ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Παναγιώτης Β. Βαλσαμής

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής, Βασίλειος Σεβρόγλου
- Αναπληρωτής Καθηγητής, Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAMME IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STUDY OF THE DISTRIBUTION OF THE TIME TO RUIN AND RELATED RUIN MEASURES

Panagiotis V. Valsamis

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

September 2022

Στους γονείς μου

Βασίλειο & Σταματίνα

Ευχαριστίες

θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγήτη του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τη πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια της επίβλεψης του μέχρι την ολοκλήρωση της διπλωμστικής εργασίας μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στήριξε κάθε μου προσπάθεια σε όλη την ακαδημαϊκή μου πορεία

Περίληψη

Μετά την εισαγωγή της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής από τους Gerber και Shiu (1998), έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος στην ανάλυση διαφόρων ποσοτήτων που σχετίζονται με την καταστροφή στη θεωρία του κινδύνου. Όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση προεξοφλημένη ποινής όχι μόνο παρέχει μια συστηματική πλατφόρμα για την από κοινού ανάλυση διαφόρων ποσοτήτων ενδιαφέροντος, αλλά προσφέρει επίσης την ευκολία για την εξαγωγή βασικών πληροφοριών από την οπτική γωνία της διαχείρισης κινδύνου. Για παράδειγμα, εξαλείφοντας τη συνάρτηση ποινής, η συνάρτηση Gerber-Shiu μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes του χρόνου χρεοκοπίας, η αντιστροφή του οποίου οδηγεί σε ανάπτυγμα σειράς για τη σχετική πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας (βλέπε, π.χ., Dickson and Willmot (2005)). Στην παρούσα εργασία, προτείνουμε να αναλύσουμε το μακροχρόνιο πρόβλημα της χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο ενσωματώνοντας τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία στην ανάλυση Gerber-Shiu. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, πολλές ωραίες αναλυτικές ιδιότητες της αρχικής συνάρτησης Gerber-Shiu διατηρούνται από αυτό το γενικευμένο αναλυτικό εργαλείο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση Gerber-Shiu εξακολουθεί να ικανοποιεί ένα ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και μπορεί γενικά να εκφραστεί σε όρους κάποιων ριζών της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen.

Στην παρούσα διατριβή, προτείνουμε όχι μόνο να ενοποιήσουμε τις προηγούμενες μεθοδολογίες για τη μελέτη της πυκνότητας του χρόνου μέχρι την καταστροφή μέσω της χρήσης του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange, αλλά και να παράσχουμε πληροφορίες για τη φύση του αναπτύγματος σειράς προσδιορίζοντας την πιθανολογική συμβολή κάθε όρου στην επέκταση μέσω της ανάλυσης που περιλαμβάνει την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Στο Κεφάλαιο 3, μελετάμε την από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία στο κλασικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου. Χρησιμοποιούμε επίσης μια εναλλακτική προσέγγιση για να λάβουμε την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας με βάση την τεχνική αντιστροφής Lagrange που εισήγαγαν οι Dickson και Willmot (2005). Στο Κεφάλαιο 4, βασιζόμενοι στο θεώρημα επέκτασης Lagrange για αναλυτική αντιστροφή, εξετάζουμε την από κοινού πυκνότητα του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία, του πλεονάσματος αμέσως πριν από τη χρεοκοπία και του αριθμού

των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων και αυθαίρετους ενδιάμεσους χρόνους.

Εξ όσων γνωρίζουμε, τα υπάρχοντα αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα της χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen περιλαμβάνουν συνήθως μια εκθετική υπόθεση είτε για τους ενδιάμεσους χρόνους είτε για τα μεγέθη των απαιτήσεων (βλέπε, π.χ., Borovkov and Dickson (2008)). Μεταξύ των λίγων εξαιρέσεων, αναφέρουμε τους Dickson και Li (2010, 2012), οι οποίοι ανέλυσαν την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας για Erlang-n ενδιάμεσους χρόνους. Στο Κεφάλαιο 5, προτείνουμε μια σημαντική ανακάλυψη χρησιμοποιώντας την πολυμεταβλητή εκδοχή του θεωρήματος επέκτασης Lagrange για να λάβουμε ένα ανάπτυγμα σειράς για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας υπό μια πιο γενική υπόθεση κατανομής, δηλαδή όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται ως συνδυασμός n εκθετικών. Αξίζει να τονιστεί ότι η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλους τομείς των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθεί η κατανομή ορισμένων χρόνων πρώτης διέλευσης για συγκεκριμένες στοχαστικές διαδικασίες. Ενδεικτικά, θα εξεταστεί η διάρκεια μιας περιόδου αιχμής σε ένα μοντέλο κινδύνου ουράς αναμονής.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 διατυπώνονται ορισμένες συμπερασματικές παρατηρήσεις και γίνεται συζήτηση για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις Κλειδιά: Χρόνος χρεοκοπίας, Σχετικά μέτρα χρεοκοπίας, Συνάρτηση Gerber-Shiu, Μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen

Abstract

Following the introduction of the discounted penalty function by Gerber and Shiu (1998), significant progress has been made on the analysis of various ruin-related quantities in risk theory. As we know, the discounted penalty function not only provides a systematic platform to jointly analyze various quantities of interest, but also offers the convenience to extract key pieces of information from a risk management prospective. For example, by eliminating the penalty function, the Gerber-Shiu function becomes the Laplace-Stieltjes transform of the time to ruin, inversion of which results in a series expansion for the associated density of the time to ruin (see, e.g., Dickson and Willmot (2005)). In this thesis, we propose to analyze the long-standing finite-time ruin problem by incorporating the number of claims until ruin into the Gerber-Shiu analysis. As will be seen in Chapter 2, many nice analytic properties of the original Gerber-Shiu function are preserved by this generalized analytic tool. For instance, the Gerber-Shiu function still satisfies a defective renewal equation and can be generally expressed in terms of some roots of Lundberg's generalized equation in the Sparre Andersen risk model.

In this thesis, we propose not only to unify previous methodologies on the study of the density of the time to ruin through the use of Lagrange's expansion theorem, but also to provide insight into the nature of the series expansion by identifying the probabilistic contribution of each term in the expansion through analysis involving the distribution of number of claims until ruin. In Chapter 3, we study the joint generalized density of the time to ruin and the number of claims until ruin in the classical compound Poisson risk model. We also utilize an alternative approach to obtain the density of the time to ruin based on the Lagrange inversion technique introduced by Dickson and Willmot (2005). In Chapter 4, relying on the Lagrange expansion theorem for analytic inversion, the joint density of the time to ruin, the surplus immediately before ruin and the number of claims until ruin is examined in the Sparre Andersen risk model with exponential claim sizes and arbitrary interclaim times.

To our knowledge, existing results on the finite-time ruin problem in the Sparre Andresen risk model typically involve an exponential assumption on either the interclaim times or the claim sizes (see, e.g., Borovkov and Dickson (2008)). Among the few exceptions, we mention Dickson

and Li (2010, 2012) who analyzed the density of the time to ruin for Erlang-n interclaim times. In Chapter 5, we propose a significant breakthrough by utilizing the multivariate version of Lagrange's expansion theorem to obtain a series expansion for the density of the time to ruin under a more general distribution assumption, namely when interclaim times are distributed as a combination of n exponentials. It is worth emphasizing that this technique can also be applied to other areas of applied probability. For instance, the proposed methodology can used to obtain the distribution of some first passage times for particular stochastic processes. As an illustration, the duration of a busy period in a queueing risk model will be examined.

Finally, some concluding remarks and discussion of future research are made in Chapter 6.

Keywords: Ruin time, Related ruin measures, Gerber-Shiu function, Sparre Andersen risk model

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορικό

Ο τυχαίος χαρακτήρας μιας επιχείρησης ενός ασφαλιστή και η υποχρέωση του να καταβάλει μελλοντικές αποζημιώσεις έχουν προσελκύσει ιδιαίτερη προσοχή σε κάθε ενδιαφερόμενο στην κοινωνία. Για παράδειγμα, για να διατηρηθεί η συνολική υγεία των ασφαλιστών, μια ποικιλία μέτρων και κεφαλαιακών απαιτήσεων έχουν επιβληθεί από τις ρυθμιστικές αρχές για να αποτρέψουν τους ασφαλιστές από την αφερεγγυότητα. Ως άμεσο αποτέλεσμα, το επίπεδο του κεφαλαίου που βασίζεται στον κίνδυνο που πρέπει να έχει στην κατοχή του γίνεται το κύριο μέλημα των ασφαλιστών και έχει πυροδοτήσει πολλαπλά κύματα συζήτησης σχετικά με τις αναλυτικές σχέσεις μεταξύ αρχικού κεφαλαίου, του χαρακτηριστικού του κινδύνου της επιχείρησης και της πιθανότητας ενός γεγονότος αφερεγγυότητας. Στην θεωρία κινδύνου, αυτό επιτυγχάνεται εν μέρει με ανάλυση κρίσιμης σημασίας μεταβλητών όπως ο *χρόνος χρεοκοπίας* (η χρονική στιγμή που το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό), το *έλλειμα κατά την χρεοκοπία* (η ελάχιστη εισφορά κεφαλαίου που απαιτείται για την αναβίωση της επιχείρησης του ασφαλιστή) και το *πλεόνασμα αμέσως πριν την χρεοκοπία*. Ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι να συμμετάσχει στην προσπάθεια της αναλογιστικής κοινότητας για να αναλύσει αυτές τις μεταβλητές (και άλλες σχετικές) και να αναπτύξει αποτελεσματικά εργαλεία διαχείρισης κινδύνων για να ενισχύσει την κατανόηση μας πάνω στο γεγονός της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, εστιάζουμε στον χρόνο της χρεοκοπίας και στοχεύουμε στην παροχή πληροφοριών σχετικά με τον χρόνο χρεοκοπίας σε διαφορά μοντέλα κινδύνου.

Στην θεωρία κινδύνου το πλεόνασμα του ασφαλιστή $\{ U_t, t \geq 0 \}$ συνήθως ορίζεται ως

$$U_t = u + ct - S_t \tag{1.1}$$

όπου u $(u \geq 0)$ είναι το αρχικό επίπεδο πλεονάσματος, c $(c > 0)$ είναι το επίπεδο ασφαλίστρου ανά μονάδα του χρόνου και $\{S_t, t \geq 0\}$ είναι η ανέλιξη συνολικού ποσού απαιτήσεων. Ορίζουμε το συνολικό ποσό απαιτήσεων τη χρονική στιγμή t ως

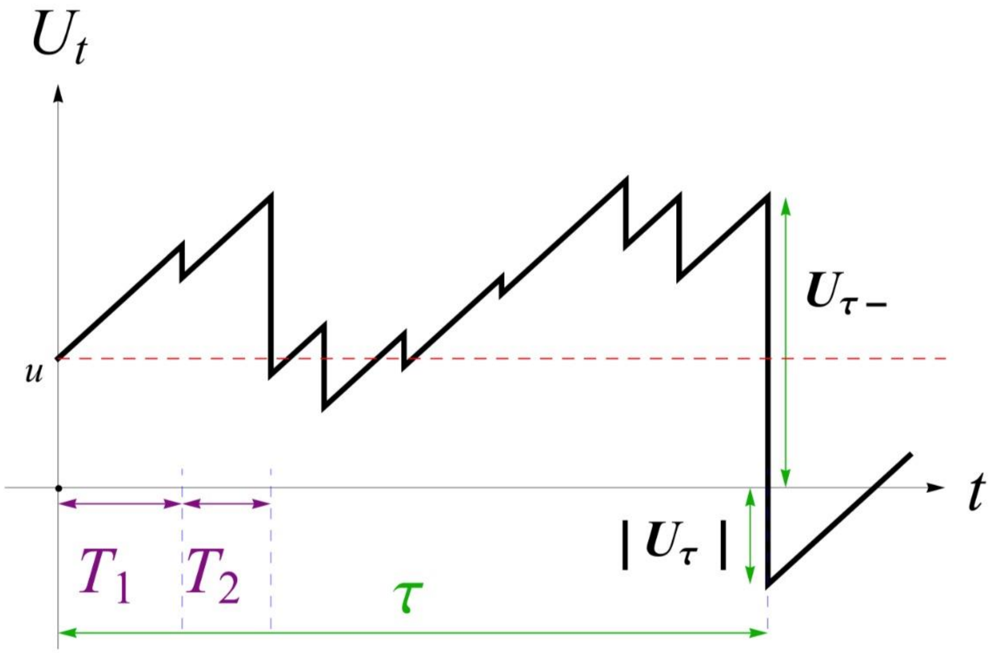
$$S_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} X_t, & N_t > 0, \\ 0, & N_t = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

όπου $\{N_t, t \geq 0\}$ είναι η ανέλιξη του πλήθους των απαιτήσεων που καθορίζεται από την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) ενδιαμέσων χρόνων $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ με T_i να αντιπροσωπεύει το χρόνο μεταξύ της $(i-1)$-ης απαίτησης και της i-ης απαίτησης (και T_1 είναι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης απαίτησης). Επίσης, ορίζουμε με X_i το μέγεθος της i-ης απαίτησης. Έστω $\tau = inf\{t \geq 0 : U_t < 0\}$ ο χρόνος της χρεοκοπίας για τη διαδικασία του πλεονάσματος $\{ U_t, t \geq 0 \}$ με $\tau = \infty$ αν δεν συμβεί χρεοκοπία. Οπότε, $U_{\tau-}$ είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και $|U_t|$ είναι το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία (βλέπε σχήμα 1.1). Σημειώνουμε ότι $X_\tau = U_{\tau-} + |U_\tau|$ είναι το μέγεθος της απαίτησης που προκάλεσε την χρεοκοπία και $N_\tau = max\{n\, ;\, \sum_{i=1}^{n} T_i \leq \tau\}$ είναι ο *αριθμός των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία*.

Στη συνέχεια εισάγουμε ένα από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα εξάρτησης μεγέθους και συχνότητας απαιτήσεων στην τρέχουσα αναλογιστική βιβλιογραφία. Σε ένα μοντέλο κινδύνου *Sparre Andersen*, υποθέτουμε ότι οι τ.μ. μεγέθους απαίτησης $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d.) με τη πυκνότητα p, αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $P(x) = 1 - \bar{P}(x)$, μετατροπή Laplace-Stieltjes (ή μετατροπή Laplace) $\tilde{p}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} p(x)dx$, μέσος μ και k-φορές μ_k (με $\mu_1 = \mu$). Ομοίως, οι τ.μ. ενδιαμέσων χρόνων $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι επίσης i.i.d. με την πυκνότητα k, α.σ.κ $K(t) = 1 - \bar{K}(t)$, μετατροπή Laplace $\tilde{k}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, k(t)dt$ και μέσο κ. Επιπλέον, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ως ειδική περίπτωση, όταν οι τ.μ. $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή, η (1.1) καταλήγει στο *κλασσικό σύνθετο*

Poisson μοντέλο κινδύνου (classical compound Poisson risk model) (βλέπε, π.χ., Cramer (1955), Gerber (1979) και Grandell (1991)).

Σχήμα 1.1: Η ανέλιξη του πλεονάσματος και ποσότητες χρεοκοπίας



Καθώς η στιγμή έναρξης της ανέλιξης του πλεονάσματος δεν σχετίζεται απαραίτητα με μια εμφάνιση απαίτησης, το T_1 δεν είναι πάντοτε ένας «πλήρης» χρόνος μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων. Είναι πιο σωστό να υποθέσουμε ότι η T_1 έχει διαφορετική πυκνότητα k_0 από τους άλλους ενδιάμεσους χρόνους. Σε αυτή την περίπτωση, η T_1 καλείται *καθυστερημένη περίοδος* (*delayed period*) και το μοντέλο (1.1) αναφέρεται σε ένα *καθυστερημένο Sparre Andersen μοντέλο κινδύνου*. Όταν $k_0 = k$, το καθυστερημένο Sparre Andersen μοντέλο κινδύνου γίνεται ένα συνήθης μοντέλο κινδύνου *Sparre Andersen*. Όταν $k_0(t) = k_e(t) = \overline{K}(t)/\kappa$, το μοντέλο (1.1) αναφέρεται στο *στάσιμο ή equilibrium μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen* (βλέπε, π.χ., Cox (1962), Karlin και Taylor (1975), Asmussen (2000) και Willmot και Lin (2001)). Οι αναγνώστες παραπέμπονται επίσης στον Willmot (2004) για συγκεκριμένες παραδοχές κατανομής για το k_0.

Μπορούμε επίσης να γενικεύσουμε τη σχέση εξάρτησης στο προαναφερθέν μοντέλο κινδύνου. Σε ένα εξαρτημένο (dependent) μοντέλο κινδύνου *Sparre Andersen*, υποθέτουμε ότι τα ζευγάρια $\{(X_i, T_i)\}_{i=1}^{\infty}$ από μια ακολουθία από i.i.d. τ.μ. και κατ' επέκταση οι $\{cT_i - X_i\}_{i=1}^{\infty}$

διαμορφώνουν μια ακολουθία από i.i.d τ.μ.. Παρ' όλ' αυτά, το κάθε ζευγάρι, T_i και X_i δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητο. Σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία πλεονάσματος $\{ U_t, t \geq 0 \}$ εξακολουθεί να διατηρεί την δομή του τυχαίου περίπατου *Sparre Andersen*. Αυτός ο τύπος διαδικασίας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τη μοντελοποίηση ορισμένων ασφαλιστικών συμβάντων που περιλαμβάνουν εξάρτηση μεταξύ συχνότητας και μεγέθους της απαίτησης, όπως στις ασφαλίσεις σεισμού. Σε όλη την εργασία υποθέτουμε μια θετική επιβάρυνση ασφαλείας *(loading)* θ $(\theta > 0)$ τέτοιο ώστε $c\kappa = (1+\theta)\mu$.

Ως επί των πλείστων, η πρόσφατη έρευνα για ποσότητες σχετικά με την χρεοκοπία βασίζετε στο έργο των καθηγητών Hans U. Gerber και Elias S.W. Shiu (Gerber and Shiu (1998)). Εισήγαγαν ένα αναλυτικό εργαλείο, ονομαζόμενο *Gerber-Shiu expected discounted penalty function* (αναφέρεται επίσης ως συνάρτηση Gerber-Shiu), ορίζεται ως

$$m_\delta(u) \equiv E\left[e^{-\delta\tau} w(U_{\tau-}, |U_\tau|) 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right] \tag{1.3}$$

όπου $\delta(\delta > 0)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η ένταση ανατοκισμού ή ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace, $w(\cdot)$ είναι η λεγόμενη συνάρτηση ποινής *(penalty function)*, και $1(A)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση όπου παίρνει την τιμή 1 όταν συμβεί το A και 0 διαφορετικά. Ένα ωραίο χαρακτηριστικό της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι η ευελιξία στην επιλογή της συνάρτησης ποινής $w(\cdot)$. Για παράδειγμα, αν $w(\cdot) = 1$, η συνάρτηση Gerber-Shiu καταλήγει στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Επιπλέον, αν $w(x, y) = e^{-sx-zy}$, η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται ο τριμερής μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν την χρεοκοπία και του ελλείματος μετά την χρεοκοπία. Αναλυτική αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace οδηγεί φυσικά στην από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τριών αυτών ποσοτήτων. Επομένως, η συνάρτηση Gerber-Shiu όχι μόνο παρέχει έναν συστηματικό τρόπο από κοινού ανάλυσης διαφόρων ενδιαφέρον ποσοτήτων, αλλά επίσης παρέχει την ευκολία εξαγωγής βασικών πληροφοριών διαχείρισης κινδύνου από μια τυπική ανάλυση του τύπου Gerber-Shiu.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu αρχικά αναλύθηκε στο πλαίσιο του κλασσικού σύνθετου Poisson μοντέλου κινδύνου από τους Gerber και Shiu (1998). Αποδείχθηκε ότι συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μία defective renewal structure και μπορεί να εκφραστεί ως η μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg (βλέπε, π.χ., Gerber και Shiu (1998) και Lin και Willmot

(1999, 2000)). Η ανάλυση επεκτάθηκε γρήγορα σε διάφορες γενικεύσεις του κλασσικού σύνθετου Poisson μοντέλου κινδύνου. Στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andresen, οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων ή τα ύψη των απαιτήσεων υποτίθεται ότι ακολουθούν μία κλάση κατανομών, όπως κατανομές Erlang (βλέπε, π.χ., Dickson και Hipp (2001) και Li και Garrido (2004)), Coxian κατανομές (βλέπε, π.χ., Li και Garrido (2005) και Landriault και Willmot (2008)), και συνδυασμούς από n εκθετικές (Gerber και Shiu (2005)). Σε γενικές γραμμές, η συνάρτηση Gerber-Shiu σε αυτά τα μοντέλα κινδύνου εξακολουθεί να ικανοποιεί μία defective renewal equation και μπορεί να εκφραστεί με όρους ορισμένων λύσεων στην λεγόμενη *γενικευμένη εξίσωση Lundberg* για τη οποία η εξάρτηση του δ εμφανίζεται εμφανίζεται με μη τετριμμένο τρόπο. Παρόμοιος Gerber-Shiu τύπος ανάλυσης έχει επίσης πραγματοποιηθεί σε μοντέλα που χαρακτηρίζονται από διάχυση (βλέπε, π.χ., Gerber and Landry (1998) και Tsai and Willmot (2002)), με μερισματικές στρατηγικές (βλέπε, π.χ., Lin κ.ά. (2003), Gerber κ.ά. (2006), Lin και Pavlova (2006) και Lin και Sendova (2008)), ή με άλματα διπλής όψης (βλέπε, π.χ., Albrecher et al. (2010) και Zhang et al. (2010)).

Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση Gerber-Shiu έχει επίσης αναλυθεί σε μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου (βλ. το δημοσίευμα ανασκόπησης των Li κ.ά. (2009)). Τυπικά, στα μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου υποθέτουμε ότι υπάρχουν το πολύ μία απαίτηση σε κάθε περίοδο και τα μεγέθη των απαιτήσεων παίρνουν διακριτές τιμές (βλ., π.χ., Gerber (1988)). Τα αποτελέσματα σε μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου είναι γενικά πιο ρητά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των συνεχών ανάλογων τους (βλ., π.χ., Dickson (1994)). Δεδομένου ότι τα μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου δεν αποτελούν το επίκεντρο αυτής της διατριβής, αναφερόμαστε στους Li et al. (2009) για μία διεξοδική ανασκόπηση της ανάλυσης Gerber-Shiu στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο και το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου. Στην επόμενη ενότητα, θα προχωρήσουμε στο θέμα των συναρτήσεων Gerber-Shiu και θα σχολιάσουμε ορισμένες πρόσφατες προόδους που σχετίζονται με τις γενικεύσεις τους.

1.2 Γενικεύσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu

Η δημοτικότητα και η ευφυΐα της συνάρτησης Gerber-Shiu οδήγησαν ορισμένους συγγραφείς στο να προτείνουν και να αναλύσουν συγκεκριμένες γενικεύσεις αυτού του αναλυτικού εργαλείου. Μία από αυτές προτάθηκε από τους Cai et al. (2009). Θεώρησαν ότι ο χρόνος πρώτης μετάβασης της διαδικασίας πλεονάσματος διασταυρώνεται κάτω από ένα δεδομένο επίπεδο $d \in \mathbb{R}$, ονομαζόμενο *χρόνος για προεπιλογή* (*time to default*), το οποίο ορίζεται ως $\tau_d = \inf\{t \geq 0 \,:\, U_t < d\,\}$. Όταν $d = 0$, το $\tau_0 = \tau$ γίνεται ο χρόνος χρεοκοπίας. Εισάγοντας μία συνάρτηση κόστους $I(U_t)$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το κόστος λειτουργίας τη χρονική στιγμή t, η οποία ορίζει την προσδοκία των συνολικών προεξοφλημένων λειτουργικών δαπανών μέχρι τον χρόνο για προεπιλογή ως

$$H_{\delta}(u) \equiv E\left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} I(U_t)dt \,|U_0 = u\right]. \tag{1.4}$$

Οι Cai et al. (2009) επισημάνουν ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι μια ειδική περίπτωση της $H_{\delta}(u)$ σε μια γενική κατηγορία διαδικασιών πλεονάσματος (δηλαδή, το αποσπασματικά-ντετερμινιστικό σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson). Επιπλέον, η $H_{\delta}(u)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση πολλών ποσοτήτων που εξαρτώνται από το χρόνο, όπως είναι τα αναμενόμενα μειωμένα μερίσματα που καταβάλλονται μέχρι την χρεοκοπία,

$$V(u) = E\left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} dD(t) \,|U_0 = u\right] \tag{1.5}$$

όπου $D(t)$ αντιπροσωπεύει τα συσσωρευμένα μερίσματα που καταβάλλονται έως το χρόνο t (βλέπε, π.χ., Avanzi (2009) και αναφορές εκεί). Οι Cai et al. (2009) μελέτησαν περαιτέρω τις ιδιότητες της $H_{\delta}(u)$ και επισήμαναν ότι η $H_{\delta}(u)$ εξακολουθεί να ικανοποιεί μία defective renewal equation για $d = 0$ και μία κατηγορία συνάρτησης $I(\cdot)$ στο κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου. Καθώς η $H_{\delta}(u)$ είναι ένα πολύ γενικό εργαλείο που θα μπορούσε να ικανοποιήσει διάφορα ενδιαφέροντα, περαιτέρω ανάλυση των ιδιοτήτων της ίσως να βασίζεται σε ορισμένες επιπλέον παραδοχές της $I(\cdot)$.

Μια άλλη κατηγορία γενικεύσεων αποτελείται από την προσθήκη νέων ποσοτήτων ενδιαφέροντος στην συνάρτηση ποινής $w(*)$ (βλέπε, π.χ., Cheung et al. (2010a, 2010b) και Biffis and Morales (2010)). Οι Cheung et al. (2010a, 2010b) καθιέρωσαν μία γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu,

$$m_{\delta}(u) \equiv E\left[e^{-\delta\tau} w\left(U_{\tau-}, |U_\tau|, Y_\tau, R_{N_\tau - 1}\right) 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right] \tag{1.6}$$

όπου $Y_t = \inf_{0\leq s<t} U_s$ είναι το ελάχιστο πλεόνασμα πριν το χρόνο t, και $R_n = u + \sum_{i=1}^{n}(cT_i - X_i)$ για n=1, 2, … (με $R_0 = u$), που δηλώνει το πλεόνασμα αμέσως μετά την n-οστή απαίτηση. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα αυτής της γενίκευσης είναι ότι το προκύπτον εργαλείο εξακολουθεί να ικανοποιεί μία defective renewal equation και μπορεί να γραφτεί με όρους σύνθετης γεωμετρικής σειράς.

Ομοίως, μπορούμε να αναλύσουμε από κοινού τον αριθμό των απαιτήσεων πριν την χρεοκοπία N_τ με τις παραδοσιακές μεταβλητές που σχετίζονται με τη χρεοκοπία εισάγοντας μια νέα συνάρτηση,

$$m_{\tau,\delta}(u) \equiv E\left[r^{N_\tau} e^{-\delta\tau} w\left(U_{\tau-}, |U_\tau|, Y_\tau, R_{N_\tau-1}\right) 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right] \qquad (1.7)$$

για $\delta \geq 0$ και $r \in (0,1]$. Το $r = 0$ αποκλείεται, δοθέντος ότι $m_{\tau,\delta}(u) = 0$ για όλα τα $u \geq 0$. Επισημάναμε ότι η $m_{\tau,\delta}(u)$ ικανοποιεί επίσης μια defective renewal equation, οι γενικές ιδιότητες της οποίας θα συζητηθούν στην Ενότητα 2.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία έχει ήδη εξεταστεί σε ορισμένα προβλήματα που σχετίζονται με την χρεοκοπία (βλέπε, π.χ., Stanford και Stroinski (1994) και De Vylder και Goovaerts (1998)). Χρησιμοποιώντας πιθανολογικά επιχειρήματα σχετικά με τον αριθμό των απαιτήσεων, αναδρομικές σχέσεις αναπτύχθηκαν για τον υπολογισμό πιθανοτήτων χρεοκοπίας από τους Stanford και Stroinski (1994) και Egidio dos Reis (2002). Σε αυτή τη διατριβή, η προτεινόμενη συνάρτηση ανάλυσης $m_{\tau,\delta}(u)$ μας επιτρέπει να ενσωματώσουμε τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία στην ανάλυση τύπου Gerber-Shiu με έναν σχετικά απλό τρόπο, όπως θα δείξουμε.

1.3 Το πρόβλημα χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου

Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου αποτελεί ένα μακροχρόνιο πρόβλημα στην θεωρία κινδύνου. Μια γόνιμη προσέγγιση που προτείνεται στη βιβλιογραφία είναι η ανάπτυξη αναδρομικών αλγορίθμων. Για παράδειγμα, οι De Vylder και Goovaerts (1988), και Dickson και Waters (1991) με επιτυχία προσέγγισαν τις πιθανότητες χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου χρησιμοποιώντας πιθανότητες χρεοκοπίας διακριτού χρόνου. Χρησιμοποιώντας τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι την χρεοκοπία, οι Stanford και Stroinski (1994) και Stanford et al. (2000) πρότειναν μια αναδρομική μέθοδο για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας πριν ή στην n-οστή απαίτηση στο κλασσικό compound Poisson μοντέλο κινδύνου και σε ορισμένα μοντέλα που ο αριθμός των απαιτήσεων δεν ακολουθεί Poisson κατανομή (π.χ., Erlang ενδιάμεσοι χρόνοι και μείξεις εκθετικών ενδιαμέσων χρόνων). Τα πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης περιλαμβάνουν σχετικά απλές αναδρομικές εκφράσεις και γρήγορες αριθμητικές αξιολογήσεις.

Πρόσφατα, υπήρξε ένα συσσωρευμένο ενδιαφέρον μιας έκφρασης κλειστής μορφής για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, η οποία φυσικά οδηγεί σε μαθηματικές εκφράσεις πιθανοτήτων χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου. Στο πλαίσιο του κλασσικού compound Poisson risk model, οι Drekic και Willmot (2003), Dickson και Willmot (2005) και Garcia (2005) όλοι έχουν εξετάσει την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας μέσω της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace. Ο αναγνώστης αναφέρεται στους Picard και Lefevre (1997) όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι διακριτά. Η κατανόμη του χρόνου χρεοκοπίας έχει ληφθεί επίσης στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andresen· βλέπε, π.χ., Borovkov and Dickson (2008). Ο αναγνώστης καλείται απίσης να συμβουλευτεί τους Dickson et al. (2005) για μια ισοδύναμη αναπαράσταση όταν γίνονται περαιτέρω παραδοχές σχετικά με την πυκνότητα μεταξύ *k* απαιτήσεων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας είναι μάλλον σπάνια όταν δεν επιβάλλεται η εκθετική υπόθεση ούτε στους ενδιάμεσους χρόνους ούτε στα μεγέθη των απιτήσεων. Μεταξύ των λίγων εξαιρέσεων, αναφέρουμε τους Dickson και Li (2010) που έλαβαν μια έκφραση για τη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andresen με Erlang-2 ενδιάμεσους χρόνους και με συγκεκριμένες κατανομές μεγέθους απαιτήσεων. Επίσης οι Dickson και Li (2012) χρησιμοποίησαν πιθανοτικά επιχειρήματα για την απόκτηση μιας αναδρομικής σχέσης για τον υπολογισμό της από κοινού πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία για ορισμένα μοντέλα με Erlang-*n* ενδίαμεσους χρόνους. Όσον αφορά ορισμένα μοντέλα διακριτού χρόνου, οι Gerber (1988) και Willmot (1993) παρείχαν τύπους για τις πιθανότητες χρεοκοπίας (πεπερασμένου χρόνου) στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο, ενώ οι Cossette et al. (2006) πρότειναν μία αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andresen.

Αν και μερικά από τα παραπάνω αποτελέσματα λαμβάνονται με πιθανολογικά επιχειρήματα, η ανάλυση του χρόνου χρεοκοπίας μέσω του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή

$$\phi_{1,\delta} \equiv E\left[e^{-\delta\tau}1(\tau < \infty)|U_0 = u\right] \tag{1.8}$$

είναι γενικά ευκολότερη με την έννοια ότι μπορεί να επιτεθχεί μέσω της ανάλυσης της συνάρτησης Gerber-Shiu $m_\delta(u)$. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο μετασχηματίσμος Laplace $m_{1,\delta}(u)$ εξαρτάται από το δ με ένα μη απλό τρόπο, γεγονός που καθιστά την αντιστροφή του σε σχέση με το δ μια αποθαρρυντική εργασία ακομη και στα πιο απλοϊκά μοντέλα κινδύνου (βλέπε, π.χ., Dickson και Willmot (2005) και Landriault et al. (2011) για περισσότερες λεπτομέρειες).. Γενκά, υπάρχουν πολλές τεχνικές αριθμητικής αναστροφής (βλέπε, π.χ., Abate και Whitt (1992)), αλλά η αναλυτική αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace παραμένει ένα πολύ προκλητικό θέμα.

Σε αυτή τη διατριβή προτείνουμε να ενοποιήσουμε την προηγούμενη μεθοδολογία για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου μέσω της χρήσης του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange (το οποίο θα συζητηθεί στην Ενότητα 1.4.2), καθώς και πληροφορίες για τη φύση της σειράς των επεκτάσεων της προσδιορίζοντας την πιθανοτική συμβολή καθε όρου στην επέκταση μέσω ανάλυσης που περιλαμβάνει την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεκοπία. Ορίζουμε

$$\phi_{\tau,\delta}(u) \equiv E\left[r^{N_\tau}e^{-\delta\tau}1(\tau < \infty)|U_0 = u\right] \tag{1.9}$$

για $\delta \geq 0$ και $r \in (0,1]$. Σαφώς αυτός ο από κοινού μετσχηματισμός Laplace / πιθανογεννήτρια συνάρτηση (p.g.f.) είναι μια ειδική περίπτωση της (1.7) όταν $w\left(U_{\tau-}, |U_\tau|, Y_\tau, R_{N_\tau - 1}\right) = 1$. Το επίκεντρο θα είναι να αποκτήσουμε την έκφραση $\phi_{\tau,\delta}(u)$ χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή προσέγγιση Gerber-Shiu και την αναλυτική αντιστροφή της $\phi_{\tau,\delta}(u)$ σε σχέση με το *r* και δ μέσω μιας εφαρμογής του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης του Lagrange.

1.4 Μαθηματικά προκαταρκτικά

1.4.1 Ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση παίζει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή μιας κλειστής μορφής της συνάρτησης Gerber-Shiu σε μοντέλα κινδύνου Sparre Andresen. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε εν' συντομία τη λύση των ελατττωματικών ανανεωτικών εξισώσεων (βλέπε, π.χ., Feller (1971)) και θα αναλύσουμε τη συμπεριφορά της λύσης τόσο σε γενικές όσο και σε ειδικές περιπτώσεις.

Ορισμος 1.4.1 *Έστω* $F(y) = 1 - \bar{F}(y)$ *μία συνάρτηση κατανομής με* $F(0) = 0$ *και* $v(x) \geq 0$ *είναι μία τοπικά ορισμένη συνεχής συνάρτηση (δηλ.* $v(x) < \infty$ *για* $x < \infty$*), τότε η* $m(x)$ *ικανοποιεί την μία ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση αν*

$$m(x) = \phi \int_0^x m(x-y)dF(y) + v(x) \tag{1.10}$$

όπου $0 < \phi < 1$.

Στην θεωρία κινδύνου, η $F(y)$ γενικά αναπαριστά την κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων με Laplace μετατροπή $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y)$. Η λύση της Εξ. (1.10) μπορεί να εκφραστεί ως μία συσχετισμένη σύνθετη γεωμετρική ουρά $\bar{G}(y)$, η οποία ορίζεται μέσω $G(y) = 1 - \bar{G}(y) = \Pr(L \leq y)$,

$$\bar{G}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(y), \quad y \geq 0. \tag{1.11}$$

Η $\bar{F}^{*n}(y) = 1 - F^{*n}(y)$ είναι η ουρά της κατανομής της n-οστής συνέλιξης της F με τον εαυτό της. Δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι η $G(y)$ έχει σημείο μάζας το $1 - \phi$ όταν $y = 1$. Στην πραγματικότητα, εάν θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μια γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ϕ, η $G(y)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η κατανομή του συνολικού αριθμού των απαιτήσεων L. Ο μετασχηματισμός Laplace της $G(y)$ μπορεί να γραφεί ως

$$E(e^{-sL}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \int_0^\infty e^{-sy} f^{*n}(y)dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \{\tilde{f}(s)\}^n$$
$$= \frac{1-\phi}{1-\phi\tilde{f}(s)}. \tag{1.12}$$

Πρόταση 1.4.2 *Η λύση της Εξ. (1.10) μπορεί να εκφραστεί ως*

$$m(x) = \frac{1}{1-\phi}\int_{0^+}^{\infty} v(x-y)dG(y) + v(x), \qquad x \geq 0 \tag{1.13}$$

Αποδ. Παίρνοντας και στις δυο πλευρές της (1.10) μετασχηματισμό Laplace, βρίσκουμε

$$\tilde{m}(s) = \phi\tilde{m}(s)\tilde{f}(s) + \tilde{v}(s) \tag{1.14}$$

Συνδυάζοντας (1.13) και (1.14) έχουμε

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}(s)}{1-\phi} E(e^{-sL})$$
$$= \frac{\tilde{v}(s)}{1-\phi}\{ E(e^{-sL^+}) + 1 - \phi\}$$
$$= \frac{\tilde{v}(s)\, E(e^{-sL^+})}{1-\phi} + \tilde{v}(s), \tag{1.15}$$

όπου L^+ είναι η τ.μ. $L \cdot 1(L > 0)$. Η αντιστροφή της (1.15) οδηγεί αμέσως στην (1.13). ■

Αξιζεί να σημειωθεί ότι η ίδια η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής $\bar{G}(y)$ είναι η λύση της ελαττωματικής ανανεωτικής εξίσωσης όταν $v(x) = \phi\bar{F}(x)$ (βλέπε, π.χ., Willmot και Lin (2001, σ. 156)). Σε αυτή την πεερίπτωση,

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}(s)}{1-\phi\tilde{f}(s)} = \frac{1}{1-\phi\tilde{f}(s)}\left(\phi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}\right).$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της (1.11) έχουμε

$$\tilde{\bar{G}}(y) = \frac{1-E(e^{-sL})}{s} = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1-\phi}{1-\phi\tilde{f}(s)}\right\} = \tilde{m}(s).$$

Από την μονδικότητα του μετασχηματισμού Laplace, καταλήγει κανείς ότι η $\bar{G}(y)$ ικνοποιεί την

$$\bar{G}(x) = \phi\int_0^x \bar{G}(x-y)dF(y) + \phi\bar{F}(y), \quad x \geq 0 \tag{1.16}$$

Η Εξ. (1.16) θα μπορούσε να χρησιμοοποιηθεί για τη λήψη του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και θα συζητηθεί περαιτέρω σε επόμενη ενότητα Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την (1.13) με διάφορες προδιαγραφές για τη $v(x)$, οι αναγνώστες παραπέμπονται στους Willmot and Lin (2001, ενότητα 9.1) για μια λεπτομερή συζήτηση..

Λόγω της πολυπλοκότητας της Εξ. (1.13), η οποία περιλαμβάνει την συνέλιξη μεταξύ της $v(x)$ και της σχετικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $G(x)$, ασυμπτωτικές ιδιότητες και όρια αξιοπιστίας της $m(x)$ έχουν προσελκύσει σημαντικό ενδιαφέρον στην βιβλιογραγία. Οι Willmot et al. (2001) παρείχαν μια γενική προσέγγιση για την απόκτηση διαφορετικών τύπων ορίων καθορίζοντας την επιλόγη μιας F-ολοκληρώσιμης, μη αρνητικής συνάρτησης $g(x)$ στην ακόλουθη γενικευμένη προσαρμοσμένη εξίσωση Lundberg

$$\int_0^\infty g(y)dF(y) = \frac{1}{\phi}. \tag{1.17}$$

Ειδικότερα, εάν $g(x) = e^{Rx}$ είναι άμεσα ολοκληρώσιμη κατά Riemann και το $R > 0$ ικανοποιεί τη

$$\int_0^\infty e^{Ry}dF(y) = \frac{1}{\phi},$$

τότε

$$C_L e^{-Rx} \leq m(x) \leq C_U e^{-Rx}, \qquad x \geq 0 \tag{1.18}$$

όπου $C_L = \inf_{z\geq 0} \alpha(z)$, $C_U = \sup_{z\geq 0} \alpha(z)$ και

$$\alpha = \frac{e^{Rz}v(z)}{\phi \int_z^\infty e^{Ry}dF(y)}.$$

Τα όρια (1.18) μερικές φορές ονομάζονται *εκθετικά όρια.* Όταν $x \to \infty$, ένα στενά συνδεδεμένο ασυμπτωτικό αποτέλεσμα (αναφέρεται επίσης ως ασυμπτωτικό αποτέλεσμα Cramer-Lundberg) είναι εύκολα διαθέσιμο (βλέπε, π.χ., Resnick (1992, ενότητα 3.11)),

$$m(x) \sim Ce^{-Rx}, \qquad x \to \infty \tag{1.19}$$

όπου

$$C = \frac{\int_0^\infty e^{Ry} \upsilon(y)dy}{\phi \int_0^\infty y e^{Ry} dF(y)} \tag{1.20}$$

και $\alpha(x) \sim b(x),\ x \to \infty$ υποδηλώνει ότι $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)/b(x) = 1$.

1.4.2 Θεώρημα πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται μια σύντομη περίληψη του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange (βλέπε, π.χ., Good (1960) και Goulden και Jackson (1983, Ενότητα 1.2.9)) στην απλη και στην πολυμεταβλητή του μορφή. Κατω από επιπλέον περιορισμούς, δίνονται μερικές απο τις απλουστευμένες μορφές του που προσφέρουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις απόμενες ενότητες αυτής της διατριβής. Για ευκολία συμβόλων, ορίζουμε

$$h^{(m_1,\dots,m_n)}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \equiv \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial\rho_1^{m_1} \dots \partial\rho_n^{m_n}} h(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n), \qquad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}.$$

Στη συνέχεια, είναι βολικό να ορίουμε $\frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} f'(t) \equiv f(t)$.

Πρώτα αναφέρουμε την μονομεταβλητή εκδοχή του θεωρήματος, επίσης γνωστή ως θεώρημα σιωπηρής συνάρτησης Lagrange (βλέπε, π.χ., Good (1960, σ. 375) και Goulden και Jackson (1983, Ενότητα 1.2.4)).

Θεώρημα 1.4.3 *Για μια αναλύτικη συνάρτηση $h(z)$ σε μια περιοχή όπου $z = \alpha$, αν*

$$\zeta - \alpha = \frac{z - \alpha}{g(z)},$$

με $g(\alpha) \neq 0$, τότε

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \alpha)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \left\{ h(t)(g(t))^m \left(1 - \frac{(t-\alpha)g'(t)}{g(t)}\right) \right\} \Bigg|_{t=\alpha}. \tag{1.21}$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η (1.21) είναι ισοδύναμη με

$$h(z) = h(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \alpha)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left\{ h'(t)\big(g(t)\big)^m \right\} \Bigg|_{t=\alpha}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left\{ h'(t)\big(g(t)\big)^m \right\} \Bigg|_{t=\alpha} . \tag{1.22}$$

Στην θεωρία κινδύνου, η Εξ. (1.22) ήταν το επίκεντρο της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και άλλων ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία όταν οι συναρτησιακές τους μορφές μπορούν να εκφραστούν ως μια μοναδική λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (βλέπε, π.χ., Dickson and Willmot (2005)).. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί (με αντίθτο τρόπο) για τη λήψη μιας συνοπτικής έκφρασης όταν η επέκταση είναι άμεσα διαθέσιμη (βλέπε De Vylder και Goovaerts (1998)). Ωστόσο, για τα περισσότερα μοντέλα κινδύνου ο μετασχηματισμός Laplace $\phi_{1,\delta}(u)$ είναι συνάρτηση περισσοτέερων από μία λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, περίπτωση κατά την οποία ισχύει η πολυμεταβλητή εκδοχή του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange.

Θεώρημα 1.4.4 *Για μια αναλυτική συνάρτηση* $h(\boldsymbol{z})$ *σε μια περιοχή όπου* $\boldsymbol{z} = \mathbf{a}$ *(*$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ *και* $\mathbf{a} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n)$*), αν*

$$\zeta_i - \alpha_i = \frac{z_i - \alpha_\iota}{g_i(\boldsymbol{z})}, \tag{1.23}$$

με $g_i(\mathbf{a}) \neq 0$ *για* $i = 1,2, \dots, n$*, τότε*

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(\zeta_i - a_j\right)^{m_j}}{m_j!} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}} \{H_n(\boldsymbol{t})(g_1(\boldsymbol{t}))^{m_1} \dots (g_n(\boldsymbol{t}))^{m_n}\} \Bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{a}} , \tag{1.24}$$

όπου

$$H_n(\boldsymbol{t}) = h(\boldsymbol{t}) \cdot det\left(1(i=j) - \frac{t_i - a_i}{g_i(\boldsymbol{t})} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}\right),$$

για $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Ένω το θεώρημα αναφέρεται με έναν μάλλον περιεκτικό τρόπο, προτείνουμε να εργαστούμε με μία από τις ισοδύναμες αναπαραστάσεις του που αποδεικνύεται ότι βοηθούν περισσότερο στο Κεφάλαιο 5 για σκοπούς αντιστροφής. Για την περίπτωση $n = 2$, ο Poincare (1886) παρείχε αυτήν την εκφρασή που μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της Εξ. (1.22) στην μονοπαραμετρική περίπτωση, δηλαδή

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\zeta_1-\alpha_1)^{m_1}(\zeta_2-\alpha_2)^{m_2}}{m_1!\,m_2!} \left\{ \frac{\partial^{m_1+m_2-2}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2-1}} h^{(1,1)}(\boldsymbol{t}) g_1^{m_1}(\boldsymbol{t}) g_2^{m_2}(\boldsymbol{t}) \right.$$
$$\left. + h^{(1,0)}(\boldsymbol{t}) \frac{\partial g_1^{m_1}(\boldsymbol{t})}{\partial t_2} g_2^{m_2}(\boldsymbol{t}) + h^{(0,1)}(\boldsymbol{t}) g_1^{m_1}(\boldsymbol{t}) \frac{\partial g_2^{m_2}(\boldsymbol{t})}{\partial t_1} \right\}\Bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{a}}. \qquad (1.25)$$

Όπως αναμενόταν, η επέκταση της (1.24) του Poincare γίνεται μεγάλη ακόμα και για τίμες n > 2. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι όταν η $g_i(\boldsymbol{z})$ είναι μόνο συνάρτηση του z_i για $i = 1,2,\dots,n$, προκύπτουν σημαντικές απλουστεύσεις. Αυτό είναι ακριβώς το πλαίσιο εφαρμογής του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange στα επόμενα κεφάλαια της διατριβής. Τα αποτελέσματα αναφέρονται στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.4.5 *Υπό τις ίδιες συνθήκες με το θεώρημα 1.4.4, μάζι με την $g_i(\boldsymbol{z})$ συνάρτηση μόνο του z_i ($i = 1,2,\dots,n$), έχουμε*

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\zeta_j-\alpha_j\right)^{m_j}}{m_j!} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_n-1}} \left\{h^{(1,\dots,1)}(\boldsymbol{t})\left(g_1(t_1)\right)^{m_1}\dots\left(g_n(t_n)\right)^{m_n}\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{a}} \qquad (1.26)$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το Πόρισμα 1.4.5 αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial t_1^{m_1}\dots\partial t_n^{m_n}}\left\{\mathbf{H}_{\mathrm{n}}(\mathbf{t})\left(g_1(\mathbf{t})\right)^{m_1}\dots\left(g_n(\mathbf{t})\right)^{m_n}\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{a}}$$
$$= \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_n-1}}\left\{h^{(1,\dots,1)}(\boldsymbol{t})\left(g_1(t_1)\right)^{m_1}\dots\left(g_n(t_n)\right)^{m_n}\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{a}} \qquad (1.27)$$

για κάθε $m_i \in \mathbb{N}$. Αποδεικνύουμε την (1.27) με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, η (1.27) γίνεται η (1.22).

Σημειώνουμε ότι όταν η $g_i(\boldsymbol{z})$ είναι μόνο συνάρτηση του z_i,

$$\mathbf{H}_{\mathrm{n}}(\mathbf{t}) = h(\mathbf{t})\prod_{i=1}^{\infty}\left\{1-\frac{t_i-a_i}{g_i(t_i)}\frac{\partial g_i(t_i)}{\partial t_i}\right\}$$
$$= \mathbf{H}_{\mathrm{n}-1}(\mathbf{t})\left\{1-\frac{t_n-a_n}{g_n(t_n)}\frac{\partial g_n(t_n)}{\partial t_n}\right\}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η (1.27) ισχύει για 2, 3, ..., $n-1$. Τότε

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial t_1^{m_1}\dots\partial t_n^{m_n}}\left\{\mathbf{H}_{\mathrm{n}}(\mathbf{t})\big(g_1(t_1)\big)^{m_1}\dots\big(g_n(t_n)\big)^{m_n}\right\}\Big|_{t=\mathbf{a}} \\
&= \frac{\partial^{m_n}}{\partial t_n^{m_n}}\left\{\left[1-\frac{t_n-a_n}{g_n(t_n)}\frac{\partial g_n(t_n)}{\partial t_n}\right](g_n(t_n))^{m_n}\right. \\
&\quad\left.\times\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-1}}{\partial t_1^{m_1}\dots\partial t_n^{m_{n-1}}}\left\{\mathbf{H}_{\mathrm{n}-1}(\mathbf{t})\prod_{j=1}^{n-1}\big(g_j(t_j)\big)^{m_j}\right\}\right\}\Bigg|_{t=\mathbf{a}} \\
&= \frac{\partial^{m_n}}{\partial t_n^{m_n}}\left\{\left[1-\frac{t_n-a_n}{g_n(t_n)}\frac{\partial g_n(t_n)}{\partial t_n}\right](g_n(t_n))^{m_n}\right. \\
&\quad\left.\times\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_{n-1}-1}}\left\{h^{(1,\dots,1,0)}\prod_{j=1}^{n-1}\big(g_j(t_j)\big)^{m_j}\right\}\right\}\Bigg|_{t=\mathbf{a}} \\
&= \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_{n-1}-1}}\left\{\prod_{j=1}^{n-1}\big(g_j(t_j)\big)^{m_j}\right. \\
&\quad\left.\times\frac{\partial^{m_n}}{\partial t_n^{m_n}}\left\{h^{(1,\dots,1,0)}\left[1-\frac{t_n-a_n}{g_n(t_n)}\frac{\partial g_n(t_n)}{\partial t_n}\right](g_n(t_n))^{m_n}\right\}\right\}\Bigg|_{t=\mathbf{a}} \\
&= \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_{n-1}-1}}\left\{\frac{\partial^{m_n-1}}{\partial t_n^{m_n-1}}\left\{h^{(1,\dots,1,1)}(g_n(t_n))^{m_n}\right\}\prod_{j=1}^{n-1}\big(g_j(t_j)\big)^{m_j}\right\}\Bigg|_{t=\mathbf{a}} \\
&= \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n-n}}{\partial t_1^{m_1-1}\dots\partial t_n^{m_n-1}}\left\{h^{(1,\dots,1)}(\boldsymbol{t})\big(g_1(t_1)\big)^{m_1}\dots\big(g_n(t_n)\big)^{m_n}\right\}\Big|_{t=\mathbf{a}}
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Η αντικατάσταση της (1.27) στην (1.24) ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

1.5 Δομή της διατριβής

Η διατριβή οργανώνεται ως εξής. Η γενική δομη της προτεινόμενης συνάρτησης Gerber-Shiu (1.7) συζητείται για πρώτη φορα στο Κεφάλαιο 2. Επιτρέπουμε στην συνάρτηση ποινής να εξαρτάται μόνο από το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοοκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία, παρόλο που το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί στην συνάρτηση ποινής τεσσάρων μεταβλητών όπως αναφέρεται στην (1.7). Ειδικότερα, στην Ενότητα 2.3 εκμεταλλευόμαστε περαιτερώ τις δομικές ιδιότητες όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά. Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε την από κοινού πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία στο κλασσικο σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου. Παρουσιάζουμε μια εναλλακτική προσέγγιση για να αποκτήσουμε την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας με βάση την τεχνική αντιστροφής Lagrange που εισήγαγαν οι Dickson και Willmot (2005) και στη συνέχεια προσδιορίζουμε την ατομική συνεισφορά σε σχέση με τον αριθμό των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία. Η προσέγγιση μας ανακτά τον αποκαλούμενο τύπο του Seal (βλέπε, π.χ., Prabhu (1961) και Dickson (2007)). Στο κεφάλαιο 4, βασισμένοι στην (1.7) και στο θεώρημα επέκτασης Lagrange, η από κοινού πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, το πλεόνασμα αμέσως πριν την χρεκοπία και ο αριθμός των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία εξετάζονται στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων και αυθαίρετους ενδιάμεσους χρόνους. Φυσικά, η οριακή κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία μπορεί να ληφθεί από την προκύπτουσα κοινή κατανομή και αυτό είναι το αντικείμενο θέμα της Ενότητας 4.3. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τη περίπτωση όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την μικτή Erlang κατανομή. Στο κεφάλαιο 5, χαλαρώνοουμε τον περιορισμό των εκθετικών υποθέσεων είτε στους ενδιάμεσους χρόνους είτε στα μεγέθη των απαιτήσεων και γενικεύουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 υποθέτοντας ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν συνδυασμό από n εκθετικές. Το θεώρημα πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange παίζει βασικό ρόλο στην ανάλυση που ακοουθεί. Επίσης μια άλλη εφαρμογή αυτη της γενικής μεθοδολογίας θα εξεταστεί σε ένα μοντέλο ουράς αναμονής. Μια διαδικασία ροής ρευστού κατασκευάζεται για τη δημιουργία σύνδεσης μεταξύ του μοντέλου κινδύνου Sparre Andersen και του υποκείμενου μοντέλου ουράς. Στο Κεφάλαιο 6, ολοκληρώνουμε την διατριβή με μερικές τελικές παρατηρήσεις και συζήτηση για πιθανή μελλοντική έρευνα.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα περισσότερα κεφάλαια σχετίζονται με μία επιστημονική εργασία, και επομένως γράφτηκαν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Παρόλο που έχουν καταβληθεί προσπάθειες για συνεπής σημειώσεις σε ολόκληρη τη διατριβή, ελπίζουμε να πετύχαμε το έργο αυτό σε επίπεδο αποδεκτό για την άρση κάθε ασάφιας.

Κεφάλαιο 2

Το εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen: γενική δομή

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμεε τις αναλυτικές ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu (1.7) στο εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen, στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ και τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ σχηατίζουν μία αλληλουχία από i.i.d. τ.μ.. Για να διατηρήσουμε τη δομη του τυχαίου περίπατου της διαδικασίας του πλεονάσματος των στιγμών των απαιτήσεων, υποθέτουμε επίσης ότι $\{cT_i - X_i\}_{i=1}^{\infty}$ σχηματίζει μία αλληλουχία απο i.i.d. τ.μ. Ωστόσο, για σταθερό i, οι X_i και T_i δεν χρειάζεται να είναι ανεξάρτητες. Η θετική επιβάρυνση ασφαλείας θ ικανοοιεί την $c\kappa = (1+\theta)\mu$.

Δεδομένου ότι το επίκεντρο της διατριβής είναι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, σε αυτό που ακολουθεί υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινής w εξαρτάται μόνο από τα $U_{\tau-}$ και $|U_\tau|$ και επαναπροσδιορίζει την $m_{\tau,\delta}(u)$ ως

$$m_{\tau,\delta}(u) \equiv E\left[r^{N\tau} e^{-\delta\tau} w(U_{\tau-}, |U_\tau) 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right] \,, \tag{2.1}$$

για $\delta \geq 0$ και $r \in (0,1]$. Δείχνουμε ότι η (2.1) ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και οι γενικές δομικές της ιδιότητας θα συζητηθούν στην Ενότητα 2.2. Σημειώσστε ότι αυτό το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει για τη γενικότερη συνάρτηση Gerber-Shiu (1.7).

Όπως επισημαίνεται στην Ενότητα 1.3, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την $\phi_{\tau,\delta}(u)$, την από κοινού μετατροπή Laplace (ή την p.g.f.) του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία,

$$\phi_{\tau,\delta}(u) \equiv E\left[r^{N\tau}e^{-\delta\tau}1(\tau < \infty)|U_0 = u\right] \ ,$$

που είναι μια ειδική περίπτωση της (2.1). Μπορεί να δειχθεί ότι η $\phi_{\tau,\delta}(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως μία σύνθετη γωμετρική ουρά στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen. Αυτό είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα για τα υπόλοιπα κεφάλαια της διατριβής.

Ωστόσο, είναι πολύ δύσκολο να προσδδιοριστεί περαιτέρω η ποσότητα $m_{\tau,\delta}(u)$ με βάση μόνο τα παραπάνω αποτελέσματα. Απαιτείται να προσδιοριστούν υποθέσεις για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων ή του μαγέθους των απαιτήσεων. Στην Ενότητα 2.3, δείχνουμε ότι η $\{m_{\tau,\delta}(u)\,, u \geq 0\}$ μπορεί να εκφραστεί ως μία μοναδική μη-αρνητική λύση στη λεγόμενη γενικευμένη εξίσωση Lundberg στο κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου, το οποίο είναι μια απαραίτητη προετοιμασία για την ανάλυση στο Κεφάαιο 3.

2.2 Γενική δομή

Σε αυτή την ενότητα, δείχνουμε ότι η $\{m_{\tau,\delta}(u)\,, u \geq 0\}$ ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση στο γενικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen. Χρησιμοποιούμε το επιχείρημα «πρώτη πτώση του πλεονάσματος» για να δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα (βλέπε, π.χ., Gerber and Shiu (1998) και Cheung et al. (2010)), όπου μικρές προσαρμογές θα χρειαστούν πρώτα για να καλύψουν τις συγκεκριμένες ανάγκες μας.

Για ένα αρχικό πλεόνασμα u, έστω $h_1(x, y\,|u)$ είναι η από κοινού πυκνότητα ενός πλεονάσματος πριν από τη χρεοκοπία x και ενός ελλείμματος στην χρεοκοπία y που συνέβη κατά τη στιγμή της πρώτης απαίτησης. Είναι άμεσο ότι ο χρόνος χρεοκοπίας τ είναι $(x - u)/c$ σχεδόν σίγουρα σε αυτή την περίπτωση (βλέπε Landriault and Willmot (2009) για περισσότερες λεπτομέρειες).. Επίσης, έστω η $h_j(t, x, y)$ είναι η από κοινού πυκνότητα ενός χρόνου χρεοκοπίας t, ένος πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία x και ένος ελλείμματος πριν τη χρεοκοπία y για χρεοκοπία που συμβαίνει τη στιγμή της j-οστης απαίτησης (j= 2, 3,…). Για ευκολία ορίζουμε επίσης τις αντίστοιχες «προεξοφλημένες» πυκνότητες ως

$$g_{1,\delta}(x, y\,|u) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta}{c}(x-u)} h_1(x, y\,|u), & x \geq u, \\ 0, & x < u, \end{cases}$$

και

$$g_{j,\delta}(x, y\,|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h_j(t, x, y|u)dt,$$

για $j = 2,3, \ldots$ Τέλος, έστω

$$\xi_{r,\delta}(x, y|u) = \sum_{j=1}^{\infty} r^j g_{j,\delta}(x, y|u)\,,$$

για $x \geq 0$ και $y > 0$.

Εξαρτώμενοι από τα σχετικά χαρακτηριστικά της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος, διαπιστώνεται ότι

$$m_{r,\delta}(u) = \int_0^u \int_0^\infty m_{r,\delta}(u-y)\xi_{r,\delta}(x, y|0)dxdy + \omega_{r,\delta}(u)\;, \tag{2.2}$$

όπου

$$\omega_{r,\delta}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u)\xi_{r,\delta}(x, y|0)dxdy.$$

Σημειώνουμε ότι η $m_{r,\delta}(u)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως

$$m_{r,\delta}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y)\, \xi_{r,\delta}(x, y|u)dxdy. \tag{2.3}$$

Έστω $w(x, y) = 1$ και $u = 0$ στην (2.3), ακολουθεί αυτό

$$\phi_{r,\delta}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_{r,\delta}(x, y|0)dxdy. \tag{2.4}$$

Αξιοποιώντας την (2.4), η (2.2) γίνεεται

$$m_{r,\delta}(u) = m_{r,\delta}(0) \int_0^u m_{r,\delta}(u-y)k_{r,\delta}(y)dy + \omega_{r,\delta}(u)\,, \tag{2.5}$$

όπου

$$k_{r,\delta}(y) = \frac{\int_0^\infty \xi_{r,\delta}(x, y|0)dx}{\int_0^\infty \int_0^\infty \xi_{r,\delta}(x, y|0)dxdy} \tag{2.6}$$

είναι μια σωστή συνάρτηση πυκνότητας.

Από τον ορισμό της $\phi_{r,\delta}(u)$, συμπαιρένουμε ότι

- για $\delta > 0$ ή $r \in (0,1)$,

$$\phi_{r,\delta}(0) < \Pr(\tau < \infty | U(0) = 0) \leq 1.$$

- για $\delta = 0$ και $r = 1$, η συνθήκη της θετικής επιβάρυνσης ασφαλείας $c\kappa > \mu$, διασφαλίζει

$$\phi_{1,0}(0) = \Pr(\tau < \infty | U(0) = 0) < 1$$

Ως αποτέλεσμα, η (2.2) είναι μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Αυτή είναι μια εξαιρετικά χρήσιμη παρατήρηση, καθώς έχει διάφορες συνέπειες για την επίλυσή της (βλ. Ενότητα 1.4.1), μερικές από τις οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα ακόλουθα.

Για παράδειγμα, όταν $w(x,y) = 1$, η (2.5) μπορεί να απλοποιηθεί σε

$$\phi_{r,\delta}(u) = \phi_{r,\delta}(0) \left\{ \int_0^u \phi_{r,\delta}(u-y) k_{r,\delta}(y) dy + \int_u^\infty k_{r,\delta}(y) dy \right\},$$

που υποδηλώνει ότι η $\{\phi_{r,\delta}(u)\,, u \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη γεωμετρική ουρά, δηλ.

$$\phi_{r,\delta}(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \phi_{r,\delta}(0)\right) \left(\phi_{r,\delta}(0)\right)^j \overline{K}_{r,\delta}^{*j}(u)\,, \tag{2.7}$$

όπου $\overline{K}_{r,\delta}^{*j}$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης που σχετίζεται με τη j-οστη συνέλιξη της πυκνότητας της $k_{r,\delta}$ με τον εαυτό της.

Παρατήρηση 2.2.1 *Όταν οι τ.μ. X και T του γενικού ζεύγους (X, T) είναι ανεξάρτητες, ακολουθεί ότι*

$$\xi_{r,\delta}(x, y|0) = \xi_{r,\delta}(x|0) p_x(y) \tag{2.8}$$

όπου η p_x είναι η πυκνότητα της μέσης υπερβολικής απώλειας

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}\,, \qquad x, y > 0$$

και

$$\xi_{r,\delta}(x|0) = \int_0^\infty \xi_{r,\delta}(x, y|0) dy.$$

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.6), κάποιος βρίσκει

$$k_{r,\delta}(y) = \int_0^\infty \eta_{r,\delta}(\chi) p_x(y) dx\,, \tag{2.9}$$

όπου

$$\eta_{r,\delta}(\chi) = \frac{\xi_{r,\delta}(x|0)}{\int_0^\infty \xi_{r,\delta}(w|0) dw}.$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $k_{r,\delta}(y)$ είναι ένα μείγμα από πυκνότητες μέσης υπερβολικής απώλειας $\{p_x(y)\}_{x\geq 0}$.

2.3 Εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι

Για την περαιτέρω εκμετάλλευση των δομικών ιδιοτήτων της $\{m_{r,\delta}(u), u \geq 0\}$, εξετάζουμε συγκεκριμένα το κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου, στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέση τιμή $1/\lambda$, επίσης είναι ανεξάρτητοι απο τα μεγέθη των απαιτήσεων.

Με βάση το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης, έχουμε

$$m_{r,\delta}(u) = \int_0^\infty r e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \{\alpha_{r,\delta}(u+ct) + \omega(u+ct)\} dt\,, \tag{2.10}$$

Όπου

$$\omega(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y), \tag{2.11}$$

και

$$\alpha_{r,\delta}(x) = \int_0^x m_{r,\delta}(x-y) dP(y).$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης από t σε $x = u + ct$ έχουμε

$$\begin{aligned} m_{r,\delta}(u) &= r\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x-u)}\{\alpha_{r,\delta}(x) + \omega(x)\} dx \\ &= r\frac{\lambda}{c}\left\{\mathcal{T}_{\frac{\lambda+\delta}{c}}\alpha_{r,\delta}(u) + \mathcal{T}_{\frac{\lambda+\delta}{c}}\omega(u)\right\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

όπου $\mathcal{T}_\rho f(x)$ είναι ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp που εφαρμόζεται σε μια συναρτηση f που ορίζεται ως

$$\mathcal{T}_\rho f(x) = \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} f(y)dy, \qquad x \geq 0,$$

(βλ. Dickson και Hipp (2001)).

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και στις δυο πλευρές της (2.12) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματιμού Dickson-Hipp (βλέπε Li και Garrido (2004, Ενότητα 3)), κάποιος βρίσκει ότι

$$\widetilde{m}_{r,\delta}(s) = r\frac{\lambda}{c}\left\{\frac{\tilde{\alpha}_{r,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) - \tilde{\alpha}_{r,\delta}(s)}{s-\frac{\lambda+\delta}{c}} + \frac{\widetilde{\omega}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) - \widetilde{\omega}(s)}{s-\frac{\lambda+\delta}{c}}\right\}. \tag{2.13}$$

Αντικατάσταση από $\tilde{\alpha}_{r,\delta}(s) = \widetilde{m}_{r,\delta}(s)\tilde{p}(s)$ στην (2.13) δίνει

$$\begin{aligned}&\widetilde{m}_{r,\delta}(s)\left\{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right\}\\ &= r\frac{\lambda}{c}\left\{\widetilde{\omega}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) + \widetilde{m}_{r,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\tilde{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right\} - r\frac{\lambda}{c}\widetilde{\omega}(s),\end{aligned} \tag{2.14}$$

Για να προσδιορίσουμε περαιτέρω τη σταθερά στο δεξί μέρος της (2.14), εξετάζουμε την ακόλουθη γενικευμένη εξίσωση Lundberg (στο s)

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = 0 \tag{2.15}$$

Μπορεί να αποδειχθεί από μια εφαρμογή του θεωρήματος Rouche ότι, για $\delta > 0$ ή $0 < r < 1$ η (2.15) έχει μια μοναδική μη αρνητική λύση ρ ($\rho = \rho(r,\delta)$). Συγκεκριμένα, σκεφτείτε ένα ημικύκλιο $\mathcal{K}$ (με μη αρητικά πραγματικά μέρη) που καθορίζεται από $|s| = d$ $\left(d > \frac{2(\lambda+\delta)}{c}\right)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Για το όριο $|s| = d$, έχουμε

$$\left|r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right| < \frac{\lambda+\delta}{c} < |s| - \frac{\lambda+\delta}{c} \leq \left|s - \frac{\lambda+\delta}{c}\right|;$$

για το τμήμα του περιγράμματος με πραγματικό μέρος $\Re(s) = 0$ (ο φανταστικός άξονας), παρατηρεί κανείς ότι

$$\left|r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right| < \frac{\lambda+\delta}{c} \leq \left|s - \frac{\lambda+\delta}{c}\right|.$$

Επομένως, η $s-\frac{\lambda+\delta}{c}=0$ έχει τον ίδιο αριθμό ρίζων με την (2.15) στο $\mathcal{K}$. Αφού η $s-\frac{\lambda+\delta}{c}=0$ έχει μόνο μία θετική ρίζα στο $\mathcal{K}$, και ως εκ τούτου η (2.15) έχει μία μοναδική λύση με μη αρητικό πραγματικό μέρος. Δεδομένου ότι οι λύσεις των εξισώσεων πραγματικού συντελεστή είναι συζυγή ζεύγη, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η (2.15) έχει μια μοναδική μη αρνητική λύση. Παρατηρούμε ότι όταν $\delta \to 0^+$ και $r=1$, $\rho(1,0^+)=0$.

Θέτοντας $s=\rho$ στην (2.14) προκύπτει

$$\tilde{\omega}(\rho)=\tilde{\omega}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)+\tilde{m}_{r,\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\tilde{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right),$$

που σημαίνει ότι η (2.14) μπορεί να γραφεί ως

$$\tilde{m}_{r,\delta}(s)\left\{s-\frac{\lambda+\delta}{c}+r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right\}=r\frac{\lambda}{c}\{\tilde{\omega}(\rho)-\tilde{\omega}(s)\}. \tag{2.16}$$

Κατά συνέπεια, έστω $s=\rho$ στην (2.15), έχουμε

$$\rho+r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(\rho)=\frac{\lambda+\delta}{c}. \tag{2.17}$$

Ακολουθεί αυτό

$$\begin{aligned} s-\frac{\lambda+\delta}{c}+r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) \\ &= s+r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)-\left(\rho+r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right) \\ &= (s-\rho)\left\{1-r\frac{\lambda}{c}\frac{\tilde{p}(\rho)-\tilde{p}(s)}{s-\rho}\right\} \\ &= (s-\rho)\left\{1-\left(r\frac{\lambda}{c}\frac{1-\tilde{p}(\rho)}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{s-\rho}\frac{\tilde{p}(\rho)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(s)}\right)\right\} \\ &= (s-\rho)\{1-\phi_{r,\delta}\tilde{p}_{1,\rho}(s)\}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

όπου

$$\phi_{r,\delta}=r\frac{\lambda}{c}\left\{\frac{1-\tilde{p}(\rho)}{\rho}\right\} \tag{2.19}$$

και η $p_{1,\rho}(y)$ είναι μια κατάλληλη πυκνότητα που ορίζεται ως

$$p_{1,\rho}(y)\equiv\frac{e^{\rho y}\int_y^\infty e^{-\rho x}dP(x)}{\int_0^\infty e^{-\rho x}\bar{P}(x)dx}, \tag{2.20}$$

με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{p}_{1,\rho}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} p_{1,\rho}(y)dy = \frac{\rho}{s-\rho}\frac{\tilde{p}(\rho)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(\rho)}.$$

Σημειώστε ότι η (2.19) μπορεί να εκφραστεί εκ νέου ως

$$\phi_{r,\delta} = r\frac{1}{(1+\theta)}\int_0^\infty e^{-\rho y}\frac{\overline{P}(x)}{\mu}dy,$$

που σημαίνει ότι $0 < \phi_{r,\delta} < 1$.

Αντικαθιστώντας την (2.18) στην (2.16), φτάνει κανείς στην

$$\widetilde{m}_{r,\delta}(s)\{1-\phi_{r,\delta}\tilde{p}_{1,\rho}(s)\} = r\frac{\lambda}{c}\left\{\frac{\widetilde{\omega}(\rho)-\widetilde{\omega}(s)}{s-\rho}\right\}. \tag{2.21}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace ως προς την s, η (2.21) γίνεται

$$m_{r,\delta}(u) = \phi_{r,\delta}\int_0^u m_{r,\delta}(u-y)p_{1,\rho}(y)dy + r\frac{\lambda}{c}\mathcal{T}_\rho\omega(u), \quad u \geq 0 \tag{2.22}$$

Συμπερασματικά, η $m_{r,\delta}(u)$ ικανοποιεί την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (2.22). Το πιο σημαντικό είναι ότι, από την Πρόταση 1.4.2, η λύση της (2.22) μπορεί να εκφραστεί ως η μη αρνητική λύση ρ της Εξ. (2.15). ■

Στην συνέχεια, εξετάζουμε την ειδική περίπτωση $\phi_{r,\delta}(u)$. Όταν $w(x,y)=1$, έχουμε

$$\begin{aligned} r\frac{\lambda}{c}\mathcal{T}_\rho\omega(u) &= r\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho x}\overline{P}(x+u)dx \\ &= r\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho x}\int_u^\infty p(y+x)dydx \\ &= r\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-\rho x}p(y+x)dydx \\ &= \left\{r\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho x}\overline{P}(x)dx\right\}\int_u^\infty\left(\frac{\int_0^\infty e^{-\rho x}p(y+x)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho x}\overline{P}(x)dx}\right)dy \\ &= \phi_{r,\delta}\int_u^\infty p_{1,\rho}(y)dy. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Αντικαθιστώντας την (2.23) στην (2.22) δίνει

$$\phi_{r,\delta}(u) = \phi_{r,\delta}\left\{\int_0^u \phi_{r,\delta}(u-y)p_{1,\rho}(y)dy + \int_u^\infty p_{1,\rho}(y)dy\right\}, \quad u \geq 0. \tag{2.24}$$

Ακολουθεί ότι η $\phi_{r,\delta}(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως μια σύνθετη γεωμετρική ουρά με όρους ρ, δηλ.

$$\phi_{r,\delta}(u) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \phi_{r,\delta})(\phi_{r,\delta})^j \bar{P}_{1,\rho}^{*j}(u)\,, \tag{2.25}$$

όπου $\bar{P}_{1,\rho}^{*j}(u)$ είναι η ουρά της κατανομής της j-οστης συνέλιξης της πυκνότητας $p_{1,\rho}$ με τον εαυτό της.

Παρατήρηση 2.3.1 *Όταν $u = 0$ προκύπτει άμεσα απο την (2.24) ότι*

$$\phi_{r,\delta}(0) = \phi_{r,\delta} \int_0^{\infty} p_{1,\rho}(y) dy = \phi_{r,\delta}.$$

Έτσι η (2.25) μπορεί να εκφραστεί εκ νέου ως

$$\phi_{r,\delta}(u) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \phi_{r,\delta}(0))(\phi_{r,\delta}(0))^j \bar{P}_{1,\rho}^{*j}(u)\,.$$

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα αναλύοντας τα όρια αξιοπιστίας και τις ασυμπτωτικές ιδιότητες της $m_{r,\delta}(u)$ όταν $u \to \infty$. Θεωρήστε ότι $R > 0$ ικανοποιεί

$$\int_0^{\infty} e^{Ru} p_{1,\rho}(y) dy = \frac{1}{\phi_{r,\delta}}$$

ή

$$\phi_{r,\delta} \tilde{p}_{1,\rho}(-R) = 1. \tag{2.26}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.18), η (2.16) γίνεται

$$-R - \frac{\lambda + \delta}{c} + r\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(-R) = 0.$$

Επομένως η $-R$ είναι μια αρνητική λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (2.15). Σημειώστε ότι η $-R$ δεν υπάρχει πάντα δεδομένου ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση (m.g.f.) του μεγέθους των απαιτήσεων ενδέχεται να μην υπάρχει. Ωστόσο, εάν η m.g.f. του p υπάρχει, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η Εξ. (2.15) έχει μια μοναδική αρνητική λύση.

Από την (1.18) προκύπτει ότι

$$C_L e^{-Ru} \leq m_{r,\delta}(u) \leq C_U e^{-Ru}, \tag{2.27}$$

για $u \geq 0$, όπου $C_L = \inf_{z\geq 0} \alpha(z)$, $C_U = \sup_{z \geq 0} \alpha(z)$ και

$$\alpha(z) = \frac{r\frac{\lambda}{c}e^{Rz}\mathcal{T}_\rho\omega(z)}{\phi_{r,\delta}\int_z^\infty e^{Ry}p_{1,\rho}(y)dy}. \tag{2.28}$$

Από την άλλη πλευρά, όταν $u \to \infty$, η (1.19) δίνει

$$m_{r,\delta}(u) \sim Ce^{-Ru}, \tag{2.29}$$

όπου

$$C = \frac{r\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Ry}\mathcal{T}_\rho\omega(y)dy}{\phi_{r,\delta}\int_z^\infty ye^{Ry}p_{1,\rho}(y)dy}. \tag{2.30}$$

Γενικά, είναι δύσκολο να απλουστευθούν περαιτέρω τα C_L, C_U και C εκτός αν γίνουν περαιτέρω υποθέσεις για την κατανομή μεγέθους των απαιτήσεων. Στο παρακάτω παράδειγμα, προσδιορίζουμε τα εκθετικά όρια και την ασυμπτωτική έκφραση για την $\phi_{r,\delta}(u)$, όταν τα μεγέθη της απαίτησης κατανέμονται εκθετικά με μέση τιμή $1/\beta$.

Παράδειγμα 2.3.2 *Όταν τα μεγέθη ων απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά με μέση τιμή* $1/\beta$, *η* $p_{1,\rho}(y)$ *κατανέμεται επίσης εκθετικά με μέση τιμή* $1/\beta$. *Επίσης, η αρνητική λύση της Εξ. (2.15) ικανοποιεί την* $-\beta < -R < 0$.

Εάν $w(x, y) = 1$, *προκύπτει από την (2.23) ότι*

$$\alpha(z) = \frac{e^{Rz}e^{-\beta z}}{\int_z^\infty e^{Ry}\beta e^{-\beta y}dy} = \frac{\beta - R}{\beta},$$

και

$$C = \frac{\int_0^\infty e^{Ry}e^{-\beta y}dy}{\int_0^\infty ye^{Ry}\beta e^{-\beta y}dy} = \frac{\beta - R}{\beta}.$$

Επομένως, το όριο είναι εκριβές, δηλαδη

$$C_L = C_U = C = \frac{\beta - R}{\beta}.$$

Καταλήγουμε στο συμπέραμσα ότι

$$\phi_{r,\delta}(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru}.$$

Κεφάλαιο 3

Το κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου

3.1 Επανεξέταση της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε με τη βοήθεια μιας ανάλυσης τύπου Gerber-Shiu την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία στο κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου. Αρχικά, εξετάζουμε εν συντομία την προσέγγιση ανιστροφής Lagrange που προτάθηκε από τους Dickson και Willmot (2005) για να αποκτήσουμε την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας. Στην ενότητα 3.2, στηριζόμαστε στο κύριο αποτέλεσμα των Dickson και Willmot (2005) σχετικά με την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας για να προσδιορίσουμε τις μεμονωμένες συνεισφορές της, όταν ο αριθμός των απαιτήσεων εώς την χρεοκοπία λαμβάνεται υπόψη. Στην ενότητα 3.3, παρέχουμε μια εναλλακτική και πιο συμπαγή αναπαράσταση της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας και δείχουμε ότι αυτή η έκφραση είναι σύμφωνη με τον τύπο του Seal (βλέπε, π.χ., Prabhu (1961)).

Όπως αναφέρεται στην Ενότητα 1.1, σε ένα συνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου, οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ και τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ σχηματίζουν δύο ακολουθίες απο i.i.d. τ.μ., αμοιβαία ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Επίσης, η $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ έχει μια αυθαίρετη πυκνότητα p με μέση τιμή μ και η $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με πυκνότητα

$$k(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Με άλλα λόγια, η ανέλιξη εμφάνισης απαίτησης $\{N_t, t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό άφιξης λ. Η θετική επιβάρυνση ασφαλείας θ σε αυτό το μοντέλο καθορίζεται από $c = (1+\theta)\lambda\mu$

Έστω p_1 είναι η πυνκότητα ισορροπίας (equilibrium) που σχετίζεται με την πυκνότητα p, δηλ.

$$p_1(x) = \frac{\bar{P}(x)}{\mu}, \quad x > 0,$$

με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{p}_1(s) = \frac{1-\tilde{p}(s)}{\mu s}.$$

Επιπλέον, έστω $\psi(u,t) = \Pr(\tau \leq t | U_0 = u)$ η πιθανότητα χρεοκοπίας στο χρονικό διάστημα $(0,t]$ με αρχικό επίπεδο πλεονάσματος u, τότε η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από

$$f(t|u) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t).$$

Ως οριακή περίπτωση, η τελική πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\psi(u) = \lim_{t\to\infty}\psi(u,t)$.

Στην Ενότητα 1.1 επισημάνουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu (1.3) στο κλασσικό σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Gerber και Shiu (1998)) και μπορεί να εκφραστεί σε όρους της σχεττικής σύνθετης γεωμετρικής ουράς (βλέπε Lin και Willmot (1999)). Ως ειδική περίπτωση, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\phi_{1,\delta}(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\phi_{1,\delta}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\phi_{1,\delta}(0)\right)\left(\phi_{1,\delta}(0)\right)^n \overline{P}_{1,\rho}^{*n}(u), \tag{3.1}$$

όπου $\rho = \rho(1,\delta)$ είναι η μοναδική μη αρνητική λύση (στο s) της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = 0, \tag{3.2}$$

και

$$\phi_{1,\delta}(0) = \psi(0)\tilde{p}_1(\rho) = \frac{\lambda\mu}{c}\tilde{p}_1(\rho), \tag{3.3}$$

Στην πραγματικότητα, η (3.1) είναι απλώς η περίπτωση $r = 1$ της Εξ. (2.25). Απο (3.1) και (3.3) μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι η $\phi_{1,\delta}(u)$ εξαρτάται μόνο (έμμεσα) από το δ μέσω ρ. Αυτή η σιωπηρή δομή εξάρτησης, καθώς και η πολυπλοκότητα που σχετίζεται με την αντιστροφή της $\bar{P}_{1,\rho}^{*n}(u)$ (ακόμα και ως προς ρ), καθιστά ένα πολύ δύσκολο έργο την αναλυτική αντιστροφή της $\phi_{1,\delta}(u)$ ως προς δ.

Ωστόσο, οι Dickson και Willmot (2005) έλυσαν αυτό το πρόβλημα αντιστρέφοντας πρώτα την $\phi_{1,\delta}(u)$ όρο προς όρο ως προς ρ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μια σχέση μεταξύ ρ και δ ολοκλήρωσαν την αντιστροφή και κατέληξαν στην πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας. Αυτή η σχέση μεταξύ ρ και δ επιτυγχάνεται μέσω μιας εφαρμογής του θεωρήματος σιωπηρής συνάρτησης του Lagrange, δηλαδή

$$\begin{aligned} e^{-\rho t} &= e^{-\frac{\delta+\lambda}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\lambda/c)^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(-te^{-zt})\int_0^{\infty} e^{-zx}p^{*n}(x)dx\right\}\Bigg|_{z=\frac{\delta+\lambda}{c}} \\ &= e^{-\frac{\delta+\lambda}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda/c)^n}{n!}t\int_0^{\infty}(x+t)^{n-1}e^{-(\delta+t)(x+t)/c}p^{*n}dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Υποκαθιστώντας την (3.4) στην

$$\phi_{1,\delta}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\xi(t|u)dt - \int_0^{\infty} e^{-\delta t}f(t|u)dt, \tag{3.5}$$

ακολουθεί αυτό

$$f(t|u) = ce^{-\lambda t}\xi(ct|u) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\int_0^{ct} yp^{*n}(ct-y)\xi(y|u)\,dy. \tag{3.6}$$

Για να ανιστρέψουμε την $\phi_{1,\delta}(u)$ ως προς ρ, η Εξ. (3.1) ξαναγράφεται ως

$$\phi_{1,\delta}(u) = \frac{\lambda\mu}{c}\tilde{p}_1(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n\left(\frac{\lambda\mu}{c}\tilde{p}_1(\rho)H_\rho^{*n}(u) - H_\rho^{*n}(u)\right), \tag{3.7}$$

όπου

$$H_p(u) = \int_0^u \int_x^\infty e^{-\rho(x-z)} p(y) dy dz$$

Σαφώς, εάν η $H_\rho^{*n}(u)$ μπορεί να αναστραφεί ως προς ρ, δηλαδή

$$H_\rho^{*n}(u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} b_n(u.t) dt, \tag{3.8}$$

για $n = 1, 2, \ldots$, τότε προκύπτει άμεσα από την (3.7) ότι, για $u > 0$,

$$\xi(t|u) = \frac{\lambda}{c} \bar{P}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \left\{\frac{\lambda}{c} \int_0^t \bar{P}(x) b_n(u.t-x) dx - b_n(u.t)\right\}. \tag{3.9}$$

Η ακόλουθη έκφραση για την $b_n(u.t)$ ελήφθη απο τους Dickson και Willmot (2005) μέτα από μια σειρά μακρών αλγεβρικών χειρισμών:

$$b_n(u.t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{\Gamma(n)} \int_0^u (u-x)^{n-1} P^{*j}(x) p^{*(n-j)}(t+u-x) dx, \tag{3.10}$$

για $n = 1, 2, \ldots$

Συμπερασματικά, η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο σύνθετο Poisson μοντέλο κινδύνου δίνεται από την (3.6) όπου $\xi(t|u)$ ικανοποιεί την (3.9). Στην περίπτωση όπου $u = 0$, η διαδικασία απόκτησης της $\xi(t|0)$ μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά. Από την (3.3) αντιστρέφοντας την $\phi_{1,\delta}(0)$ ως προς ρ δίνει

$$\xi(t|0) = \psi(0) p_1(t) = \frac{\lambda\mu}{c} p_1(t) \tag{3.11}$$

Συνδυάζοντας (3.11) με (3.6), καταλήγουμε στο

$$f(t|0) = \frac{\lambda\mu}{c} \left\{ c e^{-\lambda t} p_1(ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_0^{ct} y p^{*n}(ct-y) p_1(y) dy \right\}. \tag{3.12}$$

3.2 Η από κοινού (γενικευμένη) πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία

Σε αυτήν την ενότητα, επανεξετάζουμε την έκφραση κλειστής μορφής (3.6) για τη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας σε σχέση με τον αριθμό των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία και παράγουμε την από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία στο πλαίσιο του σύνθετου Poisson μονέλου κινδύνου. Σε όλη αυτή τη διατριβή χρησιμοποιούμε τον όρο *γενικευμένη πυκνότητα* (σε αντίθεση με την πυκνότητα) όταν τουλάχιστον μία τυχαία μεταβλητή της σχετικής από κοινού κατανομής είναι διακριτή. Σημειώστε ότι η γενική δομή της $\varphi_{r,\delta}(u)$ έχει συζητηθεί εκτενώς στην Ενότητα 2.3.

Χρησιμοποιώντας σχεδόν πανομοιότυπα επιχειρήματα με τα οποία προέκυψε η (3.7) στους Dickson και Willmot (2005), δεν είναι δύσκολο να συμπεράνουμε από την (2.25) ότι

$$\varphi_{r,\delta}(u) = \frac{\lambda}{c}\mu r\tilde{p}_1(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}r\right)^n\left(\frac{\lambda}{c}\mu r\tilde{p}_1(\rho)H_\rho^{*n}(u) - H_\rho^{*n}(u)\right). \tag{3.13}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.8), η (3.13) γίνεται

$$\begin{aligned}\varphi_{r,\delta}(u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t}\left\{\frac{\lambda}{c}r\bar{P}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}r\right)^n\left(\frac{\lambda}{c}r\int_0^t \bar{P}(x)b_n(u,t-x)dx - b_n(u,t)\right)\right\}dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \{r^n e^{-\rho t}\}\xi(t,n|u)dt, \end{aligned}\tag{3.14}$$

όπου

$$\xi(t,n|u) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{c}\left(\bar{P}(t) - b_1(u,t)\right), & n = 1, \\ \left(\dfrac{\lambda}{c}\right)^n\left(\displaystyle\int_0^t \bar{P}(x)b_{n-1}(u,t-x)dx - b_n(u,t)\right), & n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Από τον ορισμό της ρ ως τη μοναδική λύση της (2.15), η χρήση του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange (Εξ. (1.22)) δίνει

$$e^{-\rho t} = e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^m}{m!} t\int_0^\infty (x+t)^{m-1}e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)}p^{*m}(x)\,dx. \tag{3.15}$$

Αντικαθιστώντας την (3.15) στην (3.14) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,\delta}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^{n}\left\{e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t}\right\}\xi(t,n|u)dt \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^{m+n}\left\{\frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{m}}{m!}\,t\int_{0}^{\infty}(x+t)^{m-1}\,e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)}p^{*m}(x)dx\right\}\xi(t,n|u)dt \\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{n}e^{-\delta t}\right\}ce^{-\lambda t}\xi(ct,n|u)dt \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^{m}\left\{\frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{m-n}}{(m-n)!}\,t\int_{0}^{\infty}x^{m-n-1}\,e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}x}p^{*(m-n)}(x-t)dx\right\}\xi(t,n|u)dt
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Αλλάζοντας τη σειρά και των δύο αθροισμάτων και ακολουθώντας ένα παρόμοιο χειρισμό των δύο ολοκληρωμάτων, η (3.16) γίνεται

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,\delta}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{n}e^{-\delta t}\right\}ce^{-\lambda t}\xi(ct,n|u)dt \\
&+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{m}e^{-\frac{\delta}{c}x}\right\}\left(\frac{\gamma_{\frac{\lambda}{c},m-\mathrm{n}}(x)}{m-\mathrm{n}}\int_{0}^{\infty}p^{*(m-n)}(x-t)t\,\xi(t,n|u)dt\right)dx \\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{n}e^{-\delta t}\right\}ce^{-\lambda t}\xi(ct,n|u)dt \\
&+\sum_{m=2}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{m}e^{-\delta x}\right\}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\gamma_{\lambda,m-\mathrm{n}}(x)}{m-\mathrm{n}}\int_{0}^{cx}p^{*(m-n)}(cx-t)\{t\xi(t,n|u)\}dt\right)dx\,,
\end{aligned}$$

όπου $\gamma_{\beta,n}$ είναι η πυκνότητα Erlang

$$\gamma_{\beta,n}(y)=\frac{\beta^{n}y^{n-1}e^{-\beta y}}{(n-1)!},\qquad y\geq 0$$

Συμπερασματικά,

$$\varphi_{r,\delta}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{r^{n}e^{-\delta t}\right\}f(t,n|u)dt\,,$$

όπου η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, κι του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία είναι

$$f(t,n|u) = ce^{-\lambda t}\xi\ (ct,n\,|u) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_{\lambda,n-m}(t)}{n-m} \int_0^{ct} p^{*(n-m)}(ct-x)\,\{x\xi\ (x,m\,|u)\}dx \quad (3,17)$$

για $t > 0$ και $n = 1, 2, \ldots$

Με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα, η (3,17) μπορεί να απλουστευθεί περαιτέρω. Πράγματι για $u = 0$, κάποιος συμπεραίνει εύκολα από την (3,10) ότι $b_n(t) = 0$ για όλα τα $t \geq 0$ και $n = 1, 2, \ldots$, το οποίο με τη σειρά του υποδηλώνει

$$\xi\ (t,n\,|0) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c}\bar{P}(t), & n = 1, \\ 0, & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

για $t \geq 0$. Έτσι, για $u = 0$, κάποιος καταλήγει ότι

$$f\ (t,n\,|0) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(ct), & n = 1 \\ \frac{\lambda}{c}\frac{\gamma_{n-1,\lambda}(t)}{n-1}\int_0^{ct} p^{*(n-1)}(ct-x)\,\{x\bar{P}(x)\}dx, & n = 2, 3, \ldots \end{cases} \quad (3.18)$$

Παρατήρηση 3.2.1 *Μία εναλλακτική προσέγγιση για τη λήψη της $f\ (t,n\,|u)$ (βλέπε Dickson (2012)) είναι η χρήση των πιθανοτικών επιχειρημάτων που πρότεινε ο Prabhu (1961). Αντλώντας πρώτα εκφράσεις για την $f\ (t,n\,|0)$, η $f\ (t,n\,|u)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά από την $f\ (t,n\,|0)$, δηλαδή,*

$$f\ (t,n+1\,|u) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\int_0^{u+ct} p^{*n}(x)\,\lambda\bar{P}(u+ct-x)dx$$

$$-c\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t} e^{-\lambda z}\frac{(\lambda z)^j}{j!}p^{*j}(u+cz)f(t-z,n+1-j|0)dz,$$

για n=1, 2, …

Παρατήρηση 3.2.2 *Χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.17), η συνδιακύμανση των N_τ και τ δεδομένου ότι συμβαίνει η χρεοκοπία μπορεί να υπολογιστεί. Σημειώνουμε ότι ένας εναλλακτικός και πιθανώς πιο έξυπνος τρόπος υπολογισμού της συνδιακύμανσης είναι να ληφθούν οι παράγωγοι του*

$\tilde{\phi}_{\tau,\delta}(s)$ ως προς δ και r και στη συνέχεια να αντιστραφεί ο μετασχηματισμός Laplace ως προς s. Για ορισμένα μεγέθη απαιτήσεων με ελαφριά ουρά, παρατηρείται μια ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ N_τ και τ. Ωστόσο, θα ήταν δύσκολο να εξαχθεί ένα τέτοιο συμπέρασμα γενικά.

Θεωρητικά, μια ρητή έκφραση για τη (ορική) συνάρτηση μάζας πιθανότητας (p.m.f.) του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία

$$p(n\,|u) \equiv \Pr(N_\tau = n|U_0 = u) \tag{3.19}$$

μπορεί να ληφθεί από την (3.17) (ή την (3.18) όταν $\mathrm{u} = 0$) ολοκληρώνοντας την από κοινού γενικευμένη πυκνότητα $\mathrm{f}\,(\mathrm{t}, \mathrm{n}\,|\mathrm{u})$ στη μεταβλητή (χρόνου) t από 0 εώς άπειρο. Για παράδειγμα, στη περίπτωση του μηδενικού αρχικού πλεονάσματος,

$$c = \begin{cases} \lambda \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} \overline{P}(ct)dt, & n = 1 \\ \dfrac{\lambda}{c} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\gamma_{\lambda,n-1}(t)}{n-1} \left(\int_0^{ct} p^{*(n-1)}(ct - x)\left\{x\overline{P}(x)\right\}dx \right) dt, & n = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{3.20}$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε τη συνοχή αυτού του αποτελέσματος με τον Egidio dos Reis (2002, Εξ. (14) και (15)), που αναφέρει ότι

$$p(n\,|0) = \begin{cases} \tilde{g}\left(\dfrac{\lambda}{c}|0\right), & n = 1 \\ -\dfrac{\lambda}{c}\tilde{p}\left(\dfrac{\lambda}{c}\right)\tilde{g}'\left(\dfrac{\lambda}{c}|0\right), & n = 2 \\ \dfrac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\left\{\left(\tilde{p}(s)\right)^{n-1}\tilde{g}'(s|0)\right\}\Big|_{s=\frac{\lambda}{c}}, & n = 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{3.21}$$

όπου

$$g(y|0) = \frac{\lambda}{c}\overline{P}(y), \tag{3.22}$$

είναι η (ελλατωματική) πυκνότητα του ελλείμματος στη χρεοκοπία για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα.

Για να το επαληθεύσουμε, ξεκινάμε από την υπόθεση $n = 1$. Αντικαθιστώντας την (3.22) στην (3.21) και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, φτάνουμε άμεσα στη

$$p(1\,|0) = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}\left(\frac{\lambda}{c}\bar{P}(t)\right)dt$$
$$= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar{P}(ct).$$

Για $n = 2$, έχουμε

$$p(2\,|0) = -\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}p(t)dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}\left(-\frac{\lambda}{c}t\bar{P}(t)\right)dt\right)$$
$$= \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}\left(\int_0^\infty p(t-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt$$
$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{ct} p(ct-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt.$$

Για $n = 3, 4, \ldots$, παρατηρούμε ότι

$$\left(\tilde{p}(s)\right)^{n-1}\tilde{g}'^{(s|0)} = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t p^{*(n-1)}(t-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt. \tag{3.23}$$

Συνδυάζοντας (3.23) και (3.21), καταλήγουμε στη

$$p(n\,|0)$$
$$= \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\left(\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t p^{*(n-1)}(t-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt\right)\Bigg|_{s=\frac{\lambda}{c}}$$
$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}\left(t^{n-2}\int_0^t p^{*(n-1)}(t-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt$$
$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1}t^{n-2}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\left(\int_0^{ct} p^{*(n-1)}(ct-x)\{x\bar{P}(x)\}dx\right)dt \qquad \blacksquare$$

Σε γεινκές γραμμές, φαίνεται αμφίβολο ότι η προκύπτουσα έκφραση για τη p.m.f. του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία (π.χ. Εξ. (3.20)) θα επιτρέψει πολλές απλουστεύσεις, εκτός εάν επιβληθούν ορισμένες παραδοχές για τη κατανομή της πυκνότητας του μεγέθους της απαίτησης p. Για επεξηγηματιούς σκοπούς, αντλούμε μια ρητή έκφραση της $p(n\,|0)$ για μικτά Erlang μεγέθη απαιτήσεων στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.3 *Ας υποθέσουμε ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν μικτή Erlang πυκνότητα με μετασχηματισμό Laplace*

$$\tilde{p}(s) = Q\left(\frac{\beta}{\beta + s}\right),$$

όπου

$$Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j s^j,$$

με $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ *να είναι ένα διακριτό μέτρο πιθανότητας. Ως εκ τούτου,*

$$\left(\tilde{p}(s)\right)^n = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} s^j,$$

όπου q^{*n}, *η n-οστή συνέλιξη της p.m.f.* q, *λαμβάνεται μέσω*

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} s^j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} q_j s^j\right)^n,$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\bar{P}(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{(\beta x)^k}{k!}, \tag{3.24}$$

όπου $\bar{Q}_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} q_i$

Για $n = 1$, *χρησιμοποιώντας την (3.21), έχουμε*

$$\begin{aligned} p(1|0) &= \frac{\lambda}{c} \frac{1 - \tilde{p}(s)}{s}\bigg|_{s=\frac{\lambda}{c}} \\ &= 1 - Q\left(\frac{c\beta}{\lambda - c\beta}\right). \end{aligned}$$

Για $n = 2, 3, \ldots$, *χρησιμοποιώντας την (3.24), βρίσκει κανείς*

$$\int_0^{\tau} p^{*(n-1)}(t - x)\{x\bar{P}(x)\}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \frac{\beta^j (t-x)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\beta(t-x)} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k \frac{\beta^k x^{k+1}}{k!} e^{-\beta x} \right\} dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \bar{Q}_k \frac{(k+1)}{\beta^2} \frac{\beta^{j+k+2} t^{j+k+1}}{(j+k+1)}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Αντικαθηστώντας την (3.25) στην (3.20), καταλήγει κανείς στην

$$
\begin{aligned}
&p(n|0) \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \bar{Q}_k \frac{(k+1)}{\beta^2} \frac{\beta^{j+k+2} (ct)^{j+k+1}}{(j+k+1)} e^{-c\beta t} \right) dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \bar{Q}_k \frac{(k+1) \lambda^n (c\beta)^{j+k}}{(n-1)!\,(j+k+1)!} \int_0^{\infty} \left(t^{n+j+k-1} e^{-(\lambda+c\beta)t} \right) dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \bar{Q}_k \frac{(k+1) \lambda^n (c\beta)^{j+k}}{(n-1)!\,(j+k+1)!} \frac{(n+j+k-1)!}{(\lambda+c\beta)^{n+j+k}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_j^{*(n-1)} \bar{Q}_k \frac{k+1}{n+j+k} \binom{n+j+k}{n-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+c\beta} \right)^n \left(\frac{c\beta}{\lambda+c\beta} \right)^{j+k}.
\end{aligned}
$$

3.3 Μία εναλλακτική προσέγγιση

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε μια εναλλακτική αναλυτική προσέγγιση για να αποκτήσουμε την από κοινού πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Έστω $w(x, y) = 1$ στην Εξ. (2.16), προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $\phi_{r,\delta}(u)$ ικαοποιεί

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{r,\delta}(s) &= \frac{r\lambda \left(\tilde{\tilde{P}}(\rho) - \tilde{\tilde{P}}(s) \right)}{cs - (\delta+\lambda) + r\lambda \tilde{p}(s)} \\
&= r\lambda \tilde{u}_{r,\delta}(s) \left(\tilde{\tilde{P}}(\rho) - \tilde{\tilde{P}}(s) \right),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

όπου

$$
\tilde{u}_{r,\delta}(s) = \frac{1}{cs - \lambda\big(1 - r\tilde{p}(s)\big) - \delta}.
\tag{3.27}
$$

Παρατηρούμε ότι η $u_{1,\delta}(s)$ είναι η συνάρτηση δ-τάξης μιάς σύννθετης Poisson ανέλιξης κινδύνου καθορισμένης μέσω του μετασχηματισμού Laplace της

$$\tilde{u}_{1,\delta}(s) = 1/(\varphi(s) - \delta) ,$$

με $\varphi(s)$ τον εκθέτη Laplace ορίζεται ως

$$\varphi(s) = cs - \lambda(1 - \tilde{p}(s)) ,$$

(βλέπε, π.χ. Kyprianou (2006)),

Για να αποκτήσουμε την από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία με αρχικό επίπεδο πλεονάσματος u, πρέπει να αντιστρέψουμε την (3.26) ως προς s, r και δ. Σημειώνουμε ότι στην Ενότητα 3.2, η (3.26) αντιστράφηκε πρώτα ως προς s και μετά ως προς r και δ. Σε αυτό που ακολουθεί, αντιστρέφουμε τις $\tilde{u}_{r,\delta}(s)\bar{\bar{P}}(s)$ και $\tilde{u}_{r,\delta}(s)\bar{\bar{P}}(\rho)$ ως προς s, r και δ ταυτόχρονα, κάτι που αποδεικνύεται σχετικά εύκολο.

3.3.1 Η αντιστροφή της $\tilde{u}_{r,\delta}(s)\bar{\bar{P}}(s)$

Σαφώς, το κλειδί της αντιστροφής είναι να αντιστρέψουμε τη $\tilde{u}_{\tau,\delta}(s)$ ως προς s, r και δ. Από τη (3.27) έχουμε

$$\begin{aligned} -\tilde{u}_{r,\delta}(s) &= \frac{1}{\delta + \lambda\big(1 - r\tilde{p}(s)\big) - cs} \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\big\{e^{-\lambda t + cst}e^{-r\lambda t\tilde{p}(s)}\big\}dt , \end{aligned} \tag{3.28}$$

(βλέπε, π.χ. Panjer and Willmot (1997, Ενότητα 11.7)). Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} e^{-r\lambda t\tilde{p}(s)} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}\big(\tilde{p}(s)\big)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}\tilde{p}^{*n}(s) , \end{aligned}$$

η (3.28) γίνεται

$$-\tilde{u}_{r,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t + cst}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}\tilde{p}^{*n}(s)\right)\right\}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t+cst} + e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-s(y-ct)}p^{*n}(y)dy\right\}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t+cst} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-ct}^\infty e^{-sy} f_n(y+ct,t)dy\right\}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t+cst} + \int_{-ct}^\infty e^{-sy} f(y+ct,t;r)dy\right\}dt \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
f_n(y,t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} p^{*n}(y)\,, \qquad (3.30)
$$

είναι η πυκνότητα (σε y) του συνολικού ποσού των n απαιτήσεων που προκύπτουν ως τη χρονική στιγμή t και

$$
f(y,t;r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n f_n(y,t).
$$

Σαφώς,

$$
f(y,t;1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} p^{*n}(y)\,,
$$

είναι η πυκνότητα (σε y) του συνολικού ποσού των απαιτήσεων S_t.

Ακολουθεί ότι

$$
\begin{aligned}
&-\tilde{u}_{r,\delta}(s)\tilde{\bar{P}}(s) \\
&= \int_0^\infty e^{-sx}\bar{P}(x)dx \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t+cst} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-ct}^\infty e^{-sy} f_n(y+ct,t)dy\right\}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-s(x-ct)}\bar{P}(x)\,dxdt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)}\bar{P}(x) f_n(y+ct,t)dxdydt\,. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές ολοκλήρωσης στην (3.31), φτάνει κανείς στο

$$
\begin{aligned}
-\tilde{u}_{r,\delta}(s)\tilde{\bar{P}}(s) &= \int_0^\infty e^{-\delta\tau}\int_{-ct}^\infty e^{-su}e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)dudt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^\infty \int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\bar{P}(x) f_n(u-x+ct,t)dxdudt.
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_{-ct}^\infty e^{-su} e^{-\lambda t} \bar{P}(u+ct) du dt$$
$$+ \sum_{n=1}^\infty r^n \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_{-ct}^\infty e^{-su} h_n(u,t) du dt, \qquad (3.32)$$

όπου

$$h_n(u,t) = \int_0^{u+ct} f_n(x,t) \bar{P}(u+ct-x) dx.$$

3.3.2 Η αντιστροφή της $\tilde{u}_{r,\delta}(s)\tilde{\bar{P}}(\rho)$

Για να αντιστρέψουμε την $\tilde{\bar{P}}(\rho)$ ως προς r και δ, ξαναγράφουμε πρώτα την ταυτότητα Lagrange (3.15) ως

$$\begin{aligned} e^{-\rho y} &= e^{-\frac{\delta+\lambda}{c} y} + \sum_{n=1}^\infty r^n \frac{(\lambda/c)^n}{n!} y \int_0^\infty (x+y)^{n-1} e^{-(\delta+\lambda)(x+y)/c} p^{*n}(x) dx \\ &= e^{-\frac{\delta+\lambda}{c} y} + \sum_{n=1}^\infty r^n \frac{(\lambda/c)^n}{n!} y \int_{\frac{y}{c}}^\infty e^{-(\delta+\lambda)z} c(cz)^{n-1} p^{*n}(cz-y) dz \\ &= e^{-\frac{\delta+\lambda}{c} y} + \sum_{n=1}^\infty r^n \frac{(\lambda/c)^n}{n!} y \int_{\frac{y}{c}}^\infty e^{-\delta z} \left\{ \frac{y}{z} f_n(cz-y,y) \right\} dz, \end{aligned} \qquad (3.33)$$

όπου $f_n(cz-y,y)$ είναι η πυκνότητα της (3.30) στο $cz-y$.

Χρησιμοποιώντας τη (3.33), έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{P}}(\rho) &= \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{\delta+\lambda}{c} y} \bar{P}(y) dy + \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty r^n \int_{\frac{y}{c}}^\infty e^{-\delta z} \left\{ \frac{y}{z} f_n(cz-y,y) \right\} dz \right\} \bar{P}(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta z} c e^{-\lambda z} \bar{P}(cz) dz + \sum_{n=1}^\infty r^n \int_0^\infty \int_0^{cz} e^{-\delta z} \frac{y}{z} f_n(cz-y,y) \bar{P}(y) dy dz \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta z} c e^{-\lambda z} \bar{P}(cz) dz + \sum_{n=1}^\infty r^n \int_0^\infty e^{-\delta z} g_n(z) dz \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta z} g(z;r) dz \end{aligned} \qquad (3.34)$$

όπου

$$g_n(z) = \int_0^{cz} \frac{y}{z} f_n(cz-y,y)\bar{P}(y)dy, \tag{3.35}$$

και

$$g(z;r) = ce^{-\lambda z}\bar{P}(cz) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n g_n(z).$$

Συνδυάζοντας τις (3.29) και (3.34) προκύπτει

$$\begin{aligned}
&-\tilde{u}_{r,\delta}(s)\tilde{\bar{\bar{P}}}(\rho) \\
&= \left\{\int_0^\infty e^{-\delta z} g(z;r)dz\right\} \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\lambda t+cst} + \int_{-ct}^\infty e^{-sy} f(y+ct,t;r)\,dy\right\}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^0 e^{-su}\left\{\frac{1}{c}g(t+\frac{u}{c};r)e^{-\frac{\lambda}{c}u}\right\}dudt \\
&\qquad + \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^0 e^{-su}\int_{-\frac{y}{c}}^0 g(t-z;r)f(u+cz,z;r)dzdudt \\
&\qquad + \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^\infty e^{-su}\int_0^t g(t-z;r)f(u+cz,z;r)dzdudt.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.32) και (3.36) στη (3.26), προκύπτει

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{r,\delta}(s) = r\lambda &\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^\infty e^{-su}e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)dudt \\
&+\lambda\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^\infty e^{-su}h_n(u,t)dudt \\
&-r\lambda\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^0 e^{-su}\left\{\frac{1}{c}g(t+\frac{u}{c};r)e^{-\frac{\lambda}{c}u}\right\}dudt \\
&-r\lambda\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{-ct}^0 e^{-su}\int_{-\frac{y}{c}}^t g(t-x;r)f(u+cz,z;r)dzdudt \\
&-r\lambda\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\tau g(t-z;r)f(u+cz,z;r)dzdudt.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Δεδομένου ότι

$$\tilde{\phi}_{r,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\phi_{r,\delta}(u)du\,,$$

η (3.37) μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής

$$\tilde{\phi}_{r,\delta}(s) = r\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^\infty e^{-su}\{\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)\}dudt$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{\infty} e^{-su}\{\lambda h_n(u,t)\}dudt \\
&-r\lambda\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{\infty} e^{-su}\int_0^{t} g(t-z;r)f(u+cz,z;r)dzdudt \\
=\ & r\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{\infty} e^{-su}\left\{\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)\right\}dudt \\
&+\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int_0^{\infty} e^{-su}\{\lambda h_n(u,t)-\lambda\zeta_n(u,t)\}dudt
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

όπου

$$
\zeta_n(u,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{t}\left\{ce^{-\lambda(t-z)}\bar{P}(c(t-z))f_n(u+cz,z)\right\}dz, & n=1\\ \displaystyle\int_0^{t}k_n(u,z)dz, & n=2,3,\ldots,\end{cases}
$$

και

$$
\begin{aligned}
k_n(u,z)=\ & ce^{-\lambda(t-z)}\bar{P}(c(t-z))f_n(u+cz,z) \\
&+\sum_{m=1}^{n-1} g_m(t-z)f_{n-m}(u+cz,z),
\end{aligned}
$$

για $n=2,3,\ldots$

Από (3.38), κάποιος καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων δίνεται από

$$
f(t,n|u)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct), & n=1\\ \lambda h_{n-1}(u,t)-\lambda\zeta_{n-1}(u,t), & n=2,3,\ldots\end{cases} \tag{3.39}
$$

Όταν $u=0$, μια εφαρμογή του θεωρήματος αρχικής τιμής στη (3.26) δίνει

$$
\phi_{r,\delta}(0)=\lim_{s\to\infty} s\tilde{\phi}_{r,\delta}(s)=r\frac{\lambda}{c}\tilde{\tilde{P}}(\rho)\,.
$$

Χρησιμοποιώντας την (3.34), ακολουθεί ότι

$$
\begin{aligned}
\phi_{r,\delta}(0)&=r\frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\delta z}ce^{-\lambda z}\bar{P}(cz)\,dz+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\int_0^{\infty} e^{-\delta z}g_n(z)dz\right\} \\
&=r\int_0^{\infty} e^{-\delta z}\left\{\lambda e^{-\lambda z}\bar{P}(cz)\right\}dz+\sum_{n=2}^{\infty} r^n\int_0^{\infty} e^{-\delta z}\left\{\frac{\lambda}{c}g_{n-1}(z)\right\}dz.
\end{aligned}
$$

Η ιδιότητα μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace υποδηλώνει ότι

$$f(t,n|0)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(ct), & n=1\\ \dfrac{\lambda}{c}g_{n-1}(t), & n=2,3,\dots\end{cases} \tag{3.40}$$

Με απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς, είναι άμεσο ότι η (3.40) συμφωνεί με τη (3.18).

Παρατήρηση 3.3.1 *Αντικαθηστώντας τη (3.40) στην (3.39), έχουμε, για* $n=1,2,3,\dots$,

$$\begin{aligned}f(t,n+1|u)&=\lambda h_n(u,t)-c\int_0^t f(t,1|0)f_n(u+cz,z)dz\\&\quad-c\int_0^t\left\{\sum_{m=1}^{n-1}f(t-z,m+1|0)f_{n-m}(u+cz,z)\right\}dz\\&=\lambda h_n(u,t)-c\int_0^t\left\{\sum_{m=1}^{n}f(t-z,m|0)f_{n+1-m}(u+cz,z)\right\}dz,\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς ο αναδρομικός τύπος στου Dickson (2012) (βλ. Παρατήρηση 3.2.1).

Παρατήρηση 3.3.2 *Έστω* $r=1$ *στη (3.37), διαπιστώνεται ότι η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από*

$$f(t|u)=\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}h_n(u,t)-\lambda\int_0^t g(t-z;1)f(u+cz,z;1)dz. \tag{3.41}$$

Επίσης, από (3.40), μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για $u=0$,

$$\begin{aligned}f(t|0)&=\lambda e^{-\lambda t}\bar{P}(ct)+\frac{\lambda}{c}\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\\&=\frac{\lambda}{c}g(t;1)\end{aligned} \tag{3.42}$$

Αντικαθιστώντας τη (3.42) στη (3.41), έχουμε

$$\begin{aligned}f(t|u)&=\lambda\left\{e^{-\lambda t}\bar{P}(u+ct)+\int_0^{u+ct}f(x,t;1)\,\bar{P}(u+ct-x)dx\right\}\\&\quad-c\int_0^t f(u+cz,z;1)\,f(t-z|0)dz\qquad.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Η Εξ. (3.43) είναι σύμφωνη με τον τύπο του Seal (βλέπε π.χ. Prabhu (1961) και Dickson (2007).

Κεφάλαιο 4

Το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen: εκθετικές απαιτήσεις

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το πρόβλημα χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου στο συνηθισμένο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen, στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ και τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ είναι i.i.d. τ.μ.. Οι τ.μ. του μεγέθους απαίτησης $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ θεωρούνται αμοιβαία ανεξάρτητες με τους ανδιαμέσους χρόους $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι τ.μ. μεγέθους απαίτησης $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\beta$.

Όπως επισημαίνεται στην Ενότητα 1.3, οι Borovkov και Dickson (2008) χρησιμοποίησαν ένα επιχείρημα διττότητας για να αντλήσουν μία άπειρη σειρά αναπαράστασης για τη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με εκθετικές απαιτήσης. Εξετάζουμε μια εναλλακτική προσέγγιση από αυτή των Borovkov και Dickson (2008) που περιλαμβάνει τη χρήση του θεωρήματος επέκτασης Lagrange. Το πλεονέκτημα αυτής της τελευταίας προσέγγισης είναι ότι επιτρέπει τη πιθανοτική ερμηνεία κάθε όρου στο ανάπτυγμα της σειράς που προκύπτει για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας. Για να ήμαστε πιο ακριβείς, ενσωματώνουμε τη τ.μ. που ανιπροσωπεύει τον αριθμό των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία στην ανάλυση, και αρμηνεύουμε κάθε όρο στο ανάπτυγμα όσον αφορά την κατανομή αυτής της νέας μεταβλητής. Από την άποψη της διαχείρισης κινδύνου, μια τέτοια ανάλυση παρέχει πρόσθετες πληροφορίες για σκοπούς σχεδιασμού βάσει του γεγονότος ότι η κατανομή των ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία) μπορεί να εξακριβωθούν πριν από το ίδιο το γεγονός της χρεοκοπίας (παρόλο που οι πραγματικές τιμές των σχετικών μεταβλητών προφανώς δεν μπορούν να αξακριβωθούν). Κατά συνέπεια, η προτεινόμενη νέα συνάρτηση Gerber-Shiu (1.9)

$$\phi_{r,\delta}(u) \equiv E\left[r^{N_\tau} e^{-\delta\tau} 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right], \qquad \delta \geq 0, r \in (0,1],$$

επιτρέπει τον προσδιορισμό της από κοινού κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Με τη σειρά του αυτή η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας κι του αριθμού των απιατήσεων εώς τη χρεοκοπία θα παίξει αναπόσπαστο μέρος στην ερμηνεία της από κοινού γενικευμένης πυκνοότητας του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου παρατίθεται στην Ενότητα 4.4 όπου προκύπτει μια έκφραση κλειστής μορφής για τη τριμεταβλητή κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Λόγω της εγγενούς δομής αυτης της τριμεταβλητής κατανομής, η απλούστερη περίπτωση που περιλαμβάνει τη διμεταβλητή κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία αναλύεται πρώτα στην Ενότητα 4.2. Η οριακή κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία είναι το αντικείμενο της Ενότητας 4.3.

4.2 Η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία

Σε αυτήν την ενότητα, αναλύουμε την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Ξεκινάμε από την έκφραση της σύνθετης γεωμετρικής ουράς (2.7) για $\{\phi_{r,\delta}(u), u \geq 0\}$.

Όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά με μέσο $1/\beta$, από (2.9), είναι άμεσο ότι

$$k_{r,\delta}(y) = \beta e^{-\beta y}, \qquad y \geq 0 \tag{4.1}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι η $k_{r,\delta}$ είναι μια εκθετική πυκνότητα με μέσο $1/\beta$, η (2.7) γίνεται

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta}(u) &= (1-\phi_{r,\delta}(0))\sum_{j=1}^{\infty}\left(\phi_{r,\delta}(0)\right)^{j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\beta u)^{i}e^{-\beta}}{i!}\\ &= (1-\phi_{r,\delta}(0))e^{-\beta u}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\beta u)^{i}}{i!}\sum_{j=i}^{\infty}\left(\phi_{r,\delta}(0)\right)^{j+1}\\ &= \phi_{r,\delta}(0)e^{-\beta u(1-\phi_{r,\delta}(0))} \qquad (4.2)\end{aligned}$$

για $u \geq 0$. Σημειώστε ότι η (4.2) είναι μια γενίκευση της Εξ. (3.16) στου Willmot (2007).

Επίσης, εξαρτώμενοι από το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης, έχουμε

$$\phi_{r,\delta}(u) = \int_0^{\infty} re^{-\delta t}k(t)\left\{\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta}(y)\beta e^{-\beta(u+ct-y)}dy + e^{-\beta(u+ct)}\right\}dt. \qquad (4.3)$$

Χρησιμοποιώντας την ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση (2.5) με $k_{r,\delta}(y) = \beta e^{-\beta y}$ για $y \geq 0$, η (4.3) γίνεται

$$\phi_{r,\delta}(0)e^{-\beta u\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)} = re^{-\beta u\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)}\tilde{k}\left(\delta + c\beta\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)\right). \qquad (4.5)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του $e^{-\beta u\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)}$ και στις δύο πλευρές της (4.5) υποδηλώνει ότι η $\phi_{r,\delta}(0)$ είναι μία λύση (σε z) της

$$z = r\tilde{k}\big(\delta + c\beta(1-z)\big)\,. \qquad (4.6)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouché, μπορεί να αποδειχθεί ότι η (4.6) έχει ακριβώς μία λύση στο μοναδιαίο κύκλο όποτε $r < 1$ ή $\delta > 0$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επέκτασης του Lagrange με $f(x) = xe^{-\beta u(1-x)}$ (βλέπε Εξ. 1.22), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta}(0)e^{-\beta u\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)u} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(1+\beta ux)e^{-\beta u(1-x)}\int_0^{\infty}e^{-(\delta+c\beta(1-x))z}k^{*n}(z)dz\right]\Bigg|_{x=0}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\delta x}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1+\beta ux)e^{-\beta(u+cz)(1-x)}\right\}k^{*n}(z)dz\Bigg|_{x=0}\end{aligned}$$

$$= re^{-\beta u}\tilde{k}(\delta + c\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta x} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 + \beta u x) e^{-\beta(u+cz)(1-x)} \right\} k^{*n}(z) dz \bigg|_{x=0},$$

όπου k^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της πυκνότητας k με τον εαυτό της. Δοθέντος ότι

$$\begin{aligned} &\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 + \beta u x) e^{-\beta(u+cz)(1-x)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[\frac{d^j}{dx^j} (1 + \beta u x) \right] \left[\frac{d^{n-1-j}}{dx^{n-1-j}} e^{-\beta(u+cz)(1-x)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[\frac{d^j}{dx^j} (1 + \beta u x) \right] \left[(\beta(u + cz))^{n-1-j} e^{-\beta(u+cz)(1-x)} \right] \\ &= \big((1 + \beta u x) \beta(u + cz) + (n-1)\beta u \big) (\beta(u + cz))^{n-2} e^{-\beta(u+cz)(1-x)}, \end{aligned}$$

για $n \geq 2$, ακολουθεί ότι

$$\begin{aligned} \phi_{r,\delta}(0) e^{-\beta u \left(1 - \phi_{r,\delta}(0)\right) u} &= r \int_0^{\infty} e^{-\delta x} \{ e^{-\beta(u+cz)} k(z) \} dz \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta x} \left\{ \frac{\beta^{n-1}(nu + cz)(u + cz)^{n-2}}{n!} e^{-\beta(u+cz)} k^{*n}(z) \right\} dz. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Κάποιος καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοππία δίνεται από

$$f(t, n|u) = \begin{cases} e^{-\beta(u+ct)} k(t), & n = 1, \\ \dfrac{nu + ct}{n(n-1)} \gamma_{\beta,n-1}(u + ct) k^{*n}(t), & n = 2, 3, \dots, \end{cases} \tag{4.8}$$

για $t \geq 0$, όπου $\gamma_{\beta,n}$ είναι η πυκνότητα Erlang

$$\gamma_{\beta,n}(y) = \frac{\beta^n y^{n-1} e^{-\beta y}}{(n-1)!}, \qquad y \geq 0.$$

Είναι άμεσο ότι η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από

$$f(t|u) = e^{-\beta(u+ct)} k(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nu + ct}{n(n-1)} \gamma_{\beta,n-1}(u + ct) k^{*n}(t), \tag{4.9}$$

που αντιστοιχεί στην Εξ. (3) στους Borovkov και Dickson (2008). Ως αποτέλεσμα, οι μεμονωμένοι όροι της αναπαράστασης άπειρου αθροίσματος (4.9) ατιστοιχούν σε «πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας» συνεισφορές ως προς τον αριθμό των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία.

Παρατήρηση 4.2.1 *Μια εναλλακτική προσέγγιση για την επίλυση της $f(t,n|u)$ είναι η χρήση της μεθόδου που πρότειναν οι Chan και Zhang (2006). Εξαρτώμενοι από το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης, έχουμε*

$$f(t,1|u) = k(t)e^{-\beta(u+ct)}, \tag{4.10}$$

και

$$f(t,n|u) = \int_0^t k(t-x)\left[\int_0^{u+c(t-x)} \beta e^{-\beta(u+c(t-x)-y)} f(x,n-1|y)dy\right]dx, \tag{4.11}$$

για $n = 2, 3, \dots$ Με τη βοήθεια των (4.10) και (4.11) είναι εύκολο να βρούμε μια ρητή έκφραση για τη $f(t,n|u)$ για τις πρώτες λίγες τιμές της n. Στη συνέχεια, εισάγουμε τη γενική μορφή της λύσης της $f(t,n|u)$ και χρησιμοποιούμε ένα επαγωγικό όρισμα για να επαληθεύσουμε την εγκυρότητα της. Ωστόσο, παρόλο που αυτή η τεχνική είναι απλή και περιλαμβάνει μόνο αλγεβρικούς χειρισμούς στο παρόν πλαίσιο, βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στον προσδιορισμό μιας γενικής λύσης που μπορεί να αποδειχθεί μια δύσκολη εργασία σε ορισμένες (αλλες) περιπτώσεις. Για παράδειγμα, η εφαρμογή αυτής της τεχνικής στην Ενότητα 4.4 για να λάβουμε την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν από τη χρεοκοπία και τον αριθμό των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία σίγουρα δεν είναι ασήμαντη. Για το λόγο αυτό (και άλλους), πιστεύουμε ότι η προσέγγιση Gerber-Shiu που προτείνεται παραπάνω είναι παραγωγική και όχι επαγωγική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γενοκότερων μποβλημάτων (βλ. Ενότητα 4.4 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Στους Borovkov και Dickson (2008), μια έκφραση για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας προέρχεται επίσης από το πλαίσιο του μοντέλου κινδύνου καθυστερημένης ανανέωσης. Επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα στην από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία, δηλαδή $f_0(t,n|u)$. Εξαρτώμενοι από το πρώτο ενδιάμεσο χρόνο με πυκνότητα k_0, έχουμε

$$f_0(t,1|u) = k_0(t)e^{-\beta(u+ct)}.$$

Γενικά, για $n = 2,3,\ldots$, καθορίζουμε το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης για να αποκτήσουμε

$$f_0(t,n|u) = \int_0^t k_0(t-x)\left[\int_0^{u+c(t-x)} \beta e^{-\beta(u+c(t-x)-y)} f(x,n-1|y)dy\right]dx. \tag{4.12}$$

Η αντικατάσταση της (4.8) στην (4.12), όταν $n = 2$, έχει ως αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}
f_0(t,2|u) &= \int_0^t k_0(t-x)\left[\int_0^{u+c(t-x)} \beta e^{-\beta(u+c(t-x)-y)}\left\{e^{-\beta(y+cx)}k(x)\right\}dy\right]dx \\
&= e^{-\beta(u+ct)}\int_0^t k_0(t-x)\,\beta\big(u+c(t-x)\big)k(x)dx \\
&= e^{-\beta(u+ct)}\int_0^t k_0(x)\,\beta(u+cx)k(t-x)dx \\
&= e^{-\beta(u+ct)}\beta(u(k_0 * k(t)) + c(k_1 * k(t)))\,.
\end{aligned}$$

όπου $k_1(x) = xk_0(x)$, και $*$ δηλώνει συνέλιξη, π.χ., $a * b(t) = \int_0^t a(x)b(t-x)dx$.

Ομοίως, για $n = 3,4,\ldots$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&f_0(t,n|u) \\
&= \int_0^t k_0(t-x)\left[\int_0^{u+c(t-x)} \beta e^{-\beta(u+c(t-x)-y)}\, f(x,n-1|y)dy\right]dx \\
&= e^{-\beta(u+ct)}\,\frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^t k_0(t-x)\,k^{*(n-1)}(x)\left[\int_0^{u+c(t-x)}\big((n-1)y+cx\big)\,(y+cx)^{n-3}dy\right]dx,
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
&\int_0^{u+c(t-x)}\big((n-1)y+cx\big)\,(y+cx)^{n-3}dy \\
&= \int_{cx}^{u+ct}\big((n-1)(y-cx)+cx\big)\,y^{n-3}dy \\
&= \int_{cx}^{u+ct}(n-1)\,y^{n-2}dy - cx\int_{cx}^{u+ct}(n-2)\,y^{n-3}dy \\
&= (u+ct)^{n-1} - cx(u+ct)^{n-2} \\
&\quad = (u+ct)^{n-2}\big(u+c(t-x)\big).
\end{aligned}$$

Συμπεραίνει κανείς ότι

$$\begin{aligned} f_0(t,n|u) &= \frac{\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}e^{-\beta(u+ct)}}{(n-1)!}\int_0^t k_0(t-x)\,k^{*(n-1)}(x)\Big(\big(u+c(t-x)\big)\Big)dx \\ &= \frac{\gamma_{n-1,\beta}(u+ct)}{n-1}\Big(u\Big(k_0 * k^{*(n-1)}(t)\Big)+c\Big(k_1 * k^{*(n-1)}(t)\Big)\Big), \end{aligned}$$

για $n = 2, 3, \dots$

4.3 Η οριακή κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία

Υπενθυμίζουμε από την (3.19) ότι η p.m.f. του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία για ένα αρχικό πλεόνασμα $U_0 = u$ συμβολίζεται ως $p(n|u)$ για $n = 1, 2, \dots$ Από τη (4.8), είναι εύκολο να δεί κανείς ότι

$$p(n|u) = \begin{cases} e^{-\beta u}\tilde{k}(\beta c), & n = 1, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{nu+ct}{n(n-1)!}\gamma_{\beta,n-1}(u+ct)k^{*n}(t)dt, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{4.13}$$

Χρησιμοποιώντας τη (4.13), μια έκφραση κλειστής μορφής για τη $p(n|u)$ προκύπτει για πρώτη φορά όταν η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων είναι μικτή Erlang. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι η πυκνότητα k του ενδιάμεσου χρόνου έχει ένα μετασχηματισμό Laplace της μορφής

$$\tilde{k}(s) = Q\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right), \tag{4.14}$$

όπου

$$Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j s^j,$$

με $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ να είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

Παραπέμπτουμε τους αναγώστες στους Willmot & Woo (2007) και Willmot & Lin (2011) για το εύρος κατανομών που ανήκουν στη κατηγορία μικτών Erlang κατανομών. Για τη μικτή Erlang κατανομή (4,14), η (4,13) δίνει

$$p(1|u) = e^{-\beta u} Q\left(\frac{\lambda}{\lambda + c\beta}\right),$$

και

$$\begin{aligned}
&p(n|u) \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{n!} e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \int_0^{\infty} (nu + ct)\,(u + ct)^{n-2} t^{j-1} e^{-(\lambda+\beta c)t} dt \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{n!} e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} u^{n-2-i} c^i \int_0^{\infty} (nu + ct)\, t^{i+j-1} e^{-(\lambda+\beta c)t} dt \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{n!} e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda + c\beta}\right)^j}{(j-1)!} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} u^{n-2-i} c^i \left(nu \frac{(i+j-1)!}{(\lambda + c\beta)^i} + c \frac{(i+j)!}{(\lambda + c\beta)^{i+1}} \right),
\end{aligned} \tag{4,15}$$

όπου q^{*n} είναι η n-οστή συνέλιξη της p.m.f. q. Συγκεκριμένα, όταν $u = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
p(n|0) &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{(c\beta)^{n-1}}{n!} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \int_0^{\infty} t^{n+j-2} e^{-(\lambda+c\beta)t} dt \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{(n+j-2)!}{n!\,(j-1)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda + c\beta}\right)^j \left(\frac{c\beta}{\lambda + c\beta}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

για $n = 1, 2, \ldots$

Παρατηρούμε ότι η (4,15) μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτική στον αναδρομικό τύπο που δινεται από τους Stanford et al. (2000, θεώρημα 3.1 και Εξίσωση (3.6)) για τον υπολογισμό της $p(n|u)$. Στο ακόλουθο παράδειγμα, προσδιορίζουμε την (οριακή) κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά.

Παράδειγμα 4.3.1 *(Εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι) Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας k του ενδιάμεσου χρόνου είναι της μορφής (4.14) με $Q(s) = s$. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, προκύπτει ότι*

$$p(n|0) = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda + c\beta}\right)^n \left(\frac{c\beta}{\lambda + c\beta}\right)^{n-1}, \tag{4.16}$$

για $n = 1, 2, \ldots$ *για την οποία η μορφή αυτής της p.m.f. μπορεί να συνδεθεί με τη εκτεταμένη-περικομένη αρνητική διωνυμική κατανομή (Extended-Truncated Negative Binomial distribution (ETNB)). Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον τύπο πολλαπλασιαμσού του Gauss*

$$\Gamma(2n-2) = \frac{2^{2(n-1)-1}\Gamma(n-1)\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

η (4.16) γίνεται

$$\begin{aligned}
p(n|0) &= \frac{2(n-1)\Gamma(2n-2)}{\mathrm{n}!\,\Gamma(n)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+c\beta}\right)^{n}\left(\frac{c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4^{n-1}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{n}!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+c\beta}\right)^{n}\left(\frac{c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4^{n-1}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{n}!\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+c\beta}\right)^{n}\left(\frac{c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Έστω

$$\binom{n+r-1}{n} = \frac{\Gamma(\mathrm{n}+r)}{n!\,\Gamma(r)},$$

είναι ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής για έναν μη-αρνητικό ακέραιο n. *Από αυτό προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned}
p(n|0) &= \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(\frac{4c\beta\lambda}{(\lambda+c\beta)^2}\right)^{n}}{\frac{-2c\beta}{\lambda+c\beta}} \\
&= \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(\frac{(\lambda+c\beta)^2-(\lambda-c\beta)^2}{(\lambda+c\beta)^2}\right)^{n}}{\frac{-2c\beta}{\lambda+c\beta}} \\
&= \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2\right)^{n}}{\frac{-2c\beta}{\lambda+c\beta}},
\end{aligned}$$

για $n = 1, 2, \ldots$

Όποτε ικανοποίειται η θετική επιβάρυνση ασφαλείας $c\beta > \lambda$, η p.m.f. του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία είναι ελαττωματική. Έχουμε

$$p(n|0) = \frac{\frac{c\beta-\lambda}{\lambda+c\beta}-1}{\frac{-2c\beta}{\lambda+c\beta}} \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2\right)^n}{\frac{c\beta-\lambda}{\lambda+c\beta}-1}$$
$$= \frac{\lambda}{c\beta} \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2\right)^n}{\frac{c\beta-\lambda}{\lambda+c\beta}-1}$$
$$= \frac{1}{1+\theta} g_n ,$$

όπου θ είναι η θετική επιβάρυνση ασφαλείας που ικανοποιεί

$$c\beta = \lambda(1+\theta),$$

και

$$g_n = \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2\right)^n}{\frac{c\beta-\lambda}{\lambda+c\beta}-1},$$

είναι η p.m.f. μιας εκτεταμένης-περικομένης αρνητικής διωνυμικής (ETNB) τ.μ. με παραμέτρους $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $p = 1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2$ (βλέπε Willmot (1988, Εξ. 3.1)).

Όποτε $c\beta > \lambda$, η $\{p(n|0)\}_{n\geq 1}$ είναι μια σωστή p.m.f. με

$$p(n|0) = \frac{\binom{n-\frac{1}{2}-1}{n}\left(1-\left(\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^2\right)^n}{\frac{\lambda-c\beta}{\lambda+c\beta}-1}.$$

Επισημαίνουμε ότι

$$\phi_{r,0}(u) = C\left(\phi_{r,0}(0)\right),$$

όπου

$$C(z) = ze^{\beta u(z-1)} ,$$

είναι η p.g.f. μιας μετατοπισμένης (κατά μία μονάδα) Poisson τ.μ. με μέσο βu. Η δευτερεύουσα κατανομή έχει p.g.f. $\phi_{r,0}(0)$.

4.4 Η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Laplace/p.g.f. του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία, του χρόνου της χρεοκοπίας και του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, γενικεύοντας ένα αποτέλεσμα του Willmot (2007). Επιπλέον, αυτό το νέο αναλυτικό εργαλείο είναι ρητά ανεστραμμένο (με τη βοήθεια της (4.8)) για να προσδιοριστεί η από κοινού γενικεύμενη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του αριθμού των απαιτήσεων εώς ττη χρεοκοπία.

Αν αφήσουμε $w(U_{\tau-},|U_\tau|)=e^{-U_{\tau-}}$ στην Εξ. (2.1), η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$\phi_{r,\delta,s}(u)\equiv E\left[r^{N_\tau}e^{-\delta\tau-sU_{\tau-}}1(\tau<\infty)|U_0=u\right],$$

για $s\geq 0,\delta\geq 0$ και $r\in(0,1]$. Εξαρτώμενοι από την πρώτη πτώση του αρχικού πλεονάσματος, έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta,s}(u)&=\int_0^u\int_0^\infty\phi_{r,\delta,s}(u-y)\xi_{r,\delta}(x,y|0)dxdy+\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+x)}\xi_{r,\delta}\,(x,y|0)dxdy\\&=\phi_{r,\delta}(0)\int_0^u\phi_{r,\delta,s}(u-y)k_{r,\delta}(y)dy+\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+x)}\xi_{r,\delta}(x,y|0)dxdy,\end{aligned}\tag{4.17}$$

για $u\geq 0$. Χρησιμοποιώντας τη (4.1), η (4.17) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta,s}(u)&=\phi_{r,\delta}(0)\int_0^u\phi_{r,\delta,s}(u-y)\beta e^{-\beta y}dy+\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+x)}\xi_{r,\delta}(x|0)\beta e^{-\beta y}dxdy,\\&=\phi_{r,\delta}(0)\int_0^u\phi_{r,\delta,s}(u-y)\beta e^{-\beta y}dy+\tilde{b}_{r,\delta}(s)e^{-(s+\beta)u},\end{aligned}\tag{4.18}$$

όπου

$$\tilde{b}_{r,\delta}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\xi_{r,\delta}(x|0)dx.$$

Έστω $\tilde{\phi}_{r,\delta,s}(z) = \int_0^\infty e^{-zu}\phi_{r,\delta,s}(u)du$. Από (4.18), συμπεραίνει κανείς ότι

$$\tilde{\phi}_{r,\delta,s}(z) = \phi_{r,\delta}(0)\tilde{\phi}_{r,\delta,s}(z)\frac{\beta}{\beta+z} + \frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta+z},$$

Λύνοντας για το $\tilde{\phi}_{r,\delta,s}(z)$ και στη συνέχεια αναπτύσσοντας σε μορφή μερικού κλάσματος, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{r,\delta,s}(z) &= \frac{\frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta+z}}{1-\phi_{r,\delta}(0)\frac{\beta}{\beta+z}} \\ &= \frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)(\beta+z)}{(s+\beta+z)\left(\beta\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)+z\right)} \\ &= \frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\left\{\frac{s}{s+\beta+z} + \frac{\beta\phi_{r,\delta}(0)}{z+\beta\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)}\right\}. \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Η αντιστροφή της (4.19) ως προς το z δίνει

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta,s}(u) &= \frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\left\{se^{-(s+\beta)u} + \beta\phi_{r,\delta}(0)e^{-\beta u\left(1-\phi_{r,\delta}(0)\right)}\right\} \\ &= \frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\left\{se^{-(s+\beta)u} + \beta\phi_{r,\delta}(u)\right\}, \qquad (4.20)\end{aligned}$$

για $u \geq 0$.

Για να ολοκληρώσουμε τον χαρακτηρισμό της $\phi_{r,\delta,s}(u)$ που δίνεται στην (4.20), θα βρούμε μία ρητή έκφραση για το $\tilde{b}_{r,\delta}(s)$ (για να επιτραπεί τελικά η αντιστροφή της ως προς την πιθανογεννήτρια r καθώς και τους μετασχηματισμούς Laplace δ και s). Πράγματι, εξαρτώμενοι από το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης

$$\phi_{r,\delta,s}(u) = \int_0^\infty re^{-\delta t}k(t)\left\{\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta,s}(y)\beta e^{-\beta(u+ct-y)}dy + e^{-(s+\beta)(u+ct)}\right\}dt. \qquad (4.21)$$

Αντικαθιστώντας την (4.20) στην (4.21) και χρησιμοποιώντας τις (2.5) και (4.2), η (4.21) γίνεται

$$\begin{aligned}
&\phi_{r,\delta,s}(u) \\
&= \int_0^\infty re^{-\delta t}k(t)\left\{\frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\beta e^{-\beta(u+ct)}\left(1-e^{-s(u+ct)}\right)\right. \\
&\left.+\frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\beta\left[\frac{\phi_{r,\delta}(u+ct)}{\phi_{r,\delta}(0)}-e^{-\beta(u+ct)}\right]+e^{-(s+\beta)(u+ct)}\right\}dt \\
&= \int_0^\infty re^{-\delta t}k(t)\left\{\frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\frac{\phi_{r,\delta}(u+ct)}{\phi_{r,\delta}(0)}+\left[1-\frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\right]e^{-(s+\beta)(u+ct)}\right\}dt \\
&= \frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\int_0^\infty re^{-\delta t}k(t)\frac{\phi_{r,\delta}(u+ct)}{\phi_{r,\delta}(0)}dt \\
&+\left[1-\frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\right]\int_0^\infty re^{-\delta t}k(t)e^{-(s+\beta)(u+ct)}dt \\
&= \frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\phi_{r,\delta}(u)+\left[1-\frac{\beta\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}\right]r\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)e^{-(s+\beta)u}. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές της $e^{-(s+\beta)u}$ και στις δύο πλευρές της (4.22) και χρησιμοποιώντας την (4.20), συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\tilde{b}_{r,\delta}(s)}{s+\beta\phi_{r,\delta}(0)}=\frac{r\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)}{s+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)},$$

που σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
\phi_{r,\delta,s}(u) &= \frac{r\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)}{s+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)}\left\{se^{-(s+\beta)u}+\beta\phi_{r,\delta}(u)\right\} \\
&= \frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)}{s+r\beta\tilde{k}\big(\delta+c(s+\beta)\big)}\left\{\frac{s}{\beta}e^{-(s+\beta)u}+\phi_{r,\delta}(u)\right\}. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Μένει να αντιστρέψουμε την (4.23) ως προς τους όρους r, δ και s. Επισημαίνουμε ότι η $\phi_{r,\delta,s}(u)$ εκφράζεται ρητά σε όρους της $\phi_{r,\delta}(u)$, γεγονός που εξηγεί τη σειρά με την οποία πραγματοποιείται η παρουσίαση σε αυτή την ενότητα.

Αξιοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα

$$\frac{x}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n, \qquad |x|>0,$$

ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της (4.23) μπορεί να αναπτυχθεί στην ακόλουθη δυναμοσειρά στο r (για $s > \beta$):

$$\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{(-1)^{n-1}\left(\frac{\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s}\right)^n\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left\{\frac{e^{-cst}}{s^n}(-1)^{n-1}\beta^n e^{-c\beta t}k^{*n}(t)\right\}dt. \qquad (4.24)$$

Μένει να αντιστραφεί η (4.24) ως προς το μετασχηματισμού Laplace του όρου s.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{e^{-cst}}{s^n} - e^{-cst}\int_0^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-sx}dx$$
$$= \int_{ct}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x-ct)^{n-1}e^{-sx}dx, \qquad (4.25)$$

για $n = 1, 2, \ldots$, η (4.24) γίνεται

$$\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left\{(-1)^{n-1}\beta^n e^{-c\beta t}k^{*n}(t)\int_{ct}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x-ct)^{n-1}e^{-sx}dx\right\}dt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty}\int_{ct}^{\infty} e^{-\delta t}e^{-sx}\left\{\frac{\beta^n(ct-x)^{n-1}e^{-c\beta t}}{(n-1)!}k^{*n}(t)\right\}dxdt. \qquad (4.26)$$

Με τον ίδιο τρόπο

$$\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}\frac{s}{\beta}e^{-(s+\beta)u}$$
$$= se^{-(s+\beta)u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left\{\frac{e^{-cst}}{s^n}(-1)^{n-1}\beta^{n-1}e^{-c\beta t}k^{*n}(t)\right\}dt\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left\{\frac{e^{-s(u+ct)}}{s^{n-1}}(-1)^{n-1}\beta^{n-1}e^{-\beta(u+ct)}k^{*n}(t)\right\}dt$$
$$= r\int_0^{\infty} e^{-\delta t}e^{-s(u+ct)}\left\{e^{-\beta(u+ct)}k(t)\right\}dt$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-sx} \left\{ \frac{\beta^{n-1}(u+ct-x)^{n-2} e^{-\beta(u+ct)}}{(n-2)!} k^{*n}(t) \right\} dxdt. \qquad (4.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.26) και (4.7), έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} &\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)} \phi_{r,\delta}(u) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_{ct}^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-sx} \left\{ \frac{\beta^n (ct-x)^{n-1} e^{-c\beta t}}{(n-1)!} k^{*n}(t) \right\} dxdt \right) \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t,n|u) \right). \end{aligned} \qquad (4.28)$$

Μέσω συνελίξεων, η (4.28) γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)} \phi_{r,\delta}(u) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{t} \int_{cz}^{\infty} e^{-sx}\, g_n(t,z,m|u) dxdz \right\} dt\,, \end{aligned}$$

όπου

$$g_n(t,z,m|u) = \frac{\beta^m (cz-x)^{m-1} e^{-c\beta z}}{(m-1)!} k^{*m}(z) f(t-z, n-m|u)\,.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης των δύο εσωτερικών ολοκληρωμάτων, καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} &\frac{r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)}{s + r\beta\tilde{k}\big(\delta + c(s+\beta)\big)} \phi_{r,\delta}(u) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-sx} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{min\left(\frac{x}{c},t\right)} g_n(t,z,m|u)\, dz \right\} dxdt, \end{aligned} \qquad (4.29)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.27) και (4.29) στην (4.23), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\phi_{r,\delta,s}(u) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-sx} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{min\left(\frac{x}{c},t\right)} g_n(t,z,m|u)\, dz \right\} dxdt \\ &+ r \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-s(u+ct)} \left\{ e^{-\beta(u+ct)} k(t) \right\} dt \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty}\int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-sx}\left\{\frac{\beta^{n-1}(u+ct-x)^{n-2}e^{-\beta(u+ct)}}{(n-2)!}k^{*n}(t)\right\}dxdt. \qquad (4.30)$$

Δεδομένου ότι το πλεόνασμα πριν από τη χρεοκοπία είναι το πολύ $u+ct$ για χρόνο μέχρι τη χρεοκοπία t, η (4.30) απλοποιείται σε

$$\phi_{r,\delta,s}(u) = r\int_0^{\infty} e^{-\delta t}e^{-s(u+ct)}\left\{e^{-\beta(u+ct)}k(t)\right\}dt$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} r^n \int_0^{\infty}\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\, e^{-sx}\left\{\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{min\left(\frac{x}{c},t\right)} g_n(t,z,m|u)\,dz\right\}dxdt.$$

Συμπεραίνει κανείς ότι η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, και του αριθμού των απαιτήσεων πριν τη χρεοκπία είναι

$$f(t,x,n|u)$$
$$=\begin{cases} e^{-\beta(u+ct)}k(t)\,, & n=1, x=u+ct, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}\int_0^{min\left(\frac{x}{c},t\right)} \frac{\beta^m(cz-x)^{m-1}e^{-c\beta z}}{(m-1)!}k^{*m}(z)f(t-z,n-m|u)dz, & n\geq 2, x\in[0,u+ct], \\ 0, & αλλού, \end{cases} \qquad (4.31)$$

για $t,u\geq 0$.

Ο τύπος (4.31) μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω όταν καθορίζεται η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων. Στο ακόλουθο παράδειγμα, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή Erlang.

Παράδειγμα 4.4.1 *Στην περίπτωση την οποία η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου είναι μικτή Erlang με μετασχηματισμό Laplace (4.14), η (4.31) γίνεται*

$$f(t,u+ct,1|u) = e^{-\beta(u+ct)}\sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n}\frac{\lambda^j t^{j-1}e^{-\lambda t}}{(j-1)!}\,,$$

και

$$f(t,x,n|u)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\min\left(\frac{x}{c},t\right)} \frac{\beta^m (cz-x)^{m-1} e^{-c\beta z}}{(m-1)!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{*m} \frac{\lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z}}{(k-1)!} \right) f(t-z, n-m|u) dz$$
$$= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\beta^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^{*m} \lambda^k}{(k-1)!} \int_0^{\min\left(\frac{x}{c},t\right)} \left((cz-x)^{m-1} z^{k-1} e^{-(\lambda+\beta c)z} \right) f(t-z, n-m|u) dz, \quad (4.32)$$

για $n = 2, 3, \ldots$ *και* $x \in [0, u+ct]$.

Σημειώνουμε ότι

$$f(t,n|u) = \frac{(nu+ct)(u+ct)^{n-2}\beta^{n-1}}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{\lambda^j t^{j-1} e^{-\lambda t}}{(j-1)!}$$
$$= \frac{\beta^{n-1}}{n!} e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} (nu+ct)(u+ct)^{n-2} t^{j-1} e^{-(\lambda+\beta c)t}. \quad (4.33)$$

Αντικαθιστώντας την (4.33) στην (4.32), προκύπτει

$$f(t,x,n|u) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\beta^{n-1} e^{-\beta u} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{(m-1)!\,(n-m)!} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{q_k^{*m} q_j^{*(n-m)} \lambda^{k+j}}{(k-1)!\,(j-1)!} I_{k,j}(t,x,m,n|u), \quad (4.34)$$

όπου

$$I_{k,j}(t,x,m,n|u) = \int_0^{\min\left(\frac{x}{c},t\right)} (cz-x)^{m-1} z^{k-1} (t-z)^{j-1} \big((n-m)u + c(t-z) \big) \big(u + c(t-z) \big)^{n-m-2} dz$$
$$= (n-m-1) \sum_{i=0}^{n-m-2} \binom{n-m-2}{i} u^{n-m-1-i} H_i^m(t,x;k,j)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-m-1}{i} u^{n-m-1-i} H_i^m(t,x;k,j), \quad (4.35)$$

και

$$H_i^m(t,x;k,j) = c^i \int_0^{\min\left(\frac{x}{c},t\right)} (cz-x)^{m-1} z^{k-1} (t-z)^{i+j-1} dz. \quad (4.36)$$

Χρησιμοποιώντας τον πυρήνα της βήτα κατανομής, βρίσκει κανείς *(ι) για* $0 \le x \le ct$, *η (4.36) γίνεται*

$$
\begin{aligned}
&H_i^m(t,x;k,j) \\
&= c^i \int_0^{\frac{x}{c}} (cz-x)^{m-1} z^{k-1} (t-z)^{i+j-1} dz \\
&= \sum_{l=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{l} (-1)^{m-1+l} c^{i-k-l} t^{i+j-l-1} x^{m+k+l-1} \int_0^1 (1-z)^{m-1} z^{k+l-1} dz \\
&= \sum_{l=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{l} \frac{\Gamma(m)\Gamma(k+l)}{\Gamma(m+k+l)} (-1)^{m-1-l} c^{i-k-l} t^{i+j-l-1} x^{m+k+l-1};
\end{aligned}
$$

(ii) για $ct < x \le u + ct$, *η (4.36) ανάγεται σε*

$$
\begin{aligned}
&H_i^m(t,x;k,j) \\
&= c^i \int_0^t (cz-x)^{m-1} z^{k-1} (t-z)^{i+j-1} dz \\
&= \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} (-x)^{m-1-l} c^{i+l} \int_0^t z^{k+l-1} (t-z)^{i+j-1} dz \\
&= \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \frac{\Gamma(i+j)\Gamma(k+l)}{\Gamma(i+j+k+l)} (-x)^{m-1-l} c^{i+l} t^{i+j+k+l-1}.
\end{aligned}
$$

Ως ειδική περίπτωση, όταν το αρχικό πλεόνασμα $u = 0$, *η (4.35) γίνεται*

$$
\begin{aligned}
I_{k,j}(t,x,m,n|0) &= c^{n-m-1} \int_0^{\min\left(\frac{x}{c},t\right)} (cz-x)^{m-1} z^{k-1} (t-z)^{j+n-m-2} dz \\
&= H_{n-m-1}^m(t,x;k,j)\,. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας την (4.37) στην (4.34), προκύπτει ότι

$$
f(t,x,n|0) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\beta^{n-1} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{(m-1)!\,(n-m)!} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{q_k^{*m} q_j^{*(n-m)} \lambda^{k+j}}{(k-1)!\,(j-1)!} H_{n-m-1}^m(t,x;k,j),
$$

για $n = 2, 3, \dots$ *και* $x \in [0, ct]$. ■

Για το καθυστερημένο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen (με εκθετικές απαιτήσεις), η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία προκύπτει με φυσικό τρόπο από την (4.31) (π.χ. εξαρτώμενοι από το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης και αναγνωρίζοντας ότι η διαδικασία επανεκκινείται στη μη καθυστερημένη (σύνηθη) μορφή). Επομένως, παραλείπουμε τις λεπτομέρειες εδώ.

Κεφάλαιο 5

Το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen: συνδυασμός από n εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, αξιοποιούμε τις πιο πρόσφατες εξελίξεις σε σχέση με το χρόνο χρεοκοπίας μιας ανέλιξης πλεονάσματος ενός ασφαλιστή, και προσδιορίζουμε μια έκφραση κλειστής μορφής για την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας σε ορισμένα μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen. Και πάλι, το κάνουμε μέσω αναλυτικής αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας (βλέπε Εξ. (1.8))

$$\phi_{1,\delta}(u) \equiv E\left[e^{-\delta\tau}1(\tau < \infty)|U_0 = u\right],$$

και μιας ποσότητας που σχετίζεται με τη χρεοκοπία και είναι γνωστή σε διάφορα μοντέλα κινδυνου Sparre Andersen (βλέπε π.χ. Li and Garrido (2005) και Gerber and Shiu (2005)). Όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 1.3, τα περισσότερα από τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας βασίζονται στην εκθετική υπόθεση που επιβάλλεται είτε στους ενδιάμεσους χρόνους είτε στα μεγέθη των απαιτήσεων, με πολύ λίγες εξαιρέσεις.

Αφήνοντας την εκθετική υπόθεση, προτείνουμε να βασιστούμε στις πρόσφατες συνεισφορές των Dickson και Li (2010, 2012) και να παράσχουμε μια αναλυτική έκφραση για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας σε ορισμένα μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen μέσω της χρήσης του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange στην πολυμεταβλητή μορφή του (βλέπε θεώρημα 1.4.4 και πόρισμα 1.4.5). Από όσα γνωρίζουμε, τα αποτελέσματα αυτά είναι τα πρώτα του είδους τους για την κατηγορία των ανελίξεων πλεονάσματος που ενδιαφέρουν το παρόν κεφάλαιο. Επίσης, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία μας για την αντιμετώπιση της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας μπορεί επίσης να εφαρμοστεί για τη μελέτη άλλων χρόνων πρώτης διέλευσης που ενδιαφέρει τις εφαρμοσμένες πιθανότητες. Μια συγκεκριμένη εφαρμογή ουρών αναμονής θα εξεταστεί στην Ενότητα 5.3.

Ως γενικό πλαίσιο, υποθέτουμε ότι η ανέλιξη πλεονάσματος $\{U_t, t \geq 0\}$ ακολουθεί μια διαδικασία κινδύνου Sparre Andersen όπως ακριβώς περιγράφεται στην ενότητα 1.1, όπου οι ενδιάμσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ και τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ σχηματίζουν μία αλληλουχία απο i.i.d. τ.μ. Θεωρείται επίσης ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ και τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Σε αυτό το κεφάλαιο, δείχνουμε ότι, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων έχουν συνδυασμό από n εκθετικές κατανομές με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{p}(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\beta_i}{\beta_i + s}, \qquad s \geq 0, \tag{5.1}$$

για $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\beta_i > 0$, και $\beta_i \neq \beta_j$ για $i \neq j$, η αναλυτική αντιστροφή της $\phi_{1,\delta}(u)$ μπορεί να γίνει με τη χρήση του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange. Υπενθυμίζουμε ότι μία από τις σημαντικές ιδιότητες αυτής της κατηγορίας κατανομών είναι ότι είναι πυκνές μεταξύ του συνόλου των συνεχών κατανομών με στήριγμα στο $[0, \infty)$ (βλέπε π.χ. Dufresne (2007)).

Το υπόλοιπο κεφάλαιο έχει την εξής δομή: στην ενότητα 5.2 λαμβάνουμε μια έκφραση κλειστής μορφής για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινvδύνου Sparre Andersen όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων έχουν μετασχηματισμό Laplace (5.1). Συζητάμε επίσης πως η προτεινόμενη μεθοδολογία μας μπορεί να χρησιοποιηθεί για την επίλυση άλλων προβλημάτων χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου. Στην ενότητα 5.3, εξετάζουμε μία άλλη εφαρμογή του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange για να λάβουμε τη κατανομή της διάρκειας μιας περιόδου απασχόλησης σε μια υποκατηγορία μοντέλου ουράς αναμονής $K_m/G/1$. Τέλος, αριθμητικά παραδείγματα εξετάζονται στην ενότητα 5.4.

5.2 Η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας

Σε αυτή την ενότητα, προτείνουμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (1.26) για να εξάγουμε την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen με μεγέθη απαιτήσεων που έχουν μετασχηματισμό Laplace (5.1). Σε ένα πιο γενικό μοντέλο κινδύνου, οι Landriault και Willmot (2008) έδειξαν ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι της μορφής

$$\phi_{1,u}(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\rho_i u}, \tag{5.2}$$

όπου $\{\rho_i\}_{i=1}^{n}$ είναι οι n λύσεις στο δεξιό μισό του μιγαδικού πεδίου (δηλ. $\mathrm{Re}(\rho_i) \geq 0$) της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

$$\tilde{k}(\delta + c\rho_i)\tilde{p}(-\rho_i) = 1\,. \tag{5.3}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι λύσεις $\{\rho_i\}_{i=1}^{n}$ είναι διακριτές, δηλαδή $\rho_i \neq \rho_j$ για $i \neq j$. Για τα μεγέθη απαιτήσεων με μετασχηματισμό Laplace (5.1), οι συντελεστές $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ είναι η λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\beta_j}{\beta_j - \rho_i} = 1, \tag{5.4}$$

για $j = 1, \dots, n$. Χρησιμοποιώντας μια αναπαράσταση πίνακα, η (5.4) μπορεί να ξαναγραφεί ως $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ όπου $\mathbf{A} = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ με $\alpha_{ij} = \frac{1}{\beta_i - \rho_j}$, $\mathbf{B} = ((\beta_1)^{-1}, \dots, (\beta_n)^{-1})^{\mathrm{T}}$, και $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^{\mathrm{T}}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο $\mathbf{A}$ είναι ένας πίνακας Cauchy με ορίζουσα

$$\det \mathbf{A} = \frac{\prod_{k=2}^{n} \prod_{s=1}^{k-1} (\beta_k - \beta_s)(\rho_s - \rho_k)}{\prod_{s,k=1}^{n} (\beta_s - \rho_k)}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer για τη λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, έχουμε

$$C_i = \left\{\prod_{s=1}^{n} \frac{\beta_s - \rho_i}{\beta_s}\right\}\left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{\rho_k}{\rho_k - \rho_i}\right\}. \tag{5.5}$$

Δεδομένου ότι η $\phi_{1,\delta}(u)$ έχει πλέον εκφραστεί ως προς τις n λύσεις $\{\rho_i\}_{i=1}^{n}$ της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (5.3), προτείνουμε να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας (5.2) ως προς δ με τη βοήθεια του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange. Για το σκοπό αυτό, αρχικά ξαναγράφουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg (5.3) ως εξής

$$1 = \frac{\rho_i - \beta_i}{l_i(\rho_i)} \tag{5.6}$$

όπου

$$l_i(\rho_i) = f_i(\rho_i)\tilde{k}(\delta + c\rho_i)\,,$$

και

$$f_i(\rho_i) = -\alpha_i\beta_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq \iota}}^{n} \frac{\alpha_j\beta_j(\rho_i - \beta_i)}{\beta_j - \rho_i}\ . \tag{5.7}$$

Σημειώστε ότι η (5.6) είναι της μορφής (1.23) με $\alpha_i = \beta_i,\ z_i = \rho_i,\ \zeta_i - \alpha_i = 1$ και $g_i(\boldsymbol{z}) = l_i(z_i)$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι $l_i(\rho_i) \neq 0$ για $i = 1, \ldots, n$ το οποίο αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την εφαρμογή του θεωρήμστος επέκτασης Lagrange. Επίσης δεδομένου ότι η $g_i(\boldsymbol{z})$ είναι μόνο μια συναρτηση στο z_i για $i = 1, \ldots, n$, αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την απλουστευμένη εκδοχή (1.26) του θεωρήματος επέκτασης Lagrange. Κατά συνέπεια, αφήνοντας

$$h(\rho_1, \ldots, \rho_n; u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\rho_i u},$$

έπεται ότι

$$\phi_{1,\delta}(u) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} m_j!} \\ \times \frac{\partial^{m_1+\,\dots\,+m_n-n}}{\partial\rho_1^{m_1-1}\dots\partial\rho_n^{m_n-1}} \left\{ h^{(1,\dots,1)}(\rho_1,\dots,\rho_n;u) \prod_{i=1}^{n} \left(f_i(\rho_\iota)\tilde{k}(\delta + c\rho_i) \right)^{m_i} \right\} \Bigg|_{\rho_i=\beta_i} . \tag{5.8}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ορίζουμε $\frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} f'(t) \equiv f(t)$. Όταν $m_i = 0$, απλά αξιολογούμε τη $h(\dots,\rho_i,\dots)$ στο $\rho_i = \beta_i$. Για ένα δεδομένο διάνυσμα $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_n)$, ορίζουμε $\Lambda_{\mathbf{m}} = \{i \in \{1,2,\dots,n\} : m_i \neq 0\}$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας για τη διαφοροποίηση, η (5.8) γίνεται

$$\phi_{1,\delta}(u) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \dots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) \prod_{i\in\Lambda_m} \rho_{k_i,\delta}^{m_i} , \tag{5.9}$$

όπου

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{m}}(u) = \frac{\prod_{j\in\Lambda_m} \binom{m_j-1}{k_j}}{\prod_{j=1}^{n} m_j!} \frac{\partial^{\sum_{j=1}^{n}(m_j-k_j-1)}}{\partial\rho_1^{m_1-k_1-1}\dots\partial\rho_n^{m_n-k_n-1}} \left\{ h^{(1,\dots,1)}(\rho_1,\dots,\rho_n;u) \prod_{i=1}^{n} f_i(\rho_i)^{m_i} \right\} \Bigg|_{\rho_i=\beta_i} , \tag{5.10}$$

και

$$\begin{aligned} \rho_{k,\delta}^{m_i} &= \frac{\partial^{k_i}}{\partial\rho_i^{k_i}} \tilde{k}(\delta + c\rho_i)^{m_i} \Bigg|_{\rho_i=\beta_i} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{(-ct)^{k_i} e^{-c\beta_i t} k^{*m_i}(t)\} dt. \end{aligned}$$

Επισημαίνουμε ότι ο όρος $\mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)$ δεν εξαρτάται από το δ, πράγμα που σημαίνει ότι η αντιστροφή της (5.9) ως προς το δ αφορά μόνο τους όρους $\left\{\rho_{k_i,\delta}^{m_i}\right\}_{i=1}^{n}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\begin{aligned} \prod_{i\in\Lambda_m} \rho_{k_i,\delta}^{m_i} &= \prod_{i\in\Lambda_m} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{(-ct)^{k_i} e^{-c\beta_i t} k^{*m_i}(t)\} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t) dt , \end{aligned} \tag{5.11}$$

όπου $g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t)$ αντιστοιχεί στη συνέλιξη (στο t) των όρων $(-ct)^{k_i} e^{-c\beta_i t} k^{*m_i}(t)$ για $i \in \Lambda_m$.

Αντικαθιστώντας την (5.11) στην (5.9), προκύπτει ότι

$$\phi_{1,\delta}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \dots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{m}}(u) g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t) \right\} dt. \qquad (5.12)$$

Συμπερασματικά, η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων έχουν μετασχηματισμό Laplace της μορφής (5.1) δίνεται από τη σχέση

$$f_\tau(t|u) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \dots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t). \qquad (5.13)$$

Παρατήρηση 5.2.1 *Η ρητή έκφραση για την $\mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)$ περιλαμβάνει n μερικές παραγώγους και ως εκ τούτου, δίνει μια μακροσκελή έκφραση για δεδομένο $h(\rho_1, \dots, \rho_n; u)$ και $f_i(\rho_i)$ γενικά. Ωστόσο, μπορεί να αντιμετωπιστεί ως σταθερά για ένα δεδομένο αρχικό επίπεδο πλεονάσματος και επομένως δεν θα επηρεάσει τη δομική μορφή της πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας ως συνάρτηση του t. Για υψηλότερης τάξης παραγώγους, η $\mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)$ μπορεί να είναι δύσκολο να ληφθεί με ρητό τρόπο· σε τέτοιες περιπτώσεις η εκτίμηση της $\mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)$ μπορεί να γίνει μέσω αριθμητικών αλγορίθμων όπως η μεθοδολογία πεπερασμένων διαφορών (βλέπε, π.χ., Khan και Ohba (2003)).*

Παρατήρηση 5.2.2 *Όταν n = 1, τα μεγέθη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά και η προσέγγιση ανάγεται φυσικά στην εφαρμογή του θεωρήματος μονομεταβλητής επέκτασης Lagrange, το οποίο έχει αναλυθεί εκτενώς από τους Landriault et al. (2011). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι είναι συνεπή με τα αποτελέσματα των Borovkov και Dickson (2008).*

Παρατήρηση 5.2.3 *Η παρούσα ανάλυση μπορεί εύκολα να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει τον αριθμό των απαίτησεων εώς τη χρεοκοπία N_τ. Όντως, υπενθυμίζεται ότι*

$$\phi_{r,\delta}(u) = E\left[r^{N_\tau} e^{-\delta\tau} 1(\tau < \infty) | U_0 = u\right],$$

για $\delta \geq 0$ και $r \in (0,1]$ (βλέπε Εξ. (1.9)). Αποδεικνύεται ότι η μόνη διαφορά μεταξύ $\phi_{1,\delta}(u)$ και $\phi_{r,\delta}(u)$ προκύπτει στη γενικευμένη εξίσωση Lundberg (5.6) όπου το "1" αντικαθιστάται από τη πιθανογεννήτρια συνάρτηση της r. Ως εκ τούτου, η (5.9) μπορεί να γενικευτεί για $\phi_{r,\delta}(u)$ στο

$$\phi_{r,\delta}(u) = \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} r^{m_1+\cdots+m_n} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \cdots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) \prod_{i\in\Lambda_m} \rho_{k_i,\delta}^{m_i}.$$

Αμέσως συμπεραίνει κανείς ότι η από κοινού γενικευμένη πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας (στο t) και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία (στο l) δίνεται από

$$f_{\tau,N_\tau}(t,l|u) = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_n=l \\ m_i\geq 0}} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \cdots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t)\,, \tag{5.14}$$

για $t \geq 0$ και $l = 1, 2, \dots$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι μπορεί να βρεθεί μια προσιτή έκφραση για τη $g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t)$ όταν η πυκνότητα k είναι συγκεκριμένης μορφής. Εξετάζουμε την κλάση των κατανομών Erlang, δηλαδή μια πυκνότητα k με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{k}(s) = \left(\frac{\theta}{\theta+s}\right)^l,$$

για $\theta > 0$ και l είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Με πράξεις ρουτίνας, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-c\beta_i t}(ct)^{k_i} k^{*m_i}(t) &= e^{-c\beta_i t}(ct)^{k_i} \frac{(\theta t)^{m_i l-1}\theta e^{-\theta t}}{\Gamma(m_i l)} \\ &= \frac{\Gamma(k_i+m_i l)c^{k_i}\theta^{m_i l}}{\Gamma(m_i l)(c\beta_i+\theta)^{k_i+m_i l}} \tau_{k_i+m_i l, c\beta_i+\theta}(t), \end{aligned}$$

όπου $\tau_{n,\beta}(t)$ είναι η πυκνότητα Erlang με μέση τιμή $n\beta^{-1}$ και διακύμανση $n\beta^{-2}$. Ως εκ τούτου, ο μετασχηματισμός Laplace της $g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t)$ μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\tilde{g}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(s) = \varrho \prod_{i\in\Lambda_m} \left(\frac{c\beta_i+\theta}{c\beta_i+\theta+s}\right)^{k_i+m_i l}, \tag{5.15}$$

όπου

$$\varrho = \prod_{i\in\Lambda_m} (-1)^{k_i} \frac{\Gamma(k_i + m_i l) c^{k_i} \theta^{m_i l}}{\Gamma(m_i l)(c\beta_i + \theta)^{k_i + m_i l}}.$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace της μορφής (5.15) έχουν μελετηθεί εκτενώς (βλέπε, π.χ., Willmot and Woo (2007) και Willmot and Lin (2011)). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $m_i \geq 1$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $\beta_i < \beta_n$ για κάθε $i < n$ (για την περίπτωση που κάποιο $m_i = 0$, η μέθοδος εξακολουθεί να ισχύει). Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Willmot και Woo (2007, ενότητα 2.3), προκύπτει ότι

$$g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t) = \varrho \sum_{j=1}^{\infty} q_j \tau_{j, c\beta_n + \theta}(t),$$

όπου $q_j = 0$ για $j < M = \sum_{i=1}^{n} (k_i + m_i l)$, και

$$q_M = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{c\beta_i + \theta}{c\beta_n + \theta} \right)^{k_i + m_i l}.$$

Για $j > M$, το q_j μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά μέσω

$$q_j = \frac{1}{j - M} \sum_{p=1}^{j-M} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (k_i + m_i l) \left(1 - \frac{c\beta_i + \theta}{c\beta_n + \theta} \right)^{p} \right\} q_{j-p}.$$

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας μέσω του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη γενικευμένη εξίσωση Lundberg (5.3) για να είναι της μορφής (1.23) με συγκεκριμένο $g_i(\mathbf{a}) \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Όπως φάνηκε προηγουμένως, αυτό ικανοποιείται όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι ένας συνδιασμός εκθετικών. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται και για άλλες κατανομές μεγέθους απαίτησης (όπως οι Erlangs και μείγματα/συνδυασμοί Erlangs με κατάλληλα επιλεγμένο **a**), αλλά η επακόλουθη αντιστροφή του αναπτύγματος Lagrange ως προς το δ αναμένεται να είναι δύσκολη. Αυτό είναι λιγότερο ανησυχητικό, δεδομένου ότι η κλάση των συνδυασμών εκθετικών είναι πυκνή στο σύνολο των θετικών συνεχών κατανομών.

Παρατήρηση 5.2.4 *Με μια παρόμοια χρήση του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange, θα μπορούσε κανείς να εξάγει μια έκφραση κλειστής μορφής για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου SA όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι υποτίθεται ότι είναι* *συνδυασμός n εκθεετικών και τα μεγέθη των απαιτήσεων έχουν αυθαίρετη κατανομή. Ωστόσο, επισημαίνουμε ότι μια τέτοια έκφραση αναμένεται να είναι ιδιαίτερα μακροσκελής, δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας έχει μια πιο περίπλοκη μορφή σε αυτό το πλαίσιο (βλέπε, π.χ., Li και Garrido (2005)).*

Στην επόμενη ενότητα, θα εξετάσουμε μια άλλη εφαρμογή του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange στις εφαρμοσμένες πιθανότητες, πιο συγκεκριμένα την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της διάρκειας μιας περιόδου απασχόλησης σε ένα σύστημα ουράς αναμονής.

5.3 Η διάρκεια μιας περιόδου απασχόλησης σε ένα σύστημα ουράς αναμονής

Μέχρι το σύστημα να αδειάσει, η ανέλιξη του φόρτου εργασίας $\{D_t, t \geq 0\}$ του συστήματος ουράς αναμονής *G/G/*1 (βλέπε, π.χ., Cohen (1982) και Kleinrock (1975)) ορίζεται ως εξής

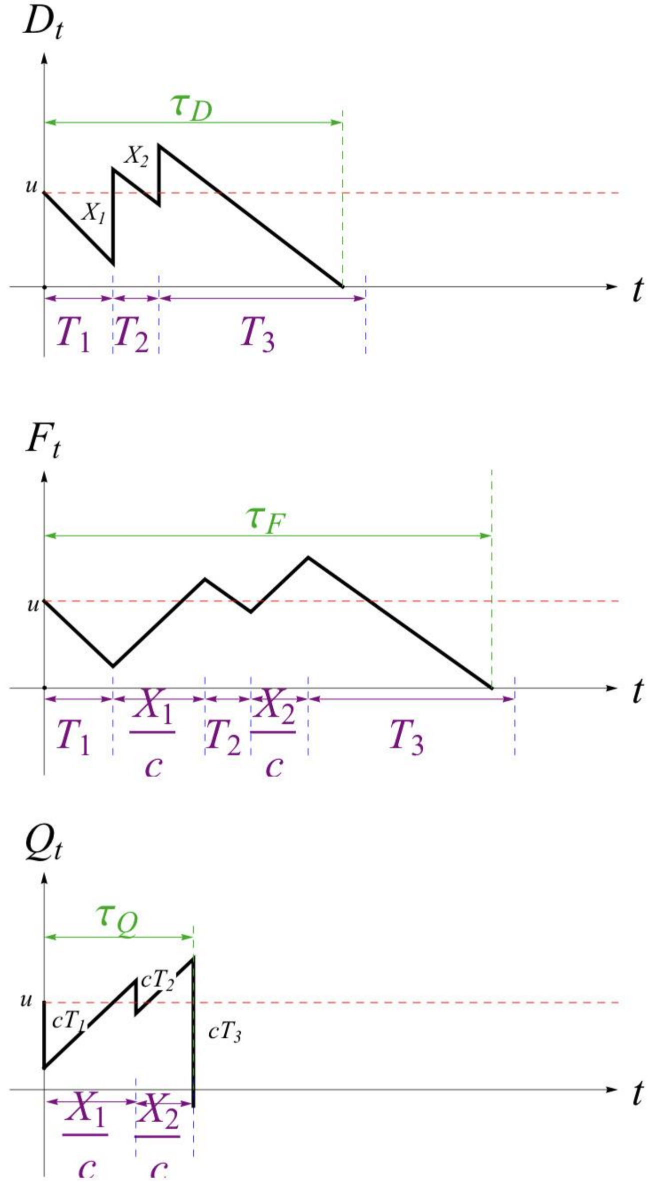
$$D_t = u - ct + S_t, \tag{5.16}$$

όπου $u > 0$ είναι ο φόρτος εργασίας στο χρόνο 0, $c > 0$ είναι η ταχύτητα εξυπηρέτησης και $\{S_t, t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανανεωτική ανέλιξη που ορίζεται όπως στην (1.2). Εδώ, η S_t αντιπροσωπεύει το συνολικό φόρτο εργασίας όλων των αφίξεων πελατών στο $(0, t]$. Σε αυτό το πλαίσιο, οι τυχαίες μεταβλητές $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ αντιπροσωπεύουν τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων πελατών στην ουρά ενώ, οι $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι οι σχετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης. Έστω $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : D_t = 0\}$ είναι η διάρκεια απασχόλησης με αρχικό φόρτος εργασίας u. Ορίστε το μετασχηματισμό Laplace ως

$$\Phi_\delta(u) \equiv E\left[e^{-\delta\tau_D} 1(\tau_D < \infty) | D_0 = u\right].$$

Επισημαίνουμε ότι το τ_D μπορεί να ερμηνευθεί ως ο χρόνος χρεοκοπίας στο μοντέλο διπλού κινδύνου στη θεωρία χρεοκοπίας (βλέπε, π.χ., Avanzi et al. (2007) και Takács (1967)).

Σχήμα 5.1: Σχέσεις των D_t, F_t και Q_t



Ο πρώτος μας στόχος είναι να λάβουμε τον μετασχηματισμό Laplace του μήκους της περιόδου απασχόλησης τ_D. Προτείνουμε να το κάνουμε αυτό συνδέοντας το σύστημα αναμονής (5.16) με το αντίστοιχο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen μέσω μιας διαδικασίας ρευστής ροής (βλέπε, π.χ., Asmussen (1995)). Για την ανέλιξη $\{D_t, t \geq 0\}$, η αντίστοιχη ανέλιξη ρευστής ροής $\{F_t, t \geq 0\}$ κατασκευάζεται αντικαθιστώντας τα ανοδικά άλματα του φόρτου εργασίας με περιόδους ανόδου της ρευστής ροής. Πιο συγκεκριμένα, ένα άλμα φόρτου εργασίας μεγέθους x αντικαθίσταται από μια περίοδο ανόδου της ρευστής ροής με ρυθμό c σε μια περίοδο μήκους

x/c (βλέπε Σχήμα 5.1). Έστω $\tau_F = \inf\{t \geq 0: F_t < 0\}$ είναι ο πρώτος χρόνος μετάβασης στο 0 της ροής ρευστού $\{F_t, t \geq 0\}$. Με τη ροή ρευστού $\{F_t, t \geq 0\}$ συνδέεται το μοντέλο κινδύνου $\{Q_t, t \geq 0\}$ που κατασκευάζεται με την αντικατάσταση των προς τα κάτω γραμμικών διαδρομών της ροής ρευστού με προς τα κάτω άλματα κατάλληλου μεγέθους (βλ. π.χ. Ramaswami (2006)). Στην ανέλιξη κινδύνου $\{Q_t, t \geq 0\}$, οι $\{cT_i\}_{i=1}^{\infty}$ αντιστοιχούν στα μεγέθη των απαιτήσεων και οι $\{X_i/c\}_{i=1}^{\infty}$ είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι. Το ασφάλιστρο είναι c και η πρώτη απαίτηση cT_1 θεωρείται ότι εμφανίζεται τη χρονική στιγμή 0. Έστω $\tau_Q = \inf\{t \geq 0: Q_t < 0\}$ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας για την ανέλιξη $\{Q_t, t \geq 0\}$. Κατασκευαστηκά, ο χρόνος πρώτης διέλευσης τ_D της ανέλιξης αναμονής $\{D_t, t \geq 0\}$ υπερτερεί του χρόνου διέλευσης τ_Q της ανέλιξης κινδύνου $\{Q_t, t \geq 0\}$ κατά u/c. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο χρόνος καθόδου της ανέλιξης ροής ρευστού (ή αλλιώς τ_D) υπερβαίνει το χρόνο ανόδου της (ή αλλιώς τ_Q) μέχρι το χρόνο πρώτης διέλευσης τ_F κατά ένα συντελεστή u/c. Δεδομένου ότι μία απαίτηση μεγέθους cT_1 εμφανίζεται τη χρονική στιγμή 0, έχουμε

$$\Phi_\delta(u) = E\left[E\left[e^{-\delta\left(\tau_Q + \frac{u}{c}\right)} 1(\tau_Q < \infty) | Q_0 = u - cT_1\right]\right].$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της ενότητας 5.2, υποθέτουμε ότι οι τ.μ. $\{cT_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθούν ένα συνδυασμό n εκθετικών κατανομών με μετασχηματισμό Laplace (5.1). Επίσης, οι τ.μ. $\{X_i/c\}_{i=1}^{\infty}$ υποθέτουμε ότι έχουν πυκνότητα k. Δεδομένου ότι οι συνδυασμοί εκθετικών είναι μια υποκατηγορία της οικογένειας κατανομών K_m, το σύστημα αναμονής που μας ενδιαφέρει είναι μια ειδική περίπτωση της $K_m/G/1$ (βλέπε Kleinrock (1975)). Εξετάζοντας αν η πρώτη απαίτηση θα προκαλέσει χρεοκοπία τη στιγμή 0 ή όχι, συμπεραίνει κανείς

$$\Phi_\delta(u) = e^{-\delta\frac{u}{c}}\left(\int_0^u E\left[e^{-\delta\tau_Q} 1\left(\tau_Q < \infty\right) | Q_{0^+} = u - y\right] p(y)dy + \int_u^\infty p(y)dy\right),$$

όπου Q_{0^+} είναι το αρχικό επίπεδο πλεονάσματος μετά την πληρωμή της απαίτησης τη χρονική στιγμή 0. Σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$E\left[e^{-\delta\tau_Q} 1\left(\tau_Q < \infty\right) | Q_{0^+} = u\right] = \Phi_{1,\delta}(u),$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$\Phi_{\delta}(u) = e^{-\delta\frac{u}{c}}\left(\int_0^u \Phi_{1,\delta}(u-y)p(y)dy + \int_u^{\infty} p(y)dy\right). \tag{5.17}$$

Αντικαθιστώντας την (5.2) στην (5.17), ακολουθούμενη από τη χρήση της (5.1), διαπιστώνεται ότι

$$\begin{aligned}
\Phi_{\delta}(u) &= e^{-\delta\frac{u}{c}}\left\{\int_0^u \left(\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\rho_i(u-y)}\right)p(y)dy + \bar{P}(u)\right\} \\
&= e^{-\delta\frac{u}{c}}\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j \int_0^u e^{-\rho_i(u-y)}e^{-\beta_j y}dy + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{-\beta_j u}\right\} \\
&= e^{-\delta\frac{u}{c}}\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j \frac{e^{-\rho_i u} - e^{-\beta_j u}}{\beta_j - \rho_i} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{-\beta_j u}\right\} \\
&= e^{-\delta\frac{u}{c}}\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\rho_i u}\tilde{p}(-\rho_i) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{-\beta_j u} \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\beta_j}{\beta_j - \rho_i} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{-\beta_j u}\right\}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.4), η (5.18) γίνεται

$$\Phi_{\delta}(u) = e^{-\delta\frac{u}{c}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i e^{-\rho_i u} \tag{5.19}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\eta_i &= C_i \tilde{p}(-\rho_i) \\
&= \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \frac{\beta_s - \rho_i}{\beta_s}\right\}\left\{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\rho_k}{\rho_k - \rho_i}\right\}.
\end{aligned}$$

Και εδώ, μια εφαρμογή του θεωρήματος πολυμεταβλητής επέκτασης Lagrange με

$$h^*(\rho_1, \dots, \rho_n; u) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e^{-\rho_i u},$$

δίνει

$$\begin{aligned}
\Phi_{\delta}(u) &= e^{-\frac{\delta}{c}u} h^*(\rho_1, \dots, \rho_n; u) \\
&= e^{-\frac{\delta}{c}u} \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)} \cdots \sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)} \mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) \prod_{i\in\Lambda_m} \rho_{k_i,\delta}^{m_i}.
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το σύμβολο $*$ προστίθεται στις συναρτήσεις h και $\mathcal{X}$ για να τονιστεί ότι το $\mathcal{X}$ είναι όπως ορίζεται στην (5.10), αλλά με τη συνάρτηση h να αντικαθίσταται από h^*. Χρησιμοποιώντας την (5.11), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\Phi_\delta(u) = \\
&= e^{-\frac{\delta}{c}u}\bar{P}(u) + e^{-\frac{\delta}{c}u}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\sum_{\substack{m_1,\dots,m_n=0\\ m_1+\cdots+m_n\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)}\cdots\sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)}\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(t)\right\}dt \\
&= e^{-\frac{\delta}{c}u}\bar{P}(u) + \int_{\frac{u}{c}}^\infty e^{-\delta t}\left\{\sum_{\substack{m_1,\dots,m_n=0\\ m_1+\cdots+m_n\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)}\cdots\sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)}\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}\left(t-\frac{u}{c}\right)\right\}dt
\end{aligned}$$

Συμπεραίνεται ότι τ_D είναι μια μικτή τ.μ. με σημείο μάζας στο u/c μεγέθους $\bar{P}(u)$ που σχετίζεται με την άφιξη κανενός πελάτη (δηλ. $N_{\tau_D}=0$) μέχρι να ολοκληρωθεί ο αρχικός φόρτος εργασίας u. Με τουλάχιστον μία άφιξη πελάτη πριν από τ_D, η διάρκεια της περιόδου απασχόλησης με αρχική φόρτο εργασίας u έχει πυκνότητα που δίνεται από

$$f_{\tau_D}(t|u) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_n=0\\ m_1+\cdots+m_n\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{k_1=0}^{\max(m_1-1,0)}\cdots\sum_{k_n=0}^{\max(m_n-1,0)}\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)g_{\mathbf{k},\mathbf{m}}\left(t-\frac{u}{c}\right),\qquad t>\frac{u}{c}. \tag{5.20}$$

Σημειώστε ότι ο συνδυασμός των εξισώσεων (5.12) και (5.17) οδηγεί στην ακόλουθη εναλλακτική έκφραση για το $\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$:

$$\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \int_0^u \mathcal{X}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u-y)p(y)dy.$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με το παράδειγμα της γενικευμένης Erlang-2 για το οποίο προσδιορίζεται μια ρητή έκφραση για το $\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$.

Παράδειγμα 5.3.1 *Υποθέτουμε ότι η* $\{cT_i\}_{i=1}^{\infty}$ *ακολουθεί τη γενικευμένη Erlang-2 κατανομή με μετασχηματισμό Laplace* $\tilde{p}(s) = \beta_1\beta_2/\{(\beta_1 + s)(\beta_2 + s)\}$. *Στην περίπτωση αυτή, η (5.19) ανάγεται σε*

$$\Phi_\delta(u) = e^{-\frac{\delta}{c}u}\left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}e^{-\rho_1 u} + \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}e^{-\rho_2 u}\right),$$

και η (5.7) γίνεται

$$f_i(\rho_i) = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_{3-i} - \rho_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Για τον προσδιορισμό του $\mathcal{X}_{\mathbf{k,m}}^{*}(u)$, *τα ακόλουθα δύο πρώτα αποτελέσματα αποδεικνύονται χρήσιμα:*

(α) για $k \leq m - 1$, *η* $(m - k - 1)$*-οστή παράγωγος του* $(\rho + s)^{-2}(\beta_1 - \rho)^{-m}$ *που εκτιμάται στο* $\rho = \beta_2$ *δίνεται από*

$$\frac{d^{m-k-1}}{d\rho^{m-k-1}}\left\{\frac{1}{(\rho + s)^2(\beta_1 - \rho)^m}\right\}\bigg|_{\rho=\beta_2} = \sum_{j=0}^{m-k-1}\vartheta_{k,m}(j; \beta_1, \beta_2)\frac{1}{(\beta_2 + s)^{j+2}}, \tag{5.21}$$

όπου

$$\vartheta_{k,m}(j; \beta_1, \beta_2) = \binom{m - k - 1}{j}\frac{(-1)^j(j + 1)!\,(2m - k - j - 2)!}{(m - 1)!\,(\beta_1 - \beta_2)^{2m-k-j-1}}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον κανόνα της αλυσίδας του Leibniz.

(β) Κάνοντας χρήση μερικών κλασμάτων, ο γενικευμένος μετασχηματισμός Erlang-$(n_1 + n_2)$ *μπορεί να εκφραστεί ως εξής*

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right)^{n_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^{n_2} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{w_{i,j}(\beta_1, \beta_2)}{(\beta_i + s)^j}, \tag{5.22}$$

όπου

$$w_{i,j}(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1)^{n_1}(\beta_2)^{n_2}\binom{n_1 + n_2 - j - 1}{n_i - j}\frac{(-1)^{n_i-j}}{(\beta_i - \beta_{3-i})^{n_1+n_2-j}}$$

για $i = 1,2$ *και* $j = 1, \dots, n_i$ *(βλέπε, π.χ., Li και Garrido (2005, σ. 841)). Αντιστρέφοντας την (5.22) προκύπτει*

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^{n_2} = \int_0^\infty e^{-su} z_{n_1,n_2}(u; \beta_1, \beta_2) du, \tag{5.23}$$

όπου

$$z_{n_1,n_2}(u; \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{w_{i,j}(\beta_1, \beta_2)}{(\beta_i)^j} \tau_{j,\beta_i}(u).$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε το $\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u)$ *σε τέσσερις περιπτώσεις:*

(i) *για* $\mathbf{m}(0,0)$*:*

$$\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) = h^*(\beta_1, \beta_2; u) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_1 u} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 u} = \bar{P}(u).$$

(ii) *για* $m_1 = 0$ *και* $m_2 \geq 1$*: η (5.10) γίνεται*

$$\mathcal{X}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(u) = \frac{\binom{m_2-1}{k_2}}{m_2!} \frac{\partial^{m_2-k_2-1}}{\partial \rho_2^{m_2-k_2-1}} \left\{ h^{*(0,1)}(\beta_1, \rho_2; u) \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \rho_2}\right)^{m_2} \right\} \bigg|_{\rho_2 = \beta_2} \tag{5.24}$$

με

$$\tilde{h}^{*(0,1)}(\beta_1, \rho_2; s) = \frac{-\beta_1}{(\beta_1 + s)(\rho_2 + s)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.21), ο μετασχηματισμός Laplace της (5.24) δίνει

$$\tilde{\mathcal{X}}^*_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(s) = \sum_{j=0}^{m_2-k_2-1} \gamma_{k_2,m_2}(j; \beta_1, \beta_2) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^{j+2}, \tag{5.25}$$

όπου

$$\gamma_{k_2,m_2}(j; \beta_1, \beta_2) = -\frac{\binom{m_2-1}{k_2} (\beta_1 \beta_2)^{m_2}}{m_2! \, (\beta_2)^{j+2}} \vartheta_{k_2,m_2}(j; \beta_1, \beta_2).$$

Χρησιμοποιώντας την (5.23) με $n_1 = 1$ *και* $n_2 = j + 2$*, καταλήγουμε αμέσως στο εξής αποτέλεσμα*

$$\mathcal{X}^*_{\mathbf{k,m}}(u) = \sum_{j=0}^{m_2-k_2-1} \gamma_{k_2,m_2}(j;\beta_1,\beta_2) z_{1,j+2}(u;\beta_1,\beta_2).$$

(iii) *για $m_1 \geq 1$ και $m_2 = 0$: με συμμετρία στο (ii), βρίσκουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^*_{\mathbf{k,m}}(u) &= \frac{\binom{m_1-1}{k_1}}{m_1!} \frac{\partial^{m_1-k_1-1}}{\partial \rho_1^{m_1-k_1-1}} \left\{ h^{*(1,0)}(\rho_1,\beta_2;u) \left(\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2-\rho_1}\right)^{m_1} \right\}\Bigg|_{\rho_1=\beta_1} \\ &= \sum_{j=0}^{m_1-k_1-1} \gamma_{k_1,m_1}(j;\beta_2,\beta_1) z_{j+2,1}(u;\beta_1,\beta_2).\end{aligned}$$

(iv) *για $m_1 \geq 1$ και $m_2 \geq 1$: δεδομένου ότι*

$$\tilde{h}^{*(1,1)}(\rho_1,\rho_2;s) = \frac{s}{(\rho_1+s)^2(\rho_2+s)^2},$$

και χρησιμοποιώντας την (5.21) δύο φορές, ο μετασχηματισμός Laplace του $\mathcal{X}^*_{\mathbf{k,m}}(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{X}}^*_{\mathbf{k,m}}(s) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{2} \frac{\binom{m_i-1}{k_i}}{m_i!}\right) \frac{\partial^{m_1-k_1-1+m_2-k_2-1}}{\partial\rho_1^{m_1-k_1-1}\partial\rho_2^{m_2-k_2-1}} \left\{ \tilde{h}^{*(1,1)}(\rho_1,\rho_2;s) \frac{(\beta_1\beta_2)^{m_1+m_2}}{(\beta_2-\rho_1)^{m_1}(\beta_1-\rho_2)^{m_2}} \right\}\Bigg|_{\rho_i=\beta_i} \\ &= \sum_{j_1=0}^{m_1-k_1-1} \sum_{j_2=0}^{m_2-k_2-1} \left(\prod_{i=1}^{2} \gamma_{k_i,m_i}(j_i;\beta_{3-i},\beta_i)\right) s \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+s}\right)^{2+j_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+s}\right)^{2+j_2}. \qquad (5.26)\end{aligned}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι

$$\begin{aligned}&s\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+s}\right)^{n_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+s}\right)^{n_2} \\ &= \beta_1 \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+s}\right)^{n_1-1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+s}\right)^{n_2} - \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+s}\right)^{n_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+s}\right)^{n_2} \right\},\end{aligned}$$

η αντιστροφή της (5.26) με τη βοήθεια της (5.23) έχει ως αποτέλεσμα

$$\mathcal{X}^*_{\mathbf{k,m}}(u) = \sum_{j_1=0}^{m_1-k_1-1} \sum_{j_2=0}^{m_2-k_2-1} \left(\prod_{i=1}^{2} \gamma_{k_i,m_i}(j_i;\beta_{3-i},\beta_i)\right) \varsigma_{2+j_1,2+j_2}(u;\beta_1,\beta_2),$$

όπου

$$\varsigma_{n_1,n_2}(u;\beta_1,\beta_2) = \beta_1\{z_{n_1-1,n_2}(u;\beta_1,\beta_2) - z_{n_1,n_2}(u;\beta_1,\beta_2)\}\,.$$

5.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα παρέχουμε αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Στο 1ο παράδειγμα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου Α για διαφορετικούς συνδυασμούς έντασης της ανέλιξης Poisson (λ) και έντασης ασφαλίστρου (c) και στο τέλος θα τις συγκρίνουμε.

Παράδειγμα 1ο

Εστω ένα χαρτοφυλάκιο Α του οποιού οι απαιτήσεις εκφράζονται μέσω μίας μείξης εκθετικών κατανομών. θα βρούμε τις ποσότητες που χρειαζόμαστε μέχρι να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συγκεκριμένα, για το χαρτοφυλάκιο δίνεται ότι το ύψος των ατομικών απαιτήσεων εκφράζεται μέσω μίας μείξης εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}$$

με παραμέτρους $\beta_1 = 5,\ \beta_2 = 3$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει ότι

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}dx = 1$$

Για τη μέση τιμή έχουμε

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty x\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x5e^{-5x} + x3e^{-3x}\,dx = \frac{4}{15} = \mu_{1,X}$$

Υπολογίζουμε την δεύτερη και τρίτη ροπή

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx = \frac{34}{225}$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^3\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx = \frac{152}{1125}$$

Η διακύμανση των απαιτήσεων θα εναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx - \left[\int_0^\infty x\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx\right]^2 = 0{,}08$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την σχέση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{5e^{-5t}}{2} + \frac{3e^{-3t}}{2}\right)dt = 1 - \frac{e^{-5x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}$$

Μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει άμεσα η συνάρτηση δεξιάς ουρας ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{e^{-5x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων X_i θα έχουμε

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx}\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right)dx = \frac{15 - 4t}{15 - 8t + t^2}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται εξ ορισμού από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας. Επομένως, έχουμε

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}}\int_0^x \bar{F}(t)\,dt = \frac{15}{4}\int_0^x \left(\frac{e^{-5x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}\right)dt = \frac{1}{8}(8 - 3e^{-5x} - 5e^{-3x})$$

Η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας θα είναι

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = \frac{1}{8}e^{-5x}(3 + 5e^{2x})$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_\varepsilon(x) = H_X'(x) = \frac{1}{8}(15e^{-5x} + 15e^{-3x})$$

1) Στη πρώτη περίπτωση για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι $\lambda = 2$ και $c = 3$.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ_X, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_X = \frac{c}{\lambda\mu_{1,X}} - 1 = 4{,}625$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογιστεί ως λύση της εξίσωσης του Lundberg,

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_X)\mu_{1,X} r.$$

Από την οποία βρίσκομαι ότι

$$R_X = 2{,}61257$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι

$$\psi_1(0) = \frac{1}{1+\theta_X} = \frac{1}{1+4{,}625} = 0{,}17778$$

Για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς ισορροπίας $1 - H_X(s)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωττών υψών $f_\varepsilon(s)$ και μέσου αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_X}}(s) = \frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}$$

$$\hat{f}_e(s) = \frac{1}{8}\left(\frac{15}{3+s} + \frac{15}{5+s}\right)$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_1}(s) = \widehat{\psi_1}(s) = \frac{\frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}}{5{,}625 + \frac{1}{8}\left(-\frac{15}{3+s} - \frac{15}{5+s}\right)}.$$

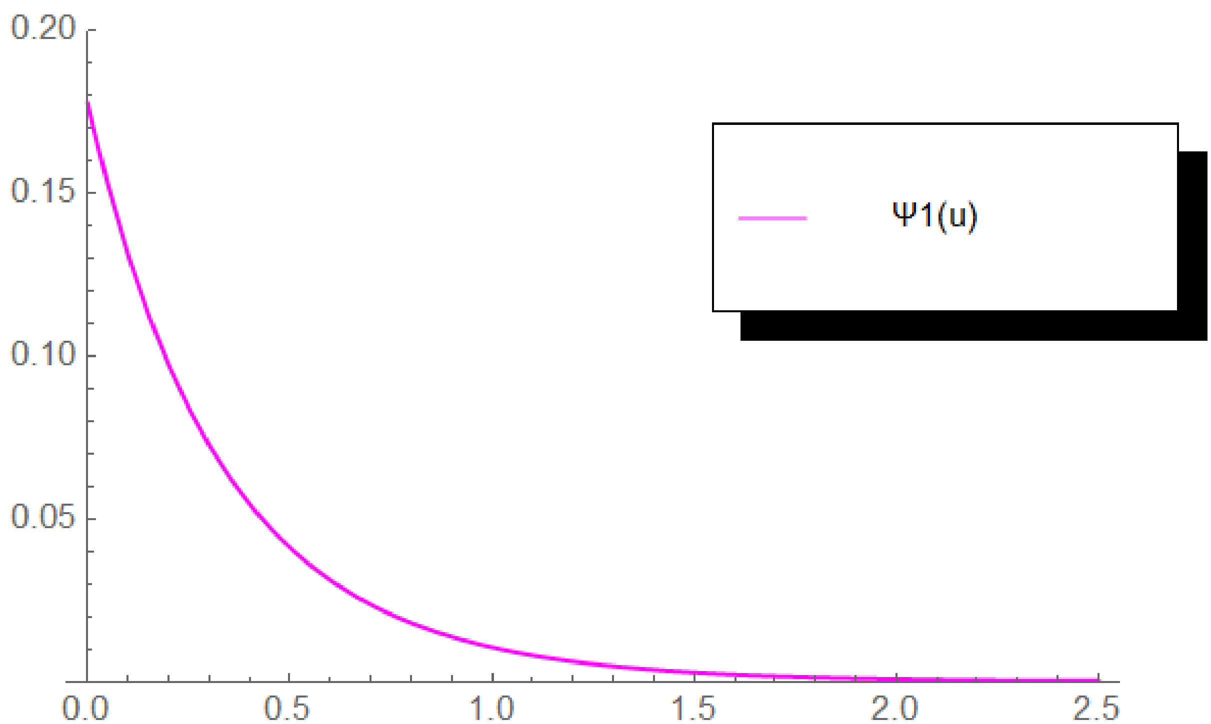
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να καταλήξουμε στην ποθανότητα χρεοκοπίας.

$$L_{\psi_1}(s)^{-1}(s) = 0{,}0397e^{-4{,}72076u} + 0{,}13808e^{-2{,}61257u}\,.$$

Τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A θα είναι ίση με

$$\psi_1(u) = 0{,}0397e^{-4{,}72076u} + 0{,}13808e^{-2{,}61257u}\,.$$

Σχήμα 5.2: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου A όταν λ = 2 και c = 3



2) Για τη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\lambda_2 = 5$ και $c_2 = 3$.

Για το περιθώριο ασφαλείας θ_2 έχουμε

$$\theta_2 = \frac{c_2}{\lambda_2 \mu_{1,X}} - 1 = 1{,}25\,.$$

Υπολογίζουμε το συντελεστή προσαρμογής R λύνοντας την εξίσωση του Lundberg.

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_2)\mu_{1,X} r.$$

Από την οποία βρίσκομαι ότι

$$R_2 = 1.86496$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι

$$\psi_2(0) = \frac{1}{1 + \theta_2} = \frac{1}{1 + 1{,}25} = 0{,}4444$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_2}(s) = \widehat{\psi_2}(s) = \frac{\frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}}{2{,}25 + \frac{1}{8}\left(-\frac{15}{3+s} - \frac{15}{5+s}\right)}.$$

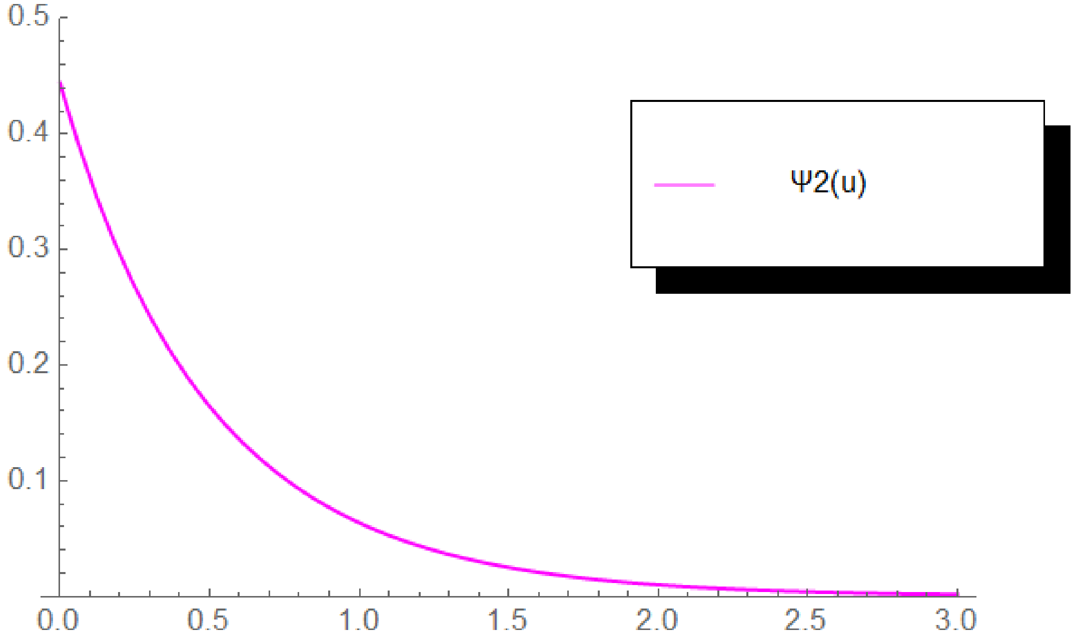
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να καταλήξουμε στην ποθανότητα χρεοκοπίας.

$$L_{\psi_2}(s)^{-1} = 0.03728 e^{-4.46837u} + 0.40716 e^{-1.86496u}.$$

Τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A για $\lambda_2 = 5$ και $c_2 = 3$ θα είναι ίση με

$$\psi_2(u) = 0.03728 e^{-4.46837u} + 0.40716 e^{-1.86496u}$$

Σχήμα 5.3: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α όταν $\lambda_2 = 5$ και $c_2 = 3$



3) Για τη τελευταία περίπτωση έχουμε $\lambda_2 = 9$ και $c_2 = 7$.

Το περιθώριο ασφαλείας θ_3 είναι

$$\theta_3 = \frac{c_3}{\lambda_3 \mu_{1,X}} - 1 = 1.9167$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R προκύπτει ως λύση της εξίσωσης του Lundberg,

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_3)\mu_{1,X} r.$$

Από την οποία βρίσκομαι ότι

$$R_3 = 2.16833$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι

$$\psi_3(0) = \frac{1}{1 + \theta_3} = \frac{1}{1 + 1.9167} = 0{,}3429$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_3}(s) = \widehat{\psi_3}(s) = \frac{\frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}}{2.9167 + \frac{1}{8}\left(-\frac{15}{3+s} - \frac{15}{5+s}\right)}.$$

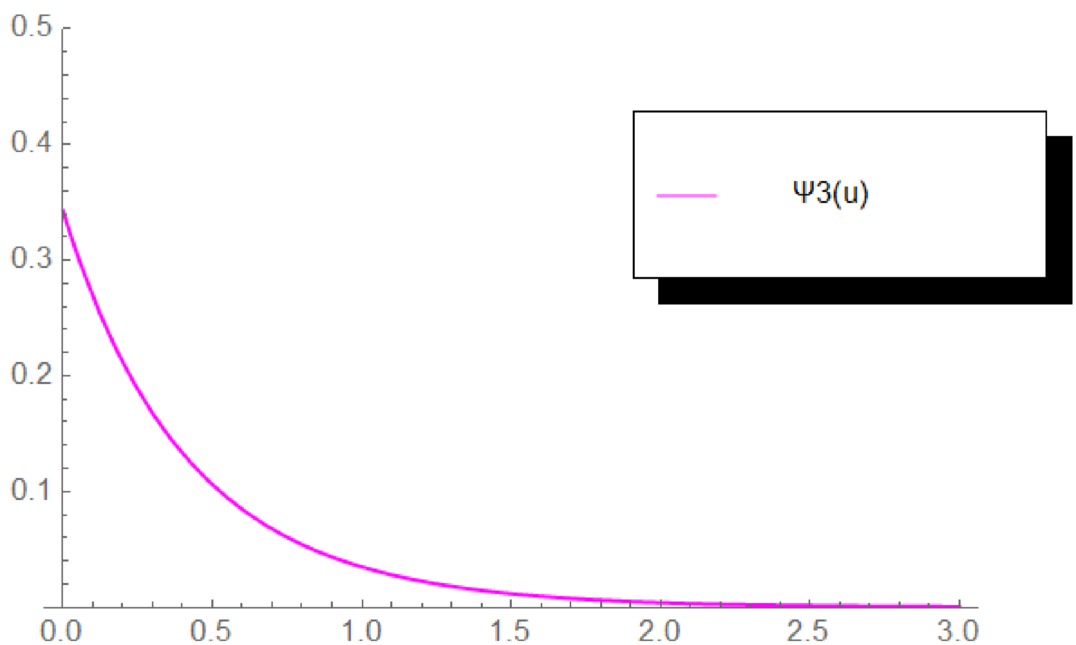
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να καταλήξουμε στην ποθανότητα χρεοκοπίας.

$$L_{\psi_3}(s)^{-1} = 0.0427e^{-4.54595u} + 0.30018e^{-2.16833u}\,.$$

Τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α για $\lambda_3 = 9$ και $c_3 = 7$ θα είναι ίση με

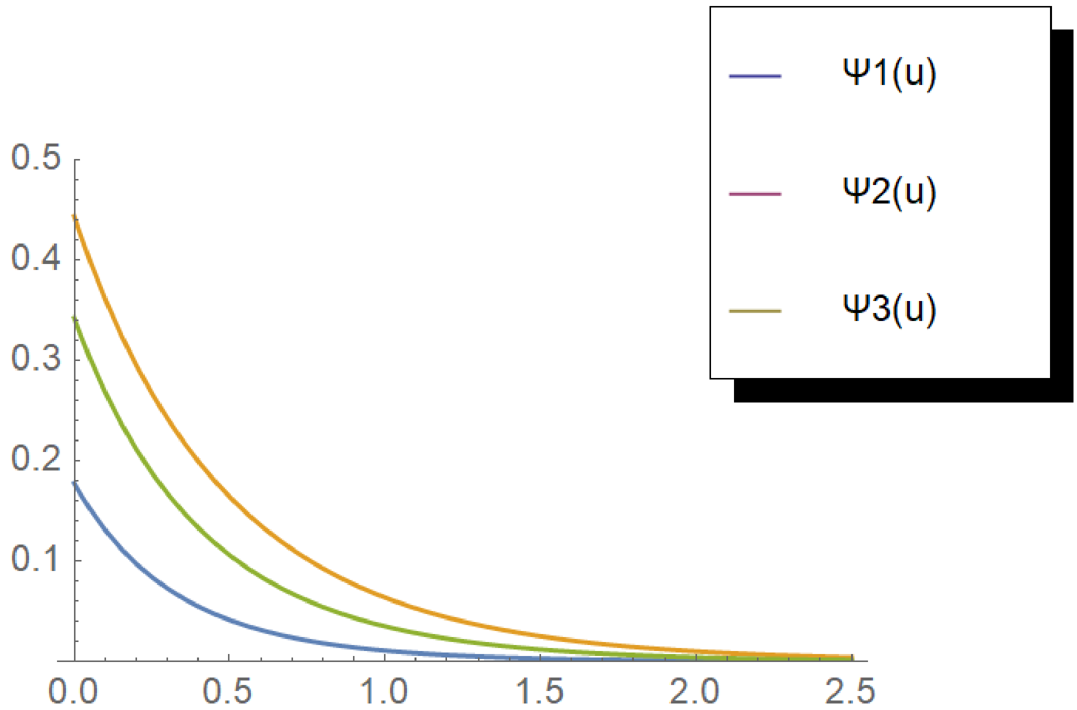
$$\psi_3(u) = 0.0427e^{-4.54595u} + 0.30018e^{-2.16833u}\,.$$

Σχήμα 5.4: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α όταν $\lambda_3 = 9$ και $c_3 = 7$



Για τη πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε το παρακάτω σχήμα 5.5 από το οποίο φαίνονται οι τρεις πιθανότητες χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α για τους άνω συνδυασμούς των c και λ. Εύκολα παρατηρείται ότι η $\psi_2(u)$ είναι η μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ η $\psi_1(u)$ είναι η μικρότερη. Επίσης παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας δεν έχουν σημείο τομής.

Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A



Στο τέλος ακολουθεί ο πίνακας τιμών για τις τρεις πιθανότητες χρεοκοπίας, όπου κι εδώ παρατηρούμε ότι η $\psi_2(u)$ είναι μεγαλύτερη πιθανότητας χρεοκοπίας και η $\psi_1(u)$ είναι η μικρότερη

Πίνακας 5.1: Πίνακας τιμών πιθανοτήτων χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A

u	*Ψ1(u)*	*Ψ2(u)*	*Ψ3(u)*
0	0,17778	0,44444	0,34288
0,2	0,09733	0,295652	0,211757
0,4	0,05457	0,199344	0,133027
0,6	0,03113	0,135538	0,084519
0,8	0,01799	0,092627	0,054094
1	0,01048	0,063498	0,034784
1,2	0,00614	0,043609	0,022433
1,4	0,00362	0,029984	0,014495

Στο 2ο παράδειγμα θα εξετάσουμε δύο χαρτοφυλάκια των οποίων οι αποζημιώσεις ακολουθούν τη κατανομή Erlang(n, λ).

Παράδειγμα 2ο

Εστω ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο Ζ του οποιού οι αποζημιώσεις X_i ακολουθούν τη κατανομή Erlang(n, λ), όπου $n = 2$ και $\lambda = 3$, δηλαδή

$$f(x) = 9xe^{-3x}$$

Καθώς και το χαρτοφυλάκιο Ω του οποίου οι αποζημιώσεις Y_i ακολουθούν τη κατανομή Erlang(n, λ), όπου $n = 2$ και $\lambda = 2$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$g(y) = 4ye^{-2y}\,.$$

Για το πρώτο χαρτοφυλάκιο έχουμε,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty 9xe^{-3x}\,dx = 1$$

Επίσης έχουμε ότι

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty x(9xe^{-3x})\,dx = 9\int_0^\infty x^2e^{-3x}\,dx = \frac{2}{3} = \mu_{1,X}$$

Για τον υπολισμό της δεύτερης και τρίτης ροπής έχουμε

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2(9xe^{-3x})\,dx = \frac{2}{3}$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3f(x)\,dx = \int_0^\infty x^3(9xe^{-3x})\,dx = \frac{8}{9}$$

Η διακύμανση θα είναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2(9xe^{-3x})\,dx - \left[\int_0^\infty x(9xe^{-3x})\,dx\right]^2 = 0{,}22222$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$F(X) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (9te^{-3t})\,dt = e^{-3x}(-1 + e^{3x} - 3x)$$

Και μέσω αυτής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-3x}(-1 + e^{3x} - 3x)$$

Μια ακόμη χρήσιμη ποσότητα είναι η ροπογεννήτρια των X_i, η οποία ισούται με

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx}(9xe^{-3x})\,dx = \frac{9}{(-3+t)^2}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται επίσης απο την κατανομή ισορροπίας ως εξής

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_0^x \bar{F}(t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^x (1 - e^{-3t}(-1 + e^{3t} - 3t))\,dt = \frac{3}{2}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x}(2 + 3x))$$

Η ουρά της θα είναι

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}(2 + 3x)$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε

$$f_\varepsilon(x) = H_X'(x) = \frac{3}{2}(-e^{-3x} + e^{-3x}(2 + 3x))$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι $\lambda = 2$ και $c = 3$.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ_X, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης

$$\theta_X = \frac{c}{\lambda \mu_{1,X}} - 1 = 1{,}25$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογιστεί ως λύση της εξίσωσης του Lundberg,

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_X)\mu_{1,X} r.$$

Από την οποία βρίσκουμε ότι

$$R_X = 1.2137$$

Για την πιθθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ έχουμε

$$\psi_1(0) = \frac{1}{1+\theta_X} = \frac{1}{1+1{,}25} = 0{,}4444$$

Για να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς ισορροπίας $1 - H_X(s)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωττών υψών $f_\varepsilon(s)$ και μέσου αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά

$$\widehat{H_X}(s) = \frac{3}{2(3+s)^2} + \frac{1}{3+s}$$

$$\hat{f}_e(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{(3+s)^2} + \frac{1}{3+s}\right)$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_x}(s) = \widehat{\psi_x}(s) = \frac{\frac{3}{2(3+s)^2} + \frac{1}{3+s}}{2.25 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{(3+s)^2} + \frac{1}{3+s}\right)}$$

Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, μπορούμε να καταλήξουμε στην ποθανότητα χρεοκοπίας.

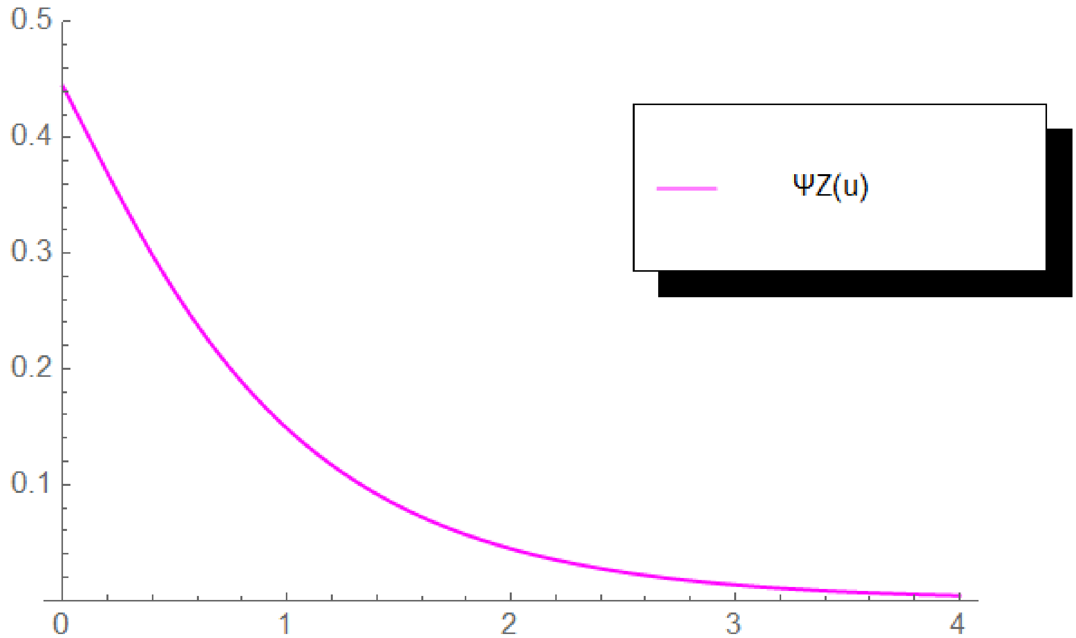
Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$L_{\psi_x}(s)^{-1}(s) = -0.0582e^{-4.11963u} + 0.50262e^{-1.21370u}$$

Άρα, τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Z θα είναι ίση με

$$\psi_x(u) = -0.0582e^{-4.11963u} + 0.50262e^{-1.21370u}$$

Σχήμα 5.5: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Z



Για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο εχουμε αντίστοιχα τις παρακάτω ποσότητες,

$$\int_0^\infty g(y)\,dy = \int_0^\infty 4ye^{-2y}\,dy = 1$$

$$E(Y) = \int_0^\infty yg(y)\,dx = \int_0^\infty y(4ye^{-2y})\,dy = 4\int_0^\infty y^2e^{-2y}\,dy = 1 = \mu_{1,Y}$$

Η δεύτερη και η τρίτη ροπή υπολογίζοντει ως εξής

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2g(y)\,dy = \int_0^\infty y^2(4ye^{-2y})\,dy = \frac{3}{2}$$

$$E(Y^3) = \int_0^\infty y^3g(y)\,dy = \int_0^\infty y^3(4ye^{-2y})\,dy = 3$$

Η διακύμανση προκυπτει μέσω τον ακόλουθο τύπου

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$Var(Y) = \int_0^\infty y^2(4ye^{-2y})\,dy - \left[\int_0^\infty y(4ye^{-2y})\,dy\right]^2 = 0{,}5$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων του δεύτερου χαρτοφυλακίου θα δίνεται από τη σχέση

$$G(y) = \int_0^y g(t)\,dt = \int_0^y (4te^{-2t})\,dt = e^{-2y}(-1 + e^{2y} - 2y)$$

και μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{G}(y) = 1 - G(y) = 1 - e^{-2y}(-1 + e^{2y} - 2y).$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων Y_i έχουμε

$$M_y(t) = \int_0^\infty e^{ty} g(y)\,dy = \int_0^\infty e^{ty}(4ye^{-2y})\,dy = \frac{4}{(-2+t)^2}.$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα υπολογιστεί και πάλι μέσω της συνάρτησης ισοροππίας, οπότε θα είναι

$$H_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{G}(t)\,dt = \int_0^y \left(1 - e^{-2t}(-1 + e^{2t} - 2t)\right) dt = 1 - e^{-2y}(1+y).$$

Και η ουρά αυτής

$$\overline{H_Y}(y) = 1 - H_Y(y) = e^{-2y}(1+y).$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμμε

$$g_\varepsilon(y) = H_Y'(y) = -e^{-2y} + 2e^{-2y}(1+y)$$

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα παίρνουν και για αυτό το χαρτοφυλάκιο τις τιμές $\lambda = 2$ και $c = 3$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, το περιθωριο ασφαλείας θ θα είναι κι πάλι ίσο με

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \mu_{1,Y}} - 1 = 0{,}5\,.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογιστεί ως λύση της εξίσωσης του Lundberg

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_Y)\mu_{1,Y} r.$$

από την οποία παίρνουμε ότι

$$R_X = 0.46482$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας του Ω χαρτοφυλακίου με αρχικό αποθεματικό $u = 0$, έχουμε

$$\psi_Y(0) = \frac{1}{1+\theta_Y} = \frac{1}{1+0,5} = 0,6666$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της ουράς της συνάρτησης ισοροππίας $1 - H_Y(s)$ θα είναι

$$\widehat{\overline{H_Y}}(s) = \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $\hat{g}_e(s)$ θα είναι

$$\hat{g}_e(s) = \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}$$

Επομένως και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_Y}(s) = \widehat{\psi_Y}(s) = \frac{\frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{2+s}}{1.5 - \frac{2}{(2+s)^2} - \frac{1}{2+s}}$$

Μέσω της τελευταίας σχέσης, βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

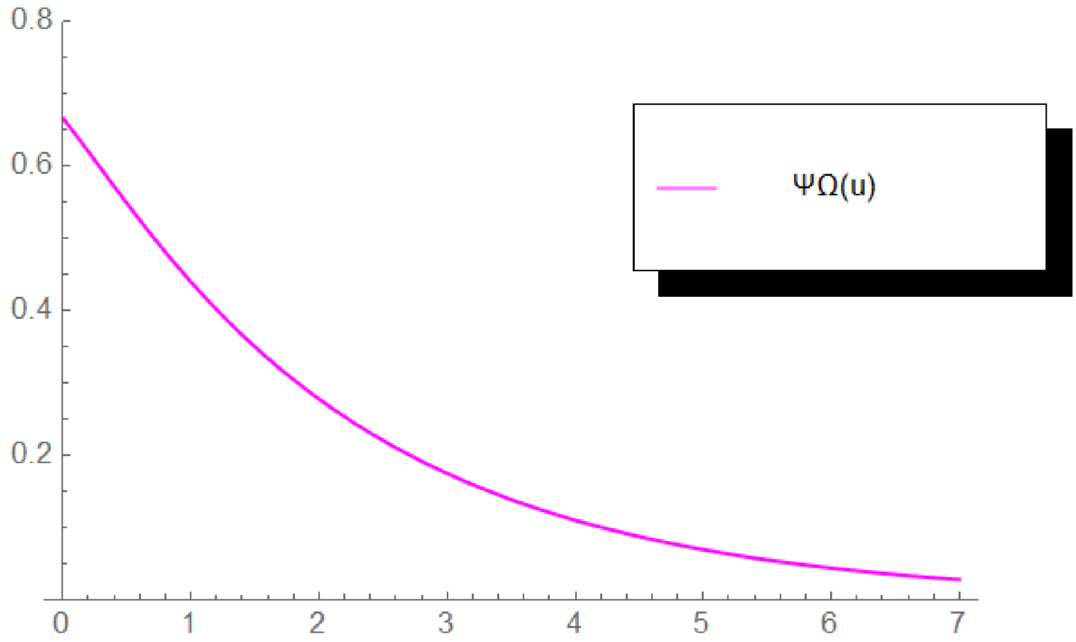
Έχουμε

$$L_{\psi_Y}(s)^{-1}(s) = -0.03647e^{-2.8685u} + 0.703133e^{-0.4648u}.$$

Τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Ω θα δίνεται απο τον τύπο

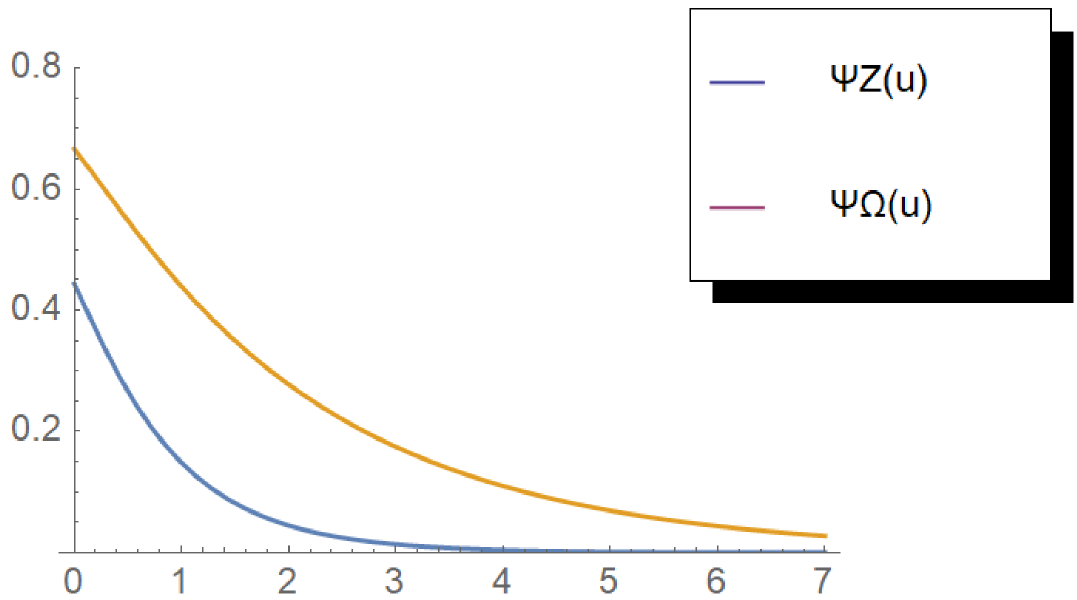
$$\psi_x(u) = -0.03647e^{-2.8685u} + 0.703133e^{-0.4648u}\ .$$

Σχήμα 5.6: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Ω



Στη συνέχεια ακολουθεί η γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Ζ και Ω στο σχήμα *5.7*, από το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το χαρτοφυλάκιο Ζ είναι μικρότερη απο την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Ω για κάθε τιμή u.

Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του Z και Ω χαρτοφυλακίου αντίστοιχα



Στο τέλος ακολουθεί ο πίνακας τιμών πιθανοτήτων χρεοκοπίας για τα χαρτοφυλάκια Z και Ω, όπου κι εδώ παρατηρούμε ότι το Ω το χαρτοφυλάκιο με τη μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Πίνακας 5.2: Πίνακας τιμών πιθανοτήτων χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Z και Ω

u	*ΨZ(u)*	*ΨΩ(u)*
0	0,44442	0,666663
0,2	0,36876	0,620167
0,4	0,298112	0,572262
0,6	0,237735	0,525489
0,8	0,188196	0,48111
1	0,148381	0,43968
1,2	0,116728	0,40137
1,4	0,091714	0,366146
1,6	0,07201	0,333872
1,8	0,056518	0,304363
2	0,044349	0,277417
2,2	0,034796	0,252832
2,4	0,027299	0,230411

Κεφάλαιο 6

Τελικές παρατηρήσεις

Το κύριο θέμα της παρούσας εργασίας είναι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας στη θεωρία κινδύνου. Αρχικά εισάγουμε μια γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu στο Κεφάλιαο 1 ενσωματώνοντας στην ανάλυση τον αριθμό των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία. Ως αποτέλεσμα, με την εξαγωγή της από κοινού κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία, είμαστε σε θέση όχι μόνο να λάβουμε την οριακή πυκνότητα του χρόονου χρεοκοπίας αλλά και να προσδιορίσουμε την ατομική συμβολή κάθε απαίτησης στη χρεοκοπία. Δείχνουμε στο Κεφάλαιο 2 ότι η προτεινόμενη συνάρτηση Gerber-Shiu εξακολουθεί να ικανοποιεί μια ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση και μπορεί γενικά να εκφραστεί από μια σχετική σύνθετη γεωμετρική ουρά. Στα Κεφάλαια 3 και 4, ξεκινάμε την ανάλυση επιβάλλοντας μια υπόθεση εκθετικής κατανομής για τους ενδιάμεσους χρόνους και τα μεγέθη των απαιτήσεων, αντίστοιχα. Στη περίπτωση αυτή, ο από κοινού μετασχηματισμός Laplace/p.g.f. του χρόνου χρεοκοπίας και του αριθμού των απαιτήσεων εώς τη χρεοκοπία μπορεί να εκφραστεί ως μια μοναδική μη αρνητική λύση της (γενικευμένης) εξίσωσης Lundberg. Εφαρμόζουμε το θεώρημα σιωπηρής συνάρτησης του Lagrange για την αντιστροφή για να λάβουμε την από κοινού γενικευμένη πυκνότητα αυτών των δύο ποσοτήτων.

Στο Κεφάλαιο 5, επεκτείνουμε την ανάλυση του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen υπό την υπόθεση ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν ένα συνδυασμό από n εκθετικές κατανομές. Η πολυμεταβλητή εκδοχή του θεωρήματος επέκτασης του Lagrange παίζει βασικό ρόλο στην αντιστροφή. Επισημαίνουμε ότι παραμένει ένα δύσκολο ερευνητικό πρόβλημα η απόκτηση μιας ρητής έκφρασης για την πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου με μικτά Erlang μεγέθη απαιτήσεων, στην οποία περίπτωση η προσέγγιση αντιστροφής Lagrange μπορεί να μην είναι η καταλληλότερη μεθοδολογία που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Με την προτεινόμενη μεθοδολογία μας, αποδεικνύουμε επίσης ότι μπορούν να ληφθούν και άλλα μεγέθη που ενδιαφέρουν τις εφαρμοσμένες πιθανότητες, όπως η διάρκεια της περιόδου αιχμής σε μία ουρά ανομονής $K_m/G/1$. Πιστεύουμε ότι η προτεινόμενη τεχνική έχει περαιτέρω εφαρμογές για την απόκτηση της πυκνότητας της διάρκειας της περιόδου απασχόλησης σε γενικότερα συστήματα ουρών αναμονής.

Βιβλιογραφια

Ελληνόγλωσση

1. Μάρκος Β. Κούρτας, 2016, Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων και εφαρμογές, έκδοση Β', Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης
2. Πολίτης Κ., 2012, Εισαγωγή στην Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
3. Χατζηκωνσταντινίδης Ε., 2019, Σημειώσεις Π.Μ.Σ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξενόγλωσση

1. Borovkov, K. A., and D. C. Dickson (2008): "On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with expontential claim sizes," Insurance: Mathematics and Economics, 42(3), 1104-1108.
2. Dickson, D. C. M., and G. E. Willmot (2005); "The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model," ASTIN Bulletin, 35(1), 45-60.
3. Kolkovska, E. T., J. A. Lopez-Mimbela, and J. V. Morales (2005): "Occupation measure and local time of classical risk processes," Insurance: Mathematics and Economics, 37(3), 573-584.
4. Zhang, C., and R. Wu (2002): "Total duration of negative surplus for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion," Journal of Apllied Propability, 39(3), 517-532.