ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΑΞΙΩΝ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Κωστάντης Ευστάθιος

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Μάϊος 2007

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

CALCULATIONS OF BOUNDS FOR THE APPROXIMATION OF THE VALUE OF ASIAN OPTIONS

By
Costanti Efstathio

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
May 2007

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δοθούν άνω και κάτω φράγματα για την αξία ενός *αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος* (arithmetic Asian option) αγοράς ή πώλησης μιας μετοχής τόσο σε συνεχή όσο και σε διακριτό χρόνο. Επίσης οι υπολογισμοί θα πραγματοποιηθούν για τιμή άσκησης του δικαιώματος, είτε σταθερή είτε κυμαινόμενη, ως ποσοστού επί της αξίας της μετοχής.

Η αξία ενός τέτοιου δικαιώματος υπολογίζεται με βάση τον αριθμητικό μέσο όρο των τιμών της μετοχής για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων θα γίνει χρήση των εννοιών της δεσμευμένης μέσης τιμής και των comonotonic κινδύνων. Για τον υπολογισμό των άνω φραγμάτων θα ακολουθηθεί μια μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στην Αναλογιστική Επιστήμη για την εύρεση φραγμάτων ασφαλίστρων ανακοπής ζημιάς για αθροίσματα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών.

Αυτές οι μέθοδοι (που είναι σχετικά απλές) οδηγούν στο να πάρουμε ακριβή αναλυτικά φράγματα που μπορούν να υπολογιστούν. Επίσης θα γίνουν συγκρίσεις αυτών των φραγμάτων με τις προσεγγιστικές τιμές των asian options που μπορούν να βρεθούν μέσω της προσέγγισης της κατανομής του μέσου όρου των τιμών της μετοχής για μια περίοδο συγκεκριμένου αριθμού ημερών μέχρι τη λήξη του asian option.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to give upper and lower bounds for the value of an *arithmetic Asian call or put option* not only in continuous but also in discrete time. Moreover, the calculations will be made for the exercise price of option, either constant or floating, as percentage on the value of share.

The value of such an option is calculated by using the arithmetic average of the stock prices for a specific time period up to the expiry of the option.

For the calculation of lower bounds the notions of the conditional average price and comonotonic dangers will be used. For the calculation of the upper bounds a methodology that is used in the Actuarial Science for the finding of bounds of stop loss premiums, for sums of dependent random variables, will be followed.

These methods (that are relatively simple) lead to accurate analytic bounds that can be calculated. Comparisons of these bounds will also be made with the approximate prices of the asian options that can be found via the approach of distribution of the average of the stock prices for a period of specific number of days up to the expiry of Asian option.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΝΑ ΕΥΚΟΛΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟ ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Ασιατικά δικαιώματα (Asian options) είναι συμβόλαια που γράφονται πάνω σε ένα περιουσιακό στοιχείο και η αξία εξόφλησης τους εξαρτάται από τον μέσο όρο (αριθμητικό ή γεωμετρικό) των τιμών του περιουσιακού στοιχείου σε μια προκαθορισμένη περίοδο.

Σχετικά με την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K (exercise price) αναφέρουμε ότι υπάρχουν δύο περιπτώσεις Ασιατικών δικαιωμάτων:

α) Ασιατικό δικαίωμα με σταθερή τιμή εξάσκησης (fixed exercise price)

και

β) Ασιατικό δικαίωμα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης (floating exercise price), όπου το K είναι ένα ποσοστό, έστω β, επί της αξίας της μετοχής .

Ένα αριθμητικό Ασιατικό, Ευρωπαϊκού τύπου, δικαίωμα αγοράς (arithmetic Asian European – style call option) με ημερομηνία εξάσκησης T (exercise date), n μέσες χρονικές στιγμές και σταθερή τιμή εξάσκησης (fixed exercise price) K, παράγει στο χρόνο T μια αξία εξόφλησης

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - K\Big)_+ ,$$

όπου $x_+ = \max\{x,0\}$ και $S(T-i)$ είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο $T-i$, $i = 0,\ldots,n-1$.

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς στο χρόνο 0 δίνεται από την

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK\Big)_+\Big]$$

υπο το martingale μέτρο Q και με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r.

Ένα αριθμητικό Ασιατικό, Ευρωπαϊκού τύπου, δικαίωμα πώλησης (Asian European – style put option) με ημερομηνία εξάσκησης T (exercise date), n μέσες χρονικές στιγμές ($n \leq T + 1$) και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης (floating exercise price) με ποσοστό β, παράγει στο χρόνο T μια αξία εξόφλησης

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - \beta S(T)\Big)_+ .$$

Επίσης, αναφέρουμε ότι υπάρχουν τα forward starting και τα in progress Ασιατικά δικαιώματα.

Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία του μέσου όρου στο χρόνο 0 δεν έχει ξεκινήσει και τα $S(T–n+1),\ldots,S(T)$ είναι τυχαία. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $T - n + 1 \leq 0$ οπότε κάποιες τιμές είναι γνωστές και μόνο οι τιμές $S(1),\ldots,S(T)$ παραμένουν τυχαίες.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 5 κεφάλαια.

Στο ***1^ο^ Κεφάλαιο*** θα δείξουμε δύο τρόπους υπολογισμού της τιμής ενός Ασιατικού δικαιώματος σε συνεχή χρόνο. Ο πρώτος τρόπος μας οδηγεί στη λύση μιας παραβολικής διαφορικής εξίσωσης (PDE). Ο δεύτερος τρόπος σχετίζεται με τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος. Το φράγμα αυτό είναι τόσο ακριβές ώστε μπορεί να αποτελέσει την πραγματική τιμή του option.

Στο ***2^ο^ Κεφάλαιο*** θα ασχοληθούμε με την περίπτωση Ασιατικών δικαιωμάτων με διακριτό αριθμητικό μέσο. Θα προσεγγίσουμε την κατανομή του μέσου μέσω δύο κατανομών: i) της Λογαριθμοκανονικής (LN) και ii) της Αντίστροφης Gauss (IG) και θα δειχθεί ότι τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις είναι τα ίδια και εξίσου ικανοποιητικά. Τέλος, η παραπάνω προσεγγιστική ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί και στον υπολογισμό χαρτοφυλακίων εξασφάλισης, μέσω μιας επαναλαμβανόμενης στρατηγικής.

Στο ***3^ο^ Κεφάλαιο*** θα αναφερθούμε σε κάποιες έννοιες όπως είναι η κυρτή διάταξη (convex order) και οι συμμονοτονικές τ.μ (comonotonic random variables) ενώ θα παρουσιάσουμε και κάποια σχετική θεωρία που αναφέρεται στους παραπάνω ορισμούς. Τέλος, θα υπολογίσουμε συμμονοτονικά άνω φράγματα, βελτιωμένα συμμονοτονικά άνω φράγματα και κάτω φράγματα για αθροίσματα τ.μ της μορφής $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Όπως θα γίνει αντιληπτό, το Κεφάλαιο 3 θα αποτελέσει τη βάση για την κατανόηση των ακόλουθων δύο Κεφαλαίων της παρούσας εργασίας.

Στο ***4ο Κεφάλαιο*** θα εισάγουμε έννοιες όπως αυτή της κλάσης Frechet, του μετασχηματισμού ανακοπής ζημιάς (stop-loss transform) και για ακόμη μια φορά του συμμονοτονικού διανύσματος. Η ανάλυση θα ολοκληρωθεί υπολογίζοντας αρχικά ένα άνω φράγμα γενικά για την τιμή ενός αριθμητικού Asian option με σταθερή τιμή εξάσκησης και εν συνεχεία παρουσιάζοντας μια εφαρμογή για τον τύπο των Black & Scholes.

Στο ***5ο Κεφάλαιο*** θα επαναλάβουμε λίγο αναλυτικότερα κάποιες σχέσεις που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3 και αφορούν το συμμονοτονικό άνω φράγμα, το βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα, το κάτω φράγμα και αθροίσματα Λογαριθμοκανονικών μεταβλητών. Θα προχωρήσουμε λίγο παραπέρα από την ανάλυση του Κεφαλαίου 4 υπολογίζοντας άνω και κάτω φράγματα βασισμένοι στην συμμονοτονικότητα αλλά και στην προσέγγιση των Rogers & Shi (1995) με εφαρμογή στον τύπο των Black & Scholes, τόσο για την περίπτωση Ασιατικών δικαιωμάτων με σταθερή τιμή εξάσκησης όσο και με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση της ιδέας των Nielsen & Sandmann (2002) οι οποίοι εφάρμοσαν την προσέγγιση των Rogers & Shi στην αριθμητική περίπτωση και η οποία αναφέρεται στο λεγόμενο μερικώς ακριβές/συμμονοτονικό άνω φράγμα.

Τέλος, στο Παράρτημα υπάρχουν 2 τμήματα. Στο τμήμα Α διατυπώνονται κάποιες γενικές παρατηρήσεις και ένα θεώρημα που αφορά συμμετρικά αποτελέσματα για τα Αριθμητικά Ασιατικά Δικαιώματα. Στο τμήμα Β παρουσιάζεται μια αριθμητική σύγκριση αποτελεσμάτων των διαφόρων μεθόδων.

1. Η ΤΙΜΗ ΕΝΟΣ ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υποθέτουμε ότι η τιμή στο χρόνο t ενός περιουσιακού στοιχείου $S(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = S(0)\exp(bB(t) - \frac{1}{2}b^2 t + \alpha t) \quad (1)$$

όπου $B(t)$ είναι μια τυπική κίνηση Brown ή διαδικασία Wienner και α είναι μια σταθερά η οποία ισούται με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο της αγοράς δηλ. $\alpha = r$. Το πρόβλημα υπολογισμού της αξίας ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με χρόνο λήξης T (maturity) και τιμή άσκησης (strike price) K, γραμμένο πάνω στο παραπάνω περιουσιακό στοιχείο, μαθηματικά ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της ποσότητας

$$\mathrm{E}\big(Y-K\big)_+ ,\ \text{όπου}\ \big(Y-K\big)_+ = \max\{Y-K,0\} \quad (2)$$

και το Y ορίζεται από την

$$Y \equiv \int_0^T S(u)\mu(du) \quad (3)$$

Στην περίπτωση του Ασιατικού Δικαιώματος με σταθερή τιμή άσκησης (fixed strike) το μέτρο μ δίνεται από τη σχέση $\mu(du) = T^{-1}\mathrm{I}_{[0,T]}(u)\,du$, ενώ για $\mu(du) = \delta_T(du)$ έχουμε το κλασσικό Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και για $\mu(du) = T^{-1}I_{[0,T]}(u)du - \delta_T(du)$ και $K = 0$ έχουμε το Ασιατικό Δικαίωμα με κυμαινόμενη τιμή άσκησης (floating strike) του οποίου η τιμή στο χρόνο 0 δίνεται από την

$$\mathrm{E}\Big(T^{-1}\int_0^T S(u)du - S(T)\Big)_+ \quad (4)$$

1.2 ΜΙΑ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (PDE) ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΝΟΣ ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος λήξης του δικαιώματος είναι σταθερός και ίσος με T και ότι το μέτρο πιθανότητας μ έχει μια πυκνότητα ρ_t στο διάστημα $(0,T)$. Εάν ορίσουμε

$$\varphi(t,x) \equiv \mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^T S(u)\mu(du) - x\Big)_+ \Big| S(t)=1\Big], \tag{5}$$

όπου S δίνεται από την (1) τότε αναπτύσσουμε το martingale

$$M_t \equiv \mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^T S(u)\mu(du) - K\Big)_+ \Big| F_t\Big]$$

$$= \mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^t S(u)\mu(du) + \int_t^T S(u)\mu(du) - K\Big)_+ \Big| F_t\Big]$$

$$= \mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^T S(u)\mu(du) - \Big(K - \int_0^t S(u)\mu(du)\Big)\Big)_+ \Big| F_t\Big]$$

$$= S(t)\mathrm{E}\Big[\Big(\int_t^T \frac{S(u)}{S(t)}\mu(du) - \frac{K - \int_0^t S(u)\mu(du)}{S(t)}\Big)_+ \Big| F_t\Big]$$

$$= S(t)\varphi(t,\xi(t)), \tag{6}$$

όπου

$$\xi(t) \equiv \frac{K - \int_0^t S(u)\mu(du)}{S(t)}. \tag{7}$$

Από τον τύπο του Ito έχουμε:

$$d\xi(t) = -\rho_t dt + \xi(t)\,(-b dB(t) - r dt + b^2 dt)$$

ενώ εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα και την (6) έχουμε:

$$dM = \varphi dS + S(\varphi dt + \varphi' d\xi + \frac{1}{2}\varphi'' \, d[\xi]\,) + dS d\varphi$$

$$= r\varphi S dt + S\big(\varphi + \varphi'(-\rho_t - r\xi + b^2\xi) + \frac{1}{2} b^2 \xi^2 \varphi''\big)\, dt - bS\cdot\varphi' b\xi dt$$

$$= S\big[r\varphi + \varphi - (\rho_t + r\xi)\,\varphi' + \frac{1}{2} b^2 \xi^2 \varphi''\,\big] dt,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$r\varphi + \varphi - (\rho_t + r\xi)\,\varphi' + \frac{1}{2} b^2 \xi^2 \varphi'' = 0. \tag{8}$$

Αν τώρα $f(t,x) \equiv e^{-r(T-t)}\varphi(t,x)$ βρίσκουμε ότι η f λύνει την

$$f + Gf = 0, \tag{9}$$

$$\text{όπου } G \equiv \frac{1}{2} b^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\rho_t + rx)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στην περίπτωση του fixed strike Asian option είναι

$$f(T,x) = x^{-} \tag{10}$$

ενώ στην περίπτωση του floating strike Asian option είναι

$$f(T,x) = (1 + x)^{-}. \tag{11}$$

Ας συμβολίσουμε την λύση της (8) με την συνοριακή συνθήκη (10) φ και με την αντίστοιχη (11) με ψ. Στην περίπτωση που το μ είναι ομοιόμορφο στο $[0,T]$, η τιμή του Ασιατικού δικαιώματος με χρόνο λήξης T, σταθερή τιμή άσκησης K και αρχική τιμή $S(0)$ είναι

$$e^{-rT}\,\mathrm{E}\Big(\int_0^T (S(u) - K)\frac{du}{T}\Big)_+ = S(0) f(0, KS(0)^{-1})$$

$$\equiv e^{-rT} S(0)\, \varphi(0, KS(0)^{-1})$$

και η τιμή του Ασιατικού δικαιώματος με χρόνο λήξης T και μεταβλητή τιμή άσκησης K είναι

$$e^{-rT}\,\mathrm{E}\Big(\int_0^T S(u)\frac{du}{T} - S(T)\Big)_+ = e^{-rT} S(0)\, \psi(0,0).$$

Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση για $x \leq 0$,

$$\varphi(t,x) = r^{-1}(e^{r(T-t)} - 1) - x$$

που κάνει την λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους ευκολότερη.

Επίσης για μεγάλο αρνητικό x, η $\psi(t,x)$ είναι πολύ κοντά στην ποσότητα

$$\mathrm{E}\Big(\int_t^T S(u)\, \frac{du}{T} - S(T) - x \Big) = \frac{e^{r(T-t)} - 1}{r} - e^{\,r(T-t)} - x,$$

πράγμα που βοηθάει να ορίσουμε συνοριακές τιμές για αριθμητικές μεθόδους.

Για ένα Asian option με χρόνο λήξης T και τιμή άσκησης K αλλά του οποίου ο μέσος υπολογίζεται στο διάστημα $[\, T-t \,,\, T \,]$, $0 < t < T$, η τιμή είναι

$$e^{-rT} \int_0^\infty P(S(T-t) \in dx) x\, \varphi(\, T-t \,, K/x),$$

όπου η φ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το μέτρο μ που είναι ομοιόμορφο στο $[T{-}t \;,\; T]$. Η παραπάνω ποσότητα υπολογίζεται εύκολα όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $\varphi(\, T-t \,, \cdot\,)$.

1.3 ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Για να αποκτήσουμε ένα κάτω φράγμα βασιζόμαστε αρχικά στην παρακάτω σχέση:

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{E}\big(Y_+\big) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(\, Y_+ | Z\,)\big) \;\geq\; \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(\, Y | Z\,)_+\big).$$

Από όλες τις πιθανές επιλογές για την Z, για το fixed strike Asian option, η καλύτερη έχει αποδειχθεί ότι είναι η

$$Z = \int_0^T X(u) du\,.$$

Η μέθοδος υπολογισμού κάτω φράγματος βασίζεται στην ιδέα ότι αν δεσμεύσουμε την διαδικασία X ως προς μια Κανονική τ.μ Z με μέσο μηδέν, τότε παραμένει μια Κανονική διαδικασία.

$$\mathrm{E}(B(t) | Z\,) = m(t)Z, \ \mathrm{cov}\ (B(s),B(t) | Z\,) = v_{st}. \qquad (12)$$

Είναι γνωστό ότι

$$m(t) = \mathrm{E}(\, B(t)Z\,) \,/\, \mathrm{E}(\, Z^2\,),\ v_{st} = s^t - \mathrm{E}(\, B(s)Z\,)\mathrm{E}(\, B(t)Z\,) \,/\, E(\, Z^2\,). \qquad (13)$$

π.χ για $T = 1$ και $Z = \int_0^1 B(t)dt$ τότε

$$m(t) = 3t(\,2 - t\,)\,/\,2,\; \upsilon_{st} = s^t - 3st(\,2 - s\,)\,(\,2 - t\,)\,/\,4, \tag{14}$$

και όταν $Z = \int_0^1 B(t)dt \; - B(1) = \int_0^1 tdB(t)$ τότε

$$m(t) = -3t^2\,/\,2,\; \upsilon_{st} = s^t - 3s^2t^2\,/\,4. \tag{15}$$

Για κάθε τ.μ U, έχουμε

$$0 \le \mathrm{E}(\,U_+) - \mathrm{E}(U)_+$$

$$= \frac{1}{2}(\,\mathrm{E}(|U|) - |E(U)|)$$

$$\le \frac{1}{2}\,\mathrm{E}(|U - E(U)|)$$

$$\le \frac{1}{2}\,\mathrm{var}\,(\,U\,)^{1/2}.$$

Κατ' αντιστοιχία,

$$0 \le \mathrm{E}[\mathrm{E}(\,Y_+|Z\,) - \mathrm{E}(\,Y|Z\,)_+]$$

$$\le \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[\mathrm{var}(\,Y|Z\,)^{1/2}]. \tag{16}$$

Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι η διακύμανση του Y δοθέντος του Z.

Αρχικά ο μέσος του Y δοθέντος του Z είναι

$$\mathrm{E}[\int_0^1 \exp(bB(t) - \frac{1}{2}b^2 t + rt)\mu(dt)|Z\,]$$

$$= \int_0^1 \exp(bm(t)Z - \frac{1}{2}b^2 \upsilon m(t)^2 + rt)\mu(dt) \tag{17}$$

όπου $\upsilon \equiv \mathrm{var}(Z)$ και τότε παρόμοια έχουμε:

$$\operatorname{var}(Y|Z) = \int_0^1 \mu(ds)\int_0^1 \mu(dt)\exp\Big(bZ(m(s) + m(t)) - \frac{1}{2} b^2\upsilon(m(s)^2 + m(t)^2) + r(s+t)\Big)$$

$$(e^{b^2\upsilon_{st}} - 1)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την προσέγγιση $e^x \approx 1+x$ παίρνουμε:

$$V \approx \int_0^1 \mu(ds)\int_0^1 \mu(dt)\Big(1+ bZ(m(s) + m(t)) - \frac{1}{2} b^2\upsilon(m(s)^2 + m(t)^2) + r(s+t)\Big)b^2\upsilon_{st}$$

το οποίο απαλείφεται αν $Z = \int_0^1 B(t)\mu(dt)$.

Για να γίνει αυτό αντιληπτό αρκεί να προσέξουμε ότι ο παράγοντας

$$\Big(1+ bZ(m(s) + m(t)) - \frac{1}{2} b^2\upsilon(m(s)^2 + m(t)^2) + r(s+t)\Big)$$

μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\Big(1+ bZm(s) + bZm(t) - \frac{1}{2} b^2\upsilon\, m(s)^2 - \frac{1}{2} b^2\upsilon\, m(t)^2 + rs + rt\Big)$$

$$= 1 + \Big(rs + bZm(s) - \frac{1}{2} b^2\upsilon m(s)^2 \Big) + \Big(rt + bZm(t) - \frac{1}{2} b^2\upsilon m(t)^2 \Big)$$

$$\equiv 1 + f(s, Z) + f(t, Z),$$

και ότι

$$\int_0^1 \upsilon_{st}\mu(ds) = \operatorname{cov}\Big(\int_0^1 B(s)\mu(ds), B(t)\Big|Z\Big) = \operatorname{cov}(Z, B(t)|Z) = 0 .$$

Κατ' αντιστοιχία, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\operatorname{var}(Y|Z)$ από τη σχέση:

$$\operatorname{var}(Y|Z) \approx \operatorname{var}(Y|Z) - V \le I_1 + I_2, \tag{18}$$

όπου για τα I_1, I_2 ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_1 = \int_0^1 \mu(ds)\int_0^1 \mu(dt)\Big(e^{f(s, Z) + f(t, Z)} - 1 - f(s, Z) - f(t, Z)\Big) - \left|e^{b^2\upsilon_{st}} - 1\right|$$

$$I_2 = \int_0^1 \mu(ds)\int_0^1 \mu(dt)\,(e^{b^2\upsilon_{st}} - 1 - b^2\upsilon_{st}) \cdot \left|1 + f(s, Z) + f(t, Z)\right|.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (16) και (18) έχουμε

$$0 \le \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y_+ | Z) - \mathrm{E}(Y | Z)_+] \le \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(I_1 + I_2)^{1/2}\right) \tag{19}$$

οπότε αυτό που θέλουμε είναι να υπολογίσουμε τα E(I_1) και E(I_2).

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω ανισότητες

$$|e^x - 1| \le |x| \cdot e^{|x|} , \ |e^x - 1 - x| \le \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{|x|} ,$$

που ισχύουν για κάθε x.

Επίσης σε ότι ακολουθεί θέτουμε $g(s) \equiv rs - \frac{1}{2} b^2 \upsilon m(s)$ και c , γ_1 , γ_2 είναι σταθερές τέτοιες ώστε για όλα τα $0 \le s$, $t \le 1$ να ισχύει:

$$|\upsilon_{st}| \le c , (m(s) + m(t))^2 \le \gamma_1 , | g(s) + g(t) | \le \gamma_2.$$

Για το πρώτο όρο έχουμε:

$$\mathrm{E}(I_1) \le cb^2 e^{cb^2} \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt)\, \mathrm{E}[\exp(g(s) + g(t) + Z\, b(m(s) + m(t))$$

$$- 1 - g(s) - g(t) - Z\sigma^2(m(s) + m(t))]$$

$$= cb^2 e^{cb^2} \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt)\, [\exp(g(s) + g(t) + \frac{1}{2} b^2 \upsilon (m(s) + m(t))^2)$$

$$- 1 - g(s) - g(t)]$$

$$= cb^2 e^{cb^2} \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt)\, [\{e^{1/2\, b^2 \upsilon (m(s) + m(t))^2} - 1\}\, e^{g(s) + g(t)} +$$

$$e^{g(s) + g(t)} - 1 - g(s) - g(t)]$$

$$\le cb^2 e^{cb^2 + \gamma_2}\Big[\frac{1}{2} b^2 \gamma_1 \upsilon e^{1/2\, b^2 \gamma_1 \upsilon} + \frac{1}{2}\gamma_2{}^2\Big] \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt)$$

$$= cb^2 e^{cb^2 + \gamma_2}\, \Big[\frac{1}{2} b^2 \gamma_1 \upsilon\, \mathrm{e}^{1/2\, b^2 \gamma_1 \upsilon} + \frac{1}{2}\gamma_2{}^2\Big] M$$

όπου

$$M \equiv \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt) .$$

Για το δεύτερο όρο έχουμε:

$$\mathrm{E}(\, I_2) = \int_0^1\int_0^1 |\mu|(ds)|\mu|(dt)\,(\, e^{b^2 \upsilon st} - 1 - \upsilon st\,) \cdot \left|1 + g(s) + g(t)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2} b^4 c^2\, e^{b^4 c^2} (1+ \gamma_2)\, M.$$

Αθροίζοντας τα παραπάνω προκύπτει το δεξιό μέλος της (19) δηλ. η ποσότητα

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(\, I_1 + I_2\,)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[cb^2\, e^{cb^2 + \gamma_2}\, \left[\frac{1}{2} b^2 \gamma_1 \upsilon\, \mathrm{e}^{1/2\, b^2 \gamma_1 \upsilon} + \frac{1}{2}\gamma_2{}^2\right] + \frac{1}{2} b^4 c^2\, e^{b^4 c^2} (1+ \gamma_2)\right]^{1/2} M^{1/2}$$

Τελικά από τις σχέσεις:

$$\mathrm{E}\left(Y_+\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(\, Y_+ | Z\,)\right) \geq \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(\, Y|Z\,)_+\right).$$

$$0 \leq \mathrm{E}[\mathrm{E}(\, Y_+|Z\,) - \mathrm{E}(\, Y|Z\,)_+] \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(\, I_1 + I_2\,)^{1/2}\right)$$

και δεδομένης της εκτίμησης της ποσότητας $\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(\, I_1 + I_2\,)^{1/2}\right)$ μπορεί κάποιος να υπολογίσει ένα **κάτω φράγμα** για την ποσότητα $\mathrm{E}\left(Y_+\right)$ και ακολούθως για την αξία ενός Ασιατικού δικαιώματος (Περισσότερες λεπτομέρειες παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5).

2. ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα μελετήσουμε την περίπτωση Ασιατικών δικαιωμάτων διακριτού αριθμητικού μέσου των τελευταίων n τιμών (discrete arithmetic average options).

Υποθέτουμε ότι η τιμή μιας μετοχής στην αγορά περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία $\{S(t)\ ,\ t\geq 0\}$ που ακολουθεί μια Γεωμετρική Κίνηση Brown:

$$dS(t) = \alpha S(t)\, dt + bS(t)\, dB(t)\ , \qquad (1)$$

όπου $\{B(t)\ ,\ t\geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown (ή στοχαστική διαδικασία Wienner).

Η παράμετρος α λέγεται μέση απόδοση της μετοχής (mean rate of return) και η παράμετρος b ονομάζεται πτητικότητα (volatility). Επίσης, στην αγορά υπάρχει η χωρίς ρίσκο επένδυση, η ομολογία, με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r . Θα πρέπει να αλλάξουμε το μέτρο πιθανότητας έτσι ώστε να ισχύει $\alpha = r$ σε όλους τους υπολογισμούς. Λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμητικό μέσο των τελευταίων n τιμών της μετοχής η αξία εξόφλησης του δικαιώματος στο χρόνο T δίνεται από την σχέση:

$$\max\left\{0,\ \frac{S(T-n+1)+...+S(T)}{n} - K\right\} = \left(\frac{S(T-n+1)+...+S(T)}{n} - K\right)_{+}$$

όπου K είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος και T ο χρόνος λήξης ο οποίος υποθέτουμε ότι μετριέται σε μονάδες δηλ. είναι ακέραιος. Για τον υπολογισμό της τιμής του Ασιατικού δικαιώματος στο χρόνο $t = 0$ είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την κατανομή της προηγούμενης ποσότητας.

Ως γνωστόν, λόγω της (1) η $S(t)$ ακολουθεί την Λογαριθμοκανονική κατανομή. Η κατανομή όμως του αθροίσματος εξαρτημένων Λογαριθμοκανονικών κατανομών και συνεπώς και του μέσου

$$\frac{S(T-n+1)+\ldots+S(T)}{n}$$

είναι άγνωστη. Το παραπάνω πρόβλημα ξεπεράστηκε με την προσέγγιση της κατανομής της παραπάνω ποσότητας από την Λογαριθμοκανονική και από μία αντίστροφη Gauss καανομή (Inverse Gaussian).

Έχει αποδειχθεί ότι η προσέγγιση από τις δύο προαναφερθείσες κατανομές είναι εξίσου αποτελεσματική και μάλιστα η ανάλυση αυτή οδηγεί σε έναν σαφή προσεγγιστικό τύπο για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος. Άμεση συνέπεια, είναι η δυνατότητα κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης (Hedging portfolio) μέσω μιας επαναλαμβανόμενης στρατηγικής (replicating strategy) και σύγκρισης της αξίας της στο χρόνο λήξης με την αξία του δικαιώματος την ίδια χρονική στιγμή.
Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω είναι αυτή των δύο πρώτων ροπών του αριθμητικού μέσου με την οποία πρωτοασχολήθηκαν οι Turnbull και Wakeman (1991).

2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

Έστω

$$Y(r,b,n,T)=\frac{S(T-n+1)+\ldots+S(T)}{n}$$

ο αριθμητικός μέσος των τελευταίων n τιμών της μετοχής. Θα υπολογίσουμε τις ροπές της Y δοθέντος ότι $S(t) = x$ για $t < T - n + 1$. (Η περίπτωση $t \geq T - n + 1$ μπορεί να υπολογιστεί ανάλογα)

Έχουμε

$$Y(r,b,n,T)=\frac{1}{n}\left[S(T-n+1)\frac{S(T-n+1)}{S(T-n+1)}+S(T-n+1)\frac{S(T-n+2)}{S(T-n+1)}+\ldots \right.$$

$$\left. \ldots+S(T-n+1)\frac{S(T)}{S(T-n+1)} \right]$$

$$=\frac{1}{n}S(T-n+1)\Big[1+\frac{S(T-n+2)}{S(T-n+1)}+\ldots+\frac{S(T)}{S(T-n+1)}\Big]$$

$$=\frac{1}{n}S(T-n+1)\times$$

$$\Big[\,1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_{T-n+2}\Big)+\ldots+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)$$

$$+bN_{T-n+2}+\ldots+\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_T\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{n}S(T-n+1)\Big[\,1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_{T-n+2}\Big)$$

$$\Big[1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_{T-n+3}\Big)\Big[\ldots 1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_{T-1}\Big)$$

$$\Big[\,1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_T\Big)\Big]\ldots\Big]\Big]\Big],$$

όπου $\{\, N_t\,, t = T-n+2\,,\ \ldots\ T\,\}$ είναι τυποποιημένες Κανονικές μεταβλητές που είναι ανεξάρτητες λόγω της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της κίνησης Brown.

Έστω τώρα

$$Y_o \equiv 1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_T\Big), \qquad (2)$$

$$Y_k \equiv 1+\exp\Big(\Big(r-\frac{b^2}{2}\Big)+bN_{T-k}\Big)\,Y_{k-1}\,, \qquad (3)$$

για $k = 1,\ldots, n-2$

Σημειώνουμε ότι N_{T-k} ανεξάρτητη από την Y_{k-1}.

Μας ενδιαφέρει η παρακάτω ποσότητα

$$Y(\,r,b,n,T\,) = \frac{1}{n}S(T-n+1)Y_{n-2}. \qquad (4)$$

Σημειώνουμε ότι $S(\,T-n+1)$ ανεξάρτητη από την Y_{n-2}.

Παίρνοντας τις δύο πρώτες ροπές στις (2 - 4) έχουμε :

$$\mathrm{E}\left[Y_o\right] = 1 + e^r , \tag{5}$$

$$\mathrm{E}\left[Y_o^{\,2}\right] = 1 + 2e^r + e^{2r + b^2} , \tag{6}$$

$$\mathrm{E}\left[Y_k\right] = 1 + e^r\, \mathrm{E}\left[Y_{k-1}\right] , \tag{7}$$

$$\mathrm{E}\left[Y_k^{\,2}\right] = 1 + 2e^r\, \mathrm{E}\left[Y_{k-1}\right] + e^{2r + b^2}\, \mathrm{E}\left[Y^2_{\;k-1}\right], \tag{8}$$

$$\mathrm{E}\left[Y(r,b,n,T)\right] = \frac{1}{n}\, \mathrm{E}\left[S(\,T - n + 1)\right]\mathrm{E}\left[Y_{n-2}\right]. \tag{9}$$

$$\mathrm{E}\left[Y(r,b,n,T)^2\right] = \frac{1}{n^2}\, \mathrm{E}\left[S(\,T - n + 1)^2\right]\mathrm{E}\left[Y^2_{\;n-2}\right]. \tag{10}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (5 – 8) , παίρνουμε

$$\mathrm{E}\left[Y_{n-2}\right] = \frac{e^{rn} - 1}{e^r - 1}, \tag{11}$$

$$\mathrm{E}\left[Y^2_{\;n-2}\right] = \frac{A(r,b,n)}{(e^r - 1)(e^{2r+b^2} - 1)(e^r - e^{2r+b^2})} \tag{12}$$

όπου ο αριθμητής δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} A(r,b,n) = {} & -2e^{r(n+1)} + 2e^{r(n+3) + b^2} + e^{2r} \\ & - e^{2r(n+1) + b^2 n} + e^{r(2n+1) + b^2 n} - e^{r(2n+3) + b^2(n+1)} \\ & - e^{3r + b^2} + e^r + e^{(2r+b^2)(n+1)} - e^{2r+b^2} . \end{aligned}$$

Έστω ότι $m_1(x, t\,; r, b, n)$ και $m_2(x, t\,; r, b, n)$ είναι η πρώτη και δεύτερη ροπή του αριθμητικού μέσου των n τιμών της μετοχής, υπολογιζόμενες t-περιόδους πριν η πρώτη τιμή υπεισέλθει στον αριθμητικό μέσο και δεδομένου ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι x.

Χρησιμοποιώντας τις (9 – 12) παίρνουμε

$$m_1(x, t\,; r, b, n) = \frac{x e^{rt}(e^{rn} - 1)}{n(e^r - 1)}, \tag{13}$$

$$m_2(x, t\,; r, b, n) = \left(\frac{x}{n}\right)^2 \frac{e^{(2r+b^2)t} A(r,b,n)}{(e^r - 1)(e^{(2r+b^2)} - 1)(e^r - e^{2r+b^2})}, \tag{14}$$

2.3 ΔΥΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

Από τη στιγμή που η κατανομή της $Y(r,b,n,T)$ είναι άγνωστη πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιο είδος προσέγγισης βασισμένο στις γνώσεις για τις ροπές. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως διάφορες επιλογές κατανομής έχουν δοκιμαστεί αλλά οι περισσότερες από αυτές δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για την τιμή του δικαιώματος. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η προσέγγιση της κατανομής του αριθμητικού μέσου από μια αντίστροφη Gauss κατανομή (IG) δίνει τιμές ίδιες και εξίσου αποτελεσματικές με αυτές της Λογαριθμοκανονικής προσέγγισης (LN).

Αρχικά θυμίζουμε ότι αν $X_1 \sim \mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ δηλ. ακολουθεί την Λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 τότε η σ.π.π της δίνεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ x>0 \tag{15}$$

ενώ για τις 2 ροπές ισχύει:

$$\mathrm{E}[X_1] = e^{\mu+\sigma^2/2} \tag{16}$$

$$\mathrm{E}[X_1^2] = e^{2\mu+2\sigma^2} \tag{17}$$

Από την άλλη πλευρά αν $X_2 \sim \mathrm{IG}(\rho,\beta)$ δηλ. ακολουθεί την Αντίστροφη κατανομή Gauss με παραμέτρους ρ και β τότε η σ.π.π της δίνεται από την σχέση:

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3\beta}}\rho \exp\left(-\frac{(x-\rho)^2}{2\beta x}\right),\ x>0 \tag{18}$$

ενώ για τις 2 ροπές ισχύει:

$$\mathrm{E}[X_2] = \rho \tag{19}$$

$$\mathrm{E}[X_2^2] = \beta\rho + \rho^2 \tag{20}$$

Για τις προσεγγίσεις θα ταυτοποιήσουμε τις 2 πρώτες ροπές και των 2 κατανομών με τις 2 πρώτες ροπές της $Y(r,b,n,T)$.

<u>για την Λογαριθμοκανονική προσέγγιση</u> επιλέγουμε τις παραμέτρους ως εξής:

$$\mu = 2lnm_1 - \frac{1}{2}\, lnm_2 \qquad (21)$$

$$\sigma^2 = lnm_2 - 2lnm_1 \qquad (22)$$

<u>για την αντίστροφη Gauss προσέγγιση</u> επιλέγουμε τις παραμέτρους ως εξής:

$$\rho = m_1 \qquad (23)$$

$$\beta = \frac{m_2 - m_1^{\,2}}{m_1} \qquad (24)$$

Μέσω των (21),(22)

$$\mathrm{E}[X_1] = e^{\mu + \sigma^2/2} \Rightarrow \mathrm{E}[X_1] = e^{2lnm_1 - lnm_1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}[X_1] = m_1^{2}/\, m_1 \Rightarrow \mathrm{E}[X_1] = m_1.$$

$$\mathrm{E}[X_1^{\,2}] = e^{2\mu + 2\sigma^2} \Rightarrow \mathrm{E}[X_1^{\,2}] = e^{4lnm_1 - lnm_2 + 2lnm_2 - 4lnm_1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}[X_1^{\,2}] = m_2^{2}/\, m_2 \Rightarrow \mathrm{E}[X_1^{\,2}] = m_2.$$

Μέσω των (23),(24)

$$\mathrm{E}[X_2] = \rho \Rightarrow \mathrm{E}[X_2] = m_1.$$

$$\mathrm{E}[X_2^{\,2}] = \beta\rho + \rho^2 \Rightarrow \mathrm{E}[X_2^{\,2}] = m_1 \frac{m_2 - m_1^{\,2}}{m_1} + m_1^{2} \Rightarrow \mathrm{E}[X_2^{\,2}] = m_2.$$

Σημειώνουμε ότι τα m_1, m_2, μ, σ, ρ, β είναι συναρτήσεις των ($S(0)$, $T-n+1$, r , b , n).

Οι Hogg και Klugman (1984) παρήγαγαν N διαδρομές της Γεωμετρικής Κίνησης Brown (τιμή μετοχής) και κατέγραψαν για κάθε μια διαδρομή την τιμή του αριθμητικού μέσου των τελευταίων n τιμών. Έτσι παρήγαγαν ένα δείγμα $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ της $Y(r , b , n ,T)$ μεγέθους N .

Εν συνεχεία μετρήθηκε η απόσταση μεταξύ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F_N του παραπάνω δείγματος της ακριβής κατανομής και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F μιας LN ή IG τυχαίας μεταβλητής. Για την μέτρηση χρησιμοποιήθηκε ένα είδος Cramer – von Mises απόστασης:

$$d_1 = \sum_{i=1}^{N} \left(F_N(y_i) - F(y_i)\right)^2 \quad \text{και}$$

σταθμισμένης Cramer – von Mises απόστασης:

$$d_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(F_N(y_i) - F(y_i)\right)^2}{1 - F(yi)}.$$

Τα αποτελέσματα με βάση τους παραπάνω τύπους έδειξαν ότι και οι δύο προσεγγιστικές κατανομές (LN και IG) απέχουν το ίδιο από την κατανομή του δείγματος. Αυτό σημαίνει πως ο υπολογισμός της τιμής με βάση τις δύο προσεγγιστικές κατανομές πρακτικά δεν διαφέρει. Αναφορικά με άλλες δοκιμαζόμενες κατανομές σημειώνουμε ότι η χρησιμοποίηση της Κανονικής κατανομής οδήγησε σε αποστάσεις κατά 10 έως 30 φορές μεγαλύτερες.

2.4 ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (REPLICATING STRATEGY) ΣΤΗΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Έστω $u(x, t\,; r, b, n, T, K)$ η τιμή του δικαιώματος που πωλείται στο χρόνο t, δοθέντος ότι η τιμή της μετοχής είναι $S(t) = x$. Αν κατασκευάσουμε την επαναλαμβανόμενη στρατηγική οριζόμενη από τα Δέλτα εξασφάλισης χρειαζόμαστε

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(x, t\,; r, b, n, T, K). \tag{25}$$

Σημειώνουμε ότι τα Δέλτα εξασφάλισης δείχνουν πως πρέπει να επενδυθεί η αξία του δικαιώματος έτσι ώστε η επένδυση να παράγει την αξία εξόφλησης στο χρόνο λήξης. Ορίζοντας την ποσότητα η ως εξής

$$\eta \equiv \frac{u(x,t;r,b,n,T,K) - \xi x}{S(0)e^{rt}} \tag{26}$$

μπορούμε να ερμηνεύσουμε το ξ ως τον αριθμό των μετοχών και το η ως την ποσότητα της ομολογίας (σε μονάδες του $S(0)$) αφού έχουμε:

$$u(x, t\,; r, b, n, T, K) = \xi x + \eta S(0)e^{rt}. \tag{27}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι η τιμή $u(x, t\,; r, b, n, T, K)$ υπολογίζεται ως εξής :

$$u(x, t\,;r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}\left[\max\{0, Y(r, b, n, T) - K\} \mid S(t) = x\right]$$

$$= e^{-r(T-t)}\int_K^{\infty}(y-K)f_Y(y)dy\,, \tag{28}$$

όπου $f_Y(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y η οποία προσεγγίζεται εδώ από την πυκνότητα μιας τ.μ από την $LN(\mu,\sigma^2)$. Για τον υπολογισμό θα πρέπει να συσχετίσουμε τα μ, σ με τις παραμέτρους του δικαιώματος.

Θα διακρίνουμε 3 περιπτώσεις.

2.4.1 Περίπτωση όπου $t < T - n + 1$

Αν είμαστε πριν από την μέση περίοδο τότε $\mu = \mu(x, T - t - n + 1\,; r, b, n)$ και $\sigma = \sigma\,(x, T - t - n + 1\,; r, b, n)$ (βλέπε (21) , (22)). Μια ολοκλήρωση δίνει έναν ανάλογο των Black – Scholes τύπο:

$$u(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\left[e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{\sigma^2+\mu-\ln K}{\sigma}\right) - K\Phi\left(\frac{\mu-\ln K}{\sigma}\right)\right] \tag{29}$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυποποιημένης κανονικής τ.μ.

Για να πάρουμε την επαναλαμβανόμενη στρατηγική πρέπει να παραγωγήσουμε το $u(x, t\,; r, b, n, T, K)$ ως προς x. Η μόνη εξάρτηση του u ως προς x βρίσκεται στις παραμέτρους μ και σ.

Από τις σχέσεις

$$m_1(x, t\,; r, b, n) = \frac{xe^{rt}(e^{rn}-1)}{n(e^r-1)},$$

$$m_2(x, t\,; r, b, n) = \left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{e^{(2r+b^2)t}A(r,b,n)}{(e^r-1)(e^{(2r+b^2)}-1)(e^r-e^{2r+b^2})},$$

για την παράγωγο έχουμε:

$$\frac{\partial m_1(x,t;r,b,n)}{\partial x} = \frac{m_1(x,t;r,b,n)}{x}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial m_2(x,t;r,b,n)}{\partial x} = \frac{2m_2(x,t;r,b,n)}{x}, \tag{31}$$

και μέσω των (21) και (22) εύκολα παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial \mu(x,t;r,b,n)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma^2(x,t;r,b,n)}{\partial x} = 0,$$

(33)

Παραγωγίζοντας την (29) μέσω των (32),(33) και απλοποιώντας έχουμε

$$\xi(x, t ; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{x} e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\Big(\frac{\sigma^2 + \mu - \ln K}{\sigma} \Big) \quad (34)$$

όπου οι παράμετροι μ και σ υπολογίζονται στα $(x, T - t - n + 1 ; r, b, n)$.

2.4.2 Περίπτωση όπου $t \geq T - n + 1$, t μη ακέραιο

Τώρα μερικές τιμές της μετοχής που υπεισέρχονται στον αριθμητικό μέσο είναι γνωστές. Έστω $\bar{t}$ το ακέραιο μέρος του t.

Τότε

$$u(x, t ; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)} \mathrm{E}\Big[\max\Big\{0, \frac{1}{n}(S(T) + S(T-1) + \ldots$$

$$+ S(\bar{t}+1) + S(\bar{t}) + \ldots + S(T-n+1)) - K \Big\} \Big| S(t) = x \Big]$$

$$= e^{-r(T-t)} \frac{T-\bar{t}}{n} \mathrm{E}\Big[\max\big\{0, Y' - K'\big\} \,\Big|\, S(t) = x \Big] \quad (35)$$

όπου

$$Y' = \frac{S(T) + S(T-1) + \ldots + S(\bar{t}+1)}{T-\bar{t}} \quad (36)$$

$$K' = \frac{nK - (S(T-n+1) + S(T-n+2) + \ldots + S(\bar{t}))}{T-\bar{t}} \quad (37)$$

Η τιμή είναι παρόμοια με την τιμή στην (28) εκτός από το ότι ο αριθμητικός μέσος υπολογίζεται τώρα με βάση $T - \bar{t}$ μελλοντικές τιμές αντί n τιμές, η τιμή άσκησης από K είναι τώρα K' και υπολογίζουμε την τιμή $1 - t + \bar{t}$ περιόδων πριν η πρώτη τιμή μπει στον μέσο.

➢ Εάν $K' > 0$, έχουμε την ίδια κατάσταση με την προηγούμενη υποενότητα. Οι ποσότητες $u(x,t;r,b,n,T,K)$, $\xi(x,t;r,b,n,T,K)$, έχουν την ίδια μορφή με την (29) και (34) αντίστοιχα, το K αντικαθίσταται από το K', οι παράμετροι υπολογίζονται στα $(x,\ 1-t+\bar{t}\ ;\ r,\ b,\ T-\bar{t})$ και υπάρχει ο έξτρα όρος $\frac{T-\bar{t}}{n}$. Δηλ.

$$u(x,\ t\ ;\ r,\ b,n,T,K) = e^{-r(T-t)}\ \frac{T-\bar{t}}{n}\ \left[e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{\sigma^2+\mu-\ln K}{\sigma}\right)-K\Phi\left(\frac{\mu-\ln K}{\sigma}\right)\right]$$

➢ Εάν $K' \le 0$, $\max\{0,\ Y'-K'\} = Y'-K'$ και η αναμενόμενη τιμή δίνει $E[Y'] - K'$

Έτσι αν $K' \le 0$, ισχύει:

$$u(x,\ t\ ;\ r,\ b,\ n,\ T,\ K) = e^{-r(T-t)}\ \frac{T-\bar{t}}{n}\left(e^{\mu+\sigma^2/2}-K'\right)$$

με τις παραμέτρους να υπολογίζονται στα $(x,\ 1-t+\bar{t}\ ;\ r,\ b,\ T-\bar{t})$.

Τελικά παίρνουμε

αν $K' > 0$,

$$\xi(x,\ t\ ;\ r,\ b,\ n,\ T,\ K) = e^{-r(T-t)}\frac{T-\bar{t}}{n}\ \frac{1}{x}\ e^{\mu+\sigma^2/2}\ \Phi\left(\frac{\sigma^2+\mu-\ln K'}{\sigma}\right) \qquad (38)$$

και

αν $K' \le 0$

$$\xi(x,\ t\ ;\ r,\ b,\ n,\ T,\ K) = e^{-r(T-t)}\frac{T-\bar{t}}{n}\ \frac{1}{x}\ e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad (39)$$

Και στις 2 εξισώσεις οι παράμετροι μ και σ υπολογίζονται στα $(x, 1-t+\bar{t}\ ;\ r,\ b,\ T-\bar{t})$.

2.4.3 Περίπτωση όπου $t \ge T-n+1$, t ακέραιο

Η κατάσταση είναι όμοια με αυτή της προηγούμενης υποενότητας με $t = \bar{t}$. Η τιμή $u(x,\ t\ ;\ r,\ b,\ n,\ T,\ K)$ είναι όπως πριν με τις παραμέτρους να υπολογίζονται στα $(x,\ 1\ ;\ r,\ b,\ T-t)$.

Αλλά τώρα από την (37), το K' περιέχει το $S(t) = x$ και είναι συνάρτηση του x.

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial K'}{\partial x} = -\frac{1}{T-t} \tag{40}$$

έτσι παίρνουμε έναν επιπλέον όρο

αν $K' > 0$,

$$\xi(x, t; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)} \frac{T-t}{n} \Big[\frac{1}{x} e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\Big(\frac{\sigma^2 + \mu - \ln K'}{\sigma}\Big)$$

$$+ \frac{1}{T-t} \Phi\Big(\frac{\mu - \ln K'}{\sigma}\Big)\Big] \tag{41}$$

και

αν $K' \leq 0$

$$\xi(x, t; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)} \frac{T-t}{n} \Big(\frac{1}{x} e^{\mu+\sigma^2/2} + \frac{1}{T-t}\Big) \tag{42}$$

Και στις 2 εξισώσεις οι παράμετροι μ και σ υπολογίζονται στα $(x, 1; r, b, T-t)$.

2.5 ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ (REPLICATING STRATEGY) ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

2.5.1 Περίπτωση όπου $t < T - n + 1$

$$u(x, t; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)} \Big[(\rho - K)\, \Phi\Big(\frac{\rho - K}{\sqrt{\beta K}}\Big) + (\rho + K)\, e^{2\rho/\beta}$$

$$\Phi\Big(-\frac{\rho + K}{\sqrt{\beta K}}\Big)\Big] \tag{43}$$

με τις παραμέτρους ρ και β υπολογιζόμενες στα $(x, T-t-n+1; r, b, n)$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{x}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\beta}{x}$$

και μετά από κάποιες απλοποιήσεις παίρνουμε:

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\ \frac{\rho}{x}\Big[\Phi\Big(\frac{\rho - K}{\sqrt{\beta K}}\Big) + e^{2\rho/\beta}\,\Phi\Big(-\ \frac{\rho + K}{\sqrt{\beta K}}\Big)\Big] \quad (44)$$

με τις παραμέτρους ρ και β να υπολογίζονται στα $(x, T - t - n + 1\ ; r, b, n)$.

2.5.2 Περίπτωση όπου $t \geq T - n + 1$, t μη ακέραιο

Η περίπτωση αυτή είναι όμοια με την Λογαριθμοκανονική προσέγγιση και έχουμε:

αν $K' > 0$,

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\frac{T - \bar{t}}{n}\ \frac{\rho}{x}\Big[\Phi\Big(\frac{\rho - K'}{\sqrt{\beta K'}}\Big) + e^{2\rho/\beta}\,\Phi\Big(-\ \frac{\rho + K'}{\sqrt{\beta K'}}\Big)\Big] \quad (45)$$

αν $K' \leq 0$,

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\frac{T - \bar{t}}{n}\ \frac{\rho}{x} \quad (46)$$

Και στις 2 εξισώσεις οι παράμετροι ρ και β υπολογίζονται στα $(x, 1 - t + \bar{t}\,;\ r,\ b,\ T - \bar{t})$.

2.5.3 Περίπτωση όπου $t \geq T - n + 1$, t ακέραιο

Παρόμοια με την περίπτωση στη Λογαριθμοκανονική προσέγγιση έχουμε εδώ:

αν $K' > 0$,

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\ \frac{T - t}{n}\Big[\Big(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{T - t}\Big)\Phi\Big(\frac{\rho - K'}{\sqrt{\beta K'}}\Big) +$$

$$\Big(\frac{\rho}{x} - \frac{1}{T - t}\Big)e^{2\rho/\beta}\,\Phi\Big(-\ \frac{\rho + K'}{\sqrt{\beta K'}}\Big)\Big] \quad (47)$$

και

αν $K' \leq 0$

$$\xi(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\ \frac{T-t}{n}\ \Big(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{T-t}\Big) \tag{48}$$

Και στις 2 εξισώσεις οι παράμετροι μ και σ υπολογίζονται στα $(x, 1; r, b, T - t)$.

2.6 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν προέκυψαν με τη χρήση του προγράμματος Mathematica. Οι ποσότητες που θα υπολογίσουμε είναι οι παρακάτω:

για την Λογαριθμοκανονική κατανομή (τύπος (29) σελ. 19)

$$u(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\ \Big[e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\Big(\frac{\sigma^2 + \mu - \ln K}{\sigma}\Big) - K\Phi\Big(\frac{\mu - \ln K}{\sigma}\Big)\Big]$$

και για την Αντίστροφη Gauss κατανομή (τύπος (43) σελ. 22)

$$u(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\Big[(\rho - K)\ \Phi\Big(\frac{\rho - K}{\sqrt{\beta K}}\Big) + (\rho + K)\ e^{2\rho/\beta}$$

$$\Phi\Big(-\frac{\rho + K}{\sqrt{\beta K}}\Big)\Big]$$

Τέλος θα βασιστούμε και στις σχέσεις των §2.2 και §2.3.

Έστω ότι η τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν είναι 100 δηλ. ***S*(0) = 100**, το ετήσιο επιτόκιο $r = 9\%$ (δηλ. ***r*** **= —— ln(1 + 0.09) για ημερήσια δεδομένα**), ο χρόνος λήξης ***T*** **= 120 μέρες** και η μέση περίοδος ***n*** **= 30 μέρες**. Θα υπολογιστεί η τιμή του Asian option $u(x, t\,; r, b, n, T, K)$ για διάφορες τιμές της πτητικότητας b και της τιμής άσκησης του δικαιώματος K.

Αν $b = 0.2$ (ετήσια δεδομένα) $\Rightarrow$ ***b*** **= ——/√ (ημερήσια δεδομένα)**

Όπως είναι φανερό από τα δεδομένα μας οι τύποι στη σελίδα 15:

$$m_1(x, t\,; r, b, n) = \frac{xe^{rt}(e^{rn} - 1)}{n(e^{r} - 1)}, \tag{13}$$

$$m_2(x, t\,; r, b, n) = \Big(\frac{x}{n}\Big)^2 \frac{e^{(2r+b^2)t} A(r,b,n)}{(e^{r} - 1)(e^{(2r+b^2)} - 1)(e^{r} - e^{2r+b^2})}, \tag{14}$$

θα εφαρμοστούν για $\boldsymbol{t = T - n + 1}$

και οι ποσότητες

$$\mu = \mu\,(x,\, T - t - n + 1\ ;\, r,\, b,\, n),\ \sigma = \sigma\,(x,\, T - t - n + 1\ ;\, r,\, b,\, n),$$

$$\rho = \rho\,(x,\, T - t - n + 1;\, r,\, b,\, n),\ \beta = \beta\,(x,\, T - t - n + 1\ ;\, r,\, b,\, n)$$

υπολογίζονται στα ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{T - n + 1\ ;\ r, b, n}$), όπου $\boldsymbol{x = S(0)}$.

Τέλος, επειδή ζητάμε την **τιμή του option στο χρόνο μηδέν** οι σχέσεις :

$$u(x,\, t\ ;\, r,\, b,\, n,\, T,\, K) = e^{-r(T-t)}\left[e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\!\left(\frac{\sigma^2 + \mu - \ln K}{\sigma}\right) - K\Phi\!\left(\frac{\mu - \ln K}{\sigma}\right)\right]$$

και

$$u(x,\, t\ ;\, r,\, b,\, n,\, T,\, K) = e^{-r(T-t)}\left[(\rho - K)\,\Phi\!\left(\frac{\rho - K}{\sqrt{\beta K}}\right) + (\rho + K)\, e^{2\rho/\beta}\right.$$

$$\left.\Phi\!\left(-\frac{\rho + K}{\sqrt{\beta K}}\right)\right]$$

θα εφαρμοστούν για $\boldsymbol{t = 0}$.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τον σχετικό αλγόριθμο ο οποίος μας οδήγησε στην τιμή του option και εφαρμόστηκε για $b = 0.2$ και $K = 90$.

Περίπτωση Λογαριθμοκανονικής κατανομής (LN) για *b* = 0.2 και *K* = 90

```
< Statistics`ContinuousDistributions`
```

Ξεκινάμε σχηματίζοντας τις ποσότητες m_1,m_2 για την πρώτη και δεύτερη ροπή του αριθμητικού μέσου που δίνονται από τις σχέσεις (13) και (14)

```
m1 [illegible]s_, [illegible], r_, b_, n_ [illegible] * Exp [illegible] p [illegible]
[illegible] * [illegible] p [illegible]
m1 [illegible] s, [illegible], b, n [illegible]
γ^r t1 [illegible] 1 + γ r [illegible]
[illegible] 1 + γ [illegible]
A = [illegible] 2 * [illegible] p [illegible] 1 [illegible] Exp [illegible] 3 [illegible] ^2 [illegible]
Exp 2 [illegible] p [illegible] + 1 [illegible] ^2 [illegible]
[illegible] xp [illegible] + [illegible] ^2 [illegible]
[illegible] xp [illegible] + [illegible] ^2 [illegible] 1 [illegible] p [illegible] ^2 [illegible]
Exp r [illegible] p [illegible] ^2 [illegible] 1 [illegible] p [illegible] ^2 [illegible]
m2 [illegible] s_, [illegible], r_, b_, n_ [illegible]
[illegible] p [illegible] p [illegible]
m2 [illegible] s, [illegible], b, n [illegible]
γ [illegible] +2r [illegible] 1 [illegible] r [illegible] γ 2r - 2γ [illegible] n [illegible] - γ b2+2r + γ [illegible] - γ [illegible] +3 [illegible] - γ b [illegible] 2 [illegible] +2 [illegible] + γ b2 n [illegible] +2n [illegible] - γ b2 [illegible] n [illegible] 2n [illegible] s
[illegible] 1 + γ r [illegible] γ b2+2r [illegible] γ b2 2r [illegible] 2
```

Στη συνέχεια θέτουμε τις παραμέτρους με βάση τα δεδομένα μας

```
r = Log [illegible] 9 [illegible];
r
```

```
0.000236103
n = 30; b = 0.2 [redacted] 120; K = 90; t1 = [redacted] - n [redacted] 1 [redacted] 100;
```

Τώρα πλέον οι αρχικές ποσότητες που ορίσαμε αποκτούν αριθμητική έκφραση

```
A
-4.31111´ 10^-8
m1 [redacted] b, n [redacted]
102.522
m2 [redacted] b, n [redacted]
10627.3
```

Σχηματίζουμε τις παραμέτρους μ, σ^2 με βάση τις σχέσεις (21) και (22)

```
μ = [redacted] * Log [redacted] b, n [redacted] b, n [redacted]
σ2 = Log [redacted] b, n [redacted] Log [redacted] b, n [redacted]
omega1 = [redacted] 2 + [redacted] - Log [redacted]
omega2 = [redacted] - Log [redacted]
μ
4.62457
σ2
0.0110166
```

Τέλος κατασκευάζουμε την ποσότητα u που δίνεται από την (19) για να βρούμε την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο t

```
omega1
1.29364
omega2
1.18868
```

u[illegible], b_, n_, T_, K_ [illegible]

Exp [illegible] NormalDistribution [illegible] 0, [illegible] NormalDistribution [illegible] 0, [illegible]

u[illegible], b, n, T, K [illegible]

13.0414 $\gamma^{-0.000236103\,(20-t)}$

Για t = 0 παίρνουμε την τιμή στο χρόνο μηδέν που είναι και το ζητούμενο.

u[illegible], b, n, T, K [illegible]

12.6771

Περίπτωση Αντίστροφης Gauss κατανομής (IG) για *b* = 0.2 και *K* = 90

```
< Statistics`ContinuousDistributions`
```

Ξεκινάμε σχηματίζοντας τις ποσότητες m_1,m_2 για την πρώτη και δεύτερη ροπή του αριθμητικού μέσου που δίνονται από τις σχέσεις (13) και (14)

```
m1 [redacted] , r_, b_, n_ [redacted] * E [redacted] p [redacted]
[redacted] * [redacted] p [redacted]
m1 [redacted] , b, n [redacted]
γ^r t [redacted] 1 + γ^r [redacted]
[redacted] 1 + γ^r [redacted]
A = [redacted] 2 * [redacted] p [redacted] 1 [redacted] E [redacted] 3 [redacted] ^2 [redacted]
Exp [redacted] p [redacted] + 1 [redacted] ^2 [redacted]
[redacted] xp [redacted] ^2 [redacted]
[redacted] xp [redacted] ^2 [redacted] 1 [redacted] p [redacted] ^2 [redacted]
Exp [redacted] p [redacted] ^2 [redacted] 1 [redacted] p [redacted] ^2 [redacted]
m2 [redacted] , r_, b_, n_ [redacted]
[redacted] p [redacted]
m2 [redacted] , b, n [redacted]
γ [redacted] +2r [redacted] r [redacted] 2r - 2γ [redacted] - γ [redacted] b2+2r + γ [redacted] - γ [redacted] - γ [redacted] +γ [redacted] - γ [redacted]
[redacted] 1+γ^r [redacted] γ b2+2r [redacted] γ b2 2r [redacted] 2
```

Στη συνέχεια θέτουμε τις παραμέτρους με βάση τα δεδομένα μας

```
r = Log [redacted]
r
```

```
0.000236103
n = 30; b = 0.2 Sqrt[illegible]120; K = 90; t1 = [illegible] - n [illegible] 1 [illegible] 100;
```

Τώρα πλέον οι αρχικές ποσότητες που ορίσαμε αποκτούν αριθμητική έκφραση

```
A
-4.31111 × 10^-8
m1[illegible]b, n[illegible]
102.522
m2[illegible]b, n[illegible]
10627.3
```

Σχηματίζουμε τις παραμέτρους ρ, β με βάση τις σχέσεις (23) και (24)

```
ρ = m1[illegible]b, n[illegible]
β = [illegible]2[illegible]b, n[illegible]b, n[illegible]b, n[illegible]
ρ
102.522
β
1.13569
```

Τέλος κατασκευάζουμε την ποσότητα u που δίνεται από την (43) για να βρούμε την τιμή του δικαιώματος στο χρόνο t

```
omega1 = [illegible]
omega2 = [illegible]
omega1
1.23862
omega2
-19.0428
```

```
u[illegible]s_, [illegible]_, r_, b_, n_, T_, K_[illegible]
Exp[illegible]r[illegible]t[illegible]
[illegible]+ E[illegible]stribution[illegible]0, [illegible]1[illegible]K[illegible]stribution[illegible]0, [illegible]2[illegible],
```

```
u[illegible]s, [illegible], b, n, T, K[illegible]
```

$13.0414\,\gamma^{-0.000236103\,(120-t)}$

Για t = 0 παίρνουμε την τιμή στο χρόνο μηδέν που είναι και το ζητούμενο.

```
u[illegible]s, 0, [illegible], b, n, T, K[illegible]
```

12.6771

Όμοια υπολογίζουμε την τιμή του Asian option για διάφορες τιμές του b και K. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα κάποια άλλα αποτελέσματα που υπολογίσαμε.

<u>Πίνακας 1</u>

	b	***K***	**LN**	**IG**	
	0,2	50	51,05	51,05	
		80	21,92	21,92	
		90	12,68	12,68	
		100	5,46	5,46	
		110	1,63	1,63	
	0,3	50	51,05	51,05	
		80	22,23	22,23	
		90	13,85	13,85	
		100	7,48	7,48	
		110	3,48	3,48	
	0,4	50	51,06	51,06	
		80	22,96	22,96	
		90	15,36	15,36	
		100	9,51	9,51	
		110	5,48	5,48	

3. ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε ορισμούς και έννοιες που αφορούν γενικά τα άνω και κάτω φράγματα αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών. Θα κάνουμε χρήση των εννοιών της συμμονοτονικής κατανομής, των ασφαλίστρων ανακοπής ζημιάς και της κυρτής διάταξης ενώ το κεφάλαιο αυτό θα αποτελέσει ουσιαστικά εισαγωγή για το επόμενο, όπου θα εφαρμόσουμε όλα τα παραπάνω στον υπολογισμό άνω και κάτω φραγμάτων των Ασιατικών δικαιωμάτων.

Άνω φράγματα για αθροίσματα $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ τυχαίων μεταβλητών των οποίων η περιθώρια κατανομή είναι γνωστή αλλά η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι άγνωστη ή πολύπλοκη για να μπορέσουμε να δουλέψουμε μαζί της, αποτελούν ουσιαστικά suprema με την έννοια της κυρτής διάταξης. Η έννοια αυτή είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της τάξης ανακοπής ζημιάς που είναι γνωστότερη στην Αναλογιστική επιστήμη. Και οι 2 έννοιες εκφράζουν ποιος από τους δύο κινδύνους είναι πιο επικίνδυνος.

Υποθέτοντας ότι μόνο οι περιθώριες κατανομές των X_i είναι γνωστές, θα δείξουμε ότι το υπόδειγμα S^c του S με το μεγαλύτερο ρίσκο (δηλ. S^c άνω φράγμα του S) προκύπτει όταν οι κίνδυνοι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι συμμονοτονικοί. Αυτό σημαίνει ότι είναι μη φθίνουσες συναρτήσεις μιας ομοιόμορφης στο (0,1) τυχαίας μεταβλητής U και αφού η περιθώρια κατανομή πρέπει να είναι η $\Pr[X_i \le x] = F_i(x)$, η συμμονοτονική κατανομή είναι αυτή του διανύσματος $F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \ldots, F_n^{-1}(U)$.

Εμείς θα υποθέτουμε ότι η περιθώρια κατανομή της κάθε μίας τ.μ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ είναι γνωστή και ότι υπάρχει κάποια τ.μ Λ με γνωστή συνάρτηση κατανομής, τέτοια ώστε

για κάθε i,λ από το πεδίο ορισμού της Λ η υπο συνθήκη συνάρτηση κατανομής της X_i δοθέντος ότι $\Lambda = \lambda$ να είναι γνωστή.

Θα επικεντρωθούμε κυρίως στην περίπτωση που οι περιθώριες κατανομές είναι **αυστηρά αύξουσες** και **συνεχείς** και θα υπολογίσουμε άνω και κάτω φράγματα κυρτής διάταξης για το άθροισμα $S = X_1 + X_2 +\ldots+ X_n$ βασισμένα στις υπο συνθήκη συναρτήσεις κατανομής. Θα δείξουμε ότι με τη βοήθεια της Λ μπορούμε να βρούμε ένα βελτιωμένο άνω φράγμα και ένα ικανοποιητικό κάτω φράγμα.

Δύο ακραίες περιπτώσεις είναι δυνατές. Η πρώτη είναι να ισχύει $\Lambda = S$. Τότε το κάτω φράγμα για το S το οποίο ισούται με $E[S|\Lambda]$ θα είναι το ίδιο το S. Η άλλη περίπτωση είναι το Λ να είναι ανεξάρτητο από όλα τα $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Τότε το άνω φράγμα για το S είναι το ίδιο συμμονοτονικό φράγμα όπως προηγουμένως δηλ. το S^c ενώ το κάτω φράγμα περιορίζεται στο τετριμμένο φράγμα $E[S]$. Τέλος, κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την περίπτωση όπου οι τμ X_i είναι λογαριθμοκανονικές.

3.2 ΚΑΠΟΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΣΥΜΜΟΝΟΤΟΝΙΚΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Έστω $F_1,F_2,\ldots,F_n$ μονοδιάστατες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (α.σ.κ). Ο Frechet μελέτησε την κλάση όλων των n-διάστατων α.σ.κ $F_{\mathbf{X}}$ των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{X} \equiv (X_1,X_2,\ldots,X_n)$ με δεδομένες περιθώριες α.σ.κ $F_1,F_2,\ldots,F_n$, όπου για κάθε πραγματικό αριθμό x, έχουμε $\Pr[X_i \leq x] = F_i(x)$, $i = 1,2,..,n$. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε το πρόβλημα καθορισμού στοχαστικών κάτω και άνω φραγμάτων για την α.σ.κ της τυχαίας μεταβλητής $X_1 + X_2 +\ldots+ X_n$ χωρίς να περιοριστούμε σε ανεξαρτησία μεταξύ των όρων X_i. Επίσης όπως αναφέραμε και προηγουμένως θα θεωρούμε πάντα ότι οι περιθώριες α.σ.κ των X_i είναι γνωστές με πεπερασμένο μέσο.

Ορισμός 1

Θεωρούμε δύο τ.μ Χ και Υ. Λέμε ότι η Χ προηγείται της Υ με την έννοια της κυρτής διάταξης και γράφουμε $X \leq_{cx} Y$, αν και μόνο αν για όλες τις κυρτές πραγματικές συναρτήσεις u, τέτοιες ώστε να υπάρχουν οι μέσες τιμές , έχουμε:

$$\mathrm{E}[u(X)] \leq \mathrm{E}[u(Y)]. \qquad \blacksquare$$

Έχει αποδειχθεί (Shaked and Shanthikumar (1994)) ότι η προαναφερθείσα συνθήκη είναι ισοδύναμη με την παρακάτω:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y],\ \mathrm{E}[X-d]_+ \leq \mathrm{E}[Y-d]_+ \text{ για όλα τα } d,$$

όπου ως γνωστόν $\mathrm{E}[Z]_+ = \mathrm{E}[\max\{Z,0\}]$.

Χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα, η συνθήκη διάταξης μεταξύ των ασφαλίστρων ανακοπής ζημιάς $\mathrm{E}[X-d]_+$ και $\mathrm{E}[Y-d]_+$ μπορεί να εκφραστεί επίσης ως εξής:

$$\int_d^\infty (1-F_X(x))dx \leq \int_d^\infty (1-F_Y(x))dx \text{ για όλα τα } d.$$

Στην περίπτωση $X \leq_{cx} Y$, ακραίες τιμές είναι πιο πιθανές για το Y παρά για το X. Σε όρους θεωρίας χρησιμότητας, η σχέση $X \leq_{cx} Y$ σημαίνει ότι η απώλεια X προτιμάται από την απώλεια Y από όλους όσους αποφεύγουν τους κινδύνους όταν λαμβάνουν αποφάσεις π.χ. $\mathrm{E}[u(-X)] \geq \mathrm{E}[u(-Y)]$ για όλες τις μη-φθίνουσες συναρτήσεις χρησιμότητας u.

Από την παραπάνω σχέση εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dx}\{\mathrm{E}[X-x]_+ - \mathrm{E}[Y-x]_+\} = F_X(x) - F_Y(x).$$

Το $X \leq_{cx} Y$ συνεπάγεται ότι $\mathrm{Var}[X] \leq \mathrm{Var}[Y]$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει γενικά (βλέπε Brockett and Garven (1998)). Επίσης σημειώνουμε ότι το $X \leq_{cx} Y$ είναι ισοδύναμο με το $-X \leq_{cx} -Y$ πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει καμία διαφορά αν ερμηνεύουμε τις τυχαίες μεταβλητές είτε σαν ζημιές ή είτε σαν κέρδη.

Για κάθε τυχαίο διάνυσμα **X** με περιθώριες α.σ.κ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ η ακόλουθη σχέση ισχύει:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} S^c \overset{\text{ορσ}}{=} F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U),$$

όπου U είναι ομοιόμορφη στο (0,1) τ.μ και η γενικευμένη αντίστροφη στο p μιας τ.μ X με α.σ.κ F_X δίνεται από την σχέση:

$$F_X^{-1}(p) \overset{\text{ορσ}}{=} \inf\{x \in \mathrm{R} \mid F_X(x) \geq p\},\ p \in [0,1].$$

Η σχέση $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} S^c \overset{\text{ορσ}}{=} F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U)$, μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

Το πιο ριψοκίνδυνο τυχαίο διάνυσμα με δεδομένες περιθώριες κατανομές είναι αυτό που έχει την συμμονοτονική από κοινού κατανομή, δηλ. έχει την από κοινού κατανομή των $F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \ldots, F_n^{-1}(U)$. Τα στοιχεία αυτού του τυχαίου διανύσματος είναι **εξαρτημένα** και **μη φθίνουσες** συναρτήσεις της ίδιας τυχαίας μεταβλητής.

Η αντίστροφη α.σ.κ ενός αθροίσματος συμμονοτονικών τ.μ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί.

Πράγματι αν

$$S^c =_d F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) +, \ldots, + F_n^{-1}(U)$$

τότε

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(p),\ p \in [0,1]$$

όπου $=_d$ σημαίνει ισότητα κατά κατανομή.

Δηλαδή η αντίστροφη α.σ.κ ενός αθροίσματος συμμονοτονικών τ.μ ισούται με το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομής των περιθώριων κατανομών.

3.3 ΣΥΜΜΟΝΟΤΟΝΙΚΑ ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Για $p \in [0,1]$ μια πιθανή επιλογή για την αντίστροφη της F_X στο p είναι κάθε σημείο στο διάστημα $[\inf\{x \in \mathrm{R} \mid F_X(x) \geq p\}; \sup\{x \in \mathrm{R} \mid F_X(x) \leq p\}]$.

Επίσης παίρνουμε ότι ισχύει inf ∅ = +∞ και sup ∅ = −∞. Παίρνοντας το αριστερό άκρο του διαστήματος να είναι η τιμή της αντίστροφης α.σ.κ στο p, έχουμε το $F_X^{-1}(p)$.

Όμοια καθορίζουμε σαν το δεξιό άκρο του διαστήματος το

$$F_X^{-1\bullet}(p) = \sup\{x \in R \mid F_X(x) \leq p\},\ p \in [0,1].$$

Σημειώνουμε ότι $F_X^{-1}(0) = -\infty$ και $F_X^{-1\bullet}(1) = +\infty$ ενώ $F_X^{-1}(p)$ και $F_X^{-1\bullet}(p)$ είναι πεπερασμένα για όλα τα $p \in (0,1)$.

Για κάθε α στο [0,1] ορίζουμε την α – αντίστροφη της F_X ως εξής:

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha)\ F_X^{-1\bullet}(p)\ ,\ p \in (0,1).$$

Για ένα συμμονοτονικό τυχαίο διάνυσμα $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ για όλα τα α στο [0,1] ισχύει:

$$F^{-1(\alpha)}{}_{X1+X2+\ldots+Xn}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p),\ p \in (0,1).$$

Παρακάτω δίνουμε μια ακόμη απόδειξη της ανισότητας που αναφέραμε προηγουμένως στην ενότητα 3.2 βασισμένοι αυτή τη φορά στην α-αντίστροφη της F_X.

Πρόταση 1

Έστω U μια τ.μ από την ομοιόμορφη στο (0,1). *Για κάθε τυχαίο διάνυσμα* $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ *με περιθώριες α.σ.κ* $F_1,F_2,\ldots,F_n$, *έχουμε*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U). \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη

Έστω $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ και $S^c = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U)$, με U από την ομοιόμορφη στο (0,1). Τότε $E[S] = E[S^c]$.

Για να αποδείξουμε τις ανισότητες ανακοπής ζημιάς θεωρούμε έναν αυθαίρετο σταθερό πραγματικό αριθμό d, με $0 < F_{S^c}(d) < 1$. Έστω $\alpha \in [0,1]$ ορισμένο έτσι ώστε

$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(d)) = d.$

Τότε έχουμε

$$\mathrm{E}[S-d]_+ = \mathrm{E}[S - F_{S^c}^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+ = \mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))\Big]_+$$

$$= \mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))\big)\Big]_+$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} E[X_i - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+ .$$

Ακόμη βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{E}[S^c-d]_+ = \mathrm{E}[F_{S^c}^{-1}(U) - d]_+ = \int_0^1 (F_{S^c}^{-1}(p) - d)_+ \, dp$$

$$= \int_{F_{S^c}(d)}^{1} (F_{S^c}^{-1}(p) - F_{S^c}^{-1(a)}(F_{S^c}(d)))dp$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_{S^c}(d)}^{1} (F_i^{-1}(p) - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)))dp .$$

Επίσης μπορεί να επαληθευθεί ότι για κάθε $p \in (F_{S^c}(d); F_i(F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))))$ ισχύει

$$F_i^{-1}(p) = F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)) .$$

Αυτό συνεπάγεται

$$\mathrm{E}[S^c-d]_+ = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i(F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)))}^{1} (F_i^{-1}(p) - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)))dp$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (F_i^{-1}(p) - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)))_+ \, dp$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[F_i^{-1}(U) - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+$$, οπότε αποδείξαμε ότι

$\mathrm{E}[S-d]_+ \leq \mathrm{E}[S^c-d]_+$ για όλα τα d με $0 < F_{S^c}(d) < 1$.

Επειδή ο μετασχηματισμός ανακοπής ζημιάς είναι **συνεχής** και **μη φθίνουσα** συνάρτηση του d συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{E}[S - F_{S^c}^{-1\bullet}(0)]_+ \leq \mathrm{E}[S^C - F_{S^c}^{-1\bullet}(0)]_+$$

καθώς επίσης και

$$\mathrm{E}[S - F_{S^c}^{-1}(1)]_+ \leq \mathrm{E}[S^C - F_{S^c}^{-1}(1)]_+.$$

Έτσι ισχύει $\mathrm{E}[S-d]_+ \leq \mathrm{E}[S^C - d]_+$ και για τα d με $F_{S^c}(d) = 0$ ή $F_{S^c}(d) = 1$. ■

Πόρισμα 1

Έστω U ομοιόμορφη στο $(0,1)$ και $S^C = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U)$. Αν $d \in (F_{S^c}^{-1\bullet}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ τότε το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς του S^C δίνεται από την

$$E[S^C - d]_+ = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+$$

με $\alpha \in [0,1]$ ορισμένο από την σχέση $F_{S^c}^{-1(a)}(F_{S^c}(d)) = d$. ■

Η έκφραση για το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς ενός συμμονοτονικού αθροίσματος S^C μπορεί επίσης να γραφεί με όρους της συνηθισμένης αντίστροφης α.σ.κ. Πράγματι για κάθε $d \in (F_{S^c}^{-1\bullet}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ έχουμε

$$E[X_i - F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d))]_+$$
$$= E[X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]_+ - (F_i^{-1(a)}(F_{S^c}(d)) - F_i^{-1}(F_{S^c}(d)))(1 - F_{S^c}(d)).$$

Αθροίζοντας ως προς i και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του α, βρίσκουμε την παρακάτω έκφραση (Dhaene et al. (1998)) όπου οι τ.μ θεωρούνται **μη – αρνητικές**

$$E[S^C - d]_+ = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]_+ - (d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)))(1 - F_{S^c}(d)).$$

Από το Πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ότι **<u>κάθε ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς αθροίσματος συμμονοτονικών τ.μ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ασφαλίστρων ανακοπής ζημιάς για τις μεμονωμένες τ.μ που εμπλέκονται</u>.** Το Πόρισμα 1 παρέχει έναν αλγόριθμο για άμεσο υπολογισμό ασφαλίστρων ανακοπής ζημιάς αθροισμάτων συμμονοτονικών τ.μ, χωρίς να πρέπει να υπολογιστεί ολόκληρη η α.σ.κ του ίδιου του αθροίσματος. Πράγματι χρειάζεται να ξέρουμε μόνο την $F_{S^c}(x)$ για x ίσο με d.

Η α.σ.κ στο x δίνεται από την

$$F_{S^c}(x) = \sup \left\{ p \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(p) \leq x \right\}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι οι περιθώριες α.σ.κ F_i είναι **συνεχείς** στο R και **αυστηρά αύξουσες** στο $(F_i^{-1\bullet}(0), F_i^{-1}(1))$. Τότε μπορεί να επαληθευθεί ότι η F_{S^c} είναι επίσης συνεχής στο R και αυστηρά αύξουσα στο $(F_{S^c}^{-1\bullet}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ και ότι η $F_{S^c}^{-1}$ είναι αυστηρά αύξουσα και συνεχής στο (0,1).

Έτσι για κάθε $x \in (F_{S^c}^{-1\bullet}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ η τιμή της $F_{S^c}(x)$ δίνεται από την

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(F_{S^c}(x)) = x .$$

Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε επίσης ότι

$$E[S^c - d]_+ = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]_+ ,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $d \in (F_{S^c}^{-1\bullet}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Το Πόρισμα 1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμό άνω φραγμάτων για την τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος (βλέπε Simon et al.(2000)).

3.4 ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

3.4.1 Άνω φράγματα

Καθώς το $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \ldots, F_n^{-1}(U))$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με περιθώριες α.σ.κ $F_1, F_2, \ldots, F_n$, το άνω φράγμα $S^c = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots + F_n^{-1}(U)$ είναι το καλύτερο που μπορεί να παραχθεί κάτω από τις υποθέσεις που δηλώθηκαν στην Πρόταση 1. Είναι ένα supremum σε όρους κυρτής διάταξης. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε πληροφόρηση σχετικά με την εξαρτημένη δομή του τυχαίου διανύσματος $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ και δεν γνωρίζουμε απλά και μόνο τις περιθώριες

κατανομές, αλλά ωστόσο ο ακριβής υπολογισμός της α.σ.κ του αθροίσματος $S = X_1 + X_2+\ldots+ X_n$ δεν είναι εφικτός.

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να παράγουμε βελτιωμένα άνω φράγματα για το S και επίσης ικανοποιητικά κάτω φράγματα, βασισμένοι στην πληροφορία για την εξάρτηση. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και στην εισαγωγή αυτό επιτυγχάνεται δεσμεύοντας ως προς μια τ.μ Λ η οποία υποθέτουμε ότι είναι συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος **X**. Θα υποθέσουμε επίσης ότι γνωρίζουμε την κατανομή της Λ καθώς και τις δεσμευμένες α.σ.κ των τ.μ X_i δοθέντος $\Lambda = \lambda$. (Ένα κατάλληλο παράδειγμα είναι να χρησιμοποιήσουμε την $\Lambda = \sum \log X_i$ όταν X_i είναι λογαριθμοκανονικές).

Πρόταση 2

Έστω U ομοιόμορφη στο (0,1) και θεωρούμε μια τ.μ Λ ανεξάρτητη της U. Τότε έχουμε

$$X_1 + X_2 +\ldots+ X_n \leq_{\text{cx}} S^u \overset{\textit{ορσ}}{=} F^{-1}{}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}{}_{X_2|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}{}_{X_n|\Lambda}(U)$$

όπου εισάγουμε την $F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U)$ *για την τ.μ* $f_i(U,\Lambda)$ *όπου η συνάρτηση* f_i *δίνεται από την* $f_i(u,\lambda)= F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(u)$. ■

Απόδειξη

Από την Πρόταση 1 έχουμε για κάθε κυρτή συνάρτηση u,

$$\mathrm{E}[u(X_1 +\ldots+ X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[u(X_1 + \ldots + X_n)|\Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} E[u(f_1(U,\lambda) + \ldots + f_n(U,\lambda))]dF_\Lambda(\lambda) = E[u(f_1(U,\lambda) + \ldots + f_n(U,\lambda))]$$

άρα έχουμε:

$$X_1 + X_2 +\ldots+ X_n \leq_{\text{cx}} S^u = F^{-1}{}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}{}_{X_2|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}{}_{X_n|\Lambda}(U).$$ ■

Σημειώνουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $(F^{-1}{}_{X_1|\Lambda}(U), F^{-1}{}_{X_2|\Lambda}(U), \ldots, F^{-1}{}_{X_n|\Lambda}(U)$ έχει περιθώριες τις $F_1, F_2, \ldots, F_n$, γιατί

$$F_i(x) = \Pr[X_i \le x\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[X_i \le x | \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) \le x] dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[f_i(U,\lambda) \le x] dF_\Lambda(\lambda) = \Pr[f_i(U,\Lambda) \le x].$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1 αυτό συνεπάγεται

$$F^{-1}{}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}{}_{X_2|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}{}_{X_n|\Lambda}(U) \le_{\text{cx}} F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) +, \ldots, + F_n^{-1}(U).$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω σχέσης είναι το S^u ενώ το δεξί μέρος είναι το S^c. Για να αποκτήσουμε την συνάρτηση κατανομής του S^u παρατηρούμε ότι δοθέντος Λ = λ αυτή η τ.μ είναι ένα άθροισμα συμμονοτονικών τ.μ. Έτσι

$$F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p),\ p \in [0,1].$$

Αν η περιθώρια α.σ.κ $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ είναι **αυστηρά αύξουσα και συνεχής**, όπως και η $F_{S^u|\Lambda=\lambda}$, τότε η $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ βρίσκεται λύνοντας την

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x,\ x \in (F^{-1\bullet}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1))$$

Η α.σ.κ της S^u τότε βρίσκεται από την

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) dF_\Lambda(\lambda).$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ποσότητα $E[(S^u - d)_+ | \Lambda=\lambda]$ και τέλος ολοκληρώνοντας ως προς λ βρίσκουμε το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς $E[(S^u - d)_+]$. (Αναλυτικότερα βλέπε Κεφάλαιο 5 §5.2.2)

3.4.2 Κάτω φράγματα

Έστω **X** ένα τυχαίο διάνυσμα με περιθώριες α.σ.κ $F_1, F_2, \ldots, F_n$, και θέλουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα S^l για το $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Μπορούμε να αποκτήσουμε ένα τέτοιο φράγμα δεσμεύοντας ως προς μια τ.μ Λ υποθέτοντας ξανά ότι αυτή είναι συνάρτηση του τυχαίου διάνυσματος **X**. Σημειώνουμε ότι η Λ **δεν είναι η ίδια** με αυτή στην περίπτωση του άνω φράγματος.

Πρόταση 3

*Για κάθε τυχαίο διάνυσμα **X** και τ.μ Λ έχουμε:*

$$S^l \overset{ορσ}{=} \mathrm{E}[X_1 \mid \Lambda] + \mathrm{E}[X_2 \mid \Lambda] + \ldots + \mathrm{E}[X_n \mid \Lambda] \leq_{\mathrm{cx}} X_1 + X_2 + \ldots + X_n . \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη

Από την ανισότητα του Jensen βρίσκουμε ότι για κάθε κυρτή συνάρτηση u ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\mathrm{E}[u(X_1+X_2+\ldots+X_n)]$$

$$= E_\Lambda E[u(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)|\Lambda] \geq E_\Lambda[u(E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n|\Lambda])] =$$

$$= E_\Lambda[u(E[X_1|\Lambda] + \ldots + E[X_n|\Lambda])] . \qquad \blacksquare$$

Αν τα Λ και S είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα η Πρόταση 3 οδηγεί στο τετριμμένο κάτω φράγμα $\mathrm{E}[S] \leq_{\mathrm{cx}} S$. Από την άλλη πλευρά αν τα Λ και S έχουν μια ένα προς ένα σχέση, το κάτω φράγμα της Πρότασης 3 συμπίπτει με το S. Σημειώνουμε επίσης ότι ισχύει πάντα $E[E[X_i|\Lambda]] = E[X_i]$ αλλά $Var[E[X_i|\Lambda]] < Var[X_i]$ εκτός και αν $E[Var[X_i|\Lambda]] = 0$ που σημαίνει ότι το X_i δοθέντος $\Lambda = \lambda$ είναι μια σταθερά για κάθε λ.

Αυτό συνεπάγεται ότι το τυχαίο διάνυσμα ($\mathrm{E}[X_1 \mid \Lambda], \mathrm{E}[X_2 \mid \Lambda], \ldots, \mathrm{E}[X_n \mid \Lambda]$) δεν θα έχει γενικά περιθώριες σ.κ τις $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Αλλά αν η δεσμευμένη τ.μ Λ έχει την ιδιότητα ότι όλες οι τ.μ $E[X_i|\Lambda]$ είναι μη αύξουσες συναρτήσεις του Λ (ή μη φθίνουσες συναρτήσεις του Λ), το κάτω φράγμα στην Πρόταση 3 έχει την μορφή ενός αθροίσματος n συμμονοτονικών τ.μ. Η α.σ.κ του αθροίσματος αυτού υπολογίζεται με βάση το αποτέλεσμα της ενότητας 3.2.

Με $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ το κάτω φράγμα S^l στην Πρόταση 3 μπορεί να γραφτεί ως Ε[S|Λ]. Για να κρίνουμε την ποιότητα αυτού του στοχαστικού φράγματος θα πρέπει να κοιτάξουμε την διακύμανσή του. Για να το μεγιστοποιήσουμε, η μέση τιμή της Var[S|Λ = λ] θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Έτσι για το καλύτερο κάτω φράγμα τα Λ και S θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν όμοια.

Ας υποθέσουμε επιπρόσθετα ότι η τ.μ Λ είναι τέτοια ώστε όλα τα $E[X_i|\Lambda]$ είναι **μη αύξουσες συνεχείς** συναρτήσεις του Λ. Η γενικευμένη αντίστροφη της τ.μ Ε[S|Λ] δίνεται από την:

$$F^{-1}{}_{E[S|\Lambda]}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{E[X_i|\Lambda]}(p) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1}(1-p)],\, p \in (0,1).$$

Για να καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι για μια μη αύξουσα συνεχή συνάρτηση f, έχουμε $F^{-1}{}_{f(S)}(p) = f(F_S^{-1}(1-p))$, $p \in (0,1)$.

Όμοια για μια μη φθίνουσα συνεχή συνάρτηση f έχουμε

$$F^{-1}{}_{f(S)}(p) = f(F_S^{-1}(p)),\, p \in (0,1).$$

Βλέπε Κεφάλαιο 5 § 5.2.3

Αν επιπρόσθετα υποθέσουμε ότι οι α.σ.κ των τ.μ $E[X_i|\Lambda]$ είναι **αυστηρά αύξουσες και συνεχείς**, τότε η α.σ.κ του Ε[S|Λ] είναι επίσης αυστηρά αύξουσα και συνεχής και παίρνουμε για όλα τα $x \in (F^{-1\bullet}{}_{E[S|\Lambda]}(0), F^{-1}{}_{E[S|\Lambda]}(1))$,

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{E[X_i|\Lambda]}(F_{E[S|\Lambda]}(x)) = x$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1}(1 - F_{E[S|\Lambda]}(x))] = x$$

το οποίο καθορίζει την α.σ.κ κυρτής τάξης του κάτω φράγματος Ε[S|Λ] του S στην περίπτωση που όλα τα $E[X_i|\Lambda = \lambda]$ είναι μη αύξουσες στο λ.

Τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του Ε[S|Λ] υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$E[E[S|\Lambda]-d]_{+} = \sum_{i=1}^{n} E\{E[X_i|\Lambda] - E[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(1-F_{E[S|\Lambda]}(d))]\}_{+},$$

που ισχύει για όλα τα $d \in (\, F^{-1\bullet}{}_{E[S|\Lambda]}(0), F^{-1}{}_{E[S|\Lambda]}(1)\,)$.

3.5 ΠΑΡΟΥΣΕΣ ΑΞΙΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ

3.5.1 Γενικό αποτέλεσμα

Θεωρούμε μια σειρά από ντετερμινιστικές πληρωμές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, στις χρονικές στιγμές $1,2,\ldots,n$. Η παρούσα αξία της σειράς των πληρωμών ισούται με

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i)).$$

Υποθέτουμε ότι τα $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ έχουν πολυδιάστατη κανονική κατανομή. Ορίζουμε τις τ.μ X_i και $Y(i)$ να δίνονται από τις σχέσεις:

$$Y(i) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i \text{ και } X_i = \alpha_i e^{-Y(i)}.$$

Τότε $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Για κάποια δεδομένη επιλογή των β_i, θεωρούμε μια δεσμευμένη τ.μ Λ ως εξής:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$$

Για μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, κάθε γραμμική συνάρτηση των στοιχείων της έχει μονοδιάστατη κανονική κατανομή, οπότε η Λ είναι κανονικά κατανεμημένη. Επίσης $(Y(i), \Lambda)$ έχει μια διδιάστατη κανονική κατανομή.

Δοθέντος $\Lambda = \lambda$, το $Y(i)$ έχει μονοδιάστατη κανονική κατανομή με μέσο και διακύμανση που δίνονται από τις σχέσεις:

$$E[Y(i)|\Lambda=\lambda]=E[Y(i)]+r_i\frac{\sigma_{Y(i)}}{\sigma_\Lambda}(\lambda-E[\Lambda]),$$

και

$$Var[Y(i)|\Lambda=\lambda]=\sigma^2{}_{Y(i)}(1-r_i{}^2)$$

όπου r_i είναι η συσχέτιση μεταξύ Λ και $Y(i)$.

Πρόταση 4

Έστω τα S, S^l, S^u και S^c που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$S=\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-(Y_1+Y_2+...+Y_i)),$$

$$S^l=\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(U)+\frac{1}{2}(1-r_i{}^2)\sigma^2{}_{Y(i)}),$$

$$S^u=\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(U)+sign(a_i)\sqrt{1-r_i{}^2}\,\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(V)),$$

$$S^c=\sum_{i=1}^{n}a_i\exp(-E[Y(i)]+sign(a_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(U)),$$

Όπου U και V είναι αμοιβαία ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο (0,1) τ.μ και Φ είναι η α.σ.κ της κανονικής N(0,1) κατανομής.

Τότε έχουμε:

$$S^l \le_{cx} S \le_{cx} S^u \le_{cx} S^c. \qquad ■$$

Απόδειξη

1. Αν μια τ.μ X είναι Λογαριθμοκανονική (μ,σ^2) τότε $E[X]=\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$.

Έτσι για $\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\beta_iY_i$, βρίσκουμε ότι, παίρνοντας $U=\Phi((\Lambda-E[\Lambda])/\sigma_\Lambda)$, $U\sim$ Uniform(0,1),

$$E[X_i|\Lambda] = a_i \exp(-E[Y(i)] - r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}(1-r_i^{\,2})\sigma^2{}_{Y(i)})$$

Από την Πρόταση 3 βρίσκουμε $S^l \leq_{\mathrm{cx}} S$.

2. Αν μια τ.μ X είναι Λογαριθμοκανονική (μ,σ^2) τότε έχουμε

$$F^{-1}{}_{aX}(p) = a\exp(\mu + sign(a)\sigma\Phi^{-1}(p)).$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(p) = a_i \exp(-E[Y(i)] - r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(U) + sign(a_i)\sqrt{1-r_i^{\,2}}\,\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)).$$

Από την Πρόταση 2 βρίσκουμε ότι $S \leq_{\mathrm{cx}} S^u$.

3. Η ανισότητα $S^u \leq_{\mathrm{cx}} S^c$ αποδεικνύεται από την Πρόταση 1. ■

Για να συγκρίνουμε την α.σ.κ του $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-(Y_1 + Y_2 + ... + Y_i))$ με τις α.σ.κ των S^l, S^u, S^c, και ιδιαίτερα τις διακυμάνσεις τους, χρειαζόμαστε τις συσχετίσεις των διαφορετικών τ.μ που εμπλέκονται. Για την Λογαριθμοκανονική διαδικασία προεξόφλησης βρίσκουμε τα παρακάτω αποτελέσματα :

$$\mathrm{corr}[X_i, X_j] = \frac{e^{\mathrm{cov}[Y(i),Y(j)]} - 1}{(e^{\sigma^2{}_{Y(i)}} - 1)^{1/2}(e^{\sigma^2{}_{Y(j)}} - 1)^{1/2}}$$

$$\mathrm{corr}[E[X_i|\Lambda], E[X_j|\Lambda]] = \frac{e^{r_i r_j \sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}} - 1}{(e^{r_i^2\sigma^2{}_{Y(i)}} - 1)^{1/2}(e^{r_j^2\sigma^2{}_{Y(j)}} - 1)^{1/2}}$$

$$\mathrm{corr}[F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U), F^{-1}{}_{X_j|\Lambda}(U)\ ]$$

$$= \frac{\exp([r_i r_j + sign(a_i a_j)(1-r_i^{\,2})^{1/2}(1-r_j^{\,2})^{1/2}]\sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}) - 1}{(e^{\sigma^2{}_{Y(i)}} - 1)^{1/2}(e^{\sigma^2{}_{Y(j)}} - 1)^{1/2}}$$

$$\mathrm{corr}[F^{-1}{}_{X_i}(U), F^{-1}{}_{X_j}(U)] = \frac{e^{sign(a_i a_j)\sigma_{Y(i)}\sigma_{Y(j)}} - 1}{(e^{\sigma^2{}_{Y(i)}} - 1)^{1/2}(e^{\sigma^2{}_{Y(j)}} - 1)^{1/2}}.$$

Από αυτές τις συσχετίσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν όλες οι πληρωμές a_i είναι θετικές και corr[$Y(i)$, $Y(j)$] = 1 για όλα τα i και j, τότε $S =_{\mathrm{d}} S^c$. Στην πράξη οι παράγοντες προεξόφλησης δεν θα είναι τέλεια συσχετισμένοι. Αλλά για κάθε ρεαλιστική διαδικασία προεξόφλησης, corr[$Y(i)$, $Y(j)$] = corr[Y_1 + Y_2 +…+ Y_i, Y_1 + Y_2 +…+ Y_j] θα είναι κοντά στο 1 δεδομένου ότι τα i και j είναι κοντά το ένα στο άλλο. Αυτό μας δίνει ένδειξη ότι η α.σ.κ του S^c μπορεί να λειτουργεί καλά σαν προσέγγιση της α.σ.κ της S για τέτοιες διαδικασίες (Goovaerts et al. (2000)).

Μια παρόμοια λογική οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η α.σ.κ του S^c δεν θα λειτουργεί καλά σαν ένα κυρτό άνω φράγμα για την α.σ.κ του S αν οι πληρωμές a_i έχουν μικτά πρόσημα.

3.5.2 Η α.σ.κ και τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του S^c

Η γενικευμένη αντίστροφη του S^c δίνεται (Goovaerts et al. (2000)) από την:

$$F^{-1}{}_{S^c}(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + sign(a_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(p)),\ p\in(0,1).$$

Επίσης το $F^{-1}{}_{S^c}(x)$ βρίσκεται λύνοντας την

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + sign(a_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^c}(x))) = x\,.$$

Για το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς έχουμε σε αυτή την περίπτωση

$$\mathrm{E}[S^c - d]_+ = \sum_{i=1}^{n} |a_i| e^{-E[Y_i]} E[sign(a_i)(Z_i - \exp(sign(a_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^c}(d))))]_+\,,$$

όπου τα Z_i λογαριθμοκανονικές $(0,\sigma^2{}_{Y(i)})$ τ.μ.

Για να πάρουμε μια σαφή έκφραση για το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς $\mathrm{E}[S^c - d]_+$ αρχικά αναφέρουμε το επόμενο αποτέλεσμα που μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα π.χ χρησιμοποιώντας $(d/dt)\mathrm{E}[X - t]_+ = F_X(t) - 1$.

Πρόταση 5

Αν $Y \sim \mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ *τότε για κάθε* $d > 0$ *έχουμε*

$$E[Y-d]_{+}= exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\ \Phi(d_1) - d\Phi(d_2),$$

$$E[Y-d]_{-}= exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\ \Phi(-d_1) - d\Phi(-d_2),$$

όπου τα d_1, d_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$d_1= \frac{\mu+\sigma^2-\ln(d)}{\sigma},\ d_2 = d_1 - \sigma.$$

Για $d \leq 0$, τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς είναι ίσα με το $E[Y] - d$. ■

Η επόμενη έκφραση προέρχεται από τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς για $d > 0$

$$\mathrm{E}[S^c - d]_{+}= \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-E[Y_i]}\{\exp(\frac{1}{2}\sigma^2{}_{Y(i)})\Phi(sign(a_i)d_{i,1})$$

$$-\exp(sign(a_i)\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^c}(d)))\Phi(sign(a_i)d_{i,2})\}$$

όπου τα $d_{i,1}$ και $d_{i,2}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$d_{i,1}= \sigma_{Y(i)} - sign(a_i)\Phi^{-1}(F_{S^c}(d)),\ d_{i,2} = -sign(a_i)\Phi^{-1}(F_{S^c}(d)).$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για το $F_{S^c}(d)$ οδηγούμαστε στην παρακάτω έκφραση για τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς.

$$\mathrm{E}[S^c - d]_{+} = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + \frac{1}{2}\sigma^2{}_{Y(i)})\Phi[sign(a_i)\sigma_{Y(i)}$$

$$-\Phi^{-1}(F_{S^c}(d))] - d(1-F_{S^c}(d))$$

με $F_{S^c}^{-1\bullet}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$

3.5.3 Η α.σ.κ και τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του S^l

Γενικά το S^l δεν θα είναι άθροισμα n συμμονοτονικών τ.μ. Αλλά στην ενότητα αυτή **υποθέτουμε** ότι όλα τα $\boldsymbol{a_i \geq 0}$ και $\boldsymbol{r_i = \mathrm{cov}[Y(i),\Lambda] \,/\, \sigma_{Y(i)}\sigma_\Lambda \geq 0}$. Αυτές οι συνθήκες εξασφαλίζουν ότι το $\boldsymbol{S^l}$ **είναι άθροισμα** $\boldsymbol{n}$ **συμμονοτονικών τ.μ**.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$, κατανέμεται κανονικά βρίσκουμε ότι

$$F_\Lambda^{-1}(1-p) = \mathrm{E}[\Lambda] - \sigma_\Lambda \Phi^{-1}(p),$$

και

$$F_{S^l}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{E[X_i|\Lambda]}(p) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i | \Lambda = F_\Lambda(1-p)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p) + \frac{1}{2}\sigma^2_{Y(i)}(1-r_i^2)),\ p \in (0,1).$$

Το $F_{S^l}(x)$ μπορεί να βρεθεί από την

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(F_{S^l}(x)) + \frac{1}{2}\sigma^2_{Y(i)}(1-r_i^2)) = x.$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}[S^l - d]_+ = \sum_{i=1}^{n} E[E[X_i|\Lambda] - F^{-1}_{E[Xi|\Lambda]}(F_{S^l}(d))]_+$$

Μετά από κάποιους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι μια σαφής έκφραση για τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς δίνεται από την

$$\mathrm{E}[S^l - d]_+$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] + \frac{1}{2}\sigma^2_{Y(i)})\Phi[r_i\sigma_{Y(i)} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(d))] - d(1 - F_{S^l}(d)).$$

3.5.4 Η α.σ.κ του S^u

Μια που το $F_{S^u|U=u}$ είναι άθροισμα n συμμονοτονικών τ.μ έχουμε

$$F^{-1}_{S^u|U=u}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|U=u}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] - r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(u) + sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y(i)}\sigma\Phi^{-1}(p)).$$

Το $F_{S^u|U=u}$ βρίσκεται επίσης από την

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(u) + sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(F_{S^u|U=u}(x))) = x .$$

Η α.σ.κ του S^u δίνεται τότε από την

$$F_{S^u}(x) = \int_0^1 F_{S^u|U=u}(x)du.$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ποσότητα $E[(S^u - d)_+|U=u]$ και ολοκληρώνοντας ως προς u στο [0,1] βρίσκουμε το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς του S^u στο d.

Δηλ. $E[(S^u - d)_+] = \int_0^1 E[(S^u - d)_+ | U = u]du$.

(Για μια αναλυτικότερη παρουσίαση βλέπε Κεφάλαιο 5 §5.3.2)

4. ΕΝΑ ΕΥΚΟΛΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟ ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΑΣΙΑΤΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρούμε μια αγορά με ένα περιουσιακό στοιχείο $S(t)$ που εμπεριέχει κίνδυνο και μια επένδυση χωρίς κίνδυνο με σταθερό επιτόκιο r. Το περιουσιακό στοιχείο $S(t)$ ορίζεται στον χώρο πιθανότητας (Ω, F_t, P) ενώ υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale Q και ότι αναφερόμαστε σε μια πλήρη και χωρίς κερδοσκοπία αγορά. Ως γνωστόν, ένα αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με ημερομηνία εξάσκησης T, n μέσες χρονικές στιγμές και τιμή εξάσκησης K παράγει μια αξία εξόφλησης στο χρόνο T ίση με

$$[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - K\,]_+ = \max\Big(0\,,\ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - K\Big)$$

ενώ η τιμή του δικαιώματος στο χρόνο t θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$AA(\,t, S(t)\,,\,n\,,\,K\,,\,T\,,\,r\,) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^{Q}\Big(\big[\,\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - K\,\big]_+ \mid \mathcal{F}_t\Big). \qquad (1)$$

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην τιμολόγηση ενός Ασιατικού δικαιώματος είναι το γεγονός ότι η κατανομή της ποσότητας $\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$ είναι άγνωστη όταν η διαδικασία της τιμής του περιουσιακού στοιχείου $S(t)$ είναι μια εκθετική κίνηση Brown (Γεωμετρική Κίνηση Brown). Μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αποτελέσει η προσέγγιση της κατανομής του αθροίσματος $\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$, από την Λογαριθμοκανονική ή την Αντίστροφη Gauss.

Βασιζόμενοι σε αυτή την προσέγγιση και χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από την Αναλογιστική θεωρία κινδύνου για τους συμμονοτονικούς κινδύνους (comonotone risks) και τις τάξεις ανακοπής ζημιάς (stop loss order), θα υπολογίσουμε σε αυτή την ενότητα ένα ακριβές άνω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος ενώ στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό τύπο των Black & Scholes.

Πριν από όλα θα αναφέρουμε κάποιες έννοιες και ορισμούς που είναι απαραίτητοι για την ανάλυση που θα ακολουθήσει.

4.2 ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΝΑΚΟΠΗΣ ΖΗΜΙΑΣ (STOP-LOSS TRANSFORMS)

Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς ανακοπής ζημιάς συναρτήσεων κατανομής. Αναφέρουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1

Για μια σ.κ $F(x)$ με $D \subseteq \mathrm{R}^+$ ο μετασχηματισμός ανακοπής ζημιάς $\Psi_F(r)$ ορίζεται ως εξής:

$$\Psi_F : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+ : r \mapsto \Psi_F(r) = \int_{[r,+\infty] \cap D} (x-r)\,dF(x) \qquad (2)$$

■

Ορισμός 2

Για δύο σ.κ $F(x)$ και $G(x)$ στο R^+ λέμε ότι η $F(x)$ προηγείται της $G(x)$ σε διάταξη ανακοπής ζημιάς (stop-loss order) και γράφουμε $F \leq_{\mathrm{sl}} G$ αν

$$\text{Για κάθε } r \in \mathrm{R}^+ : \Psi_F(r) \leq \Psi_G(r). \qquad (3)$$

■

Αν συνδυάσουμε τις ισότητες (1) και (2) βλέπουμε ότι η αξία εξόφλησης ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ανακοπής ζημιάς της ποσότητας $W_n(T) = \sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$.

Αρχικά μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (1) ως εξής:

$$AA(t, S(t), n, K, T, r) = \frac{e^{-(T-t)r}}{n}\, \mathrm{E}_t^Q\Big[\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK \mid \mathcal{F}_t \Big]_+ . \qquad (4)$$

Για δεδομένη τιμή του $S(t) = s$ έχουμε

$$AA(t, s, n, K, T, r) = \frac{e^{-(T-t)r}}{n}\, \Psi_{F^s{}_{W_n(T)}}(nK),$$

με $F^s{}_{W_n(T)}(x) = Q(W_n(T) \leq x \mid S(t) = s)$.

<u>**Οπότε το πρόβλημα τιμολόγησης ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του μετασχηματισμού ανακοπής ζημιάς ενός αθροίσματος εξαρτημένων κινδύνων**</u>. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε αποτελέσματα των φραγμάτων για μετασχηματισμούς ανακοπής ζημιάς στο πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων.

4.3 ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΑΝΑΚΟΠΗΣ ΖΗΜΙΑΣ

Θα βασιστούμε σε κάποια αποτελέσματα από την αναλογιστική επιστήμη για φράγματα μετασχηματισμών ανακοπής ζημιάς αθροισμάτων εξαρτημένων στοχαστικών μεταβλητών. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην τιμολόγηση ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος έχει να κάνει με την άγνωστη κατανομή του αθροίσματος $\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$. Παρόλα αυτά η κατανομή κάθε όρου του αθροίσματος είναι γνωστή. Τα φράγματα ανακοπής ζημιάς που θα υπολογίσουμε σε αυτήν την ενότητα θα βασιστούν στις παραπάνω γνωστές περιθώριες κατανομές. Αρχικά θα αναφέρουμε κάποιες απαραίτητες έννοιες όπως αυτή της κλάσης Frechet (Frechet class) και των συμμονοτονικών κινδύνων (comonotone risks).

Ορισμός 3

Η κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *ορισμένη από n (μονομεταβλητές) συναρτήσεις κατανομής* $F_1,F_2,\ldots,F_n$ *είναι η κλάση των n-μεταβλητών συναρτήσεων κατανομής F, με* $F_1,F_2,\ldots,F_n$ *περιθώριες κατανομές.* ■

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Με τον συμβολισμό ($X_1,X_2,\ldots,X_n$) ~ $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ εννοούμε ότι οι περιθώριες κατανομές του τυχαίου διανύσματος είναι οι F_1 έως F_n .

Ορισμός 4

Ένα θετικό τυχαίο διάνυσμα ($X_1,X_2,\ldots,X_n$) *λέγεται συμμονοτονικό (οι θετικές τυχαίες μεταβλητές* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ *λέγονται αμοιβαία συμμονοτονικές) αν ισχύει κάποια από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες:*

1. *Για την n-μεταβλητών συνάρτηση κατανομής έχουμε:*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,..,x_n) = min(F_1(x_1),..,F_n(x_n)) \text{ για κάθε } x_1,..,x_n \geq 0. \quad (5)$$

2. *Υπάρχει μια τ.μ. Z και μη-φθίνουσες συναρτήσεις* $g_1,..,g_n$ *στο* R *τέτοιες ώστε:*

$$(X_1,\ldots,X_n) \stackrel{D}{=} (g_1(Z), \ldots, g_n(Z)).$$

3. *Για κάθε τυχαία μεταβλητή U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο* [0,1] *έχουμε:*

$$(X_1,\ldots,X_n) \stackrel{D}{=} (F_1^{-1}(U),\ldots,F_n^{-1}(U)).$$ ■

Από την πρώτη συνθήκη γίνεται φανερό πως για μια δεδομένη κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ η κατανομή ενός συμμονοτονικού τυχαίου διανύσματος $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \sim R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ είναι μοναδικά ορισμένη.

Παρατήρηση 1

Για μια δεδομένη κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$, *η n-μεταβλητών κατανομή του δεξιού μέλους της εξίσωσης* (5) *ονομάζεται το άνω Frechet φράγμα του* $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *και γράφουμε:*

$$W_R(x_1, \ldots, x_n) = \min(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)).$$ ■

Ορισμός 5

Έστω ότι δίνεται μια κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *και* $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \sim R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *είναι ένα δοσμένο συμμονοτονικό διάνυσμα.*

Ορίζουμε την συνάρτηση κατανομής F_R *ως εξής:*

$$F_R(x) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\Big). \quad (6)$$

■

Σημειώνουμε ότι καθώς η κατανομή του συμμονοτονικού διανύσματος $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ορίζεται μοναδικά, η ισότητα (6) μοναδικά ορίζει την κατανομή $F_R(x)$.

Πρόταση 1

Για κάθε κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ έχουμε:

$$F_R^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(x). \tag{7}$$

(βλέπε Dennenberg (1994)) ■

Πρόταση 2

Για κάθε κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ έχουμε:

$$\text{Για κάθε } r \in R^+ : \Psi_{F_R}(r) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{F_i}[F_i^{-1}(F_R(r))] \tag{8}$$

(βλέπε Goovaerts and Dhaene (1999)) ■

Σημειώνουμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε το F_R για μια τιμή r και αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την έκφραση (7). Συνδυάζοντας τα 2 αυτά αποτελέσματα, αποκτούμε ένα άνω φράγμα για τον μετασχηματισμό ανακοπής ζημιάς για κάθε άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} X_i$, όταν είναι γνωστές μόνο οι περιθώριες κατανομές.

Πρόταση 3

Έστω ότι δίνεται μια κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$. Για όλα τα μη αρνητικά τυχαία διανύσματα $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \sim R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ έχουμε:

$$F_W \leq_{sl} F_R, \tag{9}$$

με $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Δηλαδή*

$$\text{Για κάθε } d \in \mathrm{R}^+ \quad E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i - d\Big]_+ \leq \sum_{i=1}^{n} E\big[X_i - d_i^*\big]_+ \tag{10}$$

με

$$d_i^* = F_i^{-1}(F_R(d). \tag{11}$$

■

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Λόγω της (8) το δεξί μέλος της ανισότητας (10) είναι ίσο με $\Psi_{F_R}(d)$.

Πράγματι $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[X_i - d_i^*\right]_+ = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{F_i}(d_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{F_i}(F_i^{-1}(F_R(d))) \overset{(8)}{=} \Psi_{F_R}(d)$.

Από τις (11) και (7) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} d_i^* = \sum_{i=1}^{n} F_i^{-1}(F_R(d) \overset{(7)}{=} F_R^{-1}(F_R(d)) = d$.

Οπότε ισχύει η (10). ■

Θεώρημα 1

Δίνεται μια κλάση Frechet $R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ *και ένα μη αρνητικό τυχαίο διάνυσμα* $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \sim R_n(F_1,F_2,\ldots,F_n)$*. Έχουμε ότι για κάθε επίπεδο κράτησης* $d \in \mathrm{R}^+$ *και για κάθε επιλογή επιπέδων* $d_1,d_2,\ldots,d_n \in \mathrm{R}^+$ *τέτοια ώστε* $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ *ισχύει:*

$$\sum_{i=1}^{n} E\,[X_i - d_i^*]_+ \le \sum_{i=1}^{n} E\,[X_i - d_i]_+ \tag{12}$$

με

$$d_i^* = F_i^{-1}(F_R(d)).$$
■

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $d_1,d_2,\ldots,d_n \in \mathrm{R}^+$ τέτοια ώστε $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ έχουμε:

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i - d\Big]_+ \le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i - d_i]_+ \tag{13}$$

και κάτω από την υπόθεση της συμμονοτονικότητας, η οποία αφήνει το δεξί μέλος αμετάβλητο, το αριστερό γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i - d_i^*]_+ ,$$

που αποδεικνύει την ανισότητα (12). ■

4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ, Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας στον τύπο τιμολόγησης του αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος $AA(t,s,n,K,T,r)$ στο χρόνο t με ημερομηνία εξάσκησης T, τιμή εξάσκησης K και n μέσες χρονικές στιγμές όταν $S(t) = s$.

Με $F(x_2,t_2,x_1,t_1)$ θα συμβολίσουμε την δεσμευμένη κατανομή του $S(t_2)$ υπο το ισοδύναμο martingale μέτρο Q δηλ. $F(x_2,t_2,x_1,t_1) = Q(S(t_2) \leq x_2 \mid S(t_1) = x_1)$, $t_2 \geq t_1$.

Υποθέτουμε ότι στο χρόνο t δεν έχει αρχίσει ακόμη η διαδικασία υπολογισμού του μέσου. Σε αυτή την περίπτωση οι n μεταβλητές $S(T - n + 1), \ldots , S(T)$ είναι ακόμη άγνωστες και οι n συναρτήσεις κατανομής $F(x,T - n + 1,s,t),\ldots,F(x,T,s,t)$ ορίζουν μια κλάση Frechet $R_n(F(x,T - n + 1,s,t),\ldots,F(x,T,s,t))$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και στην ενότητα 2 έχουμε ότι:

$$AA(\, t, s \,, n \,, K \,, T \,, r\,) = \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \, \Psi_{F_{W_n}}(nK).$$

Από την πρόταση 3 παίρνουμε:

$$AA(\, t, S(t)\,, n \,, K \,, T \,, r\,) \leq \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \, \Psi_{F_R}(nK)$$

με το F_R να ορίζεται αναφορικά με την κλάση Frechet $R_n(F(x,T - n + 1,s,t),\ldots,F(x,T,s,t)$ σύμφωνα με τον ορισμό 5.

Τελικά από την πρόταση 3 και την (8) παίρνουμε την ακόλουθη ανισότητα:

$$AA(\, t, n \,, K \,, T \,, r\,) \leq \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Psi_{F(\cdot,T-i,s,t)}[F^{-1}(F_R(K),T-i,s,t)],$$

όπου $F^{-1}(x_2,t_2,x_1,t_1)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $F\,(x_2,t_2,x_1,t_1)$ αναφορικά με το x_2.

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι $t < T - n + 1$. Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $t \geq T - n + 1$. Έστω i^* να είναι τέτοιο ώστε $T - i^* \leq t < T - i^* + 1$, τότε γνωρίζουμε τις πρώτες $n - i^*$ τιμές και μόνο οι τελευταίες i^* τιμές $S(T - i^*),\ldots, S(T)$ παραμένουν τυχαίες. Για αυτό λοιπόν παίρνουμε:

$$AA(t,n,K,T,r) = \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \mathrm{E}^{Q}\Big[\sum_{i=0}^{i^*-1} S(T-i) - \Big(nK - \sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\Big) \mid \mathcal{F}_t\Big]_+$$

$$= \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \mathrm{E}^{Q}\Big[\sum_{i=0}^{i^*-1} S(T-i) - K_{i^*} \mid \mathcal{F}_t\Big]_+ ,$$

με $K_j = nK - \sum_{i=j}^{n-1} S(T-i)$ για $j < n$ και $K_n = nK$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $K_{i^*} > 0$. Κάτω από αυτή την υπόθεση μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο με την περίπτωση $t < T - n + 1$ για να αποκτήσουμε άνω φράγματα. Αλλά τώρα δουλεύουμε στην κλάση Frechet $R_{i^*}(F_{T-i^*},\ldots,F_T)$ και το K έχει αντικατασταθεί από την προσαρμοσμένη τιμή άσκησης K_{i^*}. Έτσι παίρνουμε:

$$AA(t,s,n,K,T,r) \le \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} \Psi_{F(\cdot,T-i,s,t)}[F^{-1}(F_R(K_{i^*}),T-i,s,t)].$$

Αν ορίσουμε k_i ως

$$k_i = F^{-1}(F_R(K_{i^*}),T-i,s,t)\ ,\ i = 0,\ldots,i^*. \tag{14}$$

Τότε παίρνουμε

$$AA(t,s,n,K,T,r) \le \frac{e^{-(T-t)r}}{n} \sum_{i=0}^{i^*-1} \Psi_{F(\cdot,T-i,s,t)}(k_i).$$

Ας εξετάσουμε τώρα τι γίνεται όταν $K_{i^*} \le 0$. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα φράγματα της προηγούμενης ενότητας. Παρόλα αυτά έχουμε:

$$\mathrm{E}^{Q}\big[W_{i^*} - K_{i^*}\big]_+ = \mathrm{E}^{Q}\big[W_{i^*}\big] - K_{i^*} = \sum_{i=0}^{i^*-1} E^{Q} S(T-i) - K_{i^*}.$$

Καθώς η προεξοφλημένη διαδικασία $e^{-rt}S(t)$ είναι ένα martingale υπο το Q, η παραπάνω έκφραση είναι ίση με :

$$S(t) \sum_{i=0}^{i^*-1} e^{(T-i-t)r} - K_{i^*}.$$

Εάν συνδυάσουμε αυτό το αποτέλεσμα με τον τύπο (1) έχουμε στην περίπτωση αρνητικού K_{i^*}:

$$AA(\,t, s, n\,, K\,, T\,, r\,)\;=\;\frac{e^{-(T-t)r}}{n}\;\Big(\;S(t)\;\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{(T-i-t)r}\;-K_{i^*}\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\Big[S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} + e^{-(T-t)r}\sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\Big] - e^{-(T-t)r} K\,.$$

Αν συμβολίσουμε με $EC(t,T,K,r)$ την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ημερομηνία άσκησης T και τιμή εξάσκησης K, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2

Σε μια αγορά όπως έχει περιγραφεί παραπάνω

1. Αν $K_{i*} > 0$

$$AA(\,t, s, n\,, K\,, T\,, r\,) \le \frac{e^{-(T-t)r}}{n}\sum_{i=0}^{i^*-1}\Psi_{F(\cdot;T-i,s,t)}(k_i)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} EC(t,s,k_i,T-i,r) \qquad (15)$$

όπου $k_i = F^{-1}(F_R(K_{i^*}),T-i,s,t)$, $i = 0,\ldots,i^*$.

2. Αν $K_{i*} \le 0$

$$AA(\,t, s, n\,, K\,, T\,, r\,) = \frac{1}{n}\Big[S(t)\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} + e^{-(T-t)r}\sum_{i=i^*}^{n-1} S(T-i)\Big] - e^{-(T-t)r} K\,. \blacksquare \qquad (16)$$

Συμπερασματικά, για $K_{i*} > 0$ η τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος φράσσεται άνω από την τιμή ενός χαρτοφυλακίου Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς.

4.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΤΥΠΟ BLACK and SCHOLES

Υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου $S(t)$ ακολουθεί την εκθετική κίνηση Brown με σταθερούς συντελεστές δηλ.

$$dS(t) = S(t)[rdt + bdB(t)]$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των Black & Scholes για Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς. Συνδυάζοντας τον με τον τύπο (15) έχουμε:

$$AA(\,t, s, n, K, T, r\,) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir} EC(t,s,\Gamma_i^{-1}(K_{i^*},s),T-i,r)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i^*-1} e^{-ir}[sN(d_{i,1})-k_i e^{-r(T-i-t)}N(d_{i,2})],$$

όπου τα d_1,d_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$d_{i,1}=\frac{\log(s/k_i)+(r+b^2/2)(T-i-t)}{b\sqrt{T-i-t}},\ d_{i,2}=d_{i,1}-b\sqrt{\mathrm{T}-i-t}\,.$$

Η μόνη δυσκολία είναι να υπολογίσουμε τις διάφορες τιμές άσκησης k_i. Η συνάρτηση κατανομής $F(x_2,t_2,x_1,t_1) = Q(\,S(t_2) \leq x_2 \mid S(t_1) = x_1)$ δίνεται τώρα από

$$F(x_2,t_2,x_1,t_1) = \mathrm{LN}(x_2;\ln(x_1) + (r - b^2/2)\,(t_2-t_1)\,,\, b\sqrt{(t_2-t_1)}\,),$$

όπου $\mathrm{LN}(x;\mu,b)$ είναι η Λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση b.

Χρησιμοποιώντας την (7) μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (14) ως εξής:

$$K_{i^*}=\sum_{k=0}^{i^*-1} F^{-1}(F(k_i,T-i,S,t),T-k,S,t)\,.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι το παραπάνω είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^{i^*-1} S^{(1-\sqrt{(T-k-t)/(T-i-t)})} k_i^{\sqrt{(T-k-t)/(T-i-t)}} e^{(r-b^2/2)(\sqrt{(T-k-t)(T-i-t)}-(T-k-t))} = K_{i^*}. \quad (17)$$

Ορίζοντας τα $\alpha_k(i)$ και $\beta_k(i)$ ως εξής :

$$\alpha_k(i) = e^{(r-b^2/2)(\sqrt{(T-k-t)(T-i-t)}-(T-k-t)}\,,\ \beta_k(i) = \sqrt{\frac{T-k-t}{T-i-t}}\,,$$

η (17) ξαναγράφεται

$$\Gamma_i(k_i,S) = K_{i^*}, \quad (18)$$

όπου

$$\Gamma_i(x,s) = \sum_{k=0}^{i^*-1} \alpha_k(i) s^{1-\beta_k(i)} x^{\beta_k(i)} . \tag{19}$$

5. ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θυμίζουμε ότι ένα αριθμητικό Ασιατικό, Ευρωπαϊκού τύπου, δικαίωμα αγοράς (Asian European – style call option) με ημερομηνία εξάσκησης T (exercise date), n μέσες χρονικές στιγμές και σταθερή τιμή εξάσκησης (fixed exercise price) K, παράγει στο χρόνο T μια αξία εξόφλησης

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - K\Big)_+ ,$$

όπου $x_+ = \max\{x,0\}$ και $S(T-i)$ είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο $T-i$, $i = 0,\ldots,n-1$.

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς στο χρόνο 0 δίνεται από την

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rt}}{n} E^Q\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK\Big)_+\Big] \tag{1}$$

υπο το martingale μέτρο Q και με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r.

Επίσης αναφέρουμε για άλλη μια φορά ότι υπάρχουν τα forward starting και τα in progress Ασιατικά δικαιώματα. Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία του μέσου όρου στο χρόνο 0 δεν έχει ξεκινήσει και τα $S(T-n+1),\ldots,S(T)$ είναι τυχαία. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $T-n+1\leq 0$ και μόνο οι τιμές $S(1),\ldots,S(T)$ παραμένουν τυχαίες.

Τέλος, ένα αριθμητικό Ασιατικό, Ευρωπαϊκού τύπου, δικαίωμα πώλησης (Asian European – style put option) με ημερομηνία εξάσκησης T (exercise date), n μέσες χρονικές στιγμές ($n \leq T+1$) και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης (floating exercise price) με ποσοστό β, παράγει στο χρόνο T μια αξία εξόφλησης

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - \beta S(T)\right)_+ .$$

5.2 ΚΑΠΟΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όπως δείξαμε και στο 3ο Κεφάλαιο, αν έχω τ.μ $S = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$ όπου οι τ.μ X_i δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, η πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ είναι άγνωστη και το μόνο που γνωρίζουμε είναι τις περιθώριες α.σ.κ των X_i , τότε η S φράσσεται από κάτω και από πάνω με την έννοια της κυρτής διάταξης από αθροίσματα συμμονοτονικών τ.μ:

$$S^l \leq_{cx} S \leq_{cx} S^u \leq_{cx} S^c,$$

που συνεπάγεται από τον ορισμό της κυρτής διάταξης ότι

$$E[(S^l-d)]_+ \leq E[(S-d)]_+ \leq E[(S^u-d)]_+ \leq E[(S^c-d)]_+$$

για όλα τα d στο R^+ ενώ $E[S^l] = E[S] = E[S^u] = E[S^c]$.

5.2.1 Συμμονοτονικό άνω φράγμα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το μεγαλύτερο κυρτό άθροισμα των στοιχείων ενός τυχαίου διανύσματος με δεδομένες περιθώριες α.σ.κ βρίσκεται από το συμμονοτονικό άθροισμα

$$S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c \text{ με } S^c \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U),$$

όπου η αντίστροφη α.σ.κ που είναι η **μη – φθίνουσα** και **από αριστερά συνεχής** $F_X^{-1}(p)$ δίνεται από την σχέση:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathrm{R} \mid F_X(x) \geq p\},\ p \in [0,1] \text{ με } \inf \varnothing = +\infty.$$

Σύμφωνα με τον Kaas (2000) η αντίστροφη α.σ.κ ενός αθροίσματος συμμονοτονικών τ.μ ισούται με το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομής των περιθώριων κατανομών (βλέπε Κεφάλαιο 3 §3.2). Δεδομένου των αντίστροφων συναρτήσεων $F_{X_i}^{-1}$, η α.σ.κ του $S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c$ υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{S^c}(x) = \sup\{\, p \in [0,1] \mid F_{S^c}(x) \geq p \,\} = \sup\{\, p \in [0,1] \mid F_{S^c}^{-1}(p) \leq x \,\}$$

$$= \sup\{\, p \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x \,\}. \tag{2}$$

Έτσι στην περίπτωση **αυστηρά αυξουσών** και **συνεχών** περιθώριων κατανομών, η α.σ.κ $F_{S^c}(x)$ καθορίζεται μοναδικά από την

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \qquad F_{S^c}^{-1}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \tag{3}$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο ο Dhaene (2002) απέδειξε ότι τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του αθροίσματος συμμονοτονικών τ.μ υπολογίζονται από τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς των επιμέρους όρων.

Θεώρημα 1

Τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του αθροίσματος S^c των στοιχείων του συμμονοτονικού τυχαίου διανύσματος $(X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c)$ δίνονται από:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+],\ (F_{S^c}^{-1}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)). \quad \blacksquare$$

Αν η μόνη πληροφορία σχετικά με την πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι οι περιθώριες α.σ.κ των X_i τότε η συνάρτηση κατανομής του $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \ldots + F_{X_n}^{-1}(U)$ είναι μια συνετή επιλογή για την προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης κατανομής του

$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Είναι ένα supremum σε όρους κυρτής διάταξης και αποτελεί το καλύτερο άνω φράγμα που μπορεί να παραχθεί κάτω από τις δεδομένες συνθήκες.

Για περισσότερες λεπτομέρειες και αναλυτικότερη παρουσίαση των παραπάνω ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Κεφάλαιο 3 § 3.3 .

5.2.2 Βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κάποια τ.μ Λ με δοσμένη συνάρτηση κατανομής, τέτοια ώστε να γνωρίζουμε τις δεσμευμένες α.σ.κ ,δεδομένου του Λ = λ, των τ.μ X_i για όλες τις θετικές τιμές του λ. Το βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα υπολογίζεται ως εξής (Kaas et al.2000):

$$S^u = F^{-1}{}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}{}_{X_2|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}{}_{X_n|\Lambda}(U)$$

όπου $F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U)$ είναι ο συμβολισμός για την τ.μ $f_i(U,\Lambda)$, με την συνάρτηση f_i να δίνεται από την $f_i(u,\lambda) = F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(u)$.

Για την συνάρτηση κατανομής του S^u αρκεί να παρατηρήσουμε ότι δεδομένου του Λ = λ, **η τ.μ S^u είναι ένα άθροισμα συμμονοτονικών τ.μ**.

Έτσι

$$F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p),\ p \in [0,1].$$

Δεδομένου του Λ = λ , για να βρεθεί η α.σ.κ του S^u έχουμε

$$\begin{aligned} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) &= \sup\{p\in[0,1] \mid F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) \geq p\} \\ &= \sup\{p\in[0,1] \mid F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) \leq x\} \\ &= \sup\{p \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p) \leq x\}. \end{aligned}$$

Οπότε η α.σ.κ του S^u δίνεται από την

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)\, dF_\Lambda(\lambda).$$

Αν οι περιθώριες α.σ.κ $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ είναι **αυστηρά αύξουσες** και **συνεχείς**, τότε η $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ αποτελεί μια λύση του

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x\,,\; x\in (F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1)). \qquad (4)$$

Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε επίσης ότι για κάθε $d \in (F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}{}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1))$ ισχύει:

$$\mathrm{E}[(S^u - d)_+ \mid \Lambda = \lambda] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F^{-1}{}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(d)))_+ | \Lambda = \lambda]\,,$$

από το οποίο το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς του S^u στο d δηλ. το $\mathrm{E}[(S^u - d)_+]$ δίνεται με ολοκλήρωση ως προς λ.

5.2.3 Κάτω φράγμα

Έστω $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο διάνυσμα με δεδομένες περιθώριες α.σ.κ $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$. Ως γνωστόν, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τ.μ Λ (**διαφορετική** από την περίπτωση του άνω φράγματος) με δεδομένη σ.κ, τέτοια ώστε δοθέντος Λ = λ, να γνωρίζουμε τις δεσμευμένες α.σ.κ των τ.μ X_i για όλες τις θετικές τιμές του λ. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 3 για να αποκτήσουμε ένα κάτω φράγμα, με την έννοια της κυρτής διάταξης, για το $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ δεσμεύοντας ως προς την τ.μ Λ έχουμε (σύμφωνα και με τους Kaas et al. (2000) και Rogers & Shi (1995)):

Συμβολίζουμε την δεσμευμένη μέση τιμή με $S^l = E[S|\Lambda]$.

Επίσης υποθέτουμε ότι η τ.μ Λ είναι τέτοια ώστε όλα τα $E[X_i|\Lambda]$ είναι **μη – φθίνουσες** και **συνεχείς** συναρτήσεις του Λ . Τότε τα ποσοστημόρια του κάτω φράγματος S^l δίνονται από την:

$$F^{-1}{}_{S^l}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{E[X_i|\Lambda]}(p) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}{}^{-1}(p)],\; p \in (0,1)$$

και η α.σ.κ του S^l (σύμφωνα με την (2)) δίνεται από

$$F_{S^l}(x) = \sup\left\{p\in[0,1] \mid F^{-1}{}_{S^l}(p) \le x\right\}$$

$$= \sup\left\{p\in[0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{E[X_i|\Lambda]}(p) \le x\right\}$$

$$= \sup\left\{p\in[0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(p) \le x\right\}$$

Αν οι α.σ.κ των τ.μ $E[X_i|\Lambda]$ είναι **αυστηρά αύξουσες** και **συνεχείς**, τότε η α.σ.κ του S^l είναι επίσης αυστηρά αύξουσα και συνεχής, και παίρνουμε για όλα τα $x \in (F^{-1}{}_{S^l}(0), F^{-1}{}_{S^l}(1))$:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{E[X_i|\Lambda]}(F_{S^l}(x)) = x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(F_{S^l}(x))] = x, \qquad (5)$$

που καθορίζει την α.σ.κ του κυρτής διατάξεως κάτω φράγματος του S^l για το S.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1, τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς του S^l υπολογίζονται ως εξής:

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E\left[(E[X_i|\Lambda] - E[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(1 - F_{S^l}(d))])_+\right],$$

που ισχύει για όλα τα $d \in (F^{-1}{}_{S^l}(0), F^{-1}{}_{S^l}(1))$.

Η περίπτωση που όλα τα $E[X_i|\Lambda]$ είναι **μη – αύξουσες** και **συνεχείς** συναρτήσεις του Λ οδηγεί επίσης σε ένα συμμονοτονικό διάνυσμα $(E[X_1|\Lambda], E[X_2|\Lambda], \ldots, E[X_n|\Lambda])$ και το οποίο αποδείχτηκε στο Κεφάλαιο 3 §3.4.2.

5.3 ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με άνω και κάτω φράγματα για την ποσότητα $E[(S-d)_+]$ όπου το S είναι ένας γραμμικός συνδυασμός Λογαριθμοκανονικών μεταβλητών. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής τα έχουμε ήδη παρουσιάσει και στην ενότητα 3.5.1 του 3[ου] κεφαλαίου.

Ορίζουμε την ποσότητα

$$S=\sum_{i=1}^{n} X_i=\sum_{i=1}^{n} a_i e^{Y_i} \quad (6),$$

με Y_i μια κανονικά κατανεμημένη τ.μ με μέσο $E[Yi]$ και διακύμανση $\sigma^2{}_{Y_i}$. Σε αυτή την περίπτωση το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς με επίπεδο κράτησης d_i, $E[(X_i - d_i)_+]$ είναι γνωστό μια που

$$\ln(\mathrm{sign}(\alpha_i)\, X_i) \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$$

με $\mu_i = \ln[\alpha_i] + E[Yi]$ και $\sigma_i = \sigma_{Yi}$,

και ισούται για $\alpha_i\, d_i > 0$

$$E[(X_i - d_i)_+] = \mathrm{sign}(\alpha_i)\, e^{\mu_i+\frac{\sigma_i^2}{2}}\ \Phi(\mathrm{sign}(\alpha_i)\, d_{i,1}) - d_i\ \Phi(\mathrm{sign}(\alpha_i)\, d_{i,2}), \quad (7)$$

όπου τα $d_{i,1}$,$d_{i,2}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i+\sigma_i^2-\ln|d_i|}{\sigma_i},\ d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i. \quad (8)$$

Η περίπτωση $\alpha_i\, d_i < 0$ είναι ελάχιστης σημασίας.

Θεώρημα 2

Έστω S δίνεται από την (6) και θεωρούμε μια κανονικά κατανεμημένη τ.μ Λ η οποία είναι θετικά συσχετισμένη με όλα τα Y_i στο S έτσι ώστε (Y_i,Λ) να είναι διδιάστατη κανονικά κατανεμημένη για όλα τα i. Τότε οι κατανομές του συμμονοτονικού άνω φράγματος S^c , του βελτιωμένου συμμονοτονικού άνω φράγματος S^u και του κάτω φράγματος S^l δίνονται από τις σχέσεις:

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+sign(a_i)\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(U)}\ , \quad (9)$$

$$S^u = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(U)} \quad (10)$$

$$S^l = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda] = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma^2{}_{Y_i}} \quad (11)$$

όπου U και $V = \Phi\left(\frac{\Lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}\right)$ *είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες ομοιόμορφες* (0,1) *τ.μ* , Φ *είναι η α.σ.κ της* N (0,1) *κατανομής και το* r_i *καθορίζεται από την*

$$r_i = r\,(Y_i,\Lambda) = \frac{\mathrm{cov}[Y_i,\Lambda]}{\sigma_{Y_i}\sigma_\Lambda} \geq 0 \qquad \blacksquare$$

5.3.1 Συμμονοτονικό άνω φράγμα

Αφού οι α.σ.κ F_{X_i} είναι **αυστηρά αύξουσες** και **συνεχείς**, προκύπτει από την (3) και την (9) ότι για $x \in (F_{S^c}^{-1}(0),\ F_{S^c}^{-1}(1))$ η α.σ.κ του συμμονοτονικού αθροίσματος $F_{S^c}(x)$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+sign(a_i)\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x. \tag{12}$$

Από το Θεώρημα 1 και την (7), βρίσκουμε την παρακάτω έκφραση για το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς στο d με $F_{S^c}^{-1}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$ για το S^C

$$\mathrm{E}[(S^C - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+\frac{\sigma^2_{Y_i}}{2}}\Phi[sign(a_i)\sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))] - d(1 - F_{S^c}(d)). \tag{13}$$

5.3.2 Βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα

Θα προσδιορίσουμε την α.σ.κ του S^u και το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς $\mathrm{E}[(S^u - d)_+]$, δεσμεύοντας ως προς μια κανονικά κατανεμημένη τ.μ Λ ή ισοδύναμα ως προς την ομοιόμορφη στο (0,1) τ.μ που εισάγαμε στο Θεώρημα 2:

$$V = \Phi\left(\frac{\Lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}\right). \tag{14}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα $F_{S^u|V=v}(x)$ που επίσης συμβολίζεται και $F_{S^u}(x|V=v)$, είναι η α.σ.κ ενός αθροίσματος n συμμονοτονικών τ.μ και για $F^{-1}{}_{S^u|V=v}(0) < x < F^{-1}{}_{S^u|V=v}(1)$, (σύμφωνα με τις (4) και (10)), δίνεται από την:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(v)+sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^u}(x|V=v))} = x. \qquad (15)$$

Τότε η α.σ.κ του S^u δίνεται από την

$$F_{S^u}(x) = \int_0^1 F_{S^u|V=v}(x)dv \qquad (16)$$

Για το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς στο επίπεδο d με $F^{-1}{}_{S^u|V=v}(0) < d < F^{-1}{}_{S^u|V=v}(1)$ για το S^u έχουμε:

$$\mathrm{E}[(S^u - d)_+] = \int_0^1 E[(S^u - d)_+ | V = v]dv = \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 E\left[(F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U|V=v) - d_i)_+\right]dv \quad (17)$$

με $d_i = F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(F_{S^u}(d|V=v)|V=v)$ και U ομοιόμορφη τ.μ στο (0,1).

Μια που το $sign(a_i)F^{-1}{}_{X_i|\Lambda}(U|V=v)$ ακολουθεί μια Λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο και τυπική απόκλιση:

$$\mu_V(i) = \ln|\alpha_i| + \mathrm{E}[Yi] + r_i\,\sigma_{Y_i}\,\Phi^{-1}(v) \text{ και } \sigma_V(i) = \sqrt{1-r_i^2}\,\sigma_{Y_i},$$

έχουμε ότι:

$$d_i = a_i \exp\left[E[Y_i] + r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(v) + sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(d))\right]. \qquad (18)$$

Τότε η (7) δίνει:

$$\mathrm{E}[(S^u - d)_+ | V = v] = \sum_{i=1}^{n}\left[sign(a_i)e^{\mu_v(i)+\frac{\sigma^2{}_v(i)}{2}}\Phi(sign(a_i)d_{i,1}) - d_i\Phi(sign(a_i)d_{i,2})\right],$$

με (σύμφωνα με την (8)),

$$d_{i,1} = \frac{\mu_v(i) + \sigma^2{}_v(i) - \ln|d_i|}{\sigma_v(i)},\ d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_v(i).$$

Με αντικαταστάσεις και ολοκλήρωση στο διάστημα [0,1] οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\mathrm{E}[(S^u - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i]+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma^2{}_{Y_i}} \times$$

$$\times \int_0^1 e^{r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(v)} \Phi\left(sign(a_i) \sqrt{1 - r_i^2} \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(d)) \right) dv - d(1 - F_{S^u}(d)) .$$

(19)

5.3.3 Κάτω φράγμα

Θα θεωρήσουμε για λόγους απλότητας ότι $\boldsymbol{a_i \geq 0}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή Λ υπο την οποία δεσμεύουμε είναι κανονικά κατανεμημένη και έχει το σωστό πρόσημο έτσι ώστε οι συντελεστές συσχέτισης **r_i να είναι όλοι θετικοί**. Αυτές οι συνθήκες εξασφαλίζουν ότι **το S^l είναι άθροισμα n συμμονοτονικών τ.μ**.

Αφού οι $E[X_i|\Lambda]$ είναι **μη – φθίνουσες**, μπορούμε να αποκτήσουμε το $F_{S^l}(x)$, (σύμφωνα με τις (5) και (11)), από την σχέση

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i] + r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(F_{S^l}(x)) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2)\sigma^2_{Y_i}} = x \tag{20}$$

Επιπρόσθετα, καθώς S^l είναι άθροισμα n λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων τ.μ, το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς στο d ($d > 0$) μπορεί να υπολογιστεί (με βάση το Θεώρημα 1 και την (7)) ως εξής:

$$\mathrm{E}[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i] + \frac{\sigma^2_{Y_i}}{2}} \Phi[r_i \sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(d))] - d(1 - F_{S^l}(d)) \tag{21}$$

5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ ΣΤΟΝ ΤΥΠΟ ΤΩΝ BLACK & SCHOLES

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με φράγματα για Ασιατικά δικαιώματα σταθερής τιμής άσκησης. Θα χρησιμοποιήσουμε συμμονοτονικότητα, την προσέγγιση των Rogers and Shi (1995) για την οποία έχουμε ήδη αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο και τέλος, συνδυάζοντας την τεχνική υπολογισμού ενός βελτιωμένου συμμονοτονικού άνω φράγματος δεσμεύοντας ως προς μια κανονικά κατανεμημένη τ.μ Λ και την ιδέα των Nielsen and Sandmann (2002) που αποτελεί γενίκευση αυτής των Rogers and Shi (1995) θα υπολογίσουμε το λεγόμενο μερικώς ακριβές/συμμονοτονικό άνω φράγμα.

Στο μοντέλο των BLACK & SCHOLES η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου $\{S(t),\ t\geq 0\}$ υπο το ουδέτερο σε κίνδυνο μέτρο Q ακολουθεί μια Γεωμετρική Κίνηση Brown, με πτητικότητα (volatility) b και με συντελεστή ολίσθησης (drift) ίσο με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο r:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r\,dt + b\,dB(t),\ t \geq 0.$$

όπου $\{B(t),\ t\geq 0\}$είναι μια τυπική κίνηση Brown υπο το μέτρο Q. Έτσι οι τ.μ είναι Λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες με παραμέτρους $(r-\frac{b^2}{2})t$ και tb^2.

5.4.1 Φράγματα βασισμένα στην συμμονοτονικότητα

Έστω ένα αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με ημερομηνία εξάσκησης T, n μέσες χρονικές στιγμές με $T-n+1 \geq 0$. Ως γνωστόν έχουμε:

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[\left(S - nK\right)_{+}\right]$$

με

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) = \sum_{i=0}^{n-1} S(0)e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)+bB(T-i)}. \tag{22}$$

Το παραπάνω μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα λογαριθμοκανονικών τ.μ

$S = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e^{Y_i}$ με

$$Y_i = bB(T-i) \sim \mathrm{N}(0,\ b^2(T-i)) \tag{23}$$

$$\alpha_i = S(0)e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)}.$$

5.4.1.1 Κάτω Φράγμα

Καθορίζουμε την Λ σαν μια κανονική τ.μ που δίνεται από την σχέση:

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i B(T-i)\,,\ \beta_i \in \mathrm{R}^{+}. \tag{24}$$

Η επιλογή των σταθμίσεων β_i οφείλεται στο ότι η ποιότητα του στοχαστικού κάτω φράγματος $\mathrm{E}^{Q}[S|\Lambda]$ κρίνεται από την διακύμανσή του. Για να μεγιστοποιήσουμε την ποιότητα η διακύμανση θα πρέπει να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στην var[S]. Με άλλα λόγια η μέση τιμή

$$\mathrm{E}^{Q}[\mathrm{var}[S|\Lambda]] = \mathrm{var}[S] - \mathrm{var}[\mathrm{E}^{Q}[S|\Lambda]]$$

θα πρέπει να ελαχιστοποιείται.

Ενστικτωδώς, για να πάρουμε το καλύτερο κάτω φράγμα τα Λ και S θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν γίνεται ίδια.

Έτσι έχουν επιλεγεί οι 2 παρακάτω εκφράσεις για το Λ που δίνουν αρκετά καλά αποτελέσματα.

1. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός της πρώτης τάξης προσέγγισης του $\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i)\,, \tag{25}$$

2. Ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου G = $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} S(T-i)}$ (Nielsen and Sandmann (2002)):

$$\Lambda = \frac{\ln \mathrm{G} - E^{Q}[\ln \mathrm{G}]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln \mathrm{G}]}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)]}} \sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)\,, \tag{26}$$

όπου

$$\mathrm{var}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \min(T-i, T-j) = n^2 T - \frac{n}{6}(n-1)(4n+1)\,.$$

■

Για θετικά β_i, η διακύμανση του $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i B(T-i)\,,\ \beta_i \in \mathrm{R}^{+}$ δίνεται από

$$\sigma^2{}_\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\beta_i\beta_j \min(T-i,T-j).$$

Έχουμε ότι $Y_i \mid \Lambda = \lambda$ είναι κανονικά κατανεμημένο με μέσο $r_i \dfrac{b\sqrt{T-\iota}}{\sigma_\Lambda}\lambda$ και διακύμανση $b^2(T-i)(1-r_i^{\,2})$ όπου

$$r_i = \rho_{T-i} = \frac{\operatorname{cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{T-i}\sigma_\Lambda} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j \min(T-i,T-j)}{\sqrt{T-i}\sigma_\Lambda}. \tag{27}$$

Έτσι για κάθε τ.μ U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο μοναδιαίο διάστημα, βρίσκουμε από το θεώρημα 2

$$S^l \equiv \sum_{i=0}^{n-1} E^Q[S(T-i)|\Lambda] \overset{d}{=} S(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2}\rho^2{}_{T-i})(T-i)+b\rho_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)}, \tag{28}$$

το οποίο είναι άθροισμα n συμμονοτονικών κινδύνων.

Εφαρμόζοντας την (21), βρίσκουμε το κάτω φράγμα:

$$AC(n,K,T) \geq \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(S^l - nK)_+]$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\left[b\rho_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] - e^{-rT}K(1-F_{S^l}(nK)) \tag{29}$$

που ισχύει για κάθε $K>0$.

Σε αυτή την περίπτωση, το $F_{S^l}(nK)$ δίνεται από την (20) που τώρα γίνεται:

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(r-\frac{b^2}{2}\rho^2{}_{T-i}\right)(T-i) + b\rho_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] = nK. \tag{30}$$

Αυτό το κάτω φράγμα διαφέρει από τις 2 επιλογές (25) και (26) του Λ, μόνο ως προς την έκφραση (27) για τον συντελεστή συσχέτισης ρ_{T-i}:

1. $\rho_{T-i} = \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-j)}\min(T-i,T-j)}{\sqrt{T-i}\sigma_\Lambda}$ με

$$\sigma^2{}_\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(2T-i-j)} \min(T-i, T-j),$$

$$2.\ \rho_{T-i} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\min(T-i,T-j)}{\sqrt{n^2T-\frac{n}{6}(n-1)(4n+1)}\sqrt{T-i}} = \frac{n(T-i)-\frac{(n-i-1)(n-i)}{2}}{\sqrt{n^2T-\frac{n}{6}(n-1)(4n+1)}\sqrt{T-i}}$$

αφού $\sigma_\Lambda = 1$.

Χρησιμοποιώντας άλλη κανονική δεσμευμένη μεταβλητή Λ, οι τύποι (29) – (30) ισχύουν αντικαθιστώντας τα σωστά σ_Λ και ρ_{T-i}. Πράγματι, το κάτω φράγμα μπορεί να γραφεί για μια κανονικά κατανεμημένη δεσμευμένη μεταβλητή Λ, ικανοποιώντας τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2, σαν μέσος του τύπου των Black & Scholes για ένα τεχνητό υποκείμενο τίτλο του οποίου η τιμή $\tilde{S}(t)$ είναι γεωμετρική κίνηση Brown με $\tilde{S}(0) = S(0)$ και με μη σταθερή πτητικότητα $\tilde{\sigma}_i = b\rho_{T-i}$ στο χρόνο π.χ $T-i$

$$\tilde{S}(T-i) = \tilde{S}(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i B(T-i)}.$$

Οι τιμές εξάσκησης είναι:

$$\tilde{K}_i = F^{-1}{}_{E[S(T-i)|\Lambda]}(F_{S^l}(nK)) = S(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))}.$$

Πράγματι, το κάτω φράγμα $AC(n,K,T)$ μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σε

$$\frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}E^Q[(\tilde{S}(T-i)-\tilde{K}_i)_+] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{-ri}\,\tilde{S}(0)\Phi(d_{1,i}) - e^{-rT}\,\tilde{K}_i\,\Phi(d_{2,i})\right)$$

όπου

$$d_{1,i} = \frac{(r+\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)-\ln(\frac{\tilde{K}_i}{\tilde{S}(0)})}{\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}} = \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK)),$$

$$d_{2,i} = d_{1,i} - \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} = -\,\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK)).$$

5.4.1.2 Συμμονοτονικό άνω φράγμα

Από την (13) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} AC(n,K,T) &\le \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(S^c - nK)_+] \\ &= \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}{}_{S(T-i)}(U) - nK\Big)_+\Big] \\ &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E^Q\Big[\Big(S(T-i) - F^{-1}{}_{S(T-i)}(F_{S^c}(nK))\Big)_+\Big] \\ &= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\Big[b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\Big] - e^{-rT}K(1-F_{S^c}(nK)) \quad (31) \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $K > 0$

με $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i B(T-i)$, $\beta_i \in \mathrm{R}^+$

Το πρόβλημα που παραμένει είναι πώς να υπολογιστεί το $F_{S^c}(nK)$. Η τελευταία ποσότητα δίνεται από την $\sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}{}_{S(T-i)}(F_{S^c}(nK)) = nK$ ή ισοδύναμα (βλέπε (12)),

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1} \exp\Big[(r - \frac{b^2}{2})(T-i) + b\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\Big] = nK .$$

Με αυτό τον τρόπο οι Simon, Goovaerts και Dhaene (2000) βρήκαν τον μικρότερο γραμμικό συνδυασμό τιμών των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς που φράσει από πάνω την τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος Ευρωπαϊκού στυλ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \Big(S(0)e^{-ri}\Phi(d_{1,i}) - e^{-rT}K_i\Phi(d_{2,i})\Big),$$

με

$$K_i = F^{-1}{}_{S(T-i)}(F_{S^c}(nK)) = S(0)e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)+b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))}.$$

$$d_{1,i} = \frac{(r+\frac{b^2}{2})(T-i)-\ln(\frac{K_i}{S(0)})}{b\sqrt{T-i}} = b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK)),$$

$$d_{2,i} = d_{1,i} - b\sqrt{T-i} = -\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK)).$$

5.4.1.3 Βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα

Θεωρούμε μια κανονική δεσμευμένη τ.μ. Ένα βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος είναι

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n}E^Q\left[(S-nK)_+\right] \le \frac{e^{-rT}}{n}E^Q\left[(S^u-nK)_+\right], \qquad (32)$$

όπου σύμφωνα με την (19) και (14):

$$E^Q\left[(S^u-nK)_+\right] = \sum_{i=0}^{n-1} S(0)e^{r(T-i)}e^{-\frac{b^2}{2}\rho^2{}_{T-i}(T-i)} \,\square$$

$$\square \int_0^1 e^{\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(v)}\Phi\left(\sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}\,b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^u}|V=v(nK))\right)dv$$

$$-nK(1-F_{S^u}(nK)) \qquad (33)$$

με $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i B(T-i)$, $\beta_i \in R^+$

Η υπο συνθήκη κατανομή $F_{S^u|V=v}(nK)$ δίνεται από την (18):

$$nK = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \exp\left[\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(v) + \sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}\,b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(nK))\right] \qquad (34)$$

όπου

$a_i = S(0)e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)}$ (23) και η α.σ.κ του S^u βρίσκεται από την (16).

Έχει βρεθεί ότι η δεσμευμένη μεταβλητή $\Lambda = \sum_{k=1}^{T}\beta_k W_k$ με W_k i.i.d $N(0,1)$

έτσι ώστε

$$B(T-i) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{T-i} W_k \ , \ i = 0,\ldots,n-1, \tag{35}$$

με όλα τα β_k ίσα με μια ίδια σταθερά (για απλότητα θεωρούνται ίσα με 1) οδηγεί σε ένα πιο ακριβές άνω φράγμα σε σχέση με άλλες επιλογές των β_k ή με τις δεσμευμένες μεταβλητές στο κάτω φράγμα.

Για $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$ οι όροι συσχέτισης έχουν την μορφή:

$$r_i = \rho_{T-i} = \frac{\operatorname{cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda} = \frac{T-i}{\sqrt{T-i}\sqrt{T}} = \frac{\sqrt{T-i}}{\sqrt{T}}, \ i = 0,\ldots, n-1, \tag{36}$$

και η δομή ανεξαρτησίας των όρων στο άθροισμα S^u ανταποκρίνεται καλύτερα σε αυτό των όρων του αθροίσματος S από άλλες επιλογές του Λ.

Ερευνώντας τις συσχετίσεις:

$$r\left[F^{-1}{}_{S(T-i)|\Lambda}(U), F^{-1}{}_{S(T-j)|\Lambda}(U)\right]$$

$$= \frac{e^{[\rho_{T-i}\rho_{T-j} + \sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}\sqrt{1-\rho^2{}_{T-j}}]b^2\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}} - 1}{\sqrt{e^{b^2(T-i)}-1}\sqrt{e^{b^2(T-j)}-1}}$$

$$r[S(T-i), S(T-j)] = \frac{e^{b^2\min(T-i,T-j)}-1}{\sqrt{e^{b^2(T-i)}-1}\sqrt{e^{b^2(T-j)}-1}},$$

μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για ρ_{T-i} που δίνεται από την (36) αυτές οι συσχετίσεις όχι μόνο συμπίπτουν για $i = j$ αλλά επίσης όταν ένας από τους 2 δείκτες i ή j ισούται με μηδέν.

Επιπρόσθετα, για $i \neq j$ οι διαφορές

$$\left|[\rho_{T-i}\rho_{T-j} + \sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}\sqrt{1-\rho^2{}_{T-j}}]b^2\sqrt{T-i}\sqrt{T-j} - b^2\min(T-i,T-j)\right|$$

είναι μικρές για όλα τα i και j στο $\{0,\ldots,n-1\}$ σε σύγκριση με άλλες επιλογές του Λ.

Όπως και στην περίπτωση του κάτω φράγματος, μπορούμε να ξαναγράψουμε το άνω φράγμα σαν μια έκφραση του τύπου των Black & Scholes για έναν υποκείμενο τίτλο $\tilde{S}(t)$ με $\tilde{S}(0) = S(0)$ και πτητικότητα $\tilde{\sigma}_i = b\sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}$:

$$\tilde{S}(T-i)=\tilde{S}(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^{\,2}}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i B(T-i)}.$$

Πράγματι, μια ισοδύναμη έκφραση για την (33) ξαναγράφεται ως εξής

$$\frac{e^{-rT}}{n}\ E^Q\left[(S^u-nK)_+\right]$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(v)-\frac{b^2}{2}\rho^2_{T-i}(T-i)} \times \{e^{-ri}\tilde{S}(0)\Phi(d_{1,i}(v))-e^{-rT}\tilde{K}_i(v)\Phi(d_{2,i}(v))\}dv$$

με τιμές εξάσκησης ορισμένες από την $\tilde{K}_i(v)=S(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(nK))}$

και

$$d_{1,i}(\mathrm{v})=\frac{(r+\frac{\tilde{\sigma}_i^{\,2}}{2})(T-i)-\ln(\frac{\tilde{K}_i(v)}{\tilde{S}(0)})}{\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}}=\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(nK))$$

$$d_{2,i}(\mathrm{v})=d_{1,i}(v)-\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}=-\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(nK)).$$

5.4.2 Φράγματα βασισμένα στην προσέγγιση των Rogers & Shi

Σύμφωνα με την προσέγγιση των Rogers & Shi ο υπολογισμός ενός άνω φράγματος βασίζεται στο κάτω φράγμα. Εφαρμόζωντας την ακόλουθη γενική ανισότητα για κάθε τ.μ Y και Z από τους Rogers & Shi (1995) έχουμε:

$$0\le \mathrm{E}[\,\mathrm{E}[\,Y_+\,|\,Z\,]-\mathrm{E}[\,Y\,|\,Z\,]_+]\le \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\left[\sqrt{\mathrm{var}(Y|Z)}\right]$$

στην περίπτωση που το Y είναι $\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-nK$ και το Z να είναι η δεσμευμένη μας μεταβλητή Λ που δίνεται από την (24), παίρνουμε ένα σφάλμα φράγματος

$$0 \le \mathrm{E}^Q[\mathrm{E}^Q\,[(S-nK)_+|\,\Lambda\,] - (S^l - nK)_+] \le \frac{1}{2}\;\mathrm{E}^Q\Big[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\,\Big]. \qquad (37)$$

σφάλμα φράγματος

Συνεπώς, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για το αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα

$$AC(n,K,T) \le \frac{e^{-rT}}{n}\;\Big\{\mathrm{E}^Q[(S^l - nK)_+] + \frac{1}{2}\;\mathrm{E}^Q\Big[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\,\Big]\Big\}. \qquad (38)$$

με $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i B(T-i)$, $\beta_i \in \mathrm{R}^+$

Άρα

$$\text{Άνω φράγμα} = \frac{e^{-rT}}{n}\;\Big\{\mathrm{E}^Q[(S^l - nK)_+] + \text{σφάλμα φράγματος}\Big\}$$

$$\Longrightarrow \text{Άνω φράγμα} = \text{κάτω φράγμα} + \frac{e^{-rT}}{n} \times \text{σφάλμα φράγματος}$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων μεταβλητών, ο δεύτερος όρος στην δεξιά πλευρά μπορεί να γραφεί με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνει μια αναλυτική, υπολογιστική έκφραση:

$$\mathrm{E}^Q\Big[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\,\Big] = \mathrm{E}^Q\Big[(\mathrm{E}^Q\,[\mathrm{S}^2\,|\,\Lambda] - \mathrm{E}^Q\,[\mathrm{S}\,|\,\Lambda]^2)^{\,½}\Big] = \qquad (39)$$

$$= E^Q\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} E^Q[S(T-i)S(T-j)\big|\Lambda] - (S^l)^2\Big)^{1/2}\Big],$$

όπου ο πρώτος όρος στην αναμενόμενη τιμή στη δεξιά πλευρά ισούται με

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \exp\Big(r_{ij} b\sigma_{ij}\Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}(1-r^2{}_{ij})b^2\sigma^2{}_{ij}\Big) \qquad (40)$$

με

$$a_i a_j = S(0)^2 \exp\Big[(r - \frac{b^2}{2})(2T-i-j)\Big], \qquad (41)$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{(T-i)+(T-j)+2\min(T-i,T-j)} \qquad (42)$$

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{T-i}}{\sigma_{ij}}\rho_{T-i} + \frac{\sqrt{T-j}}{\sigma_{ij}}\rho_{T-j} \qquad (43)$$

και U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1).

Αυτό το άνω φράγμα ισχύει και όταν ξεκινάμε από ένα κατώτερο φράγμα με μια κανονική δεσμευμένη μεταβλητή Λ διαφορετική από την (24). Αυτό μας επιτρέπει να πάρουμε το μικρότερο από διάφορα άνω φράγματα. Σημειώνουμε επίσης ότι το σφάλμα του φράγματος στην (37) είναι ανεξάρτητο από το K.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $e^x \geq 1 + x$ και τις σχέσεις (22) – (23) και (25), παίρνουμε

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{Y_i} \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i + S(0)b \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i)}_{\Lambda}.$$

Έτσι ισχύει $S \geq nK$ όταν το Λ μεγαλύτερο του $\dfrac{nK - \sum_{i=0}^{n-1} a_i}{S(0)b}$. Στην περίπτωση που το Λ είναι γραμμικός συνδυασμός της πρώτης τάξης προσέγγισης (FA) του S, έχουμε για $\Lambda \geq d_{FA}$ με

$$d_{FA} = \frac{nK - \sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{(r-b^2/2)(T-i)}}{S(0)b} \tag{44}$$

ότι

$$E^Q[(S - nK)_+ | \Lambda] = E^Q[S - nK | \Lambda] = (S^l - nK)_+.$$

Γενικά, για $d \in$ R τέτοιο ώστε το $\Lambda \geq d$ να συνεπάγεται ότι $S \geq nK$, έχουμε, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $f_\Lambda(\cdot)$ για την κανονική συνάρτηση πυκνότητας του Λ:

$$\begin{aligned}
0 &\leq E^Q[E^Q[(S - nK)_+ | \Lambda] - (S^l - nK)_+] \\
&= \int_{-\infty}^{d} \left(E^Q[(S - nK)_+ | \Lambda = \lambda] - (E^Q[(S | \Lambda = \lambda] - nK)_+ \right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{d} (\text{var}(S | \Lambda = \lambda))^{\frac{1}{2}} f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\
&\leq \frac{1}{2} (E^Q[\text{var}(S | \Lambda) 1_{\{\Lambda < d\}}])^{\frac{1}{2}} (E^Q[1_{\{\Lambda < d\}}])^{\frac{1}{2}}, \rightarrow \textbf{σφάλμα φράγματος}
\end{aligned} \tag{45}$$

όπου η ανισότητα του Holder εφαρμόστηκε στην τελευταία ανισότητα και $1_{\{\Lambda<d\}}$ είναι δείκτρια συνάρτηση.

Το άνω φράγμα (38) αντιστοιχεί στην περιορισμένη περίπτωση που το *d* ισούται με άπειρο. Επίσης, σε αντίθεση με το (37) το σφάλμα φράγματος τώρα εξαρτάται από το K μέσω του d.

Το σφάλμα φράγματος (45) ισχύει για κάθε δεσμευμένη κανονική τ.μ Λ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2 και για το οποίο υπάρχει ένα d τέτοιο ώστε το $\Lambda \geq d$ να συνεπάγεται ότι $S \geq nK$.

Για Λ που δίνεται από την (26) **οι Nielsen and Sandmann** βρήκαν ότι το αντίστοιχο d δίνεται από την

$$d = \frac{n\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \sum_{i=0}^{n-1}(r - \frac{b^2}{2})(T-i)}{b\sqrt{n^2T - \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)}} \tag{46}$$

και συμβολίζεται με $\boldsymbol{d_{GA}}$ για να θυμίζει το γεγονός ότι το Λ είναι ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου.

Θα παράγουμε μια εύκολη υπολογίσιμη έκφραση για την (45). Ο δεύτερος αναμενόμενος όρος στο γινόμενο (45) ισούται με το $F_\Lambda(d)$ όπου $F_\Lambda(\cdot)$ συμβολίζει την κανονική α.σ.κ του Λ. Ο πρώτος αναμενόμενος όρος στο γινόμενο της (45) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$E^Q[\text{var}(S|\Lambda)1_{\{\Lambda<d\}}] = E^Q[E^Q[S^2|\Lambda]1_{\{\Lambda<d\}}] - E^Q[(E^Q[S|\Lambda])^2 1_{\{\Lambda<d\}}] \tag{47}$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (47) μπορεί να ξαναγραφεί σύμφωνα με την (28) ως εξής:

$$E^Q[(E^Q[S|\Lambda])^2 1_{\{\Lambda<d\}}]$$

$$= \int_{-\infty}^{d} (E^Q[S|\Lambda=\lambda])^2 f_\Lambda(\lambda)d\lambda$$

$$= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)-\frac{b^2}{2}(\rho^2{}_{T-i})(T-i)+(\rho^2{}_{T-j})(T-j))} \int_{-\infty}^{d} e^{b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i}+\rho_{T-j}\sqrt{T-j})\Phi^{-1}(v)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda \tag{48}$$

όπου $\Phi^{-1}(v) = \dfrac{\lambda - E^Q[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$ και $\Phi(\cdot)$ είναι η α.σ.κ μιας τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

Εφαρμόζοντας την ισότητα

$$\int_{-\infty}^{d} e^{\gamma\Phi^{-1}(v)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda = e^{\frac{\gamma^2}{2}}\Phi(d^* - \gamma)\,,\; d^* = \frac{d - E^Q[\Lambda]}{\sigma_\Lambda} \quad (49)$$

με $\gamma = b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})$

μπορούμε να εκφράσουμε την $E^Q[(E^Q[S|\Lambda])^2 1_{\{\Lambda<d\}}]$ ως

$$S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)+b^2\rho_{T-i}\rho_{T-j}\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}}\,\Phi\left(d^* - b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})\right) \quad (50)$$

Για να μετασχηματίσουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (47) επικαλούμαστε τις (40) - (43) και εφαρμόζουμε την (49) με

$\gamma = r_{ij} b\sigma_{ij} = b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})$:

$$\begin{aligned}
&E^Q[E^Q[S^2|\Lambda]1_{\{\Lambda<d\}}] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{d} E^Q[S(T-i)S(T-j)|\Lambda = \lambda]f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(2T-i-j)+\frac{1}{2}(1-r_{ij}{}^2)b^2\sigma_{ij}{}^2}\int_{-\infty}^{d} e^{r_{ij}b\sigma_{ij}\Phi^{-1}(v)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\
&= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)+b^2\min(T-i,T-j)}\Phi\left(d^* - b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})\right). \quad (51)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (50) και (51) στην (47) και έπειτα αντικαθιστώντας το $F_\Lambda(\lambda)$ και την (47) στην (45), παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για το σφάλμα φράγματος που συμβολίζεται με $\varepsilon(d)$. Δηλαδή

$$0 \le \mathrm{E}^Q[\mathrm{E}^Q[(S - nK)_+ | \Lambda] - (S^l - nK)_+] \le \varepsilon(d)$$

σφάλμα φράγματος ⟵

και

$$\varepsilon(d) = \frac{S(0)}{2}\{F_\Lambda(d)\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)+b^2\rho_{T-i}\rho_{T-j}\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}}\,\Phi\big(d^* - b(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})\big)\times$$

$$\times\big(e^{b^2(\min(T-i,T-j)-\rho_{T-i}\rho_{T-j}\sqrt{T-i}\sqrt{T-j})} - 1\big)\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$AC(n,K,T) \le \frac{e^{-rT}}{n}\left\{\mathrm{E}^Q[(S^l - nK)_+] + \varepsilon(d)\right\}.$$

Δηλαδή Άνω φράγμα = Κάτω φράγμα + $\frac{e^{-rT}}{n}\varepsilon(d)$, με $d = +\infty$.

Το σφάλμα φράγματος συμπίπτει με αυτό των Nielsen and Sandmann (2002) για

$$\Lambda = \frac{\ln \mathrm{G} - E^Q[\ln \mathrm{G}]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln \mathrm{G}]}} \text{ και } d_{GA} = \frac{n\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \sum_{i=0}^{n-1}(r - \frac{b^2}{2})(T-i)}{b\sqrt{n^2T - \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)}}$$

5.4.3 Μερικώς ακριβές / συμμονοτονικό άνω φράγμα

Το λεγόμενο μερικώς ακριβές συμμονοτονικό άνω φράγμα αποτελείται από ένα ακριβές τμήμα της τιμής του δικαιώματος και κάποιο βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα για το υπόλοιπο μέρος.

Για κάθε κανονικά κατανεμημένη τ.μ Λ, με α.σ.κ $F_\Lambda(\cdot)$, για την οποία υπάρχει ένα d τέτοιο ώστε το $\Lambda \ge d$ να συνεπάγεται $S \ge nK$ και επίσης να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2 , ο δεύτερος όρος στην ισότητα

$$\frac{e^{-rT}}{n}E^Q[(S-nK)_+]$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}E^Q[E^Q[(S-nK)_+|\Lambda]]$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}\left\{\int_{-\infty}^{d}E^Q[(S-nK)_+|\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)+\int_{d}^{+\infty}E^Q[S-nK|\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)\right\} \quad (52)$$

μπορεί να γραφεί όμοια με τις (48) – (50):

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{d}^{\infty}E^Q[S-nK|\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}\int_{d}^{+\infty}E^Q[S|\Lambda=\lambda]f_\Lambda(\lambda)d\lambda-e^{-rT}K(1-F_\Lambda(d))$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(0)e^{(r-\frac{b^2}{2}\rho^2{}_{T-i})(T-i)}\int_{d}^{+\infty}e^{\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(v)}f_\Lambda(\lambda)d\lambda-e^{-rT}K(1-\Phi(d^*))$$

$$=\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-ri}\Phi(\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}-d^*)-e^{-rT}K\Phi(-d^*) \quad \rightarrow \quad \textbf{\textit{Ακριβές τμήμα}}$$

(53)

όπου $d^*=\dfrac{d-E^Q[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$ και $v=\dfrac{\lambda-E^Q[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$.

Στον πρώτο όρο της (52) αντικαθιστούμε το S με το S^u για να αποκτήσουμε ένα άνω φράγμα και εφαρμόζουμε την (33) αλλά τώρα με ολοκλήρωμα από το 0 στο $\Phi(d^*)$:

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d}E^Q[(S\text{-}nK)_+|\Lambda=\lambda]f_\Lambda(\lambda)d\lambda$$

$$\leq\frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d}E^Q[(S^u\text{-}nK)_+|\Lambda=\lambda]f_\Lambda(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}\int_{0}^{\Phi(d^*)}E^Q[(S^u\text{-}nK)_+|V=v]dv$$

$$=\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-ri}e^{-\frac{b^2}{2}\rho^2{}_{T-i}(T-i)}$$

$$\times\int_{0}^{\Phi(d^*)}e^{\rho_{T-i}b\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(v)}\Phi\left(\sqrt{1-\rho^2{}_{T-i}}b\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{S^u|_{V=v}}(nK))\right)dv$$

$$- e^{-rT} K\Big(\Phi(d^*) - \int_0^{\Phi(d^*)} F_{S^u|V=v}(nK)dv\Big).$$ → ***Βελτιωμένο Συμμονοτονικό άνω φράγμα*** (54)

Για τις τ.μ Λ που δίνονται από τις (25) και (26) βρήκαμε ένα d (βλέπε (44) και (46)) και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το καινούριο άνω φράγμα. Θυμίζουμε ότι αυτές οι επιλογές του Λ δεν οδηγούν στο πιο βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα.

Η καλύτερη επιλογή είναι $\Lambda = B(T)$ για την οποία δεν βρίσκουμε το αναγκαίο d σε αυτό το νέο άνω φράγμα. Παρόλα αυτά αναμένουμε η συνεισφορά του ακριβούς τμήματος (53) το οποίο είναι ο δεύτερος όρος στην (52) θα αποζημιώσει για την κατά κάποιο τρόπο κατώτερη ποιότητα του S^u.

Τελικά, σημειώνουμε ότι το φράγμα $C_A^{u,G}$ **των Nielsen and Sandmann (2002) παράχθηκε για την ειδική δεσμευμένη τ.μ Λ που δίνεται από την (26)**, και ότι χρειάζεται ένας αλγόριθμος για να βρεθούν τα βάρη a_i έτσι ώστε το άνω φράγμα τους για τον πρώτο όρο στην (52)

$$\frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{d} E^Q[(S(T-i)-a_i nK)_+ \,|\, \Lambda = \lambda] f_\Lambda(\lambda)d\lambda$$

να ελαχιστοποιείται.

Με την μέθοδο μας έχουμε τα κατάλληλα a_i για δεδομένο λ ή v :

$$a_i = \frac{1}{nK} F^{-1}_{S(T-i)|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|V=v}(nK))$$

$$= \frac{S(0)}{nK} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)+\rho_{T-i} b\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(v)+\sqrt{1-\rho^2_{T-i}}\, b\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(nK))}.$$

5.5 ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΕ ΚΥΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ ΣΤΟΝ ΤΥΠΟ ΤΩΝ BLACK & SCHOLES

Η τιμή στο χρόνο $t = 0$ ενός Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης και ποσοστό β δίνεται από την σχέση:

$$APF(n,\beta,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^{Q}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-n\beta S(T)\Big)_{+}\Big].$$

Ορίζουμε ως $\tilde{Q}$ το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας του Q των Radon – Nikodym

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ}=\frac{S(T)}{S(0)e^{rT}}=\exp\Big(-\frac{b^2}{2}T+bB(T)\Big). \tag{55}$$

Υπό την πιθανότητα $\tilde{Q}$, το $\tilde{B}(t)=B(t)-bt$ είναι μια κίνηση Brown και έτσι έχουμε

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=(r+b^2)dt+bd\,\tilde{B}(t). \tag{56}$$

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση ενός forward Ασιατικού δικαιώματος με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης και $T-n+1>0$. Χρησιμοποιώντας την πιθανότητα $\tilde{Q}$, το **Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης** και ποσοστό β δίνεται:

$$APF(n,\beta,T)=\frac{S(0)}{n}E^{\tilde{Q}}\Big[\Big(\frac{\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)}{S(T)}-\beta n\Big)_{+}\Big].$$

Από αυτόν τον τύπο μπορεί κανείς να εικάσει ότι ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης μπορεί να ερμηνευθεί σαν ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης $\beta S(0)$.

Οι Henderson και Wojakowski (2002) μελέτησαν συμμετρικά αποτελέσματα μεταξύ των forward Ασιατικών δικαιωμάτων με κυμαινόμενη και σταθερή τιμή εξάσκησης (βλέπε ενότητα συμμετρικά αποτελέσματα για αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα στο Παράρτημα).

Γράφοντας τον τύπο για $S(T-i)$ και $S(T)$ στην περίπτωση των Black & Scholes έχουμε

$$S=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)}{S(T)}=\sum_{i=0}^{n-1}e^{-(r+\frac{b^2}{2})i+b(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T))}\overset{not}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i e^{Y_i}$$

με $a_i = e^{-(r+\frac{b^2}{2})i}$ και $Y_i = b(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T))$ μια κανονικά κατανεμημένη τ.μ με μέσο $\tilde{E}^{Q}[Y_i] = 0$ και διακύμανση $\sigma^2_{Y_i} = ib^2$.

Σημειώνουμε ότι το $a_0 e^{Y_0}$ είναι μια σταθερά. Το S είναι ένα άθροισμα λογαριθμοκανονικών μεταβλητών και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της ενότητας 5.3.

Συμβολίζοντας την τιμή ενός αριθμητικού Ευρωπαϊκού τύπου Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με *ACF*(*n*,*β*,*T*), βρίσκουμε από την **ισότητα πώλησης - αγοράς**:

$$APF(n,\beta,T) - ACF(n,\beta,T) = \frac{S(0)}{n}\frac{1-e^{-rn}}{1-e^{-r}} - \beta S(0). \qquad (57)$$

Έτσι μπορούμε να παράγουμε φράγματα για το Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης από τα φράγματα για το δικαίωμα πώλησης.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον υπολογισμό των **forward Ασιατικών δικαιωμάτων πώλησης** (η περίπτωση των in progress μπορεί να υπολογιστεί με ανάλογο τρόπο) ενώ μέσω της προηγούμενης σχέσης καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των αντίστοιχων φραγμάτων για τα forward Ασιατικά δικαιώματα αγοράς.

5.5.1 Κάτω φράγμα

Για να αποκτήσουμε ένα καλής ποιότητας κάτω φράγμα θεωρούμε σαν δεσμευμένη μεταβλητή μια κανονική τ.μ Λ που είναι όσο παρόμοια γίνεται με την *S*. Παίρνουμε

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T)) \qquad (58)$$

με β_i θετικά.

Συγκεκριμένα αν $\beta_i = e^{-(r+\frac{b^2}{2})i}$ βρίσκουμε την πρώτης τάξης προσέγγιση του *S* και για $\beta_i = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}}$ για όλα τα i, τότε $\Lambda = \dfrac{\ln G - E[\ln G]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln G]}}$ είναι ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου G:

$$G = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{S(T-i)}{S(T)}\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \exp\left[-\left(r + \frac{b^2}{2}\right)i + b(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T))\right]\right)^{1/n}, \quad (59)$$

με

$$E^{\tilde{Q}}[\ln G] = -\left(r + \frac{b^2}{2}\right)\frac{n-1}{2}$$

$$\mathrm{var}[\ln G] = \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\min(i,j) = \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right).$$

Η επιλογή του Λ είναι παρόμοια με την επιλογή (26) των Nielsen and Sandmann (2002) στην περίπτωση σταθερής τιμής εξάσκησης.

Για γενικά β_i, έχουμε ότι $Y_i \mid \Lambda = \lambda$ κατανέμεται κανονικά με μέσο $r_i \dfrac{b\sqrt{i}}{\sigma_\Lambda}\lambda$ και διακύμανση $\sigma^2_{Y_i}(1 - r_i^2)$ όπου $r_0 = 0$ και για $i \geq 1$

$$r_i = \frac{\mathrm{cov}\left(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T), \Lambda\right)}{\sqrt{i}\sigma_\Lambda} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j \min(i,j)}{\sqrt{i}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\beta_i\beta_j \min(i,j)}}. \quad (60)$$

Και για τις 2 επιλογές του Λ οι συσχετίσεις r_i είναι θετικές. Έτσι βρίσκουμε (από την (21)) το παρακάτω κάτω φράγμα για την τιμή του forward Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης:

$$APF(n,\beta,T) \geq \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\left[br_i\sqrt{i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(n\beta))\right] - S(0)\beta(1 - F_{S^l}(n\beta))$$

όπου το $F_{S^l}(n\beta)$ δίνεται από την (20) για $x = n\beta$.

5.5.2 Συμμονοτονικό άνω φράγμα

Εφαρμόζωντας την (13) παίρνουμε τον παρακάτω σαφή τύπο του συμμονοτονικού άνω φράγματος για τα forward starting Ασιατικά δικαιώματα πώλησης με μεταβλητή τιμή εξάσκησης:

$$APF(n,\beta,T) \le \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\left[b\sqrt{i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(n\beta))\right] - S(0)\beta(1 - F_{S^c}(n\beta))$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\beta > 0$ και το $F_{S^c}(n\beta)$ δίνεται από την (12) για $x = n\beta$.

5.5.3 Βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα

Ανάλογα με την περίπτωση του βελτιωμένου άνω φράγματος για το Ασιατικό δικαίωμα με σταθερή τιμή εξάσκησης, η δεσμευμένη τ.μ

$$\Lambda = -\sum_{k=1}^{T} W_k \text{ με } W_k \text{ i.i.d } N(0,1) \text{ τέτοια ώστε } \tilde{B}(T-i) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{T-i} W_k, i = 0,\ldots,n-1,$$

οδηγεί σε ένα καλύτερο άνω φράγμα από ότι άλλες επιλογές και για την περίπτωση δικαιώματος με μεταβλητή τιμή εξάσκησης.

Η θεωρία συμμονοτονικότητας (βλέπε (19) και (17)), οδηγεί στο παρακάτω άνω φράγμα

$$\begin{aligned}
&\frac{S(0)}{n} E^{\tilde{Q}}[(S^u - n\beta)_+] \\
&= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{b^2}{2}r_i^2)i}\int_0^1 e^{r_i b\sqrt{i}\Phi^{-1}(v)}\Phi\left(\sqrt{1-r_i^2}\,b\sqrt{i} - \Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(n\beta))\right)dv \\
&- S(0)\beta(1 - F_{S^u}(n\beta))
\end{aligned}$$

με τις συσχετίσεις να δίνονται από $r_i = \sqrt{\frac{i}{T}}$ $i = 1,\ldots,n-1$ και $r_0 = 0$. Αν επικαλεστούμε τις (15) – (16) η δεσμευμένη κατανομή $F_{S^u|V=v}(x)$ και η α.σ.κ του S^u μπορούν να βρεθούν.

5.5.4 Φράγματα βασισμένα στην προσέγγιση των Rogers & Shi

Εύκολα αποκτούμε ένα άνω φράγμα βασισμένοι στο κάτω φράγμα ακολουθώντας την προσέγγιση των Rogers & Shi (1995) και των Nielsen and Sandmann (2002).

Χρησιμοποιώντας την δεσμευμένη τ.μ Λ που δίνεται από την (58) έχουμε:

$$APF(n,\beta,T) \le \frac{S(0)}{n}\left\{E^{\tilde{Q}}[(S^{l}-n\beta)_{+}]+\varepsilon(d)\right\}$$

όπου d τέτοιο ώστε $S \ge n\beta$ εάν $\Lambda \ge d$ και με

$$\varepsilon(d)=\frac{1}{2}\{F_{\Lambda}(d)\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}e^{-r(i+j)+b^{2}r_i r_j\sqrt{i}\sqrt{j}}\,\Phi\left(d^{*}-b(r_i\sqrt{i}+r_j\sqrt{j})\right)\left(e^{b^{2}(\min(i,j)-r_i r_j\sqrt{i}\sqrt{j})}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

όπου $d^{*} = \dfrac{d-E^{\tilde{Q}}[\Lambda]}{\sigma_{\Lambda}}$ και $F_{\Lambda}(\cdot)$ είναι η κανονική α.σ.κ του Λ και οι συσχετίσεις r_i που δίνονται από την (60).

Συγκεκριμένα για τον γραμμικό μετασχηματισμό της πρώτης τάξης προσέγγισης (FA) του S δηλ.

$$\Lambda=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)) \text{ με } \beta_i = e^{-(r+\frac{b^{2}}{2})i},$$

έχουμε

$$\tilde{d}_{FA}=\frac{n\beta-\sum_{i=0}^{n-1}e^{(r+\frac{b^{2}}{2})i}}{b}.$$

Για $\beta_i = \dfrac{n}{b}Var[\ln G]$ με τον γεωμετρικό μέσο (GA) G να ορίζεται από την (59), το Λ ισούται με τον τυποποιημένο λογάριθμο του γεωμετρικού μέσου και το αντίστοιχο d ισούται με

$$\tilde{d}_{GA}=\frac{\ln(\beta)+(r+\frac{b^{2}}{2})\frac{n-1}{2}}{\frac{b}{n}\sqrt{\frac{1}{3}n^{3}-\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{6}n}}.$$

5.5.5 Μερικώς ακριβές / συμμονοτονικό άνω φράγμα

Για ένα μερικώς ακριβές/συμμονοτονικό άνω φράγμα θυμίζουμε ότι για κάποια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή Λ υπάρχει d τέτοιο ώστε το $\Lambda \ge d$ να συνεπάγεται $S \ge n\beta$:

$$\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi(r_i b\sqrt{i}-d^*)-S(0)\beta\Phi(-d^*)$$

$$+\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{b^2}{2}r_i^2)i}\int_0^{\Phi(d^*)} e^{r_i b\sqrt{i}\Phi^{-1}(v)}\Phi\left(\sqrt{1-r_i^2}\,b\sqrt{i}-\Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(n\beta)\right)dv$$

$$-S(0)\beta\left(\Phi(d^*)-\int_0^{\Phi(d^*)} F_{S^u|V=v}(n\beta)dv\right)$$

όπου $d^* = \dfrac{d-E^{\tilde{Q}}[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$ και $v=\dfrac{\lambda-E^{\tilde{Q}}[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$.

Οι πρώτοι 2 όροι σχηματίζουν το ακριβές τμήμα του $\dfrac{S(0)}{n}E^{\tilde{Q}}[(S-n\beta)_+]$ ενώ οι 2 τελευταίοι όροι καθορίζουν το βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα του εναπομείναντος μέρους.

5.6 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΑΣΙΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΚΥΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι εάν κάποιος αναγνώστης ενδιαφέρεται να πραγματοποιήσει μια αριθμητική εφαρμογή για την περίπτωση των Ασιατικών δικαιωμάτων με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης δεν έχει παρά να εφαρμόσει τους σχετικούς τύπους της ενότητας 5.5 αξιοποιώντας παράλληλα τα συμμετρικά αποτελέσματα των Henderson and Wojakowski (2002) (βλέπε Παράρτημα) και την ισότητα πώλησης - αγοράς (σχέση 57).

Ειδικότερα, ο ενδιαφερόμενος εφαρμόζοντας την αλλαγή μέτρου (βλέπε σχέση 55) και βασιζόμενος στη σχέση

$$APF(S(0),\beta,r,\delta,T,n,T-n+1) = AC(\beta S(0),S(0),\delta,r,T,n,0)$$

που δίνεται στη σελίδα 94 του Παραρτήματος όπου η αριστερή ποσότητα αντιστοιχεί στο Ευρωπαϊκού τύπου, forward, Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης και η δεξιά στο Ευρωπαϊκού τύπου, forward, Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης μπορεί να ερμηνεύσει ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης σαν ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης $\beta S(0)$.

Τέλος, αν ληφθεί υπόψη η σχέση

$$APF(n,\beta,T) - ACF(n,\beta,T) = \frac{S(0)}{n}\frac{1-e^{-rn}}{1-e^{-r}} - \beta S(0). \tag{57}$$

που δηλώνει την ισότητα πώλησης – αγοράς εύκολα μπορεί να υπολογιστεί από το Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης το αντίστοιχο Ασιατικό δικαίωμα αγοράς.

Όπως προαναφέρθηκε μια αναλυτικότερη παρουσίαση των παραπάνω ισχυρισμών που είναι αναγκαία για την όποια αριθμητική εφαρμογή δίνεται στη σχετική ενότητα του Παραρτήματος συμμετρικά αποτελέσματα για αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Γενικές Παρατηρήσεις

1. Συμβολίζοντας την τιμή ενός αριθμητικού Ευρωπαϊκού τύπου Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με ημερομηνία λήξης T, n μέσες περιόδους και σταθερή τιμή εξάσκησης K ως $AP(n, K, T)$ τότε από την ισότητα πώλησης - αγοράς στο παρόν έχουμε:

$$AC(n,K,T) - AP(n,K,T) = \frac{S(0)}{n}\frac{1-e^{-rn}}{1-e^{-r}} - e^{-rT}K$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε φράγματα για το Ασιατικό δικαίωμα πώλησης από τα φράγματα για το δικαίωμα αγοράς.

2. Η περίπτωση συνεχούς μερίσματος δ μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα αντικαθιστώντας το επιτόκιο r με το $r-\delta$.

3. Τα άνω και κάτω φράγματα για τα forward starting Ασιατικά δικαιώματα μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν για την περίπτωση των in progress δικαιωμάτων. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε $T-n+1\leq 0$ και μόνο οι τιμές $S(1),\ldots,S(T)$ είναι άγνωστες.

Για την τιμή του option τότε ισχύει:

$$AC(n,K,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^{Q}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-nK\Big)_{+}\Big]$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}E^{Q}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{T-1}S(T-i)-\Big(nK-\sum_{i=T}^{n-1}S(T-i)\Big)\Big)_{+}\Big].$$

Οπότε αντικαθιστώντας το nK με το $nK-\sum_{i=T}^{n-1}S(T-i)$ και αθροίζοντας για τον μέσο από $i=0$ έως $i=T-1$ αντί έως $n-1$ υπολογίζονται εύκολα τα αντίστοιχα φράγματα.

4. Συμμετρικά αποτελέσματα για αριθμητικά Ασιατικά Δικαιώματα

Τα συμμετρικά αποτελέσματα ανάμεσα σε forward Ασιατικά δικαιώματα κυμαινόμενης και σταθερής τιμής εξάσκησης μελετήθηκαν από τους Henderson and Wojakowski (2002). Θεώρησαν την περίπτωση των Black & Scholes με συνεχόμενο μέρισμα δ.

Συμβολίζουμε με $ACF(S(0),\frac{K}{S(0)},\delta,r,T,n,0)$ το Ευρωπαϊκού – τύπου κυμαινόμενης τιμής εξάσκησης Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με ποσοστό $\frac{K}{S(0)}$, χρόνο λήξης T, forward με n όρους και πρώτο όρο το $S(0)$ και $(S(t))_t$ η συνηθισμένη Black & Scholes διαδικασία με αρχική τιμή $S(0)$, μέρισμα r και σταθερό επιτόκιο δ.

Επίσης, ορίζουμε αντίστοιχα την ποσότητα $AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1)$ η οποία αντιστοιχεί σε σταθερής τιμής εξάσκησης Ασιατικό δικαίωμα πώλησης ίση με K, χρόνο λήξης T, forward με n όρους και πρώτο όρο το $S(T-n+1)$. Όπως προηγουμένως, $(S(t))_t$ η συνηθισμένη Black & Scholes διαδικασία με αρχική τιμή

$S(0)$, μέρισμα δ και σταθερό επιτόκιο r. Με την βοήθεια των παραπάνω συμβολισμών διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = ACF(S(0),\frac{K}{S(0)},\delta,r,T,n,0)$$

$$ACF(S(0),\beta,r,\delta,T,n,T-n+1) = AP(\beta S(0),S(0),\delta,r,T,n,0)$$

και

$$AC(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = APF(S(0),\frac{K}{S(0)},\delta,r,T,n,0)$$

$$APF(S(0),\beta,r,\delta,T,n,T-n+1) = AC(\beta S(0),S(0),\delta,r,T,n,0) \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το πρώτο συμμετρικό αποτέλεσμα καθώς τα υπόλοιπα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

$$\begin{aligned}
&AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1)\\
&= e^{-rT}E^{Q}\Big[\Big(K-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)\Big)_{+}\Big]\\
&= e^{-\delta T}E^{Q}\Big[\frac{e^{-(r-\delta)T}S(T)}{S(0)}\Big(\frac{KS(0)}{S(T)}-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T-i)S(0)}{S(T)}\Big)_{+}\Big]\\
&= e^{-\delta T}E^{\tilde{Q}}\Big[\Big(\frac{KS(0)}{S(T)}-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(0)\exp\Big[-(r-\delta+\frac{b^2}{2})i+b\big(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)\big)\Big]\Big)_{+}\Big],
\end{aligned}$$

όπου $\tilde{Q}$ το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας του Q των Radon – Nikodym αλλά τώρα λαμβάνοντας υπόψη και το μέρισμα δ

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = \frac{S(T)}{S(0)e^{(r-\delta)T}} = \exp\,(-\frac{b^2}{2}T+bB(T)).$$

Υπο αυτή την πιθανότητα $\tilde{Q}$, το $\tilde{B}(t)=B(t)-bt$ είναι μια κίνηση Brown και έτσι έχουμε

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = ((r-\delta)+b^2)dt+bd\,\tilde{B}(t)\,.$$

Λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων , το $\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)$ έχει την ίδια κατανομή με τα $\tilde{B}(i)$, $-\tilde{B}(i)$ και μπορούμε να επικεντρωθούμε στην διαδικασία $(S^*(t))_t$ που ορίζεται ως εξής:

$$S^*(i) = S(0)\exp\left[-(r-\delta+\frac{b^2}{2})i + b\tilde{B}(i)\right].$$

Πράγματι, τότε

$$\begin{aligned} &AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) \\ &= e^{-\delta T} E^{\tilde{Q}}\Big[\Big(\frac{KS^*(T)}{S(0)} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S^*(i)\Big)_+\Big] \\ &= e^{-\delta T} E^{Q}\Big[\Big(\frac{K\tilde{S}(T)}{S(0)} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{S}(i)\Big)_+\Big] \end{aligned}$$

με την διαδικασία ($\tilde{S}(t)$)$_t$ να ορίζεται από την

$$\tilde{S}(i) = S(0)\exp\left[-(r-\delta+\frac{b^2}{2})i + bB(i)\right]$$

με $(B(t))_t$ μια κίνηση Brown υπο το Q.

Συμπερασματικά,

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = ACF(S(0),\frac{K}{S(0)},\delta,r,T,n,0) \qquad \blacksquare$$

B. Αριθμητική σύγκριση των διαφόρων μεθόδων

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια αποτελέσματα από τον υπολογισμό φραγμάτων με βάση τις μεθόδους που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2 και στο Κεφάλαιο 5. Για διευκόλυνση του αναγνώστη συγκεντρώσαμε παρακάτω τους σχετικούς τύπους που εφαρμόζονται για κάθε μέθοδο.

Μέθοδοι – Τύποι υπολογισμού

- Μέθοδος προσέγγισης της κατανομής του S από την Λογαριθμοκανονική κατανομή

$$u(x, t\,; r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\left[e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{\sigma^2+\mu-\ln K}{\sigma}\right) - K\Phi\left(\frac{\mu-\ln K}{\sigma}\right)\right]$$

- Μέθοδος προσέγγισης της κατανομής του S από την Αντίστροφη Gauss κατανομή

$$u(x, t\,;\, r, b, n, T, K) = e^{-r(T-t)}\Big[(\rho - K)\,\Phi\Big(\frac{\rho - K}{\sqrt{\beta K}}\Big) +$$

$$(\rho + K)\, e^{2\rho/\beta}\,\Phi\Big(-\frac{\rho + K}{\sqrt{\beta K}}\Big)\Big]$$

- Μέθοδος υπολογισμού Κάτω Φράγματος **LB**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S - nK)_{+}] \geq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S^{l} - nK)_{+}]$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\Big[b\rho_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nK))\Big] - e^{-rT}K(1 - F_{S^{l}}(nK))$$

και $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i B(T-i)$, $\beta_i \in R^{+}$

- Μέθοδος υπολογισμού Κάτω Φράγματος **LB$_{FA}$**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S - nK)_{+}] \geq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S^{l} - nK)_{+}]$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\Big[b\rho_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nK))\Big] - e^{-rT}K(1 - F_{S^{l}}(nK))$$

και $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i)$

- Μέθοδος υπολογισμού Κάτω Φράγματος **LB$_{GA}$**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S - nK)_{+}] \geq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S^{l} - nK)_{+}]$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi\Big[b\rho_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nK))\Big] - e^{-rT}K(1 - F_{S^{l}}(nK))$$

και $\Lambda = \dfrac{\ln \mathrm{G} - E^{Q}[\ln \mathrm{G}]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln \mathrm{G}]}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)]}} \sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)$

- Μέθοδος υπολογισμού Κάτω Φράγματος **LB*B*$_{T}$**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S - nK)_{+}] \geq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S^{l} - nK)_{+}]$$

$$= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} \Phi\left[b\rho_{T-i} \sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{l}}(nK)) \right] - e^{-rT} K (1 - F_{S^{l}}(nK))$$

και $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$

- Μέθοδος υπολογισμού Συμμονοτονικού Άνω Φράγματος **CUB**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S - nK)_{+}] \leq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S^{c} - nK)_{+}]$$

$$= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} \Phi\left[b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{c}}(nK)) \right] - e^{-rT} K (1 - F_{S^{c}}(nK))$$

που ισχύει για κάθε $K > 0$.

- Μέθοδος υπολογισμού Βελτιωμένου Συμμονοτονικού Άνω Φράγματος **ICUB**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[(S - nK)_{+}\right] \leq \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[(S^{u} - nK)_{+}\right],$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n} \Big[\sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{r(T-i)} e^{-\frac{b^2}{2}\rho^{2}_{T-i}(T-i)}$$

$$\int_{0}^{1} e^{\rho_{T-i} b\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(v)} \Phi\left(\sqrt{1-\rho^{2}_{T-i}}\, b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{u}} | V = v(nK)) \right) dv - nK(1 - F_{S^{u}}(nK)) \Big]$$

και $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$

- Μέθοδος υπολογισμού Άνω Φράγματος με την προσέγγιση των Rogers & Shi **UB$_{FA}$**

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[(S - nK)_{+}\right]$$

$$\le \frac{e^{-rT}}{n}\left\{\mathrm{E}^{Q}[(S^{l}-nK)_{+}]+\frac{1}{2}\,\mathrm{E}^{Q}\left[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\right]\right\}$$

και $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i)$

Δηλαδή $\mathrm{UB}_{FA} = \mathrm{LB}_{FA} + \varepsilon(d)$, με $d = +\infty$

- Μέθοδος υπολογισμού Άνω Φράγματος με την προσέγγιση των Rogers & Shi $\mathbf{UB}_{FA_d}$

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[(S-nK)_{+}\right]$$

$$\le \frac{e^{-rT}}{n}\left\{\mathrm{E}^{Q}[(S^{l}-nK)_{+}]+\frac{1}{2}\,\mathrm{E}^{Q}\left[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\right]\right\}$$

Δηλαδή Άνω φράγμα = $\frac{e^{-rT}}{n}\left\{\ \mathrm{E}^{Q}[(S^{l}-nK)_{+}] + \text{σφάλμα φράγματος } \varepsilon(d_{FA})\right\}$

και $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i)$

Άρα $\mathrm{UB}_{FA_d} = \mathrm{LB}_{FA} + \frac{e^{-rT}}{n}\varepsilon(d_{FA})$

- Μέθοδος υπολογισμού Άνω Φράγματος των Nielsen and Sandmann $\mathbf{UB}_{GA_d}$

$$0 \le E^{Q}[E^{Q}[(S-nK)_{+}|\Lambda]-(S^{l}-nK)_{+}]$$

$$\le \frac{1}{2}(E^{Q}[\mathrm{var}(S|\Lambda)1_{\{\Lambda<d\}}])^{\frac{1}{2}}(E^{Q}[1_{\{\Lambda<d\}}])^{\frac{1}{2}} \rightarrow \textbf{σφάλμα φράγματος}$$

και

$$\Lambda = \frac{\ln \mathrm{G} - E^{Q}[\ln \mathrm{G}]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln \mathrm{G}]}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)]}}\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)$$

$$d_{GA} = \frac{n\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}(r-\frac{b^2}{2})(T-i)}{b\sqrt{n^2T-\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)}}$$

Δηλαδή $\mathrm{UB}_{GA_d} = \mathrm{LB}_{GA} + \dfrac{e^{-rT}}{n}\ \varepsilon(d_{GA})$

- Μέθοδος υπολογισμού Άνω Φράγματος **UB*B_T***

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\big[(S-nK)_{+}\big]$$

$$\leq \frac{e^{-rT}}{n}\ \Big\{\mathrm{E}^{Q}[(S^{l}-nK)_{+}] + \frac{1}{2}\ \mathrm{E}^{Q}\Big[\sqrt{\mathrm{var}(S|\Lambda)}\ \Big]\Big\}$$

και $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$

Δηλαδή $\mathrm{UB}B_T = \mathrm{LB}B_T + \varepsilon(d)$, με $d = +\infty$

- Μέθοδος υπολογισμού Μερικώς Ακριβούς / Συμμονοτονικού Άνω Φράγματος των Nielsen and Sandmann **PECUB**

$$\frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(S-nK)_{+}]$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n}\Big\{\int_{-\infty}^{d} E^{Q}[(S-nK)_{+}|\Lambda=\lambda]dF_{\Lambda}(\lambda) + \int_{d}^{+\infty} E^{Q}[S-nK|\Lambda=\lambda]dF_{\Lambda}(\lambda)\Big\}$$

όπου

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{d}^{+\infty} E^{Q}[S-nK|\Lambda=\lambda]dF_{\Lambda}(\lambda)$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi(\rho_{T-i} b\sqrt{T-i} - d^{*}) - e^{-rT}K\Phi(-d^{*}) \rightarrow \textbf{Ακριβές τμήμα}$$

όπου

$$d^{*} = \frac{d - E^{Q}[\Lambda]}{\sigma_{\Lambda}} \text{και } v = \frac{\lambda - E^{Q}[\Lambda]}{\sigma_{\Lambda}}.$$

και

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d} E^{Q}[(S - nK)_{+}|\Lambda=\lambda]f_{\Lambda}(\lambda)d\lambda$$

$$\leq \frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d} E^{Q}[(S^{u} - nK)_{+} \left| \Lambda = \lambda \right] f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \frac{e^{-rT}}{n}\int_{0}^{\Phi(d^{*})} E^{Q}[(S^{u} - \mathrm{nK})_{+} \left| V = v \right] dv$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} e^{-\frac{b^2}{2}\rho^{2}{}_{T-i}(T-i)}$$

$$\times \int_{0}^{\Phi(d^{*})} e^{\rho_{T-i} b\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(v)} \Phi\left(\sqrt{1-\rho^{2}{}_{T-i}}\, b\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^{u}|_{V=v}}(nK))\right) dv$$

$$- e^{-rT} K\left(\Phi(d^{*}) - \int_{0}^{\Phi(d^{*})} F_{S^{u}|_{V=v}}(nK) dv\right) \rightarrow$$ **Βελτιωμένο Συμμονοτονικό Άνω φράγμα**

και $\Lambda = \dfrac{\ln \mathrm{G} - E^{Q}[\ln \mathrm{G}]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln \mathrm{G}]}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)]}}\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)$

ΚΑΠΟΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα δεδομένα είναι ίδια με αυτά της εφαρμογής του Κεφαλαίου 2. Η τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν είναι 100 δηλ. ***S*(0) = 100**, το ετήσιο επιτόκιο r = 9% (δηλ. $\boldsymbol{r} = \frac{\;}{\;}$ **ln(1 + 0.09) για ημερήσια δεδομένα**), ο χρόνος λήξης ***T* = 120 μέρες** και η μέση περίοδος ***n* = 30 μέρες**. Θα υπολογιστεί η τιμή του Asian option για διάφορες τιμές της πτητικότητας b και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος K.

Αν b = 0.2 (ετήσια δεδομένα) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b} = \frac{\;}{\sqrt{\;}}$ **(ημερήσια δεδομένα)**

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας Α

b	***K***	**LN**	**IG**	**LB*FA***	**LB*GA***	**LB*B*$_T$**
	90	12,68	12,68	12,7600	12,7600	12,6917

0,2	100	5,46	5,46	5,5216	5,5216	5,3649
	110	1,63	1,63	1,6528	1,6528	1,5182
0,3	90	13,85	13,85	13,9245	13,9245	13,7636
	100	7,48	7,48	7,5346	7,5346	7,2957
	110	3,48	3,48	3,5175	3,5175	3,2889
0,4	90	15,36	15,36	15,4237	15,4237	15,1727
	100	9,51	9,51	9,5641	9,5641	9,2441
	110	5,48	5,48	5,5175	5,5175	5,1996

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι τα LB_{FA}, LB_{GA} είναι ίδια ενώ τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι συγκριτικά καλύτερα από αυτά του LBB_T .

Πίνακας Β

b	K	LN	IG	UB*FA*	UBFA_d	UBGA_d	UBB_T	PECUB	ICUB	CUB
0,2	90	12,68	12,68	12,7722	12,7615	12,7612	14,1431	12,7780	12,7867	12,8030
	100	5,46	5,46	5,5338	5,5263	5,5262	6,8164	5,5663	5,5806	5,6161
	110	1,63	1,63	1,6649	1,6616	1,6614	2,9697	1,6957	1,7041	1,7353
0,3	90	13,85	13,85	13,9520	13,9300	13,9296	15,9415	13,9684	13,9859	14,0230
	100	7,48	7,48	7,5621	7,5457	7,5456	9,4736	7,6039	7,6244	7,6785
	110	3,48	3,48	3,5449	3,5350	3,5347	5,4669	3,5890	3,6042	3,6565
0,4	90	15,36	15,36	15,4725	15,4358	15,4354	18,0782	15,4939	15,5186	15,5758
	100	9,51	9,51	9,6129	9,5840	9,5840	12,1496	9,6581	9,6842	9,7566
	110	5,48	5,48	5,5663	5,5463	5,5459	8,1051	5,6163	5,6377	5,7103

Από τον πίνακα Β γίνεται αντιληπτό ότι το βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα ICUB είναι μικρότερο από το συμμονοτονικό άνω φράγμα CUB. Επίσης το UB_{FA} δηλαδή το άνω φράγμα βασισμένο στην προσέγγιση των Rogers και Shi δίνει μικρότερα αποτελέσματα από το βελτιωμένο συμμονοντονικό άνω φράγμα ICUB. Επίσης γίνεται αντιληπτό ότι το **UBB_T** ($\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$) **δίνει τα χειρότερα**

αποτελέσματα και αυτό οφείλεται στο ότι το $B(T)$ διαφέρει πολύ από το S για $n \geq 1$ και το $E^Q[\sqrt{Var(S|B(T))}]$ είναι μεγάλο. Στις περιπτώσεις που

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{b^2}{2})(T-i)} B(T-i) \text{ και } \Lambda = \frac{\ln G - E^Q[\ln G]}{\sqrt{\mathrm{var}[\ln G]}} \text{ τότε το } E^Q[\sqrt{Var(S|B(T))}]$$

είναι πολύ μικρό γιατί τα Λ,S είναι σχεδόν ίδια. **Τα καλύτερα αποτελέσματα** παίρνουμε από τον υπολογισμό του $\mathbf{UB}_{GA_d}$ ενώ και το UB_{FA_d} δίνει επίσης αρκετά καλά αποτελέσματα.

Το Μερικώς Ακριβές / Συμμονοτονικό Άνω Φράγμα PECUB των Nielsen και Sandmann δίνει μικρότερες τιμές από το βελτιωμένο συμμονοτονικό άνω φράγμα ICUB αλλά παρόλα αυτά δεν είναι τόσο καλές όσο θα περιμέναμε. Τέλος, τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η προσέγγιση τόσο με την Λογαριθμοκανονική όσο και με την Αντίστροφη Gauss κατανομή **υποεκτιμά** συστηματικά την τιμή του δικαιώματος μια που δίνουν τιμές μικρότερες από τα συμμονοτονικά κάτω φράγματα LB_{FA}, LB_{GA}.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Black, F., Scholes, M. (1973) “The pricing of options and corporate liabilities”. Journal of Political Economy **81**, 637-659

- Denuit, M., Lefévre, C., (1997) “Stochastic product orderings, with applications in actuarial sciences”. Bulletin Français d’Actuariat **1**, 61-82

- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., and Vyncke, D. (2002) “The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory”, forthcoming in Insurance: Mathematics and Economics

- Dhaene, J., Goovaerts, M.J. (1996) “Dependency of risks and stop-loss order”. ASTIN Bulletin **26**, 201-212

➢ Dhaene, J., Wang, S., Young, V., Goovaerts, M.J. (1998) "Comonotonicity and maximal stop-loss premiums". Research Report 9730. DTEW, KU Leuven, p.13, submitted for publication

➢ Goovaerts, M.J., Dhaene, J., De Schepper, A. (2000) "Stochastic upper bounds for present value functions". Journal of Risk and Insurance Theory **67.1**, 1-14

➢ Harrison, J.M., Kreps, D.M. (1979) "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets". Journal of Economic Theory **20**, 381-408

➢ Harrison, J.M., Pliska, S. (1981) "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading". Stochastic Processes and Their Applications **11**, 215-260

➢ Henderson, V., Wojakowski, R. (2002) "On the equivalence of floating and fixed – strike Asian options". Journal of Applied Probability **39**(2), 391-394

➢ Jacques, M. (1996) "On the hedging portfolio of Asian options". ASTIN Bulletin **26**, 165-183

➢ Kaas, R. (1994) "How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice". Insurance: Mathematics and Economics **21**, 241-254

➢ Kaas, R., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. (2000) "Upper and lower bounds for sums of random variables". Insurance: Mathematics and Economics **27**, 151-168

➢ Kemna, A.G.Z, Vorst, A.C.F. (1990) "A pricing method for options based on average asset value". Journal of Banking and Finance **14**, 113-129

➢ Levy, Edmond (1992) "Pricing European average rate currency options". Journal of International Money and Finance **11**, 474-491

➢ Muller, A. (1997) "Stop-loss order for portfolios of dependent risks". Insurance: Mathematics and Economics **21**, 219-223

➢ Nielsen, J.A., Sandmann, K. (2002) "Pricing Bounds on Asian options", forthcoming in Journal of Financial and Quantitative Analysis

➢ Rogers, L.C.G., Shi, Z. (1995) "The value of an Asian option". Journal of Applied Probability **32**, 1077-1088

➢ Shaked, M., Shanthikumar, J.G. (1994) "Stochastic Orders and Their Applications". Academic Press, New York, p. 545

➢ Simon, S., Goovaerts, M.J., Dhaene, J. (2000) "An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option". Insurance: Mathematics and Economics **26**, 175-183

➢ Turnbull, S.M., Wakeman, L.M. (1991) "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options ". Journal of Financial and Quantitative Analysis **26**, 377-389

➢ Vanmaele, M., Deelstra, G., Liinev, J., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. (2002) "Bounds for the price of discretely sampled arithmetic Asian options". Working paper Ghent University Version: September 17, 2002

➢ Vecer, J. (2001) "A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options". Journal of Computational Finance **4**(4), 105-113

➢ Vyncke, D., Goovaerts, M.J., Dhaene, J. (2000) "Convex upper and lower bounds for present value functions". Research Report 0025, Dept. of Applied Economics, KU Leuven, Belgium

➢ Wang, S., Dhaene, J. (1998) "Comonotonicity, correlation order and stop-loss premiums". Insurance: Mathematics and Economics **22**(3), 235-243