

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ  
ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ  
ΕΛΑΤΤΩΣΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ**

**Αργυράκης Δ. Λάμπρος**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς  
Απρίλιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... Συνεδρίασή του, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής *Κούτρας Μάρκος*
- Αναπληρωτής Καθηγητής *Δημήτριος Αντζουλάκος*
- Επίκουρος Καθηγητής *Μπούτσικας Μιχαήλ* (επιβλέπων)

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**SIMULATION OF RELIABILITY SYSTEMS  
USING VARIANCE REDUCTION TECHNIQUES**

**Labros D. Argyrakis**

**MSc Dissertation**

**Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of  
the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements  
for the degree of Master of Science in Applied Statistics**

**Piraeus, Greece**

**April 2007**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

**Στην οικογένειά μου ...**

## Ευχαριστίες

Στα πλαίσια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μπούτσικα Μιχάλη για τις εύστοχες παρατηρήσεις, τις χρήσιμες συμβουλές και επισημάνσεις καθώς και τη συνολική υποστήριξη και υπομονή του καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου.

## Περίληψη

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με μεθόδους μέσω των οποίων βελτιστοποιείται η διαδικασία προσομοίωσης συστημάτων με σύνθετη δομή. Σκοπός μας είναι να καταστεί δυνατή η μελέτη τους εκτιμώντας σημαντικές παραμέτρους που τα αφορούν και συγκεκριμένα την αξιοπιστία τους. Η πορεία που θα ακολουθήσουμε περιγράφεται παρακάτω.

Αρχικά στο Κεφάλαιο 1 θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες σχετικές με τα συστήματα αυτά, τα οποία ονομάζονται συστήματα αξιοπιστίας. Στην περίπτωση που αυτά είναι πολύπλοκα, είτε λόγω μεγάλου αριθμού μονάδων, είτε επειδή εμφανίζουν πεπλεγμένη δομή, είναι πρακτικά αδύνατο να εργαστούμε με αναλυτικές μεθόδους προκειμένου να τα μοντελοποιήσουμε και να υπολογίσουμε την αξιοπιστία τους. Για να καταφέρουμε να επιτύχουμε κάτι τέτοιο θα βασιστούμε στην προσομοίωσή τους για την οποία και θα μιλήσουμε στο 2ο Κεφάλαιο της εργασίας. Όπως θα δούμε, η εκτίμηση της αξιοπιστίας μέσω προσομοίωσης θα μας δώσει τη δυνατότητα να ξεπεράσουμε κάποιες από τις δυσκολίες που η φύση του εγχειρήματος παρουσιάζει και τους περιορισμούς που θα είχαμε αν χρησιμοποιούσαμε αναλυτικές μεθόδους.

Η χρήση προσομοίωσης προϋποθέτει μεγάλη υπολογιστική ισχύ και επομένως η αξιοποίηση και η βέλτιστη χρήση των πόρων και του χρόνου που διαθέτουμε καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική. Παρόλο που μπορεί να έχουμε κατασκευάσει ένα σωστό θεωρητικά μοντέλο για την εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός συστήματος, σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται το πλήθος των αριθμών που απαιτούνται ώστε η εκτίμηση να είναι ικανοποιητική να είναι τόσο μεγάλο, που να καθιστά αποτρεπτικό το όλο εγχείρημα.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι είναι φυσικό να αναζητήσουμε μεθόδους που μπορούν να μας οδηγήσουν συντομότερα σε μια ικανοποιητική εκτίμηση της αξιοπιστίας. Σε αυτό το σημείο υπεισέρχονται έννοιες που αφορούν την 'αποτελεσματικότητα' μιας εκτιμήτριας συνάρτησης της αξιοπιστίας του συστήματος. Με αυτό ακριβώς θα ασχοληθούμε στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της εργασίας αυτής. Πιο συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε τρόπους τέτοιους ώστε να λάβουμε εκτιμήτριες της αξιοπιστίας του συστήματος με μικρότερη διασπορά από την αρχική πρωτογενή εκτιμήτρια συνάρτηση. Στα πλαίσια αυτά θα μελετήσουμε και θα συγκρίνουμε τις εξής μεθόδους ελάττωσης διακύμανσης:

- Τη μέθοδο των αντιθετικών τυχαίων μεταβλητών (Antithetic)

- Τη μέθοδο των ρυθμιστικών μεταβλητών (Control variates).
- Τη μέθοδο ελάττωσης διασποράς μέσω δέσμησης.
- Τη μέθοδο της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας (stratified sampling).
- Τη μέθοδο της δειγματοληψίας σπουδαιότητας (Importance sampling).

Στο 4ο και τελευταίο μέρος της εργασίας χρησιμοποιούμε παραδείγματα και εφαρμογές προκειμένου να έχουμε μια ένδειξη για την αποτελεσματικότητά των μεθόδων ελάττωσης διακύμανσης που εξετάζουμε. Χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πακέτο mathematica εκτελούμε μια σειρά προσομοιώσεων σε συγκεκριμένα συστήματα προκειμένου να συγκρίνουμε τα οφέλη που αποκομίζουμε από τη χρήση της κάθε τεχνικής ελάττωσης διακύμανσης.

## Abstract

In this Dissertation we are going to study computational issues related to reliability systems. Those systems arise in many modern applications involving coherent structures. Researchers, during their effort to study reliability systems are very often confronted with the complexity they present. In particular, the exact computation of their reliability is often not a very easy task.

In order to confront this problem effort has been made to develop efficient approximating schemes using analytic or simulation methods. In this dissertation we shall present several simulation techniques that can be used to estimate system's reliability. In particular, we shall employ standard variance reduction techniques and compare their effectiveness.

In Chapter 1 of this work, we present some basic notions related to the study of reliability systems such as structure functions of monotone systems.

In Chapter 2 we make a brief introduction to simulation theory and particular Monte Carlo estimation. We also discuss several techniques which can be used to estimate the reliability of a complex system.

In the next chapter, our basic objective is to obtain improved results via reduction of the variance of the reliability estimators. We briefly review some well known variance reduction techniques which are:

- The method of antithetic random variables
- The method of control variables
- Variance reduction through conditioning
- Stratified sampling
- Importance sampling

In last part of this work (Chapter 4), we use some examples and applications in order to show the effectiveness of the above techniques. By the use of computer software *mathematica*, we conduct a series of simulations for the estimation of system's reliability on some typical types of reliability systems. Our aim is to compare their relative effectiveness with respect to the usual (raw) Monte Carlo reliability estimation.



## Περιεχόμενα

<b>1. Εισαγωγή στη Θεωρία Αξιοπιστίας</b>	<b>1</b>
1.1. Μονότονα συστήματα	1
1.2. Μορφές συστημάτων αξιοπιστίας	4
1.3. Σύνολα λειτουργίας και διακοπής	6
1.4. Διάσπαση σε modules	10
<b>2. Εισαγωγή στις Μεθόδους Προσομοίωσης</b>	<b>12</b>
2.1 Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών.	15
2.2. Η μέθοδος της αντιστροφής	19
2.3. Η μέθοδος της σύνθεσης	21
2.4. Μέθοδος απόρριψης	23
<b>3. Μέθοδοι Ελάττωσης Διακύμανσης</b>	<b>25</b>
3.1. Αντιθετικές μεταβλητές (antithetic variates)	30
3.2. Μεταβλητές ελέγχου	33
3.3. Ελάττωση διασποράς μέσω δέσμευσης	36
3.4. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία	37
3.5. Δειγματοληψία σπουδαιότητας	38
<b>4. Εφαρμογή διαφόρων μεθόδων ελάττωσης διακύμανσης κατά την Monte-Carlo εκτίμηση της αξιοπιστίας</b>	<b>42</b>
4.1 Εφαρμογή της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών	42
4.1.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : $F$	42
4.1.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$	46
4.2. Εφαρμογή της μεθόδου των μεταβλητών ελέγχου	50
4.2.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : $F$ .	50
4.2.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$	53
4.3. Η μέθοδος της ελάττωσης διασποράς μέσω δέσμευσης	55
4.3.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : $F$	56
4.3.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$	58
4.4. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία	59
4.5. Δειγματοληψία σπουδαιότητας	60
4.5.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : $F$	61
4.5.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$	63

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1	iid συνεχόμενο 4-από-τα-30:G αντιθετικές	55
Πίνακας 2	iid 15-από-τα-30:G αντιθετικές	59
Πίνακας 3	non-iid 4-από-τα-10:G αντιθετικές	60
Πίνακας 4	iid συνεχόμενο 4-από-τα-30:G) μεταβλητές ελέγχου	63
Πίνακας 5	non-iid 4-από-τα-10:G μεταβλητές ελέγχου	64
Πίνακας 6	iid συνεχόμενο 4-από-τα-30:G δέσμευση	67
Πίνακας 7	non-iid 4-από-τα-10:G	69
Πίνακας 8	iid συνεχόμενο 4-από-τα-30:G	73
Πίνακας 9	non-iid 4-από-τα-10:G	74

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή στη Θεωρία Αξιοπιστίας

### 1.1. Μονότονα συστήματα

Με τον όρο σύστημα (μονάδων) εννοούμε ένα σύνολο συσχετιζόμενων ή ανεξάρτητων στοιχείων-οντοτήτων τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο τρόπο και αποτελούν έναν μηχανισμό. Τα στοιχεία αυτά ορισμένες φορές καλούνται και μονάδες του συστήματος. Κλασσικά παραδείγματα συστημάτων αποτελούν τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, τα συστήματα υπολογιστών κ.ο.κ.

Οι μονάδες κάθε συστήματος έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες, με βάση τα οποία εκδηλώνουν κάποιες συμπεριφορές, οι οποίες περιγράφονται με λογικούς τελεστές ή αριθμητικές τιμές. Για παράδειγμα σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί κάποια στοιχεία του να λειτουργούν ενώ άλλα όχι κτλ. Όπως γίνεται φανερό οι καταστάσεις των μονάδων του συστήματος καθορίζουν την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ολόκληρο το σύστημα.

Η θεωρία αξιοπιστίας πρωτοεμφανίστηκε το δέκατο ένατο αιώνα. Αναπτύχθηκε αυτόνομα και ξεχωριστά από τις Πιθανότητες και τη Στατιστική. Χρησιμοποιήθηκε κυρίως ως εργαλείο από εταιρίες ασφαλίσεων ζωής καθώς και εταιρίες ασφαλίσεων που δρούσαν στο χώρο της ναυσιπλοΐας. Αρχικά ο κύριος σκοπός χρήσης της θεωρίας αξιοπιστίας ήταν ο υπολογισμός του ποσοστού κέρδους των πελατών των εταιριών αυτών, το οποίο με τη σειρά του στηριζόταν σε μια πολύ βασική έννοια για τη θεωρία αξιοπιστίας, του ποσοστού ή της πιθανότητας αποτυχίας.

Η θεωρία αξιοπιστίας ασχολείται με συστήματα τα οποία ονομάζονται συστήματα αξιοπιστίας και αφορούν κυρίως μηχανές και υπολογιστικά συστήματα. Κύριος σκοπός της είναι ο υπολογισμός της αξιοπιστίας των συστημάτων αυτών. Βέβαια υπάρχουν κλάδοι, όπως είναι για παράδειγμα ο χώρος της υγείας, στους οποίους ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική καταλήγουμε σε παρεμφερή συμπεράσματα (βλ. Rubinstein and Melamed (1998)). Εκεί μιλάμε για ανάλυση επιβίωσης, θνησιμότητα και άλλες έννοιες που έχουν κοινό υπόβαθρο με τις δομές της θεωρίας αξιοπιστίας. Μπορούμε απλά να αντιπαραβάλλουμε την

αποτυχία μιας μηχανικής συσκευής όπως ένα αυτοκίνητο ή ένας υπολογιστής με τον θάνατο ενός βιολογικού οργανισμού. Ο θάνατος ή η αποτυχία καλείται γεγονός και όπως αναφέραμε ο βασικός σκοπός στη θεωρία αξιοπιστίας, είναι η μελέτη και η πρόβλεψη του ποσοστού των γεγονότων αυτών (αλλιώς συμβάντων) σε ένα σύστημα ή μια ανεξάρτητη μονάδα. Έτσι πολλές φορές οι κλάδοι αυτοί αλληλοσυμπληρώνονται και συμπλέκονται.

Γενικότερα στην καθημερινότητα, ως αξιοπιστία ενός συστήματος αντιλαμβανόμαστε την ικανότητα του συστήματος να αποδίδει και να διατηρεί τις ιδιότητες και την ποιότητα που κατασκευάστηκε και δημιουργήθηκε να έχει, κάτω από κάποιες συνθήκες λειτουργίας. Παρόλα αυτά η αξιοπιστία πολλές φορές υπόκειται σε υποκειμενική θεώρηση, καθώς τα αποτελέσματα της επηρεάζουν συχνά το ευρύ κοινό σε μεγάλο βαθμό. Για παράδειγμα η συντριβή ενός αεροσκάφους με πολλά θύματα, οδηγεί συχνά σε λανθασμένες εντυπώσεις για την πραγματική ασφάλεια των αερομεταφορέων, που σαφώς είναι αντίθετη με την πραγματικότητα. Έτσι όσο κι αν η αξιοπιστία είναι μια συνηθισμένη και εύληπτη έννοια στο ευρύ κοινό, η ανάγκη για δημιουργία αντικειμενικών τρόπων υπολογισμού της για τα συστήματα αξιοπιστίας είναι προφανής.

Στη θεωρία αξιοπιστίας πρωταρχικό στοιχείο βάσης αποτελεί η μονάδα. Μονάδα καλείται ένα βασικό στοιχείο το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε μια από δυο καταστάσεις, κατάσταση λειτουργίας ή μη λειτουργίας. Ως σύστημα αξιοπιστίας ορίζουμε οποιοδήποτε σύνολο πεπερασμένου αριθμού μονάδων, κάθε μια από τις οποίες δύναται να λειτουργεί ή να μη λειτουργεί με κάποια πιθανότητα. Η λειτουργία ή όχι της κάθε μονάδος και ο τρόπος με τον οποίο αυτές συνδέονται μεταξύ τους προκειμένου να σχηματίζουν το σύστημα, καθορίζουν κατ'επέκταση τη λειτουργία ή όχι ολόκληρου του συστήματος.

Το σύνολο των μονάδων του συστήματος, έστω  $n$  το πλήθος, το συμβολίζουμε με ένα σύνολο  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Προκειμένου να δηλώσουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται καθεμιά από τις μονάδες του υπό μελέτη συστήματος, χρησιμοποιούμε μια δείκτρια συνάρτηση  $s_i$ , η οποία παίρνει τιμές 1 ή 0 ανάλογα με το αν η μονάδα  $i$  λειτουργεί ή όχι.

Έτσι θα έχουμε:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{αν η } i\text{-μονάδα λειτουργεί} \\ 0 & \text{αν η } i\text{-μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Αντίστοιχα με τη δείκτρια συνάρτηση  $s_i$  των μονάδων, ορίζεται και η δείκτρια συνάρτηση  $\varphi$  η οποία περιγράφει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται κάθε στιγμή το σύστημα και η οποία επίσης παίρνει τιμές 1 ή 0 ανάλογα με το αν το σύστημα λειτουργεί ή όχι.

$$f = \begin{cases} 1 & \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0 & \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Κάθε σύστημα έχει μια συγκεκριμένη δομή. Η μορφή της, δηλαδή ο τρόπος που συνδέονται οι μονάδες μεταξύ τους, καθορίζει πλήρως τη κατάσταση του συστήματος σε σχέση με τις καταστάσεις των μονάδων. Αν ονομάσουμε  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  το διάνυσμα κατάστασης των  $n$  μονάδων του συστήματος, τότε η συνάρτηση  $\varphi = \varphi(\mathbf{s})$  ονομάζεται συνάρτηση δομής του συστήματος.

**Ορισμός.** Η συνάρτηση  $\varphi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  η οποία σε κάθε διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{s}$  των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση  $\varphi(\mathbf{s})$  του συστήματος, λέγεται συνάρτηση δομής (*structure function*) του συστήματος.

Στη συνέχεια, λέγοντας ότι ένα σύστημα είναι μονότονο εννοούμε ότι η βελτίωση της κατάστασης μιας μονάδος του, δεν οδηγεί στην χειροτέρευση της κατάστασης του συστήματος. Αυτή είναι μια ιδιότητα που είναι λογικό να αναμένουμε από ένα σύστημα και από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι όλα τα συστήματα αξιοπιστίας που εξετάζουμε είναι μονότονα συστήματα. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

**Ορισμός:** Ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο αν ισχύει ότι

(1) Κάθε μονάδα του συστήματος επηρεάζει το σύστημα

(2) Η συνάρτηση δομής του συστήματος  $\varphi(\mathbf{s})$  είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, δηλαδή

$$\mathbf{s} \leq \mathbf{c} \Rightarrow \varphi(\mathbf{s}) \leq \varphi(\mathbf{c}),$$

όπου για τα διανύσματα κατάστασης  $\mathbf{s}, \mathbf{c} \in \{0,1\}^n$ , η ανισότητα  $\mathbf{s} \leq \mathbf{c}$  σημαίνει ότι  $s_i \leq c_i$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για τα μονότονα συστήματα ισχύουν :

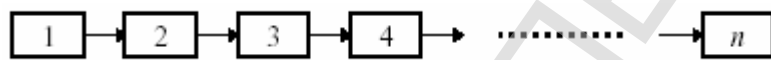
$$\varphi(\mathbf{1}) = 1 \text{ και } \varphi(\mathbf{0}) = 0.$$

Με άλλα λόγια σε ένα μονότονο σύστημα αν όλες του οι μονάδες λειτουργούν, τότε και το σύστημα θα λειτουργεί ενώ αν όλες του οι μονάδες είναι εκτός λειτουργίας, τότε αυτό δε θα λειτουργεί.

## 1.2. Μορφές συστημάτων αξιοπιστίας

Μερικά από τα πιο συνήθη συστήματα αξιοπιστίας είναι τα εξής:

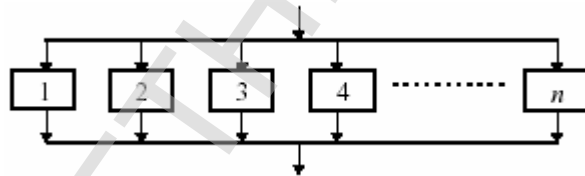
(1) **Σειριακό σύστημα.** Το σύστημα αυτό λειτουργεί, όταν λειτουργούν όλες οι μονάδες του. Ισοδύναμα δε λειτουργεί όταν δε λειτουργεί έστω και μια μονάδα του.



Η συνάρτηση δομής ενός σειριακού συστήματος, είναι ίση με :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

(2) **Παράλληλο σύστημα.** Το σύστημα αυτό λειτουργεί, όταν λειτουργεί τουλάχιστον μια μονάδα του. Ισοδύναμα δε λειτουργεί όταν χαλάσουν όλες οι μονάδες του συστήματος.



Η συνάρτηση δομής ενός παράλληλου συστήματος είναι:

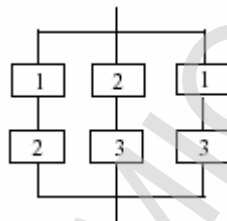
$$f(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \bigvee_{i=1}^n x_i$$

Στις δυο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δομής περιγράφει τη κατάσταση του συστήματος σε σχέση με την κατάσταση των μονάδων από τις οποίες αποτελείται, αφού επαληθεύεται ότι το σύστημα λειτουργεί (δηλαδή  $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ ) όταν πληρούνται οι συνθήκες λειτουργίας του και δε λειτουργεί ( $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ) στην αντίθετη περίπτωση.

Άλλες χαρακτηριστικές περιπτώσεις συστημάτων αξιοπιστίας είναι τα συστήματα  $S(n,k):G$  τα οποία λειτουργούν όταν λειτουργούν τουλάχιστον  $k$  μονάδες του συστήματος και τα  $C(n,k):F$  τα οποία δε λειτουργούν όταν  $k$  συνεχόμενες μονάδες του συστήματος αποτύχουν.

Στις δυο αυτές περιπτώσεις συστημάτων είναι πιο δύσκολο να βρούμε τη μορφή που θα έχει η συνάρτηση δομής τους.

Η συλλογιστική που ακολουθούμε σε αυτά τα συστήματα αλλά και σε παρόμοιες περιπτώσεις, στηρίζεται στην ιδέα ότι προσπαθούμε να μετατρέψουμε το σύστημα μας σε ένα ισοδύναμο σύστημα που όμως αποτελείται από ένα κατάλληλο συνδυασμό σειριακών και παράλληλων υποσυστημάτων, των οποίων οι συναρτήσεις δομής έχουν γνωστή μορφή. Λέγοντας ισοδύναμο σύστημα εννοούμε ένα σύστημα το οποίο θα λειτουργεί ή όχι όταν πληρούνται οι ίδιες προϋποθέσεις με το αρχικό. Έτσι για παράδειγμα ένα  $S(3,2):G$  σύστημα, το οποίο λειτουργεί αν λειτουργούν δυο από τις τρεις μονάδες του, είναι ισοδύναμο με το να έχουμε σε παράλληλη διάταξη τρία σειριακά συστήματα, τα  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  και  $(1,3)$  όπως στο σχήμα που φαίνεται παρακάτω:

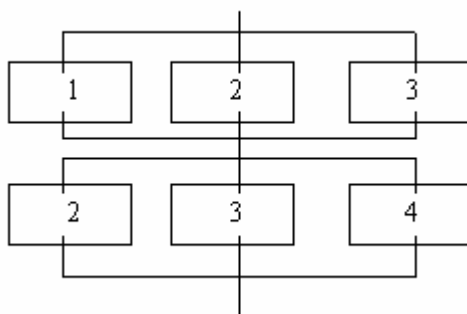


Σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει για τα παράλληλα και σειριακά συστήματα, η συνάρτηση δομής του πιο πάνω συστήματος είναι :

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 x_2) C (x_2 x_3) C (x_3 x_1) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_2 x_3)(1 - x_3 x_1).$$

Εφόσον το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το  $S(3,2):G$  η συνάρτηση δομής του θα είναι και συνάρτηση δομής του  $S(3,2):G$ .

Με όμοιο τρόπο, ένα  $C(4,3):F$  σύστημα για παράδειγμα, μπορεί να αντιμετωπιστεί ως δυο σε σειρά παράλληλα συστήματα  $(1,2,3)$  και  $(2,3,4)$ , καθότι αυτό αποτυγχάνει μόνο αν χαλάσουν οι μονάδες 1,2,3 ή οι μονάδες 2,3,4 ταυτόχρονα. Σχηματικά είναι:



Η συνάρτηση δομής του παραπάνω συστήματος είναι εμφανές ότι είναι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)][1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)]$$

Όπως βλέπουμε λοιπόν ο υπολογισμός της συνάρτησης δομής ενός συστήματος μπορεί ανάλογα το σύστημα να είναι αρκετά δύσκολο εγχείρημα. Αποδεικνύεται όμως πως ισχύει η πιο κάτω πρόταση, η οποία μας διευκολύνει αρκετά στον υπολογισμό της συνάρτησης δομής οποιουδήποτε συστήματος.

**Πρόταση.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση δομής ενός συστήματος  $n$  μονάδων, τότε για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  ισχύει:

$$1. \varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \varphi(0_i, \mathbf{x}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$2. \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0, 1\}^n} \left( \prod_{i=1}^n x_i^{y_i} (1 - x_i)^{1 - y_i} \right) \varphi(\mathbf{y})$$

όπου  $(1_i, \mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $(0_i, \mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

### 1.3. Σύνολα λειτουργίας και διακοπής

Μία ακόμη έννοια που ορίζουμε προκειμένου να διευκολυνθούμε στον υπολογισμό της συνάρτησης δομής των συστημάτων που μελετάμε είναι τα σύνολα λειτουργίας και διακοπής των συστημάτων. Σε ένα μονότονο σύστημα καλούμε σύνολο λειτουργίας οποιοδήποτε υποσύνολο μονάδων του συστήματος των οποίων η λειτουργία εξασφαλίζει τη λειτουργία του συστήματος. Αντίστοιχα ως σύνολο διακοπής ορίζουμε οποιοδήποτε υποσύνολο μονάδων του συστήματος, των οποίων η μη λειτουργία προκαλεί τη διακοπή λειτουργίας του συστήματος.



Αν για ένα διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$  συμβαίνει ότι  $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ , δηλαδή το σύστημα λειτουργεί, τότε ονομάζουμε το διάνυσμα αυτό *διάνυσμα λειτουργίας* του συστήματος (δ.λ). Στην περίπτωση μάλιστα που συμβαίνει να ισχύει  $\varphi(\mathbf{y}) = 0$  για κάθε  $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ , τότε το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  θα καλείται *ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας* (ε.δ.λ), αφού θα είναι το διάνυσμα με το μικρότερο δυνατό πλήθος μονάδων σε λειτουργία οι όποιες εξασφαλίζουν τη λειτουργία του συστήματος. Επίσης αν  $\mathbf{x}$  είναι δ.λ. τότε το σύνολο των μονάδων που λειτουργούν στο διάνυσμα είναι αυτό που προηγουμένως ονομάσαμε σύνολο λειτουργίας (σ.λ). Δηλαδή,

$$P_x = \{i : x_i = 1\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}.$$

Στην περίπτωση που το  $\mathbf{x}$  είναι ε.δ.λ τότε το σύνολο λειτουργίας  $P_x$  ονομάζεται *ελάχιστο σύνολο λειτουργίας* (ε.σ.λ).

Αντίστοιχα κάθε διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$  για το οποίο ισχύει  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ , δηλαδή το σύστημα δε λειτουργεί, το ονομάζουμε *διάνυσμα διακοπής* (δ.δ) του συστήματος και μάλιστα αν ισχύει ότι  $\varphi(\mathbf{y}) = 1$  για κάθε  $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ , τότε το  $\mathbf{x}$  θα καλείται *ελάχιστο διάνυσμα διακοπής* (ε.δ.δ). Αυτό θα είναι τότε το διάνυσμα με το μικρότερο δυνατό πλήθος μονάδων σε μη λειτουργία ώστε το σύστημα να μη λειτουργεί. Επίσης αν  $\mathbf{x}$  είναι δ.δ. τότε το σύνολο των μονάδων που δε λειτουργούν στο διάνυσμα είναι αυτό που προηγουμένα ονομάσαμε σύνολο διακοπής (σ.δ), δηλαδή

$$C_x = \{i : x_i = 0\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}.$$

Στην περίπτωση που το  $\mathbf{x}$  είναι ε.δ.δ τότε το σύνολο διακοπής  $C_x$  ονομάζεται *ελάχιστο σύνολο διακοπής* (ε.σ.δ).

Όπως είναι φανερό από τον ορισμό που δόθηκε πιο πάνω, η λειτουργία ενός συστήματος συνεπάγεται και τη λειτουργία όλων των μονάδων κάποιου ε.σ.λ, ενώ η μη λειτουργία του συνεπάγεται τη μη λειτουργία όλων των μονάδων κάποιου ε.σ.δ. Την οικογένεια όλων των ε.σ.λ. του συστήματος τη συμβολίζουμε με  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$ , ενώ την οικογένεια όλων των ε.σ.δ. του συστήματος με  $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ .

Για παράδειγμα, για το σειριακό και το παράλληλο σύστημα που αναφέραμε παραπάνω, θα έχουμε τα ακόλουθα. Για το μεν σειριακό γνωρίζουμε ότι αυτό λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν, συνεπώς μοναδικό ε.σ.λ. είναι το  $\{1,2,\dots,n\}$ , ενώ χαλάει αν και μόνο αν έστω και μια μονάδα του παύσει να λειτουργεί και άρα ε.σ.δ. είναι τα  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,

...,  $\{n\}$ . Για το παράλληλο σύστημα ξέρουμε ότι αυτό χαλάει μόνο αν χαλάσουν όλες οι μονάδες του, άρα το μοναδικό ε.σ.δ είναι το  $\{1,2,\dots,n\}$ . Αντίστοιχα το σύστημα λειτουργεί αν έστω και μια μονάδα του λειτουργεί και άρα τα ε.σ.λ είναι τα  $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$ .

Όπως είπαμε η εύρεση των συνόλων λειτουργίας και διακοπής και κατ'επέκταση των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας και διακοπής ενός συστήματος διευκολύνει σημαντικά τον υπολογισμό της συνάρτησης δομής του συστήματος. Συγκεκριμένα γνωρίζοντας τις οικογένειες  $\mathbf{P}=\{P_1,P_2,\dots,P_M\}$  ή  $\mathbf{C}=\{C_1,C_2,\dots,C_N\}$  των ελάχιστων συνόλων λειτουργίας και διακοπής μιας μονότονης δομής, τότε για τη συνάρτηση δομής οποιουδήποτε συστήματος έχουμε

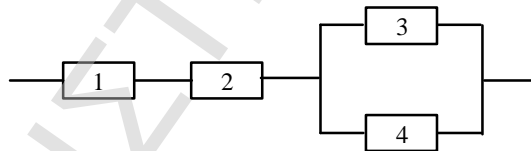
$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j \in \{1,2,\dots,M\}} \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \prod_{i \in P_j} x_i)$$

αν γνωρίζουμε την οικογένεια των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας, και

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j \in \{1,2,\dots,N\}} (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = \prod_{j=1}^N (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i))$$

αν γνωρίζουμε την οικογένεια των ελαχίστων συνόλων διακοπής.

Παρακάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της πιο πάνω πρότασης. Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα για την πιο κάτω μονότονη δομή θα έχουμε:



Το σύνολο των ε.σ.λ είναι το  $\mathbf{P} = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\}$  και το σύνολο των ελάχιστων συνόλων διακοπής είναι το  $\mathbf{C} = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$ . Χρησιμοποιώντας το σύνολο  $\mathbf{P}$ , η συνάρτηση δομής του συστήματος θα είναι

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^2 (1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_1 x_2 x_4)$$

ενώ κάνοντας χρήση του συνόλου  $\mathbf{C}$ ,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^3 (1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)) = (1 - (1 - x_1))(1 - (1 - x_2))(1 - (1 - x_3)(1 - x_4)).$$

Από τη στιγμή που θα βρούμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος, γνωρίζουμε την επίδραση που έχει η κατάσταση κάθε μονάδας στην κατάσταση του συστήματος. Αν θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , τότε η κάθε μονάδα του συστήματος θα λειτουργεί ή δε θα λειτουργεί με κάποια πιθανότητα, η οποία ονομάζεται *αξιοπιστία της μονάδας* και συμβολίζεται συνήθως με  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι η κατάσταση στην οποία βρίσκεται η κάθε μονάδα είναι τυχαία μεταβλητή αφού μπορεί να παίρνει μια από δυο τιμές με κάποια πιθανότητα. Αντίστοιχα η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος κάθε χρονική στιγμή ονομάζεται *αξιοπιστία του συστήματος* και συμβολίζεται συνήθως με  $R$ .

Όπως είδαμε προηγουμένως, η συνάρτηση δομής του συστήματος εξαρτάται από το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος. Επομένως, ενδιαφερόμαστε να δούμε ποια σχέση συνδέει την αξιοπιστία του συστήματος με τις αξιοπιστίες των μονάδων του.

Έστω ένα σύστημα με  $n$  μονάδες και το οποίο έχει συνάρτηση δομής  $\varphi$ . Ονομάζουμε  $X_i$  τη μεταβλητή που εκφράζει την κατάσταση της  $i$  μονάδας του συστήματος (τη χρονική στιγμή  $t$ ) η οποία παίρνει δυο τιμές: 1 και 0 ανάλογα αν η μονάδα αυτή λειτουργεί ή όχι. Η αξιοπιστία της  $i$  μονάδας είναι η πιθανότητα η τ.μ  $X_i$  να πάρει (τη χρονική στιγμή  $t$ ) την τιμή 1, ενώ η αναξιοπιστία της είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 0. Θα είναι

$$p_i = P(X_i = 1) = E(X_i), \quad \text{και} \quad q_i = P(X_i = 0) = 1 - p_i$$

Έτσι αν συμβολίσουμε με  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  το (τυχαίο) διάνυσμα κατάστασης των μονάδων, η συνάρτηση δομής του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t$  θα είναι τ.μ εξαρτώμενη από το  $\mathbf{X}$  και για την αξιοπιστία του συστήματος θα ισχύει,

$$R = E(\varphi(\mathbf{X})) = E(\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 \cdot P(\varphi(\mathbf{X})=1) + 0 \cdot P(\varphi(\mathbf{X})=0) = P(\varphi(\mathbf{X})=1).$$

Όμοια με την αναξιοπιστία της μονάδας, ορίζουμε ως αναξιοπιστία του συστήματος την πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος.

$$F = 1 - R = P(\varphi(\mathbf{X})=0).$$

Όπως είδαμε προηγουμένως, η εύρεση των ε.σ.δ και ε.σ.λ οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης δομής του συστήματος. Συγκεκριμένα είδαμε ότι:

$$\Phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{P \in \mathbf{P}} (1 - \prod_{i \in P} x_i) = \prod_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod_{i \in C} (1 - x_i)).$$

Έτσι η αξιοπιστία του συστήματος χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές θα είναι,

$$R(\mathbf{p}) = E(\varphi(\mathbf{X})) = E\left\{1 - \prod_{p \in \mathbf{P}} (1 - \prod_{i \in \mathbf{P}} X_i)\right\} = E\left\{\prod_{C \in \mathbf{C}} (1 - \prod_{i \in C} (1 - X_i))\right\}.$$

όπου  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ .

#### 1.4. Διάσπαση σε modules

Πολλές φορές, όταν μελετούμε μεγάλα συστήματα, διευκολύνει να τα χωρίζουμε κατάλληλα σε μικρότερα συστήματα ώστε να γίνεται ευκολότερα ο υπολογισμός της συνάρτησης δομής τους και γενικότερα η μελέτη τους. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως ανάλυση συστημάτων σε modules. Κατά τη διαδικασία αυτή ουσιαστικά το σύστημα χωρίζεται σε μικρότερα υποσυστήματα (modules) τα οποία όμως έχουν όλα διαφορετικές μονάδες. Έπειτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση δομής τους και θεωρώντας κάθε ένα υποσύστημα σαν μονάδα, υπολογίζουμε τη συνάρτηση δομής του συστήματος. Είναι φανερό ότι, ειδικά σε περιπτώσεις όπου έχουμε υποσυστήματα όμοια μεταξύ τους, η μέθοδος αυτή διευκολύνει πολύ την μελέτη τους, καθότι αρκεί ο υπολογισμός της συνάρτησης δομής καθενός από αυτά μία μόνο φορά. Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση δομής του αρχικού συστήματος έχει την μορφή:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \zeta(y_1(x^{M_1}), y_2(x^{M_2}), \dots, y_r(x^{M_r})).$$

Έτσι η αξιοπιστία του συστήματος τώρα θα είναι :

$$R_f = E(f(x)) = R_z(E(Y_1), \dots, E(Y_r)) = R_z(R_{y_1}, \dots, R_{y_r}),$$

όπου  $R_\varphi$  η αξιοπιστία του συστήματος που μας ενδιαφέρει,  $R_z$  η αξιοπιστία του συστήματος με συνάρτηση δομής τη  $\zeta$  και μονάδες τα modules, και  $R_{y_i}$  η αξιοπιστία του κάθε module.

Η αξιοπιστία κάθε μονότονου συστήματος είναι αύξουσα συνάρτηση και αν οι αξιοπιστίες των μονάδων από τις οποίες αποτελείται παίρνουν τιμές στο διάστημα (0,1), τότε η αξιοπιστία του συστήματος είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μονότονο σύστημα όταν η πιθανότητα λειτουργίας μιας μονάδας του αυξάνεται, τότε αυξάνεται και η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος. Τέλος για κάθε σύστημα με συνάρτηση δομής  $\varphi$  ισχύει ότι:

$$A. R(\mathbf{p}) = p_i R(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) R(0_i, \mathbf{p}) \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n$$

$$B. R(p) = \sum_{y \in \{0,1\}^n} \left( \prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} \right) f(y).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Εισαγωγή στις Μεθόδους Προσομοίωσης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία που αφορούσαν τη μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας. Επίσης αναφερθήκαμε στην σπουδαιότητα που έχει η κατασκευή κατάλληλων μοντέλων για την μελέτη τους. Έχει ιδιαίτερη σημασία η δυνατότητα να εκτιμούμε διάφορες παραμέτρους των συστημάτων που μας ενδιαφέρουν και μέσω αυτών να προβλέπουμε την μελλοντική συμπεριφορά των φαινομένων που αυτά συνεπάγονται. Τίθενται λοιπόν αρχικά τα ερωτήματα: ποιος είναι ο δρόμος που οδηγεί στην πρόβλεψη, και πότε μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα φαινόμενο ως προβλέψιμο;

Η απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα είναι η εξής: Ένα φαινόμενο είναι προβλέψιμο όταν είναι μοντελοποιήσιμο. Όταν δηλαδή είναι δυνατή η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου που να περιγράφει το φαινόμενο, δηλαδή το σύστημα που το δημιουργεί. Ένα μαθηματικό μοντέλο, έχει ως σκοπό την «περιγραφή» μιας παρατηρούμενης συμπεριφοράς. Με τον όρο «περιγραφή» εννοούμε την ικανότητα του μοντέλου να αναπαράγει όσο το δυνατόν ακριβέστερα την παρατηρούμενη συμπεριφορά. Ουσιαστικά δηλαδή πρόκειται για μια ποσοτικοποιημένη περιγραφή ενός φαινομένου. (βλ. Taylor and Karlin (1998))

Τα μοντέλα διακρίνονται στα ντετερμινιστικά ή αλλιώς προσδιοριστικά ή αιτιοκρατικά μοντέλα και στα στοχαστικά μοντέλα. Στα πρώτα, η γνώση των αρχικών συνθηκών αρκούν για να περιγράψουν επακριβώς την μελλοντική συμπεριφορά του φαινομένου, ενώ στα στοχαστικά μοντέλα οι αρχικές συνθήκες δεν είναι επαρκείς για κάτι τέτοιο. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει επίδραση πολλών εξωγενών παραγόντων (καλούνται και παράγοντας «τύχη»). Στα στοχαστικά μοντέλα μπορεί να γίνει πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφορά του φαινομένου μόνο με κάποια πιθανότητα.

Ουσιαστικά οι έννοιες του μοντέλου και του φαινομένου είναι αλληλένδετες και είναι αυτή η δυνατότητα περιγραφής του φαινομένου από το υπάρχον μαθηματικό υπόβαθρο που διαθέτουμε, που θα κατατάξει το εκάστοτε φαινόμενο σαν ντετερμινιστικό ή στοχαστικό. Με άλλα λόγια η μαθηματική μας υποδομή και η υπολογιστική ισχύς που διαθέτουμε, καθώς και η ακρίβεια των μετρήσεων που μπορούμε να διενεργήσουμε είναι τα όρια που θα καθορίσουν

σε ποια από τις δυο κατηγορίες θα κατατάξουμε το εκάστοτε υπό μελέτη φαινόμενο / σύστημα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις διαδικασίες που αφορούν τη μελέτη στοχαστικών φαινομένων. Προκειμένου να μελετήσουμε διάφορα στοχαστικά φαινόμενα χρησιμοποιούμε κυρίως τρεις μεθόδους:

(1) **Αναλυτικές Μέθοδοι:** Η μελέτη διαφόρων στοχαστικών φαινομένων μπορεί να γίνει αφού πρώτα πραγματοποιηθεί κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση τους. Στη συνέχεια οδηγούμαστε σε διάφορα συμπεράσματα που αφορούν το αρχικό στοχαστικό φαινόμενο μελετώντας το μαθηματικό μοντέλο που κατασκευάσαμε για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του. Παρόλα αυτά, ένα αυστηρό μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει απόλυτα το φαινόμενο μας, μπορεί να είναι πολύπλοκο και να δυσχεραίνεται έτσι η χρήση των γνωστών μαθηματικών εργαλείων που θα μας επιτρέψουν τη μελέτη του μοντέλου και κατ' επέκταση του στοχαστικού φαινομένου. Αντίθετα αν η επιλογή μας είναι η κατασκευή ενός απλούστερου μοντέλου στο οποίο θα είναι δυνατή η χρήση μαθηματικών εργαλείων κινδυνεύουμε να πάρουμε αποτελέσματα που δε θα ανταποκρίνονται πλήρως στο υπό μελέτη φαινόμενο, λόγω υπεραπλούστευσης του μοντέλου. Με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων λοιπόν υπάρχει το πλεονέκτημα ότι η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του, όμως ουσιαστικά αυτές οι μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες μόνο σε σχετικά απλά στοχαστικά φαινόμενα για τα οποία χρησιμοποιούμε απλούστευμένα μοντέλα.

(2) **Αριθμητικές Μέθοδοι:** Ένας άλλος τρόπος μελέτης στοχαστικών φαινομένων είναι μέσω αριθμητικών μεθόδων. Στην περίπτωση αυτή γίνεται χρήση προσεγγιστικών μεθόδων της αριθμητικής ανάλυσης και η συμπεριφορά του μοντέλου μελετάται μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Παρόλα αυτά, υπάρχει το πλεονέκτημα ότι οι αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν και σε συνθετότερα μοντέλα σε σχέση με τις αναλυτικές μεθόδους.

(3) **Μέθοδοι Προσομοίωσης:** Η προσομοίωση είναι ένα ισχυρό εργαλείο εάν κατανοηθεί πλήρως και χρησιμοποιηθεί κατάλληλα για τη μελέτη των συστημάτων που μας ενδιαφέρουν. Αποτελεί ένα εναλλακτικό «εμπειρικό» ή «πειραματικό» τρόπο μελέτης ενός στοχαστικού φαινομένου. Η γενική ιδέα είναι να «αναπαραστήσουμε» το φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε «μέσα» σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε ένα τεράστιο πλήθος εικονικών παρατηρήσεων και εξάγουμε τα συμπεράσματά μας μέσω της μελέτης και επεξεργασίας τους. Βέβαια και σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να θεωρήσουμε

κάποιες απλουστεύσεις του φαινομένου, αλλά αυτές θα είναι συνήθως πολύ λιγότερες από τις απλουστεύσεις που θα μας επέβαλε η αναλυτική μελέτη του. Από τη στιγμή τώρα που θα καταφέρουμε μια επιτυχή αναπαράσταση του φαινομένου στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί όποτε εμείς το επιθυμούμε είτε το σύστημα προς μελέτη είναι διαθέσιμο είτε όχι και μπορούμε να καταγράψουμε τα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν. Η εμπειρική αυτή μέθοδος μελέτης συστημάτων, μπορεί κατά κάποιο τρόπο να θεωρηθεί επικουρική διότι προφανώς δεν βασίζεται σε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις, μπορεί όμως να προσφέρει προσεγγιστικές εκφράσεις για διάφορα χαρακτηριστικά του φαινομένου τα οποία είναι πρακτικά ανέφικτο να εξαχθούν θεωρητικά. Επίσης, μπορεί να προσφέρει ενδείξεις που μπορούν να οδηγήσουν τις θεωρητικές αποδείξεις προς τη σωστή κατεύθυνση.

Ένας ορισμός της προσομοίωσης δόθηκε από τον Robert E. Shannon το 1975. Σύμφωνα με αυτόν, προσομοίωση είναι η διαδικασία του σχεδιασμού ενός μοντέλου ενός πραγματικού συστήματος και η διεξαγωγή πειραμάτων με αυτό το μοντέλο για σκοπούς είτε κατανόησης της συμπεριφοράς του συστήματος, είτε εκτίμησης διαφόρων στρατηγικών (με βάση τα όρια που τίθενται από ένα κριτήριο ή μια ομάδα κριτηρίων) για τη διαχείριση του συστήματος. Παραδείγματα εφαρμογών στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσομοίωση είναι: συστήματα ουρών αναμονής (π.χ. τράπεζες, νοσοκομεία, δίκτυα υπολογιστών, κ.ο.κ), έλεγχος αποθεμάτων αποθηκών, αξιοπιστία πολύπλοκων συστημάτων κ.α. Στην εργασία αυτή, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, θα ασχοληθούμε με την προσομοίωση συστημάτων αξιοπιστίας. Προκειμένου όμως να διεξάγουμε προσομοίωση με τη βοήθεια ενός υπολογιστικού συστήματος μια από τις πρωταρχικές και βασικές διαδικασίες που πρέπει να επιτελεστούν είναι η παραγωγή τυχαίων αριθμών.

Μια τελευταία παρατήρηση πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο παράγουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς είναι ότι η προσομοίωση μπορεί να μιμηθεί την δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος. Ανεξάρτητα του πόσο πολύπλοκο μπορεί να είναι ένα σύστημα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που να το προσομοιώνει. Η πολυπλοκότητα του συστήματος δρα ανασταλτικά κυρίως στο χρόνο που θα χρειαστεί για την μοντελοποίηση και για το χρόνο και το κόστος διεξαγωγής της προσομοίωσης. Όσον αφορά το δεύτερο, μια λύση έρχονται να δώσουν οι τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης στις οποίες θα αναφερθούμε στην επόμενη ενότητα.



## 2.1 Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών.

Ένα στοχαστικό φαινόμενο θεωρούμε ότι επηρεάζεται από κάποιες τυχαίες μεταβλητές. Τις τιμές των μεταβλητών αυτών, όπως είναι φυσικό, δεν είμαστε σε θέση να τις γνωρίζουμε προτού παρατηρήσουμε την πραγματική εξέλιξη του φαινομένου. Συνεπώς προκειμένου να το μελετήσουμε θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα εικονικό πειραματικό μοντέλο, το οποίο θα πρέπει επίσης να επηρεάζεται από τυχαίους αριθμούς.

Έτσι το πρώτο βήμα για την μελέτη ενός στοχαστικού φαινομένου μέσω προσομοίωσης αποτελεί η δυνατότητα παραγωγής τυχαίων αριθμών από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με αυτό τον τρόπο ουσιαστικά αναπαράγουμε την τυχειότητα που επηρεάζει το στοχαστικό φαινόμενο.

Όταν η προσομοίωση έκανε τα πρώτα της βήματα, ορισμένες συνήθεις τεχνικές που χρησιμοποιούνταν προκειμένου να αναπαραχθεί τυχειότητα ήταν η ρίψη ζαριών ή νομισμάτων, το ανακάτεμα χαρτιών και η ρουλέτα. Αργότερα για τον ίδιο σκοπό χρησιμοποιήθηκαν συσκευές από τον κλάδο της φυσικής, όπως ηχητικές δίοδοι και μετρητές Geiger, οι οποίες προσαρμόστηκαν σε υπολογιστές. Η επικρατούσα πεποίθηση ήταν ότι μόνο μηχανικές ή ηλεκτρονικές συσκευές μπορούν να παράγουν πραγματικά τυχαίες ακολουθίες. Παρόλα αυτά οι μηχανικές συσκευές παρουσιάζουν ορισμένα σημαντικά μειονεκτήματα έναντι των ηλεκτρονικών. Κάποια από αυτά είναι ότι είναι πολύ αργές για ευρεία και συχνή χρήση, οι παραγόμενες ακολουθίες αριθμών δε μπορούν να επαναληφθούν υπό προϋποθέσεις ώστε να χρησιμοποιηθούν για επαληθεύσεις και κυρίως έχει βρεθεί πως οι αριθμοί που παράγονται παρουσιάζουν μεροληψία και εξάρτηση. Για τους παραπάνω λόγους οι ηλεκτρονικές συσκευές προτιμούνται, τουλάχιστον όσον αφορά στην επιστημονική κοινότητα.(βλ. Rubinstein and Melamed (1998), σελ. 15)

Με την πάροδο των ετών, καθώς η προσομοίωση με τη χρήση υπολογιστή γινόταν όλο και πιο διαδεδομένη, έκαναν την εμφάνισή τους πολλές μέθοδοι παραγωγής τυχαίων αριθμών (random number generators (RNG)) οι οποίες προσαρτήθηκαν σε εξειδικευμένα ή και ευρέως γνωστά προγράμματα όπως π.χ. το Excel. Με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας (πεπερασμένης) ακολουθίας  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, η κάθε μια εκ των οποίων κατανέμεται ομοιόμορφα στο  $(0,1)$ . Δηλαδή,

$$F_{X_i}(x) = \Pr(X_i \leq x) = x, \quad x \in (0,1).$$

Οι τυχαίοι αριθμοί που παράγουμε με τη χρήση υπολογιστικών συστημάτων, προφανώς παράγονται μέσα από συγκεκριμένες επαναληπτικές διαδικασίες. Συνεπώς δεν είναι τυχαίοι με την πραγματική έννοια του όρου. Για το λόγο αυτό ονομάζονται ψευδοτυχαίοι. Παρόλα αυτά οι διαδικασίες που ακολουθούνται για την παραγωγή τους είναι έτσι μελετημένες ώστε τελικά οι αριθμοί αυτοί να έχουν τα χαρακτηριστικά που έχουν και οι τυχαίοι αριθμοί. Άλλωστε οι αριθμοί αυτοί τις περισσότερες φορές (ανάλογα και με την επαναληπτική μέθοδο που χρησιμοποιείται) καταφέρνουν να «ξεγελάσουν» αρκετούς γνωστούς ελέγχους τυχειότητας. Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν αρχεία αριθμών που προέρχονται από την παρατήρηση στοχαστικών πειραμάτων, όμως η χρήση τους παρουσιάζει πολλά μειονεκτήματα όσον αφορά την ευχρηστία. Στη συνέχεια, και για λόγους πληρότητας, θα παρουσιάσουμε περιληπτικά κάποιες τέτοιες επαναληπτικές μεθόδους για την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών, αλλά δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με την αξιολόγησή τους (δηλαδή με το κατά πόσον «τυχαίοι» μπορούν να θεωρηθούν οι αριθμοί που παράγουν). Περισσότερο μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε τέτοιους αριθμούς για την προσομοίωση διαφόρων μοντέλων και για αυτό, για λόγους απλότητας, στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που λαμβάνουμε είναι πράγματι τυχαίοι.

Μια από τις απλούστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων μεταβλητών είναι η midsquare μέθοδος. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή τα βήματα που ακολουθούμε προκειμένου να παράγουμε τυχαίους αριθμούς με  $n$  το πλήθος ψηφία είναι τα εξής:

1. Επιλέγουμε έναν αρχικό  $n$ -ψηφίο αριθμό που καλείται seed.
2. Βρίσκουμε το τετράγωνο του αριθμού αυτού. Αν ο αριθμός των ψηφίων του αποτελέσματος είναι μικρότερος από  $2n$  προσθέτουμε μηδενικά στην αρχή του αριθμού ώστε να έχει  $2n$  ψηφία.
3. Παίρνουμε τα  $n$  μεσαία ψηφία του αριθμού του βήματος 2.
4. Τοποθετούμε μια υποδιαστολή μπροστά από τον αριθμό του βήματος 3. Ο αριθμός αυτός είναι ένας τυχαίος αριθμός.
5. Χρησιμοποιούμε τον τελευταίο αριθμό ως seed στο βήμα 1 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο με έναν τετραψήφιο αριθμό θα πάρουμε:

$$\text{Seed} = 3625$$

$$a_1 = 3625^2 = 13140625 \quad u_1 = 0,1406$$

$$a_2 = 1406^2 = 1976836 \quad u_2 = 0,9768$$

$$a_3 = 9768^2 = 95413824 \quad u_3 = 0,4138$$

...

Η απλότητα που παρουσιάζει ο παραπάνω αλγόριθμος τον καθιστά κατάλληλο για την παρουσίαση της λογικής που στηρίζεται η παραγωγή τυχαίων αριθμών, παρόλα αυτά γενικά ως μέθοδος δεν έχει ικανοποιητική απόδοση. Μερικά από τα μειονεκτήματά του είναι ότι μπορεί για συγκεκριμένους seed αριθμούς από κάποιο βήμα και μετά να παράγει πολλές φορές τον ίδιο αριθμό ή το ότι αν σε κάποιο βήμα παράγει έναν τυχαίο αριθμό κοντά στο 0 (δηλαδή με πολλά μηδενικά μετά την υποδιαστολή) τότε οι επακόλουθοι τυχαίοι αριθμοί θα είναι κι αυτοί πολύ μικροί.

Μία άλλη μέθοδος που είναι από τις συνηθέστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω Η/Υ είναι η πολλαπλασιαστική μέθοδος, *multiplicative congruential method*. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή :

1. Ξεκινάμε με μία αρχική τιμή  $x_0 \in N$  (seed) (π.χ. δίνεται από εμάς ή λαμβάνεται από τα εκατοστά του δευτερολέπτου που δείχνει το ρολόι του υπολογιστή).

2. Κατόπιν υπολογίζεται η νέα τιμή

$$x_1 = ax_0 \bmod m,$$

για κάποιους φυσικούς αριθμούς  $a, m$  οι οποίοι έχουν επιλεγεί από πριν. Ως  $m$  συνήθως λαμβάνεται ένας κατάλληλος πολύ μεγάλος πρώτος αριθμός.

3. Έπειτα, υπολογίζουμε επαναληπτικά τα

$$x_2 = ax_1 \bmod m$$

$$x_3 = ax_2 \bmod m$$

έτσι, κάθε  $x_i$  ανήκει στο  $\{0,1,\dots,m-1\}$  και ο αριθμός  $x_i/m$  θεωρείται ότι είναι ένας ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ του 0 και του 1.

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος παραγωγής ψευδοτυχαίων θα είναι:

*Βήμα 1:*  $x_0 = \text{seed}$

*Βήμα i:* υπολογίζουμε την ποσότητα  $x_i = ax_{i-1} \bmod m$  και θέτουμε  $U_i = \frac{x_i}{m}$   $i = 1, 2, \dots, n$

Όπως παρατηρούμε από τον παραπάνω αλγόριθμο μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων θα εμφανιστεί ως ψευδοτυχαίος ένας αριθμός που έχει ήδη εμφανιστεί σε προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου και από εκεί και μετά θα επαναληφθεί η αρχική ακολουθία ψευδοτυχαίων. Επομένως, θα πρέπει να είμαστε προσεχτικοί στην επιλογή των  $a$  και  $m$  έτσι ώστε για κάθε αρχική τιμή  $x_0$ , το πλήθος των βημάτων μέχρι την επανάληψη της διαδικασίας να είναι αρκετά μεγάλο.

Μία ακόμα συνήθης μέθοδος παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέσω H/Y είναι και η μεικτή μέθοδος, *mixed congruential method* η οποία είναι καθ' όλα ίδια με την πολλαπλασιαστική μέθοδο *multiplicative congruential method*, εκτός από το γεγονός ότι σε κάθε βήμα αντί του  $x_i = ax_{i-1} \bmod m$  υπολογίζουμε το  $x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m$  και με την παρατήρηση ότι πάλι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τους ίδιους παράγοντες στην επιλογή των  $a, m, c$ .

*Βήμα 1:*  $x_0 = \text{seed}$

*Βήμα i:* υπολογίζουμε την ποσότητα  $x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m$  και θέτουμε  $U_i = \frac{x_i}{m}$   $i = 1, 2, \dots, n$

Η μέγιστη περίοδος, δηλαδή πλήθος επαναλήψεων, που μπορούμε να επιτύχουμε με τις παραπάνω μεθόδους είναι προφανώς ίση με  $m$  (σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι η μέθοδος έχει πλήρη περίοδο).

Στη συνέχεια δεν θα μας απασχολήσει περισσότερο η βέλτιστη επιλογή των  $a, m, c$  διότι κάθε γλώσσα προγραμματισμού (αλλά και κάθε υπολογιστικό πρόγραμμα ή πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων) έχει ενσωματωμένη μία γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών και παρέχει αυτόματα τυχαίους αριθμούς.

Στο Mathematica για παράδειγμα ένας τυχαίος αριθμός παράγεται χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω εντολές :

```
SeedRandom[ ];
```

```
Print[Random[ ]]
```

Σε αρκετά προβλήματα που καλούμαστε να μελετήσουμε χρησιμοποιώντας προσομοίωση, χρειαζόμαστε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από κάποια κατανομή, η οποία θα είναι είτε διακριτή είτε συνεχής. Οι γλώσσες προγραμματισμού συνήθως δεν προσφέρουν κάποιο εύκολο τρόπο να πάρουμε τέτοιους τυχαίους αριθμούς. Βέβαια μπορούμε εναλλακτικά να στραφούμε σε εξειδικευμένα στατιστικά πακέτα ή άλλα προγράμματα όπως το Mathematica, τα οποία μπορούν να παράγουν αυτόματα (με μία εντολή) ψευδοτυχαίους αριθμούς από αρκετές γνωστές κατανομές. Προηγουμένως αναφερθήκαμε σε κάποιους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε με βάση αυτούς τους αριθμούς να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από διάφορες συνήθεις κατανομές .

## 2.2. Η μέθοδος της αντιστροφής

Η πρώτη μέθοδος που θα παρουσιάσουμε για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια δεδομένη κατανομή ονομάζεται *μέθοδος της αντιστροφής*. Είναι απλή στην εφαρμογή της αλλά δε μπορεί να παράγει εύκολα τυχαίους αριθμούς από συναρτήσεις κατανομής με «δύσχρηστη» συνάρτηση κατανομής.

Έστω λοιπόν ότι επιθυμούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν ίδια κατανομή με μια τυχαία μεταβλητή  $X$  με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F$ . Όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση κατανομής  $F$  είναι εξ' ορισμού μη φθίνουσα συνάρτηση, επομένως ορίζεται η γενικευμένη αντίστροφος συνάρτηση

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Αποδεικνύεται ότι αν  $U$  είναι μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο  $[0,1]$ , τότε η τυχαία μεταβλητή  $X = F^{-1}(U)$  θα έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F$ . Αν η  $F$  είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση τότε η γενικευμένη αντίστροφος της συμπίπτει με τον ορισμό της κοινής αντίστροφης συνάρτησης. Ο τρόπος όμως με τον οποίο ορίζεται αυτή η

γενικευμένη αντίστροφος εξασφαλίζει ότι η  $F^{-1}$  υπάρχει και στην περίπτωση που η  $F$  δεν είναι αντιστρέψιμη (π.χ. συμβαίνει όταν η  $F$  είναι διακριτή συνάρτηση κατανομής ή είναι συνεχής συνάρτηση κατανομής η οποία όμως δεν είναι γνήσια αύξουσα). Συνοψίζοντας, εάν θέλουμε να παράγουμε μια τιμή από μια *συνεχή* τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$ ,

1. Παράγουμε πρώτα μια τιμή  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$
2. Υπολογίζουμε την ποσότητα  $F^{-1}(U)$  και θέτουμε την τιμή αυτή ίση με  $X$  που είναι η ζητούμενη τιμή.

Όπως ήδη αναφέραμε, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει δυσκολία ως προς το ότι δεν είναι πάντα εφικτή η εύρεση της γενικευμένης αντιστροφής  $F^{-1}$ . Για την διακριτή περίπτωση αντίστοιχα ο αλγόριθμος είναι παρόμοιος με μια μικρή τροποποίηση. Έτσι κι εδώ εάν θέλουμε να παράγουμε μια τιμή από μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$

1. Παράγουμε πρώτα μια τιμή  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$
2. Βρίσκουμε τον μικρότερο θετικό ακέραιο  $k$ , έτσι ώστε  $U \leq F(x_k)$  και θέτουμε την τιμή αυτή ίση με  $X$  που είναι η ζητούμενη τιμή.

Πιο κάτω παραθέτουμε τους αλγόριθμους παραγωγής τυχαίων αριθμών μερικών από τις πιο γνωστές κατανομές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντιστροφής.

**(α) Διακριτή ομοιόμορφη στο  $\{1,2,\dots,n\}$  κατανομή.** Έστω  $X$  τ.μ από την  $U\{1,2,\dots,n\}$ . Η συνάρτηση πιθανότητας στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι  $p_i = \Pr(X = i) = 1/n$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Επομένως με βάση τον αλγόριθμο αντιστροφής κάνουμε τα εξής:

1. Παράγουμε  $U \sim U(0,1)$
2. Για  $i=1,2,\dots,n$  ελέγχουμε αν  $U < i/n$  και αν αυτό ισχύει τότε θέτουμε  $X = i$  και σταματάμε, αλλιώς προχωράμε με την επόμενη τιμή του  $i$ . Παρατηρούμε όμως ότι, ισοδύναμα, μπορούμε πολύ απλά να θέσουμε

$$X = [nU] + 1.$$

(β) **Κατανομή Poisson.** Έστω  $X$  τ.μ από την  $Po(\lambda)$ . Η συνάρτηση πιθανότητας στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι

$$p_i = \Pr(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \dots$$

Ο αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών με σύμφωνα με τη μέθοδο της αντιστροφής θα είναι:

1. Παράγουμε  $U \sim U(0,1)$
2. Αν  $U < p_0 = e^{-\lambda}$  τότε θέτουμε  $X = 0$  και σταματάμε
3. Αν  $U < p_0 + p_1 = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda / 1!$  τότε  $X = 1$  και σταματάμε
4. Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο έως ότου η ανισότητα ισχύσει για πρώτη φορά.

(γ) **Εκθετική κατανομή.** Έστω  $X$  τ.μ που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda > 0$ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  και η συνάρτηση κατανομής είναι  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ . Η συνάρτηση  $F$  είναι αντιστρέψιμη στο  $(0, \infty)$  και συγκεκριμένα είναι:

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u).$$

Έτσι ο αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την εκθετική κατανομή σύμφωνα με τη μέθοδο της αντιστροφής θα είναι:

1. Παράγουμε  $U \sim U(0,1)$
2. θέτουμε  $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$ .

### 2.3. Η μέθοδος της σύνθεσης

Όπως είδαμε παραπάνω, με τη μέθοδο της αντιστροφής είμαστε σε θέση να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από ένα μεγάλο πλήθος κατανομών διακριτών ή συνεχών. Πολλές φορές όμως χρειάζεται να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μίξεις κατανομών. Στην περίπτωση αυτή η μέθοδος της αντιστροφής δεν είναι πάντα σε θέση να μας δώσει λύση. Αντί αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της σύνθεσης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε

μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$  η οποία μπορεί να γραφεί ως μίξη των κατανομών  $F_i(x)$ , δηλαδή

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x), \text{ όπου } 0 < p_i \leq 1 \text{ και } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Αν  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που έχει συνάρτηση κατανομής την  $F$  και  $X_i$  οι τυχαίες μεταβλητές που έχουν συναρτήσεις κατανομής τις  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  αντίστοιχα, τότε για τη  $X$  θα είναι

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ \vdots & \\ M & \\ \vdots & \\ X_n, & \text{με πιθανότητα } p_n \end{cases}$$

Επίσης μπορούμε να ξαναγράψουμε την  $F(x)$  χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες ως εξής

$$F(x) = \sum_{i=1}^n P(X \leq x | Y = i) P(Y = i).$$

Με άλλα λόγια αν παράγουμε τιμές από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας  $P(Y = i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  τότε μπορούμε έπειτα να παράγουμε τιμές για την τ.μ.  $X$ , η οποία δοθέντος ότι  $Y = i$ , θα έχει κατανομή  $F_i(x|i) = P(X \leq x | Y = i)$ .

Έτσι ο αλγόριθμος που έχουμε για την παραγωγή τυχαίων αριθμών μέσω της μεθόδου της σύνθεσης είναι ο εξής:

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό από την τ.μ.  $Y$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $P(Y = i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Αν  $Y = i$  τότε παράγουμε τον τυχαίο αριθμό  $X$  από την κατανομή  $F_i$ .

Τα παραπάνω ισχύουν για τη διακριτή περίπτωση. Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή  $Y$  είναι συνεχής η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$  μπορεί να γραφεί,

$$f(x) = \int h(x|y)p(y)dy.$$

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς  $X$  από μια κατανομή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο



$$g(x) = n \int_1^{\infty} y^{-n} e^{-yx} dy.$$

Στην περίπτωση αυτή από τον τύπο  $f(x) = \int h(x|y)p(y)dy$ , αν θέσουμε

$$h(x|y) = ye^{-yx}, x \geq 0$$

και

$$p(y) = \frac{n}{y^{n+1}}, 1 \leq y < \infty, n \geq 1$$

καταλήγουμε στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g$ . Έτσι προκειμένου να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από αυτή παράγουμε πρώτα μια τιμή  $Y$  από την  $p(y)$  και έπειτα παράγουμε τη  $X$  από την δεσμευμένη κατανομή  $h(x|Y)$ .

#### 2.4. Μέθοδος απόρριψης

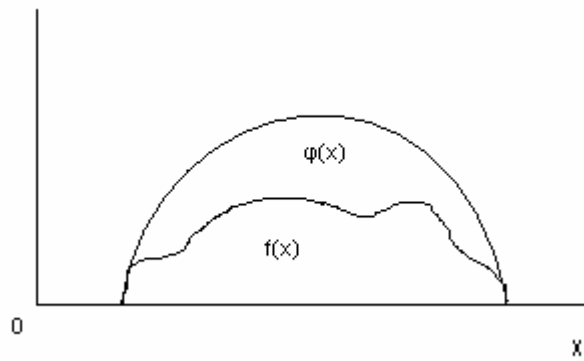
Οι μέθοδοι παραγωγής τυχαίων αριθμών που είδαμε ως τώρα έχουν το χαρακτηριστικό ότι συνδέονται απευθείας με τη συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής από την οποία πρόκειται να παραχθεί ο τυχαίος αριθμός. Αυτό το χαρακτηριστικό τους τις καθιστά απλές στην εφαρμογή τους, θέτει όμως και κάποιους περιορισμούς. Η μέθοδος της απόρριψης που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια χρησιμοποιεί ένα βήμα το οποίο μας βοηθά να παράγουμε τυχαίους αριθμούς και από κατανομές με δύσχρηστη συνάρτηση κατανομής. Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο αυτή, αν  $f(x)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από την οποία θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς τότε αναπαριστούμε την  $f(x)$  ως εξής:

$$f(x) = Ch(x)g(x),$$

όπου  $C \geq 1$ . Η  $h$  είναι και αυτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας απαιτώντας να είναι απόλυτα συνεχής ως προς την κατανομή της  $f$ . Την επιλέγουμε έτσι ώστε να είναι εύκολο να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή αυτή. Η ποσότητα  $\varphi(x) = Ch(x)$  είναι τέτοια ώστε να ισχύει  $Ch(x) \geq f(x)$  για κάθε  $x$  και

$$g(x) = \frac{f(x)}{Ch(x)} \leq 1.$$

Η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων  $\varphi$  και  $f$  μπορεί να φανεί στο παρακάτω σχήμα



Επομένως ο αλγόριθμος παραγωγής τυχαίων αριθμών με βάση αυτή τη μέθοδο είναι ο εξής :

1. Παράγουμε μια τιμή  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$
2. Παράγουμε μια τιμή  $Y$  από την κατανομή  $h$ , ανεξάρτητη από την  $U$ .
3. Αν η τιμή  $U$  είναι μικρότερη ή ίση της  $g(Y)$  θέτουμε  $X = Y$ , διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Έτσι αν θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $X$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλίως} \end{cases}$$

με χρήση της πιο πάνω μεθόδου, θα ενεργούσαμε ως ακολούθως. Θεωρώντας την  $g(x) = f(x)/2 = x$ , δηλαδή παίρνοντας  $h(y) = 1$ , ( $0 \leq y \leq 1$ ) και  $C = 2$ , ο αλγόριθμος που αναφέραμε προηγουμένως θα γίνει:

1. Παράγουμε πρώτα μια τιμή  $U$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$
2. Παράγουμε έπειτα μια τιμή  $Y$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$  ανεξάρτητη από την  $U$ .
3. Αν  $U \leq Y$  τότε θέτουμε  $X = Y$ . Αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 1.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Μέθοδοι Ελάττωσης Διακύμανσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μεθόδους ελάττωσης διακύμανσης της εκτιμήτριας συνάρτησης της αξιοπιστίας συστημάτων. Όταν έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα προσπαθούμε να συγκεντρώσουμε κάποιες πληροφορίες για αυτό, ώστε να οδηγηθούμε σε μεθόδους προσομοίωσης που θα αποδειχθούν αποδοτικότερες. Οι πληροφορίες αυτές μπορεί να είναι ποσοτικού χαρακτήρα, ποιοτικού χαρακτήρα ή και τα δυο. Οι τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης μπορούν κατά κάποιο τρόπο να θεωρηθούν ως τρόποι αξιοποίησης της υπάρχουσας πληροφορίας που έχουμε συλλέξει για το σύστημα που θα προσομοιώσουμε. Η ελάττωση διακύμανσης πρέπει να στηριχθεί στην αποκτηθείσα για το σύστημα πληροφορία. Ανάλογα με το πόσο κατάλληλη θα είναι η επιλογή της τεχνικής για την ελάττωση διακύμανσης, τόσο καλύτερα θα εκμεταλλευτούμε τη γνώση που έχουμε στη διάθεσή μας, ώστε να βελτιώσουμε τελικά το μοντέλο προσομοίωσης (βλ. Rubinstein (1981)). Ένας τρόπος ώστε να πάρουμε κάποια αρχική πληροφορία για το σύστημα είναι να διεξάγουμε μια πρώτη προσομοίωση σε αυτό, η οποία θα λειτουργήσει ως οδηγός. Αυτή θα καθοδηγήσει στην βέλτιστη επιλογή εκείνων των τεχνικών ελάττωσης διακύμανσης που θα τροποποιήσουν τη μέθοδο και θα βελτιώσουν τα αποτελέσματα της επόμενης προσομοίωσης. Επομένως πριν από οτιδήποτε άλλο, είναι πολύ σημαντικό να έχουμε εξ αρχής ξεκαθαρίσει τι ακριβώς γνωρίζουμε για το σύστημα που θα προσομοιώσουμε (βλ. Rubinstein and Melamed (1998)). Εφαρμόζοντας την ενδεδειγμένη τεχνική ελάττωσης διακύμανσης, το μοντέλο που είχαμε διαθέσιμο για προσομοίωση βελτιώνεται και γίνεται πιο αποδοτικό με την έννοια ότι τώρα επιτρέπει πιο ακριβή εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά το στατιστικό μέρος των μοντέλων που προσομοιώνουμε, παρατηρούμε ότι εάν θέλουμε να μειώσουμε τη δειγματική διασπορά που λαμβάνουμε για τις εκτιμήτριες συναρτήσεις, μπορούμε πολύ απλά να αυξήσουμε το λαμβανόμενο στατιστικό δείγμα. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι πάντοτε εφικτό, αφού σε πολύπλοκα συστήματα με μεγάλο αριθμό μονάδων, ο χρόνος που θα χρειαστεί να δαπανήσουμε θα είναι μεγάλος και πολλές φορές τίθενται διάφορων ειδών περιορισμοί που

παρεμποδίζουν την επιτυχή διενέργεια προσομοιώσεων. Επίσης, όπως αναφέραμε και παραπάνω, το πλήθος των ψευδοτυχαίων αριθμών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι πεπερασμένο (ίσο με την περίοδο της τεχνικής παραγωγής τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιούμε) και επομένως δεν μπορούμε πάντοτε να αυξήσουμε το πλήθος των επαναλήψεων ενός αλγορίθμου. Η σπουδαιότητα και σημασία που έχει η μείωση της δειγματικής διασποράς στην ακρίβεια των εκτιμήσεων των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν φαίνεται στους τύπους που δίνουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης που λαμβάνουμε από τις μεθόδους για αυτές. Σε αυτό ακριβώς το σημείο είναι που επεμβαίνουν κυρίως οι τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης.

Η χρήση τεχνικών ελάττωσης διακύμανσης επιτρέπει για δοσμένο μέγεθος δείγματος να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια των εκτιμητριών συναρτήσεων των παραμέτρων που θέλουμε, ή αν το δούμε από άλλη οπτική γωνία μπορούμε να επιτυγχάνουμε τον ίδιο βαθμό επιθυμητής ακρίβειας για τους εκτιμητές, με μικρότερο μέγεθος δείγματος. Η χρήση τέτοιων τεχνικών βέβαια έχει κυρίως νόημα για σχετικά μεγάλα συστήματα και πρέπει να γίνεται προσεχτικά, καθώς σε περίπτωση που λανθασμένη εφαρμογή τους μπορεί να οδηγήσει σε αντίθετα από τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα.

Όταν εκτελούμε προσομοίωση ενός στοχαστικού μοντέλου συνήθως ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την τιμή μιας παραμέτρου  $\theta$  που έχει σχέση με το στοχαστικό αυτό μοντέλο. Έτσι και στην περίπτωση ενός συστήματος αξιοπιστίας, αυτό που προσπαθούμε συνήθως να επιτύχουμε με την προσομοίωση είναι να εκτιμήσουμε κάποιες από τις παραμέτρους του οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία του  $R$ , τότε ουσιαστικά αυτό που επιχειρούμε είναι να εκτιμήσουμε μια ποσότητα της μορφής  $\theta := E(X)$ . Σε αυτή την περίπτωση η τυπική διαδικασία προσομοίωσης που ακολουθούμε προκειμένου να πάρουμε μια σημειακή εκτίμηση για το  $\theta$ , είναι η εξής:

1. Παράγουμε μια τιμή μιας τ.μ  $X$  η οποία ακολουθεί κατανομή  $F$  και έχει μέση τιμή  $E(X) = \theta$  και διασπορά  $S^2$ .
2. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα  $n$  φορές. Οι  $n$  τιμές που θα έχουμε πάρει θα είναι τιμές από  $n$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από μια κατανομή  $F$  με μέση τιμή  $\theta$  και διασπορά έστω  $S^2$ .

Ο δειγματικός μέσος όρος

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$$

των τιμών αυτών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$  που μας ενδιαφέρει, διότι από τον νόμο των μεγάλων αριθμών η ποσότητα αυτή συγκλίνει στο  $\theta$ .

Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε μια σημειακή εκτίμηση του  $\theta$  από το  $\bar{X}$ . Ως γνωστό, ο δειγματικός μέσος είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .

Προκειμένου να ελέγξουμε πόσο καλή είναι η  $\bar{X}$  ως σημειακή εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$ , θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τετραγωνική απόκλιση της εκτιμήτριας αυτής από την παράμετρο. Με άλλα λόγια να υπολογίσουμε το μέσο τετραγωνικό της σφάλμα (mean square error).

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - \theta)^2] = E[\bar{X}^2 - 2\theta\bar{X} + \theta^2] = E[\bar{X}^2] - 2\theta E(\bar{X}) + \theta^2 \\ &= E[\bar{X}^2] - 2E(\bar{X})E(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) \\ &= E[\bar{X}^2] - E^2(\bar{X}) = \text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i / n\right) \\ &= \frac{1}{n^2} n \text{Var}(X) = \frac{S^2}{n}. \end{aligned}$$

Στην συνήθη περίπτωση που το  $\sigma^2$  δεν είναι γνωστό μπορούμε να το εκτιμήσουμε και αυτό από τα δεδομένα μέσω της δειγματικής διασποράς,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right).$$

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της δειγματικής διασποράς μπορούμε να κάνουμε το εξής. Κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, κάθε φορά που παράγουμε μια τιμή,  $X_i$ , μπορούμε να την αποθηκεύουμε σε ένα πίνακα, και όταν ολοκληρώνεται η παραγωγή  $n$  τέτοιων αριθμών υπολογίζουμε την τιμή της δειγματικής διασποράς. Υπάρχει όμως και ένας προτιμότερος εναλλακτικός τρόπος στην περίπτωση που δεν χρειαζόμαστε όλες τις τιμές των  $X_i$  για κάποιο άλλο λόγο. Προκειμένου να μη δεσμεύουμε μεγάλο όγκο μνήμης με την αποθήκευση των τιμών  $X_i$ , μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο μεταβλητές, οι οποίες σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου παραγωγής των ψευδοτυχαίων αριθμών, θα αποθηκεύουν η μια το άθροισμα των  $X_i$  και η άλλη το άθροισμα τετραγώνων των  $X_i$ . Βέβαια στην περίπτωση που τα  $X_i$  παίρνουν

μόνο τις τιμές 0 και 1 όπως συμβαίνει συχνά στην προσομοίωση συστημάτων αξιοπιστίας, τότε αρκεί μία λίστα που θα αποθηκεύει το άθροισμα των  $X_i$ . Με αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε τη τιμή της δειγματικής διασποράς που εκτιμά το  $\sigma^2$ . Μπορούμε λοιπόν πλέον να χρησιμοποιήσουμε το εκτιμημένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $S_n^2/n$ , ώστε να έχουμε μια εικόνα του πόσο καλά ο εκτιμητής  $\bar{X}$  εκτιμά την παράμετρο  $\theta$ .

Όπως αναφέραμε όμως, το  $\bar{X}$  είναι μια σημειακή εκτίμηση για το  $\theta$  και οι πληροφορίες που μας δίνει είναι περιορισμένες σχετικά με την πραγματική τιμή της παραμέτρου  $\theta$ . Επομένως θα ήταν καλύτερο να έχουμε μεγαλύτερη πληροφορία για το  $\theta$  από το δείγμα μας. Αυτό μπορεί να γίνει αν εκτιμήσουμε το  $\theta$  χρησιμοποιώντας όχι απλά ένα σημείο, αλλά ένα διάστημα εμπιστοσύνης μέσα στο οποίο η παράμετρος μας θα βρίσκεται με κάποια πιθανότητα. Σε αυτό μας βοηθάει το γεγονός ότι τα δείγματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας μεθόδους προσομοίωσης είναι μεγάλα και έτσι είναι δυνατή η χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος και του νόμου των μεγάλων αριθμών για το δείγμα μας. Για πολύ μεγάλα δείγματα θα θεωρούμε ότι ισχύει το πιο κάτω αποτέλεσμα

$$\frac{\bar{X}_n - \theta}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Εφόσον λοιπόν η παραπάνω ποσότητα ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, προκύπτει ότι :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \theta}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \theta \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Η σχέση αυτή μας δίνει την πληροφορία που αναφέραμε πιο πάνω, ότι δηλαδή η παράμετρος  $\theta$  θα βρίσκεται στο διάστημα

$$\left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

με πιθανότητα  $1 - \alpha$ . Το διάστημα αυτό ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$ , συντελεστού  $1 - \alpha$ , και όπως βλέπουμε έχει εύρος  $2S_n/\sqrt{n} \cdot z_{\alpha/2}$ . Παρατηρούμε ότι αν θέλουμε η παράμετρος  $\theta$  να προσδιορίζεται με μεγάλη ακρίβεια τότε θα πρέπει να έχουμε μικρή δειγματική τυπική απόκλιση και μεγάλο μέγεθος δείγματος, δηλαδή να έχουμε μεγάλο

πλήθος προσομοιούμενων τιμών από το μοντέλο. Ανάλογα, μπορούμε να αποφασίζουμε πόσες παρατηρήσεις θα παράγουμε μέσω προσομοίωσης, σύμφωνα με το πόσο μικρό θέλουμε να είναι το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $\theta$ . Αν για παράδειγμα σκοπός μας είναι να έχουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1 - \alpha = 95\%$  και εύρους  $d$ , τότε ο αριθμός  $n$  των τυχαίων αριθμών που θα χρειαστεί να παράγουμε υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση.

$$2 \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq d \Leftrightarrow n \geq \frac{S_n^2 \cdot 4 \cdot 1.96^2}{d^2}$$

όπου βέβαια το  $n$  θα πρέπει να εξακολουθεί να είναι πάνω από 100 ώστε να ισχύει η κανονική προσέγγιση. Το  $S_n$  υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου προσομοίωσης και την πρώτη φορά που θα δούμε να ισχύει η πιο πάνω σχέση σταματάμε την προσομοίωση.

Συνοψίζοντας τα όσα αναφέραμε πιο πάνω, παρατηρούμε ότι εάν θέλουμε να εκτιμήσουμε ικανοποιητικά την αξιοπιστία,  $R$ , ενός συστήματος αξιοπιστίας (η οποία είναι η μέση τιμή της συνάρτησης δομής του), πρέπει να παράγουμε ένα μεγάλο πλήθος τυχαίων αριθμών. Αυτό συμβαίνει γιατί τότε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτιμήτριας, μέσω της οποίας εκτιμούμε την αξιοπιστία του συστήματος, είναι μικρότερο και διότι το διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1 - \alpha$  εκτιμά και αυτό ακριβέστερα την αξιοπιστία, εφόσον το εύρος του μειώνεται.

Το ζητούμενο βέβαια σε κάθε περίπτωση είναι πέρα από την ακρίβεια της εκτίμησης να επιτυγχάνουμε και μικρούς χρόνους προσομοίωσης. Ο χρόνος προσομοίωσης ενός συστήματος και γενικότερα ενός στοχαστικού μοντέλου είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται ποικίλες παράμετροι που επηρεάζουν τον απαιτούμενο χρόνο προσομοίωσης και τις οποίες προσπαθούμε με διάφορους τρόπους να ελέγξουμε (βλ. Fishman (1996), σελ 256). Παρόλα αυτά, οι παράγοντες που έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στο χρόνο προσομοίωσης, είναι το πλήθος των τυχαίων αριθμών που απαιτούνται για την εκτίμηση της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει και ο χρόνος που απαιτείται για την παραγωγή καθενός από αυτούς. Στην περίπτωση λοιπόν που θέλουμε να συγκρίνουμε δυο τυχαίες μεταβλητές ως προς την ικανότητά τους να εκτιμούν μια παράμετρο  $\theta$ , πρέπει οι χρόνοι παραγωγής τυχαίων αριθμών και από τις δυο να είναι περίπου ίσοι. Όπως είδαμε παραπάνω, ο τύπος που μας δίνει το πλήθος των τυχαίων αριθμών που πρέπει να προσομοιώσουμε ώστε να έχουμε δ.ε συντελεστού  $1 - \alpha$  είναι  $n \approx S_n^2 \cdot 4 \cdot 1.96^2 / d^2$ .

Παρατηρούμε ότι αν είχαμε μικρότερη διασπορά για την εκτιμήτρια τότε θα χρειαζόμασταν μικρότερο αριθμό τυχαίων αριθμών, με άλλα λόγια θα λαμβάναμε ταχύτερα μια ικανοποιητική εκτίμηση για το  $\theta$ . (βλ. Goodman (2005), Κεφ. 3)

### 3.1. Αντιθετικές μεταβλητές (antithetic variates)

Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών είναι μια από τις απλούστερες και συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους ελάττωσης διακύμανσης που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση συστημάτων. Ανήκει στην κατηγορία των δειγματοληπτικών μεθόδων όπως και η μέθοδος της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω, η οποία όμως παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα.

Η βασική ιδέα πίσω από την τεχνική αυτή, η οποία φαίνεται να εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τους Hammersley και Morton το 1956 στα πλαίσια Monte Carlo προσομοίωσης, είναι ότι σχηματίζονται κατάλληλα ζεύγη τιμών στις παρατηρήσεις που λαμβάνουμε από την προσομοίωση με τέτοιο τρόπο, ώστε η επίδραση της μιας να αντισταθμίζει κατά κάποιο τρόπο την επίδραση της άλλης. Το όλο σκεπτικό στηρίζεται στο γεγονός ότι αν θέλουμε να εκτιμήσουμε μια παράμετρο  $\theta$  ψάχνουμε δυο αμερόληπτους εκτιμητές αυτής, που να έχουν ισχυρή αρνητική συσχέτιση.

Έτσι κάθε ζεύγος παρατηρήσεων που θα παίρνουμε θα είναι τέτοιο ώστε, συνήθως, η μια παρατήρηση να είναι μεγαλύτερη από την μέση τιμή  $\theta$  που ψάχνουμε και η άλλη μικρότερη. Οπότε θεωρώντας σαν εκτίμηση της  $\theta$  τον μέσο τους, η τιμή αυτή θα είναι πιο κοντά στην τιμή της παραμέτρου. Ουσιαστικά θα δούμε ότι χρησιμοποιούμε την αρνητική συσχέτιση που έχουν δυο «συμπληρωματικοί» τυχαίοι αριθμοί. Αν για παράδειγμα οι  $Y_1$  και  $Y_2$  είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες της  $\theta$ , όχι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε η ποσότητα  $(Y_1+Y_2)/2$  θα είναι επίσης αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου αυτής και η διασπορά της θα είναι

$$Var(\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)) = \frac{1}{4}Var(Y_1) + \frac{1}{4}Var(Y_2) + \frac{1}{2}Cov(Y_1, Y_2)$$

Επομένως, από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι αν η  $Cov(Y_1, Y_2)$  είναι αρνητική, η μέθοδος αυτή μπορεί να αποβεί αποτελεσματική για την μείωση της διασποράς.

Στην περίπτωση μας ενδιαφερόμαστε να δούμε με ποιο τρόπο μπορεί η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών να εφαρμοστεί στην προσομοίωση των συστημάτων αξιοπιστίας. Ενδιαφερόμαστε για την προσομοίωση των τυχαίων μεταβλητών που θα μας οδηγήσουν στην



εκτίμηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Έστω λοιπόν ότι έχουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τις οποίες και παράγουμε προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τον τους δειγματικό τους μέσο ως εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$ , η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η αξιοπιστία του συστήματος. Στην περίπτωση που αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε προφανώς θα ισχύει

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{S^2}{n}.$$

Στην περίπτωση όμως που οι μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες παίρνουμε

$$\frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < k} \text{Cov}(X_i, X_k) \right) = \frac{S^2}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i < k} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Με βάση το σκεπτικό που αναλύσαμε παραπάνω, αν συμβεί  $\text{Cov}(X_i, X_j) < 0$  τότε προφανώς  $V(\bar{X}) < S^2/n$ , και έτσι βλέπουμε ότι με τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων που θα λάβουμε από την προσομοίωση, επιτυγχάνουμε εκτίμηση με μικρότερη διασπορά.

Η ονομασία της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών, προήλθε ακριβώς από τον τρόπο με τον οποίο παράγουμε αρνητικά συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι για την παραγωγή κάθε ενός από τα  $X_i$  χρειαζόμαστε  $m$  το πλήθος ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς  $U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i$  από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ , και ότι κάθε  $X_i$  είναι μονότονη συνάρτηση του διανύσματος  $\mathbf{U}_i = (U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i)$ . Δηλαδή  $X_i = g(\mathbf{U}_i)$ . Αυτό που κάναμε παραπάνω (προκειμένου να παράγουμε ανεξάρτητα  $X_i$ ) ήταν να παράγουμε ανεξάρτητα διανύσματα  $\mathbf{U}_i$ . Αντί αυτού, προκειμένου τώρα να πάρουμε τα  $X_i$  αρνητικά συσχετισμένα, επιλέγουμε να παράγουμε τα ζεύγη διανυσμάτων  $\mathbf{U}_i$  και  $\mathbf{1} - \mathbf{U}_i$ , όπου

$$\mathbf{1} - \mathbf{U}_i = (1 - U_1^i, 1 - U_2^i, \dots, 1 - U_m^i).$$

Προφανώς το τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{1} - \mathbf{U}_i$  αποτελείται όπως και το  $\mathbf{U}_i$  από  $m$  το πλήθος ανεξάρτητες ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές, συνεπώς οι μονότονες συναρτήσεις τους  $g(\mathbf{U}_i)$  και  $g(\mathbf{1} - \mathbf{U}_i)$  θα έχουν τις ίδιες κατανομές. Έτσι τώρα επιλέγουμε να πάρουμε τα  $X_i$  ως εξής

$$X_{2k-1} = g(\mathbf{U}_{2k+1}) \text{ και } X_{2k} = g(\mathbf{1} - \mathbf{U}_{2k+1}) \text{ για } k = 1, \dots, n.$$

Ο λόγος που επιλέξαμε να πάρουμε αυτές τις τυχαίες μεταβλητές είναι ότι ισχύει

$$\text{Cov}(U_j^i, 1 - U_j^i) = E(U_j^i \cdot (1 - U_j^i)) - E(U_j^i)E(1 - U_j^i) =$$

$$\begin{aligned}
&= E(U_j^i \cdot (1-U_j^i)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = E(U_j^i - U_j^{i^2}) - \frac{1}{4} \\
&= \int_0^1 (x - x^2) f_U(x) dx - \frac{1}{4} = \int_0^1 (x - x^2) dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\text{Cov}(U_j^i, 1-U_j^i) = -\frac{1}{12} < 0$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Επειδή όμως όπως είπαμε τα  $X_i$  είναι μονότονες συναρτήσεις των  $U_i$  και από το παραπάνω αποτέλεσμα είδαμε ότι τα  $U_j^i, 1-U_j^i$  είναι αρνητικά συσχετισμένα, το ίδιο περιμένουμε να ισχύει και για τα διαδοχικά  $X_i$ . Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει με βάση την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση:** Αν  $g: R^m \rightarrow R$  είναι μια μονότονη συνάρτηση ως προς κάθε μια από τις μεταβλητές της, τότε για κάθε σύνολο  $U_1, U_2, \dots, U_m$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, ισχύει

$$\text{Cov}(h(U_1, \dots, U_m), h(1-U_1, \dots, 1-U_m)) \leq 0$$

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω, από τη στιγμή που έχουμε παράγει τυχαίους αριθμούς  $U_1, U_2, \dots, U_m$  και μέσω αυτών υπολογίζουμε, έστω την τιμή  $X' = h(U_1, U_2, \dots, U_m)$ , χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τους αριθμούς  $1-U_1, 1-U_2, \dots, 1-U_m$  ώστε να παράγουμε μια ακόμα τιμή  $X'' = h(1-U_1, 1-U_2, \dots, 1-U_m)$ . Ο δειγματικός μέσος των δύο τιμών  $X'$  και  $X''$  χρησιμοποιείται έπειτα ως εκτίμηση για την παράμετρο  $\theta$ . Το όφελος είναι ότι αφενός ο νέος εκτιμητής έχει μικρότερη διασπορά απ'ότι αν χρησιμοποιούσαμε  $m$  καινούριες ανεξάρτητες τιμές  $U_i$  για τον  $X''$ , αφετέρου γλιτώνουμε από τον χρόνο παραγωγής  $m$  νέων τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή.

Στην περίπτωση που σε ένα σύστημα αξιοπιστίας η τυχαία μεταβλητή  $X$  που εκφράζει την κατάσταση λειτουργίας του συστήματος, εξαρτάται από  $m$  τυχαίες μεταβλητές  $Y_i$  (με σ.κ  $F_i, i = 1, 2, \dots, m$ ), τις οποίες τις παράγουμε με τη μέθοδο της αντιστροφής, τότε ισχύει μια σχέση της μορφής  $X = h(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_m^{-1}(U_m))$ , όπου  $U_i$  ανεξάρτητοι ομοιόμορφα κατανομημένοι τυχαίοι αριθμοί. Η συνάρτηση  $h$  είναι μια μονότονη συνάρτηση ως προς τις

$U_i$  μιας και οι  $F_i^{-1}$  είναι αύξουσες συναρτήσεις. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση, για την εκτίμηση της αξιοπιστίας  $\theta = E(X)$ , θα χρησιμοποιούμε την ποσότητα  $\theta = (X_1 + X_2)/2$ , όπου

$$X_1 = h(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_m^{-1}(U_m)) \quad \text{και} \quad X_2 = h(F_1^{-1}(1-U_1), \dots, F_m^{-1}(1-U_m))$$

και  $U_i$  ανεξάρτητοι ομοιόμορφα κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί.

### 3.2. Μεταβλητές ελέγχου

Η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου, όπως και αυτή των αντιθετικών μεταβλητών, εκμεταλλεύεται την συσχέτιση μεταξύ συγκεκριμένων τυχαίων μεταβλητών, προκειμένου να επιτύχει ελάττωση της διακύμανσης της εκτιμήτριας που χρησιμοποιούμε. Όσον αφορά τώρα την περίπτωση των μεταβλητών ελέγχου τα πράγματα έχουν ως εξής. Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $E(X) = \mu$  και έστω  $Y$  μια άλλη τυχαία μεταβλητή που είναι συσχετισμένη θετικά ή αρνητικά με την  $X$  με γνωστή μέση τιμή  $E(Y) = \lambda$ , διαφορετική της  $\mu$ . Έστω ότι γνωρίζουμε το είδος της συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  και μπορούμε να παρατηρήσουμε, αφού παράγουμε τιμές από την  $Y$ , αν είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη μέση της τιμή  $\lambda$ . Τότε μπορούμε (αναλόγως με τη συσχέτιση των  $X, Y$ ) να προβλέψουμε αν και η τιμή της  $X$  θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την μέση της τιμή  $\mu$ . Δηλαδή, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να προβλέψουμε αν οι τιμές που θα προσομοιώνουμε για την  $X$  θα είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από την  $\mu$ , και έτσι έχουμε τη δυνατότητα (μέσω της  $Y$ ) να τις καθοδηγήσουμε προς την κατεύθυνση που θέλουμε, ώστε να πλησιάζουμε πιο κοντά στο  $\mu$ . Γι' αυτό και η τυχαία μεταβλητή  $Y$  λέγεται μεταβλητή ελέγχου για την  $X$ , αφού κατά κάποιο τρόπο μπορεί να τη ρυθμίζει ή να την ελέγχει.

Πιο συγκεκριμένα, αν ακολουθήσουμε την πορεία που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω στη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών, οδηγούμαστε στο πιο κάτω σκεπτικό. Έστω ότι επιθυμούμε την εκτίμηση της αξιοπιστίας  $\theta$  ενός συστήματος και αυτή μπορεί να γραφεί ως η μέση τιμή μιας μεταβλητής  $X$ , δηλαδή  $E(X) = \theta$ . Έστω ακόμα ότι, και μία άλλη μεταβλητή  $Z$  έχει μέση τιμή  $\theta$ , και η  $Z$  είναι εξαρτημένη από την  $X$ . Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$(1 - \kappa)X + \kappa Z$$

έχει μέση τιμή  $\theta$  αφού

$$E((1 - \kappa)X + \kappa Z) = (1 - \kappa)E(X) + \kappa E(Z) = (1 - \kappa)\theta + \kappa\theta = \theta.$$

Είναι δηλαδή αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ . Η διασπορά της παραπάνω τυχαίας μεταβλητής θα είναι

$$\text{Var}((1 - \kappa)X + \kappa Z) = (1 - \kappa)^2 \text{Var}(X) + \kappa^2 \text{Var}(Z) + 2\kappa(1 - \kappa)\text{Cov}(X, Z).$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Z$  είναι αρνητικά συσχετισμένες, η διασπορά αυτή είναι μικρότερη από ότι αν ήταν ανεξάρτητες και μάλιστα παίρνει την ελάχιστη τιμή για

$$\kappa' = \frac{V(X) - \text{Cov}(X, Z)}{V(X - Z)}.$$

Έτσι σε σχέση με την πρωτογενή εκτιμήτρια για τη  $\theta$  που θα παίρναμε από τη δειγματική μέση τιμή αντιγράφων της  $X$ , ο δειγματικός μέσος αντιγράφων της  $(1 - \kappa)X + \kappa Z$  (ανάλογα και της συσχέτισης μεταξύ των  $X$  και  $Z$ ) αποτελεί προτιμότερη εκτιμήτρια.

Ενδέχεται βέβαια κάποιες φορές να είναι ευκολότερη η παραγωγή μιας τυχαίας μεταβλητής  $W$  η οποία να έχει διαφορετική μέση τιμή από τη  $X$ . Δηλαδή να μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή της  $W$  με  $E(W) = \lambda \neq \theta$ . Σε αυτή την περίπτωση, ενδιαφερόμαστε η μεταβλητή  $W$  να είναι πάλι τέτοια ώστε να είναι γνωστή η εξάρτησή της με την μεταβλητή  $X$ . Στην περίπτωση αυτή, αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε την τυχαία μεταβλητή  $X + W - \lambda$ , για την οποία θα είναι  $E(X + W - \lambda) = \theta$ , με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε τη μεταβλητή  $Z$ . Έτσι θα έχουμε

$$(1 - \kappa)X + \kappa(X + W - \lambda) = X + \kappa(W - \lambda)$$

και με βάση τον τύπο που είδαμε πιο πάνω για την ελαχιστοποίηση της διασποράς, το  $\kappa'$  σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\kappa' = -\frac{\text{Cov}(X, W)}{V(W)},$$

για το οποίο η διασπορά είναι,

$$\text{Var}(X + \kappa'(W - \lambda)) = \text{Var}(X) + (\kappa')^2 \text{Var}(W) + 2\kappa' \text{Cov}(X, W) = \text{Var}(X) - (\kappa')^2 \text{Var}(W).$$

Με τη μέθοδο λοιπόν των ρυθμιστικών μεταβλητών, προκειμένου να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία  $\theta$  ενός συστήματος αξιοπιστίας, μπορούμε να παράγουμε  $n$  τυχαίους αριθμούς  $X$

και  $W$  και να πάρουμε ως εκτιμήτρια το δειγματικό μέσο των  $X_i + \kappa'(W_i - \lambda)$ . Η διασπορά της εκτιμήτριας αυτής θα είναι

$$V(\bar{X} + \kappa'(\bar{W} - I)) = \frac{1}{n} (V(X + \kappa'(W - \lambda))) = \frac{1}{n} (V(X) - \text{Cov}(X, W)^2 / V(W)) = \frac{V(X) - \kappa'^2 V(W)}{n}$$

Ο λόγος των διασπορών των δυο εκτιμητριών της παραμέτρου  $\theta$ , της εκτιμήτριας που πήραμε με τη μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου και της πρωτογενούς εκτιμήτριας, προκύπτει εύκολα από τις σχέσεις

$$V(X + \kappa'(W - \lambda)) = V(X) + \kappa'^2 V(W) + 2\kappa' \text{Cov}(X, W) \quad \text{και} \quad \kappa' = \frac{\text{Cov}(X, W)}{\text{Var}(W)}.$$

Έτσι παίρνουμε

$$V(X + \kappa'(W - \lambda)) = V(X) - \frac{\text{Cov}(X, W)^2}{V(W)} = (1 - r_{XY}^2) V(X).$$

Δηλαδή τελικά

$$\frac{V(X + \kappa'(W - I))}{V(X)} = 1 - r_{XY}^2 < 1.$$

Με όμοιο τρόπο προκύπτει και ότι

$$\frac{V(\bar{X} + \kappa'(\bar{W} - I))}{V(X)} = 1 - r_{XY}^2 < 1.$$

Από την παραπάνω σχέση καθίσταται σαφές ότι η εκτιμήτρια του  $\theta$  που πήραμε χρησιμοποιώντας μεταβλητή ελέγχου, είναι καλύτερη σε σχέση με την πρωτογενή και μάλιστα βελτιώνεται όσο αυξάνεται η εξάρτηση μεταξύ των  $X$  και  $W$ . Στα μοντέλα που έχουμε, όσες από τις ποσότητες είναι άγνωστες τις εκτιμούμε από τα (προσομοιωμένα) δεδομένα.

Όσον αφορά τα διαστήματα εμπιστοσύνης για την εκτιμήτρια  $\bar{X} + \kappa'(\bar{W} - I)$ , από το κεντρικό οριακό θεώρημα ένα διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1 - \alpha$  για την παράμετρο  $\theta$  είναι το :

$$(\bar{X} + \kappa'(\bar{W} - I)) \pm \sqrt{\frac{V(X) - \kappa'^2 V(W)}{n}} z_{\alpha/2}$$

### 3.3. Ελάττωση διασποράς μέσω δέσμευσης

Γνωρίζουμε ότι για δυο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Z$  ισχύει η σχέση

$$V(X) = E(V(X | Z)) + V(E(X | Z)). \quad (1)$$

Στην σχέση αυτή στηρίζεται η μέθοδος της ελάττωσης διακύμανσης μέσω δέσμευσης. Ας υποθέσουμε, και πάλι, ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο  $\theta$ , χρησιμοποιώντας μια τυχαία μεταβλητή η οποία να έχει μικρότερη διασπορά από την πρωτογενή εκτιμήτριά της,  $\bar{X}$ . Η σχέση (1) μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι επειδή η ποσότητα  $E(V(X | Z))$  είναι μη αρνητική, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $E(X | Z)$  θα είναι σε κάθε περίπτωση μικρότερη της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την τυχαία μεταβλητή  $E(X | Z)$  για την εκτίμηση της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει, τότε θα είχαμε μια καλύτερη εκτιμήτρια από την πρωτογενή. Τα όσα αναφέραμε ισχύουν και στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή  $Z$  είναι ένα  $k$  – διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)$ . Στην περίπτωση αυτή η σχέση (1) γίνεται

$$V(X) = E(V(X | \mathbf{Z})) + V(E(X | \mathbf{Z})) \quad (2).$$

Ισχύει όμως  $E(E(X | \mathbf{Z})) = E(X) = \theta$ . Έτσι οδηγούμαστε στο εξής συμπέρασμα: Αν παράγουμε τις τιμές  $X_1, \dots, X_n$  μέσω προσομοίωσης από τη κατανομή της  $X$ , και παράγουμε και τη  $\mathbf{Z}$ , τότε η  $f(\mathbf{Z}) = E(X | \mathbf{Z})$  είναι επίσης αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$  και μάλιστα με μικρότερη ή ίση διασπορά. Επομένως αντί των τιμών  $X_1, \dots, X_n$ , προτιμούμε να παράγουμε μέσω προσομοίωσης τις τιμές  $f(\mathbf{Z}_1), \dots, f(\mathbf{Z}_n)$  και να λαμβάνουμε ως εκτίμηση του  $\theta$  τον δειγματικό τους μέσο.

Στην μέθοδο που μόλις περιγράψαμε υπάρχουν κάποια σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής. Η μεταβλητή  $\mathbf{Z}$  θα πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα, καθώς πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή της συνάρτησης  $E(X | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$ . Η συνάρτηση  $E(X | \mathbf{Z} = \mathbf{z})$  θα πρέπει προφανώς να είναι δυνατό να υπολογιστεί για κάθε δυνατή τιμή  $\mathbf{z}$  της  $\mathbf{Z}$  και εφόσον το ζητούμενο είναι να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του  $\theta$ , προφανώς δε θα πρέπει να εξαρτάται από αυτό. Για το λόγο αυτό δεν μπορούμε να επιλέξουμε ως  $\mathbf{Z}$  μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τη μεταβλητή  $X$ , καθώς στην περίπτωση αυτή παρόλο που  $E(f(\mathbf{Z})) = E(\theta) = \theta$  και  $V(f(\mathbf{Z})) = V(\theta) = 0$ , δηλαδή θεωρητικά έχουμε τον καλύτερο εκτιμητή,

εντούτοις είναι  $f(\mathbf{z}) = E(X | \mathbf{Z} = \mathbf{z}) = E(X) = \theta$  για όλα τα δυνατά  $\mathbf{z}$ . Συνεπώς η  $f$  εξαρτάται από το  $\theta$  και άρα δεν έχει νόημα να χρησιμοποιηθεί. Ακόμα βλέπουμε πως από τη σχέση (2), προκύπτει ότι η  $V(E(X|\mathbf{Z}))$  μειώνεται σε σχέση με τη  $V(X)$ , όσο η τιμή της ποσότητας  $E(V(X|\mathbf{Z}))$  αυξάνεται. Επιδιώκουμε λοιπόν η τυχαία μεταβλητή  $\mathbf{Z}$  να είναι τέτοια ώστε η  $E(V(X|\mathbf{Z}))$  να είναι μεγάλη.

Με βάση το σύνολο των πιο πάνω παρατηρήσεων αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή η τεχνική ελάττωσης της διακύμανσης που στηρίζεται στη δέσμευση, είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό εξαρτώμενη από το εκάστοτε μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει για το σύστημα που μελετάμε. Η εφαρμογή της επομένως σε κάθε περίπτωση είναι ανάλογη με τα δεδομένα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε. (Law and Kelton (2000), σελ. 613)

### 3.4. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία

Η πρώτη παρατήρηση που μας οδηγεί στην μέθοδο της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας στην οποία θα αναφερθούμε τώρα, είναι ότι πολλές φορές μπορούμε να παράγουμε ευκολότερα αριθμούς από μια δεσμευμένη κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής από ότι αν βασιζόμαστε στην αδέσμευτη κατανομή της. Το γεγονός αυτό βέβαια δεν θα είχε ιδιαίτερη σημασία αν δεν μπορούσαμε να οδηγηθούμε και σε μικρότερη διακύμανση για την εκτιμήτρια της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει. Η ιδέα πίσω από τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι να υποδιαιρέσουμε το δειγματοληπτικό χώρο από τον οποίο παίρνουμε τιμές για τις μεταβλητές μας, σε μικρότερα πεδία – στρώματα. Μέσα στα στρώματα αυτά διευκολύνεται ο χειρισμός των μεταβλητών μας, και η παραγωγή τυχαίων αριθμών παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι στα πλαίσια μελέτης ενός συστήματος αξιοπιστίας θέλουμε να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία του  $\theta$ . Έστω επίσης ότι έχουμε κατασκευάσει ένα μοντέλο σύμφωνα με το οποίο είναι  $\theta = E(X)$  και η τυχαία μεταβλητή  $X$  εξαρτάται από μια άλλη διακριτή τυχαία μεταβλητή  $Z$  που παίρνει κάθε μια από τις τιμές  $1, 2, \dots, m$  με γνωστή πιθανότητα  $P(Z = z) = p_z, z = 1, 2, \dots, m$ . Θεωρούμε τις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή  $Z$  ως στρώματα, σε κάθε ένα από τα οποία εκτιμούμε τη δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X$ ,

$$E(X | Z = z).$$

Η παραπάνω ποσότητα εκτιμάται από την δειγματική μέση τιμή των  $X$  δεδομένου ότι  $Z = z$ . Δηλαδή, για κάθε  $z$  παράγουμε  $n_z$  το πλήθος τυχαίους αριθμούς από την κατανομή της

$X | Z = z$  και στη συνέχεια διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος τους  $n_z$ . Επομένως η ζητούμενη παράμετρος  $\theta = E(X)$  που τώρα δίνεται από τη σχέση

$$\theta = E(X) = \sum_{z=1}^m E(X | Z = z) P(Z = z),$$

εκτιμάται από την ποσότητα

$$\sum_{z=1}^m \bar{X}_z P(Z = z) = \sum_{z=1}^m p_z \bar{X}_z.$$

Όπως λοιπόν είδαμε, προκειμένου να εκτιμήσουμε την  $E(X)$ , εκτελούμε προσομοίωση σε κάθε ένα από τα  $m$  στρώματα. Ας δούμε τώρα πώς επιτυγχάνουμε μικρότερη διακύμανση για την εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$  με αυτή τη μέθοδο. Η ελάττωση αυτή στη διασπορά επιτυγχάνεται μέσω της κατάλληλης επιλογής του πλήθους των τυχαίων αριθμών που θα παράγουμε σε κάθε στρώμα. Για να γίνει αυτό πρέπει να γνωρίζουμε την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $X$  σε κάθε στρώμα η οποία όμως, όπως και η μέση τιμή σε κάθε στρώμα, δεν είναι γνωστή. Έτσι κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό. Αν συμβολίσουμε με  $s_z^2$  τη διασπορά της  $X | Z = z$ , τότε

$$V\left(\sum_{z=1}^m p_z \bar{X}_z\right) = \sum_{z=1}^m \frac{p_z^2}{n_z} V(X | Z = z) = \sum_{z=1}^m \frac{p_z^2 s_z^2}{n_z}$$

Για να ελαχιστοποιείται η παραπάνω διασπορά, οι τυχαίοι αριθμοί από την  $X$  που θα παράγουμε στο στρώμα  $z$ , θα πρέπει να είναι το πλήθος

$$n_z = \frac{np_z s_z}{\sum_{i=1}^m p_i s_i}, \quad z = 1, 2, \dots, m$$

Αντί αυτού, εφόσον έχουμε άγνωστα  $s_z$ , μπορούμε απλώς να παράγουμε  $n_z = np_z$ ,  $z = 1, 2, \dots, m$ . Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι, παρόλο που μπορεί να μην χρησιμοποιούμε τα βέλτιστα  $n_z$ , εξακολουθεί να υπάρχει βελτίωση στην εκτίμηση αφού ισχύει η σχέση

$$V\left(\sum_{z=1}^m p_z \bar{X}_z\right) = \sum_{z=1}^m \frac{p_z^2 s_z^2}{n_z} = \frac{1}{n} \sum_{z=1}^m p_z V(X | Z = z) = \frac{1}{n} E(V(X|Z)) \leq \frac{1}{n} V(X) = V(\bar{X}).$$

### 3.5. Δειγματοληψία σπουδαιότητας



Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο ελάττωσης διακύμανσης, κατά την οποία ουσιαστικά αναγόμεστε στην προσομοίωση μιας μεταβλητής διαφορετικής της αρχικής (δηλ. αυτής που θα παίρναμε αν κάναμε πρωτογενή εκτίμηση), η οποία μας διευκολύνει περισσότερο στην προσομοίωσή της. Ας θεωρήσουμε, παρόμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, ότι ενδιαφερόμαστε για την εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$ , η οποία εκφράζεται ως μέση τιμή μιας συνάρτησης  $h(\underline{X}) : R^m \rightarrow R$  είναι δηλαδή  $\theta = E(h(\underline{X}))$ , όπου  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$  είναι ένα διάνυσμα  $m \geq 1$  τυχαίων μεταβλητών, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ή από κοινού συνάρτηση πιθανότητας αν πρόκειται για διακριτές τυχαίες μεταβλητές)  $f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ . Αν το διάνυσμα  $\underline{X}$  είναι διάνυσμα συνεχών τυχαίων μεταβλητών, η ποσότητα  $E(h(\underline{X}))$  θα είναι ίση με

$$E(h(\underline{X})) = \int_{\mathbf{K}} \int h(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

ενώ στην περίπτωση που το διάνυσμα  $\underline{X}$  είναι διάνυσμα διακριτών τυχαίων μεταβλητών θα είναι ίση με

$$E(h(\underline{X})) = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_m} h(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m).$$

Πιο κάτω θα αναφερόμαστε στη συνεχή περίπτωση αλλά ανάλογα ισχύουν και στη διακριτή. Εάν θέλαμε να πάρουμε μια πρωτογενή εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$ , σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε, θα προσομοιώνουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_m$  (δηλαδή θα παίρναμε μια τιμή για το διάνυσμα  $\underline{X}$ ) και με βάση αυτές θα υπολογίζαμε μια τιμή για τη συνάρτηση  $h(\underline{X})$ . Έπειτα θα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία  $n$  φορές και τελικά η εκτίμηση που θα παίρναμε για το  $\theta$  θα ήταν η δειγματική μέση τιμή των  $n$  τιμών για την  $h(\underline{X})$ . Η διαδικασία όμως αυτή μπορεί όπως γνωρίζουμε να παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες. Ενδέχεται η προσομοίωση του τυχαίου διανύσματος  $\underline{X}$  να μην είναι εύκολη, καθώς επίσης μπορεί η τυχαία μεταβλητή  $h(\underline{X})$  να παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση και επομένως η ποσότητα

$$\hat{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\underline{X}_i),$$

να μην αποτελεί καλή εκτιμήτρια της  $\theta$ .

Η μέθοδος της δειγματοληψίας σπουδαιότητας, προκειμένου να δώσει μια καλύτερη εκτίμηση της παραμέτρου, προτείνει εναλλακτικά τη χρήση μιας άλλης συνάρτησης η οποία

να «μοιάζει» στην συνάρτηση που είχαμε αρχικά προς ολοκλήρωση, ώστε τελικά να καταλήξουμε να εκτελούμε προσομοίωση σε μια νέα διαφορετική τυχαία μεταβλητή της οποίας η προσομοίωση είναι ευκολότερη.

Έστω λοιπόν ότι μπορούμε να βρούμε μια νέα συνάρτηση  $t$  καθώς και ένα νέο τυχαίο διάνυσμα  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$  το οποίο θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g(\underline{y}) = g(y_1, \dots, y_m)$ , τέτοια ώστε  $g(\underline{y}) = 0$  να συνεπάγεται ότι  $f(\underline{y}) = 0$ . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρεθεί μια συνάρτηση  $t$  καθώς και το τυχαίο διάνυσμα  $\underline{Y}$  με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι

$$E(t(\underline{Y})) = E(h(\underline{X})) = \theta,$$

αλλά και να μπορούμε να παράγουμε ευκολότερα τιμές από την κατανομή του  $\underline{Y}$  σε σχέση με του  $\underline{X}$ . Εξάλλου επιδιώκουμε η τυχαία μεταβλητή  $t(\underline{Y})$  να έχει μικρότερη διασπορά από την  $h(\underline{X})$  ώστε τελικά να προκύψει καλύτερη εκτιμήτρια του  $\theta$ . Αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου ότι

$$\theta = E(h(\underline{X})) = \int_{\mathbf{K}} \int h(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

ή αλλιώς

$$\theta = E(h(\underline{X})) = \int_{\mathbf{K}} h(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Επομένως αν τώρα θεωρούσαμε το διάνυσμα  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g(\underline{y}) = g(y_1, \dots, y_m)$ , τέτοια ώστε  $g(\underline{y}) = 0$  να συνεπάγεται ότι  $g(\underline{x}) = 0$ , η παραπάνω σχέση θα γραφόταν

$$E(h(\underline{X})) = \int_{\mathbf{K}} \int h(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\mathbf{K}} \int \frac{h(\underline{x}) f(\underline{x})}{g(\underline{x})} g(\underline{x}) d\underline{x} = E_g \left( \frac{h(\underline{Y}) f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})} \right)$$

Επομένως ισχύει

$$\theta = E_g \left( \frac{h(\underline{Y}) f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})} \right).$$

Συνεπώς η παράσταση

$$\frac{h(\underline{Y}) f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$ . Με άλλα λόγια αν θεωρήσουμε  $t = hf/g$ , θα είναι  $E(t(\underline{Y})) = \theta$  και η  $t$  είναι η συνάρτηση που ψάχναμε. Αυτό που τελικά μένει είναι να προσδιοριστεί κατάλληλα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g$  του

τυχαίου διανύσματος  $\underline{Y}$ , ώστε να είναι εύκολη η προσομοίωση τιμών από αυτό και η τυχαία μεταβλητή

$$t(\underline{Y}) = \frac{h(\underline{Y})f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}$$

να παρουσιάζει μικρότερη διακύμανση από την  $h(\underline{X})$ . Όπως αναφέραμε, οι  $f(\underline{y}) = f(y_1, \dots, y_m)$  και  $g(\underline{y}) = g(y_1, \dots, y_m)$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των διανυσμάτων  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$  και  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$  αντίστοιχα. Συνεπώς, όταν προσομοιώνουμε τιμές του  $\underline{Y}$  με κατανομή την  $g$ , περιμένουμε ότι ο λόγος

$$\frac{f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}$$

θα είναι τις περισσότερες φορές μικρότερος της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι, τις περισσότερες φορές, η  $\underline{Y}$  θα λαμβάνει τιμές στην περιοχή που η  $g$  είναι «μεγάλη». Αυτό όμως μας οδηγεί απευθείας στο συμπέρασμα ότι για κάποιες τιμές του διανύσματος  $\underline{Y}$  ο παραπάνω λόγος θα παίρνει και πολύ μεγάλες τιμές. Αυτό γίνεται φανερό αν αναλογιστούμε ότι

$$E\left(\frac{f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}\right) = \int_{\mathbf{K}} \int \frac{f(\underline{y})}{g(\underline{y})} g(\underline{y}) d\underline{y} = \int_{\mathbf{K}} \int f(\underline{y}) d\underline{y} = 1.$$

Δηλαδή παρόλο που όπως είπαμε συνήθως ο παραπάνω λόγος είναι μικρότερος της μονάδας, η μέση τιμή του είναι 1, άρα όντως για κάποια  $\underline{Y}$  ο λόγος  $f(\underline{Y})/g(\underline{Y})$  θα είναι αρκετά μεγαλύτερος του 1. Εμείς όμως ενδιαφερόμαστε η τυχαία μεταβλητή

$$t(\underline{Y}) = \frac{h(\underline{Y})f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}$$

να παρουσιάζει μικρή διακύμανση. Η λύση είναι, ο παράγοντας  $h(\underline{y})$  να παίρνει απόλυτα μικρές τιμές οποτεδήποτε συμβαίνει ο λόγος  $f(\underline{Y})/g(\underline{Y})$  να μην είναι κοντά στο 0. Με τον τρόπο αυτό το κλάσμα  $h(\underline{Y})f(\underline{Y})/g(\underline{Y})$  θα παραμένει πάντοτε μικρό.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Εφαρμογή διαφόρων μεθόδων ελάττωσης διακύμανσης κατά την Monte-Carlo εκτίμηση της αξιοπιστίας

Οι τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης που παρουσιάσαμε αποτελούν ένα δείγμα των τεχνικών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βελτιστοποιήσουμε μια διαδικασία προσομοίωσης ως προς την ικανότητά της να παράγει εκτιμήσεις παραμέτρων με μικρή διασπορά. Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικότερα πώς εφαρμόζονται τα όσα αναφέραμε μέχρι τώρα, παρουσιάζοντας εφαρμογές των τεχνικών που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε συγκεκριμένα συστήματα αξιοπιστίας: το **συνεχόμενο  $k$ -από- $\tau$ - $m$ : $F$**  και το  **$k$ -από- $\tau$ - $m$ : $G$** .

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε μέσω προσομοίωσης την αξιοπιστία συγκεκριμένων συστημάτων και μέσα από τη διαδικασία αυτή να φανεί η χρησιμότητα των μεθόδων ελάττωσης της διακύμανσης. Για κάθε ένα από τα συστήματα που θα χρησιμοποιήσουμε, θα βρούμε την πρωτογενή εκτιμήτρια της αξιοπιστίας τους και στη συνέχεια θα εφαρμόζουμε διαδοχικά τις μεθόδους που παρουσιάσαμε και θα εξετάζουμε την μείωση που επιτυγχάνεται στη διασπορά της εκτιμήτριας της αξιοπιστίας, παρατηρώντας έτσι το όφελος που αποκομίσαμε από τη χρήση κάθε μεθόδου ξεχωριστά. Η διαδικασία αυτή θα γίνεται για διαφορετικές παραμέτρους των μοντέλων ώστε να αποκομίσουμε μια γενικότερη εικόνα της βελτίωσης που επιτυγχάνουμε σε καθένα από αυτά.

#### 4.1 Εφαρμογή της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών

##### 4.1.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από- $\tau$ - $m$ : $F$

Ας θεωρήσουμε αρχικά το συνεχόμενο  $k$ -από- $\tau$ - $m$ :  $F$  σύστημα αξιοπιστίας. Το σύστημα αυτό έχει την ιδιότητα να μη λειτουργεί αν και μόνο αν συμβεί  $k$  συνεχόμενες μονάδες του από τις συνολικά  $m$ , να μη λειτουργούν. Θα θέσουμε αρχικά τις τιμές  $k = 4$  και  $m = 30$ , ώστε να έχουμε ένα συνεχόμενο 4-από- $\tau$ -30:  $F$  σύστημα αξιοπιστίας. Θα υποθέσουμε επίσης ότι οι πιθανότητες λειτουργίας των μονάδων του είναι όλες ίσες με  $p$  (iid περίπτωση).

Με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica εκτελούμε προσομοίωση στο πιο πάνω σύστημα για  $p = 0.4$  προκειμένου να πάρουμε την πρωτογενή εκτιμήτρια για την

αξιοπιστία του συστήματος. Επίσης, μέσω της προσομοίωσης, θα κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την αξιοπιστία του, καθώς και τη διασπορά της εκτιμήτριάς μας. Η προσομοίωση θα γίνει για  $n = 100000$  επαναλήψεις.

Ο αλγόριθμος και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από το Mathematica είναι:

### Αλγόριθμος

```
(*raw estimation of reliability , iid consecutive k-out-of-m:F*)
m=30;k=4;p=0.4;
s=0;n=10000;
Do[S=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p,S[[i]]=1},{i,1,m}];
  f=Product[1-Product[(1-S[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
  s=s+f;
  ,{a,1,n}];
meanh=N[s/n];
Print[meanh," +-",(meanh(1-meanh)/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for raw estimator ",(meanh(1-meanh))]
```

### Αποτελέσματα

```
0.13926 +- 0.00214588
variance estimate for raw estimator 0.119867
```

Όπως παρατηρούμε λοιπόν εκτελώντας προσομοίωση 100000 επαναλήψεων πήραμε ως εκτίμηση της αξιοπιστίας του συνεχόμενου 4-από-τα-30 : F συστήματος αξιοπιστίας με πιθανότητα επιτυχίας των μονάδων  $p = 0.4$ , την τιμή  $\hat{q} = 0.13926$ . Επίσης λάβαμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αξιοπιστία το οποίο είναι το

$$(0.13926 - 0.00214588, 0.13926 + 0.00214588)$$

Τέλος η προσομοίωση έδωσε την τιμή 0.119867 ως εκτίμηση για τη διασπορά της πρωτογενούς εκτιμήτριας.

Για το πιο πάνω σύστημα τώρα θα επαναλάβουμε τη διαδικασία προσομοίωσης. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες παραμέτρους και τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, αλλά αυτή τη φορά θα εφαρμόσουμε τη πρώτη από τις μεθόδους ελάττωσης διακύμανσης που παρουσιάσαμε, δηλαδή τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών. Αυτό θα γίνει προκειμένου να λάβουμε μια δεύτερη εκτίμηση για την αξιοπιστία του εν λόγω συστήματος και να συγκρίνουμε τη διασπορά της νέας εκτιμήτριας με την διασπορά της πρωτογενούς εκτιμήτριας. Ο αλγόριθμος αυτή τη φορά στο Mathematica είναι ο εξής :

### Αλγόριθμος

```
(*antithetic vars estimation of reliability, iid consecutive k-out-of-m:F*)
```

```

m=30;k=4;p=0.4;n=100000;
t1=0;t2=0;
Do[S1=Table[0,{m}];S2=Table[0,{m}];
  Do[U=Random[ ];
    If[U>1-p,S1[[i]]=1];If[1-U>1-p,S2[[i]]=1];,{i,1,m}];
    f1=Product[1-Product[(1-S1[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
    f2=Product[1-Product[(1-S2[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
    t1=t1+(f1+f2)/2;t2=t2+(f1+f2)^2/4;
    ,{a,1,n}];
meanh=N[t1/n];varh=N[(t2-meanh^2*n)/n];
Print[meanh," +-",(varh/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for antithetic variates ",varh]

```

**Αποτελέσματα**

```

0.13826 +- 0.00145218
variance estimate for antithetic variates 0.0548942

```

Βλέπουμε ότι εκτελώντας προσομοίωση 100000 επαναλήψεων, πήραμε ως εκτίμηση της αξιοπιστίας του συνεχόμενου 4-από-τα-30 : F συστήματος αξιοπιστίας με βάση τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών, την τιμή  $\hat{q} = 0.13826$ . Επίσης λάβαμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αξιοπιστία το οποίο είναι το

$$(0.13826 - 0.00145218, 0.13826 + 0.00145218).$$

Ακόμα, η εκτίμηση για τη διασπορά του εκτιμητή είναι σε αυτή την περίπτωση 0.0548942. Λόγω του αρνητικά συσχετισμένου δείγματος που χρησιμοποιήσαμε είχαμε κάποια οφέλη τα οποία εντοπίζονται στα εξής σημεία. Πρώτον, χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, το διάστημα εμπιστοσύνης που λάβαμε για την αξιοπιστία του συστήματος στη δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερο. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε αντιθετικές τυχαίες μεταβλητές, το εύρος του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης είναι  $2 \cdot 0.00145218$  ενώ στην περίπτωση που δεν έγινε χρήση της τεχνικής το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης είχε εύρος  $2 \cdot 0.00214588$  Δηλαδή είχαμε μείωση της τάξης του  $0.00145218 / 0.00214588 \approx 0.6767 = 67\%$ .

Το δεύτερο όφελος (το οποίο προφανώς δεν είναι ανεξάρτητο του πρώτου) εντοπίζεται στην μείωση της διακύμανσης του εκτιμητή που λάβαμε για την αξιοπιστία του συστήματος. Όπως διαφαίνεται από τα αποτελέσματα που πήραμε, στην περίπτωση που κάναμε χρήση αντιθετικών μεταβλητών η διασπορά της εκτιμητριας βρέθηκε περίπου ίση με 0.0548942 ενώ χωρίς τη χρήση της μεθόδου είχαμε λάβει την τιμή 0.119867.

Προκειμένου να συγκρίνουμε τις τιμές των διακυμάνσεων των εκτιμητών της αξιοπιστίας που επιτυγχάνουμε κάθε φορά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μεταξύ τους

λόγο. Η τιμή αυτή ονομάζεται σχετική αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας σε σχέση με την αρχική. Προφανώς όσο μικρότερη είναι η τιμή της, τόσο καλύτερη είναι η νέα εκτιμήτρια της αξιοπιστίας του συστήματος. Έτσι, η σχετική αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας των αντιθετικών μεταβλητών είναι  $0.0548942 / 0.119867 \approx 0.458$  δηλαδή περίπου 46%. Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως η συγκεκριμένη τεχνική ελάττωσης της διακύμανσης προσφέρει πολύ καλά αποτελέσματα για το συγκεκριμένο σύστημα.

Βέβαια για το σύστημα αυτό θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε ακριβώς την αξιοπιστία του χρησιμοποιώντας αναδρομικούς τύπους. Σκοπός μας όμως είναι η εξέταση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ελάττωσης διακύμανσης (χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα το συγκεκριμένο σύστημα) και όχι η εύρεση της αξιοπιστίας στο συγκεκριμένο σύστημα. Όπως έχουμε τονίσει, το πραγματικό όφελος και η χρησιμότητα της προσομοίωσης, φαίνονται περισσότερο στην περίπτωση που το σύστημα είναι πολύπλοκο, με αποτέλεσμα ο αναλυτικός υπολογισμός της αξιοπιστίας του να είναι αρκετά δυσχερής ή αδύνατος. Επίσης η χρήση του υπολογιστή μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε ένα σύστημα αλλάζοντας μερικές μόνο από τις παραμέτρους του κάθε φορά.

Για να πάρουμε μία συνολικότερη εικόνα για την αποτελεσματικότητα της συγκεκριμένης μεθόδου κατασκευάσαμε μέσω προσομοίωσης (100000 επαναλήψεων κάθε περίπτωσης) τον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 1** (iid συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $m$ :F)

$k$	$m$	$p$	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος	Διασπορά raw εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας αντιθετικών τ.μ.	Ελάττωση στη διακύμανση
4	30	0.1	0	0		
4	30	0.2	0.0022	0.0024838	0.0011794	0.4748289
4	30	0.3	0.02999	0.0290906	0.0143092	0.491884
4	30	0.4	0.13861	0.119397	0.0549616	0.4603265
4	30	0.5	0.36031	0.230487	0.100729	0.4370268
4	30	0.6	0.63129	0.232763	0.106454	0.4573493
4	30	0.7	0.8526	0.125673	0.0606323	0.4824608
4	30	0.8	0.96573	0.0330956	0.0167307	0.5055264
4	30	0.9	0.99766	0.00261314	0.001167	0.4465892

Η στήλη που αναφέρεται στην ελάττωση της διακύμανσης, περιέχει κάθε φορά τον λόγο της διασποράς που μας δίνει η τεχνική ελάττωσης της διακύμανσης προς τη διασπορά της πρωτογενούς εκτιμήτριας της αξιοπιστίας του συστήματος, που όπως είπαμε ονομάζεται σχετική αποτελεσματικότητα. Όπως βλέπουμε από τις τιμές του παραπάνω πίνακα, για το συγκεκριμένο σύστημα η βελτίωση που επιτυγχάνουμε με τη χρήση της μεθόδου κυμαίνεται από 43% ως 50%. Με άλλα λόγια, σε κάθε περίπτωση η διακύμανση με τη χρήση των αντιθετικών μεταβλητών είναι ίση με το μισό ή και λιγότερο της αρχικής διακύμανσης.

#### 4.1.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το  $k$ -από-τα- $m$ :  $G$  σύστημα αξιοπιστίας προκειμένου να διαπιστώσουμε το όφελος που θα αποκομίσουμε από τη χρήση της μεθόδου των αντιθετικών τυχαίων μεταβλητών. Το σύστημα αυτό λειτουργεί αν και μόνο αν τουλάχιστον  $k$  μονάδες του, από τις συνολικά  $m$ , λειτουργούν. Και για το σύστημα αυτό θα μπορούσαμε στην iid περίπτωση να υπολογίσουμε ακριβώς την αξιοπιστία του χρησιμοποιώντας τη διωνυμική κατανομή. Επαναλαμβάνουμε όμως ότι σκοπός μας είναι η



εξέταση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ελάττωσης διακύμανσης και όχι η εύρεση της αξιοπιστίας στο συγκεκριμένο iid σύστημα.

Θα θέσουμε αρχικά τις τιμές  $k = 3$  και  $m = 10$ , ώστε να έχουμε ένα 3-από-τα-10 : G σύστημα αξιοπιστίας. Θα υποθέσουμε επίσης ότι οι πιθανότητες λειτουργίας των μονάδων του συγκεκριμένου συστήματος είναι όλες ίσες με  $p = 0.4$ . Όπως είπαμε, το σύστημα αυτό λειτουργεί αν και μόνο αν λειτουργούν τουλάχιστον  $k$  από τις μονάδες του. Συνεπώς υπολογίζουμε τη συνάρτηση δομής ως εξής:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^m x_i \geq k \\ 0, & \sum_{i=1}^m x_i < k \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica εκτελούμε προσομοίωση στο παραπάνω μοντέλο προκειμένου να πάρουμε την πρωτογενή εκτιμήτρια για την αξιοπιστία του συστήματος αυτού. Επίσης θα ζητήσουμε από το πρόγραμμα ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την αξιοπιστία καθώς και τη διασπορά της εκτιμήτριάς μας. Η προσομοίωση θα γίνει για  $n = 100000$  επαναλήψεις :

### Αλγόριθμος

```
(*raw estimation of reliability , iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=3;p=0.4;
s=0;n=100000;
Do[S=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p,S[[i]]=1],{i,1,m}];
  If[Sum[S[[i]],{i,1,m}]>=k,f=1,f=0];
  s=s+f;
  ,{a,1,n}];
meanh=N[s/n];
Print[meanh," +/-", (meanh(1-meanh)/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for raw estimator ",meanh(1-meanh)]
```

### Αποτελέσματα

```
0.83284 +/- 0.00231261
variance estimate for raw estimator 0.139218
```

Όπως παρατηρούμε, πήραμε ως εκτίμηση της αξιοπιστίας του 3-από-τα-10 : G συστήματος με πιθανότητα επιτυχίας των μονάδων  $p = 0.4$ , την τιμή  $\hat{q} = 0.83284$ . Επίσης το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που λάβαμε για την αξιοπιστία του συστήματος αυτού είναι το εξής:

$$(0.83284 - 0.00231261, 0.83284 + 0.00231261)$$

Τέλος η προσομοίωση έδωσε την τιμή 0.139218 ως εκτίμηση για τη διασπορά της πρωτογενούς εκτιμήτριας.

Όπως είχαμε κάνει και με το παράδειγμα του συνεχόμενου συστήματος, θα επαναλάβουμε τώρα τη διαδικασία προσομοίωσης, αλλά αυτή τη φορά για την εκτίμηση της αξιοπιστίας θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι ίδιες παράμετροι, και ο ίδιος αριθμός επαναλήψεων. Αυτό θα γίνει προκειμένου να λάβουμε μια δεύτερη εκτίμηση για την αξιοπιστία του εν λόγω συστήματος και να τη συγκρίνουμε με την πρωτογενή εκτιμήτρια που βρήκαμε προηγουμένως.

### Αλγόριθμος

```
(*antithetic vars estimation of reliability , iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=3;p=0.4;n=100000;
t1=0;t2=0;
Do[S1=Table[0,{m}];S2=Table[0,{m}];
  Do[U=Random[];
    If[U>1-p,S1[[i]]=1];If[1-U>1-p,S2[[i]]=1];,{i,1,m}];
    If[Sum[S1[[i]],{i,1,m}]>=k,f1=1,f1=0];
    If[Sum[S2[[i]],{i,1,m}]>=k,f2=1,f2=0];
    t1=t1+(f1+f2)/2;t2=t2+(f1+f2)^2/4;
  ,{a,1,n}];
meanh=N[t1/n];varh=N[(t2-meanh^2*n)/n];
Print[meanh," +-",(varh/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for antithetic variates ",varh]
```

### Αποτελέσματα

```
0.83256 +- 0.00148163
variance estimate for antithetic variates 0.0571438
```

Εκτελώντας προσομοίωση 100000 επαναλήψεων, πήραμε ως εκτίμηση της αξιοπιστίας του 3-από-τα-10 : G συστήματος με βάση τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών, την τιμή

$$\hat{q} = 0.83256$$

Επίσης λάβαμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αξιοπιστία το οποίο είναι το

$$(0.83256 - 0.00148163, 0.83256 + 0.00148163)$$

Η εκτίμηση για τη διασπορά του εκτιμητή σε αυτή την περίπτωση είναι : 0.0571438.

Λόγω του αρνητικά συσχετισμένου δείγματος που χρησιμοποιήσαμε είχαμε και πάλι κάποια οφέλη τα οποία εντοπίζονται στα εξής σημεία. Πρώτον χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, το διάστημα εμπιστοσύνης που λάβαμε για την αξιοπιστία του

συστήματος είναι μικρότερο. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε αντιθετικές τυχαίες μεταβλητές, το εύρος του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης είναι 2·0.00148163, ενώ στην περίπτωση που δεν έγινε χρήση της τεχνικής το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης είχε εύρος 2·0.00231261 Δηλαδή είχαμε μείωση του εύρους του, της τάξης του

$$0.00148163 / 0.00231261 \approx 0.640674 \text{ δηλαδή περίπου } 64 \%$$

Αυτό οφείλεται στο ότι είχαμε μείωση της διακύμανσης της εκτιμήτριας που χρησιμοποιήσαμε για την αξιοπιστία του συστήματος. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα που πήραμε από την προσομοίωση, στην περίπτωση που κάναμε χρήση αντιθετικών μεταβλητών η διασπορά του εκτιμητή βρέθηκε περίπου ίση με 0.0571438 ενώ χωρίς τη χρήση της μεθόδου είχαμε λάβει την τιμή 0.139218. Η σχετική αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας των αντιθετικών μεταβλητών είναι  $0.0571438 / 0.139218 \approx 0.41 = 41\%$ .

Για να μπορούμε να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη άποψη για το όφελος που αποκομίζουμε από τη χρήση της συγκεκριμένης τεχνικής ελάττωσης διακύμανσης στο σύστημα, κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα με τη βοήθεια του mathematica.

**Πίνακας 2** (iid  $k$ -από-τα- $m$ :G)

$k$	$m$	$p$	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος	Διασπορά raw εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας	Ελάττωση στη διακύμανση
15	30	0,30	0,01791	0,0180325	0,0080310	0,478815
15	30	0,35	0,06606	0,0617221	0,0286661	0,464438
15	30	0,40	0,17544	0,145179	0,0570608	0,393038
15	30	0,45	0,35394	0,228205	0,0548215	0,240229
15	30	0,50	0,57209	0,244677	0,030848	0,126076
15	30	0,55	0,76909	0,177219	0,0621358	0,350616
15	30	0,60	0,90081	0,0881869	0,0397563	0,450819
15	30	0,65	0,96945	0,030414	0,0143439	0,471622
15	30	0,70	0,99288	0,007227	0,00350931	0,485583

Στη τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα φαίνεται η βελτίωση που επιτεύχθηκε στην διασπορά της εκτιμήτριας της αξιοπιστίας του συστήματος με τη χρήση της μεθόδου των αντιθετικών τυχαίων μεταβλητών.

Γενικότερα με βάση τον τελευταίο πίνακα έχουμε μια ένδειξη ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου όσον αφορά στην ελάττωση της διακύμανσης, είναι καλύτερα σε σχέση με το

σύστημα συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $m$  :  $F$  που είχαμε δει παραπάνω. Μάλιστα φαίνεται ότι η μέθοδος αυτή αποδίδει καλύτερα για τιμές του  $p$  κοντά στο 0.5.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η αξιοπιστία ενός iid  $k$ -από-τα- $m$ : $G$  συστήματος μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας την διωνυμική κατανομή. Μεγαλύτερο επομένως ενδιαφέρον παρουσιάζει η Monte-Carlo εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός non - iid  $k$ -από-τα- $m$  :  $G$  συστήματος διότι για αυτήν δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος. Υπενθυμίζεται ότι στα non-iid συστήματα οι πιθανότητες λειτουργίας των μονάδων είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε το 4-από-τα-10: $G$  σύστημα, για τιμές αξιοπιστίας των μονάδων, οι οποίες αυξάνουν κατά 0.05. Πιο αναλυτικά οι τιμές αξιοπιστίας των μονάδων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος περιέχει και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εφαρμογή της μεθόδου των αντιθετικών μεταβλητών.

**Πίνακας 3** (non-iid  $k$ -από-τα- $m$ : $G$ )

$k$	$m$	Αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος	Διασπορά $gaw$ εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας αντιθετικών	Ελάττωση στη διακύμανση
4	10	0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3	0.11679	0.10315	0.046206	0.447949
4	10	0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4	0.34948	0.227344	0.0789351	0.347205
4	10	0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5	0.62127	0.235294	0.0663391	0.281941
4	10	0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6	0.83074	0.140611	0.0559091	0.397615
4	10	0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7	0.9475	0.049743	0.0234246	0.470905
4	10	0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8	0.99003	0.009870	0.0048159	0.487910
4	10	0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8, 0.85, 0.85, 0.9, 0.9	0.99934	0.000659	0.0003395	0.514791

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε είναι μία κατάλληλη τροποίηση του προγράμματος που παρουσιάσαμε παραπάνω για την iid περίπτωση:

```
(*antithetic vars estimation of reliability , non iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=3;p={0.1,0.1,0.15,0.15,0.2,0.2,0.25,0.25,0.3,0.3};
n=10000;t1=0;t2=0;
Do[S1=Table[0,{m}];S2=Table[0,{m}];
  Do[U=Random[ ];
    If[U>1-p[[i]],S1[[i]]=1];If[1-U>1-p[[i]],S2[[i]]=1];,{i,1,m}];
  If[Sum[S1[[i]],{i,1,m}]>=k,f1=1,f1=0];
  If[Sum[S2[[i]],{i,1,m}]>=k,f2=1,f2=0];
  t1=t1+(f1+f2)/2;t2=t2+(f1+f2)^2/4;
  ,{a,1,n}];
meanh=N[t1/n];varh=N[(t2-meanh^2*n)/n];
Print[meanh," +-",(varh/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for antithetic variates ",varh]
```

Τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα δείχνουν ότι η τεχνική των αντιθετικών μεταβλητών δίνει πολύ καλά αποτελέσματα και γι' αυτά τα συστήματα. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι πιο καλά για τιμές της αξιοπιστίας των μονάδων του συστήματος κοντά στο 0.3 - 0.5.

## 4.2. Εφαρμογή της μεθόδου των μεταβλητών ελέγχου

### 4.2.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : F.

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το παράδειγμα του συνεχόμενου 4-από-τα-30 : F συστήματος. Αυτή τη φορά θα εκτιμήσουμε την αξιοπιστία του με τη βοήθεια της μεθόδου των μεταβλητών ελέγχου, προκειμένου να πάρουμε μια καλύτερη εκτιμήτρια σε σχέση με την πρωτογενή. Με τα αποτελέσματα που θα λάβουμε θα έχουμε την ευκαιρία να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου και με τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών που είδαμε προηγουμένως. Όπως είχαμε πει και στην παράγραφο που περιγράψαμε τη χρήση της μεθόδου, η μεταβλητή που θα επιλέξουμε ως μεταβλητή ελέγχου πρέπει να είναι τέτοια ώστε να είναι θετικά συσχετισμένη με την μεταβλητή που μας δίνει τη συνάρτηση δομής, ώστε η μεταβλητή που θα χρησιμοποιήσουμε τελικά ως εκτιμήτρια να είναι πιο κοντά στην πραγματική τιμή της αξιοπιστίας του συστήματος. Μια επιλογή που αποδεικνύεται απλή και σχετικά βολική είναι να χρησιμοποιήσουμε ως ρυθμιστική μεταβλητή τη

$$Y = \sum_{i=1}^m S_i,$$

δηλαδή το άθροισμα των καταστάσεων των μονάδων του συστήματος. Η μεταβλητή αυτή είναι κατάλληλη καθότι είναι, όπως και η συνάρτηση δομής του συστήματος, αύξουσα συνάρτηση των ανεξάρτητων  $S_i$  και συνεπώς θετικά συσχετισμένη με αυτή. Επίσης έχει γνωστή μέση τιμή, ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων λειτουργίας των μονάδων του συστήματος.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε για τη ρυθμιστική μεταβλητή που θα επιλέξουμε, θα εκτιμήσουμε την αξιοπιστία του συστήματος παράγοντας τυχαίους αριθμούς από την

$$H(\mathbf{S}) = \varphi(\mathbf{S}) + c^* \left( \sum_{i=1}^m S_i - \sum_{i=1}^m p_i \right).$$

Όπου  $c^*$  θα θέσουμε την τιμή

$$c^* = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i f_i - \bar{F} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^m p_i (1 - p_i)},$$

που θα εκτιμήσουμε μέσω της προσομοίωσης. Επίσης θα υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1-\alpha$  για την αξιοπιστία του συστήματος το οποίο θα είναι το :

$$\left( \bar{F} + \hat{c}^* (\bar{Y} - \sum_{i=1}^m p_i) \pm \sqrt{\frac{\bar{F}(1-\bar{F}) - (\hat{c}^*)^2 S_Y^2}{n}} Z_{\alpha/2} \right)$$

Ο αλγόριθμος μέσω Mathematica λοιπόν για το συνεχόμενο 4-από-τα-30 : F σύστημα με πιθανότητα λειτουργίας των μονάδων του ίση με  $p = 0.4$  και για  $n = 100000$  επαναλήψεις θα είναι :

### Αλγόριθμος

```
(*control vars estimation of reliability , iid consecutive k-out-of-m:F*)
m=30;k=4;p=0.4;fsum=0;n=100000;
ysum=0;xysum=0;y2sum=0;
Do[X=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p,X[[i]]=1],{i,1,m}];
  f=Product[1-Product[(1-X[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
  fsum=fsum+f;
  s=Sum[X[[i]],{i,1,m}];
  ysum=ysum+s;y2sum=y2sum+s^2;
  xysum=xysum+f*s;
  ,{a,1,n}];

c=-((xysum/n-fsum/n*(m*p)))/(m*p*(1-p));
estR=N[fsum/n+c*(ysum/n-m*p)];
estVar=(fsum/n(1-fsum/n)-c^2*(m*p*(1-p)));
Print[estR," +-",(estVar/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for control variates ",estVar]
```

### Αποτελέσματα

```
0.141023 +- 0.00192779
variance estimate for control variates 0.0967404
```

Επομένως η εκτίμηση που πήραμε για την αξιοπιστία του συστήματος είναι η τιμή 0.141023.

Το 95 % διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$(0.141023 - 0.00192779, 0.141023 + 0.00192779)$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης που λάβαμε με τη μέθοδο αυτή παρουσιάζει μικρότερο εύρος από το διάστημα εμπιστοσύνης που λάβαμε χρησιμοποιώντας την πρωτογενή εκτιμήτρια, αλλά

δεν είναι καλύτερο από το διάστημα εμπιστοσύνης που πήραμε χρησιμοποιώντας αντιθετικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα το εύρος χρησιμοποιώντας μεταβλητή ελέγχου είναι 2·0.0019278, ενώ όπως είδαμε στην πρώτη περίπτωση αλλά και στην περίπτωση των αντιθετικών μεταβλητών οι αντίστοιχες τιμές ήταν 2·0.00214588 και 2·0.00145218.

Όσον αφορά τη διακύμανση της εκτιμήτριας που παίρνουμε για την αξιοπιστία με τη μέθοδο αυτή, υπολογίστηκε από την προσομοίωση ίση με 0.0967404. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη από τη διακύμανση της πρωτογενούς εκτιμήτριας (0.119867) αλλά μεγαλύτερη από την διακύμανση από την μέθοδο των αντιθετικών τ.μ. (0.0548942). Πιο συγκεκριμένα η ελάττωση που επιτύχαμε στη διακύμανση με τη χρήση της μεθόδου των μεταβλητών ελέγχου σε σχέση με τη πρωτογενή εκτιμήτρια, είναι :

$$0.0967404 / 0.119867 = 0.807064 \approx 80\%$$

Ας δούμε και πάλι για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $m$ :F συστήματος (χρησιμοποιούμε τις ίδιες που είχαμε χρησιμοποιήσει στον Πίνακα 1), την απόδοση από τη χρήση της μεθόδου.

**Πίνακας 4** (iid συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $m$ :F)

$k$	$m$	$p$	Εκτίμηση Αξιοπιστίας	Διασπορά raw εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας control variates	Ελάττωση στη διακύμανση
4	30	0.1	0	0		
4	30	0.2	0.0022	0.0024838	0.002421	0.9747081
4	30	0.3	0.02999	0.0290906	0.0270778	0.9308093
4	30	0.4	0.13861	0.119397	0.0975793	0.8172676
4	30	0.5	0.36031	0.230487	0.172048	0.7464542
4	30	0.6	0.63129	0.232763	0.178695	0.7677122
4	30	0.7	0.8526	0.125673	0.107071	0.8519809
4	30	0.8	0.96573	0.0330956	0.0301843	0.9120336
4	30	0.9	0.99766	0.00261314	0.0024862	0.9514148

Από τις τιμές του παραπάνω πίνακα, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως υπάρχει μια τάση η τεχνική των μεταβλητών ελέγχου, να δίνει καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις τις οποίες η αξιοπιστία των μονάδων του συστήματος έχει τιμές κοντά στο 0.5. Τότε η διακύμανση γίνεται γύρω στο 75% της διακύμανσης χωρίς τη χρήση της μεθόδου. Όσο οι τιμές της αξιοπιστίας των μονάδων κινούνται προς υψηλότερες ή χαμηλότερες τιμές, τόσο τα οφέλη από τη χρήση της μεθόδου μειώνονται. Σε κάθε περίπτωση πάντως βλέπουμε πως η μέθοδος αυτή δίνει υποδεέστερα αποτελέσματα από την τεχνική των αντιθετικών

μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε ότι η ελάττωση στη διακύμανση κυμάνθηκε τώρα σε ποσοστά από 75% έως και 95% της διακύμανσης χωρίς τη χρήση της μεθόδου ενώ οι αντίστοιχες τιμές που είχαν επιτευχθεί με την μέθοδο των αντιθετικών κυμαίνονταν από 45% ως 50%.

#### 4.2.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : $G$

Θα εξετάσουμε τώρα και την περίπτωση του non-iid  $k$ -από-τα- $m$  :  $G$  συστήματος ώστε να διερευνήσουμε και σε αυτή την περίπτωση την αποτελεσματικότητα της τεχνικής ελάττωσης διακύμανσης που βασίζεται σε μεταβλητές ελέγχου.. Επιλέγουμε και πάλι ως ρυθμιστική μεταβλητή την

$$Y = \sum_{i=1}^m S_i .$$

Για προσομοίωση 100000 επαναλήψεων θα χρησιμοποιήσουμε στο Mathematica τον παρακάτω αλγόριθμο:

#### Αλγόριθμος

```
(*control vars estimation of reliability , non-iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=4;p={0.1,0.1,0.15,0.15,0.2,0.2,0.25,0.25,0.3,0.3};
fsum=0;n=100000;ysum=0;xysum=0;y2sum=0;
Do[X=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p[[i]],X[[i]]=1},{i,1,m}];
  If[Sum[X[[i]],{i,1,m}]>=k,f=1,f=0];
  fsum=fsum+f;
  s=Sum[X[[i]],{i,1,m}];
  ysum=ysum+s;y2sum=y2sum+s^2;
  xysum=xysum+f*s;
  ,{a,1,n}];

ymean=Sum[p[[i]],{i,1,m}];
yvar=Sum[p[[i]](1-p[[i]]),{i,1,m}];
c=-((xysum/n-fsum/n*(ymean)))/(yvar);
estR=N[fsum/n+c*(ysum/n-ymean)];
estVar=(fsum/n(1-fsum/n)-c^2*(yvar));
Print[estR," +-",(estVar/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate for control variates ",estVar]
```

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το 4-από-τα-10:G σύστημα, για τιμές αξιοπιστίας των μονάδων, που χρησιμοποιήσαμε και στον Πίνακα 3 για το ίδιο σύστημα. Πιο αναλυτικά οι τιμές αξιοπιστίας των μονάδων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

**Πίνακας 5** (non-iid  $k$ -από-τα- $m$ : $G$ )



$k$	$m$	Αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος	Διασπορά $\sigma_{raw}$ εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας με control variates	Ελάττωση στη διακύμανση
4	10	0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3	0.11679	0.10315	0.056213	0.5449675
4	10	0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4	0.34948	0.227344	0.078656	0.3459757
4	10	0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5	0.62127	0.235294	0.085741	0.364399
4	10	0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6	0.83074	0.140611	0.074514	0.5299294
4	10	0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7	0.9475	0.049743	0.037348	0.7508006
4	10	0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8	0.99003	0.009870	0.008841	0.8956568
4	10	0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8, 0.85, 0.85, 0.9, 0.9	0.99934	0.000659	0.000633	0.9594808

Παρατηρούμε ότι έχουμε καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που οι αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος έχουν τιμές από 0.2 ως 0.5. Γενικά όσο οι τιμές της αξιοπιστίας των μονάδων κινούνται προς υψηλές ή χαμηλές τιμές, τόσο τα οφέλη από τη χρήση της μεθόδου μειώνονται, κάτι το οποίο είχαμε παρατηρήσει και στα συνεχόμενα  $k$  από-τα-  $m$  : F συστήματα.

### 4.3. Η μέθοδος της ελάττωσης διασποράς μέσω δέσμευσης

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εφαρμογή της τεχνικής αυτής ελάττωσης της διακύμανσης, είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό εξαρτώμενη από το εκάστοτε μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει για το σύστημα που μελετάμε. Η βασική μεριμνά μας είναι η κατάλληλη επιλογή της μεταβλητής ως προς την οποία θα δεσμεύσουμε, ή πιο σωστά του διανύσματος ως προς το οποίο θα γίνει η δέσμευση. Όπως βλέπουμε από τον τύπο  $V(X) = E(V(X|Z)) + V(E(X|Z))$  επιδίωξή μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα  $E(V(X|Z))$  ώστε τελικά η διασπορά  $V(E(X|Z))$  να μειωθεί, συνυπολογίζοντας βέβαια ότι η τελική εκτιμήτρια που θα πάρουμε για την αξιοπιστία πρέπει να είναι εύκολη στον υπολογισμό της. Ένα πλεονέκτημα το οποίο παρουσιάζει αυτή η μέθοδος είναι ότι μπορεί να συνδυαστεί και με άλλες τεχνικές ελάττωσης διακύμανσης βελτιώνοντας σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό τα αποτελέσματα που μας δίνει η χρήση της. Μια γενικότερη περιγραφή της μεθόδου είχαμε παρουσιάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορεί να εφαρμοστεί η τεχνική αυτή σε

περιπτώσεις συστημάτων αξιοπιστίας και συγκεκριμένα στα συστήματα που έχουμε εφαρμόσει και τις άλλες τεχνικές.

Όπως αναφέραμε ήδη, το σημαντικό είναι να βρούμε ως προς ποιες μεταβλητές θα δεσμεύσουμε τη συνάρτηση δομής του συστήματος και να χρησιμοποιήσουμε την μέση τιμή της ποσότητας που θα πάρουμε ως νέα εκτιμήτρια συνάρτηση για την αξιοπιστία του συστήματος. Όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση δομής ενός συστήματος αξιοπιστίας είναι συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης των μονάδων του, δηλαδή  $\Phi(\mathbf{S})$  όπου  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων του συστήματος με  $m$  μονάδες. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν επιλέγαμε να δεσμεύσουμε ως προς όλες τις μεταβλητές  $S_i$  του συστήματος τότε θα καταλήγαμε να έχουμε ως νέα εκτιμήτρια αυτή που αρχικά είχαμε. Στην άλλη ακραία περίπτωση που επιλέγαμε να δεσμεύσουμε μόνο ως προς μια από τις  $S_i$  θα βρισκόμασταν ενδεχομένως αντιμέτωποι με μια ιδιαίτερα δύσκολη στον υπολογισμό εκτιμήτρια. Η καλύτερη εναλλακτική που έχουμε είναι να δεσμεύσουμε την συνάρτηση δομής ως προς όλες τις  $S_i$  εκτός από μια κατάλληλα επιλεγμένη κάθε φορά  $S_j$ , ανάλογα με τη δομή που παρουσιάζει το σύστημα αξιοπιστίας. Όπως έχουμε δει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση δομής ενός συστήματος στη μορφή

$$\Phi(\mathbf{S}) = S_j f(1_j, \mathbf{S}) + (1 - S_j) \varphi(0_j, \mathbf{S}).$$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε τα όσα αναφέραμε παραπάνω για την εκτιμήτρια συνάρτηση, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι,

$$E(\Phi(\mathbf{S}) \mid S_1, \dots, S_{j-1}, S_{j+1}, \dots, S_m) = f(1_j, \mathbf{S}) p_j + f(0_j, \mathbf{S})(1 - p_j).$$

Όπως βλέπουμε, η νέα εκτιμήτρια που θα λάβουμε για την αξιοπιστία θα προκύπτει από την παρακάτω συνάρτηση

$$g(S_1, \dots, S_{j-1}, S_{j+1}, \dots, S_m) = f(1_j, \mathbf{S}) p_j + f(0_j, \mathbf{S})(1 - p_j).$$

Η προσομοίωση θα διενεργηθεί για τους αριθμούς  $S_i$  ως προς τους οποίους δεσμεύουμε. Μέσω αυτών θα υπολογιστεί η τιμή της εκτιμήτριας, η οποία προκύπτει ως ο μέσος όρος των συναρτήσεων  $g$  που θα παίρνουμε σε κάθε βήμα της προσομοίωσης.

#### 4.3.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : F

Ας θεωρήσουμε και πάλι για παράδειγμα το συνεχόμενο 4-από-τα-30: F σύστημα αξιοπιστίας. Αποφασίζουμε να δεσμεύσουμε ως προς όλες τις  $S_i$ , εκτός της  $S_5$ . Ο αλγόριθμος στο mathematica είναι :

### Αλγόριθμος

```
(*conditioning - estimation of reliability, iid consecutive k-out-of-m:F*)
m=30;k=4;p=0.4;
s=0;n=10000;s2=0;
Do[S=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p,S[[i]]=1},{i,1,m}];
  S[[5]]=1;f1=Product[1-Product[(1-S[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
  S[[5]]=0;f0=Product[1-Product[(1-S[[i]]),{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
  g=f1*p+f0*(1-p);
  s=s+g;s2=s2+g^2
  ,{a,1,n}];
meanh=N[s/n];
Print[meanh," +/-",((s2/n-(s/n)^2)/n)^0.5*1.96];
Print["Variance estimate ",(s2/n-(s/n)^2)]
```

### Αποτελέσματα

```
0.13861 +/- 0.00201719
Variance estimate 0.105921
```

Ανάλογα με το σύστημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, υπάρχει η δυνατότητα να επιλέξουμε ως προς ποια ή ποιες μεταβλητές μας συμφέρει να γίνει η δέσμευση. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, η σχετική αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας μέσω δέσμευσης είναι :

$$0.105921 / 0.119867 \approx 0.883.$$

Η βελτίωση αυτή είναι μικρότερη σε σχέση με τη μέθοδο των αντιθετικών και τη μέθοδο των ρυθμιστικών μεταβλητών (46% και 80% αντίστοιχα).

Ας δούμε και πάλι για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $m$ : F συστήματος (χρησιμοποιούμε τις ίδιες που είχαμε χρησιμοποιήσει στους Πίνακες 1, 4), την απόδοση από τη χρήση της μεθόδου.

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εφαρμογή της τεχνικής της ελάττωσης της διασποράς μέσω δέσμευσης, είναι τα ακόλουθα:

Πίνακας 6 (iid συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $m$ :F)

$k$	$m$	$p$	Εκτίμηση Αξιοπιστίας	Διασπορά raw εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας μέσω δέσμευσης	Ελάττωση στη διακύμανση
4	30	0.1	0	0		
4	30	0.2	0.0022	0.0024838	0.001998	0.80441259
4	30	0.3	0.02999	0.0290906	0.0252636	0.86844547
4	30	0.4	0.13861	0.119397	0.106268	0.89003911
4	30	0.5	0.36031	0.230487	0.208205	0.90332643
4	30	0.6	0.63129	0.232763	0.20881	0.89709275
4	30	0.7	0.8526	0.125673	0.112466	0.89490980
4	30	0.8	0.96573	0.0330956	0.0292721	0.88447104
4	30	0.9	0.99766	0.00261314	0.00201829	0.77236198

Για την τεχνική αυτή όπως μπορούμε να δούμε από τις τιμές του παραπάνω πίνακα ισχύει το αντίστροφο από την περίπτωση που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Έτσι τώρα, αντίθετά από ότι συνέβαινε με την τεχνική των μεταβλητών ελέγχου, η βελτίωση της εκτιμήτριας είναι καλύτερη, όσο η αξιοπιστία των μονάδων παίρνει πολύ ψηλές ή πολύ χαμηλές τιμές, ενώ η βελτίωση είναι λιγότερο καλή για μεσαίες τιμές αυτών. Η μέθοδος της ελάττωσης της διασποράς μέσω δέσμευσης δίνει και αυτή εμφανώς υποδεέστερα αποτελέσματα στο σύνολό της από την τεχνική των αντιθετικών μεταβλητών. Αν δεσμεύσουμε όμως ως προς λιγότερες μεταβλητές (π.χ. όλες εκτός από 2) αναμένουμε τα αποτελέσματα να είναι καλύτερα.

#### 4.3.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : G

Για την εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής ελάττωσης διακύμανσης στο non-iid σύστημα  $k$  από τα  $m$  : G θα εργαστούμε παρόμοια με παραπάνω. Όσον αφορά το σύστημα 4-από-τα-10 : G, αν επιλέξουμε να δεσμεύσουμε ως προς όλες τις μεταβλητές εκτός αυτής που εκφράζει τη λειτουργία της τελευταίας μονάδας του συστήματος θα έχουμε :

## Αλγόριθμος

```
(*conditioning - estimation of reliability , non iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=4;p={0.1,0.1,0.15,0.15,0.2,0.2,0.25,0.25,0.3,0.3};
s=0;n=100000;s2=0;
monada=10;
Do[S=Table[0,{m}];
  Do[If[Random[]>1-p[[i]],S[[i]]=1},{i,1,m}];
  S[[monada]]=1;If[Sum[S[[i]],{i,1,m}]>= k,f1=1,f1=0];
  S[[monada]]=0;If[Sum[S[[i]],{i,1,m}]>= k,f0=1,f0=0];
  g=f1*p[[monada]]+f0*(1-p[[monada]]);
  s=s+g;s2=s2+g^2;
  ,{a,1,n}];
meanh=N[s/n];
Print[meanh," +-",((s2/n-(s/n)^2)/n)^0.5*1.96];
Print["variance estimate ",(s2/n-(s/n)^2)]
```

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το 4-από-τα-10:G σύστημα, για τιμές αξιοπιστίας των μονάδων, που χρησιμοποιήσαμε και στους Πίνακες 3,5 για το ίδιο σύστημα. Πιο αναλυτικά οι τιμές αξιοπιστίας των μονάδων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

**Πίνακας 7** (non-iid  $k$ -από-τα- $m$ :G)

$k$	$m$	Αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος	Διασπορά εκτιμήτριας raw	Διασπορά εκτιμήτριας δέσμευσης	Διασπορά εκτιμήτριας μεσω	Ελάττωση στη διακύμανση
4	10	0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3	0.11679	0.10315	0.0690569	0.6694803	
4	10	0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4	0.34948	0.227344	0.16413	0.7219456	
4	10	0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5	0.62127	0.235294	0.170124	0.7230273	
4	10	0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6	0.83074	0.140611	0.0983911	0.6997397	
4	10	0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7	0.9475	0.049743	0.0336438	0.6763429	
4	10	0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8	0.99003	0.009870	0.00569923	0.5773944	
4	10	0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8, 0.85, 0.85, 0.9, 0.9	0.99934	0.000659	0.00033795	0.5123809	

Για την τεχνική αυτή, όπως μπορούμε να δούμε από τις τιμές του παραπάνω πίνακα, ισχύει το αντίστροφο από την περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου. Αντίθετά από ότι συνέβαινε με την τεχνική των μεταβλητών ελέγχου, η βελτίωση μέσω αυτής της μεθόδου είναι μεγαλύτερη, όσο η αξιοπιστία των μονάδων παίρνει πολύ ψηλές ή πολύ χαμηλές τιμές, ενώ η βελτίωση είναι μικρότερη για μεσαίες τιμές αυτών. Παρόλα αυτά, μόνο για υψηλές τιμές της αξιοπιστίας η τεχνική αυτή δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την προηγούμενη μέθοδο. Μία ακόμα παρατήρηση που έχει να κάνει με τον αλγόριθμο της τεχνικής αυτής, είναι ότι

προκειμένου να πάρουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα, κρίνεται σκόπιμο να δεσμεύουμε ως προς την μονάδα με τη μεγαλύτερη αξιοπιστία. Αυτό προέκυψε εμπειρικά από τον παραπάνω αλγόριθμο, από τον οποίο είδαμε ότι όταν για το ίδιο σύστημα δεσμεύαμε ως προς την δέκατη μονάδα (η οποία έχει την μεγαλύτερη αξιοπιστία) επιτυγχάναμε τη μικρότερη διακύμανση.

#### 4.4. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία

Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία στηρίζεται ουσιαστικά στο διαμερισμό της διαδικασίας της προσομοίωσης σε ένα πλήθος επί μέρους περιπτώσεων. Συνεπώς η χρήση της κρίνεται ωφέλιμη κυρίως σε περιπτώσεις όπου η τυχαία μεταβλητή  $X$  της οποίας τη μέση τιμή θέλουμε να εκτιμήσουμε εξαρτάται από μια άλλη τυχαία μεταβλητή  $Y$  η οποία μπορεί να πάρει πεπερασμένο πλήθος τιμών. Οι τιμές αυτές τις οποίες λαμβάνει με κάποια πιθανότητα αποτελούν τα επιμέρους στρώματα στα οποία θα διαμεριστεί η προσομοίωση.

Στα συστήματα αξιοπιστίας, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις δομής  $f(\mathbf{S})$  εξαρτώνται από ένα πλήθος τυχαίων μεταβλητών  $S_i$  που εκφράζουν τη κατάσταση λειτουργίας των μονάδων τους. Πρόκειται με άλλα λόγια για ένα διάνυσμα  $\mathbf{S}$  που αποτελείται από ένα πλήθος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες παίρνουν τις τιμές 1 ή 0. Επομένως, δεν θα αποκομίσουμε όφελος προσπαθώντας να δημιουργήσουμε στρώματα ως προς τις μεμονωμένες τιμές των  $S_i$ . Ίσως θα ήταν επωφέλες να δημιουργήσουμε στρώματα ως προς τις τιμές του αθροίσματος των  $S_i$ . Έτσι, θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} R = P(f(\mathbf{S})=1) &= \sum_{s=0}^n P\left(f(\mathbf{S})=1 \mid \sum_{j=1}^n S_j = s\right) P\left(\sum_{j=1}^n S_j = s\right) \\ &=_{iid} \sum_{s=0}^n E\left(f(\mathbf{S}) \mid \sum_{j=1}^n S_j = s\right) \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, χωρίζουμε τη διαδικασία της προσομοίωσης σε  $n$  στρώματα, και στο  $s$ -στρώμα παράγουμε  $k_s = nP(\sum S_j = s)$  το πλήθος τυχαίους αριθμούς  $Y_1, \dots, Y_{k_s}$  από την κατανομή της  $f(\mathbf{S}) \mid \sum S_j = s$ . Δεδομένου ότι  $\sum S_j = s$ , το τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$  κατασκευάζεται προσθέτοντας «1» σε  $s$  το πλήθος τυχαίες θέσεις του  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέσο όρο  $\bar{Y}_s$  των  $Y_i$ . Το ίδιο γίνεται για όλα τα στρώματα  $0, 1, \dots, n$ . Τελικά θα έχουμε

$$\hat{R} = \sum_{s=0}^n \bar{Y}_s \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Η παραπάνω εκτιμήτρια θα παρουσιάζει μικρότερη διασπορά σε σχέση με την πρωτογενή εκτιμήτρια.

#### 4.5. Δειγματοληψία σπουδαιότητας

Όπως και στην περίπτωση της τεχνικής ελάττωσης της διακύμανσης μέσω δέσμευσης, έτσι και τώρα η δειγματοληψία σπουδαιότητας παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά τα οποία την καθιστούν ιδανικότερη σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου θέλουμε να επιτύχουμε μείωση της διακύμανσης μιας εκτιμήτριας. Όπως είχαμε αναφέρει κατά την περιγραφή της μεθόδου, εκφράζουμε τη μέση τιμή που επιθυμούμε να υπολογίσουμε ως μέση τιμή μιας άλλης συνάρτησης ενός διαφορετικού τυχαίου διάνυσματος. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο είτε σε περιπτώσεις που η διασπορά της αρχικής εκτιμήτριας που πήραμε είναι μεγάλη, είτε στην περίπτωση που το αρχικό τυχαίο διάνυσμα που πρέπει να προσομοιώσουμε αποδειχτεί τελικά δύσχρηστο στην προσομοίωσή του.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που είχαμε δει και κατά την περιγραφή της μεθόδου στο προηγούμενο κεφάλαιο, η νέα συνάρτηση μέσω της οποίας θα εκτιμήσουμε τη μέση τιμή  $E(h(\underline{X}))$  που μας ενδιαφέρει είναι η

$$t(\underline{Y}) = \frac{h(\underline{Y})f(\underline{Y})}{g(\underline{Y})}.$$

όπου το τυχαίο διάνυσμα  $\underline{Y}$  ακολουθεί κατανομή με σ.π.π.  $g$ . Η παραπάνω τ.μ., παρουσιάζει μικρή διακύμανση, αν η  $h(\underline{y})$  παίρνει απόλυτα μικρές τιμές οποτεδήποτε συμβαίνει ο λόγος  $f(\underline{y})/g(\underline{y})$  να μην είναι κοντά στο 0. Επειδή λοιπόν η  $h(\underline{y})$  απαιτείται να είναι μικρή, η δειγματοληψία σπουδαιότητας συμπεραίνουμε ότι δουλεύει ικανοποιητικά όταν επιδίωξή μας είναι η εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων.

Με βάση τα παραπάνω, θα δούμε στη συνέχεια πως εφαρμόζεται η τεχνική της δειγματοληψίας σπουδαιότητας, στην περίπτωση του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $m$  : F συστήματος. Οι μεταβλητές που περιγράφουν την κατάσταση λειτουργίας των μονάδων του συστήματος ακολουθούν κατανομή Bernoulli με πιθανότητα λειτουργίας  $p$ . Επίσης στη σχέση

$t(\underline{Y}) = h(\underline{Y})f(\underline{Y})/g(\underline{Y})$ , η συνάρτηση  $h(\underline{y})$  έχει το ρόλο της συνάρτησης δομής του συστήματος και η  $f(\underline{Y})$  είναι

$$f(\underline{Y}) = f_1(Y_1)\dots f_m(Y_m) \quad \text{όπου} \quad f_i(x) = p_i^x(1-p_i)^{1-x}, \quad x = 0,1.$$

Μια καλή επιλογή για τη συνάρτηση  $g$  είναι να θεωρήσουμε ότι  $g = g_1 g_2 \dots g_m$  και η κάθε σ.π.π.  $g_i$  να είναι και πάλι Bernoulli αλλά με διαφορετική παράμετρο  $q_i$ . Οι ποσότητες  $q_i$  θα υπολογιστούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά της νέας εκτιμήτριας  $t(\underline{Y})$ . Προκειμένου να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, ένας τρόπος είναι να δοκιμάσουμε αρκετές διαφορετικές τιμές και να επιλέξουμε την βέλτιστη. Η μορφή της νέας εκτιμήτριας της αξιοπιστίας με όσα αναφέραμε μέχρι τώρα θα είναι τελικά της μορφής

$$t(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \prod_{i=1}^m \left( \frac{p_i}{q_i} \right)^{Y_i} \left( \frac{1-p_i}{1-q_i} \right)^{1-Y_i},$$

όπου οι τ.μ.  $Y_i, i = 1, 2, \dots, m$ , είναι ανεξάρτητες Bernoulli με πιθ. επιτυχίας  $q_i, i = 1, 2, \dots, m$ .

#### 4.5.1. Σύστημα συνεχόμενο $k$ -από-τα- $m$ : F

Προκειμένου να παρουσιάσουμε τα παραπάνω στην πράξη θα θεωρήσουμε και πάλι το iid συνεχόμενο 4-από-τα-30 : F σύστημα αξιοπιστίας με πιθανότητες λειτουργίας των μονάδων του ίσες με  $p = 0.4$ . Ο αλγόριθμος για προσομοίωση 10000 επαναλήψεων στο mathematica δίνεται παρακάτω. Αρχικά θα γίνει ένα πλήθος δοκιμών με διαφορετικές τιμές για το  $q$  (θεωρούμε  $q_1 = \dots = q_m = q$ ) ώστε να επιλεγεί αυτό που ελαχιστοποιεί τη διασπορά του εκτιμητή.



## Αλγόριθμος

```
(*Importance sampling estimation of reliab., iid consecutive k-out-of-m:F*)
m=30;k=4;p=0.4;n=10000;
Do[w=0;s2=0;
  Do[X=Table[0,{m}];
    Do[If[Random[]>1-q,X[[i]]=1},{i,1,m}];
      f=Product[1-Product[1-X[[i]],{i,j,j+k-1}],{j,1,m-k+1}];
      s=Sum[X[[i]],{i,1,m}];
      h=f*(p/q)^s*((1-p)/(1-q))^(m-s);
      w=w+h;s2=s2+h^2;
      ,{a,1,n}];
    S2=s2/n-(w/n)^2;
    Print["q = ",q," , R Estimate: ",N[w/n],"+-",(S2/n)^0.5*1.96,"
      , Var Estimate: ",N[S2]];
  ,{q,0.2,0.6,0.05}]
```

## Αποτελέσματα

q = 0.2	, R Estimate:	0.268586	+-	0.242189	, Var Estimate:	152.685
q = 0.25	, R Estimate:	0.224723	+-	0.102326	, Var Estimate:	27.2559
q = 0.3	, R Estimate:	0.146831	+-	0.021904	, Var Estimate:	1.249
q = 0.35	, R Estimate:	0.147649	+-	0.011568	, Var Estimate:	0.348351
q = 0.4	, R Estimate:	0.142000	+-	0.006841	, Var Estimate:	0.121836
q = 0.45	, R Estimate:	0.132875	+-	0.005309	, Var Estimate:	0.0733823
q = 0.5	, R Estimate:	0.135741	+-	0.005720	, Var Estimate:	0.0851716
q = 0.55	, R Estimate:	0.145139	+-	0.009136	, Var Estimate:	0.217315
q = 0.6	, R Estimate:	0.132017	+-	0.010498	, Var Estimate:	0.2869

Από τα παραπάνω είναι φανερό πως για  $p = 0.4$  η βέλτιστη τιμή για το  $q$  είναι κάπου κοντά στο 0.45. Έτσι εκτελούμε ξανά τον πιο πάνω αλγόριθμο μόνο για  $q = 0.45$ , αυτή τη φορά για 100000 επαναλήψεις προκειμένου να πάρουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στην εκτίμηση της αξιοπιστίας. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

q = 0.45	, R Estimate:	0.137085	+-	0.00171028	, Var Estimate:	0.0761417
----------	---------------	----------	----	------------	-----------------	-----------

Η σχετική αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας που προκύπτει μέσω δειγματοληψίας σπουδαιότητας είναι  $0.0761417 / 0.119867 \approx 0.635218$  δηλαδή περίπου 63%. Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως η συγκεκριμένη τεχνική ελάττωσης της διακύμανσης προσφέρει αρκετά καλά αποτελέσματα για το συγκεκριμένο σύστημα (υπενθυμίζεται ότι οι προηγούμενες τεχνικές στο ίδιο σύστημα και με  $p = 0.4$  έδωσαν βελτίωση της διασποράς της εκτιμήτριας κατά 46%, 80% και 88% αντίστοιχα).

Ας δούμε και πάλι για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συνεχόμενου  $k$ -από-τα- $m$ : F συστήματος (χρησιμοποιούμε τις ίδιες που είχαμε χρησιμοποιήσει στους Πίνακες 1, 4, 6), την απόδοση από τη χρήση της μεθόδου. Σε κάθε διαφορετική τιμή του  $p$  βρίσκουμε, όπως παραπάνω, προσεγγιστικά την βέλτιστη τιμή του  $q$ . Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εφαρμογή της τεχνικής της δειγματοληψίας σπουδαιότητας, είναι τα ακόλουθα:

**Πίνακας 8** (iid συνεχόμενο  $k$ -από-τα- $m$ :F)

$k$	$m$	$p$	$q$	Εκτίμηση Αξιοπιστίας	Διασπορά raw εκτιμήτριας	Διασπορά εκτιμήτριας Importance sampling	Ελάττωση στη διακύμανση
4	30	0.1		0	0		
4	30	0.2	0.37	0.0022	0.0024838	0.00022456	0.090410
4	30	0.3	0.39	0.02999	0.0290906	0.0106928	0.3675689
4	30	0.4	0.4	0.13861	0.119397	0.0762968	0.6390177
4	30	0.5	0.53	0.36031	0.230487	0.185434	0.8045313
4	30	0.6	0.62	0.63129	0.232763	0.208333	0.8950435
4	30	0.7	0.705	0.8526	0.125673	0.120916	0.962148
4	30	0.8	0.802	0.96573	0.0330956	0.0325822	0.984487
4	30	0.9		0.99766	0.00261314		

Όπως αναμέναμε από τα όσα έχουμε αναφέρει για τη συγκεκριμένη μέθοδο κατά την περιγραφή της, βλέπουμε ότι η τεχνική αυτή δίνει άριστα αποτελέσματα, καλύτερα από όλες τις άλλες τεχνικές, όταν το σύστημα παρουσιάζει μικρή αξιοπιστία. Αντίθετα, τα αποτελέσματα χειροτερεύουν όσο η αξιοπιστία του συστήματος μεγαλώνει. Μάλιστα για υψηλές τιμές της αξιοπιστίας, πάνω από 0.7, η χρήση της δεν φαίνεται να αποδίδει κάποιο όφελος.

#### 4.5.2. Σύστημα $k$ -από-τα- $m$ : G

Για την εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής ελάττωσης διακύμανσης στο non-iid σύστημα  $k$  από τα  $m$  : G θα εργαστούμε παρόμοια με παραπάνω. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το 4-από-τα-10:G σύστημα, για τιμές αξιοπιστίας των μονάδων, που χρησιμοποιήσαμε και στους Πίνακες 3, 5 και 7 για το ίδιο σύστημα. Για κάθε τιμή των  $p_1, p_2, \dots, p_m$  δοκιμάζουμε τις τιμές των  $q_i$ ;  $q_1 = p_1 + d$ ,  $q_2 = p_2 + d$ , ...,  $q_{10} = p_{10} + d$  για διάφορα  $d$  και προσδιορίζουμε εμπειρικά το βέλτιστο  $d$ . Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος.

## Αλγόριθμος

```
(*importance sampling estimation of reliability, non-iid k-out-of-m:G*)
m=10;k=3;p={0.1,0.1,0.15,0.15,0.2,0.2,0.25,0.25,0.3,0.3};n=10000;
Do[w=0;s2=0;q=p+d;
  Do[X=Table[0,{m}];
    Do[If[Random[]>1-q[[i]],X[[i]]=1},{i,1,m}];
      If[Sum[X[[i]],{i,1,m}]>=k,f=1,f=0];
        s=Sum[X[[i]],{i,1,m}];
          h=f*Product[(p[[i]]/q[[i]])^X[[i]]*((1-p[[i]])
            /(1-q[[i]]))^(1-X[[i]]),{i,1,m}];
            w=w+h;s2=s2+h^2;
              ,{a,1,n}];
                S2=s2/n-(w/n)^2;
                  Print["q = ",q," , R Estimate: ",N[w/n],"+-", (S2/n)^0.5*1.96,"
                    , Variance Estimate: ",N[S2]];
                      ,{d,0.05,0.3,0.05}]
```

Τελικά προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

**Πίνακας 9** (non-iid  $k$ -από-τα- $m$ :G)

$k$	$m$	Αξιοπιστίες των μονάδων του συστήματος	Εκτίμηση αξιοπιστίας συστήματος $d$	Διασπορά raw εκτιμήτριας $gaw$	Διασπορά εκτιμήτριας importance sampling	Ελάττωση στη διακύμανση $\eta$	
4	10	0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3	0.2	0.11679	0.10315	0.021871	0.212037
4	10	0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4	0.15	0.34948	0.227344	0.10288	0.452530
4	10	0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5	0.5	0.62127	0.235294	0.161676	0.687123
4	10	0.4, 0.4, 0.45, 0.45, 0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6	0.5	0.83074	0.140611	0.125165	0.890150
4	10	0.5, 0.5, 0.55, 0.55, 0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7	0.5	0.9475	0.049743	0.049681	0.998741
4	10	0.6, 0.6, 0.65, 0.65, 0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8	0.3	0.99003	0.009870	0.009811	0.994041
4	10	0.7, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 0.8, 0.85, 0.85, 0.9, 0.9	0.99934	0.000659			

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει και στην προηγούμενη παράγραφο, η τεχνική αυτή δίνει άριστα αποτελέσματα όταν το σύστημα παρουσιάζει μικρή αξιοπιστία ενώ αντίθετα για μεγάλες τιμές της αξιοπιστίας, δεν προσφέρει κανένα όφελος.

Κλείνοντας, με βάση τα αποτελέσματα που λάβαμε από τα παραπάνω παραδείγματα, αξίζει να συνοψίσουμε τα συμπεράσματά μας στα εξής. Η τεχνική της δειγματοληψίας σπουδαιότητας είναι εξαιρετικά αποτελεσματική στις περιπτώσεις τις οποίες το σύστημα που μελετάμε παρουσιάζει πολύ μικρή αξιοπιστία. Τότε η ελάττωση στη διακύμανση είναι η

μεγαλύτερη από όλες τις άλλες μεθόδους. Η τεχνική των αντιθετικών μεταβλητών έχει την ικανότητα να μειώνει επίσης σε μεγάλο βαθμό την διακύμανση στις περισσότερες των περιπτώσεων. Όσον αφορά τη τεχνική της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας, αν και αναμένεται να μειώνει τη διακύμανση, εντούτοις η πρακτική εφαρμογή της παρουσιάζει δυσκολίες. Τέλος στα παραδείγματα που παρουσιάσαμε παρατηρήσαμε ότι οι τεχνικές της ελάττωσης διασποράς μέσω δέσμευσης και μέσω ρυθμιστικών μεταβλητών φαίνεται πως λειτουργούν σε ένα διαφορετικό φάσμα περιπτώσεων όσον αφορά την εκτιμώμενη αξιοπιστία του συστήματος που μελετάμε και με βάση αυτή θα γίνεται η επιλογή χρήσης μεταξύ των δυο.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική

- Κούτρας Μ. (2002) *Θεωρία Αξιοπιστίας*. Σημειώσεις Διδασκαλίας, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»
- Μπούτσικας Μ. (2003) *Θεωρία Αξιοπιστίας*, Σημειώσεις διδασκαλίας, τμ. Στατ. & Ασφ. Επιστήμης.
- Μπούτσικας Μ. (2003-5) *Μέθοδοι προσομοίωσης και υπολογιστικές στατιστικές τεχνικές*, Σημειώσεις διδασκαλίας, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική»

### Ξένα

- Dummer Geoffrey G., William Arnold and Winton, R. C. (1974) *An elementary guide to reliability*. Pergamon Press.
- Fishman George S. (1996) *Monte Carlo Concepts , Algorithms and Applications*. Springer Series in operations research
- Goodman Jonathan (2005) *Lecture Notes on Monte Carlo Methods*. Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU,
- Grosh, Doris and Lloyd (1989) *A primer of reliability theory*.Wiley.
- Hammersley J.M and Handscomb D.C (1979) *Monte Carlo methods*. Monographs on applied probability and statistics. Chapman and Hall
- Jackel Peter (2002) *Monte Carlo methods in finance*. Wiley finance series
- Khoshnevis and Behrokh (1994) *Discrete systems simulation*. McGraw-Hill
- Law A. and Kelton D. (2000) *Simulation modelling and analysis*. 3rd edition. McGraw – Hill International series
- Ross Sheldon M. (1997) *Simulation*. Statistical modelling and decision science. Harcourt.
- Rubinstein Reuven Y. (1981) *Simulation and the Monte Carlo method*. J. Wiley & Sons
- Rubinstein Reuven Y. and Benjamin Melamed (1998) *Modern simulation and modelling*, Wiley series in Probability and Statistics.
- Taylor Howard M, and Karlin Samuel (1998) *An introduction to stochastic modelling*. 3<sup>rd</sup> edition, Academic Press
- Yücesan E., Chen C.-H., Snowdon J. L., and Charnes J. M. (2002) *Introduction to Simulation. Proceedings of the Winter Simulation Conference*, eds . Ricki G. Ingalls School of Industrial Engineering and Management 322 Engineering North Oklahoma State University

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ