ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής & Στατιστικής

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ (VaR): ΕΚΤΙΜΗΣΗ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ντούνη Ουρανία

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής & Στατιστικής

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ (VaR): ΕΚΤΙΜΗΣΗ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ντούνη Ουρανία

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη & Διαχείριση Κινδύνων.

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κ. Πολίτης (Επιβλέπων-Αναπληρωτής Καθηγητής)
- Μ. Μπούτσικας (Αναπληρωτής Καθηγητής)
- Σ. Μπερσίμης (Καθηγητής)

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance & Statistics

DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE
& RISK MANAGEMENT

VALUE AT RISK: ESTIMATION AND APPLICATIONS IN COLLECTIVE RISK THEORY

By

Ntouni Ourania

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science inActuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
September 2023

Ευχαριστίες,

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής, θα ήθελα κατ’ αρχή να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου Κ. Πολίτη για την πολύτιμη καθοδήγησή του και την υποστήριξή καθ’ όλη την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά & τους φίλους μου, για την ενθάρρυνσή τους σε όλη την διάρκεια των σπουδών.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το Value at Risk (VaR) αποτελεί ένα από τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα μέτρα για την αποτίμηση του κινδύνου που συνδέεται με ένα χαρτοφυλάκιο στο χώρο της ασφαλιστικής και των χρηματοοικονομικών. Στη παρούσα εργασία θα δοθεί μια επισκόπηση της σημασίας του κινδύνου, των διαφόρων μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του VaR, καθώς και μια σύγκριση με άλλα μέτρα κινδύνου.

Στόχος της διαχείρισης κινδύνου είναι η επίτευξη της μέγιστης κερδοφορίας, αξιοποιώντας κάθε πιθανό όφελος, και ελαχιστοποιώντας κάθε πιθανό ενδεχόμενο πραγματοποίησης ζημιάς με την μικρότερη δυνατή απώλεια. Επίσης θα μελετηθεί η χρήση του VaR ως ένα ποσοτικό εργαλείο αποτίμησης του κινδύνου στο συλλογικό πρότυπο, και θα δοθούν παραδείγματα υπολογισμού του VaR τόσο αναλυτικά όσο και με προσομοίωση.

ABSTRACT

Value at Risk (VaR) is one of the most widely used measures for valuing the risk associated with a portfolio in the insurance and finance industry. This paper will provide an overview of the meaning of risk, the various methods used to estimate VaR, and a comparison with other risk measures.

The objective of risk management is to achieve maximum profitability, exploiting every possible benefit, and minimizing every possibility of making a loss with the smallest possible loss. The use of VaR as a quantitative risk assessment tool in the collective risk model will also be studied. VaR calculations will be demonstrated with the use of examples, involving both analytical and simulation methods.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Κίνδυνος - Εισαγωγικές Έννοιες

1.1. Η έννοια του κινδύνου

Ο κίνδυνος είναι ένα φαινόμενο συνδεδεμένο με την οικονομική πραγματικότητα σε διεθνές επίπεδο και η παρουσία του ενισχύει την αβεβαιότητα στις διάφορες επενδυτικές επιλογές. Στην σύγχρονη οικονομία, προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τον κίνδυνο εξασφαλίζοντας την μέγιστη δυνατότερη κερδοφορία.

Μεταξύ της έννοιας του κινδύνου και της αβεβαιότητας, υπάρχει μια ειδοποιός διαφορά που αξίζει να αναφερθεί. Ο κίνδυνος σύμφωνα με τον Knight (1921) είναι ένα μέγεθος μετρήσιμο το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε μέσα από μαθηματικούς όρους. Εν αντιθέσει, η αβεβαιότητα δεν είναι μετρήσιμη και κάποιες καταστάσεις της δεν μπορούν να εκτιμηθούν και να εκφραστούν με αριθμούς επακριβώς.

Στο παρελθόν η διαχείριση κινδύνων στους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς υπήρξε μονοδιάστατη καθώς οι αναλυτές δεν επεκτείνονταν σε μελέτη άλλων εκτός από την μέτρηση και την αποτίμηση του κινδύνου της αγοράς. Γρήγορα όμως αντιλήφθηκαν ότι οι μορφές κινδύνου είναι ποικίλες και το κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι μπορούν να προκαλέσουν εξίσου όλοι οι κίνδυνοι ζημιά. Κάθε οικονομική δραστηριότητα έχει την προοπτική κέρδους ή ζημίας. Στόχος της διαχείρισης κινδύνου είναι η επίτευξη της μέγιστης κερδοφορίας, αξιοποιώντας κάθε πιθανό όφελος, και ελαχιστοποιώντας κάθε πιθανό ενδεχόμενο πραγματοποίησης ζημιάς με την μικρότερη δυνατή απώλεια. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει την γενική έννοια της διαχείρισης κινδύνων, να μελετηθεί η χρήση του VaR ως ένα ποσοτικό εργαλείο αποτίμησης του κινδύνου στο συλλογικό πρότυπο, να συγκριθεί με άλλα μέτρα κινδύνου.

1.2. Είδη κινδύνων

1.2.1 Κίνδυνος Αγοράς (Market Risk)

Τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκε ενδιαφέρον για την αποτίμηση του κινδύνου της αγοράς λόγω του ότι μπορεί να επηρεάσει την αξία του εμπορικού χαρτοφυλακίου. Ο κίνδυνος της αγοράς αφορά την μεταβολή των τιμών της αγοράς και αντανακλά την κατάσταση της οικονομίας. Ο κίνδυνος αγοράς πηγάζει από τις διάφορες οικονομικές δραστηριότητες που αναπτύσσει ένας τραπεζικός οργανισμός. Απασχολεί ιδιαίτερα τους οικονομολόγους και αναλυτές καθώς επηρεάζει το χαρτοφυλάκιο των δανείων και συναλλαγών του οργανισμού.

Ουσιαστικά προέρχεται από τέσσερις παράγοντες, την μεταβλητότητα των επιτοκίων (interest rate risk), των συναλλαγματικών ισοτιμιών (currency risk), των χρηματιστηριακών δεικτών και των τιμών των μετοχών (equity risk) καθώς και των τιμών των εμπορευμάτων, όπως το πετρέλαιο (commodity risk).

1.2.2. Πιστωτικός Κίνδυνος (Credit Risk)

Ο πιστωτικός κίνδυνος απασχολεί τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα γιατί αντιπροσωπεύει την πιθανή ζημιά που μπορούν να αντιμετωπίσουν σε ενδεχόμενη επέλευση κινδύνου (Bessis 2002). Ως πιστωτικό κίνδυνο ορίζεται η πιθανή ή αναμενόμενη απώλεια, που προέρχεται από την αδυναμία του οφειλέτη να ανταπεξέλθει στην αποπληρωμή του χρέους, δηλαδή από την αδυναμία να εκπληρώσει τις συμβατικές του υποχρεώσεις. Στην τραπεζική, μια από τις καταστάσεις, στην οποία έχουμε την επέλευση του πιστωτικού κινδύνου είναι η χρεοκοπία (bankruptcy) η οποία περιγράφει την περίπτωση κατά την οποία ο οφειλέτης αντιμετωπίζει σοβαρή κρίση ρευστότητας με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αποπληρώσει τα χρέη του μερικώς ή στο σύνολό τους (Μ. Κούτρας 2021).

Μέχρι πρότινος οι τράπεζες αξιολογούσαν τους πελάτες τους με κριτήρια υποκειμενικά. Ουσιαστικά λαμβάνοντας υπόψη τα οικονομικά στοιχεία των πελατών τους, τις πιθανές εγγυήσεις που μπορούσαν να προσφέρουν και την συναλλακτική συμπεριφορά. Οι ραγδαίες εξελίξεις στις διεθνείς αγορές επέφεραν την μελέτη μοντέλων μέτρησης πιστωτικού κινδύνου αλλά και την ανάπτυξη χρηματοοικονομικών εργαλείων όπως είναι τα συστήματα πιστωτικής βαθμολόγησης όπου βάσει αυτής αξιολογείται η δυνατότητα των υποψηφίων προς δανειοδότηση και ικανότητα αποπληρωμής. Επίσης τα τελευταία έτη αναπτύχθηκαν μοντέλα που έχουν την δυνατότητα και μπορούν να αξιολογούν την συνολική συμπεριφορά ενός πελάτη. Ουσιαστικά εκτιμούν το πιθανό κέρδος ενός χρηματοπιστωτικού οργανισμού από μια ενδεχόμενη συνεργασία ή την ζημία.

1.2.3. Λειτουργικός Κίνδυνος (Operational Risk)

Λειτουργικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος των ζημιών οι οποίες προκαλούνται από ανεπαρκείς ή αποτυχημένες εσωτερικές διαδικασίες, ανθρώπους, συστήματα, εξωτερικά γεγονότα (Χ. Κουρτίδης 2021). Οι εξελίξεις που έχουν γίνει στον τομέα της τεχνολογίας καθώς και η αύξηση του όγκου των χρηματοπιστωτικών συναλλαγών στην αγορά έχουν καθιερώσει τον λειτουργικό κίνδυνο ως ένα από τους σημαντικούς κινδύνους για τον οποίον οι οργανισμοί επιθυμούν την αντιμετώπιση και διαχείρισή του. Αξίζει να αναφερθεί ένα παράδειγμα γεγονότος λειτουργικού κινδύνου για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας και της σημαντικότητάς του. Η Merrick Bank, το 2005, ανακοίνωσε ότι πλήρωσε $16 εκ. σε πρόστιμα προς την Visa και MasterCard ως αποτέλεσμα απώλειας δεδομένων πελατών. Τον Μάιο του 2005 hackers υπέκλεψαν 200.000 αριθμούς χρεωστικών και πιστωτικών καρτών από τα συστήματα της Τράπεζας. Οι hackers είχαν αρχικά παραβιάσει το σύστημα της τράπεζας το Σεπτέμβριο του 2004, αποκαλύπτοντας περίπου 40 εκ. αριθμούς καρτών (Χ. Κουρτίδης 2021).

1.2.4. Κίνδυνος Ρευστότητας (Liquidity Risk)

Ο κίνδυνος ρευστότητας δημιουργείται από τη διαφορά του μεγέθους των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού σε ένα τραπεζικό χαρτοφυλάκιο. Οφείλεται σε αδυναμία ρευστοποίησης των οικονομικών στοιχείων του ενεργητικού σε ορισμένο προβλεπόμενο χρόνο. Όταν ο όγκος των περιουσιακών στοιχείων είναι μικρότερος των υποχρεώσεων, τότε παρουσιάζεται έλλειμα όπου στην περίπτωση αυτή ο οργανισμός έχει ληξιπρόθεσμες υποχρεώσεις τις οποίες δεν δύναται να καλύψει με τους διαθέσιμους πόρους και έτσι οδηγείται σε κίνδυνο ρευστότητας.

1.3. Διαχείριση Κινδύνου

Η διαχείριση κινδύνων (risk management) είναι ένα σύγχρονο ερευνητικό πεδίο που βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις πτυχές της ανθρώπινης ζωής, τόσο σε οικονομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο (Bessis, 2002; Hull, 2008; Jorion, 2007). Αποτελείται από τρία βασικά στάδια, την ταυτοποίηση (identification), τη μέτρηση (assessment) και τέλος, την ανεύρεση πιθανών τρόπων αντιμετώπισης του κινδύνου (potential risk treatments).

1.3.1. Ιστορική αναδρομή

Στον τραπεζικό χώρο έκανε την εμφάνισή της στα μέσα του 20ου αιώνα και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1970, όπου η οικονομική κατάσταση ήταν σταθερή και ο ρόλος των τραπεζών ήταν σαφής και συγκεκριμένος, η θεωρία της διαχείρισης κινδύνων έβρισκε εύκολα την πρακτική της εφαρμογή στο πλαίσιο μιας απλής διαχείρισης ενεργητικού-παθητικού (asset-liability management ή ALM).

Σημαντικό σημείο στην ιστορία καθώς και μετέπειτα πορεία της διεθνούς οικονομίας ήταν η κατάργηση του συστήματος του Bretton Woods. Σύμφωνα με το σύστημα αυτό, κάθε χώρα που συμμετείχε αναλάμβανε την υποχρέωση να ασκήσει τέτοια νομισματική πολιτική που να διατηρεί τη συναλλαγματική της ισοτιμία σταθερή σε μια καθορισμένη τιμή ως προς την αξία του χρυσού. Σκοπός του συστήματος αυτού ήταν η καθιέρωση ενός ομαλού κλίματος στη διεξαγωγή των διεθνών συναλλαγών καθώς και η επίτευξη της μετατρεψιμότητας των νομισμάτων όλων των συμμετεχόντων στο σύστημα χωρών, μέσω των σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών (fixed exchange rates). Με το σύστημα των κυμαινόμενων συναλλαγματικών ισοτιμιών (floating exchange rates), παρατηρήθηκε υψηλή μεταβλητότητα στις ισοτιμίες των ξένων νομισμάτων και κατ’ επέκταση, υψηλή μεταβλητότητα στα επίπεδα των επιτοκίων, ένας πρωτόγνωρος κίνδυνος που καλέστηκαν να αντιμετωπίσουν τα πιστωτικά ιδρύματα. Μια τέτοια μεταρρύθμιση δε θα μπορούσε παρά να διαταράξει τα μέχρι τότε δεδομένα της διεθνούς οικονομίας. Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση της γερμανικής τράπεζας Bankhaus I.D. Herstatt3 η οποία, λόγω άστοχων θέσεων σε προθεσμιακές πράξεις συναλλάγματος, το 1974 οδηγήθηκε στη χρεοκοπία. Το περιστατικό αυτό, σε συνδυασμό με άλλα μικρότερης οικονομικής εμβέλειας, έκανε την ανάπτυξη της διαχείρισης τραπεζικού κινδύνου άμεση ανάγκη.

Ταυτόχρονα την ανάγκη αυτή ενίσχυε ο έντονος ανταγωνισμός στον τραπεζικό χώρο λόγω των διαρκών εξελίξεων της παγκόσμιας οικονομίας. Τα τραπεζικά ιδρύματα που διακρίνονταν για τον εμπορικό τους χαρακτήρα, διεκδίκησαν μερίδιο και σε άλλες αγορές όπου προσφέρονταν χρηματιστηριακά προϊόντα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να καλλιεργηθεί κλίμα ανταγωνισμού μεταξύ επενδυτικών και εμπορικών τραπεζών. Τα τελευταία χρόνια η διαφορά τους έχει αμβλυνθεί, δεδομένου ότι οι εμπορικές τράπεζες προσφέρουν πλέον πληθώρα επενδυτικών επιλογών (Bessis, 2002; Bodie et al, 2005). Ο ανταγωνισμός αποτελεί την κινητήριο δύναμη της προαγωγής της κοινωνικής ευημερίας σε μια σύγχρονη κοινωνία που λειτουργεί με βάση τις αρχές της ελεύθερης αγοράς. Τροφοδοτείται όμως από την ακαταπόνητη επιδίωξη του κέρδους. Το δέλεαρ της κερδοφορίας ώθησε τις τράπεζες στην ανάληψη κινδύνων που δεν αντιμετώπιζαν στο παρελθόν, γεγονός που απαιτούσε αποτελεσματικότερη διαχείριση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αξία σε κίνδυνο (Value At Risk)

2.1 Η Έννοια της αξίας σε κίνδυνο (VaR)

Μπορούμε να εντοπίσουμε τις πρώτες αναφορές στο VaR στα τέλη της δεκαετίας του 1970 και στη δεκαετία του 1980, όταν ορισμένα μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα άρχισαν να εργάζονται πάνω σε εσωτερικά μοντέλα υπολογισμού κινδύνων για τη μέτρηση και τη συγκέντρωση των κινδύνων σε ολόκληρο το ίδρυμα. Η επεξεργασία των μοντέλων αυτών ξεκίνησε για τους δικούς τους σκοπούς — διαχείρισης κινδύνων — καθώς οι επιχειρήσεις γίνονταν πιο περίπλοκες. Έτσι γινόταν όλο και πιο δύσκολο, αλλά και όλο και πιο αναγκαίο, να μπορούν να συγκεντρώνουν τους κινδύνους τους λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο με τον οποίο αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους, και τα ιδρύματα δεν είχαν τη μεθοδολογία για να το πράξουν.

Η ανάγκη αξιόπιστης μέτρησης του κινδύνου έγινε ακόμη πιο αισθητή κατόπιν ορισμένων οικονομικών καταστροφών στις αρχές της δεκαετίας του 1990. Από τότε, η μεθοδολογία της VaR αναπτύχθηκε με εντατικούς και διαρκώς εξελισσόμενους ρυθμούς ενώ πλέον εφαρμόζεται σε όλους τους τομείς, έχοντας μεταβάλλει σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο τα διάφορα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα προσεγγίζουν τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο (Jorion, 2007). Το πιο γνωστό σύστημα ήταν αυτό που αναπτύχθηκε από την JP Morgan, το οποίο λειτουργούσε γύρω στο 1990. Το σύστημα αυτό βασίστηκε στην τυποποιημένη θεωρία χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις των τυπικών αποκλίσεων και συσχετίσεων μεταξύ των αποδόσεων σε διαφορετικά διαπραγματεύσιμα μέσα, τις οποίες συγκέντρωσε σε ολόκληρο το ίδρυμα σε ένα ενιαίο μέτρο κινδύνου σε επίπεδο επιχείρησης. Το μέτρο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η μέχρι τώρα σχεδόν άγνωστη έννοια της ημερήσιας αξίας σε κίνδυνο (ή VaR) - η μέγιστη πιθανή απώλεια κατά την επόμενη ημέρα διαπραγμάτευσης.

Ο όρος "πιθανή απώλεια" ερμηνεύτηκε με όρους επιπέδου πιθανότητας 95%, οπότε το VaR ήταν η μέγιστη απώλεια που θα μπορούσε να συμβεί στην εταιρεία στις "καλύτερες" 95 ημέρες από τις 100. Ωστόσο, διαφορετικά μοντέλα VaR διέφεραν ως προς τις περιόδους ορίζοντα και τα επίπεδα πιθανότητας που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και ως προς τις μεθοδολογίες εκτίμησής τους: ορισμένα βασίζονταν στη θεωρία χαρτοφυλακίου, ορισμένα βασίζονταν σε μεθόδους ιστορικής προσομοίωσης και άλλα σε μεθόδους στοχαστικής προσομοίωσης.

Μόλις τέθηκαν σε λειτουργία, τα VaR models εξαπλώθηκαν πολύ γρήγορα, πρώτα μεταξύ των κινητών αξιών και των επενδυτικών τραπεζών, στη συνέχεια μεταξύ των εμπορικών τραπεζών, των συνταξιοδοτικών ταμείων , των ασφαλιστικών εταιρειών και των μη χρηματοοικονομικών εταιρειών. Η έννοια VaR έγινε επίσης πιο οικεία καθώς τα μοντέλα πολλαπλασιάστηκαν, και μέχρι τη δεκαετία του 1990, το VaR είχε ήδη καθιερωθεί ως το κυρίαρχο μέτρο του χρηματοοικονομικού κινδύνου. Έκτοτε, τα μοντέλα VaR έχουν γίνει πολύ πιο εξελιγμένα και οι μέθοδοι VaR έχουν επεκταθεί πέρα από τους κινδύνους αγοράς για τη μέτρηση άλλων κινδύνων όπως πιστωτικοί κίνδυνοι, ρευστότητα (ή ταμειακές ροές) και λειτουργικοί κίνδυνοι. Για να εξετάσουμε το μέτρο VaR πιο επίσημα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που δημιουργεί μια τυχαία απώλεια σε μια επιλεγμένη περίοδο. Έστω α μια επιλεγμένη πιθανότητα και το q_a είναι το α-ποσοστημόριο της συνάρτησης πυκνότητας απώλειας.

Το VaR του χαρτοφυλακίου στο α επίπεδο πιθανότητας είναι απλώς το q_a ποσοστημόριο της κατανομής ζημιών, δηλαδή:

$$VaR_a = q_a$$

Το VaR καθορίζεται πάντα με ένα δεδομένο επίπεδο πιθανότητας α - συνήθως α = 95% ή 99%. Σε γενικές γραμμές, η α-VaR αντιπροσωπεύει τη ζημία η οποία, κατά πάσα πιθανότητα α δεν θα εξαλειφθεί. Δεδομένου ότι αυτό μπορεί να μην ορίζει μια μοναδική τιμή, για παράδειγμα εάν υπάρχει μάζα πιθανότητας γύρω από την τιμή, ορίζουμε το α-VaR πιο συγκεκριμένα, για $0 \leq \alpha \leq 1$, ως

$$Q_a = \min \{Q: P_r[X \leq Q] \geq \alpha\} \quad \textbf{(1.1)}$$

Για συνεχείς κατανομές αυτό απλοποιείται σε Q_a έτσι ώστε

$$P_r\,[X \leq Q_a] = \alpha. \quad \textbf{(1.2)}$$

Δηλαδή $Q_a = F_X^{-1}(a)$ όπου $F_X(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής απώλειας X. Ο λόγος για τον όρο «min» στον ορισμό (1.1) είναι ότι για τυχαίες μεταβλητές απώλειας που είναι διακριτές ή μικτές (συνεχείς και διακριτές), μπορεί να μην έχουμε μια τιμή που να ταιριάζει ακριβώς με την εξίσωση (1.2). Για παράδειγμα, έχουμε την ακόλουθη διακριτή τυχαία μεταβλητή απώλειας:

$$X=\begin{cases} 100 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 0.005 \\ 50 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 0.045 \\ 10 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 0.10 \\ 0 \ \mu\varepsilon \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \ 0.85 \end{cases}$$

Από αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

y	$P_r[X \leq y]$
100	1.00
50	0.995
10	0.95
0	0.85

Τώρα, αν μας ενδιαφέρει το ποσοστημόριο 99%, δεν υπάρχει τιμή Q για την οποία $P_r[X \leq y] = 0.99$. Έτσι επιλέγουμε τη μικρότερη τιμή για την απώλεια που δίνει τουλάχιστον 99% πιθανότητα ότι η απώλεια είναι μικρότερη – δηλαδή επιλέγουμε VaR(X)= 50. Αυτός είναι ο μικρότερος αριθμός (50) που έχει την δυνατότητα ότι η απώλεια θα είναι μικρότερη με τουλάχιστον 99% πιθανότητα.

Δηλαδή,

$$50 = \min\{Q : P_r[X \leq Q] \geq 0.99]$$

που αντιστοιχεί στον ορισμό (1.1) (Hardy 2006).

Στην προσπάθεια να καθορίσουμε ευκρινέστερα την έννοια της VaR, ανατρέχοντας στη σχετική βιβλιογραφία, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται για μια μεθοδολογία εκτίμησης κινδύνου με τη χρήση τυπικών στατιστικών τεχνικών. Ένας γενικός ορισμός περιγράφει ότι το VaR αντιπροσωπεύει τη μέγιστη ζημιά που ενδέχεται να εμφανιστεί σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και για ένα συγκεκριμένο διάστημα. Το VaR αναλύει την μεταβολή των αποδόσεων μίας επένδυσης στο αμέσως προηγούμενο διάστημα, και υπολογίζει τη μεγαλύτερη ζημία που μπορεί να επέλθει στην επένδυση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (Χ. Κουρτίδης 2021).

Ως ένα ακόμη σύντομο παράδειγμα, θεωρούμε ότι ένας χρηματοπιστωτικός οργανισμός αναφέρει ότι το VaR για το σύνολο του χαρτοφυλακίου του είναι 70 εκατομμύρια € σε χρονικό ορίζοντα 7 ημερών και σε επίπεδο πιθανότητας 99%. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα μόνο 1% υπό κανονικές συνθήκες αγοράς, να σημειωθεί απώλεια στο χαρτοφυλάκιο υψηλότερη των 70 εκατομμυρίων € σε βάθος χρόνου 7 ημερών. Το VaR συνοψίζει τον όγκο μεγέθους της έκθεσης στον κίνδυνο για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο λαμβάνοντας ως βασική παράμετρο την πιθανότητα δυσμενούς κίνησης της αγοράς.

Ομοίως, η ίδια η έννοια του κινδύνου είναι δύσκολο να εκτιμηθεί χωρίς μια σαφή ιδέα για το τι εννοούμε με ένα μέτρο κινδύνου. Για να διευκρινίσουν αυτά τα ζητήματα, οι Artzner et al. (1999), πρότειναν να κάνουν για τον κίνδυνο αυτό που είχε κάνει ο Ευκλείδης και άλλοι για τη γεωμετρία: έθεσαν ένα σύνολο αξιωμάτων μέτρησης κινδύνου - τα αξιώματα της συνοχής - και άρχισαν να εργάζονται για τις επιπτώσεις τους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κίνδυνο X και ένα μέτρο κινδύνου ρ(X) που ορίζεται στο πεδίο τιμών της τ.μ. X. Ορίζουμε τώρα την έννοια του συνόλου αποδοχής ως το σύνολο όλων των θέσεων που είναι αποδεκτές από ορισμένα ενδιαφερόμενα μέρη (π.χ. μια χρηματοπιστωτική ρυθμιστική αρχή). Στη συνέχεια ερμηνεύουμε το μέτρο κινδύνου ρ(.) ως το ελάχιστο επιπλέον κεφάλαιο που πρέπει να προστεθεί σε μια επικίνδυνη θέση και να επενδυθεί με σύνεση σε κάποιο περιουσιακό στοιχείο, ώστε να καταστεί αποδεκτή η επικίνδυνη θέση. Αν ρ(.) είναι θετική, τότε πρέπει να προστεθεί ένα κεφάλαιο για να γίνει αποδεκτή η θέση, και αν ρ(.) είναι αρνητική, η απόλυτη τιμή της μπορεί να ερμηνευθεί ως το μέγιστο κεφάλαιο που μπορεί να αποσυρθεί και να αφήσει τη θέση αποδεκτή. Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το ελάχιστο ποσό εποπτικού κεφαλαίου που καθορίζεται από μια ρυθμιστική αρχή του χρηματοπιστωτικού τομέα (δηλαδή, "αποδεκτό από") για να επιτραπεί σε μια επιχείρηση να δημιουργήσει μια επιχείρηση διαχείρισης κεφαλαίων.

Τώρα ας εξετάσουμε δύο επικίνδυνες θέσεις X και Y, με τιμές που δίνονται από V(X) και V(Y). Το μέτρο κινδύνου ρ(.) θεωρείται ότι είναι συνεκτικό εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες σύμφωνα με τους Kevin Dowd and David Blake (2006):

- Μονοτονικότητα: $V(Y) \geq V(X) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
- Υποπροσθετικότητα: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- Θετική ομοιογένεια: $\rho(h X) = h\rho(X)$ για $h > 0$
- Αναλλοίωτη στην μετατόπιση: $\rho(X + n) = \rho(X) - n$ για κάποιο συγκεκριμένο ποσό n.

Η πρώτη, η τρίτη και η τέταρτη ιδιότητα μπορούν να θεωρηθούν ως συνθήκες «καλής συμπεριφοράς». Μονοτονικότητα σημαίνει ότι εάν το Y έχει μεγαλύτερη τιμή από το X, τότε το Y θα πρέπει να έχει χαμηλότερο κίνδυνο: αυτό είναι λογικό, γιατί το κεφάλαιο που απαιτείται για την κάλυψη του Y είναι πάντα μικρότερο από το αντίστοιχο του X . Σύμφωνα με την ιδιότητας της υποπροσθετικότητας στην άνω ανισότητας εκφράζεται το γεγονός ότι μια συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπλέον κινδύνους. Η θετική ομοιογένεια συνεπάγεται ότι ο κίνδυνος μιας θέσης είναι ανάλογος με την κλίμακα ή το μέγεθός της και τέλος, η αναλλοίωτη στην μετατόπιση ιδιότητα απαιτεί την προσθήκη ενός σίγουρου ποσού n.

Δεδομένων ορισμένων προβλημάτων, αναζητούμε εναλλακτικά μέτρα κινδύνου που διατηρούν τα οφέλη της VaR - όσον αφορά την ευρύτητα των εφαρμογών κ.λπ.- αποφεύγοντας παράλληλα τα μειονεκτήματά της. Επιπλέον, προκειμένου να διατηρηθούν τα οφέλη της VaR, μπορεί ευλόγως να υποτεθεί ότι τα εν λόγω μέτρα κινδύνου θα είναι «τύπου VaR», υπό την έννοια ότι θα αντικατοπτρίζουν τα ποσοστά της κατανομής των ζημιών, αλλά θα είναι μη τετριμμένες συναρτήσεις αυτών των ποσοτικών στοιχείων και όχι ένα μόνο ποσοτικό μέτρο από μόνο του (Dowd and Blake 2006).

2.2 Μέθοδοι Εκτίμησης VaR

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκε, με τη βοήθεια ενός απλοποιημένου παραδείγματος, ο τρόπος υπολογισμού της VaR. Όμως, ο υπολογισμός της είναι γενικά λίγο πιο περίπλοκος και προϋποθέτει τον υπολογισμό διαφόρων παραμέτρων που σχετίζονται με την κατανομή πιθανότητας των αποδόσεων και των χρηματικών αξιών ενός περιουσιακού στοιχείου.

Όπως έχει αναφερθεί, το VaR είναι ένα στατιστικό μέτρο του κινδύνου με φορά προς τις δυσμενείς τιμές που βασίζεται στις τρέχουσες θέσεις των περιουσιακών στοιχείων. Σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι συγκεντρώνει όλο το μέγεθος του κινδύνου σε μία αριθμητική τιμή η οποία ερμηνεύεται με ευκολία. Τα βήματα για τον υπολογισμό του είναι κοινά για όλες τις μεθοδολογίες που ακολουθούν και συνοψίζονται στα παρακάτω (Bessis, 2002; Jorion, 2007):

1. Αποτίμηση της τρέχουσας θέσης του περιουσιακού στοιχείου.
2. Μέτρηση της μεταβλητότητας του παράγοντα κινδύνου.
3. Καθορισμός του χρονικού ορίζοντα.
4. Καθορισμός του επιπέδου πιθανότητας.
5. Αναφορά της χειρότερης πιθανής ζημιάς, μετατρέποντας όλες τις πληροφορίες σε κατανομή πιθανότητας των κερδών-ζημιών του περιουσιακού στοιχείου που εκφράζει η τιμή της VaR.

Σε γενικές γραμμές, υπάρχουν τρεις κατηγορίες προσέγγισης που μπορούμε να ακολουθήσουμε:

- Παραμετρικές μέθοδοι.
- Μη παραμετρικές μέθοδοι.
- Στοχαστικές (Μόντε Κάρλο)-μέθοδοι προσομοίωσης.

Η πρώτη μέθοδος (προσέγγιση Delta-Normal) είναι παραμετρική και η θεωρητική της βάση στηρίζεται σε κάποιες υποθέσεις σχετικά με την κατανομή και τις παραμέτρους που τη διέπουν. Οι άλλες δύο μέθοδοι είναι μη παραμετρικές (ιστορική προσομοίωση- προσομοίωση Monte Carlo) και δεν υποθέτουν κάποια κατανομή εκ των προτέρων.

2.3 Χρήσιμες Ιδιότητες VaR

Στις μέρες μας το VaR είναι το σημαντικότερο και πιο διαδεδομένο μέτρο κινδύνου. Η σημασία του είναι αδιαμφισβήτητη καθώς αποτελεί τη βάση καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον κίνδυνο της αγοράς. Η γενικευμένη χρήση του, ωστόσο, έχει προκαλέσει ανησυχίες ότι θα μπορούσε πραγματικά να κάνει τις χρηματοπιστωτικές αγορές λιγότερο ασφαλείς από πριν, προκαλώντας υψηλότερη μεταβλητότητα (volatility).

Ορισμός 2.1: Δεδομένου ενός κινδύνου X για επίπεδο πιθανότητας $p \in (0,1)$ το αντίστοιχο VaR, συμβολίζεται $VaR[\mathrm{X}, p]$ και ορίζεται ως

$$Var[X,p] = F_X^{-1}(\mathrm{p})$$

όπου F_X^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της σκ $F_X(\mathrm{x})$ και ορίζεται ως

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in |F_X(x) \geq p\} = \sup\ \{x \in \big|\ F_X(x) < p\}$$

(Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την $F^{-1}(p)$ (βλ. Chapter 1.5.8 Denuit. et al (2005)). Να σημειωθεί ότι τα VaR πάντα υπάρχουν και εκφράζονται με κατάλληλη μονάδα μέτρησης, συνήθως την απώλεια χρημάτων. Για κάθε $x \in R$ και $p \in (0,1)$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$VaR[\mathrm{X}, p] \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$$

Η συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα από το ακόλουθο: Για κάθε πραγματικό αριθμό x και επίπεδο πιθανότητας p, ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές (Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014):

i) $F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow \mathrm{p} \leq F_X(x)$

ii) $x \leq F_X^{-1+}(p) \Leftrightarrow P_r[X < x] = F_x(x-) \leq p$

Χρήσιμες ιδιότητες του VaR:

Ιδιότητα 1: Το VaR δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας

Εφόσον $X \leq \max[X] \Rightarrow VaR[X;p] \leq \max[X] \ \forall p$

Επομένως το VaR είναι μικρότερο από την μέγιστη δυνατή ζημία που μπορεί να συμβεί και δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

Ιδιότητα 2: Το VaR δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας

Έστω $p^* = F_X(E[X])$ $τότε\ για\ κάθε\ p < p^*\ ισχύει$

$$p < F_X(E[X]) \Leftrightarrow \mathrm{VaR}[X,p] < E[X]$$

Είναι σαφές ότι το VaR δεν υπερβαίνει την αναμενόμενη απώλεια $E[X]$ για επίπεδο πιθανότητας μικρότερο από p.

Ιδιότητα 3: Το VaR είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά και θετικά ομοιογενές

Το VaR διαθέτει την εξής ιδιότητα: το VaR μιας μη φθίνουσας συνάρτησης t ενός τυχαίου κινδύνου X λαμβάνεται εφαρμόζοντας την ίδια συνάρτηση με το αρχικό VaR. Αυτό προκύπτει εύκολα από το παρακάτω λήμμα (Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014).

Λήμμα 3. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Για κάθε $0 < p < 1$, ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

(i) Αν t είναι μη φθίνουσα και συνεχής τότε $F_{t(X)}^{-1}(p) = t\left(F_X^{-1}(p)\right)$

(ii) Αν t είναι μη φθίνουσα και συνεχής τότε $F_{t(X)}^{-1+}(p) = t\left(F_X^{-1+}(p)\right)$

Έτσι προκύπτει άμεσα ότι $VaR[cX, p] = c\ VaR[X, p]$ που δείχνει ότι το VaR είναι θετικά ομοιογενές και $VaR[X + c, p] = VaR[X, p] + c$ που δείχνει ότι το VaR είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά.

Ιδιότητα 4: Το VaR δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας

Από την ιδιότητα της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά μπορούμε να δούμε ότι προκύπτει εύκολα και η συγκεκριμένη ιδιότητα. Για κάθε $p > 0$ ισχύει $VaR[c, p] = c$ που δείχνει ότι το VaR δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας.

Ιδιότητα 5: Το VaR δεν είναι υποπροσθετικό

Το VaR αποτυγχάνει να είναι υποπροσθετικό (εκτός από κάποιες περιπτώσεις όπως όταν X είναι πολυμεταβλητή κανονική κατανομή). Έτσι, γενικά, το VaR έχει την απροσδόκητη ιδιότητα ότι το VaR ενός αθροίσματος μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των VaR των επιμέρους κινδύνων. Σε τέτοια περίπτωση η διαφοροποίηση οδηγεί σε εκτίμηση μεγαλύτερων κινδύνων.

Μια πιθανή επιβλαβής πτυχή της έλλειψης υποπροσθετικότητας είναι ότι ένα αποκεντρωμένο σύστημα διαχείρισης κινδύνου μπορεί να αποτύχει επειδή τα VaR που υπολογίζονται για τα μεμονωμένα χαρτοφυλάκια μπορεί να μην αθροίζονται για να παράγουν ένα άνω φράγμα για το VaR του συνολικού χαρτοφυλακίου. Ορισμένες φορές το VaR είναι υποπροσθετικό, αυτό όμως δεν ισχύει πάντα.

<u>Παράδειγμα Ιδιότητας 5:</u>

- Θεωρούμε έναν κίνδυνο $\mathrm{X}_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ με $\lambda_1 = 1$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

Όπου υπολογίζουμε σε επίπεδο πιθανότητας $\mathrm{p}_0 = 95\%$ το VaR.

<u>Για το VaR έχουμε τον τύπο:</u>

$$VaR[\mathrm{X}_1, \mathrm{p}_0] = F_{X_1}^{-1}(\mathrm{p}_0)$$

Έτσι μέσω του Mathematica παίρνουμε ότι:

$\lambda 1 = 1; \mathrm{p0} = 0.95; \mathrm{VaR} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{ExponentialDistribution}[\lambda 1], \mathrm{p0}]$
$\mathbf{VaR}(\boldsymbol{X_1}) = \boldsymbol{VaR}(\boldsymbol{X_2}) = \mathbf{2.99}$

Το άθροισμα 2 εκθετικών συναρτήσεων $X_1 + X_2$ προκύπτει μια Gamma κατανομή όπου $X_1 + X_2 \sim$ Gamma(2,λ), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\lambda}$$

Υπολογίζουμε το VaR με την χρήση του Mathematica:

$\alpha = 2; \lambda = 1; \mathrm{p0} = 0.95; \mathrm{Var} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{GammaDistribution}[\alpha, \lambda], \mathrm{p0}]$
$\mathbf{VaR}(\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2})$= 4.74

Στην περίπτωση αυτή το VaR είναι υποπροσθετικό. Δηλαδή:

$$\mathbf{VaR(X_1)} + \mathbf{VaR(X_2)} = 2.99 + 2.99 = \mathbf{5.99}$$

Όμως, είδαμε ότι:

$$\mathbf{VaR(X_1 + X_2)} = \mathbf{4.74}$$

Όντως λοιπόν το VaR είναι υποπροσθετικό σε αυτή την περίπτωση, κάτι που δεν ισχύει πάντα.

$$\mathbf{VaR}(X_1 + X_2) \leq \mathbf{VaR(X_1)} + \mathbf{VaR(X_2)}$$

Όμως σύμφωνα με τους Denuit. Et al (2005) η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας δεν μπορεί να ισχύσει για κατανομές όπως η Pareto(α=1, θ=1) για την οποία δεν ορίζεται τόσο η μέση τιμή (αναγκαία συνθήκη α>1) όσο και η διασπορά αυτής (αναγκαία συνθήκη α>2).

Ιδιότητα 6: Το VaR είναι συμμονοτονικά προσθετικό

Ισχύει ότι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος συμμονοτονικών[1] τυχαίων μεταβλητών είναι απλά το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομής. Έτσι από τον ορισμό του VaR προκύπτει η παρακάτω ιδιότητα.

Έστω συμμονοτονικοί κίνδυνοι $X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c$ το VaR του αθροίσματος S^c αυτών γράφεται

$$VaR[S^c; p] = \sum_{i=1}^{n} VaR[X_i; p], \;\; 0 < p < 1$$

Επομένως το VaR είναι συμμονοτονικά προσθετικό.

Ιδιότητα 7: Το VaR είναι μονότονο

Αν $\mathrm{P_r}[\mathrm{X} \leq \mathrm{Y}] = 1$ τότε:

$$\mathrm{F_X(x)} \geq \mathrm{F_Y(x)} \text{ και } \mathrm{F_X^{-1}(x)} \leq \mathrm{F_Y^{-1}(x)} \;\forall\, \mathrm{x}$$

Ως εκ τούτου VaR[X;p] ≤ VaR[Y;p] ισχύει για κάθε επίπεδο πιθανότητας p και το VaR είναι μονότονο.

Ιδιότητα 8: Το VaR είναι συνεχές όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή. Καθώς η ασθενής σύγκλιση των συναρτήσεων κατανομής εξασφαλίζει τον ίδιο τύπο σύγκλισης για τα αντίστοιχα ποσοστημόρια.

Ιδιότητα 9: Το VaR είναι αντικειμενικό

[1] Συμμονοτονία: Σύμφωνα με το βιβλίο των Denuit et al (2005): Είναι η αυξανόμενη προς την ίδια κατεύθυνση μεταβολή δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του VaR, δεδομένου ότι εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση κατανομής της X.

Ιδιότητα 10: Το VaR είναι μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση για τις ασφαλιστικές εταιρείες

Σε μια ασφάλιση ο αντισυμβαλλόμενος πληρώνει τα ασφάλιστρα και εφόσον προκύψει ζημιά απαιτεί αποζημίωση από τον ασφαλιστή. Έτσι ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να είναι σε κίνδυνο αν η απώλεια του είναι θετική (ή το κέρδος του αρνητικό), επειδή οι υποχρεώσεις στους ασφαλισμένους δεν μπορούν να πληρωθούν σε αυτή την περίπτωση. Η Φερεγγυότητα (Solvency) αντικατοπτρίζει την οικονομική ικανότητα μιας συγκεκριμένης επικίνδυνης επιχείρησης (risky business) να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις της. Για την προστασία των αντισυμβαλλόμενων, η ρυθμιστική αρχή επιβάλει μια κεφαλαιακή απαίτηση φερεγγυότητας (solvency capital requirement) p[X]. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το διαθέσιμο κεφάλαιο σε μία εταιρεία, δηλαδή το πλεόνασμα ενεργητικού-παθητικού πρέπει να είναι τουλάχιστον p[X], έτσι ώστε η εταιρία να είναι σε θέση πάντα να καλύψει τις μελλοντικές απαιτήσεις. Είναι κάποιου είδους προστασία για την περίπτωση που τα ασφάλιστρα και τα αποθέματα της εταιρίας αποδειχθούν ανεπαρκή. Το p[X] πρέπει να είναι επομένως μεγαλύτερο από κάθε πιθανή ζημιά.

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με ζημιά X. Η ρυθμιστική αρχή επιβάλει οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας να είναι τέτοιες ώστε το έλλειμμα να είναι επαρκώς μικρό. Ο κίνδυνος ελλείμματος μετριέται ως $E[(\mathrm{X} - p[X]_+]$. Η διαδικασία καθορισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων απαιτεί δύο διαφορετικά μέτρα κινδύνου: το μέτρο κινδύνου για τον προσδιορισμό του κεφαλαίου φερεγγυότητας, και $E[(\mathrm{X} - p[X]_+]$ για την μέτρηση του ελλείμματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το κεφάλαιο που διαθέτει μια επιχείρηση τόσο μικρότερο είναι το έλλειμμα. Από την άλλη όμως η κράτηση κεφαλαίων έχει κόστος. Η ρυθμιστική αρχή αποφεύγει να ζητάει υπερβολικά κεφάλαια φερεγγυότητας λαμβάνοντας υπόψη το κόστος κεφαλαίου. Η κεφαλαιακή απαίτηση p[X] θα μπορούσε να προσδιορίζεται ως η λύση στο ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{\mathrm{p[X]}}\{\mathrm{E}[\{\mathrm{X} - \mathrm{p[X]}_+] + \mathrm{p[X]}\varepsilon\}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

η οποία εξισορροπεί τα δύο αντικρουόμενα κριτήρια, του χαμηλού υπολειπόμενου κινδύνου και του χαμηλού κόστους κεφαλαίου. Η ρυθμιστική αρχή μπορεί να αποφασίσει να αφήσει να είναι συγκεκριμένη εταιρεία ή συγκεκριμένος κίνδυνος. Εάν ε=0, το κόστος κεφαλαίου δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη και προκύπτει κεφάλαιο φερεγγυότητας ρ[X]=max[X]. Η ρυθμιστική αρχή μπορεί να αποφασίσει το ε να είναι είτε φιλικό με την εταιρεία (company-specific) είτε φιλικό με τον κίνδυνο (risk-specific) (Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014).

2.4 Υπολογισμός οικονομικού κεφαλαίου με βάση το VaR

Ο συνηθέστερος τρόπος ποσοτικοποίησης των επιχειρηματικών κεφαλαίων αλλά και των ασφαλιστικών κινδύνων βασίζεται ασφαλώς στο VaR. Εάν συμβολίσουμε με S τις συνολικές απαιτήσεις ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου αναφοράς και με P το συνολικό ασφάλιστρο (ή την πρόβλεψη) για αυτό το χαρτοφυλάκιο, τότε το $VaR[X;p] - P$ είναι το μικρότερο «πρόσθετο κεφάλαιο» που απαιτείται έτσι ώστε ο ασφαλιστής να καταστεί τεχνικά αφερέγγυος με πιθανότητα το πολύ 1 − p. Συγκεκριμένα, για ένα καθορισμένο επίπεδο πιθανότητας p, το οικονομικό κεφάλαιο που βασίζεται σε VaR ορίζεται ως

$$EC[S;p] = VaR[S;p] - E[S]$$

Για παράδειγμα, εάν το επίπεδο πιθανότητας έχει οριστεί σε p = 99%, τότε κατά 99 %, τα επιχειρηματικά κεφάλαια EC[S;p] θα επαρκούν κατά μέσο όρο για την κάλυψη των μη αναμενόμενων ζημιών. Η χρήση της VaR για τον προσδιορισμό ενός κεφαλαίου φερεγγυότητας έχει νόημα σε καταστάσεις όπου το γεγονός αθέτησης θα πρέπει να αποφεύγεται, αλλά το μέγεθος του ελλείμματος δεν είναι σημαντικό. Για τους μετόχους ή τη διοίκηση, για παράδειγμα, το μέτρο ποσοτικού κινδύνου παρέχει χρήσιμες πληροφορίες, δεδομένου ότι η αποφυγή αθέτησης υποχρεώσεων είναι το πρωταρχικό μέλημα, ενώ το μέγεθος του ελλείμματος είναι μόνο δευτερεύον (λόγω περιορισμένης ευθύνης) (Denuit. Et al 2005).

2.5 Εφαρμογές υπολογισμού VaR

<u>Εφαρμογή 2.5.1</u>

Υποθέτουμε ότι οι ζημιές X ακολουθούν την κανονική κατανομή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

Θεωρούμε συγκεκριμένα ότι $\mu = 5, \sigma = 10$.

Οπότε υπολογίζουμε σε επίπεδο πιθανότητας $p_0 = 95\%$ το VaR που δίνεται από τον τύπο:

$$VaR[X,p] = F_X^{-1}\,(p)$$

Μέσω του Mathematica έχουμε:

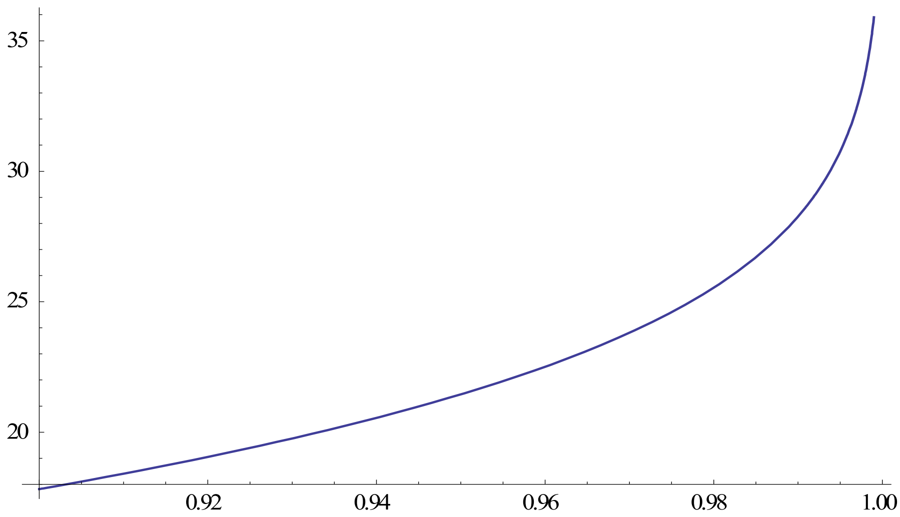
$\mathrm{p0} = 0.95; \mu = 5; \sigma = 10; \mathrm{VaR} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{NormalDistribution}[\mu,\sigma],\mathrm{p}]$
21.4485

Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια να είναι μεγαλύτερη από 21.4485

Ας δούμε όμως στο κάτωθι διάγραμμα πώς μεταβάλλεται το VaR μιας κανονικής κατανομής συναρτήσει των διάφορων επιπέδων.

Χρησιμοποιώντας την κάτωθι εντολή στο mathematica και έχοντας στον άξονα X=VaR και στον άξονα Y=p0

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Quantile}[\mathrm{NormalDistribution}[\mu,\sigma],p0],\{p0,0.9,0.999\}$



(Σχήμα 1)

Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής ισχύει ότι Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014):

$$P(X < VaR(X;p)) = p \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{VaR(X;p)-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\iff \Phi\left(\frac{VaR(X;p)-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\iff VaR(X;p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$$

Επομένως το $VaR(X;p)$ $είναι\ μια\ γραμμική\ συνάρτηση\ των\ \mu,\sigma.$

Εφαρμογή 2.5.2

Υποθέτουμε ότι οι ζημιές X ακολουθούν την κατανομή $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\lambda}$$

Θεωρούμε συγκεκριμένα ότι $\alpha = 2, \lambda = 300$.

Οπότε υπολογίζουμε σε επίπεδο πιθανότητας $p0 = 95\%$ το VaR.

$$VaR[X,p] = F_X^{-1}(p)$$

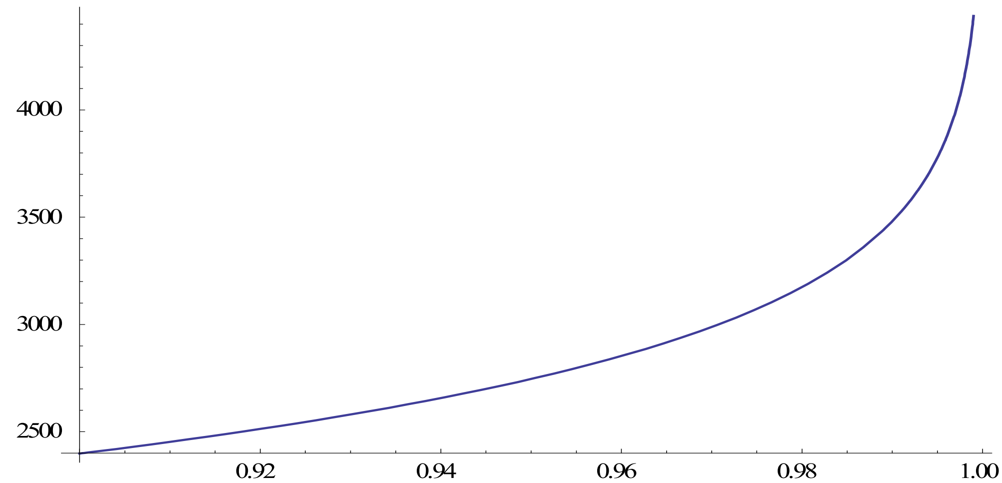
Μέσω του Mathematica έχουμε:

$\alpha = 5; \lambda = 300; \mathrm{p0} = 0.95; \mathrm{VaR} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{GammaDistribution}[\alpha, \lambda], \mathrm{p0}]$
2746.05

Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια να είναι μεγαλύτερη από 2746.05

Ας δούμε όμως πως μεταβάλλεται το VaR μιας Γάμμα κατανομής για διάφορα επίπεδα. Χρησιμοποιώντας την κάτωθι εντολή στο mathematica και έχοντας στον άξονα X=VaR και στον άξονα Y=p0

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Quantile}[\mathrm{GammaDistribution}[\alpha, \lambda], \mathrm{p0}], \{\mathrm{p0}, 0.9, 0.999\}]$



(Σχήμα 2)

Βάσει διαγράμματος παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο αυξάνεται η τιμή P_0 τόσο αυξάνεται και η απώλεια.

<u>Εφαρμογή 2.5.3</u>

Υποθέτουμε ότι οι ζημιές X ακολουθούν την κατανομή Pareto με $X\sim P(\alpha,\lambda)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)=\frac{\alpha\cdot\lambda^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$$

Θεωρούμε συγκεκριμένα ότι α=2, λ=3.

Οπότε υπολογίζουμε για $p_0=95\%$ το VaR.

$$VaR[X,p]=F_X^{-1}(\mathrm{p})$$

Μέσω του Mathematica έχουμε:

$p0=0.95;\alpha1=2;\lambda1=3;\mathrm{VaR1}=\mathrm{Quantile}[\mathrm{ParetoDistribution}[\alpha1,\lambda1],\mathrm{p0}]$
$VaR1=5.428$

Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια να είναι μεγαλύτερη από 5.428

Θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσουμε την συμπεριφορά του VaR και πώς αυτό μεταβάλλεται όταν αλλάζουν οι παράμετροι της κατανομής Pareto.

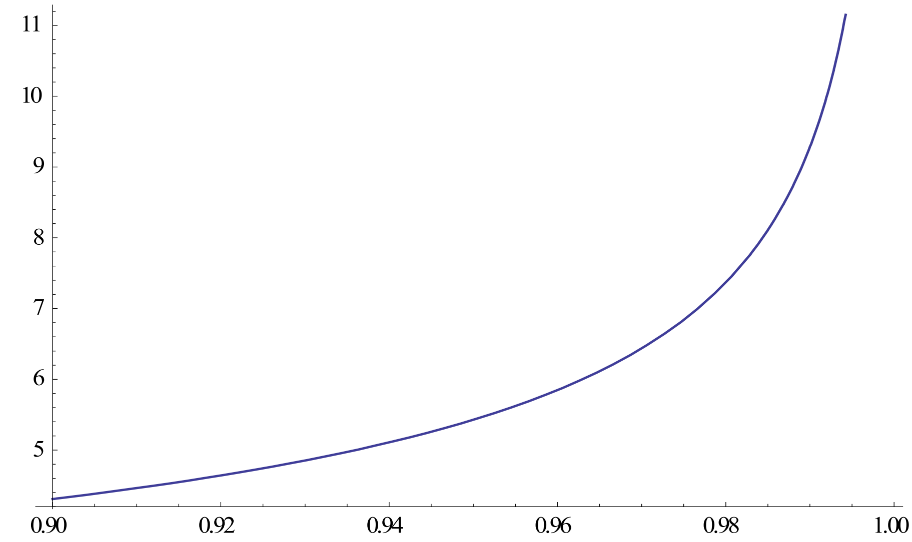
Έχουμε την Pareto (α2=4 , λ2=3)

$p0=0.95;\alpha2=4;\lambda2=3;\mathrm{VaR2}=\mathrm{Quantile}[\mathrm{ParetoDistribution}[\alpha2,\lambda2],\mathrm{p0}]$
$VaR2=10.857$

Υπάρχει λοιπόν πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια να είναι μεγαλύτερη από 10.857.

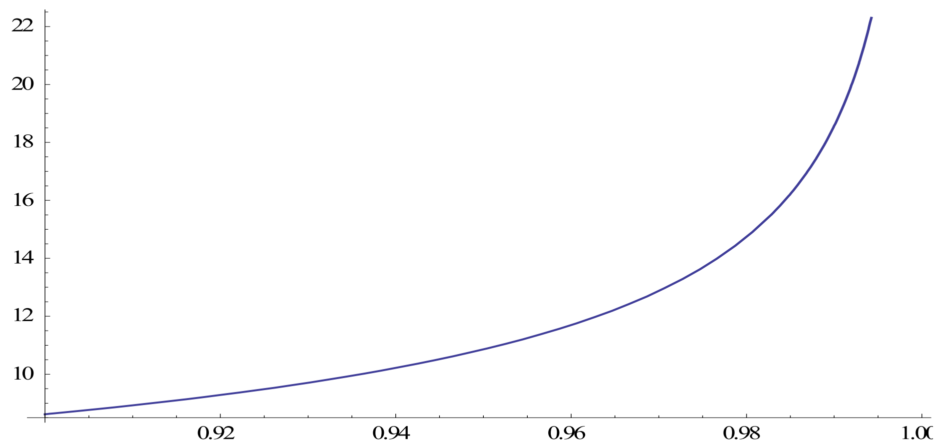
Βλέπουμε ότι αλλάζοντας την παράμετρο α κατά μια μονάδα και για το ίδιο επίπεδο πιθανότητας, η πιθανή απώλεια διπλασιάζεται. Ας αναπαραστήσουμε όμως και γραφικά την μεταβολή αυτή του VaR.

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Quantile}[\mathrm{ParetoDistribution}[\alpha1,\lambda1],p0],\{p0,0.9,0.999\}]$



(Σχήμα 3)

Plot[Quantile[ParetoDistribution[α2, λ2], p0], {p0,0.9,0.999}]



(Σχήμα 4)

Παρατηρώντας τα δυο άνω σχήματα βλέπουμε ότι αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου α κατά μια μονάδα διπλασιάζεται η πιθανή απώλεια και αυτό σαφώς επηρεάζει και την κυρτότητα της συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αξία σε κίνδυνο ουράς (TVaR) & Σχετικά Μέτρα Κινδύνου

3.1 Ορισμός (Tail Value At Risk)

Το μεμονωμένο VaR σε προκαθορισμένο επίπεδο πιθανότητας p δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με το πάχος της άνω ουράς της συνάρτησης κατανομής. Πρόκειται για σημαντικό μειονέκτημα, δεδομένου ότι στην πράξη μια ρυθμιστική αρχή δεν ενδιαφέρεται μόνο για τη συχνότητα αθέτησης, αλλά και για τη σοβαρότητα της αθέτησης. Επίσης, οι μέτοχοι και η διοίκηση θα πρέπει να ασχολούνται με το ερώτημα «πόσο κακό θα μπορούσε να προκαλέσει;» όταν θέλουν να αξιολογήσουν τους κινδύνους με συνεπή τρόπο. Λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνει ένα άλλο μέτρο κινδύνου, η αξία στον κίνδυνο ουράς (Tail Value at Risk, TVaR) που ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 3.1 Δεδομένου ενός κινδύνου X και ενός επιπέδου πιθανότητας p, το αντίστοιχο TVaR ορίζεται ως:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} VaR[X;\xi]d\xi\ ,\ \ 0 < p < 1$$

Παρατηρούμε ότι το TVaR[X;p] μπορεί να θεωρηθεί ¨αριθμητικός μέσος¨ των VaR του X από p και πάνω (Chapter 2.4.3.5, Denuit. et al. 2005).

3.2 Ιδιότητες του TVaR

Ιδιότητα 1: Το TVaR δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει εύκολα αφού το VaR είναι γνωστό ότι δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας. Συγκεκριμένα:

$$TVaR[X;p] \leq \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} max[X]d\xi = max[X]$$

Ιδιότητα 2: Το TVaR δεν προκαλεί αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας

Και αυτή η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από την αντίστοιχη του VaR:

$$TVaR[c;p] = \frac{1}{1-p}\int_{p}^{1} c\, d\xi \ = c$$

Ιδιότητα 3: Το TVaR προκαλεί μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας

Το μέτρο κινδύνου TVaR προκαλεί μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας αφού

$$TVaR[\mathrm{X};p] \geq E[\mathrm{X}]$$

για κάθε επίπεδο πιθανότητας p.

Έστω $U \sim Uni(0,1)\ \tau ό\tau\varepsilon$

$$E[\mathrm{X}] = E[F_x^{-1}(U)] = \int_0^1 F_x^{-1}(p)\, dp \ = TVaR[X;0] \qquad \textbf{(3.1)}$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι TVaR είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς επίπεδο πιθανότητας p. Αυτό αποδεικνύεται στην παρακάτω ιδιότητα.

Ιδιότητα 3.2: **Η συνάρτηση p ↔ VaR[X;p] είναι μη φθίνουσα ως προς p**

Απόδειξη: Από τον ορισμό του TVaR και χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες ολοκληρωμάτων έχουμε:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\left(\int_0^1 VaR[X;\xi]\, d\xi \ - \int_0^p VaR[X;\xi]\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{1-p}(TVaR[X;0] - \int_0^p VaR[X;\xi]\, d\xi\ )$$

Από την σχέση (3.1) ισχύει

$$TVaR[X;p] = \left(\frac{1}{1-p}\left(E[X] - \int_0^p VaR[X;\xi]\, d\xi\right)\right)$$

Παραγωγίζοντας την άνω σχέση παίρνουμε:

$$\frac{d}{dp}TVaR[X;p] = \frac{TVaR[X;p]}{1-p} - \frac{VaR[X;p]}{1-p}$$

Εφόσον η συνάρτηση p ↔ VaR[X;p] είναι μη φθίνουσα ισχύει

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]\,d\xi \ \geq \ VaR[X;p]$$

Από το οποίο προκύπτει $\frac{d}{d_p} TVaR[X;p] \geq 0$

(Θεοφάνης Δ. Πολίτης 2014).

Ιδιότητα 4: Το TVaR είναι προσθετικό ως προς τη σταθερά και θετικά ομοιογενές

Η προσθετικότητα ως προς τη σταθερά προκύπτει άμεσα από την αντίστοιχη του VaR. Συγκεκριμένα για κάθε σταθερά c ισχύει:

$$TVaR[X+c;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X+c;\xi]\,d\xi$$

$$= \frac{1}{1-p}\int_p^1 (VaR[X;\xi]+c)d\xi \ = \ TVaR[X;p]+c.$$

Αντίστοιχα προκύπτει και η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας δηλαδή ισχύει:
$TVaR[c\,\mathrm{X};p] = c\,TVaR[\mathrm{X};p]$.

Ιδιότητα 5: Το TVaR είναι συμμονοτονικά πρόσθετο

Έστω συμμονοτονικοί κίνδυνοι $X_1^c, X_1^c, \ldots, X_n^c$. Το TVaR του αθροίσματος S^c αυτών γράφεται

$$TVaR[S^C;P] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR\,[S^c;\xi]\,d\xi = \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left(\sum_{i=1}^{n} VaR[X_i;\xi])d\xi\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X_i;\xi]d\xi\right) = \sum_{i=1}^{n} TVaR\,[X_i;p], \qquad 0 < p < 1$$

που δείχνει ότι το TVaR είναι συμμονοτονικά πρόσθετο.

Ιδιότητα 6: Το TVaR είναι μονότονο

Αν $P_r[\mathrm{X} \leq Y] = 1$ τότε, από την αντίστοιχη ιδιότητα του VaR, για κάθε επίπεδο πιθανότητας p ισχύει:

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR\,[X;\xi]\,d\xi \leq \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR\,[Y;\xi]\,d\xi = TVaR[Y;p]$$

Άρα το TVaR είναι μονότονο.

Ιδιότητα 7: Το TVaR είναι υποπροσθετικό

Σε αντίθεση με το VaR, όπως απεδείχθη και μέσω παραδείγματος στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας ισχύει για το TVaR. Για την απόδειξη βλ. Chapter 2.4.3.5 στο βιβλίο των Denuit. et al. (2005).

Ιδιότητα 8: Το TVaR είναι αντικειμενικό και συνεχές όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή

Για το μέτρο κινδύνου TVaR ισχύουν οι ιδιότητες της αντικειμενικότητας και της συνέχειας όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή για τους ίδιους λόγους που ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες και για το VaR.

3.3 Βασισμένα στο TVaR οικονομικά κεφάλαια (TVaR-based economic capital)

Έστω ότι το S δηλώνει τις συνολικές απαιτήσεις ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου σε μια δεδομένη περίοδο αναφοράς και P είναι το συνολικό ασφάλιστρο για αυτό το χαρτοφυλάκιο. Ορίζουμε τις ποσότητες των ¨επιπλέον κεφαλαίων¨ ίσες με $TVaR[S;\, p] - P$, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ¨κακές στιγμές¨, ακραίες τιμές, αυτές στις οποίες το S παίρνει μια τιμή στο διάστημα:

$$[\, VaR[S;\, p], TVaR[S;\, p]\,].$$

Αντίστοιχα ως ¨κακές στιγμές¨ εκείνες στις οποίες το σύνολο των απαιτήσεων υπερβαίνει το όριο VaR[S;p], αλλά δεν χρησιμοποιούν όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο. Το πλάτος του διαστήματος είναι η ασφάλεια που χρησιμοποιείται για τις ¨κακές στιγμές¨. Για προκαθορισμένο επίπεδο πιθανότητας p, τα οικονομικά κεφάλαια βασισμένα στην TVaR ορίζονται ως (Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014):

$$EC[S;\, p] = TVaR[\mathrm{S};\, p] - E[S].$$

3.4 Σχετικά μέτρα κινδύνου

3.4.1 Δεσμευμένη προσδοκία ουράς (Conditional Tail Expectation)

Η δεσμευμένη προσδοκία ουράς (Conditional Tail Expectation) αντιπροσωπεύει την υποθετική αναμενόμενη απώλεια δεδομένου ότι η απώλεια αυτή υπερβαίνει ένα καθορισμένο ποσοστημόριο. Ουσιαστικά αυτό που εκφράζει η δεσμευμένη προσδοκία ουράς είναι την μέση τιμή του μεγέθους των ζημιών που υπερβαίνουν το αντίστοιχο VaR. Ο ορισμός της είναι ο εξής:

$$CTE[X;p] = E[X|X > VaR[X;p]] \tag{3.2}$$

Η δεσμευμένη προσδοκία ουράς θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μαθηματική έκφραση της έννοιας του «μέσου όρου των χειρότερων $100(1-p)\%$ περιπτώσεων ». Ειδάλλως, ίσως θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν ορίσουμε ένα όριο απώλειας $c = VaR[X;p]$, το οποίο αντιστοιχεί σ 'ένα επίπεδο πιθανότητας p, τότε διαπιστώνουμε ότι η CTE[X;p] παρέχει ένα "μαξιλάρι προστασίας" κατά της μέσης τιμής των ζημιών που υπερβαίνουν το κρίσιμο σημείο c (Πολίτης Θεοφάνης Δ. 2014).

3.4.2 Δεσμευμένη αξία σε κίνδυνο VaR (Conditional VaR)

Πρόκειται για ένα μέτρο κινδύνου εναλλακτικό του CTE. Είναι το δεσμευμένο VaR (Conditional VaR, CVaR). Το μέτρο κινδύνου CVaR δηλώνει την αναμενόμενη τιμή ζημιών που υπερβαίνουν το VaR. Δηλαδή:

$$CVaR[X;p] = E[X - VaR[X;p]|X > VaR[X;p]] = CTE[X;p] - VaR[X;p] \tag{3.3}$$

3.4.3 Αναμενόμενο έλλειμμα (Expected Shortfall)

Αυτό το μέτρο κινδύνου ES είναι πολύ γνωστό στους αναλογιστές, αν και είναι συνήθως γνωστό στους αναλογιστικούς κύκλους ως η υπό όρους προσδοκία ουράς (στη Βόρεια Αμερική) ή η ουρά VaR (στην Ευρώπη). Στις αναφορές χρηματοοικονομικού κινδύνου, έχει χαρακτηριστεί ποικιλοτρόπως ως Αναμενόμενη Απώλεια ουράς (Expected Tail Loss), Δεσμευμένη προσδοκία ουράς (Tail Conditional Expectation), Δεσμευμένο VaR (Conditional VaR), Δεσμευμένη Προσδοκία Ουράς VaR (Tail Conditional VaR) και Χειρότερη Δεσμευμένη προσδοκία (Worst Conditional Expectation). Έτσι, δεν υπάρχει συνέπεια της ορολογίας ούτε στα αναλογιστικά έντυπα ούτε στα έντυπα διαχείρισης χρηματοοικονομικού κινδύνου.

Το ES είναι ένα ελκυστικό μέτρο κινδύνου για διάφορους λόγους εκτός από τη συνοχή του. Έχει κάποιες πολύ φυσικές εφαρμογές στην ασφάλιση (π.χ. είναι ένα προφανές μέτρο που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε την κάλυψη που απαιτείται για μια αντασφαλιστική συνθήκη υπέρβασης ζημιών ή περισσότερο γενικά, όταν πρόκειται για τα αναμενόμενα μεγέθη ζημιών που υπερβαίνουν ένα όριο. Συγκεκριμένα το λεγόμενο αναμενόμενο έλλειμα ES σε ένα επίπεδο πιθανότητας p, μπορεί να είναι το ασφάλιστρο απαλοιφής ζημιάς (stop-loss premium) με όριο κατακράτησης VaR[X;p].Συγκεκριμένα έχουμε την :

$$\mathrm{ES}[\mathrm{X};\mathrm{p}] = \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}]_{+})$$

(Kevin Dowd & David Blake 2006).

3.4.4 Χρήσιμες σχέσεις μεταξύ των μέτρων κινδύνου

Για κάθε επίπεδο πιθανότητας $p \in (0,1)$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathrm{TVaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}] = \mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}] + \frac{1}{1-\mathrm{p}}\mathrm{ES}[\mathrm{X};\mathrm{p}] \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$\mathrm{CTE}[\mathrm{X};\mathrm{p}] = \mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}] + \frac{1}{\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}])}\mathrm{ES}[\mathrm{X};\mathrm{p}] \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$\mathrm{CVaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}] = \frac{ES[X;p]}{\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}])} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Η σχέση (3.4) προκύπτει από την απόδειξη της κάτωθι σχέσης:

$$ES[X;p] = \int_0^1 (VaR[X;\xi] - VaR[X;p])_{+} d\xi = \int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi - VaR[X;p](1-p)$$

Η σχέση (3.4) προκύπτει από:

$$ES[X;p] = E[X - VaR[X;p]|X > \mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}]]\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}]),$$

ενώ η έκφραση (3.5) προκύπτει από τις σχέσεις (3.3) και (3.5) Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts and R. Kaas (2005).

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι στις συνεχείς κατανομές ισχύει ότι:

$$\mathrm{TVaR}[\mathrm{X};\mathrm{p}] = \mathrm{CTE}[\mathrm{X};\mathrm{p}]$$

(βλ. και τα παράδειγματα στην συνέχεια).

3.5 Εφαρμογή υπολογισμού TVaR, CTE, ES, CVaR

Εφαρμογή 3.5.1

- ***Υπολογισμός VaR***

Υποθέτουμε ότι οι ζημιές X ακολουθούν την κατανομή $X \sim Exp(\lambda)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

Θεωρούμε συγκεκριμένα ότι $\lambda = 2$.

Οπότε υπολογίζουμε σε επίπεδο πιθανότητας $p_0 = 95\%$ το VaR που δίνεται από τον τύπο:

$$VaR[X, p] = F_X^{-1}\,(p)$$

Μέσω του Mathematica έχουμε:

$\mathrm{p0} = 0.95; l = 5; \mathrm{VaR} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{ExponentialDistribution}[l], \mathrm{p0}]$
$\boldsymbol{VaR} =$ 1.497

Σύμφωνα με το άνω αποτέλεσμα υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια να είναι μεγαλύτερη από 1.497

- ***Υπολογισμός TVaR***

Το TVaR δίνεται από τον τύπο,

$$TVaR = \frac{1}{1 - p_0} \int_{p_0}^{1} VaR(u) du$$

και ο υπολογισμός του μέσω του Mathematica είναι:

$\mathrm{TVaR} = (1/(1 - \mathrm{p0})) * \mathrm{Integrate}[\mathrm{Quantile}[\mathrm{ExponentialDistribution}[l], u], \{u, \mathrm{p0}, 1\}]$
TVaR=1.997

- ***Υπολογισμός του CTE***

Το CTE δίνεται από τον τύπο

$$CTE = \frac{1}{1 - p_0} \int_{VaR}^{\infty} x \cdot f(p) dp$$

και ο υπολογισμός του μέσω του Mathematica είναι:

$\mathrm{CTE} = (1/(1 - \mathrm{p0})) * \mathrm{Integrate}[x * \mathrm{PDF}[\mathrm{ExponentialDistribution}[l], x], \{x, \mathrm{VaR}, +\infty\}]$
CTE = 1.997

Παρατηρούμε ότι για τις συνεχείς κατανομές ισχύει όντως ότι CTE=TVaR.

Άρα, η μέση τιμή του μεγέθους των ζημιών που υπερβαίνουν το αντίστοιχο VaR υπάρχει πιθανότητα 5% να είναι μεγαλύτερη από είναι 1.997

- **Υπολογισμός του CVaR**

$\mathbf{CVaR} = \mathrm{CTE} - \mathrm{VaR}$
$\mathbf{CVaR} = 0.5$

Η αναμενόμενη τιμή ζημιών που υπερβαίνουν το VaR είναι 0.5

- ***Υπολογισμός του ES***

Δίνεται από τον τύπο,

$$ES = \int_{VaR}^{\infty} (x - VaR) f(p) dp$$

Άρα,

$\mathrm{ES} = \mathrm{Integrate}[(x - \mathrm{VaR}) * \mathrm{PDF}[\mathrm{ExponentialDistribution}[l], x], \{x, \mathrm{VaR}, +\infty\}]$
$\mathrm{ES} = 0.025$

Επομένως το αναμενόμενο έλλειμμα υπάρχει πιθανότητα 5% να είναι μεγαλύτερο από 0.025

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συλλογικό πρότυπο & θεωρία χρεοκοπίας

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια εισαγωγή στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων. Θα αναφερθούμε στη χρησιμότητα της μελέτης της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων καθώς και στον τρόπο υπολογισμού αυτής της κατανομής. Επίσης, θα εξεταστεί το πρόβλημα της χρεοκοπίας καθώς και η σημαντικότητά του στις επιχειρήσεις και οργανισμούς.

4.1 Εισαγωγή στο συλλογικό πρότυπο θεωρίας κινδύνων

Το συλλογικό πρότυπο που εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο είναι ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα στην θεωρία κινδύνων και στην αναλογιστική επιστήμη. Εκτός από το ενδιαφέρον που παρουσιάζει καθαυτό, το συλλογικό πρότυπο αποτελεί την βάση για την θεωρία χρεοκοπίας με την οποία θα ασχοληθούμε στην συνέχεια.

Ας φανταστούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο πρόκειται να τεθεί άμεσα σε ισχύ π.χ. ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης κατοικίας ή ζημιών αυτοκινήτων. Θωρούμε ότι εξετάζουμε τη λειτουργία αυτού του χαρτοφυλακίου σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, π.χ. ένα έτος. Το κύριο ενδιαφέρον για την ασφαλιστική εταιρεία δεν βρίσκεται στην κάθε ζημιά που θα προκύψει από τις ατομικές απαιτήσεις των πελατών, αλλά στο συνολικό ποσό που θα χρειαστεί να καταβάλλει γι' αυτές τις απαιτήσεις στο διάστημα που εξετάζουμε. Για την μελέτη του συνολικού ποσού των αποζημιώσεων έστω S, που θα κληθεί να πληρώσει η εταιρεία, υπάρχουν δυο βασικές πηγές αβεβαιότητας (Κ. Πολίτης 2012):

- Το πλήθος των απαιτήσεων που θα φτάσουν στην εταιρεία.
- Τα μεγέθη των απαιτήσεων αυτών.

Καθεμιά από αυτές τις ποσότητες, εφόσον δεν είναι γνωστή η τιμή της εκ των προτέρων, παριστάνεται με μια τυχαία μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε και οι υποθέσεις που κάνουμε στο συλλογικό πρότυπο έχουν ως εξής:

i) Το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων που φτάνουν στην εταιρεία κατά το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε παριστάνεται με μία διακριτή τυχαία μεταβλητή Ν, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0,1,2,\ldots\}$.

ii) Τα μεγέθη των αποζημιώσεων συμβολίζονται με $X_1, X_2, \ldots$. Θεωρούμε ότι οι X_ι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την ίδια κατανομή F. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι, όπως θα δούμε, είτε συνεχής είτε διακριτή.

Από την σκοπιά της ασφαλιστικής εταιρείας, το κύριο ενδιαφέρον αφορά τις συνολικές απαιτήσεις που θα κληθεί να πληρώσει κατά την διάρκεια της λειτουργίας του χαρτοφυλακίου. Με βάση τα παραπάνω, έχουμε ότι το μέγεθος S αυτών των συνολικών απαιτήσεων δίνεται από την σχέση (Κ. Πολίτης 2012):

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i & \alpha\nu\ N = 1,2,\ldots \\ 0, & \alpha\nu\ N = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4.1)}$$

Μερικές φορές γράφουμε απλώς S= $\sum_{i=1}^{N} X_i$, και είναι σαφές ότι S=0 αν N=0 (αν δεν έρθει καμία απαίτηση, το ποσό που θα καταβάλει η εταιρεία είναι μηδέν).

Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε αμέσως ότι η S είναι μια σύνθετη τυχαία μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν η μεταβλητή N που δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson, τότε η κατανομή της S είναι μια σύνθετη Poisson.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι η F δηλώνει την κοινή συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων X_i (οι οποίες αναφέρονται συχνά ως ατομικές απαιτήσεις), ενώ

$$p_n = P(N = n), n = 0,1,2, \ldots$$

είναι η συνάρτηση πιθανότητας για το πλήθος N των απαιτήσεων που φτάνουν στην εταιρεία στο χρονικό διάστημα που εξετάζουμε (Κ. Πολίτης 2012).

4.1.1 Η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στην κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S που παριστάνει το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων στο συλλογικό πρότυπο.

Έστω

$$G(x) = P(S \leq x), \qquad x \geq 0$$

η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής S. Για την μελέτη αυτής της κατανομής, αναφέρουμε αρχικά το παρακάτω βασικό αποτέλεσμα, το οποίο μας δείχνει ότι η G(x) μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα δυναμοσυνελίξεων της F, όπου η δυναμοσυνέλιξη τάξης n είναι πολλαπλασιασμένη με την πιθανότητα P(N=n).

Για τη συνάρτηση κατανομής G(x) των συνολικών αποζημιώσεων ισχύει η σχέση

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \;\; x \geq 0$$

Για n=0, η συνέλιξη $F^{*0}(x)$ εδώ ορίζεται ως εξής $F^{*0}(x) = 0 \; για \; x < 0$, ενώ για $x \geq 0$ έχουμε $F^{*0}(x) = 1$.

Επίσης η συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται ως $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \;\; x \geq 0$

4.1.2 Η σύνθετη κατανομή Poisson

Η συνηθέστερη υπόθεση που κάνουμε στο συλλογικό πρότυπο κινδύνου για την τυχαία μεταβλητή N (πλήθος των αποζημιώσεων), είναι ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S είναι μια σύνθετη Poisson. Θέτοντας ως $\mu_\kappa = E(X_i^k)$ για τη ροπή k-τάξης (γύρω από το μηδέν) της κατανομής F, η μέση τιμή και η διακύμανση των συνολικών αποζημιώσεων προκύπτουν άμεσα. Συγκεκριμένα, για τη μέση τιμή της S παίρνουμε ότι

$$E(S) = E(N) \cdot E(X_i) = \lambda\mu_1 \tag{4.2}$$

Ενώ για την διακύμανση προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$Var(S) = E(N) \cdot (\mu_2 - \mu_1^2) + \mu_1^2 . Var(N) = \lambda\mu_2 \tag{4.3}$$

Εφόσον η $N \sim Poisson$ ισχύει ότι E(N) = Var (N) = λ. Επομένως, η δεύτερη ροπή της S γύρω από το μηδέν θα είναι

$$E(S^2) = [[E(S)]^2 + Var(S) = (\lambda\mu_1)^2 + \lambda\mu_2 \tag{4.4}$$

Παραπάνω υπολογίστηκαν η μέση τιμή και η διακύμανση των συνολικών αποζημιώσεων.

Για τη ροπογεννήτρια της σύνθετης Poisson έχουμε:

$$M_S(t) = exp[\lambda(M_\chi(t) - 1)]$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά την σχέση αυτή μπορούμε να βρούμε τη ροπή οποιασδήποτε τάξης για την κατανομή της S (με την υπόθεση ότι υπάρχει αυτή η ροπή).

Για την καλύτερη κατανόησή των παραπάνω ας εξετάσουμε τις κάτωθι εφαρμογές.

<u>Εφαρμογή 4.1.2.1</u>

Ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο παράγει σ 'ένα έτος απαιτήσεις N, ο αριθμός των οποίων έχει την παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P_r(N = n)$

n	$\mathbf{p_n}$
0	0.1
1	0.5
2	0.4

(Πίνακας 1)

Τα μεγέθη των ατομικών ζημιών X σε χιλιάδες ευρώ έχουν την παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P_r(X = x)$$

x	**f(x)**
5	0.7
10	0.2
15	0.1

(Πίνακας 2)

Αν τυχαίες μεταβλητές N και X είναι ανεξάρτητες, ζητάμε την αναμενόμενη συνολική ζημιά E(S) και την διακύμανση συνολικής ζημιάς V(S).

Επίλυση

Αν S οι συνολικές ζημίες του ασφαλιστηρίου, τότε:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Άρα,

$$\mathrm{E(N)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{2} \mathrm{np_n} = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.4 = 1.3$$

$$\mathrm{E(N^2)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{2} \mathrm{np_n} = 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.4 = 2.1$$

$$\mathrm{Var(N)} = \mathrm{E(N^2)} - \mathrm{E^2(N)} = 2.1 - 1.3 = 0.8$$

και επομένως από τον πίνακα 2 έχουμε:.

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{X}} \mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)} = 5 \cdot 0.7 + 10 \cdot 0.2 + 15 \cdot 0.1 = 7$$

$$E(X^2) = \sum_{x} x^2 f(x) = 5^2 \cdot 0.7 + 10^2 \cdot 0.2 + 15^2 \cdot 0.1 = 60$$

$$Var(X) = \mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E^2(X)} = 60 - 7^2 = 11$$

Άρα $\mathbf{E(S)} = \mathrm{E(X)} \cdot \mathrm{E(N)} = 7 \cdot 1.3 = \mathbf{9.1}$ **χιλιάδες €**

Για τον υπολογισμό Var(S) θα χρησιμοποιήσουμε την κάτωθι σχέση:

$\boldsymbol{Var(S)} = Var(X)E(N) + E(X^2)Var(N) = (11 \cdot 1.3) + (60 \cdot 0.8) = \mathbf{62.3}$

<u>Εφαρμογή 4.1.2.2</u>

Ο αριθμός των ζημιών ενός χαρτοφυλακίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ>0 και το μέγεθος ατομικής ζημιάς είναι η τυχαία μεταβλητή X όπου:

$$P(X = 1) = 0.7$$

$$P(X = 4) = 0.3$$

Οι τυχαίες μεταβλητές N και X είναι ανεξάρτητες. Έστω λοιπόν S οι συνολικές ζημιές του χαρτοφυλακίου. Να υπολογισθεί η αναμενόμενη απώλεια E(S) του χαρτοφυλακίου.

<u>Επίλυση</u>

Θεωρούμε ότι, η τυχαία μεταβλητή ***N:*** *συμβολίζει των αριθμό ζημιών του χαρτοφυλακίου.*

Όπου $N \sim P(\lambda)$ $και$ $E(N) = Var(N) = \lambda$

Η τυχαία μεταβλητή ***X:*** *συμβολίζει το μέγεθος ατομικής ζημιάς.*

Το E(S) υπολογίζεται εύκολα από την σχέση:

$$E(S)= E(N) \cdot E(X) \quad \textbf{(4.5)}$$

Επομένως αρκεί ο υπολογισμός της ποσότητας E(X):

$$E(X) = \sum_x x \cdot f(x) = (1 \cdot 0.7) + (4 \cdot 0.3)=1.9$$

Μέσω της σχέσης (4.5) έχουμε τελικά ότι:

E(S)=1.9λ

4.2 Το συλλογικό πρότυπο με αντασφάλιση

Οι δυο κυριότερες μορφές αντασφάλισης είναι η αναλογική αντασφάλιση (proportional reinsurance) και η αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας (excess of loss reinsurance). Παρουσιάζουμε στη συνέχεια κάποια χαρακτηριστικά του συλλογικού προτύπου στην περίπτωση που ο συλλογικός κίνδυνος S, για ένα χαρτοφυλάκιο που εξετάζουμε, καλύπτεται από κάποια από τις δύο μορφές αντασφάλισης. Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρούμε ότι ο συνολικός κίνδυνος επιμερίζεται στη μορφή

$$S = S_I + S_R,$$

όπου S_I είναι το συνολικό ποσό το οποίο καταβάλλει η ασφαλίστρια εταιρεία (πρωτασφαλίστρια) και S_R το τμήμα του συνολικού κινδύνου το οποίο καλύπτεται από την αντασφαλίστρια εταιρεία (Κ. Πολίτης 2012).

Α. Αναλογική αντασφάλιση

Σ' ένα σχήμα αναλογικής αντασφάλισης, ο πρωτασφαλιστής εκχωρεί ένα σταθερό ποσοστό κάθε κινδύνου στην αντασφαλίστρια εταιρεία. Το ποσοστό του κινδύνου το οποίο πληρώνεται από τον πρωτασφαλιστή (ποσοστό ιδίας κράτησης), αν εκφραστεί σαν δεκαδικός αριθμός μεταξύ 0 και 1, συμβολίζεται με α, οπότε για ένα συνολικό κίνδυνο S, έχουμε ότι

$$S_I = \alpha S, \qquad S_R = (1-\alpha)S$$

(εφόσον ο πρωτασφαλιστής πληρώνει ποσοστό 100α% για κάθε ατομικό κίνδυνο X_i, θα είναι υπεύθυνος ακριβώς για το ίδιο ποσοστό του συνολικού κινδύνου S-αντίστοιχα για τον αντασφαλιστή (Κ. Πολίτης 2012)).

Β. Αντασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας

Σε μια αντασφαλιστική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημίας με ιδία κράτηση του πρωτασφαλιστή m, το ποσό που καταβάλει η πρωτασφαλίστρια εταιρεία για έναν κίνδυνο X_i είναι:

$$Y_i^I = \begin{cases} X_i, & \alpha\nu \ X_i \le m \\ m, & \alpha\nu \ X_i > m \end{cases}$$

Αν η N δηλώνει τον αριθμό των απαιτήσεων που φτάνουν στην πρωτασφαλίστρια εταιρεία, τότε το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων που καταβάλλει η εταιρεία παριστάνεται από τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} Y_i^I = \sum_{i=1}^{N} min\{X_i, m\}$$

με $S_I = 0 \ \acute{o}\tau\alpha\nu \ N = 0,$

Ενώ το συνολικό ποσό που καταβάλει η αντασφαλίστρια εταιρεία

$$S_R = \sum_{i=1}^{N} max\{0, X_i - m]$$

με $\boldsymbol{S_R = 0}$ ό$\boldsymbol{\tau\alpha\nu \ N = 0}$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ποσότητα S_R μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν (ο αντασφαλιστής δεν πληρώνει τίποτε) ακόμη και όταν N>0. Αυτό μπορεί να ανέβει όταν έρθουν n>0 απαιτήσεις στο χαρτοφυλάκιο και κάθε μια από αυτές είναι μικρότερη από m. Κατά συνέπεια, μπορούμε να μελετήσουμε την κατανομή της μεταβλητής $\boldsymbol{S_R}$ με δυο τρόπους.

Ο ένας είναι θεωρώντας την κατανομή αυτή σαν μια σύνθετη κατανομή, με βάση την τελευταία σχέση, έτσι ώστε οι ατομικοί κίνδυνοι είναι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_i^R = max\{0, X_i - m\}$. Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή των ατομικών κινδύνων έχει μια μάζα στο μηδέν, δηλαδή κάποιες από τις N απαιτήσεις που θα σημειωθούν μπορεί να είναι μηδενικές (Κ. Πολίτης 2012).

Ο άλλος τρόπος για να μελετήσουμε την $\boldsymbol{S_R}$ είναι σαν ένα άθροισμα μη-μηδενικών κινδύνων. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τυχαία μεταβλητή N_R η οποία παριστάνει το πλήθος των (μη μηδενικών) απαιτήσεων που φτάνουν στον αντασφαλιστή, δηλαδή ο αριθμός των απαιτήσεων που είναι μεγαλύτερες m. Τότε μπορούμε να γράψουμε την S_R σαν ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού μεταβλητών ως εξής:

$$S_R = \sum_{i=1}^{N_R} \widetilde{X_\iota},$$

όπου οι μεταβλητές $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \ldots . \tilde{X}_{N_R}$ δηλώνουν τα ποσά που καταβάλλει η αντασφαλίστρια εταιρεία για καθεμιά από τις απαιτήσεις οι οποίες υπερβαίνουν την τιμή m (Κ. Πολίτης 2012).

4.2.1 Αναδρομικός τύπος του Panjer

Αν και η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων δεν είναι γενικά εύκολο να υπολογιστεί, στην περίπτωση που τα ατομικά μεγέθη των απαιτήσεων παίρνουν ακέραιες και μη αρνητικές τιμές υπάρχει ένας αναδρομικός τύπος που επιτρέπει τον υπολογισμό της κατανομής αυτής. Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή του πλήθους των απαιτήσεων ανήκει σε μια ειδική κατηγορία διακριτών κατανομών. Μια διακριτή κατανομή $\{\{p_n$: n= $0,1,2\ldots\}$ ορισμένη στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση κατανομών (a,b,0) όταν η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής αυτής ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο:

$$\mathrm{p_n} = (\mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}})\mathrm{p_{n-1}}, \qquad \mathrm{n} = 1,2\ldots.$$

Εδώ τα a, b μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, ενώ η παρουσία του αριθμού 0 σαν τρίτο χαρακτηριστικό αυτής της κλάσης δικαιολογείται από το γεγονός ότι για n=1, η παραπάνω αναδρομική σχέση ξεκινά ουσιαστικά από την πιθανότητα p_0 στο δεξιό μέλος.Είναι σαφές ότι αν μια κατανομή ανήκει στην παραπάνω κλάση, τότε θα πρέπει να είναι $p_0 > 0$,δηλαδή να έχει θετική μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν (διαφορετικά προκύπτει $p_n = 0$ για κάθε n=1,2,…) (Κ. Πολίτης 2012).

4.3 Υπολογισμός Value at Risk στο Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε τι είναι το Value at Risk, κάποιες χρήσιμες ιδιότητές του καθώς και μεθόδους εκτίμησής του. Συγκεκριμένα στο 3^{ο} κεφάλαιο υπολογίσαμε το VaR για ένα κίνδυνο X που γνωρίζαμε ότι ακολουθούσε μια συγκεκριμένη κατανομή (π.χ.: Pareto). Τι γίνεται όμως όταν έχουμε ένα τυχαίο πλήθος κινδύνων; Πώς θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε το VaR ενός χαρτοφυλακίου με N πλήθος κινδύνων; Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στα ανωτέρω ερωτήματα θα δούμε στην συνέχεια διάφορα παραδείγματα υπολογισμού του VaR.

4.3.1 Μετασχηματισμός Laplace

Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών, εμφανίζονται διαφορικές (ή άλλου είδους) εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τον τρόπο μεταβολής ορισμένων ποσοτήτων ως προς το χρόνο. Ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση αυτών των προβλημάτων είναι ο μετασχηματισμός Laplace, με τη βοήθεια του οποίου, η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια απλή αλγεβρική εξίσωση. Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιεί ευρέως τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό. Δυο είδη μετασχηματισμών που συχνά αναφέρονται με το ίδιο όνομα ή και το ίδιο σύμβολο είναι οι κάτωθι:

- Έστω F μια συνάρτηση κατανομής για την οποία ισχύει F(0-)=0, δηλαδή η F είναι η συνάρτηση κατανομής μιας μεταβλητής που παίρνει μη αρνητικές τιμές. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της F συμβολίζεται με L_F και ορίζεται για κάθε s≥ 0 από την σχέση

$$L_F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x).$$

- Έστω $f: [0, \infty) \to R$ τοπικά ολοκληρώσιμη (δηλ. σε πεπερασμένα διαστήματα). Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f συμβολίζεται με $\hat{f}(s)$ και είναι

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \quad s \geq 0.$$

4.3.2 Εκτίμηση VaR σε ένα μοντέλο Compound Poisson

Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος ζημιών N μιας χρονικής περιόδου σ' ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων κινδύνων ακολουθεί μια κατανομή Poisson και το ύψος των ατομικών ζημιών X_i ακολουθεί μια οποιαδήποτε κατανομή.

Έστω η συνολική απώλεια S όπου:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

και G(X) η συνάρτηση κατανομής και g(x) η συνάρτηση πιθανότητας της S.

Για να υπολογίσουμε την κατανομή της συνολικής απώλειας S μπορούμε να την βρούμε με δυο διαφορετικούς τρόπους:

α) Αν η μεταβλητή X είναι συνεχής τότε εφαρμόζουμε την βασική μέθοδο των συνελίξεων

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^{*n}(x)$$

β) Αν η μεταβλητή X είναι διακριτή, τότε μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$g(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{y=1}^{x} y f(y) g(x-y), \qquad x \geq 1 \quad g(0) = e^{-\lambda[1-f(0)]} \ \kappa\alpha\iota \ g(x) = 0 \ \forall \ x < 0$$

Οπότε βρίσκοντας την κατανομή της συνολικής απώλειας g(x) στην συνέχεια εύκολα υπολογίζοντας την G(x) μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο VaR σε επίπεδο πιθανότητας 95% ή 90% κτλ.

4.4 Θεωρία Χρεοκοπίας

Η θεωρία χρεοκοπίας (ruin theory) αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της θεωρίας συλλογικού κινδύνου (collective risk theory), η οποία μελετά τις μεταβολές στα έσοδα, τα έξοδα αλλά και την μεταξύ τους σχέση σε βάθος χρόνου ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου (Κ. Πολίτης 2012). Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση συγκροτεί και διατηρεί συνεχώς επαρκές διαθέσιμο περιθώριο φερεγγυότητας, ανάλογο προς το σύνολο των δραστηριοτήτων της, που αντιστοιχεί σε περιουσία ελεύθερη από υποχρεώσεις που δεν μπορούν να προβλεφθούν, χωρίς να υπολογίζονται στην περιουσία αυτή τα άυλα περιουσιακά της στοιχεία. Το διαθέσιμο αυτό περιθώριο φερεγγυότητας, στην περίπτωση μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, υπολογίζεται σε συνάρτηση είτε προς το ετήσιο ποσό των ασφαλίστρων, είτε προς τη μέση επιβάρυνση των ασφαλισμάτων. Καθορίζεται ουσιαστικά με τα δύο από τα μεγαλύτερα αποτελέσματα εργασιών της ασφαλιστικής επιχείρησης που βασίζονται στα ασφάλιστρα και τις αποζημιώσεις.

Η Αναλογιστική επιστήμη καλείται να συνδράμει στην αξιολόγηση του συνολικού κινδύνου από καταστροφικά γεγονότα σε σχέση με τα συνολικά αποθέματα και πλεονάσματα της ασφαλιστικής εταιρίας. Οι Αναλογιστικοί Οργανισμοί ιδρύθηκαν για να στηρίξουν και να προωθήσουν τις μεθόδους της αναλογιστικής επιστήμης. Το κομμάτι των Αναλογιστικών μαθηματικών που ασχολείται με την πιθανότητα να χρεοκοπήσει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο αποτελεί κλάδο της θεωρίας κινδύνων και η ειδικότερη ανάλυση των ζητημάτων που ανακύπτουν καλύπτεται από αναλύσεις υπό τον τίτλο θεωρία χρεοκοπίας.

Η διαχείριση κινδύνου αναφέρεται ως μια από τις πιο σημαντικές καινοτομίες του 20ου αιώνα. Βασικό αντικείμενο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι η μελέτη τόσο των εξόδων όσο και των εσόδων μιας ασφαλιστικής εταιρίας καθώς και το πώς οι ποσότητες αυτές μεταβάλλονται στον χρόνο. Οι βασικές ποσότητες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά το χρόνο της χρεοκοπίας.

Η Θεωρία Συλλογικών Κινδύνων εμφανίστηκε για πρώτη φορά στις αρχές του 20ου αιώνα με την διδακτορική διατριβή του Σουηδού Fillip Lundberg (1903) με τίτλο “Approximations of the Probability Function/ Reinsurance of Collective Risks”. Βασιζόμενος στην διατριβή του Lundberg, το 1929, ο επίσης Σουηδός Cramer εισήγαγε την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνων. Με βάση τις δημοσιεύσεις των δυο Σουηδών δημιουργήθηκε το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ή μοντέλο των Cramer-Lundberg με κύριο χαρακτηριστικό ότι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται από μια ανέλιξη Poisson. Το μοντέλο αυτό περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στο χρόνο με κεντρική εστίαση στο αν κάποια στιγμή το πλεόνασμα (έσοδα – έξοδα) κινδυνεύει να γίνει αρνητικό. Για να αποφευχθεί αυτό η ασφαλιστική χρησιμοποιεί ένα αρχικό αποθεματικό αφού ως γνωστό κάθε ασφαλιστική επιχείρηση κατά την έναρξη των εργασιών της υποχρεούται απο το νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί το πλεόνασμα της εταιρείας κατά την έναρξη των εργασιών της.

Πρέπει να τονίσουμε ότι παρακολουθούμε τα έξοδα (αποζημιώσεις) της εταιρείας καθώς αυτά εξελίσσονται διαρκώς, όχι μόνο στο τέλος λειτουργίας του χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με το μοντέλο των Cramer-Lundberg, το πλήθος των κινδύνων θεωρείται οτι ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Κατά συνέπεια οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Οι Gerber και Shiu το 1998, ανέλυσαν τη συμπεριφορά του πλεονάσματος μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής (expected discounted penalty function). Η συνάρτηση αυτή δίνει την δυνατότητα από κοινού μελέτης του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείματος ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας και του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία. Παρακάτω θα ορίσουμε και θα αναπτύξουμε τις βασικές έννοιες του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας.

4.4.1 Βασικές αρχές

Στη Θεωρία Χρεοκοπίας, όπως έχει αναφερθεί, εξετάζουμε όχι μόνο τα έξοδα (αποζημιώσεις), αλλά και τα έσοδα μιας ασφαλιστικής εταιρεία ή χρηματοοικονομικού οργανισμού. Η μελέτη των εσόδων καθώς και τον εξόδων γίνεται τώρα όχι σε έναν προκαθορισμένο χρονικό ορίζοντα (οπότε μας ενδιαφέρει η τιμή τους στην αρχή και στον τέλος του χρονικού διαστήματος που εξετάζουμε). Αντίθετα, παρακολουθούμε την πορεία τους καθώς αυτές μεταβάλλονται χρονικά. Θεωρούμε το ύψος ατομικής ζημιάς ως τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), έστω X, η οποία μοντελοποιείται από τα προηγούμενα έτη εμπειρίας και αναφέρεται σε ομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου (Πολίτης Κ., 2012).

Για την μοντελοποίηση της κατανομής της ατομικής ζημιάς εργαζόμαστε με βάση τον έλεγχο καλής προσαρμογής χ^2 του Pearson μιας κατανομής που υποθετικά θεωρούμε ότι προσαρμόζεται στα δεδομένα (μηδενική υπόθεση) που έχουν προκύψει από προηγούμενα έτη εμπειρίας. Σε ότι αφορά το πλήθος ζημιών στη μονάδα χρόνου (π.χ. ένα έτος), πρόκειται για επίσης τυχαία μεταβλητή, έστω N , η οποία θεωρούμε συχνά ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson, με στόχο να αναδείξει το μέγιστο βαθμό τυχαιότητας. Η συνάρτηση πιθανότητας της Poisson με παράμετρο λ>0 είναι:

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2 \ldots.$$

με διασπορά και μέση τιμή ίσες με λ. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, t \in R$$

Η παράμετρός της είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών στη μονάδα του χρόνου, έστω λ>0, και προσδιορίζεται από την εμπειρία ή άλλες πιο σύνθετες μεθόδους εκτίμησης πλαισιωμένες από έλεγχο υπόθεσης αναφορικά με την ορθή επιλογή στην τιμή της παραμέτρου αυτής. Σε ότι αφορά τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ >0 είναι ο δειγματικός μέσος του πλήθους ζημιών των ν-προηγούμενων μοναδιαίων περιόδων:

$$\hat{\lambda} = \bar{N} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} N_i$$

όπου N_i είναι το παρατηρηθέν πλήθος ζημιών την i μονάδα χρόνου, i=1,…,ν, για ν το πλήθος μετρήσεων. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ>0 είναι αμερόληπτος και ελάχιστης διασποράς (Πολίτης Κ., 2012). Όπου η παράμετρος λ>0 δύναται να είναι και η ίδια μια τυχαία μεταβλητή, η οποία μεταβάλλεται μεταξύ των συνθηκών. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των ζημιών N παριστάνεται με μια δεσμευμένη κατανομή $N|\lambda$ ~Poisson(λ), όπου λ είναι μια τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί μια άλλη κατανομή. Σε αυτήν την περίπτωση ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών ανεξάρτητα της παραμέτρου λ είναι:

$$E(N) = E[E(N|\lambda)] = E(\lambda)$$

και η διασπορά αντίστοιχα,

$$Var(N) = Var[E(N|\lambda)] + E[Var(N|\lambda)] = Var(\lambda) + E(\lambda)$$

Η επέκταση της μελέτης σε χρονικό διάστημα (0, t), t>0 επαναπροσδιορίζει το πλήθος των ζημιών, δηλαδή $N(t)$ η οποία μοντελοποιείται από μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ. Σε αυτή την περίπτωση η σημασιολογία της παραμέτρου λ>0 επεκτείνεται στην αναφορά της έντασης για το πλήθος των ζημιών. Η ένταση ζημιών λ αναφέρεται σε χαρτοφυλάκιο ομοιογενών κινδύνων. Για παράδειγμα, η ένταση για το πλήθος ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών αυτοκινήτου αναμένεται να είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την ένταση ζημιών σε χαρτοφυλάκιο ζημιών δεξαμενοπλοίων μεταφοράς υγρού. Στη δεύτερη όμως περίπτωση όταν επέλθει ζημιά, το μέγεθός της αναμένεται να είναι πολύ μεγαλύτερο.

Στη θεωρία κινδύνου θεωρούμε σε κάποιες περιπτώσεις ότι η ανέλιξη του πλήθους ζημιών N(t) είναι ανανεωτική, δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με οποιαδήποτε κατανομή. Για την περίπτωση της ανέλιξης Poisson, οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι τ.μ. όπου ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ>0, με συνάρτηση κατανομής

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}, \qquad y > 0$$

Η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη, πράγματι η πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < s + y$ (έως την επόμενη απαίτηση) δοθέντος ότι Y>s είναι ίση με την πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < y$:

$$P(Y \leq s + y|Y > s) = \frac{P(s < Y \leq s + y)}{P(Y > s)} = \frac{F_Y(s + y) - F_Y(s)}{\overline{F_Y}(s)} = \frac{\overline{F_Y}(s) - \overline{F_Y}(s + y)}{\overline{F_Y}(s)}$$

$$= 1 - e^{-\lambda y} = P(Y \leq y)$$

Αντίστοιχα η ανέλιξη Poisson δεν έχει μνήμη, καθώς αν υποθέσουμε ότι στο χρονικό διάστημα (0, t) συμβαίνουν k -ζημιές, τότε η πιθανότητα να συμβούν $k + n$ ζημιές στο χρονικό διάστημα (0, s), $s > t$ είναι ίση με την πιθανότητα να συμβούν n- ζημιές στο διάστημα (t,s) η οποία λόγω των στάσιμων προσαυξήσεων της ανέλιξης είναι επίσης ίση με την πιθανότητα να να συμβούν n ζημιές στο διάστημα (0,s-t). Συγκεκριμένα:

$$P(N(s) = k + n|N(t) = k) = \frac{\mathrm{P(N(t)=k,N(s)=k+n)}}{\mathrm{P(N(t)=k)}} = \frac{\mathrm{P(N(t)=k,N(s-t)=n)}}{\mathrm{P(N(t)=k)}}$$

$$= \frac{\mathrm{P(N(t)=k)P(N(s-t)=n)}}{\mathrm{P(N(t)=k)}} = P(N(t - s) = n)$$

Συνδυάζοντας το πλήθος ζημιών και το ύψος ζημιάς στο χρονικό διάστημα (0,t), οι συνολικές ζημιές, όπως εξελίσσονται στο χρόνο, παριστάνονται με μία σύνθετη ανέλιξη

Poisson

$$S(t) \sim CP(\lambda t, f_x)$$

όπου f_x είναι η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας της ατομικής ζημιάς, και περιγράφεται από το κάτωθι μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & N(t) = 0 \\ X_1 + .. X_{N(t)}, & N(t) > 0 \end{cases}$$

όπου $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_{\mathrm{N}(t)}$ μεγέθη ατομικών ζημιών.

4.5 Κλασικό Μοντέλο Χρεοκοπίας

Στην συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι διάφορες μορφές που θα μπορούσε να πάρει το πρόβλημα της χρεοκοπίας ως προς τον χρόνο που μελετώνται τα αντίστοιχα έξοδα και έσοδα της εταιρείας (διακριτός, συνεχής ή άπειρος). Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας κεντρικό ρόλο παίζει η ποσότητα του συντελεστή προσαρμογής για τον οποίο στην συνέχεια το κεφαλαίου θα υπολογίσουμε κι ένα άνω φράγμα του το οποίο μας είναι χρήσιμο στην περίπτωση που ο συντελεστής υπάρχει αλλά δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Τέλος, θα δούμε την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου.

4.5.1 Σε συνεχή χρόνο t>0

Βασικό μέλημα μιας εταιρείας η οποία έχει ταμειακές ροές, εισροές και εκροές είναι να αποφύγει ή κατ’ ελάχιστον να μειώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας επιβιώνοντας έτσι για μεγάλο χρονικό διάστημα (θεωρητικά, στο διηνεκές). Στην περίπτωση αυτή μελετά για κάθε χρονική στιγμή t την ανέλιξη πλεονάσματος $u(t)$ σε σχέση με το απόθεμα $u = u(0)$, την ένταση ταμειακών εισροών c >0 (εισροές στη μονάδα του χρόνου) και την ανέλιξη των συνολικών εκροών $S(t)$:

$$u(t) = u + ct - S(t)$$

Η εταιρεία προγραμματίζει την ένταση ταμειακών εισροών c (ένταση του ασφαλίστρου) να υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική ζημιά στη μονάδα του χρόνου $E(S(t)) = \lambda\, E(X)$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη (Πολίτης Κ., 2012).

Σημασιολογικά, η σχέση $c > \lambda E(X)$ είναι αναγκαία αλλά μη ικανή για το ενδεχόμενο μη χρεοκοπίας, καθώς μια μεγάλη σε ύψος ζημιά X δύναται να δημιουργήσει έλλειμμα πλεονάσματος. Για το λόγο αυτό η εταιρεία χρειάζεται να έχει αναλογιστικό τμήμα που να εκτιμά την πιθανότητα μεγάλου ύψους ζημιάς. Πώς χρεοκοπεί όμως μια εταιρεία μια χρονική στιγμή Τ; Αν το πλεόνασμα γίνει κάποια στιγμή αρνητικό, οπότε τότε είναι έλλειμα πλεονάσματος:

$$u(T) < 0 \Leftrightarrow S(T) > u + c\,T$$

Εδώ Τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, που ορίζεται από τη σχέση:

$$T = \begin{cases} inf\{t: u(t)\} < 0 \\ \infty, u(t) > 0 \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Η Τ μεταβλητή είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, εφόσον μπορεί με θετική πιθανότητα να απειρίζεται. Όταν το πρόβλημα της χρεοκοπίας εξετάζεται σε πεπερασμένο χρόνο, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως διμετάβλητη συνάρτηση του αποθέματος και του χρόνου:

$$\Psi(u, t) = P_r(\exists\, \tau, 0 < \tau < t: u(t) < 0)$$

η πιθανότητα μειώνεται για μεγαλύτερο απόθεμα, $\frac{\partial \Psi}{\partial u} < 0$ και αυξάνεται στο χρόνο, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} > 0$. Είναι γεγονός λοιπόν ότι υψηλό απόθεμα μειώνει μεν την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς όμως να είναι ικανή συνθήκη να τη διατηρήσει χαμηλή στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται αλλαγή στρατηγικής λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα σε ό,τι αφορά κυρίως την μοντελοποίηση της τ.μ. ύψους ζημιάς ή την θεώρηση της έντασης των ζημιών ως συνάρτηση του χρόνου $\lambda(t)$ παρά σταθερή (Μουσκοβίας Χ., 2021).

Στο διηνεκές πάντως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά μονομεταβλητή συνάρτηση ως προς το αρχικό απόθεμα:

$$\Psi(u) = \lim_{t \to \infty} \Psi(u, t).$$

Μια βασική και σχετικά απλή παράμετρος που καθορίζει τον κίνδυνο χρεοκοπίας είναι το περιθώριο ασφάλειας θ>0 που εκφράζει το σχετικό αναμενόμενο κέρδος για την εταιρεία στη μονάδα του χρόνου:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1.$$

Εύλογα θα παρατηρούσε κανείς ότι όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφάλειας τόσο μειώνεται ο κίνδυνος χρεοκοπίας. Αυτό ισχύει εν μέρει, αλλά υψηλές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, κυρίως θ >1, θέτουν θέμα χαμηλής ανταγωνιστικότητας βάζοντας σε κίνδυνο μελλοντικές ταμειακές εισροές (Πολίτης Κ., 2012).

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς $E(X)$ και το περιθώριο ασφάλειας θ αποτελούν βασικές παραμέτρους για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας

$$\delta(u) = 1 - \Psi(u)$$

η οποία υπολογίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$(\theta + 1)E(X)\frac{d\delta(u)}{du} = \delta(u) - \int_o^u \delta(u - x)f(x)dx$$

με αρχική τιμή $\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Η εταιρεία δύναται να εκτιμήσει το κάτω και πάνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας στο διηνεκές σύμφωνα με την ανισότητα:

$$\frac{\overline{H}(u)}{\overline{H}(u) + \theta} \leq \Psi(u) \leq e^{-Ru},$$

όπου η συνάρτηση $\overline{H}(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\overline{H}(u) = \frac{1}{E(X)}\int_u^\infty \overline{F_X}(x)dx$$

και ο συντελεστής προσαρμογής R είναι θετική λύση της εξίσωσης Lundberg:

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R}M_x(R) = \frac{c}{\lambda}$$

Η $M_\chi(t)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους ατομικής ζημιάς X.

Στην ειδική περίπτωση όπου η ατομική απαίτηση είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου έστω β>0, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές υπολογίζεται με ακρίβεια από την σχέση

$$\psi(u) = \psi(0) \cdot e^{-R \cdot u}$$

με

$$R = \beta \cdot \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει τη δυνατότητα να αναθεωρήσουμε το αποθεματικό ώστε να μειώσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας κάτω από ορισμένο επιθυμητό όριο p:

$$\psi(u) \leq p \Leftrightarrow \psi(0) \cdot e^{-R \cdot u} \leq p \Leftrightarrow e^{-R \cdot u} \leq \frac{p}{\psi(0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -R \cdot u \leq ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right) \Leftrightarrow u \geq -\frac{1}{R} \cdot ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right)$$

Άρα, για την επίτευξη αυτή απαιτείται ελάχιστο αποθεματικό :

$$-\frac{1}{R} \cdot ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right),$$

όπου $\psi(0) = 1 - \delta(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

Ενώ ένα άνω φράγμα για το συντελεστή αυτόν δίνεται από την σχέση:

$$R \leq \frac{2E(X)\theta}{E(X^2)}$$

(Μουσκοβίας 2021).

Αν ρίξουμε μια ματιά στο διάγραμμα στην συνέχεια, παρατηρείται ότι η ανέλιξη πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο ακολουθεί μια διαδρομή ανόδου με κλίση όπου κατόπιν διακόπτεται από τις ατομικές απαιτήσεις με τη μορφή «πτώσης».

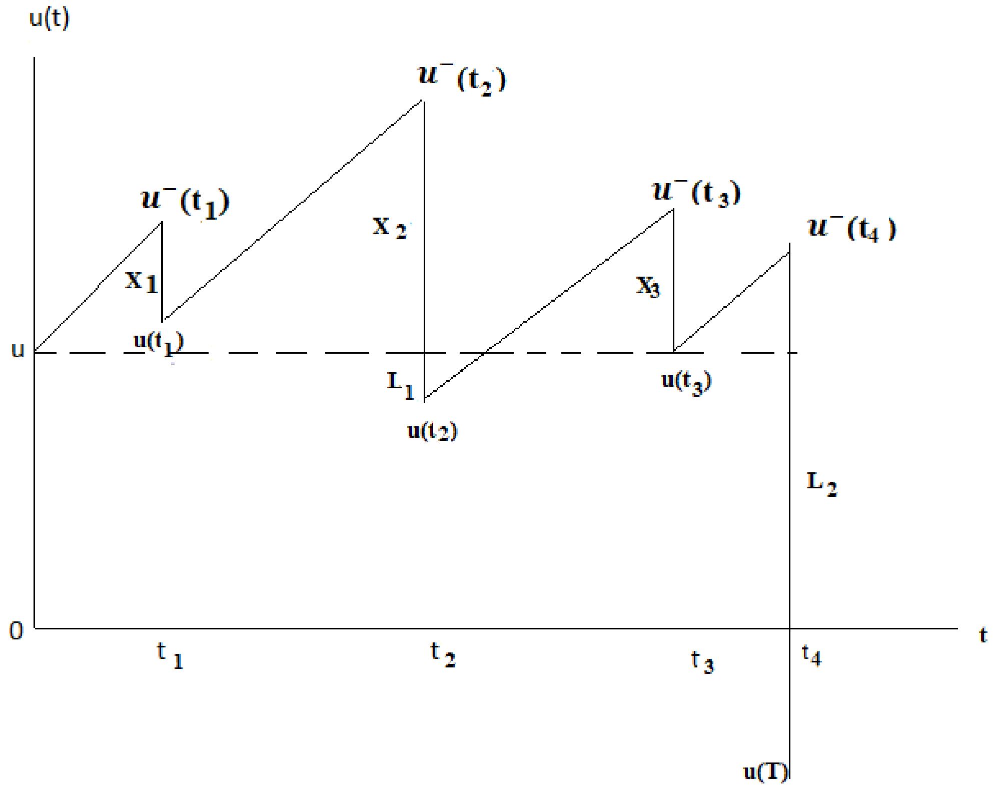
Για να μελετήσουμε το φαινόμενο της χρεοκοπίας, εξετάζουμε τις χρονικές στιγμές όπου παρατηρείται ένα νέο ελάχιστο στην ανέλιξη του πλεονάσματος.

Συγκεκριμένα, μετά την πληρωμή μιας απαίτησης η τιμή του πλεονάσματος μπορεί να:

α) παρουσιάζει ένα νέο ελάχιστο,

β) μην παρουσιάζει ένα νέο ελάχιστο,

γ) είναι υπό το μηδέν, οπότε έχουμε χρεοκοπία.



(Σχήμα 5. Η ανέλιξη του πλεονάσματος)

Όπου:

u: Το απόθεμα τη χρονική στιγμή t=0 ($u = u\ (0)$).

$\boldsymbol{t_j}$**:** Οι χρόνοι απαιτήσεων.

$\boldsymbol{X_1} \dots \boldsymbol{X_2}$**:** Τα μεγέθη των ατομικών απαιτήσεων.

$\boldsymbol{u(t_j)}$**:** Το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t_j.

$\boldsymbol{u^-(t_j) = u(t_j) + X_j}$ **:**Το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t_j ακριβώς πριν την απαίτηση X_j.

$\boldsymbol{L_j = -\min\{u(t_{i+1}) - u(t_i), 0\}}$**:** Η πτώση πλεονάσματος.

$\boldsymbol{u(T)<0}$**:** Το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Μεταξύ των απαιτήσεων το πλεόνασμα έχει γραμμική θετική πορεία. Στο χρόνο της απαίτησης φαίνεται ξεκάθαρα η πτώση που μειώνει στιγμιαία το πλεόνασμα. Το διάγραμμα σχεδιάστηκε για την καλύτερη δυνατή κατανόηση και υποθέτει τέσσερεις συνολικά απαιτήσεις όπου στη τέταρτη έχουμε χρεοκοπία. Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται οι 4 απαιτήσεις όπου οδηγούν σε χρεοκοπία (με την τελευταία απαίτηση). Οι πτώσεις πλεονάσματος L_1και L_2 αντιστοιχούν σε χρόνους t_2 και t_4, δηλαδή η ανέλιξη παρουσιάζει ελάχιστο μετά την πληρωμή της 2ης και της 4ης απαίτησης (Μουσκοβίας 2021).

Το άθροισμα των πτώσεων πλεονάσματος L_1+L_2 = L είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια με ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_L(u) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(u)}$$

Η πτώση πλεονάσματος είναι επίσης τ.μ, με συνάρτηση κατανομής :

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x (1 - F_X(t))dt\,, \qquad x > 0$$

Μια σημαντική πληροφόρηση που επιθυμεί κάθε εταιρεία είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση που θα σημάνει και την πρόωρη αναστολή λειτουργίας της ενδεχομένως. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι ισούται με:

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t}(1 - F_x(u + c \cdot t))dt.$$

4.5.1.1 Πιθανότητα χρεοκοπίας μείξης εκθετικών

Μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$\alpha_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2\beta_2 e^{-\beta_2 x} + .. + \alpha_k\beta_k e^{-\beta_k x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_i e^{-\beta_i x}\,, \qquad \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k > 0 \qquad \textbf{(4.1)}$$

όπου $\sum \alpha_i = 1$, λέγεται μείξη k εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2, .., \beta_k$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k$.

Ορισμός 4.1: Υποθέτουμε ότι στο κλασσικό μοντέλο οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια κατανομή με πυκνότητα την συνάρτηση στην (4.1). Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι της μορφής

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + \ldots + C_k e^{-r_k u} \tag{4.2}$$

όπου $r_1 r_k, \ldots, r_k$ είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής και $C_1, C_k, \ldots, C_k$ είναι σταθερές.

1. Υπολογισμός $C_1 C_k, \ldots, C_k$:

Έστω ότι k=2.

Για $u = 0$, έχουμε $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, συνεπώς τα C_1, C_2 πρέπει να ικανοποιούν την

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}. \tag{4.3}$$

Για να βρούμε μια δεύτερη σχέση, χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1}\delta(u) - \frac{1}{(1+\theta)\mu_1}\int_0^u \delta(u-x) f(x) dx \tag{4.4}$$

που είδαμε νωρίτερα. Γνωρίζοντας ότι η γενική λύση για την συνάρτηση δ είναι της μορφής $\delta(u) = 1 - C_1 e^{-r_1 u} - C_2 e^{-r_2 u}$,έχουμε

$$\delta'(u) = C_1 r_1 e^{-r_1 u} + C_2 r_2 e^{-r_2 u}.$$

Θέτοντας u=0 στην (4.4) παίρνουμε

$$\delta'(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1}\delta(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1}(1 - C_1 - C_2)$$

Αλλά $C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}$ συνεπώς,

$$C_1 r_1 + C_2 r_2 = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1}\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 \mu_1}. \tag{4.5}$$

Ο υπολογισμός των C_1, C_2 γίνεται λύνοντας το σύστημα των (4.3) & (4.5).

4.5.2 Σε διακριτό χρόνο n

Σε αντίθεση με τη συνέχεια του χρόνου όπου η χρεοκοπία συμβαίνει οποιαδήποτε στιγμή το πλεόνασμα γίνει αρνητικό, η διάκριση του χρόνου σε περιόδους περιορίζει την περίπτωση χρεοκοπίας μόνο σε αυτές τις διακριτές περιόδους (Πολίτης Κ., 2012). Έτσι, η εταιρεία υπολογίζει το πλεόνασμα σε περιόδους 1, 2, …,n, …:

$$\mathrm{u}(n) = u + c \cdot n - S(n)$$

όπου $S(n)$ είναι το άθροισμα των απαιτήσεων $W_1+\ldots+W_n$ ανά χρονική περίοδο. Κάθε περιοδική απαίτηση είναι μοντέλο συλλογικού κινδύνου σε σχέση με το ύψος ατομικής ζημιάς και το πλήθος ζημιών N που είναι κατανομή Poisson με παράμετρο λ>0, άρα η περιοδική απαίτηση είναι σύνθετη Poisson:

$$W \sim CP(\lambda, f_X)$$

Συνδυάζοντας την ένταση c του ασφαλίστρου και την περιοδική απαίτηση W, τα κέρδη κάθε περιόδου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $G = c – W$ και το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας στο διακριτό χρόνο είναι:

$$u(n) = u + \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Στο μοντέλο αυτό ο χρόνος χρεοκοπίας είναι:

$$\tilde{T} = min\{n: u(n) \leq 0, u(n-1) > 0\}$$

Ο συντελεστής προσαρμογής $\tilde{R}$ δύναται εκτός από την εξίσωση Lundberg να υπολογιστεί από την εξίσωση ροπογεννήτριας συνάρτησης των περιοδικών απαιτήσεων

$$M_w(\tilde{R}) = e^{cR}$$

ή του περιοδικού κέρδους

$$M_G(-\tilde{R}) = 1$$

Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας με έλλειμα χρεοκοπίας $u_{\tilde{T}} < 0$ μπορεί να βρεθεί με βάση την σχέση:

$$\tilde{\Psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E(e^{-\tilde{R}u_{\tilde{T}}} | T < \infty)}$$

Στη συνέχεια θα δούμε ένα συνοπτικό παράδειγμα υπολογισμού τόσο της πιθανότητας χρεοκοπίας αλλά κάποιον άλλων ποσοτήτων που αναλύθηκαν πιο πάνω.

4.5.3 Πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και συντελεστής προσαρμογής

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ορίζεται ως δ(u) από την σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \quad u \geq 0$$

Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.

Στο κλασσικό μοντέλο η συνάρτηση δ(u) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta\,(u - x)\bar{F}(x)dx$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ είναι η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων (Πολίτης Κ., 2022).

Με βάση αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε την μη πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, δηλαδή το δ(0) και κατά συνέπεια η πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι:

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$$

(Για απόδειξη της σχέσης βλ. Πολίτης Κ., 2022)

<u>Εφαρμογή 4.5.3.1</u>

Ας δούμε μια εφαρμογή υπολογισμού τόσο του συντελεστή προσαρμογής R όσο και της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Θεωρούμε σ 'ένα κλασσικό μοντέλο θεωρίας κινδύνων ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}$$

Υποθέτουμε ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson για την άφιξη των αποζημιώσεων είναι λ=2 και η ένταση ασφαλίστρου c=1. Να βρεθούν:

1. Η ουρά της κατανομής $\bar{F}$
2. Ο συντελεστής προσαρμογής R

3. Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν ψ(0)
4. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u)

<u>Επίλυση</u>

1)

Χρησιμοποιώντας το Mathematica έχουμε:

Ορίζουμε την συνάρτηση f(x):

$f[\mathrm{x\_}] := (3/2) * \mathrm{Exp}[-3 * x] + (7/2) * \mathrm{Exp}[-7 * x]$
$f[x]$
$\frac{7e^{-7x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}$

Υπολογίζουμε την μέση τιμή $\mu1 = E(X)$ & $\mu2 = E(X^2)$:

$\mu1 = \mathrm{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$
$\frac{5}{21}$
$\mu2 = \mathrm{Integrate}[(x\hat{}2) * f[x], \{x, 0, \mathrm{Infinity}\}]$
$\frac{58}{441}$

Η ουρά της κατανομής $\bar{F}$

$F[\mathrm{x\_}] := \mathrm{Integrate}[f[y], \{y, 0, x\}]$
$1 - \frac{e^{-7x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{2}$

2)

Αφού ορίσουμε τις σταθερές c και λ, μπορούμε να βρούμε την τιμή θ:

$\lambda = 2; c = 1;$
$\mathrm{theta} = (c/(\lambda * \mu1)) - 1$
$\frac{11}{10}$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής R, χρειάζεται να βρούμε την ροπογεννήτρια, επομένως:

M[t_]: = Integrate[Exp[$y * t$] * f[y], {y, 0, Infinity}]
$M[t]$
ConditionalExpression[$\frac{21-5t}{21-10t+t^2}$, Re[t] < 3]
M[t_]: = Integrate[Exp[$y * t$] * f[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions → t < 3]
$M[t]$
$\frac{21-5t}{21-10t+t^2}$

Ο συντελεστής προσαρμογής υπολογίζεται ως η μικρότερη θετική ρίζα της παρακάτω εξίσωσης ως προς t:

NSolve[$M[t]$ == 1 + (1 + theta) * μ1 * t, t]
{{t → 6.2}, {t → 1.7}, {t → 0.}}
R = 1.76;

3)Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας εφόσον το αρχικό αποθεματικό είναι 0 είναι:

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Άρα,

psi[0] = 1/(1 + theta)
$\frac{10}{21}$

4) Για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας λύνουμε το σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Τα r_1, r_2 είναι οι 2 θετικές ρίζες 1.7 και 6.2 αντίστοιχα του ερωτήματος 2.

Θέτουμε τις 2 κάτωθι εξισώσεις:

C1+C2=ψ(0)=$\frac{10}{21}$

r1*C1+r2*C2=$\delta(0) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu 1} = \frac{22}{21}$

Χρησιμοποιώντας τις εντολές του Mathematica λύνουμε το σύστημα των 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους για να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας:

r1 = 6.2; r2 = 1.7;
paragwgosδ0 = theta/((1 + theta)^2 * μ1)
$\frac{22}{21}$
NSolve[{c1 + c2 == psi0, (r1 * c1) + (r2 * c2) == paragwgosδ0}, {c1, c2}]
{{c1 → 0.05, c2 → 0.42}}
c1 = 0.05; c2 = 0.42;
psi[u]: = c1 * Exp[−r1 * u] + c2 * Exp[−r2 * u]
psi[u]
$0.05e^{-6.2u} + 0.42e^{-1.7u}$

Άρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(u) = 0.05e^{-6.2u} + 0.42e^{-1.7u}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

VaR & Μέτρα κινδύνου συνολικών αποζημιώσεων

5.1 Υπολογισμός VaR & Μέτρα Κινδύνου των συνολικών αποζημιώσεων

Στο κεφάλαιο 2 ασχοληθήκαμε με τον VaR, ενώ στο Κεφάλαιο 4 μιλήσαμε για το συλλογικό πρότυπο και το φαινόμενο της χρεοκοπίας. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον υπολογισμό του VaR στο συλλογικό πρότυπο. Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στον υπολογισμό του VaR των συνολικών αποζημιώσεων ενός χαρτοφυλακίου. Τέλος, θα αναλύσουμε πώς μπορούμε να υπολογίζουμε το VaR συνολικά για ένα χαρτοφυλάκιο.

Εφαρμογή 5.1.1:

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές:
N: *το πλήθος των απαιτήσεων που φτάνουν στην εταιρεία*
X: *το μέγεθος των ατομικών ζημιών*

Θεωρούμε ότι η $\boldsymbol{N \sim Geometric(p)}$ με $p_n = p \cdot q^{n-1},\ n = 1,2..,q = 1 - p$ και $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$ λ>0

Αναζητούμε την κατανομή της μεταβλητής $\boldsymbol{S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N}$:

Επειδή $p_0 = 0$ και η S είναι συνεχής τ.μ. στο $(0, +\infty)$, έχουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \ \ x \geq 0$$

Αν οι $X_i \sim Exp(\lambda)$ και ανεξάρτητες, τότε η τ.μ. $X_1 + X_2 + \ldots + X_N \sim Erl(n, \lambda)$ με σ.π.π.:

$$f^{*n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

Τότε:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x} \Rightarrow g(x) = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \Rightarrow$$

$$g(x) = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Για $1 \leq n \leq \infty \Rightarrow 0 \leq n-1 \leq \infty$. *Αν θέσω* $\kappa = n-1$ *τότε για* $1 < n < \infty \Rightarrow 0 \leq \kappa < \infty$ *τότε:*

$$g(x) = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{\kappa}}{\kappa!} = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot e^{q\lambda x} = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x + q\lambda x} = p \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(1-q)x} \Rightarrow$$

$$g(x) = p \cdot \lambda \cdot e^{-p\lambda x}$$

Άρα η τμ $S \sim Exp(p\lambda)$.
(Χατζηκωνσταντινίδης Ε. 2021).

1. Υπολογισμός VaR της τ.μ. S των συνολικών αποζημιώσεων:

Σε επίπεδο πιθανότητας p0=95% το VaR της S υπολογίζεται από την κάτωθι σχέση:

$$VaR[X, p0] = G^{-1}(p0)$$

Χρησιμοποιώντας το Mathematica:

$\mathrm{p0} = 0.95; p = 0.8; \lambda = 3; \mathrm{p\lambda} = 2.4;$
$\mathrm{VaR} = \mathrm{Quantile}[\mathrm{ExponentialDistribution}[\mathrm{p\lambda}], \mathrm{p0}]$
1.2482

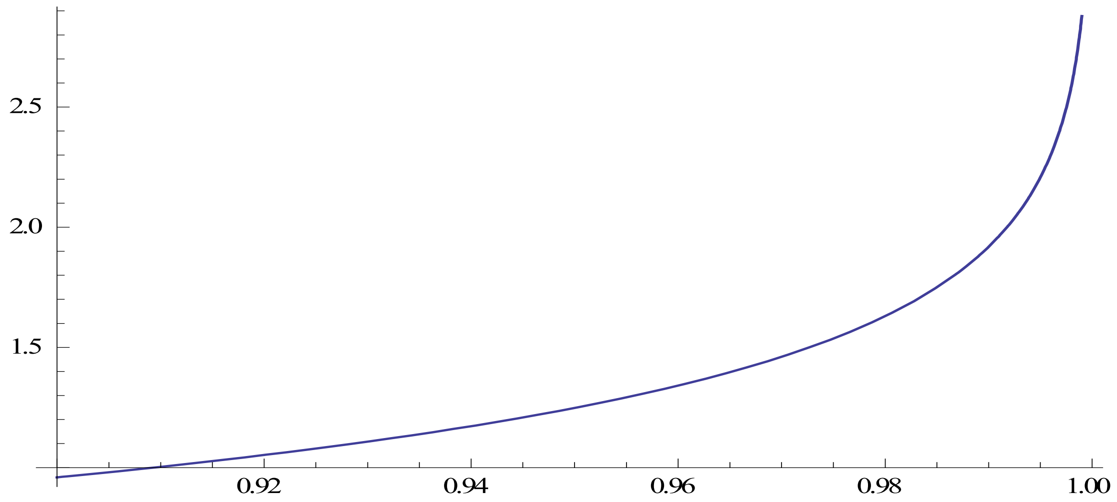
Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια του συνολικού χαρτοφυλακίου ζημιών να είναι μεγαλύτερη από 1.2482. Στον κάτωθι πίνακα θα δούμε την μεταβολή του VaR για διάφορα επίπεδα $p0$ διατηρώντας σταθερή την παράμετρο pλ.

Επίπεδο πιθανότητας p0	**Παράμετρος pλ**	**VaR**
0.80	2.4	0.675
0.85	2.4	0.790
0.90	2.4	0.959
0.95	2.4	1.248

(Πίνακας 3)

Εύκολα παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται το επίπεδο πιθανότητας p0 τόσο αυξάνεται και το VaR των συνολικών αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου. Ας αναπαραστήσουμε όμως και γραφικά την συμπεριφορά του VaR των συνολικών αποζημιώσεων για διάφορα επίπεδα p0 διατηρώντας σταθερή την παράμετρο ρλ: Χρησιμοποιώντας την κάτωθι εντολή στο mathematica και έχοντας στον άξονα X=VaR και στον άξονα Y=p0 παίρνουμε το παρακάτω γράφημα:

```
Plot[Quantile[ExponentialDistribution[pλ], p0], {p0,0.9,0.999}]
```



(Σχήμα 6)

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά του VaR για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ρλ όταν διατηρήσουμε το επίπεδο πιθανότητας p0 σταθερό:

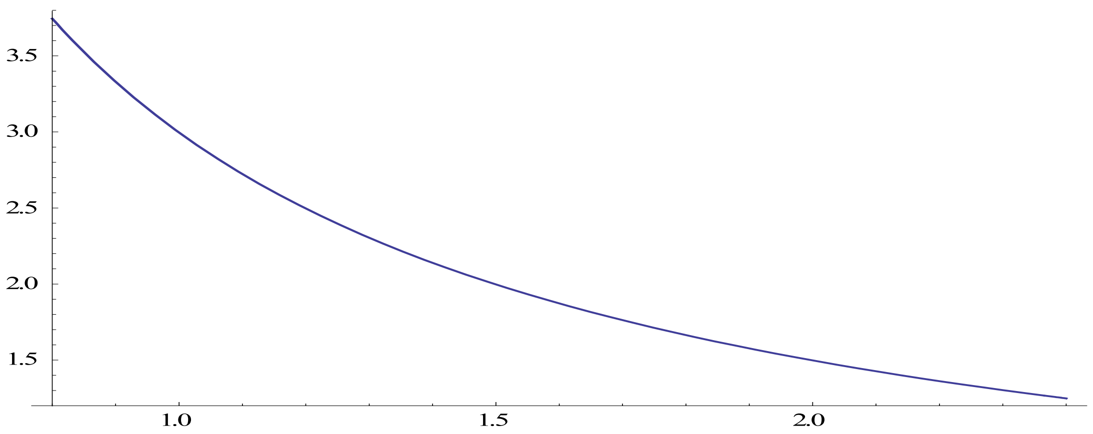
Επίπεδο πιθανότητας p_0	**Παράμετρος ρλ**		**VaR**
0.95	p=0.8 / λ=1	pλ=0.8	3.744
0.95	p=0.8 / λ=1.5	pλ=1.2	2.496
0.95	p=0.8 / λ=2	pλ=1.6	1.872
0.95	p=0.8 / λ=2.5	pλ=2	1.497

0.95	p=0.8 / λ=3	pλ=2.4	1.248

(Πίνακας 4)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4, βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το λ τόσο μειώνεται το VaR των συνολικών αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου. Ας αναπαραστήσουμε όμως και γραφικά την συμπεριφορά του VaR των συνολικών αποζημιώσεων για διάφορα επίπεδα της παραμέτρου pλ διατηρώντας σταθερό το επίπεδο πιθανότητας p0: Χρησιμοποιώντας την κάτωθι εντολή στο Mathematica και έχοντας στον άξονα X=pλ και στον άξονα Y=VaR παίρνουμε το παρακάτω γράφημα:

```
Plot[Quantile[ExponentialDistribution[pλ], p0], {pλ, 0.8,2.4}]
```



(Σχήμα 7)

Εύκολα λοιπόν καταλήγουμε στον συμπέρασμα ότι η συσχέτιση μεταξύ του VaR και της παραμέτρου pλ είναι αρνητική, δηλαδή όταν μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου τότε ελαττώνεται το VaR.

2. ***Μέτρα Κινδύνου Συνολικών Αποζημιώσεων***

-Υπολογισμός TVaR συνολικών αποζημιώσεων:

Υπενθυμίζεται ότι το TVaR δίνεται από τον τύπο,

$$TVaR = \frac{1}{1-p_0}\int_{p_0}^{1} VaR(u)du$$

και ο υπολογισμός του μέσω του Mathematica είναι:

$\mathrm{TVaR} = (1/(1-\mathrm{p0})) * \mathrm{Integrate}[\mathrm{Quantile}[\mathrm{ExponentialDistribution}[\mathrm{p}\lambda], u], \{u, \mathrm{p0}, 1\}]$
TVaR= 1.664

- Υπολογισμός CTE συνολικών αποζημιώσεων:

Στις συνεχείς κατανομές όμως, όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα ισχύει ότι:

CTE=TVaR= 1.664

Άρα, η μέση τιμή του πλήθους των ζημιών που υπερβαίνουν το αντίστοιχο VaR των συνολικών αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου σε επίπεδο πιθανότητας 95% είναι 1.664

-Υπολογισμός του CVaR

$\mathbf{CVaR} = \mathrm{CTE} - \mathrm{VaR}$
$\mathbf{CVaR} = 0.416$

Η αναμενόμενη τιμή ζημιών που υπερβαίνουν το VaR των συνολικών αποζημιώσεων είναι 0.416

-Υπολογισμός του ES

Δίνεται από τον τύπο,

$$ES = \int_{VaR}^{\infty} (x - VaR) g(k) dk$$

Άρα,

$\mathrm{ES} = \mathrm{Integrate}[(x - \mathrm{VaR}) * \mathrm{PDF}[\mathrm{ExponentialDistribution}[\mathrm{p}\lambda], x], \{x, \mathrm{VaR}, +\infty\}]$
$\mathrm{ES} = 0.02$

Επομένως υπάρχει 5% πιθανότητα το αναμενόμενο έλλειμα να είναι 0.02

5.2 Εκτίμηση VaR μέσω προσομοίωσης

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθούν κάποιες εφαρμογές εκτίμησης του VaR των συνολικών αποζημιώσεων με την χρήση προσομοίωσης. Θα παράγουμε ένα πλήθος από τυχαίους αριθμούς (απαιτήσεις χαρτοφυλακίου) στο οποίο θα προσομοιώσουμε διάφορες κατανομές.

Εφαρμογή 5.2.1:

Υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο με n=3000 πλήθος απαιτήσεων (αποζημιώσεων) και κάνοντας χρήση του στατιστικού πακέτου actuar στην R, προσομοιώνουμε τρεις διαφορετικές συνεχείς κατανομές, την Pareto, την Gamma και την Εκθετική κατανομή. Θα υπολογίσουμε λοιπόν το VaR ατομικής ζημιάς για τα επίπεδα πιθανότητας 90%,95%,99%.

Δίνεται κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την κάθε κατανομή αντίστοιχα:

- **Pareto (a=4, l=5)**

```
library(actuar)
n=3000; a<-4; l<-5; p<-0.9;
Par<-rpareto(n,a,l)
quantile(Par,p)
 90%
3.750384
```

- **Gamma (a=3, b=2)**

```
n=3000;a<-3;b<-2; p<-0.9;
Gamma<-rgamma(n,a,b)
quantile(Gamma,p)
90%
2.621679
```

- **Exp (l=2)**

```
n=3000;l<-2;p<-0.9;
Exp<-rexp(n,l)
quantile(Exp,p)
90%
1.129
```

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε τα 95% και 99% ποσοστημόρια των ανωτέρω κατανομών. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 5:

Βλέπουμε ότι σε επίπεδο πιθανότητας 90% για την Pareto το VaR υπολογίστηκε σε 3.750. Αποτέλεσμα το οποίο μας δείχνει ότι από τις 100 ζημίες που θα συμβούν, μόλις οι 10 από αυτές αναμένεται να ξεπεράσουν την τιμή 3.750. Αντίστοιχα για την κατανομή Gamma, σε επίπεδο πιθανότητας 90%, στις 100 ζημίες που θα συμβούν μόλις οι 10 από αυτές θα ξεπεράσουν την τιμή 2.621 και για την Εκθετική θα ξεπεράσουν την τιμή 1.129.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή Pareto έχει τις μεγαλύτερες εκτιμήσεις του VaR σε όλα τα επίπεδα. Αυτό συμβαίνει διότι η Pareto έχει την πιο βαριά ουρά συγκριτικά με τις άλλες δυο κατανομές. Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι ο ρυθμός μεταβολής του VaR στη κατανομή Pareto είναι πολύ μεγαλύτερος και από τις δυο άλλες κατανομές.

Κατανομή	*VaR για το αντίστοιχο* p_0		
	90%	**95%**	**99%**
Pareto (α=4, λ=5)	3.750	5.431	9.685
Gamma (a=3, b=2)	2.621	3.103	3.982
Exp (λ=2)	1.129	1.553	2.318

(Πίνακας 5)

<u>Εφαρμογή 5.2.2:</u>

Υποθέτουμε τώρα χαρτοφυλάκιο όπου για το πλήθος N των απαιτήσεων θεωρούμε ότι $\boldsymbol{N \sim Geometric(p)}$ και $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$. Κάνοντας χρήση της R προσομοιώνουμε την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής S από την εφαρμογή 5.1.1. Έτσι θα υπολογίζουμε το Value at Risk για τα επίπεδα πιθανότητας 80%,85%,90%,95% χρησιμοποιώντας τις κάτωθι εντολές:

```
Nsim=8000 ##πλήθος των ζημιών##
a1=rnbinom(Nsim,1,.8)+1 ##γεωμετρική κατανομή με παράμετρο 0.8##
aggre=a*0
for (i in 1:Nsim) {aggre[i]=sum(rexp(a1[i],3))}

quantile(aggre,0.80)
80%
0.6820951
quantile(aggre,0.85)
    85%
0.7927194
quantile(aggre,0.90)
    90%
```

```
0.9584006
quantile(aggre,0.95)
   95%
1.24879
```

Στον παρακάτω Πίνακα 6 βλέπουμε ότι οι τιμές του VaR μέσω προσομοίωσης με 8000 προσομοιώσεις έχουν μικρή απόκλιση από αυτές που βρήκαμε στην εφαρμογή 5.1.1.

Επίπεδο πιθανότητας	VaR μέσω προσομοίωσης	VaR
80%	0.680	0.675
85%	0.792	0.790
90%	0.958	0.959
95%	1.248	1.248

(Πίνακας 6)

Τέλος, ας δούμε την συμπεριφορά του VaR μέσω προσομοίωσης, συγκριτικά με τις τιμές που βρήκαμε στην εφαρμογή 5.1.1, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων p και λ όταν διατηρήσουμε το επίπεδο πιθανότητας σταθερό σε 95%.

Τιμές παραμέτρου p & λ	VaR μέσω προσομοίωσης	VaR
p=0.8 / λ=1	3.746	3.744
p=0.8 / λ=1.5	2.501	2.496
p=0.8 / λ=2	1.865	1.872
p=0.8 / λ=2.5	1.474	1.497
p=0.8 / λ=3	1.243	1.248

(Πίνακας 7)

Πάλι βλέπουμε ότι το VaR μέσω προσομοίωσης έχει μικρές αποκλίσεις σε σύγκριση με το VaR που προκύπτει αναλυτικά, δηλαδή χωρίς προσομοίωση.

Εφαρμογή 5.2.3:

Έστω ότι μια ασφαλιστική εκτιμάει ότι οι ζημιές X_i για συγκεκριμένη ομάδα ασφαλισμένων ακολουθούν μια κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha = 2.5$ $και$ $\lambda = 4100$. Το πλήθος των ζημιών N εντός του ενός έτους ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r =12 και p=0.6. Μέσω της μεθόδου προσομοίωσης θα εκτιμήσουμε το 95^{o} ποσοστημόριο της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (VaR).

Επίλυση:

Η προσομοίωση θα γίνει μέσω της παραγωγής τυχαίων αριθμών όπου αυτοί θα χρησιμοποιηθούν στην κατανομή ατομικών ζημιών (Pareto) και στην κατανομή του πλήθους των ζημιών (Αρνητική Διωνυμική).

Αφού $X \sim Pareto(\alpha = 2.5\,, \lambda = 4100)$ $τοτε$ $έχουμε$:

$$f(x) = \frac{2.5 \cdot \sqrt{4100^5}}{\sqrt{x^7}}, \qquad x \geq 4100$$

Και αφού $N \sim Αρνητικη\ Διωνυμικη(r = 12, p = 0.6)$ $τοτε$ $εχουμε$:

$$f(u) = \binom{12+u-1}{u} \left(\frac{6}{10}\right)^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{u} \ για\ x = 0{,}1{,}2{,}..$$

Επομένως, η μεταβλητή συνολικών αποζημιώσεων $S \sim$Σύνθετη Αρνητική Διωνυμική κατανομή με αθροιστική σ.κ. που θα δίνεται μέσω της μεθόδου προσομοίωσης από την κάτωθι σχέση:

$$G_S(u) = \sum_{i=0}^{u} g_s(i)$$

Παρακάτω θα δούμε την εκτίμηση της κατανομής συνολικών αποζημιώσεων χρησιμοποιώντας την R:

```
Nsim=8000
a=rnbinom(Nsim,12,.6)
b=a*0
for (i in 1:Nsim) {b[i]=sum(rpareto(a[i],2.5,4100))}
quantile(b,0.95)
    95%
51786.61
```

Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια του συνολικού χαρτοφυλακίου ζημιών να είναι μεγαλύτερη από **51786.61.** Ας δούμε τώρα την συμπεριφορά του VaR σε περίπτωση που διπλασιάσουμε το λ=8200 στην κατανομή Pareto:

```
Nsim=8000
a=rnbinom(Nsim,12,.6)
b=a*0
for (i in 1:Nsim) {b[i]=sum(rpareto(a[i],2.5,8200))}
quantile(b,0.95)
 95%

105614.5
```

Επομένως, υπάρχει πιθανότητα μόνο 5% η απώλεια του συνολικού χαρτοφυλακίου ζημιών να είναι μεγαλύτερη από **105614.5**. Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνολική απώλεια του χαρτοφυλακίου επηρεάστηκε από τον διπλασιασμό της παραμέτρου λ της κατανομής Pareto και συγκεκριμένα διπλασιάστηκε το VaR.

Αυτό είναι σε μεγάλο βαθμό αναμενόμενο, αφού διπλασιάζοντας το λ, διπλασιάζεται και η μέση τιμή της κατανομής.

<u>Εφαρμογή 5.2.4:</u>

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο. Έστω ότι στο μοντέλο αυτό το περιθώριο ασφαλείας είναι $\theta = \frac{2}{3}$ και οι ατομικές ζημιές είναι Εκθετικές με παράμετρο β=3. Ο συντελεστής προσαρμογής θα είναι:

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{6}{5}$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας θα είναι:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \frac{3}{5} e^{-\frac{6}{5}u}$$

Λύνοντας την εξίσωση:

$$\psi(u) = P(L > u) = 1 - \alpha$$

βρίσκουμε ότι η ακριβής τιμή του VaR σε επίπεδο πιθανότητας α=0.95 ισούται με 2.07. Για τα επίπεδα, α=0.98 & 0.99 το VaR ισούται με 2,84 και 3.4 αντίστοιχα.

Πάμε τώρα να δούμε πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το VaR μέσω προσομοίωσης. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής,

$$\psi(u) = P(L > u)$$

όπου

$$L = L_1 + L_2 + .. + L_K$$

και το Κ ακολουθεί γεωμετρική $\frac{\theta}{1+\theta}$. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή των L_1, L_2… είναι επίσης εκθετική με την ίδια παράμετρο β=3.

Άρα μπορούμε με την χρήση της R και της κάτωθι διαδικασίας να υπολογίσουμε το VaR για τα επίπεδα 0.95,0.98 και 0.99.

```
Nsim=10000    ##πλήθος ζημιών ##
pl=rnbinom(Nsim,1,2/5)     ## η παράμετρος της Γεωμετρικής είναι θ/1+θ=2/5##
aggr1=pl*0
for(i in 1:Nsim){aggr1[i]=sum(rexp(pl[i],3))}   #η παράμετρος γεωμετρικής β=3##

quantile(aggr1,0.95)
    95%
2.094546
quantile(aggr1,0.98)
    98%
2.870806
quantile(aggr1,0.99)
    99%
3.439281
```

Θα συγκρίνουμε τώρα τις τιμές του VaR χωρίς την χρήση προσομοίωσης αλλά και με την χρήση της.

Επίπεδο πιθανότητας	VaR μέσω προσομοίωσης	VaR
95%	2.09	2.07
98%	2.87	2.84
99%	3.43	3.4

(Πίνακας 8)

Βλέπουμε στον Πίνακα 8, ότι τα θεωρητικά VaR 2.07,2.84 και 3.4 αντίστοιχα είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα VaR που προκύπτουν μέσω προσομοίωσης.

Η προσομοίωση μπορεί να θεωρηθεί ένας καλός τρόπος εκτίμησης του VaR σ ’ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων, καθώς όπως είδαμε στα άνω παραδείγματα οι τιμές του βρίσκονται πολύ κοντά στους αντίστοιχους υπολογισμούς του VaR χωρίς την χρήση της. Επομένως, μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να βρεθεί ακριβής αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

***Ελληνική*:**

1. *Κούτρας Μ. (2021). Διαλέξεις μαθήματος: Πιστωτικός Κίνδυνος, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
2. *Κουρτίδης Χ. (2021). Διαλέξεις μαθήματος: Λειτουργικός Κίνδυνος & Κίνδυνοι Αγοράς, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
3. *Λυσιμάχου Π. Τ. (2009). Διπλωματική Εργασία «Value at Risk-Ανασκόπηση». Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
4. *Μουσκοβίας Χαράλαμπος (2021). Διπλωματική Εργασία «Μέτρα Κινδύνου με εφαρμογές στην Θεωρία Χρεοκοπίας». Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
5. *Πολίτης Θεοφάνης Δ. (2014). Διπλωματική Εργασία «Μέτρα κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη». Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
6. *Πολίτης Κων/νος (2022). Διαλέξεις μαθήματος: Θεωρία Κινδύνου ΙΙ. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
7. *Πολίτης Κων/νος (2012). Εισαγωγή στην Θεωρία συλλογικού κινδύνου: Το συλλογικό πρότυπο και Θεωρία χρεοκοπίας. Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε., Αθήνα.*
8. *Τζαβελλάς Γ. (2021), Διαλέξεις μαθήματος: Ζημιοκατανομές. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, . Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
9. *Φωτόπουλος Π.Ι. (2019), Διπλωματική Εργασία «Προσεγγιστικές Μέθοδοι στην Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου Μέσω της R» Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
10. *Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2021), Διαλέξεις μαθήματος: Θεωρία Κινδύνου Ι.. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Αναλογιστικής Επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, . Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*

Ξενόγλωσση:

1. *Bessis, J. (2002). Risk Management in Banking, 2nd Edition, Wiley*
2. *Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts and R. Kaas (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models M.*
3. *Hardy M. R. (2006). Education & examination committee of the society actuaries "An introduction to risk measures for actuarial applications".*
4. *Jorion, Ph. (2007). Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk, 3rd Edition, McGraw Hill-Irwin.*
5. *Knight H. (1921) Risk, uncertainty and profit: PhD University of Iowa.*
6. *Kevin Dowd & David Blake (2006). Paper PI-0603. After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measure.*