ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης Ελαστικών Κυμάτων σε Ομογενές κατά Τμήματα Μέσο

Γεώργιος Κανακούδης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς

Μάρτιος 2024

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

Direct and Inverse Elastic Scattering Problems in a Piecewise Homogeneous Medium

George Kanakoudis

PhD Thesis

Submitted to

Department of Statistics and Insurance Science

of the University of Piraeus

Piraeus

March 2024

Στην Κατερίνα και την Ανθή

Ευχαριστίες

Βρίσκομαι στην ευχάριστη θέση να μπορώ, στο σημείο αυτό, να εκφράσω τις ευχαριστίες και την ευγνωμοσύνη μου σε όσους με συνέδραμαν στην εκπόνηση της διατριβής μου. Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Σεβρόγλου Βασίλειο για τη διδασκαλία του και την αμέριστη συμπαράστασή του. Ο κ. Σεβρόγλου μου έδειξε τον δρόμο στο πεδίο της Μαθηματικής Θεωρίας Σκέδασης και με συμπεριέλαβε σε συνεργασίες με άλλους Καθηγητές, δίνοντας μου την ευκαιρία να μάθω από την συνεργασία με διακεκριμένους ερευνητές.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής Καθηγητές κ. Πελεκάνο Γεώργιο και κ. Στρατή Ιωάννη (Ομότιμος Καθηγητής) για την υποστήριξη και τις υποδείξεις τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τους Καθηγητές κ. Αθανασιάδη Χριστόδουλο (Ομότιμος Καθηγητής), κ. Γιαννακόπουλο Αθανάσιο καθώς και τον Prof. Natroshvili David για την πολύτιμη εμπειρία της συνεργασίας μαζί τους.

Περίληψη

Σε αυτήν τη διατριβή μελετούμε προβλήματα συνοριακών τιμών που αφορούν την εξίσωση Navier τόσο σε ντετερμινιστικό όσο και σε στοχαστικό περιβάλλον. Αρχικά, επικεντρωνόμαστε σε πρόβλημα συνοριακών τιμών που μαθηματικά μοντελοποιεί ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης στη γραμμική ελαστικότητα θεωρώντας χρονική αρμονική εξάρτηση, που αφορά σε ένα εμπόδιο με τμηματική εμπέδηση. Ειδικότερα, λαμβάνουμε υπόψη έναν σκεδαστή που βρίσκεται σε ένα ομογενές μέσο με σύνορο κατά τμήματα επικαλυμμένο, με διαφορετικές σταθερές εμπέδησης στο κάθε τμήμα. Η μοναδικότητα της λύσης θεμελιώνεται μέσω της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος, ενώ η ύπαρξη της λύσης αποδεικνύεται με τη μέθοδο ολοκληρωτικών συνοριακών εξισώσεων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η προσέγγισή μας βασίζεται στο να αναπαρασταθεί η λύση ως γραμμικός συνδυασμός δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, αποδεικνύοντας την ύπαρξη λύσης καθώς και ένα βασικό αποτέλεσμα ευστάθειας. Επιπλέον, παρέχονται σημαντικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα για να ενισχυθεί η κατανόηση του προβλήματος.

Στη συνέχεια, ασχολούμαστε με το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης χρονικά αρμονικών ελαστικών κυμάτων από ένα μη ομογενές μέσο που περιέχει θαμμένα αντικείμενα-σκεδαστές. Αρχικά, θεμελιώνουμε την καλή–τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος μέσω μιας τροποποιημένης μεταβολικής μεθόδου σε κατάλληλους συναρτησιακούς χώρους Sobolev. Αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα, την ύπαρξη και τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα στο σύνορο των θαμμένων αντικειμένων (σκεδαστών). Έπειτα, θεωρούμε το αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης και χρησιμοποιώντας κατάλληλη τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης (*modified factorization method*) δίνουμε αποτελέσματα για την ανακατασκευή του σχήματος και τον εντοπισμό των στρωμάτων του μη ομογενούς μέσου. Η μελέτη μας περιλαμβάνει ακόμη σχετικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα, εστιάζοντας στη σύνδεση μεταξύ του ευθέος προβλήματος σκέδασης και του αντίστοιχου αντιστρόφου σε ελαστικά μέσα.

Στη συνέχεια της διδακτορικής διατριβής, μελετούμε δύο στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών που προκύπτουν στη γραμμική ελαστικότητα χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Wiener chaos, ώστε να καταδειχθεί η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου αυτής και σε μελλοντική εργασία να μελετηθεί στοχαστικό πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο. Ειδικότερα, θεμελιώνουμε κατάλληλη μεταβολική διατύπωση προβλήματος για την εξίσωση Navier, με τα συνοριακά δεδομένα να εκφράζονται ως ανάπτυγμα Wiener chaos. Η βασική ιδέα είναι να ανάγουμε το στοχαστικό πρόβλημα σε μια άπειρη ιεραρχία ντετερμινιστικών συνοριακών προβλημάτων, όπου χειριζόμαστε κάθε πρόβλημα της ιεραρχίας με την κατάλληλη μεταβολική του διατύπωση. Θεμελιώνουμε την καλή τοποθέτηση για καθε ένα πρόβλημα από την ιεραρχία αυτή, παρουσιάζουμε τη σύνδεση με το στοχαστικό πρόβλημα και διατυπώνουμε επιχειρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης για τη λύση ως σταθμισμένο ανάπτυγμα Wiener chaos (*weighted Wiener chaos expansion*). Τέλος, εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία, δηλαδή αυτή της αναγωγής σε μια άπειρη ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων, σε ένα στοχαστικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη μη ομογενή εξίσωση Navier, όπου τόσο το δεύτερο μέλος της εξίσωσης όσο και τα συνοριακά δεδομένα εκφράζονται υπό μορφή αναπτύγματος Wiener chaos. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, περιλαμβάνονται σημαντικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα αναδεικνύοντας τη χρησιμότητα της μεθόδου.

Λέξεις – Κλειδιά: Δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, Εξίσωση Navier, Μεικτά προβλήματα σκέδασης, Τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης, Στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών, Αναπτύγματα Wiener chaos.

Abstract

In this thesis, we investigate boundary value problems involving Navier equation both in deterministic and stochastic invironment. Initially, we focus on the direct elastic scattering problem posed by a piecewise impedance obstacle. Specifically, we consider a scatterer embedded in a homogeneous medium, which is piecewise coated with different impedance constants on distinct parts of its boundary. The uniqueness of the solution is established through the variational formulation of the problem, while the existence and regularity properties of the solution are demonstrated using the boundary integral equation approach. Notably, our approach relies on representing the solution as a combination of single and double layer potentials, leading to existence results as well as to an essential regularity result. Additionally, significant remarks and conclusions are provided to enhance the understanding of the problem.

Next, we address the direct and inverse scattering problem of time-harmonic elastic waves by an inhomogeneous medium, containing buried objects. Initially, we establish well-posedness for the direct scattering problem through a modified variational method within a suitable Sobolev space setting. We prove uniqueness, existence, and continuous dependence of the solution on the boundary data associated with the buried obstacles. Subsequently, we delve into the corresponding inverse problem, particularly exploring, via the modified factorization method, for shape reconstruction and location of the support of the inhomogeneous medium. Our study also includes pertinent remarks and conclusions, focusing on the interconnection between the direct scattering problem and its inverse counterpart in elastic media.

Finally, we study two stochastic boundary value problems arising in linear elasticity through a Wiener chaos expansion, in order to show the feasibility of the method and proceed in future paper to the study of a stochastic scattering problem in a piecewise homogeneous medium. Specifically, we establish an appropriate variational formulation for Navier equation with stochastic boundary data . The key idea is to reduce the stochastic problems into an infinite hierarchy of deterministic boundary value problems, where each problem is treated with an appropriate variational formulation. Subsequently, we establish well-posedness for this hierarchy of deterministic problems, establish the relevant connection to the stochastic problem, and employ uniqueness and existence arguments for the weighted Wiener chaos solution. Afterwards, we address a boundary value problem concerning the non homogeneous Navier equation where both the right hand side of the equation as well as the boundary data are given as Wiener chaos expansions, using similar reasoning, i.e the reduction of the problem into an infinite hierarchy of deterministic ones. As in the previous cases, valuable remarks and conclusions are included to further illuminate the topic at hand.

Key-words: Two-dimensional linear elasticity, Navier equation, Mixed boundary value scattering problems, Stochastic boundary value problems, Wiener chaos expansions.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Συμβόλων

Δ^*	Τελεστής του Kupradze
$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$	Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Navier
$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_p(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$	Διάμηκες τμήμα του $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$
$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_s(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$	Εγκάρσιο τμήμα του $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$
$\widetilde{\mathbf{I}}$	Ταυτοτικό δυαδικό
T	Τελεστής επιφανειακής τάσης
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Τανυστής παραμόρφωσης
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Τανυστής τάσης
$\hat{\mathbf{n}}$	Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα
ρ	Πυκνότητα μάζας
$\lambda,\,\mu$	Σταθερές Lamè
$k_p,\,k_s$	Κυματικοί αριθμοί διαμήκους και εγκάρσιου κύματος
ω	Κυκλική συχνότητα
$c_p,\,c_s$	Φασικές ταχύτητες διαμήκους και εγκάρσιου κύματος
$\mathbf{u}^{\mathbf{tot}}$	Ολικό διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων
$\mathbf{u}^{\mathbf{inc}}$	Προσπίπτον διανυσματικό κυματικό πεδίο
$\mathbf{u}^{\mathbf{sct}}$	Σκεδασμένο διανυσματικό πεδίο
$\mathbf{u}^{\mathbf{inc}}_{\mathbf{p}}$	Προσπίπτον διάμηκες κύμα
$\mathbf{u}^{\mathbf{inc}}_{\mathbf{s}}$	Προσπίπτον εγκάρσιο κύμα
$\mathbf{u}^{\infty}_{p}$	Πλάτος σκέδασης διαμήκους κύματος
$\mathbf{u}^{\infty}_{s}$	Πλάτος σκέδασης εγκάρσιου κύματος
$H_0^{(1)}$	Κυλινδρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης

$(S\varphi)(\mathbf{r})$	Δυναμικό απλού στρώματος (Δ.Α.Σ.)
$(D\varphi)(\mathbf{r})$	Δυναμικό διπλού στρώματος (Δ.Δ.Σ.)
$(K\varphi)(\mathbf{r})$	Τελεστής που προκύπτει
	από τη δράση του T επί του Δ.Α.Σ.
$(K^*\varphi)(\mathbf{r})$	Ο συζυγής τελεστής του μιγαδικού συζυγούς του K
∂S_R	Σύνορο κυκλικού δίσκου ακτίνας R
$\mathcal{O}$	Μεγάλο όμικρον του Landau
F	Τελεστής μακρινού πεδίου
G	Τελεστής λύσης
$a = (a_1, a_2, ...)\,, a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	Πολυδείκτες
$h_n(x)$	Κανονικοποιημένα πολυώνυμα Hermite
$\psi_n(x)$	Συναρτήσεις Hermite
$H_a(\omega)$	Στοχαστικά πολυώνυμα Hermite

Εισαγωγή

Τα προβλήματα σκέδασης περιλαμβάνουν εκείνα τα προβλήματα της κυματικής στα οποία μελετάται η επίδραση των ανομοιογενειών του μέσου διάδοσης στο διαδιδόμενο κύμα, και χωρίζονται σε ευθέα και αντίστροφα. Στα ευθέα προβλήματα αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο με γνωστό το προσπίπτον κύμα και τον σκεδαστή, ενώ στα αντίστροφα ανακατασκευάζουμε το σχήμα του σκεδαστή ή και ανακτούμε φυσικές ιδιότητές του από τη γνώση του σκεδασμένου πεδίου. Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη μελέτη αυτή είναι προβλήματα συνοριακών τιμών.

Αρχικά, προβλήματα συνοριακών τιμών στη γραμμική ελαστικότητα μελετήθηκαν από τον Kupradze [75, 76, 78] με χρήση ελαστικών δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, ανάγοντάς τα σε ολοκληρωτικές εξισώσεις στο σύνορο. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε τόσο σε συνοριακά προβλήματα με μία συνθήκη επί του συνόρου όσο και στην περίπτωση προβλημάτων συνοριακών τιμών μεικτής εμπέδησης όπου το σύνορο χωρίζεται σε δύο μέρη, για παράδειγμα ένα μέρος με συνθήκη τύπου Dirichlet και ένα με συνθήκη τύπου Robin [10]. Τέτοιου είδους προβλήματα αναφέρονται ως μεικτά προβλημάτα σκέδασης και έχουν ευρύ πεδίο εφαρμογών που περιλαμβάνει ιατρικές εφαρμογές, εφαρμογές στον μη καταστρεπτικό έλεγχο, εφαρμογές στη βιομηχανική παραγωγή κραμάτων, κ.α.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκαν και άλλες μέθοδοι, οι οποίες είχαν πρωτοεφαρμοστεί στην ακουστική και τον ηλεκτρομαγνητισμό, τόσο για την αντιμετώπιση ευθέων όσο και για την αντιμετώπιση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης, όπως για παράδειγμα: η μεταβολική μέθοδος (variational method), η γραμμική δειγματοληπτική μέθοδος (linear sampling method), η μέθοδος που χρησιμοποιεί το συναρτησοειδές Reciprocity Gap Functional (RGF), η μέθοδος παραγοντοποίησης (factorization method) και η τροποποίηση αυτής, ενώ έχουν εφαρμοστεί και επαναληπτικές μέθοδοι που βασίζονται στη μέθοδο Newton.

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι η μελέτη δύο ντετερμινιστικών και δύο στοχαστικών προβλημάτων συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier. Ειδικότερα, αρχικά αναφέρεται ένα πρόβλημα σκέδασης της γραμμικής ελαστικότητας, που αφορά στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων από κατά τμήματα επικαλυμμένο σκεδαστή, δηλαδή από σκεδαστή με τμηματική εμπέδηση στο σύνορό του. Ο σκεδαστής είναι μη διαπερατό εμπόδιο το οποίο είναι τοποθετημένο μέσα σε ομογενές μέσο και το σύνορό του χωρίζεται σε δύο μέρη, με συνθήκες τύπου Robin με διαφορετικές σταθερές εμπέδησης c_1 και c_2 ($c_1 \neq c_2$) να ισχύουν στο κάθε μέρος. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος ακολουθούμε την προσέγγιση των ολοκληρωτικών εξισώσεων επί του συνόρου, που χρησιμοποιείται στην αναφορά [10].

Ακολούθως στην διατριβή αυτή, μελετάται το ευθύ και το αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα στη διδιάστατη ελαστικότητα, της σκέδασης χρονικά αρμονικών ελαστικών κυμάτων σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με άγνωστα θαμμένα αντικείμενα εντός του. Τα θαμμένα αντικείμενα είναι άκαμπτα εμπόδια με το σύνορό τους να θεωρείται Lipschitz επί του οποίου εφαρμόζεται συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Αρχικά κατά τη μελέτη του προβλήματος αυτού, θεμελιώνεται η καλή τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος χρησιμοποιώντας τροποποιημένη μεταβολική μέθοδο σε κατάλληλο χώρο Sobolev ορίζοντας έναν απαραίτητο τελεστή Poincaré−Steklov για την εφαρμογή της μεθόδου. Βασιζόμενοι στις ιδέες του Qu [112] που μελέτησε αντίστοιχο πρόβλημα στο πεδίο της ακουστικής σκέδασης, επεκτείνουμε τα αποτελέσματά του στην περίπτωση της ελαστικότητας. Κατόπιν, μελετάται το αντίστοιχο αντίστροφο ελαστικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παραγοντοποίησης factorization που προτάθηκε αρχικά από τον Kirsch στην αναφορά [64] στην τροποποιημένη της όμως μορφή [48, 47] με στόχο να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ανάκτησης του σχήματος και της θέσης του ανομοιογενούς μέσου που περιέχει τα θαμμένα αντικείμενα στο εσωτερικό του. Στο σύνορο του κάθε αντικειμένου θα μπρούσαν να εφαρμόζονται διαφορετικές συνθήκες, λόγω απλότητας όμως, θεωρείται συνοριακή συνθήκη Dirichlet σε κάθε ένα από τα θαμμένα αντικείμενα. Αυτά τα προβλήματα που αναφέρονται σε ομογενές κατά τμήματα μέσο ανακύπτουν πολύ συχνα στις εφαρμογές που αναφέραμε παραπάνω.

Καταλήγοντας, στη διατριβή αυτή μελετώνται δύο στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier. Η μεθοδολογία μας βασίζεται στη χρήση κατάλληλου αναπτύγματος Wiener chaos για τα στοχαστικά συνοριακά δεδομένα και για τη στοχαστική πηγή. Αν και τα ντετερμινιστικά προβλήματα σκέδασης στην ελαστικότητα έχουν ήδη μελετήθεί εκτεταμένα, υπάρχουν λίγες μόνο εργασίες στη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τα αντίστοιχα στοχαστικά προβλήματα που ενσωματώνουν τις επιδράσεις της τυχαιότητας και μετατρέπουν τα αρχικά προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων σε προβλήματα στοχαστικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΣΜΔΕ) [58, 116]. Στη διατριβή αυτή θεμελιώθηκε η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης βασιζόμενοι σε προηγούμενες εργασίες σε ελλειπτικές και παραβολικές εξισώσεις (βλέπε [87, 88, 89, 58, 135] και τις εσωτερικές αναφορές). Η κεντρική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματα Wiener chaos και να αποσυνθέσουμε το στοχαστικό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε μια ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων συνοριακών τιμών μερικών διαφορικών εξισώσεων, τα οποία έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία, ώστε να ανασυνθέσουμε κατόπιν τη λύση της ΣΜΔΕ ως ανάπτυγμα Wiener chaos, για να θεμελιώσουμε την καλή τοποθέτηση του στοχαστικού προβλήματος. Η μελέτη των στοχαστικών αυτών προβλημάτων γίνεται ώστε να αποδειχθεί η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου αναπτυγμάτων Wiener chaos σε στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier και να αντιμετωπιστεί σε νέα εργασία πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με συνθήκη Dirichlet.

Η παρούσα διατριβή είναι δομημένη ως ακολούθως: στο πρώτο κεφάλαιο, αναπτύσσονται οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στη διατύπωση και τη διερεύνηση των προβλημάτων σκέδασης στην γραμμική ελαστικότητα. Στο ίδιο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στη μαθηματική θεωρία σκέδασης και παρουσιάζονται οι μεθόδοι αντιμετώπισής των προβλημάτων αυτών. Ακολούθως, στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται αρχικά η μελέτη της καλής τοποθέτησης του ευθέος μεικτού προβλήματος σκέδασης με τμηματική εμπέδηση επί του συνόρου. Κατόπιν θεμελιώνεται η καλή τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος Dirichlet με πολλαπλούς σκεδαστές οι οποίοι βρίσκονται θαμμένοι εντός ενός κατά τμήματα ομογενούς μέσου. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με συνθήκη Dirichlet στο σύνορο των σκεδαστών, και παρουσιάζονται εφαρμογές τέτοιων προβλημάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναφέρονται κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες, αναγκαίες για την παρουσίαση των αναπτυγμάτων Wiener chaos τα οποία χρησιμοποιούνται στη θεωρία στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και εν συνεχεία διατυπώνονται δύο στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier για τα οποία θεμελιώνεται η καλή τους τοποθέτηση. Τέλος, διατυπώνονται συμπεράσματα, παρατηρήσεις και παρατίθενται σκέψεις και ιδέες για μελλοντική έρευνα.

1 Βασικές Μαθηματικές Έννοιες της Γραμμικής Ελαστικότητας – Θεωρία Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνουμε την εξίσωση Navier, τη βασική εξίσωση της γραμμικής ελαστικότητας, και ακολούθως παρουσιάζουμε ορισμένες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη διατύπωση των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.) στις δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια, και για σύνδεση με τα επόμενα κεφάλαια, αναφέρουμε πως αυτά τα Π.Σ.Τ. μοντελοποιούν μαθηματικά προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων.

1.1 Η εξίσωση Navier - Θεμελιώδης λύση

Αρχικά, στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πώς προκύπτει η εξίσωση Navier στις δύο διαστάσεις, οι λύσεις της οποίας περιγράφουν τα ελαστικά κύματα και κατόπιν θα παρουσιάσουμε τη θεμελιώδη της λύση. Με τη βοήθεια της εξίσωσης Navier διατυπώνουμε τα μαθηματικά μοντέλα των κυματικών προβλημάτων σκέδασης σε ελαστικά μέσα.

Ορίζουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^2$, το οποίο το ονομάζουμε σύστημα του παρατηρητή, και χωρίο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο παριστάνει το παραμορφώσιμο συνεχές μέσο. Η παραμόρφωση του μέσου αποδίδεται από έναν μετασχηματισμό $\mathbf{f} : B_0 \subset \mathbb{R}^2 \to B_\tau$, όπου με B_0 και B_τ συμβολίζεται το μέσο πριν και μετά την παραμόρφωση αντίστοιχα. Ο μετασχηματισμός $\mathbf{f}$ πρέπει να είναι διαφορομορφισμός (diffeomorphism) ώστε να διατηρείται η τοπολογική δομή του σώματος. Επίσης, θέλουμε ο μετασχηματισμός να διατηρεί τον προσανατολισμό και επομένως θα πρέπει $\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})\| > 0, \forall\, \mathbf{r} \in B_0$ [40].

Έστω ότι το σημείο $\mathbf{r}$ έχει συντεταγμένες (x_1, x_2) ως προς το σύστημα του παρατηρητή αλλά και ως προς το συνοδεύον σύστημα πριν από την παραμόρφωση -τότε τα δύο συστήματα συμπίπτουν-, ενώ το $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ έχει συντεταγμένες (f_1, f_2) ως προς το σύστημα του παρατηρητή και (x_1', x_2') ως προς το συνοδεύον σύστημα μετά την παραμόρφωση. Με τη βοήθεια τώρα των μετρικών τανυστών $\mathbf{g}, \mathbf{g}'$ του συνοδεύοντος συστήματος πριν και μετά την παραμόρφωση αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις δύο γειτονικών σημείων (δηλαδή τα μήκη των γραμμικών στοιχείων).

Έστω $ds^{'2} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} g'_{ij}dx_i dx_j$ όπου $g'_{ij} = \boldsymbol{e'_i} \cdot \boldsymbol{e'_j}$ και $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx_i dx_j$ όπου $g_{ij} = \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j}$ -με $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ τα διανύσματα της βάσης του συνοδεύοντος συστήματος πριν την παραμόρφωση και $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}$ τα διανύσματα της βάσης του συνοδεύοντος συστήματος στο σημείο $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ μετά την παραμόρφωση. Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $ds^{'2} - ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} (g'_{ij} - g_{ij})\, dx_i dx_j$ από την οποία μπορούμε να ορίσουμε τα ε_{ij} [40, 94] ως εξής:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\right),\ i, j = 1, 2. \tag{1.1}$$

Ο πίνακας που περιέχει ως στοιχεία του τα ε_{ij} λέγεται **τανυστής παραμόρφωσης** και δίνεται από την:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^{\mathbf{T}} + (\nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^{\mathbf{T}})].$$

Για μικρές παραμορφώσεις το μη γραμμικό μέρος του τανυστή παραμόρφωσης δηλαδή το $\nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^{\mathbf{T}}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε μηδενικό, οπότε έχουμε:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^{\mathbf{T}}] \tag{1.2}$$

δηλαδή για τα στοιχεία του ισχύουν:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\right),\ i, j = 1, 2$$

Η χρήση του γραμμικοποιημένου τανυστή παραμόρφωσης σηματοδοτεί το πέρασμά μας στη γραμμική ελαστικότητα. Σημειώνουμε εδώ ότι τα ε_{ij} αναφέρονται γενικά στις συντεταγμένες x'_1, x'_2 του συνοδεύοντος συστήματος συντεταγμένων, επειδή όμως πριν την παραμόρφωση το συνοδεύον σύστημα ταυτίζεται με αυτό του παρατηρητή για αυτό και μπορούμε να εκφράζουμε τα ε_{ij} ως προς τα x_1, x_2 [94, 118].

Ως τώρα παρουσιάσαμε τη σύνδεση μετατόπισης-παραμόρφωσης, ακολούθως παρουσιάζουμε τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.
Ονομάζουμε **τανυστή τάσεων** τον 2×2 πίνακα που έχει ως στοιχεία τις τάσεις σ_{ij}. όπου ο δείκτης i αντιστοιχεί στον άξονα x_1 και ο δείκτης j στον άξονα x_2.

Είναι επίσης γνωστό ότι ο νόμος του Hooke στις δύο διαστάσεις δίνεται σε τανυστική μορφή από την

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \ = \ \lambda(tr\tilde{\varepsilon})\tilde{\mathbf{I}} + 2\mu\tilde{\varepsilon}. \tag{1.3}$$

Συμβολίζοντας με E το μέτρο ελαστικότητας του Young, με $\mathcal{G}$ το μέτρο διάτμησης και ν τον λόγο του Poisson τότε για ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο ισχύουν:

$$\mu = \mathcal{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ και } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Τα λ, μ λέγονται **παράμετροι Lamè** και στις δύο διαστάσεις, στα ισότροπα υλικά ισχύουν: $\mu > 0$, $2\lambda + \mu > 0$.

Θεωρώντας, λοιπόν, μετατόπιση $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathrm{t}) = (\mathrm{U}_1(\mathbf{r}, \mathrm{t}), \mathrm{U}_2(\mathbf{r}, \mathrm{t}))$, $\mathrm{t} \in [0, +\infty]$ που εξαρτάται από τον χρόνο, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα με χρήση της $\mathbf{U}$ γράφεται, σε τανυστική μορφή, ως εξής:

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{U}}, \tag{1.4}$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι εξωτερική δύναμη και ρ η πυκνότητα του μέσου διάδοσης. Από τις εξισώσεις (1.2),(1.3) και (1.4), που δίνουν τις σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων, τάσεων - παραμορφώσεων και τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα αντίστοιχα, προκύπτει η εξίσωση Navier, οι λύσεις της οποίας είναι τα ελαστικά κύματα, δηλαδή χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) προκύπτει η

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\rho}{\mu} \mathbf{U_{tt}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με μ παίρνουμε τη συνήθη μορφή της εξίσωσης Navier:

$$\mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla\nabla \cdot \mathbf{U} = \rho \mathbf{U_{tt}}. \tag{1.5}$$

Θεωρώντας τώρα αρμονική εξάρτηση από τον χρόνο, δηλαδή

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{u}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα, μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές και να καταλήξουμε στη **φασματική εξίσωση Navier** [62]:

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\rho) + (\lambda + \mu) \nabla\nabla \cdot \mathbf{u}(\rho) + \rho\, \omega^2 \mathbf{u}(\rho) = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Εισάγοντας στην παραπάνω εξίσωση τον τελεστή του Kupradze $\Delta^* = \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot$ έχουμε:

$$\Delta^*\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho\,\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

Η φασματική εξίσωση Navier (1.6), με $\mu > 0$ και $\lambda+2\mu > 0$, είναι μερική διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ανάλυσης διανυσματικών πεδίων του Helmholtz μπορούμε να αναλύσουμε το $\mathbf{u}$ σε δύο διανυσματικά πεδία τέτοια ώστε: $\mathbf{u} = \mathbf{u_p} + \mathbf{u_s}$ με το $\mathbf{u_p}$ να είναι αστρόβιλο και το $\mathbf{u_s}$ σωληνοειδές [62]

$$\mathbf{u_p} = \frac{-c_p^2}{\omega^2}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right) \quad \text{με } \nabla\times\mathbf{u_p} = \mathbf{0} \quad \text{(curl free)}$$

$$\mathbf{u_s} = \frac{-c_s^2}{\omega^2}\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right) \quad \text{με } \nabla\cdot\mathbf{u_s} = \mathbf{0} \quad \text{(divergence free)}$$

Είναι τώρα φανερό ότι τα c_p και c_s που ορίσαμε προηγουμένως είναι οι φασικές ταχύτητες των p και s κυμάτων αντίστοιχα. Οι ισχυρές συνθήκες ελλειπτικότητας $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$ είναι αυτές που επιτρέπουν την ύπαρξη διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων όπως φαίνεται από τον ορισμό των $c_p,\ c_s$:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Θέτοντας $\mathbf{u} = \mathbf{u_p} + \mathbf{u_s}$ στην εξίσωση

$$c_p^2\,\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right) - c_s^2\,\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right) + \omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

προκύπτει

$$c_p^2\,(\Delta + k_p^2)\,\mathbf{u}_p(\mathbf{r}) + c_s^2\,(\Delta + k_s^2)\,\mathbf{u}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in B$$

και αυτή η εξίσωση επαληθεύεται όταν ισχύουν οι δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$(\Delta + k_p^2)\,\mathbf{u}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$
$$(\Delta + k_s^2)\,\mathbf{u}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

οι οποίες είναι γνωστές ως **διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz**.

Αν τώρα θεωρήσουμε μοναδιαία τασική δύναμη $\mathbf{F}$ στο $\mathbf{r}'$ η οποία προκαλεί μετατόπιση στο $\mathbf{r}$ [62, 115] και αναλύσουμε τη δύναμη αυτή σε δύο συνστώσες $\mathbf{F_i}, i = 1, 2$ κατά τους άξονες x_1, x_2 αντίστοιχα, τότε κάθε μία συνιστώσα προκαλεί μετατόπιση $\Gamma_i, i = 1, 2$ που μπορεί επίσης να αναλυθεί σε δύο μετατοπίσεις: μία Γ_{1j} κατά τον x_1-άξονα και μία Γ_{2j} κατά τον x_2−άξονα, $j = 1, 2$. Έτσι έχουμε συνολικά τέσσερις μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων, οι οποίες αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα $[\Gamma_{ij}]_{2\times 2}$ που ονομάζεται **πίνακας Kupradze**. Ο πίνακας αυτός είναι η **θεμελιώδης λύση** της φασματικής εξίσωσης Navier, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\Delta^*\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \rho\omega^2\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\widetilde{\mathbf{I}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2$$

όπου $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ είναι το συναρτησιακό του Dirac. Ο πίνακας $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι συμμετρικός και δίνεται από τον τύπο [6, 120]:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{4}\{\frac{1}{\mu}\widetilde{\mathbf{I}}H_0^{(1)}(k_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ &\quad -\frac{1}{\rho\omega^2}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}\left[H_0^{(1)}(k_p|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(1)}(k_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\right]\}\end{aligned}$$

όπου $\widetilde{\mathbf{I}}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό και $H_0^{(1)}$ είναι η κυλινδρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

1.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε τα συνοριακών τιμών προβλήματα στις δύο διαστάσεις. Είναι απαραίτητο να δώσουμε αρχικά κάποιους ορισμούς, αναγκαίους για τη διατύπωση και τη μελέτη των προβλημάτων σκέδασης, της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας, που θα παρουσιάσουμε στα επόμενα.

Ορισμός 1.1. Ονομάζουμε **θεμελιώδες πεδίο** ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο B του R^2 το σύνορο του οποίου ∂B είναι αρκούντως λείο. Εσωτερικό ονομάζεται το πεδίο όταν είναι φραγμένο και συμβολίζεται ως B_i και εξωτερικό όταν το $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$ είναι φραγμένο και συμβολίζεται B_e.

Ορισμός 1.2. Ορίζουμε τον **τελεστή επιφανειακής τάσης** T από τη σχέση:

$$T = 2\mu\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla + \lambda\,\hat{\mathbf{n}}\nabla\cdot + \mu\,\hat{\mathbf{n}}\times\nabla\times, \tag{1.9}$$

που προκύπτει από την: $T\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, όπου $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2)$ συμβολίζει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του B. Αναλυτικότερα, ο τελεστής επιφανειακής τάσης γράφεται υπό μορφή πίνακα ως:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial}{\partial n} & \lambda n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \lambda n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & \lambda n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Ορισμός 1.3. Εσωτερική λύση ονομάζεται κάθε ομαλή συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(B_i) \cap C^1(\bar{B}_i)$ ορισμένη στο B_i που ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier.

Ορισμός 1.4. Εξωτερική λύση ονομάζεται κάθε ομαλή συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(B_e) \cap C^1(\bar{B}_e)$ ορισμένη στο B_e που ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze.

Από το θεώρημα της απόκλισης προκύπτουν οι **τύποι του Betti** οι οποίοι αποτελούν το ανάλογο των τύπων του Green [45] στην ελαστικότητα [62]:

<u>1ος τύπος Betti:</u>

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v}\, dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{v}\, ds - \int_{B_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dv \tag{1.11}$$

<u>2ος τύπος Betti:</u>

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{u}\, dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}\, ds - \int_{B_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{u})\, dv \tag{1.12}$$

Στις παραπάνω σχέσεις για $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ το $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mu \, [(\frac{\partial u_1}{\partial r_2})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial r_1})^2] + 2\lambda \, \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial u_2}{\partial r_1} + \\ &\quad + (\lambda + \mu)\, [(\frac{\partial u_1}{\partial r_1})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial r_2})^2] + \mu\, (div\mathbf{u})^2 \end{aligned}$$

<u>3ος τύπος Betti:</u>

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \Delta^* \mathbf{u}\, dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}\, ds \tag{1.13}$$

από τον οποίο τύπο προκύπτουν ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων.

Συγκεκριμένα για την εσωτερική λύση θέτοντας όπου $\mathbf{v}$ την κάθε στήλη του θεμελιώδους δυαδικού $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ και συνθέτοντας τα δύο αποτελέσματα σε ένα, παίρνουμε:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} [\mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot T^{(\mathbf{r}')}\mathbf{u}_i(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \tag{1.14}$$

όπου το $T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ περιγράφει τη δράση του τελεστή τάσεων στη θεμελιώδη λύση στο σημείο $\mathbf{r}'$.

Αντίστοιχα για την εξωτερική λύση έχουμε:

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} [\mathbf{u}_e(\mathbf{r}') \cdot T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \,-\, \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot T^{(\mathbf{r}')}\mathbf{u}_e(\mathbf{r}')]\, ds(\mathbf{r}') \tag{1.15}$$

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier. Αυτά χωρίζονται σε εσωτερικά και εξωτερικά ανάλογα με το αναζητούμε λύση $\mathbf{u}_e$ στο εξωτερικό χωρίο B_e ή λύση $\mathbf{u}_i$ στο εσωτερικό του, δηλαδή στο B_i [7, 62]. Έχουμε:

• **Το πρόβλημα Dirichlet**:

Το ολικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}_k,\ \ k = i, e$, θα πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\Delta^*\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B_k \tag{1.16}$$

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \partial B \tag{1.17}$$

• **Το πρόβλημα Neumann**: Το ολικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}_k$ να ικανοποιεί τις

$$\Delta^*\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B_k \tag{1.18}$$

$$T\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \partial B \tag{1.19}$$

• **Το πρόβλημα Robin**: Το ολικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}_k$ να ικανοποιεί τις

$$\Delta^*\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B_k \tag{1.20}$$

$$T\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + i\omega c\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \partial B \tag{1.21}$$

• **Το πρόβλημα μετάδοσης**: Αναζητούμε δύο διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u_e}$ και $\mathbf{u}_i$ που να ικανοποιούν τις:

$$\Delta^*\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\mathbf{u_i}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B_i \tag{1.22}$$

$$\Delta^*\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\mathbf{u_e}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B_e \tag{1.23}$$

$$\mathbf{u_e}(\mathbf{r}) = \mathbf{u_i}(\mathbf{r}) \text{ στο } \partial B \tag{1.24}$$

$$T\mathbf{u_e}(\mathbf{r}) = T\mathbf{u_i}(\mathbf{r}) \text{ στο } \partial B \tag{1.25}$$

1.3 Προβλήματα σκέδασης στη δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα

Τα φαινόμενα σκέδασης βρίσκονται στο επίκεντρο της επιστημονικής έρευνας στα πεδία της φυσικής, της μηχανικής αλλά και των μαθηματικών για περισσότερο από έναν αιώνα, από την ερμηνεία του χρώματος του ουρανού από τον Rayleigh ως και τις σύγχρονες εφαρμογές της ψηφιακής τομογραφίας [32]. Η θεωρία σκέδασης μελετά την επίδραση ενός ανομοιογενούς μέσου στη διάδοση ενός κύματος ή ενός σωματιδίου. Η ύπαρξη εμποδίων εντός του μέσου διάδοσης έχει ως αποτέλεσμα τη σκέδαση του κυματικού πεδίου, ως εκ τούτου τα εμπόδια αυτά καλούνται σκεδαστές. Τα προβλήματα που εξετάζονται κατά τη μελέτη της σκέδασης κατηγοριοποιούνται σε ευθέα και αντίστροφα. Σε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης γνωρίζουμε το προσπίπτον κυματικό πεδίο, το γεωμετρικό σχήμα ή και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή και ζητούμε το σκεδασμένο κυματικό πεδίο, ενώ σε ένα αντίστροφο πρόβλημα γνωρίζουμε το σκεδασμένο πεδίο και αναζητούμε τις φυσικές ιδιότητες ή και το σχήμα του σκεδαστή.

Θεωρούμε λοιπόν ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο, που έχει παντού σταθερές παραμέτρους Lamè, και το οποίο καταλαμβάνει όλον τον $\mathbb{R}^2$. Εντός του μέσου αυτού τοποθετείται σκεδαστής με διαφορετικές σταθερές Lamè από το υπόλοιπο μέσο [62].

Πιο συγκεκριμένα, ο σκεδαστής αναπαριστάται από φραγμένο συνεκτικό χωρίο B_i με σύνορο $\Gamma \equiv \partial B$ το οποίο είναι κλειστό, φραγμένο και Lyapunov. Το εξωτερικό του B , δηλαδή το $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$ το συμβολίζουμε με B_e. Το B_e έχει σταθερές Lamè λ_e, μ_e και πυκνότητα ρ_e ενώ το B_i έχει σταθερές Lamè λ_i, μ_i και πυκνότητα ρ_i. Για τα $\lambda_{i,e}\, \mu_{i,e}$ θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες $\mu_{i,e} > 0$, $\lambda_{i,e} + 2\mu_{i,e} > 0$ ώστε να είναι δυνατή η διάδοση διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στα προβλήματα σκέδασης θεωρούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή η επαφή του σκεδαστή με το μέσο είναι άμεση, ως εκ τούτου τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων είναι συνεχή δια μέσου του συνόρου.

Ας υποθέσουμε λοιπόν τη διάδοση κυμάτων εντός ελαστικού μέσου. Η εμφάνιση συνόρου μέσα στο μέσο προκαλεί σκεδασμένο πεδίο το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός διαμήκους και εγκάρσιου κύματος ανεξάρτητα της μορφής του προσπίπτοντος κύματος. Για τα επόμενα θα θεωρούμε προσπίπτον κύμα $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ στο $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, που μπορεί να είναι είτε επίπεδο P-κύμα (επίπεδο pressure κύμα) της μορφής

$$\mathbf{u}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) := \hat{\mathbf{d}}\, e^{\mathrm{ik_p}\, \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}} \tag{1.26}$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης διάδοσης, δηλαδή $\hat{\mathbf{d}} \in \Omega := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{r}| = 1\}$, είτε επίπεδο S-κύμα (επίπεδο shear κύμα) της μορφής

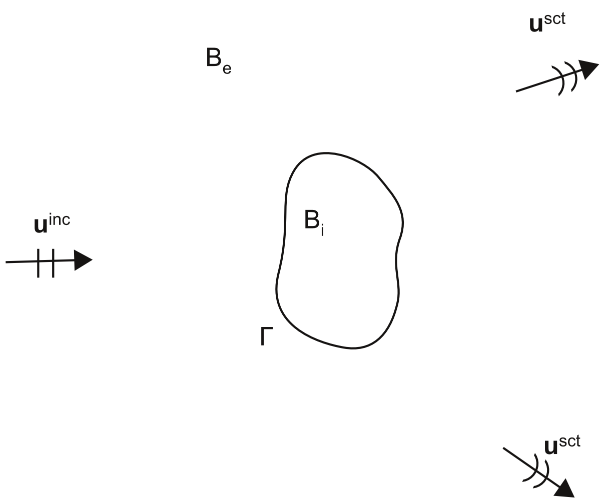
$$\mathbf{u}_{s}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) := \hat{\mathbf{d}}^{\perp}\, e^{\mathrm{ik_s}\, \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}} \tag{1.27}$$

με $\hat{\mathbf{d}}^{\perp}$ να είναι το διάνυσμα πόλωσης (polarization).
Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε προσπίπτον κύμα που να αποτελείται τόσο από P όσο και από S-επίπεδα κυματικά πεδία, της μορφής:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{d}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{ik_p}\, \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}} + \hat{\mathbf{d}}^{\perp}\, \mathrm{e}^{\mathrm{ik_s}\, \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{d}}}, \tag{1.28}$$

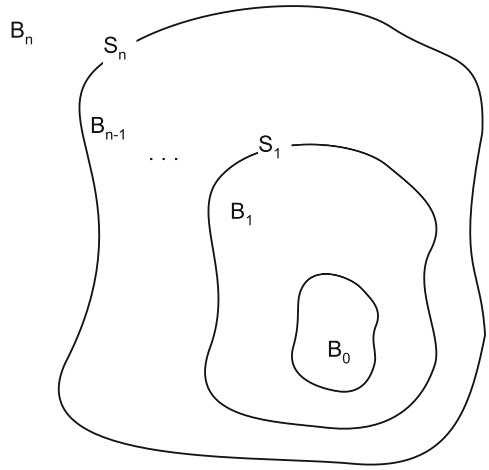
Είναι γνωστό ότι το παραγόμενο σκεδασμένο πεδίο θα αποτελείται και από σκεδασμένο P και από σκεδασμένο S-κυματικό πεδίο, ανεξαρτήτως του τύπου του προσπίπτοντος πεδίου(1.26), (1.27) ή (1.28), (βλέπε και (2.11)), και πρέπει να ικανοποιεί τις **συνθήκες ακτινοβολίας Kupradze**, οι οποίες να εξασφαλίζουν την ασυμπτωτική εξασθένισή του καθώς απομακρύνεται από τον σκεδαστή. Αυτές οι συνθήκες είναι απαραίτητες για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος και δίνονται από την επόμενη σχέση, για τα σκεδασμένα P και $S-$ κύματα:

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} \sqrt{|\ \mathbf{r}\ |}[\frac{\partial \mathbf{u_a}^{sct}(\mathbf{r})}{\partial |\ \mathbf{r}\ |} - ik_a \mathbf{u_a}^{sct}(\mathbf{r})] = \mathbf{0},\ \mathrm{a} = \mathrm{p},\ \mathrm{s} \tag{1.29}$$



Σχήμα 1: Σκέδαση ελαστικών κυμάτων

Σε ορισμένα προβλήματα σκέδασης το μέσο στο οποίο διαδίδεται το κύμα είναι στρωματοποιημένο, δηλαδή αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους ομογενή χωρία $B_1, B_2, ...B_n$ τέτοια ώστε $B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_n$ τα οποία διαχωρίζονται από διαπερατά σύνορα $S_1, S_2, ...S_{n-1}$. Στην περίπτωση αυτή ο σκεδαστής B_0 βρίσκεται εντός του B_1 και θεωρείται πυρήνας μη διαπερατός. Το μέσο διάδοσης μέσα στο οποίο βρίσκεται ο σκεδαστής B_0 καλείται **ομογενές κατά τμήματα** (ή στρωματοποιημένο) ελαστικό μέσο και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Στα προβλήματα που αναφέρονται σε ομογενές κατά τμήματα μέσο η μελέτη μας περιλαμβάνει και τον προσδιορισμό των συνόρων S_1, S_2, ..., S_n των τμημάτων. Τα προβλήματα



Σχήμα 2: Ομογενές κατά τμήματα ελαστικό μέσο

σκέδασης ελαστικών κυμάτων αναπαριστώνται μαθηματικά με τη βοήθεια των προβλημάτων συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier τα οποία παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα βασικά προβλήματα σκέδασης περιλαμβάνουν τη σκέδαση από σκληρό σκεδαστή (rigid body), που περιγράφεται μαθηματικά από το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet, τη σκέδαση από κοιλότητα (cavity), που περιγράφεται μαθηματικά από το εξωτερικό πρόβλημα Neumann, το πρόβλημα εμπέδησης (impedance), που περιγράφεται μαθηματικά από το εξωτερικό πρόβλημα Robin και τέλος το πρόβλημα διαπερατού σώματος ή πρόβλημα μετάδοσης (transmission problem). Τα δύο επόμενα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι αυτά στα οποία θα βασιστεί η μελέτη των προβλημάτων σκέδασης που διερευνούμε σε αυτή τη διατριβή.

• **Σκληρός σκεδαστής - συνοριακή συνθήκη Dirichlet** Η σκληρή επιφάνεια, που δεν επιτρέπει μετατοπίσεις, καλείται σκληρός σκεδαστής, για να υπάρχει λοιπόν συνέχεια του πεδίου μετατοπίσεων στο σύνορο θα πρέπει να μηδενίζεται το ολικό πεδίο επί του συνόρου δηλαδή θα πρέπει να ισχύει: $\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ για $r \in \partial B$. Επόμενως, το πρόβλημα σκέδασης ελαστικών κυμάτων από σκληρό σκεδαστή διατυπώνεται ως εξής:

Να οριστεί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}^{tot} \in C^2(B_e) \cap C^1(\overline{B_e})$ που να ικανοποιεί τις:

$$\Delta^* \mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) + \rho\omega^2 \mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \mathrm{B_e}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\mathrm{B}$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B_i}.$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \to \infty} \sqrt{|\ \mathbf{r}\ |}[\frac{\partial \mathbf{u_a}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})}{\partial |\ \mathbf{r}\ |} - \mathrm{ik_a} \mathbf{u_a}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})] = \mathbf{0},\ \mathrm{a} = \mathrm{p},\ \mathrm{s}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει διάδοση κυμάτων στο εσωτερικό του σκεδαστή.

• Σκεδαστής με συνθήκη εμπέδησης (impedance) - συνοριακή συνθήκη Robin

Στην περίπτωση που το εμπόδιο είναι μη διαπερατό και επικαλυμμένο μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά από σκεδαστή με σύνορο στο οποίο ισχύει μία συνθήκη εμπέδησης τύπου Robin. Η εμπέδηση περιγράφει την αναλογία μεταξύ της τάσης και της ταχύτητας του εκάστοτε σημείου. Το αντίστοιχο πρόβλημα σκέδασης διατυπώνεται λοιπόν ως εξής:
Να οριστεί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}^{\mathrm{tot}} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B_e}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathrm{B_e}})$ που να ικανοποιεί τις:

$$\Delta^* \mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) + \rho\omega^2 \mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \mathrm{B_e}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{c}\,\mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\mathrm{B}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B_i}.$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \to \infty} \sqrt{|\ \mathbf{r}\ |}[\frac{\partial \mathbf{u_a}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})}{\partial |\ \mathbf{r}\ |} - \mathrm{ik_a} \mathbf{u_a}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})] = \mathbf{0},\ \mathrm{a} = \mathrm{p},\ \mathrm{s}$$

με c να είναι η παράμετρος εμπέδησης.

1.4 Πλάτη σκέδασης

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην έννοια του πλάτους σκέδασης ή μακρινού πεδίου η οποία είναι καθοριστική στη μελέτη των προβλημάτων σκέδασης. Με τη βοήθεια των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων των συναρτήσεων Hankel μπορούμε από τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Navier να εξάγουμε ασυμπτωτικές σχέσεις για τα $\mathbf{\Gamma_p}$ και $\mathbf{\Gamma_s}$ όπως αναφέρεται από τον Σεβρόγλου [62]:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_p(\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}}\; e^{-ik_p\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}'}}\;\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\frac{e^{-ik_pr}}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-3/2}),\;\; r\to\infty \tag{1.30}$$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_s(\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}}\; e^{-ik_s\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}'}}\;(\tilde{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})\frac{e^{-ik_pr}}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-3/2}),\;\; r\to\infty \tag{1.31}$$

όπου $r := |\mathbf{r}|$. Το δυαδικό $(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})$ εκφράζει την ακτινική συμπεριφορά του διαμήκους μέρους της $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ ενώ το $(\tilde{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})$ εκφράζει το εφαπτομενικό εγκάρσιο μέρος στην περιοχή ακτινοβολίας. Από τις ασυμπτωτικές μορφές των $\nabla_{r'}\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$, $\nabla_{r'}\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ μπορούμε να βρούμε ασυμπτωτική σχέση για την $\mathrm{T}^{(r')}\,\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$.

Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική αναπαράσταση της εξωτερικής λύσης (1.15) παίρνουμε την ασυμπτωτική μορφή του σκεδασμένου πεδίου [62]:

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = u_p^{\infty}(\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}\frac{e^{ik_pr}}{\sqrt{r}} + u_s^{\infty}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}^{\perp}\,\frac{e^{ik_sr}}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-3/2}),\;\; r\to\infty \tag{1.32}$$

Οι συντελεστές $\mathbf{u}_p^{\infty}(\mathbf{r}) = u_p^{\infty}(\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{u}_s^{\infty}(\mathbf{r}) = u_s^{\infty}(\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}^{\perp}$ λέγονται **πλάτη σκέδασης** (**scattering amplitudes**) ή **μακρινά πεδία** (**far field patterns**) του p και του s-κύματος αντίστοιχα.

Για το πρόβλημα Dirichlet τα πλάτη σκέδασης δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{u}_s^{\infty}(\mathbf{r}) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}}(\tilde{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})\,\cdot\,\int_{\partial B} e^{-ik_e^s\hat{\mathbf{r}}\,\cdot\,\hat{\mathbf{r}}}T^{(\mathbf{r}')}\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}')ds(\mathbf{r}') \tag{1.33}$$

$$\mathbf{u}_p^{\infty}(\mathbf{r}) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\,\cdot\,\int_{\partial B} e^{-ik_e^p\hat{\mathbf{r}}\,\cdot\,\hat{\mathbf{r}}}T^{(\mathbf{r}')}\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}')ds(\mathbf{r}') \tag{1.34}$$

2 Ευθέα Προβλήματα Σκέδασης - Καλή Τοποθέτηση

Όπως προαναφέραμε, τα ευθέα προβλήματα σκέδασης αφορούν στον προσδιορισμό του σκεδασμένου πεδίου ενώ είναι γνωστό το προσπίτον κύμα καθώς και οι φυσικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης. Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε τις μεθόδους μελέτης των ευθέων προβλημάτων ακέδασης και αντιμετωπίζουμε το ευθύ μεικτό πρόβλημα σκέδασης από σκεδαστή με τμηματική εμπέδηση στο σύνορό του, καθώς και το ευθύ πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με εμπόδια στο εσωτερικό του.

2.1 Μέθοδοι μελέτης καλής τοποθέτησης ευθέων προβλημάτων σκέδασης

Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται καλώς τοποθετημένο κατά Hadamard όταν υπάρχει λύση του, η λύση αυτή είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα. Για τη μελέτη της καλής τοποθέτησης των ευθέων προβλημάτων σκέδασης έχουν αναπτυχθεί, κατά τη διάρκεια των ετών, δύο βασικές μέθοδοι και ορισμένες τροποποιήσεις τους. Αρχικά ο Sommerfeld απέδειξε το 1912 [124] τη μοναδικότητα της λύσης στην περιοχή της ακουστικής και τα αποτελέσματά του επεκτάθηκαν από τους Rellich [114] και Vekua [128] που μελέτησαν το πρόβλημα σκέδασης με συνθήκη Dirichlet βασιζόμενοι στα θεωρήματα Green [45, 92]. Η μέθοδος αυτή, που ονομάζεται *μεταβολική μέθοδος* (***Variational Method***), χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Müller [96] για να θεμελιώσει τη μοναδικότητα της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος στον ηλεκτρομαγνητισμό. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε εξωτερικό πρόβλημα, θεωρούμε σφαίρα (3D) -κύκλο (2D)- που περικλύει τον σκεδαστή ώστε να εφαρμόσουμε τύπους Green στο χωρίο μεταξύ της σφαίρας και του σκεδαστή. Ακολούθως, χρησιμοποιώντας την αρχή της αναλυτικής συνέχειας (unique continuation principle) και το λήμμα Rellich [15] μπορούμε να δείξουμε ότι το ομογενές πρόβλημα (με ομογενή συνοριακή συνθήκη για το σκεδασμένο πεδίο) έχει μόνο τη μηδενική λύση συνεπώς το μη ομογενές έχει μοναδική λύση. Η μέθοδος αυτή είναι δυνατό να τροποποιηθεί ώστε να δοθεί η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος με μια κατάλληλη διγραμμική μορφή και κατάλληλο γραμμικό συναρτησοειδές ώστε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Lax-Milgram και να αποδείξουμε την ύπαρξη ή/και τη μοναδικότητα της λύσης, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε από τους Liu, Zhang, Hu [86]. Στην ελαστικότητα με τη μέθοδο αυτή έχει μελετηθεί το πρόβλημα Dirichlet από τους Lee, Wang, Wang, Zhao [83].

Για την θεμελείωση της ύπαρξης λύσης, αρχικά μελετήθηκε η ολοκληρωτική εξίσωση Lippmann–Schwinger της ακουστικής [84]. Αργότερα βασιζόμενοι στην κεντρική ιδέα της διατύπωσης των προβλημάτων σκέδασης με ολοκληρωτικές εξισώσεις επί του συνόρου του σκεδαστή, μελετήθηκαν στην ακουστική προβλήματα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet και Neumann, όπου χρησιμοποίηθηκαν ολοκληρωτικές εξισώσεις (***Boundary Integral Equation Method***) που προκύπτουν με τη χρήση δυναμικών διπλού και απλού στρώματος από τους Rellich,Vekua[128] και Müller [97]. Οι λύσεις δόθηκαν, στην αρχή, σε μια μορφή που περιλάμβανε μόνο ένα δυναμικό, η προσέγγιση όμως αυτή οδηγούσε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις με αριθμίσιμο διακριτό σύνολο ιδιοτιμών, επιτάσσοντας τη διάκριση περιπτώσεων. Η δυσκολία αυτή αντιμετωπίστηκε με τη χρήση συνδυασμών δυναμικών απλού και διπλού στρώματος σε εργασίες που δημοσιεύθηκαν από τους Vekua [128] Weyl [131] Müller [97] και Werner [132] τόσο στην ακουστική όσο και στον ηλεκτρομαγνητσιμό τις οποίες διαδέχθηκαν εργασίες των Werner και Brakhage [20], Leis [81] Panich [103] Knauff και Kress [70] και Kress [71] που ανέπτυξαν και διευκρίνησαν περισσότερο τη μέθοδο αυτή. Στην ελαστικότητα αντίστοιχες εργασίες δημοσίευσε αρχικά ο Kupradze, που ήταν αυτός που διατύπωσε και τη συνθήκη ακτινοβολίας στην περιοχή της ελαστικότητας, αποδεικνύοντας ύπαρξη λύσης για προβλήματα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet και Neumann.

2.2 Μεικτό πρόβλημα σκέδασης από σκεδαστή με τμηματική εμπέδηση στο σύνορό του

Στην ενότητα αυτή, θα δώσουμε αρχικά τους απαραίτητους μαθηματικούς ορισμούς ώστε να παρουσιάσουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων επί του συνόρου (boundary integral equation approach- BIEM) αλλά και την μεταβολική μέθοδο (variational mathod). Τις δύο αυτές μεθόδους θα χρησιμοποιήσουμε για να αντιμετωπίσουμε το μεικτό πρόβλημα σκέδασης από σκεδαστή με τμηματική εμπέδηση στο σύνορό του, στο οποίο εφαρμόζουμε αφενός την BIEM για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης, αφετέρου τη μεταβολική μέθοδο για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα αυτής.

Για να μελετήσουμε, λοιπόν, τη μοναδικότητα και την ύπαρξη λύσης των παραπάνω προβλημάτων είναι αναγκαίο να ορίσουμε πρώτα τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος με τη βοήθεια Hölder συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων.

Μία διανυσματική συνάρτηση λέγεται a-**Hölder-συνεχής** αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές $C, a > 0$ ώστε να ισχύει:

$$\| \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}') \| = C \| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \|^a$$

και για $a = 1$ ονομάζεται **Hölder-συνεχής** ή **Lipschitz-συνεχής**.

Έστω $\boldsymbol{\varphi}$ μία Hölder- συνεχής διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνορο ∂B. Τότε το **δυναμικό απλού στρώματος (Δ.Α.Σ.)** με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}$ ορίζεται ως:

$$(S\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \, \mathbf{r} \in R^2 \tag{2.1}$$

όπου $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι η θεμελιώδης λύση. Το Δ.Α.Σ. είναι συνεχής λύση της φασματικής εξίσωσης Navier και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Kupradze. Η δράση όμως του επιφανειακού τελεστή τάσης επάνω στο Δ.Α.Σ. εμφανίζει ασυνέχειες στο σύνορο και ισχύει η σχέση διαπίδυσης:

$$[T(S\boldsymbol{\varphi})]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(\mp I + K)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \tag{2.2}$$

Ανάλογα ορίζουμε και το **δυναμικό διπλού στρώματος (Δ.Δ.Σ.)**:

$$(D\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} T\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \, \mathbf{r} \in R^2 \tag{2.3}$$

Το Δ.Δ.Σ. είναι λύση της φασματικής εξίσωσης Navier και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Kupradze, αλλά δεν είναι συνεχής. Ισχύει η συνθήκη διαπίδυσης:

$$[(D\boldsymbol{\varphi})]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(\pm I + K^*)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \tag{2.4}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον τελεστή:

$$(K\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} T\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}')ds(\mathbf{r}'),\, \mathbf{r} \in \partial B \tag{2.5}$$

Στις παραπάνω σχέσεις το "+" αντιστοιχεί στο B_e δηλαδή για $\mathbf{r} \in B_e$ και $\mathbf{r} \to \partial B$ ενώ το "-" αντιστοιχεί στο B_i δηλαδή για $\mathbf{r} \in B_i$ και $\mathbf{r} \to \partial B$. Επίσης το "*" συμβολίζει τον L^2 συζυγή [62].

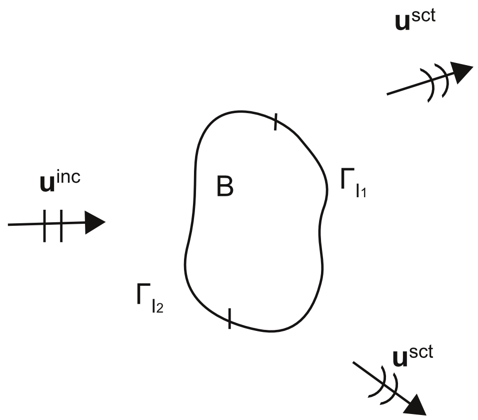
Μπορούμε, λοιπόν, τώρα να περιγράψουμε την BIEM approach που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της ύπαρξης λύσης του προβλήματος. Για να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο, πρώτα υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση σε μορφή γραμμικού συνδυασμού δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, τα οποία δυναμικά είναι λύσεις της εξίσωσης Navier που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας. Κατόπιν, αντικαθιστούμε τη μορφή αυτή της λύσης στις συνοριακές συνθήκες και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες διαπίδυσης οδηγούμαστε σε μία ολοκληρωτική εξίσωση επί του συνόρου με άγνωστη την πυκνότητα. Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση δείχνοντας ότι ο τελεστής που εμφανίζεται στην εξίσωση είναι επί.

Με τη μεταβολική μέθοδο θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος. Αρχικά θεωρούμε κύκλο που περιβάλλει τον σκεδαστή και χρησιμοποιούμε τον πρώτο τύπο Betti εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για το ομογενές πρόβλημα. Χωρίζοντας το φανταστικό μέρος στη σχέση που προκύπτει και κάνοντας χρήση των συνθηκών εξασθένισης (decay conditions) μπορούμε να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση μηδενίζεται στο σύνορο και από το λήμμα Rellich να συμπεράνουμε ότι μηδενίζεται στο εσωτερικό του κύκλου, που σημαίνει ότι το ομογενές πρόβλημα έχει μόνο τη μηδενική λύση άρα το μη ομογενές έχει μοναδική λύση.

Στη συνέχεια μελετάμε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης που αφορά έναν μη διαπερατό, επικαλυμμένο κατά τμήματα σκεδαστή. Ο σκεδαστής βρίσκεται εντός ομογενούς μέσου και έχει απλά συνεκτικό σύνορο το οποίο χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα τύπου Robin με σταθερά εμπέδησης c_1 και ένα δεύτερο επίσης τύπου Robin με σταθερά εμπέδησης $\mathrm{c}_2(\mathrm{c}_1 \neq \mathrm{c}_2)$. Σε κάθε μέρος ισχύει μια διαφορετική συνθήκη τύπου $\mathrm{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\mathrm{c}_\mathrm{k}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_\mathrm{k}, \mathrm{k} = 1, 2$.

Έστω $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$ ένα μη διαπερατό εμπόδιο, που αναπαρίσταται από φραγμένο, συνεκτικό χωρίο. Υποθέτουμε ότι το B είναι μερικώς επικαλυμένο, το σύνορό του $\partial\mathrm{B} \equiv \Gamma$ είναι Lipschitz και χωρίζεται σε δύο ξένα μεταξύ τους μέρη, Γ_{I_1} και Γ_{I_2} τέτοια ώστε $\Gamma = \overline{\Gamma}_{\mathrm{I}_1} \cup \overline{\Gamma}_{\mathrm{I}_2}$.

Δύο διαφορετικές σταθερές εφαρμόζονται στα Γ_{I_1}, Γ_{I_2}. Το σύνολο B θα καλείται στο εξής *σκεδαστής*. Σημειώνουμε επίσης ότι $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ συμβολίζει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του B στο σημείο $\mathbf{r} \in \Gamma$ και το ϱ συμβολίζει την πυκνότητα του μέσου.



Σχήμα 3: Σκέδαση από επικαλυμμένο κατά τμήματα σκεδαστή

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος σκέδασης αρμονικών ελαστικών κυμάτων δίνεται από την εξίσωση Navier με συνοριακή συνθήκη στο Γ ως ακολούθως: *Να βρεθεί διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{u} \in [\,\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{B}})\,]^2$ *τέτοιο ώστε*

$$\Delta^*\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \varrho\,\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{B}}, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_1\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathrm{I}_1} \tag{2.7}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathrm{I}_2}, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty} \sqrt{\mathrm{r}}\,\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\beta^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{i}\mathrm{k}_\beta\,\mathbf{u}_\beta^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})\right) = 0, \quad \beta = \mathrm{p}, \mathrm{s}, \quad \mathrm{r} := |\mathbf{r}|, \tag{2.9}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\mathbf{u}$ είναι το ολικό πεδίο που δίνεται από

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}), \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B} \tag{2.10}$$

με $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ να είναι το προσπίπτον επίπεδο κύμα, ενώ το $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ παριστάνει το αντίστοιχο σκεδασμένο. Στο εξής το πρόβλημα (2.6)-(2.10) θα αναφέρεται ως πρόβλημα συνοριακών τιμών τμηματικής εμπέδησης (impedance boundary value problem (IBVP)). Στην επιφάνεια του σκεδαστή θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες εμπέδησης (2.7) και (2.8). Στα παρακάτω το c_i θα είναι η επιφανειακή εμπέδηση (μια θετική σταθερά) για το σύνορο $\Gamma_{\mathrm{I_i}}$, $\mathrm{i} = 1, 2$.Η επιφανειακή εμπέδηση αποδίδει το γινόμενο της έντασης επί την ακαμψία (intesity by stiffness) και μετρά την αντίθεση (contrast) μεταξύ των δύο υλικών, λεπτομέρειες σχετικά με την έννοια της εμπέδησης μπορεί να βρει κανείς στα [40, 125]. Το σκεδασμενο πεδίο $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ είναι απαραίτητο να ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας Sommerfeld-Kupradze (2.9). Επίσης, το σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση Navier (2.6) στο εξωτερικό χωρίο $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, και μπορεί να αναλυθεί ως εξής

$$\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) := \mathbf{u}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}), \tag{2.11}$$

Το πρόβλημά μας (2.6)-(2.10) σε όρους $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\Delta^* \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \varrho\,\omega^2 \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{B}}, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\, \mathrm{c}_1\, \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_1 \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathrm{I_1}} \tag{2.13}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\, \mathrm{c}_2\, \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathrm{I_2}}, \tag{2.14}$$

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty} \sqrt{\mathrm{r}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\beta^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r})}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{i}\mathrm{k}_\beta\, \mathbf{u}_\beta^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad \beta = \mathrm{p}, \mathrm{s}, \quad \mathrm{r} := |\mathbf{r}|, \tag{2.15}$$

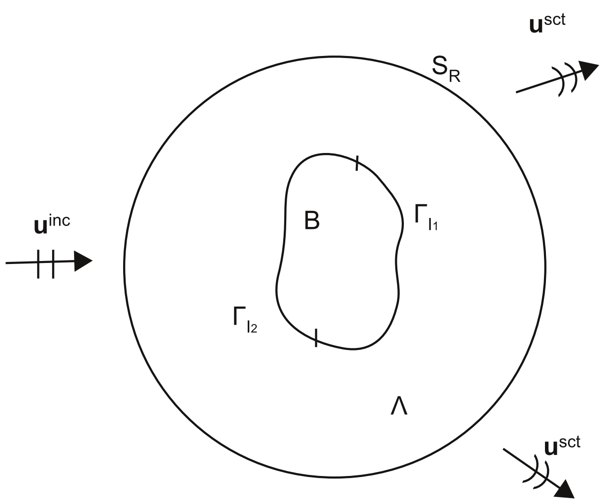
όπου $\mathbf{h_i} \in [\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{I_i}})]^2\ \mathrm{i} = 1, 2$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω διατυπώνοντας το IBVP ως εξής:

Δοθέντος μη διαπερατού σκεδαστή $B \subset \mathbb{R}^2$ ενσωματωμένου σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο και ενός επίπεδου προσπίπτοντος κύματος $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$, να βρεθεί το σκεδασμένο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}^{sct} \in [\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \setminus \overline{\mathrm{B}})]^2$ που ικανοποιεί τις (2.12)-(2.16).

2.2.1 Μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης

Στην υποενότητα αυτή θα θεμελιωθεί αρχικά η μοναδικότητα της λύσης για το πρόβλημα σκέδασης με τμηματική εμπέδηση (2.12)-(2.16) ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην αναφορά [10]. Έστω $\mathrm{S_R}$ είναι κυκλικό χωρίο με ακτίνα R, και ικανού μεγέθους ώστε να περιέχει τον σκεδαστή στο εσωτερικό του, με σύνορο $\partial S_R = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \,:\, |\boldsymbol{\alpha}| = R\}$ και Λ είναι το χωρίο $\mathrm{S_R} \setminus \overline{\mathrm{B}}$ (βλέπε σχήμα 4).



Σχήμα 4: Κυκλικό χωρίο $\mathrm{S_R}$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο Betti στο Λ προκύπτει

$$\int_{\Lambda} [\mathrm{W}(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}, \overline{\mathbf{v}}) \,-\, \varrho\omega^2 \mathbf{u}^{\mathrm{sct}} \cdot \overline{\mathbf{v}}]\, \mathrm{d}\upsilon + \int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}} \mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}} \cdot \overline{\mathbf{v}} \mathrm{ds} + \int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}} \mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}} \cdot \overline{\mathbf{v}} \mathrm{ds}$$

$$- \int_{\partial \mathrm{S_R}} \mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}} \cdot \overline{\mathbf{v}}\, \mathrm{ds} = 0. \tag{2.16}$$

Περισσότερα σχετικά με το $W(\mathbf{u},\mathbf{v})$ μπορεί να βρει κανείς στην αναφορά [6]. Λόγω των συνοριακών συνθηκών (2.13), (2.14) παίρνουμε από την (2.16)

$$\int_{\Lambda}[\mathrm{W}(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}},\overline{\mathbf{v}}) - \varrho\omega^2\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}]\,d\upsilon - \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_1\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds} - \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds}$$

$$-\int_{\partial\mathrm{S_R}}\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{ds} = -\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}\mathbf{h}_1\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds} - \int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}\mathbf{h}_2\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds}. \tag{2.17}$$

Συνεπώς οδηγούμαστε στην μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (2.12)-(2.16):
Να βρεθεί λύση $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\in[\mathrm{H}^1(\Lambda)]^2$ *τέτοια ώστε:*

$$\alpha(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}},\,\mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \tag{2.18}$$

$$\text{όπου}\quad \alpha(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}},\,\mathbf{v}) = \int_{\Lambda}[\mathrm{W}(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}},\overline{\mathbf{v}}) - \varrho\omega^2\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\overline{\mathbf{v}}]\,d\upsilon - \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_1\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds}$$

$$-\mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds} - \int_{\partial\mathrm{S_R}}\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{ds} \tag{2.19}$$

$$\text{και}\quad \ell(\mathbf{v}) = -\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}\mathbf{h}_1\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds} - \int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}\mathbf{h}_2\cdot\overline{\mathbf{v}}\mathrm{ds}. \tag{2.20}$$

για κάθε $\mathbf{v}\in[\mathrm{H}^1(\Lambda)]^2$.
Υποθέτουμε ότι $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ είναι η λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος -δηλαδή του προβλήματος με $\mathbf{h}_1 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{h}_2 = \mathbf{0}$- και για $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ και $\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{sct}}$ μπορούμε από την (2.17) να καταλήξουμε στην

$$\int_{\Lambda}\mathrm{W}(\mathbf{u}^{\mathrm{sct}},\overline{\mathbf{u}}^{\mathrm{sct}}) - \varrho\omega^2|\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}|^2\,d\upsilon - \mathrm{i}\omega\mathrm{c}_1\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}|\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}|^2\mathrm{ds} - \mathrm{i}\omega\mathrm{c}_2\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}|\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}|^2\mathrm{ds}$$

$$-\int_{\partial\mathrm{S_R}}\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\,\mathrm{ds} = 0. \tag{2.21}$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος της (2.21) έχουμε

$$\omega\mathrm{c}_1\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}|\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}|^2\mathrm{ds} + \omega\mathrm{c}_2\int_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}|\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}|^2\mathrm{ds} + \mathrm{Im}\{\int_{\partial\mathrm{S_R}}\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\cdot\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}\,\mathrm{ds}\} = 0 \tag{2.22}$$

Είναι επίσης γνωστό ότι η ακτινοβολούσα λύση $\mathbf{u}^{sct}$ της εξίσωσης Navier έχει την παρακάτω ασυμπτωτική μορφή [9]

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = u^{\infty,p}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}\,\frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + u^{\infty,s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}^{\perp}\,\frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-\frac{3}{2}}), \tag{2.23}$$

η οποία ισχύει ομοιόμορφα ως προς $\hat{\mathbf{r}}$, όπου $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ και οι συντελεστές $\mathbf{u}^{\infty,p}(\hat{\mathbf{r}}) = u^{\infty,p}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$ και $\mathbf{u}^{\infty,s}(\hat{\mathbf{r}}) = u^{\infty,s}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}^{\perp}$ οριζόμενοι στον μοναδιαίο κύκλο $\partial S_1 \in \mathbb{R}^2$, είναι γνωστοί ως το διάμηκες και το εγκάρσιο μακρινό πεδίο του $\mathbf{u}^{sct}$, αντίστοιχα [62], [121]. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε επίσης ότι η συνθήκη ακτινοβολίας (2.15) οδηγεί στην

$$\mathbf{u}^{sct,\beta} = \mathcal{O}(r^{-\frac{1}{2}}) \text{ και } \frac{\partial \mathbf{u}^{sct,\beta}}{\partial r_m} - ik_\beta \frac{r_m}{r}\mathbf{u}^{sct,\beta} = \mathcal{O}(r^{-\frac{3}{2}}),\ \beta = p, s, \tag{2.24}$$

όπου $m = 1, 2$ και καθώς η κάθετη διεύθυνση στον ∂S_R συμπίπτει με την ακτινική, δηλαδή $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \partial S_R$ για κάθε R μπορούμε να συνάγουμε ότι $\frac{\partial \mathbf{u}^{sct,\beta}}{\partial r_m} = ik_\beta\, n_m \mathbf{u}^{sct,\beta} + \mathcal{O}(R^{-\frac{3}{2}})$ (υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$) και $T\mathbf{u}^{sct,\beta} = \Delta^*\mathbf{u}^{sct,\beta}$ στο ∂S_R. Συνεπώς μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.22) ως

$$\begin{aligned} &\omega c_1 \int_{\Gamma_{I_1}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \,+\, \omega c_2 \int_{\Gamma_{I_2}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \\ &+Im\{\int_{\partial S_R} [ik_p\, \Delta^*\mathbf{u}^{\infty,p}\cdot\mathbf{u}^{\infty,s}\ \frac{e^{i(k_p-k_s)R}}{R} + ik_s\, \Delta^*\mathbf{u}^{\infty,s}\cdot\mathbf{u}^{\infty,p}\,\frac{e^{i(k_s-k_p)R}}{R} \\ &+ik_p\,\frac{\Delta^*\mathbf{u}^{\infty,p}\cdot\mathbf{u}^{\infty,p}}{R} + ik_s\ \frac{\Delta^*\mathbf{u}^{\infty,s}\cdot\mathbf{u}^{\infty,s}}{R}]\, ds\} + \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}}) = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ποσότητες $(k_p\Delta^*\mathbf{u}^{\infty,p}\cdot\mathbf{u}^{\infty,p})$, $(k_s\Delta^*\mathbf{u}^{\infty,s}\cdot\mathbf{u}^{\infty,s})$ είναι πραγματικοί οδηγούμαστε στην

$$\omega c_1 \int_{\Gamma_{I_1}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \,+\, \omega c_2 \int_{\Gamma_{I_2}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds$$

$$+ \int_{\partial S_1} k_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p} \,+\, k_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s}\, ds$$

$$+Im\{ \int_{\partial S_1} [\, ik_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s}\, e^{i(k_p-k_s)R}$$

$$+ik_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p}\, e^{i(k_s-k_p)R}\,]\, ds\} + \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}}) = 0. \tag{2.26}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση από z ως $2z$ ως προς R, παίρνουμε

$$(\omega c_1 \int_{\Gamma_{I_1}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \,+\, \omega c_2 \int_{\Gamma_{I_2}} |\mathbf{u}^{sct}|^2\, ds$$

$$+ \int_{\partial S_1} [\, k_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p} \,+\, k_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s}\,]\, ds)\, z$$

$$+Im\{ (\frac{e^{i(k_p-k_s)2z} \,-\, e^{i(k_p-k_s)z}}{i(k_p-k_s)} \,+\, \frac{e^{i(k_s-k_p)2z} \,-\, e^{i(k_s-k_p)z}}{i(k_s-k_p)})$$

$$\int_{\partial S_1} [\, ik_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s} + ik_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p}\,]\, ds\} + \mathcal{O}(z^{\frac{1}{2}}) = 0, \tag{2.27}$$

και διαιρώντας την (2.27) με z, καταλήγουμε στην

$$\omega c_1 \int_{\Gamma_{I_1}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \,+\, \omega c_2 \int_{\Gamma_{I_2}} |\mathbf{u}^{sct}|^2\, ds$$

$$+ \int_{\partial S_1} [\, k_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p} \,+\, k_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s}\,]\, ds$$

$$+Im\{ \left(\frac{e^{i(k_p-k_s)2z} \,-\, e^{i(k_p-k_s)z}}{i(k_p-k_s)z} \,+\, \frac{e^{i(k_s-k_p)2z} \,-\, e^{i(k_s-k_p)z}}{i(k_s-k_p)z} \right)$$

$$\int_{\partial S_1} [\, ik_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s} \,+\, ik_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p}\,]\, ds\} \,+\, \mathcal{O}(z^{-\frac{1}{2}}) = 0, \tag{2.28}$$

Τέλος, παίρνοντας όριο για $z \to \infty$ παίρνουμε

$$\omega c_1 \int_{\Gamma_{I_1}} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds \,+\, \omega c_2 \int_{\Gamma_{I_2}} |\mathbf{u}^{sct}|^2\, ds$$

$$+ \int_{\partial S_1} [\, k_p \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,p} \cdot \mathbf{u}^{\infty,p} \,+\, k_s \Delta^* \mathbf{u}^{\infty,s} \cdot \mathbf{u}^{\infty,s} \,]\, ds \,=0. \tag{2.29}$$

Επειδή c_1 , c_2 > 0 και οι k_p , k_s , ω έχουν το ίδιο πρόσημο και λόγω της ελλειπτικότητας του Δ^*, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}{=}\mathbf{0}$ στο ∂B. Συνεπώς λόγω των ομογενών συνοριακών συνθηκών, προκύπτει $\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}{=}\mathbf{0}$ στο ∂B. Τελικά από το λήμμα Rellich παίρνουμε $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}{=}\mathbf{0}$ στο Λ, δηλαδή το ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση και συνεπώς το μη ομογενές πρόβλημα (2.12)-(2.16) έχει μοναδική λύση.

Στο σημείο αυτό, θα μελετηθεί η ύπαρξη λύσης για το ευθύ πρόβλημα (IBVP) με τη χρήση δυναμικών απλού και διπλού στρώματος που, για τη διευκόλυνση του αναγνώστη, θυμίζουμε ότι ορίζονται ως εξής:
Δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}_s$:

$$\mathrm{S}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{s}})(\mathbf{r}) := \int_{\partial \mathrm{B}} \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{s}}(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds},\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial \mathrm{B} \tag{2.30}$$

και δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}_d$:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{d}})(\mathbf{r}) := \int_{\partial \mathrm{B}} \mathrm{T}\, \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds},\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial \mathrm{B}. \tag{2.31}$$

Επίσης ορίζουμε τους τελεστές:

$$\mathrm{K}(\boldsymbol{\varphi}_1)(\mathbf{r}) := \int_{\partial \mathrm{B}} \mathrm{T}\, \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds}, \mathbf{r} \in \partial \mathrm{B} \tag{2.32}$$

$$\mathrm{K}^*(\boldsymbol{\varphi}_2)(\mathbf{r}) := \int_{\partial \mathrm{B}} [\mathrm{T}\, \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)]^\top \cdot \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds}, \mathbf{r} \in \partial \mathrm{B} \tag{2.33}$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi}_1)(\mathbf{r}) := \int_{\partial \mathrm{B}} \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds}, \mathbf{r} \in \partial \mathrm{B} \tag{2.34}$$

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\varphi}_2)(\mathbf{r}) := \mathrm{T} \int_{\partial \mathrm{B}} \mathrm{T}\, \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{r}_0) \mathrm{ds},\ \mathbf{r} \in \partial \mathrm{B} \tag{2.35}$$

για τους οποίους μπορεί κανείς να βρει περισσότερα στην αναφορά [1, 78]. Στις αναφορές [50, 56], παραθέτονται τα ακόλουθα δύο θεωρήματα

Θεώρημα 1. *Έστω* $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$ *φραγμένο, συνεκτικό χωρίο με σύνορο* $\partial\mathrm{B}$ *το οποίο είναι Lipschitz τότε οι τελεστές*

$$\mathrm{S} \;:\; [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^1(\mathrm{B})]^2$$

$$[\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B})]^2$$

$$\mathrm{D} \;:\; [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^1(\mathrm{B})]^2$$

$$[\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B})]^2 \tag{2.36}$$

είναι συνεχείς.

Θεώρημα 2. *Έστω* $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$ *φραγμένο, συνεκτικό χωρίο με σύνορο* $\partial\mathrm{B}$ *το οποίο είναι Lipschitz τότε οι τελεστές*

$$\mathcal{H} \;:\; [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \;\to\; [\mathrm{H}_2^{1/2}]^2(\partial\mathrm{B}) \tag{2.37}$$

$$-\mathrm{I}+\mathrm{K} \;:\; [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \;\to\; [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \tag{2.38}$$

$$-\mathrm{I}+\mathrm{K}^* \;:\; [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \;\to\; [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \tag{2.39}$$

$$\mathrm{L} \;:\; [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \;\to\; [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \tag{2.40}$$

είναι συνεχείς και Fredholm με δείκτη μηδέν.

Αποδεικνύουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα:

Πρόταση 1. Αν υποθέσουμε ότι η λύση $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}} \in [\mathrm{H}^1(\Lambda)]^2$ του IBVP (2.12)-(2.15) γράφεται στη μορφή συνδυασμού απλού και διπλού στρώματος, δηλαδή

$$\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{D}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \;+\; \mathrm{i}\,\eta\,\mathrm{S}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})$$

όπου $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2$ και η είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός τότε το IBVP έχει λύση.

Απόδειξη. Έχει αποδειχθεί ότι το βοηθητικό πρόβλημα

$$\Delta^*\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) + \varrho\,\omega^2\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{B}}, \tag{2.41}$$

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}\,\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{h} \;\; \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathrm{I}} \tag{2.42}$$

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\sqrt{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\beta^{\rm sct}(\mathbf{r})}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{i}\mathrm{k}_\beta\,\mathbf{u}_\beta^{\rm sct}(\mathbf{r})\right) = 0, \quad \beta = \mathrm{p},\mathrm{s}, \quad \mathrm{r} := |\mathbf{r}|, \tag{2.43}$$

έχει λύση της μορφής [10]

$$\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}\mathbf{h})(\mathbf{r}) \;+\; \mathrm{i}\,\eta\,\mathrm{S}(\mathrm{P}^{-1}\mathbf{h})(\mathbf{r}), \text{ με } \mathbf{h} \in [\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathrm{B})]^2 \tag{2.44}$$

όπου ο τελεστής $\mathrm{P} : \, [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial\mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^{-1/2}]^2(\partial\mathrm{B})$ ορίζεται ως:

$$\mathrm{P} := \mathrm{L} \,+\, \mathrm{i}\,\eta[-\mathrm{I} \,+\, \mathrm{K}] \,+\, \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{c}_1[-\mathrm{I} \,+\, \mathrm{K}^* \,+\, \mathrm{i}\,\eta\,\mathcal{H}] \tag{2.45}$$

Έστω $\mathbf{h}_{\rm e} + \boldsymbol{\varphi}$ να είναι η επέκταση της $\mathbf{h}_1$ (βλέπε (2.13)) από Γ_{I_1} στο $\partial\mathrm{B}$, όπου $\mathbf{h}_{\rm e} \in [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathrm{B})]^2$ είναι μια σταθερή (fixed) επέκταση από Γ_{I_1} στο $\partial\mathrm{D}$ και $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathrm{H}_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{I}_2})]^2$ είναι αυθαίρετη και $[\mathrm{H}_{\Gamma_{\mathrm{I}_1}}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{I}_2})]^2$ συμβολίζει τον χώρο των συναρτήσεων του $[\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{I}_2})]^2$ που μηδενίζονται (vanish) στο Γ_{I_1}. Λαμβάνοντας υπόψη την (2.44) θα αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση $\mathbf{u}^{sct}$ του προβλήματός μας στη μορφή

$$\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}(\mathbf{h}_{\rm e} \,+\, \boldsymbol{\varphi}))(\mathbf{r}) \;+\; \mathrm{i}\,\eta\,\mathrm{S}(\mathrm{P}^{-1}(\mathbf{h}_{\rm e} \,+\, \boldsymbol{\varphi}))(\mathbf{r}). \tag{2.46}$$

Η παραπάνω $\mathbf{u}^{\rm sct}$ επιλύει το πρόβλημα αφού ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και επίσης $\mathrm{T}\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_{\rm e} \,+\, \boldsymbol{\varphi}$, στο Γ_{I_1} Είναι γνωστό ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις διαπίδυσης [92, 120]

$$[\mathrm{S}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})]_{\pm} \, = \, \mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \tag{2.47}$$

$$[\mathrm{T\,S}(\boldsymbol{\varphi})]_{\pm}(\mathbf{r}) \, = \, [(\mp \mathrm{I} \, + \, \mathrm{K})\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) \tag{2.48}$$

$$[\mathrm{D}\,(\boldsymbol{\varphi})]_{\pm}(\mathbf{r}) \, = \, [(\pm \mathrm{I} \, + \, \mathrm{K}^{*})\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) \tag{2.49}$$

Στις παραπάνω σχέσεις το $'' +\, ''$ αντιστοιχεί στο εξωτερικό του B, $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \equiv B_e$, δηλαδή θεωρούμε $\mathbf{r} \in \mathrm{B_e}$ και $\mathbf{r} \to \partial \mathrm{B}$, ενώ το $'' -\, ''$ αντιστοιχεί στο εσωτερικό του B, $\mathrm{B_i}$, δηλαδή θεωρούμε $\mathbf{r} \in \mathrm{B_i}$ και $\mathbf{r} \to \partial \mathrm{B}$. Αντικαθιστώντας την (2.46) στη συνοριακή συνθήκη στο $\Gamma_{\mathrm{I_2}}$, δηλαδή στην $\mathbf{h}_2 \, = \, \mathrm{T}\mathbf{u} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_2 \mathbf{u}$ και χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες σχέσεις διαπήδισης (2.47)-(2.49) μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\mathrm{T}\,[\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K}^{*} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, \mathcal{H}](\mathrm{P}^{-1})(\mathbf{h}_e \, + \, \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})$$

$$+\, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_2\, [\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K}^{*} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, \mathcal{H}](\mathrm{P}^{-1})(\mathbf{h}_{\mathrm{e}} \, + \, \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \, = \, \mathbf{h}_2(\mathbf{r})$$

που δίνει

$$[\mathrm{L} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, (-\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K})](\mathrm{P}^{-1})(\mathbf{h}_{\mathrm{e}} \, + \, \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})$$

$$+\, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_2\, [\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K}^{*} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, \mathcal{H}](\mathrm{P}^{-1})(\mathbf{h}_{\mathrm{e}} \, + \, \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \, = \, \mathbf{h}_2(\mathbf{r}) \;\; \text{στο}\, \Gamma_{\mathrm{I_2}} \tag{2.50}$$

Ορίζουμε τώρα τους τελεστές N, $\mathrm{F} : [\mathrm{H}_2^{-1/2}(\partial \mathrm{B})]^2 \to [\mathrm{H}_2^{1/2}(\partial \mathrm{B})]^2$ ως:

$$\mathrm{N} \, := \, \mathrm{L} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, (-\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K})(\mathrm{P}^{-1}) \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_2\, [\mathrm{I} \, + \, \mathrm{K}^{*} \, + \, \mathrm{i}\omega \mathrm{c}_1\, \mathcal{H}] \tag{2.51}$$

και τον τελεστή F ως:

$$\mathrm{F} \, := \, \mathbf{h}_2 - \mathrm{N}\mathbf{h}_{\mathrm{e}} \;\; \text{στο}\, \Gamma_{\mathrm{I_2}}. \tag{2.52}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους τελεστές (2.51), (2.52) η σχέση (2.50) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\mathrm{N}|_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{F}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})\,\text{στο}\;\Gamma_{\mathrm{I}_2} \tag{2.53}$$

όπου $\mathrm{N}|_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}(\boldsymbol{\varphi})$ είναι ο περιορισμός του Φ στο Γ_{I_2} Στην αναφορά [10] μπορεί να βρεθεί η απόδειξη ότι ο τελεστής N είναι Fredholm με δείκτη μηδέν, ως εκ τούτου για να αποδειχθεί επί αρκεί να αποδειχεί αντιστρέψιμος. Έστω $\mathbf{g} \in \ker \mathrm{N}_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}$, οπότε $\mathrm{N}_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}\mathbf{g}} = \mathbf{0}$, επίσης $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ στο Γ_{I_1} και ας αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.44) όπου $\mathbf{h}$ την $\mathbf{g}$, δηλαδή

$$\mathbf{u}^{\mathbf{sct}}(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}\mathbf{g})(\mathbf{r}) \;+\; \mathrm{i}\,\eta\,\mathrm{S}(\mathrm{P}^{-1}\mathbf{g})(\mathbf{r}) \tag{2.54}$$

Στα επόμενα με $\mathbf{u}^{\mathbf{sct}}_{+}$ συμβολίζουμε το σκεδασμένο πεδίο στο B_e, ενώ με $\mathbf{u}^{\mathbf{sct}}_{-}$ στο B_i. Η $\mathbf{u}^{\mathbf{sct}}$ επιλύει το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του (2.12)-(2.15), καθότι ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και επίσης
$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, στο Γ_{I_1}. Επομένως

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}(\mathbf{r}) = \;\mathrm{N}|_{\Gamma_{\mathrm{I}_2}}\mathbf{g}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{0}. \tag{2.55}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις διαπίδυσης (2.47), (2.48), (2.49) και την (2.54) συνάγουμε ότι $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{-} - \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+} = \mathbf{g}$ και $\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{-} - \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+} = -\mathrm{i}\eta\mathbf{g}$ οι οποίες δίνουν $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+} = -\mathbf{g}$ και $\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+} = \mathrm{i}\eta\mathbf{g}$. Έτσι καταλήγουμε στην

$$\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{+}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}\eta\,\mathbf{g} - \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{g}. \tag{2.56}$$

Η σχέση αυτή μαζί με την (2.55) δίνουν $\mathrm{i}\eta\mathbf{g} - \mathrm{i}\omega\,\mathrm{c}_2\,\mathbf{g} = \mathbf{0}$ και επειδή $\mathrm{i}\eta \neq \mathrm{i}\,\omega\,\mathrm{c}_2$ καταλήγουμε στην $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Έχουμε λοιπόν θεμελιώσει ότι ο N έχει τετριμμένο πυρήνα, δηλαδή είναι αντιστρέψιμος, το οποίο συνεπάγεται την επιλυσιμότητα του μη ομογενούς προβλήματος. Συνοψίζουμε την παραπάνω ανάλυσή μας λέγοντας ότι τόσο η μοναδικότητα όσο και η ύπαρξη λύσης του IBVP (2.6)-(2.10) έχουν αποδειχθεί. □

Σημείωση. Παρουσιάζουμε εδώ το παρακάτω αποτέλεσμα ευστάθειας:
Αν η $\mathbf{u}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (2.6)-(2.10) και η $\mathbf{u}^{sct}$ ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, δηλαδή $\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\sqrt{\mathrm{r}}\,\left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{\beta}(\mathbf{r})}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{ik}_{\beta}\,\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{\beta}(\mathbf{r})\right) = 0, \quad \beta = p, s$ και $\mathbf{h_i} \in [\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{I_i}})]^2$ ι=1,2 τότε

$$\mathbf{u} \in [\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Lambda)]^2$$

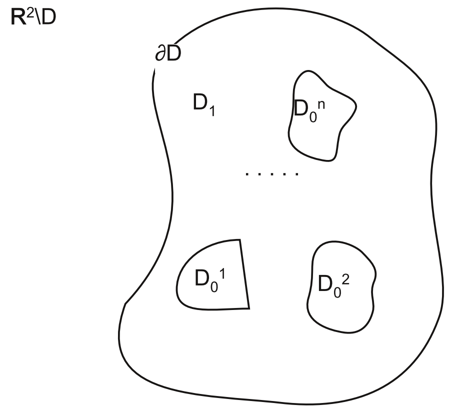
όπου $H^1_{loc}(\Lambda)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $u : \Lambda \to \mathbb{C} \in H^1(K)$ για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \Lambda$.

2.3 Πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με εμπόδια–σκεδαστές στο εσωτερικό του

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης και αποδεικνύουμε την καλή του τοποθέτηση μέσω τροποποιημένης μεταβολικής μεθόδου [57]. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να αποδείξουμε τόσο την ύπαρξη όσο και τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος. Μπορούμε να περιγράψουμε τη μέθοδο ως εξής: αρχικά θεωρούμε κύκλο που περιβάλλει τον σκεδαστή, κατόπιν πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Navier με συνάρτηση δοκιμής (test function) και έπειτα χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση και ενδεδειγμένες ταυτότητες. Ακολούθως, ορίζουμε τον κατάλληλο τελεστή Poincaré−Steklov ώστε να αντικαταστήσουμε τη συνθήκη ακτινοβολίας με μια συνθήκη στο σύνορο του κύκλου. Μετά ξαναγράφουμε τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας μια διγραμμική μορφή και ένα γραμμικό συναρτησιακό με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax−Milgram και ως εκτούτου να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.

Το πρόβλημά μας, που αφορά ένα ομογενές κατά τμήματα μέσο, περιγράφεται μαθηματικά από ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet. Έστω $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό, συνεκτικό, φραγμένο χωρίο που έχει λείο C^2-σύνορο $\partial\mathrm{D}$. Στα επόμενα το D θεωρείται ένα ανομοιογενές μέσο το οποίο περιέχει στο εσωτερικό του, πεπερασμένου πλήθους θαμμένα αντικείμενα που συμβολίζονται με $\mathrm{D}_0^{\mathrm{k}}, \mathrm{k} = 1, 2, ..., \mathrm{n}$ (βλέπε σχήμα 5).

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathrm{D}_0 = \cup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D}_0^{\mathrm{k}}$, υποθέτοντας ότι $\mathrm{D}_0^{\mathrm{k}_1} \cap \mathrm{D}_0^{\mathrm{k}_2} = \emptyset$, αν $\mathrm{k}_1 \neq \mathrm{k}_2$ και τον συμβολισμό $\mathrm{D}_1 := \mathrm{D} \setminus \bar{\mathrm{D}}_0$. Από μαθηματική σκοπιά το πρόβλημά μας περιγράφεται από το ακόλουθο εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμων:



Σχήμα 5: Ανομοιογενές μέσο με εμπόδια στο εσωτερικό του

Να βρεθεί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in [\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \setminus \mathrm{D}_0)\,]^2$ *τέτοια ώστε*

$$\Delta^* \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0, \tag{2.57}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{στο } \partial \mathrm{D}_0, \tag{2.58}$$

$$\lim_{\mathrm{r}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{r}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{\alpha}(\mathbf{r})}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{i}\mathrm{k}_{\alpha} \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}_{\alpha}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad \alpha = \mathrm{p},\, \mathrm{s},\; \mathrm{r} := |\mathbf{r}|. \tag{2.59}$$

Η συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze (2.59) ισχύει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathrm{r}}$ και οι $\mathrm{k_p}$, $\mathrm{k_s}$ είναι οι κυματαριθμοί για το διάμηκες και το εγκάρσιο κύμα αντίστοιχα. Στο πρόβλημα σκέδασης (2.57)-(2.59) χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{u}^{\mathrm{tot}} \equiv \mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{inc}} + \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ όπου $\mathbf{u}$ είναι το ολικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0$, $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ είναι το προσπίπτον επίπεδο κύμα και με $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο σκεδασμένο πεδίο. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\rho \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0)$ και $\rho > 0$, με $\rho = 1$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_1$ και $\rho \neq 1$ στο D_1.

2.3.1 Μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης

Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξη λύσης και τη μοναδικότητα αυτής χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μεταβολική μέθοδο που περιγράψαμε προηγουμένως. Λόγω γραμμικότητας

του διαφορικού τελεστή Δ^* και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση
$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\rm inc} + \mathbf{u}^{\rm sct}$, η εξίσωση (2.57) οδηγεί στην

$$\Delta^*\mathbf{u}^{\rm inc}(\mathbf{r}) + \Delta^*\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}^{\rm inc}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

και ως εκ τούτου

$$\Delta^*\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}^{\rm sct}(\mathbf{r}) = -(\Delta^*\mathbf{u}^{\rm inc}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}^{\rm inc}) \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0.$$

Αν τώρα ορίσουμε $\mathrm{q} := -(\Delta^* + \rho(\mathbf{r})\omega^2)$ και $\mathbf{f}_1 = \mathbf{u}^{\rm inc}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0$, η τελευταία σχέση καταλήγει στην:

$$\Delta^*\mathbf{u}^{\rm sct} + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}^{\rm sct} = -\mathrm{q}\mathbf{f}_1 \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0,$$

και επειδή $\rho(\mathbf{r}) \neq 1$ στο D_1 και $\rho(\mathbf{r}) = 1$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_1$, έχουμε $\mathrm{q}\mathbf{f}_1 = (\rho(\mathbf{r}) - 1)\omega^2\mathbf{f}_1$ στο $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D} \setminus \bar{\mathrm{D}}_0$. Περαιτέρω, θεωρώντας τη συνοριακή συνθήκη (2.58), δηλαδή, $\mathbf{u}^{\rm sct} = -\mathbf{u}^{\rm inc}$ επί του $\partial\mathrm{D}_0$, αν θέσουμε $\mathbf{f}_2 := -\mathbf{u}^{\rm inc}$ στο $\partial\mathrm{D}_0$ παίρνουμε

$$\mathbf{u}^{\rm sct} = -\mathbf{f}_2 \text{ στο } \partial\mathrm{D}_0.$$

Με τη χρήση των παραπάνω σχέσεων το πρόβλημα (2.57)-(2.59) μπορεί να γραφεί ως:

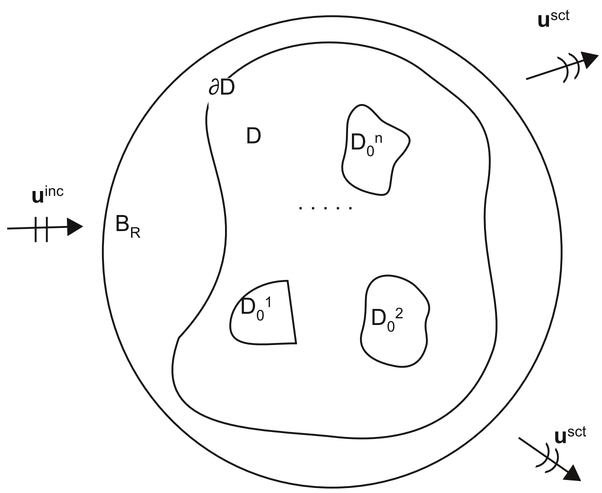
$$\Delta^*\mathbf{w} + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{w} = -\mathrm{q}\mathbf{f}_1 \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathrm{D}}_0, \tag{2.60}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{f}_2 \text{ στο } \partial\mathrm{D}_0, \tag{2.61}$$

$$\lim_{\mathrm{r}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{r}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_\alpha \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} - \mathrm{ik}_\alpha \mathbf{w}_\alpha(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad \alpha = \mathrm{p}, \mathrm{s}, \quad \mathrm{r} := |\mathbf{r}|. \tag{2.62}$$

Θεωρούμε τώρα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{d}} \in S^1$ που δηλώνει την κατεύθυνση της κυματικής διάδοσης, όπου $S^1 := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \, |\mathbf{r}| = 1\}$ και με $\mathrm{B_R} := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \, |\mathbf{r}| < \mathrm{R}\}$ ορίζουμε κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή και ακτίνα $\mathrm{R} > 0$, τέτοια ώστε $\mathrm{D} \subset \mathrm{B_R}$. Συνεπώς στα επόμενα θεωρούμε το χωρίο Ω_{R} ως το:

$$\Omega_{\mathrm{R}} := \mathrm{B_R} \setminus \bar{\mathrm{D}}_0,$$



Σχήμα 6: Κυκλικός δίσκος $\mathrm{B_R}$

και ακόμη ορίζουμε τον ακόλουθο χώρο Hilbert

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{p} \in \mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R}) : \mathbf{p}\big|_{\partial\mathrm{D}_0} = \mathbf{0}\}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την εξίσωση (2.60) με μια διανυσματική συνάρτηση δοκιμής $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{X}$ παίρνουμε

$$\Delta^*\mathbf{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}} + \rho\omega^2\mathbf{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathrm{q}\mathbf{f}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}} \text{ στο } \Omega_\mathrm{R},$$

και επομένως

$$[\mu\Delta\mathbf{w} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})]\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}} + \rho\omega^2\mathbf{w}\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{2.63}$$

Ολοκληρώνοντας την (2.63) στο Ω_R, παίρνουμε:

$$\mu\int_{\Omega_\mathrm{R}} \Delta\mathbf{w}\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon + (\lambda+\mu)\int_{\Omega_\mathrm{R}} \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon + \int_{\Omega_\mathrm{R}} \rho\omega^2\mathbf{w}\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon$$

$$= \int_{\Omega_\mathrm{R}} -\mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon. \tag{2.64}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $\overline{\boldsymbol{\varphi}}\big|_{\partial \mathrm{D}_0} = \mathbf{0}$, η παρακάτω ταυτότητα

$$\int_{\Omega_\mathrm{R}} \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds} = -\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})(\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})\hat{\mathbf{n}}\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds} \tag{2.65}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\int_{\Omega_\mathrm{R}} \nabla(\nabla\cdot\mathrm{w})\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds} = -\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})(\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{ds} - \int_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds}. \tag{2.66}$$

Καθώς ισχύει

$$\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\Delta\mathbf{w})\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon = -\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\mathbf{w}) : (\nabla\overline{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}} \hat{\mathbf{n}}(\nabla\cdot\mathbf{w})\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds}, \tag{2.67}$$

οπου με “ : ” συμβολίζουμε το *γινόμενο Frobenius* μεταξύ δύο δυαδικών και $q\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{D}}_1$, δηλαδή

$$\int_{\Omega_\mathrm{R}} -\mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon = -\int_{\mathrm{D}_1} \mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon, \tag{2.68}$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (2.64) μέσω των (2.66), (2.67) και (2.68) οδηγεί στην

$$\begin{aligned} &-\mu\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\mathbf{w}) : (\nabla\overline{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon - \mu\int_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\nabla\mathbf{w})\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds} \\ &-(\lambda+\mu)\int_{\Omega_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})(\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon - (\lambda+\mu)\int_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}} (\nabla\cdot\mathbf{w})\hat{\mathbf{n}}\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{ds} \\ &+\int_{\Omega_\mathrm{R}} \rho\omega^2\mathbf{w}\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon = -\int_{\mathrm{D}_1} \mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Από την παραπάνω ανάλυση είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τον τελεστή τύπου *Poincaré-Steklov*

$$T_{dn} = \mu(\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathbf{w}) + (\lambda+\mu)(\nabla\cdot\mathbf{w})\,\hat{\mathbf{n}} \;\; \text{στο } \partial\mathrm{B}_\mathrm{R} \tag{2.70}$$

όπου το $\hat{\mathbf{n}}$ συμβολίζει το προς το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, που ορίζεται στο σύνορο $\partial\Omega_\mathrm{R}$ στο σημείο $\mathbf{r}$. Ο τελεστής T_{dn} αντιστοιχίζει την $\tilde{\mathbf{w}}$ στο $T_{dn}\mathbf{w}$, όπου η $\tilde{\mathbf{w}}$ είναι η ακτινοβολούσα λύση του προβλήματος Dirichlet με συνοριακά δεδομένα $\tilde{\mathbf{w}}|_{\partial\Omega_\mathrm{R}} = \mathbf{w}$. Με τη βοήθεια αυτού του τελεστή, δηλαδή χρησιμοποιώντας την (2.70), το πρόβλημα (2.60) -

(2.62) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\Delta^*\mathbf{w} + \rho\omega^2\mathbf{w} = -\mathrm{q}\mathbf{f_1} \text{ στο } \Omega_\mathrm{R} \tag{2.71}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{f}_2 \text{ στο } \partial\mathrm{D}_0 \tag{2.72}$$

$$\mu(\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathbf{w}) + (\lambda+\mu)(\nabla\cdot\mathbf{w})\,\hat{\mathbf{n}} \;=\; T_{dn}\mathbf{w} \text{ στο } \partial\mathrm{B}_\mathrm{R}. \tag{2.73}$$

Με τη χρήση του T_{dn} η σχέση (2.69) μέσω της (2.70) δίνει

$$-\mu\int_{\Omega_\mathrm{R}}(\nabla\mathbf{w}):(\nabla\overline{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon - (\lambda+\mu)\int_{\Omega_\mathrm{R}}(\nabla\cdot\mathbf{w})(\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}})\,\mathrm{d}\upsilon$$

$$+\omega^2\int_{\Omega_\mathrm{R}}\rho\mathbf{w}\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon + < T_{dn}\mathbf{w},\,\boldsymbol{\varphi} >_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}} = -\int_{\mathrm{D}_1}\mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\upsilon. \tag{2.74}$$

Έστω $\mathbf{w}_0 \in \mathrm{H}^1(\mathrm{B}_\mathrm{R}\setminus\mathrm{D}_0)$ τέτοια ώστε $\mathbf{w}_0 = -\mathbf{f}_2$, στο $\partial\mathrm{D}_0$ και $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ στο $\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}$. Τότε για $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0$ στο (2.74) έχουμε την εξής μεταβολική διατύπωση του (2.71)-(2.73):
Να βρεθεί λύση $\mathbf{u} \in \left[\mathrm{H}^1_{\partial\mathrm{D}_0,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2\setminus\mathrm{D}_0)\right]^2$ *τέτοια ώστε*

$$\alpha(\mathbf{u},\,\boldsymbol{\varphi}) = \ell(\boldsymbol{\varphi}) - \alpha(\mathbf{w}_0,\,\boldsymbol{\varphi}) \tag{2.75}$$

όπου

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{u},\,\boldsymbol{\varphi}) \;&=\; \mu\int_{\Omega_\mathrm{R}}(\nabla\mathbf{u}):(\nabla\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\upsilon + (\lambda+\mu)\int_{\Omega_\mathrm{R}}(\nabla\cdot)(\nabla\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\upsilon\\ &\quad -\int_{\Omega_\mathrm{R}}\rho\omega^2\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\upsilon - < T_{dn}\mathbf{u},\,\boldsymbol{\varphi} >_{\partial\mathrm{B}_\mathrm{R}}\end{aligned} \tag{2.76}$$

και

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\mathrm{D}_1}\mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\upsilon \tag{2.77}$$

για κάθε $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{X}$.

Για να θεμελιώσουμε λοιπόν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσης του (2.75), απαιτείται να αποδείξουμε πρώτα τα επόμενα τρία λήμματα.

Λήμμα 1. *Το γραμμικό συναρτησιακό $\ell(\boldsymbol{\varphi})$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά c_1' τέτοια ώστε*

$$|\ell(\boldsymbol{\varphi})| \leq \mathrm{c}_1' \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}. \tag{2.78}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, η σχέση (2.77) δίνει

$$|\ell(\boldsymbol{\varphi})| \leq \|\mathrm{q}\mathbf{f_1}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_1)}. \tag{2.79}$$

Έχοντας υπόψη ότι η $\mathrm{q}\mathbf{f}_1$ είναι φραγμένη και $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$, έχουμε

$$|\ell(\boldsymbol{\varphi})| \leq \mathrm{c}_1 \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_1)}, \tag{2.80}$$

για κάποια θετική σταθερά c_1 και συνεπώς επειδή $\mathrm{D}_1 \subseteq \Omega_\mathrm{R}$, υπάρχει θετική σταθερά c_1' τέτοια ώστε

$$|\ell(\boldsymbol{\varphi})| \leq \mathrm{c}_1' \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}. \tag{2.81}$$

□

Λήμμα 2. *Η διγραμμική μορφή $a(\mathbf{u}, \, \boldsymbol{\varphi})$ είναι φραγμένη, δηλαδή*

$$|\alpha(\mathbf{u}, \, \boldsymbol{\varphi})| \leq \mathrm{c}_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}, \tag{2.82}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.76) χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορούμε να οδηγηθούμε στην

$$\begin{aligned} |\alpha(\mathbf{u}, \, \boldsymbol{\varphi})| \;\; \leq \;\; & \mu \, \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \, \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + (\lambda + \mu) \, \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \, \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ & + \mathrm{c}_1 \omega^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|T_{dn} \mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial \mathrm{B}_\mathrm{R})} \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial \mathrm{B}_\mathrm{R})}, \end{aligned} \tag{2.83}$$

για κάποια θετική σταθερά c_1. Έχει αποδειχεί στο [83] ότι

$$\|T_{dn} \mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega_R)} \; \leq \; \mathrm{C} \, ||\mathbf{u}||_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_R)}, \tag{2.84}$$

και ως εκ τούτου μέσω της (4.64), παίρνουμε

$$|\alpha(\mathbf{u},\,\boldsymbol{\varphi})| \leq \mathrm{c}_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}, \tag{2.85}$$

για κάποια θετική σταθερά c_3. □

Λήμμα 3. *Ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα πιεστικότητας (coercivity) για την* $\alpha(\mathbf{u},\,\mathbf{u})$

$$\mathrm{Re}\{\alpha(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\} \geq \mathrm{c}'\, \|\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})}. \tag{2.86}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{\alpha(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\} &= \mu\,\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{R})} + (\lambda+\mu)\,\|\nabla\cdot\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{R})} \\
&\quad -\rho\omega^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{R})} - \mathrm{Re}\{< T_{dn}\mathbf{u},\,\mathbf{u} >\} \\
&\geq \mathrm{c}_5\,\|\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})} - \mathrm{c}_6\,\|\mathbf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_\mathrm{R})}. \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

και συνεπώς εξασφαλίζεται η υπόθεση του θεωρήματος. □

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 2. *Το πρόβλημα (2.71) -(2.73) έχει μοναδική λύση* $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{B_R} \setminus \overline{\mathrm{D}}_0)$, *που ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})} \leq \mathrm{c}\,\left(\|\mathbf{f}_2\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)} + \|\mathbf{f}_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)}\right) \tag{2.88}$$

για κάποια θετική σταθερά c.

Απόδειξη. Έστω $\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$. Τότε $\mathrm{q}\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ στο D_1 και συνεπώς $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ στο D_1 Από την (2.75) έπεται ότι η $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ επιλύει το πρόβλημα (2.60)-(2.62) με $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$, και από το λήμμα Rellich έχουμε ότι $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Η ομογενής, λοιπόν, εξίσωση

$$\alpha(\mathbf{u},\,\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0} \tag{2.89}$$

δέχεται μόνο την τετριμμένη λύση, οπότε η εξίσωση (2.75) δέχεται το πολύ μία λύση. Από αυτό το συμπέρασμα, μαζί με τα λήμματα 1-3 και το θεώρημα Lax-Milgram υπάρχει μοναδική λύση του μεταβολικού προβλήματος που ικανοποιεί την ανισότητα (2.88). □

2.4 Εφαρμογές και συμπεράσματα

Οι εφαρμογές των μεικτών προβλημάτων σκέδασης σχετίζονται με επικαλυμμένα αντικείμενα από διαφορετικά υλικά σε διαφορετικά μέρη των συνόρων τους ή αντικείμενα που έχουν υποστεί διάβρωση που έχει αποφέρει διαφορετικές ιδιότητες εμπέδησης σε μέρη της επιφάνειάς τους. Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται σε διάφορα πεδία εφαρμογών, όπως στον μη καταστρεπτικό έλεγχο, στον εντοπισμό αντικειμένων εντός της γης, στη θεωρία συνθετικών υλικών και σε διατύπωση μαθηματικών μοντέλων στις επιστήμες υγείας. Ειδικότερα, εφαρμογές στα ελαστικά υλικά είναι αρκετά διαδεδομένες και παίζουν σημαντικό ρόλο όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα: (i) Αποτίμηση μέσω μη καταστρεπτικού ελέγχου της κατάστασης τόσο ισοτροπικών όσο και ανισοτροπικών υλικών, μέσω χρήσης ελαστικών κυμάτων ώστε να μετρηθούν οι ελαστικές ιδιότητες στερεών δειγμάτων με σκοπό να εντοπιστούν ατέλειες στην κατασκευή τους [29]. (ii) Μη καταστρεπτικός έλεγχος με σκοπό να αποκαλυφθούν ατέλειες που εμφανίστηκαν λόγω διάβρωσης ή θερμικού σοκ [37]. (iii) Κατασκευή μερικώς επικαλυμμένων ατσάλινων εξαρτημάτων που έχουν ένα μέρος από καουτσούκ. Αυτές οι κατασκευές είναι εφικτές μέσω μιας χημικής διαδικασίας μετατροπής με χρήση φωσφορικού σιδήρου, εφαρμόζοντας κατάλληλη συγκολλητική ουσία, ώστε να επικοληθεί το καουτσούκ στο εν λόγω μέρος π.χ.[134]. (iv) Κατασκευή επικαλύψεων που μειώνουν την τριβή μεταξύ διαφορετικών υποστρωμάτων σε κράματα, βλέπε π.χ. [52, 46]. (v) Παραγωγή ιατρικών στεντ επικαλυμμένων με φάρμακο, σχεδιασμένα να απελευθερώνουν το φάρμακο στον περιβάλλοντα ιστό με ελεγχόμενο τρόπο. Ο στόχος αυτής της διαδικασίας απελευθέρωσης του φαρμάκου σε βάθος χρόνου, είναι η καθυστέρηση της ανάπτυξης πλεονασματικών κυττάρων ώστε να επιτραπεί στο αγγείο να επουλωθεί [129]. Επίσης, παραγωγή στεντ με βελτιωμένη βιοσυμβατότητα, μέσω της χρήσης επικάλυψης φωσφορυλοχολίνης ως μορφής βιομίμισης, βλέπε π.χ. [133]. (vi) Ηλεκτρικά αγώγιμα συνθετικά υλικά που έχουν επιθυμητές ρεολογικές και μηχανικές ιδιότητες μπορούν να παραχθούν μέσω συνδυασμού πολυμερούς και νανοσωλήνων άνθρακα απλού τοιχώματος, [95]. Στις πρακτικές εφαρμογές των μπορεί να προστεθούν και προβλήματα σκέδασης σεισμικών κυμάτων τα οποία διαδίδονται εντός της γης και σκεδάζονται από πετρώματα. Η εμπέδηση των πετρωμάτων αναπαριστά την γεωλογική επιφανειακή τους δομή. Πετρώματα με διαφορετική εμπέδηση σε τμήματα της επιφάνειάς τους εμφανίζονται σε εφαρμογές όπως ο εντοπισμός αντικειμένων υπογείως από μετρήσεις το ολικού πεδίου που προκύπτει από την σκέδαση ελαστικών κυμάτων από αυτά τα αντικείμενα. Πρέπει να σημειώσουμε, ο χαρακτηρισμός της εμπέδησης σε αντίστορφα προβλήματα ελαστικής σκέδασης έχει μελετηθεί και μπορεί να βρει κανείς λεπτομέρειες στην αναφορά [9].

Στην παράγραφο 2.2, η μελέτη του προβλήματος σκέδασης για επικαλυμμένο εμπόδιο με τμηματική εμπέδηση πραγματοποιήθηκε μέσω κατάλληλης συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης. Διατυπώνουμε για το πρόβλημα αυτό τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η ύπαρξη λύσεων του προβλήματος IBVP (2.12)-(2.15) θεμελιώθηκε με τη βοήθεια κατάλληλων ολοκληρωτικών τελεστών. Συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας ελαστικά δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, κατασεκυάστηκε μια ειδική μορφή της λύσης με στόχο να προκύψουν κατάλληλες ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αυτή η προσέγγιση ήταν εποικοδομητική ώστε να δείξουμε ότι η λύση ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες εμπέδησης σε καθένα μήμα του συνόρου και δώσαμε, επιπλεόν, ένα βασικό αποτέλεσμα ευστάθειας.

2. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα, μπορεί κανείς να θεμελιώσει την μοναδικότητα και ύπαρξη της λύσης και στην πιο περίπλοκη περίπτωση στην οποία το σύνορο του σκεδαστή είναι χωρισμένο σε n ξένα μεταξύ τους μέρη με διαφορετική σταθερά εμπέδησης στο καθένα. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης μπορεί να θεμελιωθούν ορίζοντας το ακόλουθο άθροισμα

$$\mathbf{h}_{\mathrm{e}} + \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{k}}, \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{k}} \in [\mathrm{H}^{-1/2}{}_{\partial B\setminus\Gamma_{I_{\mathrm{k}}}}(\Gamma_{I_{\mathrm{k}}})]^2, \tag{2.90}$$

όπου η $\mathbf{h}_{\mathrm{e}}$ είναι μια καθορισμένη επέκταση της $\mathbf{h}_1 = T\mathbf{u} + i\omega c_1\mathbf{u}$ από το Γ_{I_1} σε όλο το σύνορο ∂B. Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τελεστές $N|_{\Gamma_{I_{\mathrm{k}}}}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{k}})$ στο $\Gamma_{I_{\mathrm{k}}}$ $\mathrm{k} = 2, .., \mathrm{n}$ και (2.90), μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση $\mathbf{u}$ στη μορφή

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = D(P^{-1}(\mathbf{h}_e + \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{k}}))(\mathbf{r}) + i\,\eta\, S(P^{-1}(\mathbf{h}_e + \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{k}}))(\mathbf{r}) \tag{2.91}$$

που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες.

3 Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης τα οποία αφορουν στον προσδιορισμό του σχήματος, της θέσης αλλά και των φυσικών χαρακτηριστικών του σκεδαστή από τη γνώση της ασυπτωτικής συμπεριφοράς του σκεδασμένου πεδίου. Παρουσιάζουμε τις μεθόδους επίλυσης των αντιστρόφων προβλημάτων και αντιμετωπίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από ανομοιογενές μέσο με εμπόδια—σκεδαστές στο εσωτερικό του.

3.1 Μέθοδοι επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης

Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης είναι μη γραμμικά και μη καλώς τοποθετημένα, καθώς οι μετρήσεις που λαμβάνουμε για τα πλάτη σκέδασης είναι προσεγγιστικές, ως εκτούτου δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για ύπαρξη λύσης των προβλημάτων αυτών. Αυτό που επιδιώκουμε είναι να κανονικοποιήσουμε τα αντίστροφα προβλήματα και να βρούμε λύσεις των κανονικοποιημένων προβλημάτων [32]. Η μελέτη αντίστροφων προβλημάτων αρχίζει με την εργασία του Schiffer ο οποίος έδειξε για το πρόβλημα Dirichlet στην ακουστική, ότι με γνωστά τα πλάτη σκέδασης πάνω στη μοναδιαία σφαίρα μπορούμε να καθορίσουμε μοναδικά τον σκεδαστή [79]. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης επεκτάθηκαν από τους Nachman [98], Novikov [100] και Ramm [113]. Για τα αντίστοιχα προβλήματα στον ηλεκτρομαγνητισμό δημοσιεύθηκαν εργασίες από τους Colton, Päivärinta, Ola και Somersalo [36, 101, 102]. Καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη της μοναδικότητας του σκεδαστή παίζουν είτε το θεώρημα του Karp είτε οι σχέσεις αμοιβαιότητας (mixed reciprocity relations).

Εν συνεχεία, χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές *γραμμικοποίησης* του προβλήματος όπως οι προσεγγίσεις Born, Rytov και Kirchhoff [42], οι οποίες προσφέρουν μεν απλά μαθηματικά μοντέλα αλλά αγνοούν χαρακτηριστικά της μη γραμμικής φύσης του προβλήματος. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, λοιπόν, άρχισαν να αναπτύσσονται *επαναληπτικές μέθοδοι* -τύπου Newton και άλλες- που αντιμετώπιζαν χωρίς γραμμικοποίηση το πρόβλημα και οι οποίες διατηρούσαν περισσότερα χαρακτηριστικά της μη γραμμικότητας του προβλήματος. Σε ορισμένες από αυτές τις μεθόδους η κλασική Fréchet παράγωγος αντικαθίσταται από άλλες παραγώγους όπως για παράδειγμα τις domain derivatives. Τέτοιες μέθοδοι αναπτύχθηκαν από τους Roger [117], Angel, Colton και Kirsch [4], Kress[72], Potthast[106] και άλλους.

Κατά την εφαρμογή όμως των μεθόδων αυτών είναι απαραίτητο να επιλύεται ένα ευθύ πρόβλημα σε κάθε επαναληπτικό βήμα, για την αποφυγή, λοιπόν, της ανάγκης αυτής αναπτύχθηκαν οι *μέθοδοι διάσπασης*, οι οποίες διαχωρίζουν το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης σε δύο μέρη: στο πρώτο μέρος αντιμετωπίζεται η κακή τοποθέτηση του προβλήματος υπολογίζοντας το σκεδασμένο πεδίο από τη γνώση του πλάτους σκέδασης, ενώ στο δεύτερο μέρος αντιμετωπίζεται η μη γραμμικότητά του καθορίζοντας το σύνορο του σκεδαστή ως την περιοχή των σημείων οπου ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη για το ολικό πεδίο [32]. Αρχικά, διατυπώθηκαν η *μέθοδος των Kirsch και Kress* [68, 69] και η παρόμοια *μέθοδος των Angel, Kleinmann και Roach* [5]. Στη μέθοδο αυτή επιδιώκουμε να καθορίσουμε το σύνορο του σκεδαστή ως την επιφάνεια εκείνη που δίνει πλάτη σκέδασης όσο το δυνατόν πιο κοντά στις μετρήσεις που έχουμε. Με τον όρο 'κοντά' εννοούμε την ελαχιστοποίηση ενός κατάλληλου συναρτησοειδούς, η οποία γίνεται σε ένα συμπαγές σύνολο επιτρεπτών παραμετρικοποιήσεων του συνόρου του σκεδαστή. Η διαφορά της μεθόδου αυτής από τη μέθοδο των Kirsch και Kress έγκειται στο ότι στη μέθοδο των Angel, Kleinmann και Roach εκφράζουμε το σκεδασμένο πεδίο ως ανάπτυγμα ακτινοβολουσών σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων, ενώ στη μέθοδο των Kirsch και Kress για σκεδασμένο πεδίο χρησιμοποιείται ένα δυναμικό απλού στρώματος.

Μετέπειτα, ακολούθησε *η μέθοδος των Colton και Monk* [33, 34, 35] -η οποία αναφέρεται και ως ***dual space method***- στην οποία χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Herglotz επιλύεται το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε κάθε αποδεκτό χωρίο που προσεγγίζει τον σκεδαστή, το οποίο αποκαλούμε χωρίο Herglotz. Οι συναρτήσεις Herglotz, το σύνολο των οποίων είναι πυκνό στον χώρο λύσεων του εσωτερικού προβλήματος, αποτελούν τότε προσεγγίσεις των λύσεων του εσωτερικού προβλήματος σε κάθε αποδεκτό χωρίο. Αποδεικνύεται σχέση που συνδέει τον πυρήνα Herglotz της λύσης αυτής του εσωτερικού προβλήματος με το πλάτος σκέδασης (για την ελαστικότητα βλέπε [41]) και καθώς ο υπόχωρος των πυρήνων Herglotz είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου των πλατών σκέδασης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το αντίστροφο πρόβλημα προβάλοντας τα δεδομένα μετρήσιμα πλάτη σκέδασης στον υπόχωρο πυρήνων Herglotz. Για την προσεγγιστική επίλυση, λοιπόν, ελαχιστοποιούμε το άθροισμα των τετραγώνων των εσωτερικών γινομένων των μετρήσιμων πλατών σκέδασης επί των πυρήνων Herglotz συν το τετράγωνο του ολοκληρώματος των συναρτήσεων Herglotz πάνω στη μοναδιαία σφαίρα.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι επίσης, ενώ πετυχαίνουν γρήγορη σύγκλιση, είχαν το μειονέκτημα ότι απαιτούσαν περισσότερες εκ των προτέρων πληροφορίες για τον σκεδαστή όπως για παράδειγμα τη γνώση του είδος των συνοριακών συνθηκών αλλά και πληροφορίες για την τοπολογία του κάτι που ισχύει και στις μεθόδους διάσπασης. Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας αναπτύχθηκαν οι *δειγματοληπτικές μέθοδοι* στις οποίες χρησιμοποιώντας μια δείκτρια συνάρτηση ελέγχουμε αν ένα σημείο ανήκει στο εσωτερικό του σκεδαστή ή όχι, με σκοπό να προσδιορίσουμε το σύνορό του. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν η *μέθοδος σημειακής πηγής* (***point-source method***) του Potthast [107], η *μέθοδος του* Ikehata (***probe method***) [53, 54], η *γραμμική δειγματοληπτική μέθοδος* (***linear sampling method***) των Colton, Kirsch [31], *η μέθοδος παραγοντοποίησης* (***factorization method***) του Kirsch [64, 65, 67], η *τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης* (***modified factorization method***) [47, 48]. Το κύριο μειονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι απαιτούν μετρήσεις για τις τιμές των πλατών σκέδασης σε μεγάλο αριθμό σημείων.

Ειδικότερα, στη μέθοδο του Potthast χρησιμοποιούμε μια σημειακή πηγή σε σημείο z ως προσπίπτον κύμα και μετράμε το σκεδασμένο πεδίο που προκύπτει. Αν το σημείο z πλησιάζει στο σύνορο του σκεδαστή, το σκεδασμένο πεδίο θα τείνει στο άπειρο καθώς η σημειακή πηγή έχει ιδιομορφία στο z.

Στην probe method του Ikehata θεωρούμε χωρίο Ω που περιέχει τον σκεδαστή στο εσωτερικό του και για κάθε σημείο x του Ω ορίζουμε μία καμπύλη με το ένα άκρο στο σύνορο του Ω και το άλλο στο x. Θεωρούμε μια ακολουθία λύσεων της εξίσωσης v_n τέτοια ώστε το άθροισμα της L^2-νόρμας της διαφοράς της v_n από τη θεμελιώδη λύση και της L^2-νόρμας της κλίσης (gradient) της διαφοράς αυτής, να τείνει στο μηδέν. Τότε με τη βοήθεια κατάλληλου τελεστή DtoN μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία ολοκληρωμάτων με την v_n η οποία συγκλίνει σε κατάλληλη δείκτρια συνάρτηση μόνο για τα σημεία x που δεν ανήκουν στον σκεδαστή και η οποία τείνει στο άπειρο όταν το σημείο x τείνει στο σύνορο του σκεδαστή.

Στη γραμμική δειγματοληπτική μέθοδο θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση Herglotz ως προσπίπτον κύμα και χρησιμοποιώντας τον τελεστή λύσης, τον τελεστή Herglotz και τον τελεστή μακρινού πεδίου καθώς και τη συνοριακή συνθήκη οδηγούμαστε στην εξίσωση μακρινού πεδίου του προβλήματος. Ακολούθως, επιλέγουμε ένα σύνολο σημείων από μια περιοχή που είναι γνωστό ότι περιέχει τον σκεδαστή και επιλύουμε την εξίσωση μακρινού πεδίου προσεγγιστικά, για κάθε σημείο, χρησιμοποιώντας ένα σχήμα κανονικοποίησης. Συνήθως επιλέγεται η κανονικοποίηση Tikhonov, ορίζοντας την παράμετρο a με την αρχή της απόκλισης του Morozov (Morozov's discrepancy principle) [73, 126]. Με τη μέθοδο αυτή ο προσδιορισμός του σκεδαστή επιτυγχάνεται από τα σημεία εκείνα για τα οποία η νόρμα της λύσης γίνεται αυθαίρετα μεγάλη. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι έχουν αναπτυχθεί και άλλες μέθοδοι για την επιλογή της παραμέτρου a καθώς και άλλες κανονικοποιήσεις εκτός της Tikhonov [16, 17, 60, 61, 80].

Η μελέτη του Kirsch επί της συμπεριφοράς της προσεγγιστικής λύσης που δίνει η γραμμική δειγματολητική μέθοδος απέδωσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, ο Kirsch παραγοντοποιώντας τον τελεστή μακρινού πεδίου με τη βοήθεια του τελεστή λύσης και του δυναμικού απλού στρώματος οδηγήθηκε σε μία νέα εξίσωση με τον τελεστή μακρινού πεδίου και τον συζυγή του. Στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται στην αναφορά [6], η κανονικοποίηση της εξίσωσης παράγει λύση που συγκλίνει όταν ο τελεστής μακρινού πεδίου είναι κανονικός, καθώς τότε μπορούμε με τη βοήθεια των ιδιαζουσών τιμών του τελεστή μακρινού πεδίου να βρούμε βάση Riesz και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Picard [6, 32, 73] να δείξουμε τη σύγκλιση. Στην περίπτωση που ο τελεστής μακρινού πεδίου F δεν είναι κανονικός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $F_{\#} = |ReF| + |ImF|$ ο οποίος αποδεικνύεται αυτοσυζυγής άρα κανονικός. Σε αυτή την τελευταία παρατήρηση βασίζεται η τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης του Kirsch.

Στα προβλήματα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο έχουν εφαρμοστεί κυρίως η τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης αλλά και η μέθοδος που συνδυάζει τη γραμμική δειγματοληπτική μέθοδο με τη χρήση του reciprocity gap functional [9, 12] στην οποία θεωρούμε χωρίο Ω που περιέχει τον σκεδαστή και καμπύλη C που περικλείει το Ω καθώς και τις συναρτήσεις Herglotz -που είναι λύσεις της εξίσωσης στο $\Omega \setminus \bar{D}$. Χρησιμοποιώντας τις λύσεις u του προβλήματος για προσπίπτοντα σφαιρικά κύματα με πηγή σημείο x_0 πάνω στην καμπύλη C αναζητούμε προσεγγιστικά λύση για την ολοκληρωτική εξίσωση $RGF(u, v_g) = RGF(u, G_z)$ όπου G_z είναι σφαιρικό κύμα με πηγή το σημείο z. Τότε το σύνορο του σκεδαστή προσδιορίζεται από τα σημεία z για τα οποία η νόρμα $\|g\|$ γίνεται αυθαίρετα μεγάλη. Πρέπει να σημειώσουμε ότι με αυτή τη μέθοδο μπορούμε, επίσης, να προσδιορίσουμε και τη σταθερά εμπέδησης του σκεδαστή.

Ακολούθως, αναπτύχθηκαν η μέθοδος ***range test*** [111] καθώς και η ***no response test*** [90], οι οποίες είναι δειγματοληπτικές μέθοδοι που υπολογίζουν τη δείκτρια συνάρτησή τους σε ολόκληρα σύνολα και όχι σε ξεχωριστά σημεία. Μία συγκριτική μελέτη των μεθόδων αυτών και των λοιπών δειγματοληπτικών μεθόδων μπορεί να βρει κανείς στην αναφορά [108].

Ακόμη, αξίζει να επισημάνουμε την *υβριδική μέθοδο* των Kress και Serannho [74, 119] που συνδυάζει τη μέθοδο των Kirsch και Kress με επαναλήψεις Newton καθώς και τη μέθοδο *συνδυασμού προσεγγίσεων Born με τη μέθοδο παραγοντοποίησης* [66]. Με τις προαναφερθείσες μεθόδους έχει δημοσιευθεί ένας ικανός αριθμός εργασιών από διάφορους ερευνητές που έχουν διερευνήσει εκτενώς τέτοιου είδους προβλήματα και ενδεικτικά παραπέμπουμε τον αναγνώστη -πέραν των εργασιών που έχουμε ήδη αναφέρει- στις εξής: [2, 3, 13, 14, 27, 30, 43, 44, 83, 93, 99, 104, 105, 110, 121].

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή σχετικά με τις μεθόδους μελέτης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδσης, θα ήταν χρήσιμο να επισημάνουμε ότι τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί οι *ευθείες δειγματοληπτικές μέθοδοι* (***direct sampling methods***) οι οποίες έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι χρησιμοποιούν ως δείκτρια συνάρτηση ένα εσωτερικό γινόμενο των μετήσεων με κατάλληλη -διαφορετική σε κάθε μέθοδο- συνάρτηση αντιμετωπίζοντας, δηλαδή, αριθμητικά το πρόβλημα. Αυτές οι μέθοδοι δεν έχουν την ανάγκη για μετρήσεις σε μεγάλο πλήθος σημείων. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν *η μέθοδος* ***orthogonality sampling*** του Potthast [109], η *μέθοδος* ***direct sampling method*** του Ito [55], η *μέθοδος των Cakoni και Rezac* [25], η *μέθοδος* ***single-shot method*** του Li [82], η ***reverse time migration*** του Chen [28], και *η μέθοδος του* Liu [85].

3.2 Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από ανομοιογενές μέσο με εμπόδια–σκεδαστές στο εσωτερικό του

Αρχικά, στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε την κανονικοποίηση Tikhonov και ακολούθως δίνονται ορισμένες απαραίτητες μαθηματικές έννοιες ώστε να περιγράψουμε τη μέθοδο παραγοντοποίησης (factorization method) που θα ακολουθήσουμε στη μελέτη του προβλήματός μας [57].

Μία σημαντική έννοια στην αντιμετώπιση των αντίστροφων προβλημάτων είναι αυτή της κανονικοποίησης. Έστω X, Y απειροδιάστατοι χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός, συμπαγής, ένα προς ένα τελεστής με πυκνό πεδίο τιμών. Μια μέθοδος κανονικοποίησης για τον A είναι μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $R_a : Y \to X$, $a > 0$

τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in X$

$$R_\alpha Ax \to x, \ \ (\alpha \to 0) \tag{3.1}$$

Ο τελεστής A μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, x_n) \psi_n \tag{3.2}$$

όπου μ_n είναι η ακολουθία των ιδιαζουσών τιμών του A και οι x_n στο X, ψ_n στο Y τέτοιες ώστε $Ax_n = \mu_n \psi_n$, $A^*\psi_n = \mu_n x_n$. Ένα τέτοιο σύστημα (μ_n, x_n, ψ_n) λέγεται ιδιάζον σύστημα του τελεστή A.

Φίλτρο κανονικοποίησης για τον A ονομάζεται μια συνάρτηση $q : (0, \infty) \times (0, \|A\|) \to \mathbb{R}$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
$|q(a, \mu)| \leq 1$ για κάθε $a > 0$ και $0 < \mu < \|A\|$
Για κάθε $a > 0$ υπάρχει $c(a)$ τέτοιο ώστε $|q(a, \mu)| \leq c(a)$ για κάθε $0 < \mu < \|A\|$
$\lim\limits_{a \to 0} q(a, \mu) = 1$ για κάθε $0 < \mu < \|A\|$
Κάθε οικογένεια τελεστών R_a που ορίζεται ως

$$R_a \psi = \sum_a \frac{q(a, \mu_n)}{\mu_n} (\psi, \psi_n) x_n \tag{3.3}$$

με οποιοδήποτε φίλτρο κανονικοποίησης q, είναι μια μέθοδος κανονικοποίησης [73], [6].

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι συνήθως στα προβλήματα σκέδασης χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση Tikhonov, η οποία είναι η κανονικοποίηση που προκύπτει για $q = \dfrac{\mu^2}{a + \mu^2}$. Με την κανονικοποίηση Tikhonov επιτυγχάνουμε την ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς $\|Ax_a - y\|^2 + a\|x_a\|^2$ που ονομάζεται συναρτησοειδές Tikhonov και τότε το x_a είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $ax_a + A^*Ax_a = A^*y$ και εξαρτάται συνεχώς από το y. Συνεπώς η οικογένεια τελεστών R_a μπορεί στην περίπτωση αυτή να γραφεί ως

$$R_a = (aI + A^*A)^{-1}A^*. \tag{3.4}$$

όπου για δεδομένα στα οποία υπεισέρχονται σφάλματα μετρήσεων, επιλέγουμε το a συνήθως χρησιμοποιώντας την αρχή της διαφοράς του Morozov (Morozov's discrepancy principle).

Για εφαρμογή της μεθόδου της παραγοντοποίησης είναι απαραίτητο να ορίσουμε την ελαστική συνάρτηση Herglotz ως

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_S \big[\sqrt{\frac{k^p}{\omega}}\mathbf{g}_p(\mathbf{d})e^{ik^p\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{k^s}{\omega}}\mathbf{g}_s(\mathbf{d})e^{ik^s\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, ds(\mathbf{d}),\ \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.5}$$

όπου $\mathbf{g}_p$, $\mathbf{g}_s \in L^2(S)$. Γενικότερα ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη Herglotz για σφαίρα ακτίνας R,

$$\lim_{R\to+\infty} sup\frac{1}{R}\int_{|\mathbf{r}|<R} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 dV < \infty,\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.6}$$

ονομάζεται συνάρτηση Herglotz. Η $\mathbf{v}$ όπως ορίστηκε στην (3.5) είναι συνάρτηση Herglotz και αποτελεί λύση της εξίσωσης Navier.

Κεντρικό ρόλο στη μέθοδο παραγοντοποίησης κατέχει, επίσης, το θεώρημα του Picard, το οποίο δηλώνει ότι το πεδίο τιμών του τελεστή λύσης (solution operator) G ισούται με το πεδίο τιμών του τελεστή $(F^*F)^{1/4}$, δηλαδή $R(G) = R(F^*F)^{1/4}$, όπου F είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου.

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης ($F_\sharp$ factorization method) που θα χρησιμοποιήσουμε στην αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης από ανομοιογενές μέσο με εμπόδια στο εσωτερικό του. Αρχικά, εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή, θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση Herglotz ως προσπίπτον κύμα και οδηγούμαστε σε μία εξίσωση για τον τελεστή μακρινού πεδίου. Στην τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης συνεχίζουμε παραγοντοποιώντας τον τελεστή $F_\sharp = |ReF| + |ImF|$ χρησιμοποιώντας στην παραγοντοποίηση αυτή τον τελεστή λύσης και το δυναμικό απλού στρώματος. Η επιλογή του τελεστή $F_\sharp$ αντί του F γίνεται επειδή ο $F_\sharp$ είναι αυτοσυζυγής -άρα κανονικός- συνεπώς μπορούμε να βρούμε βάση Riesz από ιδιάζουσες τιμές του και να τον γράψουμε ως αναπτύγμα πάνω στη βάση αυτή. Έπειτα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Picard μετασχηματίζουμε την εξίσωση, στην οποια είχαμε οδηγηθεί, σε εξίσωση με τον τελεστή $(F_\sharp^* F_\sharp)^{1/4} = F_\sharp^{1/2}$ την οποία και λύνουμε προσεγγιστικά με ένα σχήμα κανονικοποίησης. Ακολούθως σε αυτή την ενότητα, εφαρμόζουμε την τροποποιημένη μέθοδο πραγοντοποίησης factorization method για τον προσδιορισμό του σχήματος και της θέσης του ∂D του φορέα του ανομοιογενούς μέσου D. Εξετάζουμε την περίπτωση συνοριακής συνθήκης Dirichlet στο $\partial\mathrm{D}_0$ των θαμμένων αντικειμένων. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και στις άλλες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, όπως Neumann ή συνθήκη με εμπέδηση.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το ανομοιογενές μέσο D ακτινοβολείται από προσπίπτον ελαστικό επίπεδο κύμα της μορφής [105]

$$\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{S^1} \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}}\mathbf{g}_{\mathrm{p}}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{ik^p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{ik^s}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}) \tag{3.7}$$

και ας ορίσουμε τον τελεστή μακρινού πεδίου $F : [\mathrm{L}^2(S^1)]^2 \to [\mathrm{L}^2(S^1)]^2$ που δίνεται από [121]

$$(F\mathbf{g})(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{S} \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}}\mathbf{u}^{\mathrm{p}}_{\infty}(\hat{\mathbf{r}},\mathbf{d},\mathbf{d})\,\mathbf{g}_{\mathrm{p}}(\mathbf{d}) + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}}\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_{\infty}(\hat{\mathbf{r}},\mathbf{d},\mathbf{d}^{\top})\,\mathbf{g}_{\mathrm{s}}(\mathbf{d})\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}), \tag{3.8}$$

όπου ο πυρήνας $\mathbf{g}$ έχει στήλες τα διανύσματα του $\mathrm{L}^2(S^1)$: $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\big(\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}}\mathrm{g_p}, \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}}\mathrm{g_s}\big)$ όπου τα $\mathbf{d}, \hat{\mathbf{r}} \in \Omega$ συμβολίζουν την προσπίπτουσα κατεύθυνση και την κατεύθυνση παρατήρησης, αντίστοιχα. Επιπλέον

$$\mathbf{g}_{\mathrm{p}}(\mathbf{d}) = \mathrm{g_p}(\mathbf{d})\,\mathbf{d},\ \ \mathbf{g}_{\mathrm{s}}(\mathbf{d}) = \mathrm{g_s}(\mathbf{d})\,\mathbf{d}^{\perp}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}_{\infty}(\cdot,\mathbf{d},\boldsymbol{\theta}) = (\mathrm{u}^{\mathrm{p}}_{\infty}(;,\mathbf{d},\boldsymbol{\theta}), \mathrm{u}^{\mathrm{s}}_{\infty}(;,\mathbf{d},\boldsymbol{\theta})), \tag{3.10}$$

με $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{d}$ ή $\mathbf{d}^{\perp}$ και ακόμη οι συναρτήσεις $\mathbf{u}_{\infty}$ είναι τα μακρινά πεδία του σκεδασμένου πεδίου $\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$ του προβλήματος (2.57)-(2.59) λόγω προσπίτοντος επίπεδου κύματος $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ με συνθήκη Dirichlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ στο $\partial\mathrm{D}_0$.

Έστω ο τελεστής $G : [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \to [\mathrm{L}^2(S^1)]^2$, που δίνεται από την

$$G(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) = \mathbf{w}_{\infty},\ \text{όπου}\ \mathbf{w}_{\infty}\ \text{είναι το μακρινό πεδίο της λύσης}\ \mathbf{w} \tag{3.11}$$

του προβλήματος (2.60)-(2.62) με δεδομένα $(\mathbf{f}_1,\, \mathbf{f}_2)^{\top} \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$.

Λήμμα 4. *Ο τελεστής G είναι συμπαγής με πυκνό πεδίο τιμών στο $[\mathrm{L}^2(S^1)]^2$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο G έχει πυκνό πεδίο τιμών στο $[\mathrm{L}^2(S^1)]^2$ δείχνοντας ότι ο συζυγής τελεστής G^* έχει την ιδιότητα $Ker(G^*) = \{\mathbf{0}\}$. Θεωρούμε ότι η $\mathbf{w}$ είναι το διανυσματικό πεδίο που επιλύει το (2.60)-(2.62) με δεδομένα $(\mathbf{f}_1,\, \mathbf{f}_2)^{\top} \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$, όπου $\mathbf{u}$ είναι η λύση του (2.57)-(2.59) που αντιστοιχεί σε προσπίπτον πεδίο $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ για $\mathbf{g} = \boldsymbol{\varphi}$ (βλέπε σχέση (3.7) και [105]). Χρησιμοποιώντας το μακρινό πεδίο $\mathbf{w}_{\infty}$, τη σχέση (3.11) και τη συνθήκη ακτινοβολίας (2.59) η οποία ικανοποιείται από την $\mathbf{w}$, μπορούμε να καταλήξουμε στην

$$\begin{aligned}(G(\mathbf{f}_1,\,\mathbf{f}_2),\,\boldsymbol{\varphi}) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\int_{\partial \mathrm{D}}[\,\mathrm{T}\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}\cdot\mathbf{w}\big|_+ - \mathbf{u}^{\mathrm{inc}}\cdot\mathrm{T}\mathbf{w}\big|_+\,]\,\mathrm{ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\int_{\partial \mathrm{D}}[\,\mathrm{T}(\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\mathrm{sct}})\cdot\mathbf{w}\big|_+ + (\mathbf{u}^{\mathrm{sct}}-\mathbf{u})\cdot\mathrm{T}\mathbf{w}\big|_+\,]\,\mathrm{ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\int_{\partial \mathrm{D}}[\,\mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\big|_+ - \mathbf{u}\cdot\mathrm{T}\mathbf{w}\big|_+\,]\,\mathrm{ds}, \qquad (3.12)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{sct}}$, $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathrm{L}^2(S^1)]^2$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι $\partial\mathrm{D}_1 = \partial\mathrm{D} \cup \partial\mathrm{D}_0$ καθώς και $\mathbf{u}\big|_{\partial\mathrm{D}_0} = \mathbf{0}$, παίρνουμε

$$(G(\mathbf{f}_1,\,\mathbf{f}_2),\,\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\int_{\partial\mathrm{D}_1}\Big(\mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\big|_- - \mathbf{u}\cdot\mathrm{T}\mathbf{w}\big|_-\Big)\,\mathrm{ds} - \int_{\partial\mathrm{D}_0}\mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\big|_-\,\mathrm{ds}. \qquad (3.13)$$

Από τον τρίτο τύπο Betti, παίρνουμε

$$\int_{\partial\mathrm{D}_1}\Big(\mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\big|_- - \mathbf{u}\cdot\mathrm{T}\mathbf{w}\big|_-\Big)\,\mathrm{ds} = \int_{\mathrm{D}_1}(\mathbf{w}\cdot\Delta^*\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\Delta^*\mathbf{w})\,\mathrm{d}\upsilon, \qquad (3.14)$$

συνεπώς η σχέση (3.13) μέσω της (3.14) μπορεί να γραφεί ως

$$(G(\mathbf{f}_1,\,\mathbf{f}_2),\,\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\{\int_{\mathrm{D}_1}(\mathbf{w}\cdot\Delta^*\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\Delta^*\mathbf{w})\,\mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial\mathrm{D}_0}\mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\big|_-\,\mathrm{ds}\}. \qquad (3.15)$$

Επίσης στο χωρίο D_1, έχουμε

$$\Delta^*\mathbf{w} = (1-\rho(\mathbf{r}))\omega^2\mathbf{f}_1 \qquad (3.16)$$

και

$$\Delta^*\mathbf{u} = -\rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}, \qquad (3.17)$$

και αντικαθιστώντας την (3.16) και την (3.17) στην (3.15) οδηγούμαστε στην

$$
\begin{aligned}
(G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \boldsymbol{\varphi}) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\{\int_{\mathrm{D}_1} \big(\mathbf{w}\cdot(-\rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{u}) - \mathbf{u}\cdot(1-\rho(\mathbf{r}))\omega^2\mathbf{f}_1\big)\, \mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial \mathrm{D}_0} \mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{ds}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\{\int_{\mathrm{D}_1} (\rho(\mathbf{r})-1)\omega^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_1\,\mathrm{d}\upsilon + \int_{\partial \mathrm{D}_0} \mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_2\,\mathrm{ds}\}. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Ως εκτούτου έχουμε,

$$
(G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\{\int_{\mathrm{D}_1} \mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial \mathrm{D}_0} \mathrm{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}_2\,\mathrm{ds}\}. \qquad (3.19)
$$

ή ισοδύναμα

$$
(G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega}}\{\int_{\mathrm{D}_1} \mathrm{q}\mathbf{f}_1\cdot\overline{\overline{\mathbf{u}}}\,\mathrm{d}\upsilon - \int_{\partial \mathrm{D}_0} \overline{\mathrm{T}\,\overline{\mathbf{u}}}\cdot\mathbf{f}_2\}\,\mathrm{ds} \qquad (3.20)
$$

συνδυάζοντας την (3.12) με την (3.20), προκύπτει

$$
G^*\boldsymbol{\varphi} = (\overline{\mathrm{q}\mathbf{u}}\big|_{\mathrm{D}_1}, -\mathrm{T}\overline{\mathbf{u}}\big|_{\partial \mathrm{D}_0}). \qquad (3.21)
$$

Έστω τώρα $\boldsymbol{\varphi}$ τέτοια ώστε $G^*\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$. Έπεται από την (3.21) ότι $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ στο D_1, και από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας (βλέπε [92]), παίρνουμε $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{inc}} + \mathbf{u}^{\mathrm{sct}} = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{D}}$. Επειδή η $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}}$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, έχουμε $\mathbf{u}^{\mathrm{inc}} = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{D}}$ επομένως προκύπτει ότι $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ και συνεπώς ο G^* είναι ένα προς ένα, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. □

Διατυπώνουμε τώρα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. *Για* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *ορίζουμε*

$$
\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{r}}) := (\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\mathrm{i}+1}{4\sqrt{\pi \mathrm{k_p}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{ik_p}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{d},\quad \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{i}+1}{4\sqrt{\pi \mathrm{k_s}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{ik_s}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{r}}^{\perp}\cdot\mathbf{d}),\quad \hat{\mathbf{r}} \in S^1 \qquad (3.22)
$$

τότε

$$
\mathbf{a} \in \mathrm{D} \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{a}} \in Range(G). \qquad (3.23)
$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} \in \mathrm{D}$ και ορίζουμε κύκλο $\mathrm{B}_\delta(\mathbf{a})$ ακτίνας $\delta > 0$ με κέντρο στο $\mathbf{a}$ τέτοιο ώστε η $\overline{\mathrm{B}}_\varepsilon$ να περιέχεται D. Θεωρούμε μία συνάρτηση αποκοπής (cut-off function) X τέτοια ώστε $X(\mathbf{y}) = 1$ για κάθε $\mathbf{y}$ με $|\mathbf{y}| \geq \delta$ και $X(\mathbf{y}) = 0$ για κάθε $\mathbf{y}$ με $|\mathbf{y}| < \frac{\delta}{2}$. Επιπλέον θεωρούμε

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = X(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r},\,\mathbf{a};\tau) \tag{3.24}$$

όπου $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r},\,\mathbf{a};\tau) = \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{a})\cdot\tau$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\,\mathbf{a})$ είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Navier με την πηγή να βρίσκεται στο $\mathbf{a}$ και το τ το διάνυσμα πόλωσης. Είναι γνωστό ότι [10]

$$\mathbf{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{r},\,\mathbf{a};\tau) = \Gamma_{\mathrm{p}}^{\infty}(\hat{\mathbf{r}},\,\mathbf{a};\tau)\,\hat{\mathbf{r}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k_p}\mathrm{r}}}{\sqrt{\mathrm{r}}} + \Gamma_{\mathrm{s}}^{\infty}(\hat{\mathbf{r}},\,\mathbf{a};\tau)\,\hat{\mathbf{r}}^{\perp}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k_s}|\mathbf{r}|}}{\sqrt{\mathrm{r}}} + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1/2}) \tag{3.25}$$

Τότε

$$\mathbf{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{r},\,\mathbf{a};\tau) = \left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\mathrm{i}+1}{4\sqrt{\pi\mathrm{k_p}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k_p}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{d},\ \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{i}+1}{4\sqrt{\pi\mathrm{k_s}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k_s}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{r}}^{\perp}\cdot\mathbf{d}\right) \tag{3.26}$$

Από την (3.24) έχουμε $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r},\,\mathbf{a};\tau)$ για κάθε $\mathbf{r}$ τέτοι ώστε $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| \geq \delta$. Χρησιμοποιώντας την

$$\Delta(X\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{\Gamma}\Delta X + X\Delta\mathbf{\Gamma} + 2(\nabla X\cdot\nabla)\mathbf{\Gamma}, \tag{3.27}$$

και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση Navier, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta^{*}\mathbf{w} + \rho(\mathbf{r})\omega^{2}\mathbf{w} &= \mu\Delta\mathbf{w} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{w} + \rho\omega^{2}\mathbf{w} \\ &= \mu(\mathbf{\Gamma}\Delta X + X\Delta\mathbf{\Gamma} + 2(\nabla X\cdot\nabla)\mathbf{\Gamma}) \\ &\quad +(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot X\mathbf{\Gamma} + \rho\omega^{2}X\mathbf{\Gamma}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Χρησιμοποιώντας την επόμενη ταυτότητα

$$\nabla\cdot X\mathbf{\Gamma} = X\nabla\cdot\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}\cdot\nabla X \tag{3.29}$$

και την (3.28), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta^{*}\mathbf{w} + \rho\omega^{2}\mathbf{w} &= \mu\mathbf{\Gamma}\Delta X + X\Delta\mathbf{\Gamma} + 2(\nabla X\cdot\nabla)\mathbf{\Gamma} \\ &\quad +(\lambda+\mu)\nabla(X\nabla\cdot\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}\cdot\nabla X) + \rho\omega^{2}X\mathbf{\Gamma} =: -\mathrm{q}\,\mathbf{f}_{1}^{0},\quad \text{στο}\,\mathrm{D}_{1}.\end{aligned}$$

Στο σύνορο $\partial \mathrm{D}_0$, έχουμε

$$\mathbf{w} = X\mathbf{\Gamma} =: \mathbf{f}_2^0 \tag{3.30}$$

όπου η $\mathbf{w}$ είναι λύση του προβλήματος (2.60)-(2.62) με δεδομένα $\mathbf{f}_1^0$, $\mathbf{f}_2^0$ και συνεπώς

$$G(\mathbf{f}_1^0,\, \mathbf{f}_2^0) = \mathbf{w}^\infty = \boldsymbol{\phi}_\mathbf{a} \tag{3.31}$$

δηλαδή, $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{a} \in Range(G)$.

Ακόμη, θεωρώντας $\mathbf{a} \notin \mathrm{D}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ τέτοιες ώστε $G(\mathbf{g}_1,\, \mathbf{g}_2) = \boldsymbol{\phi}_\mathbf{a}$ και $\mathbf{w}$ η λύση του προβλήματος με δεδομένα $\mathbf{g}_1$ και $\mathbf{g}_2$, προκύπτει από το λήμμα Rellich και την αρχή της αναλυτικής συνέχειας, ότι $\mathbf{w}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r},\, \mathbf{a};\, \tau)$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\|\mathbf{w}\| < \infty$ και $\|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r},\, \mathbf{a};\, \tau)\| = \infty$ σε μια μικρή περιοχή του $\mathbf{a}$. $\square$

Στο σημείο αυτό, για την διευκόλυνση του αναγνώστη, υπενθυμίζουμε τη σχέση (3.7) που αντιστοιχεί σε μια ελαστική κυματική συνάρτηση Herglotz με τον τελεστή F να είναι ο αντίστοιχος τελεστής μακρινού πεδίου (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [123]). Από την τελευταία σχέση μπορούμε να καταλήξουμε στον ακόλουθο τελεστή $H : [\mathrm{L}^2(S^1)]^2 \to Y$, που σχετίζεται με το πρόβλημα (2.57)-(2.59), ως εξής:

$$(H_1\mathbf{g})(\mathbf{r}) := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{S^1} \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}}\mathbf{g}_\mathrm{p}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}}\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^s}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}),\ \ \mathbf{r} \in \mathrm{D}_1 \tag{3.32}$$

και

$$(H_2\mathbf{g})(\mathbf{r}) := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{S^1} \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}}\mathbf{g}_\mathrm{p}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}}\mathbf{g}_\mathrm{s}(\mathbf{d})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^s}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}),\ \ \mathbf{r} \in \partial\mathrm{D}_0. \tag{3.33}$$

Λόγω της αρχής της υπέρθεσης και τον ορισμό του G -βλέπε σχέση (3.11)- προκύπτει εύκολα ότι

$$F = GH = G(H_1, H_2). \tag{3.34}$$

Για να αποδείξουμε μια κατάλληλη παραγοντοποίηση του τελεστή F, θα δείξουμε ότι η τελευταία σχέση ικανοποιεί την ταυτότητα του πεδίου τιμών που δίνεται στην [67] (Θεώρημα 2.15, σελ. 57). Ως εκτούτου προχωράμε στη μελέτη μας ορίζοντας τους ακόλουθους επικουρικούς ολοκληρωτικούς τελεστές $\mathbf{V}$ και $\mathbf{S}$ ως:

$$(\mathbf{V}\boldsymbol{\varphi}_1)(\mathbf{r}) = \int_{\mathrm{D}_1} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\, \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{r}_0)\, \mathrm{d}\mathbf{r}_0, \ \ \mathbf{r} \in \mathrm{D}_1,\, \boldsymbol{\varphi}_1 \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \tag{3.35}$$

και

$$(\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}_2)(\mathbf{r}) = \int_{\partial\mathrm{D}_0} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\, \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{r})\, \mathrm{ds}(\mathbf{r}_0), \ \ \mathbf{r} \in \mathrm{D}_1,\, \boldsymbol{\varphi}_2 \in [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \tag{3.36}$$

και λαμβάνουμε επίσης υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς τους, που δίνονται από τις:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{res}}\boldsymbol{\varphi}_1 := (\mathbf{V}\boldsymbol{\varphi}_1)\big|_{\mathbf{r}\in\partial\mathrm{D}_0} \tag{3.37}$$

και

$$\mathbf{S}_{\mathrm{res}}\boldsymbol{\varphi}_2 := (\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}_2)\big|_{\mathbf{r}\in\partial\mathrm{D}_0}. \tag{3.38}$$

Ο πυρήνας $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ στην (3.35) και την (3.36) είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Navier στο $\mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο τελεστής ίχνους είναι φραγμένος [92], συνάγουμε ότι οι

$$\mathbf{V} : [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \to [\mathrm{H}^2(\mathrm{D}_1)]^2, \ \ \mathbf{S} : [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \to [\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_1)]^2, \tag{3.39}$$

καθώς και οι περιορισμοί τους

$$\mathbf{V}_{\mathrm{res}} : [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \to [\mathrm{H}^{3/2}(\mathrm{D}_1)]^2, \ \ \mathbf{S}_{\mathrm{res}} : [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \to [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \tag{3.40}$$

είναι φραγμένοι.

Λήμμα 5. *Το δυναμικό απλού στρώματος*

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \int_{\mathrm{D}_1} \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\, \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{r}_0)\, \mathrm{d}\mathbf{r}_0 + \int_{\partial\mathrm{D}_0} \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r},\, \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{r})\, \mathrm{ds}(\mathbf{r}_0), \ \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{D}}_0 \tag{3.41}$$

έχει μακρινό πεδίο τον συζυγή τελεστή $H^* : Y \to [\mathrm{L}^2(S^1)]^2$ του H, που δίνεται από

$$\begin{aligned} H^*(\alpha,\beta) \;\; &= \;\; \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{\mathrm{D}_1} \alpha(\mathbf{r})\big[\sqrt{\frac{\mathrm{k}^{\mathrm{p}}}{\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k}^{\mathrm{p}}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k}^{\mathrm{s}}}{\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k}^{\mathrm{s}}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{d}\upsilon \\ &\quad + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{\partial\mathrm{D}_0} \beta(\mathbf{r})\big[\sqrt{\frac{\mathrm{k}^{\mathrm{p}}}{\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k}^{\mathrm{p}}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k}^{\mathrm{s}}}{\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k}^{\mathrm{s}}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \tag{3.42}$$

για κάθε $\alpha \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2$ *και* $\beta \in [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\boldsymbol{\varphi}_1 \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2$, $\boldsymbol{\varphi}_2 \in [H^{1/2}(\partial D_0)]^2$ και $\alpha \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2$, $\beta \in [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$. Τότε μέσω των σχέσεων (3.32) και (3.33), έχουμε ότι

$$< H(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2), (\alpha, \beta) >=< (H_1\boldsymbol{\varphi}_1, H_2\boldsymbol{\varphi}_2), (\alpha, \beta) >$$

$$\begin{aligned}
&= < H_1\boldsymbol{\varphi}_1, \alpha > + < H_2\boldsymbol{\varphi}_2, \beta > \\
&= \int_{S^1} \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{d}) \overline{\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{\mathrm{D}_1} \alpha(\mathbf{r}) \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k^p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^s}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big] \mathrm{d}\mathbf{r}\}}\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}) \\
&+ \int_{S^1} \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{d}) \overline{\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_{\partial\mathrm{D}_0} \beta(\mathbf{r}) \big[\sqrt{\frac{\mathrm{k^p}}{\omega}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{k^p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}} + \sqrt{\frac{\mathrm{k^s}}{\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{k^s}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}\big]\, \mathrm{ds}(\mathbf{r})\}}\, \mathrm{ds}(\mathbf{d}) \\
&= < (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2), \mathrm{H}^*(\alpha, \beta) >,
\end{aligned}$$

και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 4. *Ο τελεστής F παραγοντοποιείται ως*

$$F = G\, P^*\, G^* \tag{3.43}$$

όπου $P : [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \to [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$ *είναι ο πίνακας τελεστή που ορίζεται από την*

$$P = \begin{pmatrix} q_1 I - \mathbf{V} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{V}_{res} & -\mathbf{S}_{res} \end{pmatrix} \quad \text{όπου } q_1\mathbf{f}_1 := \frac{1}{q}\mathbf{f}_1 \tag{3.44}$$

Απόδειξη. Μέσω του ορισμού της $\mathbf{w}$ στην (3.41) και τους ορισμούς των $\mathbf{V}$, $\mathbf{S}$ στην (3.35) και την (3.36) αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}\boldsymbol{\varphi}_{_1} + \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}_{_2}. \tag{3.45}$$

Είναι προφανές ότι η $\mathbf{w}$ επιλύει το πρόβλημα (2.60)-(2.62) με δεδομένα

$$\mathbf{f}_1 \ := \ q_1\boldsymbol{\varphi}_1 - (\mathbf{V}_1\boldsymbol{\varphi}_1 + \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}_2), \tag{3.46}$$

$$\mathbf{f}_2 \ := \ -\mathbf{V}_{res}\boldsymbol{\varphi}_1 - \mathbf{S}_{res}\boldsymbol{\varphi}_2, \tag{3.47}$$

και μέσω της σχέσης (2.60) μπορούμε να καταλήξουμε στην

$$\Delta^*\mathbf{w} + \rho(\mathbf{r})\omega^2\mathbf{w} = -\boldsymbol{\varphi}_1, \ \text{στο } \mathrm{D}_1. \tag{3.48}$$

Θεωρούμε τώρα τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} q_1 I - \mathbf{V} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{V}_{res} & -\mathbf{S}_{res} \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

και επειδή ο $G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \mathbf{w}_\infty$ είναι το μακρινό πεδίο της λύσης $\mathbf{w}$ του (2.60)-(2.62) με δεδομένα $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)^\top \in [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$, παίρνουμε $H^* = GP$ και συνεπώς

$$H = P^*\, G^*. \tag{3.50}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.8) και τις σχέσεις (3.32), (3.33) οδηγούμαστε στην

$$F = GH, \tag{3.51}$$

και συνεπώς η (3.43) έχει αποδειχθεί. □

Πρόταση 5. *Έστω ο τελεστής* $P : [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2 \to \mathrm{Y}$ *που ορίζεται από την*

$$P = \begin{pmatrix} q_1 I - \mathbf{V} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{V}_{res} & -\mathbf{S}_{res} \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

όπου $\mathrm{Y} = [\mathrm{L}^2(\mathrm{D}_1)]^2 \times [\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathrm{D}_0)]^2$. *Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

Ο (i) $P : \mathrm{Y}^* \to \mathrm{Y}$ *είναι ισομορφισμός αν* ω^2 *δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet του* $-\Delta^*$ *στο* D_0.

(ii) *Αν* $\rho(\mathbf{r}) < 1$, *υπάρχει ένας πιεστικός τελεστής* $P^{(1)}$ *και ένας συμπαγής τελεστής* $P^{(2)}$

τέτοιοι ώστε $P = P^{(1)} + P^{(2)}$.

(iii) *Ο* $Im(P)$*είναι συμπαγής και μη θετικός στο* Y^**, δηλαδή,* $Im\{< P\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathrm{Y}^*}\} \leq 0$*, για κάθε* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{Y}^*$.

Απόδειξη. Αρχίζουμε την απόδειξή μας ξαναγράφοντας τη σχέση (3.52) ως

$$P = \begin{pmatrix} q_1 I & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}_{res}(\ell_p, \ell_s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{S} \\ \mathbf{V}_{res} & \mathbf{S}_{res}(k_p,\, k_s) - \mathbf{S}_{res}(\ell_p, \ell_s) \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Αν ορίσουμε

$$P^{(1)} := \begin{pmatrix} q_1 I & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}_{res}(\ell_p, \ell_s) \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

και

$$P^{(2)} := \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{S} \\ \mathbf{V}_{res} & \mathbf{S}_{res}(k_p, k_s) - \mathbf{S}_{res}(\ell_p,\, \ell_s) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

όπου $\mathbf{S}_{res}(k_p, k_s)$ και $\mathbf{S}_{res}(\ell_p, \ell_s)$ είναι οι συνοριακοί τελεστές απλού στρώματος που ορίζονται στο $\partial \mathrm{D}_0$ και αντιστοιχούν στους κυματάριθμους $\mathrm{k_p}$, $\mathrm{k_s}$ και $\mathrm{k_p} = \ell_\mathrm{p}$, $\mathrm{k_s} = \ell_\mathrm{s}$ αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι ο $P^{(1)}$ είναι ισομορφισμός και ο $P^{(2)}$ είναι συμπαγής στο Y^*. Αν υποθέσουμε ότι $\rho(\mathbf{r}) < 1$ παίρνουμε $q < 0$ και από την (3.44) έχουμε επίσης $q_1 < 0$. Τότε ο $\mathbf{S}(\ell_\mathrm{p}, \ell_\mathrm{s})$ είναι πιεστικός στο $[\mathrm{H}^{1/2}(\partial \mathrm{D}_0)]^2$ και συνεπώς η (ii) αποδείχθηκε, δηλαδή ο $P^{(1)}$ είναι πιεστικός στο Y^*.

Για την (i) πρέπει να αποδείξουμε ότι ο P είναι αμφιμονότιμος στον Y^*. Έστω $P\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, για $(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)^\top \in \mathrm{Y}^*$. Τότε η $\mathbf{w}$ που ορίστηκε στην (3.41) είναι λύση του ομογενούς προβλήματος (2.60)-(2.62), δηλαδή, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$, και λόγω της μοναδικότητας της λύσης του προηγούμενου προβλήματος έχουμε $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{D}}_0$· η συνθήκη διαπίδυσης (3.41) οδηγεί στην $\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{0}$. Καθότι τώρα $\Delta^*\mathbf{w} + \omega^2\mathbf{w} = \mathbf{0}$ στο D_0 (υπενθυμίζουμε εδώ ότι ($\rho(\mathbf{r}) = 1$ στο D_0) με $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ στο $\partial\mathrm{D}_0$, από την υπόθεση ότι η ω^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet του $-\Delta^*$ στο D_0 παίρνουμε ότι $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ στο D_0, και συνεπώς εφαρμόζοντας τη σχέση διαπίδυσης για (3.41) άλλη μια φορά, καταλήγουμε στο $\boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{0}$. (iii)Έχουμε $< P\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathrm{Y}^*} = (q_1\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)_{D_1} - (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_1)_{D_1} - < \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_2 >_{\partial D_0} - < \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_1 >_{\partial D_0}$, όπου $Im\{(q_1\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)_{D_1}\} = 0$. Με χρήση του πρώτου τύπου Betti, των συνοριακών συνθηκών και της (3.41) προκύπτουν οι: $Im\{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_1)_{D_1}\} \geq 0$, $Im\{< \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_2 >_{\partial D_0}\} \geq 0$ και $Im\{< \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}_1 >_{\partial D_0}\} \geq 0$ επομένως $Im\{< P\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} >_{\mathrm{Y}^*}\} \leq 0$, για κάθε $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{Y}^*$. □

Από την πρόταση αυτή και σύμφωνα με το θεώρημα Kirsch–Grinberg (Θεώρημα 2.15 στην αναφορά [67]) ικανοποιείται η ιδιότητα του πεδίου τιμών:

$$Range(G) = Range(F_{\sharp}^{\frac{1}{2}}) \tag{3.56}$$

όπου $F_{\sharp} := |Re(F)| + |Im(F)|$,

με $Re(F) = \dfrac{1}{2}(F + F^*), \;\; Im(F) = \dfrac{1}{2i}(F - F^*)$

και τη βοήθεια του θεωρήματος του Picard προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 6. *Έστω ότι ισχύει η συνοριακή συνθήκη Dirichlet* $\mathbf{w} = -\mathbf{f}_2$ *και ότι η* ω^2 *δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet του* $-\Delta^*$ *στο* D_0 *με* $\rho(\mathbf{r}) < 1$ *στο* D_1. *Τότε*

$$\mathbf{a} \in \mathrm{D} \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{a}} \in Range(F_{\sharp}^{\frac{1}{2}}), \tag{3.57}$$

αν και μόνο αν

$$\mathrm{W}(\mathbf{a}) := \left[\frac{|< \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{j}} >_{\mathrm{L}^2(S^1)}|^2}{\lambda_j} \right]^{-1} > 0, \tag{3.58}$$

όπου $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{a}}$ *δίνεται από (3.22) και* $\{\lambda_{\mathrm{i}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{j}}\}_{\mathrm{j}\in\mathrm{N}}$ *είναι ζεύγος ιδιοσυστήματος του αυτοσυζυγή (self–adjoint) τελεστή* $F_{\sharp}$.

3.3 Εφαρμογές και συμπεράσματα

Τα μαθηματικά μοντέλα σκέδασης που αφορούν ελαστικά υλικά που περιέχουν θαμμένα αντικείμενα έχουν εκτεταμένες εφαρμογές (βλέπε [2, 32, 40]). Ορισμένα σημαντικά παραδείγματα περιλαμβάνουν προβλήματα που ανακύπτουν σε διάφορες επιστημονικές περιοχές όπως, γεωφυσική, μη-καταστρεπτικό έλεγχο και επιστήμη υλικών[9].

Σχετικά με το πρόβλημα σκέδασης ελαστικών κυμάτων από ανομοιογενές μέσω με εμπόδια στο εσωτερικό του, το οποίο μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σημειώνουμε ότι:

1. Θεμελιώσαμε την καλή τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος μέσω μεταβολικής μεθόδου σε κατάλληλο χώρο Sobolev, παρουσιάζοντας, στη διατριβή αυτή, έναν τρόπο να ορίζουμε τον απαραίτητο τελεστή Poincaré−Steklov για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε κάθε μεικτό πρόβλημα, με οποιεσδήποτε συνοριακές συνθήκες.

2. Το αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα επίσης μελετήθηκε συμπεριλαμβανομένου του θέματος του καθορισμού της θέσης του φορέα και της ανακατασκευής του σχήματος του ανομοιογενούς μέσου D. Η μέθοδος παραγοντοποίησης (factorization method) αποτέλεσε το βασικό συστατικό της προαναφερθείσας ανακατασκευής (βλέπε θεώρημα 6), όπου η συνοριακή συνθήκη Dirichlet ίσχυε σε όλα τα θαμμένα αντικείμενα. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και με άλλες συνοριακές συνθήκες, όπως συνθήκη Neumann ή συνθήκη εμπέδησης στο σύνορο των αντικειμένων, όταν ισχύει $\rho(\mathbf{r}) < 1$.

4 Στοχαστικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για την Εξίσωση Navier

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε δύο στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier. Στο πρώτο πρόβλημα τα συνοριακά δεδομένα εκφράζονται ως ανάπτυγμα Wiener chaos, ενώ στο δεύτερο πρόβλημα τόσο τα συνοριακά δεδομένα όσο και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης εκφράζονται ως αναπτύγματα Wiener chaos. Η μεθοδολογία μας βασίζεται στην αναγωγή του εκάστοτε προβλήματος σε μία άπειρη ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων όπου χειριζόμαστε κάθε πρόβλημα της ιεραρχίας με την κατάλληλη μεταβολική του διατύπωση. Θεμελιώνουμε την καλή τοποθέτηση για καθε ένα πρόβλημα από την ιεραρχία αυτή και διατυπώνουμε επιχειρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης για τη λύση.

4.1 Αναπτύγματα Wiener chaos στη μελέτη στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Σε αυτή την ενότητα διατυπώνουμε τις απαραίτητες έννοιες, συμβολισμούς και συναρτησιακούς χώρους, για την μελέτη των στοχαστικών προβλημάτων που θα παρουσιάσουμε. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα Hermite που ορίζονται ως

$$P_n\left(x\right) = \left(-1\right)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$n = 0, 1, 2, ...$ αποτελούν οθογώνια βάση στον L^2 με βάρη $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ενώ τα κανονικοποιημένα πολυώνυμα Hermite:

$$h_n\left(x\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \tag{4.1}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του ίδιου χώρου. Συνεπώς κάθε συνάρτηση $f \in L^2$ εκφράζεται ως ανάπτυγμα της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w(x)\, a_n\, h_n(x), \quad \text{όπου } a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, f(x)\, h_n(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, το μέτρο που επάγεται από την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ (Gaussian measure) είναι φανερό ότι κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\mu)$ έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, h_n(x), \quad \text{όπου } f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_n(x)\, d\mu, \tag{4.3}$$

το οποίο ονομάζεται ανάπτυγμα Fourier–Hermite. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν ορίσουμε τις συναρτήσεις Hermite ως

$$\psi_n(x) = [w(x)]^{\frac{1}{2}} h_n(x) = 2\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4}} h_n(x) \tag{4.4}$$

προκύπτει ότι οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{R})$ [91, 38].

Έστω τώρα ξ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή ($\xi \sim N(0,1)$), τότε κάθε συνάρτηση $f(\xi) \in L^2(\Omega,\mu)$ εκφράζεται ως ανάπτυγμα

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, h_n(\xi), \quad \text{όπου } f_n = \mathbb{E}[f(\xi)h_n(\xi)] = \int_{\Omega} f(\xi)\, h_n(\xi)\, d\mu \tag{4.5}$$

Αυτά τα αναπτύγματα ονομάζονται αναπτύγματα Wiener chaos και ισχύουν:
$\mathbb{E}[f(\xi)^2] = \int_\Omega f(\xi)^2] d\mu < \infty$ και συνεπώς $Var[f(\xi)] < \infty$ δηλαδή ο $L^2(\Omega,\mu)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή και έχουν πεπερασμένη διασπορά.

Ως τώρα, έχουμε αναφερθεί μόνο σε συναρτήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής, για να ορίσουμε, όμως, αντίστοιχα αναπτύγματα συναρτήσεων τυχαίων πολυμεταβλητών, θα πρέπει να ορίσουμε προηγουμένως τον πολυδείκτη $a \in J = \{a = (a_1, a_2, ...a_d)\,|a_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Για κάθε $\alpha \in J$, ορίζουμε τα πολυώνυμα Hermite H_a με τη σχέση

$$\mathrm{H}_a(\omega) = \prod_{j=1}^{d} h_{a_j}(\xi_j(\omega)), \;\; \omega \in \Omega. \tag{4.6}$$

με τα H_a να αποτελούν ορθοκανονική βάση στον $L^2\left(\Omega, \mu^d\right)$, οπότε κάθε συνάρτηση του $L^2(\Omega,\mu^d)$ γράφεται ως ανάπτυγμα

$$f(\omega) = \sum_{a \in J} f_a \mathrm{H}_a(\omega), \tag{4.7}$$

$$f_a = E[f(\omega)\,\mathrm{H}_a(\omega)] = \int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{H}_a(\omega)\,d\mu. \quad (4.8)$$

Ο χώρος Schwartz $S\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι ο χώρος των ραγδαίως μειούμενων συναρτήσεων (rapidly decreasing functions), αυτών δηλαδή που μειώνονται με ρυθμό ταχύτερο από κάθε όρο της μορφής $\frac{1}{x^n}$ άρα των συναρτήσεων $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : sup|x^k \theta^l f(x)| < \infty$. Ο χώρος $S'\left(\mathbb{R}^d\right)$, δηλαδή ο δυϊκός χώρος του $S\left(\mathbb{R}^d\right)$, είναι ο χώρος των κατανομών που αυξάνονται το πολύ με πολυωνυμικό ρυθμό (tempered distributions) [92]. Από το θεώρημα Bochner−Minlos προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας P στο F, όπου F είναι η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel του $S'\left(\mathbb{R}^d\right)$, τέτοιο ώστε (βλέπε [26] και τις εσωτερικές αναφορές)

$$E\left[e^{i\langle\cdot,\, f\rangle}\right] := \int_{S'} e^{i\langle\phi,\, f\rangle} dP(\phi) \;\; \forall f \in S, \quad (4.9)$$

όπου το $\langle\phi,\, f\rangle$ συμβολίζει το duality pairing μεταξύ της $\phi \in S'$ και της $f \in S$.
Χρησιμοποιώντας τώρα τους πολυδείκτες $\delta^j = \left(\delta_1^j, \delta_2^j, ..., \delta_d^j\right)$ με $\delta_i^j \in \mathbb{N}$ για τους οποιους ισχύει $i > j \Rightarrow |\delta^i| \leq |\delta^j|$, μπορούμε να ορίσουμε τα τανυστικά γινόμενα

$$\eta_j := \psi_{\delta_1^j} \otimes \psi_{\delta_2^j} \otimes ... \otimes \psi_{\delta_d^j},\; j = 1, 2, 3, ...$$

Η οικογένεια των $\{\psi_{\delta^j}\}_{j=1}^\infty$ ανήκει στον $S(\mathbb{R}^d)$ και αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Ορίζοντας το σύνολο των πολυδεικτών $I = \{a = (a_1, a_2, ...)\,, a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ όπου μόνο πεπερασμένου πλήθους a_i είναι διάφοροι του μηδενός μπορούμε να ορίσουμε τα στοχαστικά πολυώνυμα H_a από τη σχέση

$$H_a(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} h_{a_i}(\langle\omega, \eta_i\rangle), \quad \text{όπου στο εξής: } \omega \in \Omega \equiv S'. \quad (4.10)$$

Τα H_a αποτελούν ορθοκανονική βάση στον $L^2\left(\mathbb{R}^d, P\right)$ και συνεπώς κάθε $f(\mathbf{r}, \omega)$ του χώρου αυτού γράφεται ως ανάπτυγμα Wiener–Ito chaos [49, 130] που δίνεται από την

$$f(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{a \in I} f_a H_a(\omega)\,, \text{ όπου } f_a(\mathbf{r}) = E[f(\mathbf{r}, \omega)\,H_a(\omega)]. \quad (4.11)$$

Στα επόμενα θεωρούμε $d = 2$ και για κάθε χώρο Hilbert X συναρτήσεων $f_a : D \to \mathbb{R}$ όπου D ανοιχτό και φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$, ορίζουμε τον στοχαστικό χώρο Hilbert $(S)^{\rho,z,X}$, για $\rho \in [-1, 1]$, $z \in \mathbb{R}$, ως το σύνολο όλων των αθροισμάτων

$$f = \sum_{a \in I} f_a H_a,\ f_a \in X,\ \ \forall a \in I \tag{4.12}$$

με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{\rho,z,X} = \sum_{a \in I} (f_a, g_a)_X (a!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{za},\ f, g \in (S)^{\rho,z,X}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τα βάρη $\mathtt{w}_\alpha = (a!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{za}$, $|\alpha| = 0, 1, 2, ...$, με

$$(2\mathbb{N})^{za} := \prod_{j=1}^{\infty} (2j)^{za_j} \tag{4.13}$$

και το οποίο εσωτερικό γινόμενο επάγει την πεπερασμένη νόρμα [26]

$$\|f\|_{\rho,z,X} = \left(\sum_{a \in I} \|f_a\|_X^2 (a!)^{1+\rho} (2\mathbb{N})^{za} \right)^{1/2}. \tag{4.14}$$

Ο χώρος $(S)^{\rho,z,H^1(D)}$, θα είναι χρήσιμος σε μελλοντική δουλειά ώστε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για τα προβλήματα που εξετάζουμε στις επόμενες ενότητες. Συγκεκριμένα για $\rho = 0$, ο χώρος $(S)^{0,z,H^1(D)}$ είναι αυτός που θα χρησιμοποιήσουμε στα δύο επόμενα προβλήματα.

4.2 Πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνοριακά δεδομένα υπό μορφή αναπτύγματος Wiener chaos

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε ένα στοχαστικό πρόβλημα [59] συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier. Αρχικά κατασκευάζουμε μια άπειρη ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων και θεμελιώνουμε την καλή τοποθέτηση του στοχαστικού προβλήματος μέσω της ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης καθενός προβλήματος της ιεραρχίας.

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial D \equiv \Gamma$ που είναι *Lipschitz*. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως ακολούθως:

Να βρεθεί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ *τέτοια ώστε*

$$\Delta^* \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) + \varrho\, w^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) := \sum_{\alpha} \mathbf{g}_\alpha H_\alpha, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.16}$$

Καθώς κάθε στοιχείο του χώρου $(S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ δέχεται ένα ανάπτυγμα Wiener chaos [91, 88, 26], αντικαθιστώντας τα $\mathbf{u}_\alpha$ στη σχέση $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha H_\alpha$ μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τη λύση $\mathbf{u}$. Μετασχηματίζουμε το στοχαστικό μας πρόβλημα σε μια άπειρη ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων και εκμεταλλευόμαστε τα αποτελέσματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης για κάθε ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα [58]. Μέσω λοιπόν του αναπτύγματος παίρνουμε την ακόλουθη ιεραρχία προβλημάτων:

$$\Delta^* \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) + \varrho\, w^2 \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.18}$$

Για τα παραπάνω ντετερμινιστικά προβλήματα μπορούμε να πάρουμε τις αντίστοιχες μεταβολικές διατυπώσεις τους (variational formulations), και για συντομία, παρουσιάζουμε εδώ τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (4.17)-(4.18) για $|a| = n$:

Πολλαπλασιάζοντας την (4.17) με μια συνάρτηση δοκιμής $\mathbf{v} \in [H_0^1(D)]^2$ προκύπτει

$$\Delta^* \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} + \rho \omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ στο } D,$$

και συνεπώς

$$[\mu \Delta \mathbf{u_n} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u_n})] \cdot \mathbf{v} + \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{4.19}$$

Ολοκληρώνωτας την (4.19) στο D, έχουμε:

$$\mu \int_D \Delta \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} dv + (\lambda + \mu) \int_D \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v} dv + \int_D \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \; = 0 \tag{4.20}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ακόλουθη ταυτότητα

$$\int_D \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, dv = -\int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \tag{4.21}$$

η (4.20) μπορεί να γραφεί ως

$$\mu \int_D \Delta \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} dv + (\lambda + \mu) \left[-\int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \right]$$

$$+ \quad \int_D \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \; = 0 \tag{4.22}$$

Επειδή ακόμη

$$\int_D (\Delta \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, dv = -\int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds, \tag{4.23}$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σχέση (4.22) οδηγεί στην

$$-\mu \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + \mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds$$

$$-(\lambda + \mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + (\lambda + \mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds$$

$$+ \int_D \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \; = 0 \tag{4.24}$$

Εξαιτίας της συνοριακή συνθήκης (4.18), από την τελευταία προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
& -\mu \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv - (\lambda+\mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv \\
& + \int_D \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \\
= \; & -\mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{g_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds - (\lambda+\mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{g_n}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη μεταβολική διατύπωση του (4.17)-(4.18):
Να βρεθεί μία λύση $\mathbf{u}_n \in [H^1(D)]^2$ *τέτοια ώστε*

$$
a(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \ \textit{για κάθε } \mathbf{v} \in [H_0^1(D)]^2 \qquad (4.26)
$$

όπου η διγραμμική μορφή $a(\mathbf{u}_n, \mathbf{v})$ *στο* $[H^1(D)]^2 \times [H_0^1(D)]^2$ *δίνεται από την*

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) \; = \; & \mu \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + (\lambda+\mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv \\
& - \int_D \rho\omega^2 \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $\ell(\mathbf{v})$ *στο* $[H^1(D)]^2$ *από την*

$$
\ell(\mathbf{v}) \; = \; \mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{g_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds + (\lambda+\mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{g_n}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \qquad (4.28)
$$

Αντίστοιχα, η μεταβολική διατύπωση του (4.15)-(4.16) είναι η εξής:
Να βρεθεί μία λύση $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ *τέτοια ώστε*

$$
\mathbb{E}[a(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \mathbb{E}[\ell(\mathbf{v})], \ \textit{για κάθε } \mathbf{v} \in (S)^{0,z,[H_0^1(D)]^2} \qquad (4.29)
$$

Θα προχωρήσουμε στην απόδειξη της καλής τοποθέτησης του (4.17)-(4.18) για $|a| = n$.

Πρόταση 7. *Έστω* D *ένα ανοιχτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^2$ *και* $\mathbf{g_n} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, *τότε το πρόβλημα*

(4.17)-(4.18) επιλύεται μοναδικά και επιπλέον η λύση $\mathbf{u_n} \in [H^1(D)]^2$ *ικανοποιεί την*

$$\|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} \leq c\,\|\mathbf{g}_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{για κάποια θετική σταθερά } c. \tag{4.30}$$

Για να θεμελιώσουμε τώρα την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης της (4.26) χρειαζόμαστε τα ακόλουθα τρία λήμματα.

Λήμμα 1. *Η διγραμμική μορφή* $a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})$ *είναι φραγμένη δηλαδή,*

$$|a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| \leq c_3 \|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)}. \tag{4.31}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.27) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να καταλήξουμε στην

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| \;&\leq\; \mu\,\|\nabla \mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\,\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(D)} + (\lambda+\mu)\,\|\nabla\cdot\mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\,\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \rho\omega^2 \|\mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\,\|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \end{aligned} \tag{4.32}$$

και λόγω του γεγονότος ότι εξ ορισμού $\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(D)} = \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(D)} + \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(D)}$ παίρνουμε

$$|a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| \leq c_3 \|\mathbf{u_n}\,\|_{H^1(D)}\,\|\mathbf{v}\|_{H^1(D)} \tag{4.33}$$

για κάποια θετική σταθερά c_3. □

Λήμμα 2. *Ισχύει για την* $a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n})$ *η ακόλουθη ιδιότητα πιεστικότητας (coercivity)*

$$a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n}) \geq c\,\|\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)}. \tag{4.34}$$

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα Poincaré-Wirtinger, δηλαδή

$$\|\nabla \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \geq C_p \|\mathbf{u_n} - E\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)}$$

όπου $E\mathbf{u_n} = \frac{1}{measD}\int_D \mathbf{u_n}\, dv$ έχουμε

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n}) &= \mu\, \|\nabla \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} + (\lambda+\mu)\, \|\nabla\cdot \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \\ &\quad -\rho\omega^2 \|\mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \\ &\geq c_4\, \|\mathbf{u_n} - E\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)} - c_5\, \|\mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 3. *Το γραμμικό συναρτησιακό $\ell(\mathbf{v})$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά c_1 τέτοια ώστε*

$$|\ell(\mathbf{v})| \leq c_1\, \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)}. \tag{4.36}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy Schwarz και την τριγωνική καθώς και το γεγονός ότι $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$, έχουμε

$$|\ell(\mathbf{v})| \leq \mu \|\nabla \mathbf{g_n}\|_{L^2(D)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \,+\, (\lambda+\mu)\|\nabla\cdot \mathbf{g_n}\|_{L^2(D)}\, \|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \tag{4.37}$$

από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε την (4.36) □

Από τα παραπάνω λήμματα και με τη χρήση του θεωρήματος Lax-Milgram [21] μπορούμε να συνάγουμε το συμπέρασμα της πρότασης 1.

Πρόταση 8. *Το στοχαστικό πρόβλημα (4.15)-(4.16) δέχεται μοναδική λύση Wiener chaos* $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ *που ικανοποιεί την*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{(S)^{0,z,[H^1(D)]^2}} \leq c^2 \sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha\, \|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \textit{όπου } \mathtt{w}_\alpha = (a!)\,(2\mathbb{N})^{za},\ |\alpha| = 0, 1, 2, ... \tag{4.38}$$

Απόδειξη. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι καθένα από τα ντετερμινιστικά προβλήματα (4.17)-(4.18) δέχεται μοναδική λύση και ακόμη ότι οι $c_\mathbf{n}$ εξαρτώνται από τις $\mathbf{g_n}$. Υπάρχει, λοιπόν, σταθερά c που είναι το supremum των $c_n = \mu\, C_p$, δηλαδή $c = sup\{c_\mathbf{n}, n =$

$0, 1, 2, ...\}$ ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u_0}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g_0}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ \|\mathbf{u_1}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g_1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\vdots \\ \|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g}_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.39}$$

Υψώνοντας αυτές τις ανισότητες στο τετράγωνο, πολλαπλασιάζοντάς τες με $\mathtt{w}_\alpha$, προσθέτοντας κατά μέλη οδηγούμαστε στη σχέση

$$\sum_\alpha \mathtt{w}_\alpha \|\mathbf{u}_a\|^2_{H^1(D)} \leq c^2 \sum_\alpha \mathtt{w}_\alpha\,\|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{4.40}$$

Έτσι εύκολα καταλήγουμε στην

$$\|\mathbf{u}\|^2_{(S)^{0,z,[H^1(D)]^2}} \leq c^2 \sum_\alpha \mathtt{w}_\alpha\,\|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} < \infty. \tag{4.41}$$

$\square$

4.3 Πρόβλημα συνοριακών τιμών με στοχαστική πηγή και συνοριακά δεδομένα υπό μορφή αναπτύγματος Wiener chaos

Σύμφωνα με τη συλλογιστική που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και το πιο σύνθετο πρόβλημα [59] συνοριακών τιμών της μη ομογενούς εξίσωσης Navier, στο οποίο τόσο ο μη ομογενής όρος όσο και τα συνοριακά δεδομένα δίνονται στη μορφή ενός αναπτύγματος Wiener chaos. Το πρόβλημα αυτό διατυπωνεται ως εξής:

Να βρεθεί διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ *τέτοια ώστε*

$$\Delta^* \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) + \varrho w^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.42}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.43}$$

όπου $\mathbf{f} = \sum_\alpha \mathbf{f}_\alpha H_\alpha$ και $\mathbf{g} = \sum_\alpha \mathbf{g}_\alpha H_\alpha$. Όπως και και το πρόβλημα που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το πρόβλημα αυτό αναλύεται σε μια ιεραρχία ντετερμινιστικών προβλημάτων ως ακολούθως:

$$\Delta^* \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) + \varrho w^2 \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.44}$$

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.45}$$

Μπορούμε να φτάσουμε στη μεταβολική διατύπωση καθενός από τα (4.44)-(4.45) ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική. Εδώ παρουσιάζουμε, χάριν συντομίας, την περίπτωση για $|a| = n$:

$$\Delta^* \mathbf{u}_\mathbf{n}(\mathbf{r}) + \varrho w^2 \mathbf{u}_\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_\mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.46}$$

$$\mathbf{u}_\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_\mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.47}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.46) με μια συνάρτηση δοκιμής $\mathbf{v} \in [H_0^1(D)]^2$ παίρνουμε

$$\Delta^* \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} + \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}, \text{ στο } D \tag{4.48}$$

και επομένως

$$[\mu\, \Delta \mathbf{u_n} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u_n})] \cdot \mathbf{v} + \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}. \tag{4.49}$$

Ολοκληρώνοντας την (4.49) στο D, προκύπτει:

$$\begin{aligned} &\mu \int_D \Delta \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv + (\lambda + \mu) \int_D \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, dv \\ &+ \int_D \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv = \int_D \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}\, dv. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την

$$\int_D \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds = - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \tag{4.51}$$

η σχέση (4.50) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} &\mu \int_D \Delta \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv + (\lambda + \mu) \left[- \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \right] \\ &+ \int_D \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv \ = \int_D \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}\, dv. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Καθώς επίσης ισχύει

$$\int_D (\Delta \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, dv = - \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds, \tag{4.53}$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σχέση (4.52) οδηγεί στην

$$-\mu \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + \mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds$$

$$-(\lambda+\mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv + (\lambda+\mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{u_n})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds$$

$$+ \int_D \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv = \int_D \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}\, dv. \tag{4.54}$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης (4.45) η τελευταία σχέση οδηγεί στην:

$$-\mu \int_D (\nabla \mathbf{u_n}) : (\nabla \mathbf{v})\, dv - (\lambda+\mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u_n})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv$$

$$+ \int_D \varrho\, w^2\, \mathbf{u_n} \cdot \mathbf{v}\, dv$$

$$= \int_D \mathbf{f_n} \cdot \mathbf{v}\, dv - \mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{g_n}) \cdot \mathbf{v}\, ds - (\lambda+\mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{g_n})\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds \tag{4.55}$$

όπου η $\mathbf{g_n}$ θεωρείται με την εννοια του ίχνους.
Η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος:

$$\Delta^* \mathbf{u_n}(\mathbf{r}) + \varrho\, w^2 \mathbf{u_n}(\mathbf{r}) = \mathbf{f_n}, \quad \mathbf{r} \in D, \tag{4.56}$$

$$\mathbf{u_n}(\mathbf{r}) = \mathbf{g_n}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.57}$$

είναι η εξής:
Να βρεθεί λύση $\mathbf{u_n} \in \left[H^1(D)\right]^2$ *τέτοια ώστε*

$$a(\mathbf{u_n}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \ \textit{για κάθε}\ \mathbf{v} \in [H^1(D)]^2 \tag{4.58}$$

όπου η διγραμμική μορφή $a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})$ *στο* $[H^1(D)]^2 \times [H^1_0(D)]^2$ *δίνεται από την*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v}) \;\; &= \;\; \mu \int_D (\nabla \mathbf{u}_n) : (\nabla \mathbf{v})\, dv + (\lambda+\mu) \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u}_n)(\nabla \cdot \mathbf{v})\, dv \\ &\quad - \int_D \varrho\, w^2 \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}\, dv \end{aligned} \tag{4.59}$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $\ell(\mathbf{v})$ *στον* $[H^1(D)]^2$ *από την*

$$\ell(\mathbf{v}) \;\; = \;\; -\int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dv + \mu \int_\Gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \mathbf{g}_n) \cdot \mathbf{v}\, ds + (\lambda+\mu) \int_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{g}_n) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, ds. \tag{4.60}$$

Αντίστοιχα, η μεταβολική διατύπωση του (4.42)-(4.43) είναι η εξής:
Να βρεθεί μία λύση $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[H^1(D)]^2}$ *τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}[a(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \mathbb{E}[\ell(\mathbf{v})], \;\; \textit{για κάθε } \mathbf{v} \in (S)^{0,z,[H^1_0(D)]^2} \tag{4.61}$$

Θα προχωρήσουμε στην απόδειξη της καλής τοποθέτησης του (4.46)-(4.47).

Πρόταση 9. *Έστω* D *ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{g_n} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ *και* $\mathbf{f_n} \in [H^1(D)]^2$, *τότε το πρόβλημα (4.44)-(4.45) έχει μοναδική λύση* $\mathbf{u_n} \in [H^1(D)]^2$ *που ικανοποιεί την*

$$\|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} \leq c\, \|\mathbf{g_k}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c} \|\mathbf{f_n}\|_{H^1(D)} \;\; \textit{για κάποιες θετικές σταθερές } c \textit{ και } \tilde{c}. \tag{4.62}$$

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης της (4.58) χρειαζόμαστε τα τρία ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 6. *Η διγραμμική μορφή* $\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})$ *είναι φραγμένη δηλαδή*

$$|\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| \leq c_1 \|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)}. \tag{4.63}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.59) χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned} |\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| &\leq \mu\, \|\nabla \mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\, \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(D)} + (\lambda+\mu)\, \|\nabla\cdot \mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\, \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \varrho\, w^2 \|\mathbf{u_n}\|_{L^2(D)}\, \|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \end{aligned} \tag{4.64}$$

και λόγω του ότι εξ ορισμού $\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(D)} = \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(D)} + \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{L^2(D)}$ παίρνουμε

$$|\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{v})| \leq c_1 \|\mathbf{u_n}\, \|_{H^1(D)}\, \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)} \tag{4.65}$$

για κάποια θετική σταθερά c_1. □

Λήμμα 7. *Ισχύει η επόμενη ιδιότητα πιεστικότητας (coercivity) για την* $\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n})$

$$\alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n}) \geq c\, \|\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)}. \tag{4.66}$$

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα Poincaré-Wirtinger, δηλαδή

$$\|\nabla \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \geq C_p \|\mathbf{u_n} - E\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)}$$

όπου $E\mathbf{u_n} = \frac{1}{measD} \int_D \mathbf{u_n}\, dv$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u_n},\, \mathbf{u_n}) &= \mu\, \|\nabla \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} + (\lambda+\mu)\, \|\nabla\cdot \mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \\ &\quad - \varrho\, w^2 \|\mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)} \\ &\geq c_2\, \|\mathbf{u_n} - E\mathbf{u_n}\|^2_{H^1(D)} - c_3\, \|\mathbf{u_n}\|^2_{L^2(D)}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

□

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το γραμμικό συναρτησιακό $\ell(\mathbf{v})$ είναι φραγμένο δηλαδή:

$$|\ell(\mathbf{v})| \leq c_1\, \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)}. \tag{4.68}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Causchy Schwarz και τριγωνική και καθώς $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$ έχουμε

$$|\ell(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{f}\|_{H^1(D)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(D)}\ , + \|\nabla \mathbf{g}_n\|_{L^2(D)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} + (\lambda+\mu)\|\nabla\cdot \mathbf{g}_n\|_{L^2(D)}\,\|\mathbf{v}\|_{L^2(D)} \quad (4.69)$$

□

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα και με τη χρήση του θεωρήματος Lax-Milgram συνάγουμε το συμπερασμα της πρότασης 3.

Πρόταση 10. *Το στοχαστικό πρόβλημα (4.42)-(4.43) δέχεται μοναδική λύση Wiener chaos* $\mathbf{u} \in (S)^{0,z,[L^2(D)]^2}$ *που ικανοποιεί την*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{(S)^{0,z,[L^2(D)]^2}} \leq \sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha \left(c^2\|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}^2\,\|\mathbf{f}_\alpha\|^2_{H^1(D)}\right) \quad (4.70)$$

όπου $\mathtt{w}_\alpha = (a!)\,(2\mathbb{N})^{za}$, $|\alpha| = 0, 1, 2, ...$ *είναι τα κατάλληλα βάρη.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι, όπως και στο πρόβλημα της προηγούμενης παραγράφου, κάθε ντετερμινιστικό πρόβλημα (4.44)-(4.45) δέχεται μοναδική λύση όπου οι σταθερές $c_{\mathbf{k}}$ εξαρτώνται από τις $\mathbf{g_n}$. Υπάρχει, λοιπόν, σταθερά c που είναι το supremum των $c_{\mathbf{n}} = \mu\, C_p$, δηλαδή $c = sup\{c_{\mathbf{n}}, n = 0, 1, 2, ...\}$ καθώς και μια θετική σταθερά $\tilde{c}$ ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u_0}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g_0}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}\,\|\mathbf{f_0}\|_{H^1(D)} \\
\|\mathbf{u_1}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g_1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}\,\|\mathbf{f_1}\|_{H^1(D)} \\
&\vdots \\
\|\mathbf{u_n}\|_{H^1(D)} &\leq c\,\|\mathbf{g_n}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}\,\|\mathbf{f_n}\|_{H^1(D)} \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (4.71)$$

Από τις ανισότητες (4.71) προκύπτει η ανισότητα:

$$\sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha \|\mathbf{u}_a\|^2_{H^1(D)} \leq c^2 \sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha \, \|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}^2 \sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha \, \|\mathbf{f}_\alpha\|^2_{H^1(D)}. \tag{4.72}$$

Έτσι συμπεραίνουμε εύκολα ότι

$$\|\mathbf{u}\|^2_{(S)^{0,z,[H^1(D)]^2}} \leq \sum_{\alpha} \mathtt{w}_\alpha \left(c^2 \|\mathbf{g}_\alpha\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \tilde{c}^2 \, \|\mathbf{f}_\alpha\|^2_{H^1(D)}\right) < \infty. \tag{4.73}$$

□

4.4 Συμπεράσματα

Αναφορικά με το στοχαστικό πρόβλημα επισημαίνουμε ότι θεμελιώθηκε η καλή τοποθέτησή του, μέσω της μελέτης των αντίστοιχων ιεραρχιών των ντετερμινιστικών προβλημάτων. Στο σημείο αυτό παραθέτουμε δύο παρατηρήσεις:

1. Αποδείχθηκε ότι τα στοχαστικά προβλήματα για την εξίσωση Navier (4.15)–(4.16) και (4.42)–(4.43) δέχονται μοναδική λύση Wiener chaos.

2. Η μέθοδος που προτείναμε μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση στοχαστικού προβλήματος συνοριακών τιμών όπου η τυχαιότητα εμφανίζεται στην ιδια την εξίσωση Navier (π.χ., στην ϱ, ή τις λ, και μ), καθώς και στη συνοριακή συνθήκη.

Τα προβλήματα που μελετήσαμε στις δύο προηγούμενες ενότητες, κατέδειξαν την εφαρμοσιμότητα της μεθόδου αναπτυγμάτων Wiener chaos σε στοχαστικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Navier ώστε σε νέα εργασία να αντιμετωπιστεί πρόβλημα σκέδασης σε ομογενές κατά τμήματα μέσο με συνθήκη Dirichlet. Επίσης, αποβλέπουμε στη μελέτη προβλήματος σκέδασης με συνθήκη Dirichlet στο σύνορο του σκεδαστή σε στοχαστικό περιβάλλον με την τυχαιότητα να βρίσκεται τόσο στην συνοριακή συνθήκη όσο και στην πυκνότητα του μέσου -η οποία επίσης θα δίνεται ως ανάπτυγμα Wiener chaos. Ακόμη, σκοπεύουμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την προσέγγιση της λύσης των προβλημάτων αυτών. Τέλος, στοχεύουμε στη μελέτη του μεικτού -ευθεός και αντίστροφου- προβλήματος σκέδασης με συνθήκες Dirichlet και Robin στο σύνορο του σκεδαστή ο οποίος βρίσκεται εντός ομογενούς κατά τμήματα μέσου.

Βιβλιογραφία

[1] Agranovich, M.S. (2001).
Spectral properties for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains,
Russian Math. Surv., 57, 847–920.

[2] Alves, C. J.S. and Kress, R. (2002).
On the far field operator in elastic obstacle scattering,
IMA J. Appl. Math., 67, 1–21.

[3] Anagnostopoulos, K. A., Charalambopoulos, A. and Kleefeld, A. (2013).
The factorization method for the acoustic transmission problem
Inverse Problems, 29, 115015.

[4] Angell, T.S., Colton, D., and Kirsch, A. (1982).
The three dimensional inverse scattering problem for acoustic waves.
J. Diff. Equations 46, 46–58.

[5] Angell, T.S., Kleinman, R.E., Kok, B., Roach, G.F., (1989).
A constructive method for identification of an impenetrable scatterer.
Wave Motion 11 (2), 185–200.

[6] Arens, T. (2004).
Why linear sampling works.
Inverse Problems, 20, 163-173.

[7] Αθανασιάδης, Χ. (2015).
Ειδικά Θέματα Μαθηματικών. Τόμος Α΄: Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές
Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

[8] Athanasiadis, P., Martin, P. A, Stratis I. G., (2001).
On spherical-wave scattering by a spherical scatterer and related near-field inverse problem.
Journal of Applied Mathematics, 66, 539–549.

[9] Athanasiadis, C., E., Natroshvili, D., Sevroglou, V. and Stratis, I. G. (2010).
An application of the reciprocity gap functional to inverse mixed impedance problems in elasticity,
Inverse Problems, 26, 085011.

[10] Athanasiadis, C. E., Natroshvili, D., Sevroglou, V. and Stratis, I. G. (2011).
A boundary integral equations approach for mixed impedance problems in elasticity,
J. Integral Equations Appl., 23, 183–222.

[11] Athanasiadis, C. E., Natroshvili, D., Sevroglou, V. and Stratis, I. G. (2015).
Mixed impedance transmission problems for vibrating layered elastic problems.
Math. Methods Appl. Sci., 38, 3264–3294.

[12] Athanasiadis C, Ramm A G and Stratis I G. (1998).
Inverse Acoustic Scattering by a Layered Obstacle.

In: Ramm, A.G. (eds) *Inverse Problems, Tomography, and Image Processing*, Boston: Springer, 1–8.

[13] Athanasiadis, P., Sevroglou, S., Stratis I. G. (2008).
3D elastic scattering theorems for point-generated dyadic fields.
Math. Meth. Appl. Sci., 31, 987–1003.

[14] Athanasiadis, C., Stratis I. G., Sevroglou, V., Tsitsas, N.L. (2008).
Point-Source Elastic Scattering by a Nested Piecewise Homogeneous Obstacle in an Elastic Environment.
Mathematics and Mechanics of Solids, 15, 419–438.

[15] Bai, Z., Diao, H., Liu, H., Meng, Q. (2022).
Effective medium theory for embedded obstacles in elasticity with applications to inverse problems.
SIAM J. Appl. Math., 82(2).

[16] Bazána, F. S. V., Kleefeld, A., Leem, K.H., Pelekanos, G. (2016).
Sampling method based projection approach for the reconstruction of 3D acoustically penetrable scatterers.
Linear Algebra and its Applications.

[17] Bazána, F. S. V., Francisco, J.B., Leem, K.H., Pelekanos, G. and Sevroglou, V. (2017).
On an Application of the Improved Maximum Product Criterion to Inverse Acoustic Scattering in a Layered Medium.
Journal of Applied Mathematics and Physics, 9, 661-682.

[18] Bazána, F. S. V., Francisco, J.B., Leem, K.H., Pelekanos, G. and Sevroglou, V. (2017).
A numerical reconstruction method in inverse elastic scattering.
Inverse Problems in Science and Engineering, 25 (11), 1577-1600.

[19] Benth, F. E. Gjerde, J. (1998).
Convergence rates for finite element approximations of stochastic partial differential equations.
Stochastics and Stochastic Reports, 63, 313-326.

[20] Brakhage, H., and Werner, P. (1965).
Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung.
Arch. Math. 16, 325–329.

[21] Brezis, H.(2006).
Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Springer.

[22] Cakoni, F. and Colton D. (2006).
Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory: An Introduction. Springer.

[23] Cakoni, F., Colton, D., Monk, P. (2001).
The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles.
Inverse Problems, 17, 1997–2015.

[24] Cakoni, F., Harris, I. (2015).
The factorization method for a defective region in an anisotropic media.
Inverse Problems, 31, 025002.

[25] Cakoni, F. and Rezac, J. D. (2017).
Direct imaging of small scatterers using reduced time dependent data.
J. Comput. Phys., 338, 371–387.

[26] Cao, Y. (2006).
On Convergence rate of Wiener Ito chaos expansion for generalized random variables.
Stochastics, 78:3, 179-187.

[27] Charalambopoulos, A., Kirsch, A., Anagnostopoulos, K., Gintides, D., Kiriaki, K. (2007).
The factorization method in inverse elastic scattering from penetrable bodies.
Inverse Problems, 23, 27–51.

[28] Chen, J., Chen, Z., Huang, G. (2013).
Reverse time migration for extended obstacles: acoustic waves.
Inverse Problems, 29, 085005.

[29] Cherkaoui, M., Sabar, H., and Berveiller, M., (1994).
Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite problems
J. Eng. Mater. Technol. 116, 274–8.

[30] Colton, D. and Haddar, H. (2005).
An application of the reciprocity gap functional to inverse scattering theory.
Inverse Problems, 21, 383–398.

[31] Colton, D., and Kirsch, A. (1996).
A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region.
Inverse Problems, 12, 383–393.

[32] Colton, D. and Kress R. (2013).
Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory,
3rd edition, Berlin: Springer.

[33] Colton, D., and Monk, P. (1985).
A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region.
SIAM J. Appl. Math., 45, 1039–1053.

[34] Colton, D., and Monk, P. (1986).
A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region II.
SIAM J. Appl. Math., 46, 506–523.

[35] Colton, D., and Monk, P. (1987).
The numerical solution of the three dimensional inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves.
SIAM J. Sci. Stat. Comp., 8, 278–291.

[36] Colton, D. and Päivärinta, L. (1992).
The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves.
Arch. Rational Mech. Anal., 119, 59–70.

[37] Committee of Coatings for High-Temperature Structural Materials, National Materials Advisory Board, Commission on Engineering and Technical Systems National Research Council (1996)
Coatings for High- Temperature Structural Materials: Trends and Opportunities (Washington, DC: National Academy Press).

[38] Courant, R. and Hilbert., D. (1953).
Methods of Mathematical Physics, volume 1.
New York: Wiley-Interscience.

[39] Dassios, G., Kamvyssas, G. (1995).
Point source excitation in direct and inverse scattering: the soft and the hard small sphere.
IMA J. Appl. Math., 55, 67–84.

[40] Dassios, G. and Kleinman, R. (2000).
Low Frequency Scattering.
1st edn. Oxford University Press.

[41] Dassios, G., Rigou, Z. (1995).
Elastic Herglotz Functions.
SIAM Journal on Applied Mathematics, 55, 1345-1361.

[42] Devaney, A.J. (2012).
Mathematical Foundations of Imaging, Tomography and Wavefield Inversion.
Cambridge: Cambridge University Press.

[43] Di Cristo, M. and Sun, J. (2006).
An inverse scattering problem for a partially coated buried obstacle.
Inverse Problems, 22, 2331–2350.

[44] Elschner, J., Hu, G. (2019).
Uniqueness and factorization method for inverse elastic scattering with a single incoming wave.
Inverse Problems, 35, 094002/1–094002/18.

[45] Evans, L. C. (2010).
Partial differential equations.
2nd edn., Providence, Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

[46] Fitzer, E. and Manocha, L M. (1998).
Carbon Reinforcement and Carbon/Carbon Composites.
Berlin: Springer.

[47] N.I. Grinberg. (2002).
On the inverse obstacle scattering problem with Robin or mixed boundary condition: Application of the modified Kirsch factorization method.
Preprint 02/4, University of Karlsruhe, Department of Mathematics, Karlsruhe.

[48] N.I. Grinberg and A. Kirsch. (2004).
The factorization method for obstacles with a-priori separated sound-soft and sound-hard parts.
Math. Comput. in Simul., 66, 267– 279.

[49] Holden, H., Lindstrom, T., Oksendal, B., Uboe, J. and Zhang, T.-S. (1995(.
Stochastic Partial Differential Equations–A Modeling, White Noise Functional Approach, Probability and its Applications.
Basel: Birkhauser.

[50] Hsiao, G. C., Wendland, W. L., (2009).
Boundary integral equations.
Appl. Math. Sci. , 164, Springer Verlag, Berlin.

[51] Hu, G., Kirsch, A. and Sini, M. (2013).
Some inverse problems arising from elastic scattering by rigid obstacles.
Inverse Problems, 29, 015009.

[52] Hu, Z., Li, H., Fu, Q., Xue, H. and Sun, G., (2007).
Fabrication and tribological properties of B_2O_3 as friction reducing coatings for carbon–carbon composites.
New Carbon Mater, 22, 131–4.

[53] Ikehata, M., (2000).
The probe method and its applications.
In: *Inverse problems and related topics*, Nakamura, G., Saitoh, S., Seo, J. K. and Yamamoto, M. editors, UK: CRC Press, 57-68.

[54] Ikehata, M. (2005).
The Probe Method and Its Applications II.
Seminar Notes of Mathematical Sciences, 8, 9-18.

[55] Ito, K., Jin, B. Zou, J. (2012).
A direct sampling method to an inverse medium.
Inverse Problems, 28, 025003 (11pp).

[56] Jentsch, L., Natroschvilli, D., Wendland, W. L., (1999).
General transmision problems in the theory of elastic oscillations of anisotropic bodies (Mixed interface problems).
J. Math. Anal. Appl., 435, 418–434.

[57] Kaiafa, A., Kanakoudis, G., Sevroglou, V. (2022).
Elastic Scattering by an Inhomogeneous Medium with Unknown Burried Obstacles
Mathematical Analysis, Differential equations and Applications, World Scientific, https://doi.org/10.1142/13162.

[58] Kalpinelli,E. A. Frangos, N. E. Yannacopoulos A. N. (2011).
A Wiener Chaos Approach to Hyperbolic SPDEs.
Stochastic Analysis and Applications, 29(2), 237-258.

[59] Kanakoudis, G., Lallas, K., Yannacopoulos, A. N., Sevroglou, V. (2023)
Stochastic Boundary Value Problems via Wiener Chaos Expansion

Comput. Sci. Math. Forum, 7(1)
https://doi.org/10.3390/IOCMA2023-14422.

[60] Kim, K., Leem, K. H., Pelekanos, G. (2016).
The method of regularization ratios applied to reconstructions of elastic rigid obstacles via the factorization method.
East Asian Math. J., 32, 129–138.

[61] Kim, K., Leem, K. H., Pelekanos, G. (2010).
An Alternative to Tikhonov Regularization for Linear Sampling Methods.
Acta Applicandae Mathematicae, 112, 171-180.

[62] Kiriakie, K., Sevroglou, V., (2001).
Integral Equations in obstacle elastic scattering.
Bulletin of the Greek Mathematical Society, 45, 57,–69.

[63] Kirsch A. (1993).
The domain derivative and two applications in inverse scattering theory.
Inverse problems, 9, 81–96.

[64] Kirsch A. (1998).
Characterization of the Shape of a Scattering Obstacle Using the Spectral Data of the Far Field Operator.
Inverse Problems, 14, 1489–1512.

[65] Kirsch, A. (1999).
Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory.
Inverse Probl., 15, 413–429.

[66] Kirsch, A. (2017).
Remarks on the Born approximation and the Factorization Method.
Applicable Analysis, 96(1), 70-84.

[67] Kirsch, A. and Grinberg, N. (2008).
The Factorization Method for Inverse Problems.
Oxford: Oxford Univ. Press.

[68] Kirsch, A., and Kress, R. (1986).
On an integral equation of the first kind in inverse acoustic scattering.
In: *Inverse Problems (Cannon and Hornung, eds).* ISNM 77, 93–102.

[69] Kirsch, A., and Kress, R. (1987).
A numerical method for an inverse scattering problem. In: *Inverse Problems (Engl and Groetsch, eds).*
Orlando: Academic Press, 279–290.

[70] Knauff, W., and Kress, R. (1979).
On the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations.
J. Math. Anal. Appl., 72, 215–235 .

[71] Kress, R.(1986).
On the boundary operator in electromagnetic scattering.
Proc. Royal Soc. Edinburgh 103A, 91–98.

[72] Kress, R. (1997).
Integral equation methods in inverse acoustic and electromagnetic scattering.
In: *Boundary Integral Formululations for Inverse Analysis*, Ingham and Wrobel, eds. Southampton: Computational Mechanics Publications, 67–92.

[73] Kress, R. (1998).
Tikhonov Regularization. Numerical Analysis.
New York: Springer., 86–90. ISBN 0-387-98408-9.

[74] Kress, R. (2003).
Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares.
Inverse Problems 19, 91–104 .

[75] Kupradze, V., (1936).
Uniqueness theorems in boundary value problems of elasticity (in Russian).
Trudy Tbil. Univ., 2, 256-272.

[76] Kupradze, V., (1953).
Boundary value problems of steady oscillations (in Russian).
UMN 8, 3 (55), 21-74.

[77] Kupradze, V.D. (1963).
Dynamical Problems in Elasticity. Vol.3, Progress in Solid Mechanics.
Amsterdam: North Holland.

[78] Kupradze, V. D., Gegelia, T. G., Basheleishvili, M. O. and Burchuladze, T. V., (1979).
Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity (North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 25), Amsterdam: North-Holland.

[79] Lax, P.D., and Phillips, R.S. (1967).
Scattering Theory.
New York: Academic Press.

[80] Leem, K. H., Pelekanos, G., Sevroglou, V. (2015).
A singular perturbation technique for the reconstruction of elastic objects/
AIP Conf. Proc., 1648, 850045.

[81] Leis, R.(1965).
Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung.
Math. Z. 90, 205–211.

[82] Li, J., Li, P., Liu, H. and Liu, X. (2015).
Recovering multiscale buried anomalies in a two-layered medium.
Inverse Problems, 31, 105006.

[83] Li, P., Wang, Y., Wang, Z. and Zhao, Y. (2016).
Inverse obstacle scattering for elastic waves,
Inverse Problems, 32, 115-218.

[84] Lippmann, B. A., Schwinger, J. (1950). Variational Principles for Scattering Processes. *Phys. Rev. Lett.* 79 (3): 469–480. doi:10.1103/PhysRev.79.469.

[85] Liu, X.,(2017) A novel sampling method for multiple multiscale targets from scattering amplitudes at a fixed frequency, *Inverse Problems*, 33, 085011.

[86] Liu, X., Zhang, B. and Hu, G. (2009).
Uniqueness in the inverse scattering problem in a piecewise homogeneous medium,
Inverse Problems, 26, 015002.

[87] Lototsky, S.V.; Rozovskii, B.L. (2006).
Stochastic differential equations: A Wiener chaos approach.
In: *Stochastic Calculus to Mathematical Finance: The Shiryaev Festschrift*, Kabanov, Yu., Liptser, R., and Stoyanov, J., Eds.
New York: Springer, 433–507.

[88] Lototsky, S.V.; Rozovskii, B.L. (2006).
Wiener chaos solutions of linear stochastic evolution equations.
Annals of Probability, 34, 638–662.

[89] Lototsky, S.V. Rozovskii B.L. (2009).
Stochastic differential equations driven by purely spatial noise.
SIAM Journal of Math Analysis , 41(4), 1295–1322.

[90] Luke, R. and Potthast., R. (2003).
The no response test–a sampling method for inverse scattering problems.
SIAM J. Appl. Math., 63, 1292–1312.

[91] Luo, W. (2006).
Wiener Chaos Expansion and Numerical Solutions of Stochastic Partial Differential Equations.
[Doctoral dissertation, California Institute of Technology].

[92] McLean, W. (2000).
Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations.
Cambridge University Press.

[93] Meng, S., Haddar, H., Cakoni, F., (2014).
The factorization method for a cavity in an inhomogeneous medium.
Inverse Problems, 30, 045008.

[94] Μπόζης, Γ.Δ., Χατζηδημητρίου, Ι.Δ. (1997),
Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων.
Θεσσαλονίκη: Τζιόλα.

[95] Mu, M., Walker, A. M., Torkelson, J. M. and Winey, K I. (2008).
Cellular structures of carbon nanotubes in a polymer matrix improve properties relative to composites with dispersed nanotubes.
Polymer, 49, 1332–1337.

[96] Müller, C. (1945/46).
Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen.
Abh. deutsch. Akad. Wiss., 3, 5–56 .

[97] Müller, C. (1952).
Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen.
Math. Z. 56, 261–270.

[98] Nachman, A. (1988).
Reconstructions from boundary measurements.
Annals ofMath. 128, 531–576.

[99] Natrosvilli, D. and Tediashvili, Z. (2001).
Mixed type direct and inverse scattering problems.
In: *Problems and Methods in Mathematical Physics*, Elschner, J., Gohberg I. and Silbermann B. eds.
Operator Theory: Advances and Applications, 121, Birkhäuser, 366–389.

[100] Novikov, R. (1988).
Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) + E(x))\psi = 0$.
Translations in Func. Anal. and its Appl., 22, 263–272.

[101] Ola, P., Päivärinta, L. and Somersalo, E. (1993).
An inverse boundary value problem in electrodynamics.
Duke Math. Jour. 70, 617–653.

[102] Ola, P., and Somersalo, E. (1996).
Electromagnetic inverse problems and generalized Sommerfeld potentials.
SIAM J. Appl. Math., 56, 1129–1145 .

[103] Panich, O.I. (1965).
On the question of the solvability of the exterior boundary-value problems for the wave equation and Maxwell's equations.
Usp. Mat. Nauk 20A, 221–226 (in Russian).

[104] Pelekanos, G. and Sevroglou, V., (2003).
Inverse scattering by penetrable objects in two-dimensional elastodynamics.
J.Comp. Appl. Math., 151, 129–140.

[105] Pelekanos, G. and Sevroglou, V. (2006).
The (F*F) 1/4-method for the transmission problem in two-dimensional linear elasticity.
Applicable Analysis, 84, 3, 311-328.

[106] Potthast, R., (1994).
Frèchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering.
Inverse Problems 10, 431–447.

[107] Potthast, R., (2004).
A new non-iterative singular sources method for the reconstruction of piecewise

constant media.
Numer. Math., 98, 703–730.

[108] Potthast., R. (2006).
A survey on sampling and probe methods for inverse problems.
Inverse Probl., 22, R1–R47.

[109] Potthast, R., (2010).
A study on orthogonality sampling.
Inverse Problems, 26, 074015.

[110] Potthast, R., Stratis, I. G., (2005).
The Singular Sources Method for an Inverse Transmission Problem.
Computing.

[111] Potthast., R., Sylvester, J. and Kusiak. S. (2003).
A range test for determining scatterers with unknown physical properties.
Inverse Probl., 19, 533–547.

[112] Qu, F., Yang, J. and Zhang, B. (2017).
An approximate factorization method for inverse medium scattering with unknown buried objects.
Inverse Problems, 33, 035007.

[113] Ramm, A.G. (1988).
Recovery of the potential from fixed energy scattering data.
Inverse Problems, 4, 877–886.

[114] Rellich, F. (1943).
Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten.
Jber. Deutsch. Math. Verein. 53, 57–65.

[115] Ρήγου, Ζ.,(1995).
Αντίστορφη Σκέδαση Ελαστικών κυματικών πεδίων.
[Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π.]

[116] Roach, G. F., Stratis I. G., Yannacopoulos, A. N. (2012).
Mathematical analysis of deterministic and stochastic problems in complex media electromagnetics.
New Jersey: Princeton University Press.

[117] Roger, A. (1981).
Newton Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem.
IEEE Trans. Ant. Prop. AP-29, 232–238.

[118] Sadd, M. H. (2005).
Elasticity: Theory, Applications and Numerics.
Oxford: Elsevier.

[119] Serranho, P. (2006).
A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance.
Inverse Problems 22, 663–680.

[120] Sevroglou, V. (2000).
The herglotz functions in two dimensional elasticity - applications in inverse scattering problem
[Doctoral Dissertation, National Technical University of Athens] http://hdl.handle.net/10442/hedi/12470.

[121] Sevroglou, V. (2005).
The far-field operator for penetrable and absorbing obstacles in 2D inverse elastic scattering.
Inverse Problems, 17, 717–738.

[122] Sevroglou, V. and Pelekanos, G. (2001).
An inversion algorithm in two-dimensional elasticity.
J. Math. Anal. Appl., 263, 277–293.

[123] Sevroglou, V., and Pelekanos, G., (2002).
Two dimensional elastic Herglotz functions and their applications in inverse scattering,
J. Elasticity, 68, 123–144.

[124] Sommerfeld, A. (1912).
Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung.
Jber. Deutsch. Math., 21, 309–353 .

[125] Tanuma K. (2007).
Stroh formalism and Rayleigh waves.
J. Elast., 89, 5–154.

[126] Tikhonov, A.N. (1963).
Regularization of incorrectly posed problems.
Soviet Math. Doklady, 4, 1624–1627 (English translation).

[127] Twersky, V. (1967).
Multiple scattering of electromagnetic waves by arbitary configurations.
J. Math. Phys., 8, 589–610.

[128] Vekua, I.N. (1943).
Metaharmonic functions. *Trudy Tbilisskogo matematichesgo Instituta*, 12, 105–174.

[129] Venkatraman, S., Tan, L. P., Joso, J. F., Boey, F. Y. C. and Wang, X., (2006).
Biodegradable stents with elastic memory.
Biomaterials, 27, 1573–1578.

[130] Wan, X., Rozovskii, B., Kanrniadakis, G., (2009).
A stochastic modeling methodology based on weighted Wiener chaos and Malliavin calculus.
PNAS, 106(34), 14189-14194.

[131] Weyl, H. (1952).
Kapazität von Strahlungsfeldern.
Math. Z., 55, 187–198 .

[132] Werner, P. (1962).
Randwertprobleme der mathematischen Akustik.
Arch. Rational Mech. Anal., 10, 29–66 .

[133] Whelam, D. M., van der Giessen, W. J., Krabbendam, S. C., van Vliet, E. A., Verdouw, P. D., Serruys, P. W. and van Beusekom, H. M. (2000).
Biocompatibility of phosphorylcholine coated stents in normal porcine coronary arteries.
Heart, 83, 338–345.

[134] www.faqs.org/patents/app/20090056871

[135] Yannacopoulos, A. N., Frangos, N. E. and Karatzas I. (2011).
Wiener Chaos Solutions for Linear Backward Stochastic Evolution Equations.
SIAM J. Appl. Math., 43, 68–113.