

Φράγματα, προσεγγίσεις και ιδιότητες
μονοτονίας στη θεωρία κινδύνων

Γεώργιος Ι. Ψαρράκος

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2007

Στη μητέρα μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΗ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κ. Κωνσταντίνο Πολίτη Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, ο οποίος με ενθάρρυνε και με εισήγαγε ερευνητικά στο χώρο της Θεωρίας Κινδύνων, προτείνοντάς μου σύγχρονα ερευνητικά προβλήματα και προσφέροντάς μου την απαραίτητη καθοδήγηση.

Ευχαριστώ επίσης τα δύο μέλη της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, τον κ. Μάρκο Κούτρα Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και τον κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την άριστη συνεργασία μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2007

Γεώργιος Ι. Ψαρράκος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Συμβολισμοί	v
Περίληψη στην Αγγλική	vii
1 Εισαγωγή	1
2 Μοντέλα της θεωρίας κινδύνων - Βασικές έννοιες	5
2.1 Εισαγωγή	5
2.2 Κλασικό μοντέλο	5
2.3 Ανανεωτικό μοντέλο	8
2.4 Συντελεστής προσαρμογής	11
2.5 Παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας	13
2.6 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις	14
2.7 Κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας	17
2.8 Κατανομές με βαριά ουρά	20
3 Ιδιότητες μονοτονίας	23
3.1 Εισαγωγή	23
3.2 Μονοτονία κλασμάτων	23
3.3 Επιπλέον ιδιότητες μονοτονίας για την κατανομή του ελλείμματος	31
3.4 Μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, y)$	41
3.5 Ανισοτικές σχέσεις για την κατανομή του ελλείμματος	43
3.6 Στοχαστική διάταξη	45

4	Μια γενίκευση της συνθήκης Lundberg και νέα εκθετικά φράγματα	52
4.1	Εισαγωγή	52
4.2	Μια γενίκευση της συνθήκης Lundberg	53
4.3	Μια συνθήκη για την οριακή κατανομή του ελλείμματος	56
4.4	Εκθετικά φράγματα	59
4.5	Ασυμπτωτικά αποτελέσματα	66
5	Φράγματα για την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία	70
5.1	Εισαγωγή	70
5.2	Βασικές έννοιες	70
5.3	Η ανανεωτική εξίσωση για την $\bar{H}(u, x, y)$	72
5.4	Φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u > x$	73
6	Αριθμητικά παραδείγματα, εκθετικά φράγματα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα	91
6.1	Εισαγωγή	91
6.2	Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας	91
6.3	Αριθμητικά παραδείγματα	96
6.4	Ανισοτικές σχέσεις για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u \leq x$	105
6.5	Εκθετικά φράγματα	107
6.6	Ασυμπτωτικά αποτελέσματα	109
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	113

Συμβολισμοί

$U(t)$	το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t
u	το αρχικό αποθεματικό
c	το συνολικό ασφάλιστρο
θ	το περιθώριο ασφάλειας
$N(t)$	ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t
P	η κατανομή των αποζημιώσεων
P_e	η κατανομή ισορροπίας
F	η κατανομή των κλιμακωτών υψών στο ανανεωτικό μοντέλο
R	ο συντελεστής προσαρμογής
T	ο χρόνος χρεοκοπίας
$U(T-)$	το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία
$ U(T) $	το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας
$\psi(u)$	η πιθανότητα χρεοκοπίας
$H(u, y)$	η κατανομή του ελλείμματος
$H(u, x, y)$	η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος

$H_u(y)$ η κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία

$H_\infty(y)$ η οριακή κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία

\mathcal{S} η κλάση των υποεκθετικών κατανομών

\mathcal{L} η κλάση κατανομών με μακριά ουρά

λ_G η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής G

r_G ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής G

Bounds, Approximations and Monotonicity Properties in Risk Theory

We consider the renewal risk model, often referred to as the Sparre Andersen risk model. In this model, the insurer's surplus at time t , is given by

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

where $u \geq 0$ is the initial surplus, c is the rate of premium income per unit time and N_t is the number of claims in the time interval $(0, t]$. The individual claim amounts Y_1, Y_2, \dots are positive, independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with common distribution function (d.f.) $P(t) = Pr(Y \leq t)$, tail $\bar{P}(t) = 1 - P(t) = Pr(Y > t)$, density $p(t)$ and mean $E(Y) = m < \infty$. These claim amounts are also independent of N_t , and the corresponding interclaim times T_1, T_2, \dots are generally distributed with common mean $E(T_1)$. Let T denote the time of ruin, i.e. the time that the surplus becomes negative for the first time and note that T is a defective random variable. The probability of ruin is then defined by

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u).$$

The d.f. of the deficit at ruin, namely

$$H(u, y) = Pr(|U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u),$$

was introduced by Gerber et al. (1987) and represents the probability that, starting with a surplus u , ruin occurs and the deficit $|U(T)|$ at the time of ruin T does not exceed $y \geq 0$. It is also convenient to define the proper d.f. of the deficit,

$$H_u(y) = \frac{H(u, y)}{\psi(u)} = Pr(|U(T)| \leq y | T < \infty, U(0) = u)$$

with tail $\bar{H}_u(y) = 1 - H_u(y)$.

Monotonicity properties for the distribution $H_u(y)$ in the classical risk model, i.e. when claims arrive according to a Poisson process, have been discussed by Willmot and Lin (1998). Earlier, Dickson and Dos Reis (1996) have examined conditions under which $H_u(y)$ is a monotone function of u . Willmot and Lin (1998) have shown that some of these conditions cannot be met in practice and, using numerical studies, raised some further questions about which conditions guarantee that $H_u(y)$ varies monotonically in u . Here, we obtain various monotonicity properties for the distribution $H_u(y)$ and other related quantities in the renewal risk model, giving answers to some of these questions. Moreover, we introduce a new reliability class of distributions that plays an important part in the analysis. We also provide generalisations (expressed in terms of the distribution of the deficit) of the well-known new worse than used property of the probability of non-ruin in the renewal model.

Furthermore, we derive a generalisation of the Lundberg condition, in the renewal model, by studying a defective renewal equation. This generalisation explains why the monotonicity of the function $H_u(y)$ in u is important. We obtain a similar condition as Lundberg's for the d.f. $H_\infty(y)$, which has been defined by Willmot (2002). As an application of this generalisation, we give some new exponential bounds for the probability of ruin, the stop-loss premium and the tail of deficit. Numerical examples are also presented to illustrate our results.

For the classical risk model with Poisson arrivals, we study the (bivariate) tail of the joint distribution of the surplus prior to and at ruin. We also derive some exact expressions and new bounds for this tail, and we suggest three numerical methods that yield upper and lower bounds for it. As a byproduct of the analysis, we obtain new upper and lower bounds for the probability and the tail of the deficit at ruin. Many of these bounds improve and generalise corresponding bounds that have appeared earlier. For the numerical bounds, their performance is compared against bounds available in the literature.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή πραγματεύεται δύο μοντέλα της θεωρίας κινδύνων που είναι γνωστά ως το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο. Αν συμβολίσουμε με $U(t)$ το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας τη χρονική στιγμή t , τότε τα δύο αυτά μοντέλα περιγράφονται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

όπου $u = U(0)$ είναι το αρχικό αποθεματικό, c το συνολικό ασφάλιστρο που πληρώνουν οι ασφαλισμένοι στη μονάδα του χρόνου (έσοδα) και η ανέλιξη $S(t)$ είναι οι συνολικές αποζημιώσεις που πρέπει να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρία στους ασφαλισμένους (έξοδα) μέχρι τη χρονική στιγμή t . Από τον παραπάνω τύπο παρατηρούμε ότι όταν κατά τη χρονική στιγμή t δεν υπάρχει αποζημίωση, τότε το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Προφανώς, στη μονάδα του χρόνου τα έσοδα είναι σταθερά, ενώ τα έξοδα είναι τυχαία. Το κλασικό μοντέλο, γνωστό και ως μοντέλο των Cramér - Lundberg, εισήχθη από τον Filip Lundberg στη διδακτορική του διατριβή το 1903. Μια από τις βασικές υποθέσεις που έκανε είναι ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t που πληρώνει μια ασφαλιστική εταιρία στους ασφαλισμένους είναι μια ομοιογενής ανέλιξη Poisson. Αργότερα, ο Cramér (1930) ανέπτυξε περαιτέρω το συγκεκριμένο μοντέλο. Για το λόγο αυτό, το μοντέλο καθώς και κάποια αποτελέσματα έχουν το όνομα και των δύο μαθηματικών που προαναφέραμε. Το 1957 ο Sparre Andersen γενίκευσε το παραπάνω μοντέλο θεωρώντας ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι μια ανανεωτική ανέλιξη. Το συγκεκριμένο μοντέλο ονομάζεται ανανεωτικό και είναι ευρέως γνωστό ως μοντέλο Sparre Andersen. Τα τελευταία 25 χρόνια πλήθος ερευνητών μελέτησαν με μαθηματικό τρόπο τα δύο αυτά μοντέλα.

Το ανανεωτικό μοντέλο, με το οποίο θα ασχοληθούμε στα Κεφάλαια 3 και 4, είναι η φυσιολογική γενίκευση του κλασικού μοντέλου, με το οποίο θα ασχοληθούμε κυρίως στα Κεφάλαια 5 και 6. Η διαφορετικότητα τους οφείλεται αποκλειστικά

στην ανέλιξη $S(t)$. Ας θεωρήσουμε ότι συμβαίνει χρεοκοπία όταν το πλεόνασμα $U(t)$ γίνει για πρώτη φορά αρνητικό. Μια απαραίτητη συνθήκη για να μη γίνει χρεοκοπία με πιθανότητα 1 είναι ότι τα έσοδα πρέπει να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα στη μονάδα του χρόνου. Στην ανάλυσή μας σπουδαίο ρόλο παίζουν τρεις τυχαίες μεταβλητές που είναι ο χρόνος μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας, το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία.

Όπως φαίνεται και από το τίτλο της παρούσας διατριβής, θα μελετήσουμε φράγματα, ασυμπτωτικά αποτελέσματα και ιδιότητες μονοτονίας στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο. Υπάρχουν πλήθος φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Κάποιες εργασίες είναι των Cai and Garrido (1998, 1999), De Vylder and Goovaerts (1984), Politis (2005), Chadjiconstantinidis and Politis (2005), Willmot and Lin (1994,1997) και Willmot et al. (2001). Επιπλέον, ορισμένες πρόσφατες εργασίες στις οποίες υπάρχουν φράγματα για την κατανομή του ελλείμματος είναι των Chadjiconstantinidis and Politis (2007) και Willmot (2002). Επίσης, υπάρχουν πολλές εργασίες στις οποίες δίνονται ασυμπτωτικά αποτελέσματα για κατανομές με βαριά ουρά. Μεταξύ άλλων, είναι οι εργασίες των Chistyakov (1964), Embrechts and Goldie (1980, 1982), Embrechts and Veraverbeke (1982), Klüppelberg (1988, 1989a, 1989b), και Teugels (1975). Σε αντίθεση με τα φράγματα και τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα, για τη μονοτονία ποσοτήτων δεν υπάρχουν πολλές αναφορές. Συγκεκριμένα υπάρχουν μόνο δύο εργασίες, αυτές των Dickson and Dos Reis (1996) και Willmot and Lin (1998), που ερευνούν, στο κλασικό μοντέλο, τη μονοτονία της κατανομής του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία ξεκινώντας από ένα αρχικό αποθεματικό u . Εμείς μελετάμε τη μονοτονία αυτής της συνάρτησης ως προς u στο γενικότερο ανανεωτικό μοντέλο απαντώντας στις αμφισβητήσεις των Willmot and Lin (1998) στα αποτελέσματα των Dickson and Dos Reis (1996). Επιπλέον, βρίσκουμε τη μονοτονία κάποιων άλλων συναρτήσεων που οδηγούν σε γενικεύσεις αποτελεσμάτων του Willmot (2002).

Στη συνέχεια, περιγράφουμε το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου. Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται οι βασικές έννοιες και γνωστά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Ειδικότερα περιγράφουμε το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Το ανανεωτικό μοντέλο είναι πιο γενικό από το κλασικό μοντέλο. Επιπλέον, δίνεται η έννοια του συντελεστή προσαρμογής και μερικά παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας. Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις και οι κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας για την εξαγωγή νέων αποτελεσμάτων που υπάρχουν στα επόμενα κεφάλαια. Τέλος, δίνονται οι ορισμοί των υποεκθετικών κατανομών, της κλάσης κατανομών \mathcal{L} και μερικά γνωστά ασυμπτωτικά αποτελέσματα.

Αν συμβολίσουμε με $H_u(y)$ την κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία ξεκινώντας με ένα αρχικό αποθεματικό u , στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης $H_u(y)$ ως προς u . Το πρόβλημα αυτό, αντιμετωπίστηκε αρχικά στο κλασικό μοντέλο, από τους Dickson and Dos Reis (1996), στις περιπτώσεις των IFR και DFR κατανομών. Σκοπός τους ήταν να χρησιμοποιήσουν τη μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης για να βρουν τη μονοτονία άλλων ποσοτήτων με ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνων, όπως για παράδειγμα του συνολικού χρόνου όπου το πλεόνασμα είναι αρνητικό. Αργότερα οι Willmot and Lin (1998) αμφισβήτησαν τα αποτελέσματα των Dickson and Dos Reis. Συγκεκριμένα, στην IFR περίπτωση χρησιμοποιώντας αντιπαραδείγματα έδειξαν ότι η $H_u(y)$ δεν είναι μονότονη ως προς u , ενώ στην DFR περίπτωση βρήκαν ότι δεν ισχύει μια συνθήκη που είναι απαραίτητη στη διαδικασία της απόδειξης του αποτελέσματος των Dickson and Dos Reis. Για το λόγο αυτό υπέθεσαν ότι και στην DFR περίπτωση η $H_u(y)$ δεν είναι μονότονη ως προς u , χωρίς να δώσουν κάποια απόδειξη ή κάποιο αντιπαραδείγμα. Εμείς αποδεικνύουμε, στο (γενικότερο) ανανεωτικό μοντέλο ότι στην DFR περίπτωση το αποτέλεσμα των Dickson and Dos Reis είναι σωστό. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η μονοτονία συναρτήσεων στο συγκεκριμένο πλαίσιο θέλει ιδιαίτερη προσοχή και πάντα υπάρχει ο κίνδυνος του λάθους! Μελετάμε, ακόμα τη μονοτονία κάποιων άλλων ποσοτήτων γενικεύοντας αποτελέσματα του Willmot (2002). Εισάγουμε μια νέα κλάση κατανομών η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας. Τέλος, γενικεύουμε την ευρέως γνωστή NWU ιδιότητα για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο, χρησιμοποιώντας την κατανομή του ελλείμματος.

Στο Κεφάλαιο 4 βρίσκουμε, στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, μια γενίκευση της συνθήκης του Lundberg χρησιμοποιώντας την ουρά της κατανομής του ελλείμματος, $\bar{H}(u, y)$, κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Κλειδί για τη γενίκευση αυτή είναι η εύρεση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης μιας νέας συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας τη γενίκευση του Lundberg και τις ιδιότητες μονοτονίας για την κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία, $H_u(y)$, που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 3, βρίσκουμε αποτελέσματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $e^{Ru} \psi(u)$ και νέα εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Με αυτό το τρόπο παρουσιάζουμε νέες εφαρμογές για τη χρησιμότητα της μονοτονίας της συνάρτησης $\bar{H}_u(y)$ στο ανανεωτικό μοντέλο. Οι Willmot et al. (2001) έδωσαν στο ανανεωτικό μοντέλο άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που όμως είναι δύσκολο να υπολογιστούν ακόμα και στο κλασικό μοντέλο. Τα φράγματα που προκύπτουν από τη γενίκευση του Lundberg από τη μια πλευρά είναι σε απλή μορφή και από την άλλη είναι συγκρίσιμα με τα φράγματα των Willmot (2002) και Willmot et al. (2001). Τέλος, στην περίπτωση των υποεκθετικών κατανομών βρίσκουμε ασυμπτωτικούς τύπους που γενικεύουν

ήδη γνωστά αποτελέσματα.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετούμε την ουρά της από κοινού κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν και κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των Gerber and Shiu (1998), παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η παραπάνω ουρά. Αρχικά η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση κατασκευάστηκε από τον Schmidli (1999), βλέπε επίσης Dickson (1992). Από την εξίσωση αυτή, βρίσκουμε κάποιες ακριβείς εκφράσεις και νέα φράγματα για τη συγκεκριμένη ουρά. Τέλος, δίνουμε τρεις αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων για την ουρά της από κοινού κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν και κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 6 εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 για την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία με σκοπό να βρούμε νέα, άνω και κάτω, φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο. Πολλά από τα φράγματα βελτιώνουν και γενικεύουν ήδη υπάρχοντα φράγματα. Τα αριθμητικά παραδείγματα που δίνουμε δείχνουν την απόδοση των φραγμάτων μας σε σχέση με παλαιότερα φράγματα. Παρουσιάζουμε επίσης εκθετικά φράγματα και ανισοτικές σχέσεις για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$. Τέλος, αποδεικνύουμε μερικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα στην περίπτωση όπου η κατανομή ισορροπίας ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών κατανομών.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα της θεωρίας κινδύνων - Βασικές έννοιες

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται οι κύριες έννοιες και ορισμένα γνωστά αποτελέσματα που είναι απαραίτητα στο υπόλοιπο της εργασίας. Ειδικότερα περιγράφουμε το κλασικό και το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Το ανανεωτικό μοντέλο είναι πιο γενικό από το κλασικό μοντέλο. Επιπλέον, δίνεται η έννοια του συντελεστή προσαρμογής και μερικά παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας. Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις και οι κλάσεις κατανομών αξιολοπιστίας αποτελούν δύο σημαντικά εργαλεία για την εξαγωγή νέων αποτελεσμάτων που υπάρχουν στα επόμενα κεφάλαια. Στην τελευταία παράγραφο μελετάμε κάποιες γνωστές κλάσεις κατανομών με βαριά ουρά.

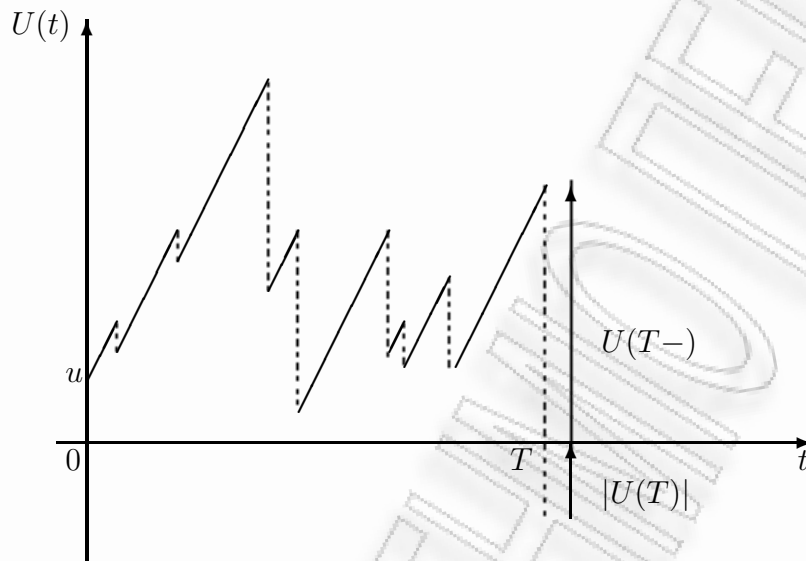
2.2 Κλασικό μοντέλο

Στο μοντέλο αυτό, γνωστό και ως μοντέλο Cramér-Lundberg, θεωρούμε ότι το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας $U(t)$ τη χρονική στιγμή t είναι

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad (2.2.1)$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, c το συνολικό ασφάλιστρο που πληρώνουν οι ασφαλισμένοι στη μονάδα του χρόνου (έσοδα) και η ανέλιξη $\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ είναι οι συνολικές αποζημιώσεις που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία στους ασφαλισμένους (έξοδα) μέχρι τη χρονική στιγμή t . Ειδικότερα, η $N(t)$ παριστάνει τον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt . Για $t = 0$ είναι $N(0) = 0$. Ακόμα, όσο ισχύει $N(t) = 0$ είναι

$\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k = 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) Y_1, Y_2, \dots εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή P στο $(0, \infty)$, πυκνότητα p και πεπερασμένη μέση τιμή m . Επιπλέον, τα μεγέθη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα από τον αριθμό των αποζημιώσεων. Οι ενδιαμέσοι χρόνοι T_1, T_2, \dots μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .



Σχήμα: Ανέλιξη πλεονάσματος

Στο παραπάνω σχήμα, παριστάνεται γραφικά η ανέλιξη του πλεονάσματος. Οι συνεχείς παράλληλες γραμμές (με κλίση c) είναι η αύξηση του πλεονάσματος ενώ οι διακεκομμένες κάθετες γραμμές είναι οι αποζημιώσεις. Θεωρούμε ότι γίνεται χρεοκοπία όταν το πλεόνασμα γίνει για πρώτη φορά αρνητικό. Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να μη γίνει χρεοκοπία με πιθανότητα 1 είναι $\lambda m < c$, δηλαδή στη μονάδα του χρόνου τα αναμενόμενα έξοδα να είναι λιγότερα από τα έσοδα. Αυτό σημαίνει ότι $U(t) \rightarrow \infty$ σχεδόν βέβαια καθώς $t \rightarrow \infty$. Επιπλέον, γράφουμε

$$\theta = \frac{c - \lambda m}{\lambda m} > 0$$

για το περιθώριο ασφάλειας του μοντέλου.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = Pr \left\{ \inf_{t > 0} U(t) < 0 \mid U(0) = u \right\}. \quad (2.2.2)$$

Αν T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας που ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} \infty, & \text{αν } U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t > 0 \\ \inf\{t > 0 \mid U(t) < 0\}, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

τότε μια δεύτερη έκφραση της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u). \quad (2.2.3)$$

Βλέποντας το τυχαίο άθροισμα που υπάρχει στο δεύτερο μέλος της σχέσης (2.2.1) ορίζουμε την έννοια της συνέλιξης μεταξύ δύο κατανομών (βλέπε Rolski et al. (1999, p.28)).

Ορισμός 2.2.1. Η συνέλιξη είναι ένας τελεστής που υπολογίζει την κατανομή του αθροίσματος $X + Y$, όπου οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με κατανομές F και G αντιστοίχως. Η συνέλιξη $F * G$ των F και G είναι

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t) dG(t).$$

Επιπλέον γράφουμε με $F^{*2} = F * F$ τη συνέλιξη δεύτερης τάξεως της F . Με ανάλογο τρόπο F^{*n} είναι η n -οστή συνέλιξη της F . Μια ακόμα χρήσιμη έννοια είναι η ουρά μιας κατανομής.

Ορισμός 2.2.2. Η ουρά μιας κατανομής G είναι μια φθίνουσα συνάρτηση που ισούται με

$$\bar{G}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} G(y) - G(x).$$

Μια τρίτη έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο τύπος των Pollaczek - Khinchine (βλέπε Asmussen (2000, Chapter 3))

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi) \phi^n \bar{P}_e^{*n}(u) \quad (2.2.4)$$

όπου $\phi = \psi(0) = \lambda m / c = 1 / (1 + \theta)$, \bar{P}_e^{*n} η ουρά της n -οστής τάξης συνέλιξης της P_e , όπου P_e η κατανομή ισορροπίας της P με

$$P_e(x) = \frac{\int_0^x \bar{P}(t) dt}{m},$$

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p_e(x) = \frac{\bar{P}(x)}{m}$$

και ουρά

$$\bar{P}_e(x) = \frac{\int_x^{\infty} \bar{P}(t) dt}{m}.$$

Έτσι, από την (2.2.4) προκύπτει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi) \phi^n P_e^{*n}(u), \quad (2.2.5)$$

όπου η P_e^{*n} η συνέλιξη n -οστής τάξεως της κατανομής P_e . Η $H(u)$ ονομάζεται κατανομή μη χρεοκοπίας, είναι μια μεικτή κατανομή με την έννοια ότι έχει μάζα στο $u = 0$, $H(0) = 1 - \phi$, και είναι συνεχής για $u > 0$.

Στο κλασικό μοντέλο, η ποσότητα $\phi p_e(y) dy$ είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει για πρώτη φορά κάτω από το αρχικό αποθεματικό και να είναι μεταξύ των τιμών $u - y$ και $u - y - dy$ (βλέπε Bowers et al. (1986, Chapter 13)). Στο κλασικό μοντέλο η κατανομή ισορροπίας $P_e(x)$ συμπίπτει με την κατανομή των κλιμακωτών υψών. Η έννοια των κλιμακωτών υψών εξηγείται στην επόμενη παράγραφο.

Είναι σημαντικό για την ασφαλιστική εταιρία να γνωρίζει το μέγεθος του ελλείμματος $|U(T)|$ στην περίπτωση που γίνει χρεοκοπία. Την έννοια του ελλείμματος εισήγαγαν οι Gerber et al. (1987) και η κατανομή του ορίζεται ως

$$H(u, y) = Pr(|U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u), \quad (2.2.6)$$

με ουρά

$$\bar{H}(u, y) = Pr(|U(T)| > y, T < \infty | U(0) = u). \quad (2.2.7)$$

Η κατανομή $H(u, y)$ είναι ελλειμματική γιατί $\lim_{y \rightarrow \infty} H(u, y) = \psi(u) < 1$. Ισχύει ακόμα ότι $\bar{H}(u, 0) = \psi(u)$. Επιπλέον, μια χρήσιμη κατανομή που θα μελετήσουμε εκτενέστερα στα Κεφάλαια 3 και 4 είναι η κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία, δηλαδή

$$H_u(y) = \frac{H(u, y)}{\psi(u)} = Pr(|U(T)| \leq y | T < \infty, U(0) = u). \quad (2.2.8)$$

Οι Dufresne and Gerber (1988) εισήγαγαν μια ακόμα σημαντική έννοια που είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, $U(T-)$. Η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$H(u, x, y) = Pr(U(T-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u).$$

Στα Κεφάλαια 5 και 6 μελετάμε με πολλές λεπτομέρειες την ουρά της παραπάνω κατανομής.

2.3 Ανανεωτικό μοντέλο

Το ανανεωτικό μοντέλο, γνωστό και ως μοντέλο Sparre Andersen, είναι μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπου θεωρούμε ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων $N(t)$ μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι μια ανανεωτική ανέλιξη. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_1, T_2, \dots μεταξύ των διαδοχικών αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. και ακολουθούν μια κατανομή

K με μέση τιμή $E(T_1)$. Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να μη γίνει χρεοκοπία με πιθανότητα 1 είναι

$$m < c E(T_1).$$

Επιπλέον, ισχύει

$$c = (1 + \theta) m / E(T_1)$$

όπου $\theta > 0$ είναι το περιθώριο ασφάλειας.

Τα κλιμακωτά ύψη είναι μια έννοια που προέρχεται από τη θεωρία των τυχαίων περιπάτων και παίζουν σημαντικό ρόλο στο υπόλοιπο της διατριβής. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα¹, θεωρούμε μια φθίνουσα ακολουθία

$$u = U(0) > u_1 = U(T_1) > u_2 = U(T_2) > u_3 = U(T_3) > \dots$$

Τότε τα κλιμακωτά ύψη δοθέντος ότι θα γίνει αυτή η πτώση κάτω από το u, u_1, u_2, u_3, \dots ορίζονται ως οι διαφορές

$$\begin{aligned} X_1 &= u - u_1 \\ X_2 &= u_1 - u_2 \\ X_3 &= u_2 - u_3 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

και είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F , πυκνότητα f , ουρά $\bar{F} = 1 - F$ και μέση τιμή μ . Όπως φαίνεται από το σχήμα, το X_1 είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το u , όταν αυτό συμβεί για πρώτη φορά. Η διαδικασία συνεχίζεται θεωρώντας τώρα ως νέο αρχικό αποθεματικό το u_1 . Επομένως, το X_2 είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το u_1 , κ.τ.λ. Έτσι, ενώ στο κλασικό μοντέλο η κατανομή των κλιμακωτών υψών (κατανομή ισορροπίας) είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κατανομή των αποζημιώσεων, στο ανανεωτικό μοντέλο κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει.

Ας συμβολίσουμε με $S = \sum_{i=1}^N X_i$ το τυχαίο άθροισμα των κλιμακωτών υψών μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με

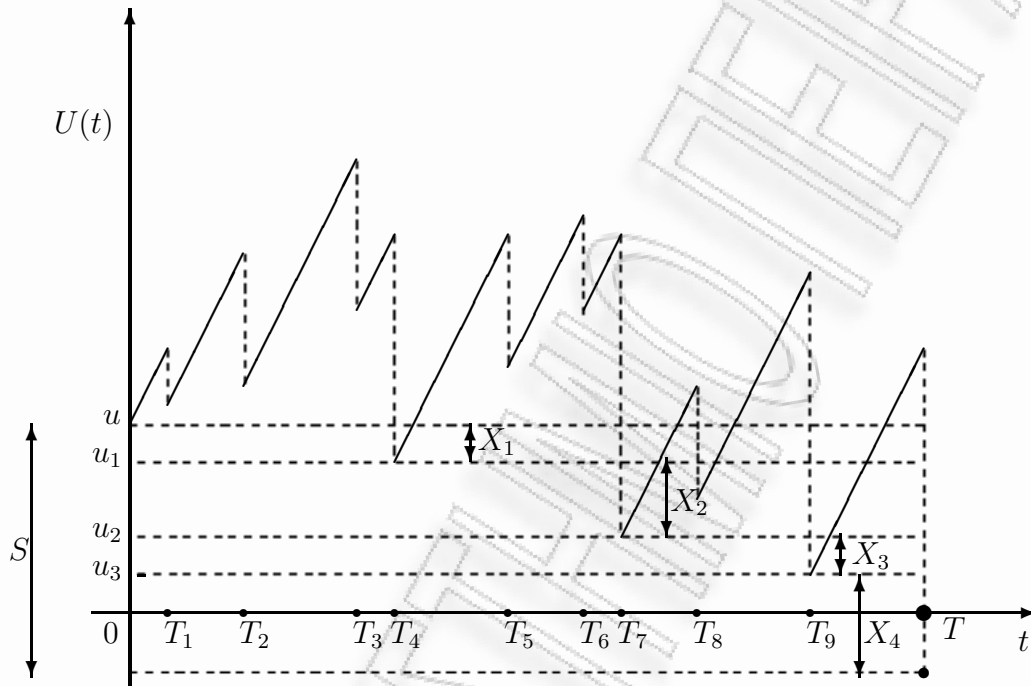
$$Pr(N = n) = (1 - \phi) \phi^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου $\phi = \psi(0)$. Τότε ισχύει $P(S > u) = \psi(u)$, (βλέπε Bowers et al., (1986, Chapter 12)). Από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας

¹ Το συγκεκριμένο σχήμα έχει σχεδιαστεί (σε περιβάλλον LaTeX) από τον κ. Βάιο Δερμιτζάκη υποψήφιο διδάκτορα του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, τον οποίο ευχαριστώ θερμά.

είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, άμεσα συνδεδεμένης με την κατανομή των κλιμακωτών υψών F . Επιπλέον, έχουμε ότι

$$E(S) = E(X_i) E(N) = \frac{\phi \mu}{1 - \phi}.$$



Σχήμα: Κλιμακωτά ύψη

Οι εκφράσεις (2.2.2) και (2.2.3) για την πιθανότητα χρεοκοπίας ισχύουν και πάλι, ενώ ο τύπος των Pollaczek - Khinchine (βλέπε τη σχέση (2.2.4)) ισχύει αν αντικαταστήσουμε την \bar{P}_e με \bar{F} , δηλαδή

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \bar{F}^{*n}(u). \quad (2.3.1)$$

Γενικά από εδώ και στο εξής, η κατανομή των κλιμακωτών υψών στο κλασικό μοντέλο θα συμβολίζεται με P_e (Κεφάλαια 5 και 6) ενώ στο ανανεωτικό μοντέλο θα συμβολίζεται με F (Κεφάλαια 3 και 4). Οι έννοιες του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ είναι ίδιες και στα δύο μοντέλα.

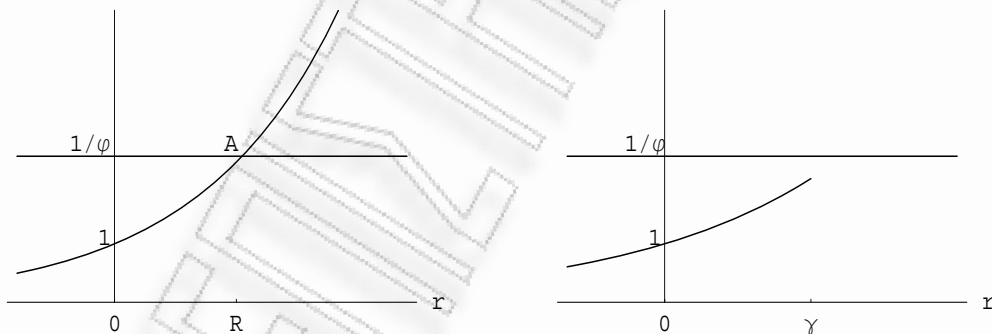
2.4 Συντελεστής προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι μια ιδιαίτερα χρήσιμη έννοια στη θεωρία κινδύνων καθώς και σε άλλους χώρους των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Συμβολίζεται με $R > 0$ και ικανοποιεί την εξίσωση Lundberg (ως προς r)

$$M_X(r) = \int_0^{\infty} e^{rx} dF(x) = \frac{1}{\phi}, \quad (2.4.1)$$

όπου $M_X(r)$ (ή $M_F(r)$) είναι η ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών στο σημείο r .

Έστω $(-\infty, \gamma)$ με $\gamma \geq 0$, το μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα στο οποίο υπάρχει η ροπογεννήτρια $M_X(r)$ και υποθέτουμε ότι $\lim_{r \rightarrow \gamma} M_X(r) = \infty$. Στα Σχήματα 2.1 και 2.2 διακρίνουμε γραφικά τέσσερις περιπτώσεις, όπου σε κάθε σχήμα η καμπύλη παριστάνει τη ροπογεννήτρια $M_X(r)$ με $r \in (-\infty, \infty)$ και η οριζόντια ευθεία είναι η $y(r) = 1/\phi$. Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στο συντελεστή προσαρμογής θα εννοούμε την πρώτη γραφική παράσταση του Σχήματος 2.1, όπου το R είναι η τετμημένη του σημείου τομής A .

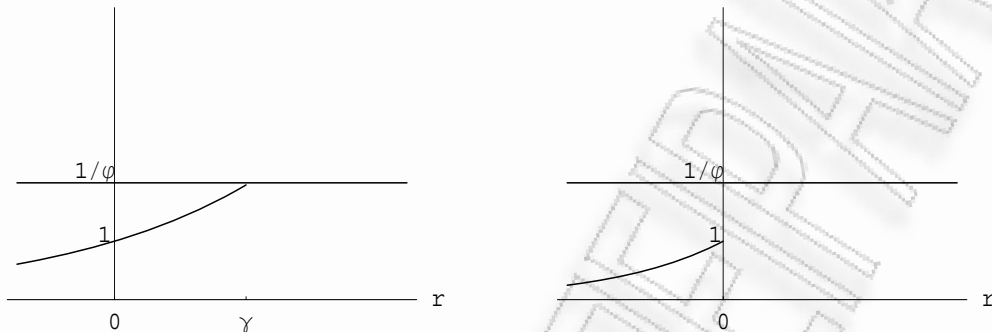


Σχήμα 2.1:

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ένας ισοδύναμος ορισμός για το συντελεστή προσαρμογής είναι ο εξής. Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης (ως προς r)

$$1 + (1 + \theta) m r = M_Y(r), \quad (2.4.2)$$

όπου $M_Y(r) = \int_0^{\infty} e^{rt} dP(t)$ η ροπογεννήτρια της κατανομής του μεγέθους των αποζημιώσεων P .



Σχήμα 2.2:

Η ποσότητα στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (2.4.2) είναι μια γραμμική συνάρτηση του r , ενώ η ροπογεννήτρια $M_Y(r)$ στο δεύτερο μέλος είναι αύξουσα και κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω). Από την υπόθεση ότι $\lambda m < c$ (ισοδύναμα $\theta > 0$) προκύπτει ότι η κλίση $(1 + \theta)m$ της ευθείας $1 + (1 + \theta)m r$ είναι μεγαλύτερη από την κλίση $M'_Y(0) = m$ στο σημείο $r = 0$. Από το Σχήμα 2.3 βλέπουμε ότι η εξίσωση (2.4.2) έχει δύο λύσεις, $r = 0$ και $r = R$. Παρατηρούμε ακόμη από τη σχέση (2.4.2) ότι αν $M_Y(r) = \infty$ για κάθε $r > 0$ τότε δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής. Για παράδειγμα, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P ακολουθεί μια κατανομή Pareto τότε ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει. Στο Κεφάλαιο 5 θα συναντήσουμε μια γενίκευση της (2.4.2) (βλέπε σχέση (5.2.3)), που μελέτησαν οι Gerber and Shiu (1998).

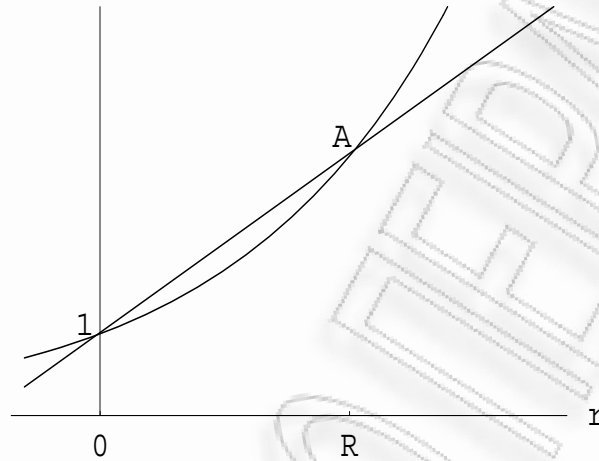
Μια ισοδύναμη σχέση με την (2.4.1) στο ανανεωτικό μοντέλο είναι (βλέπε Rolski et al. (1999, p.255))

$$M_{T_1}(-cr) M_Y(r) = 1, \quad (2.4.3)$$

όπου M_{T_1} , M_Y είναι οι ροπογεννήτριες των ενδιάμεσων χρόνων και των αποζημιώσεων, αντίστοιχα. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή, τότε η (2.4.3) οδηγεί μετά από λίγες πράξεις στην (2.4.2).

Κλείνοντας την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα για την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής στο ανανεωτικό μοντέλο.

Παράδειγμα 2.4.1. Θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η εκθετική με $P(x) = 1 - e^{-bx}$, $x \geq 0$. Τότε από Willmot (2002, Example 3.1) η κατανομή των κλιμακωτών υψών ακολουθεί την ίδια κατανομή, δηλαδή $F(x) = 1 - e^{-bx}$. Από τη σχέση (2.4.1), με απλές πράξεις προκύπτει ότι $R = (1 - \phi)b$.



Σχήμα 2.3:

2.5 Παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας

Παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν είναι γνωστή η κατανομή των αποζημιώσεων υπάρχουν μεταξύ άλλων στους Asmussen (2000), Bowers et al. (1986), Gerber et al. (1987), Dufrense and Gerber (1989), Rolski et al. (1999) και Willmot and Lin (2001). Η εύρεση της $\psi(u)$ δεν είναι πάντα εφικτή με αναλυτικές μεθόδους. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι η εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων καθώς και μέθοδοι προσομοίωσης. Πλήθος εργασιών μελετά την εύρεση φραγμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα των Cai and Garrido (1998, 1999), De Vylder and Goovaerts (1984), Politis (2005), Willmot and Lin (1997), Willmot et al. (2001). Είναι χαρακτηριστικό ότι στο κλασικό μοντέλο ισχύει $\psi(0) = 1/(1+\theta)$, που σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι 0 επηρεάζεται μόνο από το περιθώριο ασφάλειας θ .

Παράδειγμα 2.5.1. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η εκθετική με ουρά

$$\bar{P}(x) = e^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

Τότε από Willmot (2002, Example 3.1) η πιθανότητα χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο είναι $\psi(u) = \phi e^{-Ru}$, όπου $R = (1 - \phi)b$ (βλέπε Παράδειγμα 2.4.1).

Παράδειγμα 2.5.2. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί μίξη εκθετικών με ουρά

$$\bar{P}(x) = q e^{-b_1 x} + (1 - q) e^{-b_2 x}, \quad x \geq 0,$$

όπου $0 < q < 1$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $b_1 < b_2$. Τότε από Willmot (2002, Example 3.2) η πιθανότητα χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο είναι

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u}, \quad u \geq 0,$$

όπου $r_1 = R$, r_2 οι λύσεις της εξίσωσης (2.4.3) με $0 < r_1 < b_1 < r_2 < b_2$ και

$$C_1 = \frac{r_2 (b_1 - r_1)(b_2 - r_1)}{b_1 b_2 (r_2 - r_1)},$$

$$C_2 = \frac{r_1 (r_2 - b_1)(b_2 - r_2)}{b_1 b_2 (r_2 - r_1)}.$$

Παράδειγμα 2.5.3. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη δύο Γάμμα(2, β) με πυκνότητα

$$p(x) = q \beta_1^2 x e^{-\beta_1 x} + (1 - q) \beta_2^2 x e^{-\beta_2 x}.$$

Θεωρούμε ότι $q = 1/2$, $\beta_1 = 1.268$ και $\beta_2 = 4.732$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η πρώτη ροπή είναι $m = 1$. Για $\lambda = 1$ και $c = 2$, οι Gerber et al. (1987) έδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο είναι

$$\psi(u) = 0.517e^{-0.506u} - 0.070e^{-1.765u} + 0.089e^{-3.544u} - 0.036e^{-5.685u}.$$

Παράδειγμα 2.5.4. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την Erlang(2,2) με πυκνότητα

$$p(x) = 4x e^{-2x}, \quad x \geq 0,$$

και ότι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων έχει την ίδια πυκνότητα (ανανεωτικό μοντέλο). Για $c = 1.1$ ο Dickson (1998) έδειξε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = 0.8841 e^{-0.1818u} - 0.0109 e^{-2.7892u}.$$

2.6 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Έστω $0 < \phi < 1$ και G είναι μια κατανομή στο $[0, \infty)$ με $G(0) = 0$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $Z(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση όταν ισχύει

$$Z(u) = \phi \int_0^u Z(u-t) dG(t) + z(u), \quad u \geq 0, \quad (2.6.1)$$

όπου $z(u)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Εξισώσεις της μορφής (2.6.1) συναντάμε συχνά σε περιοχές των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, όπως για παράδειγμα στη θεωρία κινδύνων και στη θεωρία ουρών. Λεπτομέρειες για τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις δίνονται στους Willmot and Lin (2001).

Έστω η σύνθετη γεωμετρική κατανομή $H(u)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$V(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n G^{*n}(u), \quad (2.6.2)$$

όπου G^{*n} η συνέλιξη n -οστής τάξεως της G . Η κατανομή $V(u)$ έχει μάζα στο 0 $V(0) = 1 - \phi$ και είναι συνεχής για $u > 0$. Επιπλέον, έχει έναν ουσιαστικό ρόλο στη λύση της (2.6.1), που γράφεται

$$Z(u) = \frac{1}{1 - \phi} \int_{0+}^u z(u - t) dV(t) + z(u). \quad (2.6.3)$$

Στη θεωρία των ανανεωτικών εξισώσεων η έννοια της ευθέως ολοκληρώσιμης συνάρτησης κατά Riemann (directly Riemann integrable) είναι απαραίτητη και έχει μελετηθεί μεταξύ άλλων από τους Feller (1971), Ross (1983), Asmussen (1987), και Rolski et al. (1999).

Ορισμός 2.6.1. Θεωρούμε μια συνάρτηση $k(x)$ ορισμένη στο $[0, \infty)$. Για κάθε $a > 0$, έστω $\bar{m}_n(a)$ το supremum και $\underline{m}_n(a)$ το infimum της $k(x)$ στο διάστημα $[(n-1)a, na]$. Λέμε ότι η $k(x)$ είναι ευθέως ολοκληρώσιμη κατά Riemann, αν για κάθε $a > 0$ τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(a)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a)$ είναι πεπερασμένα, και

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a).$$

Για να είναι μια συνάρτηση $k(x)$ ευθέως ολοκληρώσιμη κατά Riemann αρκεί να ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

- η $k(x)$ είναι μη αρνητική, φθίνουσα και ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
- η $k(x)$ είναι μονότονη και απολύτως ολοκληρώσιμη.
- η $k(x)$ φράσσεται από μια ευθέως ολοκληρώσιμη συνάρτηση κατά Riemann.
- η $k(x)$ είναι μη αρνητική, συνεχής και ικανοποιεί την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(1) < \infty.$$

- η $k(x)$ είναι σταθερή στα διαστήματα $[n, n+1]$, $n = 0, 1, \dots$ και απολύτως ολοκληρώσιμη.

Το επόμενο ασυμπτωτικό αποτέλεσμα υπάρχει στον Asmussen (1987, p.161).

Λήμμα 2.6.1. Έστω $R > 0$ ο συντελεστής προσαρμογής και ότι η συνάρτηση $e^{Ru} z(u)$ είναι ευθέως ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $(0, \infty)$. Τότε ισχύει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} Z(u) = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} z(y) dy}{\phi \int_0^{\infty} y e^{Ry} dG(y)}.$$

Δύο ειδικές περιπτώσεις της (2.6.3) που θα μελετήσουμε κυρίως στα επόμενα κεφάλαια είναι οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις που ικανοποιούν η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και η ουρά του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $\bar{H}(u, y)$. Στο ανανεωτικό μοντέλο, θεωρούμε την κατανομή των κλιμακωτών υψών F και την κατανομή μη χρεοκοπίας (σύνθετη γεωμετρική) που προκύπτει από την (2.3.1)

$$H(u) = 1 - \psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n F^{*n}(u). \quad (2.6.4)$$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Willmot and Lin (2001))

$$\psi(u) = \phi \int_0^u \psi(u-t) dF(t) + \phi \bar{F}(u) \quad (2.6.5)$$

η οποία έχει λύση

$$\psi(u) = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \bar{F}(u). \quad (2.6.6)$$

Επιπλέον, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η ποσότητα $\bar{H}(u, y)$ (βλέπε Willmot (2002)), είναι

$$\bar{H}(u, y) = \phi \int_0^u \bar{H}(u-t, y) dF(t) + \phi \bar{F}(u+y) \quad (2.6.7)$$

και έχει λύση

$$\bar{H}(u, y) = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u+y-t) dH(t) + \phi \bar{F}(u+y). \quad (2.6.8)$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι για $y = 0$ στις σχέσεις (2.6.7) και (2.6.8), παίρνουμε τις σχέσεις (2.6.5) και (2.6.6), αντίστοιχα. Στο κλασικό μοντέλο ισχύουν οι ίδιες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις $\psi(u)$ και $\bar{H}(u, y)$, όπου η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι η κατανομή ισορροπίας P_e . Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της από κοινού ουράς του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο.

Τέλος, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.6.1 για τις $\psi(u)$ και $\bar{H}(u, y)$, έχουμε τους ασυμπτωτικούς τύπους

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}. \quad (2.6.9)$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \bar{H}(u, y) = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(u+y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}, \quad (2.6.10)$$

αντίστοιχα.

2.7 Κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας

Σε αυτή την παράγραφο, δίνουμε τους ορισμούς των κλάσεων κατανομών αξιοπιστίας που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια και που περιγράφονται με λεπτομέρειες στους Barlow and Proschan (1981) και στους Willmot and Lin (2001). Έστω η θετική τ.μ. X που παριστάνει το χρόνο ζωής ενός εξαρτήματος με συνάρτηση κατανομής $G(x) = Pr(X \leq x)$ και ουρά $\bar{G}(x) = 1 - G(x) = Pr(X > x)$, $x \geq 0$. Αν η G είναι απολύτως συνεχής, δηλαδή έχει πυκνότητα $g = G'$ τότε η βαθμίδα αποτυχίας (failure rate) της G (εννοούμε τη βαθμίδα αποτυχίας της X που ακολουθεί την κατανομή G) είναι $\lambda_G(x) = g(x)/\bar{G}(x)$. Η $\lambda_G(x)$ γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \lambda_G(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(x+h)}{h \bar{G}(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{\bar{G}(x+h)}{\bar{G}(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [1 - Pr(X > x+h | X > x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [Pr(X \leq x+h | X > x)]. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε μια ένδειξη για τη συμπεριφορά της δεξιάς ουράς της κατανομής ανάλογα με τις τιμές που έχει η βαθμίδα αποτυχίας. Ειδικότερα, μικρές τιμές για το $\lambda_G(x)$ είναι μια ένδειξη ότι η κατανομή G έχει βαριά από δεξιά ουρά, ενώ όταν οι τιμές του $\lambda_G(x)$ είναι μεγάλες τότε έχουμε μια ένδειξη ελαφριάς από δεξιά ουράς.

Ορισμός 2.7.1. Μια κατανομή G είναι IFR (DFR) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ η συνάρτηση $\bar{G}(x+y)/\bar{G}(x)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς x . Επιπλέον, αν η κατανομή G είναι απολύτως συνεχής, τότε η G είναι IFR (DFR) όταν η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_G(x) = g(x)/\bar{G}(x)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του x .

Παράδειγμα 2.7.1. Η εκθετική κατανομή με ουρά

$$\bar{G}(x) = e^{-bx}, \quad x \geq 0,$$

όπου $b > 0$, είναι η μοναδική κατανομή που είναι συγχρόνως IFR και DFR.

Παράδειγμα 2.7.2. Η μίξη εκθετικών με ουρά

$$\bar{G}(x) = q e^{-b_1 x} + (1 - q) e^{-b_2 x}, \quad x \geq 0,$$

όπου $b_2 > b_1 > 0$ και $0 < q < 1$, είναι DFR.

Παράδειγμα 2.7.3. Η κατανομή Γάμμα με πυκνότητα

$$g(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}, \quad x \geq 0,$$

όπου $\lambda > 0$, $a > 0$ είναι IFR αν $a \geq 1$ και DFR αν $0 < a \leq 1$.

Παράδειγμα 2.7.4. Η κατανομή Weibull με ουρά

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x^a}, \quad x \geq 0,$$

όπου $\lambda > 0$ και $a > 0$, είναι IFR αν $a \geq 1$ και DFR αν $0 < a \leq 1$.

Παράδειγμα 2.7.5. Η κατανομή Pareto με ουρά

$$\bar{G}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^a, \quad x \geq 0,$$

όπου $\lambda > 0$ και $a > 0$, είναι DFR.

Παράδειγμα 2.7.6. Η κατανομή Burr με ουρά

$$\bar{G}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^r} \right)^a, \quad x \geq 0,$$

όπου $\lambda > 0$, $a > 0$ και $r > 0$ είναι DFR αν $0 < r \leq 1$.

Θεωρούμε τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής $T_x = X - t | X > x$ για $x \geq 0$. Η ουρά του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής είναι

$$Pr(T_x > t) = Pr(X - x > t | X > x) = \frac{\bar{G}(x+t)}{\bar{G}(x)}, \quad t \geq 0.$$

Επομένως, η κατανομή του T_x είναι

$$Pr(T_x \leq t) = 1 - \frac{\bar{G}(x+t)}{\bar{G}(x)}, \quad t \geq 0.$$

Η μέση τιμή του T_x , ονομάζεται μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής (MRL) και είναι

$$r_G(x) = E(T_x) = \int_0^{\infty} Pr(T_x > t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\overline{G}(x+t)}{\overline{G}(x)} dt, \quad t \geq 0. \quad (2.7.1)$$

Έστω $G_e(x)$ η κατανομή ισορροπίας της G , με

$$G_e(x) = \frac{\int_0^x \overline{G}(t) dt}{\int_0^{\infty} \overline{G}(t) dt}, \quad x \geq 0,$$

με ουρά

$$\overline{G}_e(x) = 1 - G_e(x) = \frac{\int_x^{\infty} \overline{G}(t) dt}{\int_0^{\infty} \overline{G}(t) dt}$$

και πυκνότητα

$$g_e(x) = \frac{\overline{G}(x)}{\int_0^{\infty} \overline{G}(t) dt}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας της G_e συνδέεται άμεσα με το μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής της G . Πράγματι,

$$\lambda_{G_e}(x) = \frac{g_e(x)}{\overline{G}_e(x)} = \frac{\overline{G}(x)}{\int_x^{\infty} \overline{G}(t) dt} = \frac{1}{r_G(x)}.$$

Ορισμός 2.7.2. Μια κατανομή G είναι DMRL (IMRL) όταν η συνάρτηση $r_G(x)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα).

Από τον Ορισμό 2.7.1 και την (2.7.1) προκύπτει ότι η κλάση IFR (DFR) περιέχεται στην κλάση DMRL (IMRL).

Ορισμός 2.7.3. Μια κατανομή G είναι NBU (NWU) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει $\overline{G}(x+y) \leq (\geq) \overline{G}(x) \overline{G}(y)$.

Η κλάση IFR (DFR) περιέχεται στην κλάση NBU (NWU). Επιπλέον δεν υπάρχει σύγκριση μεταξύ των κλάσεων NBU (NWU) και DMRL (IMRL).

Ορισμός 2.7.4. Μια κατανομή G είναι 2-NBU (2-NWU) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει $\overline{G}_e(x+y) \leq (\geq) \overline{G}_e(x) \overline{G}_e(y)$.

Η κλάση DMRL (IMRL) περιέχεται στην κλάση 2-NBU (2-NWU). Ακόμα δεν υπάρχει σύγκριση μεταξύ των κλάσεων 2-NBU (2-NWU) και NBU (NWU).

Ορισμός 2.7.5. Μια κατανομή G είναι UBAE (UWAE) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει $\overline{G}_e(x+y) \geq (\leq) \overline{G}_e(x) e^{-y/r_G(\infty)}$.

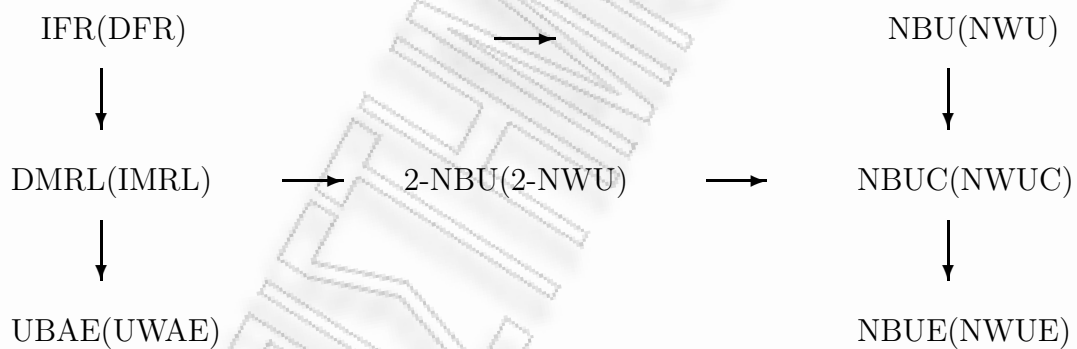
Η κλάση UBAE (UWAE) είναι ευρύτερη από την κλάση DMRL (IMRL), ενώ δεν υπάρχει σύγκριση μεταξύ των κλάσεων UBAE (UWAE) και 2-NBU (2-NWU).

Ορισμός 2.7.6. Μια κατανομή G είναι NBUC (NWUC) όταν για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει $\overline{G}_e(x+y) \leq (\geq) \overline{G}_e(x) \overline{G}(y)$.

Η κλάση NBUC (NWUC) είναι ευρύτερη από τις κλάσεις NBU (NWU) και 2-NBU (2-NWU).

Ορισμός 2.7.7. Μια κατανομή G είναι NBUE (NWUE) όταν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $\overline{G}_e(x) \leq (\geq) \overline{G}(x)$.

Η κλάση NBUE (NWUE) είναι ευρύτερη από την κλάση NBUC (NWUC). Περισσότερες λεπτομέρειες για τις κλάσεις αυτές, καθώς και για άλλες κλάσεις κατανομών, υπάρχουν στο βιβλίο των Willmot and Lin (2001, Chapter 2). Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε συνοπτικά τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις κλάσεις που αναφέραμε.



2.8 Κατανομές με βαριά ουρά

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τους ορισμούς και κάποια βασικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα κατανομών με βαριά ουρά, που είναι απαραίτητα στη συνέχεια της διατριβής. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την κλάση των υποεκθετικών κατανομών και την κλάση κατανομών \mathcal{L} , οι οποίες είναι ευρέως γνωστές στο χώρο των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Πλήθος ερευνητών έχουν ασχοληθεί με τις κλάσεις αυτές, μεταξύ άλλων οι Cai and Tang (2004), Chistyakov (1964), Embrechts and Goldie (1980, 1982), Embrechts and Veraverbeke (1982), Klüppelberg (1988, 1989a, 1989b), Ng and Tang (2004) και Teugels (1975). Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι τα αποτελέσματα που αναφέρονται στη συνέχεια αποδίδονται στους Goldie and Klüppelberg (1998).

Ορισμός 2.8.1. Έστω $(X_i)_{i \in N}$ μια ακολουθία (θετικών) ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. έτσι ώστε $G(x) < 1$ για κάθε $x > 0$. Ορίζουμε

$$\overline{G}(x) = 1 - G(x)$$

την ουρά της G και

$$\overline{G^{*n}}(x) = 1 - G^{*n}(x) = P(X_1 + \dots + X_n > x)$$

η ουρά της n -οστής τάξης συνέλιξης της G . Λέμε ότι η G είναι μια υποεκθετική κατανομή ($G \in \mathcal{S}$) αν ισχύει μια από τις επόμενες συνθήκες:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*n}}(x)}{\overline{G}(x)} = n$$

για κάποιο (όλα) $n \geq 2$,

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = 1.$$

□

Παρατήρηση 2.8.1. (i) Ο Chistyakov (1964) απέδειξε ότι αν ισχύει το (a) του προηγούμενου ορισμού για κάποιο $n = 2$ τότε ισχύει και για κάθε $n > 2$. Οι Embrechts - Goldie (1982) απέδειξαν για το (a), ότι αν ισχύει για κάποιο $n \geq 2$ τότε θα ισχύει και για $n = 2$.

(ii) Η ισοδυναμία των (a) και (b) έχει βρεθεί από τους Embrechts and Goldie (1980) και η απόδειξη είναι η εξής:

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x) = 1 - G^n(x) = \overline{G}(x) \sum_{k=0}^{n-1} G^k(x) \sim n\overline{G}(x),$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Ο συμβολισμός $f(x) \sim g(x)$ σημαίνει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$. Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*n}}(x)}{n\overline{G}(x)} = 1.$$

(iii) Ισχύουν από Chistyakov (1964) οι παρακάτω συνεπαγωγές

$$G \in \mathcal{S} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{\epsilon x} dG(x) = \infty \quad (2.8.1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{e^{-\epsilon x}} = \infty \quad (2.8.2)$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Από την (2.8.1) προκύπτει ότι οι υποεκθετικές κατανομές δεν έχουν ροπογεννήτρια. Επιπλέον, από την (2.8.2) συμπεραίνουμε ότι οι ουρές των υποεκθετικών κατανομών τείνουν πιο αργά στο 0 από ότι μια εκθετική ουρά.

Μια άλλη κλάση κατανομών με βαριά ουρά είναι η κλάση \mathcal{L} .

Ορισμός 2.8.2. Λέμε ότι η κατανομή G ανήκει στη κλάση \mathcal{L} ($G \in \mathcal{L}$) αν για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)} = 1.$$

Ο Chistyakov (1964) έδειξε ότι η κλάση \mathcal{L} είναι ευρύτερη από την κλάση των υποεκθετικών δηλαδή ότι $G \in \mathcal{S} \Rightarrow G \in \mathcal{L}$. Υπενθυμίζοντας ότι P_e και F είναι οι κατανομές των κλιμακωτών υψών στο κλασικό και στο ανανεωτικό μοντέλο, αντίστοιχα, αναφέρουμε δύο γνωστά αποτελέσματα, τα οποία θα είναι χρήσιμα στη συνέχεια.

1) Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ισχύει ότι

$$P_e \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - \psi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u)} = \frac{\phi}{1 - \phi}. \quad (2.8.3)$$

2) Στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ισχύει ότι

$$P_e \in \mathcal{S} \Leftrightarrow 1 - \psi \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u)} = \frac{\phi}{1 - \phi}. \quad (2.8.4)$$

Κεφάλαιο 3

Ιδιότητες Μονοτονίας

3.1 Εισαγωγή

Έστω $H_u(y)$ η κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία, ξεκινώντας με ένα αρχικό αποθεματικό u (βλέπε (2.2.8)). Οι Dickson and Dos Reis (1996) μελέτησαν, στο κλασικό μοντέλο, τη μονοτονία της συνάρτησης $H_u(y)$ ως προς u . Στο κεφάλαιο αυτό βρίσκουμε αποτελέσματα, στο ανανεωτικό μοντέλο, που αφορούν τη μονοτονία της $H_u(y)$ καθώς και άλλων ποσοτήτων τα οποία βελτιώνουν και γενικεύουν τα αποτελέσματα των Dickson and Dos Reis (1996) και Willmot and Lin (1998). Εισάγουμε μια νέα κλάση κατανομών η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας. Επιπλέον στο ανανεωτικό μοντέλο, γενικεύουμε την ευρέως γνωστή NWU ιδιότητα για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας, εκφράζοντας τους όρους με την κατανομή του ελλείμματος. Τέλος, κάνουμε μια σύνδεση ορισμένων στοχαστικών διατάξεων στη θεωρία κινδύνων.

3.2 Μονοτονία Κλασμάτων

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u + y)$ ως προς u διατηρώντας το y σταθερό και ως προς y διατηρώντας το u σταθερό, στις περιπτώσεις των DFR και IFR κλάσεων κατανομών. Γενικά ο υπολογισμός των $\bar{H}(u, y)$ και $\bar{F}(u + y)$ είναι δύσκολος (σε αρκετές περιπτώσεις μη εφικτός) και γι' αυτό μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του ηλίικου.

Θεώρημα 3.2.1. *Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι IFR, τότε για κάθε $y \geq 0$ η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u + y)$ είναι αύξουσα ως προς u .*

Απόδειξη.

Διαιρώντας την (2.6.8) με $\bar{F}(u + y)$ προκύπτει ότι

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\bar{F}(u + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\bar{F}(u + y)} dH(t) + \phi. \quad (3.2.1)$$

Αν η F είναι IFR τότε από τον Ορισμό 2.7.1, το πηλίκο $\bar{F}(u+y-t)/\bar{F}(u+y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u για κάθε $t \in [0, u+y]$. Έτσι, για κάθε $0 \leq s < u$, έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{\bar{F}(s+y-t)}{\bar{F}(s+y)} \leq \frac{\bar{F}(u+y-t)}{\bar{F}(u+y)}$$

για κάθε $t \in [0, s+y]$. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς t στο διάστημα $(0, s]$ προκύπτει ότι

$$\int_{0+}^s \frac{\bar{F}(s+y-t)}{\bar{F}(s+y)} dH(t) \leq \int_{0+}^s \frac{\bar{F}(u+y-t)}{\bar{F}(u+y)} dH(t) \leq \int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u+y-t)}{\bar{F}(u+y)} dH(t),$$

όπου η τελευταία ανίσωση οφείλεται στο γεγονός ότι οι ποσότητες μέσα στα ολοκληρώματα είναι θετικές. Επομένως, το $\int_{0+}^u \bar{F}(u+y-t)/\bar{F}(u+y) dH(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u . Έτσι, από την (3.2.1) ο λόγος $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u+y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u . \square

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.2.2. *Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι IFR, τότε η συνάρτηση $\psi(u)/\bar{F}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u .*

Απόδειξη.

Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.2.1 για $y = 0$. \square

Στο σημείο αυτό εισάγουμε μια νέα κλάση κατανομών που είναι ευρύτερη της IFR.

Ορισμός 3.2.1. Μια κατανομή G ανήκει στην κλάση ICR (Increasing Convolution Ratio) αν η συνάρτηση $G^{*2}(u)/G(u)$ είναι αυξουσα ως προς u .

Με όρους διάταξης, η G καλείται ICR όταν είναι μικρότερη κατά βαθμίδα αποτυχίας από την G^{*2} . Περισσότερες λεπτομέρειες στη διάταξη κατά βαθμίδα αποτυχίας (hazard rate order) υπάρχουν στους Shaked and Shanthikumar (1994) και Müller and Stoyan (2002). Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι η IFR κλάση κατανομών περιέχεται στην ICR και επεκτείνουμε το Πόρισμα 3.2.2 στην ICR περίπτωση.

Λήμμα 3.2.3. *Αν μια συνάρτηση κατανομής G είναι NBU, τότε $G(0) = 0$.*

Απόδειξη.

Επειδή η G είναι NBU, για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει $\bar{G}(u+y) \leq \bar{G}(u)\bar{G}(y)$. Για $u = 0$, είναι φανερό ότι $\bar{G}(y) \leq \bar{G}(0)\bar{G}(y)$, ή ισοδύναμα, $1 \leq \bar{G}(0)$. Επειδή $\bar{G}(y) \leq 1$ για κάθε $y \geq 0$, προκύπτει ότι $G(0) = 0$. \square

Πρόταση 3.2.4. *Αν μια κατανομή G είναι IFR τότε είναι ICR.*

Απόδειξη.

Αν η G είναι IFR, τότε είναι NBU. Συνεπώς, από το Λήμμα 3.2.3 ισχύει $G(0) = 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\overline{G^{*2}}(u)}{\overline{G}(u)} &= \frac{1 - \int_0^u G(u-t) dG(t)}{\overline{G}(u)} \\ &= \frac{1 - G(u) + \int_0^u \overline{G}(u-t) dG(t)}{\overline{G}(u)} \\ &= 1 + \int_0^u \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Αν η G είναι IFR τότε η συνάρτηση $\overline{G}(u+t)/\overline{G}(u)$ είναι φθίνουσα ως προς $u \geq 0$, για $t \geq 0$, σταθερό που σημαίνει ότι η $\overline{G}(u-t)/\overline{G}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , για $t \in [0, u]$ σταθερό. Εργαζόμενοι όπως το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει ότι η συνάρτηση $\int_0^u \overline{G}(u-t)/\overline{G}(u) dG(t)$ είναι αύξουσα ως προς u , οπότε από την (3.2.2) προκύπτει ότι η G είναι ICR. \square

Σημειώνουμε ότι, αν η συνάρτηση $\int_0^u \overline{G}(u-t)/\overline{G}(u) dG(t)$ είναι αύξουσα ως προς u , τότε δεν προκύπτει ότι η συνάρτηση $\overline{G}(u-t)/\overline{G}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , για $t \in [0, u]$ σταθερό (βλέπε Παράδειγμα 3.2.7). Έτσι, από τη σχέση (3.2.2), προκύπτει ότι η κλάση ICR είναι ευρύτερη της IFR.

Το επόμενο λήμμα εξηγεί γιατί στον ορισμό της κλάσης ICR θεωρήσαμε μόνο τη συνέλιξη δεύτερης τάξεως.

Λήμμα 3.2.5. *Αν μια κατανομή G είναι ICR, τότε η συνάρτηση $\overline{G^{*n}}(u)/\overline{G}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u για κάθε $n \geq 2$.*

Απόδειξη (Επαγωγή).

Για $n = 2$ ισχύει από τον ορισμό της κλάσης ICR. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k > 2$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} \frac{\overline{G^{*(k+1)}}(u)}{\overline{G}(u)} &= \frac{1 - \int_0^u G^{*k}(u-t) dG(t)}{\overline{G}(u)} \\ &= \frac{1 - G(u) + \int_0^u \overline{G^{*k}}(u-t) dG(t)}{\overline{G}(u)} \\ &= 1 + \int_0^u \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Επειδή από υπόθεση, η συνάρτηση $\overline{G^{*k}}(u)/\overline{G}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , προκύπτει ότι $\overline{G^{*k}}(u)/\overline{G}(u) \geq \overline{G^{*k}}(0)/\overline{G}(0)$. Έτσι για κάθε $u > s \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \int_0^u \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t) - \int_0^s \frac{\overline{G^{*k}}(s-t)}{\overline{G}(s)} dG(t) \\
&= \int_0^s \left[\frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u-t)} \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} - \frac{\overline{G^{*k}}(s-t)}{\overline{G}(s-t)} \frac{\overline{G}(s-t)}{\overline{G}(s)} \right] dG(t) \\
&\quad + \int_s^u \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u-t)} \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t) \\
&\geq \int_0^s \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u-t)} \left[\frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} - \frac{\overline{G}(s-t)}{\overline{G}(s)} \right] dG(t) + \int_s^u \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u-t)} \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t) \\
&\geq \int_0^s \frac{\overline{G^{*k}}(0)}{\overline{G}(0)} \left[\frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} - \frac{\overline{G}(s-t)}{\overline{G}(s)} \right] dG(t) + \int_s^u \frac{\overline{G^{*k}}(0)}{\overline{G}(0)} \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t) \\
&= \frac{\overline{G^{*k}}(0)}{\overline{G}(0)} \left[\int_0^u \frac{\overline{G}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t) - \int_0^s \frac{\overline{G}(s-t)}{\overline{G}(s)} dG(t) \right] \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο ότι η G είναι ICR. Έτσι η συνάρτηση

$$\int_0^u \frac{\overline{G^{*k}}(u-t)}{\overline{G}(u)} dG(t)$$

είναι αύξουσα ως προς u . Από τη σχέση (3.2.3) προκύπτει ότι η συνάρτηση $\overline{G^{*(k+1)}}(u)/\overline{G}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u . \square

Το παρακάτω αποτέλεσμα γενικεύει το αποτέλεσμα του Πορίσματος 3.2.2.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι ICR, τότε η συνάρτηση $\psi(u)/\overline{F}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u .*

Απόδειξη.

Από την (2.3.1) διαιρώντας με $\overline{F}(u)$ έχουμε

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}(u)} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \frac{\overline{F^{*n}}(u)}{\overline{F}(u)}.$$

Ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}(u)} = (1-\phi)\phi + \sum_{n=2}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \frac{\overline{F^{*n}}(u)}{\overline{F}(u)}.$$

Από την τελευταία σχέση και το Λήμμα 3.2.5, η $\psi(u)/\bar{F}(u)$ είναι αύξουσα ως (άπειρο) άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων. \square

Το αντίστροφο του Πορίσματος 3.2.2 δεν ισχύει. Για λόγους απλότητας, στο παρακάτω παράδειγμα θεωρούμε το κλασικό μοντέλο.

Παράδειγμα 3.2.7. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη εκθετικών με πυκνότητα

$$p(x) = \frac{1}{2} 3e^{-3x} + \frac{1}{2} 7e^{-7x},$$

και περιθώριο ασφάλειας $\theta = 2/5$ (βλέπε Gerber et al. (1987, Example 1)). Γνωρίζουμε ότι η μίξη εκθετικών ανήκει στην κλάση DFR. Η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι, επίσης, μίξη εκθετικών με ουρά

$$\bar{F}(x) = \frac{\int_u^\infty \bar{P}(t) dt}{m} = \frac{7}{10} e^{-3x} + \frac{3}{10} e^{-7x}.$$

Επιπλέον, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}.$$

Παρατηρούμε ότι, ενώ η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι DFR, ο λόγος $\psi(u)/\bar{F}(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Ακόμα, από τη σχέση (3.2.2), κάνοντας λίγες αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει ότι

$$\frac{\bar{F}^{*2}(u)}{\bar{F}(u)} = 1 + \frac{3}{20} \left(5 - \frac{50}{3 + 7e^{4u}} + 14u \right)$$

που είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς u , δηλαδή η F είναι DFR και ICR. \square

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η μίξη δύο εκθετικών δεν είναι πάντα ICR.

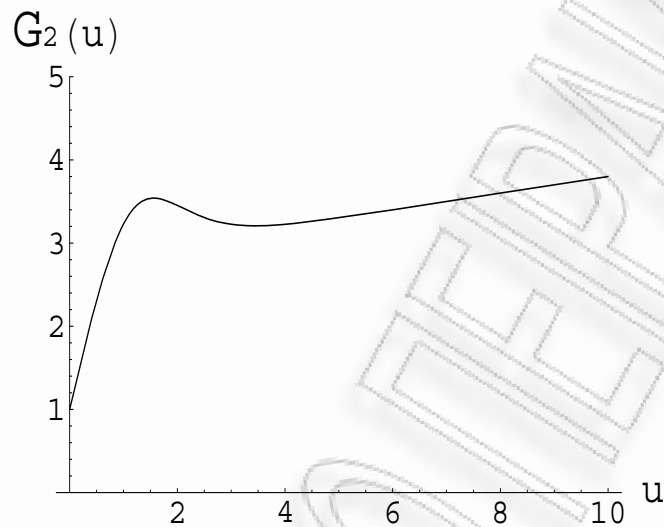
Παράδειγμα 3.2.8. Θεωρούμε την κατανομή G με ουρά

$$\bar{G}(x) = \frac{1}{10} e^{-x} + \frac{9}{10} e^{-2x}.$$

Από την (3.2.2), κάνοντας πράξεις, προκύπτει ότι

$$\frac{\bar{G}^{*2}(u)}{\bar{G}(u)} = 1 + \frac{1}{10} \left(18 + u + \frac{18(13u - 10)}{9 + e^{2u}} \right).$$

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.1 η συνάρτηση $\bar{G}^{*2}(u)/\bar{G}(u)$ δεν είναι αύξουσα, δηλαδή η κατανομή G δεν είναι ICR.



Σχήμα 3.1: Η $G_2(u) = \overline{G^{*2}}(u)/\overline{G}(u)$ δεν είναι αύξουσα.

Παρατήρηση 3.2.1. Η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u + y)$ δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα ως προς u . Συγκεκριμένα δεν υπάρχει διάστημα της μορφής $[0, a]$ στο οποίο το κλάσμα $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u + y)$ να είναι γνησίως φθίνουσα ως προς u . Πράγματι, έστω ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[0, a]$. Τότε, επειδή $\overline{H}(0, y) = \phi \overline{F}(y)$ (βλέπε σχέση (2.6.7)), ισχύει

$$\frac{\overline{H}(a, y)}{\overline{F}(a + y)} < \frac{\overline{H}(0, y)}{\overline{F}(y)} = \phi,$$

που είναι άτοπο. Σαν ειδική περίπτωση (όταν $y = 0$), μπορούμε να πούμε ο λόγος $\psi(u)/\overline{F}(u)$ δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα ως προς u με $u \in [0, a]$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό του Θεωρήματος 3.2.1, μελετώντας τη μονοτονία ως προς y . Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα του Szekli (1986) το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στη συνέχεια.

Λήμμα 3.2.9. Αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε και η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR.

Θεώρημα 3.2.10. Αν η P είναι DFR, τότε για κάθε $u \geq 0$ η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u + y)$ είναι φθίνουσα ως προς y . Αν η F είναι IFR, τότε για κάθε $u \geq 0$ η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u + y)$ είναι αύξουσα ως προς y .

Απόδειξη.

Αν η F είναι DFR (IFR), τότε η συνάρτηση $\overline{F}(u + y - t)/\overline{F}(u + y)$ είναι φθίνουσα

(αύξουσα) ως προς y , για κάθε $u \geq 0$ και $t \in [0, u]$. Θυμίζουμε τη σχέση (3.2.1), η οποία είναι

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\bar{F}(u + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\bar{F}(u + y)} dH(t) + \phi.$$

Έτσι, για κάθε $y > w \geq 0$, επειδή η F είναι DFR (IFR), έχουμε

$$\frac{\bar{F}(u + w - t)}{\bar{F}(u + w)} \geq (\leq) \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\bar{F}(u + y)}.$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι

$$\int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u + w - t)}{\bar{F}(u + w)} dH(t) \geq (\leq) \int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\bar{F}(u + y)} dH(t).$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\phi/(1 - \phi)$ και προσθέτοντας το ϕ και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης, προκύπτει ότι για $y > w \geq 0$,

$$\frac{\bar{H}(u, w)}{\bar{F}(u + w)} \geq (\leq) \frac{\bar{H}(u, y)}{\bar{F}(u + y)}. \quad (3.2.4)$$

Συνεπώς η $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u + y)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς y . Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.9. \square

Από την (3.2.4) παρατηρούμε ότι για $w = 0$, αν η P είναι DFR (η F είναι IFR), τότε

$$\frac{\psi(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{\bar{H}(u, 0)}{\bar{F}(u + 0)} \geq (\leq) \frac{\bar{H}(u, y)}{\bar{F}(u + y)}.$$

Οι σχέσεις αυτές έχουν αποδειχθεί από τον Willmot (2002, Corollary 3.2).

Πρόταση 3.2.11. Αν η P είναι DFR, τότε για κάθε $u \geq 0$, η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(y)$ είναι αύξουσα ως προς y . Αν η F είναι IFR, τότε για κάθε $u \geq 0$, η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(y)$ είναι φθίνουσα ως προς y .

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η F είναι DFR (IFR). Τότε για κάθε $u \geq 0$ και $t \in [0, u]$, η $\bar{F}(u + y - t)/\bar{F}(y)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) ως προς y . Διαιρώντας κάθε όρο της (2.6.8) με $\bar{F}(y)$, προκύπτει ότι

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\bar{F}(y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0+}^u \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\bar{F}(y)} dH(t) + \phi \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(y)}.$$

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.10, έχουμε ότι για κάθε $y > w \geq 0$,

$$\frac{\overline{H}(u, w)}{\overline{F}(w)} \leq (\geq) \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{F}(y)}.$$

Από το Λήμμα 3.2.9, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

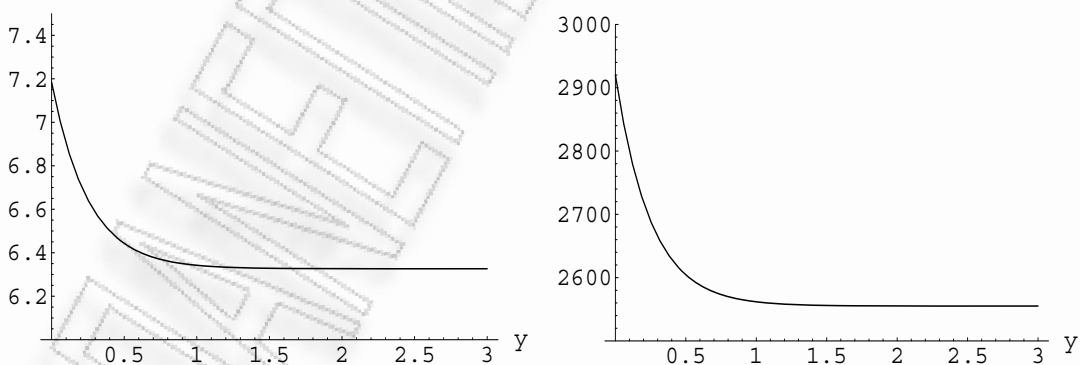
Για $w = 0$, ο Willmot (2002, Theorem 3.2) έδειξε ότι η τελευταία σχέση ισχύει αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι NWU (NBU).

Στα επόμενα παραδείγματα επαληθεύουμε το Θεώρημα 3.2.10 και την Πρόταση 3.2.11 στις περιπτώσεις DFR και IFR.

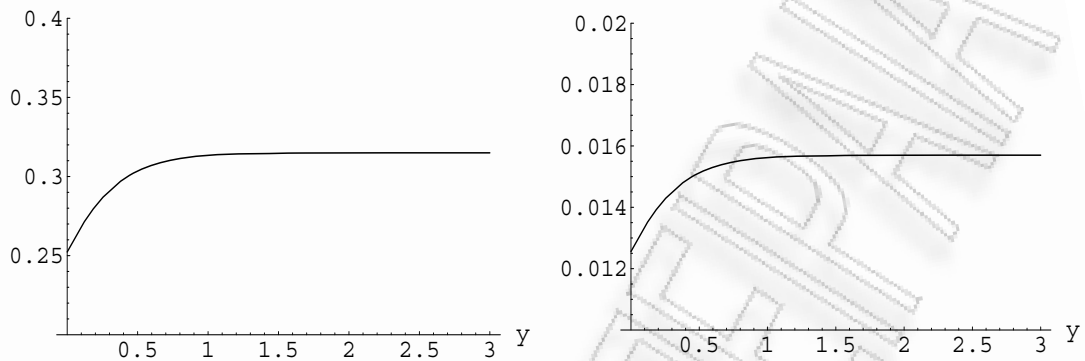
Παράδειγμα 3.2.12. Θεωρούμε το Παράδειγμα 3.2.7, όπου η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη δύο εκθετικών (που είναι DFR). Η ουρά του ελλείμματος δίνεται από

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, y) = & 0.142857 \left[\frac{3}{2} e^{-7(u+y)} + \frac{7}{2} e^{-3(u+y)} \right] \\ & + 0.0142857 e^{-7(u+y)} \left\{ e^u \left[6e^{5u} + 9 - 7e^{4u} (5e^{3u} - 6e^{5u} + 1) \right] - 15 \right\}. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος προέκυψε από την (2.6.8) κάνοντας τις πράξεις στο Mathematica. Στο Σχήμα 3.2 βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u+y)$ είναι φθίνουσα ως προς y , όταν το u πάρει τις τιμές 1 και 4. Επιπλέον στο Σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι για τις ίδιες τιμές του u , η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(y)$ είναι αύξουσα ως προς y .



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση $\overline{H}(u, y)/\overline{F}(u+y)$ είναι φθίνουσα ως προς y , για $u = 1$ (αριστερά) και $u = 4$ (δεξιά).



Σχήμα 3.3: Η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(y)$ είναι αύξουσα ως προς y , για $u = 1$ (αριστερά) και $u = 4$ (δεξιά).

Παράδειγμα 3.2.13. Θεωρούμε το Παράδειγμα 2.5.4 όπου η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η Erlang(2,2). Από τον Dickson (1998) η ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών δίνεται από τη σχέση

$$\bar{F}(y) = 1.14521 [0.8732 - 0.8732 (1 - e^{-2y}) + 0.7175 e^{-2y} y]$$

και η ουρά του ελλείμματος είναι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, y) = & 0.8841 e^{-0.1818 u} - 0.0109 e^{-2.7892 u} \\ & + 0.0109 e^{-2.7892 u} (1 - e^{-2y}) - 0.8841 e^{-0.1818 u} (1 - e^{-2y}) \\ & + 0.2172 e^{-2.7892 u - 2y} y + 0.5003 e^{-0.1818 u - 2y} y. \end{aligned}$$

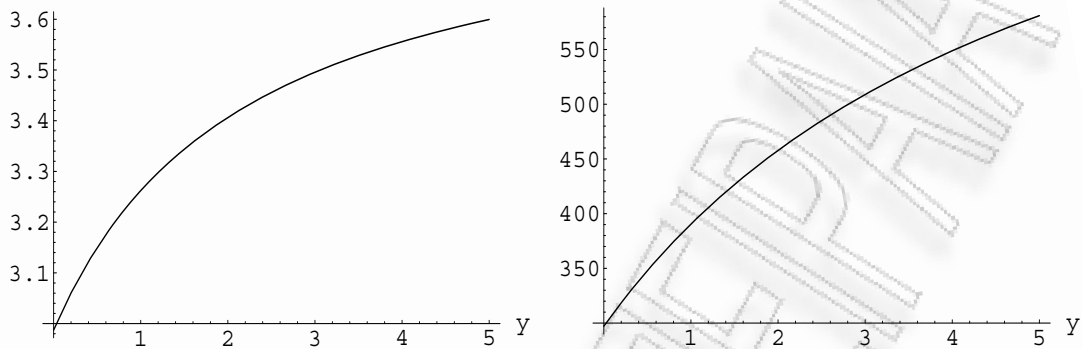
Η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι IFR. Στα Σχήματα 3.4 και 3.5 βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u + y)$ είναι αύξουσα ως προς y , ενώ η $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(y)$ είναι φθίνουσα ως προς y , όταν το u πάρει τις τιμές 1 και 4.

3.3 Επιπλέον ιδιότητες μονοτονίας για την κατανομή του ελλείμματος

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε κάποιες ικανές συνθήκες, ώστε οι συναρτήσεις $H_u(y) = H(u, y)/\psi(u)$ και $H(u, y)$ να είναι μονότονες ως προς u .

Έστω $F_u(x)$ η πιθανότητα το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι μικρότερο ή ίσο από το x , δοθέντος ότι συμβαίνει χρεοκοπία ξεκινώντας από ένα αρχικό αποθεματικό u , δηλαδή

$$F_u(x) = Pr(|U(T-)| \leq x | T < \infty, U(0) = u).$$



Σχήμα 3.4: Η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u + y)$ είναι αύξουσα ως προς y , για $u = 1$ (αριστερά) και $u = 4$ (δεξιά).

Ορίζουμε με $f_u(x) = dF_u(x)/dx$ την πυκνότητα της $F_u(x)$. Στο κλασικό μοντέλο, οι Dickson and Dos Reis (1996, Theorem 4) διατύπωσαν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.1. (Dickson and Dos Reis, 1996). Στο κλασικό μοντέλο, αν η $f_u(x)$ είναι αύξουσα ως προς u και η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR (IFR), τότε η συνάρτηση $H_u(y)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) ως προς u .

Στη συνέχεια οι Willmot and Lin (1998) χρησιμοποιώντας αριθμητικά παραδείγματα έδειξαν (στο κλασικό πάντα μοντέλο) ότι, γενικά, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι IFR, τότε η συνάρτηση $H_u(y)$ δεν είναι πάντα αύξουσα ως προς u . Ειδικότερα, θεωρώντας ότι η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι μια Erlang(a, a) με $a = 3, 10$, κατασκεύασαν παραδείγματα όπου η $H_u(y)$ είναι στην αρχή αύξουσα και μετά είναι φθίνουσα. Για λόγους πληρότητας παρουσιάζουμε στους Πίνακες 3.1 και 3.2 ορισμένα από τα αποτελέσματα των Willmot and Lin (1998). Σημειώνουμε ότι στους πίνακες αυτούς $H_0(y)$ είναι η κατανομή των κλιμακωτών υψών και $H_\infty(y) = \lim_{u \rightarrow \infty} H_u(y)$ είναι η οριακή κατανομή του ελλείμματος. Με την $H_\infty(y)$ θα ασχοληθούμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, στην DFR περίπτωση οι Willmot and Lin (1998) διαπίστωσαν ότι για $u > x$, η συνάρτηση $f_u(x)$ είναι φθίνουσα ως προς u αναφέροντας ότι πιθανόν το αποτέλεσμα του θεωρήματος να είναι λάθος, χωρίς να αναφέρουν μια απόδειξη ή κάποιο αντιπάρδειγμα.

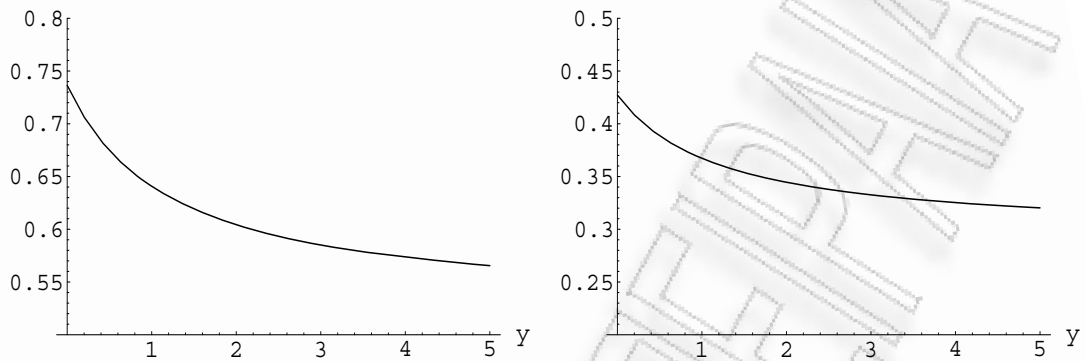
Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός των Dickson and Dos Reis (1996) είναι αληθής στην περίπτωση των DFR κατανομών στο (γενικότερο) ανανεωτικό μοντέλο. Είναι αξιοσημείωτο ότι στα αποτελεσματά μας, η μονοτονία της

Πίνακας 3.1: Erlang(10,10), $\theta = 1$ (Willmot and Lin, 1998).

y	u	$H(u, y)$	$H_u(y)$	$\psi(u)$	$H_0(y)$	$H_\infty(y)$
0.10	0.10	0.0526	0.1108	0.4744	0.1000	0.2023
	0.25	0.0566	0.1306	0.4334		
	0.50	0.0613	0.1709	0.3586		
	1.00	0.0444	0.2088	0.2127		
	2.00	0.0143	0.2022	0.0706		
0.25	0.10	0.1313	0.2769	0.4744	0.2500	0.4479
	0.25	0.1405	0.3242	0.4334		
	0.50	0.1457	0.4064	0.3586		
	1.00	0.0976	0.4588	0.2127		
	2.00	0.0316	0.4480	0.0706		
0.50	0.10	0.2588	0.5457	0.4744	0.4978	0.7287
	0.25	0.2675	0.6173	0.4334		
	0.50	0.2538	0.7077	0.3586		
	1.00	0.1567	0.7370	0.2127		
	2.00	0.0515	0.7289	0.0706		
1.00	0.10	0.4290	0.9044	0.4744	0.8749	0.9588
	0.25	0.4054	0.9354	0.4334		
	0.50	0.3439	0.9591	0.3586		
	1.00	0.2042	0.9599	0.2127		
	2.00	0.0677	0.9589	0.0706		
2.00	0.10	0.4741	0.9995	0.4744	0.9992	0.9998
	0.25	0.4333	0.9997	0.4334		
	0.50	0.3585	0.9999	0.3589		
	1.00	0.2127	0.9998	0.2127		
	2.00	0.0706	0.9998	0.0706		

Πίνακας 3.2: Erlang(10,10), $\theta = 4$ (Willmot and Lin, 1998).

y	u	$H(u, y)$	$H_u(y)$	$\psi(u)$	$H_0(y)$	$H_\infty(y)$
0.10	0.10	0.0204	0.1110	0.1838	0.1000	0.2443
	0.25	0.0210	0.1321	0.1590		
	0.50	0.0210	0.1805	0.1162		
	1.00	0.0112	0.2532	0.0443		
	2.00	0.0011	0.2429	0.0047		
0.25	0.10	0.0510	0.2773	0.1838	0.2500	0.5145
	0.25	0.0521	0.3278	0.1590		
	0.50	0.0496	0.4265	0.1162		
	1.00	0.0236	0.5324	0.0443		
	2.00	0.0024	0.5128	0.0047		
0.50	0.10	0.1005	0.5464	0.1838	0.4978	0.7849
	0.25	0.0990	0.6228	0.1590		
	0.50	0.0851	0.7317	0.1162		
	1.00	0.0355	0.8011	0.0443		
	2.00	0.0037	0.7842	0.0047		
1.00	0.10	0.1664	0.9049	0.1838	0.8749	0.9714
	0.25	0.1491	0.9379	0.1590		
	0.50	0.1124	0.9667	0.1162		
	1.00	0.0432	0.9743	0.0443		
	2.00	0.0046	0.9714	0.0047		
2.00	0.10	0.1838	0.9995	0.1838	0.9992	0.9999
	0.25	0.1590	0.9998	0.1590		
	0.50	0.1162	0.9999	0.1162		
	1.00	0.0443	0.9999	0.0443		
	2.00	0.0047	0.9999	0.0047		



Σχήμα 3.5: Η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(y)$ είναι φθίνουσα ως προς y , για $u = 1$ (αριστερά) και $u = 4$ (δεξιά).

$f_u(x)$ γενικά δεν παίζει κανένα ρόλο. Το επόμενο λήμμα είναι ένα αποτέλεσμα του Shanthikumar (1988) και αποτελεί ένα απαραίτητο εργαλείο στη συνέχεια.

Λήμμα 3.3.2. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR, τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $1 - \psi$ είναι DFR.

Από τους Rolski et al. (1999), γνωρίζουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $H(u) = 1 - \psi(u)$ ($u > 0$) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη από δεξιά στο 0.

Θεώρημα 3.3.3. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\psi(u + y)$ είναι αύξουσα ως προς u .

Απόδειξη.

Η σχέση (2.6.8) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, y) &= \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0-}^u \bar{F}(u + y - t) dH(t) \\ &= \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0-}^{u+y} \bar{F}(u + y - t) dH(t) - \frac{\phi}{1 - \phi} \int_u^{u+y} \bar{F}(u + y - t) dH(t) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6.6) προκύπτει ότι

$$\bar{H}(u, y) = \psi(u + y) - \frac{\phi}{1 - \phi} \int_u^{u+y} \bar{F}(u + y - t) dH(t). \quad (3.3.1)$$

Διαιρώντας όλους τους όρους της τελευταίας σχέσης με $\psi(u + y)$ και θεωρώντας ότι $h(t) dt = dH(t)$ για $t > 0$, έχουμε ότι

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u + y)} = 1 - \frac{\phi}{1 - \phi} \int_u^{u+y} \frac{\bar{F}(u + y - t)}{\psi(u + y)} h(t) dt. \quad (3.3.2)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$G(u, y) = \int_u^{u+y} \frac{\bar{F}(u+y-t)}{\psi(u+y)} h(t) dt.$$

Θέτοντας $v = u + y - t$, συμπεραίνουμε ότι

$$G(u, y) = \int_0^y \frac{\bar{F}(v)}{\psi(u+y)} h(u+y-v) dv,$$

το οποίο είναι ίσο με

$$G(u, y) = \int_0^y \bar{F}(v) \frac{\psi(u+y-v)}{\psi(u+y)} \frac{h(u+y-v)}{\psi(u+y-v)} dv.$$

Επειδή η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε από το Λήμμα 3.2.9 και η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR. Από το Λήμμα 3.3.2, η $1 - \psi$ είναι επίσης DFR. Έτσι από τον Ορισμό 2.7.1 προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $\psi(u+y-v)/\psi(u+y)$ και $h(u+y-v)/\psi(u+y-v)$ είναι φθίνουσες ως προς u για κάθε $0 \leq v \leq y$, θεωρώντας το $y \geq 0$ σταθερό. Επομένως, για κάθε $u > s \geq 0$ και $v \in [0, y]$ (θεωρούμε το y σταθερό), έχουμε

$$\bar{F}(v) \frac{\psi(s+y-v)}{\psi(s+y)} \frac{h(s+y-v)}{\psi(s+y-v)} \geq \bar{F}(v) \frac{\psi(u+y-v)}{\psi(u+y)} \frac{h(u+y-v)}{\psi(u+y-v)}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη ως προς v στο διάστημα $(0, y]$, προκύπτει ότι

$$G(s, y) \geq G(u, y).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $G(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u , οπότε από την (3.3.2) έχουμε ότι ο λόγος $\bar{H}(u, y)/\psi(u+y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u . \square

Από το Θεώρημα 3.3.3 προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα, τα οποία γενικεύουν το αποτέλεσμα των Dickson and Dos Reis (1996) στην περίπτωση που η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR.

Πόρισμα 3.3.4. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε η συνάρτηση $H_u(y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .

Απόδειξη.

Επειδή η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, από το Λήμμα 3.2.9 και η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR. Από το Λήμμα 3.3.2, η $1 - \psi$ είναι επίσης DFR. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$\bar{H}_u(y) = \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u+y)} \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)},$$

είναι αύξουσα ως προς u ως γινόμενο αυξουσών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$H_u(y) = 1 - \bar{H}_u(y),$$

οπότε η $H_u(y)$ είναι φθίνουσα ως προς u . \square

Πόρισμα 3.3.5. Στο κλασικό μοντέλο, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι *IMRL*, τότε η συνάρτηση $H_u(y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .

Απόδειξη.

Επειδή η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι *IMRL*, προκύπτει ότι και η κατανομή των κλιμακωτών υψών $F(u) = \int_0^u \bar{P}(x) dx/m$ είναι *DFR* (βλέπε Barlow and Proschan (1981)). Συνεχίζοντας όπως το Πόρισμα 3.3.4, καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

Πόρισμα 3.3.6. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι *DFR*, τότε η συνάρτηση $H(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .

Απόδειξη.

Προκύπτει από το Πόρισμα 3.3.4. \square

Πόρισμα 3.3.7. Στο κλασικό μοντέλο, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι *IMRL*, τότε η συνάρτηση $H(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .

Απόδειξη.

Προκύπτει από το Πόρισμα 3.3.5. \square

Στο επόμενο παράδειγμα, το οποίο υπάρχει στο Willmot (2002, Example 3.1) επαληθεύουμε τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 3.2.1, 3.2.10 και 3.3.3 (στο ανανεωτικό μοντέλο).

Παράδειγμα 3.3.8. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με $P(x) = 1 - e^{-bx}$. Θυμίζουμε ότι η εκθετική κατανομή είναι *IFR* και *DFR*.

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών είναι πάλι η εκθετική με ουρά

$$\bar{F}(x) = e^{-bx}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = \phi e^{-Ru}$$

και η ουρά της κατανομής του ελλείμματος είναι

$$\bar{H}(u, y) = \phi e^{-Ru} e^{-by},$$

όπου $R = (1 - \phi)b$ ο συντελεστής προσαρμογής με $0 < R < b$. Επομένως, οι συναρτήσεις $\bar{H}(u, y)/\psi(u+y)$ και $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u+y)$ είναι αύξουσες ως προς u για κάθε $y \geq 0$ (σταθερό). Επιπλέον, η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\bar{F}(u+y)$ είναι σταθερή ως προς y για κάθε $u \geq 0$ (σταθερό).

Ένα ερώτημα, με θεωρητικό κυρίως ενδιαφέρον, είναι αν ισχύει το αντίστροφο του Πορίσματος 3.3.5.

Θεώρημα 3.3.9. *Αν η συνάρτηση $H_u(y)$ είναι φθίνουσα ως προς u για κάθε $y \geq 0$, τότε η F είναι NWU.*

Απόδειξη.

Διαιρώντας την (2.6.7) με $\psi(u)$ παίρνουμε

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} = \phi \int_0^u \frac{\bar{H}(u-t, y)}{\psi(u-t)} \frac{\psi(u-t)}{\psi(u)} dF(t) + \phi \frac{\bar{F}(u+y)}{\psi(u)}.$$

Από υπόθεση, η συνάρτηση $H_u(y) = H(u, y)/\psi(u)$ είναι φθίνουσα ως προς u για κάθε $y \geq 0$, που σημαίνει ότι η $\bar{H}_u(y) = \bar{H}(u, y)/\psi(u)$ είναι αύξουσα ως προς u για κάθε $y \geq 0$. Επομένως,

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} \leq \phi \int_0^u \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} \frac{\psi(u-t)}{\psi(u)} dF(t) + \phi \frac{\bar{F}(u+y)}{\psi(u)}.$$

Κάνοντας λίγες πράξεις και χρησιμοποιώντας την (2.6.5) η τελευταία σχέση γράφεται

$$\bar{F}(u) \bar{H}_u(y) \leq \bar{F}(u+y).$$

Όμως, από υπόθεση $\bar{H}_u(y) \geq \bar{H}_0(y) = \bar{F}(y)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη διαφορά $\psi(u+y) - \bar{H}(u, y)$.

Θεώρημα 3.3.10. *Αν η κατανομή της μη χρεοκοπίας $H(u) = 1 - \psi(u)$ είναι κοίλη, τότε η συνάρτηση $\psi(u+y) - \bar{H}(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .*

Απόδειξη.

Από την (3.3.1) έχουμε ότι

$$\psi(u+y) - \bar{H}(u, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_u^{u+y} \bar{F}(u+y-t) dH(t).$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\psi(u+y) - \bar{H}(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u (θεωρούμε το y σταθερό), που είναι το ίδιο με το ότι η συνάρτηση $\int_u^{u+y} \bar{F}(u+y-t) dH(t)$ είναι φθίνουσα ως προς u . Πράγματι, θέτοντας

$$v = u + y - t$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $dH(t) = h(t) dt$ για $t > 0$, προκύπτει ότι

$$\int_u^{u+y} \bar{F}(u+y-t) h(t) dt = \int_0^y \bar{F}(v) h(u+y-v) dv.$$

Έτσι, αν $s < u$ και χρησιμοποιώντας ότι η συνάρτηση πυκνότητας $h(u)$ είναι φθίνουσα ως προς $u > 0$ (υπόθεση θεωρήματος), για κάθε $v \in (0, y]$ έχουμε ότι

$$\bar{F}(v) h(s+y-v) > \bar{F}(v) h(u+y-v).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς v στο διάστημα $(0, y]$, βλέπουμε ότι

$$\int_0^y \bar{F}(v) h(s+y-v) dv \geq \int_0^y \bar{F}(v) h(u+y-v) dv.$$

Επομένως, η συνάρτηση $\psi(u+y) - \bar{H}(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u . \square

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Πόρισμα 3.3.11. *Αν η κατανομή $H(u)$ είναι κοίλη, τότε η $H(u, y)$ είναι φθίνουσα ως προς u .*

Απόδειξη.

Έστω $u > s \geq 0$. Τότε από το Θεώρημα 3.3.10 έχουμε

$$\psi(u+y) - \bar{H}(u, y) \leq \psi(s+y) - \bar{H}(s, y).$$

Θυμίζοντας ότι $H(u, y) = \psi(u) - \bar{H}(u, y)$ και κάνοντας λίγες πράξεις προκύπτει ότι

$$H(s, y) - H(u, y) \geq [H(s+y) - H(s)] - [H(u+y) - H(u)].$$

Επειδή από υπόθεση, η $H(u)$ είναι κοίλη, από την τελευταία ανίσωση συμπεραίνουμε ότι $H(s, y) - H(u, y) \geq 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Πόρισμα 3.3.12. *Αν η κατανομή $H(u)$ είναι κοίλη, τότε για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει*

$$\bar{H}(u, y) \geq \phi \bar{F}(y) - [\psi(y) - \psi(u+y)].$$

Απόδειξη.

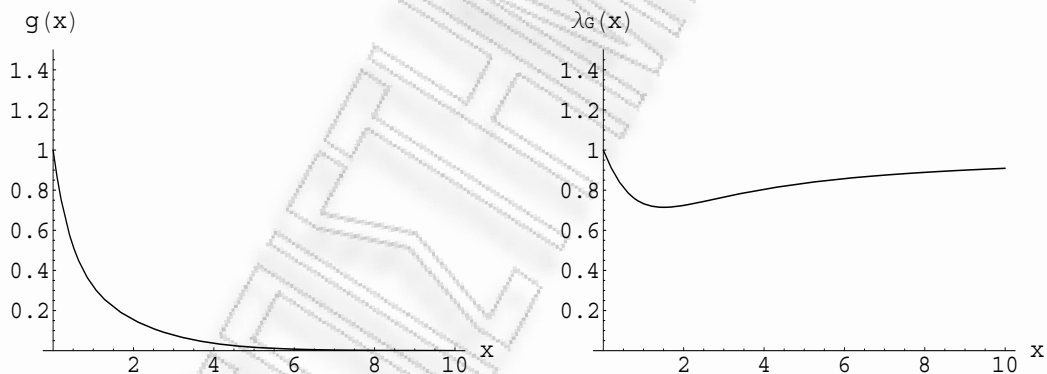
Από το Θεώρημα 3.3.10, είναι

$$\psi(u + y) - \bar{H}(u, y) \leq \psi(0 + y) - \bar{H}(0, y) = \psi(y) - \phi \bar{F}(y).$$

Λύνοντας ως προς $\bar{H}(u, y)$, προκύπτει το αποτέλεσμα του πορίσματος. \square

Παρατήρηση 3.3.1. (i) Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR, τότε από το Λήμμα 3.3.2 η $H(u) = 1 - \psi(u)$ είναι DFR, οπότε η $H(u)$ είναι κοίλη. Επιπλέον, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε από το Λήμμα 3.2.9 η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι DFR. Επομένως, η συνθήκη του Θεωρήματος 3.3.10 περιέχεται στη συνθήκη του Θεωρήματος 3.3.3.

(ii) Το κάτω φράγμα του τελευταίου πορίσματος γίνεται ακριβές στις περιπτώσεις
 (a) $u = 0$,
 (b) $y = 0$,
 (c) $y \rightarrow \infty$,
 ενώ στην περίπτωση που $u \rightarrow \infty$ είναι μη θετικό.



Σχήμα 3.6: Η κατανομή G είναι κοίλη αλλά όχι DFR.

Τέλος, δίνουμε ένα γενικό παράδειγμα μιας κατανομής που είναι κοίλη αλλά δεν είναι DFR.

Παράδειγμα 3.3.13. Έστω μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$g(x) = \frac{1}{2} 2e^{-2x} + \frac{1}{2} 1^2 x e^{-x}$$

δηλαδή μίξη μιας Εκθετικής με παράμετρο 2 και μιας Erlang με παραμέτρους 2 και 1. Τότε η κατανομή G είναι

$$G(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (-1 - x + \cosh x + 3\sinh x)$$

όπου $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ και $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ το υπερβολικό συνημίτονο και ημίτονο, αντίστοιχα. Αν $\lambda_G(x) = g(x)/\bar{G}(x)$ η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής G , από το Σχήμα 3.6 φαίνεται καθαρά ότι η G είναι κοίλη (αριστερό γράφημα), ενώ δεν είναι DFR (δεξιό γράφημα).

3.4 Μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, y)$

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε, κάτω από ορισμένες συνθήκες, τη μονοτονία των συναρτήσεων $H_u(y)$ και $H(u, y)$ ως προς u , για κάθε $y \geq 0$ (σταθερό). Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι μέσα από ένα παράδειγμα να τονίσουμε τη δυσκολία που υπάρχει να βρούμε τη μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, y) = \psi(u) - H(u, y)$ ως προς u . Γενικά, η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να είναι αύξουσα ως προς u για κάθε $y \geq 0$, διότι από τις σχέσεις (2.6.7) και (3.3.1) προκύπτει ότι

$$\phi \bar{F}(u + y) \leq \bar{H}(u, y) \leq \psi(u + y),$$

που σημαίνει ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{H}(u, y) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί τη μίξη εκθετικών με πυκνότητα

$$p(x) = q b_1 e^{-b_1 x} + (1 - q) b_2 e^{-b_2 x}.$$

Θυμίζουμε ότι η μίξη εκθετικών είναι DFR. Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ (βλέπε το Παράδειγμα 2.5.2) και την ουρά του ελλείμματος $\bar{H}(u, y)$ (βλέπε σχέση 2.6.8). Στη συνέχεια, θα δούμε τη μονοτονία της $\bar{H}(u, y)$ σε κάποιες περιπτώσεις (στο κλασικό μοντέλο).

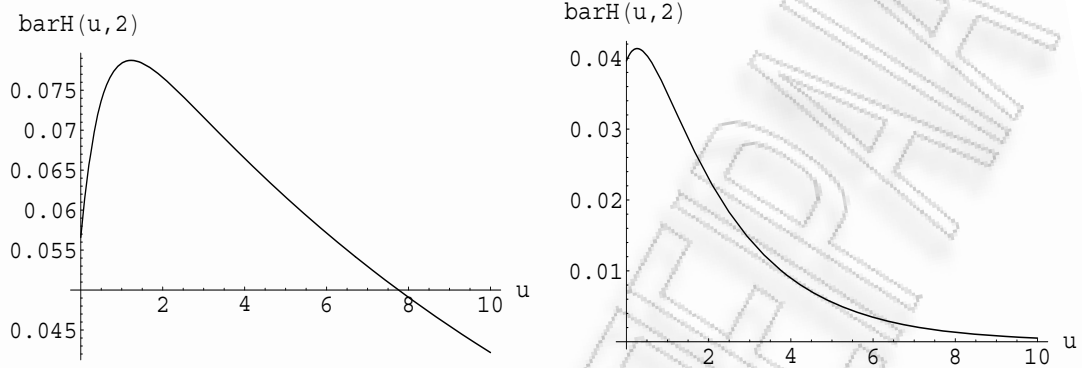
Περίπτωση 1. Έστω $q = 1/5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$.

Στα Σχήματα 3.7 και 3.8 παρουσιάζεται η μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, 2)$ για $\theta = 0.05, 0.5, 1, 1.5$, αντίστοιχα. Για μικρές τιμές του θ , παρατηρούμε ότι αρχικά είναι αύξουσα και κατόπιν φθίνουσα. Κάθως το θ μεγαλώνει, η συνάρτηση $\bar{H}(u, 2)$ γίνεται φθίνουσα.

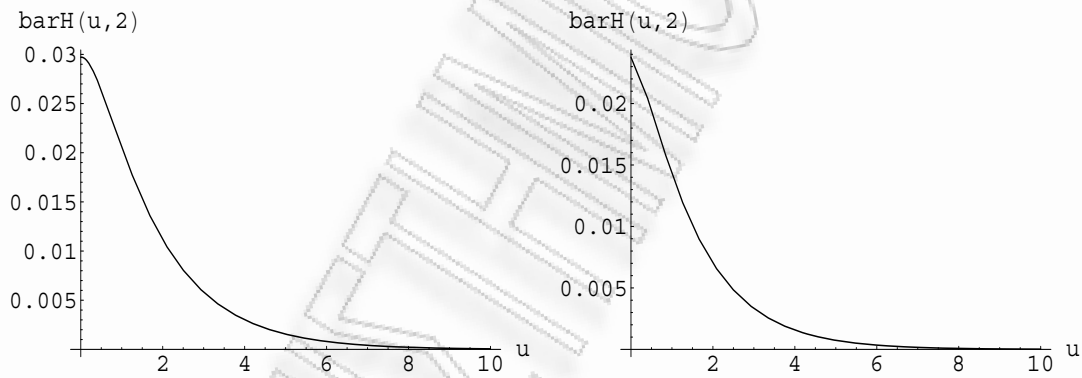
Περίπτωση 2. Έστω $q = 1/2$, $b_1 = 3$, $b_2 = 6$.

Στο Σχήμα 3.9 παρουσιάζεται η μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}(u, 2)$ για $\theta = 0.05, 0.5$, αντίστοιχα. Όταν $\theta > 0.5$, η $\bar{H}(u, 2)$ είναι φθίνουσα.

Στη γενική περίπτωση, κάνοντας ορισμένες αλγεβρικές πράξεις η ουρά του



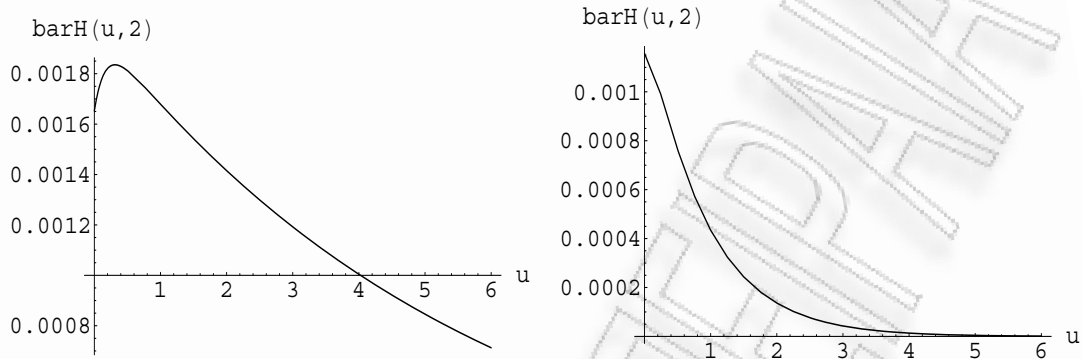
Σχήμα 3.7: Μονοτονία της $\bar{H}(u, 2)$ για $\theta = 0.05$ (αριστερά) και $\theta = 0.5$ (δεξιά).



Σχήμα 3.8: Μονοτονία της $\bar{H}(u, 2)$ για $\theta = 1$ (αριστερά) και $\theta = 1.5$ (δεξιά).

ελλείμματος είναι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, y) = & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{q_1 C_1 r_1}{b_1 - r_1} e^{-b_1 y} e^{-r_1 u} - \frac{q_1 C_1 r_1}{b_1 - r_1} e^{-b_1 y} e^{-b_1 u} \right. \\ & - \frac{q_1 C_2 r_2}{r_2 - b_1} e^{-b_1 y} e^{-r_2 u} + \frac{q_1 C_2 r_2}{r_2 - b_1} e^{-b_1 y} e^{-b_1 u} \\ & + \frac{(1-q_1) C_1 r_1}{b_2 - r_1} e^{-b_2 y} e^{-r_1 u} - \frac{(1-q_1) C_1 r_1}{b_2 - r_1} e^{-b_2 y} e^{-b_2 u} \\ & \left. + \frac{(1-q_1) C_2 r_2}{b_2 - r_2} e^{-b_2 y} e^{-r_2 u} - \frac{(1-q_1) C_2 r_2}{b_2 - r_2} e^{-b_2 y} e^{-b_2 u} \right\} \\ & + \phi q_1 e^{-b_1 y} e^{-b_1 u} + \phi (1-q_1) e^{-b_2 y} e^{-b_2 u}. \end{aligned}$$



Σχήμα 3.9: Μονοτονία της $\bar{H}(u, 2)$ για $\theta = 0.05$ (αριστερά) και $\theta = 0.5$ (δεξιά).

Παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει ότι

$$\frac{d\bar{H}(u, y)}{du} = \frac{\phi}{1 - \phi} A(u, y) - B(u, y),$$

όπου

$$\begin{aligned} A(u, y) = & \frac{q_1 C_1 r_1}{b_1 - r_1} e^{-b_1 y} [b_1 e^{-b_1 u} - r_1 e^{-r_1 u}] + \frac{q_1 C_2 r_2}{r_2 - b_1} e^{-b_1 y} [r_2 e^{-r_2 u} - b_1 e^{-b_1 u}] \\ & + \frac{(1 - q_1) C_1 r_1}{b_2 - r_1} e^{-b_2 y} [b_2 e^{-b_2 u} - r_1 e^{-r_1 u}] \\ & + \frac{(1 - q_1) C_2 r_2}{b_2 - r_2} e^{-b_2 y} [b_2 e^{-b_2 u} - r_2 e^{-r_2 u}] \end{aligned}$$

και

$$B(u, y) = \phi q_1 b_1 e^{-b_1 y} e^{-b_1 u} + \phi(1 - q_1) b_2 e^{-b_2 y} e^{-b_2 u}.$$

Από τη τελευταία σχέση, προκύπτει ότι η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)$ είναι αύξουσα ως προς u ($y > 0$ σταθερο) αν

$$\frac{B(u, y)}{A(u, y)} \leq \frac{\phi}{1 - \phi}$$

και φθίνουσα αν

$$\frac{B(u, y)}{A(u, y)} \geq \frac{\phi}{1 - \phi}.$$

3.5 Ανισοτικές σχέσεις για την κατανομή του ελλείμματος

Ο Brown (1990) έδειξε ότι κάθε σύνθετη γεωμετρική κατανομή είναι NWU. Έτσι, για την πιθανότητα χρεοκοπίας, που είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής

κατανομής (βλέπε σχέση (2.2.4) ή (2.3.1)), ισχύει ότι

$$\psi(u + y) \geq \psi(u) \psi(y) \quad (3.5.1)$$

για κάθε $u, y \geq 0$. Αρκετά αργότερα, ο Willmot (2002, Corollary 2.2) έδειξε ότι αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F ανήκει στην κλάση NWU, τότε

$$\psi(u + y) \geq \frac{\psi(u) \psi(y)}{\phi}. \quad (3.5.2)$$

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα για την ουρά του ελλείμματος $\bar{H}(u, y)$ είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 3.5.1. *Αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε για κάθε $u, x, y \geq 0$, ισχύει ότι*

$$\bar{H}(u + x, y) \geq \frac{\bar{H}(u, y) \bar{H}(x, y)}{\phi}.$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 3.3.3 έχουμε ότι

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u + y)} \leq \frac{\bar{H}(u + x, y)}{\psi(u + x + y)},$$

το οποίο γράφεται και στη μορφή

$$\frac{\psi(u + x + y)}{\psi(u + y)} \leq \frac{\bar{H}(u + x, y)}{\bar{H}(u, y)}.$$

Από το Λήμμα 3.2.9, και θυμίζοντας ότι η κλάση κατανομών DFR περιέχεται στην NWU, έχουμε από τη σχέση (3.5.2) ότι

$$\frac{\bar{H}(u + x, y)}{\bar{H}(u, y)} \geq \frac{\psi(u + x + y)}{\psi(u + y)} \geq \frac{\psi(x)}{\phi} \geq \frac{\bar{H}(x, y)}{\phi},$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια, γενικεύουμε τη σχέση (3.5.2).

Πρόταση 3.5.2. *Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι NWU, τότε για κάθε $u, x, y \geq 0$, ισχύει ότι*

$$\bar{H}(u + x, y) \geq \bar{F}(y) \frac{\bar{H}(u, y) \bar{H}(x, y)}{\phi}.$$

Απόδειξη.

Είναι φανερό ότι η (2.6.8) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\bar{H}(u+x, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0-}^{u+x} \bar{F}(u+x+y-t) dH(t).$$

Λόγω του ότι η F είναι NWU, προκύπτει η σχέση

$$\bar{H}(u+x, y) \geq \frac{\phi}{1-\phi} \bar{F}(y) \int_{0-}^{u+x} \bar{F}(u+x-t) dH(t)$$

η οποία δίνει ότι

$$\bar{H}(u+x, y) \geq \bar{F}(y) \psi(u+x). \quad (3.5.3)$$

Από την (3.5.1) και το γεγονός ότι για κάθε $u, y \geq 0$ είναι $\bar{H}(u, y) \leq \psi(u)$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει το Θεώρημα 3.2 του Willmot (2002).

Πρόταση 3.5.3. *Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι NWU (NBU), τότε για κάθε $u, x, y \geq 0$, ισχύει*

$$\bar{H}(u, x+y) \geq (\leq) \bar{F}(x) \bar{H}(u, y).$$

Απόδειξη.

Πάλι από την (2.6.8), έχουμε την ισότητα

$$\bar{H}(u, x+y) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0-}^u \bar{F}(u+x+y-t) dH(t).$$

Επειδή η F είναι NWU (NBU), προκύπτει ότι

$$\bar{H}(u, x+y) \geq (\leq) \frac{\phi}{1-\phi} \bar{F}(x) \int_{0-}^u \bar{F}(u+y-t) dH(t)$$

η οποία δίνει

$$\bar{H}(u, x+y) \geq (\leq) \bar{F}(x) \bar{H}(u, y), \quad (3.5.4)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

3.6 Στοχαστική διάταξη

Έστω Z_u μια τ.μ. με συνάρτηση κατανομής H_u , δηλαδή $Pr(Z_u \leq y) = H_u(y)$. Τότε η Z_u παριστάνει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία ξεκινώντας από ένα αρχικό αποθεματικό u . Από το Πρόσχημα 3.3.4 (Πρόσχημα 3.3.5) βλέπουμε ότι αν η P είναι DFR (ή IMRL στο κλασικό μοντέλο), τότε η $\{Z_u, u \geq 0\}$ είναι μια οικογένεια τ.μ. οι οποίες είναι στοχαστικά διατεταγμένες.

Ορισμός 3.6.1. Μια τ.μ. X είναι στοχαστικά μικρότερη από την τ.μ. Y και συμβολίζεται με $X \leq_{st} Y$ όταν για κάθε πραγματικό αριθμό t ισχύει

$$Pr(X \leq t) \geq Pr(Y \leq t).$$

Επομένως, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε από το Πρόγραμμα 3.3.4 έχουμε ότι για κάθε $u > w \geq 0$ και για κάθε $y \geq 0$ (σταθερό), ισχύει

$$H_w(y) \geq H_u(y),$$

δηλαδή

$$Pr(Z_w \leq y) \geq Pr(Z_u \leq y).$$

Αυτό δείχνει ότι $Z_w \leq_{st} Z_u$.

Επιπλέον, το επόμενο αποτέλεσμα του Willmot (2002, Theorem 3.2) έχει άμεση σχέση με τη στοχαστική διάταξη.

Πρόταση 3.6.1. (Willmot 2002) Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι NBU (NWU) τότε για κάθε $u, y \geq 0$ ισχύει

$$\bar{H}_u(y) \leq (\geq) \bar{F}(y). \quad (3.6.1)$$

Απόδειξη.

Από την (2.6.8) και τον Ορισμό 2.7.3 έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, y) &\leq (\geq) \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(y) \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \bar{F}(y) \bar{F}(u) \\ &= \bar{F}(y) \left[\frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \bar{F}(u) \right]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6.6) στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\bar{H}(u, y) \leq (\geq) \bar{F}(y) \psi(u)$$

και διαιρώντας με $\psi(u)$ η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Θυμίζοντας ότι $H_0(y) = F(y)$ η (3.6.1) γράφεται ως

$$Z_u \leq_{st} (\geq_{st}) Z_0.$$

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι $X \geq_{order} Y$ σημαίνει ότι $Y \leq_{order} X$.

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να μελετήσουμε περαιτέρω τη διάταξη χρησιμοποιώντας την τ.μ. Z_u . Για το λόγο αυτό μας είναι απαραίτητοι οι ορισμοί που ακολουθούν (βλέπε Shaked and Shanthikumar (1994) και Müller and Stoyan (2002)).

Ορισμός 3.6.2. Έστω X και Y δύο μη αρνητικές τ.μ. με συναρτήσεις κατανομών K, G αντίστοιχα.

(a) Η X είναι μικρότερη από την Y κατά αύξουσα κυρτή διάταξη (increasing convex order) και συμβολίζουμε με $X \leq_{icx} Y$, αν

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)],$$

για όλες τις αύξουσες και κυρτές συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχουν οι μέσες τιμές.

(b) Η X είναι μικρότερη από την Y κατά αύξουσα κοίλη διάταξη (increasing concave order) και συμβολίζουμε με $X \leq_{icv} Y$, αν

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)],$$

για όλες τις αύξουσες και κοίλες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχουν οι μέσες τιμές.

(c) Η X είναι μικρότερη από την Y κατά Laplace διάταξη (Laplace order) και συμβολίζουμε με $X \leq_{Lt} Y$, αν

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)],$$

για όλες τις πλήρως μονότονες και συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχουν οι μέσες τιμές.

Στην πράξη οι παραπάνω ορισμοί είναι δύσκολο να εφαρμοστούν. Για αυτό το λόγο δίνουμε, στην επόμενη πρόταση (βλέπε Müller and Stoyan (2002)), αποτελέσματα που χαρακτηρίζουν τις διατάξεις αυτές και που είναι πιο εύχρηστα στην ανάλυση που θα ακολουθήσει.

Ορισμός 3.6.3. Έστω X και Y δύο μη αρνητικές τ.μ. με συναρτήσεις κατανομών K, G και ουρές $\bar{K} = 1 - K, \bar{G} = 1 - G$, αντίστοιχα.

(a) Είναι $X \leq_{icx} Y$ αν και μόνο αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\int_x^\infty \bar{K}(t) dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t) dt.$$

(b) Είναι $X \leq_{icv} Y$ αν και μόνο αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^x K(t) dt \geq \int_0^x G(t) dt.$$

(c) Είναι $X \leq_{Lt} Y$ αν και μόνο αν για κάθε $s \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-st} \bar{K}(t) dt \leq \int_0^\infty e^{-st} \bar{G}(t) dt.$$

Οι σχέσεις μεταξύ των διατάξεων που προαναφέραμε δίνονται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου $E(X)$ και $E(Y)$ οι μέσες τιμές των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \leq_{st} Y & \longrightarrow & X \leq_{icv} Y & \longrightarrow & X \leq_{Lt} Y \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 X \leq_{icx} Y & & & \longrightarrow & E(X) \leq E(Y)
 \end{array}$$

Στη συνέχεια, δίνονται οι ορισμοί δύο κλάσεων κατανομών που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα αποτελέσματα. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις κλάσεις αυτές υπάρχουν στις εργασίες των Deshpande et al. (1986) και Belzunce et al. (1999).

Ορισμός 3.6.4. (a) Μια κατανομή G είναι $NBU(2)$ ($NWU(2)$) αν για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^x \bar{G}(t+y) dt \leq (\geq) \bar{G}(y) \int_0^x \bar{G}(t) dt.$$

(b) Μια κατανομή G είναι NBU_{Lt} (NWU_{Lt}) αν για κάθε $x, s \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-st} \bar{G}(t+x) dt \leq (\geq) \bar{G}(x) \int_0^\infty e^{-st} \bar{G}(t) dt.$$

Στα επόμενα αποτελέσματα, χρησιμοποιούμε τις παραπάνω κλάσεις κατανομών καθώς και τις κλάσεις $NBUE$ ($NWUE$) και $NBUC$ ($NWUC$) (βλέπε Κεφάλαιο 2) στη θεωρία κινδύνων. Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των κλάσεων που προαναφέραμε δίνεται στο παρακάτω γράφημα.

$$\begin{array}{ccccc}
 NBU (NWU) & \longrightarrow & NBU(2) (NWU(2)) & \longrightarrow & NBU_{Lt} (NWU_{Lt}) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 NBUC (NWUC) & & & \longrightarrow & NBUE (NWUE)
 \end{array}$$

Θεώρημα 3.6.2. Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι $NBUE$ ($NWUE$), τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει

$$E(Z_u) \leq (\geq) E(Z_0).$$

Απόδειξη.

Έστω F_e η κατανομή ισορροπίας της F . Τότε από τη σχέση (2.6.8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\bar{H}(u, w) &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u+w-t) dH(t) + \phi \bar{F}(u+w) \\ &= \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_{0+}^u f_e(u+w-t) dH(t) + \phi \mu f_e(u+w).\end{aligned}\quad (3.6.2)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς w στο διάστημα $[0, \infty)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \bar{H}(u, w) dw &= \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_0^\infty \int_{0+}^u f_e(u+w-t) dH(t) dw + \phi \mu \int_0^\infty f_e(u+w) dw \\ &= \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_{0+}^u \int_0^\infty f_e(u+w-t) dw dH(t) + \phi \mu \bar{F}_e(u) \\ &= \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}_e(u-t) dH(t) + \phi \mu \bar{F}_e(u).\end{aligned}\quad (3.6.3)$$

Έτσι, αν η F είναι NBUE (NWUE), δηλαδή $\bar{F}_e(u) \leq (\geq) \bar{F}(u)$, τότε από την (3.6.3) έχουμε

$$\int_0^\infty \bar{H}(u, w) dw \leq (\geq) \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \mu \bar{F}(u) = \mu \psi(u),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (2.6.6). Διαιρώντας με $\psi(u)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^\infty \bar{H}_u(w) dw \leq (\geq) \mu. \quad (3.6.4)$$

Θυμίζοντας ότι $\bar{H}_0(y) = \bar{F}(y)$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.6.3. *Αν η F είναι NBUC (NWUC), τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει*

$$Z_u \leq_{icx} (\geq_{icx}) Z_0.$$

Απόδειξη.

Έστω ότι η F είναι NBUC (NWUC), δηλαδή $\bar{F}_e(x+y) \leq (\geq) \bar{F}_e(x) \bar{F}(y)$. Από την (3.6.2) ολοκληρώνοντας ως προς w στο διάστημα $[x, \infty)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \bar{H}(u, w) dw &\leq (\geq) \frac{\phi \mu}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}_e(x) \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \mu \bar{F}_e(x) \bar{F}(u) \\ &= \mu \bar{F}_e(x) \psi(u).\end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\psi(u)$ προκύπτει ότι

$$\int_x^\infty \bar{H}_u(w) dw \leq (\geq) \int_x^\infty \bar{F}(w) dw$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Θεώρημα 3.6.4. Αν η F είναι $NBU(2)$ ($NWU(2)$), τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει

$$Z_u \leq_{icv} (\geq_{icv}) Z_0.$$

Απόδειξη.

Από την (2.6.8) ολοκληρώνοντας ως προς w στο διάστημα $[0, x]$ θυμίζοντας ότι $\bar{H}(u, y) = \psi(u) - H(u, y)$, έχουμε

$$\int_0^x [\psi(u) - H(u, w)] dw = \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \int_{0+}^u \bar{F}(u+w-t) dH(t) dw + \phi \int_0^x \bar{F}(u+w) dw.$$

Ισοδύναμα,

$$\int_0^x H(u, w) dw = x\psi(u) - \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^x \int_{0+}^u \bar{F}(u+w-t) dw dH(t) - \phi \int_0^x \bar{F}(u+w) dw.$$

Αν η F είναι $NBU(2)$ ($NWU(2)$), από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^x H(u, w) dw &\geq (\leq) x\psi(u) - \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) \int_0^x \bar{F}(w) dw dH(t) \\ &\quad - \phi \bar{F}(u) \int_0^x \bar{F}(w) dw \\ &= x\psi(u) - \int_0^x \bar{F}(w) dw \left(\frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) dH(t) + \phi \bar{F}(u) \right). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6.6) παίρνουμε

$$\int_0^x H(u, w) dw \geq (\leq) x\psi(u) - \int_0^x \bar{F}(w) dw \psi(u)$$

και διαιρώντας με $\psi(u)$ προκύπτει ότι

$$\int_0^x \bar{H}_u(w) dw \geq (\leq) x - \int_0^x \bar{F}(w) dw.$$

Από το γεγονός ότι

$$x - \int_0^x \bar{F}(w) dw = \int_0^x 1 dw - \int_0^x \bar{F}(w) dw = \int_0^x F(w) dw,$$

η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Θεώρημα 3.6.5. Αν η κατανομή F είναι NBU_{Lt} (NWU_{Lt}), τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει

$$Z_u \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) Z_0.$$

Απόδειξη.

Από την (2.6.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sw} \overline{H}(u, w) dw &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_0^\infty e^{-sw} \int_{0+}^u \overline{F}(u+w-t) dH(t) dw \\ &\quad + \phi \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u+w) dw. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sw} \overline{H}(u, w) dw &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u+w-t) dw dH(t) \\ &\quad + \phi \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u+w) dw. \end{aligned}$$

Αν η F είναι NBU_{Lt} (NWU_{Lt}) από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sw} \overline{H}(u, w) dw &\leq (\geq) \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \overline{F}(u-t) \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(w) dw dH(t) \\ &\quad + \phi \overline{F}(u) \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u) dw \\ &= \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u) dw \left[\frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \overline{F}(u-t) dH(t) + \phi \overline{F}(u) \right]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.6.6) παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sw} \overline{H}(u, w) dw \leq (\geq) \int_0^\infty e^{-sw} \overline{F}(u) dw \psi(u).$$

Διαιρώντας με $\psi(u)$, η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Κεφάλαιο 4

Μια γενίκευση της συνθήκης Lundberg και νέα εκθετικά φράγματα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε, στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, μια γενίκευση της συνθήκης του Lundberg (βλέπε Παράγραφο 2.4) χρησιμοποιώντας την ουρά της κατανομής του ελλείμματος, $\bar{H}(u, y)$, κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Από τη γενίκευση αυτή και τις ιδιότητες μονοτονίας για την κατανομή του ελλείμματος, δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία $H_u(y)$, που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 3, βρίσκουμε αποτελέσματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $e^{Ru} \psi(u)$. Με αυτό τον τρόπο δίνουμε νέες εφαρμογές για τη χρησιμότητα της μονοτονίας της συνάρτησης $\bar{H}_u(y)$ στο ανανεωτικό μοντέλο. Αρχικά, οι Dickson and Dos Reis (1996), χρησιμοποίησαν τη μονοτονία της συνάρτησης $\bar{H}_u(y)$ στο κλασικό μοντέλο, βρίσκοντας τη μονοτονία άλλων ποσοτήτων στη θεωρία κινδύνων, όπως για παράδειγμα τη μονοτονία του συνολικού χρόνου όπου το πλεόνασμα παραμένει αρνητικό. Επιπλέον, από τη γενίκευση της συνθήκης του Lundberg, κατασκευάζουμε νέα εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τα φράγματα αυτά από τη μια πλευρά είναι σε απλή μορφή και από την άλλη είναι συγκρίσιμα με τα φράγματα των Willmot (2002) και Willmot et al. (2001). Τέλος, στην περίπτωση όπου η κατανομή των κλιμακωτών υψών έχουν βαριά ουρά, μελετάμε ασυμπτωτικούς τύπους γενικεύοντας κάποια από τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 2.8.

4.2 Μια γενίκευση της συνθήκης Lundberg

Στην παράγραφο αυτή, γενικεύουμε τη συνθήκη του Lundberg (βλέπε σχέση (4.2.1)) στο ανανεωτικό μοντέλο, χρησιμοποιώντας την κατανομή του ελλείμματος. Θεωρούμε ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής $R > 0$, που σημαίνει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dF(x) = \frac{1}{\phi}. \quad (4.2.1)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βλέπουμε ότι μια ισοδύναμη έκφραση είναι (βλέπε Grandell (1991))

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} \bar{F}(x) dx = \frac{1 - \phi}{\phi R}. \quad (4.2.2)$$

Λήμμα 4.2.1. Έστω $u \geq 0$ σταθερό. Τότε για $y \geq 0$, η συνάρτηση

$$\Lambda_u(y) = \frac{\phi}{1 - \phi} [\psi(u + y) - \psi(u)\psi(y)],$$

ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\Lambda_u(y) = \phi \int_0^y \Lambda_u(y - t) dF(t) + \phi \bar{H}(u, y). \quad (4.2.3)$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 2.2 του Willmot (2002), ισχύει ότι

$$\psi(u + y) - \psi(u)\psi(y) = \int_{0-}^y \bar{H}(u, y - t) dH(t).$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε μέλος της τελευταίας εξίσωσης με $\phi/(1 - \phi)$, προκύπτει ότι

$$\Lambda_u(y) = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0-}^y \bar{H}(u, y - t) dH(t). \quad (4.2.4)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κατανομής μη χρεοκοπίας (βλέπε (2.6.2)) και τη γενική μορφή για τη λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (βλέπε Asmussen (1987)), από την (4.2.4) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\Lambda_u(y)$ ικανοποιεί την (4.2.3). \square

Στην (4.2.3), οι συναρτήσεις $\Lambda_u(y)$, $\bar{H}(u, y)$ είναι φραγμένες (άρα και φραγμένες σε πεπερασμένα διαστήματα). Επιπλέον, από Chadjiconstantinidis and Politis (2007, p.45) προκύπτει ότι $\bar{H}(u, y) \leq \phi \bar{F}(y)/(1 - \phi)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $e^{Ry} \bar{H}(u, y)$ είναι ευθέως ολοκληρώσιμη κατά Riemann ως προς y (βλέπε παράγραφο 2.6). Από το παραπάνω λήμμα, προκύπτει μια συνθήκη για το συντελεστή προσαρμογής που αποτελεί γενίκευση της (4.2.2).

Θεώρημα 4.2.2. Για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{H}(u, y) dy = \frac{1}{R} [e^{-Ru} - \psi(u)]. \quad (4.2.5)$$

Απόδειξη.

Από τη σχέση (4.2.3), εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.6.1 για τη συνάρτηση $\Lambda_u(y)$, έχουμε

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{Ry} \Lambda_u(y) = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{H}(u, y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}.$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $\Lambda_u(y)$, παίρνουμε ότι

$$\frac{\phi}{1 - \phi} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{Ry} [\psi(u + y) - \psi(u) \psi(y)] = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{H}(u, y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}. \quad (4.2.6)$$

Για $u = 0$, η (4.2.6) γίνεται

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{Ry} \psi(y) = \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{F}(y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}$$

το οποίο επαληθεύει την (2.6.9). Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} [e^{Ry} \psi(u + y) - e^{Ry} \psi(u) \psi(y)] &= e^{-Ru} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{R(u+y)} \psi(u + y) - \psi(u) \lim_{y \rightarrow \infty} e^{Ry} \psi(y) \\ &= \frac{\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{F}(y) dy}{\int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)} (e^{-Ru} - \psi(u)). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Η σχέση (4.2.6) μέσω της σχέσης (4.2.7) γίνεται

$$\int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{H}(u, y) dy = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^{\infty} e^{Ry} \overline{F}(y) dy [e^{-Ru} - \psi(u)]$$

και χρησιμοποιώντας την (4.2.2), καταλήγουμε το ζητούμενο. \square

Από την (2.6.7), προκύπτει ότι $\overline{H}(0, y) = \phi \overline{F}(y)$. Έτσι, αν στη σχέση (4.2.5) θέσουμε $u = 0$, προκύπτει η (4.2.2). Θυμίζουμε ότι η $H(u, y) = \psi(u) - \overline{H}(u, y)$ είναι μια ελλειμματική κατανομή ως προς y , με $u \geq 0$ σταθερό. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση της συνθήκης του Lundberg.

Πόρισμα 4.2.3. Για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{R(u+y)} dH(u, y) = 1, \quad (4.2.8)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς y .

Απόδειξη.

Από την (4.2.5), κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, προκύπτει ότι

$$[e^{Ry}\overline{H}(u, y)]_{y=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{Ry} dH(u, y) = e^{-Ru} - \psi(u),$$

απ' όπου έχουμε ότι

$$-\psi(u) + \int_0^{\infty} e^{Ry} dH(u, y) = e^{-Ru} - \psi(u).$$

Διαγράφοντας τον όρο $\psi(u)$ και πηγαίνοντας τον εκθετικό όρο e^{-Ru} στο πρώτο μέλος, λαμβάνουμε το ζητούμενο. \square

Από το Θεώρημα 4.2.2 προκύπτει άμεσα η ευρέως γνωστή ανισότητα Lundberg.

Πόρισμα 4.2.4. Για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Αν Z_u είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή H_u (βλέπε σχέση (2.2.8)), μπορούμε να βρούμε τη ροπογεννήτρια $M_{Z_u}(R)$ στο σημείο R συναρτήσει της πιθανότητας χρεοκοπίας. Το επόμενο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί αρχικά από τον Gerber (1979, Chapter 9) χρησιμοποιώντας martingales (βλέπε επίσης, Asmussen (2000, p.24)). Παρουσιάζουμε μια νέα απλή απόδειξη.

Πρόταση 4.2.5. Για κάθε $u \geq 0$, ο συντελεστής προσαρμογής R ικανοποιεί τη σχέση

$$M_{Z_u}(R) = \frac{e^{-Ru}}{\psi(u)}.$$

Απόδειξη.

Πράγματι, από το Πόρισμα 4.2.3 και την (2.2.8), προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \psi(u) e^{Ru} e^{Ry} dH_u(y) = 1,$$

η οποία δίνει

$$\int_0^{\infty} e^{Ry} dH_u(y) = \frac{e^{-Ru}}{\psi(u)}.$$

\square

Θεώρημα 4.2.6. Αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε η συνάρτηση $e^{-Ru}/\psi(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $u \geq 0$.

Απόδειξη.

Διαιρώντας την σχέση (4.2.5) με το $\psi(u)$, προκύπτει ότι

$$\frac{e^{-Ru}}{\psi(u)} = 1 + R \int_0^{\infty} e^{Ry} \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} dy. \quad (4.2.9)$$

Από το Πόρισμα 3.3.4, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\psi(u)$ είναι αύξουσα ως προς u . Έτσι, από την (4.2.9), προκύπτει ότι η συνάρτηση $e^{-Ru}/\psi(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του u . \square

Πόρισμα 4.2.7. Αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει

$$\psi(u + y) \leq \psi(u) e^{-Ry}. \quad (4.2.10)$$

Απόδειξη.

Το αποτέλεσμα του πορίσματος προκύπτει άμεσα επειδή η συνάρτηση $e^{-Ru}/\psi(u)$ είναι αύξουσα ως προς u . Πράγματι, για κάθε $u, y \geq 0$ έχουμε

$$\frac{e^{-R(u+y)}}{\psi(u+y)} \geq \frac{e^{-Ru}}{\psi(u)}$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση 4.2.1. i) Η συνάρτηση $\psi_u(y) = \psi(u + y)/\psi(u)$ ονομάζεται υπολοιπόμνη ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $H(u) = 1 - \psi(u)$ (για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κάποιος να δει την εργασία του Willmot (2002)). Από την (4.2.10) προκύπτει ότι $\psi_u(y) \leq e^{-Ry}$. Επιπλέον, από τη σχέση (3.3.1) εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι $\bar{H}(u, y) \leq \psi(u + y)$ ή $\bar{H}_u(y) \leq \psi_u(y)$. Με άλλα λόγια, όταν η P είναι DFR, τότε μια αντίστοιχη σχέση με την ανισότητα Lundberg ισχύει για τις $\bar{H}_u(y)$ και $\psi_u(y)$.

(ii) Στο κλασικό μοντέλο, το Θεώρημα 4.2.6 και το Πόρισμα 4.2.7 ισχύουν όταν η P ανήκει στην ευρύτερη κλάση IMRL (βλέπε Πόρισμα 3.3.5).

4.3 Μια συνθήκη για την οριακή κατανομή του ελλείμματος

Σύμφωνα με το ευρέως γνωστό ασυμπτωτικό αποτέλεσμα των Cramér-Lundberg, γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = C, \quad (4.3.1)$$

όπου

$$C = \frac{1 - \phi}{\phi R \int_0^{\infty} y e^{Ry} dF(y)}. \quad (4.3.2)$$

Αν $\int_0^\infty e^{(R+\epsilon)t} dF(t) < \infty$ για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε από τον Willmot (2002, Theorem 3.4) και την (4.2.2) προκύπτει ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{H}_u(y) = \bar{H}_\infty(y)$, όπου

$$\bar{H}_\infty(y) = \frac{\phi R}{1 - \phi} \int_0^\infty e^{Rt} \bar{F}(t + y) dt, \quad y \geq 0. \quad (4.3.3)$$

Στο επόμενο θεώρημα, δίνουμε μια συνθήκη ανάλογη με αυτήν του Lundberg για την οριακή κατανομή του ελλείμματος $H_\infty(y) = 1 - \bar{H}_\infty(y)$.

Θεώρημα 4.3.1. Έστω μια κατανομή $A(y)$ με ουρά $\bar{A}(y) = 1 - A(y)$, $y \geq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει $\bar{H}_u(y) \leq k \bar{A}(y)$ για κάποιο k με $0 < k < \infty$. Αν $\int_0^\infty e^{Ry} \bar{A}(y) dy < \infty$, τότε

$$\int_0^\infty e^{Ry} dH_\infty(y) = \frac{1}{C}, \quad (4.3.4)$$

όπου η σταθερά C ορίζεται στην (4.3.2).

Απόδειξη.

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της σχέσης $\bar{H}_u(y) \leq k \bar{A}(y)$ με e^{Ry} και ολοκληρώνοντας ως προς y στο διάστημα $[0, \infty)$, έχουμε

$$\int_0^\infty e^{Ry} \bar{H}_u(y) dy \leq k \int_0^\infty e^{Ry} \bar{A}(y) dy < \infty. \quad (4.3.5)$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη της (4.2.5) με $\psi(u)$ και παίρνοντας το όριο καθώς $u \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{Ry} \bar{H}_u(y) dy = \frac{1 - C}{CR}.$$

Χρησιμοποιώντας την (4.3.5), από το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης μπορούμε να αλλάξουμε στην τελευταία σχέση τη σειρά του ορίου με το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{Ry} \bar{H}_\infty(y) dy = \frac{1 - C}{CR}. \quad (4.3.6)$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι NBU, τότε από Willmot (2002, Theorem 3.2) ισχύει η συνθήκη του Θεωρήματος 4.3.1 για $\bar{A}(y) = \bar{F}(y)$ και $k = 1$. Επιπλέον, αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε από το Πρόσχημα 3.3.4, η συνάρτηση $\bar{H}_u(y) = 1 - H_u(y)$ είναι αύξουσα ως προς u και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Μονότονης Σύγκλισης λαμβάνουμε την (4.3.6).

Θεωρούμε το όριο της υπολοιπόμενης γεωμετρικής ουράς, $\psi_\infty(y) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi_u(y)$. Από την (4.3.1), προκύπτει άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.3.2. Για κάθε $y \geq 0$, ισχύει $\psi_\infty(y) = e^{-Ry}$.

Πρόταση 4.3.3. Για κάθε $y \geq 0$, ισχύει $\bar{H}_\infty(y) \leq e^{-Ry}$.

Απόδειξη.

Όπως είδαμε στη Παρατήρηση 4.2.1, για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει ότι $\bar{H}_u(y) \leq \psi_u(y)$. Παίρνοντας το όριο $u \rightarrow \infty$, από το Λήμμα 4.3.2 προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στη συνέχεια της παραγράφου, θεωρούμε το κλασικό μοντέλο, όπου $F(u) = \int_0^u \bar{P}(t) dt/m$ και παρουσιάζουμε ορισμένες ανισοτικές σχέσεις για το C (βλέπε σχέση (4.3.1)) εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.1. Από τους Lin (1996) και Willmot (1998), αν η F είναι NBUC (NWUC), τότε $C \geq (\leq)\phi$, όπου $\phi = 1/(1 + \theta)$. Η ισότητα $C = \phi$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που η P είναι η εκθετική κατανομή.

Πόρισμα 4.3.4. Στο κλασικό μοντέλο αν η P είναι NBUC, τότε $C \geq \phi/(\phi + mR)$.

Απόδειξη.

Από το Πόρισμα 7 των Willmot and Lin (1998), ισχύει $\bar{H}_u(y) \leq \bar{P}(y)$. Επειδή $\int_0^\infty e^{Ry} \bar{P}(y) dy = m/\phi < \infty$, από την (4.3.6), έχουμε

$$\int_0^\infty e^{Ry} \bar{H}_\infty(y) dy \leq \int_0^\infty e^{Ry} \bar{P}(y) dy.$$

Ισοδύναμα, ισχύει

$$\frac{1 - C}{CR} \leq \frac{m}{\phi}$$

και λύνοντας ως προς C , η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Πόρισμα 4.3.5. Στο κλασικό μοντέλο, αν η P είναι NBUE, τότε $C \geq 1 - mR$.

Απόδειξη.

Αν $R \geq 1/m$, τότε προφανώς το πόρισμα ισχύει διότι $C \geq 0$. Αν $R < 1/m$, από το Πόρισμα 8 των Willmot and Lin (1998), ισχύει $\bar{H}_u(y) \leq e^{-y/m}$. Επειδή $\int_0^\infty e^{Ry} e^{-y/m} dy = m/(1 - mR) < \infty$, από την (4.3.6), έχουμε

$$\int_0^\infty e^{Ry} \bar{H}_\infty(y) dy \leq \int_0^\infty e^{Ry} e^{-y/m} dy.$$

Ισοδύναμα, ισχύει

$$\frac{1 - C}{CR} \leq \frac{m}{1 - mR}$$

και λύνοντας ως προς C η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Πόρισμα 4.3.6. Στο κλασικό μοντέλο αν η P είναι NWAΕ, τότε $C \geq 1 - r_P(\infty)R$, όπου $r_P(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} r_P(x)$.

Απόδειξη.

Αν $R \geq 1/r_P(\infty)$, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν $R < 1/r_P(\infty)$, τότε από το Πρόρισμα 10.2.2 των Willmot and Lin (2001), $\bar{H}_u(y) \leq e^{-y/r_P(\infty)}$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην απόδειξη του Προρίσματος 4.3.5, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

4.4 Εκθετικά φράγματα

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε κυρίως με εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Οι Willmot et al. (2001) χρησιμοποίησαν τις συναρτήσεις

$$\alpha_L(u) = \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{F}(z) \geq 0} \frac{e^{Rz} \bar{F}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dF(t)},$$

$$\alpha_U(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \bar{F}(z) \geq 0} \frac{e^{Rz} \bar{F}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dF(t)}.$$

και κατασκεύασαν εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που δίνονται από τη σχέση

$$\alpha_L(u) e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq \alpha_U(u) e^{-Ru}. \quad (4.4.1)$$

Επειδή ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\alpha_L(u)$ και $\alpha_U(u)$ είναι σε πολλές περιπτώσεις δύσκολος, ακόμα και στο κλασικό μοντέλο, στο επόμενο θεώρημα δίνουμε δύο εκθετικά φράγματα σε απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 4.4.1. Για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$e^{-Ru} - \frac{1 - \phi}{1 - \phi + \phi \bar{F}(u)} \leq \psi(u) \leq \left(1 - \phi R \int_u^\infty e^{Ry} \bar{F}(y) dy \right) e^{-Ru}. \quad (4.4.2)$$

Απόδειξη.

Για το κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε το άνω φράγμα των Chadjiconstantinidis and Politis (2007) για την ουρά του ελλείμματος,

$$\bar{H}(u, y) \leq \frac{\phi}{1 - \phi} \bar{F}(y) [1 - \psi(u)] \quad (4.4.3)$$

και το κάτω φράγμα των De Vylder and Goovaerts (1984) για την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi(u) \geq \frac{\phi \bar{F}(u)}{1 - \phi + \phi \bar{F}(u)}.$$

Από το τελευταίο φράγμα προκύπτει ότι

$$1 - \psi(u) \leq \frac{1 - \phi}{1 - \phi + \phi \bar{F}(u)}. \quad (4.4.4)$$

Από τις σχέσεις (4.4.3) και (4.4.4), έχουμε

$$\bar{H}(u, y) \leq \frac{\phi}{1-\phi} \bar{F}(y) \frac{1-\phi}{1-\phi+\phi\bar{F}(u)} = \frac{\phi\bar{F}(y)}{1-\phi+\phi\bar{F}(u)}.$$

Από τις σχέσεις (4.2.2) και (4.2.5), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} e^{-Ru} - \psi(u) &= R \int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{H}(u, y) dy \\ &\leq \frac{\phi R}{1-\phi+\phi\bar{F}(u)} \int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy \\ &= \frac{\phi R}{1-\phi+\phi\bar{F}(u)} \frac{1-\phi}{\phi R}. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $\psi(u)$, προκύπτει το ζητούμενο κάτω φράγμα. Για το άνω φράγμα, από την (2.6.7), ισχύει $\bar{H}(u, y) \geq \phi\bar{F}(u+y)$. Επομένως, από την (4.2.5) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-Ru} - \psi(u) &= R \int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{H}(u, y) dy \\ &\geq \phi R \int_0^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(u+y) dy \\ &= \phi R e^{-Ru} \int_u^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $\psi(u)$, προκύπτει το άνω φράγμα της (4.4.2). \square

Παρατήρηση 4.4.1. Το άνω φράγμα του Θεωρήματος 4.4.1 βελτιώνει την ανισότητα Lundberg. Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση $\int_u^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy$ είναι φθίνουσα ως προς u , προκύπτει

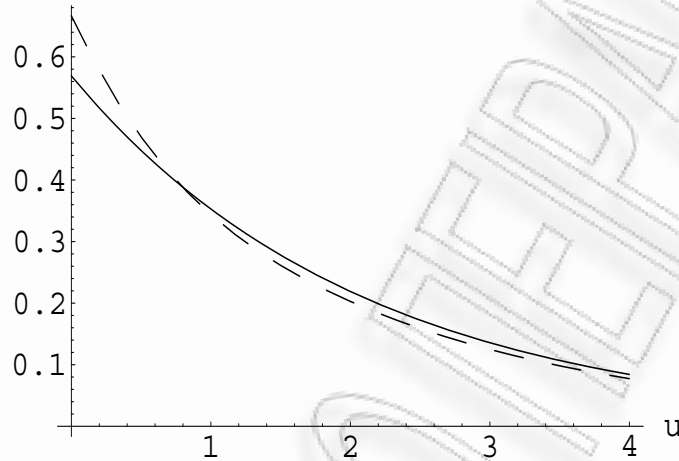
$$\phi \leq 1 - \phi R \int_u^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy \leq 1.$$

Το κάτω φράγμα του Θεωρήματος 4.4.1, δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση που το ϕ είναι κοντά στη μονάδα. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που είναι ικανοποιητικά όταν το ϕ είναι κοντά στη μονάδα, όπως για παράδειγμα στον Kalashnikov (1997, p.177).

Από Willmot (2002, relation 3.32) γνωρίζουμε ότι αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε

$$\frac{\bar{F}(u)}{\int_u^{\infty} e^{Ry} dF(y)} \leq \psi(u) \leq \phi e^{-Ru}. \quad (4.4.5)$$

Η δεύτερη ανίσωση της (4.4.5) προκύπτει και από τη σχέση (4.2.10) για $u = 0$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα κάτω εκθετικό φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramér-Lundberg.



Σχήμα 4.1: Κάτω φράγματα για την $\psi(u)$, για $\theta = 0.5$.

Πρόταση 4.4.2. Αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι DFR, τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι

$$\psi(u) \geq C e^{-Ru}.$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 4.2.6, η συνάρτηση $e^{Ru} \psi(u)$ είναι φθίνουσα ως προς u . Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την (4.3.1). \square

Στο επόμενο παράδειγμα, που αναφέρεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, συγκρίνουμε το κάτω φράγμα της Πρότασης 4.4.2 για την πιθανότητα χρεοκοπίας με το αντίστοιχο της σχέσης (4.4.5).

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη εκθετικών με πυκνότητα

$$p(x) = \frac{1}{5} e^{-x} + \frac{12}{5} e^{-3x}.$$

Θυμίζουμε ότι κάθε μίξη εκθετικών κατανομών ανήκει στην κλάση DFR. Στο Σχήμα 4.1, η διακεκομμένη γραμμή είναι το κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που δίνεται στη σχέση (4.4.5), ενώ η συνεχής γραμμή είναι το αντίστοιχο κάτω φράγμα που προκύπτει από την Πρόταση 4.4.2, για $\theta = 0.5$. Παρατηρούμε, ότι μόνο για μικρές τιμές του $u < 1$, το φράγμα που δίνει ο Willmot (2002) είναι καλύτερο από το φράγμα της Πρότασης 4.4.2.

Στο αποτέλεσμα που ακολουθεί, κατασκευάζουμε άνω και κάτω φράγματα για το συντελεστή προσαρμογής R και τη συνάρτηση $\psi(u) / \int_u^\infty \psi(y) dy$.

Θεώρημα 4.4.4. Αν η P είναι DFR, τότε

$$\frac{(1 - \phi) C}{\phi \mu} \leq R \leq \frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(y) dy} \leq \frac{1 - \phi}{\mu}, \quad (4.4.6)$$

όπου μ είναι η μέση τιμή της F .

Απόδειξη.

Από την (4.2.10), ολοκληρώνοντας ως προς $y \in [0, \infty)$, προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty \psi(u + y) dy \leq \psi(u) \int_0^\infty e^{-Ry} dy.$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\int_u^\infty \psi(y) dy \leq \psi(u) \frac{1}{R},$$

και η δεύτερη ανισότητα στην (4.4.6) αποδείχθηκε. Επιπλέον, επειδή η P είναι DFR, από το Λήμμα 3.2.9 και το Λήμμα 3.3.2, η κατανομή $H(u) = 1 - \psi(u)$ είναι επίσης DFR. Έτσι, η συνάρτηση $\int_0^\infty \psi(u + y) dy / \psi(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , οπότε η συνάρτηση $\psi(u) / \int_u^\infty \psi(y) dy$ είναι φθίνουσα ως προς u . Επομένως

$$\frac{\psi(u)}{\int_u^\infty \psi(y) dy} \leq \frac{\psi(0)}{\int_0^\infty \psi(y) dy} = \frac{\phi}{E(S)}.$$

Θυμίζοντας ότι $E(S) = \phi \mu / (1 - \phi)$ (βλέπε Παράγραφο 2.3), προκύπτει η τρίτη ανισότητα της (4.4.6). Για την πρώτη ανισότητα στην (4.4.6), από την Πρόταση 4.4.2 ολοκληρώνοντας πάλι ως προς $y \in [0, \infty)$, προκύπτει ότι

$$E(S) \geq \frac{C}{R}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Η συνάρτηση $\psi(u) / \int_u^\infty \psi(y) dy$ παρουσιάζεται συχνά στη θεωρία κινδύνων. Για παράδειγμα, η μέση τιμή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα γίνει χρεοκοπία (βλέπε Willmot (2002, relation 3.20)) είναι

$$\gamma(u) = E(|U(T)| | T < \infty, U(0) = u) = \frac{\int_u^\infty \psi(y) dy}{\psi(u)} - \frac{\phi \mu}{1 - \phi}.$$

Επομένως, κάτω από τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.4.4, έχουμε

$$\mu \leq \gamma(u) \leq \frac{1}{R} - \frac{\phi \mu}{1 - \phi}.$$

Στη συνέχεια, μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\gamma(u)$.

Πρόταση 4.4.5. *Ισχύει*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma(u) = \frac{1}{R} - \frac{\phi \mu}{1 - \phi}.$$

Απόδειξη.

Από την (4.4.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση $\alpha_L(u)$ είναι φθίνουσα ενώ η $\alpha_U(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , έχουμε

$$\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} \leq \frac{\alpha_U(\infty) e^{-R(u+y)}}{\alpha_L(\infty) e^{-Ru}} = \frac{\alpha_U(\infty)}{\alpha_L(\infty)} e^{-Ry}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.2, παίρνουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} dy = \int_0^{\infty} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} dy = \int_0^{\infty} e^{-Ry} dy = \frac{1}{R}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Παρατήρηση 4.4.2. Όταν η κατανομή των αποζημιώσεων P ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο b , τότε από Willmot (2002) η κατανομή των κλιμακωτών υψών F ακολουθεί πάλι την εκθετική κατανομή με παράμετρο b και μέση τιμή $\mu = 1/b$. Από την (4.2.1), βρίσκουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής είναι $R = (1 - \phi)b$. Στη περίπτωση αυτή, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς, ότι ισχύουν οι ιδιότητες στη σχέση (4.4.6) και ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma(u) = \mu$.

Η συνάρτηση $\pi_S(u) = \int_u^{\infty} \psi(y) dy$ είναι το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας (stop-loss premium) της τυχαίας μεταβλητής $S = \sum_{i=1}^N X_i$. Οι Cai and Garrido (1998) και οι Chadjiconstantinidis and Politis (2005) κατασκεύασαν φράγματα για τη συνάρτηση αυτή. Στη συνέχεια, δίνουμε κάποια νέα φράγματα για την $\pi_S(u)$.

Πρόταση 4.4.6. *Για κάθε $u \geq 0$, είναι*

$$\pi_S(u) \leq \left[\frac{1}{R} - \phi \int_u^{\infty} e^{Ry} \bar{F}(y) dy \right] e^{-Ru} + \phi \pi_F(u), \quad (4.4.7)$$

όπου $\pi_F(u) = \int_u^{\infty} \bar{F}(y) dy$.

Απόδειξη.

Από τη δεύτερη ανίσωση της (4.4.2), ολοκληρώνοντας στο $[0, \infty)$, παίρνουμε

$$\pi_S(u) \leq \frac{1}{R} e^{-Ru} - \phi R \int_u^{\infty} \int_t^{\infty} e^{Ry} e^{-Rt} \bar{F}(y) dy dt.$$

Κάνοντας αλλαγή στο διπλό ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\pi_S(u) \leq \frac{1}{R} e^{-Ru} - \phi R \int_u^{\infty} \int_u^y e^{Ry} e^{-Rt} \bar{F}(y) dt dy.$$

Μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Θεώρημα 4.4.7. Αν η F είναι $NWUE$ ($NBUE$), τότε

$$\pi(u) \geq (\leq) E(S) e^{-u\phi/E(S)}.$$

Απόδειξη.

Αν $r_F(u) \geq (\leq) \mu$, δηλαδή η F είναι $NWUE$ ($NBUE$), από το Θεώρημα 3.10 των Chadjiconstantinidis and Politis (2005) προκύπτει ότι για κάθε $t \geq 0$, ισχύει

$$[E(S) + \mu] \psi(t)/\pi_S(t) \geq (\leq) 1.$$

Έτσι, για $0 \leq u < \infty$,

$$[E(S) + \mu] \int_0^u \frac{\psi(t)}{\pi_S(t)} dt \leq u.$$

Όμως η συνάρτηση $-\log\pi_S(t)$ είναι από δεξιά παραγωγίσιμη με $(-\log\pi_S(t))' = \psi(t)/\pi(t)$, οπότε

$$[E(S) + \mu] [\log\pi_S(0) - \log\pi_S(u)] \geq (\leq) u.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\pi_S(0) = E(S)$, $E(S) + \mu = E(S)/\phi$ και κάνοντας λίγες πράξεις, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Οι Willmot et al (2001) έδειξαν ότι αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών F είναι $NWUC$ ($NBUC$), τότε

$$\psi(u) \leq (\geq) \phi e^{-Ru}, \quad (4.4.8)$$

γενικεύοντας το άνω εκθετικό φράγμα της (4.4.5) και βρίσκοντας ένα κάτω φράγμα όταν η F είναι $NBUC$.

Θεώρημα 4.4.8. Αν η F είναι $NWUC$ ($NBUC$), τότε για κάθε $u \geq 0$, ένα καλύτερο εκθετικό άνω (κάτω) φράγμα από αυτό της (4.4.8) δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) \leq (\geq) \phi e^{-Ru} - \phi^2 e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) + \phi \bar{F}(u). \quad (4.4.9)$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.6.5), (4.2.1) και (4.4.8), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \phi \int_0^u \psi(u-t) dF(t) + \phi \bar{F}(u) \\ &\leq \phi \int_0^u \phi e^{-R(u-t)} dF(t) + \phi \bar{F}(u) \\ &= \phi^2 e^{-Ru} \int_0^u e^{Rt} dF(t) + \phi \bar{F}(u) \\ &= \phi^2 e^{-Ru} \left[\frac{1}{\phi} - \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) \right] + \phi \bar{F}(u) \\ &= \phi e^{-Ru} - \phi^2 e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) + \phi \bar{F}(u). \end{aligned}$$

Από Willmot et al. (2001), επειδή η F είναι NWUC, έχουμε $\alpha_U(u) = \phi$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\alpha_U(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , οπότε για $u \geq z \geq 0$, έχουμε

$$\frac{e^{Rz} \bar{F}(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dF(t)} \leq \phi.$$

Από την τελευταία σχέση, προκύπτει ότι

$$\bar{F}(u) \leq \phi e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t),$$

που σημαίνει ότι

$$-\phi^2 e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) + \phi \bar{F}(u) \leq 0.$$

Έτσι, το εκθετικό άνω φράγμα της σχέσης (4.4.9) είναι καλύτερο από το αντίστοιχο της σχέσης (4.4.8). Στην περίπτωση όπου η F είναι NBUC, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha_L(u) = \phi$ και ότι η συνάρτηση $\alpha_L(u)$ είναι φθίνουσα ως προς u . \square

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως το Θεώρημα 4.4.8 και λαμβάνοντας υπόψη ότι στην DFR περίπτωση είναι $\phi \geq C$, μπορούμε να βελτιώσουμε το κάτω φράγμα που δίνεται στην Πρόταση 4.4.2.

Πρόταση 4.4.9. *Αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι DFR, τότε για κάθε $u \geq 0$, ισχύει ότι*

$$\psi(u) \geq C e^{-Ru} - C \phi e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) + \phi \bar{F}(u).$$

Στη συνέχεια, δίνουμε ένα άνω εκθετικό φράγμα για την ουρά του ελλείμματος $\bar{H}(u, y)$.

Θεώρημα 4.4.10. *Αν η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι DFR, τότε για κάθε $u, y \geq 0$, ισχύει ότι*

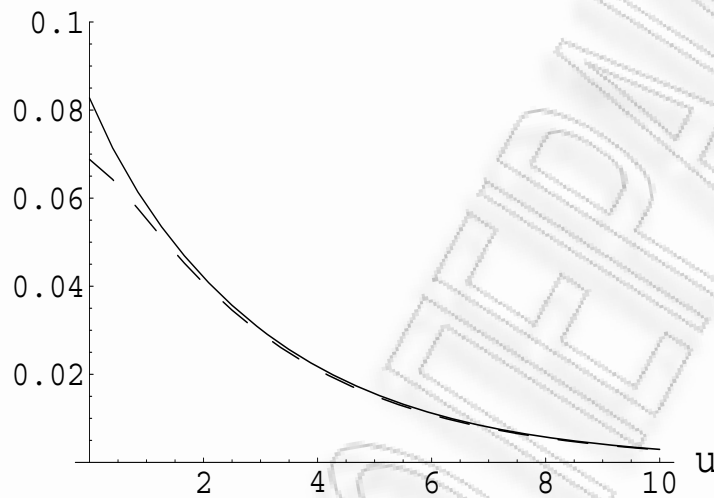
$$\bar{H}(u, y) \leq \phi \bar{H}_\infty(y) \left(e^{-Ru} - \phi e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dF(t) + \bar{F}(u) \right),$$

όπου η $\bar{H}_\infty(y)$ δίνεται στην (4.3.3).

Απόδειξη.

Από το Πρόσχημα 3.3.4, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι DFR, τότε η συνάρτηση $\bar{H}(u, y)/\psi(u)$ είναι αύξουσα ως προς u . Επομένως,

$$\frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} \leq \bar{H}_\infty(y).$$



Σχήμα 4.2: Άνω φράγμα για την $\bar{H}(u, y)$, για $0 \leq u \leq 10$ και $y = 2$.

Από το Θεώρημα 4.4.8 και θυμίζοντας ότι η κλάση NWUC είναι ευρύτερη της DFR, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Το επόμενο παράδειγμα, αναφέρεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, συγκρίνοντας το άνω φράγμα του Θεωρήματος 4.4.10 με την πραγματική τιμή της ουράς του ελλείμματος. Λεπτομέρειες για τον υπολογισμό της $\bar{H}(u, y)$ δίνονται στο άρθρο του Willmot (2002, Example 3.2).

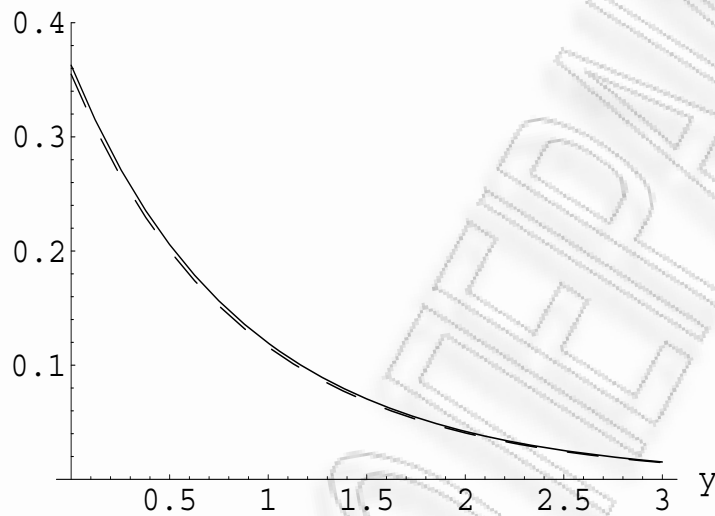
Παράδειγμα 4.4.11. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη εκθετικών με ουρά

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

Θεωρούμε ότι το περιθώριο ασφάλειας είναι $\theta = 0.4$. Στα Σχήματα 4.2 και 4.3, η διακεκομμένη γραμμή είναι η πραγματική τιμή της $\bar{H}(u, y)$, ενώ η συνεχής γραμμή είναι το άνω φράγμα που προκύπτει από το Θεώρημα 4.4.10. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.2 θεωρούμε ότι $0 \leq u \leq 10$ και $y = 2$, ενώ στο Σχήμα 4.3 θεωρούμε ότι $u = 2$ και $0 \leq y \leq 3$.

4.5 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα

Ένας από τους βασικούς μας σκοπούς εδώ είναι ο υπολογισμός της οριακής κατανομής του ελλείμματος $\bar{H}_\infty(y) = \lim_{u \rightarrow \infty} \bar{H}(u, y)/\psi(u)$ όταν η κατανομή των κλιμακωτών υψών έχει βαριά ουρά. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 4.3, στην



Σχήμα 4.3: Άνω φράγμα για την $\bar{H}(u, y)$, για $u = 2$ και $0 \leq y \leq 3$.

περίπτωση που υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R , γνωρίζουμε από τη σχέση (4.3.3) μια ακριβή έκφραση για την οριακή κατανομή του ελλείμματος. Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση της (2.8.4), χρησιμοποιώντας την κατανομή του ελλείμματος.

Θεώρημα 4.5.1. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν $\eta 1 - \psi \in \mathcal{L}$, τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u + y)} = 1, \quad y \geq 0.$$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $\bar{F}(u + y - t)$ είναι αύξουσα ως προς t . Επομένως, από τη σχέση (3.3.1), προκύπτει ότι

$$L(u, y) \leq \bar{H}(u, y) \leq U(u, y), \quad (4.5.1)$$

όπου

$$L(u, y) := \psi(u + y) - \frac{\phi}{1 - \phi} \bar{F}(y) [\psi(u) - \psi(u + y)]$$

και

$$U(u, y) := \psi(u + y) - \frac{\phi}{1 - \phi} [\psi(u) - \psi(u + y)].$$

Διαιρώντας τη συνάρτηση $L(u, y)$ με $\psi(u + y)$, λαμβάνουμε

$$\frac{L(u, y)}{\psi(u + y)} = 1 - \bar{F}(y) \left[\frac{\psi(u)}{\psi(u + y)} - 1 \right]$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)/\psi(u+y) = 1$, οπότε παίρνοντας στη παραπάνω σχέση το όριο $u \rightarrow \infty$ έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{L(u, y)}{\psi(u+y)} = 1.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{U(u, y)}{\psi(u+y)} = 1.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (4.5.1), διαιρώντας με $\psi(u+y)$ και παίρνοντας το όριο $u \rightarrow \infty$ προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στο πόρισμα που ακολουθεί, υπολογίζουμε την οριακή κατανομή του ελλείμματος στην περίπτωση όπου έχουμε κατανομές με βαριά ουρά. Είναι ευρέως γνωστό ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής.

Πόρισμα 4.5.2. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν $1 - \psi(u) \in \mathcal{L}$, τότε

$$\bar{H}_\infty(y) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} = 1, \quad y \geq 0.$$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}(u, y)}{\psi(u+y)} \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)}.$$

Από το Θεώρημα 4.5.1 η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Στο επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύουμε ότι κάτω από την υπόθεση του Πορίσματος 4.5.2, η κατανομή $H_\infty(y)$ δεν έχει μέση τιμή.

Πόρισμα 4.5.3. Αν $1 - \psi \in \mathcal{L}$ τότε ισχύει ότι $\int_0^\infty \bar{H}_\infty(y) dy = \infty$.

Παρατήρηση 4.5.1. Μια ισχυρότερη συνθήκη, αλλά περισσότερο εύχρηστη στο Θεώρημα 4.5.1 (και κατ' επέκταση στα Πορίσματα 4.5.2 και 4.5.3) είναι η $F \in \mathcal{S}$. Αυτό προκύπτει από την (2.8.4) και το γεγονός ότι η κλάση \mathcal{S} περιέχεται στην κλάση \mathcal{L} .

Θυμίζοντας ότι $\bar{H}(u, 0) = \psi(u)$ (βλέπε τη Παράγραφο 2.6), γενικεύουμε την (2.8.4) χρησιμοποιώντας την κατανομή του ελλείμματος.

Πόρισμα 4.5.4. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν $P_e \in \mathcal{S}$, τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}(u, y)}{P_e(u+y)} = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad y \geq 0.$$

Απόδειξη.

Είναι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{P}_e(u + y)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, y)}{\psi(u + y)} \frac{\psi(u + y)}{\overline{P}_e(u + y)}.$$

Από το Θεώρημα 4.5.1 και τη σχέση (2.8.4), η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Θεώρημα 4.5.5. Στο ανανεωτικό μοντέλο, αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών $F \in \mathcal{L}$, τότε

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{F}(u + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} [1 - \psi(u)], \quad u \geq 0.$$

Απόδειξη.

Ανάλογα όπως εργαστήκαμε στο Θεώρημα 4.5.1, επειδή η συνάρτηση $\overline{F}(u + y - t)$ είναι αύξουσα ως προς t , έχουμε

$$1 - \psi(u) \leq \int_{0-}^u \frac{\overline{F}(u + y - t)}{\overline{F}(u + y)} dH(t) \leq \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(u + y)} [1 - \psi(u)].$$

Από την (2.6.8), διαιρώντας με $\overline{F}(u + y)$, προκύπτει ότι

$$\frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{F}(u + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \int_{0-}^u \frac{\overline{F}(u + y - t)}{\overline{F}(u + y)} dH(t).$$

Επομένως, από τις δύο τελευταίες σχέσεις, έχουμε ότι

$$\frac{\phi}{1 - \phi} [1 - \psi(u)] \leq \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{F}(u + y)} \leq \frac{\phi}{1 - \phi} \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(u + y)} [1 - \psi(u)].$$

Παίρνοντας $y \rightarrow \infty$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\lim_{y \rightarrow \infty} \overline{F}(y)/\overline{F}(u + y) = 1$, προκύπτει το αποτέλεσμα του θεωρήματος. \square

Κεφάλαιο 5

Φράγματα για την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετούμε την ουρά της από κοινού κατανομής του πλεονάσματος ακριβώς πριν και κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Βρίσκουμε κάποιες ακριβείς εκφράσεις και νέα φράγματα για αυτήν την ουρά και δίνουμε τρεις αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, ένα αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτής είναι ότι βρίσκουμε νέα άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και την ουρά του ελλείμματος.

5.2 Βασικές έννοιες

Για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, οι Gerber and Shiu (1998) θεώρησαν την ποσότητα

$$m_{\delta}(u) = E\{e^{-\delta u} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u\}, \quad (5.2.1)$$

όπου $w(t, s)$, $0 \leq t, s < \infty$ είναι μια θετική συνάρτηση, $\delta \geq 0$ και $I(A)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου A . Η συνάρτηση αυτή έχει μελετηθεί εκτενέστερα, μεταξύ άλλων, από τους Willmot and Lin (1999), Lin and Willmot (2000), Cheng and Tang (2003), Dickson and Drekcic (2004), Li and Garrido (2004, 2005), Gerber and Shiu (2005) και Pitts and Politis (2007).

Οι Gerber and Shiu (1998) βρήκαν ότι η $m_{\delta}(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική

ανανεωτική εξίσωση (βλέπε επίσης Lin and Willmot (2000, relation (1.3))

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u m_\delta(u-t) \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} dP(s) dt + \frac{\lambda}{c} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho t} \int_t^\infty w(t, s-t) dP(s) dt. \quad (5.2.2)$$

Εδώ το $\rho = \rho(\delta)$ είναι η θετική λύση (ως προς ξ) της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg

$$\delta + \lambda - c\xi = \lambda \hat{p}(\xi), \quad (5.2.3)$$

όπου $\hat{p}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x} p(x) dx$, ο μετασχηματισμός Laplace της p . Αν η εξίσωση αυτή έχει μια αρνητική λύση, $-R$, τότε το R είναι ο συντελεστής προσαρμογής. Ο Dickson (1992) και οι Gerber and Shiu (1997) θεώρησαν ακόμα την από κοινού πυκνότητα των $U(T-)$ και $|U(T)|$. Έστω, $f_\delta(x, y|u)$ η (ελλειμματική) πυκνότητα αυτή, όπου u το αρχικό αποθεματικό. Οι Gerber and Shiu (1997) έδειξαν ότι όταν $u = 0$, ισχύει $f_\delta(x, y|0) = \lambda c^{-1} p(x+y) e^{-\rho x}$, ενώ για αυθαίρετο u έχουμε ότι

$$f_\delta(x, y|u) = \begin{cases} f_\delta(x, y|0) \frac{1-\psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & x > u > 0, \\ f_\delta(x, y|0) \frac{\psi_\delta(u-x) - \psi_\delta(u)}{1-\psi_\delta(0)} & 0 < x \leq u, \end{cases} \quad (5.2.4)$$

όπου $\psi_\delta(u) = E(e^{-\delta u} I(T < \infty) | U(0) = u)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε την περίπτωση όπου $\delta = 0$ και για δοθέντα $x, y \geq 0$, τη συνάρτηση $w(t, s) = I(t > x, s > y)$. Τότε η $m_\delta(u)$ ταυτίζεται με την

$$\bar{H}(u, x, y) = P(U(T-) > x, |U(T)| > y, T < \infty | U(0) = u), \quad (5.2.5)$$

και παριστάνει την ουρά της από κοινού κατανομής του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία. Για $x = 0$, από την (5.2.5), λαμβάνουμε την ουρά της κατανομής του ελλείμματος (βλέπε (2.2.7)), ενώ για $x = y = 0$, από την (5.2.5), παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ (βλέπε (2.2.3)).

Ο κύριος σκοπός μας είναι η εύρεση νέων, άνω και κάτω, φραγμάτων για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$ στην (5.2.5). Άνω φράγματα για την από κοινού κατανομή των $U(T-)$ και $|U(T)|$ έχουν βρεθεί πρόσφατα από τους Ng and Yang (2005a, 2005b). Σε αυτές τις εργασίες όμως, υποθέτουν ότι ο συντελεστής προσαρμογής υπάρχει, που σημαίνει ότι τα φράγματα τους δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις όπου η κατανομή των αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά, κάτι που συναντάμε συχνά στην πράξη. Οι Dickson et al. (1995), χρησιμοποίησαν επαναληπτικούς αλγόριθμους για τον υπολογισμό της ίδιας κατανομής, προσεγγίζοντας την ανέλιξη του πλεονάσματος από μια διακριτή ανέλιξη με χρήση αθροισμάτων τύπου Riemann. Στην Παράγραφο 5.3, βρίσκουμε την ανανεωτική εξίσωση για

τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$, και από αυτήν πετυχαίνουμε μια ακριβή έκφραση για $u \leq x$. Στην Παράγραφο 5.4, εφαρμόζουμε τρεις αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση φραγμάτων της $\bar{H}(u, x, y)$.

5.3 Η ανανεωτική εξίσωση για την $\bar{H}(u, x, y)$

Έστω P_e η κατανομή ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων P , οριζόμενη για κάθε $x \geq 0$ από $P_e(x) = \mu^{-1} \int_0^x \bar{P}(t) dt$. Το επόμενο αποτέλεσμα υπάρχει στο Schmidli (1999, Theorem 1), (βλέπε επίσης Dickson (1992)). Για λόγους πληρότητας, παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη.

Πρόταση 5.3.1. Η συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{H}(u, x, y) = \phi \int_0^u \bar{H}(u-t, x, y) dP_e(t) + \phi \bar{P}_e(\max\{u+y, x+y\}), \quad (5.3.1)$$

η οποία έχει λύση

$$\bar{H}(u, x, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^u \bar{P}_e(\max\{u+y-t, x+y\}) dH(t) + \phi \bar{P}_e(\max\{u+y, x+y\}). \quad (5.3.2)$$

Απόδειξη.

Από τη σχέση (5.2.2), για $\delta = 0$ (άρα $\rho = 0$) και $w(t, s) = I(t > x, s > y)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{H}(u-t, x, y) \bar{P}(t) dt \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \int_0^\infty I(t > x, s > y) p(t+s) ds dt \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \bar{H}(u-t, x, y) dP_e(t) + \frac{\lambda}{c} \int_{\max\{u,x\}}^\infty \bar{P}(t+y) dt \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u \bar{H}(u-t, x, y) dP_e(t) + \frac{\lambda\mu}{c} \bar{P}_e(\max\{u+y, x+y\}), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

από την οποία προκύπτει η (5.3.1). Η σχέση (5.3.2) προκύπτει από τη γενική μορφή της λύσης μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (βλέπε Asmussen, (1987, Ch.VI)), σημειώνοντας ότι $H(0) = 1 - \phi$. \square

Για $x = 0$, από την (5.3.1), προκύπτει η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την ουρά του ελλείμματος (βλέπε (2.6.7)), ενώ για $x = y = 0$, από την ίδια σχέση προκύπτει η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα

χρεοκοπίας (βλέπε (2.6.5)). Είναι προφανές από την παραπάνω πρόταση ότι πρέπει να μελετήσουμε τις δύο περιπτώσεις $u \leq x$ και $u > x$ ξεχωριστά. Η περίπτωση $u \leq x$ δίνει μια πολύ απλή μορφή για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$, όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα. Η απόδειξη του πορίσματος που ακολουθεί γίνεται χρησιμοποιώντας την (5.3.1). Μια δεύτερη απόδειξη γίνεται ολοκληρώνοντας την (5.2.4) δύο φορές.

Πόρισμα 5.3.2. Για $u \leq x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\bar{H}(u, x, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [1 - \psi(u)]. \quad (5.3.4)$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι για $u \leq x$, όταν γνωρίζουμε την $\psi(u)$, το Πόρισμα 5.3.2 μας δίνει άμεσα μια έκφραση της $\bar{H}(u, x, y)$. Στην περίπτωση όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι άγνωστη, χρησιμοποιώντας κάτω (άνω) φράγματα για την $\psi(u)$, βρίσκουμε άνω (κάτω) φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$. Για παράδειγμα, έστω ότι $L(u)$ ($U(u)$) είναι ένα κάτω (άνω) φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u . Τότε για $u \leq x$ και για κάθε $y \geq 0$, έχουμε

$$\frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [1 - U(u)] \leq \bar{H}(u, x, y) \leq \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [1 - L(u)].$$

5.4 Φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u > x$

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου $u > x$ και δίνουμε έναν ακριβή τύπο για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$.

Πρόταση 5.4.1. Για $u > x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &= \frac{\phi}{1-\phi} \left(\int_{0+}^{u-x} \bar{P}_e(u+y-z) dH(z) + \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \right) \\ &\quad + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Απόδειξη.

Για $u > x$, η εξίσωση (5.3.2) γράφεται

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^{u-x} \bar{P}_e(\max\{u+y-z, x+y\}) dH(z) \\ &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \int_{u-x}^u \bar{P}_e(\max\{u+y-z, x+y\}) dH(z) + \phi \bar{P}_e(u+y) \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0+}^{u-x} \bar{P}_e(u+y-z) dH(z) \\ &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \int_{u-x}^u \bar{P}_e(x+y) dH(z) + \phi \bar{P}_e(u+y) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Παρατήρηση 5.4.1. Η συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$ είναι συνεχής για $x = u$, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow u^-} \bar{H}(u, x, y) = \lim_{x \rightarrow u^+} \bar{H}(u, x, y) = \frac{\phi}{(1-\phi)} \bar{P}_e(u+y) [1 - \psi(u)].$$

Όταν $u > x$, από τη Πρόταση 5.4.1, συμπεραίνουμε ότι άνω (κάτω) φράγματα για το ολοκλήρωμα $\int_{0^+}^{u-x} \bar{P}_e(u+y-z) dH(z)$ δίνουν άνω (κάτω) φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$.

Πρόταση 5.4.2. Για $u > x$ και $y \geq 0$, ένα άνω φράγμα για την $\bar{H}(u, x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\bar{H}(u, x, y) \leq \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [\phi - \psi(u)] + \phi \bar{P}_e(u+y), \quad (5.4.2)$$

ενώ ένα κάτω φράγμα είναι

$$\bar{H}(u, x, y) \geq \frac{\phi}{1-\phi} \{ \bar{P}_e(u+y) [1 - \psi(u-x)] + \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \}. \quad (5.4.3)$$

Αν επιπλέον η $H = 1 - \psi$ έχει φθίνουσα πυκνότητα h στο $(0, \infty)$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &\leq \frac{\phi(\phi - \psi(u-x))}{(1-\phi)(u-x)} \int_0^{u-x} \bar{P}_e(u+y-z) dz \\ &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Απόδειξη.

Επειδή η $\bar{P}_e(u+y-z)$ είναι αύξουσα ως προς z , από την (5.4.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &\leq \frac{\phi}{1-\phi} \{ \bar{P}_e(u+y - (u-x)) [\phi - \psi(u-x)] \\ &\quad + \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \} + \phi \bar{P}_e(u+y) \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(x+y) [\phi - \psi(u)] + \phi \bar{P}_e(u+y), \end{aligned}$$

και η απόδειξη της (5.4.2) ολοκληρώθηκε. Για το κάτω φράγμα στην (5.4.3), από την (5.4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) &\geq \frac{\phi}{1-\phi} \{ \bar{P}_e(u+y) [\phi - \psi(u-x)] + \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \} \\ &\quad + \phi \bar{P}_e(u+y) \\ &= \frac{\phi}{1-\phi} \{ \bar{P}_e(u+y) [1 - \psi(u-x)] + \bar{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε κάνοντας την πράξη μεταξύ των $\phi \overline{P}_e(u + y)$ και $\phi/(1 - \phi) \overline{P}_e(u + y)[1 - \psi(u)]$. Τέλος, το άνω φράγμα στην (5.4.4), προκύπτει από την (5.4.1) και το Λήμμα 3 των Cai and Garrido (1998), χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι η συνάρτηση $\overline{P}_e(u + y - z)$ είναι αύξουσα ως προς z . \square

Παρατήρηση 5.4.2. (i) Αν θέσουμε $x = 0$ στην (5.4.3), τότε παίρνουμε το ακόλουθο φράγμα

$$\overline{H}(u, y) \geq \frac{\phi}{1 - \phi} \overline{P}_e(u + y)[1 - \psi(u)], \quad (5.4.5)$$

το οποίο έχει αποδειχθεί αρχικά από τους Chadjiconstantinidis and Politis (2007). (ii) Από τον Szekli (1986, Proposition 2.1), έχουμε ότι αν η κατανομή P_e είναι DFR, τότε η $H = 1 - \psi$ είναι κοίλη. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι αν η P_e είναι DFR, τότε η κατανομή των αποζημιώσεων P είναι IMRL (βλέπε για παράδειγμα Willmot and Lin (2001)). Έτσι, η σχέση (5.4.4) ισχύει στην περίπτωση όπου η P είναι IMRL.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε άνω και κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $\overline{H}(u, x, y)$ χρησιμοποιώντας τρεις αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες βασίζονται στην αντικατάσταση του ολοκληρώματος $\int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u + y - z) dH(z)$ με κατάλληλα αθροίσματα που περιέχουν την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$. Στην πρώτη αριθμητική μέθοδο χρησιμοποιούμε τον κανόνα του τραπεζίου (βλέπε Σχήμα 5.1). Έστω $u > x \geq 0$ και $y \geq 0$ σταθερά. Για $z \in (0, u - x]$, ορίζουμε τη συνάρτηση $g(z)$ έτσι ώστε

$$g(z) = \overline{P}_e(u + y - z), \quad z \in (0, u - x]. \quad (5.4.6)$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι αύξουσα και κυρτή στο $(0, u - x]$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτές για την g και τον κανόνα του τραπεζίου, βρίσκουμε στο επόμενο λήμμα ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα $\int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u + y - z) dH(z)$.

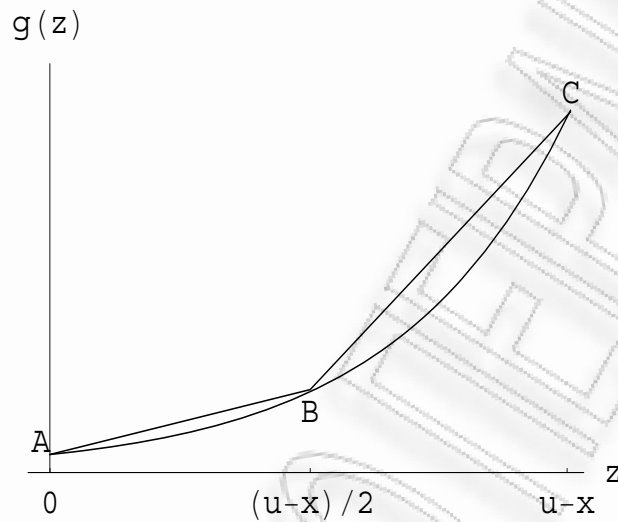
Για τις αριθμητικές μεθόδους που αναπτύσσουμε στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε μια διαμέριση του διαστήματος $(0, u - x]$. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου με d_n συμβολίζουμε το μήκος της διαμέρισης, δηλαδή

$$d_n = \frac{u - x}{n}. \quad (5.4.7)$$

(Σημειώνουμε ότι το d_n εξαρτάται από τα u, x .)

Λήμμα 5.4.3. *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u + y - z) dH(z) &\leq \frac{n}{u - x} \sum_{k=1}^n \left\{ [\overline{P}_e(u + y - k d_n) \right. \\ &\quad \left. - \overline{P}_e(u + y - (k - 1) d_n)] \int_{(k-1)d_n}^{k d_n} \psi(z) dz \right\} \\ &\quad - \overline{P}_e(x + y) \psi(u - x) + \phi \overline{P}_e(u + y). \end{aligned} \quad (5.4.8)$$



Σχήμα 5.1: Άνω φράγμα για $n = 2$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου.

Απόδειξη.

Στον οριζόντιο άξονα, θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος $(0, u - x]$ με

$$(0, u - x] = \bigcup_{k=1,2,\dots,n} ((k-1)d_n, kd_n]. \quad (5.4.9)$$

Έστω $w_{k-1,n}(z)$ η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $((k-1)d_n, g((k-1)d_n))$ και $(kd_n, g(kd_n))$. Τότε έχουμε

$$w_{k-1,n}(z) = n \frac{g(kd_n) - g((k-1)d_n)}{u - x} (z - (k-1)d_n) + g((k-1)d_n),$$

και χρησιμοποιώντας την (5.4.6), παίρνουμε ότι

$$w_{k-1,n}(z) = n \frac{\overline{P}_e(u + y - kd_n) - \overline{P}_e(u + y - (k-1)d_n)}{u - x} (z - (k-1)d_n) + \overline{P}_e(u + y - (k-1)d_n). \quad (5.4.10)$$

Επειδή η g είναι αύξουσα και κυρτή στο $(0, u - x]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \overline{P}_e(u + y - z) dH(z) &\leq \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} w_{k-1,n}(z) dH(z) \\ &= n \frac{\overline{P}_e(u + y - kd_n) - \overline{P}_e(u + y - (k-1)d_n)}{u - x} \\ &\quad \times \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} (z - (k-1)d_n) dH(z) \\ &\quad + \overline{P}_e(u + y - (k-1)d_n) [\psi((k-1)d_n) - \psi(kd_n)]. \end{aligned}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) &\leq n \frac{\overline{P}_e(u+y-kd_n) - \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n)}{u-x} \\ &\times \left\{ \left[(z - (k-1)d_n)H(z) \right]_{(k-1)d_n}^{kd_n} - \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} H(z) dz \right\} \\ &+ \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) [\psi((k-1)d_n) - \psi(kd_n)], \end{aligned}$$

το οποίο δίνει, θυμίζοντας ότι $H(z) = 1 - \psi(z)$,

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) &\leq n \frac{\overline{P}_e(u+y-kd_n) - \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n)}{u-x} \\ &\times \left\{ d_n H(kd_n) - d_n + \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \psi(z) dz \right\} \\ &+ \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) [\psi((k-1)d_n) - \psi(kd_n)]. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) &\leq n \frac{\overline{P}_e(u+y-kd_n) - \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n)}{u-x} \\ &\times \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \psi(z) dz - \overline{P}_e(u+y-kd_n) \psi(kd_n) \\ &+ \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) \psi((k-1)d_n). \quad (5.4.11) \end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z). \quad (5.4.12)$$

Εισάγωντας την (5.4.11) στην (5.4.12) και από το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} -\overline{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \phi \overline{P}_e(u+y) &= - \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-kd_n) \psi(kd_n) \\ &+ \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) \psi((k-1)d_n), \end{aligned}$$

η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Με βάση το παραπάνω λήμμα, δίνουμε ένα γενικό άνω φράγμα για τη συνάρτηση $\overline{H}(u, x, y)$.

Θεώρημα 5.4.4. *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{n}{u-x} \sum_{k=1}^n \left([\bar{P}_e(u+y-kd_n) \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{P}_e(u+y-(k-1)d_n)] \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \psi(z) dz \right) \right. \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Απόδειξη.

Εισάγωντας την (5.4.8) στην (5.4.1), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{n}{u-x} \sum_{k=1}^n \left([\bar{P}_e(u+y-kd_n) \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{P}_e(u+y-(k-1)d_n)] \int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \psi(z) dz \right) \right. \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \phi \bar{P}_e(u+y) \right. \\ & \left. + \bar{P}_e(u+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \right\} + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned}$$

Διαγράφοντας την ποσότητα $\bar{P}_e(x+y) \psi(u-x)$ και από το γεγονός ότι

$$\frac{\phi}{1-\phi} \phi \bar{P}_e(u+y) + \phi \bar{P}_e(u+y) = \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(u+y),$$

προκύπτει η σχέση (5.4.13). □

Είναι προφανές ότι το άνω φράγμα που δίνεται στο Θεώρημα 5.4.4 βελτιώνεται όσο αυξάνεται το n , ενώ για αρκετά μεγάλες τιμές του n , προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια την πραγματική τιμή της $\bar{H}(u, x, y)$. Επιπλέον, είναι αξιοσημείωτο ότι, όπως φαίνεται στα αριθμητικά παραδείγματα που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 6, λειτουργεί καλά ακόμα και για μικρές τιμές του n . Για το λόγο αυτό, δίνουμε τρία άνω φράγματα για $n = 1$, $n = 2$ και $n = 3$.

Πόρισμα 5.4.5. *Για $n = 1$, ισχύει*

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{\bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e(u+y)}{u-x} \int_0^{u-x} \psi(z) dz \right. \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Για $n = 2$, ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ 2 \frac{\bar{P}_e(u+y-\frac{u-x}{2}) - \bar{P}_e(u+y)}{u-x} \int_0^{\frac{u-x}{2}} \psi(z) dz \right. \\ & + 2 \frac{\bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e(u+y-\frac{u-x}{2})}{u-x} \int_{\frac{u-x}{2}}^{u-x} \psi(z) dz \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Για $n = 3$, ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ 3 \frac{\bar{P}_e(u+y-\frac{u-x}{3}) - \bar{P}_e(u+y)}{u-x} \int_0^{\frac{u-x}{3}} \psi(z) dz \right. \\ & + 3 \frac{\bar{P}_e(u+y-2\frac{u-x}{3}) - \bar{P}_e(u+y-\frac{u-x}{3})}{u-x} \int_{\frac{u-x}{3}}^{2\frac{u-x}{3}} \psi(z) dz \\ & + 3 \frac{\bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e(u+y-2\frac{u-x}{3})}{u-x} \int_{2\frac{u-x}{3}}^{u-x} \psi(z) dz \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $\psi(u)$ με ένα κατάλληλο άνω ή κάτω φράγμα. Για παράδειγμα, αν $L(u)(U(u))$ είναι ένα κάτω (άνω) φράγμα για την $\psi(u)$, τότε για $n = 1$, από το Θεώρημα 5.4.4 παίρνουμε

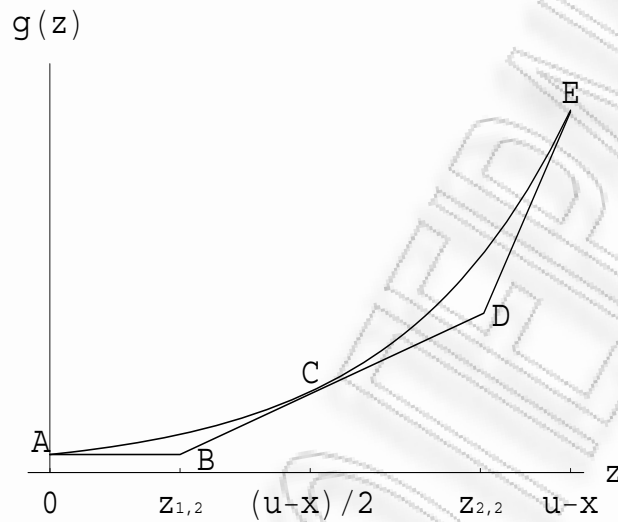
$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \leq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{\bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e(u+y)}{u-x} \int_0^{u-x} U(z) dz \right. \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) L(u-x) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Υπάρχουν στη βιβλιογραφία πολλά άνω και κάτω φράγματα για την $\psi(u)$. Για παράδειγμα, ένα πολύ γνωστό κάτω φράγμα είναι των De Vylder and Goovaerts (1984),

$$L_{DG}(u) := \frac{\phi \bar{P}_e(u)}{1-\phi P_e(u)}, \quad (5.4.15)$$

ενώ άνω φράγματα για την $\psi(u)$ υπάρχουν στους Willmot and Lin (1997), Cai and Garrido (1998, 1999), και Chadjiconstantinidis and Politis (2005).

Στη συνέχεια, βρίσκουμε κάτω φράγματα για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$. Θυμίζουμε ότι ένα αρχικό κάτω φράγμα για αυτήν την ποσότητα δίνεται στην (5.4.3), για $u > x$. Παρουσιάζουμε δύο ακόμα αριθμητικές μεθόδους με σκοπό να βελτιώσουμε το φράγμα αυτό. Χρησιμοποιούμε και πάλι τη διαμέριση του διαστήματος



Σχήμα 5.2: Κάτω φράγματα χρησιμοποιώντας την πρώτη μας μέθοδο για $n = 2$.

$(0, u - x]$ έτσι όπως αυτή ορίστηκε στη (5.4.9). Στην πρώτη μας μέθοδο, βρίσκουμε τα σημεία τομής των εφαπτομένων στα διαδοχικά σημεία της διαμέρισης. Στο Σχήμα 5.2 φαίνεται γραφικά η μέθοδος αυτή. Βλέπουμε ότι οι εφαπτομένες στα σημεία $A(0, g(0))$, $C((u-x)/2, g((u-x)/2))$ και $E(u-x, g(u-x))$, τέμνονται στα σημεία $B(z_{1,2}, w_C(z_{1,2}))$ και $D(z_{2,2}, w_C(z_{2,2}))$, όπου $w_C(z)$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο C . Ο δεύτερος δείκτης του $z_{k,2}$ ($k = 1, 2$) συμβολίζει το πλήθος των διαστημάτων κατά τη διαμέριση του διαστήματος $(0, u - x]$. Γενικά, για μια διαμέριση, όπως αυτή που δίνεται στην (5.4.9), και για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, ορίζουμε με $z_{k,n}$ τα σημεία τομής των δύο εφαπτομένων στα σημεία διαμέρισης με τετμημένες $(k-1)d_n$ και kd_n , θεωρώντας ότι $z_{0,n} = 0$ και $z_{n+1,n} = u - x$.

Λήμμα 5.4.6. Έστω p_e η πυκνότητα της κατανομής P_e . Τότε, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, τα σημεία $z_{k,n}$ είναι

$$z_{k,n} = \frac{(u-x) [k p_e(u+y-kd_n) - (k-1) p_e(u+y-(k-1)d_n)]/n}{p_e(u+y-kd_n) - p_e(u+y-(k-1)d_n)} - \frac{\overline{P}_e(u+y-kd_n) - \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n)}{p_e(u+y-kd_n) - p_e(u+y-(k-1)d_n)} \quad (5.4.16)$$

για $k = 1, 2, \dots, n$, και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) &\geq \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ p_e(u+y-(k-1)d_n) \right. \\ &\times \left[\int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz - (z_{k,n} - (k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) - ((k-1)d_n - z_{k-1,n}) \psi(z_{k-1,n}) \right] \\ &\left. + \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) [\psi(z_{k-1,n}) - \psi(z_{k,n})] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Απόδειξη.

Η εξίσωση των εφαπτομένων στα σημεία διαμέρισης $(k-1)d_n$ και $k d_n$ είναι

$$\begin{aligned} w_{k-1,n}(z) &= p_e(u+y-(k-1)d_n) (z - (k-1)d_n) \\ &\quad + \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n), \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

και

$$w_{k,n}(z) = p_e(u+y-k d_n) (z - k d_n) + \overline{P}_e(u+y-k d_n), \quad (5.4.19)$$

αντίστοιχα. Για να βρούμε το σημείο τομής δύο διαδοχικών εφαπτομένων, λύνουμε την εξίσωση $w_{k-1,n}(z) = w_{k,n}(z)$. Εισάγωντας τις (5.4.18) και (5.4.19) στην τελευταία έκφραση και λύνοντας ως προς z , παίρνουμε τη σχέση (5.4.16). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ξανά την (5.4.18), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) &\geq \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} w_{k-1,n}(z) dH(z) \\ &= p_e(u+y-(k-1)d_n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} (z - (k-1)d_n) dH(z) \\ &\quad + \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) [\psi(z_{k-1,n}) - \psi(z_{k,n})]. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βλέπουμε ότι το $\int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} (z - (k-1)d_n) dH(z)$ ισούται με

$$\int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz - (z_{k,n} - (k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) - ((k-1)d_n - z_{k-1,n}) \psi(z_{k-1,n}). \quad (5.4.21)$$

Θυμίζοντας ότι $z_{0,n} = 0$ και $z_{n+1,n} = u-x$, μια άλλη διαμέριση του διαστήματος $(0, u-x]$ είναι

$$(0, u-x] = \bigcup_{k=1,2,\dots,n+1} (z_{k-1,n}, z_{k,n}],$$

έτσι ώστε

$$\int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z). \quad (5.4.22)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.4.20) και (5.4.21) στην (5.4.22) προκύπτει η (5.4.17). \square

Λήμμα 5.4.7. Έστω f μια συνάρτηση στο $(0, a]$, έτσι ώστε η f να είναι διαφορίσιμη για όλα τα $z \in (0, a]$ (δεξιά διαφορίσιμη στο μηδέν). Θεωρούμε μια διαμέριση

$$(0, a] = \bigcup_{k=1,2,\dots,n} \left(0, k \frac{a}{n}\right] \quad (5.4.23)$$

του διαστήματος $(0, a]$. Έστω $(z_{k,n}, w_{k,n}(z_{k,n})) = (z_{k,n}, w_{k-1,n}(z_{k,n}))$, $k = 1, 2, \dots, n$, τα σημεία τομής των εφαπτομένων στα διαδοχικά σημεία διαμέρισης έτσι ώστε $f'((k-1)a/n) \neq f'(ka/n)$. Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, ισχύει ότι

$$f\left(k \frac{a}{n}\right) - f\left((k-1) \frac{a}{n}\right) - \left(z_{k,n} - (k-1) \frac{a}{n}\right) f'\left((k-1) \frac{a}{n}\right) = \left(k \frac{a}{n} - z_{k,n}\right) f'\left(k \frac{a}{n}\right).$$

Απόδειξη.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία $((k-1)a/n, f((k-1)a/n))$ και $(ka/n, f(ka/n))$ είναι αντίστοιχα

$$w_{k-1,n}(z) = f'\left((k-1) \frac{a}{n}\right) \left(z - (k-1) \frac{a}{n}\right) + f\left((k-1) \frac{a}{n}\right)$$

και

$$w_{k,n}(z) = f'\left(k \frac{a}{n}\right) \left(z - k \frac{a}{n}\right) + f\left(k \frac{a}{n}\right).$$

Για $z = z_{k,n}$ λαμβάνουμε

$$w_{k-1,n}(z_{k,n}) = w_{k,n}(z_{k,n}),$$

απ' όπου με αντικατάσταση προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ένα γενικό κάτω φράγμα για την $\bar{H}(u, x, y)$.

Θεώρημα 5.4.8. Για $u > x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_e(u+y-(k-1)d_n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz \right. \\ \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) + \bar{P}_e(u+y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

όπου οι τιμές των $z_{k,n}$ ($n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n$) δίνονται από την (5.4.16).

Απόδειξη.

Εισάγοντας την (5.4.17) στην (5.4.1), έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \left[p_e(u+y-(k-1)d_n) \left(\int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (z_{k,n} - (k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) - ((k-1)d_n - z_{k-1,n}) \psi(z_{k-1,n}) \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^n (\bar{P}_e(u+y-(k-1)d_n) [\psi(z_{k-1,n}) - \psi(z_{k,n})]) \\ \left. + \bar{P}_e(x+y) [\psi(z_{n,n}) - \psi(u)] \right\} + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned}$$

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\overline{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_e(u+y-(k-1)d_n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz \right. \\
& - \sum_{k=1}^{n+1} (z_{k,n} - (k-1)d_n) p_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) \\
& - \sum_{k=1}^{n+1} ((k-1)d_n - z_{k-1,n}) p_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k-1,n}) \\
& + \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k-1,n}) \\
& - \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) \\
& \left. + \overline{P}_e(x+y) \psi(z_{n,n}) - \overline{P}_e(x+y) \psi(u) \right\} + \phi \overline{P}_e(u+y).
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, κάνοντας αλλαγή των ορίων και σημειώνοντας ότι $z_{0,n} = 0$ και $z_{n+1,n} = u-x$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_e(u+y-(k-1)d_n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz \right. \\
& - \sum_{k=1}^n (z_{k,n} - (k-1)d_n) p_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) \\
& - \sum_{k=1}^n (k d_n - z_{k,n}) p_e(u+y-k d_n) \psi(z_{k,n}) \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_e(u+y-k d_n) \psi(z_{k,n}) + \phi \overline{P}_e(u+y) \\
& - \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-(k-1)d_n) \psi(z_{k,n}) \\
& \left. + \overline{P}_e(x+y) \psi(z_{n,n}) - \overline{P}_e(x+y) \psi(u) \right\} + \phi \overline{P}_e(u+y).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_e(u+y-k d_n) \psi(z_{k,n}) + \overline{P}_e(x+y) \psi(z_{n,n}) = \sum_{k=1}^n \overline{P}_e(u+y-k d_n) \psi(z_{k,n})$$

και εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4.7 για τη συνάρτηση $\overline{P}_e(u+y-z)$ (ως συνάρτηση του z), η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Πόρισμα 5.4.9. Για $n = 1$, έχουμε

$$z_{1,1} = \frac{(u-x)p_e(x+y) - [\overline{P}_e(x+y) - \overline{P}_e(u+y)]}{p_e(x+y) - p_e(u+y)},$$

και

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ p_e(u+y) \int_0^{z_{1,1}} \psi(z) dz + p_e(x+y) \int_{z_{1,1}}^{u-x} \psi(z) dz \right. \\ & \left. - \overline{P}_e(x+y) \psi(u) + \overline{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Για $n = 2$, έχουμε

$$z_{1,2} = \frac{\frac{u-x}{2} p_e(u+y - \frac{u-x}{2}) - [\overline{P}_e(u+y - \frac{u-x}{2}) - \overline{P}_e(u+y)]}{p_e(u+y - \frac{u-x}{2}) - p_e(u+y)},$$

$$z_{2,2} = \frac{\frac{u-x}{2} [2p_e(x+y) - p_e(u+y - \frac{u-x}{2})] - [\overline{P}_e(x+y) - \overline{P}_e(u+y - \frac{u-x}{2})]}{p_e(x+y) - p_e(u+y - \frac{u-x}{2})}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ p_e(u+y) \int_0^{z_{1,2}} \psi(z) dz + p_e(u+y - \frac{u-x}{2}) \int_{z_{1,2}}^{z_{2,2}} \psi(z) dz \right. \\ & \left. + p_e(x+y) \int_{z_{2,2}}^{u-x} \psi(z) dz - \overline{P}_e(x+y) \psi(u) + \overline{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια δεύτερη μέθοδο για την εύρεση κάτω φραγμάτων για την $\overline{H}(u, x, y)$. Με αυτή τη μέθοδο, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 5.3, χρησιμοποιούμε πάλι τις εφαπτομένες στα σημεία διαμέρισης, χωρίς όμως να βρίσκουμε τα σημεία τομής τους.

Λήμμα 5.4.10. Για $u > x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) \geq & \sum_{k=1}^n \left\{ p_e(u+y - (k-1)d_n) \left[\int_{(k-1)d_n}^{kd_n} \psi(z) dz - d_n \psi(kd_n) \right] \right. \\ & \left. + \overline{P}_e(u+y - (k-1)d_n) [\psi((k-1)d_n) - \psi(kd_n)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Απόδειξη.

Όπως κάναμε και στο Λήμμα 5.4.6, η εξίσωση της εφαπτομένης AB στο σημείο $A((\kappa-1)d_n, g((\kappa-1)d_n))$ είναι

$$\begin{aligned} w_{\kappa-1,n}(z) = & p_e(u+y - (\kappa-1)d_n) (z - (\kappa-1)d_n) \\ & + \overline{P}_e(u+y - (\kappa-1)d_n). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
& \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) \geq \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} w_{\kappa-1,n}(z) dH(z) \\
& = p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} (z-(\kappa-1)d_n) dH(z) \\
& \quad + \overline{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) [\psi((\kappa-1)d_n) - \psi(\kappa d_n)]. \quad (5.4.26)
\end{aligned}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι

$$\begin{aligned}
& \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) \geq p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \\
& \quad \left\{ [(z-(\kappa-1)d_n) H(z)]_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} - \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} H(z) dz \right\} \\
& \quad + \overline{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) [\psi((\kappa-1)d_n) - \psi(\kappa d_n)] \\
& = p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \left[\int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz - d_n \psi(\kappa d_n) \right] \\
& \quad + \overline{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) [\psi((\kappa-1)d_n) - \psi(\kappa d_n)].
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
& \int_{0+}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) = \sum_{\kappa=1}^n \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \overline{P}_e(u+y-z) dH(z) \\
& \geq \sum_{\kappa=1}^n \left\{ p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \left[\int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz - d_n \psi(\kappa d_n) \right] \right. \\
& \quad \left. + \overline{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) [\psi((\kappa-1)d_n) - \psi(\kappa d_n)] \right\}.
\end{aligned}$$

□

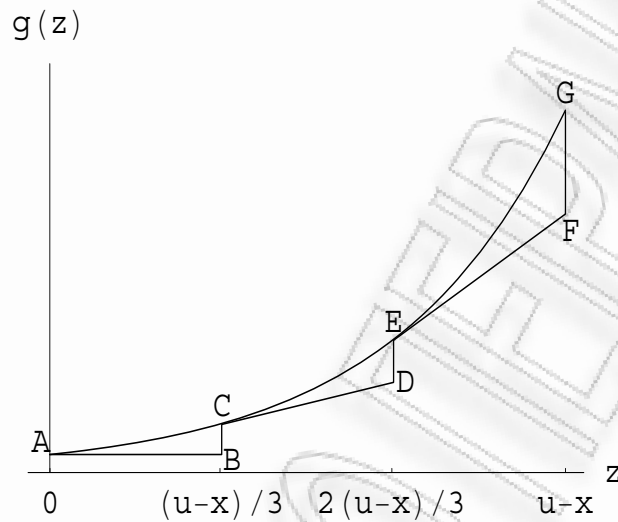
Λήμμα 5.4.11. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη στο $z \in (0, a]$ για την οποία υπάρχει η παράγωγος από δεξιά στο 0 . Έστω ακόμα ότι η $f(z)$ είναι αύξουσα και κυρτή. Θεωρούμε επίσης μια διαμέριση του διαστήματος $(0, a]$ της μορφής

$$[0, a] = \cup_{\kappa=1,2,\dots,n} \left(0, \kappa \frac{a}{n}\right].$$

Τότε

$$f\left(\kappa \frac{a}{n}\right) - f\left((\kappa-1) \frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n} f'\left((\kappa-1) \frac{a}{n}\right) \geq 0$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \dots, n$.



Σχήμα 5.3: Κάτω φράγματα χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μας μέθοδο για $n = 3$.

Απόδειξη.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $((\kappa - 1)a/n, f((\kappa - 1)a/n))$ είναι

$$w_{\kappa-1,n}(z) = f' \left((\kappa - 1) \frac{a}{n} \right) \left(z - (\kappa - 1) \frac{a}{n} \right) + f \left((\kappa - 1) \frac{a}{n} \right).$$

Επειδή η συνάρτηση $f(z)$ είναι αύξουσα και κυρτή, ισχύει ότι

$$f \left(\kappa \frac{a}{n} \right) \geq w_{\kappa-1,n}(z)$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \dots, n$ και $z \in ((\kappa - 1)a/n, \kappa a/n]$. Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε το $w_{\kappa-1,n}(z)$ για $z = \kappa a/n$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$C_{\kappa,n}(u, x, y) := \overline{P}_e \left(u + y - \kappa \frac{u-x}{n} \right) - \overline{P}_e \left(u + y - (\kappa - 1) \frac{u-x}{n} \right) - \frac{u-x}{n} p_e \left(u + y - (\kappa - 1) \frac{u-x}{n} \right) \quad (5.4.27)$$

για $\kappa = 1, 2, \dots, n$.

Ένα γενικό κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $\overline{H}(u, x, y)$ είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 5.4.12. Για κάθε $u > x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$C_{\kappa,n}(u, x, y) \geq 0$$

και

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz \right. \\ & \left. + \sum_{\kappa=1}^n C_{\kappa,n}(u, x, y) \psi(\kappa d_n) - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) + \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

Απόδειξη.

Από το Λήμμα 5.4.11, προκύπτει άμεσα ότι για $f(z) = \bar{P}_e(u+y-z)$,

$$C_{\kappa,n}(u, x, y) \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας την (5.4.25) στην (5.4.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n \left(p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \left[\int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz - d_n \psi(\kappa d_n) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) [\psi((\kappa-1)d_n) - \psi(\kappa d_n)] \right) \right. \\ & \left. + \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) \right\} + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Κάνοντας πράξεις στο δεύτερο μέλος της σχέσης (5.4.29), λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz \right. \\ & - \sum_{\kappa=1}^n d_n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & + \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi((\kappa-1)d_n) \\ & - \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & \left. + \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) \right\} + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned}$$

Γράφοντας τα όρια των αθροισμάτων έτσι ώστε να εμφανιστεί παντού το $\psi(\kappa d_n)$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz \right. \\ & - \sum_{\kappa=1}^n d_n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & + \sum_{\kappa=0}^{n-1} \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & - \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & \left. + \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) \right\} + \phi \bar{P}_e(u+y). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\sum_{\kappa=0}^n \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n) = \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n) + \phi \bar{P}_e(u+y),$$

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n) + \bar{P}_e(x+y) \psi(u-x) = \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n)$$

και

$$\frac{\phi}{1-\phi} \phi \bar{P}_e(u+y) + \phi \bar{P}_e(u+y) = \frac{\phi}{1-\phi} \bar{P}_e(u+y),$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{\kappa=1}^n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \int_{(\kappa-1)d_n}^{\kappa d_n} \psi(z) dz \right. \\ & - \sum_{\kappa=1}^n d_n p_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & + \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-\kappa d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & - \sum_{\kappa=1}^n \bar{P}_e(u+y-(\kappa-1)d_n) \psi(\kappa d_n) \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) + \phi \bar{P}_e(u+y) \right\}. \end{aligned}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\psi(\kappa d_n)$ και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό των συναρτήσεων $C_{\kappa,n}(u, x, y)$ (βλέπε (5.4.27)), προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πόρισμα 5.4.13. Για $n = 1$, ισχύει

$$\bar{H}(u, x, y) \geq \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ p_e(u+y) \int_0^{u-x} \psi(z) dz + C_{1,1}(u, x, y) \psi(u-x) - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) + \bar{P}_e(u+y) \right\},$$

όπου η συνάρτηση $C_{1,1}(u, x, y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$C_{1,1}(u, x, y) = \bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e(u+y) - (u-x) p_e(u+y).$$

Για $n = 2$, ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{H}(u, x, y) \geq & \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ p_e(u+y) \int_0^{\frac{u-x}{2}} \psi(z) dz + p_e\left(u+y - \frac{u-x}{2}\right) \int_{\frac{u-x}{2}}^{u-x} \psi(z) dz \right. \\ & + C_{1,2}(u, x, y) \psi\left(\frac{u-x}{2}\right) + C_{2,2}(u, x, y) \psi(u-x) \\ & \left. - \bar{P}_e(x+y) \psi(u) + \bar{P}_e(u+y) \right\}, \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $C_{1,2}(u, x, y)$ και $C_{2,2}(u, x, y)$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$C_{1,2}(u, x, y) = \bar{P}_e\left(u+y - \frac{u-x}{2}\right) - \bar{P}_e(u+y) - \frac{u-x}{2} p_e(u+y)$$

και

$$C_{2,2}(u, x, y) = \bar{P}_e(x+y) - \bar{P}_e\left(u+y - \frac{u-x}{2}\right) - \frac{u-x}{2} p_e\left(u+y - \frac{u-x}{2}\right).$$

Παρατήρηση 5.4.3. (i) Οι δύο μέθοδοι για την εύρεση κάτω φραγμάτων της $\bar{H}(u, x, y)$ που δίνονται στα Θεωρήματα 5.4.8 και 5.4.12 θα αναφέρονται στο εξής ως Μέθοδος 1 και Μέθοδος 2, αντίστοιχα.

(ii) Η Μέθοδος 1 είναι πιο ακριβής από τη Μέθοδο 2. Παρόλα αυτά, η Μέθοδος 2 είναι απλούστερη (πιο γρήγορη), αφού δεν απαιτεί τον υπολογισμό των σημείων τομής $z_{k,n}$. Επιπλέον, όπως θα δούμε και στα αριθμητικά παραδείγματα στο Κεφάλαιο 6 σε πολλές περιπτώσεις τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τις δύο μεθόδους είναι περίπου ίδια.

(iii) Είναι αξιοσημείωτο ότι τα νέα (μη εκθετικά) άνω και κάτω φράγματα που περιγράφηκαν σε αυτό το κεφάλαιο δεν εξαρτώνται από κάποιες συνθήκες για τη κατανομή των αποζημιώσεων. Έτσι, η μεθοδολογία που προτείνουμε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και όταν η κατανομή των αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά. Από την άλλη μεριά, τα φράγματα μας περιέχουν τη πιθανότητα χρεοκοπίας και επομένως χρειάζεται να γνωρίζουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας ή άνω και κάτω φράγματα για

αυτήν. Αν τα φράγματα για την $\psi(u)$ δεν είναι καλά, τότε τα φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ δεν είναι επίσης καλά. Αν όμως τα φράγματα για την $\psi(u)$ είναι αρκετά καλά, τότε όπως φαίνεται και από τα αριθμητικά παραδείγματα στο Κεφάλαιο 6, τα κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ είναι πολύ κοντά στα άνω φράγματα ακόμα και όταν η διαμέριση περιέχει μικρό αριθμό διαστημάτων (δηλαδή για μικρές τιμές του n).

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικά παραδείγματα, εκθετικά φράγματα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 για την από κοινού κατανομή του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία με σκοπό να βρούμε νέα, άνω και κάτω, φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, στο κλασικό μοντέλο. Πολλά από τα φράγματα βελτιώνουν και γενικεύουν ήδη υπάρχοντα φράγματα. Τα αριθμητικά παραδείγματα που δίνουμε δείχνουν την απόδοση των φραγμάτων μας σε σχέση με παλαιότερα φράγματα. Πρόσφατες εργασίες στις οποίες παρουσιάζονται φράγματα για την $\psi(u)$, είναι των Cai and Garrido (1998, 1999), Politis (2005), και Chadjiconstantinidis and Politis (2005). Παρουσιάζουμε επίσης εκθετικά φράγματα για τη συνάρτηση $\bar{H}(u, x, y)$ καθώς και κάποιες ανισοτικές σχέσεις για την ίδια συνάρτηση. Τέλος, βρίσκουμε μερικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα στην περίπτωση όπου η κατανομή των κλιμακωτών υψών έχει βαριά ουρά.

6.2 Φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Το επόμενο αποτέλεσμα υπάρχει στον Politis (2005, Lemma 2.1 and 2.2). Για την πληρότητα των πραγμάτων, παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Πρόταση 6.2.1. Για $u > 0$, αν $E(S) < \infty$, τότε ισχύει

$$\psi(u) \leq \frac{u\phi\overline{P}_e(u) + \phi E(S)P_e(u)}{u + \phi E(S)P_e(u)}. \quad (6.2.1)$$

Επιπλέον, αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι P είναι 2-NWU, έχουμε

$$\psi(u) \leq \frac{u\phi\overline{P}_e(u) + \phi E(S)P_e(u)}{u + E(S)P_e(u)}. \quad (6.2.2)$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 5.4.4, για $n = 1$ και για $x = y = 0$, προκύπτει ότι για $u > 0$ ισχύει

$$\psi(u) \leq \phi \left\{ \frac{1 - \overline{P}_e(u)}{u} \int_0^u \psi(z) dz + \overline{P}_e(u) \right\}. \quad (6.2.3)$$

Οι Cai and Garrido (1998, Lemma 1) έδειξαν ότι

$$\int_0^u \psi(z) dz \leq E(S) [1 - \psi(u)].$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\psi(u) \leq \phi \left\{ \frac{1 - \overline{P}_e(u)}{u} E(S) [1 - \psi(u)] + \overline{P}_e(u) \right\}.$$

Λύνοντας ως προς $\psi(u)$ καταλήγουμε στην (6.2.1). Αν η P είναι 2-NWU που σημαίνει ότι η P_e είναι NWU (βλέπε Willmot (2001)), τότε από τον Politis (2005, Lemma 2.1),

$$\int_0^u \psi(z) dz \leq E(S) \left[1 - \frac{\psi(u)}{\phi} \right]. \quad (6.2.4)$$

Από την τελευταία σχέση και την (6.2.3), προκύπτει ότι

$$\psi(u) \leq \phi \left\{ \frac{1 - \overline{P}_e(u)}{u} E(S) \left[1 - \frac{\psi(u)}{\phi} \right] + \overline{P}_e(u) \right\}.$$

και λύνοντας τη τελευταία σχέση ως προς $\psi(u)$, έχουμε την (6.2.2). \square

Παρατήρηση 6.2.1. Για $u \rightarrow 0$, ισχύουν οι σχέσεις (6.2.1) και (6.2.2). Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De Hospital, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(0) = \phi &\leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u\phi\overline{P}_e(u) + \phi E(S)P_e(u)}{u + \phi E(S)P_e(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[u\phi\overline{P}_e(u) + \phi E(S)P_e(u)]'}{[u + \phi E(S)P_e(u)]'} \\ &= \phi \frac{1 + E(S)p_e(0)}{1 + \phi E(S)p_e(0)}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι αληθές. Αν η P είναι 2-NWU, τότε κάνοντας τις ίδιες πράξεις καταλήγουμε στο $\phi \leq \phi$. Τονίζουμε ότι το φράγμα στην (6.2.1) δεν είναι ασυμπτωτικά ακριβές στο 0, ενώ το φράγμα στην (6.2.2) είναι ασυμπτωτικά ακριβές στο 0.

Στη συνέχεια της παραγράφου, παρουσιάζουμε νέα άνω και κάτω φράγματα για την $\psi(u)$.

Θεώρημα 6.2.2. Έστω $U(u)$ μια συνάρτηση έτσι ώστε $\psi(u) \leq U(u)$ για κάθε $u > 0$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \psi(u) &\leq \phi \frac{n}{u} \sum_{k=1}^n \left([\overline{P}_e(u - k u/n) - \overline{P}_e(u - (k-1) u/n)] \right. \\ &\quad \left. \times \int_{(k-1) u/n}^{k u/n} U(z) dz \right) + \phi \overline{P}_e(u). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Απόδειξη.

Για $x = 0$ και $y = 0$, από την (5.4.13), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \psi(u) &\leq \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \frac{n}{u} \sum_{k=1}^n \left([\overline{P}_e(u - k u/n) - \overline{P}_e(u - (k-1) u/n)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{(k-1) u/n}^{k u/n} \psi(z) dz \right) - \psi(u) + \overline{P}_e(u) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Λύνοντας ως προς $\psi(u)$ και χρησιμοποιώντας ότι $\psi(u) \leq U(u)$, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πρακτικά από το Θεώρημα 6.2.2 λαμβάνουμε καλά άνω φράγματα ακόμα και για μικρές τιμές του n .

Πόρισμα 6.2.3. Για $n = 1$, ισχύει

$$\psi(u) \leq \phi \frac{1}{u} [1 - \overline{P}_e(u)] \int_0^u U(z) dz + \phi \overline{P}_e(u).$$

Για $n = 2$, ισχύει

$$\begin{aligned} \psi(u) &\leq \phi \frac{2}{u} \left[\overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right) - \overline{P}_e(u) \right] \int_0^{\frac{u}{2}} U(z) dz \\ &\quad + \phi \frac{2}{u} \left[1 - \overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right) \right] \int_{\frac{u}{2}}^u U(z) dz + \phi \overline{P}_e(u). \end{aligned}$$

Για $n = 3$, ισχύει

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\leq \phi \frac{3}{u} \left[\overline{P}_e \left(2 \frac{u}{3} \right) - \overline{P}_e(u) \right] \int_0^{\frac{u}{3}} U(z) dz \\
&\quad + \phi \frac{3}{u} \left[\overline{P}_e \left(\frac{u}{3} \right) - \overline{P}_e \left(2 \frac{u}{3} \right) \right] \int_{\frac{u}{3}}^{2 \frac{u}{3}} U(z) dz \\
&\quad + \phi \frac{3}{u} \left[1 - \overline{P}_e \left(\frac{u}{3} \right) \right] \int_{2 \frac{u}{3}}^u U(z) dz + \phi \overline{P}_e(u).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, δίνουμε κάτω φράγματα για την $\psi(u)$ χρησιμοποιώντας τις Μεθόδους 1 και 2 του προηγούμενου κεφαλαίου. Το πρώτο φράγμα προκύπτει άμεσα από τη Μέθοδο 1.

Θεώρημα 6.2.4. Έστω $L(u)$ μια συνάρτηση έτσι ώστε $\psi(u) \geq L(u)$ για κάθε $u > 0$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ισχύει ότι

$$\psi(u) \geq \phi \sum_{k=1}^{n+1} p_e(u - (k-1)u/n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} L(z) dH(z) + \phi \overline{P}_e(u), \quad (6.2.7)$$

όπου τα σημεία $z_{k,n}$ για $k = 1, 2, \dots, n$, υπολογίζονται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
z_{k,n} &= \frac{u [k p_e(u - k u/n) - (k-1) p_e(u - (k-1) u/n)]/n}{p_e(u - k u/n) - p_e(u - (k-1) u/n)} \\
&\quad - \frac{\overline{P}_e(u - k u/n) - \overline{P}_e(u - (k-1) u/n)}{p_e(u - k u/n) - p_e(u - (k-1) u/n)}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 5.4.8, θέτοντας $x = 0$ και $y = 0$, παίρνουμε ότι

$$\psi(u) \geq \frac{\phi}{1 - \phi} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_e(u - (k-1)u/n) \int_{z_{k-1,n}}^{z_{k,n}} \psi(z) dz - \psi(u) + \overline{P}_e(u) \right\}.$$

Λύνοντας ως προς $\psi(u)$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Από το Θεώρημα 6.2.4, για μικρές τιμές του n βρίσκουμε κάτω φράγματα για την $\psi(u)$.

Πόρισμα 6.2.5. Για $n = 1$, έχουμε

$$\psi(u) = \phi p_e(u) \int_0^{z_{1,1}} L(z) dz + \phi p_e(0) \int_{z_{1,1}}^u L(z) dz + \phi \overline{P}_e(u),$$

όπου

$$z_{1,1} = \frac{u p_e(0) - [1 - \overline{P}_e(u)]}{p_e(0) - p_e(u)}.$$

Για $n = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \phi p_e(u) \int_0^{z_{1,2}} L(z) dz + \phi p_e\left(\frac{u}{2}\right) \int_{z_{1,2}}^{z_{2,2}} L(z) dz \\ &\quad + \phi p_e(0) \int_{z_{2,2}}^u L(z) dz + \phi \overline{P}_e(u), \end{aligned}$$

όπου

$$z_{1,2} = \frac{\frac{u}{2} p_e\left(\frac{u}{2}\right) - [\overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right) - \overline{P}_e(u)]}{p_e\left(\frac{u}{2}\right) - p_e(u)}$$

και

$$z_{2,2} = \frac{\frac{u}{2} [2p_e(0) - p_e\left(\frac{u}{2}\right)] - [1 - \overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right)]}{p_e(0) - p_e\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι επίσης ένα κάτω φράγμα για την $\psi(u)$ χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο 2 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Θεώρημα 6.2.6. Έστω $L(u)$ μια συνάρτηση έτσι ώστε $\psi(u) \geq L(u)$ για κάθε $u > 0$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \dots$, προκύπτει ότι

$$\psi(u) \geq \frac{\phi \sum_{k=1}^n p_e(u - (k-1)u/n) \int_{(k-1)u/n}^{ku/n} L(z) dz + \phi \sum_{k=1}^n C_{k,n}(u) L(ku/n) + \phi \overline{P}_e(u)}{1 - \phi C_{n,n}(u)}, \quad (6.2.8)$$

όπου

$$C_{k,n}(u) := \overline{P}_e(u - ku/n) - \overline{P}_e(u - (k-1)u/n) - u/n p_e(u - (k-1)u/n).$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 5.4.12, θέτοντας $x = 0$ και $y = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi(u) &\geq \frac{\phi}{1-\phi} \left\{ \sum_{k=1}^n p_e(u - (k-1)u/n) \int_{(k-1)u/n}^{ku/n} \psi(z) dz \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n C_{k,n}(u) \psi(ku/n) - \psi(u) + \overline{P}_e(u) \right\}. \end{aligned}$$

Γράφοντας $\sum_{k=1}^n C_{k,n}(u) \psi(ku/n) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n}(u) \psi(ku/n) + \phi C_{n,n}(u) \psi(u)$, και λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς $\psi(u)$, παίρνουμε

$$\psi(u) \geq \frac{\phi \sum_{k=1}^n p_e(u - (k-1)u/n) \int_{(k-1)u/n}^{ku/n} \psi(z) dz + \phi \sum_{k=1}^n C_{k,n}(u) \psi(ku/n) + \phi \overline{P}_e(u)}{1 - \phi C_{n,n}(u)}$$

(σημειώνουμε ότι $1 - \phi C_{n,n}(u) > 0$). Επειδή $\psi(u) \geq L(u)$, προκύπτει η (6.2.8). \square

Από το Θεώρημα 6.2.6, για μικρές τιμές του n , βρίσκουμε κάτω φράγματα για την $\psi(u)$.

Πόρισμα 6.2.7. Για $n = 1$, έχουμε

$$\psi(u) \geq \frac{\phi p_e(u) \int_0^u L(z) dz + \phi \overline{P}_e(u)}{1 - \phi C_{1,1}(u)},$$

όπου η συνάρτηση $C_{1,1}(u)$ ορίζεται από την σχέση

$$C_{1,1}(u) = 1 - \overline{P}_e(u) - u p_e(u) \geq 0.$$

Για $n = 2$, έχουμε

$$\psi(u) \geq \frac{\phi p_e(u) \int_0^{\frac{u}{2}} L(z) dz + \phi p_e\left(\frac{u}{2}\right) \int_{\frac{u}{2}}^u L(z) dz + \phi C_{1,2}(u) L\left(\frac{u}{2}\right) + \phi \overline{P}_e(u)}{1 - \phi C_{2,2}(u)},$$

όπου οι συναρτήσεις $C_{1,2}(u)$ και $C_{2,2}(u)$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$C_{1,2}(u) = \overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right) - \overline{P}_e(u) - \frac{u}{2} p_e(u) \geq 0$$

και

$$C_{2,2}(u) = 1 - \overline{P}_e\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{u}{2} p_e\left(\frac{u}{2}\right) \geq 0.$$

6.3 Αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 6.3.1. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μια μίξη δύο Γάμμα(2, β) με πυκνότητα

$$p(x) = q\beta_1^2 x e^{-\beta_1 x} + (1 - q)\beta_2^2 x e^{-\beta_2 x}.$$

Θέτουμε $q = 1/2$, $\beta_1 = 1.268$ και $\beta_2 = 4.732$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η πρώτη ροπή είναι $m = 1$. Για $\lambda = 1$ και $c = 2$, οι Gerber et al. (1987) έδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = 0.517e^{-0.506u} - 0.070e^{-1.765u} + 0.089e^{-3.544u} - 0.036e^{-5.685u}.$$

Οι Πίνακες 6.1, 6.2 και 6.3 δίνουν άνω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$, μεταβάλλοντας κάθε φορά μια από τις τιμές των u , x και y . Συγκεκριμένα το φράγμα U_0 δίνεται από την (5.4.2), ενώ τα U_1 , U_2 και U_3 είναι τα φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 5.4.4 για $n = 1$, $n = 2$ και $n = 3$, αντιστοίχως. Από τους Πίνακες 6.1 και 6.2, βλέπουμε ότι το φράγμα U_0 είναι ικανοποιητικό όταν το u είναι μικρό και το x είναι μεγάλο, ενώ όσο το u αυξάνει και/ή το x μικραίνει, το φράγμα αυτό γίνεται χειρότερο. Παρατηρούμε, επίσης ότι το U_1 είναι πολύ καλύτερο από το U_0 , ενώ το U_2 είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής. Στον Πίνακα 6.3, για $u = 4$ και $x = 1$, βλέπουμε ότι για όλες τις τιμές του y , το φράγμα U_0 είναι περίπου τριπλάσιο της πραγματικής τιμής. Από την άλλη μεριά, παίρνοντας

Πίνακας 6.1: Άνω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $x = 1$ και $y = 0.5$.

u	τιμή	$U_0(u)$	$U_1(u)$	$U_2(u)$	$U_3(u)$
1.5	0.125656	0.131355	0.126035	0.125750	0.125698
2	0.097271	0.115194	0.099401	0.097797	0.097504
3	0.058287	0.104199	0.067179	0.060433	0.059233
4	0.035063	0.104552	0.051460	0.038834	0.036712
5	0.021125	0.107394	0.042995	0.025822	0.023152

Πίνακας 6.2: Άνω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 4$ και $y = 0.5$.

x	τιμή	$U_0(x)$	$U_1(x)$	$U_2(x)$	$U_3(x)$
0	0.041228	0.261610	0.096000	0.053199	0.046472
0.5	0.039311	0.164308	0.069710	0.046094	0.042268
1	0.035063	0.104552	0.051460	0.038834	0.036712
2	0.024514	0.042026	0.028077	0.025374	0.024893
3	0.015502	0.018007	0.015837	0.015585	0.015539

Πίνακας 6.3: Άνω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 4$ και $x = 1$.

y	τιμή	$U_0(y)$	$U_1(y)$	$U_2(y)$	$U_3(y)$
0	0.057861	0.167997	0.088333	0.063739	0.060439
1	0.020979	0.064086	0.031339	0.023366	0.022023
2	0.007252	0.022956	0.011123	0.008147	0.007644
3	0.002421	0.007848	0.003780	0.002736	0.002559
4	0.000788	0.002599	0.001246	0.000894	0.000835
5	0.000252	0.000841	0.000402	0.000287	0.000267

$n = 1$ στο Θεώρημα 5.4.4, βλέπουμε ότι το σχετικό σφάλμα του φράγματος είναι περίπου 50%, το οποίο μειώνεται κατά προσέγγιση στο 10% για $n = 2$, και στο 5% για $n = 3$.

Οι Πίνακες 6.4, 6.5, και 6.6 περιέχουν τα κάτω φράγματα που προκύπτουν από τα Θεωρήματα 5.4.8 και 5.4.12, ενώ το L_0 είναι το φράγμα από τη σχέση (5.4.3). Ειδικότερα, σε αυτούς τους πίνακες, τα L_1, L_2 είναι τα φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 5.4.8 παίρνοντας $n = 1$ και $n = 2$ (Μέθοδος 1), αντίστοιχα, ενώ τα L_3, L_4 είναι τα φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 5.4.12 (Μέθοδος 2), ξανά για $n = 1$ και $n = 2$, αντίστοιχα. Τα $z_{k,n}$ υπολογίζονται από τη σχέση (5.4.16) και οι τιμές τους δίνονται στους Πίνακες 6.7, 6.8 και 6.9. Θυμίζουμε ότι η Μέθοδος 1 είναι γενικά ακριβέστερη από τη Μέθοδο 2. Το πλεονέκτημα που έχει η Μέθοδος 2 είναι ότι δεν χρειάζεται να βρούμε τις τιμές των $z_{k,n}$, που σημαίνει ότι είναι αριθμητικά ταχύτερη μέθοδος.

Θυμίζουμε, επίσης, ότι όλα τα φράγματα που περιγράφονται στην Παράγραφο 5.3 αναφέρονται στην περίπτωση όπου $u > x$, διαφορετικά έχουμε μια ακριβή έκφραση για την $\bar{H}(u, x, y)$ (βλέπε Πρόσχημα 5.3.2). Στον Πίνακα 6.4, όταν μεταβάλλουμε το αρχικό αποθεματικό u , παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του u , η Μέθοδος 1 δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής ακόμα και όταν $n = 1$. Η βελτίωση των φραγμάτων που γίνεται για $n = 2$ σε σχέση με $n = 1$, και με τις δύο μεθόδους, είναι μεγαλύτερη όσο το u αυξάνει. Στον Πίνακα 6.5, όπου το x μεταβάλλεται, παρατηρούμε ότι για $x \geq 1$, τα φράγματα που προκύπτουν από τη Μέθοδο 1 για $n = 1$ έχουν περίπου την ίδια ακρίβεια με εκείνα της Μεθόδου 2 για $n = 2$. Ένα γενικό σχόλιο στους Πίνακες 6.4, 6.5, και 6.6 είναι ότι τα φράγματα είναι καλύτερα όταν το u ή το y μειώνεται ή όταν το x αυξάνεται.

Στους Πίνακες 6.10 και 6.11, θεωρούμε $x = 0$ και συγκρίνουμε τα φράγματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου (Θεώρημα 5.4.4), με ήδη υπάρχοντα φράγματα για την ουρά του ελλείμματος. Στο σημείο αυτό, τονίζουμε ότι όλα αυτά τα φράγματα απαιτούν τη γνώση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Ειδικότερα, το U_W είναι το άνω φράγμα για την $\bar{H}(u, y)$ που βρήκε ο Willmot (2002, Theorem 3.2),

$$U_W := \frac{1}{1 - \phi} [\psi(u + y) - \psi(u) \psi(y)],$$

ενώ το U_{CP} είναι το αντίστοιχο άνω φράγμα των Chadjiconstantinidis and Politis (2007, Theorem 2.1)

$$U_{CP} := \frac{1}{1 - \phi} [\psi(u + y) - \psi(u) \psi(y)] - \frac{\phi}{(1 - \phi)^2} [\phi - \psi(y)] [1 - \psi(u)] \bar{P}_e(u + y).$$

Είναι προφανές ότι το U_{CP} είναι καλύτερο από το U_W . Χρησιμοποιούμε τα δύο αυτά φράγματα για να συγκρίνουμε τα φράγματα που προκύπτουν από τη σχέση

Πίνακας 6.4: Κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $x = 1$ και $y = 0.5$.

u	τιμή	$L_0(u)$	$L_1(u)$	$L_2(u)$	$L_3(u)$	$L_4(u)$
1.5	0.125656	0.121195	0.125467	0.125609	0.125024	0.125483
2	0.097271	0.086545	0.096259	0.097011	0.094323	0.096393
3	0.058287	0.041248	0.054638	0.057265	0.049563	0.055274
4	0.035063	0.019267	0.029672	0.033377	0.024154	0.030658
5	0.021125	0.009326	0.015795	0.019199	0.011538	0.016607

Πίνακας 6.5: Κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 4$ και $y = 0.5$.

x	τιμή	$L_0(x)$	$L_1(x)$	$L_2(x)$	$L_3(x)$	$L_4(x)$
0	0.041228	0.009416	0.026186	0.036002	0.016028	0.029848
0.5	0.039311	0.016441	0.030245	0.036331	0.022236	0.032017
1	0.035063	0.019267	0.029672	0.033377	0.024154	0.030658
2	0.024514	0.018306	0.023087	0.024108	0.021191	0.023335
3	0.015502	0.014071	0.015345	0.015461	0.015061	0.015367

(5.4.2) και το Θεώρημα 5.4.4 (για μικρές τιμές του n). Ειδικότερα, τα φράγματα U_W και U_{CP} είναι καλά για μέτριες και για μεγάλες τιμές του u (Πίνακας 6.10) και για μικρές τιμές του y (Πίνακας 6.11), όπου τα άνω φράγματα που προκύπτουν από τη σχέση (5.4.2) και το Θεώρημα 5.4.4 γίνονται καλύτερα καθώς το u μειώνεται, ή το y αυξάνει.

Στους Πίνακες 6.12 και 6.13, συγκρίνουμε τα κάτω φράγματα που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους της Παραγράφου 5.3, με το κάτω φράγμα των Chadjiconstantinidis and Politis (2007, Theorem 2.4) για την ουρά του ελλείμματος, που είναι

$$L_{CP} := \frac{1}{1-\phi} \{ \psi(u+y) - \psi(u)\psi(y) - [1-\psi(u)][\psi(y) - \phi \bar{P}_e(y)] \}.$$

Όπως φαίνεται από τους πίνακες αυτούς, ένα μειονέκτημα για το φράγμα L_{CP} είναι ότι παίρνει και αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Pareto με

$$P(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^3}.$$

Η μέση τιμή είναι $m = 1/2$. Υποθέτουμε ότι το περιθώριο ασφάλειας είναι $\theta = 1/10$, που σημαίνει ότι $\phi = 10/11$.

Πίνακας 6.6: Κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 4$ και $x = 1$.

y	τιμή	$L_0(y)$	$L_1(y)$	$L_2(y)$	$L_3(y)$	$L_4(y)$
0	0.057861	0.031998	0.049136	0.055181	0.040341	0.050931
1	0.020979	0.011482	0.017647	0.019921	0.014320	0.018241
2	0.007252	0.003948	0.006042	0.006858	0.004885	0.006253
3	0.002421	0.001313	0.002004	0.002283	0.001615	0.002075
4	0.000788	0.000426	0.000650	0.000742	0.000522	0.000673
5	0.000252	0.000136	0.000207	0.000237	0.000166	0.000214

Πίνακας 6.7: Για $x = 0.5$ και $y = 1$.Μέθοδος 1. Εύρεση των $z_{1,1}$, $z_{1,2}$ και $z_{2,2}$.

u	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$z_{2,2}$
1.5	0.267	0.129	0.379
2	0.568	0.267	0.767
3	1.275	0.576	1.568
4	2.105	0.930	2.404
5	3.018	1.323	3.275

Πίνακας 6.8: Για $u = 4$ και $y = 0.5$.Μέθοδος 1. Εύρεση των $z_{1,1}$, $z_{1,2}$ και $z_{2,2}$.

x	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$z_{2,2}$
0	3.070	1.304	3.338
0.5	2.540	1.114	2.838
1	2.105	0.930	2.404
2	1.304	0.583	1.576
3	0.583	0.271	0.771

Πίνακας 6.9: Για $u = 4$ και $x = 1$.Μέθοδος 1. Εύρεση των $z_{1,1}$, $z_{1,2}$ και $z_{2,2}$.

y	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$z_{2,2}$
0	2.095	0.922	2.409
1	2.130	0.935	2.413
2	2.169	0.943	2.430
3	2.192	0.948	2.440
4	2.208	0.952	2.446
5	2.218	0.955	2.450

Πίνακας 6.10: Άνω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $x = 0$ και $y = 2$.

u	τιμή	$U_0(u)$	$U_1(u)$	$U_2(u)$	$U_3(u)$	$U_W(u)$	$U_{CP}(u)$
0.1	0.067544	0.067715	0.067547	0.067545	0.067545	0.177363	0.135046
1	0.042242	0.053532	0.043639	0.042586	0.042394	0.113525	0.091175
3	0.014644	0.057751	0.025004	0.017031	0.015687	0.040340	0.037107
5	0.005297	0.065322	0.020716	0.008347	0.006591	0.014627	0.014266
10	0.000422	0.070393	0.013629	0.001761	0.000917	0.001165	0.001164

Πίνακας 6.11: Άνω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 3$ και $x = 0$.

y	τιμή	$U_0(y)$	$U_1(y)$	$U_2(y)$	$U_3(y)$	$U_W(y)$	$U_{CP}(y)$
0.1	0.102046	0.371883	0.165725	0.117562	0.108937	0.107557	0.105512
0.2	0.092306	0.334304	0.148998	0.106049	0.098430	0.103568	0.098930
1	0.041372	0.151508	0.066846	0.047250	0.043950	0.068236	0.062100
3	0.004972	0.020677	0.008844	0.005868	0.005364	0.024139	0.022848
5	0.000529	0.002340	0.000987	0.000635	0.000575	0.008749	0.008596

Πίνακας 6.12: Κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $x = 0$ και $y = 2$.

u	τιμή	$L_0(u)$	$L_1(u)$	$L_2(u)$	$L_3(u)$	$L_4(u)$	$L_{CP}(u)$
0.05	0.069164	0.069121	0.069164	0.069164	0.069164	0.069164	0.063571
0.2	0.064422	0.063810	0.064412	0.064420	0.064385	0.064412	0.042872
1	0.042242	0.035585	0.041582	0.042071	0.040336	0.041670	-0.047092
3	0.014644	0.005115	0.011312	0.013586	0.007984	0.011906	-0.163828
5	0.005297	0.000574	0.002745	0.004192	0.001067	0.002959	-0.206062

Πίνακας 6.13: Κάτω φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u = 3$ και $x = 0$.

y	τιμή	$L_0(y)$	$L_1(y)$	$L_2(y)$	$L_3(y)$	$L_4(y)$	$L_{CP}(y)$
0.05	0.107302	0.042919	0.084675	0.100655	0.065227	0.090215	0.088264
0.2	0.092306	0.036635	0.071832	0.086240	0.055799	0.077756	0.022546
1	0.041372	0.015509	0.032636	0.038692	0.023852	0.034441	-0.140615
3	0.004972	0.001668	0.003762	0.004579	0.002605	0.003974	-0.131007
5	0.000529	0.000167	0.000390	0.000482	0.000263	0.000413	-0.059147

Πίνακας 6.14: Άνω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $x = 50$ και $y = 30$.

u	τιμή	$U_0(u)$	$U_1(u)$	$U_2(u)$	$U_3(u)$
60	0.00122235	0.00149129	0.00140378	0.00140083	0.00140027
80	0.00081171	0.00145706	0.00110971	0.00108720	0.00108311
100	0.00056479	0.00143708	0.00088891	0.00084628	0.00083898
120	0.00040781	0.00142443	0.00073158	0.00067385	0.00066460
150	0.00028237	0.00141268	0.00057101	0.00049914	0.00048870
200	0.00018987	0.00140226	0.00041220	0.00033060	0.00032034

Πίνακας 6.15: Άνω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $u = 200$ και $y = 50$.

x	τιμή	$U_0(x)$	$U_1(x)$	$U_2(x)$	$U_3(x)$
10	0.00021251	0.00245690	0.00052136	0.00035543	0.00033804
40	0.00019689	0.00111193	0.00032768	0.00026693	0.00025919
70	0.00018916	0.00063518	0.00025556	0.00022982	0.00022595
100	0.00016843	0.00041303	0.00021979	0.00020872	0.00020682
150	0.00016038	0.00023938	0.00018769	0.00018577	0.00018540
190	0.00015847	0.00017091	0.00016719	0.00016715	0.00016714

Πίνακας 6.16: Άνω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $x = 100$ και $u = 200$.

y	τιμή	$U_0(y)$	$U_1(y)$	$U_2(y)$	$U_3(y)$
30	0.00017374	0.00054663	0.00027367	0.00025639	0.00025352
50	0.00016843	0.00041303	0.00021979	0.00020872	0.00020682
100	0.00011033	0.00023499	0.00014029	0.00013591	0.00013511
150	0.00008352	0.00015164	0.00009808	0.00009601	0.00009561
200	0.00006115	0.00010597	0.00007269	0.00007159	0.00007137
250	0.00004933	0.00007824	0.00005614	0.00005549	0.00005536

Πίνακας 6.17: Κάτω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $x = 50$ και $y = 30$.

u	τιμή	$L_0(u)$	$L_1(u)$	$L_2(u)$	$L_3(u)$	$L_4(u)$
60	0.00122235	0.00103353	0.00109831	0.00110027	0.00109591	0.00109888
80	0.00081171	0.00066484	0.00071582	0.00071835	0.00071410	0.00071670
100	0.00056479	0.00046025	0.00049334	0.00049506	0.00049237	0.00049401
120	0.00040781	0.00033406	0.00035624	0.00035738	0.00035567	0.00035671
150	0.00028237	0.00021978	0.00023290	0.00023354	0.00023260	0.00023318
200	0.00018987	0.00012198	0.00012837	0.00012866	0.00012825	0.00012850

Πίνακας 6.18: Κάτω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $u = 200$ και $y = 50$.

x	τιμή	$L_0(x)$	$L_1(x)$	$L_2(x)$	$L_3(x)$	$L_4(x)$
10	0.00021251	0.00004303	0.00004805	0.00004830	0.00004732	0.00004753
40	0.00019689	0.00010683	0.00011182	0.00011202	0.00011141	0.00011157
70	0.00018916	0.00012945	0.00013440	0.00013456	0.00013411	0.00013424
100	0.00016843	0.00014001	0.00014489	0.00014503	0.00014466	0.00014478
150	0.00016038	0.00014835	0.00015298	0.00015309	0.00015282	0.00015290
190	0.00015847	0.00015230	0.00015531	0.00015534	0.00015521	0.00015526

Πίνακας 6.19: Κάτω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$ όταν $x = 100$ και $u = 200$.

y	τιμή	$L_0(y)$	$L_1(y)$	$L_2(y)$	$L_3(y)$	$L_4(y)$
30	0.00017374	0.00016255	0.00017019	0.00017036	0.00016851	0.00016868
50	0.00016843	0.00014001	0.00014489	0.00014503	0.00014466	0.00014478
100	0.00011033	0.00009979	0.00010294	0.00010301	0.00010253	0.00010258
150	0.00008352	0.00007437	0.00007630	0.00007634	0.00007611	0.00007614
200	0.00006115	0.00005746	0.00005872	0.00005875	0.00005863	0.00005865
250	0.00004933	0.00004568	0.00004656	0.00004658	0.00004652	0.00004653

Στους Πίνακες 6.14, 6.15 και 6.16, δίνουμε άνω φράγματα για την $\overline{H}(u, x, y)$, μεταβάλλοντας κάθε φορά ένα από τα u , x και y . Ειδικότερα, το φράγμα U_0 δίνεται από τη σχέση (5.4.2), και τα φράγματα U_1 , U_2 και U_3 είναι ξανά τα φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 5.4.4 για $n = 1$, $n = 2$ και $n = 3$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι εδώ η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν είναι γνωστή και έτσι την αντικαθιστούμε με κατάλληλα φράγματα της. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.4.15) και (6.2.2). Για την καλύτερη αποτίμηση των φραγμάτων στους πίνακες αυτούς, η πρώτη στήλη δίνει την τιμή της $\overline{H}(u, x, y)$ ύστερα από προσομοίωση. Στον Πίνακα 6.14, βλέπουμε ότι καθώς το u μεγαλώνει, το U_2 είναι πολύ καλύτερο από το U_1 , ενώ είναι λίγο χειρότερο από το U_3 . Στον Πίνακα 6.15, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του x , το U_2 είναι σημαντικά καλύτερο από το U_1 ενώ (ξανά) η βελτίωση του U_3 σε σχέση με το U_2 δεν είναι σημαντική. Επιπλέον, είναι φανερό από τις τιμές του πίνακα ότι καθώς το x αυξάνεται, οι τιμές των φραγμάτων είναι κοντά στις τιμές της $\overline{H}(u, x, y)$ που προκύπτουν από την προσομοίωση. Ο Πίνακας 6.16 περιέχει τις τιμές των φραγμάτων καθώς το y μεταβάλλεται. Παρατηρούμε ότι η σχετική βελτίωση από το U_1 στο U_0 είναι περίπου 50% για μέτριες τιμές του y , και αυτό μειώνεται σε κάποιο βαθμό καθώς το y γίνεται μεγαλύτερο. Στον Πίνακα 6.16, βλέπουμε (πάλι) ότι όταν οι τιμές των u, x, y είναι μεγάλες, υπάρχει μικρό κέρδος αν κάποιος χρησιμοποιήσει το Θεώρημα 5.4.4 για $n = 2$ ή $n = 3$, σε σύγκριση με το άνω φράγμα για $n = 1$.

Στους Πίνακες 6.17, 6.18 και 6.19, βρίσκουμε κάτω φράγματα χρησιμοποιώντας τις δύο μεθόδους που προκύπτουν από το Θεώρημα 5.4.8 (Μέθοδος 1) και το Θεώρημα 5.4.12 (Μέθοδος 2). Οι στήλες L_1 και L_2 στους πίνακες είναι τα φράγματα που προκύπτουν από τη Μέθοδο 1 για $n = 1$ και $n = 2$, αντίστοιχα, ενώ οι στήλες L_3 και L_4 αντιστοιχούν στα φράγματα της Μεθόδου 2, παίρνοντας πάλι $n = 1$ και $n = 2$. Η στήλη L_0 είναι το φράγμα στην (5.4.3), ενώ η πρώτη στήλη σε κάθε πίνακα είναι οι τιμές της $\overline{H}(u, x, y)$ που προκύπτουν μετά από προσομοίωση. Σε αυτούς τους πίνακες βλέπουμε ότι για κατανομές με βαριά ουρά, η παρουσίαση των φραγμάτων χρησιμοποιώντας καθεμία από τις δύο μεθόδους δεν βελτιώνεται σημαντικά για τις διάφορες τιμές του n . Επομένως, και οι δύο μέθοδοι δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμα και για μικρές τιμές του n . Επιπλέον, αν συγκρίνουμε τα κάτω και άνω φράγματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 6.14 έως 6.19, βλέπουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις, για μια δεδομένη επιλογή των u, x, y , τα άνω φράγματα είναι πολύ κοντά στα κάτω φράγματα. Το γεγονός ισχυροποιεί τη χρησιμοποίηση των φραγμάτων αυτών στη πράξη. Για παράδειγμα, από τους Πίνακες 6.14 και 6.17, έχουμε ότι

$$0.00110027 \leq \overline{H}(60, 50, 30) \leq 0.00140027.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι τα κάτω φράγματα στους Πίνακες 6.17 έως 6.19 είναι πιο κοντά στις προσομοιωμένες τιμές της $\overline{H}(u, x, y)$ σε σχέση με τα άνω φράγματα που δίνονται στους Πίνακες 6.14 έως 6.16.

Πίνακας 6.20: Άνω φράγματα για την $\psi(u)$.

u	$U_{CP}(u)$	$U_1(u)$	$U_2(u)$	$U_3(u)$	$U_{CG}(u)$
0.5	0.86353123	0.85093314	0.84929265	0.84897755	0.85803850
1	0.82474227	0.81659823	0.80986727	0.80849794	0.81632650
3	0.69872958	0.73323066	0.69847906	0.69034820	0.67981893
5	0.60585432	0.67596462	0.61807052	0.60413667	0.57195692
10	0.45456252	0.57516172	0.48282052	0.46173190	0.37938107
50	0.15153322	0.29632417	0.17874456	0.16201292	0.02551521
100	0.08265072	0.19821259	0.10033271	0.08966120	0.00304985
500	0.01782562	0.06498717	0.02227713	0.01962685	0.00004539

Τέλος, στους Πίνακες 6.20 και 6.21 συγκρίνουμε τα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 6.2 με άλλα ήδη γνωστά φράγματα. Συγκεκριμένα, στο Πίνακα 6.20, το φράγμα U_{CP} είναι το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που δίνεται στο Θεώρημα 4.5 των Chadji-constantinidis and Politis (2005), ενώ τα φράγματα U_1 , U_2 και U_3 δίνονται από τη (6.2.5) για $n = 1, 2, 3$ χρησιμοποιώντας το $U(u) = U_{CP}(u)$ σαν αρχικό φράγμα.

Πίνακας 6.21: Κάτω φράγματα για την $\psi(u)$.

u	$L_{DG}(u)$	$L_{1,P}(u)$	$L_{2,P}(u)$	$L_{CG}(u)$	$L_3(u)$	$L_4(u)$
0.5	0.81632653	0.83021644	0.82495557	0.82579926	0.83317964	0.83551994
1	0.71428571	0.75567270	0.74481390	0.75072884	0.75617047	0.76303425
3	0.38461538	0.49667471	0.44572849	0.52622622	0.47357438	0.49502961
5	0.21739130	0.31652432	0.26154590	0.37802940	0.29068606	0.31491625
10	0.07633588	0.11216666	0.09068265	0.17576205	0.10497916	0.11824258
50	0.00382995	0.00396627	0.00402811	0.00430201	0.00436832	0.00451210
100	0.00097934	0.00098784	0.00100421	0.00098363	0.00105292	0.00106386
500	0.00003984	0.00003985	0.00004003	0.00003985	0.00004047	0.00004049

Η τελευταία στήλη είναι το άνω φράγμα των Cai and Garrido (1999). Για μικρές τιμές του u , τα άνω φραγματά μας είναι καλύτερα από το αρχικό φράγμα $U_{CP}(u)$. Για μέτριες και μεγάλες τιμές του u , το φράγμα των Cai and Garrido(1999) είναι πολύ καλύτερα συγκριτικά με τα άλλα φράγματα. Μια εξήγηση για αυτό δίνεται στην Παρατήρηση 5.4.3 (βλέπε (iii)), σημειώνοντας ότι το αρχικό φράγμα $U_{CP}(u)$ γίνεται πολύ χειρότερο σε σχέση με το $U_{CG}(u)$ για μεγάλες τιμές του u . Στον Πίνακα 6.21, το φράγμα L_{DG} είναι το φράγμα της (5.4.15). Τα φράγματα $L_{1,P}$ και $L_{2,P}$ είναι τα φράγματα από τον Politis (2005, Table 1), ενώ το φράγμα L_{CG} προκύπτει από τη μέθοδο των Cai and Garrido (1999). Οι τελευταίες δύο στήλες στον Πίνακα 6.21 είναι τα κάτω φράγματα που προκύπτουν από το Θεώρημα 6.2.6 για $n = 1$ και $n = 2$, χρησιμοποιώντας $L(u) = L_{DG}(u)$, και αυτά ορίζονται με $L_3(u)$ και $L_4(u)$, αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι τα φράγματα από το Θεώρημα 6.2.6 είναι καλύτερα για μικρές τιμές του αρχικού αποθεματικού ($u \leq 1$), αλλά και για μεγάλες τιμές του u , βελτιώνοντας πάντα το αρχικό φράγμα $L_{DG}(u)$. Για τις ενδιάμεσες τιμές του u , το κάτω φράγμα των Cai and Garrido (1999) είναι καλύτερο. Στο σημείο αυτό είναι αξιοσημείωτο ότι το $L_{DG}(u)$ είναι πιο κοντά στο $L_{CG}(u)$ από ότι το $U_{CP}(u)$ στο $U_{CG}(u)$. Η παρατήρηση αυτή εξηγεί γιατί τα κάτω φράγματα του Θεωρήματος 6.2.6 είναι πιο ικανοποιητικά σε σχέση με τα άνω φράγματα του Θεωρήματος 6.2.2.

6.4 Ανισοτικές σχέσεις για την $\bar{H}(u, x, y)$ όταν $u \leq x$

Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε κάποιες ανισοτικές σχέσεις για την $\bar{H}(u, x, y)$ χρησιμοποιώντας τον ακριβή τύπο του Πορίσματος 5.3.2.

Πρόταση 6.4.1. Για $u \geq x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\bar{H}(u, x, y) \geq \bar{H}(x, u, y). \quad (6.4.1)$$

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι το κάτω φράγμα της (5.4.3) είναι μεγαλύτερο από την ποσότητα

$$\overline{H}(x, u, y) = \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(u+y)[1-\psi(x)]$$

που είναι η ακριβής σχέση του Πορίσματος 5.3.2, αλλάζοντας τις θέσεις των u και x της συνάρτησης $\overline{H}(u, x, y)$ για $u \geq x$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{1-\phi} \{ \overline{P}_e(u+y)[1-\psi(u-x)] + \overline{P}_e(x+y)[\psi(u-x) - \psi(u)] \} \\ & - \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(u+y)[1-\psi(x)] \\ & = \frac{\phi}{1-\phi} \{ \overline{P}_e(u+y)[1-\psi(u-x) - 1 + \psi(x)] + \overline{P}_e(x+y)[\psi(u-x) - \psi(u)] \} \\ & = \frac{\phi}{1-\phi} \{ -\overline{P}_e(u+y)[\psi(u-x) - \psi(x)] + \overline{P}_e(x+y)[\psi(u-x) - \psi(u)] \} \\ & \geq \frac{\phi}{1-\phi} \{ -\overline{P}_e(u+y)[\psi(u-x) - \psi(u)] + \overline{P}_e(x+y)[\psi(u-x) - \psi(u)] \} \\ & = \frac{\phi}{1-\phi} \{ [\psi(u-x) - \psi(u)] [\overline{P}_e(x+y) - \overline{P}_e(u+y)] \}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα, λόγω της μονοτονίας των συναρτήσεων ψ και \overline{P}_e είναι μη αρνητική για $u \geq x$, και το ζητούμενο της πρότασης έπεται. \square

Πρόταση 6.4.2. Για $u+w \leq x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\overline{H}(u+w, x, y) \geq \overline{H}(u, x, y) \overline{H}(w, x, y). \quad (6.4.2)$$

Απόδειξη.

Βασίζομαστε στο γεγονός ότι για κάθε $u, w, x, y \geq 0$, έχουμε

$$\overline{H}(u, x, y) \leq 1 \leq \frac{1-\psi(u+w)}{1-\psi(w)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\phi/(1-\phi) \overline{P}_e(x+y) [1-\psi(w)]$, προκύπτει ότι

$$\overline{H}(u, x, y) \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) [1-\psi(w)] \leq \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) [1-\psi(u+w)].$$

Χρησιμοποιώντας τον Πόρισμα 5.3.2, η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Πρόταση 6.4.3. Για $u \geq x+z$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\overline{H}(u, x+z, y) \geq \overline{H}(x, u, y) \overline{H}(z, u, y). \quad (6.4.3)$$

Απόδειξη.

Προκύπτει από τις Προτάσεις 6.4.1 και 6.4.2. Πράγματι,

$$\bar{H}(u, x + z, y) \geq \bar{H}(x + z, u, y) \geq \bar{H}(x, u, y) \bar{H}(z, u, y).$$

□

Παρατήρηση 6.4.1. (i) Από την Πρόταση 6.4.1, προκύπτει ότι για $u \geq x$ και $y \geq x$ είναι

$$\bar{H}(u, x, y) \geq \bar{H}(x, y, u)$$

(ii) Από την Πρόταση 6.4.2 και τη τελευταία σχέση, έχουμε ότι για $u + w \leq x$ και $u + w \leq y$, είναι

$$\bar{H}(u + w, y, x) \geq \bar{H}(u, y, x) \bar{H}(w, y, x).$$

6.5 Εκθετικά φράγματα

Τα φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο εφαρμόζονται γενικά, δηλαδή για οποιαδήποτε κατανομή κι αν ακολουθούν οι αποζημιώσεις. Στην παράγραφο αυτή, βρίσκουμε φράγματα για την $\bar{H}(u, x, y)$ κάτω από την υπόθεση ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R , ο οποίος ικανοποιεί την (2.4.1). Έστω οι συναρτήσεις

$$\sigma_L(u) = \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{P}_e(z) > 0} \frac{e^{Rz} \bar{P}_e(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dP_e(t)}, \quad \sigma_U(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \bar{P}_e(z) > 0} \frac{e^{Rz} \bar{P}_e(z)}{\int_z^\infty e^{Rt} dP_e(t)}.$$

Τότε από τους Willmot et al. (2001), γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_L(u) e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq \sigma_U(u) e^{-Ru}. \quad (6.5.1)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Πρόσμα 5.3.2 και την (6.5.1).

Πόρισμα 6.5.1. Για $u \leq x$ και $y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\frac{\phi}{1 - \phi} \bar{P}_e(x + y) [1 - \sigma_U(u) e^{-Ru}] \leq \bar{H}(u, x, y) \leq \frac{\phi}{1 - \phi} \bar{P}_e(x + y) [1 - \sigma_L(u) e^{-Ru}].$$

Οι Willmot et al. (2001) βρήκαν εκθετικά φράγματα για τη λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης. Έτσι, αφού η $\bar{H}(u, x, y)$, ικανοποιεί μια (ελλειμματική) ανανεωτική εξίσωση τα αποτελεσματά τους εφαρμόζονται για τη συνάρτηση που μελετάμε. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι τα $x, y \geq 0$ είναι σταθερά και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\sigma_{L,x,y}(u) = \inf_{0 \leq z \leq u, \bar{P}_e(z) > 0} \frac{e^{Rz} \bar{P}_e(\max\{z + y, x + y\})}{\int_z^\infty e^{Rt} dP_e(t)}$$

και

$$\sigma_{U,x,y}(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \overline{P}_e(z) > 0} \frac{e^{Rz} \overline{P}_e(\max\{z+y, x+y\})}{\int_z^\infty e^{Rt} dP_e(t)}$$

για κάθε $u \geq 0$. Τότε από τους Willmot et al. (2001, Theorem 3.1) έχουμε

$$\sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \leq \overline{H}(u, x, y) \leq \sigma_{U,x,y}(u) e^{-Ru}. \quad (6.5.2)$$

Στο επόμενο θεώρημα βελτιώνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.5.2. Για κάθε $u, x, y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\overline{H}(u, x, y) \geq \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} - \phi \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\})$$

και

$$\overline{H}(u, x, y) \leq \sigma_{U,x,y}(u) e^{-Ru} - \phi \sigma_{U,x,y}(u) e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}),$$

και τα φράγματα αυτά είναι καλύτερα από τα φράγματα της σχέσης (6.5.2).

Απόδειξη.

Από τις (4.2.1), (5.3.1), (6.5.2) και το γεγονός ότι η συνάρτηση $\sigma_{L,x,y}(u)$ είναι φθίνουσα ως προς u , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, x, y) &= \phi \int_0^u \overline{H}(u-t, x, y) dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \\ &\geq \phi \int_0^u \sigma_{L,x,y}(u-t) e^{-R(u-t)} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \\ &\geq \phi \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \int_0^u e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \\ &= \phi \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \left[\frac{1}{\phi} - \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) \right] + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \\ &= \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} - \phi \sigma_{L,x,y}(u) \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}). \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της $\sigma_{L,x,y}(u)$, προκύπτει άμεσα ότι

$$\overline{P}_e(\max\{z+y, x+y\}) \geq e^{-Rz} \sigma_{L,x,y}(u) \int_z^\infty e^{Rt} dP_e(t)$$

για $0 \leq z \leq u$. Έτσι, έχουμε

$$\sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} - \phi \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \geq \sigma_{L,x,y}(u) e^{-Ru},$$

πράγμα που σημαίνει ότι το κάτω φράγμα του θεωρήματος αποτελεί μια βελτίωση του αντίστοιχου φράγματος στην (6.5.2). Για το άνω φράγμα ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση $\sigma_{U,x,y}(u)$ είναι αύξουσα ως προς u , αντιστρέφοντας τις ανισότητες. \square

Θεωρούμε τις συναρτήσεις (ως προς u για σταθερά $x, y \geq 0$)

$$\beta_{L,x,y}(u) = \inf_{0 \leq z \leq u, \overline{P}_e(z) > 0} \frac{\overline{P}_e(\max\{z+y, x+y\})}{\overline{P}_e(z)},$$

$$\beta_{U,x,y}(u) = \sup_{0 \leq z \leq u, \overline{P}_e(z) > 0} \frac{\overline{P}_e(\max\{z+y, x+y\})}{\overline{P}_e(z)},$$

και τις $\alpha_L(u)$, $\alpha_U(u)$, όπως ορίστηκαν στην Παράγραφο 4.4, για κάθε $u \geq 0$. Τότε από τους Willmot et al. (2001, Theorem 3.1) έχουμε

$$\alpha_L(u) \beta_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \leq \overline{H}(u, x, y) \leq \alpha_U(u) \beta_{U,x,y}(u) e^{-Ru}.$$

Χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα, όπως στο Θεώρημα 6.5.2 μπορούμε να βελτιώσουμε τα παραπάνω φράγματα. Για το λόγο αυτό παραλείπουμε την απόδειξη.

Θεώρημα 6.5.3. Για κάθε $u, x, y \geq 0$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, x, y) &\geq \alpha_L(u) \beta_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \\ &\quad - \phi \alpha_L(u) \beta_{L,x,y}(u) e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, x, y) &\leq \alpha_U(u) \beta_{U,x,y}(u) e^{-Ru} \\ &\quad - \phi \alpha_U(u) \beta_{U,x,y}(u) e^{-Ru} \int_u^\infty e^{Rt} dP_e(t) + \phi \overline{P}_e(\max\{u+y, x+y\}). \end{aligned}$$

6.6 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα

Ο βασικός στόχος αυτής της τελευταίας παραγράφου της διατριβής είναι η γενίκευση κάποιων αποτελεσμάτων που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 4.5, στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Πράγματι, θα μελετήσουμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα κλασμάτων που περιέχουν την ουρά της από κοινού κατανομής του πλεονάσματος πριν και μετά τη χρεοκοπία $\overline{H}(u, x, y)$, θυμίζοντας ότι για $x = 0$ παίρνουμε την ουρά του ελλείμματος $\overline{H}(u, y)$.

Θεώρημα 6.6.1. Στο κλασικό μοντέλο, αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών ανήκει στην κλάση των υποεκθετικών κατανομών ($P_e \in \mathcal{S}$), τότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u+y-x)} = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad x, y \geq 0.$$

Απόδειξη.

Όταν $u > x$, από την (5.4.1), έχουμε

$$\begin{aligned}
 \overline{H}(u, x, y) &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0-}^{u-x} \overline{P}_e(u+y-t) dH(t) + \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \\
 &= \frac{\phi}{1-\phi} \int_{0-}^u \overline{P}_e(u+y-t) dH(t) - \frac{\phi}{1-\phi} \int_{u-x}^u \overline{P}_e(u+y-t) dH(t) \\
 &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)] \\
 &= \overline{H}(u, y) - \frac{\phi}{1-\phi} \int_{u-x}^u \overline{P}_e(u+y-t) dH(t) \\
 &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) [\psi(u-x) - \psi(u)].
 \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\overline{P}_e(u+y-x)$ λαμβάνουμε ότι για κάθε $u > x$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u+y-x)} &= \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{P}_e(u+y-x)} - \frac{\phi}{1-\phi} \int_{u-x}^u \frac{\overline{P}_e(u+y-t)}{\overline{P}_e(u+y-x)} dH(t) \\
 &\quad + \frac{\phi}{1-\phi} \overline{P}_e(x+y) \left[\frac{\psi(u-x)}{\overline{P}_e(u+y-x)} - \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u+y-x)} \right].
 \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

Γράφοντας

$$\frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{P}_e(u+y-x)} = \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{P}_e(u+y)} \frac{\overline{P}_e(u+y)}{\overline{P}_e(u+y-x)},$$

από το Πρόρισμα 4.5.4 και θυμίζοντας ότι η κλάση \mathcal{L} είναι ευρύτερη από την \mathcal{S} , έχουμε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, y)}{\overline{P}_e(u+y-x)} = \frac{\phi}{1-\phi}. \tag{6.6.2}$$

Ακόμα, ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u-x)}{\overline{P}_e(u+y-x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi(u-x)}{\psi(u+y-x)} \frac{\psi(u+y-x)}{\overline{P}_e(u+y-x)} \right] = \frac{\phi}{1-\phi}$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u+y-x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi(u)}{\psi(u+y-x)} \frac{\psi(u+y-x)}{\overline{P}_e(u+y-x)} \right] = \frac{\phi}{1-\phi},$$

οπότε

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi(u-x)}{\overline{P}_e(u+y-x)} - \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u+y-x)} \right] = 0. \tag{6.6.3}$$

Η συνάρτηση $\overline{P}_e(u + y - t)$ είναι αύξουσα ως προς t , πράγμα που σημαίνει ότι

$$\int_{u-x}^u \frac{\overline{P}_e(u + y - t)}{\overline{P}_e(u + y - x)} dH(t) \geq \overline{P}_e(x + y) \left[\frac{\psi(u - x)}{\overline{P}_e(u + y - x)} - \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u + y - x)} \right]$$

και

$$\int_{u-x}^u \frac{\overline{P}_e(u + y - t)}{\overline{P}_e(u + y - x)} dH(t) \geq \overline{P}_e(y) \left[\frac{\psi(u - x)}{\overline{P}_e(u + y - x)} - \frac{\psi(u)}{\overline{P}_e(u + y - x)} \right].$$

Από την (6.6.3) και τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{u-x}^u \frac{\overline{P}_e(u + y - t)}{\overline{P}_e(u + y - x)} dH(t) = 0. \quad (6.6.4)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (6.6.1), (6.6.3) και (6.6.4), έχουμε το ζητούμενο. \square

Θεώρημα 6.6.2. Στο κλασικό μοντέλο, αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών $P_e \in \mathcal{L}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} [1 - \psi(u)].$$

Απόδειξη.

Όταν $u \leq x$, από την (5.3.4), διαιρώντας με $\overline{P}_e(u + x + y)$ έχουμε

$$\frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} \frac{\overline{P}_e(x + y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} [1 - \psi(u)].$$

Παίρνοντας $x \rightarrow \infty$ και από το γεγονός ότι $P_e \in \mathcal{L}$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{P}_e(x + y) / \overline{P}_e(u + x + y) = 1$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Θεώρημα 6.6.3. Στο κλασικό μοντέλο, αν η κατανομή των κλιμακωτών υψών $P_e \in \mathcal{L}$, τότε

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} = \frac{\phi}{1 - \phi} [1 - \psi(u)].$$

Απόδειξη.

Εργαζόμενοι όπως στο Θεώρημα 6.6.2, για $u \leq x$, ισχύει το αποτέλεσμα του θεωρήματος. Για $u > x$, παρατηρούμε ότι

$$\frac{\overline{P}_e(u + y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} [1 - \psi(u - x)] \leq \int_{0-}^{u-x} \frac{\overline{P}_e(u + y - t)}{\overline{P}_e(u + x + y)} dH(t) \leq \frac{\overline{P}_e(x + y)}{\overline{P}_e(u + x + y)} [1 - \psi(u - x)].$$

Από την τελευταία σχέση και επειδή $P_e \in \mathcal{L}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{u-x}^u \frac{\overline{P}_e(u + y - t)}{\overline{P}_e(u + x + y)} dH(t) = 1 - \psi(u - x). \quad (6.6.5)$$

Ακόμα, από την (5.4.1) διαιρώντας με $\overline{P}_e(u+x+y)$ προκύπτει ότι

$$\frac{\overline{H}(u, x, y)}{\overline{P}_e(u+x+y)} = \frac{\phi}{1-\phi} \left(\int_{0-}^{u-x} \frac{\overline{P}_e(u+y-z)}{\overline{P}_e(u+x+y)} dH(z) + \frac{\overline{P}_e(x+y)}{\overline{P}_e(u+x+y)} [\psi(u-x) - \psi(u)] \right).$$

Αν στην τελευταία σχέση πάρουμε το όριο $y \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιήσουμε την (6.6.5) και την υπόθεση ότι $P_e \in \mathcal{L}$, μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Βιβλιογραφία

- [1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. Wiley, New York.
- [2] Asmussen, S. (2000). *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [3] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Life Testing: Probability Models*. Silver Springs, MD. (To Begin With)
- [4] Belzunce, F., Ortega, E. and Ruiz, J.M. (1999). The Laplace order and ordering of residual lives. *Statistics and Probability Letters*, 42, 145–156.
- [5] Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. and Nesbitt, C. (1986). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Ithaca, IL.
- [6] Brown, M. (1990). Error bounds for exponential approximation of geometric convolutions. *Annals of Probability*, 18, 1388–1402.
- [7] Cai, J. and Garrido, J. (1998). Aging properties and bounds for ruin probabilities and stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23, 33–43.
- [8] Cai, J. and Garrido, J. (1999). Two-sided bounds for ruin probabilities when the adjustment coefficient does not exist. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 80–92.
- [9] Cai, J. and Tang, Q. (2004). On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications. *Journal of Applied Probability*, 41, 117–130.

- [10] Chadjiconstantinidis, S. and Politis, K. (2005). Non-exponential bounds for stop-loss premiums and ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 5, 335–357.
- [11] Chadjiconstantinidis, S. and Politis, K. (2007). Two-sided bounds for the distribution of the deficit at ruin in the renewal risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41, 41–52.
- [12] Cheng, Y. and Tang, Q. (2003). Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process. *North American Actuarial Journal*, 7(1), 1–12.
- [13] Chistyakov, V.P. (1964). A theorem on sums of positive random variables and its applications to branching random processes. *Theory of Probability and its Applications*, 9, 640–648.
- [14] Cramér, H. (1930). *On the Mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee Volume, Berlin.
- [15] Cramér, H. (1955). *Collective Risk Theory*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- [16] Deshpande, J.V., Kochar, S.C. and Singh, H., (1986). Aspects of positive ageing. *Journal of Applied Probability*, 23, 748–758.
- [17] De Vylder, F. and Goovaerts, M. (1984). Bounds for classical ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 3, 121–131.
- [18] Dickson, D.C.M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11, 191–207.
- [19] Dickson, D.C.M. (1998) On a class of renewal risk processes. *North American Actuarial Journal*, 2, 60–73.
- [20] Dickson, D.C.M. and Drekić, S. (2004). The joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in some Sparre Andersen models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 97–107.

- [21] Dickson, D.C.M. and Dos Reis, A.D.E. (1996). On the distribution of the duration of negative surplus. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, 148–164.
- [22] Dickson, D.C.M., Dos Reis, A.D.E. and Waters, H.R. (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications. *ASTIN Bulletin*, 25, 153–175.
- [23] Dufrence, F. and Gerber, H.U. (1988). The surpluses immediately before and at ruin and the amount of the claim causing ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, 193–199.
- [24] Embrechts, P., and Goldie, C.M. (1980). On closure and factorization theorems for subexponential and related distributions. *Australian Mathematical Society, Journal Series A*, 29, 243–256.
- [25] Embrechts, P., and Goldie, C.M. (1982). On convolution tails. *Stochastic Processes and their Applications*, 13, 263–278.
- [26] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosh, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [27] Embrechts, P., and Veraverbeke, N. (1982). Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1, 55–72.
- [28] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II, 2nd edition. Wiley, New York.
- [29] Gerber, H. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S.Huebner Foundation Monograph Series N0. 8. Irwin, Homewood, IL.
- [30] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, 129–137.
- [31] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1998). On the time value at ruin. *North American Actuarial Journal*, 2, 48–78.

- [32] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (2005). The time value of ruin in a Sparre-Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9(2), 49–69. Discussions: 69–84.
- [33] Gerber, H.U., Goovaerts, M.J. and Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin*, 17, 151–163.
- [34] Goldie, C.M., and Klüppelberg, C. (1998). Subexponential distributions. In: Alder, R., Feldman, R., and Taqqu, M.S. (Eds.) *A Practical Guide to Heavy-Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy-Tailed Distributions*, pp. 435–459. Birkhäuser, Boston.
- [35] Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer, Berlin.
- [36] Kalashnikov (1997). *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [37] Klüppelberg, C. (1988). Subexponential distributions and integrated tails. *Journal of Applied Probability*, 25, 132–141.
- [38] Klüppelberg, C. (1989a). Subexponential distributions and characterisation of related classes. *Probability Theory and Related Fields*, 77, 567–581.
- [39] Klüppelberg, C. (1989b). Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8, 279–285.
- [40] Li, S.M. and Garrido, J. (2004). On ruin for the Erlang(n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 391–408.
- [41] Li, S.M. and Garrido, J. (2005). On a general class of renewal risk process: Analysis of the Gerber-Shiu function. *Advances in Applied Probability*, 37, 836–856.
- [42] Lin, X.S. and Willmot, G.E. (2000). The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 19–44.

- [43] Lundberg, F. (1926). *Försäkringsteknisk Riskutjämning*. F. Englund's Bobtryckeri A.B., Stockholm.
- [44] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, Chichester.
- [45] Ng, K.W. and Tang, Q. (2004). Asymptotic behavior of tail and local probabilities for sums of subexponential random variables. *Journal of Applied Probability*, 41, 108–116.
- [46] Ng, A.C.Y. and Yang, H. (2005a). Lundberg-type bounds for the joint distribution of surplus prior and after ruin under the Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9(2), 85–100. Discussions: 100–107.
- [47] Ng, A.C.Y. and Yang, H. (2005b). Lundberg-type bounds for the joint distribution of surplus immediately before and at ruin under a Markov-modulated risk model. *ASTIN Bulletin*, 35, 351–361.
- [48] Pitts, S. and Politis, K. (2007). Approximations for the Gerber-Shiu expected discounted penalty function in the compound Poisson risk model. *Advances in Applied Probability*, 39, 360–384.
- [49] Psarrakos, G. and Politis, K. (2007a). Tail bounds for the joint distribution of the surplus prior to and at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, to appear.
- [50] Psarrakos, G. and Politis, K. (2007b). Monotonicity properties and the deficit at ruin in the Sparre Andersen model. Submitted for publication.
- [51] Psarrakos, G. and Politis, K. (2007c). A generalization of the Lundberg condition in the Sparre Andersen model and some applications. Submitted for publication.
- [52] Politis, K. (2005). Bounds for the probability and severity of ruin in the Sparre-Andersen model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 165–177.

- [53] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, New York.
- [54] Ross, S. (1983). *Stochastic Processes*. Wiley, New York.
- [55] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1994). *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, London.
- [56] Shanthikumar, J.G. (1988). DFR properties of first-passage times and its preservation under geometric compounding. *Annals of Probability*, 33, 397–406.
- [57] Schmidli, H. (1999). On the distribution of the surplus prior to and at ruin. *ASTIN Bulletin*, 29, 227–244.
- [58] Szekli, R. (1986). On the concavity of the waiting time distribution in some GI/G/1 queues. *Journal of Applied Probability*, 23, 555–561.
- [59] Teugels, J.L. (1975). The class of subexponential distributions. *Annals of Probability*, 3, 1001–1011.
- [60] Willmot, G.E. (2002). Compound geometric residual lifetime distributions and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30, 421–438.
- [61] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (1994). Lundberg bounds on the tails of compound distributions. *Journal of Applied Probability*, 31, 743–756.
- [62] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (1997). Simplified bounds on the tails of compound distributions. *Journal of Applied Probability*, 34(1), 27–33.
- [63] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (1998). Exact and approximate properties of the distribution of the surplus before and after ruin. *Insurance: Mathematics Economics*, 23, 91–110.
- [64] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 63–84.

- [65] Willmot, G.E. and Lin, X.S. (2001). Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications. Springer, New York.
- [66] Willmot, G.E., Cai, J. and Lin, X.S. (2001). Lundberg inequalities for renewal equations. *Advances in Applied Probability*, 33, 674–689.