

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΖΗΜΙΑΣ
ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΒΑΡΙΕΣ ΟΥΡΕΣ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙ-
ΚΟΝΟΜΙΚΑ**

Ιωάννα Γ. Κάραβου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των α-
παιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώμα-
τος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΖΗΜΙΑΣ
ΓΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΒΑΡΙΕΣ ΟΥΡΕΣ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙ-
ΚΟΝΟΜΙΚΑ

Ιωάννα Γ. Κάραβου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των α-
παιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώμα-
τος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπλ. Καθηγητής Αντζουλάκος Δημήτριος
- Αναπλ. Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**ESTIMATION OF VAR AND EXPECTED
SHORTFALL FOR HEAVY TAILED DIS-
TRIBUTIONS IN FINANCE**

By

Ioanna G. Karavou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
September 2020

*Στους γονείς μου
Γεώργιο και Μαρία*

Ευχαριστίες

Κατά την διάρκεια της πορείας μου στο Πανεπιστήμιο Πειραιά ανακάλυψα ότι ο χώρος του Πανεπιστημίου είναι μια μικρογραφία της κοινωνίας μας. Υπάρχουν άνθρωποι που θα έρθεις σε σύγκρουση μαζί τους, άνθρωποι που θα θεωρείς ότι βρίσκονται άδικα σε αυτόν τον χώρο, άνθρωποι που θα σε κρίνουν χωρίς να σε γνωρίζουν. Όμως, υπάρχουν και αυτοί οι Άνθρωποι που θα σε κάνουν να αγαπήσεις την επιστήμη που σπουδάζεις και θα σε εμπνεύσουν ώστε να γίνεις η καλύτερη εκδοχή του εαυτού σου. Αυτούς τους Άνθρώπους τους θαυμάζω, τους σέβομαι, τους εκτιμώ και τους ευχαριστώ.

Με ιδιαίτερη χαρά θέλω να αναφερθώ σε τρεις από αυτούς τους Άνθρώπους, που έχω την τιμή να είναι μέλη της Εξεταστικής επιτροπής. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Αντζουλάκο Δημήτριο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο οι οποίοι είναι από τους πρώτους Άνθρώπους που με εμπιστεύτηκαν και μου έδωσαν την ευκαιρία να ξεκινήσω τις Μεταπτυχιακές μου σπουδές. Εν συνεχεία, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μπούτσικα Μιχαήλ, γιατί είναι ο Άνθρωπος που με ενέπνευσε, είχε αρκετή υπομονή και μου παρείχε απεριόριστη υποστήριξη και διαρκή καθοδήγηση καθ' όλη την διάρκεια της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Όλα αυτά όμως δεν θα είχαν νόημα αν δεν υπήρχαν οι δικοί μου Άνθρωποι, η οικογένειά μου, οι φίλοι μου και οι συνάδελφοί μου γι' αυτό τους ευχαριστώ και τους είμαι ευγνώμων. Είναι οι Άνθρωποι που ήταν εκεί σε κάθε στιγμή για να μου θυμίζουν ποιος είναι ο στόχος μου, να με στηρίζουν, να με εμπυχώνουν, να με παροτρύνουν και όλα αυτά πάντα με χαμόγελο και υπομονή. Ένα ευχαριστώ είναι λίγο για εκείνους. Το μόνο που μπορώ, είναι να τους υποσχεθώ ότι θα κάνω τα πάντα για να είναι χαρούμενοι και περήφανοι.

Περίληψη

Η μέτρηση του κινδύνου της αγοράς ή του πιστωτικού κινδύνου συνήθως πραγματοποιείται μέσω της λεγόμενης Αξίας σε Κίνδυνο (VaR). Αν και πρόκειται για ένα πολύ απλό και ευρέως διαδεδομένο μέτρο κινδύνου, είναι συνήθως προτιμότερη η χρήση ενός πιο σύνθετου και ευαίσθητου μέτρου κινδύνου, της Αναμενόμενης Ζημίας (ES, Expected Shortfall).

Στην πρώτη ενότητα αναφερόμαστε γενικά στα μέτρα κινδύνου και αναλύουμε την έννοια και τις ιδιότητες δύο μέτρων κινδύνου συγκεκριμένα την Αξία σε Κίνδυνο (VaR) και την Αναμενόμενη Ζημία (ES, Expected Shortfall) .

Στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται αναλυτικές και προσεγγιστικές εκφράσεις τόσο για τον υπολογισμό του VaR όσο και για τον υπολογισμό του ES θεωρώντας διάφορες κατανομές για το τυχαίο κέρδος ή ζημία μιας επένδυσης. Εξετάζονται διάφορα μοντέλα κατανομών με λεπτή (π.χ. κανονική) ή κυρίως με βαριά ουρά (π.χ. γενικεύσεις της Student's t , stable Paretian, και γενικευμένη hyperbolic distribution) καθώς και μίξεις αυτών με την δημιουργία κώδικά μέσω του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της γλώσσας Mathematica.

Τέλος στην τρίτη ενότητα εκτιμώνται τα μέτρα κινδύνου VaR και ES για τρεις κατανομές με βάση πραγματικά δεδομένα που αφορούν την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής της apple.

Abstract

The measurement of market risk or credit risk is usually quantified by the so-called Value at Risk (VaR). Although this is a very simple and widespread risk measure, it is usually preferable to use a slightly more complex and sensitive risk measure, the Expected Shortfall (ES).

In the first section we refer to risk measures in general and in particular we discuss the properties of VaR and ES.

In the second section we present detailed and approximate expressions for calculating VaR and ES considering specific distributions for the random profit or loss of an investment. Various models of distributions with thin (e.g. normal) or mainly with heavy tail (eg Student's t generalizations, stable Paretian, and generalized hyperbolic distribution) are examined as well as mixtures of them. We also present appropriate codes for the numerical evaluation of VaR and ES using Wolfram Mathematica Software.

Finally, in the third section, we assess and compare VaR and ES risk measures for three distributions based on real data concerning the stock price of the apple company.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Μέτρηση του Κινδύνου (Μέτρα Κινδύνου Αγοράς).....	14
1.1 Κίνδυνος και Τύποι Κινδύνου	14
1.2 Ορισμός Μέτρου Κινδύνου	14
1.3 Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου	15
1.4 Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου	19
1.5 Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk ,VaR)	20
1.5.1 Η προέλευση και η ανάπτυξη του VaR.....	20
1.5.2 Τι είναι το VaR	22
1.5.3 Ιδιότητες του VaR	24
1.6 Αναμενόμενη Ζημία (Expected Shortfall, ES).....	26
1.6.1 Τι είναι το ES.....	26
1.6.2 Ιδιότητες του ES	29
1.7 ΣΧΕΣΗ VAR ΚΑΙ ES	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ES	34
2.1 Ορισμοί και βασικά αποτελέσματα.....	34
2.2 Student's t και επεκτάσεις.....	37
2.2.1 Κατανομή Student's t.....	37
2.2.2 Κατανομή Jones και Faddy's skewed t.....	38
2.2.3 Μη κεντρική Κατανομή Student's t (Noncentral Student's t).....	45
2.3 Κατανομή Stable Paretian	51
2.4 Κατανομή Generalized hyperbolic.....	59
2.5 Μίξεις Κατανομών	65
2.5.1 Μίξη Κανονικών Κατανομών.....	66
2.5.2 Μίξη Symmetric stable	67
2.5.3 Μίξη Κατανομής Student's t.....	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΗ	71
3.1 Περιγραφή των δεδομένων.....	71
3.2 Κανονική Κατανομή	72
3.3 Τυπική Student's t Κατανομή	74
3.4 Student's t Κατανομή με τρεις παραμέτρους.....	75
3.5 Σύγκριση Κανονικής Κατανομής και Student's t Κατανομής (με τρεις παραμέτρους).....	76

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	84

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Μέτρηση του Κινδύνου (Μέτρα Κινδύνου Αγοράς)

1.1 Κίνδυνος και Τύποι Κινδύνου

Σύμφωνα με τον Kevin Dowd (2005) ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος είναι η προοπτική οικονομικής απώλειας ή κέρδους που σχετίζεται με τις απρόβλεπτες μεταβολές στους βασικούς παράγοντες κινδύνου.

Οι τύποι κινδύνου στους οποίους μπορεί να εκτεθεί ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός είναι :

- ❖ Ο κίνδυνος αγοράς (market risk) ο οποίος είναι ο κίνδυνος μείωσης της αξίας μιας επένδυσης. Κυρίως οφείλεται σε αλλαγές στους παράγοντες που διαμορφώνουν την αξία της αγοράς.
- ❖ Ο πιστωτικός κίνδυνος (credit risk) είναι ο κίνδυνος ένας αντισυμβαλλόμενος να μην εκπληρώσει τις συμβατικές του υποχρεώσεις, για παράδειγμα, να μην καταβληθεί τόκος ή κεφάλαιο επί ενός ομολόγου.
- ❖ Ο κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk) είναι το ενδεχόμενο να μην υπάρχει η δυνατότητα έγκαιρης ρευστοποίησης μίας επένδυσης (π.χ. ομόλογο). Για παράδειγμα όταν δεν μπορεί να πωληθεί αρκετά γρήγορα ένα ομόλογο (λόγω έλλειψης αγοραστών) προκειμένου να αποτρέψει ή να μετριάσει μία απώλεια κεφαλαίου.
- ❖ Ο λειτουργικός κίνδυνος (operational risk) ο οποίος οφείλεται στην κακή λειτουργία της επιχείρησης και μπορεί να προέρχεται π.χ. από απάτη, ανθρώπινα λάθη και γενικά στην κακή διαχείριση των εσωτερικών διαδικασιών.

1.2 Ορισμός Μέτρου Κινδύνου

Η μέτρηση του κινδύνου είναι το επίκεντρο στη διαχείριση κινδύνων. Η δυσκολία βρίσκεται στο ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε τον κίνδυνο με τρόπο που να είναι εύκολα κατανοητός και ερμηνεύσιμος. Παρόλο που υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις για τη μέτρηση του κινδύνου μιας χρηματοοικονομικής θέσης, συνήθως τη μετράμε **σε όρους κατανομής πιθανοτήτων**. Τα εργαλεία που απεικονίζουν τυχαίες μεταβλητές σε πραγματικούς αριθμούς ονομάζονται μέτρα και στη συγκεκριμένη περίπτωση μέτρα κινδύνου.

Κατά συνέπεια ένα μέτρο κινδύνου θεωρείται ως ένα μέσο που παρέχει μια αξιολόγηση κινδύνου υπό μορφή κεφαλαιακού ποσού, η οποία είναι απαραίτητη ως αποθεματικό ποσό έναντι απροσδόκητων μελλοντικών ζημιών. (π.χ. βλ. Simona Roccioletti (2016) σελ. 1)

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στον επίσημο ορισμό του μέτρου κινδύνου και θα περιγράψουμε τις επιθυμητές ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Ω : Το σύνολο των φυσικών καταστάσεων.
- \mathcal{X} : Το σύνολο όλων των κινδύνων, δηλαδή το σύνολο όλων των κατανομών του $X \in \mathcal{X}$, το οποίο αντιπροσωπεύει την τελική καθαρή αξία ενός **τίτλου (περιουσιακό στοιχείο)**, ή ενός χαρτοφυλακίου τίτλων, για κάθε στοιχείο του Ω . (π.χ. βλ. Simona Roccioletti(2016) σελ. 5)

Ορισμός 1.1. Ένα μέτρο κινδύνου $\rho(X)$ είναι μια απεικόνιση από το \mathcal{X} στο \mathbb{R} .

Ένα μέτρο κινδύνου $\rho(X)$ μας επιτρέπει να εκφράζουμε την επικινδυνότητα μιας θέσης \mathcal{X} με ένα μόνο αριθμό. Προφανώς, όσο πιο επικίνδυνη είναι η θέση \mathcal{X} , τόσο υψηλότερο είναι το μέτρο του κινδύνου $\rho(X)$. Όταν ο αριθμός $\rho(X)$ είναι θετικός θα ερμηνευθεί ως το ποσό του κεφαλαίου που πρέπει να προστεθεί ως προστασία στην επικίνδυνη θέση $\rho(X)$ ώστε αυτή να γίνει αποδεκτή. Αντίθετα, αν $\rho(X) < 0$, τότε το χρηματικό ποσό $\rho(X)$ μπορεί να εξαχθεί από την ήδη αποδεκτή θέση και να επενδυθεί με πιο κερδοφόρο τρόπο. Η τιμή $\rho(X)$ είναι ο κεφαλαιακός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου. Επομένως, φαίνεται ότι η έννοια του μέτρου κινδύνου συνδέεται στενά με την έννοια της αποδοχής. Τέτοια μέτρα κινδύνου χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση. Συνεπώς γίνεται κατανοητό ότι ένα μέτρο κινδύνου χρησιμοποιείται ως το μέσο που παρέχει αξιολόγηση κινδύνου υπό μορφή ποσού κεφαλαίου. Το μέτρο αυτό είναι απαραίτητο για την αποφυγή απροσδόκητων μελλοντικών ζημιών.

Τα πιο γνωστά και επί του παρόντος χρησιμοποιούμενα μέτρα κινδύνου είναι η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk, VaR) και η Αναμενόμενη ζημιά (Expected Shortfall, ES).

1.3 Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου

Είναι βασικό να γνωρίζουμε ότι τα μέτρα κινδύνου πρέπει να πληρούν ορισμένα αξιώματα προκειμένου να οδηγήσουν σε αξιόπιστες εκτιμήσεις. Πολλοί συγγραφείς πρότειναν διάφορες

ιδιότητες που κάθε μέτρο κινδύνου θα πρέπει να ικανοποιεί. Στη συνέχεια θα δούμε έναν κατάλογο λογικών (μη ανεξάρτητων) απαιτήσεων που ένα μέτρο κινδύνου θα πρέπει να πληροί καθώς και την ερμηνεία τους. (π.χ. βλ. Denuit, Dhaene and Goovaerts (2005) σελ. 62-64)

1. Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (Non-excessive loading or no-ripoff)

$$\rho(X) \leq \max(X) , \text{ για κάθε τυχαία μεταβλητή } X.$$

Σαφώς, δεν έχει νόημα να κρατάμε περισσότερο κεφάλαιο από τη μέγιστη ζημία.

2. Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (Non-negative loading)

$$\rho(X) \geq E(X), \text{ για κάθε τυχαία μεταβλητή } X.$$

Το ελάχιστο κεφάλαιο (δηλ. το μέτρο κινδύνου) πρέπει να υπερβαίνει την αναμενόμενη ζημία, διαφορετικά θα έχουμε βέβαιη χρεοκοπία (σύμφωνα με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών).

3. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (Translativity)

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c , \text{ για κάθε τυχαία μεταβλητή } X \text{ και για κάθε } c.$$

Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε αύξηση της υποχρέωσης με ένα καθοριστικό ποσό c θα έχει ως αποτέλεσμα την ίδια αύξηση στο κεφάλαιο.

4. Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας (Constancy or no unjustified loading)

$$\rho(c) = c , \text{ για κάθε σταθερά } c.$$

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί μία μη-τυχαία απώλεια c πρέπει η εταιρεία να έχει στη διάθεσή της κεφάλαιο ίδιου ποσού. Συγκεκριμένα $\rho(0) = 0$ και η ποσότητα $\rho(X)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως απαιτούμενο περιθώριο (margin requirement), δηλαδή είναι το ελάχιστο ποσό του κεφαλαίου που αν προστεθεί στο X στην αρχή της περιόδου και επενδυθεί σε ένα αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο, κάνει την ποσότητα X αποδεκτή.

5. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) , \text{ για κάθε τ.μ. } X, Y.$$

Σύμφωνα με την συγκεκριμένη ιδιότητα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι μια συγχώνευση κινδύνων δεν επιφέρει επιπλέον κίνδυνο. Η υποπροσθετικότητα αντικατοπτρίζει την ιδέα ότι ο κίνδυνος μπορεί να μειωθεί με τη διαφοροποίηση. Όταν ισχύει η ισότητα μιλάμε για προσθετικότητα. Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης στη συνέχεια ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των μέτρων κινδύνου των επιμέρους κινδύνων και του μέτρου κινδύνου όλων των κινδύνων από κοινού.

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i) - \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης είναι πάντα θετικό για τα υποπροσθετικά (subadditive) μέτρα κινδύνου. Το πρόβλημα της κατανομής των κινδύνων αποτελείται από την κατανομή του μη αρνητικού αποτελέσματος της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων με δίκαιο τρόπο στα συστατικά του.

Η υποπροσθετικότητα είναι μια πολύ βολική μαθηματική ιδιότητα. Στη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου, η υποπροσθετικότητα και η θετική ομοιογένεια εξασφαλίζουν ότι η επιφάνεια κινδύνου που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί στο χώρο των χαρτοφυλακίων είναι κυρτή. Μόνο εάν οι επιφάνειες είναι κυρτές, θα έχουν ένα μοναδικό απόλυτο ελάχιστο και μόνο τότε η διαδικασία ελαχιστοποίησης κινδύνου θα βρει πάντα μια μοναδική, καλά διαφοροποιημένη (well-diversified), βέλτιστη λύση.

6. Συμμοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity)

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y) ,$$

για κάθε συμμοτονικές τυχαίες μεταβλητές X, Y (δηλαδή, τ.μ. που έχουν τη μέγιστη δυνατή συσχέτιση). Η συγκεκριμένη ιδιότητα μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι η τοποθέτηση συμμοτονικών κινδύνων ποτέ δεν μειώνει την επικινδυνότητα της κατάστασης. Να σημειωθεί ότι οι συμμοτονικοί κίνδυνοι αφορούν το ίδιο γεγονός και δεν μπορούν να λειτουργήσουν ως αντιστάθμιση ο ένας έναντι του άλλου.

7. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

$\rho(cX) = c\rho(X)$, για κάθε τυχαία μεταβλητή X και για κάθε σταθερά $c > 0$.

Η θετική ομοιογένεια συχνά σχετίζεται με την ανεξαρτησία σε σχέση με τη χρησιμοποιούμενη νομισματική μονάδα. Η θετική ομοιογένεια είναι στενά συνδεδεμένη με τη συμμοτονική προσθετικότητα. Συνεπώς αν ο κίνδυνος πολλαπλασιαστεί κατά μία σταθερά, τότε και το κεφάλαιο που απαιτείται θα μεταβληθεί κατά τον ίδιο τρόπο.

8. Μονοτονία (Monotonicity)

$P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$, για κάθε τυχαία μεταβλητή X, Y .

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μονοτονίας όταν ο κίνδυνος Y είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τον κίνδυνο X , τότε το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται για την κάλυψη της απώλειας του X είναι πάντοτε μικρότερο, από το αντίστοιχο ποσό που απαιτείται, για την κάλυψη της απώλειας του Y .

9. Συνέχεια όσον αφορά την σύγκλιση κατά κατανομή

Έστω $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ μια ακολουθία κινδύνων η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην X , $X_n \rightarrow_d X$ καθώς $n \rightarrow +\infty$, δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ για κάθε σημείο συνέχειας } x \text{ της } F_X.$$

Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(X_n) = \rho(X)$$

10. Αντικειμενικότητα (Objectivity)

Η $\rho(X)$ εξαρτάται από το X μόνο μέσω της συνάρτησης κατανομής F_X του X . Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η F_X περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για την μέτρηση της επικινδυνότητας του X . Η ιδιότητα αυτή καλείται και «νόμος αναλλοίωτου» και εκφράζεται

$$X =_d Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$$

Είναι κρίσιμης σημασίας για τις εφαρμογές δεδομένου ότι είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εκτίμηση του μέτρου κινδύνου από εμπειρικά δεδομένα. Επομένως, η έλλειψη αντικειμενικότητας θέτει σε σοβαρό κίνδυνο οποιαδήποτε συγκεκριμένη δυνατότητα εφαρμογής αυτών των μέτρων κινδύνου στον χρηματοοικονομικό κλάδο.

Παρατηρήσεις:

- Οι παραπάνω ιδιότητες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Οι ιδιότητες της υποπροσθετικότητας και της θετικής ομοιογένειας είναι ένα θέμα που υπόκεινται σε συζήτηση. Το κατά πόσον η υποπροσθετικότητα περιγράφει την πραγματικότητα είναι αμφισβητήσιμο καθώς παραμελεί εντελώς την έννοια του υπολειμματικού κινδύνου (residual risk). Οι Follmer and Schied (2002) παρατήρησαν ότι και οι δύο ιδιότητες καθιστούν τα μέτρα κινδύνου ευαίσθητα στον κίνδυνο ρευστότητας. Σύμφωνα με τους Rootzén and Klüppelberg (1999), η υποπροσθετικότητα είναι μια βολική μαθηματική ιδιότητα που δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Ομοίως, τα υποπροσθετικά μέτρα κινδύνου αποδεικνύεται ότι είναι ασυμβίβαστα με την θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας.

Το ερώτημα που διχάζει είναι το εξής: έχοντας δύο χαρτοφυλάκια X και Y και την από κοινού κατανομή πιθανότητας τους, με ποιο τρόπο ο συνολικός κίνδυνος $\rho(X + Y)$ σχετίζεται με τους επιμέρους κινδύνους $\rho(X)$ και $\rho(Y)$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορεί να σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο τα X και Y εξαρτώνται στοχαστικά μεταξύ τους. Η συμμονοτονική προσθετικότητα είναι σύμφωνη με αυτή την προσέγγιση: αφού όπως αναφέραμε αν X και Y είναι απόλυτα εξαρτημένες, τότε δεν υπάρχει μείωση του κινδύνου μέσω της διαφοροποίησης. Εκτός από αυτή την ακραία περίπτωση, κάποια αποτελέσματα της διαφοροποίησης επέρχονται και επικρατεί η υποπροσθετικότητα.

Μια άλλη, αντίθετη στα λεγόμενά μας, θεωρία που επικρατεί είναι ότι η συγκέντρωση «θετικά εξαρτημένων» κινδύνων στην πραγματικότητα αυξάνει την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου και ότι αυτό θα πρέπει να προκαλέσει υψηλότερες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό οδηγεί σε υπερπροσθετικότητα για θετικώς εξαρτημένους κινδύνους και προσθετικότητα για ανεξάρτητους κινδύνους.

1.4 Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου

Τα μέτρα κινδύνου δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες. Αρκετοί συγγραφείς συμφώνησαν ότι πρέπει όλα τα μέτρα κινδύνου να ικανοποιούν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες σε ένα σύνολο αξιωμάτων. Σύμφωνα με τους Artzner et al. (1999) έχουμε:

Ορισμός 1.2. Ένα μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί τις ιδιότητες της προσθετικότητας ως προς τη σταθερά, της θετικής ομοιογένειας, της υποπροσθετικότητας και της μονοτονίας ονομάζεται **συνεκτικό** (*coherent*).

Η συνεκτικότητα (συνοχή) ορίζεται ως ένα σύνολο αξιωμάτων το οποίο δεν θεωρείται καθολικά αποδεκτό. Τροποποίηση του συνόλου των αξιωμάτων οδηγεί σε άλλα «συνεκτικά» μέτρα κινδύνου. (βλ. Denuit, Dhaene and Goovaerts (2005) σελ. 65)

1.5 Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk ,VaR)

1.5.1 Η προέλευση και η ανάπτυξη του VaR

Στα τέλη της δεκαετίας του 1970 και του 1980, αρκετά μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα άρχισαν να εργάζονται σε εσωτερικά μοντέλα για τη μέτρηση και τη συγκέντρωση κινδύνων στο σύνολο του ιδρύματος. Άρχισαν να εργάζονται σε αυτά τα μοντέλα για πρώτη φορά για τους δικούς τους εσωτερικούς σκοπούς διαχείρισης κινδύνων. Καθώς οι εταιρείες γίνονταν πιο περίπλοκες, όλο και πιο δύσκολο, αλλά και όλο και πιο σημαντικό, ήταν να συγκεντρώνουν τους κινδύνους τους λαμβάνοντας υπόψη το πώς αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Όμως οι επιχειρήσεις δεν διέθεταν τη μεθοδολογία για να το κάνουν αυτό.

Το πιο γνωστό από αυτά τα συστήματα είναι το σύστημα RiskMetrics που αναπτύχθηκε από την JP Morgan. Το σύστημα αυτό λέγεται ότι δημιουργήθηκε όταν ο πρόεδρος της JP Morgan, Dennis Weatherstone, ζήτησε από το προσωπικό του να του δώσει μια ημερήσια έκθεση μιας σελίδας που να αναφέρει τους κινδύνους και τις πιθανές απώλειες μέσα στις επόμενες 24 ώρες, σε όλο το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών της τράπεζας. Αυτή η έκθεση - η περίφημη «έκθεση 4:15» - θα έπρεπε να του δοθεί στις 4:15 κάθε μέρα, μετά το κλείσιμο των συναλλαγών. Προκειμένου να ανταποκριθεί σε αυτό το αίτημα, το προσωπικό της Morgan έπρεπε να αναπτύξει ένα σύστημα μέτρησης κινδύνων σε διάφορες θέσεις διαπραγμάτευσης σε ολόκληρο το ίδρυμα και να συγκεντρώσει αυτούς τους κινδύνους σε ένα ενιαίο μέτρο κινδύνου. Το μέτρο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η αξία σε κίνδυνο (VaR) ή η μέγιστη πιθανή ζημιά κατά την επόμενη ημέρα διαπραγμάτευσης. Το VaR εκτιμήθηκε από ένα σύστημα βασισμένο στην τυποποιημένη θεωρία χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των τυπικών αποκλίσεων και συσχετισμών μεταξύ των αποδόσεων σε διαφορετικά διαπραγματεύσιμα μέσα.

Παρόλο που η θεωρία ήταν απλή κάνοντας αυτό το σύστημα λειτουργικό, περιλάμβανε τεράστιο όγκο εργασίας: έπρεπε να επιλεγούν οι συμβάσεις μέτρησης, να κατασκευασθούν σύνολα δεδομένων, να συμφωνηθούν στατιστικές υποθέσεις, να προσδιοριστούν οι διαδικασίες για

την εκτίμηση στις μεταβλητότητες και τις συσχετίσεις, να δημιουργήσουν υπολογιστικά συστήματα για τη διενέργεια εκτιμήσεων και να επιλυθούν πολλά άλλα πρακτικά προβλήματα. Η ανάπτυξη αυτής της μεθοδολογίας χρειάστηκε πολύ καιρό, αλλά γύρω στο 1990, τα βασικά στοιχεία, όπως τα συστήματα δεδομένων, η μεθοδολογία μέτρησης κινδύνου και η βασική μηχανική, ήταν όλα στη θέση τους και λειτουργούσαν αρκετά καλά. Σε εκείνο το σημείο αποφασίστηκε να αρχίσει να χρησιμοποιείται η «έκθεση 4:15» και σύντομα διαπιστώθηκε ότι το νέο σύστημα διαχείρισης κινδύνου είχε σημαντικό θετικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, «ευαισθητοποίησε την ανώτερη διοίκηση σε αντιστάθμιση κινδύνου-αποδόσεων και οδήγησε με την πάροδο του χρόνου σε μια πιο αποτελεσματική κατανομή κινδύνων σε όλες τις εμπορικές επιχειρήσεις» (βλ. Guldimann (2000), σελ. 57).

Το νέο σύστημα κινδύνου τονίστηκε στο ερευνητικό συνέδριο της JP Morgan το 1993 και προκάλεσε μεγάλο ενδιαφέρον από δυνητικούς πελάτες που επιθυμούσαν να το αγοράσουν ή να το μισθώσουν για δικούς τους σκοπούς.

Αρκετά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εργαζόνταν για την δημιουργία των δικών τους εσωτερικών μοντέλων και αποφάσισαν να τα κρατήσουν κρυφά. Αντιθέτως, η JP Morgan αποφάσισε να γνωστοποιήσει τα δεδομένα και τη βασική μεθοδολογία της, ώστε οι εξωτερικοί χρήστες να μπορούν να τα χρησιμοποιούν για να γράψουν το δικό τους λογισμικό διαχείρισης κινδύνων. Τον Οκτώβριο του 1994, η Morgan έκανε το σύστημα RiskMetrics και τα απαραίτητα δεδομένα ελεύθερα διαθέσιμα στο διαδίκτυο. Οι εξωτερικοί χρήστες μπορούσαν τώρα να αποκτήσουν πρόσβαση στο μοντέλο RiskMetrics και να συνδέσουν σε αυτό τα δικά τους δεδομένα θέσης.

Αυτή η τολμηρή κίνηση προσέλκυσε μεγάλη προσοχή και ο δημόσιος διάλογος που προέκυψε σχετικά με τα πλεονεκτήματα του RiskMetrics ήταν χρήσιμος για την ευαισθητοποίηση του VaR και των ζητημάτων που συνδέονται με τη δημιουργία και λειτουργία συστημάτων VaR. Επιπλέον, η διάθεση των δεδομένων RiskMetrics έδωσε σημαντική ενίσχυση στην διάδοση των συστημάτων VaR, παρέχοντας στους παρόχους λογισμικού και στους πελάτες τους πρόσβαση στα δεδομένα τα οποία συχνά δεν ήταν σε θέση να κατασκευάσουν.

Η μεταγενέστερη υιοθέτηση των συστημάτων VaR ήταν πολύ ταχεία, πρώτα από τα στεγαστικά ιδρύματα και τις επενδυτικές τράπεζες, και έπειτα από τις εμπορικές τράπεζες, τα συνταξιοδοτικά ταμεία, άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και τις μη χρηματοπιστωτικές επιχειρήσεις. Οι προγραμματιστές και οι χρήστες έγιναν πιο έμπειροι, ο συνδυασμός της απότομης τεχνολογίας, το κόστος και η συνεχής ανάπτυξη λογισμικού σήμαινε ότι τα συστήματα έγιναν πιο ισχυρά και πολύ πιο γρήγορα και είναι πλέον σε θέση να εκτελέσουν εργασίες που δεν ήταν εφικτές στο παρελθόν. Η μέθοδος VaR επεκτάθηκε για την αντιμετώπιση και άλλων τύ-

πων κινδύνου εκτός από τους κινδύνους αγοράς, για τους οποίους τα συστήματα VaR ανακαλύφθηκαν στην αρχή. Αντιμετωπίζουν πλέον και πιστωτικούς κινδύνους, κινδύνους ρευστότητας και κινδύνους ταμειακών ροών.

Η έννοια του VaR είναι η απάντηση στην ερώτηση «πόσες αναμένονται να είναι η ζημιές σε μία μέρα, μία εβδομάδα, ένα μήνα με δεδομένη πιθανότητα;». Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι το VaR είναι ένα συνολικό μέτρο του κινδύνου, που ορίζεται ως η μέγιστη απώλεια για έναν χρονικό ορίζοντα έτσι ώστε να υπάρχει μια μικρή, προκαθορισμένη πιθανότητα ότι η πραγματική απώλεια θα είναι μεγαλύτερη. (βλ. Dowd (2005), σελ. 8-9)

Στον σημερινό οικονομικό κόσμο, το VaR έχει γίνει ο κίνδυνος αναφοράς. Η σημασία του είναι αδιαμφισβήτητη, δεδομένου ότι οι ρυθμιστικές αρχές αποδέχονται αυτό το μοντέλο ως βάση για τον καθορισμό κεφαλαιακών απαιτήσεων για την έκθεση στον κίνδυνο της αγοράς (π.χ. βλ. Denuit (2005), σελ. 67)

1.5.2 Τι είναι το VaR

Η βασική έννοια γίνεται εύκολα κατανοητή από τους Linsmeier και Pearson (1996):

Η αξία σε κίνδυνο είναι ένα ενιαίο, συνοπτικό, στατιστικό μέτρο πιθανών ζημιών χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, η αξία σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο ζημιών που οφείλονται στις «κανονικές» κινήσεις της αγοράς. Οι απώλειες που είναι μεγαλύτερες από την αξία σε κίνδυνο εμφανίζονται μόνο με μια συγκεκριμένη μικρή πιθανότητα. Με την επιφύλαξη των απλουστευτικών υποθέσεων που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του, η αξία σε κίνδυνο συγκεντρώνει όλους τους κινδύνους ενός χαρτοφυλακίου σε ένα μόνο αριθμό κατάλληλο για χρήση στην αίθουσα συνεδριάσεων, υποβολή εκθέσεων στις ρυθμιστικές αρχές ή γνωστοποίηση σε ετήσια έκθεση. Από τη στιγμή που κάποιος διασχίσει το εμπόδιο της χρήσης ενός στατιστικού μέτρου, η έννοια της αξίας σε κίνδυνο είναι απλή για κατανόηση. Είναι απλώς ένας τρόπος να περιγράψουμε το μέγεθος των πιθανών ζημιών στο χαρτοφυλάκιο (βλ. Linsmeier και Pearson (1996), σελ. 3)

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων υψηλού κινδύνου και συμβολίζουμε με L τις ζημιές /απώλειες για έναν ορισμένο χρονικό ορίζοντα Δ . Ορίζουμε ως συνάρτηση κατανομής των απωλειών του χαρτοφυλακίου την $F_L(l) = P(L \leq l)$. Στη συνέχεια, θέλουμε να ορίσουμε ένα στατιστικό μέτρο βασισμένο στην F_L για την εκτίμηση του κινδύνου κατά τον χρονικό ορίζοντα Δ . Μια αξιοσημείωτη προσέγγιση είναι η εκτίμηση των μέγιστων δυνατών απωλειών, δηλαδή $\inf \{l \in \mathbb{R}: F_L(l) = 1\}$. Παρόλα αυτά, σε ορισμένα μοντέλα οι μέγιστες δυνατές απώλειες δεν μπορούν να περιοριστούν και έτσι το αποτέλεσμα που παίρνουμε για το l όταν $P(L \leq l) = 1$ δεν έχει κάποια χρηστική αξία. Η Αξία σε Κίνδυνο είναι μια έξυπνη και

απλή επέκταση της μέγιστης απώλειας: η ιδέα είναι απλώς να αντικατασταθεί η "μέγιστη απώλεια" με "μέγιστη απώλεια που δεν υπερβαίνει μια δεδομένη υψηλή πιθανότητα", το αποκαλούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης (βλ. McNeil et al. (2005)).

Με βάση το επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in (0, 1)$, το VaR του χαρτοφυλακίου μας στο επίπεδο εμπιστοσύνης α δίνεται από τον μικρότερο αριθμό l έτσι ώστε η πιθανότητα ότι η απώλεια L υπερβαίνει το l δεν είναι μεγαλύτερη από $(1 - \alpha)$ (συνήθως $\alpha = 0.95$ ή μεγαλύτερο).

Ορισμός 1.3 Η Αξία σε Κίνδυνο (Value-at-Risk) της ζημίας L σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in (0,1)$ είναι ίση με

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R}: P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\} \quad (1.1)$$

όπου $F_L: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ η συνάρτηση κατανομής της ζημίας L .

Η παραπάνω ποσότητα είναι γνωστή στη θεωρία κατανομών και ως

- γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της L στο α ($F_L^-(\alpha)$)
- α -ποσοστημόριο της L (συμβ. με $q_\alpha(L)$).

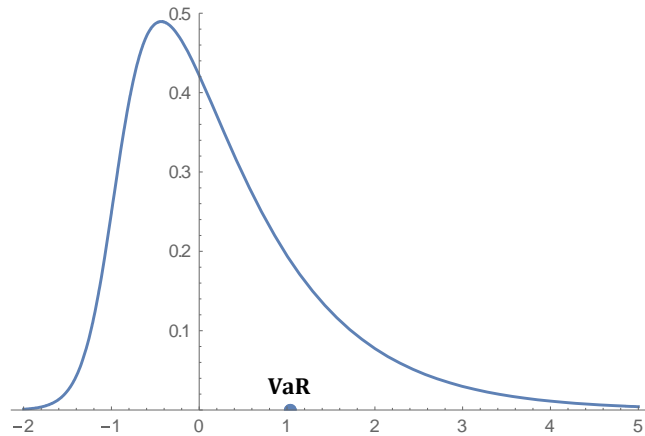
Έτσι, παίρνουμε:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(L)$$

Οι τυπικές τιμές για το α είναι $\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.99$ ή υψηλότερη.

Στη διαχείριση του κινδύνου αγοράς (market risk), ο χρονικός ορίζοντας Δ είναι συνήθως 1 ή 10 ημέρες, ενώ στη διαχείριση πιστωτικού κινδύνου (credit risk) Δ είναι συνήθως ένα έτος. (π.χ. βλ. Simona Rocciolati (2016), σελ. 7-8)

Συνεπώς, το VaR_α δεν είναι τίποτα άλλο παρά το α -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του ύψους απωλειών του χαρτοφυλακίου. Στο Σχήμα 1.1, σημειώνεται η τιμή του VaR_α σε μια υποτιθέμενη κατανομή του ύψους απωλειών. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ισούται με $1 - \alpha$, όπου α το επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέγουμε για το VaR. Η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης α καθώς και του χρονικού ορίζοντα Δ για το VaR εξαρτώνται από το χαρακτήρα του χαρτοφυλακίου.



Σχήμα 1.1 Τιμή της Αξίας σε Κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης α

1.5.3 Ιδιότητες του VaR

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 1.4 δεν είναι απαραίτητο ένα μέτρο κινδύνου να πληροί όλες τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 1.3. Συνεπώς θα ελέγξουμε αν το VaR ικανοποιεί τις 4 ιδιότητες που χρειάζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2 ώστε να είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου (coherent).

Ιδιότητα 1. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (Translativity)

Από τον ορισμό $\text{VaR}_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(L + c) &= \inf \{l \in \mathbb{R}: P(L + c \leq l) \geq \alpha\} = \inf \{l - c \in \mathbb{R}: P(L \leq l - c) \geq \alpha\} + c \\ &= \text{VaR}_\alpha(L) + c \end{aligned}$$

Επομένως το VaR ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι προσθετικό ως προς την σταθερά.

Ιδιότητα 2. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

$$\text{VaR}_\alpha(cL) = c \inf \left\{ \frac{l}{c} \in \mathbb{R}: P\left(L \leq \frac{l}{c}\right) \geq \alpha \right\} = c \text{VaR}_\alpha(L)$$

Επομένως το VaR ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι θετικά ομοιογενές.

Ιδιότητα 3. Μονοτονία (Monotonicity)

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

Αν $L_1 \leq L_2$ τότε $P(L_1 \leq l) \geq P(L_2 \leq l)$ και άρα

$$\{l \in \mathbb{R}: P(L_2 \leq l) \geq \alpha\} \subseteq \{l \in \mathbb{R}: P(L_1 \leq l) \geq \alpha\}$$

και άρα το infimum του 2^{ου} (μεγαλύτερου) συνόλου θα είναι \leq από το infimum του 1^{ου} συνόλου. Συνεπώς έχουμε $\text{VaR}_\alpha(L_1) \leq \text{VaR}_\alpha(L_2)$. Επομένως το VaR ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι μονότονο.

Ιδιότητα 4. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

Μέσω ενός αντιπαραδείγματος που βασίζεται σε ασύμμετρες ζημιές με βαριές ουρές θα αποδείξουμε ότι το VaR δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

Αντιπαραδείγμα. Θεωρούμε ομόλογα 100 ανεξάρτητων οντοτήτων το καθένα από τα οποία έχει αξία αγοράς 1000 ευρώ και επιστρέφει μετά από ένα έτος (με πιθανότητα 0.99, αν δεν υπάρχει χρεοκοπία της εταιρίας) 1010 ευρώ. Ισχύει ότι

$$L = 1000Q - 10 = \begin{cases} -10, & p = 0.99 \\ 1000, & p = 0.01 \end{cases}$$

(όπου $Q = 1$ με πιθ. p και $Q = 0$ με πιθ. $1 - p$) και άρα $\text{VaR}_{0.95}(L) = -10$.

Έστω χαρτοφυλάκιο A με 100 ομόλογα της ίδιας οντότητας (π.χ. της 1ης) και χαρτοφυλάκιο B με 100 ομόλογα, ένα από κάθε διαφορετική οντότητα. Η διαίσθησή μας λέει ότι το A θα πρέπει να ενέχει μεγαλύτερο κίνδυνο διότι έχει γίνει διαφοροποίηση. Παρόλα αυτά, αν υπολογίσουμε τα αντίστοιχα $\text{VaR}_{0.95}(L_A)$, $\text{VaR}_{0.95}(L_B)$ θα δούμε ότι αντίθετα με αυτό που θα περιμέναμε, το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Επομένως το VaR δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

Να υπενθυμίσουμε ότι υποπροσθετικότητα σημαίνει ότι η συγκέντρωση μεμονωμένων κινδύνων δεν αυξάνει τον συνολικό κίνδυνο. Η υποπροσθετικότητα έχει σημασία για πολλούς λόγους:

- ❖ Αν οι κίνδυνοι είναι υποπροσθετικοί, τότε η πρόσθεση των κινδύνων θα μας δώσει υπερεκτίμηση του συνδυασμένου κινδύνου, και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα των κινδύνων ως μια συντηρητική εκτίμηση του συνδυασμένου κινδύνου. Αυτό διευκολύνει την αποκεντρωμένη λήψη αποφάσεων στο εσωτερικό μιας επιχείρησης, επειδή ένας επόπτης μπορεί πάντα να χρησιμοποιήσει το άθροισμα των κινδύνων των μονάδων που του αναφέρουν ως συντηρητικό μέτρο κινδύνου. Αν όμως οι κίνδυνοι δεν είναι υποπροσθετικοί, η πρόσθεσή τους μας υποδεικνύει τους συνδυασμένους κινδύνους και αυτό καθιστά το σύνολο των κινδύνων αποτελεσματικά

άχρηστο ως μέτρο κινδύνου. Στη διαχείριση κινδύνων, θέλουμε οι εκτιμήσεις κινδύνου μας να είναι αμερόληπτες ή μεροληπτικές συντηρητικά.

- ❖ Εάν οι ρυθμιστικές αρχές χρησιμοποιούν μη υποπροσθετικά μέτρα κινδύνου για τον καθορισμό κεφαλαιακών απαιτήσεων, μια χρηματοπιστωτική εταιρεία ενδέχεται να μπει στον πειρασμό να διασπαστεί για να μειώσει τις κανονιστικές κεφαλαιακές της απαιτήσεις, διότι το άθροισμα των κεφαλαιακών απαιτήσεων των μικρότερων μονάδων θα είναι μικρότερο από την κεφαλαιακή απαίτηση της επιχείρησης στο σύνολό της.
- ❖ Τα μη υποπροσθετικά μέτρα κινδύνου μπορούν επίσης να προσελκύσουν πράκτορες που διαπραγματεύονται σε οργανωμένο χρηματιστήριο να διασπάσουν τους λογαριασμούς τους με ξεχωριστούς λογαριασμούς για ξεχωριστούς κινδύνους, προκειμένου να μειώσουν τις απαιτήσεις περιθωρίου τους. Αυτό θα μπορούσε να προκαλέσει σοβαρή ανησυχία στην συναλλαγή διότι το περιθώριο που απαιτείται για τους ξεχωριστούς λογαριασμούς δεν θα κάλυπτε πλέον τους συνδυασμένους κινδύνους. (βλ. Dowd (2005), σελ. 30)

Συμπερασματικά το VaR έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πολύ διαισθητικό και η μεγάλη δημοτικότητα που έχει οφείλεται ουσιαστικά στην εννοιολογική του σαφήνεια. Ωστόσο, το VaR έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα:

- i) δεν πληροί (γενικά) την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας, που σημαίνει ότι δεν αποδίδει τα οφέλη της διαφοροποίησης,
- ii) μπορεί να θεωρηθεί ότι το $\text{VaR}_\alpha(L)$ εκφράζει την ελάχιστη τιμή από τις ακραίες τιμές που εμφανίζονται με πιθανότητα μικρότερη του $1 - \alpha$. Καθώς επίσης δεν δίνονται πληροφορίες για το μέγεθος των απωλειών που παρουσιάζονται με πιθανότητα μικρότερη του $1 - \alpha$.

1.6 Αναμενόμενη Ζημία (Expected Shortfall, ES)

1.6.1 Τι είναι το ES

Στην πράξη το VaR αποτελεί το δημοφιλέστερο μέτρο κινδύνου όμως έχει κάποια σοβαρά μειονεκτήματα, για παράδειγμα, δεν δίνει κάποια πληροφορία για το πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει η ζημία στο χειρότερο σενάριο. Για τον λόγο αυτό αναζητήθηκε μια συνεκτική εναλλακτική λύση για το Value at Risk. Η αναμενόμενη ζημία (Expected Shortfall) αποτελεί μια φυσική επιλογή που προσελκύει όταν το VaR δεν είναι σε θέση να κάνει διάκριση μεταξύ χαρτοφυλακίων που ενσωματώνουν διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Φαίνεται ότι αντί να ρωτάμε ποια θα μπορούσε να είναι η ελάχιστη ζημία που προκλήθηκε σε ένα υποτιθέμενο ποσοστό των χειρότερων περιπτώσεων, θα πρέπει να αναρωτηθούμε για την αναμενόμενη ζημία που υπέστη σε αυτό το τμήμα των χειρότερων περιπτώσεων. Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι, εάν η συνάρτηση κατανομής απώλειας είναι συνεχής, τότε η ποσότητα που απαντά στην παραπάνω ερώτηση δίδεται απλά από την αναμενόμενη τιμή πάνω από το ποσοστημόριο και ονομάζεται Tail Conditional Expectation (TCE):

$$\text{TCE}_\alpha(L) = E\{L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\} \quad (1.2)$$

Για τις περισσότερες κατανομές όμως αυτό το στοιχείο δεν ταιριάζει καλά γιατί το ενδεχόμενο $\{L \geq \text{VaR}_\alpha\}$ μπορεί να έχει πιθανότητα μεγαλύτερη από το σύνολο των επιλεγμένων χειρότερων περιπτώσεων (π.χ. στις διακριτές κατανομές).

Πράγματι, η TCE μπορεί να παραβιάσει την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας για μια γενική κατανομή. Προκειμένου να ληφθούν υπόψη περισσότερες κατανομές, πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του TCE. Αυτό οδηγεί στην ακόλουθη διατύπωση :

Ορισμός 1.4 Αναμενόμενη Ζημία (Expected Shortfall). Για μια απώλεια L με $E(|L|) < \infty$ και συνάρτηση κατανομής F_L , η αναμενόμενη ζημία στο επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in (0, 1)$ ορίζεται ως εξής:

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \left(E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha)) \right) \quad (1.3)$$

όπου q_α είναι η α -ποσοστημόριο της κατανομής F_L .

Η Εξίσωση 1.3 μπορεί να φαίνεται περίπλοκη. Παρ' όλα αυτά, η έννοια που εκφράζεται είναι εκείνη που αναφέρθηκε παραπάνω. Επομένως η Εξίσωση 1.3 είναι απλά η μαθηματική μετάφραση αυτού που ψάχνουμε. Για να έχουμε μια πιο διαφανή άποψη, θα πρέπει να διευκρινίσουμε ορισμένες έννοιες: ο όρος $q_\alpha(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha))$ πρέπει να ερμηνευτεί ως το υπερτιμημένο μέρος που πρέπει να προστεθεί στην αναμενόμενη τιμή $E(L; L \geq q_\alpha)$ όταν το γεγονός $\{L \geq q_\alpha\}$ έχει πιθανότητα μεγαλύτερη από $(1 - \alpha)$.

Ενώ όταν $P(L \geq q_\alpha) = 1 - \alpha$, το οποίο ισχύει πάντοτε αν η κατανομή πιθανότητας είναι συνεχής, ο όρος εξαφανίζεται και η Εξίσωση 1.3 απλουστεύεται στην Εξίσωση 1.2.

Ορισμός 1.5 Για μια ολοκληρώσιμη απώλεια L με συνεχή συνάρτηση κατανομής F_L και οποιοδήποτε $\alpha \in (0, 1)$, έχουμε:

$$ES_{\alpha}(L) = \frac{E(L; L \geq q_{\alpha}(L))}{1-\alpha} = E(L|L \geq VaR_{\alpha}) \quad (1.4)$$

και επομένως

$$ES_{\alpha}(L) = TCE_{\alpha}(L) = E(L|L \geq VaR_{\alpha}) \quad (1.5)$$

Αυτό σημαίνει ότι είναι η αναμενόμενη ζημία δεδομένου ότι αυτή ανήκει στο χειρότερο 100α% των περιπτώσεων.

Η έννοια του ES_{α} μπορεί να γίνει αντιληπτή χρησιμοποιώντας έναν ισοδύναμο ορισμό ο οποίος χειρίζεται το ES_{α} ως συνδυασμό των αναμενόμενων τιμών. Υπάρχει μια ανάλογη αναπαράσταση της εξίσωσης 1.3 που αποκαλύπτει τη στενή σχέση με την παράμετρο α και τη συνάρτηση κατανομής F_L . (βλ. Simona Roccioletti (2016) σελ. 9-11)

Αν η τ.μ. L έχει σ.π.π. f_L τότε:

$$ES_{\alpha}(L) = \frac{E(L \cdot I(L \geq VaR_{\alpha}(L)))}{P(L \geq VaR_{\alpha}(L))} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_{\alpha}(L)}^{\infty} x f_L(x) dx$$

Επίσης αν αλλάξουμε μεταβλητή στο παραπάνω ολοκλήρωμα θέτοντας

$$y = F_L(x), \quad x = F_L^{-1}(y), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f_L(x)}{dx} = f_L(x)$$

θα είναι

$$\int_{VaR_{\alpha}(L)}^{\infty} x f_L(x) dx = \int_{F_L(VaR_{\alpha}(L))}^{F_L(\infty)} F_L^{-1}(y) dy = \int_{\alpha}^1 VaR_y(L) dy$$

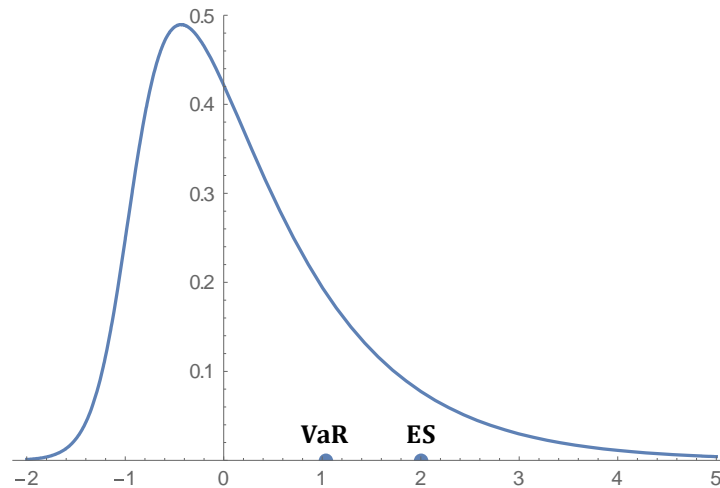
και επομένως το αναμενόμενο έλλειμμα σχετίζεται με το VaR μέσω της σχέσης :

$$ES_{\alpha}(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_y(L) dy \quad (1.6)$$

Αυτή είναι η κύρια και η πλέον χρησιμοποιούμενη διατύπωση του ES_{α} .

Η μαθηματική διαχειρισιμότητά του το καθιστά ιδιαίτερα κατάλληλο για τη μελέτη των αναλυτικών ιδιοτήτων του ES_{α} . Για παράδειγμα, μία από τις ιδιότητες που διαφοροποιούν το ES_{α} από τα άλλα μέτρα κινδύνου, και συγκεκριμένα η συνέχεια στο α , είναι προφανής στην Εξίσωση 1.6, ενώ δεν είναι στην Εξίσωση 1.3.

Από τον ορισμό γίνεται κατανοητό πως το ES_α εξαρτάται μόνο από την κατανομή του L και συγκεκριμένα από την μορφή της ουράς της κατανομής, ενώ ισχύει η σχέση $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$.



Σχήμα 1.2 Τιμή της Αξίας σε Κίνδυνο και της Αναμενόμενης Ζημίας σε επίπεδο εμπιστοσύνης α

1.6.2 Ιδιότητες του ES

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 1.4 δεν είναι απαραίτητο ένα μέτρο κινδύνου να πληροί όλες τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 1.3. Συνεπώς θα ελέγξουμε αν το ES ικανοποιεί τις 4 ιδιότητες που χρειάζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2 ώστε να είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου (coherent).

Ιδιότητα 1. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (Translativity)

Από τον ορισμό $ES_\alpha(L) = E(L | L \geq VaR_\alpha(L))$ ισχύει ότι:

$$ES_\alpha(L + c) = E(L + c | L \geq VaR_\alpha(L)) = ES_\alpha(L) + c$$

Επομένως το ES ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι προσθετικό ως προς την σταθερά.

Ιδιότητα 2. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

$ES_\alpha(cL) = cE(L | L \geq VaR_\alpha(L)) = cES_\alpha(L)$ Επομένως το ES ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι θετικά ομοιογενές.

Ιδιότητα 3. Μονοτονία (Monotonicity)

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

Αν $L_1 \leq L_2$ τότε $VaR_\alpha(L_1) \leq VaR_\alpha(L_2)$ και άρα

$$ES_\alpha(L_1) = \frac{1}{1-a} \int_a^1 VaR_y(L_1) dy \leq \frac{1}{1-a} \int_a^1 VaR_y(L_2) dy = ES_\alpha(L_2)$$

Επομένως το ES ικανοποιεί την ιδιότητα και είναι μονότονο.

Ιδιότητα 4. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(L_1 + L_2) &= E(L_1 + L_2 | L_1 + L_2 \geq VaR_\alpha(L_1 + L_2)) \\ &= E(L_1 | L_1 + L_2 \geq VaR_\alpha(L_1 + L_2)) + E(L_2 | L_1 + L_2 \geq VaR_\alpha(L_1 + L_2)) \\ &\leq E(L_1 | L_1 \geq VaR_\alpha(L_1)) + E(L_2 | L_2 \geq VaR_\alpha(L_2)) = ES_\alpha(L_1) + ES_\alpha(L_2) \end{aligned}$$

Διότι αν για κάποιο ενδεχόμενο A , τ.μ. X και $x \in R$ ισχύει $P(A) = P(X > x) > 0$ τότε αποδεικνύεται ότι $E(X|A) \leq E(X|X > x)$.

Επομένως το ES ικανοποιεί και την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

1.7 ΣΧΕΣΗ VaR ΚΑΙ ES

Οι εργασίες για τη μέτρηση κινδύνων κατά την τελευταία δεκαετία επικεντρώθηκαν στην έννοια του VaR, που παρέχει μια προσέγγιση για τη μέτρηση των κινδύνων η οποία υπερβαίνει τις προηγούμενες προσεγγίσεις σε πολλά σημαντικά σημεία. Ωστόσο, το VaR έχει επίσης σοβαρούς περιορισμούς και όσοι συνεχίζουν να χρησιμοποιούν το VaR θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη αυτούς τους περιορισμούς.

Η αξία σε κίνδυνο (VaR) είναι η μέγιστη πιθανή απώλεια μας σε κάποια ορισμένη χρονική περίοδο, δηλαδή τα περισσότερα που αναμένουμε να χάσουμε κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, αν δεν συμβεί κάποιο ακραίο (αρνητικό) συμβάν, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Υπάρχουν εναλλακτικές προτάσεις έναντι του VaR και τουλάχιστον μία από αυτές είναι η αποκαλούμενη αναμενόμενη ζημία (ES) που είναι αποδεδειγμένα καλύτερη. Το ES μας λέει το ποσό που αναμένουμε να χάσουμε αν συμβεί κάποιο ακραίο (αρνητικό) συμβάν σε κάποια ορισμένη χρονική περίοδο και για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ένα ερώτημα που απασχολεί είναι γιατί η εκτίμηση του VaR συνεχίζει να χρησιμοποιείται. Ο λόγος που συνεχίζουμε να υπολογίζουμε το VaR είναι γιατί συχνά χρειαζόμαστε τις εκτιμήσεις του VaR για να μπορούμε να εκτιμήσουμε το ES. Δεν έχουμε πολλούς τύπους για το ES και κατά συνέπεια συχνά δεν θα μπορούσαμε να το εκτιμήσουμε αν έπρεπε να βασιστούμε μόνο σε τύπους του ES. Ευτυχώς, αποδεικνύεται ότι μπορούμε πάντα να εκτιμήσουμε το ES αν μπορούμε να εκτιμήσουμε το VaR. Ο λόγος είναι ότι το VaR είναι ένα ποσοστημόριο και, εάν μπορούμε να εκτιμήσουμε αυτό το ποσοστημόριο τότε εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το ES, αφού είναι απλώς ο μέσος όρος των ποσοστημορίων του VaR. (βλ. Dowd (2005), σελ. xii Preface)

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενες παραγράφους αποδεικνύεται ότι το μέτρο VaR έχει αδυναμία στο να ικανοποιήσει την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας, δηλαδή δεν λαμβάνει πάντοτε υπόψη τα οφέλη της διαφοροποίησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν λέει τίποτα σχετικά με τις ερωτήσεις "τι ισχύει εάν" (π.χ. τι θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση που βιώνουμε απώλεια υψηλότερη από την σχεδιασμένη ποσότητα). Με άλλα λόγια, το VaR αγνοεί εντελώς το μέγεθος των ζημιών στην ουρά της κατανομής. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι ελλείψεις του VaR, το ES έχει προταθεί ως μέτρο μεγαλύτερης βαρύτητας.

Αποδείχθηκε ότι σε αντίθεση με το VaR, το ES ικανοποιεί τις προϋποθέσεις για ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου και τα μέτρα συνεκτικού κινδύνου έχουν ορισμένα ελκυστικά χαρακτηριστικά. Επιπλέον είναι ευαίσθητο στα μεγέθη των πιθανών ζημιών πέραν του επιπέδου σημαντικότητας. Σε σπάνιες περιπτώσεις το ES είναι αρκετά πιο δύσκολο να εκτιμηθεί. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ES κυριαρχεί έναντι του VaR.

Επίσης, η επιτροπή τραπεζικής εποπτείας της Βασιλείας πρότεινε τη μετάβαση από το VaR στο ES με σκοπό τον μετριασμό των αδυναμιών που αντιμετωπίζονται με τη χρήση του VaR για τον προσδιορισμό των οικονομικών απαιτήσεων κεφαλαίου στο πλαίσιο της αγοράς κινδύνου (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (2013)).

Παρά τα πλεονεκτήματα του ES, φαίνεται ότι υπάρχουν μειονεκτήματα στη χρήση αυτού του είδους της μέτρησης. Υπάρχει μια θεμελιώδης θεωρητική σύγκρουση μεταξύ της υποπροσθετικότητας και της ευστάθειας (robustness) των διαδικασιών μέτρησης κινδύνου. Προκύπτει ότι το ES στερείται ευστάθειας όσον αφορά τις μικρές αλλαγές στο σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της κατανομής των απωλειών και επίσης ότι η μέθοδος εκτίμησης έχει μεγάλη επίδραση στις ιδιότητες ευαισθησίας ES. (Simona Rocciolati (2016), σελ. 2)

Ωστόσο, το ES θεωρείται καλύτερο μέτρο κινδύνου από το VaR για τουλάχιστον πέντε διαφορετικούς λόγους:

- ❖ Το ES μας λέει τι μπορούμε να περιμένουμε σε κακές (δηλαδή ακραίες) καταστάσεις - δίνει μια ιδέα για το πόσο κακό μπορεί να είναι - ενώ το VaR δεν μας λέει τίποτε άλλο από το να περιμένουμε απώλεια υψηλότερη από την τιμή του εάν κάτι κακό συμβεί.
- ❖ Ένας κανόνας απόφασης αναμενόμενης απόδοσης που βασίζεται στο ES είναι πιο αξιόπιστος κάτω από γενικότερες συνθήκες από τον κανόνα απόφασης αναμενόμενης απόδοσης που βασίζεται στο VaR. Συγκεκριμένα ο κανόνας που βασίζεται στο ES είναι συνεπής με την αναμενόμενη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας, εάν οι κίνδυνοι μπορούν να εκφραστούν από έναν κανόνα στοχαστικής κυριαρχίας δεύτερης τάξης. Ενώ ο κανόνας που βασίζεται στο VaR είναι μόνο συνεπής με τη μεγιστοποίηση της εμπειρίας, αν οι κίνδυνοι μπορούν να εκφραστούν από έναν (πολύ) πιο αυστηρό κανόνα στοχαστικής κυριαρχίας πρώτης τάξης (βλέπε Yoshida και Yamai (2001, σελ. 21-22)).
- ❖ Επειδή είναι συνεπές, το ES ικανοποιεί πάντοτε την υποπροσθετικότητα, επομένως έχει τα διάφορα οφέλη της, ενώ το VaR όχι.
- ❖ Το ES δεν αποτρέπει τη διαφοροποίηση των κινδύνων ενώ το VaR μερικές φορές το κάνει.
- ❖ Τέλος, η υποπροσθετικότητα του ES υποδηλώνει ότι η επιφάνεια κινδύνου του χαρτοφυλακίου θα είναι κυρτή και η κυρτότητα εξασφαλίζει ότι τα προβλήματα βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιεί το ES, σε αντίθεση με εκείνα που χρησιμοποιεί το VaR, θα έχουν πάντοτε μία μοναδική βέλτιστη συμπεριφορά (βλέπε, Uryasev (2000, σελ. 1), Pflug (2000), Acerbi and Tasche (2001b, σελ. 3)). Επιπλέον, όπως αποδεικνύουν οι Rockafeller and Uryasev (2000) και Uryasev (2000), αυτή η κυρτότητα εξασφαλίζει ότι τα προβλήματα βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου με τα μέτρα κινδύνου ES μπορούν να αντιμετωπιστούν με αποτελεσματικό τρόπο χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού. Μπορεί επίσης να προσθέσουμε ότι υπάρχουν στοιχεία ότι το ES μπορεί να είναι λιγότερο επιρρεπές σε σφάλμα δειγματοληψίας από το VaR, επομένως οι εκτιμήσεις του ES μπορεί να είναι ακριβέστερες από τις εκτιμήσεις του VaR (Mausser and Rosen (2000, σελ. 218)).

Επομένως, το ES κυριαρχεί του VaR ως μέτρο κινδύνου και οι χρήστες του VaR γενικά είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούν αντ' αυτού το ES (Dowd (2005), σελ. 33)

Συμπερασματικά, υπάρχει μια σύγχυση σχετικά με τα μέτρα για την αντιμετώπιση των κινδύνων και τις θεωρητικές ιδιότητές τους. Κάθε μέτρο κινδύνου έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του και κανένα από αυτά δεν φαίνεται τέλειο.

Να σημειωθεί ότι τα βασικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου αφορούν την δεξιά ουρά των κατανομών, δηλαδή την ζημία μιας επένδυσης. Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε και θα αναλύσουμε συμπεράσματα σχετικά με την αριστερή ουρά των κατανομών, δηλαδή το κερδός μιας επένδυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ES

Στο πλαίσιο της επιλογής χαρτοφυλακίου και της διαχείρισης κινδύνων για τη χρήση μέτρων κινδύνου όπως το Value-at-Risk (VaR) και της αναμενόμενης ζημίας (ES) η ακρίβεια της μέτρησης τους επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή της κατανομής. Ο υπολογισμός του VaR για μια συγκεκριμένη σειρά αποδόσεων ισοδυναμεί με τον υπολογισμό ενός ή περισσότερων ποσοτήτων από την προβλεπόμενη κατανομή. Σε ένα πλήρως παραμετρικό μοντέλο, αυτό γίνεται εύκολα με την προϋπόθεση ότι είναι διαθέσιμη μια εύχρηστη έκφραση για τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (cdf) της προβλεπόμενης κατανομής. Ενώ το VaR εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό, η αναμενόμενη ζημία (ES) είναι ένα προτιμότερο μέτρο κινδύνου. Ο υπολογισμός του ES περιλαμβάνει σχεδόν πάντα περισσότερους υπολογισμούς από το VaR.

Δεδομένου ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε κάποια βασικά στοιχεία του VaR και του ES που αφορούσαν την δεξιά ουρά των κατανομών (κατανομή ζημίας), σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε και θα δούμε εν συντομία κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν την αριστερή ουρά των κατανομών (κατανομή κέρδους) και θα παρουσιάσουμε εύκολα υπολογίσιμες εκφράσεις για την εκτίμηση του ES για συγκεκριμένες κατανομές, οι οποίες συνήθως χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση αποδόσεων χαρτοφυλακίων.

2.1 Ορισμοί και βασικά αποτελέσματα

Έστω Q_X η συνάρτηση ποσοστημορίου της τυχαίας μεταβλητής X , δηλαδή, $Q_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $p \rightarrow F_X^{\leftarrow}(p)$, όπου $F_X^{\leftarrow}(p)$ είναι η γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση του F_X που ορίζεται με τον συνήθη τρόπο ως $\inf \{x \mid F(x) \geq p\}$. Το γ -επίπεδο σημαντικότητας της αναμενόμενης ζημίας (ES) του X ορίζεται ως (γ -level expected shortfall): (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.58-59)

$$ES_{\gamma}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} Q_X(p) dp \quad (2.1)$$

(Σημειώνεται ότι τα ES και VaR θεωρούνται συχνά θετικοί αριθμοί. Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση αρνητικών σημείων). Όταν χρησιμοποιείται μια συνεχής κατανομή,

όπως συμβαίνει στην παρούσα περίπτωση, η έκφραση (2.1) είναι ισοδύναμη με την πιο συνηθισμένη διατύπωση, που ονομάζεται Tail Conditional Expectation (TCE). Συγκεκριμένα, $F_X^-(p) = F_X^{(-1)}(p)$ και θέτοντας $u = Q_X(p)$ και υποδηλώνοντας το γ -ποσοστημόριο του X (δηλαδή το VaR) ως $q_{X,\gamma} = Q_X(\gamma)$, έχουμε :

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma Q_X(p) dp = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{q_{X,\gamma}} u f_X(u) du = E[X | X \leq q_{X,\gamma}] \quad (2.2)$$

Επιπλέον, εάν υπάρχει $E[X]$ τότε η ολοκλήρωση κατά τμήματα δείχνει ότι μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$ES_\gamma(X) = q_{X,\theta} - \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{q_{X,\gamma}} F_X(x) dx \quad (2.3)$$

δείχνοντας έτσι ότι το ES μπορεί να εκφραστεί ως ένα ολοκλήρωμα που περιέχει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf, σ.π.π), ή τη συνάρτηση κατανομής (cdf, σ.κ.), ή τη συνάρτηση ποσοστημίου

Έστω Z μια τυχαία μεταβλητής με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, και έστω $Y = \sigma Z + \mu$ για $\sigma > 0$. Ένας απλός υπολογισμός επαληθεύει ότι το ES διατηρεί τους μετασχηματισμούς της θέσης-κλίμακας (location-scale), έχουμε:

$$ES_\gamma(Y) = \mu + \sigma ES_\gamma(Z) \quad (2.4)$$

Παράδειγμα (κανονική κατανομή κέρδους). Είναι απλό να δούμε ότι για $c < 0$ και $R \sim N(0, 1)$ (τυπική κανονική κατανομή) με σ.π.π $\varphi(r)$ και σ.κ. $\Phi(r)$, ισχύει ότι $\int_{-\infty}^c r f_R(r) dr = -\varphi(c)$. Έτσι, $E[R | R \leq c] = -\frac{\varphi(c)}{\Phi(c)}$ και

$$ES_\gamma(R) = -\frac{\varphi\{\Phi^{-1}(\gamma)\}}{\gamma} \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```

γ=0.05; μ=0; σ=1;
VaR=Quantile[NormalDistribution[μ,σ],γ] ;
ES=-PDF[NormalDistribution[μ,σ],Quantile[NormalDistribution[μ,σ],γ]]/γ;
f1=Plot[PDF[NormalDistribution[μ,σ],x],{x,-4,4}];
f2=ListPlot[{{ES,0},{VaR,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];

```

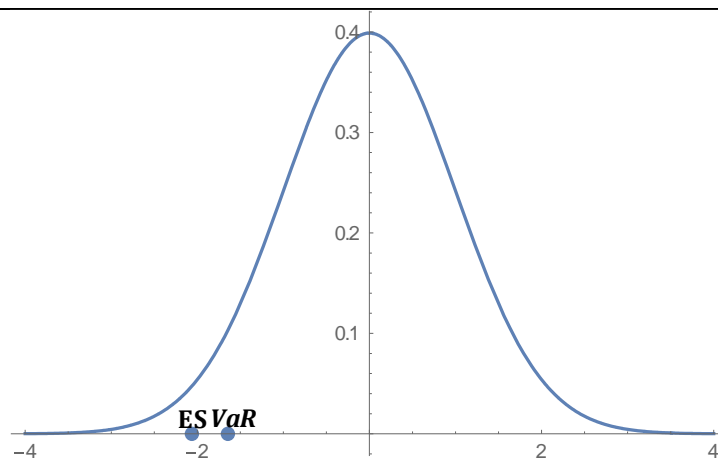
```

f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-1.58,0.0156}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-2.0627128075074257`,0.015}]];
Print["VaR = ",VaR," και " , " ES = ",ES ]
Show[f1,f2,f3,f4]

```

προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

VaR = -1.64485 και ES = -2.06271



Σχήμα 2.1 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

Παρόμοια με την κανονική κατανομή, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες το ολοκλήρωμα του ES (2.2) μπορεί συχνά να εκφραστεί αναλυτικά σε όρους ειδικών κατανομών όπως της γάμμα και της βήτα. Για παράδειγμα τη Student's t και τις επεκτάσεις της όπως τη Jones και Faddy's με λοξότητα t (JoF) (**Jones and Faddy's skewed t**) και μη κεντρική Κατανομή Student's t (**Noncentral Student's t**), όπως περιγράφονται λεπτομερώς παρακάτω.

2.2 Student's t και επεκτάσεις

Σε κάθε περίπτωση, $B_z(\alpha, b) = \int_0^z x^{\alpha-1} (1-x)^{b-1} dx$ για το $z \in [0, 1]$ είναι η ατελής συνάρτηση βήτα, $B(\alpha, b) = B_1(\alpha, b)$ είναι η συνάρτηση βήτα και

$$\bar{B}_z(\alpha, b) = \frac{B_z(\alpha, b)}{B(\alpha, b)}$$

είναι η ατελής αναλογία beta (**incomplete beta ratio**).

2.2.1 Κατανομή Student's t

Έστω ότι $T \sim t_n(\mu, c)$ μια Student's t τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους θέσης μ και κλίμακας c . Η τυπική Student's t σ.π.π ($\mu = 0, c = 1$) με n βαθμούς ελευθερίας δίνεται από την σχέση : (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.60-61)

$$f_T(x; n) = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (2.6)$$

Ένας βασικός υπολογισμός δείχνει ότι το μέρος της ουράς $\int_{-\infty}^c x f_T(x; n) dx$ είναι :

$$Ttail(c, n) \stackrel{\text{def}}{=} -f_T(c; n) \left(\frac{n + c^2}{n - 1} \right) \quad (2.7)$$

και η αναμενόμενη ζημία για την μεταβλητή T είναι :

$$ES_\gamma(T; n, 0, 1) = \gamma^{-1} Ttail(q_{T,\gamma}, n) \quad (2.8)$$

όπου $q_{T,\gamma}$ είναι το γ -ποσοστιαίο σημείο του $T \sim t_n$ (δηλαδή το VaR). Σημειώστε ότι, καθώς $n \rightarrow \infty$, η έκφραση πλησιάζει εκείνη που βασίζεται στη κανονική κατανομή.

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```
γ=0.05;μ=0; σ=1;
n=2;q=Quantile[StudentTDistribution[μ,σ,n],γ];
Ttail[c_,n_]:=-PDF[StudentTDistribution[μ,σ,n],c]*((n+c^2)/(n-1));
ESSt=(1/γ)*Ttail[q,n];
f1=Plot[PDF[StudentTDistribution[μ,σ,n],x],{x,-8,8}];
```

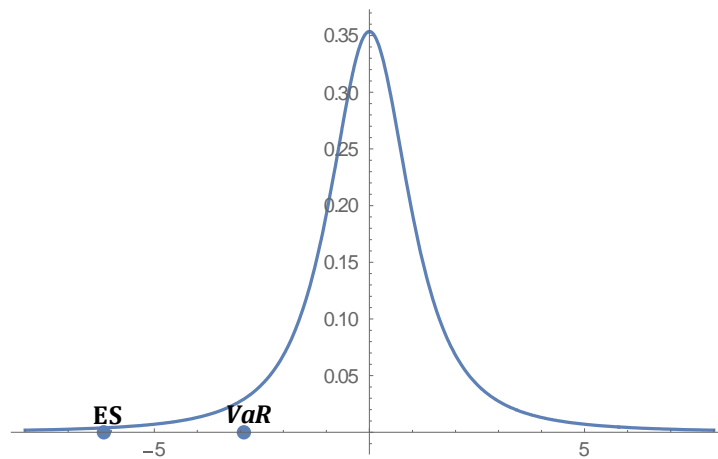
```

f2=ListPlot[{{ESSt,0},{q,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-2.80,0.0156}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-6.10,0.015}]];
Print["VaR = ",q," και " , " ES = ",ESSt]
Show[f1,f2,f3,f4]

```

Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

VaR = -2.91999 και ES = -6.16441



Σχήμα 2.2 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την τυπική Student's t κατανομή.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι επέκτασης της Student's t κατανομής για να υποστηρίξει την ασυμμετρία, όμως δεν διαθέτουν όλες κλειστές μορφές σ.κ. ή εκφράσεις ES. Στη συνέχεια θεωρούμε αρκετές παρόμοιες επεκτάσεις και φαίνεται οτι τα διαγράμματα της ES τους ως συνάρτηση της παραμέτρου ασυμμετρίας τους, για συγκρίσιμες παραμέτρους βαθμών ελευθερίας, δείχνουν μάλλον διαφορετική συμπεριφορά.

2.2.2 Κατανομή Jones και Faddy's skewed t

Αρχίζουμε με την ασύμμετρη γενικευμένη κατανομή της Student's t από τους Jones και Faddy (2003), που γράφεται ως συντόμευση JoF. Η πυκνότητα του $S \sim JoF(a, b)$ για $a, b \in \mathbb{R} > 0$, είναι : (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.61-62)

$$f_{JoF}(t; a, b) = C_{a,b} \left(1 + \frac{t}{y_t}\right)^{a+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{y_t}\right)^{b+\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

όπου $y_t = (a + b + t^2)^{1/2}$ και $C_{a,b}^{-1} = B(a, b)(a + b)^{\frac{1}{2}} 2^{a+b-1}$.

Έστω $S \sim JoF(a, b)$, εάν $a < b$ ($a > b$), τότε το S είναι αρνητικά (θετικά) λοξό, ενώ $S \sim t_{2a}$ αν $a = b$. Μέσω της σχέσης τους με μια βήτα τυχαία μεταβλητή, δείχνουν ότι η σ.κ. είναι $F_{JoF}(t; a, b) = \overline{B}_y(a, b)$, όπου $2y = 1 + t(t^2 + a + b)^{-1/2}$ και η r -οστή ροπή, αν υπάρχει, είναι

$$E[S_r] = \frac{(a + b)^{\frac{r}{2}}}{B(a, b)} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j 2^{-j} B\left(a + \frac{r}{2} - j, b - \frac{r}{2}\right)$$

με

$$E[S] = (a - b) \frac{(a + b)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \quad (2.10)$$

από το οποίο είναι σαφές ότι για $a = b$, $E[S] = 0$. Έστω ότι q_γ είναι το γ ποσοστημόριο της S και c ικανοποιεί την $F_{JoF}(c; a, b) = p$. Ο υπολογισμός αποκαλύπτει τότε ότι με $2y = 1 + c(c^2 + a + b)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} JFtail(c, a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^c s f_S(s; a, b) ds \\ &= \frac{\sqrt{a+b}}{B(a, b)} \times \left\{ B_y\left(a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} B_y\left(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}\right) \right\} / \gamma \end{aligned}$$

(2.11)

από την οποία μπορεί να υπολογιστεί το ES.

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```
n=2;a=1;b=2;γ=0.05;
C1=1/(Beta[a,b]*(a+b)^0.5*2^(a+b-1));
u[t_]=(a+b+t^2)^0.5;
f[t_]=C1*(1+(t/u[t]))^(a+0.5)*(1-(t/u[t]))^(b+0.5);
y[t_]=(1+t*(t^2+a+b)^(-0.5))/2;
f1=Plot[f[t],{t,-12,9},PlotRange->{0,0.35}];
F[t_]=Beta[y[t],a,b]/Beta[a,b];
```

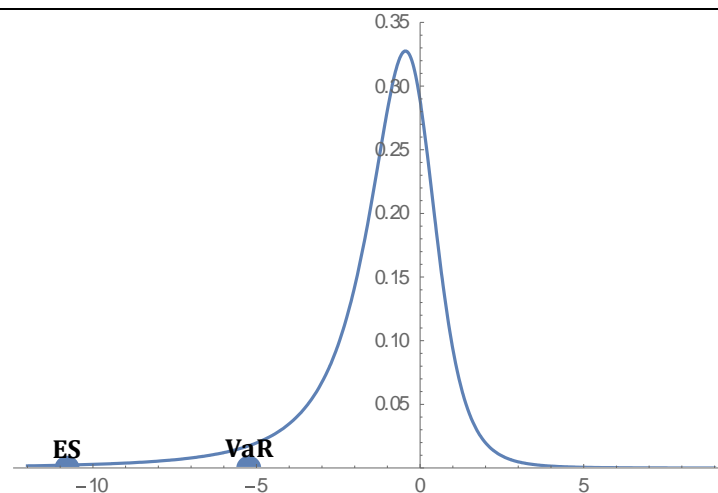
```

c=x/.Solve[F[x]==γ,x] [[1]];
ESJF=(Sqrt[a+b]/Beta[a,b])*(Beta[y[c],a+0.5,b-0.5]-0.5*Beta[y[c],a-0.5,b-
0.5])/γ;
q1=c;
f2=ListPlot[{{ESJF,0},{q1,0}},PlotStyle->PointSize[.035]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-5.2,0.0156}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-10.8,0.015}]];
Print["VaR = ",q1," και "," ES = ",ESJF]
Show[f1,f2,f3,f4]

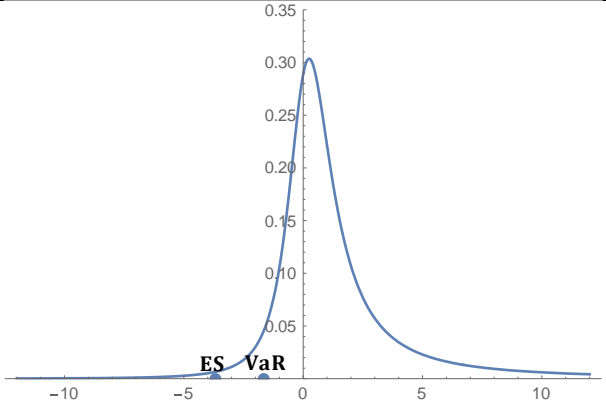
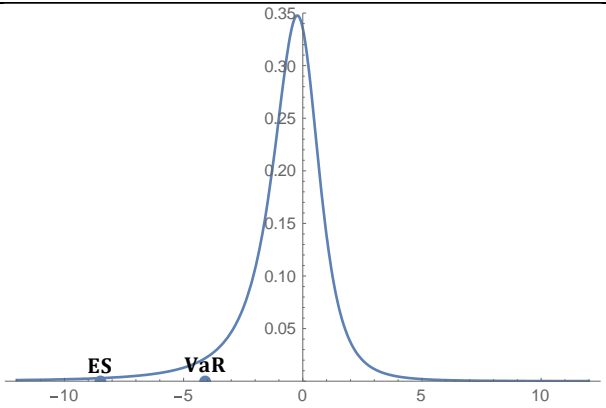
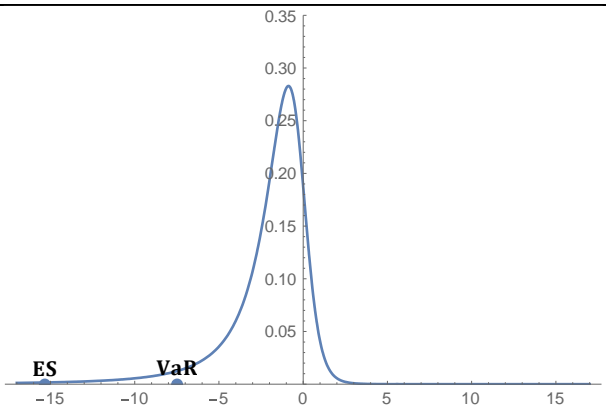
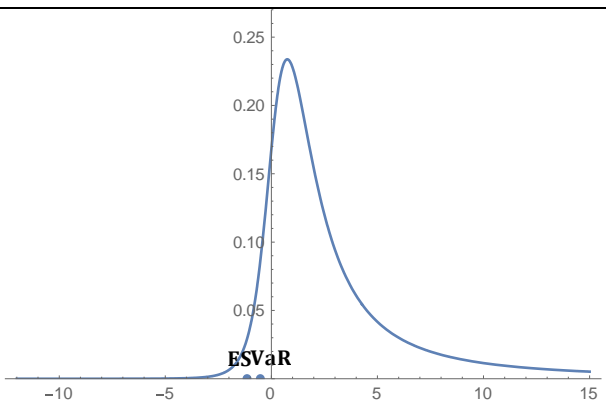
```

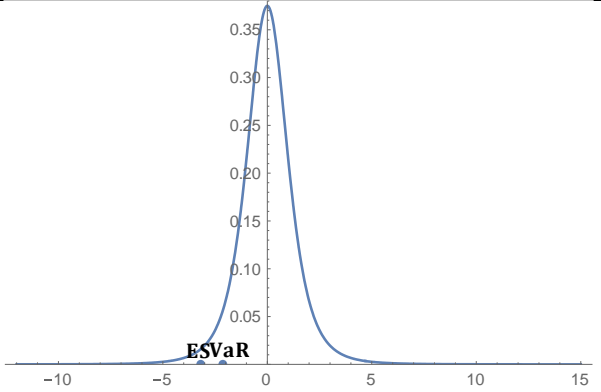
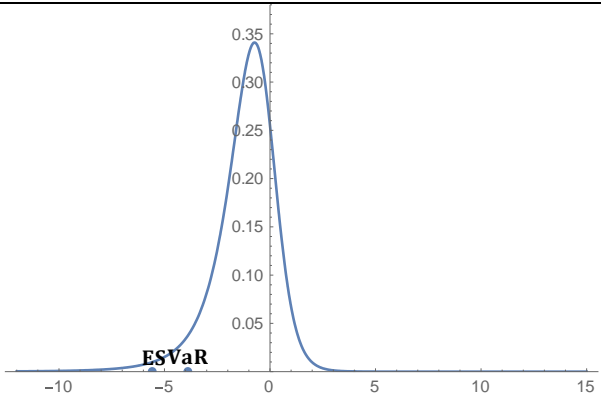
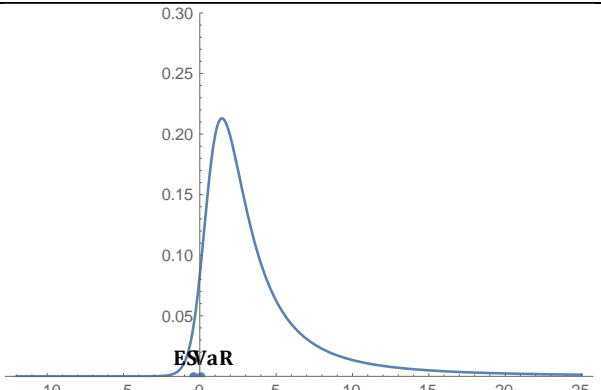
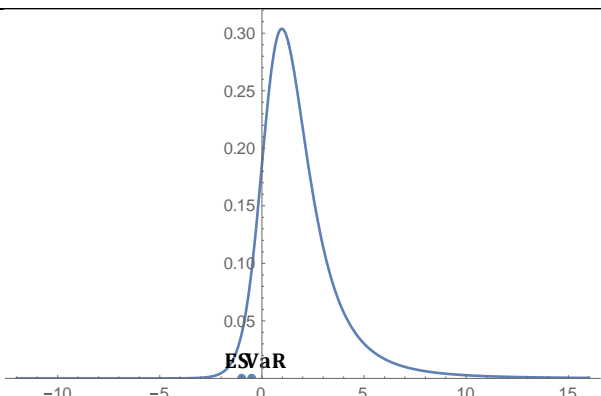
Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

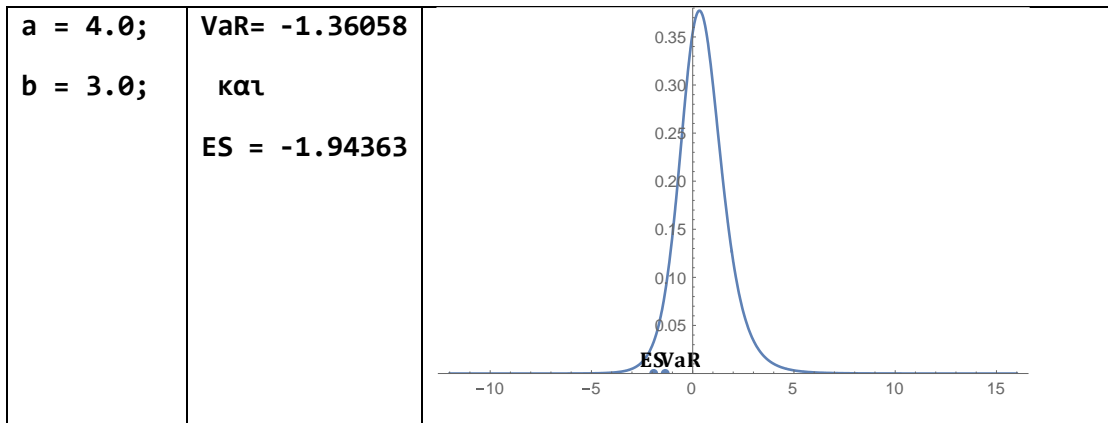
VaR = -5.23351 και ES = -10.7931



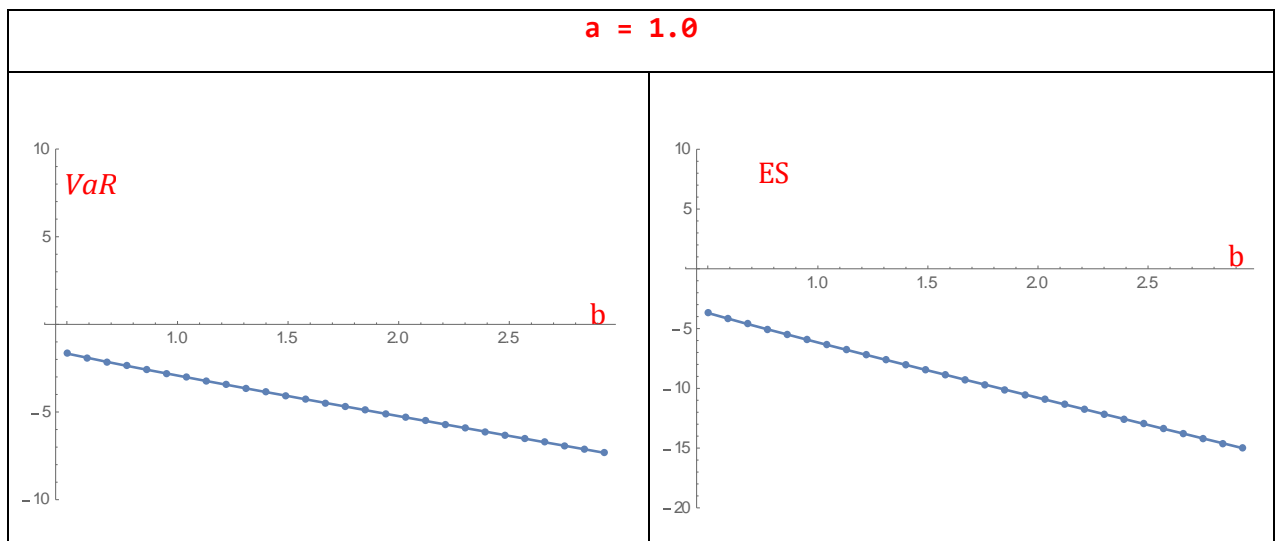
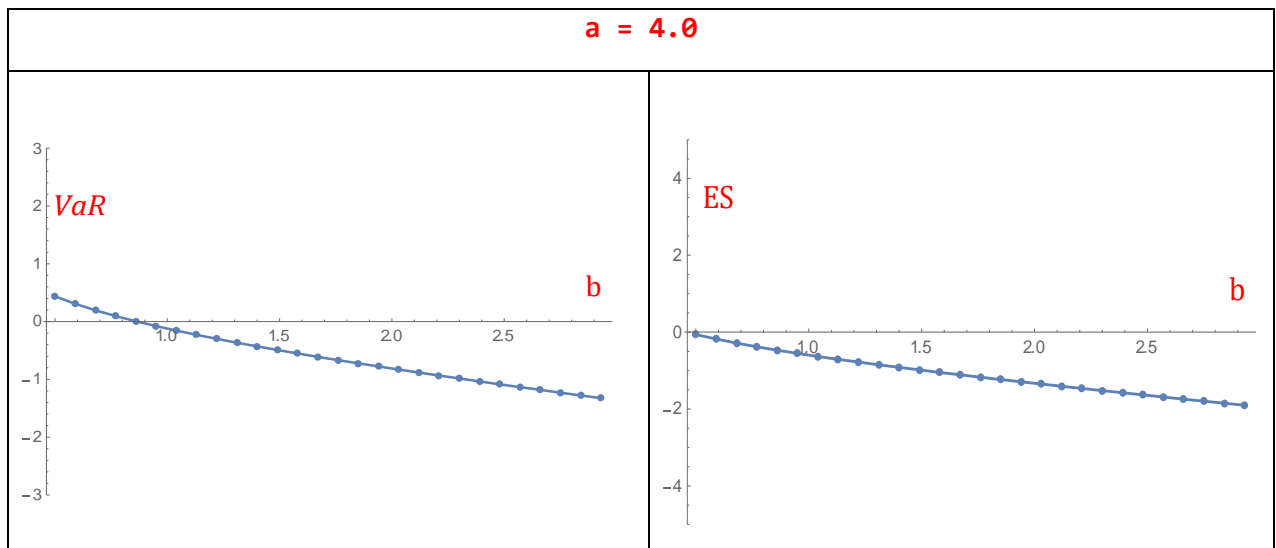
Σχήμα 2.3 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή **Jones και Faddy's skewed t**.

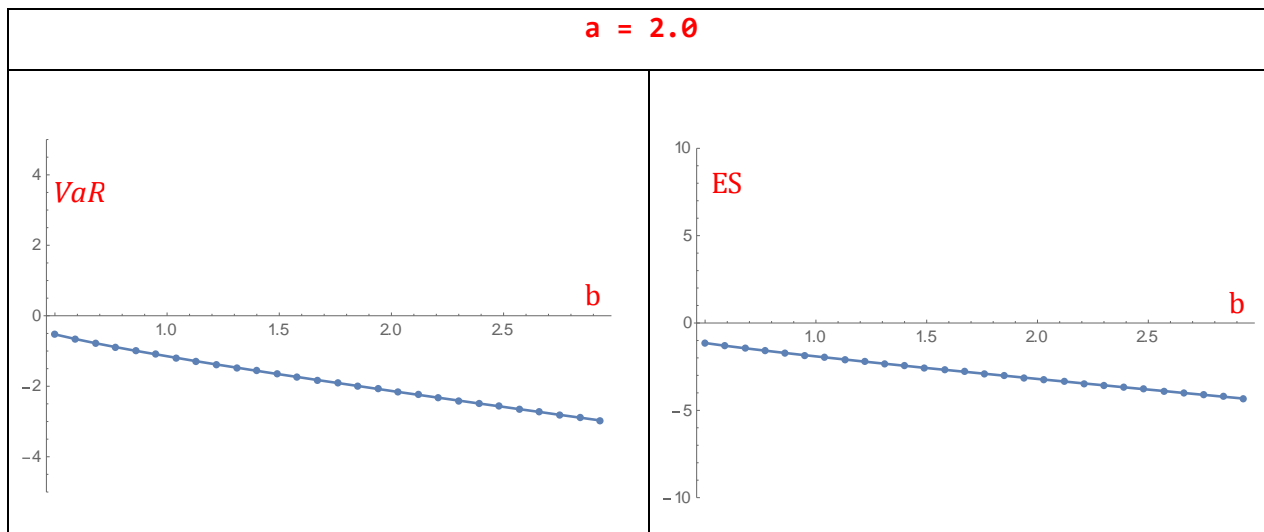
<p>a = 1.0; b = 0.5;</p>	<p>VaR= -1.66183 κατ ES = -3.69216</p>	
<p>a = 1.0; b = 1.5;</p>	<p>VaR= -4.09124 κατ ES = -8.50217</p>	
<p>a = 1.0; b = 3.0;</p>	<p>VaR= -7.48371 κατ ES = -15.3182</p>	
<p>a = 2.0; b = 0.5;</p>	<p>VaR=-0.52800 κατ ES = -1.1468</p>	

<p>a = 2.0; b = 2.0;</p>	<p>VaR = -2.1318 καλ ES = -3.20287</p>	
<p>a = 2.0; b = 4.0;</p>	<p>VaR= -3.90478 καλ ES = -5.5925</p>	
<p>a = 4.0; b = 0.8;</p>	<p>VaR= 0.065177 καλ ES = -0.41134</p>	
<p>a = 4.0; b = 2.0;</p>	<p>VaR= -0.49836 καλ ES = -0.99010</p>	

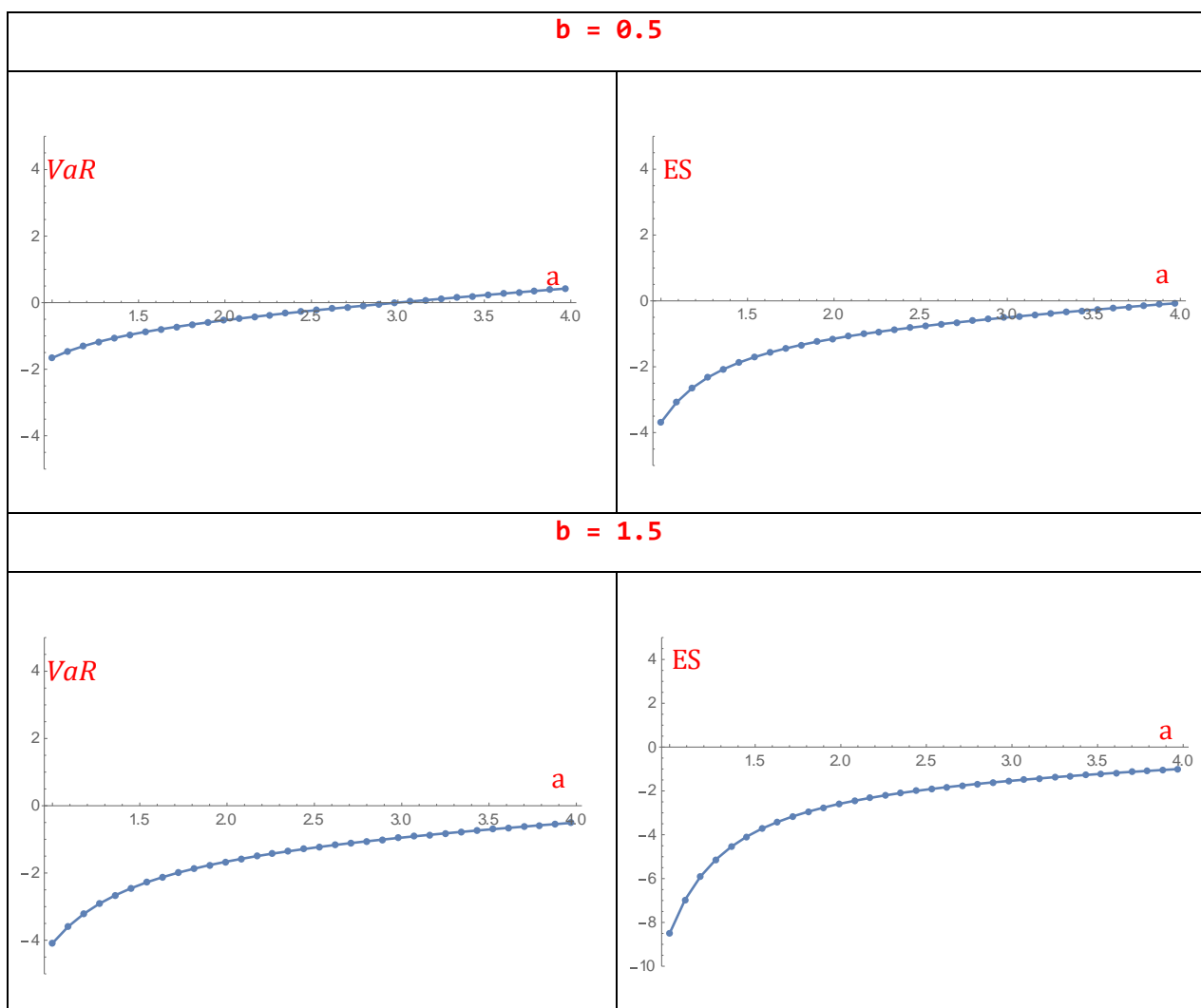


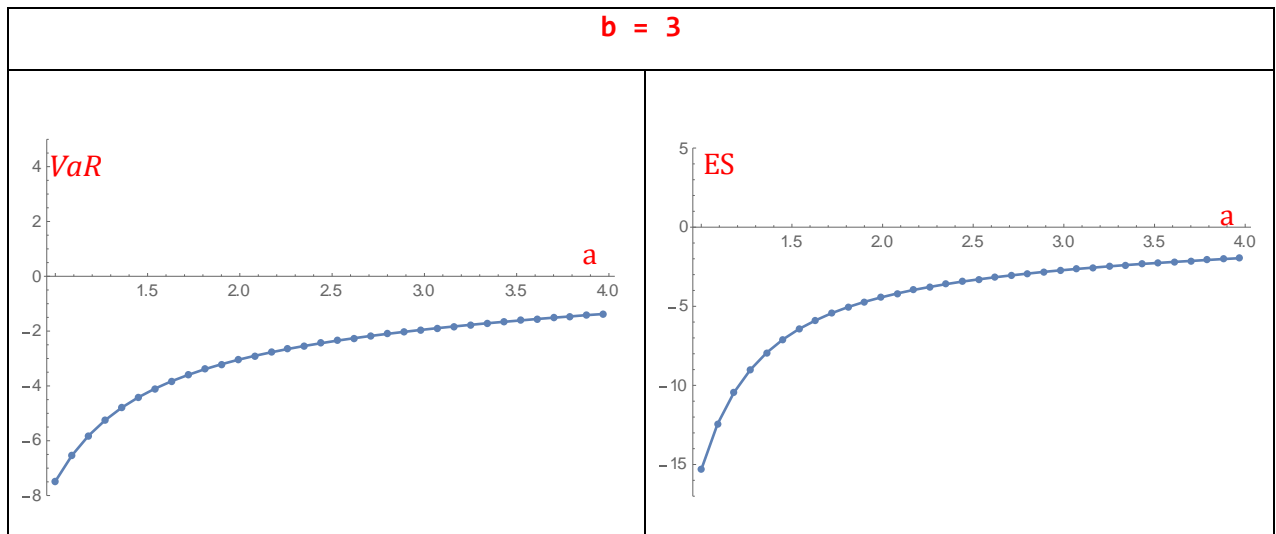
Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την κατανομή $JoF(a, b)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ασυμμετρίας b , για τρεις τιμές της παραμέτρου a .





Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την κατανομή $JoF(a, b)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου a , για τρεις τιμές της παραμέτρου b .





Απο τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η περίπτωση με $\alpha = b$ αντιστοιχεί στην Student's t κατανομή με 2α βαθμούς ελευθερίας και ότι το ES μειώνεται με την αύξηση της παραμέτρου b επειδή η πυκνότητα είναι αρνητικά λοξή για $\alpha < b$.

2.2.3 Μη κεντρική Κατανομή Student's t (Noncentral Student's t)

Η χρήση της μη κεντρικής κατανομής t στο πλαίσιο της μοντελοποίησης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου υποστηρίχθηκε και διαδόθηκε από τους Harvey και Siddique (1999). Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την μη κεντρική κατανομή t εάν η σ.π.π. της δίνεται από : (βλ. Estimation methods for ES σελ.8-9)

$$f_X(x) = e^{-\frac{\mu^2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) k^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{1}{k+x^2}\right)^{\frac{k+1}{2}} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x\mu)^i}{i!} \left(\frac{2}{x^2+k}\right)^{\frac{i}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \right] \quad (2.12)$$

όπου $k \in \mathbb{R} > 0$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας και $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος μη κεντρικότητας που δηλώνει την ασυμμετρία. Η αναμενόμενη ζημία (ES) για την μεταβλητή X είναι :

$$ES(X) = \int_{-\infty}^q x e^{-\frac{\mu^2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) k^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{1}{k+x^2}\right)^{\frac{k+1}{2}} \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x\mu)^i}{i!} \left(\frac{2}{x^2+k}\right)^{\frac{i}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \right] dx$$

όπου q είναι το γ -ποσοστιαίο σημείο της μη κεντρικής κατανομής t (δηλαδή το VaR).

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

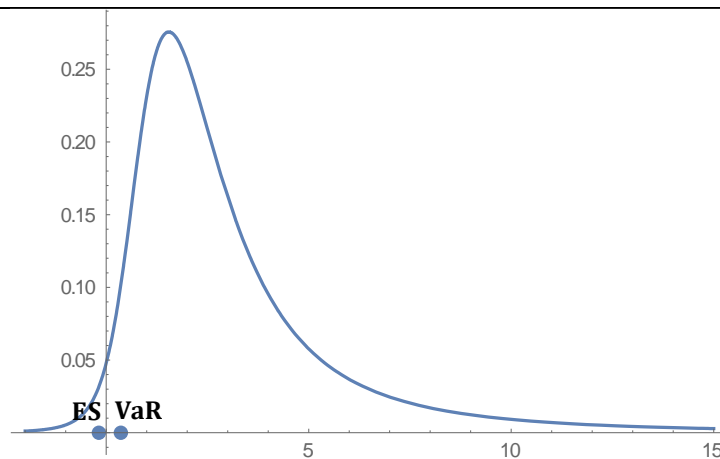
```

μ=2;k=2;γ=0.05;
q3=Quantile[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],γ] ;
ESN=NIntegrate[x*PDF[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],x],{x,-Infinity,q3}]/γ;
f1=Plot[PDF[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],x],{x,-2,15}];
f2=ListPlot[{{ESN,0},{q3,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cambria"],{0.80,0.0156}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cambria"],{-0.50,0.015}]];
Print["VaR = ",q3," και "," ES = ",ESN]
Show[f1,f2,f3,f4]

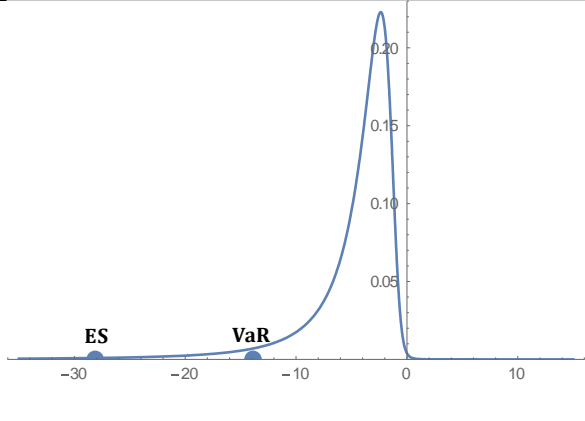
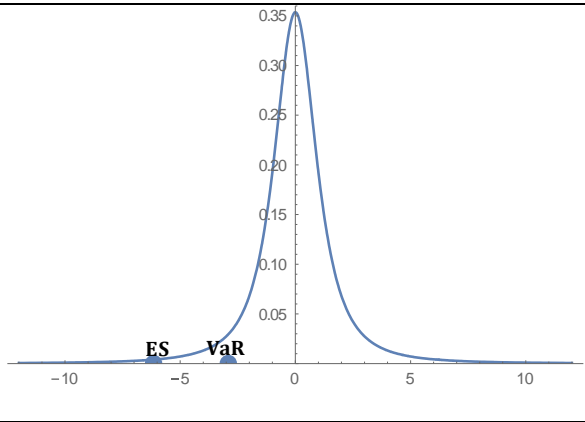
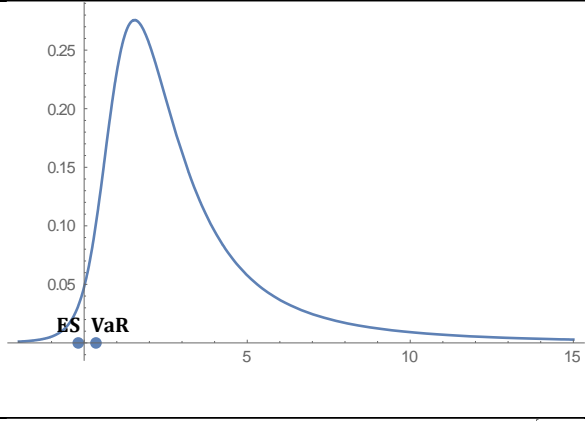
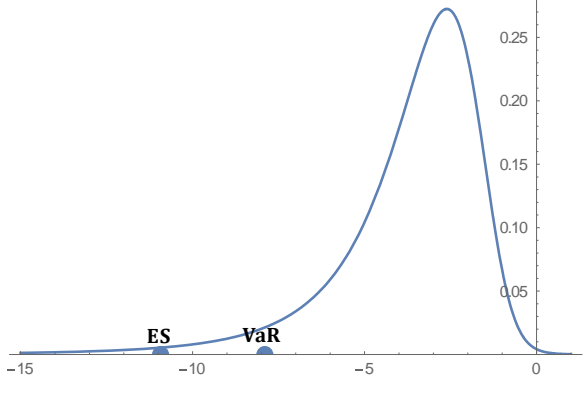
```

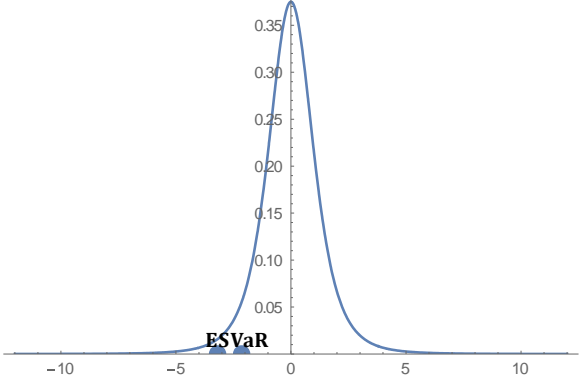
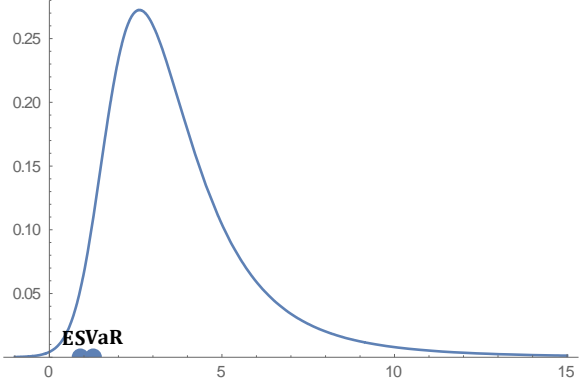
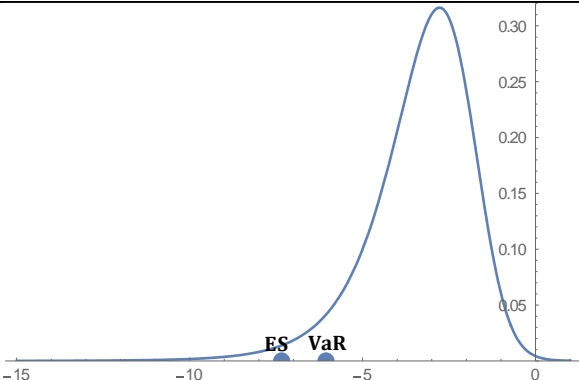
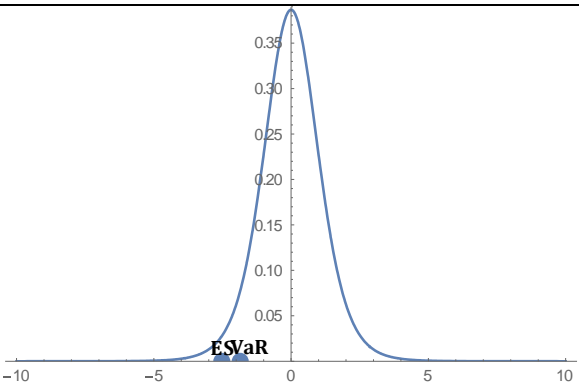
Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

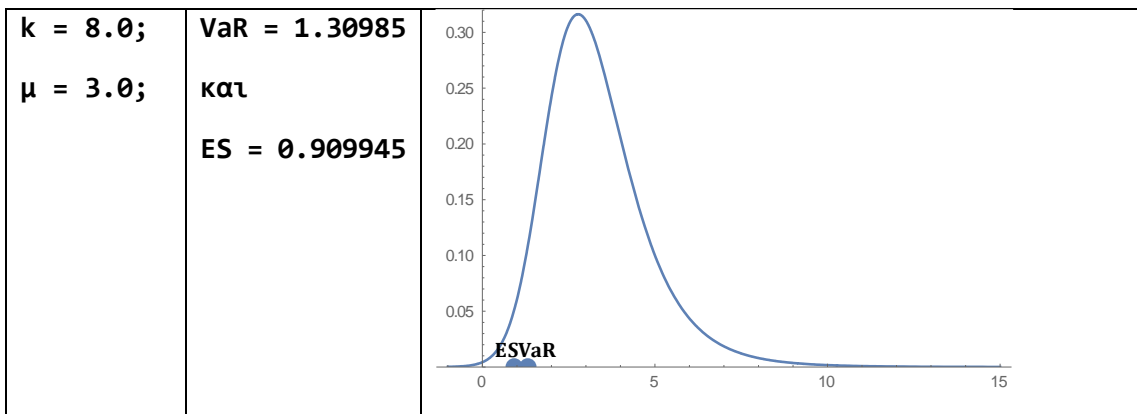
VaR = 0.372327 και ES = -0.186595



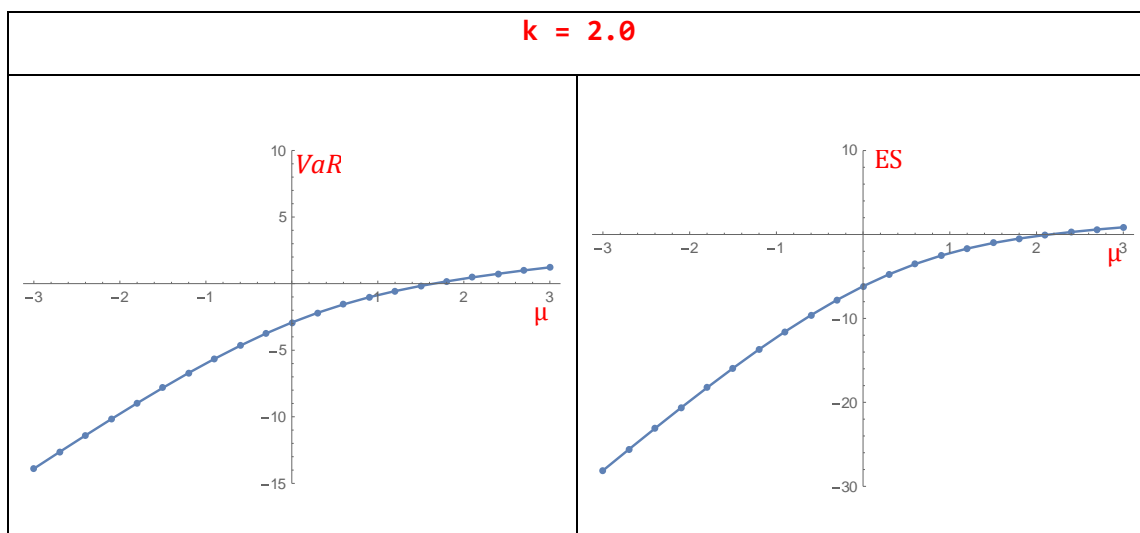
Σχήμα 2.4 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή **Noncentral Student's t**.

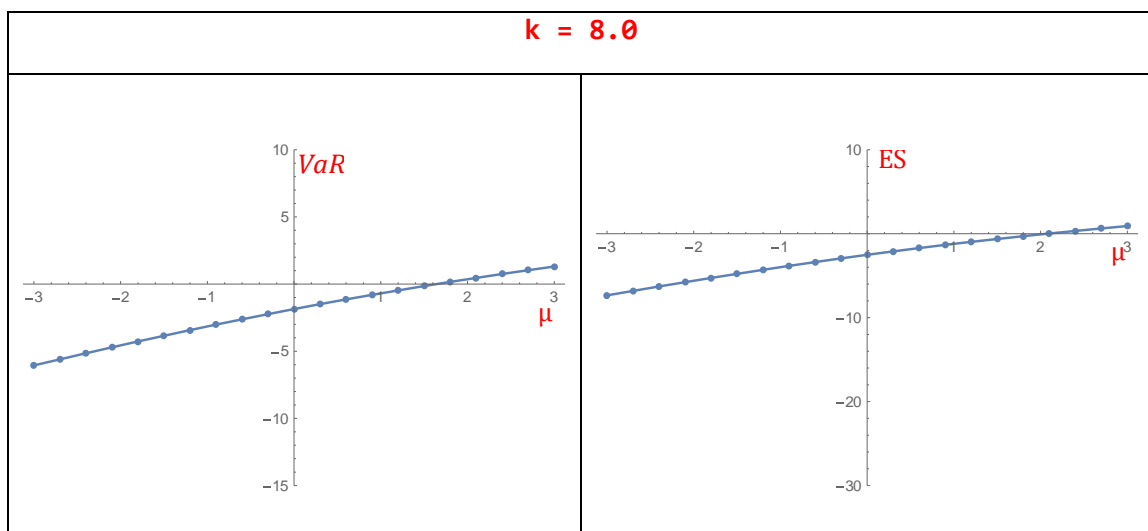
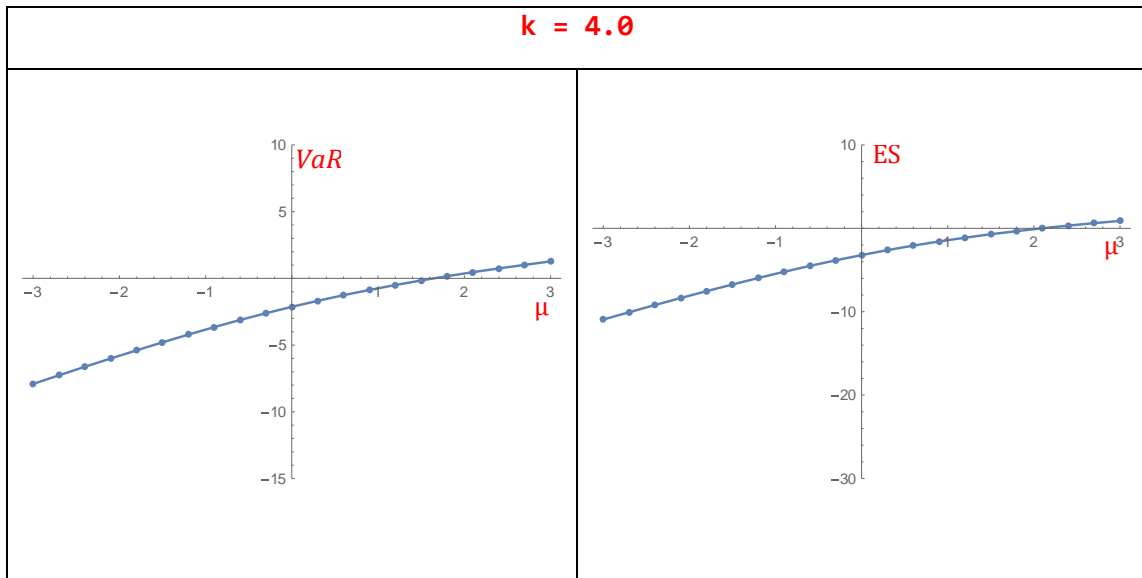
<p>$k = 2.0;$ $\mu = -3.0;$</p>	<p>$VaR = -13.8944$ $\kappa \lambda$ $ES = -28.1199$</p>	
<p>$k = 2.0;$ $\mu = 0;$</p>	<p>$VaR = -2.91999$ $\kappa \lambda$ $ES = -6.16441$</p>	
<p>$k = 2.0;$ $\mu = 2.0;$</p>	<p>$VaR = 0.372327$ $\kappa \lambda$ $ES = -0.186595$</p>	
<p>$k = 4.0;$ $\mu = -3.0;$</p>	<p>$VaR = -7.90813$ $\kappa \lambda$ $ES = -10.9357$</p>	

<p>$k = 4.0;$ $\mu = 0;$</p>	<p>$VaR = -2.13185$ $\kappa \alpha \tau$ $ES = -3.20287$</p>	
<p>$k = 4.0;$ $\mu = 3.0;$</p>	<p>$VaR = 1.27476$ $\kappa \alpha \tau$ $ES = 0.88743$</p>	
<p>$k = 8.0;$ $\mu = -3.0;$</p>	<p>$VaR = 0.065177$ $\kappa \alpha \tau$ $ES = -0.41134$</p>	
<p>$k = 8.0;$ $\mu = 0;$</p>	<p>$VaR = -1.85955$ $\kappa \alpha \tau$ $ES = -2.51385$</p>	

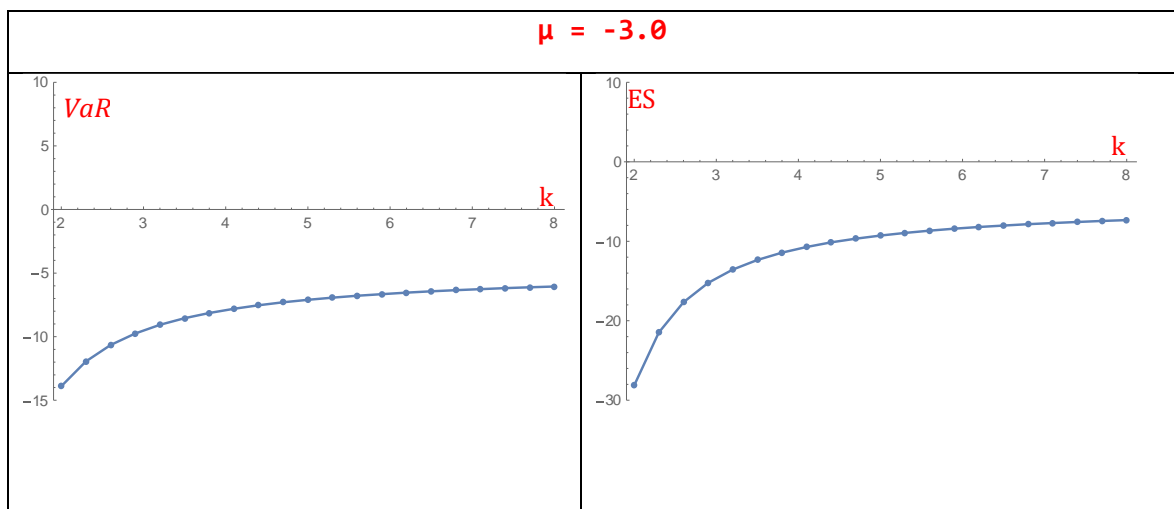


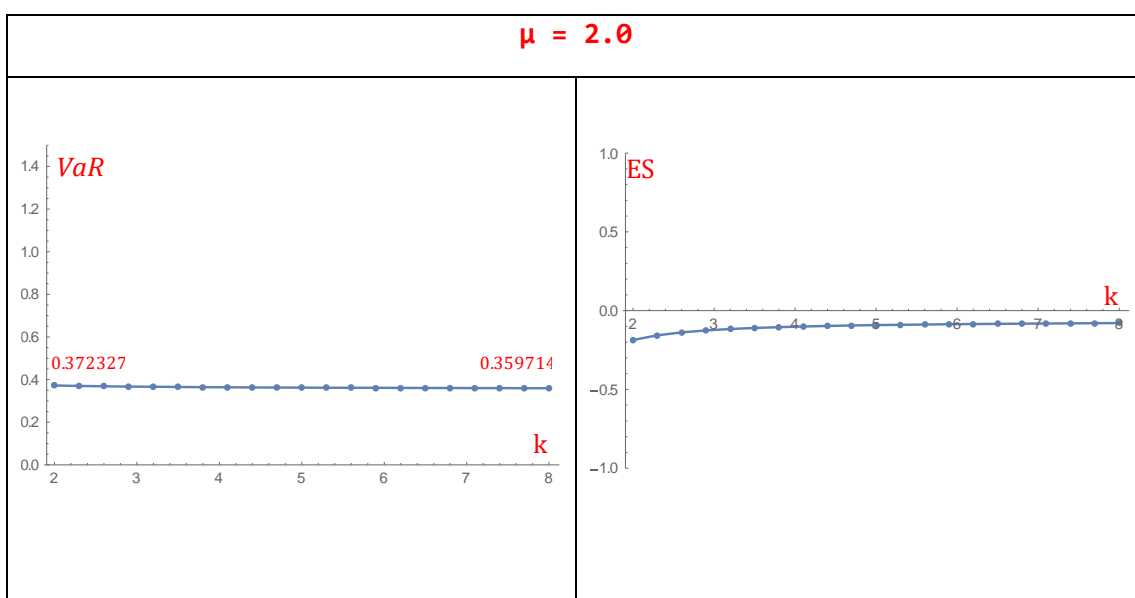
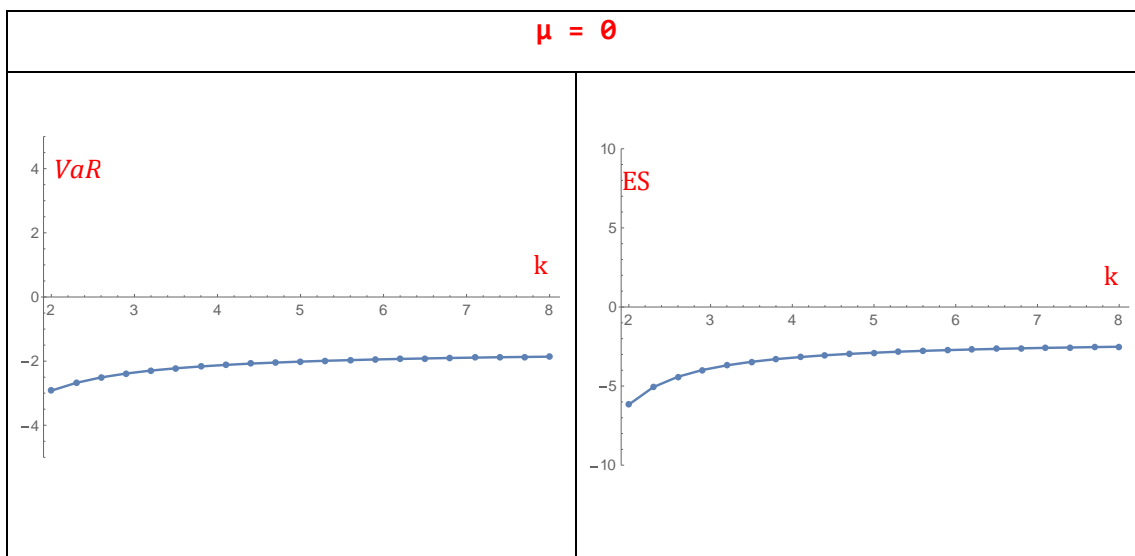
Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την κατανομή Noncentral Student's t ως συνάρτηση της παραμέτρου ασυμμετρίας μ , για τρεις διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας k .





Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% της κατανομής Non-central t ως συνάρτηση των βαθμών ελευθερίας k , για τρεις τιμές της παραμέτρου μ .





Απο τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ES αυξάνεται με την αύξηση και της παραμέτρου μ και με την αύξηση των βαθμών ελευθερίας k .

2.3 Κατανομή Stable Paretian

Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια κατανομή λέγεται ότι είναι stable εάν ένας γραμμικός συνδυασμός δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με αυτήν την κατανομή έχει την ίδια κατανομή ως προς τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας.

Αν και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μια γενική stable κατανομή δεν μπορεί να γραφτεί αναλυτικά, η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί. Οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας

δίνεται από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, ή απλώς από τη χαρακτηριστική του συνάρτηση $\varphi(t)$ μέσω της:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt$$

Μια τυχαία μεταβλητή X μπορεί να λέγεται *stable* αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\varphi(t; \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \exp(it\mu - |t\sigma|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)\Phi))$$

όπου

$$\Phi = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log|t|, & \alpha = 1 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

είναι η παράμετρος θέσης, $\beta \in [-1, 1]$ είναι η παράμετρος ασυμμετρίας, $1 < \alpha \leq 2$

Θεωρούμε μια κατανομή *stable* Paretian με δείκτη ουράς α (**tail index α**) να περιορίζεται στο $1 < \alpha \leq 2$, και την παράμετρο ασυμμετρίας β , $\beta \in [-1, 1]$. Οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, μ και σ , θεωρούνται με τον συνήθη τρόπο και γράφουμε $X \sim S_{\alpha, \beta}(\mu, \sigma)$. Πρέπει να έχουμε κατά νου ότι το σ^2 δεν είναι η διακύμανση και ότι η δεύτερη ροπή δεν υπάρχει αν $\alpha < 2$. Υπάρχουν αρκετές παραμετροποιήσεις της χαρακτηριστικής συνάρτησης, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε αυτή που αναφέρεται στο άρθρο των Samorodnitsky and Taqqu (1994): Για $1 < \alpha \leq 2$ και $X \sim S_{\alpha, \beta}(0, 1)$, (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.65-66)

$$\log \phi_X(t) = -|t|^\alpha \left[1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] \quad (2.13)$$

Στο Stoyanov et al. (2006) δίνεται μια αριθμητικά χρήσιμη ολοκληρώσιμη έκφραση για τον υπολογισμό του ES. Για το $\alpha > 1$, $S \sim S_{\alpha, \beta}(0, 1)$, $0 < \gamma < 1$ και $q_{S, \gamma} = F_S^{-1}(\gamma)$

$$ES_\gamma(S; \alpha, \beta, 0, 1) = \frac{1}{\gamma} \text{Stoy}(q_{S, \gamma}, \alpha, \beta)$$

όπου το μέρος της ουράς $\int_{-\infty}^c x f_S(x; \alpha, \beta) dx$ είναι:

$$\text{Stoy}(c, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{|c|}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) \exp\left\{-|c|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} v(\theta)\right\} d\theta \quad (2.14)$$

$$g(\theta) = \frac{\sin\{\alpha(\bar{\theta}_0 + \theta) - 2\theta\}}{\sin\{\alpha(\bar{\theta}_0 + \theta)\}} - \frac{\alpha \cos^2(\theta)}{\sin^2\{\alpha(\bar{\theta}_0 + \theta)\}}$$

$$v(\theta) = \{\cos(\alpha\bar{\theta}_0)\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\cos(\theta)}{\sin\{\alpha(\bar{\theta}_0 + \theta)\}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos\{\alpha(\bar{\theta}_0 + \theta) - \theta\}}{\cos(\theta)}$$

και

$$\bar{\theta}_0 = \frac{1}{\alpha} \arctan\left\{\bar{\beta} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right\}$$

και

$$\bar{\beta} = \text{sign}(c)\beta$$

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$):

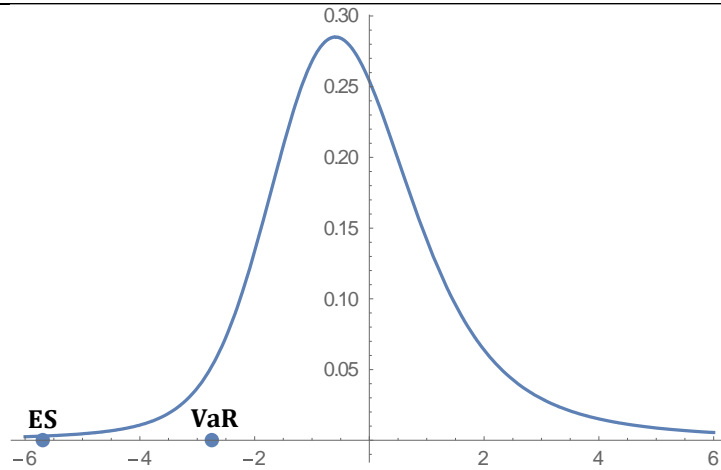
```

CharacteristicFunction[StableDistribution[1, α, β, θ, 1], t];
f1=Plot[PDF[StableDistribution[1, α, β, θ, 1], x], {x, -6, 6}];
$Assumptions=1<α<=2&& -1<=β<=1;
α=1.5;β=0.5;γ=0.05;
q5=Quantile[StableDistribution[1, α, β, θ, 1], γ];
βo[c_]:=Sign[c]*β;
θo[c_]:= (1/α)*ArcTan[βo[c]*Tan[(Pi*α)/2]];
g[c_, θ_]:=
((Sin[α*(θo[c]+θ)-2*θ])/(Sin[α*(θo[c]+θ)]))-
((α*(Cos[θ])^2)/(Sin[α*(θo[c]+θ)]^2);
υ[c_, θ_]:= ((Cos[α*θo[c]])^(1/(α-1)))*((Cos[θ]/Sin[α*(θo[c]+θ)])^(α/(α-1)))*((Cos[α*(θo[c]+θ)-θ])/Cos[θ]);
Stoy[c_]:= (α/(α-1))*(Abs[c]/Pi)*NIntegrate[g[c, θ]*Exp[(-(Abs[c])^(α/(α-1)))*υ[c, θ]], {θ, -θo[c], Pi/2}];
ESSP=(1/γ)*Stoy[q5];
f2=ListPlot[{{ESSP, 0}, {q5, 0}}, PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR", Black, Bold, FontSize->13, FontFamily->"Cambria"], {-2.70, 0.0156}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES", Black, Bold, FontSize->13, FontFamily->"Cambria"], {-5.70, 0.015}]];
Print["VaR = ", q5, " και ", " ES = ", ESSP]
Show[f1, f2, f3, f4]

```

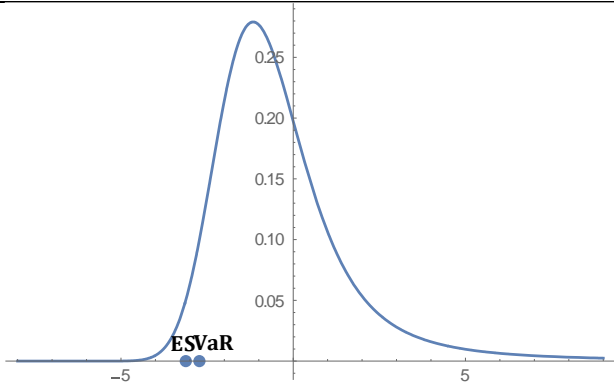
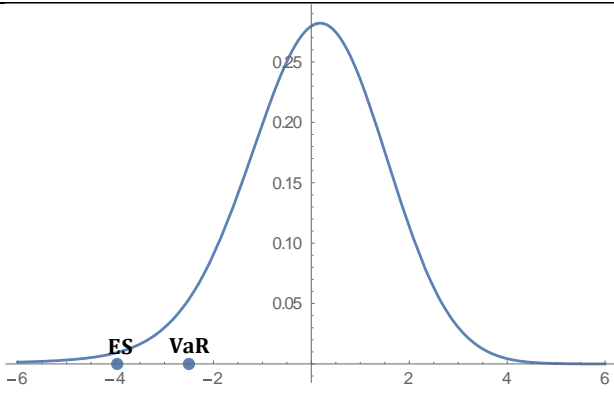
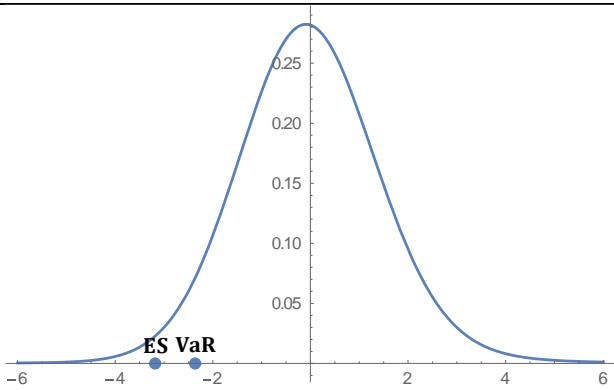
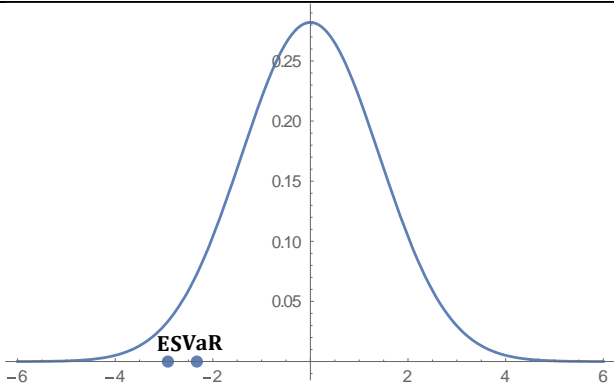
Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

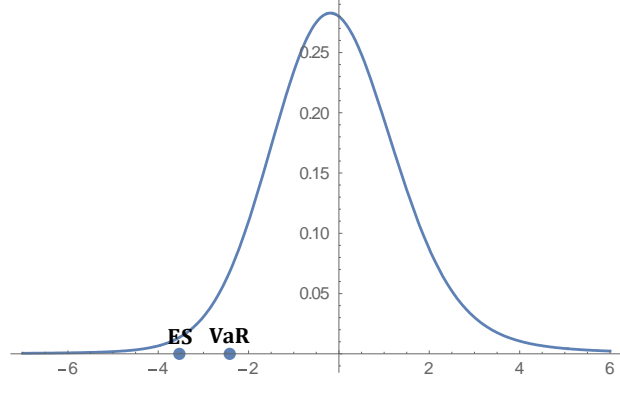
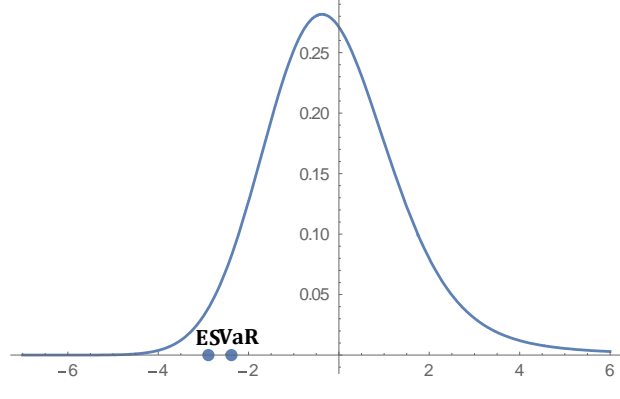
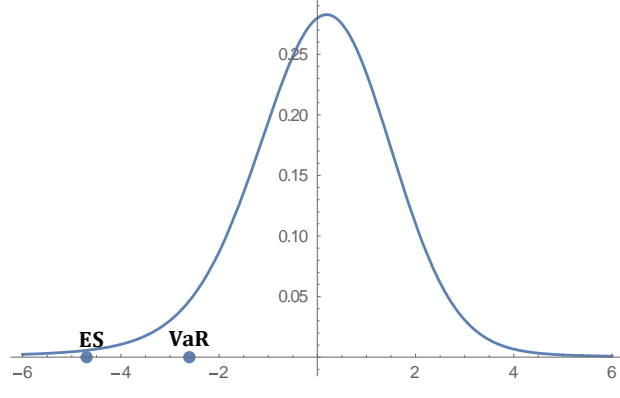
VaR = -2.75419 και ES = -5.69806



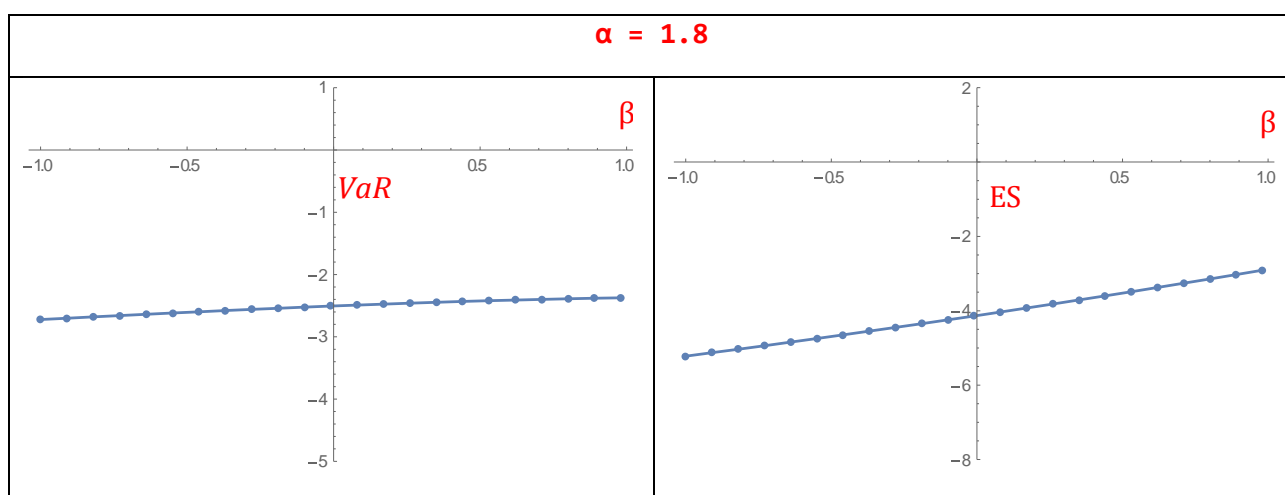
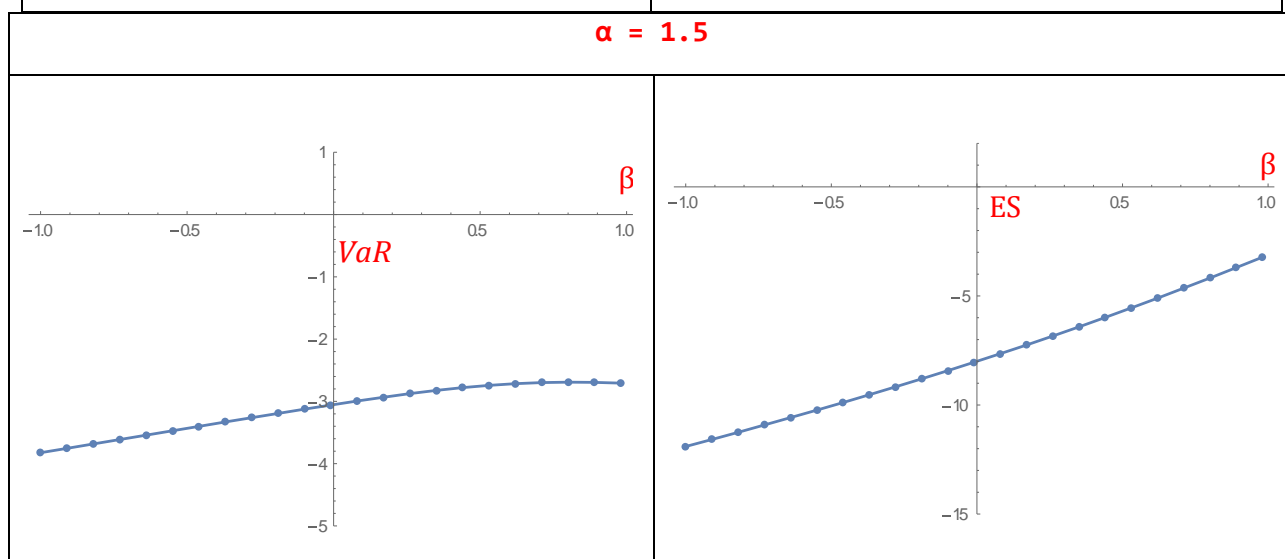
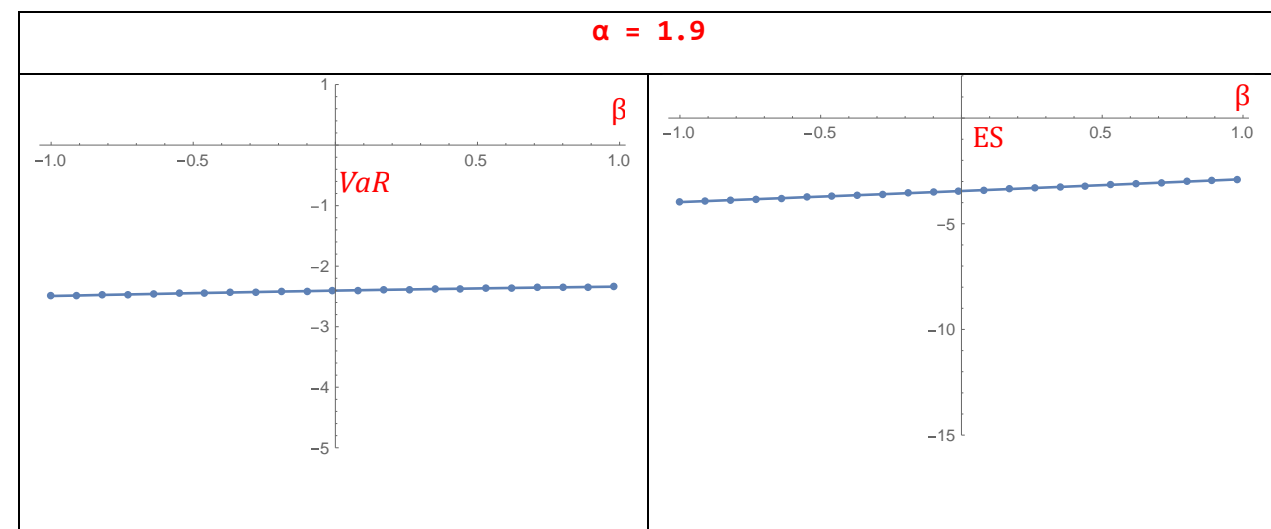
Σχήμα 2.5 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή **Stable Paretian**.

$\alpha = 1.5;$ $\beta = 0.5;$	VaR= -2.75419 κατ ES = -5.69806	
$\alpha = 1.5;$ $\beta = -0.5;$	VaR= -3.43366 κατ ES = -10.0415	

$\alpha = 1.5;$ $\beta = 1;$	VaR= -2.71174 κατ ES = -3.11508	
$\alpha = 1.9;$ $\beta = -1;$	VaR= -2.49316 κατ ES = -3.97302	
$\alpha = 1.9;$ $\beta = 0.5;$	VaR= -2.36787 κατ ES = -3.17306	
$\alpha = 2.0;$ $\beta = -0.5;$	VaR= -2.32617 κατ ES = -2.91712	

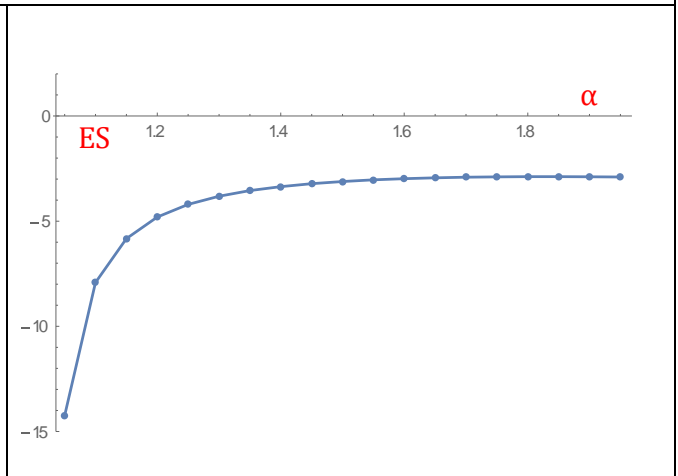
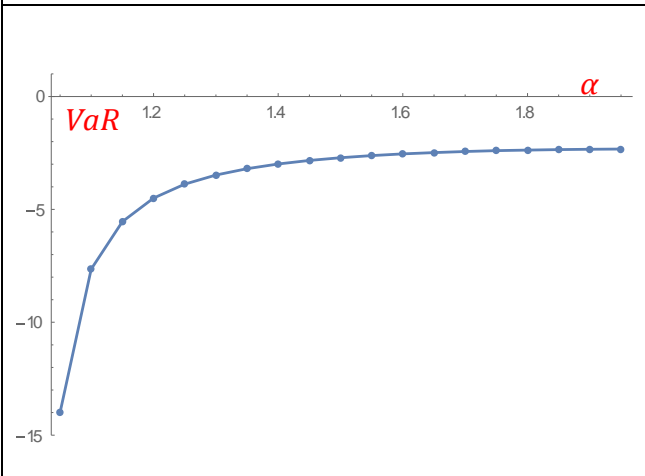
$\alpha = 1.8;$ $\beta = 0.5;$	VaR= -2.42447 κατ ES = -3.52526	
$\alpha = 1.8;$ $\beta = 1.0;$	VaR= -2.37267 κατ ES = -2.88348	
$\alpha = 1.8;$ $\beta = -0.5;$	VaR= -2.60711 κατ ES = -4.69312	

Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την **Stable Pare-tian** κατανομή ως συνάρτηση της παραμέτρου ασυμμετρίας β , για τρεις τιμές της παραμέτρου α .

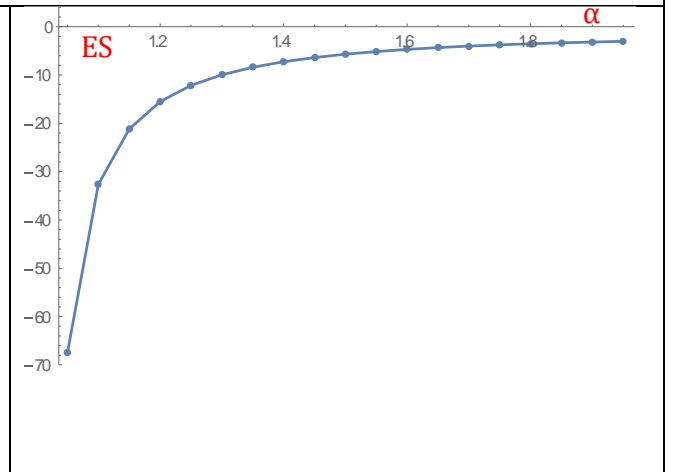
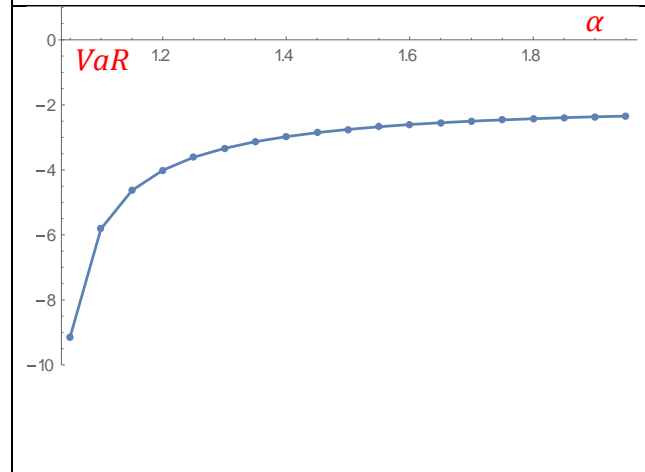


Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την **Stable Pare-tian** κατανομή ως συνάρτηση της παραμέτρου α , για τρεις τιμές της παραμέτρου β .

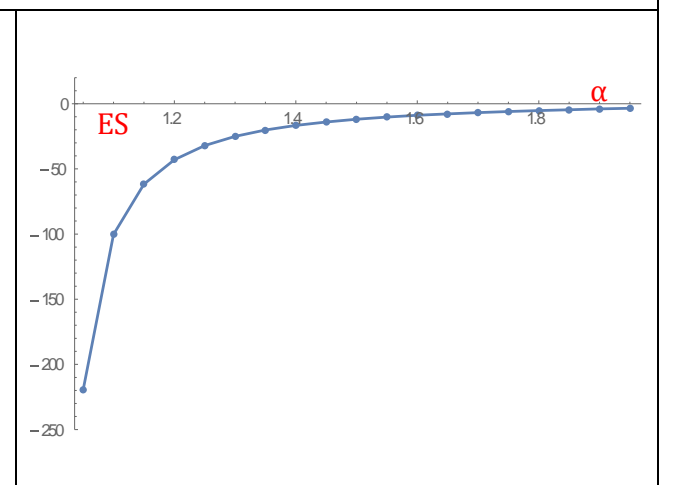
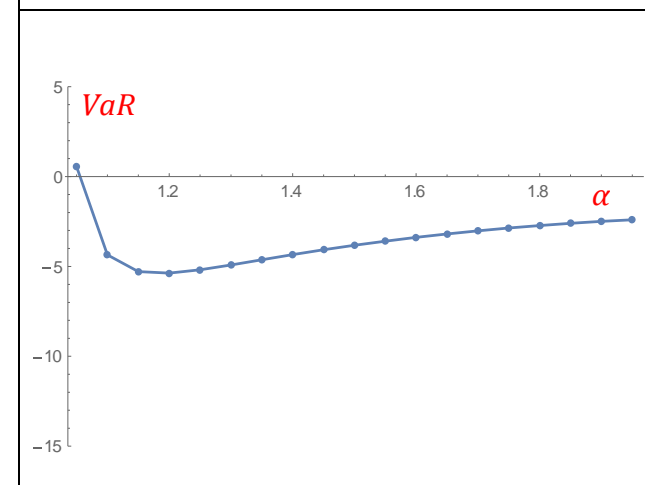
$\beta = 1.0$



$\beta = 0.5$



$\beta = -1.0$



Απο τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όσο το α αυξάνεται και πλησιάζει προς το 2 το β δεν επηρεάζει πλέον το σχήμα της πυκνότητας και έτσι το ES τείνει να είναι σταθερό. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο το α αυξάνεται προς το 2 η κατανομή έχει λιγότερο βαριά ουρά και τείνει στην κανονική κατανομή.

2.4 Κατανομή Generalized hyperbolic

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Generalized hyperbolic εάν η σ.π.π. της δίνεται από : (βλ. Estimation methods for ES σελ.9-10)

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\eta)} \frac{K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{\left\{\sqrt{\delta^2 + \frac{(x-\mu)^2}{\alpha}}\right\}^{-\frac{1}{2}-\lambda}} e^{\beta(x-\mu)} \quad (2.15)$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος θέσης, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος σχήματος, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος ασυμμετρίας, $\delta \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος κλίμακας, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ και

$$K_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}x(t+t^{-1})} dt, \quad x > 0$$

που είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel με δείκτη $\nu \in \mathbb{R}$. Η αναμενόμενη ζημία (ES) για την μεταβλητή X είναι :

$$ES(X) = \frac{\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\eta)} \int_{-\infty}^q x \frac{K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{\left\{\sqrt{\delta^2 + \frac{(x-\mu)^2}{\alpha}}\right\}^{-\frac{1}{2}-\lambda}} e^{\beta(x-\mu)} dx$$

όπου q είναι το γ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής (δηλαδή το VaR).

Θα εξετάσουμε μια ειδική περίπτωση της Generalized hyperbolic κατανομής η οποία ονομάζεται **Normal inverse Gaussian** (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.68).

Σύμφωνα με την (2.15) η **Normal inverse Gaussian** ισχύει για $\lambda = 1/2$, $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η παράμετρος θέσης, $\alpha > 0$ είναι η παράμετρος σχήματος, $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ είναι η παράμετρος ασυμμετρίας, $\delta > 0$ είναι η παράμετρος κλίμακας.

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

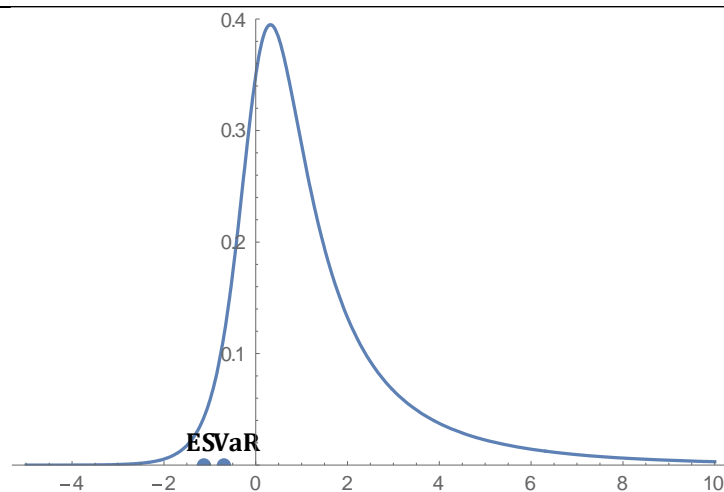
```

λ=-1/2;δ=1;μ=0;γ=0.05;α=1;β=0.8;
f1=Plot[PDF[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],x],{x,10,-5},PlotRange->{0,0.4}];
q6=Quantile[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],γ];
ESH=(NIntegrate[x*PDF[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],x],{x,-Infinity,q6}])/γ;
f2=ListPlot[{{ESH,0},{q6,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cambria"],{-0.4,0.02}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cambria"],{-1.2,0.02}]];
Print["VaR = ",q6," και "," ES = ",ESH]
Show[f1,f2,f3,f4]

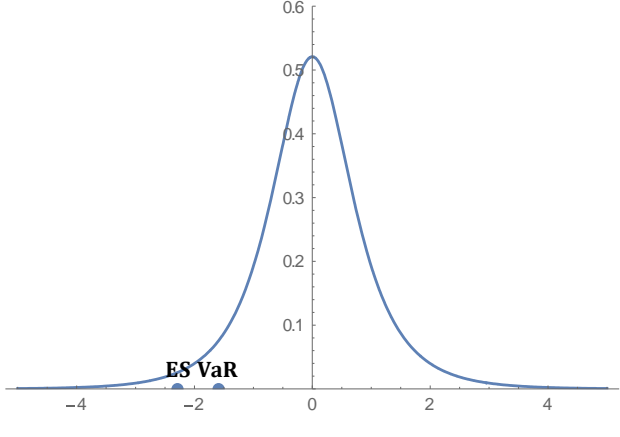
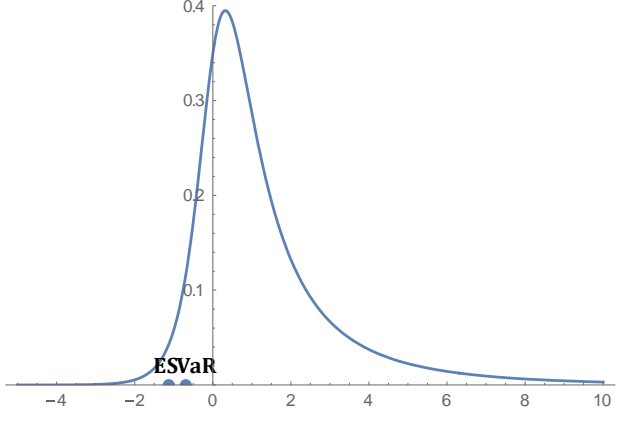
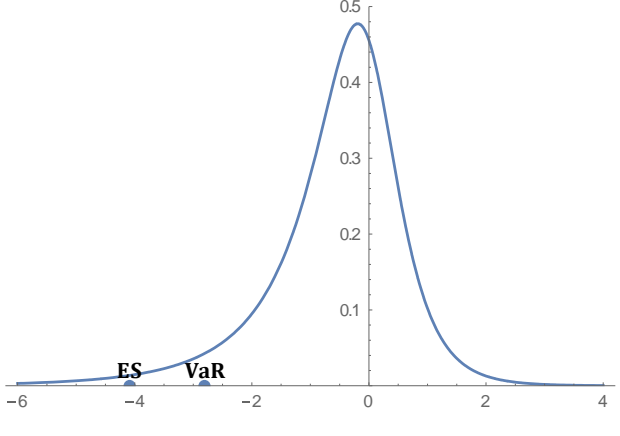
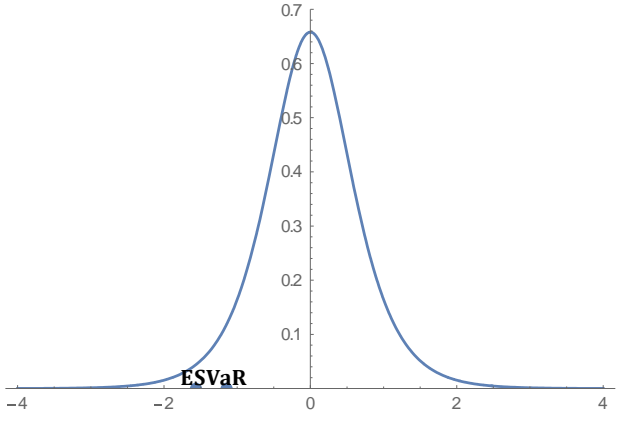
```

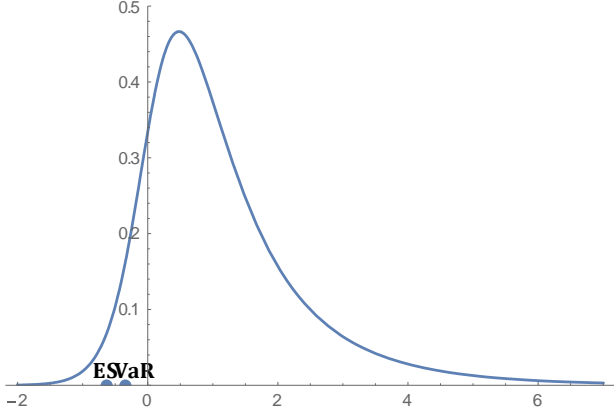
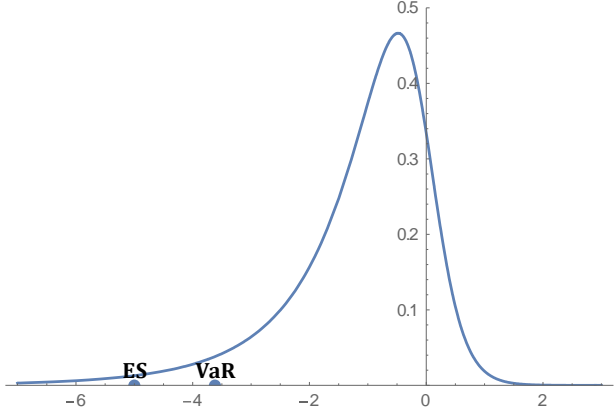
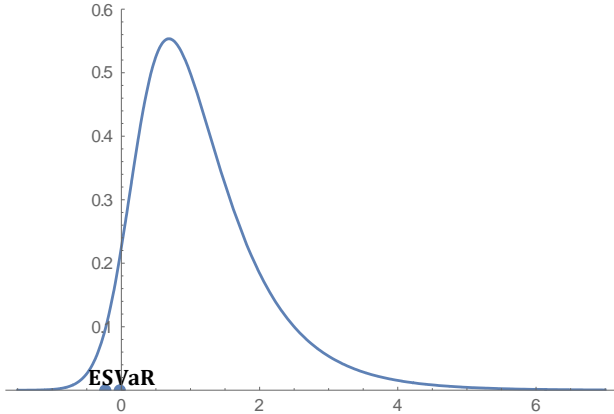
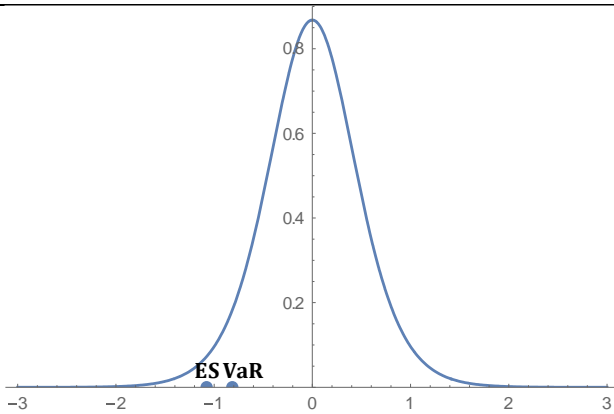
Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

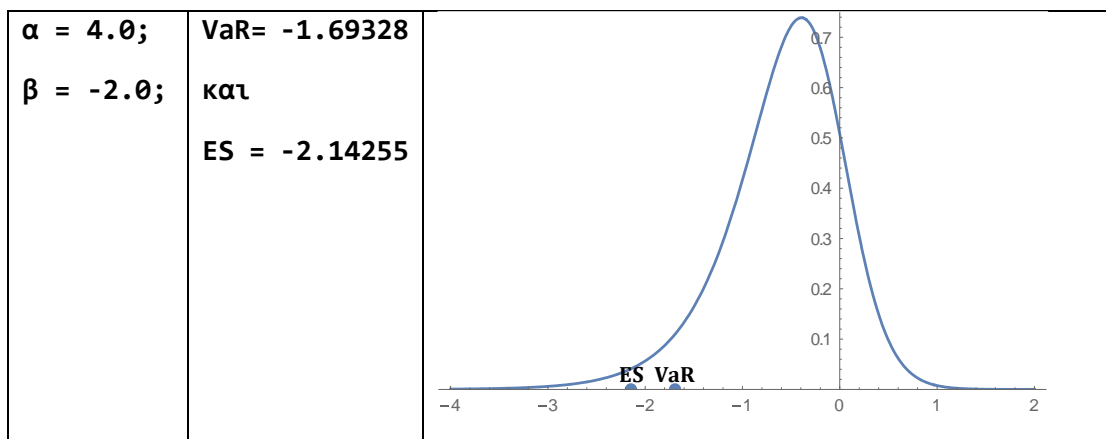
VaR = -0.695263 και ES = -1.12226



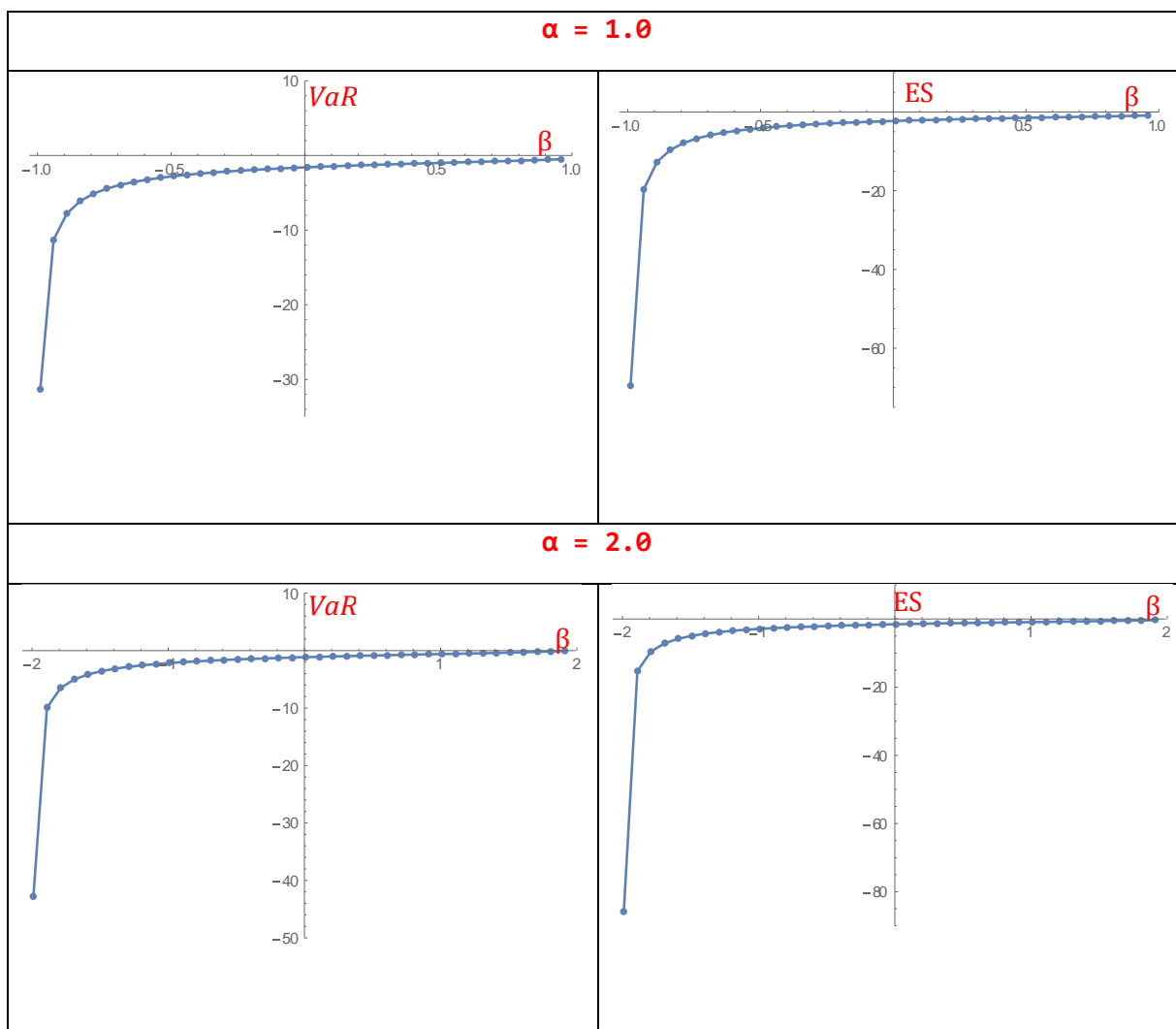
Σχήμα 2.6 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή **Normal inverse Gaussian**.

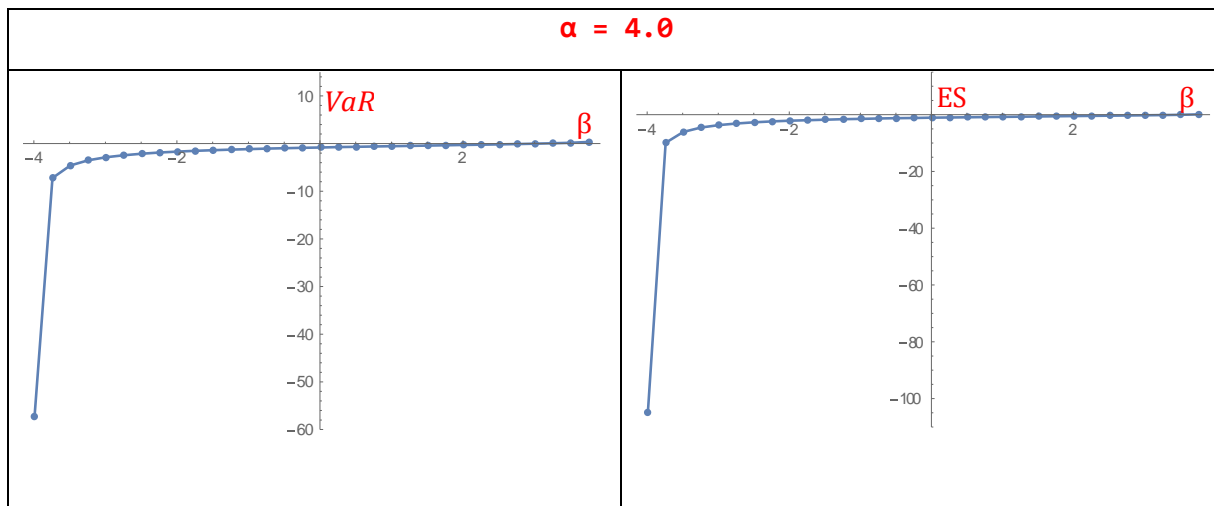
$\alpha = 1.0;$ $\beta = 0;$	VaR= -1.59137 $\kappa\tau$ ES = -2.28715	
$\alpha = 1.0;$ $\beta = 0.8;$	VaR= -0.69526 $\kappa\tau$ ES = -1.12226	
$\alpha = 1.0;$ $\beta = -0.5;$	VaR= -2.80544 $\kappa\tau$ ES = -4.09033	
$\alpha = 2.0;$ $\beta = 0;$	VaR= -1.14413 $\kappa\tau$ ES = -1.562	

$\alpha = 2.0;$ $\beta = 1.5;$	VaR= -0.34983 κ ES= -0.63540	
$\alpha = 2.0;$ $\beta = -1.5;$	VaR= -3.61377 κ ES = -5.00637	
$\alpha = 4.0;$ $\beta = 3.0;$	VaR= -0.02417 κ ES= -0.22964	
$\alpha = 4.0;$ $\beta = 0;$	VaR= -0.81559 κ ES = -1.0749	

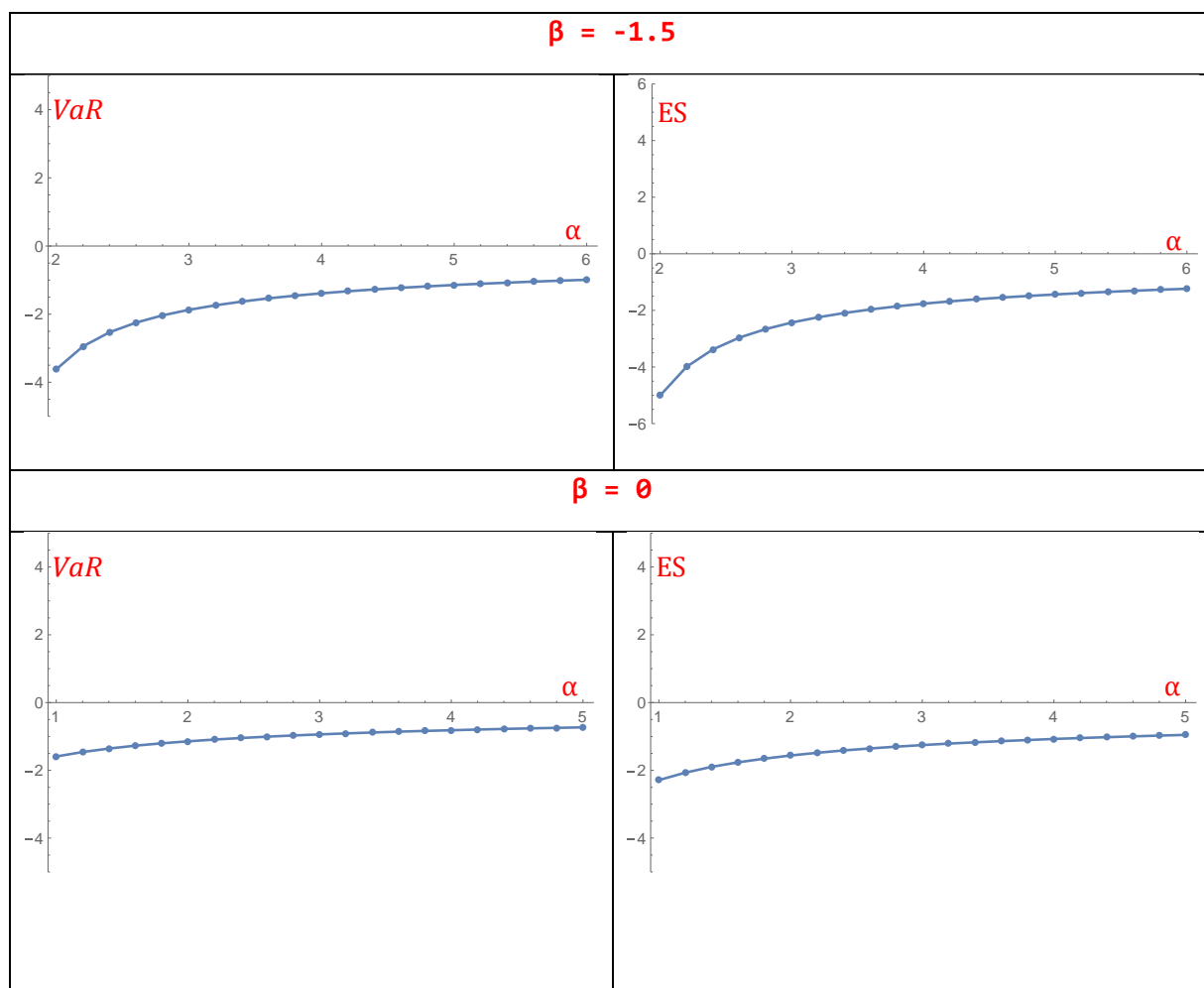


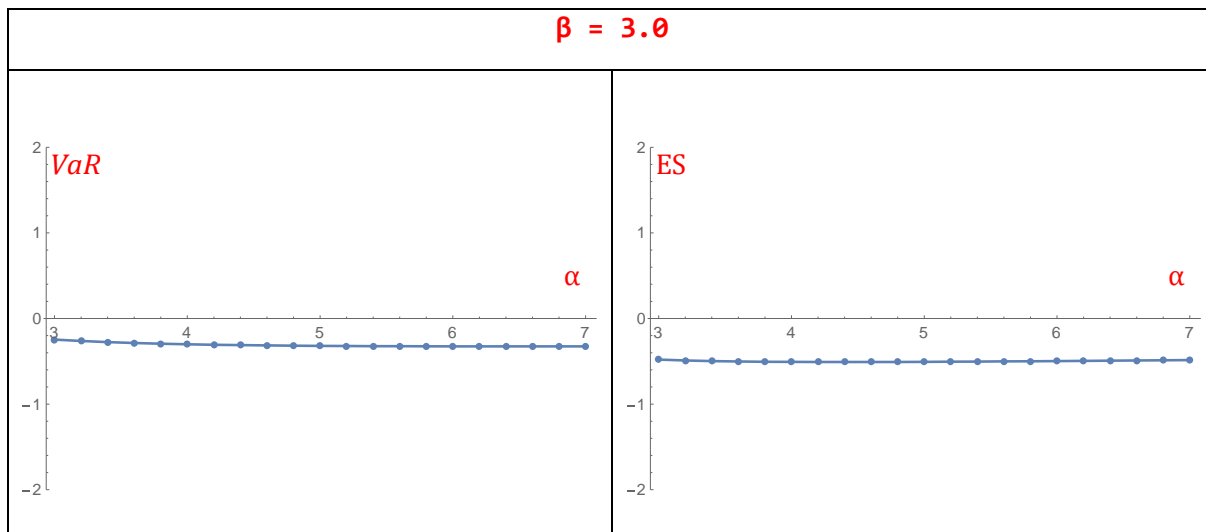
Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την **Normal inverse Gaussian** κατανομή ως συνάρτηση της παραμέτρου ασυμμετρίας β , για τρεις τιμές της παραμέτρου α .





Παρουσίαση διαγραμμάτων ES και VaR για επίπεδο σημαντικότητας 5% για την την **Normal inverse Gaussian** κατανομή ως συνάρτηση της παραμέτρου α , για τρεις τιμές της παραμέτρου β .





Απο τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ES αυξάνεται με την αύξηση και της παραμέτρου σχήματος α και με την αύξηση της παραμέτρου ασυμμετρίας β .

2.5 Μίξεις Κατανομών

Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί μια (μονομεταβλητή) k -συνιστώσα μικτής κανονικής κατανομής, εν συντομία, $Y \sim MixN(\mu, \sigma, \lambda)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi(y; \mu_j, \sigma_j^2) \quad (2.16)$$

Όπου

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k), \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \lambda_j > 0, j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

είναι τα βάρη μίξης και $\varphi(y; \mu_j, \sigma_j^2)$ είναι η σ.π.π. της κανονικής κατανομής.

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε το γενικό πλαίσιο του ES με πεπερασμένες μίξεις συνεχών κατανομών χρησιμοποιώντας αρχικά την κανονική κατανομή ως ενδεικτική περίπτωση, δεδομένης της εξέχουσας θέσης της στις εμπειρικές μελέτες. Οι εφαρμογές των μίξεων στις μη κανονικές κατανομές, όπως για αυτές που ζητήθηκαν παραπάνω, ακολουθούν έναν απλό τρόπο, και θα αναφέρουμε δύο δυνητικά χρήσιμες περιπτώσεις με την Symmetric stable και την Student's t . (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.70-71)

2.5.1 Μίξη Κανονικών Κατανομών

Έστω $X \sim \text{MixN}(\mu, \sigma, \lambda)$ με $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \dots, k$. Χρησιμοποιώντας την (2.16) η σ.κ. της X έχουμε:

$$F_X(x; \mu, \sigma, \lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi(x; \mu_i, \sigma_i^2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i}, 0, 1\right)$$

Το γ -ποσοστιαίο σημείο της X , $q_{X,\gamma}$ μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση

$\gamma - F_X(q_{X,\gamma}; \mu, \sigma, \lambda) = 0$. Το ES μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από τον ορισμό χρησιμοποιώντας αριθμητικά ολοκληρώματα (αντικαθιστώντας για παράδειγμα το $-\infty$ με το -100). Αυτό είναι εύκολο να εφαρμοστεί και γρήγορο να υπολογιστεί. Όμως, το ES μπορεί να εκφραστεί και με άλλες μορφές που είναι πιο βολικές για αριθμητικούς υπολογισμούς και την ερμηνεία. (βλ. Cizek et al.(2011) σελ. 71)

Έστω $Z \sim N(0,1)$ και $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q_{X,\gamma} - \mu_j)}{\sigma_j}$, με βασικούς υπολογισμούς προκύπτει:

$$ES_\gamma(X; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^k \lambda_j \left\{ \sigma_j \int_{-\infty}^{c_j} z f_Z(z) dz + \mu_j \int_{-\infty}^{c_j} f_Z(z) dz \right\} \quad (2.17)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5) και (2.17) μπορούμε να γράψουμε για την $X \sim \text{MixN}(\mu, \sigma, \lambda)$,

$$ES_\gamma(X; \mu, \sigma, \lambda) = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j \Phi(c_j)}{\gamma} \left\{ \mu_j - \sigma_j \frac{\varphi(c_j)}{\Phi(c_j)} \right\} \quad (2.18)$$

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```

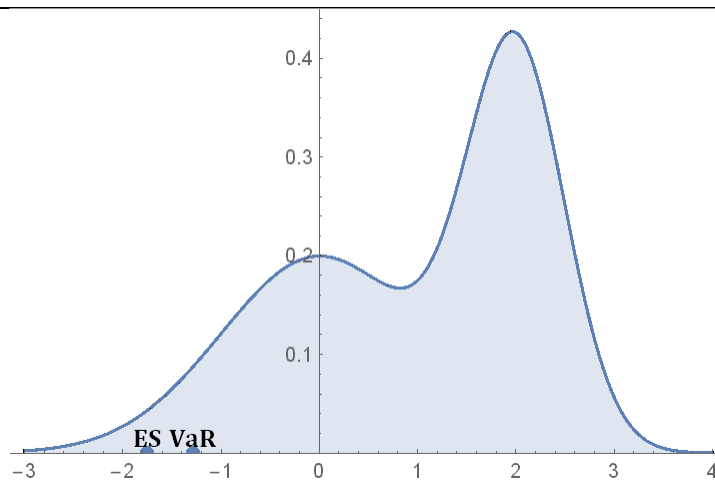
μ={0,2}; σ={1,1/2}; λ={0.5,0.5};
ND=MixtureDistribution[{λ[[1]],λ[[2]]},{NormalDistribution[μ[[1]],σ[[1]]],NormalDistribution[μ[[2]],σ[[2]]]};
f1=Plot[PDF[ND,x],{x,-3,4},Filling->Axis,PlotRange->{0,0.45}];
γ=0.05;k=2;c=Table[1,{k}];
q7=Quantile[ND,γ];
Do[ c[[i]]=(q7-μ[[i]])/σ[[i]],{i,1,k}]
ESNM=(Sum[(λ[[i]]*CDF[NormalDistribution[μ[[i]],σ[[i]]],c[[i]]])*(μ[[i]]-σ[[i]]*(PDF[NormalDistribution[μ[[i]],σ[[i]]],c[[i]])/CDF[NormalDistribution[μ[[i]],σ[[i]]],c[[i]]])),{i,1,k}])/γ;

```

```
f2=ListPlot[{{ESNM,0},{q7,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-1.28,0.015}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-1.75,0.015}]];
Print["VaR = ",q7," και ", " ES = ",ESNM]
Show[f1,f2,f3,f4]
```

Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

VaR = -1.28155 και ES = -1.75498



Σχήμα 2.7 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την **Μίξη Κανονικών Κατανομών**.

2.5.2 Μίξη Symmetric stable

Έστω $X \sim \text{MixStab}(\alpha, \mu, \sigma, \lambda)$, $X_j \sim S_{\alpha_j}(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \dots, k$ και $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Η σ.π.π της X είναι:

$$f_X(x; \alpha, \mu, \sigma, \lambda) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_S(x; \alpha_j, \mu_j, \sigma_j) \quad (2.19)$$

όπου $f_S(x; \alpha, \mu, c)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της Symmetric stable Paretian με δείκτη ουράς α (**tail index α**), μ παράμετρο θέσης και c παράμετρο κλίμακας. Αν ισχύει για κάθε $\alpha_i > 1$ τότε μ_j είναι ο ατομικός μέσος και $E[X] = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_i$. Όμοια με την μίξη κανονικών κατανομών, η σ.κ. της X είναι: (βλ. Cizek et al.(2011) σελ. 72)

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j F_S\left(\frac{x - \mu_j}{\sigma_j}; \alpha_j, 0, 1\right)$$

Όπου $F_S(\cdot; \alpha, 0, 1)$ είναι η σ.κ. της τυπικής Symmetric stable κατανομής. Το γ -ποσοστιαίο σημείο της X , $q_{X,\gamma}$ μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση $\gamma - F_X(q_{X,\gamma}) = 0$.

Έστω $X \sim \text{MixStab}(\alpha, \mu, \sigma, \lambda)$ με $q_{X,\gamma}$ το γ -ποσοστιαίο σημείο της X για $\gamma \in (0, 1)$. Τότε σύμφωνα με την (2.28), με $S \sim S_\alpha(0, 1)$ και $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q_{X,\gamma} - \mu_j)}{\sigma_j}$, έχουμε :

$$ES_\gamma(X; \alpha, \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^k \lambda_j \{ \sigma_j \text{Stoy}(c_j, \alpha_j) + \mu_j F_S(c_j; \alpha_j) \} \quad (2.32)$$

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```

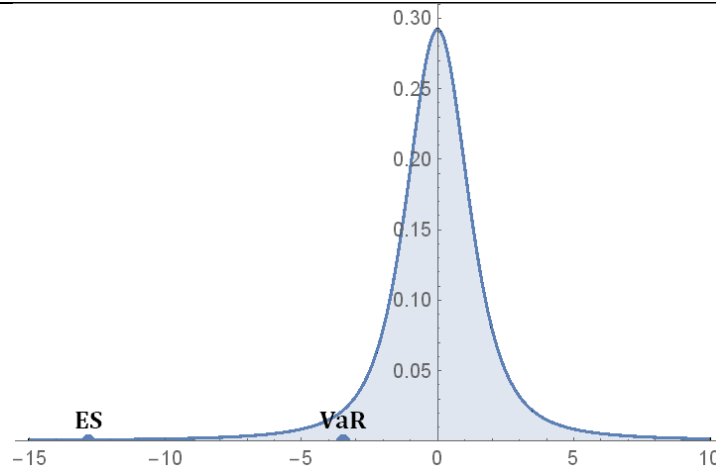
θo[α_]:= (1/α)*ArcTan[θ*Tan[(Pi*α)/2]]
g[θ_,α_]:= ((Sin[α*(θo[α]+θ)-2*θ])/(Sin[α*(θo[α]+θ)]))
            -((α*(Cos[θ])^2)/(Sin[α*(θo[α]+θ)]^2)
υ[θ_,α_]:= ((Cos[α*θo[α]]^(1/(α-1)))*(Cos[θ]/Sin[α*(θo[α]+θ)])^(α/(α-1)))
            *((Cos[α*(θo[α]+θ)-θ])/Cos[θ])
Stoy[c_,α_]:= (α/(α-1))*(Abs[c]/Pi)*NIntegrate[g[θ,α]*Exp[(-
            (Abs[c])^(α/(α-1)))*υ[θ,α]],{θ,-θo[α],Pi/2}]

α={1.3,1.7};μ={0,1}; σ={1,1/2};λ={0.8,0.2};β=0;
SD=MixtureDistribution[{λ[[1]],λ[[2]]},{StableDistribu-
            tion[1,α[[1]],θ,μ[[1]],σ[[1]]],StableDistribu-
            tion[1,α[[2]],θ,μ[[1]],σ[[1]]]}];
f1=Plot[PDF[SD,x],{x,-15,10},Filling->Axis,PlotRange->{0,0.31}];
γ=0.05;k=2;c=Table[1,{k}];
q8=Quantile[SD,γ];
Do[ c[[i]]=(q8-μ[[i]])/σ[[i]],{i,1,k}]
c
ESSM=(Sum[λ[[i]]*(σ[[i]]*Stoy[c[[i]],α[[i]]]+μ[[i]]*CDF[StableDistribu-
            tion[1,α[[i]],θ,0,1],c[[i]]]),{i,1,k}])/γ
f2=ListPlot[{{ESSM,0},{q8,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
            bria"],{-3.48,0.015}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
            bria"],{-12.83,0.015}]];
Print["VaR = ",q8," και ", " ES = ",ESSM]
Show[f1,f2,f3,f4]

```

Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

VaR = -3.48603 και ES = -12.8379



Σχήμα 2.8 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την Μίξη Symmetric stable.

2.5.3 Μίξη Κατανομής Student's t

Σύμφωνα και με τις προηγούμενες μίξεις κατανομών, έστω $X \sim \text{Mix}T(\nu, \mu, \sigma, \lambda)$, με σ.π.π.

$$f_X(x; \nu, \mu, \sigma, \lambda) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_T(x; \nu_j, \mu_j, \sigma_j)$$

όπου $f_T(x; \nu, \mu, c)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της Student's t με ν βαθμούς ελευθερίας και $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, μ παράμετρο θέσης και c παράμετρο κλίμακας. Σύμφωνα με τις (2.17) και (2.32), με $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q_{X,\gamma} - \mu_j)}{\sigma_j}$ και χρησιμοποιώντας την *Ttail* από την (2.7), (βλ. Cizek et al.(2011) σελ.73)

$$ES_\gamma(X; \alpha, \mu, \sigma, \lambda) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^k \lambda_j \left\{ \sigma_j Ttail(c_j, \nu_j) + \frac{\mu_j \nu_j^{-\frac{1}{2}}}{B\left(\frac{\nu_j}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{c_j} \left(1 + \frac{x^2}{\nu_j}\right)^{-\frac{\nu_j+1}{2}} dx \right\} \quad (2.20)$$

Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές για επίπεδο σημαντικότητας 5% ($\gamma = 0.05$) :

```

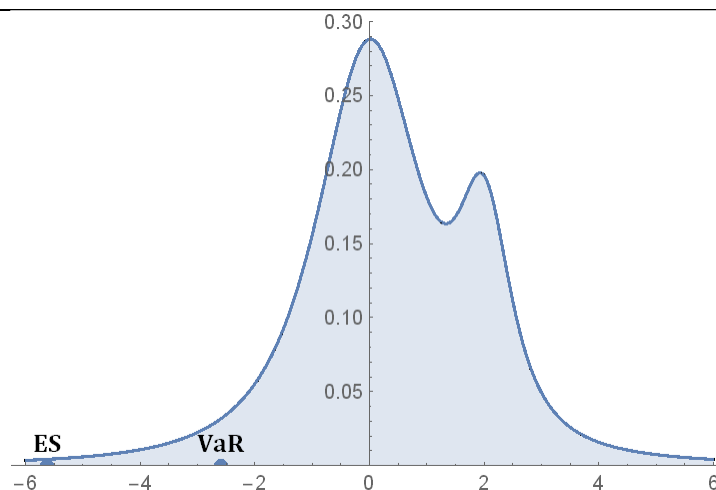
Ttail[c_,n_]:=-PDF[StudentTDistribution[0,1,n],c]*((n+c^2)/(n-1));
μ={0,2}; σ={1,1/2};n={2,2};λ={0.8,0.2};
TD=MixtureDistribution[{λ[[1]],λ[[2]]},{StudentTDistribu-
tion[μ[[1]],σ[[1]],n[[1]]]
,StudentTDistribution[μ[[2]],σ[[2]],n[[2]]]};
f1=Plot[PDF[TD,x],{x,-6,6},Filling->Axis,PlotRange->{0,0.3}];
γ=0.05;k=2;c=Table[1,{k}];
q9=Quantile[TD,γ];
Do[ c[[i]]=(q9-μ[[i]])/σ[[i]],{i,1,k}]

ESTM=(Sum[λ[[i]]*(σ[[i]]*Ttail[c[[i]],n[[i]]+μ[[i]]*CDF[StudentTDistri-
bution[μ[[i]],σ[[i]],n[[i]],c[[i]]]),{i,1,k}])/γ;
f2=ListPlot[{{ESTM,0},{q9,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-2.59,0.015}]];
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-5.62,0.015}]];
Print["VaR = ",q9," και "," ES = ",ESTM]
Show[f1,f2,f3,f4]

```

Προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

VaR = -2.59293 και ES = -5.62449



Σχήμα 2.9 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι ζημιές ακολουθούν την **Μίξη Κατανομής Student's t**.

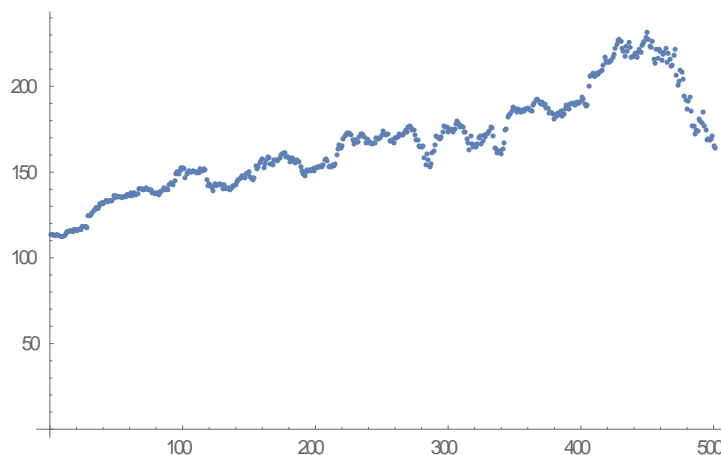
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εκτιμηθούν τα μέτρα κινδύνου VaR και ES με βάση πραγματικά δεδομένα και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τη χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής της εταιρίας apple.

3.1 Περιγραφή των δεδομένων

Το δείγμα των δεδομένων που εξετάζουμε αφορά τις ημερήσιες χρηματιστηριακές προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος της μετοχής της εταιρίας apple και καλύπτει την περίοδο 20/12/2016 έως 17/12/2018.

```
data = Import["C:\\Users\\User\\Desktop\\ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ\\AAPL4b.csv", "CSV"];  
n0 = Length[data];  
Y = Table[data[[i, 6]], {i, 2, n0}];  
ListPlot[Y]
```



Σχήμα 3.1 Τιμές της μετοχής apple την χρονική περίοδο 20/12/2016 έως 17/12/2018

Σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε στην διάθεσή μας, από το παραπάνω γράφημα μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι τιμές παρουσιάζουν άνοδο κατά το χρονικό διάστημα από το 12/2016 έως και τον 10/2018 ενώ έπειτα παρατηρείται μία πτώση αυτών.

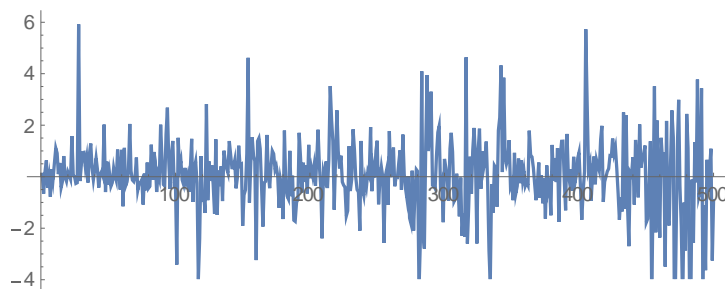
Εν συνεχεία, χρησιμοποιήθηκαν οι λογαριθμικές αποδόσεις της μετοχής και για να είναι σε καλύτερη κλίμακα τις πολλαπλασιάσαμε επί 100. Αυτό σημαίνει ότι αν P_t εκφράζει την τιμή κλεισίματος της μετοχής τη χρονική περίοδο (χρηματιστηριακή ημέρα) t , η λογαριθμική απόδοση R_t ορίζεται ως:

$$R_t = 100 \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Για το δείγμα τιμών της μετοχής $\{P_t, t \in \mathbb{N}\}$ χρησιμοποιήσαμε τις προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος (Adjusted Close), δεδομένου ότι είναι οι τιμές της μετοχής που είναι απαλλαγμένες από μεταβολές που οφείλονται σε ενέργειες όπως η αύξηση ή η διαίρεση μετοχικού κεφαλαίου και καταβολή μερίσματος στους κατόχους μετοχών. Αυτές οι ενέργειες όμως υπάρχουν μέσα στις τιμές κλεισίματος (Close) και μπορούν να μεταβάλλουν βίαια και πλασματικά την τιμή κλεισίματος και να στρεβλώσουν την πραγματική εικόνα.

```
n = Length[Y] - 1;
X = Table[100*Log[Y[[i + 1]]/Y[[i]]], {i, 1, n}];
M = Mean[X]; MA = Max[X]; MI = Min[X]; sk = Skewness[X]; ku = Kurtosis[X];
Print[" Mean= ", M, " Max= ", MA, " Min= ", MI, " Skewness= ", sk, " και",
" Kurtosis = ", ku]
ListLinePlot[X, AspectRatio -> 0.4]
```

Mean=0.0737217, Max=5.91937, Min=-6.8633, Skewness= -0.258789 και Kurtosis= 6.19866



Σχήμα 3.2 Αποδόσεις της σειράς στον χρόνο

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο μέσος της κατανομής των αποδόσεων είναι ίσος με 0.0737217. Η μέγιστη τιμή των αποδόσεων είναι 5.91937, ενώ η ελάχιστη είναι -6.8633. Η τιμή ασυμμετρίας είναι -0.258789 αυτό δηλώνει ότι υπάρχει αρνητική ασυμμετρία δηλαδή ότι οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται αριστερά της κορυφής. Όσον αφορά την κύρτωση είναι ίση με 6.19866 γεγονός που αποτελεί ένδειξη παχών ουρών στην κατανομή αποδόσεων.

3.2 Κανονική Κατανομή

Έστω ότι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι οι λογαριθμικές αποδόσεις της μετοχής πολλαπλασιασμένες επί 100. Για να ελέγξουμε αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από την κανονική κατανομή θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ ελαχιστοποιώντας την τετραγωνική

απόσταση των διατεταγμένων παρατηρήσεων από τις θεωρητικές προβλεπόμενες και ελέγχοντας αν το QQ-plot των παρατηρήσεων ως προς την $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην διαγώνιο. Έστω $X_{(i)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις και δεδομένου ότι $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε

$$F(X_{(i)}) \approx \frac{i}{n+1} \Rightarrow X_{(i)} \approx F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

Συνεπώς η ποσότητα που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς μ, σ για να εκτιμηθούν οι παράμετροι (εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων του QQplot) είναι η εξής:

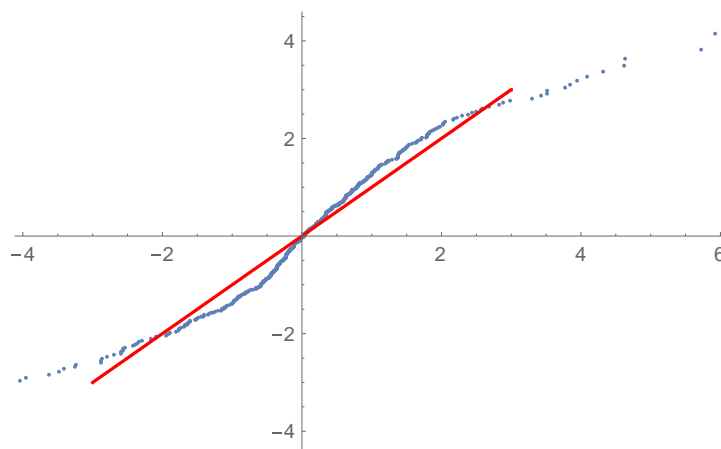
$$SS = \sum_{i=1}^n \left(X_{(i)} - F_{\mu, \sigma^2}^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)^2$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή (που θεωρούμε ότι τα δεδομένα είναι από την κανονική κατανομή) οι παράμετροι θα μπορούσαν πιο εύκολα να εκτιμηθούν από το δειγματικό μέσο και τη ρίζα της δειγματικής διασποράς (η διαφορά στις εκτιμήσεις θα είναι ελάχιστη). Επιλέξαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ως παράδειγμα γιατί στη συνέχεια θα την εφαρμόσουμε και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις (θεωρώντας π.χ. ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια κατανομή student με τρεις παραμέτρους). Η αριθμητική ελαχιστοποίηση του SS μπορεί να γίνει μέσω του ακόλουθου κώδικα mathematica.

```
SX = Sort[X];
SS = Sum[(SX[[i]] -
  Quantile[NormalDistribution[mu, sigma], i/(n + 1)])^2, {i, 1, n}];
ep = FindMinimum[SS, {mu, 0}, {sigma, 1}]

QQ = Table[{SX[[i]], Quantile[NormalDistribution[mu, sigma], i/(n + 1)]},
  {i, 1, n}] /. ep[[2]];
Show[ListPlot[QQ], Plot[x, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Red}]]
```

```
{63.424, {mu -> 0.0675508, sigma -> 1.4169}}
```



Σχήμα 3.3 QQ-plot

Οι εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των μ, σ είναι 0.0675508 και 1.4169. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις \bar{X}, S είναι σχεδόν ίδιες: 0.0675508 και 1.4477.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι ακόμα και για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων το QQ-plot δεν είναι ικανοποιητικό, δηλαδή οι παρατηρήσεις δεν φαίνεται να προέρχονται από την κανονική κατανομή.

3.3 Τυπική Student's t Κατανομή

Έστω ότι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim t_\nu(\mu, \sigma)$ είναι οι λογαριθμικές αποδόσεις της μετοχής πολλαπλασιασμένες επί 100. Τυποποιούμε τις αποδόσεις και έχουμε :

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{x}}{\sqrt{S^2}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Όπου, $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ και $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Για να ελέγξουμε αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από την Τυπική Student's t Κατανομή (με μέση τιμή 0 διασπορά 1 και σ.κ. $F_\nu(x\sqrt{\nu/(\nu-2)}), x \in \mathbb{R}$) θα πρέπει να εκτιμήσουμε την παράμετρο των βαθμών ελευθερίας ν ελαχιστοποιώντας την τετραγωνική απόσταση των διατεταγμένων παρατηρήσεων από τις θεωρητικές προβλεπόμενες και ελέγχοντας αν το QQ-plot των παρατηρήσεων ως προς την t_ν είναι «κοντά» στην διαγώνιο. Έστω $Z_{(i)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις και δεδομένου ότι $Z_i \sim t_\nu(0,1)$ τότε

$$F_\nu\left(Z_{(i)}\sqrt{\nu/(\nu-2)}\right) \approx \frac{i}{n+1} \Rightarrow Z_{(i)} \approx \left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)^{-0.5} F_\nu^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

Συνεπώς η ποσότητα που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί για να βρεθούν οι παράμετροι είναι η εξής:

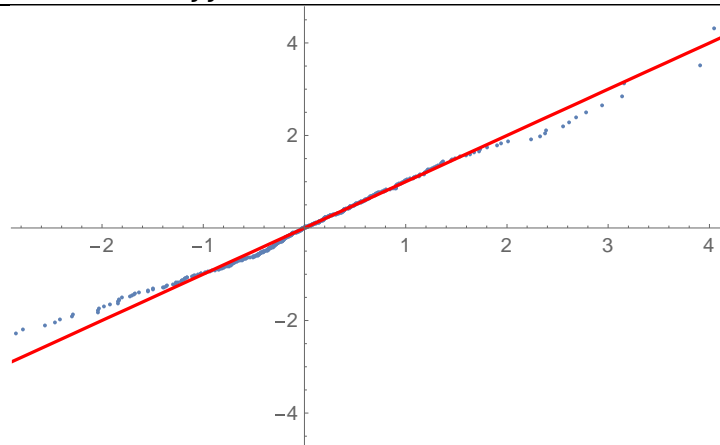
$$SS = \sum_{i=1}^n \left(Z_{(i)} - \left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)^{-0.5} F_\nu^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)^2$$

Η αριθμητική ελαχιστοποίηση του SS γίνεται μέσω του ακόλουθου κώδικα.

```
Z = (X - Mean[X])/Variance[X]^0.5;
SZ = Sort[Z];
SS = Sum[(SZ[[i]] - ((dof/(dof - 2))^-0.5)*
  Quantile[StudentTDistribution[dof], i/(n + 1.)])^2, {i, 1, n}];
ep = FindMinimum[{SS, dof > 2}, {dof, 4}]

QQ = Table[{SZ[[i]]
  , ((dof/(dof - 2))^-0.5) Quantile[StudentTDistribution[dof],
  i/(n + 1)]}, {i, 1, n}] /. ep[[2]];
Show[ListPlot[QQ], Plot[x, {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Red}]]
```

{6.58055, {dof -> 3.75026}}



Σχήμα 3.4 QQ-plot

Η εκτίμηση της παραμέτρου ν είναι 3.75026. Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε για τις βέλτιστη τιμή της παραμέτρου το QQ-plot είναι ικανοποιητικό, δηλαδή οι παρατηρήσεις μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχονται προσεγγιστικά από την Τυπική Student's t Κατανομή με τους συγκεκριμένους βαθμούς ελευθερίας.

3.4 Student's t Κατανομή με τρεις παραμέτρους

Έστω ότι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim t_\nu(\mu, \sigma)$ οι λογαριθμικές αποδόσεις της μετοχής πολλαπλασιασμένες επί 100. Αυτή τη φορά θα εκτιμήσουμε και τις τρεις παραμέτρους ν, μ, σ μέσω της παραπάνω μεθόδου. Για να ελέγξουμε αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από την Student's t Κατανομή θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους ελαχιστοποιώντας την τετραγωνική απόσταση των διατεταγμένων παρατηρήσεων από τις θεωρητικές προβλεπόμενες και ελέγχοντας αν το QQ-plot των παρατηρήσεων ως προς την $t_{\hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2}$ είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην διαγώνιο. Έστω $X_{(i)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις και δεδομένου ότι $X_i \sim t_n(\mu, \sigma)$ τότε $F(X_{(i)}) \approx \frac{i}{n+1} \Rightarrow X_{(i)} \approx F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$ Συνεπώς η ποσότητα που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί για να βρεθούν οι παράμετροι είναι η εξής:

$$SS = \sum_{i=1}^n \left(X_{(i)} - F_{\nu, \mu, \sigma}^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) \right)^2$$

Η αριθμητική ελαχιστοποίηση του SS γίνεται μέσω του ακόλουθου κώδικα.

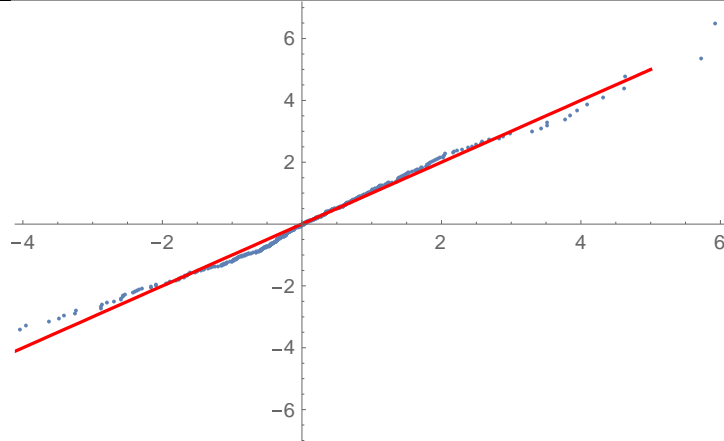
```
SX = Sort[X];
SS = Sum[(SX[[i]] -
  Quantile[StudentTDistribution[mu, sigma, dof],
    i/(n + 1.)]^2, {i, 1, n}];
ep = FindMinimum[{SS,
  dof > 2 && dof < 5 && sigma > 0 && sigma < 2}, {{mu, 0}, {sigma,
```

```

1}, {dof, 4}}, MaxIterations -> 1]
QQ = Table[{SX[[i]],
  Quantile[StudentTDistribution[mu, sigma, dof], i/(n + 1)]}, {i,
  1, n}] /. ep[[2]];
Show[ListPlot[QQ], Plot[x, {x, -5, 5}, PlotStyle -> {Red}]]

```

```
{11.4325, {mu -> 0.0581217, sigma -> 1.06518, dof -> 3.9405}}
```



Σχήμα 3.5 QQ-plot

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων το QQ-plot είναι ικανοποιητικό, δηλαδή οι παρατηρήσεις μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχονται προσεγγιστικά από την Student's t Κατανομή. Μάλιστα η προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητικότερη από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις (κανονική, τυπική student t).

3.5 Σύγκριση Κανονικής Κατανομής και Student's t Κατανομής (με τρεις παραμέτρους)

Μέσω των τύπων που χρησιμοποιήσαμε στο 2^ο Κεφάλαιο θα συγκρίνουμε το VaR και το ES, αρχικά θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από την Κανονική Κατανομή και έπειτα θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από την Τυπική Student's t Κατανομή.

Θεωρώντας ότι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ και χρησιμοποιώντας τους κώδικες της παραγράφου 2.1 και την εκτίμηση για τα μ, σ^2 που υπολογίσαμε στην παράγραφο 3.2 θα υπολογίσουμε το VaR και το ES.

Για $\mu = 0.067550$ και $\sigma = 1.4169$ προκύπτει:

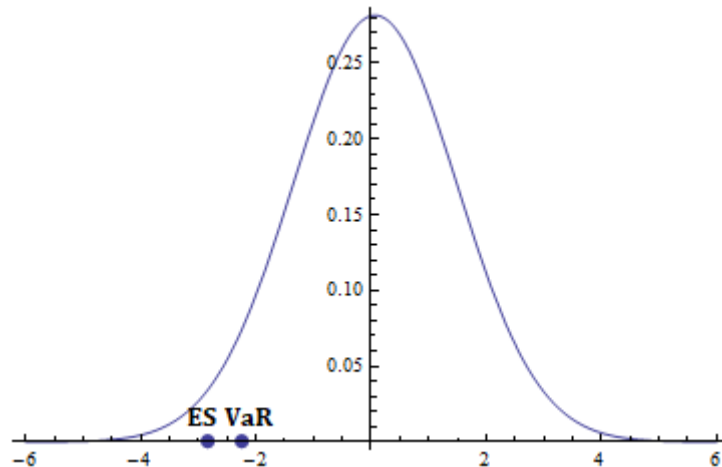
```

g=0.05;m=0.06755;s=1.4169;
VaR=Quantile[NormalDistribution[m,s],g];
ES=m-s*PDF[NormalDistribution[0,1],Quantile[NormalDistribu-
tion[0,1],g]]/g;
f1=Plot[PDF[NormalDistribution[m,s],x],{x,-6,6}];
f2=ListPlot[{{ES,0},{VaR,0}},PlotStyle->PointSize[.02]];
f3=Graphics[Text[Style["VaR",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cam-
bria"],{-2.1,0.0156}]];

```

```
f4=Graphics[Text[Style["ES",Black,Bold,FontSize->13,FontFamily->"Cambria"],{-2.9,0.015}]];
Print["VaR = ",VaR," kai"," ES = ",ES]
Show[f1,f2,f3,f4]
```

VaR = -2.26304 και ES = -2.85511

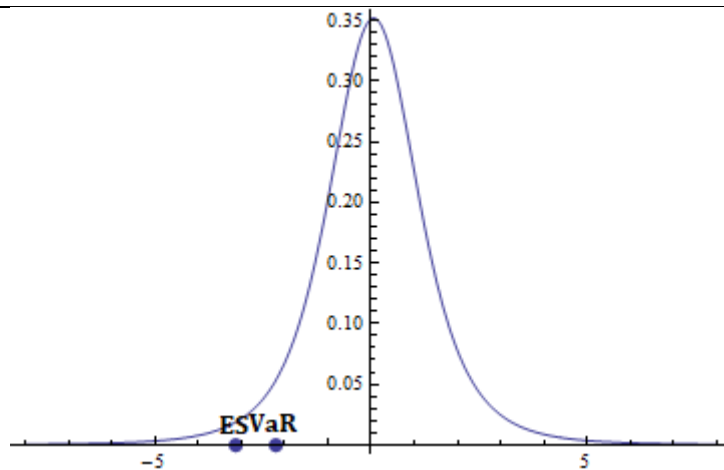


Σχήμα 3.6 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι παρατηρήσεις ακολουθούν την Κανονική κατανομή.

Θεωρώντας ότι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim t_\nu(\mu, \sigma)$ και χρησιμοποιώντας τους κώδικες της παραγράφου 2.2.1 και την εκτίμηση για τους βαθμούς ελευθερίας ν που υπολογίσαμε στην παράγραφο 3.2 θα υπολογίσουμε το VaR και το ES.

```
 $\gamma = 0.05$ ;  $\mu = 0.0581217$ ;  $\sigma = 1.06518$ ;
n = 3.9405; q = Quantile[StudentTDistribution[ $\mu$ ,  $\sigma$ , n],  $\gamma$ ];
Ttail[c_, n_] := -PDF[StudentTDistribution[ $\mu$ ,  $\sigma$ , n], c]*((n + c^2)/(n - 1));
ESSt = (1/ $\gamma$ )*Ttail[q, n];
f1 = Plot[PDF[StudentTDistribution[ $\mu$ ,  $\sigma$ , n], x], {x, -8, 8}];
f2 = ListPlot[{{ESSt, 0}, {q, 0}}, PlotStyle -> PointSize[.02]];
f3 = Graphics[Text[Style["VaR", Black, Bold, FontSize -> 13,
FontFamily -> "Cambria"], {-2.22, 0.0156}]];
f4 = Graphics[Text[Style["ES", Black, Bold, FontSize -> 13,
FontFamily -> "Cambria"], {-3.15, 0.015}]];
Print["VaR = ", q, " και", " ES = ", ESSt]
Show[f1, f2, f3, f4]
```

VaR = -2.22257 και ES = -3.15768



Σχήμα 3.7 Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας όταν οι παρατηρήσεις ακολουθούν την Student's t κατανομή.

Αν επαναλάβουμε το ίδιο για $\gamma = 0.005$ τότε βρίσκουμε θεωρώντας κανονικά δεδομένα ότι $VaR = -3.58214$, $ES = -4.03005$

ενώ θεωρώντας ότι δεδομένα προέρχονται από την student ότι

$VaR = -4.897$, $ES = -6.57677$

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση του VaR για μεγάλο γ (0.05) είναι σχεδόν ίδια (-2.26304 έναντι -2.22257) είτε θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή είτε από την κατανομή student. Η εκτίμηση του ES όμως διαφέρει σημαντικά (-2.85511 έναντι -3.15768) με την 1^η περίπτωση (της κανονικής) να υποεκτιμά σημαντικά τον κίνδυνο. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την 2^η προσέγγιση (που είναι ακριβέστερη) η αναμενόμενη απώλεια είναι -3.15, αρκετά μεγαλύτερη (κατά απόλυτη τιμή) από την τιμή -2.85511 που εκτιμάται υπό την (εσφαλμένη) υπόθεση της κανονικότητας.

Επίσης για μικρό γ (0.005) παρατηρούμε πολύ σημαντική υποεκτίμηση και του VaR και του ES εάν χρησιμοποιήσουμε κανονική προσέγγιση έναντι της ακριβέστερης student t προσέγγισης. Έτσι, υπό την υπόθεση της κανονικότητας ένας διαχειριστής κινδύνου θα υποεκτιμήσει τον κίνδυνο ($VaR \approx -3.58$, $ES \approx -4.03$) ενώ στην πραγματικότητα πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερος, με συνέπεια να μην γίνεται σωστή αντιστάθμιση κινδύνου. Αυτό συμβαίνει διότι στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε παρατηρήσεις με βαριές ουρές, γεγονός που δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω της κανονικής κατανομής. Αντίθετα η student t κατανομή (υπό την οποία εκτιμάται ότι $VaR \approx -4.8$, $ES \approx -6.57$) λαμβάνει υπόψη τις βαριές ουρές μέσω κατάλληλης εκτίμησης της παραμέτρου ν .

Επομένως κατά την εκτίμηση του κινδύνου είναι πολύ σημαντικός ο ορθός προσδιορισμός της (έστω προσεγγιστικής) κατανομής των παρατηρήσεων, ιδιαίτερα όταν αυτές έχουν βαριές ουρές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΚΩΔΙΚΕΣ

Κ.1 Κώδικας για τα διαγράμματα της κατανομής Jones και Faddy's skewed t

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ b*)

```
n=2;b=2;γ=0.05;Lq={};Lq1={};
Clear[F];
Do[
  C1=1/(Beta[a,b]*(a+b)^0.5*2^(a+b-1));
  u[t_]= (a+b+ t^2)^0.5;
  f[t_]=C1*(1+(t/u[t]))^(a+0.5) *(1-(t/u[t]))^(b+0.5) ;
  y[t_]=(1+t (t^2+a+b)^(-0.5))/2;
  F[t_]=Beta[y[t],a,b]/Beta[a,b];
  c=x/.Solve[F[x]==γ,x] [[1]];
  ESJF=(Sqrt[a+b]/Beta[a,b])*(Beta[y[c],a+0.5,b-0.5]-0.5*Beta[y[c],a-0.5,b-
0.5])/γ;
  mindist=10;q1=0;
```

q1=c;

```
AppendTo[Lq,{a,q1}];
AppendTo[Lq1,{a,ESJF}];
,{a,1,4,0.09}]
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-5,5}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["a",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.9,0.6}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.1,4.0}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-11,10}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["a",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.9,0.8}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.1,9.0}]];
Show[f5,f6,f7,f8]
Show[f9,f10,f11,f12]
```

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ a*)

```
Clear[b]
n=2;a=1;γ=0.05;Lq={};Lq1={};
Clear[F];
Do[
  C1=1/(Beta[a,b]*(a+b)^0.5*2^(a+b-1));
  u[t_]= (a+b+ t^2)^0.5;
```

```

f[t_]=C1*(1+(t/u[t]))^(a+0.5) *(1-(t/u[t]))^(b+0.5) ;
y[t_]=(1+t (t^2+a+b)^(-0.5))/2;
F[t_]=Beta[y[t],a,b]/Beta[a,b];
c=x/.Solve[F[x]==γ,x][[1]];
ESJF=(Sqrt[a+b]/Beta[a,b])*(Beta[y[c],a+0.5,b-0.5]-0.5*Beta[y[c],a-0.5,b-
0.5])/γ;
mindist=10;q1=0;

q1=c;

Clear[F];
AppendTo[Lq,{b,q1}];
AppendTo[Lq1,{b,ESJF}];
,{b,0.5,3,0.09}
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-10,10}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["b",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{2.9,0.6}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{0.6,8.0}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-20,10}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["b",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{2.9,1.1}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{0.8,8.0}]];
Show[f5,f6,f7,f8]
Show[f9,f10,f11,f12]

```

K.2 Κώδικας για τα διαγράμματα της κατανομής Noncentral Student's t

```

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ μ*)
Clear[k]
μ=2;γ=0.05;Lq={};Lq1={};
Do[
q3=Quantile[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],γ] ;
ESN=NIntegrate[x*PDF[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],x],{x,-Infin-
ity,q3}]/γ;
AppendTo[Lq,{k,q3}]
AppendTo[Lq1,{k,ESN}]
,{k,2,8,0.3}
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{0,1.5}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["k",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{7.9,0.1}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{2.3,1.4}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-1,1}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["k",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{7.9,0.1}]];

```



```

f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{2.1,0.90}]];
f13=Graphics[Text[Style[Lq[[1,2]],Red,FontSize->12,FontFamily->"Cambria"],{2.4,0.48}]];
f14=Graphics[Text[Style[Lq[[Length[Lq],2]],Red,FontSize->12,FontFamily->"Cambria"],{7.6,0.48}]];
Show[f5,f6,f7,f8,f13,f14]
Show[f9,f10,f11,f12]

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ k*)
Clear[μ]
k=8;γ=0.05;Lq={};Lq1={};
Do[
  q3=Quantile[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],γ] ;
  ESN=NIntegrate[x*PDF[NoncentralStudentTDistribution[k,μ],x],{x,-Infinity,q3}]/γ;
  AppendTo[Lq,{μ,q3}]
  AppendTo[Lq1,{μ,ESN}]
  ,{μ,-3,3,0.3}]
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-15,10}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["μ",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{2.9,-2}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{0.3,9}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-30,10}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["μ",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{2.9,-2}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{0.3,9}]];
Show[f5,f6,f7,f8]
Show[f9,f10,f11,f12]

```

K.3 Κώδικας για τα διαγράμματα της κατανομής Stable Paretian

```

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ α*)
α=1.5;γ=0.05;Lq={};Lq1={};
Do[
  q5=Quantile[StableDistribution[1,α,β,0,1],γ];
  ESSP=(1/γ)*Stoy[q5];
  AppendTo[Lq,{β,q5}]
  AppendTo[Lq1,{β,ESSP}]
  ,{β,-1,1,0.09}]
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-5,1}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["β",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{1.0,0.6}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{0.1,-0.6}]];

```

```

f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-15,2}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["β",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.0,1.1}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{0.1,-0.9}]];
Show[f5,f6,f7,f8]
Show[f9,f10,f11,f12]
f13=Graphics[Text[Style[Lq[[1,2]],Red,FontSize->12,FontFamily->"Cam-
bria"],{-0.9,-4.1}]];
f14=Graphics[Text[Style[Lq[[Length[Lq],2]],Red,FontSize->12,FontFamily-
>"Cambria"],{0.85,-3.1}]];
Show[f5,f6,f7,f8,f13,f14]

```

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ β*)

$\beta = -1.0; \gamma = 0.05; Lq = \{\}; Lq1 = \{\};$

Do[

 q5=Quantile[StableDistribution[1,α,β,θ,1],γ];

 ESSP=(1/γ)*Stoy[q5];

 AppendTo[Lq,{α,q5}]

 AppendTo[Lq1,{α,ESSP}]

 , {α,1.05,1.95,0.05}]

f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-10,5}];

f6=ListPlot[Lq];

f7=Graphics[Text[Style["α",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cambria"],{1.9,-1.0}]];

f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.1,4.0}]];

f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-250,20}];

f10=ListPlot[Lq1];

f11=Graphics[Text[Style["α",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.9,10}]];

f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{1.1,-15}]];

Show[f5,f6,f7,f8]

Show[f9,f10,f11,f12]

K.4 Κώδικας για τα διαγράμματα της κατανομής Generalized hyperbolic

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ α*)

$\lambda = -1/2; \delta = 1; \mu = 0; \gamma = 0.05; \alpha = 4; Lq = \{\}; Lq1 = \{\};$

Do[

 q6=Quantile[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],γ];

 ESH=(NIntegrate[x*PDF[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],x],{x,-Infin-
ity,q6}])/γ;

 AppendTo[Lq,{β,q6}]

 AppendTo[Lq1,{β,ESH}]

 , {β,-3.99,3.99,0.25}]

f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-60,15}];

f6=ListPlot[Lq];

```

f7=Graphics[Text[Style["β",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.7,4.2}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{0.4,9}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-110,15}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["β",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.6,6}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{0.3,6}]];

```

```
Show[f5, f6, f7, f8]
```

```
Show[f9, f10, f11, f12]
```

(*ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ β*)

```

λ=-1/2;δ=1;μ=0;γ=0.05;β=2;Lq={};Lq1={};
Do[
  q6=Quantile[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],γ];
  ESH=(NIntegrate[x*PDF[HyperbolicDistribution[λ,α,β,δ,μ],x],{x,-Infin-
ity,q6}])/γ;
  AppendTo[Lq,{α,q6}]
  AppendTo[Lq1,{α,ESH}]
  ,{α,3,7,0.2}]
f5=ListLinePlot[Lq,PlotRange->{-2,2}];
f6=ListPlot[Lq];
f7=Graphics[Text[Style["α",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{6.9,0.5}]];
f8=Graphics[Text[Style["VaR",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.15,1.8}]];
f9=ListLinePlot[Lq1,PlotRange->{-2,2}];
f10=ListPlot[Lq1];
f11=Graphics[Text[Style["α",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{6.9,0.5}]];
f12=Graphics[Text[Style["ES",Red,FontSize->18,FontFamily->"Cam-
bria"],{3.1,1.8}]];

```

```
Show[f5, f6, f7, f8]
```

```
Show[f9, f10, f11, f12]
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

- ❖ Acerbi, C. and D. Tasche (2001b) ‘Expected shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk.’p.3
- ❖ BCBS.(2013) Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework Second Consultative Paper.
- ❖ Denuit, Dhaene Goovaerts and Kaas (2005) Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models, p.62-67
- ❖ Dowd, K. (2005) Measuring Market Risk, Wiley, p.1-9,30
- ❖ Guldumann, T. (2000) ‘The story of RiskMetrics, p. 57.
- ❖ Linsmeier, T. J. and N. D. Pearson (1996) ‘Risk measurement: An introduction to value at risk.’ , p.3
- ❖ Mausser, H. and D. Rosen (2000) ‘Managing risk with expected shortfall.’ in S. Uryasev(ed.) Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications. p.218
- ❖ Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) ‘Optimization of conditional value-at-risk.’p.21--41
- ❖ Simon A. Broda , Marc S. Paolella (2011) Expected shortfall for distributions in finance. In P.Cizek et al. (eds.) Statistical Tools for Finance and Insurance, p. 57-73, Springer-Verlag.
- ❖ Simona Roccioletti (2016) Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall p.1-11

- ❖ Uryasev, S. (2000) ‘Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications.’p.1-5
- ❖ Yoshida, T. and Y. Yamai (2001) ‘Comparative analyses of expected shortfall and VaR (2): expected utility p.21-22

Ελληνική

- ❖ Μπούτσικας Μ. (2018) Σημειώσεις ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική» για το μάθημα Διοίκηση Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ιστοσελίδες

- ❖ <https://minerva.it.manchester.ac.uk/~saralees/chap17.pdf> (Estimation methods for expected shortfall)
- ❖ https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution

