ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία:

Αποτίμηση Ομολόγων υπό Πιστοληπτική Ικανότητα και Στοχαστικό Επιτόκιο

Κανακοπούλου Ιωάννα

Επιβλέπων Καθηγητής: Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Επιτροπή: Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος
Καθηγητής Πιττής Νικήτας
Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Πειραιάς, 2020

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Κύριο Νικόλαο Εγγλέζο για την πολύ καλή συνεργασία που είχαμε, την υπομονή και την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του τμήματος Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής για την μεταλαμπάδευση νέων γνώσεων και ερεθισμάτων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την συμπαράσταση και την ενθάρρυνσή της για την επίτευξη των στόχων μου και όλα τα άτομα που γνώρισα και έκαναν πιο ευχάριστο τον νέο κύκλο σπουδών.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την αποτίμηση εταιρικών ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο. Η αλλαγή στην πιστοληπτική διαβάθμιση γίνεται με βάση ένα προκαθορισμένο μέτρο. Η μεταβλητότητα της εταιρείας καθορίζεται από την περιοχή της πιστοληπτικής διαβάθμισης και εξαρτάται από το επιτόκιο. Αρχικά, παραθέτουμε το θεωρητικό πλαίσιο προηγούμενων μοντέλων αποτίμησης εταιρικών ομολόγων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το νέο μοντέλο αποτίμησης, το οποίο διαφέρει από προηγούμενα μοντέλα, όπου η αλλαγή της πιστοληπτικής διαβάθμισης μπορεί να πραγματοποιηθεί μια φορά ή επιτρέπονται πολλαπλές αξιολογήσεις υπό σταθερό επιτόκιο. Έπειτα, πραγματοποιείται εμπειρική μελέτη με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB. Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε δεδομένα της αγοράς για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με βάση το μοντέλο του Merton και του αλγόριθμου Levenberg-Marquardt. Τέλος, παρουσιάζεται η αριθμητική αποτίμηση του εταιρικού ομολόγου τόσο στην περίπτωση σταθερού επιτοκίου όσο και στην περίπτωση όπου το στοχαστικό επιτόκιο περιγράφεται με το μοντέλο Vasicek. Αριθμητική ανάλυση πραγματοποιείται και για την περιγραφή του συνοριακού συνόλου που προκύπτει από την αλλαγή στην πιστοληπτική διαβάθμιση του ομολόγου.

Λέξεις Κλειδιά: αποτίμηση εταιρικών ομολόγων; αλλαγή πιστοληπτικής διαβάθμισης; στοχαστικό επιτόκιο; αριθμητική ανάλυση; μοντέλο Vasicek; συνοριακό σύνολο; εκτίμηση παραμέτρων; μοντέλο Merton; αλγόριθμος Levenberg-Marquardt; μέθοδος πεπερασμένων διαφορών;

Abstract

This thesis refers to corporate bond pricing with potential credit rating migration and stochastic interest rate. The rating change is based on a predetermined ratio. The firm’s volatility depends on potential credit rating migration and interest rate. Initially, we display the theoretical framework of previous bond pricing models. In addition, we present a new pricing model, which differs from previous models where the credit rating change is only allowed to occur once or multiple times with constant interest rate. Furthermore, an empirical study is performed using the MatLab programming language. Specifically, we make use of market data to estimate the parameters of the model, based on Merton model and Levenberg-Marquardt algorithm. Finally, we present the numerical evaluation of the corporate bond both in case of a constant interest rate and in case of a stochastic interest rate that follows the Vasicek model. A numerical analysis is performed for the description of the interface set resulting from the credit rating change of the bond, as well.

Keywords: corporate bond pricing; credit rating migration; stochastic interest rate; numerical analysis; Vasicek model; interface; parameter estimation; Merton model; Levenberg-Marquardt algorithm; finite differences method;

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα εταιρικά ομόλογα είναι χρεόγραφα που εκδίδονται από εταιρείες με σκοπό την άντληση κεφαλαίων. Αποτελούν μια εναλλακτική μορφή δανεισμού των επιχειρήσεων σε σχέση με τις παραδοσιακές μορφές χρηματοδότησης όπως είναι ο τραπεζικός δανεισμός και η άντληση κεφαλαίων μέσω του Χρηματιστηρίου. Πιο συγκεκριμένα, οι επενδυτές δανείζουν χρήματα σε επιχειρήσεις έχοντας ως στόχο την απολαβή σταθερού τόκου σε κουπόνια και της ονομαστικής αξίας του ομολόγου στην λήξη της σύμβασης. Σε αντίθεση με τα κυβερνητικά ομόλογα, τα εταιρικά εκτίθενται σε πιστωτικό κίνδυνο, εφόσον η αποπληρωμή τους εξαρτάται από την αξιοπιστία των επιχειρήσεων.

Η έρευνα για τα μοντέλα αποτίμησης ομολόγων παραμένει ένα ελκυστικό θέμα στους τομείς της χρηματοοικονομικής έρευνας. Για μία κερδοσκοπική εταιρεία η τιμή ενός ομολόγου έχει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της αξίας της εταιρείας, ιδιαίτερα για μια εταιρεία που απαιτεί μεγάλο κεφάλαιο όπως σε εταιρίες στην μεταλλευτική βιομηχανία. Η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου, δυναμικού μοντέλου αποτίμησης (όταν το επιτόκιο είναι αβέβαιο) αποτελεί μια πρόκληση για τις χρηματοπιστωτικές αγορές.

Υπάρχουν δυο κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός ομολόγου, η αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας και το επιτόκιο. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα νέο μοντέλο τιμολόγησης εταιρικών ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο. Το μοντέλο που θα αναλυθεί στη συνέχεια, διαφέρει από τα προηγούμενα μοντέλα όπου η αλλαγή της πιστοληπτικής διαβάθμισης επιτρέπεται να πραγματοποιηθεί μια φορά και το επιτόκιο είναι εξαρτώμενο από την μεταβλητότητα ή επιτρέπονται πολλαπλές αξιολογήσεις με σταθερό επιτόκιο. Στο νέο μοντέλο, η αλλαγή στην πιστοληπτική διαβάθμιση μπορεί να συμβεί πολλές φορές πριν από την λήξη του ομολόγου και το επιτόκιο θεωρείται ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό κατά την τιμολόγηση ενός μακροπρόθεσμου εταιρικού ομολόγου για τις επιχειρήσεις λόγω ορισμένων οικονομικών κύκλων. Επιπλέον, βασίζεται στην ανάλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων και προτείνει μια νέα προσέγγιση για την αξιολόγηση των αξιών των εταιρειών με μεγάλο χρέος σε διαφορετικά μακροοικονομικά και μικροοικονομικά περιβάλλοντα. Παρέχει επίσης επιπλέον ποιοτικές πληροφορίες για επενδυτές ομολόγων όταν επενδύουν σε εταιρικά ομόλογα.

1.1 Η αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας

Για πολλά χρόνια, επικρατούσε η θεωρία ότι οι πιστωτικοί κίνδυνοι ερμηνεύονται ως κίνδυνοι αθέτησης ενώ δεν συνυπολόγιζαν την ‘μετανάστευση΄ της πιστοληπτικής διαβάθμισης (credit rating migration). Μετά την χρηματοπιστωτική κρίση το 2008, οι ερευνητές και οι επενδυτές ομολόγων αντιλήφθηκαν την σημασία της ‘μετανάστευσης’ της πιστοληπτικής ικανότητας. Ένας από τους κύριους λόγους μιας δραματικής αλλαγής της τιμής των ομολόγων είναι η μετανάστευση της πιστοληπτικής ικανότητας που συμπεριλαμβάνει τον κίνδυνο πτώχευσης.

Επομένως, η αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας έχει ένα σημαντικό ρόλο τόσο για την εταιρεία που θέλει να εκδώσει το ομόλογο όσο και για τους επενδυτές. Μια αλλαγή στην διαβάθμιση επηρεάζει τόσο το επιτόκιο των ομολόγων και συνεπώς το κόστος δανεισμού της εταιρείας που το εκδίδει όσο και την δυνατότητα της εταιρείας να δανείζεται μακροχρόνια κεφάλαια, και το κόστος αυτών των κεφαλαίων. Επιπλέον, με βάση την πιστοληπτική διαβάθμιση καθορίζεται το περιθώριο κινδύνου που είναι η διαφορά απόδοσης των εταιρικών ομολόγων σε σχέση με τα κρατικά ομόλογα αντίστοιχης διάρκειας ή άλλων δεικτών της αγοράς.

Η αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας είναι υποκειμενική και δεν ακολουθεί μια συγκεκριμένη μαθηματική φόρμουλα. Η αξιολόγηση διενεργείται από διεθνείς ανεξάρτητους οίκους, με τους τρείς μεγαλύτερους να είναι η Moody’s, η Standard & Poor’s (S&P) και η Fitch. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που λαμβάνονται υπόψιν κατά την αξιολόγηση και αφορούν τόσο δημοσιευμένα στοιχεία που ανακοινώνονται μέσω χρηματοοικονομικών καταστάσεων όσο και ποιοτικά χαρακτηριστικά. Εταιρείες με μεγαλύτερη απόδοση κεφαλαίων, μικρότερη δανειακή επιβάρυνση, υψηλότερους δείκτες κάλυψης τόκων έχουν υψηλότερους δείκτες πιστοληπτικής αξιολόγησης.

1.2 Μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων

Κατά την προσέγγιση της δομής των μοντέλων επιτοκίου, διακρίνουμε τα μοντέλα διάρθρωσης συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο προσελκύουν περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών καθώς ο στοχαστικός λογισμός παράγει πιο εμπεριστατωμένες λύσεις.

Επιπλέον, κατά την αποτίμηση ενός εταιρικού ομολόγου ,το επιτόκιο είναι ένας καθοριστικός παράγοντας, το οποίο προσεγγίζεται σαν μια στοχαστική διαδικασία. Όταν το στοχαστικό επιτόκιο συνυπολογίζεται σε ένα μοντέλο αποτίμησης ομολόγου, το μαθηματικό μοντέλο είναι δύσκολο να αναλυθεί λόγω της πολυπλοκότητας των μαθηματικών πράξεων.

Υπάρχουν μοντέλα που ασχολούνται με την στοχαστική εξέλιξη των επιτοκίων, δηλαδή στηρίζονται στην υπόθεση ότι η μελλοντική εξέλιξη του επιτοκίου εξαρτάται αποκλειστικά από την τρέχουσα τιμή του. Επίσης, υπάρχουν δυο θεωρίες προσέγγισης της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων. Η πρώτη θεωρία αφορά τα μοντέλα ενός μόνο παράγοντα, στα οποία σημαντικό ρόλο για την ερμηνεία των επιτοκίων έχουν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα μοντέλα Vasicek (1977) , Cox, Ingersoll, Ross (CIR model) (1985) και Hull-White (1990) . Η δεύτερη θεωρία εξετάζει μοντέλα επιτοκίων που βασίζονται σε περισσότερους παράγοντες.

Το πλεονέκτημα των μοντέλων ενός μόνο παράγοντα είναι ότι παράγουν κλειστές αναλυτικές λύσεις πιο εύκολα και με μεγαλύτερη ταχύτητα σε σύγκριση με τα μοντέλα πολλών παραγόντων που είναι πιο πολύπλοκα και δεν καταφέρνουν να δώσουν αναλυτικές λύσεις για την αποτίμηση των ομολόγων.

Η σωστή επιλογή ενός μοντέλου για την κατανόηση της διάρθρωσης των επιτοκίων αποτρέπει λανθασμένες τιμολογήσεις και συνεπώς, λανθασμένα συμπεράσματα. Για αυτό το λόγο, έχουν διατυπωθεί πολλά μοντέλα στην προσπάθεια κατανόησης της συμπεριφοράς των επιτοκίων.

1.2.1 Μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων ενός παράγοντα

Δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα μοντέλων που περιγράφουν την δυναμική του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι τα μοντέλα Vasicek (1977) και Cox, Ingersoll, Ross (CIR model) (1985).

Παρατηρούμε και στα δυο μοντέλα ότι υπάρχει η διαδικασία της επαναφοράς του μέσου. Η διαφορά τους εντοπίζεται στο ότι ενώ στο μοντέλο Vasicek (1977) η αβέβαιη συνιστώσα της αλλαγής για μια σύντομη χρονική περίοδο μήκους Δt έχει πάντα μηδενική μέση τιμή και σταθερή τυπική απόκλιση, στην περίπτωση των Cox, Ingersoll, Ross (1985) η αβέβαιη συνιστώσα έχει μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα του επιτοκίου. Το μειονέκτημα αυτών των δυο μοντέλων ενός παράγοντα είναι ότι δεν λαμβάνουν υπόψιν όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με τον προσδιορισμό των επιτοκίων και περιορίζονται στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια.

Στην εργασία θα ασχοληθούμε με την περίπτωση του μοντέλου Vasicek(1977), το οποίο χρησιμοποιείται αρκετά σε εμπειρικές μελέτες λόγω της απλότητάς του. Ένα σημαντικό μειονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι μπορεί να επιτρέψει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων. Την αδυναμία του μοντέλου Vasicek (1977) διόρθωσαν οι Cox, Ingersoll, Ross (1985) αποκλείοντας τα αρνητικά επιτόκια.

Σύμφωνα με το μοντέλο τους (το οποίο αποδεικνύεται πιο περίπλοκο), η συμπεριφορά των επιτοκίων έχει τις εξής ιδιότητες: (i) Αν το επιτόκιο φτάσει στο μηδέν, μπορεί στη συνέχεια να γίνει θετικό. (ii) Η απόλυτη διακύμανση των επιτοκίων αυξάνεται όταν το επιτόκιο αυξάνεται και τέλος, υπάρχει σταθερή κατανομή του επιτοκίου. Το μοντέλο Vasicek είναι ένα μοντέλο ενός παράγοντα και συνεπώς η θεωρητική καμπύλη των αποδόσεων μπορεί να μην συμπίπτει πάντα με την καμπύλη της αγοράς. Τέλος, υποθέτει τέλεια συσχέτιση στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια και μπορούν να καλύψουν μόνο ενδεχόμενες παράλληλες μετατοπίσεις στην καμπύλη των αποδόσεων.

1.2.2 Λογαριθμοκανονικά μοντέλα ενός παράγοντα

Οι Black, Derman, Toy (1990) στο άρθρο τους καταφέρνουν να αποτρέψουν την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων υποθέτωντας ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Το μοντέλο τους ήταν το πρώτο που συνδύασε την δυνατότητα επαναφοράς στο μέσο (mean reversion) με την λογαριθμοκανονική κατανομή. Χρησιμοποιείται για την αποτίμηση ομολόγων και διάφορων συμβάσεων ανταλλαγής (swaps). Ο λόγος για τον οποίο η εφαρμογή του μοντέλου γνωρίζει μεγάλη απήχηση είναι η εύκολη εφαρμογή του χρησιμοποιώντας δεδομένα της αγοράς. Η αδυναμία του μοντέλου είναι ότι δεν γνωστοποιούνται βασικές υποθέσεις του και δεν παρέχει αναλυτικές λύσεις.

Οι Black και Karasinski (1991) βασίστηκαν στο μοντέλο των Black, Derman, Toy (1990) όπου το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Η μόνη διαφορά δίνεται από τον διαφορετικό ορισμό της ταχύτητας επαναφοράς του μέσου. Η νέα προσέγγιση ερμηνεύει καλύτερα την μεταβλητότητα των επιτοκίων.

1.2.3 Μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων πολλών παραγόντων

Τα μοντέλα ενός μόνο παράγοντα που μελετούν κυρίως το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο καταφέρνουν να παρέχουν αναλυτικές λύσεις και έχουν το πλεονέκτημα της εύκολης εφαρμογής τους. Παρόλο αυτά, δέχονται κριτική επειδή ερμηνεύουν την συμπεριφορά των επιτοκίων μονοδιάστατα, εστίαζοντας μόνο στο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο.

Τα μοντέλα πολλών παραγόντων προτείνουν για την εφαρμογή τους περισσότερους του ενός παράγοντες και αποτελούν ουσιαστικά μια βελτιωμένη εφαρμογή των μονοπαραγοντικών μοντέλων. Η επιλογή περισσότερων παραγόντων εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά οδηγεί στη δημιουργία πολυπλοκότερων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που δεν προσφέρουν ακριβείς λύσεις. Στη συνέχεια, αναφέρουμε δυο παραδείγματα μοντέλων στα οποία χρησιμοποιούνται δύο ή τρείς παράγοντες.

Ο Chen (1996) ανέπτυξε ένα μοντέλο τριών παραγόντων, του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου , του στοχαστικού μέσου του και της στοχαστικής μεταβλητότητας. Το πλεονέκτημα του μοτέλου είναι ότι εφαρμόζεται εύκολα με δεδομένα της αγοράς και ότι συσχετίζει την δυναμική του στοχαστικού μέσου, της μεταβλητότητας με τις τιμές του επιτοκίου.

Το μοντέλο των Hull- White (1994) αποτελεί μία προέκταση του μοντέλου του Vasicek. Πρόκειται για ένα μοντέλο δύο παραγόντων, το οποίο εισάγει έναν δεύτερο στοχαστικό παράγοντα και καταφέρνει να δώσει κλειστή αναλυτική λύση.

1.2.4 Παρουσίαση μοντέλων στοχαστικού επιτοκίου

Κατηγορία	**Μοντέλο**	**Σ.Δ.Ε**	**Περιγραφή**
Μοντέλα ενός παράγοντα	Vasicek (1977)	$dr(t) = \big(\theta - ar(t)\big)dt + \sigma dW_t$	Ορίζει την διαδικασία επαναφοράς του μέσου (mean reversion), επιτρέπει αρνητικά επιτόκια
	Cox-Ingersoll-Ross (1985)	$dr(t) = \big(\vartheta - ar(t)\big)dt + \sqrt{r(t)}\sigma dW_t$	Βελτιώνει αδυναμίες μοντέλου Vasicek, ορίζει την διακύμανση των επιτοκίων ανάλογη των τιμών τους, όχι σταθερή, δεν επιτρέπει αρνητικά επιτόκια

Λογαριθμοκανο-νικά μοντέλα ενός παράγοντα	Black-Derman-Toy (1990)	$dln(r) = \vartheta_t dt + \sigma dW_t$	Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή επομένως δεν υπάρχει κίνδυνος αρνητικών επιτοκίων. Το πρώτο μοντέλο που περιγράφει την διαδικασία επαναφοράς του μέσω με λογαριθμοκανονική κατανομή
	Black και Karasinski (1991)	$dln\big(r(t)\big) = \big(\vartheta(t) - l(t)\ln\,(r(t))\big)dt + \sigma dW_t$	Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή. Η νέα προσέγγιση ερμηνεύει καλύτερα την μεταβλητότητα των επιτοκίων.

Μοντέλα πολλών παραγόντων	Chen (1996)	$d\big(\vartheta(t)\big) = \mu\big(\alpha - \vartheta(t)\big)dt + \beta\sqrt{\vartheta}dW_1$ $d(r(t)) = \lambda\big(\vartheta(t) - r(t)\big)dt + \sqrt{r(t)}\sqrt{\sigma}\,dW_2$ $d\big(\sigma(t)\big) = \rho\big(\nu - \sigma(t)\big)dt + \gamma\sqrt{\sigma}\,dW_3$	Ανέπτυξε ένα μοντέλο τριών παραγόντων, του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, του στοχαστικού μέσου του και της στοχαστικής μεταβλητότητας.
	Hull- White (1994)	$du(t) = -bu(t)dt + \sigma_1 dW_1$ $d\big(r(t)\big) = (\vartheta(t) - r(t) + w)dt + \sigma_2 dW_2$	Πρόκειται για ένα μοντέλο δύο παραγόντων, το οποίο εισάγει έναν δεύτερο παράγοντα και καταφέρνει να δώσει κλειστή αναλυτική λύση.

1.3 Αποτίμηση Ομολόγων

Η έρευνα για τα μοντέλα αποτίμησης ομολόγων παραμένει ένα ελκυστικό θέμα στους τομείς της χρηματοοικονομικής έρευνας. Στη συνέχεια, ακολουθεί ιστορική αναδρομή για την αποτίμηση ομολόγων κάτω από διαφορετικά πλαίσια. Στην πρώτη περίπτωση, αναφερόμαστε στην αποτίμηση ομολόγων με δυνητικό κίνδυνο αθέτησης. Τα μοντέλα αποτίμησης στηρίζονται κυρίως στα μοντέλα των Merton (1973) και Black-Cox (1976). Έπειτα, παρουσιάζουμε μοντέλα αποτίμησης που λαμβάνουν υπόψιν την πιστοληπτική ικανότητα. Η πιστοληπτική ικανότητα μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την αποτίμηση των ομολόγων. Τέλος, αναφερόμαστε σε μοντέλα που ερμηνεύουν το επιτόκιο σαν μία στοχαστική διαδικασία.

1.3.1 Αποτίμηση Ομολόγων με δυνητικό κίνδυνο αθέτησης

Ο πιστωτικός κίνδυνος ορίζεται ως η αδυναμία ενός δανειζομένου να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις του στον δανειστή. Στην προσπάθεια αποτίμησης ομολόγων υπο πιστωτικό κίνδυνο κυριαρχούν δυο προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση είναι η structural form approach, η οποία σχετίζεται με μοντέλα που περιγράφουν την εσωτερική οικονομική δομή για μια συγκεκριμένη εταιρεία έτσι ώστε η αθέτηση να είναι αποτέλεσμα ενός εσωτερικού γεγονότος. Σε ένα structural model η αθέτηση συμβαίνει όταν τα περιουσιακά στοιχεία μίας εταιρείας δεν επαρκούν βάσει ενός μέτρου (threshold). Η δεύτερη προσέγγιση είναι η reduced-form approach, που βασίζεται κυρίως σε πληροφορίες της αγοράς παρα στην αξία της ίδιας της εταιρείας. Αν εκτιμηθεί η πιθανότητα αθέτησης, τότε κάθε χρεόγραφο τιμολογείται σαν να μην ήταν περιορισμένου κινδύνου χρησιμοποιώντας ένα προεξοφλητικό επιτόκιο, το οποίο είναι προσαρμοσμένο με την ένταση της πιθανότητας αθέτησης.

Το πρώτο structural model που χρησιμοποίησε την προσέγγιση της αξίας της εταιρείας προήλθε απο τον Merton (1974) και βασίστηκε στην θεωρία αποτίμησης των Black & Scholes (1973). Ο Merton (1974) παρουσιάζει μια θεωρία για την αποτίμηση ομολόγων όταν υπάρχει πιθανότητα πτώχευσης.

Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στην θεωρία της δομής κινδύνου των επιτοκίων όπου η έννοια του κινδύνου περιορίζεται στα πιθανά κέρδη ή ζημιές για τον κάτοχο ενός ομολόγου όταν αλλάξει η πιθανότητα αθέτησης και όχι λόγω πιθανών αλλαγών στις διακυμάνσεις των επιτοκίων. Στην ανάλυσή του ακολουθεί ένα συγκεκριμένο term structure ώστε οι διαφορές στις τιμές των ομολόγων να διαμορφώνονται απο τις αλλαγές στην πιθανότητα αθέτησης.
Ο Merton υποθέτει ότι η αγορά είναι αποτελεσματική, δηλαδή η διαπραγμάτευση του υποκείμενου τίτλου είναι συνεχής, δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και η αξία της εταιρείας ακολουθεί Γεωμετρική κίνηση Brown:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Το μοντέλο του Merton (1974) εφαρμόζεται στην πιο απλή μορφή εταιρικού χρέους, σε ομόλογα που δεν προβλέπουν ενδιάμεσες πληρωμές κουπονιών. Στην μελέτη του αποδεικνύεται η εγκυρότητα του θεωρήματος των Modigliani-Miller σε περίπτωση χρεοκοπίας και παρουσιάζεται η αναμενόμενη απόδοση του χρέους συναρτήσει του συντελεστή μόχλευσης της εταιρείας. Στην γενίκευση του μοντέλου του Merton (1974), η ανάλυσή του εφαρμόζεται σε ομόλογα που πληρώνουν κουπόνια και σε callable bonds.

Το μοντέλο του Merton (1974) μελετά την πιθανότητα αθέτησης όταν λήγει το ομόλογο. Το μοντέλο των Black and Cox (1976) το οποίο βασίστηκε στο μοντέλο του Merton (1974), επιτρέπει στους κατόχους των ομολόγων να γνωρίζουν την αξία της εταιρείας όταν τα περιουσιακά της στοιχεία δεν επαρκούν βάσει ενός μέτρου(threshold). Συνεπώς, γνωρίζουν ότι υπάρχει πιθανότητα πτώχευσης πριν την λήξη του ομολόγου.

Οι Black and Cox (1976) μελετούν τις επιπτώσεις των ρητρών ασφάλειας, των περιορισμών σχετικά με την χρηματοδότηση των δαπανών για μερίσματα και τόκους και της ύπαρξης δικαιωμάτων προαίρεσης. Συμπερασματικά, διαπιστώθηκε ότι αυτές οι προβλέψεις αυξάνουν την αξία του ομολόγου και ότι μπορεί να επηρεάζουν την συμπεριφορά της τιμής των μετοχών της εταιρείας.

Η ανάλυση των Black and Cox (1976) υποθέτει ότι οποιαδήποτε αγοραπωλησία χρεογράφου δεν επηρεάζει την αγοραία αξία του, υπάρχει περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου ενώ οι επενδυτές μπορούν να πάρουν θέση πώλησης σε οποιοδήποτε χρεόγραφο, συμπεριλαμβανομένου και του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου. Η διαπραγμάτευση του υποκείμενου τίτλου είναι συνεχής, δεν υπάρχουν φόροι, κόστη συναλλαγών ή κόστη χρεοκοπίας. Τέλος, η αξία της εταιρείας ακολουθεί μια διαδικασία διάχυσης με στιγμιαία διακύμανση ανάλογη του τετραγώνου της αξίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια πιθανή απότομη μείωση της αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου μιας εταιρείας που χρησιμοποιείται σαν εχέγγυο, θέτει απευθείας σε κίνδυνο χρεοκοπίας την εταιρεία. Ως χρεοκοπία ορίζουμε την μεταφορά της ιδιοκτησίας της εταιρείας στους κατόχους των ομολόγων χωρίς να επηρεάζονται οι δραστηριότητες της εταιρείας.

Οι Jarrow and Turnbull (1995) στο άρθρο τους προτείνουν μία νέα προσέγγιση για την αποτίμηση υπο πιστωτικό κίνδυνο. Χρησιμοποιούν ένα στοχαστικό term structure που έχει μηδενικό κίνδυνο αθέτησης και ένα term structure υπο πιστωτικό κίνδυνο περιορισμένης διάρκειας. Η τιμολόγηση κατηγοριών options γίνεται χωρίς τον κίνδυνο κερδοσκοπίας, με μέτρα martingale. Η μεθοδολογία τους εφαρμόζεται για εταιρικά χρέη και για άλλα είδη χρεογράφων.

Στην πιο απλή μορφή του μοντέλου του Merton (1974),για να υπολογιστεί η αξία του zero-coupon ομολόγου είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τόσο την παρούσα αξία της εταιρείας όσο και την μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας. Ο υπολογισμός της παρούσας αξίας των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας καθιστά δύσκολη την εφαρμογή του μοντέλου του Merton (1974). Το μοντέλο των Jarrow και Turnbull (1995) παρακάμπτει αυτές τις δυσκολίες, θεωρώντας ως δεδομένο το term structure των επιτοκίων για τις αντίστοιχες κατηγορίες πιστωτικού κινδύνου. Τα ομόλογα πρέπει να έχουν ίδιες πιθανότητες αθέτησης και αν συμβεί η αθέτηση, πιθανώς οι κάτοχοι λαμβάνουν ένα προκαθορισμένο ποσό. Στην γενικευμένη εκδοχή του μοντέλου του Merton (1974) η αξία της εταιρείας και το term structure μπορούν να συσχετιστούν ενώ οι Jarrow και Turnbull (1995) υποθέτουν ανεξαρτησία.

Οι Longstaff και Schwartz (1995) στο άρθρο τους διατυπώνουν τα μειονεκτήματα των προσεγγίσεων των Black-Scholes (1973) και Merton (1974), όπως ότι τα επιτόκια είναι σταθερά και ότι η πιθανότητα αθέτησης ενός ομολόγου μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας θεωρία αποτίμησης option. Η πτώχευση συμβαίνει μόνο στην λήξη του ομολόγου, μία συνθήκη μη ρεαλιστική καθώς οι περισσότερες εταιρείες οδηγούνται σε πτώχευση πολύ πριν απο την λήξη. Θεωρούν ότι το μοντέλο τους υπερτερεί σε σχέση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις επειδή εφαρμόζεται σε όλα τα είδη εταιρικών χρεογράφων και παρέχει πρακτικές μεθόδους για την αποτίμηση τους.

Οι Longstaff και Schwartz (1995) βασιζόμενοι στο μοντέλο των Black και Cox (1976) ανέπτυξαν μια νέα προσέγγιση στην αποτίμηση του εταιρικού χρέους όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης ενσωματώνοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον επιτοκιακό κίνδυνο. Το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του χρέους όταν υπάρχουν πολλές πληρωμές τοκομεριδίων ή όταν η κεφαλαιακή δομή της εταιρείας είναι πολύπλοκη. Αποδεικνύουν ότι η συσχέτιση των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας με αλλαγές των επιτοκίων επηρεάζει την αξία των τίτλων σταθερής απόδοσης όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης. Διαφορές στα πιστωτικά περιθώρια σχετίζονται με διαφορές στις συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και αλλαγών των επιτοκίων.

Η ανάλυση των Leland και Toft (1996) βασίζεται στα αποτελέσματα της μελέτης του Leland (1994) και εξετάζει τη βέλτιστη κεφαλαιακή δομή μιας επιχείρησης που μπορεί να επιλέξει τόσο το ποσό όσο και τη λήξη του χρέους της, προβλέπει την μόχλευση, τα πιστωτικά περιθώρια και τα ποσοστά αθέτησης. Το βραχυπρόθεσμο χρέος μειώνει ή εξαλείφει το κόστος της ‘’υποκατάστασης του ενεργητικού’’. Το φορολογικό πλεονέκτημα του χρέους πρέπει να εξισσοροπηθεί με το κόστος της πτώχευσης για τον καθορισμό της βέλτιστης διάρκειας της κεφαλαιακής διάρθρωσης. Το μοντέλο προβλέπει διαφορετικά διαμορφωμένες δομές πιστωτικών περιθωρίων για διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Οι Briys και De Varenne (1997) παρουσιάζουν ένα μοντέλο αποτίμησης εταιρικών ομολόγων που λαμβάνει υπόψιν τόσο την πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και τον επιτοκιακό κίνδυνο και διορθώνει κάποιες αδυναμίες των προηγούμενων ερευνών όπου οι μέθοδοι αποτίμησης δεν εξασφαλίζουν ότι η πληρωμή στους ομολογιούχους στην χρεοκοπία δεν θα πρέπει να ξεπερνά την αξία της εταιρείας. Η ανάλυσή τους υποθέτει ότι η αγορά είναι αποτελεσματική, γίνονται συνεχείς διαπραγματεύσεις,το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ακολουθεί μια Gaussian διαδικασία διάχυσης και η μεταβλητότητα ακολουθεί ένα συγκεκριμένο term structure.

Υπάρχουν ρήτρες ασφαλείας, ένας μηχανισμός που επιτρέπει στους κατόχους των ομολόγων να ενημερωθούν για την χρεοκοπία αν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας πλησιάζει ένα προκαθορισμένο μέτρο. Επειδή η μελέτη τους λαμβάνει υπόψιν στοχαστικά επιτόκια και τον κίνδυνο χρεοκοπίας, το μοντέλο μπορεί να προτείνει διάφορα σχήματα των term structure που ερμηνεύουν τα εταιρικά spreads.

Ο Lando (1998) στην έρευνά του παρουσιάζει ένα πλαίσιο μοντελοποίησης των defaultable χρεογράφων και των πιστωτικών παραγώγων και δείχνει την εξάρτηση των παραγόντων κινδύνου της αγοράς με τον πιστωτικό κίνδυνο. Περιορίζει τα τεχνικά προβλήματα μοντελοποίησης του πιστωτικού κινδύνου σε παρόμοια προβλήματα που υπάρχουν στη συνήθη μοντελοποίηση των term structure των επιτοκίων. Σκοπός της έρευνάς του είναι να διευκρινήσει πως οι διαδικασίες Cox ή διαφορετικά οι διπλές στοχαστικές διαδικασίες Poisson χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση για την αποτίμηση της αξίας των χρηματοοικονομικών μέσων όταν υπάρχει σημαντικός κίνδυνος αθέτησης, εστιάζοντας για την κατασκευή τους στο jump του πρώτου χρονικού άλματος. Παρουσιάζει μία γενικευμένη εκδοχή του Μαρκοβιανού μοντέλου των Jarrow, Lando και Turnbull (1997) που εισάγει τα intensity models,των οποίων οι παράγοντες επηρεάζουν το πιστωτικό γεγονός.

Πρόσφατα οι Li, Lin, Sun και Tucker (2018) πρότειναν μια νέα προσέγγιση για την κατανόηση των πιστωτικών κινδύνων κατασκευάζοντας ένα inside debt metric που ενσωματώνει την επικινδυνότητα του χρέους.

1.3.2 Αποτίμηση ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα

Τα πολύ γνωστά μοντέλα που αναφέραμε δεν αντικατοπτρίζουν τον δυνητικό κίνδυνο αλλαγής της πιστοληπτικής ικανότητας και της μεταβολής των επιτοκίων. Στις χρηματοπιστωτικές αγορές, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι είτε η αλλαγή της διαβάθμισης είτε η αλλαγή επιτοκίου επηρεάζει σημαντικά την τιμή των ομολόγων για μια εταιρεία. Για την προσέγγιση της δυναμικής του credit-rating migration, εφαρμόζονται κυρίως τα reduced-form μοντέλα.

Οι Jarrow, Lando και Turnbull (1997) βασιζόμενοι στην ανάλυση των Jarrow και Turnbull (1995) αναπτύσσουν ένα Μαρκοβιανό μοντέλο για το term structure του κινδύνου των πιστωτικών περιθωρίων. Η περίπτωση αθέτησης μοντελοποιείται μέσω διακριτού χρόνου, ως Μαρκοβιανή αλυσίδα ομοιογενούς χρόνου με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Οι παράμετροι της ανάλυσης μπορούν να εκτιμηθούν με παρατηρήσιμα δεδομένα. Το μοντέλο χρησιμοποιείται τόσο για την αποτίμηση του εταιρικού χρέους με imbedded options και την αποτίμηση εξωχρηματιστηριακών παραγώγων όσο και για την αποτίμηση κυβερνητικών ομολόγων που υπόκεινται σε κίνδυνο αθέτησης.
Πιο συγκεκριμένα, στο μοντέλο τους για την αποτίμηση του χρέους συνυπολογίζουν την πιστοληπτική διαβάθμιση μιας εταιρείας σαν καθοριστικό παράγοντα που υποδεικνύει την πιθανότητα αθέτησης. Στο reduced-form μοντέλο των Jarrow, Lando και Turnbull (1997) η αθέτηση δεν είναι αποτέλεσμα ενός εσωτερικού γεγονότος. Η προσέγγισή τους μπορεί να τροποποιηθεί για να συμπεριλάβει πληροφορίες για την πιστοληπτική διαβάθμιση στην περίπτωση αθέτησης και συνεπώς να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση πιστωτικών παραγώγων.

Οι Thomas, Allen και Morkel, Kingsburry (2002) προτείνουν ένα μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας για το term structure και τα πιστωτικά περιθώρια των τιμών των ομολόγων. Ορίζουν ως εξαρτημένες τις στοχαστικές διαδικασίες μοντελοποίησης των επιτοκίων και της Μαρκοβιανής διαδικασίας που περιγράφει τις αλλαγές στην πιστοληπτική διαβάθμιση των ομολόγων λόγω της κοινής τους εξάρτησης απο μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, η οποία μπορεί να περιγράψει τις βασικές οικονομικές συνθήκες.

Η μελέτη των Hurd και Kuznetsov (2007) ασχολείται με το intensity μοντέλο αποτίμησης της πιστωτικής αθέτησης και εισάγει την έννοια της Μαρκοβιανής αλυσίδας για την αξιολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας μιας εταιρείας. Υποθέτουν ότι οι στοχαστικές παρατηρήσεις, το στοχαστικό επιτόκιο είναι παράγοντες της αγοράς, επηρεάζουν με παρόμοιο τρόπο όλες τις εταιρείες και οι διαδικασίες που ερμηνεύουν την ‘’μετανάστευση’’ της πιστοληπτικής ικανότητας είναι ανεξάρτητες μαρκοβιανές αλυσίδες. Προκύπτει ο περιορισμός ότι οι παράγοντες της αγοράς μπορούν να επηρεάσουν την πιθανότητα αθέτησης αλλά ο κίνδυνος αθέτησης δεν επηρεάζει την αγορά.

Στην ανάλυσή τους οι Hurd και Kuznetsov (2007) συμπεραίνουν ότι πολλές επιχειρήσεις υπόκεινται σε credit migration και χρεοκοπία σύμφωνα με το μοντέλο της Μαρκοβιανής αλυσίδας όταν λαμβάνουμε υπόψιν τους παράγοντες της αγοράς. Συνεπώς, οι ανεξάρτητες μαρκοβιανές αλυσίδες λειτουργούν σαν σταθεροί παράγοντες κινδύνου για μια εταιρεία ενώ το στοχαστικό επιτόκιο και άλλες στοχαστικές παρατηρήσεις είναι παράγοντες συστηματικού κινδύνου. Η κοινή δυναμική των παραγόντων της αγοράς χαρακτηρίζεται απο το πολυδιάστατο θετικό μοντέλο διάχυσης άλματος.

Στην πιο απλουστευμένη μορφή του μοντέλου αποτίμησης του credit migration υπο στοχαστική σκοπιά, όλες οι εταιρείες υπόκεινται σε credit migration και οδηγούνται (με διαφορετικό ρυθμό η κάθε εταιρεία) σε κίνδυνο αθέτησης. Το αποτέλεσμα είναι ένα πολύπλοκο structure των πιστωτικών περιθωρίων και θετικές συσχετίσεις αθέτησης. Οι Hurd και Kuznetsov (2007) αναφέρονται σε ένα πιο γενικευμένο πλάισιο, που επιτρέπει πολλαπλές στοχαστικές αλλαγές που πιθανώς περιγράφουν διαφορετικούς τομείς της οικονομίας. Η έννοια της στοχαστικής αγοράς μπορεί να ερμηνεύσει την δυναμική των τιμών των περιουσιακών στοιχείων, όπως στην περίπτωση των μοντέλων πρόβλεψης της μεταβλητότητας.

Για την μοντελοποίηση του credit-rating migration χρησιμοποιούμε στατιστικά δεδομένα που δεν συμπεριλαμβάνουν πληροφορίες για τα περιουσιακά στοιχεία μιας εταιρείας ενώ γνωρίζουμε ότι η αξία μιας εταιρείας επηρεάζει την πιστοληπτική της διαβάθμιση απο τους οίκους αξιολόγησης. Συνεπώς, η μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μπορεί να ερμηνεύσει πλήρως την πιστοληπτική ικανότητα της τιμής του ομολόγου μιας εταιρείας.

Οι Liang και Zeng (2015) χρησιμοποίησαν ένα structural model για την αποτίμηση ενός ομολόγου όταν αλλάζει η πιστοληπτική ικανότητα. Όρισαν ένα προκαθορισμένο μέτρο όπου διαχωρίζεται η αξία των περιουσιακών στοιχείων μιας εταιρείας σε δυο κατηγορίες (κατηγορίες υψηλής και χαμηλής αξιολόγησης), υπο την προυπόθεση ότι η αξία της εταιρείας ακολουθεί διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Feynman-Kac,το μοντέλο μπορεί να περιοριστεί σαν ένα πρόβλημα οριακών τιμών μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Η συγκεκριμένη μέθοδος επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης διαφέρει απο τις παραδοσιακές μεθόδους μοντελοποποίησης των εταιρικών ομολόγων.

Οι Liang και Zeng (2015) ορίζουν το προκαθορισμένο μέτρο για την αποτίμηση, μία υπόθεση που δεν μπορεί να έχει ισχύ στον οικονομικό κόσμο γιατί εξαρτάται και από τον δείκτη μόχλευσης της εταιρείας. Οι Hu,Liang και Wu (2016) προτείνουν ένα νέο μοντέλο που εξασφαλίζει ένα free boundary problem για την αποτίμηση ενός ομολόγου (με σταθερό επιτόκιο) ,του οποίου η ύπαρξη και η μοναδικότητα αποδεικνύονται.

1.3.3 Αποτίμηση ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο

Κατά την αποτίμηση ενός εταιρικού ομολόγου το επιτόκιο είναι ένας καθοριστικός παράγοντας, το οποίο προσεγγίζεται σαν μια στοχαστική διαδικασία. Όταν το στοχαστικό επιτόκιο συνυπολογίζεται σε ένα μοντέλο αποτίμησης ομολόγου, το μαθηματικό μοντέλο είναι δύσκολο να αναλυθεί.

Οι Liang, Yin, Chen και Wu (2017) χρησιμοποίησαν το μοντέλο του Vasicek για το στοχαστικό επιτόκιο στην μοντελοποίηση της αποτίμησης ομολόγου με πιθανή ‘’μετανάστευση’’ της πιστοληπτικής ικανότητας. Στην ανάλυσή τους διακρίνονται δυο αδυναμίες. Η πρώτη αφορά την αλλαγή της αξιολόγησης που μπορεί να συμβεί μια μόνο φορά κατα την διάρκεια ζωής του ομολόγου και η δεύτερη αδυναμία είναι ότι το μοντέλο δεν συνυπολογίζει την τρέχουσα αξιολόγηση.

Οι Liang, Yin και Wu (2018) βασιζόμενοι στην έρευνα των Liang, Yin, Chen και Wu (2017) πρότειναν ένα νέο μοντέλο που επιτρέπει πολλαπλές αξιολογήσεις και λαμβάνουν υπόψιν την τρέχουσα αξία της εταιρείας και την τρέχουσα αξιολόγηση πιστοληπτικής ικανότητας.

1.3.4 Συνοπτικός πίνακας εμπειρικών μελετών αποτίμησης ομολόγων

Συγγραφέας	Σκοπός	Αποτελέσματα
Merton (1974)	Μελετά την πιθανότητα αθέτησης όταν λήγει το ομόλογο	Αποτίμηση ομολόγων χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της αξίας της εταιρείας
Black & Cox (1976)	Μελετά την πιθανότητα αθέτησης πριν την λήξη του ομολόγου	Η αξία της εταιρείας είναι γνωστή όταν τα περιουσιακά στοιχεία δεν επαρκούν βάσει ενός μέτρου
Jarrow & Turnbull (1995)	Η τιμολόγηση γίνεται με μέτρα martingale	Τα ομόλογα πρέπει να έχουν ίδιες πιθανότητες αθέτησης και αν συμβεί η αθέτηση,οι κάτοχοι λαμβάνουν ένα προκαθορισμένο ποσό
Longstaff & Schwartz (1995)	Αποτίμηση εταιρικού χρέους όταν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης ενσωματώνοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον επιτοκιακό κίνδυνο	Υπολογισμός χρέους όταν υπάρχουν πολλές πληρωμές τοκομεριδίων ή όταν η κεφαλαιακή δομή της εταιρείας είναι πολύπλοκη
Leland & Toft (1996)	Προβλέπει μόχλευση,πιστωτικά περιθώρια,ποσοστά αθέτησης	Προβλέπει διαφορετικά διαμορφωμένες δομές πιστωτικών περιθωρίων για διαφορετικά επίπεδα κινδύνου
Briys & De Varenne (1997)	Αποτίμηση ομολόγων λαμβάνοντας υπ’όψιν τόσο την πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και τον επιτοκιακό κίνδυνο	Διορθώνει αδυναμίες προηγούμενων μεθόδων αποτίμησης που δεν εξασφαλίζουν ότι η πληρωμή στους ομολογιούχους δεν θα πρέπει να ξεπερνά την αξία της εταιρείας

Συγγραφέας	Σκοπός	Αποτελέσματα
Lando (1998)	Οι διαδικασίες Cox στην μοντελοποίηση της αποτίμησης όταν υπάρχει σημαντικός κίνδυνος αθέτησης	Εισάγει τα intensity models,των οποίων οι παράγοντες επηρεάζουν το πιστωτικό γεγονός
Jarrow, Lando & Turnbull (1997)	Μαρκοβιανό μοντέλο για το term structure του κινδύνου των πιστωτικών περιθωρίων	Συνυπολογίζουν την πιστοληπτική διαβάθμιση της εταιρείας σαν καθοριστικό παράγοντα που υποδεικνύει την πιθανότητα αθέτησης
Thomas, Lyn, Allen, Morkel-Kingsburry (2002)	Η μοντελοποίηση του επιτοκίου και της αλλαγής της πιστοληπτικής διαβάθμισης ως στοχαστικές διαδικασίες	Επιτρέπει μια νέα ερμηνεία των ασφαλίστρων κινδύνου
Hurd & Kuznetsov (2007)	Intensity μοντέλο αποτίμησης της πιστωτικής αθέτησης	Στοχαστικό επιτόκιο και άλλες στοχαστικές παρατηρήσεις μπορούν να επηρεάσουν την πιθανότητα αθέτησης
Liang & Zeng (2015)	Αποτίμηση όταν αλλάζει η πιστοληπτική ικανότητα (ορίζουν προκαθορισμένο μέτρο)	Το μοντέλο περιορίζεται σε πρόβλημα επίλυσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης

Liang, Yin, Chen & Wu (2017)	Μοντέλο Vasicek για το στοχαστικό επιτόκιο	Η αλλαγή της αξιολόγησης μπορεί να συμβεί μια μόνο φορά κατα την διάρκεια ζωής του ομολόγου
Liang, Yin, Chen & Wu (2018)	Μοντέλο Vasicek για το στοχαστικό επιτόκιο	Επιτρέπει πολλαπλές αξιολογήσεις πριν τη λήξη του ομολόγου

1.4 Περιγραφή διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την αποτίμηση εταιρικών ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο. Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε τα μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων, τα οποία διαχωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες, τα μοντέλα ενός παράγοντα, τα λογαριθμοκανονικά μοντέλα ενός παράγοντα και τα μοντέλα πολλών παραγόντων. Στην περίπτωσή μας, χρησιμοποιούμε το μονοπαραγοντικό μοντέλο του Vasicek για την ερμηνεία του επιτοκίου λόγω του πλεονεκτήματος του μοντέλου να επιτρέπει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων και επειδή αυτή η μορφή μας επιτρέπει να έχουμε υπολογιστική λύση. Στην συνέχεια, ακολουθεί ιστορική αναδρομή για τα μοντέλα αποτίμησης ομολόγων κάτω από διαφορετικά πλαίσια. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση, αναφερόμαστε στην αποτίμηση με δυνητικό κίνδυνο αθέτησης. Τα μοντέλα στηρίζονται κυρίως στα μοντέλα των Merton (1973) και Black-Cox (1976). Έπειτα, παρουσιάζουμε μοντέλα αποτίμησης που λαμβάνουν υπόψιν την πιστοληπτική ικανότητα και τέλος την περίπτωση όπου η αποτίμηση γίνεται με βάση την πιστοληπτική ικανότητα και το επιτόκιο ερμηνεύεται σαν μια στοχαστική διαδικασία. Η διαφορά του μοντέλου που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή σε σχέση με τα προαναφερθέντα μοντέλα είναι ότι επιτρέπει πολλαπλές αξιολογήσεις πριν τη λήξη του ομολόγου και η αξία της εταιρείας συνυπολογίζεται στον καθορισμό των διαφορετικών περιοχών πιστοληπτικής διαβάθμισης.

Στο Κεφάλαιο 2, αναλύουμε το νέο μοντέλο αποτίμησης εταιρικού ομολόγου θέτοντας αρχικά κάποιες βασικές υποθέσεις σχετικά με το στοχαστικό επιτόκιο και την αξία της εταιρείας σε κάθε περιοχή πιστοληπτικής διαβάθμισης. Η αξιολόγηση γίνεται με βάση ένα προκαθορισμένο μέτρο, το οποίο ορίζουμε και εξαρτάται από την αξία και το χρέος της εταιρείας. Επίσης, προσδιορίζουμε την εκάστοτε μεταβλητότητα σε κάθε διαφορετική περιοχή πιστοληπτικής διαβάθμισης. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Itô, αρχικά καταλήγουμε στη μερική διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την τιμή του εταιρικού ομολόγου. Έπειτα, με την εφαρμογή του μοντέλου του Vasicek και θέτοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς απλοποιούμε την επίλυση της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης και ορίζουμε τα συνοριακά σύνολα μεταξύ γειτονικών περιοχών με διαφορετική διαβάθμιση.

Στο Κεφάλαιο 3 επιλέγουμε μια εταιρεία η οποία διαχωρίζεται σε δυο διαφορετικές περιοχές πιστοληπτικής ικανότητας και εφαρμόζουμε το νέο μοντέλο αποτίμησης χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Αρχικά, αντλώντας στοιχεία απο τον ισολογισμό της εταιρείας, γίνεται εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου του Merton, μέσω του οποίου βρίσκουμε τις μεταβλητότητες και την αξία της εταιρείας σε κάθε διαφορετική περιοχή πιστοληπτικής διαβάθμισης. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt (1944-1963) για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου Vasicek. Ειδικότερα, αντλώντας τις τιμές των δικαιωμάτων που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά από την βάση δεδομένων Bloomberg και εφαρμόζοντας τον παραπάνω επαναληπτικό αλγόριθμο της στην Matlab υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στο μοντέλο.

Στο Κεφάλαιο 4, ακολουθεί η αριθμητική επίλυση της μετασχηματισμένης μερικής διαφορικής εξίσωσης αποτίμησης του εταιρικού ομολόγου χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Έπειτα, παρουσίαζουμε την απεικόνιση του συνοριακού συνόλου για τις περιπτώσεις τόσο του σταθερού όσο και του στοχαστικού επιτοκίου. Εφόσον στην αγορά το επιτόκιο δεν είναι σταθερό αλλά ερμηνεύεται σαν μια στοχαστική διαδικασία, η περίπτωση του στοχαστικού επιτοκίου αποτυπώνει καλύτερα τη δυναμική εξέλιξη του συνοριακού συνόλου για διαφορετικές τιμές του επιτοκίου. Τέλος, ακολουθούν τα συμπεράσματα της ανάλυσής μας και επισυνάπτεται το παράρτημα με τους κώδικες της Matlab που χρησιμοποιήθηκαν για την εμπειρική μελέτη.

Κεφάλαιο 2

Το Μοντέλο Αποτίμησης Εταιρικού Ομολόγου

Έστω (Ω, F, P) ο χώρος πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου. Θα αναλύσουμε ένα νέο μοντέλο αποτίμησης ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο. Ας ξεκινήσουμε με κάποιες βασικές υποθέσεις σχετικά με το στοχαστικό επιτόκιο και την αξία της εταιρείας σε περίπτωση αλλαγής της πιστοληπτικής διαβάθμισης.

2.1 Το στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο $r = r(t)$ ακολουθεί την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

$$dr(t) = \beta\big(t, r(t)\big)dt + \sigma_r(t)dW_t^r. \tag{1}$$

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα που περιγράφουν το στοχαστικό επιτόκιο. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε το μοντέλο του Vasicek όπου:

$$\beta\big(t, r(t)\big) = \alpha(t)\big(\vartheta(t) - r(t)\big). \tag{2}$$

και οι $\alpha(t), \theta(t), \sigma_r(t)$, είναι θετικές σταθερές. Ο όρος W_t είναι μια διαδικασία Wiener, δηλαδή μία διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας εντοπίζουμε την στιγμιαία μεταβλητότητα $\sigma_r^2(t)$. Η παράμετρος $\theta(t)$ υποδηλώνει το πεδίο του μακροπρόθεσμου μέσου, δηλαδή εκφράζει τα μελλοντικά διανύσματα του επιτοκίου που θα κινούνται μακροπρόθεσμα γύρω από την συγκεκριμένη τιμή $\theta(t)$.

Το μοντέλο έχει την δυνατότητα επαναφοράς του μέσου (mean reversion), δηλαδή όταν το επιτόκιο $r(t)$ είναι μεγαλύτερο του $\theta(t)$, τότε το $\alpha(t) > 0$ δίνει αρνητική τιμή στην τάση και το επιτόκιο επιστρέφει στον μακροπρόθεσμο μέσο. Συνεπώς, το $\alpha(t)$ μας δείχνει πόσο γρήγορα επιστρέφει το επιτόκιο στο $\theta(t)$.

2.2 Η αξία της εταιρείας υπό πιστοληπτική διαβάθμιση

Ορίζουμε $S(t)$ την αξία μιας εταιρείας στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άλμα για την μεταβλητότητα όταν αλλάζει η πιστοληπτική διαβάθμιση των ομολόγων. Η αξία του ενεργητικού της εταιρείας $S(t)$, ακολουθεί μια τυπική γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{3}$$

όπου μ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός ανάπτυξης του περιουσιακού στοιχείου, σ αντιπροσωπεύει την μεταβλητότητα και W_t είναι μια τυπική κίνηση Brown. Η συσχέτιση μεταξύ του επιτοκίου και της αξίας της επιχείρησης δίνεται ως εξής:

$$Cov(dW_t, dW_t^r) = \rho dt, \tag{4}$$

όπου $-1 < \rho < 1$ είναι μια σταθερά.

Η αναμενόμενη ανάπτυξη μιας εταιρείας με υψηλό χρέος εξαρτάται ισχυρά από το επιτόκιο $r(t)$. Επομένως, η αναμενόμενη ανάπτυξη ορίζεται ως συνάρτηση του χρόνου, του επιτοκίου και της αξίας της επιχείρησης:

$$\mu = \mu\big(t, r(t), S(t)\big),$$

όπου μ μπορεί να πάρει αρνητική τιμή όταν η ταμειακή ροή μιας εταιρείας γίνεται αρνητική.

Αντίστοιχα, η μεταβλητότητα σ είναι συνάρτηση του χρόνου, του επιτοκίου και της αξίας της επιχείρησης:

$$\sigma = \sigma\big(t, r(t), S(t)\big),$$

Υποθέτουμε ότι για έναν οργανισμό αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, η αξιολόγηση για ένα εταιρικό ομόλογο γίνεται με βάση ένα προκαθορισμένο μέτρο ορισμένο ως $\gamma(t) = \frac{D(t)}{S(t)}$, όπου $D(t)$ είναι το χρέος της εταιρείας και $S(t)$ τα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας.

Θεωρούμε ότι υπάρχει πεπερασμένος αριθμός πιθανών βαθμολογήσεων στον πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα $[0, T]$.
Ορίζουμε γ_i, $i = 1,2, \cdots, n$, τις κρίσιμες τιμές του προκαθορισμένου μέτρου όπου

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n \leq 1.$$

Οι τιμές $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τα εμπειρικά δεδομένα μιας εταιρείας. Επίσης, με βάση τα εμπειρικά δεδομένα μπορούμε να καθορίσουμε την κατά προσέγγιση αναμενόμενη απόδοση και μεταβλητότητα σε κάθε πιθανή αλλαγή της πιστοληπτικής διαβάθμισης:

$$\mu(t, r, S) = \mu_i(t, r, s), \qquad \gamma_i < \frac{D(t)}{S(t)} < \gamma_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1,$$

$$\sigma(t, r, S) = \sigma_i(t, r, S), \qquad \gamma_i < \frac{D(t)}{S(t)} < \gamma_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1,$$

όπου $\quad 0 < \mu_n \leq \cdots \leq \mu_1, \quad 0 < \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n.$

2.3 Αποτίμηση Εταιρικού Ομολόγου

Υποθέτουμε ότι η εταιρεία εκδίδει ένα μόνο εταιρικό ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με ονομαστική αξία F. Ορίζουμε ως Φ_t την discount τιμή του εταιρικού ομολόγου την χρονική στιγμή t, η οποία είναι ίδια με την $D(t)$. Επομένως, την χρονική στιγμή T ένας επενδυτής μπορεί να πάρει $\Phi_T = min\{S(t), F\}$. Θεωρούμε ότι ο ομολογιούχος έχει την προτεραιότητα να απαιτήσει το περιουσιακό στοιχείο της εταιρείας από τους μετόχους.

Τέλος, ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την $\Phi(s,r,t)$ που είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία αποπληρωμής την χρονική στιγμή T και ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(s,r,t) = E_{s,t}[e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} min(S_T, F)\,|s = S(t), r = r(t)], \qquad (5)$$

όπου $r(t)$ και $S(t)$ ικανοποιούν τις στοχαστικές διαδικασίες (1) και (3) αντίστοιχα. Στην περίπτωση αλλαγής της πιστοληπτικής διαβάθμισης η αξία της εταιρείας μπορεί να διαφοροποιηθεί. Ωστόσο, για μια μεγάλη εταιρεία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή του ομολόγου είναι συνεχής καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του ομολόγου. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $\Phi(s,r,t)$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε διάστημα διαβάθμισης.

Θεώρημα 1. Κατά την ημερομηνία λήξης T η τιμή του ομολόγου είναι γνωστή ως: $\Phi(s,r,T) = \min\{s, F\}$ (6) και $\Phi(0,r,T) = 0$. (7)
Τότε η $\Phi(s,r,t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \sigma_r\sigma\rho s\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + rs\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - r(t)\Phi = 0. \qquad (8)$$

στο $Q_T = \{(s,r,t): 0 < s < \infty, -\infty < r < \infty, 0 < t \le T\}$

Απόδειξη. Η αναμενόμενη παρούσα αξία αποπληρωμής την χρονική στιγμή T δίνεται από την (5)

Έχουμε ότι:

$$e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\Phi(s,r,t) = E\left[e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau}\min(S_T, F)\middle|\, s = S(t), r = r(t)\right], \qquad (9)$$

και άρα,

$$d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\Phi(s,r,t)) = d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})\Phi(s,r,t) + e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}d\Phi(s,r,t) + d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})d\Phi(s,r,t), \qquad (10)$$

όπου $d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}) = -r(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}dt$ και $d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})d\Phi(s,r,t) = 0$.

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito στην $\Phi(s,r,t)$ και με βάση τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες για το επιτόκιο (1) και την αξία της εταιρείας (3) προκύπτει:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \sigma_r\sigma\rho s\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + rs\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dt + \sigma s\frac{\partial\Phi}{\partial s}dW_t + \sigma_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}dW_t^r.$$

Με αντικατάσταση στην (10) παίρνουμε:

$$d\left(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\Phi(s,r,t)\right) = e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\left(-r(t)\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \sigma_r\sigma\rho s\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + rs\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dt + e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\left(\sigma s\frac{\partial\Phi}{\partial s}dW_t + \sigma_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}dW_t^r\right).$$

Παρατηρούμε από την (9) ότι η διαδικασία του αριστερού μέλους της προηγούμενης σχέσης είναι martingale άρα ο όρος τάσης του δεξιού μέλους της θα πρέπει να μηδενίζεται. Επομένως, η Φ ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (8) στο Q_T. ∎

Παρατήρηση 1. Ορίζουμε με $\Gamma_T^i = \{(s,r,t): \Phi(s,r,t) = s\gamma_i\}, i = 1,\cdots,n,$ (11) να είναι τα συνοριακά σύνολα μεταξύ γειτονικών περιοχών με διαφορετική διαβάθμιση. Για να δούμε τις συνοριακές συνθήκες για την Φ στο Γ_T^i επισημαίνουμε ότι η τιμή του ομολόγου είναι συνεχής όταν περάσει ένα προκαθορισμένο μέτρο βαθμολόγησης, δηλαδή

$$\Phi_i = \Phi_{i+1} = s\gamma_i \quad , i = 1,\cdots,n-1. \qquad (12)$$

Επίσης, ισχύει:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial s} = \frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial s} \quad ,i = 1,2,\cdots,n-1. \qquad (13)$$

2.4 Η περίπτωση του Μοντέλου Vasicek

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο $r(t)$ ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, η μελλοντική εξέλιξη του πραγματικού επιτοκίου λαμβάνοντας υπόψιν την παρούσα αξία του είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη εξέλιξη που οδήγησε στο σημερινό επίπεδο. Επιπλέον το επιτόκιο $r(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή δεν μεταβάλλει την αξία με ένα στιγμιαίο άλμα.

Η αγορά είναι αποτελεσματική δηλαδή δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγής, οι πληροφορίες είναι διαθέσιμες ταυτόχρονα σε όλους τους επενδυτές και κάθε επενδυτής ενεργεί ορθολογικά (προτιμά τον πλούτο και χρησιμοποιεί όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες).

Στην εργασία αυτή θεωρούμε την περίπτωση όπου το στοχαστικό επιτόκιο περιγράφεται με το μοντέλο Vasicek:

$$dr(t) = a\big(\vartheta - r(t)\big)dt + \sigma_r dW_t. \qquad (14)$$

Θεώρημα 2. Η τιμή ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου $P(t,r)$ με ονομαστική αξία $F = 1$ την χρονική στιγμή $t = T$ ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} r\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha\big(\vartheta - r(t)\big)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0. \qquad (15)$$

με $r > 0,\ 0 < t < T$.

Απόδειξη. Η τιμή $P(t,r)$ ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου δίνεται ως εξής:

$$P(t,r) = E\left[e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau} | r = r(t)\right].$$

Έχουμε ότι $e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau}P(t,r) = E\left[e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau} | r = r(t)\right]$, (16)

και άρα,

$$d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}P(t,r)) = d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})P(t,r) + e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}dP(t,r) + d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})dP(t,r), \qquad (17)$$

όπου $d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}) = -r(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}dt$ και $d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau})dP(t,r) = 0$.

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Ito στην $P(t,r)$ και επειδή το επιτόκιο ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία (14) προκύπτει ότι:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} r\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha\big(\vartheta - r(t)\big)\frac{\partial P}{\partial r}\right)dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dW_t.$$

και με αντικατάσταση στην (17) έχουμε:

$$d(e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}P(t,r)) = e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\left(-rP + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} r\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha\big(\vartheta - r(t)\big)\frac{\partial P}{\partial r}\right)dt + e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dW_t.$$

Παρατηρούμε από την (16) ότι η διαδικασία του αριστερού μέλους της προηγούμενης σχέσης είναι martingale άρα ο όρος τάσης του δεξιού μέλους της θα πρέπει να μηδενίζεται. Επομένως, η $P(t,r)$ ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (15). ■

Λήμμα 1. Σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek (14) υπάρχει μοναδική λύση $P(t,r) \in C^{1,2}\big([0.T] \times (0,\infty)\big)$ της μορφής:

$$P(t,r) = A(t)e^{-rB(t)}, \qquad (18)$$

όπου

$$A(t) = e^{\frac{(B(t)-(T-t))\left(\alpha^2\vartheta-\frac{\sigma_r^2}{2}\right)}{\alpha^2} - \frac{\sigma_r^2}{4\alpha}B(t)^2}, B(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right).$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε της μερικές παραγώγους της $P(t,r)$ όπως δίνεται από τη (18) και έχουμε τις εξής εκφράσεις:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A'(t)e^{-rB(t)} + A(t)e^{-rB(t)}(-rB'(t)),$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = A(t)e^{-rB(t)}(-B(t)) = -A(t)B(t)e^{-rB(t)},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = -A(t)B(t)e^{-rB(t)}(-B(t)) = A(t)B(t)^2 e^{-rB(t)}.$$

Ξαναγράφοντας την (15) κάνουμε αντικατάσταση και έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha\big(\vartheta - r(t)\big)\frac{\partial P}{\partial r} - rP = A'(t)e^{-rB(t)} - rA(t)B'(t)e^{-rB(t)} +$$
$$\frac{1}{2}\sigma_r^2\left(A(t)B(t)^2e^{-rB(t)}\right) + \alpha\big(\vartheta - r(t)\big)\left(-A(t)B(t)e^{-rB(t)}\right) - rA(t)e^{-rB(t)} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\left(A'(t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2A(t)B(t)^2 - \alpha\vartheta A(t)B(t)\right) - rA(t)(B'(t) + 1 - \alpha B(t)) = 0,$$

Οπότε προκύπτει το εξής σύστημα εξισώσεων που πρέπει να ισχύει $\forall r \in R$:

$$A'(t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2A(t)B(t)^2 - \alpha\vartheta A(t)B(t) = 0, \qquad (19)$$
$$B'(t) + 1 - \alpha B(t) = 0. \qquad (20)$$

Λύνουμε την εξίσωση (20) ως προς $B(t)$ και έχουμε:

$$B(t) = ce^{\alpha t} - e^{\alpha t}\int e^{-\alpha t}dt = ce^{\alpha t} + e^{\alpha t}\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha} + ce^{\alpha t}. \qquad (21)$$

Επειδή την χρονική στιγμή $t = T$ ισχύει ότι $P(T,r) = 1$, δηλαδή $A(T)e^{-rB(T)} = 1$, αυτό μας δίνει $A(T) = 1$ και $B(T) = 0$.

Οπότε την χρονική στιγμή $t = T$, $B(T) = \frac{1}{\alpha} + ce^{\alpha T} = 0$, από την οποία προκύπτει η τιμή της σταθεράς c ίση με $c = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha T}$.

Με αντικατάσταση στην (21) ,δίνεται ότι $B(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$.

Στη συνέχεια, λύνουμε την (19) ως προς $A(t)$ και έχουμε:

$$A'(t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 A(t)B(t)^2 - \alpha\vartheta A(t)B(t) = 0,$$
$$A'(t) = \alpha\vartheta A(t)B(t) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 A(t)B(t)^2,$$

$$A'(t) = A(t)\left(\alpha\vartheta B(t) - \tfrac{1}{2}\sigma_r^2 B(t)^2\right).$$

Επομένως,

$$A(t) = ce^{\int \alpha\vartheta B(t) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 B(t)^2 dt} = ce^{\int \alpha\vartheta \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{1}{\alpha^2}\left[1-e^{-\alpha(T-t)}\right]^2 dt} =$$
$$ce^{\int \vartheta\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{1}{\alpha^2}\left(1-2e^{-\alpha(T-t)}+e^{-\alpha(T-t)^2}dt\right)} =$$
$$ce^{\left[\vartheta t - \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)\right] - \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{1}{\alpha^2}\left[t - \frac{2e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}\right]} =$$
$$ce^{\vartheta t - \frac{\vartheta e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2}\sigma_r^2 t + \frac{e^{-\alpha(T-t)}\sigma_r^2}{\alpha^3} - \frac{\sigma_r^2}{4\alpha^3}e^{-2\alpha(T-t)}}. \qquad (22)$$

Επειδή $A(T) = 1$, με αντικατάσταση υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς c και προκύπτει $ce^{\vartheta T - \frac{\vartheta}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2}\sigma_r^2 T + \frac{\sigma_r^2}{\alpha^3} - \frac{\sigma_r^2}{4\alpha^3}} = 1$, δηλαδή $c = e^{-\vartheta T + \frac{\vartheta}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\sigma_r^2 T - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^3} + \frac{\sigma_r^2}{4\alpha^3}}$.

Συνεπώς,

$$A(t) = e^{-\vartheta(T-t) + \frac{\vartheta}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{1}{2\alpha^2}\sigma_r^2(T-t) - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha(T-t)}) + \frac{\sigma_r^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})},$$

$$A(t) = e^{\frac{(B(t)-(T-t))\left(\alpha^2\vartheta - \frac{\sigma_r^2}{2}\right)}{\alpha^2} - \frac{\sigma_r^2}{4\alpha}B(t)^2}. \qquad (23)$$ ■

Θεώρημα 3. Κατά την ημερομηνία λήξης T η $V_i(y,t) = \frac{\Phi_i(s,r,t)}{P(r,t)}$ είναι γνωστή ως $V_i(y,T) = min\{y, F\}$ (24) και $V_i(0,t) = 0$ (25). Τότε η $V_i(y,t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2 y^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = 0, \qquad (26)$$

όπου $\hat{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_i^2 + 2\rho\sigma_i\sigma_r B(t) + \sigma_r^2 B^2(t)}$, $i = 1.2.\cdots, n$, (27)
$\frac{V_i}{\gamma_{i+1}} < y < \frac{V_i}{\gamma_i}$, $0 < t < T$. (28)

Απόδειξη. Θέτουμε τους εξής μετασχηματισμούς:
$y = \frac{s}{P(r,t)}$, $V_i(y,t) = \frac{\Phi_i(s,r,t)}{P(r,t)}$,

δηλαδή $\Phi_i(s,r,t) = V_i(y,t)P(r,t)$,
όπου $\Phi_i(s,r,t) = \Phi(s,r,t)$, $\frac{\Phi_{i+1}}{\gamma_{i+1}} < s < \frac{\Phi_i}{\gamma_i}$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της $\Phi(s,r,t)$ και λαμβάνοντας υπόψιν τους παραπάνω μετασχηματισμούς προκύπτουν οι εξής εκφράσεις:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial t}V_i+\frac{\partial V_i}{\partial t}P,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S}=\frac{\partial P}{\partial S}V_i+P\frac{\partial V_i}{\partial s}=P\frac{\partial V_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial V_i}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)\frac{1}{P}=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{1}{P},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\partial s}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{s}{P}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{S}{A(t)e^{-rB(t)}}B(t)=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{s}{P}B(t)=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}yB(t),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial P}{\partial r}V_i+\frac{\partial V_i}{\partial r}P\right)=\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}P+\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial V_i}{\partial r}+\frac{\partial P^2}{\partial r^2}V_i+\frac{\partial V_i}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r}=$$

$$=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}P+\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial V_i}{\partial r}+\frac{\partial P^2}{\partial r^2}V_i+\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial V_i}{\partial r}=\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}y^2PB^2(t)+\frac{\partial P^2}{\partial r^2}V_i.$$

Με αντικατάσταση στην (8) έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial t}V_i+\frac{\partial V_i}{\partial t}P+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{1}{P}+\sigma_r\sigma\rho s\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}yB(t)+\frac{1}{2}\sigma_r^2\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}y^2PB^2(t)+\frac{\partial P^2}{\partial r^2}V_i\right)+ rs\left(\frac{\partial V_i}{\partial y}\right)+\beta\left(\frac{\partial P}{\partial r}V_i+\frac{\partial V_i}{\partial r}P\right)-r(t)V_iP=0, \qquad (29)$$

Από την (15) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial P}{\partial t}V_i+\frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial P^2}{\partial r^2}V_i+\beta\frac{\partial P}{\partial r}V_i-r(t)V_iP=0.$$

και η (29) μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}P+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\frac{1}{P}+\sigma_r\sigma\rho s\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}yB(t)+\frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}y^2PB^2(t)=0,$$

όπου προκύπτει ότι η $V_i(y,t)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}+\sigma_r\sigma\rho\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}y^2B(t)+\frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}y^2B^2(t)=0.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην μερική διαφορική εξίσωση προς απόδειξη. ■

Παρατήρηση 2. Παρατηρούμε ότι η (11) γράφεται ισοδύναμα ως $\Gamma_T^i = \{(t,y): y = \frac{V_i}{\gamma_i}\}$, όπου για $i = 1,2,\cdots.n-1$ και $(y,t) \in \Gamma_T$ έχουμε ότι:

$$V_i(y,t) = V_{i+1}(y,t) = \gamma_i y, \tag{30}$$

$$\frac{\partial V_i(y,t)}{\partial y} = \frac{\partial V_{i+1}(y,t)}{\partial y}. \tag{31}$$

■

Θεώρημα 4. Η $\varphi(x,t) = V_i(e^x, T-t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0, \tag{32}$$

στο $Q_T = (-\infty,+\infty)\times(0,T]$, όπου $\Gamma_T^i = \{(x,t)|\varphi(x,t) = \gamma_i e^x\}$,
και $\sigma = \hat{\sigma}_i(x,t)$, $\gamma_i e^x < \varphi < \gamma_{i+1}e^x$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τους εξής μετασχηματισμούς όπου $x = logy$ και $T-t$ ως t , ορίζουμε την $\varphi(x,t) = V_i(e^x, T-t)$. Δηλαδή, $V_i(y,t) = \varphi(logy, T-t)$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της V_i λαμβάνοντας υπόψιν τους μετασχηματισμούς που αναφέραμε και προκύπτουν οι εξής εκφράσεις:

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial y}\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Με αντικατάσταση στην (26) έχουμε:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2 y^2\left(\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην (32). ■

Παρατήρηση 3. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $F = 1$. Οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την αρχική συνθήκη ως:

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) = min\{e^x, 1\},\ -\infty < x < \infty. \tag{33}$$

Τότε για κάθε περιοχή πιστοληπτικής διαβάθμισης έχουμε:
$Q_T(i) = \{(x,t): s_i(t) < x < s_{i+1}(t), 0 < t < T\}$,

Υπόθεση 1. Τα $\sigma_i(t,r,s)$ είναι διαφοροποιήσιμα στο $[0,T] \times R^2$ και ισχύει:

$0 < \alpha_1 \leq \sigma_i(t,r,s) \leq \alpha_2$, $i = 1,2,\cdots,n$.

Θεώρημα Μοναδικότητας: Κάτω από την υπόθεση 1, για το πρόβλημα (24) – (31) υπάρχει μοναδική λύση $\varphi(x,t) \in C^{2,1}(Q_T \backslash U_{i=1}^{n} \Gamma_T^i)$ έτσι ώστε $\Gamma_T^i = \{(x,t) \colon \varphi(s_i(t),t) = \gamma_i e^{s_i(t)}\}$.

Παρατήρηση 4. Για να υπολογίσουμε την $\Phi(s,r,t)$ που είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία αποπληρωμής την χρονική στιγμή T αρκεί να υπολογίσουμε την $\varphi(x,t) = V_i(e^x, T-t)$ που ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (32) του Θεωρήματος 4.

Κεφάλαιο 3

Εμπειρική Μελέτη Εκτίμησης Παραμέτρων

Σε αυτό το κεφάλαιο επιλέγουμε μία εταιρεία με δυο διαφορετικές περιοχές πιστοληπτικής διαβάθμισης και χρησιμοποιούμε πραγματικά δεδομένα για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου αποτίμησης από το μοντέλο του Merton (1974). Στη συνέχεια, πραγματοποιείται εμπειρική μελέτη για το μοντέλο του Vasicek. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt.

3.1 Εκτίμηση παραμέτρων από το μοντέλο Merton

Για την εφαρμογή του μοντέλου αποτίμησης πρέπει να εκτιμήσουμε τις εξής παραμέτρους: $\mathrm{r}, \gamma_i, \sigma_i$.

1. Το εγχώριο επιτόκιο r , που είναι ο μέσος όρος των ημερήσιων επιτοκίων για το χρονικό διάστημα που ερευνούμε. Δίνεται από το ημερήσιο risk-free rate, ως το yield του 10ετούς κυβερνητικού ομολόγου.

2. Το γ υπολογίζεται από τον ισολογισμό της εταιρείας ως το πηλίκο του χρέους διά την αξία της εταιρείας.

3. Οι μεταβλητότητες σ_{L} , σ_{H} μπορούν να εκτιμηθούν απο τις τιμές της μετοχής της εταιρείας στις διαφορετικές περιοχές πιστοληπτικής διαβάθμισης. Πιο συγκεκριμένα,

   - Βρίσκουμε τις μεταβλητότητες σ_E σε κάθε περιοχή από τις τιμές της μετοχής της εταιρείας.

     Αν η εταιρεία βρίσκεται στην i-οστή περιοχή διαβάθμισης , ορίζουμε ως S_{ik} την k-οστή ημερήσια τιμή της μετοχής και σ_{ik} ως την τυπική διακύμανση της τιμής της μετοχής. Τότε ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης δίνεται ως εξής:

$$\sigma_{iN}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{S_{ik}-S_{i(k-1)}}{S_{ik}} - \bar{u}_i\right)^2,$$

όπου $\bar{u}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{S_{ik}-S_{i(k-1)}}{S_{ik}}$.

Τότε η ετήσια μεταβλητότητα δίνεται ως $\sigma_{iN}\sqrt{M_{\mathrm{i}}}$, όπου M_{i} οι μέρες διαπραγμάτευσης.

- Υπολογίζουμε τις μεταβλητότητες σ_{L} , σ_{H} χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Merton (1974), όπου δίνεται η σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας της εταιρείας σ_V και την μεταβλητότητα της μετοχής σ_E . Επομένως, υπολογίζουμε σ_V και V_0 από τις εξής σχέσεις:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT}N(d_2), \quad \sigma_E E_0 = N(d_1)\sigma_V V_0,$$

όπου

$$d_1 = \frac{log\left(\frac{V_0}{D}\right)+\left(r+\sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T} \ .$$

Ορίζουμε ως D το ποσό του χρέους που προσδιορίζεται από τον ισολογισμό της εταιρείας, V_0 εκφράζει την αξία της εταιρείας και E_0 την αξία της μετοχής την αρχική στιγμή σε κάθε περιοχής διαβάθμισης.

3.2 Εφαρμογή με πραγματικά δεδομένα

Επιλέγουμε την Kinder Morgan Inc. που εδρεύει στην Αμερική. Η εταιρεία παρουσιάζει δυο διαφορετικές αξιολογήσεις πιστοληπτικής διαβάθμισης κατά το χρονικό διάστημα από 17 Ιανουαρίου 2019 έως 21 Ιανουαρίου 2020. Πιο συγκεκριμένα, αξιολογήθηκε με (BBB-) για το διάστημα από 17 Ιανουαρίου 2019 έως 28 Ιουνίου 2019 και με (BBB) για το διάστημα από 1 Ιουλίου 2019 έως 21 Ιανουαρίου 2020. Η αξιολόγηση δινέται από την Fitch.

Αρχικά, το r είναι το 10ετές Αμερικανικό επιτόκιο για χρονικό ορίζοντα περίπου ενός έτους. Το προκαθορισμένο κριτήριο αλλαγής της πιστοληπτικής διαβάθμισης, δηλαδή το γ , υπολογίζεται από τον ισολογισμό της εταιρείας. Στην περίπτωσή μας, $\mathrm{r} = 0.021$ και $\gamma = 0.46$. Η αξία της μετοχής E_0 υπολογίζεται την αρχική στιγμή σε κάθε περιοχή διαβάθμισης ως το γινόμενο της τιμής κλεισίματος την πρώτη ημέρα της κάθε περιόδου επί του αριθμού των μετοχών που είναι σε κυκλοφορία. Έπειτα, αντλήσαμε τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής της εταιρείας και υπολογίσαμε τις μεταβλητότητες σ_E.

Τα δεδομένα αντλήθηκαν από δυο διαφορετικές πηγές. Ο ισολογισμός της εταιρείας, οι τιμές κλεισίματος της μετοχής καθώς επίσης και η πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας προέρχονται από τη βάση δεδομένων Bloomberg και το επιτόκιο εξάγεται από την Thomson Reuters.

Στη συνέχεια, αφού αντλήσαμε τα δεδομένα, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Merton (1974) υπολογίσαμε μεταβλητότητα της εταιρείας σ_V (δηλαδή τις μεταβλητότητες σ_{L}, σ_{H} για τις δυο διαφορετικές περιοχές διαβάθμισης) και την αξία της εταιρείας V_0 χρησιμοποιώντας τον Κώδικα 1.

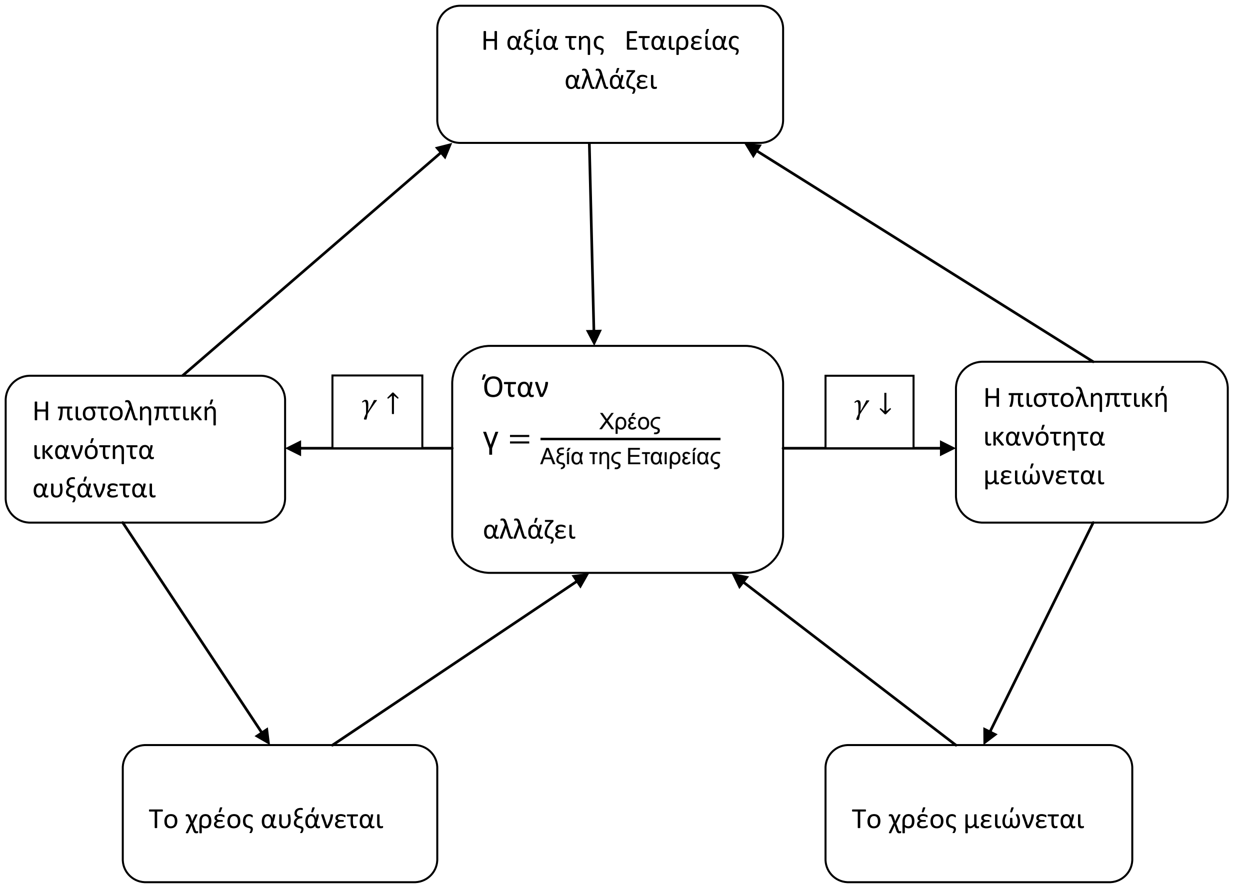
Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε μία αρχική πιθανή τιμή x_0 για τις δύο παραμέτρους που έχουμε για εκτίμηση , καλούμε με fun το όνομα του αρχείου @root2d και με την εντολή $fsolve$ λύνουμε το σύστημα ($x = fsolve(fun, x_0)$).

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τα στοιχεία για την εταιρεία για τις δύο περιοχές διαβάθμισης:

Πίνακας 1

Date	Close Price	Rating	σ_E	σ_V	D	E_0	V_0
17 January 2019 ….	17.72	Low (BBB-)	0.17	0.11	23.55	39.52	60.27
28 June 2019	20.88						
1 July 2019 ….	**20.88**	**High (BBB)**	**0.15**	**0.10**	**24.24**	**47.27**	**68.84**
21 January 2020	**21.36**						

Στο επόμενο διάγραμμα, μπορούμε να δούμε πώς συσχετίζονται η πιστοληπτική ικανότητα, το χρέος και η αξία της εταιρείας:



1) Όταν αυξάνεται η πιστοληπτική ικανότητα, η αξία του ομολόγου αυξάνεται, το χρέος αυξάνεται και η μεταβλητότητα της εταιρείας μειώνεται.

2) Όταν μειώνεται η πιστοληπτική ικανότητα, η αξία του ομολόγου μειώνεται, το χρέος μειώνεται και η μεταβλητότητα της εταιρείας αυξάνεται.

3.3 Εκτίμηση παραμέτρων για το μοντέλο Vasicek

Σε αυτή την ενότητα, υπολογίζουμε τις παραμέτρους για το μοντέλο του Vasicek. Η εμπειρική μελέτη πραγματοποιείται για χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Αρχικά, ορίζουμε την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης υπό το μοντέλο Vasicek. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε παρατηρήσεις δικαιωμάτων με διαφορετικές ληκτότητες και με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt (1944-1963) θα εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους.

3.3.1 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με το μοντέλο Vasicek

Στην περίπτωση του μοντέλου του Vasicek, το επιτόκιο $r = r(t)$ ακολουθεί την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

$$dr(t) = \alpha(t)\big(\vartheta(t) - r(t)\big)dt + \sigma_r(t)dW_t^r. \qquad (34)$$

όπου $\alpha(t)$, $\vartheta(t)$, $\sigma_r(t)$ θετικές σταθερές.

Σύμφωνα με το άρθρο του Yong-Jin Kim (2001), η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης υπό το μοντέλο Vasicek συμβολίζεται με $V_0(Vas)$ και ορίζεται ως εξής:

$$V_0(Vas) = S_0\Phi(d_1) - \alpha P(0,T)\Phi(d_2), \qquad (35)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η τυποποιημένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Η παρούσα αξία ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με χρόνο μέχρι τη λήξη T, $P(0,T)$, ορίζεται ως:

$$P(0,T) = \exp\left(\frac{1}{2}\Sigma_{22}^T - B(T)\right), \qquad (36)$$

όπου $\Sigma_{22}^T = \frac{{\sigma_r}^2}{\alpha^2}\left[T - \frac{3+e^{-\alpha T}\left(e^{-\alpha T}-4\right)}{2\alpha}\right]$,

και $B(T) = -\frac{1}{\alpha}\left[\left(r_0 - \frac{\alpha\vartheta-\sigma_r\lambda}{\alpha}\right)(e^{-\alpha T} - 1) - T(\alpha\vartheta - \sigma_r\lambda)\right]$.

Επιπλέον, $d_1 = \frac{\Sigma_{11}^T+\Sigma_{12}^T-C(T)}{\sqrt{D}}$,

όπου $C(T) = \frac{\Sigma_{11}^T}{2} - B(T) + log\left(\frac{K}{S_0}\right)$, $D = \Sigma_{11}^T + 2\Sigma_{12}^T + \Sigma_{22}^T$,

$\Sigma_{11}^T = \sigma^2 T$, $\Sigma_{12}^T = \frac{\sigma\sigma_r\rho}{\alpha}\left[\frac{e^{-\alpha T}-1}{\alpha} + T\right]$ και $d_2 = d_1 - \sqrt{D}$.

Η αποτίμηση του δικαιώματος αγοράς περιγράφεται στον Κώδικα 4 και καλείται απο τον Κώδικα 5 για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου του Vasicek.

3.3.2 Περιγραφή Δεδομένων Αγοράς

Χρησιμοποιώντας την βάση δεδομένων της Bloomberg αντλήσαμε τα δεδομένα για ένα in-the-money, at-the-money, out-of-the-money, Αμερικανικό Δικαίωμα Αγοράς με τον κάθε τύπο χρηματοροής να διαιρείται σε 4 ληκτότητες και για χρονικό ορίζοντα περίπου ενός έτους. Πιο συγκεκριμένα, για να πραγματοποιηθεί η εμπειρική μελέτη χρειαστήκαμε:

- τιμές δικαιώματος (market prices)
- τιμές εξάσκησης (strike prices)
- τιμές κλεισίματος (last prices)
- την περίοδο μέχρι τη λήξη (time to maturity)
- το ημερήσιο risk-free rate, ως το yield του 10ετούς κυβερνητικού ομολόγου των Η.Π.Α (rate)

Για κάθε ημέρα έχουμε παρατηρήσεις δικαιωμάτων με ληκτότητες 2 μήνες, 6 μήνες, 12 μήνες και 24 μήνες. Ο υποκείμενος τίτλος είναι η μετοχή της εταιρείας Kinder Morgan. Η εμπειρική μελέτη πραγματοποιείται για το διάστημα από 17 Ιανουαρίου 2019 μέχρι και 21 Ιανουαρίου 2020. Έχουμε τιμές εξάσκησης ίσες με την τρέχουσα τιμή της μετοχής (at-the-money) , τιμές εξάσκησης σε επίπεδα 5% πάνω της τρέχουσας τιμής (in-the-money) και σε επίπεδα 5% κάτω από την τρέχουσα τιμή της μετοχής (out-of-the-money).

3.3.3 Ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt

Στο μοντέλο Vasicek που μελετάμε, η μεταβλητότητα σ_r, η ταχύτητα επαναφοράς προς το μέσο α, η παράμετρος ϑ που περιγράφει την τιμή γύρω απο την οποία θα κινηθεί το επιτόκιο και ο συντελεστής συσχέτισης ρ αποτελούν άγνωστες παραμέτρους και πρέπει να εκτιμηθούν. Για την εκτίμηση των παραμέτρων κάνουμε χρήση του αλγορίθμου Levenberg-Marquardt (1944- 1963) που χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων με ελάχιστα τετράγωνα. Η συγκεκριμένη μέθοδος υποθέτει ότι έχουμε ένα μοντέλο και μια ομάδα παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Ο αλγόριθμος βρίσκει τις τιμές των παραμέτρων ώστε τα τετράγωνα των διαφορών απο τις τιμές των δικαιωμάτων που προήλθαν απο το μοντέλο με τις τιμές της αγοράς να έχουν την ελάχιστη δυνατή τιμή.

$$\hat{l} = argmin \sum_{i=0}^{N} \left(f_i^{market} - f_i^{model}\right)^2$$

όπου $\hat{l}$ είναι η ομάδα παραμέτρων (α^*,ϑ^*,σ_r^*,ρ^*) του μοντέλου και N ο αριθμός των δικαιωμάτων για κάθε μία ημέρα. Στην περίπτωσή μας, $N = 12$.

Θα βρούμε τις τιμές των δικαιωμάτων που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά και θα εφαρμόσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στο υπολογιστικό πακέτο Matlab. Δίνουμε μια αρχική πιθανή τιμή στις παραμέτρους, ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο φράγμα και με την εντολή lsqnonlin υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στο μοντέλο για την εύρεση της τιμής του δικαιώματος αγοράς.

Τα αποτελέσματα απο τον κώδικα εκτίμησης (Κώδικας 5) είναι οι εκτιμώμενες παράμετροι (α^*,ϑ^*,σ_r^*,ρ^*) για κάθε μια από τις 264 ημέρες.

α^*	ϑ^*	σ_r^*	ρ^*
1.2	**0.02**	**0.15**	**0.5**

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Αποτίμηση

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράψαμε το μοντέλο αποτίμησης και θέτοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς διαφοροποιήσαμε το αρχικό πρόβλημα επίλυσης. Σε αυτό το κεφάλαιο, πραγματοποιείται η αριθμητική επίλυση της τελικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών . Τέλος, παρουσιάζουμε την απεικόνιση του συνοριακού συνόλου για τις περιπτώσεις του σταθερού και του στοχαστικού επιτοκίου.

4.1 Αριθμητική Επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών

Για την Αριθμητική επίλυση της (32) χρησιμοποιούμε την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων βασίζεται στην ιδέα της προσέγγιση κάθε μερικής παραγώγου από ένα πηλίκο διαφοράς, μετατρέποντας τη λειτουργική εξίσωση σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \cdots \qquad (37)$$

Αν αμελήσουμε τους όρους τάξης h^2 και άνω, προκύπτει ότι:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h).$$

όπου $O(h)$ ερμηνεύει το σφάλμα αποκοπής όρων τάξης h και πάνω. Αυτή είναι μια προδρομική προσέγγιση για την παράγωγο.

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \cdots \qquad (38)$$

από όπου προκύπτει η οπισθοδρομική προσέγγιση:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h).$$

Και σε αυτή την προσέγγιση έχουμε ένα σφάλμα αποκοπής όρων τάξης $O(h)$.

Μια καλύτερη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (38) από την (37), καταλήγοντας στην

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Αυτή είναι μια κεντρική προσέγγιση και για μικρά h είναι μια καλύτερη προσέγγιση, αφού το σφάλμα αποκοπής είναι $O(h^2)$.

Για να επιλύσουμε την μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) πρέπει να προσεγγίσουμε επίσης την παράγωγο δεύτερης τάξης. Αυτή η προσέγγιση επιτυγχάνεται με την πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (37) και (38), οπότε έχουμε:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{1}{2}f^4(x)h^4 + \cdots.$$

Αναδιατάσσοντας, προκύπτει ότι:

$$f''(x)\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Για την εφαρμογή αυτών των ιδεών πάνω σε μια μερική διαφορική εξίσωση που περιλαμβάνει μια συνάρτηση $\varphi(x,y)$, δημιουργούμε ένα διακριτό πλέγμα των σημείων του τύπου (idx, jdy), όπου dx και dy είναι τα βήματα της διακριτοποίησης.

Έστω T ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, x_{max} μια κατάλληλα μεγάλη τιμή της μετοχής, που δε μπορεί να προσεγγιστεί απο την $x(t)$ εντός του χρονικού ορίζοντα που έχουμε θεωρήσει. Χρειαζόμαστε x_{max} αφού το πεδίο ορισμού της ΜΔΕ είναι μη φραγμένο για τις τιμές της μετοχής και πρέπει να το φράξουμε με κάποιο τρόπο για υπολογιστικούς σκοπούς.

- Το x_{max} παίζει το ρόλο του $+\infty$.

- Το πλέγμα αποτελείται από τα σημεία (x,t) τέτοια ώστε:

  $x = -Mdx, -(M-1)dx, ..-dx, 0, dx, 2dx, \ldots Mdx \equiv x_{max},$
  $t = 0, dt, 2dt, \ldots, Ndt \equiv T.$

Στην περίπτωσή μας, προσεγγίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς το χρόνο με τη χρήση της προδρομικής διαφοράς και τις μερικές παραγώγους ως προς x με τη χρήση της κεντρικής διαφοράς. Προκύπτουν οι εξής εκφράσεις:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j}}{dt},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2dx},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{dx^2},$$

Ξαναγράφοντας την (32) κάνουμε αντικατάσταση και έχουμε:

$$\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j}}{dt} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{dx^2} - \frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2dx}\right)=0,$$

Λύνουμε ως προς $\varphi_{i,j+1}$ και προκύπτει ότι:

$$\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \left(\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{dx^2} - \frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2dx}\right) = 0,$$

ή ισοδύναμα,

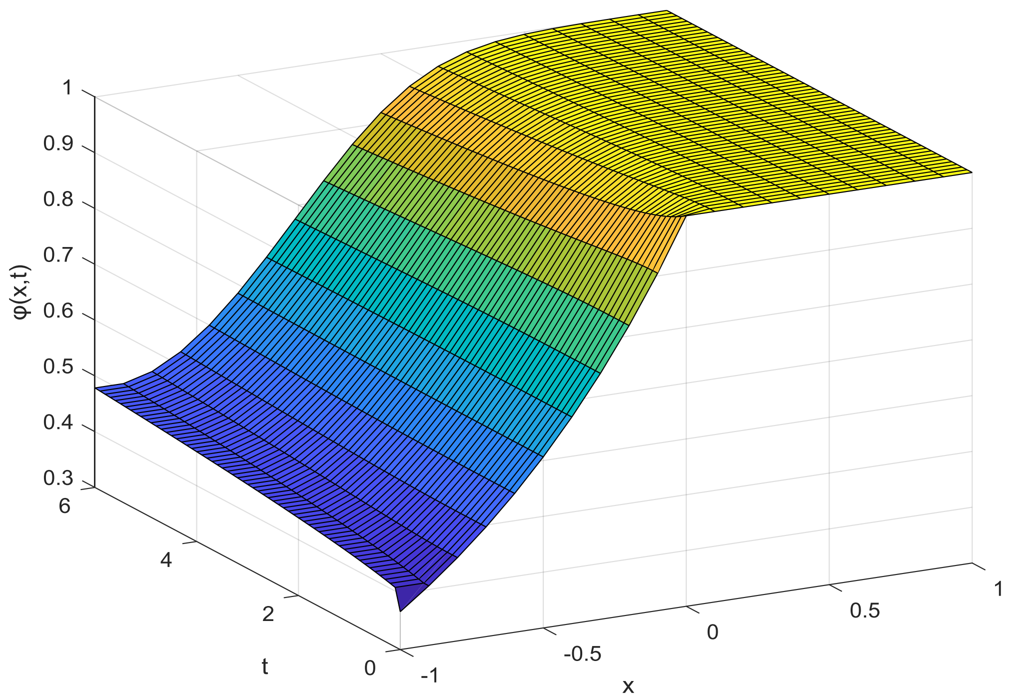
$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \frac{1}{dx^2}\varphi_{i+1,j} - \sigma^2 dt \frac{1}{dx^2}\varphi_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \frac{1}{dx^2}\varphi_{i-1,j} - \frac{1}{4}\sigma^2 dt \frac{1}{dx}\varphi_{i+1,j} + \frac{1}{4}\sigma^2 dt \frac{1}{dx}\varphi_{i-1,j} .$$

Επομένως,

$$\varphi_{i,j+1} = \left(1 - \sigma^2 dt \frac{1}{dx^2}\right)\varphi_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{dx}\right)\varphi_{i-1,j} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \left(\frac{1}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{dx}\right)\varphi_{i+1,j}, \qquad (39)$$

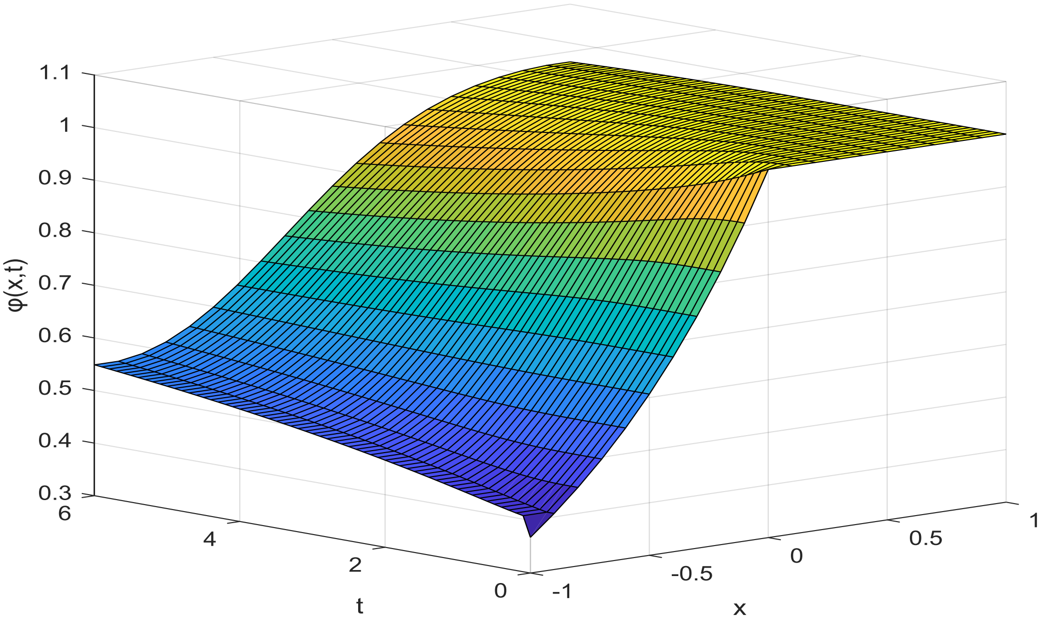
Όπου $\sigma = \begin{cases} \sigma_L, & \varphi < \gamma e^x \\ \sigma_H, & \varphi \geq \gamma e^x. \end{cases}$

Στην περίπτωσή μας, θα κάνουμε την αποτίμηση με τη χρήση της άμεσης μεθόδου καθώς προσεγγίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς το χρόνο με τη χρήση της προδρομικής διαφοράς. Εφαρμόζουμε την άμεση μέθοδο που ερμηνεύεται στον Κώδικα 2 για την περίπτωση που το επιτόκιο είναι σταθερό, δίνουμε τιμές για το $\boldsymbol{x} = (\mathbf{-1{:}\,0.1{:}\,1})$ και τον χρόνο $\boldsymbol{y} = (\mathbf{0{:}\,0.1{:}\,6})$ και με την εντολή $\boldsymbol{surf}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{matval})$ δίνεται η απεικόνιση της $\boldsymbol{\varphi}$ συναρτήσει των $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}$ στο σχήμα που δίνεται παρακάτω:



Σχήμα 1.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την άμεση μέθοδο που ερμηνεύεται στον Κώδικα 3. Με την χρήση των παραμέτρων που εκτιμήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δίνεται το σχήμα που προκύπτει απο την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης της $\boldsymbol{\varphi}$ για την περίπτωση που το επιτόκιο είναι στοχαστικό σύμφωνα με το μοντέλο Vasicek :



Σχήμα 2.

Οι απεικονίσεις της $\boldsymbol{\varphi}$ προκύπτουν από μετασχηματισμούς που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 2. Με την αλλαγή της χρονικής μεταβλητής $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{T} - \boldsymbol{t}$ **,** η τιμή του ομολόγου αυξάνεται όσο πλησιάζει ο χρόνος στη λήξη. Επίσης, αυξάνεται η τιμή του ομολόγου όσο η τιμή της μετοχής αυξάνεται.

4.2 Η Απεικόνιση του συνοριακού συνόλου

Στην περίπτωση που το επιτόκιο είναι στοχαστικό και ερμηνεύεται με το μοντέλο του Vasicek, αποδείξαμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς στο Κεφάλαιο 2, ότι το πρόβλημα επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης που ορίζεται ως συνάρτηση τριών μεταβλητών μετατρέπεται σε ενα πρόβλημα επίλυσης συναρτήσει δυο μεταβλητών, των x, t**.** Το συνοριακό σύνολο αυτής της συνάρτησης δίνεται ως εξής:

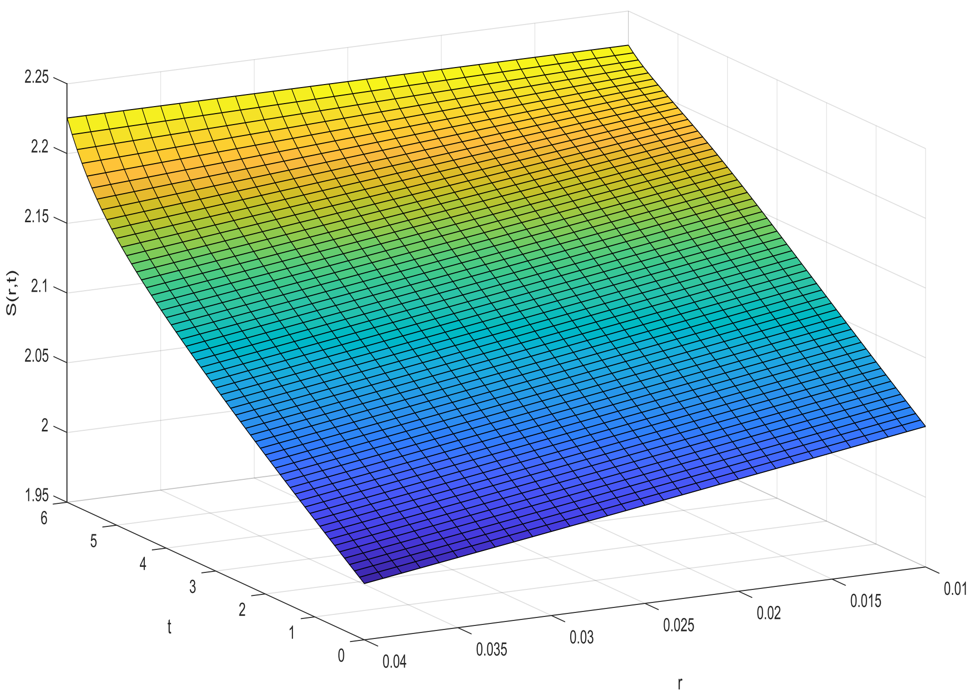
$$\Gamma_T^i = \{(x,t) \colon \varphi(s_i(t),t) = \gamma_i e^{s_i(t)}\}.$$

Για την αριθμητική εφαρμογή, χρησιμοποιούμε τον Κώδικα 3 και τις εκτιμώμενες παραμέτρους του μοντέλου Vasicek (Ενότητα 3.3.3) . Αρχικά, για την απεικόνιση του συνοριακού συνόλου ελέγχουμε ποιό είναι το x που μηδενίζει την $\varphi(s_i(t),t) - \gamma_i e^{s_i(t)}$.

Δίνουμε τιμές για το επιτόκιο $r = (0.01\colon 0.001\colon 0.04)$ και τον χρόνο $t = (0\colon 0.1\colon 6)$. Μετά απο δοκιμές στο command window για όλες τις 61 τιμές του x, διαπιστώνουμε ότι η $x = 0.8$ είναι η ζητούμενη τιμή.

Στη συνέχεια, δημιουργούμε στο command window τον πίνακα για την απεικόνιση του συνοριακού συνόλου. Ορίζουμε τον πίνακα για όλες τις 31x61 τιμές ως το γινόμενο του $\exp(0.8) * Vasicek\_P(T, r, t, \alpha, sigmar, theta)$, καθώς το $s = yP(r,t)$ όπου $y = \exp(x)$ και $P(r,t)$ η τιμή του ομολόγου υπό το μοντέλο Vasicek που ερμηνεύεται στον Κώδικα 8.

Τέλος, με την εντολή $surf(t, r, matvals)$ προκύπτει η απεικόνιση του συνοριακού συνόλου στο ακόλουθο σχήμα:



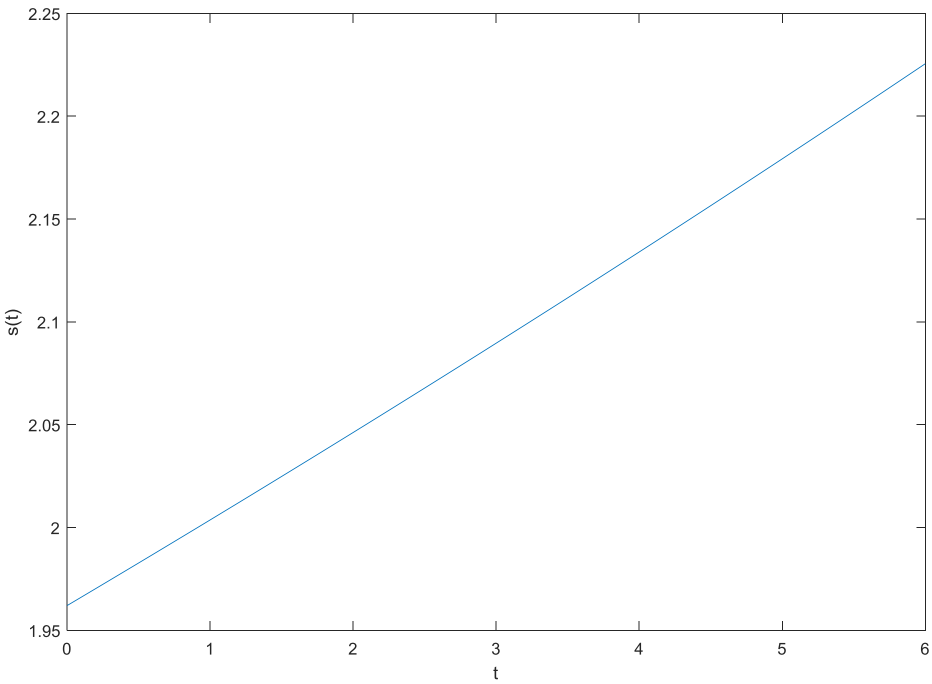
Σχήμα 3.

Στην περίπτωση που το επιτόκιο είναι σταθερό δηλαδή $r(t) = r$, έχουμε $dr(t) = a\big(\vartheta - r(t)\big)dt + \sigma_r dW_t$ να είναι ίσο με το μηδέν. Τότε, προκύπτει ότι $a, \vartheta, \sigma_r = 0$. Από τις σχέσεις (15) και (18) έχουμε ότι: $\frac{\partial P}{\partial t} = rP$ και $P(T, r) = 1$. Συνεπώς, η τιμή του ομολόγου υπό σταθερό επιτόκιο δίνεται ως εξής:

$$P(t, r) = e^{-r(T-t)}$$

Για την αριθμητική εφαρμογή, υπό σταθερό επιτόκιο ($r = 0.021$), δίνουμε τιμές για το χρόνο $t = (0{:}\,0.1{:}\,6)$ και ελέγχουμε ποιό είναι το x που μηδενίζει την $\varphi(s_i(t), t) - \gamma_i e^{s_i(t)}$. Μετά απο δοκιμές στο command window για όλες τις 61 τιμές του x, διαπιστώνουμε ότι η $x = 0.8$ είναι η ζητούμενη τιμή. Ορίζουμε τον πίνακα για τις 61 τιμές ως το γινόμενο του $\exp(0.8) * \exp\,(-r(T-t))$. Στην περίπτωση του σταθερού επιτοκίου κάνουμε χρήση του Κώδικα 2.

Τέλος, με την εντολή $plot(t, matvals)$ προκύπτει η απεικόνιση του συνοριακού συνόλου στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 4.

Παρατηρούμε ότι το $s(r,t)$ μειώνεται συναρτήσει του επιτοκίου και αυξάνεται όσο πλησιάζει ο χρόνος στη λήξη.

Τέλος, η συμπεριφορά του επιτοκίου στην αποτίμηση παρουσιάζει ενδιαφέρον, κυρίως όταν το επιτόκιο περιγράφεται σαν μια στοχαστική διαδικασία.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία ορίσαμε ένα νέο μοντέλο αποτίμησης εταιρικών ομολόγων υπό πιστοληπτική ικανότητα και στοχαστικό επιτόκιο. Η αξία της εταιρείας ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Το νέο μοντέλο επιτρέπει πολλαπλές αξιολογήσεις μέχρι την λήξη του ομολόγου. Υπάρχουν πολλά στοχαστικά μοντέλα που ερμηνεύουν την συμπεριφορά των επιτοκίων. Τα πολυπαραγοντικά μοντέλα λαμβάνουν υπόψιν περισσότερους του ενός παράγοντες αλλά αδυνατούν σε πολλές περιπτώσεις να προσφέρουν λύσεις στην αποτίμηση των ομολόγων. Η επιλογή του κατάλληλου μονοπαραγοντικού μοντέλου για την ερμηνεία του στοχαστικού επιτοκίου μας βοήθησε να δώσουμε μία πιο αναλυτική λύση στην αρχική διαφορική εξίσωση αποτίμησης που προκύπτει. Με την εφαρμογή του μοντέλου του Vasicek και θέτοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς, διαφοροποιήσαμε την επίλυση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

Η πιστοληπτική ικανότητα μιας εταιρείας καθορίζεται με βάση ένα προκαθορισμένο μέτρο που ορίσαμε και υπολογίζεται απο τον ισολογισμό της εταιρείας και με την αλλαγή της μεταβλητότητας. Για την εφαρμογή του μοντέλου αποτίμησης, χρησιμοποιήσαμε πραγματικά δεδομένα. Επιλέξαμε μια εταιρεία με δυο διαφορετικές περιοχές πιστοληπτικής διαβάθμισης και υπολογίσαμε τις μεταβλητότητες και την αξία της εταιρείας από το μοντέλο του Merton. Στην περίπτωσή μας, όπου βελτιώνεται η πιστοληπτική αξιολόγηση στο διάστημα που ερευνούμε, παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα της εταιρείας μειώνεται και η αξία της εταιρείας αυξάνεται. Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε την γραφική απεικόνιση της λύσης για την περίπτωση σταθερού επιτοκίου και για την περίπτωση όπου το επιτόκιο ερμηνεύεται από το μοντέλο του Vasicek. Η τιμή του ομολόγου αυξάνεται όσο πλησιάζει ο χρόνος στη λήξη.

Στην εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε για την εκτίμηση των παραμέτρων του Vasicek, χρησιμοποιήσαμε παρατηρήσεις δικαιωμάτων αγοράς για κάθε μια από τις 264 ημέρες που ερευνούμε και υπολογίσαμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στο μοντέλο. Έπειτα, παρουσιάσαμε την απεικόνιση του συνοριακού συνόλου για τις περιπτώσεις του σταθερού και στοχαστικού επιτοκίου. Η περίπτωση του στοχαστικού επιτοκίου δίνει μια καλύτερη ερμηνεία της εξέλιξης του συνοριακού συνόλου για διαφορετικές τιμές του επιτοκίου.

Το μοντέλο αποτίμησης που παρουσιάσαμε διαφέρει από προηγούμενα μοντέλα αποτίμησης. Λαμβάνουμε υπόψιν πληροφορίες από τον ισολογισμό της εταιρείας που είναι χρήσιμες για όσους επενδύουν σε εταιρικά ομόλογα και θεωρούμε το επιτόκιο ως μια στοχαστική διαδικασία και όχι σταθερό.

Βιβλιογραφία

<u>Άρθρα</u>

Black, F., E. Derman, and W.Toy. 1990. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysis Journal* 46: 33-39.

Black, F., Karasinski, P. 1991. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*. : 52-59.

Black, Fischer, and John C. Cox. 1976. Some Effects of Bond Indenture Provisions. *Journal of Finance* 31: 351-67.

Briys, Eric, and Francois De Varenne. 1997. Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32: 239-49.

Chen, Lin.1996. Stochastic Mean and Stochastic Volatility- A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives. *Financial Markets Institutions And Instruments* 5. :1-88.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. 1985. A Theory of the Term Structure Of Interest Rates. *Econometrica* 53: 385-407.

Ho, T., and S.Lee. 1986. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* 41: 1011-1030.

Hull, J., and A. White. 1990. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies* 3: 573-592.

Hull, J., and A. White. 1994. Numerical Procedures for Implementing term structure models II. *Journal of Derivatives*: 37-48.

Hurd, Tom, and Alexey Kuznetsov. 2007. Affine Markov chain models of multifirm credit migration. *Journal of Credit Risk* 3: 3-29.

Jarrow, Robert, and Stuart Turnbull. 1995. Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *Journal of Finance* 50: 53-86.

Jarrow, Robert A., David Lando, and Stuart M. Turnbull. 1997. A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies* 10: 481-523.

Kim, Yong. 2002. Option Pricing under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation. *Asia-Pacific Financial Markets* 9: 23-44.

Lando, David. 1998. On Cox Processes and Credit-risky Securities. *Review of Derivatives Research* 2: 99-120.

Leland, Hayne, and Klaus Bjerre Toft. 1996. Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance* 51: 987-1019.

Levenberg, K. 1944. A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squared. *Quarterly Applied Mathematics* 2: 164-168.

Liang, Jin, and Chukun Zeng. 2015. Corporate bonds pricing under credit rating migration and structure framework. *A Journal of Chinese University (A)* 30: 61-70.

Liang, Jin, Hong-Ming Yin, Xinfu Chen, and Yuan Wu. 2017. On a corporate bond pricing model with credit rating migration risks and stochastic interest rate. *Qualitative Finance and Economics* 1: 300-19.

Liang, Yin, Wu. 2018. On a New Corporate Bond Pricing Model with Potential Credit Rating Change and Stochastic Interest Rate. *Journal of Risk and Financial Management* 11.

Longstaff, Francis, and Eduardo Schwartz. 1995. A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *Journal of Finance* 50: 789-819.
Merton, Robert C. 1974. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance* 29: 449-70.

Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 11: 431-441.

Merton, Robert C. 1974. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance* 29. 449-70.

Thomas, Lyn, David Allen, and Nigel Morkel-Kingsbury. 2002. A hidden Markov chain model for the term structure of bond credit risk spreads. *International Review of Financial Analysis* 11: 311-29.

Vasicek. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5: 177-188.

<u>Ακαδημαϊκές Σημειώσεις- Εργασίες:</u>

Εγγλέζος Νικόλαος. 2019. Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική. *Πανεπιστήμιο Πειραιά*.

Εγγλέζος Νικόλαος. 2019. Παράγωγα Αξιόγραφα. *Πανεπιστήμιο Πειραιά*.

Παράρτημα

Κώδικες Matlab

1. Υπολογισμός της αξίας της εταιρείας και της μεταβλητότητάς (*Πίνακας 1*)

```
function F =root2d_kindermorgan(x)
d1=(log(x(1)/D)+(r+(x(2)^2)/2)*T)/(x(2)*sqrt(T));
d2=d1-x(2)*sqrt(T);
N1=normcdf(d1);
N2=normcdf(d2);
F(1)=E0-x(1)*N1+D*exp(-r*T)*N2;
F(2)=sigmaE*E0-N1*x(2)*x(1);
end
```

2. Αριθμητική επίλυση της ΜΔΕ υπό σταθερό επιτόκιο (*Σχήμα 1.1*)

```
function [matval,matvalf]
=EurCallExpl2_kindermorgan(T,g,sigmal,sigmah,xmax,dx,dt)
M=round(xmax/dx);
dx=xmax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
sigma=zeros(2*M+1,1);
matval=zeros(2*M+1,N+1);
vetx=linspace(-xmax,xmax,2*M+1);
%veti=-M:M;
%vetj=0:N;
matval(:,1)=min(exp(vetx),1);
for j=1:1:N
for i=2:1:2*M+1
    if matval(i,j)>g*exp((i-(M+1))*dx)
            sigma(i)=sigmal;
    else
            sigma(i)=sigmah;
    end
end
for i=2:1:2*M
        matval(i,j+1)=(1-
((sigma(i)^2)*dt)/(dx^2))*matval(i,j)+0.5*((sigma(i)^2)*dt)*((
1/dx^2)+0.5/dx)*matval(i-1,j)+0.5*((sigma(i)^2)*dt*(1/dx^2-
0.5/dx))*matval(i+1,j);
end
        matval(1,j+1)=matval(2,j+1);
        matval(2*M+1,j+1)=matval(2*M,j+1);
end
```

```
for j=1:1:N+1
for i=1:1:2*M+1
matvalf(i,j)=matval(i,j)*exp(-0.035*(T-(j-1)*dt))
end
end

end
```

3. Αριθμητική επίλυση της ΜΔΕ υπό στοχαστικό επιτόκιο Vasicek (*Σχήμα 1.2)*

```
function
[matval]=EurCallExpl_Vasicek1_kindermorgan(T,g,sigmal,sigmah,x
max,alpha,sigmar,rho,dx,dt)
M=round(xmax/dx);
dx=xmax/M;
N=round(T/dt);
dt=T/N;
sigma=zeros(2*M+1,1);
matval=zeros(2*M+1,N+1);
vetx=linspace(-xmax,xmax,2*M+1);
%veti=-M:M;
%vetj=0:N;
matval(:,1)=min(exp(vetx),1);
for j=1:1:N
for i=2:1:2*M+1
    if matval(i,j)>g*exp((i-(M+1))*dx)

sigma(i)=sqrt((sigmal^2)+2*rho*sigmal*sigmar*(1/alpha)*(1-
exp(-alpha*(j-1)*dt))+(sigmar^2)*(((1/alpha)*(1-exp(-alpha*(j-
1)*dt)))^2));
    else

sigma(i)=sqrt((sigmah^2)+2*rho*sigmah*sigmar*(1/alpha)*(1-
exp(-alpha*(j-1)*dt))+(sigmar^2)*(((1/alpha)*(1-exp(-alpha*(j-
1)*dt)))^2));
    end
end
for i=2:1:2*M
        matval(i,j+1)=((0.5*(sigma(i)^2))/dx^2
+(0.25*(sigma(i)^2))/dx)*dt*matval(i-1,j)+(1/dt-
(sigma(i)^2)/dx^2)*dt*matval(i,j)+0.5*(sigma(i)^2)*dt*(1/dx^2-
0.5/dx)*matval(i+1,j);
end
        matval(1,j+1)=matval(2,j+1);
        matval(2*M+1,j+1)=matval(2*M,j+1);
end

%for j=1:1:N+1
%for i=1:1:2*M+1
```

```
%matvalf(i,j)=matval(i,j)*Vasicek_P(t,r,T,a,sigmar,theta);
%end
%end

end
```

4. Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με το μοντέλο Vasicek

```
function[optionprice]=Vasicek_Option(S0,r,T,K,sigmai,alpha,the
ta,sigmar,rho)
B=(-1/alpha)*((r-theta)*(exp(-alpha*T)-1)-alpha*theta*T);
a=(sigmai^2)*T;
b=((sigmai*sigmar*rho)/alpha)*(((exp(-alpha*T)-1)/alpha)+T);
c=(sigmar^2/alpha^2)*(T-((3+exp((-alpha)*T))*(exp(-alpha*T)-
4))/2*alpha);
e=(a/2)-B+log(K/S0);
D=a+2*b+c;
d1=(a+b-e)/sqrt(D);
d2=d1-sqrt(D);
N1=normcdf(d1);
N2=normcdf(d2);
P=exp(0.5*c-B);
optionprice=S0*N1-K*P*N2;
end
```

5. Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου Vasicek

```
function[x,resnorm,residual,exitflag,output]=VasCalibration(~)
clear all
global S0;
global strike;
global TTM;
global mktprice;
global rate;
S0=zeros(264);
rate=zeros(264);
TTM=zeros(264,12);
strike=zeros(264,12);
mktprice=zeros(264,12);
parameter=zeros(1,4);
%εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('matcalibration.xls','price','B3:B266');
rate=xlsread('matcalibration.xls','rate','B3:B266');
TTM=xlsread('matcalibration.xls','TTM','B3:M266');
strike=xlsread('matcalibration.xls','strike','B3:M266');
mktprice=xlsread('matcalibration.xls','marketprice','B3:M266')
;
       x0=[1,0.03,0.15,0.5];
       lb=[0.8,0.02,0.10,0.45];
       ub=[1.2,0.04,0.40,0.50];
```

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@VasLSQD,x0,lb,
ub);
xlswrite('matcalibration.xls',parameter,'results','A1:A4');
end
```

Βοηθητική συνάρτηση που καλείται από τον κώδικα 5

```
function[Vas_lsqd]=VasLSQD(x)
global S0;
global strike;
global TTM;
global mktprice;
global rate;
Vas_lsqd=zeros(264,12);
for i=1:119
    for j=1:12
    Vas_lsqd(i)=mktprice(i,j)-
Vasicek_Option(S0(i),rate(i),TTM(i,j),strike(i,j),0.1087,x(1),
x(2),x(3),x(4));
    end
end
for i=120:264
    for j=1:12
     Vas_lsqd(i)=mktprice(i,j)-
Vasicek_Option(S0(i),rate(i),TTM(i,j),strike(i,j),0.1042,x(1),
x(2),x(3),x(4));
    end
end
end
```

6. Ορισμός μεταβλητής Α (Vasicek)

```
function[A]=Vasicek_A(t,T,a,sigmar,theta)
A=exp((1/(a^2)*(Vasicek_B(t,T,a))^2-(T-t))*((a^2)*theta-
(sigmar^2)/2-(-(sigmar^2)/4*a)*(Vasicek_B(t,T,a))^2));
end
```

7. Ορισμός μεταβλητής Β (Vasicek)

```
function[B]=Vasicek_B(t,T,a)
B=(1-exp(-a*(T-t)))/a;
end
```

8. Τιμή ομολόγου (Vasicek)

```
function[P]=Vasicek_P(t,r,T,a,sigmar,theta)
P=Vasicek_A(t,T,a,sigmar,theta)*exp(-r*Vasicek_B(t,T,a));
end
```