ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

«Στοχαστική Μοντελοποίηση Αγοράς Παραγώγων Ακινήτων και Σύνδεσή τους με Δικαιώματα Προαίρεσης»

Μπελεχρής Γ. Θεόδωρος

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ,
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

« The Real Estate Derivatives Market and its Linchpin with Options »

Belechris G. Theodoros

University of Piraeus

Department of Statistics and Insurance Science

M.Sc in Actuarial Science and Risk Management

PIRAEUS, GREECE

NOVEMBER 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σεβρόγλου Βασίλειο (Επιβλέπων)

- Καθηγητή κ. Κούτρα Μάρκο

- Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Τζαβελά Γεώργιο

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, κο Σεβρόγλου Βασίλειο, για την βοήθεια του στην οργάνωση και την επίβλεψη της παρούσας εργασίας.
Επιπρόσθετα, στο πνεύμα αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα, τον κο Μ. Κούτρα, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, και τον κο Γ. Τζαβελά, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, για την χρήσιμη συμβολή τους στην παρουσίαση της συγκεκριμένης εργασίας.
Τέλος, θα ήθελα να δηλώσω τις ευχαριστίες μου προς όλους τους καθηγητές του ΠΜΣ για την βέλτιστη παράδοση των διαλέξεων σε μια πολύ δύσκολη εποχή, της πανδημίας του Covid-19, όπου παρά τις απαιτήσεις της τηλεκπαίδευσης κατάφεραν να διατηρήσουν το ίδιο υψηλό επίπεδο στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιαστεί ένα μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων ακινήτων σε στοχαστικό περιβάλλον. Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν μια χρήσιμη χρηματοοικονομική αξία για τους επενδυτές όσον αφορά τη διαχείριση του κινδύνου των χαρτοφυλάκιων τους. Ιδιαίτερα, θα αναπτυχθεί ένα διπαραγοντικό μοντέλο τιμολόγησης των δικαιώματων προαίρεσης, το οποίο θα υπολογίζει την αξία οποιουδήποτε τύπου δικαιώματος επηρεάζεται από τις δύο μεταβλητές, δηλαδή από την αξία του ακινήτου και από το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο. Στην συνέχεια, θα μελετηθεί κατάλληλο μοντέλο τιμολόγησης, που θα είναι ικανό να ταιριάζει με τις καμπύλες επιτοκίων και μεταβλητότητας της αγοράς, τόσο για Ευρωπαικά όσο και για Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης. Έπειτα θα αναπτυχθεί ένα δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο για τον υπολογισμό της αξίας των παραπάνω δικαιωμάτων προαίρεσης, και τέλος θα δοθούν εφαρμογές και χρήσιμα συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα του μοντέλου μας.

Abstract

In this paper, a real estate pricing model of derivatives in a stochastic environment will be studied. Options are a usefull financial asset for investors as far as managing the risk of their portfolios is concerned. In particular, a bivariate option pricing model will be developed, which will calculate the value of any type of option affected by the two variables, namely the value of the property and the short-term interest rate. Subsequently, a suitable pricing model will be studied, which is able to match the interest rate and market volatility curves for both European and American options. Further, a two-dimensional binomial tree will be developed in order to calculate the value of these options. Finally, applications and useful conclusions on the effectiveness of our model will be given.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα αναλυθεί μοντέλο για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, το οποίο έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί ένα χρήσιμο χρηματοοικονομικό εργαλείο για τους επενδυτές σχετικά με τη διαχείριση του κινδύνου των χαρτοφυλάκιων τους. Τα τελευταία χρόνια έχει δημιουργηθεί μια ταχεία αναπτυσσόμενη αγορά για τα δικαιώματα που έχουν ως υποκείμενο τίτλο ένα ακίνητο, η οποία επιτρέπει στους συμμετέχοντες να ελέγχουν όχι μόνο την απόδοση αλλά και το κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους σε ακίνητα χωρίς να πουλούν ή να αγοράζουν απευθείας τις υποκείμενες αξίες.

Η χρήση συνεχών μοντέλων τιμολόγησης στον τομέα των χρηματοοικονομικών παραγώγων ουσιαστικά ξεκίνησε από τις εργασίες των Black-Scholes [9] το 1973 και Merton [10] το 1969, για τις οποίες έλαβαν και το Nobel οικονομικών το 1997. Μέχρι και το 1985 και την απόδειξη της διωνυμικής προσέγγισης από τον Sharpe [11] η χρήση των συγκεκριμένων μαθηματικών τεχνικών γινόταν από περιορισμένο αριθμό επιστημόνων, παρότι κανείς δεν αμφισβητούσε την χρησιμότητα τους. Η εργασία του Sharpe έδωσε την δυνατότητα τον επόμενο χρόνο, δηλαδή το 1979, στους Cox-Ross-Rubinstein [12] να αποδείξουν ότι με την χρήση ενός σωστά ορισμένου διωνυμικού μοντέλου, αν το χρονικό διάστημα μεταξύ των βημάτων του δένδρου τείνει στο μηδέν, η αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος υπολογισμένη με το διωνυμικό μοντέλο είναι πολύ κοντά στην τιμή που υπολογίζεται με το μοντέλο που παρουσίασαν οι Black-Scholes [9] και Merton [10]. Η συγκεκριμένη ιδιότητα θα αποδειχθεί με αριθμητικά παραδείγματα και για το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο που θα τεκμηριωθεί στην εργασία αυτή.

Το μοντέλο αυτό όχι μόνο θα επεκταθεί και για Αμερικάνικα δικαιώματα το 1985 από την εργασία των Cox-Rubinstein [13] για μετοχές που καταβάλλουν μέρισμα αλλά και θα εξετασθεί τι συμβαίνει στο διωνυμικό μοντέλο αν κάποιες από τις υποθέσεις που πραγματοποιήσαν οι Black-Scholes χαλαρώσουν. Στην πραγματικότητα αυτό σημαίνει ότι στην εργασία των Cox-Rubinstein [13] θα αναλυθεί η σχέση μεταξύ του ντετερμινιστικού διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης των μετοχών για χρονικό διάστημα ενός χρόνου και της συνεχής εξίσωσης τιμολόγησης, που αποτελεί την μερική διαφορική εξίσωση τιμολόγησης των Black-Scholes.

Στο μοντέλο που θα αναλυθεί στην συγκεκριμένη εργασία θα δημιουργηθεί ένα δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο για να υπολογιστεί η αξία του δικαιώματος με υποκείμενη αξία ένα ακίνητο, κάνοντας την υπόθεση ότι η τιμή του ακολουθεί μια Γεωμετρική Κίνηση Brown, υποθέτοντας ταυτόχρονα και στοχαστικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Για τον λόγο αυτό το μοντέλο αυτό θα είναι διμεταβλητό, και θα οριστεί με τρόπο ώστε να επιτρέπει την τιμολόγηση οποιουδήποτε δικαιώματος σχετικό με τις δύο συγκεκριμένες μεταβλητές, δηλαδή την τιμή του ακινήτου και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο.

Η εργασία μας διαρθρώνεται ως εξής: Στο 1^{ο} κεφάλαιο θα γίνει αναλυτικά η θεωρητική παρουσιάση των δικαιωμάτων προαίρεσης, Ευρωπαικών και Αμερικάνικων, και ο υπολογισμός άνω και κάτω φραγμάτων των τιμών τους. Έπειτα, στο 2^{ο} κεφάλαιο θα αναλυθεί το διωνυμικό μοντέλο, όπως ορίστηκε αρχικά από τους Cox-Ross-Rubinstein [12], με συγκεκριμένα παραδείγματα σχετικά με τις ιδιότητες των δύο διαφορετικών τύπων δικαιώματων, καθώς είναι απαραίτητη η κατανόηση του απλού μοντέλου για την ανάλυση του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου.

Όπως αναφέρθηκε η τιμή της μετοχής θα ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, και συγκεκριμένα την Γεωμετρική Κίνηση Brown, οπότε κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί στο 3^{ο} κεφάλαιο η θεωρία που αρχικά τεκμηριώθηκε από τον Ιάπωνα μαθηματικό Itô [14] σχετικά με τα ολοκλήρωματα Itô, τα οποία αποτελούν θεμέλιο λήθο της Γεωμετρικής Κίνησης Brown. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν διάφορα στοχαστικά μοντέλα επιτοκίων, και ιδιαίτερα το συνεχές μοντέλο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου των Black-Derman-Toy [15], το οποίο και θα χρησιμοποιηθεί στην μελέτη μας.

Τέλος, στο 4^{ο} κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση ενός δισδιάστατου διωνυμικού μοντέλου, θα δοθούν απαραίτητες μαθηματικές έννοιες του. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν παραδείγματα τα οποία επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα σχετικά με την σύγκλιση της τιμής που υπολογίζεται από τα διωνυμικά δένδρα, είτε αυτά είναι μονοδιάστατα είτε δισδιάστατα, προς την τιμή που υπολογίζει η εξισωση των Black-Scholes [9] και Merton [10].

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στα Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα παράγωγα προϊόντα αποτελούν ένα είδος επένδυσης που ολοένα και περισσότερο προτιμούν οι επαγγελματίες του χώρου, καθώς τους δίνει την δυνατότητα να αντισταθμίσουν καλύτερα τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους. Τα πιο βασικά προϊόντα είναι τρία , τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures), οι προθεσμιακές συμβάσεις (Forwards) και τα δικαιώματα προαίρεσης (Options). [2]

Η εργασία αυτή θα ασχοληθεί με τον δεύτερο τύπο, τα δικαιώματα προαίρεσης, και πιο συγκεκριμένα με τα δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο κάποιο ακίνητο. Αρχικά, θα αναλυθούν δύο βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων, δηλαδή το *επιτόκιο μηδενικού κινδύνου* και ο *συνεχής ανατοκισμός* ενός χρηματικού ποσού.

1.1 Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι ένας όρος αρκετά σημαντικός στην χρηματοοικονομική θεωρία και ιδιαίτερα στην τιμολόγηση των παραγώγων προϊόντων, καθώς όπως θα αναλυθεί στην συνέχεια, η διαδικασία αποτίμησης των παραγώγων περιλαμβάνει όχι μόνο την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο αλλά και την υπόθεση ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού είναι το *επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate).*

Ιστορικά, πριν την μεγάλη χρηματοοικονομική κρίση του 2008, που οδήγησε στην κατάρρευση της Lehman Brothers, ως επιτόκιο μηδενικού κινδύνου λογιζόταν το LIBOR, δηλαδή το επιτόκιο στο οποίο μία τράπεζα δάνειζε κάποια άλλη τράπεζα για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, από ένα βράδυ ως 12 μήνες. Κατά τη διάρκεια της κρίσης όμως τα συγκεκριμένα επιτόκια εκτινάχθηκαν, οπότε και έγινε αντιληπτό ότι δεν είναι σωστή η χρήση τους ως επιτόκια μηδενικού κινδύνου από τα χρηματοοικονομικά ιδρύματα.

Μετά την κρίση, το LIBOR αντικαταστάθηκε από το επιτόκιο ημερησίας ανταλλαγής, το οποίο αποτελεί ένα συνεχώς ανανεωμένο επιτόκιο μίας ημέρας, και παρά το γεγονός ότι η πιθανότητα μια φερέγγυα τράπεζα να αθετήσει κάποιο δάνειο μιας ημέρας είναι θετική, οι αγορές την θεωρούν αμελητέα και χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο επιτόκιο ως επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Μάλιστα η διαφορά μεταξύ των δύο παραπάνω επιτοκίων αποτελεί έναν δείκτη σχετικά με την πίεση που υφίστανται οι χρηματοοικονομικές αγορές και γι’ αυτόν τον λόγο μελετάται καθημερινά από τους επενδυτές. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζεται το άνοιγμα ανάμεσα στο LIBOR τριών μηνών και στο επιτόκιο ημερησίας ανταλλαγής τριών μηνών, το οποίο ουσιαστικά δείχνει την διαφορά του πιστωτικού κινδύνου ανάμεσα σε ένα διατραπεζικό δάνειο τριών μηνών και σε μια τρίμηνη σειρά διατραπεζικών δάνειών μια ημέρας. Υπό κανονικές συνθήκες το άνοιγμα αυτό είναι 10 μονάδες βάσης, αλλά κατά την διάρκεια της κρίσης αυξήθηκε έως και τις 364 μονάδες βάσης, λόγω του γεγονότος ότι οι τράπεζες ήταν απρόθυμες να δανείζουν η μία την άλλη για διάρκεια τριών μηνών.

1.2 Συνεχής ανατοκισμός

Κατά την διάρκεια του ορισμού ενός επιτοκίου είναι απαραίτητη και η αναφορά της συχνότητας ανατοκισμού του, δηλαδή το πόσες φορές το συγκεκριμένο επιτόκιο ανατοκίζεται κατά την διάρκεια ενός χρόνου.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό αρχικά θα οριστεί ο τύπος για ένα ποσό Π που επενδύεται για n έτη στο επιτόκιο r και ανατοκίζεται μία φορά τον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή, ύστερα από n χρόνια, η τελική αξία της επένδυσης θα είναι

$$\Pi * (1+r)^n,$$

όπου $*$ συμβολίζει τον συνήθη πολλαπλασιασμό. Αν όμως το ίδιο επιτόκιο ανατοκίζεται φ φορές ανά έτος η τελική αξία της επένδυσης γίνεται

$$\Pi * \left(1+\frac{r}{\varphi}\right)^{n*\varphi}.$$

Το όριο που υπολογίζεται όταν η συχνότητα ανατοκισμού φ τείνει στο άπειρο ονομάζεται *συνεχής ανατοκισμός (continuous compounding),* το οποίο θα χρησιμοποιείται σε όλα τα παραδείγματα που θα αναφερθούν, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, και στην περίπτωση αυτή ο τύπος για την τελική αξία της επένδυσης γίνεται

$$\Pi * e^{r*n}.$$

Ένα επιτόκιο που εκφράζεται σε μια συχνότητα ανατοκισμού δύναται να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο επιτόκιο με άλλη συχνότητα ανατοκισμού με ανάλογους τύπους. Για παράδειγμα, έστω ότι r_c το επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό και r_φ το αντίστοιχο επιτόκιο με ανατοκισμό φ φορές ανά έτος. Σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις ισχύει ότι

$$\Pi * e^{r_c*n} = \Pi * \left(1+\frac{r_\varphi}{\varphi}\right)^{n*\varphi},$$

Από την παραπάνω εξίσωση εξάγεται η βασική σχέση ισοδυναμίας επιτοκίων

$$e^{r_c} = \left(1+\frac{r_\varphi}{\varphi}\right)^{\varphi} \qquad \textit{(1.1)}$$

που σημαίνει ότι εξάγονται οι εξής τύποι για το r_c και το r_φ

$$r_c = \varphi * \ln\left(1+\frac{r_\varphi}{\varphi}\right) \qquad\qquad r_\varphi = \varphi * \left(e^{\frac{r_c}{\varphi}} - 1\right).$$

Παράδειγμα 1.1: Μετατροπές επιτοκίων

Έστω ένα επιτόκιο 8% ανά έτος με τριμηνιαίο ανατοκισμό, που σύμφωνα με την (1.1) σημαίνει ότι $\varphi = 4$ και $r_\varphi = 0.08$. Στην περίπτωση αυτή το ισοδύναμο επιτόκιο με συνεχή ανατοκισμό είναι

$$r_c = \varphi * \ln\left(1+\frac{r_\varphi}{\varphi}\right) = 4 * \ln\left(1+\frac{0.08}{4}\right) = 4 * \ln(1.02) = 4 * 0.019802 = 0.07921.$$

Έστω ότι μια τράπεζα παρέχει δάνεια με επιτόκιο 14% ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό, αλλά στην πραγματικότητα οι τόκοι καταβάλλονται ανά δίμηνο, που σημαίνει ότι $\varphi = 6$ και $r_c = 0.14$. Τότε το ισοδύναμο επιτόκιο με διμηνιαίο ανατοκισμό είναι

$$r_\varphi = \varphi * \left(e^{\frac{r_c}{\varphi}} - 1\right) = 6 * \left(e^{\frac{0,14}{6}} - 1\right) = 6 * 0.02360 = 0.14162.$$

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ότι το επιτόκιο με τον συνεχή ανατκισμό είναι μεγαλύτερο από το επιτόκιο με ανακοτισμό φ σε ετήσια βάση.

1.3 Ανοικτές πωλήσεις

Ένα τρίτος όρος που πρέπει να αναλυθεί πριν την παρουσίαση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι οι *ανοικτές πωλήσεις (Short Selling)* ή απλώς *«σορτάρισμα».* Οι ανοικτές πωλήσεις αφορούν την πώληση περιουσιακών στοιχείων που δεν έχει στην κατοχή του ένας επενδυτής και είναι εφικτές για ορισμένα επενδυτικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα οι μετοχές.

Η διαδικασία την ανοικτής πώλησης μετοχών ξεκινά λόγω της πεποίθησης ότι η τιμή μιας μετοχής θα πέσει στο επόμενο χρονικό διάστημα, που σημαίνει ότι ένας επενδυτής θα ήθελε να πουλήσει τις μετοχές σήμερα και να τις αγοράσει σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή σε χαμηλότερη τιμή με σκοπό το κέρδος. Έστω ότι ο επενδυτής που έχει αυτές τις πεποιθήσεις δεν κατέχει τις μετοχές της εταιρείας που πιστεύει ότι η τιμή της θα πέσει, έστω εταιρεία Y. Τότε απευθύνεται σε έναν αντισυμβαλλόμενο που τις κατέχει, τις δανείζεται και τις πουλάει στην τωρινή τιμή $S_{Y,0}$, εισπράττοντας το ποσό αυτό. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή θα αγοράσει τις μετοχές στην αγοραία τους τιμή την στιγμή εκείνη $S_{Y,t}$ επιστρέφοντας τις στον δανειστή. Αν ισχύει ότι $S_{Y,t} < S_{Y,0}$ ο επενδυτής είχε σωστές πεποιθήσεις και έβγαλε κέρδος από την κίνηση του αυτή, ενώ αν ισχύει το αντίθετο έχει υποστεί ζημιά.

Μία σημαντική παρατήρηση, η οποία θα χρειαστεί στις αποδείξεις των κάτω φραγμάτων των δικαιωμάτων, είναι ότι αν κάποιος δανειστεί μία μετοχή και την πουλήσει, είναι αναγκασμένος να καταβάλλει σε εκείνον που του την δάνεισε όλα τα μερίσματα που θα καταβάλλει η μετοχή ως την στιγμή που θα κλείσει την ανοικτή αυτή θέση, επιστρέφοντας την μετοχή.

Καθώς ο επενδυτής ίσως χρειαστεί να επιστρέψει τις μετοχές σε χρονική στιγμή που θα του επιφέρει ζημία, είναι αναγκασμένος στην χρονική στιγμή 0 να έχει δημιουργήσει έναν λογαριασμό, που ονομάζεται *λογαριασμός περιθωρίου,* στον οποίο θα έχει τοποθετήσει ως ενέχυρο μετρητά ή επενδυτικούς τίτλους, ώστε να αναγκαστεί να τηρήσει το συμβόλαιο που είχε υπογράψει και να επιστρέψει τις μετοχές.

Ιστορικά οι εποπτικές αρχές έχουν δημιουργήσει κανόνες για τις ανοικτές πωλήσεις, οι οποίοι συχνά αλλάζουν ανάλογα με τις ανάγκες της αγοράς. Αρχικά το 1938 δημιουργήθηκε ο *κανόνας ανόδου (Uptick rule)*, που επέτρεψε τις ανοικτές πωλήσεις μετοχών που ακολουθούσαν ανοδική πορεία, ο οποίος καταργήθηκε σχεδόν 70 χρόνια μετά, τον Ιούλιο του 2007. Μετά από τρία χρόνια, τον Φεβρουάριο του 2010, εισήχθη ένας νέος κανόνας, που όριζε ότι αν η τιμή μιας μετοχής έχει πέσει πάνω από 10% σε μια ημέρα μπαίνουν σε εφαρμογή κάποιοι περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις της ίδιας και της επόμενης μέρας. Τέλος υπάρχουν μερικές προσωρινές απαγορεύσεις στις ανοικτές πωλήσεις, όπως συνέβη στην κρίση του 2008, καθώς θεωρήθηκε ότι συνέβαλλαν στην μεγάλη αστάθεια στην αγορά.

1.4 Δικαιώματα προαίρεσης

Ύστερα από τον ορισμό των παραπάνω εννοιών είναι δυνατόν να ξεκινήσει η παρουσίαση των δύο μεγάλων κατηγοριών των δικαιωμάτων προαίρεσης, τα δικαιώματα αγοράς και τα δικαιώματα πώλησης, που στο καθένα από αυτά υπάρχουν δύο είδη, τα Αμερικάνικα και τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα, με βάση και τους ορισμούς που έχουν παρουσιαστεί από τον D.Dubofsky [1].

1.4.1 Βασικοί ορισμοί για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης

Ορισμός 1.1: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς
Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European Call Option) είναι μια γραπτή συμφωνία, δηλαδή ένα συμβόλαιο, μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, που δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή να αγοράσει από τον πωλητή του δικαιώματος μια υποκείμενη αξία σε προκαθορισμένη τιμή σε μια προκαθορισμένη χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου.

Βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι ο κάτοχος του συμβολαίου έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση να το εξασκήσει. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ο αγοραστής έχει περιορισμένη ευθύνη, και αν πέσει η τιμή της υποκείμενης αξίας μπορεί να αποσυρθεί από το συμβόλαιο αυτό και να μην αγοράσει καθόλου την υποκείμενη αξία.

Ορισμός 1.2: Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς
Μια δεύτερη κατηγορία είναι τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς (American Call Option), στα οποία η μονή διαφορά είναι ο αγοραστής μπορεί να τα εξασκήσει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως την ημερομηνία λήξης τους.

Εφόσον τα Αμερικάνικα δικαιώματα παρέχουν όλα τα πλεονεκτήματα που έχουν και τα Ευρωπαϊκά καθώς και ένα παραπάνω δικαίωμα, εκείνο της πρόωρης εξάσκησης, χωρίς να έχουν κάποιο μειονέκτημα, είναι λογικό εξ' ορισμού τους να έχουν και μεγαλύτερη αξία.

Η υποκείμενη αξία, πάνω στην οποία «γράφεται» ένα δικαίωμα, αποτελεί συνήθως μια χρηματοοικονομική αξία, όπως μετοχές ή ένας χρηματοοικονομικός δείκτης, αλλά υπάρχουν και δικαιώματα τα οποία αφορούν την *αγορά κατοικίας (Real estate)*, και αυτά τα δικαιώματα θα αναλυθούν στην εργασία αυτή.

Ορισμός 1.3: Ευρωπαϊκό και Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης
Ένα δικαίωμα πώλησης δίνει το δικαίωμα στον κάτοχου του να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στον εκδότη του δικαιώματος στην προκαθορισμένη τιμή. Αν το δικαίωμα πώλησης είναι Ευρωπαϊκού τύπου τότε μπορεί να εξασκηθεί στην ημερομηνία λήξης T ενώ αν είναι Αμερικάνικου τύπου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως την ημερομηνία λήξης.

Ο αγοραστής δηλαδή στην χρονική στιγμή 0 πληρώνει στον πωλητή το *premium,* που συμβολίζεται ως P_0, αγοράζει το δικαίωμα, και ελπίζει σε πτώση της τιμής του υποκείμενου τίτλου S_T κάτω από την τιμή εξάσκησης K, δηλαδή παίρνει αμυντική θέση, αγοράζοντας μια ασφάλεια απέναντι στην πτώση της τιμής της υποκείμενης αξίας.
Σε περίπτωση που δεν συμβεί αυτό και η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη τότε το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί και ο αγοραστής θα χάσει το *premium*, που έχει ήδη πληρώσει, το οποίο αποτελεί και την μέγιστη δυνατή απώλεια που μπορεί να υποστεί.

Ορισμός 1.4: Τιμή εξάσκησης

Η προκαθορισμένη τιμή, στην οποία εξασκούνται τα παραπάνω δικαιώματα, ονομάζεται τιμή εξάσκησης ή τιμή εκτέλεσης (Strike Price), και συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα K.

Ορισμός 1.5: Ημερομηνία Λήξης

Η προκαθορισμένη ημερομηνία εκπνοής καλείται ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (Maturity Date) και συμβολίζεται με T.

Ορισμός 1.6: Τιμή δικαιώματος

Η τιμή του δικαιώματος ονομάζεται ασφάλιστρο (Premium) και συμβολίζεται με C, στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς, ενώ στα δικαιώματα πώλησης με P.

Ένα χαρακτηριστικό του C είναι ότι αλλάζει ανάλογα την χρονική στιγμή και άρα πρέπει να τοποθετηθεί ένας χρονικός δείκτης, έχοντας ως αποτέλεσμα η τιμή του δικαιώματος στην δημιουργία του συμβολαίου, δηλαδή στην χρονική στιγμή 0, να συμβολίζεται ως C_0, στην ημερομηνία λήξης T συμβολίζεται με C_T, ενώ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t που ισχύει $0 < t < T$, συμβολίζεται ως C_t. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων πώλησης η αντίστοιχη τιμή συμβολίζεται ως P_0 ή P_T ανάλογα την χρονική στιγμή.

1.4.2 Διαδικασία έκδοσης

Τα δικαιώματα αυτά δημιουργούνται όταν ένας αγοραστής και ένας πωλητής, ή αλλιώς εκδότης του δικαιώματος, συμφωνούν σε μια τιμή και μια ημερομηνία λήξης, και την στιγμή εκείνη ο αγοραστής πληρώνει το *premium* στον εκδότη. Αν το δικαίωμα που αναλύεται είναι δικαίωμα αγοράς και ο κάτοχος επιλέξει να το εξασκήσει είτε την ημερομηνία λήξης, αν είναι Ευρωπαϊκού τύπου, είτε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως την ημερομηνία λήξης, αν είναι Αμερικάνικου τύπου, ο εκδότης έχει την υποχρέωση να παραδώσει στον κάτοχο την υποκείμενη αξία στην προκαθορισμένη τιμή, εισπράττοντας την τιμή εξάσκησης K. Σε μια τέτοια περίπτωση υπάρχουν δύο διαφορετικά ενδεχόμενα για ένα δικαίωμα αγοράς, που είναι:

a) Ο πωλητής του δικαιώματος κατέχει τον υποκείμενο τίτλο όταν εκδίδει το δικαίωμα, με την ονομασία *καλυμμένο δικαίωμα αγοράς*, και άρα στην εξάσκηση απλά παραδίδει τον τίτλο στον αγοραστή του δικαιώματος.

b) Ο πωλητής του δικαιώματος δεν κατέχει τον υποκείμενο τίτλο κατά της έκδοση του δικαιώματος, και άρα το δικαίωμα ονομάζεται *ακάλυπτο δικαίωμα αγοράς (Naked Call).* Στην περίπτωση αυτή, στην χρονική στιγμή της εξάσκησης ο εκδότης αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο από την αγορά, στην αγοραία αξία την στιγμή εκείνη S_T, και μετά τον παραδίδει στον κάτοχο του δικαιώματος στην τιμή εξάσκησης K.

Παρατήρηση 1.1: Είναι φανερό ότι $K < S_T$, γιατί αν ίσχυε το αντίθετο ο κάτοχος του δικαιώματος δεν θα εξασκούσε αλλά θα αγόραζε απευθείας τον τίτλο από την αγορά στην τιμή S_T. Οπότε αν συμβεί εξάσκηση σε ένα ακάλυπτο δικαίωμα αγοράς ο εκδότης αντιμετωπίζει την στιγμή της εξάσκησης μια ζημιά ίση με $S_T - K$. Με βάση τα παραπάνω, ο αγοραστής του δικαιώματος ελπίζει να ανέβει η τιμή της υποκείμενης αξίας, ενώ ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς πιστεύει ότι θα πέσει, και άρα το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί ποτέ.

1.4.3 Επιλογές του κάτοχου του δικαιώματος

Ο κάτοχος ενός δικαιώματος μπορεί, όποτε θελήσει, να κάνει σε μια από τις παρακάτω ενέργειες:

1. Να μην προβεί σε καμία ενέργεια, περιμένοντας μια μελλοντική στιγμή για να λάβει μια απόφαση σχετικά με το δικαίωμα.
2. Να κλείσει την θέση του, που σημαίνει ότι αν ένας επενδυτής έχει θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα, δηλαδή είναι ο κάτοχος του δικαιώματος, μπορεί να το πουλήσει στην τιμή που θα έχει στην αγορά, ενώ ο αρχικός εκδότης του δικαιώματος είναι δυνατόν να το αγοράσει πίσω στην αγοραία τιμή της στιγμής εκείνης.
3. Αν το δικαίωμα είναι Αμερικάνικου τύπου μπορεί να το εξασκήσει, και τότε ο πωλητής πρέπει να παραδώσει την υποκείμενη αξία στην τιμή εξάσκησης K, την οποία θα πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής.

Σε περίπτωση που φτάσει η ημερομηνία εκπνοής T και ο κάτοχος δεν έχει προβεί σε καμία ενέργεια, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις

- Αν $K < S_T$, δηλαδή η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τιμή της υποκείμενης αξίας στην χρονική στιγμή T, τότε ο κάτοχος λογικά εξασκεί το δικαίωμα, και ακόμα και αν δεν το εξασκήσει εκείνος συνήθως προχωράει σε εξάσκηση η χρηματιστηριακή εταιρεία που το διαχειρίζεται.
- Αν $K > S_T$ τότε το δικαίωμα δεν εξασκείται και λήγει χωρίς αξία.

Παρατήρηση 1.2: Στην περίπτωση των δικαιωμάτων πώλησης ισχύουν οι αντίθετες ανισότητες στις παραπάνω περιπτώσεις.

1.4.4 Χρηματοοικονομικό ισοδύναμο

Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, ένα δικαίωμα μπορεί να βρίσκεται σε μια από τις εξής καταστάσεις

(a.) *Εντός χρηματοοικονομικού ισοδύναμου (In the money),* που σημαίνει ότι

- αν είναι δικαίωμα αγοράς ισχύει ότι $S_t > K$, δηλαδή η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης, άρα αυτήν την στιγμή το δικαίωμα έχει θετική αξία.
- αν είναι δικαίωμα πώλησης ισχύει η ανισότητα $S_t < K$ και σε αυτήν την περίπτωση το δικαίωμα έχει αξία.

(b.) *Εκτός χρηματοοικονομικού ισοδύναμου (Out of the money),*δηλαδή

- σε δικαίωμα αγοράς ισχύει $S_t < K$, και έχει μηδενική αξία.
- Ενώ σε δικαίωμα πώλησης ισχύει $S_t > K$.

(c.) *Επί χρηματοοικονομικού ισοδύναμου (At the money),* με

- την τρέχουσα τιμή να είναι ίση με την τιμή εξάσκησης, δηλαδή $S_t \sim K$, και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή και σε δικαιώματα αγοράς και σε δικαιώματα πώλησης.

1.4.5 Εσωτερική αξία και αξία χρόνου

Το *premium*, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος C_t ή P_t, χωρίζεται σε δύο συνιστώσες, την *εσωτερική αξία (Intrinsic Value)* και την *αξία χρόνου (Time Value)* σε κάθε χρονική στιγμή t.

Ορισμός 1.7: Εσωτερική αξία δικαιώματος

Η εσωτερική αξία (Intrinsic Value) ενός δικαιώματος αγοράς δίνεται από τον τύπο $max\,[0, S_t - K]$ *δηλαδή*

$$Εσωτερική\ αξία\ Δικαιώματος\ Αγοράς = \begin{cases} S_t - K, αν\ S_t > K \\ 0, αν\ S_t \leq K \end{cases}$$

ενώ ενός δικαιώματος πώλησης δίνεται από τον τύπο $max\,[0, K - S_t]$ *με*

$$Εσωτερική\ αξία\ Δικαιώματος\ Πώλησης = \begin{cases} K - S_t, αν\ S_t < K \\ 0, αν\ S_t \geq K \end{cases}$$

Παρατήρηση 1.3: Συνοψίζοντας, η εσωτερική αξία του δικαιώματος είναι το ποσό κατά το οποίο το δικαίωμα είναι εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδύναμου ενώ αν είναι εκτός του χρηματοοικονομικού του ισοδύναμου η εσωτερική του αξία είναι μηδέν.

Ορισμός 1.8: Αξία χρόνου ή υπεραξία

Η υπεραξία ή αξία χρόνου είναι η διαφορά ανάμεσα στο premium και την εσωτερική του αξία

$$Εσωτερική\ αξία\ Δικαιώματος\ Αγοράς = C_t - max\,[0, S_t - K]$$
$$Εσωτερική\ αξία\ Δικαιώματος\ Πώλησης = P_t - max\,[0, K - S_t]$$

Παρατήρηση 1.4: Όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό διάστημα μέχρι την ημερομηνία λήξης T τόσο μεγαλύτερη είναι και η εσωτερική αξία του δικαιώματος, ενώ στην εκπνοή η εσωτερική αξία ισούται με μηδέν.

1.5 Φράγματα για τις τιμές των δικαιωμάτων

Ο βασικός σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιαστεί μία μέθοδος υπολογισμού της τιμής ενός δικαιώματος, με υποκείμενο τίτλο ένα ακίνητο. Πριν όμως από την παρουσίαση της μεθοδολογίας υπολογισμού της ακριβής τιμής του δικαιώματος, είναι χρήσιμος ο υπολογισμός άνω και κάτω φραγμάτων ώστε να προσδιοριστεί ένα πεδίο ορισμού για την τιμή αυτήν [1].

Έστω ότι ορίζεται ως C^E η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, ως C^A ενός Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς, ως P^E η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης και ως P^A ενός Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης.

1.5.1 Άνω φράγμα

Θεώρημα 1.1: Άνω φράγμα δικαιώματος αγοράς

Για το άνω φράγμα της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς ισχύει ότι $C^E \leq S_0$ *και* $C^A \leq S_0$, *δηλαδή η τιμή του δικαιώματος πρέπει να είναι μικρότερη από την τιμή της υποκείμενης αξίας την χρονική στιγμή της σύναψης του συμβολαίου.*

Απόδειξη
Ας υποθέσουμε την αντίθετη περίπτωση, δηλαδή ότι C^Eή $C^A \geq S_0$, τότε ένας επενδυτής μπορεί να αγοράσει την υποκείμενη αξία και να πουλήσει το δικαίωμα για *κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage),* όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Αν το δικαίωμα εξασκηθεί πριν λήξει**	**Χρόνος T**	
			$S_T > K$	$S_T \leq K$
Πώληση δικ.	$+C^E$ ή C^A	Παράδοση μετοχής και είσπραξη K	$-S_T + K$	0
Αγορά μετοχής	$-S_0$		$+S_T$	$+S_T$
Καθ.Ταμ.Ροή	>0	$K > 0$	$K > 0$	$S_T > 0$

Εφόσον δεν γίνεται να υπάρχει arbitrage απορρίπτεται η ανίσωση C^E ή $C^A > S_0$, και άρα αποδεικνύεται το άνω φράγμα $C^E \leq S_0$ *και* $C^A \leq S_0$.

Θεώρημα 1.2: Άνω φράγμα δικαιώματος πώλησης
Για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης ισχύει ότι $P^E \leq K * e^{-r_f T}$, ενώ όσο αφορά ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης, που μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η τιμή του δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης K, και άρα $P^A \leq K$.

Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με το άνω φράγμα της τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι γνωστό ότι στην ημερομηνία λήξης του T δεν μπορεί να έχει μεγαλύτερη αξία από την τιμή εξάσκησης K, και άρα την χρονική στιγμή σύναψης του συμβολαίου η αξία του δεν δύναται να υπερβαίνει την τιμή που εξάγεται αν προεξοφληθεί η K με την χρήση του ακίνδυνου επιτοκίου r_f. Αν δεν ισχύσουν τα παραπάνω άνω φράγματα ένας επενδυτής θα μπορούσε να έχει *κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage)* αν πουλούσε το δικαίωμα πώλησης σήμερα και επένδυε τα έσοδα αυτά, δηλαδή τις τιμές P^E ή P^A στο ακίνδυνο επιτόκιο r_f.

1.5.2 Κάτω φράγμα

Είναι φανερό ότι η παρουσίαση και η τεκμηρίωση των άνω φραγμάτων των δικαιωμάτων αποτελεί μια σχετικά εύκολη διαδικασία. Δυστυχώς όσο αφορά τα κάτω φράγματα η ανάλυση γίνεται λίγο πιο περίπλοκη, και θα χρειαστεί να γίνει διαχωρισμός ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος.

1.5.2.1 Δικαιώματα αγοράς χωρίς καταβολή μερίσματος (ή ενοικίου)

Θεώρημα 1.3: Κάτω φράγμα δικαιώματος αγοράς χωρίς μέρισμα
Στην περίπτωση που το δικαίωμα αγοράς, είτε Ευρωπαϊκού είτε Αμερικάνικου τύπου αφορά μια υποκείμενη αξία που δεν προσφέρει περιοδική καταβολή χρημάτων, όπως μια μετοχή χωρίς μέρισμα ή ένα ακίνητο χωρίς ενοίκιο, τότε ισχύει ότι η τιμή του δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την διαφορά ανάμεσα στην τιμή S_0 και την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης K, δηλαδή ισχύει

$$C^E \text{ή } C^A \geq S_0 - K * e^{-r_f T}$$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει το αντίθετο δηλαδή ότι C^Eή C^A $(έστω\ C) \leq S_0 - K * e^{-r_f T}$, άρα ισχύει ότι $-C + S_0 - K * e^{-r_f T} > 0$, τότε είναι εύκολο ένας επενδυτή να βγάλει *κέρδος χωρίς κίνδυνο*, δηλαδή να κάνει *arbitrage,*με τις εξής κινήσεις:

Την χρονική στιγμή 0 ο επενδυτής αγοράζει το δικαίωμα αγοράς και πληρώνει $-C$, και προχωράει σε *ανοικτή πώληση (Short Sell)* της μετοχής, εισπράττοντας S_0. Τέλος, δανείζει $-K * e^{-r_f T}$ και, με βάση την αρχική υπόθεση, αυτές οι κινήσεις δίνουν θετικό αποτέλεσμα ίσο με $-C + S_0 - K * e^{-r_f T} > 0$.

Στην ημερομηνία λήξης T υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν $S_T > K$ τότε ο επενδυτής εξασκεί το δικαίωμα και εισπράττει $+S_T - K$, επιστρέφει την μετοχή που είχε πουλήσει και άρα δίνει $-S_T$, και του επιστρέφονται από το δάνειο K, οπότε το αποτέλεσμα της κίνησης είναι $+S_T - K - S_T + K = 0$, άρα ο επενδυτής δεν έχει ζημιά.
- Αν $S_T \leq K$ τότε ο επενδυτής δεν εξασκεί το δικαίωμα και η αξία του είναι μηδενική, αγοράζει την μετοχή, με σκοπό να την επιστρέψει, στην αγοραία τιμή και άρα έχει χρηματορροή $-S_T$, και τέλος εισπράττει ποσό ίσο με K από το ποσό που είχε προσφέρει ως δάνειο, οπότε το αποτέλεσμα είναι $-S_T + K > 0$, με τον επενδυτή να αποκομίζει κέρδος.

Σχηματικά τα παραπάνω ενδεχόμενα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2.

Πίνακας 1.2

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Χρόνος T**	
		$S_T > K$	$S_T \leq K$
Αγορά δικ.	$-C^E$	$S_T - K$	0
Δανειοδότηση	$K * e^{-r_f T}$	$+K$	$+K$
Πώληση μετοχής	$+S_0$	$-S_T$	$-S_T$
Καθ.Ταμ.Ροή	>0	0	$K - S_T \geq 0$

Σε μια αποτελεσματική αγορά δεν γίνεται ένας επενδυτής να βγάζει κέρδος χωρίς κίνδυνο, οπότε αποδείχτηκε ότι ισχύει το κάτω φράγμα $C \geq S_0 - K * e^{-r_f T}$.

Τέλος, αφού το χειρότερο πιθανό σενάριο για ένα δικαίωμα αγοράς είναι να λήξει χωρίς αξία, η αξία του δεν μπορεί να είναι αρνητική, και άρα το τελικό κάτω φράγμα για τα δικαιώματα αγοράς χωρίς μερίσματα είναι

$$C^E ή\ C^A \geq \max\,[0, S_0 - K * e^{-r_f T}] \tag{1.2}$$

1.5.2.2 Δικαιώματα πώλησης χωρίς καταβολή μερίσματος (ή ενοικίου)

Θεώρημα 1.4: Κάτω φράγμα Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης χωρίς μέρισμα
Για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης που δεν καταβάλλουν μέρισμα μία αναγκαία συνθήκη είναι η τιμή τους να είναι μεγαλύτερη από το μέγιστο του μηδενός ή την διαφορά της παρούσας αξία της τιμής εξάσκησης K και της τιμής S_0, δηλαδή να ισχύει ότι

$$P^E \geq \max\,[0, K * e^{-r_f T} - S_0]. \tag{1.3}$$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει το αντίθετο δηλαδή ότι $P^E < K * e^{-r_f T} - S_0$, που συνεπάγεται ότι ισχύει $+ K * e^{-r_f T} - C - S_0 > 0$, τότε είναι εύκολο ένας επενδυτή να βγάλει *κέρδος χωρίς κίνδυνο*, δηλαδή να κάνει *arbitrage,* όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.3

Πίνακας 1.3

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Χρόνος T**	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
Αγορά δικ.	$-P^E$	0	$+K - S_T$
Δανειοληψία	$+ K * e^{-r_f T}$	$-K$	$-K$
Αγορά μετοχής	$-S_0$	S_T	S_T
Καθ.Ταμ.Ροή	>0	$S_T - K \geq 0$	0

Σύμφωνα με τον Πίνακα 1.3, αν σήμερα ένας επενδυτής πάρει ένα δάνειο αξίας $+ K * e^{-r_f T}$ και έπειτα αγοράσει ένα δικαίωμα και μία μετοχή στις τωρινές τιμές, τότε στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος T μπορεί είτε να έχει κέρδος ίσο με $S_T - K \geq 0$, αν $S_T \geq K$, με το δικαίωμα να μην εξασκείται ή στην χειρότερη περίπτωση να μην έχει ζημία, αν $S_T < K$, όταν και εξασκείται το δικαίωμα.

Οπότε είναι φανερό ότι δεν γίνεται να ισχύει η ανίσωση $P^E < K * e^{-r_f T} - S_0$, λόγω της υπόθεσης απουσίας κέρδους χωρίς κίνδυνο, οπότε σαν κάτω φράγμα ενός δικαιώματος πώλησης χωρίς μέρισμα ορίζεται το $P^E \geq K * e^{-r_f T} - S_0$.

Παρατήρηση 1.5: Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ένα δικαίωμα πώλησης «γραμμένο» πάνω σε μια μετοχή χωρίς μέρισμα δύναται να πωλείται κάτω από την εσωτερική του αξία την χρονική στιγμή 0, η οποία είναι $K - S_0$, αφού το κάτω φράγμα ορίστηκε ως $K * e^{-r_f T} - S_0$ και ισχύει ότι $K * e^{-r_f T} - S_0 < K - S_0$.

Θεώρημα 1.5: Κάτω φράγμα Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης χωρίς μέρισμα
Όσο αναφορά το κάτω φράγμα των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης χωρίς την καταβολή μερίσματος ισχύει ο πιο αυστηρός ορισμός $P^A \geq max\{0, K - S_0\}$, δηλαδή ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης δεν είναι δυνατόν να πουληθεί κάτω από την εσωτερική του αξία.

Σε περίπτωση που δεν ίσχυε η ανισότητα $P^A \geq K - S_0$, αλλά το ανάποδο, δηλαδή ίσχυε $P^A < K - S_0$, που σημαίνει ότι $-P^A + K - S_0 > 0$, τότε ένας επενδυτής θα μπορούσε να επιτύχει arbitrage αν στον χρόνο $t = 0$ προβεί στις εξής κινήσεις:

- Αγορά ενός Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης στην τιμή P^A, με χρηματορροή ίση με $-P^A$, και μία μετοχή με καταβολή του ποσού S_0.
- Την αμέσως επόμενη στιγμή εξασκεί το δικαίωμα που αγόρασε και εισπράττει K.

Τότε η συνολική χρηματορροή είναι $K - S_0 - P^A$, που σύμφωνα με την υπόθεση είναι αυστηρά θετική, οπότε και ο επενδυτής έβγαλε κέρδος χωρίς κίνδυνο. Οπότε η ανισότητα απορρίπτεται και η ανάλυση καταλήγει ότι για την τιμή του κάτω φράγματος της τιμής του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης πρέπει να ισχύει η ανισότητα $P^A \geq \max\{0, K - S_0\}$, καθώς, όπως και κανένα δικαίωμα που έχει παρουσιαστεί ήδη, δεν γίνεται να έχει αρνητική τιμή.

Παρατήρηση 1.6: Το συγκεκριμένο arbitrage μπορεί να επιτευχθεί μόνο με Αμερικάνικα δικαιώματα γιατί τα Ευρωπαϊκά δεν μπορούν να εξασκηθούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή αλλά μόνο στην ημερομηνία λήξης T.

1.5.2.3 Δικαιώματα αγοράς που καταθέτουν μέρισμα (ή ενοίκιο)

Οι περισσότεροι τίτλοι, πάνω στους οποίους «γράφονται» τα δικαιώματα, προσφέρουν περιοδικές χρηματορροές προς τους κατόχους τους ανά τακτά χρονικά διαστήματα, όπως για παράδειγμα οι μετοχές δίνουν μερίσματα ή τα ακίνητα προσφέρουν ενοίκια στους ιδιοκτήτες.

Θεώρημα 1.6: Κάτω φράγμα Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με μέρισμα
Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που δημιουργείται σήμερα, δηλαδή την χρονική στιγμή 0, θα καταβάλλει αυστηρά μέχρι την ημερομηνία λήξης T του ένα μέρισμα, που η ***<u>μεγαλύτερη τιμή</u>*** *που μπορεί να λάβει συμβολίζεται ως $\bar{M}$, και θα καταβληθεί στην χρονική στιγμή $t_1 < T$. Τότε η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς έχει ως κατώτατο φράγμα*

$$C^E \geq max\{0, S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M} * e^{-r_f t_1}\}. \tag{1.4}$$

Απόδειξη

Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν $C^E < S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M} * e^{-r_f t_1}$ που σημαίνει ότι ισχύει $-C^E + S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M} * e^{-r_f t_1} > 0$, ένας επενδυτής μπορεί να επιτύχει arbitrage με τις κινήσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.4.

Πίνακας 1.4

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Χρόνος t_1**	**Χρόνος T**	
			$S_T > K$	$S_T \leq K$
Αγορά δικ.	$-C^E$		$S_T - K$	0
Δανειοδότηση	$-K * e^{-r_f T}$		$+K$	$+K$
Πώληση μετοχής	$+S_0$	$-M$	$-S_T$	$-S_T$
Δανειοδότηση	$-\bar{M} * e^{-r_f t_1}$	$+\bar{M}$		
Καθ.Ταμ.Ροή	> 0	≥ 0	0	≥ 0

Βασική επισήμανση αποτελεί το γεγονός ότι αφού $\bar{M}$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του μερίσματος ισχύει ότι στον χρόνο t_1 η ποσότητα $\bar{M} - M$ δεν μπορεί να είναι αρνητική, και για τον λόγο αυτό υπάρχει το σίγουρο κέρδος χωρίς κίνδυνο σε όλες τις περιπτώσεις, επιβεβαιώνοντας με το τρόπο αυτό το κάτω φράγμα $C^E \geq \max\{0, S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M} * e^{-r_f t_1}\}$.

Παρατήρηση 1.7: Σέ περίπτωση δύο μερισμάτων με τις ανώτατες δυνατές τιμές $\bar{M}_1$ και $\bar{M}_2$ αντίστοιχα το κάτω φράγμα γίνεται

$$C^E \geq \max\{0, S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_2}\}.$$

Παρατήρηση 1.8: Μία πολύ σημαντική επισήμανση αποτελεί το γεγονός ότι ο παραπάνω τύπος δείχνει ότι τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς μπορεί να πωλούνται σε τιμή κάτω από την εσωτερική αξία τους, αφού δύναται σε κάποιες περιπτώσεις το παραπάνω φράγμα να βρίσκεται κάτω από την εσωτερική αξία $S_0 - K$, μόνο στην περίπτωση που η υποκείμενη αξία δίνει μέρισμα ή ενοίκιο.

Θεώρημα 1.7: Κάτω φράγμα Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με μέρισμα
Όσο αφορά τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς, που αφορούν μία μετοχή με δύο μερίσματα, με ***ανώτατες δυνατές τιμές*** $\bar{M}_1$ *και* $\bar{M}_2$*, που καταβάλλονται τις χρονικές στιγμές* $t_1 < t_2 < T$*, το κάτω φράγμα της τιμής του δικαιώματος* C^A *δίνεται από τον τύπο*

$$C^A = max \begin{cases} 0 \\ S_0 - K * e^{-r_f t_1} \\ S_0 - K * e^{-r_f t_2} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} \\ S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_2 * e^{-r_f t_2} \end{cases} \quad (1.5)$$

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι αρκετά σημαντική και θα αναλυθεί περεταίρω καθώς στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδειχτεί η βέλτιστη στιγμή πρόωρης εξάσκησης ενός Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με μέρισμα, και για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιηθεί το συγκεκριμένο κάτω φράγμα.

Αρχικά είναι απαραίτητη η παρουσίαση των κινήσεων που θα οδηγούσαν σε arbitrage αν δεν ισχύει ο παραπάνω τύπος, κινούμενοι σε κάθε σημείο της συνάρτησης μεγιστοποίησης που παρουσιάστηκε.

Έστω ότι $C^A < S_0 - K * e^{-r_f t_1}$, δηλαδή $-C^A + S_0 - K * e^{-r_f t_1} > 0$. Τότε το κέρδος χωρίς κίνδυνο επιτυγχάνεται με τις κινήσεις που δηλώνονται στον Πίνακα 1.5.

Πίνακας 1.5

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Ακριβώς πριν το μέρισμα την στιγμή t_1**
Αγορά δικ.	$-C^A$	Άσκηση δικαιώματος αγοράς: Κτήση μετοχής και καταβολή $-K$.
Δανειοδότηση	$- K * e^{-r_f T}$	$+K$
Πώληση μετοχής	$+S_0$	Επιστροφή της μετοχής στον κάτοχο και κλείσιμο της θέσης πώλησης.
Καθ.Ταμ.Ροή	> 0	0

Με τις παραπάνω κινήσεις ο επενδυτής πετυχαίνει arbitrage και επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει η ανίσωση $C^A < S_0 - K * e^{-r_f t_1}$.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ο τρόπος του arbitrage αν δεν ισχύει ο τέταρτος κλάδος της συνάρτησης max για το κάτω φράγμα του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με δύο μερίσματα, δηλαδή αν ισχύει $C^A < S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_2 * e^{-r_f t_2}$, που σημαίνει ότι $-C^A + S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_2 * e^{-r_f t_2} > 0$. Οι κινήσεις που πρέπει να κάνει ο επενδυτής στην περίπτωση αυτή παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.6.

Πίνακας 1.6

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Χρόνος t_1**	**Χρόνος t_2**	**Χρόνος T**	
				$S_T > K$	$S_T \leq K$
Αγορά δικ.	$-C^A$			$S_T - K$	0
Πώληση μετο.	S_0	$-M_1$	$-M_2$	$-S_T$	$-S_T$
Δανειοδότηση	$-\bar{M}_1 * e^{-r_f t_1}$	$+\bar{M}_1$			
Δανειοδότηση	$-\bar{M}_2 * e^{-r_f t_2}$		$+\bar{M}_2$		
Δανειοδότηση	$-K * e^{-r_f T}$			K	K
Καθ.Ταμ.Ροή	> 0	≥ 0	≥ 0	0	$K - S_T > 0$

Συμπεραίνεται ότι ισχύει και ο τέταρτος κλάδος της συνάρτησης του κάτω φράγματος. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ο τρίτος κλάδος, δηλαδή ότι πρέπει να ισχύει η ανίσωση $C^A < S_0 - K * e^{-r_f t_2} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1}$, αν η τιμή του συγκεκριμένου κλάδου είναι η μεγαλύτερη από τις τέσσερις ποσότητες που περιέχονται στην συνάρτηση max.

Με σκοπό να γίνει καλύτερα κατανοητό το παραπάνω κάτω φράγμα, θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2: Κάτω φράγμα Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με μέρισμα

Έστω ότι η μετοχή της εταιρείας X είχε τιμή στις 17 Μαρτίου 10.6€ και το δικαίωμα του Αυγούστου σε τιμή εξάσκησης τα 10.2€ τιμολογούνταν στα 0.52€. Το τελευταίο ποσό μερίσματος ήταν στις 15 Ιανουαρίου και είχε ύψος 0.11€ ανά μετοχή. Το δικαίωμα αγοράς αυτό λήγει στις 20 Αυγούστου και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 6%. Θα δοθούν δυο μερίσματα ως την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, ένα στις 16 Απριλίου και ένα στις 11 Ιουλίου, τα μεγαλύτερα εκτιμώμενα δυνατά μερίσματα που μπορεί να δοθούν είναι 0.12€ και 0.15€ ανά μετοχή αντίστοιχα.

Αυτό σημαίνει ότι $S_0 = 10.6, K = 10.2, T = 154\, ημέρες = 0.4278\, του\ έτους, t_1 = 30\, ημέρες = 0.0834\, του\ έτους, t_2 = 114\, ημέρες = 0.3167\, του\ έτους, r_f = 6\% = 0.06, \bar{M}_1 = 0.12€\ και\ \bar{M}_2 = 0.15€$.

Με βάση τον τύπο που παρουσιάστηκε το κάτω φράγμα του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς πρέπει να είναι το μεγαλύτερο από τα:

a. $\mathbf{0}$.

b. $S_0 - K * e^{-r_f t_1} = 10.6 - 10.2 * e^{-0.06*0.0834} = 10.6 - 10.2 * e^{-0.005004} = 10.6 - 10.2 * 0.995 = 10.6 - 10.149 = \mathbf{0.451}$.

c. $S_0 - K * e^{-r_f t_2} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} = 10.6 - 10.2 * e^{-0.06*0.3167} - 0.12 * e^{-0.06*0.0834} = 10.6 - 10.2 * e^{-0.019002} - 0.12 * e^{-0.005004} = 10.6 - 10.2 * 0.9811 - 0.12 * 0.995 = 10.6 - 10 - 0.1194 = \mathbf{0.4806}$.

d. $S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_2 * e^{-r_f t_2} = 3.6 - 3.2 * e^{-0.06*0.4278} - 0.12 * e^{-0.06*0.0834} + 0.06 * e^{-0.06*0.3167} = 10.6 - 10.2 * e^{-0.02566} - 0.12 * e^{-0.005004} - 0.15 * e^{-0.019002} = 10.6 - 10.2 * 0.9746 - 0.12 * 0.995 - 0.15 * 0.9811 = 10.6 - 9.94 - 0.1194 - 0.1471 = \mathbf{0.3935}$.

Το μεγαλύτερο από τα τέσσερα είναι το (c), που είναι ίσο με 0.4806, οπότε αυτό είναι το κάτω φράγμα της C^A.

Αφού $C^A = 0.52 > 0.4806$, τότε δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

Αν η τιμή C^A ήταν μικρότερη από 0.4806 τότε θα υπήρχαν ευκαιρίες για arbitrage και για να ελεγχθεί η παραπάνω διαπίστωση ας γίνει η υπόθεση ότι $C^A = 0.42$ αντί για 0.52. Στην περίπτωση αυτή ο Πίνακας 1.7 δείχνει τις κινήσεις του επενδυτή για να καταφέρει κέρδος χωρίς κίνδυνο, παραβιάζοντας την υπόθεση $C^A < S_0 - K * e^{-r_f t_2} - \overline{M}_1 * e^{-r_f t_1}$.

Πίνακας 1.7

17 Μαρτίου		**16 Απριλίου**	**10 Ιουλίου**	
			$S_{t_2} > 10.2$	$S_{t_2} < 10.2$
Αγορά δικ.	-0.42		$S_{t_2} - 10.2 + A.X$	$C_{t_2}^A$
Δανειοδότηση	-10		$+10.2$	$+10.2$
Πώληση μετοχής	$+10.6$	$-M_1$	$-S_{t_2}$	$-S_{t_2}$
Δανειοδότηση	-0.1194	0.12		
Καθ.Ταμ.Ροή	0.0606	≥ 0	$A.X \geq 0$	≥ 0

Όπου $A.X = A\xi\acute{\iota}\alpha\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon$ ή $\Upsilon\pi\varepsilon\rho\alpha\xi\acute{\iota}\alpha(Tive\ Value)$.

Παρατήρηση 1.9: Για να πραγματοποιηθεί το παραπάνω arbitrage πρέπει το δικαίωμα να εξασκηθεί ακριβώς την προηγούμενη μέρα πριν την αποκοπή του δεύτερου μερίσματος, δηλαδή στις 10 Ιουλίου, και στην περίπτωση αυτή δεν δημιουργούνται ταμειακές εκροές σε καμιά χρονική στιγμή. Αναλυτικότερα στην ημερομηνία δημιουργίας του δικαιώματος στις 17 Μαρτίου δηλαδή, ο επενδυτής έχει ταμειακή εισροή 0.0606€. Επίσης, αφού το μέγιστο δυνατό μέρισμα που θα μπορούσε να δοθεί στις 16 Απριλίου ήταν 0.12€ τότε η ποσότητα $0.12 - M_1$ είναι είτε μηδέν αν το πραγματικό καταβλητέο μέρισμα $M_1 = 0.12$, δηλαδή αν δόθηκε το μεγαλύτερο δυνατό μέρισμα, ή θετική, αν $M_1 < 0.12$, άρα μπορεί να υπάρχει και άλλη ταμειακή εισροή την ημερομηνία αυτή.

Επίσης, αν η τιμή της μετοχής την τελευταία μέρα πριν την καταβολή του μερίσματος, δηλαδή στις 10 Ιουλίου, είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης, δηλαδή αν $S_{t_2} > 10.2$, τότε ο επενδυτής μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα και να έχει μηδενική ταμειακή ροή, ή ακόμα υπάρχει η πιθανότητα το δικαίωμα να έχει ακόμα κάποια Αξία Χρόνου (Time Value), οπότε ο επενδυτής να καταφέρει να το πουλήσει και να εισπράξει και την εσωτερική του αξία και την αξία χρόνου, άρα θετική ταμειακή εισροή. Επιπρόσθετα, αν στις 10 Ιουλίου η τιμή είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης, $S_{t_2} < 10.2$, τότε πάλι υπάρχει θετική ταμειακή ροή. Για παράδειγμα αν $S_{t_2} = 9.9$ τότε υπάρχει θετική ροή ίση με 0.3 συν την υπεραξία που απομένει στο δικαίωμα, δηλαδή η ροή είναι ίση με $C_{t_2}^A + 10.2 - 9.9 = C_{t_2}^A + 0.3$.

Παρατήρηση 1.10: Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς που βρίσκεται εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου(In the money) έχει πάντα υπεραξία, εκτός από λίγο πριν την ημερομηνία αποκοπής του μερίσματος ή την ημερομηνία λήξης του, και δεν θα εξασκηθεί ποτέ πρόωρα εκτός από μια ημέρα πριν αποκόψει το μέρισμα.

1.5.2.4 Δικαιώματα πώλησης με καταβολή μερίσματος (ή ενοικίου)

Η βασική διαφορά στον υπολογισμό του κάτω φράγματος των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης στην περίπτωση που η μετοχή παρέχει μερίσματα είναι το γεγονός ότι το κάτω φράγμα είναι μεγαλύτερο αφού προστίθεται στο φράγμα αυτό η παρούσα αξία του μικρότερου μερίσματος που ο επενδυτής πιστεύει ότι θα πληρώσει. Η παραπάνω διαπίστωση είναι αναμενόμενη αν αναλογιστεί κανείς το γεγονός ότι την ημερομηνία αποκοπής του μερίσματος η τιμή της μετοχής πέφτει κατά το ύψος του μερίσματος, που είναι μια θετική εξέλιξη για ένα δικαίωμα πώλησης, αφού ο επενδυτής επιθυμεί όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή της μετοχής στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Θεώρημα 1.8: Κάτω φράγμα Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με μέρισμα
*Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαιώμα πώλησης που θα καταβάλλει μέχρι την ημερομηνία λήξης T του ένα μέρισμα, που θα είναι **τουλάχιστον ίσο** με $\widetilde{M}$ στην χρονική στιγμή $t_1 < T$. Τότε η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης έχει ως κατώτατο φράγμα*

$$P^E \geq max\{0, K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M} * e^{-r_f t_1}\}. \qquad (1.6)$$

Η ανίσωση αυτή αποδεικνύεται πάλι με την δημιουργία μιας κατάστασης στην οποία υπάρχει κέρδος χωρίς κίνδυνο και παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.8. Έστω δηλαδή ότι ισχύει $P^E < K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M} * e^{-r_f t_1}$ δηλαδή ότι $-P^E + K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M} * e^{-r_f t_1} > 0$.

Πίνακας 1.8

Χρονική στιγμή $t = 0$		**Χρόνος t_1**	**Χρόνος T**	
			$S_T \geq K$	$S_T < K$
Αγορά δικ.	$-P^E$		0	$+K - S_T$
Δανειοληψία	$+K * e^{-r_f T}$		$-K$	$-K$
Αγορά μετοχής	$-S_0$	$+M$	S_T	S_T
Δανειοληψία	$+\widetilde{M} * e^{-r_f t_1}$	$-\widetilde{M}$		
Καθ.Ταμ.Ροή	> 0	≥ 0	$S_T - K \geq 0$	0

Εφόσον το μικρότερο δυνατό μέρισμα που θα λάβει ο επενδυτής είναι $\widetilde{M}$ τότε η διαφορά $M - \widetilde{M}$ δεν γίνεται να είναι αρνητική, και βλέπουμε ότι και στον χρόνο T ο επενδυτής μπορεί να έχει μόνο θετικά αποτελέσματα, οπότε έχει καταφέρει κέρδος χωρίς κίνδυνο.

Αφού είναι ήδη γνωστό ότι ένα δικαίωμα προαίρεσης δεν μπορεί να έχει αρνητική τιμή αποδείχθηκε τελικά το κάτω φράγμα για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης που είναι ίσο με $P^E \geq \max\{0, K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M} * e^{-r_f t_1}\}$.

Παρατήρηση 1.11: Σε περίπτωση που η μετοχή καταβάλλει δύο μερίσματα, των οποίων **οι κατώτατες τιμές** είναι $\widetilde{M}_1 και\ \widetilde{M}_2$, τις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < T$ αντίστοιχα, ο τύπος του κατώτατου φράγματος γίνεται

$$P^E \geq \max\{0, K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_2 * e^{-r_f t_2}\}.$$

Θεώρημα 1.9: Κάτω φράγμα Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης με μέρισμα
Στην περίπτωση των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης, πάνω σε μία μετοχή με δύο μερίσματα, με κατώτατες τιμές $\widetilde{M}_1$ και $\widetilde{M}_2$, τις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < T$, το κάτω φράγμα της τιμής του δικαιώματος P^A δίνεται από τον τύπο

$$P^A = max\begin{cases} 0 \\ K - S_0 \\ K * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} - S_0 \\ K * e^{-r_f t_2} + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_2 * e^{-r_f t_1} - S_0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

1.5.3 Ισοδυναμία αξίας δικαιωμάτων (Put-Call Parity)

Είναι αξιοσημείωτο ότι έχει υπολογιστεί μια σχέση που εξισώνει την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης [2], όταν αυτά τα δύο παράγωγα έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης και την ίδια τιμή εξάσκησης. Η εξίσωση αυτή, που δίνει την δυνατότητα υπολογισμού της τιμής ενός δικαιώματος πώλησης αν είναι γνωστή η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς *ceteris paribus*, είναι γνωστή ως ισοδυναμία δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (Put-Call Parity) και υπολογίζεται ως

$$C^E + K * e^{-r_f T} = P^E + S_0 \tag{1.8}$$

ενώ γίνεται να υπολογιστούν και συγκεκριμένα φράγματά για την τιμή των Αμερικάνικων δικαιωμάτων ως

$$S_0 - K \leq C^A - P^A \leq S_0 - K * e^{-r_f T} \tag{1.9}$$

Στην περίπτωση της ύπαρξης μερίσματος M τότε η εξίσωση (1.8) για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα μεταβάλλεται ως

$$C^E + M + K * e^{-r_f T} = P^E + S_0 \tag{1.10}$$

και υπολογίζονται τα φράγματα για την διαφορά της τιμής για τα Αμερικάνικα δικαιώματα $C^A - P^A$ ως

$$S_0 - M - K \leq C^A - P^A \leq S_0 - K * e^{-r_f T}. \tag{1.11}$$

1.6 Πρόωρη εξάσκηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων

Έχει ήδη αναφερθεί ότι η βασική διαφορά των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων σε σχέση με τα Αμερικάνικα είναι το γεγονός ότι τα τελευταία μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος T , ενώ τα Ευρωπαϊκά μόνο στην ημερομηνία λήξης. Είναι όμως σημαντικό να αναλυθούν κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την πρόωρη εξάσκηση των δικαιωμάτων Αμερικάνικου τύπου, αγοράς και πώλησης.

1.6.1 Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς

Τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς έχουν πάντα υπεραξία ή αξία χρόνου και για τον λόγο αυτόν ένας κάτοχος που θα πουλήσει το δικαίωμα εισπράττει περισσότερα χρήματα, αφού η τιμή που το πουλάει περιέχει και την εσωτερική αξία και την αξία χρόνου, σε σχέση με εκείνον που θα το εξασκήσει και εισπράττει μόνο την εσωτερική αξία.

Με έναν απλό συλλογισμό αποδεικνύεται ότι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς πάνω σε μετοχή χωρίς μέρισμα δεν εξασκείται ποτέ πρόωρα. Αρχικά αν το δικαίωμα βρίσκεται εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου (In the money), δηλαδή $S_T > K$, και ο επενδυτής το ασκήσει θα πληρώσει K για μετοχές που εκείνη στιγμή αξίζουν S_T, δηλαδή θα έχει κέρδος $S_T - K$. Αν όμως το πουλήσει έχει αποδειχθεί ότι θα εισπράξει $S_T - K * e^{-r_f T}$, και με τον τρόπο αυτό θα έχει μεγαλύτερο κέρδος. Αν αντίθετα το δικαίωμα είναι εκτός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου (Out of the money), όπου $S_T < K$, τότε ο επενδυτής δεν θα εξασκήσει πρόωρα καθώς δεν έχει νόημα να πληρώσει K για μία μετοχή που έχει χαμηλότερη τιμή S_T.

Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς που δεν δίνει μέρισμα δεν εξασκείται σε καμία περίπτωση πρόωρα, και άρα έχει ίδια τιμή με ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς χωρίς μέρισμα.

Αντίθετα, όπως θα αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 2, ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς είναι συμφέρον να εξασκηθεί πρόωρα μόνο την τελευταία ημέρα πριν την καταβολή μερίσματος. Η μόνη παρατήρηση που αξίζει να αναφερθεί, προς το παρόν, είναι ότι η πιθανότητα πρόωρης εξάσκησης ενός δικαιώματος τέτοιου τύπου αυξάνεται:

- Όσο αυξάνεται το αναμενόμενο μέρισμα.
- Όσο μειώνεται το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
- Όσο χαμηλότερη είναι η τιμή εξάσκησης K.
- Όσο περισσότερο εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου βρίσκεται, δηλαδή όσο μικρότερο είναι το S_T σε σχέση με το K.
-

1.6.2 Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης

Ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικάνικου τύπου που είναι εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου (In the money) συχνά είναι βέλτιστο να εξασκείται πρόωρα αντί να πωλείται, καθώς αν γίνει η υπόθεση ότι ένας επενδυτής πιστεύει ακράδαντα ότι κατά την ημερομηνία λήξης το δικαίωμα θα έχει τιμή χαμηλότερη από την τιμή εξάσκησης και άρα θα αποτιμάται στην εσωτερική του αξία έχει τρεις επιλογές, είτε να το εξασκήσει είτε να το πουλήσει είτε να το κρατήσει περαιτέρω.

Αρχικά, δεν αποτελεί βέλτιστη επιλογή να το κρατήσει σε σχέση με την άσκηση, καθώς αν το εξασκήσει εισπράττει ποσό K σήμερα, και το επενδύει άμεσα για να κερδίσει τόκους, που χάνει αν περιμένει μέχρι την ημερομηνία λήξης.

Επίσης, αν όλοι οι επενδυτές συμφωνούν ότι δεν γίνεται να λήξει το δικαίωμα εκτός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου (Out of the money), τότε κανείς δεν θα θέλει να το αγοράσει στην εσωτερική του αξία $K - S_T$ για να το κρατήσει, που σημαίνει ότι υπάρχει η περίπτωση ο κάτοχος ενός τέτοιου δικαιώματος να μην μπορεί να το πουλήσει στην εσωτερική του αξία.

Συνοπτικά, η πρόωρη εξάσκηση Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης είναι πιθανότερη:

- Όσο αυξάνεται η τιμή εξάσκησης K.
- Όσο αυξάνεται το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
- Όσο χαμηλότερη είναι η τιμή της μετοχής S_T.
- Όσο μικρότερη είναι η υπεραξία/αξία χρόνου του δικαιώματος.

Τέλος, όσο αφορά την επίδραση των μερισμάτων, είναι φανερό ότι τα τελευταία μειώνουν την πιθανότητα πρόωρης εξάσκησης. Ένας βασικός λόγος της παραπάνω παρατήρησης είναι ότι έχει αποδειχτεί ότι τα μερίσματα αυξάνουν το κάτω φράγμα των δικαιωμάτων αυτών. Επιπλέον, αν υπάρχουν μερίσματα, υπάρχει η περίπτωση ένας κάτοχος δικαιώματος πώλησης να σκεφτεί να εισπράξει ένα μέρισμα πριν προβεί στην άσκηση του δικαιώματος και την πώληση της μετοχής, που σημαίνει γενικότερα, ότι αν η παρούσα αξία του επόμενου μερίσματος υπερβαίνει την παρούσα αξία του τόκου από το ποσό K, που υπολογίζεται για χρονικό διάστημα από σήμερα ως την ημερομηνία αποκοπής του επόμενου μερίσματος, ο επενδυτής είναι λογικό να περιμένει την είσπραξη του μερίσματος.

1.7 Περίληψη Κεφαλαίου 1

Στην αρχή του εισαγωγικού κεφαλαίου παρουσιάστηκαν τρεις εισαγωγικές εννοείς που θα χρειαστούν σε ολόκληρη την εργασία, όπως το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, ο συνεχής ανατοκισμός και οι ανοικτές πωλήσεις. Στην συνέχεια ορίστηκαν τα δικαιώματα προαίρεσης, δηλαδή τα δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου, και υπολογίστηκαν ανώτατα και κατώτατα φράγματα για τις τιμές των παραπάνω δικαιωμάτων, είτε οι υποκείμενοι τίτλοι που αφορούν καταβάλλουν μέρισμα είτε όχι, τα οποία και παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 1.9. Τέλος έγινε μια πρώτη επαφή με την έννοια της πρόωρης εξάσκησης των Αμερικάνικων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, που θα παρουσιαστεί περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο με την βοήθεια και του διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης.

Πίνακας 1.9

Είδος δικαιώματος	Άνω φράγμα	Κάτω φράγμα
Ευρωπαϊκό Δ.Α.Χ.Μ	$C^E \leq S_0$	$C^E \geq \max\,[0, S_0 - K * e^{-r_f T}]$
Αμερικάνικο Δ.Α.Χ.Μ	$C^A \leq S_0$	$C^A \geq \max\,[0, S_0 - K * e^{-r_f T}]$
Ευρωπαϊκό Δ.Α.Μ.Μ	$C^E \leq S_0$	$C^E \geq \max\{0, S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_2}\}$
Αμερικάνικο Δ.Α.Μ.Μ	$C^A \leq S_0$	$C^A = max \begin{cases} 0 \\ S_0 - K * e^{-r_f t_1} \\ S_0 - K * e^{-r_f t_2} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} \\ S_0 - K * e^{-r_f T} - \bar{M}_1 * e^{-r_f t_1} - \bar{M}_2 * e^{-r_f t_2} \end{cases}$
Ευρωπαϊκό Δ.Π.Χ.Μ	$P^E \leq K * e^{-r_f T}$	$P^E \geq \max\{0, K * e^{-r_f T} - S_0\}$
Αμερικάνικο Δ.Π.Χ.Μ	$P^A \leq K$	$P^A \geq \max\{0, K - S_0\}$
Ευρωπαϊκό Δ.Π.Μ.Μ	$P^E \leq K * e^{-r_f T}$	$P^E \geq \max\{0, K * e^{-r_f T} - S_0 + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_2 * e^{-r_f t_2}\}$
Αμερικάνικο Δ.Π.Μ.Μ	$P^A \leq K$	$P^A = max \begin{cases} 0 \\ K - S_0 \\ K * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} - S_0 \\ K * e^{-r_f t_2} + \widetilde{M}_1 * e^{-r_f t_1} + \widetilde{M}_2 * e^{-r_f t_1} - S_0 \end{cases}$

Όπου υπάρχουν οι εξής συμβολισμοί $Δ.Α = δικαίωμα\ αγοράς, Χ.Μ = χωρίς\ μέρισμα, Δ.Π = δικαίωμα\ πώλησης, Μ.Μ = με\ μέρισμα.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το Διωνυμικό Μοντέλο Τιμολόγησης

Για την τιμολόγηση των παραγωγών κατοικιών, τα οποία θα αναλυθούν στην συγκεκριμένη εργασία, θα χρησιμοποιηθεί το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο, που αποτελεί μια προέκταση του απλού διωνυμικού μοντέλου, και άρα είναι θεμιτό αρχικά να παρουσιαστούν, στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, ορισμένες ιδιότητες του μονομεταβλητού διωνυμικού μοντέλου τιμολόγησης παραγώγων.

2.1 Εισαγωγικές στατιστικές έννοιες

Για την ανάλυση όμως του απλού διωνυμικού μοντέλου απαιτούνται η τιμολόγηση ουδέτερου κινδύνου και ο ορισμός των Martingales, οπότε αρχικά πρέπει να οριστούν συγκεκριμένες εισαγωγικές έννοιες.

Ορισμός 2.1: Χώρος πιθανότητας

Ένας χώρος πιθανότητας (probability space) ορίζεται κάτω από το $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ όπου :

- *Το Ω είναι ένα μη-κενό σετ, και καλείται δειγματικός χώρος (sample space), που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος.*
- *Το $\mathcal{F}$ είναι η σ-άλγεβρα όλων των υποκατηγοριών (subsets) του Ω.*
- *Το $\mathcal{P}$ είναι το μέτρο πιθανότητας στο $(\Omega, \mathcal{F})$ που δίνει σε κάθε σετ $A \in \mathcal{F}$ έναν αριθμό $P(A) = [0,1]$, που αντικατοπτρίζει την πιθανότητα το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος να ανήκει στο A.*

Ορισμός 2.2: Σ-άλγεβρα

Μια $\Sigma - άλγεβρα$ είναι μια συλλογή $\mathcal{F}$ από υποκατηγορίες (subsets) του Ω με τις εξής ιδιότητες

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \text{ που συνεπάγεται ότι } A^C \in \mathcal{F} \\ A_1, A_{2\ldots} \text{ είναι μια σειρά από υποδιαστήματα στο } \mathcal{F} \end{cases}$$

Είναι πολύ σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι η $\Sigma - άλγεβρα$ μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει όλη την σχετική πληροφορία μιας τυχαίας μεταβλητής.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν οι ορισμοί για τα Martingales καθώς και η τιμολόγηση μέσω arbitrage [3].

2.1.1Martingales

Ορισμός 2.3: Martingales

Ένα martingale σε σχέση με ένα μέτρο πιθανότητας Q, ορίζεται ως:

$$E^Q[X_{t+s}|I_t] = X_t, \qquad \text{για όλα } s > 0.$$

Ως I_t ορίζεται το σετ πληροφορίας που επηρεάζει την στοχαστική διαδικασία X. Με άλλα λόγια, η παραπάνω μέση τιμή παρουσιάζει με μαθηματικό τρόπο την εξής πρόταση:

Σε έναν συγκεκριμένο χρόνο t, με μια στοχαστική διαδικασία X, κάτω από ένα δεδομένο μέτρο πιθανότητας Q και σετ πληροφορίας I_p(με την πληροφορία που είναι γνωστή ως τον χρόνο t), η αναμενόμενη μελλοντική τίμη $X(t+s)$, με $s > 0$, είναι ίση με $X(t)$.

Αυτό σημαίνει ότι το X έχει την ίδια τιμή με σήμερα, που σημαίνει ότι ένα Martingale αναπαριστά ένα $\delta\acute{\iota}\kappa\alpha\iota o\ \pi\alpha\iota\chi\nu\acute{\iota}\delta\iota (fair\ game)$.

Παράδειγμα 2.1: Είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα μέτρο martingale, δηλαδή ένα δίκαιο παιχνίδι, δημιουργώντας μια συμφωνία ανάμεσα σε δύο αντισυμβαλλόμενα μέλη. Έστω ότι ο Νίκος προτείνει στην Ειρήνη να της δώσει 100€ αν βρέξει αύριο, και την ρωτάει πόσα χρήματα θα ήταν διατεθειμένη να πληρώσει για μια τέτοια συμφωνία. Έστω ότι η Ειρήνη είναι διατεθειμένη να πληρώσει 45€ ενώ ο Νίκος επιθυμεί 55€. Αν στο τέλος συμβιβαστούν και συμφωνήσουν η Ειρήνη να πληρώσει 50€ στον Νίκο , και αφού συμφωνήσουν σε κάποιους περιορισμούς σε αυτήν την συμφωνία, όπως για παράδειγμα ότι πρέπει να βρέξει τουλάχιστον 1 mm νερού, τότε υπάρχει συμφωνία. Μετά την συμφωνία αυτή και ο Νίκος και η Ειρήνη νιώθουν ότι αντιμετωπίζουν ουδέτερο κίνδυνο (Risk Neutral) και πιστεύουν ότι θα βρέξει αύριο με πιθανότητα 50%, και άρα η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου (Martingale) να βρέξει αύριο είναι 50%. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η πιθανότητα δεν έχει σχέση με την πραγματική (Objective) πιθανότητα να βρέξει αύριο.

Το συμπέρασμα του παραπάνω παραδείγματος είναι ότι αν γνωρίζουμε την πιθανή τιμή, τότε οι πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου είναι γνωστές. Αυτό θα γίνει φανερό και στο διωνυμικό μοντέλο που θα μελετηθεί αργότερα.

Η δημιουργία των διωνυμικών μοντέλων στην χρηματοοικονομική είναι μια κατάσταση σαν το στρίψιμο ενός νομίσματος, όπου η τιμή μιας μετοχής θα ανέβει αν έρθει κορώνα ενώ θα πέσει αν έρθει γράμματα. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι πιθανότητες για κορώνα ή γράμματα δεν είναι ίδιες, οπότε τέτοιες χρηματοοικονομικές διαδικασίες δεν είναι martingale, αλλά μπορεί να μετατραπούν σε martingale με την διαδικασία αλλαγής μέτρου πιθανότητας.

Έστω ότι ισχύει,

$$E^p[X_{t+s}|I_t] \leq X_t, \tag{2.1}$$

με I_t το σετ πληροφορίας στον χρόνο t, τότε η X ονομάζεται $super-martingale$,

ενώ αν ισχύει,

$$E^p[X_{t+s}|I_t] \geq X_t, \tag{2.2}$$

τότε η X ονομάζεται $sub-martingale$.

Στην συνέχεια υπολογίζεται η εξίσωση της σημερινής τιμής,

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E^Q[S_t], \tag{2.3}$$

Η διαδικασία S είναι $martingale$, αλλά αφού $r > 0$, η $E^P[S_t]$ είναι $sub-martingale\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ E^P[S_t] > \frac{1}{(1+r)} E^P[S_t]$.

Στην περίπτωση αυτή το P αντικατοπτρίζει το μέτρο της αντικειμενικής πιθανότητας, και η διαδικασία υπολογισμού της τιμής μιας μετοχής δύναται να μετατραπεί σε $martingale$, απλώς πολλαπλασιάζοντας με τον συντελεστή προεξόφλησης (discount factor) $\frac{1}{1+r}$. Αυτό σημαίνει ότι κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q και με τον συντελεστή προεξόφλησης $\frac{1}{1+r}$, η διαδικασία S είναι $martingale$. Συνοψίζοντας η παραπάνω διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε $martingale$ με δύο τρόπους, είτε αλλάζοντας το μέτρο πιθανότητας ή απλά πολλαπλασιάζοντας με έναν συντελεστή προεξόφλησης.

Η παραπάνω μελέτη καταδεικνύει ότι μια διαδικασία martingale περιγράφει ένα δίκαιο παιχνίδι (Fair Game), όπου το αναμενόμενο κέρδος είναι ίσο με μηδέν ακόμα και αν ο επενδυτής χρησιμοποιήσει προηγούμενη πληροφορία.

Συνοψίζοντας μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ είναι *Martingale* αν η υπό-συνθήκη αναμενόμενη τιμή της X_t δίνεται από τον τύπο:

$$E[X_t|X_u; u \leq s] = X_s, \forall s < t$$

Για έναν πιο αναλυτικό ορισμό θα χρειαστούν:

- Έναν $\chi\acute{\omega}\rho o\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma (probability\ space)$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Μία $\delta\iota\acute{\eta}\theta\eta\sigma\eta$ ή $\varphi\iota\lambda\tau\rho\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\mu\alpha (filtration)$ δηλαδή μια ακολουθία από $\sigma -$ $\acute{\alpha}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\varepsilon\varsigma$ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.
- Μία στοχαστική διαδικασία $X = \{x_k\}$ με τις τυχαίες μεταβλητές $x_0, x_1, \ldots$

Ορισμός 2.4: Διήθηση

Διήθηση ή Φιλτράρισμα(Filtration) $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \geq 0\}$ είναι μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{\mathrm{n}}$ τέτοια ώστε η $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ να περιέχει όλα τα σετ της $\mathcal{F}_{\mathrm{t-1}}$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\mathrm{t}} \subseteq \mathcal{F}, \ \forall\, \mathrm{t} \geq 0 \\ \text{Αν } \mathrm{s} \leq \mathrm{t} \text{ τότε } \mathcal{F}_{\mathrm{s}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}} \end{cases}$$

Ορισμός 2.5: Μετρήσιμος χώρος

Ένα ζευγάρι $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, όπου το $\mathcal{M}$ είναι ένα σετ και το $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{M}$ ονομάζεται $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu o\varsigma\, \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma$. Τα υπο-διαστήματα που περιέχονται στην $\mathcal{F}$ ονομάζονται $\mathcal{F} -$ $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\alpha\ \sigma\varepsilon\tau$ $(\mathcal{F} - measurable\ sets)$. Πιο συγκεκριμένα, αν μια τυχαία μεταβλητή Y αποτελεί συνάρτηση του $\mathcal{M}$, δηλαδή $Y = \Phi(\mathcal{M})$ τότε η Y λέγεται ότι είναι $\mathcal{F}^{\mathcal{M}} - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta$.

Ορισμός 2.6: $\mathcal{F}$- προσαρμοσμένη ακολουθία

Μια ακολουθία X καλείται $\mathcal{F} - \pi\rho o\sigma\alpha\rho\mu o\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $(\mathcal{F} - adapted)$ σε μια διήθηση αν η X_s είναι $\mathcal{F}_s - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta$ για κάθε $s \geq 0$.

Ορισμός 2.7: Αυστηρός ορισμός Martingale

Η διαδικασία X ονομάζεται $Martingale$ αν:

(i) *Η X είναι $\mathcal{F} - \pi\rho o\sigma\alpha\rho\mu o\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $(\mathcal{F} - adapted)$.*
(ii) $E[|X_t|] < \infty\ \forall\, t \geq 0$.
(iii) $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s\ \forall\, s \leq t$.

Το γεγονός ότι η X είναι $\mathcal{F} - \pi\rho o\sigma\alpha\rho\mu o\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ σημαίνει ότι όλα τα x_z είναι $\mathcal{F}_z - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\alpha$, που σημαίνει ότι αν η πληροφορία στο $\mathcal{F}_z$ είναι γνωστή, τότε είναι γνωστή και η τιμή των x_z.

Παρατήρηση 2.1: Αν στο 3ο κομμάτι του παραπάνω ορισμού, δηλαδή στο (iii), αντί για το $=$ τοποθετηθεί $\leq$ ή $\geq$ τότε δημιουργούνται οι ορισμοί για το $super - martingale$ και το $sub - martingale$ αντίστοιχα.

2.1.2Τιμολόγηση μέσω Arbitrage

Έκτος από τα Martingales, για την κατανόηση του απλού διωνυμικού μοντέλου, απαιτείται και η παρουσίαση της τιμολόγησης ουδέτερου κινδύνου (Arbitrage-Free Pricing), για την οποία χρησιμοποιείται μια απλή χρηματοοικονομική αγορά με μόνο δύο χρεόγραφα, ένα ομόλογο που συμβολίζεται ως B και ένα άλλο χρεόγραφο S, το οποίο μπορεί να είναι είτε κάποια μετοχή είτε κάποιο παράγωγο προϊόν. Σκοπός είναι η μελέτη ενός χαρτοφυλακίου (B,S) στον χρόνο $t=0$, δηλαδή σήμερα, και σε έναν άλλο μελλοντικό χρόνο t. Το ομόλογο έχει τις εξής απλές ιδιότητες:

1. $B_0=1,\ B_t=1+r_f$

το οποίο σημαίνει ότι η τιμή του ομολόγου σήμερα είναι 1, ενώ στον μελλοντικό χρόνο t , η τιμή είναι $1+r_f$, όπου r_f είναι το *επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου (Risk-free interest rate).*

2. Το επιτόκιο του ομολόγου είναι το ίδιο είτε δανειστεί ο επενδυτής χρήματα είτε δανείσει.

Στην συγκεκριμένη αγορά υπάρχουν δύο πιθανά αποτελέσματα στον χρόνο t, είτε το ω_1 είτε το ω_2, οπότε ορίζεται ο δειγματικός χώρος Ω με δύο πιθανά αποτελέσματα $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, και ισχύει ότι στο ενδεχόμενο ω_1 η τιμή του χρεογράφου S θα είναι $S_{1,t}$, ενώ στο ω_2 η τιμή θα είναι $S_{2,t.}$

Στην συνέχεια ορίζεται ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_t & B_t \\ S_{1,t} & S_{2,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Εφόσον το μόνο δυνατό αποτέλεσμα για το ομόλογο B είναι $1+r_f$, ο παραπάνω πίνακας απλοποιείται ως εξής

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r_f & 1+r_f \\ S_{1,t} & S_{2,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

και για την πρώτη εξίσωση ισχύει

$$1=B_0=(1+r_f)\omega_1+(1+r_f)\omega_2=q_1+q_2 \tag{2.5}$$

όπου ορίζονται η q_1και η q_2,τα οποία αφού το άθροισμα τους είναι ίσο με 1 είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως πιθανότητες και ως συνέπεια η τιμή τους δεν γίνεται να είναι μικρότερη από μηδέν.

Το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (2.4) δύναται να γραφτεί ως εξής:

$$S_0=S_{1,t}*\omega_1+S_{2,t}*\omega_2=\frac{1}{1+r_f}*q_1*S_{1,t}+\frac{1}{1+r_f}*q_2*S_{2,t}=$$

$$\frac{1}{1+r_f}[q_1*S_{1,t}+q_2*S_{2,t}] \tag{2.6}$$

Οπότε κάτω από το *μέτρο πιθανότητας (Probability Measure)* $Q=(q_1,q_2)$ η τιμή S σήμερα, δηλαδή στον χρόνο $t=0$, δίνεται από την :

- *Προεξοφλημένη αναμενόμενη χρηματορροή (Dsicounted Expected Payoff),* δηλαδή από τον τύπο: $S_0=\frac{1}{1+r_f}E^Q[S_t]$.

Παρατηρήσεις

i. Οι πιθανότητες αυτές δεν έχουν καμία σχέση με τις πραγματικές πιθανότητες για τα αποτελέσματα στο Ω, και οι πιθανότητες αυτές ονομάζονται $\pi\iota\vartheta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma\ \pi\rho o\sigma\alpha\rho\mu o\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \kappa\iota\nu\delta\acute{\upsilon}\nu o\upsilon\ (risk - adjusted\ probabilities)$.

ii. Αν υπάρχουν και άλλα χρεόγραφα που σχετίζονται με τα ίδια αποτελέσματα, πρέπει η τιμή τους να ορίζεται από την ίδια εξίσωση, καθώς οι πιθανότητες αυτές δίνονται από το *επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου (Risk-free interest rate)* και από τον *δειγματικό χώρο Ω.*

Αν χρησιμοποιηθούν *οι πραγματικές αντικειμενικές πιθανότητες* P, για τα αποτελέσματα $\{\omega_1, \omega_2\}$, τότε ισχύει

$$S_0 < \frac{1}{1+r_f} E^P[S_t]. \qquad (2.7)$$

Ο λόγος για την ανισότητα είναι το γεγονός ότι οι πιθανότητες αυτές δεν είναι ουδέτερου κινδύνου. Αν ένας επενδυτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει μια μετοχή, η οποία είναι πιο επικίνδυνη από ένα απλό χρηματοοικονομικό στοιχείο, το οποίο έχει απόδοση το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου (Rrisk-Free Interest Rate), πρέπει να αποζημιωθεί για το μεγαλύτερο ρίσκο, οπότε προστίθεται στην παραπάνω εξίσωση και το $premium\ \kappa\iota\nu\delta\acute{\upsilon}\nu o\upsilon$, το οποίο συμβολίζεται με ρ:

$$S_0 = \frac{1}{1+r_f+\rho} E^P[S_t]. \qquad (2.8)$$

Γίνεται αντιληπτό ότι η αναμενόμενη χρηματορροή αυξάνεται όσο αυξάνεται ο κίνδυνος και γι’ αυτόν τον λόγο ένας επενδυτής αγοράζει μετοχές αντί να βάλει το ίδιο ποσό σε ένα απλό χρηματοοικονομικό στοιχείο. Τα παράγωγα μάλιστα είναι ένα στοιχείο που έχουν μεγαλύτερη αναμενόμενη χρηματορροή, ακόμα και από τις μετοχές αφού είναι πιο επικίνδυνα.

2.2 Το διωνυμικό μοντέλο

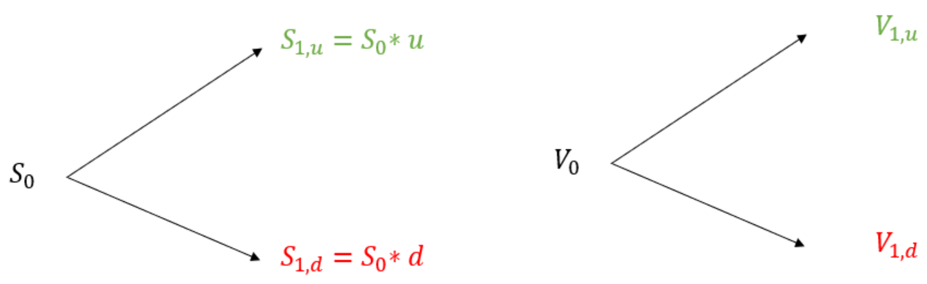
Το *διωνυμικό δένδρο* αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, το οποίο αρχικά προτάθηκε από τους Cox-Ross και Rubinstein το 1979 [12], για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και αποτελεί ένα διάγραμμα για τις πιθανές πορείες που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

Ένα βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου είναι η ευελιξία του, δηλαδή ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση πολλών σύνθετων δικαιωμάτων, όπως Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης ή Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς σε μετοχές με μέρισμα. Επιπλέον, το μοντέλο αυτό εξηγεί γιατί η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς προσομοιάζει την αγορά μιας μετοχής και δανειοληψίας ενώ η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης μοιάζει με ανοικτή πώληση μιας μετοχής και δανειοδότηση. Με λίγα λόγια, η ιδέα ότι τα δικαιώματα μπορούν να μετατραπούν σε χαρτοφυλάκια μετοχών και ομολόγων αποτελούσε ένα επαναστατικό βήμα στον τομέα των χρηματοοικονομικών.

Τέλος, το διωνυμικό μοντέλο μπορεί να συγκλίνει στο πιο γνωστό μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων, το μοντέλο Black-Scholes [9] και Merton [10], αν ο αριθμός των βημάτων στο δένδρο τείνει στο άπειρο.

2.2.1 Το Υπόδειγμα μίας περιόδου (One-period model)

Αρχικά θα εξεταστεί το διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου, που σημαίνει ότι υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές, όπου η μία είναι η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος T και η προγενέστερη χρονική στιγμή $T-1$, η οποία δύναται να είναι η χρονική στιγμή $t=0$ κατά την οποία γράφεται το δικαίωμα. Έστω ένας υποκείμενος τίτλος με τιμή την χρονική στιγμή 0 ίση με S_0 και ένα δικαίωμα με τιμή σήμερα V_0. Αν γίνει η υπόθεση ότι η χρονική διάρκεια ζωής του δικαιώματος είναι από σήμερα ως την χρονική στιγμή T τότε η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ημερομηνία λήξης μπορεί να είναι είτε $S_{1,u} = S_0 * u \; με \; u > 1$, αν έχει συμβεί άνοδος της τιμής του τίτλου, και στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα θα έχει τιμή ίση με $V_{1,u}$ είτε $S_{1,d} = S_0 * d \; με \; d < 1$, αν έχει πέσει η τιμή του τίτλου, και η τιμή του δικαιώματος θα συμβολίζεται με $V_{1,d}$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1. Σε όλα τα σχήματα που θα παρουσιαστούν με πράσινο χρώμα παρουσιάζονται οι τιμές του υποκείμενου τίτλου και του δικαιώματος στον ανοδικό κλάδο του διωνυμικού δένδρου, ενώ με κόκκινο στον καθοδικό κλάδο.



Σχήμα 2.1: Διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου

Θεώρημα 2.1: Σχέση $u \leq 1 + r_f \leq d$

Έστω r_f το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου μίας περιόδου τότε για τους παραμέτρους u και d, που αποτελούν τα πιθανά ποσοστά απόδοσης του υποκείμενου τίτλου, ισχύει η ανισότητα $u \leq 1 + r_f \leq d$, καθώς σε αντίθετη περίπτωση υπάρχουν δυνατότητες για κέρδος χωρίς κίνδυνο, δηλαδή arbitrage.

Απόδειξη

Έστω ότι και το u και το d είναι μεγαλύτερο από το r, δηλαδή ότι ισχύει $1 + r_f \leq d \leq u$. Τότε ένας επενδυτής θα μπορούσε να βγάλει κέρδος χωρίς κίνδυνο αν την χρονική στιγμή 0 δανειστεί όσο πιο μεγάλό ποσό μπορεί στο επιτόκιο r_f και το επενδύσει στον πιο «επικίνδυνο» υποκείμενο τίτλο.

Έστω ότι ο επενδυτής δανείζεται στον χρόνο $t=0$ μία νομισματική μονάδα και την επενδύει στην υποκείμενη αξία. Τότε στην χρονική στιγμή T υπάρχουν οι δύο περιπτώσεις:

- Αν η τιμή του τίτλου έχει ανέβει, δηλαδή είναι στον ανοδικό κλάδο, ο επενδυτής πρέπει να επιστρέψει στο δάνειο $-1 * (1 + r_f)$ ενώ ο τίτλος που είχε αγοράσει αξίζει $+1 * u$. Αφού $u \geq 1 + r_f$ τότε ο επενδυτής αν πουλήσει τον τίτλο έχει περισσότερα χρήματα απ' όσα πρέπει να επιστρέψει στο δάνειο και άρα έχει ένα *κέρδος* ίσο με $u - (1 + r_f) \geq 0$.

- Σε περίπτωση καθοδικής πορείας της τιμής ο επενδυτής πάλι πρέπει να επιστρέψει στο δάνειο $-1 * (1 + r_f)$ ενώ ο τίτλος που είχε αγοράσει αξίζει $+1 * d$. Πάλι όμως έχει *κέρδος* ίσο με $d - \left(1 + r_f\right) \geq 0$, αφού $d \geq 1 + r_f$. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι με βάση την υπόθεση ισχύει ότι $d \leq u$ οπότε το κέρδος στην περίπτωση αυτή είναι μικρότερο ή ίσο.

Η ανάλυση αυτή παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1, όπου και φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο επενδυτής με μηδενική αρχική καταβολή χρημάτων βγάζει κέρδος είτε σε περίπτωση ανοδικής κίνησης είτε σε καθοδική κίνηση της τιμής της μετοχής.

Πίνακας 2.1

Χρονική στιγμή $t = 0$	**Χρόνος T**	
	Ανοδική περίπτωση	Καθοδική περίπτωση
Δανεισμός 1€	$-1 * (1 + r_f)$	$-1 * (1 + r_f)$
Επένδυση 1€ σε μετοχή	$+1 * u$	$+1 * d$
Καθαρή ταμειακή ροή=0€	$u - r_f > 0$	$d - r_f > 0$

Παρατηρείται ότι και στις δύο περιπτώσεις η κίνηση του επενδυτή είναι κερδοφόρα, χωρίς να έχει επενδύσει καθόλου δικά του χρήματα, παρά μόνο το ποσό του δανείου, δηλαδή έχει επιτύχει κέρδος χωρίς κίνδυνο. Μία τέτοια κίνηση όμως δεν είναι δυνατή υπό συνθήκες αποτελεσματικότητας της αγοράς οπότε **δεν ισχύει** ότι $1 + r_f \leq d \leq u$.

Με αντίστοιχο τρόπο σκέψης αποδεικνύεται ότι αν $d \leq u \leq 1 + r_f$, τότε επενδυτής μπορεί να επιτύχει κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage) αν προβεί στις ακριβώς αντίθετες κινήσεις δηλαδή κάνει ανοικτή πώληση την μετοχή και επενδύσει τα χρήματα που έλαβε στον επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.2. Οπότε πάλι απορρίπτονται και οι ανισότητες αυτές, και **δεν ισχύει** ούτε ότι $d \leq u \leq 1 + r_f$.

Πίνακας 2.2

Χρονική στιγμή $t = 0$	**Χρόνος T**	
	Ανοδική περίπτωση	Καθοδική περίπτωση
Επένδυση 1€ στο r_f	$+1 * (1 + r_f)$	$+1 * (1 + r_f)$
Ανοικτή πώληση μετοχής 1€	$-1 * u$	$-1 * d$
Καθαρή ταμειακή ροή=0€	$r_f - u > 0$	$r_f - d > 0$

Συνοψίζοντας αποδείχθηκε ότι στην περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου δύναται να ισχύει μόνο $\boldsymbol{u \leq 1 + r_f \leq d}$ ώστε το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή να είναι *free of arbitrage.*

2.2.1.1 Εξαγωγή πιθανοτήτων ανοδικής και καθοδικής κίνησης

Στην προηγούμενη παράγραφο αναλύθηκαν οι πιθανές καταληκτικές τιμές της υποκείμενης αξίας στον χρόνο T χωρίς καμία αναφορά στις πιθανότητες ανοδικής ή καθοδικής πορείας. Για να εξαχθούν οι πιθανότητες αυτές θα χρησιμοποιηθεί ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει θετική θέση, δηλαδή αγορά Δ μετοχών και αρνητική θέση, δηλαδή πώληση, ενός δικαιώματος.

Το ζητούμενο αρχικά είναι η εύρεση ενός τύπου για το Δ, δηλαδή για την ποσότητα των μετοχών που πρέπει να αγοραστούν στον χρόνο 0 σε τιμή S_0 , για την οποία το παραπάνω χαρτοφυλάκιο είναι μηδενικού κινδύνου.

Για αυτόν τον λόγο θα πρέπει η τιμή του χαρτοφυλακίου να είναι η ίδια και σε περίπτωση ανοδικής και καθοδικής κίνησης. Αναλυτικότερα, αν η τιμή της υποκείμενης αξίας ανέβει τότε το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει $S_0 * u * \Delta - V_{1,u}$ ενώ σε περίπτωση πτώσης της τιμής η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $S_0 * d * \Delta - V_{1,d}$. Για να επέλθει ισότητα πρέπει

$$S_0 * u * \Delta - V_{1,u} = S_0 * d * \Delta - V_{1,d}$$

οπότε εξάγεται και ο τύπος για το Δ

$$\Delta = \frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{S_0 * u - S_0 * d} \qquad (2.9)$$

Ο παραπάνω τύπος (2.9) αποδεικνύει ότι ο αριθμός των μετοχών είναι το πηλίκο της μεταβολής της τιμής των δικαιωμάτων προς την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου, καθώς γίνεται η κίνηση πάνω στους κόμβους του διωνυμικού δένδρου.

Για την εξαγωγή των τύπων για τις πιθανότητες ανοδικής ή καθοδικής κίνησης αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r_f, καθώς η παρούσα αξία του παραπάνω χαρτοφυλακίου είναι

$$\left(S_0 * u * \Delta - V_{1,u}\right) * e^{-r_f T} \qquad (2.10)$$

Επίσης το κόστος δημιουργία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο 0 είναι $S_0 * \Delta - V_0$, οπότε έπεται ότι

$$S_0 * \Delta - V_0 = \left(S_0 * u * \Delta - V_{1,u}\right) * e^{-r_f T}$$

και άρα η τιμή στον χρόνο 0 δίνεται από τον τύπο:

$$V_0 = S_0 * \Delta\left(1 - u * e^{-r_f T}\right) + V_{1,u} * e^{-r_f T}. \qquad (2.11)$$

Αν γίνει αντικατάσταση του τύπου (2.9) για το Δ στην παραπάνω εξίσωση τότε

$$V_0 = S_0 * \left(\frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{S_0 * u - S_0 * d}\right) * \left(1 - u * e^{-r_f T}\right) + V_{1,u} * e^{-r_f T}$$

$$= \frac{V_{1,u}\left(1 - d * e^{-r_f T}\right) + V_{1,d}\left(u * e^{-r_f T} - 1\right)}{u - d}$$

Έπεται από τα παραπάνω ότι η αξία του δικαιώματος στον χρόνο 0 υπολογίζεται από την

$$V_0 = e^{-r_f T}[p * V_{1,u} + (1-p) * V_{1,d}] \qquad (2.12)$$

όπου ως p ορίζεται ως

$$p = \frac{e^{-r_f T} - d}{u - d}$$

Οι τύποι αυτοί επιτρέπουν την τιμολόγηση των δικαιωμάτων σε περίπτωση που χρησιμοποιείται το διωνυμικό μοντέλο ενός βήματος, με μόνη απαραίτητη υπόθεση την απουσία ευκαιριών κέρδους χωρίς κίνδυνο (Arbitrage).

2.2.1.2 Περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου

Στην τιμολόγηση των παραγώγων μια σημαντική υπόθεση που πραγματοποιείται είναι ότι οι επενδυτές είναι *ουδέτεροι στον κίνδυνο (Risk-Neutral),* οπότε το περιβάλλον στο οποίο ισχύει η ανάλυση είναι το *περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου (Risk-Neutral World).* Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές δεν αυξάνουν την αναμενόμενη απόδοση που επιθυμούν από επενδύσεις με αυξημένο κίνδυνο. Φυσικά το πραγματικό περιβάλλον δεν είναι ουδέτερου κινδύνου αλλά έχει αποδειχτεί ότι το συγκεκριμένο μοντέλο, παρά την παραπάνω υπόθεση, ανταποκρίνεται καλά στην πραγματικότητα, χωρίς να χρειάζονται περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την αποστροφή στον κίνδυνο των επενδυτών.

Το περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου έχει δύο βασικά χαρακτηριστικά που βοηθούν την τιμολόγηση των δικαιωμάτων

1. Η αναμενόμενη απόδοση των επενδύσεων είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
2. Το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται στους παραπάνω τύπους για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Με την παραπάνω παρατήρηση η παράμετρος p μπορεί να ερμηνευθεί ως η *πιθανότητα ανοδικής κίνησης* σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου ενώ ως $q = 1 - p$ θα οριστεί η *πιθανότητα καθοδικής κίνησης.*

Παρατήρηση 2.2: Για να ληφθεί η p ως πιθανότητα είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι $u > e^{-r_f T}$ έτσι ώστε να ισχύει $0 < p < 1$.

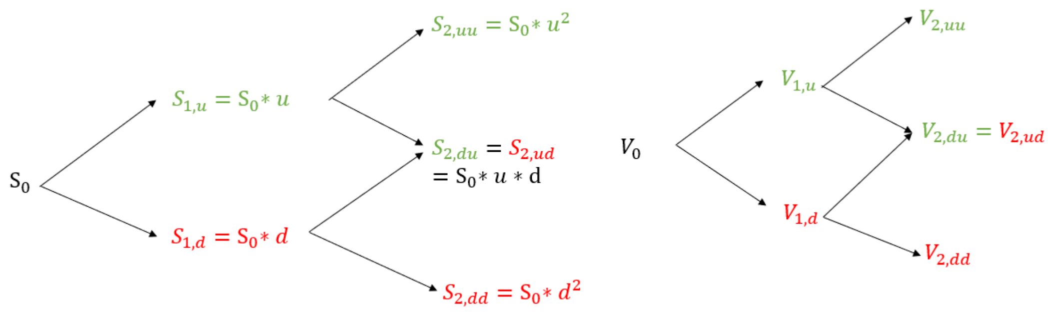
2.2.2 Το υπόδειγμα δύο περιόδων (Two period model)

Το υπόδειγμα μίας περιόδου επεκτείνεται σε δύο περιόδους εύκολα, αρκεί να γίνει η υπόθεση ότι κατά τη διάρκεια του κάθε χρονικού βήματος η τιμή μπορεί να κινηθεί ανοδικά κατά u επί την αρχική αξία ή πτωτικά κατά d επί την αρχική αξία. Αυτό σημαίνει ότι στο πρώτο χρονικό βήμα υπάρχουν δύο πιθανές καταστάσεις δηλαδή η τιμή μπορεί να είναι είτε $S_{1,u} = S_0 * u$ είτε $S_{1,d} = S_0 * d$, όπως ακριβώς και πριν. Στο δεύτερο χρονικό βήμα όμως υπάρχουν τρεις πιθανές καταστάσεις, οι οποίες είναι:

- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου να έχει κινηθεί δύο φορές ανοδικά οπότε και να είναι $S_{2,uu} = S_0 * u * u = S_0 * u^2$.
- Η τιμή να έχει κινηθεί μια φορά ανοδικά και μία φορά πτωτικά, ανεξάρτητα από την σειρά με την οποία έγιναν οι κινήσεις αυτές, και η τιμή είναι ίση με $S_{2,ud} = S_{2,du} = S_0 * u * d$.

- Η τιμή να έχει κινηθεί δύο φορές πτωτικά και να έχει διαμορφωθεί σύμφωνα με τον τύπο $S_{2,dd} = S_0 * d * d = S_0 * d^2$.

Οι τιμές των δικαιωμάτων συμβολίζονται ως $V_{2,uu}, V_{2,ud} = V_{2,du}$ $και$ $V_{2,dd}$ αντίστοιχα, ενώ θα χρειαστεί επίσης το επιτόκιο μηδενικού κίνδυνου r_f και το μήκος του χρονικού βήματος Δt, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2



Σχήμα 2.2: Διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων

Στο διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων ισχύουν οι ίδιοι τύποι για την τιμολόγηση του δικαιώματος και για τις πιθανότητες ανοδικής και καθοδικής κίνησης με το μοντέλο μιας περιόδου, με μόνη αλλαγή το χρονικό βήμα όπου από T γίνεται Δt, οπότε και οι τύποι διαμορφώνονται ως

$$V_0 = e^{-r_f \Delta t}[p * V_{1,u} + (1-p) * V_{1,d}] \tag{2.13}$$

$$p = \frac{e^{-r_f \Delta t} - d}{u - d}.$$

Με επαναλαμβανόμενη χρήση του τύπου (2.13) εξάγονται οι τύποι για τις τιμές των δικαιωμάτων στο χρονικό βήμα 1

$$V_{1,u} = e^{-r_f \Delta t}[p * V_{2,uu} + (1-p) * V_{2,ud}] \tag{2.14}$$

$$V_{1,d} = e^{-r_f \Delta t}[p * V_{2,ud} + (1-p) * V_{2,dd}] \tag{2.15}$$

Και με αντικαταστάσεις ως τον χρόνο 0

$$V_0 = e^{-2r_f \Delta t}\left[p^2 * V_{2,uu} + 2p(1-p) * V_{2,du} + (1-p)^2 V_{2,dd}\right]. \tag{2.16}$$

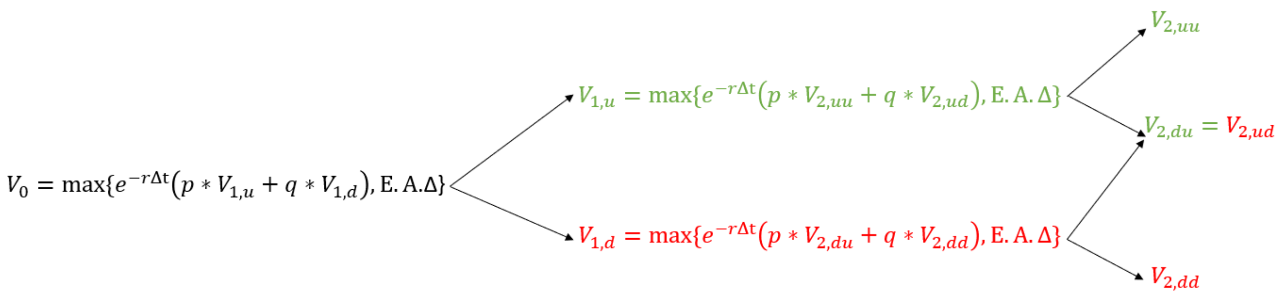
Παρατηρείται ότι, όπως και για το μοντέλο μίας περιόδου, οι μεταβλητές $p^2, 2p(1-p), (1-p)^2$ μπορούν να ερμηνευθούν ως οι πιθανότητες επίτευξης του ανώτερου, μεσαίου και κατώτατου τελικού κόμβου αντίστοιχα. Επιπλέον, όπως είναι φανερό όσο και να προσθέτουμε χρονικά βήματα στο διωνυμικό δένδρο, η αρχή της αποτίμησης σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου συνεχίζει να ισχύει και η τιμή του δικαιώματος είναι ίση με την αναμενόμενη απόδοση στο περιβάλλον αυτό προεξοφλημένη με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

2.2.2.1 Αμερικάνικα Δικαιώματα

Τα Αμερικάνικα δικαιώματα δύναται να τιμολογηθούν με την χρήση της μεθόδου του διωνυμικού δένδρου, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της επαγωγής προς τα πίσω ελέγχοντας σε κάθε κόμβο αν είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση. Ενώ η αξία του δικαιώματος είναι η ίδια στους τελικούς κόμβους, σε όλους τους προγενέστερους ισχύει ότι η τιμή του είναι το μέγιστο από

- Την αξία που προκύπτει από την χρήση του τύπου υπολογισμού της αξίας του δικαιώματος.
- Την απόδοση από την πρόωρη εξάσκηση.

Η παραπάνω παρατήρηση φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.3: Αμερικάνικο δικαίωμα

Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται ο τύπος υπολογισμού για την τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος όπου παρατηρείται ο όρος Ε.Α.Δ ο οποίος ορίζεται ως

- $\max\{S_{t,z} - K, 0\}$ αν είναι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς.
- $\max\{K - S_{t,z}, 0\}$ αν είναι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης.

όπου t είναι η χρονική στιγμή πού βρίσκεται ο κόμβος και z η κατάσταση, δηλαδή η δυάδα t, z δείχνει σε ποιόν κόμβο αναφέρεται ο τύπος και $S_{t,z}$ η τιμή του τίτλου στον κόμβο αυτόν.

2.2.2.2 Τύποι υπολογισμού για τα u και d

Όπως αναφέρθηκε, το διωνυμικό δένδρο πρέπει να κατασκευαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε να αντιπροσωπεύει την συμπεριφορά της τιμής του υποκείμενου τίτλου σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου και για τον λόγο αυτό τα p, u $και$ d πρέπει να δίνουν σωστές τιμές για την αναμενόμενη απόδοση και την μεταβλητότητα της τιμής του τίτλου για το χρονικό διάστημα Δt.

Αρχικά, αφού η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου αποτελεί το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, αφού η ανάλυση γίνεται σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, ισχύει ότι η αναμενόμενη αξία του τίτλου στο τέλος του Δt είναι ίση με $S * e^{r_f \Delta t}$, με S να δηλώνει την τιμή του τίτλου στην αρχή του χρονικού διαστήματος. Οπότε για να ταυτίζεται ο τύπος αυτός με το δένδρο απαιτείται να ισχύει ότι

$$S * e^{r_f \Delta t} = p * S * u + (1 - p) * S * d$$

που σημαίνει ότι

$$e^{r_f \Delta t} = p * u + (1-p) * d. \qquad (2.17)$$

Σχετικά με την μεταβλητότητα της τιμής του τίτλου, λαμβάνοντας υπόψιν ότι για μια τυχαία μεταβλητή Y η διακύμανση δίνεται από τον τύπο $E(Y^2) - E(Y)^2$, εξάγεται ο τύπος

$$\sigma^2 \Delta t = p * u^2 + (1-p)d^2 - [p * u + (1-p)d]^2. \qquad (2.18)$$

Είναι γνωστό ότι για την εύρεση τριών μεταβλητών απαιτούνται τρεις εξισώσεις, οπότε οι πρωτεργάτες του μοντέλου αυτού Cox,Ross και Rubinstein χρησιμοποιήσαν και την συνθήκη

$$u = \frac{1}{d}. \qquad (2.19)$$

Με την χρήση των τριών συνθηκών (2.17)-(2.18)-(2.19) εξάγονται οι τύποι για τα $u, d\ και\ p$

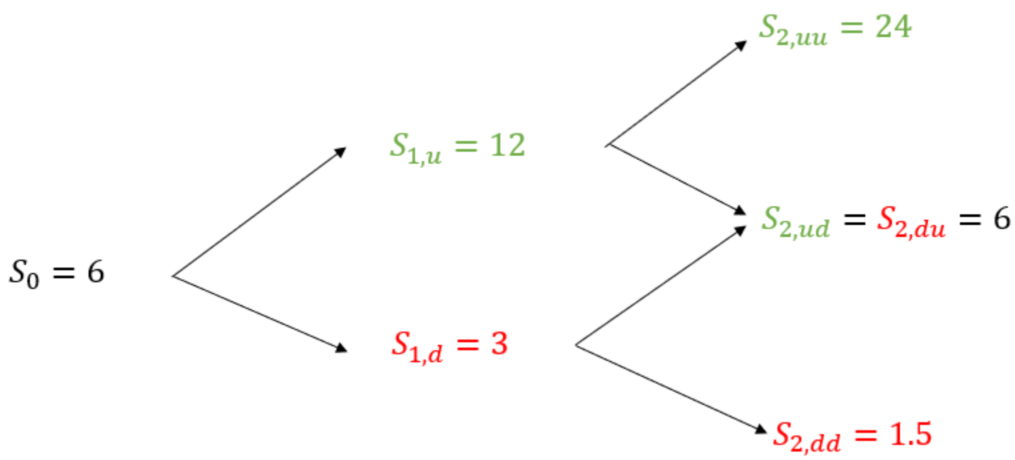
$$p = \frac{b-d}{u-d}, \qquad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

όπου η μεταβλητή b είναι ίση με $e^{r\Delta t}$ και ορίζεται ως ο *συντελεστής αύξησης (Growth Factor).*

Στην συνέχεια θα δοθούν δύο παραδείγματα καθώς και μια προσέγγιση του χρόνου εξάσκησης ενός Αμερικάνικου δικαιώματος [3].

Παράδειγμα 2.2: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμές $S_0 = 6, u = 2, d = \frac{1}{2}, p = q = \frac{1}{2}\ και\ r = \frac{1}{4}\ με\ τιμή\ εξάσκησης\ K = 8\ και\ T = 2$ σε ένα διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων.



Σχήμα 2.3: Τιμή μετοχής

Η τιμή του παραπάνω δικαιώματος, αφού είναι δικαίωμα αγοράς, ορίζεται ως $V_2 = \max(S_T - K) = (S_k - 5)^+$, οπότε

$$V_{2,uu} = (24-8)^+ = 16, V_{2,ud} = V_{2,du} = (6-8)^+ = 0\ και\ V_{2,dd} = (1.5-8)^+ = 0$$

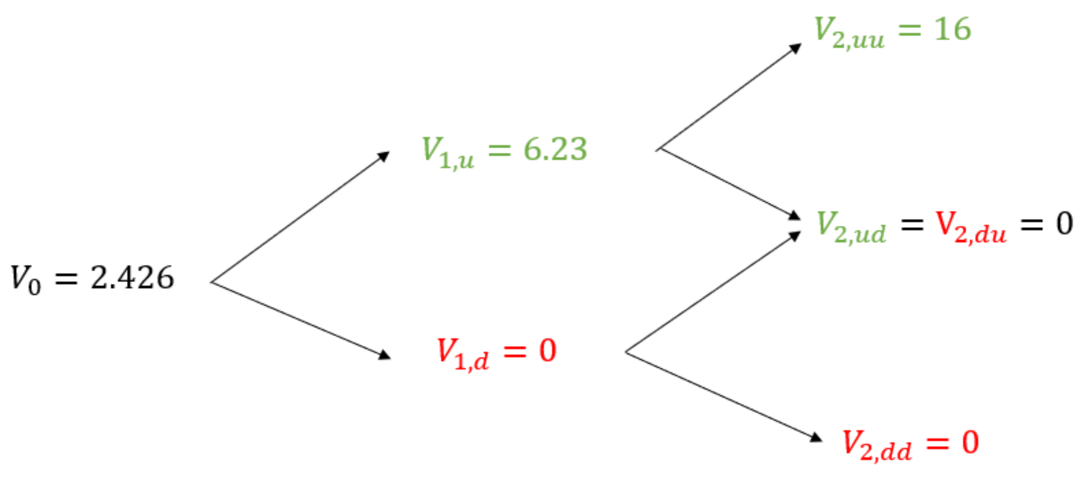
Με την χρήση της μεθόδου της «επαγωγής προς τα πίσω» στο διωνυμικό δένδρο υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές για το δικαίωμα:

$$V_{1,u} = e^{-r\Delta t}\left[p * V_{2,uu} + q * V_{2,ud}\right] = e^{-0.25*1} * \left[\frac{1}{2} * 16 + \frac{1}{2} * 0\right] = 6.23$$

$$V_{1,d} = e^{-r\Delta t}\left[p * V_{2,du} + q * V_{2,dd}\right] = e^{-0.25} * \left[\frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 0\right] = 0$$

$$V_0 = e^{-r\Delta t}\left[p * V_{1,u} + q * V_{1,d}\right] = e^{-0.25} * \left[\frac{1}{2} * 6.23 + \frac{1}{2} * 0\right] = 2.4261$$

Και σχηματικά τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Τιμή δικαιώματος

Και χρησιμοποιώντας τον τύπο για τον υπολογισμού του Δ:

$$\Delta_{t-1} = \frac{V_t(u) - V_t(d)}{S_t(u) - S_t(d)},$$

υπολογίζεται ότι

$$\Delta_0 = \frac{6.23 - 0}{12 - 3} = 0.6922, \Delta_{1,u} = \frac{16 - 0}{24 - 6} = 0.8889, \Delta_{1,d} = 0,$$

Και αν στον χρόνο 0 ο επενδυτής πουλήσει ένα δικαίωμα στην τιμή $V_0 = 2.42$ και το αντισταθμίσουμε με Δ_0 μετοχές υπολογίζεται

$$V_{1,u} = \Delta_0 * S_{1,u} + e^{r\Delta t}(V_0 - \Delta_0 * S_0).$$

$$V_{1,d} = \Delta_0 * S_{1,d} + e^{r\Delta t}(V_0 - \Delta_0 * S_0).$$

Παρατήρηση 2.3: Ένα βασικό πρόβλημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι σε ένα μοντέλο n περιόδων, δημιουργείται ένας δειγματικός χώρος Ω που περιέχει 2^n στοιχεία, από τα οποία θα υπολογίζονταν 2^n εξισώσεις. Για παράδειγμα για ένα τρίμηνο δικαίωμα θα υπήρχαν 66 ημέρες για συναλλαγές, και με μήκος περιόδου 1 ημέρας θα υπολογίζονταν $2^{66} \approx 7 * 10^{19}$ $εξισώσεις$. Το παραπάνω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με έναν από τους εξής τρεις τρόπους:

(i) Με προσομοίωση.
(ii) Χρησιμοποιώντας μοντέλα συνεχούς χρόνου.
(iii) Δημιουργώντας δομές Markov (Markov structure).

Στο διωνυμικό μοντέλο το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την 3η μέθοδο, και αντί για 4 τιμές στο $n = 2$ (V_{uu}, V_{ud}, V_{du} $και$ V_{dd}) δημιουργούνται 3 εξισώσεις αφού $V_{ud} = V_{du}$, και έτσι δημιουργούνται $n + 1$ εξισώσεις αντί για 2^n.

Ορισμός 2.8: Διαδικασία Markov

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και η διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Μία προσαρμοσμένη διαδικασία (X_t) λέγεται ότι είναι διαδικασία Markov σε σχέση με την διήθηση $(\mathcal{F}_t)$ αν:

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|X_s] \text{ για κάθε } t \geq s \geq 0,$$

Αυτό σημαίνει ότι αν μελετάται ένα μονοπάτι που περιγράφεται από μια Γεωμετρική Κίνηση Brown από το 0 στο t_0, και πρέπει να γίνει μια εκτίμηση της τιμής του $f(X(t_1))$, τότε η μόνη σχετική πληροφορία που πρέπει να ληφθεί υπόψιν είναι η $X(t_0)$.

Σε ένα μοντέλο Markov για ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο με την διαδικασία αξίας $V_n = g(S_n)$ ορίζουμε την επαγωγή προς τα πίσω (Backward Recursion) ως

$$\begin{cases} V_n(x) = g(x) \\ V_k(x) = e^{-r\Delta t}\big(pV_{k+1}(ux) + qV_{k+1}(dx)\big). \end{cases}$$

με $V_k(S_k)$ η τιμή του δικαιώματος τον χρόνο k και

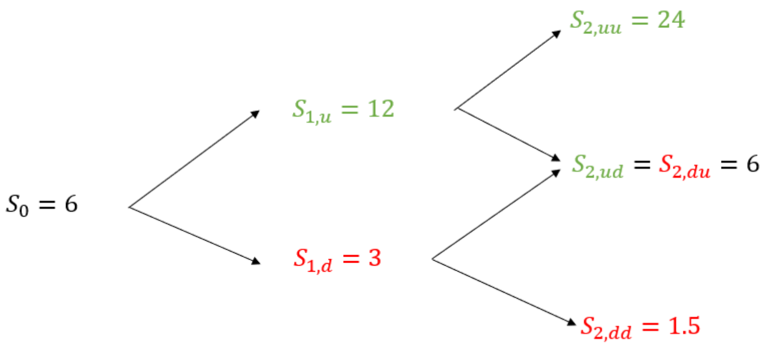
$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(uS_k) - V_{k+1}(dS_k)}{(u-d)S_k}, k = 0,1,2 \dots, n-1$$

Όσο αναφορά όμως ένα Αμερικάνικο δικαίωμα, σε κάθε κατάσταση k ο ιδιοκτήτης του δικαιώματος δύναται να το εξασκήσει και να κερδίσει $g(S_k)$, και η συνάρτηση αξίας του δικαιώματος αυτός είναι

$$\begin{cases} V_n(x) = g(x) \\ V_k(x) = \max\{e^{-r\Delta t}\big(pV_{k+1}(ux) + qV_{k+1}(dx)\big), g(x)\}. \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3: Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης

Έστω το ίδιο διωνυμικό δένδρο δύο περιόδων , τώρα όμως για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με $S_0 = 6, u = 2, d = \frac{1}{2}, p = q = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$, $τιμή\ εξάσκησης\ K = 8\ και\ T = 2.$



Σχήμα 2.5: Τιμή μετοχής

Στην λήξη η αξία του δικαιώματος είναι $V_2 = (8 - S_k)^+$, και αφού $T = 2$ το $\Delta t = 1$, ισχύει

$$V_{2,uu} = (8 - 24)^+ = 0, V_{2,du} = V_{2,ud} = (8 - 6)^+ = 2, V_{2,dd} = (8 - 1.5)^+ = 6.5.$$

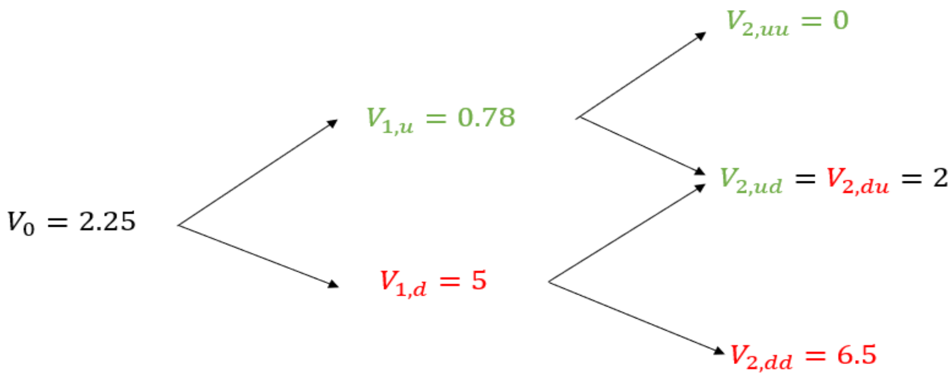
Και από το δένδρο εξάγονται οι αξίες

$$V_{1,u} = \max\{e^{-r\Delta t}(pV_{2,uu} + qV_{2,ud}), (5 - 12)^+\} = \max\left\{e^{-0.25}\left[\frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 2\right], 0\right\} = 0.779.$$

$$V_{1,d} = \max\{e^{-r\Delta t}(pV_{2,ud} + qV_{2,dd}), (8 - 3)^+\} = \max\left\{e^{-0.25}\left[\frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 6.5\right], 5\right\} = 5.$$

$$V_0 = \max\{e^{-r\Delta t}(pV_{1,u} + qV_{1,d}), (8 - 6)^+\} = \max\left\{e^{-0.25}\left[\frac{1}{2} * 0.779 + \frac{1}{2} * 5\right], 2\right\} = 2.25.$$

Η τιμή του δικαιώματος σε κάθε κόμβο παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Τιμή Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης

Και αφού $\Delta_{k-1} = \frac{V_k(u) - V_k(d)}{S_k(u) - S_k(d)}$ τότε $\Delta_0 = \frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}} = \frac{0.779 - 5}{12 - 3} = -\frac{4.221}{9} = -0.469.$ Οπότε στον χρόνο 0 η σωστή στρατηγική, ώστε να επιτευχθεί η αντιστάθμιση του κινδύνου, είναι να γίνει ανοικτή πώληση του δικαιώματος και να εισπραχθούν 2.25€, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την αγορά $\Delta_0 = 0.469$ μετοχών.

Παρατήρηση 2.4: Η τιμή ενός αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου με ένα Αμερικάνικο Δικαίωμα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= S_{k+1} * \Delta_k + e^{-r\Delta t}(X_k - S_k * \Delta_k - C_k) \\ &= e^{-r\Delta t}X_k + \Delta_k * (S_{k+1} - e^{-r\Delta t}S_k - e^{-r\Delta t}C_k). \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Όπου C_k είναι το κομμάτι εκείνο που είναι δυνατόν να «καταναλωθεί» στον χρόνο $t = k$.

2.2.2.3 Πρόωρη εξάσκηση Αμερικάνικου δικαιώματος

Ένα ερώτημα που δημιουργείται είναι το πότε γίνεται η «κατανάλωση» των χρηματικών μονάδων; Για να απαντηθεί το συγκεκριμένο ερώτημα αρχικά θα παρουσιαστεί μια μαθηματική ερμηνεία για την βέλτιστη στιγμή πρόωρης εξάσκησης ενός δικαιώματος Αμερικάνικου τύπου ενώ στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ως παράδειγμα ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς σε μετοχή που καταβάλλει μέρισμα.

Μαθηματική ερμηνεία

Αν ισχύει

$$E\left[(1+r)^{-(k+1)}V_{k+1}(S_{k+1})\middle|\mathcal{F}_k\right] < (1+r)^{-k}V_k(S_k)$$

τότε

$$\frac{1}{1+r}E[V_{k+1}(S_{k+1})|\mathcal{F}_k] < V_k(S_k)$$

Οπότε αν ο κάτοχος του δικαιώματος δεν εξασκήσει, τότε ο επενδυτής μπορεί να «καταναλώσει» και να μειώσει την διαφορά ανάμεσα στα δύο κομμάτια της ανίσωσης. Στην περίπτωση αυτή συμβαίνει η «κατανάλωση» όταν $X_k = V_k(S_k)\ για\ κάθε\ k$ και επίσης

$$\begin{cases} V_n(x) = g(x) \\ V_k(x) = \max\{\frac{1}{1+r}\left(pV_{k+1}(ux) + qV_{k+1}(dx)\right), g(x)\}. \end{cases}$$

Για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με $S_0 = 4, τιμή\ εξάσκησης\ K = 5$, με όλες τις άλλες ποσότητες ίδιες όπου $V_1\big(S_1(u)\big) = 3, V_2\big(S_2(ud)\big) = 1, V_2\big(S_2(uu)\big) = 4$, τότε

$$\frac{1}{1+r}E[V_2(S_2)|\mathcal{F}_1] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 4\right] = 2.$$

Οπότε αν ο κάτοχος δεν εξασκήσει στον χρόνο $t = 1$ τότε γίνεται να «καταναλωθεί» μία μονάδα και να γίνει αντιστάθμιση με την χρήση του τύπου

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(uS_k) - V_{k+1}(dS_k)}{(u-d)S_k}$$

Άρα παρατηρείτε ότι από την σκοπιά του κατόχου του δικαιώματος είναι δόκιμο να γίνει η εξάσκηση όταν $V_k(S_k) = g(S_k)$, δηλαδή στην εσωτερική αξία (Intrinsic Value) και όχι στην προεξοφλημένη αξία (Discounted Value).

Ορισμός 2.9: Χρόνος Στάσης
Δεδομένου ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *και της διήθησης* $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$ *του* $\mathcal{F}$ *ορίζεται ο* $χρόνος\ στάσης\ (stopping\ time)\ ως\ μια\ στοχαστική\ μεταβλητή\ \tau: \Omega \to \{0,1,2,\dots,n\} \cup \{\infty\}$ *όπως* $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k \forall k = 0,1,\dots,n,\infty$.

Παράδειγμα 2.4: Από το παραπάνω διωνυμικό δένδρο ορίζεται ο χρόνος στάσης

$$\tau(\omega) = \min\{k | V_k(S_k) = (8 - S_k)^+\}.$$

Αυτός ο χρόνος στάσης είναι ο χρόνος όπου για πρώτη φορά η αξία του δικαιώματος είναι ίση με την εσωτερική (Intrinsic) αξία του, και είναι και η ιδανική ώρα για την εξάσκηση του. Ένα βασικό χαρακτηριστικό του χρόνου στάσης είναι το γεγονός ότι σε κάθε χρόνο $t < \tau$ ο επενδυτής αποφασίζει αν έχει φτάσει ο χρόνος τ με βάση την διαθέσιμη πληροφορία μέχρι την στιγμή εκείνη. Στο διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων ισχύει:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 \ \alpha\nu \ \omega = A_d \\ 2 \ \alpha\nu \ \omega = A_u \end{cases} \qquad \begin{cases} \{\omega : \tau(\omega) = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0 \\ \{\omega : \tau(\omega) = 1\} = A_d \in \mathcal{F}_1 \\ \{\omega : \tau(\omega) = 2\} = A_u \in \mathcal{F}_2 \end{cases}$$

Πρόωρη εξάσκηση: Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκε ότι για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα χωρίς μέρισμα δεν είναι ποτέ βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση πριν την ημερομηνία λήξη του. Με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι για ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικάνικου τύπου οι μοναδικές στιγμές που είναι βέλτιστη η πρόωρη εξάσκηση είναι ακριβώς πριν την ημερομηνία αποκοπής του μερίσματος. Έστω ότι καταβάλλονται n μερίσματα, που συμβολίζονται ως $M_1, M_2, \dots, M_n$ κατά τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \dots t_n \ \mu\varepsilon \ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ αντίστοιχα.

Η ανάλυση ξεκινάει πριν από την τελευταία ημερομηνία αποκοπής μερίσματος, για να εξεταστεί η περίπτωση πρόωρης εξάσκησης, δηλαδή την χρονική στιγμή t_n, που αν εξασκήσει το δικαίωμα πρόωρα ο κάτοχος θα εισπράξει

$$S_{t_n} - K$$

όπου S_{t_n} είναι η τιμή της μετοχής κατά την χρονική στιγμή t_n.

Σε περίπτωση όμως που δεν εξασκηθεί τότε η τιμή της μετοχής θα πέσει στο $S_{t_n} - M_n$, και όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα κάτω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος είναι το

$$S_{t_n} - M_n - K * e^{-r_f(T-t_n)} \qquad \textit{(2.21)}$$

Από τον παραπάνω τύπο (2.21) εξάγονται οι δύο περιπτώσεις:

- Αν $S_{t_n} - M_n - K * e^{-r_f(T-t_n)} > S_{t_n} - K$ δηλαδή αν $M_n \leq K * (1 - e^{-r_f(T-t_n)})$ τότε η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος την χρονική στιγμή t_n δεν είναι ποτέ βέλτιστη.
- Αν $M_n > K * (1 - e^{-r_f(T-t_n)})$ τότε η πρόωρη εξάσκηση είναι βέλτιστη την χρονική στιγμή t_n για μια μεγάλη τιμή S_{t_n}.

Έχει παρατηρηθεί ότι η δεύτερη περίπτωση συνήθως ικανοποιείται όταν το τελευταίο μέρισμα είναι σχετικά μεγάλο και δίνεται χρονικά κοντά στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, δηλαδή το $T - t_n$ είναι μικρό.

Στην συνέχεια εξετάζεται η αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή καταβολής μερίσματος t_{n-1}, που αν ο κάτοχος εξασκήσει θα λάβει $S_{t_{n-1}} - K$ νομισματικές μονάδες.

Αν όμως δεν εξασκηθεί τότε η τιμή της μετοχής θα μειωθεί στο $S_{t_{n-1}} - M_{n-1}$, και η αμέσως επόμενη δυνατή ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος είναι η t_n. Το κάτω φράγμα στην περίπτωση αυτή είναι

$$S_{t_{n-1}} - M_{n-1} - K * e^{-r_f(t_n - t_{n-1})}$$

Και όπως και προηγουμένως αν $M_{n-1} \leq K * (1 - e^{-r_f(t_n - t_{n-1})})$ τότε η πρόωρη εξάσκηση την χρονική στιγμή t_{n-1} δεν είναι βέλτιστη.

Με παρόμοιο συλλογισμό καταλήγει η ανάλυση ότι η πρόωρη εξάσκηση δεν είναι βέλτιστη σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_i για κάθε $i < n$ αν ισχύει ο τύπος

$$M_i \leq K * (1 - e^{-r_f(t_i - t_{i-1})}). \tag{2.22}$$

Παρατήρηση 2.5: Προσεγγιστικός τύπος

Ο παραπάνω τύπος (2.22) μπορεί να απλουστευτεί και να θεωρηθεί περίπου ίσος με

$$M_i \leq K * r_f * t_i - t_{i-1}$$

που σημαίνει ότι για να μην ικανοποιείται η ανισότητα, και η πρόωρη εξάσκηση να είναι βέλτιστη, θα πρέπει η μερισματική απόδοση της μετοχής να είναι πολύ κοντά ή μεγαλύτερη από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, αν υποθέσουμε ότι η τιμή εξάσκησης K είναι σχετικά κοντά με την τρέχουσα τιμή της μετοχής.

Παράδειγμα 2.5: Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς με μέρισμα

Έστω ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς για το οποίο ισχύει ότι $S_0 = 40, K = 40, r_f = 0.09, \sigma = 0.30, T = 0.5$ και δίνονται δύο μερίσματα $M_1 = M_2 = 0.5$ τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0.1667\ \kappa\alpha\iota\ t_2 = 0.4167$ αντίστοιχα.

- Κατά την πρώτη ημερομηνία αποκοπής μερίσματος υπολογίζεται ότι

$$K\left(1 - e^{-r_f(t_2 - t_1)}\right) = 40 * (1 - e^{-0.09(0.4167 - 0.1667)}) = 0.89$$

Αφού το $M_1 = 0.5$ ισχύει ότι $M_1 < K\left(1 - e^{-r_f(t_2 - t_1)}\right)$ άρα η πρόωρη εξάσκηση δεν είναι βέλτιστη πριν την πρώτη καταβολή μερίσματος.

- Αντίθετα, κατά την δεύτερη ημερομηνία t_2 υπολογίζεται ότι

$$K\left(1 - e^{-r_f(T - t_2)}\right) = 40 * (1 - e^{-0.09(0.5 - 0.4167)}) = 0.3$$

Και αφού $M_2 > K\left(1 - e^{-r_f(T - t_2)}\right)$, το δικαίωμα είναι βαθιά εντός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου (Deep in the Money), και πρέπει να εξασκηθεί κατά την δεύτερη ημερομηνία αποκοπής μερίσματος.

Από την παραπάνω ανάλυση, και το παράδειγμα, συμπεραίνεται ότι τις περισσότερες φορές η πιο πιθανή ημερομηνία πρόωρης εξάσκησης ενός Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς είναι η τελευταία ημερομηνία καταβολής μερίσματος t_n.

Παρατήρηση 2.6: Περίπτωση ισότητας Αμερικάνικου και Ευρωπαϊκού δικαιώματος

Σε περίπτωση που για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς ισχύει η ανισότητα που αναφέρθηκε παραπάνω $M_i \leq K\left(1 - e^{-r_f(t_i - t_{i-1})}\right) \, \forall \, i = 1,2,3 \ldots, n-1$ καθώς και η ανισότητα για τον τελικό χρόνο αποκοπής μερίσματος $M_n \leq K * (1 - e^{-r_f(T - t_n)})$,τότε είναι βέβαιο ότι η πρόωρη εξάσκηση δεν είναι ποτέ βέλτιστη και το δικαίωμα αγοράς Αμερικάνικου τύπου μπορεί να αντιμετωπίζεται ως Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς.

2.2.2.4 Επίδραση των μερισμάτων στα p, u και d

Όπως αναφέρθηκε οι υποκείμενοι τίτλοι μπορεί να προσφέρουν περιοδική καταβολή ενός ποσού, είτε ως μέρισμα αν πρόκειται για μετοχές είτε ενοίκιο αν πρόκειται για ακίνητα, τα οποία πρέπει να ληφθούν υπόψιν ειδικά σε δικαιώματα μακράς διάρκειας. Έστω ότι είναι γνωστή η συνεχή απόδοση k, τότε η τιμή της υποκείμενης αξίας πρέπει να δίνει απόδοση $r - k$, κατά μέσο όρο, σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Επομένως η εξίσωση για την απαιτούμενη απόδοση του τίτλου, ώστε να ισχύει η ισότητα με το διωνυμικό δένδρο, γίνεται

$$S * e^{(r_f - k)\Delta t} = p * S * u + (1 - p) * S * d$$

δηλαδή από τα παραπάνω ισχύει

$$e^{(r_f - k)\Delta t} = p * u + (1 - p) * d. \tag{2.23}$$

Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό με πριν, εξάγονται οι ίδιοι τύποι για τα p, u και d, με μόνη διαφορά ότι πλέον το b στον τύπο $p = \frac{b-d}{u-d}$ είναι ίσο με

$$b = e^{(r_f - k)\Delta t}. \tag{2.24}$$

2.3 Περίληψη Κεφαλαίου 2

Αποτελεί πραγματικότητα το γεγονός ότι το διωνυμικό μοντέλο δεν χρησιμοποιείται μόνο για την τιμολόγηση απλών δικαιωμάτων, όπως τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, αλλά και για πιο σύνθετα δικαιώματα, όπως τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς και πώλησης ή δικαιώματα με μερίσματα, αποδεικνύοντας την παρατήρηση ότι το συγκεκριμένο υπόδειγμα είναι εξαιρετικά ευέλικτο. Στο βασικό κεφάλαιο της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί μία επέκταση του συγκεκριμένου μοντέλου, το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο, για την τιμολόγηση δικαιωμάτων πάνω σε ακίνητα.

Αποτελεί δηλαδή ένα υπόδειγμα τιμολόγησης δικαιωμάτων που παρότι δύναται να χρησιμοποιηθεί για σύνθετα δικαιώματα, υπάρχουν μερικοί συγκεκριμένοι περιορισμοί, όπως το γεγονός ότι για να επιτευχθούν ακριβείς υπολογισμοί για τις τιμές πρέπει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα βήματα να είναι πολύ μικρό, δημιουργώντας έτσι ένα δύσχρηστο και χρονοβόρο πλαίσιο. Οπότε μία επέκταση του μοντέλου αυτού, όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι το μοντέλο Black-Scholes [9], που παρότι δεν είναι τόσο ευέλικτο, η χρήση του είναι ευκολότερη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες-Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων

Στο μοντέλο που θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα, σχετικά με την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο ένα ακίνητο, εκτός από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, που παρουσιάστηκε το διωνυμικό μοντέλο, είναι απαραίτητη και η αναφορά στην στοχαστική διαδικασία που θα θεωρηθεί ότι ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή στην περίπτωση αυτή, του ακινήτου. Επιπρόσθετα, εφόσον η εργασία βασίζεται σε στοχαστικά επιτόκια, θα πρέπει να αναλυθούν και τα στοχαστικά μοντέλα που έχουν προταθεί σχετικά με τον υπολογισμό της πορείας της τιμής του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.

Για να γίνει κατανοητές οι στοχαστικές εξισώσεις που προσομοιάζουν οι πορείες της τιμής του ακινήτου και του βραχυπροθέσμου επιτοκίου είναι σημαντικό να παρουσιαστεί η θεωρία γύρω από τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις από την αρχή.

3.1 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Μέχρι πρόσφατα πολλά μοντέλα αγνοούσαν την παρουσία στοχαστικών παραμέτρων λόγω της δυσκολίας επίλυσης των εξισώσεων. Με την σύγχρονη υπολογιστική δύναμη όμως οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις είναι σημαντικές σε πολλές επιστήμες όπως η βιολογία, η φαρμακευτική, μηχανική και η χρηματοοικονομική, για την μοντελοποίηση φαινομένων. Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις δημιουργούνται αν στις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις προσθέσουμε έναν τυχαίο όρο, αλλά, όταν προβαίνουμε στην ενέργεια αυτή, δυστυχώς σε πολλές περιπτώσεις δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις και αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης για να προσεγγίσουμε την λύση.

Όσο αφορά την χρήση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στην προκειμένη περίπτωση, δηλαδή στην μελέτη διωνυμικών μοντέλων για τυχαίες διαδικασίες, γεννάται η εύλογη απορία αν αυτές οι διαδικασίες τείνουν σε ένα όριο, αν το χρονικό βήμα γίνεται όλο και μικρότερο και αν γίνεται να χρησιμοποιηθούν αυτά τα μοντέλα για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως μετοχές ή παράγωγα, με ένα πολύ μικρό χρονικό βήμα που να τείνει στο μηδέν. Για τον παραπάνω λόγο χρησιμοποιούνται οι συνεχείς τυχαίες διαδικασίες, και συγκεκριμένα οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$dX(t) = b\big(t, X(t)\big)dt + h\big(t, X(t)\big)dW(t),\ \ t_0 \le t \le T \qquad (3.1)$$

Για την τιμή του προϊόντος $X(t)$, και όπου το $b\big(t, X(t)\big)dt$ αποτελεί τις *«ντετερμινιστικές» κινήσεις (Deterministic Motions)* και το $h\big(t, X(t)\big)dW(t)$ *τις «τυχαίες» κινήσεις (Random Motions).*

Το $W(t)$ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση ονομάζεται *διαδικασία Wiener ή Κίνηση Brown.*

Ορισμός 3.1: Κίνηση Brown/Διαδικασία Wiener [3]

Μια στοχαστική διαδικασία $X_t, t \geq 0$, που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται Κίνηση Brown $BM(\mu, \sigma)$, με παράμετρο τάσης μ $R(drift\ parameter)$ και μεταβλητότητα$(volatility)\sigma > 0$, αν έχει τις εξής τρεις ιδιότητες:

i. *Αν $y_0 < y_1 < y_2 <..< y_n$ τότε και οι τυχαίες μεταβλητές $X_{y_0}, X_{y_1} - X_{y_0}, X_{y_2} - X_{y_1}, .., X_{y_n} - X_{y_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες, δηλαδή οι μεταβολές είναι ανεξάρτητες.*

ii. *Οι μεταβολές της Κίνησης Brown ακολουθούν την κανονική κατανομή, δηλαδή $X_{y+t} - X_y \sim N(t\mu, t\sigma^2)$, για $y \geq 0$ και $t > 0$, δηλαδή ισχύει*

$$P\big(X_{y+t} - X_y \ \in A\big) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} exp\,(-\frac{|x|^2}{2t}).$$

iii. *Όλες οι πιθανές διαδρομές της Κίνησης Brown είναι συνεχείς συναρτήσεις του t.*

Παρατήρηση 3.1: Αν $X = (X_t, t \geq 0) \sim BM(\mu, \sigma)$ τότε η $Y = (Y_t, t \geq 0)$ με $Y_t = at + bX_t \sim BM(a + b\mu, |b|\sigma)$.

Παρατήρηση 3.2: Μία Κίνηση Brown , η οποία ξεκινάει από το $\mu\eta\delta\acute{\varepsilon}\nu$ ονομάζεται *τυπική κίνηση Brown (Standard Brownian Motion),* και πολλές φορές η ιδιότητα αυτή αναφέρεται απευθείας στον ορισμό. Στον παραπάνω ορισμό όμως δεν έχει γίνει παρόμοια υπόθεση οπότε αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο να ξεκινάει από οποιοδήποτε σημείο x. Το σημείο αυτό θα ορίζεται από το μέτρο πιθανότητας που θα χρησιμοποιείται, ενώ αν δεν αναφέρεται κάτι τότε εξ' ορισμού ξεκινάει από το μηδέν.

Γενικότερα ορίζεται η *Τυπική Κίνηση Brown* ως $BM(0,1)$, δηλαδή η κίνηση Brown για την οποία η μέση τιμή είναι 0 και η διακύμανση 1, και για την οποία ισχύει ότι :

- αν $W = (W_t, t \geq 0) \sim BM(0,1)$ τότε η $X = (X_t, t \geq 0)$ με $X_t = \mu t + \sigma W_t$ είναι μία στοχαστική διαδικασία $BM(\mu, \sigma)$.

Η κίνηση Brown αποτελεί μια πού σημαντική ανακάλυψη για τον τομέα των χρηματοοικονομικών, και παρότι αποτελεί μια μη παραγωγήσιμη συνάρτηση, είναι ολοκληρώσιμη. Τα ολοκληρώματά πάνω στην Κίνηση Brown αρχικά ορίστηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1940 από τον Ιάπωνα μαθηματικό Kyoshi Itô [14], και είναι πολύ σημαντικά για την ανάλυση της πορείας της τιμής ενός χρηματοοικονομικού επενδυτικού τίτλου, είτε είναι μετοχή είτε ακίνητο.

3.1.1 Ολοκλήρωμα του Itô

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο ορισμός του ολοκληρώματος του Itô [4],[14].

Έστω μια τυχαία συνάρτηση f πού είναι εξαρτημένη από μια Κίνηση Brown W_t και ορίζεται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής πάνω στις μεταβολές της Κίνησης Brown, δηλαδή το

$$\int_a^b f(t, \omega) dW_t(\omega)$$

όπου διαισθητικά το $dW_t(\omega)$ γίνεται κατανοητό ως η διαφορά της Κίνησης Brown $W_{t+dt} - W_t$ για πολύ μικρό dt, ενώ η $f: (0, \infty) \times \Omega \to \mathcal{R}$.

Ορισμός 3.2: Το ολοκλήρωμα Itô

Έστω το διάστημα $[a,b]$ και η διαμέριση του $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 <..< t_n = b$ και ότι πρέπει να προσεγγιστεί η παραπάνω συνάρτηση $f(t,\omega)$ ως

$f(t,\omega) \cong \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(t)$, *και* $t_i = a + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0,1,2..n$

τότε το ολοκλήρωμα του Itô μπορεί να οριστεί ως το όριο στο L^2 του $\sum_{i=1}^{n} f(t_i,\omega)[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}](\omega)$, *δηλαδή ισχύει ότι:*

$$\int_a^b f(t,\omega)dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i,\omega)\big[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\big](\omega).$$

Ιδιότητες

i. Το ολοκλήρωμα Itô είναι γραμμικό, καθώς αν υπάρχουν δυο στοχαστικές διαδικασίες f_1 *και* f_2 ισχύει:

$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)dW_t = \lambda_1 \int_a^b f_1 dW_t + \lambda_2 \int_a^b f_2 dW_t$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$.

ii. Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \int_a^b f dW_t$, τότε για τις ροπές της ισχύει

$$E\left[\int_a^b f dW_t\right] = 0,$$

$$Ισομετρία\ Itô: E\left[\left|\int_a^b f(t,\omega)dW_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b |f(t,\omega)|^2 dt\right]$$

iii. Αν, $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le T$ τότε

$$\int_{t_1}^{t_3} f_x dW_x = \int_{t_1}^{t_2} f_x dW_x + \int_{t_2}^{t_3} f_x dW_x$$

Ορισμός 3.3: Το αόριστο ολοκλήρωμα του Itô

Το αόριστο ολοκλήρωμα του Itô $I_t \coloneqq \int_0^t f(t)dW_t$ *είναι μια στοχαστική διαδικασία, που δημιουργείται αν οριστεί το κάτω όριο* $a = 0$ *ως μια σταθερά , αλλά το άνω όριο* $b = t$ *να είναι μεταβλητό.*

Παρατήρηση 3.3: Για κάθε διαφορετικό *t* το ολοκλήρωμα που δημιουργείται είναι μια τυχαία μεταβλητή τετραγωνικά ολοκληρώσιμη με τιμή ίση με $\int_0^t f(t)dW_t$.

Ορισμός 3.4: Διαδικασία Itô

Μια στοχαστική διαδικασία X_t που είναι της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s$$

ονομάζεται διαδικασία Itô και δύναται να γραφτεί και σε διαφορική μορφή ως

$$dX_t = udt + vdW_t.$$

για u, v που ικανοποιούν τις παρακάτω ανισώσεις

$$\int_0^t u(s,\omega)ds < \infty \ και \int_0^t v^2(s,\omega)ds < \infty.$$

3.1.2 Το Λήμμα του Itô

Το λήμμα του Itô χρησιμοποιείται για την παραγώγιση συναρτήσεων στοχαστικών διαδικασιών, και αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές φόρμουλες στην χρηματοοικονομική ανάλυση. Η κατανόηση του λήμματος του Itô ξεκινάει από μια σειρά Taylor για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $F(t, X)$ με

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial X}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial X}\partial t \partial X + \cdots$$

όπου η X περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία της μορφής

$$dX = \mu dt + \sigma dW. \tag{3.2}$$

με μ να παρουσιάζει την ντετερμινιστική τάση, σ την διακύμανση και W είναι μια Κίνηση Brown, για την οποία ισχύει ότι $(dW)^2 = dt$.

Επίσης, καθώς $dt \to 0$, ισχύει ότι $dtdt = (dt^2) = 0 \; και \; dtdW = 0.$

ενώ υψώνοντας στο τετράγωνο την στοχαστική διαδικασία (3.2) και με βάση και την παραπάνω παρατήρηση

$$(dX)^2 = \mu^2(dt)^2 + \sigma^2(dW)^2 + 2\mu\sigma dtdW \to \sigma^2 dt$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω εξάγεται ο παρακάτω τύπος, που για την χρηματοοικονομική επιστήμη αποτελεί μια πολύ χρήσιμη εξίσωση και ονομάζεται εξίσωση του Itô

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial F}{\partial X}dW. \tag{3.3}$$

Παράδειγμα 3.1

Έστω η τιμή μιας μετοχής S και οι μεταβολές της ακολουθούν την παρακάτω στοχαστική εξίσωση $dS = \mu S dt + \sigma S dZ, με \; Z \; μια \; Κίνηση \; Brown.$

Τότε αν οριστεί η συνάρτηση $G = lnS$ και χρησιμοποιηθεί το λήμμα του Itô υπολογίζεται ότι $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mu\frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial G}{\partial S}dZ$ και αν υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \; και \; \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

εξάγεται η τελική στοχαστική εξίσωση $dG = \left(0 + \mu\frac{1}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial G}{\partial S}dZ.$

3.2 Η Διαδικασία της τιμής του υποκείμενου τίτλου

3.2.1 Ιδιότητες Κανονικής και Λογαριθμοκανονικής κατανομής

Στο μοντέλο που θα αναλυθεί θα γίνει χρήση της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, για την κατανόηση της οποίας είναι απαραίτητη η γνώση ορισμένων ιδιοτήτων της κανονικής και της λογαριθμοκανονικής κατανομής, και για τον λόγο αυτό θα γίνει μια προσπάθεια ορισμού και παρουσίασης βασικών παρατηρήσεων για τις κατανομές αυτές.

Ορισμός 3.5: Κανονική Κατανομή

Αν η συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

τότε η X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2, και συμβολίζεται ως $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Ροπές

- $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$ (1η ροπή, Μέση Τιμή)
- $Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2$ (2η ροπή, Διακύμανση)
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0$ (3η ροπή, Ασσυμετρία)
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 3\sigma^4$ (4η ροπή, Κύρτωση)

Παρατήρηση 3.4: Αν $X \sim N(m, \sigma^2)$, τότε ισχύει $X = \mu + \sqrt{\Delta t}\varepsilon, \mu\varepsilon\ \varepsilon \sim N(0,1)$.

Ορισμός 3.6: Λογαριθμοκανονική κατανομή

Αν η $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε ο εκθετικός μετασχηματισμός $Y = e^X$ λέγεται ότι ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu\ \kappa\alpha\iota\ \sigma^2 > 0$, και συμβολικά γράφεται $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$, και έχει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} exp\left[-\frac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], y > 0$$

Παρατηρήσεις

(i) Οι παράμετροι της λογαριθμοκανονικής κατανομής $\mu\ \kappa\alpha\iota\ \sigma^2$ είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της αρχικής κανονικής κατανομής, δεν αποτελούν όμως και την μέση τιμή και την διακύμανση της λογαριθμοκανονικής κατανομής, οι οποίες δίνονται από του τύπους

$$E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad Var(Y) = \left[e^{\sigma^2} - 1\right] e^{2\mu + \sigma^2}.$$

(ii) Μια τυχαία μεταβλητή Y που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή παίρνει μόνο θετικές πραγματικές τιμές, δηλαδή $0 < Y < \infty$.

(iii) Αφού $Y = e^X$ είναι ισοδύναμο το $X = lnY$, οπότε από τον παραπάνω ορισμό ισχύει:

- Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η $e^X \sim LN(\mu, \sigma^2)\ \varepsilon\nu\dot{\omega}$
- Αν η τυχαία μεταβλητή $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ τότε η $lnY \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(iv) Έστω η τυχαία μεταβλητή $V \sim N(0,1)$ τότε η $Y = e^{\mu+\sigma V} \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

(v) Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\text{και } c \in \mathcal{R}$ ισχύει

$$E[e^{-cX}] = \exp\left[-c\mu + \frac{1}{2}c^2\sigma^2\right].$$

3.2.2 Πολυώνυμο Taylor

Ένας απαραίτητος μαθηματικός ορισμός για την απόδειξη της διαδικασίας που ακολουθεί η τιμή μιας μετοχής, ή ενός υποκείμενου τίτλου γενικά, είναι το Πολυώνυμο του Taylor, καθώς θα χρησιμοποιηθεί στην διαδικασία τεκμηρίωσης της Γεωμετρικής Κίνησης Brown.

Ορισμός 3.7: Πολυώνυμο Taylor
Έστω μια συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ που έχει στο $x_0 \in A$ παραγώγους ως την τάξη c, όπου $c \in \mathbb{N}$, τότε ορίζεται το πολυώνυμο Taylor βαθμού c στο σημείο x_0 ως το πολυώνυμο

$$P_c(x) \equiv g(x_0) + g'(x_0) * (x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2} * (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{g^{(c)}(x_0)}{c!} * (x - x_0)^c$$

$$P_n(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{c} \frac{g^{(i)}(x_0)}{i!} * (x - x_0)^i. \qquad \textit{(3.4)}$$

Παράδειγμα 3.2: $\boldsymbol{g(x) = logx}$ στο $\boldsymbol{x_0 = 1}$

Αρχικά υπολογίζοντα οι παράγωγοι της $\log x$ στο σημείο x και μετά στο σημείο $x_0 = 1$ για τις τέσσερις πρώτους παραγώγους, ως εξής

$$g(x) = logx\,, \qquad g(1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad g'(1) = 1$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2}\,, \qquad g''(1) = -1$$

$$g'''(x) = \frac{2}{x^3}\,, \qquad g'''(1) = 2$$

$$g''''(x) = -\frac{6}{x^4}\,, \qquad g''''(1) = -6$$

και γενικά για $c \in \mathbb{N}$

$$g^{(c)}(x) = (-1)^{c+1} * \frac{(c-1)!}{x^c}, \qquad g^{(c)}(1) = (-1)^{c+1} * (c-1)!$$

Οπότε υπολογίζονται και τα πολυώνυμα Taylor για τις $c = 0,1,2,3,4$

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + 1 * (x - 1) = x - 1$$

$$P_2(x) = 0 + 1 * (x - 1) + \frac{1}{2} * (-1) * (x - 1)^2 = (x - 1) - \frac{1}{2} * (x - 1)^2$$

$$P_3(x) = 0 + 1 * (x-1) + \frac{1}{2} * (-1) * (x-1)^2 + \frac{1}{3!} * 2 * (x-1)^3$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2} * (x-1)^2 + \frac{1}{3} * (x-1)^3$$

$$P_4(x) = 0 + 1 * (x-1) + \frac{1}{2} * (-1) * (x-1)^2 + \frac{1}{3!} * 2 * (x-1)^3 + \frac{1}{4!} * (-6) * (x-1)^4$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2} * (x-1)^2 + \frac{1}{3} * (x-1)^3 - \frac{1}{4} * (x-1)^4$$

και γενικότερα για $c \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$P_c(x) = (x-1) - \frac{1}{2} * (x-1)^2 + \frac{1}{3} * (x-1)^3 + .. + \frac{(-1)^{c+1}}{c} * (x-1)^c$$
$$= \sum_{i=1}^{c} \frac{(-1)^{i+1}}{i} * (x-1)^i.$$

Παράδειγμα 3.3: $g(x) = e^x$ στο $x_0 = 0$

Η εκθετική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική στα χρηματοοικονομικά και αξίζει η αναφορά στο πολυώνυμο Taylor της, γιατί αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση.

Παρατηρείται ότι οποιαδήποτε παράγωγος της είναι ο ίδιος της ο εαυτός, δηλαδή

$$((e)^x)' = e^x, \quad ((e)^x)'' = e^x, \dots, ((e)^x)^{(c)} = e^x$$

και άρα για $x_0 = 0$ ισχύει ότι οποιαδήποτε παράγωγος είναι ίση με 1, άρα

$$((e)^x)^{(c)} = e^{x_0} = e^0 = 1.$$

Επομένως το πολυώνυμο Taylor για $c \in \mathbb{N}$ είναι

$$P_c(x) = 1 + x + \frac{1}{2} * x^2 + \frac{1}{3!} * x^3 + .. + \frac{1}{c!} * x^c = \sum_{i=0}^{c} \frac{1}{i!} * x^i.$$

Παρατήρηση 3.5: Σειρές Taylor

Αν το πολυώνυμο Taylor που αναλύθηκε έχει άπειρους όρους δημιουργούνται οι σειρές Taylor, και αποδεικνύεται ότι σε πολλές συναρτήσεις η σειρά Taylor της συνάρτησης g στο σημείο x_0 συγκλινει στην g για κάθε x που απέχει από το x_0 λιγότερο από έναν αριθμό που καλείται *ακτίνα σύγκλισης*. Σχετικά με τα παραδείγματα που αναλύθηκαν για την συνάρτηση $g(x) = logx$, αποδεικνύεται ότι $\forall\ x\ με\ |x-1| < 1$ ισχύει

$$logx = (x-1) - \frac{1}{2} * (x-1)^2 + .. + \frac{(-1)^{c+1}}{c} * (x-1)^c + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} * (x-1)^i.$$

που σημαίνει ότι για καθορισμένο $x\ με\ |x-1| < 1$, ισχύει το όριο, με ακτίνα σύγκλισης 1,

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} * (x-1)^i = logx.$$

Στο παράδειγμα 3.3 με $g(x) = e^x$ισχύει ότι $\forall\ x\ \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} * x^2 + \frac{1}{3!} * x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} * x^i.$$

που σημαίνει ότι για καθορισμένο x, με ακτίνα σύγκλισης το άπειρο ισχύει το όριο

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} * x^i = e^x.$$

3.2.3 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Θα ήταν δελεαστικό να γίνει η υπόθεση ότι οι τιμές των υποκείμενων τίτλων, όπως για παράδειγμα μετοχών ή ακινήτων, ακολουθούν μια Κίνηση Brown, με σταθερό αναμενόμενο ρυθμό τάσης και ρυθμό διακύμανσης, αλλά αυτή η υπόθεση αποτυγχάνει να εξηγήσει το γεγονός ότι η αναμενόμενη απαιτούμενη απόδοση των επενδυτών για μια μετοχή είναι ανεξάρτητη της τιμής της. Στην συνέχεια, με την βοήθεια του λήμματος του Itô, θα αναλυθεί η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή της μετοχής, όπως και οποιοδήποτε άλλου χρηματοοικονομικού στοιχείου, ξεκινώντας με μια διαδικασία Itô, όπως ορίστηκε παραπάνω

$$dX_t = d(\ln(S_t)) = \mu dt + \sigma dW_t, \qquad \textit{(3.5)}$$

με στόχο την εύρεση της μορφής της διαδικασίας S_t.

Εξ' ορισμού παρατηρείται ότι $S_t = e^{X_t}$, οπότε υπάρχει εξ'αρχής η πεποίθηση, με βάση το λήμμα του Itô, ότι η S_t είναι μια διαδικασία Itô αφού η X_t αποτελεί μια διαδικασία Itô, με την μορφή της να δίνεται από το λήμμα του Itô για την συνάρτηση $f(t,x) = e^x$.

Αναλυτικότερα, ισχύει ότι $f_t = 0 \; και \; f_x = f_{xx} = e^x = f$, και άρα η προσέγγιση Taylor ως την δεύτερη τάξη της συνάρτησης $f(t, X_t)$ είναι

$$df(t,X_t) = f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X_t)(dX_t)^2 = f(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f(t,X_t)(dX_t)^2.$$

Θέτοντας $u = \mu \; και \; v = s$, τότε η εξίσωση (3.5) για το X_t μπορεί να γραφτεί ως μια τυπική μορφή διαδικασίας Itô, και χρησιμοποιώντας τον κανόνα λογισμού του Itô ισχύει ότι

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \qquad \textit{(3.6)}$$

$$(dX_t)^2 = \mu^2 * dt^2 + 2 * \mu * \sigma * dt * dW_t + \sigma^2 * (dW_t)^2 \qquad \textit{(3.7)}$$

Επίσης, καθώς $dt \to 0$, ισχύει ότι $dtdt = (dt^2) = 0 \; και \; dtdW_t = 0$, η εξίσωσή *(3.7)* διαμορφώνεται ως εξής

$$(dX_t)^2 = \sigma^2 * dt.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στο ανάπτυγμα Taylor για δύο τάξεις, δηλαδή $c = 2$, ισχύει ότι

$$df(t,X_t) = f(t,X_t)\mu dt + f(t,X_t)\sigma dW_t + \frac{1}{2} f(t,X_t)\sigma^2 * dt.$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $f(t,X_t) = S_t$ και ομαδοποιώντας τους όμοιους όρους εξάγεται η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = S_t * \mu * dt + S_t * \sigma * dW_t + \frac{1}{2} * S_t * \sigma^2 * dt$$
$$= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) * S_t * dt + \sigma * S_t * dW_t.$$

Τέλος, θέτοντας $n \coloneqq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$, η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την πορεία της τιμής μιας μετοχής σε σχέση με τον χρόνο t γίνεται

$$dS_t = n * S_t * dt + \sigma * S_t * dW_t. \tag{3.8}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί μια συνεχή διαδικασία που συνδέει την μεταβολή της τιμής μιας μετοχής από τον χρόνο t ως τον χρόνο $t + dt$ με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, S_t. Η διαδικασία αυτή αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία, που ονομάζεται *Γεωμετρική κίνηση Brown (Geometrical Brownian Motion).*

Παρατήρηση 3.6: Η παραπάνω εξίσωσή έχει αποδειχθεί ότι είναι πολύ σημαντική στα χρηματοοικονομικά και μοντελοποιεί την πορεία της τιμής μιας μετοχής, που όπως αναφέρθηκε και στην περίληψη του κεφαλαίου 2, αποτελεί μια γενίκευση το διωνυμικού μοντέλου σε συνεχή χώρο καταστάσεων και συνεχή χρόνο.

Είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση της πορείας της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου, η περαιτέρω ανάλυση της παραπάνω εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή αποτελείται από δύο συνιστώσες , το άθροισμα των οποίων μοντελοποιεί την μεταβολή της τιμής του στοιχείου στο χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$, οι οποίες είναι

- Το $n * S_t * dt$ αποτελεί μια μεταβολή που εξαρτάται από την χρονική διάρκεια dt καθώς και από την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, το οποίο γίνεται εύκολα κατατνοητό αν αναλογιστεί κανείς ότι η μεταβολή της τιμής εξαρτάται από τις δυνάμεις της αγοράς, την προσφορά και την ζήτηση. Μια απλοϊκή εξήγηση είναι ότι μια αρκετά μεγάλη τιμή S_t οδηγεί σε μεγάλη προσοχή από τους επενδυτές προς το συγκεκριμένο στοιχείο, αφού είναι σημάδι καλής επένδυσης, και για τον λόγο αυτό μεταβάλλεται είτε η προσφορά είτε η ζήτηση και άρα και η τιμή. Σημαντική παρατήρηση είναι το γεγονός ότι αν $n > 0$ τότε η μεταβολή αυτή θα είναι θετική ενώ αν $n < 0$ θα είναι αρνητική.
- Ο λόγος την ύπαρξης της δεύτερης μεταβολής, που συμβολίζεται με $\sigma * S_t * dW_t$, είναι το γεγονός ότι μία χρηματοοικονομική αγορά αποτελείται από πολλούς ανεξάρτητους επενδυτές, που είναι αδύνατον να προβούν σε συντεταγμένες κινήσεις και να επηρεάσουν την μετοχή κατά μόνο $n * S_t * dt$. Για τον παραπάνω λόγο θα υπάρχουν και στατιστικές διακυμάνσεις που οδηγούν σε ισοπίθανες αυξήσεις ή μειώσεις της τιμής των μετοχών. Οι διακυμάνσεις αυτές όμως είναι ανάλογες και του όγκου των συναλλαγών, ο οποίος με την σειρά του επηρεάζεται και από την τρέχουσα τιμή της μετοχής S_t, και έτσι εξάγεται η δεύτερη μεταβολή $\sigma * S_t * dW_t$, με το σ να ονομάζεται μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου.

Παρατήρηση 3.7: Το μοντέλο αυτό, όπως ήδη αναλύθηκε, συνδέει την μεταβολή της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου με την τιμή του στην αρχική χρονική στιγμή, και χωρίζεται σε δύο μέρη, με το πρώτο να εκφράζει την μέση μεταβολή και το δεύτερο την διακύμανση αυτής της μέσης μεταβολής με στοχαστικό παράγοντα μία κίνηση Brown W_t. Αν έλειπε ο δεύτερος όρος τότε η συνάρτηση θα ήταν $dS_t = n * S_t * dt \text{ που σημαίνει ότι } \frac{dS_t}{dt} = n * S_t$, που είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών με γνωστή λύση ίση με $S_t = S_0 * e^{n*t}$.

Συνοψίζοντας, στην περίπτωση που θα αναλυθεί το υποκείμενο στοιχείο για τα δικαιώματα θα είναι ένα ακίνητο (Real Estate Asset), του οποίου η τιμή θα ακολουθεί μια Γεωμετρική Κίνηση Brown.

3.3 Το μοντέλο για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια

Η εργασία αυτή θα βασιστεί σε στοχαστικά επιτόκια, που σημαίνει ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, παρόμοια με την παραπάνω που ακολουθεί η τιμή του ακινήτου αλλά με διαφορετικούς όρους. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση αυτή θα είναι μια επέκταση του ντετερμινιστικού μοντέλου που αναπτύχθηκε από τους Black-Derman και Toy το 1990 [15], οπότε και αρχικά κρίνεται σκόπιμο να αναλυθεί το μοντέλο με ντετερμινιστικούς όρους και μετά να παρουσιαστούν διάφορα στοχαστικά μοντέλα.

3.3.1 Ντετερμινιστικό μοντέλο για τα επιτόκια των Black, Derman, Toy

Λαμβάνοντας υπόψιν ένα διωνυμικό δένδρο, όπως αναλύθηκε παραπάνω, η τιμή του ενός έτους *επιτοκίου προεξόφλησης (Yield),* που συμβολίζεται ως y, είναι σχετική με την τιμή S_0, δηλαδή από την σημερινή τιμή, και δίνεται από τον τύπο

$$S_0 = \frac{100}{(1+y)^N}. \qquad \textit{(3.9)}$$

Αντίστοιχα τα επιτόκια προεξόφλησης $y_{1,u} \text{ και } y_{1,d}$ έναν χρόνο από σήμερα, τα οποία είναι σχετικά με τα $S_u \text{ και } S_d$ δίνονται από τον τύπο

$$S_{1,u-d} = \frac{100}{\left(1+y_{1,u-d}\right)^{N-1}}. \qquad (3.10)$$

Το ζητούμενο της ενότητας είναι να αναλυθεί με ποιον τρόπο γίνεται η *δομή των επιτοκίων που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο (Model's Term Structure*) να ταιριάζει με την δομή των *πραγματικών επιτοκίων της αγοράς (Market's Term Structure).*

Παράδειγμα 3.4: Υπολογισμός των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων

Έστω ότι ο παρακάτω Πίνακας 3.1 παρουσιάζει την δομή των επιτοκίων της αγοράς

Πίνακας 3.1

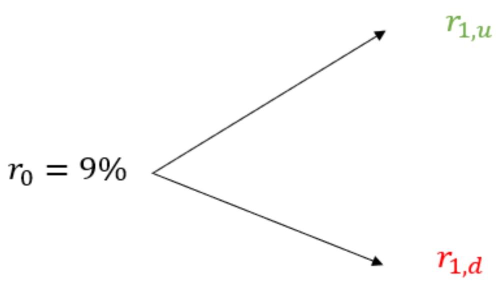
Years To Maturity	Zero-Coupon Rates (%)	Zero-Coupon Volatilities
1	9	24
2	9.5	22
3	10	20

Το επιτόκιο για μια ημερομηνία λήξης(Maturity) ενός χρόνου σημαίνει ότι δύναται να υπολογιστεί η τιμή για ένα προϊόν, για παράδειγμα ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού(Zero-Coupon Bond) που μετά από μία περίοδο δίνει στον επενδυτή 100 νομισματικές μονάδες, χρησιμοποιώντας τον εξής τύπο

$$S_0 = \frac{\frac{1}{2}*S_u+\frac{1}{2}*S_d}{(1+r_0)^N} = \frac{\frac{1}{2}*100+\frac{1}{2}*100}{(1+0.09)^1} = \frac{100}{1.1} = 91.74 \qquad (3.11)$$

3.3.1.1 Βραχυπρόθεσμα επιτόκια ενός χρόνου στο μέλλον

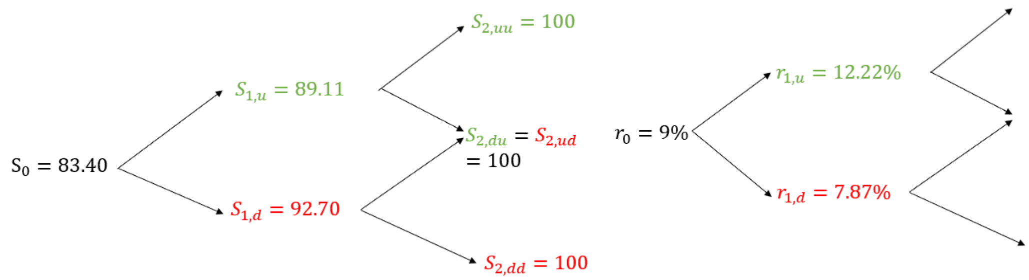
Για τον υπολογισμό των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων ένα χρόνο από σήμερα θα χρησιμοποιηθούν τα επιτόκια προεξόφλησης και η μεταβλητότητα για ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού με χρόνο λήξης δύο χρόνων (Two-Year Zero-Coupon Bond), που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.1: Δένδρο επιτοκίων

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται το διωνυμικό δένδρο για τα επιτόκια (Rate Tree), στο οποίο είναι γνωστό ότι το σημερινό βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ενός έτους είναι 9%, και πρέπει να υπολογιστούν τα μελλοντικά βραχυπρόθεσμα επιτόκια ενός χρόνου $r_{1,u}$ $και$ $r_{1,d}$, με τέτοιον τρόπο ώστε η τιμή και η μεταβλητότητα του επιτοκίου δύο χρόνων του μοντέλου να είναι ίσες με τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 3.1. Για καλύτερη αναπαράσταση της πορείας των επιτοκίων, με πράσινο χρώμα παρουσιάζονται οι τιμές του επιτοκίου και του ομολόγου αν το επιτόκιο ακολουθήσει τον ανοδικό κλάδο του διωνυμικού δένδρου, ενώ με κόκκινο αν το επιτόκιο ακολουθήσει τον καθοδικό κλάδο.

Έστω ότι $r_{1,u} = 12.22\%$ $και$ $r_{1,d} = 7.78\%$ και ότι υπάρχει ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού με χρόνο λήξης δύο χρόνων, που ανεξάρτητα από την πορεία των επιτοκίων δίνει 100 νομισματικές μονάδες στον επενδυτή.



Σχήμα 3.2: Δένδρα επιτοκίου (Rate tree) και δένδρο τιμής τίτλου (Price tree)

Χρησιμοποιώντας τα δένδρα των επιτοκίων και της τιμής του ομολόγου στο Σχήμα 3.2, εξάγονται οι πιθανές τιμές του ομολόγου στον χρόνο 1 χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$S_{1,u} = \frac{\frac{1}{2}*S_{uu}+\frac{1}{2}*S_{ud}}{(1+r_{1,u})^N} = \frac{\frac{1}{2}*100+\frac{1}{2}*100}{(1+0.1222)^1} = \frac{100}{1.1222} = 89.11 \tag{3.12}$$

$$S_{1,d} = \frac{\frac{1}{2}*S_{ud}+\frac{1}{2}*S_{dd}}{(1+r_{1,d})^N} = \frac{\frac{1}{2}*100+\frac{1}{2}*100}{(1+0.0979)^1} = \frac{100}{1.0979} = 92.70 \tag{3.13}$$

Ύστερα υπολογίζονται τα επιτόκια προεξόφλησης ενός έτους, τα $y_{1,u}$ *και* $y_{1,d}$, από τους τύπους:

$$S_{1,u} = \frac{100}{(1+y_{1,u})^{N-1}}, \qquad S_{1,d} = \frac{100}{(1+y_{1,d})^{N-1}}$$

Δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει ότι

$$89.11 = \frac{100}{(1+y_{1,u})^1} \tag{3.14}$$

$$92.70 = \frac{100}{(1+y_{1,d})^1} \tag{3.15}$$

Οπότε εξάγονται οι τιμές για τα επιτόκια προεξόφλησης από τους τύπους (3.14) και (3.15) $y_{1,u} = 0.1222$, $y_{1,d} = 0.0787$.

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές του ομολόγου και του επιτοκίου προεξόφλησης για τον επόμενο χρόνο, είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή σήμερα ως εξής

$$S_0 = \frac{\frac{1}{2}*S_{1,u}+\frac{1}{2}*S_{1,d}}{(1+r_0)^N} = \frac{\frac{1}{2}*89.11+\frac{1}{2}*92.70}{(1+0.09)^1} = \frac{90.905}{1.09} = 83.40 \tag{3.16}$$

Τέλος, θα υπολογιστεί το επιτόκιο προεξόφλησης δύο ετών που ισχύει σήμερα, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3, που συμβολίζεται ως $y_{2,tod}$, έχοντας ως γνωστό το S_0

$$S_0 = \frac{100}{(1+y_{2,tod})^N}$$

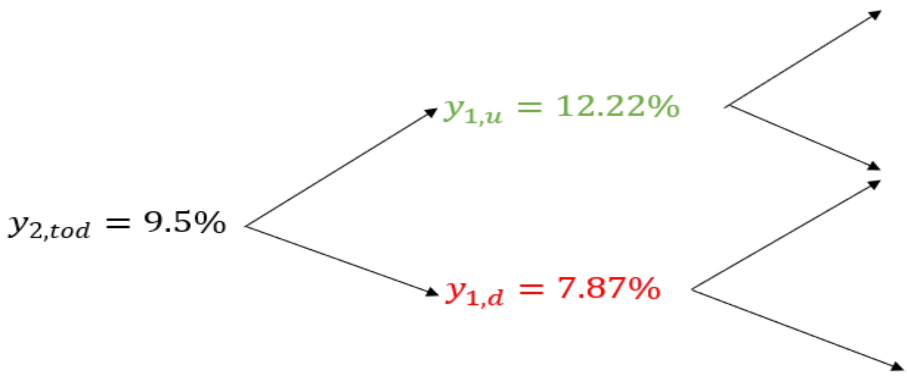
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει ότι

$$83.40 = \frac{100}{\left(1 + y_{2,tod}\right)^2}$$

και άρα εξάγεται η εξίσωση (3.17)

$$\left(1 + y_{2,tod}\right)^2 = 1{,}19904 \tag{3.17}$$

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται ότι $y_{2,tod} = 0.095 = 9.5\%$.



Σχήμα 3.3: Δένδρο επιτοκίου προεξόφλησης (Yield tree)

Όσο αναφορά την μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης δύο ετών ορίζεται ως ο φυσικός λογάριθμος του πηλίκου των δύο πιθανών επιτοκίων προεξόφλησης ενός έτους, δηλαδή των $y_{1,u}$ *και* $y_{1,d}$, και δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_{2,y_{2,tod}} = \frac{\ln\left(\frac{r_{1,u}}{r_{1,d}}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{12.22}{7.87}\right)}{2} = 0.22 = 22\%. \tag{3.18}$$

Με βάση την τιμή των μελλοντικών βραχυπρόθεσμων επιτοκίων ενός χρόνου $r_{1,u}$ *και* $r_{1,d}$ που επιλέχθηκαν ,υπολογίστηκε η τιμή και η μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης $y_{2,tod}$ *και* $\sigma_{2,y_{2,tod}}$ αντίστοιχα, οι οποίες ταιριάζουν με την δομή της αγοράς όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1. Αν η επιλογή των $r_{1,u}$ *και* $r_{1,d}$ ήταν λάθος θα εντοπίζονταν τα σωστά με την *μέθοδο δοκιμής και λάθους (Trial and Error).* Συνοψίζοντας , ένα αρχικό επιτόκιο ενός έτους ίσο με 9%, το οποίο ύστερα από έναν χρόνο θα είναι ίσο είτε με 12.22% είτε με 7.87% με ίση πιθανότητα, εξασφαλίζουν ότι η δομή του μοντέλου είναι ίση με την δομή της αγοράς για τα δύο πρώτα χρόνια τουλάχιστον.

Στην παραπάνω διαδικασία έχει γίνει η υπόθεση ότι το χρονικό βήμα είναι ίσο με 1, που σημαίνει ότι είναι ίσο με 1 χρόνο. Ιδανικά, όπως αναφέρουν και ο Black, Derman και Toy στην εργασία τους, το χρονικό βήμα θα επιθυμούσαν να ήταν όσο το δυνατόν μικρότερο, ακόμα και ημερήσιο και για πολλά χρόνια στο μέλλον, αλλά στην εποχή τους αποτελούσε εμπόδιο για την συγκεκριμένη διαδικασία η δύναμη των τότε υπολογιστικών μηχανών. Στην σημερινή εποχή η μείωση του χρονικού βήματος είναι δυνατή, όπως ακριβώς και στο διωνυμικό μοντέλο.

3.3.1.2 Βραχυπρόθεσμα επιτόκια δύο χρόνων στο μέλλον

Ο υπολογισμός του επιτοκίου ενός έτους έγινε με τον υπολογισμό του επιτοκίου προεξόφλησης ενός έτους, ενώ με τον υπολογισμό του επιτοκίου προεξόφλησης δύο ετών βρέθηκαν οι δύο πιθανές τιμές του επιτοκίου ενός έτους σε έναν χρόνο από σήμερα. Όσο αναφορά πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις του επιτοκίου πρέπει να υπολογιστεί στο μοντέλο η τιμή των πιθανών επιτοκίων που δίνουν ένα επιτόκιο προεξόφλησης τριών ετών, που η τιμή και η μεταβλητότητα να ταιριάζει με την δομή της αγοράς. Πρέπει δηλαδή να γίνει ταίριασμα δύο ποσοτήτων, της τιμής και της μεταβλητότητας, με τρία βραχυπρόθεσμα επιτόκια $r_{2,uu}, r_{2,ud}\ και\ r_{2,dd}$ ενώ προηγουμένως υπήρχαν δύο μεταβλητές και δύο επιτόκια. Η παραπάνω παρατήρηση σημαίνει ότι στην προηγούμενη περίπτωση, που γινόταν ταίριασμα δύο μεταβλητών με δύο βραχυπρόθεσμα επιτόκια, υπήρχε μόνο μία σωστή δυάδα $r_{1,u}\ και\ r_{1,d}$ που ταίριαζε στην δομή της αγοράς, ενώ τώρα είναι δυνατόν να υπάρξουν περισσότερες τριάδες $r_{2,uu}, r_{2,ud}\ και\ r_{2,dd}$ οι οποίες να παράγουν την σωστή τιμή και μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης τριών ετών.

Είναι σημαντικό όμως να ληφθεί υπόψιν ότι το μοντέλο υποθέτει ότι το επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μεταβλητότητα που σχετίζεται μόνο με τον χρόνο. Με απλά λόγια σε έναν χρόνο από σήμερα το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο θα είναι είτε 12.22% με μεταβλητότητα ίση με

$$\sigma_u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_{2,uu}}{r_{2,ud}}\right) \tag{3.19}$$

είτε 7.87% με μεταβλητότητα ίση με

$$\sigma_d = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_{2,ud}}{r_{2,dd}}\right). \tag{3.20}$$

Είναι δεδομένο όμως ότι η μεταβλητότητα του επιτοκίου πρέπει να έχει μοναδική τιμή, γεγονός που σημαίνει ότι $\sigma_u = \sigma_d$ και άρα

$$\frac{r_{2,uu}}{r_{2,ud}} = \frac{r_{2,ud}}{r_{2,dd}}$$

που σημαίνει ότι

$$r_{2,ud}^2 = r_{2,uu} * r_{2,dd}. \tag{3.21}$$

Η δεδομένη παρατήρηση σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να γίνουν τρεις υποθέσεις για τα $r_{2,uu}, r_{2,ud}\ και\ r_{2,dd}$, αλλά μόνο δύο αφού το $r_{2,ud}$ μπορεί να υπολογιστεί από τις άλλες δύο ποσότητες με βάση τον παραπάνω τύπο. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι πρέπει να γίνει ταίριασμα δύο επιτοκίων, των $r_{2,uu}\ και\ r_{2,dd}$, με δύο μεταβλητές, την τιμή και την μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης τριών ετών $y_{3,tod}$, οπότε αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της μη-μοναδικότητας που αναφέρθηκε παραπάνω, αφού υπάρχει μια μοναδική δυάδα επιτοκίων που παράγει τα σωστά αποτελέσματα.

Με αντίστοιχη μεθοδολογία υπολογίζονται και τα επιτόκια για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα.

3.3.1.3 Βασικά βήματα μοντέλου

Η μεθοδολογία εύρεσης του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου με την διαδικασία που περιεγράφηκε παραπάνω μπορεί να συμπυκνωθεί στα εξής βήματα:

1. Καθορισμός της πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου(Risk Neutral Probability) ανοδικής κίνησης $p = 50\%$ και καθοδικής $q = 1 - p = 50\%$.
2. Για κάθε εισαγόμενο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο:
    - Προσαρμόστε το επιτόκιο στον μεγαλύτερο κλάδο του διωνυμικού δένδρου στο χρονικό βήμα i.
    - Υπολογίστε όλα τα άλλα επιτόκια στο ίδιο χρονικό βήμα, τα οποία συνδέονται με τον ακριβώς από πάνω κόμβο στο δένδρο, δηλαδή δεδομένου του r_u υπολογίστε το r_d από τον τύπο $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) = \sigma_i * \sqrt{\Delta t}$, όπου το Δt είναι το μήκος του χρονικού βήματος.
    - Προεξοφλήστε στο προηγούμενο χρονικό βήμα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της επαγωγής προς τα πίσω (Backward Induction), από το χρονικό βήμα i ως την αρχική χρονική στιγμή.
    - Επαναλάβετε έως ότου η προεξοφλημένη τιμή στον πρώτο κόμβο του δένδρου ισούται με την τιμή του επιτοκίου με βάση την καμπύλη της αγοράς.
3. Όταν έχει λυθεί κρατήστε τα επιτόκια που υπολογίστηκαν και προχωρήστε στο επόμενο χρονικό βήμα (επόμενο εισαγόμενο επιτόκιο), μεγαλώνοντας το διωνυμικό δένδρο μέχρι να συμπληρωθεί ολόκληρη η καμπύλη επιτοκίων προεξόφλησης (Yield Curve).

3.3.2 Στοχαστικά μοντέλα για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια

Το μοντέλο υπολογισμού του επιτοκίου που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα αποτελεί μια ντετερμινιστική προσέγγιση που λύνει το πρόβλημα της εύρεσης του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Όμως ο συγκεκριμένος στόχος είναι δυνατόν να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας συνεχή υποδείγματα υπολογισμού των επιτοκίων, όπως το υπόδειγμα του Vasicek ή το μοντέλο Ho-Lee [5],[16].

3.3.2.1 Μοντέλο του Vasicek

Μια στοχαστική ανέλιξη του ρυθμού επιτοκίου r_t έχει παρατηρηθεί ότι κινείται γύρω από ένα σταθερό σημείο , δηλαδή επανέρχεται σε ένα μέσο όταν τείνει να μετακινηθεί μακριά από αυτό το σημείο. Το παραπάνω σημαίνει ότι αν το r_t αυξηθεί πάνω από ένα σημείο, έστω $\varphi = 4\%$, τότε υπάρχει η τάση να μειωθεί ώστε να επιστρέψει κοντά στο σημείο φ, ενώ αν μειωθεί κάτω από το σημείο αυτό τείνει να αυξηθεί. Με λίγα λόγια μια στοχαστική ανέλιξη του επιτοκίου έχει τις ιδιότητες της στασιμότητας και της επιστροφής στον μέσο, είναι δηλαδή *Mean Reverting.*

Τα επιτόκια αντιμετωπίζουν μεγάλη αβεβαιότητα σχετικά με την πορεία τους στον χρόνο και στην μοντελοποίηση της αβεβαιότητας αυτής ορίζεται ένας χώρος πιθανότητας (Probability Space) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ εξοπλισμένος με μία τυπική διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}$. Κάτω από ένα μέτρο ουδέτερου κινδύνου (Risk-Neutral Measure) P, ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$dr_t = c(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{3.22}$$

όπου $τα\ c, b\ και\ \sigma$ είναι θετικές σταθερές.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Itô αποδεικνύεται ότι η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$r_t = e^{-ct}\left[r_0 + \int_0^t cbe^{cu}du + \sigma \int_0^t e^{cu}dW_u\right]. \tag{3.23}$$

Από την παραπάνω εξίσωση (3.23) εξάγεται ο τύπος

$$r_t = e^{-ct}\left[r_0 + b(e^{ct} - 1) + \sigma \int_0^t e^{cu}dW_u\right] = \pi_t + \sigma \int_0^t e^{c(u-t)}dW_u, \tag{3.24}$$

όπου π_t είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση.

Υπολογισμός της μέσης τιμής

Ξεκινώντας από την αρχική εξίσωση, αν γραφτεί με την ολοκληρωτική της μορφή, δηλαδή από την

$$r_t = r_0 + \int_0^t (c(b - r_u)du + \sigma dW_u),$$

ορίζεται η $\mu_t \coloneqq E[r_t] = r_0 + \int_0^t (c(b - E[r_u])du)$, από την οποία εξάγεται

$$\frac{d}{dt}\mu_t = c(b - \mu_t).$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας στο ολοκλήρωμα το e^{ct} αποδεικνύεται ότι

$$E[r_t] = e^{-ct}[r_0 + b(e^{ct} - 1) = \mu_t. \tag{3.25}$$

Στο μοντέλο του Vasicek, η μεταβλητή b δύναται να ερμηνευθεί ως το επίπεδο γύρω από το οποίο κινείται το επιτόκιο, δηλαδή το επίπεδο φ που ορίστηκε παραπάνω, και ονομάζεται $επίπεδο\ επιστροφής\ στον\ μέσο\ (mean\ reverting\ level)$.

Υπολογισμός της διακύμανσης

Για την διακύμανση ορίζεται η

$$\sigma_t^2 \coloneqq Var(r_t) = E\left[\left(\sigma e^{-ct}(\int_0^t e^{cu}dW_u)\right)^2\right]$$

που μπορεί να γραφτεί, λόγω της Ισομετρίας του Itô, ως

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 e^{-2ct}E\left[\int_0^t e^{2cu}du\right] = \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2ct}}{2c}\right). \tag{3.26}$$

Παρατήρηση 3.8: Το r_t ακολουθεί κανονική κατανομή και ισχύει ότι η απόσταση $\left(W_{u_{i+1}} - W_{u_i}\right) \sim N(0, u_{i+1} - u_i)$. Γενικά, αν το δ είναι ντετερμινιστικό, δηλαδή είναι συνάρτηση μόνο του t, τότε το $\int_0^t \delta(u) dW_u$ ακολουθεί κανονική κατανομή. Οπότε στο υπόδειγμα του Vasicek το $r_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, με μέση τιμή και διακύμανση που υπολογίστηκαν παραπάνω.

Παρατήρηση 3.9: Το βασικό μειονέκτημα του υποδείγματος είναι ότι λόγω του γεγονότος ότι το r_t ακολουθεί κανονική κατανομή σημαίνει ότι μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Ένα μειονέκτημα όμως που δεν καθιστά απαγορευτική την χρήση του καθώς σε κάποιες χρονικές στιγμές, κυρίως σε περιόδους κρίσης, τα επιτόκια μπορεί να είναι αρνητικά.

3.3.2.2 Το μοντέλο του Dothan

Το δεύτερο συνεχές μοντέλο υπολογισμού του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου που θα αναλυθεί συνοπτικά είναι το μοντέλο του Dothan, στο οποίο χρησιμοποιείται η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr_t = kr_t dt + \sigma r_t dW_t \tag{3.27}$$

όπου το k είναι μια πραγματική σταθερά.

Εύκολα υπολογίζεται ότι

$$r_t = r_s * e^{\left(k - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)}, \gamma\iota\alpha\ s \leq t,$$

Οπότε το r_t, δεδομένου του $\mathcal{F}_s$, ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση

$$E[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{k(t-s)} \tag{3.28}$$

$$Var[r_t|\mathcal{F}_s] = {r_s}^2 e^{2k(t-s)}\left(e^{\sigma^2(t-s)} - 1\right). \tag{3.29}$$

Λόγω της λογαριθμοκανονικής κατανομής το r_t είναι πάντα θετικό για κάθε t, και έτσι αντιμετωπίζεται το βασικό μειονέκτημα του μοντέλου το Vasicek. Αντίθετα όμως, παρατηρείται όμως το βασικό μειονέκτημα του Dothan είναι ότι είναι *mean reverting,* δηλαδή κινείται γύρω από ένα σημείο μόνο αν $k < 0$, και μόνο στο σημείο μηδέν. Τέλος ένα σημαντικό πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι αποτελεί το μόνο μοντέλο που το r_t ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή και υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για την τιμολόγηση ομολόγων.

3.3.2.3 Το μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Ένα τρίτο μοντέλο που έχει προταθεί για την μοντελοποίηση της πορείας του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι το μοντέλο CIR, το οποίο βασίζεται στην στοχαστική διαφορική διαδικασία των $Cox - Ingressol - Ross$

$$dr_t = l(z - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r(0) = r_0 \tag{3.30}$$

στην οποία υπάρχουν 3 παράμετροι που χαρακτηρίζουν την επιστροφή προς τον μέσο (M*ean Reversion)* της διαδικασίας

- Το l δηλώνει την ταχύτητα με την οποία γίνεται η επιστροφή στον μέσο.
- Το s δηλώνει το σημείο γύρω από το οποίο κινείται το επιτόκιο μακροπρόθεσμα.
- Το σ εκφράζει την μεταβλητότητα της μεταβλητής r.

και W_t είναι μια διαδικασία Wiener.

Η πιο βασική διαφορά από το μοντέλο του Vasicek είναι ότι στο μοντέλο CIR το r_t δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και μάλιστα υπό τις συνθήκες $2lz > \sigma^2 και\, r_0 > 0$ είναι αυστηρά θετικό.

Στο μοντέλο αυτό η μέση τιμή και η διακύμανση του r_t, δεδομένου ενός συνόλου $\mathcal{F}_s$, δίνονται από τους τύπους

$$E(r_t|\mathcal{F}_s) = r_s e^{-l(t-s)} + z(1 - e^{-l(t-s)}) \tag{3.31}$$

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = r_s \frac{\sigma^2}{l}(e^{-l(t-s)} - e^{-2l(t-s)}) + z\frac{\sigma^2}{2l}\left(1 - e^{-l(t-s)}\right)^2. \tag{3.32}$$

3.3.2.4 Το συνεχές μοντέλο Black-Derman-Toy

Τέλος το τελευταίο μοντέλο που θα αναλυθεί, και μάλιστα είναι αυτό που θα χρησιμοποιηθεί και στην τιμολόγηση των παραγώγων κατοικιών, είναι το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Black-Derman-Toy το 1990, οι οποίοι εκτός από το ντετερμινιστικό μοντέλο, που αναλύθηκε παραπάνω, πρότειναν και ένα συνεχές μοντέλο.

Στο μοντέλο αυτό η μεταβλητότητα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο και το επιτόκιο αυτό περιγράφεται από την στοχαστική διαδικασία

$$dlnr_t = \left\{\varphi_t + \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} lnr_t\right\}dt + \sigma_t dW_t \tag{3.33}$$

όπου το $\frac{d\sigma_t}{\sigma_t}$ είναι *η ταχύτητα επιστροφής προς τον μέσο (Speed of Mean Reversion)* και το φ_t, αν διαιρεθεί με την ταχύτητα επιστροφής προς τον μέσο, δηλώνει *τον εξαρτημένο προς τον χρόνο επίπεδο επιστροφής (Time Dependent Mean Reversion Level).*

Τα φ_t και σ_t επιλέγονται με τέτοιον τρόπο ώστε να ταιριάζουν με την δομή της αγοράς βραχυπρόθεσμων επιτοκίων και με την μεταβλητότητα τους, δηλαδή με την καμπύλη επιτοκίων (Yield Curve) και την καμπύλη μεταβλητότητας (Volatility urve), και αφότου επιλεχθούν η μεταβλητότητα των μελλοντικών βραχυπρόθεσμων επιτοκίων γίνεται ντετερμινιστική. Βασικό μειονέκτημα του μοντέλου είναι ότι για δεδομένες συναρτήσεις του σ_t το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μπορεί να παρουσιάζει την ιδιότητα απομάκρυνσης από τον μέσο (Mean Fleeing) αντί για επιστροφής προς τον μέσο (Mean Reverting).

Στο συγκεκριμένο μοντέλο το επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή, όπως και στο μοντέλο του Dothan, αλλά δυστυχώς δεν υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για τον υπολογισμό την τιμής των ομολόγων, και για τον λόγο αυτό πολλοί αναλυτές επιλέγουν η μεταβλητότητα του επιτοκίου να είναι σταθερή, ίση με σ, δηλαδή να μην εξαρτάται από τον χρόνο, μια ιδιότητα που θα γίνει χρήσιμη και στο επόμενο κεφάλαιο που θα τιμολογηθούν δικαιώματα κατοικιών. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο γίνεται

$$dlnr_t = \varphi_t dt + \sigma dW_t. \tag{3.34}$$

3.4 Περίληψη Κεφαλαίου 3

Στο κεφάλαιο 2 αναλύθηκε το διωνυμικό μοντέλο, το οποίο και θα χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο ένα ακίνητο. Για την τιμολόγηση όμως είναι απαραίτητη και η γνώση της διαδικασία που ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου, ώστε να συμπληρωθούν οι κλάδοι του δένδρου. Η υπόθεση που θα πραγματοποιηθεί είναι ότι η αξία των ακινήτων ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown και για τον λόγο αυτό αναλύθηκε η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία, και αποδείχθηκε ο τύπος της μεταβολής της τιμής του ακινήτου σε ένα διάστημα $[t, t + dt]$.

Επιπρόσθετα, για να δημιουργηθεί ένα διωνυμικό δένδρο, απαιτούνται και οι πιθανότητες ανόδου και καθόδου, οπότε είναι απαραίτητη και η γνώση της διαδικασίας που ακολουθεί το επιτόκιο, το οποίο θα θεωρηθεί στοχαστική μεταβλητή. Για τον λόγο αυτό παρουσιάστηκαν ένα ντετερμινιστικό και τέσσερα στοχαστικά μοντέλα για τα επιτόκια, και ήδη αναφέρθηκε ότι θα χρησιμοποιηθεί μια παραλλαγή του στοχαστικού μοντέλου υπολογισμού βραχυπροθέσμων επιτοκίων των Black, Derman και Toy του 1990 [15].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μοντέλο Τιμολόγησης Δικαιωμάτων σε Ακίνητα με Στοχαστικά Επιτόκια

Στα προηγούμενα εισαγωγικά κεφάλαια αναλύθηκαν τα δικαιώματα προαίρεσης πάνω με υποκείμενο τίτλο κάποιο χρηματοοικονομικό στοιχείο, το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων καθώς και η Γεωμετρική κίνηση Brown και τα στοχαστικά μοντέλα υπολογισμού στοχαστικών επιτοκίων. Ο λόγος της επιλογής των συγκεκριμένων ενοτήτων είναι το γεγονός ότι θα φανούν χρήσιμες για το μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων με υποκείμενο τίτλο ένα ακίνητο, όπως θα περιγράφει παρακάτω. Αρχικά όμως είναι άξιοι αναφοράς οι λόγοι ύπαρξης τέτοιων δικαιωμάτων προαίρεσης, και σε ποιο λόγο αποσκοπεί η δημιουργία τους, όπως παρουσιάστηκαν από τους Buttimer-Kau-Slawson [17].

4.1 Χρησιμότητα της αγοράς δικαιωμάτων ακινήτων

4.1.1 Χρηματοοικονομική μόχλευση (Leverage)

Η αγορά κατοικιών αποτελεί έναν χώρο με μεγάλο δανεισμό, και με την εισαγωγή των παραγώγων κατοικιών οι ευκαιρίες στον χώρο αυτόν αυξάνονται. Έστω ένας επενδυτής ο οποίος κατέχει μικρό αρχικό κεφάλαιο, που υπό κανονικές συνθήκες θα χρηματοδοτούσε την αγορά κατοικίας χρησιμοποιώντας το κεφάλαιο αυτό και παίρνοντας ως ενυπόθηκο δάνειο το υπόλοιπο ποσό, ρισκάροντας όμως να χάσει ποσό μεγαλύτερο του αρχικού κεφαλαίου.

Η αγορά των δικαιωμάτων δίνει την δυνατότητα όμως στον επενδυτή να κατοχυρώσει μια θέση αγοράς σε ένα ακίνητο με πολύ μικρότερο κόστος, που είναι ίσο με μόνο την τιμή του δικαιώματος, που σε γενικά επίπεδα είναι χαμηλή, αγοράζοντας ένα δικαίωμα αγοράς. Το βασικό πλεονέκτημα την κίνησης αυτής είναι ότι δεν χρειάζεται να δανειστεί χρήματα για την παραπάνω αγορά, αλλά χρησιμοποιεί μόνο το αρχικό του κεφάλαιο, και με τον τρόπο αυτό δεν γίνεται να χάσει ποσό μεγαλύτερο από την αρχική του θέση.

4.1.2 Ρευστότητα (Liquidity)

Έστω ότι υπάρχει μια επενδυτική εταιρεία η οποία κατέχει μεγάλη επενδυτική θέση σε μια σχετική μικρή αγορά κατοικιών. Αν η εταιρεία αποφασίσει να εξέλθει από την αγορά αυτήν, δηλαδή πουλήσει απευθείας όλες τις κατοικίες που έχει στο ενεργητικό της, τότε θα επηρεάσει την αγορά, αυξάνοντας την προσφορά, οπότε και θα αναγκαστεί να πουλήσει σε χαμηλότερες τιμές. Στην περίπτωση όμως που πουλήσει δικαιώματα αγοράς σε επενδυτές με διαφορετικές λήξεις, η αγορά δεν θα μετακινηθεί απότομα και θα καταφέρει να εξέλθει πιο σταδιακά, χωρίς να αναγκαστεί να χάσει μεγάλο μέρος την αξίας του ενεργητικού της.

4.1.3 Αρνητικές προσδοκίες για την αγορά (Negative Sentiments)

Πριν την δημιουργία της αγοράς αυτής αν ένας επενδυτής πίστευε ότι οι τιμές των κατοικιών θα πέσουν δεν είχε καμία δυνατότητα επένδυσης πάνω στην πεποίθηση αυτήν, αλλά το μόνο που μπορούσε ήταν να απέχει από την αγορά ακινήτων. Τώρα όμως ένας επενδυτής με παρόμοιες απόψεις έχει πολλές επενδυτικές επιλογές όπως το να πάρει θέση πώλησης (Short Position) σε μια κατοικία, πουλώντας δικαιώματα αγοράς, ή να αγοράσει ο ίδιος δικαιώματα πώλησης πάνω σε μια κατοικία.

4.1.4 Κόστος συναλλαγών (Transaction cost)

Έστω ότι ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή των κατοικιών θα αυξηθεί, και άρα παραδοσιακά θα αγόραζε μια κατοικία σήμερα ώστε να την πουλήσει σε μεταγενέστερο χρόνο ακριβότερα. Κάνοντας μια τέτοια επενδυτική κίνηση όμως ο επενδυτής θα έπρεπε να πληρώσει, επιπλέον της αξίας του ακίνητου, και κόστη συναλλαγών όχι μόνο για την αγορά αλλά και για την πώληση του ακινήτου, καθώς και κόστη διαχείρισης και συντήρησης, που ακόμα και αν τα εισέπραττε νοικιάζοντας το ακίνητο, θα αύξαναν σημαντικά το κόστος επένδυσης. Η δημιουργία της αγοράς παραγώγων ακινήτων όμως δίνει την δυνατότητα στον ενδιαφερόμενο να επενδύσει στην αύξηση της τιμής των κατοικιών παρακάμπτοντας τα κόστη συναλλαγών και διαχείρισης αγοράζοντας δικαιώματα αγοράς.

4.1.5 Αντιστάθμιση Κινδύνου (Hedging)

Τελευταία αλλά και πολύ σημαντική συμβολή της αγοράς δικαιωμάτων ακινήτων είναι η δυνατότητα που προσφέρει για αντιστάθμιση του κινδύνου ανόδου ή πτώσης της τιμής μιας κατοικίας όχι μόνο σε επενδυτές αλλά και σε απλούς αγοραστές ή πωλητές ακινήτων. Ένα άτομο που επιθυμεί να αγοράσει ένα ακίνητο σε συγκεκριμένο μεταγενέστερο χρόνο αντιμετωπίζει τον κίνδυνο την χρονική στιγμή εκείνη να έχουν ανέβει οι τιμές των ακινήτων, που όμως μπορεί να τον αντιμετωπίσει αγοράζοντας ένα δικαίωμα αγοράς (Call Option) σήμερα με λήξη τον χρόνο που επιθυμεί να αγοράσει το ακίνητο. Παρόμοια ένας ιδιοκτήτης ακίνητου που επιθυμεί να πουλήσει σε συγκεκριμένο μεταγενέστερο χρονικό σημείο θέλει και να προστατευτεί από πιθανή πτώση των τιμών των ακινήτων αλλά και να επωφεληθεί από μια πιθανή αύξηση των τιμών, και με την δημιουργία της αγοράς των παραγώγων μπορεί να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης (Put Option) ώστε να πετύχει αυτόν τον διπλό στόχο του.

4.2 Πολυπαραγοντικό Λήμμα του Itô

Εκτός από το μονοδιάστατο λήμμα του Itô, που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχει αποδειχθεί και μια πολυπαραγοντική εξίσωση, που αφορά περισσότερες από μια στοχαστικές διαδικασίες. Η συγκεκριμένη εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί για την τεκμηρίωση του μοντέλου και για τον λόγο αυτό θα αναλυθεί συνοπτικά [6],[7].

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχει ήδη δειχθεί ότι αν ισχύει η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \mu dt + \sigma s W_t$$

με W_t να αποτελεί μια Κίνηση Brown, ισχύει ότι

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right) dt + \sigma \frac{\partial F}{\partial X} dW$$

Με $F(t, X)$ να είναι μια συνάρτηση δύο στοχαστικών μεταβλητών.

Για την πολυπαραγοντική περίπτωση, έστω ότι υπάρχουν δύο στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X dt + \sigma_X dW_t^1$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu_Y dt + \sigma_Y dW_t^2 \quad \mu\varepsilon \;\; W_t^1 * W_t^2 = \rho * dt$$

Τότε ισχύει ο εξής τύπος

$$df(X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial x} * dX_t + \frac{\partial f}{\partial y} * dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * (dX_t)^2 + + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} * (dY_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} * dX_t dY_t$$

Παράδειγμα 4.1

Έστω μια καινούρια στοχαστική διαφορική εξίσωση, που δημιουργείτε από τις $X_t \; \kappa\alpha\iota \; Y_t$,

$$Z_t = \frac{X_t}{Y_t}$$

και αναζητείται η μεταβλητότητα της $\frac{dZ_t}{Z_t}$.

Τότε, αφού $Z_t = f(X_t, Y_t) = \frac{X_t}{Y_t}$, ισχύει ότι

$$dZ_t = \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial X_t} * dX_t + \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial Y_t} * dY_t + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial X_t^2} * (dX_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial Y_t^2} * (dY_t)^2 + \frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial X_t \partial Y_t} * dX_t dY_t.$$

Με τις αντίστοιχες πράξεις, εξάγεται η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dZ_t = Z_t * (\mu_X - \mu_Y - \rho * \sigma_X * \sigma_Y + \sigma_Y^2)dt + Z_t * \sigma_X * dW_t^1 - Z_t * \sigma_Y * dW_t^2$$

$$= \frac{dZ_t}{Z_t} = (\mu_X - \mu_Y - \rho * \sigma_X * \sigma_Y + \sigma_Y^2)dt + \sigma_X * dW_t^1 - \sigma_Y * dW_t^2.$$

Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι το γεγονός ότι

$$(\frac{dZ_t}{Z_t})^2 = (\sigma_X * dW_t^1 - \sigma_Y * dW_t^2)^2 = (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \rho * \sigma_X * \sigma_Y)dt$$

οπότε η μεταβλητότητα του $\frac{dZ_t}{Z_t}$ είναι $\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \rho * \sigma_X * \sigma_Y}$.

4.3 Η Δομή του Μοντέλου

Το μαθηματικό πρόβλημα της τιμολόγησης των παραγώγων χρηματοοικονομικών στοιχείων αρχικά αναλύεται στις εργασίες των Black-Scholes και Merton. Οι συγκεκριμένοι ακαδημαϊκοί ήταν οι πρώτοι που έλυσαν με αναλυτικό τρόπο το συγκεκριμένο πρόβλημα και για το συγκεκριμένο επίτευγμα κέρδισαν το βραβείο Nobel το 1997. Η εργασία θα χρησιμοποιήσει τα πορίσματα των Black-Scholes [9] και Merton [10] για την μελέτη και την τιμολόγηση παραγώγων στην αγορά κατοικιών (Real Estate Derivatives). Ο συγκεκριμένος τύπος χρηματοοικονομικού στοιχείου υπόκειται στην κατηγορία των συμβολαίων με περιοδικές καταβολές μερίσματος, στην περίπτωση αυτή μια κατοικία, η τιμή της οποίας επηρεάζεται από τα επιτόκια (Interest Rate). Το χρηματοοικονομικό στοιχείο , στην περίπτωση που θα μελετηθεί, θα παρουσιαστεί από μια Γεωμετρική Κίνηση Brown , ενώ το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο θα θεωρηθεί στοχαστική μεταβλητή, σε αντίθεση με τους BSM που στην μελέτη τους το είχαν θεωρήσει ως μια σταθερά.

Ας θεωρήσουμε μια οικονομία με δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

- Το χρηματοοικονομικό στοιχείο ακινήτου (Real estate asset): $X = \{X_t, t \geq 0\}$
- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (Risk-free rate): $r_f = \{r_t, t \geq 0\}$

που η πορεία τους είναι συνάρτηση του χρόνου t και μοντελοποιείται από τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (*Stochastic Differential Equations (SDEs))*

$$dX_t = \mu_X(X_t, t)dt + \sigma_X(X_t, t)dW_t^1$$

$$dr_t = \mu_r(r_t, t)dt + \sigma_r(r_t, t)dW_t^2$$

όπου $\{W_t^i, t \geq 0\}$, για $i = 1,2$, είναι δύο τυπικές διαδικασίες Wiener/Κινήσεις Brown στον ίδιο δειγματικό χώρο $\mathbb{P}$ και συσχετιζόμενες μέσω ενός συντελεστή, που επηρεάζεται από τον χρόνο, $\rho_{X,t} \in [-1,1], \forall\, t \geq 0$.

Πιο συγκεκριμένα, για την τιμή του ακινήτου X χρησιμοποιείται μια Γεωμετρική Κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion)

$$dX_t = (\mu - \delta)X_t dt + \sigma_X X_t dW_t^1 \qquad (4.3.1)$$

όπου $\delta \geq 0$ είναι η χρηματοροή που πληρώνει συνεχώς το χρηματοοικονομικό στοιχείο και μ είναι η συνολική αναμενόμενη απόδοση , ώστε η διαφορά $\mu - \delta$ να είναι το ύψος της ανατίμησης του ακινήτου ανά μονάδα του χρόνου, ενώ ο συντελεστής $\sigma_X > 0$ συμβολίζει την μεταβλητότητα της αξίας του ακινήτου.

Αντίθετα για την τιμή του επιτοκίου έχουμε μια στοχαστική διαδικασία, που προσομοιάζει τον φυσικό λογάριθμο του επιτοκίου ως

$$dln\, r_t = \left\{\frac{\partial lnu_t}{\partial t} - \frac{\partial ln\sigma_{r,t}}{\partial t}[lnu_t - lnr_t]\right\}dt + \sigma_r(t)dW_t^2, \qquad (4.3.2)$$

όπου το u_t είναι η διάμεσος της κατανομής του βραχυπροθέσμου επιτοκίου τον χρόνο t και το $\sigma_{r,t}$ είναι η μεταβλητότητα του επιτοκίου τον χρόνο t. Η στοχαστική διαδικασία του επιτοκίου είναι ένα συνεχούς χρόνου μοντέλο , το οποίο είναι αντίστοιχο με το διακριτού χρόνου μοντέλο που πρότειναν οι Black, Derman και Toy, το οποίο αρχικά είχε μελετηθεί σε ένα διακριτού χρόνου διωνυμικό δένδρο, όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3. Η στοχαστική διαδικασία (4.3.2) όμως περιγράφει καλύτερα την πραγματικότητα, καθώς οι δύο άγνωστες, εξαρτημένες ως προς τον χρόνο, μεταβλητές u_t και $\sigma_{r,t}$ επιλέγονται με τέτοιον τρόπο ώστε να κάνουν το μοντέλο συνεπές με την καμπύλη επιτοκίων και με την καμπύλη μεταβλητότητας αντίστοιχα. Ένα πλεονέκτημα επίσης, σε σχέση με άλλα μοντέλα είναι ότι, λόγω της λογαριθμοκανονικής κατανομής που ακολουθούν τα επιτόκια στην στοχαστική διαδικασία αυτή, δεν γίνεται τα τελευταία να βγουν αρνητικά, σε αντίθεση με το μοντέλο του Vasicek. Η συγκεκριμένη ιδιότητα όμως συνοδεύεται από ένα αρνητικό, το οποίο είναι ότι δεν δύναται να βρεθεί αναλυτική λύση, αλλά απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι, ώστε να κατασκευαστεί ένα δένδρο επιτοκίων που να σχετίζεται αποτελεσματικά με την δομή της αγοράς. Τέλος, έχει παρατηρηθεί ότι για ορισμένες επιλογές της συνάρτησης $\sigma_{r,t}$το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δεν περιστρέφεται γύρω από τον μέσο του μακροχρόνια, βασική υπόθεση για το μοντέλο, αλλά ξεφεύγει από το μέσο, δηλαδή δεν είναι *Mean-Reverting* αλλά *Mean-Fleeing*. Για τον παραπάνω λόγο πολλές φορές είναι αναγκαίο να επιλέγεται μόνο το u_t με κατάλληλο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η συνέπεια με την αγορά, ενώ το $\sigma_{r,t}$ να θεωρείται σταθερά, και στην προκειμένη περίπτωση να συμβολίζεται ως σ_r .

Σε ένα τέτοιο μοντέλο, όπως παρουσιάστηκε αρχικά στο [18] από τους Ciurlia-Gheno, έχουμε την στοχαστική διαδικασία για το επιτόκιο

$$dln\, r_t = \left\{\frac{\partial lnu_t}{\partial t}\right\} dt + \sigma_r dW_t^2 \qquad (4.3.3)$$

Αν εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην 4.2 και υποθέτοντας περιβάλλον για τιμολόγηση ουδέτερου κινδύνου (Risk-Neutral Valuation Setting) το διπαραμετρικό μοντέλο μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακας ως εξής:

$$\begin{bmatrix} dX_t \\ dr_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_t - \delta)X_t \\ (\psi_t + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2(t))r_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_X X_t & 0 \\ 0 & \sigma_{r,t}^2 r_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_t^1 \\ d\widetilde{W}_t^2 \end{bmatrix}$$

με $\psi_t = \frac{\partial lnu_t}{\partial t} - \frac{\partial ln\sigma_{r,t}}{\partial t}[lnu_t - lnr_t]$,

και τα $d\widetilde{W}_t^1$ και $d\widetilde{W}_t^2$ είναι οι προσθέσεις δύο μη-ανεξάρτητων τυπικών διαδικασιών Wiener κάτω όμως από τον δειγματικό χώρο των πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{Q}$.

Έστω $\Pi_t = \Pi(X_t, r_t, t)$ μία συνεχής, διπλή διαφορίσιμη συνάρτηση των μεταβλητών X και r στον χρόνο t, σχετικά με τον χρόνο t. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο του πολυπαραγοντικού λήμματος του Itô, έχουμε:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = \Bigg[&\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial X}(r_t - \delta)X_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial r}\left(\psi_t + \frac{1}{2}\sigma_{r,t}^2\right) r_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial X^2}\sigma_X^2 X_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial r^2}\sigma_{r,t}^2 r_t^2 \\ &+ \frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial X \partial r}\rho_{X,t}\sigma_X \sigma_{r,t} X_t r_t \Bigg] dt + \frac{\partial \Pi_t}{\partial X}\sigma_X X_t d\widetilde{W}_t^1 + \frac{\partial \Pi_t}{\partial r}\sigma_{r,t} r_t d\widetilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα επιτόκια που ταιριάζουν με την αγορά έχουμε την εξής δευτέρου βαθμού μερική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial X}(r_t - \delta)X_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial r}\left[\left(\psi_t + \frac{1}{2}\sigma_{r,t}^2\right) + q_t \sigma_{r,t}\right] r_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial X^2}\sigma_X^2 X_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial r^2}\sigma_{r,t}^2 r_t^2 + \\ &\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial X \partial r}\rho_{X,t}\sigma_X \sigma_{r,t} X_t r_t - r_t \Pi_t = 0, \end{aligned} \qquad (4.3.4)$$

όπου q_t είναι η αγοραία τιμή του επιτοκίου κινδύνου. Για να υπολογίσουμε την τιμή του Π για κάθε πιθανή απαίτηση σχετικά με το X και το r πρέπει να βρούμε την αριθμητική λύση της παραπάνω εξίσωσης (4.3.4), λαμβάνοντας υπόψιν τις τελικές και οριακές υποθέσεις.

Για υπολογιστικούς λόγους είναι βολικό να προσεγγίσουμε την από κοινού πορεία των δύο συνεχών στοχαστικών διαδικασιών X και r με ένα δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο (Bidimensional Binomial Lattice). Για να υπολογίσουμε το ύψος των αλμάτων καθώς και τις πιθανότητες θα εξισώσουμε τους μέσους, τις διακυμάνσεις και τις συσχετίσεις του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου με εκείνες των στοχαστικών διαδικασιών X και r.

Επειδή είναι ευκολότερη η μελέτη μια προσθετικής διωνυμικής διαδικασίας με δύο μεταβλητές, θα ορίσουμε τον φυσικό λογάριθμο του ακινήτου (Real Estate Asset), δηλαδή της εξίσωσης (4.3.1) ως

$$dy_t = v_t dt + \sigma_X d\widetilde{W}_t^1, \tag{4.3.5}$$

Με $y_t \coloneqq lnX_t$ και με το όρο v_t να ορίζεται ως $v_t = (r_t - \delta - \frac{1}{2}\sigma_X^2)$.

Αν υποθέσουμε ότι κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[t, t + \Delta t]$ οι φυσικοί λογάριθμοι των X και r_t μπορεί

- είτε να κινηθούν ανοδικά στο $y_t + \Delta y_{u,t}$ και $lnr_t + \Delta lnr_{u,t}$ ή
- καθοδικά στο$y_t + \Delta y_{d,t}$ και $lnr_t + \Delta lnr_{d,t}$ αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε τις πιθανότητες $p_{uu,t}, p_{ud,t}, p_{du,t}, p_{dd,t}$ ως τις από κοινού πιθανότητες για άνω ή κάτω άλματα στο δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο , με το δείκτη να υποδεικνύει το είδος του άλματος, αν είναι ανοδικό u ή καθοδικό d, για το y και το lnr αντίστοιχα.

Το εξαρτημένο από το χρόνο ύψος των αλμάτων $\{\Delta y_{u,t}, \Delta y_{d,t}, \Delta lnr_{u,t}, \Delta lnr_{d,t}\}$ καθώς και των από κοινού πιθανοτήτων $\{p_{uu,t}, p_{ud,t}, p_{du,t}, p_{dd,t}\}$ επιλέγονται με τέτοιον τρόπο ώστε να ταιριάζουν με τις ροπές πρώτου και δευτέρου βαθμού των μηδενικού κινδύνου (Risk-Neutral) στοχαστικών διαδικασιών δηλαδή,

$$\mathbb{E}(\Delta y_t) \coloneqq (p_{uu,t} + p_{ud,t})\Delta y_{u,t} + (p_{du,t} + p_{dd,t})\Delta y_{d,t} = v_t \Delta t \tag{4.3.6}$$

$$\mathbb{E}(\Delta y_t^2) \coloneqq (p_{uu,t} + p_{ud,t})\Delta y_{u,t}^2 + (p_{du,t} + p_{dd,t})\Delta y_{d,t}^2 = \sigma_X^2 \Delta t + v_t^2 \Delta t^2 \tag{4.3.7}$$

$$\mathbb{E}(\Delta lnr_t) \coloneqq (p_{uu,t} + p_{du,t})\Delta lnr_{u,t} + (p_{ud,t} + p_{dd,t})\Delta lnr_{d,t} = \psi_t \Delta t \tag{4.3.8}$$

$$\mathbb{E}(\Delta lnr_t^2) \coloneqq (p_{uu,t} + p_{du,t})\Delta lnr_{u,t}^2 + (p_{ud,t} + p_{dd,t})\Delta lnr_{d,t}^2 = \sigma_{r,t}^2 \Delta t + \psi_t^2 \Delta t^2 \tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Delta y_t \Delta lnr_t) &\coloneqq (p_{uu,t}\Delta y_{u,t} + p_{du,t}\Delta y_{d,t})\Delta lnr_{u,t} + (p_{ud,t}\Delta y_{u,t} + p_{dd,t}\Delta y_{d,t})\Delta lnr_{d,t} \\ &= \rho_{X,t}\sigma_X \sigma_{r,t}\Delta t + v_t \psi_t \Delta t^2\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

όπου οι από κοινού πιθανότητες πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό

$$p_{uu,t} + p_{ud,t} + p_{du,t} + p_{dd,t} = 1 \tag{4.3.11}$$

Είναι δυνατόν να παρατηρηθεί ότι στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων οι άγνωστοι είναι παραπάνω από τις εξισώσεις και γι’ αυτόν τον λόγο δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για να αντιμετωπίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα και να εξασφαλίσουμε την αναλυτική λύση θεωρούμε ότι το πάνω άλμα και το κάτω άλμα του y_t είναι ίδιο, δηλαδή

$$\Delta y_{u,t} = -\Delta y_{d,t} \text{ και άρα } \Delta y_{u,t} \equiv \Delta y_t \tag{4.3.12}$$

Η παραπάνω υπόθεση είναι παρόμοια με εκείνη που προτάθηκε στο [19] από τον Trigeorgis, και γενικά παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το μοντέλο με ίσες πιθανότητες που αναλύθηκαν στο [12].

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι μη δεσμευμένες πιθανότητες άνω άλματος και κάτω άλματος για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι ίσες, δηλαδή είναι

$$p_{uu,t} + p_{du,t} := p_r = \frac{1}{2} \tag{4.3.13}$$

$$p_{ud,t} + p_{dd,t} := 1 - p_r = q_r = \frac{1}{2} \tag{4.3.14}$$

Ύστερα από τις υποθέσεις αυτές το σύστημα των εξισώσεων (4.3.6) ως (4.3.10) και (4.3.12) ως (4.14) δύναται να λυθεί αναλυτικά και από την επίλυση του προκύπτουν οι τύποι για τα προσθετικό ύψος των αλμάτων (Additive Jump Size), δηλαδή το Δy_t, το $\Delta lnr_{u,t}$ και το $\Delta lnr_{d,t}$, καθώς και για τις από κοινού πιθανότητες $p_{uu,t}, p_{ud,t}, p_{du,t}, p_{dd,t}$ ως εξής

$$\Delta y_t = \sqrt{\sigma_X^2 \Delta t + v_t^2 \Delta t^2)} \tag{4.3.15}$$

$$\Delta lnr_{u,t} = \psi_t \Delta t + \sigma_{r,t}\sqrt{\Delta t} \tag{4.3.16}$$

$$\Delta lnr_{d,t} = \psi_t \Delta t - \sigma_{r,t}\sqrt{\Delta t} \tag{4.3.17}$$

και

$$p_{uu,t} = \frac{1}{4}(1 + \frac{v_t\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}} + \frac{\rho_{X,t}\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}}) \tag{4.3.18}$$

$$p_{ud,t} = \frac{1}{4}(1 + \frac{v_t\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}} - \frac{\rho_{X,t}\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}}) \tag{4.3.19}$$

$$p_{du,t} = \frac{1}{4}(1 - \frac{v_t\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}} + \frac{\rho_{X,t}\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}}) \tag{4.3.20}$$

$$p_{dd,t} = \frac{1}{4}(1 - \frac{v_t\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}} - \frac{\rho_{X,t}\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}}) \tag{4.3.21}$$

Όμως κάθε πιθανότητα πρέπει να βρίσκεται στο κλειστό διάστημα [0,1] και για να επιτευχθεί αυτό υπάρχει ο εξής περιορισμός

$$\frac{|v_t|\sqrt{\Delta t} + |\rho_{X,t}|\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t}} \leq 1, \ \forall\, t \geq 0 \tag{4.3.22}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $\rho_{X,t}$ έχουμε τον περιορισμό

$$|\rho_{X,t}| \leq \frac{\sqrt{\sigma_X^2 + v_t^2 \Delta t} - |v_t|\sqrt{\Delta t}}{\sigma_X}, \ \forall t \geq 0 \tag{4.3.23}$$

Οπότε για το μοντέλο είναι απαραίτητο να ικανοποιηθεί η παραπάνω σχέση (4.3.23) για τον συντελεστή συσχέτισης του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή του ακινήτου, και του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας, αυτό το διπαραγοντικό μοντέλο μπορεί να παρουσιαστεί μέσω ενός δισδιάστατου διωνυμικού μοντέλου που ενώνονται οι τελικές καταστάσεις (Recombining Bidimensional Binomial Model), και γι' αυτόν το λόγο είναι χρήσιμο για την τιμολόγηση πολλών χρηματοοικονομικών στοιχείων.

4.4 Το δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιαστεί ο τρόπος δημιουργίας του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου, όταν υπάρχουν δύο συσχετιζόμενες μεταβλητές. Αρχικά, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το δένδρο πρέπει να κατασκευαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε να προσεγγίζει τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις του ακινήτου και του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και ύστερα να ταιριάξει με την δομή της αγοράς.

Ας γίνει η υπόθεση ότι το κατάλληλο δισδιάστατο δένδρο είναι N χρόνων και κάθε περίοδος είναι χρονικού διαστήματος Δt χρόνων, οπότε και ο συνολικός χρονικός ορίζοντας του δένδρου είναι $T = N\Delta t$ χρόνια. Η ιδιότητα επανασύνθεσης (Recombining Nature) του δένδρου εξασφαλίζει ότι με χρονικό βήμα $n = 0,1,2 \ldots\ldots N$, μέχρι τον χρόνο $t = n\Delta t$, θα υπάρχουν $(n+1)^2$ περιπτώσεις/κλαριά που θα συμβολίζονται ως (n, i, j) με $i = -n, -n+2, \ldots, n-2, n$ και $j = -n, -n+2, \ldots, n-2, n$, παρουσιάζοντας την κατάσταση που βρίσκονται οι μεταβλητές X και r αντίστοιχα. Έτσι σε κάθε περίοδο n και για τις δύο μεταβλητές , οι πιθανές καταστάσεις απέχουν κατά δύο βήματα και οι δείκτες των βημάτων i και j, με την ιδιότητα $i, j \in \mathbb{Z}$, θα αλλάζουν με βήμα ίσο με 2.

Είναι χρήσιμο να χωρίσουμε τις $(n+1)^2$ περιπτώσεις, σε κάθε χρονική περίοδο n, στις εξής 3 κατηγορίες:

- 4 ακραίες καταστάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες με τους 4 πιθανούς συνδυασμούς, στους οποίους και οι δύο μεταβλητές, δηλαδή το X και το r , παίρνουν τις ακραίες τιμές. Αυτές οι περιπτώσεις, οι οποίες θα αναφέρονται με τον τρόπο (n, i, j) $\mu\varepsilon$ $i \pm n$ $\kappa\alpha\iota$ $j \pm n$, μπορούν να δημιουργηθούν από ένα μοναδικό μονοπάτι.

- $[(n+1)-2)] * 4$ εξωτερικές καταστάσεις, στις οποίες περιέχονται οι περιπτώσεις που μία από τις δύο μεταβλητές X και r παίρνει ακραία τιμή, ενώ η άλλη παραμένει σε μία από τις ενδιάμεσες καταστάσεις. Αυτές οι καταστάσεις θα αναφέρονται με τον τρόπο (n, i, j) $\mu\varepsilon$ $i \pm n$ $\kappa\alpha\iota$ $|j| \leq n-2$ ή $|i| \leq n-2$ $\kappa\alpha\iota$ $j \pm n$ που μπορούν να προσεγγιστούν από δύο διαφορετικά μεταβατικά μονοπάτια.

- $[(n+1)-2)]^2$ εσωτερικές καταστάσεις, που αναφέρονται σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς, στους οποίους και οι δύο μεταβλητές παραμένουν σε κάποια ενδιάμεση κατάσταση. Αυτές οι καταστάσεις θα αναφέρονται με τον τρόπο (n, i, j) $\mu\varepsilon$ $|i| \leq n-2$ $\kappa\alpha\iota$ $|j| \leq n-2$ που μπορούν να προσεγγιστούν από τέσσερα διαφορετικά μεταβατικά μονοπάτια.

Έστω $X_{n,i,j}$ και $r_{n,j}$ η τιμή του ακινήτου και του ετησιοποιημένου βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μιας περιόδου αντίστοιχα για την περίπτωση (n, i, j) του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου. Επιπλέον έστω $p_{uu,n,j}, p_{ud,n,j}, p_{du,n,j}, p_{dd,n,j}$ να παρουσιάζουν τις από κοινού πιθανότητες για τα άνω ή κάτω άλματα στο διωνυμικό δένδρο στην περίπτωση (n, i, j) και ως συνάρτηση του αντίστοιχου βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r_{n,j}$.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, από μια περίπτωση-κλαδί (n, i, j) προκύπτουν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το προς το ποια κατεύθυνση θα κινηθούν οι δύο μεταβλητές X και r στο χρονικό βήμα $(n+1)$.

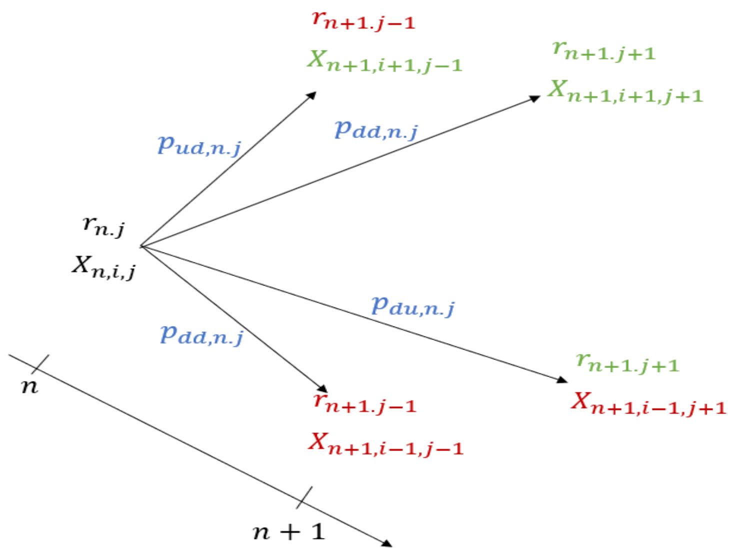
Το βραχυπρόθεσμο (Δt περιόδου) επιτόκιο $r(n, j)$ μπορεί να μεταβληθεί προς

- Την κάτω κατάσταση $r_{n+1.j-1}$ με πιθανότητα $p_{ud,n,j} + p_{dd,n,j} = q_r$
- Την άνω κατάσταση $r_{n+1.j+1}$ με πιθανότητα $p_{uu,n,j} + p_{du,n,j} = p_r$

Αντίθετα, η τιμή του ακινήτου $X_{n,i,j}$ κινείται ανοδικά ή καθοδικά κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ανάλογα με τις κινήσεις του επιτοκίου και καταλήγει σε ανάλογες καταστάσεις με τον ακόλουθο τρόπο:

- Την κατάσταση $X_{n+1,i+1,j+1}$, με πιθανότητα $p_{uu,n,j}$
- Την κατάσταση $X_{n+1,i+1,j-1}$, με πιθανότητα $p_{ud,n,j}$
- Την κατάσταση $X_{n+1,i-1,j+1}$, με πιθανότητα $p_{du,n,j}$
- Την κατάσταση $X_{n+1,i-1,j-1}$, με πιθανότητα $p_{dd,n,j}$

Σχηματικά οι καταστάσεις αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1, όπου αν μια μεταβλητή, δηλαδή η r και η X, έχει μειωθεί από τον χρόνο n ως τον χρόνο $n+1$ γράφεται με κόκκινα γράμματα, ενώ αν έχει αυξηθεί με πράσινα, και έτσι σχηματίζεται το δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο.



Σχήμα 4.1: Το δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο

Οπότε οι καταστάσεις $X_{n+1,i+1,j-1}$ και $X_{n+1,i-1,j-1}$ παρουσιάζουν τις άνω και κάτω τιμές της αξίας του ακινήτου την επόμενη χρονική στιγμή, αντίστοιχα, αν έχουμε μία καθοδική πορεία του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, ενώ οι καταστάσεις $X_{n+1,i+1,j+1}$ και $X_{n+1,i-1,j+1}$ δείχνουν την άνω και κάτω τιμή αν το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο κινηθεί ανοδικά. Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι από κοινού πιθανότητες $p_{uu,n,j}, p_{ud,n,j}, p_{du,n,j}, p_{dd,n,j}$ υπολογίζονται από τις εξισώσεις που αναλύθηκαν παραπάνω με τον δείκτη τάσης v_t να υπολογίζεται από το τύπο

$$v_j = \left(r_{n,j} - \delta - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο διπαραγοντικό μοντέλο τιμολόγησης που αναλύεται το ύψος των δύο μεταβλητών την χρονική στιγμή t, όπου παρουσιάζεται και η τεχνική της «επαγωγής προς τα εμπρός» (F. Jamshidian, [20]), ο φυσικός λογάριθμος της τιμής του υποκείμενου ακινήτου y_t και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r_t δίνονται από τις εξισώσεις

$$y_t = U_{X,t} + \sigma_X \widetilde{W}_t^1 \tag{4.4.1}$$

$$r_t = U_{r,t} * exp\ (\sigma_{r,t} \widetilde{W}_t^2) \tag{4.4.2}$$

όπου το $U_{X,t}$ είναι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής του y, το $U_{r,t}$ είναι η διάμεσος της λογαριθμοκανονονικής κατανομής του r, τα σ_X και $\sigma_{r,t}$ είναι τα ύψη, σε ποσοστιαία κλίμακα, της σταθερής και εξαρτημένης από τον χρόνο μεταβλητότητας των X και r αντίστοιχα, ενώ τα $\widetilde{W}_t^1$ και $\widetilde{W}_t^2$ είναι τα ύψη των συσχετιζομένων τυπικών διαδικασιών Wiener/Κινήσεων Brown , που είναι ορισμένες κάτω από τον ίδιο δειγματικό χώρο ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{Q}$.

Ενώ για τον όρο $U_{X,t}$ έχουμε μια γνωστή συνάρτηση σε σχέση με τον χρόνο t, η οποία είναι

$$U_{X,t} = y_0 + v_t * t, \tag{4.4.3}$$

με $y_0 \coloneqq lnX_0$ και X_0 την αρχική τιμή της αξίας του ακινήτου, οι δύο άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου $U_{r,t}$ και $\sigma_{r,t}$ πρέπει να επιλέγονται κατάλληλα κάθε χρονική περίοδο ώστε να ταιριάζει το μοντέλο στην πραγματική δομή της αγοράς. Αν γίνει η επιλογή το μοντέλο να ταιριάζει μόνο με την πραγματική αγοραία καμπύλη των επιτοκίων, τότε δύναται να τεθεί το $\sigma_{r,t}$ ίσο με μια σταθερά σ_r και σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να υπολογιστεί μόνο η διάμεσος $U_{r,t}$ και έτσι για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση

$$r_t = U_{r,t} * \exp\ (\sigma_r \widetilde{W}_t^2). \tag{4.4.4}$$

Αφού όσο το χρονικό διάστημα των βημάτων τείνει στο μηδέν, δηλαδή το $\Delta t \to 0$, η διαδικασία του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου $(i\sqrt{\Delta t}, j\sqrt{\Delta t})$ μετατρέπεται σε μια δισδιάστατη τυπική διαδικασία Wiener $(\widetilde{W}_t^1, \widetilde{W}_t^2)$, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι εξής τύποι για την αξία του ακινήτου και τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια

$$X_{n,i,j} = X_0 * \exp\big(i\Delta y_{n,j}\big), \tag{4.4.5}$$

$$r_{n,j} = U_{r,n} * \exp\big(\sigma_{r,n} j\sqrt{\Delta t}\big), \tag{4.4.6}$$

Με $|i| \leq n$ και $|j| \leq n$ και το ύψος του άλματος $\Delta y_{n,j}$ του φυσικού λογαρίθμου της αξίας του ακινήτου να υπολογίζεται από τον τύπο (4.3.15) που παρουσιάστηκε, δηλαδή ισχύει ότι $\Delta y_t = \sqrt{\sigma_X^2 \Delta t + v_t^2 \Delta t^2)}$.Οπότε, για την κατασκευή του δένδρου που επανασυνθέτεται (Recombining Tree) για τις δύο μεταβλητές (δηλαδή για την κατάλληλη επιλογή των $X_{n,i,j}$ και $r_{n,j}$) απαιτείται ο σωστός υπολογισμός των $U_{r,n}$ και $\sigma_{r,n}$.

4.4.1 Υπολογισμός των χρονικά εξαρτημένων συναρτήσεων $U_{r,t}$ και $\sigma_{r,t}$

Για τον υπολογισμό των χρονικά εξαρτημένων συναρτήσεων $U_{r,t}$ και $\sigma_{r,t}$ είναι αναγκαία η τεχνική «επαγωγής προς τα εμπρός» (Forward Induction Technique), η οποία απαιτεί την χρήση των Arrow-Debreu χρεογράφων. Έστω ότι υπάρχει ένα χρεόγραφο που πληρώνει τις εξής χρηματικές μονάδες

$$\begin{cases} 1\ , & αν\ φτάσουμε\ στην\ περίπτωση\ (n, i, j) \\ 0\ , & σε\ οποιαδήποτε\ άλλη\ περίπτωση \end{cases}$$

και έστω $A_{n,i,j}$ να συμβολίζει την αξία στον χρόνο 0, δηλαδή στην αρχική κατάσταση του δένδρου στην περίπτωση (0,0,0) αυτού του Arrow-Debreu χρεογράφου που αποτελεί τον θεμέλιο λίθο για κάθε χρεόγραφο.

Πιο συγκεκριμένα, η τιμή ενός προεξοφλημένου ομολόγου που έχει ημερομηνία λήξης (Maturity Date) την $n+1$ στιγμή, μπορεί να γραφτεί, σε όρους Arrow-Debreu τιμολόγησης, ως

$$B_{n+1} = \sum_i \sum_j A_{n,i,j} d_{n,j}, \tag{4.4.7}$$

Με τα δύο αθροίσματα να περιέχουν όλες τις πιθανές καταστάσεις την χρονική στιγμή n, για κάθε $|i| \leq n$ και $|j| \leq n$, και το $d_{n,j}$ να συμβολίζει την αξία την χρονική στιγμή n και κατάσταση j ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού (Zero-Coupon Bond) που ωριμάζει την χρονική στιγμή $n+1$, δηλαδή την συντελεστή προεξόφλησης μίας περιόδου στις περιπτώσεις (n,i,j), $\forall\ |i| \leq n$, και ορίζεται ως ακολούθως

$$d_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{1+r_{n,j}\Delta t}, & για\ απλό\ ανατοκισμό \\ \exp\left[-r_{n,j}\Delta t\right], & για\ συνεχή\ ανατοκισμό \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Έχει αποδειχθεί ότι η σταθερότητα των λογαριθμοκανονικών μοντέλων βραχυπρόθεσμων επιτοκίων επιτεύχθηκε από το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται απλά ή αποτελεσματικά επιτόκια αντί για επιτόκια συνεχούς ανατοκισμού από τους Sandmann-Sondermann [21].

Η διαδικασία της «επαγωγής προς τα εμπρός» περιέχει τον υπολογισμό την τιμής του χρεογράφου σε κάθε περίπτωση-κλαρί καθώς κινείται το μοντέλο πάνω στο δένδρο, δηλαδή οι τιμές Arrow-Debreu την χρονική στιγμή n, περίπτωση i για την μεταβλητή X και περίπτωση j για την μεταβλητή r, δηλαδή τα $A_{n,i,j}$, μπορούν να υπολογιστούν από τις γνωστές τιμές της περιόδου $n-1$ λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα πιθανά μονοπάτια που οδηγούν στην περίπτωση (n,i,j).

Αρχικά, οι 4 ακραίες καταστάσεις της περιόδου n, με $n = 1,2,3 \ldots N$ μπορούν να προσεγγιστούν μόνο από ένα μοναδικό μονοπάτι και επομένως οι τιμές Arrow-Debreu ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη

$$A_{n,i,j} = \begin{cases} p_{ud,n-1,j+1} A_{n-1,i-1,j+1} d_{n-1,j+1}, & i = n, j = -n \\ p_{uu,n-1,j-1} A_{n-1,i-1,j-1} d_{n-1,j-1}, & i = n, j = n \\ p_{dd,n-1,j+1} A_{n-1,i+1,j+1} d_{n-1,j+1}, & i = -n, j = -n \\ p_{du,n-1,j-1} A_{n-1,i+1,j-1} d_{n-1,j-1}, & i = -n, j = n \end{cases} \tag{4.4.9}$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζεται κάθε μεταβατική πιθανότητα με την τιμή της κατάστασης στην $n-1$ χρονική στιγμή και με τον αντίστοιχο συντελεστή προεξόφλησης μιας περιόδου.

Για κάθε μία από τις $[(n+1)-2)] * 4$ εξωτερικές καταστάσεις υπάρχουν δύο πιθανά μονοπάτια που πρέπει να ληφθούν υπόψιν και άρα οι τιμές $A_{n,i,j}$ Arrow-Debreu την χρονική στιγμή n για τέτοιες περιπτώσεις υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$A_{n,i,j} = \begin{cases} p_{uu,n-1,j-1}A_{n-1,i-1,j-1}d_{n-1,j-1} \\ +p_{ud,n-1,j+1}A_{n-1,i-1,j+1}d_{n-1,j+1}, \; i = n, |j| \leq n-2 \\ p_{dd,n-1,j+1}A_{n-1,i+1,j+1}d_{n-1,j+1} \\ + \quad p_{du,n-1,j-1}A_{n-1,i+1,j-1}d_{n-1,j-1}, \quad i = -n, |j| \leq n-2 \\ p_{dd,n-1,j+1}A_{n-1,i+1,j+1}d_{n-1,j+1} \\ +p_{ud,n-1,j+1}A_{n-1,i-1,j+1}d_{n-1,j+1}, \quad |i| \leq n-2, j = -n \\ p_{uu,n-1,j-1}A_{n-1,i-1,j-1}d_{n-1,j-1} \\ + \quad p_{du,n-1,j-1}A_{n-1,i+1,j-1}d_{n-1,j-1}, \quad |i| \leq n-2, j = -n \end{cases} \tag{4.4.10}$$

όπου για κάθε ζεύγος καταστάσεων που οδηγούν στην περίπτωση (n, i, j) προσθέτουμε τις δύο τιμές που είχαν στην προηγούμενη κατάσταση στον χρόνο δηλαδή $n-1$, πολλαπλασιασμένες με την αντίστοιχη πιθανότητα και τον αντίστοιχο συντελεστή προεξόφληση μιας περιόδου.

Τέλος, για κάθε μία από τις $[(n+1)-2)]^2$ εσωτερικές καταστάσεις, η τιμή Arrow-Debreu την χρονική στιγμή n ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} A_{n,i,j} = \; & p_{du}(n-1, j-1)A(n-1, i+1, j-1)d(n-1, j-1) \\ & + p_{dd}(n-1, j+1)A(n-1, i+1, j+1)d(n-1, j+1) \\ & + p_{uu}(n-1, j-1)A(n-1, i-1, j-1)d(n-1, j-1) \\ & + p_{ud}(n-1, j+1)A(n-1, i-1, j+1)d(n-1, j+1), \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

που ισχύει για $|i| \leq n-2, |j| \leq n-2$ και παρουσιάζει τα 4 πιθανά μονοπάτια μέσω τον οποίων μπορεί να προσεγγιστεί μια εσωτερική περίπτωση-κλαρί (n, i, j) από μια προηγούμενη κατάσταση στον χρόνο $n-1$.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι η τιμή Arrow-Debreu στην αρχική κατάσταση, δηλαδή στο $n = 0$ και στο αρχικό επίπεδο 0 για κάθε μία από τις μεταβλητές του μοντέλου, είναι εξορισμού ίση με $A_{0,0,0} = 1$.

4.4.2 Μέθοδος Newton-Raphson

Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης για το μοντέλο που ταιριάζει με τις καμπύλες επιτοκίων και μεταβλητότητας, θα δημιουργηθούν συναρτήσεις, οι οποίες για να λυθούν απαιτούν σύνθετες αριθμητικές μέθοδούς, και για τον λόγο αυτόν θα χρησιμοποιηθεί μία από αυτές που ονομάζεται μέθοδος Newton-Raphson.

Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια επαναληπτική μέθοδος, δηλαδή έχει την μορφή $x = g(x)$, με την επιλογή της $g(x)$ να πραγματοποιείται με εύκολο τρόπο, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Έστω ότι αναζητείται η ρίζα της διαφορίσιμης και συνεχούς συνάρτησης $z(x)$, στο διάστημα $[c, d]$ και ότι είναι γνωστή η τιμής της, καθώς και των παραγώγων της, στο σημείο y_0, τότε είναι εξασφαλισμένο από το Θεώρημα Taylor, που παρουσιάστηκε προηγουμένως, ότι στην ρίζα $\bar{y} \in [c, d]$ ισχύει

$$z(\bar{y}) = z(y_0) + z'(y_0) * (\bar{y} - y_0) + \frac{z''(\lambda)}{2!} * (\bar{y} - y_0)^2,$$

με το λ να βρίσκεται μεταξύ του $\bar{y}$ και του y_0.

Αν αγνοηθεί ο τελευταίος όρος, υπό την υπόθεση ότι το $|y_0 - y_0|$ είναι πολύ μικρό και άρα $(\bar{y} - y_0)^2 \approx 0$, καθώς και υπό το γεγονός ότι για την συνάρτηση στην ρίζα της ισχύει ότι $z(\bar{y}) = 0$, τότε ισχύει

$$0 \approx z(y_0) + z'(y_0) * (\bar{y} - y_0)$$

και προκύπτει ότι

$$\bar{y} \approx y_0 - \frac{z(y_0)}{z'(y_0)}.$$

Επομένως η συνάρτηση $g(x) = x - \frac{z(x)}{z'(x)}$ μπορεί να δημιουργηθεί από την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στην ρίζα, αρκεί να ισχύει ότι $z'(y_n) \neq 0$ και άρα

$$y_{n+1} = y_n - \frac{z(y_n)}{z'(y_n)}, \quad n = 0,1,2,3 \ldots$$

Οπότε σε οποιαδήποτε επανάληψη υπολογίζονται οι τιμές δύο συναρτήσεων $z(x)$ και $z'(x)$.

Παράδειγμα 4.2

Έστω η συνάρτηση $z(y) = y^2 - 6 * y + 5$, τότε

$$y_{n+1} = y_n - \frac{{y_n}^2 - 6 * y_n + 5,}{2 * y_n - 6}, \quad n = 0,1,2,3 \ldots$$

Για τις ρίζες $\bar{y}_1 = 1\ και\ \bar{y}_2 = 5$ και για τα αρχικά σημεία $y_{0,1} = 2\ και\ y_{0,2} = 6$ ισχύουν οι διαδοχικές προσεγγίσεις, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1 [8].

Πίνακας 4.1

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{y_{0,1}}$	$\boldsymbol{y_{0,2}}$
0	2	6
1	0.5	5.166
2	0.95	5.006
3	0.9993	5.00001
4	0.9999	5.0000000
5	0.9999	5
6	1	

Στην περίπτωση της μεθόδου Newton-Raphson για πολλαπλές ρίζες ισχύουν διαφορετικοί τύποι που παρουσιάζονται παρακάτω.

Έστω ότι η ρίζα $\bar{y}$ είναι πολλαπλή με συντελεστή πολλαπλότητας k , δηλαδή $z(\bar{y}) = z'(\bar{y}) = \cdots = z^{(k-1)}(\bar{y}) = 0, με\ z^{(\kappa)}(\bar{y}) \neq 0$.

Στην περίπτωση αυτή εξάγονται οι εξής τύποι Newton-Raphson

$$y_{n+1} = y_n - k * \frac{z(y_n)}{z'(y_n)} \qquad ή \qquad y_{n+1} = y_n - \frac{z(y_n) * z'(y_n)}{[z'(y_n)]^2 - z(y_n) * z''(y_n)}$$

Πριν να προχωρήσουμε στην περιγραφή του γενικού μοντέλου, κατά το οποίο το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο ταιριάζει και στην καμπύλη επιτοκίων και στην δομή της διακύμανσης, θα παρουσιαστεί ο τρόπος κατασκευής του αντίστοιχου δένδρου που ταιριάζει μόνο στην καμπύλη επιτοκίων.

4.4.3 Το μοντέλο που ταιριάζει στην καμπύλη επιτοκίων

Είναι πρακτικό, για απλούστευση του μοντέλου, να θεωρείται η συνάρτηση της μεταβλητότητας $\sigma_{r,t}$ σταθερή και ίση με σ_r, με αποτέλεσμα το μοντέλο να τα ανταποκρίνεται μόνο στην πραγματική καμπύλη των επιτοκίων. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος επιστροφής του μέσου (Mean Reverting Term) που περιέχεται στο ψ_t είναι ίσος με μηδέν, και τότε η στοχαστική διαδικασία του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου περιγράφεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.3.3) $dlnr_t = \left\{\frac{\partial lnu_t}{\partial t}\right\}dt + \sigma_r d\widetilde{W}_t^2$, ενώ η διακριτού χρόνου απεικόνιση του παρουσιάζεται από την εξίσωση

$$r_{n,j} = U_{r,n} * \exp\left(\sigma_r j\sqrt{\Delta t}\right), |j| \leq n \qquad (4.4.12)$$

Από την παραπάνω εξίσωση, καθώς και λαμβάνοντας υπόψιν και η εξίσωση $B_{n+1} = \sum_i \sum_j A_{n,i,j} d_{n,j}$, για ένα Arrow-Debreu χρεόγραφο, και με την χρήση του όρου $d_{n,j}$ για τον απλό ανατοκισμό μίας περιόδου, η τιμή ενός προεξοφλημένου ομολόγου με ημερομηνία λήξης την $n+1$ δίνεται από τον τύπο

$$B_{n+1} = \sum_i \sum_j \frac{A_{n,i,j}}{1+U_{r,n}*\exp\left(\sigma_r j\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} \quad , \qquad (4.4.13)$$

Εφόσον το $d_{n,j}$ δίνεται από τα δεδομένα της αγοράς, ο μόνος άγνωστος της παραπάνω εξίσωσης (4.4.13) είναι η διάμεσος $U_{r,n}$ την λογαριθμοκανονικής κατανομής του r την περίοδο n. Λόγω της αναλυτικής αδυναμίας των λογαριθμοκανονικών μοντέλων, δεν είναι δυνατή η αναδιάταξη της εξίσωσης ως προς $U_{r,n}$, και πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης. Για να λυθεί η εξίσωση και να παρθεί η κατά-προσέγγιση τιμή της $U_{r,n}$, μέσω της οποίας να υπολογιστεί το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο της περιόδου n από την παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιείται η Newton-Raphson μέθοδος.

Έστω $n \geq 1$ τα $U_{r,n-1}, A_{n-1,i,j}, r_{n-1,j}, d_{n-1,j}$ και τα $\{p_{uu,n-1,j}, p_{ud,n-1,j}, p_{du,n-1,j}, p_{dd,n-1,j}\}$ είναι γνωστά για όλες τις καταστάσεις i και j την περίοδο $n-1$.Επίσης, οι τιμές στην αρχική περίοδο, δηλαδή στο $n = 0$, είναι $U_{r,0} = r_{0,0} = Y_1, A_{0,0,0} = 1, d_{0,0} = \frac{1}{1+r_{0,0}\Delta t}$, οπότε και η διαδικασία μπορεί να συμπυκνωθεί στα εξής πέντε βήματα:

1. Από την αρχική καμπύλη επιτοκίων, υπολογίζεται η αγοραία τιμή ενός $n - περιόδων$ προεξοφλημένου ομολόγου $\widehat{B}_n, για\ n = 1,2,3 \ldots N+1$.
2. Χρησιμοποιώντας τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις των καταστάσεων-κλαριών (4.4.9) ως (4.4.11), υπολογίζεται η τιμή Arrow-Debreu $A_{n,i,j}, για\ |i| \leq n\ και\ |j| \leq n, με\ n \leq N$.
3. Για $n \leq N$, γίνεται αντικατάσταση της $\widehat{B}_{n+1}$ στην μη γραμμική εξίσωση (4.4.13) και επίλυση της ως προς τον μόνο άγνωστο $U_{r,n}$ με την μέθοδο Newton-Raphson.
4. Με το $U_{r,n}$ υπολογίζεται το $r_{n,j}$ και το $d_{n,j}$, από τις (4.4.12) και (4.4.8) αντίστοιχα.
5. Με το $r_{n,j}$, με τον περιορισμό $|j| \leq n$, υπολογίζονται οι από-κοινού πιθανότητες $p_{uu,n,j}, p_{ud,n,j}, p_{du,n,j}, p_{dd,n,j}$ από τις εξισώσεις (4.3.18) ως (4.3.21) και τέλος το $X_{n,i,j}$ για $|i| \leq n\ με\ n \leq N$, από την εξίσωση (4.4.5).

4.4.4 Το μοντέλο που ταιριάζει στην καμπύλη επιτοκίων και στην καμπύλη μεταβλητότητας

Στο κομμάτι αυτό παρουσιάζεται το μοντέλο, στην γενικότερη μορφή του, που ταιριάζει και στην καμπύλη επιτοκίων και στην καμπύλη της μεταβλητότητας, οπότε είναι αναγκαία η χρήση της εξίσωσης (4.4.6) $r_{n,j} \ = U_{r,n} * \exp(\sigma_{r,n} j\sqrt{\Delta t})$ για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο.

Έστω $B_{uu,n}, B_{du,n}, B_{ud,n}, B_{dd,n}$ οι τέσσερις πιθανές τιμές στην περίοδο 1 για ένα πλήρως προεξοφλημένο ομόλογο που έχει ημερομηνία λήξης την στιγμή $n, με\ n = 1,2,3 \ldots N+1$ και $Y_{uu,n}, Y_{du,n}, Y_{ud,n}, Y_{dd,n}$ τα αντίστοιχα επιτόκια προεξόφλησης. Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι την χρονική στιγμή 1, υπάρχουν δύο πιθανές καταστάσεις για το βραχυπρόθεσμο ($\Delta t - περιόδου$) επιτόκιο, οποίες είναι οι $r(1,-1)\ και\ r(1,1)$, τότε εξορισμού ισχύει $B_{uu,n} = B_{du,n} \equiv B_{u,n}\ και\ B_{ud,n} = B_{dd,n} \equiv B_{d,n}$ για τις τιμές των ομολόγων και $Y_{uu,n} = Y_{du,n} \equiv Y_{u,n}\ και\ Y_{ud,n} = Y_{dd,n} \equiv Y_{d,n}$. Καθώς η άνω και κάτω κίνηση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου διαφέρει κατά τον παράγοντα $\exp\,[2\sigma_{Y,n}\sqrt{\Delta t}]$, ισχύει ότι

$$\frac{Y_{u,n}}{Y_{d,n}} = e^{2\sigma_{Y,n}\sqrt{\Delta t}} \qquad (4.4.14)$$

όπου το $\sigma_{Y,n}$ συμβολίζει την αρχική μεταβλητότητα του αντίστοιχου επιτοκίου προεξόφλησης ενός προεξοφλημένου ομολόγου που έχει ημερομηνία λήξης την περίοδο $n \geq 1$.

Στην συνέχεια ορίζονται και πάλι οι δύο σχέσεις που ισχύουν ανάμεσα στην αρχική τιμή του ομολόγου $B_{0,n} \equiv B_n$ και του αντίστοιχου επιτοκίου $Y_{0,n} = Y_n$ ενός ομολόγου με ημερομηνία λήξης n, και είναι

$$B_n = \begin{cases} \frac{1}{(1+Y_n \Delta t)^2}, & για\ απλό\ ανατοκισμό \\ \exp\,[-Y_n n \Delta t], & για\ συνεχή\ ανατοκισμό \end{cases} \qquad (4.4.15)$$

Οπότε ύστερα από τα παραπάνω είναι δυνατόν να λυθεί η εξίσωση (4.4.14 ως προς $\sigma_{Y,n}$ και να δημιουργηθεί η παρακάτω σχέση

$$\sigma_{Y,n} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} \ln\left(\frac{Y_{u,n}}{Y_{d,n}}\right). \qquad (4.4.16)$$

Επίσης, οι δύο συναρτήσεις $B_{u,n}$ και $B_{d,n}$ $, για\ n \geq 2$ σχετίζονται με την αρχική τιμή του ομολόγου B_n, σύμφωνα με την φόρμουλα:

$$B_n \ = \frac{1}{1+r_{0,0}\Delta t}\left[B_{u,n}\left(p_{uu,0,0} + p_{du,0,0}\right) + B_{d,n}\left(p_{ud,0,0} + p_{dd,0,0}\right)\right]. \qquad (4.4.17)$$

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις για τις πιθανότητες (4.3.13) και (4.3.14) που παρουσιάστηκαν παραπάνω και τον συνεχή ανατοκισμό (4.4.15), δύναται να λυθεί το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων (4.4.16) και (4.4.17) ώστε να βρεθεί το ακόλουθο σύστημα μη γραμμικών σχέσεων

$$\begin{aligned} B_{d,n} \ &= {B_{u,n}}^{\exp\,[-2\sigma_{Y,n}\sqrt{\Delta t}]} \\ B_{d,n} \ + {B_{u,n}}^{\exp\,[-2\sigma_{Y,n}\sqrt{\Delta t}]} &= 2B_n\left[1 + r_{0,0}\Delta t\right]. \end{aligned} \qquad (4.4.18)$$

Για να υπολογιστούν οι εξαρτημένες από τον χρόνο συναρτήσεις που ταιριάζουν με την καμπύλη επιτοκίων και την καμπύλη μεταβλητότητας, είναι απαραίτητη η χρήση της μεθόδου της «επαγωγής προς τα εμπρός» που τώρα περιλαμβάνει και την χρήση των Arrow-Debreu χρεογράφων όπως φαίνεται από τις 4 πιθανές καταστάσεις-κλαριά της περιόδου 1, και παρουσιάζεται ως

- $A_{uu,n,i,j}$: Η τιμή Arrow-Debreu στην περίπτωση $(1,1,1)$ ενός χρεογράφου που πληρώνει 1 αν οι καταστάσεις i και j πραγματοποιηθούν στον χρόνο n, και 0 σε άλλη περίπτωση.
- $A_{du,n,i,j}$: Η τιμή Arrow-Debreu στην περίπτωση $(1,-1,1)$ ενός χρεογράφου που πληρώνει 1 αν οι καταστάσεις i και j πραγματοποιηθούν στον χρόνο n, και 0 σε άλλη περίπτωση.
- $A_{ud,n,i,j}$: Η τιμή Arrow-Debreu στην περίπτωση $(1,1,-1)$ ενός χρεογράφου που πληρώνει 1 αν οι καταστάσεις i και j πραγματοποιηθούν στον χρόνο n, και 0 σε άλλη περίπτωση.
- $A_{dd,n,i,j}$: Η τιμή Arrow-Debreu στην περίπτωση $(1,-1,-1)$ ενός χρεογράφου που πληρώνει 1 αν οι καταστάσεις i και j πραγματοποιηθούν στον χρόνο n, και 0 σε άλλη περίπτωση.

Είναι αξιοσημείωτο ότι $A_{uu,n,i,j} = A_{du,n,i-2,j}\ και\ A_{ud,n,i,j} = A_{dd,n,i-2,j} για\ |i| \leq n$, καθώς και η ιδιότητες: $A_{uu,1,1,1} = A_{du,1,-1,1} = 1$ και $A_{ud,1,1,1} = A_{dd,1,-1,1} = 1$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι τιμές στην περίοδο 1 ενός προεξοφλημένου ομολόγου με ημερομηνίας ωρίμανσης (Maturity Date) την $(n+1)$, δηλαδή τα $B_{u,n+1}$ και $B_{d,n+1}$ για $n = 1,2,\dots N$, δύναται να γραφτεί σε βάση των παραπάνω τιμών Arrow-Debreu ως εξής

$$B_{u,n+1} \equiv \begin{cases} B_{uu,n+1} = \sum_i \sum_j A_{uu,n,i,j} d_{n,j}\ , & στην\ περίσταση\ (1,1,1) \\ B_{du,n+1} = \sum_i \sum_j A_{du,n,i,j} d_{n,j}\ , & στην\ περίσταση\ (1,-1,1) \end{cases} \quad (4.4.19)$$

$$B_{d,n+1} \equiv \begin{cases} B_{ud,n+1} = \sum_i \sum_j A_{ud,n,i,j} d_{n,j}\ , & στην\ περίσταση\ (1,1,-1) \\ B_{dd,n+1} = \sum_i \sum_j A_{dd,n,i,j} d_{n,j}\ , & στην\ περίσταση\ (1,-1,-1) \end{cases} \quad (4.4.20)$$

όπου ο συντελεστής προεξόφλησης μιας περιόδου $d(n,j)$ ορίζεται με βάση τον τύπο (4.4.8) του απλού ανατοκισμού, δηλαδή

$$d_{n,j} = \frac{1}{1 + r_{n,j}\Delta t} = \frac{1}{1 + U_{r,n} * \exp\left(\sigma_{r,n} j \sqrt{\Delta t}\right)\Delta t}$$

Δεδομένου του γεγονότος ότι η αρχική τιμή του ομολόγου, που είναι ίση με $\hat{B}_n$, και η μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης, που είναι $\hat{\sigma}_{Y,n}$ για $n \geq 1$, είναι γνωστές, καθώς είναι δυνατόν να αντληθούν από τα δεδομένα τη αγοράς, είναι εύκολο να βρεθούν τα $B_{u,n}$ και $B_{d,n}$ για κάθε περίοδο $n \geq 1$ χρησιμοποιώντας το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων (4.4.18) που βρέθηκαν, σε συνδυασμό με την φόρμουλα της τιμολόγησης Arrow-Debreu (4.4.19) και (4.4.20), σε ένα δισδιάστατο Newton-Raphson περιβάλλον όπου οι δύο άγνωστες $U_{r,n}$ και $\sigma_{r,n}$, λύνονται ταυτοχρόνως.

Σημειώνεται ότι οι τιμές $A_{uu,n,i,j}, A_{du,n,i,j}, A_{ud,n,i,j}, A_{dd,n,i,j}$ των νέων χρεογράφων Arrow-Debreu ανανεώνονται ανάλογα με τον τύπο της κάθε περίπτωσης, δηλαδή αν είναι ακραία, εξωτερική ή εσωτερική, χρησιμοποιώντας εξισώσεις ανάλογες με την προηγούμενη περίπτωση, δηλαδή ανάλογες με τις εξισώσεις (4.4.9)- (4.4.11).

Έστω $n \geq 1$, τα $U_{r,n-1}, \sigma_{r,n-1}, A_{uu,n-1,i,j}, A_{du,n-1,i,j}, A_{ud,n-1,i,j}, A_{dd,n-1,i,j}, r_{n-1,j}, d_{n-1,j}$ και τα $\{p_{uu,n-1,j}, p_{ud,n-1,j}, p_{du,n-1,j}, p_{dd,n-1,j}\}$ είναι γνωστά για κάθε κατάσταση i και j την περίοδο $n-1$. Επίσης, οι τιμές στην αρχική περίοδο, δηλαδή στο $n = 0$, είναι $U_{r,0} = r_{0,0} = Y_1$, $A_{uu1,1,1} = A_{du1,-1,1} = 1$ και $A_{ud1,1,-1} = A_{dd,1,-1,-1} = 1, \sigma_{r,0} = \sigma_{Y,1}, d_{0,0} = \frac{1}{1+r_{0,0}\Delta t}$, τότε η διαδικασία μπορεί να συμπυκνωθεί στα εξής βήματα

1. Από την αρχική καμπύλη επιτοκίων και την καμπύλη μεταβλητότητας, υπολογίζεται η αγοραία τιμή ενός $n-\pi\varepsilon\rho\iota\acute{o}\delta\omega\nu$ προεξοφλημένου ομολόγου $\hat{B}_n, \gamma\iota\alpha\ n = 1,2,3 \dots N+1$, και η αντίστοιχη μεταβλητότητα του επιτοκίου προεξόφλησης $\hat{\sigma}_{Y,n}$ για $n \geq 1$.
2. Με αντικατάσταση των $\hat{B}_n\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\sigma}_{Y,n}$ στο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων (4.4.18) ώστε να βρεθούν τα $B_U(n)$ και $B_D(n)$ για $n \geq 2$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton-Raphson.
3. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις και ανάλογες με τις εξισώσεις (4.4.9) ως (4.4.11) για τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις των καταστάσεων, όπως και πριν, υπολογίζονται οι τιμές Arrow-Debreu $A_{uu,n,i,j}, A_{du,n,i,j}, A_{ud,n,i,j}, A_{dd,n,i,j}, \gamma\iota\alpha\ |i| \leq n\ \kappa\alpha\iota\ |j| \leq n$.
4. Γίνεται αντικατάσταση της $B_{u,n+1}$ και $B_{d,n+1}$ στις μη γραμμικές εξισώσεις (4.4.19) και (4.4.20) και επίλυση της ως προς τους δύο αγνώστους $U_{r,n}$ και $\sigma_{r,n}$ με την δισδιάστατη μέθοδο Newton-Raphson.
5. Με το $U_{r,n}$ και το $\sigma_{r,n}$ υπολογίζονται τα $r_{n,j}$ και $d_{n,j}, \gamma\iota\alpha\ |j| \leq n$, από τις (4.4.6) και (4.4.8) αντίστοιχα.
6. Με το$r_{n,j}$, με τον περιορισμό $|j| \leq n$, υπολογίζονται οι από-κοινού πιθανότητες $p_{uu,n,j}, p_{ud,n,j}, p_{du,n,j}, p_{dd,n,j}$ από τις (4.3.18) ως (4.3.21) και τέλος το $X_{n,i,j}$, για $|i| \leq n$, από τον τύπο $X_{n,i,j} = X_0 * \exp(i\Delta y_{n,j})$, από την (4.4.5).

4.5 Εφαρμογή σε Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης

Το πιο ενδιαφέρον στοιχείο της παραπάνω ανάλυσης είναι το γεγονός ότι, εφόσον το δένδρο χτιστεί σωστά, η τιμή οποιουδήποτε χρεογράφου που σχετίζεται με δύο μεταβλητές, είναι δυνατόν να υπολογιστεί με την μέθοδο της «επαγωγής προς τα πίσω».

Έστω $\Pi_{n,i,j}$ η τιμή ενός παραγώγου σε ακίνητο (Real Estate Derivative) την χρονική στιγμή $n < N$, στο επίπεδο i της αξίας του ακινήτου στο επίπεδο j του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Με το διμεταβλητό μοντέλο που αναπτύχθηκε η αξία $\Pi_{n,i,j}$ του παραγώγου θα υπολογιστεί από την προεξοφλημένη παρούσα αξία των τεσσάρων πιθανών μελλοντικών τιμών στον χρόνο $n+1$ με βάση την παρακάτω οπισθοδρομική εξίσωση

$$\Pi_{n,i,j} = d_{n,j} * [\Pi_{n+1,i+1,j-1} * p_{ud,n,j} + \Pi_{n+1,i-1,j-1} * p_{dd,n,j} + \Pi_{n+1,i-1,j+1} * p_{du,n,j} + \Pi_{n+1,i+1,j+1} * p_{uu,n,j}] \tag{4.5.1}$$

όπου ο συντελεστής προεξόφλησης μίας περιόδου $d(n,j)$ είναι ο απλός ανατοκισμός που παρουσιάζεται στον τύπο (4.4.8) που αναφέρθηκε παραπάνω. Η συγκεκριμένη εξίσωση συνεχίζεται προς τα πίσω έως τον χρόνο $n = 0$, όπου και η αρχική τιμή του παραγώγου $\Pi_0 \equiv \Pi_{0,0,0}$.

Το πρόβλημα της τιμολόγησης κάθε απαίτησης που σχετίζεται με δύο μεταβλητές μπορεί να λυθεί με την χρήση της ίδιας διαδικασίας δηλαδή της «επαγωγής προς τα πίσω», αλλά τα μοναδικά χαρακτηριστικά κάθε ξεχωριστού συμβολαίου παραγώγων είναι ενσωματωμένα στις τελικές και οριακές συνθήκες του και έτσι πρέπει να οριστούν κατάλληλα πριν να προχωρήσει η τιμολόγηση.

Μία εφαρμογή του μοντέλου που παρουσιάστηκε παραπάνω θα μπορούσε να είναι η τιμολόγηση στο χρόνο $t_0 \geq 0$ παραγώγων συμβολαίων, Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου, πάνω σε ένα ακίνητο, που η αξία τους X_t ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown σύμφωνα με την εξίσωση (4.3.1), και χρηματορροή στον χρόνο T $(\textit{τελική κατάσταση})$ να δίνεται από τον τύπο

$$H_t = \begin{cases} \max\{X_t - K, 0\}, & \textit{για ένα δικαίωμα αγοράς} \\ \max\{K - X_t, 0\}, & \textit{για ένα δικαίωμα πώλησης} \end{cases}$$

με $T \geq t_0$ η ημερομηνία λήξης/ωρίμανσης (Maturity Date) του παραγώγου, και $K \geq 0$ η τιμή εξάσκησης (Strike Price) του δικαιώματος.

Έστω $V_{N,i,j}^E$ και $V_{N,i,j}^A$ η αξία στην περίπτωση/κλαρί $(n, i, j), \textit{για } |i|, |j| \leq n$, ενός Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου παραγώγου αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο όπου ο χρόνος ζωής του παραγώγου $\tau \coloneqq T - t_0$ χωρίζεται σε N ίσες χρονικές περιόδου, μήκους $\Delta t = \tau/N$ χρόνια , οι τιμές των Ευρωπαϊκών και Αμερικάνικων δικαιωμάτων στον χρόνο λήξης T, δηλαδή στην $N - th \textit{ χρονική περίοδο}$, υπολογίζονται από την δεδομένη χρηματορoή

$$\Pi(n, i, j) \equiv H_{N,i,j} = \begin{cases} \max\{X_{N,i,j} - K, 0\}, & \textit{για ένα δικαίωμα αγοράς} \\ \max\{K - X_{N,i,j}, 0\}, & \textit{για ένα δικαίωμα πώλησης} \end{cases} \tag{4.5.2}$$

όπου $X_{N,i,j} = X(t_0) * e^{i\Delta y(N,j)}, \textit{για } |i|, |j| \leq N$ είναι όλες οι πιθανές τιμές την αξίας του ακινήτου στην τελική χρονική στιγμή N σχετικά με την αρχική τιμή X_{t_0} και όλες τις πιθανές πραγματοποιήσεις του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου $r_{N,i,j}$ από το οποίο προκύπτει ο όρος τάσης $\Delta y(N, j)$.

Όπως παρουσιάστηκε παραπάνω η τιμή ενός παραγώγου σε κάθε περίπτωση/κλαρί $(n, i, j), \textit{με } n < N$, σε ένα δένδρο που επανασυναρμολογείται (Recombining Tree) είναι σχετική από τις τέσσερις πιθανές καταστάσεις που μπορεί να προκύψουν στην επόμενη χρονική περίοδο $n + 1$ με την χρήση της γενικής φόρμουλας (4.5.1) που παρουσιάστηκε.

Πιο συγκεκριμένα, για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αυτή η «επαγωγή προς τα πίσω» πρέπει να πραγματοποιηθεί ως την στιγμή N όταν και η τελική συνθήκη (4.5.2) χρησιμοποιείται. Επομένως η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος στην περίπτωση (n, i, j) δίνεται από τον τύπο

$$V_{N,i,j}^E = \Pi(n, i, j), \forall i, j \textit{ την περίοδο } n < N. \tag{4.5.3}$$

Όσο αφορά τα Αμερικάνικα δικαιώματα, για να ληφθεί υπόψιν η πιθανότητα πρόωρης εξάσκησης, πρέπει όταν χρησιμοποιείται η «επαγωγή προς τα πίσω» (Backward Induction) από την (4.5.1) να υπολογιστούν και η προεξοφλημένη τιμή και η εσωτερική αξία του δικαιώματος, δηλαδή οι οριακές συνθήκες (Boundary Conditions) (4.5.2), και να δοθεί ως τιμή το μέγιστο από τις δύο τιμές, σε κάθε περίπτωση/κλαρί, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Παρόμοια, μετά και την χρήση της τελικής συνθήκης, η τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος στην περίπτωση (n, i, j) $για\ όλα\ τα\ i, j\ στην\ περίοδο\ n < N$, δίνεται από τον τύπο

$$V_{N,i,j}^{A} = \begin{cases} [\Pi(n,i,j), \left(X_{N,i,j} - K\right)]^{+},\ για\ ένα\ δικαίωμα\ αγοράς \\ [\Pi(n,i,j), \left(K - X_{N,i,j}\right)]^{+},\ για\ ένα\ δικαίωμα\ πώλησης \end{cases} \quad (4.5.4)$$

4.5.1 Τύποι των Black-Scholes και Merton για την τιμολόγηση παραγώγων και η μέθοδος Crank-Nicolson

Στο αριθμητικό παράδειγμα που θα ακολουθήσει θα γίνει σύγκριση των τιμών που εξάγει το δυσδιαστατο διωνυμικό μοντέλο που παρουσιάστηκε με την τιμή που υπολογίζει η εξίσωση των Black-Scholes και Merton [9],[10] για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης και για τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς, ενώ για τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης θα συγκριθεί με την τιμή που υπολογίζεται με την μέθοδο Crank-Nicolson [22],[23]. Για τον λόγο αυτό θα παρουσιαστούν συνοπτικά οι τύποι για τις δύο παραπάνω μεθόδους.

4.5.1.1 Τύποι των Black, Scholes και Merton

Οι τύποι που υπολόγισαν οι Black, Scholes και Merton αφορούν Ευρωπαϊκά δικαιώματα, αγοράς και πώλησης, πάνω σε υποκείμενες αξίες που δεν δίνουν μέρισμα και είναι

$$C^{E} = S_0 * N(d_1) - K * e^{-r_f * T} * N(d_2) \quad (4.5.5)$$

$$P^{E} = K * e^{-r_f * T} * N(-d_2) - S_0 * N(-d_1) \quad (4.5.6)$$

όπου ισχύει

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

και $N(x)$ είναι η συνάρτηση σωρευτικής πιθανότητας, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής, μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, και ορίζεται ως η πιθανότητα μιας μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή να είναι μικρότερη από έναν αριθμό x.

Στο αριθμητικό παράδειγμα που θα ακολουθήσει θα εξάγονται οι τιμές με βάση τους παραπάνω τύπους και θα συγκρίνονται οι τιμές αυτές με την αξία που υπολογίζει το μοντέλο μας.

4.5.1.2 Η μέθοδος Crack-Nicolson

Η Crack-Nicolson μέθοδος αφορά την διακριτοποίηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης και των μερικών συνθήκων με την χρήση της «προς τα εμπρός» ή της «προς τα πίσω» προσέγγισης. Η αρχή της μεθόδου αυτής γίνεται με την παρουσίαση της μερικής διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes και Merton, η οποία είναι

$$f_t(t, S_t) + r * S_t * f_{S_t} + \frac{\sigma^2 * S_t^2}{2} * f_{S_t S_t} = rf(t, S_t) \quad (4.5.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.5.7) διακριτοποιείται ως προς τον χρόνο t και ως προς την αξία του υποκείμενου τίτλου S_t, με το μήκος κάθε βήματος να είναι Δt και ΔS_t αντίστοιχα, χωρίζοντας το διάστημα (t, S_t). Έπειτα πρέπει να οριστεί ο πίνακας που περιέχει $N+1$ στοιχεία, ώστε τα χρονικά σημεία $t_0, t_1 \dots, t_N$ αν χωρίζουν τον συνολικό χρόνο T ώστε να ισχύει
$t_{n+1} - t_n = \frac{T}{N} = \Delta t$, και με παρόμοιο τρόπο δημιουργείται ο πίνακας $M+1$ για την αξία του υποκείμενου τίτλου ώστε να ισχύει $S_{m+1} - S_m = \frac{S_{Max}}{M} = \Delta S_{t.}$

Η μέθοδος αυτή δίνει έναν ορθογώνια πλέγμα του χώρου (t, S_t) με πλευρές $(0, S_{Max})$ και $(0, T)$, και άρα γίνεται να υπολογιστεί η τιμή της εξίσωσης σε κάθε σημείο του πλέγματος. Θα ορίζεται η τιμή του παραγώγου στην χρονική στιγμή t_n όταν η αξία του υποκειμενου τίτλου είναι S_m ως

$$f_{m,n} = f(n\Delta t, m\Delta S) = f(t_n, S_m) = f(t, S_t) \qquad \textit{(4.5.8)}$$

όπου τα $n\ και\ m$ είναι ο αριθμός των διακριτών βημάτων που έχουν πραγματοποιηθεί στον χρόνο προς την ημερομηνία λήξης και στην τιμή του υποκείμενου τίτλου αντίστοιχα.

Έστω ότι $f_n = f_{n,0}, f_{n,1}, \dots, f_{n,M}\ για\ n = 0,1,2, \dots, N$, τότε οι ποσότητες $f_{0,m}$ και
$f_{N,M}\ για\ m = 0,1,2, \dots M$ αποτελούν τις οριακές συνθήκες που στην περίπτωση που θα μελετηθεί είναι γνωστές από προτέρων, αν και δεν ισχύει πάντα, και οι αξίες
$f_{n,m}\ για\ n = 1,2,3, \dots, N-1\ και\ m = 0,1,2,3, \dots, M$ ονομάζονται εσωτερικές αξίες ή εσωτερικά σημεία.
Σε γενικές γραμμές οι μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να χωριστούν σε 2 κατηγορίες

1. Τα προβλήματα οριακών συνθηκών, όπου πρέπει να οριστούν όλες οι οριακές υποθέσεις.
2. Τα προβλήματα αρχικών συνθηκών, στα οποία περιλαμβάνονται και τα περισσότερα θέματα τιμολόγησης παραγώγων, όπου πρέπει να οριστούν μόνο οι τιμές της συνάρτησης σε μία αρχική χρονική στιγμή.

Οπότε πρέπει να οριστούν οι συνθήκες αυτές για τα δικαιώματα αγοράς, με χρηματορροή ίση με $\max\{0, S_T - K\}$, και τα δικαιώματα πώλησης με ροή $\max\{0, K - S_T\}$, όπου S_T η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή T και K η τιμή εξάσκησης.

Είναι γνωστό ότι όταν η αξία του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με το μηδέν, ένα δικαίωμα πώλησης, με συμβολισμό P^E, αξίζει $f_{n,0} = K\ για\ n = 0,1,2,3, \dots N$, και όσο η τιμή του τίτλου, για παράδειγμα της μετοχής, αυξάνεται τόσο η τιμή του δικαιώματος τείνει προς το μηδέν, και για τον λόγο αυτό γίνεται μια επιλογή του $S_{Max} = S_M$ ώστε να ισχύει ότι $f_{n,M} = 0\ για\ n = 0,1,2,3, \dots N$.

Πιο συγκεκριμένα, για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ημερομηνία λήξης T, ισχύει η αρχική συνθήκη $f_{N,m} = \max\{0, K - m * \Delta S_T\}\ για\ m = 0,1,2,3 \dots, M$, για την αξία του στο τελικό χρονικό σημείο N. Είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη αρχική συνθήκη υπολογίζει την τιμή του δικαιώματος στο τέλος της περιόδου, και όχι στην αρχή, οπότε η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί με την επαγωγή «προς τα πίσω», ξεκινώντας από τον την ημερομηνία λήξης και πηγαίνοντας προς την αρχική χρονική στιγμή, και η ανάλυση αυτή είναι συμβατή με ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης που δεν προσφέρει την δυνατότητα πρόωρής εξάσκησης.

Όσο αφορά ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, η τιμή του συμβολίζεται με C^E και δίνεται από την ισοδυναμία των δικαιωμάτων (Put- Call Parity)

$$C^E + K * e^{-r_{f*t}} = P^E + S$$

αφού πρώτα υπολογιστεί η αξία του δικαιώματος πώλησης.

Έχει αποδειχτεί ότι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς χωρίς μέρισμα δεν εξασκείται ποτέ πρόωρα, οπότε τιμολογείται ακριβώς όπως το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, ενώ όσο αφορά τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης, στα οποία είναι δυνατή η πρόωρη εξάσκηση, η μόνη διαφορά της μεθόδου διακριτοποίησης είναι ότι σε κάθε σημείο του πάνελ που δημιουργείται, όσο κινείται η μέθοδος από το τέλος προς την αρχή, συγκρίνεται η αξία που υπολογίστηκε σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο με την εσωτερική αξία του δικαιώματος και τοποθετείται στο σημείο αυτό η μεγαλύτερη από τις δύο.

Συνοψίζοντας για τα δικαιώματα πώλησης και τα δικαιώματα αγοράς ισχύουν οι αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} f_{N,m} = \max\{0, m * \Delta S_T - K\}\, για\ τα\ δικαιώματα\ αγοράς \\ f_{N,m} = \max\{0, K - m * \Delta S_T\}\, για\ τα\ δικαιώματα\ πώλησης \end{cases} με\ m = 0,1,2,,3 \ldots M.$$

Επομένως ισχύει ότι στις μεθόδους διακριτοποίησης γίνεται αντικατάσταση των μερικών διαφορικών στην αρχική διαφορική εξίσωση με προσεγγίσεις με βάση την συνάρτηση Taylor κοντά στα σημεία ενδιαφέροντος. Έστω δηλαδή ότι ισχύει $f_{n,m} = f(t,S)$, οι προσεγγίσεις με βάση την συνάρτηση του Taylor για τα $f(t, S + \Delta S)$ και $f(t, S - \Delta S)$ δίνονται από τις εξισώσεις

$$f(t, S_t + \Delta S_t) = f(t, S_t) + f_S * \Delta S_t + \frac{1}{2} * f_{SS} * \Delta^2 S_t + \frac{1}{6} * f_{SSS} * \Delta^3 S_t + \cdots \qquad (4.5.9)$$

$$f(t, S_t - \Delta S_t) = f(t, S_t) - f_S * \Delta S_t + \frac{1}{2} * f_{SS} * \Delta^2 S_t - \frac{1}{6} * f_{SSS} * \Delta^3 S_t + \cdots \qquad (4.5.10)$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση (4.5.9) εξάγεται ο τύπος της *διαφοράς προς τα εμπρός (Forward Difference)*

$$f_{S_t} \approx \frac{f_{n,m+1} - f_{n,m}}{\Delta S_t} \qquad (4.5.11)$$

Ενώ η δεύτερη προσέγγιση Taylor εξάγεται η *διαφορά προς τα πίσω (Backward Difference)*

$$f_{S_t} \approx \frac{f_{n,m} - f_{n,m-1}}{\Delta S_t} \qquad (4.5.12)$$

με $f(t, S_t + \Delta S_t) = f_{n,m+1}$, $f(t, S_t - \Delta S_t) = f_{n,m-1}$ και $f(t, S_t) = f_{n,m}$.

Επίσης αν αφαιρεθεί η δεύτερη προσέγγιση Taylor, δηλαδή η εξίσωση (4.5.10), από την πρώτη (4.5.9), και ύστερα υπολογιστεί η πρώτη μερική παράγωγος , εξάγεται ο τύπος της *κεντρικής διαφοράς (Central Difference)*

$$f_{S_t} \approx \frac{f_{n,m+1} - f_{n,m-1}}{2 * \Delta S_t} \qquad (4.5.13)$$

Ενώ αν προστεθούν οι δύο προσεγγίσεις Taylor και ύστερα υπολογιστεί η δεύτερη μερική παράγωγο εξάγεται ο τύπος της *συμμετρικής κεντρική διαφοράς*

$$f_{S_t S_t} \approx \frac{f_{n,m+1} - 2 * f_{n,m} - f_{n,m-1}}{\Delta {S_t}^2}. \qquad (4.5.14)$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η προσέγγιση Taylor για το $f(t+\Delta t, S)$ ως εξής

$$f(t+\Delta t, S_t) = f(t, S_t) + f_t * \Delta t + \frac{1}{2} * f_{tt} * \Delta^2 t + \frac{1}{6} * f_{ttt} * \Delta^3 t + \cdots \quad (4.5.15)$$

και υπολογίζεται η *προς τα εμπρός διαφορά για την ημερομηνία λήξης*

$$f_t \approx \frac{f_{n+1,m} - f_{n,m}}{\Delta t} \quad (4.5.16)$$

Τοποθετώντας του παραπάνω τύπους στην αρχική μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes και Merton $f_t(t, S_t) + r * S_t * f_{S_t} + \frac{\sigma^2 * S_t^2}{2} * f_{S_t S_t} = rf(t, S_t)$ ισχύει ότι

$$z_{1m} * f_{n,m-1} + z_{2m} * f_{n,m} + z_{3m} * f_{n,m+1} = f_{n+1,m} \quad (4.5.17)$$

με

$$z_{1m} = \frac{r * m * \Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2}$$

$$z_{2m} = 1 + r * \Delta t + \sigma^2 * m^2 * \Delta t$$

$$z_{3m} = -\frac{r * m * \Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2}$$

η οποία ονομάζεται εξίσωση διακριτοποίησης και έτσι εξάγονται οι τύποι

- Για την ρητή περίπτωση (Explicit Case)

$$\frac{1}{1 + r * \Delta t}\left(a_{1m} * f_{n+1,m-1} + a_{2m} * f_{n+1,m} + a_{3m} * f_{n+1,m+1}\right) = f_{n,m} \quad (4.5.18)$$

με

$$a_{1m} = \frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2} - \frac{r * m * \Delta t}{2}$$

$$a_{2m} = 1 - \sigma^2 * m^2 * \Delta t$$

$$a_{3m} = \frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2} + \frac{r * m * \Delta t}{2}$$

η οποία αντιμετωπίζει ένα βασικό πρόβλημα, το οποίο είναι ότι μπορεί να δίνει αρνητικές πιθανότητες.

- Για την έμμεση περίπτωση (Implicit Case)

$$\frac{1}{1 - r * \Delta t}\left(b_{1m} * f_{n,m-1} + b_{2m} * f_{n,m} + b_{3m} * f_{n,m+1}\right) = f_{n+1,m} \quad (4.5.19)$$

με

$$b_{1m} = -\frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2} + \frac{r * m * \Delta t}{2}$$

$$b_{2m} = 1 + \sigma^2 * m^2 * \Delta t$$

$$b_{3m} = -\frac{\sigma^2 * m^2 * \Delta t}{2} - \frac{r * m * \Delta t}{2}$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση γίνεται να εξαχθεί η μέθοδος Crank-Nicolson, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί, για τον υπολογισμό της τιμής ενός Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης, και την σύγκριση της τιμής αυτής με την μέθοδο του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου. Η μέθοδος Crank-Nicolson είναι απλά ο μέσος όρος την ρητής και της έμμεσης περίπτωσης (Explicit and Implicit Cases), όπου ισχύει ότι

$$\frac{1}{1+r*\Delta t}\left(a_{1m}*f_{n+1,m-1}+a_{2m}*f_{n+1,m}+a_{3m}*f_{n+1,m+1}\right) + \frac{1}{1-r*\Delta t}\left(b_{1m}*f_{n,m-1}+b_{2m}*f_{n,m}+b_{3m}*f_{n,m+1}\right)=f_{n,m}+f_{n+1,m}.$$

Στην συνέχεια με βάση τους τύπους για τα (a_{1m}, a_{2m}, a_{3m}) και τα (b_{1m}, b_{2m}, b_{3m}) εξάγεται ότι

$$\left(\frac{r*m*\Delta t}{4}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}\right)*f_{n,m-1}+\left(1+\frac{r*\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{2}\right)*f_{n,m} + \left(-\frac{r*m*\Delta t}{4}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}\right)*f_{n,m+1}$$
$$=\left(\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}-\frac{r*m*\Delta t}{4}\right)*f_{n+1,m-1}+\left(1-\frac{r*\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{2}\right)*f_{n+1,m} + \left(\frac{r*m*\Delta t}{4}+\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}\right)*f_{n+1,m+1}$$

ή αλλιώς μπορεί να γραφτεί ως

$$k_{1m}*f_{n,m-1}+k_{2m}*f_{n,m}+k_{3m}*f_{n,m+1} = l_{1m}*f_{n+1,m-1}+l_{2m}*f_{n+1,m}+l_{3m}*f_{n+1,m+1} \qquad (4.5.20)$$

με $k_{1m}=\frac{r*m*\Delta t}{4}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}$, $k_{2m}=1+\frac{r*\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{2}$, $k_{3m}=-\frac{r*m*\Delta t}{4}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}$,
$l_{1m}=\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}-\frac{r*m*\Delta t}{4}$, $l_{2m}=1-\frac{r*\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{2}$ και $l_{3m}=\frac{r*m*\Delta t}{4}+\frac{\sigma^2*m^2*\Delta t}{4}$.

Τέλος, θα παρουσιαστούν δύο παραδείγματα, τα οποία αρχικά υπολογίστηκαν [18], που τεκμηριώνουν την παρουσίαση του μοντέλου του δισδιάστατου διωνμικού μοντέλου.

Παράδειγμα 4.3: Σταθερή καμπύλη επιτοκίων και μηδενική μεταβλητότητα επιτοκίου και συσχέτιση.

Το πρώτο βήμα για την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε είναι να καθορίζονται το ύψος της μεταβολής καθώς και οι από-κοινού πιθανότητες με τέτοιον τρόπο ώστε να ανταποκρίνονται στα δεδομένα της αγοράς, και ύστερα η διαδικασία της «επαγωγής προς τα πίσω» μπορεί να δώσει την τιμή για οποιοδήποτε παράγωγο που σχετίζεται με δύο μεταβλητές.

Στο αριθμητικό παράδειγμα που θα παρουσιαστεί θα δημιουργηθεί ένα διωνυμικό δένδρο, στο οποίο όχι μόνο η καμπύλη επιτοκίων θα είναι σταθερή αλλά και η μεταβλητότητα του επιτοκίου και του συντελεστή συσχέτισης θα είναι ίσες με μηδέν.

Θα εξεταστούν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις καθώς στην αρχική χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η τιμή του ακινήτου X_0 θα είναι είτε 95 ή 100 ή 105, το ακίνητο δεν θα παρέχει περιοδικές καταβολές χρημάτων δηλαδή $\delta = 0$, η τιμή εξάσκησης είναι $K = 100$, η ημερομηνία εξάσκησης είναι $T = 6\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$ ή $1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ από σήμερα , η μεταβλητότητα της μεταβολής της αξίας του ακινήτου είναι $\sigma_X = 20\%$ ή $30\%\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ \chi\rho\acute{o}\nu o$, και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $r_f = 5\%\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ \chi\rho\acute{o}\nu o$.

Θα γίνουν επιπρόσθετα οι υποθέσεις ότι οι δύο μεταβλητές, δηλαδή η αξία του ακινήτου και το βραχυπρόθεσμο στοχαστικό επιτόκιο, είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, η καμπύλη του επιτοκίου είναι ευθεία και ίση με 5% και η μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι μηδέν, δηλαδή τα παραπάνω σημαίνουν ότι $\rho_{X,t} \equiv 0, r_t = r_f = 5\%\ \kappa\alpha\iota\ \sigma_{r_t} \equiv 0\ \forall\ t \geq 0$.

Επίσης, για την κατασκευή του δένδρου θα χρησιμοποιηθούν N χρονικά βήματα, τα οποία θα ποικίλουν από 60 ως 240 περίοδο, ενώ θα υπολογίζεται και η αξία με βάση την μέθοδο Black-Scholes και Merton. Τέλος, η μέθοδος Crack-Nicolson με 1500 ή 3000 χρονικά βήματα, για τα δικαιώματα εξαμήνου, και χρόνου θα χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση μόνο των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης , αφού λόγω της απουσίας περιοδικών καταβολών έχει αποδειχθεί ότι η αξία των Αμερικάνικων και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς είναι ίδια.

Η αξία των δικαιωμάτων με τα στοιχεία που αναφέρθηκαν, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2, όπου αναφέρονται οι τιμές των εξαμηνιαίων δικαιωμάτων, και στον Πίνακα 4.3 με τις αξίες των δικαιωμάτων που λήγουν έναν χρόνο από σήμερα.

Πίνακας 4.2: Αξία δικαιώματος εξαμήνου με διαφορετικές αξίες ακινήτου

Αριθμός περιόδων		$\boldsymbol{T = 0.5\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma}$					
		$\sigma_X = 0.2$			$\sigma_X = 0.3$		
	X_0	95	100	105	95	100	105
Ευρ/Αμερ.δικ.αγ							
$\boldsymbol{60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		4.2728	6.8656	10.2166	6.9088	9.5998	12.7910
$\boldsymbol{120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		4.2435	6.8772	10.1991	6.9397	9.6173	12.8069
$\boldsymbol{240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		4.2553	6.8829	10.2052	6.9268	9.6261	12.8015
$\boldsymbol{BSM\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta}$		4.2545	6.8887	10.2013	6.9282	9.6349	12.7986
Ευρ.δικ.πώλ.							
$\boldsymbol{60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		6.8040	4.3968	2.7479	9.4401	7.1311	5.3223
$\boldsymbol{120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		6.7746	4.4083	2.7302	9.4709	7.1485	5.3381
$\boldsymbol{240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		6.7864	4.4140	2.7362	9.4578	7.1572	5.3326
$\boldsymbol{BSM\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta}$		6.7855	4.4197	2.7322	9.4592	7.1659	5.3295
Αμερ.δικ.πώλ.							
$\boldsymbol{60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		7.2409	4.6454	2.8688	9.7894	7.3749	5.4833
$\boldsymbol{120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		7.2194	4.6505	2.8561	9.8135	7.3847	5.4896
$\boldsymbol{240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota}$		7.2250	4.6532	2.8593	9.8003	7.3894	5.4855
$\boldsymbol{M\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma\ CNFD}$		7.2224	4.6539	2.8542	9.7990	7.3915	5.4793

Παρατήρηση 4.1: Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι αξίες των δικαιωμάτων αγοράς όχι μόνο αυξάνονται όταν αυξάνεται η αρχική αξία του ακινήτου, με σταθερή την μεταβλητότητα αλλά ισχύει και το αντίθετο, δηλαδή όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα, με σταθερή την αξία, τα δικαιώματα αγοράς αξίζουν περισσότερο. Όσο αφορά τα δικαιώματα πώλησης, είτε είναι Ευρωπαϊκά είτε Αμερικάνικα ισχύουν ακριβώς οι αντίθετες παρατηρήσεις, δηλαδή η αξία τους μειώνεται όσο αυξάνεται η αξία του ακίνητου ή η μεταβλητότητα, όπως ακριβώς αναμενόταν και από την θεωρία που αναφέρθηκε.

Πίνακας 4.3: Αξία δικαιώματος ενός χρόνου με διαφορετικές αξίες ακινήτου

Αριθμός περιόδων		$T = 1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$					
		$\sigma_X = 0.2$			$\sigma_X = 0.3$		
	X_0	95	100	105	95	100	105
Ευρ/Αμερ.δικ.αγ							
$60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.4780	10.4182	13.8407	11.3067	14.1814	17.5440
$120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.5239	10.4344	13.8688	11.2592	14.2063	17.4991
$240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.5031	10.4425	13.8563	11.2812	14.2188	17.5107
$BSM\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$		7.5109	10.4506	13.8579	11.2733	14.2313	17.5051
Ευρ.δικ.πώλ.							
$60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.6018	5.5420	3.9646	11.4309	9.3057	7.6684
$120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.6473	5.5577	3.9922	11.3828	9.3299	7.6227
$240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		7.6262	5.5656	3.9794	11.4045	9.3421	7.6340
$BSM\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$		7.6338	5.5735	3.9808	11.3963	9.3542	7.6280
Αμερ.δικ.πώλ.							
$60\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		8.4398	6.0780	4.3008	12.1145	9.8470	8.0552
$120\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		8.4617	6.0845	4.3136	12.0795	9.8585	8.0160
$240\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\iota$		8.4483	6.0874	4.3055	12.0948	9.8645	8.0196
$M\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma\ CNFD$		8.4499	6.0891	4.3038	12.0852	9.8682	8.0125

Παρατήρηση 4.2: Σημειώνεται ότι οι αξίες των δικαιωμάτων αγοράς έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με αυτές που αναφέρθηκαν και για τα εξαμηνιαία δικαιώματα, αύξηση τιμής όταν αυξάνεται το X_0 αλλά και όταν αυξάνεται και το σ_X, αλλά με μεγαλύτερες απόλυτες τιμές καθώς έχει αυξηθεί η χρονική διάρκεια των δικαιωμάτων. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για δικαιώματα πώλησης κάθε τύπου, Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα.

Ύστερα από την παρουσίαση των πινάκων αξίζει να αναφερθεί ότι στην ειδική περίπτωση όπου η μεταβλητότητα είναι σταθερή, το διπαραγοντικό μοντέλο τιμολόγησης περιγράφεται από τις εξής στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις για την τιμή και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο

$$dlnX_t = v_t dt + \sigma_X d\widetilde{W}_t^1,$$

$$dlnr_t = \frac{\partial lnu_t}{\partial t} dt + \sigma_r d\widetilde{W}_t^2,$$

όπου ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των $d\widetilde{W}_t^1$ και $d\widetilde{W}_t^2$, που συμβολίζεται με $\rho_{X,t}$, είναι ίσος με μηδέν και το u_t είναι η διάμεσος της κατανομής του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου στην χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Όταν γίνεται η υπόθεση ότι οι δύο μεταβλητές X_t και r_t είναι ανεξάρτητες και ότι η αρχική καμπύλη επιτοκίων είναι σταθερή με μεταβλητότητα του επιτοκίου ίση με μηδέν , η στοχαστική διαδικασία για το r_t μειώνεται σε μια απλή στοχαστική διαδικασία της μορφής $dlnr_t = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη $r_{t_0} = r_f$, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δίνεται από μια σταθερά συνάρτηση της μορφής, $r_t = r_f \; \forall \; t \geq 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι όρος v_t στην στοχαστική διαδικασία για το $dlnX_t$ είναι σταθερό και ίσο με $v_t = v \coloneqq \left(r_t - \delta - \frac{1}{2}\sigma_X^2 \right)$.

Συνεπάγεται ότι το μέγεθος του άλματος για το lnr_t είναι ίσο με μηδέν και τότε το διπαραγοντικό διωνυμικό δένδρο μετατρέπεται σε ένα απλό διωνυμικό δένδρο. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζονται οι τύποι για τα άλματα καθώς και για τις πιθανότητες ανόδου και καθόδου για το lnX_t

$$\Delta y_t = \sqrt{\sigma_X^2 * \Delta t + v^2 * \Delta t^2} \coloneqq \Delta y \tag{4.5.5}$$

και

$$p_{uu,t} + p_{ud,t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{v * \Delta t}{\Delta y} \coloneqq p_{X,} \tag{4.5.6}$$

$$p_{du,t} + p_{dd,t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{v * \Delta t}{\Delta y} = 1 - p_X \coloneqq q_X. \tag{4.5.7}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο δεν γίνεται να ληφθούν ξεχωριστά οι από-κοινού πιθανότητες $p_{uu,t}, p_{ud,t}, p_{du,t}, p_{dd,t}$, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεν (4.3.6), (4.3.7) και (4.3.11) ως (4.3.14), δημιουργώντας με τον τρόπο αυτόν ένα απλό διωνυμικό δένδρο όπου το ύψος των αλμάτων, που δίνεται από τον (4.5.5) και οι πιθανότητες ανόδου και καθόδου, από τις εξισώσεις (4.5.6) και (4.5.7), είναι παρόμοιες με αυτές που υπολογίστηκαν στο [19].

Παράδειγμα 4.4: Μεταβαλλόμενη καμπύλη επιτοκίων με μεταβλητότητα επιτοκίου και συσχέτιση.

Τέλος, θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα [18], που τεκμηριώνει την παρουσίαση του δισδιάστατου διωνμικού μοντέλου.

Αντίθετα, για να γίνει καλύτερα κατανοητή η χρησιμότητα του δισδιάστατου διωνυμικού δένδρου, πρέπει αρχικά να ληφθεί υπόψιν ένα στοχαστικό επιτόκιο και μετά να γίνει το ταίριασμα με την καμπύλη μεταβλητότητας και την καμπύλη επιτοκίων. Έστω ότι η καμπύλη της μεταβλητότητας είναι σταθερή και ίση με $\sigma_{r,t} \equiv 5\% \; ανά \; χρόνο \; \forall \; t \geq 0$, ενώ η καμπύλη επιτοκίων μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα ανάλογα με την αρχική καμπύλη επιτοκίων. Έστω ένας χρονικός ορίζοντας L ίσος με έναν χρόνο, ο οποίος χωρίζεται σε $N_L = 20 \; περίοδοι$, όπου κάθε περίοδος έχει χρονικό μήκος $\Delta L \coloneqq \frac{1}{N_L} = 0.05 \; χρόνια$.

Υπό την υπόθεση ότι το επιτόκιο προεξόφλησης στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου ΔL είναι ίσο με $5\% \; ανά \; χρόνο$, χτίζεται το δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο με τις εξής δύο ξεχωριστές καμπύλες επιτοκίων

a) Αύξουσα (αρχική) καμπύλη επιτοκίων: το επιτόκιο αυξάνεται από $5\%\ ανά\ χρόνο$ ύστερα από ΔL χρόνια σε $6\%\ ανά\ χρόνο$ για $N_L * \Delta L = 1\ χρόνος$ και παραμένει σταθερό στην διάρκεια κάθε χρονικού βήματος μήκους ΔL.

b) Φθίνουσα (αρχική) καμπύλη επιτοκίων: το επιτόκιο μειώνεται από $5\%\ ανά\ χρόνο$ ύστερα από ΔL χρόνια σε $4\%\ ανά\ χρόνο$ για $N_L * \Delta L = 1\ χρόνος$ και παραμένει σταθερό στην διάρκεια κάθε χρονικού βήματος μήκους ΔL.

Αφού έχει αποδειχθεί ότι η αξία ενός δικαιώματος υπολογισμένη με το δισδιάστατο διωνυμικό δένδρο σταθερού επιτοκίου είναι περίπου ίση με την αξία που παράγει η εξίσωση των Black-Scholes και Merton, θα παρουσιαστεί η τιμή που υπολογίζει για τα δικαιώματα το μοντέλο με στοχαστικά επιτόκια, και θα γίνει σύγκριση με τις τιμές που δίνει το BSM μοντέλο σταθερού επιτοκίου, παρουσιάζοντας την ποσοστιαία διαφορά τους. Για να εξεταστούν οι διαφορές αυτές κατά την πάροδο του χρόνου μέχρι την ημερομηνία λήξης και με διαφορετικές αξίες του ακίνητού , χρησιμοποιούνται οι παράμετροι, $K = 100, r_f = 5\%, \delta = 0, \sigma_X = 0.2, \rho_{X,t} \equiv 0\ \forall t \geq 0, με\ το\ X_0$ να βρίσκεται μεταξύ των 90 με 110 και το $\tau = T - t_0$ να είναι από 0 ως 1 χρόνο. Για να μπορούν να είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα για τα δικαιώματα με διαφορετικές λήξεις, ο αριθμός των περιόδων N, στις οποίες χωρίζεται ο χρονικός ορίζοντας των δικαιωμάτων, είναι διαμορφωμένο έτσι ώστε το μήκος της κάθε περιόδου Δt να είναι ίσο με 0.00625.

Με τα παραπάνω δεδομένα αποδεικνύεται ότι όταν ισχύει μια αύξουσα καμπύλη επιτοκίων, τότε το μοντέλο σταθερού επιτοκίου συστηματικά υποεκτιμά την αξία των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και υπερεκτιμά την αξία των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης , σε σχέση με το μοντέλο με στοχαστικά επιτόκια, ενώ η ποσοστιαία διαφορά αυξάνεται όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος που απομένει ως της ημερομηνία λήξης καθώς και όσο υψηλότερη είναι η αξία του ακινήτου. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή υπάρχει φθίνουσα καμπύλη επιτοκίων, το μοντέλο σταθερού επιτοκίου υπερεκτιμά τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και υποεκτιμά τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης, με την διαφορά αυτή αυξάνεται για μακροχρόνια δικαιώματα και δικαιώματα εντός του χρηματοοικονομικού τους ισοδυνάμου.

Όταν υπάρχει μη-μηδενικός συντελεστής συσχέτισης, τότε το ύψος της διαφοράς ανάμεσα στην αξία των δικαιωμάτων που υπολογίζεται με το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο με στοχαστικά επιτόκια και την αξία που υπολογίζεται με την εξίσωση Black-Scholes και Merton με σταθερά επιτόκια, παρουσιάζει μερικά αξιοπρόσεκτα μοτίβα. Οι Πίνακες 4.4 και 4.5 παρουσιάζουν και συγκρίνουν τις τιμές και τις μεταβολές στην αξία Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα, υπό διαφορετικούς συντελεστές συσχέτισης $\rho_{X,t}$ και με διάφορες ημερομηνίες λήξης και αξίες ακινήτου. Όσο αφορά και τις υπόλοιπες παραμέτρους, ισχύει ότι , $K = 100, r_f = 5\%, \delta = 0, \sigma_X = 0.2$. Το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο δημιουργείται με τις δύο διαφορετικές καμπύλες επιτοκίων με σταθερή μεταβλητότητα επιτοκίου ίση με 5% και χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αριθμό χρονικών βημάτων N ώστε το μήκος κάθε βήματος Δt είναι ίσο με 0.005.

Πίνακας 4.4: Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με διαφορετικές συσχετίσεις $\rho_{X,t}$

4.3.1 Αύξουσα καμπύλη επιτοκίων						
	$T = 0.5\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$			$T = 1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$		
	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	2.4100	2.4164	2.4229	5.4272	5.4505	5.4739
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	6.9960	7.0039	7.0117	10.9711	10.9954	11.0196
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	14.2610	14.2669	14.2726	18.3676	18.3877	18.4076

Ποσοστιαία μεταβολή σε σχέση με BSM τιμολόγηση σταθερού επιτοκίου						
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	2.58%	2.85%	3.13%	6.60%	7.06%	7.52%
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	1.56%	1.67%	1.79%	4.98%	5.21%	5.44%
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	1.32%	1.36%	1.40%	3.99%	4.10%	4.22%

4.3.2 Φθίνουσα καμπύλη επιτοκίων						
	$T = 0.5\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$			$T = 1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$		
	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	2.2877	2.2935	2.2983	4.7571	4.7700	4.7830
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	6.7442	6.7502	6.7561	9.9058	9.9200	9.9342
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	13.8982	13.9027	13.9071	16.9679	16.9801	16.9922

Ποσοστιαία μεταβολή σε σχέση με BSM τιμολόγηση σταθερού επιτοκίου						
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	−2.59%	−2.38%	−2.18%	−6.56%	−6.31%	−6.05%
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	−2.10%	−2.01%	−1.92%	−5.21%	−5.08%	−4.94%
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	−1.26%	−1.23%	−1.20%	−3.93%	−3.87%	−3.80%

Ο Πίνακας 4.4 αποδεικνύει ότι η εξίσωση Black-Scholes και Merton υποτιμά τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς όταν η αρχική καμπύλη επιτοκίων έχει ανοδική τροχιά και υπερεκτιμά τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς όταν η αρχική καμπύλη επιτοκίων έχει καθοδική τροχιά. Όσο αυξάνεται ο χρόνος που απομένει ως την ημερομηνία λήξης, το ποσοστό λάθους στην τιμολόγηση της αξίας αυξάνεται σε απόλυτες τιμές. Επιπρόσθετα, η απόλυτη μεταβολή στο λάθος τιμολόγησης είναι μεγαλύτερο για τα δικαιώματα εκτός του χρηματοοικονομικού του ισοδυνάμου, δηλαδή αυτά που ισχύει ότι $X_0 < K$, σε σύγκριση με εκείνα που ισχύει ότι $X_0 \geq K$. Πιο συγκεκριμένα, οι ποσοστιαίες διαφορές για τα μεσοπρόθεσμα και τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα αγοράς είναι φθίνουσες συναρτήσεις της αξίας του ακινήτου. Τέλος, σχετικά με τις διαφορές του ποσοστού λάθους σε σχέση με τον συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,t}$, διαπιστώνεται ότι το ύψος του λάθους τιμολόγησης αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,t}$ ενώ υπάρχει αύξουσα καμπύλη επιτοκίων, ενώ το λάθος αυτό μειώνεται όσο το $\rho_{X,t}$ πηγαίνει από τις αρνητικές τιμές προς τις θετικές και ισχύει μια αρνητική καμπύλη επιτοκίων.

Πίνακας 4.5: Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με διαφορετικές συσχετίσεις $\rho_{X,t}$

4.4.1 Αύξουσα καμπύλη επιτοκίων						
	$T = 0.5\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$			$T = 1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$		
	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	9.7093	9.7155	9.7218	9.5667	9.6188	9.6410
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	4.2952	4.3028	4.3104	5.1397	5.1627	5.1856
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	1.5601	1.5657	1.5712	2.5355	2.5542	2.5726

Ποσοστιαία μεταβολή σε σχέση με BSM τιμολόγηση σταθερού επιτοκίου						
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	-1.73%	-1.67%	-1.61%	-6.05%	-5.83%	-5.61%
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	-2.82%	-2.64%	-2.47%	-7.78%	-7.37%	-6.96%
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	-2.88%	-2.53%	-2.19%	-8.99%	-8.32%	-7.66%

4.4.2 Φθίνουσα καμπύλη επιτοκίων						
	$T = 0.5\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$			$T = 1\ \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$		
	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$	$\rho_{X,t} = -0.4$	$\rho_{X,t} = 0$	$\rho_{X,t} = +0.4$
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	10.0510	10.0558	10.0606	10.8342	10.8468	10.8595
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	4.5066	4.5125	4.5185	5.9827	5.9966	6.0104
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	1.6606	1.6650	1.6695	3.0446	3.0564	3.0681

Ποσοστιαία μεταβολή σε σχέση με BSM τιμολόγηση σταθερού επιτοκίου						
$\boldsymbol{X_0 = 90}$	1.73%	1.78%	1.82%	6.07%	6.19%	6.32%
$\boldsymbol{X_0 = 100}$	1.97%	2.10%	2.24%	7.34%	7.59%	7.84%
$\boldsymbol{X_0 = 110}$	3.37%	3.65%	3.93%	9.29%	9.71%	10.13%

Στον πίνακα 4.5 παρουσιάζεται και αριθμητικά η παρατήρηση ότι η τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης με στοχαστικά επιτόκια, σε σχέση με την τιμή της BSM εξίσωσης σταθερών επιτοκίων, παρουσιάζει τις αντίθετες ιδιότητες σε σχέση με την ανάλυση που παρουσιάστηκε για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς. Αναλυτικότερα, όταν η αρχική καμπύλη επιτοκίων παρουσιάζει ανοδική τροχιά, τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης τείνουν να υπερεκτιμούνται από την εξίσωση των εξίσωση Black-Scholes και Merton, ενώ στην περίπτωση της καθοδικής καμπύλης επιτοκίων υποεκτιμούνται. Παρόμοια, μεγαλύτερη χρονική διάρκεια ως την λήξη σημαίνει μεγαλύτερο ποσοστό λάθους, και όσο η αξία του ακινήτου μειώνεται τόσο οι ποσοστιαίες διαφορές αυξάνονται σε απόλυτες τιμές. Τελικά, η επίπτωση του συντελεστή συσχέτισης στο σχετικό ύψος του λάθους τιμολόγησης είναι ίδια με τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, όσο αφορά την κατεύθυνση του λάθους. Οπότε, οι ποσοστιαίες διαφορές μειώνονται όσο το $\rho_{X,t}$ βρίσκεται μεταξύ του $-0.4\ \omega\varsigma\ 0.4$ όταν το δικαίωμα είναι υποτιμημένο, δηλαδή όταν η καμπύλη επιτοκίων είναι ανοδική, ενώ αντίθετα αυξάνεται όταν το $\rho_{X,t}$ πηγαίνει από τις αρνητικές τιμές προς τις θετικές όταν το δικαίωμα είναι υπερεκτιμημένο, δηλαδή ισχύει μια φθίνουσα καμπύλη επιτοκίων.

Παρότι παρουσιάστηκαν οι συγκεκριμένοι πίνακες, σχετικά με τις επιπτώσεις των στοχαστικών επιτοκίων, μόνο για Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης, είναι εύκολη η επέκταση των παρατηρήσεων και σε πραγματικά Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς και πώλησης που αφορούν πραγματικά ακίνητα, είτε στην περίπτωση που τα ακινητά αυτά καταβάλουν περιοδική σταθερή χρηματορροή είτε στην περίπτωση που δεν καταβάλλουν καθόλου ενοίκιο ή γενικά κάποιο μέρισμα.

Παράδειγμα 4.5: Τιμολόγηση Δικαιωμάτων με διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιτοκίων

Στο τελευταίο παράδειγμα θα παρουσιαστεί η τιμή που υπολογίζει για τα δικαιώματα το μοντέλο με τρεις διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιτοκίων, και θα γίνει σύγκριση με τις τιμές που δίνει το BSM μοντέλο σταθερού επιτοκίου, παρουσιάζοντας την διαφορά τους. Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν είναι $X_0 = 75, \delta = 0, \sigma_X = 0.1, \rho_{X,t} \equiv 0\ \forall t \geq 0, \mu\varepsilon\ \tau o\ K = 75$ ή 85 και το $\tau = T - t_0$ να είναι 2 χρόνια.

Ο αριθμός των περιόδων N, στις οποίες χωρίζεται ο χρονικός ορίζοντας των δικαιωμάτων, θα είναι ίσο με $N = 400, 1000\ \kappa\alpha\iota\ 2000$ και το μήκος της κάθε περιόδου Δt να είναι ίσο με $0.005, 0.002\ \kappa\alpha\iota\ 0.001$ αντίστοιχα.

Τα τρία μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι τα εξής:

- Το διωνυμικό μοντέλο σταθερού επιτοκίου, με επιτόκιο $r_t = r = 0.06$.
- Το μοντέλο του Vasicek, το οποίο αναλύθηκε και στο Κεφάλαιο 3, με $c = 0.15\ , b = 0.07\ \kappa\alpha\iota\ \sigma_r = 0.02$.
- Το διωνυμικό μοντέλο για το επιτόκιο, δηλαδή έχουμε μεταβαλλόμενο επιτόκιο με μεταβλητότητα ίση με $\sigma_r = 0.02$.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 4.6, στον οποίο οι τιμές υπολογίστηκαν με τον κώδικα R (βλέπε Παράρτημα Α σελ. 98).

Πίνακας 4.6: Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης με διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιτοκίων

4.Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς						
	$K = 75$			$K = 85$		
	$r_t = r$	$r_t(Vas.)$	$r_t(Binom.)$	$r_t = r$	$r_t(Vas.)$	$r_t(Binom.)$
$\boldsymbol{N = 400}$	9.5797	9.7173	9.6848	4.0468	4.1385	4.1464
$\boldsymbol{N = 1000}$	9.5803	9.7067	9.6851	4.0462	4.1305	4.1456
$\boldsymbol{N = 2000}$	9.5805	9.7025	9.6853	4.0475	4.1287	4.1468
BSM Price	$\mathbf{9.5807}$			$\mathbf{4.0475}$		

Διαφορά από την τιμή BSM						
$\boldsymbol{N = 400}$	-0.001	0.1366	0.1041	-0.0007	0.091	0.0989
$\boldsymbol{N = 1000}$	-0.0004	0.126	0.1044	-0.0013	0.083	0.0981
$\boldsymbol{N = 2000}$	-0.0002	0.1218	0.1046	≈ 0	0.0812	0.0993

Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης						
	$K = 75$			$K = 85$		
	$r_t = r$	$r_t(Vas.)$	$r_t(Binom.)$	$r_t = r$	$r_t(Vas.)$	$r_t(Binom.)$
$\boldsymbol{N = 400}$	1.0988	1.0611	1.1129	4.4352	4.3281	4.4317
$\boldsymbol{N = 1000}$	1.0994	1.0645	1.1134	4.4345	4.3358	4.4310
$\boldsymbol{N = 2000}$	1.0995	1.0659	1.1136	4.4358	4.3407	4.4323
BSM Price	$\mathbf{1.0997}$			$\mathbf{4.4354}$		

Διαφορά από την τιμή BSM						
$\boldsymbol{N = 400}$	-0.0009	-0.0386	0.0132	-0.0002	-0.1073	-0.0037
$\boldsymbol{N = 1000}$	-0.0003	-0.0352	0.0137	-0.0009	-0.0996	-0.0044
$\boldsymbol{N = 2000}$	-0.0002	-0.0338	0.0139	0.0004	-0.0947	-0.0031

Στον πίνακα 4.6 παρουσιάζεται η τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με ντετερμινιστικά και στοχαστικά επιτόκια καθώς και η τιμή της BSM εξίσωσης σταθερών επιτοκίων. Αναλυτικότερα, τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς τείνουν να υπερεκτιμούνται από τα μοντέλα μεταβλητού επιτοκίου, είτε στο μοντέλο του Vasicek είτε στο διωνυμικό μοντέλο επιτοκίων, σε σχέση με την εξίσωση των εξίσωση Black-Scholes και Merton, ενώ στην περίπτωση των δικαιωμάτων πώλησης δεν εξάγεται ένα ασφαλές συμπέρασμα. Παρόμοια, μεγαλύτερή τιμή εξάσκησης σημαίνει μεγαλύτερή διαφορά σε σχέση με το BSM μοντέλο. Τέλος, παρατηρούμε ότι η διαφορά από το BSM μοντέλο είναι μικρότερη αν η τιμή του επιτοκίου υπολογιστεί με το διωνυμικό μοντέλο σε σχέση με το αν υπολογιστεί με το μοντέλο του Vasicek, ενώ γενικά πιο κοντά στο BSM μοντέλο είναι το απλό μοντέλο σταθερού επιτοκίου.

4.6 Επίλογος και συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή αναλύεται ένα διπαραγοντικό μοντέλο, δηλαδή με δύο στοχαστικές μεταβλητές, για την τιμολόγηση παραγώγων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης πάνω σε υποκείμενες αξίες, οι οποίες στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ακίνητα. Το μοντέλο που αναπτύσσεται δημιουργεί ένα μοντέλο που μπορεί να υπολογίσει τις τιμές των δικαιωμάτων γρήγορα, με την χρήση των σύγχρονων ηλεκτρονικών μέσων, αλλά και καταφέρνει να είναι και ακριβές, αφού παράγει τιμές κοντά στις αξίες που υπολογίζονται με την εξίσωση των Black-Scholes και Merton. Το βασικό στοιχείο του μοντέλου είναι το γεγονός ότι χρησιμοποιείται μια καμπύλη επιτοκίων που είναι συμβατή με την καμπύλη επιτοκίων της αγοράς αλλά και έναν μη-ανεξάρτητο υποκείμενο τίτλο. Οι διαδικασίες του υπολογισμού της τιμής των δύο στοχαστικών μεταβλητών διακριτοποιούνται με το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο, και η αναλυτική λύση και το ύψος των βημάτων υπολογίζονται με βάση την αναγκαία συνθήκη των μη αρνητικών πιθανοτήτων. Τέλος, το ταίριασμα του μοντέλου με την αγορά γίνεται με την τεχνική της «επαγωγής προς τα εμπρός», που περιλαμβάνει τα χρεόγραφα Arrow-Debreu.

Όσο αφορά τα αριθμητικά αποτελέσματα, γίνεται αντιληπτό ότι οι αξίες που υπολογίζονται από το μοντέλο αυτό για τα δικαιώματα, με σταθερό επιτόκιο και μηδενικό συντελεστή συσχέτισης ταυτίζεται με την τιμή που υπολογίζει η BSM εξίσωση. Το μοντέλο αυτό που υποθέτει στοχαστικά επιτόκια, συγκρινόμενο με μοντέλα σταθερού επιτοκίου, αποδεικνύεται ότι είναι πιο ακριβές για την τιμολόγηση των παραγώγων για μη-ευθείες καμπύλες επιτοκίων και μεταβλητότητας, και στα αριθμητικά παραδείγματα γίνεται φανερό ότι το δισδιάστατο διωνυμικό μοντέλο αποτελεί μια αξιόπιστη λύση όταν αποδεικνύεται μικρός συντελεστής συσχέτισης αναμεσά στην τιμή του ακινήτου και το στοχαστικό επιτόκιο.

Παράρτημα Α: Κώδικας R

Κώδικας R για την κατασκευή των Πινάκων των παραδειγμάτων

Για το παράδειγμα 4.5, οι τιμές μπορούν να εξαχθούν με τον παρακάτω κώδικα διαλέγοντας τα κατάλληλα βήματα N του διωνυμικού δένδρου:

```
Stock_Tree <- function(S, sigmax,Dt,N,r,Div) {
  tree = matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
v=r-Div-0.5*(sigmax^2)
Dy=sqrt(sigmax^2*Dt+(v^2)*(Dt^2))
  for (i in 1:(N+1)) {
    for (j in 1:i) {
     tree[i, j] = S*exp((j-1)*Dy)*exp(((i-1)-(j-1))*(-Dy))
    } }
  return(tree)
}
European_Binomial_Option <- function(tree, sigmax,r, K, type,Dt,d) {
  v=r-d-0.5*(sigmax^2)
  Dy=sqrt(sigmax^2*Dt+(v^2)*(Dt^2))
  q = 0.5+0.5*((v*Dt)/Dy)
  option_tree = matrix(0, nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
  if(type == 'put') {
    option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(K - tree[nrow(tree),],0)
  } else {  option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(tree[nrow(tree),] - K, 0)
  }
   for (i in (nrow(tree)-1):1) {
    for(j in 1:i) {
     option_tree[i,j]=((1-q)*option_tree[i+1,j] +q*option_tree[i+1,j+1])/exp(r*Dt)
    }
  }
  return(option_tree)
}
```

```
American_Binomial_Option <- function(tree, sigma, Dt, r, K, type) {
 v=r-d-0.5*(sigmax^2)
 Dy=sqrt(sigmax^2*Dt+(v^2)*(Dt^2))
 q = 0.5+0.5*((v*Dt)/Dy)
 option_tree <- matrix(0, nrow = nrow(tree), ncol = ncol(tree))
 option_tree[nrow(option_tree), ] <- if (type == 'put') pmax(K - tree[nrow(tree), ], 0) else
pmax(tree[nrow(tree), ] - K, 0)
 for (i in (nrow(tree) - 1):1) {
  j <- 1:i
  exercise.payoff <- if (type == 'put') pmax(X - tree[i, j], 0) else pmax(tree[i, j] - X, 0)
  hold.payoff <- ((1 - q) * option_tree[i + 1, j] + q * option_tree[i + 1, j + 1]) / exp(r * Dt)
  option_tree[i, j] <- pmax(exercise.payoff, hold.payoff)
 }
 return(option_tree)
}
BlackScholes <- function(S, K, r, T, sigmax, type){


 if(type=="C"){
 d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*T) / (sigmax*sqrt(T))
 d2 <- d1 - sigmax*sqrt(T)
 value <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
 return(value)}
 if(type=="P"){
 d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*T) / (sigmax*sqrt(T))
 d2 <- d1 - sigmax*sqrt(T)
 value <-  (K*exp(-r*T)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1))
 return(value)}
}
```

Ο παρακάτω κώδικας δίνει ένα διωνυμικό δένδρο με μεταβαλλόμενη καμπύλη επιτοκίων με βάση το μοντέλου του Vasicek καθώς και η τιμολόγηση των δικαιωμάτων με βάση το δένδρο αυτό:

```
Stock_Tree_Vasi <- function(S, sigmax,a,b,sigmar,Dt,N,rfir,Div,t) {
   Vas=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   A=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   B=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   P=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   sharpe = 0
   rbar = b + sigmar*sharpe/a - 0.5*sigmar^2/a^2
   vn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   Dyn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
 for (i in 1:(N+1)) {
       for (j in 1:i) {
     B[i,j]=(1 - exp(-a*(i-t)))/a
     A[i,j]=exp(rbar*(B[i,j] + t -i) - (B[i,j]^2)*sigmar^2/(4*a))
     P[i,j]= A[i,j] * exp(-B[i,j] * rfir)
     Vas[i,j]<- -log(P[i,j])/(i-t)
     vn[i,j]=Vas[i,j]-Div-0.5*(sigmax^2)
     Dyn[i,j]=sqrt(sigmax^2*Dt+(vn[i,j]^2)*(Dt^2))
}
}
tree = matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
  for (i in 1:(N+1)) {
   for (j in 1:i) {
    tree[i, j] = S*exp((j-1)*Dyn[i,j])*exp(((i-1)-(j-1))*(-Dyn[i,j]))
   }  }
  return(tree)
}
Option_Vasi_returns<- function(tree,sigmax,a,b,sigmar,rfir,K,type,Dt,N,Div,t) {
     Vas=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
     A=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
```

```
    B=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
    P=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
    sharpe = 0
    rbar = b + sigmar*sharpe/a - 0.5*sigmar^2/a^2
    q=matrix(0,nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
    vn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
    Dyn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
 for (i in 1:(N+1)) {
      for (j in 1:i) {
       B[i,j]=(1 - exp(-a*(i-t)))/a
       A[i,j]=exp(rbar*(B[i,j] + t -i) - (B[i,j]^2)*sigmar^2/(4*a))
       P[i,j]= A[i,j] * exp(-B[i,j] * rfir)
       Vas[i,j]<- -log(P[i,j])/(i-t)
       vn[i,j]=Vas[i,j]-Div-0.5*(sigmax^2)
       Dyn[i,j]=sqrt(sigmax^2*Dt+(vn[i,j]^2)*(Dt^2))
       q[i, j] = 0.5+0.5*((vn[i,j]*Dt)/Dyn[i,j])
}
}
option_tree = matrix(0, nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
 if(type == 'put') {
   option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(K - tree[nrow(tree),],0)
 } else {  option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(tree[nrow(tree),] - K, 0)
 }
  for (i in (nrow(tree)-1):1) {
   for(j in 1:i) {
    option_tree[i,j]=((1- q[i, j])*option_tree[i+1,j] +
q[i,j]*option_tree[i+1,j+1])/exp(Vas[i,j]*Dt)
 }
 }
 return(option_tree)
}
```

Ενώ αν μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο για τα επιτόκια χρησιμοποιούμε τον εξής κώδικα:

```
Stock_Tree_M <- function(S, sigmax,sigmar,Dt,N,rfir,Div) {
   u = exp(sigmar*sqrt(Dt))
   d = exp(-sigmar*sqrt(Dt))
   rnj=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   vn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
   Dyn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
 for (i in 1:(N+1)) {
        for (j in 1:i) {
     rnj[i,j]= rfir * (u^((j-1)))* (d^((i-1)-(j-1)))
     vn[i,j]=rnj[i,j]-Div-0.5*(sigmax^2)
     Dyn[i,j]=sqrt(sigmax^2*Dt+(vn[i,j]^2)*(Dt^2))
}
}
tree = matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
  for (i in 1:(N+1)) {
   for (j in 1:i) {
    tree[i, j] = S*exp((j-1)*Dyn[i,j])*exp(((i-1)-(j-1))*(-Dyn[i,j]))
   } }
  return(tree)
}
Option_M_returns<- function(tree,sigmax,sigmar,rfir,K,type,Dt,N,Div) {
   u = exp(sigmar*sqrt(Dt))
   d = exp(-sigmar*sqrt(Dt))
     q=matrix(0,nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
     rnj=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
     vn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
     Dyn=matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
 for (i in 1:(N+1)) {
        for (j in 1:i) {
```

```
      rnj[i,j]= rfir * (u^((j-1)))* (d^((i-1)-(j-1)))
      vn[i,j]=rnj[i,j]-Div-0.5*(sigmax^2)
      Dyn[i,j]=sqrt(sigmax^2*Dt+(vn[i,j]^2)*(Dt^2))
      q[i, j] = 0.5+0.5*((vn[i,j]*Dt)/Dyn[i,j])
}
}
option_tree = matrix(0, nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
  if(type == 'put') {
    option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(K - tree[nrow(tree),],0)
  } else {  option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(tree[nrow(tree),] - K, 0)
  }
   for (i in (nrow(tree)-1):1) {
    for(j in 1:i) {
     option_tree[i,j]=((1- q[i, j])*option_tree[i+1,j] + q[i,j]*option_tree[i+1,j+1])/exp(rnj[i,j]*Dt)
  }
  }
  return(option_tree)
}
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. ΒΙΒΛΙΑ – ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

[1] D. A Dubofsky (2004) “ Παράγωγα Προϊόντα & Ελληνική αγορά” Επιμέλεια: Ν.Πορφύρης.

[2] J. C. Hull (2017) “ Βασικές Αρχές των Αγορών Συμβολαίων και Δικαιωμάτων», 9η Αμερικάνικη έκδοση, ” Επιμέλεια: Β.Πολυμένης.

[3] J. R. M. Roman (2017) “Analytical Finance: Volume 1, The Mathematics of Equity Derivatives, Markets, Risk and Valuation”.

[4] A. N. Γιαννακόπουλος (2010), “Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά”, Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ.

[5] D. Brigo, F. Mercurio (2006) “Interest Rate Models-Theory and Practice”, 2nd Edition.

[6] W. Zhang (2015) “Introduction to Itô’s Lemma”, Department of Statistical Sciences, Cornell University.

[7] B. Lee (2010) “Stochastic Calculus”, MIT Opencourses.

[8] Σ. Σταματιάδης (2021) “Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση”, Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογία Υλικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Β. ΕΡΓΑΣΙΕΣ

[9] F. Black, M. Scholes (1973) “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy 81 , 637–654.

[10] R. Merton (1969) “Theory of rational option pricing”, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141–183.

[11] Sharpe W. F. (1978), “Investments (2nd ed.)”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[12] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein (1979) “Option pricing: A simplified approach”, Journal of Financial Economics 7, 229–263.

[13] J. Cox , M. Rubinstein (1985), “Options Markets”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[14] K. Itô (1951) “On Stochastic Differential Equations”, Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1-51.

[15] F. Black, E. Derman and W.Toy (1990), “A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options”, Financial Analysts Journal Vol. 46,No. 1, 33-39.

[16] R. S. Mamon (2004) “Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model”.

[17] R. J. Buttimer Jr., J. B. Kau, V. C. Slawson Jr. (1997) ‘‘A Model for Pricing Securities Dependent upon a Real Estate Index”, Journal of Housing Economics, Volume 6, Issue 1, 16-30.

[18] P. Ciurlia, A. Gheno (2009) “A model for pricing real estate derivatives with stochastic interest rates”, Mathematical and Computer Modelling 50,233-247.

[19] L. Trigeorgis (1991) “ A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments” , Journal of Financial and Quantitative Analysis 26, 309–326.

[20] F. Jamshidian (1991) “Forward induction and construction of yield curve diffusion models”, Journal of Fixed Income 1, 62–74.

[21] K. Sandmann, D. Sondermann (1997) “A note on the stability of lognormal interest rate models and the pricing of Eurodollar futures”, Mathematical Finance 7, 119–125.

[22] S. E. Fadugba, C. Nwozo (2013) “Crank Nicolson Finite Difference Method for the Valuation of Options”.

[23] N. Umeorah, P. Mashele (2019) “A Crank-Nicolson finite difference approach on the numerical estimation of rebate barrier option prices”, Cogent Economics & Finance.