

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ  
ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ  
ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΓΗΡΑΝΣΗ**

**Θωμάς Ι. Ράππη**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς  
Ιανουάριος 2007

РАВЕШТАМО ТЕРАПА

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ  
ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ  
ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΓΗΡΑΝΣΗ**

**Θωμάη Ι. Ράππη**

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς  
Ιανουάριος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Κωνσταντίνος Πολίτης
- Κούτρας Μάρκος
- Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**STATISTICAL TESTS FOR  
DISTRIBUTIONS WITH MONOTONE  
AGING**

**Thomai J. Rapti**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics.

Piraeus  
January 2007

РАНЕКІШНО ТЕРАПІА

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Πολίτη για το θέμα που μου εμπιστεύτηκε καθώς και για την στήριξη και τις πολύτιμες συμβουλές και οδηγίες του σε όλα τα στάδια αυτής της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μιχαήλ Μπούτσικα του οποίου η συμβολή ήταν σημαντική για την διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάμε κλάσεις κατανομών αξιοπιστίας με μονότονη γήρανση (aging). Στο πρώτο μέρος της εργασίας παρουσιάζουμε τις γνωστότερες από αυτές τις κλάσεις και τις ιδιότητές τους, ενώ στο δεύτερο μέρος εξετάζουμε το στατιστικό πρόβλημα του ελέγχου υποθέσεων για κατανομές με μονότονη γήρανση.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της βαθμίδας αποτυχίας μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Αρχικά δίνεται ο ορισμός και η ερμηνεία της και στη συνέχεια περιγράφονται οι διάφορες μορφές της. Τέλος, γίνεται μια ανασκόπηση γνωστών παραμετρικών μοντέλων και παρατίθενται παραδείγματα για την βαθμίδα αποτυχίας της εκάστοτε κατανομής όπου παρουσιάζεται αναλυτικά ο τύπος και η γραφική παράσταση τόσο της βαθμίδας αποτυχίας όσο και της συνάρτησης αξιοπιστίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετούμε διάφορες οικογένειες κατανομών οι οποίες ταξινομούνται σε διάφορες κλάσεις με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας ή τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Κάθε οικογένεια κατανομών αναλύεται διεξοδικά και στη συνέχεια δίνονται προτάσεις που τη συνδέουν με άλλες κλάσεις κατανομών που ανήκουν σε αυτές.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετούμε τη μεθοδολογία που έχει προταθεί τα τελευταία χρόνια και αφορά τον έλεγχο της υπόθεσης ότι μια κατανομή έχει μονότονη γήρανση. Στους ελέγχους αυτούς η μηδενική υπόθεση είναι ότι η κατανομή που εξετάζουμε είναι η εκθετική, η οποία έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι η κατανομή αυτή ανήκει σε κάποια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών (π.χ IFR, IFRA, NBU, NBUE κλπ). Αρχικά δίνεται η οικογένεια των στατιστικών ελέγχου που χρησιμοποιούνται σε κάθε έλεγχο και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman προκειμένου να συγκρίνουμε την στατιστική έλεγχο που εισήγαμε με άλλες στατιστικές που αναφέρονται στην βιβλιογραφία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο προσεγγίζουμε το θέμα των στατιστικών ελέγχων που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, από την πρακτική του πλευρά και συγκεκριμένα μέσω προσομοίωσης. Χρησιμοποιούμε το στατιστικό πακέτο *Mathematica* για να παράγουμε τυχαία δείγματα από γνωστές στη θεωρία αξιοπιστία κατανομές- όπως είναι η Weibull, Gamma, LFR κλπ- και στη συνέχεια εκτιμούμε την συνάρτηση ισχύος της διαδικασίας ελέγχου προκειμένου να αποφανθούμε αν η στατιστική που χρησιμοποιήσαμε οδηγεί σε



στατιστικώς σημαντικά αποτελέσματα ή όχι και να αξιολογήσουμε εμπειρικά την απόδοση της συγκεκριμένης μεθόδου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

# ABSTRACT

In the present MSc Dissertation we examine reliability classes with monotone aging. The first part of the thesis demonstrates the most familiar classes as well as their attributes while the second one, examines the statistical issue of testing hypothesis for distributions with monotone aging.

In the first chapter, we introduce the concept of the failure rate of a unit or a system. Initially, we demonstrate its definition and interpretation. Finally, we present known parametric models and examples for the failure rate for each distribution with analytical presentation of the form and the graph of both the failure rate and the reliability function.

In the second chapter, we study various families of distributions that are being classified by the failure rate or the mean residual life. Each class is being comprehensively studied by stating several propositions that give the connection with other reliability classes.

In the third chapter, we study the methodology that has been proposed over the last years and concerns the test of hypothesis that a distribution has a monotone aging. In these controls, the null hypothesis is that the examined distribution is exponential, with constant failure rate, while the alternative hypothesis is that this distribution belongs to a non-parametric class of distributions (i.e IFR, IFRA, NBU, NBUE, etc). At the beginning, we give the family of the statistic that is used in each method and then we estimate Pitman's asymptotic efficiency in order to compare it with other statistics that are being referred in the bibliography.

In the fourth chapter, we approach the issue of the statistical controls that had been studied in the previous chapter, through its practical aspect and specifically via simulation. By using the statistical package "Mathematica", we produce random samples from distributions that we use in reliability theory- such as Weibull, Gamma, LFR, etc. Then, we estimate the force of the statistic in order to decide whether or not the statistic that we used, leads to statistically significant results and also to empirically estimate the efficiency of the particular statistical method.

РАНЕКІШНО ТЕРАПІА

---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>xiii</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	<b>xv</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΒΑΘΜΙΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Ορισμός	1
1.3 Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας	4
1.4 Η βαθμίδα αποτυχίας γνωστών συνεχών κατανομών	9
1.4.1 Εκθετική κατανομή	9
1.4.2 Κατανομή Weibull	10
1.4.3 Κατανομή Gamma	13
1.4.4 Περικομμένη κανονική κατανομή	16
1.4.5 Λογαριθμοκανονική κατανομή	17
1.4.6 Ομοιόμορφη κατανομή	19
1.4.7 Λογιστική κατανομή	20
1.4.8 Λογαριθμολογιστική κατανομή	22
1.4.9 Κατανομή Pareto	24
1.4.10 Κατανομή Gompert-Makeham	25
1.4.11 Γενικευμένη κατανομή Gamma	27
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ</b>	<b>31</b>
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Οικογένεια IFR	31
2.3 Οικογένεια DFR	37
2.4 Οικογένεια IFRA	41
2.5 Οικογένεια DFRA	46
2.6 Οικογένεια NBU	48
2.7 Οικογένεια NWU	49
2.8 Οικογένεια NBUE	51
2.9 Οικογένεια NWUE	52

---

2.10	Οικογένεια HNBUE	53
2.11	Οικογένεια HNWUE	53
2.12	Οικογένεια IMRL	54
2.13	Οικογένεια DMRL	54
2.14	Οικογένεια IDMRL	55
2.15	Οικογένεια DIMRL	56
2.16	Οικογένεια NWBUE	56
2.17	Οικογένεια NBWUE	57

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΓΗΡΑΝΣΗ** **59**

3.1	Εισαγωγή	59
3.2	Έλεγχος έναντι της IFR εναλλακτικής	60
3.3	Έλεγχος έναντι της NBU εναλλακτικής	65
3.4	Έλεγχος έναντι της NBUE εναλλακτικής	69
3.5	Έλεγχος έναντι της HNBUE εναλλακτικής	71
3.6	Έλεγχος έναντι της IFRA εναλλακτικής	76
3.7	Έλεγχος έναντι της DMRL εναλλακτικής	83

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ** **89**

4.1	Εισαγωγή	89
4.2	Έλεγχος έναντι της IFR εναλλακτικής	89
4.3	Έλεγχος έναντι της DMRL εναλλακτικής	93
4.4	Έλεγχος έναντι της IFRA εναλλακτικής	94

**Παράρτημα** **101**

**Βιβλιογραφία** **117**

---

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

1.1	Συνάρτηση κατανομής.	7
1.2	Βαθμίδα αποτυχίας για την BFR περίπτωση.	8
1.3	Βαθμίδα αποτυχίας για την UBFR περίπτωση.	9
1.4	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής	10
1.5	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Weibull.	12
1.6	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Rayleigh.	13
1.7	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Gamma.	15
1.8	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της περικομμένης κανονικής κατανομής.	17
1.9	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της λογαριθμοκανονικής κατανομής.	19
1.10	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της ομοιόμορφης κατανομής	20
1.11	Βαθμίδα αποτυχίας της λογιστικής κατανομής.	21
1.12	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της λογαριθμολογιστικής κατανομής.	23
1.13	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Pareto.	25
1.14	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Gompertz.	26
1.15	Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Makeham.	27
1.16	Συνάρτηση αξιοπιστίας της γενικευμένης κατανομής Gamma.	29
1.17	Βαθμίδα αποτυχίας της γενικευμένης κατανομής Gamma.	29

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

2.1	Σχέση των κλάσεων κατανομών IFR και DFR	40
2.2	Βαθμίδα αποτυχίας μιας κατανομής που είναι IFRA και δεν είναι IFR.	44
2.3	Γράφημα της σχέσης $\Lambda(t)/t$ της IFRA κατανομής.	45

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

- |     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=50$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(1.5, 1)$     | 91 |
| 4.2 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=50$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(2, 1)$ .     | 91 |
| 4.3 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=100$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(1.5, 1)$ .  | 92 |
| 4.4 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=100$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(2, 1)$      | 92 |
| 4.5 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=2000$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(1.5, 1)$ . | 92 |
| 4.6 | Σύγκριση εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δείγματος $n=2000$ και συνάρτησης κατανομής της $Gamma(2, 1)$ .   | 92 |

---

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1	Σχέση μεταξύ των ποσοτήτων $f(t)$ , $F(t)$ , $R(t)$ , $\lambda(t)$ και $\Lambda(t)$	4
4.1	Εμπειρική συνάρτηση ισχύος της στατιστικής ελέγχου $\hat{\Delta}_2^{(1)}$ για τον IFR έλεγχο κατά Ahmad	90
4.2	Εκτίμηση της πιθανότητας σφάλματος τύπου I για την εκθετική κατανομή (IFR περίπτωση).	93
4.3	Εκτίμηση της πιθανότητας σφάλματος τύπου I για την εκθετική κατανομή (DMRL περίπτωση).	94
4.4	Εμπειρική συνάρτηση ισχύος των $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\Delta}_2$ για τον IFRA έλεγχο κατά Bassiouny (ε.σ 5%).	95
4.5	Εκτίμηση της πιθανότητας σφάλματος τύπου I για την εκθετική κατανομή (IFRA περίπτωση).	96
4.6	Η ποσότητα PAE της στατιστικής ελέγχου $\hat{\Delta}_{r+1}$ για τον IFRA έλεγχο κατά El-Bassiouny	97
4.7	Η ποσότητα PARE της στατιστικής ελέγχου $\hat{\Delta}_{r+1}$ για τον IFRA έλεγχο κατά El-Bassiouny.	99



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΒΑΘΜΙΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε την έννοια της βαθμίδας αποτυχίας μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Αρχικά δίνεται ο ορισμός της βαθμίδας αποτυχίας καθώς επίσης και η ερμηνεία της και στη συνέχεια περιγράφονται οι μορφές αυτής. Τέλος, κάνουμε μια ανασκόπηση γνωστών παραμετρικών μοντέλων παραθέτοντας παράλληλα ορισμένα παραδείγματα για τη βαθμίδα αποτυχίας για την εκάστοτε κατανομή. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι για την περάτωση αυτού του κεφαλαίου ιδιαίτερα χρήσιμες υπήρξαν οι πανεπιστημιακές σημειώσεις «Ανάλυση Επιβίωσης» του κ. Αντζουλάκου Δ. και «Στατιστική Θεωρία Αξιοπιστίας και Ελεγχοι χρόνων ζωής» του κ. Κούτρα Μ. καθώς επίσης και το σύγγραμμα “*Survival distributions and their characteristics- a contribution to the encyclopedia of biostatistics*” του Klein, J.P.

### 1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε μια μη αρνητική, συνεχή, τυχαία μεταβλητή την οποία συμβολίζουμε με  $T$  και η οποία παριστάνει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος και συμβολίζουμε με  $F(t)$  και  $f(t)$  την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας αντίστοιχα αυτής.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$F(t) = P[T \leq t] \text{ και } f(t) = F'(t)$$

με  $F(-\infty) = F(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$  και η  $F(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση και συνεχής από δεξιά. Στη θεωρία αξιοπιστίας η συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$  συμβολίζεται συνήθως και με  $\theta(t)$  και λέγεται *συνάρτηση θνησιμότητας*.

Αν υποθέσουμε ότι η μονάδα ή το σύστημα έχει λειτουργήσει χωρίς αποτυχία στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  με  $t \geq 0$ , τότε η πιθανότητα να λειτουργήσει χωρίς αποτυχία για  $x$  επιπλέον χρονικές μονάδες (δηλαδή να επιβιώσει στο χρονικό διάστημα  $(t, t+x]$  με  $x \geq 0$ ) θα είναι ίση με

$$P(T > t+x / T > t) = \frac{P(T > t+x)}{P(T > t)} = \frac{R(t+x)}{R(t)}$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα αποτυχίας στο ίδιο διάστημα  $(t, t+x]$  θα είναι ίση με

$$P(T \leq t+x / T > t) = \frac{P(t < T \leq t+x)}{P(T > t)} = \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}$$

όπου  $R(t) = P(T > t)$  είναι η αξιοπιστία της μονάδας ή του συστήματος σε χρόνο  $t$ , δηλαδή είναι η πιθανότητα να επιζήσει η μονάδα ή το σύστημα μέχρι την χρονική στιγμή  $t$ .

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αξιοπιστίας  $R(t)$  μπορούμε να γράψουμε

$$R'(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(t+x) - R(t)}{x}$$

οπότε

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(t+x) - R(t)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{R(t+x) - R(t)}{R(t)}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η εξής σχέση

$$-\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t+x / T > t)}{x}.$$

Ο λόγος

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t+x / T > t)}{x}$$

καλείται **(στιγμιαία) βαθμίδα αποτυχίας** (*failure rate, hazard rate, intensity rate, force of mortality, intensity of failure*) και εκφράζει το δεσμευμένο ρυθμό αποτυχίας της μονάδας στο διάστημα  $(t, t+x]$  όταν  $x \rightarrow 0$ , δεδομένου ότι  $T > t$ .

Η  $R(t)$  συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  σύμφωνα με την προφανή σχέση

$$R(t) = P[T > t] = 1 - P[T \leq t] = 1 - F(t).$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  είναι συνεχής και φθίνουσα στο  $[0, \infty)$ , με

$$R(0) = 1 - F(0) = 1 \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0.$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u) du$$

αφού

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u) du = \int_0^{\infty} f(u) du - \int_0^t f(u) du = \int_t^{\infty} f(u) du$$

Η  $R(t)$  συνδέεται με τη συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$  σύμφωνα με τη σχέση

$$R'(t) = (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t)$$

οπότε η βαθμίδα αποτυχίας μπορεί να έχει και την εξής μορφή

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = (-\ln R(t))' \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.1) ως προς  $t$  και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη  $R(0) = 1$  προκύπτει

$$\int_0^t \lambda(u) du = -\ln R(u) \Big|_0^t = -\ln \frac{R(t)}{R(0)} = -\ln R(t)$$

οπότε

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

Η ποσότητα  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ ,  $t \geq 0$  ονομάζεται *συνάρτηση κινδύνου (hazard rate)*.

Από τον ορισμό της  $\Lambda(t)$  είναι φανερό ότι

$$\Lambda'(t) = \lambda(t), \quad R(t) = e^{-\Lambda(t)} \quad \text{και} \quad \Lambda(t) = -\ln R(t)$$

Εφόσον  $0 \leq R(t) \leq 1$  θα ισχύει  $0 \leq \Lambda(t) \leq \infty$ . Επιπλέον, επειδή  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$  προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty$$

αφού

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\Lambda(t)} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\Lambda(t)}} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty.$$

Συνεπώς για τη βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  προκύπτουν οι εξής ιδιότητες

$$\lambda(t) \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\infty} \lambda(u) du = \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty.$$

Όταν γνωρίζουμε τη μια από τις ποσότητες  $f(t)$ ,  $F(t)$ ,  $R(t)$ ,  $\lambda(t)$  και  $\Lambda(t)$  μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες τέσσερις. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω των τύπων του πίνακα που ακολουθεί όπου οι ποσότητες της κάθε γραμμής δίνονται συναρτήσει των ποσοτήτων της κάθε στήλης.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1**  
ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ  $f(t)$ ,  $F(t)$ ,  $R(t)$ ,  $\lambda(t)$  και  $\Lambda(t)$

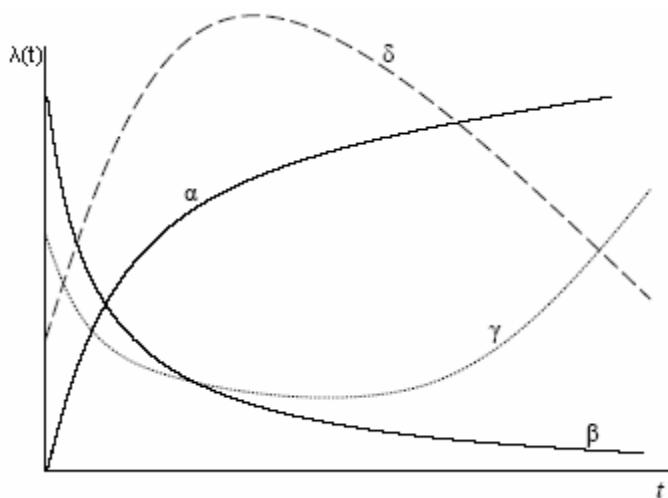
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$	$\Lambda(t)$
$F(t)$	-	$\int_0^t f(u)du$	$1 - R(t)$	$1 - \exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$	$1 - \exp(-\Lambda(t))$
$f(t)$	$F'(t)$	-	$-R'(t)$	$\lambda(t) \exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$	$\Lambda'(t) \exp(-\Lambda(t))$
$R(t)$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u)du$	-	$\exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$	$\exp(-\Lambda(t))$
$\lambda(t)$	$\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)du}$	$-\frac{R'(t)}{R(t)} = (-\ln R(t))'$	-	$\Lambda'(t)$
$\Lambda(t)$	$-\ln(1 - F(t))$	$\int_0^t \frac{f(u)}{\int_u^\infty f(s)ds} du$	$-\ln R(t)$	$\int_0^t \lambda(u)du$	-

Η βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  αποτελεί σημαντική ποσότητα τόσο στη θεωρία αξιοπιστίας όσο και σε άλλες επιστήμες. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στη δημογραφία και στην ασφαλιστική επιστήμη εμφανίζεται με τον όρο *ένταση θνησιμότητας (force of mortality)*, στην επιδημιολογία με τον όρο *age specific failure rate*, στα οικονομικά ως αντίστροφος λόγος του Mill (*Inverse Mill's Ratio*), στη θεωρία ακραίων τιμών είναι γνωστή ως *συνάρτηση έντασης (intensity function)* (Barlow, Marshall & Proschan (1963)).

### 1.3 ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Ανάλογα με τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας διακρίνουμε τέσσερις βασικές μορφές: την αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (*Increasing Failure Rate-IFR*), τη φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (*DFR*), τη βαθμίδα αποτυχίας λεκανοειδούς μορφής (*bathtub failure rate-BFR*) και τη βαθμίδα αποτυχίας ανάποδης λεκανοειδούς μορφής (*hump-shaped failure rate*). Στο παρακάτω γράφημα δίνεται μια εμπειρική παρουσίαση των τεσσάρων αυτών βασικών

μορφών όπου η καμπύλη ( $\alpha$ ) αντιστοιχεί σε κατανομή με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, η ( $\beta$ ) σε DFR, η ( $\gamma$ ) σε κατανομή με βαθμίδα αποτυχίας κυρτοειδούς μορφής και η ( $\delta$ ) UBFR.



Δ. Αντζουλάκος, "Ανάλυση Επιβίωσης", 2005

Μοντέλα με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη και θεωρούνται ίσως τα πιο δημοφιλή μοντέλα κινδύνου συγκριτικά με τα υπόλοιπα. Στην περίπτωση αυτή, η μονάδα ή το σύστημα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να αποτύχει με την πάροδο του χρόνου. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση όπου έχουμε φυσική γήρανση (*natural aging*) ή φθορά (*wear out*) των ατόμων ή των αντικειμένων που μελετάμε.

Η φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας εμφανίζεται σπάνια αλλά έχει εφαρμογή στις περιπτώσεις όπου υπάρχει αυξημένη πιθανότητα αποτυχίας σε πρώιμα στάδια. Με απλά λόγια, υπάρχει βελτίωση για τη μονάδα ή το σύστημα με την πάροδο του χρόνου. Συναρτήσεις κινδύνου αυτής της μορφής παρατηρούνται σε περιπτώσεις που μελετάμε την πορεία ασθενών που έχουν κάνει μεταμόσχευση ζωτικών οργάνων, σε ορισμένους τύπους ηλεκτρονικών συσκευών οι οποίες εμφανίζονται να έχουν φθίνουσα συνάρτηση κινδύνου κατά την αρχική περίοδο της χρήσης τους καθώς επίσης στην περίπτωση ορισμένων υλικών (μέταλλα, μπετόν) τα οποία αποκτούν αυξημένη αντοχή όσο περνάει ο χρόνος. Παρατηρείται επίσης και στην περίπτωση που μελετάμε την πορεία μιας επιχείρησης (Lomax, 1954). Συγκεκριμένα, οι φάσεις της ζωής μιας επιχείρησης διαγράφουν έναν βιολογικό κύκλο από τη γέννηση και την ανάπτυξη μέχρι τον εκφυλισμό και το θάνατο. Συνήθως τα πρώτα χρόνια από τη σύστασή της είναι τα πιο δύσκολα. Στο στάδιο αυτό, η πιθανότητα αποτυχίας είναι αυξημένη οπότε η πορεία της επιχείρησης από τη γέννησή της μέχρι την δραστηριοποίηση και την ανάπτυξή της μπορεί να περιγραφεί από ένα μοντέλο με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Τέλος, μοντέλα αυτής της μορφής χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη δημογραφία κατά τη μελέτη

ανομοιογενών πληθυσμών όπου η βαθμίδα αποτυχίας κάθε μέλους είναι τυχαία μεταβλητή (Frailty models). Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με τον Proschan (1963) η μορφή αυτή συναρτήσεων κινδύνου μπορεί να προκύψει από τη μίξη μοντέλων με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας ενώ ο Gleser (1989) απέδειξε ότι και στην περίπτωση της κατανομής γάμμα με παράμετρο μορφής  $\alpha < 1$  και παράμετρο κλίμακας  $\lambda$  η οποία προκύπτει από τη μίξη εκθετικών κατανομών με παράμετρο  $\lambda$ , η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Λίγα χρόνια αργότερα, οι Gurland και Sethuraman (1994) παρουσίασαν παραδείγματα τα οποία αποδεικνύουν ότι μοντέλα με φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας μπορούν να προκύψουν από τη μίξη κατανομών με βαθμίδα αποτυχίας που αυξάνεται πολύ γρήγορα.

Η τρίτη μορφή συναρτήσεων κινδύνου λεκανοειδούς μορφής (*bathhtub curve*) παρατηρείται στην περίπτωση που μελετάμε πληθυσμούς από τη στιγμή της γεννήσεώς τους. Αρχικά, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται, στη συνέχεια παραμένει σχεδόν σταθερή (οι διακυμάνσεις θεωρούνται αμελητέες) και τέλος αυξάνεται λόγω φθοράς ή γήρανσης. Η πρώτη περίοδος καλείται *βρεφική περίοδος* (*early life period*) όπου οι αποτυχίες που εμφανίζονται μπορούν να αποδοθούν σε αδυναμίες σχεδίασης ή κατασκευής των μονάδων σε περίπτωση που αναφερόμαστε σε αντικείμενα/προϊόντα, ή σε βρεφικές ασθένειες για τον άνθρωπο. Στη δεύτερη περίοδο, γνωστή με τον όρο *χρήσιμη περίοδος* (*useful period*), οι αποτυχίες οφείλονται σε τυχαίους λόγους και ονομάζονται τυχαίες ή καταστροφικές. Η τρίτη περίοδος ονομάζεται *περίοδος φθοράς* (*wear-out period*). Οι αποτυχίες στο διάστημα αυτό είναι φυσιολογικές και αναμενόμενες και συμβαίνουν λόγω φθοράς ή γήρανσης των υπό μελέτη μονάδων. Η μορφή αυτή συναρτήσεων κινδύνου μπορεί να προκύψει από την μίξη δύο μοντέλων με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η μίξη μιας κατανομής Weibull με αυστηρά αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, με μια εκθετική κατανομή δίνουν μια συνάρτηση κινδύνου λεκανοειδούς μορφής (Wondmagegnehu, Navarro και Hernandez (2005)).

Στην περίπτωση που η βαθμίδα αποτυχίας αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται, οι συναρτήσεις κινδύνου έχουν κοίλη μορφή (*hump-shaped curve* ή *upside-down bathtub shaped*). Μονάδες με αυτή τη μορφή βαθμίδας αποτυχίας έχουν μεγάλη πιθανότητα να αποτύχουν σε αρχικό στάδιο ενώ όσο περνάει ο χρόνος βελτιώνονται. Εμφανίζεται συχνά στην ανάλυση επιβίωσης και συγκεκριμένα όταν μελετάμε το χρόνο αποτυχίας μετά από μια επιτυχημένη χειρουργική επέμβαση όπου αρχικά υπάρχει αυξημένος κίνδυνος θανάτου λόγω μόλυνσης, αιμορραγίας και άλλων επιπλοκών. Ο κίνδυνος αυτός μειώνεται σταθερά με την

πάροδο του χρόνου καθώς ο ασθενής αναρρώνει. Η λογαριθμοκανονική κατανομή και η αντίστροφη κατανομή του Gauss έχουν βαθμίδα αποτυχίας αυτής της μορφής.

Στη συνέχεια δίνουμε δύο παραδείγματα μοντέλων βαθμίδας αποτυχίας που περιγράφουν τις καμπύλες (γ) και (δ). Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι η υπό μελέτη μονάδα μπαίνει σε λειτουργία στο χρόνο  $t=0$ .

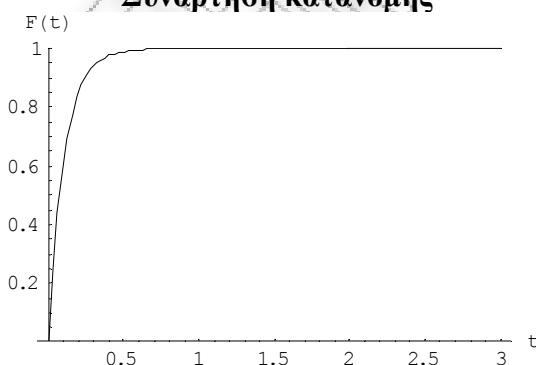
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Θεωρούμε μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $T$  η οποία παριστάνει το χρόνο ζωής μιας μονάδας και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της έχει την παρακάτω μορφή

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{(-10t+2t^2)}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 - e^{(-2t-8)}, & 2 < t \leq 3 \\ 1 - e^{-13-0.0625(t-1)^4}, & 3 < t \leq \infty \end{cases}$$

και

**ΣΧΗΜΑ 1.1**  
**Συνάρτηση κατανομής**



Από τη συνάρτηση κατανομής προκύπτει άμεσα η βαθμίδα αποτυχίας αφού ισχύει

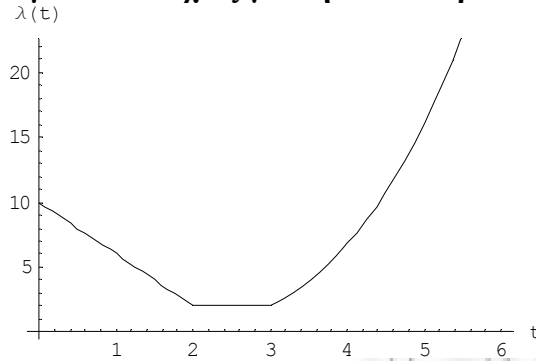
$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}.$$

Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\lambda(t) = \begin{cases} 10 - 4t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 3 \\ \frac{(t-1)^3}{4}, & 3 < t \leq \infty \end{cases}$$

η οποία διαγραμματικά είναι ως εξής

**ΣΧΗΜΑ 1.2**  
**Βαθμίδα αποτυχίας για την BFR περίπτωση.**



Παρατηρούμε ότι η παραπάνω καμπύλη μοιάζει με την καμπύλη (δ), δηλαδή το μοντέλο της βαθμίδας αποτυχίας που έχουμε στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να περιγραφεί από μια λεκανοειδή καμπύλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Θεωρούμε μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t^3}{3}\right)}, & 0 \leq t \leq 3 \\ 1 - \left(\frac{3}{t}\right)^{30} e^{-12}, & t > 3 \end{cases}$$

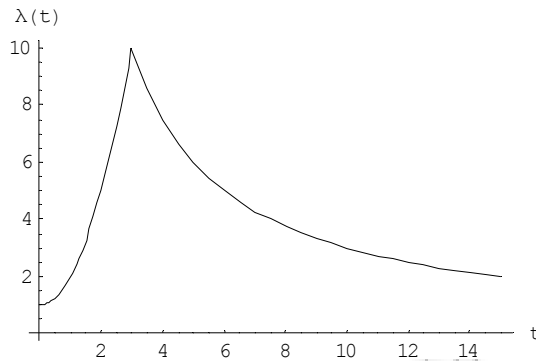
Εύκολα προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας ισούται με

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 + t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{30}{t}, & t > 3 \end{cases}$$

και έχει την ακόλουθη μορφή



**ΣΧΗΜΑ 1.3**  
**Βαθμίδα αποτυχίας για την UBFR περίπτωση.**



Παρατηρούμε ότι η παραπάνω καμπύλη μοιάζει με την καμπύλη ( $\gamma$ ), δηλαδή το μοντέλο βαθμίδας αποτυχίας που έχουμε στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να περιγραφεί από μια καμπύλη ανάποδης λεκανοειδούς μορφής.

#### 1.4 Η ΒΑΘΜΙΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

##### (1.4.1) ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ $Exp(\lambda)$

Η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται ευρύτατα στη θεωρία αξιοπιστίας παρέχοντας μια ικανοποιητική περιγραφή του χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος το οποίο δεν γερνάει. Η εκθετική κατανομή έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή δεν εξαρτάται από το χρόνο.

Θεωρούμε μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $T$  που παριστάνει το χρόνο ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή

$$\lambda(t) = \lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

Τότε η συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ , η συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$  και η συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις

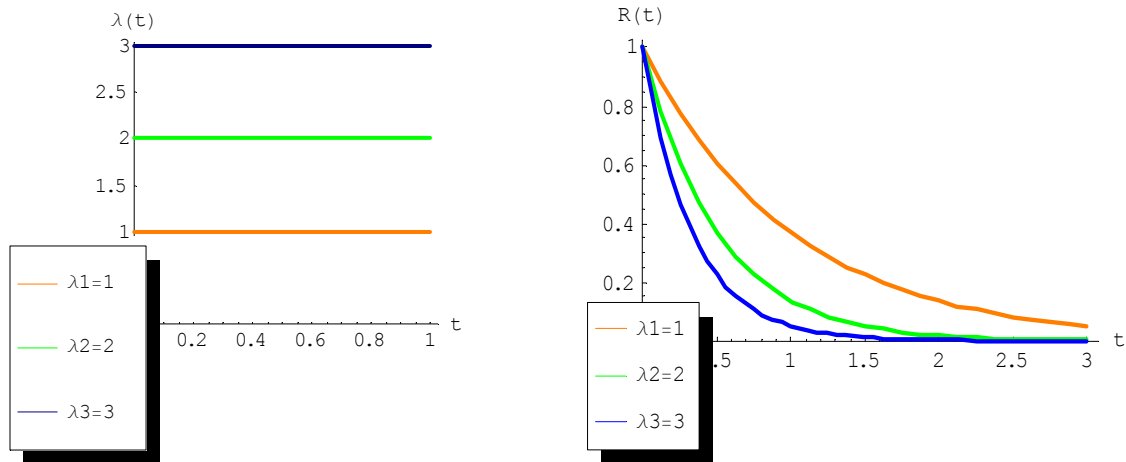
$$F(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται τα γραφήματα της βαθμίδας αποτυχίας  $\lambda(t)$ , και της αξιοπιστίας  $R(t)$  μιας μονάδας με εκθετικό χρόνο ζωής.

**ΣΧΗΜΑ 1.4**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής.**



Η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική συνεχής κατανομή που έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, δηλαδή η πιθανότητα αποτυχίας μιας μονάδας ηλικίας  $t$  είναι ανεξάρτητη της ηλικίας. Αυτό εκφράζει την *αμνήμονα ιδιότητα* (“*memoryless*” *property*). Μια τέτοια μονάδα θεωρείται «αγέραστη», αφού κάθε χρονική στιγμή συμπεριφέρεται σαν να ήταν καινούρια. Συμβολικά, η ιδιότητα αυτή δίνεται από την ακόλουθη σχέση (ισότητα Cauchy)

$$R(t+x) = R(t)R(x)$$

Η ιδιότητα *έλλειψης μνήμης* της εκθετικής κατανομής έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο σε πρακτικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι εφόσον μια ήδη χρησιμοποιημένη μονάδα είναι τόσο καλή όσο μια καινούρια, δεν υπάρχει κανένας λόγος να ακολουθήσουμε πολιτική αντικατάστασης των μονάδων που γνωρίζουμε ότι λειτουργούν. Επιπλέον κατά τη στατιστική εκτίμηση της μέσης ζωής, ποσοστημορίων και αξιοπιστίας των μονάδων, τα δεδομένα που συλλέγονται μπορούν να αφορούν τον αριθμό των ωρών της παρατηρηθείσας ζωής και τον αριθμό των παρατηρηθέντων αποτυχιών, αφού οι ηλικίες των μονάδων που παρατηρούμε δεν τα επηρεάζουν (Barlow & Proschan (1975)).

#### (1.4.2) ΚΑΤΑΝΟΜΗ WEIBULL $W(\lambda, \alpha)$

Η κατανομή αυτή θεωρείται από τις πιο δημοφιλείς παραμετρικές οικογένειες κατανομών για την μελέτη του χρόνου αποτυχίας μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Λόγω του ευπροσάρμοστου της βαθμίδας αποτυχίας της, η κατανομή Weibull χρησιμοποιείται επιτυχώς στην πράξη καθαρά ως εμπειρικό μοντέλο. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1939 από τον Σουηδό Weibull για να περιγράψει την αντοχή υλικών ενώ δύο σχεδόν δεκαετίες

αργότερα χρησιμοποιήθηκε από τους Lieblein και Zelen και τον Kao το 1958 για να περιγράψει αποτυχία σε ρουλεμάν και σε κενό σωλήνα αντίστοιχα.

Πέρα από την περιγραφή κατανομών χρόνου ζωής, το μοντέλο της κατανομής Weibull βρίσκει εφαρμογές στην οικονομία, στη μετεωρολογία, στην ασύρματη επικοινωνία και στα συστήματα ραντάρ όπου χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της διασποράς του επιπέδου των λαμβανόμενων σημάτων.

Η κατανομή Weibull -και συγκεκριμένα ο λογάριθμος μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την κατανομή αυτή- εφαρμόζεται ευρύτατα και στη θεωρία ακραίων τιμών (*extreme value theory*) όπου ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η ελάχιστη ή η μέγιστη τιμή ενός δείγματος το οποίο ακολουθεί τη συγκεκριμένη κατανομή. Ο τύπος αυτός ασυμπτωτικών κατανομών ακραίων τιμών είναι γνωστός με την ορολογία *log-Weibull distribution* ή *Fisher-Tippett distribution* ή *κατανομή ακραίων τιμών τύπου III*. Χρησιμοποιείται συνήθως για την περιγραφή ακραίων καταστάσεων όπως ανέμων μεγάλης εντάσεως, της ενέργειας που ελευθερώνεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού ή την υπερένταση στην οποία βρίσκεται ένα άτομο.

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^\alpha}, \quad \text{για } t \geq 0, \lambda > 0 \text{ και } \alpha > 0$$

$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, \quad \text{για } t \geq 0, \lambda > 0 \text{ και } \alpha > 0$$

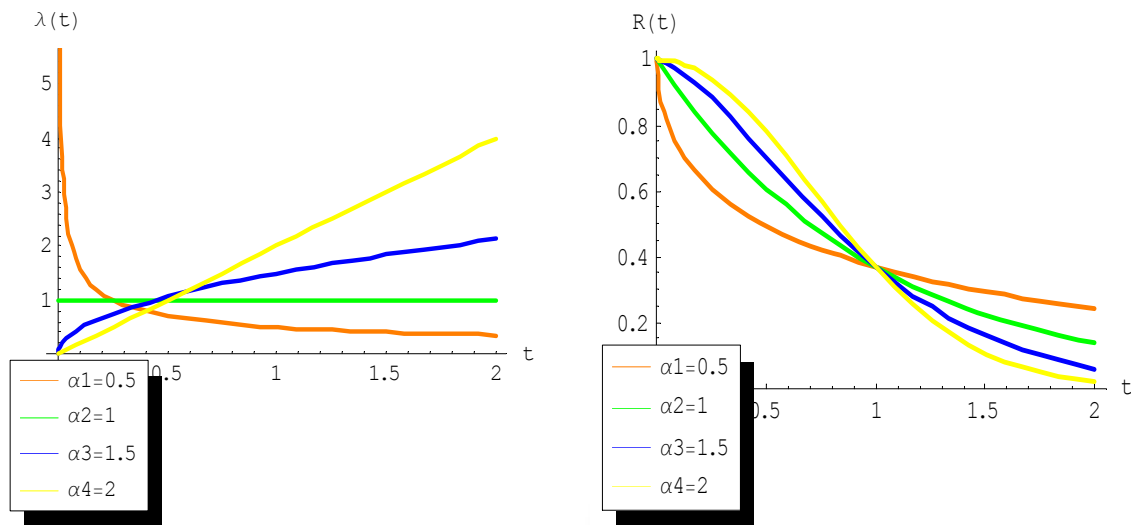
$$R(t) = \text{Exp} \left[ \int_0^t \lambda(u) du \right] = e^{-\lambda t^\alpha}$$

$$\lambda(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}.$$

Η παράμετρος  $\alpha$  ονομάζεται *παράμετρος μορφής (shape parameter)* ενώ η  $\lambda$  *παράμετρος κλίμακας (scale parameter)*. Η κατανομή εξαρτάται από την παράμετρο  $\lambda$  και τον χρόνο  $t$  μέσω του γινομένου τους  $\lambda t$ .

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης αξιοπιστίας για  $\lambda=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.5**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Weibull.**



Είναι φανερό ότι:

- Για  $a=1$  η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει σταθερή, προκύπτει δηλαδή η εκθετική κατανομή.
- Για  $a > 1$  η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται με το χρόνο (η μονάδα “γερνάει”) δηλαδή έχουμε IFR χρόνους ζωής.
- Για  $0 < a < 1$  η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται με το χρόνο (η μονάδα βελτιώνεται με την πάροδο του χρόνου) δηλαδή έχουμε DFR χρόνους ζωής.
- Για  $a=2$  παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνει γραμμικά ως προς το χρόνο  $t$ . Πρόκειται, ουσιαστικά, για μια ειδική περίπτωση της οικογένειας κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας, γνωστή στη βιβλιογραφία με το ακρόνυμο LFR (*Linear Failure Rate*). Η βαθμίδα αποτυχίας της οικογένειας αυτής δίνεται γενικά από τη σχέση

$$\lambda(t) = \lambda + at \text{ με } a, \lambda \geq 0.$$

ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας ισούται με

$$R(t) = e^{-\lambda t - \frac{a}{2}t^2}.$$

Για μεγάλες τιμές του χρόνου  $t$  (δηλαδή για  $t \rightarrow \infty$ ) η βαθμίδα αποτυχίας τείνει στο άπειρο όταν  $a \geq 1$  οπότε ο κίνδυνος αποτυχίας της μονάδος ή του συστήματος είναι βέβαιος, ή στο μηδέν όταν  $a \leq 1$  όπου η πιθανότητα αποτυχίας είναι πολύ μικρή.

- a) Για  $a=1$  προκύπτει η εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ .

b) Για  $\alpha=2$  και  $\lambda=k/2$  προκύπτει η κατανομή *Rayleigh*.

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{kt^2}{2}}, \quad \text{για } t \geq 0, \quad k > 0$$

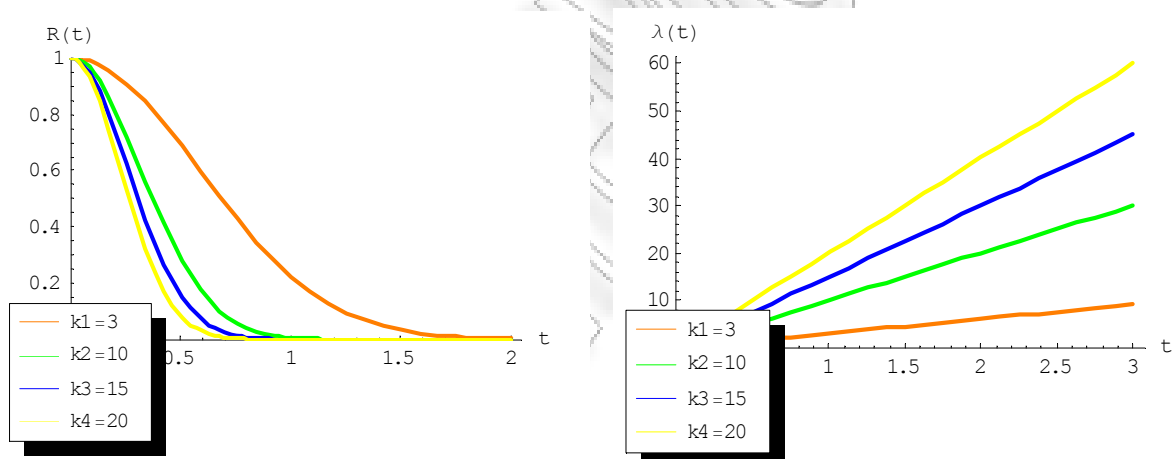
$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}, \quad \text{για } t \geq 0, \quad k > 0$$

$$R(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$\lambda(t) = kt.$$

Παρατηρούμε ότι η κατανομή αυτή έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας. Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της *Rayleigh* κατανομής για αδιάφορες τιμές του  $k$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.6**  
Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής *Rayleigh*.



### (1.4.3) ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ $Gamma(\lambda, \alpha)$

Η κατανομή Γάμμα έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad \text{για } t \geq 0$$

όπου  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$  η παράμετρος κλίμακας (*scale parameter*) και παράμετρος μορφής (*shape parameter*) αντίστοιχα.

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(t) = \int_0^t f(u) du .$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας είναι ίση με

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u) du = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}$$

όπου με  $\Gamma(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  συμβολίζουμε την μη πλήρη συνάρτηση Γάμμα.

Για τη βαθμίδα αποτυχίας έχουμε

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} .$$

Όταν το  $\alpha$  είναι θετικός ακέραιος, τότε η συνάρτηση κατανομής γράφεται σε κλειστή μορφή ως εξής

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} .$$

Η κατανομή Γάμμα με παράμετρο μορφής ένα θετικό ακέραιο αριθμό συμπίπτει με την κατανομή του αθροίσματος  $\alpha$  ανεξάρτητων, εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, όπου η κάθε μια έχει βαθμίδα αποτυχίας ίση με  $\lambda$ . Η κατανομή αυτή ονομάζεται *κατανομή Erlang* και εισήχθη από τον Δανό μαθηματικό A.K Erlang για την μελέτη του τηλεπικοινωνιακού συστήματος της πατρίδας του.

Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \alpha \in \mathbb{N}$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \alpha \in \mathbb{N} .$$

οπότε η βαθμίδα αποτυχίας είναι

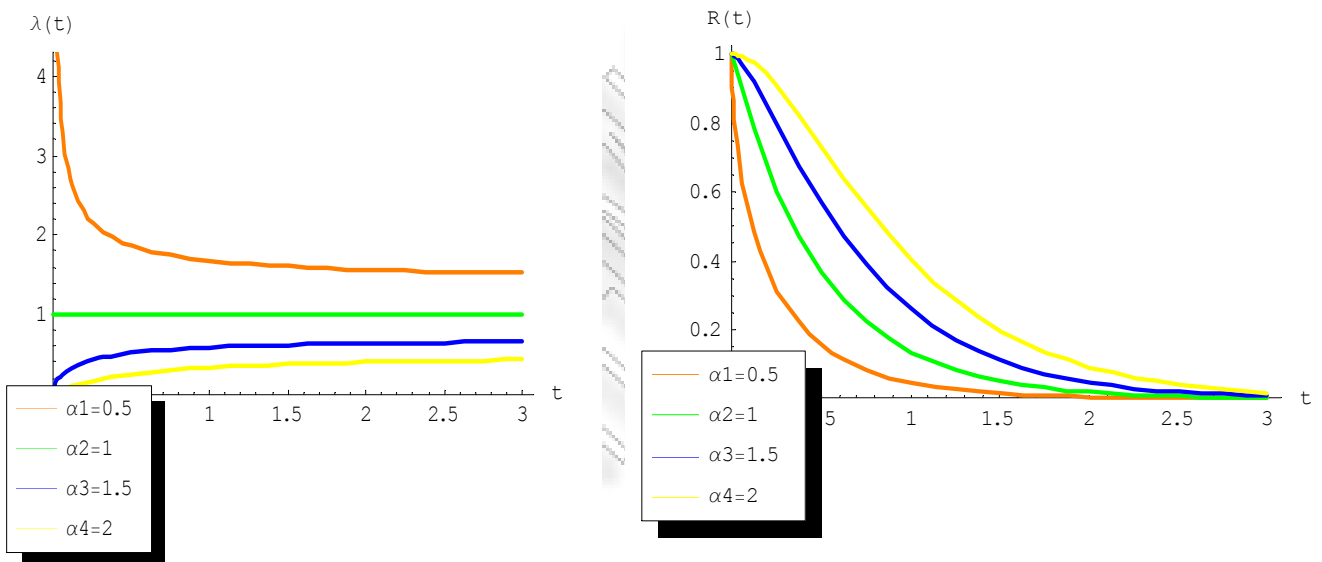
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)! \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}} t^{\alpha-1}, \quad t \geq 0, \alpha \in \mathbb{N} .$$

Η κατανομή Erlang χρησιμοποιείται για την καταγραφή των τηλεφωνημάτων που γίνονται ταυτόχρονα σε ένα τηλεφωνικό κέντρο. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο εκδοχές της

κατανομής: Η Erlang B και η Erlang C κατανομή. Προκειμένου να καταγράψουμε τον (περιορισμένο) αριθμό τηλεφωνημάτων τα οποία παραμένουν σε αναμονή για μικρό χρονικό διάστημα μέχρι να εξυπηρετηθούν, χρησιμοποιούμε την κατανομή Erlang C ενώ η Erlang B κατανομή εφαρμόζεται στην περίπτωση που δεν επιτρέπεται η συσσώρευση τηλεφωνικών κλήσεων. Οι κατανομές αυτές χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα για τον σχεδιασμό τηλεφωνικών κέντρων. Τέλος, η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται συχνά στην βιολογία και στην οικολογία .

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Gamma για  $\lambda=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.7**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Gamma.**



Είναι φανερό ότι:

- Για  $\alpha=1$  η βαθμίδα αποτυχίας παραμένει σταθερή, προκύπτει δηλαδή η εκθετική κατανομή.
- Για  $\alpha > 1$  η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται με το χρόνο, δηλαδή έχουμε IFR χρόνους ζωής.
- Για  $0 < \alpha < 1$  η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται με το χρόνο, δηλαδή έχουμε DFR χρόνους ζωής.

Το μοντέλο της κατανομής Γάμμα [ $Gamma(\lambda, \alpha)$ ] αν και χρησιμοποιείται στην πράξη για την περιγραφή κατανομών χρόνου ζωής δεν είναι τόσο δημοφιλές όσο και το μοντέλο της κατανομής Weibull [ $W(\lambda, \alpha)$ ] κυρίως λόγω της μη απλής μορφής της συνάρτησης κινδύνου.

**(1.4.4) ΠΕΡΙΚΟΜΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (TRUNCATED NORMAL)**

Για την περιγραφή του χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος και ειδικά σε περιπτώσεις που υπάρχει γήρανση, χρησιμοποιούμε συχνά την κανονική κατανομή. Όμως μια κανονική τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι φυσικό για χρόνους ζωής. Για τον λόγο αυτό, όταν ισχύει  $\frac{\mu}{\sigma} < 3$  αντί της κανονικής κατανομής χρησιμοποιείται η *περικομμένη κανονική κατανομή* η οποία παίρνει μόνο θετικές τιμές (ή το μηδέν).

Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} P(X \leq t | X \geq 0), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Αφού ισχύει

$$P(X \geq 0) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq -\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

(όπου  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής  $N(0, 1)$ ) παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \frac{P(X \leq t, X \geq 0)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X \leq t)}{P(X \geq 0)} = \frac{P\left(-\frac{\mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{P(X \geq 0)} \\ &= \frac{\Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \geq 0.$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας δίνονται από τους ακόλουθους τύπους



$$R(t) = 1 - F(t) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

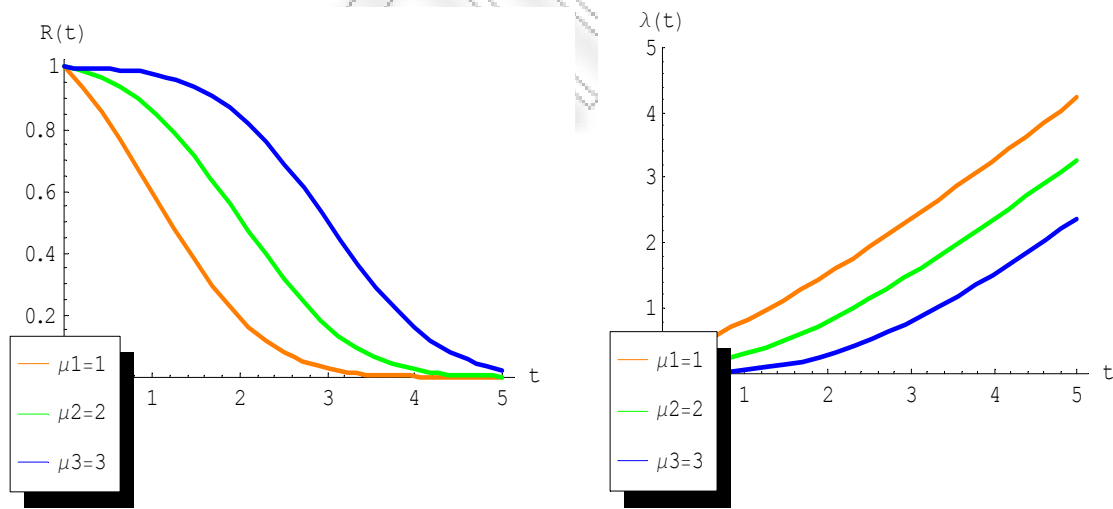
και

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\left[1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)\right] \sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Από τους τελευταίους τύπους είναι φανερό ότι για  $\frac{\mu}{\sigma} \gg 3$  η περικομμένη κανονική είναι σχεδόν ίδια με την κανονική κατανομή αφού  $\Phi(\mu/\sigma) \cong 1$ . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονική κατανομή για την μελέτη του χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της περικομμένης κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές του  $\mu$  και για  $\sigma=1$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.8**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της περικομμένης κανονικής κατανομής.**



**(1.4.5) ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ  $LN(\mu, \sigma^2)$**

Ως λογαριθμοκανονική κατανομή (*Lognormal distribution*) ορίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T$  για την οποία ο λογάριθμός της ακολουθεί κανονική κατανομή. Θα είναι  $X = \ln T \sim N(\mu, \sigma^2)$  ή ισοδύναμα  $T = e^X$  όπου  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Η κατανομή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μοντελοποίηση του χρόνου αποτυχίας ενός συνόλου ηλεκτρονικών συσκευών οι οποίες, εξαιτίας ενός μικρού ποσοστού ελαττωμάτων που παρατηρείται στον πληθυσμό, έχουν φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της αντοχής των μετάλλων αφού περιγράφει ικανοποιητικά το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την μορφοποίηση του μετάλλου μέχρι την καταστροφή του (θραύση) ([www.utk.edu](http://www.utk.edu) -πανεπιστημιακές σημειώσεις του Ramon V. Leon )

Οι συναρτήσεις κατανομής των  $T$  και  $X$  συνδέονται με τον τύπο

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[\ln T \leq x] = P[T \leq e^x] = F_T(e^x)$$

ενώ για τη συνάρτηση πυκνότητας έχουμε

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_T(e^x) = f_T(e^x) e^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

οπότε

$$f_T(e^x) e^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.2)$$

Θέτοντας  $e^x = t$  η σχέση (1.2) γίνεται

$$f_T(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0.$$

Η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας εκφράζονται συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής  $\Phi(t)$  της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και δίνονται από τους τύπους

$$R(t) = P(T \geq t) = P(e^X \geq t) = P(X \geq \ln t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$$

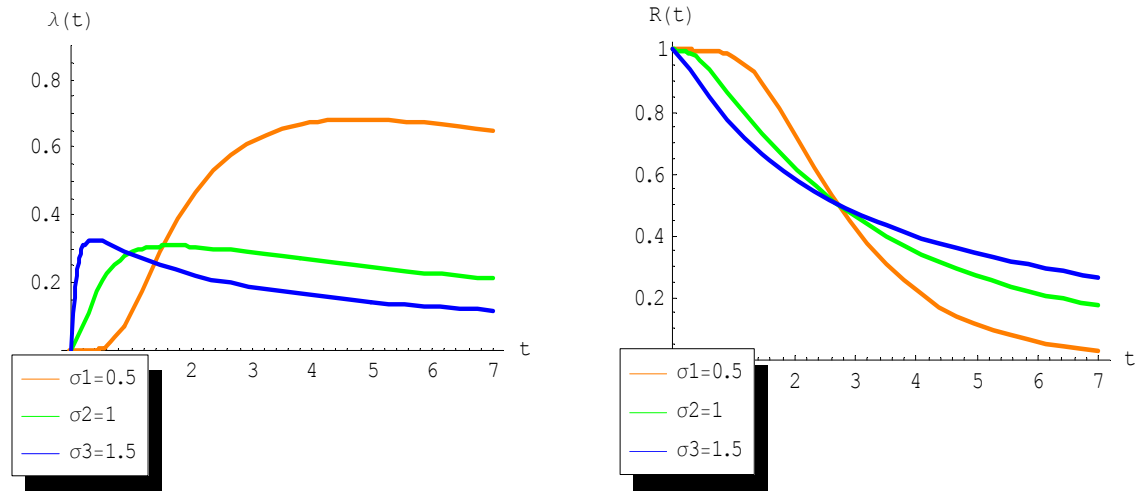
και

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{t\sqrt{2\pi\sigma^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)\right]}$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης αξιοπιστίας για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\sigma$  και για  $\mu=1$ .

ΣΧΗΜΑ 1.9

Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της λογαριθμοκανονικής κατανομής.



Για τη βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  της κατανομής  $LN(\mu, \sigma^2)$  ισχύει ότι  $\lambda(0) = 0$ , η  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση σε ένα διάστημα της μορφής  $[0, t_{\max}]$ , φθίνουσα στο διάστημα  $[t_{\max}, \infty]$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ . Λόγω του ότι η  $\lambda(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[t_{\max}, \infty]$ , θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η  $\lambda(t)$  δεν χρησιμοποιείται συχνά ως μοντέλο για την περιγραφή κατανομών ζωής. Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται συχνά σε περιπτώσεις που δεν μας ενδιαφέρουν μεγάλες τιμές του  $t$ .

**(1.4.6) ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ  $U(a, \beta)$**

Η ομοιόμορφη κατανομή στο  $[a, \beta]$  όπου  $0 \leq a < \beta$ , έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - a}, & t \in [a, \beta] \\ 0, & t \notin [a, \beta] \end{cases}$$

και συνάρτηση αξιοπιστίας

$$R(t) = \int_0^{\infty} f(t) dt = \begin{cases} 1, & t < a \\ \int_0^{\beta} \frac{1}{\beta - a} dt = \frac{\beta - t}{\beta - a}, & t \in [a, \beta] \\ 0, & t > \beta \end{cases}$$

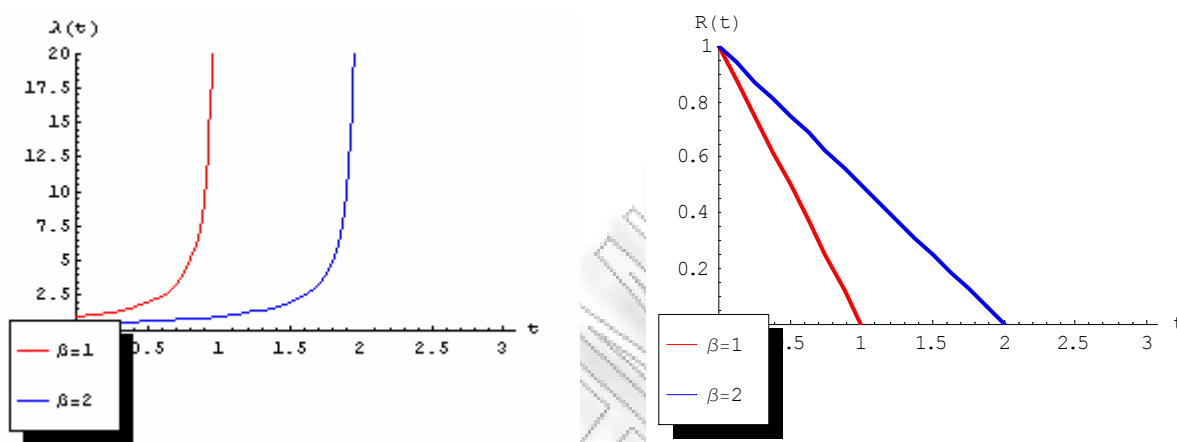
Η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-t}, & t \in [a, \beta) \\ 0, & t \notin [a, \beta) \end{cases}$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας και της συνάρτησης αξιοπιστίας για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$  και για  $a=1$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.10**

**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της ομοιόμορφης κατανομής.**



**(1.4.7) ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ( $LOGIS(\mu, \sigma)$ )**

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Βέλγο καθηγητή Pierre Francois Verhulst στο έργο του που αφορά την αύξηση του πληθυσμού της πατρίδας του στις αρχές του 1800. Η περιγραφή που δίνει για την αύξηση του πληθυσμού ακολουθεί την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της λογιστικής κατανομής. Το μοντέλο αυτό έχει εφαρμογή στη λογιστική παλινδρόμηση καθώς χρησιμοποιείται ευρύτατα στην περίπτωση που έχουμε δίτιμα δεδομένα. Το βασικό μειονέκτημα της λογιστικής κατανομής είναι ότι παίρνει και αρνητικές τιμές (ξεκινά από το μείον άπειρο) κάτι που δεν είναι φυσικό για χρόνους ζωής.

Αν υποθέσουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί τη λογιστική κατανομή με παραμέτρους  $\mu$  και  $\sigma$  (συμβολικά  $Y \sim LOGIS(\mu, \sigma)$ ) τότε η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η βαθμίδα αποτυχίας και η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(y; \mu, \sigma) = \Phi_{\logis} \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right), \quad -\infty < \mu < \infty \text{ και } \sigma > 0$$

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \phi_{\text{logis}} \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right),$$

$$\lambda(t) = \lambda(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \Phi_{\text{logis}} \left( \frac{t - \mu}{\sigma} \right),$$

$$R(t) = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}}, \text{ με } -\infty < y < \infty$$

όπου  $\phi_{\text{logis}}$  και  $\Phi_{\text{logis}}$  είναι η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης λογιστικής κατανομής αντίστοιχα. Ορίζονται από τις σχέσεις

$$\phi_{\text{logis}}(z) = \frac{\exp(z)}{[1 + \exp(z)]^2}$$

και

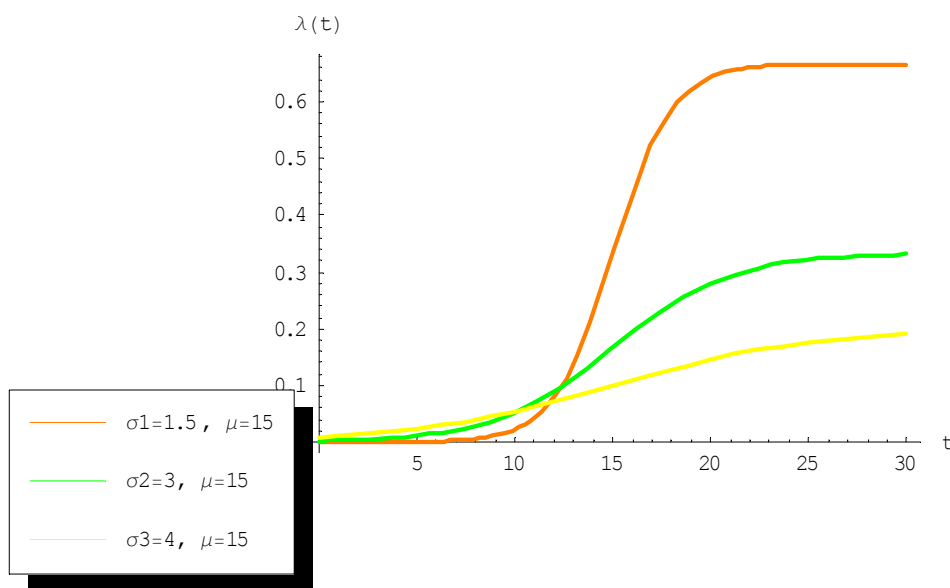
$$\Phi_{\text{logis}}(z) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}$$

Η παράμετρος  $\mu$  ονομάζεται *παράμετρος θέσης (location parameter)* ενώ η  $\sigma$  *παράμετρος κλίμακας (scale parameter)*.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας για  $\mu=15$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\sigma$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.11**

**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της λογιστικής κατανομής.**



Η μορφή της λογιστικής κατανομής είναι παρόμοια με αυτή της κανονικής με μοναδική διαφορά στις ουρές. Η βασική αυτή διαφορά οφείλεται στην βαθμίδα αποτυχίας. Συγκεκριμένα, η λογιστική κατανομή έχει ελαφρώς πιο μακριές ουρές σε αντίθεση με την κανονική. Επιπλέον, στην άνω ουρά της λογιστικής κατανομής η βαθμίδα αποτυχίας οριζοντιώνεται προσεγγίζοντας την τιμή  $1/\sigma$  για μεγάλες τιμές του χρόνου  $t$ . Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, όταν αυξάνεται το  $\sigma$  η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται πιο σιγά και πιο ομαλά από ότι όταν το  $\sigma$  μειώνεται. Στην περίπτωση αυτή, αυξάνεται και το χρονικό διάστημα για το οποίο είναι  $0 < \lambda(t) < 1/\sigma$  ενώ η περιοχή όπου η βαθμίδα αποτυχίας είναι κοντά στο μηδέν ή το  $1/\sigma$  στενεύει. Το αντίστροφο ισχύει όταν μειώνεται το  $\sigma$ .

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι αν και η μορφή της λογιστικής κατανομής είναι παρόμοια με αυτή της κανονικής, απεδείχθη από τους Govind S. Mudholkar και E. George Olusegun το 1975 ότι τελικά μοιάζει περισσότερο με την κατανομή Student  $t$  με 9 βαθμούς ελευθερίας.

#### (1.4.8) ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (LOG-LOGISTIC( $\mu, \sigma$ ))

Ως λογαριθμολογιστική κατανομή (*Log-Logistic distribution*) ορίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T$  για την οποία ο λογάριθμός της ακολουθεί λογιστική κατανομή. Θα είναι  $X = \ln T \sim L(\mu, \sigma)$  ή ισοδύναμα  $T = e^X$  όπου  $T \sim LL(\lambda, \alpha)$  με  $\lambda = e^{-\alpha\mu}$  και  $\alpha = 1/\sigma$ .

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η βαθμίδα αποτυχίας και η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right),$$

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right),$$

$$\lambda(t) = \lambda(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \Phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right),$$

$$R(t) = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)}}.$$

όπου  $\phi_{\text{logis}}$  και  $\Phi_{\text{logis}}$  είναι η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης λογιστικής κατανομής αντίστοιχα. Ορίζονται από τις σχέσεις

$$\phi_{\text{logis}}(z) = \frac{\exp(z)}{[1 + \exp(z)]^2} \quad (1.3)$$

και

$$\Phi_{\text{logis}}(z) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)} \quad (1.4)$$

Από τις (1.3) και (1.4) και θέτοντας  $\lambda = e^{-\alpha\mu}$  και  $\alpha = 1/\sigma$  παίρνω τις παρακάτω σχέσεις:

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\lambda t^\alpha}{(1 + \lambda t^\alpha)},$$

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha-1}}{(1 + \lambda t^\alpha)^2},$$

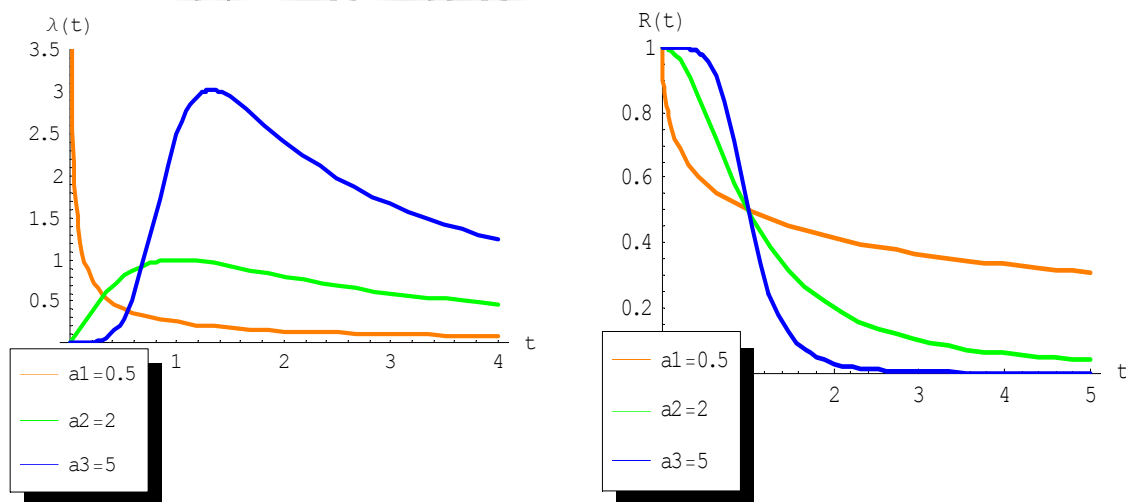
$$\lambda(t) = \lambda(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma t} \Phi_{\text{logis}}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\lambda \alpha t^{\alpha-1}}{(1 + \lambda t^\alpha)},$$

$$R(t) = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)}} = \frac{1}{1 + \lambda t^\alpha}.$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της βαθμίδας αποτυχίας και της αξιοπιστίας για  $\lambda=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.12**

**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της λογαριθμολογιστικής κατανομής.**



Όπως προκύπτει από το παραπάνω γράφημα, για  $\alpha < 1$  η συνάρτηση κινδύνου της λογαριθμολογιστικής κατανομής είναι φθίνουσα ενώ για  $\alpha > 1$  είναι αρχικά αύξουσα στο  $\left[0, ((\alpha-1)/\lambda)^{1/\alpha}\right]$  και στη συνέχεια φθίνουσα στο  $\left[0, ((\alpha-1)/\lambda)^{1/\alpha}\right]$  με  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ . Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για  $\alpha > 1$  η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής  $LL(\lambda, \alpha)$  έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης κινδύνου της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

Λόγω του ευπροσάρμοστου της βαθμίδας αποτυχίας του το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη. Μάλιστα, χρησιμοποιείται πιο συχνά από το λογαριθμοκανονικό μοντέλο αφού, όπως προαναφέραμε, προσεγγίζει ικανοποιητικά την κατανομή αυτή.

#### (1.4.9) ΚΑΤΑΝΟΜΗ PARETO ( $Pareto(\alpha, \lambda)$ )

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται συχνά στην οικονομία για την μοντελοποίηση της κατανομής του εισοδήματος. Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η βαθμίδα αποτυχίας και η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha,$$

$$f(t) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{t^{\alpha+1}},$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\alpha}{t},$$

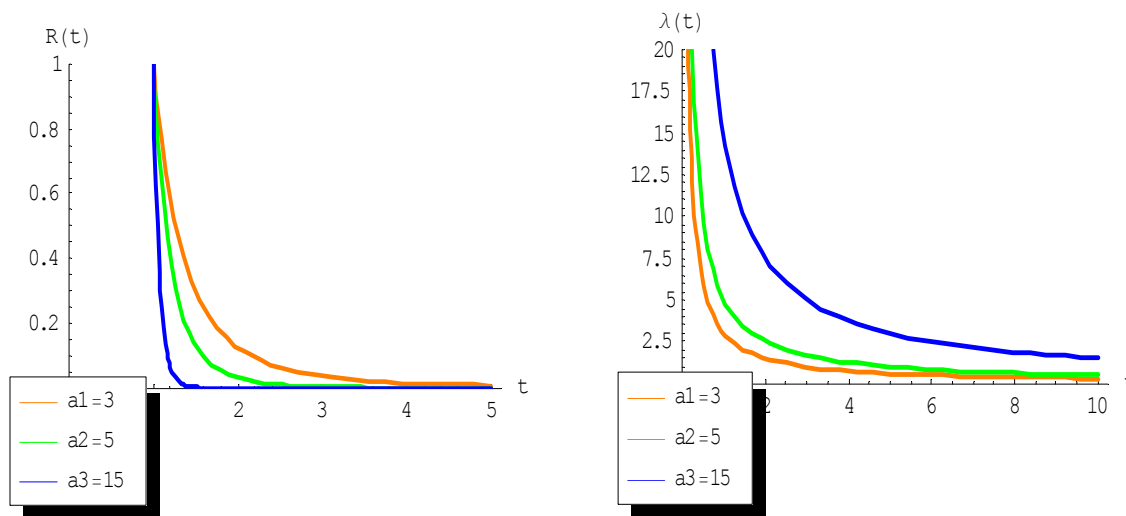
$$R(t) = 1 - F(t) = \left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha \text{ για } t \geq \lambda, \lambda > 0 \text{ και } \alpha > 0$$

Η παράμετρος  $\alpha$  ονομάζεται *παράμετρος μορφής (shape parameter)* ενώ η  $\lambda$  *παράμετρος κλίμακας (scale parameter)*.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής για  $\lambda=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .



**ΣΧΗΜΑ 1.13**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Pareto.**



**(1.4.10) ΚΑΤΑΝΟΜΗ GOMPERTZ-MAKEHAM**

Η κατανομή των Gompertz-Makeham χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του ανθρωπίνου χρόνου ζωής ξεκινώντας από τη μέση ηλικία. Αν και περιγράφει με σχετική ακρίβεια τον χρόνο ζωής ατόμων ηλικίας 30-80 ετών, δεν ενδείκνυται για την μελέτη της θνησιμότητας σε μεγαλύτερες ηλικίες καθώς η βαθμίδα αποτυχίας δεν αυξάνεται με τον ρυθμό που προβλέπεται από το νόμο των Gompertz και Makeham. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό με την ορολογία “late-life mortality deceleration”.

Οι νόμοι των Gompertz και Makeham είναι δύο από τους πιο δημοφιλείς νόμους θνησιμότητας οι οποίοι χρησιμοποιούνται και σήμερα με μεγάλη πρακτική εφαρμογή.

Το 1825 προτάθηκε ο νόμος του Gompertz (Gompertz law of mortality) σύμφωνα με τον οποίο σε ένα περιβάλλον όπου οι αιτίες θανάτου από εξωγενείς παράγοντες είναι σπάνιες, η πιθανότητα αποτυχίας μιας μονάδας αυξάνεται εκθετικά με τον χρόνο. Η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Gompertz δίνονται από τους παρακάτω τύπους

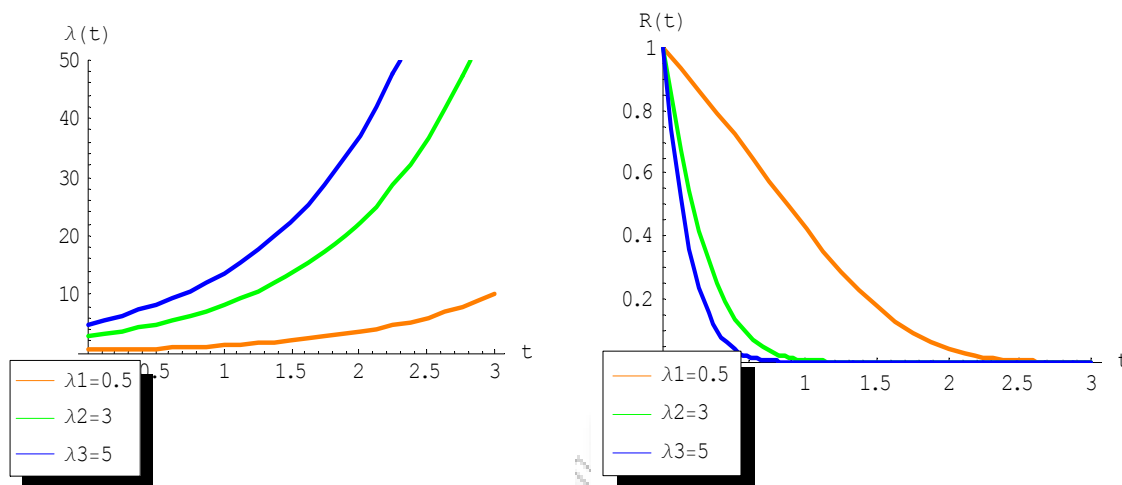
$$f(t) = \lambda e^{\alpha t} \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{\alpha t})\right), t \geq 0, \lambda, \alpha > 0$$

$$R(t) = \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{\alpha t})\right),$$

$$\lambda(t) = \lambda e^{\alpha t}$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής για  $\alpha=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.14**  
**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Gompertz.**



Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, όταν αυξάνεται το  $\lambda$  η συνάρτηση κινδύνου αυξάνεται πιο γρήγορα και πιο απότομα από ότι στην περίπτωση που το  $\lambda$  μειώνεται.

Το 1860 ο Makeham πρότεινε μια παραλλαγή του νόμου του Gompertz και το 1865 εξέδωσε ένα άρθρο το οποίο αποτέλεσε τη βάση για τη μελέτη, επεξεργασία και ανάπτυξη της πρότασής του. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή, η οποία είναι γνωστή στην βιβλιογραφία με την ορολογία *Makeham's Law*, η ένταση θνησιμότητας έχει την παρακάτω μορφή

$$\lambda(t) = A + \lambda e^{\alpha t}$$

όπου  $\alpha, \lambda > 0$ ,  $A \geq -\lambda$  και  $t \geq 0$ .

Σύμφωνα με το νόμο του Makeham, η ένταση θνησιμότητας μπορεί να αποδοθεί ως το άθροισμα μιας μονάδας η οποία είναι αγέραστη (όρος  $A$ ) και μιας μονάδας της οποίας η ηλικία αυξάνει εκθετικά με το χρόνο. Η παρουσία του σταθερού όρου κρίνεται απαραίτητη αν αναλογιστεί κανείς ότι υπάρχουν αιτίες θανάτου που οφείλονται σε εξωγενείς παράγοντες- όπως είναι τα ατυχήματα και ορισμένες αρρώστιες- και συνεπώς η θνησιμότητα είναι ανεξάρτητη της ηλικίας.

Η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

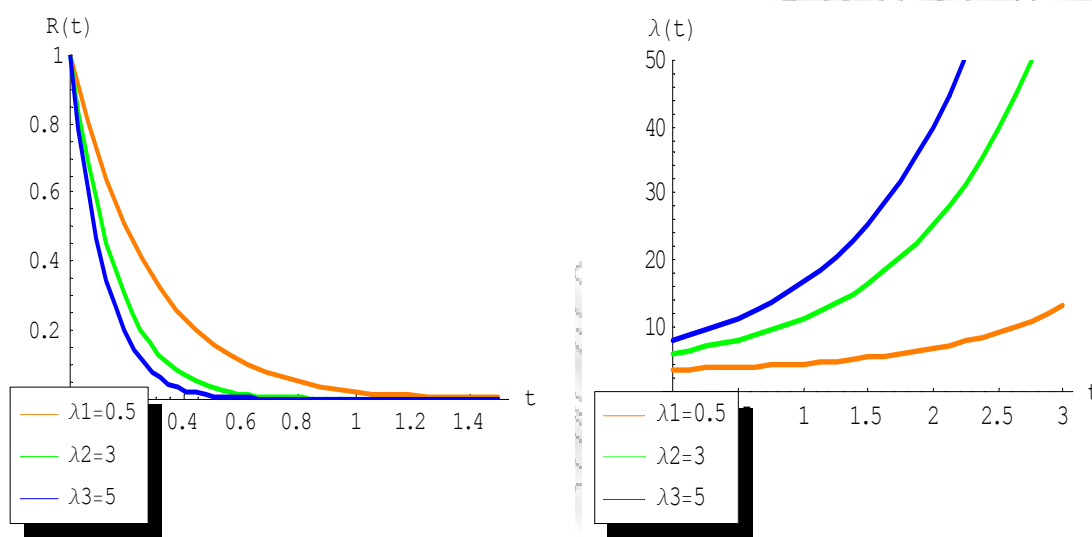
$$f(t) = (A + \lambda e^{\alpha t}) \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{\alpha t}) - At\right), t \geq 0, \lambda, \alpha > 0$$

$$R(t) = \exp\left(\frac{\lambda}{a}(1 - e^{at}) - At\right),$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής για  $A=3$ ,  $a=1$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.15**

**Βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Makeham.**



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση αξιοπιστίας της κατανομής Makeham μειώνεται πιο γρήγορα και πιο απότομα από ότι στην περίπτωση της κατανομής Gompertz. Όσον αφορά την συνάρτηση κινδύνου, όπως φαίνεται και από το σχήμα 1.15, τη χρονική στιγμή  $t=0$  της γέννησης του υπό μελέτη ατόμου η βαθμίδα αποτυχίας είναι μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση της κατανομής Gompertz. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη του σταθερού όρου  $A$  ο οποίος, όπως προαναφέραμε, αντιπροσωπεύει όλους εκείνους τους εξωγενείς παράγοντες που μπορεί να οφείλονται για την θνησιμότητα, όπως είναι οι βρεφικές ασθένειες, στην περίπτωση  $t=0$ .

**(1.4.11) ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ ( $GG3(\lambda, \beta, a)$ )**

Η γενικευμένη κατανομή γάμμα χρησιμοποιείται ως μοντέλο για κατανομές χρόνων ζωής όχι όμως τόσο συχνά όσο οι προαναφερθείσες κατανομές, εξαιτίας της πολυπλοκότητας της συνάρτησης πυκνότητας η οποία δυσχεραίνει την εκτίμηση των παραμέτρων. Το κύριο γνώρισμα αυτής της κατανομής είναι ότι συμπεριφέρεται όπως άλλες κατανομές -όπως για

παράδειγμα η κατανομή Weibull ή η λογαριθμοκανονική κατανομή- και αυτό αποτελεί σημαντικό εργαλείο που μας δίνει την δυνατότητα να αποφασίσουμε ποια από τις κατανομές αυτές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων.

Η γενικευμένη κατανομή γάμμα εισήχθη πρώτη φορά από τον E. W. Stacy (1962) ενώ οι Prentice (1974), Farewell και Prentice (1977) και Lawless (1980) απέδειξαν την μεγάλη χρησιμότητά της παραθέτοντας στα έργα τους παραδείγματα από ελέγχους χρόνων ζωής με δεδομένα από τον βιομηχανικό και τον ιατρικό χώρο.

Η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας, η συνάρτηση αξιοπιστίας και η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$F(t; \lambda, \alpha, \beta) = \frac{\int_0^t \alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta u^{\alpha\beta-1} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}u\right)^\alpha} du}{\Gamma(\beta)}, \quad \text{με } t \geq 0, \text{ και } \alpha, \beta, \lambda > 0$$

$$f(t; \lambda, \beta, \alpha) = \frac{\alpha t^{\alpha\beta-1} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}t\right)^\alpha}}{\lambda^{\alpha\beta} \Gamma(\beta)},$$

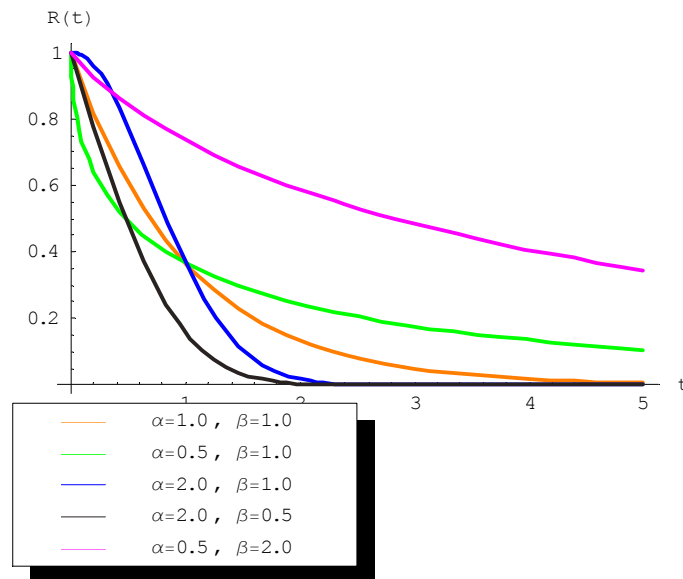
$$R(t) = 1 - F(t),$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\alpha t^{\alpha\beta-1} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}t\right)^\alpha}}{\lambda^{\alpha\beta} \left[ \Gamma(\beta) - \int_0^t \alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta u^{\alpha\beta-1} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}u\right)^\alpha} du \right]},$$

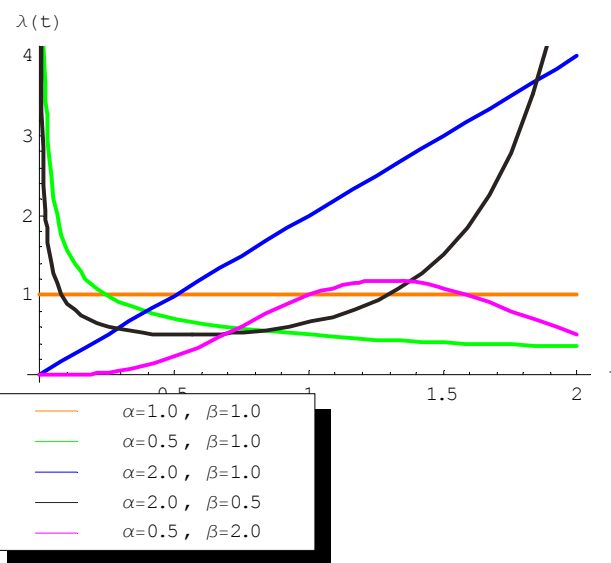
Για  $\alpha=\beta=1$  η γενικευμένη κατανομή γάμμα ανάγεται στην εκθετική κατανομή με παράμετρο  $1/\lambda$ , στην κατανομή Weibull ( $W(1/\lambda, \alpha)$ ) για  $\beta=1$  και στην Gamma ( $G(1/\lambda, \beta)$ ) για  $\alpha=1$  ενώ για  $\beta \rightarrow \infty$  ανάγεται στην λογαριθμοκανονική κατανομή.

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της αξιοπιστίας και της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ . Εφόσον το  $\lambda$  είναι παράμετρος κλίμακας θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $\lambda=1$ .

**ΣΧΗΜΑ 1.16**  
**Συνάρτηση αξιοπιστίας της γενικευμένης κατανομής Gamma.**



**ΣΧΗΜΑ 1.17**  
**Βαθμίδα αποτυχίας της γενικευμένης κατανομής Gamma.**



Από τα διαγράμματα 1.16 και 1.17 καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Για  $\beta=1$  έχουμε την κατανομή Weibull της οποίας η βαθμίδα αποτυχίας αυξάνεται όταν  $\alpha>1$  ενώ μειώνεται όταν  $0<\alpha<1$ .
- Για  $\beta=1$  και  $\alpha=2$  παίρνουμε την κατανομή Rayleigh με παραμέτρους  $\alpha=2$  και  $k=2$ .
- Όταν  $\beta<1$  η βαθμίδα αποτυχίας έχει την γνωστή λεκανοειδή μορφή ενώ για  $\beta>1$  έχει την ανάποδη λεκανοειδή μορφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

#### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε διάφορες οικογένειες κατανομών. Θα ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας με την αναλυτική παρουσίαση των γνωστών κλάσεων IFR και DFR τις οποίες αναφέραμε επιγραμματικά στο προηγούμενο κεφάλαιο και θα συνεχίσουμε με άλλες, λιγότερο περιοριστικές, οικογένειες κατανομών. Η ταξινόμηση των κατανομών σε διάφορες κλάσεις έγινε με βάση δύο κριτήρια: τη βαθμίδα αποτυχίας τους ή τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Αρχικά δίνεται ο ορισμός κάθε οικογένειας κατανομών καθώς επίσης και ισοδύναμοι ορισμοί και στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα γνωστών κατανομών οι οποίες ανήκουν στις κλάσεις αυτές. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι για την διεκπεραίωση αυτού του κεφαλαίου ιδιαίτερα χρήσιμο υπήρξε το σύγγραμμα των Barlow, R.E. και Proschan, F. «*Statistical Theory of Reliability and Life Testing*» καθώς επίσης και το άρθρο «*Properties of probability distributions with monotone hazard rate*» των Barlow, R.E., Proschan, F. και Marshall, A.W.

#### 2.2 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ IFR

**Ορισμός 2.2.1α.** Θεωρούμε μια διακριτή κατανομή  $f(t_i)$  με  $\sum_{i=k}^{\infty} f(t_i) > 0$ . Θα λέμε ότι η κατανομή αυτή έχει την ιδιότητα IFR (*increasing failure rate*) αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας, η οποία δίνεται από τον λόγο

$$\lambda(k) = \frac{f(t_k)}{\sum_{i=k}^{\infty} f(t_i)},$$

είναι αύξουσα συνάρτηση για  $i=1,2,\dots,k$ .

Στη διακριτή περίπτωση ισχύει  $\lambda(k) \leq 1$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$1 - F(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right]$$

παίρνουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό για τη συνεχή περίπτωση.

**Ορισμός 2.2.1β.** Μια κατανομή  $F$  είναι IFR αν ο λόγος

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

αυξάνει ως προς  $t$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Δεδομένου ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  μιας κατανομής  $F$  δίνεται από τη σχέση

$$R(t) = 1 - F(t)$$

παίρνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.2.2.** Μια κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα IFR αν ο λόγος

$$\frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο ορισμός αυτός ισχύει τόσο για συνεχείς όσο και για διακριτές κατανομές.

Ένας ισοδύναμος ορισμός διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.2.3.** Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα IFR (increasing failure rate) αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Συμβολικά γράφουμε  $T \in IFR$  ή  $F \in IFR$ .

### Παρατήρηση

Ο ορισμός 2.2.3 είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 2.2.1β. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ , συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$  και βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$ . Υποθέτουμε ότι η  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι για  $t_1 \leq t_2$  ισχύει  $\lambda(t_1) \leq \lambda(t_2)$  και κατ' επέκταση

$$\lambda(t_1 + u) \leq \lambda(t_2 + u) \Rightarrow \int_0^x \lambda(t_1 + u) du \leq \int_0^x \lambda(t_2 + u) du \Rightarrow \int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(z) dz \leq \int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(z) dz .$$



Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, \infty)$  έπεται

$$\int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(z) dz \leq \int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(z) dz \Rightarrow \exp \left[ - \int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(z) dz \right] \leq \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(z) dz \right] \quad (2.1)$$

Όμως εξ ορισμού είναι  $1 - F(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right]$  οπότε

$$\exp \left[ - \int_{t_1}^{t_1+x} \lambda(z) dz \right] = \exp \left[ \int_0^{t_1} \lambda(z) dz - \int_0^{t_1+x} \lambda(z) dz \right] = F(t_1) - F(t_1+x)$$

και

$$\exp \left[ - \int_{t_2}^{t_2+x} \lambda(z) dz \right] = F(t_2) - F(t_2+x)$$

Τότε η σχέση (2.1) γίνεται

$$F(t_2+x) - F(t_2) \geq F(t_1+x) - F(t_1) \Rightarrow \frac{F(t_2+x) - F(t_2)}{1 - F(t_2)} \geq \frac{F(t_1+x) - F(t_1)}{1 - F(t_1)}$$

αφού  $\lambda(t_1) \leq \lambda(t_2) \Rightarrow \exp \left[ - \int_0^{t_2} \lambda(u) du \right] \leq \exp \left[ - \int_0^{t_1} \lambda(u) du \right] \Rightarrow 1 - F(t_2) \leq 1 - F(t_1)$ .

Ξεκινώντας, λοιπόν, με την υπόθεση ότι η  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου αποδείξαμε ότι ο λόγος

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

αυξάνει ως προς  $t$  οπότε με βάση τον ορισμό 2.2.1β η κατανομή  $F$  (ή η μεταβλητή  $T$ ) έχει την ιδιότητα IFR.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο της ισοδυναμίας υποθέτουμε ότι ο λόγος

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

αυξάνει ως προς  $t$  δηλαδή για  $t_1 \leq t_2$  ισχύει

$$\frac{F(t_1+x) - F(t_1)}{1 - F(t_1)} \leq \frac{F(t_2+x) - F(t_2)}{1 - F(t_2)}$$

Επειδή  $1 - F(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right]$  έχω

$$\frac{\exp\left[-\int_0^{t_1} \lambda(u) du\right] - \exp\left[-\int_0^{t_1+x} \lambda(u) du\right]}{\exp\left[-\int_0^{t_1} \lambda(u) du\right]} \leq \frac{\exp\left[-\int_0^{t_2} \lambda(u) du\right] - \exp\left[-\int_0^{t_2+x} \lambda(u) du\right]}{\exp\left[-\int_0^{t_2} \lambda(u) du\right]} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{\exp\left[-\int_0^{t_1+x} \lambda(u) du\right]}{\exp\left[-\int_0^{t_1} \lambda(u) du\right]} \leq 1 - \frac{\exp\left[-\int_0^{t_2+x} \lambda(u) du\right]}{\exp\left[-\int_0^{t_2} \lambda(u) du\right]} \Rightarrow$$

$$\exp\left[\int_0^{t_1} \lambda(u) du - \int_0^{t_1+x} \lambda(u) du\right] \geq \exp\left[\int_0^{t_2} \lambda(u) du - \int_0^{t_2+x} \lambda(u) du\right] \Rightarrow$$

$$\exp\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du\right] \leq \exp\left[\int_{t_1+x}^{t_2+x} \lambda(u) du\right] \Rightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du \leq \int_{t_1+x}^{t_2+x} \lambda(u) du$$

Παραγωγίζοντας τη τελευταία σχέση παίρνουμε

$$0 \leq \lambda(t_2) - \lambda(t_1) \leq \lambda(t_2 + x) - \lambda(t_1 + x)$$

δηλαδή  $\lambda(t_2) - \lambda(t_1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(t_2) \geq \lambda(t_1)$  για  $t_2 \geq t_1$  άρα η  $\lambda(t)$  είναι αύξουσα οπότε σύμφωνα με το ορισμό 2.2.3 η κατανομή είναι IFR.) ■

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα IFR μιας κατανομής  $F$  διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.2.4.** Μια κατανομή  $F$  είναι IFR αν η συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

είναι φθίνουσα στο  $(0, \infty)$  για κάθε  $x > 0$  με  $F(t) < 1$ .

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 2.2.1β. Είναι

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(t)} = 1 - \frac{F(x+t) - F(t)}{1-F(t)}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.1β η κατανομή  $F$  είναι αύξουσα αν ο λόγος

$$\frac{F(x+t) - F(t)}{1 - F(t)}$$

αυξάνει ως προς  $t$  και κατ' επέκταση αν η  $\bar{F}(x/t)$  είναι φθίνουσα στο  $(0, \infty)$  ■

**Πρόταση 2.2.1.** Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  και συνάρτηση πυκνότητας  $f$ . Η μεταβλητή έχει την ιδιότητα *IFR* αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$\log[1 - F(t)]$$

είναι κοίλη ως προς  $t$  δηλαδή αν και μόνο αν η πρώτη παράγωγός της είναι αύξουσα ως προς  $t$ .

*Απόδειξη.*

Έστω  $\Lambda(t)$  η συνάρτηση κινδύνου της μεταβλητής  $T$ . Για την  $\Lambda(t)$  ισχύει ότι

$$\Lambda(t) = -\log[1 - F(t)]. \quad (2.2)$$

οπότε

$$1 - F(t) = \exp[-\Lambda(t)].$$

Με βάση τον ορισμό 2.2.1β έχουμε ότι η  $F$  είναι αύξουσα εάν ο λόγος

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

αυξάνει ως προς  $t$ .

Εδώ είναι

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\exp[-\Lambda(t)] - \exp[-\Lambda(t+x)]}{\exp[-\Lambda(t)]} = 1 - \exp\{-[\Lambda(t+x) - \Lambda(t)]\}$$

Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι η  $F$  είναι *IFR* αν και μόνο αν ο εκθέτης

$$\Lambda(t+x) - \Lambda(t)$$

είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $t$  για κάθε  $x > 0$  δηλαδή εάν η  $\Lambda(t)$  είναι κυρτή ως προς  $t$ .

Όμως, παραγωγίζοντας την σχέση (2.2) ως προς  $t$  προκύπτει

$$\Lambda'(t) = -\log[1 - F(t)]' \Rightarrow \log[1 - F(t)]' = -\Lambda'(t)$$

οπότε η  $F$  είναι *IFR* αν και μόνο αν η ποσότητα

$$\log[1 - F(t)]$$

είναι κοίλη ως προς  $t$ . ■

**Πρόταση 2.2.2.** Αν μια κατανομή  $F$  είναι  $IFR$  και  $F(0^-) = 0$  τότε η ποσότητα  $x^{-1} \log[1 - F(t)]$  και κατ' επέκταση η  $[1 - F(t)]^{1/x}$ , θα φθίνουν ως προς  $x$ .

Η πρόταση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων με την χρήση ποσοστημορίων.

**Πρόταση 2.2.3.** Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  με  $F(0^-) = 0$  και την κατανομή  $G(y) = 1 - \exp(-y)$  για  $y \geq 0$ . Η  $F$  έχει την ιδιότητα  $IFR$  αν και μόνο αν υπάρχει μια μη αρνητική, αύξουσα, κυρτή συνάρτηση  $h$  τέτοια ώστε  $F(t) = G(h(t))$ . Αν η  $F$  είναι  $IFR$  και η  $h$  είναι μια μη αρνητική, αύξουσα, κυρτή συνάρτηση-όχι ταυτοτικά σταθερή- τότε η  $F(h(t))$  είναι  $IFR$ .

Μια σημαντική υπο-οικογένεια κατανομών με αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας είναι αυτή που έχει την ιδιότητα των *Pólya frequency* συναρτήσεων τάξεως 2 ( $PF_2$ ). Πριν προχωρήσουμε στην πρόταση που συνδέει την ιδιότητα  $IFR$  μιας κατανομής  $F$  με την ιδιότητα  $PF_2$  θα δώσουμε τον ορισμό των συναρτήσεων συχνότητας *Pólya* τάξεως 2.

**Ορισμός.** Μια συνάρτηση  $h(x)$  με  $-\infty < x < \infty$  είναι  $PF_2$  αν

- a)  $h(x) \geq 0$  για  $-\infty < x < \infty$
- b) Για  $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$  και  $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$  ισχύει

$$\begin{vmatrix} h(x_1 - y_1) & h(x_1 - y_2) \\ h(x_2 - y_1) & h(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

ή ισοδύναμα αν

b') η ποσότητα  $\log h(x)$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, \infty)$ ,

ή ισοδύναμα αν

b'') για δεδομένο  $\Delta > 0$ , η ποσότητα  $h(x + \Delta)/h(x)$  μειώνεται ως προς  $x$  με  $a \leq x \leq b$  όπου  $a = \inf_{h(y) > 0} y$  και  $b = \sup_{h(y) > 0} y$ .

Η κλάση αυτή συναρτήσεων οφείλει το όνομά της στον *Schoenberg*. Έχει πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά, τη στατιστική, στις οικονομικές επιστήμες, στη μηχανολογία και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους (*Karlin & Proschan (1960)*).

Στη συνέχεια δίνουμε μια πρόταση που συνδέει την ιδιότητα *IFR* μιας κατανομής  $F$  με την ιδιότητα  $PF_2$ .

**Πρόταση 2.2.4.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής  $F$ . Η  $F$  είναι *IFR* αν και μόνο αν η  $\bar{F}$  είναι  $PF_2$ .

**Απόδειξη.**

Από τον ορισμό 2.2.4 έχουμε ότι η κατανομή  $F$  είναι *IFR* αν και μόνο αν ο λόγος

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

φθίνει στο  $(0, \infty)$  για κάθε  $x > 0$ .

Αν θέσω  $h(t) \equiv \bar{F}(t)$  από τον εναλλακτικό ορισμό ( $b''$ ) προκύπτει τελικά ότι η  $\bar{F}$  είναι  $PF_2$ .

**Λήμμα 1.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας  $f$ . Αν η  $f$  είναι  $PF_2$  στο  $[0, \infty)$  τότε η κατανομή  $F(t) = \int_0^t f(x)dx$  είναι *IFR*.

Παραδείγματα κατανομών που έχουν την ιδιότητα *IFR* είναι η εκθετική κατανομή, η κατανομή Γάμμα (με παράμετρο μορφής  $\alpha > 1$ ), η *Weibull* (για  $a > 1$ ), η περικομμένη κανονική κατανομή, η ομοιόμορφη κατανομή και η κατανομή *Gompertz-Makeham*.

### 2.3 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ DFR

**Ορισμός 2.3.1a.** Θεωρούμε μια διακριτή κατανομή  $f(t_i)$  με  $\sum_{i=k}^{\infty} f(t_i) > 0$ . Θα λέμε ότι η κατανομή αυτή έχει την ιδιότητα *DFR* (*decreasing failure rate*) αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας, η οποία δίνεται από τον λόγο

$$\lambda(k) = \frac{f(t_k)}{\sum_{i=k}^{\infty} f(t_i)},$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση για  $i=1, 2, \dots, k$ .

Στην διακριτή περίπτωση ισχύει  $\lambda(k) \leq 1$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$1 - F(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right]$$

παίρνουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό για τη συνεχή περίπτωση.

**Ορισμός 2.3.1β.** Μια συνεχή κατανομή  $F$  με  $F(0^-) = 0$  είναι DFR αν ο λόγος

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}$$

μειώνεται ως προς  $t$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Δεδομένου ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  μιας κατανομής  $F$  δίνεται από τη σχέση

$$R(t) = 1 - F(t)$$

παίρνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.3.2.** Μια κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα DFR αν ο λόγος

$$\frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο ορισμός αυτός ισχύει τόσο για συνεχείς όσο και για διακριτές κατανομές.

Ένας ισοδύναμος ορισμός διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.3.3.** Μια τυχαία μεταβλητή  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα DFR (decreasing failure rate) αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Συμβολικά γράφουμε  $T \in DFR$  ή  $F \in DFR$ .

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα DFR μιας κατανομής  $F$  διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.3.4.** Μια κατανομή  $F$  είναι DFR αν η συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

είναι αύξουσα στο  $(0, \infty)$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο ορισμός αυτός ισχύει μόνο αν υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας  $f(t)$ .

**Πρόταση 2.3.1.** Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  και συνάρτηση πυκνότητας  $f$ . Η μεταβλητή έχει την ιδιότητα IFR αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$\log[1 - F(t)]$$

είναι κυρτή ως προς  $t$  δηλαδή αν και μόνο αν η πρώτη παράγωγός της είναι αύξουσα ως προς  $t$ .

*Απόδειξη.*

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της Πρότασης 2.2.1 της παραγράφου 2.2 ■

**Πρόταση 2.3.2.** *Αν μια κατανομή  $F$  είναι DFR και  $F(0^-) = 0$  τότε η ποσότητα  $x^{-1} \log[1 - F(t)]$  και κατ' επέκταση η  $[1 - F(t)]^{1/x}$ , θα αυξάνουν ως προς  $x$ .*

Η πρόταση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό ορίων με την χρήση ποσοστημορίων.

**Πρόταση 2.3.3.** *Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή  $T$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  με  $F(0^-) = 0$  και την κατανομή  $G(y) = 1 - \exp(-y)$  για  $y \geq 0$ . Η  $F$  έχει την ιδιότητα DFR αν και μόνο αν υπάρχει μια μη αρνητική, αύξουσα, κοίλη συνάρτηση  $h$  τέτοια ώστε  $F(t) = G(h(t))$ .*

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια πρόταση η οποία συνδέει την ιδιότητα DFR μιας κατανομής με την ιδιότητα των *Ολικά Θετικών (Totally Positive)* συναρτήσεων τάξεως 2 ( $TP_2$ ). Πριν προχωρήσουμε, θα δώσουμε τον ορισμό των συναρτήσεων  $TP_2$ .

**Ορισμός.** *Εστω  $A, B$  δύο υποσύνολα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Μια συνάρτηση  $K(x, y)$  είναι  $TP_2$  στο  $A \times B$  αν*

$$\begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

για όλα τα  $x_1, x_2 \in A$  και για όλα τα  $y_1, y_2 \in B$ .

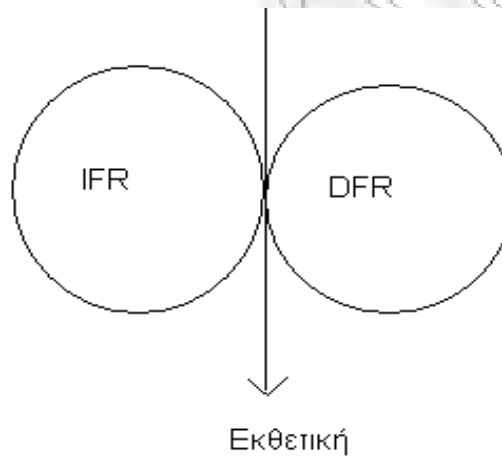
Η κλάση των ολικά θετικών συναρτήσεων έχει πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά, τη στατιστική, στις οικονομικές επιστήμες, στη μηχανολογία και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους. Στη στατιστική, η θεωρία των συναρτήσεων  $TP_2$  είναι θεμελιώδης στην κατανόηση και λήψη στατιστικών αποφάσεων ενώ χρησιμοποιείται συχνά και στα οικονομικά μαθηματικά για τον έλεγχο της σταθερότητας συγκεκριμένων μοντέλων. Στη μηχανολογία, η θεωρία των συναρτήσεων  $TP_2$  εμφανίζεται κυρίως κατά τη μελέτη των κραδασμών ορισμένου τύπου μηχανολογικών συστημάτων (*Karlin & Proschan (1960)*).

Στη συνέχεια δίνουμε μια πρόταση που συνδέει την ιδιότητα DFR μιας κατανομής  $F$  με την ιδιότητα  $TP_2$ .

**Πρόταση 2.3.4.** (Barlow, Marshall & Proschan (1963)). Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής  $F$ . Η  $F$  είναι  $DFR$  αν και μόνο αν το στήριγμά της είναι το  $[0, \infty)$  και η  $K(x, y) = \bar{F}(x+y)$  είναι  $TP_2$  για  $x+y \geq 0$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η εκθετική κατανομή, η οποία έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, θεωρείται ότι είναι τόσο  $IFR$  όσο και  $DFR$ . Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα για κάθε  $t \in (0, \infty)$ , επομένως ανήκει και στις δύο κλάσεις. Αυτό μπορεί να αποδοθεί διαγραμματικά ως εξής:

**ΣΧΗΜΑ 2.1**  
Σχέση των κλάσεων κατανομών  $IFR$  και  $DFR$ .



Παραδείγματα κατανομών που έχουν την ιδιότητα  $DFR$  είναι η εκθετική κατανομή, η κατανομή  $\Gamma$ άμμα (για  $0 < a < 1$ ), η  $Weibull$  (για  $0 < a < 1$ ) και η κατανομή  $Pareto$ .

Η απαίτηση να έχουμε χρόνους ζωής  $IFR$  (αντίστοιχα  $DFR$ ) είναι σε γενικές γραμμές πολύ περιοριστική αφού ζητάμε η βαθμίδα αποτυχίας να αυξάνεται (αντίστοιχα να μειώνεται) συνεχώς. Για τον λόγο αυτό θα μπορούσαμε να ζητήσουμε αντί για συνεχή μεταβολή της βαθμίδας αποτυχίας να έχουμε μεταβολή «κατά μέσο όρο». Έτσι, προκύπτουν δύο νέες οικογένειες κατανομών, η  $IFRA$  και η  $DFRA$  τις οποίες θα μελετήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια.



## 2.4 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ IFRA

**Ορισμός 2.4.1.** Έστω  $T$  ο χρόνος ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$ .

Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *IFRA* (*increasing failure rate on average*) αν ο λόγος

$$\frac{\int_0^t \lambda(u) du}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t}$$

αυξάνει ως προς  $t$ .

Ο ορισμός αυτός προκύπτει από το γεγονός ότι μια κατανομή είναι *IFRA* όταν η συνάρτηση κινδύνου  $\Lambda(t)$  αυξάνει γρηγορότερα από την αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *IFRA* μιας κατανομής  $F$  διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.4.2.** Έστω  $T$  ο χρόνος ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *IFRA* αν ο λόγος

$$\frac{-\log \bar{F}(t)}{t}$$

αυξάνει ως προς  $t$ .

### Παρατήρηση.

Ο ορισμός 2.4.2 προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 2.4.1 αφού  $\Lambda(t) = -\log \bar{F}(t)$  ■

**Πρόταση 2.4.1.** (Ahmad, (1994)) Μια κατανομή  $F$  είναι *IFRA* αν και μόνο αν για κ-άδα μη αρνητικών πραγματικών αριθμών  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ισχύει η σχέση

$$\bar{F}(t_1 + t_2 + \dots + t_k) \leq \prod_{i=1}^k [\bar{F}(at_i)]^{1/a}$$

για κάθε  $k \geq 1$  και  $a \in (0,1)$ .

**Πρόταση 2.4.2.** Μια κατανομή  $F$  είναι *IFRA* αν και μόνο αν για κάθε  $\lambda > 0$  η συνάρτηση  $\bar{F}(t) - \exp[-\lambda t]$  έχει το πολύ μια αλλαγή προσήμου και μάλιστα αν συμβαίνει μια τέτοια αλλαγή, το πρόσημο να αλλάζει από θετικό σε αρνητικό.

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow & Proschan (1975)).

**Πρόταση 2.4.3.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το χρόνο μιας μονάδας ή ενός συστήματος με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$ . Αν ορίσουμε μια συνάρτηση  $g(\bullet)$  με τύπο

$$g(t) = [R(t)]^{1/t}, \quad t > 0$$

τότε η  $T$  είναι IFRA αν και μόνο αν η  $g$  είναι φθίνουσα.

**Απόδειξη.**

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 2.4.1 αν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{\int_0^t \lambda(u) du}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t} = -\frac{\ln R(t)}{t} = -\frac{1}{t} \ln R(t) = -\ln [R(t)]^{1/t} = -\ln g(t).$$

Η  $T$  είναι IFRA αν  $\forall t > 0$  ο λόγος  $\frac{\Lambda(t)}{t}$ , και κατ' επέκταση η ποσότητα  $-\ln g(t)$ , αυξάνει ως προς  $t$ . Δηλαδή η  $T$  είναι IFRA αν η συνάρτηση  $g$  είναι φθίνουσα. ■

**Πρόταση 2.4.4.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(\bullet)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(\bullet)$ . Τότε η  $T$  είναι IFRA αν και μόνο αν ισχύει

$$R(\theta t) \geq R^\theta(t)$$

για κάθε  $0 < \theta < 1$  και  $t > 0$ .

**Απόδειξη.**

Έστω ότι ισχύει  $T \in \text{IFRA}$ . Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.3 η συνάρτηση  $g(t) = [R(t)]^{1/t}$  είναι φθίνουσα οπότε για  $0 < \theta < 1$  και  $t > 0$  έχουμε

$$g(\theta t) \geq g(t).$$

Άρα

$$[R(\theta t)]^{1/\theta t} \geq [R(t)]^{1/t}$$

από όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

$$R(\theta t) \geq R^\theta(t).$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η τελευταία σχέση  $0 < \theta < 1$  και  $t > 0$ . Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι φθίνουσα και σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.3 η  $T$  θα έχει την ιδιότητα IFRA.

Έστω  $t_1, t_2 > 0$  με  $t_1 < t_2$ . Αν θέσουμε  $t = t_2$  και  $\theta = \frac{t_1}{t_2}$  ( $0 < \theta < 1$ ) στη σχέση

$$R(\theta t) \geq R^\theta(t)$$

θα προκύψει

$$R(t_1) \geq R^{t_1/t_2}(t_2) \Rightarrow [R(t_1)]^{1/t_1} \geq [R(t_2)]^{1/t_2}$$

ή ισοδύναμα

$$g(t_1) = [R(t_1)]^{1/t_1} \geq [R(t_2)]^{1/t_2} = g(t_2)$$

οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο. ■

**Πρόταση 2.4.5.** Η κλάση *IFR* είναι μικρότερη από την οικογένεια *IFRA*, δηλαδή ισχύει ότι αν  $T \in IFR$  τότε  $T \in IFRA$ .

**Απόδειξη.**

Έστω  $T \in IFR$ . Τότε η βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(\bullet)$  θα είναι αύξουσα και μπορούμε να γράψουμε

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du \leq \int_0^t \lambda(t) dt = \lambda(t)t$$

δηλαδή ισχύει

$$\lambda(t)t - \Lambda(t) \geq 0, \quad \forall t > 0.$$

Όμως

$$\left( \frac{\Lambda(t)}{t} \right)' = \frac{\Lambda'(t)t - \Lambda(t)}{t^2} = \frac{\lambda(t)t - \Lambda(t)}{t^2}$$

οπότε θα έχουμε

$$\left( \frac{\Lambda(t)}{t} \right)' \geq 0, \quad \text{για κάθε } t > 0$$

το οποίο δείχνει ότι η συνάρτηση  $\frac{\Lambda(t)}{t}$  είναι αύξουσα, δηλαδή  $T \in IFRA$ . ■

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει, δηλαδή η οικογένεια *IFRA* είναι γνήσια μεγαλύτερη από την οικογένεια *IFR*. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να διαπιστωθεί από το επόμενο αντιπαράδειγμα το οποίο βρίσκεται στις πανεπιστημιακές σημειώσεις «Στατιστική Θεωρία Αξιοπιστίας και Έλεγχοι χρόνων ζωής» του κ.Κούτρα Μ.

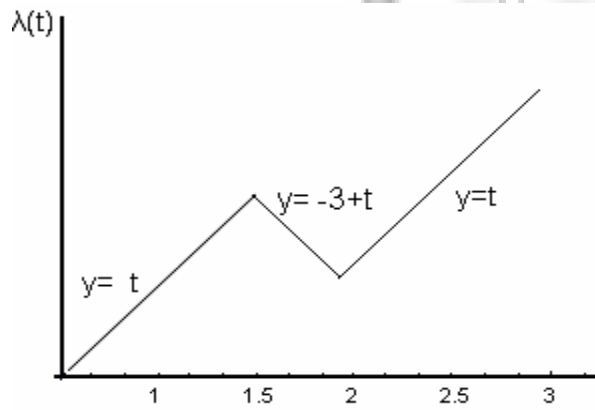
Έστω  $T$  ο χρόνος μιας μονάδας με βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$ , η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\lambda(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1.5 \\ 3-t, & 1.5 < t \leq 2 \\ t-1, & 2 \leq t \end{cases}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση  $\lambda(t)$  είναι συνεχής στα σημεία αλλαγής του τύπου της. Η μορφή της δίνεται από το ακόλουθο διάγραμμα.

**ΣΧΗΜΑ 2.2**

**Βαθμίδα αποτυχίας μιας κατανομής που είναι IFRA και δεν είναι IFR.**



Είναι προφανές ότι  $T$  δεν έχει την ιδιότητα *IFR* ούτε την ιδιότητα *DFR*.

Για την συνάρτηση κινδύνου  $\Lambda(t)$  έχουμε

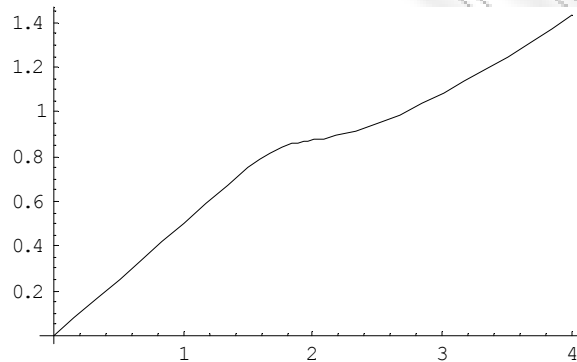
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \begin{cases} \int_0^t u du = \frac{t^2}{2}, & t \leq 1.5 \\ \frac{9}{8} + \int_{1.5}^t (-u+3) du = -\frac{t^2}{2} + 3t - \frac{9}{4}, & 1.5 < t \leq 2 \\ \frac{7}{4} + \int_2^t (u-1) du = \frac{t^2}{2} - t + \frac{7}{4}, & t \geq 2 \end{cases}$$

οπότε

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq 1.5 \\ -\frac{t}{2} + 3 - \frac{9}{4t}, & 1.5 \leq t \leq 2 \\ \frac{t}{2} - 1 + \frac{7}{4t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται το γράφημα της συνάρτησης  $\Lambda(t)/t$ .

**ΣΧΗΜΑ 2.3**  
Γράφημα της  $\Lambda(t)/t$  της IFRA κατανομής.



Από το Σχήμα 2.3 παρατηρούμε ότι η  $\Lambda(t)/t$  είναι γνήσια αύξουσα σε όλο το διάστημα  $[0, +\infty)$ . Άρα  $T \in IFRA$  ενώ  $T \notin IFR$ .

**Πρόταση 2.4.6.** (Birnbäum, Esary & Marshall (1966)) Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F$ . Αν η κατανομή είναι IFRA, τότε για κάθε  $x \geq 0$  και για κατάλληλο  $\lambda$  τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση

$$\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x),$$

η συνάρτηση  $\bar{F}(t)$  ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη

$$\begin{cases} \bar{F}(t) \geq \exp(-\lambda t), & \text{για } t \leq x \\ \bar{F}(t) \leq \exp(-\lambda t), & \text{για } t \geq x \end{cases}$$

Η ερμηνεία της παραπάνω συνθήκης είναι η εξής:

Αν ένα σύστημα που έχει την ιδιότητα *IFRA* έχει την ίδια πιθανότητα επιβίωσης για κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο  $[0, x]$  με ένα σύστημα που δεν φθίνει, τότε το σύστημα αυτό έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα επιβίωσης σε οποιαδήποτε μικρότερη περίοδο και τη μικρότερη πιθανότητα επιβίωσης σε οποιαδήποτε μεγαλύτερη περίοδο.

## 2.5 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ DFRA

**Ορισμός 2.5.1.** Έστω  $T$  ο χρόνος ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$ .

Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *DFRA* (decreasing failure rate on average) αν για κάθε  $t > 0$  ο λόγος

$$\frac{\int_0^t \lambda(u) du}{t} = \frac{\Lambda(t)}{t}$$

μειώνεται ως προς  $t$ .

Ο ορισμός αυτός προκύπτει από το γεγονός ότι μια κατανομή είναι *DFRA* όταν η συνάρτηση κινδύνου  $\Lambda(t)$  μειώνεται γρηγορότερα από την αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Ένας ισοδύναμος ορισμός για την ιδιότητα *DFRA* μιας κατανομής  $F$  διατυπώνεται ως εξής.

**Ορισμός 2.5.2.** Έστω  $T$  ο χρόνος ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *DFRA* αν για κάθε  $t > 0$  ο λόγος

$$\frac{-\log \bar{F}(t)}{t}$$

μειώνεται ως προς  $t$ .

### Παρατήρηση.

Ο ορισμός 2.5.2 προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 2.5.1 αφού  $\Lambda(t) = -\log \bar{F}(t)$ . ■

**Πρόταση 2.5.1.** Μια κατανομή  $F$  είναι *IFRA* αν και μόνο αν για κάθε  $\lambda > 0$  η συνάρτηση  $\bar{F}(t) - \exp[-\lambda t]$  έχει το πολύ μια αλλαγή προσήμου και μάλιστα αν συμβαίνει μια τέτοια αλλαγή, το πρόσημο να αλλάζει από αρνητικό σε θετικό.

Η απόδειξη παραλείπεται (Barlow & Proschan (1975)).

**Πρόταση 2.5.2.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον χρόνο μιας μονάδας ή ενός συστήματος με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$ . Αν ορίσουμε μια συνάρτηση  $g(\bullet)$  με τύπο

$$g(t) = [R(t)]^{1/t}, \quad t > 0$$

τότε η  $T$  είναι DFRA αν και μόνο αν η  $g$  είναι αύξουσα.

**Απόδειξη.**

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της Πρότασης 2.4.3 στην περίπτωση της IFRA οικογένειας κατανομών. ■

**Πρόταση 2.5.3.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(\bullet)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(\bullet)$ . Τότε η  $T$  είναι DFRA αν και μόνο αν ισχύει

$$R(\theta t) \leq R^\theta(t)$$

για κάθε  $0 < \theta < 1$  και  $t > 0$ .

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της Πρότασης 2.4.4 στην περίπτωση της IFRA οικογένειας κατανομών.

**Πρόταση 2.5.4.** Η κλάση DFR είναι μικρότερη από την οικογένεια DFRA, δηλαδή ισχύει ότι αν  $T \in DFR$  τότε  $T \in DFRA$ .

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή η οικογένεια DFRA είναι γνήσια μεγαλύτερη από την οικογένεια DFR.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε οικογένειες κατανομών οι οποίες ορίζουν έννοιες γήρανσης που βασίζονται στον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Πριν προχωρήσουμε θα δώσουμε τον ορισμό του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

**Ορισμός.** Έστω μια μονάδα (ή ένα σύστημα) ηλικίας  $t > 0$  της οποίας ο χρόνος ζωής περιγράφεται από τη μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $T$ . Ο χρόνος που απομένει μέχρι να καταστραφεί η μονάδα (ή το σύστημα) δίνεται από την τυχαία μεταβλητή  $T - t$ . Επομένως, η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) ηλικίας  $t$  θα παριστάνεται από τη δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $T - t$  δεδομένου ότι  $T > t$  δηλαδή

$$T - t / T > t.$$

Αν  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $T$  τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ( $m_F(t)$ ) μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) ηλικίας  $t > 0$ , δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$m_F(t) = \begin{cases} E(T - t / T > t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du, & \text{για } \bar{F}(t) > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής έχει πολλές εφαρμογές στη θεωρία αξιοπιστίας, στην ανάλυση επιβίωσης, στη βιοϊατρική, στα αναλογιστικά μαθηματικά, στις οικονομικές επιστήμες και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους. Στην Αξιοπιστία χρησιμοποιείται κυρίως για τη μελέτη του χρόνου ζωής διαφόρων μοντέλων, παραμετρικών και μη. Στην Ανάλυση Επιβίωσης και την βιοϊατρική, αποτελεί σημαντικό εργαλείο που δίνει στους ερευνητές τη δυνατότητα να αναλύσουν μελέτες σχετικές με το χρόνο επιβίωσης του υπό μελέτη συνόλου ατόμων. Τέλος, η έννοια του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής εμφανίζεται στην Ανανεωτική θεωρία η οποία αποτελεί γενίκευση της ανέλιξης Poisson, στις κλαδωτές ανελίξεις (branching processes) όπου ουσιαστικά μελετάμε την πληθυσμιακή εξέλιξη από γενιά σε γενιά, και στην πληροφορική στα πλαίσια μιας μεθόδου (dynamic programming) με την οποία μειώνεται ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση ενός αλγόριθμου (Ghai & Mi (1999)).

## 2.6 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ NBU

**Ορισμός 2.6.1.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο» (New Better than Used, NBU) αν ισχύει

$$\bar{F}(x/t) \leq \bar{F}(x), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$T \in NBU \text{ ή } F \in NBU.$$



Η ιδιότητα NBU δηλώνει ότι η πιθανότητα μια μονάδα ηλικίας  $t$  να επιβιώσει πέρα από την ηλικία  $t+x$  είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα επιβίωσης μιας καινούριας μονάδας για χρόνο  $x$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)},$$

παίρνουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό

**Ορισμός 2.6.2.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα NBU αν ισχύει

$$\bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Ισοδύναμα, ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή.

**Ορισμός 2.6.3.** Ο χρόνος ζωής  $T$  μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα NBU αν ισχύει

$$R(x+t) \leq R(x)R(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Από τον Ορισμό 2.6.3 έχουμε ότι  $T \in NBU$  αν ισχύει

$$R(x+t) \leq R(x)R(t)$$

ή ισοδύναμα αν ισχύει

$$\ln R(x+t) \leq \ln R(x) + \ln R(t).$$

Όμως  $\Lambda(t) = -\ln R(t)$  οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$\Lambda(x+t) \geq \Lambda(x) + \Lambda(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι  $T \in NBU$  αν  $\Lambda(x+t) \geq \Lambda(x) + \Lambda(t)$ .

## 2.7 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ NWU

**Ορισμός 2.7.1.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $\bar{F}(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο» (New Worse than Used, NWU) αν ισχύει

$$\bar{F}(x/t) \geq \bar{F}(x), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$T \in NWU \text{ ή } F \in NWU.$$

Η ιδιότητα NWU δηλώνει ότι η πιθανότητα μια μονάδα ηλικίας  $t$  να επιβιώσει πέρα από την ηλικία  $t+x$  είναι μεγαλύτερη ή ίση από την πιθανότητα επιβίωσης μιας καινούριας μονάδας για χρόνο  $x$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\bar{F}(x/t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)},$$

παίρνουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό

**Ορισμός 2.7.2.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα NWU αν ισχύει

$$\bar{F}(x+t) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Ισοδύναμα, ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή.

**Ορισμός 2.7.3** Ο χρόνος ζωής  $T$  μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$  θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα NWU αν ισχύει

$$R(x+t) \geq R(x)R(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Από τον Ορισμό 2.7.3 προκύπτει άμεσα ότι  $T \in NWU$  αν ισχύει

$$\Lambda(x+t) \leq \Lambda(x) + \Lambda(t), \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } t \geq 0.$$

Οι κλάσεις  $NBU/NWU$  είναι ευρύτερες από τις κλάσεις  $IFRA/DFRA$  αφού ισχύει η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση.**

α) Αν  $T \in IFRA$  τότε  $T \in NBU$

β) Αν  $T \in DFRA$  τότε  $T \in NWU$

**Απόδειξη.**

Έστω  $T \in IFRA$ . Τότε ο λόγος  $\Lambda(t)/t$  θα αυξάνει ως προς  $t$  οπότε για κάθε  $x > 0$  και  $t > 0$  θα έχουμε

$$\frac{\Lambda(t+x)}{t+x} \geq \frac{\Lambda(t)}{t} \quad \text{και} \quad \frac{\Lambda(t+x)}{t+x} \geq \frac{\Lambda(x)}{x}.$$

Επομένως,

$$\frac{\Lambda(t+x)}{t+x} \geq \max\left(\frac{\Lambda(t)}{t}, \frac{\Lambda(x)}{x}\right)$$

και μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \Lambda(t+x) &\geq (t+x) \max\left(\frac{\Lambda(t)}{t}, \frac{\Lambda(x)}{x}\right) \\ &= t \max\left(\frac{\Lambda(t)}{t}, \frac{\Lambda(x)}{x}\right) + x \max\left(\frac{\Lambda(t)}{t}, \frac{\Lambda(x)}{x}\right) \\ &\geq t \frac{\Lambda(t)}{t} + x \frac{\Lambda(x)}{x} \\ &= t\Lambda(t) + x\Lambda(x) \end{aligned}$$

Άρα

$$\Lambda(t+x) \geq \Lambda(t)\Lambda(x) \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ και } t > 0$$

το οποίο δείχνει ότι  $T \in NBUE$ .

Ομοίως αποδεικνύεται και το β. ■

## 2.8 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ NBUE

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος). Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή» (New Better than Used in Expectation, NBUE) αν ισχύει

$$m_F \leq E(T) \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$T \in NBUE \quad \text{ή} \quad F \in NBUE.$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η συνθήκη για να είναι μια τυχαία μεταβλητή NBUE είναι

$$m_F \leq E(T) \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής

$$\frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(u) du \leq E(T).$$

Αφού

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(u)du \quad \text{και} \quad \int_t^{\infty} R(u)du = \int_0^{\infty} R(t+x)dx$$

η τελευταία παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\int_0^{\infty} R(t+x)du \leq R(t) \int_0^{\infty} R(u)du. \quad (2.3)$$

## 2.9 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ NWUE

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος). Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή» (*New Worse than Used in Expectation, NWUE*) αν ισχύει

$$m_F \geq E(T) \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$T \in NWUE \quad \text{ή} \quad F \in NWUE.$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η συνθήκη για να είναι μια τυχαία μεταβλητή  $NWUE$  είναι

$$m_F \geq E(T) \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής

$$\frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(u)du \geq E(T).$$

Αφού

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(u)du \quad \text{και} \quad \int_t^{\infty} R(u)du = \int_0^{\infty} R(t+x)dx$$

η τελευταία παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\int_0^{\infty} R(t+x)du \geq R(t) \int_0^{\infty} R(u)du \quad (2.4)$$

Με βάση τις εκφράσεις (2.3) και (2.4) μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι οι κλάσεις  $NBUE / NWUE$  είναι ευρύτερες από τις κλάσεις  $NBU / NWU$ .

**Πρόταση.**

α) Αν  $T \in NBU$  τότε  $T \in NBUE$

β) Αν  $T \in NWU$  τότε  $T \in NWUE$

**Απόδειξη.**

Έστω  $T \in NBU$ . Τότε θα έχουμε

$$R(x+t) \leq R(x)R(t) \text{ για κάθε } t, x \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$  παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} R(x+t)dx \leq R(t) \int_0^{\infty} R(x)dx \text{ για κάθε } t \geq 0$$

το οποίο, σύμφωνα με τη σχέση (2.3) δείχνει ότι  $T \in NBUE$ .

Όμοια αποδεικνύεται και το β.

**2.10 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ HNBUE**

**Ορισμός.** (Ahmad (2001)) Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει το χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «αρμονικά καλύτερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή» (Harmonic New Better than Used in Expectation, HNBUE) αν ισχύει

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du \leq \mu \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \text{ για κάθε } t > 0.$$

όπου  $\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt$  είναι ο μέσος της κατανομής  $F$ .

**2.11 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ HNWUE**

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα «αρμονικά χειρότερα καινούριο παρά μεταχειρισμένο κατά μέση τιμή» (Harmonic New Worse than Used in Expectation, HNWUE) αν ισχύει

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du \geq \mu \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \text{ για κάθε } t > 0.$$

όπου  $\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt$  είναι ο μέσος της κατανομής  $F$ .

Η οικογένεια κατανομών *HNBUE* (*HNWUE*) εισήχθη από τον Rolski T. το 1975 ενώ λίγα χρόνια αργότερα (1980) ο Klefsjö απέδειξε ότι η συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών είναι μεγαλύτερη από την κλάση κατανομών *NBUE* (*NBUE*).

### 2.12 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ IMRL

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα *IMRL* (*Increasing Mean Residual Life*) αν ο λόγος

$$\frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(u) du}{\bar{F}(t)}$$

αυξάνεται ως προς  $t \geq 0$ .

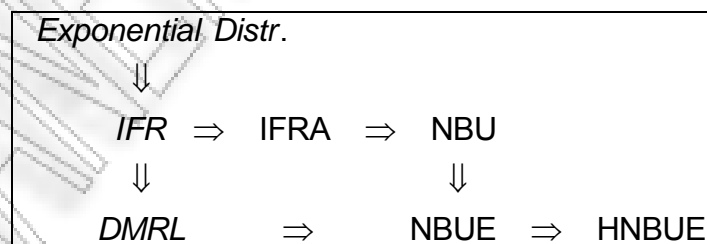
### 2.13 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ DMRL

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια τυχαία μεταβλητή συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  έχει την ιδιότητα *DMRL* (*Decreasing Mean Residual Life*) αν ο λόγος

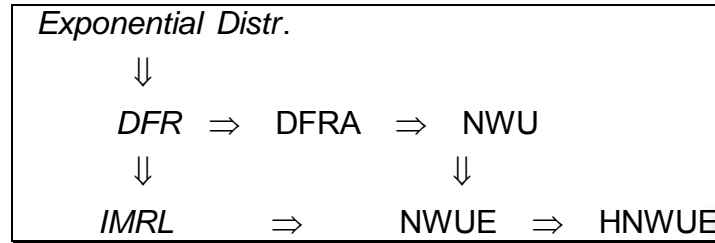
$$\frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(u) du}{\bar{F}(t)}$$

μειώνεται ως προς  $t \geq 0$ .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι για τις κλάσεις που ορίστηκαν παραπάνω ισχύει



και



Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, πολλές φορές στην πράξη μελετάμε μοντέλα των οποίων η συνάρτηση κινδύνου είναι λεκανοειδούς μορφής- δηλαδή αρχικά η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται και μετά την πάροδο ορισμένου χρόνου αυξάνεται λόγω φθοράς ή γήρανσης- ή έχουν κυρτή μορφή όπου παρατηρείται το αντίστροφο. Για τη μελέτη αυτών των μοντέλων χρησιμοποιούμε βασικά δύο μη παραμετρικές οικογένειες κατανομών, τις *IDMRL* και *DIMRL*. Για την ανάλυση των *IDMRL* και *DIMRL* θα βασιστούμε στην έννοια του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μια μονάδας ή ενός συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε, θα ήταν σκόπιμο να δώσουμε τον ορισμό των *BFR* και *UBFR*.

**Ορισμός.** Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$  και αντίστοιχη συνάρτηση αξιοπιστίας  $R(t)$ . Θα λέμε ότι η μεταβλητή  $T$  είναι *BFR* (αντίστοιχα *UBFR*) αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $t_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε η  $R(t)$  να είναι κοίλη (αντίστοιχα κυρτή) στο διάστημα  $[0, t_0)$  και κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο  $[t_0, \infty)$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι πολύ γενικός και χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει η βαθμίδα αποτυχίας.

### 2.14 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ *IDMRL*

**Ορισμός.** (Guess, Hollander & Proschan (1986)). Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *IDMRL* (Increasing initially, then Decreasing Mean Residual Life) αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $\tau \geq 0$  τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} m_F(s) \leq m_F(t) & \text{για } 0 \leq s \leq t < \tau \\ m_F(s) \geq m_F(t) & \text{για } \tau \leq s \leq t < \infty \end{cases}$$

όπου  $m_F(\bullet)$  είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ή του συστήματος.

### 2.15 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ *DIMRL*

**Ορισμός.** (*Guess, Hollander & Proschan (1986)*) Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *DIMRL* (*Decreasing initially, then Increasing Mean Residual Life*) αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $\tau \geq 0$  τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} m_F(s) \geq m_F(t) & \text{για } 0 \leq s \leq t < \tau \\ m_F(s) \leq m_F(t) & \text{για } \tau \leq s \leq t < \infty \end{cases}$$

όπου  $m_F(\bullet)$  είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ή του συστήματος.

### 2.16 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ *NWBUE*

Η κλάση *NWBUE* είναι μια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών η οποία περιλαμβάνει τόσο την κλάση *IDMRL* όσο και τη *BFR* κατανομή.

**Ορισμός.** (*Mitra & Basu (1994)*) Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με πεδίο ορισμού το  $[0, \infty)$ , μέση τιμή  $\mu$  και συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα *NWBUE* (*New Worse, then Better than Used in Expectation*) αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $x_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} m_F(x) \geq m_F(0) & \text{για } x < x_0 \\ m_F(x) \leq m_F(0) & \text{για } x \geq x_0 \end{cases}$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$F \in \text{NWBUE}(x_0)$$

Παρακάτω διατυπώνουμε δύο προτάσεις που μας δείχνουν τη σχέση μεταξύ των *NWBUE*, *BFR* και *IDMRL*.

**Πρόταση 2.16.1.** Έστω  $F$  μια συνεχής και αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση κατανομής. Αν η  $F$  είναι *BFR* με μέση τιμή  $\mu$  τότε έχει την ιδιότητα *NWBUE*.

Η απόδειξη παραλείπεται (βλ. *Mitra & Basu (1994)*)



**Πρόταση 2.16.2** Αν μια κατανομή  $F$  είναι  $IDMRL(t_0)$  τότε είναι  $NWBUE(t_0)$  με  $t_0 \geq 0$ .

Η απόδειξη παραλείπεται λόγω της πολυπλοκότητάς της.

### 2.17 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ $NBWUE$

Η κλάση  $NBWUE$  είναι μια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών η οποία περιλαμβάνει τόσο την κλάση  $DIMRL$  όσο και τη  $UBFR$  κατανομή.

**Ορισμός.** (Mitra & Basu (1994)) Έστω  $T$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας (ή ενός συστήματος) με πεδίο ορισμού το  $[0, \infty)$ , μέση τιμή  $\mu$  και συνάρτηση κατανομής  $F(t)$ . Θα λέμε ότι η  $T$  (ή η αντίστοιχη κατανομή  $F$ ) έχει την ιδιότητα  $NBWUE$  (New Better, then Worse than Used in Expectation) αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο  $x_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} m_F(x) \leq m_F(0) & \text{για } x < x_0 \\ m_F(x) \geq m_F(0) & \text{για } x \geq x_0 \end{cases}$$

Συμβολικά θα γράφουμε

$$F \in NBWUE(x_0)$$

Το σημείο  $x_0$  (το οποίο δεν χρειάζεται να είναι μοναδικό) ονομάζεται *σημείο αλλαγής* της συνάρτησης κατανομής  $F$ .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι κάθε σημείο της εκθετικής κατανομής θεωρείται σημείο αλλαγής. Παρόλα αυτά, θα κάνουμε τη σύμβαση ότι το σημείο αλλαγής της εκθετικής κατανομής είναι το  $x_0 = 0$ .

Έστω  $\mathcal{CP}_{\mathcal{F}}$  ένα σύνολο το οποίο περιλαμβάνει όλα τα σημεία αλλαγής μιας κατανομής  $F$  που έχει την ιδιότητα  $NWBUE$  (ή  $NBWUE$ ). Αν το μηδέν ανήκει στο  $\mathcal{CP}_{\mathcal{F}}$  τότε η  $F$  έχει την ιδιότητα  $NBUE$  ( $NWUE$ ) και την ιδιότητα  $NWUE$  ( $NBUE$ ) αν  $\infty \in \mathcal{CP}_{\mathcal{F}}$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΓΗΡΑΝΣΗ

#### 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις κυριότερες στατιστικές μεθόδους που έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι μια κατανομή έχει μονότονη γήρανση. Στους ελέγχους αυτούς συνήθως η μηδενική υπόθεση είναι ότι η κατανομή που εξετάζουμε είναι η εκθετική, η οποία έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας, ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι η κατανομή αυτή ανήκει σε κάποια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών, όπως αυτές που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (π.χ IFR, IFRA, NBU, NBUE κλπ).

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο, θα πρέπει να επιλέξουμε την κατάλληλη στατιστική συνάρτηση ελέγχου. Για το λόγο αυτό, θα αναφέρουμε πρώτα κάποιες ανισότητες για τις ροπές τάξεως μεγαλύτερης της μονάδος για την εκάστοτε μη παραμετρική οικογένεια κατανομών και στηριζόμενοι σε αυτές τις ανισότητες θα κατασκευάσουμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ασυμπτωτικά σχετικής αποτελεσματικότητας του Pitman, γνωστό με το ακρώνυμο *PARE* (*Pitman's Asymptotic Relative Efficiency*), θα συγκρίνουμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου που βρήκαμε με άλλες στατιστικές συναρτήσεις που συναντάμε στην βιβλιογραφία.

Πριν προχωρήσουμε θα ήταν σκόπιμο να δώσουμε τον ορισμό του *PARE*.

**Ορισμός.** (Noether (1954)) Θεωρούμε δύο ελέγχους που αφορούν το ίδιο δείγμα, με το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας- έστω  $\alpha$  - και της ίδιας στατιστικής υπόθεσης

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{οχι } H_0.$$

Προκειμένου οι έλεγχοι να είναι βέλτιστοι θα πρέπει με σταθερό το  $\alpha$  να επιτύχουμε την μέγιστη δυνατή ισχύ  $\gamma$ . Αυτό συνεπάγεται την αλλαγή του μεγέθους του δείγματος σε κάθε

περίπτωση ώστε και οι δύο έλεγχοι να δίνουν την ίδια συνάρτηση ισχύος. Έστω ότι στον πρώτο έλεγχο απαιτούνται  $n_1$  παρατηρήσεις ενώ στο δεύτερο  $n_2$ .

Ως σχετική αποτελεσματικότητα του πρώτου ελέγχου ως προς τον δεύτερο ορίζουμε την ποσότητα

$$e_{\theta}(\alpha, \gamma) = \frac{n_1}{n_2}$$

Τότε η σχετικά αποτελεσματική αποδοτικότητα κατά Pitman (PARE) δίνεται από το όριο

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} e_{\theta}(\alpha, \gamma)$$

### 3.2 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ IFR ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Ένα από τα παλαιότερα προβλήματα που μας απασχολεί όσον αφορά τους ελέγχους για κατανομές χρόνου ζωής με μονότονη βαθμίδα αποτυχίας είναι ο έλεγχος

$$H_0 : \eta \text{ } F \text{ είναι η εκθετική με πεπερασμένο μέσο } \mu,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta \text{ } F \text{ ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική.}$$

Ο παραπάνω έλεγχος αποτελεί αντικείμενο μελέτης εδώ και τέσσερις περίπου δεκαετίες. Σύμφωνα με τον Ahmad (2004), οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με το αντικείμενο αυτό είναι οι Proschan και Pyke το 1967 και λίγο αργότερα οι Barlow και Proschan, Bickel και Doksum ενώ ακολούθησαν και πολλοί άλλοι μέχρι σήμερα, όπως ο Ahmad (2001).

Απαραίτητο εργαλείο για την κατασκευή του παραπάνω ελέγχου είναι η εύρεση της κατάλληλης οικογένειας στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου. Θα ξεκινήσουμε, λοιπόν, με τον υπολογισμό των ροπών τάξεως μεγαλύτερης της μονάδος και στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου για να κάνουμε τον έλεγχο. Παρακάτω περιγράφουμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Ahmad (2001) για τον παραπάνω έλεγχο. Θεωρώντας ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες ο Ahmad διατύπωσε τα εξής

**Πρόταση 3.2.1.** Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα IFR τότε για κάθε ακέραιο  $r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0$  με  $\kappa \geq 2$  ισχύει

$$2^{C(r; k)} \prod_{i=1}^k (r_i + 1)! \nu_{(\sum_{i=1}^k r_i + k)} \geq \left( \sum_{i=1}^k r_i + k \right)! \prod_{i=1}^k \mu_{(r_i + 1)}$$

όπου  $C(r; k) = \frac{(k+2)(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^k ir_i - r_k$ ,  $v_{(s)} = E[\min(X_1, X_2)^s]$  και  $\mu_{(s)} = E(X_1^s)$  η ροπή  $s$ -τάξεως.

Οι  $X_1, X_2$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής  $F$ .

**Πόρισμα 3.2.1** Αν  $r_i = 0$  με  $i = 1, 2, \dots, k$  τότε για κάθε  $k \geq 2$  ισχύει

$$2^{(k+2)(k-1)/2} v_{(k)} \geq k! \mu^k$$

όπου  $\mu = \mu_{(1)} = E(X_1)$

**Πόρισμα 3.2.2** Αν  $k = 2$  και  $r_1 = r_2 = r$  με  $r \geq 0$  τότε ισχύει

$$v_{(2r+2)} \geq \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} \mu_{(r+1)}^2.$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.2.2 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta_{r+2}^{(1)} = v_{(2r+2)} - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} \mu_{(r+1)}^2.$$

Η ποσότητα αυτή ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Για να είναι ο έλεγχος ανεξάρτητος της κλίμακας χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\Delta_{r+2}^{(1)} = \delta_{r+2}^{(1)} / \mu^{2r+2}$$

την οποία εκτιμούμε από την σχέση

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(1)} = \hat{\delta}_{r+2}^{(1)} / \bar{X}^{2r+2}$$

όπου

$$\hat{\delta}_{r+2}^{(1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left\{ \min(X_i^{2r+2}, X_j^{2r+2}) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} X_i^{r+2} X_j^{r+2} \right\}.$$

**Πρόταση 3.2.2** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_{r+2}^{(1)} - \Delta_{r+2}^{(1)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = 4 \text{var} \left\{ \int_0^{X_1} x^{2r+2} dF(x) + X_1^{2r+2} \bar{F}(X_1) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1} \mu_{(r+1)} X^{r+1} \right\} / \mu^{4r+4}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(1)} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_o^2 = 4 \left\{ [(2r+2)!]^2 \left\{ -1 + \left[ \sum_{s=0}^{2r+1} \binom{2s}{s} \left(\frac{1}{3}\right)^{2s+1} + \sum_{s \neq u} \sum \binom{s+u}{s} \left(\frac{1}{3}\right)^{s+u+1} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{4r+4} + \sum_{s=1}^{2r+2} \binom{r+s}{s-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3r+s+2} \right\} \right\}$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(1)} = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+2}^{(1)}}{\sigma_o} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+2}^{(1)}}{\sigma_o} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει στην οικογένεια των εκθετικών κατανομών.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman (PARE). Αρχικά θα εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman (Pitman Asymptotic Efficacy- PAE) του υπό εξέταση ελέγχου και στη συνέχεια, μέσω της λήψης αναλογιών, θα τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη

ποσότητα PAE γνωστών από τη βιβλιογραφία ελέγχων ώστε να λάβουμε την ζητούμενη ποσότητα PARE.

Αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\Delta_{r+2}^{(1)}(\theta)$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(1)}(\theta)) = \left\{ \frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(1)}(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow \theta_0} \right\}^2 / \sigma_0^2 \quad (3.1)$$

Ύστερα από πράξεις, ο Ahmad κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η παραπάνω ποσότητα παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(1)}(\theta)) = \left\{ v'_{(2r+2)}(\theta_0) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1} (r+1)! \mu'_{(r+1)}(\theta_0) \right\}^2 / \sigma_0^2 \quad (3.2)$$

όπου

$$v_{(2r+2)}(\theta) = (2r+2) \int_0^{\infty} w^{2r+1} \bar{F}_{\theta}^2(w) dw,$$

$$\mu_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^{\infty} w^r \bar{F}_{\theta}(w) dw$$

και

$$\mu'_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^{\infty} w^r \bar{F}'_{\theta}(w) dw.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε την ισοδυναμία των σχέσεων (3.1) και (3.2).

**Παρατήρηση.**

Ο αριθμητής στη σχέση (3.1) έχει ως εξής

$$\frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(1)}(\theta) = \frac{\left\{ v'_{(2r+2)}(\theta) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} 2\mu_{(r+1)} \mu'_{(r+1)}(\theta) \right\} \mu^{2r+2} - (2r+2) \mu^{2r+1} \mu' \delta_{r+2}^{(1)}}{\mu^{4r+4}}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση η κατανομή  $F$  είναι η εκθετική οπότε ισχύει

$$\mu_{(r+1)} = \frac{(r+1)!}{\mu^{r+1}}$$

και

$$\mu' = \mu = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει την εξής μορφή

$$\frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(1)}(\theta) |_{\theta \rightarrow \theta_0} = v'_{(2r+2)}(\theta_0) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1} (r+1)! \mu'_{(r+1)}(\theta_0)$$

το οποίο αποτελεί τον αριθμητή της σχέσεως (3.2). ■

Δύο από τις πιο γνωστές οικογένειες κατανομών που φέρουν την ιδιότητα IFR και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον παραπάνω έλεγχο είναι οι εξής

I. Η Weibull κατανομή με συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}_\theta(x) = e^{-x^\theta} \quad \text{με } x > 0 \text{ και για } \theta > 1. \quad (3.3)$$

II. Η οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας (*Linear failure Rate family- LFR*) όπου η συνάρτηση αξιοπιστίας ισούται με

$$\bar{F}_\theta(x) = e^{-x - \frac{\theta}{2}x^2} \quad \text{με } x > 0, \theta > 0. \quad (3.4)$$

Θέτοντας όπου  $\theta=1$  και  $\theta=0$  στους τύπους (3.3) και (3.4) αντίστοιχα, η συνάρτηση αξιοπιστίας δίνεται από τον τύπο

$$\bar{F}_\theta(x) = e^{-x}$$

η οποία αντιστοιχεί στην συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\mu$  ίση με τη μονάδα. Κατ' επέκταση, για  $\theta=1$  και  $\theta=0$  αντίστοιχα, ισχύει η μηδενική υπόθεση του ελέγχου που θέλει την  $F$  να είναι εκθετική. Στην προκειμένη περίπτωση, θέτοντας στην σχέση (3.2) όπου  $\theta_0$  τη μονάδα και το μηδέν αντίστοιχα προκύπτουν για κάθε οικογένεια οι παρακάτω σχέσεις

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(1)}(1), Weibull) = \left\{ -\frac{(2r+2)!}{2^{2r+2}} \left[ \sum_{i=r+1}^{2r+1} \frac{1}{i} - \ln 2 \right] \right\}^2 / \sigma_0^2 \quad (3.5)$$

και

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(1)}(0), LFR) = \left\{ (2r+2)(2r+2)! \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+4} \right\}^2 / \sigma_0^2 \quad (3.6)$$

Θέτοντας όπου  $r=0$  στις σχέσεις (3.5) και (3.6) παίρνουμε τις τιμές 1.2711 και 0.8438 αντίστοιχα. Ως σημείο αναφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο που έχει προταθεί από τους Bickel & Doksum (1969) λόγω της υψηλής αποτελεσματικότητας που παρουσιάζει συγκριτικά με άλλους ελέγχους που αφορούν τον έλεγχο έναντι της IFR εναλλακτικής. Για την περίπτωση της κατανομής Weibull και της LFR ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του



Pitman ισούται με 1.4408 και 0.8258 αντίστοιχα. Τότε η ποσότητα PARE για κάθε περίπτωση ισούται με 0.88 και 1.02. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι για  $r=0$  η οικογένεια στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου που έχει προταθεί από τον Ahmad είναι καλύτερη από αυτή των Bickel & Doksum όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι η κατανομή LFR ενώ το αντίστροφο συμβαίνει όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι η κατανομή Weibull.

### 3.3 ΈΛΕΓΧΟΣ ΈΝΑΝΤΙ ΤΗΣ NBU ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην NBU οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου. Με την παραδοχή ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, ο Ahmad (2001) ανέπτυξε μια μεθοδολογία η οποία είναι χρήσιμη για την μελέτη του προαναφερθέντος ελέγχου.

**Πρόταση 3.3.1.** Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα NBU τότε για κάθε ακέραιο  $r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0$  με  $k \geq 2$  ισχύει

$$\left( \sum_{i=1}^k r_i + k \right)! \prod_{i=1}^k \mu_{(r_i+1)} \geq \prod_{i=1}^k (r_i + 1)! \mu_{\left( \sum_{i=1}^k r_i + k \right)}$$

όπου  $\mu_{(s)} = E(X_1^s)$ .

**Πόρισμα 3.3.1** Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα NBU και  $r_i = 0$  με  $i = 1, 2, \dots, k$  τότε για κάθε  $k \geq 2$  ισχύει

$$\mu^k \geq \frac{\mu^{(k)}}{k!} \tag{3.7}$$

όπου  $\mu = \mu_{(1)} = E(X_1)$ .

Εφόσον ισχύει  $\mu^k \leq \mu_{(k)}$  η σχέση (3.7) γίνεται

$$\frac{\mu^{(k)}}{k!} \leq \mu^k \leq \mu_{(k)}.$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.3.1 και θέτοντας  $k = r + 2$  μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης  $H_1$  την

$$\delta_{r+2}^{(2)} = \mu^{r+2} - \frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)!}.$$

Η ποσότητα αυτή ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Για να είναι ο έλεγχος ανεξάρτητος της κλίμακας χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\Delta_{r+2}^{(2)} = \delta_{r+2}^{(2)} / \mu^{r+2}$$

την οποία εκτιμούμε από την σχέση

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(2)} = \hat{\delta}_{r+2}^{(2)} / \bar{X}^{r+2}$$

όπου

$$\hat{\delta}_{r+2}^{(2)} = \frac{(r+2)!}{n(n-1)\dots(n-r-1)} \sum_c \left[ \prod_{j=1}^{r+2} X_{i_j} - \frac{X_i^{r+2}}{(r+2)!} \right].$$

Το  $\sum_c$  περιλαμβάνει όλους τους δείκτες  $1 \leq i_1 < \dots < i_{r+2} = n$

Μια ισοδύναμη μορφή για το  $\hat{\Delta}_{r+2}^{(2)}$  είναι η εξής

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(2)} = \frac{1}{\bar{X}^{r+2}} \left[ \bar{X}^{r+2} - m_{(r+2)} / (r+2)! \right]$$

όπου

$$m_{(r+2)} = \frac{1}{n} \sum_i X_i^{r+2}$$

είναι ο εκτιμητής του  $\mu_{(r+2)}$  δηλαδή πρόκειται για τον  $(r+2)$ -ιστό δειγματικό μέσο.

**Πρόταση 3.3.2** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_{r+2}^{(2)} - \Delta_{r+2}^{(2)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = \text{var} \left\{ (r+2)X_1\mu^{r+1} - \frac{X_1^{r+2}}{(r+2)!} - (r+1)\frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)!} \right\} / \mu^{2r+4}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(2)} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_o^2 = \binom{2r+4}{r+2} - (r+2)^3 - 1$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu ,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην NBU οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(2)} = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n} \widehat{\Delta}_{r+2}^{(2)}}{\sigma_o} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n} \widehat{\Delta}_{r+2}^{(2)}}{\sigma_o} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει

στην οικογένεια εκθετικών κατανομών.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στον προηγούμενο έλεγχο, την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PAE$ ). Αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\Delta_{r+2}^{(2)}(\theta)$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(2)}(\theta)) = \left\{ \frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(2)}(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow \theta_0} \right\}^2 / \sigma_o^2 \quad (3.8)$$

Ύστερα από πράξεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ποσότητα αυτή δίνεται από την ακόλουθη σχέση.

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(2)}(\theta)) = \left\{ \frac{\mu'_{(r+2)}(\theta_0)}{(r+2)!} - (r+2) \right\}^2 / \sigma_o^2 \quad (3.9)$$

όπου  $\mu'_{(r+2)}(\theta) = (r+2) \int_0^\infty w^{r+1} \overline{F}'_\theta(w) dw$ .

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ισοδυναμία των σχέσεων (3.8) και (3.9).

**Παρατήρηση.**

Ο αριθμητής στη σχέση (3.8) έχει ως εξής

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(2)}(\theta) \right\}^2 = \left\{ \frac{d}{d\theta} \left[ 1 - \frac{\mu_{(r+2)}(\theta)}{(r+2)! \mu^{r+2}(\theta)} \right] \right\}^2 = \left\{ -\frac{1}{(r+2)!} \frac{\mu'_{(r+2)}(\theta) \mu^{r+2} - (r+2) \mu^{r+1} \mu'(\theta)}{\mu^{2r+4}(\theta)} \right\}^2$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση η κατανομή  $F$  είναι η εκθετική οπότε ισχύει

$$\mu_{(r+1)} = \frac{(r+1)!}{\mu^{r+1}}$$

και

$$\mu' = \mu = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει την εξής μορφή

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} \Delta_{r+2}^{(2)}(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow \theta_0} \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\mu'_{(r+2)}}{(r+2)!} \right\}^2$$

δηλαδή προκύπτει ο αριθμητής της σχέσεως (3.9). ■

Δύο από τις πιο γνωστές οικογένειες κατανομών που φέρουν την ιδιότητα NBU και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον παραπάνω έλεγχο είναι η Weibull και η οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας. Θέτοντας όπου  $\theta_0 = 1$  και  $\theta_0 = 0$  στην (3.9) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για την PAE της Weibull και της LFR αντίστοιχα

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(2)}(\theta), Weibull) = \left[ \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{i} + (r+1) \ln \gamma \right]^2 / \sigma_0^2 \quad (3.10)$$

και

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(2)}(\theta), LFR) = (r+2)^2 (r+1)^2 / 4\sigma_0^2 \quad (3.11)$$

όπου  $\gamma = 0.577216$  είναι η σταθερά του Euler.

Θέτοντας όπου  $r=0$  στις σχέσεις (3.10) και (3.11) παίρνουμε τις τιμές 2.4876 και 1.000 αντίστοιχα. Ως σημείο αναφοράς θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο που έχει προταθεί από τους Hollander & Proschan (1975), όπου οι ποσότητες PAE είναι 1.35 για την κατανομή Weibull και 0.3716 για την κατανομή LFR. Μέσω της λήψης αναλογιών προκύπτει ότι η PARE ισούται με 1.84 και 2.69 αντίστοιχα, δείχνοντας έτσι την υπεροχή του ελέγχου του Ahmad έναντι των άλλων ελέγχων που έχουν προταθεί για την περίπτωση που η εναλλακτική υπόθεση είναι η κατανομή Weibull ή η LFR.

### 3.4 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ NBUE ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με πεπερασμένο μέσο } \mu,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην NBUE οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών ελέγχου. Στη συνέχεια περιγράφουμε τη στατιστική μέθοδο που εφάρμοσε ο *Ahmad* (2001) για την μελέτη του παραπάνω ελέγχου. Με την παραδοχή ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, ο *Ahmad* διατύπωσε τα εξής

**Πρόταση 3.4.1.** *Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα NBUE τότε για κάθε ακέραιο  $r \geq 0$  ισχύει*

$$\mu_{(r+1)}\mu \geq \frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)}$$

όπου  $\mu_{(s)} = E(X_1^s)$ .

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.4.1 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta_{r+2}^{(3)} = \mu_{(r+1)}\mu - \frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)}.$$

Η ποσότητα αυτή ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Για να είναι ο έλεγχος ανεξάρτητος της κλίμακας χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\Delta_{r+2}^{(3)} = \frac{\delta_{r+2}^{(3)}}{\mu^{r+2}}$$

την οποία εκτιμούμε από την σχέση

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(1)} = \frac{\hat{\delta}_{r+2}^{(1)}}{\bar{X}^{2r+2}}$$

όπου

$$\hat{\delta}_{r+2}^{(3)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \left\{ X_i^{r+1} X_j - \frac{X_i^{r+2}}{(r+2)} \right\}.$$

**Πρόταση 3.4.2** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_{r+2}^{(3)} - \Delta_{r+2}^{(3)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = \text{var} \left\{ \left[ \mu_{(r+1)} X_1 + \frac{X_1^{r+2}}{(r+2)} - \frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)} \right] / \mu^{r+2} \right\}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(3)} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_o^2 = (2r+2)! + \frac{(2r+4)!}{(r+2)^2} - \frac{2(2r+3)!}{(r+2)} - [(r+1)!]^2$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην NBUE οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+2}^{(3)} = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+2}^{(3)}}{\sigma_o} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+2}^{(3)}}{\sigma_o} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει

στην οικογένεια εκθετικών κατανομών.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και στον προηγούμενο έλεγχο, την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PARE$ ). Αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\Delta_{r+2}^{(3)}(\theta)$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση.

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(3)}(\theta)) = \left\{ (r+1)! \mu'(\theta_0) + (r+2) \mu'_{(r+1)}(\theta_0) - \frac{\mu'_{(r+2)}(\theta_0)}{r+2} \right\}^2 / \sigma_o^2 \quad (3.12)$$

όπου

$$\mu'_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^{\infty} w^r \bar{F}'_{\theta}(w) dw$$

και

$$\mu'(\theta) = \int_0^{\infty} w^r \bar{F}'_{\theta}(w) dw.$$

Η οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας και η κατανομή Weibull μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον παραπάνω έλεγχο. Θέτοντας στην σχέση (3.12) όπου  $\theta_0 = 1$  και  $\theta_0 = 0$  προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για την PAE της Weibull και της LFR αντίστοιχα

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(3)}(\theta), Weibull) = \left\{ (r+1)! \left[ \frac{1}{(r+1)} + \ln \gamma \right] \right\}^2 / \sigma_0^2$$

και

$$PAE(\Delta_{r+2}^{(3)}(\theta), LFR) = \{(r+1)!(r+2)\}^2 / \sigma_0^2$$

όπου  $\gamma = 0.577216$  είναι η σταθερά του Euler.

### 3.5 ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ HNBUE ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με πεπερασμένο μέσο } \mu,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην HNBUE οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών ελέγχου. Στη συνέχεια περιγράφουμε τη στατιστική μέθοδο που εφάρμοσε ο *Ahmad* (2001) για την μελέτη του παραπάνω ελέγχου. Με την παραδοχή ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες, ο *Ahmad*, διατύπωσε τα εξής

**Πρόταση 3.5.1.** *Αν η κατανομή F έχει την ιδιότητα HNBUE τότε για κάθε ακέραιο  $r \geq 0$  ισχύει*

$$\mu^{r+2} \geq \frac{\mu_{(r+2)}}{(r+2)!}$$

όπου  $\mu_{(s)} = E(X_1^s)$ .

Παρατηρούμε ότι για  $k = r + 2$  η παραπάνω πρόταση είναι ίδια με το πόρισμα 3.3.1 οπότε για την μελέτη του ελέγχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως στατιστική συνάρτηση την ποσότητα

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(1)} = \hat{\delta}_{r+2}^{(1)} / \bar{X}^{2r+2}$$

που είχαμε στην περίπτωση του ελέγχου έναντι της NBU εναλλακτικής. Κατ' επέκταση, θα ισχύουν όλα όσα αναφέραμε στον έλεγχο αυτό.

Μια διαφορετική προσέγγιση για την μελέτη του ελέγχου συναντάμε στο άρθρο του Klar (2000). Σύμφωνα με τον Klar, μια κατανομή  $F$  ανήκει στην HNBUE οικογένεια κατανομών αν ισχύει

$$\Psi_F(t) \leq \Psi(t, 1/\mu), \quad \forall t \geq 0$$

όπου

$$\Psi_F(t) = E_F(X-t)^+ = \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx$$

είναι η ολοκληρωμένη συνάρτησης κατανομής της κατανομής  $F$  και

$$\Psi(t, 1/\mu)$$

η ολοκληρωμένη συνάρτησης κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $1/\mu$ .

Αν έχουμε στη διάθεση μας ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  μεγέθους  $n$  από την κατανομή  $F$  και

$$\Psi_n(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_n(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - t) I\{X_i > t\}$$

είναι η ολοκληρωμένη, εμπειρική συνάρτησης κατανομής της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I\{X_j \leq x\},$$

τότε ο έλεγχος έναντι της HNBUE εναλλακτικής βασίζεται στη διαφορά μεταξύ της  $\Psi_n(t)$  και της ολοκληρωμένης συνάρτησης κατανομής

$$\Psi(t, 1/\bar{X}_n)$$

η οποία είναι ουσιαστικά η ολοκληρωμένη συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$  όπου  $\bar{X}_n$ : ο αριθμητικός μέσος του δείγματος.



Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου που εισήγη ο Klar για τον έλεγχο είναι η εξής

$$T_{n,a} = \hat{\lambda}_n^2 \int_t^\infty (\Psi_n(t) - \Psi(t, \hat{\lambda}_n)) \exp(-a\hat{\lambda}_n) dt \quad (3.13)$$

όπου  $a \geq 0$ .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η επιλογή του  $a$  επηρεάζει την ισχύ του ελέγχου. Συνήθως όμως  $a = 0$  και  $a = 1$ .

Εφόσον είναι

$$\Psi_F(x) - \Psi(x, 1/\mu) \leq 0$$

απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση για μεγάλες, αρνητικές τιμές του  $T_{n,a}$ .

Αντί της (3.13) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως στατιστική συνάρτηση την παρακάτω ποσότητα

$$T_{n,a} = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^n e^{-aY_j} - \frac{1}{a^2(1+a)}, \text{ για } a > 0 \quad (3.14)$$

και

$$T_{n,0} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n Y_j^2 - 1 \text{ για } a = 0. \quad (3.15)$$

όπου  $Y_j = \frac{X_j}{\bar{X}_n}$  για  $j = 1, 2, \dots, n$ .

- Για  $a = 1$  παίρνουμε

$$T_{n,1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( e^{-Y_j} - \frac{1}{2} \right).$$

Η ποσότητα αυτή χρησιμοποιείται επίσης και για τον έλεγχο

$$H_0 : \eta \text{ F είναι η εκθετική κατανομή,}$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta \text{ F είναι η κατανομή Makeham}$$

(Η κατανομή Makeham έχει μελετηθεί λεπτομερώς στην ενότητα 1.4.10).

- Όταν  $a = 0$  η ποσότητα  $\sqrt{n}T_{n,0}$  αποτελεί την πρώτη μη αρνητική συνιστώσα του ελέγχου ομαλής προσαρμογής του Neyman για την εκθετική κατανομή. Επίσης το στατιστικό  $T_{n,0}$  συμπίπτει με τη στατιστική του Greenwood, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$G_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n Y_j^2$$

και με το δειγματικό συντελεστή μεταβλητότητας

$$CV_n = \frac{S_n}{\bar{X}_n}$$

όπου  $S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}$  είναι η δειγματική τυπική απόκλιση.

Αυτό σημαίνει ότι μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν στη θέση της στατιστικής συνάρτησης του ελέγχου  $T_{n,0}$  για την μελέτη του ελέγχου έναντι της HNBUE εναλλακτικής.

Για τον έλεγχο που μελετάμε μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον συνολικό χρόνο ελέγχου (*Total Time of Test-TTT*) και συγκεκριμένα τον TTT- μετασχηματισμό

$$t(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(s) ds$$

ο οποίος συνδέεται άμεσα με την ολοκληρωμένης συνάρτηση κατανομής από την σχέση

$$t(p) + \Psi(F^{-1}(p)) = \mu(0 < p < 1).$$

Στην περίπτωση αυτή ως στατιστική ελέγχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξής ποσότητες τις οποίες εισήγαγε ο Klefsjö (1983)

$$Q_{1,\nu} = \sum_{j=1}^n \left( -\frac{1}{\nu} + \nu \left( 1 - \frac{j}{n} \right)^{\nu-1} \right) X_{(j)} / t_n(n), \quad (\nu \geq 2)$$

$$Q_{2,\nu} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} - \nu \left( \frac{j}{n} \right)^{\nu-1} \right) X_{(j)} / t_n(n), \quad (\nu \geq 2)$$

όπου  $t_n(n)$  είναι ο εμπειρικός συνολικός χρόνος ελέγχου.

Αυτό που προέχει στην κατασκευή του ελέγχου είναι να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου η οποία όμως να είναι ανεξάρτητη της κλίμακας. Από τις σχέσεις (3.14) και (3.15) προκύπτει ότι η  $T_{n,a}$  είναι όντως αναλλοίωτη κλίμακας.

Η ασυμπτωτική κατανομή της  $T_{n,a}$  δίνεται από την παρακάτω πρόταση

**Πρόταση 3.5.2** Κάτω από την μηδενική υπόθεση  $H_0$  η ποσότητα  $\sqrt{n}T_{n,a}$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την  $N(0, \sigma^2)$  κατανομή όπου

$$\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^4} E_{\lambda} \left( e^{-aX} - \frac{1}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2} (X-1) \right)^2 = \frac{1}{(1+a)^4 (2a+1)}.$$

Για να κάνουμε, λοιπόν, τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu = 1,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην HNBUE οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\sqrt{n}T_{n,a} \sim N(0, \sigma^2)$  οπότε

$$\sqrt{n}T_{n,a} \sim N(0, \sigma^2)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n}T_{n,a}}{\sigma} < Z_n(a)$  τότε απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  δεν ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman (*PAE*). Εφόσον η στατιστική συνάρτηση ελέγχου  $T_{n,a}$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονικά κατανομή, η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(T_{n,a}(\theta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{d\theta} E_{\theta}(T_{n,a}) \Big|_{\theta=\theta_0} / \sigma^2(\theta_0)$$

όπου  $\theta_0$  αναφέρεται στην εκθετική κατανομή.

Τότε η ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman ισούται με το λόγο

$$\frac{PAE(T_{n,a}(\theta))}{PAE(T_{n,\beta}(\theta))}$$

μιας άλλης γνωστής στατιστικής ελέγχου  $T_{n,\beta}$ .

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ποσότητα *PAE* για την οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας, την Makeham και την Weibull με συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}_1(x) = \exp\left(-x - \frac{\theta}{2}x^2\right) \quad \mu\epsilon \quad x \geq 0, \theta \geq 0$$

$$\bar{F}_2(x) = \exp\left(-\left(x + \theta(x + e^{-x} - 1)\right)\right) \text{ με } x \geq 0, \theta \geq 0$$

$$\bar{F}_3(x) = \exp(-x^\theta) \text{ με } x \geq 0, \theta \geq 0$$

αντίστοιχα.

Θέτοντας στις  $F_1$  και  $F_2$  όπου  $\theta = \theta_0 = 0$  και στην  $F_3$  όπου  $\theta = \theta_0 = 1$ , παίρνουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής οπότε ισχύει η μηδενική υπόθεση του ελέγχου.

Η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για κάθε μια από τις παραπάνω οικογένειες κατανομών δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$PAE(T_{n,a}(\theta), F_1) = \frac{(2a+1)}{(a+1)^2} \text{ για } a \geq 0$$

$$PAE(T_{n,a}(\theta), F_2) = \frac{(2a+1)}{4(a+2)^2} \text{ για } a \geq 0$$

και

$$PAE(T_{n,a}(\theta), F_3) = \frac{(\log(a+1))^2(2a+1)}{a^2} \text{ για } a > 0 \text{ και } PAE(T_{n,0}(\theta), F_3) = 1$$

### 3.6 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ IFRA ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με πεπερασμένο μέσο } \mu,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην IFRA οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου. Στη συνέχεια περιγράφουμε τις στατιστικές μεθόδους που έχουν εφαρμοστεί τα τελευταία χρόνια για την μελέτη του παραπάνω ελέγχου ξεκινώντας με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον *El-Bassiuny (2003)*.

**Πρόταση 3.6.1.** *Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα IFRA τότε για κάθε ακέραιο  $r \geq 0$ ,  $k \geq 2$  ισχύει*

$$V_{(r+1)} \geq \frac{\mu_{(r+1)}}{k^{(r+1)}} \quad (3.16)$$

όπου  $v_{(r)} = E[\min(X_1, \dots, X_k)^r]$  και  $\mu_r = E(X_1^r)$  με  $X_1, \dots, X_k$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής  $F$ .

**Πόρισμα 3.6.1** Αν  $k = 2$  τότε η σχέση (3.16) γίνεται

$$2^{(k+2)(k-1)/2} v_{(k)} \geq k! \mu^k$$

όπου  $\mu = \mu_{(1)} = E(X_1)$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.6.1 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta_{r+1} = v_{(r+1)} - \frac{\mu^{(r+1)}}{2^{r+1}}.$$

Η ποσότητα αυτή ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Για να είναι ο έλεγχος ανεξάρτητος της κλίμακας χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\Delta_{r+1} = \frac{\delta_{r+1}}{\mu^{(r+1)}}$$

την οποία εκτιμούμε από την σχέση

$$\hat{\Delta}_{r+1} = \frac{\hat{\delta}_{r+1}}{\bar{X}^{(r+1)}}$$

όπου

$$\hat{\delta}_{r+1} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left\{ \min(X_i^{r+1}, X_j^{r+1}) - \frac{X_i^{r+1}}{2^{(r+1)}} \right\}.$$

**Πρόταση 3.6.2** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_{r+1} - \Delta_{r+1})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = \text{var} \left\{ 2X_1^{r+1} \bar{F}(X_1) + 2 \int_0^{X_1} x^{r+1} dF(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} X_1^{r+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} \mu_{(r+1)} \right\}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+1} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_o^2 = E \left\{ 2Y^{r+1}e^{-Y} + 2(r+1)! \left[ 1 - \sum_{i=0}^{r+1} \frac{Y_i}{i!} e^{-Y} \right] - \left( \frac{Y}{2} \right)^{r+1} - \frac{(r+1)!}{2^{r+1}} \right\}^2$$

όπου η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο ίση με τη μονάδα.

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην IFRA οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_{r+1} = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+1}}{\sigma_o} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+1}}{\sigma_o} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει στην οικογένεια εκθετικών κατανομών.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman (*PARE*). Αρχικά θα εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman (*Pitman Asymptotic Efficacy- PAE*) του υπό εξέταση ελέγχου και στη συνέχεια, μέσω της λήψης αναλογιών, θα την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη ποσότητα PAE γνωστών από την βιβλιογραφία ελέγχων ώστε να λάβουμε την ζητούμενη ποσότητα PARE.

Αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\Delta_{r+1}$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(\Delta_{r+1}(\theta_0)) = \frac{\left\{ v'_{(r+1)}(\theta_0) - \frac{\mu'_{(r+1)}(\theta_0)}{2^{r+1}} \right\}^2}{\sigma_o^2}$$

όπου

$$v_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^\infty w^r \bar{F}_\theta^2(w) dw,$$

$$\mu_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^{\infty} w^r \bar{F}_{\theta}(w) dw$$

και

$$\mu'_{(r+1)}(\theta) = (r+1) \int_0^{\infty} w^r \bar{F}'_{\theta}(w) dw.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ποσότητα  $PAE$  για την οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας, την Weibull και την Makeham με συνάρτηση αξιοπιστίας

$$\bar{F}_1(x) = \exp\left(-x - \frac{\theta}{2}x^2\right) \text{ με } x \geq 0, \theta \geq 0$$

$$\bar{F}_2(x) = \exp(-x^{\theta}) \text{ με } x \geq 0, \theta \geq 1$$

και

$$\bar{F}_3(x) = \exp\left(-\left(x + \theta(x + e^{-x} - 1)\right)\right) \text{ με } x \geq 0, \theta \geq 0$$

αντίστοιχα.

Θέτοντας στις  $F_1$  και  $F_3$  όπου  $\theta = \theta_0 = 0$  και στην  $F_2$  όπου  $\theta = \theta_0 = 1$  παίρνουμε τη συνάρτηση αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής οπότε ισχύει η μηδενική υπόθεση του ελέγχου.

Η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για κάθε μια από τις παραπάνω οικογένειες κατανομών δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$PAE(\Delta_{r+1}(0), F_1) = \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ \frac{(r+1)(r+2)!}{2^{r+3}} \right\}^2$$

$$PAE(\Delta_{r+1}(1), F_2) = \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ -2(r+1) \int_0^{\infty} x^{(r+1)} \ln(x) e^{-2x} dx + \frac{(r+1)}{2^{r+1}} \int_0^{\infty} x^{(r+1)} \ln(x) e^{-x} dx \right\}^2$$

και

$$PAE(\Delta_{r+1}(1), F_3) = \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ -(r+1)! \left[ \frac{2}{3^{r+1}} - \frac{1}{2^{r+1}} - \left( \frac{1}{2^{r+1}} \right)^2 \right] \right\}^2$$

Κλείνοντας την μελέτη του ελέγχου έναντι της IFRA εναλλακτικής θα παραθέσουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τους *Ahmad* και *Mugdadi* (2004) οι οποίοι με την παραδοχή ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες διατύπωσαν τα εξής.

**Πρόταση 3.6.3.** Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα IFRA τότε για κάθε ακέραιο  $r \geq 0$  και για  $0 < a < 1$  ισχύει

$$E(X_1^{r+1}) \geq E \left\{ \min \left( \frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{1-a} \right)^{r+1} \right\}$$

όπου  $X_1$  και  $X_2$  είναι δύο μη αρνητικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαιές μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής  $F$ .

**Πόρισμα 3.6.2** Αν  $r = 0$  τότε ισχύει

$$\mu \geq E \left\{ \min \left( \frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{1-a} \right) \right\}$$

όπου  $\mu = E(X)$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.6.2 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta_\alpha^{(1)} = \frac{1}{\mu[\alpha(1-\alpha)]} \left[ \alpha(1-\alpha)\mu - E \{ \min(\alpha X_1, (1-\alpha)X_2) \} \right].$$

Η ποσότητα αυτή είναι αναλλοίωτη κλίμακας και ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Η ποσότητα αυτή εκτιμάται από την σχέση

$$\hat{\delta}_\alpha^{(1)} = \frac{1}{\bar{X}[\alpha(1-\alpha)]} \left[ \alpha(1-\alpha)\bar{X} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \{ \min(\alpha X_i, (1-\alpha)X_j) \} \right]$$

όπου  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  είναι ο δειγματικός μέσος ενός τυχαίου δείγματος από την κατανομή  $F$ .

**Πρόταση 3.6.4** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\delta}_\alpha^{(1)} - \delta_\alpha^{(1)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{\mu^2 [a(1-a)]^2} \text{var} \left\{ \alpha(1-\alpha)(X_1 + \mu) - \alpha X_1 \bar{F} \left( \frac{a}{1-a} X_1 \right) - (1-a) X_1 \bar{F} \left( \frac{1-a}{a} X_1 \right) - (1-a) \int_0^{(a/(1-a))X_1} x dF(x) - a \int_0^{((1-a)/a)X_1} x dF(x) \right\}$$



Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\delta_\alpha^{(1)} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)(1+5\alpha-5\alpha^2)}{(2-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)} \quad (3.17)$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$H_0$  : η  $F$  είναι η εκθετική με μέσο  $\mu$ ,

έναντι της εναλλακτικής

$H_1$  : η  $F$  ανήκει στην IFRA οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\delta_\alpha^{(1)} = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n}\hat{\delta}_\alpha^{(1)}}{\sigma_{\alpha}} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n}\hat{\delta}_\alpha^{(1)}}{\sigma_{\alpha}} < Z_{1-a}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PARE$ ). Αρχικά θα εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PAE$ ) του υπό εξέταση ελέγχου και στη συνέχεια, μέσω της λήψης αναλογιών, θα την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη ποσότητα  $PAE$  γνωστών από την βιβλιογραφία ελέγχων ώστε να λάβουμε την ζητούμενη ποσότητα  $PARE$ .

Αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\Delta_{r+1}$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(\delta_\alpha^{(1)}(\theta_0)) = \left\{ \omega'_{\theta_0} - \mu'_{\theta_0} \omega_{\theta_0} \right\} / \sigma_{\alpha}$$

όπου

$$\mu'_{\theta_0} = \frac{d}{d\theta} \mu_\theta |_{\theta \rightarrow \theta_0}, \quad \omega_\theta = E_\theta \{ \min(aX_1, (1-a)X_2) \} \quad \text{και} \quad \omega'_{\theta_0} = \frac{d}{d\theta} \omega_\theta |_{\theta \rightarrow \theta_0}$$

Δύο από τις πιο γνωστές οικογένειες κατανομών που φέρουν την ιδιότητα IFRA είναι η Weibull και η οικογένεια κατανομών με γραμμική βαθμίδα αποτυχίας. Για  $\theta = 1$  και  $\theta = 0$  αντίστοιχα ισχύει η μηδενική υπόθεση του ελέγχου. Η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Ρίτμαν για κάθε μια από τις παραπάνω οικογένειες κατανομών δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$PAE(\delta_{\alpha}^{(1)}(1), Weibull) = [a(1-a)\{a \ln a + (1-a) \ln(1-a)\}] / \sigma_{0,a}$$

και

$$PAE(\delta_{\alpha}^{(1)}(0), LFR) = \frac{2a^2(1-a)^2}{\sigma_0}$$

Αν πέρα από την αύξηση της ισχύος του ελέγχου ενδιαφερόμαστε να αυξήσουμε και την αποτελεσματικότητά του μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την ποσότητα

$$\delta_{r,\alpha}^{(1)} = \frac{1}{\mu^{r+1}} \left[ \mu_{(r+1)} - E \left\{ \min \left( \frac{X_1}{\alpha}, \frac{X_2}{(1-\alpha)} \right) \right\}^{r+1} \right]$$

όπου  $\mu_{(r)} = E(X^r)$ .

Η ποσότητα αυτή εκτιμάται από την  $\hat{\delta}_{r,\alpha}^{(1)}$  η οποία δίνεται από την σχέση

$$\hat{\delta}_{r,\alpha}^{(1)} = \frac{1}{\bar{X}^{r+1}} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{r+1} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \left\{ \min \left( \frac{X_i}{\alpha}, \frac{X_j}{(1-\alpha)} \right) \right\}^{r+1} \right]$$

**Πρόταση 3.6.4** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\delta}_{r,\alpha}^{(1)} - \delta_{r,\alpha}^{(1)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \mu^{-(r+1)} \text{var} \left\{ X_1^{r+1} + \mu_{(r+1)} - \left( \frac{1}{1-a} \right)^{r+1} \int_0^{((1-a)/a)X_1} x^{r+1} dF(x) \right. \\ & - \left( \frac{X_1}{a} \right)^{r+1} \bar{F} \left( \frac{1-a}{a} X_1 \right) - \left( \frac{1}{2} \right)^{r+1} \int_0^{(a)/(1-a)X_1} x^{r+1} dF(x) \\ & \left. - \left( \frac{X_1}{1-a} \right)^{r+1} \bar{F} \left( \frac{a}{1-a} X_1 \right) \right\} \end{aligned}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\delta_{r,\alpha}^{(1)} = 0$ . Σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση προκύπτει αν θέσουμε όπου  $\bar{F}(x) = e^{-x}$  στην προηγούμενη σχέση.

Επειδή είναι δύσκολο να καταλήξουμε σε μια συγκεκριμένη σχέση παραθέτουμε ένα πίνακα που μας δίνει την διακύμανση κάτω από την μηδενική υπόθεση για διάφορες τιμές του  $\alpha$  και του  $r$ .

*Null variance for various  $\alpha$  and  $r$*

$r \backslash \alpha$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0	0.06861	0.24658	0.33333	0.24650	0.06861
1	1.33402	6.37080	9.18416	6.37080	1.33402
2	57.1431	286.223	411.556	286.223	57.1430
3	4614.22	21043.2	29048.8	21043.2	4614.22

*I.A Ahmad & A.R Mughadi (2004)*

Για  $r = 0$  προκύπτει η σχέση (3.17)

$$\sigma_{o,\alpha}^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)(1+5\alpha-5\alpha^2)}{(2-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)}$$

Καθώς αυξάνεται το  $r$ , αυξάνεται ταυτόχρονα και η διακύμανση ενώ αντίθετα μειώνεται η αποτελεσματικότητα.

### 3.7 ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ DMRL ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta \text{ } F \text{ είναι η εκθετική με πεπερασμένο μέσο } \mu,$$

έναντι της

$$H_1 : \eta \text{ } F \text{ ανήκει στην DMRL οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη οικογένεια στατιστικών συναρτήσεων ελέγχου.

Παρακάτω περιγράφουμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον *Abu-Youssef (2002)* για τον παραπάνω έλεγχο.

**Πρόταση 3.7.1.** *Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα DMRL ισχύει*

$$\mu_{(2)} \geq \frac{\mu^2}{2}$$

όπου  $\mu_{(r)} = E[\min(X_1, X_2)^r]$ .

Χρησιμοποιώντας το πρόταση 3.7.1 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta = \mu_{(2)} - \frac{\mu^2}{2}.$$

Η ποσότητα αυτή ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Για να είναι ο έλεγχος ανεξάρτητος της κλίμακας χρησιμοποιούμε την ποσότητα

$$\Delta_n = \frac{\delta}{\mu^2}$$

την οποία εκτιμούμε από τη σχέση

$$\hat{\Delta}_n = \frac{\hat{\delta}_n}{\bar{X}^2}$$

όπου

$$\hat{\delta}_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left[ \min(X_i^2, X_j^2) - \frac{1}{2} X_i X_j \right].$$

**Πρόταση 3.7.2.** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_n - \Delta_n)$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^4} \text{var} \left\{ X_1^2 \bar{F}(X_1) - X_1 \mu + \int_0^{X_1} u^2 dF(u) \right\}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_n = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{27}$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$H_0$  : η  $F$  είναι η εκθετική με μέσο  $\mu$ ,

έναντι της εναλλακτικής

$H_1$  : η  $F$  ανήκει στην DMRL οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\Delta_n = 0$  οπότε

$$\frac{\sqrt{n}\hat{\Delta}_n}{\sigma_0} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\frac{\sqrt{n}\hat{\Delta}_n}{\sigma_0} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

Τέλος, παραθέτουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τους *Ahmad* και *Mugdadi* (2004) σχετικά με την μελέτη του ελέγχου έναντι της DMRL εναλλακτικής. Θεωρώντας ότι οι ροπές κάθε τάξεως υπάρχουν και είναι πεπερασμένες διατύπωσαν τα εξής.

**Πρόταση 3.7.3.** Αν η κατανομή  $F$  έχει την ιδιότητα DMRL τότε για κάθε ακέραιο  $r \geq 0$  ισχύει

$$(r+1)E\left[X_1\{\min(X_1, X_2)\}^r\right] \geq (r+2)E\{\min(X_1, X_2)\}^{r+1}$$

**Πόρισμα 3.7.1.** Αν  $r = 0$  τότε

$$\mu \geq 2E\{\min(X_1, X_2)\}$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 3.7.1 μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την

$$\delta^{(3)} = \frac{1}{\mu} \left\{ \mu - 2E[\min(X_1, X_2)] \right\}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι αναλλοίωτη κλίμακας και ισούται με μηδέν κάτω από την μηδενική υπόθεση ενώ είναι αυστηρά θετική κάτω από την εναλλακτική  $H_1$ .

Εκτιμάται από τη σχέση

$$\hat{\delta}^{(3)} = \frac{1}{\bar{X}} \left\{ \bar{X} - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \min(X_i, X_j) \right\}$$

**Πρόταση 3.7.4.** Για  $n \rightarrow \infty$  η ποσότητα  $\sqrt{n}(\hat{\delta}^{(3)} - \delta^{(3)})$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέσο ίσο με μηδέν και διακύμανση ίση με

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \text{var} \left\{ X_1 + \mu - 4X_1 \bar{F}(X_1) - 4 \int_0^{X_1} u dF(u) \right\}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\delta^{(3)} = 0$  και σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση ισούται με

$$\sigma_o^2 = \frac{1}{3}$$

Για να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \mu,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην DMRL οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική,}$$

θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύει  $\delta^{(3)} = 0$  οπότε

$$\sqrt{3n} \hat{\delta}^{(3)} \sim N(0,1)$$

2. Αν  $\sqrt{3n} \hat{\delta}^{(3)} < Z_{1-\alpha}$  τότε δεν απορρίπτω την μηδενική υπόθεση δηλαδή η  $F$  ανήκει στην οικογένεια εκθετικών κατανομών.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PAE$ ) και θα την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη ποσότητα  $PAE$  γνωστών από την βιβλιογραφία ελέγχων προκειμένου να πάρουμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman ( $PARE$ ). Γενικά, η ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman για το  $\delta^{(3)}$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$PAE(\delta^{(3)}(\theta)) = \left\{ \frac{d}{d\theta} \delta^{(3)}(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow \theta_0} \right\} / \sigma_{0,\alpha}$$

Θέτοντας όπου

$$\delta^{(3)} = 1 - \frac{2\omega_\theta}{\mu_\theta}$$

παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$PAE(\delta^{(3)}(\theta_0)) = -2(\omega'_{\theta_0} - \mu'_{\theta_0} \omega_{\theta_0}) / \left( \frac{1}{3} \right)^{1/2} = \sqrt{12}(\omega'_{\theta_0} - \mu'_{\theta_0} \omega_{\theta_0})$$

όπου  $\mu_\theta = E_\theta(X_1)$  και  $\omega_\theta = E_\theta(\min(X_1, X_2))$ .

Αν πέρα από την αύξηση της ισχύος του ελέγχου ενδιαφερόμαστε να αυξήσουμε και την αποτελεσματικότητά του, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο ασυμφωνίας με την μηδενική υπόθεση  $H_0$  υπέρ της εναλλακτικής  $H_1$  την ποσότητα  $\delta_r^{(3)}$  η οποία εκτιμάται από την  $\hat{\delta}_r^{(3)}$

$$\hat{\delta}_r^{(3)} = \frac{1}{\bar{X}^{r+1}} \left[ \frac{r+1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} X_i [\min(X_i, X_j)]^r - \frac{r+2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \{\min(X_i, X_j)\}^{r+1} \right]$$

ΓΑΝΕΣΤΗΜΟ ΓΕΡΑΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

#### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις κυριότερες στατιστικές μεθόδους που έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι μια κατανομή είναι εκθετική έναντι της εναλλακτικής ότι ανήκει σε κάποια μη παραμετρική οικογένεια κατανομών όπως για παράδειγμα στην IFR, IFRA, NBU, DMRL κλπ. Στο κεφάλαιο αυτό, θα προχωρήσουμε ένα βήμα πιο πέρα περνώντας από το θεωρητικό κομμάτι στο πρακτικό. Πρωταρχικός μας στόχος είναι να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση ισχύος της διαδικασίας ελέγχου. Χρησιμοποιώντας το στατιστικό πρόγραμμα *Mathematica*, θα παράγουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους 50 και 100 από γνωστές στη θεωρία αξιοπιστίας κατανομές (π.χ Weibull, Gamma, LFR κλπ) και στη συνέχεια επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία 5000 φορές θα πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα κάλυψης του ελέγχου. Τέλος, θα μας ενδιέφερε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας που εξετάζουμε με άλλες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία οπότε θα εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman. Οι εντολές που θα χρησιμοποιήσουμε σε κάθε περίπτωση δίνονται στο παράρτημα.

#### 4.2 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ IFR ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ

Όπως έχουμε αναφέρει αναλυτικά στην παράγραφο 3.2, προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta \text{ } F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \lambda = 1,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta \text{ } F \text{ ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική}$$

θα πρέπει να εκτιμήσουμε την στατιστική ελέγχου

$$\hat{\Delta}_{r+2}^{(1)} = \frac{1}{\bar{X}^{2r+2}} \left( \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left\{ \min(X_i^{2r+2}, X_j^{2r+2}) - \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} X_i^{r+2} X_j^{r+2} \right\} \right) \quad (4.1)$$

και να εξετάσουμε αν  $\frac{\sqrt{n} \hat{\Delta}_{r+2}^{(1)}}{\sigma_0} > Z_{1-\alpha}$  οπότε και απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Προκειμένου να βρούμε την πιθανότητα ορθής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης και να εξετάσουμε αν και κατά πόσο εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο  $\theta$ , εκτελέσαμε ένα πείραμα χρησιμοποιώντας τις κατανομές Gamma, LFR και Weibull με παράμετρο κλίμακας ίση με τη μονάδα και παράμετρο μορφής ίση με  $\theta$ . Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι  $r=0$ . Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα..

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1**

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΙΣΧΥΟΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ  $\hat{\Delta}_2^{(1)}$  ΓΙΑ ΤΟΝ IFR ΕΛΕΓΧΟ ΚΑΤΑ ΔΗΜΑΔ

Distribution	a=5%		a=10%	
	n=50	n=100	n=50	n=100
Gamma( 1.5, 1)	0.2048	0.3478	0.3282	0.5020
Gamma(2.0, 1)	0.4772	0.7746	0.6492	0.8766
Gamma(2.5, 1)	0.7578	0.9674	0.8698	0.9898
LFR (1.5, 1)	0.5928	0.8928	0.7552	0.9548
LFR (2.0, 1)	0.6610	0.9406	0.8074	0.9760
LFR (2.5, 1)	0.7184	0.9540	0.8566	0.9900
Weibull(1.5, 1)	0.6814	0.9436	0.8186	0.9806
Weibull(2.0, 1)	0.9978	1.0000	0.9996	1.0000
Weibull(2.5, 1)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η (εμπειρική) συνάρτηση ισχύος του ελέγχου εξαρτάται από την παράμετρο  $\theta$ . Η πιθανότητα αυτή αυξάνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\theta$  όπως επίσης και στην περίπτωση που αυξηθούν είτε το μέγεθος του δείγματος είτε το επίπεδο σημαντικότητας είτε και τα δυο. Αυτό ήταν αναμενόμενο αν αναλογιστεί κανείς ότι όταν μεγαλώνει το επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , μικραίνει η πιθανότητα λανθασμένης αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης (δηλαδή το  $\beta$ ) και η ισχύς του ελέγχου μεγαλώνει. Στην περίπτωση που το  $\alpha$  παραμένει σταθερό, αυξομειώνοντας το μέγεθος του δείγματος πετυχαίνουμε αντίστοιχα και αυξομείωση της ισχύος του ελέγχου.

Αναλυτικότερα, στην περίπτωση της κατανομής Weibull, παρατηρούμε ότι όταν η παράμετρος είναι  $\theta=1.5$  το μέγεθος του δείγματος παίζει δραστικό ρόλο στην

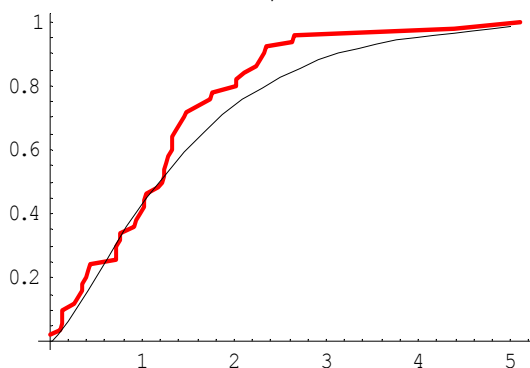
αποτελεσματικότητα του ελέγχου αφού η πιθανότητα κάλυψης από 68,14% που είναι για μέγεθος δείγματος ίσο με 50 γίνεται 94,36% όταν το μέγεθος διπλασιαστεί. Για  $\theta \geq 2.0$ , η πιθανότητα να απορρίψουμε σωστά την μηδενική υπόθεση είναι πολύ μεγάλη προσεγγίζοντας τη μονάδα. Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη του επιπέδου σημαντικότητας και του μεγέθους του δείγματος (όταν  $\theta \geq 2$ ). Αυτό συνεπάγεται την προτίμηση της στατιστικής συνάρτησης  $\hat{\Delta}_2^{(1)}$  στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε αν κάποια δεδομένα προέρχονται από την εκθετική κατανομή ή την κατανομή Weibull.

Όσον αφορά την κατανομή Gamma, παρατηρούμε ότι για  $\theta=1.5$  η πιθανότητα ορθής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης βρίσκεται κάτω του 50% οπότε στην περίπτωση αυτή τα αποτελέσματα που μας δίνει ο έλεγχος αυτός δεν είναι τόσο καλά, άρα θα ήταν καλύτερο να αποφύγουμε να τον χρησιμοποιήσουμε. Για  $\theta=2$  το μέγεθος του δείγματος παίζει σημαντικό ρόλο αφού για  $n=50$  και σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, η συνάρτηση ισχύος εκτιμάται γύρω στο 48% ενώ όταν το μέγεθος του δείγματος διπλασιαστεί, η πιθανότητα αυτή προσεγγίζει το 77%.

Θα μπορούσαμε να πάρουμε μια εικόνα για την εμπειρική συνάρτηση κατανομής του τυχαίου δείγματος που παρήγαμε και να την συγκρίνουμε με την συνάρτηση κατανομής της κατανομής Gamma προκειμένου να δούμε την ποιότητα της προσέγγισης αυτής. Έτσι παίρνουμε τα ακόλουθα γραφήματα όπου η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής του παραγόμενου τυχαίου δείγματος και η μαύρη στην συνάρτηση κατανομής της κατανομής Gamma.

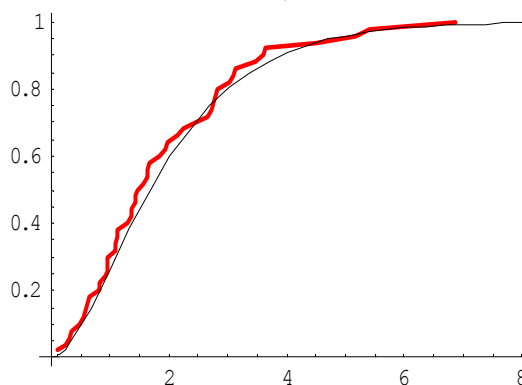
ΣΧΗΜΑ 4.1

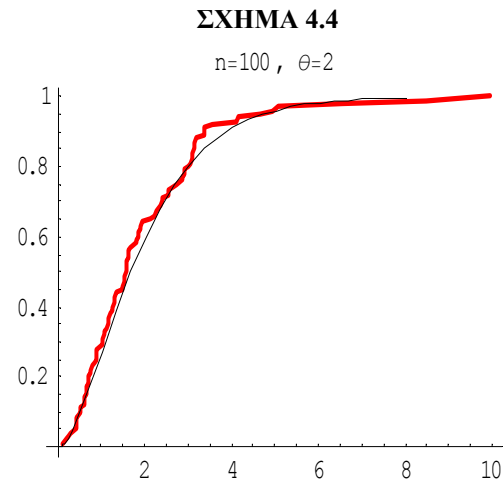
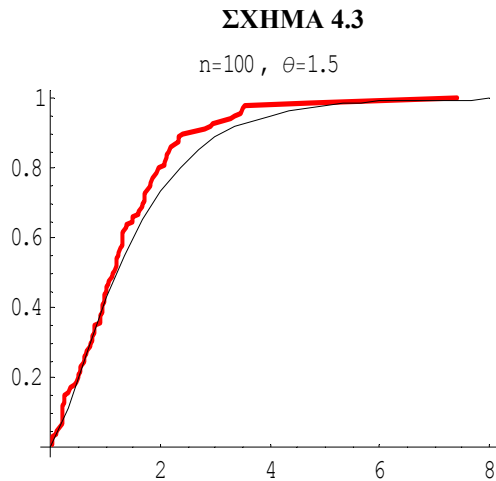
$n=50, \theta=1.5$



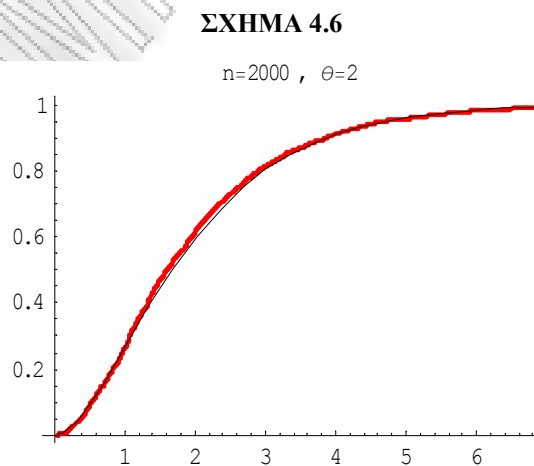
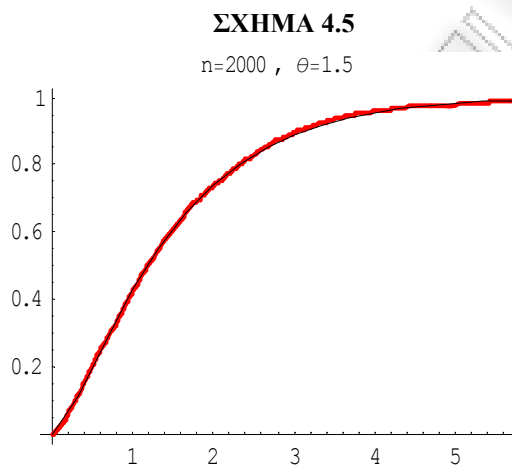
ΣΧΗΜΑ 4.2

$n=50, \theta=2$





Παρατηρούμε ότι για  $\theta=1.5$  και για μικρό μέγεθος δείγματος ( $n=50$  ή  $100$ ) η εμπειρική συνάρτηση κατανομής του δείγματος δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής Gamma. Καθώς όμως το  $\theta$  μεγαλώνει, η προσέγγιση γίνεται καλύτερη. Πιο ξεκάθαρη εικόνα θα έχουμε αν πάρουμε μεγαλύτερο δείγμα π.χ 2000 παρατηρήσεων.



Μια άλλη προσέγγιση σχετικά με τη διεξαγωγή του ελέγχου

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \lambda = 1,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην IFR οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική}$$

είναι μέσω της εκτίμησης της πιθανότητας σφάλματος τύπου I. Θα παράγουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους 20, 50 και 100 από την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda=1$  και στη συνέχεια θα

εκτιμήσουμε το  $\alpha$  για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2**

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΥΠΟΥ I ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (IFR ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

$\theta=1$	$\alpha=5\%$
	Estimated $\alpha$
$n=20$	0.0422 (0.0366, 0.0477)
$n=50$	0.0436 (0.0379, 0.0493)
$n=100$	0.0464 (0.0405, 0.0522)

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης φαίνεται να εξαρτάται από το μέγεθος του παραγόμενου τυχαίου δείγματος. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η τιμή του  $n$ , τόσο η (εμπειρική) εκτίμηση για το  $\alpha$  πλησιάζει τη θεωρητική τιμή του 5%, χωρίς όμως (για τις συγκεκριμένες τιμές του  $n$ ) να την υπερβαίνει. Αυτό σημαίνει στην πράξη ότι ο συγκεκριμένη μεθοδολογία ελέγχου έχει την τάση να απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση λιγότερες φορές απ’ ότι θα αναμενόταν, άρα τουλάχιστον για μικρές τιμές του  $n$  ο συγκεκριμένος έλεγχος είναι κάπως συντηρητικός.

**4.3 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ DMRL ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ**

Όσον αφορά τον έλεγχο

$$H_0 : \eta F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \lambda = 1,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta F \text{ ανήκει στην DMRL οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική}$$

θα πρέπει να εκτιμήσουμε την στατιστική ελέγχου

$$\hat{\delta}_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left[ \min(X_i^2, X_j^2) - \frac{1}{2} X_i X_j \right].$$

Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τη στατιστική συνάρτηση του ελέγχου έναντι της IFR εναλλακτικής η οποία δίνεται από τη σχέση (4.1) όταν  $r=0$ , οπότε θα πάρουμε τα ίδια σχεδόν αποτελέσματα όσον αφορά την συνάρτηση ισχύος του ελέγχου.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πόσο συχνά απορρίπτουμε (εσφαλμένα) τη μηδενική υπόθεση καθώς μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος για τον έλεγχο όπου η εναλλακτική

υπόθεση είναι η DMRL. Αυτό θα γίνει μέσω της εκτίμησης της πιθανότητας του σφάλματος τύπου Ι. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3**

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΥΠΟΥ Ι ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (DMRL ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

$\theta=1$	$\alpha=5\%$
	Estimated $\alpha$
$n=20$	0.0436 (0.0379, 0.0492)
$n=50$	0.0444 (0.0387, 0.0501)
$n=100$	0.0456 (0.0405, 0.0514)

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, το  $\alpha$  αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η τιμή του  $n$  χωρίς όμως να ξεπερνάει την τιμή του επιπέδου σημαντικότητας (5%). Για  $n=20$  η πιθανότητα αυτή εκτιμάται γύρω στο 4.4% και είναι σχεδόν βέβαιο μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας, δεδομένου ότι ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το (0.0379, 0.0492). Σε αντίθεση με την IFR περίπτωση, εδώ για  $n \geq 50$  δε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα αν το  $\alpha$  βρίσκεται κάτω ή πάνω από το ε.σ. Αυτό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος αποδίδει κάπως καλύτερα (είναι λιγότερο συντηρητικός) σε σχέση με τον προηγούμενο αφού απαιτείται μικρότερο μέγεθος δείγματος για να πιάσουμε το θεωρητικό επίπεδο σημαντικότητας (5%).

**4.4 ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ IFRA ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ**

Σύμφωνα με τον Bassiouny (2003) προκειμένου να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : \eta \text{ } F \text{ είναι η εκθετική με μέσο } \lambda = 1,$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \eta \text{ } F \text{ ανήκει στην IFRA οικογένεια κατανομών και δεν είναι εκθετική}$$

θα πρέπει να εκτιμήσουμε την στατιστική ελέγχου

$$\hat{\Delta}_{r+1} = \frac{1}{X^{r+1}} \left( \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \left\{ \min(X_i^{r+1}, X_j^{r+1}) - \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} X_i^{r+1} \right\} \right)$$

και να εξετάσουμε αν  $\frac{\sqrt{n}\hat{\Delta}_{r+1}}{\sigma_0} < Z_{1-\alpha}$  οπότε και απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Σκοπός μας είναι να βρούμε την πιθανότητα ορθής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Θα πάρουμε δείγμα μεγέθους 50 και 100 από τις κατανομές Gamma, LFR και Weibull με παράμετρο κλίμακας ίση με τη μονάδα και παράμετρο μορφής ίση με  $\theta$  και αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία 5000 φορές θα ελέγξουμε αν η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου εξαρτάται από την παράμετρο  $\theta$ .

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και για  $r=0$  και  $r=1$  προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4**

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΙΣΧΥΟΣ ΤΩΝ  $\hat{\Delta}_1$  ΚΑΙ  $\hat{\Delta}_2$  ΓΙΑ ΤΟΝ IFRA ΕΛΕΓΧΟ ΚΑΤΑ BASSIOUNY (ε.σ 5%)

Test	$\theta$	Weibull		LFR		Gamma	
		n=50	n=100	n=50	n=100	n=50	n=100
$\hat{\Delta}_1$	1.5	0.9192	0.9938	0.7114	0.9022	0.5838	0.7898
	2.0	0.9996	1.0000	0.7640	0.9378	0.8974	0.9896
	2.5	1.0000	1.0000	0.8194	0.9592	0.9820	1.0000
$\hat{\Delta}_2$	1.5	0.7248	0.9598	0.5512	0.8564	0.2762	0.5000
	2.0	0.9948	1.0000	0.6116	0.9174	0.5978	0.8758
	2.5	1.0000	1.0000	0.6764	0.9356	0.8238	0.9784

Είναι εμφανές ότι η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου εξαρτάται από την παράμετρο  $\theta$ . Συγκεκριμένα, αυξάνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\theta$  καθώς επίσης και στην περίπτωση που αυξηθεί το μέγεθος του δείγματος.

Αναλυτικότερα, στην περίπτωση της κατανομής Weibull, ο έλεγχος δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα είτε χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση  $\hat{\Delta}_1$  είτε την  $\hat{\Delta}_2$ . Όσον αφορά την LFR οικογένεια κατανομών, η  $\hat{\Delta}_1$  δίνει ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα ως προς την αποτελεσματικότητα του ελέγχου χωρίς αυτό να σημαίνει ότι και η χρησιμοποίηση της δεύτερης στατιστικής συνάρτησης δεν θα οδηγήσει σε στατιστικώς σημαντικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση της κατανομής Gamma και συγκεκριμένα για  $\theta=1.5$  και για την στατιστική συνάρτηση  $\hat{\Delta}_2$ , η εμπειρική συνάρτηση ισχύος βρίσκεται κάτω του 50% δηλαδή τα αποτελέσματα που μας δίνει ο έλεγχος αυτός δεν είναι τόσο καλά. Η εικόνα αυτή αντιστρέφεται για τιμές της παραμέτρου  $\theta \geq 2$ . Μάλιστα, αν χρησιμοποιήσουμε για τον έλεγχό μας την  $\hat{\Delta}_1$  τότε η πιθανότητα να απορρίψουμε σωστά τη μηδενική υπόθεση είναι

πολύ μεγάλη προσεγγίζοντας τη μονάδα. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι αν θέλαμε να εξετάσουμε αν κάποια δεδομένα προέρχονται από την εκθετική κατανομή ή την κατανομή Gamma, θα προτιμούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την στατιστική συνάρτηση  $\hat{\Delta}_1$ .

Θα μπορούσαμε, επίσης, να εκτιμήσουμε την πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5**

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΥΠΟΥ I ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (IFRA ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

$\theta=1$	$\alpha=5\%$	
	$\hat{\Delta}_1$	$\hat{\Delta}_2$
	Estimated $\alpha$	Estimated $\alpha$
<b>n=20</b>	0.1122 (0.1034, 0.1209)	0.0272 (0.0227, 0.0317)
<b>n=50</b>	0.1158 (0.1069, 0.1246)	0.0480 (0.0420, 0.0539)
<b>n=100</b>	0.1206 (0.1116, 0.1296)	0.0798 (0.0723, 0.0873)

Στην περίπτωση της στατιστικής ελέγχου  $\hat{\Delta}_1$  το εκτιμώμενο σφάλμα τύπου I είναι μεγαλύτερο του 5% για όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη του δείγματος. Αυτό δείχνει ξεκάθαρα ότι, χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση  $\hat{\Delta}_1$ , ο έλεγχος έχει την τάση να καταλήγει σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης πολύ συχνότερα από ότι θα αναμενόταν. Μάλιστα, εμπειρικά βρίσκουμε ότι η πιθανότητα απόρριψης αυξάνεται (απομακρύνεται από την τιμή 5%) καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, κάτι που δεν είναι ικανοποιητικό.

Στην περίπτωση της στατιστικής  $\hat{\Delta}_2$  για  $n=20$  το  $\alpha$  είναι πολύ μικρότερο του 5% οπότε δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση όσο συχνά θα αναμενόταν. Καθώς όμως αυξάνεται το  $n$ , αυξάνεται και πάλι η πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Το σφάλμα τύπου I φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από το μέγεθος του δείγματος το οποίο χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση. Έτσι, βρίσκουμε ότι ενώ για  $n=50$  η εμπειρική (μέσω προσομοίωσης) τιμή του  $\alpha$  είναι πολύ κοντά στη θεωρητική τιμή, για μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος υπάρχει μια τάση να απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση πολύ συχνότερα από ότι θα έπρεπε.



Για να αξιολογήσουμε κατά πόσο η οικογένεια των στατιστικών ελέγχου που εισήγαμε για ένα συγκεκριμένο έλεγχο είναι καλή συγκριτικά με άλλες που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, θα χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτικά σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman (*PARE*). Αρχικά, λοιπόν, θα εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα του Pitman (*PAE*) του υπό εξέταση ελέγχου και στη συνέχεια, μέσω της λήψης αναλογιών, θα την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη ποσότητα *PAE* γνωστών από την βιβλιογραφία ελέγχων ώστε να λάβουμε την ζητούμενη ποσότητα *PARE*. Στο παρόν κεφάλαιο θα περιοριστούμε στον υπολογισμό της ποσότητας *PAE* για τον έλεγχο έναντι της IFRA εναλλακτικής όπως μελετήθηκε από τον Bassiouny.

Η ποσότητα *PAE* για την οικογένεια στατιστικών ελέγχου  $\hat{\Delta}_{r+1}$  για  $r=0$  και  $r=1$  δίνεται στον παρακάτω πίνακα

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6**

Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ *PAE* ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ  $\hat{\Delta}_{r+1}$  ΓΙΑ ΤΟΝ IFRA ΕΛΕΓΧΟ ΚΑΤΑ EL-BASSIOUNY

$\hat{\Delta}_{r+1}$	Alternative Distributions		
	Weibull	LFR	Makeham
$r=0, \Delta_1$	1.447	0.750	0.083
$r=1, \Delta_2$	0.840	0.980	0.056

(El-Bassiouny (2003))

Ως σημείο αναφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο που έχει προταθεί από τον Ahmad (1994) ο οποίος βασίζεται στην στατιστική έλεγχο  $J(F_n, a, k)$ . Η επιλογή αυτή έγινε με γνώμονα τη σχετικά υψηλή αποτελεσματικότητα που παρουσιάζει ο έλεγχος αυτός συγκριτικά με άλλους που έχουν προταθεί για την περίπτωση αυτή.

Η ποσότητα  $J(F_n, a, k)$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$J(F_n; \alpha, k) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^k - \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \bar{F}(x_1 + x_2 + \dots + x_k) dF(\alpha x_1) dF(\alpha x_2) \dots dF(\alpha x_k)$$

για  $0 < \alpha < 1$  και  $k \geq 1$ .

Σκοπός είναι να εκτιμήσουμε τις τιμές εκείνες των  $\alpha$  και  $k$  για τις οποίες επιτυγχάνουμε τη μέγιστη αποτελεσματικότητα του ελέγχου. Η σχετική αποτελεσματικότητα του Pitman για τις κατανομές Weibull, LFR, και Makeham δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις.

i. Για την κατανομή Weibull

$$PAE(Weibull) = \left\{ -\frac{k}{(a+1)} \left( \frac{a}{a+1} \right)^k \left[ \sum_{i=2}^k \frac{1}{i} - \ln a \right] / \sigma_0(a; k) \right\}$$

ii. Για την κατανομή LFR

$$PAE(LFR) = -[k(k+1-2a)/2a(a+1)] / (a/(a+1))^{k+1} / \sigma_0(a; k)$$

iii. Για την κατανομή Makeham.

$$PAE(Makeham) = -\left\{ \left( \frac{a}{a+1} \right)^k \frac{k-2a-1}{2a+1} - \left( \frac{a}{a+2} \right)^k \right\} / \sigma_0(a; k)$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma_0(a; k) = & \left( \frac{a}{a+1} \right)^k \left\{ 2 + 2k \left( \frac{a^2}{a^2+a+1} \right)^k + \frac{k^2 a^{a-1}}{(a+1)^{k-2} (a+2)} \right\} \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^k \binom{2i-2}{i-1} \frac{a^{2i-2}}{(2a+1)^{2i-1}} + 2 \sum_{i < j} \binom{i+j-2}{i-1} \frac{a^{i+j-2}}{(2a+1)^{i+j-1}} \right\} \quad \text{για } k \geq 2 \\ & - 1 - \left\{ (k+1)^2 \left( \frac{a}{a+1} \right)^{2k} \right\} \end{aligned}$$

και

$$\sigma_0(a; 1) = 1 + \frac{a}{a+2} + \frac{1}{2a+1} + \frac{2(1-a)}{a+1} - \frac{2a}{a^2+a+1} - \frac{4}{(a+1)^2} \quad \text{για } k=1.$$

Για την κατανομή Weibull η μέγιστη αποτελεσματικότητα του ελέγχου επιτυγχάνεται για  $\alpha=0.40$  και  $k=3$  και ισούται με 1.276324, για την κατανομή LFR ισούται με 0.9095 για  $\alpha=0.40$  και  $k=4$  ενώ για την κατανομή Makeham η μέγιστη αποτελεσματικότητα επιτυγχάνεται για  $\alpha=0.99$  και  $k=1$  και η τιμή αυτής είναι ίση με 0.279167.

Διαιρώντας τις τιμές PAE του πίνακα 4.5 με τις προαναφερθείσες τιμές παίρνουμε την ζητούμενη ποσότητα PARE.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.7**

Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ PARE ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ  $\hat{\Delta}_{r+1}$  ΓΙΑ ΤΟΝ IFRA ΕΛΕΓΧΟ ΚΑΤΑ BASSIOUNY

$\hat{\Delta}_{r+1}$	Alternative Distributions		
	Weibull	LFR	Makeham
$r=0, \Delta_1$	1.134	0.820	0.297
$r=1, \Delta_2$	0.660	1.080	0.200

Παρατηρούμε ότι για  $r=0$  και  $r=1$ , η οικογένεια στατιστικών ελέγχου που έχει προταθεί από τον Bassiouny είναι καλύτερη από αυτή του Ahmad όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι η κατανομή Weibull ή η LFR αντίστοιχα. Ωστόσο, ο έλεγχος του Bassiouny υστερεί του ελέγχου του Ahmad στην περίπτωση της κατανομής Makeham όπου η ποσότητα PARE είναι πολύ μικρότερη της μονάδος για κάθε τιμή του  $r$ . Σε κάθε περίπτωση, το ζητούμενο είναι να έχουμε την μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα του ελέγχου. Αυτό συνδέεται άμεσα με την τιμή του  $r$ . Η επιλογή του  $r$  εξαρτάται κάθε φορά από την εναλλακτική υπόθεση. Αν υποψιαζόμαστε ότι η εναλλακτική υπόθεση αφορά την κατανομή Weibull τότε θέτουμε  $r=0$  ενώ στην περίπτωση της κατανομής LFR θεωρούμε  $r=1$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΕΡΠΑΑ

## ΕΝΤΟΛΕΣ ΣΤΟ Mathematica 5.0

Στη συνέχεια δίνονται οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων που περιέχονται στην διπλωματική εργασία.

- ΣΧΗΜΑ 1.1

---

```
F[t_] = Which[(0 ≤ t) && (t ≤ 2), 1 - Exp[-10 t + 2 t^2],
  (2 ≤ t) && (t ≤ 3), 1 - Exp[-8 - 2 t],
  3 ≤ t, 1 - Exp[-13 - 0.0625 (t - 1)^4]];
Plot[F[t], {t, 0, 3}, PlotRange → {0, 1}, AxesLabel → {"t", "F(t)"}]
```

- ΣΧΗΜΑ 1.2

---

```
f[t_] = 10 - 4 t;
h[t_] = 2;
g[t_] = (t - 1)^3 / 4;
p1 = Plot[f[t], {t, 0, 2}, AxesLabel → {"t", "λ(t)"}, AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity];
p2 = Plot[h[t], {t, 2, 3}, AxesLabel → {"t", "λ(t)"}, AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity];
p3 = Plot[g[t], {t, 3, 6}, AxesLabel → {"t", "λ(t)"}, AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity];
Show[p1, p2, p3, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesOrigin → {0, 0}]
```

- ΣΧΗΜΑ 1.3

---

```
f[t_] = 1 + t^2;
g[t_] = 30 / t;
p1 = Plot[f[t], {t, 0, 3}, AxesLabel → {"t", "λ(t)"}, AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity];
p2 = Plot[g[t], {t, 3, 15}, AxesLabel → {"t", "λ(t)"}, AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction → Identity];
Show[p1, p2, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesOrigin → {0, 0}]
```

- ΣΧΗΜΑ 1.4

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της εκθετικής κατανομής.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
<< Graphics`Legend`
λ1[t_] = 1; λ2[t_] = 2; λ3[t_] = 3;
f1 = ExponentialDistribution[1];
f2 = ExponentialDistribution[2];
f3 = ExponentialDistribution[3];
Plot[{λ1[t], λ2[t], λ3[t]}, {t, 0, 1}, AxesLabel → {t, "λ(t)"},
  Ticks → {Automatic, {0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3}},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.017]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.017]},
  {RGBColor[0, 0, 0.5], Thickness[0.017]}}, PlotLegend → {"λ1=1", "λ2=2", "λ3=3"}, LegendPosition → {-1, -1},
  LegendSize → {0.5, 0.75}]
```

- Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της εκθετικής κατανομής.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions` ;
<< Graphics`Legend`
λ1[t_] = 1; λ2[t_] = 2; λ3[t_] = 3;
f1 = ExponentialDistribution[1];
f2 = ExponentialDistribution[2];
f3 = ExponentialDistribution[3];
Plot[{(1/λ1[t]) PDF[f1, t], (1/λ2[t]) PDF[f2, t], (1/λ3[t]) PDF[f3, t]}, {t, 0, 3}, AxesLabel → {t, "R(t)"},
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0088]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0088]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0088]}}, PlotLegend → {"λ1=1", "λ2=2", "λ3=3"}, LegendPosition → {-1, -0.9},
LegendSize → {0.4, 0.5}]
```

### • ΣΧΗΜΑ 1.5

- Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Weibull.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions` ;
<< Graphics`Legend`
α1 = 0.5; α2 = 1; α3 = 1.5; α4 = 2;
l1 = α1 * t^(α1 - 1);
l2 = α2 * t^(α2 - 1);
l3 = α3 * t^(α3 - 1);
l4 = α4 * t^(α4 - 1);
Plot[{l1, l2, l3, l4}, {t, 0, 2}, AxesLabel → {t, "λ(t)"},
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0087]}},
PlotLegend → {"α1=0.5", "α2=1", "α3=1.5", "α4=2"}, LegendPosition → {-1, -1.05}, LegendSize → {0.5, 0.5}]
```

- Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Weibull.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions` ;
<< Graphics`Legend`
α1 = 0.5; α2 = 1; α3 = 1.5; α4 = 2;
R1 = Exp[-t^α1];
R2 = Exp[-t^α2];
R3 = Exp[-t^α3];
R4 = Exp[-t^α4];
Plot[{R1, R2, R3, R4}, {t, 0, 2}, AxesLabel → {t, "R(t)"},
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0087]}},
PlotLegend → {"α1=0.5", "α2=1", "α3=1.5", "α4=2"}, LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.5, 0.5}]
```



- ΣΧΗΜΑ 1.6

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Rayleigh.

```
<< Graphics`Legend`
k1 = 3; k2 = 10; k3 = 15; k4 = 20;
l1 = k1 * t;
l2 = k2 * t;
l3 = k3 * t;
l4 = k4 * t;
Plot[{l1, l2, l3, l4}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0087]}},
PlotLegend -> {"k1=3", "k2=10", "k3=15", "k4=20"}, LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.5}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Rayleigh.

```
<< Graphics`Legend`
k1 = 3; k2 = 10; k3 = 15; k4 = 20;
R1 = Exp[-k1 * (t^2) / 2];
R2 = Exp[-k2 * (t^2) / 2];
R3 = Exp[-k3 * (t^2) / 2];
R4 = Exp[-k4 * (t^2) / 2];
Plot[{R1, R2, R3, R4}, {t, 0, 2}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.01]}}, PlotRange -> {0, 1},
PlotLegend -> {"k1=3", "k2=10", "k3=15", "k4=20"}, LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.5}]
```

- ΣΧΗΜΑ 1.7

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Gamma.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Graphics`Legend`
α1 = 0.5; α2 = 1; α3 = 1.5; α4 = 2;
l1 = (1 / Gamma[α1, 2 t]) * t^(α1 - 1) * Exp[-2 t];
l2 = (1 / Gamma[α2, 2 t]) * t^(α2 - 1) * Exp[-2 t];
l3 = (1 / Gamma[α3, 2 t]) * t^(α3 - 1) * Exp[-2 t];
l4 = (1 / Gamma[α4, 2 t]) * t^(α4 - 1) * Exp[-2 t];
Plot[{l1, l2, l3, l4}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0087]}},
PlotLegend -> {"α1=0.5", "α2=1", "α3=1.5", "α4=2"}, LegendPosition -> {-1, -1.01}, LegendSize -> {0.5, 0.5}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Gamma.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;  
<< Graphics`Legend`  
α1 = 0.5; α2 = 1; α3 = 1.5; α4 = 2;  
R1 = Gamma[α1, 2 t] / Gamma[α1];  
R2 = Gamma[α2, 2 t] / Gamma[α2];  
R3 = Gamma[α3, 2 t] / Gamma[α3];  
R4 = Gamma[α4, 2 t] / Gamma[α4];  
Plot[{R1, R2, R3, R4}, {t, 0, 3}, AxesLabel → {t, "R(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},  
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0087]}},  
PlotLegend → {"α1=0.5", "α2=1", "α3=1.5", "α4=2"}, LegendPosition → {-1.1, -0.9}, LegendSize → {0.5, 0.5}]
```

### • ΣΧΗΜΑ 1.8

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της περικομμένης κανονικής κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`  
μ1 = 1; μ2 = 2; μ3 = 3;  
l1 = ((1/√(2 π)) * Exp[-(t-μ1)^2 / 2]) / (1 - (1/√(2 π)) * ∫-∞t-1 Exp[-u^2 / 2] du);  
l2 = ((1/√(2 π)) * Exp[-(t-μ2)^2 / 2]) / (1 - (1/√(2 π)) * ∫-∞t-2 Exp[-u^2 / 2] du);  
l3 = ((1/√(2 π)) * Exp[-(t-μ3)^2 / 2]) / (1 - (1/√(2 π)) * ∫-∞t-3 Exp[-u^2 / 2] du);  
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 5}, AxesLabel → {t, "λ(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.009]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.009]},  
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.009]}}, PlotRange → {0, 5}, PlotLegend → {"μ1=1", "μ2=2", "μ3=3"},  
LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.4, 0.5}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της περικομμένης κανονικής κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`  
μ1 = 1; μ2 = 2; μ3 = 3;  
R1 = (1 - ((1/√(2 π)) * ∫-∞t-1 Exp[-u^2 / 2] du)) / ((1/√(2 π)) * ∫-∞1 Exp[-u^2 / 2] du);  
R2 = (1 - ((1/√(2 π)) * ∫-∞t-2 Exp[-u^2 / 2] du)) / ((1/√(2 π)) * ∫-∞2 Exp[-u^2 / 2] du);  
R3 = (1 - ((1/√(2 π)) * ∫-∞t-3 Exp[-u^2 / 2] du)) / ((1/√(2 π)) * ∫-∞3 Exp[-u^2 / 2] du);  
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 5}, AxesLabel → {t, "R(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]},  
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}}, PlotLegend → {"μ1=1", "μ2=2", "μ3=3"},  
LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.4, 0.5}]
```

---

- ΣΧΗΜΑ 1.9

---

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;  
<< Graphics`Legend`  
σ1 = 0.5; σ2 = 1; σ3 = 1.5;  
l1 = D[-Log[R1], t];  
l2 = D[-Log[R2], t];  
l3 = D[-Log[R3], t];  
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 7}, AxesLabel → {t, "λ(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]},  
{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}},  
PlotRange → {0, 0.9}, PlotLegend → {"σ1=0.5", "σ2=1", "σ3=1.5"},  
LegendPosition → {-1, -0.95}, LegendSize → {0.5, 0.4}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;  
<< Graphics`Legend`  
σ1 = 0.5; σ2 = 1; σ3 = 1.5;  
R1 = 1 - (1/√(2π)) * ∫-∞(Log[t]-1)/σ1 Exp[-(u^2)/2] du;  
R2 = 1 - (1/√(2π)) * ∫-∞(Log[t]-1)/σ2 Exp[-(u^2)/2] du;  
R3 = 1 - (1/√(2π)) * ∫-∞(Log[t]-1)/σ3 Exp[-(u^2)/2] du;  
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 7}, AxesLabel → {t, "R(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0087]},  
{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0087]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0087]}},  
PlotLegend → {"σ1=0.5", "σ2=1", "σ3=1.5"}, LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.5, 0.4}]
```

---

- ΣΧΗΜΑ 1.10

---

➤ Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της ομοιόμορφης κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`  
b1 = 1; b2 = 2;  
l1 = 1 / (b1 - t);  
l2 = 1 / (b2 - t);  
Plot[{l1, l2}, {t, 0, 3}, AxesLabel → {t, "λ(t)"}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},  
PlotLegend → {"β=1", "β=2"}, PlotRange → {0, 20}, LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.4, 0.4}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της ομοιόμορφης κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`  
a = 0; b1 = 1; b2 = 2;  
R1 = (b1 - t) / (b1 - a);  
R2 = (b2 - t) / (b2 - a);  
Plot[{R1, R2}, {t, 0, 3}, AxesLabel → {t, "R(t)"},  
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}},  
PlotLegend → {"β=1", "β=2"}, PlotRange → {0, 1}, LegendPosition → {-1, -0.9}, LegendSize → {0.4, 0.4}]
```

---

- ΣΧΗΜΑ 1.11

---

```
<< Graphics`Legend`
σ1 = 1.5; σ2 = 3; σ3 = 5; μ = 15;
l1 = (1/σ1) * (Exp[(t - μ) / σ1] / (1 + Exp[(t - μ) / σ1]));
l2 = (1/σ2) * (Exp[(t - μ) / σ2] / (1 + Exp[(t - μ) / σ2]));
l3 = (1/σ3) * (Exp[(t - μ) / σ3] / (1 + Exp[(t - μ) / σ3]));
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 30}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0088]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0088]},
  {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0088]}}, PlotLegend -> {"σ1=1.5, μ=15", "σ2=3, μ=15", "σ3=4, μ=15"},
  LegendPosition -> {-1.7, -0.9}, LegendSize -> {0.8, 0.5}]
```

---

- ΣΧΗΜΑ 1.12

---

- Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της λογαριθμολογιστικής κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`
a1 = 0.5; a2 = 2; a3 = 5; λ = 1;
l1 = (λ * a1 * t^(a1 - 1)) / (1 + λ * t^a1);
l2 = (λ * a2 * t^(a2 - 1)) / (1 + λ * t^a2);
l3 = (λ * a3 * t^(a3 - 1)) / (1 + λ * t^a3);
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 4}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 3.5}, PlotLegend -> {"a1=0.5", "a2=2", "a3=5"},
  LegendPosition -> {-1, -1.05}, LegendSize -> {0.5, 0.5}]
```

- Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της λογαριθμολογιστικής κατανομής.

```
<< Graphics`Legend`
a1 = 0.5; a2 = 2; a3 = 5; λ = 1;
R1 = 1 / (1 + λ * t^a1);
R2 = 1 / (1 + λ * t^a2);
R3 = 1 / (1 + λ * t^a3);
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 5}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 1}, PlotLegend -> {"a1=0.5", "a2=2", "a3=5"},
  LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.5}]
```

---

- ΣΧΗΜΑ 1.13

---

- Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Pareto.

```
<< Graphics`Legend`
l1 = a1 / t;
l2 = a2 / t;
l3 = a3 / t;
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 10}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 20},
  PlotLegend -> {"a1=3", "a2=5", "a3=15"}, LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.4}]
```

- Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Pareto.

```
<< Graphics`Legend`
a1 = 3; a2 = 5; a3 = 15;
R1 = (1/t) ^ a1;
R2 = (1/t) ^ a2;
R3 = (1/t) ^ a3;
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 5}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 1}, PlotLegend -> {"a1=3", "a2=5", "a3=15"},
  LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.4}]
```

#### • ΣΧΗΜΑ 1.14

- Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Gompertz.

```
<< Graphics`Legend`
l1 = λ1 * Exp[a * t];
l2 = λ2 * Exp[a * t];
l3 = λ3 * Exp[a * t];
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotRange -> {0, 50}, PlotLegend -> {"λ1=0.5", "λ2=3", "λ3=5"},
  LegendPosition -> {-1.1, -0.95}, LegendSize -> {0.5, 0.4}]
```

- Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Gompertz.

```
<< Graphics`Legend`
λ1 = 0.5; λ2 = 3; λ3 = 5; a = 1;
R1 = Exp[(λ1/a) * (1 - Exp[a * t])];
R2 = Exp[(λ2/a) * (1 - Exp[a * t])];
R3 = Exp[(λ3/a) * (1 - Exp[a * t])];
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 1}, PlotLegend -> {"λ1=0.5", "λ2=3", "λ3=5"},
  LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.4}]
```

#### • ΣΧΗΜΑ 1.15

- Για το διάγραμμα της βαθμίδας αποτυχίας της κατανομής Makeham.

```
<< Graphics`Legend`
l1 = A + λ1 * Exp[a * t];
l2 = A + λ2 * Exp[a * t];
l3 = A + λ3 * Exp[a * t];
Plot[{l1, l2, l3}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.015]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.015]},
  {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.015]}}, PlotRange -> {0, 50},
  PlotLegend -> {"λ1=0.5", "λ2=3", "λ3=5"}, LegendPosition -> {-1.1, -0.92}, LegendSize -> {0.57, 0.4}]
```

➤ Για το διάγραμμα της συνάρτησης αξιοπιστίας της κατανομής Makeham.

```
<< Graphics`Legend`
λ1 = 0.5; λ2 = 3; λ3 = 5; a = 1; A = 3;
R1 = Exp[(λ1/a) * (1 - Exp[a*t]) - A*t];
R2 = Exp[(λ2/a) * (1 - Exp[a*t]) - A*t];
R3 = Exp[(λ3/a) * (1 - Exp[a*t]) - A*t];
Plot[{R1, R2, R3}, {t, 0, 1.5}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, PlotRange -> {0, 1}, PlotLegend -> {"λ1=0.5", "λ2=3", "λ3=5"},
  LegendPosition -> {-1, -0.9}, LegendSize -> {0.5, 0.4}]
```

#### • ΣΧΗΜΑ 1.16

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
<< Graphics`Legend`
α1 = 1; α2 = 0.5; α3 = 2; b1 = 1; b2 = 0.5; b3 = 2;
R1 = 1 - ∫0t α1 * u(α1 * b1 - 1) * Exp[-uα1] / Gamma[b1] du;
R2 = 1 - ∫0t α2 * u(α2 * b1 - 1) * Exp[-uα2] / Gamma[b1] du;
R3 = 1 - ∫0t α3 * u(α3 * b1 - 1) * Exp[-uα3] / Gamma[b1] du;
R4 = 1 - ∫0t α3 * u(α3 * b2 - 1) * Exp[-uα3] / Gamma[b2] du;
R5 = 1 - ∫0t α2 * u(α2 * b3 - 1) * Exp[-uα2] / Gamma[b3] du;
Plot[{R1, R2, R3, R4, R5}, {t, 0, 5}, AxesLabel -> {t, "R(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0.16, 0.14, 0.13], Thickness[0.0089]},
    {RGBColor[1, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, LegendPosition -> {-1, -1.1}, LegendSize -> {0.99, 0.5},
  PlotLegend -> {"α=1.0, β=1.0", "α=0.5, β=1.0", "α=2.0, β=1.0", "α=2.0, β=0.5", "α=0.5, β=2.0"}]
```

#### • ΣΧΗΜΑ 1.17

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
<< Graphics`Legend`
l1 = f1 / R1;
l2 = f2 / R2;
l3 = f3 / R3;
l4 = f4 / R4;
l5 = f5 / R5;
Plot[{l1, l2, l3, l4, l5}, {t, 0, 2}, AxesLabel -> {t, "λ(t)"},
  PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0.5, 0], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0089]},
    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0089]}, {RGBColor[0.16, 0.14, 0.13], Thickness[0.0089]},
    {RGBColor[1, 0, 1], Thickness[0.0089]}}, LegendPosition -> {-1, -1.1}, LegendSize -> {0.99, 0.5},
  PlotLegend -> {"α=1.0, β=1.0", "α=0.5, β=1.0", "α=2.0, β=1.0", "α=2.0, β=0.5", "α=0.5, β=2.0"}]
```

#### • ΣΧΗΜΑ 2.2

```
g[t_] = Which[(0 ≤ t) && (t ≤ 3/2), t,
  (3/2 < t) && (t ≤ 2), (3 - t),
  t > 2, t - 1];
Plot[g[t], {t, 0, 4}]
```

- ΣΧΗΜΑ 2.3

```
f[t_] = Which[(0 ≤ t) && (t ≤ 3/2), t/2,
  (3/2 < t) && (t ≤ 2), -t/2 + 3 - 9/(4t),
  t > 2, t/2 - 1 + 7/(4t)];
Plot[f[t], {t, 0, 4}]
```

- ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

Παρακάτω δίνουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του πίνακα 4.1. Αναφέρουμε ενδεικτικά την περίπτωση όπου  $\theta=1.5$  και  $n=50$ . Αλλάζοντας τις τιμές της παραμέτρου  $\theta$  και του  $n$  παίρνουμε και τις υπόλοιπες εντολές.

➤ Για την κατανομή Gamma(1.5, 1) και  $n=50$ .

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = 50; a = 1.5; l = 1; s01 = Sqrt[2/27]; a1 = 1.64485; a2 = 1.28155; rej1 = 0; rej2 = 0; n1 = 5000;
Do[
  X = Table[Random[GammaDistribution[a, l]], {n}];
  d1 = 2/(n*(n-1)) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.5*X[[i]]*X[[j]], {i, 1, n}, {j, i+1, n}];
  d11 = d1/(Mean[X])^2;
  s1 = Sqrt[n] * d11 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  If[s1 > a2, rej2 = rej2 + 1];
  , {n1}];
N[rej1/n1]
N[rej2/n1]
```

➤ Για την κατανομή Weibull (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = 50; s01 = Sqrt[2/27]; a = 1.5; l = 1; s01 = Sqrt[2/27]; a1 = 1.645; a2 = 1.28; rej1 = 0; rej2 = 0; n1 = 5000;
Do[X = Table[Random[WeibullDistribution[a, 1^(-1/a)]], {n}];
  d1 = 2/(n*(n-1)) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.5*X[[i]]*X[[j]], {i, 1, n}, {j, i+1, n}];
  d11 = d1/(Mean[X])^2;
  s1 = Sqrt[n] * d11 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  If[s1 > a2, rej2 = rej2 + 1];
  , {n1}];
N[rej1/n1]
N[rej2/n1]
```

➤ Για την κατανομή LFR (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
n = 50; u = 1.5; s01 = Sqrt[2 / 27]; a1 = 1.64485; a2 = 1.28155; rej1 = 0; rej2 = 0; n1 = 5000;
Do[
  X = {};
  Do[r = (-1 + Sqrt[1 - 2 u * Log[Random[]]]) / u;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = 2 / (n * (n - 1)) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.5 * X[[i]] * X[[j]]
    , {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  d11 = d1 / (Mean[X])^2;
  s1 = Sqrt[n] * d11 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  If[s1 > a2, rej2 = rej2 + 1];
  , {n1}];
N[rej1 / n1]
N[rej2 / n1]
```

- ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

Παρακάτω δίνουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του πίνακα 4.2. Αναφέρουμε ενδεικτικά την περίπτωση όπου  $n=20$ . Αλλάζοντας τις τιμές του  $n$  παίρνουμε και τις υπόλοιπες εντολές.

```
n1 = 5000; n = 20; l1 = 1; s01 = Sqrt[2 / 27]; a = 1.64485; rej = 0;
Do[
  X = {};
  Do[r = -Log[Random[]] / l1;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = 2 / (n * (n - 1)) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.5 * X[[i]] * X[[j]]
    , {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  d11 = d1 / (Mean[X])^2;
  s1 = Sqrt[n] * d11 / s01;
  If[s1 > a, rej = rej + 1];
  , {n1}];
ep = N[rej / n1];
Print["p-value estimate : ", ep, " ",
  { ep - (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96, ep + (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96}];
```

- ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3

Παρακάτω δίνουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του πίνακα 4.3. Αναφέρουμε ενδεικτικά την περίπτωση όπου  $n=50$ . Αλλάζοντας τις τιμές του  $n$  παίρνουμε και τις υπόλοιπες εντολές.



```

n1 = 5000; n = 50; l1 = 1; s01 = Sqrt[2 / 27]; a = 1.645; rej = 0;
Do[
  X = {};
  Do[r = -Log[Random[]] / l1;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = 2 / (n * (n - 1)) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.5 * X[[i]] * X[[j]], {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  d11 = d1 / (Mean[X])^2;
  s1 = Sqrt[n] * d11 / s01;
  If[s1 > a, rej = rej + 1];
  , {n1}];
ep = N[rej / n1];
Print["p-value estimate : ", ep, " ",
  {ep - (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96, ep + (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96}];

```

- ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4

Παρακάτω δίνουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του πίνακα 4.4. Αναφέρουμε ενδεικτικά την περίπτωση όπου  $\theta=1.5$  και  $n=50$ . Αλλάζοντας τις τιμές του  $n$  παίρνουμε και τις υπόλοιπες εντολές.

- Για την στατιστική ελέγχου  $\hat{\Delta}_1$ 
  - Για την κατανομή Weibull (1.5, 1) και  $n=50$ .

```

<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = 50; s01 = Sqrt[0.083]; a = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.64485; n1 = 5000;
Do[X = Table[Random[WeibullDistribution[a, 1^(-1/a)]]], {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-1)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]], X[[j]]] - 0.5 * X[[i]], {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]

```

- Για την κατανομή LFR (1.5, 1) και  $n=50$ .

```

n = 50; s01 = Sqrt[0.083]; u = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.64485; n1 = 5000;
Do[
  X = {};
  Do[r = (-1 + Sqrt[1 - 2 u * Log[Random[]]]) / u;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-1)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]], X[[j]]] - 0.5 * X[[i]], {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]

```

- Για την κατανομή Gamma (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = 50; s01 = Sqrt[0.083]; a = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.645; n1 = 5000;
Do[
  X = Table[Random[GammaDistribution[a, l]], {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-1)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]], X[[j]]] - 0.5 * X[[i]], {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]
```

- Για την στατιστική ελέγχου  $\hat{\Delta}_2$

- Για την κατανομή Weibull (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
n = 50; s01 = Sqrt[0.573]; a = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.64485; n1 = 5000;
Do[X = Table[Random[WeibullDistribution[a, l^(-1/a)]], {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-2)) * (2 / (n * (n - 1))) *
    Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.25 * X[[i]]^2, {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]
```

- Για την κατανομή LFR (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
n = 50; s01 = Sqrt[0.573]; u = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.64485; n1 = 5000;
Do[
  X = {};
  Do[r = (-1 + Sqrt[1 - 2 * u * Log[Random[]]]) / u;
    AppendTo[X, r];
  , {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-2)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.25 * X[[i]]^2, {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]
```

- Για την κατανομή Gamma (1.5, 1) και  $n=50$ .

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;
n = 50; s01 = Sqrt[0.573]; a = 1.5; l = 1; rej1 = 0; a1 = 1.64485; n1 = 5000;
Do[
  X = Table[Random[GammaDistribution[a, l]], {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-2)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.25 * X[[i]]^2, {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a1, rej1 = rej1 + 1];
  , {n1}];
Print[N[rej1 / n1]]
```

- ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6

Παρακάτω δίνουμε τις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του πίνακα 4.6. Αναφέρουμε ενδεικτικά την περίπτωση όπου  $n=100$ . Αλλάζοντας τις τιμές του  $n$  παίρνουμε και τις υπόλοιπες εντολές.

- Για τη στατιστική ελέγχου  $\hat{\Delta}_1$

```
n1 = 5000; n = 100; l1 = 1; s01 = Sqrt[0.083]; a = 1.645; rej = 0;
Do[
  X = {};
  Do[r = -Log[Random[]] / l1;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-1)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]], X[[j]]] - 0.5 * X[[i]], {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a, rej = rej + 1];
  , {n1}];
ep = N[rej / n1];
Print["p-value estimate : ", ep, " ",
  { ep - (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96, ep + (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96 }];
```

- Για την στατιστική ελέγχου  $\hat{\Delta}_2$

```
n1 = 5000; n = 100; l1 = 1; s01 = Sqrt[0.573]; a = 1.645; rej = 0;
Do[
  X = {};
  Do[r = -Log[Random[]] / l1;
    AppendTo[X, r];
    , {n}];
  d1 = (Mean[X]^(-2)) * (2 / (n * (n - 1))) * Sum[Min[X[[i]]^2, X[[j]]^2] - 0.25 * X[[i]]^2, {i, 1, n}, {j, i + 1, n}];
  s1 = Sqrt[n] * d1 / s01;
  If[s1 > a, rej = rej + 1];
  , {n1}];
ep = N[rej / n1];
Print["p-value estimate : ", ep, " ",
  { ep - (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96, ep + (ep (1 - ep) / n1)^0.5 * 1.96 }];
```

- ΣΧΗΜΑ 4.1-4.6

Παρακάτω δίνουμε την εντολή που χρησιμοποιήθηκε για το σχήμα 4.1 όπου  $\theta=1.5$  και  $n=50$ . Αλλάζοντας τις τιμές του  $\theta$  και του  $n$  παίρνουμε και τα υπόλοιπα σχήματα.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`;  
<< Graphics`Graphics`;  
n = 50; a = 1.5; l = 1; X = {};  
Do[  
  X = Table[Random[GammaDistribution[a, l]], {n}];  
sr = Sort[X];  
ta = Table[{sr[[i]], N[i/n]}, {i, 1, n}];  
L = ListPlot[ta, PlotJoined -> True, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.0087]},  
  DisplayFunction -> Identity];  
p = Plot[Integrate[l^a * (x^(a - 1)) / (a - 1)! * Exp[-l * x], {x, 0, t}], {t, 0, 5},  
  DisplayFunction -> Identity];  
Show[{L, p}, AspectRatio -> 1/GoldenRatio, DisplayFunction -> $DisplayFunction,  
  PlotLabel -> "n=50,  $\theta=1.5$ "]
```

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ

**Αντζουλάκος, Δ. (2005).** Ανάλυση Επιβίωσης, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

**Κούτρας, Μάρκος Β. (2005).** Στατιστική Θεωρία Αξιοπιστίας και Έλεγχοι Χρόνων Ζωής, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

**Μπούτσικας, Μ. (2005).** Μέθοδοι Προσομοίωσης, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

## ΞΕΝΗ

**Abu-Youssef, S.E. (2002).** A moment inequality for decreasing (increasing) mean residual life distributions with hypothesis testing application, *Statistics & Probability Letters*, **57**, 171-177.

**Ahmad, I.A. (1994).** A class of statistics useful in testing increasing failure rate average and new better than used life distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **41**, 141-149.

**Ahmad, I.A. (2001).** Moment inequalities of aging families of distributions with hypotheses testing applications, *Journal of Statistical Planning & Inference*, **92**, 121-132.

**Ahmad, I.A. (2004).** A simple and more efficient new approach to life testing, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **33, No.9**, 2199-2215

**Ahmad, I.A. & Mugdadi, A.R. (2004).** Further moment inequalities of life distributions with hypothesis testing applications: the IFRA, NBUC and DMRL classes, *Journal of Statistical Planning & Inference*, **120**, 1-12.

**Anis, M.Z. & Mitra, M. (2005).** A simple test of exponentiality against NWBUE family of life distributions, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **21**, 45-53.

**Barlow, R.E., Marshall, A.W. & Proschan, F. (1963).** Properties of probability distributions with monotone hazard rate, *Annals of Mathematical Statistics*, **35**, 375-389.

**Barlow, R.E. & Proschan, F. (1975).** Statistical theory of Reliability and Life testing, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

**Bickel, P.J & Doksum, K. (1969).** Tests for monotone failure rate based on normalized spacings. *Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 1250-1260.

- Birnbaum, Z.W., Esary, J.D. & Marshall, A.W. (1966).** A stochastic characterization of wear-out for components and systems, *Annals of Mathematical Statistics*, **37, No.4**, 816-825.
- El-Bassiouny, A.H. (2003).** On testing exponentiality against IFRA alternatives, *Applied Mathematics and Computation*, **146**, 445-453.
- Ghai, G.L & Mi, J. (1999).** Mean residual life and its association with failure rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **48, No. 3**, 262-266.
- Gleser, L.J. (1989).** The Gamma distribution as a mixture of exponential distributions, *The American Statistician*, **43, No.2**, 115-117.
- Guess, F., Hollander, M. & Proschan, F. (1986).** Testing exponentiality versus a trend change in mean residual life, *The Annals of Statistics*, **14, No.4**, 1388-1398.
- Gurland, J. & Sethuraman, J. (1994).** Reversal of increasing failure rates when pooling failure data, *Technometrics*, **36**, 416-418.
- Hollander, M. & Proschan, F. (1975).** Testing whether new is better than used in expectation. *The Annals of Mathematical Statistics*, **43**, 1136-1146.
- Karlin, S. & Proschan, F. (1960).** Polya type distributions of convolutions, *The Annals of Mathematical Statistics*, **31, No.3**, 721-731.
- Klar, B. (2000).** A class of tests for exponentiality against HNBUE alternatives, *Statistics & Probability Letters*, **47**, 199-207.
- Klein, J.P. (1996).** Survival distributions and their characteristics- a contribution to the encyclopedia of biostatistics ([www.biostat.mcv.edu](http://www.biostat.mcv.edu))
- Leon, R.V. (2004).** Unit4: Location-Scale-Based Parametric Distributions, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις.
- Lomax, K.S. (1954).** Business failures: another example of the analysis of failure data, *Journal of American Statistical Association*, **49**, 847-852.
- Mitra, M. & Basu, S.K. (1994).** On a nonparametric family of life distributions and its dual, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **39**, 385-397.
- Noether, G.E. (1955).** On a theory of Pitman, *The Annals of Mathematical Statistics*, **26, No.1**, 64-68.
- Proschan, F. (1963).** Theoretical explanation of observed decreasing failure rate, *Technometrics*, **5, No.3**, 375-383.
- Rietz, H.L. (1931).** On certain properties of Markham's laws of mortality with applications, *The American Mathematical monthly*, **28, No.4**, 158-165.
- Stacy, E.W. (1962).** A generalization of the Gamma distribution, *The Annals of Mathematical Statistics*, **33, No.3**, 1187-1192.

**Wondmagehu, E.T, Navarro, J. & Hernandez, P.J. (2005).** Bathtub shaped failure rates from mixtures: a practical point of view, *IEEE, Transaction on Reliability*, **54**, No.2, 270-275.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

РАВЕЛЪТНО ТЕРАА