ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΤΡΑ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Νικόλαος Κ. Δαμηλάτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΜΕΤΡΑ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Νικόλαος Κ. Δαμηλάτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Νοέμβριος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία Εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε που τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. … συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

– Κούτρας Μάρκος, Καθηγητής (Επιβλέπων)
– Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος, Αναπληρωτής Καθηγητής
– Μπούτσικας Μιχαήλ, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

IMPORTANCE MEASURES IN RELIABILITY THEORY

Nikolaos K. Damilatis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
2007

Στους γονείς μου

Κωνσταντίνο και Παναγιώτα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την υποδειγματική υποστήριξη και συμπαράστασή που υπέδειξαν μέχρι και σήμερα, στους οποίους οφείλω ότι έχω επιτύχει, τον κ. Κούτρα Μάρκο, επιβλέποντα καθηγητή, για την υπομονή, τη συνεργασία του και τις χρήσιμες και κρίσιμες επεμβάσεις στο κείμενο της παρούσας διπλωματικής, χωρίς τη βοήθεια του οποίου, η διπλωματική εργασία δε θα είχε φθάσει σε αυτή τη μορφή, καθώς επίσης και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο και Μπούτσικα Μιχαήλ, για την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής.

Περίληψη

Στη βιβλιογραφία έχουν παρουσιασθεί αρκετά μέτρα σπουδαιότητας. Τα μέτρα σπουδαιότητας είναι σημαντικά «εργαλεία» για τον υπολογισμό και τη διάταξη της επίδρασης των επί μέρους μονάδων, ή της επίδρασης της τοπολογίας των θέσεων στην ποιότητα λειτουργίας (αξιοπιστία) ενός συστήματος. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν ευρέως ως «εργαλεία» για την αναγνώριση των αδυναμιών των συστημάτων, με στόχο να δοθεί προτεραιότητα σε κινήσεις βελτίωσης. Τέλος, χρησιμοποιήθηκαν ακόμη για τη βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων στο σύστημα, βάσει της αξιοπιστίας των τελευταίων και της δομής του συστήματος. Σε αυτή τη διπλωματική παρουσιάζουμε όλα τα γνωστά μέτρα σπουδαιότητας, αλλά και κάποια λιγότερο δημοφιλή. Δίνουμε διάφορους τύπους υπολογισμού τους, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες για συστήματα εμφυτευμένα σε μαρκοβιανές αλυσίδες (MIS). Τέλος, εξετάζουμε, για κάθε σύστημα, τα μέτρα αυτά, δίνοντας όπου είναι δυνατό σχέσεις που διατάσσουν τις μονάδες.

Abstract

Several measures of component importance have been introduced in the literature. Component importance measures are important tools to evaluate and rank the impact in system's quality (reliability) of individual components or even of the impact of the topology of each position within a system. They also have been widely used as tools for identifying system weaknesses, and prioritize improvement activities, even to assign probabilities in an optimal fashion (optimal arrangement) during the design of the system. In this dissertation, we present all well-known measures of importance and some less-widely used. We give formulae for their numerical evaluation and the corresponding formulae for the class of Markov Chain Imbeddable Systems. Finally we calculate the majority of importance measures for each system, and proceed to the ordering of the components (in terms of each specific importance measure), in the cases where this is feasible.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Συντομογραφιών

AM	Αριθμός μονάδων
ΕΣΔ	Ελάχιστο Σύνολο Διακοπής
ΕΣΛ	Ελάχιστο Σύνολο Λειτουργίας
ΜΜΣΔ	Μικρότερου Μήκους Σύνολο Διακοπής
ΜΜΣΛ	Μικρότερου Μήκους Σύνολο Λειτουργίας
iid	identically and independently distributed
MIS	Markov Chain Imbeddable System, Σύστημα εμφυτευμένο σε μαρκοβιανές αλυσίδες

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η θεωρία αξιοπιστίας ασχολείται με προβλήματα πιθανοτήτων και στατιστικής, τα οποία περιέχουν κατανομές χρόνων ζωής μονάδων ή συστημάτων. Τα μαθηματικά υποδείγματα στη θεωρία αξιοπιστίας κατευθύνονται προς την περιγραφή της λειτουργίας των μονάδων ή των συστημάτων. Αυτά τα υποδείγματα δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων στη βελτιστοποίηση της αξιοπιστίας ή του μέσου χρόνου ζωής των συστημάτων. Η μελέτη των μεθόδων συντήρησης (*maintenance*) είναι επίσης «τμήμα» της θεωρίας αξιοπιστίας. Η στατιστική «διάσταση» της θεωρίας αξιοπιστίας προσανατολίζεται προς την επίλυση προβλημάτων πρόβλεψης και εκτίμησης της κατανομής του χρόνου ζωής ή του μέσου χρόνου ζωής των μονάδων ή των συστημάτων. Η θεωρία αξιοπιστίας αναπτύχθηκε σε ένα σημαντικό αντικείμενο για εργαζόμενους σε πολλούς τομείς, κυρίως όμως στη μηχανική και την ηλεκτρολογία.

Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η αξιοπιστία, σαν ανθρώπινο χαρακτηριστικό επαινέθηκε για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Όμως, για τεχνολογικά συστήματα, η έννοια της αξιοπιστίας χρησιμοποιήθηκε μόλις τα τελευταία 60 χρόνια. Εμφανίσθηκε με τεχνολογικό νόημα ακριβώς μετά τον Πρώτο Παγκόσμιο Πόλεμο και χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση της ασφαλούς λειτουργίας μονοκινητήριων, δικινητήριων και τετρακινητήριων αεροπλάνων. Ως αξιοπιστία ορίσθηκε τότε ο αριθμός των ατυχημάτων ανά ώρα πτήσης.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1930, οι Walter Shewhart, Harold F. Dodge και Harry G. Romig έθεσαν τη θεωρητική βάση για την αξιοποίηση των στατιστικών μεθόδων στον ποιοτικό έλεγχο βιομηχανικών προϊόντων. Τέτοιες μέθοδοι, όμως, δε χρησιμοποιήθηκαν εκτεταμένα μέχρι την έναρξη του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου. Έτσι, δε μπορούσαν εύκολα να ερμηνεύσουν πώς προϊόντα τα οποία είχαν κατασκευαστεί με χρήση μεγάλου αριθμού εξαρτημάτων, συχνά δε λειτουργούσαν, πάρα το γεγονός ότι οι επί μέρους μονάδες ήταν υψηλής ποιότητας.

Κατά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, μια ομάδα στη Γερμανία, που εργαζόταν υπό τις εντολές Wernher von Braun εφηύρε τον πύραυλο V-1. Μετά τον Πόλεμο, αναφέρθηκε ότι οι πρώτοι 10 πύραυλοι V-1 είχαν παταγώδη αποτυχία. Παρά τις προσπάθειες να παρέχουν υψηλής ποιότητας εξαρτήματα, και ιδιαίτερη προσοχή στις λεπτομέρειες, όλοι οι πρώτοι πύραυλοι, είτε ανατινάχθηκαν στην εξέδρα εκτόξευσης, είτε προσεδαφίσθηκαν πολύ γρήγορα (στο Στενό της Μάγχης). Ένας μαθηματικός, ο Robert Lusser, προσκλήθηκε ως σύμβουλος. Αποστολή του ήταν να αναλύσει το σύστημα του πυραύλου, και σύντομα παρήγαγε τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο των Πιθανοτήτων σειριακών μονάδων. Αυτό το θεώρημα ασχολείται με συστήματα που λειτουργούν μόνο όταν όλες οι μονάδες λειτουργούν και μπορεί να εφαρμοστεί μόνο κάτω από ειδικές προϋποθέσεις.

Στις Ηνωμένες Πολιτείες, έγιναν προσπάθειες να αντισταθμίσουν τη χαμηλή αξιοπιστία ενός συστήματος βελτιώνοντας την ποιότητα των επιμέρους μονάδων. Απαιτήθηκαν καλύτερες πρώτες ύλες και καλύτεροι σχεδιασμοί για τα προϊόντα. Επιτεύχθηκε υψηλότερη αξιοπιστία συστημάτων, αλλά πιθανότατα εκείνη τη χρονική περίοδο, δεν έγινε περαιτέρω συστηματική ανάλυση του προβλήματος.

Μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, η ανάπτυξη συνεχίστηκε ανά τον κόσμο, αφού παράγονταν με αύξοντα ρυθμό πιο πολύπλοκα προϊόντα, συντιθέμενα από ένα διαρκώς αυξανόμενο αριθμό μονάδων (τηλεοράσεις, Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές, κ.λ.π.). Με τον αυτοματισμό, η ανάγκη για πολύπλοκο έλεγχο και συστήματα ασφάλειας γινόταν ολοένα και εντονότερη.

Προς το τέλος της δεκαετίας του 1950 και στην αρχή της δεκαετίας του 1360, το ενδιαφέρον στις Ηνωμένες Πολιτείες επικεντρώθηκε στους διηπειρωτικούς βαλλιστικούς πυραύλους και τη διαστημική έρευνα, ιδιαίτερα στα προγράμματα Mercury και Gemini. Στον συναγωνισμό με τους Ρώσους για το ποιο θα είναι το πρώτο έθνος που θα στείλει ανθρώπους στο διάστημα, ήταν πολύ σημαντικό η προσεδάφιση επανδρωμένου διαστημόπλοιου να είναι επιτυχής. Σύντομα ιδρύθηκε μια οργάνωση για μηχανικούς που ασχολούνται με θέματα αξιοπιστίας. Το πρώτο περιοδικό στο αντικείμενο (*IEEE Transactions on Reliability*) άρχισε να κυκλοφορεί το έτος 1963, και ένας αριθμός εισαγωγικών βιβλίων πάνω στο θέμα εκδόθηκε τη δεκαετία του 1960.

Τη δεκαετία του 1970 το ενδιαφέρον αυξήθηκε στις Ηνωμένες Πολιτείες όπως και σε άλλα μέρη του κόσμου, σε έννοιες κινδύνου και ασφάλειας σχετικές με την κατασκευή και τη λειτουργία σταθμών πυρηνικής ενέργειας. Στις Ηνωμένες Πολιτείες σχηματίστηκε μια μεγάλη ερευνητική επιτροπή καθοδηγούμενη από τον καθηγητή Norman Rasmussen, για να αναλύσει το πρόβλημα. Το πολλών εκατομμυρίων δολαρίων πρόγραμμα είχε ως αποτέλεσμα την επονομαζόμενη ***Rasmussen Report**, WASH-1400* (*NUREG-75/014*). Παρά τις αδυναμίες της, αυτή η αναφορά παρουσιάζει την πρώτη «σοβαρή» ανάλυση ασφάλειας ενός τόσο πολύπλοκου συστήματος όπως ένας σταθμός πυρηνικής ενέργειας.

Παρόμοιες εργασίες πραγματοποιήθηκαν και στην Ευρώπη και την Ασία. Στην πλειονότητα των βιομηχανιών, πολλή προσπάθεια έχει ήδη εμφανισθεί έντονη κινητικότητα με στόχο την ανάλυση προβλημάτων κινδύνου και αξιοπιστίας.

Μετά τη σύντομη περιγραφή του αντικειμένου της θεωρίας αξιοπιστίας, και τη σύντομη ιστορική αναδρομή στις σημαντικότερες χρονικές στιγμές που συνέβαλαν δραστικά στην ανάπτυξη αυτής της επιστήμης, θα προχωρήσουμε στη συνέχεια στο κύριο μέρος της παρούσας διπλωματικής.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας αξιοπιστίας, παρουσιάζονται τα πλέον συνήθη συστήματα αξιοπιστίας, ενώ γίνεται και αναφορά σε μεθόδους υπολογισμού της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα πιο γνωστά μέτρα σπουδαιότητας και δίνονται μαθηματικοί τύποι υπολογισμού τους. Ταυτόχρονα δίνεται η φυσική ερμηνεία των μέτρων αυτών.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται διεξοδική μελέτη των μέτρων σπουδαιότητας για κάθε σύστημα αξιοπιστίας. Ταυτόχρονα παρουσιάζονται κάποιες συγκεκριμένες υποπεριπτώσεις των συστημάτων, ενώ γίνεται και γραφική παρουσίαση των μέτρων σπουδαιότητας όπου αυτό κρίνεται χρήσιμο.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Αξιοπιστίας

2.1. Εισαγωγή σε Έννοιες Αξιοπιστίας

"Αξιοπιστία" είναι η πιθανότητα ότι ένα σύστημα θα λειτουργεί ικανοποιητικά, τουλάχιστο για ένα δοσμένο χρονικό διάστημα.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια να αναφέρουμε περιληπτικά τις σημαντικότερες έννοιες της θεωρίας αξιοπιστίας καθώς και κάποιες μεθόδους υπολογισμού της αξιοπιστίας. Για μία πιο εκτενή αναφορά στις συγκεκριμένες έννοιες και μεθόδους, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει σε οποιοδήποτε εισαγωγικό σύγγραμμα της Θεωρίας Αξιοπιστίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα επόμενα, Rausand and Høyland (2004), Gertsbakh (1989) ή Barlow and Proschan (1975).

Στην προσπάθεια να βρεθεί ένας κοινός τρόπος για να ποσοτικοποιηθεί η αξιοπιστία των συστημάτων, αλλά και για να συγκριθεί η αξιοπιστία δύο ή περισσοτέρων συστημάτων, αναπτύχθηκε μία ολόκληρη σύγχρονη επιστήμη με την ονομασία "Θεωρία Αξιοπιστίας"

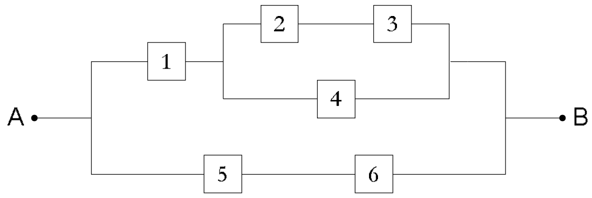
Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες αξιοπιστίας:

- Αξιοπιστία Συστημάτων (***Hardware Reliability***)
- Αξιοπιστία Λογισμικού (***Software Reliability***)
- Ανθρώπινη Αξιοπιστία (***Human Reliability***)

Η πρώτη από αυτές τις κατηγορίες είναι εκείνη στην οποία αναφέρεται αυτή η εργασία.

Σύστημα ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων, με κάποια δομή. Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται ένα σύστημα. Το σύστημα αποτυγχάνει αν δεν υπάρχει μία διαδρομή με λειτουργούσες μονάδες από το σημείο A προς το σημείο B.

Σχήμα 2.1
Ενδεικτικό Σύστημα Αξιοπιστίας



Πριν ξεκινήσουμε όμως, ας ορίσουμε μερικές σημαντικές ποσότητες που θα χρησιμοποιούμε, από εδώ και στο εξής.

• Συνάρτηση Δομής (*Structure Function*)

Αν έχουμε ένα σύστημα *n* μονάδων $x_1, x_2, ..., x_n$ συνδεδεμένες με κάποιο τρόπο, τότε η κατάσταση της *i* μονάδας, κάποια συγκεκριμένη στιγμή, περιγράφεται από τη δίτιμη συνάρτηση:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η μονάδα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν η μονάδα δε λειτουργεί.} \end{cases}$$

Όμοια η κατάσταση του συστήματος των *n* μονάδων, κάποια συγκεκριμένη στιγμή, περιγράφεται από τη συνάρτηση δομής :

$$j(\mathbf{x}) = j(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν το σύστημα δε λειτουργεί.} \end{cases}$$

Εισάγοντας στο μοντέλο μας και την έννοια του χρόνου, οι ορισμοί αυτοί γενικεύονται, έτσι ώστε η κατάσταση της *i* μονάδας τη χρονική στιγμή *t* να περιγράφεται από την επόμενη σχέση:

$$x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μονάδα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{αν η μονάδα δε λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t. \end{cases}$$

Όμοια ορίζεται και η συνάρτηση δομής συναρτήσει του χρόνου. Έτσι θα έχουμε:

$$j(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{αν το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{αν το σύστημα δε λειτουργεί τη χρονική στιγμή } t. \end{cases}$$

Στην παρούσα εργασία, όπως φαίνεται και παραπάνω αναλύουμε την περίπτωση όπου οι μονάδες και το σύστημα είναι δυαδικά (***binary***), δηλαδή οι μονάδες και το σύστημα μπορούν να βρεθούν μόνο σε μία από δύο διακριτές καταστάσεις: λειτουργούν ή δε λειτουργούν.

- **Συνάρτηση Αξιοπιστίας (*Reliability Function*) - Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (*Time To Failure*)**

Ο χρόνος ζωής T ενός στοιχείου (μονάδας ή συστήματος) είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_T(x)$ και συνάρτηση κατανομής:

$$F_T(x) = \Pr(T \le x) = \int_0^x f(z)\,dz, \qquad x > 0,$$

δηλαδή η $F_T(t)$ εκφράζει την πιθανότητα να αποτύχει το στοιχείο στο διάστημα $(0, x]$.

Η συνάρτηση αξιοπιστίας ενός στοιχείου (μονάδας ή συστήματος) ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = \Pr(T > t), \qquad t > 0 \\ &= 1 - \int_0^t f(z)\,dz = \int_t^\infty f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι ίσως η σημαντικότερη ποσότητα, αφού είναι η πιο εύκολα ερμηνεύσιμη, ακόμα και από μη-ειδικούς. Εξάλλου είναι η ποσότητα που μας δείχνει το πιο ουσιώδες, την πιθανότητα που έχει το στοιχείο να λειτουργεί τουλάχιστο μέχρι τη χρονική στιγμή t.

Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής T_t ενός στοιχείου (μονάδας ή συστήματος) είναι η συνεχής τυχαία μεταβλητή $T_t = T - t \mid T > t$. Η συνάρτηση αξιοπιστίας του T_t μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} R_{T_t}(x \mid t) &= \Pr(T_t > x) \\ &= \Pr(T - t > x \mid T > t) \\ &= \Pr(T > t + x \mid T > t) \\ &= \frac{\Pr(T > t + x)}{\Pr(T > t)}, \end{aligned}$$

δηλαδή ορίζεται ως η πιθανότητα το στοιχείο να αποτύχει μετά τη χρονική στιγμή $t + x$, δεδομένου ότι δεν έχει αποτύχει στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.

• **Η Βαθμίδα Αποτυχίας (*Hazard Rate*)**

Η πιθανότητα ένα στοιχείο (μονάδα ή σύστημα) να αποτύχει στο χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t]$, όταν γνωρίζουμε ότι λειτουργεί τη χρονική στιγμή t, είναι ίση με:

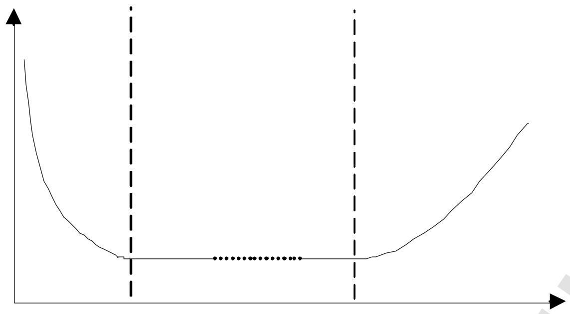
$$\Pr\left(t \le T \le t+\Delta t \,|\, T > t\right) = \frac{\Pr\left(t \le T \le t+\Delta t\right)}{\Pr\left(T > t\right)} = \frac{F\left(t+\Delta t\right) - F\left(t\right)}{1 - F\left(t\right)} = \frac{R\left(t\right) - R\left(t+\Delta t\right)}{R\left(t\right)}.$$

Διαιρώντας την προαναφερθείσα ποσότητα με το πλάτος του διαστήματός του (μέσα στο οποίο επιθυμούμε να αποτύχει) και θέτοντας $\Delta t \to 0$ παίρνουμε τη βαθμίδα αποτυχίας $l\left(t\right)$ του στοιχείου. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$l\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\left(t \le T \le t+\Delta t \,|\, T > t\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F\left(t+\Delta t\right) - F\left(t\right)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R\left(t\right)} = \frac{f\left(t\right)}{R\left(t\right)}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας μας δείχνει ποια είναι η πιθανότητα να αποτύχει μία μονάδα σε ένα «πολύ μικρό» χρονικό διάστημα (Δt) το οποίο έπεται της χρονικής στιγμής t. Η βαθμίδα αποτυχίας κάθε στοιχείου ως συνάρτηση του χρόνου, συνήθως έχει τη μορφή του Σχήματος 2.2, γνωστή ως Bathtub Curve. Η καμπύλη αυτή χωρίζεται σε τρεις περιοχές βάσει του χρόνου. Η χρονική περίοδος $[0, t_1]$ λέγεται βρεφική περίοδος (*early life period*) και η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα (*decreasing failure rate ή DFR*). Οι αποτυχίες των συστημάτων που εμφανίζονται σε αυτό το διάστημα, οφείλονται μάλλον σε αδυναμίες σχεδίασης του συστήματος ή κατασκευής των μονάδων. Η χρονική περίοδος $[t_1, t_2]$ λέγεται χρήσιμη περίοδος (*useful life period*) και η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερή. Οι αποτυχίες των συστημάτων που εμφανίζονται σε αυτή τη περίοδο λέγονται τυχαίες ή καταστροφικές. Και τέλος η χρονική περίοδος $[t_2, \infty)$ λέγεται περίοδος φθοράς (*wear-out period*) και έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (*increasing failure rate ή IFR*). Οι αποτυχίες των συστημάτων σε αυτήν την περίοδο εμφανίζονται λόγω της μεγάλης ηλικίας των μονάδων.

Σχήμα 2.2
Bathtub Curve (Καμπύλη σε σχήμα Μπανιέρας)



• **Η Συνάρτηση Κινδύνου (*Hazard Function*)**

Ως συνάρτηση κινδύνου $L(t)$ ορίζεται η ποσότητα $L(t)=\int_0^t l(z)\,dz$.

Η μαθηματική σχέση μεταξύ των πέντε βασικών ποσοτήτων που σχετίζονται με την αξιοπιστία ενός στοιχείου (μονάδας ή συστήματος), περιγράφεται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 2.1
Σχέσεις Μεταξύ των ποσοτήτων $F(t), f(t), R(t), l(t)$ και $L(t)$.

	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{R(t)}$	$\boldsymbol{\lambda(t)}$	$\boldsymbol{\Lambda(t)}$
$\boldsymbol{F(t)}$		$\int_0^t f(z)\,dz$	$1-R(t)$	$1-\exp\left\{-\int_0^t l(z)\,dz\right\}$	$1-\exp\{-L(t)\}$
$\boldsymbol{f(t)}$	$\frac{d}{dt}F(t)$		$-\frac{d}{dt}R(t)$	$l(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t l(z)\,dz\right\}$	$\frac{d}{dt}L(t)\cdot\exp\{-L(t)\}$
$\boldsymbol{R(t)}$	$1-F(t)$	$\int_t^\infty f(z)\,dz$		$\exp\left\{-\int_0^t l(z)\,dz\right\}$	$\exp\{-L(t)\}$
$\boldsymbol{\lambda(t)}$	$\frac{1}{1-F(t)}\cdot\frac{d}{dt}F(t)$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(z)\,dz}$	$-\frac{d}{dt}\ln R(t)$		$\frac{d}{dt}L(t)$
$\boldsymbol{\Lambda(t)}$	$-\ln(1-F(t))$	$\int_0^t \frac{f(u)}{\int_t^\infty f(z)\,dz}\,du$	$-\ln R(t)$	$\int_0^t l(z)\,dz$	

• **Μέσος χρόνος μέχρι την αποτυχία (μέσος χρόνος ζωής) (*Mean Time to Failure*)**

Ο μέσος χρόνος ζωής ορίζεται ως:

$$MTTF := E(T) = -\int_0^\infty t \cdot R'(t)\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt,$$

και είναι ο αναμενόμενος χρόνος λειτουργίας ενός στοιχείου.

• **Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής (*Mean Residual Life, MRL*)**

Έστω ένα στοιχείο με υπολειπόμενο χρόνο T, το οποίο τέθηκε σε λειτουργία τη χρονική στιγμή 0 και συνεχίζει να λειτουργεί τη στιγμή *t*. Η πιθανότητα ένα στοιχείο που επιβίωσε ως τη χρονική στιγμή *t* να επιβιώσει για κάποιο επιπλέον χρόνο *x* είναι:

$$R(x|t) = \Pr(T > x+t \,|\, T > t) = \frac{\Pr(T > x+t)}{\Pr(T > t)} = \frac{R(x+t)}{R(t)}.$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής $MRL(t)$ ενός στοιχείου ηλικίας *t* δίνεται από τον τύπο:

$$MRL(t) = \int_0^\infty R(x|t)\,dx = \frac{1}{R(t)}\int_t^\infty R(x)\,dx.$$

2.2. Διάφορα Συστήματα Αξιοπιστίας

Υπάρχουν διάφορα συστήματα αξιοπιστίας, τα οποία χρησιμοποιούνται συχνά, είτε ως αυτοτελή είτε ως τμήμα άλλων συστημάτων. Τα πιο συνήθη είναι τα εξής:

- Σειριακό Σύστημα (*Series System*)
- Παράλληλο Σύστημα (*Parallel System*)
- Γέφυρα (*Bridge Structure*)
- Σύστημα *k*-από-τα-*n*: *F*(*G*) (*k-out-of-n: F(G) System*)
- Σύστημα Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* (*Consecutive k-out-of-n: F System*)
- Σύστημα Κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F*(*G*) (*Circular Consecutive k-out-of-n: F System*)
- Σύστημα σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* (*Weighted k-out-of-n: F System*)
- Σύστημα συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* (*Consecutive Weighted k-out-of-n: F System*)

- Σύστημα *r*-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* (*r-within-consecutive-k-out-of-n: F System*)
- (*Multidimensional Systems*)

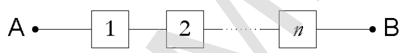
Θα περιγράψουμε στη συνέχεια αναλυτικά καθένα από τα συστήματα αυτά.

• Σειριακό Σύστημα (*Series System*)

Ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες του, λέγεται σειριακό σύστημα. Ένα σειριακό σύστημα τάξης n έχει τη μορφή του Σχήματος 2.3, και συνάρτηση δομής της μορφής

$$j\left(\mathbf{x}\right)=x_1\cdot x_2\cdots x_n=\prod_{i=1}^{n}x_i=\min_i x_i,\ i=1,2,\ldots,n$$

Σχήμα 2.3
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Σειριακού Συστήματος

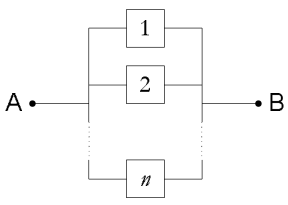


• Παράλληλο Σύστημα (*Parallel System*)

Ένα σύστημα, το οποίο λειτουργεί αν μία μονάδα του λειτουργεί, λέγεται παράλληλο σύστημα. Ένα παράλληλο σύστημα τάξης n έχει τη μορφή του Σχήματος 2.4, και συνάρτηση δομής της μορφής

$$j\left(\mathbf{x}\right)=1-\left(1-x_1\right)\cdot\left(1-x_2\right)\cdots\left(1-x_n\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)=\coprod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)=\max_i x_i,\ i=1,2,\ldots,n$$

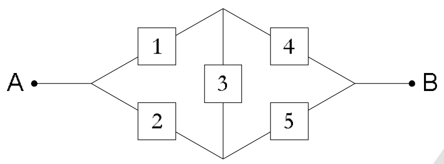
Σχήμα 2.4
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Παράλληλου Συστήματος



• **Γέφυρα (*Bridge Structure*)**

Ένα σύστημα, το οποίο έχει τη μορφή του Σχήματος 2.5 ονομάζεται γέφυρα. Το σύστημα αυτό λειτουργεί αν υπάρχει μια συνεχής διαδρομή από το σημείο Α ως το σημείο Β.

Σχήμα 2.5
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας



Η συνάρτηση δομής της γέφυρας δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} j(\mathbf{x}) &= 1-(1-x_1x_4)(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4) = \\ &= x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 \\ &\quad - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

• **Σύστημα *k*-από-τα-*n*: *F(G)* (*k-out-of-n: F(G) System*)**

Ένα σύστημα , το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστο k από τις n μονάδες του, λέγεται σύστημα *k*-από-τα-*n*: *F*. Η συνάρτηση δομής του έχει τη μορφή

$$j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1 \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < n-k+1 \end{cases}$$

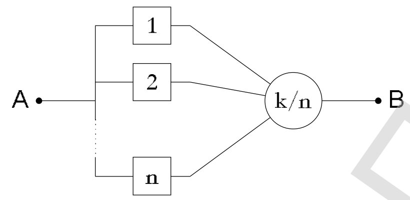
Όμοια, ένα σύστημα, το οποίο λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν τουλάχιστο k από τις n μονάδες του, λέγεται σύστημα *k*-από-τα-*n*: *G*. Η συνάρτηση δομής του έχει τη μορφή

$$j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

Ένα σύστημα *k*-από-τα-*n*: *G* είναι ισοδύναμο με ένα $(n-k+1)$-από-τα-*n*: *F* σύστημα, και αντίστροφα, δηλαδή ένα σύστημα *k*-από-τα-*n*: *F* είναι ισοδύναμο με ένα $(n-k+1)$-από-τα-*n*: *G* σύστημα

Μία απεικόνιση της μορφής του *k*-από-τα-*n*: *G* συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6

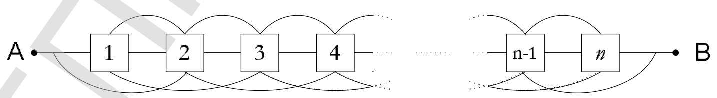
Σχήμα 2.6
Διάγραμμα Αξιοπιστίας *k*-από-τα-*n*: *G* Συστήματος



• **Σύστημα Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F(G)* (*Consecutive k-out-of-n: F(G) System*)**

Το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Kontoleon (1980). Ένα σύστημα n μονάδων, το οποίο αποτυγχάνει (λειτουργεί) αν και μόνο αν αποτύχουν (λειτουργούν) k συνεχόμενες μονάδες του, λέγεται συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F(G)* σύστημα. Μία απεικόνιση της δομής του παρουσιάζεται στο σχήμα 2.7

Σχήμα 2.7
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Συνεχόμενου 3-από-τα-*n*: *F* Συστήματος



• **Σύστημα σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* και συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* (*Weighted k-out-of-n: F και Consecutive Weighted k-out-of-n: F Systems*)**

Οι Wu and Chen (1994a,b) επέκτειναν τα ήδη γνωστά *k*-από-τα-*n*: *F* και συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματα αντιστοιχώντας βάρη w_i σε κάθε μία από τις n μονάδες του συστήματος, και υποθέτοντας ότι το σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα αποτυγχάνει αν το συνολικό βάρος των μονάδων που απέτυχαν είναι τουλάχιστο *k*. Αντίστοιχα το συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα αποτυγχάνει αν και μόνο αν το συνολικό βάρος συνεχόμενων μονάδων που απέτυχαν είναι τουλάχιστο *k*.

• **Σύστημα *r*-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* (*r-within-consecutive-k-out-of-n: F System*)**

Η έννοια του *r*-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* συστήματος προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Griffith (1986), αν και η μελέτη ενός μαθηματικού μοντέλου που καθόριζε τη δομή του είχε γίνει νωρίτερα. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει αν υπάρχουν *k* συνεχόμενες μονάδες στις οποίες περιέχονται τουλάχιστο *r* μονάδες που έχουν αποτύχει.

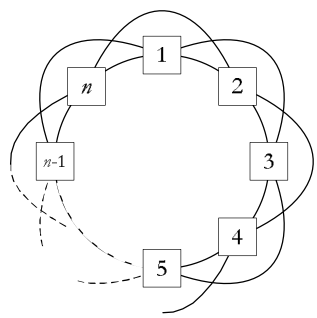
• **Σύστημα *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*: *F* (*m-consecutive-k-out-of-n: F System*)**

Το σύστημα αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Griffith (1986). Ένα σύστημα το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν εντός των *n* μονάδων του, υπάρχουν *m* μη επικαλυπτόμενες ροές *k* συνεχόμενων μονάδων που απέτυχαν λέγεται σύστημα *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*: *F*.

• **Σύστημα κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F* (*circular-consecutive-k-out-of-n:F System*)**

Ένα σύστημα *n* μονάδων διατεταγμένων σε ένα κύκλο (η πρώτη μονάδα ενώνεται με την τελευταία) το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν *k* συνεχόμενες μονάδες, λέγεται σύστημα κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F*. Μία απεικόνιση της δομής του παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8

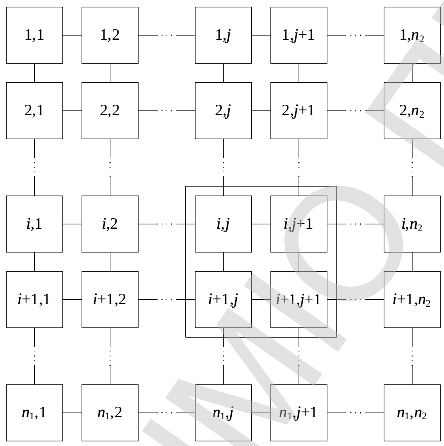
Σχήμα 2.8
Διάγραμμα Αξιοπιστίας κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*: *F* Συστήματος



• **Σύστημα πολυδιάστατο-συνεχόμενο-*k*-από-τα-n: *F* (*multidimensional-consecutive-k-out-of*-n*: F System*)**

Τα πολυδιάστατα συνεχόμενα *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματα μπορεί να είναι γραμμικά ή κυκλικά, διδιάστατα ή περισσότερων διαστάσεων. Ένα διδιάστατο γραμμικό-συνεχόμενο-(k_1, k_2)-από-τα-(n_1, n_2): *F* σύστημα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 2.9
Διάγραμμα αξιοπιστίας γραμμικού συνεχόμενου (2, 2)-από-τα-(n_1, n_2): *F* Συστήματος



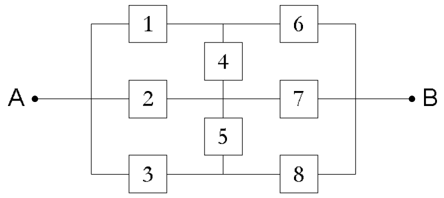
Το διδιάστατο γραμμικό συνεχόμενο σύστημα αποτυγχάνει αν αποτύχουν ταυτόχρονα όλες οι μονάδες που βρίσκονται σε ένα τετράγωνο διαστάσεων (k_1, k_2) μονάδων.

Εκτός από τα προηγούμενα υπάρχουν και διάφορα άλλα συστήματα με εξειδικευμένες δομές, μερικά από αυτά παρουσιάζονται στα επόμενα σχήματα.

• **Σύστημα Αξιοπιστίας Διπλής Γέφυρας**

Το σύστημα αξιοπιστίας διπλής γέφυρας προτάθηκε από τους Kuo And Zuo (2003), και λειτουργεί αν υπάρχει μια διαδρομή με λειτουργούσες μονάδες από το σημείο Α ως το σημείο Β.

Σχήμα 2.10
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Διπλής Γέφυρας



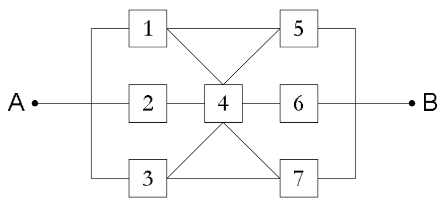
Η συνάρτηση δομής της διπλής γέφυρας δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$
\begin{aligned}
j(\mathbf{x}) &= 1-(1-x_1x_6)(1-x_1x_4x_7)(1-x_1x_4x_5x_8)(1-x_2x_7)(1-x_2x_4x_6)(1-x_2x_5x_8)\times \\
&\quad\times(1-x_3x_8)(1-x_3x_5x_7)(1-x_3x_4x_5x_6) \\
&= x_1x_6+x_2x_7+x_3x_8+x_1x_4x_7+x_2x_4x_6+x_2x_5x_8+x_3x_5x_7 \\
&\quad -x_1x_2x_4x_6-x_1x_2x_4x_7-x_1x_2x_6x_7-x_1x_3x_6x_8+x_1x_4x_5x_8-x_1x_4x_6x_7-x_2x_3x_5x_7-x_2x_3x_5x_8-x_2x_3x_7x_8 \\
&\quad -x_2x_4x_6x_7-x_2x_5x_7x_8+x_3x_4x_5x_6-x_3x_5x_7x_8 \\
&\quad -x_1x_2x_4x_5x_8+2x_1x_2x_4x_6x_7-x_1x_2x_5x_6x_8-x_1x_3x_4x_5x_6-x_1x_3x_4x_5x_7-x_1x_3x_4x_7x_8-x_1x_3x_5x_6x_7-x_1x_3x_4x_5x_8 \\
&\quad -x_1x_4x_5x_6x_8-x_1x_4x_5x_7x_8-x_2x_3x_4x_5x_6-x_2x_3x_4x_6x_8+2x_2x_3x_5x_7x_8-x_2x_4x_5x_6x_8-x_3x_4x_5x_6x_7-x_3x_4x_5x_6x_8 \\
&\quad +x_1x_2x_3x_4x_5x_6+x_1x_2x_3x_4x_5x_7+x_1x_2x_3x_4x_5x_8+x_1x_2x_3x_4x_6x_8+x_1x_2x_3x_4x_7x_8+x_1x_2x_3x_5x_6x_7+x_1x_2x_3x_5x_6x_8 \\
&\quad +x_1x_2x_3x_6x_7x_8+2x_1x_2x_4x_5x_6x_8+x_1x_2x_4x_5x_7x_8+x_1x_2x_5x_6x_7x_8+2x_1x_3x_4x_5x_6x_7+2x_1x_3x_4x_5x_6x_8+2x_1x_3x_4x_5x_7x_8 \\
&\quad +x_1x_3x_4x_6x_7x_8+x_1x_3x_5x_6x_7x_8+x_1x_4x_5x_6x_7x_8+x_2x_3x_4x_5x_6x_7+2x_2x_3x_4x_5x_6x_8+x_2x_3x_4x_6x_7x_8+x_2x_4x_5x_6x_7x_8 \\
&\quad +x_3x_4x_5x_6x_7x_8-2x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7-3x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8-2x_1x_2x_3x_4x_5x_7x_8-2x_1x_2x_3x_4x_6x_7x_8-2x_1x_2x_3x_5x_6x_7x_8 \\
&\quad -2x_1x_2x_4x_5x_6x_7x_8-3x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_8-2x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8+4x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8.
\end{aligned}
$$

• **Παραλλαγές Συστήματος Αξιοπιστίας Γέφυρας**

Τα δύο συστήματα που δίνονται στα Σχήματα 2.11 και 2.12 προτάθηκαν από τους Rausand και Høyland (2004) και αποτελούν μικρές παραλλαγές του συστήματος της Γέφυρας.

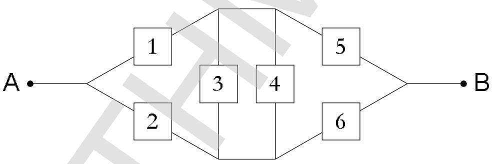
Σχήμα 2.11
Διάγραμμα Αξιοπιστίας 1ης παραλλαγής του συστήματος της Γέφυρας



Οι συναρτήσεις δομής αυτών των δύο συστημάτων είναι αρκετά πιο περίπλοκες από αυτήν της γέφυρας. Η συνάρτηση δομής του συστήματος του Σχήματος 2.11 δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$
\begin{aligned}
j\,(\mathbf{x}) = 1-&(1-x_1x_5)(1-x_1x_4x_6)(1-x_1x_4x_7)(1-x_2x_4x_5)(1-x_2x_4x_6)(1-x_2x_4x_7)\times \\
&\times(1-x_3x_4x_5)(1-x_3x_4x_6)(1-x_3x_7) = \\
= {}& x_1x_5 + x_3x_7 + x_1x_4x_6 + x_1x_4x_7 + x_2x_4x_5 + x_2x_4x_6 + x_2x_4x_7 + x_3x_4x_5 + x_3x_4x_6 - x_1x_2x_4x_5 \\
& - x_1x_2x_4x_6 - x_1x_2x_4x_7 - x_1x_3x_4x_5 - x_1x_3x_4x_6 - x_1x_3x_4x_7 - x_1x_3x_5x_7 - x_1x_4x_5x_6 - x_1x_4x_5x_7 \\
& - x_1x_4x_6x_7 - x_2x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_6 - x_2x_3x_4x_7 - x_2x_4x_5x_6 - x_2x_4x_5x_7 - x_2x_4x_6x_7 - x_3x_4x_5x_6 \\
& - x_3x_4x_5x_7 - x_3x_4x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_6 + x_1x_2x_3x_4x_7 + x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_2x_4x_5x_7 \\
& + x_1x_2x_4x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5x_6 + 2x_1x_3x_4x_5x_7 + x_1x_3x_4x_6x_7 + x_1x_4x_5x_6x_7 + x_2x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_7 \\
& + x_2x_3x_4x_6x_7 + x_2x_4x_5x_6x_7 + x_3x_4x_5x_6x_7 - x_1x_2x_3x_4x_5x_6 - x_1x_2x_3x_4x_5x_7 - x_1x_2x_3x_4x_6x_7 \\
& - x_1x_2x_4x_5x_6x_7 - x_1x_3x_4x_5x_6x_7 - x_2x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7.
\end{aligned}
$$

Σχήμα 2.12
Διάγραμμα Αξιοπιστίας $2^{ης}$ παραλλαγής του συστήματος της Γέφυρας



Η συνάρτηση δομής του συστήματος του Σχήματος 2.12 δίνεται από τον τύπο:

$$
\begin{aligned}
j\,(\mathbf{x}) = 1-&(1-x_1x_5)(1-x_2x_6)(1-x_1x_3x_6)(1-x_1x_4x_6)(1-x_2x_3x_5)(1-x_2x_4x_5) = \\
= {}& x_1x_5 + x_2x_6 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_6 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 - x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2x_3x_6 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_2x_4x_6 \\
& - x_1x_2x_5x_6 - x_1x_3x_4x_6 - x_1x_3x_5x_6 - x_1x_4x_5x_6 - x_2x_3x_4x_5 - x_2x_3x_5x_6 - x_2x_4x_5x_6 + x_1x_2x_3x_4x_5 \\
& + x_1x_2x_3x_4x_6 + 2x_1x_2x_3x_5x_6 + 2x_1x_2x_4x_5x_6 + x_1x_3x_4x_5x_6 + x_2x_3x_4x_5x_6 - 2x_1x_2x_3x_4x_5x_6.
\end{aligned}
$$

2.3. Υπολογισμός Αξιοπιστίας Συστημάτων

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που μας απασχολούν, είναι «πως θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία των συστημάτων;». Για το σκοπό αυτό, με τη πάροδο των χρόνων αναπτύχθηκαν διάφορες τεχνικές. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τις σημαντικότερες από αυτές και πιο συγκεκριμένα:

- Αναγωγή σε Παράλληλες και Σειριακές συνδέσεις (*Parallel and Series Reductions*)
- Διάσπαση με Οδηγό Στοιχείο (*Pivotal Decomposition*)
- Μέθοδο Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion-Exclusion Method*)
- Μέθοδο του αθροίσματος γινομένων (*Sum of Disjoint Products Method*)
- Εμφύτευση σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*Markov Chain Imbeddable Systems*)
- Μετασχηματισμοί Δέλτα – Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα (*Delta-Star and Star-Delta Transformations*)
- Διάσπαση σε υποσυστήματα (*Modular Decomposition*)
- Φράγματα Αξιοπιστίας (*System Reliability Bounds*)

2.3.1. Υπολογισμός της Αξιοπιστίας μέσω της συνάρτησης δομής

Η αξιοπιστία των συστημάτων μπορεί να εκφρασθεί εύκολα μέσω της συνάρτησης δομής για δεδομένη χρονική στιγμή από τη σχέση,

$$R = \Pr\left(j\left(\mathbf{x}\right)=1\right) = E\left(j\left(\mathbf{x}\right)\right).$$

Αντίστοιχα η αξιοπιστία συναρτήσει του χρόνου μπορεί να εκφραστεί με χρήση του επόμενου τύπου

$$R(t) = \Pr\left(j\left(\mathbf{x}(t)\right)=1\right) = E_t\left(j\left(\mathbf{x}(t)\right)\right).$$

Έτσι σκοπός της μελέτης μας είναι να βρούμε τη συνάρτηση δομής του συστήματος, κι έπειτα εύκολα υπολογίζουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας.
Για να το κατορθώσουμε αυτό, υπάρχουν διάφορες τεχνικές εύρεσης της συνάρτησης δομής. Μερικές από αυτές περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω.

2.3.2. Αναγωγή σε Παράλληλες και Σειριακές συνδέσεις (*Parallel and Series Reductions*).

Όταν έχουμε ένα σύνθετο σύστημα, μπορούμε να κάνουμε σταδιακές απλοποιήσεις για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής του, άρα και την αξιοπιστία του. Για κάθε υποσύστημα που θα είναι ένα σύνολο S_i μονάδων παράλληλα συνδεδεμένων, η συνάρτηση δομής του δίνεται από τον τύπο

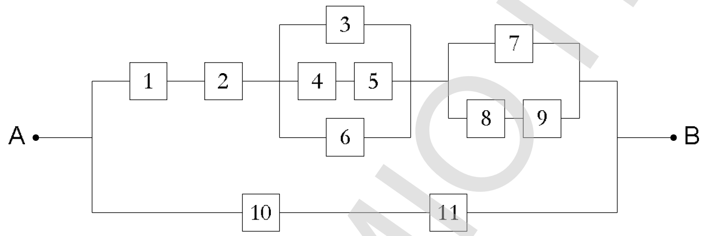
$$R_i = \coprod_{j \in S_i} x_j = 1 - \prod_{j \in S_i} x_j \ ,$$

ενώ για κάθε υποσύστημα που θα είναι ένα σύνολο $S_{i'}$ μονάδων σειριακά συνδεδεμένων, η συνάρτηση δομής του δίνεται από τον τύπο

$$R_{i'} = \prod_{j \in S_{i'}} x_j \ .$$

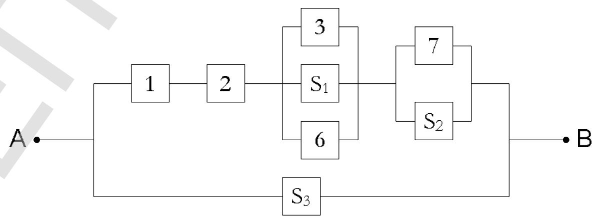
Έτσι, για παράδειγμα το σύστημα του Σχήματος 2.13α απλοποιείται ως εξής

Σχήμα 2.13.α
Διάγραμμα Αξιοπιστίας



Έχουμε τα σύνολα μονάδων $S_1 = \{4,5\}$, $S_2 = \{8,9\}$ και $S_3 = \{10,11\}$, έτσι η συνάρτηση δομής των αντιστοίχων υποσυστημάτων είναι, $j_1 = x_4 x_5$, $j_2 = x_8 x_9$ και $j_3 = x_{10} x_{11}$, και το παραπάνω σύστημα απλοποιείται στο επόμενο.

Σχήμα 2.13.β
Διάγραμμα Αξιοπιστίας μετά από σειριακή απλοποίηση



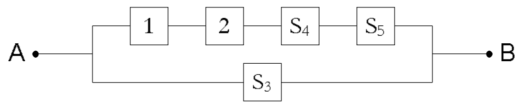
Τώρα έχουμε τα σύνολα μονάδων $S_4 = \{3, 6, S_1\} = \{3,4,5,6\}$ και $S_5 = \{7, S_2\} = \{7,8,9\}$, με αντίστοιχες συναρτήσεις δομής,

$$j_4 = x_3 \amalg x_6 \amalg j_1 = x_3 \amalg x_6 \amalg (x_4 x_5) = 1 - (1 - x_3)(1 - x_6)(1 - x_4 x_5)$$

και

$$j_5 = x_7 \amalg j_2 = x_7 \amalg (x_8 x_9) = 1 - (1 - x_7)(1 - x_8 x_9) \ .$$

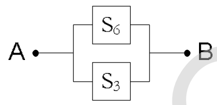
Σχήμα 2.13.γ
Διάγραμμα Αξιοπιστίας μετά από σειριακή και παράλληλη απλοποίηση



Συνεχίζοντας έχουμε το σύνολο $S_6 = \{1, 2, S_4, S_5\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, με συνάρτηση δομής,

$$j_6 = x_1 x_2 j_4 j_5 = x_1 x_2 \left(1-\left(1-x_3\right)\left(1-x_6\right)\left(1-x_4 x_5\right)\right)\left(1-\left(1-x_7\right)\left(1-x_8 x_9\right)\right).$$

Σχήμα 2.13.δ
Διάγραμμα Αξιοπιστίας μετά από δύο σειριακές και μια παράλληλη απλοποίηση



Τελικά η συνάρτηση δομής του αρχικού συστήματος δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$j = j\left(\mathbf{x}\right) = j_3 \,\mathrm{C}\, j_6 = 1-\left(1-j_3\right)\left(1-j_6\right) =$$
$$= 1-\left(1-x_1 x_2 \left(1-\left(1-x_3\right)\left(1-x_6\right)\left(1-x_4 x_5\right)\right)\left(1-\left(1-x_7\right)\left(1-x_8 x_9\right)\right)\right)\left(1-x_{10} x_{11}\right).$$

2.3.3. Διάσπαση με Οδηγό Στοιχείο (*Pivotal Decomposition*)

Η τεχνική αυτή αναλύει τη δομή του συστήματος σε δύο περιπτώσεις, όταν λειτουργεί και όταν δε λειτουργεί ένα συγκεκριμένο στοιχείο (μονάδα ή σύνολο μονάδων) του συστήματος. Χρησιμοποιούμε το στοιχείο αυτό σαν οδηγό για να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος. Αρχικά υπολογίζουμε την αξιοπιστία στην περίπτωση που λειτουργεί και στην περίπτωση που δε λειτουργεί το στοιχείο που θεωρήσαμε ως οδηγό. Κατόπιν συνδυάζουμε αυτές τις ποσότητες για να υπολογίσουμε την ολική αξιοπιστία του συστήματος.

Με την τεχνική αυτή μπορούμε πάντα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος. Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιείται με τέτοιον τρόπο ώστε να αλλάζει τη δομή του συστήματος σε μία μορφή που εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση δομής, μέσω παράλληλων και σειριακών απλοποιήσεων.

Έτσι, αναλύοντας ως προς κάποια μονάδα (ή στοιχείο) i, η συνάρτηση δομής γίνεται:

$$j\,(\mathbf{x}) = x_i j\,(1_i,\mathbf{x}) + (1-x_i)\,j\,(0_i,\mathbf{x}),$$

όπου,

$j\,(1_i,\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση δομής, όταν γνωρίζουμε ότι η i μονάδα λειτουργεί, και

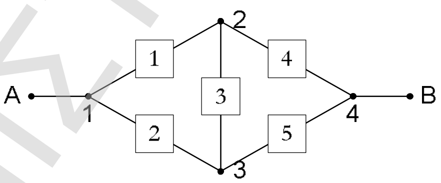
$j\,(0_i,\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση δομής, όταν γνωρίζουμε ότι η i μονάδα δε λειτουργεί.

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε την αξία αυτής της τεχνικής είναι η γέφυρα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.5.

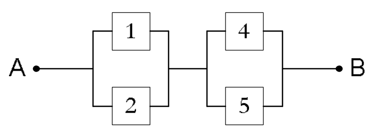
Στο σύστημα της γέφυρα έχοντας ως οδηγό την μονάδα 3, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που λειτουργεί οι κόμβοι 2 και 3 ενώνονται. Έτσι προκύπτει το διάγραμμα αξιοπιστίας του Σχήματος 2.14 (ii) που είναι ένα σειριακό παράλληλο σύστημα. Στην περίπτωση που η μονάδα 3 δε λειτουργεί οι κόμβοι 2 και 3 δεν ενώνονται. Έτσι προκύπτει το διάγραμμα αξιοπιστίας του Σχήματος 2.14 (iii) που είναι ένα παράλληλο σειριακό σύστημα.

Σχήμα 2.14
(i) Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας.
(ii) Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας όταν λειτουργεί η μονάδα 3.
(iii) Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας όταν δε λειτουργεί η μονάδα 3.

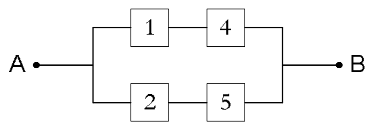
(i)



(ii)



(iii)



Έτσι, η συνάρτηση δομής γίνεται:

$$\begin{aligned} j\left(\mathbf{x}\right) &= x_3 j\left(1_3,\mathbf{x}\right)+\left(1-x_3\right)j\left(0_3,\mathbf{x}\right)= \\ &= x_3\left(1-\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\right)\left(1-\left(1-x_4\right)\left(1-x_5\right)\right)+\left(1-x_3\right)\left(1-\left(1-x_1x_4\right)\left(1-x_2x_5\right)\right)= \\ &= x_1x_4+x_2x_5+x_1x_3x_5+x_2x_3x_4-x_1x_3x_4x_5-x_1x_2x_3x_5-x_1x_2x_3x_4-x_2x_3x_4x_5+2x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

2.3.4. Ελάχιστα Σύνολα Διακοπής και Ελάχιστα Σύνολα Λειτουργίας (*Minimal Cut Sets and Minimal Path Sets*)

Σύνολο διακοπής είναι ένα σύνολο μονάδων, η ταυτόχρονη αποτυχία των οποίων, μας εξασφαλίζει την αποτυχία του συστήματος. Ελάχιστο Σύνολο Διακοπής (ΕΣΔ) είναι ένα ελάχιστο σύνολο μονάδων, η ταυτόχρονη αποτυχία των οποίων, μας εξασφαλίζει την αποτυχία του συστήματος.

Σύνολο λειτουργίας είναι ένα σύνολο μονάδων, η ταυτόχρονη λειτουργία των οποίων, μας εξασφαλίζει την λειτουργία του συστήματος. Ελάχιστο Σύνολο Λειτουργίας (ΕΣΛ) είναι ένα ελάχιστο σύνολο μονάδων, η ταυτόχρονη λειτουργία των οποίων, μας εξασφαλίζει την λειτουργία του συστήματος.

Ο μαθηματικός ορισμός των ΕΣΛ και ΕΣΔ, δίνεται αναλυτικά παρακάτω.

Έστω ένα μονότονο σύστημα με συνάρτηση δομής j. ένα διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}$ λέγεται διάνυσμα λειτουργίας αν $j\left(\mathbf{x}\right)=1$, ενώ λέγεται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας αν $j\left(\mathbf{y}\right)=0$ για οποιοδήποτε $\mathbf{y}<\mathbf{x}$, όμοια ένα διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}$ λέγεται διάνυσμα διακοπής αν $j\left(\mathbf{x}\right)=0$, ενώ λέγεται ελάχιστο διάνυσμα διακοπής αν $j\left(\mathbf{y}\right)=1$ για οποιοδήποτε $\mathbf{y}>\mathbf{x}$.

Μία τεχνική για τον προσδιορισμό των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας και μέσω αυτών της συνάρτησης δομής, είναι να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα σύνδεσης του συστήματος (*Connection Matrix*). Ο πίνακας σύνδεσης $\mathbf{C}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας του οποίου το στοιχείο c_{ij} μας δείχνει αν συνδέονται οι κόμβοι i και j. Το c_{ij} παίρνει την τιμή 0 αν δε συνδέονται και την τιμή x_l, την κατάσταση δηλαδή της μονάδας, όταν παρεμβάλεται η μονάδα l μεταξύ των δύο κόμβων. Τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου είναι μονάδες. Σημειώνεται, ότι ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος ταυτίζονται με τους κόμβους Α και Β των σχημάτων, δηλαδή είναι οι δύο κόμβοι που αν ενώνονται λειτουργεί το σύστημα. Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας από τον πίνακα σύνδεσης $\mathbf{C}$, διάστασης $m \times m$ ως εξής:

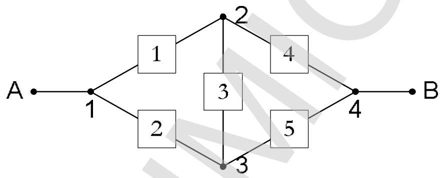
Υπολογίζουμε κάποιους ενδιάμεσους πίνακες $\mathbf{C}', \mathbf{C}'', \ldots$ μέχρι ο πίνακας να γίνει διάστασης 2×2. Τα στοιχεία των ενδιάμεσων πινάκων υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$c'_{ij} = c_{ij} + c_{il}c_{lj} \quad \text{, όταν αφαιρούμε τον κόμβο } l,\ i \neq j, i \neq l, j \neq l, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$$

$$c'_{ii} = 1 \qquad , \ i = 1, 2, \ldots, m$$

Προκειμένου αποσαφηνισθεί η παραπάνω μεθοδολογία, ας εξετάσουμε πώς υπολογίζεται η συνάρτησης δομής στο διάγραμμα αξιοπιστίας της γέφυρας.

Σχήμα 2.15
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας με ονομασμένους κόμβους



Εδώ ο πίνακας σύνδεσης βάσει του Σχήματος 2.15 είναι:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & 1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 1 & x_5 \\ 0 & x_4 & x_5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι αν αφαιρέσουμε τον κόμβο 2 από τον πίνακα σύνδεσης, έχουμε:

$$c'_{13} = c_{13} + c_{12}c_{23} = x_2 + x_1x_3 \quad (= c'_{31}), \quad c'_{14} = c_{14} + c_{12}c_{24} = 0 + x_1x_4 \quad (= c'_{41})$$
$$c'_{34} = c_{34} + c_{32}c_{24} = x_5 + x_3x_4 \quad (= c'_{43}), \quad c'_{11} = 1, \quad c'_{33} = 1, \quad c'_{44} = 1,$$

και ο πίνακας σύνδεσης γίνεται

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2 + x_1x_3 & 1 & x_5 + x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_5 + x_3x_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεχίζουμε αφαιρώντας και τον άλλο ενδιάμεσο κόμβο, οπότε έχουμε,
$$c''_{13} = c'_{13} + c'_{12}c'_{23} = x_1x_4 + (x_2 + x_1x_3)(x_5 + x_3x_4) = x_1x_4 + x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_3^2x_4 =$$
$$= x_1x_4 + x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 \qquad (= c''_{31})$$

Στην άλγεβρα Boole γνωρίζουμε ότι η πράξη της πρόσθεσης αντιστοιχεί στην ένωση ($\cup$) ενώ η πράξη του πολλαπλασιασμού αντιστοιχεί στην τομή ($\cap$). Έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω παράσταση, αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_i^n = x_i \cdot x_i \ldots x_i =$ $= x_i \cap x_i \cap \ldots \cap x_i = x_i, \forall i$ και ότι $x_1x_4 + x_1x_3x_4 = (x_1 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_3 \cap x_4) = x_1x_4$, αφού $x_1 \cap x_3 \cap x_4 \subseteq x_1 \cap x_4$.

2.3.5. Μέθοδος Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (*Inclusion-Exclusion Method*)

Η Μέθοδος εγκλεισμού – αποκλεισμού είναι μία μέθοδος για να υπολογίσουμε την αξιοπιστία του συστήματος, χρησιμοποιώντας ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και ελάχιστα σύνολα διακοπής. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε ικανοποιητικά όρια αξιοπιστίας, για την αξιοπιστία μεγάλων συστημάτων. Η μέθοδος εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι γνωστή και ως μέθοδος του Poincaré, αφού βασίζεται στον τύπο για την πιθανότητα της ένωσης ενδεχομένων, ο οποίος φέρει το όνομά του.

Έστω E_j το ενδεχόμενο να λειτουργούν όλες οι μονάδες ενός ελάχιστου συνόλου λειτουργίας T_j. Τότε η πιθανότητα ότι ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας θα λειτουργεί (όλες οι μονάδες του θα λειτουργούν) είναι:
$$\Pr(E_j) = \prod_{i \in T_j} p_i$$
όπου p_i είναι η πιθανότητα να λειτουργεί η i μονάδα.

Ένα σύστημα με l ΕΣΛ λειτουργεί αν και μόνο αν ένα ΕΣΛ λειτουργεί. Με άλλα λόγια λειτουργία του συστήματος αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $\bigcup_{j=1}^{l} E_j$. Η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με την πιθανότητα του ενδεχομένου της παραπάνω ένωσης, $R_S = \Pr\left(\bigcup_{j=1}^{l} E_j\right)$.

Έστω $S_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le l} \Pr\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}\right)$, τότε το S_k αντιπροσωπεύει το άθροισμα των πιθανοτήτων ότι οποιαδήποτε k ΕΣΛ λειτουργούν. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, η αξιοπιστία του συστήματος, η οποία ισούται με την πιθανότητα της ένωσης των l ΕΣΛ, εκφράζεται ως

$$R_S = \sum_{k=1}^{l} \left(-1\right)^{k-1} S_k \, .$$

Έτσι βάσει του προηγούμενου τύπου το S_1 συμπεριλαμβάνεται (εγκλείεται), το S_2 αφαιρείται (αποκλείεται), το S_3 συμπεριλαμβάνεται, κ.ο.κ.. Από αυτή τη διαδικασία εγκλεισμού και αποκλεισμού επιπρόσθετων όρων, προκύπτουν άνω και κάτω όρια της αξιοπιστίας R_S τα οποία έχουν την επόμενη μορφή:

$$\begin{aligned} R_S &\le S_1 \\ S_1 - S_2 &\le R_S \\ R_S &\le S_1 - S_2 + S_3 \\ S_1 - S_2 + S_3 - S_4 &\le R_S \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.3.6. Συστήματα εμφυτευμένα σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*Markov Chain Imbeddable Systems, MIS*)

Ως τώρα οι μέθοδοι που μελετήσαμε αφορούσαν (και ήταν αποτελεσματικές) σε "μικρά" συστήματα (συστήματα με λίγες μονάδες). Σε αυτή την παράγραφο, θα αναφέρουμε μία τεχνική η οποία διευκολύνει τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των συστημάτων, ακόμα και για πιο περίπλοκα συστήματα που δεν είναι εύκολο και γρήγορο να υπολογίσουμε την αξιοπιστία τους με τις προηγούμενες μεθόδους. Η τεχνική αυτή είναι η εμφύτευση των συστημάτων αξιοπιστίας σε μαρκοβιανές αλυσίδες. Μία πρώιμη δημοσίευση προς αυτή την κατεύθυνση έγινε από τον Fu (1986), ενώ αργότερα υπήρξε μία ακολουθία δημοσιεύσεων από τους Chao and Fu (1989, 1991) και τους Fu and Lou (1991), ενώ η πρώτη δημοσίευση που έκανε μία συστηματική παρουσίαση της τεχνικής έγινε από τον Koutras (1996).

Έστω μία δομή αξιοπιστίας n μονάδων της οποίας οι μονάδες είναι γραμμικά τοποθετημένες και αναφέρονται με τους αριθμούς $1, 2, ..., n$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η αρχή λειτουργίας του συστήματος (*principle of operation*) έχει νόημα για κάθε υποσύστημα

$1,2,\ldots,t$ με $t \le n$. Συνήθως η κατάρρευση μιας μονότονης δομής επιτυγχάνεται από προοδευτικές μεταβάσεις μέσα από διάφορα επίπεδα (στάδια) “χειροτέρευσης”, έστω $0,1,\ldots,m$, όπου το επίπεδο 0 δηλώνει την τέλεια κατάσταση του συστήματος (καμία ελαττωματική μονάδα) και το m σημαίνει ότι το σύστημα βρίσκεται εκτός λειτουργίας.

Ένα σύστημα αξιοπιστίας θα λέγεται σύστημα εμφυτευμένο σε μαρκοβιανή αλυσίδα (*MIS*), αν

(α) υπάρχει ένας πεπερασμένος χώρος καταστάσεων $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$, ο οποίος μπορεί να διασπαστεί ως $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, όπου $S_i \cap S_j = \varnothing$ για κάθε $i \ne j$, και

(β) υπάρχει μία μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t = 0,1,\ldots\}$ ορισμένη στο S έτσι ώστε

(i) $Y_t \in S_i$ αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ έφτασε στο i-οστό επίπεδο χειροτέρευσης $(i = 0,1,\ldots,m-1)$, και

(ii) $Y_t \in S_m$ αν και μόνο αν το σύστημα αποτελούμενο από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ χάλασε (σταμάτησε να λειτουργεί).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να ταξινομήσουμε το χώρο καταστάσεων S έτσι ώστε $S_i = \{s_{j_i}, s_{j_i+1}, \ldots, s_{j_{i+1}-1}\}$, $i = 0,1,\ldots,m-1$ $(j_0 = 0, j_m = N)$ και $S_m = \{s_N\}$. Έστω οι $p_{ij}(t) = \Pr\left[Y_t = s_j \mid Y_{t-1} = s_i\right], t \ge 1$ να είναι οι πιθανότητες μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας, και $\Lambda_t = \left(p_{ij}(t)\right)$ ο αντίστοιχος $(N+1)\times(N+1)$ πίνακας μετάβασης. Από τη στιγμή που το σύνολο $S_m = \{s_N\}$ περιγράφει την κατάρρευση (αποτυχία) του συστήματος, το επίπεδο s_N αντιστοιχεί σε μία κατάσταση απορρόφησης (***absorbing state***), οπότε

$$p_{N,i} = \begin{cases} 0, & i \ne N \\ 1, & i = N \end{cases}$$

Με άλλα λόγια η τελευταία σειρά του πίνακα Λ_t είναι ίση με $(0,0,\ldots,0,1)$.

Πριν υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός συστήματος, πρέπει πρώτα να ορίσουμε κάποια στοιχεία, τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή και άλλων συμπερασμάτων.

Έστω $\mathbf{e}_j = (0,\dots,1,\dots,0)'$ τα μοναδιαία διανύσματα (στήλη) του χώρου $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{e}_j = (1,1,\dots,1)'$ και $\mathbf{u} = \mathbf{1} - \mathbf{e}_{N+1} = (1,\dots,1,0)'$. Συμβολίζουμε επίσης με

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr(Y_0 = s_0), \Pr(Y_0 = s_1), \dots, \Pr(Y_0 = s_N)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$$

το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων (*vector of initial probabilities*) της μαρκοβιανής αλυσίδας $\{Y_t, t \geq 0\}$ και με R_t, F_t η αξιοπιστία, αναξιοπιστία του υποσυστήματος $1, 2, \dots, t$ $(1 \leq t \leq n)$. Το επόμενο θεώρημα ακολουθεί άμεσα τον ορισμό του MIS συστήματος.

Θεώρημα. Η αξιοπιστία και η αναξιοπιστία ενός MIS συστήματος δίνεται από τους τύπους:

$$R_n = \boldsymbol{\pi}_0' \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) \mathbf{u}, \qquad F_n = \boldsymbol{\pi}_0' \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) \mathbf{e}_{N+1}.$$

Το παραπάνω θεώρημα δίνει έναν ακριβή τύπο για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας και της αναξιοπιστίας ενός MIS συστήματος. Είναι πολύ σημαντικό ότι αυτοί οι απλοί τύποι είναι κατάλληλοι για τα *iid* και τα μη-*iid* συστήματα. Το επόμενο θεώρημα παρέχει ένα αποτελεσματικό σχήμα για τον αριθμητικό υπολογισμό των R_n και F_n ενός MIS συστήματος.

Θεώρημα. Έστω $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a_0(t), a_1(t), \dots, a_N(t))'$, $t = 1, 2, \dots, n$, να είναι το διάνυσμα ακολουθίας το οποίο δημιουργήθηκε από τις αναδρομικές σχέσεις

$$a_j(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t-1)\, p_{ij}(t), \qquad j = 0, 1, \dots, N$$

με αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$, με άλλα λόγια

$$a_j(0) = \boldsymbol{\pi}_0' \cdot \mathbf{e}_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \dots, N.$$

Τότε

$$R_n = \sum_{j=0}^{N-1} a_j(n), \qquad F_n = a_N(n).$$

Θεώρημα. Έστω $\boldsymbol{\beta}(t)=\left(b_0(t), b_1(t), \ldots, b_N(t)\right)'$, $t=1,2,\ldots,n$, να είναι το διάνυσμα ακολουθίας το οποίο δημιουργήθηκε από τις αναδρομικές σχέσεις

$$b_j(t)=\sum_{i=0}^{N} b_i(t-1)\, p_{ji}(n-t+1), \qquad j=0,1,\ldots,N$$

με αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{\pi}_0$, δηλαδή

$$b_j(0)=\mathbf{u}'\cdot\mathbf{e}_{j+1}, \qquad j=0,1,\ldots,N .$$

Τότε

$$R_n=\sum_{j=0}^{N-1} p_{0,j}\, b_j(n),\; F_n=\sum_{j=0}^{N-1} p_{0,j}\left(1-b_j(n)\right).$$

Στη συνήθη περίπτωση όπου $\boldsymbol{\pi}_0=\mathbf{e}_1$, θα έχουμε

$$R_n=b_0(n), \qquad F_n=1-b_0(n).$$

Η εμφύτευση των πλέον συνηθισμένων συστημάτων σε μαρκοβιανές αλυσίδες παρουσιάζεται παρακάτω.

• **Σειριακό Σύστημα**

Θεωρούμε ένα σειριακό σύστημα n μονάδων $(1,2,\ldots,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να θεωρήσουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{0,1\}=$ $\{s_0,s_1\}$, τη διαμέρισή του $S_0=\{s_0\}, S_1=\{s_1\}$ $(N=m=1)$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t=0$, αν οι μονάδες $1,2,\ldots,t$ λειτουργούν $(1\leq t\leq n)$

(ii) $Y_t=1$, αν τουλάχιστο μία μονάδα από τις $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργεί $(1\leq t\leq n)$.

Προφανώς, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$\Lambda_t=\begin{bmatrix} p_t & q_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Παράλληλο Σύστημα

Θεωρούμε ένα παράλληλο σύστημα n μονάδων $(1,2,\ldots,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,..,n\}=\{s_0,s_1,\ldots,s_n\}$, τη διαμέρισή του $S_i=\{s_i\}$, $i=0,1,\ldots,n$ $(N=m=n)$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενη σχέση:

$Y_t=i$, αν ακριβώς i από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργούν ($0\leq i\leq n$).

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$\Lambda_t=\left[\begin{array}{ccccc|c} p_t & q_t & & & & \\ & p_t & q_t & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & p_t & q_t & \\ & & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right]_{(n+1)\times(n+1)}.$$

• Σύστημα *k*-από-τα-*n*:*F*

Θεωρούμε ένα *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,\ldots,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,..,k\}=\{s_0,s_1,\ldots,s_k\}$, τη διαμέρισή του $S_i=\{s_i\}$, $i=0,1,\ldots,k$ $(N=m=k)$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t=i$, αν ακριβώς i από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργούν ($0\leq i<k$), και

(ii) $Y_t=k$, αν τουλάχιστο k από τις μονάδες $1,2,\ldots,t$ δε λειτουργούν.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$\Lambda_t=\left[\begin{array}{ccccc|c} p_t & q_t & & & & \\ & p_t & q_t & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & p_t & q_t & \\ & & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}.$$

Αντικαθιστώντας στους παραπάνω ορισμούς το k με το $(n-k+1)$ μπορεί να αντιμετωπιστεί και ένα *k*-από-τα-*n*:*G* σύστημα, αφού το τελευταίο είναι ισοδύναμο με ένα (*n*-*k*+*1*)-από-τα-*n*:*F* σύστημα.

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$a_0(t) = p_t a_0(t-1)$$
$$a_k(t) = q_t a_{k-1}(t-1) + a_k(t-1)$$
$$a_r(t) = q_t a_{r-1}(t-1) + p_t a_r(t-1), \; r = 1,...,k-1$$

$$b_k(t) = 0$$
$$b_r(t) = p_{n-t+1} b_r(t-1) + q_{n-t+1} b_{r+1}(t-1), \; r = 0,...,k-1.$$

• Σύστημα Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F*

Θεωρούμε ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,...,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$, $i=1,2,...,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,..,k\}=\{s_0,s_1,...,s_k\}$, τη διαμέρισή του $S_i=\{s_i\}$, $i=0,1,...,k$ $(N=m=k)$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\geq 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t = i$, αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων είναι i $(0\leq i<k)$, και

(ii) $Y_t = n$, αν το πλήθος των τελευταίων συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων είναι ίσο ή μεγαλύτερο από k.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_t & q_t & & & & & \\ p_t & & q_t & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ p_t & & & & & q_t & \\ p_t & & & & & & q_t \\ \hline & & & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}.$$

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$
\begin{aligned}
&a_0(t) = p_t \sum_{r=0}^{k-1} a_0(t-1) = p_t\left(1 - a_k(t-1)\right)\\
&a_k(t) = q_t a_{k-1}(t-1) + a_k(t-1)\\
&a_r(t) = q_t a_{r-1}(t-1),\ r = 1,\ldots,k-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_k(t) = 0\\
&b_r(t) = p_{n-t+1} b_0(t-1) + q_{n-t+1} b_{r+1}(t-1),\ r = 0,\ldots,k-1.
\end{aligned}
$$

• Σύστημα Σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* (*Weighted k-out-of-n:F*)

Θεωρούμε ένα συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,\ldots,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$ και βάρη w_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S = \{0,1,..,k\}$, τη διαμέρισή του $S = \bigcup_{i=0}^{m} S_i = \bigcup_{i=0}^{m} \{i\}$, $(N = m = k)$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t \geq 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t = i$, αν το συνολικό βάρος των μονάδων που απέτυχαν στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,\ldots,t$, είναι ακριβώς i $(0 \leq i < k)$, και

(ii) $Y_t = k$, αν το συνολικό βάρος των μονάδων που απέτυχαν στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,\ldots,t$, είναι τουλάχιστο k.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad \leftarrow\ w_t\ \rightarrow
\end{array}
$$
$$
\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccccc|c}
p_t & 0 & & q_t & & & \\
& \ddots & & & \ddots & & \\
& & p_t & & & q_t & \\
& & & p_t & & & q_t \\
& & & & \ddots & & \vdots \\
& & & & & p_t & q_t \\
\hline
& & & & & & 1
\end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}.
$$

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$\begin{aligned}
&a_r(t) = p_t a_r(t-1), && 0 \le r \le w_t - 1\\
&a_r(t) = q_t a_{r-w_t}(t-1) + p_t a_r(t-1), && w_t \le r \le k-1\\
&a_k(t) = q_t \sum\nolimits_{r=k-w_t}^{k-1} a_r(t-1) + a_k(t-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_r(t) = p_{n-t+1} b_r(t-1) + q_{n-t+1} b_{r+w_{n-t+1}}(t-1), && 0 \le r \le k - w_{n-t+1}\\
&b_r(t) = p_{n-t+1} b_r(t-1), && k - w_{n-t+1} \le r \le k-1\\
&b_k(t) = 0.
\end{aligned}$$

• Σύστημα Συνεχόμενο Σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* (*Consecutive Weighted k-out-of-n:F*)

Θεωρούμε ένα συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,...,n)$ με αξιοπιστίες p_i $(=1-q_i)$ και βάρη w_i, $i=1,2,...,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,..,k\}$, τη διαμέριση του $S=\bigcup_{i=0}^{m} S_i = \bigcup_{i=0}^{m}\{i\}$, ($N=m=k$) και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t\ge 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t \in S_i$, αν το συνολικό βάρος των τελευταίων συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,...,t$ είναι ακριβώς i ($0 \le i < k$), και

(ii) $Y_t \in S_k$, αν το συνολικό βάρος των τελευταίων συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,...,t$ είναι τουλάχιστο k.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{c}
\quad\leftarrow w_t \rightarrow \\
\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccccc|c}
p_t & 0 & & q_t & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \\
p_t & & & & & q_t & \\
p_t & & & & & & q_t \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
p_t & & & & & & q_t \\
\hline
 & & & & & & 1
\end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}
\end{array}.$$

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$
\begin{aligned}
&a_0(t) = p_t\left(1 - a_k(t-1)\right) \\
&a_r(t) = 0, \qquad\qquad 1 \le r \le w_t - 1 \\
&a_r(t) = q_t a_{r-w_t}(t-1), \ \ w_t \le r \le k-1 \\
&a_k(t) = q_t \sum\nolimits_{r=k-w_t}^{k-1} a_r(t-1) + a_k(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_r(t) = p_{n-t+1} b_0(t-1) + q_{n-t+1} b_{r+w_{n-t+1}}(t-1), \quad 0 \le r \le k - w_{n-t+1} \\
&b_r(t) = p_{n-t+1} b_0(t-1) + q_{n-t+1} b_k(t-1), \qquad\quad k - w_{n-t+1} \le r \le k-1 \\
&b_k(t) = 0.
\end{aligned}
$$

• **2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*:*F* (*2-within-consecutive-k-out-of-n:F*)**

Θεωρούμε ένα 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,...,n)$ με αξιοπιστίες $p_i \ \ (=1-q_i), \ \ i=1,2,...,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S=\{s_0, s_1, .., s_{k+1}\}$ $(N=k+1)$, τη διαμέρισή του $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, όπου $S_0 = \{s_0\}$, $S_1 = \{s_1, ..., s_k\}$, $S_2 = \{s_{k+1}\}$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t \ge 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t = s_0$, αν οι τελευταίες k μονάδες στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,...,t$, λειτουργούν,

(ii) $Y_t = s_i$, αν στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,...,t$ οι τελευταίες k μονάδες, λειτουργούν εκτός από τη $t-i+1$, η οποία δε λειτουργεί ($i=1,2,...,k$), και

(iii) $Y_t = s_{k+1}$, αν εντός των τελευταίων k συνεχόμενων μονάδων του υποσυστήματος με μονάδες $1,2,...,t$, υπάρχουν 2 τουλάχιστο μονάδες που δε λειτουργούν.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$
\Lambda_t = \left[\begin{array}{cc|cccc|c}
p_t & q_t & & & & & \\
\hline
 & & p_t & & & & q_t \\
 & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & p_t & q_t \\
\hline
p_t & q_t & & & & & 0 \\
0 & 0 & & & & & 1
\end{array}\right]_{(k+2)\times(k+2)} .
$$

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα συνεχόμενο σταθμισμένο *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$a_0(t) = p_t\left(a_0(t-1) + a_k(t-1)\right)$$
$$a_1(t) = q_t\left(a_0(t-1) + a_k(t-1)\right)$$
$$a_r(t) = p_t a_{r-1}(t-1), \qquad 2 \le r \le k$$
$$a_{k+1}(t) = q_t \sum_{r=1}^{k-1} a_r(t-1) + a_k(t-1)$$

$$b_r(t) = p_{n-t+1} b_0(t-1) + q_{n-t+1} b_{r-t+1}(t-1), \qquad r = 0, k$$
$$b_r(t) = p_{n-t+1} b_{r+1}(t-1), \qquad k - w_{n-t+1} \le r \le k-1$$
$$b_{k+1}(t) = 0.$$

• **Σύστημα *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*:*F* (*m-consecutive-k-out-of-n:F*)**

Θεωρούμε ένα *m*-συνεχόμενα *k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα n μονάδων $(1,2,...,n)$ με αξιοπιστίες $p_i \ (=1-q_i)$, $i = 1,2,...,n$. Για να αντιμετωπίσουμε μια τέτοια δομή ως ένα Σύστημα Εμφυτευμένο σε Μαρκοβιανές Αλυσίδες (*MIS*), αρκεί να εισάγουμε το χώρο καταστάσεων $S = \{s_0, s_1, .., s_N\}$ ($N = mk$), τη διαμέρισή του $S = \bigcup_{j=0}^{m} S_j$, όπου $S_j \{(j,i) : i = 0,1,...,k-1\}$, $j = 0,1,...m-1$, $S_m = \{(m,0)\}$ και τη μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t, t \ge 0\}$ που ορίζεται από τις επόμενες σχέσεις:

(i) $Y_t = (j,i)$, αν τουλάχιστο i μονάδες του υποσυστήματος με μονάδες $1,2,...,t$, δε λειτουργούν, και j το πλήθος ομάδες k συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων, έχουν εμφανιστεί στο υπόλοιπο μέρος του υποσυστήματος $1,2,...,t-i$ $(i = 0,1,...,k-1)$, και

(ii) $Y_t = (m,0)$, αν m ή περισσότερες το πλήθος ομάδες k συνεχόμενων μη λειτουργουσών μονάδων, έχουν εμφανιστεί στο υποσύστημα με μονάδες $1,2,...,t$.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης δίνεται ως εξής:

$$
\Lambda_t = \left[\begin{array}{ccccc|c}
A_t & B_t & & & & \\
 & A_t & B_t & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & A_t & B_t & \\
 & & & & A_t & q_t\mathbf{e}_k \\
\hline
 & & & & & 1
\end{array}\right]_{(N+1)\times(N+1)}
$$

όπου,

$$
A_t = \begin{bmatrix}
p_t & q_t & & & \\
p_t & & q_t & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
p_t & & & & q_t \\
p_t & & & & 0
\end{bmatrix}_{k\times k}, \qquad
B_t = \begin{bmatrix}
0 & 0 & & & \\
0 & & 0 & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
0 & & & & 0 \\
q_t & & & & 0
\end{bmatrix}_{k\times k}.
$$

Οι αναδρομικές σχέσεις για ένα m-συνεχόμενα k-από-τα-n:F σύστημα, δίνονται από τους επόμενους τύπους:

$$
\begin{aligned}
&a_0(t) = p_t \sum_{r=0}^{k-1} a_r(t-1) \\
&a_{rk}(t) = q_t a_{rk-1}(t-1) + p_t \sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s(t-1), \quad r = 1,2,\ldots,m-1 \\
&a_{r+sk}(t) = q_t a_{r+sk-1}(t-1), \qquad\qquad\qquad\quad r = 1,2,\ldots,k-1,\ s = 0,1,\ldots,m-1 \\
&a_{mk}(t) = q_t a_{mk-1}(t-1) + a_{mk}(t-1)
\end{aligned}
$$

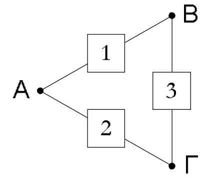
$$
\begin{aligned}
&b_{r+sk}(t) = p_{n-t+1} b_{sk}(t-1) + q_{n-t+1} b_{r+sk+1}(t-1), \quad r = 0,1,\ldots,k-1,\ s = 0,1,\ldots,m-1 \\
&b_{mk}(t) = 0.
\end{aligned}
$$

2.3.7. Μετασχηματισμοί Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα (*Delta-Star and Star-Delta Transformations*)

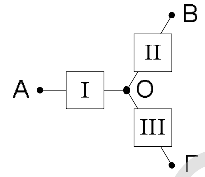
Όταν έχουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία περίπλοκων δικτύων, αφού κάνουμε παράλληλες και σειριακές απλοποιήσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σχετικά νέο εργαλείο: τους μετασχηματισμούς Δέλτα-Αστέρι και Αστέρι-Δέλτα. Με τη διαδικασία αυτή «αλλάζουμε» την δομή που περιέχεται εντός τριών κόμβων του συστήματος σε μία ιδεατή ισοδύναμη δομή, έτσι ώστε να είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός της αξιοπιστίας του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα οι δομές οι οποίες αμοιβαία μετασχηματίζονται παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.16. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι κόμβοι δεν αποτυγχάνουν ποτέ, ενώ δύνανται να αποτύχουν οι μονάδες που ενώνουν τους κόμβους αυτούς.

Σχήμα 2.16
Διάγραμμα Αξιοπιστίας δομής Δέλτα και Αστεριού

(i) Δομή Δέλτα



(ii) Δομή Αστεριού



Σε ένα μετασχηματισμό Δέλτα-Αστέρι αλλάζουμε τη δομή του συγκεκριμένου μέρους του συστήματος από τη μορφή τριγώνου (ή του γράμματος Δ) στη μορφή ενός Αστεριού, ενώ στο μετασχηματισμό Αστέρι-Δέλτα κάνουμε το αντίστροφο. Με τους μετασχηματισμούς που κάνουμε παράγουμε ένα καινούριο σύστημα το οποίο είναι ισοδύναμο με το πρωτεύων. Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθοι:

$A \sim B$ είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος Α συνδέεται με τον κόμβο Β

$A \sim \Gamma$ είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος Α συνδέεται με τον κόμβο Γ

$B \sim \Gamma$ είναι το ενδεχόμενο ότι ο κόμβος Β συνδέεται με τον κόμβο Γ

Για να καθορίσουμε την ισοδυναμία μεταξύ των δύο συστημάτων, αρκεί να υπολογίσουμε τις επόμενες τέσσερις πιθανότητες:

$$\Pr(A \sim B), \quad \Pr(A \sim \Gamma), \quad \Pr(B \sim \Gamma), \quad \Pr(\{A \sim B\} U \{A \sim \Gamma\}).$$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες μπορούν να υπολογισθούν από αυτές. Εδώ η κάθε πιθανότητα συμβολίζει την αξιοπιστία (πιθανότητα να λειτουργεί) κάποιας ή κάποιων μονάδων.

Παρακάτω θα υπολογισθούν οι πιθανότητες αυτές μετά τους μετασχηματισμούς όταν έχουμε έναν κόμβο εισόδου (*Input Node*) και δύο κόμβους εξόδου (*Output Nodes*), όταν έχουμε δύο κόμβους εισόδου (*Input Nodes*) και έναν κόμβο εξόδου (*Output Node*), καθώς και όταν όλοι οι κόμβοι είναι είτε εισόδου (*Input Nodes*) είτε εξόδου (*Output Nodes*).

2.3.7.1. Σύστημα Δέλτα ή Αστεριού με έναν κόμβο εισόδου και δύο κόμβους εξόδου

Σε αυτό το υποσύστημα για να δεχθούμε ότι λειτουργεί πρέπει ο κόμβος Α (κόμβος εισόδου) να μπορεί να ενωθεί με τους κόμβους Β και Γ (κόμβοι εξόδου), έτσι από τις τέσσερις προαναφερθείσες πιθανότητες μόνο οι επόμενες τρεις μας είναι απαραίτητες $\Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B})$, $\Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma)$, $\Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\})$, αφού η πιθανότητα $\Pr(\mathrm{B} \sim \Gamma)$ δε χρειάζεται να προσδιορισθεί επειδή δε μας απασχολεί αν ενώνονται οι δύο κόμβοι.

Έχουμε λοιπόν για τα δύο συστήματα

$$\Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) = p_1 + (1 - p_1)\, p_2 p_3 = p_I\, p_{II}$$

$$\Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)\, p_1 p_3 = p_I\, p_{III}$$

$$\Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_I\left(1 - (1 - p_{II})(1 - p_{III})\right).$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} a &= \Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) \\ b &= \Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) \\ g &= \Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) + \Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) - \Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) = \Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cap \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) \end{aligned}$$

εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$p_I = \frac{ab}{g}, \qquad p_{II} = \frac{g}{b}, \qquad p_{III} = \frac{g}{a}$$

όπου

$$a = \Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) = p_1 + (1 - p_1)\, p_2 p_3 = p_1 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3,$$

$$b = \Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) = p_2 + (1 - p_2)\, p_1 p_3 = p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3, \text{ και}$$

$$\begin{aligned} g &= \Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) + \Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) - \Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) = \\ &= \left(p_1 + (1 - p_1)\, p_2 p_3\right) + \left(p_2 + (1 - p_2)\, p_1 p_3\right) - \left(1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\right) = \\ &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} a &= \Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) = p_I\, p_{II} \\ b &= \Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) = p_I\, p_{III} \\ c &= \Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) = p_I\left(1 - (1 - p_{II})(1 - p_{III})\right), \end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι:

$$p_1 = \frac{a - cp_3}{1 - p_3}, \quad p_2 = \frac{b - cp_3}{1 - p_3}, \text{ και}$$

$$c(1-c)\,p_3^2 - (a+b)(1-c)\,p_3 + a + b - ab - c = 0$$

ή ισοδύναμα $p_3 = \dfrac{(a+b)(1-c) \pm \sqrt{(a+b)^2(1-c)^2 - 4c(1-c)(a+b-ab-c)}}{2c(1-c)}$, με $0 < p_3 < 1$.

2.3.7.2. Σύστημα Δέλτα ή Αστεριού με δύο κόμβους εισόδου και έναν κόμβο εξόδου

Η δομή αυτή, είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την προηγούμενη, αφού δε μας απασχολεί αν έχουμε δύο κόμβους εισόδου και έναν κόμβο εξόδου, ή αν έχουμε δύο κόμβους εξόδου και έναν κόμβο εισόδου. Το μόνο που θα αλλάξει τώρα είναι να θεωρήσουμε ως κόμβους εισόδου τους Β και Γ και ως κόμβο εξόδου τον κόμβο Α οπότε ο μετασχηματισμός παραμένει ο ίδιος.

2.3.7.3. Σύστημα Δέλτα όπου κάθε κόμβος μπορεί να είναι είτε εισόδου είτε εξόδου

Σε μεγαλύτερα διαγράμματα αξιοπιστίας είναι πιο εύκολο να βρούμε υποσυστήματα με τη δομή Δέλτα, εντούτοις, είναι σπάνιο να έχουν κόμβους μόνο εισόδου ή εξόδου. Επομένως κρίνεται απαραίτητο να αναλύσουμε εδώ την περίπτωση όπου όλοι οι κόμβοι είναι είτε κόμβοι εισόδου είτε εξόδου. Σε αυτή τη περίπτωση θα ορίσουμε μία ακόμη πιθανότητα την p_O η οποία θα είναι η πιθανότητα να λειτουργεί ο κόμβος Ο, ή αλλιώς η αξιοπιστία αυτού του κόμβου. Οι τέσσερις πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν παίρνουν τώρα τη μορφή:

$$\Pr(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) = p_1 + (1-p_1)\,p_2 p_3 = p_I\, p_O\, p_{II}$$

$$\Pr(\mathrm{A} \sim \Gamma) = p_2 + (1-p_2)\,p_1 p_3 = p_I\, p_O\, p_{III}$$

$$\Pr(\mathrm{B} \sim \Gamma) = p_3 + (1-p_3)\,p_1 p_2 = p_{II}\, p_O\, p_{III}$$

$$\Pr(\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\} \cup \{\mathrm{A} \sim \Gamma\}) = 1 - (1-p_1)(1-p_2) = p_I\, p_O\left(1 - (1-p_{II})(1-p_{III})\right).$$

Από αυτές τις εξισώσεις παίρνουμε τις ακόλουθες πιθανότητες για τη δομή του Αστεριού:

$$p_I = \frac{a+b-d}{g}, \quad p_{II} = \frac{a+b-d}{b}, \quad p_{III} = \frac{a+b-d}{a}, \text{ και} \quad p_O = \frac{abg}{(a+b-d)^2}$$

όπου

$$a = \Pr\left(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\right) = p_1 + \left(1 - p_1\right) p_2 p_3$$

$$b = \Pr\left(\mathrm{A} \sim \Gamma\right) = p_2 + \left(1 - p_2\right) p_1 p_3$$

$$g = \Pr\left(\mathrm{B} \sim \Gamma\right) = p_3 + \left(1 - p_3\right) p_1 p_2 \text{, και}$$

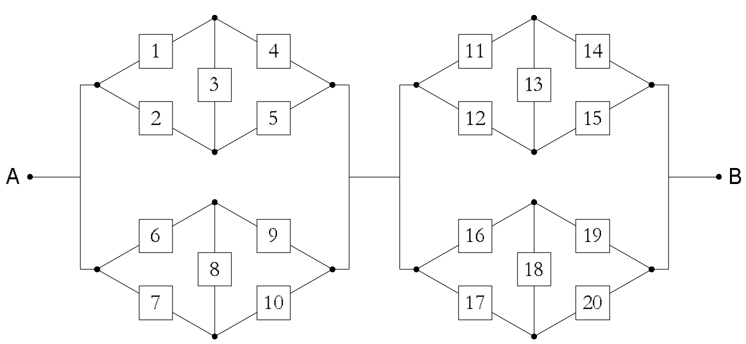
$$d = \Pr\left(\left\{\mathrm{A} \sim \mathrm{B}\right\} \mathrm{U} \left\{\mathrm{A} \sim \Gamma\right\}\right) = 1 - \left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right)$$

Με αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε την αξιοπιστία σε πολύπλοκα συστήματα.

2.3.8. Διάσπαση σε υποσυστήματα (*Modular Decomposition*)

Όταν έχουμε ένα μεγάλο σύστημα μέσα στο οποίο μπορούμε να διακρίνουμε κάποια όμοια υποσυστήματα, τότε κάνουμε διάσπαση του μεγάλου συστήματος σε μικρότερα υποσυστήματα των οποίων η αξιοπιστία υπολογίζεται σχετικά εύκολα. Για παράδειγμα αν έχουμε το σύστημα του Σχήματος 2.17, εύκολα αναγνωρίζουμε τέσσερα υποσυστήματα ίδιας δομής (δομή γέφυρας). Είναι σαφώς πιο εύκολο να βρούμε την αξιοπιστία ενός από τα τέσσερα υποσυστήματα (π.χ. αυτού που περιέχει τις μονάδες 1-5) και μετά να αντικαταστήσουμε τις μονάδες των άλλων υποσυστημάτων, έτσι ο υπολογισμός του συγκεκριμένου συστήματος ανάγεται στον υπολογισμό ενός σειριακού-παράλληλου συστήματος.

Σχήμα 2.17
Διάγραμμα Αξιοπιστίας συστήματος αποτελούμενο από τέσσερα υποσυστήματα ίδιας δομής.



Κεφάλαιο 3

Μέτρα Σπουδαιότητας στη Θεωρία Αξιοπιστίας

Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι η σημαντικότερη ποσότητα για να εκτιμήσουμε αν το σύστημα θα πραγματοποιήσει τη διαδικασία για την οποία κατασκευάστηκε για ένα ικανοποιητικό χρονικό διάστημα.

Όμως ο γενικότερος στόχος της Θεωρίας Αξιοπιστίας δεν είναι η εύρεση απλώς της ποσότητας αυτής, αλλά η βελτίωση της αξιοπιστίας των συστημάτων όπου είναι εφικτό. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί το τελευταίο εγχείρημα είναι η ανακατανομή των μονάδων με τρόπο που να βελτιώνει την αξιοπιστία του συστήματος. Ένας ακόμη σημαντικός στόχος, είναι και η εύρεση της μονάδας που εξ' αιτίας της σταμάτησε η λειτουργία ολόκληρου του συστήματος.

Όταν τίθενται τέτοια προβλήματα τα μέτρα σπουδαιότητας μπορούν να βοηθήσουν στην επίλυσή τους.

Τα μέτρα σπουδαιότητας που κυρίως χρησιμοποιούνται στη θεωρία αξιοπιστίας περιγράφονται στις παραγράφους που ακολουθούν.

3.1. Μέτρο Δομικής Σπουδαιότητας (*Structural Importance*)

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας είναι ένα μέτρο σπουδαιότητας το οποίο εξαρτάται από την τοπολογία του συστήματος. Έτσι, για τον υπολογισμό του δε λαμβάνουμε καθόλου υπόψη μας την αξιοπιστία των μονάδων, αλλά βασιζόμαστε μόνο στη δομή του συστήματος και στη θέση της εκάστοτε μονάδας.

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας μιας μονάδας i δίνεται από τη σχέση:

$$I_i^S = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(\mathrm{g},\mathbf{x})} \left(j\ (1_i, \mathbf{x}) - j\ (0_i, \mathbf{x}) \right)$$

όπου $(\mathrm{g}, \mathbf{x})$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος χωρίς την i μονάδα ,

2^{n-1} είναι το πλήθος των διαφορετικών διανυσμάτων κατάστασης του συστήματος με $n-1$ μονάδες,

$(1_i, \mathbf{x})$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος όταν η i μονάδα λειτουργεί, και

$(0_i, \mathbf{x})$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος όταν η i μονάδα δε λειτουργεί.

Για να εφαρμόσουμε την ιδέα της δομικής σπουδαιότητας στο σχεδιασμό του συστήματος θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις πιο αξιόπιστες μονάδες στις θέσεις του συστήματος με το μεγαλύτερο μέτρο δομικής σπουδαιότητας.

3.2. Μέτρο Σπουδαιότητας του Birnbaum (*Birnbaum Importance*)

Ο Birnbaum (1969), πρότεινε το ακόλουθο μέτρο σπουδαιότητας μιας μονάδας.

Ορισμός. Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μιας μονάδας i δίνεται από τον τύπο:

$$I_i^B = \frac{\partial R_S(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $p_i = \Pr(x_i = 1)$ είναι η αξιοπιστία της i μονάδας,

$\mathbf{p}$ είναι το διάνυσμα της αξιοπιστίας των μονάδων, και

$R_S(\mathbf{p})$ είναι η αξιοπιστία του συστήματος.

Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι, το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μιας μονάδας i, είναι ίσο με την αύξηση που επέρχεται στην αξιοπιστία του συστήματος όταν η αξιοπιστία της μονάδας i βελτιώνεται κατά μία (ποσοστιαία) μονάδα.

Από τη διάσπαση με οδηγό στοιχείο γνωρίζουμε ότι,

$$R_S(\mathbf{p}) = p_i \cdot R_S(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) \cdot R_S(0_i, \mathbf{p}).$$

Άρα το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$I_i^B = \frac{\partial R_S(\mathbf{p})}{\partial p_i} = R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(0_i, \mathbf{p})$$

όπου $(1_i, \mathbf{p})$ είναι το διάνυσμα αξιοπιστίας των μονάδων όταν η i μονάδα λειτουργεί, ενώ

$(0_i, \mathbf{p})$ είναι το διάνυσμα αξιοπιστίας των μονάδων όταν η i μονάδα δε λειτουργεί.

Μια εναλλακτική έκφραση του συγκεκριμένου μέτρου είναι η επόμενη:

$$\begin{aligned} I_i^B &= E\left[j\,(1_i, \mathbf{x}) - j\,(0_i, \mathbf{x}) \right] \\ &= \Pr\left[j\,(1_i, \mathbf{x}) - j\,(0_i, \mathbf{x}) = 1 \right]. \end{aligned}$$

Ένα αρκετά σημαντικό αποτέλεσμα για τον υπολογισμό του συγκεκριμένου μέτρου μέσω των MIS, δίνεται από τους Chadjiconstantinidis and Koutras (1999). Η αξία των συγκεκριμένων τύπων αναδεικνύεται όταν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία συστημάτων με μεγάλο πλήθος μονάδων. Οι δύο τύποι υπολογισμού του μέτρου δίνονται παρακάτω:

$$I_i^B = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}\,.$$

$$I_i^B = \frac{1}{1-p_i} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left(\Lambda_i(1) - \Lambda_i \right) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}\,.$$

όπου $\Lambda_{i,j} = \begin{cases} \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t, & \text{αν } 1 \le i \le j \le n \\ I_{N+1}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$, και $\Delta_t = \Lambda_t(1) - \Lambda_t(0)$.

Εναλλακτικά , το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για τα MIS θα μπορούσε να υπολογισθεί μέσω αναδρομικών σχέσεων, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα (βλ. Chadjiconstantinidis and Koutras (1999)).

<u>Θεώρημα.</u> Έστω $\boldsymbol{\alpha}(t) = \left(a_0(t), a_1(t), ..., a_N(t)\right)'$, και $\boldsymbol{\beta}(t) = \left(b_0(t), b_1(t), ..., b_N(t)\right)'$, $t = 0,1,...,n$ οι ακολουθίες διανυσμάτων που δημιουργήθηκαν από τις αναδρομικές σχέσεις

$$a_j(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t-1)\, p_{ij}(t),$$
$$b_j(t) = \sum_{i=0}^{N} b_i(t-1)\, p_{ji}(n-t+1),$$

όπου $p_{ij}(t)$ είναι το (i, j) στοιχείο του πίνακα Λ_t, με $j = 0,1,\ldots,N,\ t \geq 1$, και αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$ και $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{u}$.

Τότε

$$I_i^B = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} a_r(i-1) d_{r,s}(i)\, b_s(n-i)$$

όπου $d_{r,s}(i)$ είναι το (r,s) στοιχείο του πίνακα $\Delta_i = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0)$.

Για να αποδείξουμε το προηγούμενο θεώρημα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $I_i^B = \boldsymbol{\alpha}'(i-1)\Delta_i \boldsymbol{\beta}(n-i)$, αφού $\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} = \left(a_0(i-1), a_1(i-1), \ldots, a_N(i-1)\right) = \boldsymbol{\alpha}'(i-1)$ και $\Lambda_{i+1}\mathbf{u} = \left(b_0(n-i), b_1(n-i), \ldots, b_N(n-i)\right)' = \boldsymbol{\beta}(n-i)$.

Όπως είναι προφανές, $b_N(t) = \sum_{i=0}^{N} b_i(t-1)\, p_{Ni}(n-t+1) = b_N(t-1) = \cdots = 0$ για κάθε t, αφού $p_{Ni}(n-t+1) = 0$ όταν $i < N$, και $p_{NN}(n-t+1) = 1$, ενώ $d_{N,s}(t) = 0$ για κάθε t και s.

Τέλος, παρατηρούμε ότι $R_S(\mathbf{p}) = b_0(n)$ και $F_S(\mathbf{p}) = 1 - R_S(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N} b_i(n)$.

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μιας μονάδας i, ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να είναι σε τέτοια κατάσταση που η μονάδα i να είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του, πιο συγκεκριμένα

$$I_i^B = \Pr\left[\text{η μονάδα } i \text{ είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του συστήματος}\right].$$

Το γεγονός ότι η μονάδα i είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του συστήματος, δε μας δίνει καμία πληροφορία για την κατάσταση της μονάδας i. Το μέτρο εξαρτάται μόνο από τις υπόλοιπες μονάδες του συστήματος. Για να είναι κρίσιμη μια μονάδα πρέπει να αποτελεί από μόνη της ένα ΕΣΔ ή να είναι τμήμα ενός ΕΣΔ όπου όλες οι υπόλοιπες μονάδες δεν λειτουργούν.

Σύμφωνα με τους Rausand and Høyland (2004) το μέτρο δομικής σπουδαιότητας μιας μονάδας i μπορεί να εκφραστεί μέσω του τύπου:

$$I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j=1/2}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Έτσι, το μέτρο δομικής σπουδαιότητας είναι πολύ εύκολο να προκύψει μέσω του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι όλες οι μονάδες έχουν αξιοπιστία $p_i^* = \frac{1}{2}$.

Βασιζόμενοι στο μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, η πιο σημαντική μονάδα θα έπρεπε να βελτιωθεί για να επιτύχουμε τη μεγαλύτερη βελτίωση στην αξιοπιστία του συστήματος.

3.3. Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης (*Improvement Potential, IP*)

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με συνάρτηση αξιοπιστίας $R_S(\mathbf{p})$. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πόσο αυξάνεται η αξιοπιστία του συστήματος αν η μονάδα i αντικατασταθεί από μία τέλεια μονάδα. Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μας δείχνει ποια είναι η μέγιστη δυνατή βελτίωση που μπορούμε να επιτύχουμε. Τέλεια μονάδα (***perfect component***) λέγεται μία μονάδα που δεν αποτυγχάνει ποτέ και έχει αξιοπιστία $p_i = 1$.

Ορισμός. Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης της μονάδας i ορίζεται ως:

$$I_i^{IP} = R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(\mathbf{p}), \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Δεδομένου ότι το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να γραφεί στη μορφή $I_i^B = \dfrac{R_S(1_i,\mathbf{p}) - R_S(\mathbf{p})}{1-p_i}$, είναι εμφανής η επόμενη σχέση που συνδέει τα δύο μέτρα σπουδαιότητας: $I_i^{IP} = I_i^B(1-p_i)$.

Βέβαια στην πραγματικότητα, καμία μονάδα δεν είναι τέλεια. Θα μπορούσαμε όμως να αντικαταστήσουμε τη μονάδα μας, με μία μονάδα η οποία να έχει τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία. Έστω p_i' η μέγιστη δυνατή αξιοπιστία που μπορεί να έχει μια μονάδα που αντικαθιστά τη μονάδα i. Έτσι υπολογίζουμε την πραγματική (ή αξιόπιστη) δυνατότητα βελτίωσης (*Realistic or Credible Improvement Potential*). Ο τύπος για τον υπολογισμό της είναι ο εξής:

$$I_i^{CIP} = R_S\left(p_i', \mathbf{p}\right) - R_S\left(\mathbf{p}\right), \qquad i = 1, 2, ..., n$$

όπου $\left(p_i', \mathbf{p}\right)$ είναι το διάνυσμα αξιοπιστίας των μονάδων, με την i μονάδα να έχει αξιοπιστία p_i' (την καλύτερη δυνατή).

Σύμφωνα με τους Rausand and Høyland (2004), επειδή η αξιοπιστία του συστήματος είναι γραμμική συνάρτηση του p_i, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_i^{CIP} &= R_S\left(p_i', \mathbf{p}\right) - R_S\left(\mathbf{p}\right) + R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) \\ I_i^{CIP} &= \left(R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(\mathbf{p}\right)\right) - \left(R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(p_i', \mathbf{p}\right)\right) \\ I_i^{CIP} &= I_i^B\left(1 - p_i\right) - I_i'^B\left(1 - p_i'\right). \end{aligned}$$

Όμως επειδή το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum εξαρτάται από όλες τις άλλες μονάδες εκτός αυτής που βρίσκεται στη θέση i, έχουμε $I_i^B = I_i'^B$, άρα

$$I_i^{CIP} = I_i^B\left(p_i' - p_i\right).$$

Σε αντιστοιχία με το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, μπορούμε να υπολογίσουμε και τα μέτρα δυνατότητας βελτίωσης και πραγματικής δυνατότητας βελτίωσης, για συστήματα που μπορούν να εμφυτευτούν σε μαρκοβιανές αλυσίδες. Έτσι τα δύο μέτρα σπουδαιότητας μπορούν να βρεθούν μέσω των σχέσεων

$$I_i^{IP} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i(1) - \Lambda_i\left(p_i\right)\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

$$I_i^{IP} = \left(1 - p_i\right)\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}.$$

$$I_i^{CIP} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i\left(p_i'\right) - \Lambda_i\left(p_i\right)\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

$$I_i^{CIP} = \left(p_i' - p_i\right)\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}.$$

3.4. Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας (*Criticality Importance*)

Το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας είναι ένα μέτρο σπουδαιότητας που είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για να δώσουμε προτεραιότητα σε πράξεις συντήρησης.

Υπάρχουν δύο ορισμοί για τη σπουδαιότητα κρισιμότητας. Ο ένας είναι σε όρους λειτουργίας του συστήματος, ενώ ο άλλος σε όρους μη λειτουργίας του.

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i **σε όρους λειτουργίας** του συστήματος, ορίζεται ως η πιθανότητα η μονάδα αυτή να είναι κρίσιμή στη λειτουργία του συστήματος, και να λειτουργεί όταν το σύστημα λειτουργεί. Έτσι, αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά αυτής της μονάδας στη λειτουργία του συστήματος, όταν το σύστημα λειτουργεί. Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i συμβολίζεται με I_i^{CS}, και μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης

$$I_i^{CS} = \frac{R_S(1_i,\mathbf{p}) - R_S(0_i,\mathbf{p})}{R_S(\mathbf{p})} p_i = I_i^B \frac{p_i}{R_S(\mathbf{p})} = I_i^{IP} \frac{p_i}{1-p_i} \frac{1}{R_S(\mathbf{p})}.$$

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας του συστήματος, μετράει την πιθανότητα η μονάδα i να λειτουργεί και να είναι αυτή η οποία ευθύνεται για τη λειτουργία του συστήματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας του συστήματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα η μονάδα i να είναι αυτή που συμβάλει με τρόπο καθοριστικό στη λειτουργία του συστήματος.

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i **σε όρους μη λειτουργίας** του συστήματος, ορίζεται ως η πιθανότητα η μονάδα αυτή να είναι κρίσιμη στη λειτουργία του συστήματος, και να μη λειτουργεί όταν το σύστημα δε λειτουργεί. Έτσι, αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά αυτής της μονάδας στην αποτυχία (μη λειτουργία) του συστήματος, όταν το σύστημα δε λειτουργεί. Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i συμβολίζεται με I_i^{CF}, και μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης

$$I_i^{CF} = \frac{R_S(1_i,\mathbf{p}) - R_S(0_i,\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})}(1-p_i) = I_i^B \frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})} = I_i^{IP} \frac{1}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος, είναι με άλλα λόγια η πιθανότητα η μονάδα i να προκάλεσε τη μη λειτουργία (αποτυχία) του συστήματος. Έτσι, όταν η μονάδα i επισκευαστεί, το σύστημα θα συνεχίσει να λειτουργεί. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η σπουδαιότητα κρισιμότητας χρησιμοποιείται για να δώσουμε προτεραιότητα σε πράξεις συντήρησης.

Κάνοντας χρήση της διάσπασης με οδηγό στοιχείο τα δύο μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας μπορούν να υπολογιστούν με χρήση των σχέσεων

$$I_i^{CS} = \frac{R_S(\mathbf{p}) - R_S(0_i, \mathbf{p})}{R_S(\mathbf{p})} = 1 - \frac{R_S(0_i, \mathbf{p})}{R_S(\mathbf{p})},$$

$$I_i^{CF} = \frac{R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(\mathbf{p})}{1 - R_S(\mathbf{p})} = 1 - \frac{1 - R_S(1_i, \mathbf{p})}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

Αντίστοιχα και αυτά τα μέτρα μπορούν να εκφραστούν για *MIS* συστήματα μέσω των επόμενων σχέσεων:

$$I_i^{CS} = \frac{p_i}{R_S(\mathbf{p})} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

$$I_i^{CS} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left(\Lambda_i(p_i) - \Lambda_i(0)\right) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

και

$$I_i^{CF} = \frac{1 - p_i}{1 - R_S(\mathbf{p})} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

$$I_i^{CF} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_N\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left(\Lambda_i(1) - \Lambda_i(p_i)\right) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}.$$

Ένας άλλος τρόπος ορισμού των δύο μέτρων σπουδαιότητας κρισιμότητας είναι ο ακόλουθος.

Έστω το ενδεχόμενο $C(1_i, \mathbf{x})$ να δηλώνει το ενδεχόμενο το σύστημα να είναι σε τέτοια κατάσταση όπου η μονάδα i να είναι κρίσιμη. Τότε, $\Pr\left[C(1_i, \mathbf{x})\right] = I_i^B$.

Το γεγονός ότι η μονάδα i είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του συστήματος, δε μας δίνει κάποια πληροφορία για τη κατάσταση της μονάδας i. Αυτό ισχύει επειδή, οι μονάδες του συστήματος είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, οπότε το ενδεχόμενο $C(1_i, \mathbf{x})$ είναι ανεξάρτητο της κατάσταση της μονάδας i.

Η πιθανότητα η μονάδα i να είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του συστήματος, και ταυτόχρονα η μονάδα i να μη λειτουργεί, δίνεται από τη σχέση,

$$\Pr\left[C(1_i, \mathbf{x}) \mathrm{I} \{x_i = 0\}\right] = I_i^B (1 - p_i).$$

Η πιθανότητα να μη λειτουργεί το σύστημα, γνωστή ως αναξιοπιστία του συστήματος, δίνεται από τον τύπο,

$$\Pr[\text{σύστημα δε λειτουργεί}] = 1 - R_s(\mathbf{p}) = \Pr[\varphi(\mathbf{x}) = 0],$$

οπότε θα έχουμε

$$\Pr[\text{η μονάδα } i \text{ είναι κρίσιμη} \mid \text{σύστημα δε λειτουργεί}] = \Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0] =$$

$$= \frac{\Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \cap \varphi(\mathbf{x}) = 0]}{\Pr[\varphi(\mathbf{x}) = 0]} = \frac{\Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \cap \{x_i = 0\}]}{\Pr[\varphi(\mathbf{x}) = 0]} =$$

$$= \frac{I_i^B (1 - p_i)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

Η πιθανότητα η μονάδα i να είναι κρίσιμη για τη λειτουργία του συστήματος, και ταυτόχρονα η μονάδα i να λειτουργεί, δίνεται από τη σχέση,

$$\Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \cap \{x_i = 1\}] = I_i^B p_i .$$

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε

$$\Pr[\text{η μονάδα } i \text{ είναι κρίσιμη} \mid \text{σύστημα λειτουργεί}] = \Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x}) = 1] =$$

$$= \frac{\Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \cap \varphi(\mathbf{x}) = 1]}{\Pr[\varphi(\mathbf{x}) = 1]} = \frac{\Pr[C(1_i, \mathbf{x}) \cap \{x_i = 1\}]}{\Pr[\varphi(\mathbf{x}) = 1]} =$$

$$= \frac{I_i^B p_i}{R_S(\mathbf{p})}.$$

3.5. Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely (*Fussell-Vesely's Importance*)

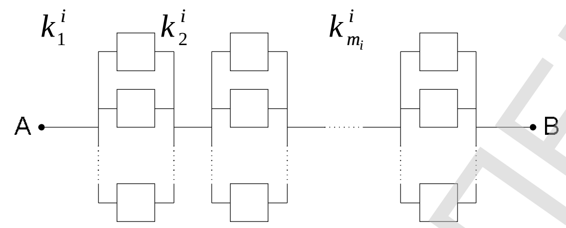
Οι Fussell (1975) και Vesely πρότειναν το ακόλουθο μέτρο σπουδαιότητας της μονάδας i.

<u>Ορισμός.</u> Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely ορίζεται ως η πιθανότητα ένα τουλάχιστο σύνολο διακοπής το οποίο περιέχει τη μονάδα i να μη λειτουργεί (όλες οι μονάδες έχουν παύσει να λειτουργούν), δοθέντος ότι το σύστημα δε λειτουργεί.

Το μέτρο των Fussell-Vesely λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι μια μονάδα συμβάλει στην αποτυχία (μη λειτουργία) του συστήματος.

Έστω ένα σύστημα με l ελάχιστα σύνολα διακοπής, $K_1, K_2, \ldots, K_l$. Το σύστημα μπορεί να αναπαραχθεί από ένα ιδεατό σειριακό σύστημα l παράλληλων υποσυστημάτων, όπου κάθε υποσύστημα περιέχει τις μονάδες ενός ελάχιστου συνόλου διακοπής, τοποθετημένες παράλληλα. Το σύστημα αυτό παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 3.1
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Ιδεατού Σειριακού-Παράλληλου Συστήματος



Εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

D_i: το ενδεχόμενο, ένα ΕΣΔ το οποίο περιέχει τη μονάδα i να μη λειτουργεί,

C: το ενδεχόμενο το σύστημα να μη λειτουργεί,

m_i: ο αριθμός των ΕΣΔ που περιέχουν τη μονάδα i, και

E_j^i: το ενδεχόμενο το j-οστό ΕΣΔ ανάμεσα στα ΕΣΔ που περιέχουν τη μονάδα i να μη λειτουργεί, για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m_i$.

Τότε το μέτρο των Fussell-Vesely μπορεί να εκφρασθεί μέσω της σχέσης:

$$I_i^{FV} = \Pr(D_i \mid C) = \frac{\Pr(D_i \cap C)}{\Pr(C)},$$

ή ισοδύναμα, αφού $D_i \subseteq C$,

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)}.$$

Το ενδεχόμενο D_i παρατηρείται, αν παρατηρηθεί τουλάχιστο ένα από τα ενδεχόμενα E_j^i, $j = 1, 2, \ldots, m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, $D_i = E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{m_i}^i$.

Λόγω της ανεξαρτησίας που υπάρχει μεταξύ των μονάδων έχουμε

$$\Pr(C) = \Pr\left(j\ (\mathbf{x}) = 0\right) = 1 - R_S(\mathbf{p})$$

και

$$\Pr\left(E_j^i\right) = \Pr\left(k_j^i(\mathbf{x}) = 0\right) = \prod\nolimits_{l \in K_j^i} (1 - p_l)$$

όπου K_j^i είναι το j-οστό ΕΣΔ το οποίο περιέχει τη μονάδα i, και k_j^i η αντίστοιχη παράλληλη δομή διακοπής (cut parallel structure).

Όμως, επειδή μία μονάδα συνήθως ανήκει σε περισσότερα από ένα ΕΣΔ, τα ενδεχόμενα $E_j^i, j = 1, 2, ..., m_i$, δεν είναι αναγκαία ανεξάρτητα μεταξύ τους, ακόμα και όταν όλες οι μονάδες είναι ανεξάρτητες.

Παρά το γεγονός ότι οι μονάδες είναι ανεξάρτητες οι παράλληλες δομές διακοπής k_j^i θα είναι συσχετισμένες. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\Pr(D_i) \leq 1 - \prod\nolimits_{j=1}^{m_i} 1 - \Pr\left(E_j^i\right).$$

Όταν οι αξιοπιστίες των μονάδων είναι υψηλές, ισχύει προσεγγιστικά η ισότητα. Τότε,

$$I_i^{FV} \approx \frac{1 - \prod\nolimits_{j=1}^{m_i}\left(1 - \Pr\left(E_j^i\right)\right)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

Τέλος μια πιο αδρή εκτίμηση δίνεται από την επόμενη πιο απλή σχέση

$$I_i^{FV} \approx \frac{\sum\nolimits_{j=1}^{m_i} \Pr\left(E_j^i\right)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

3.6. Μέτρο επίτευξης κινδύνου (*Risk Achievement Worth, RAW*)

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου, προτάθηκε ως ένα μέτρο σπουδαιότητας στις αξιολογήσεις ασφάλειας με χρήση μοντέλων πιθανότητας (*probabilistic safety assessments*) των σταθμών πυρηνικής ενέργειας. Το μέτρο αυτό ορίζεται με χρήση ορολογίας ανάλυσης κινδύνου, όμως εδώ χρησιμοποιούμε την ορολογία της θεωρίας αξιοπιστίας.

Ορισμός. Το μέτρο επίτευξης κινδύνου της μονάδας i, ορίζεται ως

$$I_i^{RAW} = \frac{1-R_S(0_i,\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου είναι ο λόγος της αναξιοπιστίας του συστήματος όταν η μονάδα i δε λειτουργεί, προς την πραγματική αναξιοπιστία του συστήματος. Έτσι το μέτρο αυτό αντιπροσωπεύει την αξία της μονάδας i στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας του συστήματος.

3.7. Μέτρο ελάττωσης κινδύνου (*Risk Reduction Worth, RRW*)

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου χρησιμοποιείται όπως και το μέτρο επίτευξης κινδύνου, σαν ένα μέτρο σπουδαιότητας στις αξιολογήσεις ασφάλειας με χρήση μοντέλων πιθανότητας.

Ορισμός. Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου της μονάδας i, ορίζεται ως

$$I_i^{RRW} = \frac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(1_i,\mathbf{p})}, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου είναι ο λόγος της αναξιοπιστίας του συστήματος, προς την αναξιοπιστία του συστήματος όταν η μονάδα i αντικατασταθεί από μια τέλεια μονάδα. Σύμφωνα με τους Rausand and Høyland (2004), σε κάποιες εφαρμογές, η αποτυχία μιας «μονάδας» μπορεί να είναι ένα λάθος του χειριστή ή κάποιο εξωτερικό γεγονός. Αν τέτοιες «μονάδες» μπορούν να αφαιρεθούν από το σύστημα, εξουδετερώνοντας τα λάθη των χειριστών ή τις επιδράσεις των εξωτερικών γεγονότων, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν αντικατάσταση μιας μονάδας με μια τέλεια μονάδα.

3.8. Μέτρο Σπουδαιότητας Δεσμού (*Link Importance, LI*) και Μέτρο Σπουδαιότητας Συνόλου Λειτουργίας-Συνόλου Διακοπής (*Pathset-Cutset Importance, PCI*)

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού LI προτάθηκε από τους Page and Perry (1994). Τα υπόλοιπα μέτρα σπουδαιότητας παρέχουν τιμές για κάθε μονάδα, έτσι ώστε να μπορεί να προσδιορισθεί μια πλήρης διάταξη (όπου πιθανότατα θα υπάρχουν δεσμοί) της σπουδαιότητας των μονάδων. Η LI δεν υπολογίζει μία τιμή, αλλά παρέχει μερική διάταξη. Υπάρχουν δύο ορισμοί της σπουδαιότητας δεσμού. Εδώ, ακολουθώντας το συμβολισμό του

Armstrong (1997), παρουσιάζουμε το πρώτο μέτρο ως μέτρο σπουδαιότητας δεσμού LI και το δεύτερο ως μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής PCI .

Ορισμός. Για την ποσότητα LI , ορίζεται ότι $LI_i \geq LI_j$ αν για κάθε ανάθεση πιθανοτήτων έτσι ώστε:

- Όλες οι καταστάσεις όλων των μονάδων να είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.
- Αν $p_i = p_j$ για κάθε i, j , να ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες

  (1) $R_S\left(0_j, \mathbf{p}\right) \geq R_S\left(0_i, \mathbf{p}\right)$,

  (2) $R_S\left(1_j, \mathbf{p}\right) \leq R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right)$.

Αν $LI_i \geq LI_j$ και $LI_i \leq LI_j$ τότε οι μονάδες i και j είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, και θα γράφουμε $LI_i \approx LI_j$.

Η διαισθητική ερμηνεία πίσω από τη σπουδαιότητα δεσμού είναι ότι, η μονάδα i είναι πιο σημαντική από τη μονάδα j αν η μονάδα i δημιουργεί μεγαλύτερη μεταβολή στην αξιοπιστία του συστήματος μεταξύ των δύο περιπτώσεων, λειτουργίας και μη-λειτουργίας της. Από τον ορισμό αφήνεται να εννοηθεί ότι όλες οι μονάδες είναι στοχαστικά ισόνομες, και δίνει μια διάταξη μόνο αν και οι δύο ανισότητες ισχύουν για κάθε αξιοπιστία. Αν και η γενικότερη ιδέα του μέτρου σπουδαιότητας δεσμού μοιάζει με αυτήν της σπουδαιότητας του Birnbaum, ωστόσο διαφέρουν στο γεγονός ότι, η σπουδαιότητα του Birnbaum υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο διάνυσμα αξιοπιστίας των μονάδων, οι αξιοπιστίες των οποίων δεν είναι αναγκαίο να είναι ίσες.

Το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής ορίζεται μόνο με όρους τοπολογίας δικτύου και αγνοεί τις αξιοπιστίες των μονάδων, έτσι η λογική του είναι παρόμοια με αυτή του μέτρου δομικής σπουδαιότητας. Η ιδέα πίσω από το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής είναι να εξεταστεί το μέγεθος των συνόλων λειτουργίας και των συνόλων διακοπής στα οποία δύο μονάδες αποτελούν μέρος τους. Η μονάδα η οποία ανήκει σε μικρότερου μεγέθους σύνολα τείνει να είναι πιο σημαντική για τη λειτουργία του συστήματος από τη μονάδα εκείνη που ανήκει σε μεγαλύτερου μεγέθους σύνολα. Αυτό ισχύει επειδή η κατάσταση μιας μονάδας είναι συγκριτικά λιγότερο σημαντική σε ένα μεγαλύτερο σύνολο.

Ορισμός. Για την ποσότητα PCI , ορίζεται ότι $PCI_i \geq PCI_j$ αν ισχύουν τα παρακάτω

(1) {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΛ, όπου $x_i = 1$} ≤ { AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΛ, όπου $x_j = 1$}. Αν ισχύει η ισότητα, τότε απαιτείται επιπλέον {ο αριθμός των ΜΜΣΛ, όπου $x_i = 1$} ≥ {ο αριθμός των ΜΜΣΛ, όπου $x_j = 1$}

(2) {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΔ, όπου $x_i = 1$} ≥ {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΔ, όπου $x_j = 1$}. Αν ισχύει η ισότητα, τότε απαιτείται επιπλέον {ο αριθμός των ΜΜΣΔ, όπου $x_i = 1$} ≤ {ο αριθμός των ΜΜΣΔ, όπου $x_j = 1$}

(3) {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΛ, όπου $x_i = 0$ } ≥ {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΛ, όπου $x_j = 0$ }. Αν ισχύει η ισότητα, τότε απαιτείται επιπλέον {ο αριθμός των ΜΜΣΛ, όπου $x_i = 0$ } ≤ {ο αριθμός των ΜΜΣΛ, όπου $x_j = 0$ }

(4) {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΔ, όπου $x_i = 0$ } ≤ {AM που υπάρχουν στο ΜΜΣΔ, όπου $x_j = 0$ }. Αν ισχύει η ισότητα, τότε απαιτείται επιπλέον {ο αριθμός των ΜΜΣΔ, όπου $x_i = 0$ } ≥ {ο αριθμός των ΜΜΣΔ, όπου $x_j = 0$ }

όπου AM: ο αριθμός των μονάδων,

ΜΜΣΛ: μικρότερου μεγέθους σύνολο λειτουργίας, και

ΜΜΣΔ: μικρότερου μεγέθους σύνολο διακοπής.

Αν $PCI_i \geq PCI_j$ και $PCI_i \leq PCI_j$ τότε οι μονάδες i και j είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, έτσι γράφουμε $PCI_i \approx PCI_j$.

Τα μέτρα σπουδαιότητας δεσμού LI και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής PCI δεν ορίζουν πλήρη διάταξη αλλά μερική. Έτσι μπορεί να υπάρχουν δύο μονάδες, έστω i, j για τις οποίες δεν ισχύει $LI_i \geq LI_j$, ή $LI_i \leq LI_j$, αλλά ούτε $LI_i \approx LI_j$. Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής PCI . Σύμφωνα με τον Armstrong (1997), το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού LI είναι πιο αυστηρό και απαιτητικό από το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής PCI . Ως αποτέλεσμα, η χρήση του LI μας δίνει λιγότερες ισότητες ή δεσμούς από το PCI , όμως είναι πιο πιθανό να μην μπορέσει να υπάρξει καμία διάταξη.

Σύμφωνα με Page and Perry (1994), υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των δύο μέτρων, LI και PCI . Έτσι:

$$LI_i \geq LI_j \Rightarrow PCI_i \geq PCI_j,$$
$$LI_i \approx LI_j \Rightarrow PCI_i \approx PCI_j.$$

Τέλος ο Armstrong (1997), αναφέρει ότι:

$$LI_i \geq LI_j \Rightarrow I_i^S \geq I_j^S,$$
$$LI_i \approx LI_j \Rightarrow I_i^S = I_j^S,$$

ενώ όταν οι μονάδες είναι ισόνομες, ισχύουν τα εξής

$$LI_i \geq LI_j \Rightarrow I_i^B \geq I_j^B,$$
$$LI_i \approx LI_j \Rightarrow I_i^B = I_j^B.$$

3.9. Από κοινού Μέτρο Σπουδαιότητας Αξιοπιστίας (*Joint Reliability Importance, JRI*) και Από κοινού Μέτρο Δομικής Σπουδαιότητας Αξιοπιστίας (*Joint Structural Importance, JSI*)

Οι Hong and Lie (1993) πρότειναν την έννοια της από κοινού σπουδαιότητας δύο μονάδων. Αυτό το μέτρο σπουδαιότητας δίνεται από τον επόμενο τύπο:

$$JRI_{i,j} = \frac{\partial^2 R_S(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}$$

όπου $R_S(\mathbf{p})$ είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος, και
p_i, p_j είναι οι αξιοπιστίες των μονάδων i και j αντίστοιχα.

Ο Armstrong (1995) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό όταν οι μονάδες του συστήματος είναι ανεξάρτητες:

$$JRI_{i,j} = R_S(1_i, 1_j, \mathbf{p}) + R_S(0_i, 0_j, \mathbf{p}) - R_S(1_i, 0_j, \mathbf{p}) - R_S(0_i, 1_j, \mathbf{p})$$

όπου $(1_i, 1_j, \mathbf{p})$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων με τις i και j μονάδες να λειτουργούν.

$\left(0_i, 0_j, \mathbf{p}\right)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων με τις i και j μονάδες να μην λειτουργούν.

$\left(0_i, 1_j, \mathbf{p}\right)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων με την i μονάδα να μη λειτουργεί, και τη j μονάδα να λειτουργεί.

$\left(1_i, 0_j, \mathbf{p}\right)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων με την i μονάδα να λειτουργεί, και τη j μονάδα να μη λειτουργεί.

Το μέτρο από κοινού σπουδαιότητας, μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $\left[-1, +1\right]$.

Αφού, όπως είδαμε στα προηγούμενα, ισχύει $I_i^B = R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(0_i, \mathbf{p}\right)$, το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας μπορεί να ερμηνευτεί ως η μεταβολή του μέτρου του Birnbaum μιας μονάδας i που προκλήθηκε από τη μετάβαση της j μονάδας, από κατάσταση λειτουργίας σε κατάσταση μη λειτουργίας. Το μέτρο από κοινού σπουδαιότητας αξιοπιστίας μας δείχνει ότι μια μονάδα είναι περισσότερο ή λιγότερο σημαντική, ή έχει την ίδια σημαντικότητα όταν η άλλη λειτουργεί. Πιο συγκεκριμένα,

(α) αν $JRI > 0$, τότε η μία μονάδα γίνεται πιο σημαντική όταν η άλλη λειτουργεί (συνέργεια, *synergy*),

(β) αν $JRI < 0$, τότε η μία μονάδα γίνεται λιγότερο σημαντική όταν η άλλη λειτουργεί (μειούμενη ανταπόδοση, *diminishing returns*), και

(γ) αν $JRI = 0$, τότε η σπουδαιότητα της μίας μονάδας δεν επηρεάζεται από τη λειτουργία της άλλης.

Αν θεωρήσουμε ότι όλες τις μονάδες έχουν αξιοπιστία $p_i = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ..., n$, τότε από το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, προκύπτει το μέτρο δομικής σπουδαιότητας. Αντίστοιχα, από το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας, προκύπτει το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας.

Το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας ορίζεται ως εξής:

$$JSI_{i,j} = JRI_{i,j}\Big|_{p_k = 1/2}, \ i \neq j, \ i, j, k = 1, 2, ..., n$$

Όπως και κάποια από τα προηγούμενα μέτρα, έτσι και τα από κοινού μέτρα σπουδαιότητας και δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας, μπορούν να υπολογισθούν για συστήματα εμφυτευμένα σε μαρκοβιανές αλυσίδες. Έτσι, όταν $i < j$ έχουμε:

$$JRI_{i,j} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,j-1} \Delta_j \Lambda_{j+1,n} \mathbf{u}.$$

$$JRI_{i,j} = \frac{1}{(1-p_i)(1-p_j)} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left(\Lambda_i(1) - \Lambda_i\right) \Lambda_{i+1,j-1} \left(\Lambda_j(1) - \Lambda_j\right) \Lambda_{j+1,n} \mathbf{u}.$$

Όπου

$$\Lambda_{i,j} = \begin{cases} \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t, & \text{αν } 1 \le i \le j \le n \\ I_{N+1}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \text{ και } \Delta_t = \Lambda_t(1) - \Lambda_t(0).$$

Η επόμενη πρόταση δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του από κοινού μέτρου σπουδαιότητας αξιοπιστίας με χρήση των αναδρομικών σχέσεων.

<u>Πρόταση.</u> Έστω $\boldsymbol{\alpha}(t) = \left(a_0(t), a_1(t), \ldots, a_N(t)\right)'$, και $\boldsymbol{\beta}(t) = \left(b_0(t), b_1(t), \ldots, b_N(t)\right)'$, $t = 0,1,\ldots,n$, οι ακολουθίες διανυσμάτων που προκύπτουν από τις αναδρομικές σχέσεις

$$a_j(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t-1)\, p_{ij}(t),$$
$$b_j(t) = \sum_{i=0}^{N} b_i(t-1)\, p_{ji}(n-t+1),$$

όπου $p_{ij}(t)$ είναι το (i,j) στοιχείο του πίνακα Λ_t, με $j = 0,1,\ldots,N,\ t \ge 1$, και αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\pi}_0$ και $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{u}$.

Τότε

$$JRI_{i,j} = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} a_r(i-1) d_{r,s}(i)\, l_{s,t}(i+1, j-1) d_{t,u}(j)\, b_u(n-j)$$

όπου

$d_{r,s}(i)$ είναι το (r,s) στοιχείο του πίνακα $\Delta_i = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0)$,

$l_{r,s}(i,j)$ να είναι το (r,s) στοιχείο του πίνακα $\Lambda_{i,j}$.

3.10. Μέτρο σχετικής κρισιμότητας (*Relative Criticality Measure*)

Οι Boland, Proschan and Tong (1989), πρότειναν την έννοια της σχετικής κρισιμότητας δύο μονάδων σε ένα μονότονο σύστημα. Όπως και οι έννοιες της σπουδαιότητας δεσμού και της σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, η σχετική κρισιμότητα δεν προσδιορίζει μια πλήρη διάταξη, αλλά παρέχει μερική διάταξη.

Το μέτρο αυτό είναι κατάλληλο για τον βέλτιστο σχεδιασμό συστημάτων αξιοπιστίας (*optimal system design*).

<u>Ορισμός.</u> Η μονάδα i θα λέγεται πιο κρίσιμη από τη μονάδα j για τη συνάρτηση δομής j (συμβολισμός: $I_i^{RC} > I_j^{RC}$) αν ισχύει

$$j\left(1_i, 0_j, \mathbf{x}\right) \geq j\left(0_i, 1_j, \mathbf{x}\right)$$

για κάθε $\left(g, g_j, \mathbf{x}\right)$ και ισχύει γνήσια ανισότητα τουλάχιστο για ένα $\left(g, g_j, \mathbf{x}\right)$,

όπου $\left(g, g_j, \mathbf{x}\right)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος με δεδομένες τις καταστάσεις των μονάδων i και j.

Αν ισχύει η ισότητα $j\left(1_i, 0_j, \mathbf{x}\right) = j\left(0_i, 1_j, \mathbf{x}\right)$ για κάθε $\left(g, g_j, \mathbf{x}\right)$ τότε οι δύο μονάδες θεωρούνται ισοδύναμες ως προς την κρισιμότητά τους και γράφουμε $I_i^{RC} \approx I_j^{RC}$.

Όπως στα μέτρα σπουδαιότητας δεσμού και σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, και σε αυτό το μέτρο είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχει διάταξη για κάποια ζεύγη μονάδων.

Οι Boland, Proschan and Tong (1989), έδωσαν μια μέθοδο εύρεσης της σχετικής κρισιμότητας μέσω των ΕΣΛ και των ΕΣΔ, όπως περιγράφεται στα επόμενα θεωρήματα.

<u>Θεώρημα.</u> Έστω $P_1, P_2, \ldots, P_n$ τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας ενός μονότονου συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες $1, 2, \ldots, n$ και έχει συνάρτηση δομής $j\left(\mathbf{x}\right)$. Θεωρούμε $A_i = \left\{P_k : i \in P_k, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Αν το A_j είναι γνήσιο υποσύνολο του A_i ($A_j \subset A_i$) τότε $I_i^{RC} > I_j^{RC}$.

Θεώρημα. Έστω $K_1, K_2, \ldots, K_n$ τα ελάχιστα σύνολα διακοπής ενός μονότονου συστήματος που αποτελείται από τις μονάδες $1, 2, \ldots, n$ και έχει συνάρτηση δομής $j\left(\mathbf{x}\right)$. Θεωρούμε $A_i = \left\{K_k : i \in K_k, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Αν το A_j είναι γνήσιο υποσύνολο του A_i ($A_j \subset A_i$) τότε $I_i^{RC} > I_j^{RC}$.

Σημειώνεται ότι ισχύει και η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$I_i^{RC} > I_j^{RC} \Rightarrow I_i^S > I_j^S ,$$

που σημαίνει ότι όποια διάταξη επιτύχουμε με το μέτρο σχετικής κρισιμότητας σίγουρα αυτή θα ισχύει και για το μέτρο δομικής σπουδαιότητας.

Κεφάλαιο 4

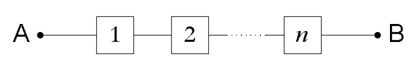
Συστήματα Αξιοπιστίας και Μέτρα Σπουδαιότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μέτρα σπουδαιότητας που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για τα πιο σημαντικά συστήματα αξιοπιστίας, με στόχο να εξάγουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των μονάδων σε κάθε σύστημα για το αντίστοιχο μέτρο σπουδαιότητας.

4.1. Σειριακό Σύστημα (*Series System*)

Το σειριακό σύστημα, όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 2, λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν όλες οι μονάδες του. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι μια ειδική περίπτωση του ***k**-από-τα-**n***: ***F***(*G*) συστήματος, συγκεκριμένα είναι ένα σύστημα 1-από-τα-***n***: ***F***, αντίστοιχα ***n***-από-τα-***n***: ***G***.

Σχήμα 4.1
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Σειριακού Συστήματος



Σε αυτό το σύστημα είναι διαισθητικά προφανές ότι όλες οι μονάδες είναι εξίσου σημαντικές για τη λειτουργία του συστήματος. Έστω ότι έχουμε τις μονάδες $1, 2, \ldots, n$, με αξιοπιστίες $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Τότε η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^{n} p_j$.

Ας παραθέσουμε όμως τα διάφορα μέτρα σπουδαιότητας για το εν λόγω σύστημα, μελετώντας αρχικά την περίπτωση όπου δεν έχουμε *iid* μονάδες.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum και μέτρο δομικής σπουδαιότητας**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μιας μονάδας i προκύπτει από τη σχέση:

$$I_i^B = R_S(1_i,\mathbf{p}) - \cancel{R_S(0_i,\mathbf{p})} = R_S(1_i,\mathbf{p}) \Rightarrow I_i^B = \frac{1}{p_i}\prod_{j=1}^{n} p_j = \frac{R_S(\mathbf{p})}{p_i}.$$

Βάσει αυτού του μέτρου, σπουδαιότερη είναι η μονάδα η οποία έχει τη μικρότερη αξιοπιστία.

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί μέσω του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, θέτοντας τις αξιοπιστίες όλων των μονάδων ίσες με $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε, $I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j=1/2,\ j=1,2,\dots,n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$I_i^{IP} = I_i^B(1-p_i) = \frac{1-p_i}{p_i}\prod_{j=1}^{n} p_j .$$

Το μέτρο αυτό μας δίνει την ίδια διάταξη με αυτή του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, αφού $p_i < p_j \Rightarrow \frac{1}{p_i} > \frac{1}{p_j}$ και $(1-p_i) > (1-p_j) \Rightarrow \frac{1-p_i}{p_i} > \frac{1-p_j}{p_j} \Rightarrow I_i^{IP} > I_j^{IP}$.

Το μέτρο πραγματικής δυνατότητας βελτίωσης μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$I_i^{CIP} = I_i^B(p_i' - p_i) = \frac{p_i' - p_i}{p_i}\prod_{j=1}^{n} p_j$$

Σε αυτό το μέτρο είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $p_i' = p',\ i = 1,2,\dots,n$. Τότε, όπως το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, και αυτό το μέτρο μας δίνει την ίδια διάταξη με αυτή του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum.

• **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i σε όρους λειτουργίας του συστήματος, μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης $I_i^{CS} = I_i^B \dfrac{p_i}{R_S(\mathbf{p})}$. Όμως $I_i^B = \dfrac{R_S(\mathbf{p})}{p_i}$ οπότε για το σειριακό σύστημα η σπουδαιότητα κρισιμότητας κάθε μονάδας σε όρους λειτουργίας του συστήματος είναι ίση με τη μονάδα δηλαδή $I_i^{CS} = 1,\ \ i = 1,2,...,n$. Όπως και στο μέτρο δομικής σπουδαιότητας, δεν υπάρχει κάποια διάταξη ως προς τη σπουδαιότητα των μονάδων του σειριακού συστήματος.

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος, μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης

$$I_i^{CF} = I_i^B \frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{R_S(\mathbf{p})}{p_i}\frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1-p_i}{p_i}\frac{R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Όπως παρατηρούμε, και αυτό το μέτρο έχει την ίδια διάταξη που έχει το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum.

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει n ελάχιστα σύνολα διακοπής τα $K_i = \{i\},\ \ i = 1,2,...,n$. Έτσι το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(E_1^i)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_i=0)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Όπως παρατηρούμε και αυτό το μέτρο σπουδαιότητας μας δίνει την ίδια διάταξη με τη σπουδαιότητα κατά Birnbaum.

• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου της μονάδας i, μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης,

$$I_i^{RAW} = \frac{1-R_S(0_i,\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Με αυτό το μέτρο δε μπορεί να υπάρξει διάταξη ως προς τη σπουδαιότητα των μονάδων σε ένα σειριακό σύστημα.

• **Μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου της μονάδας i, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της σχέσης,

$$I_i^{RRW} = \frac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(1_i,\mathbf{p})} = \frac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})/p_i}.$$

Το μέτρο αυτό μας δίνει την ίδια διάταξη με αυτή του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, αφού

$$p_i < p_j \Rightarrow \frac{1}{p_i} > \frac{1}{p_j} \Rightarrow \frac{R_S(\mathbf{p})}{p_i} > \frac{R_S(\mathbf{p})}{p_j} \Rightarrow 1-\frac{R_S(\mathbf{p})}{p_i} < 1-\frac{R_S(\mathbf{p})}{p_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-R_S(\mathbf{p})/p_i} > \frac{1}{1-R_S(\mathbf{p})/p_j} \Rightarrow I_i^{RRW} > I_j^{RRW}.$$

• **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού προϋποθέτει ότι οι δύο μονάδες στις οποίες θα επιχειρήσουμε διάταξη, έχουν την ίδια αξιοπιστία. Έτσι, στη περίπτωση που υπάρχουν δύο μονάδες, οι i, j, που έχουν την ίδια αξιοπιστία, $p_i = p_j$, τότε, $LI_i \approx LI_j$, αφού ισχύει η ισότητα. $R_S(1_i,\mathbf{p}) = \frac{1}{p_i}\prod_{l=1}^{n} p_l \overset{p_i=p_j}{=} \frac{1}{p_j}\prod_{l=1}^{n} p_l = R_S(1_j,\mathbf{p})$ και $R_S(0_i,\mathbf{p}) = R_S(0_j,\mathbf{p}) = 0$.

Σύμφωνα με τους Page and Perry (1994), όταν $LI_i \approx LI_j \Rightarrow PCI_i \approx PCI_j$, άρα όλες οι μονάδες είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής.

• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας δύο μονάδων i, j δίνεται από την επόμενη σχέση

$$JRI_{i,j} = R_S(1_i,1_j,\mathbf{p}) + \cancel{R_S(0_i,0_j,\mathbf{p})} - \cancel{R_S(1_i,0_j,\mathbf{p})} - \cancel{R_S(0_i,1_j,\mathbf{p})} = \frac{1}{p_i p_j} R_S(\mathbf{p}),$$

ενώ το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης $JSI_{i,j} = JRI_{i,j}\big|_{p_k=1/2}$, $i \neq j,\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $JSI_{i,j} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$ για όλα τα $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

• Μέτρο σχετικής κρισιμότητας

Για το μέτρο σχετικής κρισιμότητας, γνωρίζουμε ότι $j\left(1_i, 0_j, \mathbf{x}\right) = j\left(0_i, 1_j, \mathbf{x}\right), \forall i, j$, αφού $j\left(\mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Είναι λοιπόν εμφανές, ότι δύο οποιεσδήποτε μονάδες ενός σειριακού συστήματος θεωρούνται ισοδύναμες ως προς τη σχετική κρισιμότητα.

Συνοψίζοντας τις διαπιστώσεις που έγιναν προηγουμένως, αν θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι μονάδες είναι τοποθετημένες στο σύστημα με τέτοιο τρόπο ώστε $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Τότε, για τα διάφορα μέτρα σπουδαιότητας προκύπτει ότι:

$I_1^S = I_2^S = \cdots = I_n^S$,

$I_1^B > I_2^B > \cdots > I_n^B$,

$I_1^{IP} > I_2^{IP} > \cdots > I_n^{IP}$,

$I_1^{CIP} > I_2^{CIP} > \cdots > I_n^{CIP}$,

$I_1^{CS} = I_2^{CS} = \cdots = I_n^{CS}$,

$I_1^{CF} > I_2^{CF} > \cdots > I_n^{CF}$.

$I_1^{FV} > I_2^{FV} > \cdots > I_n^{FV}$,

$I_1^{RAW} = I_2^{RAW} = \cdots = I_n^{RAW}$,

$I_1^{RRW} > I_2^{RRW} > \cdots > I_n^{RRW}$,

$PCI_1 \approx PCI_2 \approx \cdots \approx PCI_n$,

$I_1^{RC} \approx I_2^{RC} \approx \cdots \approx I_n^{RC}$,

Στη περίπτωση που έχουμε *iid* μονάδες , δηλαδή $p_i = p$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν τα μέτρα σπουδαιότητας απλοποιούνται ως εξής:

$$I_i^B = \frac{R_S\left(\mathbf{p}\right)}{p_i} = p^{n-1}, \qquad JRI_{i,j} = \frac{1}{p_i p_j} R_S\left(\mathbf{p}\right) = p^{n-2},$$

$$I_i^{IP} = I_i^B(1-p_i) = (1-p)\,p^{n-1}, \qquad I_i^{CIP} = I_i^B(p_i'-p_i) = (p'-p)\,p^n,$$

$$I_i^{FV} = \frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1-p}{1-p^n}, \qquad I_i^{CF} = I_i^B \frac{1-p_i}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1-p}{1-p^n}\,p^{n-1},$$

$$I_i^{RAW} = \frac{1}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{1}{1-p^n}, \qquad I_i^{RRW} = \frac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})/p_i} = \frac{1-p^n}{1-p^{n-1}}.$$

Το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας, σε ένα σειριακό σύστημα είναι ανεξάρτητο της αξιοπιστίας των μονάδων. Πιο συγκεκριμένα ισχύει $I_i^{CS} = 1$.

Στο μέτρο σπουδαιότητας δεσμού θεωρούμε ότι όλες οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία, έτσι ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε όλες τις δυνατές συγκρίσεις κατά ζεύγη.

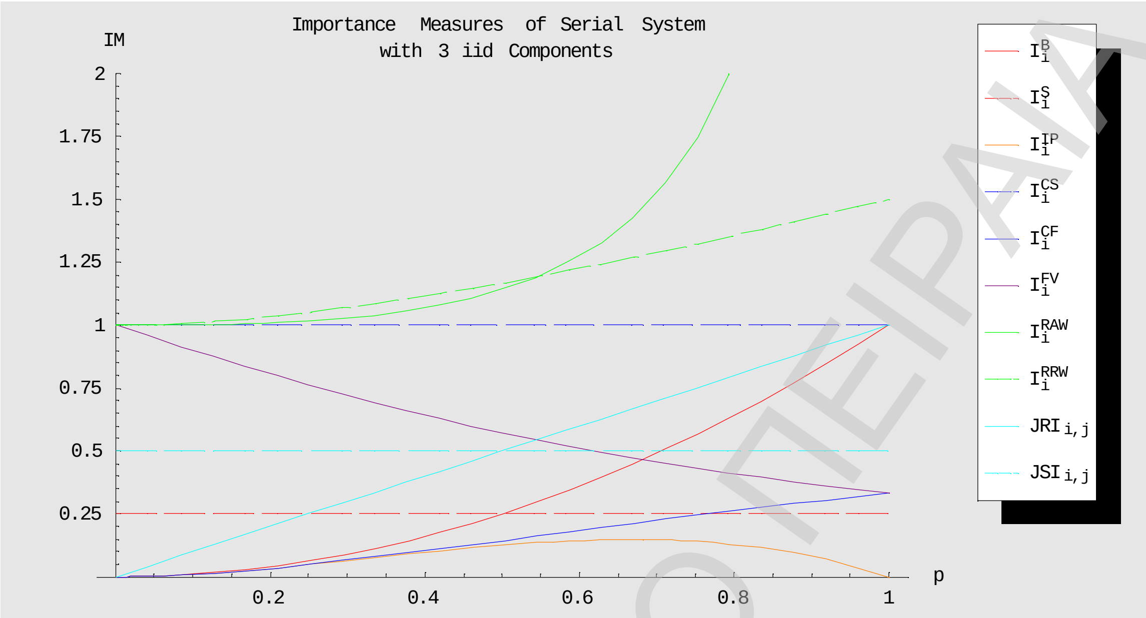
Επίσης, για το μέτρο δομικής σπουδαιότητας, το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας, το μέτρο σχετικής κρισιμότητας, καθώς και το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, γνωρίζουμε ότι εξαρτώνται αποκλειστικά από τη τοπολογία του συστήματος και είναι ανεξάρτητα από τις αξιοπιστίες των μονάδων. Γι’ αυτά έχουμε

$$I_i^S = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad JSI_{i,j} = \frac{1}{2^{n-2}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ και } i \neq j.$$

Τέλος στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα 10 μέτρα που μπορούν να πάρουν αριθμητικές τιμές, συναρτήσει της αξιοπιστίας p των μονάδων, στην *iid* περίπτωση.

Σχήμα 4.2

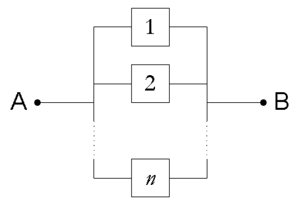
Διάγραμμα μέτρων σπουδαιότητας ενός σειριακού συστήματος με 3 ισόνομες μονάδες.



4.2. Παράλληλο Σύστημα (*Parallel System*)

Το παράλληλο σύστημα, λειτουργεί αν λειτουργεί τουλάχιστο μία μονάδα του. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι μια ειδική περίπτωση του *k*-από-τα-*n*: *F*(*G*) συστήματος, συγκεκριμένα είναι ένα σύστημα *n*-από-τα-*n*: *F*, αντίστοιχα 1-από-τα-*n*: *G*.

Σχήμα 4.3
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Παράλληλου Συστήματος



Έστω ότι έχουμε τις μονάδες $1,2,...,n$, με αξιοπιστίες $p_1, p_2,..., p_n$. Τότε η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-p_j)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα μέτρα σπουδαιότητας για το παράλληλο σύστημα, στην περίπτωση όπου δεν έχουμε *iid* μονάδες.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μιας μονάδας i προκύπτει από τη σχέση:

$$I_i^B = R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(0_i, \mathbf{p}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1-p_i}\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)\right) \Rightarrow I_i^B = \frac{1}{1-p_i}\prod_{j=1}^{n}(1-p_j) = \frac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-p_i}$$

Βάσει αυτού του μέτρου, σπουδαιότερη είναι η μονάδα η οποία έχει τη μεγαλύτερη αξιοπιστία.

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί μέσω του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, θέτοντας τις αξιοπιστίες όλων των μονάδων ίσες με $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε, $I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j = 1/2,\ j=1,2,...,n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

• **Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$I_i^{IP} = I_i^B\left(1-p_i\right) = \left(1-p_i\right)\frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1-p_i} = 1-R_S\left(\mathbf{p}\right).$$

Το μέτρο αυτό δε μας δίνει κάποια διάταξη.

Το μέτρο πραγματικής δυνατότητας βελτίωσης μιας μονάδας i μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$I_i^{CIP} = I_i^B\left(p_i'-p_i\right) = \frac{p_i'-p_i}{1-p_i}\left(1-R_S\left(\mathbf{p}\right)\right).$$

Σε αυτό το μέτρο είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $p_i' = p'$, $i=1,2,...,n$. Τότε, και αυτό το μέτρο μας δίνει αντίστροφη διάταξη από αυτή του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum.

• **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας μιας μονάδας i σε όρους λειτουργίας και σε όρους διακοπής του συστήματος, μπορεί να βρεθεί μέσω των σχέσεων

$$I_i^{CS} = I_i^B\frac{p_i}{R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1-p_i}\frac{p_i}{R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{p_i}{1-p_i}\frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{R_S\left(\mathbf{p}\right)}$$

και

$$I_i^{CF} = I_i^B\frac{1-p_i}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = 1,$$

αντίστοιχα. Όπως παρατηρούμε, και αυτό το μέτρο σπουδαιότητας μας δίνει την ίδια διάταξη με τη σπουδαιότητα κατά Birnbaum.

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει 1 ελάχιστο σύνολο διακοπής, το $K_1 = \{1,2,...,n\}$, $i=1,2,...,n$. Έτσι το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση,

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr\left(D_i\right)}{\Pr\left(C\right)} = \frac{\Pr\left(E_1^i\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{\Pr\left(x_1=0, x_2=0,..., x_n=0\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\cdots\left(1-p_n\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = 1.$$

Όπως παρατηρούμε, αυτό το μέτρο σπουδαιότητας δε μας δίνει κάποια διάταξη.

- **Μέτρο επίτευξης και μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου της μονάδας i, μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης,

$$I_i^{RAW} = \frac{1-R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{\left(1-R_S\left(\mathbf{p}\right)\right)/\left(1-p_i\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = \frac{1}{1-p_i}.$$

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου της μονάδας i, δεν μπορεί να υπολογισθεί, αφού η σχέση $I_i^{RRW} = \dfrac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)}$ δεν ορίζεται για το συγκεκριμένο σύστημα.

- **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού προϋποθέτει ότι οι δύο μονάδες στις οποίες θα επιχειρήσουμε διάταξη, έχουν την ίδια αξιοπιστία. Έτσι, στη περίπτωση που υπάρχουν δύο μονάδες, οι i, j, που έχουν την ίδια αξιοπιστία, $p_i = p_j$, τότε, $LI_i \approx LI_j$, αφού ισχύει η ισότητα,

$$R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right) = R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right) = 1$$

και

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) = 1 - \frac{1}{1-p_i}\prod_{l=1}^{n}\left(1-p_l\right) \overset{p_i=p_j}{=} 1 - \frac{1}{1-p_j}\prod_{l=1}^{n}\left(1-p_l\right) = R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right).$$

Σύμφωνα με τους Page and Perry (1994), όταν $LI_i \approx LI_j \Rightarrow PCI_i \approx PCI_j$, άρα όλες οι μονάδες είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής.

- **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας δύο μονάδων i, j δίνεται από την επόμενη σχέση

$$JRI_{i,j} = R_S\left(1_i,1_j,\mathbf{p}\right) + R_S\left(0_i,0_j,\mathbf{p}\right) - R_S\left(1_i,0_j,\mathbf{p}\right) - R_S\left(0_i,1_j,\mathbf{p}\right) =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{\left(1-p_i\right)\left(1-p_j\right)}\prod_{l=1}^{n}\left(1-p_l\right)\right) - 1 - 1 = -\frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{\left(1-p_i\right)\left(1-p_j\right)},$$

ενώ το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας μπορεί να βρεθεί μέσω της σχέσης

$$JSI_{i,j} = JRI_{i,j}\Big|_{p_k=1/2},\ i \neq j,\ i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Άρα $JSI_{i,j} = -\dfrac{1}{2^{n-2}}$ για όλα τα $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Το αρνητικό πρόσημο στο από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας μας δείχνει ότι μια μονάδα είναι λιγότερο σημαντική όταν λειτουργεί η άλλη μονάδα του ζεύγους.

• Μέτρο σχετικής κρισιμότητας

Για το μέτρο σχετικής κρισιμότητας, γνωρίζουμε ότι $j\left(1_i, 0_j, \mathbf{x}\right) = j\left(0_i, 1_j, \mathbf{x}\right), \forall i, j$, αφού $j\left(\mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Είναι λοιπόν εμφανές, ότι δύο οποιεσδήποτε μονάδες ενός παράλληλου συστήματος θεωρούνται ισοδύναμες ως προς τη σχετική κρισιμότητα.

Στη περίπτωση που έχουμε *iid* μονάδες, δηλαδή $p_i = p$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε τα προηγούμενα αποτελέσματα απλοποιούνται στα εξής:

$$I_i^B = \frac{1 - R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1 - p_i} = \left(1 - p\right)^{n-1},$$

$$I_i^{FV} = 1,$$

$$I_i^{IP} = I_i^B\left(1 - p_i\right) = \left(1 - p\right)^n,$$

$$I_i^{RAW} = \frac{1}{1 - p},$$

$$I_i^{CS} = \frac{p\left(1 - p\right)^n}{1 - \left(1 - p\right)^n},$$

$$I_i^{CF} = 1,$$

$$I_i^{CIP} = I_i^B\left(p_i' - p_i\right) = \left(p' - p\right)\left(1 - p\right)^n,$$

$$JRI_{i,j} = -\left(1 - p\right)^{n-2}.$$

Το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους διακοπής, σε ένα παράλληλο σύστημα είναι ανεξάρτητο της αξιοπιστίας των μονάδων. Πιο συγκεκριμένα $I_i^{CF} = 1$.

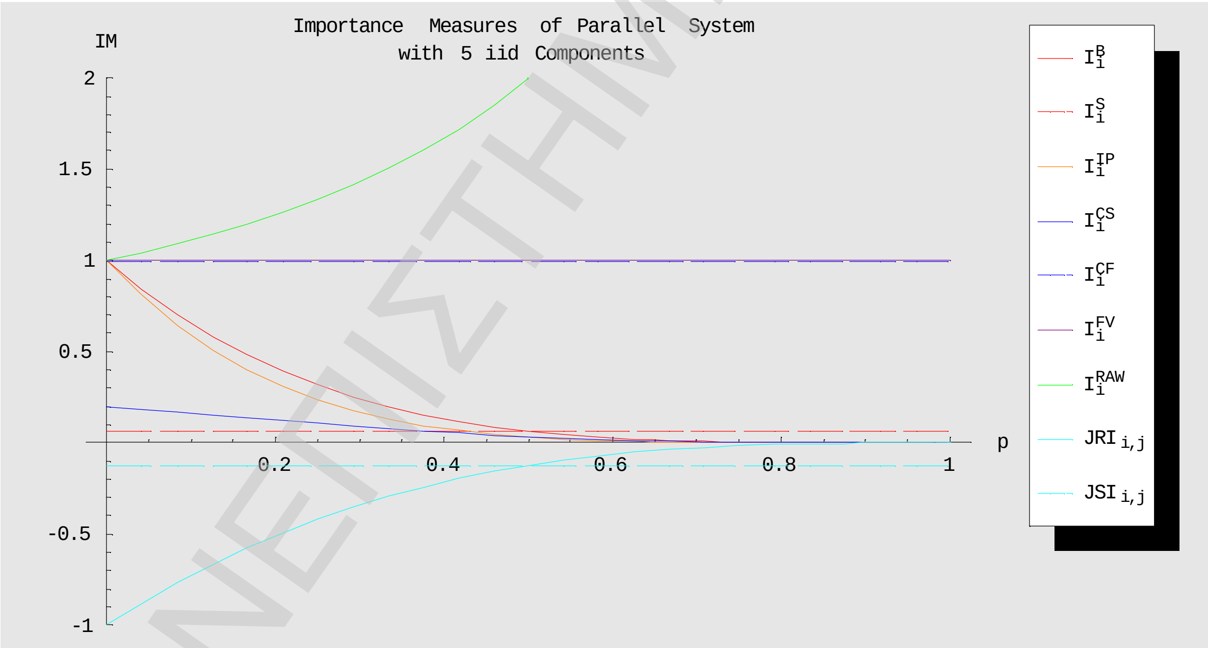
Στο μέτρο σπουδαιότητας δεσμού θεωρούμε ότι όλες οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία, έτσι ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε όλες τις δυνατές συγκρίσεις κατά ζεύγη.

Τέλος, για το μέτρο δομικής σπουδαιότητας, το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας, το μέτρο σχετικής κρισιμότητας, καθώς και το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, γνωρίζουμε ότι εξαρτώνται αποκλειστικά από τη τοπολογία του συστήματος και είναι ανεξάρτητα από τις αξιοπιστίες των μονάδων. Για το παράλληλο σύστημα έχουμε

$$I_i^S = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad\qquad JSI_{i,j} = -\frac{1}{2^{n-2}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ και } i \neq j.$$

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα 9 μέτρα που μπορούν να πάρουν αριθμητικές τιμές, συναρτήσει της αξιοπιστίας p των μονάδων, στην *iid* περίπτωση.

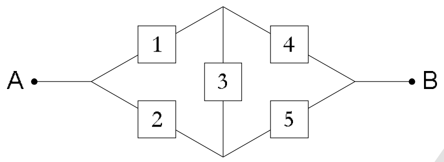
Σχήμα 4.4
Διάγραμμα μέτρων σπουδαιότητας ενός παράλληλου συστήματος με 5 ισόνομες μονάδες.



4.3. Γέφυρα (*Bridge Structure*)

Το σύστημα της γέφυρας είναι ένα από τα πιο σημαντικά συστήματα που μελετήθηκαν διεξοδικά στη διεθνή βιβλιογραφία. Η δομή του παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 4.5
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Γέφυρας



• Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για την i μονάδα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $I_i^B = R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(0_i, \mathbf{p})$. Όμως, η δομή της γέφυρας δε μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε κοινή σχέση για το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum. Έτσι, το υπολογίζουμε για κάθε μονάδα ξεχωριστά και προκύπτουν επόμενοι τύποι:

$$
\begin{aligned}
I_1^B &= p_4 + p_3 p_5 - p_2 p_3 p_4 - p_2 p_3 p_5 - p_2 p_4 p_5 - p_3 p_4 p_5 + 2 p_2 p_3 p_4 p_5, \\
I_2^B &= p_5 + p_3 p_4 - p_1 p_3 p_4 - p_1 p_3 p_5 - p_1 p_4 p_5 - p_3 p_4 p_5 + 2 p_1 p_3 p_4 p_5, \\
I_3^B &= p_1 p_5 + p_2 p_4 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_2 p_5 - p_1 p_4 p_5 - p_2 p_4 p_5 + 2 p_1 p_2 p_4 p_5, \\
I_4^B &= p_1 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_5 - p_1 p_3 p_5 - p_2 p_3 p_5 + 2 p_1 p_2 p_3 p_5, \\
I_5^B &= p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_3 p_4 - p_2 p_3 p_4 + 2 p_1 p_2 p_3 p_4.
\end{aligned}
$$

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$
I_i^S = I_i^B \Big|_{p_j = 1/2,\, j=1,\ldots,5} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - 4\dfrac{1}{2^3} + 2\dfrac{1}{2^4} = \dfrac{3}{2^3}, & i = 1, 2, 4, 5 \\[2ex] 2\dfrac{1}{2^2} - 4\dfrac{1}{2^3} + 2\dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{2^3}, & i = 3. \end{cases}
$$

Παρατηρούμε ότι βάσει του μέτρου δομικής σπουδαιότητας, η μονάδα 3 είναι η λιγότερο σημαντική για τη λειτουργία του συστήματος.

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει 4 Ε.Σ.Δ., τα $K_1=\{1,2\}, K_2=\{4,5\}, K_3=\{1,3,5\}, K_4=\{2,3,4\}$. Έτσι, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
I_1^{FV} &= \frac{\Pr(D_1)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr\left(E_1^1 \cup E_2^1\right)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_5=0)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \\
I_2^{FV} &= \frac{\Pr(D_2)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr\left(E_1^2 \cup E_2^2\right)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \\
I_3^{FV} &= \frac{\Pr(D_3)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr\left(E_1^3 \cup E_2^3\right)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \\
I_4^{FV} &= \frac{\Pr(D_4)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr\left(E_1^4 \cup E_2^4\right)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \\
I_5^{FV} &= \frac{\Pr(D_5)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr\left(E_1^5 \cup E_2^5\right)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \frac{\Pr(x_1=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0)}{1-R_S(\mathbf{p})}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, για τις 5 μονάδες δίνεται από τους επόμενους τύπους:

$$
\begin{aligned}
I_1^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right), \\
I_2^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right), \\
I_3^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right), \\
I_4^{FV} &= (1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right), \\
I_5^{FV} &= (1-p_1)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right).
\end{aligned}
$$

Όπως είναι προφανές, η μονάδα 3 είναι η λιγότερο σημαντική βάσει του μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely. Στις υπόλοιπες μονάδες μπορεί να υπάρξει διάταξη ως προς τη σπουδαιότητά τους, αν γνωρίζουμε τη διάταξη της αξιοπιστίας των μονάδων. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $p_1 < p_2 < p_4 < p_5$, βρίσκουμε αμέσως τη διάταξη για το συγκεκριμένο μέτρο ως εξής: $I_3^{FV} < I_4^{FV} < I_5^{FV} < I_1^{FV} < I_2^{FV}$.

• **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού υποθέτει ότι οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=\begin{cases} p^2+p^3-p^4, & i=1,2,4,5 \\ 2p^2-p^4, & i=3 \end{cases}$$
$$R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=\begin{cases} p+2p^2-3p^3+p^4, & i=1,2,4,5 \\ 4p^2-4p^3+p^4, & i=3. \end{cases}$$

Τότε, $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right),\ \ i\neq j,\ \ i,j=1,2,4,5$. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες 1, 2, 4 και 5 είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, άρα και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής.

Για τη μονάδα 3, παρατηρούμε ότι είναι λιγότερο σημαντική από τις υπόλοιπες μονάδες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, αφού $R_S\left(0_3,\mathbf{p}\right)>R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_3,\mathbf{p}\right)\leq R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right),\ \ i,=1,2,4,5$. Αυτό σημαίνει ότι η μονάδα 3 είναι λιγότερο σημαντική και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής.

• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας δίνεται από τις επόμενες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
JRI_{1,2}&=-p_3p_4-p_3p_5-p_4p_5+2p_3p_4p_5\\
JRI_{1,3}&=p_5-p_2p_4-p_2p_5-p_4p_5+2p_2p_4p_5\\
JRI_{1,4}&=1-p_2p_3-p_2p_5-p_3p_5+2p_2p_3p_5\\
JRI_{1,5}&=p_3-p_2p_3-p_2p_4-p_3p_4+2p_2p_3p_4\\
JRI_{2,3}&=p_4-p_1p_4-p_1p_5-p_4p_5+2p_1p_4p_5\\
JRI_{2,4}&=p_3-p_1p_3-p_1p_5-p_3p_5+2p_1p_3p_5\\
JRI_{2,5}&=1-p_1p_3-p_1p_4-p_3p_4+2p_1p_3p_4\\
JRI_{3,4}&=p_2-p_1p_2-p_1p_5-p_2p_5+2p_1p_2p_5\\
JRI_{3,5}&=p_1-p_1p_2-p_1p_4-p_2p_4+2p_1p_2p_4\\
JRI_{4,5}&=-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+2p_1p_2p_3.
\end{aligned}$$

Το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας δίνεται από τις επόμενες σχέσεις.

$$
\begin{aligned}
&JSI_{1,2} = JSI_{4,5} = -1/2,\\
&JSI_{1,3} = JSI_{1,5} = JSI_{2,3} = JSI_{2,4} = JSI_{3,4} = JSI_{3,5} = 0,\\
&JSI_{1,4} = JSI_{2,5} = 1/2.
\end{aligned}
$$

Μέσω του από κοινού μέτρου δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας παρατηρούμε ότι για τα ζεύγη μονάδων (1,2) και (4,5) η θέση της μίας μονάδας είναι λιγότερο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί. Αντίθετα, για τα ζεύγη μονάδων (1,4) και (2,5) η θέση της μίας μονάδας πιο σημαντική όταν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί.

Τα μέτρα δυνατότητας βελτίωσης, σπουδαιότητας κρισιμότητας, επίτευξης κινδύνου και ελάττωσης κινδύνου μπορούν εύκολα να υπολογισθούν από το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum. Ο υπολογισμός τους όμως δεν εξάγει συμπεράσματα για τη διάταξη ως προς τη σημαντικότητα στις μονάδες του συστήματος της γέφυρας. Επίσης, ούτε το μέτρο σχετικής κρισιμότητας δίνει κάποια διάταξη.

Όπως είναι προφανές, στην περίπτωση που οι μονάδες δεν έχουν την ίδια αξιοπιστία, είναι ανέφικτο να εξάγουμε συμπεράσματα για τη σπουδαιότητα των μονάδων. Συνεχίζουμε αναλύοντας την *iid* περίπτωση.

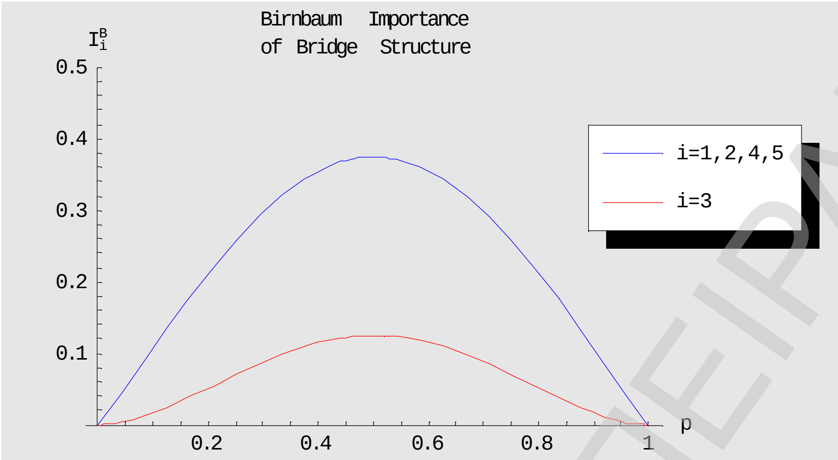
• **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για τη δομή της γέφυρας δίνεται από τη σχέση

$$
I_i^B = \begin{cases} p + p^2 - 4p^3 + 2p^4, & i = 1,2,4,5 \\ 2p^2 - 4p^3 + 2p^4, & i = 3. \end{cases}
$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η σπουδαιότητα της μονάδας 3 είναι μικρότερη από τη σπουδαιότητα των υπόλοιπων μονάδων, κάτι που φαίνεται και από το επόμενο διάγραμμα.

Σχήμα 4.6
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum για το σύστημα της Γέφυρας



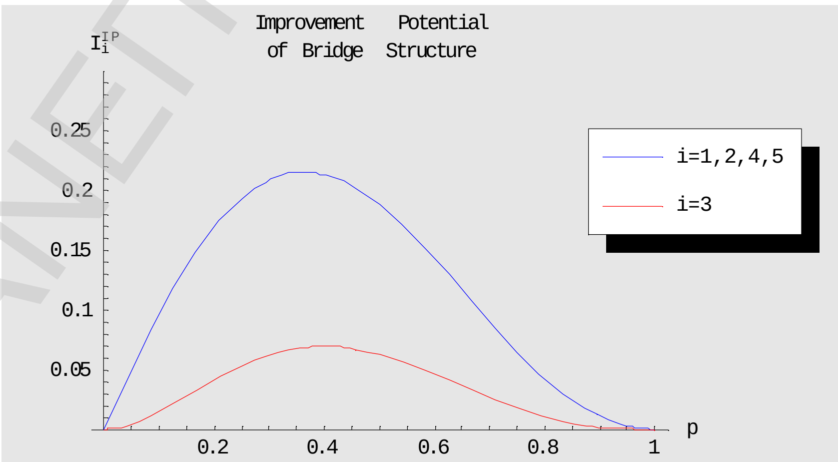
• **Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης**

Για το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, παρατηρούμε ότι

$$I_i^{IP} = \begin{cases} p-5p^3+6p^4-2p^5, & i=1,2,4,5 \\ 2p^2-6p^3+6p^4-2p^5, & i=3. \end{cases}$$

Όπως και πριν, η σπουδαιότητα της μονάδας 3 είναι μικρότερη από τη σπουδαιότητα των υπόλοιπων μονάδων.

Σχήμα 4.7
Διάγραμμα μέτρου δυνατότητας βελτίωσης για το σύστημα της Γέφυρας



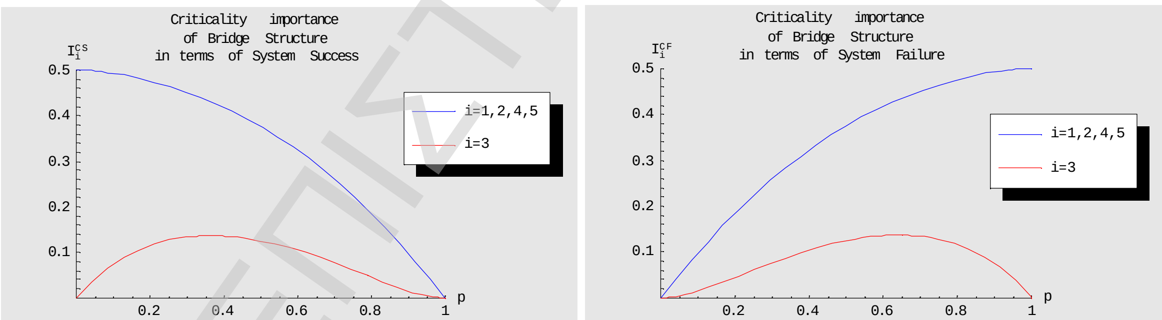
Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους διακοπής του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$I_i^{CS}=\begin{cases}\dfrac{1+p-4p^2+2p^3}{2+2p-5p^2+2p^3}, & i=1,2,4,5\\[2mm] \dfrac{2p-4p^2+2p^3}{2+2p-5p^2+2p^3}, & i=3\end{cases}\quad,\qquad \text{και}\qquad I_i^{CF}=\begin{cases}\dfrac{p+2p^2-2p^3}{1+2p+p^2-2p^3}, & i=1,2,4,5\\[2mm] \dfrac{2p^2-2p^3}{1+2p+p^2-2p^3}, & i=3.\end{cases}$$

• **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Στα επόμενα διαγράμματα, όπου απεικονίζεται η σπουδαιότητα κρισιμότητας παρατηρούμε ότι η συνεισφορά της κάθε μονάδας στη λειτουργία του συστήματος μειώνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Ταυτόχρονα η συνεισφορά της μονάδας 3 είναι πάντοτε μικρότερη από την συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων. Αντίθετα, η συνεισφορά της κάθε μονάδας στην αποτυχία του συστήματος όταν αυτό δε λειτουργεί, αυξάνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Και πάλι όμως, η συνεισφορά της μονάδας 3 είναι πάντοτε μικρότερη από την συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων.

Σχήμα 4.8
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας κρισιμότητας για το σύστημα της Γέφυρας
α) σε όρους λειτουργίας του συστήματος β) σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος



• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

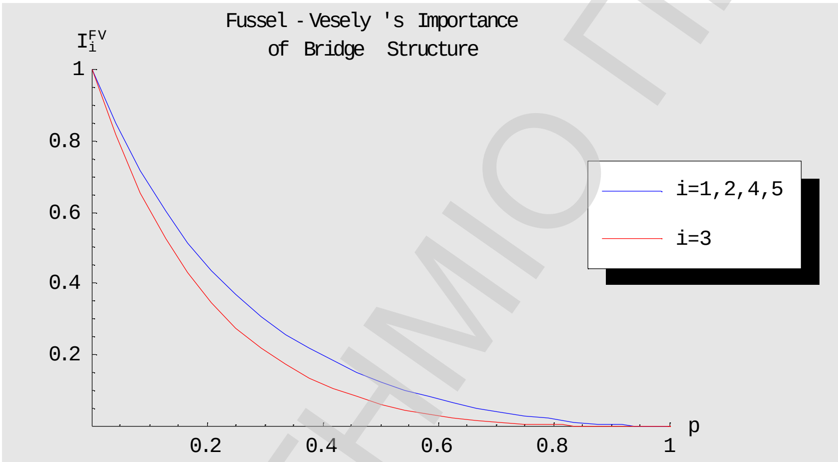
Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται από τη σχέση

$$I_i^{FV}=\begin{cases}\dfrac{1-2p+p^2}{1+2p+p^2-2p^3}, & i=1,2,4,5\\[2mm] \dfrac{1-3p+3p^2-p^3}{1+2p+p^2-2p^3}, & i=3.\end{cases}$$

Εδώ, όπως και στην περίπτωση που οι μονάδες έχουν διαφορετική αξιοπιστία, παρατηρούμε ότι η μονάδα 3 είναι λιγότερο σημαντική από τις υπόλοιπες. Έτσι η αποτυχία του συστήματος οφείλεται λιγότερο στην αποτυχία της μονάδας 3 από τις υπόλοιπες μονάδες. Οι μονάδες 1, 2, 4 και 5 είναι εξίσου σημαντικές (ως προς το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely).

Από το Σχήμα 4.9 παρατηρούμε ότι το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely μειώνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων.

Σχήμα 4.9
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely για το σύστημα της Γέφυρας



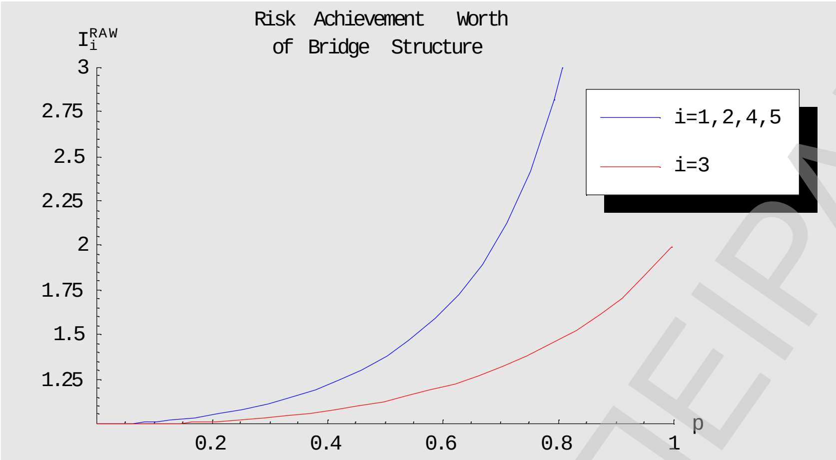
• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση, και αντιπροσωπεύει τη συμβολή της μονάδας i στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας του συστήματος.

$$I_i^{RAW} = \begin{cases} \dfrac{1+p-p^3}{1+p-p^2-3p^3+2p^4}, & i=1,2,4,5 \\ \dfrac{1+2p+p^2}{1+2p+p^2-2p^3}, & i=3. \end{cases}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι η συμβολή της μονάδας 3 είναι πάντοτε μικρότερη από την συμβολή των υπόλοιπων μονάδων. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.10, όταν η αξιοπιστία p των μονάδων αυξάνεται, το μέτρο αυτό αυξάνεται με ολοένα μεγαλύτερο ρυθμό. Έτσι η συμβολή των μονάδων 1, 2, 4 και 5 τείνει στο άπειρο όταν $p \to 1$. Για τη μονάδα 3 το μέτρο επίτευξης κινδύνου αυξάνεται μέχρι να πάρει την τιμή 2 (για $p=1$).

Σχήμα 4.10
Διάγραμμα μέτρου επίτευξης κινδύνου για το σύστημα της Γέφυρας



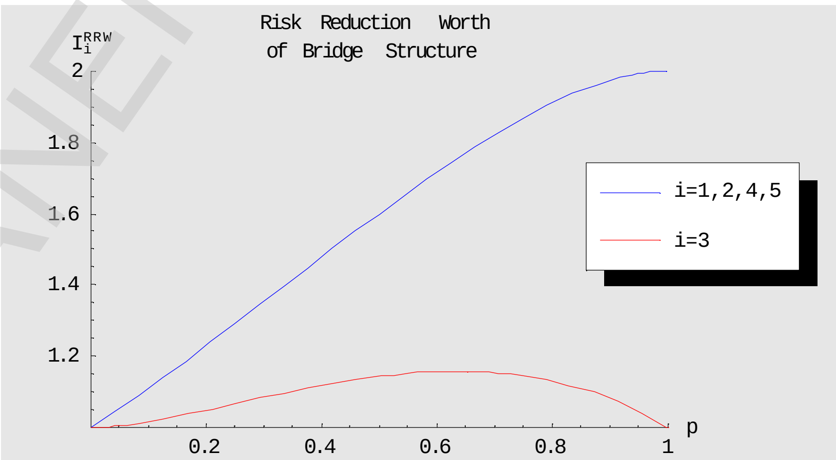
• **Μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση,

$$I_i^{RRW} = \begin{cases} \dfrac{1+2p+p^2-2p^3}{1+p-p^2}, & i=1,2,4,5 \\ \dfrac{1+2p+p^2-2p^3}{1+2p-p^2}, & i=3. \end{cases}$$

Για μια ακόμη φορά παρατηρούμε ότι η μονάδα 3 είναι λιγότερο σημαντική από τις υπόλοιπες μονάδες, ενώ αντικαθιστώντας μια από τις υπόλοιπες μονάδες με μία τέλεια μονάδα θα μειώσουμε την αναξιοπιστία του συστήματος έως 50%.

Σχήμα 4.11
Διάγραμμα μέτρου ελάττωσης κινδύνου για το σύστημα της Γέφυρας



• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

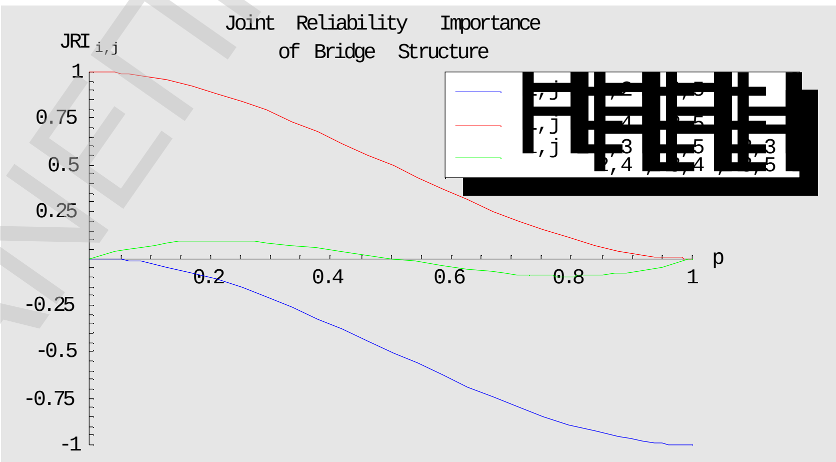
Σε αντίθεση με τα υπόλοιπα μέτρα που μετρούν τη σπουδαιότητα μιας μονάδας στο σύστημα, τα από κοινού μέτρα σπουδαιότητας και δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας μας δείχνουν πόσο σημαντική είναι η μία μονάδα όταν η άλλη λειτουργεί.

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας δίνεται από τις επόμενες σχέσεις για κάθε ζεύγος μονάδων:

$$JRI_{1,2} = JRI_{4,5} = -3p^2 + 2p^3,$$
$$JRI_{1,3} = JRI_{1,5} = JRI_{2,3} = JRI_{2,4} = JRI_{3,4} = JRI_{3,5} = p - 3p^2 + 2p^3,$$
$$JRI_{1,4} = JRI_{2,5} = 1 - 3p^2 + 2p^3.$$

Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε ότι τα ζεύγη μονάδων $(1,4)$ και $(2,5)$ παρουσιάζουν συνέργεια, η οποία όμως μειώνεται καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Τα ζεύγη μονάδων $(1,2)$ και $(4,5)$ παρουσιάζουν μειούμενη ανταπόδοση (*diminishing returns*) η οποία αυξάνεται (σε απόλυτη τιμή) καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Τέλος, τα υπόλοιπα ζεύγη μονάδων παρουσιάζουν συνέργεια όταν η αξιοπιστία των μονάδων είναι μικρότερη από ½ και μειούμενη ανταπόδοση όταν η αξιοπιστία των μονάδων είναι μικρότερη από ½. Πάντοτε όμως είναι πολύ κοντά στο μηδέν, έτσι σε κάθε ζεύγος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μία μονάδα επηρεάζεται ελάχιστα από τη λειτουργία της άλλης.

Σχήμα 4.12
Διάγραμμα από κοινού μέτρου σπουδαιότητας αξιοπιστίας για το σύστημα της Γέφυρας



4.4. Σύστημα *k*-από-τα-*n*: *F* (*k-out-of-n: F System*)

Για τη μελέτη ενός *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος, καθώς και για κάποια μέτρα σπουδαιότητας του συστήματος αυτού, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη τεχνική εμφύτευσης σε μαρκοβιανές αλυσίδες.

Όπως είναι ήδη γνωστό από το Κεφάλαιο 2, η αξιοπιστία ενός *k*-από-τα-*n*: *F MIS* συστήματος, δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr(Y_0 = s_0), \ldots, \Pr(Y_0 = s_N)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0)'$, και

$$\Lambda_{i,j} = \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t ,$$

με

$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccc|c} p_t & q_t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} .$$

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^B = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}$$

όπου

$$\Delta_i = \Delta = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} .$$

Το μέτρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί αρκετά γρήγορα μέσω των αναδρομικών σχέσεων

$$\begin{aligned} I_i^B &= \sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\, b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i) \\ &= \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\left[b_r(n-i) - b_{r+1}(n-i)\right] + a_{k-1}(i-1)\, b_{k-1}(n-i). \end{aligned}$$

Στο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα δεν έχει σημασία ο τρόπος που θα αριθμήσουμε τις μονάδες, αλλά μόνο πόσες από αυτές θα λειτουργούν. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ και να εξάγουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα.

Όπως έδειξαν οι Chadjiconstantinidis and Koutras (1999), ισχύουν τα επόμενα αποτελέσματα σε σχέση με τη σπουδαιότητα της κάθε μονάδας.

<u>Θεώρημα.</u> Έστω $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ οι αξιοπιστίες των μονάδων σε ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1 \le k \le n$ και $n \ge 2$.

(α) αν $0 \le p_i \le \dfrac{n-k}{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$I_1^B \ge I_2^B \ge \cdots \ge I_{n-1}^B \ge I_n^B,$$

δηλαδή, η μονάδα με τη μικρότερη αξιοπιστία (μονάδα 1) είναι η πιο σημαντική για το σύστημα.

(β) αν $\dfrac{n-k}{n-1} \le p_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$I_1^B \le I_2^B \le \cdots \le I_{n-1}^B \le I_n^B,$$

δηλαδή, η μονάδα με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία (μονάδα n) είναι η πιο σημαντική για το σύστημα.

Το επόμενο Λήμμα θα μας βοηθήσει να βρούμε τη διάταξη που υπάρχει σε κάποια μέτρα σπουδαιότητας ενός *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος.

<u>Λήμμα.</u> Έστω ένα *k*-από-τα-*n*: *F MIS* σύστημα. Τότε,

$$b_0(j) \ge b_1(j) \ge \cdots \ge b_k(j) = 0.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Γνωρίζουμε ότι, $\boldsymbol{\beta}(j) = \Lambda_{n-j+1}\boldsymbol{\beta}(j-1)$. Έτσι, για ένα *k*-από-τα-*n*: *F MIS* σύστημα,

όταν $0 \le r \le k-1$, έχουμε

$$b_r(j) = p_{n-j+1} b_r(j-1) + q_{n-j+1} b_{r+1}(j-1),$$

ενώ, όταν $r=k$, έχουμε

$$b_k(j)=b_k(j-1)=\cdots=b_k(0)=0.$$

για $0\le r\le k-2$,

$$\left.\begin{aligned} b_r(j)&=p_{n-j+1}b_r(j-1)+q_{n-j+1}b_{r+1}(j-1)\\ b_{r+1}(j)&=p_{n-j+1}b_{r+1}(j-1)+q_{n-j+1}b_{r+2}(j-1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} b_r(j)-b_{r+1}(j)=p_{n-j+1}&\left[b_r(j-1)-b_{r+1}(j-1)\right]\\ &+q_{n-j+1}\left[b_{r+1}(j-1)-b_{r+2}(j-1)\right].\end{aligned}$$

Άρα, αν $b_0(j-1)\ge b_1(j-1)\ge\cdots\ge b_k(j-1)$, τότε, $b_0(j)\ge b_1(j)\ge\cdots\ge b_k(j)$. Αφού οι ανισότητες ισχύουν για το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}(0)=\mathbf{u}$, επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι ισχύουν και για το $\boldsymbol{\beta}(j)$, $\forall j$.

• **Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP}=\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i(1)-\Lambda_i\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

ή μέσω των αναδρομικών σχέσεων από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^{IP}&=\sum_{r=0}^{k-1}a_r(i-1)(1-p_i)b_r(n-i)-\sum_{r=0}^{k-2}a_r(i-1)(1-p_i)b_{r+1}(n-i)\\ &=(1-p_i)\left\{\sum_{r=0}^{k-2}a_r(i-1)\left[b_r(n-i)-b_{r+1}(n-i)\right]+a_{k-1}(i-1)b_{k-1}(n-i)\right\}.\end{aligned}$$

<u>Θεώρημα.</u> Έστω $0\le p_1\le p_2\le\cdots\le p_n\le 1$ οι αξιοπιστίες των μονάδων σε ένα k-από-τα-n: F σύστημα, με $1\le k\le n$ και $n\ge 2$. Τότε

$$I_1^{IP}\ge I_2^{IP}\ge\cdots\ge I_{n-1}^{IP}\ge I_n^{IP}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $0\le p_1\le p_2\le\cdots\le p_n\le 1$ και p_i, p_{i+1} οι αξιοπιστίες δύο διαδοχικών μονάδων, με $1\le i\le n-1$. Τότε η διαφορά των μέτρων δυνατότητας βελτίωσης των δύο διαδοχικών μονάδων δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$
\begin{aligned}
I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i(1)-\Lambda_i\right)\Lambda_{i+1}\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} - \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(\Lambda_{i+1}(1)-\Lambda_{i+1}\right)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(I-\Lambda_i\right)\Lambda_{i+1}\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} - \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(I-\Lambda_{i+1}\right)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_{i+1}-\Lambda_i\right)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(p_{i+1}-p_i\right)\Delta\,\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} \\
&= \left(p_{i+1}-p_i\right)\boldsymbol{\alpha}'(i-1)\Delta\boldsymbol{\beta}(n-i-1) \\
&= \left(p_{i+1}-p_i\right)\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\big(b_r(n-i-1)-b_{r+1}(n-i-1)\big).
\end{aligned}
$$

Επειδή $p_i \le p_{i+1}$ και $b_r(n-i-1) \ge b_{r+1}(n-i-1)$, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι $I_i^{IP} \ge I_{i+1}^{IP}$, για $1 \le i \le n-1$, άρα αποδεικνύεται η υπόθεση.

• Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους αποτυχίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
I_i^{CS} &= p_i\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{u}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \\
I_i^{CF} &= (1-p_i)\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},
\end{aligned}
$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$
\begin{aligned}
I_i^{CS} &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\,p_i b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\,p_i b_{r+1}(n-i)}{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(n)}, \\
I_i^{CF} &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)(1-p_i)\,b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)(1-p_i)\,b_{r+1}(n-i)}{a_k(n)}.
\end{aligned}
$$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ οι αξιοπιστίες των μονάδων σε ένα k-από-τα-n: F σύστημα, με $1 \le k \le n$ και $n \ge 2$, τότε

$$
I_1^{CS} \ge I_2^{CS} \ge \cdots \ge I_{n-1}^{CS} \ge I_n^{CS}, \text{ και}
$$

$$
I_1^{CF} \ge I_2^{CF} \ge \cdots \ge I_{n-1}^{CF} \ge I_n^{CF}.
$$

Απόδειξη:

Έστω $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq 1$ και p_i, p_{i+1} οι αξιοπιστίες δύο διαδοχικών μονάδων, με $1 \leq i \leq n-1$. Τότε η διαφορά των μέτρων δυνατότητας βελτίωσης των δύο διαδοχικών μονάδων δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$
\begin{aligned}
I_i^{CS} - I_{i+1}^{CS} &= p_i \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta \Lambda_{i+1} \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} - p_{i+1} \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i \Delta \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} \\
&= \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left[p_i \Delta \Lambda_{i+1} - p_{i+1} \Lambda_i \Delta \right] \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι, $p_i \Delta = \Lambda_i + I - \Delta$, και $\Lambda_i (I - \Delta) = (I - \Delta) \Lambda_i$, οπότε η παράσταση μέσα στις αγκύλες γίνεται,

$$
\begin{aligned}
& p_i \Delta \Lambda_{i+1} - p_{i+1} \Lambda_i \Delta = (\Lambda_i + I - \Delta) \Lambda_{i+1} - \Lambda_i (\Lambda_{i+1} + I - \Delta) = (I - \Delta) \Lambda_{i+1} - \Lambda_i (I - \Delta) \\
& = (\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)(I - \Delta) = (p_{i+1} - p_i) \Delta (I - \Delta),
\end{aligned}
$$

και η προηγούμενη διαφορά παίρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
I_i^{CS} - I_{i+1}^{CS} &= \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} (p_{i+1} - p_i) \Delta (I - \Delta) \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} = \\
&= (p_{i+1} - p_i) \left(\boldsymbol{\alpha}'(n) \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\alpha}'(i-1) \Delta (I - \Delta) \boldsymbol{\beta}(n-i-1) \\
&= \frac{(p_{i+1} - p_i)}{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(n)} \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1) \left(b_{r+1}(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1) \right)
\end{aligned}
$$

αφού,

$$
\Delta (I - \Delta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right].
$$

Επειδή $p_i \leq p_{i+1}$ και $b_{r+1}(n-i-1) \geq b_{r+2}(n-i-1)$, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι $I_i^{CS} \geq I_{i+1}^{CS}$, για $1 \leq i \leq n-1$, άρα αποδεικνύεται το πρώτο σκέλος.

Το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος, είναι ανάλογο του μέτρου δυνατότητας βελτίωσης, $I_i^{CF} = \dfrac{I_i^{IP}}{1 - R_S(\mathbf{p})}$, οπότε θα έχουν ίδια διάταξη. Έτσι αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος της υπόθεσης.

• Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται με χρήση των ΕΣΔ. Για ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1 \le k \le n$, και $k \ge 2$, έχουμε $\binom{n-1}{k-1}$ ΕΣΔ, τα οποία περιέχουν τη μονάδα i, από τα οποία $\binom{n-2}{k-2}$ περιέχουν τη μονάδα j, με $j \ne i$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\Pr(D_i) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{m_i}^i\right) = \Pr(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0) = \prod_{j=1}^{n}(1 - p_j).$$

Επίσης, $\Pr(C) = 1 - R_S(\mathbf{p})$. Άρα, για κάθε μονάδα του *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely παραμένει σταθερό και ίσο με

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1 - p_j)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

Επομένως, όλες οι μονάδες συμβάλουν εξίσου σε μια ενδεχόμενη αποτυχία του συστήματος.

• Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_N\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{e}_N, \qquad I_i^{RAW} = \frac{1 - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i)}{a_N(n)}.$$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ οι αξιοπιστίες των μονάδων σε ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1 \le k \le n$ και $n \ge 2$, τότε

$$I_1^{RAW} \le I_2^{RAW} \le \cdots \le I_{n-1}^{RAW} \le I_n^{RAW}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ και p_i, p_{i+1} οι αξιοπιστίες δύο διαδοχικών μονάδων, με $1 \le i \le n-1$. Τότε η διαφορά των μέτρων δυνατότητας βελτίωσης των δύο διαδοχικών μονάδων δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$I_i^{RAW} - I_{i+1}^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_N\right)^{-1}\left(1-\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1}\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u}\right)$$
$$-\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_N\right)^{-1}\left(1-\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\Lambda_{i+1}(0)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u}\right)=$$
$$=\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_N\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left[\Lambda_i\Lambda_{i+1}(0)-\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1}\right]\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι, $\Lambda_i(0)=I-\Delta$, και $\Lambda_i(I-\Delta)=(I-\Delta)\Lambda_i$, και η παράσταση μέσα στις αγκύλες γίνεται,

$$\Lambda_i\Lambda_{i+1}(0)-\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1}=\Lambda_i(I-\Delta)-(I-\Delta)\Lambda_{i+1}=(\Lambda_i-\Lambda_{i+1})(I-\Delta)=(p_i-p_{i+1})\Delta(I-\Delta).$$

Τότε, η προηγούμενη διαφορά γίνεται

$$I_i^{RAW} - I_{i+1}^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{u}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}(p_i-p_{i+1})\Delta(I-\Delta)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u}=$$
$$=(p_i-p_{i+1})\left(\boldsymbol{\alpha}'(n)\mathbf{u}\right)^{-1}\boldsymbol{\alpha}'(i-1)\Delta(I-\Delta)\boldsymbol{\beta}(n-i-1)$$
$$=\frac{(p_i-p_{i+1})}{\sum_{r=0}^{k-1}a_r(n)}\sum_{r=0}^{k-2}a_r(i-1)\left(b_{r+1}(n-i-1)-b_{r+2}(n-i-1)\right)$$

Επειδή $p_i \le p_{i+1}$ και $b_{r+1}(n-i-1)\ge b_{r+2}(n-i-1)$, συμπεραίνουμε ότι $I_i^{RAW}\le I_{i+1}^{RAW}$, για $1\le i\le n-1$, άρα αποδεικνύεται η υπόθεση.

• Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW}=\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i(1)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{e}_N\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_N, \qquad I_i^{RRW}=\frac{a_N(n)}{1-\sum_{r=0}^{k-1}a_r(i-1)b_r(n-i)}.$$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $0\le p_1\le p_2\le\ldots\le p_n\le 1$ οι αξιοπιστίες των μονάδων σε ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1\le k\le n$ και $n\ge 2$, τότε

$$I_1^{RRW}\ge I_2^{RRW}\ge\ldots\ge I_{n-1}^{RRW}\ge I_n^{RRW}.$$

Απόδειξη:

Έστω $0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le 1$ και p_i, p_{i+1} οι αξιοπιστίες δύο διαδοχικών μονάδων, με $1 \le i \le n-1$. Παρατηρούμε ότι,

$$R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right) - R_S\left(1_{i+1},\mathbf{p}\right) = I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} \ge 0 \Rightarrow \frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)} \ge \frac{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(1_{i+1},\mathbf{p}\right)} \Rightarrow I_i^{RRW} \ge I_{i+1}^{RRW}.$$

- **Μέτρο Σπουδαιότητας Δεσμού και Μέτρο Σπουδαιότητας Συνόλου Λειτουργίας-Συνόλου Διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού υποθέτει ότι όλες οι μονάδες είναι ισόνομες. Στην περίπτωση αυτή, δύο μονάδες είναι ισοδύναμες ως προς το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού όπως φαίνεται και από τα παρακάτω.

Γνωρίζουμε ότι για τους πίνακες $\left(I-\Delta\right)$ και Λ ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, οπότε

$$\begin{aligned} R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(0\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda^{i-1}\left(I-\Delta\right)\Lambda^{n-i}\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda^{j-1}\left(I-\Delta\right)\Lambda^{n-j}\mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,j-1}\Lambda_j\left(0\right)\Lambda_{j+1,n}\mathbf{u} = R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right), \end{aligned}$$

όπου Λ ο πίνακας μετάβασης μιας οποιασδήποτε μονάδας.

Επίσης,

$$\begin{aligned} R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right) &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(1\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda^{i-1}I\Lambda^{n-i}\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda^{n-1}\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda^{j-1}I\Lambda^{n-j}\mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,j-1}\Lambda_j\left(1\right)\Lambda_{j+1,n}\mathbf{u} = R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right). \end{aligned}$$

Άρα, $LI_i \approx LI_j$ για κάθε $i, j = 1,2,\ldots,n$, με $i \ne j$.

Σύμφωνα με τους Page and Perry (1994), αν $LI_i \approx LI_j \Rightarrow PCI_i \approx PCI_j$

Άρα, και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, δυο οποιεσδήποτε μονάδες θεωρούνται ισοδύναμες.

- **Μέτρο Σχετικής Κρισιμότητας**

Θεώρημα: Έστω $1,2,\ldots,n$ οι μονάδες ενός k-από-τα-n: F συστήματος, με $1 \le k \le n$ και $n \ge 2$. Τότε, όλες οι μονάδες του είναι ανά δύο ισοδύναμες ως προς τη σχετική κρισιμότητα.

Απόδειξη:

Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\Lambda_i^* = \Lambda_i\left(x_i\right)$, να δηλώνει τον πίνακα μετάβασης της μονάδας i, τότε, εύκολα διαπιστώνουμε ότι,

$$j\left(\mathbf{x}\right) = \boldsymbol{\pi}_0' \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i\left(x_i\right)\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0' \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n}^* \mathbf{u}$$

όπου $\Lambda_{1,n}^* = \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i^* = \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i\left(x_i\right)$.

Γνωρίζουμε ότι για τους πίνακες $\left(I-\Delta\right)$ και Λ_i ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, άρα ισχύει και για τους $\left(I-\Delta\right)$ και Λ_i^*, αφού ο Λ_i^* είναι ειδική περίπτωση του Λ_i.

Τότε, για $i<j$, θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
j\left(0_i,1_j,\mathbf{x}\right) &= \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}^* \Lambda_i^*\left(0\right) \Lambda_{i+1,j-1}^* \Lambda_j^*\left(1\right) \Lambda_{j+1,n}^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}^* \left(I-\Delta\right) \Lambda_{i+1,j-1}^* I \Lambda_{j+1,n}^* \mathbf{u} = \\
&= \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}^* I \Lambda_{i+1,j-1}^* \left(I-\Delta\right) \Lambda_{j+1,n}^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}^* \Lambda_i^*\left(1\right) \Lambda_{i+1,j-1}^* \Lambda_j^*\left(0\right) \Lambda_{j+1,n}^* \mathbf{u} = \\
&= j\left(1_i,0_j,\mathbf{x}\right)
\end{aligned}$$

Άρα αποδείχθηκε η υπόθεσή μας.

Τέλος, στην ειδική περίπτωση όπου $p_i = p$ για κάθε i, όλα τα μέτρα σπουδαιότητας παίρνουν την ίδια τιμή, αφού για τον υπολογισμό κάποιου μέτρου, δεν έχει σημασία η θέση της εκάστοτε μονάδας αλλά μόνο η αξιοπιστία της.

4.5. Σύστημα Συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* (*Consecutive k-out-of-n: F System*)

Για τη μελέτη ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος, καθώς και για κάποια μέτρα σπουδαιότητας του συστήματος αυτού, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη τεχνική εμφύτευσης σε μαρκοβιανές αλυσίδες.

Όπως είναι ήδη γνωστό από το Κεφάλαιο 2, η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* *MIS* συστήματος, δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr(Y_0 = s_0), \ldots, \Pr(Y_0 = s_N)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0)'$, και

$$\Lambda_{i,j} = \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t ,$$

με

$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{ccc|c} p_t & q_t & & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_t & & & q_t \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} .$$

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^B = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u} ,$$

όπου

$$\Delta_i = \Delta = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -1 \\ \hline & & & 0 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} .$$

Μέσω αναδρομικών σχέσεων το μέτρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^B &= \sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\, b_0(n-i) - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i) \\ &= \left(1 - a_k(i-1)\right) b_0(n-i) - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τους Chadjiconstantinidis and Koutras (1999), μπορούμε να διατάξουμε τις μονάδες ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος βάσει του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο πρότυπο που περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα.</u> Τα μέτρα σπουδαιότητας του Birnbaum για τις μονάδες ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος ικανοποιούν τις επόμενες διατάξεις (iid και μη-iid περίπτωση)

$$I_i^B < I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } k \le n/2,\ 1 \le i < k,\ \ p_i \le p_{i+1}$$
$$I_i^B < I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ 1 \le i \le n-k-1,\ \ p_i \le p_{i+1}$$
$$I_i^B < I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ n-k \le i < k,\ \ p_i < p_{i+1}$$
$$I_i^B < I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ i = n-k,\ \ p_i = p_{i+1}$$
$$I_i^B = I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ n-k+1 \le i < k,\ \ p_i = p_{i+1}$$

$$I_i^B > I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } k \le n/2,\ n-k+1 \le i < n,\ \ p_i \ge p_{i+1}$$
$$I_i^B > I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ n-k+1 \le i < k,\ \ p_i > p_{i+1}$$
$$I_i^B > I_{i+1}^B, \quad \text{όταν } n/2 < k < n,\ k \le i < n,\ \ p_i \ge p_{i+1}$$

$$I_1^B < I_{k+1}^B, \quad \text{όταν } n \ge k+2,\ \ p_1 \ge p_{k+1}$$
$$I_1^B = I_{k+1}^B, \quad \text{όταν } n = k+1,\ \ p_1 = p_{k+1}$$
$$I_1^B < I_{k+1}^B, \quad \text{όταν } n = k+1,\ \ p_1 > p_{k+1}$$
$$I_1^B > I_{k+1}^B, \quad \text{όταν } n = k+1,\ \ p_1 < p_{k+1}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η αξιοπιστία του συστήματος θα αυξηθεί περισσότερο όταν αυξάνουμε την αξιοπιστία των λιγότερο ακραίων μονάδων, τουλάχιστο στην περίπτωση που οι πιο κεντρικές μονάδες έχουν μεγαλύτερη αξιοπιστία.

<u>Λήμμα.</u> Έστω ένα συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F MIS* σύστημα. Τότε,

$$b_0(j) \ge b_1(j) \ge \cdots \ge b_k(j).$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι, $\boldsymbol{\beta}(j)=\Lambda_{n-j+1}\boldsymbol{\beta}(j-1)$. Έτσι, για ένα συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F* *MIS* σύστημα,

όταν $0 \le r \le k-1$, έχουμε

$$b_r(j)=p_{n-j+1}b_0(j-1)+q_{n-j+1}b_{r+1}(j-1),$$

ενώ όταν $r=k$,

$$b_k(j)=b_k(j-1)=\cdots=0.$$

Όταν $0 \le r \le k-2$, προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} b_r(j)=p_{n-j+1}b_0(j-1)+q_{n-j+1}b_{r+1}(j-1) \\ b_{r+1}(j)=p_{n-j+1}b_0(j-1)+q_{n-j+1}b_{r+2}(j-1) \end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$b_r(j)-b_{r+1}(j)=p_{n-j+1}\left[b_{r+1}(j-1)-b_{r+2}(j-1)\right].$$

Άρα, αν $b_0(j-1)\ge b_1(j-1)\ge\cdots\ge b_k(j-1)$, τότε, $b_0(j)\ge b_1(j)\ge\cdots\ge b_k(j)$.

Αφού οι ισότητες ισχύουν για το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}(0)=\mathbf{u}$, επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι ισχύουν και για το $\boldsymbol{\beta}(j), \forall j$.

• **Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP}=\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i(1)-\Lambda_i\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

ή μέσω των αναδρομικών σχέσεων από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^{IP} &= \sum\nolimits_{r=0}^{k-1}a_r(i-1)(1-p_i)\,b_r(n-i)-\sum\nolimits_{r=0}^{k-2}a_r(i-1)(1-p_i)\,b_{r+1}(n-i) \\ &=(1-p_i)\left\{\left(1-a_k(i-1)\right)b_0(n-i)-\sum\nolimits_{r=0}^{k-2}a_r(i-1)\,b_{r+1}(n-i)\right\}. \end{aligned}$$

Θεώρημα. Τα μέτρα δυνατότητας βελτίωσης για τις μονάδες ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος ικανοποιούν τις επόμενες διατάξεις (iid και μη-iid περίπτωση):

$$I_i^{IP} < I_{i+1}^{IP}, \quad \text{όταν } k \le n/2, \;\; 1 \le i < k$$

$$I_i^{IP} > I_{i+1}^{IP}, \quad \text{όταν } k \le n/2, \;\; n-k+1 \le i < n$$

$$I_i^{IP} < I_{i+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n/2 < k < n, \;\; 1 \le i \le n-k-$$

$$I_i^{IP} = I_{i+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n/2 < k < n, \;\; n-k+1 \le i \le k$$

$$I_i^{IP} > I_{i+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n/2 < k < n, \;\; k+1 \le i < n$$

$$I_1^{IP} < I_{k+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n \ge k+2, \;\; p_1 \ge p_{k+1}$$

$$I_i^{IP} = I_{k+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n = k+1, \;\; p_1 = p_{k+1}$$

$$I_i^{IP} < I_{k+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n = k+1, \;\; p_1 > p_{k+1}$$

$$I_i^{IP} > I_{k+1}^{IP}, \quad \text{όταν } n = k+1, \;\; p_1 < p_{k+1}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει $b_0(j) = b_1(j) = \ldots = b_{k-j-1}(j) = 1,\; j \le k-1$, και $a_{i+1}(i) = \ldots = a_k(i) = 0,\; i < k$. Αυτό συνεπάγεται ότι για $j \le k-2$, $b_0(j) = b_1(j) = 1$ και για $i \le k-2$, ισχύει $a_{k-1}(i) = a_k(i) = 0$.

Η διαφορά δύο διαδοχικών μέτρων δίνεται από την επόμενη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} &= R_S(1_i, \mathbf{p}) - R_S(1_{i+1}, \mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1} \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} - \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i \Lambda_{i+1}(1) \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left[\Lambda_i(1) \Lambda_{i+1} - \Lambda_i \Lambda_{i+1}(1) \right] \Lambda_{i+2,n} \mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}(i-1) \Delta^* \boldsymbol{\beta}(n-i-1), \end{aligned}$$

όπου

$$\Delta^* = \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1} - \Lambda_i \Lambda_{i+1}(1) = \left[\begin{array}{cc|c} -q_{i+1} & q_{i+1} & \\ \vdots & \vdots & \\ -q_{i+1} & q_{i+1} & \\ q_i - q_{i+1} & q_{i+1} & -q_i \\ \hline & & 0 \end{array} \right]_{(k+1)\times(k+1)}.$$

Άρα η διαφορά των δύο μέτρων απλοποιείται στη μορφή

$$\begin{aligned} I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} &= \boldsymbol{\alpha}(i-1)\Delta^*\boldsymbol{\beta}(n-i-1) \\ &= q_{i+1}\left(1-a_k(i-1)\right)\left(b_1(n-i-1)-b_0(n-i-1)\right)+q_i a_{k-1}(i-1)\,b_0(n-i-1). \end{aligned}$$

Αν $(n+1)/2 \le k < n$, ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις.

- Αν, $i \le n-k$ $(n-i-1 \ge k-1)$, τότε $i \le 2k-1-k = k-1$ $(i-1 \le k-2)$, οπότε $a_{k-1}(i-1) = a_k(i-1) = 0$, και $b_0(n-i-1) > b_1(n-i-1) \Rightarrow I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} < 0 \Rightarrow I_i^{IP} < I_{i+1}^{IP}$.
- Αν, $n-k+1 \le i \le k-1$ $(n-i-1 \le k-2, i-1 \le k-2)$, τότε, $a_{k-1}(i-1) = a_k(i-1) = 0$, και $b_0(n-i-1) = b_1(n-i-1) = 1 \Rightarrow I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} = 0 \Rightarrow I_i^{IP} = I_{i+1}^{IP}$.
- Τέλος, αν $i \ge k$ $(i-1 \ge k-1)$, τότε, $n-i-1 \le n-k-1 \le 2k-1-k-1 = k-2$, οπότε $a_{k-1}(i-1) > 0$, και $b_0(n-i-1) = b_1(n-i-1) = 1 \Rightarrow I_i^{IP} - I_{i+1}^{IP} > 0 \Rightarrow I_i^{IP} > I_{i+1}^{IP}$.

Για τις αναλυτικές αποδείξεις των υπόλοιπων σχέσεων διάταξης βλέπε Chadjiconstantinidis and Koutras (1999).

Παρατηρούμε, ότι το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης αυξάνεται καθώς μεταφερόμαστε από τις ακραίες μονάδες του συστήματος στις πιο κεντρικές. Άρα, οι μονάδες των οποίων η αξιοπιστία πρέπει να βελτιωθεί, είναι οι κεντρικές μονάδες, δηλαδή οι k έως $(n-k)$.

- **Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας**

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους μη λειτουργίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_i^{CS} &= p_i\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{u}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \\ I_i^{CF} &= (1-p_i)\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$I_i^{CS} = \frac{p_i\left(1-a_k(i-1)\right)b_0(n-i) - p_i\sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\,b_{r+1}(n-i)}{1-a_k(n)},$$

$$I_i^{CF} = \frac{(1-p_i)\left(1-a_k(i-1)\right)b_0(n-i) - (1-p_i)\sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\,b_{r+1}(n-i)}{a_k(n)}.$$

<u>Θεώρημα.</u> Η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος όταν δε λειτουργεί μια μονάδα ικανοποιεί τις επόμενες διατάξεις (iid και μη-iid περίπτωση):

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) > R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } n \geq 2k,\ i \leq k-1 \text{ και } p_i \leq p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) < R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } n \geq 2k,\ i \geq n-k+1 \text{ και } p_i \geq p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) > R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } \tfrac{n+1}{2} \leq k < n,\ i \leq n-k \text{ και } p_i \leq p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) > R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } \tfrac{n+1}{2} \leq k < n,\ n-k+1 \leq i \leq k-1, \text{ και } p_i < p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) = R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } \tfrac{n+1}{2} \leq k < n,\ n-k+1 \leq i \leq k-1, \text{ και } p_i = p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) < R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } \tfrac{n+1}{2} \leq k < n,\ n-k+1 \leq i \leq k-1, \text{ και } p_i > p_{i+1}$$

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) < R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right), \quad \text{όταν } \tfrac{n+1}{2} \leq k < n,\ i \geq k \text{ και } p_i \geq p_{i+1}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Η διαφορά της αξιοπιστίας όταν δε λειτουργεί μια μονάδα, και όταν δε λειτουργεί η επόμενη από αυτήν μονάδα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) - R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right) &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1}\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} - \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\Lambda_{i+1}(0)\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\left[\Lambda_i(0)\Lambda_{i+1} - \Lambda_i\Lambda_{i+1}(0)\right]\Lambda_{i+2,n}\mathbf{u} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}(i-1)\Delta^{**}\boldsymbol{\beta}(n-i-1), \end{aligned}$$

όπου

$$\Delta^{**} = \Lambda_i(0)\Lambda_{i+1} - \Lambda_i\Lambda_{i+1}(0) = \left[\begin{array}{cccc|c} p_{i+1} & -p_i & (p_i - p_{i+1}) & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ p_{i+1} & -p_i & & & (p_i - p_{i+1}) \\ 0 & -p_i & & & p_i \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)}.$$

Η διαφορά αυτή απλοποιείται στη μορφή

$$\begin{aligned} R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right) - R_S\left(0_{i+1},\mathbf{p}\right) = p_{i+1}\sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\,b_0(n-i-1) - p_i\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\,b_1(n-i-1) + \\ +\left(p_i - p_{i+1}\right)\sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1)\,b_{r+2}(n-i-1) \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{k-3} a_r(i-1)\left[p_{i+1}\left(b_0(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right) - p_i\left(b_1(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right)\right] +$$
$$+ a_{k-2}(i-1)\left[p_{i+1} b_0(n-i-1) - p_i b_1(n-i-1)\right] - p_i a_{k-1}(i-1) b_1(n-i-1).$$

Αν $n \ge 2k$, ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις.

• Όταν, $i \le k-1$ $(i-1 \ge k-2)$ και $p_i \le p_{i+1}$, τότε $a_{k-1}(i-1) = a_k(i-1) = 0$ και $b_0(n-i-1) > b_1(n-i-1) \Rightarrow$

$$b_0(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1) > b_1(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1),\ r = 0,1,\ldots,k-3 \overset{p_i \le p_{i+1}}{\Rightarrow}$$
$$\begin{cases} p_{i+1}\left(b_0(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right) > p_i\left(b_1(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right) \\ p_{i+1} b_0(n-i-1) > p_i b_1(n-i-1). \end{cases}$$

Τότε

$$R_S(0_i, \mathbf{p}) - R_S(0_{i+1}, \mathbf{p}) =$$
$$= \sum_{r=0}^{k-3} a_r(i-1)\left[p_{i+1}\left(b_0(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right) - p_i\left(b_1(n-i-1) - b_{r+2}(n-i-1)\right)\right] +$$
$$+ a_{k-2}(i-1)\left[p_{i+1} b_0(n-i-1) - p_i b_1(n-i-1)\right] > 0.$$

Άρα $R_S(0_i, \mathbf{p}) > R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$, όταν $n \ge 2k$, $i \le k-1$ και $p_i \le p_{i+1}$.

• Όταν, $i \ge n-k+1$ $(n-i-1 \le k-2)$ και $p_i \ge p_{i+1}$, τότε $b_0(n-i-1) = b_1(n-i-1) = 1$ και

$$R_S(0_i, \mathbf{p}) - R_S(0_{i+1}, \mathbf{p}) =$$
$$= \sum_{r=0}^{k-3} a_r(i-1)\left[p_{i+1}\left(1 - b_{r+2}(n-i-1)\right) - p_i\left(1 - b_{r+2}(n-i-1)\right)\right] +$$
$$+ a_{k-2}(i-1)\left(p_{i+1} - p_i\right) - p_i a_{k-1}(i-1) < 0.$$

Άρα $R_S(0_i, \mathbf{p}) < R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$, όταν $n \ge 2k$, $i \ge n-k+1$ και $p_i \ge p_{i+1}$.

Αν $(n+1)/2 \le k < n$, ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις.

• Όταν, $i \le n-k$ $(n-i-1 \ge k-1)$, τότε $i \le 2k-1-k = k-1$ $(i-1 \le k-2)$, και επομένως $a_{k-1}(i-1) = a_k(i-1) = 0$, και $b_0(n-i-1) > b_1(n-i-1)$. Όπως και προηγουμένως αποδεικνύεται ότι $R_S(0_i, \mathbf{p}) > R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$, όταν $(n+1)/2 \le k < n$, $i \le n-k$ και $p_i \le p_{i+1}$.

• Όταν $i \geq k$ $(i-1 \geq k-1)$, τότε, $n-i-1 \leq n-k-1 \leq 2k-1-k-1 = k-2$, οπότε θα ισχύει $a_{k-1}(i-1) > 0$, και $b_0(n-i-1) = b_1(n-i-1) = 1$. Όπως και προηγουμένως αποδεικνύεται ότι $R_S(0_i, \mathbf{p}) < R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$, όταν $(n+1)/2 \leq k < n$, $i \geq k$ και $p_i \geq p_{i+1}$.

• Τέλος, αν $n-k+1 \leq i \leq k-1$ $(n-i-1 \leq k-2, i-1 \leq k-2)$, τότε, $a_{k-1}(i-1) = a_k(i-1) = 0$, και $b_0(n-i-1) = b_1(n-i-1) = 1$. Άρα,

$$R_S(0_i, \mathbf{p}) - R_S(0_{i+1}, \mathbf{p}) = (p_{i+1} - p_i)\left\{\sum_{r=0}^{k-3} a_r(i-1)\left(1 - b_{r+2}(n-i-1)\right) + a_{k-2}(i-1)\right\}.$$

Επομένως

αν $p_i < p_{i+1} \Rightarrow R_S(0_i, \mathbf{p}) > R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$,

αν $p_i = p_{i+1} \Rightarrow R_S(0_i, \mathbf{p}) = R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$,

αν $p_i > p_{i+1} \Rightarrow R_S(0_i, \mathbf{p}) < R_S(0_{i+1}, \mathbf{p})$.

Είναι προφανές λοιπόν ότι το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας του συστήματος ακολουθεί μια δομή αντίστοιχη με αυτή της αξιοπιστίας που αναλύθηκε προηγουμένως. Αφού $I_i^{CS} = 1 - \dfrac{R_S(0_i, \mathbf{p})}{R_S(\mathbf{p})}$, παρατηρούμε ότι:

$I_i^{CS} < I_{i+1}^{CS}$, όταν $n \geq 2k$, $i \leq k-1$ και $p_i \leq p_{i+1}$

$I_i^{CS} > I_{i+1}^{CS}$, όταν $n \geq 2k$, $i \geq n-k+1$ και $p_i \geq p_{i+1}$

$I_i^{CS} < I_{i+1}^{CS}$, όταν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, $i \leq n-k$ και $p_i \leq p_{i+1}$

$I_i^{CS} < I_{i+1}^{CS}$, όταν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, $n-k+1 \leq i \leq k-1$, και $p_i < p_{i+1}$

$I_i^{CS} = I_{i+1}^{CS}$, όταν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, $n-k+1 \leq i \leq k-1$, και $p_i = p_{i+1}$

$I_i^{CS} > I_{i+1}^{CS}$, όταν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, $n-k+1 \leq i \leq k-1$, και $p_i > p_{i+1}$

$I_i^{CS} > I_{i+1}^{CS}$, όταν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, $i \geq k$ και $p_i \geq p_{i+1}$.

Αντίστοιχα με το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας, και το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος ικανοποιεί σχέσεις διάταξης αντίστοιχες με αυτές του μέτρου δυνατότητας βελτίωσης του συστήματος, αφού $I_i^{CF} = I_i^{IP} \dfrac{1}{R_S(\mathbf{p})}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τα επόμενα αποτελέσματα:

$I_i^{CF} < I_{i+1}^{CF}$, όταν $k \le n/2,\ \ 1 \le i < k$

$I_i^{CF} > I_{i+1}^{CF}$, όταν $k \le n/2,\ \ n-k+1 \le i < n$

$I_i^{CF} < I_{i+1}^{CF}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ 1 \le i \le n-k-$

$I_i^{CF} = I_{i+1}^{CF}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ n-k+1 \le i \le k$

$I_i^{CF} > I_{i+1}^{CF}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ k+1 \le i < n$

$I_i^{CF} < I_{i+1}^{CF}$, όταν $n \ge k+2,\ \ p_1 \ge p_{k+1}$

$I_i^{CF} = I_{i+1}^{CF}$, όταν $n = k+1,\ \ p_1 = p_{k+1}$

$I_i^{CF} < I_{i+1}^{CF}$, όταν $n = k+1,\ \ p_1 > p_{k+1}$

$I_i^{CF} > I_{i+1}^{CF}$, όταν $n = k+1,\ \ p_1 < p_{k+1}$.

• **Μέτρο Σπουδαιότητας των *Fussell-Vesely***

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται με χρήση των ΕΣΔ. Για ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1 \le k \le n$, και $k \ge 2$, έχουμε $(n-k+1)$ ΕΣΔ.

Αν $n \ge 2k$

• Για $i \le k$, η μονάδα i περιέχεται σε i ΕΣΔ, πιο συγκεκριμένα τα

$$E_1^i = \{1,2,\dots,k\}, E_2^i = \{2,3,\dots,k+1\},\dots,E_i^i = \{i,i+1,\dots,i+k-1\}.$$

Άρα,

$$\Pr(D_i) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_i^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_1 = 0, x_2 = 0,\dots,x_{i+k-1} = 0\right) = \prod_{j=1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right), \qquad i \le k.$$

• Για $k \le i \le n-k+1$, η μονάδα i περιέχεται στα επόμενα k ΕΣΔ:

$$E_1^i = \{i-k+1, i-k+2,\dots,i\}, E_2^i = \{i-k+2, i-k+3,\dots,i+1\},\dots,E_k^i = \{i,i+1,\dots,i+k-1\}.$$

Άρα,

$$\Pr\left(D_i\right) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_k^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_{i-k+1} = 0, x_{i-k+2} = 0, \ldots, x_{i+k-1} = 0\right) = \prod_{j=i-k+1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right), \quad k \le i \le n-k+1.$$

• Για $i \ge n-k+1$, η μονάδα i περιέχεται σε $\left(n-i+1\right)$ ΕΣΔ, πιο συγκεκριμένα τα

$$E_1^i = \left\{i-k+1, i-k+2, \ldots, i\right\}, E_2^i = \left\{i-k+2, i-k+3, \ldots, i+1\right\}, \ldots, E_k^i = \left\{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\right\}.$$

Άρα,

$$\Pr\left(D_i\right) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{n-i+1}^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_{i-k+1} = 0, x_{i-k+2} = 0, \ldots, x_n = 0\right) = \prod_{j=i-k+1}^{n}\left(1-p_j\right), \quad i \ge n-k+1.$$

Αν $\frac{n+1}{2} \le k < n$

• Για $i \le n-k+1$, η μονάδα i περιέχεται στα επόμενα i ΕΣΔ:

$$E_1^i = \left\{1, 2, \ldots, k\right\}, E_2^i = \left\{2, 3, \ldots, k+1\right\}, \ldots, E_i^i = \left\{i, i+1, \ldots, i+k-1\right\}.$$

Άρα,

$$\Pr\left(D_i\right) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_i^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_{i+k-1} = 0\right) = \prod_{j=1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right), \quad i \le n-k+1.$$

• Για $n-k+1 \le i \le k$, η μονάδα i περιέχεται στα επόμενα $\left(n-k+1\right)$ ΕΣΔ:

$$E_1^i = \left\{1, 2, \ldots, k\right\}, E_2^i = \left\{2, 3, \ldots, k+1\right\}, \ldots, E_{n-k+1}^i = \left\{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\right\}.$$

Άρα,

$$\Pr\left(D_i\right) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{n-k+1}^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right), n-k+1 \le i \le k.$$

• Για $i \ge k$, η μονάδα i περιέχεται στα επόμενα $\left(n-i+1\right)$ ΕΣΔ:

$$E_1^i = \left\{i-k+1, i-k+2, \ldots, i\right\}, E_2^i = \left\{i-k+2, i-k+3, \ldots, i+1\right\}, \ldots, E_k^i = \left\{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\right\}.$$

Άρα,

$$\Pr\left(D_i\right) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{n-i+1}^i\right) =$$
$$= \Pr\left(x_{i-k+1} = 0, x_{i-k+2} = 0, \ldots, x_n = 0\right) = \prod_{j=i-k+1}^{n}\left(1-p_j\right), \quad i \ge k.$$

Επίσης, $\Pr(C)=1-R_S(\mathbf{p})$.

Άρα, για κάθε μονάδα του *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely περιγράφεται από τις επόμενες σχέσεις.

Αν $n \geq 2k$, τότε

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad i \leq k.$$

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad k \leq i \leq n-k.$$

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{n}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad i \geq n-k.$$

Αν $\frac{n+1}{2} \leq k < n$, τότε

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=1}^{i+k-1}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad i \leq n-k+1.$$

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad n-k+1 \leq i \leq k.$$

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{n}\left(1-p_j\right)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad i \geq k.$$

Θεώρημα. Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely δύο διαδοχικών μονάδων ενός *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος, ικανοποιεί τις επόμενες διατάξεις:

$I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}$, όταν $n \geq 2k$ και $i \leq k-1$

$I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}$, όταν $n \geq 2k$, $k \leq i \leq n-k$ και $p_{i-k+1} < p_{i+k}$

$I_i^{FV} = I_{i+1}^{FV}$, όταν $n \geq 2k$, $k \leq i \leq n-k$ και $p_{i-k+1} = p_{i+k}$

$I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}$, όταν $n \geq 2k$, $k \leq i \leq n-k$ και $p_{i-k+1} > p_{i+k}$

$I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}$, όταν $n \geq 2k$ και $n-k+1 \leq i \leq n-1$

$I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$ και $i \le n-k$

$I_i^{FV} = I_{i+1}^{FV}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$ και $n-k+1 \le i \le k-1$

$I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$ και $n-k+1 \le i \le n-1$.

<u>Απόδειξη:</u>

Για $n \ge 2k$

• αν $i \le k-1$ θα έχουμε

$$I_i^{FV} - I_{i+1}^{FV} = \frac{\prod_{j=1}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} - \frac{\prod_{j=1}^{i+k}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \left(1-(1-p_{i+k})\right)\frac{\prod_{j=1}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} =$$

$$= p_{i+k}\frac{\prod_{j=1}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} > 0 \Rightarrow I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}$$

• αν $k \le i \le n-k$ θα ισχύει

$$I_i^{FV} - I_{i+1}^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} - \frac{\prod_{j=i-k+2}^{i+k}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \left((1-p_{i-k+1})-(1-p_{i+k})\right)\frac{\prod_{j=i-k+2}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} =$$

$$= (p_{i+k} - p_{i-k+1})\frac{\prod_{j=i-k+2}^{i+k-1}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

οπότε:

$$p_{i-k+1} < p_{i+k} \Rightarrow I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}.$$

$$p_{i-k+1} = p_{i+k} \Rightarrow I_i^{FV} = I_{i+1}^{FV}.$$

$$p_{i-k+1} > p_{i+k} \Rightarrow I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}.$$

• αν $n-k+1 \le i \le n-1$

$$I_i^{FV} - I_{i+1}^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{n}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} - \frac{\prod_{j=i-k+2}^{n}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} = \left((1-p_{i-k+1})-1\right)\frac{\prod_{j=i-k+2}^{n}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} =$$

$$= -p_{i-k+1}\frac{\prod_{j=i-k+2}^{n}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})} < 0 \Rightarrow I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}.$$

Τέλος, για $\frac{n+1}{2} \le k < n$ τότε

• αν $i \le n-k$ έχουμε $I_i^{FV} > I_{i+1}^{FV}$

• αν $i \ge k$, έχουμε $I_i^{FV} < I_{i+1}^{FV}$

• ενώ αν $n-k+1 \le i \le k-1$ προκύπτει

$$I_i^{FV} - I_{i+1}^{FV} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} - \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)} = 0 \Rightarrow I_i^{FV} = I_{i+1}^{FV}.$$

Όπως παρατηρούμε, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα του συστήματος. Η ερμηνεία που δίνεται, είναι ότι όσο πλησιάζουμε στα άκρα του συστήματος οι μονάδες συμβάλουν περισσότερο στην αποτυχία του συστήματος.

• Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_N\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i\left(0\right) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_N, \qquad I_i^{RAW} = \frac{1-\sum_{r=0}^{k-2} a_r\left(i-1\right) b_{r+1}\left(n-i\right)}{a_N\left(n\right)}$$

Όμως, όπως είναι ήδη γνωστό, $I_i^{RAW} = \dfrac{1-R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}$. Αυτό σημαίνει ότι και για αυτό το μέτρο υπάρχει μια διάταξη ανάμεσα στα μέτρα σπουδαιότητας δυο διαδοχικών μονάδων, ανάλογη με αυτή του μέτρου σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας του συστήματος. Άρα,

$I_i^{RAW} < I_{i+1}^{RAW}$, όταν $n \ge 2k$, $i \le k-1$ και $p_i \le p_{i+1}$

$I_i^{RAW} > I_{i+1}^{RAW}$, όταν $n \ge 2k$, $i \ge n-k+1$ και $p_i \ge p_{i+1}$

$I_i^{RAW} < I_{i+1}^{RAW}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$, $i \le n-k$ και $p_i \le p_{i+1}$

$I_i^{RAW} < I_{i+1}^{RAW}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$, $n-k+1 \le i \le k-1$, και $p_i < p_{i+1}$

$I_i^{RAW} = I_{i+1}^{RAW}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$, $n-k+1 \le i \le k-1$, και $p_i = p_{i+1}$

$I_i^{RAW} > I_{i+1}^{RAW}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$, $n-k+1 \le i \le k-1$, και $p_i > p_{i+1}$

$I_i^{RAW} > I_{i+1}^{RAW}$, όταν $\frac{n+1}{2} \le k < n$, $i \ge k$ και $p_i \ge p_{i+1}$

Σε περίπτωση μη λειτουργίας του συστήματος, παρατηρούμε ότι η μη λειτουργία κεντρικών μονάδων συμβάλει περισσότερο στη μη λειτουργία του συστήματος σε σχέση με τη λειτουργία ακραίων μονάδων.

• **Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_N\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_N, \qquad I_i^{RRW} = \frac{a_N(n)}{1-\left(1-a_k(i-1)\right) b_0(n-i)}.$$

Όπως και στο μέτρο επίτευξης κινδύνου, έτσι και για το μέτρο ελάττωσης κινδύνου υπάρχει μια αντιστοιχία με ένα άλλο μέτρο. Η δομή ανάμεσα στα μέτρα σπουδαιότητας δυο διαδοχικών μονάδων είναι ανάλογη με αυτή του μέτρου δυνατότητας βελτίωσης, αφού $I_i^{RRW} = \dfrac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(1_i,\mathbf{p})} = \dfrac{1-R_S(\mathbf{p})}{1-R_S(\mathbf{p})-I_i^{IP}}$. Έτσι, η δομή αυτή περιγράφεται από τις επόμενες σχέσεις:

$I_i^{RRW} < I_{i+1}^{RRW}$, όταν $k \le n/2, \ 1 \le i < k$

$I_i^{RRW} > I_{i+1}^{RRW}$, όταν $k \le n/2, \ n-k+1 \le i < n$

$I_i^{RRW} < I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n/2 < k < n, \ 1 \le i \le n-k-$

$I_i^{RRW} = I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n/2 < k < n, \ n-k+1 \le i \le k$

$I_i^{RRW} > I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n/2 < k < n, \ k+1 \le i < n$

$I_i^{RRW} < I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n \ge k+2, \ p_1 \ge p_{k+1}$

$I_i^{RRW} = I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n = k+1, \ p_1 = p_{k+1}$

$I_i^{RRW} < I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n = k+1, \ p_1 > p_{k+1}$

$I_i^{RRW} > I_{i+1}^{RRW}$, όταν $n = k+1, \ p_1 < p_{k+1}$.

Στο μέτρο ελάττωσης κινδύνου, παρατηρούμε ότι ισχύουν αντίστοιχες σχέσεις με το μέτρο επίτευξης κινδύνου. Εδώ όμως, αυτό που εξετάζεται είναι αν το ποσοστό της αναξιοπιστίας που οφείλεται σε μία μονάδα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το ποσοστό της αναξιοπιστίας που οφείλεται σε μία άλλη μονάδα. Έτσι συμπεραίνουμε πως όσο απομακρυνόμαστε από τις ακραίες μονάδες, το ποσοστό αυτό αυξάνεται.

- **Μέτρο Σπουδαιότητας Δεσμού και Μέτρο Σπουδαιότητας Συνόλου Λειτουργίας-συνόλου Διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού, υποθέτει ότι έχουμε iid μονάδες. Οι διατάξεις μεταξύ της αξιοπιστίας $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)$ δύο διαδοχικών μονάδων είναι ανάλογες των μέτρων δυνατότητας βελτίωσης δύο διαδοχικών μονάδων. Αντίστοιχα, οι διατάξεις μεταξύ της αξιοπιστίας $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)$ δύο διαδοχικών μονάδων είναι ανάλογες των μέτρων σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας δύο διαδοχικών μονάδων. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες διατάξεις (iid και μη-iid περίπτωση):

$LI_i \le LI_{i+1}$, όταν $k \le n/2,\ \ 1 \le i < k$

$LI_i \ge LI_{i+1}$, όταν $k \le n/2,\ \ n-k+1 \le i < n$

$LI_i \le LI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ 1 \le i \le n-k$

$LI_i \approx LI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ n-k+1 \le i \le k$

$LI_i \ge LI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ k+1 \le i < n$.

Για το μέτρο σπουδαιότητας συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής, ισχύουν και οι ανισότητες που ισχύουν για το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού. Έτσι, έχουμε αντίστοιχα,

$PCI_i \le PCI_{i+1}$, όταν $k \le n/2,\ \ 1 \le i < k$

$PCI_i \ge PCI_{i+1}$, όταν $k \le n/2,\ \ n-k+1 \le i < n$

$PCI_i \le PCI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ 1 \le i \le n-k$

$PCI_i \approx PCI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ n-k+1 \le i \le k$

$PCI_i \ge PCI_{i+1}$, όταν $n/2 < k < n,\ \ k+1 \le i < n$.

• Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας για ένα συνεχόμενο-k-από-τα-$n:F$ σύστημα, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$JRI_{i,j} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,j-1} \Delta_j \Lambda_{j+1,n} \mathbf{u},$$

ή αναδρομικά από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
JRI_{i,j} &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{u=0}^{k-1} a_r(i-1) d_{r,s}(i)\, l_{s,t}(i+1, j-1) d_{t,u}(j) b_u(n-j) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{t=0}^{k-1} a_r(i-1) \left[l_{0,t}(i+1, j-1) - l_{r+1,t}(i+1, j-1) \right] \left[b_0(n-j) - b_{t+1}(n-j) \right] \\
&= \left(1 - a_k(i-1)\right) \left[\sum_{t=0}^{k-1} l_{0,t}(i+1, j-1) \right] b_0(n-j) \\
&\qquad - \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1) \left[\sum_{t=0}^{k-1} l_{r+1,t}(i+1, j-1) \right] b_0(n-j) \\
&\qquad - \left(1 - a_k(i-1)\right) \left[\sum_{t=0}^{k-2} l_{0,t}(i+1, j-1) \right] b_{t+1}(n-j) \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{k-2} a_r(i-1) \sum_{t=0}^{k-2} l_{r+1,t}(i+1, j-1)\, b_{t+1}(n-j)
\end{aligned}$$

• Μέτρο σχετικής κρισιμότητας.

Γνωρίζουμε πως όταν $n \geq 2k$ και $i \leq k$ ή $i \geq n-k+1$, η i μονάδα έχει i και $n-i+1$ ΕΣΔ, αντίστοιχα. Έτσι,

όταν $i < k$, $A_i \subset A_{i+1}$, αφού το A_{i+1} περιέχει επιπλέον το ΕΣΔ $\{i+1, \ldots, i+k\}$,

οπότε $I_i^{RC} < I_{i+1}^{RC}$, ενώ

όταν $i \geq n-k+1$, τότε $A_{i+1} \subset A_i$, αφού το A_i περιέχει επιπλέον το ΕΣΔ $\{i+k-1, \ldots, i\}$,

οπότε $I_i^{RC} > I_{i+1}^{RC}$.

όταν $k < n < 2k$, τότε αν $i \leq n-k$ ή $i \geq k+1$, η i μονάδα έχει i και $n-i+1$ ΕΣΔ, αντίστοιχα. Η i μονάδα έχει $n-k+1$ ΕΣΔ που είναι κοινά για όλες τις μονάδες. Έτσι,

όταν $i < n-k$, $A_i \subset A_{i+1}$, αφού το A_{i+1} περιέχει επιπλέον το ΕΣΔ $\{i+1, \ldots, i+k\}$,

άρα $I_i^{RC} < I_{i+1}^{RC}$,

όταν $i \geq k+1$, τότε $A_{i+1} \subset A_i$, αφού το A_i περιέχει επιπλέον το ΕΣΔ $\{i+k-1, \ldots, i\}$,

άρα $I_i^{RC} > I_{i+1}^{RC}$, ενώ

όταν $n-k+1 \leq i < k$, τότε $A_i \equiv A_{i+1}$, άρα $I_i^{RC} \approx I_{i+1}^{RC}$.

4.6. Σύστημα Σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* (*Weighted-k-out-of-n: F System*)

Για τη μελέτη ενός σταθμισμένου-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος, καθώς και για κάποια μέτρα σπουδαιότητας του συστήματος αυτού, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη τεχνική εμφύτευσης σε μαρκοβιανές αλυσίδες.

Όπως είναι ήδη γνωστό από το Κεφάλαιο 2, η αξιοπιστία ενός σταθμισμένου-*k*-από-τα-*n*: *F MIS* συστήματος, δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr\left(Y_0 = s_0\right), \ldots, \Pr\left(Y_0 = s_N\right)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0)'$,

$$\Lambda_{i,j} = \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t ,$$

και

$$\Lambda_t = \begin{array}{c} \leftarrow \; w_t \; \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} p_t & 0 & & q_t & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & p_t & & & q_t & \\ & & & p_t & & & q_t \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & p_t & q_t \\ \hline & & & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} \end{array}$$

ο πίνακας μετάβασης του συστήματος.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^B = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}$$

όπου

$$\Delta_i = \Delta = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0) = \begin{array}{c} \leftarrow \; w_t \; \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & & -1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & 1 & & & -1 & \\ & & & 1 & & & -1 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} \end{array} .$$

Μέσω των αναδρομικών σχέσεων, το μέτρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^B &= \sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\, b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)\, b_{r+w_i}(n-i) \\ &= \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)\left[b_r(n-i) - b_{r+w_i}(n-i)\right] + \sum_{r=k-w_i}^{k-1} a_r(i-1)\, b_r(n-i). \end{aligned}$$

• **Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP} = \boldsymbol{\pi}'_0 \Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i(1) - \Lambda_i\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

ή μέσω των αναδρομικών σχέσεων από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^{IP} &= \sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)(1-p_i)\, b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)(1-p_i)\, b_{r+w_i}(n-i) \\ &= (1-p_i)\left\{ \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)\left[b_r(n-i) - b_{r+w_i}(n-i)\right] + \sum_{r=k-w_i}^{k-1} a_r(i-1)\, b_r(n-i)\right\}. \end{aligned}$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας**

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους μη λειτουργίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_i^{CS} &= p_i\left(\boldsymbol{\pi}'_0 \Lambda_{1,n}\mathbf{u}\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}'_0 \Lambda_{1,i-1}\Delta_i \Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \\ I_i^{CF} &= (1-p_i)\left(\boldsymbol{\pi}'_0 \Lambda_{1,n}\mathbf{e}_k\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}'_0 \Lambda_{1,i-1}\Delta_i \Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} I_i^{CS} &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)\, p_i b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)\, p_i b_{r+w_i}(n-i)}{1-a_k(n)}, \\ I_i^{CF} &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1)(1-p_i)\, b_r(n-i) - \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)(1-p_i)\, b_{r+w_i}(n-i)}{a_k(n)}. \end{aligned}$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται με χρήση των ΕΣΔ. Για ένα σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: F σύστημα, με $1 \le k \le n$, $k \ge 2$ και $w_i < k$ για κάθε i, υπάρχει τουλάχιστο ένα ΕΣΔ, που περιέχει τη μονάδα i και τη μονάδα j, για κάθε i, j, με $j \ne i$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\Pr(D_i) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{m_i}^i\right) = \Pr\left(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right).$$

Επίσης, $\Pr(C) = 1 - R_S(\mathbf{p})$.

Άρα, για κάθε μονάδα του σταθμισμένου-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely παραμένει σταθερό και ίσο με

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Έτσι, όλες οι μονάδες συμβάλουν εξίσου σε μια ενδεχόμενη αποτυχία του συστήματος.

• Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_k\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(0) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_k \qquad I_i^{RAW} = \frac{1 - \sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1) b_{r+w_i}(n-i)}{a_k(n)}.$$

• Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_k\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_k, \qquad I_i^{RRW} = \frac{a_k(n)}{1 - \sum_{r=0}^{k-1} a_r(i-1) b_r(n-i)}.$$

4.7. Σύστημα Συνεχόμενο-σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* (*Consecutive-Weighted-k-out-of-n: F System*)

Όπως είναι ήδη γνωστό από το Κεφάλαιο 2, η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου-σταθμισμένου-*k*-από-τα-*n*: *F MIS* συστήματος, δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr(Y_0 = s_0), \ldots, \Pr(Y_0 = s_N)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0)'$,

$$\Lambda_{i,j} = \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t ,$$

και

$$\Lambda_t = \begin{array}{c} \leftarrow \ w_t \ \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc|c} p_t & 0 & q_t & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ p_t & & & q_t & \\ p_t & & & & q_t \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_t & & & & q_t \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} \end{array}$$

ο πίνακας μετάβασης του συστήματος.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^B = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u}$$

όπου

$$\Delta_i = \Delta = \Lambda_i(1) - \Lambda_i(0) = \begin{array}{c} \leftarrow \ w_t \ \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & -1 & \\ 1 & & & & -1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & -1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right]_{(k+1)\times(k+1)} \end{array} .$$

Το μέτρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί και μέσω των επόμενων αναδρομικών σχέσεων

$$\begin{aligned} I_i^B &= \left(1-a_k\left(i-1\right)\right) b_0\left(n-i\right) - \sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right) b_{r+w_i}\left(n-i\right) \\ &= \sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right)\left[b_0\left(n-i\right) - b_{r+w_i}\left(n-i\right)\right] + \sum\nolimits_{r=k-w_i}^{k-1} a_r\left(i-1\right) b_0\left(n-i\right). \end{aligned}$$

• **Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1}\left(\Lambda_i\left(1\right) - \Lambda_i\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u},$$

ή μέσω των αναδρομικών σχέσεων από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^{IP} &= \left(1-a_k\left(i-1\right)\right)\left(1-p_i\right) b_0\left(n-i\right) - \sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right)\left(1-p_i\right) b_{r+w_i}\left(n-i\right) \\ &= \left(1-p_i\right)\left\{\sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right)\left[b_0\left(n-i\right) - b_{r+w_i}\left(n-i\right)\right] + \sum\nolimits_{r=k-w_i}^{k-1} a_r\left(i-1\right) b_0\left(n-i\right)\right\}. \end{aligned}$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας**

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους μη λειτουργίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} I_i^{CS} &= p_i\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{u}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \\ I_i^{CF} &= \left(1-p_i\right)\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_k\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} I_i^{CS} &= \frac{\left(1-a_k\left(i-1\right)\right) p_i b_0\left(n-i\right) - \sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right) p_i b_{r+w_i}\left(n-i\right)}{1-a_k\left(n\right)}, \\ I_i^{CF} &= \frac{\left(1-a_k\left(i-1\right)\right)\left(1-p_i\right) b_0\left(n-i\right) - \sum\nolimits_{r=0}^{k-w_i-1} a_r\left(i-1\right)\left(1-p_i\right) b_{r+w_i}\left(n-i\right)}{a_k\left(n\right)}. \end{aligned}$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Για ένα συνεχόμενο-σταθμισμένο-k-από-τα-n: F σύστημα, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely δε μπορεί να μας δώσει κάποια τιμή για το συγκεκριμένο μέτρο, εκτός αν γνωρίζουμε τις σταθμίσεις w_i των μονάδων.

• **Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα συνεχόμενο-σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_k\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(0) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_k, \qquad I_i^{RAW} = \frac{1-\sum_{r=0}^{k-w_i-1} a_r(i-1)\, b_{r+w_i}(n-i)}{a_k(n)}.$$

• **Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα συνεχόμενο-σταθμισμένο-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_k\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_k, \qquad I_i^{RRW} = \frac{a_k(n)}{1-\left(1-a_k(i-1)\right) b_0(n-i)}.$$

4.8. Σύστημα 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* (*2-within-k-out-of-n: F System*)

Για τη μελέτη ενός 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* συστήματος, καθώς και για κάποια μέτρα σπουδαιότητας του συστήματος αυτού, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη τεχνική εμφύτευσης σε μαρκοβιανές αλυσίδες.

Όπως είναι ήδη γνωστό από το 2^{o} κεφάλαιο, η αξιοπιστία ενός 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F MIS* συστήματος, δίνεται από τη σχέση $R_S\left(\mathbf{p}\right)=\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0=\left(\Pr\left(Y_0=s_0\right),\ldots,\Pr\left(Y_0=s_N\right)\right)'\in\mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u}=\left(1,\ldots,1,0\right)'$,

$$\Lambda_{i,j}=\prod\nolimits_{t=i}^{j}\Lambda_t\ ,$$

και

$$\Lambda_t=\left[\begin{array}{cc|ccc|c} p_t & q_t & & & & \\ \hline & & p_t & & & q_t \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & p_t & q_t \\ \hline p_t & q_t & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+2)\times(k+2)}$$ ο πίνακας μετάβασης του συστήματος.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^B=\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Delta_i\Lambda_{i+1,n}\mathbf{u}$$

Όπου

$$\Delta_i=\Delta=\Lambda_i\left(1\right)-\Lambda_i\left(0\right)=\Lambda_t=\left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & -1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & -1 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 \end{array}\right]_{(k+2)\times(k+2)}.$$

Μέσω των αναδρομικών σχέσεων, το μέτρο αυτό μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$I_i^B=\left(a_0\left(i-1\right)+a_k\left(i-1\right)\right)\left(b_0\left(n-i\right)-b_1\left(n-i\right)\right)+\sum\nolimits_{r=1}^{k-1}a_r\left(i-1\right)b_{r+1}\left(n-i\right).$$

• **Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης**

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP} = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \left(\Lambda_i (1) - \Lambda_i \right) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

ή μέσω των αναδρομικών σχέσεων από τη σχέση

$$I_i^{IP} = (1-p_i)\left\{ \left(a_0(i-1) + a_k(i-1) \right) \left(b_0(n-i) - b_1(n-i) \right) + \sum_{r=1}^{k-1} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i) \right\}.$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας**

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους μη λειτουργίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$I_i^{CS} = p_i \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

$$I_i^{CF} = (1-p_i) \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_{k+1} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$I_i^{CS} = p_i \frac{\left(a_0(i-1) + a_k(i-1) \right) \left(b_0(n-i) - b_1(n-i) \right) + \sum_{r=1}^{k-1} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i)}{1 - a_k(n)},$$

$$I_i^{CF} = (1-p_i) \frac{\left(a_0(i-1) + a_k(i-1) \right) \left(b_0(n-i) - b_1(n-i) \right) + \sum_{r=1}^{k-1} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i)}{a_k(n)}.$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται με χρήση των ΕΣΔ. Για ένα 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* σύστημα, με $1 \le k \le n$, και $k > 2$, υπάρχουν $2k-2$ ΕΣΔ, που περιέχουν τη μονάδα i. Έτσι τα ΕΣΔ είναι τα εξής:

$$\{i-k+1, i-k+2, \ldots, i\}, \{i-k+2, i-k+3, \ldots, i\}, \ldots, \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$$

Αυτό σημαίνει ότι,

$$\Pr(D_i) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{m_i}^i \right) = \Pr\left(x_{i-k+1} = 0, x_{i-k+2} = 0, \ldots, x_{i+k-1} = 0 \right) = \prod_{j=i-k+1}^{i+k-1} (1-p_j).$$

Επίσης, $\Pr(C) = 1 - R_S(\mathbf{p})$.

Άρα, για τη μονάδα i του 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* συστήματος το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely είναι ίσο με

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{i+k-1} (1-p_j)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

• **Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW}=\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_{k+1}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(0\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{e}_{k+1},\qquad I_i^{RAW}=\frac{1-\left(a_0\left(i-1\right)+a_k\left(i-1\right)\right)b_1\left(n-i\right)}{a_{k+1}\left(n\right)}$$

• **Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα 2-από-*k*-συνεχόμενα-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW}=\left(\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,i-1}\Lambda_i\left(1\right)\Lambda_{i+1,n}\mathbf{e}_{k+1}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}_0'\Lambda_{1,n}\mathbf{e}_{k+1}$$

$$I_i^{RRW}=\frac{a_{k+1}\left(n\right)}{1-\left[\left(a_0\left(i-1\right)+a_k\left(i-1\right)\right)b_0\left(n-i\right)+\sum_{r=1}^{k-1}a_r\left(i-1\right)b_{r+1}\left(n-i\right)\right]}$$

4.9. Σύστημα *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*: *F* (*m-consecutive-k-out-of-n: F System*)

Όπως είναι ήδη γνωστό από το 2$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο, η αξιοπιστία ενός *MIS* συστήματος *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*: *F*, δίνεται από τη σχέση $R_S(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u}$,

όπου $\boldsymbol{\pi}_0 = \left(\Pr(Y_0 = s_0), \ldots, \Pr(Y_0 = s_N)\right)' \in \mathbb{R}^{N+1}$ είναι το διάνυσμα αρχικών πιθανοτήτων της μαρκοβιανής αλυσίδας, $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1, 0)'$,

$$\Lambda_{i,j} = \prod_{t=i}^{j} \Lambda_t ,$$

και

$$\Lambda_t = \left[\begin{array}{cccc|c} A_t & B_t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & A_t & B_t & \\ & & & A_t & q_t \mathbf{e}_k \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right]_{(mk+1)\times(mk+1)}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης του συστήματος,

με

$$A_t = \begin{bmatrix} p_t & q_t & & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_t & & & q_t \\ p_t & & & 0 \end{bmatrix}_{k\times k}, \qquad B_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ q_t & & & 0 \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

• Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum μπορεί να βρεθεί μέσω των αναδρομικών σχέσεων. Το μέτρο αυτό υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_i^B &= \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s(i-1) \right) b_{rk}(n-i) - \sum_{r=0}^{mk-2} a_r(i-1)\, b_{r+1}(n-i) \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s(i-1) \left(b_{rk}(n-i) - b_{s+1}(n-i) \right). \end{aligned}$$

• Μέτρο Δυνατότητας Βελτίωσης

Μέσω των αναδρομικών, σχέσεων το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$I_i^{IP} = (1 - p_i) \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s(i-1) \left(b_{rk}(n-i) - b_{s+1}(n-i) \right).$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας Κρισιμότητας**

Τα μέτρα σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους μη λειτουργίας, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$I_i^{CS} = p_i \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{u} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

$$I_i^{CF} = (1 - p_i) \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Delta_i \Lambda_{i+1,n} \mathbf{u},$$

αντίστοιχα, και αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$I_i^{CS} = \frac{p_i \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s (i-1) \left(b_{rk} (n-i) - b_{s+1} (n-i) \right)}{1 - a_{mk} (n)},$$

$$I_i^{CF} = \frac{(1 - p_i) \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s (i-1) \left(b_{rk} (n-i) - b_{s+1} (n-i) \right)}{a_{mk} (n)}.$$

• **Μέτρο Σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται με χρήση των ΕΣΔ. Για να σταματήσει να λειτουργεί ένα σύστημα *m*-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n*: *F*, πρέπει να υπάρχουν m ομάδες k συνεχόμενων μονάδων. Έτσι, υπάρχουν ΕΣΔ που περιέχουν τη μονάδα i και όποια άλλη μονάδα επιθυμούμε. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\Pr(D_i) = \Pr\left(E_1^i \cup E_2^i \cup \cdots \cup E_{m_i}^i \right) = \Pr\left(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0 \right) = \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j).$$

Επίσης, $\Pr(C) = 1 - R_S(\mathbf{p})$.

Άρα, για κάθε μονάδα του *m*-συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely παραμένει σταθερό και ίσο με

$$I_i^{FV} = \frac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)} = \frac{\prod_{j=1}^{n} (1 - p_j)}{1 - R_S(\mathbf{p})}.$$

Έτσι, όλες οι μονάδες συμβάλουν εξίσου σε μια ενδεχόμενη αποτυχία του συστήματος.

• **Μέτρο Επίτευξης Κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου για ένα *m*-συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RAW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i (0) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_{mk}, \qquad I_i^{RAW} = \frac{1 - \sum_{r=0}^{mk-2} a_r (i-1) b_{r+1} (n-i)}{a_{mk} (n)}.$$

• **Μέτρο Ελάττωσης Κινδύνου**

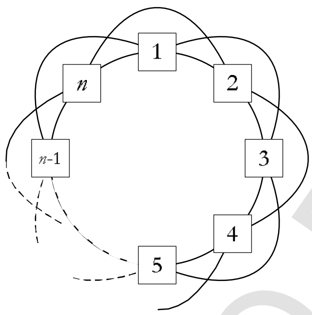
Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου για ένα *m*-συνεχόμενα-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα μπορεί να βρεθεί μέσω των επόμενων σχέσεων,

$$I_i^{RRW} = \left(\boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,i-1} \Lambda_i(1) \Lambda_{i+1,n} \mathbf{e}_{mk}\right)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0' \Lambda_{1,n} \mathbf{e}_{mk}, \qquad I_i^{RRW} = \frac{a_{mk}(n)}{1 - \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{s=rk}^{rk+k-1} a_s(i-1) \right) b_{rk}(n-i)}.$$

4.10. Κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F* Σύστημα Αξιοπιστίας (*Circular Consecutive k-out-of-n: F System*)

Η δομή ενός κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 4.13
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*: *F* Συστήματος



Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αναδρομικά σύμφωνα με τους Antonopoulou and Papastavridis (1987), από την επόμενη σχέση.

$$
\begin{aligned}
R_S(\mathbf{p}) = R_C(k,n) = \\
&= p_n R_L(k,n-1) + q_n R_C(k,n-1) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1}\Big(p_{i+1}\prod_{j=1}^{i} q_j\Big)\Big(p_{n-k+i}\prod_{j=n-k+i+1}^{n} q_j\Big) R_L\big(k,(i+2,n-k+i-1)\big)
\end{aligned}
$$

όπου $R_C(k,j)$ είναι η αξιοπιστία ενός κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*j*: *F* υποσυστήματος με μονάδες $1,2,\ldots,j$,

$R_L(k,j)$ είναι η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου-*k*-από-τα-*j*: *F* υποσυστήματος, με μονάδες $1,2,\ldots,j$,

$R_L(k,(i,j))$ είναι η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου-*k*-από-τα-$(j-i+1)$: *F* υποσυστήματος, με μονάδες $i,i+1,\ldots,j$.

Ο Hwang (1982), πρότεινε την ακόλουθη σχέση.

$$
\begin{aligned}
R_C(k,n) &= \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{l}\Big(p_{m+1}\prod_{i=1}^{m} q_i\Big)\Big(p_{n-(l-m)}\prod_{j=n-(l-m)+1}^{n} q_j\Big) R_L\big(k,(m+2,n-(l-m)-1)\big) \\
&= \sum_{s-1+n-t<k}\Big(p_s\prod_{i=1}^{s-1} q_i\Big)\Big(p_t\prod_{j=t+1}^{n} q_j\Big) R_L\big(k,(s+1,t-1)\big).
\end{aligned}
$$

Όταν έχουμε ένα σύστημα με iid μονάδες τότε οι δύο προηγούμενες αναδρομικές σχέσεις ανάγονται στις ακόλουθες:

$$R_C(k,n) = pR_L(k,n-1) + qR_C(k,n-1) - kp^2q^kR_L(k,n-k-2)$$

$$R_C(k,n) = \sum_{s-1+n-t<k} p^2q^{s-1+n-t}R_L(k,t-s-1)$$

Ένας κλειστός τύπος για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ενός κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος δόθηκε από τον Tong (1985) και τους Zuo and Kuo (1990), για ειδικές περιπτώσεις. Έτσι για $n \le 2k+1$ θα έχουμε

$$R_C(k,n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < k \\ 1-\prod_{i=1}^{n} q_i, & n = k \\ 1-\sum_{i=1}^{n}\left(p_{i+k}\prod_{j=i}^{i+k-1} q_j\right)-\prod_{i=1}^{n} q_i, & k < n \le 2k+1 \end{cases},$$

όπου $q_j \equiv q_{j-n}$ για $j > n$.

• Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum

Οι Griffith and Govindarajulu (1985), πρότειναν την ακόλουθη έκφραση του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum για ένα κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα:

$$I_i^B = \frac{R_i(k,n-1) - R_C(k,n)}{1-p_i} = \frac{R_i(k,n-1) - R_S(\mathbf{p})}{1-p_i}$$

όπου $R_i(k,n-1)$ είναι η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου-*k*-από-τα-$(n-1)$: *F* υποσυστήματος με μονάδες $i+1, i+2, ..., n, 1, 2, ..., i-1$.

• Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης

Το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μπορεί εύκολα να υπολογισθεί από το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, από τη σχέση $I_i^{IP} = q_iI_i^B$, άρα

$$I_i^{IP} = R_i(k,n-1) - R_C(k,n).$$

• **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Για το μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και μη λειτουργίας του συστήματος γνωρίζουμε ότι μπορεί να υπολογισθεί από τις σχέσεις $I_i^{CS} = p_i I_i^B / R_S(\mathbf{p})$ και $I_i^{CF} = q_i I_i^B / \left(1 - R_S(\mathbf{p})\right)$, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε

$$I_i^{CS} = \frac{p_i}{q_i}\frac{R_i(k,n-1) - R_C(k,n)}{R_C(k,n)}, \qquad I_i^{CF} = \frac{R_i(k,n-1) - R_C(k,n)}{R_C(k,n)}.$$

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Τα ΕΣΔ ενός κυκλικού-συνεχόμενου-*k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος είναι τα επόμενα n σύνολα, $K_1 = \{1,2,...,k\}, K_2 = \{2,3,...,k+1\},..., K_{n-k+1} = \{n-k+1, n-k+2,...,n\}$, $K_{n-k+2} = \{n-k+2,...,n,1\},..., K_n = \{n,1,2,...,k-1\}$.

Έτσι, μια μονάδα i θα περιέχεται στα ακόλουθα $2k-1$ ΕΣΔ

$$K_{i-k+1}, K_{i-k+2},..., K_i$$

όπου $K_j \equiv K_{j+n}$ για $j<1$, και

$$K_j = \{j, j+1,..., j+k-1\}.$$

Άρα το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely για την μονάδα i είναι ίσο με

$$I_i^{FV} = \frac{\prod_{j=i-k+1}^{i+k-1} q_j}{1 - R_C(k,n)}$$

όπου $q_j \equiv q_{j+n}$ για $j<1$, και $q_j \equiv q_{j-n}$ για $j>n$.

• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Αυτό δίνεται από τον τύπο

$$I_i^{RAW} = \frac{1}{q_i} - \frac{p_i}{q_i}\frac{1 - R_i(k,n-1)}{1 - R_C(k,n)}.$$

Από το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, παρατηρούμε ότι $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(\mathbf{p}\right)-p_i I_i^B$.

Άρα, $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_C\left(k,n\right)-\frac{p_i}{q_i}\left[R_i\left(k,n-1\right)-R_C\left(k,n\right)\right]$,

$$
\begin{aligned}
R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)&=R_C\left(k,n\right)-\frac{p_i}{q_i}\left[R_i\left(k,n-1\right)-R_C\left(k,n\right)\right]\\
&=\frac{1}{q_i}R_C\left(k,n\right)-\frac{p_i}{q_i}R_i\left(k,n-1\right),
\end{aligned}
$$

οπότε,
$$
\begin{aligned}
I_i^{RAW}&=\frac{1-R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)}{1-R_S\left(\mathbf{p}\right)}=\left(\left(\frac{1}{q_i}-\frac{p_i}{q_i}\right)-\left(\frac{1}{q_i}R_C\left(k,n\right)-\frac{p_i}{q_i}R_i\left(k,n-1\right)\right)\right)\Big/\left(1-R_C\left(k,n\right)\right)\\
&=\frac{1}{q_i}-\frac{p_i}{q_i}\frac{1-R_i\left(k,n-1\right)}{1-R_C\left(k,n\right)}.
\end{aligned}
$$

• Μέτρο ελάττωσης κινδύνου

Γνωρίζουμε ότι $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=R_i\left(k,n-1\right)$, οπότε το μέτρο ελάττωσης κινδύνου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$
I_i^{RRW}=\frac{1-R_C\left(k,n\right)}{1-R_i\left(k,n-1\right)}
$$

• Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού προϋποθέτει ότι οι μονάδες του συστήματος είναι ισόνομες. Τότε όμως, η σπουδαιότητα δεσμού δύο μονάδων είναι ισοδύναμη $LI_i \approx LI_j$, αφού

$$
R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)=\frac{1}{q}R_C\left(k,n\right)-\frac{p}{q}R_L\left(k,n-1\right),
$$

και

$$
R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)=R_L\left(k,n-1\right)
$$

• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας για το κυκλικό-συνεχόμενο-*k*-από-τα-*n*:*F* σύστημα μπορεί να βρεθεί από την επόμενη σχέση, όταν $i<j$.

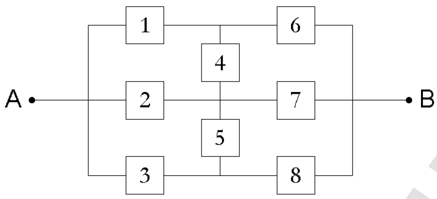
$$
\begin{aligned}
JRI_{i,j} &= \frac{1}{q_i q_j}\left[R_S\left(1_i,1_j,\mathbf{p}\right)+R_S\left(\mathbf{p}\right)-R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)-R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)\right] \\
&= \frac{1}{q_i q_j}\left[R_L\left(k,(i+1,j-1)\right)R_L\left(k,(j+1,i-1)\right)+R_C\left(k,n\right)-R_i\left(k,n-1\right)-R_j\left(k,n-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

όπου $R_L\left(k,(s,t)\right)$ είναι η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου-*k*-από-τα-$(n-1)$:*F* συστήματος, με μονάδες $s,s+1,\ldots,t$, αν $s<t$ και μονάδες $s,s+1,\ldots,n,1,2,\ldots,t$, αν $s>t$.

4.11. Σύστημα Αξιοπιστίας Διπλής Γέφυρας (*Double Bridge Structure*)

Το σύστημα αξιοπιστίας διπλής γέφυρας είναι μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του συστήματος γέφυρας. Η δομή του παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 4.14
Διάγραμμα Αξιοπιστίας Διπλής Γέφυρας



Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης δομής που δίνεται στο Κεφάλαιο 2.

• Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum

Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για την i μονάδα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $I_i^B = R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(0_i, \mathbf{p}\right)$. Όπως στη δομή της γέφυρας, έτσι και σε αυτή της διπλής γέφυρας, δε μας δίνεται η δυνατότητα να εξάγουμε κοινή σχέση για το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum. Το υπολογίζουμε λοιπόν ξεχωριστά για κάθε μονάδα. Όμως, στην περίπτωση που δεν έχουμε ισόνομες μονάδες, παρατηρούμε ήδη από τον υπολογισμό της πρώτης μονάδας, πως καταλήγουμε σε μία πολύ δύσχρηστη σχέση, πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$
\begin{aligned}
I_1^B = p_6 &+ p_4 p_7 - p_2 p_4 p_6 - p_2 p_4 p_7 - p_2 p_6 p_7 - p_3 p_6 p_8 + p_4 p_5 p_8 - p_4 p_6 p_7 - p_2 p_4 p_5 p_8 \\
&+2 p_2 p_4 p_6 p_7 - p_2 p_5 p_6 p_8 - p_3 p_4 p_5 p_6 - p_3 p_4 p_5 p_7 - p_3 p_4 p_5 p_8 - p_3 p_4 p_7 p_8 - p_3 p_5 p_6 p_7 \\
&- p_4 p_5 p_6 p_8 - p_4 p_5 p_7 p_8 + p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + p_2 p_3 p_4 p_5 p_7 + p_2 p_3 p_4 p_5 p_8 + p_2 p_3 p_4 p_6 p_8 \\
&+ p_2 p_3 p_4 p_7 p_8 + p_2 p_3 p_5 p_6 p_7 + p_2 p_3 p_5 p_6 p_8 + p_2 p_3 p_6 p_7 p_8 + 2 p_2 p_4 p_5 p_6 p_8 + p_2 p_4 p_5 p_7 p_8 \\
&+ p_2 p_5 p_6 p_7 p_8 + 2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 + 2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 + 2 p_3 p_4 p_5 p_7 p_8 + p_3 p_4 p_6 p_7 p_8 + p_3 p_5 p_6 p_7 p_8 \\
&+ p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 - 2 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 - 3 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_8 - 2 p_2 p_3 p_4 p_5 p_7 p_8 - 2 p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 p_8 \\
&- 2 p_2 p_3 p_5 p_6 p_7 p_8 - 2 p_2 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 - 3 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 + 4 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 .
\end{aligned}
$$

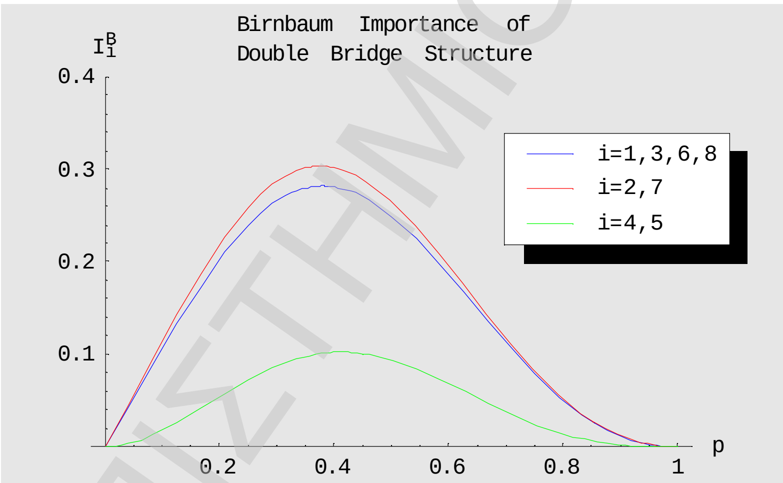
Τη σχέση αυτή είναι δύσκολο να ερμηνεύσουμε για να εξάγουμε συμπεράσματα για τη σπουδαιότητα της κάθε μονάδας σε σχέση με τις υπόλοιπες.

Στην iid περίπτωση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum κάθε μονάδας, μπορεί να εκφραστεί από την επόμενη συνάρτηση.

$$I_i^B = \begin{cases} p+p^2-4p^3-7p^4+21p^5-16p^6+4p^7, & i=1,3,6,8 \\ p+2p^2-8p^3-p^4+17p^5-15p^6+4p^7, & i=2,7 \\ 2p^2-2p^3-10p^4+22p^5-16p^6+4p^7, & i=4,5. \end{cases}$$

Από το επόμενο σχήμα, παρατηρούμε πως με βάση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, η σπουδαιότητα των μονάδων 2 και 7 είναι η μεγαλύτερη. Ωστόσο, σχεδόν το ίδιο σημαντικές είναι και οι μονάδες 1, 3, 6 και 8, ενώ οι μονάδες 4 και 5 έχουν πολύ μικρότερη σπουδαιότητα από τις υπόλοιπες μονάδες.

Σχήμα 4.15
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum για το σύστημα της διπλής γέφυρας



Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j=1/2,\, j=1,\dots,8} = \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{4}{2^3}-\frac{7}{2^4}+\frac{21}{2^5}-\frac{16}{2^6}+\frac{4}{2^7}=\frac{1}{2^2}, & i=1,3,6,8 \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{8}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{17}{2^5}-\frac{15}{2^6}+\frac{4}{2^7}=\frac{17}{2^6}, & i=2,7 \\ \frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}-\frac{10}{2^4}+\frac{22}{2^5}-\frac{16}{2^6}+\frac{4}{2^7}=\frac{3}{2^5}, & i=4,5 \end{cases}$$

Για το μέτρο δομικής σπουδαιότητας, παρατηρούμε ότι και για το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, αφού το πρώτο είναι ειδική περίπτωση του δεύτερου.

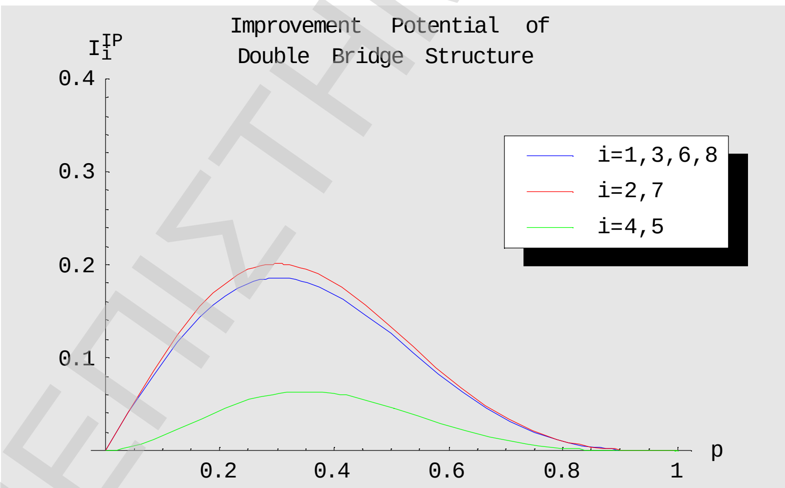
• **Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης**

Για το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης προκύπτουν ακόμη μεγαλύτερες σχέσεις από αυτές του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum. Για τις σχέσεις αυτές είναι αδύνατο να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα, εφόσον δε γνωρίζουμε την αξιοπιστία της κάθε μονάδας. Συνεχίζουμε λοιπόν στην ανάλυση της iid περίπτωσης. Εδώ παρατηρούμε ότι το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μπορεί εύκολα να υπολογισθεί από την επόμενη συνάρτηση.

$$I_i^{IP}=\begin{cases} p-5p^3-3p^4+28p^5-37p^6+20p^7-4p^8, & i=1,3,6,8 \\ p+p^2-10p^3+7p^4+18p^5-32p^6+19p^7-4p^8, & i=2,7 \\ 2p^2-4p^3-8p^4+32p^5-38p^6+20p^7-4p^8, & i=4,5 \end{cases}$$

Όπως και με το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, η σπουδαιότητα των μονάδων 4 και 5 είναι μικρότερη από τη σπουδαιότητα των υπόλοιπων μονάδων, κάτι που φαίνεται και από το Σχήμα 4.16

Σχήμα 4.16
Διάγραμμα μέτρου δυνατότητας βελτίωσης για το σύστημα της Διπλής Γέφυρας



Αυτό σημαίνει ότι η βελτίωση της αξιοπιστίας που θα επιτύχουμε αν αυξήσουμε ισόποσα την αξιοπιστία κάποιας μονάδας θα είναι μεγαλύτερη αν η μονάδα η μονάδα της οποίας η αξιοπιστία θα βελτιωθεί είναι μία από τις 2 και 7, ελάχιστα μικρότερη αν βελτιωθεί η αξιοπιστία μιας εκ των μονάδων 1, 3, 6, 8 και σαφώς μικρότερη αν βελτιώσουμε την αξιοπιστία της μονάδας 4 ή 5.

• **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους διακοπής του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$I_i^{CS}=\begin{cases}\dfrac{1+p-4p^2-7p^3+21p^4-16p^5+4p^6}{3p+4p^2-9p^3-10p^4+27p^5-18p^6+4p^7}, & i=1,3,6,8\\ \dfrac{1+2p-8p^2-p^3+17p^4-15p^5+4p^6}{3p+4p^2-9p^3-10p^4+27p^5-18p^6+4p^7}, & i=2,7\\ \dfrac{2-2p-10p^2+22p^3-16p^4+4p^5}{3+4p-9p^2-10p^3+27p^4-18p^5+4p^6}, & i=4,5\end{cases},$$

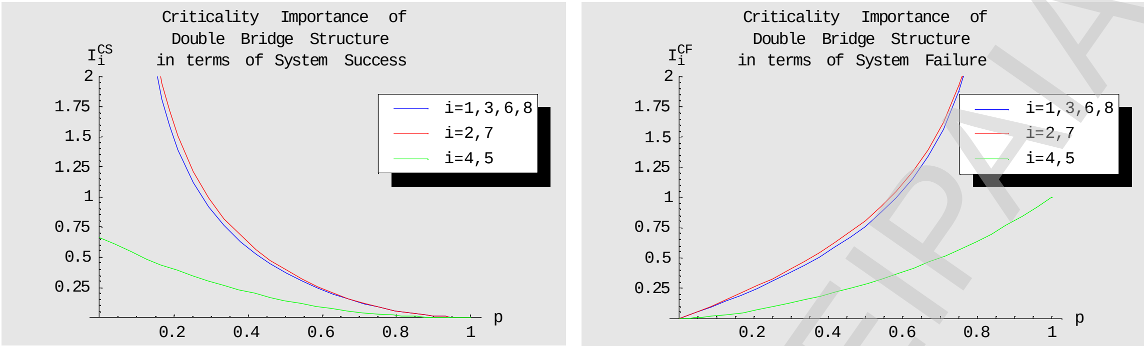
και

$$I_i^{CF}=\begin{cases}\dfrac{p+p^2-4p^3-7p^4+21p^5-16p^6+4p^7}{1-3p^2-4p^3+9p^4+10p^5-27p^6+18p^7-4p^8} & i=1,3,6,8\\ \dfrac{p+2p^2-8p^3-p^4+17p^5-15p^6+4p^7}{1-3p^2-4p^3+9p^4+10p^5-27p^6+18p^7-4p^8} & i=2,7\\ \dfrac{2p^2-2p^3-10p^4+22p^5-16p^6+4p^7}{1-3p^2-4p^3+9p^4+10p^5-27p^6+18p^7-4p^8} & i=4,5\end{cases}$$

Στα επόμενα διαγράμματα, όπου απεικονίζεται η σπουδαιότητα κρισιμότητας, παρατηρούμε ότι, η συνεισφορά της κάθε μονάδας στη λειτουργία του συστήματος μειώνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Ταυτόχρονα, η συνεισφορά των μονάδων 4 και 5 είναι αρκετά μικρότερη από την συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων. Η διαφορά της συνεισφοράς των μονάδων 4 ή 5 και μίας εκ των υπολοίπων μηδενίζεται καθώς η αξιοπιστία p τείνει στην μονάδα.

Αντίθετα, η συνεισφορά της κάθε μονάδας στην αποτυχία του συστήματος, όταν αυτό δε λειτουργεί, αυξάνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Και πάλι, η συνεισφορά των μονάδων 4 και 5 είναι μικρότερη από τη συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων. Η διαφορά της συνεισφοράς των μονάδων 4 ή 5 και μίας εκ των υπολοίπων αυξάνεται καθώς η αξιοπιστία p των μονάδων αυξάνεται.

Σχήμα 4.17
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας κρισιμότητας για το σύστημα της Διπλής Γέφυρας
α) σε όρους λειτουργίας του συστήματος β) σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος



- **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει 8 Ε.Σ.Δ., τα $K_1=\{1,2,3\}, K_2=\{6,7,8\}, K_3=\{1,2,5,8\}, K_4=\{1,4,7,8\}$, $K_5=\{2,3,4,6\}, K_6=\{3,5,6,7\}, K_7=\{1,3,4,5,7\}, K_8=\{2,4,5,6,8\}$.

Έτσι, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται από τη σχέση $I_i^{FV}=\dfrac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)}$. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\Pr(D_1)=\Pr\left(E_1^1\cup E_2^1\cup E_3^1\cup E_4^1\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_2)=\Pr\left(E_1^2\cup E_2^2\cup E_3^2\cup E_4^2\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_3)=\Pr\left(E_1^3\cup E_2^3\cup E_3^3\cup E_4^3\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0\right)$$
$$\Pr(D_4)=\Pr\left(E_1^4\cup E_2^4\cup E_3^4\cup E_4^4\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_5)=\Pr\left(E_1^5\cup E_2^5\cup E_3^5\cup E_4^5\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_6)=\Pr\left(E_1^6\cup E_2^6\cup E_3^6\cup E_4^6\right)=\Pr\left(x_2=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_7)=\Pr\left(E_1^7\cup E_2^7\cup E_3^7\cup E_4^7\right)=\Pr\left(x_1=0,x_3=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(D_8)=\Pr\left(E_1^8\cup E_2^8\cup E_3^8\cup E_4^8\right)=\Pr\left(x_1=0,x_2=0,x_4=0,x_5=0,x_6=0,x_7=0,x_8=0\right)$$
$$\Pr(C)=1-R_S(\mathbf{p}).$$

Τότε αν $p_i<1$ για $i=1,2,\ldots,8$, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, για τις 8 μονάδες δίνεται από τις επόμενες σχέσεις.

$$I_1^{FV} = \frac{1}{1-p_6}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad I_5^{FV} = \frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})},$$

$$I_2^{FV} = \frac{1}{1-p_7}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad I_6^{FV} = \frac{1}{1-p_1}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})},$$

$$I_3^{FV} = \frac{1}{1-p_8}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad I_7^{FV} = \frac{1}{1-p_2}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})},$$

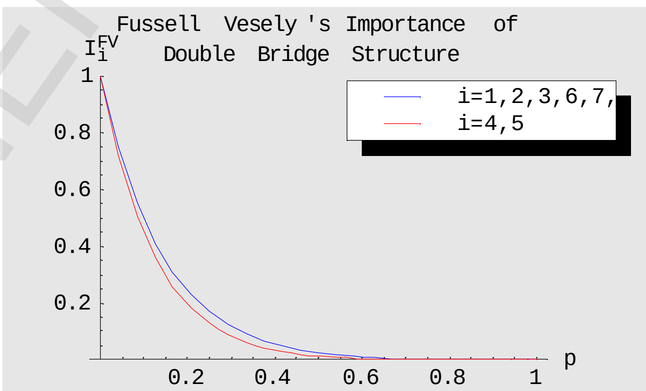
$$I_4^{FV} = \frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})}, \qquad I_8^{FV} = \frac{1}{1-p_3}\frac{\prod_{i=1}^{8}(1-p_i)}{1-R_S(\mathbf{p})}.$$

Όπως είναι προφανές, οι μονάδες 4 και 5 είναι οι λιγότερο σημαντικές βάσει του μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely. Στις υπόλοιπες μονάδες μπορεί να υπάρξει διάταξη ως προς τη σπουδαιότητά τους, αν γνωρίζουμε τη διάταξη της αξιοπιστίας των μονάδων. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $p_1 < p_2 < p_3 < p_6 < p_7 < p_8 < 1$, βρίσκουμε αμέσως τη διάταξη για το συγκεκριμένο μέτρο, πιο συγκεκριμένα: $I_4^{FV} = I_5^{FV} < I_6^{FV} < I_7^{FV} < I_8^{FV} < I_1^{FV} < I_2^{FV} < I_3^{FV}$.

Στην iid περίπτωση, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely εκφράζεται για τις 8 μονάδες από την ακόλουθη σχέση

$$I_i^{FV} = \begin{cases} \dfrac{1-7p+21p^2-35p^3+35p^4-21p^5+7p^6-p^7}{3p^2+4p^3-9p^4-10p^5+27p^6-18p^7+4p^8}, & i=1,2,3,6,7,8 \\[2ex] \dfrac{1-8p+28p^2-56p^3+70p^4-56p^5+28p^6-8p^7+p^8}{3p^2+4p^3-9p^4-10p^5+27p^6-18p^7+4p^8}, & i=4,5. \end{cases}$$

Σχήμα 4.18
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely της Διπλής Γέφυρας



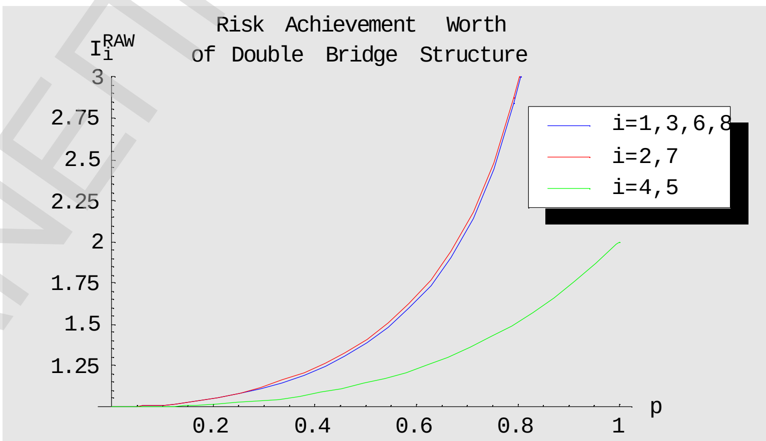
• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση, και αντιπροσωπεύει τη συμβολή της μονάδας i στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας του συστήματος.

$$I_i^{RAW} = \begin{cases} \dfrac{1+2p+p^3-3p^3-2p^4+2p^5}{1+2p-6p^3-3p^4+10p^5-4p^6}, & i=1,3,6,8 \\ \dfrac{1+2p+p^3-2p^3-4p^4+3p^5}{1+2p-6p^3-3p^4+10p^5-4p^6}, & i=2,7 \\ \dfrac{1+3p+3p^3-p^3-2p^4}{1+3p+3p^2-3p^3-6p^4+4p^5}, & i=4,5. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συμβολή των μονάδων 4 και 5 είναι πάντοτε μικρότερη από την συμβολή των υπόλοιπων μονάδων. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.19, όταν η αξιοπιστία p των μονάδων αυξάνεται, το μέτρο αυτό αυξάνεται με ολοένα μεγαλύτερο ρυθμό. Έτσι η συμβολή των μονάδων 1, 2, 3, 6, 7 και 8 τείνει στο άπειρο. Ενώ για τις μονάδες 4 και 5 το μέτρο επίτευξης κινδύνου αυξάνεται μέχρι τη τιμή 2. Αυτό μας δείχνει ότι η συμβολή των μονάδων 1, 2, 3, 6, 7 και 8 στην επίτευξη της εκάστοτε αξιοπιστίας αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό ως προς την αξιοπιστία p των μονάδων, από τη συμβολή των μονάδων 4 και 5 στην επίτευξη της αξιοπιστίας. Οι μονάδες 1, 3, 6 και 8 συμβάλουν λιγότερο από τις μονάδες 2 και 7, όμως η διαφορά αυτή δεν είναι σημαντική.

Σχήμα 4.19
Διάγραμμα μέτρου επίτευξης κινδύνου για το σύστημα της Γέφυρας



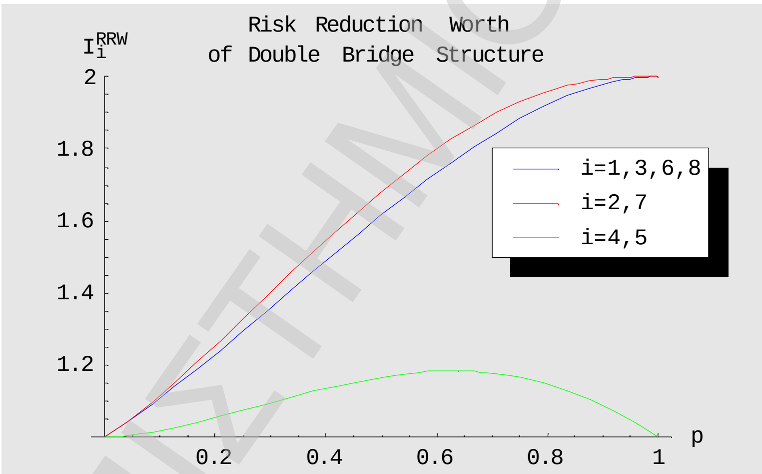
• **Μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση,

$$I_i^{RRW} = \begin{cases} \dfrac{1+3p+3p^2-3p^3-6p^4+4p^5}{1+2p-4p^3+2p^4}, & i=1,3,6,8 \\ \dfrac{1+3p+3p^2-3p^3-6p^4+4p^5}{1+2p-p^2-2p^3+p^4}, & i=2,7 \\ \dfrac{1+3p+3p^2-3p^3-6p^4+4p^5}{1+3p+p^2-5p^3+2^4}, & i=4,5. \end{cases}$$

Όμοια, παρατηρούμε ότι οι μονάδες 4 και 5 είναι λιγότερο σημαντικές από τις υπόλοιπες μονάδες. Αντικαθιστώντας μια από τις υπόλοιπες μονάδες με μία τέλεια μονάδα θα μειώσουμε την αναξιοπιστία του συστήματος έως 50%.

Σχήμα 4.20
Διάγραμμα μέτρου ελάττωσης κινδύνου για το σύστημα της Γέφυρας



• **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού υποθέτει ότι οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$R_S(0_i,\mathbf{p}) = \begin{cases} 2p^2+3p^3-5p^4-3p^5+6p^6-2p^7, & i=1,3,6,8 \\ 2p^2+2p^3-p^4-9p^5-10p^6-3p^7, & i=2,7 \\ 3p^2+2p^3-7p^4+5p^6-2p^7, & i=4,5, \end{cases}$$

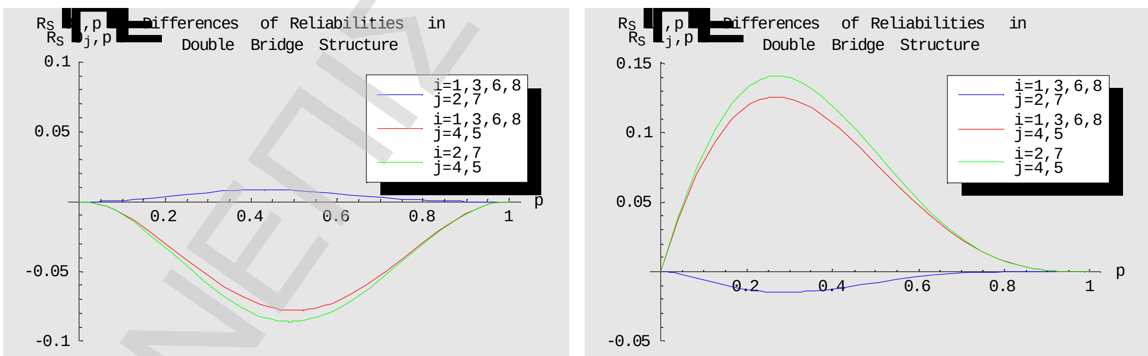
$$
R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=\begin{cases} p+3p^2-p^3-12p^4+18p^5-10p^6+2p^7, & i=1,3,6,8 \\ p+4p^2-6p^3-2p^4+8p^5-5p^6+p^7, & i=2,7 \\ 5p^2-17p^4+22p^5-11p^6+2p^7, & i=4,5. \end{cases}
$$

Είναι φανερό ότι έχουμε, $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)$, όταν $i,j=1,3,6,8$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=2,7$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=4,5$ και $i\neq j$. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες 1, 3, 6, 8 και 2, 7 και 4, 5 είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, άρα και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής.

Όπως μπορεί να υπολογισθεί από τις συναρτήσεις αξιοπιστίας, αλλά γίνεται ακόμα πιο εμφανές στα Σχήματα 4.21 (α) και 4.21 (β), θα έχουμε: $R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)<R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)<R_S\left(0_k,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)>R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)>R_S\left(1_k,\mathbf{p}\right)$, άρα $LI_j\geq LI_i\geq LI_k$ για $i=1,3,6,8$, $j=2,7$, $k=4,5$

Επομένως, $LI_2\approx LI_7\geq LI_1\approx LI_3\approx LI_6\approx LI_8\geq LI_4\approx LI_5$, και από γνωστή πρόταση, θα έχουμε $PCI_2\approx PCI_7\geq PCI_1\approx PCI_3\approx PCI_6\approx PCI_8\geq PCI_4\approx PCI_5$.

Σχήμα 4.21
Διάγραμμα διαφορών αξιοπιστίας για τη Διπλή Γέφυρα
α) $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)-R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)$ β) $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)-R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)$



• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας στην iid περίπτωση, δίνεται από την επόμενη συνάρτηση.

$$
JRI_{i,j} = \begin{cases}
-3p^2+12p^4-13p^5+4p^6, & (i,j)=(1,2),(2,3),(6,7),(7,8) \\
-p^2-5p^3+16p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(1,3),(6,8) \\
p-2p^2-5p^3+16p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(1,4),(3,5),(4,6),(5,8) \\
p^2-8p^3+17p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(1,5),(3,4),(4,8),(5,6) \\
1-4p^2-2p^3+15p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(1,6),(3,8) \\
p-3p^2-2p^3+13p^4-13p^5+4p^6, & (i,j)=(1,7),(2,4),(2,5),(2,6), \\
 & \qquad (2,8),(3,7),(4,7),(5,7) \\
-6p^3+16p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(1,8),(3,6) \\
1-6p^2+4p^3+9p^4-12p^5+4p^6, & (i,j)=(2,7) \\
2p^2-10p^3+18p^4-14p^5+4p^6, & (i,j)=(4,5).
\end{cases}
$$

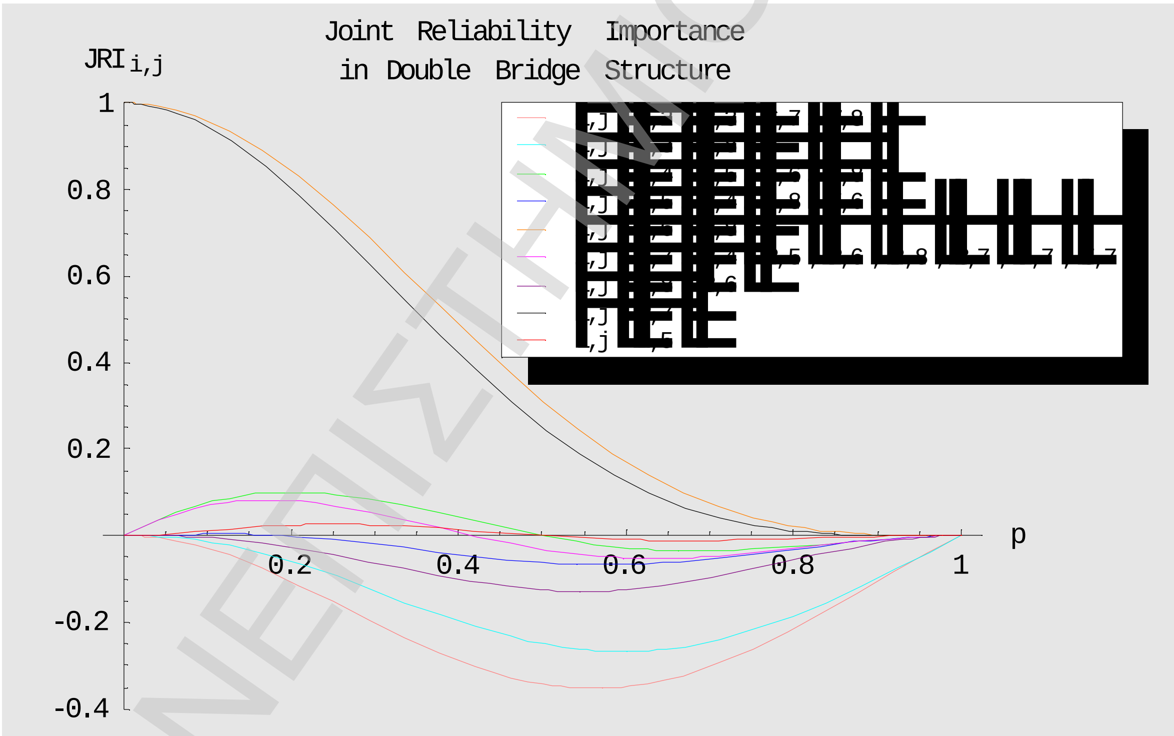
Αντίστοιχα, το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας δίνεται από την επόμενη συνάρτηση

$$
JSI_{i,j} = \begin{cases}
-\frac{11}{32}, & (i,j)=(1,2),(2,3),(6,7),(7,8) \\
-\frac{1}{4}, & (i,j)=(1,3),(6,8) \\
0, & (i,j)=(1,4),(3,5),(4,6),(5,8) \\
-\frac{1}{16}, & (i,j)=(1,5),(3,4),(4,8),(5,6) \\
\frac{5}{16}, & (i,j)=(1,6),(3,8) \\
-\frac{1}{32}, & (i,j)=(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,8),(3,7),(4,7),(5,7) \\
-\frac{1}{8}, & (i,j)=(1,8),(3,6) \\
\frac{1}{4}, & (i,j)=(2,7) \\
0, & (i,j)=(4,5).
\end{cases}
$$

Μέσω του από κοινού μέτρου δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας παρατηρούμε ότι για τα ζεύγη μονάδων $(1,6),(3,8)$ και $(2,7)$, η θέση της μίας μονάδας είναι πιο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί. Για τα ζεύγη μονάδων $(1,4),(3,5),(4,6),(5,8)$ και $(4,5)$, η σπουδαιότητα της θέσης της μίας μονάδας είναι ανεξάρτητη από τη κατάσταση της άλλης μονάδας του ζεύγους. Για όλα τα υπόλοιπα ζεύγη μονάδων, η θέση της μίας μονάδας είναι λιγότερο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί.

Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε ότι τα ζεύγη μονάδων $(1,6)$, $(2,7)$ και $(3,8)$ παρουσιάζουν συνέργεια, η οποία όμως μειώνεται καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Τα ζεύγη μονάδων $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,8)$, $(2,3)$, $(3,6)$, $(6,7)$, $(6,8)$ και $(7,8)$ παρουσιάζουν μειούμενη ανταπόδοση (***diminishing returns***) η οποία αρχικά αυξάνεται (σε απόλυτη τιμή) ως προς την αξιοπιστία των μονάδων και έπειτα μειώνεται. Τέλος, τα υπόλοιπα ζεύγη μονάδων παρουσιάζουν συνέργεια αρχικά, ενώ από κάποια τιμή της αξιοπιστίας p των μονάδων και για μεγαλύτερες τιμές παρουσιάζουν μειούμενη ανταπόδοση. Πάντοτε όμως είναι πολύ κοντά στο μηδέν, έτσι σε κάθε ζεύγος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μία μονάδα επηρεάζεται ελάχιστα από τη λειτουργία της άλλης.

Σχήμα 4.22
Διάγραμμα από κοινού μέτρου σπουδαιότητας αξιοπιστίας
για το σύστημα της Διπλής Γέφυρας



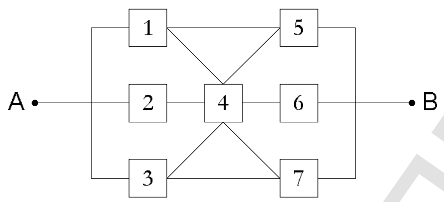
• **Μέτρο Σχετικής Κρισιμότητας**

Βάσει του μέτρου σχετικής κρισιμότητας δε μπορεί να υπάρξει διάταξη των μονάδων, αφού δεν υπάρχει καμία μονάδα της οποίας το σύνολο των ΕΣΛ (ή ΕΣΔ) να είναι υποσύνολο του συνόλου των ΕΣΛ (αντίστοιχα ΕΣΔ) κάποιας άλλης μονάδας.

4.12. Σύστημα Αξιοπιστίας 1ης παραλλαγής Γέφυρας (*Bridge Structure Variation 1*)

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του συστήματος γέφυρας παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 4.23
Διάγραμμα Αξιοπιστίας 1ης παραλλαγής
του συστήματος της Γέφυρας



Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης δομής που δίνεται στο Κεφάλαιο 2.

• **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

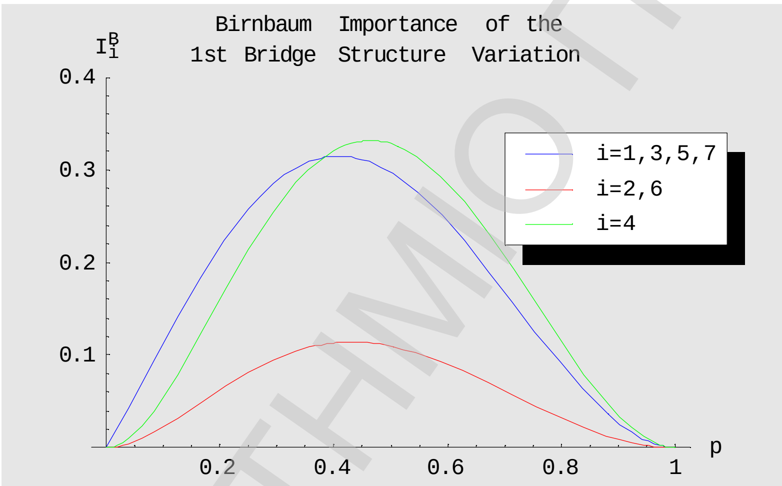
Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για την i μονάδα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $I_i^B = R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(0_i, \mathbf{p}\right)$. Όπως στη δομή της γέφυρας και της διπλής γέφυρας, έτσι και σε αυτή τη την παραλλαγή της γέφυρας, δε μας δίνεται η δυνατότητα να εξάγουμε κοινή σχέση για το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum. Το υπολογίζουμε για κάθε μονάδα. Όμως, στην περίπτωση που δεν έχουμε ισόνομες μονάδες, καταλήγουμε σε μία πολύ μεγάλη σχέση. Η σχέση αυτή είναι πολύ δύσκολο να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία της σπουδαιότητας κάθε μονάδας.

Στην iid περίπτωση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum κάθε μονάδας, μπορεί να εκφραστεί από την επόμενη συνάρτηση

$$I_i^B = \begin{cases} p + 2p^2 - 10p^3 + 11p^4 - 5p^5 + p^6, & i = 1,3,5,7 \\ 3p^2 - 9p^3 + 10p^4 - 5p^5 + p^6, & i = 2,6 \\ 7p^2 - 18p^3 + 16p^4 - 6p^5 + p^6, & i = 4. \end{cases}$$

Από το επόμενο σχήμα, παρατηρούμε πως με βάση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, η σπουδαιότητα των μονάδων 2 και 6 είναι η μικρότερη δυνατή. Πιο σημαντικές είναι οι μονάδες 1, 3, 4, 5 και 7. Η μονάδα 4 είναι πιο σημαντική για τη λειτουργία του συστήματος όταν η αξιοπιστία p των μονάδων είναι μεγαλύτερη από $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$, ενώ αν $p < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, σημαντικότερες είναι οι μονάδες 1, 3, 5 και 7.

Σχήμα 4.24
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας δίνεται από την επόμενη σχέση

$$I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j=1/2,\, j=1,\dots,8} = \begin{cases} 19/64, & i = 1,3,5,7 \\ 7/64, & i = 2,6 \\ 21/64, & i = 4. \end{cases}$$

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας, επίσης μας δείχνει ότι οι μονάδες 2 και 6 είναι οι λιγότερο σημαντικές για τη λειτουργία του συστήματος. Η μονάδα 4 πάλι εμφανίζεται να είναι ελάχιστα πιο σημαντική για τη λειτουργία του συστήματος από τις μονάδες 1, 3, 5 και 7.

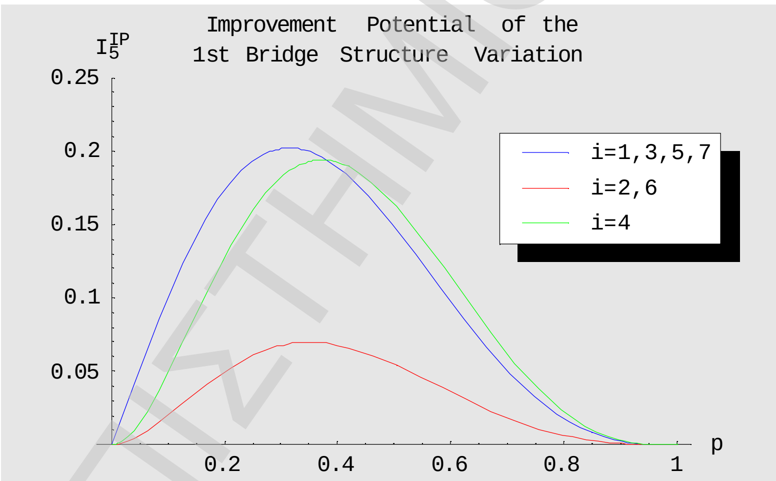
• **Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης**

Όπως στο μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, έτσι και στο μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, αλλά και σε επόμενα μέτρα σπουδαιότητας, οι σχέσεις που προκύπτουν για τον υπολογισμό των μέτρων στην μη-iid περίπτωση, δε μας βοηθούν να εξάγουμε συμπεράσματα για την σπουδαιότητα των μονάδων. Συνεχίζουμε λοιπόν στην ανάλυση της iid περίπτωσης. Εδώ παρατηρούμε ότι το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μπορεί εύκολα να υπολογισθεί από την επόμενη συνάρτηση

$$I_i^{IP} = \begin{cases} p + p^2 - 12p^3 + 21p^4 - 16p^5 + 6p^6 - p^7, & i = 1,3,5,7 \\ 3p^2 - 12p^3 + 19p^4 - 15p^5 + 6p^6 - p^7, & i = 2,6 \\ 7p^2 - 25p^3 + 34p^4 - 22p^5 + 7p^6 - p^7, & i = 4. \end{cases}$$

Η σπουδαιότητα των μονάδων 2 και 6 είναι μικρότερη από τη σπουδαιότητα των υπόλοιπων μονάδων, κάτι που φαίνεται και από το Σχήμα 4.25.

Σχήμα 4.25
Διάγραμμα μέτρου δυνατότητας βελτίωσης
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



Αυτό σημαίνει ότι η βελτίωση της αξιοπιστίας που θα επιτύχουμε αν αυξήσουμε ισόποσα την αξιοπιστία κάποιας μονάδας θα είναι μεγαλύτερη αν βελτιωθεί η αξιοπιστία της μονάδας 4, ελάχιστα μικρότερη θα είναι η βελτίωση, αν βελτιωθεί η αξιοπιστία μιας εκ των μονάδων 1, 3, 5, 7 και σαφώς μικρότερη αν βελτιώσουμε την αξιοπιστία της μονάδας 2 ή 6.

- **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους διακοπής του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

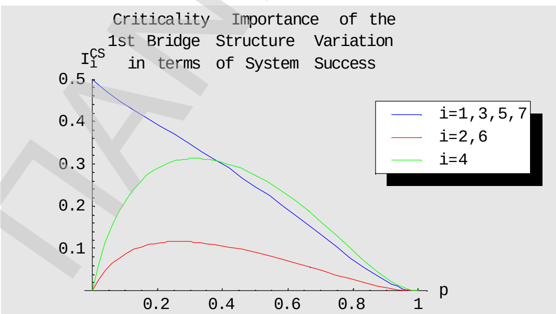
$$I_i^{CS}=\begin{cases}\dfrac{1+2p-10p^2+11p^3-5p^4+p^5}{2+7p-19p^2+16p^3-6p^4+p^5}, & i=1,3,5,7\\ \dfrac{3p-9p^2+10p^3-5p^4+p^5}{2+7p-19p^2+16p^3-6p^4+p^5}, & i=2,6\\ \dfrac{7p-18p^2+16p^3-6p^4+p^5}{2+7p-19p^2+16p^3-6p^4+p^5}, & i=4,\end{cases}$$

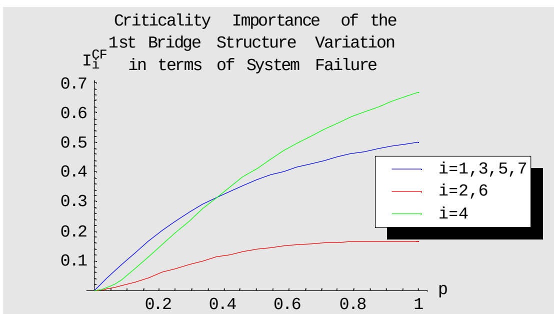
και

$$I_i^{CF}=\begin{cases}\dfrac{p+4p^2-3p^3+p^4}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=1,3,5,7\\ \dfrac{3p^2-3p^3+p^4}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=2,6\\ \dfrac{7p^2-4p^3+p^4}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=4.\end{cases}$$

Στα επόμενα διαγράμματα, όπου απεικονίζεται η σπουδαιότητα κρισιμότητας, παρατηρούμε ότι, η συνεισφορά των μονάδων 1, 3, 5 και 7 στη λειτουργία του συστήματος μειώνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Η συνεισφορά των μονάδων 2, 4 και 6 στη λειτουργία του συστήματος πρώτα αυξάνεται και έπειτα μειώνεται. Ταυτόχρονα, η συνεισφορά των μονάδων 2 και 6 είναι πάντοτε μικρότερη από την συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων. Τέλος, η συνεισφορά της μονάδας 4 στη λειτουργία του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τη συνεισφορά των μονάδων 1, 3, 5, 7 όταν $p<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Σχήμα 4.26
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας κρισιμότητας
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας
α) σε όρους λειτουργίας του συστήματος β) σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος





Αντίθετα, η συνεισφορά της κάθε μονάδας στην αποτυχία του συστήματος όταν αυτό δε λειτουργεί, αυξάνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Και πάλι, η συνεισφορά των μονάδων 2 και 6 είναι μικρότερη από τη συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων.

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει 6 Ε.Σ.Δ., τα $K_1=\{1,2,3\}, K_2=\{1,3,4\}, K_3=\{1,4,7\}, K_4=\{3,4,5\}$, $K_5=\{4,5,7\}, K_6=\{5,6,7\}$.

Έτσι, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται από τη σχέση $I_i^{FV}=\dfrac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)}$. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Pr(D_1) &= \Pr\left(E_1^1 \cup E_2^1 \cup E_3^1\right) &&= \Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_7=0)\\
\Pr(D_2) &= \Pr\left(E_1^2\right) &&= \Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0)\\
\Pr(D_3) &= \Pr\left(E_1^3 \cup E_2^3 \cup E_3^3\right) &&= \Pr(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0)\\
\Pr(D_4) &= \Pr\left(E_1^4 \cup E_2^4 \cup E_3^4 \cup E_4^4\right) &&= \Pr(x_1=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_7=0)\\
\Pr(D_5) &= \Pr\left(E_1^5 \cup E_2^5 \cup E_3^5\right) &&= \Pr(x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0, x_7=0)\\
\Pr(D_6) &= \Pr\left(E_1^6\right) &&= \Pr(x_5=0, x_6=0, x_7=0)\\
\Pr(D_7) &= \Pr\left(E_1^7 \cup E_2^7 \cup E_3^7\right) &&= \Pr(x_1=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0, x_7=0)\\
\Pr(C) &= 1-R_S(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

Τότε, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, για τις 7 μονάδες δίνεται από τις επόμενες σχέσεις.

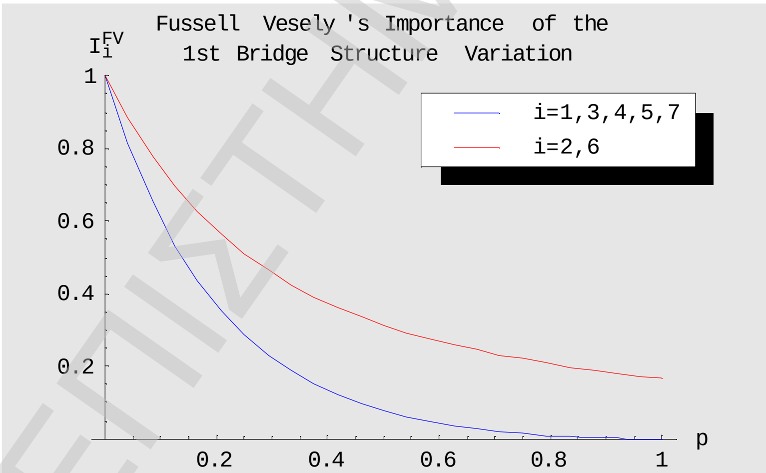
$$
\begin{aligned}
I_1^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_7)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_2^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_3^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_4^{FV} &= (1-p_1)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_7)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_5^{FV} &= (1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)(1-p_7)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_6^{FV} &= (1-p_5)(1-p_6)(1-p_7)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_7^{FV} &= (1-p_1)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)(1-p_7)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right).
\end{aligned}
$$

Όπως είναι προφανές, δε μπορούμε να βρούμε ποιες είναι οι πιο σημαντικές μονάδες βάσει του μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, χωρίς να γνωρίζουμε τις αξιοπιστίες των μονάδων. Η μόνη διάταξη που εύκολα προκύπτει είναι για τις μονάδες 2 και 6 σε σχέση με τις μονάδες 1, 3 και 5, 7 αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε $I_2^{FV} > I_1^{FV}, I_2^{FV} > I_3^{FV}$ και $I_6^{FV} > I_5^{FV}$, $I_6^{FV} > I_7^{FV}$.

Στην iid περίπτωση το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely δίνεται για τις 7 μονάδες από τον ακόλουθο τύπο

$$I_i^{FV} = \begin{cases} \dfrac{1-2p+p^2}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=1,3,4,5,7 \\ \dfrac{1}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=2,6. \end{cases}$$

Σχήμα 4.27
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



Όπως συμπεραίνουμε, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely είναι μεγαλύτερο για τις μονάδες 2 και 6, αυτό σημαίνει ότι η συμβολή των μονάδων 2 και 6 στην αποτυχία του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τη συμβολή των υπολοίπων μονάδων.

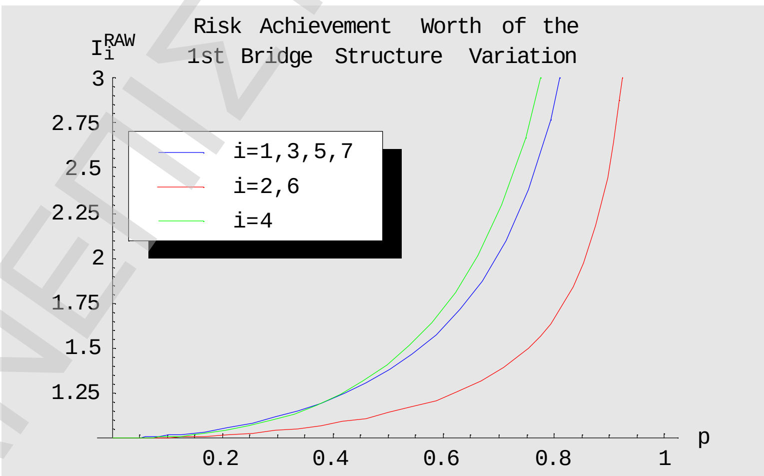
• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση, και αντιπροσωπεύει τη συμβολή της μονάδας i στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας του συστήματος.

$$I_i^{RAW} = \begin{cases} \dfrac{1+2p+2p^2-3p^3-p^4}{1+2p+p^2-7p^3+4p^4-p^5}, & i=1,3,5,7 \\ \dfrac{1+2p+p^2-4p^3-p^4}{1+2p+p^2-7p^3+4p^4-p^5}, & i=2,6 \\ \dfrac{1+2p+p^2}{1+2p+p^2-7p^3+4p^4-p^5}, & i=4. \end{cases}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι η συμβολή των μονάδων 2 και 6 είναι πάντοτε μικρότερη από την συμβολή των υπόλοιπων μονάδων. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.28, όταν η αξιοπιστία p των μονάδων αυξάνεται, το μέτρο αυτό αυξάνεται με ολοένα μεγαλύτερο ρυθμό. Έτσι η συμβολή όλων των μονάδων τείνει στο άπειρο. Οι μονάδες 1, 3, 5 και 7 συμβάλουν λιγότερο από τη μονάδα 4. Η διαφορά αυτή είναι σημαντική, αφού η κατακόρυφη απόσταση των μέτρων μεγαλώνει όσο η αξιοπιστία p των μονάδων τείνει στη μονάδα.

Σχήμα 4.28
Διάγραμμα μέτρου επίτευξης κινδύνου
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



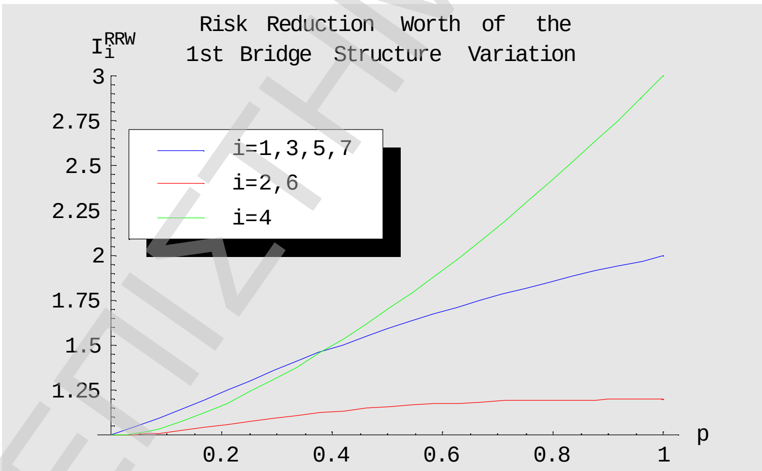
• **Μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση,

$$I_i^{RRW} = \begin{cases} \dfrac{1+2p}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=1,3,5,7 \\ \dfrac{1+3p+p^2}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=2,6 \\ \dfrac{1+3p-3p^2+p^3}{1+3p+4p^2-3p^3+p^4}, & i=4. \end{cases}$$

Όμοια, παρατηρούμε ότι οι μονάδες 2 και 6 είναι λιγότερο σημαντικές από τις υπόλοιπες μονάδες. Αντικαθιστώντας μια από τις μονάδες 1, 3, 5 και 7 με μία τέλεια μονάδα θα μειώσουμε την αναξιοπιστία του συστήματος έως 50%, ενώ αν αντικαταστήσουμε τη μονάδα 4 με μία τέλεια μονάδα θα μειώσουμε την αναξιοπιστία του συστήματος έως 66%.

Σχήμα 4.29
Διάγραμμα μέτρου ελάττωσης κινδύνου
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



• **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού υποθέτει ότι οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$R_S(0_i,\mathbf{p}) = \begin{cases} p^2+5p^3-9p^4+5p^5-p^6, & i=1,3,5,7 \\ 2p^2+4p^3-10p^4+6p^5-p^6, & i=2,6 \\ 2p^2-p^4, & i=4, \end{cases}$$

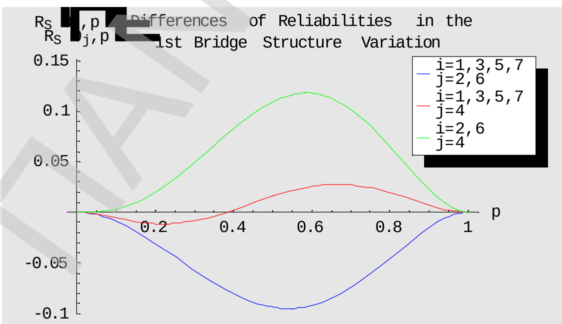
$$R_S(1_i,\mathbf{p})=\begin{cases} p+3p^2-5p^3+2p^4, & i=1,3,5,7 \\ 5p^2-5p^3+p^5, & i=2,6 \\ 9p^2-18p^3+15p^4-6p^5+p^6, & i=4. \end{cases}$$

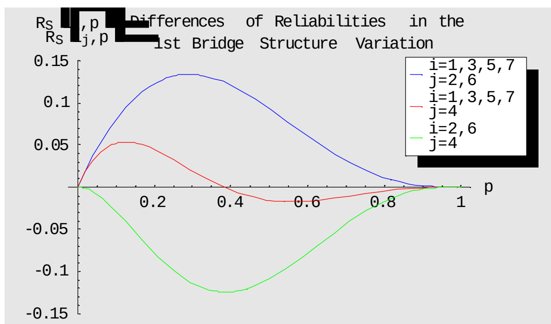
Τότε θα έχουμε, $R_S(0_i,\mathbf{p})=R_S(0_j,\mathbf{p})$ και $R_S(1_i,\mathbf{p})=R_S(1_j,\mathbf{p})$ όταν $i,j=1,3,5,7$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=2,6$ και $i\neq j$. Άρα $LI_i\approx LI_j$ αν $i,j=1,3,5,7$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=2,6$ και $i\neq j$. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες 1, 3, 5, 7 και 2, 6 είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, άρα και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής. Πιο συγκεκριμένα, $PCI_i\approx PCI_j$ αν $i,j=1,3,5,7$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=2,6$ και $i\neq j$.

Όπως μπορεί να υπολογισθεί από τις συναρτήσεις αξιοπιστίας, και γίνεται πιο εμφανές στα Σχήματα 4.30 (α) και 4.30 (β), αν $p>\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ θα έχουμε: $R_S(0_4,\mathbf{p})<R_S(0_i,\mathbf{p})<R_S(0_j,\mathbf{p})$ και $R_S(1_4,\mathbf{p})>R_S(1_i,\mathbf{p})>R_S(1_j,\mathbf{p})$, άρα $LI_4\geq LI_i\geq LI_j$, για $i=1,3,5,7$, $j=2,6$. Αν $p<\left(3-\sqrt{5}\right)/2$, τότε $R_S(0_i,\mathbf{p})<R_S(0_4,\mathbf{p})<R_S(0_j,\mathbf{p})$ και $R_S(1_i,\mathbf{p})>R_S(1_4,\mathbf{p})>R_S(1_j,\mathbf{p})$, άρα $LI_i\geq LI_4\geq LI_j$, για $i=1,3,5,7$, $j=2,6$.

Παρατηρούμε ότι $LI_4\geq LI_j$ και $LI_i\geq LI_j$, για $i=1,3,5,7$, $j=2,6$. Επομένως, από γνωστή πρόταση, θα έχουμε $PCI_4\geq PCI_j$ και $PCI_i\geq PCI_j$, για $i=1,3,5,7$, $j=2,6$.

Σχήμα 4.30
Διάγραμμα διαφορών αξιοπιστίας για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας
α) $R_S(0_i,\mathbf{p})-R_S(0_j,\mathbf{p})$ β) $R_S(1_i,\mathbf{p})-R_S(1_j,\mathbf{p})$





• **Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας**

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας στην iid περίπτωση, δίνεται από την επόμενη συνάρτηση

$$JRI_{i,j}=\begin{cases}-3p^2+6p^3-4p^4+p^5, & (i,j)=(1,2),(2,3),(5,6),(6,7)\\ -4p^2+7p^3-4p^4+p^5, & (i,j)=(1,3),(5,7)\\ 2p-9p^2+11p^3-5p^4+p^5, & (i,j)=(1,4),(3,4),(4,5),(4,7)\\ 1-5p^2+7p^3-4p^4+p^5, & (i,j)=(1,5),(3,7)\\ p-4p^2+6p^3-4p^4+p^5, & (i,j)=(1,6),(2,5),(2,6),(2,7),(3,6)\\ p-5p^2+7p^3-4p^4+p^5, & (i,j)=(1,7),(3,5)\\ 3p-9p^2+10p^3-5p^4+p^5, & (i,j)=(2,4),(4,6).\end{cases}$$

Αντίστοιχα, το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας δίνεται από την επόμενη συνάρτηση

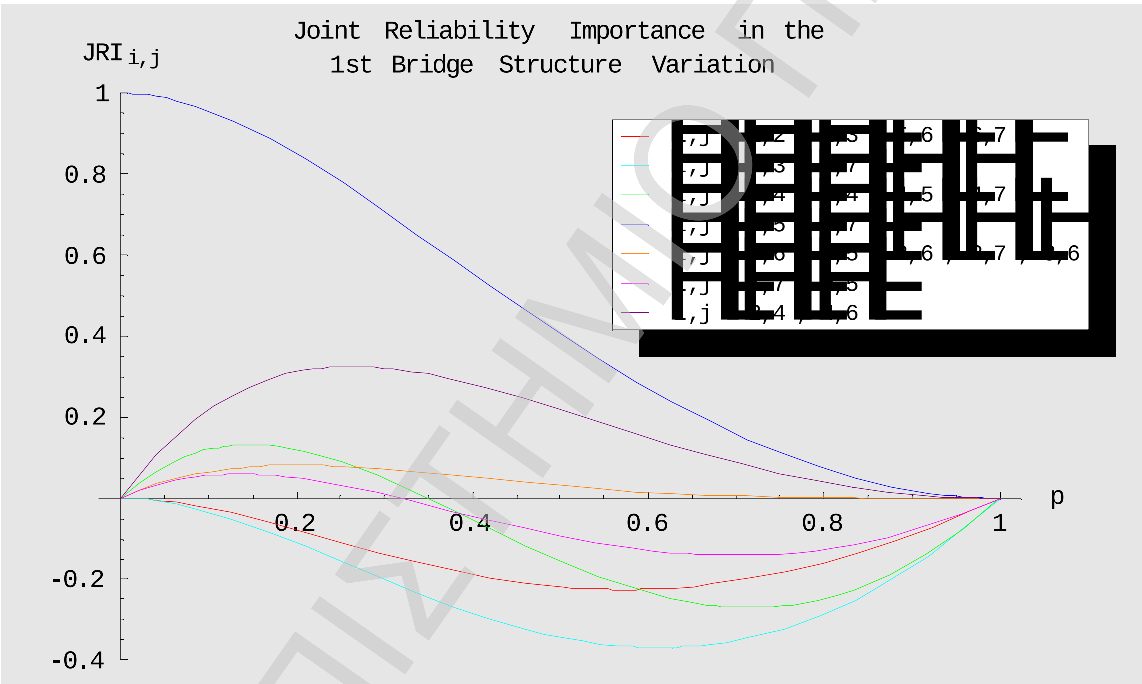
$$JSI_{i,j}=\begin{cases}-\tfrac{7}{32}, & (i,j)=(1,2),(2,3),(5,6),(6,7)\\ -\tfrac{11}{32}, & (i,j)=(1,3),(5,7)\\ -\tfrac{5}{32}, & (i,j)=(1,4),(3,4),(4,5),(4,7)\\ \tfrac{13}{32}, & (i,j)=(1,5),(3,7)\\ \tfrac{1}{32}, & (i,j)=(1,6),(2,5),(2,6),(2,7),(3,6)\\ -\tfrac{3}{32}, & (i,j)=(1,7),(3,5)\\ \tfrac{7}{32}, & (i,j)=(2,4),(4,6).\end{cases}$$

Μέσω του από κοινού μέτρου δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας παρατηρούμε ότι για τα ζεύγη μονάδων $(1,5),(2,4),(2,6)$ και $(3,7)$, παρουσιάζουν συνέργεια, έτσι η θέση της μίας μονάδας είναι πιο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί. Για τα ζεύγη μονάδων $(1,4),(2,5),(2,6),(2,7)$ και $(3,6)$, η σπουδαιότητα της θέσης της μίας μονάδας είναι ελάχιστα πιο σημαντική αν λειτουργεί η άλλη μονάδα του ζεύγους. Για όλα τα υπόλοιπα ζεύγη μονάδων, η θέση της μίας μονάδας είναι λιγότερο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί.

Στο επόμενο σχήμα παρατηρούμε ότι τα ζεύγη μονάδων $(1,5)$ και $(3,7)$ παρουσιάζουν συνέργεια, η οποία όμως μειώνεται καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία των μονάδων. Τα ζεύξη μονάδων $(2,4)$ και $(4,6)$ παρουσιάζουν συνέργεια όμως σε μικρότερο βαθμό. Ενώ τα ζεύγη

$(1,6)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,7)$ και $(3,6)$ παρουσιάζουν συνέργεια, η οποία όμως δεν είναι σημαντική. Τα ζεύγη $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(5,6)$, $(5,7)$ και $(6,7)$, εμφανίζουν μειούμενη ανταπόδοση. Τα υπόλοιπα ζεύγη, αρχικά εμφανίζουν συνέργεια, όσο όμως αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων εμφανίζουν μειούμενη ανταπόδοση. Η συνέργεια που παρουσιάζουν δεν είναι σημαντική, ενώ η μειούμενη ανταπόδοση είναι ελάχιστα σημαντική, κυρίως όταν $0.6 < p < 0.9$.

Σχήμα 4.31
Διάγραμμα από κοινού μέτρου σπουδαιότητας αξιοπιστίας
για την 1η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



• **Μέτρο Σχετικής Κρισιμότητας**

Βάσει του μέτρου σχετικής κρισιμότητας υπάρχει διάταξη σε κάποιες μονάδες. Η διατάξεις αυτές προκύπτουν από τα ΕΣΛ και τα ΕΣΔ σύμφωνα με τους Boland, Proschan and Tong (1989)

Τα ΕΣΔ για αυτό το σύστημα είναι:

$$K_1 = \{1,2,3\}, K_2 = \{1,3,4\}, K_3 = \{1,4,7\}, K_4 = \{3,4,5\}, K_5 = \{4,5,7\}, K_6 = \{5,6,7\},$$

οπότε προκύπτουν οι επόμενες διατάξεις για το μέτρο σχετικής κρισιμότητας:

$$\left.\begin{array}{l} A_1=\{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,4,7\}\} \\ A_2=\{\{1,2,3\}\} \\ A_3=\{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{3,4,5\}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_2 \subset A_1 \\ A_2 \subset A_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1^{RC} > I_2^{RC} \\ I_3^{RC} > I_2^{RC} \end{array}$$

και

$$\left.\begin{array}{l} A_5=\{\{3,4,5\},\{4,5,7\},\{5,6,7\}\} \\ A_6=\{\{5,6,7\}\} \\ A_7=\{\{1,4,7\},\{4,5,7\},\{5,6,7\}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_6 \subset A_5 \\ A_6 \subset A_7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_5^{RC} > I_6^{RC} \\ I_7^{RC} > I_6^{RC}. \end{array}$$

Τα ΕΣΛ για αυτό το σύστημα είναι:

$P_1=\{1,5\}, P_2=\{1,4,6\}, P_3=\{1,4,7\}, P_4=\{2,4,5\}, P_5=\{2,4,6\}, P_6=\{2,4,7\}, P_7=\{3,4,5\},$
$P_8=\{3,4,6\}, P_9=\{3,7\}$

και προκύπτουν οι επόμενες διατάξεις για το μέτρο σχετικής κρισιμότητας.

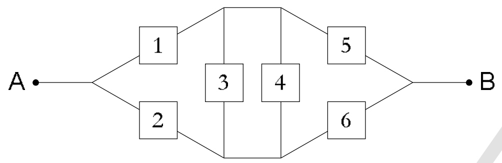
$$\left.\begin{array}{l} A_2=\{\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,4,7\}\} \\ A_4=\{\{1,4,6\},\{1,4,7\},\{2,4,5\},\{2,4,6\}, \\ \qquad\qquad \{2,4,7\},\{3,4,5\},\{3,4,6\}\} \\ A_6=\{\{1,4,6\},\{2,4,6\},\{3,4,6\}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_2 \subset A_4 \\ A_6 \subset A_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_4^{RC} > I_2^{RC} \\ I_4^{RC} > I_6^{RC} \end{array}$$

Επειδή το μέτρο σχετικής κρισιμότητας είναι κατάλληλο για τη φάση σχεδιασμού του συστήματος, θα πρέπει στις θέσεις που έχουν μεγαλύτερο μέτρο σχετικής κρισιμότητας να αναθέσουμε τις μονάδες με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία.

4.13. Σύστημα Αξιοπιστίας 2^{ης} παραλλαγής Γέφυρας (*Bridge Structure Variation 2*)

Η δομή της δεύτερης παραλλαγής του συστήματος της γέφυρας παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.

Σχήμα 4.32
Διάγραμμα Αξιοπιστίας 2^{ης} παραλλαγής του συστήματος της Γέφυρας



Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης δομής που δίνεται στο Κεφάλαιο 2.

- **Μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum**

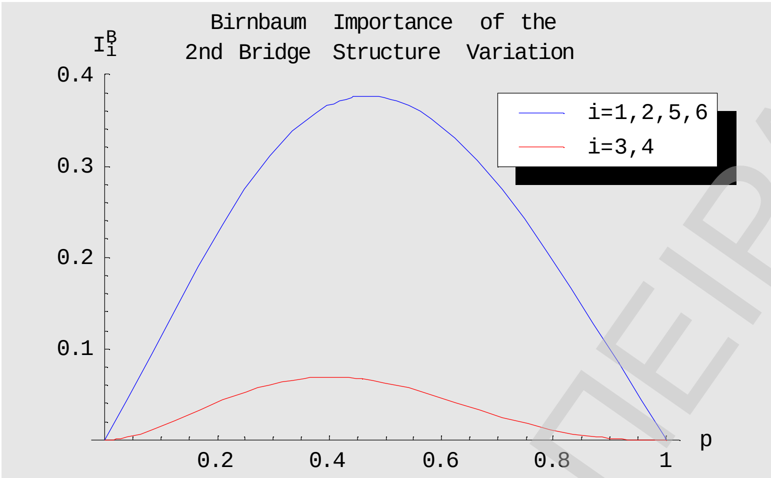
Το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum για την i μονάδα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $I_i^B = R_S\left(1_i, \mathbf{p}\right) - R_S\left(0_i, \mathbf{p}\right)$. Όπως στη δομή της γέφυρας και της διπλής γέφυρας, έτσι και σε αυτή την παραλλαγή της γέφυρας, δε μας δίνεται η δυνατότητα να εξάγουμε κοινή σχέση για το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum. Το υπολογίζουμε λοιπόν για κάθε μονάδα ξεχωριστά. Όμως, στην περίπτωση που δεν έχουμε ισόνομες μονάδες, καταλήγουμε σε έναν πολύ δύσχρηστο τύπο. Ο τύπος αυτός είναι πολύ δύσκολο να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία της σπουδαιότητας κάθε μονάδας.

Στην iid περίπτωση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum κάθε μονάδας, μπορεί να εκφραστεί από την επόμενη συνάρτηση

$$I_i^B = \begin{cases} p + 2p^2 - 8p^3 + 7p^4 - 2p^5, & i = 1,2,5,6 \\ 2p^2 - 6p^3 + 6p^4 - 2p^5, & i = 3,4. \end{cases}$$

Από το επόμενο σχήμα, παρατηρούμε πως, με βάση το μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, η σπουδαιότητα των μονάδων 3 και 4 είναι η μικρότερη, ενώ οι υπόλοιπες μονάδες έχουν πολύ μεγαλύτερη σπουδαιότητα από τις μονάδες 3 και 4.

Σχήμα 4.33
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας δίνεται από την επόμενη σχέση

$$I_i^S = I_i^B\Big|_{p_j=1/2,\, j=1,\dots,6} = \begin{cases} \frac{3}{8}, & i=1,2,5,6 \\ \frac{1}{16}, & i=3,4. \end{cases}$$

Το μέτρο δομικής σπουδαιότητας, ως ειδική περίπτωση του μέτρου σπουδαιότητας του Birnbaum, επίσης μας δείχνει ότι οι μονάδες 3 και 4 είναι οι λιγότερο σημαντικές για τη λειτουργία του συστήματος.

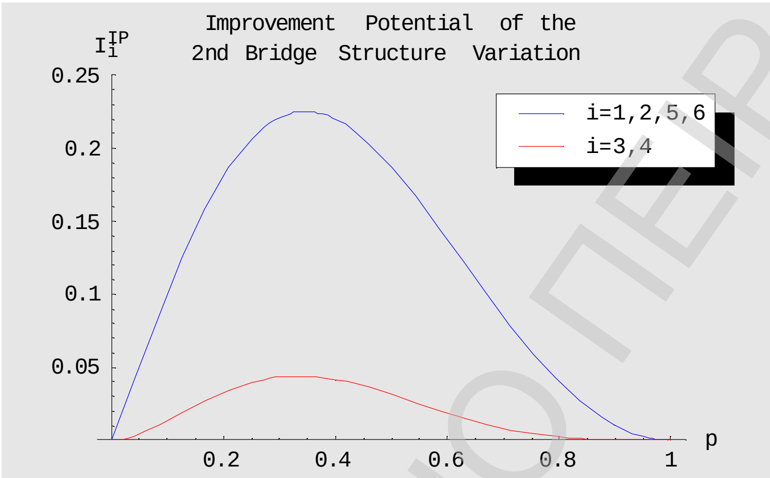
• Μέτρο δυνατότητας βελτίωσης

Όπως στο μέτρο σπουδαιότητας του Birnbaum, έτσι και στο μέτρο δυνατότητας βελτίωσης, αλλά και σε επόμενα μέτρα σπουδαιότητας, οι σχέσεις που προκύπτουν για τον υπολογισμό των μέτρων στην μη-iid περίπτωση δε μας βοηθούν να εξάγουμε συμπεράσματα για την σπουδαιότητα των μονάδων. Συνεχίζουμε λοιπόν στην ανάλυση της iid περίπτωσης. Εδώ παρατηρούμε ότι το μέτρο δυνατότητας βελτίωσης μπορεί εύκολα να υπολογισθεί από την επόμενη συνάρτηση

$$I_i^{IP} = \begin{cases} p+p^2-10p^3+15p^4-9p^5+2p^6, & i=1,2,5,6 \\ 2p^2-8p^3+12p^4-8p^5+2p^6, & i=3,4. \end{cases}$$

Η σπουδαιότητα των μονάδων 3 και 4 είναι μικρότερη από τη σπουδαιότητα των υπόλοιπων μονάδων, κάτι που φαίνεται και από το Σχήμα 4.34

Σχήμα 4.34
Διάγραμμα μέτρου δυνατότητας βελτίωσης
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



Αυτό σημαίνει ότι η βελτίωση της αξιοπιστίας που θα επιτύχουμε αν αυξήσουμε ισόποσα την αξιοπιστία κάποιας μονάδας θα είναι μεγαλύτερη αν βελτιωθεί η αξιοπιστία μιας εκ των μονάδων 1, 2, 5, 6, και σαφώς μικρότερη αν βελτιώσουμε την αξιοπιστία της μονάδας 3 ή 4.

- **Μέτρο σπουδαιότητας κρισιμότητας**

Η σπουδαιότητα κρισιμότητας σε όρους λειτουργίας και όρους διακοπής του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

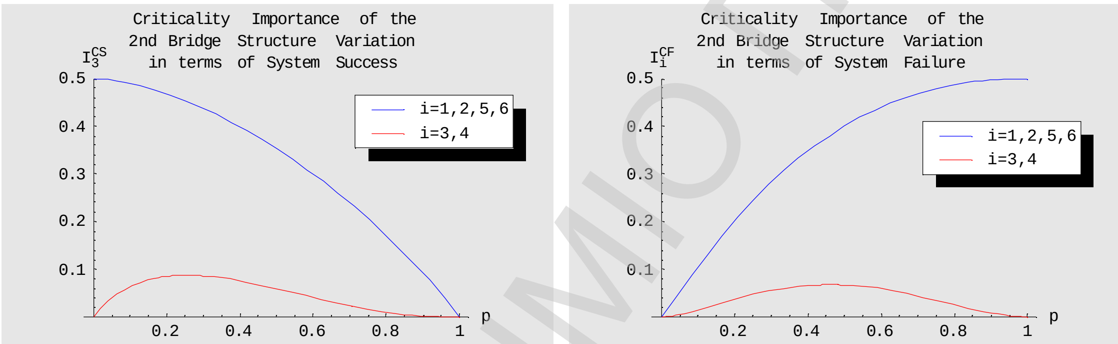
$$I_i^{CS} = \begin{cases} \dfrac{1+2p-8p^2+7p^3-2p^4}{2+4p-11p^2+8p^3-2p^4}, & i=1,2,5,6 \\[2ex] \dfrac{2p-6p^2+6p^3-2p^4}{2+4p-11p^2+8p^3-2p^4}, & i=3,4, \end{cases}$$

και

$$I_i^{CF} = \begin{cases} \dfrac{p+3p^2-5p^3+2p^4}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4}, & i=1,2,5,6 \\[2ex] \dfrac{2p^2-4p^3+2p^4}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4}, & i=3,4. \end{cases}$$

Στα επόμενα διαγράμματα, όπου απεικονίζεται η σπουδαιότητα κρισιμότητας, παρατηρούμε ότι, η συνεισφορά των μονάδων 1, 2, 5, 6 στη λειτουργία του συστήματος μειώνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Η συνεισφορά των μονάδων 3 και 4 αυξάνεται όσο $p < 0.253$ και μειώνεται όταν $p > 0.253$ καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Ταυτόχρονα, η συνεισφορά των μονάδων 3 και 4 είναι πάντοτε μικρότερη από τη συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων.

Σχήμα 4.35
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας κρισιμότητας
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας
α) σε όρους λειτουργίας του συστήματος   β) σε όρους μη λειτουργίας του συστήματος



Αντίθετα, η συνεισφορά των μονάδων 1, 2, 5 και 6 στην αποτυχία του συστήματος όταν αυτό δε λειτουργεί, αυξάνεται όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Η συνεισφορά των μονάδων 3 και 4 αυξάνεται όσο $p < 0.46$ και μειώνεται όταν $p > 0.46$ καθώς αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων. Και πάλι, η συνεισφορά των μονάδων 3 και 4 είναι μικρότερη από τη συνεισφορά των υπολοίπων μονάδων.

• **Μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely**

Το σύστημα έχει 4 Ε.Σ.Δ., τα $K_1 = \{1,2\}, K_2 = \{1,3,4,6\}, K_3 = \{2,3,4,5\}, K_4 = \{5,6\}$.

Έτσι, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely υπολογίζεται από τη σχέση $I_i^{FV} = \dfrac{\Pr(D_i)}{\Pr(C)}$. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Pr(D_1) &= \Pr\left(E_1^1 \cup E_2^1\right) = \Pr\left(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_6=0\right)\\
\Pr(D_2) &= \Pr\left(E_1^2 \cup E_2^2\right) = \Pr\left(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0\right)\\
\Pr(D_3) &= \Pr\left(E_1^3 \cup E_2^3\right) = \Pr\left(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0\right)\\
\Pr(D_4) &= \Pr\left(E_1^4 \cup E_2^4\right) = \Pr\left(x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0\right)\\
\Pr(D_5) &= \Pr\left(E_1^5 \cup E_2^5\right) = \Pr\left(x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0\right)\\
\Pr(D_6) &= \Pr\left(E_1^6 \cup E_2^6\right) = \Pr\left(x_1=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0\right)\\
\Pr(C) &= 1-R_S(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, για τις 6 μονάδες δίνεται από τις επόμενες σχέσεις.

$$\begin{aligned}
I_1^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_6)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_2^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_3^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_4^{FV} &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_5^{FV} &= (1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right)\\
I_6^{FV} &= (1-p_1)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)(1-p_6)\big/\left(1-R_S(\mathbf{p})\right).
\end{aligned}$$

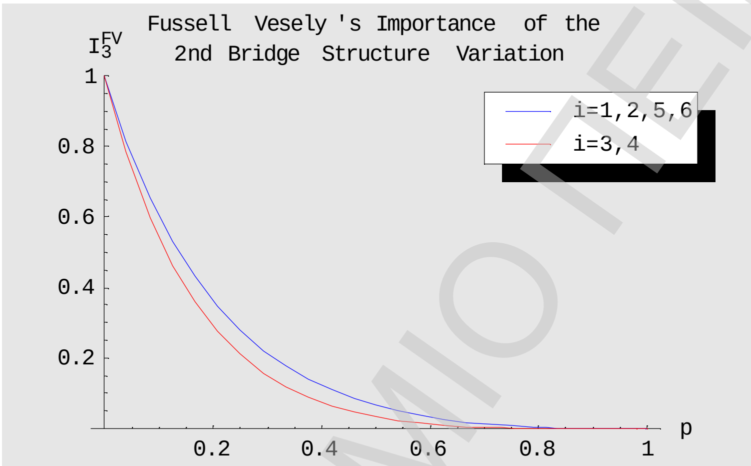
Όπως είναι προφανές, δε μπορούμε να βρούμε ποιες είναι οι πιο σημαντικές μονάδες βάσει του μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely, αν δε γνωρίζουμε τις αξιοπιστίες των μονάδων. Η μόνη διάταξη που εύκολα προκύπτει είναι για τις μονάδες 3 και 4 μεταξύ τους, αλλά και σε σχέση με τις υπόλοιπες μονάδες. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε $I_3^{FV} = I_4^{FV}$ και $I_i^{FV} > I_j^{FV}$, $i = 1,2,5,6$, $j = 3,4$, $i \neq j$.

Στην iid περίπτωση, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely εκφράζεται για τις 7 μονάδες από την ακόλουθη σχέση

$$I_i^{FV} = \begin{cases} \dfrac{1-3p+3p^2-p^3}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4} & i=1,2,5,6 \\[2ex] \dfrac{1-4p+6p^2-4p^3+p^4}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4} & i=3,4. \end{cases}$$

Όπως συμπεραίνουμε, το μέτρο σπουδαιότητας των Fussell-Vesely είναι μεγαλύτερο για τις μονάδες 1, 2, 5 και 6, οπότε η συμβολή αυτών των μονάδων στην αποτυχία του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τη συμβολή των μονάδων 3 και 4. Όμως, όπως παρατηρούμε, δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στη συμβολή των μονάδων 1, 2, 5, 6 και 3, 4.

Σχήμα 4.36
Διάγραμμα μέτρου σπουδαιότητας των Fussell-Vesely
για τη $2^{η}$ παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



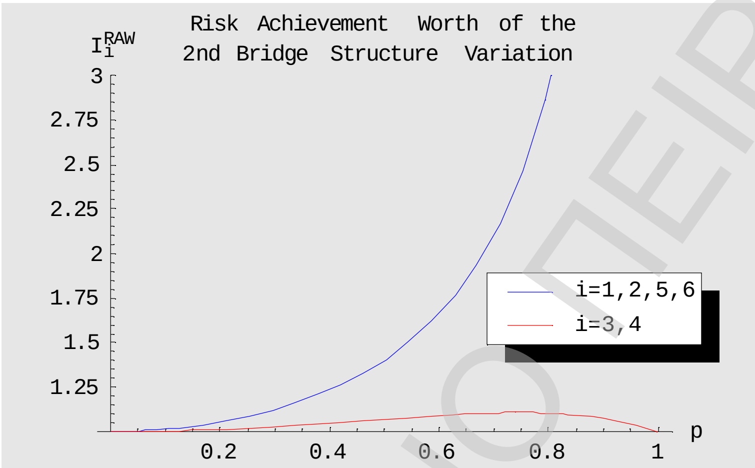
• **Μέτρο επίτευξης κινδύνου**

Το μέτρο επίτευξης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση, και αντιπροσωπεύει τη συμβολή της μονάδας i στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας του συστήματος

$$I_i^{RAW} = \begin{cases} \dfrac{1+p-2p^3+p^4}{1+p-p^2-5p^3+6p^4-2p^5}, & i=1,2,5,6 \\[2ex] \dfrac{1+2p+p^2-2p^3}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4} & i=3,4. \end{cases}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι η συμβολή των μονάδων 3 και 4 είναι πάντοτε μικρότερη από την συμβολή των υπόλοιπων μονάδων. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.37, όταν η αξιοπιστία p των μονάδων αυξάνεται, το μέτρο αυτό αυξάνεται με ολοένα μεγαλύτερο ρυθμό για τις μονάδες 1, 2, 5, 6, ενώ για τις μονάδες 3 και 4 είναι πάντοτε κοντά στη μονάδα. Άρα οι μονάδες 3 και 4 συμβάλουν λιγότερο από τις υπόλοιπες μονάδες στην επίτευξη της παρούσας αξιοπιστίας. Η διαφορά αυτή είναι σημαντική, αφού η κατακόρυφη απόσταση των μέτρων μεγαλώνει με αυξανόμενο ρυθμό, όσο η αξιοπιστία p των μονάδων τείνει στη μονάδα.

Σχήμα 4.37
Διάγραμμα μέτρου επίτευξης κινδύνου
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



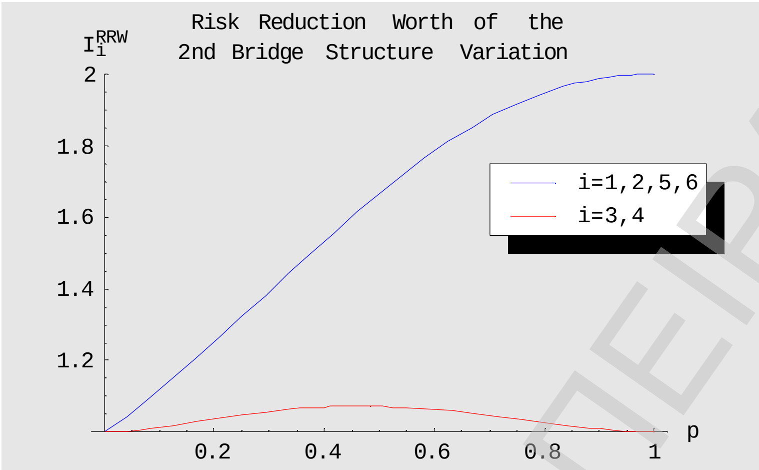
• **Μέτρο ελάττωσης κινδύνου**

Το μέτρο ελάττωσης κινδύνου υπολογίζεται από την επόμενη σχέση,

$$I_i^{RRW} = \begin{cases} \dfrac{1+p-2p^2+p^3}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4}, & i=1,2,5,6 \\ \dfrac{1+2p-p^2}{1+2p+p^2-4p^3+2p^4}, & i=3,4. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι μονάδες 3 και 4 είναι λιγότερο σημαντικές από τις υπόλοιπες μονάδες. Αντικαθιστώντας μια από τις μονάδες 1, 2, 5 και 6 με μία τέλεια μονάδα θα μειώσουμε την αναξιοπιστία του συστήματος έως 50%, ενώ αν αντικαταστήσουμε μία από τις μονάδες 3 ή 4 με μία τέλεια μονάδα, η μείωση της αναξιοπιστίας του συστήματος θα είναι ελάχιστη.

Σχήμα 4.38
Διάγραμμα μέτρου ελάττωσης κινδύνου
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



• **Μέτρο σπουδαιότητας δεσμού και συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής**

Το μέτρο σπουδαιότητας δεσμού υποθέτει ότι οι μονάδες έχουν την ίδια αξιοπιστία. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=\begin{cases} p^2+2p^3-3p^4+p^5, & i=1,2,5,6 \\ 2p^2+2p^3-5p^4+2p^5, & i=3,4, \end{cases}$$

$$R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=\begin{cases} p+3p^2-6p^3+4p^4-p^5, & i=1,2,5,6 \\ 4p^2-4p^3+p^4, & i=3,4. \end{cases}$$

Τότε θα έχουμε, $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)=R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)$ όταν $i,j=1,2,5,6$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=3,4$ και $i\neq j$. Άρα $LI_i\approx LI_j$ αν $i,j=1,2,5,6$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=3,4$ και $i\neq j$. Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες 1, 2, 5, 6 και 3, 4 είναι ισοδύναμες ως προς τη σπουδαιότητα δεσμού, άρα και ως προς τη σπουδαιότητα συνόλου λειτουργίας-συνόλου διακοπής. Πιο συγκεκριμένα, $PCI_i\approx PCI_j$ αν $i,j=1,2,5,6$ και $i\neq j$ ή όταν $i,j=3,4$ και $i\neq j$.

Όπως μπορεί να υπολογισθεί από τις συναρτήσεις αξιοπιστίας, θα έχουμε $R_S\left(0_i,\mathbf{p}\right)<R_S\left(0_j,\mathbf{p}\right)$ και $R_S\left(1_i,\mathbf{p}\right)>R_S\left(1_j,\mathbf{p}\right)$, οπότε $LI_i\geq LI_j$, για $i=1,2,5,6$, $j=3,4$.

Τότε, από γνωστή πρόταση, θα έχουμε $PCI_4 \geq PCI_j$ και $PCI_i \geq PCI_j$, για $i = 1,2,5,6$, $j = 3,4$.

• Από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας

Το από κοινού μέτρο σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας στην iid περίπτωση, δίνεται από την επόμενη συνάρτηση

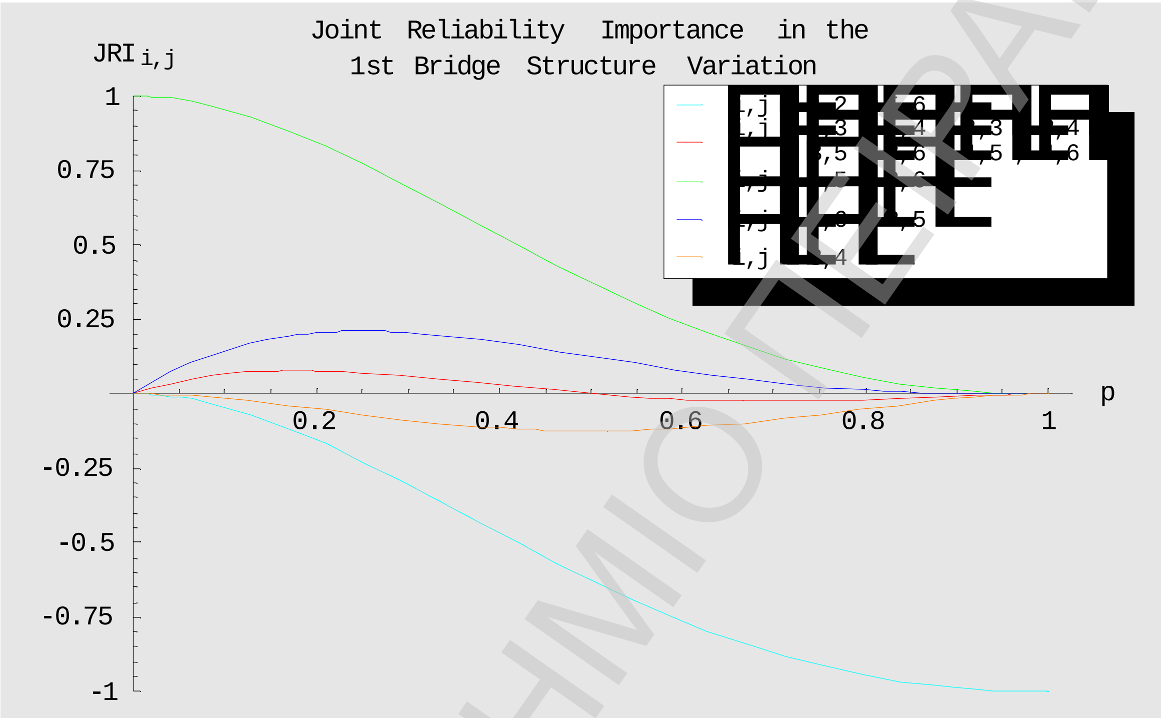
$$JRI_{i,j} = \begin{cases} -5p^2 + 6p^3 - 2p^4, & (i,j) = (1,2),(5,6) \\ p - 4p^2 + 5p^3 - 2p^4, & (i,j) = (1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6) \\ 1 - 5p^2 + 6p^3 - 2p^4, & (i,j) = (1,5),(2,6) \\ 2p - 6p^2 + 6p^3 - 2p^4, & (i,j) = (1,6),(2,5) \\ -2p^2 + 4p^3 - 2p^4, & (i,j) = (3,4). \end{cases}$$

Αντίστοιχα, το από κοινού μέτρο δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας των μονάδων της γέφυρας δίνεται από την επόμενη συνάρτηση

$$JSI_{i,j} = \begin{cases} -\frac{5}{8}, & (i,j) = (1,2),(5,6) \\ 0, & (i,j) = (1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6) \\ \frac{3}{8}, & (i,j) = (1,5),(2,6) \\ \frac{1}{8}, & (i,j) = (1,6),(2,5) \\ -\frac{1}{8}, & (i,j) = (3,4). \end{cases}$$

Μέσω του από κοινού μέτρου δομικής σπουδαιότητας αξιοπιστίας παρατηρούμε ότι τα ζεύγη μονάδων $(1,5),(1,6),(2,5)$ και $(2,6)$, παρουσιάζουν συνέργεια, οπότε η θέση της μίας μονάδας είναι πιο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί. Τα ζεύγη μονάδων $(1,2),(3,4)$ και $(5,6)$, παρουσιάζουν μειούμενη ανταπόδοση, οπότε η θέση της μίας μονάδας είναι λιγότερο σημαντική αν η άλλη μονάδα του ζεύγους λειτουργεί. Για όλα τα υπόλοιπα ζεύγη υπάρχει ανεξαρτησία, δηλαδή η σπουδαιότητα της θέσης κάποιας μονάδας είναι ανεξάρτητη από τη λειτουργία ή μη της άλλης μονάδας του ζεύγους.

Σχήμα 4.39
Διάγραμμα από κοινού μέτρου σπουδαιότητας αξιοπιστίας
για τη 2η παραλλαγή του συστήματος της Γέφυρας



• **Μέτρο Σχετικής Κρισιμότητας**

Βάσει του μέτρου σχετικής κρισιμότητας υπάρχει διάταξη σε κάποιες μονάδες, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των συναρτήσεων δομής. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε, $I_i^{RC} > I_j^{RC}$ για $i = 1,2,5,6$, $j = 3,4$. Αυτό σημαίνει ότι στις θέσεις 1, 2, 5 και 6 πρέπει να τοποθετήσουμε μονάδες με μεγαλύτερη αξιοπιστία από αυτές που θα τοποθετήσουμε στις θέσεις 3 και 4.

Βιβλιογραφία

Ξένη

Antonopoulou, I., Papastavridis, S. (1987), Fast recursive algorithm to evaluate the reliability of a circular consecutive–*k*–out–of–*n*: *F* system, *IEEE Transactions on Reliability*, **36** (1), 83 – 84.

Armstrong, M. J. (1995), Joint Reliability Importance of components, *IEEE Transactions on Reliability*, **44** (3), 408 – 412.

Armstrong, M. J. (1997), Reliability–Importance and Dual Failure–Mode Components, *IEEE Transactions on Reliability*, **46** (2), 212 – 221.

Barlow, R. E., Proschnan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Birnbaum, Z. W. (1969), On the Importance of Different Components in a Multi–component System, In *Multivariate Analysis II, P. R. Krishnaiah, ed.*, Academic Press, 581 – 592.

Boland, P. J., Proschan, F., Tong Y. L. (1989), Optimal Arrangement of Components via Pairwise Rearrangements, *Naval Research Logistics*, **36**, 807 – 815.

Chadjiconstantinidis, S., Koutras M. V. (1999), Measures of Component Importance for Markov Chain Imbeddable Reliability Structures, *Naval Research Logistics*, **46**, 613 – 639.

Chao, M. T., Fu, J. C. (1989), A limit theorem of certain repairable systems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **41** (4), 809 – 818.

Chao, M. T., Fu, J. C. (1991), The reliability of large series systems under Markov structure, *Advances in Applied Probability*, **23** (4), 894 – 908.

Fu, J. C. (1986), Reliability of consecutive-weighted-*k*-out-of-*n*: *F* systems with (*k* – 1)-step Markov dependence, *IEEE Transactions on Reliability*, **35** (), 602 – 606.

Fu, J. C., Lou, W. Y. (1991), On reliabilities of certain large linearly connected engineering systems, *Statistics and Probability Letters*, **12** (4), 291 – 296.

Fussell, J. B. (1975), How to hand-calculate system safety and reliability characteristics, *IEEE Transactions on Reliability*, **24** (3), 169 – 174.

Gertsbakh, I. B. (1989), *Statistical Reliability Theory*, Marcel Dekker, New York.

Griffith, W. S. (1986), On consecutive–*k*–out–of–*n* failure systems and their generalizations, *Reliability and Quality Control, A. P. Basu, ed.*, Elsevier, Amsterdam, 157 – 165.

Griffith, W. S., Govidarajulu, Z. (1985), Consecutive–*k*–out–of–*n* failure system: Reliability and availability, component importance, and multi state extensions, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **5** (1, 2), 125 – 160.

Hong, J. S., Lie, C. H. (1993), Joint Reliability Importance of two Edges in an Undirected Network, *IEEE Transactions on Reliability*, **42** (1), 17 – 23.

Hwang, F. K., (1982), Fast solutions for consecutive–*k*–out–of–*n*: *F* system, *IEEE Transactions on Reliability*, **31** (5), 447 – 448.

Kontoleon, J. M. (1980), Reliability Determination of a *r*-successive–out–of–*n*: *F* system, *IEEE Transactions on Reliability*, **29** (4), 437.

Koutras, M. V. (1996), On a Markov Chain Approach for the Study of Reliability Structures, *Journal of Applied Probability*, **33**, 357 – 367.

Kuo, W., Zuo, M. J. (2002), *Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications*, Wiley, New York.

Page, L. B., Perry, J. E. (1994), Reliability Polynomials and Link Importance in Networks, *IEEE Transactions on Reliability*, **43** (1), 51 – 58.

Rausand, M., Høyland, A. (2004), *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2nd ed., Wiley, New York.

Tong Y. L. (1985), A rearrangement inequality for the longest run, with an application to network reliability, *Journal of Applied Probability*, **22**, 386 – 393.

Wu, J. S., Chen, R. J. (1994a), An algorithm for computing the reliability of a weighted–*k*–out–of–*n*: *F* system, *IEEE Transactions on Reliability*, 43 (), 327 – 328.

Wu, J. S., Chen, R. J. (1994b), Reliability of consecutive–weighted–*k*–out–of–*n*: *F* systems, In *Runs and Patterns in Probability: Selected Papers, A. Godbole and S. Papastavridis, ed.*, Kluwer, Amsterdam, 205 – 211.

Zuo, M. J., Kuo, W. (1990), Design and performance analysis of consecutive–*k*–out–of–*n* structure, *Naval Research Logistics*, **37**, 203 – 230.