0 πολύ συχνά.

(II) Τα ανωτέρω αναφερόμενα προβλήματα στη συμπεριφορά των ελέγχων φαίνονται να είναι εύκολα ιάσιμα. Όταν η πρώτη εξίσωση του VAR(1) χρησιμοποιείται για να φιλτράρει το δεσμευμένο μέσο, όλοι οι στατιστικοί έλεγχοι επανακτούν τις επιθυμητές ιδιότητες μεγέθους τους. Τα εμπειρικά μεγέθη είναι κοντά στις ονομαστικές τιμές τους για όλες τις τιμές της M και για όλες τις υπό εξέταση συναρτήσεις στάθμισης.

Μοντέλο 3: Ισχυρή αιτιότητα στο μέσο – Συνολοκληρώσιμο (cointegrated) VAR:

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (1.0, 0.9, 0.0, 0.5)$$

Αυτή η περίπτωση διαφέρει σημαντικά και από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις αφού εδώ η z_t είναι μια μη στάσιμη συνολοκληρώσιμη διαδικασία. Συνολοκληρώσιμες σειρές συναντάμε συχνά όταν μελετάμε τις τιμές (levels) οικονομικών μεταβλητών (π.χ. συναλλαγματικές ισοτιμίες ή τιμές χρηματιστηρίου). Είναι γνωστό ότι σε τέτοιες περιπτώσεις υπάρχουν δευτέρου βαθμού ασυμπτωτικά προβλήματα (second-order asymptotic bias effects) στην εκτίμηση των παραμέτρων του δεσμευμένου μέσου (βλ., παραδείγματος χάριν, Park και Phillips, 1988, Phillips, 1991). Επομένως, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί εάν η παρουσία τέτοιων στοιχείων επηρεάζει τη συμπεριφορά των ελέγχων για αιτιότητα στη διακύμανση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πίνακα C3. Μπορεί να φανεί ότι η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας στον δεσμευμένο μέσο δεν αλλάζει την εικόνα που λαμβάνεται από το μοντέλο 2. Οι στατιστικοί έλεγχοι για την ύπαρξη αιτιότητα κατά Granger στη διακύμανση έχουν καλές ιδιότητες μεγέθους υπό την προϋπόθεση ότι η ύπαρξη αιτιότητας στο μέσο λαμβάνεται υπόψη.

Μοντέλο 4: Ήπια αιτιότητα στο μέσο - Στάσιμο VAR: IGARCH διαδικασία. (a_{11} ,

$$a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (0.5, 0.5, 0.0, 0.5)$$

Σε αυτό το μοντέλο, χαλαρώνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα σφάλματος e_t είναι στάσιμο δευτέρου βαθμού. Αντ' αυτού, υποθέτουμε ότι και τα δύο στοιχεία αυτού του διανύσματος είναι IGARCH(1,1) διαδικασίες, θέτοντας $v_{11} = v_{22} = \sqrt{0.15}$ και $\delta_{11} = \delta_{22} = \sqrt{0.85}$. Αυτή η περίπτωση έχει σημαντικό εμπειρικό ενδιαφέρον δεδομένου ότι πολλές μελέτες έχουν εκθέσει παρόμοιες IGARCH εκτιμήσεις. Τα αποτελέσματα (που αναφέρονται στο πίνακα C4) είναι κατά ένα μεγάλο μέρος παρόμοια με εκείνα που λαμβάνονται για τις αντίστοιχες δευτέρου βαθμού στάσιμες περιπτώσεις, και αποδεικνύουν τη σημασία που έχει το κατάλληλο φιλτράρισμα της αιτιότητας στο δεσμευμένο μέσο.

4.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάσαμε την επίδραση της ύπαρξης αιτιότητας κατά Granger στο δεσμευμένο μέσο, αν αυτή αγνοηθεί, στη συμπεριφορά κάποιων στατιστικών ελέγχων για την ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger στη διακύμανση. Με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo δείξαμε ότι το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να φιλτράρει το δεσμευμένο μέσο των υπό εξέταση σειρών πρέπει να λαμβάνει υπόψη του τη πιθανή ύπαρξη αιτιότητας στο μέσο. Εάν αντ' αυτού, χρησιμοποιηθεί ένα μονομεταβλητό μοντέλο για να φιλτράρει τη γραμμική-χρονική εξάρτηση στο δεσμευμένο μέσο, οι στατιστικοί έλεγχοι για την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση πάσχουν από σοβαρές διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions), ειδικά όταν η αγνοηθείσα αιτιότητα στο μέσο είναι ισχυρή. Σε αυτή την περίπτωση η αιτιότητα στο μέσο λαμβάνεται από τα τεστ ως αιτιότητα στη διακύμανση, και κατά συνέπεια τα τεστ υποδεικνύουν λανθασμένα την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκτίμηση και Πρόβλεψη στα Πλαίσια ενός VAR(1) Μοντέλου με Ρίζες Πλησίον της Μονάδος και Ετεροσκεδαστικότητα

5.1 Εισαγωγή

Η χρήση των διανυσματικών αυτοπαλίνδρομων μοντέλων (VAR) για την πρόβλεψη των οικονομικών μεταβλητών έχει μια μακροχρόνια ιστορία στην οικονομετρία και σε εφαρμοσμένες οικονομικές μελέτες. Η ακρίβεια και η διακύμανση των προβλέψεων ενός VAR μοντέλου εξαρτώνται από τις ιδιότητες χρονικής ετερογένειας της διαθέσιμης ομάδας μεταβλητών. Εάν το VAR μοντέλο είναι στάσιμο, δηλ. δεν περιέχει μοναδιαίες ρίζες (unit roots), τότε παράγει προβλέψεις των οποίων τα σφάλματα έχουν πεπερασμένη διακύμανση ακόμα και για μακρινούς ορίζοντες πρόβλεψης. Η παρουσία ολοκληρώσιμων (I(1)) σειρών στο VAR μοντέλο (δηλαδή σειρών που περιέχουν μοναδιαίες ρίζες) περιπλέκει τη διαδικασία πρόβλεψης. Εάν η ύπαρξη μοναδιαίων ριζών αγνοηθεί, τότε η διακύμανση των σφαλμάτων πρόβλεψης του VAR μοντέλου θα αυξάνεται χωρίς όρια, καθώς ο ορίζοντας πρόβλεψης θα μεγαλώνει. Επιπλέον, ο Phillips (1998) έδειξε ότι ένα μη στάσιμο VAR μοντέλο παράγει προβλέψεις που δεν είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες με τις βέλτιστες δυνατές προβλέψεις. Αφ' ετέρου, εάν οι πληροφορίες για την παρουσία και τη θέση των μοναδιαίων ριζών στο σύστημα είναι διαθέσιμες, τότε είναι εφικτό να παράγουμε ασυμπτωτικά βέλτιστες προβλέψεις. Διαισθητικά, η ύπαρξη συνολοκλήρωσης (cointegration) μεταξύ των υπό εξέταση σειρών έχει επιπτώσεις στη διαδικασία πρόβλεψης τους, δεδομένου ότι μερικοί γραμμικοί

συνδυασμοί των σειρών παραμένουν συνδεδεμένες μακροπρόθεσμα. Κατά συνέπεια, η επιβολή των περιορισμών συνολοκλήρωσης (cointegration restrictions), όταν ισχύουν, παράγει ουσιαστικές βελτιώσεις στις προβλέψεις για μακρινούς ορίζοντες πρόβλεψης, μαζί με συνεπείς εκτιμήσεις της μήτρας συνδιακύμανσης των σφαλμάτων πρόβλεψης (βλ. Engle και Yoo, 1987, Clements και Hendry, 1993, Stock, 1995, Lin και Tsay, 1996, Phillips, 1998).¹¹

Για να το θέσουμε διαφορετικά, η πρόβλεψη στα πλαίσια ενός μοντέλου με λανθασμένες υποθέσεις σε ότι αφορά την παρουσία και τη θέση μοναδιαίων ριζών έχει αρνητικό αντίκτυπο στην ποιότητα των προβλέψεων. Καθορίζουμε δύο τύπους «κόστους πρόβλεψης» που προκύπτουν από τέτοιου τύπου λανθασμένη παραμετροποίηση (misspecification). Ο πρώτος, αναφερόμενος ως «κόστος πρόβλεψης τύπου I» (FC1), προκύπτει από την επιβολή άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης σε ένα στάσιμο VAR μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, υποθέστε ότι ένας ερευνητής χρησιμοποιεί ένα διμεταβλητό, αυτοπαλίνδρομο VAR(1) μοντέλο, του οποίου τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη ιδιοτιμή συμβολίζουμε με λ_{\max} και λ_{\min} αντίστοιχα. Σφάλμα τύπου FC1 είναι πιθανό να προκύψει όταν η λ_{\max} είναι μικρότερη από αλλά πλησίον της μονάδος, ενώ η λ_{\min} είναι αρκετά μικρότερη από την μονάδα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα συνηθισμένα τεστ μοναδιαίας ρίζας είναι εμφανώς ανίκανα να απορρίψουν την λανθασμένη μηδενική υπόθεση ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας για εναλλακτικές που βρίσκονται στη περιοχή της μονάδος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα τεστ είναι πιθανό να προτείνουν λανθασμένα ένα “reduced rank” μοντέλο (RR). Αυτό το μοντέλο εκτιμάται συνήθως με τη βοήθεια του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του Johansen (JOH), και έπειτα παράγονται (μη

¹¹ Αντίθετα, οι Christoffersen και Diebold (1998) υποστηρίζουν ότι η αγνόηση σχέσεων συνολοκλήρωσης δεν επηρεάζει τη ποιότητα των μακροπρόθεσμων προβλέψεων.

βέλτιστες) προβλέψεις (βλ. Johansen, 1988 και 1991). Εντούτοις, υπάρχουν περιπτώσεις όπου λάθος παραμετροποίηση προκύπτει για τους αντίθετους λόγους, δηλαδή από την αγνόηση έγκυρων σχέσεων συνολοκλήρωσης. Τέτοιες περιπτώσεις μπορούν να προκύψουν όταν η λ_{\max} ισούται με μονάδα και η λ_{\min} είναι μικρότερη από αλλά πλησίον της μονάδος. Σε αυτήν την περίπτωση, το RR είναι το σωστά ορισμένο μοντέλο. Εντούτοις, τα τεστ για μοναδιαία ρίζα είναι πιθανό να αποτύχουν να απορρίψουν την λανθασμένη υπόθεση $\lambda_{\min} = 1$, προτείνοντας ένα μοντέλο σε πρώτες διαφορές (a first-differenced (FD) VAR model) ως το αληθινό μοντέλο. Τα αποτελέσματα αυτού του τύπου λανθασμένης παραμετροποίησης στην διαδικασία πρόβλεψης θα τα αναφέρουμε ως «κόστος πρόβλεψης του τύπου II» (FC2).

Αυτό το κεφάλαιο στοχεύει στην ποσοτικοποίηση και των δύο τύπων κόστους πρόβλεψης κάτω από πραγματικές καταστάσεις όπου ο ερευνητής παραπλανιέται για τη «δομή μοναδιαίας ρίζας» (unit root structure) του συστήματος βασισμένος στα αποτελέσματα των συνηθισμένων τεστ για μοναδιαία ρίζα. Για αυτόν τον λόγο, πραγματοποιούμε προσομοιώσεις Monte Carlo που σχεδιάζονται με έναν τρόπο που μιμείται τα βήματα που ακολουθούνται συνήθως από τον ερευνητή στη διαδικασία παραγωγής προβλέψεων. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται τα εξής: I) Οι ιδιότητες μερικών ευρέως χρησιμοποιημένων τεστ στασιμότητας (βλ. Johansen, 1988, 1991, 2002, Reinsel και Ahn, 1992, Yap και Reinsel, 1995). Ένα τεστ με χαμηλή δύναμη (low power) να απορρίπτει τη λανθασμένη μηδενική υπόθεση ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας οδηγεί στην επιβολή πολύ λίγων σχέσεων συνολοκλήρωσης πάρα πολύ συχνά, παράγοντας κατά συνέπεια είτε FC1 είτε FC2. II) Η συμπεριφορά σε πεπερασμένα δείγματα των εκτιμητών OLS και JOH σε καταστάσεις όπου υπάρχουν ρίζες κοντά στη μονάδα. Ιδιαίτερη έμφαση

δίνεται στην απόδοση του JOH κάτω από στασιμότητα και του OLS κάτω από συνολοκλήρωση, δεδομένου ότι αυτές σχετίζονται με το FC1 και το FC2 αντίστοιχα. III) Τη συνολική επίδραση της συμπεριφοράς των τεστ στασιμότητας (unit-root tests) και των εκτιμητών στην διαδικασία πρόβλεψης. Όλα αυτά τα ζητήματα εξετάζονται στις περιπτώσεις ότι ο βαθμός (order) του VAR μοντέλου επιλέγεται με τη βοήθεια γνωστών κριτηρίων επιλογής μοντέλων.

Η προηγούμενη συζήτηση αφορά την περίπτωση, που συναντιέται συνήθως στη βιβλιογραφία, στην οποία τα σφάλματα (innovations) του VAR μοντέλου είναι *iid* γκαουσιανά (κανονικά). Όμως, το VAR μοντέλο υιοθετείται συχνά για την πρόβλεψη οικονομικών χρονοσειρών, όπως τιμές μετοχών, συναλλαγματικές ισοτιμίες και επιτόκια, που έχουν σημαντικές αποκλίσεις από την κανονικότητα, μαζί με μη γραμμική χρονική εξάρτηση. Επομένως, είναι ενδιαφέρον να μετρήσουμε τα FC1 και FC2, σε περιπτώσεις όπου τα σφάλματα του VAR μοντέλου ακολουθούν διαδικασίες GARCH. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα τεστ για μοναδιαία ρίζα και η εκτίμηση των παραμέτρων του VAR μοντέλου διεξάγεται συνήθως στα πλαίσια της μεθοδολογίας του Johansen, η οποία υποθέτει ρητά *iid* και γκαουσιανά σφάλματα. Κατά συνέπεια, υπάρχουν τουλάχιστον δύο λόγοι για τους οποίους η «αναχώρηση» από το γκαουσιανό *iid* περιβάλλον είναι πιθανό να έχει επιπτώσεις στα FC1 και FC2. Πρώτον, η δύναμη των τεστ για μοναδιαία ρίζα του Johansen μπορεί να μειωθεί περαιτέρω, αυξάνοντας κατά συνέπεια τη συχνότητα επιλογής λανθασμένου μοντέλου-εκτιμητή (βλ. Kim και Schmidt, 1993). Δεύτερον, η μεροληψία σε πεπερασμένα δείγματα του γκαουσιανού εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του Johansen (JOH) είναι πιθανό να αυξηθεί. Πολλά είναι γνωστά για τις ιδιότητες του εκτιμητή JOH σε περιπτώσεις όπου το VAR μοντέλο είναι

συνολοκληρώσιμο και γκαουσιανό, αλλά λίγα είναι γνωστά για τις ιδιότητες αυτού του εκτιμητή σε περιπτώσεις όπου το VAR μοντέλο έχει ρίζες κοντά στη μονάδα και GARCH σφάλματα. Παρομοίως, ο εκτιμητής OLS μπορεί να επηρεαστεί από την παρουσία GARCH σφαλμάτων, αν και οι απαιτήσεις του για καλή ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι λιγότερες από εκείνες του JOH. Τέλος, προκειμένου να διακρίνουμε μεταξύ της επίδρασης (i) της μη γραμμικής εξάρτησης (GARCH) και (ii) της άπειρης διακύμανσης στα FC1 και FC2, εξετάζουμε επίσης τη περίπτωση όπου τα σφάλματα του VAR είναι *iid* με *t*-κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας.

Το κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής. Στην επόμενη ενότητα, θυμόμαστε μερικά χρήσιμα θεωρητικά αποτελέσματα για τις ιδιότητες πρόβλεψης ενός στάσιμου ή συνολοκληρώσιμου VAR μοντέλου σε ένα γκαουσιανό *iid* περιβάλλον. Η ενότητα 5.3 εκθέτει τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις Monte Carlo για τη μέτρηση των FC1 και FC2 τόσο για γκαουσιανές όσο και για μη γκαουσιανές στοχαστικές διαδικασίες. Μια εμπειρική εφαρμογή, που δείχνει ότι τα FC1 και FC2 είναι πιθανό να προκύψουν στην πράξη, παρουσιάζεται στην ενότητα 5.4. Τέλος, η ενότητα 5.5 ολοκληρώνει το κεφάλαιο.

5.2 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Έστω ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ ακολουθεί μια VAR(1) διαδικασία μηδενικού μέσου:

$$Y_t = AY_{t-1} + U_t \quad (5.1)$$

όπου $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, $U_t = (u_{1t}, u_{2t})' \sim \text{NIID}(0, \Sigma_u)$, και $\Sigma_u = [\sigma_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας συνδιακύμανσης. Αυτό το μοντέλο έχει μια ισοδύναμη διανυσματική “error correction” παραμετροποίηση (VEC):

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + U_t \quad \text{όπου } \Pi = A - I_2 \equiv [\pi_{ij}], \quad i, j = 1, 2 \quad (5.2)$$

Η τάξη, $r(\Pi)$, της μακροπρόθεσμης μήτρας Π καθορίζει τα χαρακτηριστικά μοναδιαίας ρίζας (unit root properties) της διαδικασίας. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Εάν $r(\Pi) = 2$, η Y_t είναι μια στάσιμη διαδικασία, έχοντας μια παραμετροποίηση VAR σε «επίπεδα» (VAR-in-levels). Το λάθος πρόβλεψης έχει μια μήτρα συνδιακύμανσης, $\Sigma_y(h) = \sum_{i=1}^{h-1} A^i \Sigma_u (A^i)'$, που είναι πεπερασμένη για όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης, πλησιάζοντας μονοτονικά την αδέσμευτη μήτρα συνδιακύμανσης της Y_t όπως ο ορίζοντας πρόβλεψης h τείνει στο άπειρο. Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή του OLS εκτιμητή στην (5.1) οδηγεί σε \sqrt{T} -συνεπείς εκτιμήσεις του A . Οι προβλέψεις που προκύπτουν από την αντικατάσταση του A από τον εκτιμημένο \hat{A} , παράγει ένα λάθος πρόβλεψης, του οποίου η μήτρα συνδιακύμανσης, είναι το άθροισμα δύο στοιχείων. Το πρώτο στοιχείο είναι η $\Sigma_y(h)$ και το δεύτερο προκύπτει από την μεροληψία του \hat{A} λόγω του πεπερασμένου δείγματος. Δηλαδή, η μήτρα συνδιακύμανσης είναι:

$$\hat{\Sigma}_y(h) = \Sigma_y(h) + MSE\left(Y_t(h) - \hat{Y}_t(h)\right)$$

Φυσικά, τα λάθη εκτίμησης των παραμέτρων δεν έχουν καμιά επίδραση ασυμπτωτικά και οι διαφορές $[\hat{Y}_t(h) - Y_t(h)]$ και $[\hat{\Sigma}_y(h) - \Sigma_y(h)]$ τείνουν στο μηδέν για $T \rightarrow \infty$. Για πεπερασμένα δείγματα, αλλά με T αρκετά μεγάλο, ο Lütkepohl (1987) δείχνει ότι:

$$\hat{\Sigma}_y(h) - \Sigma_y(h) \simeq \frac{1}{T} \Omega(h)$$

όπου $a = \text{vec}(A)$ και

$$\Omega(h) = E\left(\frac{\partial Y_t(h)}{\partial a'} \Sigma_{\hat{a}} \frac{\partial Y_t(h)'}{\partial a}\right)$$

(II) Όταν $r(\Pi) = 1$, οι y_{1t} και y_{2t} είναι $I(1)$ διαδικασίες. Σε αυτή την περίπτωση, η μακροπρόθεσμη μήτρα Π μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $\Pi = CB'$, όπου $C = [c_{11}, c_{22}]'$ και $B = [b_{11}, b_{22}]'$. Η εφαρμογή OLS στο μη στάσιμο VAR(1)-in-levels μοντέλο οδηγεί σε υπερ-συνεπείς (super consistent), αλλά όχι ασυμπτωτικά αποδοτικές, εκτιμήσεις του A (βλ., παραδείγματος χάριν, Sims et al., 1990, Phillips, 1995). Εντούτοις, οι προβλέψεις που λαμβάνονται από το εκτιμημένο VAR(1) μοντέλο, φέρουν την επίδραση από την εκτιμημένη μοναδιαία ρίζα και κατά συνέπεια δεν συγκλίνουν στις βέλτιστες προβλέψεις, τουλάχιστον για μακρινούς ορίζοντες πρόβλεψης (βλ. το θεώρημα 3,4, στο Phillips, 1998).¹² Κατά συνέπεια, η $\Sigma_{\hat{y}}(h)$ δεν τείνει στην $\Sigma_y(h)$ όταν το $T \rightarrow \infty$, αλλά αντ' αυτού έχει ένα τυχαίο όριο. Αντίθετα, οι προβλέψεις που λαμβάνονται από την εκτίμηση του σωστά ορισμένου RR μοντέλου, είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες με τις βέλτιστες (βλ. το θεώρημα 3,9 στο Phillips, 1998). Επομένως, το κόστος πρόβλεψης που προκύπτει από την εκτίμηση του μη στάσιμου VAR(1) μοντέλου εμμένει ακόμα και ασυμπτωτικά και γίνεται πιο εμφανές για μακρινούς ορίζοντες πρόβλεψης.

(III) Όταν $r(\Pi) = 0$, η μακροπρόθεσμη μήτρα Π είναι η μηδενική μήτρα και η σειρά ΔY_t είναι μια διανυσματική διαδικασία λευκού θορύβου με μήτρα συνδιακύμανσης ίση με Σ_u .

Η τάξη, $r(\Pi)$, του Π καθορίζεται συνήθως με τη βοήθεια του στατιστικού ελέγχου Trace (TR) ή/και του στατιστικού ελέγχου Maximum Eigenvalue (EIG) που προτείνονται από τον Johansen (1988, 1991). Εναλλακτικές μορφές του TR για πεπερασμένα δείγματα

¹² Όταν ο ορίζοντας πρόβλεψης είναι μικρός σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή όταν το $f=h/T$ είναι κοντά στο 0, τότε το $[\hat{Y}_t(h) - Y_t(h)]$ είναι επίσης μικρό.

παρέχονται από τους Reinsel και Ahn (1992), Yap και Reinsel (1995) και Johansen (2002) (βλ. επίσης Hubrich, Lütkepohl και Saikkonen, 2001, για μια έρευνα για τις ιδιότητες των τεστ για συνολοκλήρωση που βασίζονται σε συστήματα μεταβλητών). Όπως αναφέραμε ήδη, η δύναμη (power) αυτών των τεστ να ανιχνευθούν τις ρίζες που είναι κοντά στη μονάδα είναι πολύ χαμηλή. Κατά συνέπεια, ο ερευνητής είναι πιθανό να αποτύχει να προσδιορίσει τη σωστή παραμετροποίηση για το υπό εξέταση σύστημα. Ειδικότερα, εστιάζουμε στα ακόλουθα δύο λάθη παραμετροποίησης: I) Η λ_{\max} είναι μικρότερη από αλλά πλησίον στην μονάδα και η λ_{\min} είναι πολύ μικρότερη από την μονάδα, που σημαίνει ότι ο ερευνητής έχει να κάνει με ένα στάσιμο VAR-in-levels μοντέλο. Λόγω της χαμηλής δύναμης του TR και του EIG, όμως, καταλήγει λανθασμένα στο συμπέρασμα ότι $r(\Pi) = 1$, και προχωρά στην εκτίμηση του RR, συνήθως με τη βοήθεια του εκτιμητή JOH. Λίγα είναι γνωστά για τις ιδιότητες αυτού του εκτιμητή σε περιπτώσεις όπου οι σειρές στο σύστημα έχουν ρίζες που είναι κοντά αλλά όχι ακριβώς ίσες με την μονάδα. Ο Elliot (1998) αποδεικνύει ότι, γενικά, όλοι οι συνήθως χρησιμοποιημένοι εκτιμητές συνολοκλήρωσης παράγουν μεγάλες μεροληψίες (biases) και σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions) όταν στάσιμες διαδικασίες με ρίζες κοντά στη μονάδα προσεγγίζονται από I(1) διαδικασίες. Αυτές οι μεροληψίες αποδεικνύεται ότι είναι ανάλογες προς την απόσταση, $d(1)$, της λ_{\max} από τη μονάδα. Επομένως, όσο μεγαλύτερη η $d(1)$, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το FC1. Συγχρόνως, μια μεγάλη τιμή της $d(1)$ υπονοεί ότι η δύναμη του TR και του EIG είναι υψηλή στην παράδοση της σωστής παραμετροποίησης του συστήματος. Κατά συνέπεια, για τις μεγάλες (μικρές) τιμές της $d(1)$, ο ερευνητής αντιμετωπίζει μεγάλο (μικρό) FC1 σε λίγες (πολλές) περιπτώσεις. II) Η λ_{\max} είναι ίση με την μονάδα και η λ_{\min} είναι μικρότερη

από αλλά πλησίον της μονάδας, που σημαίνει ότι ο ερευνητής έχει να κάνει με ένα συνολοκλήρωσιμο σύστημα. Για άλλη μια φορά, τα τεστ συνολοκλήρωσης μπορεί να αποτύχουν να απορρίψουν την άκυρη μηδενική υπόθεση ότι $\lambda_{\min} = 1$, και έτσι προτείνουν λανθασμένα ένα FD μοντέλο, αντί ενός RR μοντέλου. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ερευνητής αγνοεί τον έγκυρο περιορισμό συνολοκλήρωσης και οδηγείται κατά συνέπεια στο FC2.

5.3 Αποτελέσματα Monte Carlo

Σε αυτό το τμήμα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσής μας, στοχεύοντας στη μέτρηση των FC1 και FC2, αρχίζοντας από το πρώτο. Η ανάλυση είναι βασισμένη στην απλή διμεταβλητή VAR(1) διαδικασία, που δίνεται στην (5.1) δεδομένου ότι επιθυμούμε να αποφύγουμε οποιεσδήποτε πιθανές περιπλοκές στα πλαίσια των γενικότερων VAR(p) διαδικασιών. Πράγματι, ο αριθμός ζητημάτων που πρέπει να αντιμετωπιστούν στα πλαίσια ενός μεγαλύτερου βαθμού και διάστασης συστήματος είναι τέτοιος που κάνει τον έλεγχο των επιπτώσεων που έχει στην εκτίμηση και στη πρόβλεψη μια λανθασμένη παραμετροποίηση (σε ότι αφορά την ύπαρξη και θέση μοναδιαίων ριζών στο σύστημα) σχεδόν αδύνατο. Εντούτοις, είναι λογικό να υποτεθεί ότι εάν το FC1 ή/και το FC2 είναι παρόντα στα πλαίσια του απλούστερου μοντέλου, είναι πιθανό στα πλαίσια των γενικότερων μοντέλων το κόστος πρόβλεψης να είναι ακόμη μεγαλύτερο. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για μια τέτοια αξίωση: Παραδείγματος χάριν, εάν το αληθινό μοντέλο είναι ένα VAR(p) με $p \geq 2$, τότε τα κριτήρια επιλογής του βαθμού (order) του μοντέλου μπορούν να επιλέξουν ένα underspecified μοντέλο συχνότερα σε σχέση με τη περίπτωση $p = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, το επιλεγμένο μοντέλο μπορεί να είναι μια φτωχή προσέγγιση της αληθινής διαδικασίας (DGP), μειώνοντας κατά συνέπεια τη δύναμη των

τεστ συνολοκλήρωσης να απορρίψουν την άκυρη υπόθεση ότι $\lambda_{\max} = 1$ ή/και $\lambda_{\min} = 1$ (βλ., παραδείγματος χάριν, Reimers, 1992, Saikkonen και Luukkonen, 1997, Lütkepohl και Saikkonen, 1999). Για αυτόν τον λόγο, οι Gonzalo και Pitarakis (1999) δείχνουν ότι όσο η διάσταση του συστήματος αυξάνεται, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα underspecified μοντέλο με τη βοήθεια του SIC ή του HQ αυξάνεται. Με άλλα λόγια, οι τιμές των FC1 και FC2 που θα υπολογιστούν στις επόμενες υποενότητες πρέπει να θεωρηθούν ως οι χαμηλότερες τιμές που είναι πιθανό να προκύψουν λόγω λανθασμένης unit-root παραμετροποίησης. Για να το θέσουμε διαφορετικά, εάν έχουμε προβλήματα στη διαδικασία πρόβλεψης μιας χρονοσειράς στα πλαίσια ενός απλού μοντέλου λόγω μιας ιδιαίτερης αιτίας, δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι τα προβλήματα θα μειωθούν στα πλαίσια πιο περίπλοκων μοντέλων, εάν η ίδια αιτία που προκαλεί προβλήματα είναι ακόμα παρούσα.

5.3.1 Κόστος Πρόβλεψης Τύπου I (FC1)

Γκαουσιανά IID Σφάλματα

Στην υποενότητα αυτή, διατηρούμε την υπόθεση, που κάναμε στο προηγούμενο τμήμα, ότι δηλαδή $U_t \sim \text{NIID}(0, \Sigma_u)$. Σε ότι αφορά τη μήτρα A , δίνουμε στα στοιχεία της a_{ij} , $i, j=1,2$, κατάλληλες τιμές έτσι ώστε η λ_{\max} να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,7, 0,98]$ με βήματα 0,04, ενώ η λ_{\min} να μένει σταθερή στο 0,2. Επιπλέον, εξετάζουμε και τη περίπτωση ενός συνολοκληρώσιμου VAR μοντέλου (όπου $\lambda_{\max} = 1$). Γενικά, εξετάζουμε εννέα διαφορετικές περιπτώσεις (DGPs) από τις οποίες οι πρώτες οκτώ αντιστοιχούν σε

στάσιμα συστήματα και μόνο η τελευταία παράγει ένα συνολοκληρώσιμο VAR.¹³ Εξετάζουμε τα μεγέθη δείγματος, $T=50$ και 200 παρατηρήσεων και χρησιμοποιούμε 5000 επαναλήψεις για τη προσομοίωση. Η αρχική τιμή τίθεται ίση με μηδέν, που είναι η τιμή του αδέσμευτου μέσου της Y_t . Θέτουμε επίσης $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ και $\sigma_{12} = 0.5$.

Αρχίζουμε την ανάλυση με την εξέταση της συμπεριφοράς τεστ συνολοκλήρωσης. Αυτά είναι τα ασυμπτωτικά TR και EIG τεστ, η εναλλακτική μορφή του TR για μικρά δείγματα του Johansen (που συμβολίζουμε με TRS) και οι δύο εναλλακτικές μορφές του TR για μικρά δείγματα που προτείνονται από τους Reinsel και Ahn (1992) και Yap και Reinsel (1995). Εξετάζουμε αρχικά τις ιδιότητες μεγέθους των τεστ συνολοκλήρωσης, με βάση την DGP-9, κάτω από τρεις εναλλακτικές στρατηγικές για την επιλογή του βαθμού (order) p του VAR μοντέλου. Η πρώτη υποθέτει ότι το p είναι γνωστό a-priori, ενώ στη δεύτερη και τρίτη στρατηγική, το p επιλέγεται με τη βοήθεια των κριτηρίων πληροφόρησης του Akaike (AIC) και του Schwarz (SIC) αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα (που δίνονται στον πίνακα D1)¹⁴ δείχνουν ότι τα εμπειρικά μεγέθη των πέντε υπό εξέταση τεστ είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ονομαστικό μέγεθος του 5 τοις εκατό.¹⁵ Εντούτοις, το TR και το TRS έχουν ελαφρώς μεγαλύτερο μέγεθος όταν χρησιμοποιείται το AIC για να επιλέξει το p . Φαίνεται ότι η γνωστή τάση του AIC να υπερεκτιμά το p με θετική πιθανότητα, έχει επιπτώσεις στις ιδιότητες μεγέθους των TR και TRS, ειδικά για $T = 50$. Γενικά, οι ιδιότητες μεγέθους όλων των τεστ συνολοκλήρωσης που μελετάμε είναι παρόμοιες. Προκύπτει ότι οι ιδιότητες δύναμης (power properties) αυτών των τεστ

¹³ Στην DGP- i , $i=1,2,\dots,8$, θέτουμε $a_{11} = a_{12} = 0.5$, $a_{21} = 0.096 + 0.024 * i$, $a_{22} = 0.36 + 0.04 * i$. Στην DGP-9, θέτουμε $a_{11} = a_{12} = 0.5$, $a_{21} = 0.3$, $a_{22} = 0.7$.

¹⁴ Όλοι οι πίνακες αυτού του κεφαλαίου δίνονται στο Παράρτημα D.1.

¹⁵ Η συμπεριφορά του EIG είναι ίδια με αυτή του TR. Επομένως, το εμπειρικό μέγεθος του EIG δεν αναφέρεται στο πίνακα D1.

είναι παρόμοιες επίσης. Δεδομένου ότι η επιλογή μεταξύ των τεστ συνολοκλήρωσης έχει πολύ λίγη επίδραση στον προσδιορισμό του $r(\Pi)$, από τώρα και στο εξής, τα αποτελέσματα προσομοίωσης είναι βασισμένα στον έλεγχο TRS. Επιπλέον, οι ιδιότητες δύναμης των τεστ συνολοκλήρωσης δεν επηρεάζονται από την επιλογή μεταξύ AIC και SIC. Επομένως, στο υπόλοιπο του πειράματος χρησιμοποιούμε το SIC για την επιλογή του VAR μοντέλου. Ο πίνακας D2 παρουσιάζει τη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ (size-adjusted power) του TRS για τα DGPs που εξετάζονται, για την περίπτωση που το p επιλέγεται με τη βοήθεια του SIC. Όπως αναμέναμε, η δύναμη του τεστ μειώνεται όσο αυξάνεται η λ_{\max} και αυξάνεται με το T . Για τα μικρά μεγέθη δείγματος ($T = 50$), το τεστ αποτυγχάνει να παραδώσει τη σωστή τάξη συνολοκλήρωσης σε μια ικανοποιητική συχνότητα, ακόμη και για τιμές της λ_{\max} τόσο χαμηλές όπως 0,82. Όταν η λ_{\max} είναι πολύ κοντά στην μονάδα, το τεστ συνολοκλήρωσης δεν έχει πλέον οποιαδήποτε δύναμη να υποδείξει τη σωστή παραμετροποίηση, ειδικά για $T=50$. Παραδείγματος χάριν, όταν $\lambda_{\max} = 0.98$, η δύναμη του TRS είναι 6,0 και 20,7 τοις εκατό για $T = 50$ και 200 αντίστοιχα. Σημειώστε ότι το αν η επιλογή του p γίνει χρησιμοποιώντας τα κριτήρια επιλογής μοντέλου (AIC και SIC) ή χρησιμοποιηθεί απευθείας η αληθινή τιμή του p , δεν έχει σχεδόν καμία επίδραση στη δύναμη του TRS (βλ. Hubrich *et al.*, 2001, για μια λεπτομερή συζήτηση σχετικά με αυτό το σημείο).

Όπως αναφέραμε ήδη, το FC1 αναμένεται να καθοριστεί εν μέρει από την συμπεριφορά του JOH σε πεπερασμένα δείγματα (σε σχέση πάντοτε με τη συμπεριφορά του OLS). Επομένως, εστιάζουμε τώρα στην εξέταση της συμπεριφοράς αυτών των εκτιμητών, με την εκτέλεση των ακόλουθων πειραμάτων προσομοίωσης: Για κάθε επανάληψη (replication), εκτιμούμε τις παραμέτρους του μοντέλου με τη βοήθεια του εκτιμητή JOH

και υπολογίζουμε την απόλυτη μεροληψία του JOH για κάθε στοιχείο, π_{ij} , $i, j=1,2$ της μακροπρόθεσμης μήτρας Π . Για να καταστήσουμε τα αποτελέσματα συγκρίσιμα στις διαφορετικές τιμές της λ_{\max} , εκφράζουμε την μεροληψία ως ποσοστό της αληθινής τιμής π_{ij} , $i, j=1,2$, λαμβάνοντας κατά συνέπεια το ακόλουθο μέτρο της απόλυτης ποσοστιαίας μεροληψίας για την επανάληψη k :

$$APB_{ij,k}^{JOH} = \frac{|\hat{\pi}_{ij,k} - \pi_{ij}|}{\pi_{ij}} \times 100, \quad i, j = 1, 2$$

Κατόπιν, καθορίζουμε το $MAPB_{ij}^{JOH}$ να είναι ο διάμεσος της απόλυτης ποσοστιαίας μεροληψίας $APB_{ij,k}^{JOH}$ για το σύνολο των επαναλήψεων. Υπολογίζουμε επίσης ένα συνολικό μέτρο για την ακρίβεια εκτίμησης της μήτρας Π , που ορίζεται ως $TMAPB^{JOH} = \sum_{ij} MAPB_{ij}^{JOH} / 4$. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για να υπολογίσουμε τη συνολική μεροληψία εκτίμησης του OLS.

Υπολογίζοντας τα $TMAPB^{JOH}$ και $TMAPB^{OLS}$, μπορούμε τώρα να μετρήσουμε το συμπληρωματικό κόστος από την άποψη της μεροληψίας εκτίμησης, που συνδέεται με την επιβολή των άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης. Ο πίνακας D3 εκθέτει τη διαφορά μεταξύ $TMAPB^{JOH}$ και $TMAPB^{OLS}$ ως ποσοστού του $TMAPB$ του βέλτιστου εκτιμητή. Η χρήση του JOH στα πλαίσια ενός λανθασμένα ορισμένου RR μοντέλου έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα στην ακρίβεια των εκτιμήσεων των π_{ij} , ειδικά για τις μικρές τιμές της λ_{\max} και για τα μεγάλα μεγέθη δείγματος. Εντούτοις, όσο η λ_{\max} προσεγγίζει τη μονάδα η ανωτερότητα του OLS σε σχέση με τον JOH μικραίνει, δεδομένου ότι ο JOH κινείται προς το φυσικό περιβάλλον του. Στην πραγματικότητα, όταν $\lambda_{\max} \geq 0.98$, οι δύο εκτιμητές είναι σχεδόν ισοδύναμοι, με τον JOH να είναι

ελαφρώς καλύτερος από τον OLS (όπως υποδεικνύεται από τις αρνητικές καταχωρήσεις στον πίνακα D3).

Γυρίζουμε τώρα στον υπολογισμό του κόστους πρόβλεψης που προκαλείται από την επιβολή των άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης. Προκειμένου να μετρηθεί το FC1 όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά, σχεδιάζουμε το ακόλουθο σύνολο προσομοιώσεων. Σε κάθε επανάληψη, εφαρμόζουμε αρχικά το SIC για την εκτίμηση του p . Βασισμένοι στο επιλεγμένο μοντέλο, καθορίζουμε την τάξη της μήτρας Π με τη βοήθεια του TRS. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τις πρώτες T παρατηρήσεις για να εκτιμήσουμε το επιλεγμένο μοντέλο με τη βοήθεια του σχετικού εκτιμητή και παραγάγουμε τις προβλέψεις $\hat{Y}_T(h)$ του Y_{T+h} , για τους υπό εξέταση ορίζοντες πρόβλεψης. Τέλος, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα πρόβλεψης $\hat{e}_h \equiv [\hat{Y}_T(h) - Y_{T+h}]$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για να λάβουμε τα σφάλματα πρόβλεψης, που καθορίζονται με βάση τις προβλέψεις $\tilde{Y}_T(h)$ που παράγονται από το μοντέλο που υποθέτει τη σωστή τάξη της μήτρας Π και χρησιμοποιεί τον αντίστοιχο βέλτιστο εκτιμητή. Τέλος, το FC1 καθορίζεται με τη σύγκριση της ακρίβειας πρόβλεψης του επιλεγμένου μοντέλου με την προβλεπτική ακρίβεια του σωστά ορισμένου μοντέλου.

Το πιο συνηθέστερα χρησιμοποιημένο μέτρο αξιολόγησης της προβλεπτικής ακρίβειας ενός μοντέλου είναι το κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE), το οποίο είναι απλά οι μήτρες συνδιακύμανσης $\hat{\Sigma}_Y(h)$ των \hat{e}_h . Προκειμένου να διευκολυνθούν οι συγκρίσεις, η μήτρα $\hat{\Sigma}_Y(h)$ μετατρέπεται συνήθως σε ένα βαθμωτό (scalar) με τον υπολογισμό του ίχνους (trace) της.¹⁶ Εντούτοις, στην ακόλουθη υποενότητα εξετάζουμε

¹⁶ Οι Clements και Hendry (1993, 1995) υποστηρίζουν ότι το κριτήριο MSE δεν είναι κατάλληλο για την επιλογή μοντέλων, γιατί η συμπεριφορά του επηρεάζεται από non-singular, scale-preserving γραμμικούς

διαδικασίες που δεν κατέχουν πεπερασμένες δεύτερες ροπές, καθιστώντας κατά συνέπεια το κριτήριο MSE ακατάλληλο. Ένα εναλλακτικό μέτρο για την αξιολόγηση της προβλεπτικής ακρίβειας ενός μοντέλου που παραμένει σωστό σε περιπτώσεις διαδικασιών άπειρης διακύμανσης, είναι το Inter-Quantile Range (IQR) των σφαλμάτων πρόβλεψης. Στη διμεταβλητή περίπτωσή μας, ορίζουμε το $a\%$ $IQR_a(h)$, για τον ορίζοντα πρόβλεψης h , ως εξής:

$$IQR_a(h) := [q_{1,1-a}(h) - q_{1,a}(h)] + [q_{2,1-a}(h) - q_{2,a}(h)]$$

όπου $q_{i,r}(h)$ είναι το r -εκατοστημόριο (quantile) της κατανομής του $\hat{e}_{i,h}$. Σημειώνουμε ότι το $IQR_a(h)$ είναι ένα βαθμωτό που μετρά τη συνολική προβλεπτική ακρίβεια του μοντέλου σε σχέση με τις δύο συνιστώσες σειρές της Y_t . Η ανάλυσή μας είναι βασισμένη στο 10% IQRs. Καθορίζουμε το FC1, για τον ορίζοντα πρόβλεψης h , ως εξής:

$$FC1(h) = \frac{IQR_a^s(h) - IQR_a^*(h)}{IQR_a^*(h)} \times 100$$

όπου $IQR_a^s(h)$ και $IQR_a^*(h)$ είναι τα IQRs του επιλεγμένου και του σωστού μοντέλου αντίστοιχα. Ο πίνακας D4 δίνει το FC1 για $T = 50$ και $T = 200$ (στη παρένθεση). Τα κύρια συμπεράσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(I) Το κόστος επιβολής άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης στην ακρίβεια των προβλέψεων είναι σημαντικό όταν το δείγμα που χρησιμοποιείται στο στάδιο εκτίμησης είναι μικρό και ο ορίζοντας πρόβλεψης μακρύς. Παραδείγματος χάριν, όταν $T = 50$ και $\lambda_{\max} = 0.82$, το FC1 είναι 1,6% και 16% για $h = 1$ και $h = 10$ αντίστοιχα.

μετασηματισμούς των μοντέλων. Για αυτό το λόγο, οι Clements και Hendry προτείνουν ένα εναλλακτικό κριτήριο, το Generalized Forecast Error Second Moment (GFESM), το οποίο δεν επηρεάζεται από τέτοιου είδους μετασηματισμούς.

(II) Για $T = 50$, το κόστος πρόβλεψης είναι μια \cap -μορφής συνάρτηση της τιμής της λ_{\max} για όλους τους υπό εξέταση ορίζοντες πρόβλεψης. Στην πραγματικότητα, το FC1 φθάνει στη μέγιστη τιμή του για τιμές της λ_{\max} που βρίσκονται στο διάστημα $[0.82, 0.86]$. Αυτό σημαίνει ότι για αυτές τις τιμές της λ_{\max} , τα τεστ συνολοκλήρωσης προτείνουν την χρήση ενός πολύ μεροληπτικού εκτιμητή αρκετά συχνά.

(III) Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι για $T = 50$ και $\lambda_{\max} = 0.98$, το FC1 είναι αρνητικό για όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης. Αυτό σημαίνει ότι για τα μικρά μεγέθη δείγματος, η αποτυχία των τεστ συνολοκλήρωσης να προσδιορίσουν το σωστό $r(\Pi)$, αποδεικνύεται ευεργετική, αφού ο ασυμπτωτικά μη-βέλτιστος εκτιμητής JOH, που προτείνεται από τα τεστ συνολοκλήρωσης, εκτιμά καλύτερα από τον ασυμπτωτικά βέλτιστο εκτιμητή OLS.

(IV) Όταν το μέγεθος δείγματος αυξάνεται ($T = 200$), το FC1 σχεδόν εξαφανίζεται για όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης και όλες τις τιμές της λ_{\max} εκτός από εκείνες που βρίσκονται κοντά στη μονάδα.

(V) Όταν $\lambda_{\max} = 1$, η διαδικασία Y_t είναι συνολοκληρώσιμη. Σε αυτή την περίπτωση, το FC1 ορίζεται ως το κόστος πρόβλεψης που προκύπτει από τη χρησιμοποίηση των VAR-in-levels/OLS, αντί των RR/JOH. Εντούτοις, δεδομένου ότι το πραγματικό μέγεθος του TRS δεν υπερβαίνει το 5%, η συχνότητα στην οποία το VAR-in-levels επιλέγεται είναι αρκετά χαμηλή, παράγοντας κατά συνέπεια αμελητέες τιμές για το FC1, ακόμη και για $T = 50$.

Η Επίδραση της Ετεροσκεδαστικότητας

Σε αυτήν την υποενότητα, χαλαρώνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα σφάλματος, U_t ,

ακολουθεί μια γκαουσιανή *iid* διαδικασία και την αντικαθιστάμε με την υπόθεση ότι παράγεται με μια διμεταβλητή GARCH(1,1) διαδικασία. Ο μεταφορά από το γκαουσιανό στο ετεροσκεδαστικό περιβάλλον είναι πιθανό να έχει επιπτώσεις στο μέγεθος και τη δύναμη των τεστ συνολοκλήρωσης, καθώς επίσης και στις ιδιότητες των εκτιμητών JOH και OLS. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τη μνήμη και τις ροπές (memory and moment) της εξεταζόμενης σειράς που απαιτούνται για να ισχύουν τα αποτελέσματα της ασυμπτωτικής θεωρίας μπορεί να μην ικανοποιούνται πλέον.

Υποθέτουμε ότι ο μηχανισμός γέννησης της U_t δίνεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} U_t &= H_t^{1/2} Z_t \\ Z_t &\equiv (z_{1t}, z_{2t})', Z_t \sim \text{NIID}(0, I_2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

όπου $H_t = [h_{ij,t}]$, $i, j = 1, 2$ είναι η ετεροσκεδαστική δεσμευμένη μήτρα συνδιακύμανσης.

Αυτή καθορίζεται ως ένα πρώτου-βαθμού διαγώνιο BEKK μοντέλο (προτεινόμενο από τους Engle και Kroner, 1995):

$$H_t = C'C + MU_{t-1}U'_{t-1}M + \Delta H_{t-1}\Delta \quad (5.4)$$

όπου C είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα και M, Δ είναι διαγώνιες μήτρες με στοιχεία (μ_1, μ_2) και (δ_1, δ_2) αντίστοιχα. Οι διαγώνιες μήτρες M και Δ εξασφαλίζουν ότι $h_{ii,t} = k_i + \mu_i^2 u_{it-1}^2 + \delta_i^2 h_{ii,t-1}$, $i = 1, 2$, γεγονός που σημαίνει ότι οι u_{1t} και u_{2t} ακολουθούν μονομεταβλητές GARCH(1,1) διαδικασίες. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα των u_{1t} και u_{2t} μας επιτρέπει να ελέγχουμε τη συμπεριφορά και εξάρτηση της U_t θέτοντας περιορισμούς απευθείας στις u_{1t} και u_{2t} .

Η μεταφορά από τα *iid* σφάλματα στα GARCH σφάλματα έχει σημαντικές επιπτώσεις

στην εκτίμηση του πίνακα Π και στην πρόβλεψη της Y_t . Η επίδραση των GARCH φαινομένων στην εκτίμηση και στη πρόβλεψη εξαρτάται από εάν το VAR μοντέλο είναι στάσιμο ή όχι. Μελετάμε κάθε περίπτωση χωριστά.

1. Στάσιμο VAR,

Εδώ, η σωστή επιλογή παραμετροποίησης/εκτιμητή είναι VAR(1)-in-levels/OLS και τα ακόλουθα προβλήματα λόγω των GARCH σφαλμάτων μπορεί να προκύψουν: Κατ' αρχάς, ο OLS μπορεί να είναι μεροληπτικός ή, ανάλογα με την ένταση των GARCH φαινομένων, ασυνεπής (inconsistent). Δεύτερον, η παρουσία GARCH σφαλμάτων μπορεί να μειώσει τη δύναμη των τεστ συνολοκλήρωσης να απορρίψουν τη άκυρη μηδενική υπόθεση $r(\Pi) = 1$ (που προτείνει τη χρήση του ακατάλληλου JOH εκτιμητή).

Τρίτο, στις περιπτώσεις όπου το RR μοντέλο επιλέγεται, η απόδοση του (ήδη μεροληπτικού) γκαουσιανού εκτιμητή JOH είναι πιθανό να επιδεινωθεί περαιτέρω.

2. Συνολοκληρώσιμο VAR,

Σε αυτή τη περίπτωση το RR μοντέλο είναι η σωστή παραμετροποίηση. Εντούτοις, η καταλληλότητα του JOH δεν είναι προφανής, δεδομένου ότι αυτός ο εκτιμητής είναι από την κατασκευή γκαουσιανός. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και όταν έχουν πετύχει τα τεστ συνολοκλήρωσης να επιλέξουν τη σωστή παραμετροποίηση, η εφαρμογή του JOH μπορεί να οδηγήσει στις μεροληπτικές εκτιμήσεις του Π . Για παρόμοιους λόγους, τα τεστ συνολοκλήρωσης μπορεί να πάσχουν από διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions).

Γενικά, η ασυμπτωτική θεωρία για κάθε ιδιαίτερη περίπτωση απαιτεί την ικανοποίηση ορισμένων υποθέσεων σχετικά με τη μνήμη και τις ροπές (memory and moment) της εξεταζόμενης σειράς. Εάν μερικές από αυτές τις υποθέσεις δεν ισχύουν, οι εκτιμήσεις

των A ή Π μπορεί να είναι μεροληπτικές και ασυνεπείς, ακόμη και στα πλαίσια του μοντέλου που υποθέτει τη σωστή unit-root παραμετροποίηση. Για να ερευνήσουμε αυτά τα ζητήματα, πραγματοποιούμε ένα δεύτερο σύνολο προσομοιώσεων, στοχεύοντας στην αξιολόγηση της απόδοσης των εκτιμητών, των τεστ συνολοκλήρωσης και των προβλέψεων όταν GARCH φαινόμενα διάφορων εντάσεων είναι παρόντα. Πριν παρουσιάσουμε το σύνολο των νέων αποτελεσμάτων, συζητάμε εν συντομία τις ιδιότητες μνήμης και ροπών της διμεταβλητής GARCH(1,1) διαδικασίας, που καθορίζονται από τις (5.3) - (5.4). Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση I: Στασιμότητα τέταρτης τάξης

Ο Hafner (2003) ερευνά τις ιδιότητες της γενικής πολυμεταβλητής GARCH(ρ, q) διαδικασίας. Παρέχει τις απαραίτητες και ικανές συνθήκες για να είναι τα σφάλματα U_t στάσιμα τέταρτης τάξης. Στα πλαίσια του διαγωνίου BEKK μοντέλου, είναι εύκολο να δειχτεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ικανές για τη στασιμότητα τέταρτης τάξης της U_t .¹⁷

$$\begin{aligned} \delta_1^4 + 2\delta_1^2\mu_1^2 + 3\mu_1^4 &< 1 \\ \delta_2^4 + 2\delta_2^2\mu_2^2 + 3\mu_2^4 &< 1 \end{aligned} \quad (Y1)$$

Περίπτωση II: Στασιμότητα δεύτερης τάξης

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι $\mu_i^2 + \delta_i^2 < 1$, $i=1,2$, αν και οι συνθήκες (Y1) δεν ισχύουν. Αυτό σημαίνει οι u_{1t} και u_{2t} κατέχουν πεπερασμένες δεύτερες (αλλά όχι

¹⁷Είναι ευρέως γνωστό ότι αυτές οι συνθήκες είναι απαραίτητες και ικανές για τη στασιμότητα τέταρτης τάξης των επιμέρους σειρών u_{1t} και u_{2t} της U_t (βλ. Bollerslev, 1986, He και Terasvirta, 1999).

τέταρτες) ροπές. Οι Carrasco και Chen (2002) έχουν αποδείξει πρόσφατα ότι οι ίδιες συνθήκες είναι απαραίτητες και ικανές για είναι οι u_{1t} και u_{2t} b – mixing.

Περίπτωση III: Στασιμότητα πρώτης τάξης (IGARCH)

Εδώ, υποθέτουμε ότι $\mu_i^2 + \delta_i^2 = 1$, $i=1,2$, που σημαίνει ότι οι u_{1t} και u_{2t} δεν έχουν πεπερασμένη διακύμανση.¹⁸ Σε αυτή την περίπτωση, οι μήτρες συνδιακύμανσης των σφαλμάτων πρόβλεψης απειρίζονται.

Οι προσομοιώσεις σχεδιάζονται ως εξής. Τρεις διαφορετικές GARCH(1,1) διαδικασίες εξετάζονται, μια για κάθε μια από τις περιπτώσεις που περιγράφονται προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα, το διάνυσμα τιμών $(\mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2)$ είναι ίσο με $(0.72, 0.28, 0.7, 0.3)$, $(0.7, 0.5, 0.75, 0.6)$ και $(0.8, 0.6, 0.8, 0.6)$ για τις περιπτώσεις (I), (II) και (III) αντίστοιχα. Για τις πρώτες δύο περιπτώσεις, οι τιμές των GARCH παραμέτρων επιλέγονται κατάλληλα έτσι ώστε η αδέσμευτη μήτρα συνδιακύμανσης της U_t να είναι ίδια με αυτήν της ομοσκεδαστικής περίπτωσης που εξετάστηκε στις προηγούμενες προσομοιώσεις. Για την τρίτη διαδικασία, η Σ_u δεν υπάρχει. Όσον αφορά στη μήτρα μετάβασης, A , εξετάζουμε τις ίδιες εννέα περιπτώσεις που εξετάστηκαν στο σύνολο προσομοιώσεων της ομοσκεδαστικής περίπτωσης. Συνολικά, εξετάζουμε 27 διαφορετικές DGPs σε ότι αφορά το δεσμευμένο μέσο και τη δεσμευμένη διακύμανση. Για άλλη μια φορά, εξετάζουμε μεγέθη δείγματος 50 και 200 παρατηρήσεων και προβλέψεις μέχρι 10 περιόδους. Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

¹⁸Ο Nelson (1990) αποδεικνύει ότι μια IGARCH ή ακόμα και μια ήπια εκρηκτική (mildly explosive) διαδικασία μπορεί να είναι αυστηρά στάσιμη και εργοδική.

(I) Η απόδοση των δύο εξεταζόμενων κριτηρίων επιλογής μοντέλου επιδεινώνεται με την εμμονή της GARCH διαδικασίας (βλ. τον πίνακα D5).¹⁹ Η επίδραση της ετεροσκεδαστικότητας στο AIC είναι πολύ ισχυρή, ενώ το SIC φαίνεται να είναι λιγότερο ευαίσθητο. Παραδείγματος χάριν, για την IGARCH περίπτωση και για $T = 200$, η πιθανότητα το AIC να επιλέξει το VAR(1) μοντέλο είναι μόνο 43,6 τοις εκατό, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για το SIC είναι 91,3 τοις εκατό. Για να ελαχιστοποιήσουμε τις αρνητικές επιπτώσεις από την επιλογή του βαθμού (order) του VAR μοντέλου στην διαδικασία πρόβλεψης, στο υπόλοιπο των προσομοιώσεων χρησιμοποιούμε το SIC για να επιλέξουμε το κατάλληλο μοντέλο.

(II) Η παρουσία ετεροσκεδαστικότητας προκαλεί διαστρεβλώσεις μεγέθους (size distortions) και μειώσεις της δύναμης (power reductions) για όλα τα υπό διερεύνηση τεστ συνολοκλήρωσης (τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες D6 και D7).²⁰ Αυτά τα προβλήματα είναι αμελητέα όταν έχουμε στασιμότητα τέταρτης τάξης, αλλά γίνονται αρκετά σοβαρά στη περίπτωση μιας IGARCH διαδικασίας. Παραδείγματος χάριν, για $T = 200$, το εμπειρικό μέγεθος (empirical size) του TRS είναι 5,4% και 8,5% για την στάσιμη διαδικασία τέταρτης τάξης και την IGARCH διαδικασία αντίστοιχα. Ομοίως, για $\lambda_{\max} = 0.96$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του TRS για την στάσιμη διαδικασία τέταρτης τάξης είναι 52% (σχεδόν ίση με τη *iid* γκαουσιανή περίπτωση), και μειώνεται σε 38%, για την IGARCH διαδικασία.

¹⁹Θα σχολιάσουμε το τελευταίο τμήμα του πίνακα (επονομαζόμενων "t(2) σφάλματα") αργότερα σε αυτή την ενότητα.

²⁰Θα σχολιάσουμε το τελευταίο τμήμα του πίνακα (επονομαζόμενων "t(2) σφάλματα") αργότερα σε αυτή την ενότητα.

(III) Οι JOH και OLS επηρεάζονται επίσης από την παρουσία ετεροσκεδαστικότητας. Ειδικότερα, η μεροληψία και των δύο εκτιμητών αυξάνεται με την ένταση των GARCH φαινομένων. Εντούτοις, ο ρυθμός στον οποίο η μεροληψία του OLS επιδεινώνεται, καθώς οι GARCH επιδράσεις γίνονται ισχυρότερες, είναι γρηγορότερος από τον αντίστοιχο ρυθμό για τον εκτιμητή JOH. Αυτό είναι εμφανές στον πίνακα D8²¹ που εκθέτει τη διαφορά μεταξύ $TMAPB^{JOH}$ και $TMAPB^{OLS}$ ως ποσοστού του $TMAPB$ του βέλτιστου εκτιμητή. Παραδείγματος χάριν, για $T = 200$ και $\lambda_{max} = 0.78$, το κόστος χρήσης του JOH αντί του ασυμπτωτικά βέλτιστου OLS είναι 96,7 τοις εκατό, όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες στασιμότητας τέταρτης τάξης. Αυτό το κόστος εκτίμησης, εντούτοις, μειώνεται σε 66,1 τοις εκατό στην περίπτωση μιας IGARCH διαδικασίας, υπονοώντας ότι η ανωτερότητα του OLS έχει γίνει λιγότερο έντονη. Τέλος, για $\lambda_{max} = 1$, όπου ο JOH λειτουργεί στο φυσικό “περιβάλλον” του, η μεροληψία των δύο εκτιμητών είναι σχεδόν ίδια.

(IV) Αν και το κόστος εκτίμησης του JOH σε σχέση με τον OLS μειώθηκε λόγω της ετεροσκεδαστικότητας, γενικά το FC1 αυξάνεται όσο οι GARCH επιδράσεις γίνονται ισχυρότερες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη του TRS είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της έντασης των GARCH φαινομένων. Οι τιμές του FC1 για στάσιμες σειρές τέταρτης τάξης, στάσιμες σειρές δεύτερης τάξης και IGARCH σειρές, που δίνονται στους πίνακες D9, D10 και D11 αντίστοιχα, είναι συστηματικά υψηλότερες από τις

²¹Θα σχολιάσουμε το τελευταίο τμήμα του πίνακα (επονομαζόμενων “t(2) σφάλματα”) αργότερα σε αυτή την ενότητα.

αντίστοιχες της ομοσκεδαστικής περίπτωσης, για σχεδόν όλες τις τιμές της λ_{\max} , και όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης.

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα της προσομοίωσης δείχνουν ότι το FC1 μεγιστοποιείται στη περίπτωση που οι u_{1t} και u_{2t} είναι IGARCH διαδικασίες. Σε αυτή την περίπτωση, τα σφάλματα, U_t δεν είναι ούτε mixing στοχαστικές διαδικασίες ούτε έχουν πεπερασμένες δεύτερες ροπές. Έτσι γεννάται η ανάγκη για πρόσθετες προσομοιώσεις, στοχεύοντας στη διάκριση μεταξύ του ρόλου (έλλειψη) της ασυμπτωτικής ανεξαρτησίας και του ρόλου της άπειρης διακύμανσης στην παραγωγή των υψηλότερων τιμών του FC1 σε σχέση με την *iid* γκαουσιανή περίπτωση. Για αυτόν τον λόγο, παράγουμε *iid* σφάλματα, U_t , από διμεταβλητή *t*-κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας. Με αυτό τον τρόπο, ξεχωρίζουμε την επίδραση της "άπειρης-διακύμανσης" από εκείνη της εξάρτησης δευτέρου βαθμού. Τα αποτελέσματα (βλ. το τελευταίο τμήμα των πινάκων D5, D6, D7 και D8) μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(I) Η δυνατότητα των κριτηρίων επιλογής μοντέλου που καθορίζουν το σωστό p είναι σημαντικά υψηλότερη στη περίπτωση *iid* - *t*(2) σφαλμάτων σε σχέση με τη περίπτωση IGARCH σφαλμάτων.

(II) Τα τεστ συνολοκλήρωσης είναι ελαφρώς undersized στη περίπτωση *iid* - *t*(2) σφαλμάτων, με τα εμπειρικά μεγέθη να κυμαίνονται από 3,4 έως 4,4 τοις εκατό. Αφ' ετέρου, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των τεστ είναι σημαντικά υψηλότερη έναντι αυτής της IGARCH περίπτωσης.

(III) Η μεροληψία του JOH είναι σημαντικά υψηλότερη από αυτή του OLS. Εντούτοις, η διαφορά μεταξύ των εκτιμητών είναι μεγαλύτερη σε αυτήν την περίπτωση σε σχέση με

την IGARCH ή ακόμα και την γκαουσιανή περίπτωση. Παραδείγματος χάριν, για $T = 50$ και $\lambda_{\max} = 0.70$, η μεροληψία του JOH είναι 96%, 68.7% και 52.2% μεγαλύτερη από την μεροληψία του OLS για την *iid* - $t(2)$, *iid*- γκαουσιανή και IGARCH περίπτωση αντίστοιχα.

(iv) Το μέγεθος του FC1 για την *iid* - $t(2)$ περίπτωση, που δίνονται στον πίνακα D12, είναι συγκρίσιμο με εκείνο για την IGARCH περίπτωση. Εντούτοις, στην περίπτωση των *iid* - $t(2)$ σφαλμάτων, το FC1 παράγονται κυρίως από το υψηλό κόστος εκτίμησης του JOH σε σχέση με τον OLS. Αφ' ετέρου, στην IGARCH περίπτωση, το FC1 προκαλείται κυρίως από τη χαμηλή δύναμη των τεστ συνολοκλήρωσης να επιλέξουν το σωστό μοντέλο.

5.3.2 Κόστος Πρόβλεψης Τύπου II (FC2)

Στην προηγούμενη υποενότητα, ερευνήσαμε το κόστος πρόβλεψης που προκλήθηκε από την επιβολή άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης σε ένα στάσιμο VAR(1) μοντέλο. Εντούτοις, υπάρχουν περιπτώσεις όπου προβλήματα λανθασμένης παραμετροποίησης προκύπτουν από την αγνόηση έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης και τη μεταχείριση του μοντέλου σαν να έχει δύο (αντί μίας) μοναδιαίες ρίζες. Σε αυτή την περίπτωση, ο ερευνητής υιοθετεί λανθασμένα το ένα VAR μοντέλο σε πρώτες διαφορές (FD), αγνοώντας κατά συνέπεια τις χρήσιμες πληροφορίες για τις μακροπρόθεσμες ιδιότητες του συστήματος. Όπως αναφέραμε ήδη, ονομάζουμε το κόστος πρόβλεψης που προκύπτει από μια τέτοια λανθασμένη επιλογή ως «κόστος πρόβλεψης τύπου II» (FC2). Το τελευταίο ορίζεται ως εξής:

$$FC2(h) = \frac{IQR_a^s(h) - IQR_a^*(h)}{IQR_a^*(h)} \times 100$$

όπου $IQR_a^s(h)$ και $IQR_a^*(h)$ είναι τα $a\%$ IQRs του επιλεγμένου και του σωστού μοντέλου αντίστοιχα για τον ορίζοντα πρόβλεψης h .

Προσπαθούμε να μετρήσουμε το FC2 με τη βοήθεια μιας προσομοίωσης Monte Carlo στα πλαίσια του VAR(1) μοντέλου. Στα στοιχεία a_{ij} , $i, j=1,2$ του A , δίνονται οι κατάλληλες τιμές έτσι ώστε η λ_{\max} να κρατιέται σταθερά ίση με μονάδα ενώ η λ_{\min} να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,7, 1]$ με βήματα 0,04. Εξετάζουμε εννέα διαφορετικές DGPs, από τις οποίες οι πρώτες οκτώ αντιστοιχούν σε RR μοντέλα και μόνο η τελευταία παράγει ένα FD μοντέλο. Όπως πριν, εξετάζουμε μεγέθη δείγματος 50 και 200 παρατηρήσεων, θέτουμε $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ και $\sigma_{12} = 0.5$ και υποθέτουμε *iid* - γκαουσιανά, GARCH και *iid* - $t(2)$ σφάλματα. Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(I) Για άλλη μια φορά, η απόδοση των κριτηρίων επιλογής μοντέλου βελτιώνεται με το μέγεθος δείγματος και επιδεινώνεται με την ένταση των GARCH φαινομένων.

(II) Τα εμπειρικά μεγέθη των τεστ συνολοκλήρωσης, που παρουσιάζονται στον πίνακα D13, εμφανίζονται να είναι μεγαλύτερα του ονομαστικού μεγέθους (oversized) όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Από την άλλη μεριά,, όταν υποθέσουμε *iid* - $t(2)$ σφάλματα, τα τεστ συνολοκλήρωσης έχουν, γενικά, ελαφρώς μικρότερο μέγεθος από το ονομαστικό μέγεθος (undersized). Σχετικά με την «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ των τεστ, τα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται στον πίνακα D14, δείχνουν ότι είναι δυσκολότερο για το TRS να απορρίψει την λανθασμένη υπόθεση ότι $\lambda_{\min} = 1$, από το να απορρίψει την λανθασμένη υπόθεση ότι $\lambda_{\max} = 1$. Με άλλα λόγια, το TRS εμφανίζεται ικανότερο να διακρίνει μεταξύ ενός σταθερού VAR με $\lambda_{\max} \approx 1$ και ενός RR μοντέλου,

από,τι μεταξύ ενός FD μοντέλου και ενός RR μοντέλου με $\lambda_{\min} \approx 1$. Παραδείγματος χάριν, για $T = 50$, $\lambda_{\min} = 0.70$ και *iid* - γκαουσιανά σφάλματα, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του TRS να απορρίψει την υπόθεση $\lambda_{\min} = 1$ είναι ίση με 46,2%, ενώ η δύναμή της να απορρίψει την υπόθεση $\lambda_{\max} = 1$ βρέθηκε να είναι μεγαλύτερη από 90% στην προηγούμενη υποενότητα. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες δύναμης του TRS κάτω από IGARCH σφάλματα είναι κατά ένα μεγάλο μέρος οι ίδιες με εκείνες κάτω από *iid* - $t(2)$ ή ακόμα και κάτω από *iid* - γκαουσιανά σφάλματα.

(III) Οι πίνακες D15, D16, D17, D18 και D19 παρουσιάζουν τις τιμές του FC2 για *iid* - γκαουσιανά, στάσιμα GARCH τέταρτης τάξης στάσιμα GARCH δεύτερης τάξης, IGARCH και *iid* - $t(2)$ σφάλματα αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι το FC2 είναι πολύ μικρότερο από το FC1 σε όλες τις υπό εξέταση περιπτώσεις. Μάλιστα, για $T = 50$, το FC2 τείνει να πάρει αρνητικές τιμές για τιμές της λ_{\min} που ανήκουν στο διάστημα $[0.86, 0.98]$, υπονοώντας ότι η (συχνή) λανθασμένη υιοθέτηση του FD μοντέλου είναι προτιμητέα από την εκτίμηση του σωστού RR μοντέλου, ακόμη και για τις περιπτώσεις που η λ_{\min} είναι αρκετά μικρή. Αυτά τα μάλλον μη αναμενόμενα αποτελέσματα, απεικονίζουν το γεγονός ότι σε περιπτώσεις όπου Π είναι κοντά στη μηδενική μήτρα η μεροληψία του JOH, $i, j = 1, 2$ είναι μεγαλύτερη από τη μεροληψία $|0 - \pi_{ij}|$, που προκύπτει από τη (λανθασμένη) υιοθέτηση ενός VAR(1) σε πρώτες διαφορές,. Επιπλέον, το FC2 αυξάνεται με το μέγεθος δείγματος και, την ένταση των GARCH φαινομένων. Εντούτοις, το FC2 δεν υπερβαίνει το 6 τοις εκατό σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις που εξετάζονται.

5.4 Μια εμπειρική εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε μια εμπειρική εφαρμογή σχετική με τα αποτελέσματα προσομοίωσης που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Πιο συγκεκριμένα, προσπαθούμε να προβλέψουμε τα βραχυπρόθεσμα και τα μακροπρόθεσμα επιτόκια των ΗΠΑ στα πλαίσια ενός VAR(ρ) μοντέλου, όπου το ρ επιλέγεται με τη βοήθεια του SIC. Χρησιμοποιούμε εβδομαδιαία στοιχεία του τρίμηνου επιτοκίου T-Bill και του δεκαετούς επιτοκίου «Treasury constant maturity» από τη δευτεροβάθμια αγορά (secondary market), όπως παρέχονται από τη βάση δεδομένων «Fred» της ομοσπονδιακής τράπεζας του Saint Louis. Η επιλεγμένη συχνότητα των παρατηρήσεων εγγυάται την παρουσία GARCH φαινομένων στη σειρά ενδιαφέροντος.

Είναι σύνηθες προτού ξεκινήσει μια διαδικασία πρόβλεψης κάποιων οικονομικών σειρών, ο ερευνητής να εξετάζει τη πιθανή ύπαρξη διαταραχών (structural breaks) εντός της περιόδου εκτίμησης. Η παρουσία μη ανιχνεύσιμων διαταραχών προκαλεί σημαντικά προβλήματα στους στατιστικούς ελέγχους που πραγματοποιούνται στα πλαίσια των VAR μοντέλων (βλ., παραδείγματος χάριν, Johansen και Nielsen, 1993, Campos et al., 1996, Hendry και Doornik, 1997, Clements και Hendry, 1999a, 1999b). Ειδικότερα, μια πρόσφατη μελέτη από τους Hendry και Mizon (2004) καταδεικνύει ότι η επίδραση των διαταραχών στην προβλεπτική απόδοση των VAR μοντέλων εξαρτάται από το χρόνο και τον τύπο της διαταραχής.

Η εξέταση της ύπαρξης διαταραχών σε οικονομικές μεταβλητές είναι σαφώς πέρα από το πεδίο αυτής της μελέτης. Όπως πρέπει να έχει ήδη γίνει σαφές, ενδιαφερόμαστε για τη μέτρηση και τη σύγκριση του κόστους πρόβλεψης που προκύπτει από τους εναλλακτικούς τύπους λανθασμένης unit-root παραμετροποίησης ενός VAR μοντέλου με σταθερές παραμέτρους. Αυτό σημαίνει, ότι εάν επιθυμούμε να δείξουμε ότι τα

αποτελέσματα της προσομοίωσής μας σχετικά με τη παρουσία των FC1 και FC2 έχουν εμπειρικό ενδιαφέρον, πρέπει να προσδιορίσουμε περιόδους κατά τη διάρκεια των οποίων η διαδικασία γέννησης (DGP) των αμερικανικών επιτοκίων έχει παραμείνει σχετικά σταθερή. Με τη βοήθεια των κατάλληλων τεστ για τον έλεγχο σταθερότητας (stability tests) έχουμε προσδιορίσει δύο τέτοιες περιόδους. Η πρώτη (περίοδος A) ξεκινά στις 25 Νοεμβρίου 1966 και τελειώνει στις 24 Νοεμβρίου 1972, ενώ η δεύτερη (περίοδος B) ξεκινά στις 16 Φεβρουαρίου 1990 και τελειώνει στις 20 Ιανουαρίου 1995. Κατά τη διάρκεια της περιόδου A, τα αμερικανικά επιτόκια μπορούν να περιγραφούν από ένα VAR(1) μοντέλο, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο φαίνεται να έχει λ_{\max} κοντά στη μονάδα και λ_{\min} αρκετά μικρότερη από τη μονάδα. Πράγματι, το TRS προτείνει το RR ως κατάλληλο μοντέλο για αυτήν την περίπτωση. Επομένως, αυτή η περίοδος αντιστοιχεί στη προσομοίωση που μετρούσε το FC1. Για την περίοδο B, τα αμερικανικά επιτόκια εμφανίζονται πάλι να ακολουθούν ένα VAR(1) μοντέλο, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει και τις δύο ρίζες του κοντά στη μονάδα. Το TRS αποτυγχάνει να απορρίψει την υπόθεση ότι και οι δύο ρίζες είναι ίσες με τη μονάδα, προτείνοντας κατά συνέπεια το FD (αντί του RR) ως κατάλληλο μοντέλο. Προφανώς, αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στη προσομοίωση που υπολόγισε το FC2.

Για την περίοδο A συγκρίνουμε τις προβλέψεις των επιτοκίων από το VAR(1)-in-levels και το RR, ενώ για την περίοδο B συγκρίνουμε τις προβλέψεις των επιτοκίων από το RR και το FD. Οι προβλέψεις παράγονται ως εξής: Αρχικά, χρησιμοποιούμε τις πρώτες 50 παρατηρήσεις του δείγματος για να εκτιμήσουμε τα σχετικά μοντέλα. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε κάθε εκτιμημένο μοντέλο για να παραγάγουμε τις δυναμικές προβλέψεις για τις επόμενες 10 παρατηρήσεις. Επαναλαμβάνουμε αυτήν την διαδικασία

χρησιμοποιώντας ένα κυλιόμενο δείγμα 50 παρατηρήσεων, έως ότου εξαντλήσουμε όλες τις παρατηρήσεις μας. Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνουμε μια ακολουθία από 255 και 199 προβλέψεις h -περιόδων, $h = 1, 2, \dots, 10$ για τις περιόδους A και B αντίστοιχα. Κατόπιν υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα πρόβλεψης και παρουσιάζουμε τα 10% IQRs για κάθε h στους πίνακες D20 και D21 για τις περιόδους A και B αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

(I) Για την περίοδο A, το VAR(1)-in-levels παράγει ακριβέστερες προβλέψεις από το RR για όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης, παρά το γεγονός ότι TRS προτείνει το RR ως κατάλληλο μοντέλο. Σημειώστε ότι το TRS ευνοεί το RR σε σχέση με το VAR(1)-in-levels όχι μόνο για ολόκληρη την περίοδο A, αλλά για σχεδόν όλα τα κυλιόμενα δείγματα εκτίμησης 50 παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για να παραγάγουν τις προβλέψεις. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων μεγιστοποιείται για $h = 10$. Είναι προφανές ότι αυτά τα εμπειρικά αποτελέσματα μιμούνται τα στοιχεία προσομοίωσης του FC1, που αναφέρονται στην υποενότητα 5.3.1.

(II) Για την περίοδο B, το RR ξεπερνά οριακά το FD στην πρόβλεψη των επιτοκίων για σχεδόν όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης, εκτός από $h = 1$ και 7, παρά το γεγονός ότι το TRS επιλέγει το FD αντί του RR για σχεδόν όλα τα κυλιόμενα δείγματα εκτίμησης 50 παρατηρήσεων. Αυτή η συμπεριφορά είναι παρόμοια με αυτή που παρατηρείται στις προσομοιώσεις της υποενότητας 5.3.2. Το γεγονός ότι η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων της περιόδου A είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή μεταξύ των μοντέλων της περιόδου B είναι σύμφωνο με την παρατήρηση ότι το FC1 είναι υψηλότερο από το FC2.

5.5 Συμπεράσματα

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου ήταν να ερευνηθούν η επίδραση της επιβολής άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης ή της αγνόησης έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης στις εκτιμήσεις, στατιστικούς ελέγχους και προβλέψεις του VAR(1) μοντέλου. Τα κυριότερα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής:

(I) Τα τεστ συνολοκλήρωσης έχουν, γενικά, χαμηλή δύναμη στο να απορρίψουν την λανθασμένη υπόθεση ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας για εναλλακτικές υποθέσεις που βρίσκονται στη περιοχή της μονάδας. Τα τεστ είναι ισχυρότερα στο να απορρίψουν την λανθασμένη υπόθεση ότι $\lambda_{\max} = 1$ (δεδομένου ότι $\lambda_{\min} < 1$), από το να απορρίψουν την λανθασμένη υπόθεση $\lambda_{\min} = 1$ (δεδομένου ότι $\lambda_{\max} = 1$). Επιπλέον, η παρουσία GARCH σφαλμάτων στο μοντέλο έχει αρνητικές επιπτώσεις στη δύναμη των τεστ να απορρίψουν την $H_0: \lambda_{\max} = 1$ (δεδομένου ότι $\lambda_{\min} < 1$), αλλά έχει αμελητέες επιπτώσεις στη δύναμη τους να απορρίψουν την $H_0: \lambda_{\min} = 1$ (δεδομένου ότι $\lambda_{\max} = 1$).

(II) Στην περίπτωση ενός στάσιμου αλλά σχεδόν συνολοκληρώσιμου VAR(1) μοντέλου που έχει *iid*-γκαουσιανά σφάλματα, το κόστος πρόβλεψης από την επιβολή άκρων περιορισμών συνολοκλήρωσης είναι σημαντικό, ειδικά για τα μικρά δείγματα (δηλ. $T = 50$). Αυτό οφείλεται στο γεγονός που ο εκτιμητής JOH, που συνδέεται με το RR μοντέλο, συμπεριφέρεται πολύ χειρότερα από το βέλτιστο εκτιμητή OLS, ειδικά στις περιπτώσεις όπου η απόσταση της λ_{\max} από τη μονάδα είναι μεγάλη.

(III) Η παρουσία ετεροσκεδαστικότητας στα σφάλματα του μοντέλου αυξάνει το FC1, το οποίο μεγιστοποιείται στη περίπτωση μιας IGARCH διαδικασίας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η παρουσία GARCH φαινομένων προκαλεί σημαντική μείωση της δύναμης

των τεστ συνολοκλήρωσης να απορρίψουν τη λανθασμένη υπόθεση $\lambda_{\max} = 1$, επιλέγοντας έτσι το RR μοντέλο συχνότερα σε σχέση με την *iid*-γκαουσιανή περίπτωση.

(IV) Το κόστος πρόβλεψης τύπου II, που προκύπτει από την αγνόηση έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης και κατά συνέπεια την επιλογή ενός VAR μοντέλου σε πρώτες διαφορές, είναι μικρό τόσο σε γκαουσιανό όσο και σε μη-γκαουσιανό περιβάλλον. Αυτό οφείλεται στην κακή απόδοση του εκτιμητή JOH σε περιπτώσεις όπου η $\lambda_{\max} = 1$ και η λ_{\min} είναι μικρότερη από αλλά πλησίον της μονάδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Προβλέποντας τη Διακύμανση με ένα GARCH(1,1) Μοντέλο:

Κάποια Νέα Αναλυτικά και Monte Carlo Αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δύο δεκαετιών, έμφαση έχει δοθεί στην πρόβλεψη της διακύμανσης οικονομικών χρονοσειρών. Αυτό το ζήτημα είναι σημαντικό για πολλούς οικονομικούς παράγοντες, όπως επενδυτές ή κεντρικές τράπεζες χωρών, δεδομένου ότι οι προβλέψεις της διακύμανσης είναι σημαντικές για πολλές χρηματοοικονομικές αποφάσεις (π.χ. διαχείριση στοιχείων ενεργητικού ή διαχείριση κινδύνου και υπολογισμός του Value-at-Risk). Η κατηγορία GARCH μοντέλων, που εισήγαγε ο Engle (1982) και γενίκευσε ο Bollerslev (1986), είναι κατά πολύ η δημοφιλέστερη κατηγορία οικονομετρικών μοντέλων για την περιγραφή μιας σειράς με μεταβαλλόμενη δεσμευμένη διακύμανση.

Η προβλεπτική ακρίβεια εκτός-δείγματος (out-of-sample) των GARCH μοντέλων εξετάζεται από διάφορες μελέτες (βλ., π.χ. West et al., 1993, West και Cho, 1995, Franses και Van Dijk, 2000). Στις περισσότερες από αυτές τις μελέτες, η αξιολόγηση των GARCH μοντέλων είναι βασισμένη στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) των προβλέψεων. Εντούτοις, οι Andersen και Bollerslev (1998) και οι Christodoulakis και Satchell (1998) έχουν υποστηρίξει πρόσφατα ότι η κακή προβλεπτική απόδοση των GARCH μοντέλων στις εμπειρικές μελέτες είναι παραπλανητική. Πιο συγκεκριμένα, αυτές οι δύο μελέτες αποκαλύπτουν ότι η φαινομενικά φτωχή προβλεπτική συμπεριφορά

εκτός-δείγματος των GARCH μοντέλων οφείλεται στη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων (squared errors) ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη (unobservable) αληθινή δεσμευμένη διακύμανση. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια αύξηση στο MSE των προβλέψεων (MSE-inflation), παραδίδοντας μια παραπλανητική αξιολόγηση των GARCH μοντέλων .

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε αυτό το ζήτημα πιο λεπτομερώς με τον υπολογισμό των αναλυτικών τύπων του MSE των προβλέψεων της διακύμανσης του δημοφιλούς GARCH(1,1) μοντέλου όταν (I) χρησιμοποιείται η αληθινή διακύμανση στη διαδικασία αξιολόγησης και (II) χρησιμοποιούνται τα τετράγωνα των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την αληθινή διακύμανση στη διαδικασία αξιολόγησης. Κατά συνέπεια, παρέχουμε έναν αναλυτικό τύπο για τον MSE-inflation στην περίπτωση ενός GARCH(1,1) μοντέλου. Επιπλέον, πηγαίνουμε ένα βήμα παραπέρα και εξετάζουμε εάν η κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου μπορεί να αποδοθεί απλώς στη χρησιμοποίηση μιας προσέγγισης για την μη-παρατηρήσιμη διακύμανση. Η χρησιμοποίηση ενός GARCH(1,1) μοντέλου στις εμπειρικές μελέτες θα δικαιολογούταν εάν αυτό το μοντέλο θα μπορούσε τουλάχιστον να παραγάγει ακριβέστερες προβλέψεις από ένα μοντέλο που υποθέτει σταθερή διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα, homoscedasticity). Παράγουμε τους αναλυτικούς τύπους για το MSE των προβλέψεων ενός ομοσκεδαστικού μοντέλου, οι οποίοι όπως αναμενόταν αποκαλύπτουν ότι το GARCH(1,1) μοντέλο ξεπερνά (σε ακρίβεια προβλέψεων) το ομοσκεδαστικό μοντέλο βάσει του κριτηρίου MSE.

Εντούτοις, φθάνουμε σε δύο σημαντικά συμπεράσματα σημαντικής σημασίας για τις εμπειρικές μελέτες. Κατ' αρχάς, η διαφορά στην προβλεπτική ακρίβεια μεταξύ του GARCH(1,1) και του ομοσκεδαστικού μοντέλου από την άποψη του κριτηρίου MSE δεν

επηρεάζεται από τη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την δεσμευμένη διακύμανση. Αυτό σημαίνει ότι το κριτήριο MSE παραμένει ικανό για να αξιολογήσει κατάλληλα τη σχετική προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων. Δεύτερον, η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων μεγιστοποιείται για τις προβλέψεις μιας περιόδου μπροστά (one-step ahead forecasts), ενώ τα δύο μοντέλα γίνονται ισοδύναμα όταν ο ορίζοντας πρόβλεψης τείνει να γίνει άπειρος. Δεδομένου ότι η σύγκριση της προβλεπτικής απόδοσης των εναλλακτικών οικονομετρικών μοντέλων είναι συνήθως βασισμένη σε στατιστικά τεστ, βάσει του δεύτερου συμπεράσματος οι ερευνητές πρέπει να βασίζονται στον στατιστικό έλεγχο της σχετικής προβλεπτικής ακρίβειας των μοντέλων σε ακολουθίες προβλέψεων μιας περιόδου μπροστά προκειμένου να αυξηθεί η δύναμη των τεστ.

Επιπλέον, με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo, υπολογίζουμε το εμπειρικό μέγεθος και την «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ ποικίλων στατιστικών τεστ να επιλέγουν το GARCH(1,1) μοντέλο από το ομοσκεδαστικό μοντέλο όταν χρησιμοποιείται το MSE για την αξιολόγηση των προβλέψεων. Στη βιβλιογραφία, υπάρχουν πολυάριθμα στατιστικά τεστ με σκοπό τη σύγκριση είτε nested μοντέλων (όπως το τεστ των Diebold και Mariano, 1995), είτε non-nested μοντέλων (όπως τα τεστ που προτείνονται από τον McCracken, 2004). Παρόλο που ενδιαφερόμαστε για τη σύγκριση δύο non-nested μοντέλων, εξετάζουμε τη συμπεριφορά τεστ που ανήκουν και στις δύο κατηγορίες για λόγους σύγκρισης.²²

²²Οι Christodoulakis και Satchell (2003) δείχνουν ότι η χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την αληθινή αλλά μη-παρατηρήσιμη δεσμευμένη διακύμανση καθιστά το τεστ των Diebold και Mariano άκυρο, ακόμα κι αν ενδιαφερόμαστε για τη σύγκριση δύο non-nested GARCH μοντέλων.

Όσον αφορά το εμπειρικό μέγεθος των στατιστικών ελέγχων, η προσομοίωση δείχνει σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους για την πλειοψηφία των στατιστικών με εξαίρεση τα δύο από τα τρία τεστ που προτείνονται από τον McCracken (2004). Για αυτά τα δύο τεστ παρατηρούνται μόνο κάποιες μικρές διαστρεβλώσεις μεγέθους λόγω πεπερασμένου δείγματος (minor finite sample size distortions). Επιπλέον, οι διαστρεβλώσεις μεγέθους όλων των στατιστικών που εξετάζονται γίνονται μεγάλες όταν η αξιολόγηση των μοντέλων βασίζεται σε ακολουθίες προβλέψεων από 1- έως P-περιόδους (δυναμική πρόβλεψη, dynamic forecast), αντί για ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου (στατική πρόβλεψη, static forecast). Όσον αφορά τη δύναμη των στατιστικών, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αποκαλύπτουν τρία σημαντικά ζητήματα. Κατ' αρχάς, η δύναμη όλων των υπό εξέταση τεστ αυξάνεται σημαντικά όταν η αξιολόγηση βασίζεται σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου. Δεύτερον, η δύναμη των τεστ δεν επηρεάζεται από το μέγεθος δείγματος που χρησιμοποιείται στη διαδικασία εκτίμησης εφ' όσον ο αριθμός παρατηρήσεων είναι επαρκής για να εξασφαλίσει αξιόπιστες εκτιμήσεις των GARCH παραμέτρων. Εντούτοις, η δύναμη των τεστ εξαρτάται σημαντικά από τον αριθμό των εκτός-δείγματος προβλέψεων. Πιο συγκεκριμένα, η δύναμη των τεστ αυξάνεται με τον αριθμό των εκτός-δείγματος προβλέψεων. Αυτό σημαίνει ότι οι ερευνητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν όσο το δυνατόν περισσότερες παρατηρήσεις για την άσκηση πρόβλεψης εκτός-δείγματος. Τρίτον, η δύναμη των τεστ αυξάνεται με την εμμονή της GARCH σειράς. Αυτό είναι ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα για τους ερευνητές, δεδομένου ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι συνήθως ιδιαίτερα επίμονη (persistent) στις εμπειρικές εφαρμογές.

Τέλος, προτείνουμε την κατάλληλη διαδικασία για τη σύγκριση της σχετικής προβλεπτικής ακρίβειας του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου με μια εφαρμογή σε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ. Εξετάζουμε τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται από τους West και Cho (1995). Σε αντίθεση με τα συμπεράσματα των West και Cho (1995), τα αποτελέσματά μας δείχνουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου σε σχέση με το ομοσκεδαστικό μοντέλο για την πρόβλεψη της δεσμευμένη διακύμανσης σε τρεις από τις πέντε εξεταζόμενες συναλλαγματικές ισοτιμίες.

Το κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής. Στην παράγραφο 6.2, παράγουμε το MSE των προβλέψεων διακύμανσης για το GARCH(1,1) μοντέλο και το ομοσκεδαστικό μοντέλο. Η παράγραφος 6.3 περιγράφει εν συντομία τα επιλεγμένα στατιστικά τεστ για την σύγκριση της προβλεπτικής ακρίβειας δύο μοντέλων και παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Monte Carlo που εξετάζει το εμπειρικό μέγεθος και τη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ αυτών των τεστ να επιλέγουν το GARCH(1,1) μοντέλο αντί του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Η παράγραφος 6.4 περιέχει ένα εμπειρικό παράδειγμα και η παράγραφος 6.5 ολοκληρώνει το κεφάλαιο.

6.2 Αξιολόγηση της Προβλεπτικής Απόδοσης του GARCH(1,1)

Μοντέλου

Εξετάζουμε το ακόλουθο GARCH(1,1) μοντέλο:

$$\begin{aligned} e_t &= h_t z_t \\ h_t^2 &= w + a e_{t-1}^2 + b h_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

όπου w , a και b είναι θετικοί αριθμοί και $z_t \sim \text{iid}(0,1)$. Η υπόθεση της μοναδιαίας διακύμανσης για τη διαδικασία z_t , εξασφαλίζει ότι η h_t^2 είναι η δεσμευμένη στο F_{t-1} διακύμανση της e_t , όπου F_{t-1} είναι το σύνολο των διαθέσιμων πληροφοριών μέχρι τη περίοδο $t-1$. Δεν υποθέτουμε μια συγκεκριμένη κατανομή για τη z_t . Παρόλα αυτά, ομοίως με τους Baillie και Bollerslev (1992) (BB εφεξής) προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, υποθέτουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της e_t στο F_{t-1} είναι συμμετρική με όλες τις υπάρχουσες ζυγές ροπές²³ ανάλογες προς τις αντίστοιχες δυνάμεις της δεσμευμένη διακύμανσης, δηλαδή

$$\begin{aligned} E_{t-1}(e_t^{2r+1}) &= 0, & r &= 0, 1, \dots, K-1 \\ E_{t-1}(e_t^{2r}) &= k_r(h_t^{2r}), & r &= 0, 1, \dots, K \end{aligned}$$

όπου k_r είναι η r βαθμού cumulant της δεσμευμένης κατανομής της e_t .²⁴

Η βέλτιστη πρόβλεψη, \hat{h}_{t+s} , της δεσμευμένη διακύμανσης για τον ορίζοντα πρόβλεψης s είναι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της h_{t+s}^2 , δηλαδή η $E_t(h_{t+s}^2)$.²⁵ Είναι εύκολο να δειχτεί ότι:

²³Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για τις δεύτερες και τέταρτες δεσμευμένες ροπές.

²⁴Εξ' ορισμού $k_0 = k_1 = 1$. Κάτω από την υπόθεση δεσμευμένης κανονικότητας έχουμε

$k_r = \prod_{i=1}^r (2i-1)$, $r = 1, 2, \dots$ ενώ κάτω από την υπόθεση δεσμευμένης t_n - κατανομής έχουμε

$k_r = (n-2)^r \Gamma(r + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} - r) \Gamma^{-1}(\frac{1}{2}) \Gamma^{-1}(\frac{n}{2})$, $r = 1, 2, \dots, K$ όπου $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα και $K = \text{int}(\frac{n}{2})$.

²⁵Εξ' ορισμού $E_t(h_{t+s}^2) = E_t(e_{t+s}^2)$ για $s > 0$.

$$\widehat{h}_{t+s}^2 = E_t(h_{t+s}^2) = E_t(e_{t+s}^2) = w \sum_{i=1}^{s-1} (a+b)^{i-1} + (a+b)^{s-1} h_{t+1}^2 \quad (6.2)$$

όπου η $h_{t+1}^2 = w + ae_t^2 + bh_t^2$ είναι γνωστή στο χρόνο t . Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της αδέσμευτης διακύμανσης, $\sigma^2 := \text{Var}(e_t) = \frac{w}{1-a-b}$, της e_t είναι $a+b < 1$. Σε αυτή την περίπτωση, η (6.2) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\widehat{h}_{t+s}^2 = \sigma^2 + (a+b)^{s-1} (h_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

Είναι προφανές ότι αν $s \rightarrow \infty$, η πρόβλεψη \widehat{h}_{t+s} τείνει στην αδέσμευτη διακύμανση σ^2 .

Αντίθετα, εάν $a+b=1$, λαμβάνουμε την ακόλουθη πρόβλεψη:

$$\widehat{h}_{t+s}^2 = w(s-1) + h_{t+1}^2$$

6.2.1 Μη-Εφικτό και Εφικτό MSE των Προβλέψεων του GARCH(1,1) Μοντέλου

Αρχικά, υπολογίζουμε το μη-εφικτό (non-feasible) δεσμευμένο MSE, δηλαδή το $MSE_{G,t}^{NF}(s)$, του GARCH(1,1) μοντέλου για s -περιόδους μπροστά βασισμένοι στην αληθινή δεσμευμένη διακύμανση h_{t+s}^2 .²⁶ Οι BB (1992) παρέχουν τον ακόλουθο τύπο για τον υπολογισμό του $MSE_{G,t}^{NF}$ των προβλέψεων της διακύμανσης βασισμένοι στην \widehat{h}_{t+s} :

$$MSE_{G,t}^{NF}(s) := E_t[(h_{t+s}^2 - \widehat{h}_{t+s}^2)^2] = (k_2 - 1)a^2 \sum_{i=1}^{s-1} (a+b)^{2(i-1)} E_t(h_{t+s-i}^4)$$

²⁶Στην πράξη, ο υπολογισμός αυτού του MSE είναι μη-εφικτός, αφού η h_{t+s}^2 είναι μη παρατηρήσιμη.

όπου $E_t(h_{t+s}^4) = w^2 + \sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} \pi_i w^{2-i} E_t(h_{t+s-i}^{2i})$, $\pi_1 = (a+b)$ και $\pi_2 = k_2 a^2 + ab + b^2$. Μετά

από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο

$$E_t(h_{t+s-i}^4) = \pi_2^{s-i-1} h_{t+i}^4 + w^2 \sum_{q=1}^{s-i-1} \pi_2^{q-1} + 2\pi_1 w \sum_{q=1}^{s-i-1} \left\{ \pi_2^{q-1} w \sum_{p=1}^{s-i-q-1} [(a+b)^{p-1} + (a+b)^{s-i-q-1} h_{t+i}^2] \right\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{G,t}^{\text{NF}}(s) &= (k_2 - 1)a^2 \sum_{i=1}^{s-1} (a+b)^{2(i-1)} \left\{ \pi_2^{s-i-1} h_{t+i}^4 + w^2 \sum_{q=1}^{s-i-1} \pi_2^{q-1} + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi_1 w \sum_{q=1}^{s-i-1} \left\{ \pi_2^{q-1} w \sum_{p=1}^{s-i-q-1} [(a+b)^{p-1} + (a+b)^{s-i-q-1} h_{t+i}^2] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Προκειμένου να ληφθεί το μη-εφικτό αδέσμευτο MSE_G^{NF} , πρέπει να υποθέσουμε ότι η τέταρτη ροπή της e_t είναι πεπερασμένη. Μεταξύ των άλλων, ο Hafner (2003) αποδεικνύει την ακόλουθη αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το $E(e_t^4)$ πεπερασμένο: $3ca^2 + 2ab + b^2 < 1$, όπου $c := \frac{E(z_t^4)}{3}$. Σε αυτή την περίπτωση:

$$E(e_t^4) = 3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον τύπο για το αδέσμευτο MSE_G^{NF} ως εξής:

$$E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] = E\{E_t[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]\} = E\{(k_2 - 1)a^2 \sum_{i=1}^{s-1} (a+b)^{2(i-1)} E_t(h_{t+s-i}^4)\}$$

Μετά από κάποιες πράξεις,²⁷ λαμβάνουμε τον ακόλουθο τύπο:

²⁷Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ιδιότητα: $E_t(e_{t+s}^4) = k_2 E_t(h_{t+s}^4)$ για $s > 0$.

$$\text{MSE}_G^{\text{NF}}(s) = \frac{k_2 - 1}{k_2} a^2 [3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2}] \frac{1-(a+b)^{2(s-1)}}{1-(a+b)^2}$$

Μέχρι τώρα, έχουμε υπολογίσει το MSE των προβλέψεων της δεσμευμένη διακύμανσης υποθέτοντας ότι η h_{t+s}^2 είναι γνωστή. Εντούτοις, δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε την h_{t+s}^2 . Επομένως, στις εμπειρικές μελέτες αξιολογούμε την προβλεπτική ακρίβεια των GARCH μοντέλων με τη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων, e_{t+s}^2 , ως προσέγγιση για την h_{t+s}^2 . Τώρα θα δείξουμε ότι η χρήση αυτής της προσέγγισης οδηγεί σε υψηλότερο MSE, αφού η e_{t+s}^2 είναι ένας «κακός» εκτιμητής της πραγματικής δεσμευμένη διακύμανσης. Παραδείγματος χάριν, ο Lopez (2001) δηλώνει ότι "... ακόμα κι αν κάποιος είναι πρόθυμος να δεχτεί μια προσέγγιση που είναι μέχρι 50% διαφορετική από την h_{t+s}^2 , η e_{t+s}^2 θα τηρούσε αυτόν τον όρο μόνο στο 25% των περιπτώσεων". Πιο συγκεκριμένα, ο Lopez (2001) δείχνει ότι $\Pr(e_{t+s}^2 \in [\frac{1}{2}h_{t+s}^2, \frac{3}{2}h_{t+s}^2]) = 0.2588$.²⁸

Καταρχήν, υπολογίζουμε το εφικτό δεσμευμένο MSE, δηλαδή το $\text{MSE}_{G,t}^F(s) := E_t[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$.

Καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{G,t}^F(s) = & k_2 \{ \pi_2^{s-1} h_{t+1}^4 + w^2 \sum_{i=1}^{s-1} \pi_2^{i-1} + \\ & + 2\pi_1 w \sum_{i=1}^{s-1} \pi_2^{i-1} [\sigma^2 + (a+b)^{s-i-1} (h_{t+1}^2 - \sigma^2)] \} - \\ & \{ [\sigma^2 + (a+b)^{s-1} (h_{t+1}^2 - \sigma^2)]^2 \} \end{aligned}$$

²⁸Ο Lopez (2001) υποθέτει γκαουσιανά σφάλματα, δηλαδή $z_t \sim N(0,1)$.

Το εφικτό αδέσμευτο MSE ορίζεται ως εξής:

$$MSE_G^F(s) := E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] = E\{E_t[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]\}$$

και είναι το ακόλουθο:²⁹

$$MSE_G^F(s) = \sigma^4[(a+b)^{2(s-1)} - 1] + 3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} \left[1 - \frac{(a+b)^{2(s-1)}}{k_2}\right]$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι το MSE-inflation, $MSEI_G := MSE_G^F(s) - MSE_G^{NF}(s)$, που αντιστοιχεί στην αύξηση του MSE λόγω της χρήσης της e_{t+s}^2 αντί της h_{t+s}^2 , δίνεται από:

$$MSEI_G = 3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} \left(1 - \frac{1}{k_2}\right)$$

Παρατήρηση (6,1): Το $MSEI_G$ είναι ανεξάρτητο από το s και είναι επίσης μια αύξουσα συνάρτηση των GARCH παραμέτρων (w , a και b). Τέλος, το $MSEI_G$ αυξάνεται με την τιμή της παραμέτρου k_2 , υπονοώντας ότι η επίδραση από την προσέγγιση της h_{t+s}^2 με την e_{t+s}^2 είναι εντονότερη όταν η z_t ακολουθεί μια λεπτόκυρτη κατανομή.

6.2.2 Μη-Εφικτό και Εφικτό MSE των Προβλέψεων του Ομοσκεδαστικού Μοντέλου

Στη προηγούμενη ενότητα, δείξαμε ότι τα τετράγωνα των σφαλμάτων, e_{t+s}^2 , είναι «κακοί» εκτιμητές της μη-παρατηρήσιμης δεσμευμένης διακύμανσης h_{t+s}^2 . Επομένως, η αξιολόγηση της προβλεπτικής ακρίβειας των GARCH μοντέλων με βάση το εφικτό

²⁹Για άλλη μια φορά, υποθέτουμε πεπερασμένες τέταρτες ροπές για την e_t . Δηλαδή υποθέτουμε ότι $E(e_t^4) < \infty$, $\forall t$.

αδέσμευτο MSE, μπορεί να είναι παραπλανητική. Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε εάν η κακή προβλεπτική απόδοση (για τη διακύμανση) των GARCH μοντέλων που παρατηρείται στις εμπειρικές μελέτες είναι απλώς το αποτέλεσμα της χρησιμοποίησης μιας κακής προσέγγισης για την μη-παρατηρήσιμη πραγματική διακύμανση. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε εάν τα μοντέλα GARCH είναι γενικά ικανά ή όχι να δώσουν ακριβείς προβλέψεις της διακύμανσης. Η χρησιμοποίηση ενός GARCH μοντέλου στις εμπειρικές μελέτες θα δικαιολογούταν εάν αυτό το μοντέλο θα μπορούσε τουλάχιστον να παραγάγει ακριβέστερες προβλέψεις από ένα μοντέλο που υποθέτει σταθερή διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα). Υπολογίζουμε τους αναλυτικούς τύπους για το MSE των προβλέψεων ενός ομοσκεδαστικού μοντέλου.

Ας υποθέσουμε ότι ένας ερευνητής αγνοεί την ύπαρξη της χρονικής ετερογένειας στην δεσμευμένη διακύμανση και επιλέγει να υπολογίσει ένα μοντέλο με σταθερή διακύμανση. Δηλαδή λανθασμένα υποθέτει ότι $h_t^2 = \sigma^2$, $\forall t$ και χρησιμοποιεί την σ^2 αντί της \hat{h}_{t+s} για να προβλέψει την διακύμανση. Θα υπολογίσουμε το εφικτό και μη-εφικτό MSE των προβλέψεων της διακύμανσης σε αυτήν την περίπτωση. Κατ' αρχάς, υπολογίζουμε το μη-εφικτό MSE, δηλαδή το $\text{MSE}_H^{\text{NF}}(s) := E[(h_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$.

Καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο:

$$\text{MSE}_H^{\text{NF}}(s) = \sigma^2 \left[\frac{3cw}{k_2} \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} - \sigma^2 \right]$$

Ομοίως, υπολογίζουμε το εφικτό $\text{MSE}_H^{\text{F}}(s) := E[(e_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$:

$$\text{MSE}_H^{\text{F}}(s) = \sigma^2 \left[3cw \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} - \sigma^2 \right]$$

Παρατήρηση (6,2): Κατά ένα ενδιαφέροντα τρόπο, η χρήση της e_{t+s}^2 σαν προσέγγιση για την h_{t+s}^2 στον υπολογισμό του MSE παράγει ένα MSE-inflation, ορισμένο ως $MSEI_H := MSE_H^F(s) - MSE_H^{NF}(s)$, που είναι ίσο με το $MSEI_G$ που παράχθηκε από τις προβλέψεις, \hat{h}_{t+s} , του GARCH. Το MSE-inflation είναι

$$MSEI_H = 3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) = MSEI_G$$

6.2.3 Η Σχετική Προβλεπτική Απόδοση του GARCH(1,1) Μοντέλου και του Ομοσκεδαστικού Μοντέλου

Συγκρίνουμε τώρα τις προβλέψεις του GARCH(1,1) μοντέλου με τις αντίστοιχες του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Η ακόλουθη πρόταση είναι μάλλον τετριμμένη δηλώνοντας ότι οι προβλέψεις της δεσμευμένη διακύμανσης βάσει του GARCH μοντέλου είναι ακριβέστερες (σε ότι αφορά το MSE κριτήριο) από εκείνες του ομοσκεδαστικού μοντέλου.

Πρόταση (6.1): Έστω $R1(s) := \frac{E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]}{E[(h_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]}$. Τότε, $R1 < 1$ για κάθε πεπερασμένο s .

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα E.1.

Η ακόλουθη πρόταση είναι λιγότερο τετριμμένη, δηλώνοντας ότι η ανωτερότητα σε όρους MSE των προβλέψεων του GARCH μοντέλου σε σχέση με αυτές του ομοσκεδαστικού μοντέλου διατηρείται ακόμα κι αν τα MSEs καθορίζονται σε τη βοήθεια της e_{t+s}^2 αντί της μη-παρατηρήσιμης h_{t+s}^2 .

Πρόταση (6.2): Έστω $R2(s) := \frac{E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]}{E[(e_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]}$. Τότε, $R2 < 1$ για κάθε πεπερασμένο s .

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα Ε.2.

Η ακόλουθη πρόταση είναι πολύ σημαντική για τη σύγκριση των δύο μοντέλων σε εμπειρικές μελέτες. Δηλώνει ότι η διαφορά μεταξύ της προβλεπτικής απόδοσης του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου όταν χρησιμοποιείται η αληθινή δεσμευμένη διακύμανση h_{t+s}^2 για τον υπολογισμό του MSE είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της προβλεπτικής απόδοσης των δύο μοντέλων όταν η e_{t+s}^2 χρησιμοποιείται ως προσέγγιση για την h_{t+s}^2 για τον υπολογισμό του MSE.

Πρόταση (6.3): Έστω $D^F(s)$ η διαφορά μεταξύ του εφικτού MSE των προβλέψεων του ομοσκεδαστικού μοντέλου και του εφικτού MSE των προβλέψεων του GARCH μοντέλου για τον ορίζοντα πρόβλεψης s , δηλ. $D^F(s) := \text{MSE}_H^F(s) - \text{MSE}_G^F(s)$. Έστω $D^{NF}(s)$ η διαφορά μεταξύ του μη-εφικτού MSE των προβλέψεων του ομοσκεδαστικού μοντέλου και του μη-εφικτού MSE των προβλέψεων του GARCH μοντέλου για τον ορίζοντα πρόβλεψης s , δηλ. $D^{NF}(s) := \text{MSE}_H^{NF}(s) - \text{MSE}_G^{NF}(s)$. Τότε, $D^F(s) = D^{NF}(s)$, $\forall s$.

Απόδειξη: Με βάση τους τύπους των MSEs που δίνονται στις προηγούμενες ενότητες, είναι τετριμμένο να δείχθει ότι $D^F(s) = D^{NF}(s)$, $\forall s$ ■

Η πρόταση (6.3) δηλώνει ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα, δεδομένου ότι δείχνει ότι καμία πληροφορία δεν χάνεται σχετικά με τη σχετική προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων όταν η e_{t+s}^2 χρησιμοποιείται ως προσέγγιση για την h_{t+s}^2 για τον υπολογισμό των MSEs. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το MSE μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις εμπειρικές μελέτες για να συγκριθεί η σχετική προβλεπτική απόδοση τέτοιων μοντέλων.

Παρατήρηση (6,3): Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η διάφορα μεταξύ του MSE των «αφελών» (ομοσκεδαστικών) προβλέψεων και του MSE των GARCH-βασισμένων προβλέψεων είναι η εξής:

$$D := (a + b)^{2(s-1)} \left[\frac{3cw\sigma^2}{k_2} \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} - \sigma^4 \right] = (a + b)^{2(s-1)} \text{MSE}_H^{\text{NF}}(s)$$

Αυτή είναι η διάφορα τόσο για την εφικτή όσο και για τη μη-εφικτή περίπτωση. Προφανώς, η D είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του s και μεγιστοποιείται όταν $s = 1$. Η D είναι επίσης μια αύξουσα συνάρτηση των a , b και w . Τέλος, η D είναι μια αύξουσα συνάρτηση της k_2 .

Η προηγούμενη παρατήρηση παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τις εμπειρικές μελέτες. Δείχνει ότι η διαφορά στο MSE των δύο μοντέλων μεγιστοποιείται για τις 1-περιόδου μπροστά προβλέψεις. Αυτό υπονοεί ότι για τη σύγκριση της προβλεπτικής απόδοσης εναλλακτικών οικονομετρικών μοντέλων βάσει ενός στατιστικού τεστ, ο ερευνητής πρέπει να χρησιμοποιήσει ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου (στατική πρόβλεψη) και όχι ακολουθίες προβλέψεων 1- έως P-περιοδών (δυναμική πρόβλεψη). Με αυτό τον τρόπο, η δύναμη των τεστ να υποδειχθεί το βέλτιστο μοντέλο για την πρόβλεψη είναι πιθανό να αυξηθεί. Στην επόμενη ενότητα, θα ερευνήσουμε τη δύναμη (power) ποικίλων στατιστικών διαδικασιών να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο αντί του ομοσκεδαστικού μοντέλου με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo.

6.3 Η Σύγκριση της Προβλεπτικής Απόδοσης των δύο Μοντέλων

Πριν παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, περιγράψουμε αρχικά εν συντομία τα στατιστικά τεστ που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση για να

συγκρίνουν την προβλεπτική ακρίβεια των δύο εναλλακτικών μοντέλων. Γενικά, στη βιβλιογραφία υπάρχουν ποικίλες στατιστικές διαδικασίες για τη σύγκριση της σχετικής προβλεπτικής απόδοσης οικονομετρικών μοντέλων. Αυτές οι διαδικασίες είναι χωρισμένες σε δύο διακριτές ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιέχει τα τεστ που έχουν ως σκοπό να συγκρίνουν non-nested μοντέλα, ενώ η δεύτερη ομάδα περιέχει όλα τα τεστ που συγκρίνουν nested μοντέλα.

Η συνήθης διαδικασία που χρησιμοποιείται από τους ερευνητές για τη σύγκριση της σχετικής προβλεπτικής απόδοσης δύο μοντέλων είναι η ακόλουθη. Υποθέτοντας ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα $T = P + R$ παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Y_t , οι πρώτες R παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθούν οι παράμετροι των μοντέλων ενώ οι τελευταίες P παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την εκτός-δείγματος άσκηση πρόβλεψης (out-of-sample forecast exercise). Η διαδικασία πρόβλεψης μπορεί να είναι είτε στατική είτε δυναμική. Η πρώτη διαδικασία βασίζεται σε μια ακολουθία P προβλέψεων 1-περιόδου για κάθε μοντέλο. Υπάρχουν τρεις εναλλακτικοί μέθοδοι για να παραχθεί η ακολουθία των προβλέψεων. Οι μέθοδοι αυτοί είναι η recursive, η rolling και η fixed μέθοδος που περιγράφονται λεπτομερέστερα στην επόμενη ενότητα. Η δεύτερη διαδικασία βασίζεται σε μια ακολουθία P προβλέψεων 1- εώς P -περιόδων. Η στατική και η δυναμική μέθοδος διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους και έτσι η επιλογή μεταξύ των δύο μεθόδων είναι κρίσιμη. Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο ακολουθίες P προβλέψεων (μια για κάθε μοντέλο), δηλαδή τις $f_{i,t}$, $i=1,2$ και $t=1,2,\dots,P$, υπολογίζονται τα σφάλματα πρόβλεψης ($\varepsilon_{i,t} = Y_{t+t} - f_{i,t}$, $i=1,2$ και $t=1,2,\dots,P$). Τέλος, η προβλεπτική ικανότητα των δύο μοντέλων συγκρίνεται με βάση μια επιλεγμένη συνάρτηση κόστους, $L(\cdot)$, και ένα συγκεκριμένο τεστ. Στην περίπτωση του MSE, έχουμε ότι $L(\varepsilon_{i,t}) := \varepsilon_{i,t}^2$,

$i=1,2$ και $t=1,2,\dots,P$. Περιγράφουμε τώρα εν συντομία μερικά από τα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία τεστ.

6.3.1 Τεστ για τη Σύγκριση της Προβλεπτικής Ακρίβειας

Καταρχήν, παρουσιάζουμε το δημοφιλές τεστ των Diebold και Mariano (1995), το οποίο σχεδιάστηκε για να συγκρίνει την προβλεπτική απόδοση δύο non-nested μοντέλων.

Κάτω από την μηδενική υπόθεση, το τεστ υποθέτει ίση προβλεπτική ακρίβεια, δηλαδή $H_0 : E[L(\varepsilon_{1,t})] = E[L(\varepsilon_{2,t})]$ ή ισοδύναμα $H_0 : E[d_t] = 0$, όπου $d_t = L(\varepsilon_{1,t}) - L(\varepsilon_{2,t})$.

Λαμβάνοντας υπόψη την ακολουθία διαφοράς κόστους $\{d_t\}_{t=1}^P$, οι Diebold και Mariano

(1995) δείχνουν ότι $\sqrt{P}(\bar{d} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Omega)$, όπου $\bar{d} := P^{-1} \sum_{t=1}^P [L(\varepsilon_{1,t}) - L(\varepsilon_{2,t})]$. Ο

στατιστικός έλεγχος που προτείνουν είναι ο ακόλουθος:

$$DM - statistic = S_1 := (\sqrt{P})^{-1} \left(\sqrt{\hat{\Omega}} \right)^{-1} \sum_{t=1}^P [L(\varepsilon_{1,t}) - L(\varepsilon_{2,t})] \quad (6.3)$$

όπου $\hat{\Omega}$ είναι ένας συνεπής εκτιμητής της ασυμπτωτικής διακύμανσης Ω . Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, το S_1 ακολουθεί μια $N(0,1)$ κατανομή εφόσον πληρούνται μια σειρά από υποθέσεις.

Μια βασική υπόθεση για τον υπολογισμό της ασυμπτωτικής κατανομής του S_1 είναι ότι τα δύο υπό εξέταση μοντέλα είναι non-nested. Στην περίπτωση δύο nested μοντέλων, η $\Omega = 0$ που ακυρώνει τη διαδικασία που προτείνεται από τους Diebold και Mariano (1995), δεδομένου ότι η ασυμπτωτική κατανομή είναι μη τυποποιημένη (non-standard). Εντούτοις, ο McCracken (2004) παράγει αριθμητικά εκτιμήσεις των ασυμπτωτικών κριτικών τιμών για το S_1 . Προτείνει επίσης δύο εναλλακτικά τεστ για να συγκρίνει την

προβλεπτική ακρίβεια δύο nested μοντέλων. Το πρώτο είναι βασισμένο σε μια μέθοδο που εισάγεται από τους Granger και Newbold (1977) και που χρησιμοποιείται από τους Ashley et al. (1980). Αυτό το τεστ είναι βασισμένο στο t-στατιστικό της παραμέτρου γ της ακόλουθης παλινδρόμησης: $(\varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t}) = \gamma(\varepsilon_{1,t} + \varepsilon_{2,t}) + \text{error}$.³⁰ Το προτεινόμενο τεστ είναι το ακόλουθο:

$$\text{OOS-t} := \sqrt{P-1} \frac{P^{-1} \sum_{t=1}^P [\varepsilon_{1,t}^2 - \varepsilon_{2,t}^2]}{\sqrt{([P^{-1} \sum_{t=1}^P [\varepsilon_{1,t} + \varepsilon_{2,t}]^2][P^{-1} \sum_{t=1}^P [\varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t}]^2] - \bar{d}^2)}} \quad (6.4)$$

Το δεύτερο στατιστικό που προτείνει ο McCracken (2004) όταν ενδιαφερόμαστε για τη σύγκριση της προβλεπτικής ακρίβειας δύο nested μοντέλων βασισμένοι στο κριτήριο MSE είναι το ακόλουθο:

$$\text{OOS-F} := \frac{\sum_{t=1}^P [\varepsilon_{1,t}^2 - \varepsilon_{2,t}^2]}{P^{-1} \sum_{t=1}^P \varepsilon_{2,t}^2} \quad (6.5)$$

Ο McCracken (2004) δείχνει ότι οι ασυμπτωτικές κατανομές των (6.3), (6.4) και (6.5) είναι μη τυποποιημένες³¹ και παρέχει αριθμητικές εκτιμήσεις των ασυμπτωτικών κριτικών τιμών για τη πραγματοποίηση έγκυρων ελέγχων. Μια βασική υπόθεση που χρησιμοποιείται από τον McCracken (2004) είναι ότι η συνάρτηση κόστους που

³⁰Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι εφεξής όταν εξετάζουμε την περίπτωση των nested μοντέλων, με $i = 1$ αναφερόμαστε στο περιορισμένο μοντέλο (restricted), ενώ με $i = 2$ αναφερόμαστε στο απεριόριστο μοντέλο (unrestricted).

³¹Εντούτοις, ο McCracken (2004) δείχνει ότι οι τρεις στατιστικοί έλεγχοι είναι ασυμπτωτικά pivotal.

χρησιμοποιείται για να αξιολογήσει την προβλεπτική ακρίβεια των μοντέλων είναι η ίδια με τη συνάρτηση κόστους που χρησιμοποιείται στη διαδικασία εκτίμησης. Στην περίπτωση του MSE, τα μοντέλα πρέπει να εκτιμηθούν με OLS, NLLS ή ML κάτω από τη πρόσθετη υπόθεση γκαουσιανών σφαλμάτων. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στην περίπτωση nested μοντέλων, τα τεστ είναι μονόπλευρα. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση των nested μοντέλων η μηδενική υπόθεση είναι $H_0 : E[L(\varepsilon_{1,t})] = E[L(\varepsilon_{2,t})]$, ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι $H_A : E[L(\varepsilon_{1,t})] > E[L(\varepsilon_{2,t})]$.

6.4 Προσομοιώσεις Monte Carlo

6.4.1 Στατικές Προβλέψεις

Στην παράγραφο 6.2, παρουσιάζουμε τους αναλυτικούς τύπους για το εφικτό και μη-εφικτό MSE των προβλέψεων της διακύμανσης από το GARCH(1,1) μοντέλο και από το ομοσκεδαστικό μοντέλο. Αποδείξαμε ότι η χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων e_{t+s}^2 ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη δεσμευμένη διακύμανση διογκώνει εξίσου το MSE των δύο μοντέλων. Κατά συνέπεια, το MSE κριτήριο διατηρεί τη δυνατότητά του να αξιολογήσει κατάλληλα τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων. Εντούτοις, ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε εάν οι ερευνητές είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ των δύο μοντέλων βασισμένοι στις τυπικές στατιστικές διαδικασίες όπως εκείνες που παρουσιάζονται στη προηγούμενη ενότητα. Με άλλα λόγια, θέλουμε να ερευνήσουμε τη δύναμη των στατιστικών τεστ να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο αντί του ομοσκεδαστικού μοντέλου όταν η αξιολόγηση βασίζεται στο MSE κριτήριο. Ερευνάμε αρχικά τις ιδιότητες μεγέθους των στατιστικών ελέγχων

για να φέρουμε στο φως οποιεσδήποτε διαστρεβλώσεις μεγέθους που πρέπει να λάβουμε υπόψη όταν εξετάζουμε τη δύναμη αυτών των στατιστικών.

Στο πρώτο πείραμά μας, παράγουμε τις τυχαίες πραγματοποιήσεις του όρου σφάλματος e_t υποθέτοντας σταθερή διακύμανση, δηλαδή τα a και b τίθενται ίσα με μηδέν στην (6.1). Δύο διαφορετικές περιπτώσεις εξετάζονται για τη κατανομή του όρου σφάλματος z_t . Δηλαδή επιτρέπουμε στα σφάλματα να ακολουθούν είτε τη κανονική κατανομή είτε τη t -κατανομή με 5 βαθμούς ελευθερίας. Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου είναι βασισμένη στη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, η οποία δεν επηρεάζεται από μη-γκαουσιανά σφάλματα. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο των Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Παράγουμε $T = P + R + 200$ παρατηρήσεις. Για να εξαλείψουμε την επίδραση των αρχικών περιορισμών, οι πρώτες 200 παρατηρήσεις απορρίπτονται. Η εκτίμηση των μοντέλων είναι βασισμένη σε R παρατηρήσεις, $\{e_t\}_{t=201}^{200+R}$, ενώ οι τελευταίες P παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την άσκηση πρόβλεψης εκτός-δείγματος. Εξετάζουμε την περίπτωση των προβλέψεων 1-περιόδου. Όπως έχουμε αναφέρει ήδη προηγουμένως, υπάρχουν τρεις εναλλακτικές μέθοδοι για να παράγουμε μια ακολουθία P προβλέψεων 1-περιόδου, η recursive, η rolling και η fixed μέθοδος.

Η recursive μέθοδος παράγει την πρώτη πρόβλεψη βασισμένη σε ένα μοντέλο που εκτιμάται με τη χρησιμοποίηση των παρατηρήσεων $\{e_t\}_{t=201}^{200+R}$. Κατόπιν, το μοντέλο επανεκτιμάται με βάση το δείγμα $\{e_t\}_{t=201}^{200+R+1}$ και η δεύτερη πρόβλεψη 1-περιόδου παράγεται. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου παραχθεί η τελευταία πρόβλεψη 1-περιόδου με βάση ένα μοντέλο που εκτιμάται με τη χρησιμοποίηση των

παρατηρήσεων $\{e_t\}_{t=201}^{200+R+P-1}$. Κατά συνέπεια, σε κάθε βήμα το δείγμα εκτίμησης αυξάνεται κατά μια παρατήρηση.

Σύμφωνα με τη rolling μέθοδο, η πρώτη πρόβλεψη παράγεται με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση της recursive μεθόδου. Εντούτοις, η δεύτερη πρόβλεψη είναι βασισμένη σε ένα μοντέλο που εκτιμάται με τη χρησιμοποίηση των παρατηρήσεων $\{e_t\}_{t=201+1}^{200+R+1}$, ενώ η τελευταία πρόβλεψη παράγεται με βάση ένα μοντέλο που εκτιμάται με τη χρησιμοποίηση των $\{e_t\}_{t=201+P-1}^{200+R+P-1}$. Με άλλα λόγια, η εκτίμηση είναι βασισμένη σε ένα σταθερό παράθυρο R παρατηρήσεων. Για κάθε παρατήρηση που προστίθεται στο τέλος του δείγματος εκτίμησης, μια παρατήρηση στο απόμακρο παρελθόν απορρίπτεται.

Τέλος, η fixed μέθοδος είναι βασισμένη σε μια ενιαία εκτίμηση του μοντέλου με βάση τις παρατηρήσεις $\{e_t\}_{t=201}^{200+R}$. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται μόνο όταν το υπολογιστικό φορτίο είναι μεγάλο.

Μεταξύ των τριών εναλλακτικών μεθόδων, η recursive μέθοδος είναι η πιο αποτελεσματική δεδομένου ότι εκμεταλλεύεται όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες (δηλ. παρατηρήσεις) για να παραγάγει τις προβλέψεις. Επομένως, στη μελέτη μας εξετάζουμε μόνο τη recursive μέθοδο για να παραγάγουμε τις προβλέψεις. Εξετάζουμε τέσσερα διαφορετικά μεγέθη δείγματος εκτίμησης ($R = 300, 600, 900$ και 1200). Για κάθε τιμή του R , εξετάζουμε τρεις διαφορετικές τιμές για τον αριθμό των προβλέψεων εκτός-δείγματος P , δηλαδή $P = 0.1 * R$, $P = 0.2 * R$ και $P = 0.4 * R$. Εξετάζουμε ποικίλα τεστ για να εξετάσουμε τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Στην περίπτωσή μας, συγκρίνουμε δύο nested μοντέλα. Επομένως, τα 3 τεστ που δίνονται στις (6.3), (6.4) και (6.5) είναι κατάλληλα για την

σύγκριση της προβλεπτικής ακρίβειας των δύο μοντέλων. Εντούτοις, εξετάζουμε επίσης κάποια εναλλακτικά τεστ για λόγους σύγκρισης. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε το στατιστικό των Diebold-Mariano βάσει των κριτικών τιμών από τη $N(0,1)$ κατανομή (καλούμε αυτό το τεστ $S_1 - DM$), το sign τεστ (μια έκδοση πεπερασμένου-δείγματος, S_2 , και μια ασυμπτωτική έκδοση, S_2^*), το Wilcoxon's signed-rank τεστ, το Morgan-Granger- Newbold (MGN) τεστ, το Meese-Rogoff τεστ (MR) και το Van der Waerden τεστ (VDW). Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτά τα τεστ μπορούν να βρεθούν στους Lehmann (1975), Diebold και Mariano (1995) και Sheskin (2000).

Τα αποτελέσματα σχετικά με το εμπειρικό μέγεθος των στατιστικών ελέγχων για τη κανονική και $t(5)$ κατανομή δίνονται στους πίνακες E1³² και E2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ονομαστικό μέγεθος 5 τοις εκατό. Τα κύρια συμπεράσματα μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- 1) Στην περίπτωση των γκαουσιανών σφαλμάτων, τα OOS-F και S_1 είναι ελαφρώς oversized, αλλά παραμένουν κοντά στο ονομαστικό μέγεθος 5 τοις εκατό σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτές οι διαστρεβλώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως δευτερεύουσες διαστρεβλώσεις λόγω του πεπερασμένου δείγματος, δεδομένου ότι και τα δύο τεστ είναι βασισμένα σε ασυμπτωτικές κριτικές τιμές. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, το εμπειρικό μέγεθος των OOS-F και S_1 δεν πηγαίνει πάνω από 8 τοις εκατό. Αφ' ετέρου, το OOS-t είναι βαριά undersized στις περισσότερες περιπτώσεις. Εντούτοις, το εμπειρικό μέγεθος του τεστ τείνει στο ονομαστικό

³²Όλοι οι πίνακες αυτού του κεφαλαίου δίνονται στο παράρτημα E.4.

μέγεθος, καθώς ο αριθμός των προβλέψεων εκτός-δείγματος P αυξάνεται. Στην περίπτωση των λεπτόκυρτων σφαλμάτων (t -κατανομή), η συμπεριφορά των τριών στατιστικών επιδεινώνεται ελαφρώς, αλλά όλες τείνουν να έχουν καλή συμπεριφορά όπως το P αυξάνεται.

- 2) Τα $S_1 - DM$ και MGN είναι undersized όταν υποθέτουμε κανονικά σφάλματα, ενώ και τα δύο τεστ βελτιώνουν τις ιδιότητες μεγέθους τους στην περίπτωση των λεπτόκυρτων σφαλμάτων. Η συμπεριφορά των δύο στατιστικών επιδεινώνεται όπως το P αυξάνεται, καθώς γίνονται πιο συντηρητικά. Αφ' ετέρου, το VDW είναι ελαφρώς oversized στην γκαουσιανή περίπτωση. Εντούτοις, τα λεπτόκυρτα σφάλματα φαίνονται να έχουν μια αρνητική επίπτωση στις ιδιότητες μεγέθους του τεστ. Τέλος, όλα τα άλλα εξεταζόμενα τεστ είναι πολύ oversized, ειδικά στην περίπτωση των λεπτόκυρτων σφαλμάτων. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της t -κατανομής και για $R = 600$ και $\pi := \frac{p}{R} = 0.1$, το εμπειρικό μέγεθος του S_2 είναι 42 τοις εκατό. Σε μερικές ακραίες περιπτώσεις, το εμπειρικό μέγεθος μερικών στατιστικών είναι υψηλότερο από 60 τοις εκατό.

Εν περιλήψει, η προσομοίωση αποκαλύπτει ότι μεταξύ όλων των εξεταζομένων τεστ, τα $OOS - F$ και S_1 είναι οι έλεγχοι με τις καλύτερες ιδιότητες μεγέθους. Επιπλέον, η καλή συμπεριφορά των $OOS - F$ και S_1 δεν επηρεάζεται από λεπτόκυρτα σφάλματα. Αφ' ετέρου, οι ιδιότητες μεγέθους του $OOS - t$ εξαρτώνται σημαντικά από τον αριθμό των προβλέψεων εκτός-δείγματος που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία αξιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα, το $OOS - t$ είναι undersized, εκτός αν το P είναι αρκετά μεγάλο ($P > 450$) για να εξασφαλίσει κατάλληλες ιδιότητες μεγέθους του τεστ. Αφ' ετέρου, οι διαστρεβλώσεις μεγέθους που παρατηρούνται στην περίπτωση των $S_1 - DM$ και MGN

δεν είναι αμελητέες. Τέλος, τα υπόλοιπα τεστ πάσχουν από έντονες διαστρεβλώσεις μεγέθους και επομένως αποκλείονται από τις προσομοιώσεις που ακολουθούν.

Εξετάζουμε τώρα τη δύναμη των στατιστικών ελέγχων να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο αντί του ομοσκεδαστικού μοντέλου όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Η αξιολόγηση των τεστ είναι βασισμένη στο κριτήριο MSE. Λαμβάνοντας υπόψη τις διαστρεβλώσεις μεγέθους που αποκαλύπτονται από το πρώτο πείραμα Monte Carlo, η σύγκριση των στατιστικών είναι βασισμένη στη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ τους. Πιο συγκεκριμένα, στην ακόλουθη προσομοίωση η απόρριψη ή όχι της άκυρης υπόθεσης της ίσης προβλεπτικής ακρίβειας των δύο μοντέλων είναι βασισμένη στη σύγκριση μεταξύ της εκτιμημένης τιμής κάθε τεστ και του 95ου εκατοστημορίου της εμπειρικής κατανομής του τεστ, όπως υπολογίζεται στην πρώτη προσομοίωσή μας. Δηλαδή οι τυποποιημένες κριτικές τιμές των στατιστικών αντικαθίστανται από τις εμπειρικές κριτικές τιμές από την αντίστοιχη προσομοίωση μεγέθους.

Η δεύτερη προσομοίωσή μας που στοχεύει στην εξέταση των ιδιοτήτων δύναμης των στατιστικών ελέγχων οργανώνεται ως εξής. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία παράγονται από το GARCH(1,1) μοντέλο που δίνεται από τη (6.1). Για άλλη μια φορά, τα σφάλματα z_t υποτίθεται ότι ακολουθούν είτε τη κανονική κατανομή είτε τη t-κατανομή με 5 βαθμούς ελευθερίας.

Είναι γνωστό ότι τα χαρακτηριστικά ροπών της e_t καθορίζονται από την τιμή των παραμέτρων a και b στη (6.1). Εξετάζουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

Υπόθεση 6.I: Στασιμότητα τέταρτης τάξης

(C1): $3ca^2 + 2ab + b^2 < 1$, όπου $c := \frac{E(z_t^4)}{3}$. Μεταξύ των άλλων, ο Hafner (2003) αποδεικνύει ότι η συνθήκη (C1) είναι αναγκαία και ικανή για να είναι η $E(e_t^4)$ πεπερασμένη. Ο Davidson (2001) αποδεικνύει ότι η συνθήκη (C1) είναι αναγκαία και σχεδόν επαρκής (nearly sufficient) για να είναι η e_t near-epoch dependent στη z_t σε L_2 -norm (L_2 – NED).³³

Περίπτωση 6.II: Στασιμότητα δεύτερης τάξης

(C2): $a + b < 1$. Η συνθήκη (C2) είναι αναγκαία και ικανή για την ύπαρξη της αδέσμευτης διακύμανσης $\sigma^2 := \text{Var}(e_t)$ της e_t . Εάν η συνθήκη (C2) ισχύει, ενώ η συνθήκη (C1) αποτυγχάνει, η e_t κατέχει πεπερασμένες δεύτερες (αλλά όχι τέταρτες) ροπές. Ο Davidson (2001) αποδεικνύει ότι κάτω από στασιμότητα δεύτερης τάξης, η e_t είναι L_1 – NED στο z_t . Πιο πρόσφατα, οι Carrasco και Chen (2002) αποδεικνύουν ότι ο ίδιος συνθήκες είναι αναγκαίες και επαρκής για να είναι η e_t b – mixing.

Υπόθεση 6.III: Στασιμότητα πρώτης τάξης (IGARCH)

(C3): $a + b = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση η e_t δεν είναι μια στάσιμη διαδικασία δεύτερης τάξης.³⁴

³³Ο Davidson (2001) δείχνει ότι η συνθήκη της τέταρτης ροπής είναι αναγκαία και σχεδόν ικανή για την L_2 – NED ιδιότητα, ανεξάρτητα από τη κατανομή της διαδικασίας σφαλμάτων. Η L_2 – NED ιδιότητα μιας GARCH(1,1) διαδικασίας αποδείχθηκε αρχικά από τον Hansen (1991) κάτω από τη πρόσθετη υπόθεση της κανονικότητας της Z_t .

³⁴Ο Nelson (1990) αποδεικνύει ότι μια IGARCH διαδικασία ή ακόμα και μια ήπια εκρηκτική διαδικασία μπορεί να είναι αυστηρά στάσιμη και εργοδική.

Στην προσομοίωση, θεωρούμε ένα σύνολο από διάφορους συνδυασμούς για τις τιμές των a και b για όλες τις περιπτώσεις που αναφέρονται ανωτέρω προκειμένου να εξεταστεί η επίδραση των χαρακτηριστικών ροπής της e_t στη δύναμη των στατιστικών τεστ που εξετάζονται. Πιο συγκεκριμένα, εκθέτουμε τα αποτελέσματα για εννέα διαφορετικές DGPs. Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, οι διαδικασίες που εξετάζονται στη πρώτη, τέταρτη και έβδομη DGP κατέχουν πεπερασμένες τέταρτες ροπές, ενώ η δεύτερη, πέμπτη και όγδοη DGP είναι στοχαστικές διαδικασίες στάσιμες δεύτερης τάξης. Τέλος, η τρίτη, έκτη και ένατη DGP, αντιστοιχούν σε διαδικασίες IGARCH. Εντούτοις, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι τύποι για το MSE των προβλέψεων διακύμανσης που παράγονται στην παράγραφο 6.2 ισχύουν μόνο όταν έχουμε στασιμότητα τέταρτης τάξης (περίπτωση 6.I). Διαφορετικά, τα MSEs των προβλέψεων γίνονται άπειρα. Σε όλη την προσομοίωση κρατάμε το σταθερό όρο w ίσο με 0.1. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της προσομοίωσης είναι ίδια με εκείνα του πρώτου πειράματός μας. Δηλαδή παράγουμε $T = P + R + 200$ παρατηρήσεις και οι πρώτες 200 παρατηρήσεις απορρίπτονται. Η εκτίμηση των μοντέλων είναι βασισμένη σε R παρατηρήσεις, $\{e_t\}_{t=201}^{200+R}$, ενώ οι τελευταίες P παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την άσκηση πρόβλεψης εκτός-δείγματος, η οποία είναι βασισμένη σε προβλέψεις 1-περιόδου προκειμένου να αυξηθεί η δύναμη των τεστ (βλ. την παρατήρηση 6.3). Τέλος, για κάθε σύνολο τιμών για τα a και b , εξετάζουμε όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς για τις τιμές των R και P που εξετάζονται στο προηγούμενο πείραμα. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για τις δύο εναλλακτικές κατανομές της z_t παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Περίπτωση A: Κανονικά σφάλματα

Όπως έχουμε αναφέρει ήδη, εξετάζουμε μόνο τα ακόλουθα πέντε τεστ: τα 3 τεστ που δίνονται στις (6.3), (6.4) και (6.5), το MGN τεστ και το $S_1 - DM$ τεστ. Εντούτοις, δεν υπάρχει καμία ανάγκη να διακρίνουμε μεταξύ S_1 και $S_1 - DM$, δεδομένου ότι η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των δύο στατιστικών υπολογίζεται βάσει των ίδιων εμπειρικών κριτικών τιμών. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα είναι ίδια για τα δύο τεστ. Τα αποτελέσματα για τα 4 τεστ επιδεικνύονται στους πίνακες E3-E6 και μπορούν να συνοψιστούν ως εξής.

- 1) Το OOS-F είναι το ισχυρότερο τεστ, ακολουθούμενο από το MGN και το S_1 .³⁵ Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-F φθάνει στο 100 τοις εκατό όταν το μέγεθος δείγματος εκτίμησης R και ο αριθμός προβλέψεων εκτός-δείγματος P είναι υψηλά. Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-t είναι πολύ χαμηλή, εκτός αν το P είναι μεγαλύτερο από 450. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της DGP-3 και για $R = 1200$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-t είναι 25 και 90 τοις εκατό για $\pi := \frac{P}{R} = 0.1$ και 0.4 αντίστοιχα (βλ. τον πίνακα E5).
- 2) Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς όλων των τεστ αυξάνεται με την εμμονή (persistence) της υπό εξέταση διαδικασίας. Με άλλα λόγια, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των τεστ μεγιστοποιείται στην περίπτωση μιας IGARCH διαδικασίας. Παραδείγματος χάριν, όταν $R = 1200$ και $\pi = 0.1$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του S_1 αυξάνεται από 38 σε 72 τοις εκατό για τις DGP-1 και DGP-3

³⁵Η ανωτερότητα του OOS-F σε σχέση με τα S_1 και OOS-t όταν ο αριθμός των πρόσθετων παραμέτρων του απεριόριστου μοντέλου και το π είναι μικρά αναφέρεται επίσης από τον McCracken (2004).

αντίστοιχα. Αφ' ετέρου, η επίδραση των σχετικών τιμών των a και b δεν είναι ξεκάθαρη. Αρχικά, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς όλων των στατιστικών αυξάνεται με την τιμή της a . Εντούτοις, μια ακραία τιμή της a που είναι υψηλότερη από αυτή της b (αυτό συμβαίνει στις DGPs 7, 8 και 9) έχει αρνητική επίπτωση στη συμπεριφορά των περισσότερων στατιστικών. Εντούτοις, τέτοιες ακραίες τιμές της ARCH παραμέτρου παρατηρούνται σπάνια στις εμπειρικές μελέτες, όπου η εκτίμηση της GARCH παραμέτρου είναι συνήθως πολύ υψηλότερη από αυτή της ARCH παραμέτρου.

- 3) Το μέγεθος δείγματος εκτίμησης R έχει δευτερεύοντα ρόλο στη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ όλων των τεστ εφ' όσον ο αριθμός παρατηρήσεων είναι επαρκής για να εξασφαλίσει αξιοπιστία των εκτιμήσεων των παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, καθώς το μέγεθος δείγματος εκτίμησης αυξάνεται, παρατηρούμε μικρές αυξήσεις στη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ των τεστ που σπάνια ξεπερνούν το 10 τοις εκατό (είναι συνήθως λιγότερο από 5 τοις εκατό). Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της $DGP-1$ και για $P = 240$ (δηλαδή όταν $\pi := \frac{P}{R} = 0.4$ και 0.2 για $R = 600$ και 1200 αντίστοιχα) η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-F (πίνακας E3) αυξάνεται κατά μόνο 2 τοις εκατό (από 83 τοις εκατό σε 85 τοις εκατό), ενώ στην περίπτωση της $DGP-6$ η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-F παραμένει αμετάβλητη στο 98 τοις εκατό.
- 4) Αντίθετα, ο αριθμός των προβλέψεων εκτός-δείγματος P είναι κρίσιμος για τη δύναμη όλων των τεστ που εξετάζονται στην προσομοίωση. Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των τεστ αυξάνεται αισθητά με το P , φθάνοντας στο 100 τοις εκατό σε μερικές περιπτώσεις. Παραδείγματος χάριν, για $R = 600$ και για τη $DGP-1$, η

«προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS–F αυξάνεται από 58 σε 83 τοις εκατό για $\pi = 0.1$ και 0.4 αντίστοιχα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι το OOS–t είναι πολύ ευαίσθητο στην τιμή του R. Τουλάχιστον 240 προβλέψεις εκτός-δείγματος είναι απαραίτητες έτσι ώστε η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS–t να ξεπερνά το 50 τοις εκατό.

Περίπτωση Β: σφάλματα t(5)-κατανομής

Η υπόθεση των λεπτόκυρτων σφαλμάτων έχει δύο σημαντικές επιπτώσεις με αντίθετη επίδραση στη δύναμη των εξεταζόμενων στατιστικών. Οι τύποι για το MSE των προβλέψεων διακύμανσης που παράγονται στην παράγραφο 6.2 υπονοούν ότι η διαφορά μεταξύ του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση των λεπτόκυρτων κατανομών. Αυτό αναμένεται να αυξήσει τη δύναμη των στατιστικών που εξετάζονται σε αυτή τη μελέτη. Αφ' ετέρου, τα λεπτόκυρτα σφάλματα μπορούν να έχουν μια αρνητική επίπτωση στις εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων του GARCH και να αυξήσουν την μεροληψία πεπερασμένου δείγματος. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην επιδείνωση της προβλεπτικής ακρίβειας του GARCH(1,1) μοντέλου, με συνέπεια τις μικρότερες διαφορές μεταξύ των δύο μοντέλων. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι όταν έχουμε σφάλματα με t(5)-κατανομή, η DGP–1 είναι η μόνη περίπτωση από τις εννέα DGPs που μελετώνται που ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας τέταρτης τάξης C(1).

Τα κύρια αποτελέσματα, που δίνονται στους πίνακες E7-E10, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής.

- 1) Γενικά, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των περισσότερων τεστ που εξετάζονται στην προσομοίωση μειώνεται σε σχέση με τη περίπτωση γκαουσιανών

σφαλμάτων. Παραδείγματος χάριν, για τη DGP-1, $R = 1200$ και $\pi = 0.1$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-F είναι 73 και 65 τοις εκατό για τη κανονική και την $t(5)$ -κατανομή αντίστοιχα.

- 2) Ομοίως με την γκαουσιανή περίπτωση, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς όλων των τεστ αυξάνεται με τον αριθμό των προβλέψεων εκτός-δείγματος P και την εμμογή της υπό εξέταση διαδικασίας.³⁶ Παραδείγματος χάριν, όταν $R = 600$ και $\pi = 0.1$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του MGN (πίνακας E10) είναι 22 και 42 τοις εκατό για τη DGP-1 και τη DGP-3 αντίστοιχα. Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του MGN αυξάνεται περαιτέρω στο 74 τοις εκατό για τη DGP-3 και $\pi = 0.4$. Για άλλη μια φορά, το μέγεθος δείγματος εκτίμησης R έχει δευτερεύοντα ρόλο στη συμπεριφορά όλων των τεστ.
- 3) Η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς των τριών στατιστικών που προτείνονται από τον McCracken (2004) μειώνεται. Το OOS-F εξακολουθεί να ξεπερνά τα άλλα δύο τεστ, αλλά ένας μεγάλος αριθμός προβλέψεων εκτός-δείγματος είναι τώρα απαραίτητος για να επιτύχει μια δύναμη άνω του 80 τοις εκατό. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της DGP-1 και για $R = 1200$, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-F είναι 65 και 86 τοις εκατό για $\pi = 0.1$ και 0.4 αντίστοιχα.

Εν περιλήψει, η προσομοίωση αποκαλύπτει την ανωτερότητα του OOS-F σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα εξεταζόμενα τεστ. Το OOS-F έχει καλές ιδιότητες μεγέθους (μόνο δευτερεύουσες διαστρεβλώσεις μεγέθους λόγω του πεπερασμένου δείγματος παρατηρούνται), ενώ έχει σημαντικά υψηλότερη δύναμη από τα άλλα τεστ. Επιπλέον,

³⁶Σε λίγες περιπτώσεις, η «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύς του OOS-t μειώνεται ελαφρώς με την εμμογή της διαδικασίας.

φαίνεται να μην επηρεάζεται ιδιαίτερα από λεπτόκυρτα σφάλματα. Το S_1 έχει παρόμοιες ιδιότητες μεγέθους αλλά σημαντικά χαμηλότερη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ από το OOS-F. Η απόδοση του OOS-t είναι πολύ κακή, εκτός αν ο ερευνητής χρησιμοποιεί έναν μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων για την άσκηση πρόβλεψης εκτός-δείγματος. Τα υπόλοιπα τεστ που εξετάζονται πάσχουν από σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους ή/και έχουν χαμηλή δύναμη.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το κριτήριο MSE παραμένει ικανό να αξιολογήσει κατάλληλα τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των εξεταζόμενων μοντέλων, ακόμα κι αν τα τετράγωνα των καταλοίπων χρησιμοποιούνται ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη δεσμευμένη διακύμανση. Όμως, ο ερευνητής πρέπει να χρησιμοποιήσει το κατάλληλο τεστ (δηλαδή τεστ που είναι κατάλληλα για να συγκρίνουν nested μοντέλα) για τη αξιολόγηση της σχετικής ακρίβειας πρόβλεψης των μοντέλων. Επιπλέον, η προσομοίωση δείχνει ότι η δύναμη όλων των στατιστικών αυξάνεται αισθητά με τον αριθμό των προβλέψεων εκτός-δείγματος και φθάνει στο 100 τοις εκατό σε μερικές περιπτώσεις. Αφ' ετέρου, το μέγεθος δείγματος εκτίμησης έχει μικρή επίδραση στη δύναμη των τεστ. Κατά συνέπεια, οι ερευνητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν ένα μεγάλο ποσοστό του διαθέσιμου δείγματος για την άσκηση πρόβλεψης εκτός δείγματος, προκειμένου να αυξηθεί η δύναμη του επιλεγμένου τεστ.

Μέχρι τώρα, η ανάλυση είναι βασισμένη σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου. Στην παράγραφο 6.2, έχουμε δείξει ότι η διαφορά στο MSE των προβλέψεων διακύμανσης του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου μεγιστοποιείται για τις προβλέψεις 1-περιόδου (βλ. την παρατήρηση 6.3). Όσο ο ορίζοντας πρόβλεψης αυξάνεται, η διαφορά στο MSE των προβλέψεων διακύμανσης των δύο μοντέλων

μειώνεται. Κατά συνέπεια, αναμένουμε ότι η δύναμη των στατιστικών τεστ που χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουν τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων θα είναι υψηλότερη εάν τα τεστ βασίζονται σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου παρά σε ακολουθίες προβλέψεων 1- έως P-περιόδων, που παράγονται με έναν δυναμικό τρόπο. Εξετάζουμε αυτό το ζήτημα στην ακόλουθη υποενότητα, όπου επαναλαμβάνουμε τα πειράματα Monte Carlo βασισμένοι σε ακολουθίες προβλέψεων 1-εώς P-περιόδων, που παράγονται με έναν δυναμικό τρόπο. Αυτή η δυναμική διαδικασία πρόβλεψης χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμοσμένες μελέτες για να συγκριθεί η σχετική προβλεπτική ακρίβεια εναλλακτικών μοντέλων.

6.4.2 Δυναμικές Προβλέψεις

Σε αυτήν την υποενότητα, χρησιμοποιούμε τις προσομοιώσεις Monte Carlo για να εξετάσουμε το μέγεθος και τη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ των ίδιων στατιστικών που εξετάστηκαν προηγουμένως για να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο αντί του ομοσκεδαστικού μοντέλου στην περίπτωση των δυναμικών προβλέψεων. Με άλλα λόγια, υπολογίζουμε τώρα την τιμή των στατιστικών ελέγχων με βάση ακολουθίες προβλέψεων 1-εώς P-περιόδων, που παράγονται με έναν δυναμικό τρόπο. Πριν παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα 3 τεστ που προτείνονται από τον McCracken (2004), δηλαδή το OOS-F, το S_1 και το OOS-t, δεν ισχύουν σε αυτήν την περίπτωση. Αυτά τα τεστ ισχύουν μόνο στην περίπτωση των προβλέψεων 1-περιόδου. Όταν μακρύτεροι ορίζοντες πρόβλεψης εξετάζονται, η ασυμπτωτική κατανομή των τριών στατιστικών είναι μη-τυποποιημένη (για λεπτομέρειες βλέπε Clark και McCracken, 2001).

Οι περιπτώσεις που εξετάζονται σε αυτήν την δεύτερη προσομοίωση είναι οι ίδιες με εκείνες του προηγούμενου πειράματος. Τα αποτελέσματα για το εμπειρικό μέγεθος των στατιστικών ελέγχων που εξετάζονται σε αυτήν την έρευνα παρουσιάζονται στους πίνακες E11 και E12 για την γκαουσιανή και $t(5)$ κατανομή αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι όλα τα τεστ πάσχουν από σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους. Είναι είτε undersized (π.χ. το MGN και το $S_1 - DM$) είτε oversized (π.χ. S_2). Το OOS-F και το OOS-t φαίνεται να πάσχουν από ηπιότερες διαστρεβλώσεις μεγέθους από τα υπόλοιπα τεστ. Είναι πολύ σημαντικό να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά όλων των τεστ επιδεινώνεται με τον αριθμό των προβλέψεων εκτός-δείγματος που χρησιμοποιούνται στην αξιολόγηση των δύο μοντέλων. Όσον αφορά τη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ των τεστ, μελετάμε μόνο το OOS-F και το OOS-t τεστ. Τα αποτελέσματα σχετικά με τη «προσαρμοσμένη στο μέγεθος» ισχύ των δύο στατιστικών αναφέρονται στους πίνακες E13 και E14 για την γκαουσιανή κατανομή και στους πίνακες E15 και E16 για την $t(5)$ -κατανομή. Η δύναμη των δύο εξεταζόμενων τεστ είναι πολύ χαμηλή. Και τα δύο φαίνονται να είναι ανίκανα να επιλέξουν το σωστό μοντέλο. Παραδείγματος χάριν, η δύναμη του OOS-F δεν υπερβαίνει ποτέ το 63 τοις εκατό και στις περισσότερες περιπτώσεις είναι χαμηλότερη από 30 τοις εκατό.

Εν περιλήψει, η προσομοίωση αποκαλύπτει ότι τα τεστ που εξετάζονται σε αυτήν την μελέτη πάσχουν από σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους και έχουν χαμηλή δύναμη να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου, όταν βασίζονται σε ακολουθίες προβλέψεων 1- εώς P-περιόδων, που παράγονται με έναν δυναμικό τρόπο.

6.5 Μια Εμπειρική Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε πώς οι στατιστικοί έλεγχοι αποδίδουν με μια εφαρμογή σε συναλλαγματικές ισοτιμίες. Παράγουμε αρχικά προβλέψεις για τη διακύμανση των συναλλαγματικών ισοτιμιών βασισμένοι σε ένα GARCH(1,1) μοντέλο και ένα ομοσκεδαστικό μοντέλο. Συγκρίνουμε έπειτα τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο εναλλακτικών μοντέλων. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, που παρουσιάζονται στο προηγούμενο τμήμα, τα μόνα αξιόπιστα τεστ είναι τα 3 τεστ που προτείνονται από τον McCracken (2004), δηλαδή το OOS-F, το S_1 και το OOS-t. Η προσομοίωσή μας αποκάλυψε ότι αυτά τα 3 τεστ έχουν καλές ιδιότητες μεγέθους και υψηλή δύναμη. Επομένως, η ανάλυση είναι βασισμένη σε αυτά τα 3 τεστ. Εξετάζουμε τα ίδια στοιχεία που χρησιμοποιούνται από τους West και Cho (1995), δηλαδή εξετάζουμε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τις εβδομαδιαίες συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ έναντι των νομισμάτων του Καναδά, της Γαλλίας, της Γερμανίας, της Ιαπωνίας και της Μ.Βρεταννίας. Τα στοιχεία παρέχονται από την ομοσπονδιακή τράπεζα της Νέας Υόρκης και το δείγμα καλύπτει μια περίοδο 16 ετών, από τις 7 Μαρτίου 1973 έως τις 20 Σεπτεμβρίου 1989.³⁷ Οι συναλλαγματικές ισοτιμίες μετριοούνται ως δολάρια ανά μονάδα ξένου νομίσματος. Η ανάλυση είναι βασισμένη στις λογαριθμικές διαφορές της σειράς. Πιο συγκεκριμένα, οι μεταβλητές που εξετάζονται είναι:

$$x_t = 100 * [\ln(\varepsilon_t) - \ln(\varepsilon_{t-1})]$$

³⁷Ομοίως με τους West και Cho (1985), τα στοιχεία είναι τα spot rates της Τετάρτης της Νέας Υόρκης. Όταν η Τετάρτη ήταν αργία, χρησιμοποιούμε τα spot rates της Πέμπτης. Όταν και η Πέμπτη ήταν αργία, χρησιμοποιήσαμε τα spot rates της Τρίτης.

όπου ε_t είναι η συναλλαγματική ισοτιμία στην περίοδο t . Κατά συνέπεια, μια αρχική παρατήρηση χάνεται λόγω του υπολογισμού των πρώτων διαφορών, με συνέπεια να έχουμε ένα δείγμα 863 παρατηρήσεων. Οι τιμές (levels) και οι πρώτες διαφορές των σειρών επιδεικνύονται στον διάγραμμα E1 (παράρτημα E.3). Η ετεροσκεδαστικότητα είναι προφανής στις πρώτες διαφορές των σειρών, και επομένως οι μεταβλητές πρέπει να περιγραφούν από ένα μοντέλο που επιτρέπει τη χρονική ετερογένεια στην δεσμευμένη διακύμανση. Μερικά χρήσιμα περιγραφικά στατιστικά των πρώτων διαφορών των υπό εξέταση σειρών παρέχονται στον πίνακα E17.

Με βάση το κριτήριο MSE, οι West και Cho (1995) διαπιστώνουν ότι για έναν ορίζοντα μιας εβδομάδας, το GARCH(1,1) μοντέλο παράγει ακριβέστερες προβλέψεις για την δεσμευμένη διακύμανση από το ομοσκεδαστικό μοντέλο σε τρία από τα πέντε νομίσματα που εξετάζονται. Το GARCH(1,1) μοντέλο ξεπερνά το ομοσκεδαστικό μοντέλο για τα νομίσματα του Καναδά, της Ιαπωνίας και της Μ.Βρετανίας. Εντούτοις, για μακρύτερους ορίζοντες πρόβλεψης, η ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου χάνεται. Επιπλέον, όταν οι West και Cho (1995) συγκρίνουν τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων βασισμένοι σε κάποιο τεστ, αποτυγχάνουν να απορρίψουν τη μηδενική υπόθεση ίσης προβλεπτικής ακρίβειας σε όλες τις περιπτώσεις. Με άλλα λόγια, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το GARCH(1,1) μοντέλο δεν παρέχει ακριβέστερες προβλέψεις διακύμανσης από το ομοσκεδαστικό μοντέλο για όλα τα νομίσματα και όλους τους ορίζοντες πρόβλεψης που εξετάζονται.

Επαναλαμβάνουμε τώρα τη σύγκριση των δύο μοντέλων βασισμένοι στα τεστ που εξετάζονται στην προσομοίωσή μας. Ομοίως με τους West και Cho (1985), αρχίζουμε την άσκηση πρόβλεψης εκτός-δείγματος στο μέσο του δείγματος. Τα αποτελέσματα

εκτίμησης για το GARCH(1,1) μοντέλο για το πρώτο δείγμα εκτίμησης (δηλ. για τις πρώτες 432 παρατηρήσεις) παρουσιάζονται στον πίνακα E18.³⁸ Οι εκτιμήσεις προτείνουν μια στάσιμη διαδικασία τέταρτης τάξης για τον Καναδά και τη Μ.Βρετανία. Αφ' ετέρου, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες της Γαλλίας, της Γερμανίας και της Ιαπωνίας είναι ιδιαίτερα επίμονες και αντιστοιχούν σε στάσιμες διαδικασίες δεύτερης τάξης.

Παράγουμε τις ακολουθίες προβλέψεων 1 – περιόδου για τα δύο μοντέλα βασισμένοι είτε στη recursive είτε στη rolling μέθοδο. Εξετάζουμε την μηδενική υπόθεση της ίσης προβλεπτικής ακρίβειας του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου, ενάντια στην εναλλακτική υπόθεση της ανωτερότητας (δηλ. μικρότερο MSE) του GARCH(1,1) μοντέλου. Κατά συνέπεια, έχουμε ένα μονόπλευρο τεστ. Στην περίπτωση μας, ο αριθμός παρατηρήσεων του δείγματος εκτίμησης είναι ίσος με τον αριθμό παρατηρήσεων εκτός-δείγματος, δηλαδή $R = P$.

Τα αποτελέσματα για τα 3 τεστ για τη recursive και τη rolling μέθοδο παρουσιάζονται στο πίνακα E19. Θεωρούμε το OOS – t ως αξιόπιστο τεστ επειδή ο αριθμός προβλέψεων εκτός-δείγματος που χρησιμοποιείται στο πείραμα είναι αρκετά υψηλός ώστε να έχουμε καλές ιδιότητες μεγέθους και δύναμης. Εντούτοις, μεταξύ των τριών στατιστικών, το OOS – F έχει την υψηλότερη δύναμη και έτσι είναι προτιμητέο από τα άλλα δύο τεστ.

Στην περίπτωση της recursive μεθόδου, το OOS – F δείχνει ότι το GARCH(1,1) μοντέλο ξεπερνά το ομοσκεδαστικό μοντέλο στις περιπτώσεις του Καναδά, της Ιαπωνίας και της Μ.Βρετανίας. Η μηδενική υπόθεση της ίσης προβλεπτικής ακρίβειας απορρίπτεται σε

³⁸Εξετάσαμε επίσης την ισοτιμία της ιταλικής λιρέτας με το δολάριο των ΗΠΑ. Εντούτοις, αποκλείσαμε την Ιταλία από το πείραμα επειδή οι εκτιμήσεις GARCH αντιστοιχούσαν σε μια εκρηκτική διαδικασία.

επίπεδο 1 τοις εκατό. Ομοίως, οι άλλες δύο στατιστικές, S_1 και $OOS-t$, δείχνουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου είτε σε επίπεδο 5 είτε 10 τοις εκατό. Στην περίπτωση της Γαλλίας και της Γερμανίας, το MSE του ομοσκεδαστικού μοντέλου αποδεικνύεται χαμηλότερο από αυτό του GARCH(1,1) μοντέλου. Κατά συνέπεια, όλα τα τεστ αποτυγχάνουν να απορρίψουν την μηδενική υπόθεση της ίσης προβλεπτικής ακρίβειας, δεδομένου ότι έχουμε μονόπλευρα τεστ. Τα αποτελέσματα για τη rolling μέθοδο είναι παρόμοια. Εντούτοις, στην περίπτωση της Ιαπωνίας η ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου υποστηρίζεται μόνο από το $OOS-F$.

Αντίθετα με τα συμπεράσματα των West και Cho (1985), το πείραμά μας προτείνει ότι το GARCH(1,1) μοντέλο παράγει ακριβέστερες προβλέψεις διακύμανσης από το ομοσκεδαστικό μοντέλο στην περίπτωση του Καναδά, της Ιαπωνίας και της Μ.Βρεταννίας. Είναι επομένως προφανές ότι ο στατιστικός έλεγχος υποστηρίζει την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου σε πολλές περιπτώσεις, δεδομένου ότι (I) η σύγκριση των δύο μοντέλων είναι βασισμένη σε κατάλληλα τεστ για nested μοντέλα και (II) η αξιολόγηση είναι βασισμένη σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου και όχι ακολουθίες προβλέψεων 1- έως P-περιόδων, προκειμένου να αυξηθεί η δύναμη των τεστ. Επιπλέον, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το κριτήριο MSE παραμένει ικανό να αξιολογήσει κατάλληλα τη σχετική προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων.

Τέλος, επαναλαμβάνουμε τη σύγκριση των δύο μοντέλων για την πρόβλεψη της διακύμανσης των ίδιων πέντε συναλλαγματικών ισοτιμιών για μια διαφορετική περίοδο. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε ημερήσια στοιχεία από τις 31 Αυγούστου 1971 έως τις 31 Δεκεμβρίου 1998. Για άλλη μια φορά, η ανάλυση είναι βασισμένη στις πρώτες

διαφορές των σειρών. Έχουμε τώρα 7128 παρατηρήσεις και θέτουμε $\pi = \frac{p}{R}$ ίσο με 0.4. Τα αποτελέσματα για τη recursive μέθοδο, που δίνονται στον πίνακα E20, υποστηρίζουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου σε όλες τις περιπτώσεις εκτός της Γαλλίας. Το προτιμητέο OOS – F τεστ και το OOS – t τεστ (για τον Καναδά, τη Γερμανία και τη Μ.Βρετανία) δείχνουν ότι το GARCH(1,1) μοντέλο ξεπερνά το ομοσκεδαστικό μοντέλο.

6.6 Συμπεράσματα

Διάφορες προηγούμενες εμπειρικές μελέτες συγκρίνουν τις προβλέψεις της δεσμευμένης διακύμανσης του GARCH(1,1) μοντέλου με εκείνες ενός αφελούς μοντέλου που υποθέτει σταθερή δεσμευμένη διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα) και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το GARCH(1,1) μοντέλο δεν ξεπερνά σε προβλεπτική ακρίβεια το αφελές μοντέλο. Οι ερευνητές συγκρίνουν συνήθως τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων με τη βοήθεια ενός επιλεγμένου στατιστικού ελέγχου που είναι βασισμένος στο MSE των προβλέψεων. Σε αυτό το κεφάλαιο ερευνάμε τους λόγους για την κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου που παρατηρείται στις εμπειρικές μελέτες.

Οι Andersen και Bollerslev (1998) και οι Christodoulakis και Satchell (1998) έχουν υποστηρίξει πρόσφατα ότι η κακή προβλεπτική απόδοση των GARCH μοντέλων στις εμπειρικές μελέτες είναι παραπλανητική, ως αποτέλεσμα της χρησιμοποίησης των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη αληθινή

δεσμευμένη διακύμανση. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια αύξηση στο MSE των προβλέψεων (MSE-inflation), παραδίδοντας μια παραπλανητική αξιολόγηση των GARCH μοντέλων. Εντούτοις, σε αυτήν την μελέτη δείχνουμε ότι η κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι αυτής του ομοσκεδαστικού μοντέλου δεν μπορεί να αποδοθεί στη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη αληθινή δεσμευμένη διακύμανση, δεδομένου ότι η χρησιμοποίηση αυτής της προσέγγισης "διογκώνει" εξίσου το MSE των προβλέψεων και των δύο μοντέλων. Εάν υποθέσουμε ετεροσκεδαστικότητα, τότε το MSE των προβλέψεων της διακύμανσης GARCH (1,1) είναι χαμηλότερο από αυτό του αφελούς ομοσκεδαστικού μοντέλου. Επομένως, τα αναλυτικά αποτελέσματά δείχνουν ότι εάν υποθέσουμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα είναι παρούσα στα πραγματικά στοιχεία, τότε η φαινομενικά κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH (1,1) στις εμπειρικές μελέτες μπορεί μόνο να προκύψει από τη χαμηλή δύναμη των στατιστικών τεστ που χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουν τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια του GARCH (1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου.

Στη μελέτη αυτή δείχνουμε ότι η διαφορά μεταξύ του MSE των προβλέψεων των δύο μοντέλων (δηλ. του GARCH (1,1) και του ομοσκεδαστικού μοντέλου) μεγιστοποιείται για προβλέψεις 1-περιόδου, ενώ τα δύο μοντέλα τείνουν να γίνουν ισοδύναμα καθώς ο ορίζοντας πρόβλεψης αυξάνεται. Αυτή η παρατήρηση προτείνει ότι οι ερευνητές πρέπει να βασίσουν το στατιστικό έλεγχο της σχετικής προβλεπτικής ακρίβειας των μοντέλων σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου προκειμένου να αυξηθεί η δύναμη των τεστ. Οι ερευνητές πρέπει επίσης να λάβουν υπόψη τους ότι τα δύο μοντέλα είναι nested και έτσι η σύγκριση της σχετικής προβλεπτικής απόδοσης τους πρέπει να βασιστεί σε τεστ που

είναι κατάλληλα για nested μοντέλα. Διαφορετικά, τα αποτελέσματα των τεστ δεν είναι αξιόπιστα. Τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Monte Carlo που εξετάζει τις ιδιότητες μεγέθους και δύναμης ποικίλων στατιστικών διαδικασιών να επιλέξουν το GARCH(1,1) μοντέλο έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου, δείχνουν ότι τα τεστ που έχουν ως σκοπό τη σύγκριση non-nested μοντέλων πάσχουν από σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους όταν εφαρμόζονται σε nested μοντέλα. Αντίθετα, τα τεστ που είναι κατάλληλα για τη σύγκριση της προβλεπτικής ακρίβειας nested μοντέλων έχουν καλές ιδιότητες μεγέθους και υψηλή δύναμη να δείξουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Επιπλέον, η δύναμη όλων των στατιστικών να υποδειχθεί το σωστό μοντέλο αυξάνεται όταν η αξιολόγηση των μοντέλων βασίζεται σε ακολουθίες προβλέψεων 1-περιόδου (στατική πρόβλεψη), παρά σε ακολουθίες προβλέψεων 1- έως P-περιόδων (δυναμική πρόβλεψη). Τέλος, προτείνουμε την κατάλληλη διαδικασία για τη σύγκριση της σχετικής προβλεπτικής ακρίβειας του GARCH(1,1) μοντέλου και του ομοσκεδαστικού μοντέλου με μια εφαρμογή σε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ. Τα αποτελέσματα δείχνουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου για την πρόβλεψη της δεσμευμένη διακύμανσης σε τρεις από τις πέντε εξεταζόμενες συναλλαγματικές ισοτιμίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τελικές Παρατηρήσεις

Ο κύριος στόχος αυτής της διατριβής ήταν να συγκριθεί η προβλεπτική απόδοση εναλλακτικών μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών μοντέλων χρονοσειρών. Η μελέτη μελετά οικονομετρικά μοντέλα για την πρόβλεψη είτε του δεσμευμένου μέσου, είτε της δεσμευμένης διακύμανσης μιας (βαθμωτής ή διανυσματικής) στοχαστικής διαδικασίας. Δεδομένου ότι η ύπαρξη ή όχι σχέσεων αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των οικονομικών σειρών έχει επιπτώσεις στη συμπεριφορά τους και επομένως επηρεάζει και τη προβλεπτική απόδοση των μοντέλων που περιγράφουν τις σειρές αυτές, αυτή η μελέτη εξέτασε επίσης το ζήτημα της ύπαρξης ή μη σχέσεων αιτιότητας κατά Granger στη πρώτη ή/και δεύτερη ροπή των εξεταζόμενων σειρών.

Αυτή η διατριβή αποτελείται από πέντε δοκίμια. Τα πρώτα δύο δοκίμια (που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 2 και 3) βασίστηκαν στην παραγωγή της "ισοδύναμης" μονομεταβλητής ARMA(2,1) παραμετροποίησης ενός στάσιμου, διμεταβλητού VAR(1) μοντέλου. Στο κεφάλαιο 2 συγκρίναμε τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο εναλλακτικών παραμετροποιήσεων με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) των προβλέψεων του δεσμευμένου μέσου. Σε όλο αυτό το κεφάλαιο ενδιαφερθήκαμε για την πρόβλεψη της πρώτης συνιστώσας μεταβλητής, του VAR μοντέλου. Εξετάσαμε τις περιπτώσεις μοντέλων με γνωστές ή και εκτιμημένες παραμέτρους και στο κεφάλαιο 2 παρατέθηκαν ένα σύνολο από αναλυτικά αλλά και Monte Carlo αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όταν

υποθέσουμε ότι οι παράμετροι των μοντέλων ήταν γνωστές, το VAR μοντέλο παράγει ακριβέστερες προβλέψεις από το ARMA(2,1) μοντέλο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η δεύτερη μεταβλητή του συστήματος, προκαλεί κατά Granger την y_{1t} . Διαφορετικά, εάν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} , οι δύο παραμετροποιήσεις είναι ισοδύναμες από την άποψη του κριτηρίου MSE. Στην περίπτωση των εκτιμημένων παραμέτρων, το VAR(1) μοντέλο παραμένει ασυμπτωτικά βέλτιστο για την πρόβλεψη της y_{1t} εάν (I) η y_{2t} προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} ή (II) η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} αλλά αυτή η πληροφορία είναι διαθέσιμη στη διαδικασία εκτίμησης (restricted estimation). Αντίθετα, εάν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} και αυτή η πληροφορία δεν λαμβάνεται υπόψη στην εκτίμηση, η ασυμπτωτική θεωρία δεν μπορεί να παρέχει ένα σαφές αποτέλεσμα σχετικά με τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια των δύο μοντέλων. Με άλλα λόγια, το ARMA(2,1) μοντέλο μπορεί να παρέχει ακριβέστερες προβλέψεις για τη y_{1t} από το VAR(1) μοντέλο. Εντούτοις, τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Monte Carlo αποκαλύπτουν ότι στα μικρά δείγματα, το VAR(1) μοντέλο ξεπερνά το ARMA(2,1) μοντέλο σε όλες τις περιπτώσεις (ακόμα κι αν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t}), ειδικά για τα πολύ μικρά δείγματα και τις βραχυπρόθεσμες προβλέψεις. Τέλος, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δείχνουν ότι τα κριτήρια επιλογής μοντέλων (AIC, SIC και HQ) είναι γενικά ικανά να δείξουν το βέλτιστο μοντέλο για την πρόβλεψη της μεταβλητής ενδιαφέροντος.

Το δεύτερο δοκίμιο (κεφάλαιο 3) εισήγαγε μια νέα μεθοδολογία που στοχεύει στη μέτρηση της συνεισφοράς μιας μεταβλητής (έστω της y_{2t}) στην εμμονή των διαταραχών στη μεταβλητή ενδιαφέροντος (έστω της y_{1t}). Η μεθοδολογία είναι βασισμένη στη

σύγκριση της συνάρτησης Impulse Response (IRF) ενός VAR μοντέλου με την IRF της "ισοδύναμης" μονομεταβλητής ARMA(2,1) παραμετροποίησης της μεταβλητής ενδιαφέροντος (δηλαδή της y_{1t}). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι γενικά οι δύο IRFs είναι διαφορετικές εκτός αν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger τη y_{1t} . Σε αυτή την περίπτωση, οι δύο IRFs είναι ίσες. Διαφορετικά, η διαφορά μεταξύ της IRF του ARMA(2,1) μοντέλου με την IRF του VAR(1) μοντέλου μετρά τη συνεισφορά της y_{2t} στην εμμονή των διαταραχών επάνω στη y_{1t} . Στο κεφάλαιο 3 παρέχονται επίσης χρήσιμες ανισότητες μεταξύ των δύο IRFs.

Το τρίτο δοκίμιο (κεφάλαιο 4) μελετήθηκε η επίδραση της ύπαρξης αιτιότητας στο μέσο στον έλεγχο για αιτιότητα στη διακύμανση. Η ανάλυση βασίστηκε στα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Monte Carlo. Εν περιλήψει, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι δοκιμές για την ύπαρξη αιτιότητας στη διακύμανση πάσχουν από σημαντικές διαστρεβλώσεις μεγέθους όταν αγνοείται η ύπαρξη ισχυρής αιτιότητας κατά Granger στο μέσο. Επομένως, ο κάθε ερευνητής πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός στο να φιλτράρει σωστά την οποιαδήποτε εξάρτηση στο δεσμευμένο μέσο των εξεταζόμενων σειρών με τη βοήθεια ενός κατάλληλου παραμετρικού μοντέλου, προτού να μελετήσει την ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger δεύτερης τάξης.

Στα πρώτα τρία δοκίμια υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει καμία μοναδιαία ρίζα στον δεσμευμένο μέσο της υπό εξέταση διαδικασίας. Εντούτοις, στο τέταρτο δοκίμιο αυτής της διατριβής (κεφάλαιο 5) επιτρέψαμε την ύπαρξη μοναδιαίων ριζών (ή ριζών κοντά στη μονάδα) στον δεσμευμένο μέσο της εξεταζόμενης ανέλιξης. Πιο συγκεκριμένα, στο τέταρτο δοκίμιο εξετάστηκε η επίδραση της επιβολής άκρων περιορισμών

συνολοκλήρωσης ή της αγνόησης έγκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης στις εκτιμήσεις, στατιστικούς ελέγχους και προβλέψεις του VAR(1) μοντέλου.

Εξετάσαμε τόσο τη περίπτωση στάσιμων VAR μοντέλων με ρίζες κοντά στη μονάδα, όσο και συνολοκληρώσιμων VAR μοντέλων. Στην πρώτη περίπτωση, ορίσαμε το «κόστος πρόβλεψης τύπου I» (FC1), που προκύπτει από την επιβολή άκυρων περιορισμών συνολοκλήρωσης σε ένα στάσιμο VAR μοντέλο. Στη δεύτερη περίπτωση, ορίσαμε σαν «κόστος πρόβλεψης τύπου II» (FC2), το κόστος που προκύπτει σε όρους μείωσης της προβλεπτικής ακρίβειας του VAR από την αγνόηση αληθινών σχέσεων συνολοκλήρωσης. Με τη βοήθεια προσομοιώσεων Monte Carlo, μετρήσαμε και τους δύο τύπους κόστους πρόβλεψης σε πραγματικές καταστάσεις, όπου ο ερευνητής οδηγείται (ή παραπλανιέται) από τα συνηθισμένα τεστ στασιμότητας στην επιλογή του οικονομετρικού μοντέλου. Εξετάσαμε VAR(1) μοντέλα με *iid* γκαουσιανά ή GARCH σφάλματα. Εξετάσαμε επίσης την περίπτωση *iid* σφαλμάτων που ακολουθούν $t(2)$ κατανομή, προκειμένου να διακρίνουμε μεταξύ των επιδράσεων στη προβλεπτική συμπεριφορά του VAR της μη γραμμικής εξάρτησης και εκείνης των λεπτόκυρτων σφαλμάτων. Τα αποτελέσματα αποκάλυψαν ότι το FC1 είναι πολύ υψηλότερο από το FC2. Εντούτοις, η παρουσία ετεροσκεδαστικότητας αυξάνει και τους δύο τύπους κόστους πρόβλεψης. Τέλος, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα τεστ συνολοκλήρωσης έχουν, γενικά, χαμηλή δύναμη να απορρίψουν την άκυρη υπόθεση μιας μοναδιαίας ρίζας για εναλλακτικές υποθέσεις που βρίσκονται κοντά στη μονάδα.

Το τελευταίο δοκίμιο (κεφάλαιο 6) στρέφεται στην παραγωγή προβλέψεων για την δεσμευμένη διακύμανση μιας μεταβλητής. Αυτό το δοκίμιο προσπάθησε να εξηγήσει τη κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου που αναφέρεται σε πολλές

εμπειρικές μελέτες. Πιο συγκεκριμένα, διάφορες προηγούμενες εφαρμοσμένες μελέτες συγκρίνουν τις προβλέψεις διακύμανσης του GARCH(1,1) μοντέλου με εκείνους ενός μοντέλου που υποθέτει σταθερή δεσμευμένη διακύμανση (ομοσκεδαστικότητα) και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το GARCH(1,1) μοντέλο δεν παρέχει ακριβέστερες προβλέψεις από το ομοσκεδαστικό μοντέλο. Σε αυτές τις μελέτες η ανάλυση είναι συνήθως βασισμένη σε ένα επιλεγμένο στατιστικό τεστ που συγκρίνει το MSE των προβλέψεων των δύο μοντέλων. Μερικές πρόσφατες θεωρητικές μελέτες υποστηρίζουν ότι η κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου στις εμπειρικές μελέτες οφείλεται στη χρησιμοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων ως προσέγγιση για την μη-παρατηρήσιμη αληθινή δεσμευμένη διακύμανση, καθιστώντας άκυρο το κριτήριο MSE για την αξιολόγηση του GARCH(1,1) μοντέλου. Εντούτοις, τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6 αυτής της διατριβής αποδεικνύουν ότι η χρησιμοποίηση αυτής της προσέγγισης "διογκώνει" εξίσου το MSE των προβλέψεων και των δύο μοντέλων και έτσι το κριτήριο MSE μπορεί να αξιολογήσει κατάλληλα τη σχετική προβλεπτική απόδοση των δύο μοντέλων. Επομένως, τα αναλυτικά αποτελέσματά μας προτείνουν ότι εάν υποθέτουμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα είναι παρούσα στα πραγματικά στοιχεία, τότε η φαινομενικά κακή προβλεπτική απόδοση του GARCH(1,1) μοντέλου στις εμπειρικές μελέτες μπορεί μόνο να προκύψει από τη χαμηλή δύναμη των στατιστικών τεστ που χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουν τη σχετική προβλεπτική ακρίβεια του GARCH(1,1) και του ομοσκεδαστικού μοντέλου. Παρέχονται χρήσιμες προτάσεις για την σωστή στατιστική αξιολόγηση των προβλέψεων διακύμανσης του GARCH (1,1) μοντέλου, μαζί με μια εμπειρική εφαρμογή βασισμένη σε πέντε διμερείς συναλλαγματικές ισοτιμίες για το δολάριο των ΗΠΑ. Τα

αποτελέσματα της εμπειρικής εφαρμογής δείχνουν την ανωτερότητα του GARCH(1,1) μοντέλου έναντι του ομοσκεδαστικού μοντέλου για την πρόβλεψη της δεσμευμένη διακύμανσης σε τρεις από τις πέντε εξεταζόμενες συναλλαγματικές ισοτιμίες.

Μερικά τελικά σχόλια. Κατ' αρχάς, πρέπει να σημειώσουμε ότι όλα τα αποτελέσματα που είναι βασισμένα στις προσομοιώσεις Monte Carlo εξαρτώνται από το μοντέλο «γέννησης» των ανεπίξεων. Εντούτοις, αυτά τα αποτελέσματα προσομοίωσης παρέχουν μερικές χρήσιμες ενδείξεις για τη συμπεριφορά σε πεπερασμένα δείγματα των εκτιμητών ή των στατιστικών ελέγχων. Δεύτερον, μερικοί μπορεί να υποστηρίξουν ότι τα μοντέλα ARMA, VAR και GARCH που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την διατριβή είναι πάρα πολύ απλά για να παρέχουν μια επαρκή περιγραφή της αληθινής στοχαστικής διαδικασίας. Παρόλα αυτά, αυτά τα μοντέλα είναι πολύ δημοφιλή στις εμπειρικές μελέτες και επομένως η εξέταση της προβλεπτικής απόδοσης τους είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Τέλος, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός άρθρων και βιβλίων στη βιβλιογραφία που ερευνούν την παρουσία διαταραχών (structural breaks ή regime shifts) στην διαδικασία «γέννησης» των οικονομικών σειρών και την επίδραση αυτών των διαταραχών στη συμπεριφορά των οικονομετρικών μοντέλων. Αν και ενδιαφέρον, αυτό το ζήτημα είναι σαφώς πέρα από το πεδίο αυτής της διατριβής.

Βιβλιογραφία

1. Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, 667-673.
2. Andersen, T.G. and T. Bollerslev (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review* 39, 885-905.
3. Ashley, R., C.W.J. Granger and R.Schmalensee (1980). Advertising and Aggregate Consumption: An Analysis of Causality. *Econometrica* 48, 1149-1167.
4. Baillie, R.T and T. Bollerslev (1992). Prediction in Dynamic Models with Time Dependent Conditional Variances. *Journal of Econometrics*, Vol.52, No.1, pp.91-113; Reprinted in *The International Library of Critical Writings in Economics: Economic Forecasting* (ed. Terence C. Mills), London: Edward Elgar Publishing Limited, (1998).
5. Bhansali, R.J. (1981). Effects of Not Knowing the Order of an Autoregressive Process on the Mean Squared Error of Prediction-I. *Journal of the American Statistical Association* 76, 588-597.
6. Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327; Reprinted in *The International Library of Critical Writings in Econometrics: Time Series* (ed. Andrew Harvey), London: Edward Elgar Publishing Limited, (1994); Reprinted in *ARCH: Selected Readings* (ed. Robert F. Engle), Oxford: Oxford University Press, (1995); Reprinted in *Foundations of Probability, Econometrics and Economic Games* (eds. O.F. Hamouda and J.C.R. Rowley), London: Edward Elgar Publishing Limited, (1996); Reprinted in

- Journal of Econometrics, 100th Anniversary Commemorative Issue, Vol.100, No.1, (2001).*
7. Campos, J., N.R. Ericsson and D.F. Hendry (1996). Cointegration Tests in the Presence of Structural Breaks. *Journal of Econometrics* 70, 187-220.
 8. Carrasco, M. and X. Chen (2002). Mixing and Moment Properties of Various GARCH and Stochastic Volatility Models. *Econometric Theory* 18, 17-39.
 9. Cheung, Y.M. and L.K. Ng (1996). A Causality-in-Variance Test and Its Application to Financial Market Prices. *Journal of Econometrics* 72, 33-48.
 10. Christodoulakis, G.A. and S.E. Satchell (1998). Forecasting (Log) Volatility Models. *University of Exeter, School of Business and Economics, Discussion Paper 98/14.*
 11. Christodoulakis, G.A. and S.E. Satchell (2003). Forecast Evaluation in the Presence of Unobserved Volatility. *City University, Cass Business School, Working Paper.*
 12. Christoffersen, P. and F.X. Diebold (1998). Cointegration and Long-Horizon Forecasting. *Journal of Business and Economic Statistics* 16, 450-458.
 13. Clark, T.E. and M.W. McCracken (2001). Tests of Equal Forecast Accuracy and Encompassing for Nested Models. *Journal of Econometrics* 105, 85-110.
 14. Clements, M.P. and D.F. Hendry (1993). On the Limitations of Comparing Mean Forecast Errors. *Journal of Forecasting* 12, 617-676.
 15. Clements, M.P. and D.F. Hendry (1995). Forecasting in Cointegrated Systems. *Journal of Applied Econometrics* 10, 127-146.
 16. Clements, M.P. and D.F. Hendry (1999a). *Forecasting Non-stationary Economic Time Series*. Cambridge, Mass.:MIT Press.
 17. Clements, M.P. and D.F. Hendry (1999b). On Winning Forecasting Competitions in

- Economics. *Spanish Economic Review* 1, 123-160.
18. Davidson, J. (2001). Establishing Conditions for the Functional Central Limit Theorem in Nonlinear and Semiparametric Time Series Processes. *Journal of Econometrics* 106, 243-269.
 19. Diebold, F.X. and R.S. Mariano (1995). Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics* 13, 253-265; Reprinted in *Economic Forecasting* (T.C. Mills, ed.), part of the International Library of Critical Writings in Economics (M. Blaug, series ed.), Edward Elgar Publishing, (1998); Reprinted in E. Ghysels and A. Hall (eds.), *Special Twentieth Anniversary Commemorative Issue of Journal of Business and Economic Statistics* 20, 134-144, (2002), containing the ten most influential papers published in the journal's first twenty years.
 20. Elliot, G. (1998). The Robustness of Efficient Cointegration Estimators when Regressors Almost Have Unit Roots. *Econometrica* 66, 149-158.
 21. Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 987-1007.
 22. Engle, R.F. and K.F. Kroner (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122-150.
 23. Engle, R.F. and S. Yoo (1987). Forecasting and Testing in Cointegrated Systems. *Journal of Econometrics* 35, 143-159.
 24. Franses, P.H. and D. van Dijk (2000). *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
 25. Granger, C.W.J. and P. Newbold (1977). *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press.

26. Gonzalo, J. and J.-Y. Pitarakis (1999). Dimensionality Effect in Cointegration Analysis. In R.F. Engle and H. White (Eds.), *Cointegration, Causality and Forecasting: A Festschrift in Honour of Clive W.J. Granger*. Oxford: Oxford University Press, 212-229.
27. Hafner, C.M. (2003). Fourth Moment Structure of Multivariate GARCH Models. *Journal of Financial Econometrics* 1, 26-54.
28. Hannan, E.J. and B.G. Quinn (1979). The Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 41, No2 190-195.
29. Hansen, B.E. (1991). Strong Laws for Dependent Heterogeneous Processes. *Econometric Theory* 7, 213-221.
30. He, C. and T. Terasvirta (1999). Fourth Moment Structure of the GARCH(p,q) Process. *Econometric Theory* 15, 824-846.
31. Hendry, D.F. and J.A. Doornik (1997). The Implications for Econometric Modeling of Forecast Failure. *Scottish Journal of Political Economy* 44, 437-461. Special Issue.
32. Hendry, D.F. and G.E. Mizon (2004). Forecasting in the Presence of Structural Breaks and Policy Regime Shifts. In *Identification and Inference in Econometric Models: Festschrift in Honor of T.J. Rothenberg*, edited by D.W. Andrews, J.L. Powell, P.A. Ruud and J. Stock, Cambridge University Press, Forthcoming.
33. Hong, Y., (2001). A Test for Volatility Spillover with Application to Exchange Rates. *Journal of Econometrics* 103, 183-224.
34. Hubrich, K., H. Lütkepohl and P. Saikkonen (2001). A Review of Systems Cointegration Tests. *Econometric Reviews*, 20, 247-318.
35. Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of*

- Economic Dynamics and Control* 12, 231-254.
36. Johansen, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Model. *Econometrica* 59, 1551-1580.
 37. Johansen, S. (2002). A Small Sample Correction for the Test of Cointegrating Rank in the Vector Autoregressive Model, *Econometrica* Vol. 70, No 5, 1929-1961.
 38. Johansen, S. and B. Nielsen (1993). Manual for the Simulation Program DisCo. *Institute of Mathematical Statistics*, University of Copenhagen.
 39. Kim, K. and P. Schmidt (1993). Unit Root Tests with Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 59, 287-300.
 40. Kunitomo, N. and T. Yamamoto (1985). Properties of Predictors in Misspecified Autoregressive Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association* 80, 941-950.
 41. Lehmann, E. L. (1975). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. San Francisco: Holden-Day, Inc.
 42. Lin, J.L. and R. Tsay (1996). Co-integration Constraint and Forecasting: Empirical Examination. *Journal of Applied Econometrics* 11, 519-538.
 43. Lopez, J.A. (2001). Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models. *Journal of Forecasting* 20, 87-109.
 44. Lütkepohl, H. (1984). Linear Transformations of Vector ARMA Processes. *Journal of Econometrics* 26, 283-293.
 45. Lütkepohl, H. (1987). *Forecasting Aggregated Vector ARMA Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
 46. Lütkepohl, H. (1993). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Second Edition,

Berlin : Springer-Verlag.

47. Lütkepohl, H. and P. Saikkonen (1999). Order Selection in Testing for the Cointegrating Rank of a VAR Process. In R.F. Engle and H. White (Eds.), *Cointegration, Causality and Forecasting: A Festschrift in Honour of Clive W.J. Granger*. Oxford: Oxford University Press, 168-199.
48. McCracken, M.W. (2004). Asymptotics for Out-of-Sample Tests of Granger Causality. Department of Economics, University of Missouri-Columbia, Working Paper.
49. Nelson, D.B. (1990). Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory* 6, 318-334.
50. Ng, S. and P. Perron (2001). A Note on the Selection of Time Series Models. *Boston College Working Papers in Economics*, Boston College, Department of Economics.
51. Park, J.Y. and P.C.B. Phillips (1988). Statistical Inference in Regressions with Integrated Processes: Part I. *Econometric Theory* 4, 468-497.
52. Phillips, P.C.B. (1991). Optimal Inference in Cointegrated Systems. *Econometrica* 59, 283-306.
53. Phillips, P.C.B. (1995). Robust Nonstationary Regression. *Econometric Theory* 12, 912-951.
54. Phillips, P.C.B. (1998). Impulse Response and Forecast Error Variance Asymptotics in Nonstationary VAR's. *Journal of Econometrics* 83, 21-56.
55. Quinn, B.G. (1980). Order Determination for a Multivariate Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 42, 182-185.
56. Reimers, H. (1992). Comparisons of Tests for Multivariate Cointegration. *Statistical*

- Papers* 33, 335-359.
57. Reinsel, G. and S. Ahn (1992). Vector AR Models with Unit Roots and Reduced Rank Structure: Estimation, Likelihood Ratio Test and Forecasting. *Journal of Time Series Analysis* 13, 353-375.
58. Saikkonen, P. and R. Luukkonen (1997). Testing Cointegration in Infinite Order Vector Autoregressive Processes. *Journal of Econometrics* 81, 93-129.
59. Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics* 6, 461-464.
60. Sheskin, D. J. (2000). *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. Chapman and Hall, Boca Raton, Florida, USA.
61. Sims, C.A., J.H. Stock and M.W. Watson (1990). Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots. *Econometrica* 58, 113-144.
62. Stock, J.H. (1995). Units Roots, Structural Breaks and Trends. In R. Engle and D. McFadden(eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Amsterdam: North Holland.
63. West, K.D. and D. Cho (1995). The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility. *Journal of Econometrics* 69, 367-391; Reprinted in 505-529 in Volume 2 of *Economic Forecasting*, T. Mills (ed.), Cheltenham: Edward Elgar Publishing Ltd.
64. West, K.D., H.J. Edison and D. Cho (1993). A Utility Based Comparison of Some Models of Exchange Rate Volatility. *Journal of International Economics* 35, 23-45.
65. Yap, S. and G. Reinsel (1995). Estimating and Testing for Unit Roots in a Partially Nonstationary Vector Autoregressive Moving Average Model. *Journal of the American Statistical Association* 90, 253-267.

Α. Παράρτημα Κεφαλαίου 2

A.1 Συνθήκες Στασιμότητας του VAR(1) Μοντέλου

Έστω ότι η $Y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ δίνεται από το VAR(1) μοντέλο της σχέσης (2.1). Το μοντέλο είναι στάσιμο αν και οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδος. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\det(zI_2 - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} z - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & z - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z - a_{11})(z - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

Συνθήκη: Το VAR(1) μοντέλο που δίνεται από την (2.1) είναι στάσιμο εάν οι ιδιοτιμές

$$z_{1,2} = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \text{ έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδος.}$$

Περίπτωση: $a_{12} = 0$ και / ή $a_{21} = 0$

Σε αυτή τη περίπτωση, οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$z_1 = a_{11} \text{ και } z_2 = a_{22}$$

Επομένως, το VAR(1) μοντέλο είναι στάσιμο αν $|a_{11}| < 1$ και $|a_{22}| < 1$.

A.2 Υπολογισμός της ARMA(2,1) Παραμετροποίησης της y_{1t}

Κάνουμε χρήση του τελεστή υστέρησης (lag operator), η (2.1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$A(L)Y_t = U_t \quad (A.1)$$

όπου $A(L) = I_2 - AL = \begin{bmatrix} 1 - a_{11}L & -a_{12}L \\ -a_{21}L & 1 - a_{22}L \end{bmatrix}$. Έστω $A^*(L)$ ο adjoint πίνακας του $A(L)$,

δηλαδή $A^*(L) = \begin{bmatrix} 1 - a_{22}L & a_{12}L \\ a_{21}L & 1 - a_{11}L \end{bmatrix}$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (A.1) με

τον $A^*(L)$ παίρνουμε ότι

$$|A(L)|Y_t = A^*(L)U_t \quad (A.2)$$

όπου η σχέση $A^*(L)A(L) = |A(L)|$ χρησιμοποιήθηκε.

Το $|A(L)|$ είναι ένα πολυώνυμο (lag polynomial) δευτέρου βαθμού. Οπότε, το αριστερό μέρος της εξίσωσης (A.2) γράφεται:

$$|A(L)|Y_t = W_t = Y_t - (a_{11} + a_{22})Y_{t-1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})Y_{t-2}$$

όπου $W_t = (w_{1t}, w_{2t})$.

Από την εξίσωση (A.2), βλέπουμε ότι $W_t = A^*(L)U_t$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} w_{1t} &= u_{1t} - a_{22}u_{1t-1} + a_{12}u_{2t-1} \\ w_{2t} &= u_{2t} - a_{11}u_{2t-1} + a_{21}u_{1t-1} \end{aligned}$$

Άρα, η w_{it} είναι το άθροισμα μιας διαδικασίας κινούμενου μέσου πρώτου βαθμού (MA(1) process) και μιας διαδικασίας λευκού θορύβου (white noise process). Επομένως, η w_{it} έχει μια MA(1) παραμετροποίηση, έστω $w_{it} = e_{it} + \gamma_i e_{it-1}$. Πρέπει να καθορίσουμε τις παραμέτρους γ_i και $\sigma_i^2 = \text{Var}(e_{it})$.

Κάνουμε χρήση των:

$$E(w_{1t}^2) = E[(e_{1t} + \gamma_1 e_{1t-1})^2] = E[e_{1t}^2] + 2\gamma_1 E[e_{1t}e_{1t-1}] + \gamma_1^2 E[(e_{1t-1})^2] = (1 + \gamma_1^2)\sigma_1^2$$

$$E(w_{1t}^2) = E[(u_{1t} - a_{22}u_{1t-1} + a_{12}u_{2t-1})^2] = (1 + a_{22}^2)\sigma_{11} - 2a_{12}a_{22}\sigma_{12} + a_{12}^2\sigma_{22} = \Psi_1$$

και

$$E(w_{1t}w_{1t-1}) = E[(e_{1t} + \gamma_1 e_{1t-1})(e_{1t-1} + \gamma_1 e_{1t-2})] = \gamma_1 \sigma_1^2$$

$$E(w_{1t}w_{1t-1}) = E[(u_{1t} - a_{22}u_{1t-1} + a_{12}u_{2t-1})(u_{1t-1} - a_{22}u_{1t-2} + a_{12}u_{2t-2})] =$$

$$= -a_{22}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{12} = \Theta_1$$

Με άλλα λόγια, έχουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$(1 + \gamma_1^2)\sigma_1^2 = \Psi_1$$

$$\gamma_1 \sigma_1^2 = \Theta_1$$

Λύνοντας αυτό το μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων ως προς γ_1 και σ_1^2 παίρνουμε:

$$\gamma_1 = \frac{\Psi_1 \pm \sqrt{\Psi_1^2 - 4\Theta_1^2}}{2\Theta_1} \text{ and } \sigma_1^2 = \frac{2\Theta_1^2}{\Psi_1 \pm \sqrt{\Psi_1^2 - 4\Theta_1^2}}$$

Μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις, οδηγούμαστε στην ακόλουθη λύση για την γ_1 :

$$\gamma_1 = \frac{S \pm \sqrt{Q + R}}{F}$$

$$\text{όπου } S = (1 + a_{22}^2)\sigma_{11} - 2a_{12}a_{22}\sigma_{12} + a_{12}^2\sigma_{22}$$

$$Q = (1 + a_{22}^4 - 2a_{22}^2)\sigma_{11}^2 + a_{12}^4\sigma_{22}^2 + (4a_{12}^2a_{22}^2 - 4a_{12}^2)\sigma_{12}^2 - 4(a_{12}a_{22}^3 - a_{22}a_{12})\sigma_{11}\sigma_{12}$$

$$R = (2a_{12}^2 + 2a_{22}^2a_{12}^2)\sigma_{11}\sigma_{22} - 4a_{12}^3a_{22}\sigma_{12}\sigma_{22}$$

$$F = 2(a_{12}\sigma_{12} - a_{22}\sigma_{11})$$

Σημειώστε ότι επιλέγουμε την αντιστρέψιμη (invertible) λύση για την γ_1 . Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουμε τη λύση της γ_1 που πληρεί την ανισότητα $|\gamma_1| < 1$.

Έχουμε επίσης ότι $\sigma_1^2 = \frac{G_1}{\gamma_1}$ όπου $G_1 = a_{12}\sigma_{12} - a_{22}\sigma_{11}$. Επομένως, η ARMA(2,1) παραμετροποίηση της y_{1t} είναι:

$$y_{1t} - (a_{11} + a_{22})y_{1t-1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y_{1t-2} = e_{1t} + \gamma_1 e_{1t-1} \text{ όπου } \text{Var}(e_{1t}) = \sigma_1^2$$

A.3 Υπολογισμός της ARMA(2,1) Παραμετροποίησης της y_{2t}

Παρόμοια με την περίπτωση της y_{1t} , μπορούμε να υπολογίσουμε την ARMA παραμετροποίηση της y_{2t} . χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} E(w_{2t}^2) &= E[(e_{2t} + \gamma_2 e_{2t-1})^2] = E[e_{2t}^2] + 2\gamma_2 E[e_{2t}e_{2t-1}] + \gamma_2^2 E[(e_{2t-1})^2] = (1 + \gamma_2^2)\sigma_2^2 \\ E(w_{2t}^2) &= E[(u_{2t} - a_{11}u_{2t-1} + a_{21}u_{1t-1})^2] = (1 + a_{11}^2)\sigma_{22} - 2a_{11}a_{21}\sigma_{12} + a_{21}^2\sigma_{11} = \Psi_2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E(w_{2t}w_{2t-1}) &= E[(e_{2t} + \gamma_2 e_{2t-1})(e_{2t-1} + \gamma_2 e_{2t-2})] = \gamma_2 \sigma_2^2 \\ E(w_{1t}w_{1t-1}) &= E[(u_{2t} - a_{11}u_{2t-1} + a_{21}u_{1t-1})(u_{2t-1} - a_{11}u_{2t-2} + a_{21}u_{1t-2})] = \\ &= -a_{11}\sigma_{22} + a_{21}\sigma_{12} = \Theta_2 \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_2^2)\sigma_2^2 &= \Psi_2 \\ \gamma_2 \sigma_2^2 &= \Theta_2 \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτό το μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων ως προς γ_2 και σ_2^2 έχουμε:

$$\gamma_2 = \frac{\Psi_2 \pm \sqrt{\Psi_2^2 - 4\Theta_2^2}}{2\Theta_2} \text{ και } \sigma_2^2 = \frac{2\Theta_2^2}{\Psi_2 \pm \sqrt{\Psi_2^2 - 4\Theta_2^2}}$$

Μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις, οδηγούμαστε στην ακόλουθη λύση για την γ_2 :

$$\gamma_2 = \frac{Z \pm \sqrt{V + B}}{N}$$

$$\text{όπου } Z = (1 + a_{11}^2)\sigma_{22} - 2a_{11}a_{21}\sigma_{12} + a_{21}^2\sigma_{11}$$

$$V = (1 + a_{11}^4 - 2a_{11}^2)\sigma_{22}^2 + a_{21}^4\sigma_{11}^2 + 4(a_{11}^2a_{21}^2 - a_{21}^2)\sigma_{12}^2 + 4(-a_{11}^3a_{21} + a_{11}a_{21})\sigma_{22}\sigma_{12}$$

$$B = 2(a_{21}^2 + a_{11}^2a_{21}^2)\sigma_{11}\sigma_{22} - 4a_{21}^3a_{11}\sigma_{12}\sigma_{11}$$

$$N = 2(a_{21}\sigma_{12} - a_{11}\sigma_{22})$$

Παρόμοια με την περίπτωση της γ_1 , επιλέγουμε την αντιστρέψιμη λύση της γ_2 . Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουμε τη λύση της γ_2 που πληρεί την ανισότητα $|\gamma_2| < 1$.

Έχουμε επίσης ότι $\sigma_2^2 = \frac{G_2}{\gamma_2}$ όπου $G_2 = a_{21}\sigma_{12} - a_{11}\sigma_{22}$. Άρα, η ARMA παραμετροποίηση της y_{2t} είναι:

$$y_{2t} - (a_{11} + a_{22})y_{2t-1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y_{2t-2} = e_{2t} + \gamma_2 e_{2t-1} \quad \text{όπου } \text{Var}(e_{2t}) = \sigma_2^2$$

A.4 Ισοδυναμία των (2.3) και (2.4) όταν $a_{12} = 0$

Όταν $a_{12} = 0$, η ARMA παραμετροποίηση της y_{1t} δίνεται από την (2.3). Θέτοντας

$$A_1 = a_{11} + a_{22}, \quad A_2 = -a_{11}a_{22} \quad \text{και} \quad \gamma_1 = -a_{22},$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την απείρου βαθμού MA παραμετροποίηση του ARMA μοντέλου ($y_{1t} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e_{1t-i}$) χρησιμοποιώντας

την φόρμουλα $\Phi_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^i A_j \Phi_{i-j}$ για $i = 1, 2, \dots$, όπου $\Phi_0 := 1, A_j := 0$ για $j > 2$ και

$\gamma_i := 0$ για $i > 1$. Ξέρουμε επίσης ότι $\Phi_i = a_{11}^i$ για κάθε ακέραιο $i > 0$ (βλέπε την απόδειξη της Πρότασης 2.3 στο Παράρτημα A.5).

Από την άλλη μεριά, όταν $a_{12} = 0$, το VAR(1) μοντέλο παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= a_{11}y_{1t-1} + u_{1t} \\ y_{2t} &= a_{21}y_{1t-1} + a_{22}y_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο ερώτημα: Γιατί η μονομεταβλητή παραμετροποίηση της y_{1t} δίνεται από το ARMA(2,1) μοντέλο της (2.3) και όχι από το ακόλουθο AR(1) μοντέλο: $y_{1t} = a_{11}y_{1t-1} + u_{1t}$ όπου $\text{Var}(u_{1t}) = \sigma_{11}$; Θα αποδείξουμε ότι οι δύο παραμετροποιήσεις είναι ισοδύναμες.

Η απείρου βαθμού MA παραμετροποίηση του παραπάνω AR(1) μοντέλου είναι

$$y_{1t} = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i u_{t-i} \quad \text{Είναι εύκολο να δει κανείς ότι } \Theta_i = a_{11}^i \text{ για κάθε ακέραιο } i > 0.$$

Επομένως, τα δύο μοντέλα (ARMA(2,1) και AR(1)) έχουν την ίδια απείρου βαθμού MA παραμετροποίηση. Άρα, είναι ισοδύναμα. Είναι δύο φαινομενικά διαφορετικές αλλά οικονομικά ισοδύναμες παραμετροποιήσεις της ίδιας στοχαστικής διαδικασίας.

Υπάρχει και ένας διαφορετικός τρόπος για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Το ARMA(2,1) μοντέλο της (2.3) μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του τελεστή υστέρησης ως εξής:

$$A(L)y_{1t} = B(L)e_{1t}$$

$$\text{όπου } A(L) = 1 - (a_{11} + a_{22})L + a_{11}a_{22}L^2 \text{ και } B(L) = 1 - a_{22}L.$$

$$\text{Τότε, } A(L) = 1 - a_{11}L - a_{22}L + a_{11}a_{22}L^2 = -a_{11}L(1 - a_{22}L) + (1 - a_{22}L) = (1 - a_{22}L)(1 - a_{11}L).$$

Επομένως, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον όρο $(1 - a_{22}L)$ από το $A(L)$ και το $B(L)$.

Με αυτό τον τρόπο, η (2.3) γίνεται το ακόλουθο AR(1) μοντέλο:

$$y_{1t} = a_{11}y_{1t-1} + e_{1t}$$

A.5 Απόδειξη της Πρότασης 2.3

Αρχικά, αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα :

Λήμμα(3): Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε ακέραιο $d > 0$:

$$1) \text{ Αν } a_{12} = 0, A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ q_1 & a_{22}^d \end{bmatrix} \text{ όπου } q_1 \text{ είναι μια συνάρτηση των } a_{ij}$$

$$2) \text{ Αν } a_{21} = 0, A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & q_2 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix} \text{ όπου } q_2 \text{ είναι μια συνάρτηση των } a_{ij}$$

$$3) \text{ Αν } a_{12} = a_{21} = 0, A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη: 1) Για $d = 1$, $A^d = A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ που είναι της μορφής $\begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ q_1 & a_{22}^d \end{bmatrix}$ για

$$q_1 = a_{21}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ q_1 & a_{22}^d \end{bmatrix}$ όπου q_1 είναι μια συνάρτηση των a_{ij} . Πρέπει να

$$\text{δείξουμε ότι } A^{d+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & 0 \\ q_1' & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}.$$

$$A^{d+1} = A^d A = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ q_1 & a_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & 0 \\ a_{11}q_1 + a_{21}a_{22}^d & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix} \text{ που είναι της μορφής}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & 0 \\ q_1' & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}.$$

2) Για $d=1$, $A^d = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, που είναι της μορφής $\begin{bmatrix} a_{11}^d & q_2 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix}$ για $q_2 = a_{12}$.

Ας υποθέσουμε ότι $A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & q_2 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix}$ όπου q_2 είναι μια συνάρτηση των a_{ij} . Πρέπει να

δείξουμε ότι $A^{d+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & q_2' \\ 0 & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}$.

$$A^{d+1} = A^d A = \begin{bmatrix} a_{11}^d & q_2 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & a_{12}a_{11}^d + a_{22}q_2 \\ 0 & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}, \text{ που είναι της μορφής}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & q_2' \\ 0 & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}.$$

3) Για $d=1$, $A^d = A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, που είναι της μορφής $\begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix}$.

Ας υποθέσουμε ότι $A^d = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $A^{d+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & 0 \\ 0 & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}$.

$$A^{d+1} = A^d A = \begin{bmatrix} a_{11}^d & 0 \\ 0 & a_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d+1} & 0 \\ 0 & a_{22}^{d+1} \end{bmatrix}.$$

Τώρα προχωράμε στην απόδειξη της Πρότασης (2.3). Όταν $a_{12} = 0$, η ARMA παραμετροποίηση της y_{1t} δίνεται από την (2.3). Τότε, η πρόβλεψη μιας περιόδου μπροστά (1-step ahead forecast) και το αντίστοιχο MSE της πρόβλεψης είναι:

$$y_{1t}(1)_{ARMA} = (a_{11} + a_{22})y_{1t} - a_{11}a_{22}y_{1t-1} - a_{22}e_{1t}$$

$$\Sigma_{y_1}(1)_{ARMA} = \text{MSE}[y_{1t}(1)]_{ARMA} = \sigma_1^2 = \sigma_{11}$$

Για το VAR(1) μοντέλο, η πρόβλεψη μιας περιόδου μπροστά και το αντίστοιχο MSE της πρόβλεψης είναι:

$$y_{1t}(1) = a_{11}y_{1t}$$

$$\Sigma_{y_1}(1) = \text{MSE}[y_{1t}(1)] = \sigma_{11}$$

Βλέπουμε ότι οι δύο προβλέψεις είναι ισοδύναμες σε ότι αφορά το κριτήριο MSE.

Το ίδιο ισχύει και για τις προβλέψεις 2-περιόδων μπροστά. Για το ARMA(2,1) μοντέλο έχουμε:

$$y_{1t}(2)_{ARMA} = (a_{11}^2 + a_{11}a_{22} + a_{22}^2)y_{1t} - (a_{11}^2a_{22} + a_{11}a_{22}^2)y_{1t-1} - (a_{22}^2 + a_{11}a_{22})e_{1t}$$

$$\Sigma_{y_1}(2)_{ARMA} = \text{MSE}[y_{1t}(2)]_{ARMA} = \sigma_{11} + a_{11}^2\sigma_{11}$$

Αντίστοιχα, για το VAR(1) μοντέλο έχουμε:

$$y_{1t}(2) = a_{11}^2y_{1t}$$

$$\Sigma_{y_1}(2) = \text{MSE}[y_{1t}(2)] = \sigma_{11} + a_{11}^2\sigma_{11}$$

Άρα η πρόταση ισχύει για $h=1$ και $h=2$. Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για $h=d-1$ (για κάποιο ακέραιο $d > 2$). Αυτό σημαίνει ότι: $\Sigma_{y_1}(d-1) = \Sigma_{y_1}(d-1)_{ARMA}$. Αν δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και για $h=d$, τότε η πρόταση θα έχει αποδειχθεί για κάθε ακέραιο h .

Από το λήμμα (3) παραπάνω, έχουμε ότι όταν $a_{12} = 0$, $A^{d-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d-1} & 0 \\ x & a_{22}^{d-1} \end{bmatrix}$ όπου x είναι

μια συνάρτηση των a_{11}, a_{21} και a_{22} .

Τότε η εξίσωση (2.5) δίνει: $\Sigma_{y_i}(d) = \Sigma_{y_i}(d-1) + F_1 A^{d-1} \Sigma_u (A^{d-1})' F_1'$ όπου $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Άρα, $\Sigma_{y_i}(d) = \Sigma_{y_i}(d-1)_{ARMA} + F_1 A^{d-1} \Sigma_u (A^{d-1})' F_1'$. Τότε,

$$F_1 A^{d-1} \Sigma_u (A^{d-1})' F_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{d-1} & 0 \\ x & a_{22}^{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{d-1} & x \\ 0 & a_{22}^{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}^{2(d-1)} \sigma_{11}$$

Επομένως, $\Sigma_{y_i}(d) = \Sigma_{y_i}(d-1)_{ARMA} + a_{11}^{2(d-1)} \sigma_{11}$

Από την άλλη μεριά, $\Sigma_{y_i}(d)_{ARMA} = \sum_{i=0}^{d-1} \Phi_i \sigma_1^2 \Phi_i' = \Sigma_{y_i}(d-1)_{ARMA} + \Phi_{d-1}^2 \sigma_{11}$ όπου $d > 1$

($\sigma_1^2 = \sigma_{11}$ όταν $a_{12} = 0$). Αν δείξουμε ότι $\Phi_{d-1}^2 \sigma_{11} = a_{11}^{2(d-1)} \sigma_{11}$, τότε $\Sigma_{y_i}(d) = \Sigma_{y_i}(d)_{ARMA}$

και η πρόταση θα έχει αποδειχθεί.

Με άλλα λόγια,, πρέπει να δείξουμε ότι $\Phi_d = a_{11}^d$ ($d > 0$).

Για $d=1$, $\Phi_1 = M_1 + A_1 = a_{11}$, ενώ $\Phi_2 = A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_0 = a_{11}^2$.

Ας υποθέσουμε ότι $\Phi_s = a_{11}^s$ για κάθε ακέραιο $s < d$. Τότε

$$\Phi_d = A_1 \Phi_{d-1} + A_2 \Phi_{d-2} = (a_{11} + a_{22}) a_{11}^{d-1} - a_{11} a_{22} a_{11}^{d-2} = a_{11}^d.$$

Άρα, $\Phi_d = a_{11}^d$ για κάθε ακέραιο $d > 0$.

A.6 Πίνακες

Πίνακας A1a:
DGPs και οι Αντίστοιχες Ιδιοτιμές του Πρώτου Πειράματος Monte Carlo

DGP	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	σ_{11}	σ_{22}	σ_{12}	1 ^η Ιδιοτιμή*	2 ^η Ιδιοτιμή*
1	0.5	0.7	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.67	0.67
2	0.5	0	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.5	0.5
3	0.5	0.1	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.31	0.31
4	0.9	0.7	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.87	0.87
5	1.1	0.7	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.97	0.97
6	1.1	0.1	-0.6	0.5	1	1	0.5	0.9732	0.6268

* Οι αριθμοί στις τελευταίες δύο στήλες είναι το μέτρο της κάθε ιδιοτιμής.

Πίνακας A1b:
Η “Ισοδύναμη” ARMA(2,1) Παραμετροποίηση της y_{1t}

DGP	ARMA(2,1)	
1	$y_{1t} = y_{1t-1} - 0.67 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.1092 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1.3736
2	$y_{1t} = y_{1t-1} - 0.25 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.5 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1
3	$y_{1t} = y_{1t-1} - 0.31 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.4458 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1.0094
4	$y_{1t} = 1.4 y_{1t-1} - 0.87 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.1092 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1.3736
5	$y_{1t} = 1.6 y_{1t-1} - 0.97 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.1092 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1.3736
6	$y_{1t} = 1.6 y_{1t-1} - 0.61 y_{1t-1} + e_{1t} - 0.4458 e_{1t-1}$	Var(e_{1t})=1.0094

Πίνακας Α2α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-1*

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374 (37.3%)	1.088 (8.77%)	1.173 (17.3%)	1.288 (28.8%)	2.391 (139.%)	1.502 (50.2%)	1.559 (55.9%)	1.969 (96.8%)	1.688 (68.7%)	1.857 (85.7%)	1.700 (70.0%)
h=2	2.090	2.464 (17.8%)	2.379 (13.8%)	2.477 (18.5%)	2.716 (29.9%)	4.337 (107.%)	2.839 (35.8%)	2.916 (39.5%)	3.779 (80.8%)	3.201 (53.1%)	3.456 (65.3%)	3.215 (53.8%)
h=5	2.984	3.102 (3.94%)	3.240 (8.57%)	3.366 (12.7%)	3.524 (18.0%)	3.504 (17.4%)	3.325 (11.4%)	3.451 (15.6%)	3.483 (16.7%)	3.598 (20.5%)	3.696 (23.8%)	3.557 (19.1%)
h=10	3.366	3.367 (0.03%)	3.560 (5.77%)	3.711 (10.2%)	3.892 (15.6%)	3.518 (4.51%)	3.523 (4.67%)	3.661 (8.78%)	3.511 (4.31%)	3.893 (15.6%)	4.013 (19.2%)	4.046 (20.1%)

Πίνακας Α2β:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-1[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374 (37.3%)	1.047 (4.67%)	1.095 (9.48%)	1.149 (14.9%)	2.457 (145.%)	1.468 (46.7%)	1.494 (49.4%)	1.917 (91.7%)	1.546 (54.6%)	1.639 (63.8%)	1.553 (55.2%)
h=2	2.090	2.464 (17.8%)	2.283 (9.24%)	2.338 (11.8%)	2.449 (17.1%)	4.253 (103.%)	2.672 (27.8%)	2.686 (28.5%)	3.676 (75.8%)	2.801 (34.0%)	2.976 (42.3%)	2.849 (36.2%)
h=5	2.984	3.102 (3.94%)	3.220 (7.91%)	3.274 (9.72%)	3.339 (11.8%)	3.607 (20.8%)	3.337 (11.8%)	3.381 (13.2%)	3.561 (19.3%)	3.442 (15.3%)	3.492 (17.0%)	3.441 (15.3%)
h=10	3.366	3.367 (0.03%)	3.305 (-1.7%)	3.353 (-0.3%)	3.409 (1.28%)	3.381 (0.43%)	3.301 (-1.9%)	3.350 (-0.4%)	3.365 (-0.0%)	3.398 (0.95%)	3.446 (2.38%)	3.392 (0.78%)

* η δηλώνει τον ορίζοντα πρόβλεψης. Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ του MSE του κάθε μοντέλου με το MSE του VAR(1) μοντέλου με γνωστές παραμέτρους για τον ίδιο ορίζοντα πρόβλεψης.

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α2c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-1[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.012	1.034	1.064	2.291	1.379	1.387	1.729	1.395	1.432	1.406
		(37.3%)	(1.23%)	(3.45%)	(6.36%)	(129.%)	(37.9%)	(38.6%)	(72.8%)	(39.5%)	(43.2%)	(40.5%)
h=2	2.090	2.464	2.251	2.272	2.333	4.129	2.602	2.597	3.583	2.616	2.695	2.660
		(17.8%)	(7.68%)	(8.69%)	(11.6%)	(97.5%)	(24.5%)	(24.2%)	(71.4%)	(25.1%)	(28.9%)	(27.2%)
h=5	2.984	3.102	2.994	3.017	3.037	3.371	3.096	3.113	3.335	3.126	3.171	3.132
		(3.94%)	(0.31%)	(1.09%)	(1.77%)	(12.9%)	(3.73%)	(4.31%)	(11.7%)	(4.75%)	(6.26%)	(4.95%)
h=10	3.366	3.367	3.413	3.428	3.458	3.472	3.411	3.420	3.463	3.437	3.451	3.429
		(0.03%)	(1.40%)	(1.84%)	(2.73%)	(3.16%)	(1.33%)	(1.60%)	(2.88%)	(2.12%)	(2.52%)	(1.86%)

Πίνακας Α2d:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-1[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.025	1.030	1.043	2.311	1.413	1.410	1.775	1.413	1.427	1.424
		(37.3%)	(2.5%)	(2.97%)	(4.29%)	(131.%)	(41.3%)	(41.0%)	(77.4%)	(41.2%)	(42.6%)	(42.4%)
h=2	2.090	2.464	2.132	2.154	2.173	4.028	2.527	2.520	3.508	2.526	2.548	2.549
		(17.8%)	(2.01%)	(3.08%)	(3.99%)	(92.7%)	(20.9%)	(20.5%)	(67.8%)	(20.8%)	(21.8%)	(21.9%)
h=5	2.984	3.102	2.969	2.991	3.003	3.443	3.107	3.116	3.406	3.124	3.153	3.134
		(3.94%)	(-0.5%)	(0.24%)	(0.61%)	(15.3%)	(4.10%)	(4.42%)	(14.1%)	(4.69%)	(5.65%)	(5.02%)
h=10	3.366	3.367	3.429	3.427	3.446	3.500	3.428	3.428	3.493	3.434	3.458	3.444
		(0.03%)	(1.87%)	(1.82%)	(2.39%)	(3.99%)	(1.85%)	(1.84%)	(3.77%)	(2.04%)	(2.72%)	(2.32%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α..

Πίνακας Α2ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-1[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374 (37.3%)	1.003 (0.29%)	1.004 (0.36%)	1.007 (0.71%)	2.319 (131.%)	1.382 (38.2%)	1.377 (37.7%)	1.764 (76.4%)	1.376 (37.6%)	1.378 (37.8%)	1.374 (37.3%)
h=2	2.090	2.464 (17.8%)	2.075 (-0.7%)	2.079 (-0.5%)	2.091 (0.03%)	4.063 (94.3%)	2.473 (18.3%)	2.461 (17.7%)	3.511 (67.9%)	2.462 (17.8%)	2.468 (18.0%)	2.466 (17.9%)
h=5	2.984	3.102 (3.94%)	3.076 (3.07%)	3.088 (3.47%)	3.098 (3.80%)	3.587 (20.2%)	3.217 (7.79%)	3.214 (7.70%)	3.554 (19.0%)	3.217 (7.80%)	3.219 (7.85%)	3.216 (7.76%)
h=10	3.366	3.367 (0.03%)	3.405 (1.16%)	3.412 (1.35%)	3.420 (1.62%)	3.491 (3.71%)	3.421 (1.63%)	3.412 (1.37%)	3.486 (3.57%)	3.414 (1.42%)	3.420 (1.59%)	3.418 (1.53%)

Πίνακας Α3α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-2[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.000 (0%)	1.093 (9.25%)	1.193 (19.2%)	1.317 (31.7%)	1.043 (4.33%)	1.095 (9.53%)	1.151 (15.0%)	1.140 (13.9%)	1.195 (19.4%)	1.323 (32.3%)	1.247 (24.6%)
h=2	1.250	1.250 (0%)	1.391 (11.2%)	1.484 (18.6%)	1.649 (31.9%)	1.333 (6.68%)	1.378 (10.2%)	1.448 (15.8%)	1.397 (11.8%)	1.531 (22.4%)	1.660 (32.8%)	1.582 (26.5%)
h=5	1.332	1.332 (1.42%)	1.497 (12.3%)	1.526 (14.5%)	1.586 (19.0%)	1.470 (10.3%)	1.474 (10.6%)	1.500 (12.6%)	1.567 (17.6%)	1.626 (22.0%)	1.715 (28.7%)	1.695 (27.2%)
h=10	1.333	1.333 (0%)	1.482 (11.1%)	1.499 (12.4%)	1.546 (15.9%)	1.459 (9.45%)	1.462 (9.63%)	1.476 (10.7%)	1.687 (26.5%)	1.714 (28.5%)	1.863 (39.7%)	1.867 (40.0%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α3b:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-2[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.000 (0%)	1.054 (5.41%)	1.106 (10.6%)	1.157 (15.6%)	1.030 (3.05%)	1.055 (5.46%)	1.078 (7.77%)	1.073 (7.26%)	1.109 (10.9%)	1.175 (17.4%)	1.129 (12.9%)
h=2	1.250	1.250 (0%)	1.361 (8.92%)	1.410 (12.7%)	1.487 (18.9%)	1.331 (6.50%)	1.363 (9.06%)	1.389 (11.0%)	1.359 (8.69%)	1.426 (14.0%)	1.510 (20.7%)	1.470 (17.5%)
h=5	1.332	1.332 (1.42%)	1.410 (5.86%)	1.425 (6.96%)	1.466 (10.0%)	1.390 (4.37%)	1.394 (4.67%)	1.409 (5.78%)	1.406 (5.58%)	1.476 (10.7%)	1.499 (12.5%)	1.494 (12.1%)
h=10	1.333	1.333 (0%)	1.389 (4.17%)	1.396 (4.70%)	1.410 (5.72%)	1.383 (3.72%)	1.385 (3.89%)	1.390 (4.23%)	1.415 (6.09%)	1.465 (9.84%)	1.486 (11.4%)	1.444 (8.30%)

Πίνακας Α3c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-2[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.000 (0%)	1.016 (1.59%)	1.040 (3.96%)	1.067 (6.66%)	1.002 (0.18%)	1.013 (1.32%)	1.026 (2.58%)	1.014 (1.39%)	1.038 (3.79%)	1.056 (5.6%)	1.042 (4.18%)
h=2	1.250	1.250 (0%)	1.314 (5.08%)	1.336 (6.86%)	1.369 (9.49%)	1.289 (3.15%)	1.307 (4.56%)	1.317 (5.35%)	1.308 (4.63%)	1.339 (7.12%)	1.353 (8.23%)	1.343 (7.4%)
h=5	1.332	1.332 (1.42%)	1.386 (4.03%)	1.393 (4.56%)	1.399 (5.05%)	1.378 (3.43%)	1.381 (3.71%)	1.389 (4.24%)	1.384 (3.93%)	1.411 (5.96%)	1.423 (6.85%)	1.425 (6.98%)
h=10	1.333	1.333 (0%)	1.411 (5.81%)	1.411 (5.79%)	1.413 (6.00%)	1.409 (5.69%)	1.410 (5.74%)	1.411 (5.79%)	1.411 (5.82%)	1.420 (6.51%)	1.421 (6.57%)	1.427 (6.99%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α3δ:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-2[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.000 (0%)	1.022 (2.25%)	1.030 (2.97%)	1.045 (4.51%)	1.013 (1.31%)	1.019 (1.87%)	1.025 (2.54%)	1.019 (1.93%)	1.029 (2.9%)	1.032 (3.24%)	1.031 (3.08%)
h=2	1.250	1.250 (0%)	1.258 (0.66%)	1.268 (1.44%)	1.279 (2.29%)	1.251 (0.06%)	1.253 (0.21%)	1.258 (0.65%)	1.254 (0.30%)	1.261 (0.90%)	1.274 (1.93%)	1.269 (1.54%)
h=5	1.332	1.332 (1.42%)	1.299 (-2.4%)	1.300 (-2.4%)	1.308 (-1.7%)	1.299 (-2.4%)	1.300 (-2.4%)	1.303 (-2.1%)	1.300 (-2.4%)	1.317 (-1.1%)	1.319 (-0.9%)	1.323 (-0.6%)
h=10	1.333	1.333 (0%)	1.355 (1.63%)	1.355 (1.62%)	1.354 (1.54%)	1.354 (1.57%)	1.355 (1.62%)	1.355 (1.61%)	1.355 (1.62%)	1.356 (1.71%)	1.358 (1.86%)	1.360 (1.97%)

Πίνακας Α3ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-2[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.000 (0%)	1.003 (0.32%)	1.005 (0.51%)	1.008 (0.85%)	1.000 (0.02%)	1.003 (0.31%)	1.004 (0.4%)	1.003 (0.32%)	1.006 (0.55%)	1.006 (0.55%)	1.007 (0.69%)
h=2	1.250	1.250 (0%)	1.241 (-0.7%)	1.244 (-0.4%)	1.250 (0.04%)	1.235 (-1.2%)	1.237 (-1.0%)	1.241 (-0.7%)	1.238 (-0.9%)	1.244 (-0.4%)	1.246 (-0.3%)	1.248 (-0.2%)
h=5	1.332	1.332 (1.42%)	1.349 (1.26%)	1.349 (1.27%)	1.351 (1.42%)	1.348 (1.20%)	1.349 (1.23%)	1.350 (1.35%)	1.349 (1.26%)	1.353 (1.56%)	1.354 (1.68%)	1.355 (1.74%)
h=10	1.333	1.333 (0%)	1.321 (-0.8%)	1.322 (-0.8%)	1.322 (-0.8%)	1.321 (-0.9%)	1.321 (-0.9%)	1.321 (-0.9%)	1.321 (-0.9%)	1.329 (-0.3%)	1.326 (-0.5%)	1.326 (-0.5%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α4α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-3[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.093 (9.28%)	1.193 (19.2%)	1.314 (31.4%)	1.067 (6.75%)	1.111 (11.1%)	1.165 (16.4%)	1.153 (15.2%)	1.208 (20.8%)	1.319 (31.9%)	1.258 (25.8%)
h=2	1.310	1.319 (0.71%)	1.463 (11.6%)	1.552 (18.4%)	1.726 (31.7%)	1.427 (8.96%)	1.464 (11.7%)	1.532 (16.9%)	1.466 (11.9%)	1.644 (25.5%)	1.742 (32.9%)	1.679 (28.1%)
h=5	1.385	1.385 (0.02%)	1.522 (9.89%)	1.551 (12.0%)	1.611 (16.3%)	1.532 (10.6%)	1.520 (9.78%)	1.542 (11.3%)	1.554 (12.2%)	1.646 (18.8%)	1.712 (23.6%)	1.701 (22.8%)
h=10	1.387	1.387 (0%)	1.482 (6.85%)	1.494 (7.71%)	1.532 (10.5%)	1.482 (6.91%)	1.479 (6.64%)	1.489 (7.37%)	1.541 (11.1%)	1.626 (17.2%)	1.712 (23.4%)	1.716 (23.7%)

Πίνακας Α4β:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-3[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.052 (5.19%)	1.103 (10.3%)	1.155 (15.4%)	1.052 (5.19%)	1.070 (7.03%)	1.092 (9.17%)	1.087 (8.66%)	1.122 (12.2%)	1.185 (18.5%)	1.148 (14.8%)
h=2	1.310	1.319 (0.71%)	1.431 (9.22%)	1.477 (12.7%)	1.554 (18.6%)	1.412 (7.78%)	1.439 (9.82%)	1.464 (11.7%)	1.425 (8.75%)	1.534 (17.0%)	1.581 (20.6%)	1.553 (18.5%)
h=5	1.385	1.385 (0.02%)	1.464 (5.72%)	1.480 (6.85%)	1.519 (9.72%)	1.460 (5.44%)	1.455 (5.07%)	1.468 (6.05%)	1.462 (5.61%)	1.540 (11.2%)	1.554 (12.1%)	1.554 (12.2%)
h=10	1.387	1.387 (0%)	1.415 (2.06%)	1.421 (2.48%)	1.434 (3.39%)	1.415 (2.04%)	1.414 (2.01%)	1.418 (2.25%)	1.423 (2.66%)	1.454 (4.88%)	1.492 (7.62%)	1.462 (5.43%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας A4c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-3[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.015 (1.53%)	1.039 (3.88%)	1.065 (6.52%)	1.018 (1.81%)	1.021 (2.11%)	1.034 (3.43%)	1.022 (2.24%)	1.046 (4.64%)	1.073 (7.25%)	1.048 (4.76%)
h=2	1.310	1.319 (0.71%)	1.385 (5.71%)	1.408 (7.45%)	1.443 (10.1%)	1.379 (5.25%)	1.386 (5.77%)	1.394 (6.38%)	1.385 (5.75%)	1.423 (8.64%)	1.445 (10.2%)	1.424 (8.73%)
h=5	1.385	1.385 (0.02%)	1.429 (3.19%)	1.437 (3.80%)	1.446 (4.39%)	1.428 (3.13%)	1.427 (3.08%)	1.433 (3.52%)	1.428 (3.15%)	1.476 (6.59%)	1.474 (6.42%)	1.468 (6.00%)
h=10	1.387	1.387 (0%)	1.457 (5.09%)	1.457 (5.10%)	1.460 (5.30%)	1.457 (5.11%)	1.457 (5.10%)	1.458 (5.12%)	1.458 (5.13%)	1.470 (6.05%)	1.470 (6.00%)	1.472 (6.18%)

Πίνακας A4d:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-3[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.022 (2.19%)	1.030 (2.98%)	1.044 (4.38%)	1.031 (3.12%)	1.031 (3.09%)	1.036 (3.59%)	1.031 (3.12%)	1.047 (4.72%)	1.047 (4.66%)	1.046 (4.59%)
h=2	1.310	1.319 (0.71%)	1.319 (0.67%)	1.330 (1.51%)	1.341 (2.38%)	1.332 (1.70%)	1.324 (1.03%)	1.326 (1.22%)	1.326 (1.24%)	1.346 (2.72%)	1.351 (3.15%)	1.345 (2.64%)
h=5	1.385	1.385 (0.02%)	1.348 (-2.6%)	1.347 (-2.6%)	1.355 (-2.1%)	1.353 (-2.3%)	1.350 (-2.5%)	1.353 (-2.3%)	1.350 (-2.5%)	1.375 (-0.6%)	1.370 (-1.0%)	1.374 (-0.7%)
h=10	1.387	1.387 (0%)	1.410 (1.71%)	1.410 (1.71%)	1.409 (1.65%)	1.410 (1.72%)	1.411 (1.73%)	1.410 (1.70%)	1.411 (1.73%)	1.417 (2.16%)	1.416 (2.12%)	1.415 (2.06%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα A2a.

Πίνακας Α4ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-3[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009	1.003	1.005	1.008	1.018	1.013	1.012	1.014	1.015	1.013	1.014
		(0.94%)	(0.34%)	(0.51%)	(0.85%)	(1.75%)	(1.32%)	(1.25%)	(1.39%)	(1.49%)	(1.31%)	(1.36%)
h=2	1.310	1.319	1.300	1.303	1.309	1.321	1.310	1.311	1.311	1.316	1.316	1.319
		(0.71%)	(-0.7%)	(-0.5%)	(-0.0%)	(0.82%)	(-0.0%)	(0.06%)	(0.09%)	(0.45%)	(0.47%)	(0.64%)
h=5	1.385	1.385	1.406	1.407	1.409	1.413	1.408	1.408	1.409	1.411	1.411	1.411
		(0.02%)	(1.56%)	(1.61%)	(1.74%)	(2.05%)	(1.71%)	(1.67%)	(1.79%)	(1.88%)	(1.93%)	(1.87%)
h=10	1.387	1.387	1.373	1.373	1.373	1.373	1.373	1.373	1.373	1.376	1.377	1.375
		(0%)	(-1.0%)	(-0.9%)	(-0.9%)	(-1.0%)	(-1.0%)	(-1.0%)	(-1.0%)	(-0.7%)	(-0.6%)	(-0.8%)

Πίνακας Α5α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-4[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.083	1.168	1.285	5.181	1.506	1.557	3.108	1.704	1.881	1.704
		(37.4%)	(8.28%)	(16.8%)	(28.5%)	(418.%)	(50.5%)	(55.7%)	(210.%)	(70.3%)	(88.1%)	(70.4%)
h=2	2.930	3.662	3.370	3.518	3.873	13.330	4.317	4.399	10.584	4.823	5.339	4.917
		(24.9%)	(15.0%)	(20.0%)	(32.2%)	(354.%)	(47.3%)	(50.1%)	(261.%)	(64.5%)	(82.2%)	(67.8%)
h=5	5.234	5.334	6.391	6.564	6.807	17.466	6.415	6.580	15.984	6.769	7.176	6.991
		(1.90%)	(22.0%)	(25.4%)	(30.0%)	(233.%)	(22.5%)	(25.7%)	(205.%)	(29.3%)	(37.0%)	(33.5%)
h=10	8.115	8.274	9.781	10.220	10.739	10.304	9.745	10.366	11.313	10.931	11.334	11.066
		(1.95%)	(20.5%)	(25.9%)	(32.3%)	(26.9%)	(20.0%)	(27.7%)	(39.4%)	(34.6%)	(39.6%)	(36.3%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α5b:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-4[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.049	1.099	1.150	5.107	1.469	1.492	2.960	1.520	1.596	1.537
		(37.3%)	(4.9%)	(9.94%)	(14.9%)	(410.%)	(46.8%)	(49.2%)	(196.%)	(51.9%)	(59.5%)	(53.6%)
h=2	2.930	3.662	3.215	3.291	3.458	13.261	4.019	4.032	10.225	4.124	4.385	4.255
		(24.9%)	(9.70%)	(12.3%)	(18.0%)	(352.%)	(37.1%)	(37.6%)	(248.%)	(40.7%)	(49.6%)	(45.2%)
h=5	5.234	5.334	5.797	5.879	5.906	16.396	5.929	5.950	14.828	5.999	6.174	6.124
		(1.90%)	(10.7%)	(12.3%)	(12.8%)	(213.%)	(13.2%)	(13.6%)	(183.%)	(14.6%)	(17.9%)	(16.9%)
h=10	8.115	8.274	8.897	9.064	9.154	10.179	9.033	9.250	10.329	9.368	9.545	9.349
		(1.95%)	(9.63%)	(11.6%)	(12.8%)	(25.4%)	(11.3%)	(13.9%)	(27.2%)	(15.4%)	(17.6%)	(15.2%)

Πίνακας Α5c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-4[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.004	1.029	1.065	4.944	1.376	1.384	2.801	1.393	1.418	1.412
		(37.3%)	(0.38%)	(2.87%)	(6.48%)	(394.%)	(37.6%)	(38.3%)	(180.%)	(39.2%)	(41.8%)	(41.1%)
h=2	2.930	3.662	3.129	3.184	3.284	12.482	3.845	3.851	9.691	3.876	3.947	3.944
		(24.9%)	(6.79%)	(8.66%)	(12.0%)	(326.%)	(31.2%)	(31.4%)	(230.%)	(32.2%)	(34.6%)	(34.5%)
h=5	5.234	5.334	5.440	5.470	5.507	14.625	5.555	5.545	13.224	5.563	5.603	5.635
		(1.90%)	(3.92%)	(4.49%)	(5.20%)	(179.%)	(6.13%)	(5.93%)	(152.%)	(6.27%)	(7.04%)	(7.64%)
h=10	8.115	8.274	8.622	8.683	8.734	10.337	8.784	8.831	10.460	8.866	8.932	8.857
		(1.95%)	(6.25%)	(6.99%)	(7.63%)	(27.3%)	(8.24%)	(8.82%)	(28.8%)	(9.25%)	(10.0%)	(9.14%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α5d:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-4[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374 (37.3%)	1.025 (2.54%)	1.030 (3.02%)	1.045 (4.48%)	4.897 (389.%)	1.415 (41.5%)	1.409 (40.9%)	2.780 (177.%)	1.412 (41.2%)	1.423 (42.2%)	1.421 (42.0%)
h=2	2.930	3.662 (24.9%)	3.015 (2.89%)	3.028 (3.34%)	3.070 (4.78%)	12.139 (314.%)	3.774 (28.8%)	3.761 (28.3%)	9.476 (223.%)	3.773 (28.7%)	3.803 (29.7%)	3.808 (29.9%)
h=5	5.234	5.334 (1.90%)	5.401 (3.17%)	5.409 (3.32%)	5.436 (3.84%)	14.712 (181.%)	5.556 (6.14%)	5.529 (5.63%)	13.414 (156.%)	5.532 (5.67%)	5.543 (5.88%)	5.568 (6.38%)
h=10	8.115	8.274 (1.95%)	8.334 (2.69%)	8.358 (2.99%)	8.380 (3.26%)	10.263 (26.4%)	8.513 (4.90%)	8.516 (4.94%)	10.413 (28.3%)	8.527 (5.07%)	8.563 (5.51%)	8.541 (5.25%)

Πίνακας Α5ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-4[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374 (37.3%)	1.002 (0.25%)	1.005 (0.53%)	1.010 (1%)	4.857 (385.%)	1.390 (38.9%)	1.377 (37.6%)	2.761 (176.%)	1.376 (37.5%)	1.376 (37.5%)	1.375 (37.5%)
h=2	2.930	3.662 (24.9%)	2.907 (-0.7%)	2.915 (-0.5%)	2.932 (0.05%)	12.282 (319.%)	3.690 (25.9%)	3.657 (24.7%)	9.603 (227.%)	3.656 (24.7%)	3.657 (24.8%)	3.656 (24.7%)
h=5	5.234	5.334 (1.90%)	5.405 (3.26%)	5.410 (3.34%)	5.414 (3.42%)	14.523 (177.%)	5.529 (5.63%)	5.512 (5.30%)	13.236 (152.%)	5.510 (5.26%)	5.513 (5.33%)	5.528 (5.60%)
h=10	8.115	8.274 (1.95%)	8.214 (1.22%)	8.228 (1.39%)	8.235 (1.47%)	10.386 (27.9%)	8.424 (3.81%)	8.423 (3.80%)	10.542 (29.9%)	8.427 (3.84%)	8.435 (3.94%)	8.429 (3.87%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α6α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-5[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.108	1.208	1.329	16.604	1.541	1.595	7.053	1.762	1.922	1.788
		(37.3%)	(10.8%)	(20.7%)	(32.8%)	(1560%)	(54.1%)	(59.4%)	(605.%)	(76.2%)	(92.2%)	(78.8%)
h=2	3.470	4.426	4.209	4.458	4.914	51.167	5.470	5.584	35.444	6.172	6.938	6.375
		(27.5%)	(21.3%)	(28.4%)	(41.6%)	(1374%)	(57.6%)	(60.9%)	(921.%)	(77.8%)	(99.9%)	(83.7%)
h=5	8.103	8.103	10.804	11.108	11.447	98.009	10.873	11.003	96.283	11.343	12.052	11.963
		(0.00%)	(33.3%)	(37.0%)	(41.2%)	(1109%)	(34.1%)	(35.7%)	(1088%)	(39.9%)	(48.7%)	(47.6%)
h=10	15.054	15.057	20.749	21.556	22.409	30.906	20.391	21.224	39.913	22.445	24.201	23.222
		(0.01%)	(37.8%)	(43.1%)	(48.8%)	(105.%)	(35.4%)	(40.9%)	(165.%)	(49.0%)	(60.7%)	(54.2%)

Πίνακας Α6β:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-5[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.052	1.113	1.163	18.043	1.483	1.512	7.333	1.541	1.622	1.571
		(37.3%)	(5.23%)	(11.2%)	(16.3%)	(1704%)	(48.3%)	(51.1%)	(633.%)	(54.1%)	(62.2%)	(57.1%)
h=2	3.470	4.426	3.840	3.974	4.179	54.584	4.949	4.972	37.804	5.095	5.451	5.283
		(27.5%)	(10.6%)	(14.5%)	(20.4%)	(1473%)	(42.6%)	(43.2%)	(989.%)	(46.8%)	(57.0%)	(52.2%)
h=5	8.103	8.103	9.499	9.578	9.720	101.504	9.549	9.544	95.151	9.576	9.855	9.964
		(0.00%)	(17.2%)	(18.2%)	(19.9%)	(1152%)	(17.8%)	(17.7%)	(1074%)	(18.1%)	(21.6%)	(22.9%)
h=10	15.054	15.057	18.179	18.382	18.672	34.457	18.093	18.299	39.782	18.420	18.918	18.635
		(0.01%)	(20.7%)	(22.1%)	(24.0%)	(128.%)	(20.1%)	(21.5%)	(164.%)	(22.3%)	(25.6%)	(23.7%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α6c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-5[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.018	1.041	1.074	19.038	1.391	1.397	7.789	1.404	1.426	1.426
		(37.3%)	(1.77%)	(4.13%)	(7.43%)	(1803%)	(39.0%)	(39.7%)	(678.%)	(40.3%)	(42.5%)	(42.5%)
h=2	3.470	4.426	3.760	3.825	3.944	57.507	4.706	4.708	40.729	4.728	4.810	4.835
		(27.5%)	(8.34%)	(10.2%)	(13.6%)	(1557%)	(35.6%)	(35.6%)	(1073%)	(36.2%)	(38.6%)	(39.3%)
h=5	8.103	8.103	8.966	8.987	9.078	103.777	8.977	8.983	97.788	8.992	9.068	9.245
		(0.00%)	(10.6%)	(10.9%)	(12.0%)	(1180%)	(10.7%)	(10.8%)	(1106%)	(10.9%)	(11.9%)	(14.0%)
h=10	15.054	15.057	16.972	17.053	17.195	40.702	16.969	17.003	44.496	17.037	17.176	17.191
		(0.01%)	(12.7%)	(13.2%)	(14.2%)	(170.%)	(12.7%)	(12.9%)	(195.%)	(13.1%)	(14.0%)	(14.1%)

Πίνακας Α6d:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-5[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.025	1.032	1.045	19.480	1.423	1.419	7.738	1.420	1.425	1.431
		(37.3%)	(2.51%)	(3.19%)	(4.48%)	(1848%)	(42.3%)	(41.8%)	(673.%)	(41.9%)	(42.4%)	(43.0%)
h=2	3.470	4.426	3.569	3.592	3.642	58.751	4.582	4.569	41.259	4.580	4.605	4.618
		(27.5%)	(2.85%)	(3.51%)	(4.94%)	(1593%)	(32.0%)	(31.6%)	(1089%)	(31.9%)	(32.7%)	(33.0%)
h=5	8.103	8.103	8.546	8.571	8.590	104.440	8.588	8.570	98.585	8.574	8.568	8.678
		(0.00%)	(5.46%)	(5.78%)	(6.01%)	(1188%)	(5.99%)	(5.76%)	(1116%)	(5.81%)	(5.74%)	(7.10%)
h=10	15.054	15.057	15.970	16.062	16.118	43.089	16.060	16.038	46.673	16.063	16.095	16.141
		(0.01%)	(6.08%)	(6.69%)	(7.06%)	(186.%)	(6.68%)	(6.53%)	(210.%)	(6.70%)	(6.91%)	(7.22%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α6ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-5[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.374	1.003	1.005	1.010	19.011	1.395	1.378	7.598	1.377	1.378	1.376
		(37.3%)	(0.27%)	(0.48%)	(1.02%)	(1801%)	(39.5%)	(37.7%)	(659.%)	(37.6%)	(37.8%)	(37.6%)
h=2	3.470	4.426	3.442	3.446	3.465	55.139	4.476	4.421	38.998	4.418	4.422	4.419
		(27.5%)	(-0.8%)	(-0.6%)	(-0.1%)	(1489%)	(28.9%)	(27.3%)	(1023%)	(27.3%)	(27.4%)	(27.3%)
h=5	8.103	8.103	8.322	8.321	8.347	102.966	8.369	8.331	98.378	8.329	8.325	8.361
		(0.00%)	(2.71%)	(2.69%)	(3.01%)	(1170%)	(3.28%)	(2.82%)	(1114%)	(2.79%)	(2.73%)	(3.19%)
h=10	15.054	15.057	15.250	15.242	15.264	44.478	15.335	15.250	47.731	15.249	15.250	15.274
		(0.01%)	(1.30%)	(1.25%)	(1.39%)	(195.%)	(1.86%)	(1.30%)	(217.%)	(1.29%)	(1.30%)	(1.46%)

Πίνακας Α7α:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=30) DGP-6[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009	1.115	1.214	1.341	1.147	1.145	1.187	1.191	1.270	1.435	1.323
		(0.94%)	(11.5%)	(21.3%)	(34.1%)	(14.6%)	(14.4%)	(18.6%)	(19.1%)	(26.9%)	(43.5%)	(32.2%)
h=2	2.330	2.354	2.876	3.060	3.390	2.902	2.930	3.008	2.980	3.388	3.681	3.478
		(1.03%)	(23.4%)	(31.3%)	(45.4%)	(24.5%)	(25.7%)	(29.0%)	(27.9%)	(45.3%)	(57.9%)	(49.2%)
h=5	7.157	7.205	10.531	11.335	12.608	10.143	10.298	10.840	10.331	13.781	14.268	14.034
		(0.65%)	(47.1%)	(58.3%)	(76.1%)	(41.7%)	(43.8%)	(51.4%)	(44.3%)	(92.5%)	(99.3%)	(96.0%)
h=10	14.867	14.912	25.986	29.050	33.801	27.716	26.071	27.306	28.687	39.745	44.755	43.334
		(0.29%)	(74.7%)	(95.3%)	(127.%)	(86.4%)	(75.3%)	(83.6%)	(92.9%)	(167.%)	(201.%)	(191.%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α7b:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=50) DGP-6[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.085 (8.47%)	1.141 (14.1%)	1.192 (19.2%)	1.129 (12.9%)	1.112 (11.1%)	1.130 (13.0%)	1.125 (12.5%)	1.185 (18.5%)	1.224 (22.3%)	1.200 (19.9%)
h=2	2.330	2.354 (1.03%)	2.717 (16.6%)	2.817 (20.9%)	2.952 (26.6%)	2.804 (20.3%)	2.766 (18.7%)	2.798 (20.0%)	2.793 (19.8%)	3.009 (29.1%)	3.073 (31.8%)	3.027 (29.9%)
h=5	7.157	7.205 (0.65%)	9.266 (29.4%)	9.699 (35.5%)	10.171 (42.1%)	9.095 (27.0%)	9.124 (27.4%)	9.391 (31.2%)	9.083 (26.9%)	11.095 (55.0%)	11.250 (57.1%)	11.142 (55.6%)
h=10	14.867	14.912 (0.29%)	21.521 (44.7%)	22.770 (53.1%)	24.265 (63.2%)	22.184 (49.2%)	21.089 (41.8%)	21.624 (45.4%)	21.435 (44.1%)	28.776 (93.5%)	29.032 (95.2%)	29.177 (96.2%)

Πίνακας Α7c:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=100) DGP-6[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.024 (2.37%)	1.045 (4.5%)	1.079 (7.86%)	1.080 (7.96%)	1.040 (3.99%)	1.049 (4.91%)	1.044 (4.35%)	1.076 (7.63%)	1.083 (8.34%)	1.082 (8.18%)
h=2	2.330	2.354 (1.03%)	2.554 (9.59%)	2.589 (11.1%)	2.666 (14.4%)	2.663 (14.2%)	2.584 (10.9%)	2.599 (11.5%)	2.599 (11.5%)	2.708 (16.2%)	2.717 (16.6%)	2.713 (16.4%)
h=5	7.157	7.205 (0.65%)	8.775 (22.6%)	8.876 (24.0%)	9.052 (26.4%)	8.842 (23.5%)	8.731 (21.9%)	8.842 (23.5%)	8.729 (21.9%)	9.644 (34.7%)	9.598 (34.0%)	9.713 (35.7%)
h=10	14.867	14.912 (0.29%)	19.258 (29.5%)	19.510 (31.2%)	20.028 (34.7%)	19.112 (28.5%)	18.800 (26.4%)	19.039 (28.0%)	18.803 (26.4%)	22.574 (51.8%)	22.163 (49.0%)	22.607 (52.0%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α7d:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=200) DGP-6[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.027 (2.74%)	1.033 (3.33%)	1.051 (5.06%)	1.077 (7.67%)	1.045 (4.51%)	1.042 (4.23%)	1.050 (4.96%)	1.049 (4.91%)	1.060 (5.99%)	1.056 (5.58%)
h=2	2.330	2.354 (1.03%)	2.393 (2.69%)	2.405 (3.21%)	2.440 (4.73%)	2.518 (8.08%)	2.435 (4.49%)	2.423 (3.97%)	2.453 (5.29%)	2.469 (5.94%)	2.477 (6.30%)	2.467 (5.87%)
h=5	7.157	7.205 (0.65%)	7.642 (6.76%)	7.675 (7.22%)	7.734 (8.05%)	7.802 (9.00%)	7.674 (7.21%)	7.674 (7.21%)	7.695 (7.50%)	7.984 (11.5%)	8.066 (12.6%)	8.006 (11.8%)
h=10	14.867	14.912 (0.29%)	16.266 (9.40%)	16.377 (10.1%)	16.509 (11.0%)	16.287 (9.54%)	16.031 (7.82%)	16.169 (8.75%)	16.036 (7.85%)	17.471 (17.5%)	17.638 (18.6%)	17.486 (17.6%)

Πίνακας Α7ε:

MSEs των Προβλέψεων των Μοντέλων με «Γνωστές» και «Εκτιμημένες» Παραμέτρους (Μέγεθος Δείγματος=500) DGP-6[&]

	Γνωστές Παράμετροι		Εκτιμημένες Παράμετροι									
	VAR(1)	ARMA(2,1)	VAR(1)	VAR(2)	VAR(3)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,1)
h=1	1.000	1.009 (0.94%)	1.003 (0.3%)	1.005 (0.54%)	1.008 (0.8%)	1.039 (3.89%)	1.016 (1.6%)	1.014 (1.39%)	1.018 (1.8%)	1.016 (1.55%)	1.019 (1.88%)	1.019 (1.91%)
h=2	2.330	2.354 (1.03%)	2.311 (-0.8%)	2.317 (-0.5%)	2.332 (0.09%)	2.405 (3.22%)	2.345 (0.65%)	2.341 (0.48%)	2.358 (1.18%)	2.350 (0.86%)	2.362 (1.37%)	2.359 (1.25%)
h=5	7.157	7.205 (0.65%)	7.359 (2.81%)	7.364 (2.89%)	7.398 (3.36%)	7.538 (5.31%)	7.409 (3.51%)	7.390 (3.24%)	7.442 (3.97%)	7.463 (4.26%)	7.498 (4.75%)	7.495 (4.71%)
h=10	14.867	14.912 (0.29%)	15.499 (4.24%)	15.509 (4.31%)	15.549 (4.58%)	15.759 (5.99%)	15.500 (4.25%)	15.500 (4.25%)	15.545 (4.55%)	15.720 (5.73%)	15.824 (6.43%)	15.845 (6.57%)

[&] Βλέπε υποσημείωση (*) του Πίνακα Α2α.

Πίνακας Α8α:
Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά) * και MSEs του AIC[&]

Τμήμα Α: DGP-1						Τμήμα Β: DGP-2				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	52.2	71.3	80.0	81.9	82.5	4.16	5.18	6.92	8.02	8.70
VAR(2)	9.36	12.0	12.7	11.5	11.7	2.16	2.22	3.00	3.12	3.56
VAR(3)	7.14	7.48	6.86	6.52	5.70	2.34	2.34	1.92	1.68	1.72
Univ.	31.30	9.22	0.44	0.08	0.10	91.34	90.26	88.16	87.18	86.02
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.3687 (36.8%)	1.1285 (12.8%)	1.0288 (2.88%)	1.0325 (3.25%)	1.0050 (0.5%)	1.3068 (30.6%)	1.1559 (15.5%)	1.0540 (5.4%)	1.0341 (3.41%)	1.0071 (0.71%)
h=2	2.8767 (37.6%)	2.4120 (15.4%)	2.2680 (8.51%)	2.1459 (2.67%)	2.0815 (-0.4%)	1.6397 (31.1%)	1.5060 (20.4%)	1.3433 (7.46%)	1.2710 (1.68%)	1.2459 (-0.3%)
h=5	3.4803 (16.6%)	3.3150 (11.0%)	2.9939 (0.32%)	2.9854 (0.03%)	3.0842 (3.34%)	1.7294 (29.8%)	1.5094 (13.3%)	1.4290 (7.28%)	1.3231 (-0.6%)	1.3571 (1.88%)
h=10	3.9632 (17.7%)	3.3565 (-0.2%)	3.4213 (1.64%)	3.4348 (2.05%)	3.4108 (1.33%)	1.9085 (43.1%)	1.4817 (11.1%)	1.4232 (6.74%)	1.3579 (1.84%)	1.3301 (-0.2%)
Τμήμα C: DGP-3						Τμήμα D: DGP-4				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	6.76	11.6	22.2	38.3	63.4	55.4	73.1	79.3	81.5	82.3
VAR(2)	2.42	3.16	4.06	5.62	7.62	9.84	12.0	12.6	12.2	11.9
VAR(3)	2.34	2.26	2.66	3.02	3.96	8.92	8.18	7.46	6.16	5.74
Univ.	88.48	82.98	71.08	53.06	25.02	25.84	6.72	0.64	0.14	0.06
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.2917 (29.1%)	1.1623 (16.2%)	1.0589 (5.89%)	1.0427 (4.27%)	1.0052 (0.52%)	1.3217 (32.1%)	1.1219 (12.1%)	1.0260 (2.6%)	1.0308 (3.08%)	1.0057 (0.57%)
h=2	1.7369 (32.5%)	1.5688 (19.7%)	1.4354 (9.57%)	1.3431 (2.52%)	1.3032 (-0.5%)	3.9846 (35.9%)	3.3697 (15.0%)	3.1776 (8.45%)	3.0276 (3.33%)	2.9117 (-0.6%)
h=5	1.7089 (23.4%)	1.5630 (12.8%)	1.4796 (6.86%)	1.3706 (-1.0%)	1.4125 (2.01%)	7.6431 (46.0%)	5.9283 (13.2%)	5.4517 (4.15%)	5.4109 (3.37%)	5.4081 (3.31%)
h=10	1.7746 (27.9%)	1.4838 (7.01%)	1.4697 (6.00%)	1.4171 (2.20%)	1.3767 (-0.7%)	10.874 (34.0%)	9.0051 (10.9%)	8.6432 (6.51%)	8.3529 (2.93%)	8.2177 (1.26%)
Τμήμα E: DGP-5						Τμήμα F: DGP-6				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	57.1	72.7	79.6	81.4	82.5	5.60	13.4	29.3	48.3	69.9
VAR(2)	9.90	12.5	12.8	12.3	12.2	2.22	3.66	4.44	5.92	7.16
VAR(3)	9.30	8.64	7.18	6.24	5.22	2.64	3.02	2.92	3.10	3.84
Univ.	23.70	6.16	0.42	0.06	0.08	89.54	79.92	63.34	42.68	19.10
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.3682 (36.8%)	1.1316 (13.1%)	1.0350 (3.5%)	1.0313 (3.13%)	1.0047 (0.47%)	1.3770 (37.7%)	1.2047 (20.4%)	1.0912 (9.12%)	1.0459 (4.59%)	1.0081 (0.81%)
h=2	5.0571 (45.7%)	4.0281 (16.0%)	3.7993 (9.48%)	3.5860 (3.34%)	3.4422 (-0.8%)	3.6544 (56.8%)	3.0604 (31.3%)	2.7464 (17.8%)	2.4561 (5.41%)	2.3210 (-0.3%)
h=5	12.491 (54.1%)	9.6647 (19.2%)	8.9802 (10.8%)	8.5678 (5.74%)	8.3260 (2.75%)	15.019 (109.%)	11.447 (59.9%)	9.7591 (36.3%)	8.0037 (11.8%)	7.4008 (3.39%)
h=10	23.465 (55.8%)	18.489 (22.8%)	17.048 (13.2%)	16.020 (6.41%)	15.248 (1.28%)	49.326 (231.%)	30.548 (105.%)	22.873 (53.8%)	17.590 (18.3%)	15.672 (5.40%)

* Επιλεγμένο Μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} .

& h δηλώνει τον ορίζοντα πρόβλεψης. Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ του MSE του κάθε μοντέλου με το MSE του VAR(1) μοντέλου με γνωστές παραμέτρους για τον ίδιο ορίζοντα πρόβλεψης.

Πίνακας A8b:
Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά)* και MSEs του SIC[&]

Τμήμα A: DGP-1						Τμήμα B: DGP-2				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	69.0	90.6	98.2	99.5	99.7	3.86	3.82	2.84	1.90	1.12
VAR(2)	3.08	2.34	1.34	0.48	0.28	0.72	0.42	0.16	0.04	0.02
VAR(3)	1.18	0.54	0.18	0.00	0.00	0.34	0.18	0.00	0.02	0.00
Univ.	26.74	6.52	0.28	0.02	0.02	95.08	95.58	97.00	98.04	98.86
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.2782 (27.8%)	1.0858 (8.58%)	1.0145 (1.45%)	1.0248 (2.48%)	1.0028 (0.28%)	1.2371 (23.7%)	1.0893 (8.93%)	1.0172 (1.72%)	1.0171 (1.71%)	1.0014 (0.14%)
h=2	2.7365 (30.9%)	2.3456 (12.2%)	2.2519 (7.74%)	2.1327 (2.04%)	2.0748 (-0.7%)	1.5426 (23.4%)	1.4159 (13.2%)	1.3083 (4.66%)	1.2579 (0.63%)	1.2347 (-1.2%)
h=5	3.4024 (14.0%)	3.2637 (9.36%)	2.9962 (0.39%)	2.9693 (-0.5%)	3.0759 (3.06%)	1.6850 (26.5%)	1.4461 (8.56%)	1.3978 (4.93%)	1.3019 (-2.2%)	1.3490 (1.27%)
h=10	3.8181 (13.4%)	3.3278 (-1.1%)	3.4120 (1.37%)	3.4286 (1.86%)	3.4045 (1.14%)	1.8612 (39.5%)	1.4316 (7.37%)	1.4117 (5.88%)	1.3529 (1.47%)	1.3230 (-0.7%)
Τμήμα C: DGP-3						Τμήμα D: DGP-4				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	7.86	11.7	18.7	31.2	64.9	72.6	92.4	98.3	99.4	99.6
VAR(2)	0.86	0.54	0.24	0.18	0.12	3.84	2.50	1.16	0.58	0.36
VAR(3)	0.40	0.14	0.00	0.02	0.00	1.34	0.52	0.10	0.00	0.00
Univ.	90.88	87.62	81.06	68.60	34.98	22.22	4.58	0.44	0.02	0.04
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.2504 (25.0%)	1.1196 (11.9%)	1.0373 (3.73%)	1.0366 (3.66%)	1.0088 (0.88%)	1.2581 (25.8%)	1.0949 (9.49%)	1.0072 (0.72%)	1.0253 (2.53%)	1.0027 (0.27%)
h=2	1.6653 (27.1%)	1.5020 (14.6%)	1.4074 (7.43%)	1.3406 (2.33%)	1.3078 (-0.1%)	3.8192 (30.3%)	3.2883 (12.2%)	3.1291 (6.79%)	3.0146 (2.88%)	2.9079 (-0.7%)
h=5	1.6614 (19.9%)	1.5202 (9.79%)	1.4577 (5.27%)	1.3612 (-1.6%)	1.4107 (1.88%)	7.3648 (40.6%)	5.8456 (11.6%)	5.4443 (4.01%)	5.4011 (3.18%)	5.4058 (3.27%)
h=10	1.7292 (24.7%)	1.4463 (4.31%)	1.4625 (5.48%)	1.4129 (1.90%)	1.3745 (-0.8%)	10.418 (28.3%)	8.9321 (10.0%)	8.6212 (6.23%)	8.3309 (2.66%)	8.2153 (1.23%)
Τμήμα E: DGP-5						Τμήμα F: DGP-6				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	74.4	92.2	98.4	99.3	99.7	7.62	16.3	36.4	63.5	91.5
VAR(2)	4.02	2.96	0.98	0.62	0.28	0.74	0.64	0.40	0.36	0.08
VAR(3)	1.48	0.42	0.20	0.02	0.00	0.36	0.26	0.06	0.00	0.00
Univ.	20.10	4.42	0.42	0.06	0.02	91.28	82.80	63.14	36.14	8.42
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.2753 (27.5%)	1.0902 (9.02%)	1.0188 (1.88%)	1.0245 (2.45%)	1.0026 (0.26%)	1.3338 (33.3%)	1.1763 (17.6%)	1.0728 (7.28%)	1.0387 (3.87%)	1.0036 (0.36%)
h=2	4.7804 (37.7%)	3.9328 (13.3%)	3.7572 (8.27%)	3.5694 (2.86%)	3.4422 (-0.8%)	3.4877 (49.6%)	2.9956 (28.5%)	2.6761 (14.8%)	2.4315 (4.35%)	2.3147 (-0.6%)
h=5	11.807 (45.7%)	9.5635 (18.0%)	8.9612 (10.5%)	8.5446 (5.45%)	8.3234 (2.72%)	14.120 (97.2%)	10.970 (53.2%)	9.3929 (31.2%)	7.8486 (9.65%)	7.3830 (3.15%)
h=10	22.274 (47.9%)	18.342 (21.8%)	16.964 (12.6%)	15.973 (6.10%)	15.252 (1.31%)	44.626 (200%)	28.482 (91.5%)	21.361 (43.6%)	16.968 (14.1%)	15.566 (4.69%)

* Επιλεγμένο Μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} .

& h δηλώνει τον ορίζοντα πρόβλεψης. Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ του MSE του κάθε μοντέλου με το MSE του VAR(1) μοντέλου με γνωστές παραμέτρους για τον ίδιο ορίζοντα πρόβλεψης.

Πίνακας Α8c:
Επιλογή Μοντέλου (σε Ποσοστά)* και MSEs του HQ[&]

Τμήμα Α: DGP-1						Τμήμα Β: DGP-2				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	59.1	81.9	93.3	96.0	96.9	4.20	4.86	5.32	4.94	4.48
VAR(2)	6.80	7.10	5.14	3.36	2.62	1.68	1.32	1.06	0.74	0.54
VAR(3)	4.36	2.68	1.18	0.58	0.42	1.34	0.84	0.10	0.16	0.04
Univ.	29.74	8.32	0.38	0.06	0.06	92.78	92.98	93.52	94.16	94.94
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.3355 (33.5%)	1.1139 (11.3%)	1.0187 (1.87%)	1.0259 (2.59%)	1.0024 (0.24%)	1.2795 (27.9%)	1.1373 (13.7%)	1.0393 (3.93%)	1.0239 (2.39%)	1.0027 (0.27%)
h=2	2.8238 (35.1%)	2.3818 (13.9%)	2.2514 (7.72%)	2.1331 (2.06%)	2.0763 (-0.6%)	1.6040 (28.3%)	1.4742 (17.9%)	1.3283 (6.26%)	1.2665 (1.32%)	1.2383 (-0.9%)
h=5	3.4521 (15.6%)	3.2924 (10.3%)	2.9952 (0.36%)	2.9749 (-0.3%)	3.0797 (3.19%)	1.7193 (29.0%)	1.4918 (11.9%)	1.4160 (6.30%)	1.3142 (-1.3%)	1.3515 (1.46%)
h=10	3.9048 (16.0%)	3.3464 (-0.5%)	3.4149 (1.45%)	3.4276 (1.83%)	3.4049 (1.16%)	1.9031 (42.7%)	1.4684 (10.1%)	1.4188 (6.41%)	1.3536 (1.52%)	1.3279 (-0.4%)
Τμήμα C: DGP-3						Τμήμα D: DGP-4				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	7.54	12.7	22.8	40.3	72.4	62.3	83.8	93.4	95.7	97.0
VAR(2)	1.90	1.64	1.62	1.52	1.64	7.70	7.36	4.66	3.72	2.60
VAR(3)	1.28	0.94	0.32	0.24	0.24	5.04	2.80	1.36	0.50	0.36
Univ.	89.28	84.72	75.26	57.94	25.72	24.96	6.04	0.58	0.08	0.04
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.2771 (27.7%)	1.1496 (14.9%)	1.0465 (4.65%)	1.0403 (4.03%)	1.0057 (0.57%)	1.3022 (30.2%)	1.1073 (10.7%)	1.0106 (1.06%)	1.0260 (2.6%)	1.0032 (0.32%)
h=2	1.7169 (31.0%)	1.5443 (17.8%)	1.4261 (8.86%)	1.3409 (2.35%)	1.3031 (-0.5%)	3.9423 (34.5%)	3.3213 (13.3%)	3.1345 (6.97%)	3.0171 (2.97%)	2.9089 (-0.7%)
h=5	1.6930 (22.2%)	1.5539 (12.2%)	1.4682 (6.03%)	1.3685 (-1.1%)	1.4108 (1.89%)	7.5496 (44.2%)	5.8864 (12.4%)	5.4420 (3.96%)	5.4027 (3.21%)	5.4038 (3.23%)
h=10	1.7619 (27.0%)	1.4733 (6.26%)	1.4655 (5.69%)	1.4149 (2.04%)	1.3753 (-0.8%)	10.667 (31.4%)	8.9670 (10.5%)	8.6296 (6.34%)	8.3398 (2.77%)	8.2166 (1.25%)
Τμήμα E: DGP-5						Τμήμα F: DGP-6				
	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
VAR(1)	64.3	84.4	92.9	95.2	97.2	6.48	16.1	35.3	60.1	85.5
VAR(2)	7.68	7.30	5.10	4.06	2.42	1.68	2.00	1.74	1.70	1.48
VAR(3)	5.24	2.98	1.68	0.70	0.34	1.58	0.90	0.52	0.30	0.18
Univ.	22.78	5.32	0.32	0.04	0.04	90.26	81.00	62.44	37.90	12.84
MSE	T=30	50	100	200	500	30	50	100	200	500
h=1	1.3336 (33.3%)	1.1118 (11.1%)	1.0251 (2.51%)	1.0252 (2.52%)	1.0029 (0.29%)	1.3648 (36.4%)	1.1910 (19.1%)	1.0802 (8.02%)	1.0412 (4.12%)	1.0059 (0.59%)
h=2	4.9396 (42.3%)	3.9691 (14.3%)	3.7730 (8.73%)	3.5741 (3%)	3.4420 (-0.8%)	3.6116 (55.0%)	3.0322 (30.1%)	2.7118 (16.3%)	2.4434 (4.86%)	2.3153 (-0.6%)
h=5	12.187 (50.4%)	9.6268 (18.8%)	8.9650 (10.6%)	8.5492 (5.51%)	8.3224 (2.71%)	14.749 (106.%)	11.267 (57.4%)	9.5935 (34.0%)	7.9269 (10.7%)	7.3791 (3.09%)
h=10	22.709 (50.8%)	18.456 (22.5%)	16.985 (12.8%)	15.981 (6.15%)	15.251 (1.31%)	47.705 (220%)	29.815 (100%)	22.275 (49.8%)	17.300 (16.3%)	15.598 (4.91%)

* Επιλεγμένο Μοντέλο για τη πρόβλεψη της y_{1t} .

& h δηλώνει τον ορίζοντα πρόβλεψης. Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ του MSE του κάθε μοντέλου με το MSE του VAR(1) μοντέλου με γνωστές παραμέτρους για τον ίδιο ορίζοντα πρόβλεψης.

B. Παράρτημα Κεφαλαίου 3

B.1 Απόδειξη της Πρότασης 3.1

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι στα πλαίσια του (2.1), $IRF_m(1) = a_{11}$.

Από την άλλη μεριά, $IRF_u(1) = a_{11} + a_{22} + \gamma_1$. Ομοίως, $IRF_m(2) = a_{11}^2 + a_{12}a_{21}$, ενώ

$IRF_u(2) = (a_{11} + a_{22})(\gamma_1 + a_{11} + a_{22}) - a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$ Καταλήγουμε σε παρόμοια

αποτελέσματα για $k > 2$. Άρα, γενικά έχουμε $IRF_u(k) \neq IRF_m(k)$.

B.2 Απόδειξη της Πρότασης 3.2

Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} IRF_m(k) - IRF_u(k) &= (2^{-1-k}((a_{11} + a_{22} - x)^k \\ &\quad - (a_{11} + a_{22} + x)^k)((-1 + a_{22}^2)\sigma_{11} - a_{12}^2\sigma_{22} + \\ &\quad + \sqrt{(\sigma_{11} + a_{22}^2\sigma_{11} + a_{12}^2\sigma_{22})^2 - 4a_{22}^2\sigma_{11}^2}) / (xa_{22}\sigma_{11}) \end{aligned}$$

ή εναλλακτικά:

$$\begin{aligned} IRF_m(k) - IRF_u(k) &= \left(\frac{1}{2}(\lambda_2^k - \lambda_1^k)\right)((-1 + a_{22}^2)\sigma_{11} - a_{12}^2\sigma_{22} + \\ &\quad + \sqrt{(\sigma_{11} + a_{22}^2\sigma_{11} + a_{12}^2\sigma_{22})^2 - 4a_{22}^2\sigma_{11}^2}) / (xa_{22}\sigma_{11}) \end{aligned}$$

όπου $x = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}$ και λ_1 και λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του A.³⁹ Είναι εύκολο

να δειχθεί ότι $\lambda_1 > |\lambda_2|$ ή $(\lambda_2^k - \lambda_1^k) < 0$ για κάθε πεπερασμένο k . Τότε, αυτό που μένει

³⁹ $\lambda_1 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}})$ και

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}})$.

να αποδειχθεί είναι ότι $((-1+a_{22}^2)\sigma_{11}-a_{12}^2\sigma_{22}+\sqrt{(\sigma_{11}+a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22})^2-4a_{22}^2\sigma_{11}^2})>0$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma_{11}+a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22})^2-4a_{22}^2\sigma_{11}^2} = \sqrt{(\sigma_{11}-a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22})^2+4a_{22}^2a_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22}} > \\ & > \sqrt{(\sigma_{11}-a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22})^2} = \sigma_{11}-a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22} . \end{aligned}$$

Άρα,

$$((-1+a_{22}^2)\sigma_{11}-a_{12}^2\sigma_{22}+\sqrt{(\sigma_{11}+a_{22}^2\sigma_{11}+a_{12}^2\sigma_{22})^2-4a_{22}^2\sigma_{11}^2})>0, \text{ το οποίο υπονοεί ότι}$$

$$\text{IRF}_u(k) \geq \text{IRF}_m(k) \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N} .$$

B.3 Απόδειξη του Λήμματος 3.1

Έχουμε ορίσει την $\text{IRF}_m(k)$ να είναι ίση με το πάνω αριστερά στοιχείο, $\phi_{11,k}$, του $\Phi_k = A^k$. Με τη βοήθεια του Λήμματος (3), έχουμε ότι ο Φ_k είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 \\ q_1 & a_{22}^k \end{bmatrix} \text{ όπου } q_1 \text{ είναι μια συνάρτηση των } a_{ij} . \text{ Άρα, } \text{IRF}_m(k) = a_{11}^k .$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι όταν $a_{12} = 0$, δηλαδή όταν η y_{2t} δεν προκαλεί κατά Granger

την y_{1t} , η μονομεταβλητή παραμετροποίηση της y_{1t} είναι το ακόλουθο AR(1) μοντέλο:

$$y_{1t} = a_{11} * y_{1t-1} + e_{1t}, \text{ που υπονοεί ότι } \text{IRF}_u(k) = a_{11}^k . \text{ Άρα, } \text{IRF}_u(k) = \text{IRF}_m(k) \text{ για κάθε } k .$$

B.4 Απόδειξη της Πρότασης 3.3

Είναι προφανές ότι $\text{IRF}_{m_0}(1) = a_{11} + a_{12} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$, που είναι γενικά διαφορετική από την

$$\text{IRF}_u(1) = a_{11} + a_{22} + \gamma_1 . \text{ Ομοίως, } \text{IRF}_{m_0}(2) = a_{11}^2 + a_{11}a_{12} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}, \text{ ενώ}$$

$\text{IRF}_u(2) = (a_{11} + a_{22})(\gamma_1 + a_{11} + a_{22}) - a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$. Παίρνουμε παρόμοια αποτελέσματα για $k > 2$. Άρα, γενικά $\text{IRF}_u(k) \neq \text{IRF}_{m_0}(k)$.

B.5 Απόδειξη του Λήμματος 3.2

Έχουμε ήδη δείξει ότι όταν $a_{12} = 0$, $\text{IRF}_u(k) = a_{11}^k$, $k \geq 0$. Επιπλέον, ο Φ_k είναι της

μορφής: $\begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 \\ q_1 & a_{22}^k \end{bmatrix}$ (βλέπε λήμμα 3) όπου q_1 είναι μια συνάρτηση των a_{ij} . Δεδομένου

ότι ο P είναι κάτω τριγωνικός, είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο $\Theta_k = \Phi_k P$ έχει την

ακόλουθη μορφή: $\Theta_k = \begin{bmatrix} a_{11}^k \sqrt{\sigma_{11}} & 0 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$ όπου q_1 και q_2 είναι συναρτήσεις των a_{ij} και

σ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Άρα, $\text{IRF}_{m_0}(k) = \frac{\theta_{11,k}}{\sqrt{\sigma_{11}}} = a_{11}^k = \text{IRF}_u(k)$.

C. Παράρτημα Κεφαλαίου 4

C.1 Πίνακες

Πίνακας C1
Ύπια Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_{12}=0.5$), Στάσιμο VAR.
Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση.

Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%						
A.Bandwidth=5	I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)					
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	63.1					
S*	63.5					
Q1	66.2	76.6	76.2	77.2	74.7	77.1
Q1*	66.2	76.6	76.2	77.2	74.7	77.1
II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)						
S	5.0					
S*	5.2					
Q1	7.4	6.8	6.8	7.0	6.8	6.7
Q1*	7.5	6.7	6.8	7.0	6.8	6.7
B.Bandwidth=50	I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)					
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	29.6					
S*	34.6					
Q1	38.7	58.7	53.8	61.3	51.0	56.4
Q1*	37.3	58.3	53.3	61.2	50.0	56.1
II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)						
S	3.7					
S*	5.3					
Q1	6.6	6.7	6.1	6.9	6.1	6.1
Q1*	6.2	6.8	6.1	6.8	6.0	6.2

Πίνακας C2
Ισχυρή Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_{12}=0.9$), Στάσιμο VAR.
Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση.

Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%

A.Bandwidth=5		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)				
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	98.3					
S*	98.3					
Q1	98.6	98.9	98.9	99.0	99.0	99.0
Q1*	98.6	98.9	98.9	99.0	99.0	99.0
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)				
S	4.0					
S*	4.0					
Q1	6.0	5.5	5.6	5.9	5.2	5.5
Q1*	6.0	5.6	5.6	5.9	5.2	5.5
B.Bandwidth=50		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)				
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	86.6					
S*	88.2					
Q1	89.6	98.1	97.0	98.3	95.4	97.7
Q1*	89.0	98.1	96.7	98.2	94.9	97.7
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)				
S	3.5					
S*	5.3					
Q1	6.2	6.4	6.2	6.9	5.6	6.8
Q1*	6.1	6.4	6.2	6.9	5.7	6.8

Πίνακας C3
Ισχυρή Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_{12}=0.9$), Συνολοκληρώσιμο VAR.
Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση.

Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%

A.Bandwidth=5		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)				
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	98.5					
S*	98.5					
Q1	98.7	99.1	99.1	99.1	99.2	99.1
Q1*	99.0	99.2	99.2	99.2	99.4	99.2
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)				
S	4.9					
S*	4.9					
Q1	6.9	6.9	7.0	6.5	7.0	6.6
Q1*	6.6	6.6	6.6	6.0	6.6	6.2
B.Bandwidth=50		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)				
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey
S	85.3					
S*	87.6					
Q1	89.6	97.0	95.5	97.4	94.3	96.2
Q1*	88.0	96.6	94.8	97.0	94.6	95.8
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)				
S	3.4					
S*	5.0					
Q1	6.1	5.9	5.7	5.7	5.6	5.9
Q1*	5.8	5.8	5.6	6.0	5.6	6.0

Πίνακας C4
Ήπια Αιτιότητα στο Μέσο ($\alpha_2=0.5$), Στάσιμο VAR, IGARCH.
Καμιά Αιτιότητα στη Διακύμανση.

Ποσοστό Απορρίψεων της Μηδενικής Υπόθεσης. Ονομαστικό Μέγεθος= 5%

A.Bandwidth=5		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)					
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey	
S	60.4						
S*	60.4						
Q1	64.2	73.4	72.4	73.8	70.8	73.6	
Q1*	64.2	73.4	72.2	73.8	70.8	73.4	
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)					
S	4.6						
S*	4.6						
Q1	6.8	7.2	7.2	7.0	7.4	7.0	
Q1*	6.8	7.2	7.2	7.0	7.4	7.0	
B.Bandwidth=50		I. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: ARMA(2,1)					
	truncated	Bartlett	Daniell	Parzen	QS	Tukey	
S	35.2						
S*	38.4						
Q1	41.2	59.6	54.4	60.6	51.6	57.2	
Q1*	40.2	59.6	53.8	60.8	51.4	56.6	
		II. Μοντέλο για το Δεσμευμένο Μέσο: Πρώτη Εξίσωση του VAR(1)					
S	3.2						
S*	5.2						
Q1	5.8	5.6	5.6	6.0	5.2	5.4	
Q1*	5.8	5.6	5.6	6.0	4.8	5.4	

D. Παράρτημα Κεφαλαίου 5

D.1 Πίνακες

Πίνακας D1:
Ιδιότητες Μεγέθους του «Trace» Τεστ (Κανονικά Σφάλματα)

	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)			Yap-Reinsel (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	5.0	5.3	5.0	4.9	5.1	4.9	4.6	4.6	4.6	4.3	4.4	4.4
T=200	4.8	4.9	4.8	4.7	4.9	4.7	4.7	4.8	4.7	4.6	4.7	4.6

Πίνακας D2:
«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS (Κανονικά Σφάλματα)*

T \ λ_{\max}	50	200
0.70	91.0	100.0
0.74	85.2	100.0
0.78	72.5	100.0
0.82	59.7	100.0
0.86	42.1	100.0
0.90	26.8	99.7
0.94	14.2	84.9
0.98	6.0	20.7

Πίνακας D3:
Διαφορά μεταξύ του $TMAPB^{JOH}$ και του $TMAPB^{OLS}$ ως ποσοστό του $TMAPB$ του Βέλτιστου Εκτιμητή (Κανονικά Σφάλματα)

T \ λ_{\max}	50	200
0.70	68.7	200.2
0.74	49.5	158.7
0.78	37.8	127.6
0.82	25.1	89.8
0.86	13.2	54.0
0.90	6.8	25.5
0.94	2.3	10.2
0.96	-0.5	0.2
0.98	-0.4	-0.1

* Ο βαθμός του VAR μοντέλου επιλέγεται με το SIC.

Πίνακας D4:
FCI, Κανονικά Σφάλματα[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.2 (0.0)	2.8 (0.0)	2.7 (0.1)	4.5 (0.1)	4.4 (0.0)	4.9 (0.0)	5.6 (0.0)	5.3 (0.0)	5.3 (0.0)	5.5 (0.0)
0.74	1.5 (0.0)	2.2 (-0.1)	3.0 (0.0)	4.8 (0.0)	5.8 (0.0)	6.5 (0.0)	6.8 (0.0)	6.8 (0.0)	6.8 (0.0)	8.5 (0.0)
0.78	1.7 (0.0)	4.5 (0.0)	5.3 (0.0)	7.8 (0.0)	9.4 (0.0)	10.3 (0.0)	11.8 (0.0)	11.9 (0.0)	12.5 (0.0)	12.6 (0.0)
0.82	1.6 (0.0)	3.7 (0.0)	7.0 (0.0)	8.0 (0.0)	10.2 (0.0)	12.3 (0.0)	12.7 (0.0)	13.3 (0.0)	15.3 (0.0)	16.0 (0.0)
0.86	2.4 (0.0)	4.0 (0.0)	6.0 (0.0)	8.3 (0.0)	10.2 (0.0)	11.3 (0.0)	13.4 (0.0)	15.9 (0.0)	17.0 (0.0)	19.2 (0.0)
0.90	1.9 (0.1)	3.1 (0.0)	5.1 (0.1)	5.9 (0.1)	7.9 (0.3)	8.3 (0.2)	10.6 (0.1)	12.2 (0.4)	13.2 (0.4)	13.4 (0.4)
0.94	0.3 (0.3)	1.0 (0.7)	2.3 (1.3)	1.9 (1.5)	3.3 (1.7)	4.8 (2.2)	6.5 (2.4)	5.9 (3.2)	8.0 (4.6)	8.6 (4.9)
0.98	-0.8 (0.3)	-1.9 (0.4)	-2.8 (0.6)	-1.8 (1.4)	-2.9 (2.5)	-4.2 (1.7)	-4.3 (2.5)	-3.9 (2.8)	-4.7 (3.6)	-5.1 (3.3)
1.00	0.2 (0.1)	0.1 (0.1)	0.6 (0.3)	1.0 (0.4)	1.0 (0.3)	1.5 (0.7)	1.5 (0.7)	1.6 (0.6)	1.3 (0.3)	1.2 (0.4)

Πίνακας D5:
Επιλογή του Βαθμού του VAR Μοντέλου

Σφάλματα Στάσιμα 4ης Τάξης						
	AIC			SIC		
	k=1	k=2	k>2	k=1	k=2	k>2
T=50	74.7	15.0	10.3	97.9	2.0	0.1
T=200	71.3	19.4	9.4	98.7	1.3	0.0
Σφάλματα Στάσιμα 2ης Τάξης						
	AIC			SIC		
	k=1	k=2	k>2	k=1	k=2	k>2
T=50	71.2	16.0	12.9	96.6	3.0	0.3
T=200	57.3	20.4	22.4	95.5	3.6	1.0
IGARCH Σφάλματα						
	AIC			SIC		
	k=1	k=2	k>2	k=1	k=2	k>2
T=50	70.0	15.3	14.7	95.9	3.6	0.6
T=200	43.6	20.9	35.5	91.3	6.8	2.0
t(2) Σφάλματα						
	AIC			SIC		
	k=1	k=2	k>2	k=1	k=2	k>2
T=50	80.9	9.7	9.4	97.9	1.5	0.6
T=200	87.2	7.1	5.7	99.4	0.4	0.2

[&] T=50 και 200 (στις παρενθέσεις). Ο βαθμός του VAR μοντέλου επιλέγεται με το SIC και η τάξη συνολοκλήρωσης με το TRS.

Πίνακας D6:
Εμπειρικό Μέγεθος των Τεστ Συνολοκλήρωσης

Σφάλματα Στάσιμα 4ης Τάξης												
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)			Yap-Reinsel (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	5.7	6.2	5.9	5.7	6.1	5.8	5.2	5.3	5.4	5.0	5.2	5.2
T=200	5.5	5.6	5.4	5.4	5.5	5.4	5.3	5.2	5.3	5.3	5.2	5.2
Σφάλματα Στάσιμα 2ης Τάξης												
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)			Yap-Reinsel (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	6.8	7.2	6.9	6.8	7.1	6.9	6.4	6.2	6.3	5.9	5.8	5.9
T=200	6.5	6.1	6.5	6.5	6.1	6.4	6.4	5.9	6.4	6.3	5.9	6.3
IGARCH Σφάλματα												
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)			Yap-Reinsel (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	8.1	8.7	8.2	7.9	8.4	8.1	7.4	7.3	7.5	7.0	7.0	7.1
T=200	8.6	8.0	8.5	8.6	8.0	8.5	8.5	7.5	8.3	8.4	7.5	8.2
t(2) Σφάλματα												
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)			Yap-Reinsel (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	4.2	4.4	4.2	4.1	4.2	4.1	3.7	3.6	3.7	3.5	3.4	3.4
T=200	4.0	3.9	4.0	4.0	3.9	4.0	3.9	3.8	3.9	3.9	3.7	3.9

Πίνακας D7:
«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS
Τμήμα A: T=50

λ_{max}	Σφάλματα Στάσιμα 4ης Τάξης			Σφάλματα Στάσιμα 2ης Τάξης			IGARCH Σφάλματα			t(2) Σφάλματα		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
0.70	87.0	83.2	86.6	83.8	79.0	83.6	76.5	68.7	75.6	94.4	91.8	94.2
0.74	81.4	77.2	80.5	76.5	71.8	76.4	69.4	62.8	68.3	88.8	86.2	88.7
0.78	69.1	64.3	68.0	64.4	59.8	64.3	57.8	51.6	56.9	80.0	77.3	80.0
0.82	56.4	52.4	55.5	52.7	48.8	53.0	46.6	41.3	46.0	64.2	62.4	64.6
0.86	41.4	39.3	40.7	38.0	34.8	38.0	33.2	29.9	32.4	44.2	43.2	44.8
0.90	26.0	24.3	25.6	23.8	22.8	24.1	22.7	20.8	22.6	26.2	25.8	26.4
0.94	14.6	13.8	14.1	14.2	13.2	14.5	12.6	11.5	12.4	14.5	15.0	14.8
0.98	7.3	7.0	7.2	7.2	7.1	7.3	7.2	6.8	7.3	6.5	6.8	6.6

Τμήμα B: T=200

λ_{max}	Σφάλματα Στάσιμα 4ης Τάξης			Σφάλματα Στάσιμα 2ης Τάξης			IGARCH Σφάλματα			t(2) Σφάλματα		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
0.70	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	99.9	99.8	99.8	100.0	100.0	100.0
0.74	100.0	100.0	100.0	99.9	99.9	99.9	99.8	99.6	99.8	100.0	100.0	100.0
0.78	100.0	100.0	100.0	100.0	99.8	99.9	99.6	99.6	99.7	99.9	99.9	99.9
0.82	100.0	99.9	100.0	99.9	99.8	99.9	99.3	99.3	99.3	99.9	99.9	99.9
0.86	99.9	99.8	99.9	99.3	99.2	99.3	98.4	98.1	98.1	99.8	99.8	99.8
0.90	98.8	98.9	98.8	96.5	96.5	96.6	90.4	92.1	90.7	99.7	99.5	99.7
0.94	80.7	80.3	81.1	74.7	73.8	74.6	61.9	65.5	62.2	88.7	88.5	88.9

0.98 | 19.3 19.3 19.5 | 18.9 18.5 19.0 | 17.0 18.2 17.1 | 21.5 21.7 21.5

Πίνακας D8:
Διαφορά μεταξύ TMAPB^{JOH} και TMAPB^{OLS} ως Ποσοστό του TMAPB του Βέλτιστου
Εκτιμητή

T λ _{max}	Σφάλματα Στάσιμα 4ης Τάξης		Σφάλματα Στάσιμα 2ης Τάξης		IGARCH Σφάλματα		t(2) Σφάλματα	
	50	200	50	200	50	200	50	200
0.70	59.6	157.8	58.4	136.0	52.2	116.1	96.0	293.7
0.74	43.9	130.9	43.6	108.7	40.5	89.4	77.6	252.1
0.78	32.5	96.7	31.4	79.0	29.2	66.1	59.8	204.4
0.82	21.2	66.8	22.4	54.4	19.2	44.0	39.8	156.0
0.86	13.2	39.9	12.9	32.9	13.8	28.0	27.3	108.8
0.90	7.3	21.5	6.5	18.2	5.1	13.8	12.8	63.0
0.94	2.3	6.4	1.0	8.6	3.2	5.3	4.2	26.0
0.98	0.3	0.6	-0.3	0.7	-0.1	0.5	-3.3	1.8
1.00	-1.1	-0.1	-2.0	-0.2	-1.0	0.4	-5.0	-2.1

Πίνακας D9:
FCI, Σφάλματα Στάσιμα 4^{ης} Τάξης &
Οριζοντας Πρόβλεψης

λ _{max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.5 (0.0)	2.5 (0.0)	3.6 (-0.1)	5.2 (0.1)	6.3 (0.0)	7.6 (0.0)	8.0 (0.1)	7.7 (0.0)	9.6 (0.0)	8.1 (-0.1)
0.74	1.2 (0.1)	2.4 (0.0)	4.3 (0.0)	6.6 (0.0)	7.7 (-0.1)	8.7 (0.0)	9.2 (-0.1)	8.9 (0.0)	10.6 (0.0)	11.2 (0.0)
0.78	1.9 (0.0)	5.2 (0.0)	6.9 (0.0)	7.6 (-0.1)	9.7 (0.1)	12.0 (0.1)	14.2 (0.0)	14.7 (0.0)	14.1 (0.1)	14.9 (0.1)
0.82	2.3 (0.0)	5.1 (0.3)	7.5 (0)	10.0 (-0.2)	12.2 (-0.1)	14.6 (0.0)	15.4 (0.0)	17.7 (-0.1)	20.8 (0.0.0)	19.8 (0)
0.86	1.7 (0.0)	4.2 (-0.1)	7.6 (0.0)	8.2 (0.1)	10.3 (0.1)	12.7 (0.1)	14.4 (0.1)	16.6 (0.0)	17.4 (0.2)	18.5 (0.1)
0.90	1.1 (0.2)	3.1 (0.2)	3.5 (0.5)	6.9 (0.3)	8.8 (0.4)	11.4 (0.2)	13.7 (0.7)	12.8 (0.8)	13.3 (0.5)	15.6 (0.3)
0.94	1.2 (0.4)	1.1 (0.8)	2.9 (1.5)	3.7 (2.1)	4.4 (2.8)	5.0 (2.4)	6.7 (3.1)	5.9 (4.5)	7.3 (4.3)	8.2 (5.3)
0.98	-0.7 (0.8)	-1.8 (1.1)	-1.9 (1.3)	-2.8 (2.4)	-4.0 (3.0)	-5.9 (3.7)	-5.3 (3.3)	-4.8 (4.5)	-5.6 (4.8)	-6.1 (4.8)
1.00	0.9 (0.2)	1.4 (0.7)	2.1 (0.8)	2.3 (1.0)	1.9 (0.8)	2.7 (0.7)	2.0 (0.6)	2.4 (0.4)	2.2 (1.2)	2.7 (1.0)

& Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D10:
FC1, Σφάλματα Στάσιμα 2^{ης} Τάξης[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	2.0 (0.2)	3.0 (-0.1)	4.7 (0.1)	5.7 (0.2)	6.7 (0.4)	7.4 (0.2)	7.8 (0.0)	8.6 (0.0)	10.5 (0.0)	9.9 (0.0)
0.74	0.9 (0.3)	3.5 (0.3)	4.2 (0.4)	6.6 (0.4)	7.2 (0.1)	9.3 (0.2)	9.2 (0.0)	9.4 (-0.1)	9.3 (0.0)	12.1 (0.1)
0.78	2.6 (0.4)	5.3 (0.2)	6.6 (0.2)	7.5 (0.1)	10.9 (0.2)	12.6 (-0.1)	14.1 (-0.1)	14.0 (0.0)	16.8 (-0.3)	17.2 (0.0)
0.82	1.7 (0.3)	5.1 (0.1)	8.5 (0.8)	8.6 (0.1)	11.3 (0.1)	12.4 (0.4)	14.5 (0.2)	15.3 (0.3)	16.1 (0.0)	17.7 (0.0)
0.86	3.0 (0.2)	5.6 (0.3)	6.3 (0.2)	8.4 (0.1)	9.8 (0.2)	12.2 (0.3)	13.9 (0.2)	14.1 (0.2)	15.3 (0.1)	15.6 (0.3)
0.90	1.7 (0.4)	3.4 (0.6)	6.2 (0.7)	7.2 (0.8)	9.3 (1.1)	11.1 (1.5)	11.9 (1.4)	13.3 (1.2)	12.7 (1.1)	14.3 (1.2)
0.94	0.2 (1.0)	0.6 (1.8)	2.7 (1.5)	4.0 (2.8)	3.9 (3.0)	4.7 (3.6)	5.6 (4.8)	7.6 (4.3)	5.6 (5.4)	7.4 (5.5)
0.98	0.2 (0.3)	-1.8 (1.8)	-2.6 (0.5)	-3.9 (1.1)	-5.8 (1.4)	-7.1 (2.6)	-5.1 (3.6)	-5.0 (3.6)	-7.2 (3.7)	-7.6 (4.1)
1.00	1.5 (0.9)	2.6 (1.2)	3.2 (1.8)	3.6 (1.8)	3.0 (2.4)	3.6 (2.2)	2.7 (1.3)	2.2 (1.5)	3.3 (2.2)	3.8 (2.4)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D11:
FC1, IGARCH Σφάλματα[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	2.7 (0.2)	3.1 (0.5)	5.8 (0.1)	7.2 (0.0)	9.7 (0.0)	9.5 (0.1)	10.4 (0.4)	10.4 (0.4)	11.7 (-0.1)	12.3 (0.1)
0.74	1.9 (0.7)	4.4 (0.7)	5.4 (0.3)	7.0 (1.1)	9.2 (-0.2)	9.8 (0.1)	13.4 (0.2)	11.3 (0.1)	11.9 (0.1)	12.6 (0.1)
0.78	3.0 (0.3)	6.7 (1.0)	6.3 (0.7)	9.5 (0.6)	11.8 (0.2)	16.1 (0.6)	15.3 (0.4)	17.7 (0.1)	18.8 (0.1)	18.4 (0.0)
0.82	3.4 (0.1)	5.3 (0.9)	8.8 (-0.3)	11.4 (0.5)	14.9 (0.0)	15.3 (-0.1)	18.0 (0.2)	18.8 (0.0)	21.5 (-0.8)	23.0 (-0.4)
0.86	1.5 (0.4)	6.1 (0.4)	6.4 (0.4)	8.3 (0.4)	9.2 (0.1)	12.4 (0.1)	15.1 (0.2)	13.0 (0.1)	16.2 (0.2)	16.7 (0.3)
0.90	3.0 (0.7)	3.7 (1.2)	6.5 (2.0)	8.3 (1.8)	9.5 (2.1)	11.0 (1.4)	11.0 (1.9)	14.7 (1.3)	16.0 (1.7)	18.4 (1.4)
0.94	1.3 (0.9)	1.4 (2.5)	2.7 (3.7)	1.9 (3.4)	1.2 (5.0)	2.6 (5.3)	4.6 (6)	6.2 (5.6)	6.5 (6.6)	6.1 (7.3)
0.98	-0.9 (1.3)	-2.6 (2.2)	-3.1 (2.6)	-5.6 (2.6)	-6.4 (1.7)	-6.9 (4.1)	-7.8 (4.7)	-7.7 (5.2)	-7.8 (5.9)	-8.8 (5.5)
1.00	2.0 (1.2)	2.6 (3.1)	4.8 (3.1)	3.9 (3.5)	4.5 (4.6)	4.5 (4.7)	4.6 (5.1)	4.2 (5.0)	4.4 (5.3)	4.9 (4.3)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D12:
FC1, t(2) Σφάλματα[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	2.4 (0.3)	3.8 (0.3)	5.4 (0.1)	4.9 (0.0)	5.8 (0.0)	7.2 (0.1)	8.2 (0.1)	7.4 (0.1)	7.4 (0.1)	8.6 (0.0)
0.74	3.4 (0.1)	5.7 (-0.1)	7.9 (0.1)	8.6 (-0.1)	11.6 (0.0)	10.8 (0.0)	12.4 (0.0)	12.6 (0.0)	12.9 (0.0)	10.8 (0.0)
0.78	5.0 (0.3)	7.5 (0.0)	8.8 (0.0)	11.3 (0.1)	14.0 (0.0)	17.6 (0.1)	16.2 (-0.1)	18.8 (-0.1)	18.4 (0.0)	17.7 (0.0)
0.82	5.9 (0.1)	9.3 (0.1)	10.7 (0.0)	13.8 (0.2)	15.8 (0.0)	17.4 (0.0)	19.9 (0.0)	21.0 (0.1)	22.8 (0.0)	23.7 (0.1)
0.86	6.2 (0.3)	8.9 (0.4)	13.5 (0.3)	13.9 (0.0)	17.5 (0.1)	19.0 (0.1)	20.0 (0.2)	21.5 (0.2)	22.8 (0.2)	23.9 (0.1)
0.90	5.3 (0.7)	7.7 (0.3)	10.8 (0.3)	10.7 (0.2)	12.5 (0.7)	15.4 (0.4)	17.0 (0.4)	19.4 (0.5)	20.0 (0.6)	19.8 (0.5)
0.94	3.4 (0.9)	5.1 (2.9)	5.2 (3.5)	6.6 (3.7)	6.5 (4.6)	8.4 (4.8)	7.8 (5.7)	11.7 (6.0)	12.5 (6.8)	13.0 (7.1)
0.98	-1.1 (1.3)	-3.4 (1.2)	-3.1 (3.8)	-4.3 (3.0)	-3.8 (4.4)	-4.3 (4.5)	-3.4 (4.6)	-3.7 (5.5)	-4.9 (5.8)	-5.6 (6.2)
1.00	0.8 (0.5)	1.5 (0.2)	1.9 (0.5)	2.0 (0.2)	1.7 (0.8)	2.3 (0.5)	1.9 (0.8)	1.8 (0.6)	1.4 (1.0)	1.7 (1.0)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D13:
Ιδιότητες Μεγέθους του «Trace» Τεστ

Τμήμα Α: Κανονικά Σφάλματα									
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	4.9	7.1	5.1	4.8	6.4	4.9	3.7	4.6	3.8
T=200	4.8	5.4	4.8	4.8	5.3	4.8	4.7	5.1	4.7

Τμήμα Β: Σφάλματα Στάσιμα 4^{ης} Τάξης									
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	6.8	9.4	7.4	6.7	8.2	7.1	5.5	6.3	5.8
T=200	5.8	6.1	5.7	5.8	6.0	5.7	5.4	5.5	5.3

Τμήμα Γ: Σφάλματα Στάσιμα 2^{ης} Τάξης									
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	7.6	11.0	8.3	7.2	9.6	7.7	6.0	6.9	6.4
T=200	8.2	8.5	8.3	8.1	8.1	8.2	7.9	7.6	7.9

Τμήμα Δ: IGARCH Σφάλματα									
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	8.5	11.8	9.5	8.3	10.2	9.1	7.1	8.0	7.7
T=200	10.3	9.6	10.3	10.5	9.4	10.4	9.9	8.5	9.8

Τμήμα Ε: t(2) Σφάλματα									
	Johansen (Asymptotic)			Johansen (Small Sample)			Reinsel-Ahn (Small Sample)		
	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC	Known	AIC	SIC
T=50	4.4	6.8	4.6	4.2	5.8	4.4	3.2	3.9	3.4
T=200	4.3	4.7	4.3	4.4	4.7	4.4	4.1	4.5	4.1

Πίνακας D14:
«Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του TRS*

λ_{\min}	Κανονικά Σφάλματα		Σφάλματα Στάσιμα 4 ^{ης} Τάξης		Σφάλματα Στάσιμα 2 ^{ης} Τάξης		IGARCH Σφάλματα		t(2) Σφάλματα	
	T=50	T=200	T=50	T=200	T=50	T=200	T=50	T=200	T=50	T=200
0.70	46.2	82.0	42.1	82.7	57.3	82.7	54.1	81.9	36.9	83.7
0.74	34.1	82.2	32.7	81.9	47.8	82.4	45.0	81.5	27.1	83.9
0.78	24.0	81.7	23.8	82.1	38.7	82.1	38.9	82.2	21.1	82.4
0.82	15.5	82.5	15.6	81.4	26.5	81.4	27.6	79.7	16.2	83.7
0.86	10.1	80.0	10.4	77.6	18.0	78.5	19.6	73.0	12.2	79.1
0.90	6.1	56.7	6.1	57.5	10.4	62.3	12.2	56.4	9.0	59.6
0.94	4.2	21.2	4.9	24.2	6.5	29.5	7.2	27.5	6.8	29.4
0.96	4.1	11.4	3.5	13.2	5.8	17.0	5.6	16.7	6.2	18.9
0.98	3.5	4.6	3.5	5.3	4.2	5.2	4.1	6.6	4.4	8.5

Πίνακας D15:
FC2, Κανονικά Σφάλματα[&]

λ_{\max}	Οριζόντιες Πρόβλεψη									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.6 (0.1)	2.5 (0.1)	2.9 (0.2)	3.4 (0.3)	3.3 (0.6)	3.2 (0.7)	2.7 (0.7)	2.9 (0.9)	3.3 (1.0)	2.9 (0.6)
0.74	1.6 (0.1)	2.0 (0.3)	2.4 (0.3)	1.8 (0.6)	1.8 (0.3)	2.9 (0.7)	2.8 (0.5)	2.8 (0.8)	2.4 (0.8)	2.6 (0.7)
0.78	0.4 (0.1)	1.3 (0.3)	1.8 (0)	2.9 (0.3)	1.2 (0.3)	2.3 (0.3)	3.2 (0.4)	3.3 (0.5)	3.3 (0.7)	3.2 (0.6)
0.82	0.2 (0.1)	0.4 (0.0)	0.4 (0.1)	0.0 (0.3)	0.5 (0.2)	0.3 (0.3)	1.3 (0.4)	1.2 (0.4)	1.7 (0.6)	1.9 (1.0)
0.86	-0.2 (0.0)	-2.0 (0.1)	-1.7 (0.5)	-1.7 (0.7)	-1.6 (0.8)	-1.7 (0.5)	-1.7 (0.5)	-1.1 (0.6)	-1.3 (0.8)	-1.2 (0.6)
0.90	-0.6 (0.1)	-1.8 (0.5)	-2.4 (0.1)	-3.1 (0.6)	-3.2 (0.7)	-4.0 (0.8)	-4.1 (0.5)	-3.6 (1.4)	-2.5 (1.6)	-3.3 (1.8)
0.94	-2.1 (0.3)	-4.6 (-0.5)	-4.5 (0.4)	-5.3 (-0.3)	-5.0 (-0.2)	-5.7 (-0.3)	-6.6 (0.6)	-6.8 (1.1)	-6.5 (1.2)	-6.2 (0.3)
0.98	-2.8 (0.1)	-5.1 (-1.1)	-5.9 (-1.1)	-6.7 (-2.1)	-7.0 (-2.4)	-6.5 (-2.2)	-7.5 (-3.1)	-8.0 (-3.0)	-8.2 (-2.5)	-9.4 (-2.7)
1.00	0.6 (0.1)	0.5 (0.1)	0.5 (0.1)	0.5 (0.4)	0.5 (0.6)	0.7 (0.7)	0.5 (0.5)	0.9 (0.7)	1.0 (0.6)	1.3 (0.4)

* Ο βαθμός του VAR μοντέλου επιλέγεται με το SIC.

& Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D16:
FC2, Σφάλματα Στάσιμα 4^{ης} Τάξης[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.3 (0.3)	2.3 (0.1)	2.8 (0.4)	2.8 (0.2)	3.1 (0.7)	2.8 (0.8)	3.0 (0.8)	3.5 (0.6)	3.3 (0.9)	1.7 (1.1)
0.74	1.3 (0.1)	2.6 (0.1)	2.5 (0.5)	3.0 (0.1)	2.4 (0.2)	2.5 (0.8)	2.4 (0.9)	2.8 (1.4)	2.5 (0.9)	2.4 (1.0)
0.78	0.3 (0.1)	1.2 (0.4)	1.6 (0.7)	2.6 (0.3)	2.3 (0.6)	2.4 (0.9)	2.5 (1.1)	2.8 (1.4)	3.0 (1.0)	2.9 (1.2)
0.82	-0.6 (0.1)	0.4 (0)	1.0 (0.5)	0.9 (0.2)	1.4 (0.2)	1.5 (0.5)	2.4 (0.8)	2.7 (0.4)	2.3 (1.5)	2.6 (1.1)
0.86	-0.6 (0.7)	-1.6 (0.8)	-1.5 (0.8)	-0.1 (1.2)	0.3 (1)	-0.8 (1.2)	0.0 (1.3)	-1.2 (1.1)	-0.6 (1.8)	-0.5 (1.3)
0.90	-1.5 (0.9)	-3.5 (0.4)	-2.9 (0.7)	-3.2 (1.6)	-4.0 (1.8)	-4.5 (1.8)	-4.5 (1.0)	-3.9 (2.2)	-4.7 (2.3)	-5.0 (2.1)
0.94	-2.5 (0.1)	-3.6 (-0.5)	-5.9 (-0.2)	-5.8 (-0.1)	-7.3 (0.6)	-6.9 (0.5)	-7.4 (0.7)	-8.0 (1.2)	-7.3 (0.3)	-8.0 (1.1)
0.98	-3.1 (-0.2)	-6.0 (-1.3)	-8.3 (-1.5)	-8.1 (-2.6)	-9.2 (-2.9)	-8.6 (-3.1)	-10.1 (-2.8)	-9.5 (-4.5)	-9.1 (-4.1)	-10.1 (-4.6)
1.00	0.8 (0.3)	2.0 (0.9)	1.9 (0.7)	2.6 (0.9)	2.6 (1.1)	2.1 (0.9)	3.1 (1.1)	2.7 (1.2)	2.4 (1.2)	2.2 (1.3)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D17:
FC2, Σφάλματα Στάσιμα 2^{ης} Τάξης[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.4 (0.8)	1.7 (0.5)	2.4 (0.7)	2.6 (1.4)	2.7 (1.7)	4.0 (1.3)	3.7 (1.8)	3.2 (1.7)	2.3 (2.2)	2.9 (1.8)
0.74	1.5 (0.4)	3.6 (0.6)	4.6 (0.2)	3.7 (1.0)	3.5 (1.5)	4.9 (2.5)	4.4 (2.1)	4.9 (1.9)	3.4 (2.0)	3.0 (2.0)
0.78	1.0 (0.9)	1.2 (0.6)	2.3 (1.5)	2.1 (1.1)	2.6 (1.3)	3.7 (1.1)	4.3 (1.5)	3.4 (1.1)	3.5 (1.3)	3.5 (1.2)
0.82	0.7 (0.5)	0.5 (1.1)	1.5 (0.5)	2.0 (1.0)	0.9 (1.4)	1.9 (0.9)	1.8 (1.4)	1.5 (1.1)	1.6 (1.8)	1.8 (1.5)
0.86	0.3 (0.8)	-0.4 (1.2)	0.4 (1.5)	0.5 (1.4)	-0.5 (1.9)	-0.4 (2.2)	-1.1 (2.3)	-0.8 (2.1)	0.1 (1.7)	0.0 (2.6)
0.90	-0.9 (0.4)	-2.0 (1.9)	-3.5 (1.5)	-1.5 (1.7)	-2.6 (2.3)	-2.8 (2.1)	-4.3 (1.9)	-2.7 (2.3)	-3.6 (2.2)	-3.2 (2.7)
0.94	-0.7 (0.5)	-3.9 (1.0)	-5.6 (1.0)	-5.8 (0.4)	-6.9 (1.5)	-9.6 (0.9)	-9.0 (0.8)	-9.3 (1.2)	-9.1 (1.1)	-8.0 (1.1)
0.98	-2.3 (-0.4)	-6.3 (-1.3)	-7.9 (-2.0)	-9.7 (-2.3)	-10.0 (-3.1)	-10.8 (-2.6)	-11.0 (-3.3)	-12.1 (-3.1)	-11.7 (-4.8)	-11.7 (-5.0)
1.00	2.3 (0.9)	4.0 (1.8)	3.2 (1.6)	3.2 (1.7)	2.9 (2.5)	2.7 (2.5)	4.3 (3.0)	2.2 (2.0)	2.3 (2.0)	2.3 (2.8)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D18:
FC2, IGARCH Σφάλματα[&]

λ_{\max}	Ορίζοντας Πρόβλεψης									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	1.6 (1.2)	2.2 (1.3)	3.5 (1.9)	3.5 (1.9)	3.6 (2.0)	4.1 (1.5)	3.6 (1.9)	3.9 (1.7)	3.7 (2.1)	3.9 (1.8)
0.74	3.0 (1.4)	2.9 (1.7)	4.2 (2.5)	2.9 (2.6)	4.2 (4.4)	3.5 (4.0)	3.5 (3.6)	4.5 (3.7)	2.8 (2.7)	3.1 (3.9)
0.78	2.6 (1.9)	2.2 (2.0)	3.8 (2.4)	2.9 (1.8)	2.8 (3.1)	4.2 (3.2)	5.2 (3.5)	3.9 (3.0)	3.2 (2.8)	3.1 (3.3)
0.82	0.0 (1.1)	0.4 (1.0)	1.7 (2.0)	2.0 (1.8)	1.7 (1.9)	2.8 (1.8)	1.5 (1.1)	1.3 (2.1)	2.2 (1.8)	1.7 (1.4)
0.86	0.9 (1.7)	0.8 (2.1)	-0.7 (2.5)	-1.3 (3)	-1.1 (3.6)	-2.2 (2.4)	-1.7 (2.2)	-2.7 (2.4)	-1.3 (2.4)	-2.1 (2.3)
0.90	-0.5 (1.8)	-1.0 (2.5)	-0.9 (1.9)	-2.5 (2.9)	-2.0 (4.1)	-3.2 (3.2)	-1.9 (3.8)	-2.8 (3.6)	-3.4 (3.5)	-4.0 (3.6)
0.94	-2.4 (0.5)	-4.6 (0.4)	-5.1 (1.1)	-4.8 (0.4)	-4.7 (0.9)	-5.9 (1.1)	-6.0 (0.6)	-6.2 (0.8)	-6.5 (0.8)	-5.5 (0.7)
0.98	-4.4 (-0.4)	-5.9 (-1.3)	-7.5 (-2.0)	-10.1 (-2.8)	-10.9 (-4.8)	-10.5 (-5.1)	-12.6 (-4.2)	-12.5 (-6)	-13.5 (-5.7)	-14.2 (-5.5)
1.00	3.1 (1.9)	3.0 (2.8)	4.0 (3.7)	3.7 (4.1)	3.6 (4.3)	4.7 (4.3)	4.8 (4.9)	4.6 (4.9)	3.2 (5.0)	3.5 (5.7)

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D19:
FC2, t(2) Σφάλματα[&]

Ορίζοντας Πρόβλεψης										
λ_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.70	3.6 (0.6)	5.4 (0.5)	6.7 (0.3)	6.2 (0.6)	5.3 (0.5)	5.2 (0.6)	6.3 (0.8)	5.4 (0.9)	5.8 (0.7)	5.8 (0.8)
0.74	4.1 (0.6)	4.6 (0.2)	5.3 (0.6)	5.9 (0.2)	5.1 (0.4)	6.1 (0.8)	6.2 (0.7)	4.8 (0.5)	5.1 (0.9)	4.9 (0.5)
0.78	1.7 (0.4)	2.1 (0.9)	2.5 (0.9)	4.0 (0.6)	3.6 (0.6)	3.3 (1.3)	4.1 (1.1)	3.7 (1.3)	4.7 (1.4)	5.1 (1.2)
0.82	0.5 (0.4)	0.1 (0.6)	1.4 (0.6)	0.4 (0.6)	1.4 (0.9)	2.2 (0.8)	2.2 (1.2)	1.0 (1.0)	2.0 (1.0)	2.0 (1.2)
0.86	-1.7 (0.9)	0.5 (1.3)	-1.7 (0.9)	-0.6 (1.3)	-0.6 (1.1)	-0.2 (1.3)	-0.5 (1.2)	0.9 (1.3)	0.7 (1.2)	1.2 (1.6)
0.90	-3.0 (2.4)	-4.0 (2.3)	-4.0 (2.9)	-3.0 (3.6)	-3.7 (3.7)	-3.1 (3.4)	-2.6 (3.9)	-4.2 (3.8)	-3.9 (4.0)	-3.8 (4.0)
0.94	-4.1 (1.8)	-5.7 (2.1)	-6.3 (2.8)	-7.3 (2.3)	-5.9 (2.7)	-5.8 (3.7)	-5.5 (3.5)	-5.8 (4.0)	-4.6 (4.1)	-6.1 (5.1)
0.98	-8.6 (-1.9)	-10.5 (-3.3)	-11.5 (-4.1)	-12.6 (-3.0)	-12.1 (-4.2)	-12.2 (-3.5)	-12.2 (-4)	-12.4 (-3.5)	-13.0 (-3.9)	-12.7 (-4.7)
1.00	1.9 (0.5)	1.3 (0.7)	1.3 (0.8)	1.6 (0.9)	1.3 (1.2)	0.8 (1.3)	1.3 (0.6)	1.5 (1.0)	1.2 (1.3)	1.6 (1.2)

Πίνακας D20:
10% IQR της Άσκησης Πρόβλεψης Εκτός-Δείγματος (Περίοδος A)

Ορίζοντας Πρόβλεψης	VAR	RR	% Διαφορά
1	0.865	0.883	2.163
2	1.423	1.491	4.825
3	1.886	1.960	3.952
4	2.401	2.438	1.578
5	2.774	2.883	3.950
6	3.105	3.249	4.656
7	3.643	3.759	3.167
8	4.037	4.053	0.394
9	4.326	4.486	3.706
10	4.745	5.038	6.178

[&] Βλέπε την υποσημείωση (&) του Πίνακα D4.

Πίνακας D21:
10% IQR της Άσκησης Πρόβλεψης Εκτός-Δείγματος (Περίοδος Β)

Ορίζοντας Πρόβλεψης	FD	RR	% Διαφορά
1	0.462	0.479	-7.306
2	0.736	0.724	2.290
3	1.036	0.989	4.783
4	1.258	1.254	0.259
5	1.456	1.455	0.029
6	1.636	1.613	0.866
7	1.768	1.796	-0.878
8	1.962	1.954	0.203
9	2.140	2.064	1.782
10	2.276	2.253	0.446

Ε. Παράρτημα Κεφαλαίου 6

Ε.1 Απόδειξη της Πρότασης 6.1

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} E[(h_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$. Άρα, $R1 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$. Δεδομένου ότι και το $E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ και το $E[(h_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$ είναι θετικά ορισμένα εξ'ορισμού, η πρόταση θα έχει αποδειχθεί αν δείξουμε ότι το $E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση της s .

$$\begin{aligned} E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] - E[(h_{t+s-1}^2 - \hat{h}_{t+s-1}^2)^2] &= \\ &= (a+b)^{2(s-2)} \left\{ \frac{k_2-1}{k_2} a^2 [3cw\sigma^2 \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2}] \right\} = (a+b)^{2(s-2)} \text{MSE}_G^{\text{NF}}(2) > 0 . \end{aligned}$$

Άρα, το $E[(h_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση της s και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Ε.2 Απόδειξη της Πρότασης 6.2

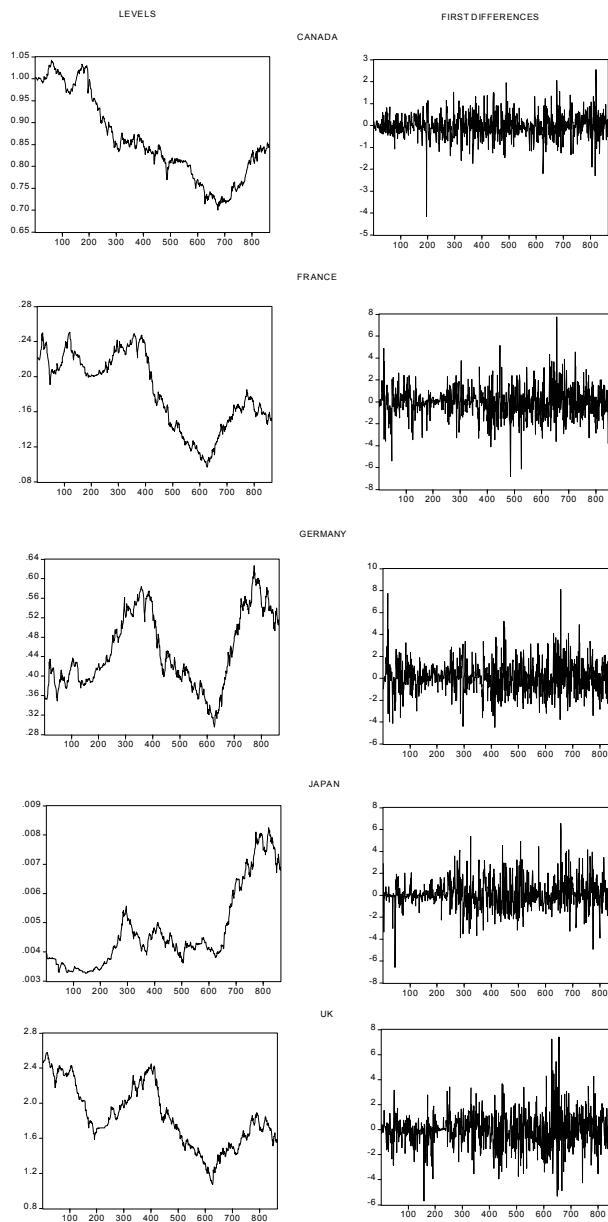
Αρχικά, παρατηρούμε ότι $E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} E[(e_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$. Άρα, $R2 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$. Δεδομένου ότι και το $E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ και το $E[(e_{t+s}^2 - \sigma^2)^2]$ είναι θετικά ορισμένα εξ'ορισμού, η πρόταση θα έχει αποδειχθεί αν δείξουμε ότι το $E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση της s .

$$\begin{aligned} E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2] - E[(e_{t+s-1}^2 - \hat{h}_{t+s-1}^2)^2] &= \\ &= (a+b)^{2(s-2)} [1 - (a+b)^2] \left[\frac{3c}{k_2} \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} - \frac{1}{1-a-b} \right] > 0 , \text{ αφού (i) } (a+b)^{2(s-2)} > 0 \text{ γιατί} \\ & a, b > 0 , \text{ (ii) } [1 - (a+b)^2] > 0 \text{ γιατί } a + b < 1 \text{ (υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι στάσιμη} \\ & 4^{\text{ης τάξης)} \text{ και (iii) } \left[\frac{3c}{k_2} \frac{1+a+b}{1-3ca^2-2ab-b^2} - \frac{1}{1-a-b} \right] = \frac{1}{w\sigma^2} \text{MSE}_H^F(s) > 0 . \end{aligned}$$

Άρα, το $E[(e_{t+s}^2 - \hat{h}_{t+s}^2)^2]$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση της s και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Ε.3 Διαγράμματα

Διάγραμμα Ε1:
Τιμές και Πρώτες Διαφορές των Συναλλαγματικών Ισοτιμιών



Ε.4 Πίνακες

Πίνακας Ε1:

Εμπειρικό Μέγεθος (Στατικές Προβλέψεις, Κανονική Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%

Τεστ	T=300			T=600			T=900			T=1200		
	P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
OOS-F	0.08	0.07	0.05	0.05	0.06	0.08	0.07	0.05	0.06	0.05	0.07	0.06
S ₁	0.08	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.04	0.05	0.04	0.05	0.06
OOS-t	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.05
F-Τεστ	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MGN	0.04	0.02	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02
MR	0.13	0.14	0.14	0.12	0.14	0.12	0.13	0.13	0.11	0.13	0.12	0.10
S ₁ -DM	0.06	0.02	0.02	0.03	0.02	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.01	0.02
S ₂	0.24	0.25	0.27	0.25	0.26	0.34	0.25	0.30	0.38	0.26	0.30	0.25
S ₂ *	0.17	0.20	0.23	0.21	0.23	0.34	0.25	0.27	0.38	0.22	0.30	0.25
S ₃	0.21	0.25	0.26	0.25	0.29	0.33	0.31	0.30	0.32	0.27	0.33	0.34
VDW	0.08	0.07	0.08	0.08	0.08	0.10	0.09	0.09	0.08	0.07	0.09	0.06

Πίνακας Ε2:

Εμπειρικό Μέγεθος (Στατικές Προβλέψεις, t(5)-Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%

Τεστ	T=300			T=600			T=900			T=1200		
	P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
OOS-F	0.05	0.06	0.05	0.11	0.11	0.06	0.11	0.07	0.07	0.07	0.07	0.05
S ₁	0.02	0.09	0.08	0.10	0.09	0.05	0.09	0.05	0.04	0.06	0.05	0.06
OOS-t	0.56	0.07	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.06
F-Τεστ	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MGN	0.00	0.02	0.01	0.06	0.05	0.02	0.05	0.03	0.01	0.03	0.03	0.02
MR	0.00	0.11	0.17	0.13	0.12	0.15	0.14	0.13	0.13	0.10	0.10	0.16
S ₁ -DM	0.01	0.05	0.02	0.06	0.04	0.01	0.06	0.03	0.01	0.04	0.02	0.01
S ₂	0.39	0.26	0.28	0.42	0.54	0.60	0.44	0.58	0.70	0.53	0.65	0.39
S ₂ *	0.26	0.23	0.26	0.38	0.50	0.60	0.44	0.55	0.70	0.48	0.65	0.38
S ₃	0.14	0.43	0.49	0.38	0.46	0.50	0.43	0.50	0.58	0.45	0.51	0.69
VDW	0.03	0.11	0.13	0.18	0.22	0.21	0.20	0.21	0.25	0.20	0.26	0.13

Πίνακας Ε3:

Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F in Percentages (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	40.0	51.0	68.0	58.0	71.0	83.0	68.0	81.0	93.0	73.0	85.0	97.0
	0.895	55.0	67.0	81.0	73.0	85.0	95.0	82.0	92.0	98.0	89.0	97.0	100.0
	0.9	56.0	66.0	81.0	76.0	85.0	96.0	85.0	93.0	98.0	90.0	97.0	100.0
0.2	0.72	54.0	64.0	79.0	70.0	82.0	92.0	80.0	90.0	98.0	85.0	93.0	99.0
	0.77	63.0	72.0	87.0	77.0	89.0	96.0	88.0	96.0	99.0	91.0	97.0	100.0
	0.8	68.0	78.0	90.0	84.0	93.0	98.0	91.0	97.0	100.0	94.0	98.0	100.0
0.5	0.15	54.0	62.0	73.0	64.0	73.0	84.0	71.0	80.0	90.0	76.0	84.0	93.0
	0.45	68.0	73.0	81.0	76.0	83.0	91.0	83.0	89.0	95.0	88.0	92.0	95.0
	0.5	72.0	74.0	81.0	79.0	86.0	92.0	86.0	90.0	95.0	89.0	93.0	96.0

Πίνακας Ε4:

Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του S_1 (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	21.0	31.0	46.0	25.0	41.0	61.0	31.0	53.0	79.0	38.0	57.0	81.0
	0.895	33.0	46.0	65.0	48.0	63.0	83.0	58.0	78.0	94.0	69.0	84.0	96.0
	0.9	32.0	46.0	62.0	49.0	65.0	84.0	62.0	81.0	95.0	72.0	86.0	97.0
0.2	0.72	24.0	37.0	55.0	30.0	48.0	73.0	40.0	64.0	86.0	46.0	67.0	91.0
	0.77	34.0	45.0	65.0	44.0	61.0	82.0	53.0	77.0	94.0	61.0	80.0	94.0
	0.8	43.0	55.0	71.0	57.0	69.0	88.0	67.0	83.0	96.0	76.0	88.0	95.0
0.5	0.15	22.0	31.0	46.0	20.0	28.0	52.0	25.0	43.0	70.0	28.0	45.0	68.0
	0.45	37.0	44.0	55.0	41.0	48.0	66.0	48.0	62.0	76.0	54.0	61.0	72.0
	0.5	44.0	47.0	56.0	48.0	54.0	67.0	55.0	65.0	77.0	61.0	65.0	71.0

Πίνακας Ε5:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	5.0	15.0	32.0	16.0	28.0	54.0	19.0	41.0	69.0	25.0	49.0	76.0
	0.895	4.0	13.0	32.0	11.0	27.0	62.0	16.0	45.0	81.0	24.0	54.0	88.0
	0.9	3.0	12.0	31.0	11.0	27.0	63.0	16.0	45.0	83.0	25.0	56.0	90.0
0.2	0.72	8.0	26.0	47.0	24.0	41.0	68.0	33.0	57.0	80.0	41.0	65.0	87.0
	0.77	7.0	24.0	48.0	21.0	42.0	71.0	29.0	60.0	86.0	41.0	68.0	92.0
	0.8	7.0	24.0	52.0	20.0	44.0	75.0	30.0	64.0	89.0	41.0	72.0	95.0
0.5	0.15	21.0	38.0	52.0	34.0	46.0	67.0	42.0	55.0	75.0	48.0	65.0	80.0
	0.45	13.0	32.0	46.0	26.0	43.0	64.0	34.0	53.0	74.0	42.0	61.0	80.0
	0.5	12.0	29.0	47.0	24.0	41.0	63.0	32.0	52.0	74.0	38.0	59.0	78.0

Πίνακας Ε6:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του MGN (Κανονική Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	23.0	36.0	52.0	33.0	49.0	67.0	40.0	59.0	83.0	44.0	64.0	87.0
	0.895	35.0	51.0	68.0	55.0	69.0	86.0	63.0	82.0	96.0	73.0	89.0	98.0
	0.9	33.0	51.0	68.0	55.0	71.0	88.0	66.0	84.0	96.0	76.0	90.0	98.0
0.2	0.72	29.0	45.0	64.0	42.0	59.0	79.0	51.0	72.0	90.0	58.0	77.0	95.0
	0.77	38.0	56.0	73.0	54.0	72.0	88.0	64.0	84.0	97.0	71.0	88.0	98.0
	0.8	45.0	62.0	79.0	64.0	79.0	92.0	76.0	89.0	98.0	82.0	94.0	99.0
0.5	0.15	27.0	43.0	56.0	36.0	51.0	70.0	44.0	58.0	79.0	51.0	68.0	84.0
	0.45	43.0	54.0	64.0	54.0	65.0	79.0	61.0	74.0	87.0	69.0	79.0	89.0
	0.5	49.0	56.0	66.0	58.0	70.0	81.0	66.0	77.0	88.0	72.0	83.0	90.0

Πίνακας Ε7:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	40.0	47.0	56.0	44.0	54.0	70.0	56.0	68.0	80.0	65.0	76.0	86.0
	0.895	50.0	57.0	70.0	64.0	72.0	86.0	73.0	84.0	93.0	80.0	90.0	96.0
	0.9	50.0	58.0	71.0	64.0	74.0	88.0	75.0	85.0	95.0	81.0	91.0	96.0
0.2	0.72	48.0	54.0	62.0	54.0	61.0	74.0	64.0	74.0	82.0	70.0	79.0	86.0
	0.77	54.0	61.0	70.0	64.0	71.0	82.0	74.0	83.0	88.0	78.0	86.0	92.0
	0.8	60.0	65.0	74.0	71.0	77.0	87.0	81.0	87.0	92.0	85.0	90.0	94.0
0.5	0.15	48.0	49.0	53.0	47.0	50.0	58.0	52.0	59.0	62.0	55.0	60.0	65.0
	0.45	57.0	59.0	60.0	60.0	63.0	66.0	67.0	67.0	70.0	68.0	70.0	73.0
	0.5	62.0	61.0	62.0	65.0	67.0	68.0	70.0	71.0	71.0	72.0	73.0	74.0

Πίνακας Ε8:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του S₁ (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	51.0	22.0	28.0	21.0	27.0	50.0	24.0	44.0	64.0	31.0	45.0	63.0
	0.895	60.0	32.0	44.0	38.0	46.0	68.0	46.0	64.0	81.0	54.0	69.0	83.0
	0.9	59.0	33.0	45.0	41.0	48.0	70.0	49.0	67.0	84.0	58.0	71.0	86.0
0.2	0.72	57.0	24.0	30.0	22.0	26.0	51.0	26.0	46.0	66.0	34.0	46.0	61.0
	0.77	61.0	30.0	37.0	31.0	36.0	60.0	39.0	55.0	72.0	45.0	57.0	72.0
	0.8	64.0	37.0	43.0	45.0	48.0	66.0	50.0	63.0	77.0	55.0	67.0	77.0
0.5	0.15	51.0	18.0	21.0	14.0	14.0	33.0	15.0	29.0	45.0	17.0	25.0	34.0
	0.45	60.0	28.0	28.0	28.0	28.0	43.0	32.0	42.0	53.0	34.0	38.0	43.0
	0.5	63.0	33.0	32.0	35.0	34.0	46.0	38.0	45.0	53.0	40.0	43.0	45.0

Πίνακας Ε9:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	0.0	2.0	8.0	8.0	18.0	43.0	13.0	35.0	54.0	24.0	37.0	48.0
	0.895	0.0	3.0	10.0	7.0	20.0	52.0	12.0	38.0	68.0	23.0	42.0	61.0
	0.9	0.0	3.0	11.0	7.0	20.0	52.0	12.0	41.0	69.0	24.0	44.0	66.0
0.2	0.72	1.0	4.0	15.0	14.0	25.0	51.0	21.0	45.0	62.0	32.0	43.0	55.0
	0.77	1.0	4.0	17.0	12.0	26.0	55.0	18.0	45.0	66.0	32.0	45.0	60.0
	0.8	1.0	6.0	19.0	11.0	29.0	58.0	18.0	46.0	70.0	32.0	48.0	65.0
0.5	0.15	1.0	12.0	24.0	22.0	30.0	46.0	27.0	43.0	48.0	34.0	40.0	47.0
	0.45	1.0	9.0	20.0	16.0	25.0	42.0	20.0	37.0	47.0	28.0	35.0	43.0
	0.5	1.0	8.0	20.0	14.0	24.0	41.0	18.0	35.0	46.0	27.0	36.0	42.0

Πίνακας Ε10:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του MGN (t(5)-Κατανομή, Στατικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	53.0	30.0	34.0	22.0	26.0	55.0	28.0	44.0	64.0	35.0	46.0	68.0
	0.895	61.0	39.0	49.0	40.0	46.0	72.0	48.0	64.0	83.0	55.0	71.0	88.0
	0.9	61.0	39.0	49.0	42.0	48.0	74.0	50.0	66.0	85.0	58.0	73.0	91.0
0.2	0.72	58.0	33.0	39.0	25.0	31.0	59.0	32.0	50.0	68.0	43.0	53.0	72.0
	0.77	61.0	40.0	46.0	34.0	40.0	68.0	45.0	59.0	78.0	52.0	65.0	83.0
	0.8	65.0	45.0	52.0	47.0	51.0	73.0	54.0	68.0	83.0	60.0	74.0	88.0
0.5	0.15	54.0	29.0	34.0	18.0	26.0	44.0	26.0	41.0	50.0	34.0	41.0	55.0
	0.45	60.0	41.0	42.0	34.0	38.0	52.0	39.0	50.0	58.0	45.0	51.0	62.0
	0.5	64.0	43.0	46.0	39.0	43.0	56.0	46.0	52.0	59.0	49.0	54.0	63.0

Πίνακας Ε11:
Εμπειρικό Μέγεθος (Δυναμικές Προβλέψεις, Κανονική Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%

Τεστ	T=300			T=600			T=900			T=1200		
	P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
OOS-F	0.07	0.03	0.02	0.03	0.02	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
S ₁	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
OOS-t	0.09	0.08	0.08	0.08	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06	0.07	0.07	0.08
F-Τεστ	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MGN	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MR	0.01	0.11	0.71	0.11	0.71	0.88	0.55	0.86	0.93	0.74	0.89	0.94
S ₁ -DM	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S ₂	0.34	0.40	0.50	0.38	0.51	0.64	0.40	0.56	0.71	0.47	0.61	0.74
S ₂ *	0.23	0.31	0.45	0.30	0.46	0.64	0.40	0.51	0.71	0.42	0.61	0.73
S ₃	0.19	0.24	0.36	0.24	0.35	0.50	0.30	0.46	0.59	0.36	0.50	0.65
VDW	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.02	0.03	0.03

Πίνακας Ε12:
Εμπειρικό Μέγεθος (Δυναμικές Προβλέψεις, t(5)-Κατανομή). Ονομαστικό Μέγεθος 5%

Τεστ	T=300			T=600			T=900			T=1200		
	P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
OOS-F	0.17	0.09	0.06	0.08	0.05	0.03	0.05	0.04	0.03	0.06	0.03	0.03
S ₁	0.09	0.04	0.02	0.04	0.02	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
OOS-t	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.05	0.05	0.04	0.05	0.04	0.04
F-Τεστ	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MGN	0.05	0.03	0.01	0.03	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
MR	0.01	0.04	0.41	0.04	0.40	0.75	0.23	0.65	0.83	0.44	0.76	0.84
S ₁ -DM	0.07	0.04	0.02	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
S ₂	0.63	0.75	0.89	0.75	0.88	0.95	0.81	0.95	0.99	0.86	0.97	1.00
S ₂ *	0.49	0.68	0.85	0.67	0.85	0.95	0.81	0.93	0.99	0.84	0.97	1.00
S ₃	0.25	0.33	0.42	0.32	0.42	0.51	0.35	0.43	0.54	0.38	0.47	0.58
VDW	0.11	0.12	0.17	0.13	0.15	0.20	0.12	0.19	0.22	0.15	0.17	0.25

Πίνακας Ε13:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F (Κανονική Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	19.0	12.0	9.0	10.0	4.0	2.0	6.0	4.0	1.0	3.0	1.0	0.0
	0.895	29.0	23.0	25.0	31.0	27.0	22.0	34.0	28.0	23.0	34.0	27.0	24.0
	0.9	51.0	48.0	42.0	57.0	51.0	47.0	61.0	55.0	44.0	63.0	54.0	43.0
0.2	0.72	27.0	19.0	12.0	18.0	10.0	6.0	14.0	6.0	2.0	9.0	4.0	2.0
	0.77	38.0	29.0	23.0	30.0	25.0	18.0	28.0	21.0	15.0	29.0	18.0	12.0
	0.8	57.0	46.0	39.0	56.0	44.0	32.0	56.0	38.0	27.0	51.0	32.0	24.0
0.5	0.15	34.0	28.0	17.0	29.0	18.0	10.0	21.0	13.0	7.0	18.0	10.0	5.0
	0.45	45.0	40.0	30.0	45.0	35.0	26.0	40.0	30.0	26.0	39.0	30.0	19.0
	0.5	36.0	22.0	17.0	23.0	18.0	18.0	20.0	15.0	16.0	18.0	15.0	16.0

Πίνακας Ε14:
Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (Κανονική Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	7.0	8.0	7.0	6.0	7.0	7.0	6.0	7.0	6.0	7.0	7.0	7.0
	0.895	7.0	8.0	9.0	7.0	6.0	6.0	8.0	7.0	7.0	6.0	7.0	7.0
	0.9	10.0	19.0	28.0	19.0	26.0	32.0	21.0	28.0	28.0	26.0	29.0	31.0
0.2	0.72	8.0	8.0	6.0	7.0	7.0	4.0	6.0	6.0	6.0	7.0	6.0	5.0
	0.77	8.0	7.0	6.0	7.0	6.0	7.0	6.0	6.0	5.0	5.0	5.0	6.0
	0.8	14.0	24.0	24.0	20.0	23.0	24.0	21.0	23.0	21.0	19.0	20.0	18.0
0.5	0.15	9.0	7.0	7.0	7.0	6.0	5.0	6.0	6.0	7.0	5.0	6.0	5.0
	0.45	7.0	8.0	6.0	5.0	7.0	5.0	7.0	6.0	4.0	5.0	4.0	4.0
	0.5	14.0	12.0	12.0	12.0	8.0	9.0	10.0	9.0	8.0	8.0	8.0	6.0

Πίνακας E15:

Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-F (t(5)-Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	29.0	24.0	17.0	23.0	16.0	10.0	18.0	11.0	6.0	14.0	10.0	4.0
	0.895	35.0	33.0	29.0	39.0	34.0	29.0	38.0	32.0	27.0	39.0	31.0	25.0
	0.9	45.0	41.0	32.0	52.0	47.0	34.0	53.0	40.0	32.0	49.0	40.0	30.0
0.2	0.72	39.0	27.0	20.0	30.0	23.0	17.0	26.0	18.0	12.0	23.0	14.0	9.0
	0.77	42.0	35.0	27.0	39.0	34.0	23.0	36.0	28.0	21.0	35.0	26.0	18.0
	0.8	43.0	36.0	32.0	41.0	29.0	28.0	36.0	25.0	33.0	32.0	22.0	17.0
0.5	0.15	45.0	34.0	26.0	39.0	30.0	19.0	33.0	24.0	15.0	31.0	23.0	14.0
	0.45	49.0	42.0	34.0	46.0	40.0	26.0	45.0	32.0	25.0	41.0	36.0	25.0
	0.5	22.0	45.0	38.0	17.0	41.0	30.0	44.0	35.0	40.0	39.0	31.0	22.0

Πίνακας E16:

Ποσοστιαία «Προσαρμοσμένη στο Μέγεθος» Ισχύς του OOS-t (t(5) Κατανομή, Δυναμικές Προβλέψεις)

a	b	T=300			T=600			T=900			T=1200		
		P/R=0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.4
0.1	0.85	6.0	7.0	6.0	6.0	6.0	5.0	5.0	6.0	5.0	5.0	5.0	4.0
	0.895	6.0	7.0	6.0	6.0	5.0	6.0	6.0	6.0	4.0	6.0	4.0	5.0
	0.9	9.0	16.0	20.0	12.0	22.0	23.0	16.0	21.0	24.0	20.0	25.0	26.0
0.2	0.72	7.0	9.0	6.0	7.0	6.0	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	6.0	4.0
	0.77	9.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	5.0	7.0	4.0	5.0	6.0	4.0
	0.8	13.0	16.0	17.0	14.0	18.0	18.0	17.0	15.0	22.0	14.0	15.0	17.0
0.5	0.15	7.0	6.0	6.0	6.0	6.0	5.0	5.0	4.0	4.0	4.0	3.0	4.0
	0.45	6.0	7.0	4.0	7.0	5.0	6.0	7.0	5.0	4.0	6.0	6.0	4.0
	0.5	7.0	6.0	8.0	7.0	11.0	12.0	17.0	14.0	16.0	13.0	12.0	13.0

Πίνακας E17:

Περιγραφικά Στατιστικά των Πρώτων Διαφορών των Συναλλαγματικών Ισοτιμιών					
	ΚΑΝΑΔΑΣ	ΓΑΛΛΙΑ	ΓΕΡΜΑΝΙΑ	ΙΑΠΩΝΙΑ	Μ.ΒΡΕΤΑΝΝΙΑ
Μέσος	-0.0197	-0.0438	0.0420	0.0685	-0.0518
Διάμεσος	-0.0297	0.0000	0.0226	-0.0263	-0.0216
Μέγιστο	2.5505	7.7413	8.1133	6.5461	7.3974
Ελάχιστο	-4.1551	-6.8252	-4.4877	-6.5869	-5.6911
Τ. Απόκλιση	0.5523	1.4083	1.4656	1.3607	1.4063
Ασυμμετρία	-0.4210	0.1031	0.4801	0.3847	0.2609
Κύρτωση	7.9541	5.4907	5.1336	5.5867	6.0920
Παρατηρήσεις	863	863	863	863	863

Πίνακας E18:

Αποτελέσματα Εκτίμησης του GARCH(1,1) Μοντέλου (από 14/3/1973 ως 17/6/1981)

	w	a	b
ΚΑΝΑΔΑΣ	0.0557 (0.0133)	0.2597 (0.0243)	0.5442 (0.0622)
ΓΑΛΛΙΑ	0.1372 (0.0262)	0.3470 (0.05447)	0.6137 (0.0437)
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	0.2007 (0.0446)	0.2973 (0.0492)	0.6149 (0.0533)
ΙΑΠΩΝΙΑ	0.0076 (0.0035)	0.0530 (0.0076)	0.9443 (0.0069)
Μ.ΒΡΕΤΑΝΝΙΑ	0.1883 (0.0725)	0.1160 (0.0466)	0.7323 (0.0985)

Οι εκτιμημένες τυπ. Αποκλίσεις δίνονται στις παρενθέσεις.
Όλες οι εκτιμήσεις είναι στατιστικά σημαντικές με $\alpha=5\%$.

Πίνακας E19:

Τιμές των Τεστ, Εβδομαδιαία Δεδομένα

Recursive	ΚΑΝΑΔΑΣ	ΓΑΛΛΙΑ	ΓΕΡΜΑΝΙΑ	ΙΑΠΩΝΙΑ	Μ.ΒΡΕΤΑΝΝΙΑ
	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό
OOS-F	12.276***	-39.178	-18.195	6.750***	27.756***
S ₁	0.412*	-1.134	-0.758	0.292	0.762**
OOS-t	0.411*	-3.137	-1.860	-0.327	1.187**
Rolling	ΚΑΝΑΔΑΣ	ΓΑΛΛΙΑ	ΓΕΡΜΑΝΙΑ	ΙΑΠΩΝΙΑ	Μ.ΒΡΕΤΑΝΝΙΑ
	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό
OOS-F	16.482***	-28.198	-13.683	11.476***	15.131***
S ₁	0.616*	-1.091	-0.686	0.532*	0.440*
OOS-t	1.057**	-2.277	-1.485	0.810**	0.510*

*** δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=1\%$.** δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=5\%$.* δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=10\%$.

Πίνακας E20:

Τιμές των Τεστ, Ημερήσια Δεδομένα, Recursive Μέθοδος

Recursive	ΚΑΝΑΔΑΣ	ΓΑΛΛΙΑ	ΓΕΡΜΑΝΙΑ	ΙΑΠΩΝΙΑ	Μ.ΒΡΕΤΑΝΝΙΑ
	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό	Στατιστικό
OOS-F	153.671***	-77.076	145.071***	12.856***	111.595***
S ₁	0.441	-0.479	0.674*	0.049	0.580
OOS-t	2.852***	-0.735	4.291***	0.188	2.980***

*** δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=1\%$.** δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=5\%$.* δηλώνει απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ίσης προβλεπτικής ακρίβειας με $\alpha=10\%$.

F. «Γέννηση» Τυχαίων Διανυσμάτων από μια Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή

Έστω ότι η $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ακολουθεί μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή $N(\mu, \Sigma)$ όπου $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ είναι το διάνυσμα του μέσου και Σ είναι η μήτρα

συνδιακυμάνσεων: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$, που είναι θετικά ορισμένη, αντιστρέψιμη

και συμμετρική. Αφού η Σ είναι θετικά ορισμένη και συμμετρική, υπάρχει ένας

μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας $C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε:

$$\Sigma = CC^T \quad (\text{F.1})$$

Τότε, το διάνυσμα X μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X = CZ + \mu \quad (\text{F.2})$$

όπου $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ είναι ένα κανονικό διάνυσμα με μηδενικό μέσο και μοναδιαία μήτρα συνδιακυμάνσεων. Επομένως, όλα τα στοιχεία της Z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ακολουθούν τη τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Τα στοιχεία του πίνακα C μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (F.1) και (F.2).

Αποδεικνύεται ότι:

$$c_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk}}{(\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2)^{1/2}}$$

όπου $\sum_{k=1}^0 c_{ik} c_{jk} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq n$.

Επομένως, προκειμένου να παράγουμε τυχαία διανύσματα από μια πολυμεταβλητή $N(\mu, \Sigma)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

Αλγόριθμος:

1. Παραγωγή $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ από $N(0,1)$
2. Υπολογισμός του πίνακα C από τις εξισώσεις (F.1) και (F.2).
3. $X = CZ + \mu$

Για τη διμεταβλητή περίπτωση, τα στοιχεία του C είναι:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sqrt{\sigma_{11}} \\ c_{21} &= \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ c_{22} &= \sqrt{\sigma_{22} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}}} \end{aligned}$$